

YVON PIERRE JOSEPH BRIEND

**CONTRIBUIÇÃO AOS MÉTODOS DE REDUÇÃO
DE MODELOS APLICADOS A SISTEMAS
AEROVISCOELÁSTICOS**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

2017

YVON PIERRE JOSEPH BRIEND

**CONTRIBUIÇÃO AOS MÉTODOS DE REDUÇÃO DE
MODELOS APLICADOS A SISTEMAS
AEROVISCOELÁSTICOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima

Uberlândia - MG

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

- B853c
2017 Briend, Yvon Pierre Joseph, 1990-
 Contribuição aos métodos de redução de modelos aplicados a
 sistemas aeroviscoelásticos / Yvon Pierre Joseph Briend. - 2017.
 138 f. : il.
- Orientador: Antônio Marcos Gonçalves de Lima.
 Dissertação (mestrado) -- Universidade Federal de Uberlândia,
 Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
 Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2017.72>
 Inclui bibliografia.
1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Flutter (Aerodynamics) - Teses.
 3. Materiais viscoelásticos - Teses. I. Lima, Antônio Marcos Gonçalves
 de, 1975-. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-
 Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 621



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO
UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
MECÂNICA



ALUNO: Yvon Pierre Joseph Briend

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11612EMC018

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Mecânica dos Sólidos e Vibrações

LINHA DE PESQUISA: Dinâmica de Sistemas Mecânicos

PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA: NÍVEL MESTRADO

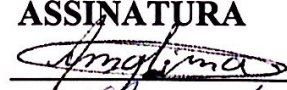


TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:

“Contribuição aos Métodos de Redução de Modelos Aplicados a Sistemas Aeroviscoelásticos”

ORIENTADOR: Prof. Dr. Antonio Marcos Gonçalves de Lima

A Dissertação foi **APROVADA** em reunião pública, realizada no Anfiteatro B - Bloco 5O, Campus Santa Mônica, em 11 de outubro de 2017, às 09:00 horas, com a seguinte Banca Examinadora:

NOME
Prof. Dr. Antonio Marcos Gonçalves de Lima
Prof. Dr. Leonardo Sanches
Prof. Dr. Flávio José Silvestre

ASSINATURA
UFU 
UFU 
ITA 

Uberlândia, 11 de outubro de 2017

*Dedico este trabalho a minha família e especialmente
ao meu avô Jean e a minha avó Thérèse que nos dei-
xaram o ano passado para poder se encontrarem no-
vamente no céu.*

AGRADECIMENTOS

Eu gostaria de agradecer primeiramente meu orientador Antônio Marcos Gonçalves de Lima por ter me oferecido esta oportunidade incrível de poder trabalhar e desfrutar de um projeto de pesquisa de alto nível científico, pelo acolhimento com o qual ele me recebeu dois anos para trás, por ter acreditado nas minhas capacidades e sempre ter sido presente ao longo deste mestrado.

Um enorme agradecimento ao meu colega de trabalho Andre Garcia Cunha Filho pela incrível parceria, nossas várias discussões sempre construtivas sobre a pesquisa, a correção do presente trabalho que levou uma boa parte do seu tempo, e obviamente todas as outras coisas fora do contexto da faculdade. Te espero em Lyon bro.

Agradeço também meus professores que complementaram a minha formação de engenharia mecânica, agregando novos conceitos que se revelaram de grande interesse para mim.

À Universidade Federal de Uberlândia, à Faculdade de Engenharia Mecânica e o Laboratório de Mecânica de Estruturas pela oportunidade de realizar este mestrado.

Ao CNPq, CAPES, FAPEMIG e ao coordenador do INCT-EIE e novo reitor da UFU Prof. Valder Steffen pelo suporte financeiro indispensável para o desenvolvimento desta pesquisa.

A minha família, para a qual foi difícil me deixar atravessar sozinho o oceano e me deixar morar por dois longos anos fora, por me deixar ter esta experiência incrível e sempre continuar me apoiando mesmos com 10000 km de distância. Vocês que têm todos os méritos deste sucesso. Amo vocês.

A minha namorada Juliana ter me trazido toda esta alegria cotidiana, ter me apoiado nos momentos ruins e ter me deixado roubar os famosos temperos enquanto ela podia ter ficado na floresta com uma onça de estimação.

E finalmente aos meus parceiros da república pelos inúmeros rolês em Uberlândia e outros lugares, inúmeros papos e trocas de ideias, sempre de leve.

Briend, Y., **Contribuição aos Métodos de Redução de Modelo Aplicados a Sistemas Aeroviscoelásticos**, 2017. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Brasil.

RESUMO

A predição da fronteira do flutter de sistemas aeroelásticos complexos não é uma tarefa simples. Na maioria dos casos esta complexidade advém do número elevado de graus de liberdade dos modelos aeroelásticos. Além disso, se estes últimos integrarem uma estratégia de controle com o objetivo de remover o fenômeno de flutter, tal como o uso de tratamento viscoelástico superficial, os gastos computacionais requeridos para predizer a velocidade crítica do modelo aeroviscoelástico associado são muito altos, as vezes inviáveis. Neste contexto, o uso de técnica de redução de modelos se torna imprescindível. Todavia, a construção de bases de redução para sistemas aeroviscoelásticos ainda é um desafio devido à dependência em frequência e temperatura inerente dos materiais viscoelásticos. Assim, a principal contribuição desta dissertação é propor novos métodos de redução precisos e eficiente nos domínios da frequência e do tempo para sistemas aeroviscoelásticos. Duas estruturas são utilizadas para testar a qualidade dos métodos desenvolvidos, sendo uma placa sanduíche plana de três camadas e uma estrutura de interesse industrial representada por um painel aeronáutico curvo com enrijecedores. Várias análises são realizadas para caracterizar cada método em relação a sua precisão e sua eficiência. Na sequência, alguns parâmetros principais são avaliados para quantificar a influência de cada um sobre resultado final.

Palavras Chave: Flutter, Tratamento viscoelástico, Redução de modelo, Derivadas fracionárias

Briend, Y., **Contribution to the Model Reduction Method Applied to Aeroviscoelastic Systems**, 2017. Master Thesis, Federal University of Uberlândia, Uberlândia, Brazil.

ABSTRACT

The flutter boundary prediction of complex aeroelastic systems is not an easy task. In most cases, it is due to the large number of degrees of freedom of the aeroelastic models. Additionally, if the latter incorporate a control strategy aiming to suppress the flutter phenomenon, such as the use of viscoelastic treatments, the computational cost and time required to predict the flutter speeds of the resulting aeroviscoelastic model is very high, sometimes unfeasible. In this situation, the use of a model reduction technique turns essential. However, the construction of a modal reduction basis for aeroviscoelastic systems is still a challenge, owing to the inherent frequency- and temperature-dependent behavior of the viscoelastic materials. Thus, the main contribution intended for this master thesis is to propose new efficient and accurate reduction methods in frequency and time domains for aeroviscoelastic system. Two structures are under study in order to assess the quality of the methods developed herein, consisting of a three-layered viscoelastic sandwich flat plate and of a system of industrial interest represented by an aeronautic curved panel with stiffeners. Several analyses are performed in order to characterize each method with respect to its efficiency and accuracy. Some parameters are then assessed to quantify the influence of each one over the final result.

Keywords: Flutter, Viscoelastic treatment, Model reduction, Fractional derivative

LISTA DE FIGURAS

2.1	Fenômenos de fluência (a), de relaxação (b) e de recuperação (a e b) do material viscoelástico. Figura adaptada de [46]	12
2.2	Dependência típica com a frequência (a) e com a temperatura (b) de um material viscoelástico. Figuras adaptadas de [28]	16
2.3	Nomograma do material ISD112 - (a) : Curva mestre do módulo de cisalhamento de armazenamento G' e do fator de perda η - (b) : Variação do fator de desvio α_T com a temperatura. Figuras extraídas de [44]	18
2.4	Ilustração da placa sanduíche com tratamento viscoelástico	19
2.5	Configuração da placa sanduíche no plano OXZ antes e após a deformação. Figura adaptada de [44]	20
2.6	Elemento finito de referência (a) e elemento finito físico (b)	30
2.7	Exemplo de malha regular da placa sanduíche	31
2.8	Ilustração do painel aeroelástico curvo tratado parcialmente com camada res- trita passiva	39
2.9	Rerencial local (azul) e global (vermelho) dos elementos do painel curvo . .	41
2.10	Comparação do MEF desenvolvido com o código Ansys	46
3.1	Ajuste de curva para achar os parâmetros do FDM com $T_v = 15^\circ C$	56
4.1	Fluxograma da resolução do flutter na frequência	72
4.2	Fluxograma da resolução do flutter no tempo	74
5.1	Algoritmo do processo de construção da base do método IERM	82
5.2	Gastos computacionais das duas etapas principais na integração do Newmark	84

6.1	Comparação dos métodos de redução para placa sanduíche através das FRFs	91
6.2	Comparação dos métodos de redução para placa sanduíche através do diagrama V-g	94
6.3	Foco sobre os fatores de amortecimento perto da fronteira do flutter	95
6.4	Influência da malha sobre a precisão da redução	97
6.5	Redução de modelo aplicada ao estudo de FRF do painel curvo pela abordagem na frequência	99
6.6	Redução de modelo aplicada ao estudo de flutter do painel curvo pela abordagem na frequência	100
6.7	Comparação das respostas temporais da placa sanduíche a um impacto . . .	102
6.8	FRFs da placa sanduíche obtidas pela abordagem no tempo	103
6.9	Comparação das respostas temporais harmônicas no flutter para a placa sanduíche	105
6.10	Influência do N_R sobre a precisão da redução da placa sanduíche no tempo .	106
6.11	Influência do N_l sobre a precisão da redução para placa sanduíche	107
6.12	Influência da malha sobre a precisão da redução da placa sanduíche no tempo	109
6.13	Resposta temporal do painel curvo a um impacto com $U = 1500\text{m/s}$	111
6.14	FRF do painel curvo com $U = 1500\text{m/s}$ obtida pela abordagem no tempo .	112
6.15	Comparação das respostas harmônicas obtidas na região do flutter para o painel curvo	113
A.1	Aplicação do tratamento sobre o gdl fictício θ'_z	137
A.2	Aplicação do tratamento sobre o gdl fictício w'_3	139

LISTA DE TABELAS

2.1	Parâmetros da parte elástica para análise de FRF	45
6.1	Parâmetros da placa sanduíche viscoelástica	90
6.2	Comparação dos gastos computacionais no cálculo das FRFs dos modelos de placa sanduíche viscoelástica completo e reduzidos.	92
6.3	Comparação dos gastos computacionais na análise de flutter para a placa sanduíche viscoelástica	96
6.4	Influência do parâmetro N_R sobre a precisão e os gastos computacionais na frequência	97
6.5	Parâmetros da painel curvo parcialmente tratado	98
6.6	Comparação dos gastos computacionais na análise de flutter para o painel aeronáutico	101
6.7	Comparação dos gastos computacionais na análise das respostas transientes da placa sanduíche	103
6.8	Comparação dos gastos computacionais na análise de flutter no tempo da placa sanduíche	105
6.9	Influência do N_R sobre a eficiência da redução para a placa sanduíche no tempo	106
6.10	Influência do N_l sobre a eficiência dos métodos de redução para a placa sanduíche	108
6.11	Influência da malha sobre a eficiência dos métodos de redução para a placa sanduíche	109
6.12	Comparação dos gastos computacionais para uma análise transiente do painel curvo parcialmente tratado	111

6.13 Comparação dos gastos computacionais na análise de flutter no tempo do painel curvo	113
A.1 Parâmetros da estrutura parcialmente tratada elástica para análise de FRF .	138

LISTA DE SÍMBOLOS

$G(i\omega)$	- Módulo complexo de cisalhamento do material viscoelástico
$\eta(\omega)$	- Fator de perda do material viscoelástico
α_T	- Fator de deslocamento para o princípio de equivalência frequência-temperatura
S_j	- Área da camada j
V_j	- Volume da camada j
ρ_j	- Densidade da camada j
h_j	- Espessura da camada j
E_j	- Módulo de Young da camada j
ν_j	- Coeficiente de Poisson da camada j
$[A_j]$	- Matriz constitutiva da camada j
d_1, d_2, d_3	- Parâmetros geométricos relativos à camada viscoelástica
a, b	- Comprimentos elementares nas direções locais x e y
S_j	- Área da camada j
$[J]$	- Matriz Jacobiano
$[M_p]$	- Matriz de passagem das incógnitas nodais locais para globais
$[N]$	- Matriz de interpolação dos deslocamentos
$\{\delta_i\}$	- Vetor de incógnitas nodais do elemento i
θ'_z	- Grau de liberdade fictício local associado à rotação no plano
w'_3	- Grau de liberdade fictício local associado à translação da camada restrigente
α_1	- Fator adimensional associado ao θ'_z
α_3	- Fator adimensional associado ao w'_3
A_{j+1}	- Coeficientes de Grüwald
N_l	- Comprimento de memória
Δt	- Passo de tempo na integração numérica de Newmark
ν	- Ordem fracionário de derivação no modelo FDM
b_d	- Parâmetro relativo a derivação fracionária sobre o campo de deformação
a_d	- Parâmetro relativo a derivação fracionária sobre o campo de tensão
$\{s^{(g)}\}$	- Vetor global de força viscoelástica
λ	- Pressão aerodinâmica
q	- Pressão dinâmica
β, γ, ζ	- Parâmetros aerodinâmicos
ΔU	- Intervalo grosseiro de velocidade do escoamento
$\Delta \bar{U}$	- Intervalo grosseiro de velocidade do escoamento para a base IERM
N_R	- Parâmetro de redução relacionado à ordem das bases
$G_0 = G(0, T_v)$	- Módulo complexo de cisalhamento em baixa frequência

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Contexto do estudo	1
1.2	Estado da arte	5
1.2.1	Modelos de comportamento viscoelástico linear	5
1.2.2	Redução de modelos	7
1.2.2.1	No domínio da frequência	7
1.2.2.2	No domínio do tempo	8
1.3	Conteúdo da dissertação	9
2	MODELAGEM DE SISTEMAS VISCOELÁSTICOS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA	11
2.1	Introdução aos conceitos de viscoelasticidade linear	11
2.1.1	Dependência com o tempo	11
2.1.2	Dependência frequência-temperatura	13
2.2	Placa sanduíche	18
2.2.1	Energias cinéticas e de deformação das três camadas	21
2.2.2	Discretização pelo método dos elementos finitos	28
2.2.3	Matrizes elementares e globais	32
2.3	Sistema de interesse industrial	39
2.3.1	Descrição do sistema	39
2.3.2	Rotação das matrizes elementares	40
2.3.3	Tratamento dos gdl's fictícios	43
2.3.4	Validação da parte elástica com o Ansys	45

3	MODELAGEM DE SISTEMAS VISCOELÁSTICOS NO DOMÍNIO DO TEMPO	48
3.1	Introdução à derivada fracionária	48
3.2	Placa simples	50
3.2.1	Lei constitutiva do material viscoelástico	51
3.2.2	Otimização dos parâmetros do FDM	55
3.2.3	MEF segundo o FDM	55
3.3	Sistema industrial	65
4	MODELAGEM DE SISTEMAS AEROVISCOELÁSTICOS	66
4.1	Teoria aerodinâmica	66
4.2	Introdução no modelo de elementos finitos	68
4.3	Predição do flutter	70
4.3.1	Na frequência	70
4.3.2	No tempo	72
5	REDUÇÃO DE MODELOS	76
5.1	Na frequência	76
5.2	No tempo	83
5.2.1	Redução típica	83
5.2.2	Escolha da base	85
6	SIMULAÇÕES NUMÉRICAS	89
6.1	Na frequência	90
6.1.1	Placa simples	90
6.1.1.1	Comparação das FRFs	90
6.1.1.2	Flutter	93
6.1.2	Sistema industrial	97
6.2	No tempo	101
6.2.1	Placa simples	101
6.2.1.1	Comparação das respostas transientes	101

6.2.1.2	Flutter	104
6.2.2	Sistema industrial	109
7	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS	114
7.1	Conclusões	114
7.2	Perspectivas futuras	118
	REFERÊNCIAS	119
	APÊNDICE	127
A	DETALHES SOBRE O MEF	128
A.1	Funções de forma da placa sanduíche	128
A.1.1	dos gdl's de flexão	128
A.1.2	dos gdl's de membrana	130
A.1.3	matriz de interpolação dos deslocamentos	132
A.2	Estrutura industrial	133
A.2.1	Matriz de rigidez elementar dos gdl's fictícios	133
A.2.2	Remoção das instabilidades numéricas nas FRFs	137

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1 Contexto do estudo

O trabalho apresentado se enquadra nos temas de interesse das equipes de pesquisa do Laboratório de Mecânica de Estruturas (LMEst) da Faculdade de Engenharia Mecânica (FEMEC) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU).

Uma das principais linhas de pesquisa e desenvolvimento no setor aeronáutico e aeroespacial trata do aperfeiçoamento dos sistemas de transportes, tais como aeronaves e foguetes, especialmente no que se refere ao aumento de velocidade de deslocamento destes veículos. Uma grande parte das alternativas consiste na otimização de sistemas aerodinâmicos, no desenvolvimento de motores cada vez mais potentes, no uso de materiais compósitos cada vez mais leves e com propriedades mecânicas similares ou até superiores às aquelas obtidas com material convencional. O problema subjacente diretamente relacionado a essa constante necessidade de aumentar as velocidades de voo é a ocorrência potencial de instabilidades aeroelásticas. O tipo de instabilidade talvez mais conhecido e pesquisado devido à sua alta capacidade destrutiva que será o principal foco deste trabalho é o *flutter*. Este fenômeno complexo ocorre devido à interação entre forças elásticas, inerciais e aerodinâmicas atuando nos sistemas aeroelásticos [1]. Portanto, é verdade que este fenômeno é bem conhecido do setor aeronáutico e aeroespacial nos quais o ar interage fortemente com as estruturas (asa, fuselagem, etc). Entretanto, o flutter não é limitado somente às estruturas aeroespaciais,

ele pode também ocorrer em outros sistemas como pontes, *spoilers*, torres de resfriamento, dentre outros [1, 2].

O flutter pode ser definido como sendo uma instabilidade auto-excitada [3] que ocorre pelo fato da estrutura extrair energia do escoamento de ar [4]. De maneira geral, o fluxo se acopla com a estrutura elástica, alterando o seu comportamento dinâmico. Quanto maior a velocidade do fluxo, menos energia é dissipada, ou seja, há uma diminuição do amortecimento do sistema. Isto prossegue até um certo ponto crítico, no qual o amortecimento zera. Nesta configuração, o movimento é caracterizado como sendo puramente harmônico. Acima desta velocidade, é possível observar a interação de dois modos e um fator de amortecimento modal positivo [4]. Caso haja qualquer perturbação neste ponto, o sistema sai então da posição de equilíbrio instável para divergir em oscilações potencialmente destrutivas. Entretanto, diferentemente do flutter em superfícies de sustentação, onde o flutter é catastróficamente súbito, o flutter em painéis pode ter suas amplitudes de oscilação limitada devido a um processo não linear de autoenrigecimento [5], muitas vezes denominado de não linearidades geométricas. Isto faz com que a estrutura entre em um ciclo limite [3], momento onde tensões próximas aos limites admissíveis são geradas fazendo com que a estrutura falhe por fadiga, ou pela fadiga da estrutura que a suporta.

Um outro tipo de flutter conhecido como *stall flutter*, ocorre especialmente para aerofólio a grandes ângulos de ataque. Neste caso o fluxo acaba se separando parcialmente ou totalmente do sistema. Isto resulta em uma reação aerodinâmica não linear essencial para a ocorrência desta instabilidade [6]. Entretanto, neste trabalho, somente o flutter de painéis será tratado para o caso especial de placa submetida a um escoamento de ar em regime supersônico/hipersônico.

Várias soluções associadas ao design da estrutura já são utilizadas no setor aeronáutico para inibir ou pelo menos prorrogar o flutter. Pode-se citar, por exemplo, a otimização do dimensionamento do sistema para mudar a posição dos eixos de massa e de rigidez, ou também o aumento da rigidez e a alteração da distribuição da massa para aumentar a distância frequencial entre os modos que coalescem [4]. Outra alternativa consiste em aplicar uma forma de controle das vibrações para conseguir melhorar a estabilidade do sistema. Uma solução ativa altamente desenvolvida consiste na aplicação de superfície de controle, o que

é hoje conhecido sobre o nome da aeroservoelasticidade [4, 7], especialmente usado para modelos de seção típica de asa. Porém, estas soluções são mais empregadas para sistemas do tipo seção típica de asa. Um exemplo de técnica de controle para o caso de flutter de painéis aproveita das propriedades particulares dos materiais piezoelétricos [8–10]. Um dos maiores inconvenientes de tal solução, mesmo que possivelmente eficiente e interessante por ser passiva, reside na complexidade de sua integração na estruturas pre-existentes. Outro tipo de solução passiva, que é o tema deste trabalho, é o tratamento superficial com material viscoelástico.

A ideia de utilizar material viscoelástico para melhorar a estabilidade de sistemas como painéis aeronáuticos não é novidade, já que as primeiras publicações tratando do assunto datam das décadas de 80 e 90 [11–13]. Nestes trabalhos preliminares, os autores estudaram principalmente a influência dos parâmetros viscoelásticos sobre a velocidade de flutter de placas, usando uma representação integral/hereditária ou complexa do comportamento viscoelástico. Trabalhos mais recentes [14–19] usam representações mais completas e complexas, para as quais será feito um estado da arte na seção 1.2, como o modelo de derivadas fracionárias, modelo GHM, ou módulo de cisalhamento complexo. Todas estas abordagens, possuindo cada uma as suas vantagens e desvantagens conseguem modelizar a dependência particular em frequência e temperatura associada aos materiais viscoelásticos. Por outro lado, esta dependência resulta geralmente em modelos matemáticos complicados que culminam em problemas de autovalor quadrático complexo não auto-adjunto ou requerendo cálculos de tensões extremamente onerosos do ponto de vista computacional. Esta dificuldade se torna ainda mais evidente para sistemas industriais com geometria complexa e/ou com elevado número de graus de liberdade (gdl). Para tais sistemas, a busca do ponto de flutter pode ser inviável, o que motiva o uso de técnicas de redução de modelos específicas.

A redução de modelos é uma ferramenta matemática poderosa que consegue diminuir drasticamente os tempos computacionais associados à resolução de sistemas extremamente complexos, mantendo uma alta capacidade de predição do comportamento dinâmico original. Juntamente com as técnicas de CMS (*Component Mode Synthesis*) [20], é possível realização de análise de deslocamentos, tensões/deformações, análise modal, análise de flambagem, para sistemas com milhões de gdl tais como carros, aeronaves, pontes, torres etc. Originalmente

usada para sistemas puramente conservativos, vários autores propuseram trabalhos para a sua aplicação em sistemas com dependência em frequência [21–27]. Nestes trabalhos são desenvolvidas bases de redução enriquecidas com resíduos estáticos de deslocamentos através da resolução de problemas de autovalores ou processos iterativos. A grande vantagem reside no fato que estas bases não requerem nenhuma atualização após a construção, portanto, permanecem constantes durante os cálculos principais. Entretanto, apesar de funcionarem de forma satisfatória para sistemas viscoelásticos, elas podem se revelar ineficazes para o caso aeroviscoelástico. De fato, o escoamento do ar atuando sobre a estrutura altera o comportamento dinâmico da mesma como consequência da interação fluido estrutura. Essa mudança que pode se tornar considerável perto da ocorrência do flutter precisa ser considerada para manter o modelo reduzido fiel em relação ao sistema completo original.

O principal foco deste trabalho consiste portanto em desenvolver técnicas de redução de modelo robustas aplicadas a sistemas aeroviscoelásticos tipo painel buscando a diminuição dos custos computacionais associados à predição do flutter. Este trabalho será feito considerando-se duas representações clássicas do comportamento viscoelástico, sendo a abordagem pelo módulo complexo no domínio da frequência e o modelo das derivadas fracionárias (FDM) no domínio do tempo. A necessidade de desenvolver a redução de modelos para ambos os domínios é motivada pelo fato de poder comparar, a posteriori, as duas abordagens e inferir sobre a relevância de cada uma. Isto permite obter uma visão mais objetiva dos resultados numéricos que podem muitas vezes não representar fielmente a realidade. Entretanto, os modelos numéricos são, ainda assim, utilizados devido às dificuldades, principalmente econômicas, de realizar experimentos em túnel de vento ou *in situ*. Portanto, espera-se que este trabalho é imprescindível para as indústrias aeronáuticas/aeroespaciais na tentativa de controlar as instabilidades não somente de sistemas aeroviscoelásticos, como também qualquer sistema aeroelástico incorporando alguma técnica de controle que apresente dependência em frequência e/ou temperatura (por exemplo sistema compósito piezoelétricos). Este trabalho poderá também contribuir para reduzir os tempos computacionais relacionados aos estudos de propagação de incertezas para sistemas aeroelásticos estocásticos para os quais os parâmetros (geometria, material, condições de contorno) não são perfeitamente controlados.

1.2 Estado da arte

1.2.1 Modelos de comportamento viscoelástico linear

Várias são as possibilidades encontradas na literatura para modelar o comportamento dinâmico de um material viscoelástico linear. Uma primeira categoria, que apareceu nos anos 60, consiste no uso de uma combinação de derivadas inteiras aplicadas nos campos de tensão e de deformação, conhecida como *Generalized standard linear model* [28]. Dentro desta categoria, podem ser citados os conhecidos modelos de Maxwell e Kelvin-Voigt [29], que permitem caracterizar respectivamente as funções de fluência e de relaxação do material viscoelástico. O problema relacionado a tal abordagem reside na dificuldade de representar a dependência em frequência dos materiais, para a qual os modelos matemáticos precisam de muitos parâmetros [30–32]. Isto implica em um elevado custo computacional, o que pode tornar a solução inviável para sistemas viscoelásticos de interesse industrial.

Outra categoria aproveita da propriedade de linearidade para aplicar o princípio de superposição de Boltzmann, afim de levar em conta o efeito de memória dos materiais viscoelásticos, na forma de integrais de convolução, chamadas de integrais hereditárias [29]. Esta forma usa geralmente funções exponenciais para modelar os comportamentos de fluência e relaxação do material. Novamente, muitos parâmetros são necessários para conseguir acompanhar a dependência em frequência.

Uma terceira forma consiste na representação do módulo de cisalhamento do material no domínio de Laplace, com a introdução de variáveis internas. É especialmente o caso do modelo GHM desenvolvido por Golla, Hughes e McTavish [33, 34]) e do modelo ADF (*Anelastic Displacement Field*) desenvolvido por Lesieutre e Mingori [35]. Nestes dois modelos, a parte viscoelástica é representada na forma de um quociente contendo vários parâmetros a serem otimizados e a variável de Laplace s . A maior dificuldade relacionada a esta abordagem reside no aumento da ordem do sistema original a ser resolvido. Além disso, assim como para as outras formas já apresentadas, são geralmente necessárias muitas variáveis para conseguir aproximar a dependência em frequência dos materiais viscoelásticos.

Uma alternativa mais interessante, e certamente a mais conhecida é a representação pelo

módulo complexo. Desta vez, vários ensaios experimentais são realizados para caracterizar o comportamento do material com a frequência e a temperatura, e determinar uma curva mestre ou nomograma que resuma de uma só vez as duas dependências. Esta abordagem é capaz de resolver os problemas mencionados acima no domínio da frequência, porém a sua desvantagem é que este método sofre muitas restrições quando se deseja utilizá-lo no domínio do tempo. De fato, utilizar o módulo Complexo pode gerar respostas não causais ao retornar para o domínio do tempo quando se emprega as transformadas inversas de Laplace. Além disso, o tempo de computação destas transformadas inversas tende a tornar o processo proibitivo [30, 32].

Para resolver os problemas relacionados a esta última abordagem via módulo complexo, Bagley e Torvik [36] propuseram então uma nova representação, chamada de FDM por *Fractional Derivative Model*, que é baseada no uso de derivadas fracionárias. Esta última, além de ser fundamentada de acordo com a teoria molecular dos materiais viscoelásticos [31, 37], consegue aproximar a dependência da frequência com menos parâmetros do que as precedentes abordagens já mencionadas. Além disso, uma correlação excelente com uma grande variedade de materiais viscoelásticos comerciais já foi demonstrada com esta nova teoria através de ajustes de modelo [30]. Por fim, esta teoria não apresenta os efeitos não causais conhecidos pelo módulo complexo. Por estas razões, ela é certamente a melhor candidata para o uso no domínio do tempo. Entretanto, os primeiros desenvolvimentos apresentados por Bagley e Torvik [31] eram restritos a problemas unidimensionais simples com poucos gdl [32]. Neste contexto, para resolver o problema de autovalor no domínio de Laplace, é necessário expandir drasticamente a ordem inicial do problema, o que torna o método ineficaz. Uma solução proposta por vários autores como Enelund, Schimdt e Gaul [32, 37] é de resolver o problema inteiro somente no domínio do tempo por integração numérica, sem ter que passar para o domínio de Laplace e retornar por transformada inversa. O maior inconveniente inerente a tal solução, que já foi observado em [38] e será visto em mais detalhes no capítulo III, é relacionada à necessidade do conhecimento dos eventos passados devido ao efeito de memória do material viscoelástico. Especialmente no trabalho de Schmidt e Gaul [37], o fato de ter que computar as tensões elementares para cada iteração de tempo usando as tensões passadas torna o processo computacionalmente muito caro.

Para contornar esta dificuldade, vários são os autores que usam leis constitutivas do tipo Kelvin-Voigt, a qual não possui derivada fracionária sobre o campo de tensão, anulando a necessidade de guardar o histórico de tensões passadas. Entretanto, tais modelos são restritos a materiais viscoelásticos nas regiões de transição e de borracha, enquanto modelos com derivada fracionária sobre o campo de tensão são mais completos, já que descrevem até a região vítrea. Galucio et. al [39] propuseram uma mudança de variável, introduzindo o deslocamento anelástico, para dispensar os problemas relacionados à tensão. No entanto, apesar de bons resultados com a literatura, esta última variável é associada à uma interpolação elementar sem justificção física. Cortés em [38] propôs então de relacionar a tensão com o deslocamento através do uso da equação de equilíbrio de momento ao nível local. Os seus resultados mostraram uma boa correlação com os trabalhos reconhecidos de Padovan [40], porém restritos à sistema unidimensional.

1.2.2 Redução de modelos

1.2.2.1 *No domínio da frequência*

Como mencionado na seção 1.1, vários são os trabalhos que propõem métodos de redução de modelos para sistemas viscoelásticos. Geralmente, todos consistem em usar bases de redução constituídas de autovetores do sistema conservativo associado. Entretanto, cada abordagem tenta enriquecer a base inicial de alguma maneira, geralmente introduzindo resíduos de deslocamento estático ou dinâmico, a fim de levar em conta as mudanças no comportamento dinâmico aportado pelo material viscoelástico. Portanto, todos estes métodos não são equivalentes, resultando em diferenças no que se refere à qualidade da aproximação e eficiência de cálculo, dependendo da aplicação. Entretanto, todos tem a principal vantagem de propor uma base constante computada fora do cálculo principal de função de resposta em frequência (FRF) ou problema de autovalor iterativo.

Assim, de Lima et al. [27, 41, 42] propuseram o enriquecimento da base inicial com pelo menos um resíduo de deslocamento estático, associado ao carregamento externo harmônico definido para o cálculo das FRFs. Em seguida são introduzidos vários resíduos de deslocamento associados ao que são chamados de esforços de amortecimento viscoelásticos. Estes

últimos resíduos são computados a partir do cálculo do inverso da matriz de rigidez estática e dos autovetores do sistema conservativo associado. Esta base enriquecida tem a vantagem de fornecer excelente custo computacional e demonstrou resultados satisfatórios até para sistema industriais com geometria complexa [41]. Já Balmès e Plouin [22] propuseram utilizar como resíduo os autovetores do sistema viscoelástico com o módulo complexo computado nos extremos da banda de frequência avaliada. Esta técnica permite introduzir informações sobre as alterações no comportamento dinâmico devido à dependência em frequência do sistema viscoelástico. Balmès et al. [21, 23, 24] propuseram um outro método baseado em energia de deformação que computa a resposta estática a um resíduo de força. Esta resposta pode ser adicionada também à base de redução inicial como resíduo estático de deslocamento, e implementada em um processo iterativo para conseguir erros de aproximação muito baixos. Este método é ainda mais preciso, porém, pode levar mais tempo de computação devido ao processo iterativo. Rouleau et. al [26] aplicaram os métodos mais convencionais de redução e os métodos desenvolvidos por Balmès com pequenas modificações para tentar determinar o mais eficiente. Neste trabalho foi concluído que os dois métodos propostos por Balmès et al. [21, 23, 24] são de fato os mais eficientes.

Com respeito aos sistemas aeroviscoelásticos, raros são os trabalhos relativos à redução de modelos. Shin et al. [16] foram uns dos poucos a propor uma redução de modelo para uma placa curva tratada por material viscoelástico sobre carregamento aerodinâmico supersônico. Contudo, neste trabalho, os autores fixam o valor do módulo complexo para uma dada frequência ω_0 , o que vai contra os próprios princípios de uso do material viscoelástico, já que a dependência com a frequência é desconsiderada. Além disso, nenhuma comparação entre modelo completo e modelo reduzido é feita para comprovar a precisão da base de redução proposta, a qual é constituída somente dos autovetores do sistema conservativo associado, nenhum enriquecimento sendo feito.

1.2.2.2 No domínio do tempo

Os trabalhos sobre redução de modelos para sistemas viscoelásticos usando a abordagem do FDM também são raros na literatura. Dentre os existentes, nenhum trata de carregamento aerodinâmico. de Lima em [43] propôs uma base de redução para reduzir um sistema

viscoelástico linear, composta pelos mesmos vetores que os vetores da análise no domínio da frequência em [27]. Será visto no capítulo V que esta base pode ser adaptada ao caso de sistemas aeroviscoelásticos e fornecer assim resultados confiáveis com o ganho de tempo aceitável.

1.3 Conteúdo da dissertação

No capítulo II é feita uma introdução aos conceitos básicos de viscoelasticidade linear. Em seguida são mostrados os passos para desenvolver um modelo de elementos finitos (MEF) de uma placa plana puramente elástica e finalmente um painel curvo industrial com enrijecedores. É então introduzido no domínio da frequência o tratamento viscoelástico. Para o painel curvo será feito uma validação da parte de base elástica com o código comercial Ansys®.

No capítulo III é feita a modelagem das duas estruturas descritas no capítulo II exclusivamente no domínio do tempo, segundo a abordagem do modelo das derivadas fracionárias (FDM). Desta maneira é introduzida primeiramente o conceito de derivada fracionária segundo a definição de Grünwald-Letnikov. Em seguida este conceito é utilizado na formulação do MEF das duas estruturas. O capítulo encerra com a proposta de uma versão mais eficiente do algoritmo desenvolvido por Schmidt e Gaul [37].

No capítulo IV é feita uma breve introdução sobre a teoria aerodinâmica de painéis aeronáuticos, conhecida como Teoria do Pistão. Os esforços aerodinâmicos associados são introduzidos nos modelos MEF viscoelásticos desenvolvidos nos capítulos anteriores. Finalmente o princípio da análise de flutter para o sistema aeroviscoelástico na frequência baseado no trabalho original de Cunha [44] é descrito. Para o sistema no tempo é proposto um novo método de predição do flutter, baseado na avaliação das respostas temporais obtidas por integração de Newmark.

No capítulo V são propostos novos métodos de redução na frequência e no tempo, baseado em toda literatura citada na seção 1.2 e adaptada ao caso aeroviscoelástico para a predição de instabilidade aerodinâmica com dependência a frequência.

No capítulo VI são apresentados os resultados dos métodos de redução desenvolvidos,

tanto em termo de precisão quanto de eficiência para as duas estruturas analisadas. A influência dos diferentes parâmetros dos modelos sobre as velocidades críticas de flutter é analisada.

Por fim no capítulo VII é feita uma conclusão geral sobre o trabalho desenvolvido e é proposta uma lista dos possíveis trabalhos futuros relacionados ao assunto.

As principais contribuições deste trabalho podem então ser resumidas como sendo:

- criar uma versão mais eficiente do MEF segundo a abordagem FDM do trabalho original proposto por Schmidt e Gaul;
- desenvolver um novo método de predição da instabilidade de flutter para um sistema com dependência em frequência, exclusivamente no domínio do tempo;
- adaptar e propor novos métodos de redução para sistemas aeroelásticos com dependência a frequência, tanto no domínio da frequência quanto do tempo.

CAPÍTULO II

MODELAGEM DE SISTEMAS VISCOELÁSTICOS NO DOMÍNIO DA FREQUÊNCIA

Os sistemas estudados neste trabalho consistem placas finas. Estes sistemas serão posteriormente submetidos a um carregamento aerodinâmico com o intuito de se determinar a instabilidade de flutter. Para controlar passivamente este fenômeno é proposto um tratamento viscoelástico superficial por camada restrita passiva [28], para o qual a influência já foi tratada em detalhes em [44]. Será apresentada as etapas de construção de um modelo de elementos finitos baseado em deslocamento no domínio da frequência que aproximará as soluções exatas de uma placa retangular simples quadriapoiada completamente tratada, e um sistema de interesse industrial representado por um painel curvo enrijecido parcialmente tratado com camada restrita passiva.

2.1 Introdução aos conceitos de viscoelasticidade linear

2.1.1 Dependência com o tempo

Para poder prosseguir com o desenvolvimento deste trabalho, é importante relembrar os conceitos básicos de viscoelasticidade linear. Na literatura, as referências sobre a teoria da viscoelasticidade disponíveis são muitas, contudo, as mais utilizadas podem ser encontradas em [28, 29, 45, 46]. Assim, para começar a introduzir a idéia do material viscoelástico, este pode ser entendido como um material que apresenta não só um comportamento elástico

regido pela lei de Hooke $\sigma = E\varepsilon$, mas possui também um comportamento viscoso regido por uma lei do tipo $\tau = \mu\dot{\gamma}$. Esta última parte é responsável pela dependência temporal das propriedades mecânicas do material. De fato, para um material viscoelástico, quando uma tensão constante σ_0 é aplicada no mesmo, sua deformação sofre uma mudança instantânea, relativa à parte elástica, logo continua crescendo com o tempo com uma taxa cada vez menor de maneira assintótica. Já o material puramente elástico sofre somente a deformação instantânea, e o material viscoso uma deformação linear com o tempo sem assíntota. Este comportamento específico do material viscoelástico é chamado de fenômeno de fluência e é apresentado na parte inferior da Figura 2.1.a. Quando a tensão é removida, o material viscoelástico retorna para a sua configuração inicial, também não de forma instantânea. Este fenômeno é chamado de recuperação (do inglês *recovery*) e é apresentado na parte inferior da Figura 2.1.a. Por outro lado, quando se aplica uma deformação constante, ε_0 , no material viscoelástico, a sua tensão aumenta de maneira instantânea, sendo esta devida ao seu comportamento elástico. A este fenômeno é dado o nome de relaxação, caracterizada por uma diminuição do estado de tensão interna devida a uma reorganização interna do material [41]. Este último é visível na parte inferior da Figura 2.1.b. Quando a deformação está removida, ocorre então o mesmo fenômeno de recuperação já mencionado.

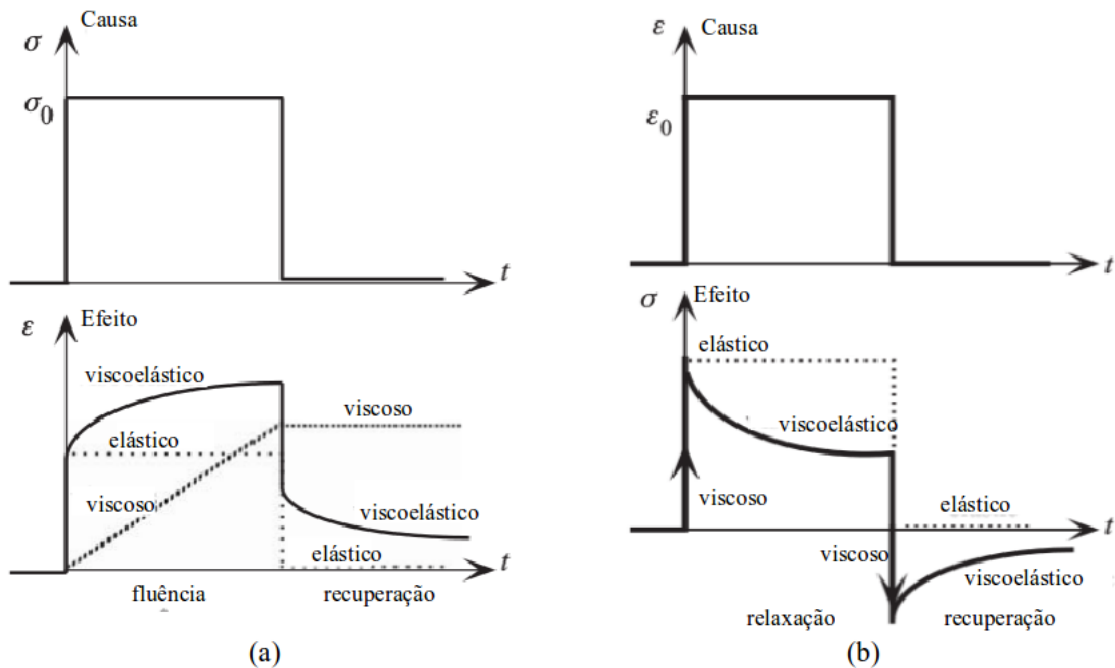


Figura 2.1 – Fenômenos de fluência (a), de relaxação (b) e de recuperação (a e b) do material viscoelástico. Figura adaptada de [46]

Estes fenômenos de fluência e de relaxação do material podem então ser descritos respectivamente pela função de fluência $J(t) = \varepsilon(t)/\sigma_0$, equivalente viscoelástico do módulo de flexibilidade elástico, e pela função de relaxação $E(t) = \sigma(t)/\varepsilon_0$, equivalente viscoelástico do módulo de Young elástico. A consequência direta destas funções que caracterizam o material como dependentes do tempo é que para computar um estado atual de tensão/deformação, é necessário conhecer as tensões ou deformações passadas. Isto corresponde ao conhecido efeito de memória dos materiais viscoelásticos. No entanto, quanto mais longe se situam os eventos no passado, menor a sua participação na resposta atual, ou seja, o efeito de memória se esvanece com o tempo (do inglês *fading memory*). Para a viscoelasticidade linear, por definição, a resposta à soma de carregamentos distintos é igual a soma das respostas aos carregamentos analisados separadamente (princípio da superposição). Com esta hipótese, que sempre será assumida neste trabalho, correspondente a uma classe específica dos materiais viscoelásticos, é possível aplicar o princípio de Boltzmann [45] e calcular as tensões ou deformações atuais através de integrais de convolução, da seguinte forma

$$\sigma(t) = \int_0^t E(t - \tau) \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (2.1a)$$

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t - \tau) \frac{d\sigma(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (2.1b)$$

Estas integrais de convolução chamadas de integrais hereditárias e evocadas no capítulo I representam bem o efeito de memória do material, uma vez que é necessário utilizar os eventos passados até o momento inicial $t = 0$ para conhecer o estado atual de instante t .

