Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática

Matheus Manoel Dantas

Descobrindo o Universo Transcendente com os Números de Liouville

Uberlândia - MG

2017

Matheus Manoel Dantas

Descobrindo o Universo Transcendente com os Números de Liouville

Monografia apresentada a Faculdade de Matemática, UFU, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática, sob a orientação de Victor Gonzalo Lopez Neumann.

Uberlândia - MG

2017

Matheus Manoel Dantas

Descobrindo o Universo Transcendente com os Números de Liouville

Monografia apresentada a Faculdade de Matemática, UFU, como requisito parcial para obtenção do título de Bacharel em Matemática, sob a orientação de Victor Gonzalo Lopez Neumann.

Aprovada no dia 20 de Dezembro de 2017.

Cicero Fernandes De Carvalho

Fernando R. Rafaeli

Fernando Rodrigo Rafaeli

Marcos Antônio da Câmara

Marcos Antônio da Câmara

Victor Gonzalo Lopez Neumann

Agradecimentos

Muito Obrigado! Em resumo este é o sentimento que carrego todos os dias de minha vida. Primeiramente, Muito obrigado meu Deus onipresente, justo e misericordioso e Muito obrigado Jesus Cristo pelas infinitas horas de conversa, pelos milhares de pedidos concedidos, por pegar na minha mão todas as vezes que precisei, por me castigar nas vezes que te decepcionei e aos poucos me ensinar o que significa ser justo. Muito obrigado pelos 22 anos de proteção e orientação.

Muito Obrigado Mãe por me educar, me orientar e por moldar este vaso de barro pequeno e frágil. Com certeza a senhora é o melhor e maior presente que Deus me deu. Muito Obrigado por ser a melhor mãe do mundo! Sem sua atenção, seu cuidado e seu carinho que recebi todos os dias de minha vida, eu não seria quem eu sou hoje. E assim, sem suas mãos trabalhando em mim todos os dias da minha vida, eu provavelmente não estaria concluindo o bacharelado em matemática.

Muito Obrigado Pai por fazer da minha vida tão divertida e feliz. Por ser o meu principal exemplo de homem, por ter me ensinado que um homem faz o que deve ser feito quando ninguém mais poderia fazê-lo sem uma única palavra de reclamação. Obrigado por acreditar em mim e com gestos me ensinar o que é a vida.

Muito Obrigado Irmão, por ser sempre o meu amigo mais idiota, com quem posso falar sobre o que quiser, fazer a piada que quiser e mesmo que minha piada seja sem graça, você vai fazer todo dar risada. Muito Obrigado Irmã, por ser sempre a minha amiga mais cabeça oca, por sempre estar comigo (mesmo enquanto dormimos), e ser essa pessoa com quem posso sempre contar e que não importa quantas vezes brigarmos, sempre irá me perdoar. Muito obrigado por aguentar meu egoísmo todos estes anos e obrigado por me fazer ser minha irmãzinha caçula e assim ter me dado a responsabilidade de me tornar uma pessoa melhor.

Muito Obrigado Tia Eliete, por ser a melhor tia do mundo, por ser a definição de parceira e a minha revoltada predileta. A senhora me ensinou a lutar, me ensinou que nenhum dia é cansativo demais, que nenhum compromisso é mais importante que a família e que sempre podemos superar qualquer desafio.

Muito Obrigado minha Lis, o melhor presente que Deus me deu nessa aventura de 5 anos. Muito Obrigado por ter me dado forças todos os dias, por ter me aconselhado, me deixado descansar deitado no seu colo e por nunca deixar eu fraquejar e/ou procrastinar. Muito Obrigado meu amor por segurar minha mão e ser um dos pilares fundamentais da minha vida. Você é o meu primeiro sonho realizado ♡

Muito Obrigado madrinhas Eliete e Gisdete pelo apoio, pelos passeios, pelo carinho, pela preocupação e por cuidarem de mim. Muito Obrigado padrinho João pelas muitas e muitas horas de brincadeira e histórias. Muito Obrigado pela paciência com este afilhado tão esquecido e preguiçoso. Muito obrigado tia Gilvanete pelas risadas, pelo carinho e por ser minha parceira de pratos!

Muito Obrigado meus amigos de infância, Celé, Fernandinho, Gabriel, Fabim, Patryck, Siqueira, Miguxa, Ervilha e Sharingan por me aguentarem todos esses anos, por sempre estarem presentes quando eu precisei,

pelas várias e várias horas de conselhos e conversas aleatórias. Muito Obrigado por me ajudarem a liberar todo o estresse e tensão do meu corpo e a relaxar com nossas muitas e muitas jogatinas, noites de filmes, jogos de peteca e truco. Muito Obrigado pelas várias aventuras e zueiras que passamos juntos que levo comigo todos os dias de minha vida.

Muito Obrigado aos meus amigos, Japa, Marça, Luís, Dani Alves, Aline, PV, Elis, Carol, Gi, Capitão 48h, JP, Shadow e Lu, que conheci neste desafio chamado curso de Matemática. Muito Obrigado pela paciência de vocês, sei que não foi pouca. Muito Obrigado pelo carinho que vocês tiveram comigo, por sempre estarem ao meu lado nos momentos em que precisei, pelos empurrões que são tão importantes pra quem encara este desafio como nós e pela zueira. Muito Obrigado Jesus por cruzarem nossos caminhos. Com certeza vocês são a cereja e o recheio desta graduação, com vocês os 5 anos de sofrimento não foram nada mais que 5 anos de diversão e alegrias que vão deixar uma saudade enorme no meu peito.

Muito Obrigado Gonzalo por ser meu amigo, meu orientador e um exemplo de Matemático. Muito Obrigado pela paciência, pela dedicação e por ser uma das pessoas mais incríveis que já conheci. Muito Obrigado por sempre me fazer rir e ver um lado "bom"sempre que estive com a corda no pescoço.

Muito Obrigado Cícero, por ser um excelente orientador, pelos muitos e muitos conselhos, pela paciência e por sempre me incentivar e me lembrar de fazer a matemática por prazer e nunca por obrigação. Muito Obrigado por ser um dos professores mais divertido, energético, engraçado e esforçado que conheci nestes 22 anos de vida.

Muito Obrigado Marcos por ser o melhor tutor que existe. Com certeza uma das melhores decisões que fiz nesta graduação foi entrar para o PET Matemática pois assim pude aprender e crescer sobre sua orientação. Muito Obrigado por sempre deixar o ambiente mais agradável, por permitir que cada petiano crescesse a sua própria maneira, pelos ensinamentos sobre a vida, trabalho em equipe, pessoas e por me ensinar tantas piadinhas ruins novas!

Muito Obrigado Fran por ser uma excelente professora, por me fazer rir tantas e tantas vezes, pelas várias horas de conversas e por ser a melhor coordenadora do curso de matemática! Muito Obrigado também aos excelentes professores, Salomão, Mário, Edson, Marcus, Fenille, Adriana, Elisa, Luís Renato, Daniel, Fernando e César que me moldaram durante esta graduação e, se sou um bom aspirante a matemático, então foi graças a instrução de todos vocês.

E novamente, Muito Obrigado Jesus Cristo por ter me feito ser Matheus Manoel Dantas, filho de Rosalina Maria de Jesus Dantas e de José do Carmo Alves Dantas, irmão de Lucas Gabriel Dantas e Maria Eduarda Dantas, sobrinho de Eliete Almeida dos Santos e alma gêmea de Elis Coimbra de Moura. Esta conquista não é apenas minha, é de todas as pessoas citadas e de muitas outras que não couberam neste agradecimento.

Muito Obrigado!

“ O ontem é história, o amanhã é incerto, o hoje é uma dádiva, por isso se chama presente. ”

“ Depois da guerra, sobra apenas o sentimento de que ninguém ganhou. Depois da guerra, o que um soldado se torna? ” - Iron Maiden.

“ Amai a justiça, vós que governais a terra, tende para com o Senhor sentimentos, e procurai-o na simplicidade do coração, porque ele é encontrado pelos que o não tentam, e se revela aos que não lhe recusam sua confiança; com efeito, os pensamentos tortuosos se afastam de Deus, e o seu poder, posto à prova, triunfa dos insensatos. a sabedoria não entrará na alma perversa, nem habitará no corpo sujeito ao pecado; o Espírito Santo educador (das almas) fugirá da perfídia, afastar-se-á dos pensamentos insensatos, e a iniquidade que sobrevém o repelirá. ” - Livro da Sabedoria, Cap. 1, Versículos 1 - 5.

Resumo

Neste trabalho discutiremos sobre os números de Liouville, um conjunto especial de números transcendentes. O primeiro capítulo é destinado à construção de números transcendentes segundo as ideias presentes em um artigo de Joseph Liouville de 1844. Estes transcendentes são chamados de números de Liouville e no segundo capítulo iremos explorar as propriedades destes números, o quão numerosos são e como eles estão distribuídos na reta.

Para finalizar o trabalho, demonstraremos que e e π são números transcendentes que não são números de Liouville.

Palavras-Chave: Joseph Liouville, números transcendentes, frações contínuas, aproximações racionais, números algébricos.

Abstract

In this work we shall discuss about Liouville Numbers, a special set of transcendental numbers. The first chapter is devoted to the construction of transcendental numbers according to the ideas present in an article by Joseph Liouville in 1844. These transcendents are called Liouville Numbers and in the second chapter we will explore the properties of these numbers, how numerous they are and how they are distributed on the line.

To finalize the work, we will show that e and π are transcendent numbers that are not Liouville numbers.

Key-Words: Joseph Liouville, transcendental numbers, continued fractions, rational approximation, algebraic numbers.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O que é um número transcendente? A resposta para essa pergunta é: Um número que não é algébrico. E quando perguntamos o que é um número algébrico, a resposta que obtemos é a seguinte definição dada por Leonard Euler.

Definição 1.0.1. *Dizemos que um número complexo $\alpha \in \mathbb{C}$ é algébrico se existe um polinômio $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ com coeficientes inteiros tal que $f(\alpha) = 0$.*

Seria esta definição o berço da teoria dos números transcendentes? Não! A teoria dos números transcendentes surge com o primeiro transcendente a dar as caras na história da matemática: π. E nem sabemos ao certo qual a idade de π! E mesmo que saibamos que π é a razão entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro, a demonstração da transcendência de π surge apenas em 1882 com o esforço de Lindemann.

Por mais que a teoria dos números transcendentes esteja presente na história da matemática desde muitos anos antes de cristo, é apenas no século XVIII que a teoria começa a tomar forma com Euler. E é apenas em 1844 que surgem os primeiros números transcendentes construídos por Joseph Liouville. Com uma ideia relativamente simples Liouville dá um pontapé inicial na teoria transcendente ao construir uma infinidade de exemplos, no entanto, como veremos adiante, Liouville não tentava construir números transcendentes, seu objetivo sempre foi demonstrar que e é transcendente.

Os primeiros exemplos de números que vamos trabalhar serão os números de Liouville, que são transcendentes muito bem comportados! Antes de adentrar nas ideias de Liouville vejamos um pouco de sua história.

Nascido em março de 1809, no auge do governo de Napoleão, Liouville era filho do capitão do exército de Napoleão Claude - Joseph Liouville com Thérèse Balland. Desde jovem Liouville teve interesse em Matemática e em Física entrando, em 1825, para École Polytechnique onde tem aulas de análise e mecânica com Ampère e Arago.

Depois de se graduar, Liouville atua como professor na École des Ponts et Chaussèes e, enquanto professor, ele submete vários artigos para a Academia de Paris sobre eletrodinâmica, equações diferenciais parciais e teoria do calor. E em 1831 Liouville consegue seu primeiro posto acadêmico como assistente de Claude Mathieu (apontado para ocupar a cadeira de Ampère) na École Polytechnique. Nesta época, Liouville já havia sido indicado para várias escolas particulares e estava dando de 35 a 40 horas de aula por semana.

Finalmente Liouville ganha fama internacional publicando em um dos melhores jornais científicos, o Jornal de Crelle. No entanto ele percebe o quanto é difícil publicar e espalhar matemática na França e, em 1836, Liouville fundou o Journal de Mathématiques Pures et Appliquées. Mesmo assim, é apenas em 1850 que Liouville consegue uma cadeira desocupada no Collège de France.

Liouville fez grandes contribuições para a física e a matemática. Além de publicar mais de 400 artigos, o jornal que Liouville criou abriu as portas dessas ciências na França e além disso, Liouville foi o responsável por chamar a atenção da comunidade matemática para os trabalhos de Galois, republicando-os em seu jornal em 1846.

Liouville foi um grande matemático que fez contribuições importantes tanto na matemática quanto na física. Para mais detalhes sobre sua história e seu trabalho recomendamos o livro [3]. Vamos construir transcendentes!

Capítulo 2

O Início da Teoria dos Números Transcendentes

O objetivo deste capítulo será abordar a teoria dos números transcendentes de um ponto de vista histórico até obtermos os primeiros números transcendentes. Com este intuito vamos começar falando do número e. Depois seguiremos os passos de Joseph Liouville atravessando a teoria das frações contínuas até obtermos os primeiros exemplos de números transcendentes da história.

O nome transcendente é atribuído a Leibniz que afirmou: "Existem números que transcendem o poder das operações algébricas", no entanto, foi Euler quem definiu números algébricos e transcendentes da maneira usual. Além disso, Euler demonstrou que o número e é irracional em 1737 mas não conseguiu demonstrar que e é transcendente nem encontrar um exemplo de número transcendente. É apenas em 1844, um século mais tarde, que Joseph Liouville fornece os primeiros exemplos de tais números.

Quando Liouville começou a trabalhar com a teoria transcendente seu objetivo era demonstrar que e é um número transcendente. Mas mesmo que Liouville tenha falhado, suas ideias geram muitos frutos e utilizando parte dessas ideias Hermite, que foi aluno de Liouville, prova que e é transcendente em 1873 e generalizando as ideias de Hermite, Lindemann demonstra em 1882 - apenas dois meses antes da morte de Liouville - que π é transcendente. Entretanto, Liouville encontrou uma quantidade infinita de números transcendentes com suas ideias.

Para acompanhar o desenvolvimento das ideias de Liouville precisamos responder a uma pergunta: Quem é e?

Em 1619 John Napier publica seu trabalho sobre logaritmos utilizando como base o número $1 - 10^{-7}$. Com o desenvolvimento dos logaritmos a comunidade matemática começa a se questionar qual a base dos logaritmos que melhor simplifica os cálculos? O que os matemáticos da época perceberam foi que, para $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, o número $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ fornece uma boa base para se fazer cálculos e estudando esta base eventualmente eles chegam ao número e. Para mais detalhes desta história veja [12]. Portanto definimos:

Definição 2.0.1. *Seja* $e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Mas ainda precisamos demonstrar que este limite existe, isto é, que e é um número real. Faremos isto no apêndice A e junto com esta demonstração já iremos obter duas informações sobre e: e é um número real que está entre 2 e 3, e também

$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

2.1 As Tentativas de Liouville

O primeiro passo de Liouville em direção a demonstração de que e é transcendente foi dado em 1840, passo no qual ele demonstrou que e não é solução de uma equação quadrática da forma

$$a\cdot e + \frac{b}{e} = c$$

onde $a > 0$ e $a,\ b$ e c são inteiros.

Depois Liouville demonstra que e^2 também não é uma solução de uma equação quadrática da forma $a\cdot e^2 + b\cdot e^{-2} = c$.

O próximo passo de Liouville foi redemonstrar que $e = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ utilizando somas finitas com um certo erro. Ele prova desta maneira porque a demonstração que Liouville conhecia foi dada por Cauchy utilizando séries infinitas com pouco rigor. Nessa demonstração Liouville escreve:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{m!}\left(1+\frac{\theta}{m}\right).$$

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \frac{1}{1} + \cdots + \frac{1}{m!}\left(1+\frac{\zeta}{m}\right) + \epsilon_m(m)$$

Onde $0 < \zeta < 1$, $0 < \theta < 1$ e $\epsilon_n(m) \longrightarrow 0$ quando m vai para infinito. Destas equações Liouville obteve

$$\left|e - \left(1+\frac{1}{m}\right)^m\right| = \left|\frac{1}{m!}\cdot\frac{\theta-\zeta}{m} - \epsilon_m(m)\right|$$

e aplicando o limite quando m tende a infinito Liouville obteve a demonstração formalizada que desejava.

E qual a importância desta demonstração no trabalho de Liouville ? Nesta demonstração ele percebeu que trabalhar com aproximações é uma boa ideia. Essa demonstração tem um maior impacto em 1844 quando, motivado pela correspondência entre Daniel Bernoulli e Christian Goldbach, Liouville decide voltar a trabalhar com números transcendentes. Nas correspondências Bernoulli e Goldbach discutem sobre números transcendentes utilizando séries infinitas, tentando obter números cuja escrita decimal nunca seria periódica.

Por esta época Liouville já conhecia os trabalhos de Lambert e Legendre sobre frações contínuas e, provavelmente para evitar trabalhar com as séries infinitas, muda sua abordagem. Liouville decide utilizar frações contínuas para verificar o quão bem um número algébrico pode ser aproximado por números racionais. Simplificando, a ideia de Liouville foi a seguinte: Encontrar uma propriedade que todo algébrico satisfaz e depois provar que e não satisfaz a propriedade encontrada. Portanto, vamos estudá-las para construir o primeiro número transcendente da história.

2.2 Frações Contínuas

Para definir o que é uma fração contínua vamos começar reescrevendo a fração $\frac{63}{13}$ de uma maneira um pouco diferente:

$$\frac{63}{13} = \frac{52}{13} + \frac{11}{13} = 4 + \frac{1}{\dfrac{13}{11}} = 4 + \frac{1}{1 + \dfrac{2}{11}} = 4 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{\dfrac{11}{2}}} = 4 + \frac{1}{1 + \dfrac{1}{5 + \dfrac{1}{2}}}.$$

Note que, para qualquer número real x, podemos escrever x desta maneira. Com efeito, dado $x \in \mathbb{R}$, definimos

$$\alpha_0 = x,\ a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

onde $\lfloor \cdot \rfloor$ denota a função parte inteira. E se $\alpha_n \notin \mathbb{Z}$, então definimos $\alpha_{n+1} = \frac{1}{\alpha_n - a_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Desse modo o processo termina sempre que $\alpha_m \in \mathbb{Z}$ para algum $m \in \mathbb{N}$ e nos permite escrever x da seguinte maneira:

$$x = \alpha_0 = a_0 + \alpha_0 - a_0 = a_0 + \frac{1}{\dfrac{1}{\alpha_0 - a_0}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dfrac{1}{\dfrac{1}{\alpha_1 - a_1}}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2 + \dfrac{1}{\dfrac{1}{\alpha_3 - a_3}}}}.$$

Essa construção nos permite definir:

Definição 2.2.1. *Dado $x \in \mathbb{R}$, definimos a fração contínua de x como sendo a expressão*

$$x := [a_0; a_1, \ldots, a_n, \ldots] := a_0 + \frac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2 + \cdots + \dfrac{1}{a_n + \ldots}}}.$$

onde os coeficientes $a_i \in \mathbb{Z}_+$, para todo $i \in \mathbb{Z}_+$ e $a_0 \in \mathbb{N}$.

Observe que, por construção, todo número real x pode ser escrito como uma fração contínua. No entanto, ainda temos que responder uma pergunta: Dada uma escrita $[a_0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$, a fração contínua correspondente converge para um número real ? Provaremos adiante que a resposta à essa pergunta é sim.

Definição 2.2.2. *Dada a construção da fração contínua de x, chamamos*

$$x = [a_0; a_1, \dots, a_{m-1}, \alpha_m]$$

de m-ésimo truncamento de x onde $\alpha_{m+1} = [a_{m+1}; a_{m+2}, \dots, a_n, \dots]$.

