

Universidade Federal de Uberlândia - UFU
Faculdade de Engenharia Elétrica
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica



**Modelagem de Funções de Transferência de Plantas Industriais em Malha
Aberta e Fechada utilizando Algoritmos Genéticos**

Florisvaldo Cardozo Bomfim Junior

Uberlândia-MG

2017

Florisvaldo Cardozo Bomfim Junior

**Modelagem de Funções de Transferência de Plantas Industriais em Malha
Aberta e Fechada utilizando Algoritmos Genéticos**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de
Uberlândia, como requisito para o título de Mestre em
Ciências.

Área de concentração: Processamento da Informação
Linha de Pesquisa: Inteligência Artificial

Orientador: Dr. Keiji Yamanaka
Coorientador: Dr. Igor Santos Peretta

Uberlândia-MG

2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

B695m Bomfim Junior, Florisvaldo Cardozo, 1980-
2017 Modelagem de funções de transferência de plantas industriais em
malha aberta e fechada utilizando algoritmos genéticos / Florisvaldo
Cardozo Bomfim Junior. - 2017.
51 f. : il.

Orientador: Keiji Yamanaka.
Coorientador: Igor Santos Peretta.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica.
Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2018.25>
Inclui bibliografia.

1. Engenharia elétrica - Teses. 2. Algoritmos genéticos - Teses. 3.
Automação industrial - Teses. 4. Controle automático - Teses. I.
Yamanaka, Keiji. II. Peretta, Igor Santos. III. Universidade Federal de
Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. IV.
Título.

CDU: 621.3

Maria Salete de Freitas Pinheiro CRB6 -1262

Florisvaldo Cardozo Bomfim Junior

Modelagem de Funções de Transferência de Plantas Industriais em Malha Aberta e Fechada utilizando Algoritmos Genéticos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação
em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de
Uberlândia, como requisito para o título de Mestre em
Ciências.

Área de concentração: Processamento da Informação
Linha de Pesquisa: Inteligência Artificial

Prof. Keiji Yamanaka, Dr.
FEELT/UFU (Orientador)

Prof. Igor Santos Peretta, Dr.
FEELT/UFU (Coorientador)

Prof. Edilberto Teixeira, Dr.
UNIUBE

Prof. Josué Silva de Moraes, Dr.
FEELT/UFU

Uberlândia-MG

2017

Dedicado à minha esposa, meu filho e aos professores
Keiji Yamanaka e Igor Santos Peretta que foram as pe-
dras angulares.

Agradecimentos

Agradeço a todos que apoiaram e participaram da elaboração deste trabalho.

Lista de Figuras

1	Função transladada	6
2	Função de transferência	8
3	Malha aberta	12
4	Malha fechada	12
5	Método de Zeagle Nichols/K:Ganho;L:Atraso (θ);T:Constante de tempo (τ);	12
6	Método de Smith – Primeira Ordem	13
7	Método de Sundaresan e Krishnaswamy - Primeira Ordem	14
8	Método de Nishikawa	15
9	Gráfico de Smith	18
10	Resposta ao degrau unitário em malha aberta	28
11	Gráfico de comparação das curvas.	30
12	Gráfico de comparação das curvas.	32
13	Gráfico de comparação das curvas.	34
14	Gráfico de comparação das curvas.	36
15	Gráfico de comparação das curvas.	38
16	Gráfico de Smith	38
17	Gráfico de comparação das curvas.	39
18	Gráfico de comparação das curvas.	40
19	Gráfico de comparação das curvas.	41
20	Curva de resposta em malha fechada	43
21	Resposta real ao degrau em malha aberta	45
22	Curva de aproximação 1 ^a ordem	46
23	Curva de aproximação 2 ^a ordem	46
24	Curva de aproximação 3 ^a ordem	47
25	Malha fechada com parâmetros antigos.	47
26	Malha fechada com parâmetros novos	48

Lista de Tabelas

1	Síntese direta	21
2	Tabela de comparação de métodos	37
3	Comparação de resultados de 2 ^a ordem	41
4	Resultados de aproximação 3 ^a ordem	41
5	Função Alvo versus Função Encontrada	42
6	Modelagem por ordem do sistema fictício em malha fechada	44
7	Modelo estimado em malha fechada	44

Sumário

1	Introdução	3
2	Revisão de Literatura	5
2.1	Modelos Matemáticos	5
2.2	Transformada de Laplace	5
2.2.1	Função degrau	6
2.2.2	Função Transladada	6
2.2.3	Teorema da diferenciação	7
2.2.4	Teorema da Integração	7
2.2.5	Teorema do valor final	7
2.2.6	Teorema do valor inicial	7
2.2.7	Modelos de entrada e saída e função de transferência	8
2.3	Função de Transferência	8
2.3.1	Polo	10
2.3.2	Zeros	10
2.3.3	Ordem de Numerador e Denominador	10
2.3.4	Ganho no estado estacionário	10
2.4	Diagrama de Blocos	10
2.5	Métodos Gráficos de Identificação do Processo (Curva de reação)	11
2.5.1	Tipos de Malhas	11
2.5.2	Zeagle Nichols – Primeira Ordem	12
2.5.3	Método de Smith – Primeira Ordem	13
2.5.4	Método de Sundaresan e Krishnaswamy - Primeira Ordem	14
2.5.5	Método de Nishikawa - Primeira Ordem	15
2.5.6	Integração por Área - Método Trapezoidal	16
2.5.7	Método Harriot - Segunda Ordem Sobre Amortecido	16
2.5.8	Método de Smith – Segunda Ordem	17
2.6	Sistema de Controle	18
2.6.1	Controladores PID	19
2.6.2	Ação Proporcional	19
2.6.3	Ação Integral	20

2.6.4	Ação Derivativa	20
2.7	Métodos de sintonia	20
2.7.1	Síntese Direta	20
2.8	Algoritmo Genético	21
2.8.1	Funcionamento	22
2.8.2	Mutação	22
2.8.3	Seleção	23
2.8.4	Recombinação	23
2.8.5	Aptidão	24
2.9	<i>SBX (Simulated Binary Crossover)</i>	24
3	Trabalhos Relacionados	26
4	Resultados e Discussão	27
4.1	Considerações sobre o método	28
4.2	Levantando dados para a simulação	28
4.3	Aplicação em malha aberta para aproximação de um modelo de Primeira Ordem	29
4.3.1	Método de Smith	29
4.3.2	Método de Sundaresan e Krishnaswamy	31
4.3.3	Método de Nishikawa	32
4.4	Método não convencional em malha aberta para aproximação em primeira ordem.	34
4.4.1	Estrutura do cromossomo	34
4.4.2	Função Fitness	35
4.4.3	Aplicação do método	35
4.4.4	Comparação dos resultados	36
4.5	Aplicação em malha aberta para aproximação de um modelo de segunda ordem	36
4.5.1	Método Harriot	37
4.5.2	Método de Smith	37
4.6	Aproximação de sistema de segunda ordem usando método não convencional	39
4.6.1	Comparação entre os métodos	40

4.7	Aproximação de sistema de 3 ^a ordem usando método não convencional	41
4.8	Modelagem de processos em malha fechada	42
4.8.1	Determinação dos parâmetros do cromossomo	42
4.9	Aplicação em um sistema de controle real	44
5	Conclusão	49

Resumo

Em sistemas de controle, conhecer a função de transferência é de suma importância para a calibração dos compensadores industriais (Controladores PID's) e para determinar o seu comportamento. Existem várias técnicas convencionais para a determinação dessas funções de transferência, tais como Smith, Sundaresan e Krishnaswamy e Nishikawa para sistemas de 1^a ordem, e Harriot e Smith para sistemas de 2^a ordem.

Este trabalho teve como objetivo determinar a função de transferência em sistemas de malha aberta e malha fecha por meio do algoritmo genético e confrontar os modelos com os obtidos nas formas convencionais. Para o desenvolvimento do algoritmo fez-se necessário a aplicação de conhecimentos de automação e controle (transformada de Laplace, Controladores, diagrama de blocos e modelagem de sistemas lineares) usando como plataforma o software matemático Matlab®. Os resultados foram confrontados e apresentaram melhores respostas quando comparado aos obtidos pelos métodos convencionais, comprovando que o método aplicado atingiu as expectativas. Logo após, aplicou-se o sistema para a determinação da função de transferência de uma planta real e os resultados comprovaram que é uma ferramenta válida para aplicações reais.

Palavras-chave: Algoritmo Genético, Controle, Automação, Função de Transferência, Planta Industrial.

Abstract

In control systems, knowing the transfer function is of paramount importance for the calibration of industrial compensators (PID controllers) and to determine their behavior. There are several conventional techniques for determining such transfer functions, such as Smith, Sundaresan and Krishnaswamy and Nishikawa for first order systems, and Harriot and Smith for second order systems.