2.1.2 Dependência frequência-temperatura

Como para o caso puramente elástico, é possível relacionar tensão e deformação através de uma lei constitutiva para os materiais viscoelásticos. Porém, em vez de expressá-la no domínio do tempo como no caso elástico, é mais conveniente e geralmente mais comum de expressá-la no domínio de Laplace. De fato, passando as equações (2.1) para o domínio de Laplace, as integrais de convolução se tornam produtos de funções da variável s , da seguinte forma

$$\sigma(s) = sE(s)\varepsilon(s) \quad (2.2a)$$

$$\varepsilon(s) = sJ(s)\sigma(s) \quad (2.2b)$$

Pode-se observar que a forma das equações (2.2) é muito parecida com o caso elástico linear. De fato, a analogia pode ser feita se substituirmos o $sE(s)$ e $sJ(s)$ pelos módulos elásticos E e J , respectivamente [45]. Assim, é possível obter a solução de um problema viscoelástico ao resolver o problema elástico simples, através da substituição dos módulos elásticos E ou J pelos equivalentes no domínio de Laplace e finalmente retornar para o domínio do tempo por transformada inversa. Este princípio é chamado de correspondência elástica-viscoelástica e é disponível em muitas referências sobre viscoelasticidade [29, 45, 46].

É também possível utilizar uma lei constitutiva no domínio do tempo pela abordagem das derivadas generalizadas [28], que no caso unidimensional pode ser expressa como segue:

$$\sigma(t) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n D^{\alpha_n} \sigma(t) = E\varepsilon(t) + E \sum_{n=1}^{\infty} b_n D^{\beta_n} \varepsilon(t) \quad (2.3)$$

onde D representa o operador diferencial em relação ao tempo, α_n e β_n são ordens de diferenciação (inteiros ou fracionários) e E o módulo de Young elástico. Nesta equação, a presença das derivadas em relação às tensão e deformação é responsável pelo efeito de memória do material. Nota-se que no caso $\alpha_n = 0$ e $\beta_n = 0$ para todo n , tem-se o caso puramente elástico. Esta outra alternativa de representar a relação entre tensão e deformação é muito interessante, pois ajuda a definir a noção de módulo complexo. De fato, quando assume-se solução harmônica do tipo $\sigma(t) = \sigma_0 \exp(i\omega t)$ e $\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \exp(i\omega t)$, a equação (2.3) se torna

$$\sigma_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (i\omega)^{\alpha_n} \right] = E\varepsilon_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (i\omega)^{\beta_n} \right] \quad (2.4)$$

E isolando tensão e deformação, obtém-se o módulo complexo $E^*(i\omega)$ tal como segue,

$$E^*(i\omega) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} = E' + iE'' \quad (2.5)$$

sendo

- $E'(\omega) = \text{Re} \left(\frac{E + \sum_{n=1}^{\infty} E b_n (i\omega)^{\beta_n}}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (i\omega)^{\alpha_n}} \right)$ o módulo de armazenamento e
- $E''(\omega) = \text{Im} \left(\frac{E + \sum_{n=1}^{\infty} E b_n (i\omega)^{\beta_n}}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (i\omega)^{\alpha_n}} \right)$ o módulo de perda.

Este módulo é geralmente reformulado e usado da seguinte forma:

$$E^*(i\omega) = E(\omega)'(1 + i\eta(\omega)) \quad (2.6)$$

onde $\eta(\omega) = E''/E'$ é o fator de perda. Enquanto o módulo de armazenamento representa a rigidez do material viscoelástico, o fator de perda representa o seu amortecimento. Quanto maior for este último, melhor será a dissipação de energia aportada pelo material [28]. Muitas vezes, em vez de se usar o módulo de armazenamento E' , os autores preferem usar o módulo de cisalhamento de armazenamento G' como será visto abaixo com o material 3M-ISD112™. Isto se deve ao fato do grande interesse pelo cisalhamento da camada viscoelástica em muitas aplicações de camadas restritas passivas.

Com esta nova representação complexa, fica evidente a dependência do material com a frequência através destas duas novas funções $E'(\omega)$ e $\eta(\omega)$. Uma variação típica destas funções com a frequência é apresentada na Figura 2.2.a. Vê-se que para uma dada frequência pode-se obter um máximo do fator de perda, enquanto o módulo de armazenamento sempre aumenta com a frequência até se tornar assintótico. Portanto, através destas transformações de um domínio para o outro, entende-se que o efeito de memória no tempo se traduz por uma dependência em frequência do material. Assim, todo material viscoelástico sofre tal dependência, seja fraca ou forte dependendo do material, e dependendo também do segundo fator mais importante que é a temperatura. De fato, como pode ser observado na Figura 2.2.b, para uma frequência fixa, o módulo de armazenamento e o fator de perda variam muito com a temperatura. Como mencionado no capítulo I, a influência da temperatura pode ser classificada em varias regiões específicas:

- a região vítrea caracterizada por um modulo de armazenamento quase constante, e um fator de perda aumentando de maneira aproximadamente linear,

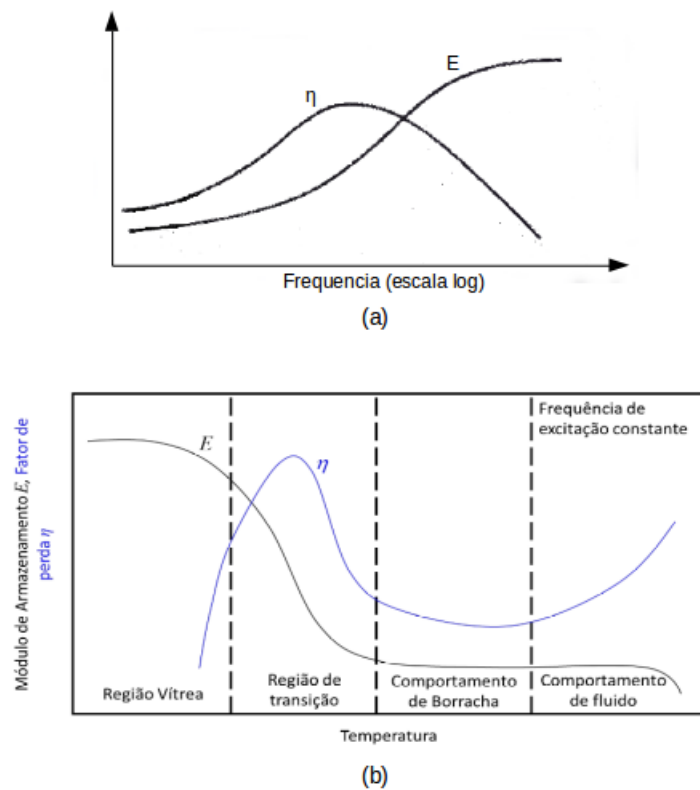


Figura 2.2 – Dependência típica com a frequência (a) e com a temperatura (b) de um material viscoelástico. Figuras adaptadas de [28]

- a região de transição caracterizada por um modulo de armazenamento caindo drasticamente, e um fator de perda atingindo o seu pico,
- a região de borracha que apresenta um modulo de armazenamento baixo e constante, e um fator de perda no seu mínimo,
- a região de fluido que é representada por um modulo de armazenamento que se torna nulo, e um fator de perda aumentando novamente de maneira aproximadamente linear.

Portanto, é imprescindível que o modelo usado para representar a viscoelasticidade leve em conta, além da frequência, este efeito da temperatura. Na verdade, é possível demonstrar para a maioria dos materiais viscoelásticos lineares que a influência da temperatura tem o efeito inverso da influência da frequência. Além disso, a variação de alguns poucos graus na temperatura tem o mesmo comportamento do que a variação de algumas décadas de frequência. Ou seja, quando se desloca em frequência as curvas da Figura 2.2.a para várias temperaturas, as curvas tendem a se sobreporem [41]. Isso leva à construção de uma curva mestre, resumindo de uma só vez as duas dependências frequência-temperatura, e a um outro

conhecido princípio chamado de equivalência frequência-temperatura. Este fala que é possível a partir uma curva mestre obter para uma dada temperatura os valores correspondentes em frequência de E' e η aplicando o fator de deslocamento (do ingles *shift factor*) α_T apropriado [28]. Este conjunto das duas curvas mestre do E' e η em função de uma frequência reduzida $\omega_r = \alpha_T \omega$ é chamado de nomograma.

Para o material 3M-ISD112TM usado neste trabalho, equações analíticas foram desenvolvidas por Drake and Soovere [47] para descrever as curvas mestres de G' e η , e o fator de deslocamento α_T . Estas equações são mostradas a seguir

$$G(i\omega_r) = B_1 + \frac{B_2}{1 + B_5 \frac{i\omega_r}{B_3} - B_6 + \frac{i\omega_r}{B_3} - B_4} \quad (2.7a)$$

$$\log(\alpha_T) = a \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_Z} \right) + 2.303 \left(\frac{2a}{T_Z} - b \right) \log\left(\frac{T}{T_Z}\right) + \left(\frac{b}{T_Z} - \frac{a}{T_Z^2} - S_{AZ} \right) (T - T_Z) \quad (2.7b)$$

onde

- $B_1 = 0.4307 MPa; B_2 = 1200 MPa; B_3 = 0.1543 \cdot 10^7 rad.s^{-1}; B_4 = 0.6847; B_5 = 3.241; B_6 = 0.18$
- $S_{AZ} = 0.05956 K^{-1}; S_{AL} = 0.1474 K^{-1}; S_{AH} = 0.9725 \cdot 10^{-2} K^{-1}; T_z = 290 K; T_L = 210 K; T_H = 360 K$
- $a = \frac{D_B C_C - C_B D_C}{D_E}$
- $b = \frac{C_A D_C - D_A C_C}{D_E}$
- $C_A = \left(\frac{1}{T_L} - \frac{1}{T_Z} \right)^2; C_B = \frac{1}{T_L} - \frac{1}{T_Z}; C_C = S_{AL} - S_{AZ}$
- $D_A = \left(\frac{1}{T_H} - \frac{1}{T_Z} \right)^2; D_B = \frac{1}{T_H} - \frac{1}{T_Z}; D_C = S_{AH} - S_{AZ}$
- $D_E = D_B C_A - C_B D_A$

O nomograma correspondente à equação (2.7a), assim como a variação do fator de deslocamento α_T com a temperatura são apresentados na Figura 2.3. Pode-se então observar a semelhança notável das duas curvas mestre com a Figura 2.2.a. Por outro lado, vê-se que

existe um comportamento assintótico tanto para as frequências altas quanto as baixas. A assíntota na parte estática é as vezes usada por alguns autores para construir base de redução de modelos em elementos finitos eficientes, como será visto na capítulo IV.

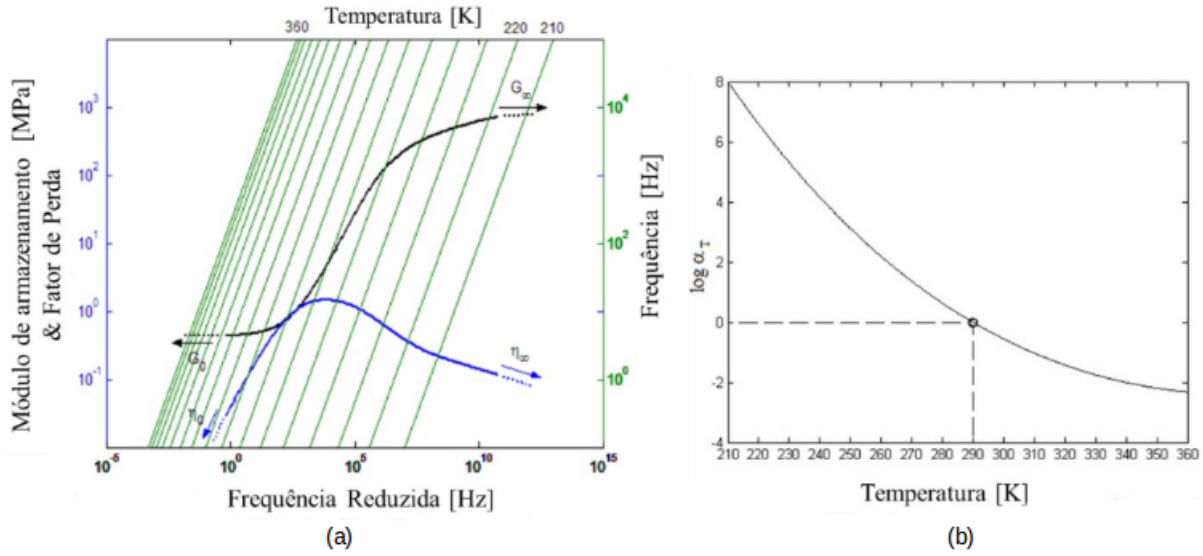


Figura 2.3 – Nomograma do material ISD112 - (a) : Curva mestre do módulo de cisalhamento de armazenamento G' e do fator de perda η - (b) : Variação do fator de desvio α_T com a temperatura. Figuras extraídas de [44]

2.2 Placa sanduíche

A primeira estrutura analisada, representada na Figura 2.4, consiste em uma placa retangular fina do tipo sanduíche, apoiada nas quatro bordas e completamente tratada. Esta é composta de três camadas: a estrutura base (1) que recebe o tratamento superficial, a camada viscoelástica (2) e a camada restringente (3) empregada normalmente para aumentar as deformações cisalhantes no núcleo viscoelástico. h_1 , h_2 e h_3 são as espessuras das camadas (1), (2) e (3), respectivamente. AA e BB são os comprimentos em X e Y da placa onde $(O\vec{X}\vec{Y}\vec{Z})$ é o referencial global do sistema de origem O em um canto da placa, e qualquer ponto M da placa é localizado pelas coordenadas físicas (x, y, z) neste referencial.

A cinemática da placa sanduíche analisada neste trabalho se baseia nos desenvolvimentos originais feitos por Khatua & Cheung [48] e implementados por de Lima et al. [27]. Nesta teoria, o movimento relativo das camadas é modelado da forma representada na Figura 2.5 que mostra as configurações antes e após deformação no plano $(O\vec{X}\vec{Z})$. Vê-se nesta

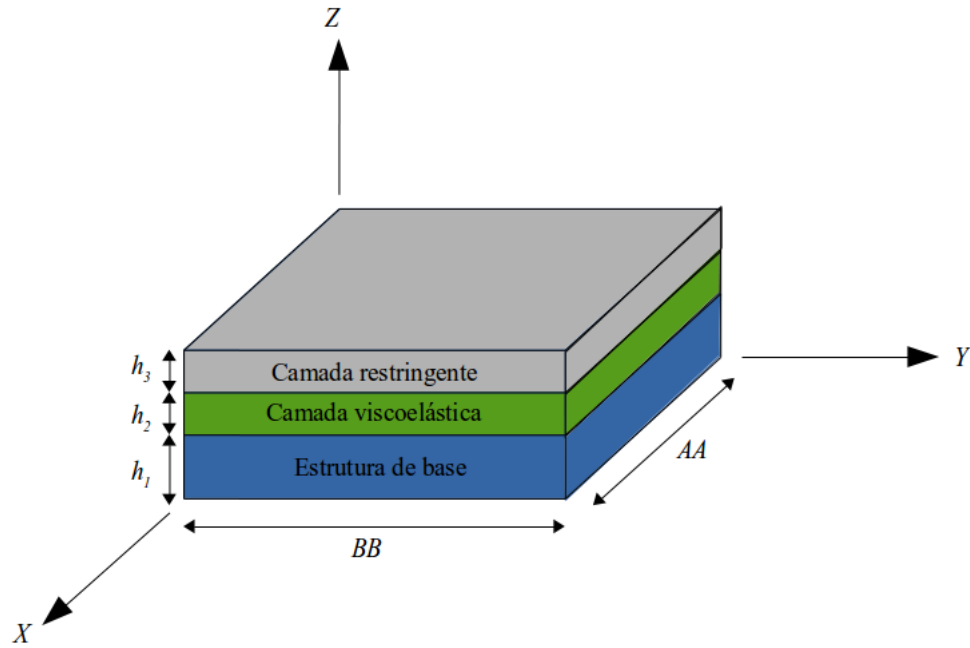


Figura 2.4 – Ilustração da placa sanduíche com tratamento viscoelástico

figura que somente a camada do meio (neste caso a camada viscoelástica) sofre deformação cisalhante forçada pela presença da camada restrigente. As hipóteses cinemáticas são as seguintes:

1. As camadas elásticas (1) e (3) são modeladas pela teoria de placa fina de Kirchhoff-Love, na qual as deformações cisalhantes transversais são desprezadas;
2. A camada viscoelástica (2) é modelada pela teoria de placa mais espessa de Mindlin-Reissner, na qual se considera a deformação cisalhante transversal constante na espessura;
3. O deslocamento transversal w e consequentemente as rotações das seções transversais θ_x e θ_y são as mesmas para as três camadas.

Dado estas hipóteses e segundo Khatua & Cheung, a configuração da placa para qualquer instante de tempo t pode ser completamente descrita pelos sete graus de liberdade (gdls) seguintes

- u_1 : deslocamento de membrana da camada (1) na direção X ;
- v_1 : deslocamento de membrana da camada (1) na direção Y ;

- u_3 : deslocamento de membrana da camada (3) na direção X ;
- v_3 : deslocamento de membrana da camada (3) na direção Y ;
- w : deslocamento transversal das três camadas (direção Z);
- θ_X : rotação das seções transversais em torno do eixo $(O\vec{X})$, tal como $\theta_X = \frac{\partial w}{\partial y}$;
- θ_Y : rotação das seções transversais em torno do eixo $(O\vec{Y})$, tal como $\theta_Y = -\frac{\partial w}{\partial x}$;

Os graus de liberdade de deslocamento de membrana da camada (2) u_2 e v_2 podem então ser expressos em relação a estes sete outros gdl's.

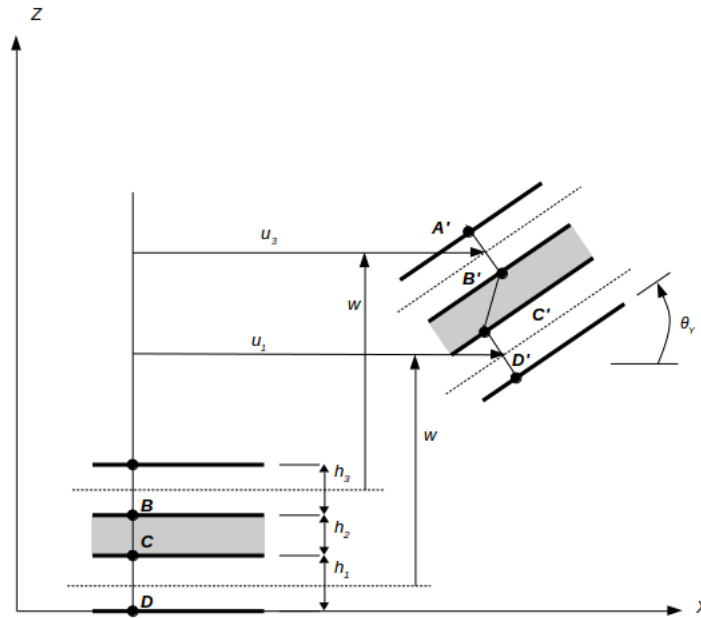


Figura 2.5 – Configuração da placa sanduíche no plano OXZ antes e após a deformação.
Figura adaptada de [44]

Para modelo de elementos finitos da placa sanduíche de três camadas desenvolvido neste trabalho, são ainda adotadas as seguintes hipóteses:

- Estado plano de tensão;
- Material homogêneo, isotrópico e linear;
- Pequenos deslocamentos;

Logo, para obter as matrizes globais de massa e rigidez descrevendo a equação do movimento do sistema, se usa o princípio variacional de Hamilton [20]. Porém, é preciso em

um primeiro passo obter as energias cinéticas e de deformação das três camadas, e em um segundo passo discretizar o problema contínuo em elementos finitos.

2.2.1 Energias cinéticas e de deformação das três camadas

Como mencionado anteriormente, para as camadas elásticas (1) e (3), usa-se a teoria de placa de Kirchhoff-Love, que é uma extensão da teoria de viga de Euler-Bernoulli ao caso da placa. Ela é também conhecida como *Classical Plate Theory* (ou CPT, ver Reddy [49] para mais detalhes), e é considerada como válida quando a razão comprimento/espessura é maior do que 20. Neste caso, o campo de deslocamento da camada (j), onde $j = [1; 3]$, é dado como segue:

$$\vec{U}^{(j)} = \begin{Bmatrix} u^{(j)}(x, y, z) \\ v^{(j)}(x, y, z) \\ w^{(j)}(x, y, z) \end{Bmatrix}_{(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})} \approx \begin{Bmatrix} u_j(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial x} \\ v_j(x, y) - z \frac{\partial w}{\partial y} \\ w(x, y) \end{Bmatrix}_{(\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z})} \quad (2.8)$$

A energia cinética da camada (j) é obtida através da seguinte expressão:

$$T^{(j)} = \frac{1}{2} \int_{V_j} \rho_j \left(\frac{\partial \vec{U}^{(j)}}{\partial t} \right)^2 dV \quad (2.9)$$

onde ρ_j e V_j são, respectivamente, a densidade e o volume da camada (j).

Substituindo a equação (2.8) na (2.9), desprezando a inercia de rotação das seções transversais (o que pode ser feito para placas finas e baixas frequências), e integrando em $z \in [-h/2; +h/2]$, tem-se:

$$T^{(j)} = \frac{1}{2} \int_S \rho_j h_j (\dot{u}_j^2 + \dot{v}_j^2 + \dot{w}^2) dS \quad (2.10)$$

onde S é a área da camada j .

Para a energia de deformação da camada elástica (j), é preciso computar primeiro o seu campo de deformação. Assim, segundo a teoria da elasticidade e usando o campo de deslocamento (2.8), pode-se decompor o campo de deformação no caso de pequenos deslocamentos

da seguinte forma:

$$\{\varepsilon^{(j)}\} = \{\varepsilon_m^{(j)}\} + z \{\varepsilon_f^{(j)}\} \quad (2.11)$$

onde $\{\varepsilon_m^{(j)}\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_j}{\partial x} \\ \frac{\partial v_j}{\partial y} \\ \frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x} \end{Bmatrix}$ e $\{\varepsilon_f^{(j)}\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$ são, respectivamente, as deformações associadas aos efeitos de membrana e de flexão.

Em seguida, é necessário determinar o campo de tensão para que a energia potencial elástica possa ser computada. Usando a lei constitutiva de Hooke e assumindo estado plano de tensão associado à placa fina e um material homogêneo, isotrópico e linear, tem-se a relação seguinte:

$$\{\sigma^{(j)}\} = E_j [A_j] \{\varepsilon^{(j)}\} \quad (2.12)$$

onde $[A_j] = \frac{1}{(1-\nu_j^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_j & 0 \\ \nu_j & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_j}{2} \end{bmatrix}$ é a matriz constitutiva fatorada composta por E_j e ν_j que são o módulo de Young e o coeficiente de Poisson da camada (j) .

A energia de deformação da camada elástica (j) é dada da seguinte forma:

$$\Pi^{(j)} = \frac{1}{2} \int_{V_j} \{\varepsilon^{(j)}\}^T \{\sigma^{(j)}\} dV \quad (2.13)$$

Substituindo as equações (2.11) e (2.12) na equação (2.13), e integrando em z , a energia de deformação pode ser decomposta como segue:

$$\Pi^{(j)} = \Pi_m^{(j)} + \Pi_f^{(j)} \quad (2.14)$$

onde $\Pi_m^{(j)} = \frac{1}{2} \int_S E_j h_j \{\varepsilon_m^{(j)}\}^T [A_j] \{\varepsilon_m^{(j)}\} dS$ e $\Pi_f^{(j)} = \frac{1}{2} \int_S E_j \frac{h_j^3}{12} \{\varepsilon_f^{(j)}\}^T [A_j] \{\varepsilon_f^{(j)}\} dS$ são as energias de deformação da camada elástica (j) associada aos efeitos de membrana e de flexão, respectivamente.

Para a camada viscoelástica (2), as expressões das energias são mais complicadas já que os gdl's u_2 e v_2 dependem dos outros sete gdl's. Para encontrar o campo de deslocamento da camada viscoelástica pode-se utilizar uma expansão em série de Taylor do campo de

deslocamento $\vec{U}^{(2)}$ até a primeira ordem na direção Z . Considerando a hipótese comum às teorias de Kirchhoff e Mindlin sobre a inextensibilidade da espessura ($\frac{\partial w}{\partial z} = 0$), chega-se então à seguinte expressão para o campo de deslocamento:

$$\vec{U}^{(2)} = \left\{ \begin{array}{l} u^{(2)}(x, y, z) \\ v^{(2)}(x, y, z) \\ w^{(2)}(x, y, z) \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \approx \left\{ \begin{array}{l} u_2(x, y) + z \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z} \\ v_2(x, y) + z \frac{\partial v^{(2)}}{\partial z} \\ w(x, y) \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad (2.15)$$

Usando a cinemática ilustrada na Figura 2.5, é possível mostrar as relações seguintes [41, 48]:

$$u_2 = \frac{u_3 + u_1}{2} + \frac{h_3 - h_1}{4} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.16a)$$

$$\frac{\partial u^{(2)}}{\partial z} = \frac{1}{h_2} \left(u_3 - u_1 + \frac{h_3 + h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.16b)$$

$$v_2 = \frac{v_3 + v_1}{2} + \frac{h_3 - h_1}{4} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.16c)$$

$$\frac{\partial v^{(2)}}{\partial z} = \frac{1}{h_2} \left(v_3 - v_1 + \frac{h_3 + h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.16d)$$

Substituindo as equações (2.16a) a (2.16d) na equação (2.15), pode-se expressar o campo de deslocamento da camada (2) em função dos sete gdl's principais tal como:

$$\vec{U}^{(2)} = \left\{ \begin{array}{l} u^{(2)}(x, y, z) \\ v^{(2)}(x, y, z) \\ w^{(2)}(x, y, z) \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \approx \left\{ \begin{array}{l} \frac{u_3 + u_1}{2} + \frac{h_3 - h_1}{4} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{z}{h_2} \left(u_3 - u_1 + \frac{h_3 + h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{v_3 + v_1}{2} + \frac{h_3 - h_1}{4} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{z}{h_2} \left(v_3 - v_1 + \frac{h_3 + h_1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ w(x, y) \end{array} \right\}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} \quad (2.17)$$

Assim, a energia cinética da camada (2) pode ser computada, que segundo definição, vale:

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} \int_{V_2} \rho_2 \left(\frac{\partial \vec{U}^{(2)}}{\partial t} \right)^2 dV \quad (2.18)$$

onde ρ_2 e V_2 designam a densidade e o volume da camada (2).

Substituindo o campo de deslocamento (2.17) na equação (2.18), desprezando nova-

mente a inércia de rotação das seções transversais e integrando em $z \in [-h/2; +h/2]$, tem-se:

$$T^{(2)} = \frac{1}{2} \int_S \rho_2 h_2 (\dot{u}_2^2 + \dot{v}_2^2 + \dot{w}^2) dS \quad (2.19)$$

A energia cinética é então simplesmente determinada ao substituir os u_2 e v_2 pelas expressões fornecidas nas equações (2.16a) e (2.16c).

Para a energia de deformação da camada viscoelástica (2), primeiramente é preciso determinar o campo de deformação. Assim, as seguintes equações da teoria da elasticidade são novamente utilizadas:

$$\{\varepsilon^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(2)} \\ \varepsilon_y^{(2)} \\ 2\varepsilon_{xy}^{(2)} \\ 2\varepsilon_{xz}^{(2)} \\ 2\varepsilon_{yz}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} \\ \frac{\partial v^{(2)}}{\partial y} \\ \frac{\partial u^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(2)}}{\partial x} \\ \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

Pode-se notar que a componente $\varepsilon_z^{(2)}$ do tensor de deformação não foi incluída por ser desprezada segundo as hipóteses assumidas neste trabalho.

Substituindo as componentes do campo $\vec{U}^{(2)}$ da equação (2.15) e as equações (2.16a) a (2.16d) na equação (2.20), pode-se expressar o campo de deformação do núcleo viscoelástico da seguinte forma:

$$\{\varepsilon^{(2)}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(2)} \\ \varepsilon_y^{(2)} \\ 2\varepsilon_{xy}^{(2)} \\ 2\varepsilon_{xz}^{(2)} \\ 2\varepsilon_{yz}^{(2)} \end{Bmatrix} = \{\varepsilon_m^{(2)}\} + \frac{z}{h_2} \{\varepsilon_f^{(2)}\} + \frac{1}{h_2} \{\varepsilon_c^{(2)}\} \quad (2.21)$$

sendo

$$\bullet \left\{ \varepsilon_m^{(2)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (u_3 + u_1) + \frac{d_1}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (v_3 + v_1) + \frac{d_1}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (u_3 + u_1) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (v_3 + v_1) + \frac{d_1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \text{ a deformação de membrana}$$

$$\bullet \left\{ \varepsilon_f^{(2)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x} (u_3 - u_1) + \frac{d_2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} (v_3 - v_1) + \frac{d_2}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial}{\partial y} (u_3 - u_1) + \frac{\partial}{\partial x} (v_3 - v_1) + d_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \text{ a deformação de flexão}$$

$$\bullet \left\{ \varepsilon_c^{(2)} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_3 - u_1 + \frac{d_3}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \\ v_3 - v_1 + \frac{d_3}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} \text{ a deformação de cisalhamento}$$

- $d_1 = h_3 - h_1$ um parâmetro geométrico associado ao efeito de membrana
- $d_2 = h_3 + h_1$ um parâmetro geométrico associado ao efeito de flexão
- $d_3 = h_1 + 2h_2 + h_3$ um parâmetro geométrico associado ao efeito de cisalhamento

Para encontrar o campo de tensão, é preciso utilizar leis constitutivas da mesma maneira que foi feito para as camadas elásticas. Entretanto, no caso viscoelástico, estas leis não são óbvias como mencionado na seção 2.1. Caso o objetivo da análise seja determinar o comportamento da estrutura no domínio da frequência através da obtenção das FRFs, dos autovalores ou autovetores, por exemplo, é melhor representar o comportamento mecânico do material através do módulo complexo, o qual está descrito pelas equações analíticas (2.7a) e (2.7b) no caso do 3M-ISD112™. No entanto, as equações constitutivas mencionadas na seção 2.1 foram expressas somente no caso unidimensional. Para aplicá-las ao caso tridimensional da placa, o princípio da correspondência elástica-viscoelástica é novamente evocado [29, 45]. Segundo este último, as equações constitutivas viscoelásticas no domínio de Laplace ou da

frequência são equivalentes às equações no caso elástico, desde que os módulos elásticos sejam substituídos pelos respectivos equivalentes viscoelásticos. Portanto, em um primeiro passo computam-se as energias para que as matrizes de massa e rigidez possam ser determinadas. Isto é feito de tal maneira que poderia se dizer que o módulo complexo é um parâmetro puramente elástico. E em um segundo passo, uma vez que a equação do movimento do sistema é obtida na forma matricial, o sistema é levado para o domínio da frequência onde o módulo é substituído pelo módulo complexo novamente [41].

Assim, aplicando esta estratégia, o campo de tensão é computado da seguinte maneira:

$$\{\sigma^{(2)}\} = E_2 [A_2] \{\varepsilon^{(2)}\} \quad (2.22)$$

onde $E_2 = 2G_2(1 + \nu_2)$ com G_2 sendo o módulo complexo (até o momento considerado como sendo puramente elástico) e

$$[A_2] = \frac{1}{(1 - \nu_2^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu_2 & 0 & 0 & 0 \\ \nu_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu_2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-\nu_2}{2} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

é a matriz constitutiva no caso isotrópico com o E_2 fatorado.

Para uma formulação mais conveniente, ao invés de deixar o módulo de Young fatorado na equação (2.22), é possível fatorar o módulo de cisalhamento como segue:

$$\{\sigma^{(2)}\} = G_2 [A'_2] \{\varepsilon^{(2)}\} \quad (2.24)$$

onde

$$[A'_2] = \begin{bmatrix} \frac{2}{(1-\nu_2)} & \frac{2\nu_2}{(1-\nu_2)} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2\nu_2}{(1-\nu_2)} & \frac{2}{(1-\nu_2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

é a matriz constitutiva com o G_2 fatorado.

Observação: nota-se na equação (2.22) que o princípio de correspondência faz intervir o coeficiente de Poisson. Entretanto, como demonstrado em [50] o uso de tal coeficiente neste princípio é abordagem errônea, uma vez que ele deixa de representar uma característica mecânica do sistema viscoelástico. Contudo, se ele for assumido real e constante, o princípio pode ser usado. Apesar desta hipótese desconsiderar vários aspectos e por isso ser considerada errada por vários autores [28, 46, 51, 52], neste trabalho ela será mantida uma vez que a especificação técnica do material 3M-ISD112™ (hoje chamado de *3M-VHB™ acrylic tape*) disponível no site do fabricante assume um coeficiente constante tal como $\nu = 0.49$ (ver por exemplo o 3M-VHB™4950 tape).

Após discutidas as hipóteses sobre o coeficiente de Poisson, a energia de deformação da camada (2) pode ser então computada como segue:

$$\Pi^{(2)} = \frac{1}{2} \int_{V_2} \{\varepsilon^{(2)}\}^T \{\sigma^{(2)}\} dV \quad (2.26)$$

Usando a decomposição em (2.21), substituindo a equação (2.24) na equação (2.26) e integrando em $z \in [-h_2/2; h_2/2]$, a energia de deformação pode ser decomposta nas seguintes parcelas:

$$\Pi^{(2)} = \Pi_m^{(2)} + \Pi_f^{(2)} + \Pi_c^{(2)} \quad (2.27)$$

sendo

- $\Pi_m^{(2)} = \frac{1}{2} \int_S G_2 h_2 \left\{ \varepsilon_m^{(2)} \right\}^T [A'_2] \left\{ \varepsilon_m^{(2)} \right\} dS$ a energia de deformação da camada (2) associada ao efeito de membrana

- $\Pi_f^{(2)} = \frac{1}{2} \int_S G_2 \frac{h_2}{12} \left\{ \varepsilon_f^{(2)} \right\}^T [A_2'] \left\{ \varepsilon_f^{(2)} \right\} dS$ a energia de deformação da camada (2) associada ao efeito de flexão
- $\Pi_c^{(2)} = \frac{1}{2} \int_S G_2 \frac{1}{h_2} \left\{ \varepsilon_c^{(2)} \right\}^T [A_2'] \left\{ \varepsilon_c^{(2)} \right\} dS$ a energia de deformação da camada (2) associada ao efeito de cisalhamento

Nota-se nesta última equação que não aparecem termos de acoplamento entre os três efeitos. Isto é devido à escolha do intervalo de integração sobre z , e a ortogonalidade dos campos de deformação de membrana e flexão com o de cisalhamento.

2.2.2 Discretização pelo método dos elementos finitos

Ao olhar para as expressões das energias de deformação das três camadas, pode ser notado que derivadas espaciais de segunda ordem são aplicadas sobre o grau de liberdade w . Consequentemente, w deve ser pelo menos C^1 contínuo, ou seja, suas derivadas espaciais de primeira ordem devem ser contínuas. Porém, elementos finitos que respeitam tal restrição, conhecidos como elementos conformes (do inglês *conforming element*), possuem mais gdl's por nó afim de impor a unicidade das derivadas espaciais de primeira ordem na interface dos elementos (um elemento com essas características foi desenvolvido primeiramente por Bogner, Fox and Schmidt [53]). Neste trabalho e para a interpolação do deslocamento w se usa um elemento não conforme, chamado elemento ACM, desenvolvido primeiramente por Adini, Clough e Melosh [54–57]. Este é um elemento retangular de quatro nós com a seguinte interpolação:

$$w(\xi, \eta) = e_0 + e_1\xi + e_2\eta + e_3\xi\eta + e_4\xi^2 + e_5\eta^2 + e_6\xi^2\eta + e_7\xi\eta^2 + e_8\xi^3 + e_9\eta^3 + e_{10}\xi^3\eta + e_{11}\xi\eta^3 \quad (2.28)$$

que é uma interpolação polinomial bi-cúbica não completa com 12 termos, expressa em um sistema de coordenadas de referência (ξ, η) . Assim, o número de gdl's por elemento para w é de 12, os quais são o deslocamento transversal w , e as derivadas de primeira ordem na duas direções tais como $-\frac{\partial w}{\partial \xi} = \theta_\eta$ e $\frac{\partial w}{\partial \eta} = \theta_\xi$. As correspondentes funções de forma usadas são os polinômios de Hermite bidimensionais. As suas construções são explicitadas no anexo A.1.1.

Para os deslocamentos de membrana u_1 , v_1 , u_3 e v_3 , somente derivadas de primeira

ordem aparecem nas energias de deformação. Portanto, os clássicos polinômios de Lagrange bilineares bastam para interpolar estes deslocamentos. As suas construções também são apresentadas em anexo A.1.2. Usando o elemento de referência da Figura 2.6.a, os deslocamentos podem ser interpolados da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} u_1(\xi, \eta) \\ v_1(\xi, \eta) \\ u_3(\xi, \eta) \\ v_3(\xi, \eta) \\ w(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = [N_r(\xi, \eta)] \{\delta_r\} \quad (2.29)$$

onde $\{\delta_r\} = \left\{ (u_1)_1 \quad (v_1)_1 \quad w_1 \quad \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_1 \quad -\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_1 \quad (u_3)_1 \quad (v_3)_1 \quad (u_1)_2 \quad \dots \quad (v_3)_4 \right\}^T$ é o vetor coluna de tamanho (28,1) das incógnitas nodais expressas nas coordenadas de referência (ξ, η) e $[N_r(\xi, \eta)]$ é a matriz de interpolação dos deslocamentos descrita no anexo A.1.3. O fato de interpolar os deslocamentos em um elemento de referência escolhido aqui é bastante comum no MEF. Isto faz com que as funções de forma sejam independentes do elemento e as integrações elementares mais simples. A volta para o elemento real físico de coordenadas (x, y) representado na Figura 2.6.b é feita através de interpolação geométrica bilinear da seguinte forma

$$x(\xi, \eta) = [N_m(\xi, \eta)]\{X\} \quad (2.30a)$$

$$y(\xi, \eta) = [N_m(\xi, \eta)]\{Y\} \quad (2.30b)$$

onde $\{X\}$ and $\{Y\}$ são respectivamente os vetores colunas das coordenadas em x e y dos nós do elemento considerado e $[N_m(\xi, \eta)]$ é a matriz de interpolação dos deslocamentos de membrana descrita em anexo A.1.2.

Com respeito a discretização da geometria, dado que a placa analisada é perfeitamente retangular, pode-se escolher uma malha com elementos físicos perfeitamente retangulares e iguais, como a da Figura 2.7. Isto leva a muitas simplificações, por exemplo a forma da

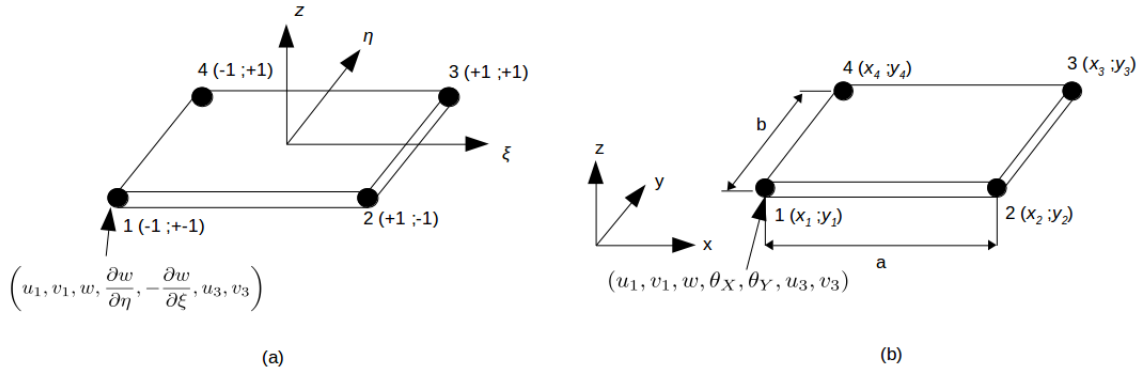


Figura 2.6 – Elemento finito de referência (a) e elemento finito físico (b)

matriz Jacobiana $[J]$ tal como:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & \frac{b}{2} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

sendo a e b os comprimentos elementares nas direções x e y do referencial local. Nota-se que esta matriz não depende das coordenadas dos nós. Além disso, já que os elementos são todos iguais, os comprimentos a e b são constantes, portanto as matrizes elementares serão também independentes do elemento. Uma última vantagem é que, dado uma malha com elementos retangulares, o referencial local do elemento ($O\vec{x}\vec{y}\vec{z}$) é o mesmo do que o referencial global ($O\vec{X}\vec{Y}\vec{Z}$). Portanto não é preciso transformar as matrizes de um referencial para o outro através de processos de rotação com cossenos diretores e um único sistema de coordenadas físicas (x, y, z) basta.