Observe que o truncamento é simplesmente parar a construção da fração contínua de x depois de m passos. É importante notar que, caso x seja irracional, o truncamento será irracional. Mas e se quisermos uma aproximação racional de x? Nesse caso vamos trabalhar com as m-ésimas convergentes de x.

Definição 2.2.3. *Dado uma fração contínua $[a_0; a_1, \dots, a_n, \dots]$ a fração*

$$\frac{p_m}{q_m} := [a_0; a_1, \dots, a_m]$$

é chamada de m-ésima convergente de x.

Note que o truncamento nos fornece exatamente x, enquanto uma m-ésima convergente nos fornece uma aproximação racional. Mais adiante estudaremos o quão boas são essas aproximações. Por mais que a ideia seja simples, calcular a fração contínua de um número real pode ser um bom desafio, como veremos adiante. Não entraremos em detalhes, mas existem as frações contínuas periódicas e nestes casos conseguimos determinar a fração contínua de maneira mais simples.

Exemplo 2.2.1. *Calculemos a fração contínua de $x = \sqrt{2}$. Como $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$, temos que*

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2} - 1}}.$$

Observando que $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2} + 1$ obtemos

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{2} - 1}}} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2} + 1}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\sqrt{2} + 1}}}}.$$

Portanto, $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, 2, \dots]$.

Você pode se perguntar: E quando a fração contínua não é periódica ? Nesses casos para nossa felicidade há relações de recorrência que podemos utilizar para determinar as convergentes e também os truncamentos.

Proposição 2.2.1. *As sequências $(p_n)_n$ e $(q_n)_n$ satisfazem as seguintes relações de recorrência:*

$$p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n \ \ e \ \ q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n$$

para todo $n \geq 0$, com $p_0 = a_0,\ p_1 = a_0a_1 + 1,\ q_0 = 1$ e $q_1 = a_1$. Além disso,

$$p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n.$$

Demonstração.

Primeiramente vamos demonstrar a relação de recorrência por indução tomando um certo cuidado com os valores iniciais da mesma. Depois, novamente por indução, demonstraremos a relação entre a n-ésima e a $(n+1)$-ésima convergente.

Para $n = 0$ temos que $[a_0] = a_0 = \dfrac{a_0}{1} = \dfrac{p_0}{q_0}$.

Seja $n = 1$. Nesse caso, $[a_0; a_1] = a_0 + \dfrac{1}{a_1} = \dfrac{a_0a_1 + 1}{a_1} = \dfrac{p_1}{q_1}$.

Para $n = 2$, temos que

$$\begin{aligned}[a_0; a_1, a_2] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} &= a_0 + \cfrac{1}{\cfrac{a_2a_1 + 1}{a_2}} = \frac{a_0(a_1a_2 + 1) + a_2}{a_2a_1 + 1} \\ &= \frac{a_2(a_0a_1 + 1) + a_0}{a_2q_1 + q_0} = \frac{a_2p_1 + p_0}{a_2q_1 + q_0} = \frac{p_2}{q_2}.\end{aligned}$$

Agora suponha que a relação de recorrência seja satisfeita até um certo $2 < n \in \mathbb{N}$. Provemos que está relação também vale para $n + 1$. De fato, pela estrutura das frações contínuas, temos a igualdade:

$$\begin{aligned}[a_0; a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}] &= \left[a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right] \\ &= \frac{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right)p_{n-1} + p_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right)q_{n-1} + q_{n-2}} \\ &= \frac{a_np_{n-1} + \frac{p_{n-1}}{a_{n+1}} + p_{n-2}}{a_nq_{n-1} + \frac{q_{n-1}}{a_{n+1}} + q_{n-2}} \\ &= \frac{a_{n+1}(a_np_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{a_{n+1}(a_nq_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} \\ &= \frac{a_{n+1}p_n + p_{n-1}}{a_{n+1}q_n + q_{n-1}} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\end{aligned}$$

Portanto, $(p_n)_n$ e $(q_n)_n$ satisfazem as relações de recorrência como queríamos demonstrar.

Ainda precisamos provar que $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$. Por indução, note que para $n = 0$ temos que $p_1q_0 - q_1p_0 = (a_0a_1 + 1) \cdot 1 - a_0 \cdot a_1 = 1 = (-1)^0$. Suponha que para algum $n \in \mathbb{N}$ temos que $p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n$, então

$$\begin{aligned}
p_{n+2}q_{n+1} - p_{n+1}q_{n+2} &= (a_{n+2}p_{n+1} + p_n)q_{n+1} - p_{n+1}(a_{n+2}q_{n+1} + q_n) \\
&= a_{n+2}p_{n+1}q_{n+1} + p_nq_{n+1} - a_{n+2}p_{n+1}q_{n+1} - q_np_{n+1} \\
&= -(p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n) = -(-1)^n = (-1)^{n+1}.
\end{aligned}$$

□

Corolário 2.2.1. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ valem as relações:*

$$x = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}} \;\; e \;\; \alpha_n = \frac{p_{n-2} - q_{n-2} \cdot x}{q_{n-1} \cdot x - p_{n-1}}$$

Demonstração.

Para a primeira igualdade basta fazer $a_n = \alpha_n$ na relação de recorrência da proposição anterior. Podemos fazer isto pois as operações que utilizamos na demonstração da proposição anterior não consideram que os a_i são inteiros. Assim,

$$x = [a_0; a_1, \ldots, a_{n-1}, \alpha_n] = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}}$$

Desta igualdade obtemos a outra. De fato,

$$\begin{aligned}
x = \frac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}} &\Leftrightarrow x(q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}) = \alpha_n p_{n-1} + p_{n-2} \\
&\Leftrightarrow xq_{n-1}\alpha_n - \alpha_n p_{n-1} = p_{n-2} - q_{n-2}x \\
&\Leftrightarrow \alpha_n = \frac{p_{n-2} - q_{n-2}x}{xq_{n-1} - p_{n-1}}
\end{aligned}$$

□

Finalmente podemos demonstrar nossa primeira cota superior para aproximações racionais via frações contínuas. Além disso, o teorema a seguir é crucial no trabalho de Liouville.

Teorema 2.2.1. *Dado $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots]$ real, temos que*

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n}.$$

Em particular,

$$\frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n} < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}$$

Demonstração.

Pelo Corolário 2.2.1,

$$\begin{aligned} x - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{q_n(\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}) - p_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})} \\ &= \frac{q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1}}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})} = \frac{-(p_n q_{n-1} - p_{n-1}q_n)}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})} = \frac{(-1)^n}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}. \end{aligned}$$

Pois já sabemos que $p_{n+1}q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n$.

Em particular, $\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| = \frac{1}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}$. Como $\lfloor \alpha_{n+1} \rfloor = a_{n+1}$ e a sequência $(q_n)_n$ é crescente, temos que $a_n \leq \alpha_n \leq a_n + 1$ e $q_n > q_{n-1} \geq 1 > 0$. Daí,

$$\frac{1}{(a_{n+1}+2)q_n^2} < \left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2}.$$

□

Com este teorema podemos demonstrar o teorema de Dirichlet que possui uma certa similaridade com o teorema de Liouville. Esta similaridade talvez não seja coincidência, afinal Liouville e Dirichlet eram amigos próximos e sempre discutiam seus trabalhos de matemática entre si.

Teorema 2.2.2 (Teorema da Aproximação de Dirichlet)**.** *Se $\alpha \in \mathbb{R}$ é um número irracional, então existem infinitos racionais $\frac{p}{q}$, com $q \geq 1$, tais que*

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

Demonstração.

Se α é irracional, então a fração contínua de $\alpha = [a_o; a_1, \ldots]$ é infinita. Como $a_i \in \mathbb{Z}_+$ para todo $i > 0$, pelo teorema anterior obtemos que

$$\left| \alpha - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{a_{n+1}q_n^2} < \frac{1}{q_n^2}, \;\; \forall\, 1 < n \in \mathbb{N}$$

onde $\frac{p_n}{q_n}$ é um n-ésimo convergente da fração contínua de α. □

Finalmente podemos formalizar melhor a teoria das frações contínuas e também demonstrar que as frações contínuas nos fornecem uma aproximação racional tão boa quanto quisermos.

Proposição 2.2.2. *Seja $x = [a_0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ um número real irracional. Se $(p_n)_n$ e $(q_n)_n$ são as n-ésimas* *reduzidas de x, então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = x$$

Demonstração. Dado $\epsilon > 0$, como $(q_n)_n$ é crescente, ilimitada e $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}_+$, existe um $0 < n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{a_{n_0+1} \cdot q_{n_0}^2} < \epsilon$. E, pela proposição anterior,

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{a_{n+1} \cdot q_n^2} \leq \frac{1}{a_{n_0+1} \cdot q_{n_0}^2} < \epsilon$$

para todo $n > n_0$. □

Enfim, para podermos seguir os passos de Liouville na construção do primeiro número transcendente, precisaremos de apenas mais um teorema. Mas, para demonstrar este teorema, precisaremos do seguinte lema:

Lema 2.2.1. *Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $\frac{p_m}{q_m}$ as m-ésimas convergentes de x. Então, para todo índice $k \in \mathbb{N}$ temos*

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} \leq \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} \leq x \leq \frac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}} \leq \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$$

Demonstração.

Observe que

$$\begin{aligned}
\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} &= \frac{a_{n+2}p_{n+1} + p_n}{a_{n+2}q_{n+1} + q_n} - \frac{p_n}{q_n} \\
&= \frac{q_n(a_{n+2}p_{n+1} + p_n) - p_n(a_{n+2}q_{n+1} + q_n)}{q_n q_{n+2}} \\
&= \frac{a_{n+2}(q_n p_{n+1} - p_n q_{n+1})}{q_n q_{n+2}} = (-1)^n \frac{a_{n+2}}{q_n q_{n+2}}.
\end{aligned}$$

Assim, se n é par, então $\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} \geq 0$. E se n é ímpar, então $\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}} - \frac{p_n}{q_n} \leq 0$. Por outro lado, sabemos que

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})q_n}$$

donde, se n é par, então $x - \frac{p_n}{q_n} \geq 0$ e se n é ímpar, $x - \frac{p_n}{q_n} \leq 0$. Portanto

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} \leq \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} \leq x \leq \frac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}} \leq \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$$

□

Teorema 2.2.3. *Dada uma sequência de números inteiros $(a_n)_n$ com $a_k \geq 1$ para todo $k \neq 0$, existe um único número real x irracional tal que sua representação por frações contínuas é exatamente $x = [a_0; a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots]$.*

Demonstração.

Dada a sequência de inteiros $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sejam $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ duas sequências construídas pelas seguintes relações de recorrência:

$$p_0 = a_0,\ p_1 = a_0 a_1 + 1 \ e\ p_{n+2} = a_{n+2}p_{n+1} + p_n.$$

$$q_0 = 1,\ q_1 = a_1 \ e\ q_{n+2} = a_{n+2}q_{n+1} + q_n.$$

Defina $x = [a_0; a_1, \ldots, a_{n+2}]$, nesse caso $x \in \mathbb{Q}$ e as sequências (p_n) e (q_n) descrevem as n-ésimas primeiras convergentes de x. Então, dado $0 \leq k \in \mathbb{Z}$ podemos tomar $n = 2k+3$ e assim obter condições de aplicar o lema 2.2.1. Do lema obtemos que

$$\frac{p_{2k}}{q_{2k}} \leq \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} \leq x \leq \frac{p_{2k+3}}{q_{2k+3}} \leq \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}. \tag{2.1}$$

Daí, para cada $k \in \mathbb{N}$ defina $I_k = \left[\frac{p_{2k}}{q_{2k}}, \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}\right]$. Observe que pela desigualdade anterior, temos uma sequência de intervalos encaixados $I_k \supset I_{k+1} \supset \cdots$. Provemos que o comprimento dos intervalos I_k vai para zero à medida que k cresce. Com efeito,

$$|I_k| = \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} - \frac{p_{2k}}{q_{2k}} = \frac{p_{2k+1}q_{2k} - p_{2k}q_{2k+1}}{q_{2k}q_{2k+1}} = \frac{(-1)^{2k}}{q_{2k}q_{2k+1}} = \frac{1}{q_{2k}q_{2k+1}}.$$

Por definição, como os elementos a_k são inteiros, a sequência $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente. Portanto

$$\lim_{k\to\infty} |I_k| = 0.$$

Então, pelo teorema dos intervalos encaixados, $\{\alpha\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$. Mas da equação (2.1) temos que

$$[a_0; a_1, \ldots, a_n, \ldots] = x_\infty \in I_k \ \forall\ k \in \mathbb{N},$$

logo $\alpha = x_\infty$ e portanto existe um único número real α cuja representação contínua por frações contínuas é $[a_0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$. □

2.3 A Construção de Liouville de 1844

E qual foi a ideia de Liouville? A ideia de Liouville foi construir frações contínuas que não satisfaziam nenhuma equação algébrica da forma

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0. \tag{2.2}$$

Trabalhando com aproximações, séries de Taylor e algumas ideias presentes nos trabalhos de Lagrange, Liouville demonstrou o teorema seguinte. Contudo, a demonstração abaixo é uma versão simplificada daquela feita por Liouville. Antes do teorema, observe que dado um polinômio $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$, definimos o polinômio

$$F(x, y) := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}y + \cdots + a_2 x^2 y^{n-2} + a_1 x y^{n-1} + a_0 y^n \in \mathbb{Z}[x]$$

de modo que F e f satisfazem a relação

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{1}{q^n} \cdot F(p, q)$$

para todo racional $\frac{p}{q}$ não nulo. Em particular, $q^n \cdot f\left(\dfrac{p}{q}\right) = F(p, q)$ é um inteiro não nulo.

Além desta observação, precisamos do seguinte lema para demonstrar os dois teoremas de Liouville.

Lema 2.3.1. *Se $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ é um polinômio irredutível de grau maior ou igual que 2, então f não possui raízes racionais, ou seja, $f\left(\frac{a}{b}\right) \neq 0$ para todo racional $\frac{a}{b}$.*

Demonstração.

De fato, se existe um racional $\frac{a}{b}$ tal que $f(\frac{a}{b}) = 0$, então $f(x) = \left(x - \frac{a}{b}\right) \cdot g(x)$ onde $g(x)$ é um polinômio com coeficientes racionais, isto é,

$$g(x) = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} \cdot x^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{b_1} \cdot x + \frac{a_0}{b_0}.$$

Note que, como $deg(f) = n \geq 2$, temos que $deg(g) \geq 1$ logo $g(x)$ não é um polinômio constante. Agora observe que:

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{a}{b}\right) &= \frac{1}{b} \cdot (bx - a), \\ g(x) &= \frac{1}{b_{n-1} \cdots b_1 \cdot b_0} [\underbrace{(a_{n-1}b_{n-2} \cdots b_0)x^{n-1} + \cdots + (a_0 b_{n-1} \cdots b_1)}_{\overline{g}(x)}]. \end{aligned}$$

E como por hipótese $f(x) = \left(x - \frac{a}{b}\right) g(x)$ temos que $(b \cdot b_{n-1} \cdots b_0) f(x) = \overline{g}(x)(bx - a)$ donde f é redutível. Contradição! Portanto $f\left(\frac{a}{b}\right) \neq 0$.

□

Teorema 2.3.1. *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$ um número algébrico irracional, $f(x) = a_n x^n + \cdots a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$ o polinômio irredutível que anula α e seja $n = deg(f)$. Se $\alpha = [b_0; b_1, \ldots, b_m, \alpha_{m+1}]$, então existem dois números reais*

$c, \theta \in (\alpha - 1, \alpha + 1)$ de modo que valem as relações

$$b_{m+1} < \alpha_{m+1} < (-1)^{m+1} \frac{f'(c)}{q_m \cdot f(p_m, q_m)} \leq (-1)^{m+1} f'(\theta) \cdot q_m^{n-2}$$

para todo racional $\frac{p_m}{q_m}$ m-ésimo convergente de α. Em particular, existe uma contante real $A > 0$ tal que para todo $1 < m \in \mathbb{N}$ vale

$$b_{m+1} < q_m^{n-2} \cdot A.$$

Demonstração.

Primeiramente observe que se $m > 1$, então $q_m \geq 2$ e pelo teorema da aproximação das frações contínuas temos que $\frac{p_m}{q_m} \in (\alpha - 1, \alpha + 1)$ para todo $m > 1$.

Dada uma m-ésima convergente $\frac{p_m}{q_m}$, como todo polinômio é uma função contínua, pelo teorema do valor médio existe c entre $\frac{p_m}{q_m}$ e α tal que

$$f(\alpha) - f\left(\frac{p_m}{q_m}\right) = f'(c)\left(\alpha - \frac{p_m}{q_m}\right).$$

Pela observação anterior $c \in (\alpha - 1, \alpha + 1)$. Note que se $f'(c) = 0$, então $f\left(\frac{p_m}{q_m}\right) = f(\alpha) = 0$ o que contraria o lema 2.3.1, pois como α é irracional, $deg(f) \geq 2$. Logo, $f'(c) \neq 0$.

Aplicando a relação do teorema 2.2.1 na igualdade acima obtemos que

$$-\frac{f\left(\frac{p_m}{q_m}\right)}{f'(c)} = \alpha - \frac{p_m}{q_m} = \frac{(-1)}{q_m(\alpha_{m+1} q_m + q_{m-1})}$$

donde

$$\begin{aligned} q_m(\alpha_{m+1} q_m + q_{m-1}) &= (-1)^{m+1} \frac{f'(c)}{f\left(\frac{p_m}{q_m}\right)} \\ &= (-1)^{m+1} \frac{f'(c)}{\left(\frac{1}{q_m}\right)^n F(p_m, q_m)} \\ &= (-1)^{m+1} \frac{1}{q_m} \frac{f'(c) \cdot q_m^n}{F(p_m, q_m)}. \end{aligned}$$

Como $q_m \geq 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$

$$\alpha_{m+1} q_m < (-1)^{m+1} \frac{f'(c) \cdot q_m^{n-1}}{F(p_m, q_m)} \Leftrightarrow \alpha_{m+1} < (-1)^{m+1} \frac{f'(c) \cdot q_m^{n-2}}{F(p_m, q_m)}.$$

Lembre que c depende de $\frac{p_m}{q_m}$ e consequentemente de m. Mas como f' também é contínua, pelo teorema de Weierstrass, existe $\theta \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$ de modo que $|f'(\theta)| \geq |f'(x)|$ para todo x no intervalo. Suponha, sem perda de generalidade, que $F(p_m, q_m)$ seja positivo. Daí, como $F(p_m, q_m)$ é um inteiro e $\frac{p_m}{q_m} \in [\alpha - 1, \alpha + 1]$ para todo $m > 1$, temos que

$$b_{m+1} = \lfloor \alpha_{m+1} \rfloor < \alpha_{m+1} < (-1)^{m+1} \frac{f'(\theta) \cdot q_m^{n-2}}{F(p_m, q_m)} < (-1)^{m+1} f'(\theta) q_m^{n-2}$$

para todo $m > 1$. Em particular, para $A = |f'(\theta)|$ obtemos que

$$b_{m+1} < q_m^{n-2} \cdot A.$$

□

2.4 Os Primeiros Números Transcendentes

Assim, bastou Liouville construir números por frações contínuas que não satisfaziam esta desigualdade. O método que ele usou foi o seguinte:

- Escolha b_1 inteiro maior ou igual a 2 e b_0 qualquer.
- Tome os próximos termos da fração contínua satisfazendo $b_{m+1} = q_m^m$.

e este número (para o qual a fração contínua converge) é o primeiro número transcendente da história. Lembre que o número dado pelo método acima existe e é único pelo teorema 2.2.3.

Exemplo 2.4.1. *Escolha $b_0 = 2$ e $b_1 = 3$. Temos que*

$$\frac{p_1}{q_1} = [3; 2] = 3 + \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \Longrightarrow b_2 = 2^2 = 4.$$

Continuando,

$$\frac{p_2}{q_2} = [3; 2, 4] = 3 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4}} = 3 + \frac{4}{9} = \frac{31}{9} \Longrightarrow b_3 = 9^3 = 243.$$

E assim continuamos infinitamente.