This work aimed to determine the transfer function in open mesh and closed mesh systems through the genetic algorithm and to compare the models with those obtained in conventional forms. For the development of the algorithm it was necessary to apply knowledge of automation and control (Laplace transform, Controllers, block diagram and linear systems modeling) using as platform Matlab registered mathematical software. The results were compared and presented better responses, when compared to those obtained by conventional methods, proving that the applied method reached expectations. Afterwards, the system was applied to determine the transfer function of a real plant and the results proved that it is a valid tool for real applications.

Keywords: Genetic Algorithm, Control, Automation, Transfer Function , Industrial plant.

1 Introdução

Em sistemas de controle industrial, conhecer a função de transferência de uma planta, pode ser a pedra fundamental para se obter um bom ajuste dos compensadores da malha de controle. Em diversos tipos de malha de controle, tal função de transferência não é conhecida devido as dificuldades de modelagem. Desta forma, os compensadores são ajustados de modo empírico, também chamado de tentativa e erro, resultando em perdas de matéria-prima, além de vapor, água e combustíveis usados como variáveis de controle. A função de transferência é a relação de pelo menos duas variáveis de processo, sendo uma de entrada e uma de saída. Por exemplo, na função de transferência de um aquecedor industrial, para a variável de entrada, pode-se adotar a vazão de vapor para a variável de saída, a temperatura da substância que desejamos aquecer. Atualmente, há várias formas de estimar a função de transferência de um sistema, sendo que, na maioria dos métodos existentes, aproxima-se para uma função de primeira ordem com atraso. Desta forma, mesmo se o sistema for de segunda ou de terceira ordem, será reduzido para um sistema de primeira ordem com atraso. Essa diferença na função pode acarretar um cálculo equivocado dos parâmetro do compensador (Controlador PID¹). Outra característica dos métodos é que, para a maioria, tem-se como cenário um sistema em malha aberta (estrutura de controle onde não ocorre a realimentação) e não fechada (estrutura de controle em que há a comparação da variável desejada com a variável controlada), o que causa dificuldade para plantas que não podem ser interrompidas, como por exemplo, controle de temperatura de petróleo. O presente trabalho tem como objetivo apresentar uma forma não convencional de se estimar a função de transferência usando a heurística dos algoritmos genéticos (AG). O algoritmo proposto é capaz de estimar funções tanto em sistemas em malha aberta e em malha fechada. O método apresentado consegue estimar uma função de transferência mais próxima da função real, possibilitando, aos engenheiros responsáveis, um melhor ajuste de sua malha de controle. Devido à grande concorrência de mercado, uma planta com parâmetros otimizados pode representar uma enorme vantagem perante aos concorrentes.

Muitas pesquisas analisaram o estado de desempenho dos laços de controle em diferentes indústrias de processo. A principal conclusão foi que muitas vezes os princípios

¹Estrutura de controlador que possui ação integral, derivativa e proporcional.

básicos de controle são ignorados, os algoritmos de controle são incorretamente escolhidos e sintonizados, enquanto sensores e atuadores são mal selecionados ou mantidos.

2 Revisão de Literatura

Nesta seção são discutidos conceitos importantes para o entendimento da proposta apresentada neste trabalho.

2.1 Modelos Matemáticos

Os sistemas físicos reais apresentam uma alta complexidade, o que dificulta muito o seu estudo. Com isso a dificuldade da modelagem está diretamente relacionada à natureza e à precisão do estudo que se deseja fazer referente ao comportamento do sistema. Para tal, podemos usar métodos para a sua obtenção através da resposta ao degrau, que corresponde à curva de reação a uma variação na entrada do processo.

2.2 Transformada de Laplace

A transformada de Laplace (Equação (1)) é usada como ferramenta para a solução de equações lineares², por realizar a transformação de funções, como seno e cosseno, para um sistema algébrico. Por ser um meio facilitador de resoluções rápidas (KATSUHIRO, O. et al, 2015), pode-se defini-la como:

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt \quad (1)$$

sendo:

$f(t)$: uma função no tempo tal que $f(t) = 0$ para $t < 0$;

s : uma variável complexa ($s \in C$);

$F(s)$: Transformada de Laplace $f(t)$;

A transformada para uma função $f(t)$ existe se $f(t)$ é seccionalmente contínua em todo intervalo finito na região $t > 0$ e se a função for da ordem exponencial quando t tende a infinito. (MAYA, P.A. et al, 2011)

²Sistemas invariantes no tempo.

2.2.1 Função degrau

Esse tipo de função é muito usado em sistemas de controle para a obtenção da função de transferência, colocando a planta em malha aberta e aplicando um degrau unitário de amplitude 1 em sua entrada. Como qualquer função multiplicada por 1 é igual a ela mesma, temos então que a curva de resposta ao degrau na saída corresponde à função de transferência procurada.(KATSUHIRO, O. et al, 2015)

Considere a seguinte função degrau:

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \quad (2)$$

Ao fazer a integração concluímos que a transformada de Laplace é válida em todo plano 's' exceto no pólo $s = 0$. Fisicamente, uma função degrau ocorrendo em $t = 0$ corresponde a um sinal constante inserido subitamente na entrada do sistema, no instante t igual a zero.(KATSUHIRO, O. et al, 2015)

2.2.2 Função Transladada

Supondo que $f(t)$ é zero para $t < 0$ ou $f(t - \alpha) = 0$ para $t < a$. As funções $f(t)$ e $f(t - \alpha)$ são mostradas graficamente na figura 1.(KATSUHIRO, O. et al, 2015)

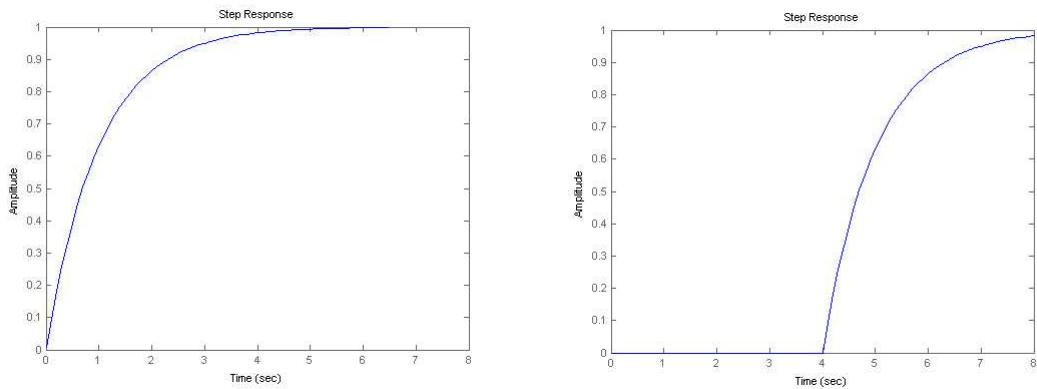


Figura 1: Função transladada

Desta forma, podemos concluir que a transformada de uma função transladada é dada por:

$$\mathcal{L}\{f(t - \alpha)\} = e^{-\alpha \cdot s} \cdot F(s) \quad (3)$$

2.2.3 Teorema da diferenciação

Na aplicação da transformada de Laplace em equação diferencial de 1^a ordem temos a seguinte formulação:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\delta f(t)}{\delta t} \right\} = F(s) \cdot s - F(0) \quad (4)$$

Uma das principais aplicações para a transformada de Laplace está na solução analítica de equações diferenciais comuns, o que mostra que a transformação de um derivado é um termo algébrico. Assim, uma equação diferencial é transformada em uma equação algébrica, que pode ser facilmente resolvida usando regras de álgebra.

2.2.4 Teorema da Integração

Na aplicação da transformada de Laplace de uma integral, encontramos a seguinte função transformada $F(s)$.

$$\mathcal{L} \left\{ \int_0^{\infty} f(t) \cdot dt \right\} = \frac{F(s)}{s} - F(0) \quad (5)$$

2.2.5 Teorema do valor final

O valor de acomodação do transiente pode ser determinado aplicando a expressão o limite do termo ‘s’ tendendo a zero³. (KATSUHIRO, O. et al, 2015)

$$V_{final} = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\delta f(t)}{\delta t} \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt \right\} = \lim_{s \rightarrow 0} \{ F(s) \cdot s - F(0) \} \quad (6)$$
$$V_{final} = \lim_{s \rightarrow 0} F(0) \cdot s$$

2.2.6 Teorema do valor inicial

O valor inicial de um sistema pode ser determinado da mesma forma que o valor final por meio de um limite tendendo ‘s’ a infinito.