Contudo, é necessário para os cálculos posteriores expressar o vetor de incógnitas nodais de volta às coordenadas físicas (x, y) pela operação seguinte:

$$\{\delta_r\} = [M_p] * \{\delta\} \quad (2.32)$$

onde

- $\{\delta\} = \left\{ (u_1)_1 \quad (v_1)_1 \quad w_1 \quad (\theta_X)_1 \quad (\theta_Y)_1 \quad (u_3)_1 \quad (v_3)_1 \quad (u_1)_2 \quad \dots \quad (v_3)_4 \right\}^T$ é o vetor coluna de tamanho (28,1) das incógnitas nodais nas coordenadas físicas (x, y), lembrando que $\theta_X = \frac{\partial w}{\partial y}$ e $\theta_Y = -\frac{\partial w}{\partial x}$

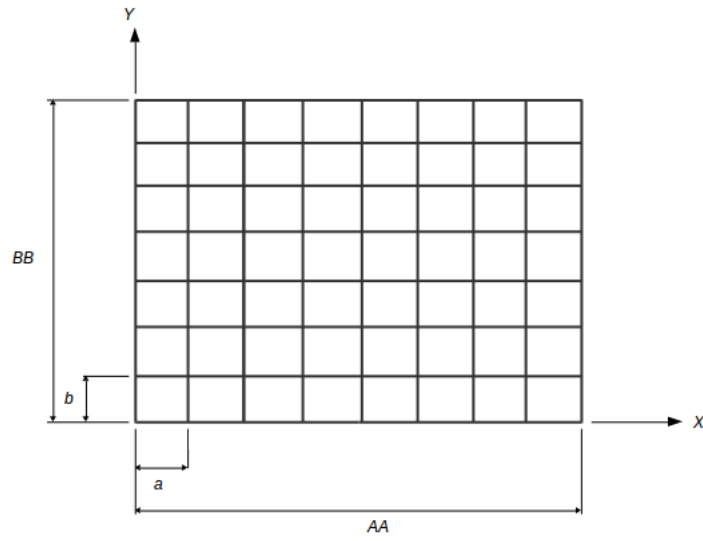


Figura 2.7 – Exemplo de malha regular da placa sanduíche

$$\bullet [M_p] = \begin{bmatrix} [I_3] & & & & & & & \\ & [\bar{J}] & & & & & & \\ & & [I_5] & & & & & \\ & & & [\bar{J}] & & & & \\ & & & & [I_5] & & & \\ & & & & & [\bar{J}] & & \\ & & & & & & [I_5] & \\ & & & & & & & [\bar{J}] \\ & & & & & & & & [I_2] \end{bmatrix} \quad \text{é a matriz de transformação das}$$

coordenadas de referencia para as físicas. Esta matriz é diagonal e somente depende dos comprimentos do elemento dado a forma da matriz Jacobiano da equação (2.31).

$$\bullet [\bar{J}] = \begin{bmatrix} \frac{b}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{2} \end{bmatrix}$$

Substituindo a equação (2.32) na (2.29), obtém-se então:

$$\begin{Bmatrix} u_1(\xi, \eta) \\ v_1(\xi, \eta) \\ u_3(\xi, \eta) \\ v_3(\xi, \eta) \\ w(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = [N(\xi, \eta)] \{\delta\} \quad (2.33)$$

onde $[N] = [N_r] * [M_p]$ é a matriz de tamanho (5,28) de interpolação dos cinco deslocamentos nas coordenadas físicas.

2.2.3 Matrizes elementares e globais

Para achar as matrizes elementares e globais, é necessário discretizar primeiro as energias computadas anteriormente. Usando o elemento finito e a malha descritos acima, as energias de deformação e cinéticas podem ser aproximadas da forma seguinte:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{nEF} \Pi_i \quad (2.34a)$$

$$T = \sum_{i=1}^{nEF} T_i \quad (2.34b)$$

sendo nEF o número de elementos finitos e $\Pi_i = \Pi_i^{(1)} + \Pi_i^{(2)} + \Pi_i^{(3)}$ e $T_i = T_i^{(1)} + T_i^{(2)} + T_i^{(3)}$ as energias de deformação e cinéticas do elemento i .

O processo é iniciado com as energias de deformação das camadas elásticas. Através da equação (2.14) da energia de deformação da camada elástica (j) formulada para um elemento i , encontra-se a energia elementar:

$$\Pi_i^{(j)} = \Pi_{m,i}^{(j)} + \Pi_{f,i}^{(j)} \quad (2.35)$$

onde $\Pi_{m,i}^{(j)} = \frac{1}{2} \int_{S_i} E_j h_j \left\{ \varepsilon_{m,i}^{(j)} \right\}^T [A_j] \left\{ \varepsilon_{m,i}^{(j)} \right\} dS$ e $\Pi_{f,i}^{(j)} = \frac{1}{2} \int_{S_i} E_j \frac{h_j^3}{12} \left\{ \varepsilon_{f,i}^{(j)} \right\}^T [A_j] \left\{ \varepsilon_{f,i}^{(j)} \right\} dS$ são respectivamente as participações elementares dos efeitos de membrana e flexão na energia de deformação total.

O próximo passo consiste em aproximar os campos de deformação presentes em $\Pi_{m,i}^{(j)}$ e $\Pi_{f,i}^{(j)}$. Para isso, se substitui a interpolação dos deslocamentos da equação (2.33) nas equações (2.11) para encontrar:

$$\left\{ \varepsilon_{m,i}^{(j)} \right\} = [B_m^{(j)}] \{ \delta_i \} \quad (2.36a)$$

$$\left\{ \varepsilon_{f,i}^{(j)} \right\} = [B_f^{(j)}] \{ \delta_i \} \quad (2.36b)$$

onde

$$[B_m^{(j)}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{u_j}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{\partial N_{v_j}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial N_{u_j}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial N_{v_j}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.37a)$$

$$[B_f] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 N_w}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial^2 N_w}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \\ 2 \frac{\partial^2 N_w}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.37b)$$

sendo N_{u_j} , N_{v_j} e N_w as linhas de tamanho (1,28) da matriz $[N]$ da equação (2.33) correspondente aos respectivos gdl's u_j , v_j e w . As funções $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ e $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ originadas da mudança de variáveis com diferenciação podem ser determinadas ao inverter a matriz Jacobiano da equação (2.31).

Substituindo as equações (2.36a) e (2.36b) nas energias da equação (2.35), são determinadas as duas parcelas de energia:

$$\Pi_{m,i}^{(j)} = \frac{1}{2} \{ \delta_i \}^T [K_m^{(j)}] \{ \delta_i \} \quad (2.38a)$$

$$\Pi_{f,i}^{(j)} = \frac{1}{2} \{ \delta_i \}^T [K_f^{(j)}] \{ \delta_i \} \quad (2.38b)$$

onde

- $[K_m^{(j)}] = E_j h_j \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B_m^{(j)}]^T [A_j] [B_m^{(j)}] |J| d\xi d\eta$ é a matriz de rigidez elementar de tamanho (28,28), associada ao efeito de membrana da camada elástica (j);
- $[K_f^{(j)}] = E_j \frac{h_j^3}{12} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B_f]^T [A_j] [B_f] |J| d\xi d\eta$ é a matriz de rigidez elementar de tamanho (28,28), associada ao efeito de flexão da camada elástica (j).

Nota-se que dado a espessura sendo constante e o material homogêneo, as propriedades E_j e h_j foram fatoradas fora das integrais.

Para a energia cinética elementar das camadas elásticas (j), usa-se a expressão (2.10) para o elemento i tal como:

$$T_i^{(j)} = \frac{1}{2} \int_{S_i} \rho_j h_j (\dot{u}_j^2 + \dot{v}_j^2 + \dot{w}^2) dS \quad (2.39)$$

Substituindo a interpolação da equação (2.33) na equação (2.39) e integrando no elemento de referência da Figura 2.6.a, obtém-se a seguinte expressão:

$$T_i^{(j)} = \frac{1}{2} \left\{ \dot{\delta}_i \right\}^T [M^{(j)}] \left\{ \dot{\delta}_i \right\} \quad (2.40)$$

onde $[M^{(j)}] = \rho_j h_j \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} ([N_{u_j}]^T [N_{u_j}] + [N_{v_j}]^T [N_{v_j}] + [N_w]^T [N_w]) |J| d\xi d\eta$ é a matriz elementar de massa da camada elástica (j), de tamanho (28,28). Dado a homogeneidade do material e a espessura constante, ρ_j e h_j são fatorados da integral.

Para a energia de deformação da camada viscoelástica (2), usa-se a expressão da energia de deformação da equação (2.27) para um elemento i tal como:

$$\Pi_i^{(2)} = \Pi_{m,i}^{(2)} + \Pi_{f,i}^{(2)} + \Pi_{c,i}^{(2)} \quad (2.41)$$

sendo $\Pi_{m,i}^{(2)} = \frac{1}{2} \int_{S_i} G_2 h_2 \left\{ \varepsilon_{m,i}^{(2)} \right\}^T [A'_2] \left\{ \varepsilon_{m,i}^{(2)} \right\} dS$, $\Pi_{f,i}^{(2)} = \frac{1}{2} \int_{S_i} G_2 \frac{h_2}{12} \left\{ \varepsilon_{f,i}^{(2)} \right\}^T [A'_2] \left\{ \varepsilon_{f,i}^{(2)} \right\} dS$ e $\Pi_{c,i}^{(2)} = \frac{1}{2} \int_{S_i} G_2 \frac{1}{h_2} \left\{ \varepsilon_{c,i}^{(2)} \right\}^T [A'_2] \left\{ \varepsilon_{c,i}^{(2)} \right\} dS$ as energias elementares de deformação do elemento i para os efeitos de membrana, flexão e cisalhamento da camada (2).

Substituindo a interpolação da equação (2.33) nos campos de deformação da equação (2.21), estes podem ser aproximados da seguinte forma:

$$\left\{ \varepsilon_{m,i}^{(2)} \right\} = [B_m^{(2)}] \left\{ \delta_i \right\} \quad (2.42a)$$

$$\left\{ \varepsilon_{f,i}^{(2)} \right\} = [B_f^{(2)}] \left\{ \delta_i \right\} \quad (2.42b)$$

$$\left\{ \varepsilon_{c,i}^{(2)} \right\} = [B_c^{(2)}] \left\{ \delta_i \right\} \quad (2.42c)$$

onde

$$[B_m^{(2)}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_{u1}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{u3}}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{d_1}{4} \frac{\partial^2 N_w}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial N_{v1}}{\partial \eta} + \frac{\partial N_{v3}}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{d_1}{4} \frac{\partial^2 N_w}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\partial N_{u1}}{\partial \eta} + \frac{\partial N_{u3}}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} + \left(\frac{\partial N_{v1}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{v3}}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) + \frac{d_1}{2} \frac{\partial^2 N_w}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.43a)$$

$$[B_f^{(2)}] = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial N_{u3}}{\partial \xi} - \frac{\partial N_{u1}}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{d_2}{2} \frac{\partial^2 N_w}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial N_{v3}}{\partial \eta} - \frac{\partial N_{v1}}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{d_2}{2} \frac{\partial^2 N_w}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 \\ \left(\frac{\partial N_{u3}}{\partial \eta} - \frac{\partial N_{u1}}{\partial \eta} \right) \frac{\partial \eta}{\partial y} + \left(\frac{\partial N_{v3}}{\partial \xi} - \frac{\partial N_{v1}}{\partial \xi} \right) \frac{\partial \xi}{\partial x} + d_2 \frac{\partial^2 N_w}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.43b)$$

$$[B_c^{(2)}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ N_{u3} - N_{u1} + \frac{d_3}{2} \frac{\partial N_w}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ N_{v3} - N_{v1} + \frac{d_3}{2} \frac{\partial N_w}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.43c)$$

A interpolação das deformações é então obtida como segue:

$$\{\varepsilon_{i,t}\} = \left\{ \varepsilon_{m,i,t}^{(2)} \right\} + \frac{z}{h_2} \left\{ \varepsilon_{b,i,t}^{(2)} \right\} + \frac{1}{h_2} \left\{ \varepsilon_{c,i,t}^{(2)} \right\} \quad (2.44)$$

Logo, substituindo as equações (2.42a) a (2.42c) nas energias da equação (2.41), as seguintes relações são encontradas:

$$\Pi_{m,i}^{(2)} = \frac{1}{2} G_2 \{\delta_i\}^T [K_m^{(2)}] \{\delta_i\} \quad (2.45a)$$

$$\Pi_{f,i}^{(2)} = \frac{1}{2} G_2 \{\delta_i\}^T [K_f^{(2)}] \{\delta_i\} \quad (2.45b)$$

$$\Pi_{c,i}^{(2)} = \frac{1}{2} G_2 \{\delta_i\}^T [K_c^{(2)}] \{\delta_i\} \quad (2.45c)$$

onde

- $[K_m^{(2)}] = h_2 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B_m^{(2)}]^T [A'_2] [B_m^{(2)}] |J| d\xi d\eta$ é a matriz de rigidez elementar de tamanho (28,28), associada ao efeito de membrana, da camada viscoelástica (2);
- $[K_f^{(2)}] = \frac{h_2}{12} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B_f^{(2)}]^T [A'_2] [B_f^{(2)}] |J| d\xi d\eta$ é a matriz de rigidez elementar de tamanho (28,28), associada ao efeito de flexão, da camada viscoelástica (2);
- $[K_c^{(2)}] = \frac{1}{h_2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [B_c^{(2)}]^T [A'_2] [B_c^{(2)}] |J| d\xi d\eta$ é a matriz de rigidez elementar de tamanho (28,28), associada ao efeito de cisalhamento, da camada viscoelástica (2).

Nota-se que o módulo G_2 foi fatorado fora das matrizes por mais conveniência para os cálculos posteriores.

Para a energia cinética elementar da camada viscoelástica (2), se usa a expressão (2.19) para o elemento i tal como:

$$T_i^{(2)} = \frac{1}{2} \int_{S_i} \rho_2 h_2 (\dot{u}_2^2 + \dot{v}_2^2 + \dot{w}^2) dS \quad (2.46)$$

Substituindo a interpolação da equação (2.33) na equação (2.46) e integrando no elemento de referência da Figura 2.6.a, a energia cinética é obtida como segue:

$$T_i^{(2)} = \frac{1}{2} \left\{ \dot{\delta}_i \right\}^T [M^{(2)}] \left\{ \dot{\delta}_i \right\} \quad (2.47)$$

onde

- $[M^{(2)}] = \rho_2 h_2 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} ([N_{u_2}]^T [N_{u_2}] + [N_{v_2}]^T [N_{v_2}] + [N_w]^T [N_w]) |J| d\xi d\eta$ é a matriz elementar de massa da camada viscoelástica (2), de tamanho (28,28), com ρ_2 e h_2 fatorados da integral
- $[N_{u_2}] = \frac{N_{u_3} + N_{u_1}}{2} + \frac{d_1}{4} \frac{\partial N_w}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x}$
- $[N_{v_2}] = \frac{N_{v_3} + N_{v_1}}{2} + \frac{d_1}{4} \frac{\partial N_w}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$

Uma vez que as matrizes elementares de cada camada foram obtidas, pode-se computar as matrizes elementares para o conjunto das três camadas. Dado que a energia cinética e de deformação de um elemento é a soma das energias elementares de cada camada, as matrizes

elementares do conjunto são determinadas como segue:

$$T_i = T_i^{(1)} + T_i^{(2)} + T_i^{(3)} = \frac{1}{2} \left\{ \dot{\delta}_i \right\}^T [M^{(e)}] \left\{ \dot{\delta}_i \right\} \quad (2.48a)$$

$$\Pi_i = \Pi_i^{(1)} + \Pi_i^{(2)} + \Pi_i^{(3)} = \frac{1}{2} \left\{ \delta_i \right\}^T ([K_e^{(e)}] + G_2 [K_v^{(e)}]) \left\{ \delta_i \right\} \quad (2.48b)$$

onde

- $[M^{(e)}] = [M^{(1)}] + [M^{(2)}] + [M^{(3)}]$ é a matriz elementar de massa
- $[K_e^{(e)}] = [K^{(1)}] + [K^{(3)}]$ é a matriz elementar de rigidez associada a subestrutura puramente elástica, sendo $[K^{(j)}] = [K_m^{(j)}] + [K_f^{(j)}]$ a matriz elementar de rigidez da camada (j)
- $[K_v^{(e)}] = [K_m^{(2)}] + [K_f^{(2)}] + [K_c^{(2)}]$ é a matriz elementar de rigidez associada a subestrutura puramente viscoelástica

Como mencionado na seção 2.2.2, pode-se notar que as matrizes elementares são todas independentes do elemento i dado a malha simples escolhida que simplifica a forma da matriz Jacobiano.

Finalmente, uma vez que todas as matrizes elementares foram obtidas, o próximo passo consiste em montar as matrizes a nível global. Este processo, por ser clássico não é descrito aqui. Entretanto, o mesmo pode ser encontrado em qualquer referência de elementos finitos [58, 59]. Logo, o princípio de Hamilton é aplicado utilizando as aproximações das energias cinéticas e de deformação da placa a nível global para se chegar nas equações de Lagrange. Desta maneira, a equação do movimento em sua forma matricial é encontrada da seguinte forma:

$$[M^{(g)}] \{\ddot{u}_t\} + ([K_e^{(g)}] + G_2 [K_v^{(g)}]) \{u_t\} = \{F_t^{(g)}\} \quad (2.49)$$

onde $[M^{(g)}]$, $[K_e^{(g)}]$ e $[K_v^{(g)}]$ são respectivamente as matrizes globais de massa, de rigidez elástica e rigidez viscoelástica, $\{u_t\}$ é o vetor global de incógnitas nodais a serem determinadas e $\{F_t^{(g)}\}$ o vetor global de forças externas.

Até aqui, a equação do movimento a nível global do sistema no domínio do tempo foi obtida. Porém, o princípio da correspondência elástico-viscoelástico é válido somente no

domínio da frequência (ou de Laplace). Portanto, é necessário passar o sistema de volta para o domínio da frequência ao assumir uma resposta harmônica do tipo $\{u_t\} = \{U\} e^{i\omega t}$ e substituir o módulo G_2 pelo módulo complexo descrito pelas equações (2.7a) e (2.7b). A equação (2.49) se torna então:

$$(-\omega^2 [M^{(g)}] + [K_e^{(g)}] + G(i\omega) [K_v^{(g)}]) \{U\} = \{F\} \quad (2.50)$$

sendo $\{F\}$ a amplitude das forças externas harmônicas.

Pode-se notar na equação do movimento (2.50) a dependência em frequência do módulo complexo $G(i\omega)$. Esta dependência para o cálculo das FRFs via processo direto não traz dificuldades dado que a matriz de rigidez dinâmica já depende da frequência por definição. Entretanto o fato do módulo $G(i\omega)$ ser complexo torna as matrizes complexas e o cálculo pode ser mais demorado. Por outro lado, para problemas de autovalor, a resolução se torna muito mais complexa, uma vez que os autovalores dependem da frequência. Desta maneira, é preciso recorrer a processos iterativos, como descrito em [44]. Isto será visto com mais detalhes no capítulo IV.

Finalmente, fica restando somente a aplicação das condições de contorno para que as análises possam ser realizadas. Como para o processo de montagem das matrizes elementares, esta etapa não será descrita aqui por ser clássica. Além disso, as matrizes globais antes ou após aplicação das condições de contorno terão a mesma notação para não sobrecarregar a escrita.

O modelo de placa sanduíche viscoelástico desenvolvido neste capítulo foi comparado com os modelos equivalentes desenvolvidos em [41] que já foram validados experimentalmente em [60]. Os resultados demonstraram que os modelos são equivalentes, o que comprova a consistência do presente modelo.

2.3 Sistema de interesse industrial

2.3.1 Descrição do sistema

Nesta parte do trabalho, é realizada uma aplicação de caráter industrial utilizando a metodologia de tratamento passivo descrita nas seções anteriores. Esta estrutura, mostrada na Figura 2.8 no referencial global $(O\vec{X}\vec{Y}\vec{Z})$, pode ser entendida como sendo uma parte de fuselagem de uma aeronave. Seu comprimento em Z (direção sem curvatura) é de 0,72m. No plano $(O\vec{X}\vec{Y})$, o raio interno é de 0,938m e o comprimento de arco é de 0,680m. O painel possui quatro enrijecedores na direção Z ao longo de todo o comprimento, que têm comprimento igual a 0,030 m no plano $(O\vec{X}\vec{Y})$. A estrutura é engastada nas quatro bordas, assim como as extremidades dos enrijecedores em $Z = 0$ m e $Z = 0,72$ m. A geometria e a conectividade foram feitas no código comercial Ansys® e são depois importadas no código comercial Matlab® para a computação das matrizes elementares e globais. Qualquer ponto da estrutura M é localizado pelas coordenadas físicas globais (x, y, z) no referencial global $(O\vec{X}\vec{Y}\vec{Z})$.

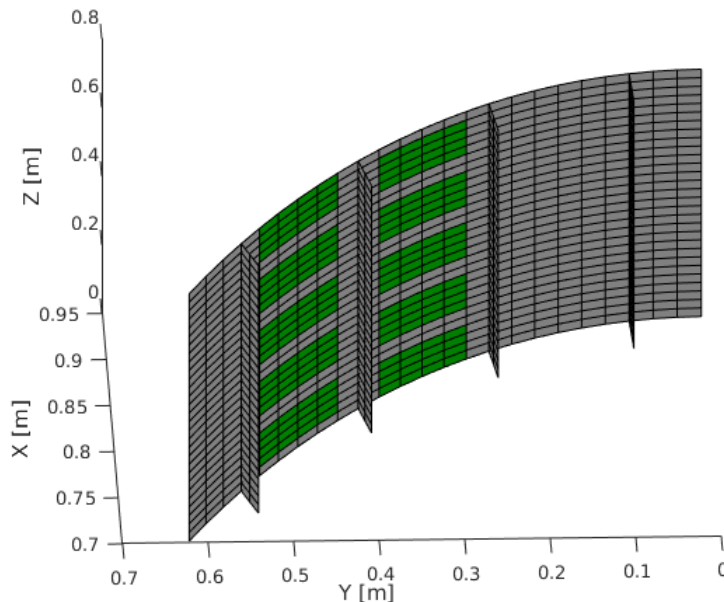


Figura 2.8 – Ilustração do painel aeroelástico curvo tratado parcialmente com camada restrita passiva

A estrutura toda é composta por 928 elementos finitos planos tais como os descritos na seção 2.2. Esta escolha de malha e o número de elementos finitos foi feita de tal forma

que mesmo que o painel possua curvatura, o uso de elementos curvos não é necessário. De fato, desde que a diferença de orientação entre dois elementos planos consecutivos não ultrapasse 15° , a aproximação permanece confiável e equivalente à dos elementos curvos (ver a documentação do elemento shell63 do Ansys® ou [56]).

Por outro lado, o sistema possui um tratamento superficial com material viscoelástico e camada restringente como descrito na seção 2.2, consistindo de 10 áreas tratadas (em verde na Figura 2.8), cada uma formada por 4x4 elementos finitos. As posições destas áreas foram escolhidas de forma a otimizar a redução de energia de deformação modal, como descrito em [41]. Para estes elementos tratados, o elemento finito e as matrizes elementares são os mesmos que os descritos na seção 2.2. Para os elementos não tratados, são utilizadas simplesmente as matrizes elásticas de massa e rigidez da camada (1) segundo as equações (2.38) e (2.40), e somente com os gdl's u_1 , v_1 , w , θ_x e θ_y .

2.3.2 Rotação das matrizes elementares

Analogamente à placa da seção 2.2, os elementos finitos físicos são retangulares. Consequentemente, a matriz Jacobiano mais uma vez não depende das coordenadas dos nós e conserva a forma simples da equação (2.31). Portanto, não é preciso usar um sistema de coordenadas físicas locais (x', y', z') para a computação das matrizes elementares, como também não é necessário definir uma origem para os referenciais locais. No entanto, o que diferencia a estrutura atual da estrutura da seção 2.2 é a geometria 3D com curvatura e a presença de enrijecedores, fazendo com que os elementos finitos não possuem todos a mesma orientação. Consequentemente, o referencial local dos elementos não necessariamente coincide com o referencial global da estrutura. Isto pode ser visto por exemplo na Figura 2.9, na qual o referencial local $(O\vec{x}\vec{y}\vec{z})$ dos elementos da parte curva da estrutura no plano $(O\vec{X}\vec{Y})$ é representado em cor azul, enquanto o referencial global $(O\vec{X}\vec{Y}\vec{Z})$ é de cor vermelha.

Assim, para resolver as futuras análises do sistema, é preciso expressar todas as matrizes elementares no mesmo referencial global. Para conseguir isso, se pega primeiro o exemplo da mudança dos gdl's da parte elástica. A mudança do referencial local (denotado pela notação

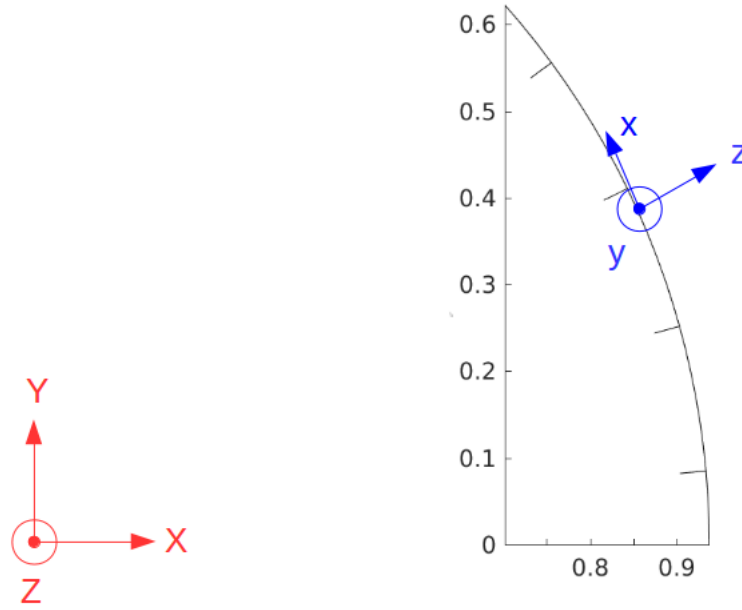


Figura 2.9 – Rerencial local (azul) e global (vermelho) dos elementos do painel curvo

’) para global é então expressa da forma seguinte:

$$\begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ w' \\ \theta'_x \\ \theta'_y \\ \theta'_z \end{Bmatrix} = [\Lambda_1] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w \\ \theta_X \\ \theta_Y \\ \theta_Z \end{Bmatrix} \quad (2.51)$$

sendo

- $[\Lambda_1] = \begin{bmatrix} \Lambda_0 & \\ & \Lambda_0 \end{bmatrix}$ uma matriz diagonal por bloco de tamanho (6,6)
- $[\Lambda_0] = \begin{bmatrix} \cos(\vec{x}, \vec{X}) & \cos(\vec{x}, \vec{Y}) & \cos(\vec{x}, \vec{Z}) \\ \cos(\vec{y}, \vec{X}) & \cos(\vec{y}, \vec{Y}) & \cos(\vec{y}, \vec{Z}) \\ \cos(\vec{z}, \vec{X}) & \cos(\vec{z}, \vec{Y}) & \cos(\vec{z}, \vec{Z}) \end{bmatrix}$ a matriz ortogonal de transformação do referencial local para global constituída pelos cossenos diretores (esta matriz computada para cada elemento é também exportada do Ansys para o Matlab)

Nota-se então a presença do gdl local θ'_z , que normalmente não faz parte da cinemática

usada. Mais explicações sobre este gdl são dadas na seção 2.3.3.

Logo, aplicando este princípio para todos os gdls de um elemento, a matriz elementar de um elemento não tratado pode ser transformada, com o exemplo a matriz de rigidez $[K_e'^{(e)}]$, pela seguinte operação matricial [56]:

$$[K_e^{(e)}] = [\Lambda_e]^T [K_e'^{(e)}] [\Lambda_e] \quad (2.52)$$

sendo $[\Lambda_e] = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & & & \\ & \Lambda_1 & & \\ & & \Lambda_1 & \\ & & & \Lambda_1 \end{bmatrix}$ uma matriz de rotação diagonal por bloco de tamanho (24,24), associada aos elementos não tratados.

Para um elemento tratado, a mudança de referencial é expressa da forma seguinte:

$$\begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ w' \\ \theta'_x \\ \theta'_y \\ \theta'_z \\ u'_3 \\ v'_3 \\ w'_3 \end{Bmatrix} = [\Lambda_2] \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w \\ \theta_X \\ \theta_Y \\ \theta_Z \\ u_3 \\ v_3 \\ w_3 \end{Bmatrix} \quad (2.53)$$

onde $[\Lambda_2] = \begin{bmatrix} \Lambda_0 & & \\ & \Lambda_0 & \\ & & \Lambda_0 \end{bmatrix}$ é uma matriz diagonal por bloco de tamanho (9,9).

Nota-se novamente a presença de um gdl local adicional w'_3 , para o qual o uso será descrito na seção 2.3.3.

Assim, na mesma lógica mostrada acima, para uma matriz elementar de um elemento

tratado, sendo por exemplo a matriz de rigidez $[K_v^{(e)}]$, tem-se:

$$[K_v^{(e)}] = [\Lambda_v]^T [K_v'^{(e)}] [\Lambda_v] \quad (2.54)$$

onde $[\Lambda_v] = \begin{bmatrix} \Lambda_2 & & & \\ & \Lambda_2 & & \\ & & \Lambda_2 & \\ & & & \Lambda_2 \end{bmatrix}$ é uma matriz diagonal por bloco de tamanho (36,36), associada aos elementos tratados.

Portanto, para todas as matrizes elementares desenvolvidas na seção 2.2 o processo de rotação descrito acima deve ser feito antes de poder realizar a montagem ao nível global.

2.3.3 Tratamento dos gdl's fictícios

Notou-se nas equações (2.51) e (2.53) a aparição de novos gdl's locais θ'_z e w'_3 , até agora não usados. A nível global, eles aparecem naturalmente dado a rotação das matrizes, no entanto, estes gdl's adicionais não tem interesse cinemático, já que são desnecessários para descrever o movimento dos elementos a nível local. Porém, pode ser conveniente incluí-los nas matrizes elementares locais para reduzir eventuais problemas numéricos. Por exemplo, quando se analisa uma estrutura do tipo casca como a representada na Figura 2.8, os elementos finitos planos não tem necessariamente a mesma orientação. Entretanto, caso exista elementos coplanares vizinhos, o gdl θ'_z dos nós compartilhados entre estes elementos pode não ser restrito, o que geralmente resulta em uma singularidade da matriz de rigidez [56]. Alguns códigos comerciais como Matlab[®] conseguem reconhecer a singularidade desde que todos os elementos do MEF permanecem no mesmo plano. Porém, assim que ocorrer mudança de referencial, a singularidade pode ser mascarada em função dos erros de arredondamento no processo de rotação das matrizes elementares. Neste caso, ela não é mais reconhecida e ocorrem erros numéricos. Nas FRFs, isto resulta na presença de picos indesejados que podem ser confundidos com picos de ressonâncias, comprometendo a análise (este fenômeno é apresentado no anexo A.2.2. O mesmo fenômeno pode acontecer também com o

gdl w'_3 para elementos tratados por material viscoelástico. Se houver mudança de referencial, este gdl pode ser não restrito ao nível local e criar singularidade.

A primeira ideia para tratar estes problemas seria não incluir estes gdls a nível local para os elementos que podem apresentar instabilidades. No entanto, alguns testes simples mostram que isto não consegue resolver as instabilidades. Uma alternativa que já demonstrou resultados satisfatórios para o gdl θ'_z é a adição de rigidez fictícia. Desta forma, o gdl, geralmente chamado de *drilling dof* [56], possui restrição. Mas esta rigidez fictícia tem que ser pequena o suficiente para não atrapalhar a dinâmica original do sistema. Esta é a ideia que será aplicada neste trabalho. Seguindo os trabalhos feitos por Kanok [61], duas energias de deformação fictícias adicionais são definidas da forma seguinte:

$$\Pi_{\theta_z} = \frac{1}{2} G_1 h_1 \alpha_1 \int_S \theta_z'^2 dS \quad (2.55a)$$

$$\Pi_{w_3} = \frac{1}{2} \frac{E_3}{h_3} \alpha_3 \int_S w_3'^2 dS \quad (2.55b)$$

sendo Π_{θ_z} aplicada para os elementos coplanares, e Π_{w_3} para todos os elementos com tratamento viscoelástico. Os coeficientes α_1 e α_3 são coeficientes arbitrários sem dimensão que têm que ser grandes o suficiente para remover as singularidades numéricas, e pequenos o suficiente para as novas energias não alterarem a dinâmica original. Nestas equações, os gdls θ'_z e w'_3 podem ser interpolados simplesmente por polinômios bilineares de Lagrange da mesma forma do que os gdls de membrana. Mais detalhes sobre as matrizes elementares de rigidez fictícias referentes a estes gdls são disponíveis no anexo A.2.1.

Adicionando as energias (2.55a) e (2.55b), é então possível reduzir a singularidade da matriz de rigidez dinâmica no caso de FRF. Isto pode facilmente ser quantificado ao investigar o valor do número de condicionamento desta última para qualquer frequência analisada. Este número mede a sensibilidade da solução de um sistema de equações lineares em relação à entrada. Portanto, é uma indicação preciosa do quão inversível, ou perto de singular, é a matriz (para mais detalhes sobre este número, ver [62]). Por exemplo, para a estrutura sem tratamento viscoelástico com os parâmetros apresentados na Tabela 2.1, pode-se achar um número de condicionamento normalmente da ordem de 10^{27} , sinônimo de uma matriz altamente não inversível. Porém, quando se adiciona o tratamento sobre o gdl

Tabela 2.1 – Parâmetros da parte elástica para análise de FRF

Espessura h_1	1,2 mm
Módulo de Young E_1	70 GPa
Coefficiente de Poisson ν_1	0,34
Densidade ρ_1	2700 kg/m ³
Banda de frequência	[0; 500]Hz
Numero de pontos	1000

θ'_z com $\alpha_1 = 1.10^{-5}$, este número cai para 10^{11} , o que é um valor satisfatório e comum para MEF. Da mesma forma, para a estrutura parcialmente tratada da Figura 2.8, é possível por exemplo baixar o número de condicionamento de 10^{20} para 10^{11} novamente com $\alpha_3 = 10^{-10}$. Os exemplos e o resultado sobre as FRFs são disponível no anexo A.2.2.

2.3.4 Validação da parte elástica com o Ansys

Nesta seção, realiza-se uma primeira análise para comprovar a consistência do MEF da parte elástica, base da estrutura da Figura 2.8, modelada pela teoria de Kirchhoff. A comparação é feita através de função de resposta em frequência (FRF) com o código comercial Ansys® usando dois tipos de elementos: o Shell63 (elemento de casca 4 nós e 6 gdl) e o Shell181 (versão mais geral do Shell63). Os parâmetros principais são apresentados na Tabela A.1. Lembra-se que a estrutura é engastada nas quatro bordas. Os nós de excitação e visualização escolhidos para a FRF são respectivamente os de coordenadas globais (0,8027;0,4852;0,2979) e (0,7384;0,5785;0,3228) e o gdl excitado e visualizado é o u_1 global (deslocamento na direção X). O coeficiente α_1 de tratamento de gdl fictício θ'_z é definido a 10^{-5} para remover as singularidades numéricas da matriz de rigidez dinâmica. Os resultados são apresentados na Figura 2.10.

Pode-se observar que a FRF obtida pelo Ansys® com o Shell63 é muito próxima do modelo desenvolvido neste trabalho, enquanto a FRF obtida pelo Shell181 já apresenta frequências naturais mais altas. Isto poderia ser explicado pelo fato deste elemento usar a teoria de placa de Mindlin-Reissner (M-R), também conhecida como *First-Order Shear Deformation Theory* [49], que é uma generalização da teoria de viga de Timoshenko ao caso da placa. Nesta teoria, os efeitos de cisalhamento transversal não são mais desprezados, o que é especialmente verdade para espessuras maiores. Porém, para placa fina ($AA/h > 50$), a teoria de M-R pode superestimar a verdadeira rigidez estrutural (ver o exemplo 12.5.1 de

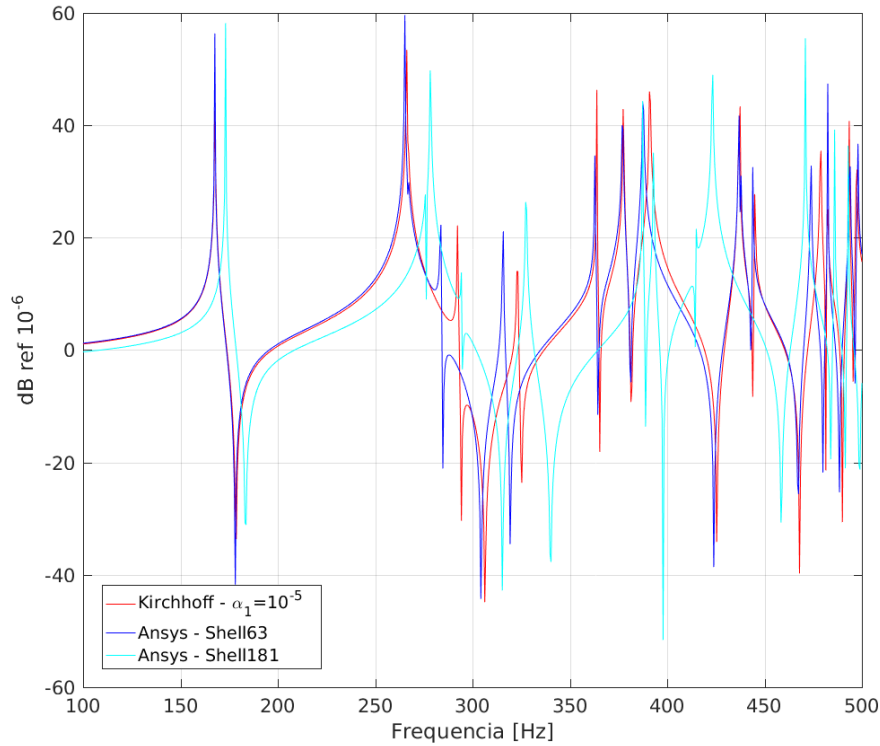


Figura 2.10 – Comparação do MEF desenvolvido com o código Ansys

[57]). Para contornar tal problema, chamado de *shear-locking*, o Shell181 usa uma interpolação mixta para levar em conta as deformações cisalhantes constantes, segundo Bathe [63], no entanto as frequências naturais podem ainda ser superestimadas. Por outro lado, o Shell63 não considera os efeitos de cisalhamento, e é portanto mais próximo do MEF desenvolvido neste trabalho em uma banda de frequência satisfatória, exceto em torno de 300Hz. Esta última discrepância pode estar associada à propriedade não conforme do elemento finito ACM usado, enquanto o Shell63 usa uma combinação de quatro elementos DKT (do inglês *Discrete Kirchhoff Triangle*), segundo [56]. Estes elementos DKT consideram os gdl's w , θ_x e θ_y como independentes, mas impõe restrições cinemáticas entre estes gdl's em alguns pontos específicos dentro do elemento (nos pontos de Gauss por exemplo). Vários exemplos numéricos entre o elemento ACM e uma combinação quadrilateral de elementos DKT, chamada DKQ (do inglês *Discrete Kirchhoff Quadrilateral*), são disponíveis em [56], mostrando na maioria dos casos um erro relativo do ACM menor do que o DKQ para várias malhas testadas. Isto dá portanto mais credibilidade ao MEF desenvolvido neste trabalho do que o Shell63 do Ansys®. Uma alternativa para reduzir esta discrepância seria então de refinar a

malha usada e ver se os modelos convergem para um mesmo valor. Outra explicação possível seria também a modelagem dos enrijecedores que sofrem especialmente flexão no seu plano. Talvez seja necessário uma modelagem mais fiel, o que possivelmente é fornecido pelo Ansys®.

Com respeito à estrutura parcialmente tratada, ou seja o sistema viscoelástico completo da Figura 2.8, nenhuma validação numérica do modelo é feita neste trabalho. De fato, os códigos comerciais ainda não propõem muitas soluções para modelizar comportamento viscoelástico. No Ansys® por exemplo, pode-se modelizar o material viscoelástico com a representação em série de Prony, que usa variáveis internas na forma de soma de funções exponenciais no tempo. Entretanto, é preciso recorrer à ajuste de curva e otimização com muitos parâmetros, mas é uma alternativa interessante a ser realizada.

CAPÍTULO III

MODELAGEM DE SISTEMAS VISCOELÁSTICOS NO DOMÍNIO DO TEMPO

Neste capítulo, é mostrada a estratégia de modelagem dos sistemas viscoelásticos apresentados no capítulo II, segundo o método das derivadas fracionárias evocado na seção 2.1. Para tanto, será empregada uma equação constitutiva na forma da equação (2.3), onde as ordens de derivação α_n e β_n são números fracionários contidos entre 0 e 1.

3.1 Introdução à derivada fracionária

Existem varias definições de derivadas fracionárias, e.g. a derivada fracionária de Riemann-Louville, Caputo, Riesz, Fourier, etc, sendo que todas possuam suas vantagens e desvantagens [64]. Neste trabalho, é empregado o conceito de derivadas fracionárias de Grünwald-Letnikov. Estas derivadas, ao contrário daquelas de ordem inteiro as quais o cálculo exige somente valores vizinhos da função f para um instante t (no caso do tempo), as derivadas fracionárias são operadores não-locais. De fato, a derivada fracionária temporal necessita do histórico de tempo completo para ser computada. Isto significa que o resultado final depende até, para uma definição explícita, do valor mínimo de tempo considerado no intervalo (chamado de terminal menor). Esta não-localidade é responsável pelo efeito de memória conhecido dos materiais viscoelásticos [65], fazendo com que as tensões e deformações no tempo t dependam de todos os instantes de tempo passados. Para a derivada

fracionária espacial, o seu cálculo dependerá da informação da função f para x além dos limites consideradas do sistema, o que pode levar a eventuais problemas numéricos.

Segundo as referências [37, 64, 66], a definição da derivada fracionária de Grünwald-Letnikov (G-L) de uma função f de ordem fracionária ν de terminal menor a é da forma:

$${}_a D_t^\nu f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[(h)^{-\nu} \sum_{j=0}^{\frac{t-a}{h}} A_{j+1} f(t - jh) \right] \quad (3.1)$$

onde $A_{j+1} = \frac{\Gamma(j-\nu)}{\Gamma(-\nu)\Gamma(j+1)}$ são os chamados coeficientes de Grünwald, $\Gamma(\nu)$ é a função Gamma, extensão da função fatorial ao domínio complexo e h é o passo de tempo.

Conforme mencionado em [37], para ν sendo um número inteiro natural, os coeficientes A_{j+1} são todos zero para $j > \nu$. Contudo, se ν é um número fracionário, todos os A_{j+1} são diferentes de zero, ressaltando a propriedade de não-localidade. Além disso, quanto mais longe de um valor inteiro é a ordem ν , mais a derivada fracionária é sensível ao efeitos não-locais, e mais os instantes passados de tempo vão participar ao tempo atual t .

