

FERNANDO COSTA MALHEIROS

Desenvolvimento de uma técnica experimental para a estimativa
de propriedades térmicas usando uma única superfície de acesso
"in situ"



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
2017

FERNANDO COSTA MALHEIROS

Desenvolvimento de uma técnica experimental para a
estimativa de propriedades térmicas usando uma única
superfície de acesso *"in situ"*

TESE apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **DOCTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos

Orientador: Prof. Dr. Gilmar Guimarães

Uberlândia
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil

M249d Malheiros, Fernando Costa, 1986-
2017 Desenvolvimento de uma técnica experimental para a estimativa de
propriedades térmicas usando uma única superfície de acesso "in situ"/
Fernando Costa Malheiros. - 2017.
72 f. : il.

Orientador: Gilmar Guimarães.
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa
de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Materiais - Propriedades térmicas
- Teses. 3. Problemas inversos (Equações diferenciais) - Teses. I.
Guimarães, Gilmar. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de
Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título

CDU: 621

À Fernanda e Liz.

Agradecimentos

Aos meus pais pelo muito que me deram ao longo da vida.

À Fernanda pela paciência e cumplicidade.

Aos meus amigos e colegas de trabalho Alisson e Luis.

Ao pessoal do laboratório pelo apoio.

Aos amigos da FEMEC, docentes, técnico-administrativos e discentes.

Em especial, ao professor Gguima, pelos ensinamentos ao longo de todos esses anos.

Às agências financiadoras CAPES, CNPq e FAPEMIG.

Malheiros, F. C. **Desenvolvimento de uma técnica experimental para a estimativa de propriedades térmicas usando uma única superfície de acesso "in situ"**. 2017. 72f. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Este trabalho apresenta um novo método experimental desenvolvido para a obtenção simultânea da condutividade e difusividade térmica em materiais sólidos. O método se baseia na utilização de um novo aparato experimental na superfície que possui uma resistência elétrica para aquecimento, dois termopares e um sensor de medição de fluxo de calor. A amostra é parcialmente aquecida em uma superfície frontal. Duas regiões da superfície frontal, aquecida e não aquecida, são usadas para estimar as propriedades térmicas. A técnica se baseia na minimização de duas funções distintas. Ambos são definidos a partir das mesmas medições de temperatura na superfície frontal, mas usando diferentes conceitos térmicos. A primeira usa uma razão de ganho entre duas temperaturas medidas na superfície para a identificação da difusividade térmica. A segunda é definido pela conhecida função de erro quadrático calculada entre os valores experimentais e teóricos para as mesmas temperaturas superficiais. Este segundo procedimento permite a estimativa da condutividade térmica. Em adição, apresenta-se um estudo sobre o comportamento de alguns parâmetros que influenciam o conceito de razão de ganho de temperatura. As propriedades foram mensuradas em duas amostras diferentes, PVC e cobre, materiais não condutor e condutor, com o desvio inferior a 2% dos valores encontrados na literatura. Após as estimativas experimentais, os modelos térmicos originais foram reduzidos a outros modelos simplificados. Uma nova função para estimar a difusividade térmica foi proposta usando o modelo térmico simplificado com a mesma ideia da razão de ganho entre duas temperaturas medidas na superfície. A condutividade térmica é determinada com o mesmo conceito quando se usa o modelo original, mas é necessária uma nova posição de medição de temperatura experimental sob o centro do fluxo de calor. Esses modelos reduzidos usam apenas uma superfície para estimar as propriedades térmicas. Os resultados da estimativa de propriedades são os mesmos usando o modelo original ou os modelos reduzidos, mas tem uma diminuição significativa no tempo computacional usando os modelos reduzidos devido ao tempo para minimizar as funções. Dessa forma, esta técnica tem todos os requisitos para ser aplicada em medições "in situ".

Malheiros, F. C. **Development of the experimental thecnique to Estimation the thermal properties using only one surface "*in situ*".** 2017. 70f. Doctor's Thesis, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

This work presents a new experimental method developed for obtaining, simultaneously, the thermal conductivity and thermal diffusivity of solid materials. The method is based on the use of a new surface probe that has one resistance heater, two termocouples, and one heat flux sensor. The sample is partially heated in a frontal surface. Two regions, heated and non-heated front surface are used to estimate the thermal properties. The technique relies on the minimization of two distinct functions. Both are defined from the same frontal surface temperature measurements, but using different thermal concepts. The first uses a gain ratio between two surface temperatures for the identification of the thermal diffusivity. The second is defined by the well-known square quadratic error function calculated between the experimental and theoretical values of the same surface temperatures. This second procedure allows the estimation of thermal conductivity. In addition, has a study about the behaviour of some parameters that influence the a gain ratio temperatura concept. The properties were measure in two different sample, PVC and coopper, non-condutor and conductor materials with the deviation less than 1% of the values found in literature. After mensurements, the original thermal models were reduced to others more simple. A new function to measure the thermal diffusivity was proposed using the simple thermal model wiht the same ideia of the gain ratio between two surface temperature measurements. The thermal conductivity is determinated with the same concept when use the original model, but a new position of mensurement of experimental temperatura under the center of the heat flux is necessary. Those reduced models use only one surface to estimate the thermal properties. The results of the properties estimation are the same using the original or the reduce models, but has a significant reduction in computacional estimation time using the reduce models because of the time to minimize the functions. So, this thecnique has all requirements to be applied in *in situ* measurements.

Keywords: thermal properties, inverse problems, diffusivity, conductivity

Lista de Figuras

3.1	Modelo esquemático de uma amostra sujeita a convecção natural e uma região de fluxo de calor imposto em uma das faces.	9
3.2	Diagrama de blocos mostrando a impedância térmica generalizada para: a) Sistema dinâmico. b)Modelo térmico correspondente.	15
4.1	Esquema de uma amostra não condutora sujeita a aquecimento parcial e exposta a um meio convectivo.	20
4.2	Comportamento típico das variações de temperatura superficial e razão de ganho de temperatura em material não condutor para um problema simulado sem adição de ruído. a) Fluxo de calor aplicado. b) Variação das temperaturas nas posições 1 e 2. c) Razão de ganho de temperatura.	21
4.3	Resultados simulados no modelo não condutor: a) Fluxo aplicado. b)Variação de temperatura.	23
4.4	Evolução da razão de ganho de temperatura para o modelo simulado.	23
4.5	Comparação entre a evolução das temperaturas na posição 1 sintéticos e calculadas usando as propriedades estimadas: a) Evolução das temperaturas. b)Resíduo entre as variações de temperatura.	24
4.6	Desenho esquemático de uma amostra de material condutor para simulação do comportamento térmico na estimativa de propriedades.	25
4.7	Comportamento típico das variações de temperatura superficial e razão de ganho de temperatura em material condutor para um problema simulado sem adição de ruído. a) Fluxo de calor aplicado. b) Evolução das temperaturas. c) Razão de ganho de temperatura.	26
4.8	Resultados simulados no modelo não condutor: a) Fluxo aplicado. b)Variação de temperatura.	27
4.9	Razão de ganho de temperatura para o modelo simulado durante o tempo total da simulação.	28
4.10	Comparação entre a evolução das temperaturas na posição 1 sintéticas e calculadas usando as propriedades estimadas: a) Evolução das temperaturas. b)Resíduo entre as variações de temperatura.	29
4.11	Sensibilidade da razão de ganho em relação a difusividade térmica variando de 1×10^{-8} a $1 \times 10^{-4} m^2/s$	30
4.12	Sensibilidade da razão de ganho em relação a variação da distância entre os pontos de medição de temperatura.	31

4.13	Sensibilidade da razão de ganho em relação a variação da distância entre os pontos de medição de temperatura em um material condutor térmico.	32
4.14	Sensibilidade da razão de ganho em relação ao coeficiente de convecção natural variando de 0 a 20 (W/m^2K) em uma amostra de material isolante térmico.	33
5.1	Aparato experimental: a) Esquema do posicionamento da resistência/transdutor e termopares na amostra de PVC. b) Amostra de PVC instrumentadas.	35
5.2	Aparato experimental: a) Esquema do posicionamento da resistência/transdutor e termopares na amostra de cobre. b) Amostra de cobre instrumentadas.	35
5.3	Experimento típico medidos na superfície de uma amostra de PVC.	36
5.4	Razão de ganho de temperatura para os experimentos realizados na amostra de PVC.	37
5.5	Experimento típico na superfície de uma amostra de Cobre.	38
5.6	Razão de ganho de temperatura para os experimentos realizado na amostra de cobre.	39
5.7	Histograma da razão de ganho medida em cada repetição dos experimentos para as amostras de PVC e Cobre.	40
5.8	Comparação entre temperatura experimental e temperatura calculada com os valores de k e α estimados para a amostra de PVC ($k = 0,157W/mK$ e $\alpha = 1,149 \times 10^{-7}m^2/s$).	43
5.9	Comparação entre temperatura experimental e temperatura calculada com os valores de k e α estimados para a amostra de cobre ($k = 397W/mK$ e $\alpha = 117 \times 10^{-4}m^2/s$)	44
6.1	Representação esquemática de uma região semi-infinita sendo aquecida parcialmente em uma região R_0 , enquanto as superfícies remanescentes são expostas a um meio convectivo.	46
6.2	Desenho esquemático de um modelo unidimensional infinito contendo uma região com temperatura inicial finita.	51
6.3	Experimento típico medidos na superfície de uma amostra de PVC.	53
6.4	Razão de ganho de temperatura para os experimentos realizados na amostra de PVC.	54
6.5	Experimento típico na superfície de uma amostra de Cobre.	55
6.6	Razão de ganho de temperatura para os experimentos realizados na amostra de cobre.	56
6.7	Esquema de uma superfície exposta a aquecimento superficial.	57
6.8	Modelo 1D semi-infinito proposto para estimativa da condutividade térmica.	57
6.9	Fluxo experimental típico medidos na superfície de uma amostra de PVC.	59
6.10	Evolução das temperaturas medidas na posição 3, em baixo do fluxo de calor aplicado. a) Amostra de PVC. b) Amostra de cobre.	60
A.1	Modelo 3D isolado com fluxo em uma área da superfície de acesso.	65
B.1	Variação das temperaturas experimental e calculada no modelo reduzido usando as propriedades encontradas na literatura para o PVC.	71

B.2	Varição das temperaturas experimental e calculada no modelo reduzido usando as propriedades encontradas na literatura para o Cobre.	71
-----	---	----

Lista de Tabelas

5.1	Posição dos termopares e transdutor nos experimentos.	35
5.2	Valores das razões de ganho medidas em cada experimento para as amostras de PVC e cobre.	41
5.3	Valor estimado das propriedades térmicas para os 30 experimentos realizados na amostra de PVC, com intervalo de confiança de 95%	42
5.4	Valor estimado das propriedades térmicas para os 30 experimentos realizados na amostra de cobre, com intervalo de confiança de 95%	42
6.1	Comparação entre difusividade térmica estimada usando o modelo 3D e o modelo reduzido 1D.	56
6.2	Comparação da condutividade estimada usando o modelo 3D e o modelo reduzido 1D.	60

Lista de Símbolos

T	- Temperatura, $[^{\circ}C]$.
T_0	- Temperatura inicial, $[^{\circ}C]$.
T_{∞}	- Temperatura ambiente, $[^{\circ}C]$.
t	- Tempo, $[s]$.
α	- Difusividade térmica do material, $[\frac{m^2}{s}]$.
k	- Condutividade térmica do material, $[\frac{W}{mK}]$.
h	- Coeficiente de troca de calor por convecção, $[\frac{W}{m^2K}]$.
$q(t)$	- Fluxo de calor variando com o tempo, $[\frac{W}{m^2}]$.
θ	- Variação de temperatura, $[^{\circ}C]$.
G_{XIJ}	- Função de Green para o contorno XIJ.
B_i	- Número de Biot.
α_m	- Autovalores associados à função de Green na direção X.
β_n	- Autovalores associados à função de Green na direção Y.
γ_p	- Autovalores associados à função de Green na direção Z.
L	- Comprimento na direção X, $[m]$.
W	- Comprimento na direção Y, $[m]$.
R	- Comprimento na direção Z, $[m]$.

- R_{GT} - Razão de ganho de temperatura, [*Adimensional*].
- XIJ - Modelo que considera condução de calor na direção X, com condição de contorno do tipo I em $x=0$ e do tipo J em $x=L$.
- $h(t)$ - Resposta impulsiva.
- $H(s)$ - Função transferência.
- Φ - Fator de fase da impedância generalizada.
- S_R - Função objetivo para estimativa da difusividade térmica.
- $R_{GT_{exp}}$ - Razão de ganho de temperatura experimental, [*adimensional*].
- $R_{GT_{teo}}$ - Razão de ganho de temperatura teórica, [*adimensional*].
- $Y(t)$ - Temperatura experimental, [$^{\circ}C$].
- ρ - Massa específica, [kg/m^3].
- c - Calor específico, [J/kgK].
- C - Capacidade térmica, [J/K].
- X, Y, Z - Eixos ortogonais, [m].
- $Y^*(t)$ - Temperatura experimental simulada com ruído, [$^{\circ}C$].
- N - Variação para mais e para menos no intervalo de busca.
- $T^*(t)$ - Temperatura experimental simulada, [$^{\circ}C$].
- σ - Amplitude máxima de variação do ruído, [*adimensional*].
- Ω - Número randômico com distribuição uniforme, [*adimensional*].
- X_i - Coeficiente de sensibilidade.
- β_i - Número randômico com distribuição uniforme, [*adimensional*].
- $3D$ - Modelo tridimensional.

$1D$ - Modelo unidimensional.

R_0 - Região de aquecimento.

R_{GT-3D} - Razão de ganho de temperatura para o modelo tridimensional, *[adimensional]*.

R_{GT-1D} - Razão de ganho de temperatura para o modelo unidimensional, *[adimensional]*.

S_{1D} - Função objetivo para estimativa da difusividade térmica usando modelo unidimensional.

S_{T-1D} - Função objetivo para estimativa da condutividade térmica usando modelo unidimensional.

Sumário

1	Introdução	1
2	Revisão Bibliográfica	3
3	Fundamentos Teóricos	8
3.1	Introdução	8
3.2	Problema direto: modelo térmico 3D transiente	9
3.2.1	Descrição do modelo térmico	9
3.2.2	Solução analítica	10
3.3	Problema inverso	14
3.3.1	Estimativa da difusividade térmica, (α)	14
3.3.2	Estimativa da condutividade térmica, (k)	17
3.3.3	Estimativa da capacidade térmica, (ρc)	18
4	Estimativa de k e α em Materiais Condutores e Não Condutores: Aplicabilidade da Técnica	19
4.1	Introdução	19
4.2	Estimativas da difusividade e condutividade térmica na amostra não condutora	20
4.2.1	Descrição do modelo avaliado	20
4.2.2	Análise de resultados	22
4.3	Estimativas da difusividade e condutividade térmica na amostra condutora .	25
4.3.1	Descrição o modelo avaliado	25
4.3.2	Análise de resultados	27
4.4	Análise de sensibilidade da razão de ganho de temperatura, R_{GT}	29
4.4.1	Sensibilidade da R_{GT} em relação à variação da difusividade térmica, α	29
4.4.2	Sensibilidade da R_{GT} à distância entre as posições de medição de temperatura, $d = x_2 - x_1$	30
4.4.3	Comportamento da R_{GT} em relação ao coeficiente de convecção térmica, h	32
5	Análise de Resultados	34
5.1	Desenvolvimento experimental	34
5.2	Resultados das estimativas	39

6	Redução de Modelos 3D-1D	45
6.1	Introdução	45
6.2	Redução de modelo para a estimativa da difusividade térmica	46
6.3	Redução de modelo para cálculo da condutividade	57
7	Conclusão	61
7.1	Trabalhos futuros	62
	Referências	63
A	Aplicação da Técnica em um Modelo Isolado - X22Y22Z22.	65
A.1	Problema direto 3D transiente - X22Y22Z22.	65
A.1.1	Solução analítica usando funções de Green	66
A.2	Determinação da função razão de ganho de temperatura, R_{GT}	68
B	Tempo de Desvio de Calor	70

Capítulo 1

Introdução

A determinação das propriedades térmicas dos materiais é um problema de grande importância na engenharia e em diversas outras áreas do conhecimento. Como a energia em forma de calor é um efeito comum em muitos procedimentos, conhecer as propriedades térmicas dos materiais é fundamental para compreender, planejar, intervir e controlar processos.

A contribuição desta tese é o desenvolvimento de um método de medição de propriedade térmica *in situ* que demande pouco tempo para sua realização e que não provoque grandes perturbações no material que está sendo avaliado. Facilitando a caracterização térmica de equipamentos já instalados ou formado por materiais compostos como aeronaves, satélites, placas solares, cerâmicos, polímeros de revestimento e ainda, possível de ser aplicada na medição de propriedades em tecidos biológicos vivos como o corpo humano.

Diante disso, o desenvolvimento de uma técnica para medição de propriedades térmicas representa uma grande possibilidade de avanço no conhecimento dos processos termofísicos e pode auxiliar na consolidação de técnicas inovadoras, como o uso da termografia em diagnósticos de doenças. Este trabalho se torna relevante por servir como base para o avanço de novos campos da ciência.

O desenvolvimento e proposição do método está organizado em 7 capítulos, sendo esta introdução o primeiro deles. O capítulo 2 apresenta uma revisão dos métodos consolidados de estimativa de propriedades térmicas, mostrando que suas aplicações têm características que inviabilizam ou impossibilitam sua aplicação *in situ*.

O capítulo 3 apresenta o desenvolvimento da técnica, propondo duas funções objetivo distintas, mas baseadas no mesmo modelo térmico. A primeira usa o conceito de razão de ganho de temperatura na determinação da difusividade térmica e que depende exclusivamente deste parâmetro. A segunda usa o erro quadrático entre as temperaturas experimentais e calculadas para a determinação da condutividade térmica.

O capítulo 4 discute a aplicabilidade da técnica em dois materiais sólidos condutor e não condutor. Mostra a variação de temperatura para a aplicação de um fluxo de calor tipo pulso e o comportamento da razão de ganho de temperatura nestas simulações. Ao final, estuda a influência da difusividade térmica, da distância entre os pontos de medição e da convecção sobre a razão de ganho de temperatura e nos resultados das estimativas das propriedades.

O capítulo 5 apresenta a estimativa das propriedades difusividade e condutividade térmica em duas amostras, uma de PVC e outra de Cobre. Descreve o experimento e os parâmetros experimentais usados e mostra as variações de temperatura e razão de ganho medidas nos experimentos. Mostra, também, as propriedades estimadas em comparação aos valores encontrados na literatura, obtendo erros menores que 2%.

No capítulo 6 é proposta uma redução de modelo, onde o modelo tridimensional da razão de ganho é substituído por um modelo unidimensional que tem a mesma equivalência em relação à difusividade térmica. Outra redução de modelo é a proposição de um modelo unidimensional associado à medição da temperatura em uma posição específica para a determinação da condutividade térmica. Os resultados das propriedades e o tempo das estimativas são comparados entre os modelos tridimensionais e reduzidos, mostrando que os tempos da estimativa são significativamente menores nos modelos reduzidos, sem prejuízo dos valores estimados.

Por fim, o capítulo 7 apresenta conclusões diversas a respeito do método e conceitos estudados bem como a perspectiva de trabalhos futuros derivados desta tese.

Além disso, a tese traz dois apêndices. O apêndice A mostra que a função razão de ganho de temperatura para um modelo tridimensional finito com fluxo em uma área parcial de uma das faces enquanto todas as demais superfícies são mantidas isoladas é função exclusiva da difusividade térmica. O apêndice B apresenta os conceitos de tempo desvio de calor e verificação intrínseca que são usados para a proposição da técnica de redução de modelo para determinar a condutividade térmica.

Capítulo 2

Revisão Bibliográfica

A determinação das propriedades térmicas dos materiais é de grande importância para o entendimento e controle de processos em diversas áreas do conhecimento. (HUANG; LIU, 2009) e (MOHAMED, 2010) estudam a determinação de propriedades térmicas em alimentos. (REMY; DEGIOVANNI, 2005) avalia a determinação de propriedades térmicas em líquidos. (LASKAR et al., 2008) estuda a determinação de propriedades em metais sólidos. (UKRAINCZYK, 2009) apresenta um método para determinação da difusividade térmica para materiais que sejam possíveis de preencher um cilindro de cobre, como sólidos granulados ou líquidos.

Na engenharia, a determinação de propriedades térmica, também, é extremamente importante para a compreensão do comportamento térmico em várias aplicações. Em muitos casos, no entanto, não se permite testes invasivos, como medições internas ou em mais de uma superfície. Como exemplo destes casos tem-se, o comportamento térmico de revestimentos em edificações, em paredes de fornos, em máquinas ferramentas, em engrenagens, em geradores, em transformadores elétricos e medições em tecidos biológicos vivos.

Isto significa que se o meio investigado não pode ser danificado na aquisição dos dados de medição como revestimentos ou aplicações *in situ*, a medição deve ser realizada em apenas uma superfície. Com esta restrição, a maioria das técnicas experimentais podem estimar apenas um parâmetro. (MELO; SILVA; SILVA, 2007) apresentam um método pra medição da efusividade térmica ($k/\sqrt{\alpha}$) usando apenas uma superfície de acesso aplicada em três polímeros. O experimento consiste em usar uma placa de área frontal maior que a espessura para condicionar o problema como unidimensional. A placa é aquecida no centro da área de acesso e a temperatura é medida na superfície logo abaixo da área de aquecimento. A impedância experimental é definida a partir dessas medições e a impedância teórica é proposta a partir da equação da difusão do calor. A efusividade é resultado da minimização do erro

quadrático entre a impedância experimental e teórica, encontrando resultados que diferem 3,6% dos encontrados na literatura.

Pode-se observar que a maior parte dos métodos encontrados na literatura usa medições no interior da amostra ou precisa de duas superfícies para estimar as propriedades térmicas. Pode-se citar por exemplo, os métodos clássicos como o método flash (PARKER et al., 1961), o método Angstrom modificado (ZHU, 2016), o método do fio quente adaptado (WAITE et al., 2006), o “hot square” e “hot disk” (GUSTAFSSON, 1991) como também em uma aplicação do “hot disk” (BOHAC et al., 2000).

No método Flash (PARKER et al., 1961), um pulso de calor de curta duração de tempo (flash) é imposto em uma superfície enquanto a temperatura da face oposta é medida. A partir da equação da difusão de calor e da máxima temperatura medida na face oposta é criando um modelo adimensional. Este modelo tem dependência exclusiva da difusividade térmica e é usado para estimá-la. A capacidade térmica é estimada relacionando-se a energia absorvida pela amostra com a máxima temperatura da face oposta. Já a condutividade térmica é estimada pela definição matemática da difusividade, que relaciona a capacidade térmica com a condutividade térmica. O método estima a difusividade, condutividade e capacidade térmica, mas a aplicação é fortemente dependente de que as condições de contorno aplicadas à amostra estejam de acordo com os modelos teóricos estabelecidos para estimativa das propriedades.