³Como é uma função na frequência, seu valor final é encontrado quando a variável s tende a zero, representando que atingiu o valor final após a aplicação de uma entrada n qualquer.

$$V_{inicial} = \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\delta f(t)}{\delta t} \cdot e^{-s \cdot t} \cdot dt \right\} = \lim_{s \rightarrow \infty} \{ F(s) \cdot s - F(0) \} \quad (7)$$

$$V_{inicial} = \lim_{s \rightarrow \infty} F(\infty) \cdot s$$

2.2.7 Modelos de entrada e saída e função de transferência

A determinação de um modelo pode ser alcançado pelo agrupamento de 3 variáveis:

1. Entrada (causa)
2. Saída (efeito)
3. Intermediária (função desejada)

Para modelos dinâmicos lineares utilizados no controle de processo, é possível eliminar variáveis intermediárias analíticas para produzir um modelo *input-output*, de modo que as variáveis intermediárias são considerados no modelo, mesmo que não sejam explicitamente calculadas. Portanto, não há mais suposições e simplificações envolvidas na modelagem de *input-output* de sistemas lineares. Uma maneira muito comum de apresentar modelos *input-output*, que apresentam uma aplicação considerável no controle de processo, é a função de transferência.(MAYA, P.A. et al, 2011)

2.3 Função de Transferência

Para falarmos de função de transferência temos que considerar um sistema linear de parâmetros concentrados pertencentes à classe de sistemas LIT⁴, que possui apenas uma entrada e uma saída. Supondo que o sistema a seguir cumpra estas condições, o modelo matemático pode ser representado pela figura 2.(MAYA, P.A. et al, 2011)



Figura 2: Função de transferência

$$\begin{aligned} q_n y(t)^{(n)} + q_{n-1} y(t)^{(n-1)} + \dots + q_2 y(t)'' + q_1 y(t)' + q_0 y(t) = \\ p_m u(t)^{(m)} + p_{m-1} u(t)^{(m-1)} + \dots + p_1 u(t)' + p_0 u(t) \end{aligned} \quad (8)$$

⁴Linear Invariante no Tempo.

em que:

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) &= \frac{\delta^n y(t)}{\delta t^n} y(t)^{(n-1)} = \frac{\delta y(t)^{n-1}}{\delta t^{n-1}} \dots y(t)' = \frac{\delta y(t)}{\delta t} \\ u^{(m)}(t) &= \frac{\delta u(t)^m}{\delta t^m} + u(t)^{m-1} = \frac{\delta u(t)^{m-1}}{\delta t^{m-1}} \dots u(t)' = \frac{\delta u(t)}{\delta t} u(t) \end{aligned} \quad (9)$$

e os coeficientes q_i com $i = 0, 1, 2, 3 \dots n$ e p_j com $j = 0, 1, 2, 3 \dots m$ são constantes e dependem essencialmente dos parâmetros do sistema considerado. Geralmente $n \geq m$, sendo n a ordem da equação que também representa o seu sistema. Considerando os valores iniciais nulos, temos, como resultado:

$$\begin{aligned} (q_n s^n + q_{n-1} s^{n-1} + \dots + q_2 s^2 + q_1 s + q_0) Y(s) &= \\ (p_m s^m + p_{m-1} s^{m-1} + \dots + p_2 s^2 + p_1 s + p_0) U(s) \end{aligned} \quad (10)$$

Definindo

$$Q(s) = q_n s^n + q_{n-1} s^{n-1} + \dots + q_2 s^2 + q_1 s + q_0 \quad (11)$$

e

$$P(s) = p_m s^m + p_{m-1} s^{m-1} + \dots + p_2 s^2 + p_1 s + p_0 \quad (12)$$

podemos escrever:

$$Q(s)Y(s) = P(s)U(s) \quad (13)$$

“Denomina-se função de transferência $G(s)$ de um sistema linear, de parâmetros concentrados, invariantes no tempo e de entrada e saída únicas, a relação entre as transformadas de Laplace da variável de saída e da variável de entrada, supondo condições iniciais nulas.” (MAYA, P.A. et al, 2011)

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (14)$$

2.3.1 Polo

Um polo é definido como uma raiz do denominador da função de transferência, ou seja, é uma raiz do polinômio característico. Informações importantes sobre o comportamento dinâmico do sistema podem ser obtidos através da análise dos polos, tais como:

1. A estabilidade do sistema;
2. O potencial para transientes periódicos;

Desta forma, não podemos deixar de perceber que o controle de realimentação afeta os polos, como, por exemplo, a aplicação de um controle proporcional mais integral.

2.3.2 Zeros

Um zero é uma raiz do numerador da função de transferência. Zeros não influenciam os expoentes.

2.3.3 Ordem de Numerador e Denominador

Os sistemas físicos estão em conformidade com uma limitação específica entre as ordens do numerador e do denominador, ou seja, a ordem do denominador deve ser maior que a ordem do numerador, ou melhor dizendo, o número de polos sempre deve ser maior do que o de zeros, pois a função $F(s)$ torna-se ilimitada quando o $|s|$ tende para infinito.

2.3.4 Ganho no estado estacionário

O ganho de estado estacionário é o valor da divisão da variação da saída com a variação da entrada para todos os sistemas. O ganho no estado estacionário é normalmente representado por K e podemos representá-lo por meio da Equação 15.

$$K = \frac{\delta \text{Saída}}{\delta \text{Entrada}} \quad (15)$$

2.4 Diagrama de Blocos

É uma representação em forma de blocos⁵ entre as variáveis do sistema. Podem ser usados para representação de sistemas, sendo uma forma conveniente de representar as equações que descrevem o comportamento dinâmico de sistemas lineares e não lineares. Nos

⁵Forma de apresentação figurativa.

casos em que a função de transferência é igual a 1, o bloco pode ser dispensado.(MAYA, P.A. et al, 2011)

2.5 Métodos Gráficos de Identificação do Processo (Curva de reação)

De acordo com Katsuhiko, 2015, o método da curva de reação é um dos processos mais utilizados para a identificação de modelos dinâmicos, fornecendo funções de transferência adequadas para muitas aplicações. Para a aplicação dos métodos, devemos executar os seguintes procedimentos:

1. Permita que o processo atinja o estado estacionário.
2. Introduza uma única mudança de etapa na variável de entrada.
3. Recolha dados de resposta de entrada e saída até o processo voltar ao estado estacionário.
4. Execute os cálculos da curva de reação do processo gráfico.

Esse processo nos permite a aproximação para um sistema de primeira ordem com atraso, ou segunda ordem sem atraso do tipo:

$$F(s) = \frac{K \cdot e^{-\theta \cdot s}}{\tau \cdot s + 1} \quad (16)$$

2.5.1 Tipos de Malhas

Em sistemas de controle pode-se colocar uma malha de controle em duas condições: em malha aberta (figura 3) e em malha fechada (figura 4). Em sistemas de malha aberta não há atuação do compensador⁶, em relação à variável de saída. Dessa forma, podemos dizer que não existe uma retroalimentação. Já o sistema de malha fechada compara a variável controlada (PV⁷) com a variável de referência (SP⁸) e gera um valor de erro (Equação (17)), que será usado para compensar a saída.(KATSUHIRO, O. et al, 2015)

⁶Como por exemplo, controladores PID's, Fuzzy dentre outros.

⁷Variável que desejamos controlar, como, por exemplo, temperatura, nível, pressão, vazão e outras.

⁸Representa o valor que desejamos para a variável controlada PV.

$$e(t) = sp - pv \quad (17)$$

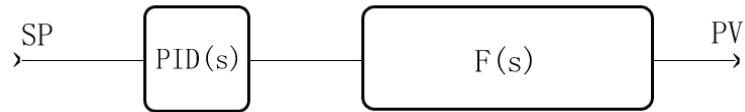


Figura 3: Malha aberta

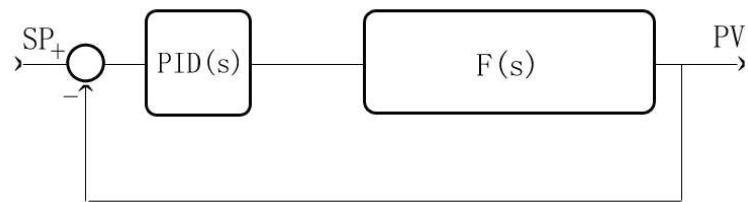


Figura 4: Malha fechada

2.5.2 Zeagle Nichols – Primeira Ordem

A primeira técnica adaptativa é o método de Zegle Nichols(1942), que consiste em aplicar uma reta tangente à curva em um ponto de inflexão (figura 5), para se determinar as constantes de ganho, tempo e atraso.(Marlin, T. E.,2014)

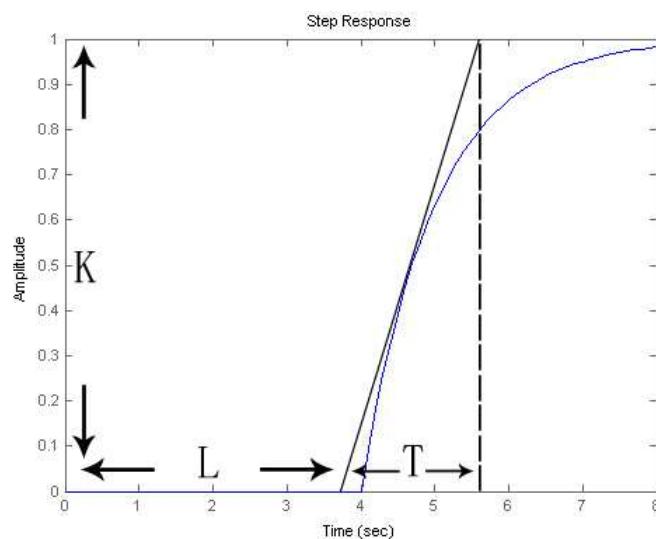


Figura 5: Método de Zeagle Nichols/K:Ganho;L:Atraso (θ);T:Constante de tempo (τ);

