

**ANA PAULA RODRIGUES RAMOS**

**CONTRIBUIÇÃO À ANÁLISE DE FADIGA DE  
SISTEMAS ESTRUTURAIS INCORPORANDO  
MATERIAIS VISCOELÁSTICOS**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2014

ANA PAULA RODRIGUES RAMOS

**CONTRIBUIÇÃO À ANÁLISE DE FADIGA DE SISTEMAS  
ESTRUTURAIS INCORPORANDO MATERIAIS VISCOELÁSTICOS**

**Tese** apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

**Área de Concentração:** Mecânica dos Sólidos e Vibração

**Orientador:** Prof. Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima

UBERLÂNDIA – MG

2014

*“Não haverá borboletas se a vida não passar  
por longas e silenciosas metamorfoses”.*

*Rubem Alves*

*Dedico este trabalho a toda minha família, em especial ao meu amado Júlio Cesar e as minhas filhas, Mariana e Letícia.*

## AGRADECIMENTOS

A Deus, que por sua constante presença, divina luz e suprema força sempre me abençoa e capacita para todos os desafios a que Ele me destina.

Ao Prof. Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima, a quem tive a honra de ter como orientador, muito obrigada, pela sincera amizade, paciência com o meu espírito de aprendiz, bondosa orientação e ricos ensinamentos transmitidos durante meu doutorado.

Aos meus queridos pais, Moacyr (*in memoriam*) e Maria Léa, que por uma vida de dedicação, amor e trabalho, sempre possibilitaram a seus filhos a oportunidade de realizar projetos, sonhos e conquistas.

Ao meu querido Júlio Cesar, agradeço a amorosa presença, a incondicional ajuda e ao incansável estímulo. Produzir uma tese ao lado de um companheiro deste quilate é um verdadeiro presente.

As minhas queridas e amadas filhas, Mariana e Letícia, pela ajuda e pela singela compreensão em meus complicados momentos de ansiedade e estresse nos meses em que me dediquei com afinco ao doutorado.

Aos meus queridos irmãos, Júlio, Patrícia, Cássia e Luciana, exemplos de dignidade, bondade, caráter e união fraternal.

Aos meus especiais cunhados e sobrinhos.

À minha irmã, Patrícia, pela valiosa companhia, sempre solícita e verdadeira amiga, obrigada pelas horas dedicadas.

Aos membros da banca de qualificação, que com extrema competência, contribuíram com importantes e enriquecedoras sugestões.

Aos amigos e professores da Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM), do Departamento de Engenharia de Produção, pela confiança, incentivo e apoio a mim dedicados durante boa parte do meu doutorado.

À Faculdade de Engenharia Mecânica, à Coordenação do Curso de Pós-Graduação e também à Universidade Federal de Uberlândia, pela generosa oportunidade e pela infraestrutura fundamentais à realização deste trabalho.

Aos professores do curso de pós-graduação, pelos sábios conhecimentos transmitidos.

Às funcionárias da Seção de Pós-Graduação da UFU, pela atenção, carinho e paciência.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

RAMOS, A. P. R. Contribuição à análise de fadiga de sistemas estruturais incorporando materiais viscoelásticos. 2014.p.106. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil.

## RESUMO

Este trabalho é dedicado ao estudo numérico e implementação computacional de materiais viscoelásticos aplicados sob a forma de tratamentos superficiais com camada restrita passiva com vistas ao aumento da vida em fadiga de sistemas dinâmicos, quando estes são submetidos a excitações aleatórias do tipo estacionárias e Gaussianas. Para tanto, será utilizado um elemento estrutural do tipo placa sanduíche de três camadas combinada com o *Princípio da Superposição Frequência-Temperatura* para levar em conta a dependência em frequência e temperatura do comportamento do material viscoelástico. Com respeito ao critério de fadiga, neste trabalho optou-se por utilizar o Critério de *Sines* para carregamentos multiaxiais e não proporcionais. Os resultados são apresentados em termos das respostas em tensão, das funções de resposta em frequência e do índice de fadiga para os sistemas sem e com amortecimento viscoelástico. Para tanto, são empregadas técnicas de redução de modelo bem adaptadas a sistemas viscoelásticos com vistas à redução das matrizes globais do sistema de equações do movimento e redução do custo computacional. Neste sentido, ênfase é dada a uma base de condensação constante formada por modos do sistema conservativo associativo que deve ser enriquecida com resíduos estáticos associados aos esforços externos e aos efeitos viscoelásticos. Por fim, a partir dos resultados obtidos em termos das respostas em tensão e do índice de fadiga é possível verificar que os materiais viscoelásticos podem ser empregados com vantagem para o aumento da vida em fadiga de sistemas dinâmicos em virtude de sua eficiência na redução dos níveis de tensões de tais sistemas.

*Palavras-chave: Controle passivo de vibrações, materiais viscoelásticos, análise de fadiga, critério de Sines.*

RAMOS, A. P. R. Contribution to the fatigue analysis of structures incorporating viscoelastic materials. 2014. p. 106. Thesis, Federal University of Uberlândia, Uberlândia, MG, Brazil.

## ABSTRACT

This work is dedicated to computational implementation and numerical study of viscoelastic materials applied as surface viscoelastic treatments by constraining layers in order to increase the fatigue life of engineering structures subjected to stationary and Gaussian random excitations. In the development of theory a three-layer sandwich plate element to be combined with the so-named *Frequency-Temperature Superposition Principle* is used in order to introduce the frequency- and temperature-dependent behavior of the viscoelastic material. Regarding the fatigue criterion, in the present study it will be adopted the *Sines* global criterion that enables to perform fatigue analyses of engineering systems subjected to multiaxial and non-proportional loads. The results are obtained in terms of stress responses and frequency response functions computed for the systems with and without viscoelastic damping, and the distributions of the fatigue criterion. The responses of the viscoelastic system are computed by using a condensation strategy adapted to viscoelastically damped structures in which the basis is formed the normal modes of the associated conservative system enriched by static residues due to the external loadings and the viscoelastic damping forces. Finally, the obtained results in terms of the stress responses and the fatigue criterion enables to conclude that the viscoelastic materials can be employed with the aim of increasing the fatigue life of engineering structures due to their efficiency in mitigating the stress levels.

Keywords: Passive Control of vibration, viscoelastic materials, fatigue analysis, *Sines* criterion.



## SUMÁRIO

CAPÍTULO I.....	11
INTRODUÇÃO .....	11
1.1. Contexto do estudo .....	11
1.2. Objetivos do trabalho.....	15
1.3. Conteúdo do Trabalho.....	16
CAPÍTULO II.....	17
MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO DA FALHA POR FADIGA .....	17
2.1. Revisão histórica sobre a análise de fadiga.....	17
2.2. Falha por fadiga uniaxial .....	20
2.3. Critérios de fadiga multiaxiais .....	27
CAPÍTULO III .....	33
MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS DE UMA PLACA SANDUÍCHE DE TRÊS CAMADAS CONTENDO MATERIAL VISCOELÁSTICO .....	33
3.1. Relações Cinemáticas .....	33
3.2. Relações tensão-deformação.....	35
3.3. Discretização por elementos finitos .....	38
3.4. Equações do Movimento.....	40
3.5. Inclusão do amortecimento viscoelástico no modelo de elementos finitos .....	43
3.6. Redução de modelos adaptada a sistemas viscoelásticos .....	48
3.7. Resposta em tensão média do sistema viscoelástico sujeito a cargas aleatórias.....	50
CAPÍTULO IV .....	53
ANÁLISE DE FADIGA DE UM SISTEMA VISCOELÁSTICO SUJEITO A CARGAS ALEATÓRIAS ESTACIONÁRIAS E GAUSSIANAS .....	53
4.1. Critério multiaxial de Sines .....	53
4.2. Técnica Prismatic Hull para o cálculo de $\sqrt{J_{2a}}$ .....	61
4.3. Formulação probabilística do critério de Sines.....	63
4.4. Distribuição e variância do índice de fadiga - Presença de incertezas .....	67
CAPÍTULO V.....	69
SIMULAÇÕES NUMÉRICAS .....	69
5.1. Descrição do exemplo numérico.....	69
5.2. Verificação da redução de modelo adaptada ao sistema viscoelástico .....	70
5.3. Respostas em tensão do sistema viscoelástico.....	72

5.4. Distribuição do $\sqrt{J_{2,a}}$ para o sistema viscoelástico .....	74
5.5. Influência da temperatura e das espessuras das camadas no índice de fadiga .....	76
5.6. Influência das incertezas .....	81
CAPÍTULO VI .....	83
CONCLUSÕES GERAIS E PERSPECTIVAS .....	83
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	86
ANEXO A .....	94
ANEXO B.....	100

# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

### 1.1. Contexto do estudo

O presente trabalho de tese está inscrito no contexto das temáticas de pesquisa que vem sendo desenvolvidas pela equipe de dinâmica estrutural do Laboratório de Mecânica de Estruturas (LMEst), da Faculdade de Engenharia Mecânica (FEMEC), da Universidade Federal de Uberlândia (UFU), Uberlândia-MG, Brasil, e do Laboratório de Mecânica Aplicada de Rouen, Rouen, França, que trata da aplicação de materiais viscoelásticos para o aumento da vida em fadiga de sistemas mecânicos submetidos a carregamentos dinâmicos.

No contexto dos novos desenvolvimentos em vários domínios da engenharia mecânica, nota-se a constante busca pela durabilidade, confiabilidade, segurança e conforto de máquinas e equipamentos impulsionados pela modernização de processos e produtos industriais (KOÇER, 2010). Além disso, na maioria das aplicações práticas de engenharia, as máquinas e/ou equipamentos estão frequentemente submetidos a perturbações dinâmicas que podem levar a níveis indesejáveis de vibrações e ruídos, e como consequência, agravar os problemas de desgaste por fadiga de peças e componentes, sendo frequentemente responsável por quebras definitivas de tais sistemas. Neste contexto, durante as fases de concepção inicial, de análise e de projeto de sistemas de engenharia quando estes são submetidos a ciclos de carregamentos mecânicos, procedimentos de modelagem numérico-computacionais são comumente utilizados para prever a vida dos mesmos para determinadas condições de operação, levando-se em conta o fato de que as mesmas podem excitar frequências naturais de componentes gerando níveis indesejáveis de vibrações e ruídos, e como consequência, agravando o problema de fadiga.

Neste panorama, a importância dada ao problema de falha por fadiga induzida por vibrações mecânicas é hoje um dos problemas cruciais das Engenharias Mecânica, Civil e Aeronáutica em virtude da preocupação em projetar e construir estruturas que sejam confiáveis e que possuam resistência suficiente à fadiga sobre uma dada faixa de operação para evitar desastres catastróficos. Como exemplo, a Fig. 1.1 abaixo mostra a foto de um acidente com uma aeronave da *American Airlines* ocorrido em 1979 em Chicago, devido a uma falha por fadiga.



(a)



(b)

Figura 1.1 – Acidente com uma aeronave da *American Airlines* ocorrido em 1979 em Chicago: (a) posição da aeronave basicamente a  $90^\circ$  antes do impacto; (b) explosão após o impacto (extraído de KILROY, 2008).

A falha de uma estrutura ocorre muitas vezes quando a mesma está submetida a excitações dinâmicas que levam a tensões repetidas ou alternadas. A característica destas falhas é que as tensões são repetidas de modo cíclico inúmeras vezes, sendo, portanto, chamadas de falhas por fadiga induzidas por vibrações. Em outras palavras, a fadiga de uma estrutura mecânica é um dano estrutural progressivo e localizado que ocorre quando o material está submetido a cargas cíclicas (KOÇER, 2010). A título de exemplo, a Fig. 1.2 ilustra a presença de trincas ocasionadas por fadiga de um componente ferroviário.

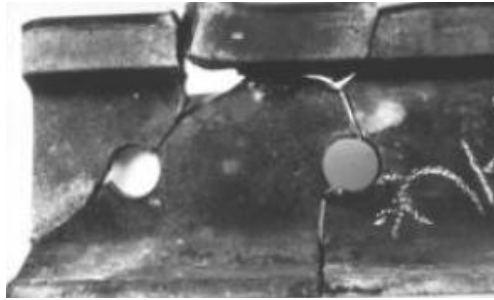


Figura 1.2 – Presença de trincas em um componente de vias férreas (extraído de BISHOP e SHERRATT, 2000).

A maioria das falhas ocorridas em regime estático pode ser prevista antecipadamente, uma vez que nestes casos, as estruturas estão sujeitas a níveis de deflexões superiores ao limite de elasticidade do material antes que a fratura total ocorra. Já as falhas por fadiga são súbitas e geralmente sem um aviso prévio, o que as tornam bastante perigosas.

Outro aspecto importante que deve ser levado em conta é o fato de que para sistemas submetidos a carregamentos dinâmicos, a dinâmica da estrutura deve ser levada em conta durante a análise de fadiga, uma vez que há o risco de que o carregamento mecânico cíclico excite alguma frequência de ressonância da estrutura, elevando os seus níveis das tensões alternadas. Portanto, em tais situações, técnicas de análise de fadiga no domínio da frequência são preferencialmente utilizadas.

Basicamente, as técnicas de análise de fadiga por vibrações podem ser divididas em duas grandes classes, a saber: as técnicas no domínio do tempo, e as do domínio da frequência, como ilustrado na Fig. 1.3.

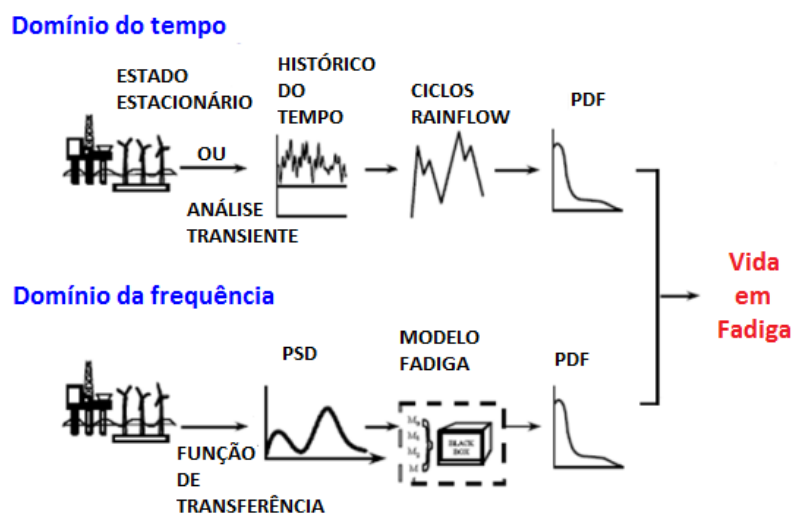


Figura 1.3 – Ilustração dos domínios de análise de fadiga (extraído de KOÇER, 2010).

As abordagens no domínio da frequência são geralmente mais econômicas se levado em conta o tempo computacional para o cálculo das respostas dinâmicas quando comparadas com as abordagens no domínio temporal. Neste contexto, será empregado o critério de fadiga multiaxial de *Sines*. Entretanto, independente da abordagem a ser empregada para análise de fadiga, é importante investigar os fenômenos causadores e/ou amplificadores da fadiga induzida por vibrações para garantir segurança e confiabilidade de um determinado componente mecânico. Portanto, nos últimos anos o problema de controle de vibrações e ruído tem sido objeto de estudo de inúmeros pesquisadores em todo o mundo. Como resultado, diferentes técnicas de controle foram desenvolvidas e continuam sendo aperfeiçoadas.

Dentre as técnicas de controle que têm sido frequentemente empregadas para tratar o problema de atenuação dos níveis de vibração e ruído de sistemas dinâmicos, o uso de materiais viscoelásticos é uma estratégia bastante interessante para ser investigada, em virtude de sua grande eficiência e do seu baixo custo de manutenção e simplicidade de aplicação. Além disso, embora eles percam no quesito adaptabilidade, e apesar do grande interesse na aplicação de técnicas de controle ativo e semi-ativo, a utilização desses materiais apresenta-se geralmente como sendo a solução mais robusta e econômica (NASHIF et al., 1985; DE LIMA et al., 2007). Como resultado, tem-se observado nos últimos anos um aumento considerável do uso dos materiais viscoelásticos em um grande número de sistemas de engenharia tais como: automóveis, aeronaves, estruturas de engenharia civil, mecanismos flexíveis, compressores, satélites de comunicação, dentre outros.

A representação analítica do comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos é feita através do emprego de modelos matemáticos que levam em conta a dependência de suas propriedades em relação a parâmetros ambientais e operacionais, dentre os quais, os mais importantes são a frequência da excitação e a temperatura ambiente. Neste contexto, muitos pesquisadores propuseram modelos viscoelásticos particularmente bem adaptados para serem incorporados em modelos de elementos finitos de sistemas estruturais, como abordado nos trabalhos de Bagley e Torvik (1979), Golla e Hughes (1985) e Mctavish e Hughes (1993), Lesieutre e Lee (1996) e Lesieutre e Bianchini (1995). O atual estado da arte demonstra que foi obtido grande avanço e amadurecimento nos procedimentos de modelagem numérico-computacional de sistemas estruturais contendo amortecimento viscoelástico, sendo possível hoje, a previsão do comportamento dinâmico de estruturas de engenharia de interesse industrial incorporando materiais viscoelásticos para o controle passivo de vibrações. Em

particular, pode-se citar a aproximação do Módulo Complexo combinado com o *Princípio da Equivalência Temperatura-Frequência* para materiais viscoelásticos lineares (DE LIMA, 2007), o qual será empregado no presente trabalho.

Para o caso de estruturas complexas de engenharia contendo amortecimento viscoelástico, a grande limitação no cálculo das funções de resposta em frequência e das respostas em tensão, é o elevado custo computacional envolvido, uma vez que a matriz de rigidez da subestrutura viscoelástica é dependente da frequência e da temperatura (DE LIMA et al, 2010a). Neste contexto, técnicas de redução de modelos bem adaptadas a sistemas viscoelásticos serão empregadas para a redução das matrizes globais do sistema de equações do movimento com o objetivo de diminuir o esforço computacional necessário para o cálculo das respostas dinâmicas.

Por fim, deve-se destacar que a principal e original contribuição advinda com o desenvolvimento deste trabalho é o uso de tratamentos viscoelásticos superficiais por camada restrita passiva para o aumento da vida em fadiga de sistemas dinâmicos quando estes são submetidos a carregamentos mecânicos cíclicos do tipo estacionários e Gaussianos.

## 1.2. Objetivos do trabalho

Este trabalho tem como principal objetivo a realização de um estudo numérico-computacional da viabilidade da aplicação de tratamentos viscoelásticos superficiais a sistemas dinâmicos submetidos a carregamentos mecânicos cíclicos aleatórios do tipo Gaussianos e estacionários para aumento da vida em fadiga dos mesmos.

Os objetivos específicos são os seguintes:

- Modelagem por elementos finitos de sistemas estruturais do tipo placas sanduíches de três camadas com núcleo viscoelástico para fins de controle passivo de vibrações;
- Implementação numérico-computacional de uma técnica de redução de modelos de sistemas contendo amortecimento viscoelástico. Para tanto, serão geradas as funções de resposta em frequência e as respostas em tensão reduzidas do sistema viscoelástico com vistas à diminuição do esforço computacional;
- Análise de fadiga do sistema viscoelástico submetido a cargas mecânicas cíclicas determinísticas. Neste sentido, será empregado o critério de fadiga multiaxial de *Sines*.

- Formulação probabilística do critério de fadiga multiaxial de *Sines* para o caso de carregamentos aleatórios do tipo Gaussianos e estacionários;
- Realização de simulações numéricas e análise dos resultados.

### 1.3. Conteúdo do Trabalho

O Capítulo 2 apresenta primeiramente um breve estado-da-arte sobre fadiga uniaxial e multiaxial de sistemas mecânicos não amortecidos. São apresentadas as definições fundamentais relacionadas aos critérios de fadiga multiaxiais baseados nos invariantes de tensão, para ambos os domínios do tempo e da frequência, além de um estudo comparativo entre os inúmeros critérios de fadiga existentes.

O Capítulo 3 é dedicado à modelagem por elementos finitos de sistemas estruturais do tipo placas retangulares multicamadas (basicamente compostas por três camadas), baseada no trabalho original de Kathua e Cheung (1973) e implementado por Stoppa (2003). Além disso, será mostrado o procedimento de fatoração da expressão do módulo complexo da subestrutura viscoelástica através do *Princípio da Correspondência Elástico-Viscoelástico*. Será também apresentado os desenvolvimentos necessários para a criação da base de redução constante (independente da frequência e temperatura) que será utilizada para a obtenção das respostas em tensão e em frequência do sistema viscoelástico reduzido.

No Capítulo 4, o critério de fadiga multiaxial de *Sines* inicialmente desenvolvido para a análise de fadiga de sistemas não amortecidos é estendido ao caso de sistemas contendo amortecimento viscoelástico quando estes estão submetidos a carregamentos mecânicos cíclicos do tipo estacionários e Gaussianos. Para tanto, será empregado a técnica *Prismatic Hull* para a determinação das respostas em tensão do sistema viscoelástico reduzido no domínio da frequência.

O Capítulo 5 apresenta os resultados das simulações numéricas e as discussões, e no Capítulo 6 são apresentadas as conclusões gerais e as perspectivas de continuidade de trabalhos futuros.



## CAPÍTULO II

### MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO DA FALHA POR FADIGA

Neste capítulo, será apresentada uma breve revisão da literatura e o estado da arte sobre as técnicas numéricas que avaliam o dano por fadiga de sistemas estruturais não amortecidos, baseados em estudos comparativos disponíveis na literatura. Serão apresentadas as vantagens e desvantagens de alguns critérios que estimam o dano em sistemas estruturais causados por tensões uniaxiais e multiaxiais determinísticas. Também será apresentado o critério de fadiga multiaxial que será empregado no presente trabalho para a análise de fadiga de sistemas estruturais contendo amortecimento viscoelástico. Para isto, alguns trabalhos importantes são citados.

#### 2.1. Revisão histórica sobre a análise de fadiga

Os primeiros estudos sobre a falha de um metal devido à aplicação de esforços mecânicos cíclicos iniciaram-se em 1828, de acordo com os trabalhos de W.A.J. Albert na Alemanha. Entretanto, o termo fadiga só foi empregado pela primeira vez em 1839 por J.V. Poncelet na França (KOÇER, 2010).

Em 1860, o trabalho de August Wöhler definiu critérios de caracterização da vida em fadiga em termos da magnitude da tensão nominal utilizando dados experimentais obtidos através de ensaios de flexão-torção com corpos de prova de componentes usados em trilhos. Foram definidas então, as conhecidas curvas  $S-N$ , onde  $S$  é a tensão e  $N$  é o número de ciclos (KOÇER, 2010; LAMBERT, 2007; WEBER, 1999).

Para caracterizar os parâmetros de fadiga de um material, o ensaio mais simples consiste em submeter um corpo de prova, com ou sem entalhe extraído do material da peça, a

ciclos de esforços periódicos de amplitude máxima e frequência constante, e plotar os dados obtidos numa curva caracterizada como o número de ciclos em que se observa a ruptura em função da amplitude do esforço aplicado (LAMBERT, 2007).

A Fig. 2.1 abaixo representa uma curva  $S-N$  ou curva de Wöhler, idealizada para mostrar os diferentes domínios no estudo da fadiga (KOÇER, 2010; LAMBERT, 2007). Em alguns materiais, por exemplo, aços carbono e de baixa liga, abaixo de um determinado nível de tensão não se observa falha por fadiga em condições normais de carregamento. A curva de Wöhler, na Fig. 2.1 apresenta um patamar respectivo a uma amplitude de tensão chamada de limite de fadiga ou limite de resistência à fadiga,  $s_D$ .

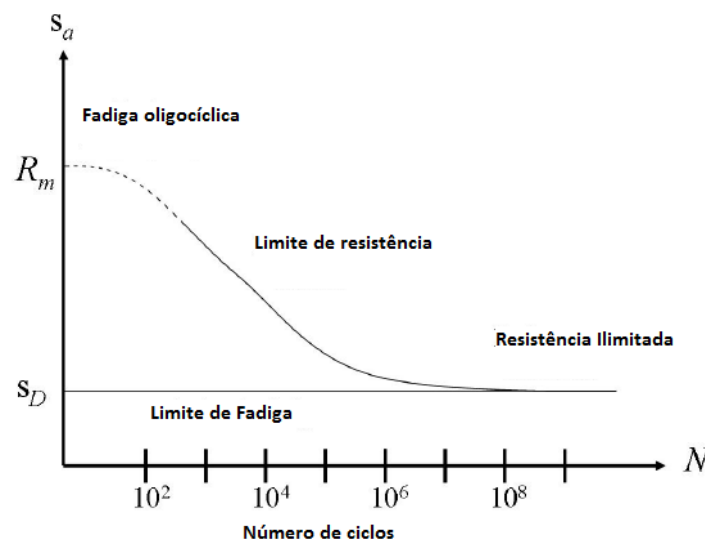


Figura 2.1- Curva de Wöhler (extraída de LAMBERT, 2007).

É importante salientar que as curvas de Wöhler permitem caracterizar a vida útil de materiais submetidos a tensões com médias nulas. Entretanto, a natureza das solicitações normalmente encontradas em serviço apresentam médias não nulas. Portanto, se faz necessário levar em conta esta influência.

De 1870 a 1890, Gerber, Goodman e Bauschinger examinaram a influência da tensão média na vida em fadiga de peças e componentes de máquinas, e no início de 1910, Ewing e Humfrey estudaram os mecanismos de fadiga em escala microscópica observando-se a presença de microfissuras (KOÇER, 2010). Neste mesmo ano, Basquin (1910) representa a tensão alternada versus o número de ciclos num diagrama  $S-N$  até a ocorrência de falha como uma região finita. Neste caso, para uma tensão alternada,  $s_a$ , até o número de ciclos,  $N_r$ , que caracteriza a falha do material, a representação analítica de Basquin assume a seguinte forma:

$$\ln s_a = a - b \ln N_r, \quad a > 0 \text{ e } b > 0 \quad (2.1)$$

ou,

$$N_r s_a^\beta = C, \quad \text{para } \beta = 1/b; \quad C = \alpha/\beta \quad (2.2)$$

É importante salientar que a expressão de Basquin não descreve a totalidade da curva de Wöhler, uma vez que a tensão,  $s_a$ , não atinge o limite da resistência ilimitada,  $s_D$ , que é definido como sendo o nível de tensão para o qual o corpo de prova terá uma vida infinita. Portanto, ela representa somente o domínio de resistência limitada.

Em 1920, Griffith, contribuiu enormemente para a mecânica da fratura, apresentando os cálculos teóricos e experimentais para a fratura frágil por meio de ensaios com vidro. Nesta mesma linha, Palmgren, em 1924, introduziu um modelo de dano cumulativo linear para o carregamento com diferentes amplitudes. Neuber em 1930 demonstrou os efeitos do gradiente de tensão em entalhes, e Miner (1945) formulou um critério linear de danos cumulativos por fadiga baseado nos desenvolvimentos de Palmgren, passando a ser conhecido como Regra do Dano Linear Palmgren-Miner (KOÇER, 2010).

Na sequência, Irwin (1957) define o fator de intensidade de tensão, que é conhecido como a base da mecânica da fratura linear elástica e a origem do crescimento da trinca por fadiga. Neste sentido, a distribuição de Weibull garante uma boa representação de dois e três parâmetros estatísticos para a análise e testes probabilísticos da vida em fadiga. Em seguida, Morrow propôs a relação de Coffin-Manson que analisa a correlação entre a amplitude de deformação plástica na extremidade de uma trinca e a vida em fadiga (KOÇER, 2010). Matsuishi e Endo (1968) formularam o algoritmo de contagem Rainflow para determinar os intervalos de tensão para o carregamento de amplitude variável.

Em 1970, Elber desenvolveu um modelo quantitativo que determina a finalização da trinca por fadiga. Neste mesmo ano, Paris mostrou que um fator de intensidade limiar de tensão pode ser empregado para que o crescimento da trinca por fadiga não ocorra (KOÇER, 2010; LAMBERT, 2007).

Por fim, durante os anos de 1980 e 1990, o estudo de muitos pesquisadores culminou no desenvolvimento de técnicas no domínio da frequência para analisar a vida em fadiga induzida por vibrações de sistemas dinâmicos quando estes são submetidos a carregamentos

mecânicos cíclicos multiaxiais. Entretanto, é importante salientar que até o presente, pouco se tem feito com relação ao emprego de tais técnicas para a análise da vida em fadiga de sistemas dinâmicos quando estes são tratados com materiais viscoelásticos.

## 2.2. Falha por fadiga uniaxial

As modificações observadas nas propriedades mecânicas das estruturas quando estas estão submetidas a carregamentos mecânicos cíclicos, são condições que definem a fadiga ou falha por fadiga, que pode ser dividida em duas grandes classes, a saber: (a) fadiga de baixo ciclo, que corresponde a esforços superiores ao limite de elasticidade do material, levando à ruptura do mesmo em torno de  $10^4 - 10^5$  ciclos, com deformação plástica rápida; (b) fadiga de alto ciclo, que se divide em dois subconjuntos: a resistência limitada com grande número de ciclos de fadiga, onde a ruptura ocorre entre  $10^5 - 10^7$  ciclos, sem a ocorrência de deformação plástica mensurável, sendo observado um fenômeno de adaptação; e a resistência ilimitada, onde a estrutura pode suportar um número infinito de ciclos sem quebrar com  $10^8$  ciclos.

Vários métodos para estimar a vida em fadiga de uma estrutura são descritos na literatura, esses métodos se baseiam nas seguintes hipóteses básicas: (a) as hipóteses baseadas nas deformações via emprego das curvas  $\varepsilon - N$  (deformação *versus* número de ciclos até a falha), sendo mais indicadas para pequenos números de ciclos; (b) as hipóteses baseadas na energia de deformação, indicadas para grandes e pequenos números de ciclos; (c) as abordagens baseadas nas tensões, que são amplamente utilizadas para avaliar a vida em fadiga de estruturas elásticas com um grande número de ciclos, utilizando-se as curvas  $S - N$  (tensão *versus* número de ciclos até a falha) (LAMBERT, 2007). Esta última será adotada no presente trabalho uma vez que é comumente empregada para a determinação da vida em fadiga de sistemas estruturais submetidos a níveis de tensão mais elevados.

### 2.2.1. Fatores de influência

Muitos parâmetros tem influência direta sobre a resistência à fadiga de um material. Portanto, a modificação e a natureza desses parâmetros podem afetar significativamente esta resistência à fadiga. Entre os fatores de influência, os seguintes podem ser citados: (a) condições das solicitações (influência da forma do sinal, sobreposição de cargas, etc.); (b) geométricos (efeitos de escalas, imperfeições na peça, acabamentos, etc.); (c) ambientes (temperaturas elevadas, meios corrosivos, etc.); (d) metalúrgica (orientação das fibras em

relação à aplicação dos esforços, tamanho dos grãos, defeitos metalúrgicos, taxa de encruamento, tratamento térmico).