No método do fio quente ou filme quente adaptado (WAITE et al., 2006) o sensor tem que ser inserido na amostra, ou duas amostras em uma montagem simétrica são necessárias. Neste método, as propriedades são estimadas pelos coeficientes da reta que relaciona a variação da temperatura ao $\ln(t)$. Com a inclinação dessa reta se determina a condutividade e com o termo independente, determina-se a difusividade. Este método é diretamente influenciado pela resistência do contato entre o fio quente e o material avaliado, dificultando sua aplicação em materiais metálicos. Apesar de não ser extraído diretamente do experimento, a capacidade térmica é estimada pela relação com as outras propriedades térmicas. O trabalho também mostra a aplicação do método em alguns materiais, os erros dessas medições, as vantagens e limitações do método.

Nos métodos “hot square” e “hot disk.” (GUSTAFSSON, 1991), o princípio do sensor permite que a medição de temperatura e a imposição de calor aconteçam em uma mesma face, porém a montagem experimental exige o uso de duas amostras. Os métodos Hot square e hot disk são baseados na construção de um plano de aquecimento variável no tempo (transient plane source - TPS), quando sua construção é feita com geometria retangular recebe o nome de hot square, quando a construção é radial recebe o nome de hot disk. O método consiste

em colocar o TPS no interior de uma amostra ou entre duas amostra. O TPS é então submetido a uma tensão elétrica e produz um aquecimento que é absorvido pela amostra. O aquecimento é curto o suficiente para que nenhuma outra superfície da amostra influencie a variação de temperatura. Assim, constroem-se um modelo térmico infinito ou semi-infinito considerando que o calor gerado pelo TPS é absorvido pela amostra, extraíndo-se daí as propriedades térmicas. O trabalho apresenta todos os ajustes, considerações e modelos para o TPS no formato retangular ou radial, além de resultados da medição de propriedades para diversos materiais em diversas temperaturas encontrando desvios da ordem de 3% e 7% para a condutividade e difusividade, respectivamente.

No método Angstron modificado (ZHU, 2016) a difusividade térmica e a condutividade térmica são obtidas simultaneamente através do uso de duas temperaturas superficiais de uma amostra fina. Entretanto, o aparato experimental prevê o apoio das extremidades, sendo o fluxo de calor imposto em uma delas. O método determina a difusividade térmica pela avaliação da defasagem entre as temperaturas medidas em duas posições comparada ao fluxo senoidal imposto na amostra. A capacidade térmica é estimada considerando um modelo onde não há perda de calor. A condutividade térmica é calculada por sua relação com a difusividade e capacidade térmica.

Outra técnica de medição simultânea da condutividade e difusividade térmica é apresentada por (BORGES; SOUSA; GUIMARAES, 2008). Nesse caso, a técnica necessita de um aparato experimental que garanta o isolamento térmico da amostra e, portanto, analogamente aos métodos Flash e Angstron, devido a complexidade do aparato experimental, não podem ser aplicados diretamente em apenas uma superfície.

O objetivo e o principal interesse deste trabalho é a estimativa simultânea da difusividade e condutividade térmica usando apenas uma superfície de acesso. Em outras palavras, a excitação térmica devido ao fluxo de calor assim como as respostas de temperatura ocorrem numa mesma superfície da amostra avaliada.

Trabalhando com este objetivo, (SILVA; DUARTE; GUIMARAES, 2008) apresentaram uma técnica experimental para a medição simultânea da condutividade e difusividade térmica para materiais não metálicos que pode ser aplicada em amostras de variadas espessuras. Neste trabalho, apenas um único sensor de temperatura posicionado na mesma superfície de imposição do calor foi usado. O procedimento minimizava duas diferentes funções objetivo para a estimativa da condutividade e difusividade térmica. A difusividade foi obtida usando uma função correlação entre o fluxo e a resposta de temperatura enquanto uma função erro quadrática entre a temperatura experimental e estimada era usada como função objetivo para a determinação da condutividade térmica. A maior dificuldade apresentada pelos autores do

método proposto foi a dúvida na existência de valores mínimos para a difusividade térmica usando a função de correlação proposta.

Observa-se que nos métodos de estimativa de parâmetros, os melhores valores das propriedades são encontrados por minimização de uma função objetivo. Esta função geralmente é o erro quadrático médio calculado entre valores experimentais e teóricos. Normalmente, o grande problema é a presença de mínimos locais na função objetivo quando mais de um parâmetro está envolvido eles são correlacionados. Neste sentido, pode-se notar que a difusividade e condutividade térmica são correlacionados por definição.

A literatura mostra, devido à dependência da difusividade com a condutividade e calor específico, que as estimativas de parâmetros levam a quatro direções.

1. Tentar estimar simultaneamente todas as propriedades, que apesar de estarem em franco desenvolvimento, os métodos de otimização ainda esbarram em mínimos locais neste tipo de problema.
2. Trabalhos que usam apenas uma superfície de acesso com resultados satisfatórios, porém determinam uma única propriedade, como efusividade térmica, que são dependentes da condutividade e difusividade simultaneamente.
3. Separam a dependência da difusividade e condutividade térmica aplicando condições de contorno controladas em laboratório que, apesar de encontrarem resultados satisfatórios, impossibilita a aplicação dessas técnicas *in situ*.
4. Separam a dependência da condutividade e difusividade térmica usando geometrias específicas com amostras padronizadas, o que impossibilita a aplicação da técnica a equipamentos já instalados e medições *in situ*.

Diferentemente de outros métodos encontrados na literatura, o procedimento aqui proposto não necessita de medições de temperatura interna do material, uso de geometrias específicas, uso de nenhuma condição de contorno controlada em laboratório ou o uso de nenhuma outra informação de nenhuma outra superfície. O aquecimento da amostra e as medições de fluxo de calor e temperatura acontecem na mesma superfície. O aparato é muito simples, de fácil aplicação e pode ser aplicado em qualquer superfície plana assim como pode ser usado em aplicações **in situ**.

A técnica utiliza-se da minimização de duas funções objetivos distintas. Ambas são definidas pelas temperaturas medidas em uma mesma superfície, mas usando diferentes conceitos térmicos. O primeiro usa uma razão de ganho definida pela relação entre duas temperaturas

superficiais para a determinação da difusividade térmica. A segunda é definida pelo melhor ajuste de uma função erro quadrática calculada para valores teóricos e experimentais da temperatura superficial. O segundo procedimento nos dá a estimativa da condutividade térmica.

Capítulo 3

Fundamentos Teóricos

3.1 Introdução

Este trabalho propõe o desenvolvimento de um novo método experimental para a obtenção simultânea da difusividade e condutividade térmica em materiais condutores e não condutores. O modelo térmico é estabelecido pelo aquecimento parcial de uma amostra enquanto as superfícies remanescentes são expostas a um meio convectivo. As respostas de temperatura superficiais em duas (ou mais) posições da superfície frontal (superfície de acesso) permitem as estimativas simultâneas das propriedades difusividade e condutividade térmica.

Estas propriedades, tratadas como variáveis de projeto, são estimadas a partir da otimização de duas funções objetivo distintas que usam as temperaturas em diferentes definições. Ou seja, o conceito fundamental da técnica é o da minimização de duas funções objetivos diferentes, porém oriundas de um mesmo modelo térmico que por sua vez calcula as temperaturas na superfície.

A minimização da primeira função objetivo, responsável pela estimativa da difusividade, baseia-se no ajuste experimental e teórico da razão entre duas temperaturas superficiais afastadas da região de aquecimento. A condutividade térmica, por sua vez, é estimada pela minimização da função erro quadrática entre temperaturas calculadas e medidas experimentalmente em uma (ou mais) posições distintas da superfície.

A técnica proposta tem todos os requisitos para aplicação *"in situ"* uma vez que usa apenas uma superfície de acesso para o aquecimento e medição de resposta de temperatura.

3.2 Problema direto: modelo térmico 3D transiente

3.2.1 Descrição do modelo térmico

O modelo proposto é o aquecimento parcial de uma amostra inicialmente a uma temperatura uniforme, $T_0 = T_\infty$, enquanto todas as outras superfícies são expostas a um meio convectivo.

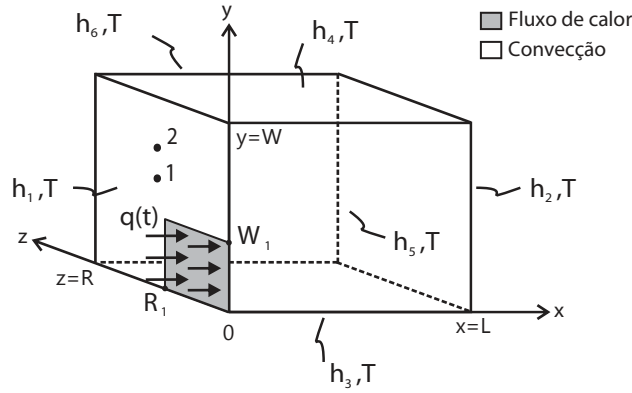


Figura 3.1: Modelo esquemático de uma amostra sujeita a convecção natural e uma região de fluxo de calor imposto em uma das faces.

O modelo apresentado na Figura (3.1) tem equação governante descrita por:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3.1a)$$

sujeito às condições de contorno na direção x

$$k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = -q(t) - h_1(T - T_\infty) \quad -k \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = h_2(T - T_\infty) \quad (3.1b)$$

na direção y

$$k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} = h_3(T - T_\infty) \quad -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=W} = h_4(T - T_\infty) \quad (3.1c)$$

na direção z

$$k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = h_5(T - T_\infty) \quad -k \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=R} = h_6(T - T_\infty) \quad (3.1d)$$

e à condição inicial

$$T(x, y, z, 0) = F(x, y, z) - T_\infty \quad (3.1e)$$

3.2.2 Solução analítica

Definindo-se a variável $\theta = T - T_\infty$ e aplicando-a nas Equações (3.1), obtém-se

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (3.2a)$$

sujeito às condições de contorno

$$k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} = -q(t) - h_1 \theta; \quad -k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L} = h_2 \theta; \quad (3.2b)$$

$$k \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=0} = h_3 \theta; \quad -k \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{y=W} = h_4 \theta; \quad (3.2c)$$

$$k \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{z=0} = h_5 \theta; \quad -k \frac{\partial \theta}{\partial y} \Big|_{z=R} = h_6 \theta \quad (3.2d)$$

e à condição inicial

$$\theta(x, y, z, 0) = F(x, y, z) - T_\infty \quad (3.2e)$$

Obtém-se a solução das Equações 3.2 aplicando-se o método das funções de Green

$$\begin{aligned} \theta(x, y, z, t) = & \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^W \int_{z'=0}^R G(x, y, z, t|x', y', z', 0) \theta(x, y, z, 0) dx' dy' dz' \\ & + \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^W \sum_{i=1}^2 \left[\frac{f_i(\tau)}{k_i} G(x, y, z, t|x, y, z_i, \tau) \right] dx' dy' d\tau \quad (a) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$+ \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{x'=0}^L \int_{z'=0}^R \sum_{i=1}^2 \left[\frac{f_i(\tau)}{k_i} G(x, y, z, t|x, y_i, z, \tau) \right] dx' dz' d\tau \quad (b)$$

$$+ \alpha \int_{\tau=0}^t \int_{y'=0}^W \int_{z'=0}^R \sum_{i=1}^2 \left[\frac{f_i(\tau)}{k_i} G(x, y, z, t|x_i, y, z, \tau) \right] dy' dz' d\tau \quad (c)$$

Considerando que $f_i(\tau) = 0$ em (a) e (b) e $f_2(\tau) = 0$ em (c)

$$\begin{aligned} \theta(x, y, z, t) = & \int_{x'=0}^L \int_{y'=0}^W \int_{z'=0}^R G(x, y, z, t|x', y', z', 0) \theta(x, y, z, 0) dx' dy' dz' \\ & + \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^t \int_{y'=0}^{W_1} \int_{z'=0}^{R_1} q(\tau) [G(x, y, z, t|0, y', z', \tau)] dy' dz' d\tau \end{aligned} \quad (3.4)$$

Obtém-se a Função de Green $G(x, y, z, t|x', y', z', \tau)$ (BECK et al., 1992) observando-se os tipos de condições de contorno, nas direções de x , y e z , sendo os subíndices 1, 2 e 3 relativos às condições de contorno de 1º tipo, do 2º tipo e do 3º tipo, respectivamente. Ou seja, a função $G(x, y, z, t|x', y', z', \tau)$ é dada como o produto $G(x, y, z, t|x', y', z', \tau) = G_{X33}G_{Y33}G_{Z33}$, onde

$$\begin{aligned} G_{X33}(x, t|x', \tau) = & \frac{2}{L} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\alpha_m^2 \alpha(t-\tau)/L^2} \left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) \right] \\ & \times \frac{\left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x'}{L}\right) \right]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{(\alpha_m^2 + B_2^2)} + B_1 \right]} \end{aligned} \quad (3.5a)$$

$$e \tan \alpha_m = \frac{\alpha_m(B_1+B_2)}{\alpha_m^2-B_1B_2} \quad e \quad B_1 = \frac{h_1L}{k} \quad e \quad B_2 = \frac{h_2L}{k}.$$

$$G_{Y33}(y, t|y', \tau) = \frac{2}{W} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\beta_n^2 \alpha(t-\tau)/W^2} \left[\beta_n \cos \left(\frac{\beta_n y}{W} \right) + B_3 \sin \left(\frac{\beta_n y}{W} \right) \right] \quad (3.5b)$$

$$\times \frac{\left[\beta_n \cos \left(\frac{\beta_n y'}{W} \right) + B_3 \sin \left(\frac{\beta_n y'}{W} \right) \right]}{(\beta_n^2 + B_3^2) \left[1 + \frac{B_4}{(\beta_n^2 + B_4^2)} + B_3 \right]}$$

$$e \tan \beta_n = \frac{\beta_n(B_3+B_4)}{\beta_n^2-B_3B_4} \quad e \quad B_3 = \frac{h_3W}{k} \quad e \quad B_4 = \frac{h_4W}{k}.$$

$$G_{Z33}(z, t|z', \tau) = \frac{2}{R} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\gamma_p^2 \alpha(t-\tau)/R^2} \left[\gamma_p \cos \left(\frac{\gamma_p z}{R} \right) + B_5 \sin \left(\frac{\gamma_p z}{R} \right) \right] \quad (3.5c)$$

$$\times \frac{\left[\gamma_p \cos \left(\frac{\gamma_p z'}{R} \right) + B_5 \sin \left(\frac{\gamma_p z'}{R} \right) \right]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{(\gamma_p^2 + B_6^2)} + B_5 \right]}$$

$$e \tan \gamma_p = \frac{\gamma_p(B_5+B_6)}{\gamma_p^2-B_5B_6} \quad e \quad B_5 = \frac{h_5R}{k} \quad e \quad B_6 = \frac{h_6R}{k}.$$

Substituindo-se as Equações (3.5) na Equação (3.4), obtém-se

$$\theta(x, y, z, t) =$$

$$\begin{aligned}
& \frac{8\theta_0}{LWR} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha t} \\
& \times \frac{\left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right)\right]}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{(\alpha_m^2 + B_2^2)} + B_1\right]} \frac{\left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)\right]}{(\beta_n^2 + B_3^2) \left[1 + \frac{B_4}{(\beta_n^2 + B_4^2)} + B_3\right]} \frac{\left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right)\right]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{(\gamma_p^2 + B_6^2)} + B_5\right]} \\
& \times \frac{LWR}{\alpha_m \beta_n \gamma_p} [\alpha_m \sin \alpha_m - B_1(\cos \alpha_m - 1)] [\beta_n \sin \beta_n - B_3(\cos \beta_n - 1)] [\gamma_p \sin \gamma_p - B_5(\cos \gamma_p - 1)] \\
& + \frac{8\alpha}{Lk} \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\alpha_m \cos\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{\alpha_m x}{L}\right)\right] \alpha_m}{(\alpha_m^2 + B_1^2) \left[1 + \frac{B_2}{(\alpha_m^2 + B_2^2)} + B_1\right]} \\
& \times \frac{\left[\beta_n \cos\left(\frac{\beta_n y}{W}\right) + B_3 \sin\left(\frac{\beta_n y}{W}\right)\right]}{(\beta_n^2 + B_3^2) \left[1 + \frac{B_4}{(\beta_n^2 + B_4^2)} + B_3\right]} \frac{\left[\gamma_p \cos\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right) + B_5 \sin\left(\frac{\gamma_p z}{R}\right)\right]}{(\gamma_p^2 + B_5^2) \left[1 + \frac{B_6}{(\gamma_p^2 + B_6^2)} + B_5\right]} \\
& \times \frac{\left(1 - e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha t}\right)}{\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right) \alpha} \frac{1}{\beta_n \gamma_p} \left[\beta_n \sin\left(\frac{\beta_n W_1}{W}\right) - B_3(\cos\left(\frac{\beta_n W_1}{W}\right) - 1)\right] \\
& \left[\gamma_p \sin\left(\frac{\gamma_p R_1}{R}\right) - B_5(\cos\left(\frac{\gamma_p R_1}{R}\right) - 1)\right] \\
& \times \int_{\tau=0}^t q(\tau) e^{-\left(\frac{\alpha_m^2}{L^2} + \frac{\beta_n^2}{W^2} + \frac{\gamma_p^2}{R^2}\right)\alpha \tau} d\tau
\end{aligned} \tag{3.6}$$

onde

$$\begin{aligned}\tan \alpha_m &= \frac{\alpha_m(B_1 + B_2)}{\alpha_m^2 - B_1 B_2}, B_1 = \frac{h_1 L}{k} \text{ e } B_2 = \frac{h_2 L}{k}. \\ \tan \beta_n &= \frac{\beta_n(B_3 + B_4)}{\beta_n^2 - B_3 B_4}, B_3 = \frac{h_3 W}{k} \text{ e } B_4 = \frac{h_4 W}{k}. \\ \tan \gamma_p &= \frac{\gamma_p(B_5 + B_6)}{\gamma_p^2 - B_5 B_6}, B_5 = \frac{h_5 R}{k} \text{ e } B_6 = \frac{h_6 R}{k}.\end{aligned}$$

Note que a solução do problema direto de condução de calor $X33Y33Z33$ é obtido desde que o fluxo de calor, $q(t)$, seja conhecido.

Neste sentido, a Equação (3.6) é usado para calcular a variação de temperatura nas posições 1 e 2, onde os termopares medem as temperaturas na superfície.

3.3 Problema inverso

Como já mencionado, a proposta deste trabalho para a estimativa da difusividade térmica, α , é o uso da razão entre duas variações de temperaturas medidas na superfície. Caso esta razão seja exclusivamente dependente desta propriedade uma técnica simples de otimização unimodal pode então ser aplicada para a estimativas de α .

Apresenta-se neste capítulo o desenvolvimento do conceito do uso da razão do ganho de temperatura $R_{GT} = \frac{T_1 - T_0}{T_2 - T_0} = \frac{\theta_1}{\theta_2}$, usado para a estimativa da difusividade térmica.

3.3.1 Estimativa da difusividade térmica, (α)

O conceito da razão de ganho (R_{GT}) foi derivado do uso da impedância generalizada definida por (GUIMARAES, 1993) e da impedância superficial definida por (BORGES; SILVA; GUIMARAES, 2006), ambas descritas sucintamente a seguir.

(GUIMARAES, 1993) obsearam que o fator de fase da impedância generalizada de um sistema dinâmico 1D é função exclusiva da difusividade térmica (α). Este sistema dinâmico entrada/saída é mostrado na Figura (3.2).

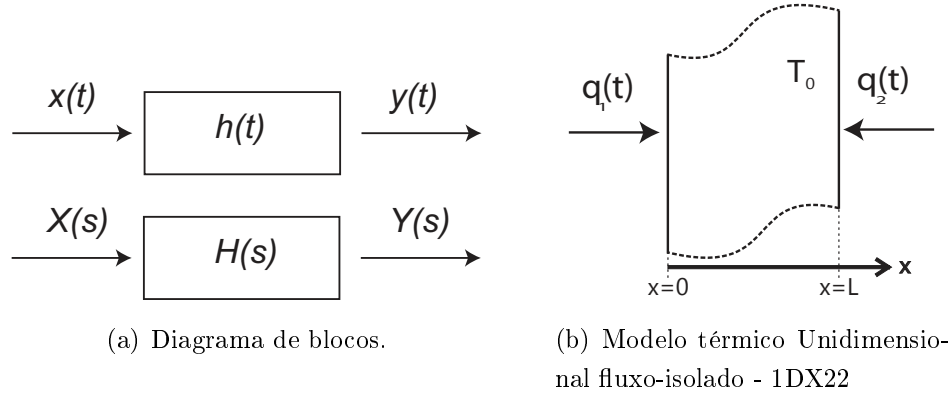


Figura 3.2: Diagrama de blocos mostrando a impedância térmica generalizada para: a) Sistema dinâmico. b) Modelo térmico correspondente.

Neste sistema, a entrada, $X(t)$, e a saída, $Y(t)$, são definidas, respectivamente, como: $X(t) = q_1(t) + q_2(t)$ e $Y(t) = T_1(t) - T_2(t)$ e a impedância, $H(f)$ no domínio da frequência, é definida por

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{T_1(f) - T_2(f)}{q_1(f) + q_2(f)} \quad (3.7)$$

Pode-se observar que a transformada da impedância, $H(f)$ no plano $f - x$ é uma variável complexa. A expressão analítica do fator de fase da impedância generalizada ($\Phi(f, \alpha)$) descrita por (GUIMARAES, 1993) prova que esta função é dependente apenas da difusividade. Isso significa que,

$$\Phi(f, \alpha) = \arctan(H(f)) = \frac{\text{Re}(H(f))}{\text{Im}(H(f))} \quad (3.8)$$

onde $\text{Re}(H)$ e $\text{Im}(H)$ são, respectivamente, a parte real e imaginária da impedância $H(f)$.

Usando o mesmo conceito, porém definindo uma nova impedância superficial (BORGES; SILVA; GUIMARAES, 2006) estendeu este conceito para um modelo 3D transiente. Os dados entrada/saída do sistema dinâmico foram definidos, respectivamente como $X(t) = q_1(t)$ e $Y(t) = T_1(t) - T_2(t)$.

$$H(f) = \frac{Y(f)}{X(f)} = \frac{T_1(f) - T_2(f)}{q_1(f)} \quad (3.9)$$

$$\Phi(f, \alpha) = \arctan(H(f)) = \frac{\operatorname{Re}(H(f))}{\operatorname{Im}(H(f))} \quad (3.10)$$

(BORGES; SILVA; GUIMARAES, 2006) observaram que também neste caso a fase da impedância é função exclusiva da difusividade térmica.

Conclui-se das equações Eq(3.7) e Eq(3.9) que se o fluxo de calor é uma força externa, a dependência da difusividade térmica é, basicamente, dependente da diferença entre as temperaturas em duas diferentes posições, ou seja, por uma defasagem na propagação do calor no meio. Este fato pode ser observado indistintamente, no domínio do tempo ou frequência, quer seja nos modelos 1D ou 3D. Ainda, as equações (3.7 e 3.9) são válidas para qualquer valor de fluxo de calor, incluindo o fluxo constante ou degrau.

Uma vez que nas duas impedâncias propostas a difusividade térmica tem o papel principal no fator de fase na frequência definido a partir de duas temperaturas, este conceito é aqui estendido no domínio do tempo.