Através da divisão da variação de saída (PV) e entrada (MV) conseguimos determinar o valor do ganho do sistema a ser analisado, que está representado na Equação (18).

$$\begin{aligned}
 Y(t) &= K \cdot u(t) \cdot [1 - e^{-(1-\theta) \cdot t}] \\
 Y(t)' &= K \cdot u(t) \cdot \frac{e^{-(1-\theta) \cdot t}}{\tau} \\
 K &= \frac{\delta Y(t)}{\delta u(t)}
 \end{aligned} \tag{18}$$

2.5.3 Método de Smith – Primeira Ordem

O Dr. Cecil Smith (1972) propôs que os valores de θ e de τ sejam selecionados de tal modo que o modelo e as respostas reais coincidam em dois pontos que apresentam elevada taxa de variação. Os valores intermediários determinados a partir do gráfico são a magnitude do valor aplicado na entrada e a magnitude do estado de mudança na saída, sendo adotados dois tempos, em que o primeiro é quando a saída atinge 28%, e o segundo, 63% do valor final da saída (Figura 6). (Marlin, T. E., 2014)

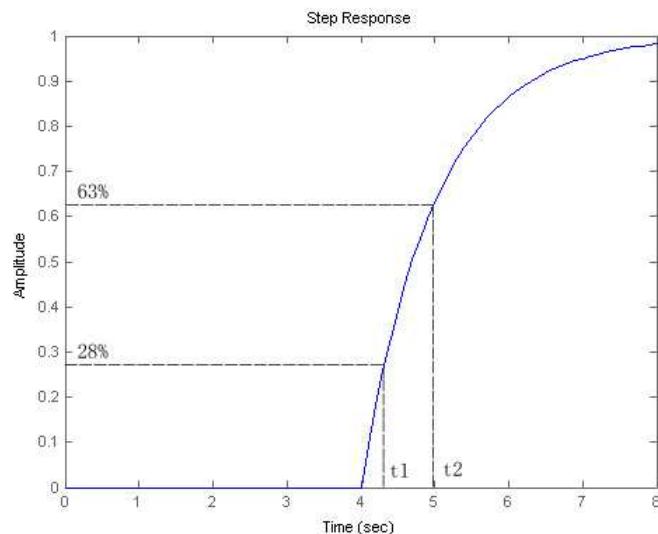


Figura 6: Método de Smith – Primeira Ordem

$$K = \frac{\delta Y(t)}{\delta u(t)}$$

$$Y(\theta + \tau) = u(t) \cdot (1 - e^{-1}) = 0.623 \cdot u(t)$$

$$Y \cdot \left(\theta + \frac{\tau}{3}\right) = u(t) \cdot (1 - e^{-\frac{1}{3}}) = 0.283 \cdot u(t)$$

$$t_2 = \theta + \tau \quad (19)$$

$$t_1 = \theta + \frac{\tau}{3}$$

$$\tau = \frac{3}{2} \cdot (t_2 - t_1)$$

$$\theta = t_2 - \tau$$

2.5.4 Método de Sundaresan e Krishnaswamy - Primeira Ordem

Este método também evita a utilização do ponto de inflexão para estimar a constante de tempo τ e de atraso de transporte θ . Eles propuseram que dois tempos, t_1 e t_2 (figura 7), sejam estimados a partir da curva de resposta a um degrau, correspondente aos 35.3% e 85.3% da resposta, respectivamente.(Marlin, T. E., 2014)

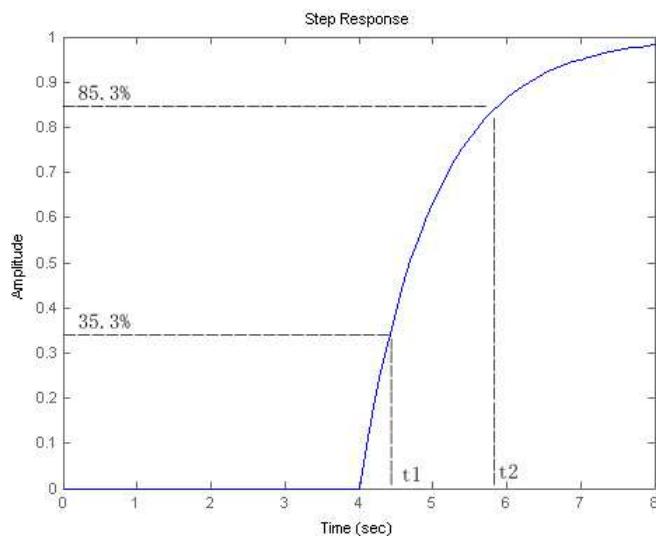


Figura 7: Método de Sundaresan e Krishnaswamy - Primeira Ordem

$$K = \frac{\delta Y(t)}{\delta u(t)}$$

$$t_2 - \theta = 1.91723 \cdot \tau$$

$$t_1 - \theta = 0.43541 \cdot \tau \quad (20)$$

$$\tau = 0.67233 \cdot (t_2 - t_1)$$

$$\theta = 1.29273 \cdot t_1 - 0.292737 \cdot t_2$$

2.5.5 Método de Nishikawa - Primeira Ordem

Consiste em determinar os valores das constantes usando o cálculo das áreas (figura 8). (NISHIKAWA, H., 2007).

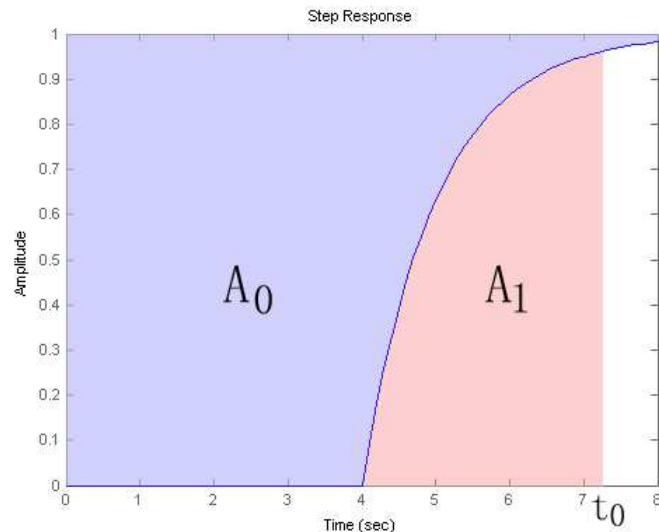


Figura 8: Método de Nishikawa

$$\begin{aligned}
K_p &= \frac{\delta y(t)}{\delta u(t)'} \\
A_0 &= \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{\tau} \cdot t} \cdot dt \\
t_0 &= \frac{A_0}{\delta y(t)} \\
A_1 &= \int_0^{t_0} (1 - e^{-\frac{1}{\tau} \cdot t}) \cdot dt \\
\tau &= \frac{A_1}{0.367 \cdot \delta y(t)} \\
\theta &= t_0 - \tau
\end{aligned} \tag{21}$$

2.5.6 Integração por Área - Método Trapezoidal

É um processo numérico de integração que tem como objetivo, definir o valor da integral dentro de um intervalo determinado, o que corresponde à área sob a curva que define a função $f(t)$ no intervalo t_n a $t_{(n+1)}$. (ARENALES, S. et al, 2008)

O método trapezoidal é considerado uma interpolação linear, na qual a função $f(t)$ é representada por um polinômio $p(t)$ (equação 22). Desta forma, a área sob a reta representa o valor da integral.

$$A = \int_{t_n}^{t_{(n+1)}} f(t) \cdot dt = \frac{\Delta t}{2} \cdot (f(t_{(n+1)}) + f(t_n)) \tag{22}$$

em que Δt : Intervalo entre os dois tempos amostrados.