Observe que os termos da fração contínua crescem muito rapidamente e que este processo não é prático para se construir um exemplo de número transcendente. Este foi seu teorema de 1844 e depois deste resultado Liouville passa os 7 anos seguintes sem trabalhar com números transcendentes. Este primeiro teorema de 1844 não causa um impacto tão grande na comunidade matemática da época, mas depois de 7 anos sem trabalhar com números transcendentes Liouville publica em 1851 seu último trabalho sobre números transcendentes. Ele percebeu que não era necessário que $\frac{p}{q}$ fosse uma m-ésima convergente da fração contínua de x, bastava que a fração $\frac{p}{q}$ fosse suficientemente próxima de x. Desse modo, Liouville mostra que

$$l = \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{10^{3!}} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$$

é um número transcendente, o primeiro exemplo númerico deles, e afirma que qualquer número da forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} m^{-n!},\ m \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$$

é transcendente. No entanto, Liouville não demonstra tal afirmação.

2.5 O Teorema de Liouville (1851)

O teorema que Liouville publica em 1851 é o seguinte:

Teorema 2.5.1 (Teorema de Liouville de 1851)**.** *Se $\alpha \in \mathbb{R}$ é um número irracional e algébrico de grau n, então existe uma constante $0 < A \in \mathbb{R}$ tal que para qualquer racional $\frac{p}{q}$ com $q > 0$ a seguinte desigualdade é mantida:*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{A \cdot q^n}$$

E foi este o teorema que causou um grande impacto na comunidade matemática e imortalizou Joseph Liouville. Este teorema surge apenas 23 anos antes de Cantor demonstrar, em 1874, que o conjunto dos números algébricos é enumerável. Ou seja, praticamente todos os números reais são transcendentes. Este teorema de Cantor balança as ideias da comunidade matemática da época, afinal, se quase todos os números são transcendentes, então por que quase não conhecemos nenhum? Além disso, porque é tão difícil demonstrar a transcendência de um número?

Perceba que os números transcendentes não possuem uma caracterização geral, eles são definidos como números que não são algébricos. No entanto, essa dificuldade de encontrar uma caracterização faz todo o sentido. Pense bem, estes números superam as operações algébricas e são quase todos os números reais, ou seja, se existisse uma caracterização destes números, provavelmente poderíamos construir os números reais de uma maneira diferente e isto afetaria também a teoria de conjuntos, a base da matemática.

Para demonstrar o teorema de Liouville precisamos apenas do Teorema Fundamental da Álgebra.

Teorema 2.5.2 (Teorema Fundamental da Álgebra)**.** *Seja $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ um polinômio com coeficientes complexos e não contante. Então, $f(x)$ possui exatamente n raízes complexas. Em outras palavras,* *podemos escrever*

$$f(x) = a(x - y_1)(x - y_2)\cdots(x - y_n)$$

onde $a \in \mathbb{C}$ *é uma constante e* y_i *é uma raíz complexa de* f *para todo* $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Demonstração.

A demonstração do T.F.A. pode ser encontrada no livro [10] □

Demonstração do Teorema de Liouville de 1851.

Sejam f o polinômio irredutível tal que $f(\alpha) = 0$ e $n = deg(f) \geq 2$. Olhando para f no corpo dos números complexos, pelo TFA podemos escrever

$$f(x) = b(x - \alpha)(x - y_1)\cdots(x = y_{n-1}).$$

Em particular, aplicando $x = \frac{p}{q}$ obtemos que

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = ((-1)^n b)\left(\alpha - \frac{p}{q}\right)\left(y_1 - \frac{p}{q}\right)\cdots\left(y_{n-1} - \frac{p}{q}\right)$$

onde $y_1, \ldots, y_{n-1}$ são as outras raízes de f em $\mathbb{C}$ e $b \in \mathbb{C}$ é uma constante. Daí, para $a = (-1)^n b$ obtemos que

$$\left(\alpha - \frac{p}{q}\right) = \frac{f\left(\frac{p}{q}\right)}{a\left(y_1 - \frac{p}{q}\right)\cdots\left(y_{n-1} - \frac{p}{q}\right)} = \frac{1}{q_n}\cdot\frac{F(p,q)}{a\left(y_1 - \frac{p}{q}\right)\cdots\left(y_{n-1} - \frac{p}{q}\right)}.$$

Agora note que $a\left(y_1 - \frac{p}{q}\right)\cdots\left(y_{n-1} - \frac{p}{q}\right)$ depende apenas de $\frac{p}{q}$. Logo, supondo que $\frac{p}{q}$ é proximo de α de modo que $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < 1$, existe $0 < M \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{p}{q} < M$ para todo $\frac{p}{q}$ racional próximo de α. Para $N = max\{|y_i| : i = 1, \ldots, n-1\}$, obtemos que

$$\begin{aligned}\left|a\left(y_1 - \frac{p}{q}\right)\cdots\left(y_{n-1} - \frac{p}{q}\right)\right| &\leq |a|\left(|y_1| + \left|\frac{p}{q}\right|\right)\cdots\left(|y_{n-1}| + \left|\frac{p}{q}\right|\right)\\ &< |a|(N+M)\cdots(N+M) = |a|\cdot(N+M)^{n-1}.\end{aligned}$$

Lembrando que $F(p,q)$ é um inteiro, ou seja, $|F(p,q)| \geq 1$ e tomando $0 < A = |a|\cdot(N+M)^{n-1} \in \mathbb{R}$ obtemos que

$$\left|\frac{p}{q} - \alpha\right| > \left|\frac{F(p,q)}{q^n \cdot A}\right| \geq \frac{1}{A\cdot q^n}$$

□

Inspirado pelo teorema de Liouville dizemos que um número real α é de Liouville se dado $0 < n \in \mathbb{N}$ existe um racional não nulo $\frac{p}{q}$ com $q > 1$ tal que

$$0 < \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}.$$

Vamos estudar melhor estes números no capítulo seguinte. Todos os números de Liouville são irracionais e transcendentes mas nem todo transcendente é um número de Liouville como veremos adiante. Agora que sabemos o que é um número de Liouville vamos dar nomes aos bois! Denotemos o conjunto dos números complexos algébricos por $\mathbb{A}$, o conjunto dos números transcendentes por $\mathbb{T}$ e o conjunto dos números de Liouville por $\mathbb{L}$.

Embora o trabalho de Liouville seja incrível e importante para a matemática, é possível que mesmo assim Liouville não tenha se orgulhado do que fez, afinal de contas ele não explorou os números que encontrou. Depois de publicar seu trabalho em 1851 Liouville nunca mais publica nenhum trabalho na área de teoria dos números transcendentes.

Capítulo 3

Números de Liouville

3.1 Generalizações do Teorema de Liouville

No capítulo anterior demonstramos o teorema de Liouville de 1851. Com o tempo, diversos matemáticos contribuíram com o teorema melhorando ainda mais a cota de Liouville. Antes de continuar trabalhando os números de Liouville vamos demonstrar uma versão aprimorada do teorema de Liouville de modo que seja possível encontrar esta cota.

Teorema 3.1.1 (Teorema de Liouville)**.** *Seja α uma raíz irracional de um polinômio irredutível $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ de grau $n \geq 2$. Então, existe uma constante positiva $c(\alpha)$ tal que*

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{c(\alpha)}{b^n}$$

para todo racional $\frac{a}{b}$. Uma escolha conveniente para esta constante é

$$c(\alpha) := \frac{1}{1 + max\{|p'(t)| : |t - \alpha| \leq 1\}}.$$

Demonstração.

Primeiramente observe que se $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \geq 1$, então pela escolha de $c(\alpha)$ o teorema está provado. Suponha agora que $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < 1$. Como $p(x)$ é irredutível em $\mathbb{Z}[x]$ e $deg(p) \geq 2$, temos pelo lema 2.2.3 que $p(\frac{a}{b}) \neq 0$ para todo racional $\frac{a}{b}$.

Como todo polinômio é uma função contínua, pelo teorema do valor médio, existe t entre α e $\frac{a}{b}$ de modo que

$$\left|p(\alpha) - p\left(\frac{a}{b}\right)\right| = |p'(t)| \cdot \left|\alpha - \frac{a}{b}\right|.$$

Mas por hipótese $p(\alpha) = 0$ e portanto

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| = \frac{\left|p\left(\frac{a}{b}\right)\right|}{|p'(t)|} = \frac{b^n \left|p\left(\frac{a}{b}\right)\right|}{b^n|p'(t)|} \geq \frac{1}{b^n|p'(t)|} > \frac{1}{b^n(|p'(t)|+1)},$$

e como $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \leq 1$, $|\alpha - t| \leq 1$. Daí,

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{1}{b^n \cdot (max\{|p'(t)| : |t-\alpha| \leq 1\} + 1)} = \frac{c(\alpha)}{b^n}.$$

□

Esta versão do teorema de Liouville é mais simples de entender e demonstrar que as demais e realmente fornece uma cota inferior (para o erro de aproximação dos números algébricos por racionais) que conseguimos calcular. No entanto, em 1955, K. Roth exibiu a melhor estimativa possível para a cota inferior: se α é um algébrico irracional, então dado $\epsilon > 0$, existe $c = c(\alpha, \epsilon) > 0$, tal que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^{2+\epsilon}},$$

para todo $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Uma demonstração desse resultado pode ser encontrada em [9].

Exemplo 3.1.1. *Vamos determinar $c(\alpha)$ para $\alpha = \sqrt{3}$.*

Note que α é algébrico e que $p(x) = x^2 - 3$ é o polinômio irredutível que anula α. Para calcular a constante $c(\alpha)$ precisamos determinar o máximo de $p'(x) = 2x$ no intervalo $[\sqrt{3}-1, \sqrt{3}+1]$, que nesse caso é simples pois $p'(x) = 2x$ é uma função estritamente crescente. Logo,

$$c(\sqrt{3}) = \frac{1}{1 + p'(\sqrt{3}+1)} = \frac{1}{2\sqrt{3}+3} = \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1.$$

3.2 Números de Liouville: Características e Exemplos

O nosso objetivo neste capítulo será demonstrar as diversas propriedades que os números de Liouville possuem e também construir muitos exemplos de tais números. Vamos começar trabalhando a definição de número de Liouville e encontrar uma outra caracterização. Depois vamos demonstrar que todos os números de Liouville são irracionais e também transcendentes. E então, no final do capítulo, vamos demonstrar três propriedades belíssimas destes números.

Definição 3.2.1 (Números de Liouville)**.** *Dado um número real α, dizemos que α é um número de Liouville se* *para todo $0 < n \in \mathbb{N}$ existe um racional $\frac{p}{q}$ com $q > 1$ tal que*

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}.$$

E finalmente vamos ao nosso primeiro exemplo (formal) de número de Liouville.

Exemplo 3.2.1. *Demonstremos que a constante de Liouville $l = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$ é um número de Liouville.*

De fato, dado $0 < m \in \mathbb{N}$, defina $p = 10^{m!} \cdot \sum_{n=1}^{m} 10^{-n!}$ e $q = 10^{m!} > 1$ e observe que $p,\ q \in \mathbb{Z}$. Assim,

$$\left|l - \frac{p}{q}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!} - \sum_{n=1}^{m} 10^{-n!} = \sum_{n=m+1}^{\infty} 10^{-n!}.$$

Completando a série com os expoentes de 10 que faltam obtemos que

$$\begin{aligned}\left|l - \frac{p}{q}\right| &= \sum_{n=m+1}^{\infty} 10^{-n!} < \sum_{n=(m+1)!}^{\infty} 10^{-n} = 10^{-(m+1)!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} 10^{-n} = 10^{-(m+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= 10^{-(m+1)!} \cdot \frac{10}{9} < 10^{-(m+1) \cdot m! + 1} = (10^{-m!})^{(m+1) - \frac{1}{m!}} < (10^{-m!})^m = \frac{1}{q^m}.\end{aligned}$$

Portanto l é um número de Liouville.

De modo análogo ao feito no exemplo anterior podemos demonstrar que dado um inteiro $b \geq 2$, o número $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n b^{-n!}$ é de Liouville para toda escolha de $a_n \in \{1, 2, \ldots, b-1\}$.

O nosso próximo passo é encontrar uma outra caracterização dos números de Liouville que irá facilitar diversas demonstrações ao longo do capítulo. Note que na definição dos números de Liouville existe um racional $\frac{p}{q}$ para cada $0 < n \in \mathbb{N}$ escolhido. O que aconteceria se juntassemos todos estes racionais ? Obteríamos a seguinte proposição:

Proposição 3.2.1 (Caracterização N$^{\text{o}}$ de Liouville)**.** *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$. Então, α é um número de Liouville se, e somente se, existir uma sequência de racionais $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j>0}$ com $q_j > 1$ tais que*

$$0 < \left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j},\ \ \forall\, j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}.$$

Demonstração.

Suponha que α é número de Liouville. Por definição, para cada $0 < n \in \mathbb{N}$ existe $\frac{p_n}{q_n} \in \mathbb{Q}^*$ com $q_n > 1$ tal que $\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^n}$. Juntando todos os racionais obtidos variando n construímos uma sequência $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j>0}$ satisfazendo as condições do enunciado.

Inversamente, suponha que $\alpha \in \mathbb{R}$ é tal que existe uma sequência $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j>0}$ com $q_j > 1$ e $\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}$.

Nesse caso, para cada $0 < n \in \mathbb{N}$ existe $p = p_n$ e $q = q_n > 1$ tais que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}.$$

Portanto α é um número de Liouville. □

No primeiro capítulo, ao explicar as ideias de Liouville, falamos sobre o quão bem números algébricos podem ser aproximados por racionais. Para formalizar melhor nossa conversa sobre essas aproximações por racionais vamos à definição:

Definição 3.2.2. *Um número real α é aproximável na ordem n por racionais se existirem uma contante $C > 0$ e uma sequência $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_j$ de racionais distintos com $q_j > 1$ e $mdc(p_j, q_j) = 1$ tais que*

$$\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{C}{q_j^n}, \ \ \forall\, j \in \mathbb{N}$$

E dizemos que α é bem aproximado por racionais se é aproximável na ordem n por racionais para algum natural n.

Esta definição em conjunto com o Teorema de Liouville nos diz que os números algébricos não podem ser bem aproximados por números racionais e, com a próxima proposição, poderemos concluir que os números de Liouville são bem aproximados por racionais e, além disso, são aproximáveis na ordem n para todo $0 < n \in \mathbb{N}$.

O poder da caracterização que demonstramos acima é a propriedade extra que a mesma possui, propriedade essa que usaremos em muitas demonstrações de outros teoremas.

Proposição 3.2.2. *Dado um número de Liouville α, a sequência dos denominadores $(q_j)_{j>0}$ construída na proposição anterior é ilimitada.*

Demonstração.

Suponha, por absurdo, que existe uma constante $0 < M \in \mathbb{R}$ tal que $q_j < M$ para todo $0 < j \in \mathbb{N}$. Como $\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < 1$, pela desigualdade da diferença obtemos que

$$|p_j| - |q_j\alpha| \leq |q_j\alpha - p_j| = q_j \left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < q_j$$

donde $|p_j| < q_j + |\alpha| q_j = q_j(1 + |\alpha|) \leq M(1 + |\alpha|)$. Desse modo, há no máximo $M(1 + |\alpha|) - 1$ escolhas para p_j e no máximo $M - 1$ escolhas para q_j. Como a sequência é infinita, existe um $0 < i \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{p_i}{q_i}$ se repete infinitas vezes na sequência $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)$.

Por outro lado, $q_i > 1$ o que significa que a sequência $\left(\frac{1}{q_i^n}\right)_{n>0}$ converge para 0, ou seja, vai existir um $0 < m \in \mathbb{N}$ grande o suficiente de modo que $p_m = p_i$, $q_m = q_i$ e

$$0 < \frac{1}{q_i^m} < \left|\alpha - \frac{p_m}{q_m}\right| < \frac{1}{q_m^m} = \frac{1}{q_i^m}.$$

Absurdo! Portanto, a sequência $(q_j)_{j>0}$ é ilimitada. $\square$

Observe que da última proposição temos duas informações sobre os números de Liouville:

- Como a sequência $(q_j)_{j>0}$ é ilimitada, pela caracterização dos números de Liouville obtemos que a sequência $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j>0}$ converge para α.
- Se α é um número de Liouville, então α é bem aproximável na ordem n por racionais para todo n natural não nulo. De fato, dado $0 < n \in \mathbb{N}$, considere a subsequência $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j\geq n}$ de $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j>0}$. Note que esta subsequência satisfaz a definição de boa aproximação já que

$$\forall\, n \leq j \in \mathbb{N}, \quad \left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j} \leq \frac{1}{q_j^n}.$$

Já estamos caminhando para as propriedades mais interessantes dos números de Liouville, no entanto, antes de começarmos as propriedades vamos aumentar nossos exemplos de números de Liouville com dois teoremas bem úteis. Mostremos que basta conhecer um número de Liouville para conhecer uma quantidade enumerável de números de Liouville.

Teorema 3.2.1. *O produto e soma de um número de Liouville com um racional não nulo são números de Liouville.*

Demonstração.

Primeiro vamos demonstrar para o produto. Para provar que $\alpha \cdot \frac{a}{b}$ é um número de Liouville vamos combinar a definição de número de Liouville e a caracterização. Por hipótese existe $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j>0}$ com $q_j > 1$ tal que $\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}$ e $(q_j)_{j>0}$ é ilimitada. Assim, dado $0 < n \in \mathbb{N}$ existe um natural $m > n$ tal que $q_m > ab^{n-1}$. Definindo $p = p_m \cdot a$ e $q = q_m \cdot b$ temos que

$$\left|\alpha \cdot \frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| = \frac{a}{b} \cdot \left|\alpha - \frac{p_m}{q_m}\right| < \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{q_m^m} = \frac{ab^{n-1}}{b^n q_m^m} < \frac{q_m}{b^n q_m^m} = \frac{1}{b^n q_m^{m-1}} \leq \frac{1}{(bq_m)^n} = \frac{1}{q^n}.$$

Portanto, $\alpha \cdot \frac{a}{b}$ é um número de Liouville.

Agora provemos que dado $m \in \mathbb{Z}$, $\alpha + m \in \mathbb{L}$. Por hipótese, dado $0 < n \in \mathbb{N}$ existe $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$ com $q > 1$

tal que $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|$. Então,

$$\left|(\alpha+m) - \left(\frac{p}{q}+m\right)\right| = \left|(\alpha+m) - \frac{(p+mq)}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$$

onde $mdc(p+mq,q)=1$ pois $mdc(p,q)=1$. Logo, $\alpha+m\in\mathbb{L}$.

Pelo que já demonstramos, dado $\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}^*$ temos que $b\alpha+a\in\mathbb{L}$ e consequentemente $(b\alpha+a)\cdot\frac{1}{b}=\alpha+\frac{a}{b}$ é um número de Liouville. □

Com esta proposição sabemos, por exemplo, que $\frac{l}{2}$, $3l$, $l+2$ e $\frac{l-31}{1078}$ são números de Liouville. Além disso, l^2, $\frac{1}{l^3}$ e, de modo geral, l^n para qualquer n inteiro não nulo é um número de Liouville! Mas para demonstrar tal teorema vamos antes demonstrar o Critério da Simplicidade para verificar quando um número real é de Liouville.

Proposição 3.2.3. *Seja $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Se existe uma constante real $C>0$ e uma sequência $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j>0}$ com $q_j>1$ e $(q_j)_j$ satisfazendo*

$$0<\left|\alpha-\frac{p_j}{q_j}\right|<\frac{C}{q_j^j},\ \forall\, j\in\mathbb{Z}_+,$$

então α é um número de Liouville.

Demonstração.