A ideia básica é de que a defasagem na frequência é equivalente ao atraso no tempo. Portanto, para se eliminar a influência do fluxo de calor imposto, propõe-se a análise térmica de uma razão de ganho de temperatura definida por $R_{GT} = \frac{T_1(t) - T_0}{T_2(t) - T_0} = \frac{\theta_1(t)}{\theta_2(t)}$.

Embora as temperaturas $T_1(t)$ e $T_2(t)$ sejam dependentes das propriedades térmicas k , α e ρC_p , a sua razão é função exclusivamente da difusividade térmica (α). Esta afirmativa é exata para modelos térmicos cujas condições de contorno não envolvam meios convectivos.

Assim, propõe-se a estimativa da difusividade térmica através da minimização da função objetivo definida por

$$S_R = \sum_{i=1}^N [R_{GT_{exp}}(t_i) - R_{GT_{teo}}(t_i)]^2 \quad (3.11)$$

onde os índices "*exp*" e "*teo*" referem-se aos valores experimentais e teóricos respectivamente, e $R_{GT}(t_i)$ referem-se as funções razão de ganho de temperatura definidas por

$$R_{GT}(t_i) = \frac{T_1(t_i) - T_0}{T_2(t_i) - T_0} = \frac{\theta_1(t_i)}{\theta_2(t_i)} \quad (3.12)$$

onde $T_1(t_i)$ e $T_2(t_i)$ são as temperaturas medidas ou calculadas no tempo t_i nas posições 1 e 2, respectivamente. A função será minimizada pelo método da seção áurea com aproximação

polinomial (VANDERPLAATS, 1984).

Para que a minimização da Equação (3.11) seja mais eficiente, ao invés de usar um único valor da razão de ganho de temperatura, usa-se valores de t_i em torno de um tempo definido para a estimativa. Assim, a equação da função objetivo usada na estimativa da difusividade térmica passa a ser descrita por

$$S_R = \sum_{i=1}^n [R_{GT_{exp}}(t_i) - R_{GT_{teo}}(t_i)]^2 \quad (3.13)$$

onde os índices "*exp*" e "*teo*" referem-se aos valores experimentais e teóricos respectivamente e as variáveis $R_{GT}(t_i)$ referem-se as funções razão de ganho de temperatura. Sendo n o intervalo $[t_{max} - N, t_{max} + N]$ e N é o número de medições ao redor do valor de t_i .

No Anexo A é demonstrado a dependência exclusiva da difusividade térmica para a medição em uma amostra finita aquecida parcialmente e com as superfícies remanescentes sendo termicamente isoladas. No capítulo 4, uma análise da influência do número de Biot associado as superfícies expostas ao meio é apresentada.

3.3.2 Estimativa da condutividade térmica, (k)

Uma vez estimado o valor da difusividade térmica (α), uma função objetivo baseada no erro quadrático entre a temperatura medida experimentalmente e a calculada pelo modelo teórico, em um ou mais pontos da superfície é usada para estimar a condutividade térmica (k). Novamente apenas uma variável é estimada, ou seja, a variável k será aquela que minimiza a função erro quadrática S_T .

$$S_T = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^P (Y_n(i) - \theta_n(i))^2 \quad (3.14)$$

sendo Y_n e θ_n as variações de temperaturas experimental e teórica, respectivamente, para as n posições medidas e i é o número de medições realizadas.

Analogamente, a técnica de otimização usada na determinação de k é o método da seção áurea com aproximação polinomial (VANDERPLAATS, 1984).

3.3.3 Estimativa da capacidade térmica, (ρc)

A difusividade térmica, α é definida por

$$\alpha = \frac{k}{\rho c} = \frac{k}{C} \quad (3.15)$$

onde, k é a condutividade térmica, ρ é a massa específica, c é o calor específico e C a capacidade térmica.

Uma vez estimado os valores da condutividade e difusividade térmica, a capacidade térmica $C = \rho c$ é obtida pela Equação (3.16)

$$C = \frac{k}{\alpha} \quad (3.16)$$

O capítulo seguinte discute a aplicabilidade da técnica e a influência de alguns parâmetros nas estimativas da condutividade e difusividade térmica.

Capítulo 4

Estimativa de k e α em Materiais Condutores e Não Condutores: Aplicabilidade da Técnica

4.1 Introdução

Este capítulo apresenta uma análise da aplicabilidade da técnica em dois materiais com comportamento térmico bem diferente: condutor e não condutor.

Esta análise é importante para o estabelecimento das condições físicas necessárias para as estimativas das propriedades térmicas como duração, tipo e intensidade do fluxo de calor imposto. Ainda, comportamento e perfil das respostas de temperatura ótimas para estas estimativas.

Serão estabelecidos dois problemas simulados: um com material condutor e outro com não condutor. Os modelos considerados têm espessuras diferentes, mesmo assim a geometria das amostras simuladas são equivalentes devido a capacidade térmica de amostras condutoras e não condutoras serem muitos diferentes.

Concluindo o capítulo, apresenta-se uma análise da influência da difusividade térmica (α), da distância entre os pontos de medição ($d = x_1 - x_2$) e do coeficiente de transferência de calor por convecção (h) na função razão de ganho de temperatura.

4.2 Estimativas da difusividade e condutividade térmica na amostra não condutora

4.2.1 Descrição do modelo avaliado

A Figura 4.1 apresenta em forma esquemática o modelo térmico usado na estimativa de α e k na superfície de uma amostra não condutora.

O modelo térmico tem dimensões $500 \times 25 \times 500mm$ (L, W, R), nos eixos X, Y e Z, respectivamente. Condutividade térmica $k = 0.15 \left(\frac{W}{mK} \right)$ e difusividade térmica $\alpha = 1.17 \times 10^{-7} \left(\frac{m^2}{s} \right)$, ou seja, um material com características não condutoras. A área do fluxo tem dimensões $50 \times 50mm$ no plano (XZ em $Y = W$) com centro em $(X = L/2, Y = W, Z = R/2)$, concêntrica à superfície de acesso. O coeficiente de convecção $h = 2W/m^2K$ será usado em todas as faces, e a base da amostra, a face no plano (XZ em $Y=0$) terá coeficiente de convecção $h = 1 \times 10^{-8}W/m^2K$ para simular que a amostra está apoiada sobre uma superfície, o que leva a um coeficiente de convecção muito próximo à condição de isolamento térmico.

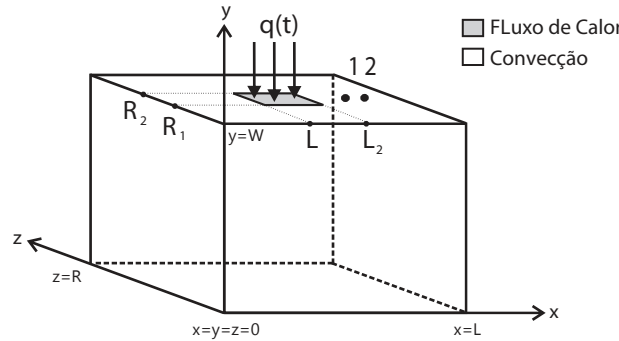


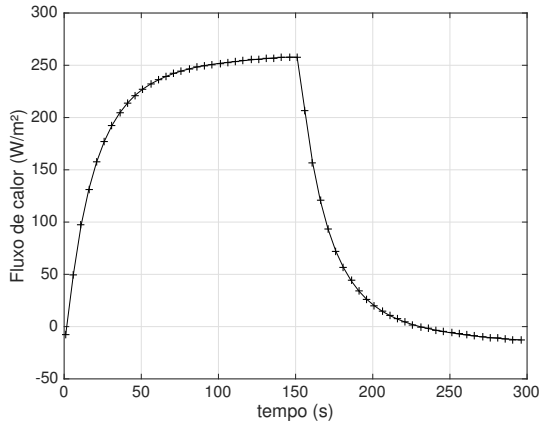
Figura 4.1: Esquema de uma amostra não condutora sujeita a aquecimento parcial e exposta a um meio convectivo.

As posições 1 e 2 estão afastadas da fonte $2mm$ e $10mm$, respectivamente. A posição 1 tem coordenadas $(277, W, R/2)$ mais próximas da fonte de calor e a posição 2 tem coordenadas $(285, W, R/2)$. Observe que as posições estão em uma mesma linha na superfície de acesso, ou seja, tem os mesmos valores das coordenadas y e z, variando apenas a coordenada x que determina o afastamento em relação à fonte de calor e a distância entre as posições.

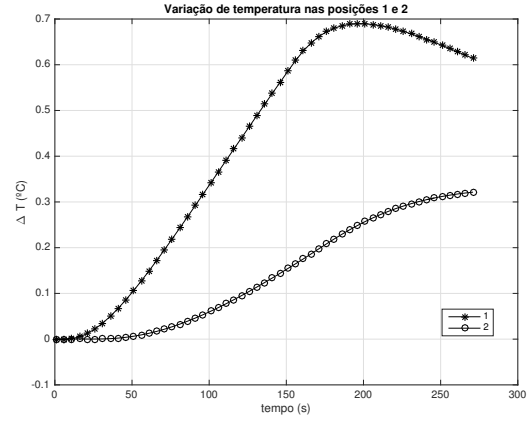
O modelo tem equação governante descrita pela Equação (3.1) e solução analítica em termo de função de Green já apresentada no Capítulo (3) descrita pela Equação (3.6).

A Figura (4.2) apresenta a evolução das temperaturas na posições 1 e 2 e a razão de ganho de temperatura no problema de referência com material não condutor sem adição de

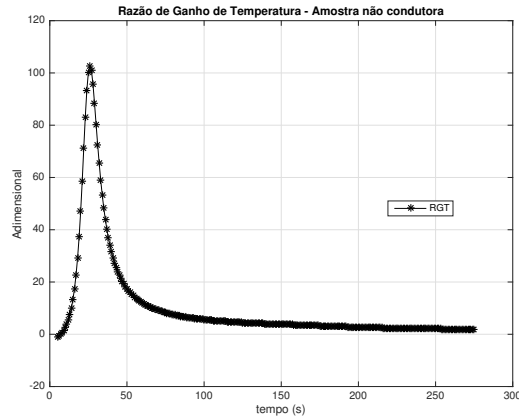
ruído. Um fluxo de calor do tipo degrau com duração de 150s (Figura 4.2) é aplicado para variar a temperatura da amostra.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.2: Comportamento típico das variações de temperatura superficial e razão de ganho de temperatura em material não condutor para um problema simulado sem adição de ruído. a) Fluxo de calor aplicado. b) Variação das temperaturas nas posições 1 e 2. c) Razão de ganho de temperatura.

Observa-se que a razão de ganho de temperatura tem 4 fases de comportamento característico. A primeira de crescimento acentuado (0s a 40s) onde seu valor aumenta à medida que o fluxo varia a temperatura da posição 1 mais rápido que a temperatura da posição 2. Isto pode ser observado pela inclinação da curva de temperatura 1 que é maior que a da curva de temperatura 2.

O segundo comportamento é um decaimento acentuado (40s a 150s) onde a influência do

fluxo de calor atingiu, também a posição 2. Isto pode ser observado na inclinação da curva de temperatura da posição 2 que aumenta enquanto a inclinação da curva de temperatura 1 não sofre mudança.

O terceiro comportamento é um decaimento suave (150s a 200s) que acontece a partir da interrupção do fluxo. A temperatura 1 percebe o fim do fluxo mais rapidamente e começa um decaimento, enquanto a temperatura 2 leva mais tempo para perceber o fim do fluxo e mantém o aquecimento por um tempo, levando a uma diminuição da razão de ganho.

O quarto comportamento é um decaimento ainda mais suave (a partir de 200s) da razão de ganho de temperatura. Isso ocorre pelo resfriamento da amostra que tenderá a igualar as temperaturas nas posições 1 e 2, levando a razão de ganho ao valor unitário.

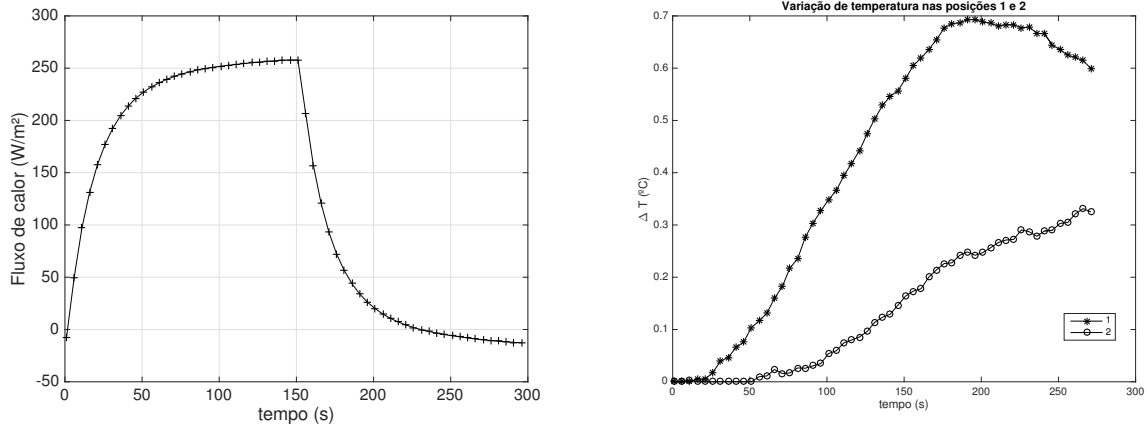
4.2.2 Análise de resultados

A Figura (4.3) apresenta o fluxo de calor e a evolução das temperaturas nas posições 1 e 2 para 30 experimentos simulados. O fluxo é um pulso de calor com duração 150s e intensidade máxima $256W/m^2$. A evolução das temperaturas é calculada pela Equação (3.6) usando o fluxo e os parâmetros descritos por um tempo total de 275s. Erros aleatórios são adicionados a esta temperatura a partir da seguinte equação.

$$Y^*(t) = T^*(t) + \sigma\Omega_j \quad (4.1)$$

onde Ω_j representa um número randômico no intervalo de $[-1, 1]$ e σ é a amplitude máxima da variação.

Foi definido $\sigma = 0,1$. Ω_j foi obtido pela função *Randon (rand)* do software comercial MATLAB®. Assim, foi adicionado um ruído aleatório de $\pm 0,1^0C$ às temperaturas calculadas.



(a) Fluxo de calor aplicado.

(b) Variação das temperaturas nas posições 1 e 2.

Figura 4.3: Resultados simulados no modelo não condutor: a) Fluxo aplicado. b) Variação de temperatura.

A Figura (4.4) mostra o comportamento da razão de ganho de temperatura variando no tempo para os 30 experimentos simulados de referência para medições na superfície de uma amostra isolante térmica sujeita a aquecimento por um fluxo de calor tipo pulso (Figura 4.3).

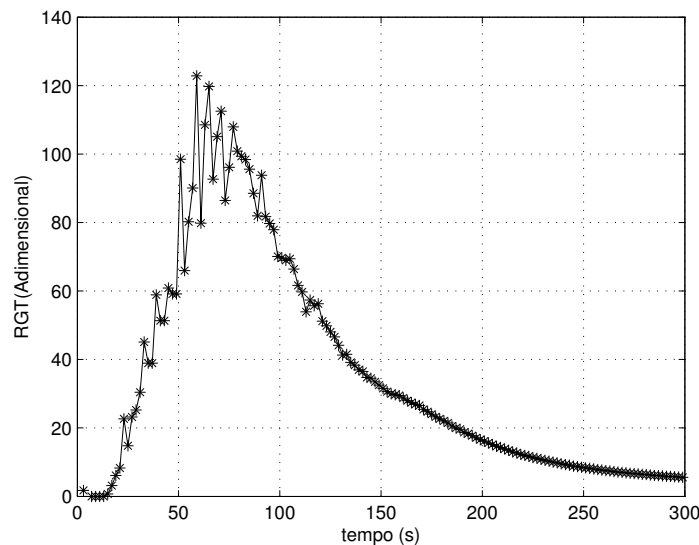


Figura 4.4: Evolução da razão de ganho de temperatura para o modelo simulado.

Observa-se que a razão de ganho de temperatura só existe a partir do tempo em que o fluxo de calor aplicado provoca variação de temperatura nas posições 1 e 2. Até o tempo 40s o fluxo de calor não havia provocado variação de temperatura na posição 2 maior do que o

erro aleatório inserido (Figura 4.3). Este comportamento é claramente observado na Figura (4.4) onde não há valor de razão de ganho no intervalo de tempo descrito (de 0s a 40s).

A partir do tempo que a razão de ganho de temperatura é determinada pode-se usar qualquer ponto ou intervalo existente para a estimativa da difusividade térmica. Usou-se a Equação (3.13) e definiu-se $N = 3$, ou seja 3 medições para mais e para menos ao redor de $t = 150s$. Este tempo foi escolhido pois a razão de ganho tem menor influência do ruído, ou seja, menor oscilação dos seus valores. O valor da difusividade térmica estimado foi de $1,183 \times 10^{-7} [m^2/s]$.

Uma vez estimada a difusividade térmica, a condutividade é obtida pela minimização de uma função objetivo da diferença entre as variações de temperatura simuladas e calculadas. A estimativa será realizada para as variações de temperatura na posição 1, num intervalo de tempo de $[0-30s]$. Neste caso, qualquer intervalo de tempo poderia ser usado. Usando a Equação (3.14) e os parâmetros já descritos. O valor estimado para a condutividade térmica foi de $0.1543W/mK$.

A Figura (4.5) apresenta a comparação entre as variações de temperatura simuladas e calculadas usando as propriedades térmicas estimadas para a posição 1. Observa-se que a estimativa é satisfatória pois o erro residual entre as variações de temperatura está dentro da faixa de erro imposta na simulação que é de $\pm 0,1^{\circ}C$.

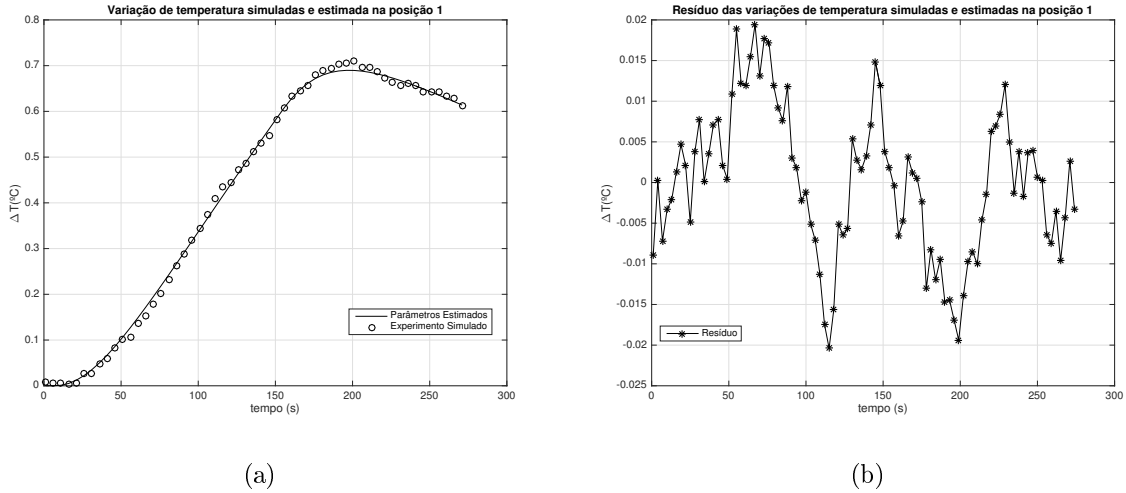
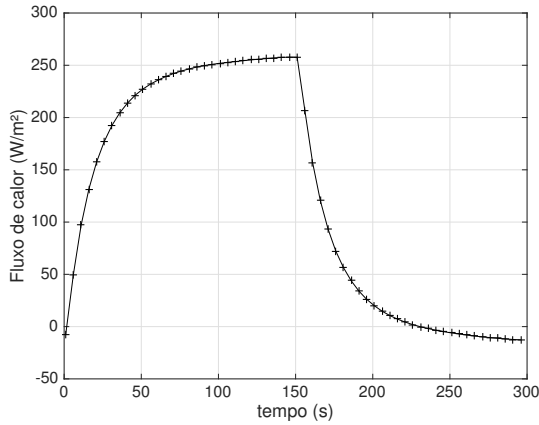
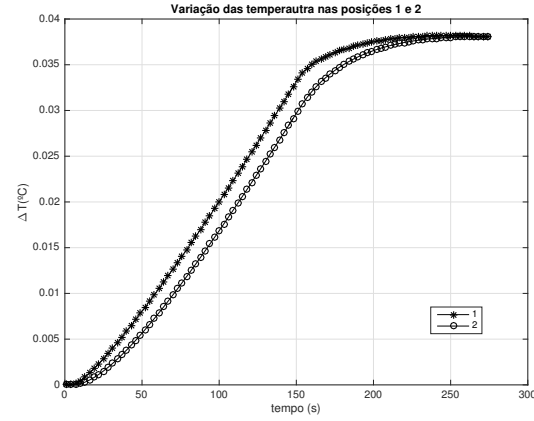


Figura 4.5: Comparação entre a evolução das temperaturas na posição 1 sintéticos e calculadas usando as propriedades estimadas: a) Evolução das temperaturas. b) Resíduo entre as variações de temperatura.

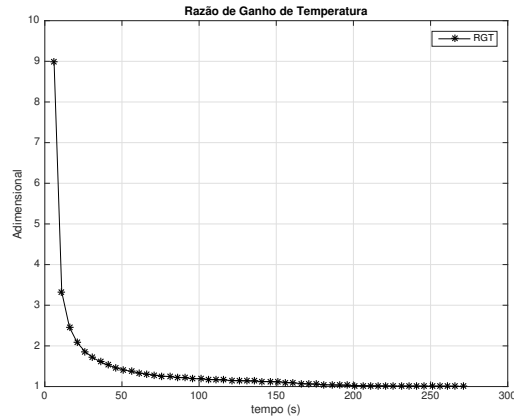
ganho de temperatura no problema de referência com material condutor sem adição de ruído, resultado da aplicação fluxo de calor do tipo pulso com duração de 150s.



(a)



(b)



(c)

Figura 4.7: Comportamento típico das variações de temperatura superficial e razão de ganho de temperatura em material condutor para um problema simulado sem adição de ruído. a) Fluxo de calor aplicado. b) Evolução das temperaturas. c) Razão de ganho de temperatura.

Observa-se que a razão de ganho de temperatura, devido ao maior efeito difusivo do material, tem apenas 2 fases de comportamento característico, diferentemente do material isolante térmico.

A primeira fase é de decaimento acentuado (0s a 150s) que é durante o tempo de aplicação do fluxo. Como as temperaturas mantêm uma inclinação de ganho de temperatura, a razão de ganho decai na proporção deste ganho, o que leva a um decaimento exponencial.

A segunda fase é um decaimento mais suave (a partir de 160s) da razão de ganho de temperatura. Isso ocorre porque depois de cessado o fluxo, a energia se difunde rapidamente pelo material, diferentemente do material isolante cujo comportamento final é fortemente influenciado pelo resfriamento da amostra por convecção. Observa-se que nesta fase a razão de ganho rapidamente assume valor unitário, mostrando que as temperaturas se igualam logo após a interrupção do fluxo de calor.