Ao impor $t = 0$ como sendo o primeiro instante de tempo a ser considerado, ou seja $a = 0$, e ao dividir o intervalo de tempo $[0; t]$ em N subintervalos, a equação (3.1) pode ser reformulada como segue:

$${}_0 D_t^\nu f(t) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{t}{N} \right)^{-\nu} \sum_{j=0}^N A_{j+1} f \left(t - j \frac{t}{N} \right) \right] \quad (3.2)$$

Para simplificar os cálculos, é bastante comum aproximar a derivada fracionária da equação (3.2) truncando-a até a ordem $N - 1$ [37], como mostrado pela seguinte relação:

$$[{}_0 D_t^\nu f(t)]_{(N)} = \left(\frac{t}{N} \right)^{-\nu} \sum_{j=0}^{N-1} A_{j+1} f \left(t - j \frac{t}{N} \right) \quad (3.3)$$

o que leva a um erro inerente que pode ser encontrado pelo seguinte coeficiente:

$$R(N, \Delta N) = \frac{[{}_0 D_t^\nu f(t)]_{(N)} - [{}_0 D_t^\nu f(t)]_{(N+\Delta N)}}{[{}_0 D_t^\nu f(t)]_{(N+\Delta N)}} \quad (3.4)$$

No entanto, Schmidt e Gaul [37] demostraram que os coeficientes de Grünwald A_{j+1} ,

que também podem ser reformulados pela relação recursiva,

$$A_1 = 1 \quad (3.5a)$$

$$A_{j+1} = \frac{j-1-\nu}{j} A_j \quad (3.5b)$$

formam uma série que converge para 0 quando j tende a $+\infty$. Isto significa que eventos mais longe no passado $f(t - j\frac{t}{N})$, relacionados aos coeficientes de Grünwlad A_{j+1} para valores de j maiores, se esvanecem com o tempo, ou seja, estes eventos têm uma participação cada vez menor. Consequentemente, a série em (3.5) pode ser truncada para uma ordem menor $N_l \leq N - 1$, o que leva a seguinte truncatura:

$$[{}_0D_t^\nu f(t)]_{(N)} = \left(\frac{t}{N}\right)^{-\nu} \sum_{j=0}^{N_l} A_{j+1} f\left(t - j\frac{t}{N}\right) \quad (3.6)$$

com o seguinte resíduo:

$$E(N, N_l) = \left(\frac{t}{N}\right)^{-\nu} \sum_{j=N_l+1}^{N-1} A_{j+1} f\left(t - j\frac{t}{N}\right) \quad (3.7)$$

A ordem N_l é chamada de comprimento de memória. Sua influência na predição do ponto crítico de flutter será analisada em mais detalhes no capítulo VI.

Observação: como mencionado em [37, 39], a subdivisão do intervalo de tempo $\frac{t}{N}$ na computação das derivadas fracionárias é muitas vezes escolhido como igual ao passo de tempo Δt da integração de Newmark. Portanto, adotando esta ideia, na seguida será assumido $\frac{t}{N} = \Delta t$. Além disso, para a continuidade do desenvolvimento, a notação $\frac{d^\nu f(t)}{dt^\nu} \approx [{}_0D_t^\nu f(t)]_{(N)}$ será implicitamente adotada.

3.2 Placa simples

Nesta seção, é analisado o caso do sistema desenvolvido na seção 2.2, ou seja, a placa sanduíche tratada inteiramente por material viscoelástico com camada restrigente. Porém, ao contrario do desenvolvimento precedente feito no domínio da frequência exclusivamente,

aqui se usa uma abordagem puramente temporal, chamada de *Fractional Derivative Model* (FDM), junto à discretização numérica de Grünwald-Letnikov. Os desenvolvimentos a seguir são principalmente baseados nos trabalhos efetuados por Schmidt e Gaul [37]. Estes foram os primeiros autores que propuseram um modelo FDM no contexto de elementos finitos inteiramente no domínio do tempo (sem passar pelo domínio de Laplace), usando lei constitutiva tridimensional. Além desta representação ser bastante rigorosa, a mesma foi validada experimentalmente segundo um sistema de viga 3D modelizado por elementos finitos. Entretanto, uma de suas desvantagens, como mencionado na seção 1.2.1, reside na computação das tensões a partir do histórico de tensões passadas, o que pode consumir até 80% do tempo total de cálculo do algoritmo original. Neste sentido, uma outra grande contribuição deste trabalho é a proposição de uma versão alternativa do algoritmo do Schmidt e Gaul, fisicamente equivalente porém consideravelmente mais eficiente. Este procedimento será detalhado na seção 3.2.3.

3.2.1 Lei constitutiva do material viscoelástico

O modelo FDM proposto por Schmidt e Gaul, é um modelo de quatro variáveis baseado no modelo unidimensional de Bagley e Torvik [30], que não despreza a derivada fracionária sobre o campo de tensão, ao contrario das abordagens do tipo Kelvin-Voigt fracionário. No caso de uma versão tridimensional, é mais conveniente utilizar uma lei constitutiva representada pela soma das componentes hidroestásticas e deviatóricas, ao invés de aplicar simplesmente a Lei de Hooke generalizada para o caso viscoelástico, sendo esta última mais complexa [67].

Assim, no caso isotrópico com a hipótese de inextensibilidade (ou seja a tensão σ_z e deformação ε_z removidas do problema), a parte deviatórica da lei constitutiva de quatro parâmetros usada é da forma [32, 37, 67]:

$$\{\sigma_d\} + a_d \left\{ \frac{d^{\nu_d} \sigma_d}{dt^{\nu_d}} \right\} = 2G_0 \{\varepsilon_d\} + 2b_d \left\{ \frac{d^{\nu_d} \varepsilon_d}{dt^{\nu_d}} \right\} \quad (3.8)$$

onde $\{\sigma_d\} = [T_d] \{\sigma\}$ e $\{\varepsilon_d\} = [T_d] \{\varepsilon\}$ são, respectivamente, os tensores de tensão e deformação deviatóricos, G_0 é o valor assintótico do módulo complexo da equação (2.7a) em baixa

frequência, a_d e b_d são parâmetros a serem determinados e,

$$[T_d] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Quando se considera que as tensões e deformações são funções harmônicas, a equação (3.8) se torna:

$$(1 + a_d(i\omega)^{\nu_d}) \{\sigma_d^*\} = 2(G_0 + b_d(i\omega)^{\nu_d}) \{\varepsilon_d^*\} \quad (3.10)$$

da qual se pode isolar o módulo de cisalhamento complexo como segue:

$$G^*(i\omega) = \frac{\{\sigma_d^*\}}{2\{\varepsilon_d^*\}} = \frac{G_0 + b_d(i\omega)^{\nu_d}}{1 + a_d(i\omega)^{\nu_d}} \quad (3.11)$$

Da mesma forma, a parte hidroestática da lei constitutiva assume a forma:

$$\{\sigma_h\} + a_h \left\{ \frac{d^{\nu_h} \sigma_h}{dt^{\nu_h}} \right\} = 3K_0 \{\varepsilon_h\} + 3b_h \left\{ \frac{d^{\nu_h} \varepsilon_h}{dt^{\nu_h}} \right\} \quad (3.12)$$

onde $\{\sigma_h\} = [T_h] \{\sigma\}$ e $\{\varepsilon_h\} = [T_h] \{\varepsilon\}$ são os tensores de tensão e deformação hidroestáticos, K_0 é o valor assintótico do módulo de flambagem em baixa frequência, a_h e b_h são parâmetros a serem determinados e,

$$[T_h] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Assumindo uma variação harmônica das tensões e deformações na equação (3.12), chega-se na seguinte expressão:

$$(1 + a_h(i\omega)^{\nu_h}) \{\sigma_h^*\} = 3(K_0 + b_h(i\omega)^{\nu_h}) \{\varepsilon_h^*\} \quad (3.14)$$

do qual se pode isolar o módulo de flambagem complexo da forma:

$$K^*(i\omega) = \frac{\{\sigma_h^*\}}{3\{\varepsilon_h^*\}} = \frac{K_0 + b_h(i\omega)^{\nu_h}}{1 + a_h(i\omega)^{\nu_h}} \quad (3.15)$$

Usando o princípio da correspondência elástica-viscoelástica novamente, pode-se relacionar os dois módulos complexos de cisalhamento e de flambagem no domínio da frequência, ao comparar com o caso elástico:

$$K^*(i\omega) = \frac{2G^*(i\omega)(1 + \nu_2^*(i\omega))}{3(1 - 2\nu_2^*(i\omega))} \quad (3.16)$$

Substituindo a equação (3.11) na equação (3.16), tem-se então:

$$K^*(i\omega) = \frac{2(1 + \nu_2^*(i\omega))}{3(1 - 2\nu_2^*(i\omega))} \frac{G_0 + b_d(i\omega)^{\nu_d}}{1 + a_d(i\omega)^{\nu_d}} \quad (3.17)$$

Observação: novamente, o princípio da correspondência faz intervir o coeficiente de Poisson ν_2^* . No entanto, conforme já salientado na seção 2.2.1, um coeficiente de Poisson real e constante é assumido dado as especificações do material 3M-ISD112™, o que é uma condição sob a qual o princípio permanece válido. Além disso, este último é usado para caracterizar o módulo complexo de flambagem associado à deformação hidroestática, a qual é pouco solicitada em um sistema com camada restringente que força a deformação cisalhante na camada viscoelástica, desta maneira valorizando mais a parcela deviatórica. Portanto, caso existam erros associados ao mau uso do princípio utilizado para se determinar o $K^*(i\omega)$, é preciso lembrar que ele não terá grande influência nos cálculos a seguir.

Assim, considerando que o coeficiente de Poisson ν_2 é constante e igual a 0.49 conforme a especificação, a equação (3.17) se torna:

$$K^*(i\omega) = \frac{2(1 + \nu_2)}{3(1 - 2\nu_2)} \frac{G_0 + b_d(i\omega)^{\nu_d}}{1 + a_d(i\omega)^{\nu_d}} \quad (3.18)$$

e por identificação entre as equações (3.15) e (3.18), pode-se achar as seguintes relações:

$$K_0 = \frac{2(1 + \nu_2)}{3(1 - 2\nu_2)} G_0 \quad (3.19a)$$

$$b_h = \frac{2(1 + \nu_2)}{3(1 - 2\nu_2)} b_d \quad (3.19b)$$

$$\nu_h = \nu_d = \nu \quad (3.19c)$$

$$a_h = a_d \quad (3.19d)$$

Logo, somando as equações (3.8) e (3.12), usando as equações (3.19c) e (3.19d), e lembrando que $\{\sigma\} = \{\sigma_h\} + \{\sigma_d\}$ and $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_h\} + \{\varepsilon_d\}$, obtém-se:

$$\{\sigma\} + a_d \left\{ \frac{d^\nu \sigma}{dt^\nu} \right\} = (3K_0[T_h] + 2G_0[T_d]) \{\varepsilon\} + (3b_h[T_h] + 2b_d[T_d]) \left\{ \frac{d^\nu \varepsilon}{dt^\nu} \right\} \quad (3.20)$$

ou de forma simplificada:

$$\{\sigma\} + a_d \left\{ \frac{d^\nu \sigma}{dt^\nu} \right\} = [C] \{\varepsilon\} + [D] \left\{ \frac{d^\nu \varepsilon}{dt^\nu} \right\} \quad (3.21)$$

onde $[C] = 3K_0[T_h] + 2G_0[T_d]$ e $[D] = 3b_h[T_h] + 2b_d[T_d]$.

Assim, pode-se ver que a lei constitutiva tridimensional da equação (3.21) usando os tensores hidroestásticos e deviatóricos apresenta uma forma bastante simples, enquanto uma generalização da lei de Hooke ao caso viscoelástico seria mais complexa [67].

Por outro lado, como mencionado na seção 2.1, a dependência em frequência do material é traduzida pela presença das derivadas na lei constitutiva da equação (3.21). O que não se pode observar nesta última é a segunda dependência do material em relação à temperatura T_v . Esta dependência é implícita nos coeficientes a_d , b_d e ν do FDM (o G_0 é independente da temperatura segundo [47]). São estes coeficientes que traduzirão a dependência em temperatura, ou seja, tem-se $a_d = a_d(T_v)$, $b_d = b_d(T_v)$ e $\nu = \nu(T_v)$, mas por simplificação da notação, a dependência ficará implícita. Estes parâmetros podem então ser encontrados por ajuste de curvas, como descrito na seção 3.2.2.

3.2.2 Otimização dos parâmetros do FDM

Os parâmetros do FDM a_d , b_d e ν podem ser encontrados pela comparação das curvas dos módulos complexos de cisalhamento representados pelo FDM da equação (3.11) e pelas equações analíticas propostas por Drake e Soovere (2.7a) e (2.7b). Para isto, é realizado um ajuste de curva por otimização dos parâmetros do FDM através de um algoritmo genético. São então usados 10 valores de frequência no intervalo $[0; 500\text{Hz}]$. Como exemplo, para $T_v = 15^\circ\text{C}$ os valores encontrados dos três parâmetros desconhecidos (o G_0 já é conhecido pelas equações analíticas de [47]) são:

- $a_d = 5,2512 \cdot 10^{-4} s^\nu$
- $b_d = 8,6874 \cdot 10^4 N \cdot s^\nu \cdot m^{-2}$
- $\nu = 0,6732$

A comparação das curvas entre o modelo de referência (da equação (2.7)) e o modelo ajustado do FDM é apresentada na Figura 3.1. Pode-se notar que o modelo ajustado (denotado “opt”) quase sobrepõe o modelo de referência (denotado “ref”), o que valida os valores dos parâmetros encontrados para esta temperatura.

3.2.3 MEF segundo o FDM

Nesta seção, será discutido sobre a construção o MEF segundo a abordagem FDM da placa sanduíche da Figura 2.4, no domínio do tempo. Embora esta abordagem seja diferente daquela demonstrada na seção 2.2, muitos aspectos permanecem equivalentes. De fato, o FDM somente vai influir na modelagem da camada viscoelástica (2), portanto as energias e consequentemente as matrizes elementares das camadas elásticas (1) e (3) associadas às equações (2.38) e (2.40) permanecem as mesmas. A energia cinética e, portanto, a matriz de massa de camada viscoelástica (2) descrita pela equação (2.47) não são alteradas. Porém, a expressão da energia de deformação desta última sofrerá alterações, dado que a lei constitutiva neste caso é diferente. Portanto, para encontrar a nova expressão da matriz de rigidez elementar da camada viscoelástica é preciso voltar ao cálculo da energia, descrita pela equação (2.26). Para computar esta energia, é necessário expressar o tensor de tensão

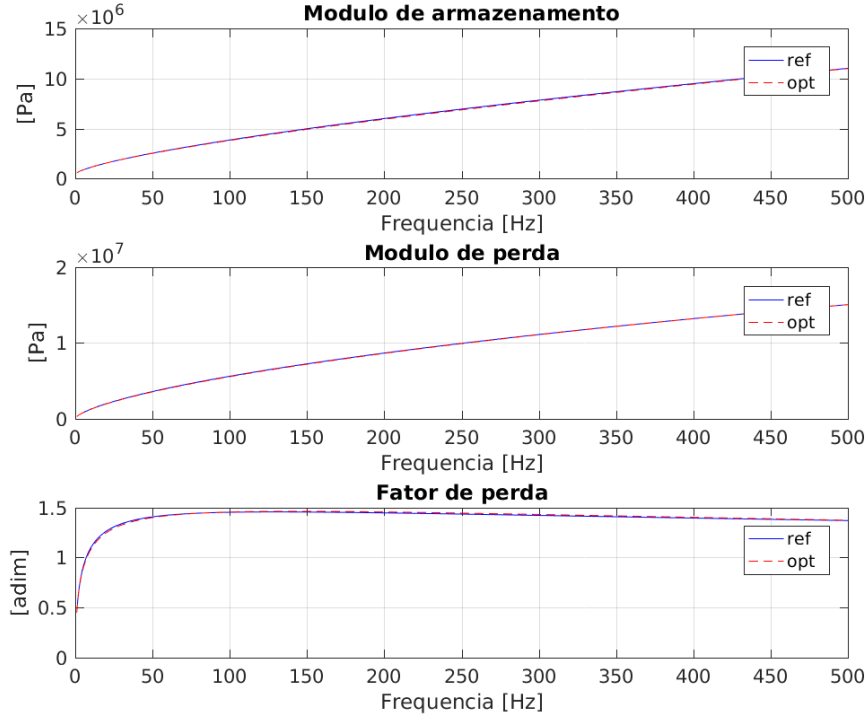


Figura 3.1 – Ajuste de curva para achar os parâmetros do FDM com $T_v = 15^\circ C$

$\{\sigma^{(2)}\}$ em função do tensor de deformação $\{\varepsilon^{(2)}\}$, o qual pode ser interpolado em função dos deslocamentos nodais. Entretanto, dado a complicada forma da lei constitutiva relacionando tensão e deformação da equação (3.21), determinar uma solução analítica para o campo de tensão é bastante complicado. Por isso decide-se aproximar o problema utilizando soluções de integração numérica com o método numérico de Newmark, juntamente com a decomposição das derivadas fracionárias de G-L. Pode-se então encontrar uma aproximação do tensor de tensão num tempo t qualquer. Para isto, é necessário inicialmente substituir a formula genérica da derivada fracionária da equação (3.6) nas derivadas dos tensores de tensão e deformação da equação (3.21). Fazendo isto, é obtido para o tempo t

$$\{\sigma_t^{(2)}\} + a_d (\Delta t)^{-\nu} \sum_{j=0}^{N_l} A_{j+1} \{\sigma_{t-j\Delta t}^{(2)}\} = [C] \{\varepsilon_t^{(2)}\} + [D] (\Delta t)^{-\nu} \sum_{j=0}^{N_l} A_{j+1} \{\varepsilon_{t-j\Delta t}^{(2)}\} \quad (3.22)$$

Dado que $A_1 = 1$ segundo a equação (3.5a), o tensor de tensão ao tempo t da equação (3.22) pode ser fatorado e expresso em relação ao tensor de deformação atual e os tensores

de tensão e deformação passados, da seguinte forma:

$$\left\{ \sigma_t^{(2)} \right\} = \frac{1}{1 + a_d (\Delta t)^{-\nu}} \left(-a_d (\Delta t)^{-\nu} \sum_{j=1}^{N_l} A_{j+1} \left\{ \sigma_{t-j\Delta t}^{(2)} \right\} + ([C] + [D] (\Delta t)^{-\nu}) \left\{ \varepsilon_t^{(2)} \right\} + [D] (\Delta t)^{-\nu} \sum_{j=1}^{N_l} A_{j+1} \left\{ \varepsilon_{t-j\Delta t}^{(2)} \right\} \right) \quad (3.23)$$

Fazendo uso da mesma lógica da decomposição do tensor de deformação em efeitos de membrana, flexão e cisalhamento mostrada na equação (2.21), a tensão da camada viscoelástica será também decomposta nestes três efeitos. Este processo é realizado, pois facilita enormemente a fatoração da dependência em z , simplificando o cálculo da integração da energia de deformação nesta direção. Assim, substituindo a equação (2.21) na equação (3.23) para cada iteração de tempo, é possível decompor o tensor de tensão da forma seguinte:

$$\left\{ \sigma_t^{(2)} \right\} = \left\{ \sigma_{m,t}^{(2)} \right\} + \frac{z}{h_2} \left\{ \sigma_{f,t}^{(2)} \right\} + \frac{1}{h_2} \left\{ \sigma_{c,t}^{(2)} \right\} \quad (3.24)$$

onde

- $\left\{ \sigma_{m,t}^{(2)} \right\} = \frac{1}{1 + a_d (\Delta t)^{-\nu}} \left(-a_d (\Delta t)^{-\nu} \sum_{j=1}^{N_l} A_{j+1} \left\{ \sigma_{m,t-j\Delta t}^{(2)} \right\} + ([C] + [D] (\Delta t)^{-\nu}) \left\{ \varepsilon_{m,t}^{(2)} \right\} + (\Delta t)^{-\nu} [D] \sum_{j=1}^{N_l} A_{j+1} \left\{ \varepsilon_{m,t-j\Delta t}^{(2)} \right\} \right)$ é o tensor de tensão associado ao efeito de membrana da camada viscoelástica (2), no tempo t ;
- $\left\{ \sigma_{f,t}^{(2)} \right\} = \frac{1}{1 + a_d (\Delta t)^{-\nu}} \left(-a_d (\Delta t)^{-\nu} \sum_{j=1}^{N_l} A_{j+1} \left\{ \sigma_{f,t-j\Delta t}^{(2)} \right\} + ([C] + [D] (\Delta t)^{-\nu}) \left\{ \varepsilon_{f,t}^{(2)} \right\} + (\Delta t)^{-\nu} [D] \sum_{j=1}^{N_l} A_{j+1} \left\{ \varepsilon_{f,t-j\Delta t}^{(2)} \right\} \right)$ é o tensor de tensão associado ao efeito de flexão da camada viscoelástica (2), no tempo t ;
- $\left\{ \sigma_{c,t}^{(2)} \right\} = \frac{1}{1 + a_d (\Delta t)^{-\nu}} \left(-a_d (\Delta t)^{-\nu} \sum_{j=1}^{N_l} A_{j+1} \left\{ \sigma_{c,t-j\Delta t}^{(2)} \right\} + ([C] + [D] (\Delta t)^{-\nu}) \left\{ \varepsilon_{c,t}^{(2)} \right\} + (\Delta t)^{-\nu} [D] \sum_{j=1}^{N_l} A_{j+1} \left\{ \varepsilon_{c,t-j\Delta t}^{(2)} \right\} \right)$ é o tensor de tensão associado ao efeito de cisalhamento da camada viscoelástica (2), no tempo t .

É possível agora computar a energia de deformação da camada viscoelástica em qualquer tempo t ao substituir a expressão do tensor de tensão da equação (3.24) na equação (2.26).

Contudo, isto pode ser feito somente através da discretização por elementos finitos, dado que a deformação somente será conhecida nos elementos através da interpolação nodal.

Assim, substituindo as interpolações das deformações das equações (2.42a), (2.42b) e (2.42c) na equação (3.24), é possível computar o tensor de tensão elementar decomposto nos três efeitos da forma seguinte:

$$\{\sigma_{i,t}\} = \{\sigma_{m,i,t}^{(2)}\} + \frac{z}{h_2} \{\sigma_{f,i,t}^{(2)}\} + \frac{1}{h_2} \{\sigma_{c,i,t}^{(2)}\} \quad (3.25)$$

onde

- $\{\sigma_{m,i,t}^{(2)}\} = \frac{1}{1+a_d(\Delta t)^{-\nu}} \left(-a_d (\Delta t)^{-\nu} \sum_{j=1}^{N_l} A_{j+1} \{\sigma_{m,i,t-j\Delta t}^{(2)}\} + \right.$
 $\left. ([C] + [D] (\Delta t)^{-\nu}) [B_m^{(2)}] \{\delta_{i,t}\} + (\Delta t)^{-\nu} [D] \sum_{j=1}^{N_l} A_{j+1} [B_m^{(2)}] \{\delta_{i,t-j\Delta t}\} \right)$ é o tensor de tensão do elemento i , associado ao efeito de membrana da camada viscoelástica (2), no tempo t ;
- $\{\sigma_{f,i,t}^{(2)}\} = \frac{1}{1+a_d(\Delta t)^{-\nu}} \left(-a_d (\Delta t)^{-\nu} \sum_{j=1}^{N_l} A_{j+1} \{\sigma_{f,i,t-j\Delta t}^{(2)}\} + \right.$
 $\left. ([C] + [D] (\Delta t)^{-\nu}) [B_f^{(2)}] \{\delta_{i,t}\} + (\Delta t)^{-\nu} [D] \sum_{j=1}^{N_l} A_{j+1} [B_f^{(2)}] \{\delta_{i,t-j\Delta t}\} \right)$ é o tensor de tensão do elemento i , associado ao efeito de flexão da camada viscoelástica (2), no tempo t ;
- $\{\sigma_{c,i,t}^{(2)}\} = \frac{1}{1+a_d(\Delta t)^{-\nu}} \left(-a_d (\Delta t)^{-\nu} \sum_{j=1}^{N_l} A_{j+1} \{\sigma_{c,i,t-j\Delta t}^{(2)}\} + \right.$
 $\left. ([C] + [D] (\Delta t)^{-\nu}) [B_c^{(2)}] \{\delta_{i,t}\} + (\Delta t)^{-\nu} [D] \sum_{j=1}^{N_l} A_{j+1} [B_c^{(2)}] \{\delta_{i,t-j\Delta t}\} \right)$ é o tensor de tensão do elemento i , associado ao efeito de cisalhamento da camada viscoelástica (2), no tempo t .

A partir desta etapa, Schmidt e Gaul propuseram substituir o tensor de tensão da equação (3.25) na integral da energia de deformação elementar. Porém, pode-se notar na equação (3.25) que desta maneira a tensão atual depende não somente do deslocamento atual e deslocamentos passados, como também de todas as tensões passadas. Portanto, esta estratégia obriga a guardar as tensões elementares passadas, computar as tensões atuais, e integrar esforços viscoelásticos para cada iteração de tempo e cada elemento. Este procedimento

é altamente oneroso computacionalmente, pois pode levar a praticamente 80% de todo o tempo de cálculo. Para evitar isto, é proposto neste trabalho uma alternativa que simplifica a expressão da tensão atual, e a torna função somente dos deslocamentos. Desta forma, não é mais preciso guardar um histórico de tensão, e mais importante do que isso, nenhuma tensão a mais é computada. Além disso, o processo de integração dos esforços viscoelásticos (que serão descrito mais adiante) pode ser feito fora da integração do Newmark, o que já leva a uma redução drástica do tempo computacional.

Para isto, é preciso então determinar a relação entre tensão atual e deslocamento. Esta relação pode ser encontrada ao adotar uma abordagem recursiva. Focando primeiro sobre no efeito de membrana e introduzindo as seguintes notações:

$$[D_1] = \frac{-a_d(\Delta t)^{-\nu}}{1 + a_d(\Delta t)^{-\nu}} [I_5] \quad (3.26a)$$

$$[D_2] = \frac{1}{1 + a_d(\Delta t)^{-\nu}} ([C] + [D] (\Delta t)^{-\nu}) \quad (3.26b)$$

$$[D_3] = \frac{(\Delta t)^{-\nu}}{1 + a_d(\Delta t)^{-\nu}} [D] \quad (3.26c)$$

onde $[I_5]$ é a matriz identidade de ordem 5, o tensor de tensão da camada (2) associada ao efeito de membrana do elemento i ao tempo t se torna:

$$\left\{ \sigma_{m,i,t}^{(2)} \right\} = [D_1] \sum_{j=1}^{N_l} A_{j+1} \left\{ \sigma_{m,i,t-j\Delta t}^{(2)} \right\} + [D_2] [B_m^{(2)}] \left\{ \delta_{i,t} \right\} + [D_3] \sum_{j=1}^{N_l} A_{j+1} [B_m^{(2)}] \left\{ \delta_{i,t-j\Delta t} \right\} \quad (3.27)$$

Assumindo que o sistema estava em repouso para $t = 0$ desde um tempo grande o suficiente (considerando o efeito de memória) para que $\{\sigma_{m,i,0}\} = 0$ e $\{\varepsilon_{m,i,0}\} = 0$ para todos os elementos i , é possível escrever para a primeira iteração com $t = \Delta t$ que a tensão vale:

$$\left\{ \sigma_{m,i,\Delta t}^{(2)} \right\} = [\beta_1] [B_m^{(2)}] \left\{ \delta_{i,\Delta t} \right\} \quad (3.28)$$

onde $[\beta_1] = [D_2]$.

Para a próxima iteração de tempo $t = 2\Delta t$, aplicando a fórmula geral da equação (3.26),

o tensor de tensão assume a forma:

$$\left\{ \sigma_{m,i,2\Delta t}^{(2)} \right\} = A_2[D_1] \left\{ \sigma_{m,i,\Delta t}^{(2)} \right\} + [D_2] [B_m^{(2)}] \{ \delta_{i,2\Delta t} \} + A_2[D_3] [B_m^{(2)}] \{ \delta_{i,\Delta t} \} \quad (3.29)$$

Na equação (3.29), pode-se notar que o tensor de tensão atual depende do tensor anterior. Assim, ao substituir a equação (3.28) na equação (3.29), chega-se na seguinte expressão:

$$\left\{ \sigma_{m,i,2\Delta t}^{(2)} \right\} = A_2[D_1][\beta_1] [B_m^{(2)}] \{ \delta_{i,\Delta t} \} + [D_2] [B_m^{(2)}] \{ \delta_{i,2\Delta t} \} + A_2[D_3] [B_m^{(2)}] \{ \delta_{i,\Delta t} \} \quad (3.30)$$

Reagrupando os termos que multiplicam os mesmos instantes de tempo, tem-se então:

$$\left\{ \sigma_{m,i,2\Delta t}^{(2)} \right\} = [\beta_1] [B_m^{(2)}] \{ \delta_{i,2\Delta t} \} + [\beta_2] [B_m^{(2)}] \{ \delta_{i,\Delta t} \} \quad (3.31)$$

onde $[\beta_2] = A_2[D_1][\beta_1] + A_2[D_3]$

Para a próxima iteração $t = 3\Delta t$, aplicando a fórmula geral da equação (3.26), o tensor de tensão fica da forma:

$$\begin{aligned} \left\{ \sigma_{m,i,3\Delta t}^{(2)} \right\} = & [D_1] \left(A_2 \left\{ \sigma_{m,i,2\Delta t}^{(2)} \right\} + A_3 \left\{ \sigma_{m,i,\Delta t}^{(2)} \right\} \right) + \\ & [D_2] [B_m^{(2)}] \{ \delta_{i,3\Delta t} \} + \\ & [D_3] \left(A_2 [B_m^{(2)}] \{ \delta_{i,2\Delta t} \} + A_3 [B_m^{(2)}] \{ \delta_{i,\Delta t} \} \right) \end{aligned} \quad (3.32)$$

Substituindo as equações (3.28) e (3.31) na equação (3.32), tem-se:

$$\begin{aligned} \left\{ \sigma_{m,i,3\Delta t}^{(2)} \right\} = & [D_1] \left(A_2 \left([\beta_1] [B_m^{(2)}] \{ \delta_{i,2\Delta t} \} + [\beta_2] [B_m^{(2)}] \{ \delta_{i,\Delta t} \} \right) + \right. \\ & \left. A_3 [\beta_1] [B_m^{(2)}] \{ \delta_{i,\Delta t} \} \right) + \\ & [D_2] [B_m^{(2)}] \{ \delta_{i,3\Delta t} \} + \\ & [D_3] \left(A_2 [B_m^{(2)}] \{ \delta_{i,2\Delta t} \} + A_3 [B_m^{(2)}] \{ \delta_{i,\Delta t} \} \right) \end{aligned} \quad (3.33)$$

Expandindo então a equação (3.33) a reagrupando os termos com os mesmos instantes

de tempo, o tensor de tensão se torna:

$$\left\{ \sigma_{m,i,3\Delta t}^{(2)} \right\} = [\beta_1] [B_m^{(2)}] \{ \delta_{i,3\Delta t} \} + [\beta_2] [B_m^{(2)}] \{ \delta_{i,2\Delta t} \} + [\beta_3] [B_m^{(2)}] \{ \delta_{i,\Delta t} \} \quad (3.34)$$

onde $[\beta_3] = A_2[D_1][\beta_2] + A_3[D_1][\beta_1] + A_3[D_3]$.

Assim, prosseguindo da mesma forma para as próximas iterações de tempo, pode-se facilmente expressar o tensor de tensão em qualquer tempo em relação aos deslocamentos atual e passados. A relação recursiva para qualquer iteração é expressa da forma:

$$\left\{ \sigma_{m,i,t}^{(2)} \right\} = \sum_{j=0}^{N_l} [\beta_{j+1}] [B_m^{(2)}] \{ \delta_{i,t-j\Delta t} \} \quad (3.35)$$

onde as matrizes recursivas $[\beta_{j+1}]$ são determinadas como segue:

$$[\beta_1] = [D_2] \quad (3.36a)$$

$$[\beta_{j+1}] = A_{j+1}[D_3] + \sum_{l=1}^j \left(A_{l+1}[D_1][\beta_{j+1-l}] \right) \quad \forall j \geq 1 \quad (3.36b)$$

Aplicando a mesma lógica para os efeitos de flexão e cisalhamento, obtém-se:

$$\left\{ \sigma_{f,i,t}^{(2)} \right\} = \sum_{j=0}^{N_l} [\beta_{j+1}] [B_f^{(2)}] \{ \delta_{i,t-j\Delta t} \} \quad (3.37a)$$

$$\left\{ \sigma_{c,i,t}^{(2)} \right\} = \sum_{j=0}^{N_l} [\beta_{j+1}] [B_c^{(2)}] \{ \delta_{i,t-j\Delta t} \} \quad (3.37b)$$

Assim, é possível expressar a tensão em função somente do deslocamento, para qualquer tempo t . O cômputo da energia de deformação do elemento i será bastante simplificada ao usar esta última expressão. Por definição, esta energia é computada como segue:

$$\Pi_{i,t}^{(2)} = \frac{1}{2} \int_{V_i} \{ \varepsilon_{i,t} \}^T \{ \sigma_{i,t} \} dV \quad (3.38)$$

Substituindo as equações (2.44) e (3.25) na equação (3.38), expandindo o resultado e integrando sobre $z \in [-h/2; h/2]$, a energia de deformação do elemento i pode-ser mais uma

vez decomposta entre os três efeitos

$$\Pi_{i,t}^{(2)} = \Pi_{m,i,t}^{(2)} + \Pi_{f,i,t}^{(2)} + \Pi_{c,i,t}^{(2)} \quad (3.39)$$

onde

- $\Pi_{m,i,t}^{(2)} = \frac{1}{2} h_2 \int_{S_i} \{\varepsilon_{m,i,t}\}^T \{\sigma_{m,i,t}\} dS$
- $\Pi_{f,i,t}^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{h_2}{12} \int_{S_i} \{\varepsilon_{f,i,t}\}^T \{\sigma_{f,i,t}\} dS$
- $\Pi_{c,i,t}^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{h_2} \int_{S_i} \{\varepsilon_{c,i,t}\}^T \{\sigma_{c,i,t}\} dS$

A partir daqui, o processo de desenvolvimento é feito somente para o efeito de membrana, já que a lógica é a mesma para qualquer um dos três efeitos. Assim, substituindo as equações (2.42a) e (3.35) na energia de deformação de membrana da equação (3.39), ela se torna:

$$\Pi_{m,i,t}^{(2)} = \frac{1}{2} h_2 \{\delta_{i,t}\}^T \int_{S_i} [B_m^{(2)}]^T \sum_{j=0}^{N_i} [\beta_{j+1}] [B_m^{(2)}] dS \{\delta_{i,t-j\Delta t}\} \quad (3.40)$$

Logo, invertendo os operadores de integral e soma que são lineares e limitados neste caso, tem-se

$$\Pi_{m,i,t}^{(2)} = \frac{1}{2} \{\delta_{i,t}\}^T \sum_{j=0}^{N_i} h_2 [I_{m,i,j+1}] \{\delta_{i,t-j\Delta t}\} \quad (3.41)$$

onde

$$[I_{m,i,j+1}] = \int_{S_i} [B_m^{(2)}]^T [\beta_{j+1}] [B_m^{(2)}] dS \quad (3.42)$$

é uma matriz de tamanho (28,28) que depende do efeito (m , f ou c), do elemento i , e dos instantes passados j .

Para simplificar o cálculo da integral da equação (3.42), muda-se a integração para o elemento de referência da Figura 2.6.a. A integral pode ser avaliada então da seguinte forma:

$$[I_{m,j+1}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_m^{(2)}]^T [\beta_{j+1}] [B_m^{(2)}] |J| d\xi d\eta \quad (3.43)$$

Observa-se na equação (3.43) que, já que a matriz Jacobiano é constante para a malha escolhida da placa da Figura 2.7, a matriz $[I_{m,j+1}]$ é também independente do elemento, o que simplifica bastante os cálculos posteriores.

Prosseguindo na mesma lógica para os efeitos de flexão e cisalhamento, obtém-se:

$$\Pi_{f,i,t}^{(2)} = \frac{1}{2} \{\delta_{i,t}\}^T \sum_{j=0}^{N_l} \frac{h_2}{12} [I_{f,j+1}] \{\delta_{i,t-j\Delta t}\} \quad (3.44a)$$

$$\Pi_{c,i,t}^{(2)} = \frac{1}{2} \{\delta_{i,t}\}^T \sum_{j=0}^{N_l} \frac{1}{h_2} [I_{c,j+1}] \{\delta_{i,t-j\Delta t}\} \quad (3.44b)$$

onde

$$[I_{f,j+1}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_f^{(2)}]^T [\beta_{j+1}] [B_f^{(2)}] |J| d\xi d\eta \quad (3.45a)$$

$$[I_{c,j+1}] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [B_c^{(2)}]^T [\beta_{j+1}] [B_c^{(2)}] |J| d\xi d\eta \quad (3.45b)$$

Finalmente, somando as energias de deformação $\Pi_{m,i,t}^{(2)}$, $\Pi_{f,i,t}^{(2)}$ and $\Pi_{c,i,t}^{(2)}$, a energia de deformação total da camada viscoelástica (2) pode ser calculada como segue:

$$\Pi_{i,t}^{(2)} = \frac{1}{2} \{\delta_{i,t}\}^T \sum_{j=0}^{N_l} [I_{j+1}] \{\delta_{i,t-j\Delta t}\} \quad (3.46)$$

onde $[I_{j+1}] = h_2 [I_{m,j+1}] + \frac{h_2}{12} [I_{f,j+1}] + \frac{1}{h_2} [I_{c,j+1}]$.

Dado que $[\beta_1] = [D_2]$, a energia de deformação do elemento i pode ser reorganizada da seguinte forma:

$$\Pi_{i,t}^{(2)} = \frac{1}{2} \{\delta_{i,t}\}^T [K^{(2)}] \{\delta_{i,t}\} - \frac{1}{2} \{\delta_{i,t}\}^T \{s_i\} \quad (3.47)$$

onde

- $[K^{(2)}] = h_2 [I_{m,1}] + \frac{h_2}{12} [I_{f,1}] + \frac{1}{h_2} [I_{c,1}]$ é a matriz de rigidez associada à parte elástica do material viscoelástico
- $\{s_i\} = -\sum_{j=1}^{N_l} [I_{j+1}] \{\delta_{i,t-j\Delta t}\}$ é o vetor das forças viscoelásticas de tamanho (28,1) relacionado ao efeito memória do material. Pode-se ver que ele depende dos deslocamentos passados até o último guardado na memória, justificado pela soma de 1 até N_l . Esses esforços são adicionados ao lado direito da equação do movimento e considerados como forças externas de “amortecimento” aplicadas em cada um dos nós dos elementos tratados.

A energia de deformação das três camadas é então determinada somando as três matrizes de rigidez elementares como segue:

$$\Pi_{i,t} = \frac{1}{2} \{\delta_{i,t}\}^T [K^{(e)}] \{\delta_{i,t}\} - \frac{1}{2} \{\delta_{i,t}\}^T \{s_i\} \quad (3.48)$$

onde $[K^{(e)}] = [K^{(1)}] + [K^{(2)}] + [K^{(3)}]$ é a matriz de rigidez elementar da subestrutura puramente elástica no caso do FDM.

A continuidade do desenvolvimento do MEF é clássica, consistindo em montar as matrizes e vetor de forças elementares para o nível global, e aplicar as equações de Lagrange usando as energias cinéticas e de deformação globais para encontrar a equação do movimento global, a qual possui a seguinte forma:

$$[M^{(g)}] \{\ddot{u}_t\} + [K^{(g)}] \{u_t\} = \{F_t^{(g)}\} + \{s^{(g)}\} \quad (3.49)$$

onde $[K^{(g)}]$ é a matriz de rigidez global puramente elástica no caso do FDM, $[M^{(g)}]$ é a mesma matriz de massa representada na equação (2.49),

$$\{s^{(g)}\} = \sum_{j=1}^{N_l} [I_{j+1}^{(g)}] \{u_{t-j\Delta t}\} \quad (3.50)$$

é o vetor global de esforços viscoelásticos onde $[I_{j+1}^{(g)}]$ é a matriz global advinda da matriz elementar $[I_{j+1}]$ da equação (3.46).

A equação do movimento (3.49) é depois resolvida por integração numérica de Newmark (para mais detalhes sobre o esquema numérico, ver [58]). Neste método, as forças viscoelásticas $\{s^{(g)}\}$ são computadas a cada nova iteração de tempo usando a equação (3.50). Como mencionado anteriormente, uma das principais vantagens desta nova versão do algoritmo de Schmidt e Gaul é que o processo de integração destas forças é feito fora da integração do Newmark e guardado em memória nas matrizes $[I_{j+1}^{(g)}]$, o que reduz consideravelmente os gasto computacionais.

3.3 Sistema industrial

Para o painel aeronáutico parcialmente tratado representado na Figura 2.8, o procedimento de construção do MEF é similar ao da seção 3.2.3. No entanto, é necessário realizar a rotação das matrizes elementares da seção 2.3.2, antes da montagem a nível global. E da mesma forma que na seção 2.3, torna-se imprescindível tratar os gdl's fictícios locais θ'_z e w'_3 que aparecem no processo de rotação. Sem este tratamento, a matriz de rigidez efetiva da integração do Newmark [58] pode se tornar singular pelas mesmas razões. Isto faz com que a resposta temporal obtida divirja com o tempo, sinônimo de um sistema instável. Portanto, adicionar as mesmas energias de deformação fictícias das equações (2.55a) e (2.55b) ajuda a reduzir consideravelmente o número de condicionamento da matriz de rigidez efetiva, possibilitando torná-la inversível. Consequentemente, todas as matrizes e vetor de esforços elementares são de tamanho (36,36) e (36,1).

CAPÍTULO IV

MODELAGEM DE SISTEMAS AEROVISCOELÁSTICOS

Neste capítulo, a teoria aerodinâmica aplicada a placas e painéis curvos contendo tratamentos viscoelásticos por camadas restritas passivas é introduzida dando seguimento aos desenvolvimentos descritos nos capítulos II e III. Através da teoria do Pistão, um carregamento aerodinâmico supersônico/hipersônico é gerado em forma matricial e introduzido nos respectivos modelos de elementos finitos dos sistemas viscoelásticos. As instabilidade aeroelásticas das estruturas em questão serão analisadas tanto no domínio frequencial quanto no domínio temporal.

4.1 Teoria aerodinâmica

A teoria aerodinâmica usada neste trabalho para representar o efeito do escoamento de ar sobre as estruturas viscoelásticas desenvolvidas é a conhecida teoria do Pistão, introduzida inicialmente por Lighthill [68]. Trata-se de uma abordagem amplamente difundida para determinar as características do flutter de painéis aeronáuticos [69–73]. Segundo esta teoria, a pressão aerodinâmica gerada por um escoamento de ar supersônico/hipersônico sobre um lado da placa (do outro lado o ar permanece estagnado) pode ser descrita de maneira geral tal como proposto por Ashley [70]

$$\frac{P}{P_\infty} = \left[1 + \frac{\gamma_{ar} - 1}{2a_\infty} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right]^{\frac{2\gamma_{ar}}{\gamma_{ar} - 1}} \quad (4.1)$$

sendo P_∞ a pressão não perturbada (pressão distante do sistema), a_∞ a velocidade do som, γ_{ar} a razão entre os calores específicos do ar ($\approx 1,4$) e U_∞ a velocidade do escoamento não perturbado. A direção do escoamento é determinada pela variável em relação a qual é derivado o deslocamento w na equação (4.1) (neste caso é a direção x).