Provemos que α satisfaz a definição de número de Liouville. Seja $0<n\in\mathbb{N}$. Observe que, como ainda não concluímos que α é de Liouville, não podemos dizer que a sequência (q_j) do enunciado é ilimitada pela proposição 3.2.2. No entanto, $(q_j)_j$ é ilimitada e a demonstração dessa afirmação é análoga à da proposição 3.2.2. Seja $(q_{m_j})_j$ a subsequência não-decrescente de $(q_j)_j$. Assim, existe $k\in\mathbb{N}$ tal que $C<q_{m_k}\leq q_{m_{k+n}}$. Definindo $p=p_{m_{k+n}}$ e $q=q_{m_{k+n}}$ obtemos

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{C}{q_{m_{k+n}}^{m_{k+n}}}.$$

Como $(q_{m_j})_j$ é uma subsequência de $(q_j)_j$, então $m_{k+n}\geq k+n$ para todo índice. Logo,

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\leq\frac{C}{q^{k+n}}<\frac{q}{q^{k+n}}=\frac{1}{q^{k+n-1}}\leq\frac{1}{q^n}.$$

pois $k\geq 1$.

Portanto, α é um número de Liouville. □

Corolário 3.2.1 (Critério da Simplicidade)**.** *Seja $\alpha\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Se existe $C>0$ e, para todo $0<n\in\mathbb{N}$, existe*

$\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$ com $q > 1$ de modo que

$$0 < \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{C}{q^n},$$

então α é um número de Liouville.

Demonstração.

Procedemos de modo análogo à demonstração da caracterização dos números de Liouville construindo uma sequência $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j>0}$ satisfazendo as condições da proposição anterior. $\square$

E com o Critério da Simplicidade podemos demonstrar de maneira simples que toda potência inteira de um número de Liouville é de Liouville.

Teorema 3.2.2. *Toda potência inteira não nula de um número de Liouville é também um número de Liouville.*

Demonstração.

Seja $\alpha \in \mathbb{L}$. Primeiramente vamos provar que para todo $n \in \mathbb{Z}_+$ o número α^n é de Liouville. Depois demonstraremos que $\alpha^{-1} \in \mathbb{L}$ concluindo a demonstração.

Por hipótese, para cada $0 < m \in \mathbb{N}$ existe $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$ com $q > 1$ de modo que $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{mn}}$. Em particular $\frac{p}{q} \in (\alpha - 1, \alpha + 1)$, logo existe uma constante real $M > 0$ de modo que $(\alpha - 1, \alpha + 1) \subset [-M, M]$. Como n é fixo, $C = n \cdot M^{n-1} > 0$ é uma constante. Assim,

$$\begin{aligned}
\left|\alpha^n - \left(\frac{p}{q}\right)^n\right| &= \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \cdot \left|\alpha^{n-1} + \alpha^{n-2} \cdot \frac{p}{q} + \ldots + \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}\right| \\
&< \frac{1}{q^{m \cdot n}} \cdot \left(M^{n-1} + M^{n-2} \cdot M + \cdots + M^{n-1}\right) \\
&= \frac{1}{(q^n)^m} \left(n \cdot M^{n-1}\right) = \frac{C}{(q^n)^m}.
\end{aligned}$$

Basta mostrar agora que α^{-1} também é número de Liouville. Com este intuito observe que, como $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$, $|p\alpha| > |\alpha|$ para todo $0 \neq p \in \mathbb{Z}$. Logo, $\frac{1}{|p\alpha|} < \frac{1}{|\alpha|} = K > 0$ para todo racional não nulo $\frac{p}{q}$.

Como α é de Liouville, dado $0 < n \in \mathbb{N}$, existe $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$ tal que $\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b^{n+1}}$. Daí segue que

$$\left|\frac{1}{\alpha} - \frac{b}{a}\right| = \left|\frac{a - \alpha b}{b\alpha}\right| = \frac{b}{|a\alpha|}\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \frac{b}{|a\alpha| \cdot b^{n+1}} < \frac{K}{b^n}.$$

Portanto, pelo corolário 3.2.1, α^{-1} é um número de Liouville. $\square$

E agora para terminar esta primeira parte e entrarmos nas propriedades mais legais dos números de Liouville, vamos demonstrar uma propriedade simples mas intrigante.

Proposição 3.2.4. *Se δ é um irracional que não é número de Liouville, então existe um outro irracional β de modo que $\alpha = \frac{\delta}{\beta}$ é um número de Liouville.*

Demonstração.

Seja $\alpha \in \mathbb{L}$ qualquer. Defina $\beta = \frac{\delta}{\alpha}$. Provemos que β é irracional. Com efeito, suponha que $\beta \in \mathbb{Q}$, nesse caso $\delta = \alpha \cdot \beta$ é um número de Liouville, o que é um absurdo. Logo α é irracional. Ou seja, existe um irracional β tal que $\alpha = \frac{\delta}{\beta}$ é um número de Liouville. □

3.3 As Fantásticas Propriedades dos Números de Liouville

E finalmente vamos às propriedades! Primeiro vamos demonstrar que todos os números de Liouville são irracionais, transcendentes e também são densos na reta. Essas propriedades seguem facilmente dos resultados que já demonstramos.

Teorema 3.3.1. *Todo número de Liouville é irracional.*

Demonstração.

Seja $\alpha \in \mathbb{L}$. Então existe $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j>0}$ com $q_j > 1$ e $\left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j}$ para todo $j \in \mathbb{Z}_+$. Suponha, por absurdo, que $\alpha = \frac{p}{q} \neq 0$. Nesse caso,

$$\frac{1}{q_j^j} > \left|\frac{p}{q} - \frac{p_j}{q_j}\right| = \left|\frac{pq_j - p_jq}{qq_j}\right| \geq \frac{1}{|q|q_j}$$

com $\frac{p}{q} \neq \frac{p_j}{q_j}$ para todo $j \in \mathbb{Z}_+$. Segue da desigualdade anterior que $\frac{1}{q_j^{j-1}} > \frac{1}{|q|}$ e portanto $q_j < |q|$, ou seja $(q_j)_j$ é limitada. Absurdo!

Portanto, α não é racional. □

Teorema 3.3.2. *Todo número de Liouville é transcendente.*

Demonstração.

Seja $\alpha \in \mathbb{L}$. Suponha que α é algébrico e seja $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ o polinômio irredutível qua anula α. Como α é irracional, temos que $n = deg(f) \geq 2$. Nesse caso, pelo teorema de Liouville e pela caracterização dos números de Liouville, existe uma sequência de racionais $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j>0}$ com $q_j > 1$ e uma constante $c(\alpha)$ tais que

$$\frac{c(\alpha)}{q_j^n} < \left|\alpha - \frac{p_j}{q_j}\right| < \frac{1}{q_j^j},\ \ \forall\, j \in \mathbb{Z}_+.$$

Logo, $\dfrac{q_j^j}{q_j^n} = q_j^{j-n} < \dfrac{1}{c(\alpha)}$. Como n é fixo, para $j \geq n+1$ temos que $q_j < \frac{1}{c(\alpha)}$, ou seja, $(q_j)_j$ é limitada. Absurdo!

Portanto, α é transcendente. □

Teorema 3.3.3. *O conjunto $\mathbb{L}$ dos números de Liouville é denso em $\mathbb{R}$.*

Demonstração.

Dado $\alpha \in \mathbb{L}$, já temos que $\alpha + \frac{p}{q}$ é número de Liouville para todo racional $\frac{p}{q}$. Como os números racionais são densos na reta, segue que $\mathbb{L}$ também é denso na reta. De fato, dado um intervalo real (a, b) temos que $(a - \alpha, b - \alpha)$ também é um intervalo. Como os racionais são densos, existe um racional $\frac{p}{q}$ tal que $a - \alpha < \frac{p}{q} < b - \alpha$, então $a < \frac{p}{q} + \alpha < b$.

Portanto $\mathbb{L}$ é denso em $\mathbb{R}$. □

Com os teoremas anteriores já sabemos que o conjunto dos números de Liouville é, no mínimo, enumerável. Mas ainda não respondemos a algumas perguntas: Quantos números de Liouville existem ? Já sabemos que estão bem distribuídos na reta, afinal $\mathbb{L}$ é denso, mas qual a medida do conjunto dos números de Liouville? Isto é, são uma parte considerável dos números reais ? Pensando na reta real geometricamente, qual o espaço que eles ocupam? Agora vamos caminhar para responder a essas perguntas.

Lema 3.3.1. *Sejam $\alpha = \sum_{n\geq 1} a_n d^{-n!}$ e $\beta = \sum_{n\geq 1} b_n d^{-n!}$ dois números de Liouville com $d \geq 2$ e $b_n, a_n \in \{1, 2, \cdots, d-1\}$. Se existe $j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tal que $a_j \neq b_j$, então $\alpha \neq \beta$.*

Demonstração.

Seja $j \in \mathbb{N}$ o menor inteiro positivo tal que $a_j \neq b_j$. Observe que para todo $1 \leq i \in \mathbb{N}$ temos que

$$-d + 1 \leq a_i - b_i \leq d - 1.$$

Sem perda de generalidade, suponha que $a_j > b_j$. Então, como $a_i, b_i \in \{1, 2, \cdots, d-1\}$, temos

$$\begin{aligned}
\alpha - \beta &= (a_j - b_j)d^{-j!} + \sum_{i>j}(a_i - b_i)d^{-i!} \geq d^{-j!} + \sum_{i>j}(a_i - b_i)d^{-i!} \\
&\geq d^{-j!} - \sum_{i>j}(d-2)\cdot d^{-i!} > d^{-j!} - (d-2)\cdot \sum_{i>j!} d^{-i} \\
&= d^{-j!} - (d-2)\cdot d^{-j!-1}\cdot \left(1 + \frac{1}{d} + \frac{1}{d^2} + ...\right) = d^{-j!} - (d-2)\cdot d^{-j!-1}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{d}}\right) \\
&= d^{-j!} - (d-2)\cdot \frac{d}{d-1}\cdot d^{-j!-1} = d^{-j!} - \frac{d-2}{d-1}\cdot d^{-j!} \\
&= \frac{1}{d-1}\cdot d^{-j!} > 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\alpha \neq \beta$. □

Com o auxílio deste lema conseguiremos demonstrar que o conjunto dos números de Liouville é não enumerável. Vamos demonstrar este resultado com a técnica da diagonal de cantor.

Teorema 3.3.4. $\mathbb{L}$ *é não enumerável.*

Demonstração.

Provaremos que o subconjunto

$$L_{10} = \left\{ \sum_{n \geq 1} b_n 10^{-n!} : b_n \in \{1, \ldots, 9\} \right\} \subset \mathbb{L}.$$

é não enumerável. Lembre que já sabemos que os números de L_{10} são números de Liouville.

Suponha que o conjunto L_{10} seja enumerável, nesse caso, podemos listar os elementos de L_{10} da seguinte maneira: $l_1 = \sum_{n\geq 1} a_{1n} 10^{-n!},\ l_2 = \sum_{n\geq 1} a_{2n} 10^{-n!},\ \ldots,\ l_m = \sum_{n\geq 1} a_{mn} 10^{-n!}, \ldots$ para todo $m \in \mathbb{N}$.

E cada sequência $(a_{in})_n$, $i \in \mathbb{Z}_+$, possui pelo menos um elemento distinto das outras. Agora constuímos o elemento $l = \sum_{n\geq 1} t_n 10^{-n!}$ onde para cada $1 \leq i \in \mathbb{N}$ temos $t_i \neq a_{ii}$ onde a_{ii} é um elemento de l_i. Pelo lema anterior, temos que $l \neq l_i$ para todo $0 < i \in \mathbb{N}$, ou seja, l não está na lista, o que é um absurdo.

Portanto $\mathbb{L}$ é não enumerável. □

Note que então já conhecemos uma quantidade não enumerável de números de Liouville. No entanto, agora vamos demonstrar o exemplo mais geral deste trabalho.

Exemplo 3.3.1. *Seja $(s_m)_{m>0}$ uma sequência crescente de números naturais não nulos tais que o complementar $(\mathbb{Z}_+ \backslash \{s_m\}_{m>0})$ é infinito. Sejam*

$$\alpha = \sum_{n>0} a_n d^{-n} \text{ e } \beta = \sum_{n>0} b_n d^{-n}$$

tais que, para cada $0 < n \in \mathbb{N}$ e para todo $k \in \mathbb{N}$ com $n! \leq k < (n+1)!$, temos as relações:

$$n \in \{s_m\}_{m>0} \Longrightarrow a_k \in \{1,\ \ldots, d-1\} \text{ e } b_k = 0,$$

$$n \notin \{s_m\}_{m>0} \Longrightarrow a_k = 0 \text{ e } b_k \in \{1,\ \ldots, d-1\}.$$

Então, α e β são números de Liouville.

Demonstração.

Vamos provar que $\alpha \in \mathbb{L}$ e a demonstração que $\beta \in \mathbb{L}$ é análoga. Pela definição da sequência $(s_m)_{m>0}$, dado $0 < n \in \mathbb{N}$, existe um natural $N \geq n$ tal que N é um elemento de $(s_m)_{m>0}$ e $N+1$ não é. Assim, defina

$$q = d^{(N+1)!-1} \text{ e } p = q(a_1 d^{-1} + \cdots + a_{(N+1)!-1} d^{-(N+1)!+1})$$

donde

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n d^{-n} - \sum_{n=1}^{(N+1)!-1} a_n d^{-n} = \sum_{n=(N+1)!}^{\infty} a_n d^{-n}.$$

Como $N+1 \notin \{s_m\}_{m>0}$, $a_k = 0$ para todo $(N+1)! \leq k < (N+2)!$ e daí

$$\begin{aligned}
\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| &= \sum_{n=(N+2)!}^{\infty} a_n d^{-n} < \sum_{n=(N+2)!}^{\infty} (d-1) d^{-n} \\
&= (d-1) d^{-(N+2)!} \left(1 + \frac{1}{d} + \frac{1}{d^2} + \cdots\right) = (d-1) \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{d}} \cdot d^{-(N+2)!} \\
&= d^{-(N+2)!+1} < d^{-n(N+1)!+1} < d^{-n(N+1)!+n} = d^{-n((N+1)!-1)} \\
&= q^{-n}.
\end{aligned}$$

Portanto, α é número de Liouville. De modo análogo demonstramos que β também é um número de Liouville.

□

E perceba que este exemplo também nos fornece uma quantidade não enumerável de números de Liouville. Para demonstrarmos esta afirmação, lembre que $P(\mathbb{N})$ é um conjunto não enumerável e observe que o conjunto $S_f = \{A \in P(\mathbb{N}) \ : \ A \textit{ é finito}\}$ é enumerável. De fato,

$$S_f = \{A \in P(\mathbb{N}) : \#A = 1\} \cup \{A \in P(\mathbb{N}) : \#A = 2\} \cup \cdots \cup \{A \in P(\mathbb{N}) : \#A = n\} \cup \cdots$$

é uma união enumerável de conjuntos enumeráveis e portanto enumerável.

Além disso, temos uma bijeção entre os conjuntos

$$S_f = \{(S_m)_{m>0} \textit{ crescente} \ : \ \mathbb{N} \backslash (\{S_m\}_{m>0}) \textit{ é finito}\} \longleftrightarrow C_f = \{A \in P(\mathbb{N}) \ : \ A \textit{ é finito}\}$$

associando os subconjuntos finitos dos naturais com o complementar do conjunto de pontos das sequências de S_f.

Como o conjunto de todas as sequências de números naturais é não enumerável, associando os complementares aos subconjuntos de $\mathbb{N}$, obtemos que o conjunto $S_\infty = \{(S_m)_{m>0} \textit{ crescente} : \mathbb{N} \backslash (\{S_m\}_{m>0}) \textit{ é infinito}\}$ é não enumerável.

Este exemplo será extremamente útil em um teorema que demonstraremos adiante. No entanto, antes deste teorema, vamos demonstrar que o conjunto dos números de Liouville quase não ocupam nenhum espaço (geométrico) na reta real. Isto é:

Teorema 3.3.5. *O conjunto dos números de Liouville $\mathbb{L}$ tem medida nula em $\mathbb{R}$.*

Mas antes precisamos formalizar o que significa um conjunto possuir medida nula, e também há uma propriedade de medida que precisaremos utilizar.

Definição 3.3.1. *Dado um intervalo real $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$, definimos o comprimento de I por $l(I) = b - a$. Seja $A \subset \mathbb{R}$. Dizemos que A possui medida nula se dado $\epsilon > 0$, existe uma quantidade enumerável de intervalos abertos $I_1, I_2, \ldots, I_n, \ldots$, que cobrem A, isto é, $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty} l(I_n) < \epsilon$.*

Ou seja, a definição de medida nula é intuitiva no sentido que, olhando para o limite, o comprimento geométrico dos conjuntos de medida nula é 0.

Proposição 3.3.1. *Se $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é uma família enumerável de subconjuntos de $\mathbb{R}$ e cada A_j tem medida nula, então $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} A_i$ possui medida nula em $\mathbb{R}$. Em outras palavras, união enumerável de conjuntos de medida nula ainda possui medida nula.*

Demonstração.

Esta proposição segue diretamente do fato que união enumerável de enumeráveis é enumerável. Dado $\epsilon > 0$, por hipótese, como cada A_j tem medida nula, existem intervalos $I_{j1}, I_{j2}, \ldots$, tais que $A_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{jk}$ e $\sum_{k=1}^{\infty} l(I_{jk}) < \dfrac{\epsilon}{2^{j+1}}$. Então, existe uma quantidade enumerável de intervalos I_{jk} com $j \in \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{Z}_+$ tais que

$$\bigcup_{j=0}^{\infty} A_j \subset \bigcup_{j=0}^{\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} I_{jk}\right), \ \sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{\infty} l(I_{jk})\right) < \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^{j+1}} = \epsilon \cdot \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \epsilon.$$

Portanto $\sum_{j=0}^{\infty} A_j$ tem medida nula. □

Demonstração que $\mathbb{L}$ tem medida nula.

Primeiramente, observe que se $\alpha \in \mathbb{L}$ é tal que $|\alpha| > 1$, então $|\alpha - \lfloor\alpha\rfloor| < 1$ é um número de Liouville. Além disso, como $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} [n,\ n+1]$, basta provar que $\mathbb{L} \cap [0, 1]$ é um conjunto de medida nula, pois a união anterior é enumerável e pela proposição anterior $\mathbb{L}$ terá medida nula.

Para enaltecer a ideia da demonstração, vamos fazer dois dos passos técnicos destacados e, assim, sem olhar para a demonstração destes passos a ideia geral será melhor compreendida.

Afirmação 01: Dado $\epsilon > 0$, existe um número natural positivo n tal que $\sum_{q=2}^{\infty} 4 \cdot q^{-n+1} < \epsilon$.

Com efeito, note que para cada $k \geq 3$ natural temos que

$$\begin{aligned}
0 < a_k = \sum_{q=2}^{\infty} \frac{4}{q^{k-1}} \leq 4 \cdot \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{2^{k-3} \cdot q^2} &= \frac{4}{2^{k-3}} \sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q^2} \\
&= \frac{4}{2^{k-3}} \left(\sum_{q=2}^{\infty} \frac{1}{q^2} + 1 - 1\right) = \frac{4}{2^{k-3}} \left(\sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{q^2} - 1\right) \\
&= \frac{4}{2^{k-3}} \left(\frac{\pi^2}{6} - 1\right)
\end{aligned}$$

pois $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Pela desigualdade obtemos que $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$. Ou seja, existe $0 < n \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 < a_n = \sum_{q=2}^{\infty} \frac{4}{q^{n-1}} < \epsilon$$

$\square$

Como $0 < n \in \mathbb{N}$, para $\alpha \in \mathbb{L} \cap [0,1]$ existe um racional não nulo $\frac{p}{q}$ com $q > 1$ tal que

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}.$$

Nessas condições temos:

Afirmação 02: Há no máximo q possibilidades para p, em particular, $0 < p < q+1$.