4.3.2 Análise de resultados

A Figura (4.8) apresenta o fluxo de calor e a evolução das temperaturas nas posições 1 e 2 para 30 experimentos simulados. O fluxo é um pulso de calor com duração 150s e intensidade máxima $256\text{W}/\text{m}^2$. A evolução das temperaturas é calculada pela Equação (3.6) usando o fluxo e os parâmetros descritos por um tempo total de 275s. Um ruído aleatório de $\pm 5\%$ foi adicionado às temperaturas calculadas usando o modelo descrito pela Equação (4.1).

Uma observação importante é que mesmo sendo pequenas as diferenças de temperatura entre a posição 1 e 2 é possível estimar a difusividade térmica.

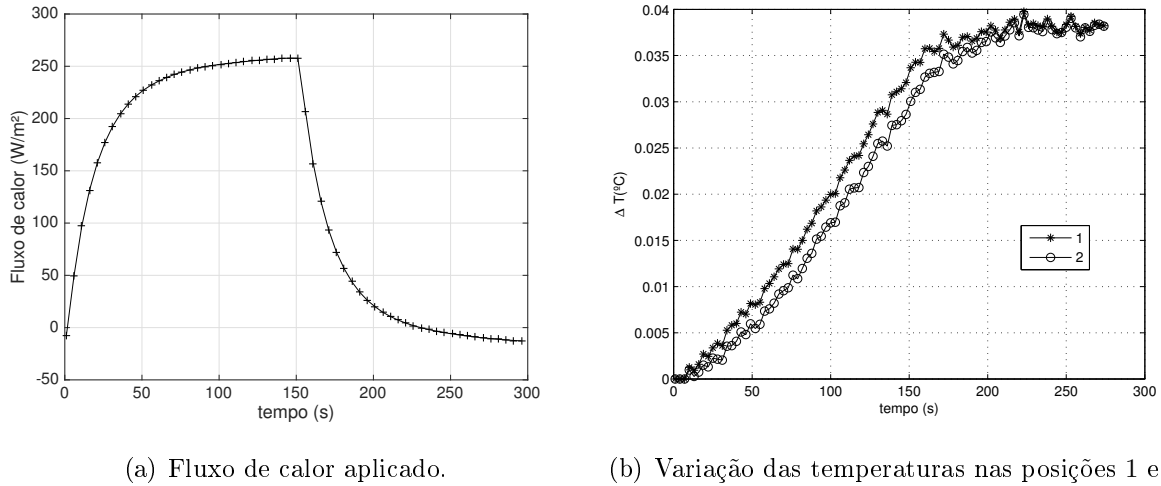


Figura 4.8: Resultados simulados no modelo não condutor: a) Fluxo aplicado. b) Variação de temperatura.

A Figura (4.9) mostra o comportamento da razão de ganho de temperatura variando no tempo para os 30 experimentos simulados de referência para medições na superfície de uma amostra de material condutor térmico sujeita a aquecimento por um fluxo de calor tipo pulso (Figura 4.3).

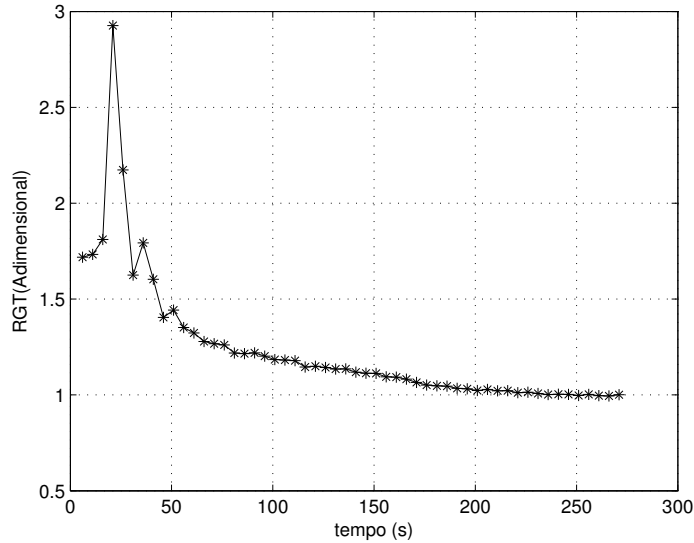


Figura 4.9: Razão de ganho de temperatura para o modelo simulado durante o tempo total da simulação.

Analogamente ao caso avaliado no material não condutor, a razão de ganho de temperatura só existe a partir do tempo em que o fluxo de calor aplicado provoca variação de temperatura nas posições 1 e 2. Até o tempo 20s o fluxo de calor não havia provocado variação de temperatura na posição 2 maior do que o erro aleatório inserido (Figura 4.3).

Como já observado, a partir do tempo que a razão de ganho de temperatura é determinada pode-se usar qualquer ponto ou intervalo existente para a estimativa da difusividade térmica. Usou-se a Equação (3.13) e definiu-se $N = 5$, ou seja 5 medições para mais e para menos ao redor de $t = 70s$. Este tempo foi escolhido pois a razão de ganho é visualmente estável nesta faixa. O valor da difusividade térmica estimado foi de $116,7 \times 10^{-6} [m^2/s]$.

Uma vez estimada a difusividade térmica, a condutividade é obtida pela minimização de uma função objetivo da diferença entre as variações de temperatura simuladas e calculadas. A estimativa será realizada para as variações de temperatura na posição 1, num intervalo de tempo de $[0 - 20s]$, neste caso, qualquer intervalo de tempo poderia ser usado. Usando a Equação (3.14) e os parâmetros já descritos. O valor estimado para a condutividade térmica é de $393W/mK$.

A Figura (4.10) apresenta a comparação entre as variações de temperatura simuladas e calculadas usando as propriedades térmicas estimadas para a posição 1. Observa-se que a estimativa é satisfatória pois o erro residual entre as variações de temperatura está dentro da faixa de erro imposta na simulação.

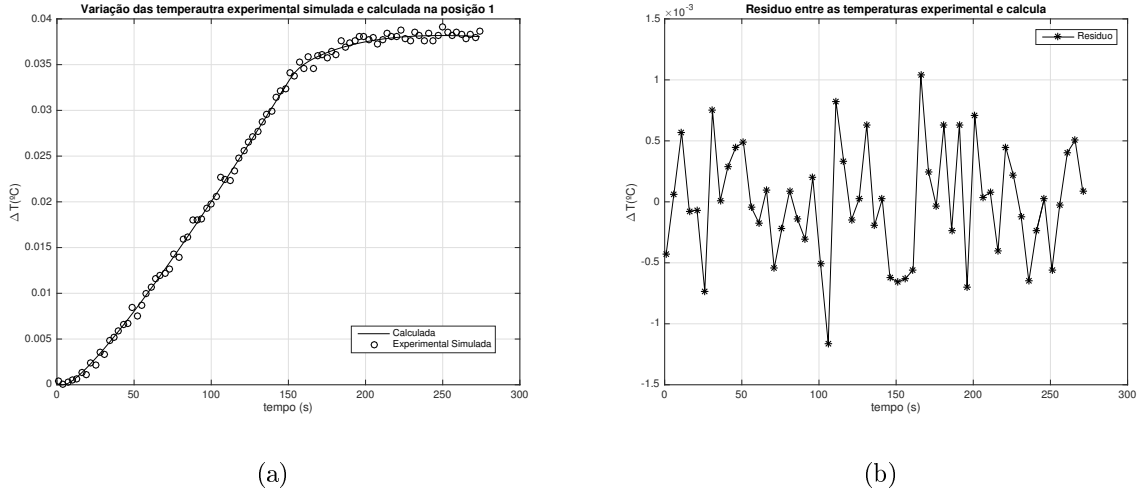


Figura 4.10: Comparação entre a evolução das temperaturas na posição 1 sintéticas e calculadas usando as propriedades estimadas: a) Evolução das temperaturas. b) Resíduo entre as variações de temperatura.

4.4 Análise de sensibilidade da razão de ganho de temperatura, R_{GT}

Nesta seção é avaliada o comportamento da razão de ganho de temperatura em relação a variações da difusividade térmica (α), da distância entre as posições de medição de temperatura ($d = x_1 - x_2$) e do coeficiente de convecção térmica (h). Para isto defini-se

$$X_i = \frac{\partial R_{GT}}{\partial \beta_i} \quad (4.2)$$

Para a análise observa-se X_i que é definido como o coeficiente de sensibilidade em relação a cada parâmetro, $\beta_i = \alpha$, d ou h , respectivamente.

4.4.1 Sensibilidade da R_{GT} em relação à variação da difusividade térmica, α

A avaliação do comportamento da razão de ganho de temperatura em relação à difusividade térmica é importante para a compreensão do método proposto. Mostrou-se, pelos modelos simulados, que a razão de ganho tem comportamento diferente para materiais iso-

lantes e condutores. Nesta seção é apresentado uma análise do comportamento da RGT em relação à difusividade térmica.

A Figura (4.11) mostra a sensibilidade da razão de ganho de temperatura em relação à difusividade térmica (1×10^{-8} a $1 \times 10^{-4} m^2/s$). Esta faixa de valores compreende materiais isolantes e condutores térmicos. Observa-se que quanto maior a difusividade maior é o valor da razão de ganho. Observar apenas esta informação nos levaria a pensar que a aplicação da técnica em materiais condutores é mais cômoda, entretanto, a influência da distância entre os pontos de medição de temperatura na RGT deve, também ser observada.

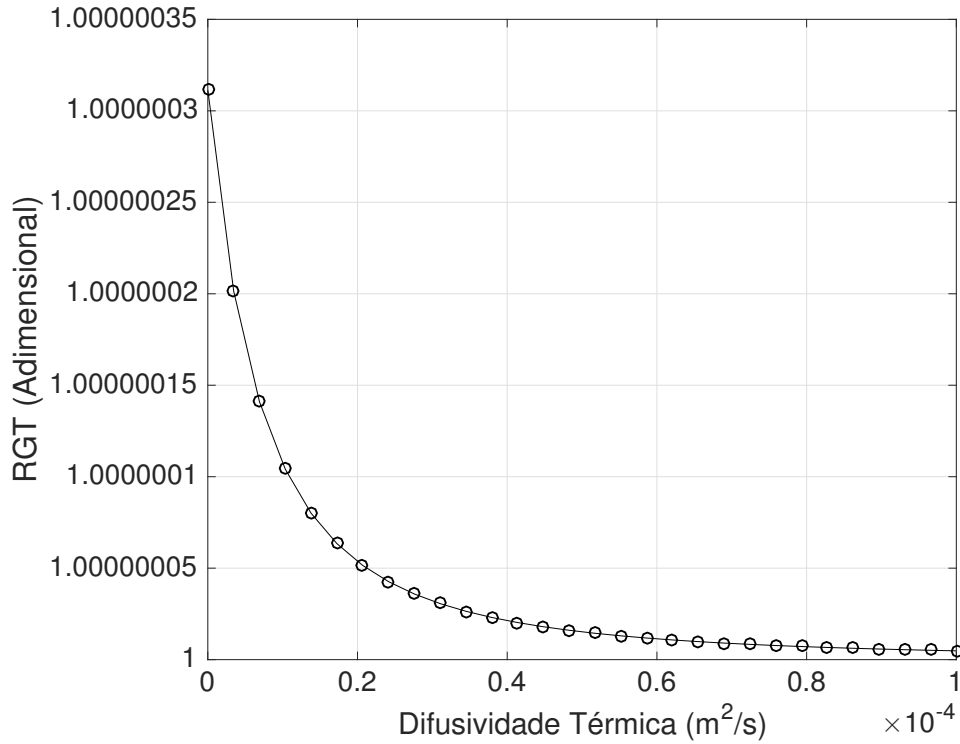


Figura 4.11: Sensibilidade da razão de ganho em relação a difusividade térmica variando de 1×10^{-8} a $1 \times 10^{-4} m^2/s$.

4.4.2 Sensibilidade da R_{GT} à distância entre as posições de medição de temperatura, $d = x_2 - x_1$

A Figura 4.12 apresenta a razão de ganho para diferentes distâncias de medição de temperatura ($d = x_2 - x_1$). As distâncias avaliadas variaram de $0,001m$ a $0,1m$. Observa-se que a razão de ganho aumenta com o aumento da distância entre os pontos de medição. Entretanto, como o comportamento é exponencial, se aumentar demais a distância pode-se chegar

a uma posição x_2 onde não ocorrerá variação de temperatura, levando a razão de ganho a um valor infinito, ou uma indeterminação matemática (divisão por zero).

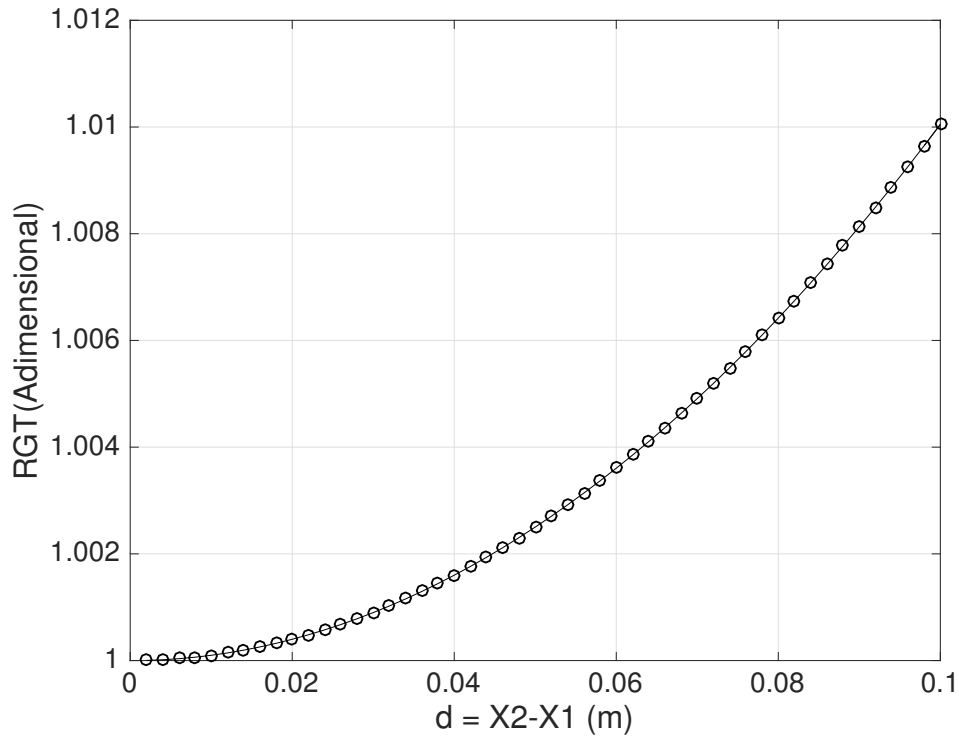


Figura 4.12: Sensibilidade da razão de ganho em relação a variação da distância entre os pontos de medição de temperatura.

A Figura 4.13 apresenta a razão de ganho variando a distância ($d = x_2 - x_1$) em uma amostra muito condutora ($k = 400 \text{ W/mK}$). Observa-se que rapidamente as razões de ganho de temperatura tendem para um mesmo valor. Apesar disso, como já observado, pode-se estimar a difusividade térmica desde que a razão de ganho seja definida em algum tempo do experimento, independente da distância entre os pontos de medição. Assim, para estimativa em materiais muito condutores a distância entre os pontos de medição não modificam significativamente o comportamento da razão de ganho de temperatura.

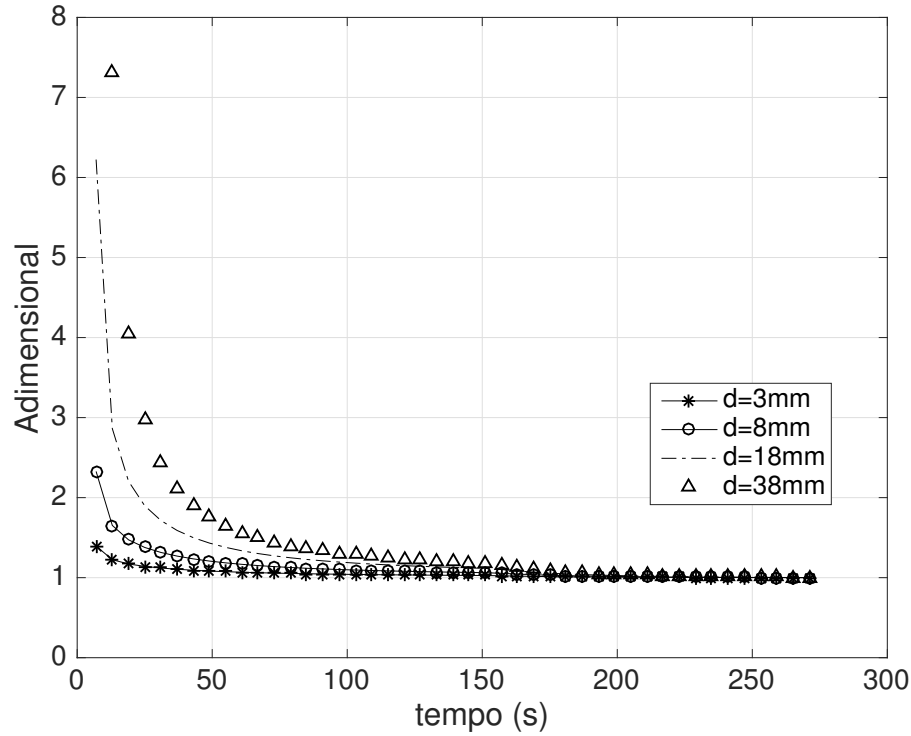


Figura 4.13: Sensibilidade da razão de ganho em relação a variação da distância entre os pontos de medição de temperatura em um material condutor térmico.

4.4.3 Comportamento da R_{GT} em relação ao coeficiente de convecção térmica, h

O modelo analítico (Equação 3.6) que modela o experimento tem dependência do número de Biot, $B_N = \frac{hN}{k}$, para se obter os autovalores em cada direção que, por sua vez, depende dos parâmetros térmicos h e k .

A questão que se apresenta é se a influência desses parâmetros (h e k), ao alterar o número de Biot, afeta o cálculo da razão de ganho de temperatura, uma vez que tanto T_1 quanto T_2 são modificadas.

A figura (4.14) apresenta o coeficiente de sensibilidade da razão de ganho de temperatura em relação ao coeficiente de convecção térmica $X_h = \frac{\partial R_{GT}}{\partial h}$, com h variando de 1 a 20 W/m^2K . Observa-se que a curva de sensibilidade é constante, ou seja, para a faixa avaliada, o coeficiente de convecção não influencia a razão de ganho de temperatura.

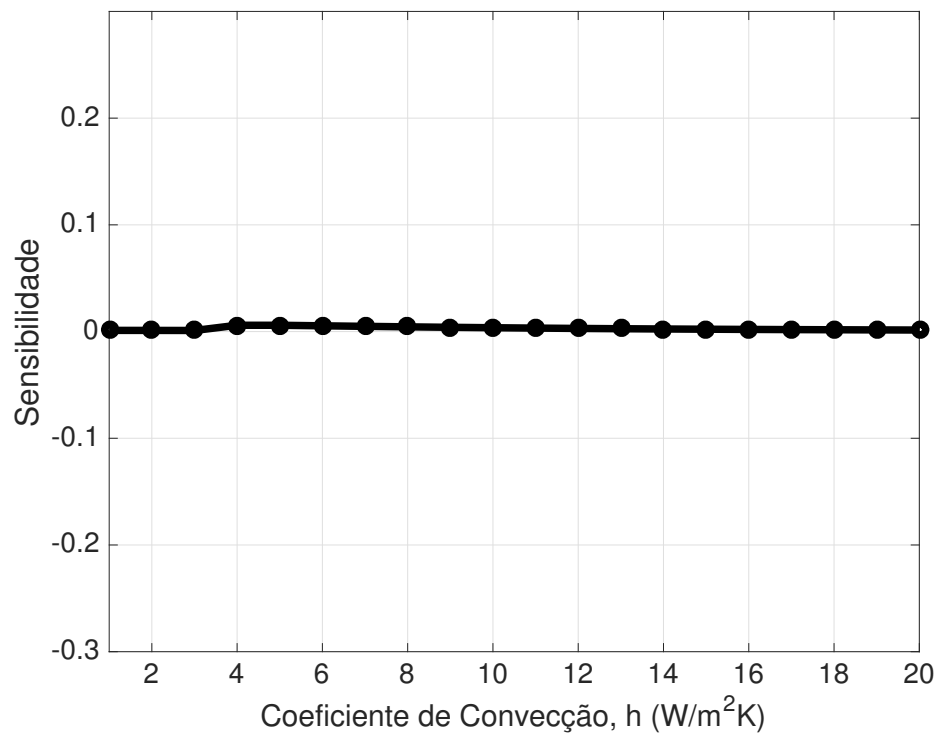


Figura 4.14: Sensibilidade da razão de ganho em relação ao coeficiente de convecção natural variando de 0 a 20 (W/m^2K) em uma amostra de material isolante térmico.

Uma vez analisados a influência de diversos parâmetros a cerca do problema de estimativa de propriedades térmicas, a técnica desenvolvida está pronta para ser aplicada em experimentos reais como será apresentado no próximo capítulo (5).

Capítulo 5

Análise de Resultados

5.1 Desenvolvimento experimental

Duas amostras foram analisadas, uma de cobre (condutor) e outra de PVC (não condutor). Nas duas configurações experimentais as amostras estão inicialmente em equilíbrio térmico a T_0 ($T_0 = T_\infty$) e depois são aquecidas parcialmente. Um aquecimento de duração $150s$ é imposto em cada amostra por uma fonte de alimentação de corrente contínua (BK Precision 9206). Aplicou-se uma tensão de $40V$ e $30V$ em uma resistência elétrica aquecedora de 1440Ω , coberta com borracha de silicone, com dimensões laterais $50 \times 50mm$ e espessura de $0,3mm$, nas amostras de PVC e Cobre, respectivamente. O fluxo de calor proveniente do aquecimento é medido por um transdutor tipo termopilha com dimensões $50 \times 50mm$ e espessura $0,3mm$ enquanto as temperaturas são medidas por termopares de superfície Tipo K.

Como já observado, todos os sensores estão posicionados na mesma superfície. A medição e armazenamento das informações dos termopares, do transdutor e da tensão da fonte de alimentação são arquivadas usando um sistema de aquisição de dados (*Agilent*® 34972A). Cada sinal é medido num intervalo de $0.97s$, totalizando 300 pontos para cada experimento. Realizaram-se 30 experimentos independentes em cada amostra.

A amostra de PVC (Figura 5.1) tem espessura $25mm$, dimensões laterais de $300 \times 300mm$ e o centro da área de fluxo de calor é concêntrico à superfície de acesso. Já a amostra de cobre (Figura 5.2) tem espessura $5,3mm$, dimensões laterais $83,8 \times 82mm$ e o centro da área de fluxo está posicionado em $X = 34mm$, $Y = 5,3mm$ e $Z = 41mm$.