A equação (4.1) pode ser expandida em série, onde a ordem desta expansão determinará o grau de não linearidade da teoria do Pistão adotada. Neste trabalho, usa-se a versão mais simples da teoria do Pistão linear que já é suficiente para prever a ocorrência de flutter painel para as duas estruturas de interesse. Entretanto, caso o objetivo do trabalho seja a determinação dos deslocamentos e por consequência o ciclo limite da estrutura, faz-se necessário uma abordagem não linear. Deste forma, a variação de pressão se torna [71]

$$P - P_\infty = \frac{2q}{\beta} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \zeta \frac{\partial w}{\partial t} \right] \quad (4.2)$$

sendo $q = \frac{1}{2}\rho_a U_\infty^2$ a pressão dinâmica, ρ_a a densidade do ar, $\beta = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$ e $\zeta = \frac{M_\infty^2 - 2}{M_\infty^2 - 1} \frac{1}{U_\infty}$ onde M_∞ é o número de Mach.

Nesta última equação, a derivada em relação ao tempo é responsável pelo amortecimento aerodinâmico. Na literatura, este termo é muitas vezes desprezado por ter pouca influência [69]. Entretanto, neste trabalho o amortecimento aerodinâmico será considerado no intuito de se obter um sistema aeroviscoelástico mais completo.

O trabalho gerado pela pressão aerodinâmica é então computado da seguinte forma:

$$\begin{aligned} W &= - \int_S (P - P_\infty) w \, dS \\ &= - \int_S \frac{2q}{\beta} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \zeta \frac{\partial w}{\partial t} \right] w \, dS \end{aligned} \quad (4.3)$$

Este trabalho, sendo não conservativo, é adicionado ao lado direto da equação do movimento através das equações de Lagrange, atuando então como uma força externa adicional. Vê-se que ele, além de depender da velocidade do escoamento U_∞ , depende também do deslocamento transversal w . Esta dependência das forças externas com o deslocamento, e o deslocamento com as forças induz o sistema a uma condição tal que, ao invés de dissipar energia a estrutura aumenta seu estado energético ao extrair energia do escoamento. Este

processo pode continuar até o movimento da estrutura apresentar um movimento harmônico e logo um amortecimento positivo resultando em oscilações divergentes. A velocidade em que isto ocorre é dado o nome de velocidade crítica de flutter. A partir deste ponto, a instabilidade gerada torna o sistema autoexcitado [3].

A teoria do Pistão é aplicada para um escoamento supersônico, ou até hipersônico, o que define $M_\infty = 1$ como sendo o limite inferior de validade de teoria. No entanto, muitos autores afirmam que o verdadeiro limite inferior é em torno de $M_\infty = 1,7$ [72, 74, 75], fato que soa bastante coerente, uma vez que o parâmetro ζ exige a condição $M_\infty \geq \sqrt{2}$ para ser definido.

Por outro lado, a versão da teoria do Pistão da equação (4.2) vale para painel plano. Para painel curvo como o apresentando nas seções 2.3 e 3.3, é geralmente preciso um ajuste da teoria, como mencionado no trabalho do Krumhaar [76]. Porém, neste trabalho, a geometria curva do painel industrial foi aproximada somente por elementos planos, cuja quantidade foi escolhida grande o suficiente para evitar o uso de elementos finitos curvos para representar a dinâmica estrutural. Consequentemente, o ajuste desenvolvido por Krumhaar, mesmo que necessário, não pode ser aplicado a estes elementos planos. Além disso, se a direção do fluxo é imposta como sendo na direção sem curvatura do painel (ou seja y local na Figura 2.9), este reajuste não é mais necessário.

4.2 Introdução no modelo de elementos finitos

Os esforços aerodinâmicos são introduzidos nos modelos desenvolvidos nos capítulos II e III, através do princípio de Hamilton, ao computar o trabalho virtual elementar. Usando a equação (4.3), este trabalho virtual pode ser expresso da seguinte forma:

$$\delta W_i = - \int_{S_i} \frac{2q}{\beta} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \zeta \frac{\partial w}{\partial t} \right] \delta w dS \quad (4.4)$$

Passando a integral no elemento de referência da Figura 2.6.a e substituindo a interpolação do deslocamento transversal w da equação (2.33) na equação (4.4), pode-se decompor

o trabalho virtual elementar em duas partes:

$$\delta W_i = -\lambda \{\delta \delta_i\}^T [A_r^{(e)}] \{\delta_i\} - \gamma \{\delta \delta_i\}^T [A_a^{(e)}] \{\dot{\delta}_i\} \quad (4.5)$$

sendo

- $[A_r^{(e)}] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N_w]^T \left[\frac{\partial N_w}{\partial x} \right] |J| d\xi d\eta$ a matriz de rigidez aerodinâmica elementar. Esta matriz não é simétrica nem antissimétrica.
- $[A_a^{(e)}] = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N_w]^T [N_w] |J| d\xi d\eta$ a matriz de amortecimento aerodinâmico elementar,
- $\lambda = \frac{2q}{\beta}$ a pressão aerodinâmica
- $\gamma = \lambda \zeta$ um parâmetro associado ao amortecimento aerodinâmico

Nota-se na equação (4.5) que os parâmetros aerodinâmicos foram fatorados das matrizes por não dependerem do espaço. Vê-se também que as matrizes aerodinâmicas não dependem do elemento no caso da placa, dado que a matriz Jacobiana também é constante. Para o painel curvo, já que nem todos os elementos têm necessariamente o mesmo comprimento, estas matrizes podem variar.

Logo, prossegue-se com as etapas de rotação das matrizes (somente para o painel curvo), a montagem das matrizes ao nível global, e equações de Lagrange como feito nos capítulos II e III. As novas matrizes aerodinâmicas globais $[A_r^{(g)}]$ e $[A_a^{(g)}]$ por multiplicarem os deslocamentos nodais podem ser colocadas do lado esquerdo da equação do movimento global. No domínio da frequência a equação (2.50) assume a seguinte forma:

$$(-\omega^2 [M^{(g)}] + i\omega\gamma [A_a^{(g)}] + [K_e^{(g)}] + G(i\omega) [K_v^{(g)}] + \lambda [A_r^{(g)}]) \{U\} = \{F\} \quad (4.6)$$

e no domínio do tempo a equação (3.49) se torna:

$$[M^{(g)}] \{\ddot{u}_t\} + \gamma [A_a^{(g)}] \{\dot{u}_t\} + ([K^{(g)}] + \lambda [A_r^{(g)}]) \{u_t\} = \{F_t^{(g)}\} + \{s^{(g)}\} \quad (4.7)$$

As equações do movimento (4.6) e (4.7) representam finalmente os sistemas aerovisco-

elásticos completos.

4.3 Predição do flutter

4.3.1 Na frequência

A busca do flutter de painel aeronáutico no domínio da frequência é clássica, consistindo em computar o problema de autovalor do sistema para vários valores de velocidade do escoamento do ar. A velocidade crítica é a velocidade a partir da qual um dos fatores de amortecimentos modais se torna positivo. Para sistemas aeroelásticos conservativos, isto corresponde à coalescência de dois modos. Entretanto, na presença de material viscoelástico esta coalescência não necessariamente acontece [14], provavelmente devido ao amortecimento envolvido. Portanto, somente os fatores de amortecimentos modais podem prever a instabilidade. O problema de autovalor associado à equação (4.6) é definido como segue:

$$(p^2 [M^{(g)}] + p\gamma [A_a^{(g)}] + [K_e^{(g)}] + G(p) [K_v^{(g)}] + \lambda [A_r^{(g)}]) \{\phi\} = \{0\} \quad (4.8)$$

Devido à presença do amortecimento aerodinâmico, a equação (4.8) é um caso particular de problema de autovalor quadrático (PAQ) [77]. Para resolvê-lo no caso geral é preciso linearizar a equação (4.8) passando-a no espaço de estado, e resolver o novo problema de autovalor linear correspondente de ordem $2N$ (onde N é a ordem do problema original quadrático). Portanto, não há outra possibilidade de solução a não ser dobrar a ordem do sistema, o que necessariamente deixa o tempo de computação maior.

Por outro lado, uma desvantagem e outra dificuldade trazida pelo material viscoelástico é a dependência do sistema com a frequência para uma dada temperatura de operação fixa, que pode ser vista na equação (4.8) através do módulo complexo $G(i\omega)$. De fato, as frequências naturais são obtidas através dos autovalores, porém os autovalores dependem das matrizes globais que dependem da frequência, o que sugere a adoção de um processo iterativo sobre as frequências naturais que, infelizmente, também aumenta em muito os gastos computacionais. Além disso, o problema se torna obrigatoriamente complexo, o que também deixa a resolução mais demorada.

Finalmente, uma última dificuldade é que o problema é não auto-adjunto. De fato, devido à presença da matriz de rigidez aerodinâmica $[A_r^{(g)}]$, a matriz $p^2 [M^{(g)}] + p\gamma [A_a^{(g)}] + [K_e^{(g)}] + G(p) [K_v^{(g)}] + \lambda [A_r^{(g)}]$ não é mais simétrica, o que obriga a usar outros algoritmos de resolução de problema de autovalor que são mais lentos (utilizar uma decomposição QZ, chamada também de decomposição geral de Schur, em vez da clássica decomposição de Cholesky).

Todas estas dificuldades tornam a predição do flutter muito cara em termos de tempo computacional, e justifica o uso de técnicas de redução de modelos (que serão propostas no capítulo V). O princípio de busca desta instabilidade na frequência, resumido na Figura 4.1, é o seguinte:

Algoritmo 1

1. Computa-se as matrizes globais do MEF, define-se um intervalo ΔU com N_i velocidades de valor U_i , o número N_j de frequências naturais ω_j para avaliar, uma temperatura T_v e uma tolerância tol .
2. Para uma velocidade U_i , realiza-se o processo iterativo sobre cada uma das frequências naturais ω_j .
3. O processo iterativo sobre a frequência natural ω_j consiste nas seguintes etapas
 - Chutar um valor dela inicial ω_0 , por exemplo $\omega_0 = 0$
 - Computar o valor do módulo complexo $G(p)$ para este valor de frequência, ou seja $G(p) = G(\omega_0, T_v)$
 - Resolver o problema de autovalor quadrático da equação (4.8), através do qual é extraído o novo valor de frequência ω_j
 - Se o erro relativo deste novo valor em relação ao chute ω_0 não for inferior a tolerância tol , computar novamente o problema de autovalor com $\omega_0 = \omega_j$
 - Repetir estas etapas até chegar na tolerância imposta
4. Analisar a próxima frequência natural tal como $j = j + 1$

5. Prosseguir com a próxima velocidade de escoamento tal como $i = i + 1$

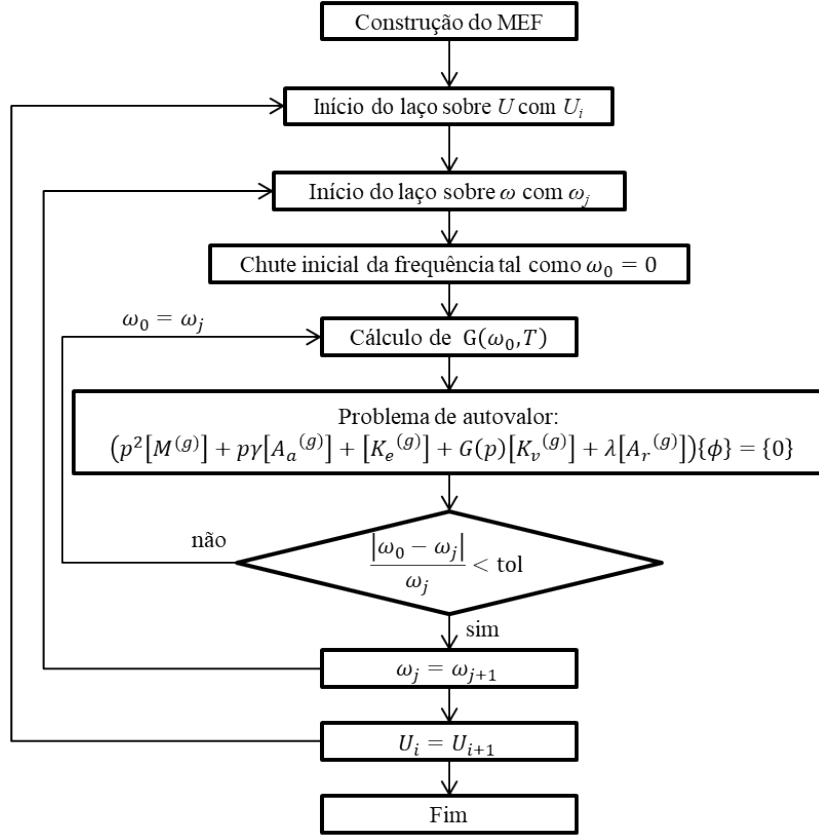


Figura 4.1 – Fluxograma da resolução do flutter na frequência

4.3.2 No tempo

No que se refere a painéis aeronáuticos exclusivamente no domínio do tempo, vastos são os trabalhos que visam determinar as velocidades críticas e até caracterizar o ciclo limite destas estruturas em flutter [71, 78–81]. Entretanto, quando aplicado algum tipo de controle de vibração, o volume de trabalhos publicados no domínio do tempo diminuem consideravelmente, principalmente quando o tipo de controle for passivo via utilização de material viscoelástico. Para sistemas aeroviscoelásticos, as poucas análises de flutter disponíveis na literatura são feitas exclusivamente no domínio de Laplace ou da frequência [18, 19]. Um único trabalho de flutter usando a abordagem FDM no domínio do tempo foi aplicado para um sistema representado por uma bandeira [17]. Portanto, uma das contribuições deste trabalho é a proposição de uma metodologia para a análise de flutter no domínio do tempo de

sistemas aeroviscoelásticos. Esta é uma alternativa interessante do ponto de vista da análise do flutter, pois serve de comparação com os resultados obtidos pela abordagem na frequência, a qual pode apresentar eventuais erros numéricos devido à complexidade do problema a ser resolvido (problema de autovalor quadrático complexo, não auto-adjunto e dependente de frequência e temperatura).

Por definição, um sistema instável é caracterizado por uma resposta que diverge com o tempo quando perturbado da sua posição de equilíbrio. Mais precisamente, a velocidade crítica de flutter pode ser encontrada identificando a velocidade para a qual o movimento é puramente harmônico, ou seja, nem amortecido e nem divergente. Isto corresponde a pelo menos um fator de amortecimento modal nulo. Para determinar esta velocidade, aplica-se o princípio apresentado na Figura 4.2 que consiste nas seguintes etapas:

Algoritmo 2

1. Construir as matrizes $[M^{(g)}]$, $[A_a^{(g)}]$, $[K^{(g)}]$ e $[A_r^{(g)}]$ da equação (4.7) para uma temperatura T_v . Construir as N_l matrizes recursivas $[I_{j+1}^{(g)}]$ para o futuro cálculo das forças viscoelásticas $\{s^{(g)}\}$ segundo a equação (3.49). Criar uma força de excitação externa (do tipo impulso). Definir um intervalo grosseiro ΔU contendo N_i velocidades U_i (ter certeza de que a velocidade crítica se encontra dentro do intervalo);
2. Laço 1: Para cada velocidade U_i de ΔU , computar a resposta transiente pela integração numérica de Newmark (para cada U_i tem-se um laço sobre o tempo da integração do Newmark, e para cada iteração de tempo tem-se o laço sobre j para computar as forças viscoelásticas $\{s^{(g)}\}$, ou seja, existem três laços em cadeia neste nível do algoritmo);
3. A partir das respostas obtidas no laço 1, criar o intervalo refinado $[U_l; U_h]$ no qual U_l e U_h são respectivamente as velocidades consecutivas para as quais o sistema ainda está convergindo e depois divergindo;
4. Laço 2 : Dentro deste intervalo refinado, buscar o fator de amortecimento igual a zero ao aplicar o princípio de dicotomia de seguinte forma:

- (a) Computar a resposta transiente para a velocidade $U^* = \frac{U_h + U_l}{2}$.
- (b) Realizar o teste do movimento harmônico: vários máximos de amplitudes são avaliados em um trecho no meio do sinal e comparados com os máximos no fim do sinal. Se a diferença relativa entre a média destes dois conjuntos for menor que uma tolerância, determina-se que o movimento é harmônico, logo determina-se a velocidade crítica $U^* = U_c$. Caso contrário, prossegue com a próxima etapa.
- (c) Se a resposta para U^* converge, então o novo intervalo de velocidade é $[U_l; U_h]$ onde $U_l = U^*$. Senão o novo intervalo é $[U_l; U_h]$ onde $U_h = U^*$.
5. Repetir estas etapas até chegar na tolerância imposta.

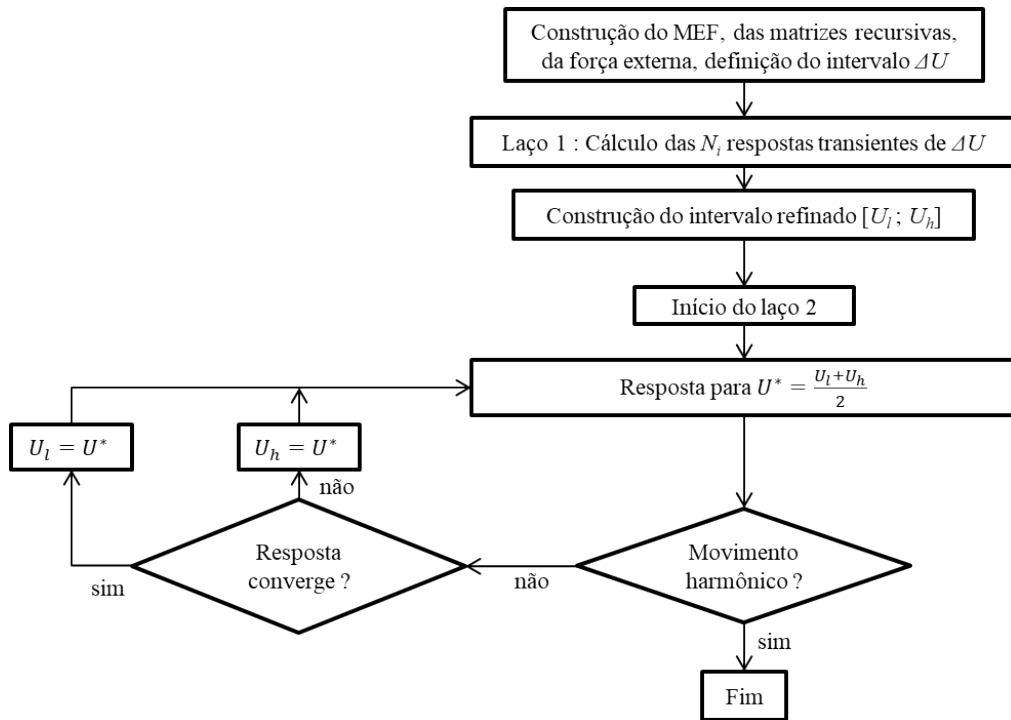


Figura 4.2 – Fluxograma da resolução do flutter no tempo

Aplicando o princípio descrito acima, pode-se determinar a velocidade crítica de flutter, tanto do sistema puramente elástico quanto do sistema aeroviscoelástico. É um princípio simples, mas, dependendo dos parâmetros usados para a integração de Newmark (passo de tempo, intervalo de tempo) e do comprimento de memória N_l do FDM, pode aumentar bastante o tempo de predição, especialmente no caso do painel industrial. Isto mais uma

vez motiva o uso de métodos de redução de modelos, sendo considerada esta também, mais uma contribuição advinda com o desenvolvimento deste trabalho.

CAPÍTULO V

REDUÇÃO DE MODELOS

Neste capítulo, apresenta-se uma nova metodologia de redução aplicada a sistemas aeroviscoelásticos com o propósito de prever a instabilidade aeroelástica de flutter nos domínios da frequência e do tempo. O objetivo é reduzir tempo da cálculo da análise de flutter, que é extremamente onerosa do ponto de vista computacional, afim de torná-la viável mesmo para sistemas aerelásticos de interesse industrial. Outro objetivo, além de reduzir o tempo de cálculo é reproduzir da maneira mais fiel possível o comportamento do sistema original (ou sistema completo), ou seja, fornecer uma aproximação de alta precisão.

5.1 Na frequência

Como demonstrado na seção 4.3.1, o princípio da busca da instabilidade de flutter é um processo complexo e demorado para se obter uma solução. Isto se torna ainda mais crítico para estruturas industriais de grande escala e com geometria complexa. No entanto, os correspondentes gastos computacionais podem ser reduzidos ao assumir que a resposta do sistema completo de ordem N da equação (4.6) pode ser aproximada da seguinte forma:

$$\{U\} \simeq \{\tilde{U}\} = [T]\{\eta\} \quad (5.1)$$

onde $[T]$ é uma base de redução de tamanho (N, N_R) onde $N_R \ll N$ e $\{\eta\}$ é o vetor de coordenadas generalizadas. Fala-se então que a solução completa é projetada em um subespaço gerado por uma família de vetores $\{T_i\}_{i=1..N_R}$.

Ao substituir a equação (5.1) na equação (4.6) e pré-multiplicar por $[T]^T$, obtém-se a seguinte equação do sistema aeroviscoelástico reduzido:

$$\left(-\omega^2 [M^{(r)}] + i\omega\gamma [A_a^{(r)}] + [K_e^{(r)}] + G(i\omega) [K_v^{(r)}] + \lambda [A_r^{(r)}]\right) \{\eta\} = \{F^{(r)}\} \quad (5.2)$$

onde $[M^{(r)}] = [T]^T [M^{(g)}] [T]$, $[K_e^{(r)}] = [T]^T [K_e^{(g)}] [T]$, $[K_v^{(r)}] = [T]^T [K_v^{(g)}] [T]$, $[A_r^{(r)}] = [T]^T [A_r^{(g)}] [T]$, $[A_a^{(r)}] = [T]^T [A_a^{(g)}] [T]$ e $\{F^{(r)}\} = [T]^T \{F^{(g)}\}$ são, respectivamente, as matrizes reduzidas de massa, rigidez elástica, rigidez viscoelástica, rigidez aerodinâmica e amortecimento aerodinâmico de tamanho (N_R, N_R) e o vetor reduzido de forças externas de tamanho $(N_R, 1)$.

Nota-se que a equação do movimento passou de uma ordem N a uma ordem consideravelmente menor N_R , o que leva a uma redução significativa nos tempos de cálculos para as análises de FRF ou de autovalores. Porém, isto somente é relevante se a qualidade da aproximação da solução completa for aceitável. Esta condição é satisfeita se a base de redução escolhida conseguir representar o real comportamento dinâmico da estrutura. Portanto, a escolha dos vetores compondo esta base é obviamente a etapa mais delicada do processo de redução.

Geralmente, para sistemas dinâmicos contendo amortecimento estrutural ou viscoso, uma base de redução composta pelos autovetores do sistema conservativo associado é uma escolha relativamente confiável para reduzir o modelo completo, já que as matrizes são constantes [27]. Contudo, para sistemas aeroviscoelásticos como o representado pela equação (5.2), a construção da base $[T]$ é mais complicada, devido à dependência do sistema com a frequência e a temperatura. Portanto, a proposição de uma base eficiente neste caso é um desafio. No entanto, uma primeira proposta consiste em uma base simples $[\Phi_0]$, criada pelos modos normais obtidos da seguinte equação:

$$\left(-\omega^2 [M^{(g)}] + [K_0^{(g)}]\right) \{U\} = \{F\} \quad (5.3)$$

sendo $[K_0^{(g)}] = [K_e^{(g)}] + G_0 [K_v^{(g)}]$ a matriz de rigidez estrutural associada ao comportamento assintótico de baixa frequência e $G_0 = G(\omega_0, T_v)$ o módulo complexo em baixa frequência (ou seja $\omega_0 = 0$). Dado que para esta frequência, o comportamento do material viscoelástico é puramente elástico, a matriz $[K_0^{(g)}]$ é real.

Esta foi a estratégia abordada por Shin et al. [16]. Porém, esta base não considera de forma alguma a dependência do sistema com a frequência e a temperatura, nem a alteração do comportamento dinâmico trazido pelos efeitos aerodinâmicos. Em [82], Cunha et al. mostraram que esta base $[\Phi_0]$ é efetivamente insuficiente para representar corretamente o sistema completo original. Entretanto, partindo desta, o Método de Ritz Enriquecido (ERM) inicialmente proposto por de Lima et al. [27] pode ser facilmente adaptado neste trabalho. Ele tem a vantagem de evitar a solução de problema de autovalor quadrático complexo não-adjunto e dependente da frequência que exige um custo computacional considerável. O método ERM propõe enriquecer a base inicial $[\Phi_0] = [\phi_1 \ \phi_2 \ \dots \ \phi_{N_R}]$ com resíduos estáticos de forças externas $\{R_b\} = [K_0^{(g)}]^{-1} \{b\}$ (sendo $\{b\}$ um vetor de força estático composto exclusivamente de 0 exceto no gdl a ser excitado onde o valor vale 1), resíduos estáticos de forças viscoelásticas $\{R_v\} = [K_0^{(g)}]^{-1} [K_v^{(g)}] [\Phi_0]$ e resíduos estáticos de forças aerodinâmicas $\{R_a\} = [K_0^{(g)}]^{-1} [A_r^{(g)}] [\Phi_0]$. Assim, a nova base enriquecida do ERM é da forma:

$$[T_{ERM}] = \begin{bmatrix} \Phi_0 & R_b & R_v & R_a \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

No entanto, como será mostrado neste trabalho, a base $[T_{ERM}]$ não é capaz de representar fielmente as modificações provocadas pela aerodinâmica do sistema, apesar de conseguir aproximar as respostas dinâmicas de um sistema puramente viscoelástico com uma precisão considerável [27]. Assim, é necessário propor uma base de redução mais eficiente para determinar a velocidade crítica de flutter do sistema aeroviscoelástico completo.

Outra base que será avaliada neste trabalho, chamada de método Multi Modelo Enriquecido (EMM) e baseada nos desenvolvimentos feitos por Balmès et al. [22], foi também criada originalmente para aproximar o comportamento de sistemas viscoelásticos. A ideia principal deste método reside no fato de considerar a alteração do comportamento dinâmico do sistema com a frequência ao fornecer informações modais para frequências mais elevadas.

Neste contexto, no trabalho de Balmès et. al. [22], são computados os subespaços de autovetores advindo dos problemas de autovalor para os quais o módulo complexo é definido tal como $G(\omega_{min}, T_v)$ e $G(\omega_{max}, T_v)$, onde $\omega_{min} = 0$ e ω_{max} são os extremos da banda de frequência avaliada. No caso aeroviscoelástico do presente trabalho, propõe-se adaptar as ideias de Balmès et al. adicionando pelo menos a parcela de rigidez aerodinâmica no problema de autovalor (a adição do amortecimento nestes problemas de autovalores preliminares geralmente não mostrou influência alguma). A formulação é reescrita da seguinte forma:

$$(-\omega^2 [M^{(g)}] + [K_e^{(g)}] + G(i\omega) [K_v^{(g)}] + \lambda [A_r^{(g)}]) \{\phi\} = \{0\} \quad (5.5)$$

A equação (5.5) é avaliada para os dois extremos de frequência com $G(i\omega_{min})$ e $G(i\omega_{max})$ e o parâmetro λ é definido grande o suficiente para fornecer mudanças significativas dos modos normais associadas aos efeitos aerodinâmicos do problema. O ideal seria impor exatamente o λ crítico, porém como esta é a solução final do problema, a mesma não é conhecida por definição. Portanto, a base do método multi-modelo enriquecido (EMM) é determinada aqui da seguinte forma

$$[T_{EMM}] = \begin{bmatrix} \Phi_0 & \Phi_{\omega_{max}} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

Nota-se que, apesar de ser necessário resolver dois problemas de autovalores, a vantagem deste método em relação ao método ERM é que, obtêm-se uma base dinamicamente mais rica, uma vez que informações da alteração do comportamento dinâmico para frequências e pressão aerodinâmica altas é adicionada. Além disto, o fato de estar resolvendo um problema de autovalor não quadrático simples (não há presença de amortecimento aerodinâmico) e independente da frequência é mantida. Em contrapartida, o ponto fraco do método é que é necessário resolver um segundo problema de autovalor que é desta vez complexo e não auto-adjunto, o que consequentemente pode aumentar os gastos computacionais para sistema de grande escala. Além disso, o parâmetro λ da equação (5.5) pode ter muita influência sobre a precisão da redução, e um valor ótimo deste último pode ser difícil de encontrar.

Um terceiro método usado neste trabalho, chamado de Método de Ritz Enriquecido

Iterativo (IERM), se baseia nos desenvolvimentos de Balmès et al. [23, 24] cujo propósito é reduzir modelos de elementos finitos de estruturas amortecidas acoplados com fluidos incompressíveis. Como o sistema é dependente da frequência, os autores propõem uma base de redução fundamentada com autovetores advindos do problema conservativo $[\Phi_0]$ e a enriquecem com informações dinâmicas do problema aeroviscoelástico completo da equação (4.6). A inserção de autovetores com informações dinâmicas é feita através de um processo iterativo pelo qual valores específicos de frequência são utilizados. Estes valores correspondem aos autovalores associados aos autovetores da base $[\Phi_0]$. O processo iterativo é regido por um critério baseado na energia de deformação do sistema. É importante salientar que a adaptação feita do método de Balmès et al. para o caso aeroviscoelástico a seguir é a inclusão de diferentes velocidades no método iterativo de construção da base, fato que enriquece a base não somente com informações puramente dinâmicas, com também fornece características aerodinâmicas necessárias.

O algoritmo de construção da base iterativa é resumido na Figura 5.1 e explicado passo-a-passo na sequência.

Algoritmo 3

1. Computação da base inicial $[\Phi_0]$ do sistema conservativo associado segundo a equação (5.3). Desta base inicial, são utilizados somente os N_R primeiros autovetores (modo de corpo rígido incluídos) e as N_R primeiras frequências naturais ω_k (removendo os modos de corpo rígido). Define-se também uma tolerância tol , uma temperatura T_v , um vetor de excitação $\{b\}$, e um intervalo de velocidade grosseiro $\Delta\bar{U}$ contendo N_R velocidades U_k que deve respeitar os limites de validade da teoria aerodinâmica e conter a velocidade crítica a ser determinada (geralmente se pega o mesmo $\Delta\bar{U}$ do que o ΔU do algoritmo 1). Inicializa-se a base de redução tal como $[T_{IERM}] = [\Phi_0]$.
2. Inicia-se o laço variando k de 1 até N_R : Para cada k , computa-se a matriz de rigidez dinâmica $[Z] = \left(-\omega_k^2 [M^{(g)}] + [K_e^{(g)}] + G(i\omega_k, T_v) [K_v^{(g)}] + \lambda_k [A_r^{(g)}] \right)$ onde $\lambda_k = \frac{2q_k}{\beta_k}$ depende da velocidade U_k . Define-se então um erro inicial $\varepsilon = 1 \leq tol$

- (a) Inicia-se o segundo laço sobre o erro ε , com a computação da matriz de rigidez dinâmica reduzida $[Z^{(r)}] = [T_{IERM}]^T Z [T_{IERM}]$
 - (b) Computa-se a resposta dinâmica reduzida $\{\eta\} = [Z^{(r)}]^{-1} [T_{IERM}]^T \{b\}$ e a aproximação da resposta completa correspondente $\{\tilde{U}\} = [T_{IERM}]\{\eta\}$
 - (c) Computa-se o resíduo de força devido ao erro de aproximação tal como $\{R_f\} = [Z]\{\tilde{U}\} - \{b\}$
 - (d) Logo computa-se o resíduo estático de deslocamento associado a este resíduo de força tal como $\{R_d\} = [K_0^{(g)}]^{-1} \{R_f\}$
3. Computa-se então o novo erro comparando as energias de deformação do resíduo e da aproximação tal como $\varepsilon = \frac{\{R_d\}^T [K_0^{(g)}] \{R_d\}}{\{\tilde{U}\}^T [K_0^{(g)}] \{\tilde{U}\}}$. Se este erro for menor do que a tolerância tol , volta-se na etapa 2 com a próxima iteração $k = k + 1$. Senão as partes reais e imaginária do atual resíduo de deslocamento $\{R_d\}$ são adicionadas à base $[T_{IERM}]$, esta é depois ortogonalizada para manter a base de posto cheio (do inglês *full-rank*), e volta-se na etapa 2.a com a nova base atualizada.

Observa-se primeiro que a alteração do comportamento dinâmico devido aos efeitos viscoelásticos e aerodinâmicos é levada em consideração através da mudança dos parâmetros ω_k e λ_k dentro da matriz de rigidez dinâmica do sistema completo. Vê-se que estes dois últimos possuem o mesmo índice k , fazendo com que os dois efeitos são de certa forma associados. No caso ideal, teria que dissociar os mesmos usando então dois índices diferentes. No entanto, para simplificar a implementação, somente um índice k é utilizado.

Por outro lado, pode ser visto no algoritmo da Figura 5.1 que, a cada iteração k , mais de um resíduo pode estar adicionado à base dependendo do erro ε . Portanto, a ordem da base final pode se tornar maior do que a ordem da base do método ERM por exemplo. Este fato faz com que os cálculos com a base IERM sejam relativamente mais caros. Porém com este processo iterativo usando resíduos estáticos de deslocamentos baseados no critério da energia de deformação, a aproximação demonstra uma qualidade consideravelmente superior, fato que será demonstrado no capítulo VI. Além disso, como para os outros métodos, a base conserva a vantagem de permanecer constante uma vez construída.

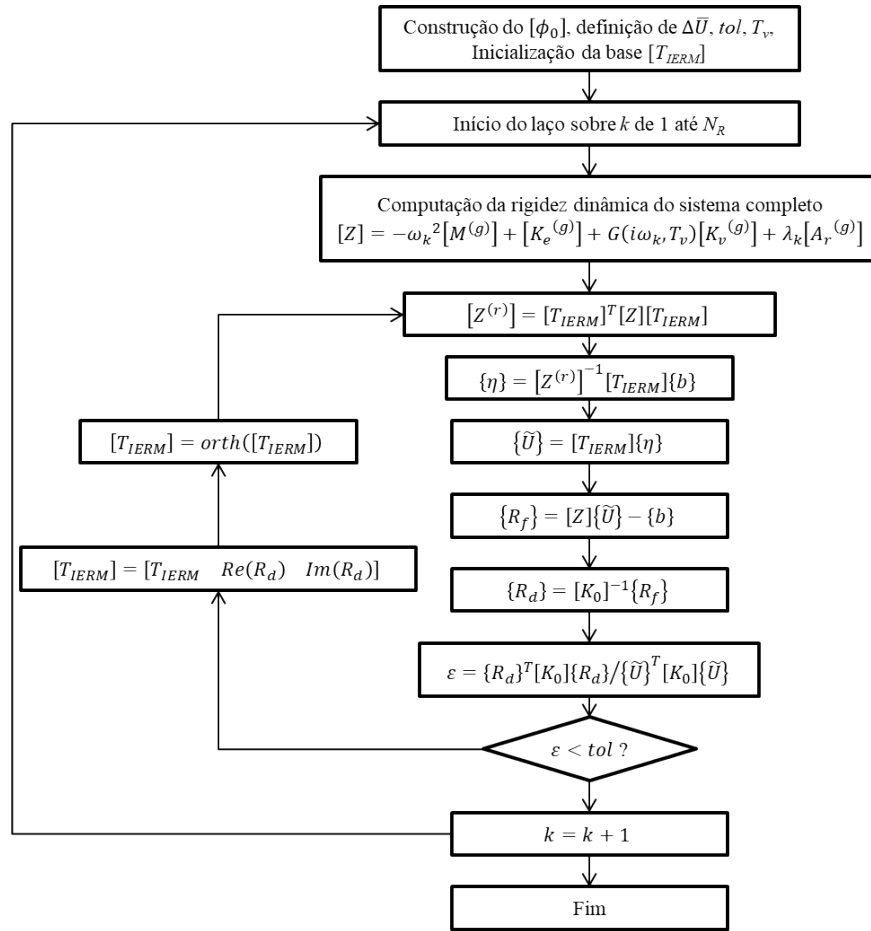


Figura 5.1 – Algoritmo do processo de construção da base do método IERM

O vetor de excitação $\{b\}$ usado no algoritmo é também um parâmetro cuja escolha deve ser feita com atenção. De fato, no caso de uma análise de FRF, este é o mesmo vetor do que o vetor booleano (cheio de 0 e 1 para selecionar quais gdl são excitados) utilizado para a computação da FRF do sistema completa. Já para o caso da análise de flutter, como não se sabe qual gdl excitado fornecerá a base de melhor qualidade, é conveniente adotar um vetor $\{b\}$ cheio de 1, ou seja, excita-se todos os gdl de forma unitária para a construção da base. Esta estratégia mostrou resultados mais precisos.

É importante salientar que existem vários outros métodos de redução para o caso de sistemas viscoelásticos que poderiam ser adaptados ao caso aeroviscoelástico, como os métodos apresentados por Rouleau et al. [26]. Todos estes foram implementados e comparados, porém somente os de maior relevância para o caso aeroviscoelástico são aqui tratados.

5.2 No tempo

Como visto na seção 4.3.2, a predição do flutter no domínio do tempo é um processo caro computacionalmente que envolve um conjunto de laços em cadeia dentro do próprio laço do Newmark. Isto torna o tempo de computação muito alto, mesmo com a melhoria do algoritmo do Schmidt & Gaul desenvolvida na seção 3.2.3. Portanto, o uso de métodos de redução é mais uma vez imperativo, especialmente para a estrutura industrial da seção 3.3.

5.2.1 Redução típica

Ao contrário da redução de modelos no domínio da frequência, a redução no domínio do tempo não é tão clássica e óbvia. Portanto, é muito importante analisar quais são os processos que levam mais tempo na computação das respostas transientes, e poder reduzi-las com eficiência. Como descrito no algoritmo 2, o flutter é determinado ao avaliar a convergência/divergência das respostas transientes que são computadas por integração numérica de Newmark. Neste esquema numérico, existem duas grandes etapas a serem feitas para cada iteração de tempo que são o cálculo das forças viscoelásticas $\{s^{(g)}\}$ segundo a equação 3.50, e o inverso da matriz de rigidez efetiva do processo de integração de Newmark. Uma redução clássica como feita por de Lima et al. [43] consistiria então em reduzir a ordem da matriz de rigidez efetiva ao pré- e pós-multiplicá-la por uma base de redução convencional (determinada por pseudo-modos de um problema conservativo) e assim reduzir o tempo de cálculo do inverso. Porém, por este processo, nota-se que o tempo de cálculo é praticamente inalterado. Isto vem do fato de que o que mais leva tempo de cálculo não é o inverso da matriz de rigidez, e sim o cálculo das forças viscoelásticas. Para comprovar esta afirmação, é feito um rápido exemplo utilizando a placa sanduíche viscoelástica definida pelos parâmetros da Tabela 6.1. É possível computar os tempos de cálculo requeridos para realizar cada uma das duas etapas para cada iteração da integração do Newmark. Os resultados são apresentados na Figura 5.2. Nota-se que o tempo médio de cálculo das forças $\{s^{(g)}\}$ em torno de 68ms é de fato mais importante do que o tempo médio do inverso da matriz de rigidez efetiva em torno de 3,7ms. Isto é explicado pelo fato destas forças serem computadas elemento por elemento. Portanto, quanto mais refinada for a malha, mais demorada se tornará esta etapa.

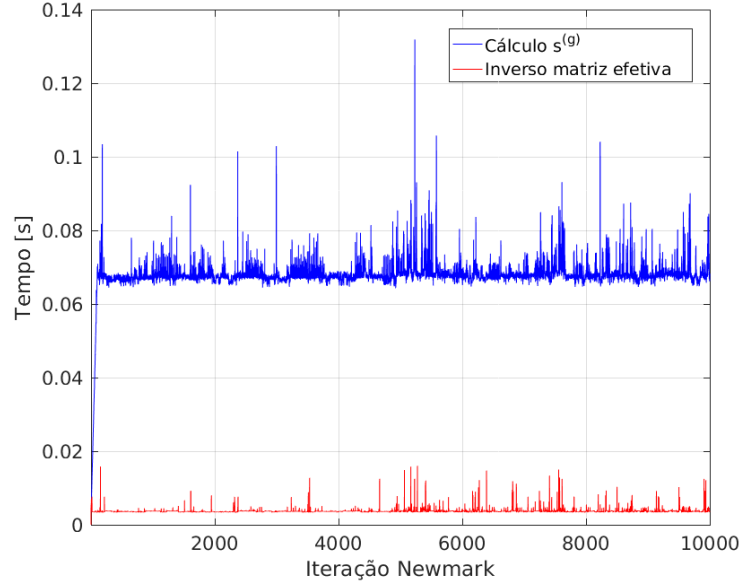


Figura 5.2 – Gastos computacionais das duas etapas principais na integração do Newmark

Neste contexto, a ideia para criar uma forma de reduzir um modelo aeroviscoelástico no domínio do tempo é a seguinte: além de reduzir a ordem da matriz de rigidez efetiva, se reduz também o gastos computacionais associados à computação dos esforços viscoelásticos. Para isto, inicia-se ao considerar a aproximação seguinte:

$$\{u_t\} \simeq \{\tilde{u}_t\} = [T]\{\eta_t\} \quad (5.7)$$

Esta aproximação é substituída na equação do movimento completa (4.7) e esta última é pre-multiplicada pelo transposto da base de redução. Obtém-se então a seguinte equação do sistema reduzido:

$$[M^{(r)}] \{\ddot{\eta}_t\} + \gamma [A_a^{(r)}] \{\dot{\eta}_t\} + ([K^{(r)}] + \lambda [A_r^{(r)}]) \{\eta_t\} = \{F_t^{(r)}\} + \{s^{(r)}\} \quad (5.8)$$

onde $[M^{(r)}] = [T]^T [M^{(g)}] [T]$, $[K^{(r)}] = [T]^T [K^{(g)}] [T]$, $[A_a^{(r)}] = [T]^T [A_a^{(g)}] [T]$ e $[A_r^{(r)}] = [T]^T [A_r^{(g)}] [T]$ são, respectivamente, as matrizes reduzidas de tamanho (N_R, N_R) de massa, rigidez estrutural, amortecimento aerodinâmico e rigidez aerodinâmica, e $\{F_t^{(r)}\} = [T]^T \{F_t^{(g)}\}$ e $\{s^{(r)}\} = [T]^T \{s^{(g)}\}$ são os vetores reduzidos de tamanho $(N_R, 1)$ de forças externas e forças viscoelásticas.