Esses parâmetros são geralmente considerados pelo cálculo e aplicação de coeficientes de correção específicos, como definidos na Tab. 2.1 (LAMBERT, 2007). Para um ciclo de carregamento alternado de amplitude,  $s_a$ , um ciclo equivalente de amplitude,  $s_e$ , é calculado da seguinte forma:

$$s_e = s_a C_{\text{carregamento}} C_{\text{ambiente}} C_{\text{geométrico}} \dots \quad (2.3)$$

Tabela 2.1- Exemplo de fatores de correção para vários tipos de carregamentos

Carregamento Inicial	Carregamento Final	Fator de Correção
Axial	Flexão	1,25
Axial	Torsão	0,725
Flexão	Torsão	0,58
Flexão	Axial	0,8
Torsão	Axial	1,38
Torsão	Flexão	1,72

É importante salientar que os fatores de correção são determinados de forma empírica e utilizados apenas para um determinado tipo de material.

### 2.2.2. Efeitos da tensão média

Como foi salientado na Seção 2.1, as curvas de Wöhler caracterizam a resistência à fadiga de materiais quando estes são submetidos a tensões com médias nulas. Contudo, carregamentos cíclicos com tensões de médias não nulas são observados em muitas aplicações. O valor médio da carga de fadiga imposta influência de maneira significativa no comportamento em fadiga de materiais. Neste contexto, existe na literatura um grande número de resultados que evidenciam os efeitos da tensão média sobre o comportamento em fadiga de materiais (RICE, 1969; HANCOCK, MACKENZIE, 1976; WEBER, 1999).

Quando a amplitude da tensão para um teste de fadiga uniaxial é plotada como função do número de ciclos até a falha, a curva  $S - N$  resultante é função do nível de tensão média aplicada. Em geral, as tensões médias de compressão são benéficas, e as de tração, maléficas para a vida em fadiga em uma mesma amplitude de tensão. Tal observação pode ser explicada pelo fato de que as tensões médias de tração,  $s_m > 0$ , favorecem a abertura de trincas e

consequentemente sua propagação, enquanto que as de compressão,  $s_m < 0$ , têm efeito contrário, conforme ilustrado na Fig. 2.2. Portanto, novos ensaios são necessários a fim de caracterizar esta influência através da utilização do diagrama de Haigh como ilustrado na Fig. 2.3(a), que define, para um determinado tempo de vida,  $N$ , a tensão alternada admissível,  $s_a$ , em função da tensão média,  $s_m = 0$ .

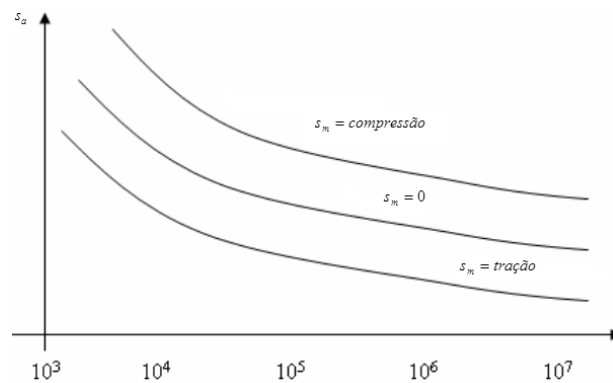


Figura 2.2 – Efeito da tensão média na resistência e no limite de fadiga (adaptada de MALCHER, 2006).

Os ensaios necessários para gerar o diagrama de Haigh são onerosos, e por este motivo, várias relações empíricas entre a amplitude da tensão alternada e a tensão média têm sido propostas. Neste sentido, inúmeros ensaios produziram resultados que se situam entre os modelos propostos por Goodman e Gerber. Para os casos em que a tensão média é pequena quando comparada com a amplitude da tensão alternada, os dois modelos apresentam resultados similares. Entretanto, para o caso em que a tensão média é próxima da amplitude da tensão alternada, as duas metodologias divergem, sendo mais prudente adotar o modelo mais conservativo. Neste caso, pode-se considerar que a curva de Gerber permite modelar a influência de uma tensão média de tração da seguinte forma (LAMBERT, 2007; KOÇER, 2010; WEBER, 1999):

$$\frac{s_a}{s_e} + \left( \frac{s_m}{R_m} \right)^2 = 1 \quad \text{onde} \quad |s_m| \leq R_m \quad (2.4)$$

e a equação de Goodman é mais apropriada para o caso de tensão média de compressão:

$$\frac{s_a}{s_e} + \frac{s_m}{R_m} = 1 \quad \text{onde} \quad |s_m| \leq R_m. \quad (2.5)$$

A partir da tensão limite de ruptura do material,  $R_m$ , os dois modelos permitem transformar cada ciclo de média não nula,  $s_m$ , e de amplitude,  $s_a$ , em um ciclo equivalente de média nula e amplitude,  $s_e$ .

O Centro Técnico das Indústrias Mecânicas (CETIM) (LAMBERT, 2007) propõe a utilização do seguinte modelo bilinear, conforme ilustrado na Fig. 2.3(b):

$$s_e = R_m + \frac{1}{2}(s_a - s_m) - \sqrt{R_m + \frac{1}{2}(s_a - s_m)^2 - 2s_a R_m} \quad (2.6)$$

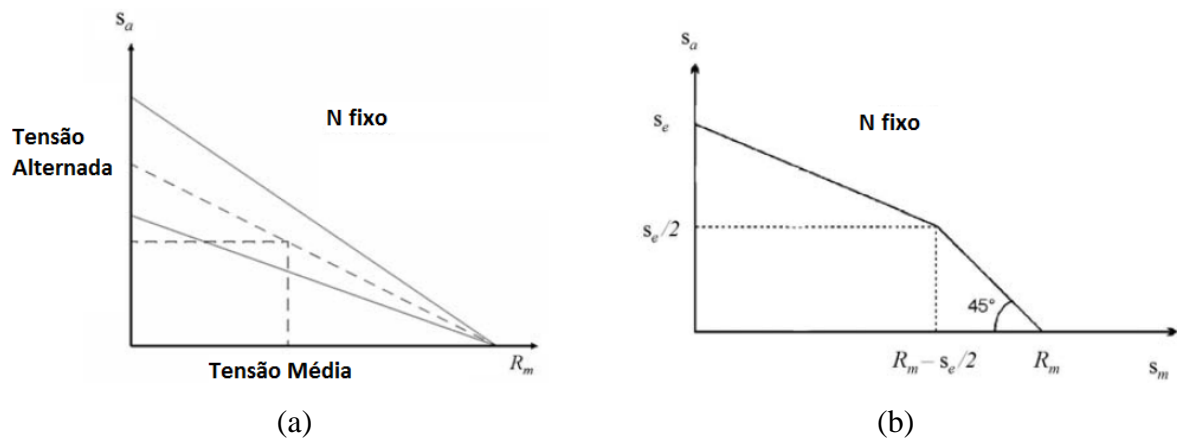


Figura 2.3 - (a) Representação esquemática do diagrama de Haigh; (b) diagrama de Haigh proposto pelo Centro Técnico das Indústrias Mecânicas- CETIM (adaptada de LAMBERT, 2007).

Todas as correções dos dados fornecidas pelas curvas  $S-N$  permitem explorar os dados via emprego dos métodos clássicos utilizados na análise de fadiga uniaxial. Desta forma, para um ciclo de tensão alternada e de médias conhecidas, é possível determinar o número de repetições deste ciclo que leva à ruptura do material. Entretanto, para carregamentos compostos por diferentes ciclos, torna-se necessário utilizar uma lei de acúmulo de danos.

### 2.2.3. Acúmulo de dano e predição da vida útil

Cada ciclo de tensão de amplitude superior ao limite de resistência produz um dano irreversível sobre a estrutura. O dano,  $D_i$ , produzido por,  $n_i$ , ciclos de amplitude,  $s_{ai}$ , está ligado ao número total de ciclos,  $N_i$ , que leva à ruptura por fadiga sob uma tensão de amplitude constante,  $s_{ai}$ . Para estimar o dano parcial,  $D_i$ , produzido por,  $n_i$  ciclos, Miner (1945) propôs a seguinte relação:

$$D_i = \frac{n_i}{N_i} \quad (2.7)$$

Se  $k$  grupos de ciclos de tensão de amplitudes diferentes e médias nulas são considerados, então o dano produzido por cada grupo é dado pela lei de Miner (MINER, 1945). Portanto, o dano total,  $D$ , da estrutura quando esta está submetida a todos os grupos de ciclos de tensão, pode ser estimado através da expressão de Palmgren (LAMBERT, 2007):

$$D = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} \quad (2.8)$$

Nota-se que a falha ocorre quando  $D = 1$ . O principal inconveniente da lei de acúmulo de dano de Palmgren-Miner é que ela não leva em conta a ordem de aplicação dos ciclos de tensão. Outras leis de acúmulo de dano foram propostas considerando a ordem de aplicação dos ciclos e inúmeros estudos comparativos foram realizados, concluindo que para o caso onde as solicitações são aleatórias, as estratégias baseadas na ordem de aplicação dos ciclos perdem a eficiência. Portanto, a lei de Palmgren-Miner ainda é considerada a mais utilizada. Entretanto, quando as tensões se tornam aleatórias, é necessário dispor de métodos capazes de extrair os ciclos causadores de danos para poder explorar uma lei de acúmulo. Estes métodos são chamados de Métodos de Contagem de Ciclos (LAMBERT, 2007).

#### 2.2.4. Método de contagem Rainflow

A contagem dos ciclos de tensões é uma etapa importante que permite filtrar as informações essenciais para o estudo do dano por fadiga. Sabe-se, por exemplo, que somente os valores máximos e mínimos das tensões aplicadas a uma estrutura têm uma influência significativa na duração da vida em fadiga. Neste contexto, existe uma infinidade de métodos



para realizar esta contagem (LAMBERT, 2007; WEBER, 1999). Entretanto, para todos estes métodos, é necessário saber eliminar as pequenas variações ou ruídos presentes nos sinais. Esta correção, destinada originalmente à remoção dos ruídos, tem o objetivo de transformar os sinais de longa duração em sinais mais fáceis de serem utilizados. A escolha de um método depende da maneira em que são definidos os ciclos de tensão.

Dentre os métodos mais conhecidos, pode-se citar o método de passagem, o método de contagem de domínios por pares e o método de contagem dos extremos entre duas passagens pelo valor médio. Enfim, o método de Rainflow é, de longe, o mais utilizado no campo da fadiga (LAMBERT, 2007). Ele define o ciclo de tensão como um laço de histerese fechado em um diagrama de tensão-deformação.

O procedimento clássico do método Rainflow consiste em discretizar o histórico das tensões através da definição do número de classes de amplitude,  $n$  (a norma francesa AFNOR - Associação Francesa de Normalização – estabelece que  $n = 64$ ), seguido de uma redução do histórico em uma sequência de máximos e mínimos locais. Cada máximo,  $u$ , e mínimo,  $v$ , sucessivos representam uma área,  $e = |u - v|$ . De acordo com a norma AFNOR, a extração de um ciclo baseia-se no estudo de uma sequência de três medidas sucessivas. Um ciclo,  $e_i$ , é extraído quando o mesmo é inferior ou igual à medida anterior,  $e_{i-1}$ , e à medida posterior,  $e_{i+1}$  ( $e_{i-1} \geq e_i \leq e_{i+1}$ ), conforme ilustrado na Fig. 2.4. Na sequência,  $e_{i-1}$  e  $e_{i+1}$  são associados permitindo suprimir da sequência os valores máximo,  $u_i$ , e mínimo,  $v_i$ , pertencentes à medida,  $e_i$ . A operação se repete para todo o histórico das tensões e o dano por fadiga é associado às amplitudes e aos valores médios dos ciclos de tensão.

Portanto, para uma tensão aleatória, o método de contagem é capaz de extrair um conjunto de ciclos onde cada um é definido pelos níveis de pico e vale, respectivamente,  $u$  e  $v$ , ou por uma amplitude,  $s$ , e um valor médio,  $m$ . Estes parâmetros satisfazem as seguintes expressões (LAMBERT, 2007):

$$s = (u - v)/2, \quad m = (u + v)/2 \quad (2.9)$$

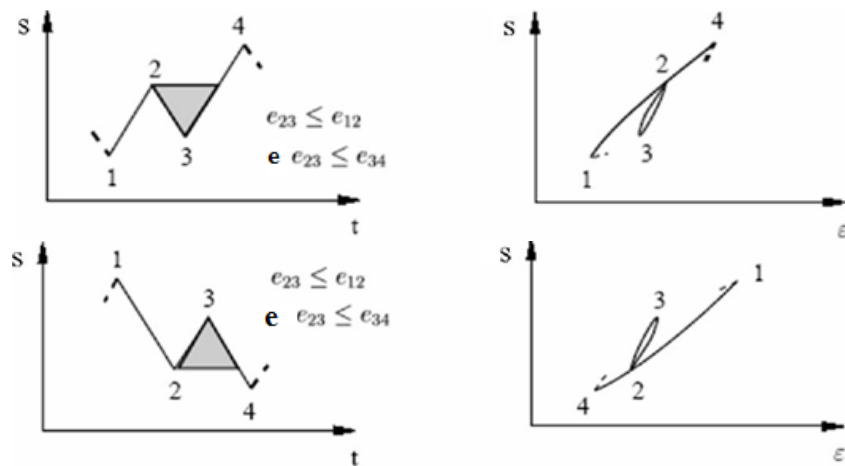


Figura 2.4 –Ilustração do método de contagem Rainflow (adaptada de LAMBERT, 2007).

De acordo com Lambert (2007), as principais etapas para a previsão da vida em fadiga no caso de carregamentos uniaxiais podem ser representadas no fluxograma da Fig. 2.5.

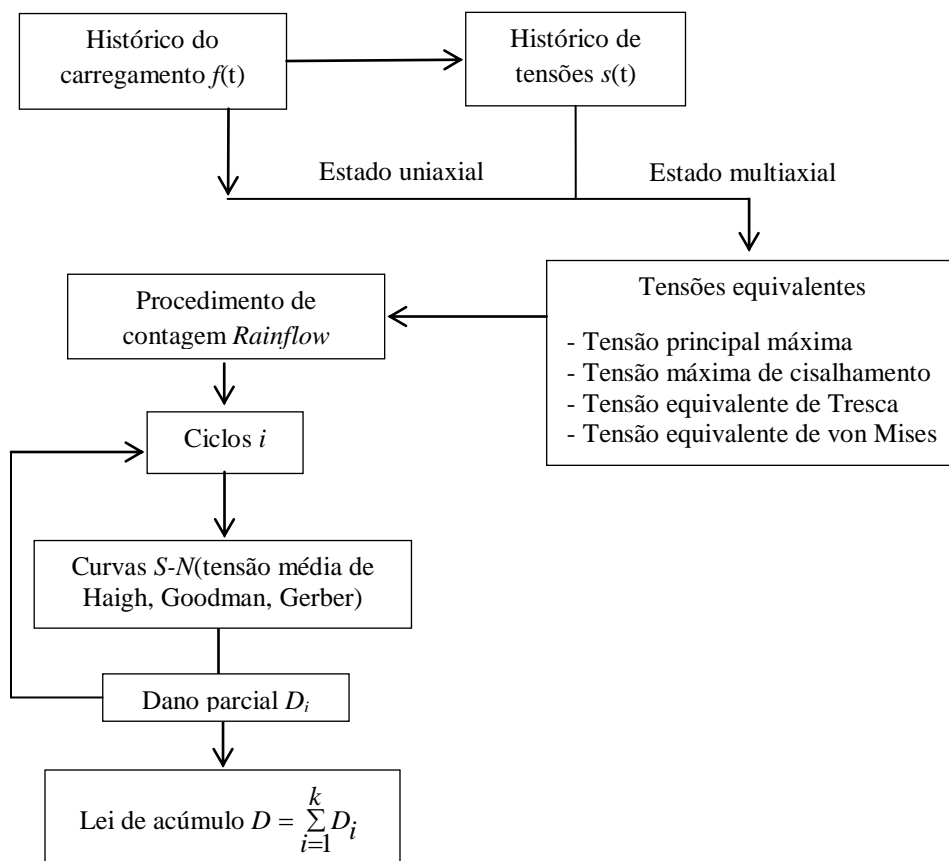


Figura 2.5- Etapas para a estimativa da vida em fadiga (adaptada de LAMBERT, 2007).

No início do processo, o tipo de estado de tensão uniaxial (flexão, tração, torção, etc.) deve ser identificado e assim realizar as eventuais correções sobre os dados disponíveis. Em seguida, um procedimento de contagem de ciclos (*Rainflow*) é empregado com o objetivo de identificar os ciclos de tensão de dano para a estrutura investigada. Para cada ciclo é associado um dano parcial equivalente através do qual, é possível o cálculo do dano total via emprego de uma lei de acúmulo.

Muitos componentes mecânicos sofrem ações de carregamentos mais complexos que os até agora apresentados, levando-os a estados de tensão multiaxiais. Neste caso, há a necessidade de se utilizar os critérios de fadiga multiaxiais.

### **2.3. Critérios de fadiga multiaxiais**

Na maior parte das situações reais de serviço, os componentes mecânicos e estruturas são submetidos a estados de tensão cíclicas multiaxiais. Isto significa que a cada ponto da peça ou componente mecânico, as direções das tensões principais podem variar durante o ciclo de carregamento em função do tempo. Além disso, a amplitude das tensões principais pode não ser proporcional às outras tensões principais. Estas observações complicam a análise do comportamento em fadiga de estruturas quando estas são sujeitas a tensões multiaxiais.

Por fim, deve-se destacar que para os estados de tensões multiaxiais, apesar de inúmeras abordagens terem sido propostas nas últimas décadas, poucos são os resultados de comparações entre as previsões dos modelos com os correspondentes obtidos de ensaios experimentais. Como consequência, não há ainda uma abordagem universalmente aceita. Autores como Papadopoulos et al. (1997), Wang e Yao (2004), Liu e Mahadevan (2005), Papuga (2005) e Jiang et al. (2007) fizeram ensaios experimentais e realizaram inúmeras comparações entre as previsões dos diversos critérios existentes. Neste contexto, vale ressaltar que a maioria dos critérios propostos é baseada no histórico das tensões e/ou deformações, ou em quantidades energéticas do sistema. Eles foram desenvolvidos a partir de critérios empíricos, baseados nos invariantes ou os do tipo planos críticos (LAMBERT, 2007).

Um critério de fadiga baseado nas tensões utiliza particularmente as grandezas oriundas do histórico de tensão multiaxial definido num período,  $T$ , tal que a amplitude, os valores máximos e médios, e os limites de resistência são obtidos para diferentes modos de sollicitação. Dentre os parâmetros mais empregados, pode-se citar o limite de fadiga em torção

alternada simétrica,  $t_{-1}$ , o limite de fadiga em tração alternada simétrica,  $f_{-1}$ , e o limite de fadiga em tração repetida,  $f_0$ . Além disso, são as seguintes as classes de critérios:

- a primeira determina se a peça terá uma vida útil infinita ou não para um dado histórico de tensor tensão,  $s$ . Quando o valor do dano,  $D$ , atinge um valor superior a um limite,  $D_c$  (representando uma tensão admissível), uma ruptura é prevista, caso contrário, não haverá ruptura. É importante salientar que os critérios são frequentemente reformulados de modo que o valor limite,  $D_c$ , seja igual a 1. Essa classe de critérios utiliza dois ou três parâmetros definidos entre os limites de resistência do material ( $f_{-1}, f_0, t_{-1}, \dots$ ), sendo representada simbolicamente pelas seguintes expressões:

$$D = g(s, f_{-1}, f_0, t_{-1}, \dots) \geq D_c \rightarrow \text{ruptura} \quad (2.10)$$

$$D = g(s, f_{-1}, f_0, t_{-1}, \dots) < D_c \rightarrow \text{não-ruptura} \quad (2.11)$$

- a outra classe de critérios requer o conhecimento das curvas de fadiga do material investigado, a fim de determinar o limite de resistência do mesmo para um certo número de ciclos,  $(t_{-1}(N_e), f_0(N_e), f_{-1}(N_e), \dots)$ .

A estimativa da vida em fadiga exige um método de contagem. Entretanto, um método de contagem é realizável somente para o caso de uma única variável escalar. Se as seis componentes do tensor de tensão em um ponto qualquer da peça evoluem no tempo, é preciso reduzir esta evolução temporal em uma evolução temporal de uma única variável. É por isto que os diferentes métodos multiaxiais de fadiga escolhem uma variável dita de contagem e a cada ciclo extraído desta variável são determinados os parâmetros necessários para a avaliação do critério. Um fluxograma simplificado das duas classes de métodos discutidos anteriormente é mostrado na Fig. 2.6.

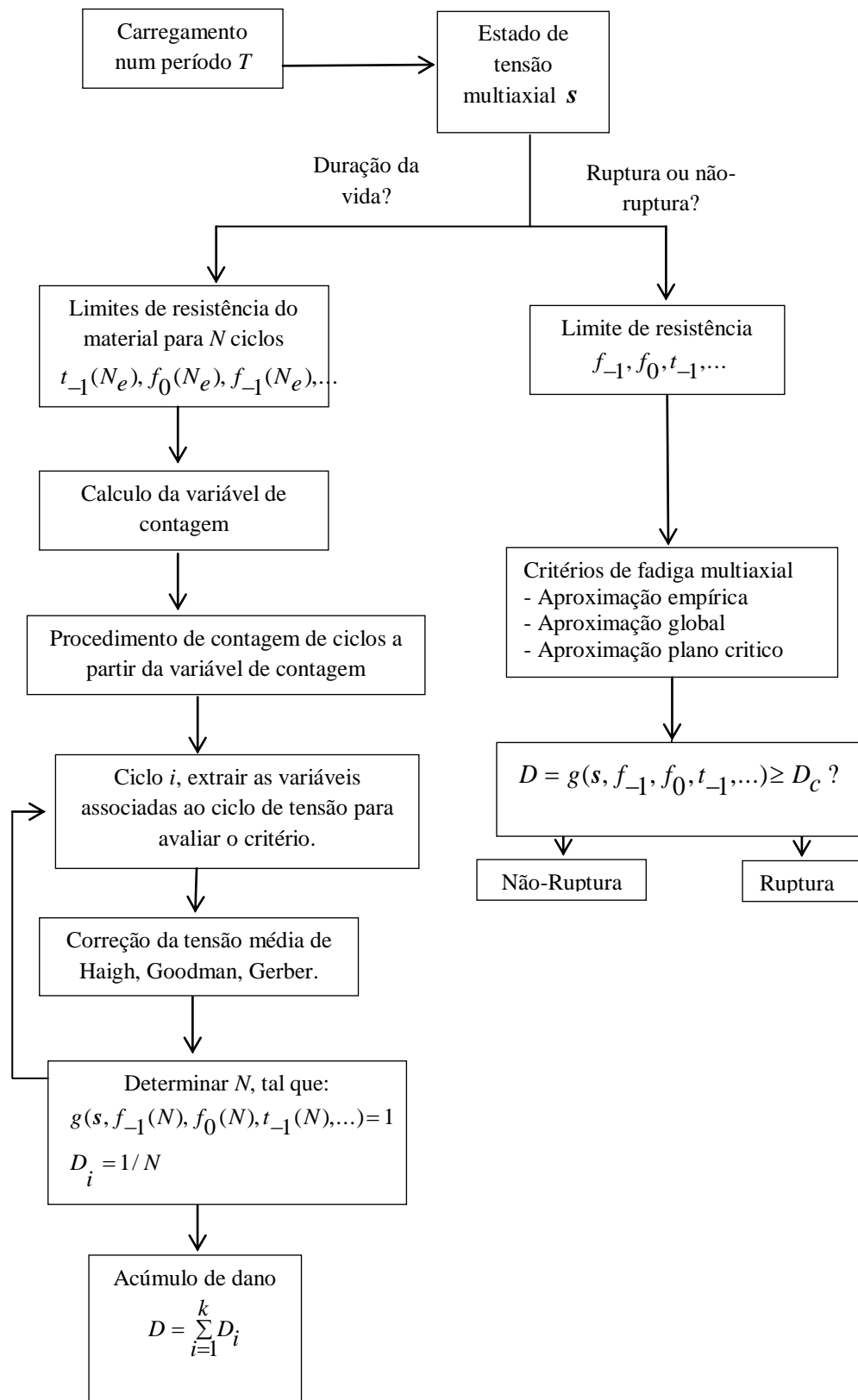


Figura 2.6 – Fluxograma de um estudo de fadiga multiaxial (adaptada de LAMBERT, 2007).

### **2.3.1. Comparação entre os diferentes critérios de fadiga multiaxiais**

Os critérios empíricos são geralmente critérios derivados dos critérios de Von Mises ou de Tresca e foram desenvolvidos a partir de um grande número de ensaios de fadiga. Estes critérios podem levar a uma boa predição somente para a variedade de carregamentos para as quais foram desenvolvidos. Portanto, fora destas condições ou para carregamentos mais complexos, estes critérios não levam a resultados precisos (LAMBERT et al., 2010). Além disso, a maior parte desses critérios não faz alusão aos fenômenos físicos envolvidos no processo de fadiga.

Os critérios energéticos baseiam-se no fato de que parte da energia transmitida para o sistema é armazenada sob a forma de energia elástica e a outra parte é dissipada sob a forma de deformações plásticas ou dissipações térmicas (LAMBERT, 2007). É por isso que esses critérios são mais adequados para estudos no campo da fadiga de baixo ciclo ou no campo termomecânico (CHARKALUK et al, 2002; CONSTANTINESCU et al, 2004). No domínio de fadiga de alto ciclo, as deformações plásticas ao nível dos grãos, causadas por movimentos de deslocamentos em escala microscópica, são oriundas de uma grande parte das dissipações de energia onde a estimativa é mais difícil.

Entre todos os critérios existentes, os que são baseados no plano crítico são os mais utilizados como, por exemplo, o critério de Dang Van (1993), de Papadopoulos (1995) ou ainda o de Matake (1977). Estas abordagens buscam os planos onde o dano causado por fadiga é máximo. A abordagem baseada no plano crítico é justificada experimentalmente para carregamentos em fase, onde a existência de direções críticas propícias à formação de trincas é demonstrada. Em cada ponto onde é definido o tensor de tensões, o dano é avaliado por decomposição e projeção do tensor de tensões sobre o conjunto de planos físicos estudados. Assim, os critérios para determinar a vida em fadiga e a direção crítica de início da trinca utilizam a combinação das tensões de cisalhamento e normal sob o plano considerado.

Os resultados publicados na literatura, onde são comparados os critérios para carregamentos proporcionais como flexão e torção combinadas em fase, por exemplo, são bastante satisfatórios. No entanto, são insatisfatórios para carregamentos não proporcionais. Portanto, os critérios baseados no plano crítico funcionam melhor para carregamentos em fase do que fora de fase.

A maioria dos critérios baseados no conceito de aproximação global utiliza o primeiro invariante,  $I_1(t)$ , do tensor de tensões,  $s$ , e o segundo invariante,  $J_2(t)$ , do tensor desviatório de tensões. Portanto, os critérios como o de *Sines* (1959) e *Crossland* (1956) baseiam-se na escolha do plano octaédrico como sendo o plano de cisalhamento máximo. De fato, vários experimentos evidenciaram que após o início de uma fissura, esta se propaga segundo um plano de cisalhamento, destacando a importância do cisalhamento na inicialização da fissura. Outros ensaios experimentais em fadiga mostraram também a importância da pressão hidrostática no processo de fadiga. Por fim, estes critérios parecem ser mais apropriados para situações onde os carregamentos estão fora de fase ou não proporcionais.

Diversas análises comparativas foram realizadas para diferentes tipos de carregamentos e materiais. Entretanto, na literatura, destacam-se os estudos feitos por *Weber* (1999) que utiliza trinta critérios de fadiga multiaxiais obtendo um grande número de resultados (233 no total) em testes multiaxiais. Estes testes envolvem a influência multiaxial do carregamento, o nível de tensão média, a mudança de fase entre os componentes de tensores de tensão, e para diferentes materiais. A Tab. 2.2 extraída de *Weber* (1999) resume os resultados obtidos para os melhores critérios. São mostrados o número dos experimentos e o número dos ensaios, e entre parênteses, as porcentagens correspondentes para que a diferença seja válida: entre -40% à 40%, -2% à 2%, -40% à -2% e 2% à 40%.

Tabela 2.2- Resultados dos ensaios para alguns critérios realizados por *Weber* (1999).

Critério	Número de ensaios	Número de teste (%), onde a diferença é válida			
		[-40%,+40%]	[-2%,+2%] preciso	[-40%,+2%] não conservador	[-2%,+40%] conservador
Fogue	233	232	52 (22,3)	90 (38,6)	81 (34,8)
Sines	233	231	47 (20,2)	99 (42,5)	85 (36,5)
Froustey	233	224	46 (19,7)	73 (31,3)	105 (45,1)
Dang Van	233	232	45 (19,3)	115 (49,4)	72 (30,9)
Papadopoulos	233	232	45 (19,3)	130 (55,8)	57 (24,5)
Deperrois	233	232	44 (18,9)	100 (42,9)	88 (37,8)
Robert	233	232	44 (18,9)	92 (39,5)	96 (41,2)
Matake	233	227	40 (17,2)	96 (41,2)	91 (39,1)
Crossland	233	230	28 (12)	180 (77,3)	22 (9,4)

De acordo com Weber (1999), a medida da precisão do critério é feita pela diferença entre a sua função do dano e  $I$ , determinando essa diferença de validade da seguinte forma:

$$\Delta I = E - I \quad (2.12)$$

Se  $\Delta I$  for próximo de zero, o teste é considerado mais preciso. Se  $\Delta I$  for positivo, então o teste é conservador, e se  $\Delta I$  é negativo o teste será considerado não conservador.

Na Tab. 2.2 os critérios são classificados em ordem crescente do número de casos considerados como precisos (validade padrão entre -2% e +2%). Nota-se que os critérios onde as abordagens são mais abrangentes ocupam os três primeiros lugares. A formulação de Fogue propõe o uso de três limites de resistência, que por sua vez limita bastante a sua utilização prática. Na segunda posição está o critério de *Sines* que possui a vantagem de ser muito mais simples e, conseqüentemente, a aplicação de sua formulação exige somente a determinação de dois limites de resistência. Além disso, ele avalia os danos em um único plano (plano octaédrico como o plano máximo de cisalhamento) o que leva a uma redução no custo computacional envolvido quando comparado com os outros critérios.

Portanto, o critério de *Sines* é particularmente bem adequado para a determinação do índice de fadiga de sistemas dinâmicos contendo amortecimento viscoelástico.



## CAPÍTULO III

### MODELAGEM POR ELEMENTOS FINITOS DE UMA PLACA SANDUÍCHE DE TRÊS CAMADAS CONTENDO MATERIAL VISCOELÁSTICO

Neste capítulo será apresentada a modelagem de uma placa sanduíche composta por três camadas utilizando-se a técnica de elementos finitos. Ênfase será dada à separação da matriz elementar da camada viscoelástica e a introdução da dependência em frequência e temperatura do material viscoelástico via emprego do módulo complexo e do Princípio da Superposição Elástico-Viscoelástico. Em seguida, será apresentado todo o desenvolvimento matemático para a obtenção de uma base de redução a ser empregada para reduzir o sistema de equações do movimento do sistema viscoelástico. Para tanto, será feito o enriquecimento da base de redução com resíduos estáticos associados aos esforços externos e viscoelásticos.