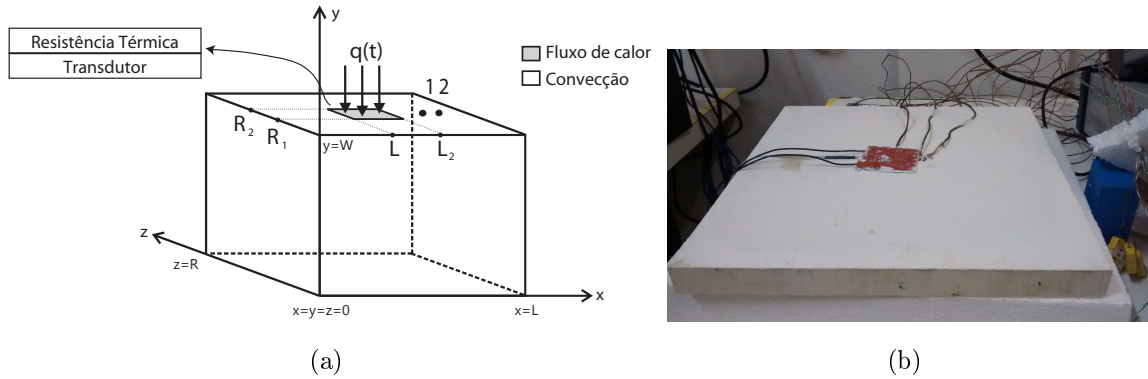


Figura 5.1: Aparato experimental: a) Esquema do posicionamento da resistência/transdutor e termopares na amostra de PVC. b) Amostra de PVC instrumentadas.

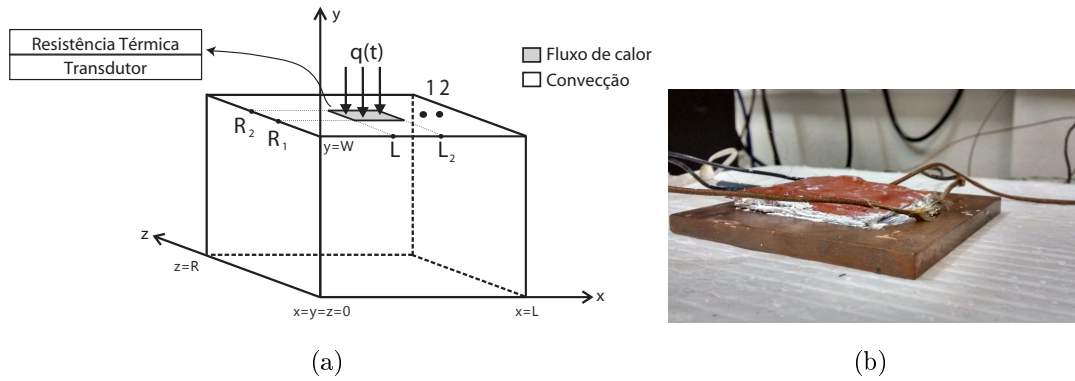


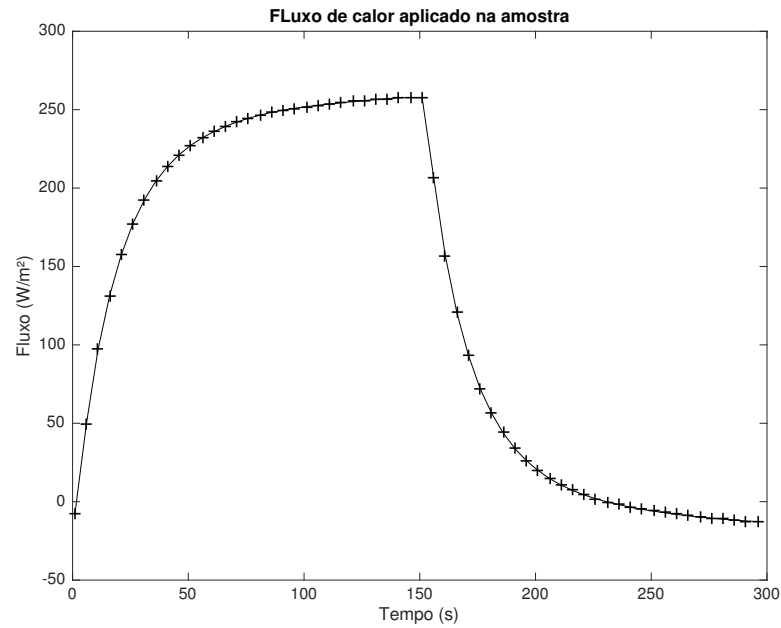
Figura 5.2: Aparato experimental: a) Esquema do posicionamento da resistência/transdutor e termopares na amostra de cobre. b) Amostra de cobre instrumentadas.

Apresenta-se na Tabela 5.1 as posições dos termopares e transdutores nos experimentos.

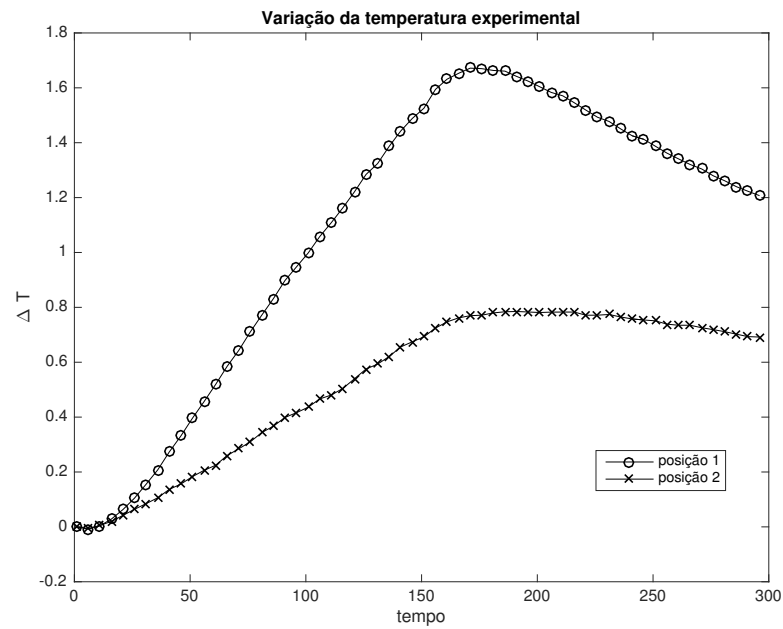
Tabela 5.1: Posição dos termopares e transdutor nos experimentos.

PVC	$x(mm)$	$y(mm)$	$z(mm)$
Termopar 1	177	25	150
Termopar 2	180	25	150
Centro do transdutor	150	25	150
Cobre			
Termopar 1	64	5,3	41
Termopar 2	69	5,3	41
Centro do transdutor	34	5,3	41

A Figura (5.3) mostram as variações do fluxo de calor e das temperaturas medidas nas posições 1 e 2 nos experimentos realizados na amostra de PVC.



(a) Evolução do fluxo de calor imposto na amostra de PVC (Tabela 5.1).



(b) Evolução das temperaturas experimentais nas posições 1 e 2 (Tabela 5.1)

Figura 5.3: Experimento típico medidos na superfície de uma amostra de PVC.

A Figura (5.4) mostra a Razão de Ganho de temperatura para os experimentos realizados na amostra de PVC. Observa-se que até o tempo 30s os ruídos existentes no experimento interferem no comportamento da curva por apresentar um pico agudo decrescente. De 30s a 70s tem-se um crescimento acentuado, onde a curva de temperatura 1 já definiu a sua inclinação enquanto a curva 2 ainda está definindo. De 70s a 120s assume um valor mais estável. A partir de 150s assume o decaimento característico do resfriamento da amostra por convecção térmica.

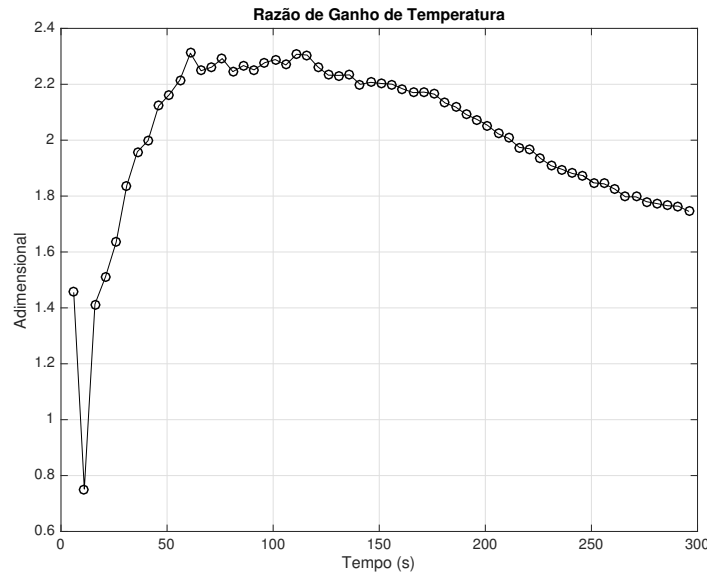
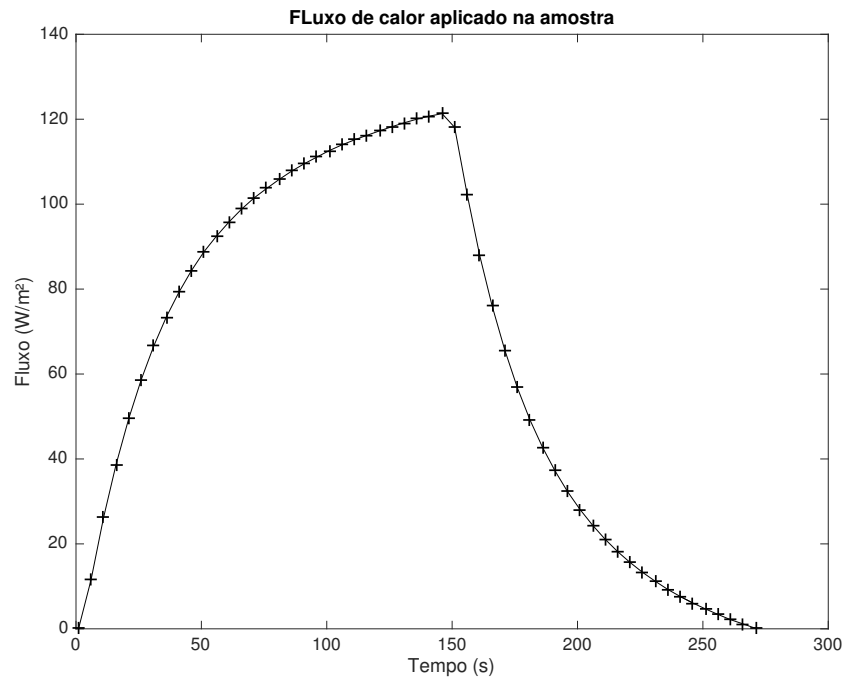


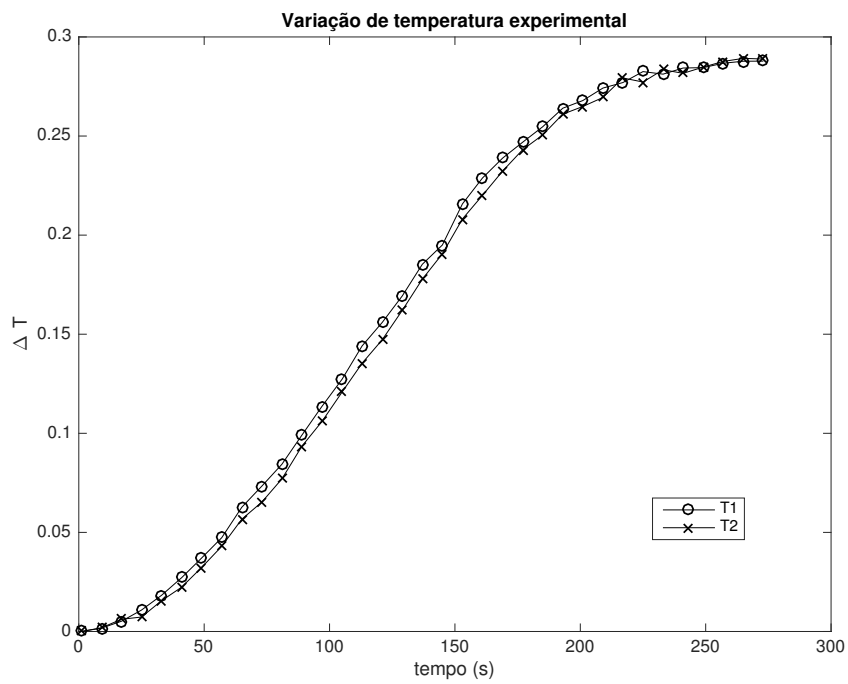
Figura 5.4: Razão de ganho de temperatura para os experimentos realizados na amostra de PVC.

Como pode ser observado, por existir valores da razão de ganho de temperatura, qualquer intervalo da curva apresentada na Figura (5.4) pode ser usado na determinação da difusividade térmica. Nesta análise experimental usou-se o valor da razão de ganho no tempo $t = 150s$ e um valor de $N = 5$, ou seja, cinco valores para mais e para menos ao redor do ponto definidos para serem aplicados na equação (3.13).

A Figura (5.5) mostra as variações do fluxo de calor e das temperaturas medidas nas posições 1 e 2 nos experimentos realizados na amostra de cobre. Observa-se que existe uma diferença pequena de temperatura entre as posições 1 e 2. Porém esta diferença é suficiente para estabelecer uma razão de ganho com comportamento padrão de material condutor, o que leva à possibilidade de aplicação da técnica proposta e a determinação da difusividade térmica para o material avaliado.



(a) Evolução do fluxo de calor imposto na amostra de Cobre (Tabela 5.1).



(b) Evolução das temperaturas experimentais nas posições 1 e 2 (Tabela 5.1)

Figura 5.5: Experimento típico na superfície de uma amostra de Cobre.

A Figura (5.6) mostra a Razão de Ganho de temperatura para os experimentos realizados na amostra de cobre. Observa-se que a razão de ganho experimental tem o mesmo comportamento dos modelos simulados no capítulo anterior (Capítulo (4)). Um decaimento exponencial acentuado que leva a curva rapidamente para um valor constante e, depois de um tempo que o fluxo foi interrompido (150s) a curva tende a ir para o valor zero, ou seja, igualdade de temperatura nas posições avaliadas. Na estimativa da difusividade, usou-se o tempo de 100s com $N = 5$ definidos para serem aplicados na equação (3.13).

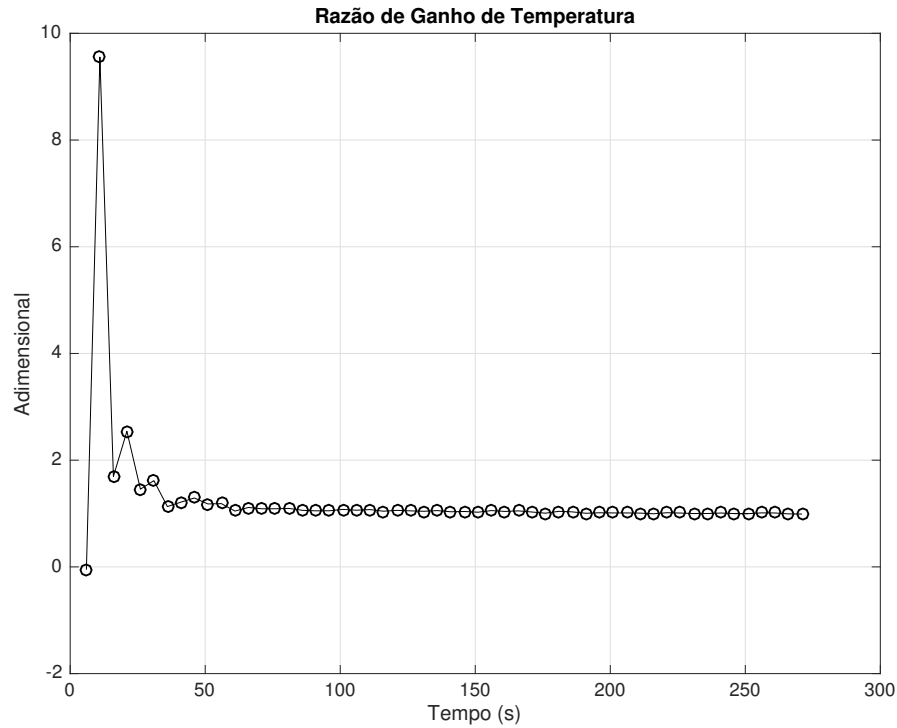
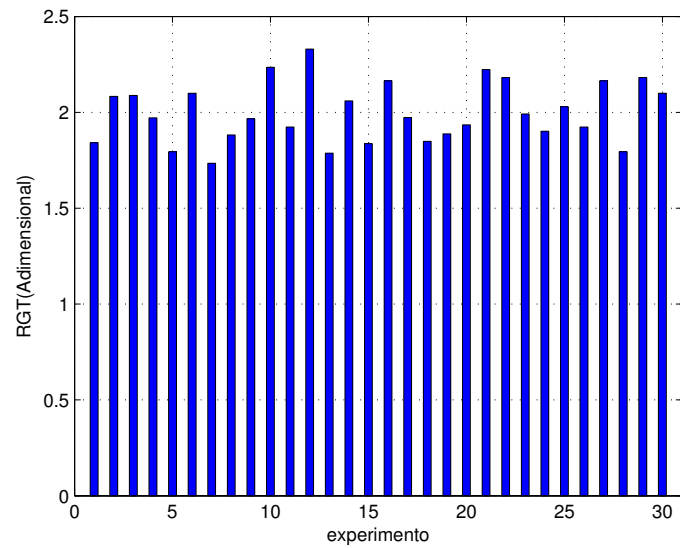


Figura 5.6: Razão de ganho de temperatura para os experimentos realizado na amostra de cobre.

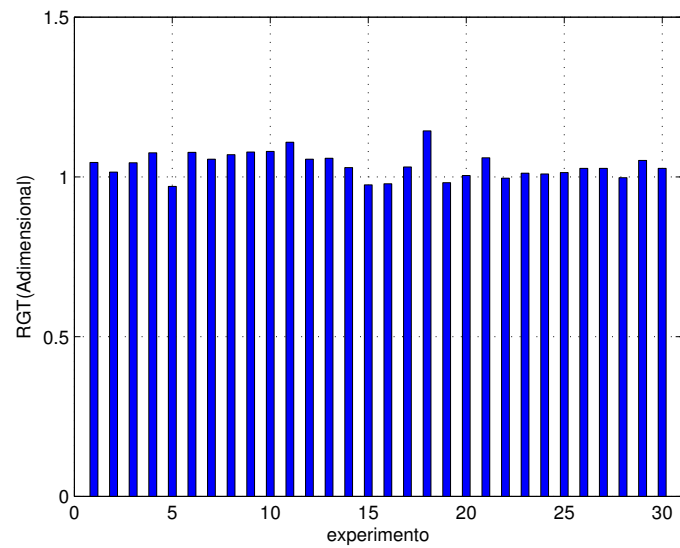
5.2 Resultados das estimativas

Como já observado, realizaram-se 30 experimentos independentes em cada uma das amostras.

A Figura (5.7) e a Tabela (5.2) mostra a razão de ganho medida na amostra de PVC e cobre em cada um dos experimentos realizados no tempo onde ocorre o maior variação de temperatura na posição 1 (maior θ_1).



(a) Razão de ganho medida nos experimentos realizados na amostra de PVC.



(b) Razão de ganho medida nos experimentos na amostra de Cobre.

Figura 5.7: Histograma da razão de ganho medida em cada repetição dos experimentos para as amostras de PVC e Cobre.

Tabela 5.2: Valores das razões de ganho medidas em cada experimento para as amostras de PVC e cobre.

Amostra	PVC	Cobre
Experimento	R_{GT}	R_{GT}
1	1,841	1,045
2	2,083	1,014
3	2,088	1,044
4	1,971	1,075
5	1,794	0,969
6	2,099	1,076
7	1,734	1,055
8	1,882	1,069
9	1,966	1,077
10	2,235	1,079
11	1,923	1,108
12	2,330	1,055
13	1,787	1,058
14	2,059	1,029
15	1,836	0,974
16	2,164	0,978
17	1,973	1,031
18	1,849	1,143
19	1,887	0,981
20	1,935	1,004
21	2,223	1,059
22	2,181	0,995
23	1,991	1,011
24	1,901	1,009
25	2,029	1,013
26	1,932	1,026
27	2,165	1,026
28	1,795	0,997
29	2,181	1,051
30	2,098	1,026
Média	1,971	1,030
Desvio padrão	0,155	0,040

O valor estimado, usando o resultado da razão de ganho média dos 30 experimentos, na amostra de PVC e Cobre, tem intervalo de confiança de 95% e são comparados com a literatura nas Tabelas (5.3 e 5.4), respectivamente. Observa-se que o valor médio da razão de ganho calculado tem desvio padrão para o PVC de $\pm 7,9\%$ e para o cobre de $\pm 3,9\%$.

Tabela 5.3: Valor estimado das propriedades térmicas para os 30 experimentos realizados na amostra de PVC, com intervalo de confiança de 95%

Propriedade	Estimado	Goodfellow	BORGES <i>et al.</i> , 2006
$\alpha \left[\frac{m}{s^2} \right] \times 10^7$	1,148	0,857 - 1,190 *	1,157
$k \left[\frac{W}{mK} \right]$	0,157	0,12-0,25	0,159

* Valores calculados pela equação $\alpha = \frac{K}{\rho C_p}$ baseado nos limites das propriedades térmicas $K = 0,012 - 0,25$, $\rho = 1400 \frac{kg}{m^3}$ e $c = 1000 - 1500 \frac{J}{kgK}$ disponíveis em (GOODFELLOW, 2017)

Tabela 5.4: Valor estimado das propriedades térmicas para os 30 experimentos realizados na amostra de cobre, com intervalo de confiança de 95%

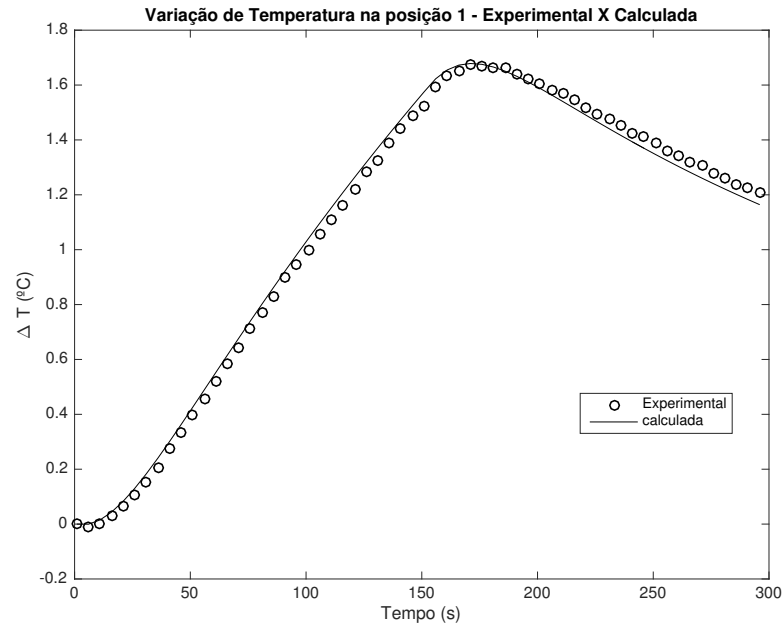
Propriedade	Estimado	Goodfellow	Incropera
$\alpha \left[\frac{m}{s^2} \right] \times 10^6$	118	116,2	117
$k \left[\frac{W}{mK} \right]$	397	401	401

Assim, o valor da difusividade térmica estimada para a amostra de PVC, considerando os 30 experimentos realizados, foi de $(1,148 \pm 0,0907) \times 10^{-7} \frac{m^2}{s}$ e o valor da condutividade térmica foi de $0,157 \pm 0,011 \frac{W}{m^2K}$. Para a amostra de Cobre o valor estimado para a difusividade térmica foi de $(118 \pm 4,67) \times 10^{-6} \frac{m^2}{s}$ e o valor da condutividade térmica foi de $397 \pm 15,72 \frac{W}{m^2K}$.