Pela desigualdade obtida da definição de número de Liouville obtemos que

$$\begin{aligned}
\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n} &\iff -\frac{1}{2} < \alpha - \frac{p}{q} < \frac{1}{2} \\
&\iff \frac{1}{q} + \alpha > \frac{p}{q} > \frac{-1}{q} + \alpha \\
&\iff 0 < \frac{p}{q} < \frac{1}{q} + \alpha \leq \frac{1}{q} + 1 = \frac{q+1}{q} \\
&\iff 0 < p < q+1.
\end{aligned}$$

Logo, há no máximo q possibilidades para p e além disso $0 < p < q+1$.

$\square$

Desse modo $p \in C_q := \{1, \ldots, q\}$ e portanto

$$\alpha \in \bigcup_{p \in C_q} \left(\frac{p}{q} - \frac{1}{q^m}, \frac{p}{q} + \frac{1}{q^m}\right).$$

E como $q \geq 2$ pela definição de número de Liouville, temos que

$$\mathbb{L} \cap [0,1] \subset A = \bigcup_{q=2}^{\infty} \left(\bigcup_{p \in C_q} \left(\frac{a}{b} - \frac{1}{b^n}, \frac{a}{b} + \frac{1}{b^n}\right)\right),$$

onde o comprimento de A é

$$\ell(A) = \sum_{q=2}^{\infty} \#C_q \cdot \frac{2}{q^n} \leq q \cdot \frac{2}{q^n} = \sum_{q=2}^{\infty} \frac{2}{q^{n-1}}.$$

Pela afirmação 01 segue que

$$\ell(\mathbb{L} \cap [0,1]) \leq \ell(A) \leq \sum_{q=2}^{\infty} \frac{2}{q^{n-1}} < \sum_{q=2}^{\infty} \frac{4}{q^{n-1}} < \epsilon.$$

Portanto, $\mathbb{L}$ tem medida nula em $\mathbb{R}$.

■

Vamos ainda demonstrar uma outra proposição sobre medida para compreender melhor a propriedade mais surpreendente dos números de Liouville.

Proposição 3.3.2. *Todo subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ enumerável possui medida nula.*

Demonstração.

Como A é enumerável, existe uma bijeção $n : A \to \mathbb{N}$. Para cada $a \in A$, defina o intervalo $I_a = \left(a - \frac{\epsilon}{3} \cdot \frac{1}{2^{n(a)}}, a + \frac{\epsilon}{3} \cdot \frac{1}{2^{n(a)-1}}\right)$ que possui comprimento

$$l(I_a) = \frac{\epsilon}{3}\left(\frac{1}{2^{n(a)-1}} - \frac{1}{2^{n(a)}}\right) = \frac{\epsilon}{3} \cdot \frac{1}{2^{n(a)}}.$$

Desse modo, como f é uma bijeção, temos que $\mathbb{Q} \subset \bigcup_{a \in A} I_a$ e vale

$$\sum_{a \in A} l(I_a) = \sum_{a \in A} \frac{\epsilon}{3} \cdot \frac{1}{2^{n(p,q)}} = \frac{\epsilon}{3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} = \frac{2}{3} \cdot \epsilon < \epsilon.$$

Portanto, A tem medida nula.

□

Da proposição obtemos que os racionais $\mathbb{Q}$ é um conjunto de medida nula.

3.3.1 A Mais Bela das Propriedades

E agora vamos demonstrar a propriedade mais incrível dos números de Liouville. Observe que, como os racionais $\mathbb{Q}$ e os números de Liouville $\mathbb{L}$ possuem medida nula na reta, quase todos os números reais são transcendentes e não são números de Liouville. Então, não é surpreendente dizer que todo número real pode ser escrito como soma de dois transcendentes. Agora, como soma de dois números de Liouville, isso sim é surpreendente afinal isto significa que com uma quantidade muito pequena de números conseguimos escrever todos os números reais apenas somando eles dois a dois.

Teorema 3.3.6 (Erdös - 1962)**.** *Todo número real pode ser escrito como soma de dois números de Liouville.*

Demonstração.

Note que, se $t \in \mathbb{Q}$, então para qualquer $\alpha \in \mathbb{L}$ temos que $\beta = t - \alpha \in \mathbb{L}$ donde $t = \alpha + \beta$. Portanto basta fazer o caso em que t é irracional, e ainda mais, apenas para os irracionais $t \in (0, 1)$ pois se $t > 1$, então $t = \lfloor t \rfloor + \{t\}$ onde $\lfloor t \rfloor$ é um inteiro e $\{t\}$ é a parte fracionária de t e portanto $\{t\} < 1$.

Assim, como t é irracional e menor que 1, ao escrever t na base 2, obtemos uma escrita da forma $t = \sum_{n \geq 1} t_n 2^{-n}$ onde $t_n \in \{0, 1\}$ e infinitos termos $t_n \neq 0$. Defina

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n 2^{-n} \text{ e } \beta = \sum_{n=1}^{\infty} b_n 2^{-n}$$

de modo que, para cada $0 < n \in \mathbb{N}$ e para todo $n! \leq k < (n+1)!$, temos

$$\begin{cases} a_k = t_k, \ b_k = 0 \text{ se } n \text{ é ímpar}, \\ a_k = 0, \ b_k = t_k \text{ se } n \text{ é par}. \end{cases}$$

Observe que a sequência dos números ímpares satisfaz a hipótese do exemplo 3.3.1, e α e β coincidem com os números de Liouville construídos no exemplo. Portanto, α e β são números de Liouville tais que

$$\alpha + \beta = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) 2^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} t_n 2^{-n} = t.$$

□

Em particular, pelo exemplo 3.3.1, se t é irracional, então existe uma quantidade não enumerável de pares $(\alpha, \beta) \in \mathbb{L}^2$ tais que $t = \alpha + \beta$. E se t é racional, pela demonstração do teorema, também há uma quantidade não enumerável pois $\mathbb{L}$ é não enumerável.

Capítulo 4

Nossos parceiros de longa data: e e π

Este capítulo vai ser destinado àqueles números que estão presentes na nossa caminhada de matemática praticamente desde o início, os nossos parceiros de longa data e e π.

Já conhecemos bem os números de Liouville ao ponto de saber que quase todos os números transcendentes não são de Liouville. Contudo, ainda não conhecemos outros números transcendentes que não sejam os números de Liouville. Mas isto está para mudar! Vamos demonstrar que e e π são irracionais, transcendentes e observar - não faremos os detalhes destas demonstrações - que e e π não são números de Liouville.

4.1 O Método de Hermite: e e π são irracionais

O método de Hermite é uma ferramenta para provar irracionalidade. Com o método de Hermite demonstraremos que e^r com $0 \neq r \in \mathbb{Q}$ e π são números irracionais. Depois, ainda seguindo os passos de Hermite, demonstraremos que e é transcendente.

Definição 4.1.1. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função analítica onde $\Omega \subset \mathbb{C}$ é aberto, conexo e $0 \in \Omega$. Nesse caso dizemos que $f(z)$ é bem aproximada pela função racional $\frac{A(z)}{B(z)}$ se $B(z) \cdot f(z) - A(z)$ tem um zero de multiplicidade $2n + 1$ na origem, onde A e B são polinômios de grau n.*

O método de Hermite consiste em obter uma boa aproximação para a função inteira e^z com $z \in \mathbb{C}$ e, com esta boa aproximação de ordem $n \in \mathbb{N}$, conseguiremos demonstrar por absurdo que e^r com $0 \neq r \in \mathbb{Q}$ é irracional. A parte interessante é que usaremos a mesma boa aproximação de e^z para provar que π é irracional.

Antes de construir a boa aproximação de e^z, observe que se $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ é uma expansão de Taylor centrada na origem, conseguimos construir uma outra função g a partir de f de modo que, dado $m \in \mathbb{N}$, a

m-ésima expansão de Taylor de g seja 0. De fato:

$$\left\{\begin{array}{c} f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots \\ f'(z) = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \cdots \end{array}\right| \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} mf(z) = a_0 m + a_1 mz + a_2 mz^2 + \cdots \\ zf'(z) = a_1 z + 2a_2 z^2 + 3a^3 z^3 + 4a_4 z^4 + \cdots \end{array}\right.$$

Definindo $g(z) = zf'(z) - mf(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(k-m)a_k z^k$ temos que o m-ésimo coeficiente de g é zero. Como é divertido zerar coeficientes, vamos zerar mais alguns! Dados números naturais n_0 e n_1 vamos construir g utilizando f e suas derivadas de modo que $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ e $b_{n_0+1} = b_{n_0+2} = \cdots = b_{n_0+n_1} = 0$. Mas para isto, vamos utilizar a derivada de um polinômio como um operador linear!

Seja $V = \mathbb{C}[x]$ o espaço vetorial dos polinômios com coeficientes reais. Seja

$$\begin{array}{rrcl} D: & V = \mathbb{C}[x] & \longrightarrow & V \\ & f(x) & \longmapsto & D(f(x)) = f'(x) \end{array}$$

o operador derivada. Como $D(f(x) + c \cdot g(x)) = f'(x) + c \cdot g'(x) = D(f(x)) + c \cdot D(g(x))$, D é um operador linear. Daqui em diante utilizaremos a notação multiplicativa, isto é $D^2 f = f''(x)$. A derivada é importante nesta construção pois com ela podemos definir o operador linear que precisamos:

$$\begin{array}{rrcl} \delta: & V = \mathbb{C}[x] & \longrightarrow & V \\ & f(x) & \longmapsto & \delta(f(x)) = z \cdot D(f(x)) = zf'(x) \end{array}$$

onde $\delta(f(x) + c \cdot g(x)) = z(f'(x) + c \cdot g'(x)) = zf'(x) + c \cdot zg'(x) = \delta(f(x)) + c \cdot \delta(g(x))$. Portanto, δ é um operador linear e possui as seguintes propriedades:

- $(P1) : \delta(z^k) = k \cdot z^k, \forall k \geq 0.$
- $(P2) : \delta^m(z^k) = k^m \cdot z^k, \forall k,\ m \in \mathbb{Z}_+$
- $(P3)$: Se $T(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}[x]$, então $T(\delta)$ é um operador linear definido por

$$\begin{array}{rrcl} T(\delta): & V = \mathbb{C}[z] & \longrightarrow & V \\ & f(z) & \longmapsto & T(\delta)(f(x)) = a_n(\delta^n f(z)) + \cdots + a_1 \delta f(z) + a_0 f(z) \end{array}.$$

  Logo, $T(\delta)f(x) = a_n z^n f^{(n)}(z) + \cdots + a_1 z f'(z) + a_0 f(z)$. Assim, $T(\delta)$ satisfaz a propriedade $T(\delta)z^k = T(k)z^k$.

Assim, dados dois polinômios $T(z),\ f(z) \in \mathbb{C}[z]$, se $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ é a expansão de Taylor de f, então,

$$T(\delta)f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T(k) z^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k.$$

Logo, se tomarmos $T(z) = (z-n_0-1)(z-n_0-2)\cdots(z-n_0-n_1)$, a função $T(\delta)f(z)$ possui os coeficientes $b_{n_0+1} = \cdots = b_{n_0+n_1} = 0$.

Finalmente, para o nosso propósito, tome $n_0 = n_1 = n$ e $f(z) = e^z$. Assim,

$$T(\delta)e^z = \sum_{k=0}^{n} \frac{T_n(k)}{k!} z^k + \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{T_n(k)}{k!} z^k, \tag{4.1}$$

onde $T_n(z) = (z-n-1)\cdots(z-2n)$. Logo, completando o fatorial obtemos que, se $k \leq n$, então $T_n(k) = (-1)^n \frac{(2n-k)!}{(n-k)!}$ e caso $k \geq 2n+1$, temos que $T_n(k) = \frac{(k-n-1)!}{(k-2n-1)!}$.

Podemos agora definir os polinômios que irão aproximar e^z. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$A_n(z) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{(2n-k)!}{(n-k)!k!} z^k \quad e \quad R_n(z) = \sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{(k-n-1)!}{(k-2n-1)!k!} z^k.$$

E da equação (4.1) obtemos a igualdade

$$T_n(\delta)e^z = A_n(z) + R_n(z)$$

onde $A_n(z) \in \mathbb{Z}[z]$ e $R_n(z)$ é uma soma formal. Como $\delta(e^z) = ze^z$, temos que $T_n(\delta)e^z = T_n(z)e^z$. Assim, defina $B_n(z) = T_n(z) \in \mathbb{Z}[z]$. Daí,

$$B_n(z)e^z - A_n(z) = R_n(z) \tag{4.2}$$

Como $R_n(z) = \displaystyle\sum_{k=2n+1}^{\infty} \frac{(k-n-1)!}{(k-2n-1)!k!} z^k$, $D(R_n(z)) = \sum_{k=2n+1}^{\infty} \dfrac{(k-n-1)!}{(k-2n-1)!k!} kz^{k-1}$ e indutivamente obtemos que $D^{2n+1}R_n(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{k!(2n+1+k)!} z^k$. Logo, $R_n(z)$ tem um zero de multiplicidade $2n+1$ na origem e portanto e^z é bem aproximado pela função racional $\frac{A_n(z)}{B_n(z)}$.

Finalmente terminamos a construção da aproximação polinomial de e^z, no entanto, o que esta aproximação tem de especial?

Lema 4.1.1. *Dado $z \in \mathbb{C}$, temos que*

$$|R_n(z)| \leq \frac{|z|^{2n+1}}{(n+1)!} e^{|z|}.$$

Em particular, $|R_n(z)|$ tende a zero quando n tende ao infinito (e além!).

Demonstração.

Lembre que $R_n(z) = \sum_{k=2n+1}^{\infty} \dfrac{(k-n-1)!}{(k-2n-1)!k!} z^k$. Escrevendo $k = l+2n+1$ reorganizamos a expressão de $R_n(z)$ da seguinte maneira:

$$R_n(z) = z^{2n+1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+n)!}{(l+2n+1)!l!} z^l.$$

E como $l \geq 0$ e $n > 0$, temos que

$$\frac{(l+2n+1)!}{(l+n)!} = (l+2n+1)(l+2n)\cdots(l+n+1) \geq (2n+1)\cdots(n+1) > (n+1)!$$

donde

$$|R_n(z)| \leq \left| z^{2n+1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!l!} z^l \right| \leq \frac{|z|^{2n+1}}{(n+1)!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{|z|^l}{l!} = \frac{|z|^{2n+1}}{(n+1)!} e^{|z|}$$

□

4.1.1 e é Irracional

Teorema 4.1.1. *Para todo racional $r \in \mathbb{Q}^*$, e^r é irracional.*

Demonstração.

Seja $r = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ com $a > 0$. Suponha, por absurdo, que $e^a = \frac{p}{q}$ é racional. Pela construção do método de Hermite, aplicando $z = a > 0$ na equação (4.2), obtemos que

$$0 < B_n(a) \cdot \frac{p}{q} - A_n(a) = R_n(a) \Longleftrightarrow 0 < B_n(a) \cdot p - A_n(a) \cdot q = R_n(a) \cdot q.$$

Pelo lema anterior existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $R_m(a) \cdot q < 1$. Daí,

$$0 < B_m(a) \cdot p - A_m(a) \cdot q < 1.$$

Como $A_m(z)$ e $B_m(z)$ são polinômios com coeficientes inteiros, $B_m(a) \cdot p - A_m(a) \cdot q$ é um inteiro entre 0 e 1. Absurdo! Logo, e^a deve ser um número irracional.

Agora note que, se $e^r = (e^a)^{\frac{1}{b}} = \frac{p}{q}$ é racional, então $e^a = \frac{p^b}{q^b}$ é racional. Portanto, e^r é irracional para todo $r \in \mathbb{Q}^*$. □

4.1.2 π é Irracional

Para demonstrar que π é irracional precisaremos tomar um caminho mais longo trabalhando com termos líderes para construir um absurdo. Isto acontece porque, diferentemente da demonstração anterior, ao utilizar a relação $e^{i\pi} + 1 = 0$ e supor que $\pi = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$ não há como garantir que $R_n(ia) > 0$ uma vez que $i^2 = -1$. Por este motivo, será um pouco mais difícil demonstrar a irracionalidade de π.

Teorema 4.1.2. *π é irracional.*

Demonstração.

Suponha, por absurdo, que $\pi = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*$ é racional. Nesse caso, $i = i\frac{b}{a}\pi$ o que implica $ia = ib\pi$ e segue que $e^{ia} = e^{ib\pi} = (-1)^b$. Aplicando $z = ia$ na equação (4.2) obtemos

$$B_n(ia)(-1)^n - A_n(ia) = R_n(ia).$$

Ainda da equação (4.2) obtemos as relações

$$\begin{cases} -R_n B_{n+1} = -B_{n+1}B_n e^z + B_{n+1}A_n \\ R_{n+1}B_n = B_{n+1}B_n e^z - B_n A_{n+1} \end{cases}$$

que somadas resultam na expressão

$$R_{n+1}B_n - R_n B_{n+1} = \Delta_n(z) = B_{n+1}A_n - B_n A_{n+1}. \tag{4.3}$$

Agora vamos olhar para os termos líderes. Como $A_n(z) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n-k)!}{(n-k)!k!} z^k$ e $B_n(z) = (z - n - 1) \cdots (z - 2n)$, fazendo $k = n$ na expressão de $A_n(z)$ obtemos pelo lado direito da equação (4.3) que o termo líder de $\Delta_n(z)$ é

$$LT(\Delta_n(z)) = z^{n+1}((-1)^n z^n) - z^n((-1)^{n+1} z^{n+1}) = (-1)^n 2z^{2n+1}$$

Por outro lado, $R_n(z)$ possui um zero de multiplicidade $2n + 1$ na origem, isto é, existe um polinômio $g(z) \in \mathbb{Q}[z]$ de modo que $R_n(z) = z^{2n+1}g_n(z)$ e $z \nmid g_n(z)$. Substituindo esta expressão no lado esquerdo da equação (4.3) obtemos que

$$\Delta_n(z) = z^{2(n+1)+1}g_{n+1}B_n - z^{2n+1}g_n B_{n+1} = z^{2n+1}(z^2 g_{n+1}B_n - g_n B_{n+1}).$$

No entanto, $deg(\Delta_n) = 2n + 1$, logo a igualdade anterior implica que $z^2 g_{n+1}B_n - g_n B_{n+1} = c \in \mathbb{R}$ é constante e portanto $\Delta_n(z) = cz^{2n+1} = (-1)^n 2z^{2n+1}$. Logo, a única raíz de Δ_n é a origem e da igualdade $\Delta_n(z) = R_{n+1}B_n - R_n B_{n+1}$ podemos concluir que para todo $z \neq 0$ temos $R_n(z) \neq 0$ ou $R_{n+1}(z) \neq 0$. Em outras palavras, conseguimos garantir que, como $ia \neq 0$, $R_n(ia) \neq 0$ ou $R_{n+1}(ia) \neq 0$ e finalmente podemos tirar uma conclusão absurda!

Como $R_n(ia)$ converge para zero quando n tende ao infinito, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $0 < |R_m(ia)|^2 < 1$. Logo, pelo módulo complexo,

$$0 < |B_m(ia)(-1)^b - A_m(ia)|^2 < 1.$$

No entanto, $w = B_m(ia)(-1)^b - A_m(ia)$ é um inteiro de Gauss, isto é, $w = p + iq$ com $p,\ q \in \mathbb{Z}$. Portanto,

$|w|^2 \in \mathbb{Z}$, o que significa que existe um inteiro $|w|^2$ entre 0 e 1, um tremendo Absurdo! Portanto, π é irracional. □

4.2 e é Transcendente

Até então não era nenhuma novidade o trabalho de Hermite, afinal já era de conhecimento da comunidade matemática que e e π são números irracionais. A grande novidade do trabalho de Hermite foi demonstrar que e é um número transcendente. Para esta demonstração precisaremos dos seguintes lemas.