2.5.7 Método Harriot - Segunda Ordem Sobre Amortecido

Harriot plotou a resposta na forma fracionária de segunda ordem (sem tempo morto). Encontrou que todas as curvas se intersectam aproximadamente a 73% do valor final do estado estável, em que $\frac{t}{\tau_1 + \tau_2}$ é igual a 1.3. (Marlin, T. E., 2014)

$$K_p = \frac{Y(t)'}{u(t)'} \\ \tau_{tot} = \frac{T_{23\%}}{1.3} \quad (23)$$

$$\tau_1 = \tau_{rat} \cdot \tau_{tot}$$

$$\tau_2 = \tau_{tot} - \tau_1$$

$$G(s) = \frac{K_p}{(\tau_1 \cdot s + 1)(\tau_2 \cdot s + 1)} \quad (24)$$

2.5.8 Método de Smith – Segunda Ordem

O método de Smith consiste na obtenção de dois oriundos da resposta ao degrau unitário (Marlin, T. E., 2014). Assume que o modelo de segunda ordem pode ser dado por:

$$G(s) = \frac{K \cdot e^{-\theta \cdot s}}{\tau^2 \cdot s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \tau \cdot s + 1} \quad (25)$$

Tomamos os seguintes procedimentos para o cálculo:

1. Determinar t_{20} (20% do valor final) e t_{60} (60% do valor final), da resposta ao degrau.
2. Determinar ζ e $\frac{t_{60}}{\tau}$, usando a figura 9.
3. Determinar o valor de τ , dado que t_{60} é conhecido.
4. Calcular o valor do ganho da planta usando a Equação (26).

$$K_p = \frac{Y(t)'}{u(t)'} \quad (26)$$

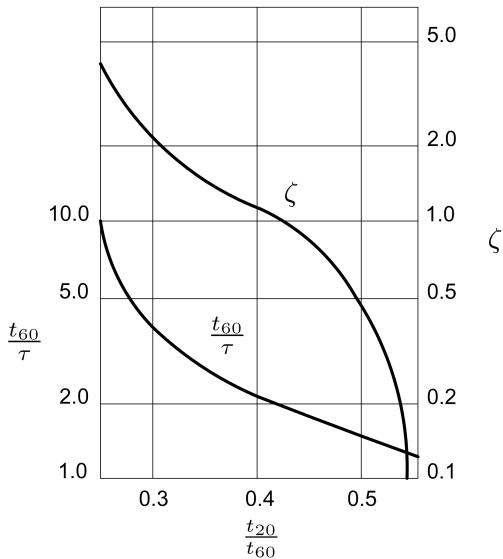


Figura 9: Gráfico de Smith

2.6 Sistema de Controle

Para discorrer sobre o que é um controle de processo, inicialmente vamos apresentar um exemplo, que é o controle de temperatura, onde temos como variável controlada (PV) a temperatura aferida por um PT-100⁹ a nossa variável manipulada (MV) é a corrente elétrica que realiza o aquecimento da água por meio de uma resistência, caso a mesma esteja diferente da variável desejada (SP). Portanto, dadas as vezes que a PV ficar divergente do valor desejado, o controlador irá atuar na variável manipulada. Desta forma, podemos dizer que o sistema de controle é uma interconexão de componentes formando uma configuração de sistema que produzirá uma resposta desejada. O processo pode estar em dois tipos de malhas de controle: aberta e fechada. Um sistema em malha aberta é uma configuração onde não há comparação da variável controlada com a desejada. Sendo assim esse tipo de planta não está protegida contra perturbações externas, tais como temperatura e alterações na variável manipulada. Ao contrário de um sistema de malha aberta, um sistema de controle de malha fechada utiliza uma medida adicional para comparar a saída real com a resposta desejada. Essa medida é chamada de sinal de retro alimentação, sendo que esse tipo de conceito tem sido usado como alicerce para análise e projeto de sistemas de controle.(KATSUHIRO, O. et al, 2015)

⁹É um tipo de termorresistência que mede a temperatura pela correlação da sua resistência elétrica com a temperatura. A maioria destes sensores é feita a partir de uma espiral de fio fino montada num suporte cerâmico ou de vidro.

2.6.1 Controladores PID

A classificação dos controladores PID é realizada a partir da ação de controle que o mesmo exerce. Em outras palavras, é o tipo de operação matemática que é realizada sobre o erro para se determinar o sinal de saída. Podemos classificá-los em três ações que são: Proporcional(K_p), Integral($\frac{K_i}{s}$) e Derivativa($K_d \cdot s$) (Equação (27)). Muitos processos industriais são controlados a partir de controladores PID, Sua popularidade é atribuída parcialmente ao seu bom desempenho em uma ampla faixa de condições de operação e à sua simplicidade de funcionamento.

$$G(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d \cdot s \quad (27)$$

2.6.2 Ação Proporcional

O controlador proporcional (P) é o mais simples dos controladores, pois sua ação é a de multiplicar o valor do erro por um ganho proporcional(Equação (28)). Sua função de transferência é dada por :

$$G(s)_p = K_p \cdot e(t) \quad (28)$$

em que:

K_p :Ganho Proporcional

$e(t)$:Erro

O controlador proporcional em malha fechada apresenta o erro de regime permanente, para um sistema de primeira ordem apresentado a seguir:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_p \cdot K \cdot e^{-\theta \cdot s}}{\tau \cdot s + 1} \quad (29)$$

Fechando a malha, temos:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K_p \cdot K \cdot e^{-\theta \cdot s}}{\tau \cdot s + 1 + K_p \cdot K \cdot e^{-\theta \cdot s}} \quad (30)$$

Aplicando o teorema do valor final para determinar o valor de estabilização da variável controlada, temos:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{K_p \cdot K \cdot e^{-\theta \cdot s}}{\tau \cdot s + 1 + K_p \cdot K \cdot e^{-\theta \cdot s}} = \frac{K_p \cdot K}{1 + K_p \cdot K} \quad (31)$$

Concluímos que:

1. A ordem do sistema não muda;
2. Se o ganho proporcional aumenta, a frequência de oscilação aumenta e o fator de amortecimento diminui.

2.6.3 Ação Integral

A ação integral produz um sinal de saída que é proporcional à magnitude e à duração do erro, ou seja, ao erro acumulado. Isso fornece uma alternativa para corrigir o erro de *off-set* gerado pela ação integral e acelera a resposta do sistema, permitindo chegar ao valor de referência.

2.6.4 Ação Derivativa

A ação derivativa fornece uma correção antecipada do erro, diminuindo o tempo de resposta e melhorando a estabilidade do sistema. Contudo não é aconselhável usá-la em sistemas com muita vibração.

2.7 Métodos de sintonia

São métodos utilizados para a determinação dos parâmetros de ganho: de integração, derivação e proporção.

2.7.1 Síntese Direta

Este método busca definir a função de transferência de malha aberta para impor a resposta de malha fechada. Sendo assim, é necessário verificar se o controlador resultante é realizável, ou seja, se não possui um tempo morto positivo ou temos de diferenciação pura com mais zeros que polos na função de transferência.

Demonstração:

Dada a função em frequência:

$$F(s) = \frac{K_p \cdot e^{-\theta \cdot s}}{\tau \cdot s + 1} \quad (32)$$

Adicionando um controlador $G(s)$ em série com a função e fechando uma realimentação negativa, temos:

$$G(s) = \frac{\tau}{(\tau_d + \theta) \cdot K_p} + \frac{1}{(\tau_d + \theta) \cdot K_p \cdot s} \quad (33)$$

Sendo assim, podemos construir a seguinte tabela:

Tabela 1: Síntese direta

Modular	Parâmetros do Controlador PID		
	K_p	T_i	T_d
$G(s) = \frac{K}{\tau \cdot s + 1}$	$\frac{\tau}{K \cdot \tau_c}$	τ	0
$G(s) = \frac{K \cdot e^{-\theta \cdot s}}{\tau \cdot s + 1}$	$\frac{\tau}{K \cdot (\tau_c + \theta)}$	τ	0

2.8 Algoritmo Genético

São algoritmos de otimização numérica, inspirados tanto na seleção natural quanto na genética natural, podendo ser aplicado a uma gama de problemas, sendo usados para ajudar a resolver problemas práticos do dia a dia.

A ideia de usar uma população de soluções para resolver problemas de otimização de engenharia prática foi considerada, várias vezes, durante as décadas de 1950 e 1960. No entanto, o AG foi inventado por John Holland, em 1960. Os seus motivos para desenvolver tais os algoritmos foram muito além do tipo de resolução de problemas convencionais.(COLEY, David A.,1999)

Constituição dos algoritmos genéticos:

1. Um número ou população de suposições da solução para o problema;
2. Uma maneira de calcular o quão são bons ou ruins as soluções individuais dentro da população;
3. Um método para misturar fragmentos para formar melhores soluções;
4. Um operador de mutação para evitar a perda permanente de diversidade dentro

das soluções.

2.8.1 Funcionamento

Em vez de partir de um único ponto (ou adivinhar) dentro do espaço de busca, AG's são inicializados com população de suposições. Estes são geralmente aleatórios e espalhados por todo o espaço de busca. Um algoritmo típico usa três operadores - seleção, recombinação e mutação (escolhidos em parte por analogia com o mundo natural) - a fim de direcionar a população, ao longo de uma série de etapas de tempo ou gerações, para a convergência no ótimo global. Normalmente, essas suposições iniciais são mantidas como codificações binárias (ou strings) das variáveis verdadeiras, embora um número crescente de AG's use "valores reais" (ou seja, base decimal), ou codificações que foram escolhidas para imitar, de alguma maneira, a estrutura de dados naturais do problema.(COLEY, David A.,1999)

Quanto aos três principais operadores da população:

1. A seleção tenta pressionar a população de uma maneira semelhante ao da seleção natural encontrada nos sistemas biológicos.
2. Recombinação permite que as soluções troquem informações de forma semelhante à que é usada por um organismo natural submetido à reprodução sexual.
3. Mutação é usada para mudar aleatoriamente (*flip*) o valor de bits individuais dentro de strings individuais. O uso típico é usado com muita moderação.