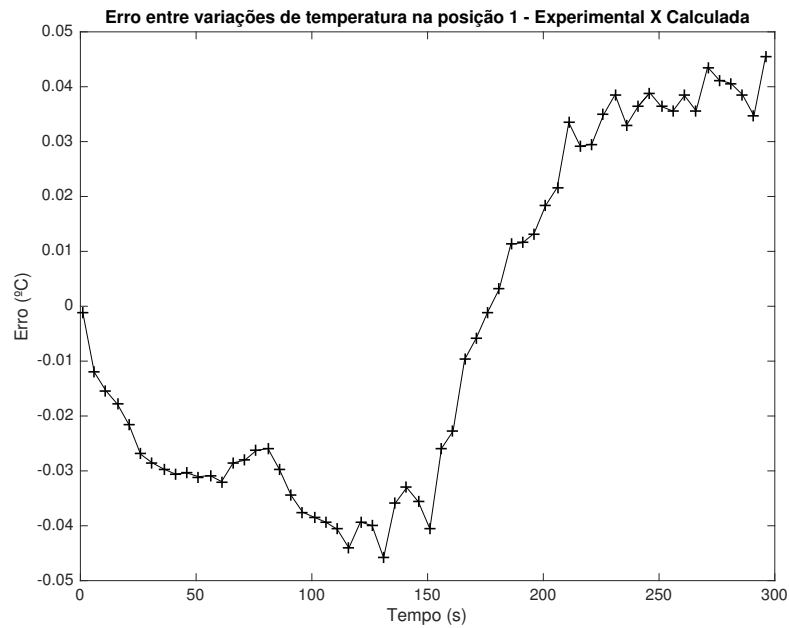
O PVC (Policloreto de Vinila) tem grande versatilidade em suas aplicações e por isso, grande diversidade de aditivos que podem ser usados em sua elaboração. Logo, os resultados encontrados na literatura trazem uma faixa de valores para as propriedades termofísicas desse material. A amostra usada nos testes tem composição desconhecida.

A amostra de cobre não tem especificação de pureza. Ainda assim, os resultados estimados são satisfatórios quando comparados aos apresentados na literatura.

As Figuras (5.8 e 5.9) mostram para as amostras de PVC e cobre, respectivamente, a temperatura experimental e calculada e o resíduo entre elas para a posição mais próxima ao fluxo (posição 1).

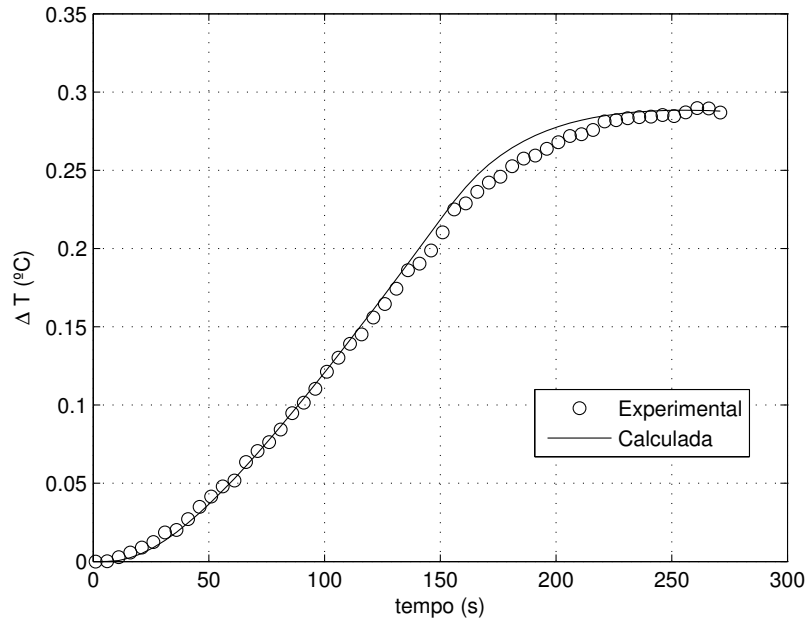


(a) Evolução das temperaturas nas posições 1 e 2

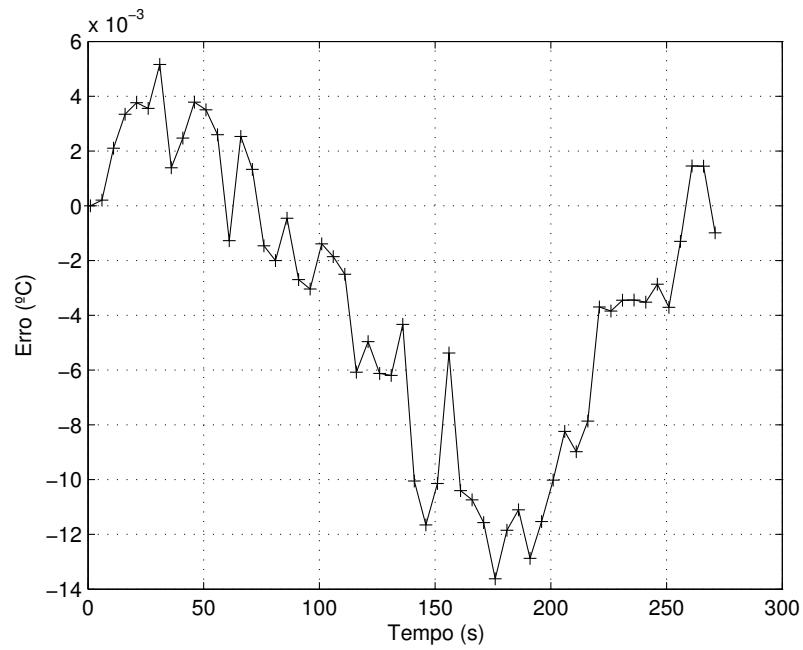


(b) Resíduo entre as variações de temperatura experimentais e calculadas.

Figura 5.8: Comparação entre temperatura experimental e temperatura calculada com os valores de k e α estimados para a amostra de PVC ($k = 0,157W/mK$ e $\alpha = 1,149 \times 10^{-7}m^2/s$).



(a) Variação de temperatura experimental e analítica no Cobre.



(b) Erro entre as variações de temperatura experimental e analítico na amostra de cobre.

Figura 5.9: Comparação entre temperatura experimental e temperatura calculada com os valores de k e α estimados para a amostra de cobre ($k = 397 \text{ W/mK}$ e $\alpha = 117 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$)

Capítulo 6

Redução de Modelos 3D-1D

6.1 Introdução

A redução de modelos é um procedimento importante e útil quando possível de ser aplicado. Ele consiste em encontrar um outro modelo matemático, geralmente com menor número de graus de liberdade, que tenha o mesmo comportamento do modelo original em relação à variável de interesse.

O objetivo aqui é aplicar a técnica de estimativa de parâmetros apresentada no Capítulo 3 com modelos tridimensionais (3D) porém usando modelos reduzidos unidimensionais (1D). Esse procedimento reduz o custo computacional significativamente, uma vez que reduz o tempo de minimização das funções objetivo.

Duas reduções de modelos são propostas. Uma para a determinação da difusividade que está relacionada a um atraso na propagação do calor no meio, mostrando que este parâmetro se comporta de maneira similar nos modelos 1D e 3D aqui avaliados. E outra para a determinação da condutividade térmica que se relaciona à quantidade de calor que o corpo recebe.

A proposta de redução de modelo, além de diminuir o tempo de estimativa, amplia a possibilidade de aplicação da técnica a diversas geometrias e reforça a possibilidade de medição de propriedades *in situ*.

6.2 Redução de modelo para a estimativa da difusividade térmica

A difusividade térmica é associada à velocidade de propagação do calor no interior de um sólido durante mudanças de temperatura. Ou seja, é o fluxo de calor que atravessa o corpo comparado com a energia armazenada durante um processo de mudança de temperatura.

Quanto maior a difusividade térmica mais rápida é a resposta de um meio que sofre perturbações térmicas (ÖZİŞIK, 1993). Ou seja, a difusividade mede a habilidade de um material conduzir energia térmica relativo à sua habilidade de armazenar energia térmica (BERGMAN et al., 2011).

A Figura (6.1) representa uma amostra inicialmente a uma temperatura $T_0 = T_\infty$ sendo aquecida parcialmente enquanto todas as outras superfícies são expostas a um meio convectivo à temperatura T_∞ .

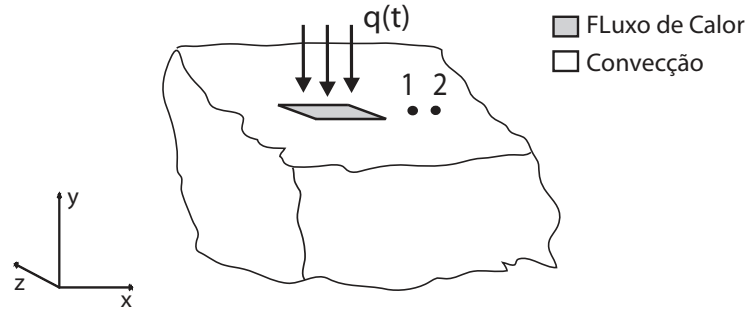


Figura 6.1: Representação esquemática de uma região semi-infinita sendo aquecida parcialmente em uma região R_0 , enquanto as superfícies remanescentes são expostas a um meio convectivo.

A equação governante desse problema é dada por

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6.1)$$

sujeita às condições de contorno

$$\left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = q(t) + h(T - T_\infty) \quad em \quad R_0 \quad (6.2)$$

e condição inicial

$$T(x, y, z, 0) = F(x, y, z) = T_0 = T_\infty \quad (6.3)$$

A solução das Equações (A.1) pode ser dada em termos de Funções de Green (FERNANDES, 2013), como

$$\theta(x, 0, z, t) = \theta_0 + \frac{\alpha}{k} \int_{\tau=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} q(\tau) G(x, y, z, t|x', \mathbf{0}, z', \tau) dx' dz' d\tau \quad (6.4)$$

onde a função de Green $G(x, y, z, t|x', y', z', \tau)$ é obtida observando-se os tipos de condições de contorno nas direções x , y e z , como o produto

$$G(x, y, z, t|x', y', z', \tau) = G_{X00}(x, t|x', \tau) \cdot G_{Y30}(y, t|y', \tau) \cdot G_{Z00}(z, t|z', \tau) \quad (6.5)$$

sendo

$$G_{X00}(x, (t - \tau)) = [4\pi\alpha(t - \tau)]^{-1/2} e^{\left[-\frac{(x-x')^2}{4\alpha(t-\tau)}\right]} \quad (6.6)$$

$$G_{Z00}(z, (t - \tau)) = [4\pi\alpha(t - \tau)]^{-1/2} e^{\left[-\frac{(z-z')^2}{4\alpha(t-\tau)}\right]} \quad (6.7)$$

$$G_{Y30}(y, (t - \tau)) = 4\pi\alpha(t - \tau)^{-1/2} \left[\exp \left[-\frac{(y - y')^2}{4\alpha(t - \tau)} \right] + \exp \left[\frac{(y + y')^2}{4\alpha(t - \tau)} \right] \right] \quad (6.8)$$

$$- \frac{h}{k} \exp^{\alpha(t-\tau)h^2k^{-2}} + h(y + y')k^{-1} \operatorname{erfc} \left[\frac{(y + y')}{4\alpha(t - \tau)^{1/2}} + \frac{h}{k} \alpha(t - \tau)^{-1/2} \right]$$

Avaliando G_{Y30} na superfície , ou seja, em $y' = 0$, obtém-se

$$G_{Y30}(y, (t - \tau)) = 4\pi\alpha(t - \tau)^{-1/2} \left[\exp \left[-\frac{y^2}{4\alpha(t - \tau)} \right] + \exp \left[\frac{y^2}{4\alpha(t - \tau)} \right] \right] \quad (6.9)$$

$$- \frac{h}{k} \exp^{\alpha(t-\tau)h^2k^{-2}} + h y k^{-1} \operatorname{erfc} \left[\frac{y}{4\alpha(t - \tau)^{1/2}} + \frac{h}{k} \alpha(t - \tau)^{-1/2} \right]$$

e, portanto, pode-se escrever

$$\theta(x, y, z, t) = \frac{\alpha}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\tau=0}^{\infty} q(\tau) G(x, y, z, t | x', \mathbf{0}, z', \tau) dx' dz' d\tau \quad (6.10)$$

Sendo

$$G(x, y, z, t | x', \mathbf{0}, z', \tau) = [4\pi\alpha(t - \tau)]^{-1/2} e^{\left[-\frac{(x-x')^2}{4\alpha(t-\tau)} \right]}$$

$$\times [4\pi\alpha(t - \tau)]^{-1/2} e^{\left[-\frac{(z-z')^2}{4\alpha(t-\tau)} \right]}$$

$$\times \left[4\pi\alpha(t - \tau)^{-1/2} \left[\exp \left[-\frac{y^2}{4\alpha(t - \tau)} \right] + \exp \left[\frac{y^2}{4\alpha(t - \tau)} \right] \right] \right] \quad (6.11)$$

$$- \frac{h}{k} \exp^{\alpha(t-\tau)h^2k^{-2}} + h y k^{-1} \operatorname{erfc} \left[\frac{y}{4\alpha(t - \tau)^{1/2}} + \frac{h}{k} \alpha(t - \tau)^{-1/2} \right] \Bigg]$$

Considerando que o fluxo de calor imposto possa ser representado por várias funções pulso em cada instante, então, sem perder a generalidade, pode-se escrever para um instante qualquer $q(\tau) = C\delta(\tau)$. Neste caso a solução pode ser escrita como

$$\theta(x, y, z, t) = C \frac{\alpha}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{\tau=0}^{\infty} G(x, y, z, t | x', \mathbf{0}, z', \tau) \delta(\tau) \right] dx' dz' d\tau \quad (6.12)$$

Usando-se a propriedade da função delta de Dirac, $\delta(\tau)$, ou seja

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t - \tau) \delta(\tau) d\tau = F(t) \quad (6.13)$$

Então, pode-se escrever a solução $\theta(x, y, z, t)$ para um fluxo arbitrário $q = C\delta(\tau)$ como sendo

$$\theta(x, y, z, t) = C \frac{\alpha}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y, z, t | x', \mathbf{0}, z') dx' dz' \quad (6.14)$$

A Equação (6.14), por sua vez, pode ser avaliada nas posições x_1 e x_2 , ou seja

$$\theta_1(x_1, y, z, t) = C \frac{\alpha}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x_1, y, z, t | x', \mathbf{0}, z') dx' dz' \quad (6.15)$$

$$\theta_2(x_2, y, z, t) = C \frac{\alpha}{k} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(x_2, y, z, t | x', \mathbf{0}, z') dx' dz' \quad (6.16)$$

Assim, avaliando-se as temperaturas na superfície onde o calor é aplicado, ou seja em $y = 0$ tem-se,

$$G_{Y30}(\mathbf{0}, (t - \tau)) = (\pi\alpha(t - \tau))^{-1/2} \times \left[-\frac{h}{k} \exp\left(\frac{\alpha(t - \tau)h^2}{k^2}\right) \times \operatorname{erfc}\left[\frac{h}{k}(\alpha(t - \tau))^{-1/2}\right] \right] \quad (6.17)$$

Neste caso, substituindo-se as Equações (6.6, 6.7 e 6.17) nas Equações (6.15 e 6.16), obtêm-se

$$\begin{aligned} \theta(x_1, 0, z, t) &= C \frac{\alpha}{k} \int_{-\infty}^{\infty} [4\pi\alpha(t)]^{-1/2} e^{\left[-\frac{(x_1 - x')^2}{4\alpha(t)}\right]} dx' \int_{-\infty}^{\infty} [4\pi\alpha(t)]^{-1/2} e^{\left[-\frac{(z - z')^2}{4\alpha(t)}\right]} dz' \\ &\times \left[(\pi\alpha t)^{-1/2} - \frac{h}{k} \exp^{\alpha(t)h^2k^{-2}} \operatorname{erfc}\left[\frac{h}{k}\alpha(t)^{-1/2}\right] \right] \end{aligned}$$

analogamente para $x = x_2$ tem-se,

$$\begin{aligned} \theta(x_2, 0, z, t) &= C \frac{\alpha}{k} \int_{-\infty}^{\infty} [4\pi\alpha(t)]^{-1/2} e^{\left[-\frac{(x_2-x')^2}{4\alpha(t)}\right]} dx' \int_{-\infty}^{\infty} [4\pi\alpha(t)]^{-1/2} e^{\left[-\frac{(z-z')^2}{4\alpha(t)}\right]} dz' \\ &\times \left[(\pi\alpha t)^{-1/2} - \frac{h}{k} \exp(\alpha(t)h^2k^{-2}) \operatorname{erfc} \left[\frac{h}{k} \alpha(t)^{-1/2} \right] \right] \end{aligned}$$

Considerando que os termopares nas posições 1 e 2 estejam exatamente na mesma distância Z_1 , então

$$\begin{aligned} \theta_1(x_1, 0, Z_1, t) &= C \frac{\alpha}{k} \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\alpha(t)^{1/2}} \left[\operatorname{erfc} \frac{(x_1 - x')}{4\pi\alpha(t)^{1/2}} - \operatorname{erfc} \frac{(x_1 + x')}{4\alpha(t)^{1/2}} \right] \\ &\times \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\alpha(t)^{1/2}} \left[\operatorname{erfc} \frac{(Z_1 - z')}{4\pi\alpha(t)^{1/2}} - \operatorname{erfc} \frac{(Z_1 + z')}{4\alpha(t)^{1/2}} \right] \\ &\times \left[\pi\alpha(t)^{-1/2} - \frac{h}{k} \exp(\alpha(t)h^2k^{-2}) \operatorname{erfc} \left[\frac{h}{k} \alpha(t)^{-1/2} \right] \right] \end{aligned} \quad (6.18)$$

analogamente para $x = x_2$ tem-se,

$$\begin{aligned} \theta_1(x_2, 0, Z_1, t) &= C \frac{\alpha}{k} \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\alpha(t)^{1/2}} \left[\operatorname{erfc} \frac{(x_2 - x')}{4\pi\alpha(t)^{1/2}} - \operatorname{erfc} \frac{(x_2 + x')}{4\alpha(t)^{1/2}} \right] \\ &\times \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\alpha(t)^{1/2}} \left[\operatorname{erfc} \frac{(Z_1 - z')}{4\pi\alpha(t)^{1/2}} - \operatorname{erfc} \frac{(Z_1 + z')}{4\alpha(t)^{1/2}} \right] \\ &\times \left[\pi\alpha(t)^{-1/2} - \frac{h}{k} \exp(\alpha(t)h^2k^{-2}) \operatorname{erfc} \left[\frac{h}{k} \alpha(t)^{-1/2} \right] \right] \end{aligned} \quad (6.19)$$

e, portanto, dividindo-se a Equação (6.18) pela Equação (6.19), tem-se a expressão da razão de ganho de temperatura (R_{GT}), como

$$R_{GT-3D}(x, t) = \frac{\operatorname{erfc} \frac{(x_1 - x')}{4\pi\alpha(t)^{1/2}} - \operatorname{erfc} \frac{(x_1 + x')}{4\alpha(t)^{1/2}}}{\operatorname{erfc} \frac{(x_2 - x')}{4\pi\alpha(t)^{1/2}} - \operatorname{erfc} \frac{(x_2 + x')}{4\alpha(t)^{1/2}}} \quad (6.20)$$

Observa-se que a razão de ganho $R_{GT}(x, t)$ é função apenas da posição x_1, x_2 e t , ou seja é um problema de dependência unidimensional.