#### 3.1. Relações Cinemáticas

A Fig. 3.1 representa o modelo composto pelas camadas base (1), viscoelástica (2) e restringente (3), e a Fig. 3.2 ilustra a cinemática da deformação do elemento de placa sanduíche de três camadas para os planos  $xz$  e  $yz$ , onde  $u$  é o deslocamento na direção  $x$ ,  $v$  é o deslocamento na direção  $y$ , e  $w$  representa o deslocamento transversal.  $\theta_x = \partial w / \partial x$  é a rotação em torno do eixo  $x$ , e  $\theta_y = \partial w / \partial y$  é a rotação em torno do eixo  $y$  (DE LIMA, 2007).

Nos desenvolvimentos que seguem, foram assumidas as seguintes hipóteses: (a) será considerado material elástico e linear para ambas as camadas; (b) as tensões cisalhantes transversais serão negligenciadas para as camadas base e restringente (Teoria de Kirchhoff para placas finas), e para o núcleo viscoelástico, o cisalhamento transversal é considerado; (c) as tensões normais na direção  $z$  são assumidas desprezíveis para todas as camadas.

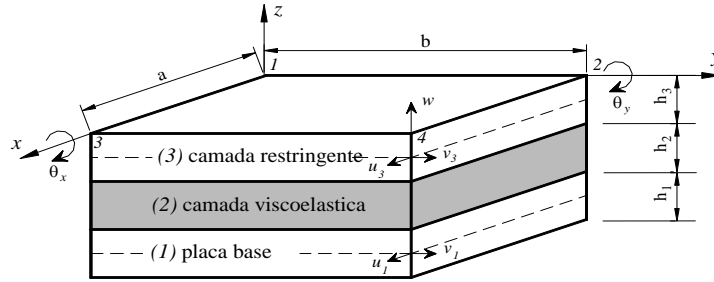


Figura 3.1- Ilustração do elemento de placa de três camadas (adaptado DE LIMA, 2007).

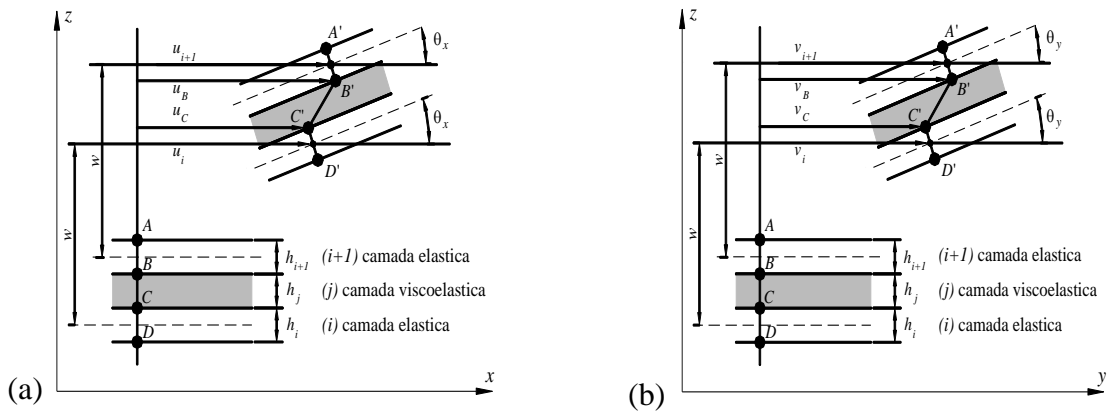


Figura 3.2 – Cinemática da deformação do elemento de placa sanduíche.

Será assumido que o campo de deslocamento transversal,  $w$ , e as rotações,  $\theta_x$  e  $\theta_y$ , são comuns a todas as camadas elásticas do elemento de placa sanduíche. Neste sentido, a partir da Fig. 3.2, pode-se chegar às seguintes relações para os deslocamentos das camadas elásticas:

$$u_B = u_3 + \frac{h_3}{2} \frac{\partial w}{\partial x}, \quad u_C = u_1 + \frac{h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3.1)$$

onde  $u_1$  e  $u_3$  representam, respectivamente, os deslocamentos longitudinais médios das camadas elásticas inferior e superior na direção  $x$ .

Similarmente, os campos de deslocamentos na direção  $y$  podem ser obtidos:

$$v_B = v_3 + \frac{h_3}{2} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad v_C = v_1 + \frac{h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.2)$$

Para a camada viscoelástica, as seguintes relações para as direções  $x$  e  $y$ , podem ser obtidas, respectivamente:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_2 = \frac{u_B - u_C}{h_2}, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_2 = \frac{v_B - v_C}{h_2} \quad (3.3)$$

Através da substituição das Eqs. (3.1) e (3.2) nas relações (3.3), obtém-se:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_2 = \frac{d_2}{h_2} \left[ \frac{(u_3 - u_1)}{d_2} + \frac{\partial w}{\partial x} \right], \quad \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_2 = \frac{d_2}{h_2} \left[ \frac{(v_3 - v_1)}{d_2} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (3.4)$$

onde  $(u_1, v_1)$  e  $(u_3, v_3)$  representam, respectivamente, os deslocamentos longitudinais médios das camadas elásticas inferior e superior nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, sendo  $d_2 = (h_3 - h_1)/2$ .

Por fim, os deslocamentos longitudinais médios do núcleo viscoelástico nas respectivas direções  $x$  e  $y$  são dados pelas seguintes expressões:

$$u_2 = \frac{u_B + u_C}{2} = \frac{1}{2} \left[ (u_3 + u_1) + \left( \frac{h_3 + h_1}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (3.5)$$

$$v_2 = \frac{v_B + v_C}{2} = \frac{1}{2} \left[ (v_1 + v_3) + \left( \frac{h_3 + h_1}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (3.6)$$

### 3.2. Relações tensão-deformação

Através da teoria da elasticidade linear, onde é assumido a hipótese de pequenos deslocamentos, são válidas as seguintes relações envolvendo as componentes de deslocamentos e as deformações:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.7)$$

No presente estudo, para as camadas elásticas serão consideradas somente as

deformações de extensão e flexão, e para o núcleo viscoelástico, serão consideradas ainda as deformações devido ao cisalhamento transversal.

- Estrutura base

$$u^I = u_I + z_1 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_1, \quad v^I = v_I + z_1 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_1 \quad (3.8)$$

- Camada restrigente

$$u^3 = u_3 + z_3 \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_3, \quad v^3 = v_3 + z_3 \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_3 \quad (3.9)$$

A partir das relações (3.7) e das expressões (3.8) e (3.9), pode-se obter os seguintes campos de deformações para as camadas base (1) e restrigente (3):

$$\varepsilon_x^{(1)} = \frac{\partial u_1}{\partial x} - z_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.10.a)$$

$$\varepsilon_y^{(1)} = \frac{\partial v_1}{\partial y} - z_1 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.10.b)$$

$$\gamma_{xy}^{(1)} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.10.c)$$

$$\varepsilon_x^{(3)} = \frac{\partial u_3}{\partial x} - z_3 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.11.a)$$

$$\varepsilon_y^{(3)} = \frac{\partial v_3}{\partial y} - z_3 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.11.b)$$

$$\gamma_{xy}^{(3)} = \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial x} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.11.c)$$

As relações anteriores podem ser escritas sob a seguinte forma matricial:

$$\mathbf{s}^{(1)} = \mathbf{C}^{(1)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}, \quad \mathbf{s}^{(3)} = \mathbf{C}^{(3)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} \quad (3.12)$$

onde  $\mathbf{s}$  representa o vetor contendo as tensões,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é o vetor das deformações, e  $\mathbf{C}$  indica a matriz dos coeficientes elásticos, dados por ( $i = 1$  e  $3$ ):

$$\mathbf{s}^{(i)} = \begin{Bmatrix} \sigma_x^{(i)} \\ \sigma_y^{(i)} \\ \tau_{xy}^{(i)} \end{Bmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(i)} \\ \varepsilon_y^{(i)} \\ \gamma_{xy}^{(i)} \end{Bmatrix}; \mathbf{C}^{(i)} = \begin{bmatrix} \frac{E^{(i)}}{1-\nu^{(i)^2}} & \frac{E^{(i)}\nu^{(i)}}{1-\nu^{(i)^2}} & 0 \\ \frac{E^{(i)}\nu^{(i)}}{1-\nu^{(i)^2}} & \frac{E^{(i)}}{1-\nu^{(i)^2}} & 0 \\ 0 & 0 & G^{(i)} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

- Camada viscoelástica

Para a camada viscoelástica, os deslocamentos longitudinais de um ponto qualquer nas direções  $x$  e  $y$  são dados por:

$$u^{(2)} = u_2 + z_2 \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_2, \quad v^{(2)} = v_2 + z_2 \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_2 \quad (3.14)$$

Combinando as expressões (3.4) a (3.6) com as relações (3.14), pode-se obter os campos de deslocamentos para o núcleo viscoelástico nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente:

$$u^{(2)} = u_2 + z_2 \left[ \frac{u_3 - u_1}{h_2} + \left( \frac{h_3 + h_1}{2h_2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right], \quad v^{(2)} = v_2 + z_2 \left[ \frac{v_3 - v_1}{h_2} + \left( \frac{h_3 + h_1}{2h_2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (3.15)$$

Considerando-se as relações (3.7), as deformações para a camada viscoelástica podem ser escritas como se segue:

$$\varepsilon_x^{(2)} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{z_2}{h_2} \left[ \left( \frac{\partial u_3}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial x} \right) + \left( \frac{h_3 + h_1}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (3.16.a)$$

$$\varepsilon_y^{(2)} = \frac{\partial v^{(2)}}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{z_2}{h_2} \left[ \left( \frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial y} \right) + \left( \frac{h_3 + h_1}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (3.16.b)$$

$$\gamma_{xy}^{(2)} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(2)}}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{z_2}{h_2} \left[ \left( \frac{\partial u_3}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) + (h_3 + h_1) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (3.16.c)$$

$$\gamma_{xz}^{(2)} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z_2} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{h_2} \left[ u_3 - u_1 + \left( \frac{h_3 + h_1}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (3.16.d)$$

$$\gamma_{yz}^{(2)} = \frac{\partial v^{(2)}}{\partial z_2} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{h_2} \left[ v_3 - v_1 + \left( \frac{h_3 + h_1}{2} + h_2 \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (3.16.e)$$

Desta forma, obtém-se a seguinte expressão matricial que representa as relações tensão-deformação para a camada viscoelástica:

$$\mathbf{s}^{(2)} = \mathbf{C}^{(2)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} \quad (3.17)$$

onde o vetor das tensões  $\mathbf{s}^{(2)}$ , o vetor das deformações  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}$ , e a matriz dos coeficientes elásticos  $\mathbf{C}^{(2)}$ , para o núcleo viscoelástico são dados como segue:

$$\mathbf{s}^{(2)} = \begin{Bmatrix} \sigma_x^{(2)} \\ \sigma_y^{(2)} \\ \tau_{xy}^{(2)} \\ \tau_{xz}^{(2)} \\ \tau_{yz}^{(2)} \end{Bmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(2)} \\ \varepsilon_y^{(2)} \\ \gamma_{xy}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \\ \gamma_{yz}^{(2)} \end{Bmatrix}; \mathbf{C}^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{E^{(2)}}{1-\nu^{(2)^2}} & \frac{E^{(2)}\nu^{(2)}}{1-\nu^{(2)^2}} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{E^{(2)}}{1-\nu^{(2)^2}} & 0 & 0 & 0 \\ & & G^{(2)} & 0 & 0 \\ & & & G^{(2)} & 0 \\ sym. & & & & G^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

### 3.3. Discretização por elementos finitos

Após a obtenção dos deslocamentos e das relações tensão-deformações, pode-se fazer a discretização do modelo via método dos elementos finitos. Para tanto, será empregado o elemento de placa retangular plana composto por quatro nós e sete graus de liberdade por nó e ilustrado na Fig. 3.1, conforme os desenvolvimentos originais feitos por Khatua e Cheung (1973) e implementado por de Lima et al (2010a) a partir dos desenvolvimento feito por Stoppa (2003). São os seguintes os graus de liberdade em nível nodal: deslocamentos longitudinais  $u_1$  e  $v_1$  da camada restrigente superior, deslocamentos  $u_3$  e  $v_3$  da camada base; deflexão transversal  $w$ ; e rotações  $\theta_x = \partial w / \partial x$  e  $\theta_y = \partial w / \partial y$ .  $a$  e  $b$  representam, respectivamente, as dimensões do elemento nas direções  $x$  e  $y$ . Portanto, o vetor dos graus de liberdade nodais pode ser representado da seguinte forma:

$$\mathbf{u}_{(e)j}(t) = \begin{bmatrix} u_{1j} & v_{1j} & u_{3j} & v_{3j} & w_j & \theta_{xj} & \theta_{yj} \end{bmatrix}^T \quad j = 1, \dots, 4 \quad (3.19)$$

e o vetor dos graus de liberdade em nível elementar é dado como segue:

$$\mathbf{u}_{(e)}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{(e)1} & \mathbf{u}_{(e)2} & \mathbf{u}_{(e)3} & \mathbf{u}_{(e)4} \end{bmatrix}^T \quad (3.20)$$

O campo de deslocamentos longitudinais e transversais no interior do elemento é interpolado segundo a relação:

$$\mathbf{U}(x, y) = \mathbf{N}(x, y) \mathbf{u}_{(e)}(t) \quad 0 \leq x \leq a; \quad 0 \leq y \leq b \quad (3.21)$$

onde  $\mathbf{U}(x, y) = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & u_3 & v_3 & w & \theta_x & \theta_y \end{bmatrix}^T$  e  $\mathbf{N}(x, y) = \begin{bmatrix} N_{u_1} & N_{v_1} & N_{u_3} & N_{v_3} & N_w & N_{\theta_x} & N_{\theta_y} \end{bmatrix}^T$  é a matriz contendo as funções de interpolação descritas no Anexo A.

A partir das expressões (3.10), (3.11) e (3.16), pode-se definir o seguinte vetor das deformações como função da matriz dos operadores diferenciais e do vetor dos campos de deslocamentos a nível elementar:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z, t) = \mathbf{B}(x, y, z) \mathbf{u}_{(e)}(t) \quad (3.22)$$

onde  $\mathbf{B}(x, y, z)$  é a matriz obtida aplicando-se os operadores diferenciais das relações tensão-deformação na matriz contendo as funções de forma  $\mathbf{N}(x, y)$ . Essas matrizes estão definidas no Anexo A de acordo com o estado de tensão assumido para cada camada.

A partir das relações tensão-deformação, pode-se definir a resposta em tensão do sistema da seguinte maneira:

$$\mathbf{s}(x, y, z, t) = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z) = \mathbf{C} \mathbf{B}(x, y, z) \mathbf{u}_{(e)}(t) \quad (3.23)$$

onde  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_k$  ( $k = 1, 3$ ) é a matriz das propriedades mecânicas das camadas elásticas, e  $\mathbf{C} = \mathbf{C}_2^*$  contém as propriedades do material viscoelástico dependentes da frequência e da temperatura.

### 3.4. Equações do Movimento

As equações do movimento do sistema podem ser obtidas através das equações de Lagrange. Para isto, é preciso formular as expressões das energias de deformação e cinética do elemento de placa sanduíche formado por três camadas.

A energia de deformação total do elemento de placa sanduíche pode ser obtida através da adição das energias de deformação de cada camada da seguinte forma:

$$U = \sum_{k=1}^3 U^{(k)} \quad (3.24)$$

onde o índice  $k$  representa a camada a ser considerada, sendo a energia de deformação da  $k$ -ésima camada calculada da seguinte forma:

$$U^{(k)} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)T} \mathbf{C}^{(k)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)} dV \quad (3.25)$$

A introdução da Eq. (3.22) na Eq. (3.25) permite obter a seguinte relação:

$$U^{(k)} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{(e)}(t)^T \left( \int_V \mathbf{B}^{(k)T} \mathbf{C}^{(k)} \mathbf{B}^{(k)} dV \right) \mathbf{u}_{(e)}(t) = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{(e)}(t)^T \mathbf{K}^{(k)} \mathbf{u}_{(e)}(t) \quad (3.26)$$

onde  $\mathbf{K}^{(k)} = \int_V \mathbf{B}^{(k)T} \mathbf{C}^{(k)} \mathbf{B}^{(k)} dV$  é a contribuição da  $k$ -ésima camada na rigidez do elemento finito de placa sanduíche de três camadas.

Após algumas manipulações matemáticas, pode-se mostrar que a matriz de rigidez elementar para as camadas elásticas,  $i = 1$  e  $3$ , são escritas como segue:

$$\mathbf{K}^{(i)} = \mathbf{K}_{mm}^{(i)} + \mathbf{K}_{ff}^{(i)} + 2\mathbf{K}_{mf}^{(i)} \quad (3.27)$$



onde  $\mathbf{K}_{mm}^{(i)} = \int_V \mathbf{B}_m^{(i)T} \mathbf{C}^{(i)} \mathbf{B}_m^{(i)} dV$ ,  $\mathbf{K}_{ff}^{(i)} = \int_V \mathbf{B}_f^{(i)T} \mathbf{C}^{(i)} \mathbf{B}_f^{(i)} dV$  e  $\mathbf{K}_{mf}^{(i)} = \int_V \mathbf{B}_m^{(i)T} \mathbf{C}^{(i)} \mathbf{B}_f^{(i)} dV$ , onde os índices  $m$ ,  $f$ , e  $mf$  designam os efeitos de membrana, flexão e acoplamento membrana-flexão, respectivamente.

Para a camada viscoelástica, a matriz de rigidez elementar é obtida da seguinte forma:

$$\mathbf{K}^{(2)} = \mathbf{K}_{mm}^{(2)} + \mathbf{K}_{ff}^{(2)} + \mathbf{K}_{cc}^{(2)} + 2\mathbf{K}_{mf}^{(2)} + 2\mathbf{K}_{mc}^{(2)} + 2\mathbf{K}_{fc}^{(2)} \quad (3.28)$$

onde  $\mathbf{K}_{mm}^{(2)} = \int_V \mathbf{B}_m^{(2)T} \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{B}_m^{(2)} dV$ ,  $\mathbf{K}_{ff}^{(2)} = \int_V \mathbf{B}_f^{(2)T} \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{B}_f^{(2)} dV$ ,  $\mathbf{K}_{cc}^{(2)} = \int_V \mathbf{B}_c^{(2)T} \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{B}_c^{(2)} dV$ ,  $\mathbf{K}_{mf}^{(2)} = \int_V \mathbf{B}_m^{(2)T} \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{B}_f^{(2)} dV$ ,  $\mathbf{K}_{mc}^{(2)} = \int_V \mathbf{B}_m^{(2)T} \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{B}_c^{(2)} dV$  e  $\mathbf{K}_{fc}^{(2)} = \int_V \mathbf{B}_f^{(2)T} \mathbf{C}^{(2)} \mathbf{B}_c^{(2)} dV$ , onde o índice  $c$  designa os efeitos do cisalhamento na camada viscoelástica.

Da mesma forma, a energia cinética total do elemento finito de placa sanduíche de três camadas é dada pela soma das energias cinéticas de cada camada:

$$T = \sum_{k=1}^3 T^{(k)} \quad (3.29)$$

onde  $T^{(k)} = \frac{1}{2} \int_V \left( \dot{\mathbf{u}}^{(k)T} \dot{\mathbf{u}}^{(k)} + \dot{\mathbf{v}}^{(k)T} \dot{\mathbf{v}}^{(k)} + \dot{\mathbf{w}}^{(k)T} \dot{\mathbf{w}}^{(k)} \right) dV$ , ou ainda sob a seguinte forma:

$$T^{(k)} = \frac{\rho_k h_k}{2} \left( \int_A \dot{\mathbf{u}}^{(k)T} \dot{\mathbf{u}}^{(k)} dA + \int_A \dot{\mathbf{v}}^{(k)T} \dot{\mathbf{v}}^{(k)} dA + \int_A \dot{\mathbf{w}}^{(k)T} \dot{\mathbf{w}}^{(k)} dA \right) \quad (3.30)$$

A expressão (3.21) permite reescrever a equação anterior da seguinte forma:

$$T^{(k)} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \left[ \rho_k h_k \int_A \left( \mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w + \mathbf{N}_{u_k}^T \mathbf{N}_{u_k} + \mathbf{N}_{v_k}^T \mathbf{N}_{v_k} \right) dA \right] \dot{\mathbf{U}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M}^{(k)} \dot{\mathbf{U}} \quad (3.31)$$

onde  $\mathbf{M}^{(k)} = \rho_k h_k \int_A \left( \mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w + \mathbf{N}_{u_k}^T \mathbf{N}_{u_k} + \mathbf{N}_{v_k}^T \mathbf{N}_{v_k} \right) dA$  é a matriz de massa de cada camada  $k$  do elemento finito,  $\mathbf{N}_w$ ,  $\mathbf{N}_{u_k}$  e  $\mathbf{N}_{v_k}$  são as matrizes contendo as funções de interpolação, e  $h_k$  e

$\rho_k$  são as densidades de massa e rigidez, respectivamente. Detalhes dos desenvolvimentos para a obtenção das matrizes elementares de massa e rigidezes estão no Anexo A.

Finalmente, as matrizes de massa e rigidez elementares do elemento finito de placa sanduíche de três camadas podem ser escritas, respectivamente, como segue:

$$\mathbf{M} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{M}^{(k)}, \quad \mathbf{K} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{K}^{(k)} \quad (3.32)$$

Após a obtenção das matrizes elementares, as matrizes globais podem ser obtidas aplicando-se procedimentos padrões de montagem de matrizes elementares e levando-se em conta a conectividade dos nós. Portanto, chega-se à seguinte equação do movimento do sistema viscoelástico no domínio do tempo (sem a presença de amortecimento viscoso), composta por  $N$  graus de liberdade:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}^* \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (3.33)$$

onde  $\mathbf{M}, \mathbf{K}^* \in R^{N \times N}$  representam, respectivamente, a matriz de massa (simétrica, definida positiva) e a matriz de rigidez complexa (simétrica, definida não-negativa).  $\mathbf{u}(t) \in R^N$  e  $\mathbf{f}(t) \in R^N$  são respectivamente, os vetores de deslocamento e forças externas.

Para o caso de uma excitação harmônica da forma,  $\mathbf{f}(t) = \mathbf{F}e^{i\omega t}$  e  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}e^{i\omega t}$ , as equações do movimento do sistema no domínio do tempo são transformadas nas seguintes equações algébricas no domínio da frequência:

$$[\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v(\omega, T) - \omega^2 \mathbf{M}] \mathbf{U}(\omega, T) = \mathbf{F}(\omega) \quad (3.34)$$

onde  $\mathbf{K}_e$  é a matriz de rigidez correspondente à subestrutura puramente elástica, e  $\mathbf{K}_v(\omega, T)$  é a matriz de rigidez da subestrutura viscoelástica dependente da frequência e temperatura.

### 3.5. Inclusão do amortecimento viscoelástico no modelo de elementos finitos

Uma vez definido as equações do movimento do sistema contendo amortecimento viscoelástico, antes de proceder à incorporação no modelo da dependência das propriedades mecânicas do material viscoelástico em relação a parâmetros ambientais e operacionais, é importante fazer uma revisão sobre a influência da frequência da excitação e da temperatura no comportamento mecânico desses materiais, uma vez que estes são considerados os parâmetros mais influentes.

#### 3.5.1. Influência da frequência e temperatura

A Fig 3.3 ilustra as amplitudes das FRFs experimentais de uma viga engastada-livre tratada com material viscoelástico. Através das mudanças observadas nas frequências de ressonância e amplitudes de vibração do sistema amortecido, conclui-se que as propriedades mecânicas dos materiais viscoelásticos dependem fortemente da temperatura e da frequência.

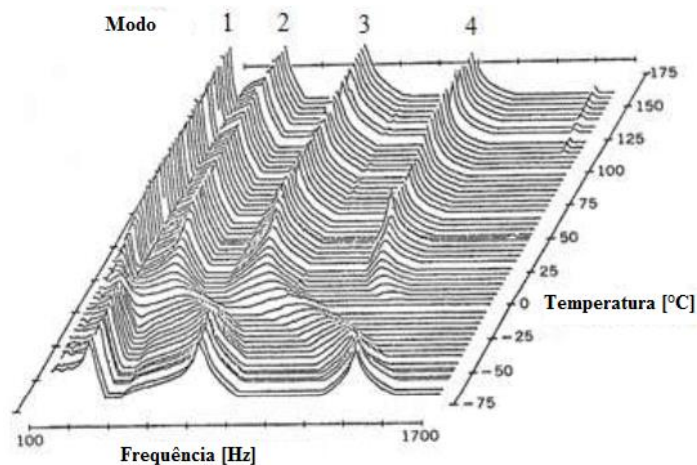


Figura 3.3 – FRFs de uma viga com material viscoelástico (adaptada de NASHIF et al, 1985).

A temperatura é considerada como sendo o fator ambiental que exerce a maior influência sobre as propriedades dos materiais viscoelásticos (NASHIF et al, 1985). Neste caso, os materiais viscoelásticos podem apresentar quatro tipos de comportamento, como ilustrado na Fig. 3.4: estado vítreo (I), estado de transição (II), estado de borracha (III) e estado de fluído (IV). Portanto, é imprescindível considerar as variações de temperatura durante a modelagem de sistemas viscoelásticos (LIMA et al, 2007).

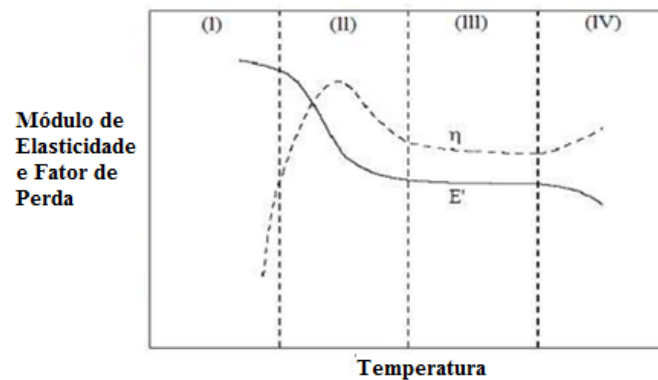


Figura 3.4 – Variação de  $E'$  e  $\eta$  de um material viscoelástico qualquer em função da temperatura para uma frequência constante (adaptada DE LIMA, 2003).

A região (I) corresponde às temperaturas mais baixas onde o material apresenta-se sob a forma vítrea, caracterizado por um módulo de armazenamento atingindo seu valor máximo, e variando pouco com a temperatura. Já o fator de perda é muito pequeno e aumenta rapidamente com a temperatura. Nesta região, as deformações do material são muito pequenas. A região (II) é caracterizada por um módulo que decresce fortemente com a temperatura, e um fator de perda apresentando seu valor máximo. Na região da borracha (III), o módulo de armazenamento e o fator de perda são caracterizados por valores pequenos e que variam pouco com a temperatura. A quarta região corresponde ao estado de fluído do material. Este estado é pouco considerado em aplicações estruturais em razão de sua instabilidade.

Para uma temperatura fixa próxima da temperatura de transição vítrea (dentro da região de transição II), as medidas das características viscoelásticas fornecem o módulo de armazenamento,  $E'$ , e o fator de perda,  $\eta$ , para o qual a variação em frequência assemelha-se geralmente à configuração ilustrada na Fig. 3.5.

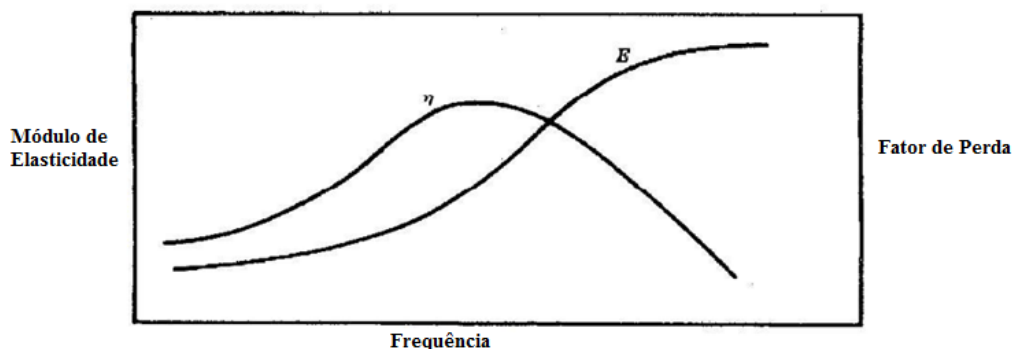


Figura 3.5 – Variações de  $E'$  e  $\eta$  com a frequência para uma temperatura constante (adaptada de NASHIF et al, 1985).

Através da análise das Figs. 3.4 e 3.5 e de observações experimentais para materiais viscoelásticos lineares, observou-se que a influência exercida pela frequência da excitação é, qualitativamente, o inverso do efeito da temperatura, mas em uma escala menor, ou seja, a variação na frequência de algumas décadas reflete a mesma influência de alguns poucos graus de temperatura. Como consequência, se deslocamentos em frequência das curvas mostradas na Fig. 3.5 são aplicados para diferentes temperaturas, elas tendem a se sobrepor, e a descreverem uma única curva contínua. Este fato indica que as características viscoelásticas em diferentes temperaturas podem ser associadas entre si através de deslocamentos horizontais aplicados nos valores da frequência da excitação, conduzindo aos então conhecidos *fator de deslocamento* e *frequência reduzida*, caracterizando o Princípio da Superposição Frequência-Temperatura (PSFT), que se aplica a vários materiais viscoelásticos lineares. Simbolicamente, o PSFT pode ser expresso da seguinte forma:

$$E(\omega, T) = E(\omega_r, T_0) = E(\alpha_T \omega, T_0); \quad \eta(\omega_r, T_0) = \eta(\alpha_T \omega, T_0) \quad (3.35)$$

onde  $\omega_r = \alpha_T(T)\omega$  é a frequência reduzida,  $\omega$  corresponde à frequência da excitação,  $\alpha_T(T)$  é o fator de deslocamento que depende da temperatura do material viscoelástico, e  $T_0$  é a temperatura de referência. Os termos  $E(\alpha_T \omega, T_0)$  e  $\eta(\alpha_T \omega, T_0)$  permitem construir as curvas mestre ou nomogramas do material viscoelástico.