Lema 4.2.1. *Se $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$, então para todo $k \in \mathbb{N}$, todos os coeficientes da k-ésima derivada $g^{(k)}(x)$ de g são múltiplos de $k!$.*

Demonstração.

Como a derivada é linear basta demonstrar este resultado para um monômio. Seja $g(x) = ax^s$ com $a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Temos dois casos:

- Caso $k > s$, então $(ax^s)^{(k)} = 0 = 0 \cdot k!$.
- E se $1 \leq k \leq s$, então $(ax^s)^{(k)} = s(s-1)\cdots(s-k-1)ax^{s-k} = k!\binom{s}{k}ax^{s-k}$ e como $\binom{s}{k} \in \mathbb{N}$, $k!$ divide $g^{(k)}(x)$.

□

Lema 4.2.2 (Identidade de Hermite). *Seja $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ um polinômio de grau n. Se*

$$F(x) = f(x) + f'(x) + f''(x) + \cdots + f^{(n)}(x), \tag{4.4}$$

então

$$e^x \int_0^x f(t)e^{-t}dt = F(0)e^x - F(x),$$

onde x assume valores complexos.

Demonstração.

Dividindo nossa tese por e^x obtemos a equação

$$\int_0^x f(t)e^{-t}dt = F(0) - F(x)e^{-x}.$$

Se derivarmos a expressão $-F(x)e^{-x}$ e obtermos $f(x)e^{-x}$ então, pelo teorema fundamental do cálculo, a identidade de Hermite está provada. Observe que o teorema fundamental do cálculo pode ser aplicado mesmo para valores complexos porque todo polinômio é uma função inteira. Com efeito, como f tem grau n, temos que

$$\begin{aligned}
(-F(x)e^{-x})' &= -F'(x)e^{-x} - (-1)F(x)e^{-x} \\
&= -e^{x}(f'(x) + f''(x) + \cdots + \underbrace{f^{(n+1)}(x)}_{=0}) + e^{-x}(f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(n)}(x)) \\
&= e^{-x}(f(x) + f'(x) - f'(x) + f''(x) - f''(x) + \cdots + f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x) + 0) \\
&= e^{-x}f(x)
\end{aligned}$$

□

E finalmente um dos dois teoremas que não podem faltar em um trabalho sobre números transcendentes!

Teorema 4.2.1. *e é transcendente.*

Demonstração.

A ideia da demonstração de Hermite é, como todos esperavam, por absurdo! Suponha que e é algébrico de grau n e $g(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{R}[x]$ seja o irredutível que anula e. Os passos da demonstração serão os seguintes: Trabalharemos a identidade de Hermite com os coeficientes a_j de g. Depois escolheremos um certo polinômio f para aplicar na identidade de Hermite, e esta é a grande carta na manga. Em seguida vamos obter uma equação e determinar cotas para os dois lados da mesma com o intuito de obter o nosso tão desejado absurdo, que será $1 < 1$.

† **[1º Passo]** - Relacionar $g(x)$ com a identidade de Hermite.

Pela identidade de Hermite aplicada em $x = k$,

$$e^k \int_0^k f(t)e^{-t}dt = F(0)e^k - F(k).$$

Multiplicando esta equação por a_k para todo $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ obtemos $n + 1$ equações da forma

$$F(0)(a_k e^k) - a_k F(k) = a_k e^k \int_0^k f(t)e^{-t}dt.$$

Somando-as e utilizando que $g(e) = 0$ obtemos

$$F(0)\underbrace{\left(\sum_{k=0}^{n} a_k e^k\right)}_{g(e)} - \sum_{k=0}^{n} a_k F(k) = -\sum_{k=0}^{n} a_k F(k) = \sum_{k=0}^{n} a_k e^k \int_0^k f(t)e^{-t}dt \tag{4.5}$$

Daremos a esta equação o nome de equação da felicidade. Note que a equação da felicidade é verdadeira para qualquer escolha de $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ e o motivo por trás da matemágica da escolha a seguir são as propriedades que obteremos de f. Estas propriedades são cruciais para determinar uma cota superior tanto para o lado esquerdo quanto o lado direito de (4.5).

† **[2º Passo]** - Matemagicamente escolher um polinômio $f(x)$ para aplicar em (4.5).

Escolha

$$f(x) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot x^{m-1}(x-1)^m \cdots (x-n)^m \in \mathbb{R}[x]. \tag{4.6}$$

Note que o grau de f é $n \cdot m + m - 1 = (n+1)m - 1$ onde n é o grau de $g(x)$. Adiante precisaremos que m satisfaça uma condição que se enunciada agora não faria sentido. Tanto f quanto F são importantes por suas propriedades.

† **[3º Passo]** - Determinar as propriedades específicas obtidas da escolha de $f(x)$.

A função f escolhida em (4.6) possui as seguintes propriedades:

- $P_f(01)$**:** $f^{(j)}(0) = 0$, para todo $j \in \{0, 1, \ldots, m-2\}$.
- $P_f(02)$**:** $f^{(j)}(k) = 0$, para todo $j \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ e todo $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
- $P_f(03)$**:** $f^{(m-1)}(0) = (-1)^{nm}(n!)^m$.

Observe que as propriedades $P_f(01)$ e $P_f(02)$ seguem da definição de f pois f tem um zero de multiplicidade $m-1$ na origem e zeros de multiplicidade m nos inteiros $1, 2, \ldots, n$. Já a propriedade $P_f(03)$ segue das identidades da derivada. De fato,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{(m-2)!} \cdot x^{m-2}(x-1)^m \cdots (x-n)^m + Q_1(x) \\
f''(x) &= \frac{1}{(m-3)!} \cdot x^{m-3}(x-1)^m \cdots (x-n)^m + Q_2(x) \\
&\vdots \\
f^{(m-2)}(x) &= x \cdot (x-1)^m \cdots (x-n)^m + Q_{m-2}(x) \\
f^{(m-1)}(x) &= (x-1)^m \cdots (x-n)^m + Q_{m-1}(x)
\end{aligned}$$

onde $x^{m-j} \mid Q_j$ para todo $j \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$. Daí,

$$f^{(m-1)}(0) = (-1)^m(-2)^m \cdots (-n)^m = ((-1)^n)^m(1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n)^m = (-1)^{nm}(n!)^m.$$

Utilizando as três propriedades acima e aplicando o lema 4.2.1 podemos encontrar expressões facéis de se trabalhar para $F(k)$, definido em (4.4) na identidade de Hermite, qualquer que seja $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Note que pelo lema 4.2.1 para qualquer $j \geq m$, todos os coeficientes de $(m-1)!f^{(j)}$ são múltiplos de $m!$, em particular, os coeficientes de $f^{(j)}$ são múltiplos de m. Então, pelas propriedades $P_f(01),\ P_f(02)$ e $P_f(03)$, obtemos:

- $P_F(01)$**:** $F(0) = \sum_{j=m-1}^{deg(f)} f^{(j)}(0) = (-1)^{mn}(n!)^m + m \cdot A$, onde $A \in \mathbb{Z}$ é constante.

- $P_F(02)$**:** $F(k) = \sum_{j=m}^{deg(f)} f^{(j)}(k) = m \cdot B_k$, onde $B_k \in \mathbb{Z}$ é constante para cada $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Lembre que $deg(f) = (m+1)n - 1$. Perceba que diretamente das propriedades acima obtemos que $F(k)$ é inteiro para $0 \leq k \leq n$.

E agora vamos utilizar estas propriedades na equação (4.5).

† **[4º Passo]** - Determinar uma cota inferior para o lado esquerdo da equação da felicidade.

Note que substituindo $P_F(01)$ e $P_F(02)$ em (4.5) obtemos a equação

$$-(-1)^{mn}(n!)^m a_0 - m \cdot a_0 \cdot A - m \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k B_k = \sum_{k=0}^{n} a_k e^k \int_0^k f(t)e^{-t} dt, \tag{4.7}$$

cujo lado esquerdo é um número inteiro. Escolhendo $m \in \mathbb{Z}$ tal que $mdc(m, n!) = 1$ e $m > |a_0|$ obtemos que $m \nmid (n!)^m a_0$. Portanto,

$$\left| \sum_{k=0}^{n} a_k F(k) \right| = \left| (-1)^{mn}(n!)^m a_0 + mA + m \left(\sum_{k=1}^{n} a_k B_k \right) \right| \geq 1$$

† **[5º Passo]** - Determinar uma cota superior para o lado direito da equação da felicidade.

Para encontrar uma cota superior do lado direito de (4.7) vamos limitar $f(x)$ no intervalo $[0, n]$. Como

$$f(x) = \frac{1}{(m-1)!} \cdot x^{m-1}(x-1)^m \cdots (x-n)^m,$$

cada fator do produto acima é sempre menor ou igual a n se $x \in [0, n]$. Logo,

$$|f(x)| \leq \frac{n^{(n+1)m-1}}{(m-1)!}, \ \ \forall\, x \in [0, n].$$

Daí,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{n} a_k e^k \int_0^k f(t)e^{-t} dt \right| &\leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \cdot \int_0^k |f(t)| e^{k-t} dt \\ &= \frac{n^{(n+1)m-1}}{(m-1)!} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k| \cdot \int_0^k e^{k-t} dt \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{k=0}^{n} a_k e^k \int_0^k f(t)e^{-t}dt\right| &= \frac{n^{(n+1)m-1}}{(m-1)!} \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k| \cdot \underbrace{(e^k-1)}_{\leq e^n - 1}\right) \\
&\leq (e^n-1) \cdot \frac{n^{(n+1)m-1}}{(m-1)!} \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right) \\
&< \left[(e^n-1) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} |a_k|\right)\right] \cdot \left(n^{(n+1)}\right)^m \cdot \frac{1}{(m-1)!} \\
&= C_0 \frac{C_1^m}{(m-1)!}
\end{aligned}
$$

Note que C_0 e C_1 não dependem de m. Finalmente vamos ao Gran Finale!

† **[6º Passo]** - Obter um absurdo.

Juntando as cotas obtidas nos dois passos anteriores obtemos que

$$1 \leq \left|\sum_{k=0}^{n} a_k F(k)\right| < C_0 \cdot \frac{C_1^m}{(m-1)!}.$$

Como n é fixo podemos escolher m suficientemente grande de modo que $mdc(m, n!) = 1$ e

$$1 \leq \left|\sum_{k=0}^{n} a_k F(k)\right| < 1. \rightarrow|\leftarrow$$

□

Finalmente conhecemos um número transcendente diferente dos exemplos trabalhados nos capítulos anteriores e não é um número de Liouville. Antes de discutirmos sobre a última afirmação vamos demonstrar que π é transcendente porque a ideia geral da demonstração é semelhante a demonstração que fizemos acima.

A demonstração de que π é um número transcendente é um pouco mais complexa do que a demonstração que e é transcendente. Precisaremos trabalhar com raízes conjugadas de um polinômio e também com polinômios simétricos. Vamos às preliminares!

4.3 Antes de brincar: Polinômios Simétricos

Deste ponto em diante fixemos a notação $f(X) = f(x_1, \ldots, x_n)$ para todo polinômio $f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$. Os polinômios simétricos possuem uma relação forte com raízes de polinômios e nos fornecem condições para garantir quando somas e produtos de raízes - nesse caso de um mesmo polinômio - são números inteiros, por este motivo precisamos da seguinte definição:

Definição 4.3.1. *Dizemos que um número complexo $\alpha \in \mathbb{C}$ é um inteiro algébrico se existe um polinômio*

$f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ não nulo, mônico com coeficientes inteiros tal que $f(\alpha) = 0$.

Observe que a única diferença entre algébricos e inteiros algébricos é o detalhe do coeficiente lider, se f é mônico ou não. Por exemplo, todo racional $0 \neq \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ com $q > 1$ é algébrico mas não é inteiro algébrico.

As ideias por trás dos polinômios simétricos surgem com Cardano ao encontrar uma fórmula para as soluções das equações de terceiro e quarto grau. Cardano muda a abordagem usual do problema, ao invés de usar os coeficientes para determinar as raízes, Cardano decide usar as raízes para determinar os coeficientes do polinômio e assim obter uma relação. Mas qual é a ideia importante nesta interpretação?

Dada uma equação da forma

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0,$$

pelo Teorema Fundamental da Álgebra, existem $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \in \mathbb{C}$ tais que

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n).$$

Desenvolvendo o lado direito e utilizando a igualdade entre polinômios obtemos as relações fundamentais da teoria dos polinômios simétricos. São elas:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_n &= -a_{n-1}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-2}x_n + x_{n-1}x_n &= a_{n-2}, \\ &\ \vdots \\ x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n &= (-1)^n a_0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Analisando as equações acima concluimos que, se $J = \{\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n\}$ é o conjunto de todas as raízes de um polinômio $p(x)$, então as expressões do lado esquerdo de (4.8) aplicadas nos elementos $x_j = \alpha_j,\ j \in \{1, \ldots, n\}$, resultam ou em número racional, se o p não é mônico, ou seja, se $\alpha \in J$ é algébrico, ou em um número inteiro se p é mônico, isto é, se $\alpha \in J$ é um inteiro algébrico.

Mas onde está a simetria?

Definição 4.3.2. *Sejam A e B dois conjuntos não nulos. Uma função $f : A^n \longrightarrow B$ é dita simétrica nos elementos $a_1, \ldots, a_n \in A$ se*

$$f(a_1, \ldots, a_n) = f(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)})$$

para toda permutação σ do conjunto $\{1, \ldots, n\}$. E dizemos que f é simétrica em A se os elementos a_i podem ser tomados de forma arbitrária em A.

Observe que o lado esquerdo de cada equação de (4.8) define uma função polinomial de n variáveis que são funções simétricas para qualquer escolha de n números complexos. Em outras palavras, definindo

$$\begin{aligned}
s_{n,1}(x_1,\ldots,x_n) &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n,\\
s_{n,2}(x_1,\ldots,x_n) &= x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-2}x_n + x_{n-1}x_n,\\
&\vdots\\
s_{n,n}(x_1,\ldots,x_n) &= x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n.
\end{aligned}$$

onde $s_{n,i} : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$ para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$, temos que $s_{n,i}$ é uma função simétrica em $\mathbb{C}$. De fato, para qualquer escolha de $a_1,\ \ldots,\ a_n \in \mathbb{C}$ temos que

$$s_{n,i}(a_1,\ldots,a_n) = s_{n,i}(a_{\sigma(1)},\ldots,a_{\sigma(n)})$$

para todo $i \in \{1,\ldots,n\}$ e para toda permutação σ de $\{1,\ldots,n\}$. Estes polinômios simétricos são tão importantes na teoria dos polinômios simétricos que recebem um nome especial.

Definição 4.3.3. *Os polinômios $s_{n,1},\ s_{n,2},\ \ldots,\ s_{n,n}$ são chamados de polinômios simétricos elementares.*

Embora a maneira de pensar de Cardano tenha sido inovadora, quem desenvolve a ideia e trabalha com os polinômios simétricos elementares é Lagrange. Lagrange decide utilizar os polinômios simétricos elementares aplicados a números algébricos para descrever outros polinômios. Isso mesmo, polinômios descrevendo coeficientes de polinômios!

O estudo de Lagrange foi o seguinte: Dado um polinômio $f(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ simétrico em $\mathbb{C}$, isto é, $f(x_1,\ldots,x_n) = f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})$ para toda permutação σ, quando é possível encontrar um polinômio $H(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$ de modo que

$$f(x_1,\ldots,x_n) = H(s_{n,1}(x_1,\ldots,x_n),\ldots,s_{n,n}(x_1,\ldots,x_n))$$

E deste estudo surge o Teorema Fundamental dos Polinômios Simétricos (TFPS)! Mas para demonstrar este teorema precisaremos antes ordenar monômios. É necessária uma maneira de ordenar monômios da forma $x_1^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\cdots x_n^{\alpha_n}$ que tenha uma estrutura forte o suficiente para podermos trabalhar com indução e construir algoritmos.

Definição 4.3.4. *Uma ordem monomial em $\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$ é uma relação de ordem $>$ em $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ satisfazendo:*

i) $>$ é uma relação de ordem total em $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$.

ii) $\alpha > \beta \Rightarrow \alpha + \gamma > \beta + \gamma$, *para todos* $\alpha,\ \beta$ *e* $\gamma \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$.

iii) $>$ *é uma boa ordem, isto é, todo subconjunto não vazio de* $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ *tem elemento mínimo.*

Uma ordem monomial possui a estrutura necessária para demonstrar o TFPS. Precisamos escolher qual ordem monomial iremos utilizar.

Definição 4.3.5 (Ordem Lexicográfica)**.** *Sejam* $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \cdots, \beta_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$. *Dizemos que* $\alpha >_{lex} \beta$ *se na diferença vetorial* $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}^n$*, a primeira coordenada não nula do lado esquerdo é positiva.*

Exemplo 4.3.1. *Sejam* $\alpha = (1, 2, 0)$ *e* $\beta = (0, 3, 4)$ *elementos de* $\mathbb{Z}^3_{\geq 0}$. *Então,* $\alpha >_{lex} \beta$ *já que* $\alpha - \beta = (1, -1, -4)$. *O que significa que* $xy^2 >_{lex} y^3z^4$.

Note que a primeira coordenada de $\alpha \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$ está relacionada com a variável x_1, e se mudarmos esta relação das variáveis com a coordenadas dos pontos de $\mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, então mudamos a ordem lexicográfica. Logo, na definição usual, estamos considerando $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$.

Não demonstraremos que a ordem lexicográfica definida acima é uma ordem monomial nem entraremos em mais detalhes sobre este assunto. Para um detalhado estudo sobre o tema e também uma demonstração de que a ordem lexicográfica é ordem monomial veja o capítulo sobre Bases de Gröbner do livro [11].

4.3.1 Teorema Fundamental dos Polinômios Simétricos

Teorema 4.3.1 (Teorema Fundamental dos Polinômios Simétricos)**.** *Todo polinômio simétrico de* n *variáveis pode ser escrito como um polinômio em função dos simétricos elementares* $s_{n,1},\ \ldots,\ s_{n,n}$.

Demonstração.

A importância da ordem lexicográfica na demonstração do teorema vai além do fato de usarmos indução forte sobre os monômios. Esta demonstração fornece um algoritmo - que não funcionaria sem uma ordem monomial - para escrever qualquer polinômio simétrico f de n variáveis em função dos simétricos elementares. Seja $\mathcal{M}_n$ o conjunto de todos os monômios com n variáveis e considere a ordem lexicográfica sobre $\mathcal{M}_n$.

Observe que o menor elemento de $\mathcal{M}_n$ é o termo $1 = x_1^0 \cdot x_2^0 \cdots x_n^0$. De fato, se $M = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \in \mathcal{M}_n$ é não constante, então o primeiro expoente não nulo de M será a primeira coordenada não nula na diferença vetorial $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) - (0, 0, \ldots, 0)$ que será positiva. Portanto, $M >_{lex} 1$. Dessa forma, o primeiro passo da indução está provado, afinal todo polinômio constante é um polinômio simétrico de n variáveis e pode ser escrito da forma $1 = 1 \cdot s_{n,1}^0$.

Sejam $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ um polinômio simétrico e $M := LM(f)$ o maior monômio de f com relação a ordem lexicográfica. Suponha, pelo princípio de indução forte, que todos os polinômios simétricos

$h \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ tais que $LM(h) <_{lex} LM(f)$ são escritos como polinômios nos simétricos elementares $s_{n,1}, \ldots, s_{n,n}$. Provemos que f é escrito como um polinômio nos simétricos elementares.