Após, os operadores de seleção, recombinação e mutação foram aplicadas à população inicial. Uma nova população será formada e adicionado mais 1 no contador da geração. Este processo de seleção, *crossover* e mutação é continuado até certo número de gerações terem decorrido ou alguma forma de o critério de convergência ser cumprido.

2.8.2 Mutação

No mundo natural, vários processos podem causar mutação. As taxas de bactérias são aproximadamente $2 \cdot 10^{-3}$ por genoma por geração (FU90, BA96, p19.). Por meio de uma representação binária, a mutação é particularmente fácil de implementar. A cada nova geração toda a população é varrida, com cada posição de bit em cada corda visitada, e

muito ocasionalmente, 1 é invertido para 0 ou vice-versa. A probabilidade de mutação P é tipicamente da ordem de 0,001, ou seja, um bit em cada mil será mutado. No entanto, assim como em todo o resto sobre o AG's, a correta configuração para P dependerá do problema. Alguns autores realizam a mutação, visitando cada posição de bit, jogando aleatoriamente 0 ou 1 e substituindo o bit existente por esse novo valor. Como há uma probabilidade de 50% de o bit pré-existente e o substituto serem idênticos, a mutação será realizada apenas à metade da taxa.

2.8.3 Seleção

A seleção é particularmente simples: os melhores 50% são selecionados para se reproduzir, e o resto é jogado fora. Este é um método prático, mas não é o mais comum. Um dos motivos para isso é que, embora permita o melhor reproduzir (e para o pior); não faz distinção entre "bom" e "muito bom". Além disso, em vez de apenas permitir soluções pobres para avançar para a próxima geração com uma probabilidade muito menor, simplesmente os aniquila (reduzindo a diversidade genética da população). O mais comum operador de seleção proporcional é a roleta. Com isso abordar a probabilidade de seleção é proporcional à aptidão de um indivíduo.

Elitismo A seleção proporcional não garante a seleção do indivíduo mais apto. Embora pareça contraproducente, isso pode ser vantajoso para alguns problemas porque ele retarda o algoritmo, permitindo que se explore mais o espaço de pesquisa antes da convergência. Elitismo é a técnica quesegura a cada geração, os melhores indivíduos para que tais indivíduos não se percam durante a evolução.

2.8.4 Recombinação

O Algoritmo Genético usa *crossover* de ponto único como a recombinação de operadores. Os pares de indivíduos selecionados são submetidos *crossover* a um valor de probabilidade. Um número aleatório, R, é gerado no intervalo entre 0 e 1, e os indivíduos passam por *crossover* se, e somente, R for menor do que P, senão o par prossegue sem cruzamento. A nova população agora é constituída por N indivíduos (o mesmo número que a população original), criados por seleção e *crossover*. A mutação então opera em toda a população, exceto o membro da elite (se o elitismo está sendo aplicado). Finalizado o

processo, a população antiga é substituída pela nova e o contador de época é acrescido de mais 1.

2.8.5 Aptidão

Durante cada iteração, os princípios de seleção e reprodução são aplicados a uma população de candidatos que pode variar, dependendo da complexidade do problema e dos recursos computacionais disponíveis. Através da seleção, se determina quais indivíduos conseguirão se reproduzir, gerando um número determinado de descendentes para a próxima geração, com uma probabilidade determinada pela seu índice de aptidão. Em outras palavras, os indivíduos com maior adaptação relativa têm maiores chances de se reproduzir.

2.9 SBX (*Simulated Binary Crossover*)

O *crossover* binário simulado (SBX – *Simulated Binary Crossover*) trabalha com dois indivíduos selecionados P1 e P2 e cria dois novos indivíduos C1 e C2. O operador SBX, e o *crossover* Blend são considerados operados auto adaptativos, pois se adaptam automaticamente durante a execução de um algoritmo genético. O *crossover* SBX utiliza uma distribuição de probabilidade não uniforme bimodal. O indivíduo criado é uma aproximação de centro nos dois indivíduos pais, isto é, tem maior probabilidade de ser gerado em duas regiões, cujos centros são os dois indivíduos pais. (Deb, Joshi e Anand, 2001).

$$u_i = \text{rand}(1) \quad (34)$$

$$B_{qi} = (2 \cdot u_i)^{\frac{1}{\eta+1}} \quad u_i \leq \frac{1}{2} \quad (35)$$

$$B_{qi} = \left(\frac{1}{2 \cdot (1 - u_i)} \right)^{\frac{1}{\eta+1}} \quad u_i > \frac{1}{2} \quad (36)$$

$$C_1 = \frac{1}{2} \cdot ((1 - B_{qi}) \cdot P_1 + (1 + B_{qi}) \cdot P_2) \quad (37)$$

$$C_2 = \frac{1}{2} \cdot ((1 - B_{qi}) \cdot P_2 + (1 + B_{qi}) \cdot P_1) \quad (38)$$

onde o índice i é uma referência ao i -ésimo alelo; B_{qi} , é definido pela Equação 35 e 36; u_i , uma variável aleatória com distribuição uniforme entre 0 e 1. Note que, como

não pode existir coeficientes negativos, existe um teste que traz para zero os alelos que porventura se tornem negativos ao final da recombinação.

3 Trabalhos Relacionados

O desejo de automatizar o modelamento de sistemas não é recente. Funções de transferência podem descrever sistemas e permitir seu controle. Trabalhos como o visto em (He et al. 1996) utiliza técnicas de busca estocásticas para gerar funções de transferência. Em (Loyka 1999), existe a aplicação de algoritmos genéticos para modelar sistemas não lineares. Trabalhos como os de (Nedelea et al. 2006) e de (Cabral and de Melo 2011) também se utilizam de algoritmos genéticos, relacionando-os com funções de transferências, porém, o objetivo de ambos é o modelamento de filtros, um sistema específico que difere do deste presente trabalho. Ainda sobre aplicações, em (McCall 2005) tem-se funções de transferência através de modelamento por otimização matemática no campo da imunologia. O trabalho de (Tavakolpour et al. 2010) foca em modelamento de sistemas com função de transferência, mas não trabalha com atrasos ou aplicações industriais. Em (Biradar et al. 2016), seus autores se preocupam com sistemas lineares invariantes no tempo, o tipo de sistemas para o qual este presente trabalho é focado, no entanto, difere em aplicações. O método aqui apresentado traz contribuições que diferem dos trabalhos relacionados, uma vez que considera que o sistema a ser modelado pode ditar a ordem da função de transferência, além de trazer comparações com os métodos consagrados de modelamento de sistemas. As aplicações de interesse são plantas industriais em produção, que podem ser amostradas em malha aberta ou em malha fechada.

4 Resultados e Discussão

Este trabalho apresenta os seguintes tópicos:

- Modelagem de primeira, segunda e terceira ordem em malha aberta.
- Modelagem de primeira, segunda e terceira ordem em malha fechada.
- Modelagem de uma planta industrial real.

Para o desenvolvimento deste trabalho, foi utilizada a ferramenta matemática Matlab®, sendo o ambiente de desenvolvimento do algoritmo genético utilizado para a modelagem das funções de transferência. O AG foi configurado com valores em torno dos considerados padrões pela literatura:

- População : 200
- Gerações : 30 (malha aberta) e 30 (malha fechada)
- Números de indivíduos de torneio : 3^{10}
- Probabilidade de recombinação: 0.95 ou 95% (na falha, os pais selecionados são copiados para a próxima geração)
- Probabilidade de mutação: 0.15 ou 15%
- Atualização da geração com troca dos pais, pelos filhos.

Para a simulação foi adotada uma função de transferência de terceira ordem com atraso sendo a nossa função procurada. Partindo do pressuposto de que não conhecemos a função de transferência e a única informação é a sua curva amostrada de resposta ao degrau unitário¹¹.

$$F(s) = \frac{0.5 \cdot e^{-10.s}}{2 \cdot s^3 + 4 \cdot s^2 + 5 \cdot s + 1} \quad (39)$$

¹⁰Três indivíduos são selecionados aleatoriamente e logo após é observado aquele que possui a melhor aptidão, o vencedor e enviado para o próximo processo.

¹¹A curva amostrada possui um total de 4500 pontos.

4.1 Considerações sobre o método

Como o usuário pode determinar a ordem com a qual deseja trabalhar para estimar a função de transferência de uma planta a partir de sua resposta ao degrau amostrada, existe a possibilidade de se usar uma ordem superior à da realidade. Se for esse o caso, o próprio AG irá convergir para soluções em que os coeficientes de maior grau sejam iguais a zero.

4.2 Levantando dados para a simulação

Seguindo o procedimento de levantamento de curva, o sistema foi deixado em malha aberta e foi aplicado um degrau unitário de amplitude igual a 1 na entrada. Realizou-se a captura dos dados de saída, armazenando, nas variáveis referências e tempo conforme código apresentado.