A redução clássica termina nesta etapa. Entretanto aqui é dado mais um passo quanto

ao vetor $\{s^{(r)}\}$. Este processo é feito da seguinte maneira: primeiro é substituída a aproximação (5.1) na equação (3.50) para obter a aproximação das forças viscoelásticas da seguinte forma:

$$\{s^{(g)}\} \simeq \{\tilde{s}^{(g)}\} = \sum_{j=1}^{N_l} \left[I_{j+1}^{(g)} \right] [T] \{\eta_{t-j\Delta t}\} \quad (5.9)$$

Na sequência, é substituída a equação (5.9) no cálculo do $\{s^{(r)}\}$ ao pre-multiplicar pelo transposto da base como segue:

$$\{s^{(r)}\} = \sum_{j=1}^{N_l} \left[I_{j+1}^{(r)} \right] \{\eta_{t-j\Delta t}\} \quad (5.10)$$

onde $\left[I_{j+1}^{(r)} \right] = [T]^T \left[I_{j+1}^{(g)} \right] [T]$

Ao realizar esta etapa adicional de redução, vê-se que o laço sobre j de 1 até N_l de alto custo de cálculo de multiplicação matricial é aliviado uma vez que a matriz envolvida foi reduzida da ordem N para a ordem N_R .

5.2.2 Escolha da base

Como mencionado na seção 1.2.2.2, não existe até o presente na literatura nenhum trabalho de redução de modelos para sistemas aeroviscoelásticos no domínio do tempo. Também, os trabalhos de redução que envolvem a abordagem FDM são bem raros. Um dos únicos trabalhos nesta temática foi feito por de Lima et al [43], tratando de uma placa sanduíche viscoelástica com molas não lineares. A base de redução proposta pelos autores no caso linear simples é baseada no emprego da base ERM definida na equação (5.4). Uma primeira proposta de base adaptada ao caso aeroviscoelástico seria então de repetir esta ideia original, usando os modos normais do sistema conservativo associado, e resíduos estáticos de força computados através da inversão matricial. Portanto, partindo da equação global do movimento (4.7), se resolve o seguinte problema de autovalor:

$$\left(-\omega^2 \left[M^{(g)} \right] + \left[K^{(g)} \right] \right) \{\phi\} = \{0\} \quad (5.11)$$

do qual se tira a matriz de autovetores normais $[\Phi_0] = \begin{bmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \cdots & \phi_{N_R} \end{bmatrix}$.

A estes autovetores são acrescentados os seguintes resíduos estáticos [43]

$$\{R_b\} = [K_e^{(g)}]^{-1} \{b\} \quad (5.12a)$$

$$\{R_v\} = [K_e^{(g)}]^{-1} [K_2^{(g)}] [\Phi_0] \quad (5.12b)$$

sendo $\{b\}$ um vetor de força estática (com o valor 1 no gdl excitado, e 0 para todos os outros) e $[K_2^{(g)}]$ a matriz global associada à matriz elementar $[K^{(2)}]$ da equação (3.47).

A adaptação da base original de de Lima ao caso aeroviscoelástico é então feita com os seguintes resíduos aerodinâmicos:

$$\{R_a\} = [K_e^{(g)}]^{-1} [A_r^{(g)}] [\Phi_0] \quad (5.13)$$

Reagrupando todos os autovetores e resíduos, a primeira base analisada pode ser formulada como

$$[T_{ERM}] = \begin{bmatrix} \Phi_0 & R_b & R_v & R_a \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

Alternativamente, o método EMM da seção 5.1 não pode ser mais adaptado no domínio do tempo dado que não é mais possível resolver o problema de autovalor usando o módulo complexo neste caso. O método IERM também não pode ser adaptado no tempo, principalmente porque o cálculo de resíduo de força é impossível neste caso, dado que não se sabe a força exata que excita o sistema no tempo t . De fato, dado que a força total externa na integração numérica de Newmark depende das forças viscoelásticas $\{s^{(g)}\}$ computadas a partir da aproximação de $\{s^{(g)}\}$ segundo a equação (5.9), ela é também aproximada. Como não se sabe a força exata, não é possível computar um resíduo de força e conseqüentemente também não há como computar resíduos estáticos de deslocamentos associados, o que é a base do princípio do método IERM.

Uma base ótima seria obviamente os verdadeiros modos de vibrar do sistema aeroviscoelástico. Porém, na abordagem temporal, eles são inacessíveis pois não é possível nesta abordagem resolver o problema de autovalor complexo com dependência da frequência. Por outro lado, seria razoável pensar que os autovetores $[\Phi_0]$ da parte conservativa associada não têm a capacidade de representar o sistema de maneira confiável, pois são reais, logo

não levam em conta a defasagem entre os diferentes pontos da estrutura típica de modos complexos e material viscoelástico. Uma nova proposta neste trabalho é de conseguir trazer esta informação de defasagem sem passar pelo problema de autovalor. Para isso, a ideia é computar a resposta transiente do sistema completo frente a um impacto, o qual excita todos os modos da estrutura. Neste curto tempo no qual a parte homogênea do sistema ainda está respondendo (pois ainda não foi completamente amortecida), são guardados um certo número de vetores globais de deslocamentos do sistema $\{u_t\}$, os quais são ricos em informação modal complexa. A lógica como um todo é, quanto mais vetores são utilizados, mais informação sobre a defasagem entre os pontos na estrutura seria obtida, em contrapartida mais os vetores serão semelhantes. Esta última consequência torna a futura base de posto não cheio (ou seja com informação redundante), o que pode levar a uma matriz de rigidez efetiva reduzida próxima de singular. Para evitar este problema, é imprescindível recorrer a uma ortogonalização da base inicial, fazendo como que os vetores da base se tornem ortogonais entre si, e esta sempre permaneça de posto cheio.

Outra consequência desta nova proposta é que será preciso realizar uma pré integração de Newmark do sistema completo, para poder resolver a integração de Newmark do sistema reduzido. Esta observação pode parecer paradoxal a primeira vista, já que é desejado resolver o sistema reduzido para determinar o completo, mas não o contrário. Não obstante, a ideia é de computar a resposta completa somente para um tempo muito curto, associado a parte homogênea e $t \leq N_l \Delta t$, onde Δt é o passo da integração numérica. De fato, para $t \leq N_l \Delta t$, dado que o sistema é assumido no repouso inicialmente, não é preciso realizar a soma até N_l para computar o vetor $\{s^{(g)}\}$ (já que neste intervalo $\{u_{t-j\Delta t}\} = \{0\} \quad \forall j\Delta t \geq t$). O cálculo dos $\{s^{(g)}\}$ e portanto da resposta $\{u_t\}$ é então muito mais rápida neste intervalo, e este processo de “pre-Newmark” completo não prejudica de maneira importante a eficiência de redução, como será visto no capítulo VI.

Esta nova base, que é chamada de $[T_{IRV}]$ (por Vetores Respostas ao Impacto) é então da seguinte forma:

$$[T_{IRV}] = \begin{bmatrix} u_{t_1} & u_{t_2} & \cdots & u_{t_{N_R}} \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

onde os instantes t_i são escolhidos como equidistantes no intervalo de tempo $[0; N_l \Delta t]$.

Como mencionado acima, desta base inicial obtida por uma pré-integração de Newmark, realiza-se uma ortogonalização dos vetores através da transformação de Gram-Schmidt (disponível no código Matlab[®] como a função “orth”). Caso a base inicial não seja de posto cheio, a ortogonalização irá então reduzir a sua ordem, removendo vetores redundantes até obter uma matriz ortogonal.

Será analisada então no capítulo VI a influência dos parâmetros N_l e N_R sobre a precisão da aproximação.

CAPÍTULO VI

SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Neste capítulo, são apresentados os resultados dos métodos de redução aplicados às estruturas cujos MEFs foram desenvolvidos dos capítulos II e III, tanto no domínio da frequência quanto no tempo, e são avaliados com respeito a sua precisão e eficiência. As influências da ordem da base, da malha e outros parâmetros são analisadas através de FRFs e predição de flutter. Todos os cálculos aqui apresentados foram realizados com um computador Intel[®] Core[™]i7-6700K CPU @ 4.00GHz x 8, 15,6 Go RAM, sistema Linux-Ubuntu-16.04 LTS 64bits, e o código comercial Matlab[®] R2016a. O material viscoelástico usado foi o material 3M-ISD112[™], descrito pelas equações (2.7a) e (2.7b). Para a comparação dos métodos de redução com o sistema completo, os gastos computacionais relativos às etapas comuns (construção do MEF, das matrizes $[I_{j+1}^{(g)}]$, aplicação de contorno, ...) não são apresentados. As ordens das matrizes apresentadas são as ordens após a aplicação das condições de contorno. Todos os problemas de autovalores e cálculos de inversão de matriz (seja para FRF no domínio da frequência ou integração de Newmark no tempo) são realizados com algoritmos aproveitando do fato das matrizes serem esparsas.

Tabela 6.1 – Parâmetros da placa sanduíche viscoelástica

Comprimento na direção X AA	0.39 mm
Comprimento na direção Y BB	0.33 mm
Espessura da camada de base h_1	2 mm
Espessura da camada viscoelástica h_2	0,5 mm
Espessura da camada restrigente h_3	0,5 mm
Módulo de Young da camada de base E_1	70 GPa
Módulo de Young da camada restrigente E_3	70 GPa
Coefficiente de Poisson da camada de base ν_1	0,34
Coefficiente de Poisson da camada viscoelástica ν_2	0,49
Coefficiente de Poisson da camada restrigente ν_3	0,34
Densidade da camada de base ρ_1	2700 kg/m ³
Densidade da camada viscoelástica ρ_2	950 kg/m ³
Densidade da camada restrigente ρ_3	2700 kg/m ³
Temperatura externa T_v	15 °C
Densidade do ar ρ_a	1,25 kg/m ³
Velocidade do som v_a	340 m/s

6.1 Na frequência

6.1.1 Placa simples

Para a primeira aplicação, é analisado o caso da placa sanduíche aeroviscoelástica descrita pelas equações da seção 4.2. Os principais parâmetros associados são apresentados na Tabela 6.1.

6.1.1.1 Comparação das FRFs

Em um primeiro momento, o interesse é avaliar a precisão e a eficiência dos métodos de redução descritos na seção 5.1 para prever a amplitude das funções de resposta em frequência (FRF), antes de avançar para o caso mais complicado de predição do fenômeno do flutter. A malha escolhida consiste em 15x15 elementos, baseada no critério de convergência realizado na seção 6.1.1.2. Deve-se lembrar que a placa é quadriapoada. As FRFs são computadas no intervalo [0; 500]Hz, com 1000 pontos. O nó de excitação e visualização é localizado nas coordenadas (0,0975;0,0825;0) sendo a origem como mostrada na Figura 2.4. O gdl excitado e visualizado é o deslocamento transversal w . O fluxo de ar é imposto na direção X com uma velocidade arbitrária de 1500 m/s (antes do flutter). O parâmetro de redução N_R é igual a 20 para os três métodos analisados. Para o método EMM, é assumido

que $\omega_0 = 0$, $\omega_{max} = 500\text{Hz}$ e $\lambda = 5.10^5\text{Pa}$ (próximo ao λ crítico) para o cálculo dos dois problemas de autovalores definido na equação (5.5). Para a construção da base do método IERM, define-se o intervalo arbitrário de velocidade $\Delta\bar{U} = [600; 2500]\text{m/s}$. As FRFs do sistema completo e dos três métodos são apresentadas na Figura 6.1.

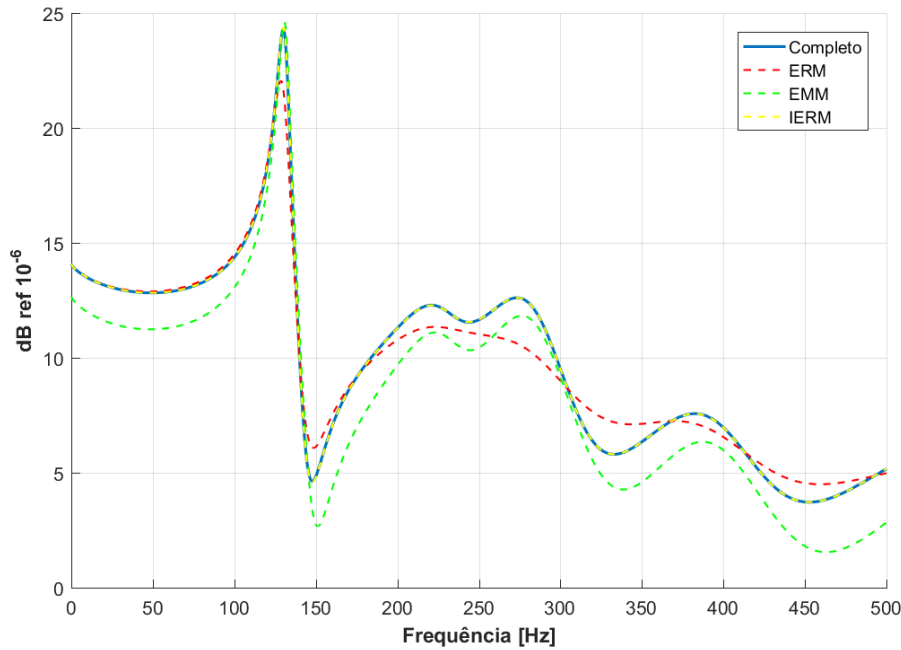


Figura 6.1 – Comparação dos métodos de redução para placa sanduíche através das FRFs

Pode-se perceber que o método ERM conhecido por ser confiável no caso puramente viscoelástico [27] já não consegue representar o sistema aeroviscoelástico, mesmo considerando os resíduos aerodinâmicos $[R_a]$. Portanto, entende-se que o escoamento tem uma influência significativa sobre o comportamento dinâmico do sistema, e que os resíduos usados são ineficazes. Já para o método EMM, a precisão é ligeiramente melhor, uma vez que consegue prever a amplitude do primeiro pico de ressonância com mais precisão e acompanhar a evolução da curva do sistema completo, até apresentando as ressonâncias nas frequências corretas e amortecimentos relevantes. Porém, a sua predição de amplitude não é precisa na maioria da banda de frequência de estudo. Por outro lado, o método IERM fornece o melhor resultado, uma vez que a sua curva sobrepõe à do sistema exato em toda a banda de frequência. Isto permite concluir que os resíduos construídos pelo processo iterativo complexo do IERM são mais ricos do que os outros métodos. Estes conseguem fornecer toda a informação sobre a alteração do comportamento dinâmico gerada pelos efeitos viscoelásticos

Tabela 6.2 – Comparação dos gastos computacionais no cálculo das FRFs dos modelos de placa sanduíche viscoelástica completo e reduzidos.

Sistema	Ordem	Construção da base	Cálculo FRF	Gasto total
Completo	1668	-	45,72s	45,72s
ERM	55	0,51s	28,72s	29,23s
EMM	40	0,86s	30,23s	31,09s
IERM	84	3,01s	31,29s	34,30s

e aerodinâmicos.

Os respectivos gastos computacionais são apresentados na Tabela 6.2. Na segunda coluna é mostrada a ordem do sistema, ou seja, a dimensão das matrizes após a aplicação das condições de contorno; na terceira coluna é mostrado o tempo de cálculo das bases de redução; na quarta coluna são os tempos de computação das FRFs e na última coluna os tempos totais. Frente aos resultados, pode-se notar que os tempos totais maiores são associados aos métodos que mostraram uma precisão melhor na Figura 6.1, evidenciando que a precisão da aproximação tem um custo computacional mais elevado. Por outro lado, se os gastos totais são comparados aos do sistema completo, os três métodos não demonstram uma eficiência tão significante, sendo um ganho respectivo de 36,07%, 32,00% e 24,98% para o ERM, o EMM e o IERM. Isto vem do fato que reduzir um processo de inversão de matrizes, as quais são esparsas, não mostra tanto benefício quanto para um problema de autovalores (como será visto para a análise de flutter em frequência).

Por fim, nota-se que apesar do método EMM ter uma base menor do que a base do método ERM, este mostra um tempo de cálculo das FRFs maior. Isto é devido ao fato que a sua base é na verdade constituída em 50% de autovetores complexos, advindo do segundo problema de autovalores da base da equação (5.6). De fato, os cálculos matriciais com vetores complexos demoram mais em relação ao caso onde somente vetores reais são envolvidos.

Outra desvantagem do método EMM, apesar de levar a uma precisão razoável, é que este precisa da escolha arbitrária de uma frequência ω_{max} e de um λ para a resolução dos dois problemas de autovalores da equação (5.5). Estes dois parâmetros têm obviamente uma influência sobre a precisão da aproximação e pode ser difícil achar um valor ótimo para os mesmos, enquanto que para o método IERM é necessário fornecer somente um intervalo de velocidade do ar $\Delta\bar{U}$ de forma arbitrária. Portanto, o método IERM mostra-se mais robusto do ponto de vista da escolha dos parâmetros, tornando-o mais completo.

Por fim, vale ressaltar que nesta avaliação os métodos são comparados utilizando um sistema acadêmico muito simples, onde mesmo o sistema completo apresentou tempo de cálculo relativamente baixo. Por esta razão será analisado o caso da estrutura mais complexa do painel curvo na seção 6.1.2.

6.1.1.2 Flutter

O interesse agora é verificar a precisão e a eficiência dos métodos de redução na predição da velocidade crítica de flutter do sistema aeroviscoelástico, segundo o algoritmo 1 descrito na seção 4.3.1. Os cálculos consistem em construir os diagramas V-g do sistema, que mostram a evolução das frequências naturais e dos fatores de amortecimentos modais em função da velocidade de escoamento do ar. Como mencionado na seção 4.3.1, o flutter é determinado quando um dos fatores de amortecimento modais se torna positivo. As simulações foram realizadas para a mesma placa da seção 6.1.1.1 com a mesma malha de 15x15 elementos. O parâmetro de redução N_R é mantido igual a 20. O intervalo de velocidade do escoamento de ar é definido tal como $\Delta U = [600; 2500]$ m/s, o que respeita o limite inferior de validade da teoria aerodinâmica utilizada. A quantidade de velocidades analisadas é de 50, escolhidas de maneira equidistantes no intervalo ΔU . Ressalta-se que este exemplo de escolha do intervalo de velocidade não é relacionada a uma condição particular de voo, o objetivo desta parte é mostrar a viabilidade da redução de modelos aplicado ao fenômeno de flutter. O número de frequências avaliadas N_j no algoritmo 1 é definido igual a 2. Os parâmetros relativos ao método EMM são mantidos iguais aos utilizados na seção anterior, e o intervalo $\Delta \bar{U}$ do método IERM é definido igual ao intervalo de busca do flutter ΔU . O diagrama V-g correspondente é apresentado na Figura 6.2 e os fatores de amortecimentos modais perto da região crítica são apresentados na Figura 6.3. Somente os dois primeiros modos do sistema são mostrados uma vez que estes são os primeiros que tendem a coalescer e gerar a instabilidade de flutter.

Como esperado, o método ERM não é capaz de representar de forma confiável o sistema completo como pode ser observado na Figura 6.2, especialmente a evolução dos fatores de amortecimento modais em função da velocidade do escoamento. Porém, com respeito à velocidade crítica, vê-se na Figura 6.3 que o método ERM prediz um valor de 1919 m/s

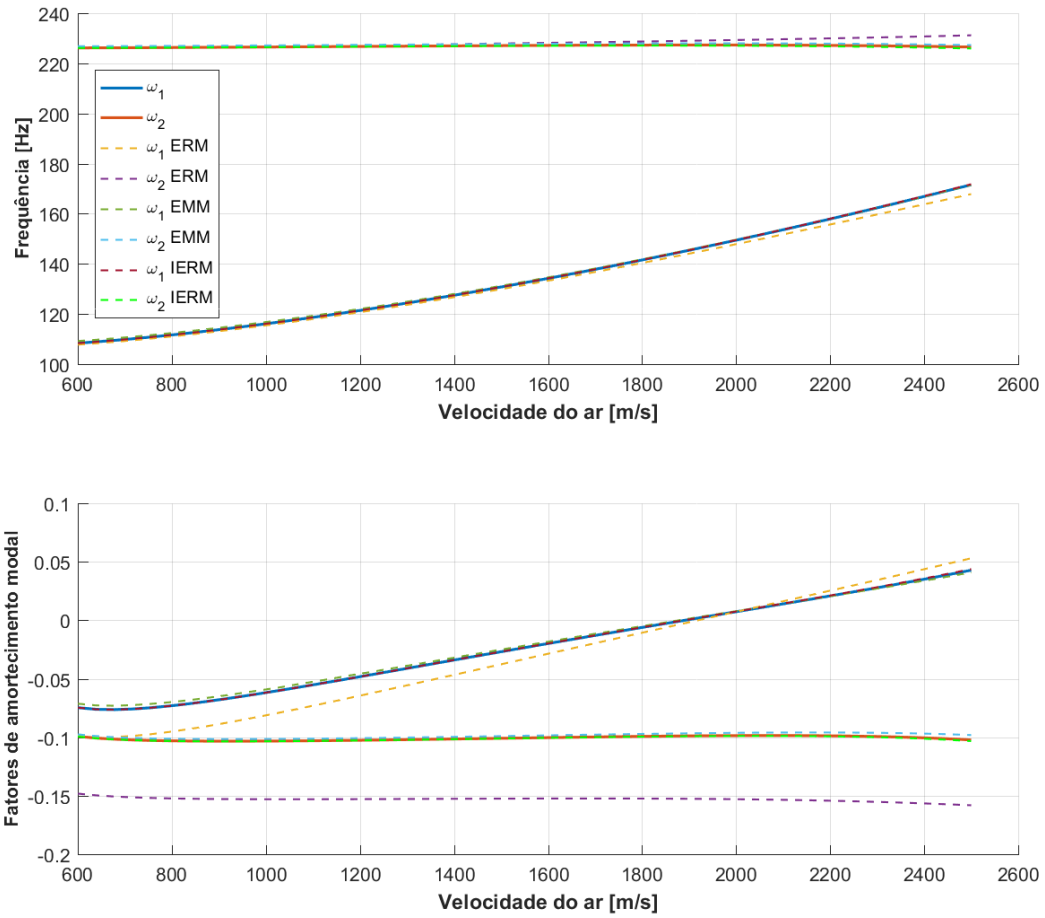


Figura 6.2 – Comparação dos métodos de redução para placa sanduíche através do diagrama V-g

enquanto a velocidade do sistema completo é de 1891 m/s, o que corresponde a um erro relativo de 1,48%. No entanto, isto não significa que para outra configuração de sistema este erro não seja pior, em função dos erros de aproximação que o método fornece no resto do intervalo de velocidade da Figura 6.2.

Já para os métodos EMM e IERM, não é possível diferenciá-los na Figura 6.2, ambos estão quase sobrepostos à curva do sistema completo, comprovando a qualidade das duas bases. Contudo, ao detalhar a região crítica como mostrado na Figura 6.3, fica evidente que o método IERM é mais preciso do que o EMM, com um erro relativo em relação à velocidade crítica de 0,05%, contra 0,5%. Isto demonstra mais uma vez que o processo de construção do método IERM, baseado nos resíduos estáticos de deslocamentos como proposto neste trabalho, é realmente mais preciso e adaptado para sistemas aeroviscoelásticos.

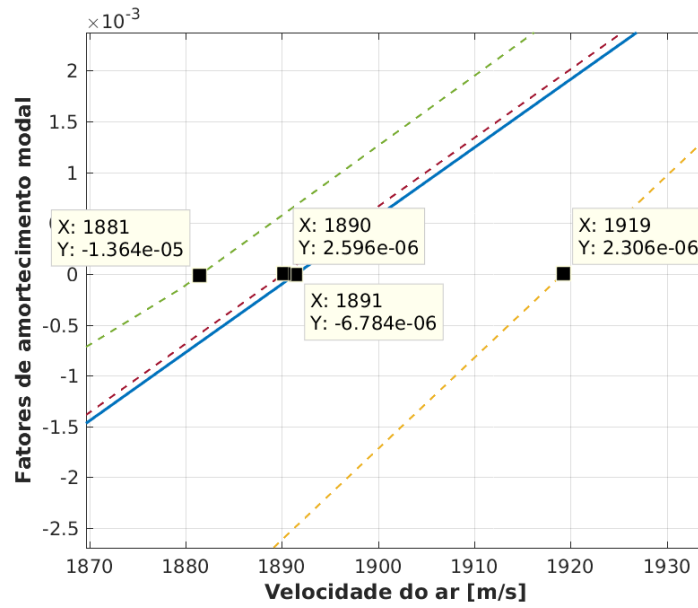


Figura 6.3 – Foco sobre os fatores de amortecimento perto da fronteira do flutter

No que se refere aos custos computacionais apresentados na Tabela 6.3, fica claro o ganho computacional com a aplicação de todos os métodos em relação ao sistema original, sendo respectivamente 97,86%, 98,47% e 94,97% para os métodos ERM, EMM e IERM. Portanto, como mencionado na seção anterior, a redução de modelos é consideravelmente mais eficiente quando aplicada à análise de flutter (problema de autovalores) do que para a computação de FRF (inverso de matriz de rigidez dinâmica).

É importante salientar que no tocante às implementações de interesse deste trabalho, foi notado que o uso da função “eigs” do Matlab[®] é mais eficiente do que a clássica função “eig” para resolver problemas não auto-adjuntos de alta ordem. Em função disto, é razoável concluir que o método EMM obteve o melhor compromisso entre qualidade de predição de flutter e tempo total de cálculo. Entretanto, é importante salientar que o método EMM requer a escolha do parâmetro λ da equação (5.5) que tem grande influência sobre a qualidade final da aproximação. Quanto ao IERM, apesar de mostrar um ganho de tempo um pouco menor, é importante notar que ele ainda é altamente satisfatório e aumentará com a complexidade do modelo. Assim, em vista dos resultados sobre a comparação dos métodos através das FRFs e do problema de flutter, é considerado que o método IERM é o método mais adaptado para representar o sistema completo aliando custo computacional e capacidade de predição de flutter. Neste contexto, somente este será estudado nas análises que seguem.

Tabela 6.3 – Comparação dos gastos computacionais na análise de flutter para a placa sanduíche viscoelástica

Sistema	Ordem	Construção da base	Cálculo Flutter	Gasto total
Completo	1668	-	17min45s	17min45s
ERM	55	0,45s	22,35s	22,8s
EMM	40	0,95s	15,37s	16,32s
IERM	78	2,89s	50,63s	53,52s

Uma análise complementar que pode se revelar interessante consiste em estudar a influência do refino da malha sobre a velocidade crítica de flutter e a precisão da redução. Para tal, dois diagramas V-g são construídos para a placa sanduíche com vários tipos de malha, iniciando pela malha considerada grosseira (6x6 elementos finitos) até uma malha mais refinada (20x20 elementos finitos). Como mencionado acima, somente o método IERM é testado, mantendo o parâmetro $N_R = 20$. O resultado da convergência para o sistema completo e reduzido é apresentado na Figura 6.4.

Nota-se que a velocidade crítica do sistema completo parece convergir com malhas superiores a 20x20 elementos finitos para um valor em torno de 1895 m/s. Porém, com uma malha de 15x15 elementos finitos, o erro relativo em relação a este valor convergido é de 0,2%. Portanto, esta malha já fornece uma boa aproximação para a predição do flutter, o que justifica a escolha feita nas análises anteriores. Por outro lado, pode ser visto que o refino da malha parece afastar as duas curvas, ou seja, a redução piora para matrizes de ordem maior. Isto pode ser explicado pelo fato do parâmetro N_R se manter constante durante todas as análises, sendo necessário ajustá-lo de acordo com a ordem do sistema. Para comprovar isso, é mostrada a influência deste parâmetro sobre as velocidades críticas para a malha de 20x20 elementos, com $N_R = 20$, $N_R = 30$, $N_R = 40$ e $N_R = 50$. Estas velocidades, juntamente com os gastos computacionais são apresentados na Tabela 6.4. Sendo a velocidade crítica do sistema completo de $U_c = 1893,7$ m/s, os erros relativos absolutos em relação a este valor são respectivamente 0,089%, 0,042%, 0,011% e 0,005%. Fica evidente que ao aumentar o N_R a aproximação se torna melhor. Porém, os gastos computacionais aumentam significativamente dado que a ordem das bases também aumenta, prejudicando a redução. Dado que de 20 para 50 vetores na base de redução foi gerado um aumento de 53% no tempo total de cálculo, é plausível considerar que $N_R = 20$ é um bom compromisso.

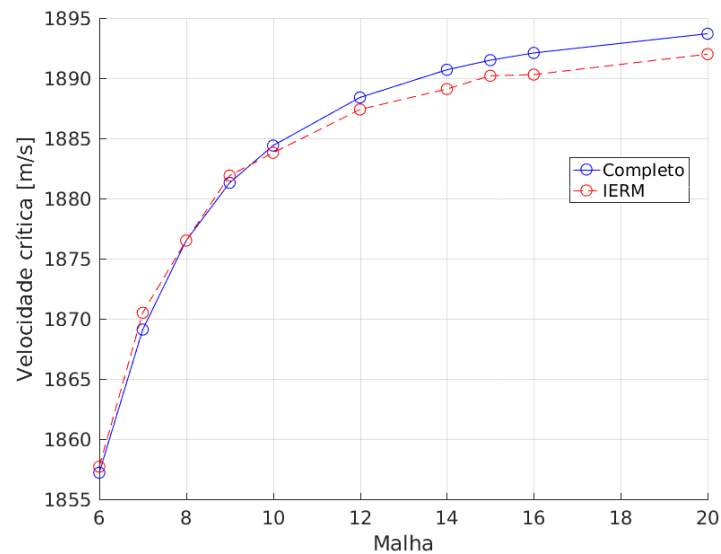


Figura 6.4 – Influência da malha sobre a precisão da redução

Tabela 6.4 – Influência do parâmetro N_R sobre a precisão e os gastos computacionais na frequência

N_R	Velocidade crítica	Construção da base	Cálculo Flutter	Gasto total
20	1892.0m/s	11,4s	45,2s	56,6s
30	1892.9m/s	15,2s	48,5s	63,7s
40	1893.9m/s	19,1s	56,3s	75,4s
50	1893.8m/s	24,4s	62,3s	86,7s

6.1.2 Sistema industrial

Com o objetivo de confirmar a eficiência superior do método de redução IERM desenvolvido neste trabalho, prossegue-se com uma estrutura de interesse industrial constituído por um painel curvo parcialmente tratado com material viscoelástico e reforçado com enrijecedores. Os principais parâmetros do modelo, além da descrição da geometria feita na seção 2.3, são apresentados na Tabela 6.5. Deve-se lembrar que a estrutura é considerada engastada nas quatro bordas, o que faz com que a ordem do sistema após a aplicação de contorno seja de 5928.

Não é uma tarefa trivial avaliar a validade do método de redução para determinar a fronteira do flutter para sistemas aeroelásticos complexos. De fato, uma das grandes dificuldades é a obtenção do diagrama V-g do sistema completo devido ao longo tempo de cálculo demandado. Neste sentido, é inviável traçar uma curva de referência para a comparação com as curvas do sistema reduzido. Isto implicaria na impossibilidade de se determinar um valor

Tabela 6.5 – Parâmetros da painel curvo parcialmente tratado

Espessura da camada de base h_1	2 mm
Espessura das camadas viscoelásticas h_2	0,5 mm
Espessura das camadas restringentes h_3	0,5 mm
Espessura das camadas restringentes h_4	4,3 mm
Módulo de Young da camada de base E_1	70 GPa
Módulo de Young da camada restrigente E_3	70 GPa
Coefficiente de Poisson da camada de base ν_1	0,34
Coefficiente de Poisson da camada viscoelástica ν_2	0,49
Coefficiente de Poisson da camada restrigente ν_3	0,34
Densidade da camada de base ρ_1	2700 kg/m ³
Densidade da camada viscoelástica ρ_2	950 kg/m ³
Densidade da camada restrigente ρ_3	2700 kg/m ³
Temperatura externa T_v	25 °C
Densidade do ar ρ_a	1,25 kg/m ³
Velocidade do som v_a	340 m/s
Coefficiente para o tratamento de θ'_z, α_1	10 ⁻⁵
Coefficiente para o tratamento de w'_3, α_3	10 ⁻¹⁰

de N_R no intuito de atingir o compromisso ótimo entre qualidade da precisão e eficiência de cálculo. É proposta uma solução para este problema que consiste, primeiramente, em avaliar as FRFs do sistema, pois o cálculo envolvido neste caso é mais rápido do que para o problema de flutter. A partir desta ideia, é possível ajustar o N_R para obter uma aproximação razoável sobre a amplitude dos modos responsáveis pela instabilidade. O valor do N_R encontrado é depois usado para o problema do flutter.

Assim, em uma primeira análise são computadas as FRFs do sistema completo e reduzido com $N_R = 30$. Um intervalo de frequência de $[0; 1000]$ Hz é definido com 2000 pontos. O gdl e o nó colocalizado de excitação e visualização são, respectivamente, o gdl u_1 global (translação na direção X), e o nó de coordenada $(0,8867; 0,3060, 0,5959)$. O intervalo de velocidade $\Delta\bar{U}$ para a construção da base do método IERM é definido igual a $[600; 2500]$ m/s. A velocidade do ar deste estudo é fixa e vale 1500 m/s e o fluxo imposto sendo na direção y local (ver Figura 2.9), ou seja, a direção sem curvatura do painel. Nesta configuração, como será visto adiante, os modos responsáveis pela instabilidade são os modos 7 e 8. É possível explicar a ocorrência do flutter pelos modos 7 e 8 devido ao fato de que neste caso é adotado um fluxo na direção y . Escoando nesta direção, os modos que são alterados com mais intensidade são aqueles que possuem linhas nodais em uma direção perpendicular ao fluxo, ou seja, x local. Porém estes modos são de frequências mais altas por culpa dos enrijecedores

que cortam as linhas nodais e da curvatura do painel. Caso o fluxo escoasse na direção x , os modos que entrariam em flutter seriam o primeiro e o segundo uma vez que a rigidez seria muito menor. Portanto, é essencial ajustar o N_R para que a redução seja confiável até 500Hz, onde os modos 7 e 8 são situados. As FRFs do sistema completo e do sistema reduzido são então apresentadas na Figura 6.5. Nota-se claramente que o método IERM consegue fornecer uma aproximação excelente até aproximadamente 850Hz com o valor escolhido para o N_R . Neste contexto, seria possível diminuir o valor de N_R mantendo a qualidade da aproximação até 500Hz, desprezando assim as frequências desnecessárias no estudo do flutter. No entanto, é mais confiável aproximar até frequências um pouco além das frequências de interesse, da mesma forma que é usada uma frequência de amostragem sempre maior do que o necessário em análise de sinal. Portanto, o valor $N_R = 30$ é mantido para a próxima análise de busca da instabilidade de flutter.

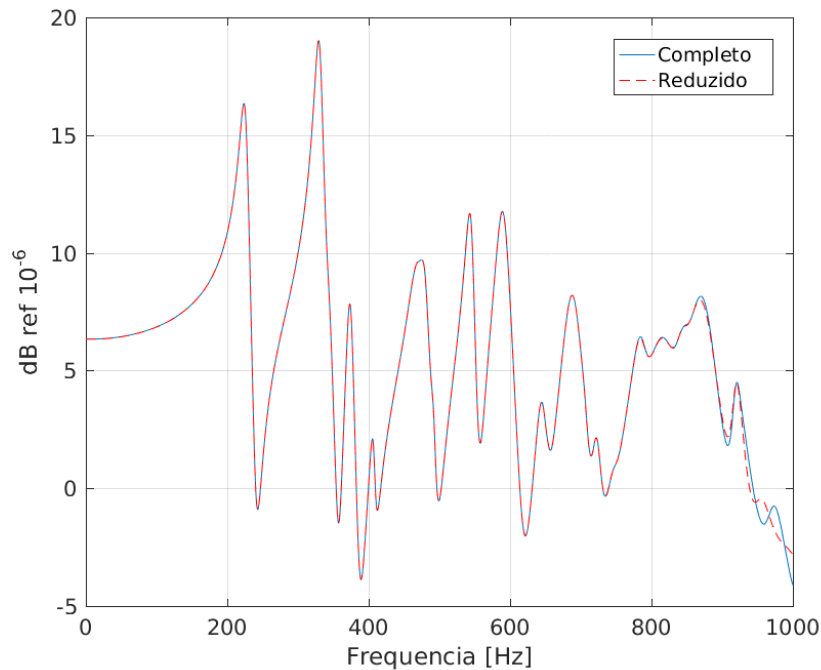


Figura 6.5 – Redução de modelo aplicada ao estudo de FRF do painel curvo pela abordagem na frequência

Uma vez assegurada a qualidade do processo de redução, a análise de flutter é iniciada pelo algoritmo 1 da seção 4.3.1. Como mencionado anteriormente, é possível que os resultados do sistema completo sejam inacessíveis, justificando a análise de FRF anterior. Entretanto, neste trabalho é possível computar o problema completo devido ao fato de que o algoritmo

aproveita das matrizes globais envolvidas serem esparsas e de ordem elevada (utilizando a função “eigs” do Matlab[®], como explicado anteriormente). Assim, são construídas as curvas do diagrama V-g dos sistemas completos e reduzidos com $N_R = 30$. O intervalo de velocidade $\Delta\bar{U}$ do estudo é definido como sendo $[1000; 4000]$ m/s com 50 pontos equidistantes. O intervalo de velocidade ΔU para a construção da base do método IERM permanece o mesmo da análise de FRF. O número de frequências avaliadas N_j no algoritmo 1 é imposto igual a 14, possibilitando visualizar o que acontece também com as frequências maiores do que as de interesse. As curvas obtidas são então apresentadas na Figura 6.6.

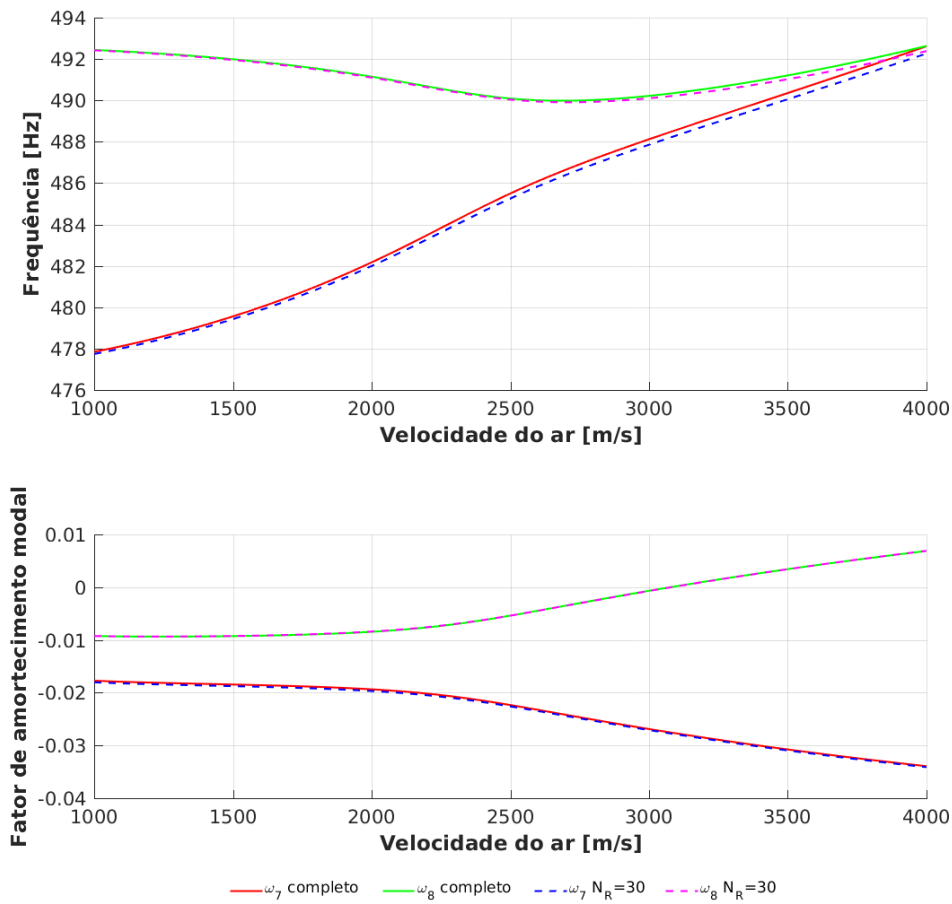


Figura 6.6 – Redução de modelo aplicada ao estudo de flutter do painel curvo pela abordagem na frequência

Pode ser visto que, mesmo que as duas curvas não estejam totalmente sobrepostas, a aproximação do sistema reduzido representa o sistema completo com boa precisão, em todo

Tabela 6.6 – Comparação dos gastos computacionais na análise de flutter para o painel aeronáutico

Sistema	Ordem	Construção da base	Cálculo Flutter	Gasto total
Completo	5928	-		2h59min46s
IERM	62	4s	4min20s	4min24s

o intervalo de velocidades analisadas. Em particular, ao visualizar a região da fronteira do flutter, nota-se que o sistema reduzido prevê uma velocidade crítica de 3081 m/s, enquanto a velocidade do sistema completo é de 3077 m/s. Portanto, o erro relativo de predição é da ordem de 0,13%, sendo considerado satisfatório. Vale ressaltar que este resultado poderia ainda ser melhorado ao aumentar o N_R , dependendo das especificações requeridas.

Os gastos computacionais associados são apresentados na Tabela 6.6. Vê-se que o sistema reduzido conseguiu diminuir os custos computacionais de maneira significativa, obtendo um ganho de tempo de aproximadamente 97,6%. Como esperado e mencionado na seção 6.1.1.2, este ganho é mais alto do que para a placa simples, dado à ordem maior e a complexidade do sistema aeroviscoelástico completo.