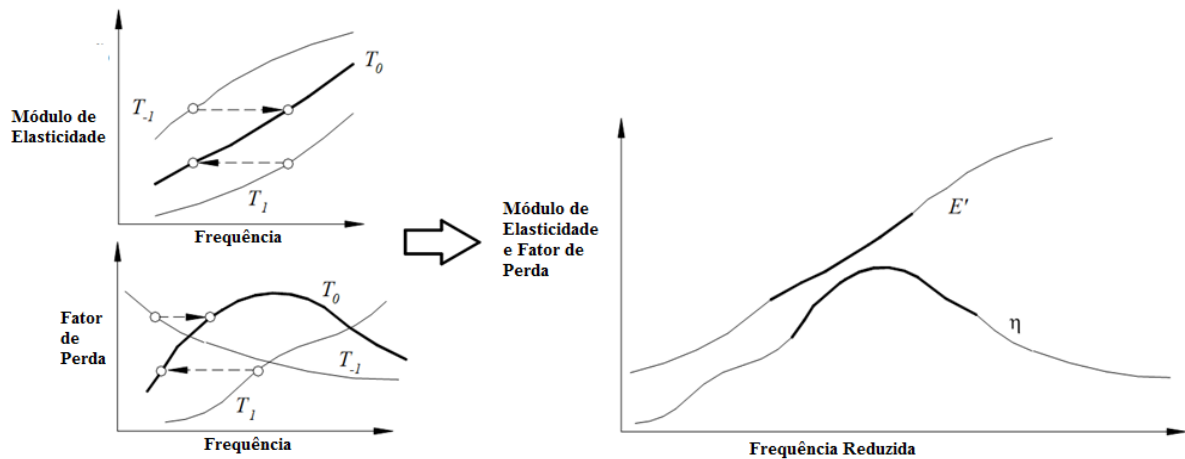


Figura 3.6 – Princípio da Superposição Frequência-Temperatura (adaptada DE LIMA, 2010a).

A Fig. 3.6 ilustra o PSFT, com o módulo de armazenamento e o fator de perda de um

material viscoelástico arbitrário para diferentes valores de temperatura,  $T_{-1}$ ,  $T_0$ ,  $T_1$ , se deslocamentos horizontais segundo o eixo da frequência são aplicados a cada uma das curvas, elas podem ser combinadas numa única curva. O fator de deslocamento é dado por  $\alpha_T$ , e depende da temperatura.

As equações seguintes representam, respectivamente, o modulo complexo e o fator de deslocamento como funções da frequência reduzida e da temperatura para o material viscoelástico 3M ISD112 conforme desenvolvimentos feitos por Drake e Soovere (1984).

$$G(\omega_r) = B_1 + B_2 / (1 + B_5 (i\omega_r / B_3))^{-B_6} + (i\omega_r / B_3)^{-B_4} \quad (3.36.a)$$

$$\log(\alpha_T) = a \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_r} \right) + 2.303 \left( \frac{2a}{T_r} - b \right) \log \left( \frac{T}{T_r} \right) + \left( \frac{b}{T_r} - \frac{a}{T_r^2} - S_{AZ} \right) (T - T_r) \quad (3.36.b)$$

onde:

$$B_1 = 0.4307 \text{ MPa}; B_2 = 1200 \text{ MPa}; B_3 = 0.1543 \text{ MPa}; B_4 = 0.6847; B_5 = 3.241; B_6 = 0.18$$

$$T_r = 290 \text{ K}; T_L = 210 \text{ K}; T_H = 360 \text{ K}; S_{AZ} = 0.0595 \text{ K}^{-1}; S_{AL} = 0.1474 \text{ K}^{-1}; S_{AH} = 0.009725 \text{ K}^{-1}$$

$$C_A = (1/T_L - 1/T_r)^2; C_B = (1/T_L - 1/T_r); C_C = (S_{AL} - S_{AZ}); D_A = (1/T_H - 1/T_r)^2$$

$$D_B = (1/T_H - 1/T_r); D_C = (S_{AH} - S_{AZ}); a = ((D_B C_C - C_B D_C) / D_E); b = ((D_C C_A - C_C D_A) / D_E)$$

A Fig. 3.7 representa as curvas normalizadas do módulo de armazenamento e do fator de perda obtidas através do emprego das expressões anteriores para o material viscoelástico 3M ISD112<sup>TM</sup>.

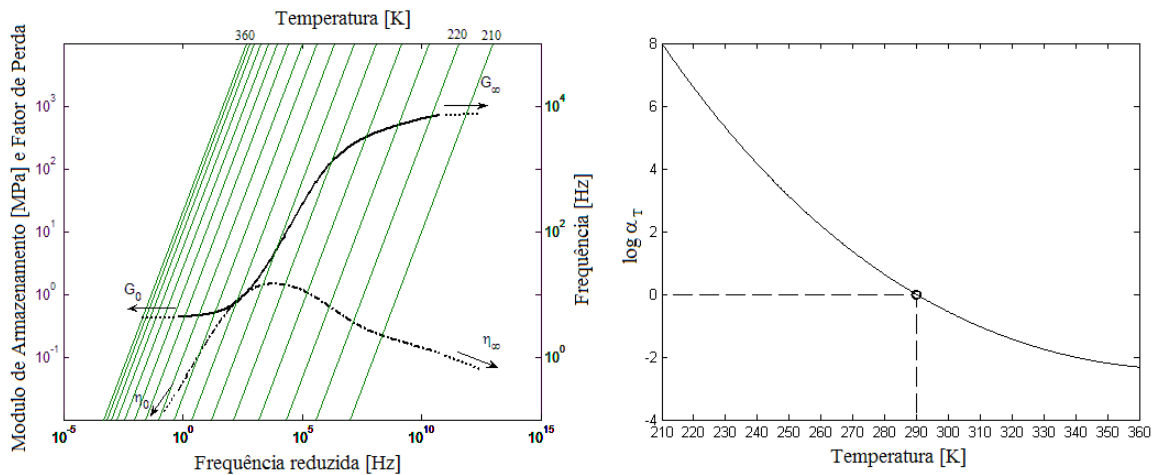


Figura 3.7 – Nomograma representando as propriedades do material viscoelástico ISD112<sup>TM</sup> (DE LIMA, 2007).

### 3.5.2. Inclusão do amortecimento viscoelástico

A introdução da dependência em frequência e temperatura do material viscoelástico na Eq. (3.34) pode ser feita através do Princípio da Correspondência Elástico-Viscoelástico (CHRISTENSEN, 1982), segundo o qual, para uma dada temperatura, a matriz da subestrutura viscoelástica,  $\mathbf{K}_v(\omega, T)$ , é gerada para o elemento de placa sanduíche supondo que os módulos de Young,  $E(\omega, T)$ , e de cisalhamento,  $G(\omega, T)$ , de acordo com o estado de tensão-deformação assumido para a camada viscoelástica (ver Seção 3.2), são constantes (independentes da frequência e temperatura). Após a construção das matrizes globais, a dependência em frequência e temperatura é introduzida de acordo com a aproximação do Módulo Complexo (3.36) pelo Princípio da Superposição Frequência-Temperatura (NASHIF et al 1985). Para tanto, será assumido que o coeficiente de Poisson é constante (independente da frequência e temperatura) de tal forma que a relação de isotropia,  $G(\omega, T) = E(\omega, T)/2(1 + \nu)$ , é válida. Portanto, um dos dois módulos pode ser fatorado da matriz de rigidez da subestrutura viscoelástica sob a seguinte forma:

$$\mathbf{K}_v(\omega, T) = G(\omega, T) \bar{\mathbf{K}}_v \quad (3.37)$$

onde  $\bar{\mathbf{K}}_v$  é a matriz de rigidez fatorada da subestrutura viscoelástica.

Partindo-se das Eqs. (3.34) e (3.37), a expressão da matriz de rigidez dinâmica complexa do sistema viscoelástico pode ser obtida da seguinte forma:

$$\mathbf{Z}(\omega, T) = \mathbf{K}_e + G(\omega, T) \bar{\mathbf{K}}_v - \omega^2 \mathbf{M} \quad (3.38)$$

Uma vez definido a rigidez dinâmica complexa, a etapa seguinte consiste em resolver o sistema no domínio da frequência, o que pode ser feito através da construção da seguinte matriz de Funções Resposta em Frequência (FRFs):

$$\mathbf{H}(\omega, T) = \mathbf{Z}(\omega, T)^{-1} \quad (3.39)$$

No domínio do tempo, a resposta em tensão do sistema viscoelástico pode ser obtida a partir da Eq. (3.23) e da resposta ao impulso do sistema viscoelástico:

$$\mathbf{s}(x, y, z, t, T) = \mathbf{C} \mathbf{B}(x, y, z) \mathbf{u}(t, T) \quad (3.40.a)$$

onde a resposta no tempo do sistema viscoelástico é dada pela seguinte equação:

$$\mathbf{u}(t, T) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(\tau, T) \mathbf{f}(t - \tau) d\tau \quad (3.40.b)$$

onde  $\mathbf{h}(t, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\omega, T) e^{j\omega t} d\omega$  é a resposta ao impulso do sistema viscoelástico que pode ser calculada a partir da matriz de FRFs do sistema.

### 3.6. Redução de modelos adaptada a sistemas viscoelásticos

O objetivo da condensação de modelos é sempre construir uma base de redução que seja capaz de representar o mais fielmente possível as respostas dinâmicas do sistema exato. Para sistemas de engenharia de interesse industrial contendo amortecimento viscoelástico, não é prático do ponto de vista do custo numérico-computacional envolvido, utilizar diretamente o modelo completo (3.39), uma vez que ele conduz a um tempo de cálculo proibitivo em virtude da inversão da matriz de rigidez dinâmica complexa para cada ponto em frequência. Neste caso, utilizam-se respostas aproximadas, buscando-se a solução num subespaço: isto é, a aproximação modal, que consiste em projetar as equações do movimento do sistema amortecido numa base de redução,  $\mathbf{T}$ , com o objetivo de diminuir o número de graus de liberdade do sistema original e, portanto, acelerar a resolução numérica do problema. Isto é feito partindo-se da hipótese de que as respostas exatas obtidas pela resolução da Eq. (3.33) podem ser aproximadas por soluções dentro de um subespaço reduzido da forma:

$$\mathbf{u} = \mathbf{T} \mathbf{u}_r \quad (3.41)$$

onde  $\mathbf{T} \in C^{N \times NR}$  é a base de redução ou base de Ritz, e  $\mathbf{u}_r \in C^{NR}$  com  $NR \ll N$  ( $NR$  representa o número de modos retidos na base).



A partir das equações (3.33), (3.39) e (3.40), pode-se obter as seguintes expressões para o cálculo das FRFs e da resposta em tensão do modelo reduzido, respectivamente:

$$\mathbf{H}_r(\omega, T) = \mathbf{Z}_r(\omega, T)^{-1} \quad (3.42)$$

$$s_r(x, y, z, t, T) = \boldsymbol{\psi}(x, y, z) \mathbf{u}_r(t, T) \quad (3.43)$$

onde  $\mathbf{Z}_r(\omega, T) = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_e \mathbf{T} + G(\omega, T) \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}}_v \mathbf{T} - \omega^2 \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T}$  designa a rigidez dinâmica reduzida,  $\boldsymbol{\psi}(x, y, z) = \mathbf{C}_k \mathbf{B}(x, y, z) \mathbf{T}$  para as camadas elásticas ( $k=1,3$ ), e  $\boldsymbol{\psi}(x, y, z) = \mathbf{C}_2^* \mathbf{B}(x, y, z) \mathbf{T}$ . Para simplificar os desenvolvimentos que seguem, a dependência espacial de  $\mathbf{B}$  será omitida.

A matriz de rigidez dinâmica reduzida pode ser calculada e invertida para cada frequência de uma maneira direta, utilizando-se algoritmos numéricos eficientes. Entretanto, para sistemas contendo amortecimento viscoelástico, a escolha da base de redução não é uma tarefa simples, nem sistemática, uma vez que há dependência da matriz de rigidez do material viscoelástico em relação à frequência da excitação e à temperatura. Neste caso, para uma dada temperatura de atuação do material viscoelástico, a base de redução deve levar em conta as variações da frequência.

No presente trabalho, será proposta uma base de redução constante inspirada na técnica de aproximação padrão de Ritz-Galerkin (MASSON et al, 2006). Para isto, é necessária a adoção de um ponto de partida para a determinação da base de redução independente da frequência e da temperatura. Neste sentido, Balmès e Germès (2002) demonstraram que a *rigidez tangente* é um ponto de partida conveniente, tendo a vantagem de ser real e fácil de ser invertida. Isto caracteriza o Sistema Conservativo Associado (SCA) do sistema viscoelástico, para o qual  $\mathbf{K}_v(0) = G_0 \bar{\mathbf{K}}_v$ . O SCA pode ser obtido através das propriedades assintóticas do material viscoelástico, conforme mostrado na Fig. 3.7. Nota-se que nas regiões de altas e baixas frequências, as curvas do módulo de armazenamento e do fator de perda podem ser prolongadas por assíntotas horizontais. A extrapolação em baixa frequência fornece uma assíntota real para o módulo,  $G_0$ , e  $\eta_0 = 0$ , e para as altas frequências, obtém-se uma assíntota complexa para  $G_\infty$  e  $\eta_\infty$  (CRANDALL; MARK, 1963). Neste caso, a matriz de rigidez elástica tangente pode ser obtida como segue:

$$\mathbf{K}_0 = \mathbf{K}_e + G_0 \bar{\mathbf{K}}_v \quad (3.44)$$

Neste caso, a base de redução nominal contendo os primeiros modos do sistema SCA pode ser obtida através da resolução do seguinte problema de autovalores:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K}_0 - \lambda_i \mathbf{M}) \phi_i &= 0 & i = 1, \dots, N \\ \phi_0 &= [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \dots \quad \phi_{NR}] & \mathbf{A}_0 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{NR}) \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde  $\phi_0$  contém somente os modos próprios do sistema SCA.

De acordo com de Lima et al. (2010), esta base deve ser enriquecida com os seguintes resíduos estáticos para levar em conta os esforços externos e as forças viscoelásticas, respectivamente:

$$\mathbf{R} = \mathbf{K}_0^{-1} \mathbf{b} \quad (3.46)$$

$$\mathbf{R}_v^0 = \mathbf{K}_0^{-1} \bar{\mathbf{K}}_v \phi_0 \quad (3.47)$$

Desta forma, a base de redução final a ser utilizada para a redução de um sistema viscoelástico pode ser expressa como segue:

$$\mathbf{T}_0 = [\phi_0 \quad \mathbf{R} \quad \mathbf{R}_v^0] \quad (3.48)$$

É importante destacar que a base de redução (3.48) é utilizada para reduzir o modelo de elementos finitos do sistema contendo amortecimento viscoelástico com uma razoável precisão, mas ela não é necessariamente robusta para considerar pequenas modificações paramétricas eventualmente ocorridas no modelo. Neste caso, deve-se partir para a utilização de condensação robusta de modelos (DE LIMA et al, 2010a).

### 3.7. Resposta em tensão média do sistema viscoelástico sujeito a cargas aleatórias

A partir da combinação das relações (3.40) e aplicando-se a transformada de Fourier na expressão resultante para  $\omega_0 = 0$ , o valor médio da resposta em tensão do sistema

viscoelástico submetido a uma carga aleatória estacionária,  $\mathbf{f}(t, \theta)$ , é dado como segue:

$$\bar{\mathbf{s}}(t, T) = \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{H}(\omega_0, T) \bar{\mathbf{f}}(t) = \mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{K}_0^{-1} \bar{\mathbf{f}}(t) \quad (3.49)$$

onde  $\bar{\mathbf{s}}(t, T) = E[\mathbf{s}(t, T, \theta)]$  e  $\bar{\mathbf{f}}(t) = E[\mathbf{f}(t, \theta)]$ .  $E[\bullet]$  representam a esperança matemática e  $\theta$  designa um processo aleatório estacionário.

A Eq. (3.49) mostra que o valor médio da resposta em tensão de uma estrutura contendo amortecimento viscoelástico submetida a carregamentos aleatórios estacionários é proporcional ao valor médio das cargas aleatórias e da resposta estática do sistema viscoelástico calculado a partir da matriz de rigidez tangente representando o comportamento do sistema SCA.

### 3.7.1. Densidade espectral de potência da resposta em tensão

Para a caracterização de um processo aleatório estacionário no domínio da frequência, a propriedade estatística normalmente utilizada é a Densidade Espectral de Potência (*Power Spectral Density*- PSD) (MEIROVITCH, 1975).

A partir da equação do movimento do sistema viscoelástico (3.34) sujeito a uma carga aleatória estacionária e Gaussiana,  $\mathbf{f}(t, \theta)$ , que pode ser totalmente caracterizada por seu valor médio,  $\bar{\mathbf{f}}(t)$ , e sua matriz PSD,  $\Phi_f(\omega)$ , a PSD da resposta pode ser expressa em termos da matriz complexa das FRFs do sistema viscoelástico,  $\Phi_u(\omega, T) = \mathbf{H}(\omega, T) \Phi_f(\omega) \mathbf{H}(\omega, T)^H$ , onde  $\mathbf{H}(\omega, T)^H$  representa o conjugado complexo transposto da matriz complexa das FRFs. Assim, considerando as Eqs. (3.42) e (3.43) e  $\Phi_u(\omega, T)$ , a densidade espectral de potência da resposta em tensão reduzida do sistema viscoelástico no domínio da frequência assume a seguinte forma:

$$\hat{\Phi}_s(\omega, T) = \Psi \hat{\mathbf{H}}(\omega, T) \hat{\Phi}_f(\omega) \hat{\mathbf{H}}(\omega, T)^H \Psi^T \quad (3.50)$$

onde  $\hat{\Phi}_f(\omega) = \mathbf{T}^T \Phi_f(\omega) \mathbf{T}$  e para um sistema sujeito ao estado de tensão aleatório da forma,

$\mathbf{s}(t, T, \theta) = [s_{xx}(t, T, \theta) \ s_{yy}(t, T, \theta) \ s_{xy}(t, T, \theta)]^T$  obtém-se a seguinte matriz da densidade

espectral de potência,  $\hat{\Phi}_s(\omega, T) = \begin{bmatrix} \hat{\Phi}_{xx,xx}(\omega, T) & \hat{\Phi}_{xx,yy}(\omega, T) & \hat{\Phi}_{xx,xy}(\omega, T) \\ & \hat{\Phi}_{yy,yy}(\omega, T) & \hat{\Phi}_{yy,xy}(\omega, T) \\ sym & & \hat{\Phi}_{xy,xy}(\omega, T) \end{bmatrix}.$

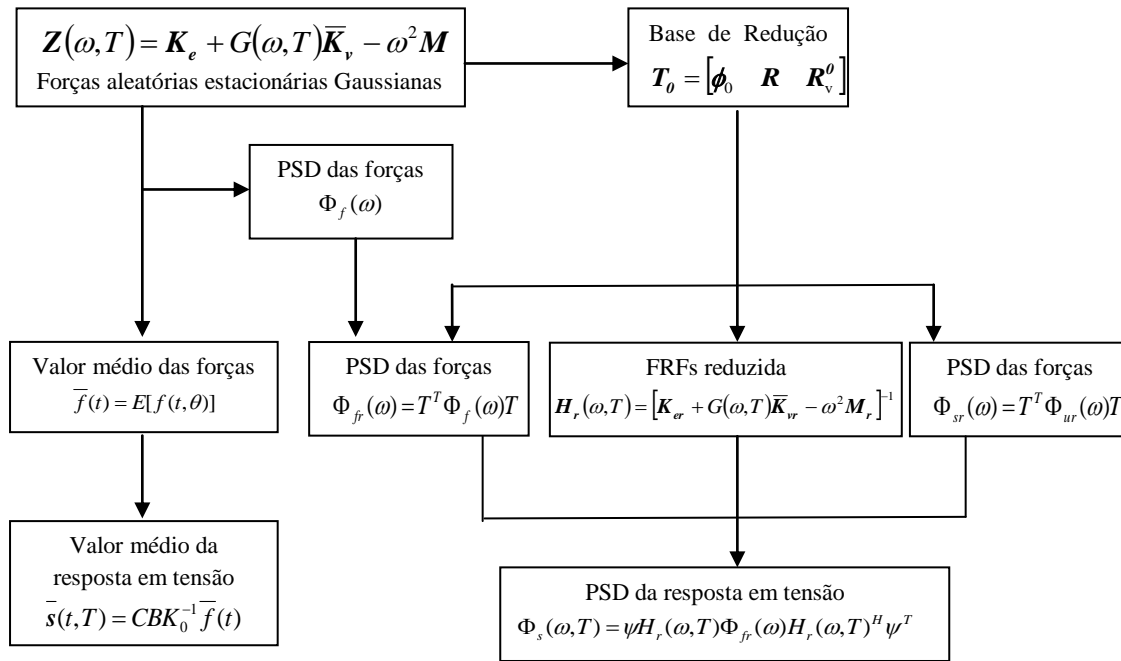


Figura 3.8 - Etapas para o cálculo da resposta em tensão de um sistema viscoelástico.

A Figura 3.8 apresenta as etapas necessárias para se calcular a resposta em tensão de um sistema viscoelástico. Pode-se notar que o cálculo da resposta em tensão no domínio da frequência é menos oneroso em termos de custo computacional, uma vez que não é necessário calcular as integrais de convolução, especialmente para o caso de estruturas de interesse industrial contendo amortecimento viscoelástico. Além disso, para uma estrutura viscoelástica linear sujeita a uma carga aleatória estacionária e Gaussiana, a PSD e o valor médio da resposta em tensão aleatória do sistema podem ser determinados com base na PSD da carga aleatória estacionária e das FRFs do sistema viscoelástico.

## CAPÍTULO IV

### ANÁLISE DE FADIGA DE UM SISTEMA VISCOELÁSTICO SUJEITO A CARGAS ALEATÓRIAS ESTACIONÁRIAS E GAUSSIANAS

Neste capítulo será apresentada a metodologia para a análise de fadiga de sistemas viscoelásticos. Esta metodologia permite determinar o índice de fadiga além da estimação da probabilidade de não falha (ou confiabilidade) de sistemas viscoelásticos sujeitos a carregamentos mecânicos cíclicos multiaxiais do tipo estacionários e Gaussianos. Neste contexto, o modelo de fadiga baseado no critério de fadiga multiaxial de *Sines*, inicialmente proposto para sistemas sem amortecimento, será estendido ao caso de sistemas contendo amortecimento viscoelástico. Para a implementação do método, a técnica *Prismatic Hull* para a determinação da amplitude da tensão cisalhante equivalente necessária ao critério de fadiga será empregada neste trabalho. Por fim, será apresentada a abordagem probabilística do critério de *Sines*.

#### 4.1. Critério multiaxial de *Sines*

Como reportado no capítulo introdutório deste trabalho, muitos componentes estruturais estão frequentemente sujeitos a carregamentos dinâmicos que podem levar a níveis indesejáveis de vibrações, os quais tendem a amplificar os problemas de falhas por fadiga induzidas por vibrações. Exemplos mais comuns são os componentes estruturais de aeronaves que estão frequentemente sujeitos a carregamentos dinâmicos multiaxiais e aleatórios, e que podem estar fora de fase, além de serem aplicados em diferentes frequências, gerando estados de tensões elevados e complexos, dificultando a análise de fadiga de tais sistemas. Neste contexto, alguns estudos sobre fadiga multiaxial foram propostos na literatura, conforme

discutido no Capítulo 2, na tentativa de descrever o comportamento em fadiga de tais sistemas estruturais não amortecidos. Dentre as inúmeras abordagens encontradas na literatura, pode-se citar: o Método da Tensão Equivalente; o Método do Plano Crítico; o Método da Energia; e o Método do Segundo Invariante. Sendo este último, a técnica a ser considerada no presente trabalho.

É importante salientar que o principal objetivo dos critérios de fadiga multiaxiais é determinar a localização dos pontos críticos de uma estrutura, ou pontos onde há a formação de macrotrincas que podem levá-la à fratura estrutural, além do limite de resistência à fadiga (normalmente para  $10^6$  ciclos ou mais). Neste contexto, muitos autores assumem que o início de uma trinca é caracterizado pelo *segundo desviatório em tensão cisalhante equivalente*. Segundo Lambert et al (2010), sob cargas não proporcionais, a evolução no tempo das direções principais das tensões devem ser levadas em consideração, sabendo que um maior número de planos de deslizamentos pode ser observado, sendo, nestes casos, difícil a estimação do comportamento em fadiga de uma estrutura utilizando a técnica do Plano Crítico, que baseia-se no fato de que as direções principais das tensões são fixas.

O Método do Segundo Invariante utiliza a pressão hidrostática e a amplitude da tensão cisalhante equivalente para a determinação da resistência à fadiga multiaxial de uma estrutura mecânica. Este método procura determinar, dentro de um plano desviatório em tensão, quais são os valores máximos de seus parâmetros. Neste sentido, inúmeros modelos que se baseiam neste método são encontrados na literatura, como os modelos de *Crossland* e *Sines* (LAMBERT et al, 2010). De acordo com Papadopoulos (1998), estes modelos fornecem boas estimativas para os casos de carregamentos em fase (proporcionais). Entretanto, para carregamentos fora de fase (não proporcionais), a evolução no tempo das direções principais deve ser levada em consideração, sabendo que um determinado número de planos de deslizamentos é ativado. Portanto, é muito difícil definir o comportamento de uma estrutura em fadiga induzida por vibrações mecânicas. Weber et al (2001) e Wu et al (2003) observaram que nenhum dos critérios de fadiga multiaxiais testados são totalmente satisfatórios, mas o critério multiaxial de *Sines* parece levar a resultados mais satisfatórios quando comparados com os correspondentes obtidos de ensaios experimentais, conforme discutido na Seção 2.3.1, Capítulo 2.

O critério de *Sines* é deduzido a partir da pressão hidrostática média,  $E[p_h(t)]$ , e da amplitude da tensão cisalhante equivalente,  $\sqrt{J_{2a}}$ , onde é assumido 100% de confiabilidade

da estrutura após um determinado período de tempo,  $T$ , desde que a seguinte desigualdade seja verificada:

$$\sqrt{J_{2a}} \leq f_{eq} \quad (4.1)$$

onde  $f_{eq}$  é o limite de resistência equivalente do material baseado no limite de resistência aleatório ( $\tau_{-1}$ ) e na constante do material ( $m$ ), definido como segue:

$$f_{eq} = \tau_{-1} - (3m - \sqrt{3}) \cdot E[p_h(t)] \quad (4.2)$$

onde  $\sqrt{J_{2a}}$  designa a amplitude da tensão cisalhante equivalente, e  $E[p_h(t)]$  representa o valor médio da pressão hidrostática, determinado da seguinte forma:

$$E[p_h(t)] = E\left[\frac{s_{xx}(t) + s_{yy}(t) + s_{zz}(t)}{3}\right] = \frac{1}{3}(E[s_{xx}(t)] + E[s_{yy}(t)] + E[s_{zz}(t)]) \quad (4.3)$$

onde  $s(t) = [s_{xx}(t), s_{yy}(t), s_{zz}(t), s_{xy}(t), s_{yz}(t), s_{xz}(t)]^T$  é o vetor das tensões.

Partindo-se da definição da tensão cisalhante equivalente (WEBER et al., 2001), chega-se à seguinte expressão para a raiz quadrada do segundo desviatório em tensão:

$$\sqrt{J_2(t)} = \sqrt{\frac{1}{6}[(s_{xx}(t) - s_{yy}(t))^2 + (s_{yy}(t) - s_{zz}(t))^2 + (s_{zz}(t) - s_{xx}(t))^2] + (s_{xy}(t) + s_{yz}(t) + s_{xz}(t))^2} \quad (4.4)$$

Para o caso específico de carregamento em fase, o valor da amplitude da tensão cisalhante equivalente,  $\sqrt{J_{2a}}$ , pode ser determinado diretamente das componentes alternadas da resposta em tensão do sistema,  $s(t) = [s_{xx}(t), s_{yy}(t), s_{zz}(t), s_{xy}(t), s_{yz}(t), s_{xz}(t)]^T$ , da forma:

$$\sqrt{J_{2a}} = \sqrt{\frac{1}{6}[(s_{xx,a} - s_{yy,a})^2 + (s_{yy,a} - s_{zz,a})^2 + (s_{zz,a} - s_{xx,a})^2] + (s_{xy,a} + s_{yz,a} + s_{xz,a})^2} \quad (4.5)$$

onde  $s_{\bullet,a} = \frac{1}{2} \left( \max_{t \in [0,T]} [s_{\bullet}(t)] - \min_{t \in [0,T]} [s_{\bullet}(t)] \right)$  é a expressão utilizada para o cálculo da componente alternada, avaliada num intervalo de tempo  $t \in [0, T_p]$ .

Entretanto, a determinação de  $\sqrt{J_{2a}}$  para o caso de carregamentos não proporcionais (fora de fase) não é trivial (BERNASCONI, 2002). Neste contexto, uma vez que  $\sqrt{J_2(t)}$  corresponde à raiz quadrada do segundo desviatório de tensão, torna-se interessante relacioná-lo com uma norma no espaço Euclidiano de cinco dimensões,  $E_5$ , (LAMBERT et al, 2010),

$$\sqrt{J_2(t)} = \sqrt{R_1^2(t) + R_2^2(t) + R_3^2(t) + R_4^2(t) + R_5^2(t)} \quad (4.6)$$

através da seguinte transformação:

$$\mathbf{S}(t) = \mathbf{P}_s \mathbf{s}(t) \quad (4.7)$$

onde  $\mathbf{S}(t) = [S_1(t), S_2(t), S_3(t), S_4(t), S_5(t)]^T$ ,  $S_4(t) = s_{xz}(t)$ ,  $S_3(t) = s_{xy}(t)$ ,  $S_5(t) = s_{yz}(t)$ ,

$S_1(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ \frac{2}{3} s_{xx}(t) - \frac{1}{3} s_{yy}(t) - \frac{1}{3} s_{zz}(t) \right]$ ,  $S_2(t) = \frac{1}{2} [s_{yy}(t) - s_{zz}(t)]$  e a matriz de transformação,

$$\mathbf{P}_s = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Neste contexto, o desviatório em tensão é completamente descrito por um número menor de componentes no espaço transformado, sendo esta, uma das grandes vantagens em se utilizar a relação (4.7). Além disso, para carregamentos periódicos, a medida do vetor,  $\mathbf{S}(t)$ , descreve uma curva fechada a qual representa o caminho percorrido pelo carregamento. Portanto, através desta transformação, várias alternativas para o cálculo de,  $\sqrt{J_{2a}}$ , foram propostas na literatura.

A primeira estratégia proposta para a estimação de,  $\sqrt{J_{2a}}$ , foi baseada na determinação do raio da hipersfera de mínimo volume (PAPADOPOULOS et al, 1997)



circunscrevendo o caminho do segundo desviatório em tensão através da formulação do seguinte problema de otimização (KHALIJ et al, 2010):

$$\sqrt{J_{2a}} = \max_{t \in T} \|S(t) - \bar{S}\| \quad (4.8)$$

Na equação anterior, o vetor,  $\bar{S}$ , designa o centro da hipersfera e contém os valores médios de,  $S(t)$ . Entretanto, existe a dificuldade no procedimento de obtenção da solução através do problema de otimização,  $\bar{S} : \min_{d'} \left( \max_{t \in T} \|S(t) - \bar{S}\| \right)$ , uma vez que alguns autores demonstraram que a introdução de uma mudança de fase entre duas tensões senoidais, por exemplo, leva a uma redução do diâmetro do círculo. Neste sentido, esta abordagem passa a ser questionável especialmente quando se considera resultados de ensaios experimentais (PAPADOUPOLOS et al., 1997).