Algoritmo 1: Código MATLAB - 1

```
g = tf([0.5],[2 4 5 1]); \\
g.OutputDelay = 10; \\
[referencia,tempo] = step(g,0:0.1:450); \\
```

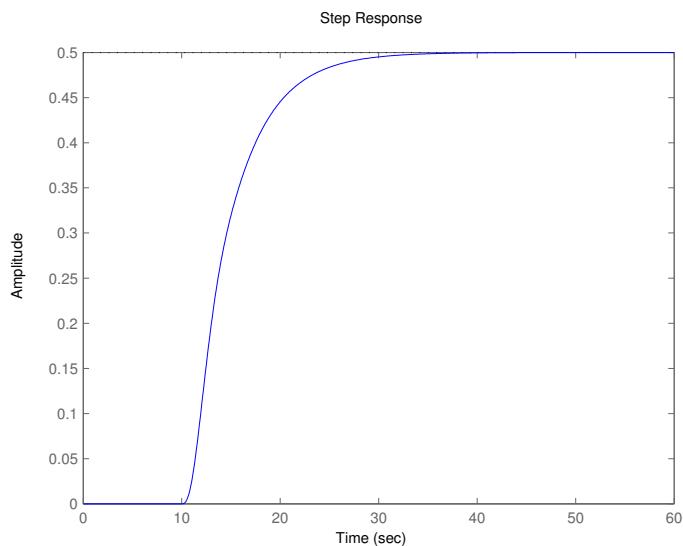


Figura 10: Resposta ao degrau unitário em malha aberta

4.3 Aplicação em malha aberta para aproximação de um modelo de Primeira Ordem

Neste tópico vamos modelar, de forma empírica, o modelo matemático, usando três métodos matemáticos. Foram adotados três métodos convencionais para determinar a função de transferência de primeira ordem com atraso.

4.3.1 Método de Smith

O primeiro método utilizado foi o de Smith. Para a sua aplicação, foram determinados os dois pontos de inflexão (28% e 63%) e seus tempos correspondentes e foi desenvolvido um script no Matlab para uma maior aproximação.

Algoritmo 2: Código MATLAB - Método de Smith

```
flag=0;
for i=1:10001
    if (respg(i,1)>=resp(end)*.283 && flag==0)
        flag=1;
        t1=respg(i,2);
    end
end
flag=0;
for i=1:10001
    if (respg(i,1)>=resp(end)*.632 && flag==0)
        flag=1;t2=respg(i,2);
    end
end
tal=3/2*(t2-t1);
atraso=t2-tal;
```

Demonstração

$$\begin{aligned}
t_{1(28\%)} &= 12.359 \\
t_{2(63\%)} &= 14.923 \\
\tau &= \frac{3}{2} \cdot (14.923 - 12.359) = 3.885 \\
\theta &= 14.923 - 3.885 = 11.1 \\
F(s) &= \frac{0.5 \cdot e^{-11.1 \cdot s}}{3.885 \cdot s + 1}
\end{aligned} \tag{40}$$

Para comprovar a qualidade do modelo encontrado aplicou-se o método do erro quadrático que é comprovada pelo Figura 11 .

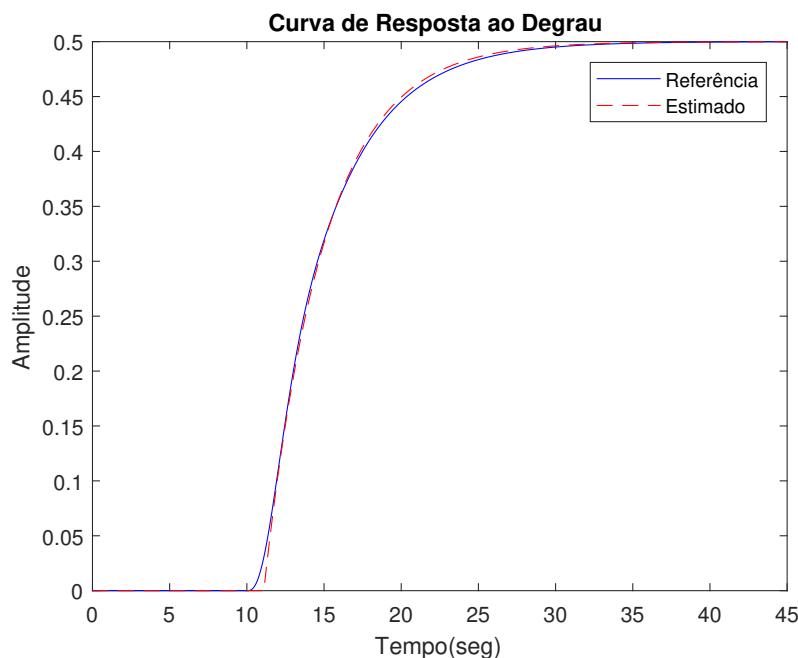


Figura 11: Gráfico de comparação das curvas.

$$EQ = \sqrt{\sum_{i=1}^m (R(i) - M(i))^2} = 0.233412 \tag{41}$$

Sendo:

$R(i)$: Valores de referência;

$M(i)$: Valores do modelo gerado¹²;

¹²Valores estimados.

4.3.2 Método de Sundaresan e Krishnaswamy

O segundo método utilizado foi o de Sundaresan e Krishnaswamy e para a sua aplicação, foram determinados os dois pontos de inflexão (35,3% e 85,3%) e seus tempos correspondentes e foi desenvolvido um script no Matlab para uma maior aproximação.

Algoritmo 3: Código MATLAB - Método de Sundaresan e Krishnaswamy

```

flag=0;
for i=1:10001
if (respg(i,1)>=resp(end)*.283 && flag==0)
flag=1;
t1=respg(i,2);
end
end
flag=0;
for i=1:10001
if (respg(i,1)>=resp(end)*.632 && flag==0)
flag=1;t2=respg(i,2);
end
end
tal=3/2*(t2-t1);
atraso=t2-tal;

```

Demonstração

$$\begin{aligned}
t_{1(35.3\%)} &= 12.739 \\
t_{2(85.3\%)} &= 18.739 \\
\tau &= 0.67 \cdot (18.739 - 12.739) = 4.04 \\
\theta &= \frac{1}{3} \cdot 12.739 - 0.29 \cdot 18.739 = 11.1 \\
F(s) &= \frac{0.5 \cdot e^{-11.1 \cdot s}}{4.04 \cdot s + 1}
\end{aligned} \tag{42}$$

Para comprovar a qualidade do modelo encontrado, aplicou-se o método do erro quadrático que é comprovada pela Figura 12 .

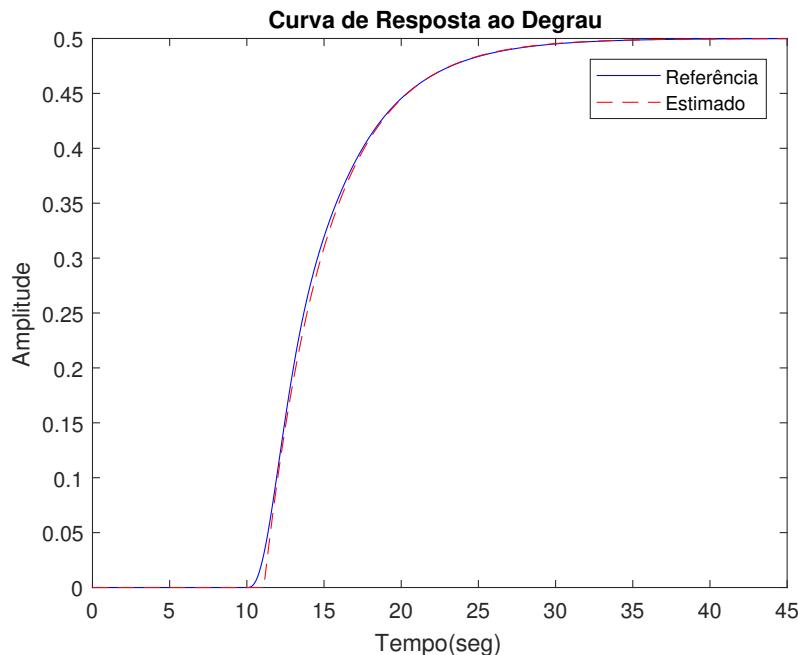


Figura 12: Gráfico de comparação das curvas.

$$EQ = \sqrt{\sum_{i=1}^m (R(i) - M(i))^2} = 0.3234407 \quad (43)$$

Sendo:

$R(i)$: Valores de referência;

$M(i)$: Valores do modelo gerado;

4.3.3 Método de Nishikawa

O terceiro método utilizado foi o de Nishikawa e, para a sua aplicação, foi determinada a área superior da resposta ao degrau, usada como tempo para a determinação da área inferior.