Segundo (ÖZİŞİK, 1993), um modelo térmico unidimensional de dimensões infinitas com

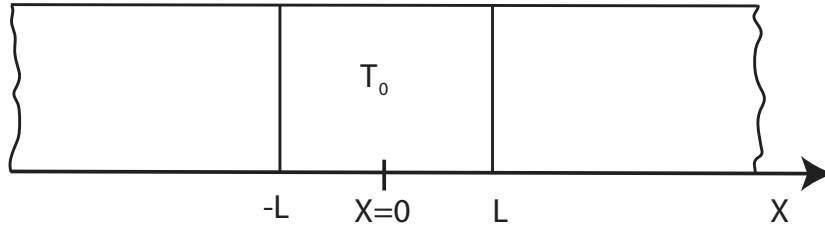


Figura 6.2: Desenho esquemático de um modelo unidimensional infinito contendo uma região com temperatura inicial finita.

temperatura diferente de zero em uma região (Figura 6.2) tem solução descrita por

$$\theta(x, t) = [4\pi\alpha t]^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[-\frac{(x - x')^2}{4\alpha t} \right] dx' \quad (6.21)$$

considerando uma região neste problema com temperatura inicial finita (6.2) onde

$$\theta_0 = T(x, t) - T_0 \quad \begin{cases} \theta_0 & \text{em } -L < X < L \\ 0 & \text{em } -L > X > L \end{cases} \quad (6.22)$$

criando uma nova variável

$$\eta = \frac{x - x'}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \quad \therefore \quad dx' = -\sqrt{4\pi\alpha t} \quad d\eta \quad (6.23)$$

a Equação (6.21) se torna,

$$\theta(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(L+x)/\sqrt{4\pi t}} e^{-\eta^2} d\eta + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{(L-x)/\sqrt{4\pi t}} e^{-\eta^2} d\eta \quad (6.24)$$

que pode ser escrita na forma de

$$\theta(x, t) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \frac{(L+x)}{\sqrt{4\pi\alpha t}} - \operatorname{erf} \frac{(L-x)}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \right] \quad (6.25)$$

ou ainda como

$$\theta(x, t) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{erfc} \frac{(x+L)}{\sqrt{4\pi\alpha t}} - \operatorname{erfc} \frac{(x-L)}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \right] \quad (6.26)$$

fazendo a solução para as posições 1 e 2, tem-se,

$$\theta(x_1, t) = \operatorname{erfc} \frac{(x_1-L)}{\sqrt{4\pi\alpha t}} - \operatorname{erfc} \frac{(x_1+L)}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \quad (6.27)$$

$$\theta(x_2, t) = \operatorname{erfc} \frac{(x_2-L)}{\sqrt{4\pi\alpha t}} - \operatorname{erfc} \frac{(x_2+L)}{\sqrt{4\pi\alpha t}} \quad (6.28)$$

e a razão de ganho de temperatura para um modelo unidimensional é estabelecida como

$$R_{GT-1D}(x, t) = \frac{\operatorname{erfc} \frac{(x_1-L)}{\sqrt{4\pi\alpha t}} - \operatorname{erfc} \frac{(x_1+L)}{\sqrt{4\pi\alpha t}}}{\operatorname{erfc} \frac{(x_2-L)}{\sqrt{4\pi\alpha t}} - \operatorname{erfc} \frac{(x_2+L)}{\sqrt{4\pi\alpha t}}} \quad (6.29)$$

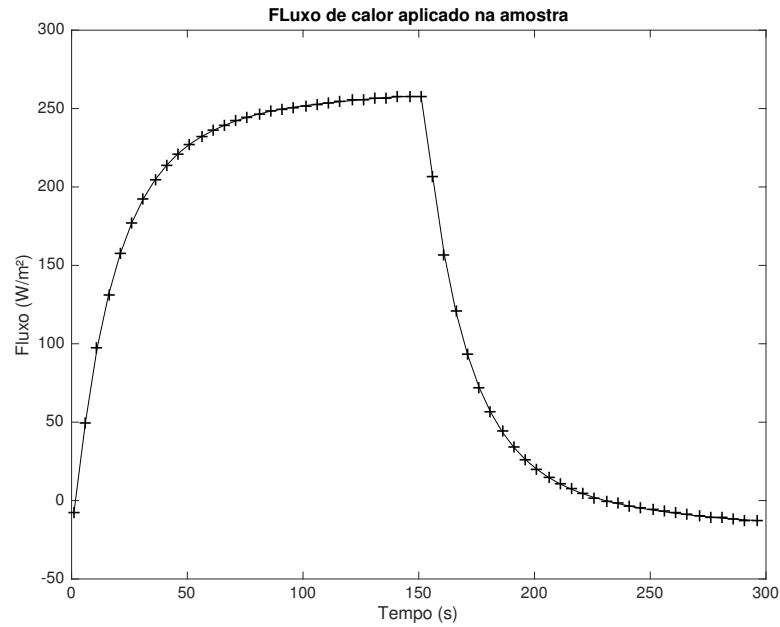
Assim, analogamente ao procedimento descrito na Seção (3.3.1) propõe-se a estimativa da difusividade térmica (α) minimizando-se a função objetivo dada por

$$S_{1D} = [R_{GT-EXP}(t) - R_{GT-1D}(t)]^2 \quad (6.30)$$

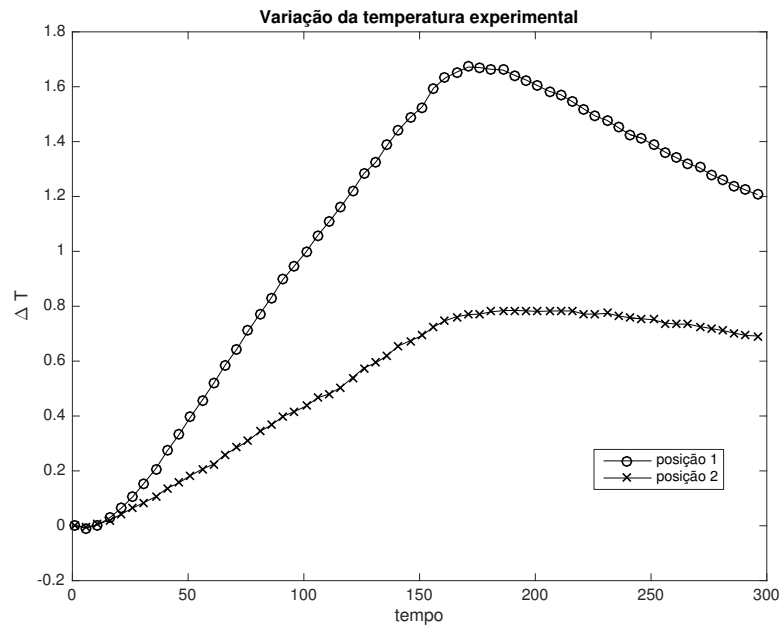
onde R_{GT-EXP} é a razão de ganho experimental e R_{GT-1D} é a razão de ganho teórica usando o modelo unidimensional. Os valores de α serão aqueles que minimizam a equação (6.30) que, neste trabalho, é feita pelo uso do método da seção áurea com aproximação polinomial (VANDERPLAATS, 1984).

Sendo θ_1 e θ_2 obtidos pela Equação (6.29) e θ_{1-exp} e θ_{2-exp} as temperaturas medidas nas posições 1 e 2, medidas na superfície dos experimentos descritos na seção (5.1).

Como já observado, qualquer fluxo de calor pode ser imposto, não sendo necessário o conhecimento exato de seu valor. A Figura (6.3) mostram as variações do fluxo de calor e das temperaturas medidas nas posições 1 e 2 nos experimentos realizados na amostra de PVC.



(a) Evolução do fluxo de calor imposto na amostra de PVC (Tabela 5.1).



(b) Evolução das temperaturas experimentais nas posições 1 e 2 (Tabela 5.1).

Figura 6.3: Experimento típico medidos na superfície de uma amostra de PVC.

A Figura (6.4) mostra a Razão de Ganho de temperatura para os experimentos realizados na amostra de PVC. Nesta análise experimental usou-se o valor da razão de ganho no tempo

$t = 150s$ e um valor de $N = 5$, ou seja, cinco valores para mais e para menos ao redor do ponto definido.

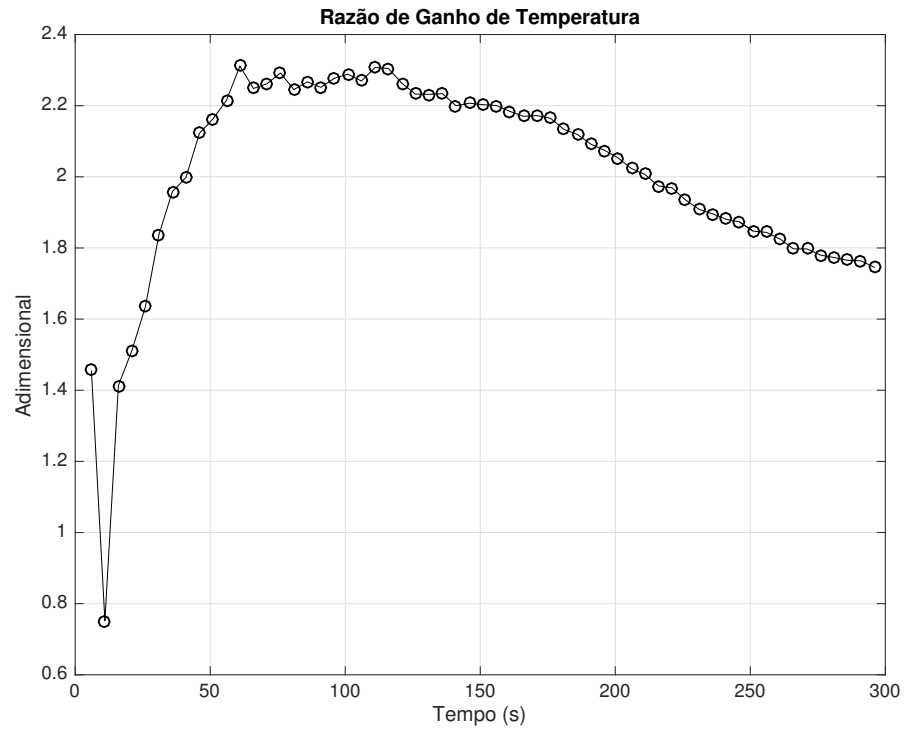
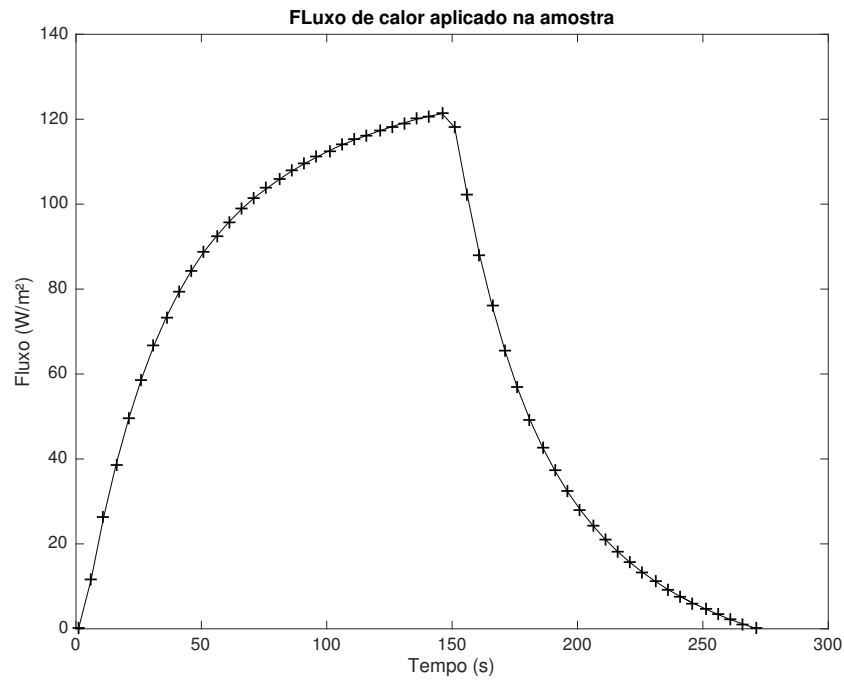
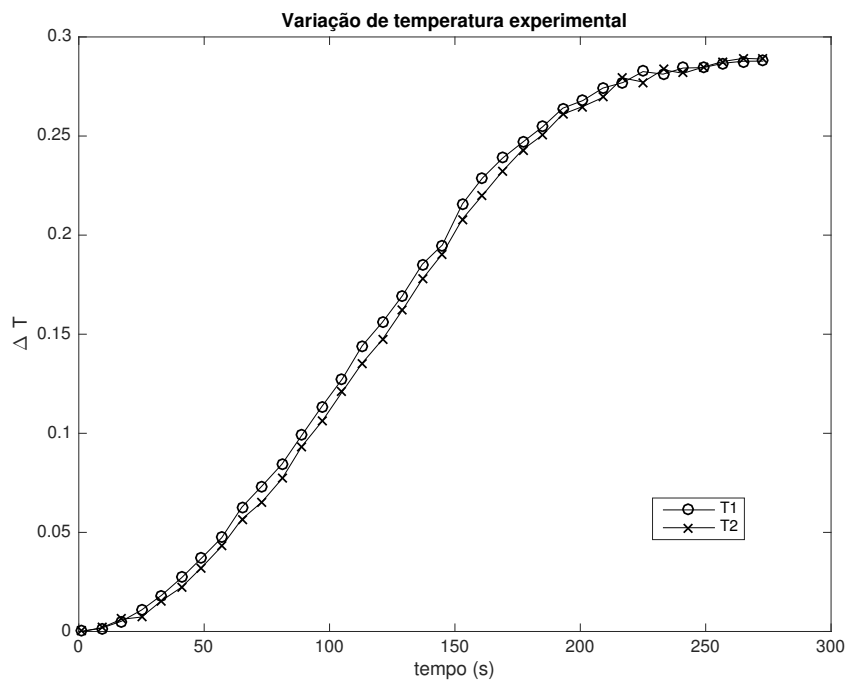


Figura 6.4: Razão de ganho de temperatura para os experimentos realizados na amostra de PVC.

A Figura (6.5) mostra as variações do fluxo de calor e das temperaturas medidas nas posições 1 e 2 nos experimentos realizados na amostra de Cobre.



(a) Evolução do fluxo de calor imposto na amostra de Cobre (Tabela 5.1).



(b) Evolução das temperaturas experimentais nas posições 1 e 2 (Tabela 5.1)

Figura 6.5: Experimento típico na superfície de uma amostra de Cobre.

A Figura (6.6) mostra a Razão de Ganho de temperatura para os experimentos realizados na amostra de Cobre. Na estimativa da difusividade, usou-se o tempo de 100s com $N = 5$.

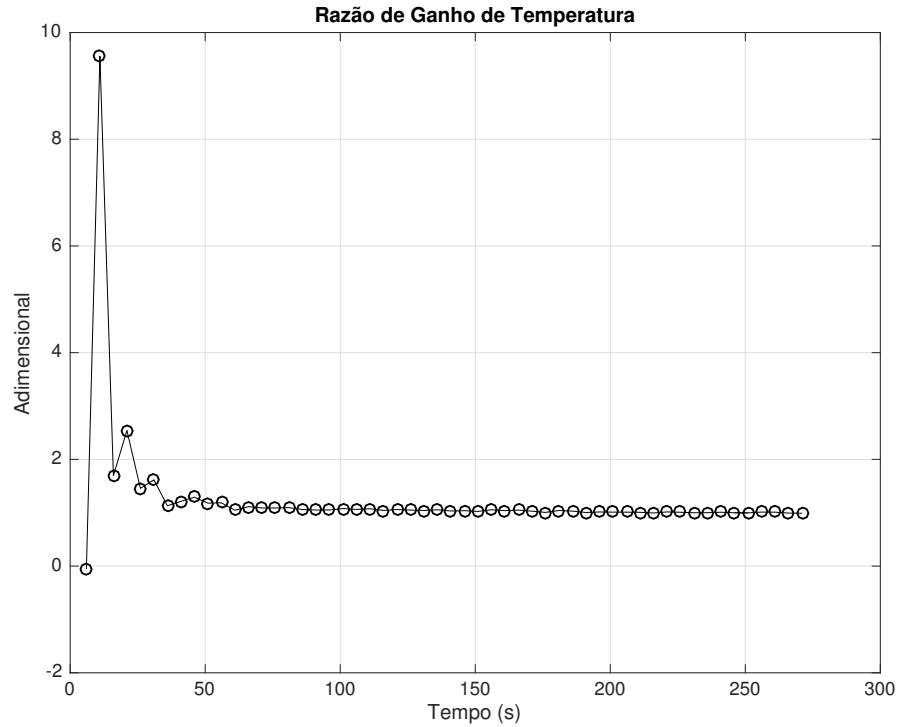


Figura 6.6: Razão de ganho de temperatura para os experimentos realizados na amostra de cobre.

Os resultados encontrados entre os modelos 1D e 3D e o tempo de estimativa estão mostrados nas Tabela (6.1), usando um computador intel® core i5 2,0Gbs e 4Gbs de memória RAM.

Tabela 6.1: Comparação entre difusividade térmica estimada usando o modelo 3D e o modelo reduzido 1D.

Material	3D	tempo	1D	tempo	desvio
Cobre	$1,18e - 4$	6h	$1,18e - 4$	52 segundos	0%
PVC	$1,148e - 7$	14h	$1,148e - 7$	47 segundos	0%

6.3 Redução de modelo para cálculo da condutividade

Diferente da difusividade térmica, devido a sua própria definição, a determinação da condutividade térmica exige o conhecimento do fluxo de calor imposto na superfície da amostra.

Assim, considerando o aparato experimental proposto, Figura (6.7), observa-se que o modelo térmico governante será tridimensional transiente caso apenas as temperaturas T_1 e T_2 sejam usadas.

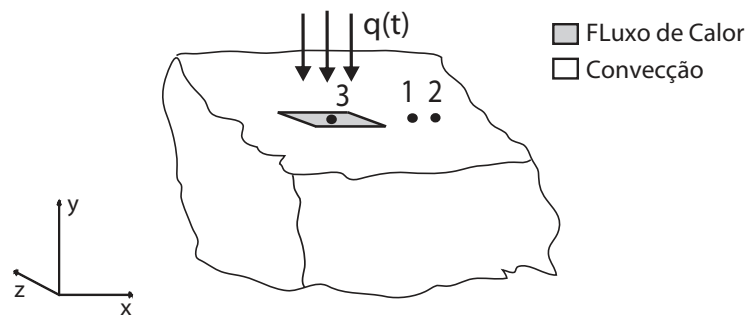


Figura 6.7: Esquema de uma superfície exposta a aquecimento superficial.

Uma alternativa para a redução de modelos nesse caso é a fixação de um termopar adicional na superfície logo abaixo da resistência aquecedora. A Figura (6.8) apresenta esta concepção.

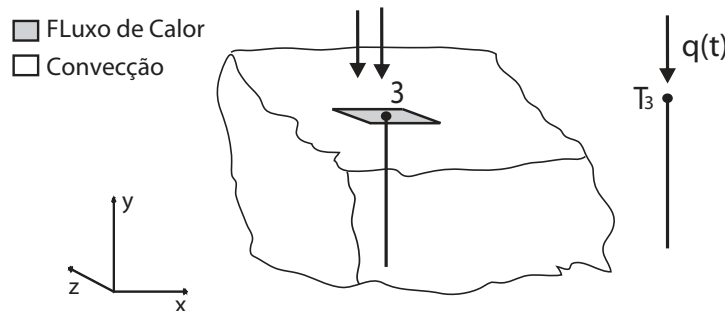


Figura 6.8: Modelo 1D semi-infinito proposto para estimativa da condutividade térmica.

O uso desse termopar permite uma possível redução a um modelo 1D transiente na direção Y.

Observa-se que sob determinadas condições físicas evoluções de temperatura podem apresentar o mesmo comportamento em um ou mais modelos térmicos (COLE et al., 2014). Por exemplo, a evolução de temperatura superficial na posição central do aquecimento pode ser

prevista por um modelo 1D ou 3D transiente desde que os efeitos laterais da superfície e das condições de contorno na superfície oposta ao aquecimento não sejam sentidos.

Essas condições podem ser identificadas através do conceito de tempo de penetração e tempo de desvio de fluxo de calor, inicialmente definidas por (MONTE; BECK; AMOS, 2008). Uma descrição completa destes conceitos é apresentada no trabalho de (IGNACIO, 2016).

Assim, propõem-se neste trabalho o uso da evolução da temperatura na posição 3, termopar T_3 em tempos inferiores ao tempo de desvio de fluxo de calor de forma que essa evolução possa ser prevista por um modelo 1D transiente. Apresenta-se uma comparação da temperatura calculada entre os dois modelos (1D e 3D) no Anexo 2.

Como mencionado, considerando tempo inferiores ao tempo de desvio de fluxo de calor a equação governante para a posição central da superfície de aquecimento pode ser dada por

$$\frac{\partial^2 T(y, t)}{\partial y^2} = \alpha \frac{\partial T(y, t)}{\partial t} \quad (6.31)$$

e condições de contorno

$$k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{x=0} = q_1(t) \quad (6.32)$$

Cuja solução homogênea em termos de função de Green é dada por 6.33.

$$\theta(x, t) = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \int_{\tau=0}^t \frac{q(\tau)}{\sqrt{4\alpha(t-\tau)}} \times \exp\left(-\frac{y^2}{4\alpha(t-\tau)}\right) d\tau \quad (6.33)$$

Onde $\theta = T(x, t) - T_0$.

Analogamente ao procedimento descrito na seção (3.3.2) propõe-se a estimativa da condutividade térmica minimizando-se a função objetivo dada por

$$S_{T-1D} = \sum_{n=1}^N \sum_{i=1}^P (Y_n(i) - \theta_n(i))^2 \quad (6.34)$$

Sendo Y_n a evolução discreta das temperaturas superficiais medidas na posição central do aquecimento e T_3 a temperatura calculada pela Equação (6.33)

O fluxo de calor ($q(\tau)$) é medido pelo transdutor de fluxo de calor descrito na seção (5.1).

A Equação (6.33) por sua vez é implementada numericamente considerando cada componente de fluxo de q_i representativo do instante $t = i \times \delta t$.

A Figura (6.9) representa um fluxo típico aplicado em uma amostra de PVC.

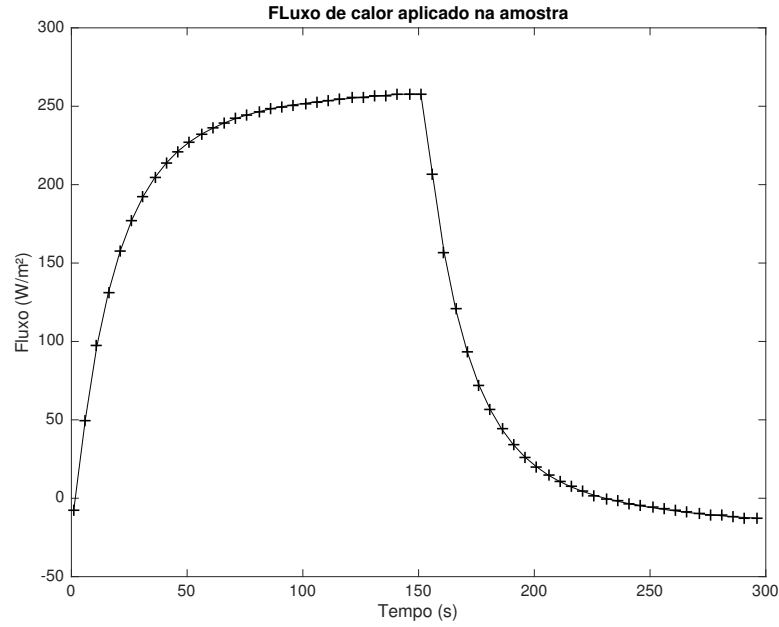


Figura 6.9: Fluxo experimental típico medidos na superfície de uma amostra de PVC.

A figura 6.10 apresenta a evolução temporal da temperatura na posição central do aquecimento para tempos inferiores ao tempo de desvio de fluxo de calor. O valor de k foi estimado em 5s para a amostra de PVC e em 4s para a amostra de Cobre, considerando $N=5$ e $N=4$ temperatura medidas, respectivamente em cada amostra avaliada.

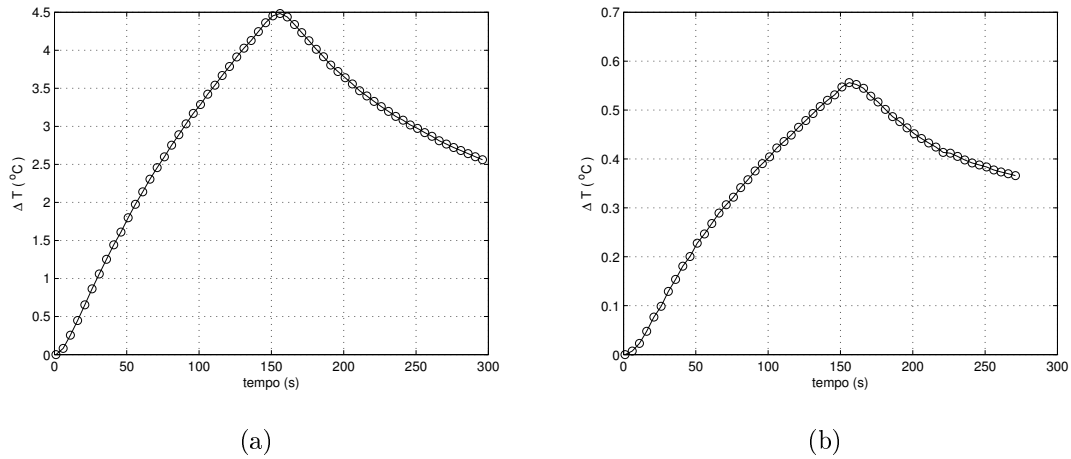


Figura 6.10: Evolução das temperaturas medidas na posição 3, em baixo do fluxo de calor aplicado. a) Amostra de PVC. b) Amostra de cobre.