Kueppers e Sonsino (2006) demonstraram que carregamentos não proporcionais são altamente dependentes do caminho da tensão e do tipo de material. Novamente, no contexto de fadiga de alto ciclo, alguns autores (PAPADOUPOLOS et al, 1997; KUEPPERS; SONSINO, 2006) definem as classes dos metais a partir de uma relação entre os limites de fadiga em torção e flexão totalmente revertidas. Além disso, cada um deles é diferentemente influenciado pelo deslocamento em fase. Para uma melhor definição das trajetórias de tensão para avaliar o termo,  $\sqrt{J_{2a}}$ , a definição seguinte é sugerida por Deperrois et al (1995):

$$\sqrt{J_{2a}} = \frac{1}{2} \sqrt{\sum_{i=1}^5 l_i^2} \quad (4.9)$$

Na Eq. (4.9), o componente  $l_i$  é avaliado no espaço Euclidiano,  $E_5$ , determinando primeiro a maior corda da hipersfera. Na sequência, o procedimento é repetido para o próximo,  $l_i$ , identificando novamente a maior corda em um subespaço reduzido e ortogonal do subespaço gerado pela corda anterior. Entretanto, a Eq.(4.9) pode levar à não unicidade no valor da maior corda em alguns casos como por exemplo para carregamentos triangulares. Portanto, para evitar o problema da não unicidade no cálculo do valor médio do segundo desviatório em tensão proposto por Deperrois et al (1995), Li e De Freitas (2002) propuseram a definição da elipse mínima que oferece uma medida mais adequada do valor do segundo

desviatório em tensão, uma vez que considera os efeitos de mudança de fase do carregamento. Por exemplo, para o caso de um carregamento bidimensional, a amplitude da tensão cisalhante equivalente é obtida por meio dos semi-eixos do círculo que circunscreve o caminho do carregamento no espaço,  $E_2$ , da seguinte forma:

$$\sqrt{J_{2a}} = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} \quad (4.10)$$

Na expressão anterior,  $R_1$  e  $R_2$  são os semi-eixos da elipse que representa o caminho do carregamento, conforme ilustrado na Fig. 4.1.

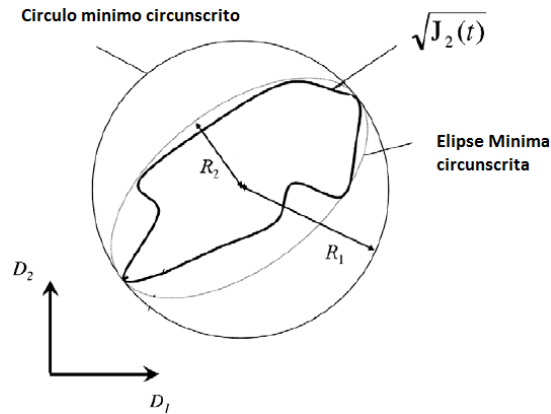


Figura 4.1 - Círculo mínimo circunscrito e elipse mínima circunscrita para carregamentos não proporcionais (adaptada de LAMBERT et al, 2010).

Li e De Freitas (2002) demonstraram que esta definição é adequada para o caso onde os carregamentos são bidimensionais. Entretanto, Gonçalves et al. (2005) criticam esta abordagem concluindo que ela pode conduzir aos mesmos resultados para dois caminhos triangulares diferentes de tensões cisalhantes equivalentes. Os autores propõem então que a amplitude de tensão cisalhante equivalente seja estimada a partir de outra elipse convexa, ou seja, que corresponda à norma mínima de Frobenius, a qual caracteriza a elipse. A medida de  $\sqrt{J_{2a}}$  é então calculada a partir da seguinte expressão:

$$\sqrt{J_{2a}} = \sqrt{\sum_{i=1}^5 a_i^2} \quad (4.11)$$

onde  $a_i$  são os semi-eixos da elipse que circunscreve a hipersfera.

É importante destacar que para o caso de carregamentos senoidais sincronizados e fora de fase, nota-se que as componentes,  $a_i$ , podem ser facilmente avaliadas a partir das amplitudes dos componentes de um prisma retangular que circunscreve a elipse (KHALIJ et al, 2010):

$$\lambda_i = \frac{1}{2} \left( \max_{t \in T} [S_i(t)] - \min_{t \in T} [S_i(t)] \right) \quad i = 1, \dots, 5 \quad (4.12)$$

Esta observação levou Gonçalves et al. (2005) a propor uma variação da Eq. (4.11), que é conhecida como sendo o conceito de maior prisma retangular (“*largest rectangular prismatic hull*”), onde as rotações do caminho da tensão do desviatório são calculadas em torno de cada um dos cinco eixos do espaço Euclidiano,  $E_5$ , a fim de encontrar o volume máximo do prisma retangular. A medida de,  $\sqrt{J_{2a}}$ , é então diretamente definida a partir dos semi-eixos do invólucro prismático. Entretanto, a dificuldade encontrada nesta metodologia se deve ao próprio algoritmo, uma vez que exige inúmeras iterações até que seja encontrada a rotação ótima (KHALIJ et al, 2010).

Outro caminho, é um processo modificado de uma elipse mínima que foi recentemente desenvolvido por Li et al (2009). Para cargas bidimensionais, os autores propõem encontrar,  $R_2$ , através do método da Mínima Elipse Circunscrita. Este procedimento supera a definição original proposta por Gonçalves et al. (2005), mas apresenta uma dificuldade comum no procedimento que é válido para todas as definições baseadas no prisma, que é encontrar o centro do caminho do carregamento (KHALIJ et al, 2010).

#### 4.1.1. Comparação das metodologias empregadas para calcular $\sqrt{J_{2a}}$

Khalij et al. (2010) comparam algumas definições para o cálculo de,  $\sqrt{J_{2a}}$ , para dois testes em que emprega carregamentos não senoidais periódicos e fora de fase. As formas e amplitudes dos carregamentos estão definidas nas Figs. 4.2(a) e 4.2(c). Em um primeiro momento, define-se a mudança de variável sobre as tensões em um espaço Euclidiano de cinco dimensões,  $E_5$ , via emprego da matriz,  $\mathbf{P}_s$ , conforme Eq. (4.7).

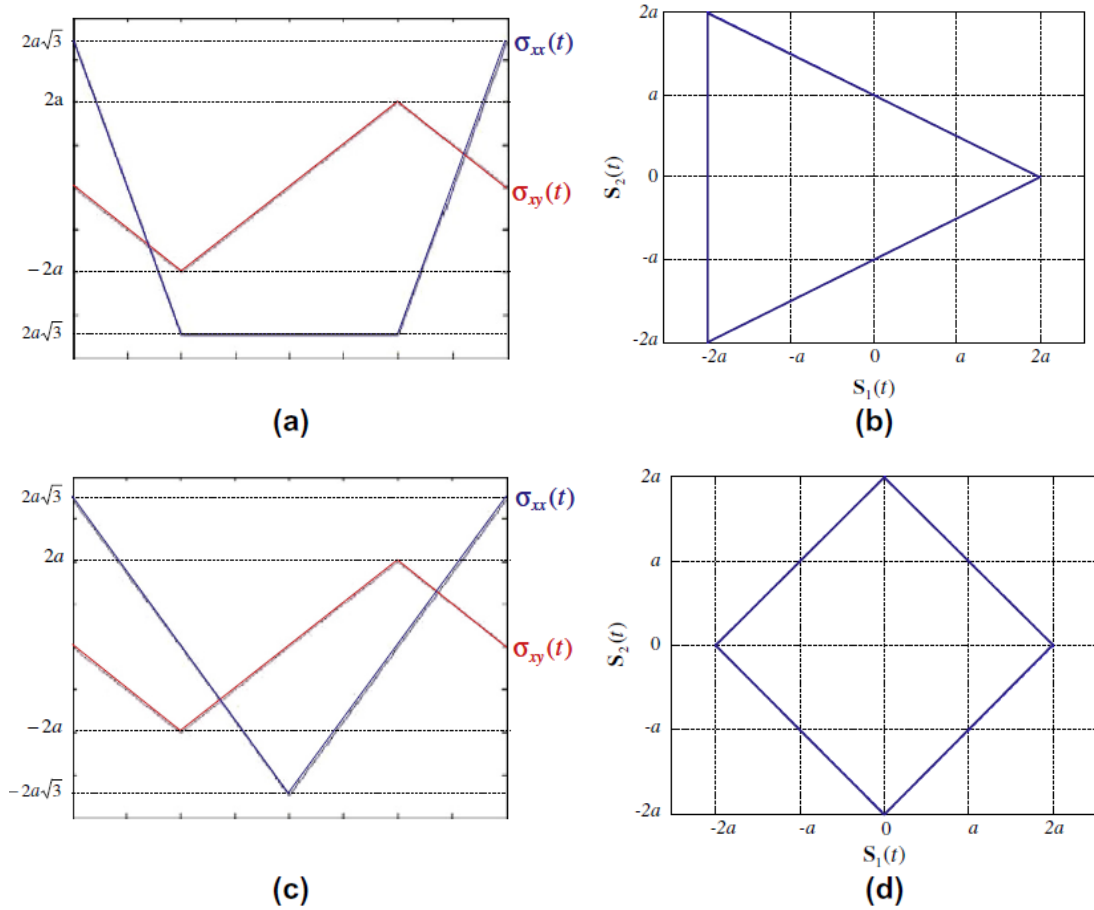


Figura 4.2 – Ensaio de tensão-torção de carregamentos triangulares (a) e (b), e retangulares (c) e (d). (b) e (d) são as respectivas projeções no espaço bidimensional do vetor,  $\mathbf{S}(t)$ , (extraída de KHALIJ et al, 2010).

Nota-se que a extremidade do vetor,  $\mathbf{s}(t)$ , descreve uma curva que corresponde ao caminho das tensões, e as projeções,  $\mathbf{S}(t)$ , no espaço de duas dimensões descrevem caminhos triangulares e retangulares, conforme mostrado na Fig. 4.2 para os dois exemplos. Percebe-se que elas conduzem a resultados similares para,  $\sqrt{J_{2a}}$ , uma vez que atuam com a mesma amplitude. Para estas condições, a expressão (4.5) pode ser aplicada para a estimação de,

$$\sqrt{J_{2a}} = \sqrt{\frac{1}{3} s_{xx,a}^2 + s_{xy,a}^2}, \text{ permitindo concluir que as medidas da amplitude da tensão cisalhante}$$

equivalente devem ser iguais a,  $2a\sqrt{2}$ , para ambos os caminhos triangulares e retangulares.

A título de ilustração, a Fig. 4.3 mostra as construções e as medidas associadas às definições anteriores. A partir dos valores estimados para,  $\sqrt{J_{2a}}$ , mostrados na Tab. 4.1, nota-

se que as medidas são muito diferentes para os dois caminhos de tensão. Assim, nenhuma das definições anteriores satisfaz ambas as propostas.

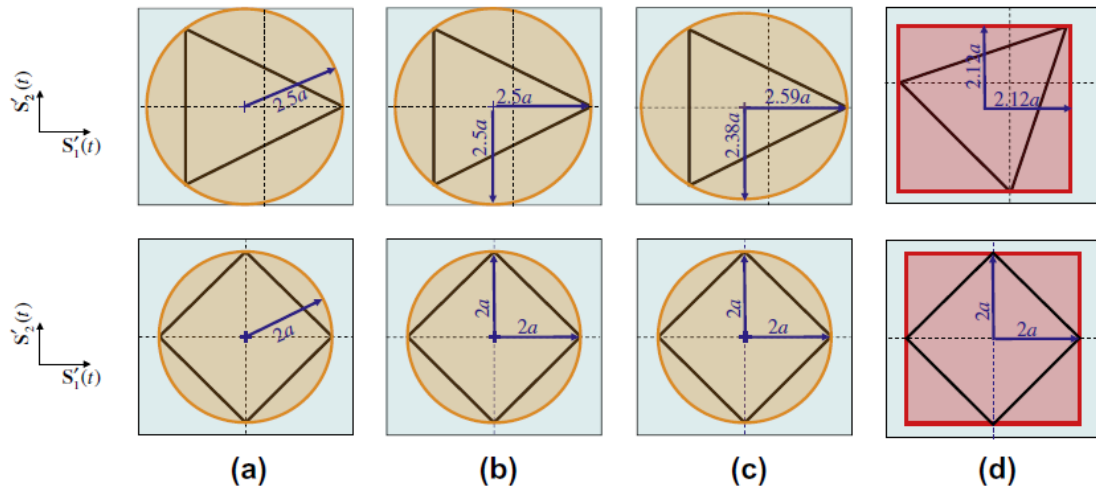


Figura 4.3 – (a) círculo mínimo (PAPADOUPOLOS, 1997); (b) elipse mínima (LI et al., 2009); (c) prisma com a norma de Frobenius (MAMIYA et al, 2009); (d) maior prisma retangular (LI et al., 2009) (adaptada de (KHALIJ et al, 2010)).

Tabela 4.1- Comparação entre as medidas de  $\sqrt{J_{2a}}$  para as diferentes definições

	Círculo mínimo	Elipse mínima	Prisma com a norma de Frobenius	Maior prisma retangular
Caminho triangular	$2.5a$	$3.535a$	$3.517a$	$3a$
Caminho retangular	$2a$	$2a\sqrt{2}$	$2a\sqrt{2}$	$2a\sqrt{2}$

#### 4.2. Técnica *Prismatic Hull* para o cálculo de $\sqrt{J_{2a}}$

Neste ponto, é importante salientar que para carregamentos em fase e determinísticos, o valor de,  $\sqrt{J_{2a}}$ , pode ser estimado diretamente das componentes de tensão alternadas,  $s(t) = [s_{xx}(t), s_{yy}(t), s_{zz}(t), s_{xy}(t), s_{yz}(t), s_{xz}(t)]^T$ , conforme Eq. (4.5). Entretanto, para o caso de carregamentos não proporcionais que levam em conta a natureza aleatória das tensões e sua dependência em temperatura para o caso de sistemas contendo amortecimento viscoelástico, a direção e a magnitude da resposta em tensão aleatória do sistema viscoelástico,  $s(t, T, \theta)$ , não são constantes durante um ciclo de carregamento.

Portanto, para o caso geral de carregamentos não determinísticos, a técnica *Prismatic Hull* definida no sistema de coordenadas principais, inicialmente proposta por Khalij et al. (2010), será adaptada neste trabalho para o caso de sistemas contendo amortecimento viscoelástico e sujeitos a carregamentos aleatórios do tipo estacionários e Gaussianos. Neste contexto, uma vez caracterizado o estado de tensão do sistema viscoelástico, o tensor tensão pode ser reduzido de seis para cinco componentes, conforme definição (4.7), e relacionado a uma norma no espaço Euclidiano. Através desta mudança de variável sobre as tensões no espaço reduzido, o caminho das tensões pode ser mais bem representado visando estimar a raiz quadrada do segundo invariante do tensor desviatório em tensão do sistema viscoelástico.

As principais etapas da metodologia a ser empregada neste trabalho são descritas a seguir, onde, para simplificar os desenvolvimentos, a natureza aleatória e a temperatura do material viscoelástico, serão omitidas:

- Inicialmente, partindo-se de um estado tri-axial de tensões, é realizada uma mudança de variável de seis para cinco dimensões sobre a resposta em tensão aleatória do sistema viscoelástico,  $s(t)$ , por meio da seguinte transformação,  $S(t) = P_s s(t)$ , em  $N_s$  intervalos de tempo discretos,  $t_i$ , com  $i = 1, \dots, N_s$ , onde  $P_s \in R^{5 \times 6}$  é a matriz de transformação definida na Eq. (4.7);
- Em seguida, uma nova avaliação,  $S'(t) = T_s^T S(t)$ , é obtida via transformação ortonormal, onde  $T_s \in R^{5 \times 5}$  é uma matriz contendo os cinco autovetores referentes aos eixos principais do carregamento, obtidos da análise de autovalores da matriz de covariância,  $V_s = (S - \bar{S}) \cdot (S - \bar{S})^T / (N_s - 1)$ , onde  $\bar{S} = (\sum_{i=1}^{N_s} S_i) / N_s$ ,  $V_s \in R^{5 \times 1}$  e  $\bar{S} \in R^{5 \times 1}$ ;
- Na sequência, é calculada as amplitudes,  $R = (1/2)[\max(S') - \min(S')]$ , para um período de tempo  $t \in T_p$  no sistema de coordenadas principal, após a transformação ortogonal, onde  $R = [R_1 \ R_2 \ R_3 \ R_4 \ R_5]^T$  representa as medidas dos vetores das tensões aleatórias ao longo dos eixos principais do prisma que circunscreve o caminho do carregamento, para então estimar,  $\sqrt{J_{2a}} = \|R\| = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2 + R_5^2}$ .

A título de exemplo, a Fig. 4.4 abaixo ilustra os vetores  $S(t)$  e  $S'(t)$  definidos no espaço bidimensional para o seguinte problema ilustrativo:  $s_x(t) = s_1(t) = 315 \times \sin(\omega t) [MPa]$  e

$s_{xy}(t) = s_3(t) = 158 \times \sin(\omega t + \pi/3) [MPa]$ . Após o procedimento de transformação ortogonal, é possível calcular as medidas máximas de  $\mathbf{R} = [118.7 \ 209.6]^T$ , utilizadas para estimar,  $\sqrt{J_{2a}} = \|\mathbf{R}\| = 240.91$ .

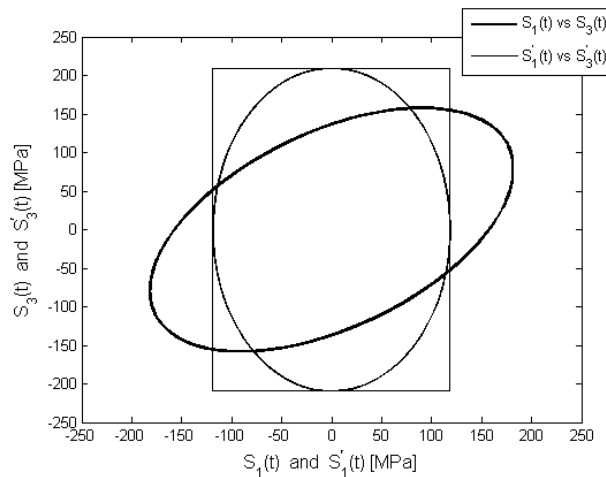


Figura 4.4 – Ilustração da técnica *Prismatic Hull* para um problema bidimensional.

#### 4.3. Formulação probabilística do critério de *Sines*

Nesta seção, será apresentada a formulação probabilística do critério de *Sines* que será empregada para avaliar a probabilidade de não falha por fadiga de sistemas dinâmicos contendo materiais viscoelásticos sujeitos a ciclos de carregamentos aleatórios que podem ser multiaxiais, estacionários e Gaussianos. Este critério baseia-se nas características estatísticas calculadas através da resposta em tensão de sistemas viscoelásticos no domínio da frequência, conforme apresentado na Seção 3.7, Capítulo 3.

Partindo-se das contribuições propostas por Lambert et al. (2010), Khalij et al. (2010) e Pagnacco et al. (2002), referentes à proposição de uma aproximação probabilística para o critério de *Sines* para o caso de estruturas não-amortecidas, a probabilidade de não-falha ou confiabilidade de uma estrutura contendo amortecimento viscoelástico pode ser estimada da seguinte forma:

$$P_f = \text{prob}\left(\sqrt{J_{2a}}(\theta) \leq f_{eq}(\theta)\right) \quad (4.13)$$

Na Eq. (4.13), para o critério de *Sines*,  $f_{eq}(\theta) = \tau_{-1}(\theta) - (3m - \sqrt{3})p_h(\theta)$  designa o limite de resistência aleatório equivalente que é dependente do limite de resistência aleatório,  $\tau_{-1}(\theta)$ , e da constante do material,  $m$ , obtida dos limites de torção e flexão. É importante salientar que as curvas *S-N* (amplitude de tensão *versus* número de ciclos) podem ser utilizadas para determinar esses limites de fadiga para amostras submetidas a um carregamento constante (comportamento experimental em fadiga de materiais estruturais). Além disso, o critério de *Sines* pode ser utilizado em conjunto com a vida infinita em fadiga (amplitudes de tensão abaixo do limite de fadiga das curvas *S-N*). Neste caso, o critério permanece independente do número de ciclos e do tempo de tal forma que o emprego de técnicas de contagem de ciclos e danos cumulativos pode ser evitado.  $p_h(\theta)$  é a pressão hidrostática aleatória calculada a partir da resposta em tensão do sistema viscoelástico (ver Eq. (3.43), Seção 3.6, Capítulo 3), e  $\sqrt{J_{2a}}$  é a amplitude do segundo desviatório em tensão.

Portanto, assumindo independência entre  $\sqrt{J_{2a}}$  e  $f_{eq}$ , a probabilidade de não falha do sistema viscoelástico pode ser estimada a partir da avaliação da seguinte integral:

$$P_f = \int_{s=-\infty}^{+\infty} \int_{r=-\infty}^s p_{\sqrt{J_{2a}}(\theta)}(r) p_{f_{eq}}(\theta)(s) dr ds \quad (4.14)$$

Partindo-se do fato de que o estado de tensão aleatório é considerado estacionário e Gaussiano, a pressão hidrostática resultante também é um processo aleatório estacionário e Gaussiano, podendo ser caracterizada estatisticamente através de seu valor médio e de sua densidade espectral de potência. Além disso, para carregamentos com média zero (resultando em uma pressão hidrostática com média zero), a Função Densidade de Probabilidade (FDP) do limite de resistência equivalente aleatório,  $p_{f_{eq}}(\theta)$ , tem uma distribuição semelhante ao limite de resistência aleatório,  $p_{\tau_{-1}}(\theta)$ , que, por sua vez, pode ser construída a partir da análise estatística de dados experimentais, resultando em uma distribuição de probabilidade Gaussiana conforme demonstrado por Schijve (2005). Entretanto, a fim de caracterizar a FDP,  $p_{\sqrt{J_{2a}}(\theta)}$ , uma técnica no domínio da frequência será utilizada neste trabalho, baseada na teoria de processos aleatórios estacionários, ao invés de empregar simulações de Monte Carlo.



Vale ressaltar novamente que para carregamentos determinísticos em fase ou fora de fase,  $\sqrt{J_{2a}}$ , pode ser estimado seguindo os procedimentos apresentado na Seção 4.2. Entretanto, a análise deve levar em conta a natureza aleatória e a dependência em frequência e temperatura das respostas em tensões do sistema viscoelástico,  $s(t, T, \theta)$ , e o fato de não ser constante durante um ciclo de vibração. Portanto, para estimar a probabilidade definida na Eq. (4.14) levando-se em conta a natureza estacionária e Gaussiana do estado de tensão de um sistema viscoelástico, uma etapa intermediária para estimar a distribuição de,  $\sqrt{J_{2a}(\theta)}$ , consiste em caracterizar os dois primeiros momentos estatísticos das medidas máximas aleatórias estacionárias e Gaussianas não correlacionadas,  $R_i(\theta)$ , onde  $i=1$  a  $5$ . Dentre as várias estratégias usadas para estimar a distribuição de valores extremos atingido por processos Gaussianos durante um período de tempo, os resultados encontrados por Preumont (1985) serão empregados, no qual os momentos estatísticos de,  $R_i(\theta)$ , são expressos como:

$$E[R_i(\theta)] = \sqrt{\lambda_0}(\mu_R + \gamma \beta_R) \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, 5 \quad (4.15.a)$$

$$V[R_i(\theta)] = \lambda_0 \frac{\pi^2}{6} \beta_R^2 \quad \text{para} \quad i = 1, \dots, 5 \quad (4.15.b)$$

onde  $\beta_R = 1/\sqrt{2 \ln(\kappa_a N_p)}$  e  $\mu_R = \sqrt{2 \ln(\kappa_u N_p)}$  designam, respectivamente, a dispersão e o modo de,  $R_i(\theta)$ ,  $N_p = \frac{T_p}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}}$  é o número de máximos associados aos componentes,  $S'(t) - \bar{S}'$ , avaliado num intervalo,  $T_p$ . Os parâmetros  $\lambda_0$  e  $\lambda_2$  indicam, respectivamente, os momentos espectrais de zero e segunda ordens do vetor,  $S'(t)$ , e  $\gamma = 0.5772$  é a constante de Euler. Os parâmetros de largura de banda são definidos como segue:

$$\kappa_u = \begin{cases} 1.5(1 - e^{-1.8\delta}) & \text{para } \delta < 0.5 \\ 0.94 & \text{para } \delta \geq 0.5 \end{cases}, \quad \kappa_a = \begin{cases} 7\delta & \text{para } \delta < 0.5 \\ 4.05 & \text{para } \delta \geq 0.5 \end{cases} \quad (4.16)$$

onde  $\delta = \sqrt{1 - \lambda_1^2/(\lambda_0 \lambda_2)}$  é o fator de irregularidade dependente dos momentos espectrais do processo aleatório,  $S'(t)$ , de acordo com a teoria do fator de pico (PREUMONT, 1985).

De acordo com Preumont (1985), as características estatísticas (4.15) levam a estimações razoáveis para várias formas espectrais de uma maneira simples considerando a largura de banda do processo. Além disso, para o desenvolvimento dessas expressões, a distribuição de Gumbel foi adotada assumindo-se que as passagens de níveis ocorrem de acordo com um processo de Markov. Tal suposição, que é adotada neste trabalho, também foi usada por Pitoiset et al. (2001), Lambert et al. (2010) e Preumont (1985).

Baseado nas distribuições (4.15), obtidas para os processos aleatórios estacionários e Gaussianos não correlacionados,  $R_i(\theta)$ , é possível obter as seguintes funções para os valores da média e da variância da amplitude do segundo desviatório em tensão cisalhante,  $E[J_{2a}(\theta)] = \sum_{i=1}^5 E[R_i^2(\theta)]$  e  $V[J_{2a}(\theta)] = \sum_{i=1}^5 V[R_i^2(\theta)]$ , onde os primeiros dois momentos estatísticos de,  $R_i^2(\theta)$ , podem ser definidos como segue (LAMBERT et al., 2010):

$$E[R_i^2(\theta)] = E[R_i(\theta)]^2 + V[R_i(\theta)] \quad (4.17)$$

$$V[R_i^2(\theta)] = \overbrace{4E[R_i(\theta)]^2 V[R_i(\theta)] + \frac{22}{5} V[R_i(\theta)]^2 + \frac{48\zeta\sqrt{6}}{\pi^3} E[R_i(\theta)] V[R_i(\theta)]^{3/2} - E[R_i^2(\theta)]}^{E[R_i^4(\theta)]} \quad (4.18)$$

onde  $\zeta = 1.20206$  é a constante de Apery. Detalhes da obtenção da média e da variância de,  $R_i^2(\theta)$ , estão descritos no Anexo B.

A partir deste ponto, é necessário fazer uma suposição sobre a função densidade de probabilidade de,  $\sqrt{J_{2a}(\theta)}$ , para continuar com a sua caracterização. Neste contexto, Lambert et al. (2010) realizaram inúmeras simulações numéricas utilizando a estratégia de Monte Carlo, levando-os à adoção da distribuição de Gumbel para caracterizar,  $\sqrt{J_{2a}(\theta)}$ . Entretanto, com o objetivo de superar as dificuldades na obtenção de expressões analíticas para o caso de uma distribuição de Gumbel, neste trabalho, será assumido que,  $E[J_{2a}^2(\theta)]$ , pode ser escrito de forma similar a,  $E[R_i^4(\theta)]$ , na Eq. (4.18), além da seguinte definição de variância,  $E[J_{2a}^2(\theta)] = E[J_{2a}(\theta)]^2 - V[J_{2a}(\theta)]$  e  $V[\sqrt{J_{2a}(\theta)}] = E[J_{2a}(\theta)] - E[\sqrt{J_{2a}(\theta)}]^2$ . Portanto, é

possível combinar estas relações para gerar a seguinte equação não linear a ser resolvida numericamente (PAPADOPOULOS et al.,1997):

$$\begin{aligned}
 & E[J_{2a}(\theta)]^2 + V[J_{2a}(\theta)] - 4E[\sqrt{J_{2a}(\theta)}]^2 \left( E[J_{2a}(\theta)] - E[\sqrt{J_{2a}(\theta)}]^2 \right) \\
 & - \frac{22}{5} \left( E[J_{2a}(\theta)] - E[\sqrt{J_{2a}(\theta)}]^2 \right)^2 \\
 & - \frac{48\zeta\sqrt{6}}{\pi^3} E[\sqrt{J_{2a}(\theta)}] \left( E[J_{2a}(\theta)] - E[\sqrt{J_{2a}(\theta)}]^2 \right)^{3/2} = 0
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Na equação anterior, observa-se que somente o termo,  $E[\sqrt{J_{2a}(\theta)}]$ , não é conhecido. Entretanto, este pode ser determinado via emprego do método de Newton–Raphson assumindo a seguinte estimativa inicial,  $E[\sqrt{J_{2a}(\theta)}] \approx \sqrt{E[J_{2a}(\theta)]}$ .

A solução da equação anterior em conjunto com a definição de variância para a variável aleatória,  $\sqrt{J_{2a}(\theta)}$ , permite obter a seguinte expressão analítica para a sua função densidade de probabilidade (LAMBERT et al, 2010):

$$p_{\sqrt{J_{2a}}}(r) = \frac{1}{\beta_J} \exp\left(\frac{\mu_J - r}{\beta_J}\right) \exp\left[-\exp\left(\frac{\mu_J - r}{\beta_J}\right)\right] \tag{4.20}$$

onde  $\beta_J = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \left( V[\sqrt{J_{2a}(\theta)}] \right)^{1/2}$  e  $\mu_J = E[\sqrt{J_{2a}(\theta)}] - \gamma \beta_J$  designam, respectivamente, a dispersão e o modo de,  $\sqrt{J_{2a}(\theta)}$ . Nota-se que o valor mais provável de,  $\sqrt{J_{2a}(\theta)}$ , é o seu modo e não o seu valor médio.