Antes de descrevermos o algoritmo, observe que o termo líder de f é da forma $LT(f) := a_m M = a_m x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$ onde $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_n$ e $a_m \in \mathbb{C}$. Com efeito, se não temos esta ordem dos expoentes, então existe uma permutação σ do conjunto $\{1, \ldots, n\}$ de modo que $m_{\sigma(1)} \geq m_{\sigma(2)} \geq \cdots \geq m_{\sigma(n)}$ e então o monômio $N = x_1^{m_{\sigma(1)}} \cdots x_n^{m_{\sigma(n)}} >_{lex} M$. E como f é simétrico por hipótese, temos que

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

O algoritmo consiste em determinar o termo líder de f e então construir um polinômio g nos simétricos elementares com mesmo termo líder de f para assim obter um polinômio com mônomio líder menor, a saber $f - g$. E como a ordem lexicográfica é uma boa ordem, com um número finito de passos o algoritmo vai terminar. Felizmente há uma maneira simples de construir g quando o termo líder de f está escrito na forma $a_m M = a_m x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$. Defina

$$\begin{aligned} g &= a_m (s_{n,1})^{m_1 - m_2} (s_{n,2})^{m_2 - m_3} \cdots (s_{n,n})^{m_n} \\ &= a_m \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right)^{m_1 - m_2} \left(\sum_{0 < j < k \leq n} x_j x_k \right)^{m_2 - m_3} \cdots (x_1 \cdots x_n)^{m_n} \end{aligned}$$

Observe que como g é simétrico, o termo líder de g também será escrito da forma $a_m M_g = a_m x_1^{l_1} \cdots x_n^{l_n}$ com $l_1 \geq l_2 \geq \cdots \geq l_n$. Em particular, para maximizar os expoentes l_j de M_g escolhemos no primeiro fator a parcela x_1, no segundo fator escolhemos a parcela $x_1 x_2$, no terceiro a parcela $x_1 x_2 x_3$ e assim por diante. Desse modo vamos obter que

$$\begin{aligned} M_g &= a_m x_1^{m_1 - m_2} (x_1 x_2)^{m_2 - m_3} (x_1 x_2 x_3)^{m_3 - m_4} \cdots (x_1 x_2 \cdots x_n)^{m_n} \\ &= a_m x_1^{m_1 - m_2 + m_2 - m_3 + \cdots - m_n + m_n} x_2^{m_2 - m_3 + m_3 - m_4 + \cdots - m_n + m_n} \cdots x_n^{m_n} \\ &= a_m x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n} = M \end{aligned}$$

Então, $LM(f - g) <_{lex} LM(f)$ e pela hipótese de indução existe $h \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ tal que $f - g = h(s_{n,1}, \ldots, s_{n,n})$. E pela hipótese de indução $h = f - g$ se escreve como polinômio nos simétricos elementares. Em particular, $f = g + h$ é escrito como um polinômio nos simétricos elementares. Pelo princípio de indução forte, o teorema está provado. $\square$

E agora façamos um exemplo do que significa toda esta discussão sobre simétricos elementares e de como o algoritmo descrito no teorema funciona.

Exemplo 4.3.2. *Seja $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ um polinômio em $\mathbb{C}[x,y,x]$. Como f é simétrico em $\mathbb{C}^3$, pelo TFPS podemos escrever f em função dos simétricos elementares de três variáveis $s_{3,1} = x + y + z$, $s_{3,2} = xy + xz + yz$ e $s_{3,3} = xyz$.*

Pela ordem lexicográfica $LM(f) = x^2 = x^2y^0z^0$, logo

$$g = (s_{3,1})^2 = x^2 + 2xy + 2xz + y^2 + 2yz + z^2$$

donde obtemos que $f - g = -2xy - 2xz - 2yz$. Pelo algoritmo deveríamos continuar e agora repetir o passo anterior com $LT(f - g) = -2xy$, mas nesse exemplo não é necessário outro passo, pois $f - g = -2(xy + xz + yz) = -2s_{3,2} = h$. Portanto,

$$f = g + h = (s_{3,1})^2 - 2s_{3,2}.$$

Finalmente!

4.4 π é Transcendente

Teorema 4.4.1 (Lindemann)**.** *π é transcendente.*

Demonstração.

A demonstração de Lindemann segue a mesma estrutura da demonstração de Hermite que e é transcendente. Isto é possível graças a relação $e^{i\pi} + 1 = 0$. Primeiro vamos transformar o problema em um outro problema de modo que neste novo problema possamos utilizar as técnicas de Hermite, depois seguindo os passos da demonstração de e precisaremos de alguns trabalhos pesados extras pois perderemos algumas propriedades importantes na demonstração do e. Por exemplo, o termo $F(k)$ da equação da felicidade em e é inteiro para todo $k \in \{0, 1, \ldots, k\}$ mas isto não será verdadeiro para a demonstração do π.

† **[1º Passo]** - Simplificar o problema.

Suponha, por absurdo, que π seja algébrico. Nesse caso, $\gamma = i\pi$ também é algébrico. Sejam $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ o polinômio irredutível que anula γ, $l = deg(p)$ e $\{\gamma_1, \cdots, \gamma_l\}$ o conjunto de todas as raízes de $p(x)$.

Como $e^{\gamma}+1=0$, temos que $\prod_{i=1}^{l}(e^{\gamma_i}+1)=0$. Expandindo o produto obtemos que

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{l}(e^{\gamma_i}+1) &= e^{\gamma_1+\cdots+\gamma_l}+e^{\gamma_1+\cdots+\gamma_{l-1}}+\cdots+e^{\gamma_{l-1}+\gamma_l}+e^{\gamma_1}+\cdots+e^{\gamma_l}+1\\ &= \sum_{b_1=0}^{1}\sum_{b_2=0}^{1}\cdots\sum_{b_l=0}^{1}e^{b_1\gamma_1+\cdots+b_l\gamma_l}=0.\end{aligned}$$

Observe que $\gamma=i\pi\neq 0$ está no conjunto $\{\gamma_1,\ldots,\gamma_l\}$, logo pelo menos um dos expoentes $b_1\gamma_1+\cdots+b_l\gamma_l$ na soma acima é não nulo. Seja m a quantidade de expoentes não nulos, denotemos estes expoentes por $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_m$. Como a soma anterior possui 2^l parcelas, $a=2^l-m$ é o número de expoentes nulos da soma anterior e podemos reescrevê-la da seguinte maneira:

$$a+e^{\alpha_1}+\cdots+e^{\alpha_m}=0,\ a\geq 1 \tag{4.9}$$

A característica principal destes expoentes $\alpha_1,\ \ldots,\alpha_m$ é formar um conjunto completo de raízes de um polinômio $g(x)\in\mathbb{Z}[x]$ de grau m. De fato, note que o polinômio

$$h(x)=\prod_{b_1=0}^{1}\prod_{b_2=0}^{1}\cdots\prod_{b_l=0}^{1}(x-(b_1\gamma_1+\cdots+b_l\gamma_l))$$

possui coeficientes racionais pois é simétrico com relação a $\gamma_1,\ \ldots,\gamma_l$. De fato, se olharmos h como um polinômio de l variáveis em $(\mathbb{Z}[x])[\gamma_1,\ldots,\gamma_l]$, isto é, com coeficientes em $\mathbb{Z}[x]$, temos o produto de todas as somas possíveis das l variáveis, e consequentemente nenhuma permutação σ de $\{1,\ldots,l\}$ irá alterar o resultado de h. Portanto, pelo TFPS, h se escreve como uma combinação polinomial nos simétricos elementares $s_{l,j}$ nas variáveis $\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_l$. Além disso, $\gamma_1,\ \ldots,\gamma_l$ formam um conjunto completo de raízes de um polinômio não necessariamente mônico, isto implica que $s_{l,j}(\gamma_1,\ldots,\gamma_l)\in\mathbb{Q}$ para todo $j\in\{1,\ldots,l\}$. Ou seja, $h(x)\in\mathbb{Q}[x]$.

Por construção, $h(x)$ possui raiz de multiplicidade a em 0 e suas outras raízes são $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_m$ (não necessariamente distintos), desse modo podemos escrever $h(x)=x^a\overline{h}(x)$ com $\overline{h}(x)\in\mathbb{Q}[x]$. Tomando $r\in\mathbb{Z}$ como o mínimo múltiplo comum dos denominadores dos coeficientes de $\overline{h}$, temos que

$$g(x)=\frac{r}{x^a}h(x)=r\overline{h}(x)\in\mathbb{Z}[x].$$

Denotemos $g(x)=b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0\in\mathbb{Z}[x]$, onde $b_m>0$ e $b_0\neq 0$.

† **[2º Passo]** - Obter a equação que utilizaremos para obter um absurdo.

De modo análogo ao que fizemos para e, se aplicarmos sucessivamente $x=\alpha_1,\ldots,x=\alpha_m$ na identidade de Hermite para um polinômio f qualquer, vamos obter m equações da forma

$$F(0)e^{\alpha_i} - F(\alpha_i) = e^{\alpha_i} \int_0^{\alpha_i} f(t)e^{-t}dt$$

onde $i \in \{1, \ldots, m\}$. Somando todas as equações e aplicando (4.9) obtemos

$$-aF(0) - \sum_{k=1}^{m} F(\alpha_k) = \sum_{k=1}^{m} e^{\alpha_k} \int_0^{\alpha_k} f(t)e^{-t}dt. \tag{4.10}$$

Que é bem semelhante a equação da felicidade que obtemos para e.

† **[3º Passo]** - Escolher matematicamente f para aplicar em (4.10).

Novamente vamos escolher matemagicamente um polinômio $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ para obtermos um absurdo. A escolha do f que utilizaremos nesta demonstração é semelhante ao que fizemos anteriormente. Defina

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(n-1)!} b_m^{mn-1} x^{n-1} (g(x))^n \\ &= \frac{1}{(n-1)!} b_m^{mn-1} x^{n-1} (b_m^n (x-\alpha_1)^n \cdots (x-\alpha_m)^n) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} b_m^{(m+1)n-1} x^{n-1} (x-\alpha_1)^n \cdots (x-\alpha_m)^n. \end{aligned}$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e discutiremos quais as condições que n deve satisfazer mais adiante.

De modo similar ao que fizemos para e, esta escolha de f possui algumas propriedades importantes. São elas:

- $P(01)$**:** $f^{(j)}(0) = 0$ para todo $j \in \{0, 1, \ldots, n-2\}$.
- $P(02)$**:** $f^{(n-1)}(0) = (-1)^{mn} b_m^{(m+1)n-1} (\alpha_1 \cdots \alpha_m)^n = b_m^{mn-1} b_0^n$.
- $P(03)$**:** $F(0) = \sum_{j=n-1}^{(m+1)n-1} f^{(j)}(0) = b_m^{mn-1} b_0^n + nA$, $A \in \mathbb{Z}$.
- $P(04)$**:** $f^{(j)}(\alpha_k) = 0$ para todo $j \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ e todo $k \in \{1, \ldots, m\}$.
- $P(05)$**:** $F(\alpha_k) = \sum_{j=n}^{(m+1)n-1} f^{(j)}(\alpha_k) = n b_m^{mn-1} \psi(\alpha_k)$ para todo $k \in \{1, \ldots, m\}$ onde $\psi(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

A demonstração das propriedades acima utiliza o lema 4.2.1 e segue de modo análogo à demonstração que fizemos das propriedades de f para e. A única diferença entre o que fizemos para e e a demonstração das propriedades listadas acima é que os elementos α_j não são inteiros. No entanto, formam um conjunto completo de raízes do polinômio $g(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$. Dessa forma, os polinômios elementares aplicados em $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ vão resultar em números racionais. Em outras palavras,

$$s_{m,j}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = (-1)^j \frac{b_{m-j}}{b_m}, \ \ \forall\, j \in \{1, \ldots, m\}.$$

† **[4º Passo]** - Obter uma cota inferior para o lado esquerdo de (4.10).

Aqui precisamos de um trabalho extra porque, diferentemente da demonstração da transcendência de e, não temos que $F(\alpha_k)$ é inteiro. No entanto, não precisamos que cada $F(\alpha_k)$ seja inteiro, basta que a soma $\sum_{k=1}^{m} F(\alpha_k)$ seja um número inteiro. Para demonstrar que esta soma é um número inteiro utilizaremos os polinômios simétricos.

Observe que o grau de $\psi(x)$ é exatamente $deg(f)-n = (m+1)n-1-n = mn-1$. Assim, reorganizando se necessário as potências de b_m, podemos definir o polinômio

$$H(b_m x) = b_m^{mn-1}\psi(x)$$

que possui coeficientes inteiros e é mônico. De fato, o termo líder de $f^{(n)}(x)$ é $LT(f^{(n)}) = n!\dfrac{b_m^{(m+1)n-1}}{b_m^n(n-1)!}x^{mn-1} = nb_m^{mn-1}x^{mn-1}$ e como já retiramos nb_m^{mn-1} em evidência na propriedade $P(05)$, temos que $\psi(x)$ se escreve como

$$\psi(x) = x^{mn-1} + c_{mn-2}x^{mn-2} + \cdots + c_1 x + c_0$$

onde $c_j = c_j(b_0, \ldots, b_m)$ para todo $j \in \{0, 1, \ldots, mn-1\}$. Daí, podemos reescrever $H(b_m x) = b_m^{mn-1}\psi(x)$ da forma

$$H(b_m x) = (b_m x)^{mn-1} + b_m c_{mn-2}(b_m x)^{mn-1} + \cdots + c_1 b_m^{mn-2}(b_m x) + c_0 b_m^{mn-1},$$

ou seja, $H(x) \in \mathbb{Z}[x]$ é mônico.

Defina $B_k = b_m\alpha_k$ para todo $k \in \{1, \ldots, m\}$. Desse modo, $F(\alpha_k) = n \cdot H(B_k)$ onde B_k é um inteiro algébrico para todo k. Agora vamos trabalhar com H e B_k para provar que a soma $\sum_{k=1}^{m} F(\alpha_k)$ é um número inteiro. Temos que os elementos B_k são inteiros algébricos e $B_1, \ldots, B_m$ forma um conjunto completo de raízes de um polinômio inteiro de grau m. Com efeito, como $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ formam um conjunto completo de raízes de $g(x)$, reorganizando as potências de b_m obtemos que $B_1, \ldots, B_m$ formam um conjunto completo de raízes do polinômio $p(x) = b_m^{m-1}g(x)$. De fato, para $y = b_m x$ temos que

$$p(y) = y^m + b_{m-1}b_m y^{m-1} + \cdots + b_{m-1}^{m-2}b_1 y + b_0 b_m^{m-1}$$

onde $p(B_k) = p(b_m\alpha_k) = b_m^{m-1}g(\alpha_k) = 0$ para todo $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Finalmente provemos que $\sum_{k=1}^{m} H(B_k)$ é um inteiro. Defina o polinômio de m variáveis

$$\hat{H}(x_1, \ldots, x_m) = H(x_1) + H(x_2) + \cdots + H(x_m) \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_m].$$

Temos que $\hat{H}$ é um polinômio simétrico e, pelo Teorema Fundamental dos Polinômios Simétricos, existe $S \in \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ tal que

$$\hat{H} = S(s_{m,1}, \ldots, s_{m,m}).$$

Como $\{B_1, \ldots, B_k\}$ é um conjunto completo de raízes de um polinômio mônico, $s_{m,j}(B_1, \ldots, B_m) = \beta_j \in \mathbb{Z}$ para todo índice j de 1 a m. Logo,

$$\hat{H}(B_1, \cdots, B_k) = \sum_{k=1}^{m} H(B_k) = S(\beta_1, \ldots, \beta_m) = B \in \mathbb{Z}.$$

Desse modo, obtemos que o lado esquerdo da nossa equação da felicidade de π é da forma

$$aF(0) + \sum_{k=1}^{m} F(\alpha_k) = ab_0^n b_m^{mn-1} + n(aA + B). \tag{4.11}$$

E caso $n \in \mathbb{N}$ é tal que $mdc(n, b_0 b_m) = 1$ e $n > a$, então $n \nmid ab_0^n b_m^{mn-1}$ o que implica que

$$\left| aF(0) + \sum_{k=1}^{m} F(\alpha_k) \right| \geq 1.$$

† **[5º Passo]** - Obter uma cota superior para (4.10).

E seguimos nossa demonstração caminhando para obter uma cota superior para o lado direito da nossa equação (4.10). Como temos finitos números complexos $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, existe $0 < R \in \mathbb{R}$ tal que todos os α_j estão no disco de centro na origem e raio R. Ou seja, $|\alpha_j| \leq R$ para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$. Como todo polinômio é uma função contínua e o disco é fechado em $\mathbb{R}^2$ a função $b_m^m g(x)$ atinge máximo e mínimo neste disco. Seja

$$\max_{|x| \leq R} |b_m^m g(x)| = C \in cR.$$

Assim, como $f(x) = \dfrac{1}{(n-1)!} b_m^{mn-1} x^{n-1} (g(x))^n$ e C não depende de n, temos que

$$\begin{aligned}
\max_{|x| \leq R} |f(x)| &= \max_{|x| \leq R} \left| \frac{1}{(n-1)!} b_m^{mn-1} x^{n-1} (g(x))^n \right| \\
&< \frac{1}{(n-1)!} \max_{|x| \leq R} \left| x^{n-1} b_m^{mn} (g(x))^n \right| \\
&< \frac{R^{n-1}}{(n-1)!} \max_{|x| \leq R} |(b_m^m g(x))^n| \\
&\leq \frac{R^{n-1}}{(n-1)!} C^n.
\end{aligned}$$

† **[6º Passo]** - Concluímos um absurdo!

Como C e R não dependem de n, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_0$ temos que

$$\begin{array}{llll} 1 & \leq \left|aF(0) + \sum_{k=1}^{m} F(\alpha_k)\right| & = & \left|\sum_{k=1}^{m} e^{\alpha_k} \int_0^{\alpha_k} f(t)e^{-t}dt\right| \\ & \leq \sum_{k=1}^{m} |e^{\alpha_k}| \int_0^{\alpha_k} \left|f(t)e^{-t}\right| dt & \leq & \sum_{k=1}^{m} e^{R} \int_0^{\alpha_k} \dfrac{R^{n-1}C^n}{(n-1)!} \cdot \dfrac{1}{e^R} dt \\ & < \sum_{k=1}^{m} e^{R} \dfrac{R^{n-1}C^n}{(n-1)!} \left|\int_0^{\alpha_k} 1 \cdot dt\right| & = & \sum_{k=1}^{m} e^{R} \dfrac{R^{n-1}C^n}{(n-1)!} |\alpha_k| \\ & \leq me^{R} \dfrac{R^{n-1}C^n}{(n-1)!} R & = & me^{R} \left(\dfrac{(RC)^n}{(n-1)!}\right) \\ & < 1. \rightarrow\mid\leftarrow & & \end{array}$$

□

4.4.1 O Teorema de Hermite-Lindemann

Depois de demonstrar que π é transcendente, Lindemann demonstra um resultado ainda mais forte:

Teorema 4.4.2 (Teorema de Hermite-Lindemann)**.** *Se α é um número algébrico não nulo, então e^{α} é transcendente.*

Demonstração.

Para uma demonstração seguindo a linha de raciocínio que utilizamos para demonstrar a transcendência de e e π veja o capítulo 2 do livro [2]. □

Note que a transcendência de $e = e^1$ e pi são corolários do teorema de Hermite-Lindemann. De fato, se π é algébrico, então $i\pi$ é algébrico e pelo teorema acima obtemos que $e^{i\pi} = -1$ é transcendente. Absurdo! Portanto π é transcendente.

4.5 e e π Não São Números de Liouville

Agora já conhecemos uma boa quantidade de números transcendentes, inclusive e e π. Por este motivo, para fechar com chave de ouro este capítulo, vamos discutir a demonstração que e e π são números transcendentes que não são de Liouville. Para demonstrar que e não é um número de Liouville utilizaremos a teoria das frações contínuas que desenvolvemos no capítulo 1 e precisaremos de outro resultado da teoria das frações contínuas.

4.5.1 A Fração Contínua de e

Lema 4.5.1. *A fração contínua de e é dada por*

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots, 1, 1, 2n, \ldots] \tag{4.12}$$

Demonstração.

Nesta demonstração deixamos para o leitor a diversão de fazer as contas intermediárias! Observe que esta demonstração garante que a fração contínua de e é infinita, ou seja, a demonstração garante que e é irracional.