Os valores estimados para a condutividade térmica usando o modelo unidimensional comparado com os modelos estimados usando os modelos tridimensionais estão organizados na Tabela (6.2), calculados usando um computador intel® core i5 2,0Gbs e 4,0Gbs de memória RAM.

Tabela 6.2: Comparação da condutividade estimada usando o modelo 3D e o modelo reduzido 1D.

Material	k - 3D	tempo	k - 1D	tempo	desvio
PVC	0,157	6h	0,162	8s	3,08%
Cobre	397	1,5h	399	11s	0,5%

Observa-se que os valores da condutividade e difusividade térmica obtidos com os modelos 1D transiente tem um desvio de 3% e 0,5% respectivamente, dos valores obtidos com os modelos tridimensionais.

Capítulo 7

Conclusão

O desenvolvimento da tese mostrou que a difusividade térmica é dependente de um atraso na propagação de calor no meio e que a condutividade é relacionada com a quantidade de energia que chega na amostra avaliada. A partir destas percepções, foram criadas funções objetivos independentes, uma para estimar a difusividade e outra para condutividade, levando à funções com apenas uma variável a ser estimada em cada procedimento, dando estabilidade ao método proposto.

A difusividade foi estimada pela minimização de uma função objetivo que relaciona a razão de ganho de temperatura experimental e teórica em duas posições conhecidas na superfície de acesso, obtendo erros menores que 2% nas estimativas feitas em uma amostra de PVC (não condutor) e Cobre (condutor). Inicialmente, um modelo teórico 3D que representa o experimento é proposto e, na sequência, é apresentada uma redução para uma equação unidimensional que tem o mesmo comportamento da original em relação à difusividade térmica, com menor custo computacional sem comprometer os valores das estimativas.

A condutividade térmica é estimada, depois da estimativa da difusividade, pela minimização da diferença entre as variações de temperatura experimental e teórica 3D para uma posição conhecida na superfície de acesso, obtendo erros da ordem de 3% nas estimativas realizadas na amostra de PVC e Cobre. Em seguida, é proposto um modelo reduzido unidimensional que tem o mesmo comportamento do experimento tridimensional para uma posição no centro do fluxo de calor aplicado durante um intervalo de tempo definido. Os resultados no modelo reduzido foram iguais aos encontrados no modelo original para a difusividade térmica.

A técnica proposta estima a condutividade e difusividade térmica através de um procedimento não invasivo, não destrutivo, que acessa apenas uma superfície da amostra, não tóxico e que provoca pequenas perturbações na energia da amostra avaliada. Assim, se mostra um

método adequado para aplicações *in situ* e possível de ser aplicado em tecidos biológicos vivos, tornando-se uma grande contribuição por servir de base para outras aplicações.

7.1 Trabalhos futuros

A técnica proposta tem grande potencial para aplicações *in situ* e, também, em medição de propriedades de tecidos biológicos vivos, que pode ser o ponto de partida para diversos outros trabalhos.

- Desenvolvimento de uma técnica para medição de propriedades em corpos fantasmas.
- Medição de propriedades e tecidos biológicos.
- Caracterização das propriedades térmicas de tumores.
- Determinação de propriedades médias em materiais compostos.
- Desenvolvimento de um equipamento de medição de propriedades.
- Modelagem de partes do corpo humano a partir dos valores de propriedades medidas pelas técnicas.

Referências Bibliográficas

BECK, J. V. et al. *Heat Conduction Using Green's Function*. Washington, DC: Hemisphere Publishing, 1992.

BERGMAN, T. L. et al. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. New York, NY: Wiley, 2011.

BOHAC, V. et al. Parameter estimations for measurements of thermal transport properties with the hot disk thermal constants analyzer. *Rev. Sci. Instrum.*, v. 71, p. 2452–2455, 2000.

BORGES, V. L.; SILVA, S. M. M. L. e; GUIMARAES, G. A dynamic thermal identification method applied to conductor and non conductor materials. *Inverse Problems in Science and Engineering*, v. 14, p. 511–527, 2006.

BORGES, V. L.; SOUSA, P. F.; GUIMARAES, G. Estimating thermal diffusivity and specific heat from needle probe thermal conductivity data. *Inverse Problems in Science and Engineering*, v. 16, p. 1047–1067, 2008.

COLE, K. D. et al. Intrinsic verification and a heat conduction database. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 78, p. 36–47, 2014.

FERNANDES, A. P. *Função transferência analítica aplicada à solução de problema inverso em condução de calor*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2013.

GOODFELLOW. *disponível em: www.goodfellow.com*. [S.l.]: acessado em 22/01/2017 às 10:46h, 2017.

GUIMARAES, G. *Estimação de parâmetros no domínio da frequência para a determinação simultânea da condutividade e difusividade térmica*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Santa Catarina, 1993.

GUSTAFSSON, S. E. Transient plane source techniques for thermal conductivity and thermal diffusivity measurements of solid materials. *Rev. Sci. Instrum.*, v. 62, p. 797–804, 1991.

HUANG, L.; LIU, L.-S. Simultaneous determination of thermal conductivity and thermal diffusivity of food and agricultural materials using a transient plane-source method. *Journal of Food Engineering*, v. 95, p. 179–185, 2009.

- IGNACIO, L. H. da S. *Desenvolvimento de técnicas de redução de modelos térmicos para a solução de problemas inversos em condução de calor*. Tese (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2016.
- LASKAR, J. et al. Measurement of thermal diffusivity of solids using infrared thermography. *Material Letters*, v. 62, p. 2740–2742, 2008.
- MELO, R. W. de; SILVA, A. L. F. de Lima e; SILVA, S. M. M. de Lima e. Estimation of thermal effusivity of polymers using the thermal impedance method. *19th International Congress of Mechanical Engineering*, 2007.
- MOHAMED, I. O. Development of a simple and robust inverse method for determination of thermal diffusivity of solid foods. *Journal of food engeneering*, v. 101, p. 1–7, 2010.
- MONTE, F. de; BECK, J. V.; AMOS, D. E. Difusion of thermal disturbances in two-dimensional cartesian transient heat conduction. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 51, p. 25–26, 2008.
- ÖZİŞİK, M. N. *Heat Conduction*. 2. ed. Nova Iorque, NY: John Wiley & Sons, 1993.
- PARKER, W. J. et al. Flash method of determining thermal diffusivity, heat capacity, and thermal conductivity. *JOURNAL OF APPLIED PHYSICS*, v. 39, p. 1680–1684, 1961.
- REMY, B.; DEGIOVANNI, A. Parameters estimation and measurement of thermophysical properties of liquids. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 48, p. 4103–4120, 2005.
- SILVA, S. M. M. L. e; DUARTE, M. A. V.; GUIMARAES, G. A correlation function for thermal properties estimation applied to a large thickness sample with a single surface sensor. *Inverse Problems in Science and Engineering*, v. 16, p. 1047–1067, 2008.
- UKRAINCZYK, N. Thermal diffusivity estimation using numerical inverse solution for 1d heat conduction. *International journal of heat and mass transfer*, v. 52, p. 5675–5681, 2009.
- VANDERPLAATS, G. N. *Numerical Optimization Techniques for Engineering Design*. New York, NY: Mcgraw-Hill College, 1984.
- WAITE, W. F. et al. Estimating thermal diffusivity and specific heat from needle probe thermal conductivity data. *Rev. Sci. Instrum.*, v. 77, p. 1–5, 2006.
- ZHU, Y. Heat-loss modified angstrom method for simultaneous measurements of thermal diffusivity and conductivity of graphite sheets: The origins of heat loss in angstrom method. *International Journal of Heat and Mass transfer*, v. 92, p. 784–791, 2016.

Apêndice A

Aplicação da Técnica em um Modelo Isolado - X22Y22Z22.

A função razão de ganho de temperatura tem dependência exclusiva da difusividade térmica e é claramente observada quando estabelecida para uma amostra finita aquecida parcialmente enquanto as demais superfícies são mantidas isoladas termicamente (Modelo X22Y22Z22).

A.1 Problema direto 3D transiente - X22Y22Z22.

O modelo térmico proposto é uma amostra inicialmente a temperatura uniforme, T_0 e submetida a um fluxo de calor na área $A_1[W/m^2]$ enquanto todas as outras superfícies são mantidas isoladas (Figura A.1).

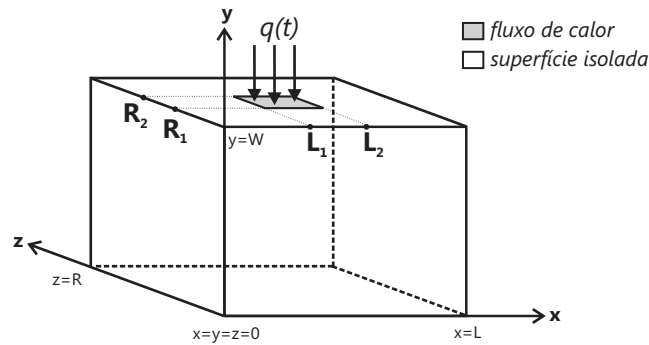


Figura A.1: Modelo 3D isolado com fluxo em uma área da superfície de acesso.

O modelo térmico tridimensional pode ser obtido pela solução da equação da difusão.

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{A.1})$$

sujeita às condições de contorno

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L} = \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=R} = \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$-k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=W} = q(t) \quad \text{na região } L_1 \leq x \leq L_2 \text{ e } R_1 \leq z \leq R_2$$

e condição inicial

$$T(x, y, z, 0) = F(x, y, z) = T_0 = T_\infty \quad (\text{A.3})$$

A.1.1 Solução analítica usando funções de Green

A solução do problema homogêneo em termo de funções de Green é dada por

$$\theta(x, y, z, t) = \theta_0 + \frac{\alpha}{k} \int_0^t \int_{L_1}^{L_2} \int_{R_1}^{R_2} q(\tau) G(x, y, z, t|x', W, z', \tau) dx' dz' d\tau \quad (\text{A.4})$$

A função de Green $G(x, y, z, t|x', y', z', \tau)$ (BECK et al., 1992) é obtida, observando os tipos de condições de contorno nas direções de x , y e z , pelo o produto de três problemas unidimensionais independentes

$$G(x, y, z, t|x', y', z', \tau) = G_{X22}(x, t|x', \tau) \cdot G_{Y22}(y, t|y', \tau) \cdot G_{Z22}(z, t|z', \tau) \quad (\text{A.5})$$

Como as direções x , y e z tem a mesma função de Green, apenas as variáveis que carac-

terizam o problema em cada coordenada irá mudar, obtendo assim

$$G_{X22}(x, t|x', \tau) = \frac{1}{L} + \frac{2}{L} \sum_{m=1}^M e^{-\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{m\pi x'}{L}\right) \quad (\text{A.6})$$

$$G_{Y22}(y, t|y', \tau) = \frac{1}{W} + \frac{2}{L} \sum_{n=1}^N e^{-\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos\left(\frac{n\pi y'}{W}\right) \quad (\text{A.7})$$

$$G_{Z22}(z, t|z', \tau) = \frac{1}{R} + \frac{2}{R} \sum_{p=1}^P e^{-\left(\frac{p\pi}{R}\right)^2 \alpha(t-\tau)} \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \cos\left(\frac{p\pi z'}{R}\right) \quad (\text{A.8})$$

Onde os índices $m = 1, \dots, M$, $n = 1, \dots, N$ e $p = 1, \dots, P$ definem o número de autovalores necessários para a convergência das séries, obtidas por um erro de truncamento, ϵ , definido e a solução em termos da variável original T por ser obtida por $T = \theta + T_\infty$.

Substituindo a função de Green pelo problema térmico de interesse equações (A.5 - A.8) na equação A.4 a expressão analítica em termos da variável θ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \theta(x, y, z, t) = & \frac{\alpha}{k} \times A_1 \int_0^t q(\tau) d\tau \\ & + \frac{\alpha}{k} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-\frac{m^2}{L^2} \pi^2 \alpha t} A_{2m} \int_0^t \left[q(\tau) e^{\frac{m^2}{L^2} \pi^2 \alpha \tau} \right] d\tau \\ & + \frac{\alpha}{k} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n^2}{W^2} \pi^2 \alpha t} B_{1n} \int_0^t \left[q(\tau) e^{\frac{n^2}{W^2} \pi^2 \alpha \tau} \right] d\tau \\ & + \frac{\alpha}{k} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\frac{p^2}{R^2} \pi^2 \alpha t} C_{1p} \int_0^t \left[q(\tau) e^{\frac{p^2}{R^2} \pi^2 \alpha \tau} \right] d\tau \\ & + \frac{\alpha}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{W^2}\right) \pi^2 \alpha t} AB_{1mn} \int_0^t \left[q(\tau) e^{\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{W^2}\right) \pi^2 \alpha \tau} \right] d\tau \\ & + \frac{\alpha}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha t} AB_{2mn} B_{2n} \int_0^t \left[q(\tau) e^{\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha \tau} \right] d\tau \\ & + \frac{\alpha}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{n^2}{W^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha t} AC_{pn} \int_0^t \left[q(\tau) e^{\left(\frac{n^2}{W^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha \tau} \right] d\tau \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

$$+ \frac{\alpha}{k} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{W^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha t} A_{6m} A_{C_{pn}} \times \int_0^t \left[q(\tau) e^{\left(\frac{m^2}{L^2} + \frac{n^2}{W^2} + \frac{p^2}{R^2}\right) \pi^2 \alpha \tau} \right] d\tau$$

onde as variáveis $A_1, A_{2n}, B_{1n}, C_{1p}, AB_{1mn}, AB_{2mn}, B_{2n}, AC_{pn}, A_{6m}, A_{C_{pn}}$ são termos que dependem somente das autofunções, autovalores e dos parâmetros geométricos L, W e R e são obtidas como

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{LWR} [L_2 - L_1] [R_2 - R_1] \\ A_{2m} &= \frac{2}{WR} [R_2 - R_1] \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \left[\sin\left(\frac{m\pi L_2}{L}\right) - \sin\left(\frac{m\pi L_1}{L}\right) \right] \times \frac{1}{m\pi} \\ B_{1n} &= \frac{2}{LWR} [L_2 - L_1] [R_2 - R_1] \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos(n\pi) \\ C_{1p} &= \frac{2}{LW} [L_2 - L_1] \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \left[\sin\left(\frac{p\pi R_2}{R}\right) - \sin\left(\frac{p\pi R_1}{R}\right) \right] \times \frac{1}{p\pi} \\ AB_{1mn} &= \frac{4}{WR} [R_2 - R_1] \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \left[\sin\left(\frac{m\pi L_2}{L}\right) - \sin\left(\frac{m\pi L_1}{L}\right) \right] \times \frac{1}{m\pi} \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos(n\pi) \\ AB_{2mn} &= \frac{4}{W} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \left[\sin\left(\frac{m\pi L_2}{L}\right) - \sin\left(\frac{m\pi L_1}{L}\right) \right] \frac{1}{m\pi} \\ B_{2n} &= \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \left[\sin\left(\frac{p\pi R_2}{R}\right) - \sin\left(\frac{p\pi R_1}{R}\right) \right] \times \frac{1}{p\pi} \\ AC_{pn} &= \frac{4}{LW} [L_2 - L_1] \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos(n\pi) \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \times \left[\sin\left(\frac{p\pi R_2}{R}\right) - \sin\left(\frac{p\pi R_1}{R}\right) \right] \times \frac{1}{p\pi} \\ A_{6m} &= \frac{8}{W} \cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \left[\sin\left(\frac{m\pi L_2}{L}\right) - \sin\left(\frac{m\pi L_1}{L}\right) \right] \frac{1}{m\pi} \\ AC_{pn} &= \cos\left(\frac{n\pi y}{W}\right) \cos(n\pi) \cos\left(\frac{p\pi z}{R}\right) \left[\sin\left(\frac{p\pi R_2}{R}\right) - \sin\left(\frac{p\pi R_1}{R}\right) \right] \frac{1}{p\pi} \end{aligned} \tag{A.10}$$

A.2 Determinação da função razão de ganho de temperatura, R_{GT}

A razão de ganho de temperatura R_{GT} é definido pela razão das variações de temperatura entre dois pontos. Neste sentido, a equação A.9 é usada para calcular a temperatura nas posições 1 e 2, onde os termopares estariam mediando as variações de temperaturas na superfície de acesso.

Observa-se que para a solução da equação A.9 o fluxo de calor deve ser conhecido. Como já demonstrado na seção 3.3.1 a razão de ganho de temperatura independe do fluxo, valendo para

qualquer tipo de fluxo incluindo periódico, degrau ou constante. Para melhor visualização do procedimento aqui proposto, consideraremos a plicação de um fluxo constante, q , aplicado na equação A.9 descrita por

$$\theta(x, y, z, s) = \frac{q\alpha}{k} \times B_i(x_i, y_i, z_i, t, \alpha) \quad (\text{A.11})$$

sendo

$$\begin{aligned} B_i(x_i, y_i, z_i, t) = & A_1 + \sum_{m=1}^{\infty} A_{2m} \frac{\gamma_m(t)}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} B_{1n} \frac{\gamma_n(t)}{\alpha} + \sum_{p=1}^{\infty} C_{1p} \frac{\gamma_p(t)}{\alpha} \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} AB_{1mn} \frac{\gamma_{mn}(t)}{\alpha} + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} AB_{2mn} B_{2n} \frac{\gamma_{mp}(t)}{\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} AC_{pn} \frac{\gamma_{pn}(t)}{\alpha} \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} A_{6m} C A_{pn} \frac{\gamma_{mnp}(t)}{\alpha} \end{aligned}$$

Usando a Equação (A.11) para o cálculo das variações de temperaturas (θ_1 e θ_2) em duas posições distintas 1 e 2 e calculando a razão entre elas, obtêm-se R_{GT} que é função da difusividade (α),

$$R_{GT}(\alpha) = \frac{\theta(x_1, y_1, z_1, t)}{\theta(x_2, y_2, z_2, t)} = \frac{\frac{q\alpha}{k} B_1(x_1, y_1, z_1, t, \alpha)}{\frac{q\alpha}{k} B_2(x_2, y_2, z_2, t, \alpha)} = \frac{B_1(x_1, y_1, z_1, t, \alpha)}{B_2(x_2, y_2, z_2, t, \alpha)}$$

Observa-se que R_{GT} independe tanto do fluxo de calor imposto quanto da condutividade térmica, se tornando uma função exclusiva de um único parâmetro térmico, da difusividade.

Apêndice B

Tempo de Desvio de Calor

(MONTE; BECK; AMOS, 2008) define que o tempo de desvio de calor é a informação de quanto tempo é necessário para que uma condição de contorno inativa influencie a temperatura em uma determinada posição em uma amostra avaliada.

Baseado no conceito de tempo de desvio de calor (COLE et al., 2014) apresenta em seu trabalho o conceito de verificação intrínseca, mostrando que dois modelos térmicos tem o mesmo comportamento durante um certo intervalo de tempo quando sujeitos a condições de contorno específicas. Assim, quando tem-se uma solução já validada, pode-se validar outro modelo no intervalo onde as duas apresentam o mesmo comportamento.

(IGNACIO, 2016) avalia os conceitos de tempo de desvio de calor e tempo de penetração de calor em diversos modelos e define modelos reduzidos para solução de problemas inversos. Além disso, conclui em seu trabalho que o tempo de desvio de calor independe do fluxo aplicado.

Como mostrado no Capítulo 6, a estimativa da condutividade térmica é realizada por um modelo reduzido unidimensional que tem o mesmo comportamento térmico do modelo experimental tridimensional durante um certo intervalo de tempo. A estimativa é realizada neste intervalo.

As Figuras (B.1 e B.2) mostram as variações de temperatura experimental e calculada com modelo reduzido em uma posição na superfície da amostra logo abaixo da resistência aquecedora para as amostras de PVC e Cobre, respectivamente. As variações de temperatura foram calculadas com as propriedades dos materiais encontradas na literatura usando a equação 6.33 para o modelo reduzido 1D.

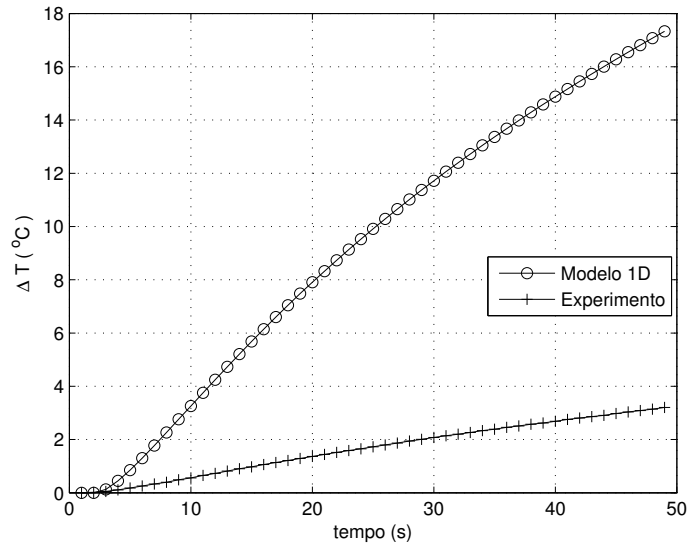


Figura B.1: Variação das temperaturas experimental e calculada no modelo reduzido usando as propriedades encontradas na literatura para o PVC.

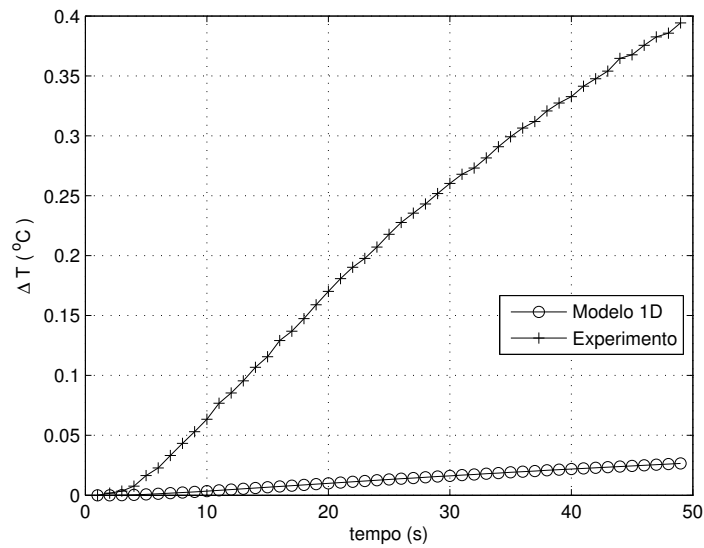


Figura B.2: Variação das temperaturas experimental e calculada no modelo reduzido usando as propriedades encontradas na literatura para o Cobre.

Observa-se que para a amostra de PVC, a variação de temperatura experimental e calculada no modelo reduzido tem o mesmo comportamento até o tempo de 5s e a temperatura no modelo reduzido aumenta mais rápido que no experimental. Já para a amostra de cobre,

por ser mais condutor, o comportamento das temperaturas é igual até o tempo de $4s$, porém o modelo experimental aumenta a temperatura mais rápido que o modelo reduzido. Assim, a estimativa da condutividade usando o modelo reduzido proposto deve acontecer em tempos menores que o tempo de desvio de calor observados no experimentos em cada amostra.