6.2 No tempo

6.2.1 Placa simples

6.2.1.1 Comparação das respostas transientes

Nesta seção é analisado o caso da placa sanduíche viscoelástica completamente tratada submetida aos efeitos aerodinâmicos no domínio do tempo. Inicialmente, estuda-se um exemplo simples de uma resposta transiente a um impacto do sistema aeroviscoelástico, o qual é assumido inicialmente em repouso. Este impacto é modelado como sendo um impulso triangular atingindo o seu máximo $F_0 = 1$ N no tempo $t_{imp} = 2$ ms e permanecendo nulo para $t \geq 4$ ms. A placa utilizada nesta aplicação é definida na Tabela 6.1. O fluxo de ar é mantido na direção X com a velocidade arbitrária de 1500 m/s. O intervalo de tempo é $[0; 1]$ s, com um passo $\Delta t = 1 \cdot 10^{-4}$ s. Este valor de passo é baseado em um estudo de convergência preliminar de FRFs com o sistema não tratado, de forma a obter uma precisão razoável para as frequências até de 500Hz. A malha e o valor do comprimento de memó-

ria são definidos arbitrariamente como sendo 12×12 elementos e $N_l = 100$. O nó e gdl de excitação e visualização são ainda o nó de coordenada $(0,0975;0,0825;0)$ e o deslocamento transversal w . O parâmetro de redução N_R é definido arbitrariamente igual a 20 para as duas bases descritas na seção 5.2.2. Para o método IRV, o pré-Newmark é então computado no intervalo $[0; 0,01]$ s uma vez que $N_l \Delta t = 0,01$. As respostas transientes associadas aos sistemas completo e reduzidos segundo os métodos ERM e IRV são então apresentadas na Figura 6.7, com detalhe no intervalo $[0; 0,2]$ s.

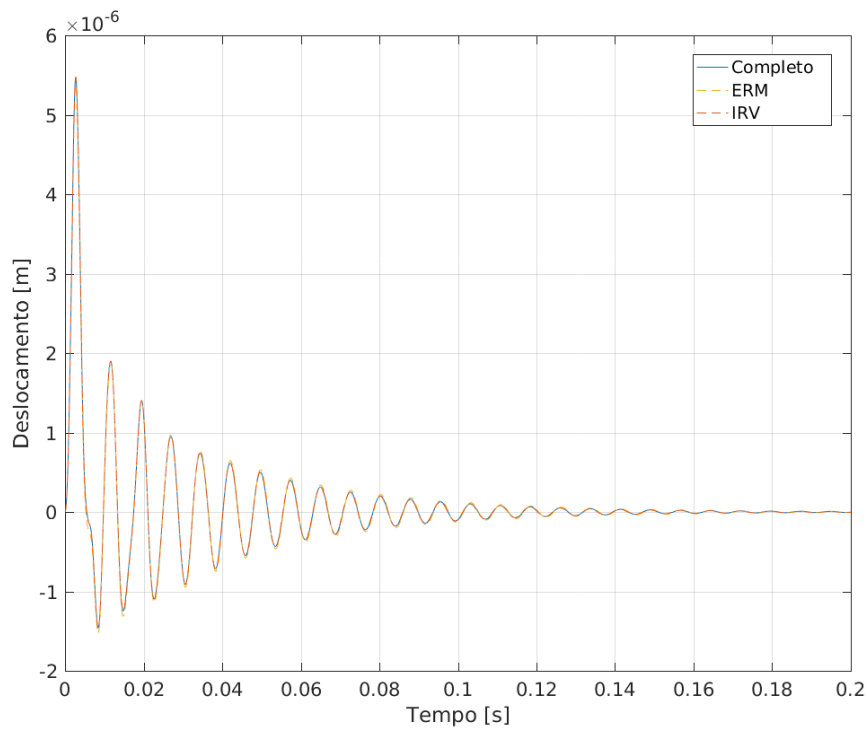


Figura 6.7 – Comparação das respostas temporais da placa sanduíche a um impacto

Pode ser visto que as duas curvas associadas aos dois métodos de redução são quase sobrepostas à do sistema completo, significando que ambos possuem uma boa precisão. Porém, ao olhar com mais detalhes os máximos e mínimos de amplitude de oscilação, percebe-se que o método ERM está sempre superestimando-os. Estas diferenças são ainda mais visíveis ao passar para o domínio da frequência. Isto é feito ao computar os respectivos espectros das respostas através da transformada de Fourier e dividindo-as pelo espectro do impacto, afim de obter as respectivas FRFs (desta vez obtidas por uma abordagem temporal). Este processo pode se revelar útil para comparar posteriormente estas FRFs com as FRFs da abordagem na frequência. Assim, as respectivas FRFs são apresentadas na Figura 6.8 no

Tabela 6.7 – Comparação dos gastos computacionais na análise das respostas transientes da placa sanduíche

Sistema	Ordem	Construção da base	Cálculo Flutter	Gasto total
Completo	1083	-	2min46s	2min46s
ERM	61	0,23s	17s	17,23s
IRV	20	1,22s	11s	12,22s

intervalo $[0; 500]$ Hz.

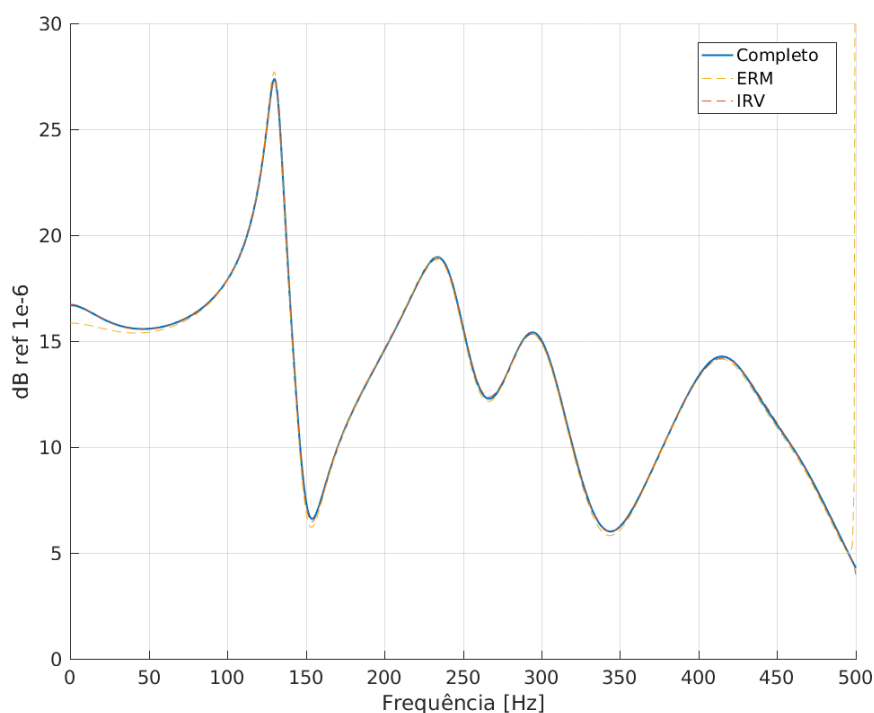


Figura 6.8 – FRFs da placa sanduíche obtidas pela abordagem no tempo

Observa-se mais uma vez que o método ERM é menos preciso do que o IRV, superestimando as amplitudes e predizendo um comportamento estático errado. Além disso, ao olhar para os respectivos gastos computacionais da Tabela 6.7 associados ao cálculo das respostas temporais, nota-se que o ganho de tempo do ERM é de 89,62%, enquanto o do IRV é de 92,62%. Esta diferença entre os dois ganhos, mesmo que aparentemente baixa, poderia revelar-se muito maior para uma estrutura de grande escala. Entretanto, o método ERM mostra-se importante por servir de comparação com o método IRV nas análises que virão.

6.2.1.2 *Flutter*

Nesta etapa, os esforços são concentrados no problema da predição da instabilidade de flutter da placa sanduíche. Deseja-se determinar as velocidades críticas dos dois modelos reduzidos segundo o ERM e o IRV e compará-las com a do sistema completo. Como visto no capítulo V, a base do método ERM não depende da velocidade do escoamento dada a construção do resíduo aerodinâmico (ver equação (5.14)). Já para o método IRV é preciso realizar a cada nova velocidade um pré-Newmark do sistema completo para construir a base. Portanto, esta base é computada novamente para cada laço de velocidades, o que pode prejudicar a eficiência do método. Assim, usando o algoritmo 2 para o sistema completo e os sistemas reduzidos, resolve-se o problema de flutter no tempo. Os parâmetros usados para esta análise são os mesmos daqueles utilizados na seção 6.2.1.1. O intervalo grosseiro de velocidade do ar é definido tal como $[600; 2500]$ m/s com 50 iterações equidistantes. A tolerância tol associada ao laço 2 do algoritmo 2 é imposta igual a 10^{-2} . Os resultados em termos de gastos computacionais relativos ao algoritmo 2 e velocidades críticas para os diferentes sistemas são apresentados na Tabela 6.8. A comparação das curvas nas respectivas velocidades críticas também é apresentada na Figura 6.9. Assim, é mostrado que os três sistemas podem ser considerados como quase equivalentes, dado a semelhança das curvas. Em relação à Tabela 6.8, pode ser observado que ambos os métodos de redução fornecem aproximações relativamente confiáveis com custo computacional significativamente baixo em relação ao sistema completo. Porém, mais uma vez o método IRV mostra ser o método mais preciso ao obter um erro relativo sobre a velocidade crítica de aproximadamente 0,035%, enquanto o do ERM é de 0,36%. Além disso, apesar de não possuir uma base constante (pois atualizada a cada nova velocidade), o tempo de computação do método IRV é menor, gerando um ganho em relação ao sistema completo de 96,16% contra um ganho de 94,66% para o método ERM. Portanto, o método IRV é considerado mais eficiente não somente em termos da qualidade da aproximação, como também no tempo total de cálculo. Porém, os resultados podem ser influenciados de maneira significativa pelos parâmetros N_R e N_l e o refino da malha. Em função disto, o estudo destes parâmetros deve ser realizado.

Segue-se com a avaliação do parâmetro N_R em relação a precisão da aproximação dos

Tabela 6.8 – Comparação dos gastos computacionais na análise de flutter no tempo da placa sanduíche

Sistema	Ordem	Cons. Base	Laço 1	Laço 2	Total	Vel. Crítica
Completo	1083	-	2h5min50s	10min01s	2h15min51s	2312,06m/s
ERM	61	0,36s	6min34s	1min17s	7min51s	2304,65m/s
IRV	20	-	4min22s	51s	5min13s	2312,87m/s

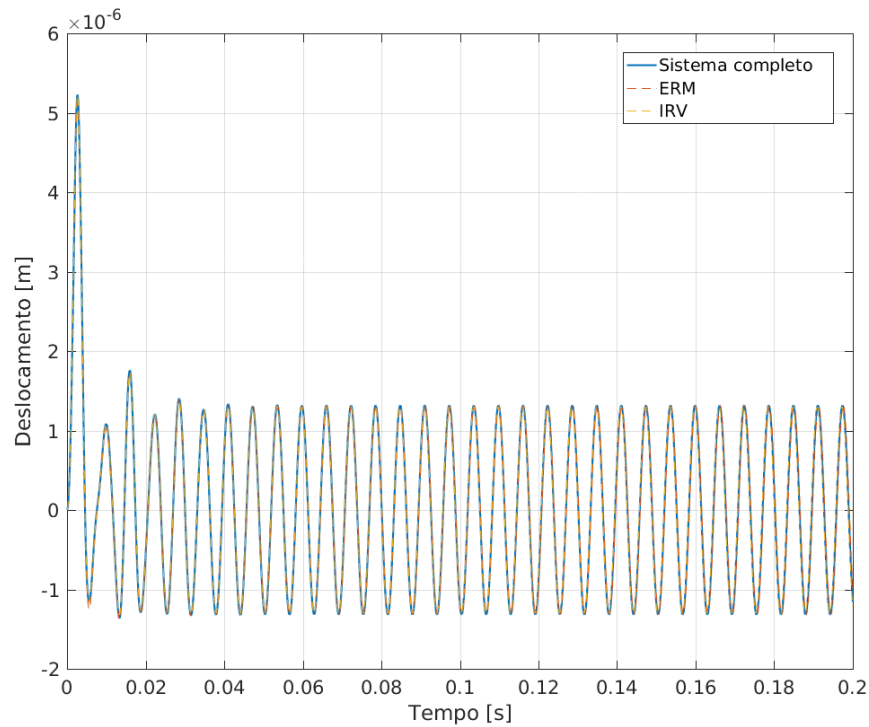


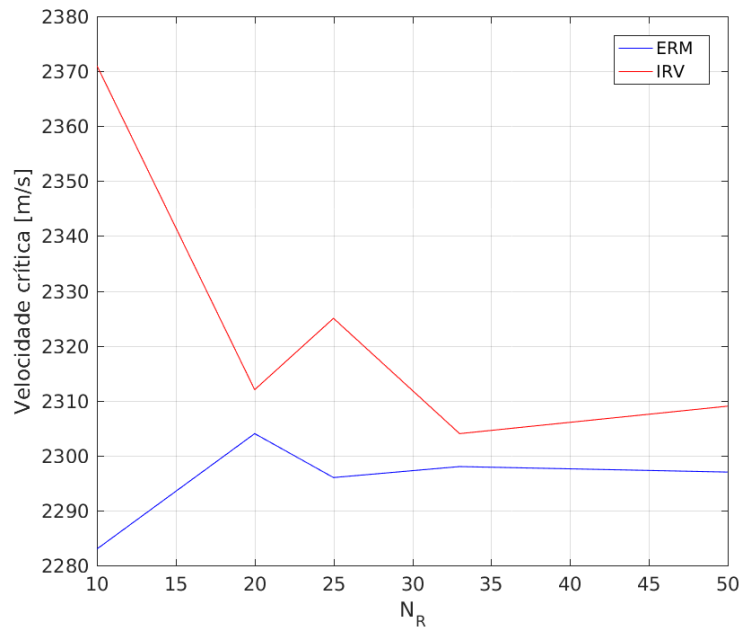
Figura 6.9 – Comparação das respostas temporais harmônicas no flutter para a placa sanduíche

métodos ERM e IRV. Assim, computa-se novamente o problema de predição do flutter conforme o algoritmo 2 para os dois sistemas reduzidos e vários valores de N_R . Os outros parâmetros permanecem iguais aos do estudo anterior. As curvas representando a variação das velocidade críticas são então apresentadas na Figura 6.10 e os respectivos custos computacionais totais (laço 1 + laço 2 + construção da base) assim como as ordens das bases dos sistemas reduzidos são disponíveis na Tabela 6.9. Pode-se notar que as duas curvas tendem a convergir, mas para valores distintos. No entanto, destes dois métodos, o IRV fornece o resultado convergido (para $N_R = 50$) mais próximo do valor de referência da Tabela 6.8. Um fato curioso percebido na Figura 6.10 é que para $N_R = 20$, ambos os métodos mostram o resultado mais perto do valor de referência. Com respeito aos gastos computacionais da Tabela 6.9, fica evidente que o método IRV leva a um ganho de tempo sempre maior, dado

Tabela 6.9 – Influência do N_R sobre a eficiência da redução para a placa sanduíche no tempo

N_R	Ordem ERM	Ordem IRV	Gasto ERM	Gasto IRV
10	31	10	05min14s	04min41s
20	61	20	07min54s	05min13s
25	76	25	09min14s	05min32s
33	100	33	17min59s	07min06s
50	151	50	29min27s	08min41s

que a ordem da base do método ERM sempre é maior. Portanto, desta análise, pode-se concluir primeiro que para ambos os métodos é mais seguro impor um valor de N_R alto o suficiente para garantir uma velocidade estável. Segundo, o método IRV se mostrou mais uma vez o mais adaptado para o problema em questão.

Figura 6.10 – Influência do N_R sobre a precisão da redução da placa sanduíche no tempo

A continuidade se dá com a avaliação do outro parâmetro de importância, sendo o comprimento de memória N_l . Os parâmetros anteriores são mantidos os mesmos, no entanto o N_R é aumentado para $N_R = 50$ dado as observações já feitas sobre este parâmetro. Logo se faz variar o N_l de 100 até 500. As curvas de variação das velocidades críticas de flutter em relação ao N_l e os gastos computacionais totais associados ao sistema completo e reduzido são apresentados na Figura 6.11 e na Tabela 6.10. Pode-se observar primeiro que é preciso um comprimento de memória bastante alto para se chegar em um valor estável para todos os três sistemas ($\simeq N_l \geq 400$). Por outro lado, vê-se que quanto maior o N_l , menor a

diferença entre o método IRV e o sistema completo, ou seja, melhor a aproximação. Com relação aos custos computacionais, estes não necessariamente crescem linearmente com o N_l , especialmente para o sistema completo. Isto não parece intuitivo uma vez que as operações matriciais aumentam de forma linear. Este fato poderia ser explicado devido ao efeito de memória que se esvanece e torna o cálculo do vetor $\{s^{(g)}\}$ mais rápido para valores altos de j . Por fim, é importante ressaltar que quanto maior o N_l , menor o ganho de tempo obtido pela redução de modelos dos dois métodos. De fato, para $N_l = 100$ os ganhos em relação ao sistema completo são respectivamente para o método ERM e IRV de 77,94% e 94,15%, enquanto para $N_l = 500$, eles são de 67,34% e 90,68%. Assim, quando deseja-se aumentar o N_l visando melhorar a convergência, aumenta-se os custos computacionais como também é reduzida a eficiência para os dois métodos. Entretanto, estes dois impactos são muito mais relevantes para o ERM. Portanto, é melhor encontrar um bom compromisso para este parâmetro, que será escolhido a $N_l = 200$ dado a excelente concordância do método IRV com o sistema completo para este valor.

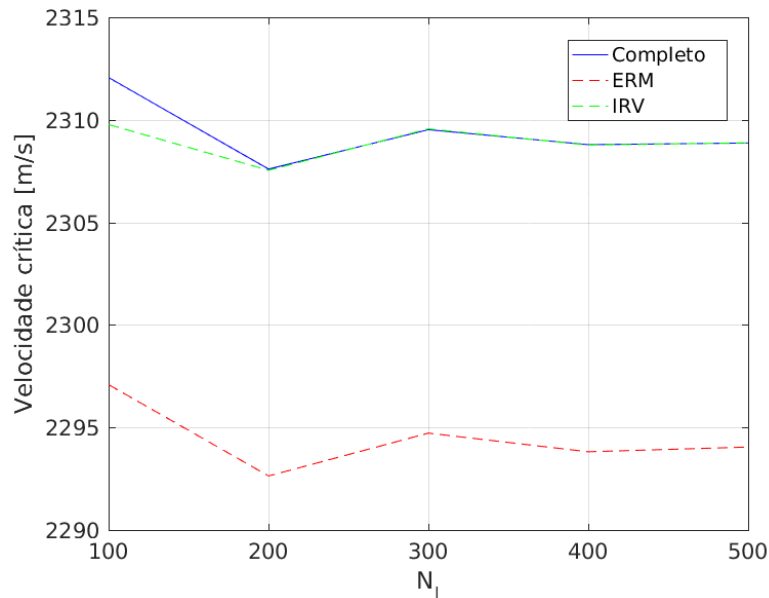


Figura 6.11 – Influência do N_l sobre a precisão da redução para placa sanduíche

Finalmente, um último parâmetro importante que pode alterar a precisão ou eficiência da redução é a malha. Para caracterizar este efeito, várias malhas são analisadas, de 6x6 até 16x16 elementos finitos. Os principais parâmetros da placa permanecem os mesmos das análises anteriores. Para o N_R , viu-se que é melhor impor um valor suficientemente

Tabela 6.10 – Influência do N_l sobre a eficiência dos métodos de redução para a placa sanduíche

N_l	Gastos comp.	Gastos ERM	Gastos IRV
100	2h15min51s	29min58s	07min57s
200	3h42min10s	56min34s	14min28s
300	4h48min18s	1h22min27s	21min05s
400	5h51min20s	1h47min59s	29min39s
500	6h54min22s	2h15min21s	38min38s

grande, desta forma define-se $N_R = 50$ para ambos os métodos de redução analisados. Com respeito ao comprimento de memória, utiliza-se o compromisso previamente determinado de $N_l = 200$. A variação das velocidades críticas com a malha, juntamente com os custos computacionais totais e a ordem do sistema completo são apresentados na Figura 6.12 e na Tabela 6.11. Pode ser visto primeiramente que todos os sistemas convergem para malhas maiores que 14x14 elementos. Segundo, uma excelente concordância entre o método IRV e o sistema completo pode ser observada para todas as malhas estudadas. Para o método ERM, nota-se que a redução tende a piorar quando a malha é refinada, como foi visto na abordagem em frequência (ver Figura 6.4). Este mesmo fenômeno também vale para a curva do IRV mas não é visível já que a mesma é muito próxima da curva do sistema exato. Assim como visto na seção 6.1.1.2, é preciso aumentar o parâmetro N_R para que a redução possa acompanhar a alteração do sistema completo com a convergência da malha. Caso contrário, a precisão de ambos os métodos de redução é degradada. Por outro lado, atentando-se aos custos computacionais, nota-se que o método ERM não sofre aumento de tempo ao contrário do IRV. Isto pode ser explicado pelo fato deste último efetuar uma pre-integração de Newmark do sistema completo para computar a sua base a cada nova iteração de velocidade. Portanto os tempos de computação do método IRV aumentam quando a ordem do sistema completo aumenta. Contudo, em vista da excelente concordância entre o método IRV em relação ao sistema completo e um custo computacional quase quatro vezes menor do que o ERM, ele pode ser considerado o melhor método de redução da abordagem no domínio do tempo no caso da placa sanduíche. Por exemplo, para o pior caso da malha com 16x16 elementos, o erro relativo sobre a velocidade crítica é de 0,002% para um ganho de tempo de 95,47%. Portanto, somente este método será testado no caso do painel curvo a seguir.

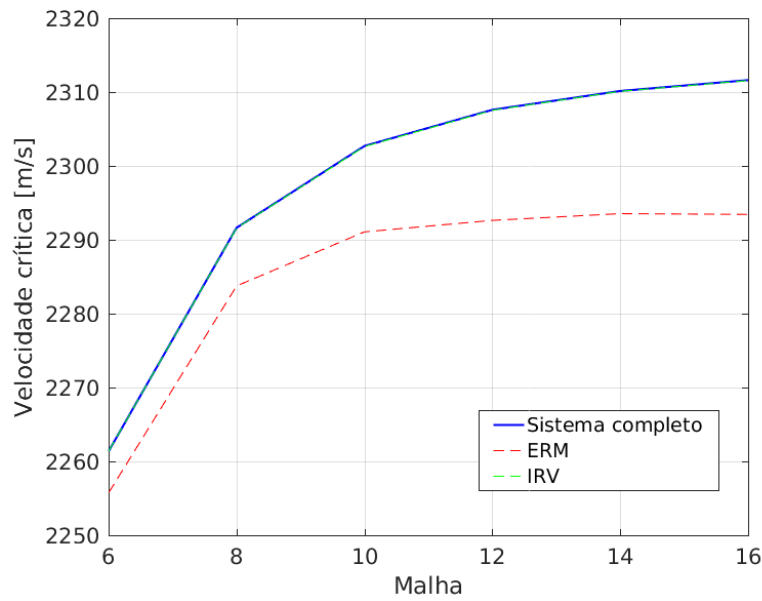


Figura 6.12 – Influência da malha sobre a precisão da redução da placa sanduíche no tempo

Tabela 6.11 – Influência da malha sobre a eficiência dos métodos de redução para a placa sanduíche

Mesh	Ordem completo	Gastos completo	Gastos ERM	Gastos IRV
06x06	291	49min17s	56min50s	12min40s
08x08	499	1h35min04s	57min33s	13min07s
10x10	763	2h39min08s	56min50s	14min47s
12x12	1083	3h42min10s	56min34s	14min28s
14x14	1459	5h25min30s	56min19s	16min51s
16x16	1891	7h01min36s	56min19s	19min07s

6.2.2 Sistema industrial

Neste última seção, o caso da estrutura de interesse industrial da seção 6.1.2 no domínio do tempo é analisado para avaliar se o melhor método de redução IRV caracterizado na seção anterior também é capaz de representar o comportamento dinâmico de um sistema aeroviscoelástico mais complexo. Como para o caso da placa sanduíche, inicia-se com a comparação dos sistemas completo e reduzido através de respostas transientes geradas por um impacto unitário. É aplicado o mesmo tipo de impulso que aquele utilizado na seção 6.2.1.1, porém com $t_{imp} = 1$ ms. Os parâmetros principais são os da Tabela 6.5. Para a temperatura T_v , os parâmetros do FDM encontrados por otimização como feito na seção 3.2.2 são $a_d = 2,7105 \cdot 10^{-4} s^\nu$, $b_d = 3,4492 \cdot 10^4 N \cdot s^\nu \cdot m^{-2}$ e $\nu = 0,6786$. O valor do passo do tempo Δt é ajustado a $5 \cdot 10^{-4} s$ para garantir uma precisão razoável sobre os modos responsáveis

pelo flutter em torno de 500Hz. Nestas condições, o intervalo de tempo é reduzido a $[0; 0,5]$ s para não sobrecarregar os cálculos. Com relação ao número de elementos finitos, a malha é fixa e não pode ser refinada, pois foi exportada do Ansys[®], impossibilitando a realização do estudo da convergência. Para o comprimento de memória N_l , como visto na seção anterior, é importante definir um valor alto o suficiente para a redução se aproximar do sistema completo, garantindo valores estáveis de convergência. Este fato é ainda mais relevante para estruturas menos amortecidas, uma vez que o movimento oscilatório relativo à parte transitória possui um tempo maior de atenuação, o que torna os resultados mais dependentes dos eventos passados. Portanto, impõe-se $N_l = 500$ (lembrando que um valor alto demais pode prejudicar a eficiência da redução). Com relação à N_R , já que a estrutura analisada é de ordem muito maior (5928 após aplicação das condições de contorno) e tendo em vista os resultados da seção 6.2.1.2, é imposto um valor alto o suficiente tal como $N_R = 100$. O nó e gdl de excitação e visualização são os mesmos que na seção 6.1.2. O pré-Newmark é então computado no intervalo $[0; 0,025]$ s uma vez que $N_l \Delta t = 0,025$ s. Lembra-se que uma ortogonalização da base é realizada para a mesma permanecer de posto cheio e evitar os problemas de singularidades da matriz de rigidez efetiva reduzida. As respostas temporais associadas ao sistemas completo e reduzido segundo o método IRV são apresentadas na Figura 6.13, com foco no intervalo $[0; 0,1]$ s. As FRFs correspondentes obtidas por transformada de Fourier das respostas temporais e da força de impacto são apresentadas na Figura 6.14 para uma banda de $[100; 1000]$ Hz. Os gastos computacionais totais (fora as etapas comuns aos dois sistemas) associados são disponíveis na Tabela 6.12. Uma excelente concordância entre o modelo reduzido e o completo no tempo pode então ser observada, com uma curva sobrepondo a outra. Na FRF, pode-se ver que a aproximação é relativamente confiável até em torno 950Hz. O método de redução IRV consegue satisfazer de maneira considerável as expectativas em termos de precisão para uma análise transiente simples fora do flutter. Com relação ao custo computacional, nota-se que o ganho de tempo é de 91,40%, o que é menor em relação à análise da placa sanduíche, porém dadas as características dos cálculos envolvidos e a complexidade do problema é considerado um ganho excelente.

Finalmente, esta seção de simulações numéricas é finalizada com a predição da instabilidade de flutter do painel curvo no domínio do tempo. Deseja-se determinar as velocidades

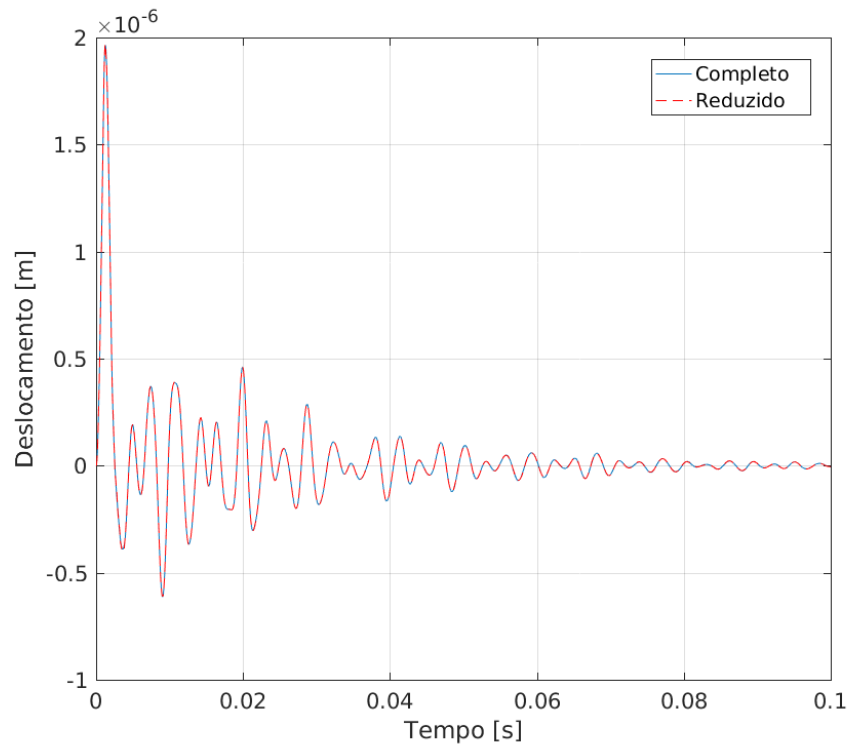


Figura 6.13 – Resposta temporal do painel curvo a um impacto com $U = 1500\text{m/s}$

Tabela 6.12 – Comparação dos gastos computacionais para uma análise transiente do painel curvo parcialmente tratado

Sistema	Ordem	Gastos totais
Completo	5928	30min30s
Reduzido IRV	100	02min37s

críticas do sistema completo e sistema reduzido IRV para avaliar a precisão e eficiência desta redução no caso da busca da instabilidade aerodinâmica na presença de material viscoelástico. Os parâmetros utilizados para a análise anterior são mantidos iguais. O intervalo grosseiro de velocidade do ar é definido tal como $[2000; 5000]\text{m/s}$ com 50 iterações equidistantes. A tolerância tol associada ao laço 2 do algoritmo 2 é definida igual a 10^{-2} . Uma operação adicional de filtragem passa baixo é realizada para remover eventuais instabilidades na região do flutter geradas por modos de frequência alta que ainda não convergiram com a malha utilizada. Assim, para cada velocidade de ar, aplica-se o filtro do tipo *butterworth* de ordem 6 com uma frequência de corte de 1500Hz . Os resultados em termos de gastos computacionais relativos ao algoritmo 2 e velocidades críticas para os diferentes sistemas são apresentados na Tabela 6.13. A comparação das curvas nas respectivas velocidades também é apresentada na Figura 6.15. Pode ser notado que as velocidades críticas dos dois sistemas

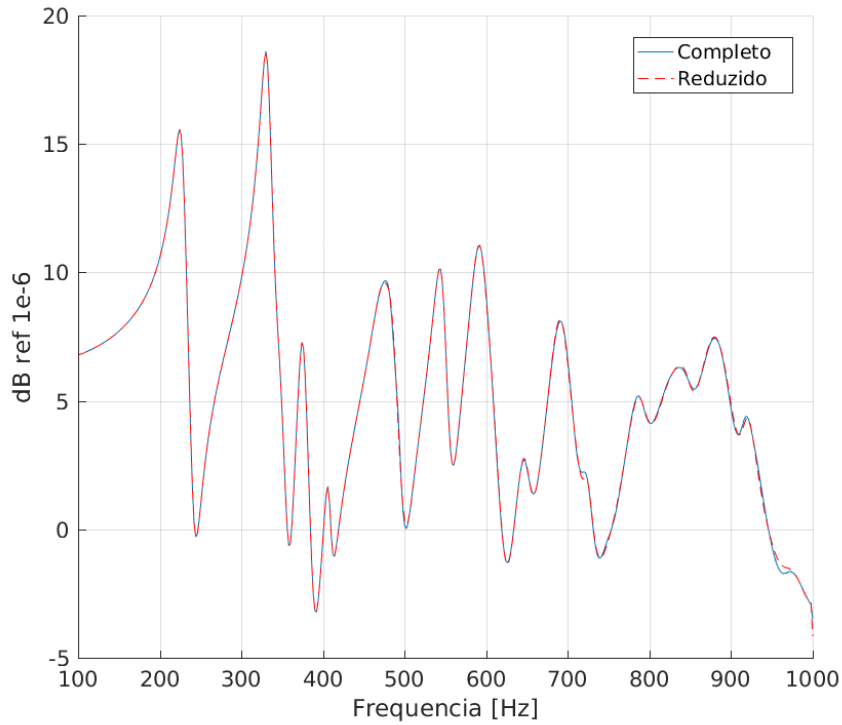


Figura 6.14 – FRF do painel curvo com $U = 1500\text{m/s}$ obtida pela abordagem no tempo

não são tão próximas, apresentando uma diferença de $132,4\text{ m/s}$. Contudo, as curvas são bastante semelhantes, indicando que o comportamento modal varia pouco na região do flutter. Por outro lado, o erro relativo em relação à velocidade do sistema completo é somente de $4,08\%$, o que mais elevado do que para o caso da placa. Uma das explicações possíveis é que o modo responsável pela instabilidade nesta aplicação é o modo 8, ou seja é um modo mais elevado do que para o caso da placa. Assim, é preciso melhorar a precisão sobre este modo, por exemplo ao aumentar o parâmetro N_R , no entanto isto prejudicaria a eficiência da redução pois diminuiria o ganho de tempo que é ainda de $92,00\%$. Outra alternativa seria de aumentar a informação relativa a este modo na base de redução, ao impor o impacto utilizado na computação da base em um máximo da forma modal associada ao modo 8. De fato, no caso associado à Figura 6.15, é visto que a amplitude do modo 8 em regime permanente é relativamente baixa, ou seja ele foi pouco excitado e então pouco presente na base de redução.

Tabela 6.13 – Comparação dos gastos computacionais na análise de flutter no tempo do painel curvo

Sistema	Ordem	Gasto total	Vel. Crítica
Completo	5928	29h29min04s	3249,06 m/s
IRV	100	2h21min34s	3381,46 m/s

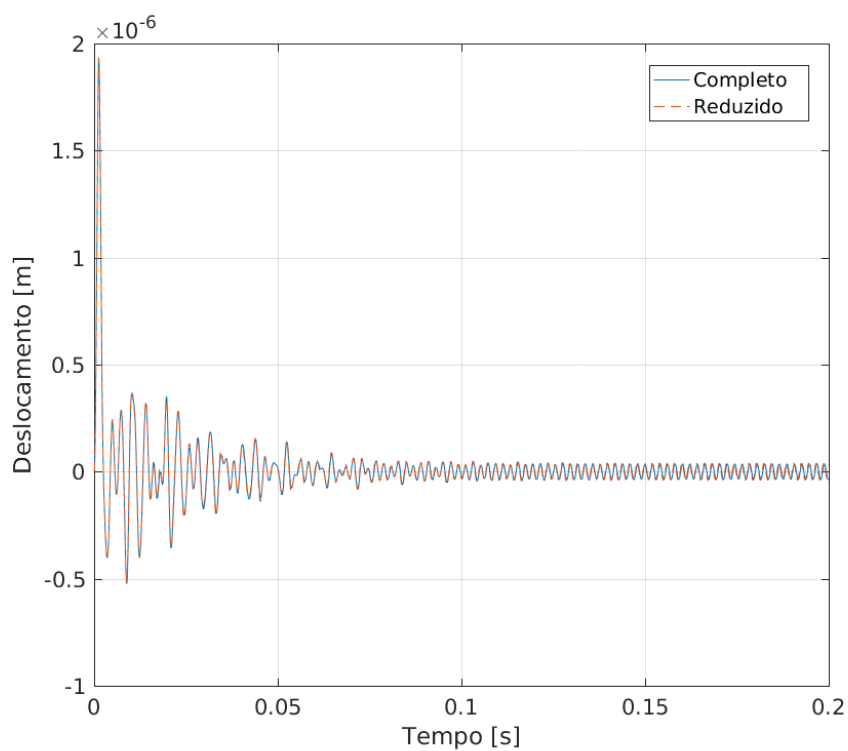


Figura 6.15 – Comparação das respostas harmônicas obtidas na região do flutter para o painel curvo

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS

7.1 Conclusões

Este trabalho é o resultado de uma parceria em pesquisa que vem sendo desenvolvida entre o Laboratório de Mecânica de Estruturas (LMEst), da Faculdade de Engenharia Mecânica (FEMEC-UFU), e o Laboratório de Estruturas do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA). O mesmo tem como principal contribuição propor um método de redução de modelos em elementos finitos de sistemas aeroviscoelásticos para a predição das fronteiras do flutter através de abordagens nos domínios da frequência e do tempo de tal maneira que uma complemente a outra.

A primeira parte do presente trabalho ressalta a necessidade do uso de técnicas de redução de modelos para sistemas que sofrem importantes alterações do comportamento dinâmico, sejam elas devidas às dependências em frequência e temperatura ou interação fluido-estrutura. Em seguida, foram evocadas as diferentes pesquisas e referências que serviram de base para estabelecer o estado da arte do trabalho, abrangendo noções de viscoelasticidade linear, redução de modelos e predição de flutter para painéis aeroelásticos.

Foi apresentado no capítulo II um dos principais conceitos deste trabalho sendo a viscoelasticidade linear, com as diferentes abordagens utilizadas para representar o seu comportamento. Na sequência, foi descrito uma das duas abordagens de modelagem para material viscoelástico sendo o módulo complexo, para o qual são utilizadas equações analíticas asso-

ciadas ao material 3M-ISD112™. Um modelo de elementos finitos baseado em deslocamento foi construído no código Matlab® por uma abordagem variacional para dois sistemas tipo placa fina, um deles sendo comparado e validado com o código comercial Ansys®.

O capítulo III iniciou-se com uma breve introdução ao conceito de derivada fracionária, essencial para o desenvolvimento do MEF no domínio exclusivo do tempo. Neste contexto, foi proposta uma melhoria do algoritmo originalmente proposto por Schmidt e Gaul [37], afim de remover a computação de tensões dos cálculos principais e promover uma primeira redução considerável dos gastos computacionais. Aqui vale ressaltar que esta é considerada uma das grandes contribuições do trabalho.

A teoria aerodinâmica do Pistão foi apresentada e introduzida nos MEFs desenvolvidos nos capítulos II e III formando assim os sistemas aeroviscoelásticos. Na sequência, foram mostrados os princípios utilizados para a predição da instabilidade de flutter. O princípio iterativo pela abordagem no domínio da frequência é baseado nos desenvolvimentos de Cunha [44], enquanto o princípio pela abordagem no tempo é proposto pela primeira vez neste trabalho.

No capítulo V foram apresentados novos métodos de redução de modelos para estes sistemas aeroviscoelásticos. Os métodos da abordagem na frequência foram adaptados de casos viscoelásticos, sendo baseados principalmente nos desenvolvimentos feito por de Lima et al. [41], Balmès et al. [21–24] e Rouleau et al. [26]. Para a abordagem temporal, um dos métodos chamado de ERM foi adaptado de Lima [43], e o outro método chamado de IRV foi proposto pela primeira vez neste trabalho, sendo considerando também uma das grandes contribuições.

Finalmente, a avaliação dos métodos quanto às qualidades de aproximação obtida e eficiencia de cálculo foram todas feitas com base nas análises de FRFs, respostas temporais e problemas de autovalores. Os dois critérios de validação foram a capacidade de representar fielmente o comportamento do sistema original completo (precisão), e o ganho de tempo obtido (eficiência). No que diz respeito à abordagem frequencial, o método IERM se mostrou o mais eficiente dentro todos os métodos estudados, com erro relativo à precisão de somente 0,13% para a estrutura de porte industrial e um ganho de tempo de 97,6%. Além disso, o método IERM se mostrou também robusto no quesito parâmetros de entrada, sendo o mais

flexível neste ponto.

Em se tratando da abordagem no domínio do tempo, o método IRV se destacou em relação ao método ERM adaptado de de Lima et al. [43]. A sua precisão foi demonstrada no caso da placa sanduíche com um erro relativo em relação a velocidade crítica menor do que 0,002% e um ganho de tempo de 95,47%. Entretanto, para o caso do painel curvo a precisão do mesmo método é menor, atingindo um erro relativo de 4,08% para um ganho de tempo de cálculo de 92,00%. Isto pode estar associado por exemplo ao fato do modo responsável pela instabilidade ser mais alto ou a uma eventual fraqueza do princípio de busca da velocidade crítica.

Em seguida, os métodos que foram considerados os melhores no domínio da frequência, IERM, e no domínio do tempo, IRV, são confrontados. Neste estudo, é constatado que ambos reproduzem o comportamento do sistema completo com excelente precisão. Entretanto, analisando friamente os resultados, o método IERM se mostrou mais eficiente. Este resultado pode ser explicado por se tratar de reduzir um problema de autovalores, sendo que a taxa do tempo computacional (tangente da curva do tempo vs ordem da matriz) cresce de acordo com a ordem das matrizes. Isto significa que quanto maior a ordem das matrizes, melhor a eficiência do método. Por outro lado, a relação do tempo de computação do flutter com a ordem das matrizes na abordagem do FDM é linear (como pode ser visto ao representar a coluna 3 em função da coluna 2 da Tabela 6.11). Desta maneira, conclui-se que o método de redução no domínio da frequência IERM aumenta sua eficiência com o aumento da ordem do sistema de maneira mais pronunciada quando comparado com o aumento de eficiência do método de redução no domínio do tempo IRV nestas mesmas proporções.

Finalizando as conclusões sobre os métodos de redução desenvolvidos neste trabalho, os mesmos provaram que é possível estender sua aplicação a sistemas não somente viscoelásticos, como também a qualquer sistema que apresente dependência da frequência, temperatura e que ainda possuam alteração de suas propriedades mecânicas decorrentes das operações de trabalho. Poderiam ser citados sistemas com tratamento por materiais piezoelétricos, sistemas de máquinas rotativas, ou qualquer sistema auto-excitado não necessariamente de natureza aerodinâmica. O notável princípio de construção do método IRV baseado na resposta de um impacto poderá também ser aplicado para outro tipo de carregamento, como

harmônico ou mesmo aleatório. Esta última propriedade, no contexto da redução de MEF, poderá se revelar particularmente interessante e imprescindível para sistemas com características estocásticas, como é o caso de SFEM (do inglês *stochastic finite element model*).