#### 4.4. Distribuição e variância do índice de fadiga - Presença de incertezas

Nas seções anteriores foi mostrado o procedimento para a estimação do índice de fadiga de sistemas viscoelástico via emprego do critério de *Sines*. Entretanto, torna-se interessante estudar as dispersões sobre os valores do índice obtidos levando-se conta as possíveis fontes de incertezas. Neste caso, pode-se considerar as duas fontes seguintes:

- A primeira é a incerteza associada à própria estimação da raiz quadrada da amplitude do segundo desviatório em tensão para sistemas viscoelásticos sujeitos a carregamentos aleatórios. Na verdade, as dispersões obtidas a partir dos valores de,  $R_i(\theta)$ , estão diretamente relacionadas com a natureza aleatória do carregamento externo que, neste caso, é do tipo estacionária e Gaussiana. Portanto, através das Eqs. (4.17) e (4.18) podem-se obter diretamente as características estatísticas dos valores máximos de,  $R_i(\theta)$ ;
- A segunda refere-se às incertezas associadas às características mecânicas dos materiais obtidas de ensaios experimentais de fadiga. De fato, os valores usados para os limites de resistência dos materiais determinados a partir de um grande número de ensaios de fadiga em laboratório, são valores médios. Por exemplo, duas peças idênticas sujeitas ao mesmo carregamento, raramente terão parâmetros de fadiga iguais. Neste sentido, a dispersão dos parâmetros de fadiga pode ser muito grande. Neste contexto, na literatura são empregadas as distribuições Gaussianas, log-normal ou Weibull (SCHIJVE, 2003; SCHMIT, 1960) para variações entre 5 e 10% dos valores médios dos limites de resistência à fadiga. Para o presente estudo, será utilizada uma distribuição normal do limite de resistência a fadiga com variações de 10% do valor médio.

Para avaliar a propagação destas incertezas, será empregado o método de simulação de Monte Carlo. Neste contexto, serão realizadas inúmeras tiragens aleatórias dos parâmetros considerando-se a distribuição determinada na seção anterior para estimar os valores mínimos, médios e máximos dos índices de fadiga empregando o critério multiaxial de *Sines*.

## CAPÍTULO V

### SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Este capítulo apresenta os resultados das simulações numéricas realizadas com o intuito de elucidar a eficiência dos materiais viscoelásticos para o aumento do índice de fadiga de sistemas dinâmicos sujeitos a carregamentos mecânicos cíclicos. Num primeiro momento, serão mostradas as respostas reduzidas dos sistemas sem e com tratamento viscoelástico superficial em termos das funções de resposta em frequência e das respostas em tensão. Em seguida são apresentadas as distribuições da raiz quadrada do segundo desviatório em tensão para os sistemas sem e com tratamento viscoelástico superficial. Também será realizado um estudo da influência da temperatura do material viscoelástico e das espessuras das camadas na estimação da amplitude do segundo desviatório em tensão e do próprio critério multiaxial de *Sines*. Por fim, será apresentado um estudo preliminar sobre a influência de incertezas nos parâmetros de fadiga da estrutura base na estimação do índice de fadiga usando o critério de *Sines*.

#### 5.1. Descrição do exemplo numérico

A Fig. 5.1 representa o sistema a ser utilizado nos exemplos numéricos compostos por uma placa plana completamente tratada com uma camada restrita passiva. A placa foi discretizada em 14 elementos na direção  $x$  e 10 elementos na direção  $y$ , sendo que as dimensões geométricas da placa base do núcleo viscoelástico e da camada restringente nas respectivas direções  $x$  e  $y$  estão indicadas na mesma figura.

Nos desenvolvimentos que seguem, será utilizado o modelo de elementos finitos de placa sanduíche de três camadas desenvolvido no Capítulo III. Além disso, será assumido que a placa está engastada-engastada-livre-livre. São assumidos os seguintes valores para as

espessuras das camadas base, viscoelástica e restrigente, respectivamente: 1,00mm, 0,0254mm e 0,5mm. As propriedades físicas da placa base e restrigente são: módulo de Young,  $E=0,69 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$ , densidade  $\rho=2700 \text{ Kg/m}^3$  e coeficiente de Poisson  $\nu=0,29$ . Já para a camada viscoelástica será empregado o módulo complexo do material ISD112 conforme apresentado na Seção 3.5.1, Capítulo 3.

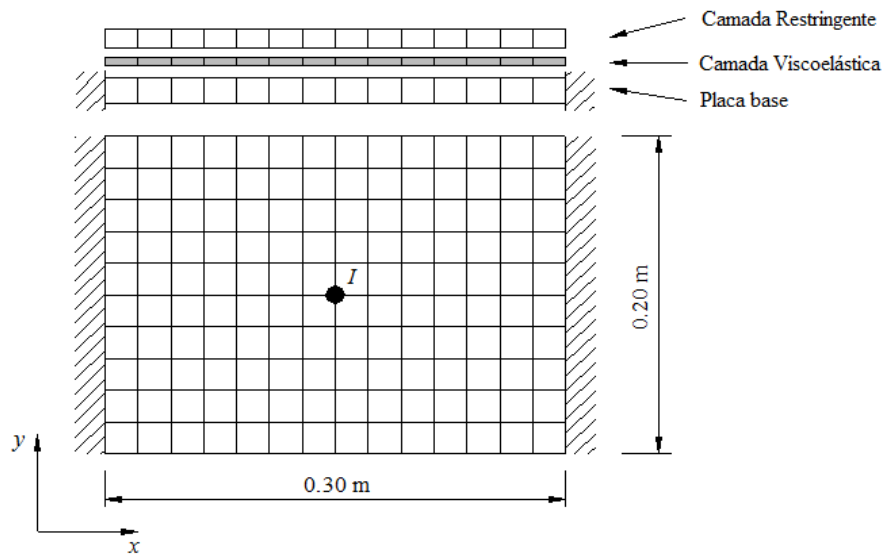


Figura 5.1 - Representação da placa tratada com camada restrita passiva.

## 5.2. Verificação da redução de modelo adaptada ao sistema viscoelástico

Para verificar a eficiência da estratégia de condensação do modelo viscoelástico na banda de frequência de interesse [1-500 Hertz], fixa-se a temperatura do material viscoelástico a 25°C, e neste caso, serão utilizadas três bases de redução, a saber:  $\mathbf{T}_{o_1} = [\phi_0^{(15)}]$  (15 autovetores obtidos via resolução do problema de autovalores (3.45));  $\mathbf{T}_{o_2} = [\phi_0^{(15)} \quad \mathbf{R}^{(1)}]$  (15 autovetores obtidos pela resolução do problema (3.45), 1 vetor correspondente ao resíduo estático da força externa de amplitude unitária aplicada no ponto  $I$  (ver Fig. 5.1), conforme Eq. (3.46)); e  $\mathbf{T}_{o_3} = [\phi_0^{(15)} \quad \mathbf{R}^{(1)} \quad \mathbf{R}_\Delta^{(15)}]$  (15 autovetores obtidos pela resolução do problema (3.45), 1 resíduo estático obtido pela aplicação da Eq. (3.46), e 15 vetores associados aos resíduos estáticos que caracterizam as forças viscoelásticas obtidos através da Eq. (3.47)).

O cálculo das funções de resposta em frequência (FRFs) dos sistemas de referência e reduzidos é feito pela aplicação de uma força de amplitude unitária no ponto  $I$ , sendo a resposta obtida no mesmo ponto, a qual será designada por,  $\mathbf{H}_\Pi(\omega, T)$ .

A Fig. 5.2 mostra as amplitudes das FRFs calculadas através do emprego das três bases de redução,  $T_{01}$ ,  $T_{02}$  e  $T_{03}$ , respectivamente, confrontadas com as amplitudes da FRF do sistema de referência, no qual foi utilizada uma base composta por 601 autovetores no total. Pode-se notar que a precisão do modelo reduzido em representar a resposta dinâmica do sistema contendo amortecimento viscoelástico é aumentada em função do enriquecimento sucessivo da base de redução através da inclusão na mesma, dos resíduos associados aos esforços externos e às forças viscoelásticas. Isto pode ser confirmado pela análise dos erros relativos entre as amplitudes das FRFs calculadas para o sistema de referência e as correspondentes obtidas através do emprego das bases de redução, conforme mostrado na Fig. 5.3.

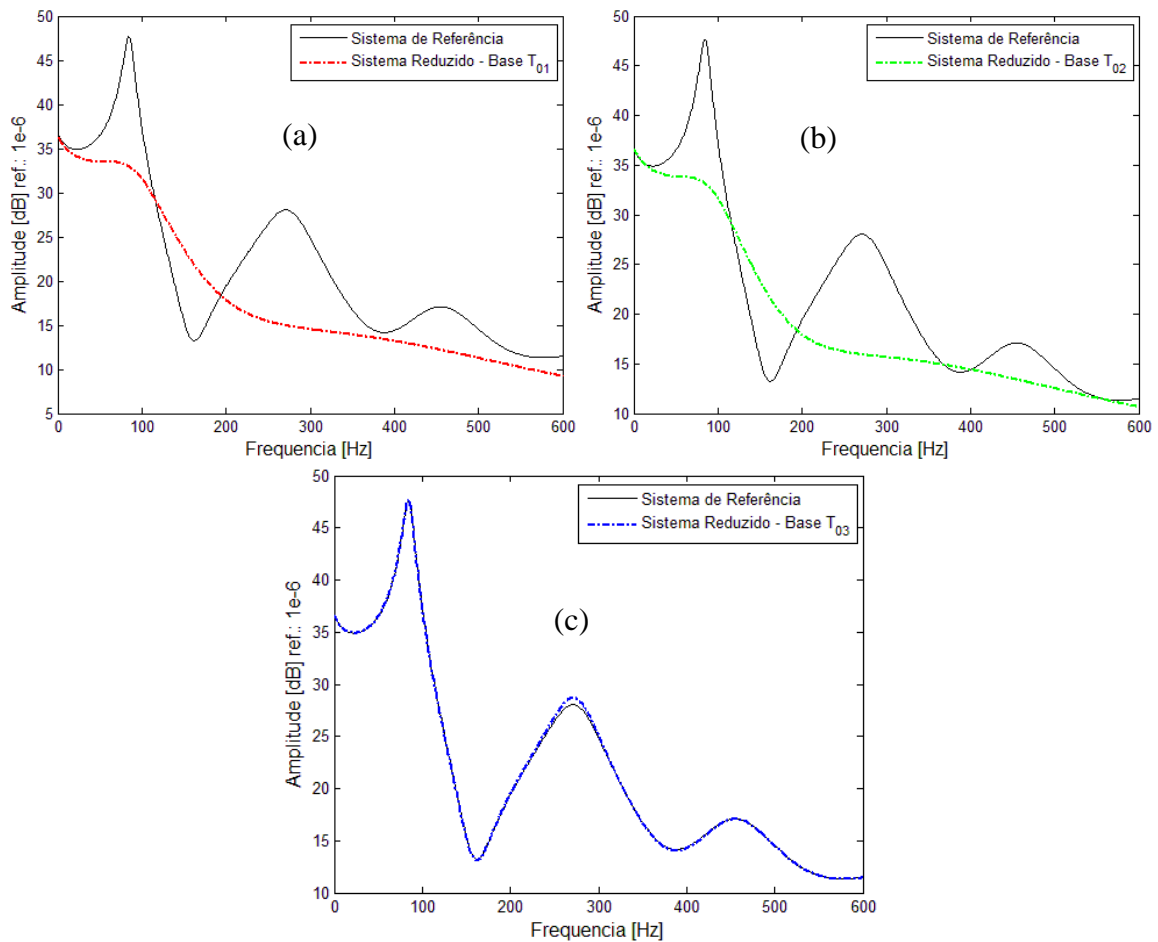


Figura 5.2 – Amplitudes das FRFs dos sistemas de referência e reduzidos: (a) base  $T_{01}$ ; (b) base  $T_{02}$ ; (c) base  $T_{03}$ .

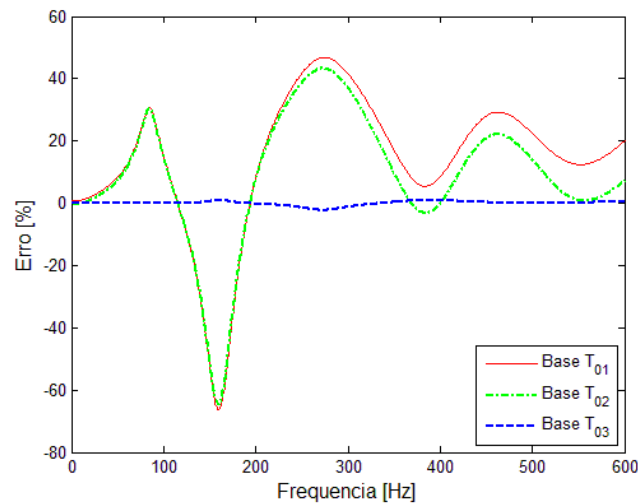


Figura 5.3 – Erros relativos entre as respostas reduzidas e a referência.

### 5.3. Respostas em tensão do sistema viscoelástico

Nesta seção, serão apresentadas as respostas em tensão dos sistemas sem e com tratamento viscoelástico superficial sujeitos a um carregamento aleatório transversal concentrado aplicado no ponto *I*, indicado na Fig. 5.1, definido pela sua densidade espectral de potência (PSD) uniforme,  $\Phi_f(\omega) = 100 \times 10^6 \text{ Pa}^2/\text{Hz}$  (ruído branco). O procedimento para o cálculo das respostas em tensão do sistema viscoelástico incluindo a redução de modelos foi apresentado na Seção 3.7.1 do Capítulo III.

A Fig. 5.4 abaixo representa as densidades espectrais de potência das respostas em tensão calculadas para um elemento finito localizado na parte central da placa próximo à aplicação do carregamento para os sistemas sem e com tratamento viscoelástico. Os valores apresentados são uma média dos valores das tensões calculados para os quatro nós que formam o elemento finito. Como será mostrado na sequência, a escolha deste elemento foi baseada no fato de que os elementos da parte central da placa estão submetidos a um maior nível de tensão, sendo estes, os mais críticos.

É importante destacar que as respostas em tensão do sistema viscoelástico podem ser obtidas para cada elemento finito da malha através da resolução da Eq. (3.50), conforme procedimento apresentado na Fig. 3.8, Capítulo III. Neste caso, além da PSD do carregamento aleatório, é necessária a matriz complexa das FRFs do sistema viscoelástico,  $\mathbf{H}_{II}(\omega, T)$ , e da seguinte matriz de propriedades elásticas para o material isotrópico da placa base:



$$\mathbf{C}_1 = \frac{E^{(1)}}{1 - \nu^{(1)2}} \begin{bmatrix} 1 & \nu^{(1)} & 0 \\ \nu^{(1)} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu^{(1)}}{2} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Através da análise da Fig. 5.4, pode-se concluir que houve uma redução significativa dos níveis de tensões do elemento escolhido pela presença do amortecimento viscoelástico. Isto pode ser explicado pela redução dos níveis de vibração do sistema pelo amortecimento viscoelástico introduzido conforme demonstrado pelas amplitudes das FRFs dos sistemas sem e com tratamento viscoelástico apresentadas na Fig. 5.5. Além disso, devido ao alto custo computacional envolvido no cálculo das respostas em tensão do sistema viscoelástico, estas foram geradas a partir do modelo reduzido, via emprego da base de redução,  $\mathbf{T}_{O_3}$ , definida na seção anterior, conforme etapas discriminadas na Fig. 3.8, Capítulo III.

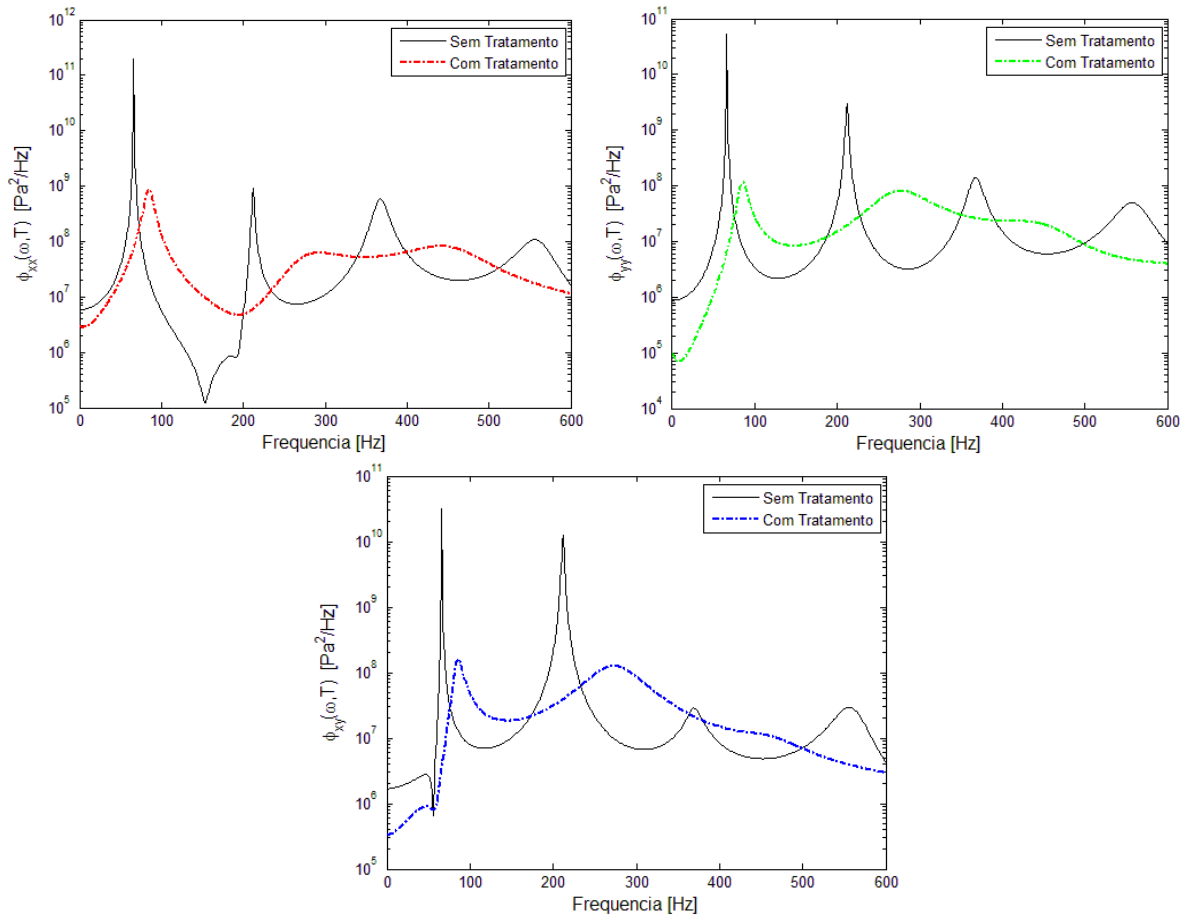


Figura 5.4 – PSD das respostas em tensão de um elemento central da placa sem e com tratamento viscoelástico.

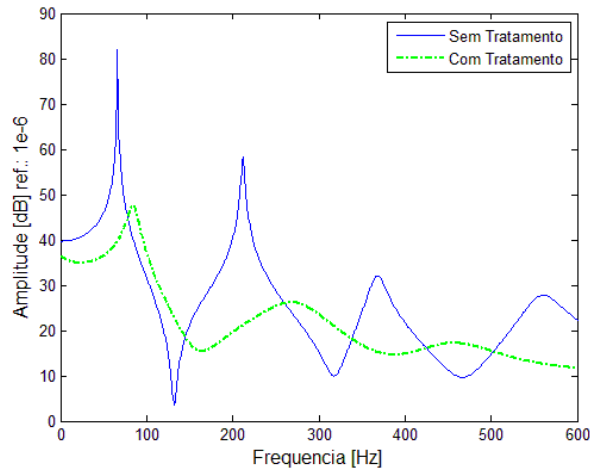


Figura 5.5 – Amplitudes das FRFs,  $H_{II}(\omega, T)$ , da placa sem e com tratamento viscoelástico.

#### 5.4. Distribuição do $\sqrt{J_{2,a}}$ para o sistema viscoelástico

Para o carregamento aleatório definido pela sua PSD detalhado anteriormente, a Fig. 5.6 representa as distribuições de,  $\sqrt{J_{2,a}}$ , para cada elemento da placa sem e com tratamento viscoelástico, obtidas pela resolução da Eq. (4.19), Capítulo IV. Nota-se que a presença do tratamento viscoelástico leva a uma diminuição considerável das amplitudes de,  $\sqrt{J_{2,a}}$ , para ambos os elementos da placa em decorrência da redução dos níveis das tensões. Além disso, os elementos mais críticos com maiores níveis de tensão estão localizados na parte central da placa. Isto se deve em virtude das condições de contorno mecânicas e da posição do carregamento externo.

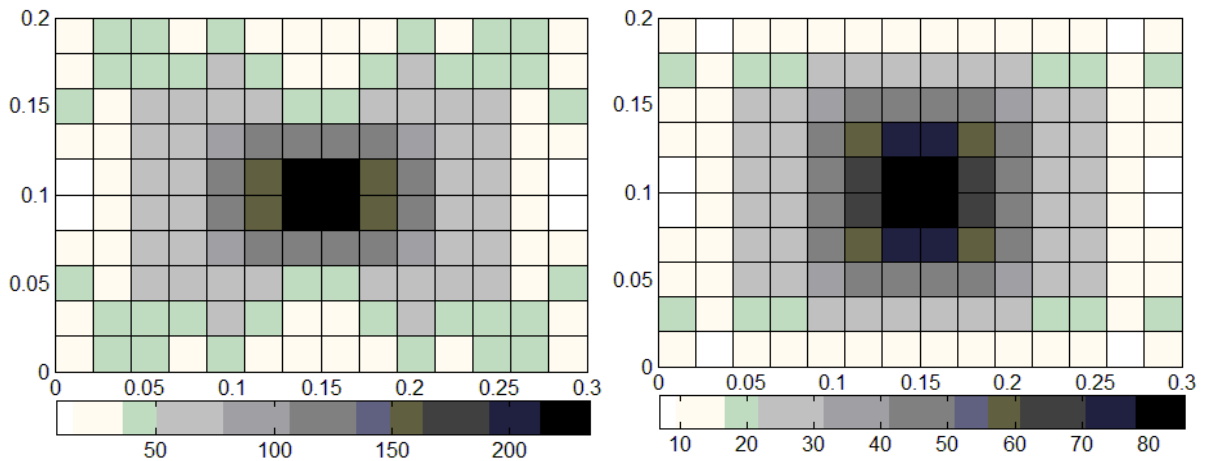


Figura 5.6 – Distribuição de  $\sqrt{J_{2,a}}$  para os sistemas sem (esq.) e com (dir.) viscoelástico.

Portanto, através dos resultados obtidos das simulações numéricas até o presente pode-se concluir que a aplicação do tratamento viscoelástico superficial em sistemas dinâmicos reduz significativamente os valores da amplitude da tensão cisalhante equivalente. Neste sentido, a partir dos resultados apresentados na Fig. 5.6 e assumindo o comportamento em fadiga da placa base como sendo determinístico com um limite de resistência equivalente,  $f_{eq} = \tau_{-1} = 92 \text{ MPa}$  (LAMBERT et al., 2010), para o caso de carregamentos com média nula (resultando numa pressão hidrostática também nula), pode-se estimar o índice de fadiga do sistema sem e com amortecimento viscoelástico via emprego do critério multiaxial de *Sines*(4.1), que pode ser reescrito da seguinte forma:

$$E[D_{sines}] = \frac{\sqrt{J_{2a}}}{f_{eq}} \leq 1 \quad (5.2)$$

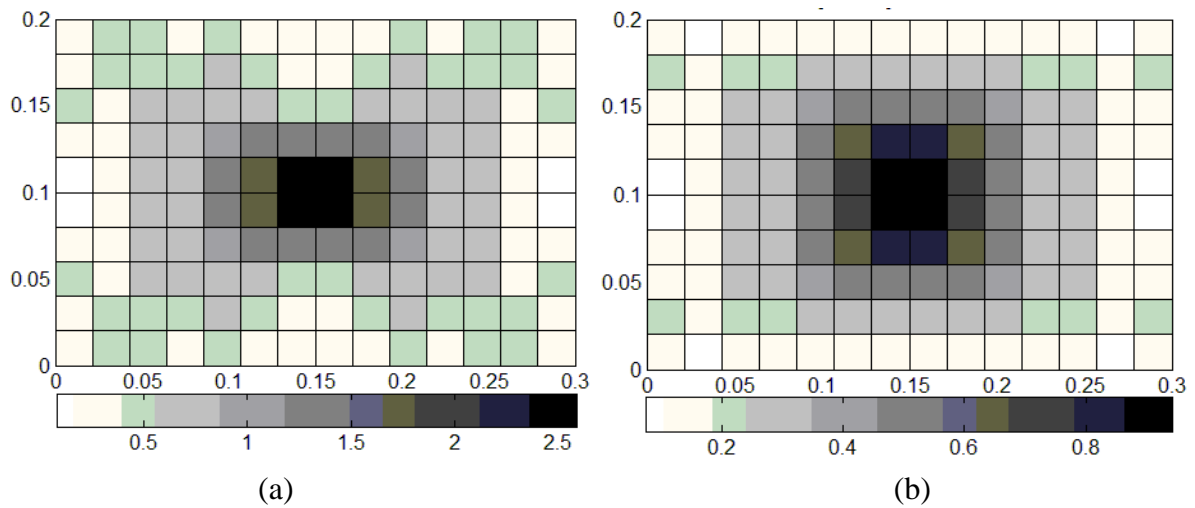


Figura 5.7 – Distribuições de  $E[D_{sines}]$  para os sistemas (a) sem e (b) com tratamento viscoelástico.

Ao analisar os índices de fadiga para cada elemento finito dos sistemas sem e com tratamento viscoelástico mostrados na Fig. 5.7 nota-se que houve uma redução significativa no índice de fadiga pela atuação do material viscoelástico. Isto confirma a sua eficiência em aumentar a vida em fadiga de sistemas dinâmicos sujeitos a carregamentos aleatórios. Além disso, partindo-se dos resultados apresentados na Fig. 5.7 e da definição (4.13) para o critério de *Sines*, levando-se em conta o caso específico desta aplicação em que o comportamento em fadiga da placa base é assumido ser determinístico,  $f_{eq} = \tau_{-1} = 92 \text{ MPa}$ , a confiabilidade da

placa base contendo tratamento viscoelástico superficial pode ser estimada empregando a Eq. (4.14), resultando na seguinte relação :

$$P_f = \int_{-\infty}^{f_{eq}} P_{\sqrt{J_{2a}}}(r) dr = P_{\sqrt{J_{2a}}}(f_{eq}) \quad (5.3)$$

onde  $P_{\sqrt{J_{2a}}}$  designa a função densidade de probabilidade acumulada.

Portanto, perfazendo a mesma para os sistemas sem e com tratamento viscoelástico superficial, foram encontrados os seguintes índices de confiabilidade para os sistemas sem e com tratamento viscoelástico, respectivamente,  $P_f = 97.45\%$  e  $P_f = 99.10\%$ , para as regiões mais críticas do sistema. Isto demonstra claramente que o tratamento de sistemas dinâmicos com materiais viscoelásticos aplicados sob a forma de camada restrita passiva, pode levar a um significativo aumento do índice de confiabilidade dos mesmos.

### 5.5. Influência da temperatura e das espessuras das camadas no índice de fadiga

Nesta seção, será investigada a influência das variações ocorridas na temperatura e nas espessuras das camadas viscoelástica e restringente no índice de fadiga. Para o caso das temperaturas, as simulações foram realizadas com variações de 15°C entre os valores de – 40°C a 60°C.

É importante salientar que o comportamento dinâmico do material viscoelástico foi avaliado para cada valor de temperatura e frequência utilizando a expressão do módulo complexo (3.36.a) definida no Capítulo III. A Fig. 5.8 mostra a distribuição de  $E[D_{sines}]$  para a temperatura de 60°C. Comparando a Fig. 5.7(b), que representa a distribuição de  $E[D_{sines}]$  para a temperatura do material viscoelástico de 25°C, nota-se de imediato que o aumento da temperatura do material viscoelástico levou a um aumento do índice de fadiga. Isto pode ser explicado em função da perda de eficiência do tratamento viscoelástico em reduzir as amplitudes das vibrações em temperaturas mais altas e, conseqüentemente, os níveis de tensão, conforme as PSD das respostas em tensão obtidas para o elemento viscoelástico mais crítico para as temperaturas de 25°C e 60°C mostradas na Fig. 5.9.

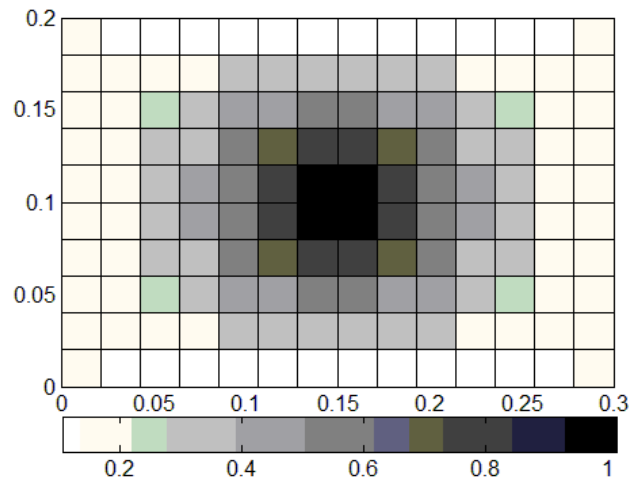


Figura 5.8 – Distribuição de  $E[D_{sines}]$  para a temperatura de 60°C do material viscoelástico.

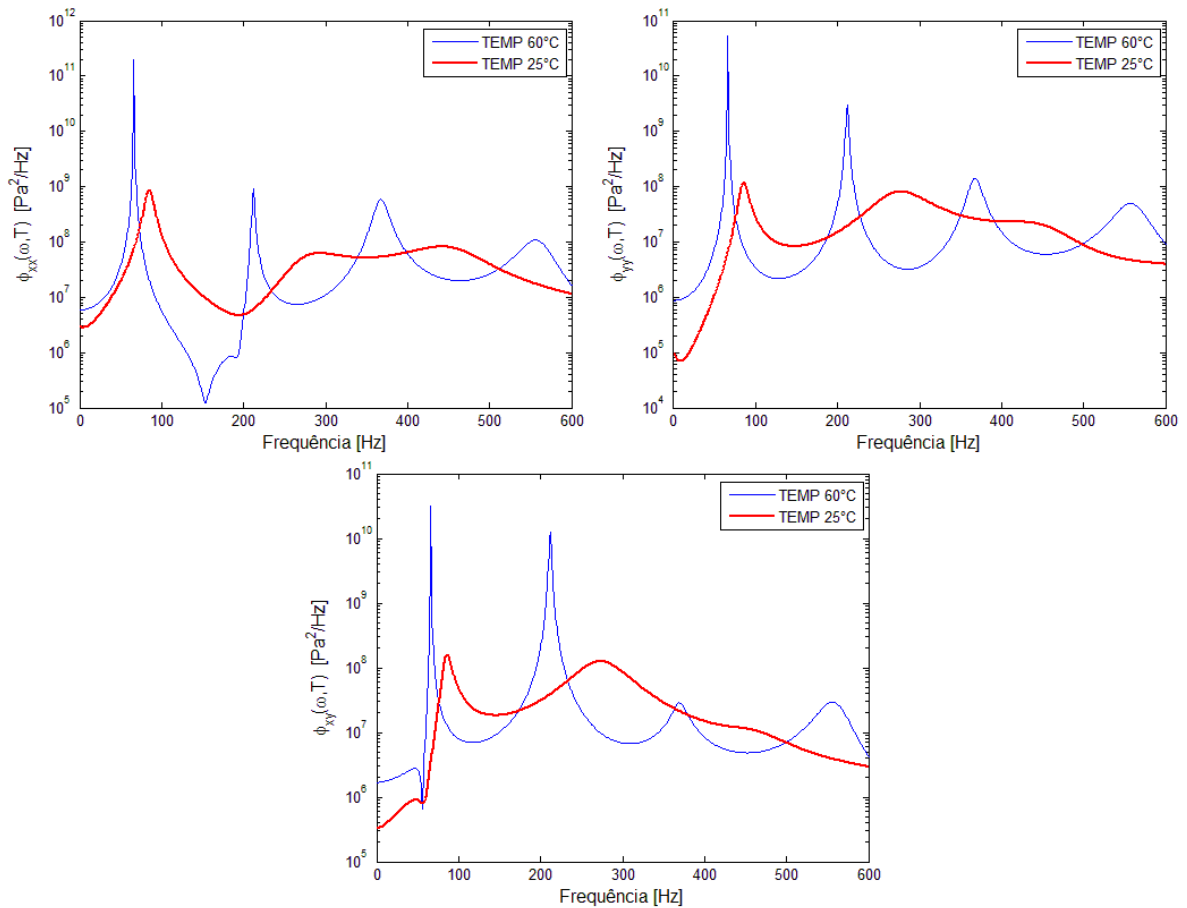


Figura 5.9 – PSD das respostas em tensão do elemento mais crítico para as temperaturas do material viscoelástico de 25°C e 60°C.