Para provar a igualdade (4.12) definimos os coeficientes

$$\begin{aligned} A_n &= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^n}{n!} e^x dx, \\ B_n &= \int_0^1 \frac{x^{n+1}(x-1)^n}{n!} e^x dx, \\ C_n &= \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^{n-1}}{n!} e^x dx. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Para todo $n \geq 1$ temos que estes coeficientes satisfazem três relações:

$$A_n + B_{n-1} + C_{n-1} = 0, \tag{4.14}$$

$$B_n - 2nA_n + C_{n-1} = 0, \tag{4.15}$$

$$A_n - B_n + C_n = 0. \tag{4.16}$$

Utilizaremos os coeficientes $A_n,\ B_n$ e C_n para definir duas sequências de inteiros (p_n) e (q_n) de modo que

$$e = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots, 1, 1, 2n, \ldots].$$

Defina $p_0 = q_0 = p_1 = 1$, $q_1 = 0$ e

$$\begin{array}{llll} n \geq 1 & \Longrightarrow & p_{3n} = p_{3n-1} + p_{3n-2} & q_{3n} = q_{3n-1} + q_{3n-2} \\ n \geq 1 & \Longrightarrow & p_{3n+1} = 2np_{3n} + p_{3n-1} & q_{3n+1} = 2nq_{3n} + q_{3n-1} \\ n \geq 0 & \Longrightarrow & p_{3n+2} = p_{3n+1} + p_{3n} & q_{3n+2} = q_{3n+1} + q_{3n} \end{array}$$

Nestas condições, valem as igualdades:

$$\begin{aligned} A_n &= q_{3n}e - p_{3n}, \\ B_n &= p_{3n+1} - q_{3n+1}e, \\ C_n &= p_{3n+2} - q_{3n+2}e. \end{aligned} \tag{4.17}$$

A demonstração segue diretamente das relações (4.14). Finalmente, com as equações acima, vamos demonstrar que

$$e = \lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, \ldots, 1, 1, 2n, \ldots].$$

Veja que para todo $0 \leq x \leq 1$ temos que $|x| \leq 1$ e $|x-1| \leq 1$. Daí,

$$|A_n| = \left| \int_0^1 \frac{x^n(x-1)^n}{n!} e^x dx \right| \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 |x^n(x-1)^n| e^x dx \leq \frac{1}{n!} \int_0^1 e^x dx = \frac{e-1}{n!}$$

e de modo análogo demonstramos que $|B_n| \leq \dfrac{e-1}{n!}$ e $|C_n| \leq \dfrac{e-1}{n!}$. Dessa maneira, como $q_n \geq 1$, temos $\frac{1}{q_n} \leq 1$ o que implica que $\left|\dfrac{A_n}{q_j}\right| \leq \dfrac{e-1}{n!}$ para todo $n,\ j \in \mathbb{N}$. Daí, utilizando as equações (4.17) temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{p_{3n}}{q_{3n}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{q_{3n}e - A_n}{q_{3n}} = \lim_{n\to\infty} \left(e - \frac{A_n}{q_{3n}}\right) = e, \\
\lim_{n\to\infty} \frac{p_{3n+1}}{q_{3n+1}} &= \lim_{n\to\infty} \frac{q_{3n+1}e + B_n}{q_{3n+1}} = \lim_{n\to\infty} \left(e - \frac{B_n}{q_{3n+1}}\right) = e
\end{aligned}$$

e também

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_{3n+2}}{q_{3n+2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{q_{3n+2}e - C_n}{q_{3n+2}} = \lim_{n\to\infty} \left(e - \frac{C_n}{q_{3n+2}}\right) = e$$

donde $e = \lim_{n\to\infty} \dfrac{p_n}{q_n}$.

Pela definição das sequências (p_n) e (q_n) obtemos os valores

$$\begin{array}{lll}
p_2 = p_1 + p_0 = 2 & q_2 = q_1 + q_0 = 1 & \frac{p_2}{q_2} = 2 \\
p_3 = p_2 + p_1 = 3 & q_3 = q_2 + q_1 = 1 & \frac{p_3}{q_3} = 2 + \dfrac{1}{1} \\
p_4 = 2p_3 + p_2 = 8 & q_4 = 2q_3 + q_2 = 3 & \frac{p_4}{q_4} = 2 + \dfrac{1}{1+\frac{1}{2}} \\
p_5 = p_4 + p_3 = 11 & q_5 = q_4 + q_3 = 4 & \frac{p_5}{q_5} = [2; 1, 2, 1] \\
p_6 = p_5 + p_4 = 19 & q_6 = q_5 + q_4 = 7 & \frac{p_6}{q_6} = [2; 1, 2, 1, 1] \\
p_7 = 4p_6 + p_5 = 87 & q_7 = 4q_6 + q_5 = 32 & \frac{p_7}{q_7} = [2; 1, 2, 1, 1, 4]
\end{array}$$

e assim por diante. Portanto,

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, \ldots, 1, 1, 2n, \ldots].$$

□

No primeiro capítulo demonstramos que as frações contínuas fornecem boas aproximações racionais para um dado $x \in \mathbb{R}$. Na verdade, as aproximações por frações contínuas são as melhores aproximações possíveis de ordem 2! É o que nos diz a proposição a seguir.

Proposição 4.5.1. *Seja $x \in \mathbb{R}$. Se $0 \neq \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ é tal que*

$$\left|x - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2b^2},$$

então $\frac{a}{b}$ é uma m-ésima convergente da fração contínua de x para algum $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração.

Veja o capítulo de frações contínuas do livro [6]. □

Teorema 4.5.1. *e não é um número de Liouville.*

Demonstração.

Para demonstrar que e não é um número de Liouville, vamos provar que para todo racional $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ com $b > 1$ temos que

$$\left|e - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{1}{b^3}.$$

Comecemos eliminando os casos em que $b = 2$ e $b = 3$. Caso $b = 2$, $\frac{1}{b^3} = \frac{1}{8} = 0,125$ e se $a \leq 4$ ou $a \geq 7$, então $\left|e - \frac{a}{b}\right| \geq 0,5 > \frac{1}{8}$. Vejamos os casos $a = 5$ e $a = 6$. Se $a = 5$, então $\left|e - \frac{5}{2}\right| > 0,2 > \frac{1}{8}$. E caso $a = 6$, temos que $\left|e - \frac{6}{2}\right| > 0,25 > \frac{1}{8}$.

Portanto $b > 2$. De modo análogo demonstramos que $b > 3$.

Suponha, por absurdo, que existe $0 \neq \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ com $b > 3$ tal que

$$\left|e - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{b^3}.$$

Em particular,

$$\left|e - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{2b^2}.$$

Então, pela proposição anterior, $\frac{a}{b} = \frac{p_m}{q_m}$ para algum $5 \leq m \in \mathbb{N}$ (pois $b > 3$). Logo, $\left|e - \frac{p_m}{q_m}\right| < \frac{1}{q_m^3}$. Por outro lado, pelo teorema 2.2.1, temos que

$$\frac{1}{q_m^3} > \left|e - \frac{p_m}{q_m}\right| > \frac{1}{(a_{m+1} + 2)q_m^2}. \tag{4.18}$$

Agora vamos contruir um absurdo usando a desigualdade anterior e a fração contínua de e. Escrevendo

$$e = [2; 1, 2, 1, 1, 4, 1, 1, 6, 1, 1, 8, 1, 1, 10, \ldots] = [a_0; a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, \ldots]$$

temos os casos:

- Se $m = 3k$ para algum $0 < k \in \mathbb{Z}$, então $a_{m+1} = a_{3k+1} = 1$ e consequentemente, como $q_5 = 4$, $a_{m+1} + 2 \leq q_m$ para todo $m \geq 5$.

- Caso $m = 3k + 1$ para algum $0 < k \in \mathbb{Z}$, então $a_{m+1} = a_{3k+2} = 2k$. Vejamos quando $q_m \geq m$. Note que $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e que para $n > 4$ a diferença entre dois elementos consecutivos desta sequência é sempre maior que um. Em outras palavras, $q_{n+1} > q_n + 1$ para todo $n > 4$. E como $q_6 = 7 \geq 6$ e m

cresce de um em um, temos que $q_m \geq m$ para todo $m \geq 6$. Assim, como $q_4 = 3$, temos que

$$a_{m+1} + 2 = 2(k+1) \leq 3k + 1 = m \leq q_m, \ \forall \, m \geq 6.$$

Entretanto, $m \geq 5$ o que significa que precisamos verificar o caso particular $m = 5$. Se $m = 5$, então $q_5 = 4$ e $a_6 = 1$ donde $a_6 + 2 = 3 < q_5$. Portanto, $a_{m+1} + 2 \leq q_m$ para todo $m \geq 5$.

- E se $m = 3k + 2$ para algum $0 < k \in \mathbb{Z}$, então $a_{m+1} = a_{3(k+1)} = 1$. Logo, $a_{m+1} + 2 \leq q_m$ sempre que $m \geq 5$.

Da relação entre a_{m+1} e q_m que acabamos de demonstrar obtemos que $\frac{1}{a_{m+1}+2} \geq \frac{1}{q_m}$. Voltando à desigualdade (4.18) concluimos que

$$\frac{1}{q_m^3} > \left| e - \frac{p_m}{q_m} \right| > \frac{1}{(a_{m+1}+2)q_m^2} \geq \frac{1}{q_m^3} \rightarrow\mid\leftarrow$$

Portanto, não existe um racional $\frac{a}{b}$ de modo que $\left| e - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{b^3}$, ou seja, e não é um número de Liouville. □

Teorema 4.5.2. *π não é um número de Liouville.*

Demonstração.

O passo que não iremos demonstrar é a seguinte propriedade que K. Mahler demonstrou em 1953 no artigo [7]: Para todo número racional $\frac{p}{q}$ com $q > 2$ vale a desigualdade

$$\left| \pi - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^{42}}. \tag{4.19}$$

A demonstração deste fato é longa e técnica, motivo pelo qual não a faremos aqui.

Suponha, por absurdo, que π é um número de Liouville. Então, existe uma sequência de racionais $\left(\frac{p_j}{q_j}\right)_{j>0}$ tais que para todo $j \in \mathbb{Z}_+$ temos $q_j > 1$ e

$$\left| \pi - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{1}{q_j^j}.$$

Daí, como a sequência $(q_j)_{j>0}$ é ilimitada, existe $j \geq 42$ de modo que $q_j > 2$ e então, da inequação (4.19), obtemos que

$$\frac{1}{q_j^{42}} < \left| \pi - \frac{p_j}{q_j} \right| < \frac{1}{q_j^j} \leq \frac{1}{q_j^{42}} \rightarrow\mid\leftarrow$$

Portanto, π não é um número de Liouville.

□

Capítulo 5

Conclusão

Pela história da teoria transcendente fica muito claro que o surgimento dos números de Liouville foi um avanço na matemática muito importante que abriu as portas desta teoria como nunca ocorreu antes. Além disso, até hoje os números de Liouville são focos de pesquisa e possuem muitos mistérios a serem descobertos. Mesmo entre os resultados sobre números de Liouville já conhecidos atualmente, o que demonstramos e estudamos neste trabalho é apenas o centro da teoria, seus ramos ainda alcançam lugares longínquos. Um resultado interessante de 1991 demonstrado por D. Caveny em [13] que não discutimos neste trabalho é: A potenciação de dois números de Liouville é sempre transcendente. Além disso, Burger provou, em [8], que existe um número de Liouville $\alpha \in \mathbb{L}$ tal que e^{α} também é um número de Liouville.

A importância do trabalho de Liouville fica mais evidente quando Hermite e Lindemann demonstram que e e π são transcendentes, respectivamente. Afinal, Hermite segue as ideias de Liouville e Lindemann segue as ideias de Hermite e desse modo, em menos de 50 anos, a teoria dos números transcendentes cresce de uma forma maravilhosa e surpreendente. Lembre que passou um século desde que Euler demonstrou que e é irracional até surgir o primeiro exemplo de número transcendente.

Como os números algébricos são enumeráveis e os reais são não enumeráveis, conhecer nem que seja um pouco da teoria transcendente é uma obrigação de qualquer estudante de matemática. Pense comigo: A matemática surge dos números, então como um matemático pode conhecer tão pouco sobre eles? E nesse sentido os números de Liouville são um bom lugar para se começar.

5.1 Próximos Passos

Ainda que os números de Liouville sejam um assunto extenso, eles são apenas um anzol na ponta de uma linha chamada teoria dos números transcendentes. Para aqueles interessados em continuar os estudos desta teoria há muito para se fazer. Um dos caminhos divertidos para seguir nesta teoria é estudar alguns dos teoremas para construir números transcendentes e suas consequências. Teoremas como o de Hermite-Lindemann citado no fim do capítulo anterior, o teorema de Gelfond-Schneider, o teorema das seis exponenciais e também o teorema de Baker.

Teorema 5.1.1 (Gelfond-Schneider)**.** *Seja α um número algébrico diferente de 0 e 1. Se β é um algébrico irracional, então α^β é um número transcendente.*

Teorema 5.1.2 (Seis Exponenciais)**.** *Sejam $x_1,\ x_2$ e $x_3 \in \mathbb{C}$ linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$ e $y_1,\ y_2 \in \mathbb{C}$ também linearmente independentes sobre $\mathbb{Q}$. Então, pelo menos um dos seis números*

$$e^{x_1 y_1}, e^{x_1 y_2}, e^{x_2 y_1}, e^{x_2 y_2}, e^{x_3 y_1}, e^{x_3 y_2}$$

é transcendente.

Teorema 5.1.3 (Baker)**.** *Se $\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n \in \mathbb{A}$ são números algébricos não nulos, e $log\alpha_1,\ \ldots,\ log\alpha_n$ são linearmente independentes sobre os racionais, então $1,\ log\alpha_1,\ \ldots,\ log\alpha_n$ são linearmente independentes sobre os números algébricos.*

Corolário 5.1.1 (De Baker)**.** *Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{A}$ são números algébricos não nulos, e $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{A}$ tais que*

$$\beta_1 log\alpha_1 + \cdots + \beta_n log\alpha_n \neq 0,$$

então $\beta_1 log\alpha_1 + \cdots + \beta_n log\alpha_n$ é um número transcendente.

Um outro caminho possível seria estudar as classificações dos números transcendentes. Isto é, dividir os números transcendentes em classes de acordo com alguma propriedade. Uma das classificações mais utilizada foi construída por Mahler no artigo [14].

E além destes dois caminhos muito teóricos, há também um caminho divertido para os estudantes que gostam de fazer contas! Há muitas relações intrigantes relacionando números transcendentes, em particular, e e π. Por exemplo:

- $\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 = \pi.$
- $\int_{-\infty}^{infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{e}.$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \cos(2\sqrt{\pi}x) dx = e^{-\pi}.$

Para aqueles que irão continuar os estudos da teoria transcendente, sugiro as referências [1], que é livro muito bom em português, [2] e [4] que são livros muito bons em inglês. Espero que você meu caro leitor tenha se divertido com os números de Liouville!

Muito Obrigado e isso é tudo pessoal!

Apêndice A

e é um Número Real

Agora vamos demonstrar que e é de fato um número real, isto é, que existe o limite de $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ quando m tende a infinito. Para isso vamos trabalhar com duas sequências:

$$S_n = \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n!}.$$
$$P_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Demonstraremos que ambas as sequências possuem o mesmo limite. Ou seja, provaremos que

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

Primeiramente vamos mostrar que ambas são crescentes e limitadas e, portanto, convergentes. Com efeito, como $2^n \leq (n+1)!$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $\frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{(n+1)!}$. Então,

$$S_n \leq 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) < 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 3.$$

Logo, S_n é limitada. Além disso, S_n é crescente pois $S_{n+1} = S_n + \frac{1}{n!}$. Portanto, S_n converge e seja $S = \lim_{n\to\infty} S_n$.

Agora vamos trabalhar a sequência P_n. Observe que pelo binômio de Newton temos que

$$
\begin{aligned}
P_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1+\binom{n}{n-1}\frac{1}{n}+\binom{n}{n-2}\frac{1}{n^2}+\binom{n}{n-3}\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{1}{n^n} \\
&= 1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3}+\cdots+n!\frac{1}{n!}\frac{1}{n^n} \\
&= 1+1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) \\
&\leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3!}+\cdots\frac{1}{n!}\leq S_n<3,
\end{aligned}
$$

ou seja, P_n é limitada e é fácil ver que P_n é crescente. De fato, $1-\frac{m}{n+1}>1-\frac{m}{n}$ para todo $m<n\in\mathbb{Z}_+$ e portanto $P_{n+1}>a_n+\left[\prod_{m=1}^{n}\left(1-\frac{m}{n+1}\right)\right]\frac{1}{(n+1)!}$. Portanto, P_n converge e seja $P=\lim\limits_{n\to\infty}P_n$.

Resta provar agora que $P=S$. Observe que pelas contas acima já obtemos que $P\leq S$, logo basta provar que $S\leq P$. Aqui usaremos um pequeno truque, vamos fixar $m\in\mathbb{N}$ e olhar para os primeiros $m+1$ termos de P_n, ou seja, $n\geq m+1$. Estes termos são dados por:

$$
P_{n,m+1}=1+1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)\leq P_n\leq P.
$$

Assim, deixando m fixo e fazendo n tender ao infinito, obtemos que

$$
\lim_{n\to\infty}P_{n,m+1}=1+1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{m!}=S_m
$$

e portanto $S_m\leq\lim\limits_{n\to\infty}P_n=P$ para todo $m\in\mathbb{N}$. Em outras palavras, $S\leq P$. Isto significa que $S=P$ e finalmente demonstramos que

$$
e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}
$$

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] Diego Marques, Teoria dos Números Transcendentes - SBM, Rio de Janeiro 2013, 1ª Edição.

[2] A. Borisovich S., Transcendental Numbers - W de G, New York 1989.

[3] J. Lützen, Joseph Liouville 1809-1882: Master of Pure and Applied Mathematics - Springer-Verlag, 1990.

[4] E. B. Burger, R. Tubbs, Making Transcendence Transparent - Springer, 2004, 1ª Edição.

[5] A. N. Parshin, R. Shafarevich, Number Theory IV: Transcendental Numbers - Springer-Verlag, New York 1998, 1ª Edição.

[6] James S. Kraft, Lawrence C. Washington, An Introduction to Number Theory with Cryptography - CRC Press, 2014.

[7] F. Brochero M., C. Gustavo M., N. Saldanha e Eduardo Tengan, Teoria dos Números - IMPA, Rio de Janeiro 2015, 4ª Edição.

[8] Jörg Bewersdorff, Galois Theory for Beginners - AMS, 2006.

[9] K. Mahler, On the Approximation of π. Proc. Akad. Wetensch. Ser. A. 56 (1953), 30-42.

[10] E. Burger, On Liouville decompositions in local fields, Proceedings of the A.M.S., 124 (1996) 3305-3310.

[11] Yves Lequain, Aproximação de um Número Real por Números Racionais, 19º Colóquio Brasileiro de Matemática 1993, IMPA.

[12] Ruel V. Churchill, J. W. Brown, Variáveis Complexas e Aplicações - McGraw-Hill, Porto Alegre 2015, 9ª Edição.

[13] D. Cox, J. Little and D. O'Shea, Ideals, Varieties, and Algorithms - New York, NY:Springer, 3rd. ed., 2007.

[14] Eli Maor, e: A história de um número - Record, Rio de Janeiro 2008, 5ª Edição.

[15] D. Caveny, U-numbers and T-numbers: Some elementary transcendence and algebraic independence results - in Number Theory with an Emphasis on the Markoff Spectrum (Provo, UT, 1991), Lect. Notes Pure Appl. Math., no. 147, Dekker, New York, 43-52, 1993.

[16] K. Mahler, On the order function of a transcendental number. Acta Arith., 18 (1971) 63-76.