Visualizando além do escopo da redução de modelos, seria interessante comparar as velocidades críticas obtidas pelas duas abordagens analisadas (o que é a vantagem de se estudar duas abordagens diferentes). Para o painel curvo completo, nota-se que as velocidades não são exatamente as mesmas, sendo $V_c = 3077$ m/s na frequência e $V_c = 3249$ m/s no tempo. Esta discrepância pode estar associada às diferenças de modelagem do comportamento viscoelástico, sendo pelo módulo complexo ou pelo FDM. Neste ponto é difícil determinar quais das duas abordagens é a mais correta sem referências experimentais. Explicações para esta discrepância poderiam ser várias, porém uma lista contemplando os principais motivos seria:

- o ajuste de curvas dos parâmetros do FDM não preciso o suficiente;
- erros numéricos associados à resolução do problema de autovalores complexo quadrático não auto-adjunto e dependente da frequência;
- erros numéricos devido à integração numérica de Newmark (passo Δt não refinado o suficiente por exemplo);
- erros de truncamento da série da equação (3.6) das derivadas fracionárias (ou seja, um comprimento de memória muito curto);
- mau uso do princípio da correspondência elástica-viscoelástica, especialmente em relação ao coeficiente de Poisson complexo;
- princípio da busca do movimento harmônico no tempo (algoritmo 2) não rigoroso o suficiente;
- filtragem passa baixo não ajustado o suficiente;

Em relação ao custo computacional, a abordagem na frequência parece se mostrar consideravelmente mais adaptada do que a abordagem no tempo (3 horas contra 29,5 horas para a mesma estrutura). A abordagem no tempo serviria mais uma alternativa a ser utilizada caso a primeira seja descartada experimentalmente.

7.2 Perspectivas futuras

Os desenvolvimentos propostos nesta dissertação de mestrado proporcionam a realização de vários trabalhos posteriores que podem dar continuidade ao presente trabalho. Algumas das principais ideias são listadas abaixo:

- Estudo de sistema de elementos finitos estocásticos de sistema industrial com material apresentando dependência em frequência;
- Análise de sensibilidade destes sistemas;
- Testes da robustez dos métodos de redução desenvolvidos caracterizando a capacidade dos mesmos representarem ainda um sistema alterado com a base do sistema não alterado;
- Ensaio experimental para determinar quais das duas abordagens utilizadas neste trabalho representa melhor a realidade física;;
- Confirmação das vantagens das propriedades de material viscoelástico para instabilidade aerodinâmica;
- Comparação do sistema viscoelástico com o código comercial Ansys[®] através das séries de Prony;
- Implementação de um novo elemento finito com continuidade C^1 do deslocamento transversal, utilizando uma nova formulação cinemática das camadas restridentes (e.g. Layerwise [49]), e ainda modelando todas as camadas segundo a teoria de placa de Mindlin-Reissner;
- Adaptação dos métodos de redução aqui desenvolvidos para sistemas não lineares em grande deslocamento e/ou deformação usando a teoria da viscoelasticidade não linear, e teoria do Pistão não linear

REFERÊNCIAS

- [1] Hodges, D. H. e Pierce, G. A. *Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity*. 2nd ed. Cambridge University Press, 2011.
- [2] Fung, Y. C. *An Introduction to The Theory of Aeroelasticity*. Dover Publications, 1993.
- [3] Nayfeh, A.H. e Mook, D.T. *Nonlinear Oscillations*. Physics textbook. Wiley, 1995.
- [4] Wright, J. R. e Cooper, J. E. *Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads - Aerospace Series*. 2nd ed. Wiley.
- [5] Dowell, E. H. *Aeroelasticity of Plates and Shells*. Mechanics: Dynamical Systems. Springer Netherlands, 1974.
- [6] Dowell, E. H. *A Modern Course in Aeroelasticity - Solid Mechanics and Its Applications*. 5th ed. Vol. 217. Springer, 2014.
- [7] Roger, K.L., Hodges, G.E. e Felt, L. “Active Flutter Suppression - A Flight Test Demonstration”. Em: *AIAA* 12.6 (jun. de 1975).
- [8] Leao, L. S. et al. “Dynamic and aeroelastic behavior of composite plates with multi-mode resonant shunted piezoceramics in series”. Em: *Composite Structures* 153 (2016), pp. 815–824. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2016.07.010>.
- [9] Raja, S. et al. “Flutter control of a composite plate with piezoelectric multilayered actuators”. Em: *Aerosol Science and Technology* 10 (2006), pp. 435–441. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2006.01.003>.
- [10] Zhou, R.C. et al. “Suppression of Nonlinear Panel Flutter with Piezoelectric Actuators Using Finite Element Method”. Em: *AIAA* 33.6 (jun. de 1995). DOI: <https://doi.org/10.2514/3.12530>.

- [11] Kiiko, I.A. “Flutter of a viscoelastic plate”. Em: *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 60.1 (1996), pp. 167–170. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10665-012-9534-4>.
- [12] Potapov, V.D. “Stability of Viscoelastic Plate in Supersonic Flow Under Random Loading”. Em: *AIAA* 33.4 (1995), pp. 712–715. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.12635>.
- [13] Lottati, I. “The Role of Damping on Supersonic Panel Flutter”. Em: *AIAA* 23.10 (1984), pp. 1640–1642. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.9141>.
- [14] Cunha-Filho, A. G. et al. “Flutter suppression of Plates Using Passive Constrained Viscoelastic Layers”. Em: *Mechanical Systems and Signal Processing* (2016). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2016.02.025>.
- [15] Cunha-Filho, A. G. et al. “Flutter Suppression of Plates Subjected to Supersonic Flow Using Passive Constrained Viscoelastic Layers and Golla-Hughes-MacTavish Method”. Em: *Aerospace Science and Technology* (2016). DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ast.2016.02.022>.
- [16] Shin, W..H et al. “Aeroelastic characteristics of cylindrical hybrid composite ppanel with viscoelastic damping treatments”. Em: *Journal of Sound and Vibration* 296 (2006), pp. 99–116. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2006.01.068>.
- [17] Chen, M. et al. “Flutter analysis of a flag of fractional viscoelastic material”. Em: *Journal of Sound and Vibration* 333 (2014), pp. 7183–7197. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2014.08.024>.
- [18] Merrett, C.G. e Hilton, H.H. “Fractional order derivative aero-servo-viscoelasticity”. Em: *International Journal of Dynamics and Control* 5 (2017), pp. 239–251. DOI: <https://doi.org/10.1007/s40435-015-0195-9>.
- [19] Mojtaba, A., Permoon, M.R. e Haddadpour, H. “Stability analysis of a fractional viscoelastic plate strip in supersonic flow under axial loading”. Em: *Meccanica* 52.7 (2016), pp. 1495–1502. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11012-016-0494-z>.
- [20] Craig, R.R. e Kurdila, A.J. *Fundamentals of Structural Dynamics*. Wiley, 2006.

- [21] Balmès, E. e Germès, S. “Tools for viscoelastic damping treatment design: Application to an automotive floor panel”. Em: *Proceedings of the 28th International Seminar on Modal Analysis - ISMA*. 2002.
- [22] Balmès, E. e Plouin, A.S. “Steel/viscoelastic/steel sandwich shells computational methods and experimental validations”. Em: *International Modal Analysis Conference*. Vol. 4062. 2. 2000, pp. 384–390.
- [23] Kergoulay, G., Balmès, E. e Clouteau, D. “Model reduction for efficient FEM/BEM coupling”. Em: *ISMA*. Vol. 3. Leuven, 2000, pp. 1167–1174.
- [24] Bobillot, A. e Balmès, E. “Iterative techniques for eigenvalue solutions of damped structures coupled with fluids”. Em: *43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. Vol. 1391. Denver, Colorado, abr. de 2002.
- [25] Ouisse M. Sadoulet-Reboul, E. “Efficiency comparison of CMS vibroacoustic formulations for uncertain damped problems”. Em: *Sensors, Instrumentation and Special Topics*. Vol. 6. Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series. 2011, pp. 161–175.
- [26] Rouleau, L., Deü, J. F. e Legay, A. “A comparison of model reduction techniques based on modal projection for structures with frequency-dependent damping”. Em: *Mechanical Systems and Signal Processing* 90 (2016), pp. 110–125. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2016.12.013>.
- [27] Lima, A. M. de et al. “Component mode synthesis combining robust enriched Ritz approach for viscoelastically damped structures”. Em: *Engineering Structures* 32 (2010), pp. 1479–1488. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2010.01.028>.
- [28] Nashif, A.D., Jones, D.I.G. e Henderson, J.P. *Vibration Damping*. Wiley-Interscience publication. Wiley, 1985.
- [29] Flügge, W. *Viscoelasticity*. Springer, 1975.

- [30] Bagley, R. L. e Torvik, P. “Fractional Calculus - A Different Approach to the Analysis of Viscoelastically Damped Structures”. Em: *AIAA* 21.5 (mai. de 1983), pp. 741–748. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.8142>.
- [31] Bagley, R. L. e Torvik, P. “Fractional Calculus in the Transient Analysis of Viscoelastically Damped Structures”. Em: *AIAA* 23.6 (jun. de 1985), pp. 918–925. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.9007>.
- [32] Enelund, M e Lennart Josefson, B. “Time-Domain Finite Element Analysis of Viscoelastic Structures with Fractional Derivatives Constitutive Relations”. Em: *AIAA* 35.10 (out. de 1997), pp. 1630–1637. DOI: <https://doi.org/10.2514/2.2>.
- [33] Golla, D. F. e Hughes, P. C. “Dynamics of Viscoelastic Structures - A time-Domain, finite element formulation”. Em: *Journal of Applied Mechanics* 52 (1985), pp. 897–906. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.3169166>.
- [34] McTavish, D. J. e Hughes, P. C. “Modeling of linear viscoelastic space structures”. Em: *Journal of Vibration and Acoustics* 115.1 (1993), pp. 103–113. DOI: <https://doi.org/doi:10.1115/1.2930302>.
- [35] Lesieutre, G.A e Lee, U. “A finite element for beams having segmented active constrained layers with frequency-dependent viscoelastics”. Em: *Smart Materials and Structures* 5 (1996). DOI: <https://doi.org/10.1088/0964-1726/5/5/010>.
- [36] Bagley, R. L. e Torvik, P. “A Generalized Derivative Model for an Elastomer Damper”. Em: *The Shock and Vibration Bulletin* 49.2 (1979), pp. 135–143.
- [37] Schmidt, A. e Gaul, L. “FE Implementation of Viscoelastic Constitutive Stress-Strain Relations Involving Fractional Time Derivatives”. Em: *Constitutive Models for Rubbers II* A.A. Ed. por Publishers, Balkema. Tokyo, 2001, pp. 79–89. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1016552503411>.
- [38] Cortés, F. e Elejabarrieta, M. J. “Finite element formulation for transient dynamic analysis in structural systems with viscoelastic treatments containing fractional derivative models”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 69 (ago. de 2007), pp. 2173–2195. DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.1840>.

- [39] Galucio, A. C., Deü, J. F. e Ohayon, R. “Finite Element Formulation of Viscoelastic Sandwich Beams Using Fractional Derivative Operators”. Em: *Computational Mechanics* 33.4 (2004), pp. 282–291. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00466-003-0529-x>.
- [40] Padovan, J. “Computational algorithms for FE formulation involving fractional operators”. Em: *Computational Mechanics* 2 (1987), pp. 271–287.
- [41] Lima, A. M. G. de. “Modeling and Robust Optimization of Viscoelastic Damping in Mechanical Systems”. Tese de doutoramento. University of Franche-Comte (UFC) e Federal University of Uberlandia (UFU), 2007.
- [42] Lima, A. M. de, Rade, D. A. e Bouhaddi, N. “Stochastic modeling of surface viscoelastic treatments combined with model condensation procedures”. Em: *Shock and Vibration* 17.4-5 (2010), pp. 429–444. DOI: <http://dx.doi.org/10.3233/SAV-2010-0538>.
- [43] Lima, A. M. G. de et al. “A time-domain finite element model reduction method for viscoelastic linear and nonlinear systems”. Em: *Latin American Journal of Solids and Structures* 12.6 (jun. de 2015). DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/1679-78251695>.
- [44] Cunha-Filho, A. G. “A influencia do amortecimento viscoelástico na estabilidade aerodinâmica de painéis aeronáuticos”. Tese de mestrado. Universidade Federal de Uberlândia, 2015.
- [45] Christensen, R.M. *Theory of Viscoelasticity: Second Edition*. Dover Civil and Mechanical Engineering. Dover Publications, 2013.
- [46] Lakes, R.S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge University Press, 2009.
- [47] Drake, M. L. e Soovere, J. *Aerospace Structures Technology Damping Design Guide Volume III - Damping Material Data*. Rel. téc. Flight Dynamics Laboratory - Air Force Wright Aeronautical Laboratories, 1984.
- [48] Khatua, T. P. e Cheung, Y. K. “Bending and Vibration of Multilayer Sandwich Beams and Plates”. Em: *International Journals for Numerical Methods in Engineering* 6.11-24 (1973). DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.1620060103>.
- [49] Reddy, J.N. *Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells, Second Edition*. Series in Systems and Control. Taylor & Francis, 2006.

- [50] Hilton, H.H. “(Aero)elasticity and (Aero)viscoelasticity: A critical appreciation of similarities and differences”. Em: *51st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference 18th AIAA/ASME/AHS Adaptive Structures Conference 12th*. Orlando, Florida, abr. de 2010.
- [51] Moreau, A. “Identification de propriétés viscoélastiques de matériaux polymères par mesures de champs de réponses en fréquences de structures”. Tese de doutoramento. INSA Rouen, 2007.
- [52] Boiko, A. V. et al. “Measurement method of complex viscoelastic material properties”. Em: *International Journal of Solids and Structures* 47 (2009), pp. 374–382. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2009.09.037>.
- [53] Bogner, F. K., Fox, R. L. e Schmit, L. A. “The Generation of Interelement Compatible Stiffness and Mass Matrices by the Use of Interpolation Formulas”. Em: *Proceedings of the Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*. Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, 1965, pp. 397–444.
- [54] Adini, A. e Clough, R.W. *Analysis of Plate Bending by the Finite Element Method*. University of California, 1960.
- [55] Melosh, R. J. “Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method”. Em: *AIAA* 1.7 (1963), pp. 1631–1637. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.1869>.
- [56] Zienkiewicz, O.C. e Taylor, R.L. *The Finite Element Method: Solid mechanics*. Fluid Dynamics. Butterworth-Heinemann, 2000.
- [57] Reddy, J. *An Introduction to the Finite Element Method*. McGraw-Hill Education, 2005.
- [58] Bathe, K.J. *Finite Element Procedures*. Prentice Hall, 2006.
- [59] Zienkiewicz, O.C. e Taylor, R.L. *The Finite Element Method: The basis*. Fluid Dynamics. Butterworth-Heinemann, 2000.
- [60] Lima, A. M. G. de, Stoppa, M. H. e Rade, D. A. “Finite Element Modeling and Experimental Characterization of Beams and Plates Treated with Constraining Damping Layers”. Em: *ABCM Symposium Series in Mechatronics*. Vol. 1. 2004, pp. 311–320.

- [61] Kanok-nukulchai, W. “A Simple and Efficient Finite Element for General Shell Analysis”. Em: *International Journals for Numerical Methods in Engineering* 14.2 (1979). DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.1620140204>.
- [62] Kannan, R. et al. “Detecting the Causes of Ill-Conditioning in Structural Finite Element Models”. Em: *Computers and Structures* 133 (2014), pp. 79–89. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2013.11.014>.
- [63] Bathe, K. e Dvorkin, E.N. “A formulation of general shell elements - The use of mixed interpolation of tensorial components”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 22 (1986), pp. 697–722. DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.1620220312>.
- [64] Atanackovic, T. M. et al. *Fractional Calculus with Applications in Mechanics - Vibration and Diffusion Processes*. Ed. por WILEY. ISTE, 2014.
- [65] Herrmann, R. *Fractional Calculus - An Introduction For Physicists*. Ed. por Scientific, Wolrd. 2nd. Wolrd Scientific, 2014.
- [66] Grünwald, A. K. “Ueber ”begrenzte”Derivationen und deren Anwendung”. Em: *Zeitschrift für Mathematik und Physik* 12 (1867), pp. 441–480.
- [67] Makris, M. “Three-Dimensional Constitutive Viscoelastic Laws with Fractional Order Time Derivatives”. Em: *Journal of Rheology* 41.5 (1997), pp. 1007–1020. DOI: <https://doi.org/10.1122/1.550823>.
- [68] Lighthill, M. J. “Oscillating Airfoils at High Mach Number”. Em: *Journal of the Aeronautical Sciences* 20.6 (1952). DOI: <https://doi.org/10.2514/8.2657>.
- [69] Bismarck-Nasr, M.N. *Structural Dynamics in Aeronautical Engineering*. AIAA education series. American Institute of Aeronautics & Astronautics, 1999.
- [70] Ashley, H. “Piston Theory - A New Aerodynamic Tool for the Aeroelastician”. Em: *AIAA* 23.12 (1956), pp. 1109–1118. DOI: <https://doi.org/10.2514/8.3740>.
- [71] Dowell, E. H. “Nonlinear Oscillations of a Fluttering Plate”. Em: *AIAA* 4.7 (jul. de 1966), pp. 1267–1275. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.3658>.

- [72] Sander, G., Bon, C. e Geradin, M. “Finite element analysis of supersonic panel flutter”. Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 7 (1973), pp. 379–394. DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.1620070313>.
- [73] Eastep, F.E. e McIntosh Jr, S.C. “Analysis of a Nonlinear Panel Flutter and Response under Random Excitation or Nonlinear Aerodynamic Loading”. Em: *AIAA* 9.3 (mar. de 1971), pp. 411–418. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.6195>.
- [74] Vedeneev, V.V., Guvernyuk, S.V. e M.E., Kolotnikov. “Experimental Observation of Single Mode Panel Flutter in Supersonic Gas Flow”. Em: *7th EUROMECH Solid Mechanics Conference*. Lisbon, 2009. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2010.04.004>.
- [75] Meijer, M.C. e Dala, L. “Generalized Formulation and Review of Piston Theory for Airfoils”. Em: *AIAA* 54.1 (2016), pp. 17–27. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.J054090>.
- [76] Krumhaar, H. “The Accuracy of Linear Piston Theory When Applied to Cylindrical Shells”. Em: *AIAA* 1.6 (jun. de 1963), pp. 1448–1449. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.1832>.
- [77] Tisseur, F. e Meerbergen, K. “The Quadratic Eigenvalue Problem”. Em: *Society for Industrial and Applied Mathematics* 43.2 (2001). DOI: <https://doi.org/10.1137/S0036144500381988>.
- [78] Ghoman, S.S., Azzouz, M.S. e Mei, C. “Time Domain Method for Nonlinear Flutter of Curved PPanel under Yawed Supersonic Flow at Elevated Temperature”. Em: *50th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*. Palm Springs, California, mai. de 2009.
- [79] Gray, C.E., Mei, C. e Shore, C.P. “Finite Element Method for Large-Amplitude Two-Dimensional Panel Flutter at Hypersonic Speeds”. Em: *AIAA* 29.2 (1990), pp. 290–298. DOI: <https://doi.org/10.2514/3.10576>.
- [80] Mei, C. “A Finite-Element Approach for Nonlinear Panel Flutter”. Em: *AIAA* 15.8 (1977), pp. 1107–1110.

- [81] Goldmann, B.D. e Dowell, E. H. “Nonlinear Oscillations of a Fluttering Plate Resting on a Unidirectional Elastic Foundation”. Em: *AIAA* 52.10 (2014), pp. 2364–2368. DOI: <https://doi.org/10.2514/1.J053290>.
- [82] Cunha-Filho, A. G. et al. “A Model Reduction Method for Aeroviscoelastic Systems”. Em: *Proceedings of the XVII International Symposium on Dynamics Problems of Mechanics - DINAME*. São Sebastião, São Paulo, mar. de 2017.

ANEXO A

DETALHES SOBRE O MEF

A.1 Funções de forma da placa sanduíche

A.1.1 dos gdl de flexão

Como mencionado no capítulo II, o deslocamento transversal w é interpolado da seguinte forma no elemento de referência

$$w(\xi, \eta) = e_0 + e_1\xi + e_2\eta + e_3\xi\eta + e_4\xi^2 + e_5\eta^2 + e_6\xi^2\eta + e_7\xi\eta^2 + e_8\xi^3 + e_9\eta^3 + e_{10}\xi^3\eta + e_{11}\xi\eta^3 \quad (\text{A.1})$$

ou na forma matricial

$$w(\xi, \eta) = [\Phi_f]\{e\} \quad (\text{A.2})$$

onde $[\Phi_f] = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta & \xi^2 & \eta^2 & \xi^2\eta & \xi\eta^2 & \xi^3 & \eta^3 & \xi^3\eta & \xi\eta^3 \end{bmatrix}$ é a base de interpolação bi-cúbica de tamanho (1,12) do deslocamento w . Analisando o triângulo de Pascal, nota-se que esta base é incompleta, pois ela precisaria de 16 termos para ser uma base bi-cúbica completa. No entanto, devido à sua simetria, a mesma é capaz de produzir resultados bastante confiáveis [56, 57]. $\{e\} = \begin{Bmatrix} e_0 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 & e_9 & e_{10} & e_{11} \end{Bmatrix}^T$ é o vetor coluna de tamanho (12,1) dos coeficientes de interpolação a serem determinados.

Para encontrar as funções de forma do gdl w , é preciso expressar a função de interpolação $w(\xi, \eta)$ em relação aos seus valores nodais em vez dos coeficientes $\{e_i\}$. Para isso, é necessário

primeiramente computar o valor da função $w(\xi, \eta)$ segundo a equação (A.1) em cada um dos quatro nós do elemento de referência, e expressar os valores em função dos $\{e_i\}$. Assim, encontra-se a relação seguinte

$$\{\delta_f\} = [\phi_f] \{e\} \quad (\text{A.3})$$

onde $\{\delta_f\} = \left\{ w_1 \quad \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)_1 \quad - \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_1 \quad w_2 \quad \dots \quad \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_4 \right\}^T$ é o vetor coluna de tamanho (12,1) das incógnitas nodais (o objetivo da resolução do MEF) e $[\phi_f]$ é uma matriz de tamanho (12,12) contendo os valores que multiplicam os coeficientes $\{e_i\}$ no cálculo de cada incógnita nodal de $\{\delta_f\}$.

Logo, é invertida a relação (A.3) para isolar os coeficientes $\{e_i\}$, e estes são substituídos na equação (A.2) para obter a seguinte interpolação

$$w(\xi, \eta) = [N_f(\xi, \eta)] \{\delta_f\} \quad (\text{A.4})$$

onde $[N_f(\xi, \eta)] = [\Phi_f][\phi_f]^{-1}$ é a matriz de tamanho (1,12) das funções de forma (conhecida também como a matriz de interpolação dos deslocamentos) do gdl w e das suas derivadas espaciais de primeira ordem. Para o elemento de referência da Figura 2.6.a, tem-se $[N_f] =$

$$\begin{bmatrix} N_f^{(1)} & N_f^{(2)} & \dots & N_f^{(12)} \end{bmatrix} \text{ com}$$

- $N_f^{(1)}(\xi, \eta) = -\frac{1}{8}(\eta - 1)(\xi - 1)(\xi^2 + \eta^2 + \xi + \eta - 2)$
- $N_f^{(2)}(\xi, \eta) = -\frac{1}{8}(\eta + 1)(\eta - 1)^2(\xi - 1)$
- $N_f^{(3)}(\xi, \eta) = \frac{1}{8}(\xi + 1)(\xi - 1)^2(\eta - 1)$
- $N_f^{(4)}(\xi, \eta) = \frac{1}{8}(\eta - 1)(\xi + 1)(\xi^2 + \eta^2 - \xi + \eta - 2)$
- $N_f^{(5)}(\xi, \eta) = \frac{1}{8}(\eta + 1)(\eta - 1)^2(\xi + 1)$
- $N_f^{(6)}(\xi, \eta) = \frac{1}{8}(\xi - 1)(\xi + 1)^2(\eta - 1)$
- $N_f^{(7)}(\xi, \eta) = -\frac{1}{8}(\eta + 1)(\xi + 1)(\xi^2 + \eta^2 - \xi - \eta - 2)$
- $N_f^{(8)}(\xi, \eta) = \frac{1}{8}(\eta - 1)(\eta + 1)^2(\xi + 1)$
- $N_f^{(9)}(\xi, \eta) = -\frac{1}{8}(\xi - 1)(\xi + 1)^2(\eta + 1)$

- $N_f^{(10)}(\xi, \eta) = \frac{1}{8}(\eta + 1)(\xi - 1)(\xi^2 + \eta^2 + \xi - \eta - 2)$
- $N_f^{(11)}(\xi, \eta) = -\frac{1}{8}(\eta - 1)(\eta + 1)^2(\xi - 1)$
- $N_f^{(12)}(\xi, \eta) = -\frac{1}{8}(\xi + 1)(\xi - 1)^2(\eta + 1)$

A.1.2 dos gdl's de membrana

Como mencionado no capítulo II, somente derivadas espaciais de primeira ordem sobre os gdl's u_1 , v_1 , u_3 , e v_3 aparecem no cálculo das energias de deformação. Portanto, estes gdl's podem ser interpoladas com funções bilineares da forma seguinte

$$u_1(\xi, \eta) = a_0 + a_1\xi + a_2\eta + a_3\xi\eta \quad (\text{A.5a})$$

$$v_1(\xi, \eta) = b_0 + b_1\xi + b_2\eta + b_3\xi\eta \quad (\text{A.5b})$$

$$u_3(\xi, \eta) = c_0 + c_1\xi + c_2\eta + c_3\xi\eta \quad (\text{A.5c})$$

$$v_3(\xi, \eta) = d_0 + d_1\xi + d_2\eta + d_3\xi\eta \quad (\text{A.5d})$$

onde os coeficientes de interpolação a_i , b_i , c_i e d_i devem ser expressados em função dos valores nodais. Como feito para o deslocamento transversal, as equações (A.5) podem ser colocadas na forma matricial

$$u_1(\xi, \eta) = [\Phi_m(\xi, \eta)] \{a\} \quad (\text{A.6a})$$

$$v_1(\xi, \eta) = [\Phi_m(\xi, \eta)] \{b\} \quad (\text{A.6b})$$

$$u_3(\xi, \eta) = [\Phi_m(\xi, \eta)] \{c\} \quad (\text{A.6c})$$

$$v_3(\xi, \eta) = [\Phi_m(\xi, \eta)] \{d\} \quad (\text{A.6d})$$

onde $[\Phi_m(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} 1 & \xi & \eta & \xi\eta \end{bmatrix}$ é a base de interpolação bilinear completa de tamanho (1,4) dos deslocamentos de membrana. $\{a\} = \begin{Bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{Bmatrix}^T$, $\{b\} = \begin{Bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \end{Bmatrix}^T$, $\{c\} = \begin{Bmatrix} c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \end{Bmatrix}^T$ e $\{d\} = \begin{Bmatrix} d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{Bmatrix}^T$ são os vetores colunas dos coeficientes a serem determinados.

Para encontrar as funções de forma correspondentes, é preciso expressar as funções de

interpolação da equação (A.6) em relação ao seus valores nodais. Para isso, é necessário primeiramente computar o valor das funções segundo a equação (A.5) em cada um dos quatro nós do elemento de referência, e expressar os valores em função dos coeficientes de interpolação. Assim, encontra-se as relações seguintes

$$\{U_1\} = [\phi_m] \{a\} \quad (\text{A.7a})$$

$$\{V_1\} = [\phi_m] \{b\} \quad (\text{A.7b})$$

$$\{U_3\} = [\phi_m] \{c\} \quad (\text{A.7c})$$

$$\{V_3\} = [\phi_m] \{d\} \quad (\text{A.7d})$$

onde

- $\{U_1\} = \left\{ (u_1)_1 \quad (u_1)_2 \quad (u_1)_3 \quad (u_1)_4 \right\}^T$ é o vetor coluna de tamanho (4,1) das incógnitas nodais do deslocamento u_1
- $\{V_1\} = \left\{ (v_1)_1 \quad (v_1)_2 \quad (v_1)_3 \quad (v_1)_4 \right\}^T$ é o vetor coluna de tamanho (4,1) das incógnitas nodais do deslocamento v_1
- $\{U_3\} = \left\{ (u_3)_1 \quad (u_3)_2 \quad (u_3)_3 \quad (u_3)_4 \right\}^T$ é o vetor coluna de tamanho (4,1) das incógnitas nodais do deslocamento u_3
- $\{V_3\} = \left\{ (v_3)_1 \quad (v_3)_2 \quad (v_3)_3 \quad (v_3)_4 \right\}^T$ é o vetor coluna de tamanho (4,1) das incógnitas nodais do deslocamento v_3
- $[\phi_m] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ é a matriz contendo os valores que multiplicam os coeficientes de interpolação

Logo, as equações (A.7) são invertidas para isolar os coeficientes $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ e $\{d\}$ e

estes são substituídos nas equações (A.6) para obter a seguinte interpolação

$$u_1(\xi, \eta) = [N_m(\xi, \eta)] \{U_1\} \quad (\text{A.8a})$$

$$v_1(\xi, \eta) = [N_m(\xi, \eta)] \{V_1\} \quad (\text{A.8b})$$

$$u_3(\xi, \eta) = [N_m(\xi, \eta)] \{U_3\} \quad (\text{A.8c})$$

$$v_3(\xi, \eta) = [N_m(\xi, \eta)] \{V_3\} \quad (\text{A.8d})$$

onde $[N_m(\xi, \eta)] = [\Phi_m] \{\phi_m\}^{-1}$ é a matriz de tamanho (1,4) das funções de forma (ou matriz de interpolação) dos deslocamentos de membrana. Para o elemento de referência usado no capítulo II, tem-se $[N_m] = \begin{bmatrix} N_m^{(1)} & N_m^{(2)} & N_m^{(3)} & N_m^{(4)} \end{bmatrix}$ onde

- $N_m^{(1)}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta)$
- $N_m^{(2)}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta)$
- $N_m^{(3)}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta)$
- $N_m^{(4)}(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta)$

A.1.3 matriz de interpolação dos deslocamentos

Uma vez que todas as funções de forma foram determinadas, pode-se expressar as cinco incógnitas do problema (e eventualmente as derivadas de primeira ordem) em relação ao conjunto de todos os valores nodais do elemento de referência tal como

$$\begin{Bmatrix} u_1(\xi, \eta) \\ v_1(\xi, \eta) \\ u_3(\xi, \eta) \\ v_3(\xi, \eta) \\ w(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = [N_r(\xi, \eta)] \{\delta_r\} \quad (\text{A.9})$$

onde $\{\delta_r\} = \left\{ (u_1)_1 \quad (v_1)_1 \quad w_1 \quad \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_1 \quad -\left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_1 \quad (u_3)_1 \quad (v_3)_1 \quad (u_1)_2 \quad \dots \quad (v_3)_4 \right\}^T$ é o vetor coluna de tamanho (28,1) dos deslocamentos nodais expressos nas coordenadas de referência

(ξ, η) e

$$[N_r(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} N_m^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_m^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_f^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_f^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_f^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_m^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_m^{(1)} \\ N_m^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_m^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_f^{(4)} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_m^{(4)} \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.10})$$

é a matriz de funções de forma (ou matriz de interpolação dos deslocamentos) elementar de tamanho (5,28) de todos os gdls. Pode-se observar a ordem específica dos gdls in $\{\delta_r\}$ que foi escolhida para evitar problema de conectividade quando se passa de um elemento tratado de 28 gdls para um elemento não tratado de 20 gdls.

A.2 Estrutura industrial

A.2.1 Matriz de rigidez elementar dos gdls fictícios

Os gdls fictícios θ'_z e w'_3 da seção 2.3.3 são interpolados simplesmente com polinômios bilineares de Lagrange da mesma forma que os gdls de membrana. Ou seja,

$$\theta'_z(\xi, \eta) = [N'_m(\xi, \eta)] \{\Theta'_Z\} \quad (\text{A.11a})$$

$$w'_3(\xi, \eta) = [N'_m(\xi, \eta)] \{W'_3\} \quad (\text{A.11b})$$

onde

- $\{\Theta'_Z\} = \left\{ (\theta'_z)_1 \quad (\theta'_z)_2 \quad (\theta'_z)_3 \quad (\theta'_z)_4 \right\}^T$ é o vetor coluna de tamanho (4,1) das incógnitas nodais do deslocamento fictício local θ'_z

- $\{W'_3\} = \left\{ (w'_3)_1 \quad (w'_3)_2 \quad (w'_3)_3 \quad (w'_3)_4 \right\}^T$ é o vetor coluna de tamanho (4,1) das incógnitas nodais do deslocamento fictício local w'_3
- $[N'_m(\xi, \eta)]$ é a mesma matriz das equações (A.8)

A nova interpolação dos cinco gdl's principais para o painel aeronáutico se torna então

$$\begin{Bmatrix} u_1(\xi, \eta) \\ v_1(\xi, \eta) \\ u_3(\xi, \eta) \\ v_3(\xi, \eta) \\ w(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = [N'_r{}^*(\xi, \eta)] \{\delta'_r{}^*\} \quad (\text{A.12})$$

onde $\{\delta'_r{}^*\} = \left\{ (u'_1)_1 \quad (v'_1)_1 \quad w'_1 \quad \left(\frac{\partial w'}{\partial \eta}\right)_1 \quad -\left(\frac{\partial w'}{\partial \xi}\right)_1 \quad (\theta'_z)_1 \quad (u'_3)_1 \quad (v'_3)_1 \quad (w'_3)_1 \quad (u'_1)_2 \quad \dots \quad (w'_3)_4 \right\}^T$ é o vetor coluna de tamanho (36,1) dos deslocamentos nodais expressos nas coordenadas de referência (ξ, η) (o índice * é utilizado para diferenciar a placa sanduíche da estrutura industrial) e

$$[N'_r{}^*(\xi, \eta)] = \begin{bmatrix} N_m^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_m^{(1)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_f^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_f^{(2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_f^{(3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_m^{(1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_m^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_m^{(2)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_m^{(2)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_f^{(4)} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{A.13})$$

Ao substituir a equação (A.14) na (A.12), a interpolação dos deslocamentos se torna

$$\begin{Bmatrix} u_1(\xi, \eta) \\ v_1(\xi, \eta) \\ u_3(\xi, \eta) \\ v_3(\xi, \eta) \\ w(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = [N'^*(\xi, \eta)] \{\delta^*\} \quad (\text{A.15})$$

sendo $[N'^*(\xi, \eta)] = [N_r'^*(\xi, \eta)][M_p^*]$.

Logo, as matrizes elementares locais $[M'^{(e)}]$, $[K_e'^{(e)}]$ e $[K_v'^{(e)}]$ da seção 2.2.3 são computadas novamente segundo a nova interpolação dos deslocamentos da equação (A.15). No entanto, dado a presença dos novos gdl's fictícios, estas se tornam de tamanho (36,36).

Com respeito às matrizes de rigidez associadas às energias fictícias das equações (2.55a) e (2.55b), elas são então calculadas da seguinte forma

$$[K'_{\theta_z}] = G_1 h_1 \alpha_1 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N'_{\theta_z}]^T [N'_{\theta_z}] |J| d\xi d\eta \quad (\text{A.16a})$$

$$[K'_{w_3}] = \frac{E_3}{h_3} \alpha_3 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [N'_{w_3}]^T [N'_{w_3}] |J| d\xi d\eta \quad (\text{A.16b})$$

onde

- $[N'_{\theta_z}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_m^{(1)} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz elementar de tamanho (1,36) de interpolação do gdl fictício θ_z , composta pelas funções de forma bilineares da equação (A.8) colocadas nas posições associadas a este gdl no vetor de incógnitas nodais $\{\delta^*\}$.
- $[N'_{w_3}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_m^{(1)} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz elementar de tamanho (1,36) de interpolação do gdl fictício w_3 , composta pelas funções de forma bilineares da equação (A.8) colocadas nas posições associadas a este gdl no vetor de incógnitas nodais $\{\delta^*\}$.

Estas matrizes de rigidez elementares fictícias são em seguida adicionadas à matriz de rigidez da subestrutura elástica $[K_e'^{(e)}]$.

A sequência consiste em realizar o processo de rotação das matrizes elementares descrito na seção 2.3.2.

A.2.2 Remoção das instabilidades numéricas nas FRFs

Neste seção se analisa primeiro o exemplo da estrutura apresentada na Figura 2.8 desconsiderando o tratamento viscoelástico, ou seja, somente a camada de base puramente elástica. Os parâmetros são os apresentados na Tabela A.1. Os nós de excitação e visualização escolhidos para a FRF são respectivamente os de coordenadas globais (0,8027;0,4852;0,2979) e (0,7384;0,5785;0,3228) e o gdl excitado e visualizado é u_1 global. As FRFs com ($\alpha_1 = 10^{-5}$) e sem tratamento ($\alpha_1 = 0$) do gdl θ'_z são apresentada na Figura A.1. Vê-se que o tratamento conseguiu remover os dois picos indesejados da FRF presentes em 192Hz e 300Hz.

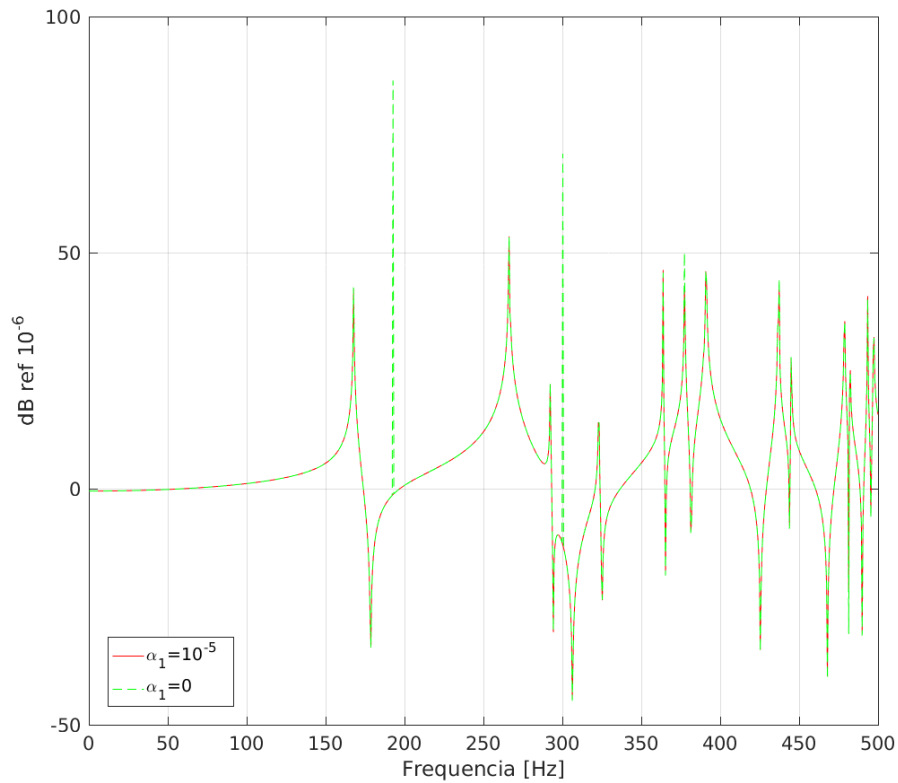


Figura A.1 – Aplicação do tratamento sobre o gdl fictício θ'_z

Da mesma forma, é analisado o caso da estrutura parcialmente tratada por material viscoelástico da Figura 2.8 com os parâmetros adicionais disponíveis na Tabela A.1. O material viscoelástico usado é o material 3M-ISD122TM, modelizado pelas equações (2.7a) e

Tabela A.1 – Parâmetros da estrutura parcialmente tratada elástica para análise de FRF

Espessura da camada de base h_1	1,2 mm
Espessura da camada viscoelástica h_2	0,5 mm
Espessura da camada restrigente h_3	0,5 mm
Módulo de Young da camada de base E_1	70 GPa
Módulo de Young da camada restrigente E_3	70 GPa
Coefficiente de Poisson da camada de base ν_1	0,3
Coefficiente de Poisson da camada viscoelástica ν_2	0,49
Coefficiente de Poisson da camada restrigente ν_3	0,3
Densidade da camada de base ρ_1	2700 kg/m ³
Densidade da camada viscoelástica ρ_2	950 kg/m ³
Densidade da camada restrigente ρ_3	2700 kg/m ³
Temperatura externa T_v	25 °C
Banda de frequência	[0; 500]Hz
Número de pontos	1000

(2.7b). Além disso, o valor encontrado de α_1 é mantido a 10^{-5} para o tratamento do gdl θ'_z . Utilizando os mesmos nós e gdl de excitação e visualização, são computadas as FRF com ($\alpha_3 = 10^{-10}$) e sem tratamento ($\alpha_3 = 0$) sobre o gdl fictício w'_3 . As FRFs são apresentadas na Figura A.2.

É evidente a eficiência notável do tratamento sobre o gdl w'_3 que foi capaz remover todos os picos indesejados.

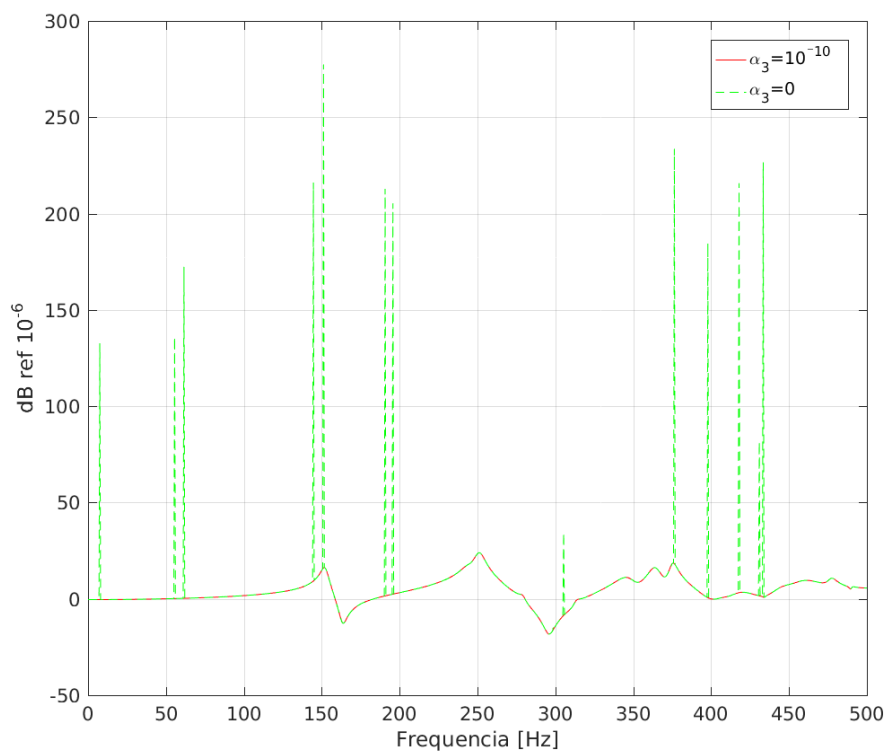


Figura A.2 – Aplicação do tratamento sobre o gdl fictício w'_3