A Fig. 5.10 mostra as variações ocorridas no índice de fadiga em função da temperatura para um elemento mais crítico situado na parte central da placa. Percebe-se claramente que há um aumento do índice de fadiga com o aumento da temperatura do material

viscoelástico devido à perda de eficiência do mesmo em altas temperaturas (DE LIMA et al., 2010)e, conseqüentemente, a um aumento dos níveis de tensão do sistema, conforme mostrado na Fig. 5.9. Portanto, pode-se concluir que a utilização do tratamento viscoelástico superficial em temperaturas mais elevadas compromete significativamente sua eficiência, resultando num aumento dos níveis de tensão do sistema, aumentando o índice de fadiga.

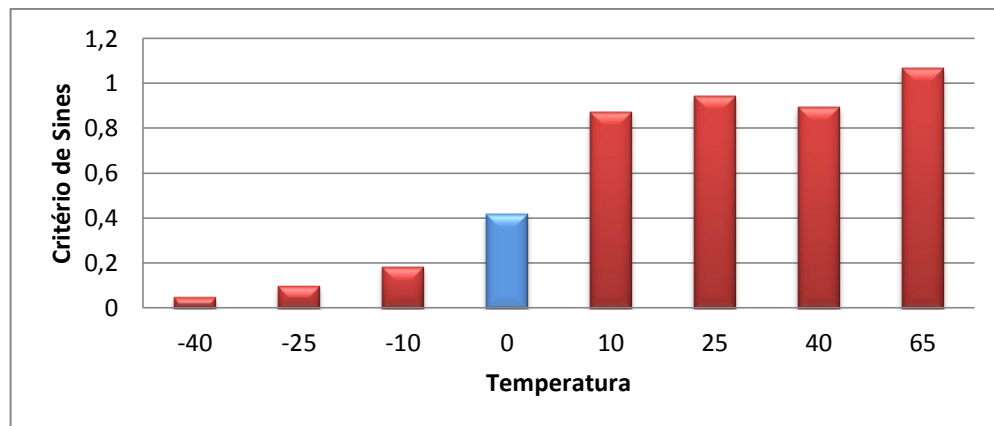


Figura 5.10 – Variações do  $E[D_{sines}]$  em função da temperatura para um elemento crítico.

São apresentadas a seguir as simulações realizadas para verificar a influência das variações introduzidas na espessura da camada viscoelástica para uma temperatura constante do material de 25°C, onde foram consideradas variações de 10% para mais e para menos em torno do valor nominal da mesma. A Fig. 5.11 apresenta os resultados obtidos para o elemento mais crítico localizado na parte central da placa. Nota-se que um aumento da espessura da camada viscoelástica leva a uma diminuição no índice de fadiga do sistema. Isto pode ser explicado em função do aumento da energia de dissipação por cisalhamento da camada viscoelástica, conforme discutido por de Lima et al. (2006) que fez um estudo sobre a sensibilidade de inúmeros parâmetros na eficiência de tratamentos viscoelásticos superficiais.

Portanto, o aumento na espessura da camada viscoelástica leva a uma diminuição dos níveis de tensão do sistema amortecido, conforme as respostas em tensão apresentadas na Fig. 5.12. O contrário é observado quando há uma redução na espessura da camada viscoelástica.

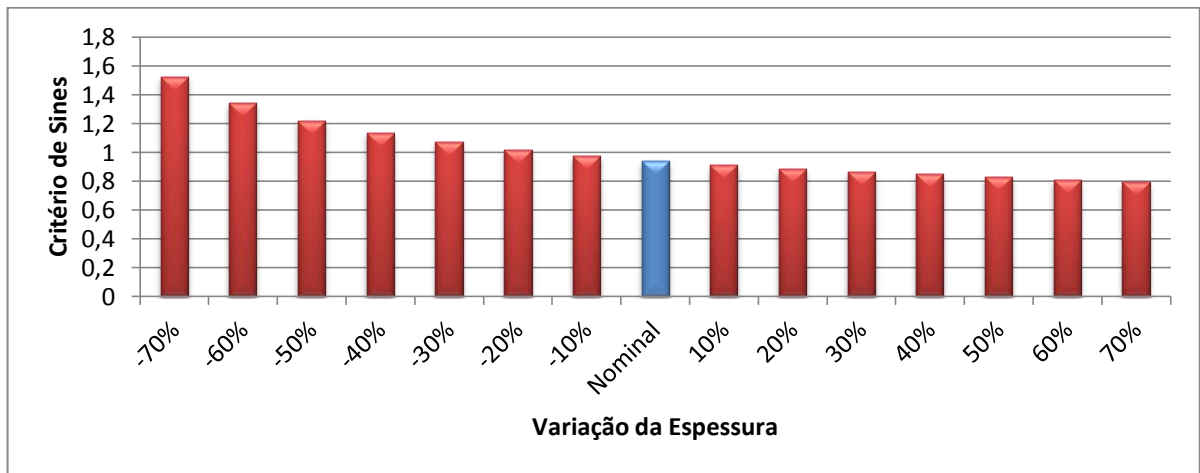


Figura 5.11 – Distribuição de  $E[D_{sines}]$  para variações na espessura viscoelástica.

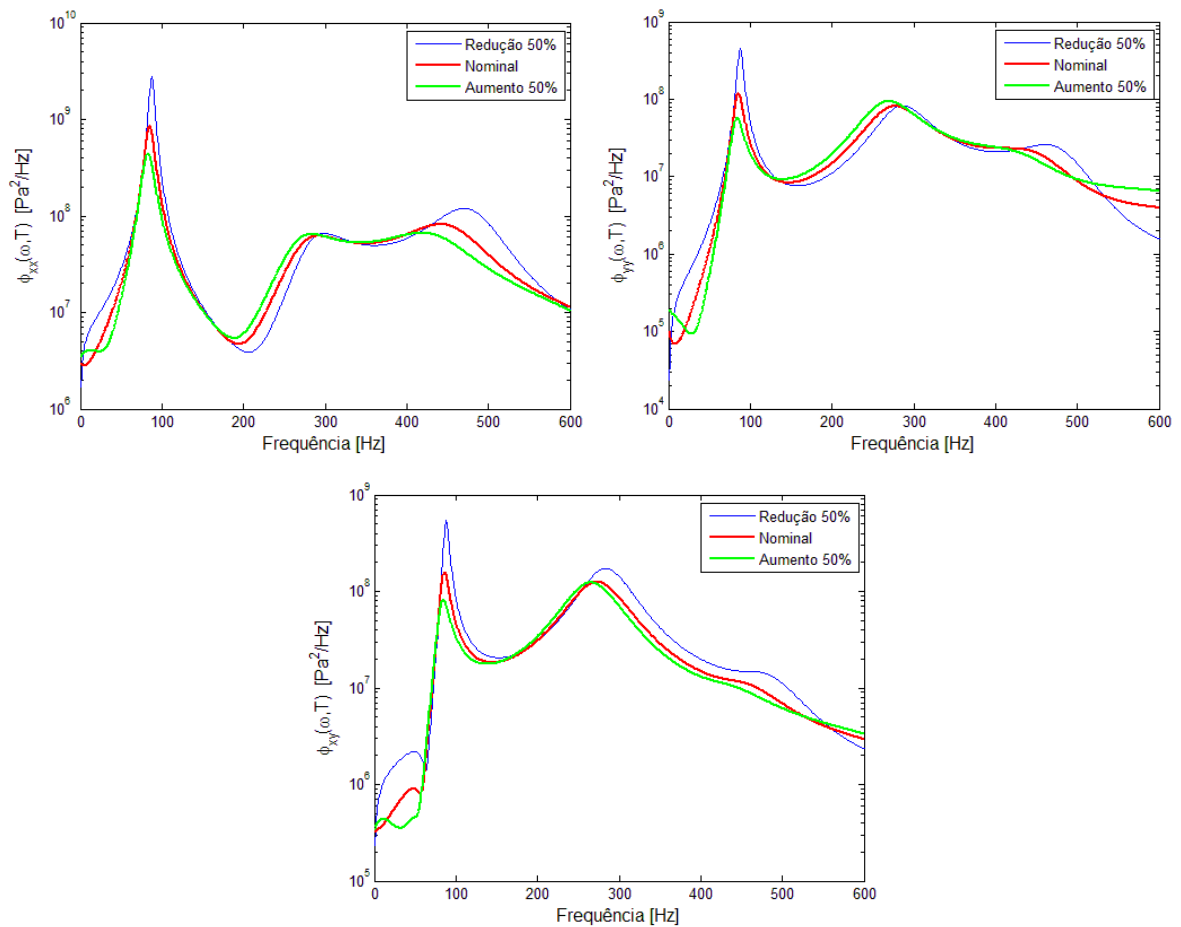


Figura 5.12 – PSD das respostas em tensão do elemento mais crítico para vários valores da espessura da camada viscoelástica.

Outro parâmetro importante que deve ser considerado na análise de fadiga de sistemas dinâmicos tratados com material viscoelástico é a camada restringente que pode afetar significativamente a eficiência do tratamento viscoelástico e, portanto, o índice de fadiga.

A Fig. 5.13 apresenta os valores do critério de *Sines* considerando a influência da camada restringente para variações de 10% aplicadas na espessura da mesma. De imediato, percebe-se uma influência similar à observada para variações na espessura da camada viscoelástica. Entretanto, a influência das variações da camada restringente parece ser ligeiramente maior do que a da camada viscoelástica, como pode ser observado pelas respostas em tensão do sistema mostradas na Fig. 5.14. Isto está de acordo com os estudos de sensibilidade desse parâmetro apresentados por de Lima et al. (2006).

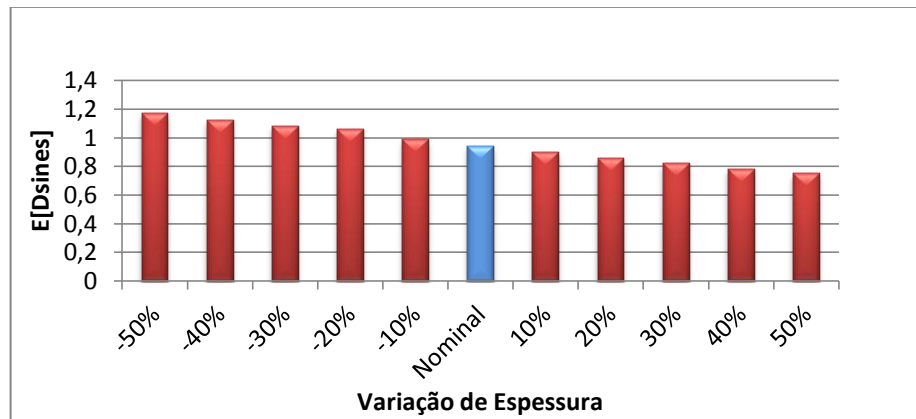
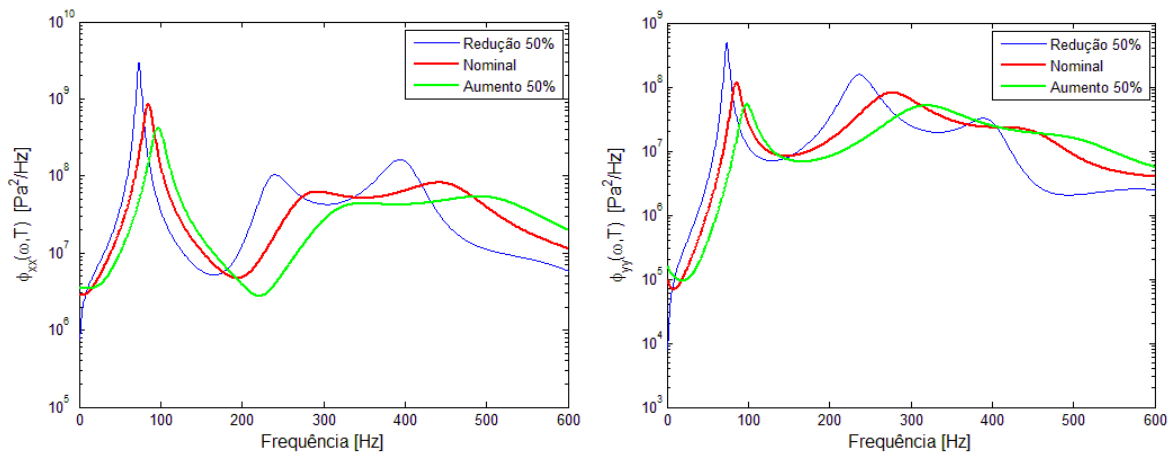


Figura 5.13 – Distribuição de  $E[D_{sines}]$  para variações na espessura da camada restringente.





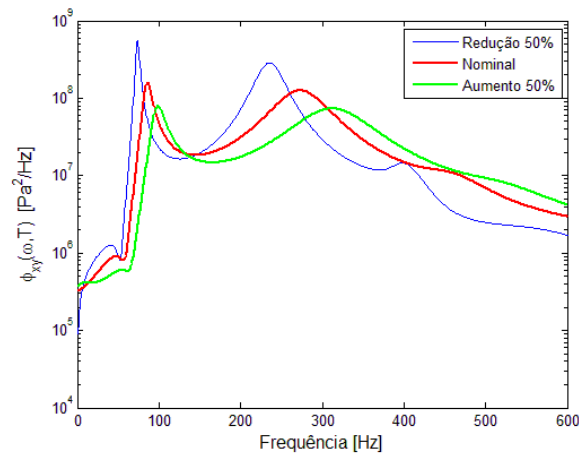


Figura 5.14 – PSD das respostas em tensão do elemento mais crítico para vários valores de espessura da camada restringente.

## 5.6. Influência das incertezas

Outro aspecto considerado de grande relevância na análise de fadiga de sistemas viscoelásticos é o estudo da influência das incertezas afetando o sistema de parâmetros. De fato, em aplicações nas quais as estruturas são submetidas a carregamentos aleatórios ao invés de determinísticos, as respostas do sistema a tais excitações levam a tensões aleatórias. Em tal situação, torna-se apropriado considerar um limite de resistência equivalente aleatório uma vez que isto envolve parâmetros do material os quais são obtidos de ensaios experimentais com certo grau de aleatoriedade.

Portanto, torna-se apropriado considerar a influência das incertezas afetando a estratégia de estimação do modo e dispersão de,  $\sqrt{J_{2a}}(\theta)$ , de acordo com as Eqs. (4.19) e (4.20), e o limite de resistência equivalente do material da placa base sobre o critério de *Sines* conforme abordagem probabilística (4.13),  $D_{sines}(\theta) = \sqrt{J_{2a}}(\theta) / f_{eq}(\theta)$ . Neste contexto, uma distribuição Gaussiana com uma variação de 10% sobre o valor nominal do limite de resistência equivalente,  $f_{eq} = 92 \text{ MPa}$ , será considerado para a geração de 500 amostras usando o método de simulação de Monte Carlo (FLORIAN, 1992). Além disso, para gerar estatisticamente os valores aleatórios de,  $E[\sqrt{J_{2a}}(\theta)]$ , representando a solução da Eq. (4.19), os valores do modo,  $\mu_J$ , e da dispersão,  $\beta_J$ , conforme definidos pela distribuição de Gumbel (4.20) serão empregados para a geração do mesmo número de amostras para o cálculo do índice de fadiga,  $D_{sines}(\theta)$ .

A Fig. 5.15 mostra as distribuições do critério de *Sines* para cada elemento finito, desde os valores mínimos até os valores máximos estimados (extremos estatísticos), obtidos a partir das 500 simulações de Monte Carlo. Observa-se um aumento nos valores estimados do critério de fadiga que resulta numa redução significativa da probabilidade de não falha da estrutura. Em particular, os valores máximos das distribuições do índice de fadiga mostra que alguns elementos podem apresentar índices bem maiores que  $I$ , o que resulta em falha da estrutura para as características aleatórias de carga e propriedades do material consideradas nas simulações. Consequentemente, é esperado que a avaliação numérica da integral (4.14) forneça um novo índice de confiabilidade o qual deve ser bem menor que aquele do sistema viscoelástico onde foram consideradas as propriedades determinísticas.

Finalmente, estes resultados preliminares permitem concluir sobre a importância no futuro de considerar as incertezas nos parâmetros de fadiga do material da estrutura na análise de confiabilidade quando comparado com os valores determinísticos.

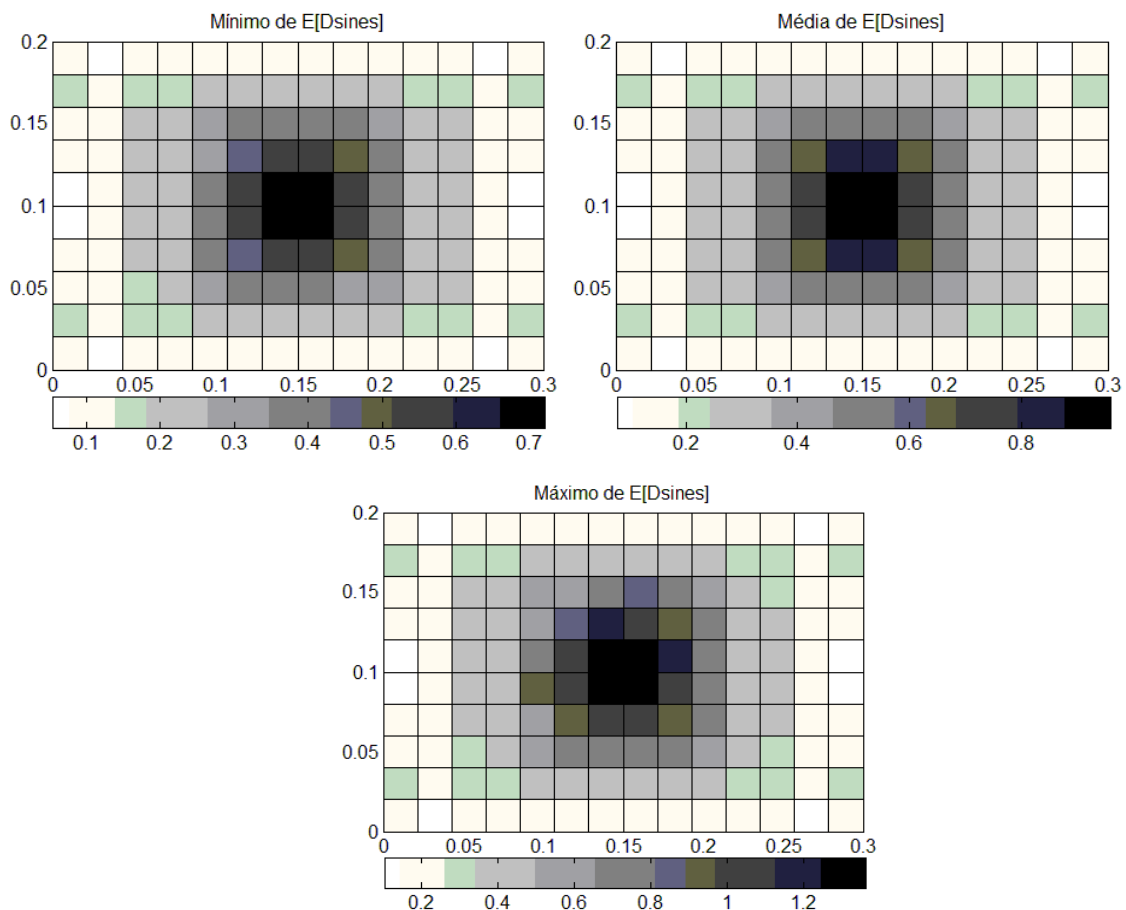


Figura 5.15 – Valores mínimos, médios e máximos das distribuições do critério de *Sines* para o sistema viscoelástico.

## CAPÍTULO VI

### CONCLUSÕES GERAIS E PERSPECTIVAS

#### Conclusões gerais

Este trabalho de tese representa uma contribuição aos desenvolvimentos recentes com relação ao estudo numérico-computacional da viabilidade da aplicação de tratamentos viscoelásticos superficiais a sistemas dinâmicos submetidos a carregamentos mecânicos cíclicos aleatórios do tipo Gaussianos e estacionários para o aumento da vida em fadiga dos mesmos.

O aspecto original do procedimento apresentado neste trabalho envolve a extensão da aproximação probabilística do critério multiaxial de *Sines*, originalmente desenvolvida para a análise de fadiga de sistemas não amortecidos a partir das respostas em tensão dos mesmos, a sistemas dinâmicos contendo amortecimento viscoelástico, onde as propriedades dinâmicas variam fortemente com a frequência da excitação e a temperatura de aplicação. Além disso, um procedimento de condensação de modelos baseado no emprego de uma base de redução constante (independente da frequência e da temperatura) foi proposto com o objetivo de aliviar o custo computacional requerido para o cálculo das respostas em tensão do sistema amortecido e das amplitudes das FRFs, indispensáveis no cálculo do índice de fadiga via critério de *Sines*, além de ser um procedimento necessário para a análise de fadiga de sistemas de engenharia de interesse industrial compostos por um grande número de graus de liberdade.

Um exemplo acadêmico formado por uma placa plana sanduíche formada por três camadas foi proposto para ilustrar a metodologia proposta. Neste sentido, foram estimados os índices de fadiga e o segundo desviatório em tensão de cada elemento finito para os sistemas

sem com tratamento viscoelástico superficial, além da probabilidade de não falha dos sistemas submetidos a uma excitação do tipo estacionária e Gaussiana. Por fim, foram apresentados os resultados preliminares da metodologia proposta levando-se conta a presença das incertezas sobre o processo de estimação da amplitude da tensão cisalhante equivalente e os parâmetros de fadiga do material da estrutura base.

De uma maneira geral, os resultados obtidos através das inúmeras simulações numéricas confirmaram que o emprego de materiais viscoelásticos aplicados sob a forma de tratamentos superficiais por camada restrita passiva pode aumentar significativamente a vida em fadiga de sistemas dinâmicos como resultado da redução dos níveis de vibrações e das respostas em tensão dos mesmos. A relevância de tal conclusão no tocante ao projeto da vida em fadiga de estruturas mecânicas submetidas a carregamentos aleatórios deve ser enfatizada. Além disso, dos resultados numéricos obtidos pode-se concluir acerca da aplicabilidade da metodologia proposta a situações envolvendo a presença de incertezas no carregamento aplicado e sobre os parâmetros do material, para a determinação da probabilidade de não falha de tais sistemas, sendo estas, situações mais realísticas.

Por fim, outro ponto que deve ser discutido é a influência da temperatura e das propriedades geométricas (espessuras das camadas) do tratamento viscoelástico superficial sobre a metodologia proposta. Com relação à temperatura, que é considerado o parâmetro mais crítico de tratamentos viscoelásticos, quando a temperatura do material aumenta, uma redução significativa na sua capacidade de amortecimento é esperada, resultando num aumento dos níveis de tensão da estrutura amortecida. Como consequência, é esperado um aumento nos valores estimados dos índices de fadiga com a consequente redução da sua probabilidade de não falha. Já para as espessuras das camadas viscoelástica e restringente, de uma forma geral, os resultados obtidos permitiram concluir que na medida em que ocorrem aumentos das espessuras das camadas, há uma redução nos índices de fadiga. Isto ocorre em virtude do aumento das dissipações da camada viscoelástica.

## **Perspectivas**

O presente trabalho de tese possibilitou o surgimento de inúmeras perspectivas no qual pode-se citar as seguintes:

- Para continuar o procedimento de aplicação dos tratamentos viscoelásticos por camadas restritas passivas na análise de fadiga de sistemas de engenharia no domínio industrial, é necessário melhorar a técnica de redução de modelos para levar em conta pequenas variações que podem ocorrer nos parâmetros de projeto que influem no índice de fadiga;
- A incorporação do efeito do auto-aquecimento do material viscoelástico em funcionamento para a análise de fadiga constitui-se numa outra perspectiva. Uma vez que foi observado que a temperatura tem um papel fundamental sobre as propriedades dinâmicas dos materiais viscoelásticos. Neste caso, é preciso propor a análise de fadiga através de um modelo termomecânico bem adaptado para o caso estruturas tratadas com materiais viscoelásticos.
- Extensão da análise de fadiga de sistemas viscoelásticos proposta neste trabalho a um modelo estocástico exato via emprego do método dos elementos finitos estocásticos viscoelásticos. Em particular, o acoplamento deste com o método de condensação também proposto neste trabalho, constitui-se numa interessante contribuição para a análise de fadiga de sistemas mais realísticos de interesse industrial envolvendo a presença de incertezas;
- Projeto Robusto com a inclusão das incertezas paramétricas e o uso de técnicas de otimização multiobjetivo;

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AFNOR- Associação Francesa de Normalização. Fatigue sous sollicitations d'amplitude variable. Méthode Rainflow de comptage, AFNOR a03-406, 1-32,1993.

BAGLEY, R.L.; TORVIK, P.J. A generalized derivative model for an elastomer damper. **Shock and Vibration Bulletin**, 49(2), p. 135–43, 1979.

BALMÈS, E; GERMÈS, S. Tools for viscoelastic damping treatment design: Application to an automotive floor panel. In: **Proceedings of the 28<sup>th</sup> international seminar on modal analysis**. 2002.

BASQUIN, O.H. The Experimental Law of Endurance Tests. **Proceedings of the ASTM**, vol. 10, part II, p. 625, 1910.

BISHOP, N.W.M.; SHERRATT, F. Finite elements based fatigue calculations. **NAFEMS**, Germany, 2000.

BERNASCONI, A. Efficient algorithms for calculation of shear stress amplitude and amplitude of the second invariant of the stress deviator in fatigue criteria applications. **International Journal of Fatigue**, v. 24, p. 649-657, 2002

CARPINTERI, A; MACHA, E; BRIGHENTI, R; SPAGNOLI, A. Expected principal stress directions under multiaxial random loading. Part I & II. **International Journal of Fatigue**, v. 21, p.83-88, 1999.

CHARKALUK, E.; BIGNONNET, A., CONSTANTINESCU, A; DANG VAN, K. Fatigue design of structures under thermo mechanical loadings. **Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures**, v. 25, n. 12, p 1199-1206, 2002.

CHRISTENSEN, R. M. **Theory of viscoelasticity: An introduction**. 2.ed. N.Y. Academic Press, Inc. 1982.

CRANDALL, S.H.; MARK, W.D. **Random vibration in mechanical systems**, Academic Press, 1963.

CONSTANTINESCU, A.; CHARKALUK, E.; LEDERER, G; VERGER L.A computational approach to thermo mechanical fatigue. **International Journal Fatigue**. v. 26, p. 805-818, 2004.

CRISTOFORI A, BENASCIUTTI D, TOVO R. A stress invariant based spectral method to estimate fatigue life under multiaxial random loading. **International Journal Fatigue**. v. 33, p. 887- 899, 2011.

CROSSLAND, B. Effects of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel. **International conference on fatigue of metals**, London, 1956.

DANG-VAN, K. Macro-micro approach in high-cycle multiaxial fatigue. **Advances in Multiaxial Fatigue**.ASTM STP 1191, p. 120-130, 1993.

DEPERROIS, A.; BALLARD, P; DANG VAN, K.; PAPADOPOULOS, I.V. High cycle fatigue and a finite element analysis. **Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures**, v. 18(3), p. 397-411, 1995.

DE LIMA, A.M.G.; FARIA, A.W.; RADE, D.A. Sensitivity analysis of frequency response functions of composite sandwich plates containing viscoelastic layers. **Composite Structure**, v. 92, p. 364-376, 2010a.

DE LIMA, A.M.G.; SILVA, A.R.; RADE, D.A.; BOUHADDI, N. Component mode synthesis combining robust enriched Ritz approach for viscoelastically structures. **Engineering Structures**, v. 32, p. 1479-1488, 2010b.

DE LIMA, A.M.G.; RADE, D.A.; BOUHADDI, N. Stochastic modeling of surface viscoelastic treatments combined with model condensation procedures. **Shock and Vibration**, v. 17, p. 429-444, 2010c.

DE LIMA, A.M.G. **Modélisation et Optimisation Robuste de Systèmes Mécaniques em Présence d'Amortissement Viscoélastique**. Tese de doutorado em Co-tutela, entre a

Université de Franche-Comté (UFC), Besançon, France, e a Universidade Federal de Uberlândia (UFU), Uberlândia, Brasil, 2007.

DE LIMA, A. M. G.; AIT BRIK, B.; BOUHADDI, N.; RADE, D. A. Multi-objective Optimization of Viscoelastically Damped Systems Combining Robust Condensation and Metamodels. **Proceedings of the Fifth International Conference on Engineering Computational Technology**, Las Palmas de Gran Canaria, Spain, 2006a.

DE LIMA, A. M. G.; STOPPA, M.H.; RADE, D.A.; STEFFEN JR., V. Sensitivity Analysis of Viscoelastic Structures. **Shock and Vibration**, v. 13, n. 4-5, p. 545-558, 2006b.

DE LIMA, A. M. G.; BOUHADDI, N.; RADE, D.A. Métamodèles pour L'Optimisation Multiobject if des Structures Viscoélastiques. **XV Colloque Vibrations Chocs et Bruit**, 14-16 Juin, Ecole Centrale de Lyon, France, 2006c.

DE LIMA, A.M.G. **Procedimentos de Modelagem Numérica e Avaliação Experimental Sistemas Estruturais Dotados de Absorvedores de Vibrações Viscoelásticos**, Dissertação de Mestrado em Engenharia Mecânica, UFU, 2003.

DE LIMA, A.M.G.; STOPPA, M. H.; RADE, D. A. Finite Element Modeling of Structures Incorporating Viscoelastic Materials. **Proceedings of IMACXXI - Conference and Exposition on Structural Dynamics**, Orlando, EUA, CD-ROM, 2003.

DRAKE, M. L.; SOOVERE, J. A Design Guide for Damping of Aerospace Structures. **In AFWAL Vibration Damping Workshop Proceedings 3**. 1984

FLORIAN, A. An efficient sampling scheme: updates Latin Hypercube sampling. **Probabilistic Engineering Mechanics**, 7(2), p.123-130, 1992.

FUENTE, E. Von Mises stresses in random vibration of linear structures. **Computers & Structures**, v. 87, p. 1253–62, 2009.

GÉRADIN, M.; RIXEN, D. **Mechanical vibrations: theory and application to structural dynamics**. John Wiley & Sons, 1998.

GOLLA, D.F.; HUGHES, P.C. Dynamics of viscoelastic structures a time domain, finite element formulation. **Journal of Applied Mechanics**, v. 52(4), p. 897-906, 1985.



GONÇALVES, C.A.; ARAUJO, J.A.; MAMIYA, E.N. A simple multiaxial fatigue criterion for metals. **Comptes Rendus Mécanique**, v. 332, p. 963–8, 2005.

GUPTA, S.; MANOHAR, C.S. “Probability distribution of extremes of Von Mises stress in randomly vibrating structures”. **Journal of Vibration Acoustics**. ASME, v.127(6), p. 547–55, 2005.

HAFTKA, R.T.; GÜRDAL, Z. **Elements of structural optimization (solid mechanics and its applications)**, 3rd ed, Springer, 1992.

HANCOCK, J. W.; MACKENZIE, A. C. On the mechanism of ductile failure in high-strength steels subjected to multiaxial stress-state. **Journal of Mechanics and Physics of Solids**, v. 24, p. 147-169, 1976.

HEMEZ, F.M.; PAGNACCO, E. Statics and inverse dynamics solvers based on strain mode disassembly. **Eur J Finite Element**, v.9(5), p.511–560, 2000.

JIANG, Y.; HERTEL, O.; VORMWALD, M. An experimental evaluation of three critical plane multiaxial fatigue criteria. **International Journal of Fatigue**, v.29, p.1490-1502, 2007.

IRWIN, G. R. Analysis of Stresses and Strains Near the End of a Crack Traversing a Plate. Transactions of the ASME, **Journal of Applied Mechanics**, v. 24, p. 361, 1957.

KHATUA, T.P.; CHEUNG, Y.K. Bending and vibration of multilayer sandwich beams and plates. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.6, p. 11–24, 1973.

KHALIJ, L.; PAGNACCO, E.; LAMBER, S. A measure of the equivalent shear stress amplitude from a prismatic hull in the principal coordinate system. **International Journal of Fatigue**, v. 32, p. 1977-1984, 2010.

KILROY, C. **American Airlines Flight 191**. [www.airdisaster.com](http://www.airdisaster.com), 2008.

KOÇER, B. **Vibration fatigue analysis of structures under broadband excitation**. Master of Science in Mechanical Engineering Department, Middle East Technical University, 2010.

KUEPPERS, M.; SONSINO, C.M. Assessment of the fatigue behaviour of welded aluminium joints under multiaxial spectrum loading by a critical plane approach. **International Journal of Fatigue**, v. 28, p. 540-546, 2006.

LAMBERT, S. **Contribution à l'analyse de l'endommagement par fatigue et au dimensionnement de structures soumises à des vibrations aléatoires**. Thèse de l'INSA de Lyon, Lyon, 2007.

LAMBERT, S.; PAGNACCO, E.; KHALIJ, L. A probabilistic model for the fatigue reliability of structures under random loadings with phase shift effects”, **International Journal of Fatigue**, v. 32, p. 463-474, 2010.

LESIEUTRE, G.A.; BIANCHINI, E. Time domain modeling of linear viscoelasticity using anelastic displacement fields. **ASME J**, v.117 (4), p.424–430, 1995.

LESIEUTRE, G.A.; LEE, U.A finite element for beams having segmented active constrained layers with frequency-dependent viscoelastic. **Smart Materials & Structures**, v.5 (5), p. 615–627, 1996.

LI, B; DE FREITAS, M.A procedure for fast evaluation of high-cycle fatigue under multiaxial random loading. **Journal of Mechanical Design**, v. 124, p. 558–563, 2002.

LI, B; REIS, L.; DE FREITAS, M. Comparatice study of multiaxial fatigue damage models for ductile structural steels and brittle materials. **International Journal of Fatigue**, v. 31, p. 1895-1906, 2009.

LIU, Y.; MAHADEVAN, S. Multiaxial High-cycle Fatigue Criterion and Life Prediction for Metals, **International Journal of Fatigue**, v.27 p.790-800, 2005.

MALCHER, L. **Um modelo para determinação da resistência à fadiga multiaxial para carregamentos de flexão e torção combinados, fora de fase e com amplitude constante com base no critério do segundo invariante do tensor**. Dissertação. Universidade de Brasília, 2006..

MAMIYA, E.N.; ARAÚJO, J.A.; CASTRO F.C. Prismatic Hull: a new measure of shear stress amplitude in multiaxial high cycle fatigue **International Journal of Fatigue**, v. 31, p. 1144-1153, 2009.

MASSON, G.; AIT BRIK, B.; COGAN, S.; BOUHADDI, N. Component mode synthesis (CMS) based on an enriched Ritz approach for efficient structural optimization. **Journal of Sound and Vibration**, v. 296(4), p.845-860, 2006.

MATAKE, K. An explanation on fatigue limit under combined stress, **Bulletin of the Japanese Society of Mechanical Engineers**, v. 20, p. 257, 1977.

MATSUISHI, M.; ENDO, T. **Fatigue of Metals Subjected to Varying Stress**. Japan Society of Mechanical Engineers, Japan, 1968.

MCTAVISH, D.; HUGHES, P.C. Modeling of linear viscoelastic space structures. **Journal of Vibration Acoustics**, v. 115, p. 103-115, 1993.

MEIROVITCH, L. **Element of vibration analysis**. McGraw-Hill, 1975.

MINER, M. A. Cumulative damage in fatigue. **Journal of Applied Mechanics**, Transactions of ASME 12, v. 3, p. 159-164, 1945.

NASHIF, A.D.; JONES, D.I.G.; HENDERSON, J.P. **Vibration Damping**. John Wiley & Sons, 1985.

PAPADOPOULOS, I.V. A high-cycle fatigue criterion applied in biaxial and triaxial out-of phase stress conditions **Fadigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, v. 18, p. 79-91, 1995.

PAPADOPOULOS, I.V.; DAVOLI, P.; GORLA, C.; FILIPPINI, M.; BERNASCONI, A.A comparative study of multiaxial high-cycle fatigue criteria for metals. **International Journal of Fatigue**, v. 19, p. 219–235, 1997.

PAPADOPOULOS, I.V. Critical plane approaches in high-cycle fatigue: On the definition of the amplitude and mean value of the shear stress acting on the critical plane. **Fadigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, v.21(3), p. 269–285, 1998.

PAPUGA, J. **Mapping of fatigue damages – Program shell of FE-Calculation**. PhD Thesis, Faculty of Mechanical Engineering, Czech Technical University in Prague, 2005.

PAGNACCO, E.; ZIDANI, H.; SAMPAIO, R.; ELLAIA, R.; SOUZA DE CURSI, E. Multi-objective optimization of the dynamic of a bridge pillar and a truss structure subjected to random load by a new hybridized method. **Mecánica Computacional**, v. XXX, p. 3339–55, 2002.

PITOISET, X.; RYCHLIK, I.; PREUMONT, A. Spectral methods to estimate local multiaxial fatigue failure for structures undergoing random vibrations. **Fatigue & Fracture of Engineering Materials & Structures**, v.24(11), p. 715–727, 2001.

PREUMONT, A. On the peak factor of stationary Gaussian processes. **Journal of Sound and Vibration**, v.100(1), p.15–34, 1985.

RAMOS, A.P.R.; LAMBERT, S.; DE LIMA, A.M.G.; RADE, D.A.; PAGNACCO, E. Fatigue Damage Analysis of Viscoelastic Structures. **International Conference of Structures Engineering Dynamics**, 2013

RICE, J.R.; TRACEY, D. M. On the ductile enlargement of voids in triaxial stress fields, **Journal of the Mechanics and Physics and Solids**, v. 17, p. 201-217, 1969.

SCHIJVE, J. Statistical distribution functions and fatigue of structures, **International Journal of Fatigue**, v. 27, p. 1031-1039, 2005.

SCHMIT, L.A. Structural design by systematic synthesis. **Proceedings, 2nd Conference on Electronic Computation**, ASCE, New York, p. 105-132, 1960.

SINES, G. **Behaviour of metals under complex stresses**. Sines G. & Waisman J.L. editors. Metal fatigue, New York, McGraw-Hill, p. 145–69, 1959.

STOPPA, M. H. **Modelagem numérica e projeto ótimo de sistemas de amortecimento viscoelásticos aplicados a placas retangulares**, Tese, Universidade Federal de Uberlândia, 2003.

WANG, Y.Y.; YAO, W.X. Evaluation and Comparison of several multiaxial fatigue criteria. **International Journal of Fatigue**, v.26, p.17-25, 2004.

WEBER, B. **Fatigue multiaxiale des structures industrielles sous chargement quelconque**. Thèse de l'INSA de Lyon, Lyon, 1999.

WEBER, B.; LABESSE-JIED, F.; ROBERT, J.L. Comparison of multiaxial high cycle fatigue criteria and their application to fatigue design of structures. In: **Carpinteri A, de Freitas M, Spagnoli A, editors. Sixth international conference on biaxial/multiaxial Fatigue and Fracture**, ESIS 31. Lisbon: Elsevier, p. 195–202, 2001.

WU, B.; FERRATON, L.; ROBIN, C.; MESMACQUE, G.; ZAKRZEWSKI, D. Application de critères de fatigue multiaxiale aux structures en alliages d'aluminium. **Conf G2RT, TILT**, December 2003 [in French].

## ANEXO A

### A.1 Matrizes de massa e de rigidez elementares do EF de placa de três multicamadas

Na Seção 3.2, a partir da expressão (3.13), pode-se expressar o vetor das deformações para as camadas elásticas  $(i)$  como segue:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(i)} \\ \varepsilon_y^{(i)} \\ \gamma_{xy}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x} \\ \frac{\partial v_i}{\partial y} \\ \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \end{Bmatrix} - z_i \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\varepsilon}_m^{(i)} + \boldsymbol{\varepsilon}_f^{(i)} \quad (\text{A.1})$$

onde  $\boldsymbol{\varepsilon}_m^{(i)}$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}_f^{(i)}$  são os vetores de deformação de membrana e de flexão, respectivamente. Eles podem ser expressos em termos dos deslocamentos nodais de acordo com a relação:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m^{(i)} = \mathbf{B}_m^{(i)} \mathbf{u}_{(e)}, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_f^{(i)} = \mathbf{B}_f^{(i)} \mathbf{u}_{(e)} \quad (\text{A.2})$$

e a energia de deformação pode ser reescrita como segue:

$$U^{(i)} = \frac{1}{2} \int_V \left( \boldsymbol{\varepsilon}_m^{(i)} + \boldsymbol{\varepsilon}_f^{(i)} \right)^T \mathbf{C}^{(i)} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_m^{(i)} + \boldsymbol{\varepsilon}_f^{(i)} \right) dV \quad (\text{A.3})$$

ou ainda sob a forma:

$$U^{(i)} = U_{mm}^{(i)} + U_{ff}^{(i)} + U_{mf}^{(i)} \quad (\text{A.4})$$

onde:

$$U_{mm}^{(i)} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{(e)}^T \int_V \left( \mathbf{B}_m^{(i)T} \mathbf{C}^{(i)} \mathbf{B}_m^{(i)} \right) dV \mathbf{u}_{(e)} \quad (\text{A.5.a})$$

$$U_{ff}^{(i)} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{(e)}^T \int_V \left( \mathbf{B}_f^{(i)T} \mathbf{C}^{(i)} \mathbf{B}_f^{(i)} \right) dV \mathbf{u}_{(e)} \quad (\text{A.5.b})$$

$$U_{mf}^{(i)} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{(e)}^T \int_V \left( \mathbf{B}_m^{(i)T} \mathbf{C}^{(i)} \mathbf{B}_f^{(i)} \right) dV \mathbf{u}_{(e)} \quad (\text{A.5.c})$$

As expressões acima definem as frações da energia de deformação associadas aos efeitos de flexão, membrana e acoplamento membrana-flexão, respectivamente. Portanto, a matriz de rigidez elementar para as camadas elásticas, é escrita como segue:

$$\mathbf{K}^{(i)} = \mathbf{K}_{mm}^{(i)} + \mathbf{K}_{ff}^{(i)} + 2\mathbf{K}_{mf}^{(i)} \quad (\text{A.6})$$

Da mesma forma, para a camada viscoelástica ( $j$ ), pode-se escrever o vetor de deformações como segue:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}^{(j)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(j)} \\ \varepsilon_y^{(j)} \\ \gamma_{xy}^{(j)} \\ \gamma_{xz}^{(j)} \\ \gamma_{yz}^{(j)} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_j}{\partial x} \\ \frac{\partial v_j}{\partial y} \\ \frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{z_j}{h_j} \left[ \left( \frac{\partial u_{i+1}}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) + \left( \frac{h_{i+1} + h_i}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \\ \frac{z_j}{h_j} \left[ \left( \frac{\partial v_{i+1}}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial y} \right) + \left( \frac{h_{i+1} + h_i}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \\ \frac{z_j}{h_j} \left[ \left( \frac{\partial u_{i+1}}{\partial y} + \frac{\partial v_{i+1}}{\partial x} - \frac{\partial u_i}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) + (h_{i+1} + h_i) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \dots \\ \dots \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{z_j}{h_j} \left[ (u_{i+1} - u_i) + \left( \frac{h_{i+1} + h_i}{2} + h_j \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \\ \frac{z_j}{h_j} \left[ (v_{i+1} - v_i) + \left( \frac{h_{i+1} + h_i}{2} + h_j \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] \end{Bmatrix} &= \boldsymbol{\varepsilon}_m^{(j)} + \boldsymbol{\varepsilon}_f^{(j)} + \boldsymbol{\varepsilon}_c^{(j)} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

onde  $\boldsymbol{\varepsilon}_m^{(j)}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_f^{(j)}$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}_c^{(j)}$  representam os vetores de deformações associados aos efeitos de membrana, de flexão e de cisalhamento fora do plano, respectivamente, e a energia de deformação pode ser expressa como segue:

$$U^{(j)} = \frac{1}{2} \int_V \left( \boldsymbol{\varepsilon}_m^{(j)} + \boldsymbol{\varepsilon}_f^{(j)} + \boldsymbol{\varepsilon}_c^{(j)} \right)^T \mathbf{C}^{(j)} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_m^{(j)} + \boldsymbol{\varepsilon}_f^{(j)} + \boldsymbol{\varepsilon}_c^{(j)} \right) dV \quad (\text{A.8})$$

ou ainda sob a foram seguinte:

$$U^{(j)} = U_{mm}^{(j)} + U_{ff}^{(j)} + U_{cc}^{(j)} + U_{mf}^{(j)} + U_{mc}^{(j)} + U_{fc}^{(j)} \quad (\text{A.9})$$

onde as frações de energia de deformação são dadas por:

$$U_{mm}^{(j)} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{(e)}^T \int_V \left( \mathbf{B}_m^{(j)T} \mathbf{C}^{(j)} \mathbf{B}_m^{(j)} \right) dV \mathbf{u}_{(e)} \quad (\text{A.10.a})$$

$$U_{ff}^{(j)} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{(e)}^T \int_V \left( \mathbf{B}_f^{(j)T} \mathbf{C}^{(j)} \mathbf{B}_f^{(j)} \right) dV \mathbf{u}_{(e)} \quad (\text{A.10.b})$$

$$U_{cc}^{(j)} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{(e)}^T \int_V \left( \mathbf{B}_c^{(j)T} \mathbf{C}^{(j)} \mathbf{B}_c^{(j)} \right) dV \mathbf{u}_{(e)} \quad (\text{A.10.c})$$

$$U_{ff}^{(j)} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{(e)}^T \int_V \left( \mathbf{B}_f^{(j)T} \mathbf{C}^{(j)} \mathbf{B}_f^{(j)} \right) dV \mathbf{u}_{(e)} \quad (\text{A.10.d})$$

$$U_{mc}^{(j)} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{(e)}^T \int_V \left( \mathbf{B}_m^{(j)T} \mathbf{C}^{(j)} \mathbf{B}_c^{(j)} \right) dV \mathbf{u}_{(e)} \quad (\text{A.10.e})$$

$$U_{fc}^{(j)} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_{(e)}^T \int_V \left( \mathbf{B}_f^{(j)T} \mathbf{C}^{(j)} \mathbf{B}_c^{(j)} \right) dV \mathbf{u}_{(e)} \quad (\text{A.10.f})$$

Pode-se expressar a matriz de rigidez elementar da camada viscoelástica como segue:

$$\mathbf{K}^{(j)} = \mathbf{K}_{mm}^{(j)} + \mathbf{K}_{ff}^{(j)} + \mathbf{K}_{cc}^{(j)} + 2\mathbf{K}_{mf}^{(j)} + 2\mathbf{K}_{mc}^{(j)} + 2\mathbf{K}_{fc}^{(j)} \quad (\text{A.11})$$



## A.2 Definição das funções de interpolação para os campos de deslocamentos

Os deslocamentos longitudinais nas direções  $x$  e  $y$  são interpolados por funções bilineares, e o deslocamento transversal  $w$  é interpolado por um polinômio de terceira ordem, fornecidos pelas seguintes expressões:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 xy \\
 v_1 &= a_5 + a_6 x + a_7 y + a_8 xy \\
 u_3 &= a_9 + a_{10} x + a_{11} y + a_{12} xy \\
 v_3 &= a_{13} + a_{14} x + a_{15} y + a_{16} xy \\
 w &= b_1 + b_2 x + b_3 y + b_4 x^2 + b_5 xy + b_6 y^2 + b_7 x^3 + b_8 x^2 y + b_9 xy^2 + b_{10} y^3 + b_{11} x^3 y + b_{12} xy^3
 \end{aligned} \tag{A.12}$$

Desta forma, segundo a Eq. (3.21) e omitindo a dependência com relação a  $x$  e  $y$  para simplificar a notação, a interpolação dos campos de deslocamentos, é expressa como segue:

$$U(x, y) = N(x, y) \mathbf{u}_{(e)} \tag{A.13}$$

onde:

$$U(x, y) = [u_1 \quad v_1 \quad u_3 \quad v_3 \quad w \quad \theta_x \quad \theta_y]^T \tag{A.14}$$

$$N(x, y) = [N_{u_1} \quad N_{v_1} \quad N_{u_3} \quad N_{v_3} \quad N_w \quad N_{\theta_x} \quad N_{\theta_y}]^T \tag{A.15}$$

$$\mathbf{u}_{(e)} = [u_1^1 \quad v_1^1 \quad u_3^1 \quad v_3^1 \quad w^1 \quad \theta_x^1 \quad \theta_y^1 \quad u_1^2 \quad v_1^2 \quad u_3^2 \quad v_3^2 \quad w^2 \quad \theta_x^2 \quad \theta_y^2 \quad u_1^3 \quad v_1^3 \quad u_3^3 \quad v_3^3 \quad w^3 \quad \theta_x^3 \quad \theta_y^3 \quad u_1^4 \quad v_1^4 \quad u_3^4 \quad v_3^4 \quad w^4 \quad \theta_x^4 \quad \theta_y^4]$$

(A.16)

onde:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{N}_{u_1} &= [N_{11} \quad \mathbf{0} \quad N_{12} \quad \mathbf{0} \quad N_{13} \quad \mathbf{0} \quad N_{14} \quad \mathbf{0}], \\
 \mathbf{N}_{v_1} &= [0_1 \quad N_{11} \quad \mathbf{0} \quad N_{12} \quad \mathbf{0} \quad N_{13} \quad \mathbf{0} \quad N_{14} \quad \mathbf{0}], \\
 \mathbf{N}_{u_3} &= [\mathbf{0} \quad N_{11} \quad \mathbf{0} \quad N_{12} \quad \mathbf{0} \quad N_{13} \quad \mathbf{0} \quad N_{14} \quad \mathbf{0}], \quad \mathbf{N}_{v_3} = [\mathbf{0} \quad N_{11} \quad \mathbf{0} \quad N_{12} \quad \mathbf{0} \quad N_{13} \quad \mathbf{0} \quad N_{14} \quad \mathbf{0}],
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{N}_w = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & N_{1w} & N_{1\theta_x} & N_{1\theta_y} & \mathbf{0} & N_{2w} & N_{2\theta_x} & N_{2\theta_y} & \mathbf{0} & N_{3w} & N_{3\theta_x} & N_{3\theta_y} & \mathbf{0} & N_{4w} & N_{4\theta_x} & N_{4\theta_y} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_{\theta_x} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & N_{1w}^x & N_{1\theta_x}^x & N_{1\theta_y}^x & \mathbf{0}_6 & N_{2w}^x & N_{2\theta_x}^x & N_{2\theta_y}^x & \mathbf{0}_6 & N_{3w}^x & N_{3\theta_x}^x & N_{3\theta_y}^x & \mathbf{0}_6 & N_{4w}^x & N_{4\theta_x}^x & N_{4\theta_y}^x \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{N}_{\theta_y} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & N_{1w}^y & N_{1\theta_x}^y & N_{1\theta_y}^y & \mathbf{0} & N_{2w}^y & N_{2\theta_x}^y & N_{2\theta_y}^y & \mathbf{0} & N_{3w}^y & N_{3\theta_x}^y & N_{3\theta_y}^y & \mathbf{0} & N_{4w}^y & N_{4\theta_x}^y & N_{4\theta_y}^y \end{bmatrix}.$$

Os termos  $N_{li}$ ,  $N_{iw}$ ,  $N_{i\theta_x}$ ,  $N_{i\theta_y}$ ,  $N_{iw}^x$ ,  $N_{i\theta_x}^x$ ,  $N_{i\theta_y}^x$ ,  $N_{iw}^y$ ,  $N_{i\theta_x}^y$  e  $N_{i\theta_y}^y$  para  $i = 1, \dots, 4$ , são fornecidos pelas seguintes expressões:

$$N_{1l} = \frac{(y-b)(x-b)}{ab}; \quad N_{12} = \frac{x(b-y)}{ab}; \quad N_{13} = \frac{xy}{ab}; \quad N_{14} = \frac{y(a-x)}{ab};$$

$$N_{1w} = \frac{(b-y)(x-a)(2x^2b^2 - xab^2 + 2y^2a^2 - ya^2b - a^2b^2)}{a^3b^3};$$

$$N_{2w} = \frac{x(y-b)(x-a)(2x^2a^2 - ya^2b - 3xab^2 + 2x^2b^2)}{a^3b^3};$$

$$N_{3w} = \frac{-xy(a^2b^2 - 3xab^2 - 3ya^2b + 2x^2b^2 + 2y^2a^2)}{a^3b^3};$$

$$N_{4w} = \frac{y(x-a)(2x^2b^2 - xab^2 - 3ya^2b + 2y^2a^2)}{a^3b^3};$$

$$N_{1\theta_x} = \frac{x(x-a)^2(b-y)}{a^2b}; \quad N_{2\theta_x} = \frac{x^2(b-y)(x-a)}{a^2b}; \quad N_{3\theta_x} = \frac{x^2y(x-a)}{a^2b}$$

$$N_{4\theta_x} = \frac{xy(x-a)^2}{a^2b}; \quad N_{1\theta_y} = \frac{y(y-b)^2(a-x)}{ab^2}; \quad N_{2\theta_y} = \frac{xy(y-b)^2}{ab^2}; \quad N_{3\theta_y} = \frac{xy^2(y-b)}{ab^2}$$

$$N_{4\theta_y} = \frac{y^2(y-b)(a-x)}{ab^2}; \quad N_{1w}^x = \frac{(b-y)(6x^2b^2 - 6xab^2 + 2y^2a^2 - ya^2b)}{a^3b^3};$$

$$N_{2w}^x = \frac{(y-b)(6x^2b^2 - 6xab^2 + 2y^2a^2 - ya^2b)}{a^3b^3};$$

$$N_{3w}^x = \frac{-y(a^2b^2 - 6xab^2 - 3ya^2b + 6x^2b^2 + 2y^2a^2)}{a^3b^3};$$

$$N_{4w}^x = \frac{y(a^2b^2 - 6xab^2 - 3ya^2b + 6x^2b^2 + 2y^2a^2)}{a^3b^3}; \quad N_{1\theta_x}^x = \frac{(x-a)(b-y)(3x-a)}{a^2b};$$

$$N_{2\theta_x}^x = \frac{x(b-y)(3x-2a)}{a^2b}; \quad N_{3\theta_x}^x = \frac{xy(3x-2a)}{a^2b}; \quad N_{4\theta_x}^x = \frac{y(x-a)(3x-a)}{a^2b};$$

$$\begin{aligned}
N_{1\theta_y}^x &= \frac{-y(y-b)^2}{ab^2} ; N_{2\theta_y}^x = \frac{y(y-b)^2}{ab^2} ; N_{3\theta_y}^x = \frac{y^2(y-b)^2}{ab^2} ; N_{4\theta_y}^x = \frac{y^2(b-y)}{ab^2} ; \\
N_{1w}^y &= \frac{(a-x)(2x^2b^2 - xab^2 + 6y^2a^2 - 6ya^2b)}{a^3b^3} ; \\
N_{2w}^y &= \frac{x(6y^2a^2 - 6ya^2b - 3xab^2 + 2x^2b^2 + a^2b^2)}{a^3b^3} ; \\
N_{3w}^y &= \frac{-x(6y^2a^2 - 6ya^2b - 3xab^2 + 2x^2b^2 + a^2b^2)}{a^3b^3} ; \\
N_{4w}^y &= \frac{(x-a)(2x^2b^2 - xab^2 + 6y^2a^2 - 6ya^2b)}{a^3b^3} ; N_{1\theta_x}^y = \frac{-x(x-a)^2}{ba^2} ; N_{2\theta_x}^y = \frac{-x^2(x-a)}{ba^2} \\
N_{3\theta_x}^y &= \frac{x^2(x-a)}{ba^2} ; N_{4\theta_x}^y = \frac{x(x-a)^2}{ba^2} ; N_{4\theta_x}^y = \frac{x(x-a)^2}{ba^2} ; N_{1\theta_y}^x = \frac{(x-a)(b-y)(3y-b)}{ab^2} \\
N_{2\theta_y}^x &= \frac{x(y-b)(3y-b)}{ab^2} ; N_{3\theta_y}^x = \frac{xy(-2b+3y)}{ab^2} ; N_{4\theta_y}^x = \frac{y(x-a)(2b-3y)}{ab^2}
\end{aligned}$$

## ANEXO B

### B.1. Valor Médio e Variância de $R^2$

O objetivo deste item é caracterizar estatisticamente  $\sqrt{J_{2a}} = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2 + R_5^2}$  conhecendo a variável aleatória  $R_i$ . A partir da metodologia apresentada acima, cada variável aleatória  $R_i$  é não correlacionada, e supondo ter uma distribuição de Gumbel descrita por seus parâmetros, modo,  $\mu_i$ , e dispersão,  $\beta_i$ .

O primeiro passo é calcular os primeiros dois momentos estatísticos de  $(\sqrt{J_{2a}})^2$  ao invés de  $\sqrt{J_{2a}}$ . A partir de  $R_i$ , variáveis aleatórias estacionárias Gaussianas não correlacionadas, temos:

$$E[J_{2a}] = \sum_{i=1}^5 E[R_i^2] \quad (\text{B.1})$$

$$V[J_{2a}] = \sum_{i=1}^5 V[R_i^2] \quad (\text{B.2})$$

onde é fácil mostrar, a partir da definição de variância, as seguintes relações:

$$E[R_i^2] = E[R_i]^2 + V[R_i] \quad (\text{B.3})$$

$$V[R_i^2] = E[(R_i^2 - E[R_i^2])^2] = E[R_i^4] - E[R_i^2]^2 \quad (\text{B.4})$$

Neste ponto, é necessário fazer uma suposição sobre a função densidade de probabilidade  $\sqrt{J_{2a}}$  para continuar com a sua caracterização. Lambert et al. (2010) realizaram simulações numéricas seguindo a estratégia de Monte Carlo, com isso foram obtidas resultados que levaram a suposição da distribuição de Gumbel para determinar  $\sqrt{J_{2a}}$ .

No entanto, com o objetivo de superar as dificuldades na obtenção de expressões analíticas diretas para os momentos estatísticos, no caso de uma distribuição de Gumbel, foi assumido que  $E[J_{2a}^2]$  pode ser escrito de forma semelhante a  $E[R_i^4]$ , equação (4.20.b) e usando a seguinte definição de variância,  $E[J_{2a}^2] = E[J_{2a}]^2 + V[J_{2a}]$  e  $V[\sqrt{J_{2a}}] = E[J_{2a}] - E[\sqrt{J_{2a}}]^2$ , é possível combinar estas relações para gerar a seguinte equação não linear (PAPADOPOULOS et al., 1997):

$$\begin{aligned} E[J_{2a}]^2 + V[J_{2a}] - 4E[\sqrt{J_{2a}}]^2 \left( E[J_{2a}] - E[\sqrt{J_{2a}}]^2 \right) \\ - \frac{22}{5} \left( E[J_{2a}] - E[\sqrt{J_{2a}}]^2 \right)^2 \\ - \frac{48\zeta\sqrt{6}}{\pi^3} E[\sqrt{J_{2a}}] \left( E[J_{2a}] - E[\sqrt{J_{2a}}]^2 \right)^{3/2} = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Na expressão acima, somente o termo  $E[\sqrt{J_{2a}}]$  não é conhecido, podendo ser determinado através do método de Newton–Raphson assumindo a seguinte estimativa inicial  $E[\sqrt{J_{2a}}] \approx \sqrt{E[J_{2a}]}$ . Além disso, a solução da equação anterior em conjunto com a definição de variância avaliada para a variável aleatória,  $\sqrt{J_{2a}}$ , permitem gerar a seguinte expressão analítica para a sua função de densidade de probabilidade (LAMBERT et al, 2010):

$$p_{\sqrt{J_{2a}}}(r) = \frac{1}{\beta_J} \exp\left(\frac{\mu_J - r}{\beta_J}\right) \exp\left[-\exp\left(\frac{\mu_J - r}{\beta_J}\right)\right] \quad (\text{B.6})$$

onde  $\beta_J = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \left( V \left[ \sqrt{J_{2a}} \right] \right)^{1/2}$  e  $\mu_J = E \left[ \sqrt{J_{2a}} \right] - \gamma \beta_J$  representam, respectivamente, a dispersão e o modo de  $\sqrt{J_{2a}}$ . Pode notar-se que o valor mais provável de  $\sqrt{J_{2a}}$  é o valor do seu modo, e não do valor médio.