Finalizado o processo, encontrou-se:

$$A_0 = 7.499$$

$$A_1 = 0.7546$$

Algoritmo 4: Código Matlab - Nishikawa

```
vi=respq(1,1);
A0=0;
for i=2:100001
    A0=(1-(kk+respq(i,1)))*0.001/2+A0;
    vi=respq(i,1);
end
T0=A0/.5;
T0=T0/.001;
vi=respq(1,1);
A1=0;
for i=2:T0
    A1=(vi+respq(i,1))*0.001/2+A1;
    vi=respq(i,1);
end
T0=A0/.5;
tal=A1/(0.368*0.5);
atraso=T0-tal;
```

$$F(s) = \frac{0.5 \cdot e^{-10.9 \cdot s}}{4.101 \cdot s + 1} \quad (44)$$

Para comprovar a qualidade do modelo encontrado, aplicou-se o método do erro quadrático que é comprovada pela Figura 13 .

$$EQ = \sqrt{\sum_{i=1}^m (R(i) - M(i))^2} = 0.148342 \quad (45)$$

Sendo:

$R(i)$: Valores de referência;

$M(i)$: Valores do modelo gerado;

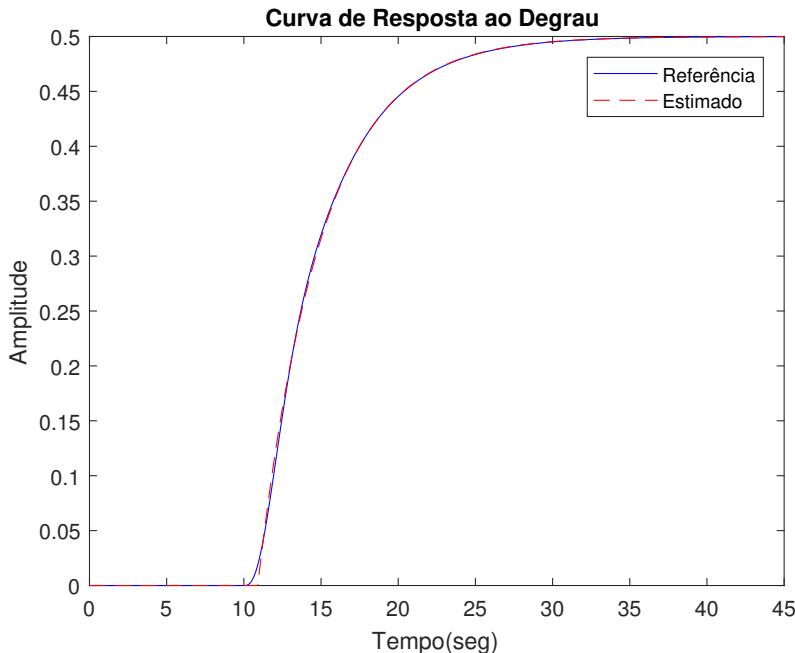


Figura 13: Gráfico de comparação das curvas.

4.4 Método não convencional em malha aberta para aproximação em primeira ordem.

Para a elaboração do algoritmo para a simulação, adotou-se a seguinte medida: para as aproximações, usou-se o valor do erro quadrático, como *fitness*, portanto, o que possui o menor erro quadrático seria o meu indivíduo mais apto. Devido a esse cenário, optou-se por usar o método da minimização (determinar o valor mínimo de erro). Para se determinar o ganho do sistema, optou-se por usar a seguinte método:

$$K_p = \frac{\Delta y(t)}{\Delta u(t)} \quad (46)$$

em que: K_p : Ganho da planta; $\frac{\Delta y(t)}{\Delta u(t)}$: Variação da saída pela entrada;

4.4.1 Estrutura do cromossomo

A estrutura do cromossomo foi baseada em um sistema de primeira ordem, no qual o ganho proporcional da planta já é conhecido.

$$F(s) = \frac{K_p \cdot e^{-\theta \cdot s}}{\tau \cdot s + 1} \quad (47)$$

Cromossomo: $[K_p, \theta, \tau]$;

4.4.2 Função Fitness

Como mencionado à função *fitness* é o erro quadrático entre a curva referência e a curva gerada pela função encontrada pelo algoritmo genético. Fazendo a Laplace inversa para o sistema de primeira ordem, temos:

$$\mathcal{L}^{-}[F(s)] = u(t) \cdot \left(K_p - K_p \cdot e^{\frac{-1}{\tau} \cdot (t-\theta)} \right) \quad (48)$$

$$erro = \sqrt{\sum_{t=0}^m \left(F(t-\theta)_{alvo} - u(t) \cdot \left(K_p - K_p \cdot e^{\frac{-1}{\tau} \cdot (t-\theta)} \right) \right)^2} \quad (49)$$

Algoritmo 5: Código : Função Fitness

```
H = tf(referencia(end), [indiv(3:end) 1]);
H.OutputDelay = indiv(1);
estimado = (step(H, tempo))';
f = sqrt(sum((estimado-referencia).^2));
```

4.4.3 Aplicação do método

Para uma melhor precisão, o algoritmo foi executado trinta vezes consecutivas e logo depois foi retirada a sua média para a determinação da função de transferência. Após o cálculo, determinou-se a função de aproximação apresentada uma comparação entre a curva de referência e a estimada na Figura 14 .

$$F(s) = \frac{0.5 \cdot e^{-10.93 \cdot s}}{4.06 \cdot s + 1} \quad (50)$$

que apresentou um erro quadrático de:

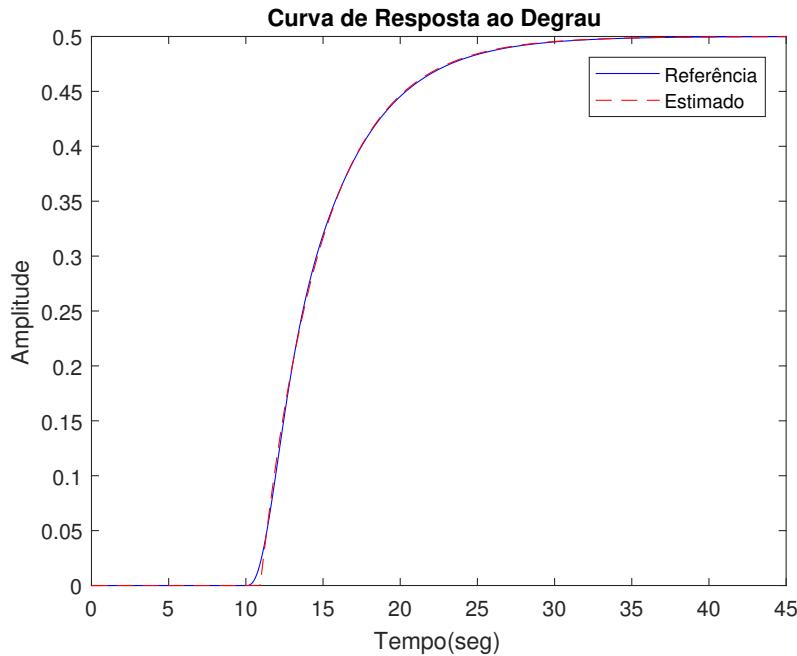


Figura 14: Gráfico de comparação das curvas.

$$EQ = \sqrt{\sum_{i=1}^m (R(i) - M(i))^2} = 0.01211 \quad (51)$$

Sendo:

$R(i)$: Valores de referência;

$M(i)$: Valores do modelo gerado;

4.4.4 Comparação dos resultados

A tabela 2 a seguir apresenta as funções e erros quadráticos encontrados, onde μ^{13} identifica a média e σ o desvio padrão do erro de aproximação da curva de referência.

4.5 Aplicação em malha aberta para aproximação de um modelo de segunda ordem

Para a modelagem de segunda ordem, aplicamos dois métodos, sendo que ambos não possuem, em sua modelagem, o cálculo do atraso (atraso de transporte), aproximado utilizando uma reta tangente à curva.

¹³Representa a média de trinta função de transferências encontradas pelo algoritmo genético.

Tabela 2: Tabela de comparação de métodos

Método	Função encontrada	Erro Quadrático
Smith	$F(s) = \frac{0.5 \cdot e^{-11.1 \cdot s}}{3.885 \cdot s + 1}$	0.233
Sundaresan e Krishnaswamy	$F(s) = \frac{0.5 \cdot e^{-11.1 \cdot s}}{4.04 \cdot s + 1}$	0.325
Nishikawa	$F(s) = \frac{0.5 \cdot e^{-10.9 \cdot s}}{4.101 \cdot s + 1}$	0.144
Algoritmo Genético	$F(s) = \frac{0.5 \cdot e^{-10.93 \cdot s}}{4.06 \cdot s + 1}$	$\mu = 0.012 \quad \sigma = 3.63 \cdot 10^{-7}$

4.5.1 Método Harriot

Primeiramente, determinamos o valor do tempo, quando atinge 73% do valor final para a resposta ao degrau unitário. Considerando o atraso igual a zero, temos que o valor de é 6.24 segundos para um valor de saída igual a 0.31053.

Dessa forma podemos determinar que a função aproximada em segunda ordem por Harriot é igual a:

$$F(s) = \frac{0.5 \cdot e^{-10 \cdot s}}{3.686 \cdot s^2 + 4.8s + 1} \quad (52)$$

A Figura 15 representa a comparação da função de referência com a função estimada.

4.5.2 Método de Smith

Para a aplicação do método de Smith foram encontrados os valores do tempo para 20 e 60% do valor final.

$$t_{20\%} = 1.93 \text{ e } t_{60\%} = 4.58$$

$$\frac{t_{20\%}}{t_{60\%}} = 0.42139$$

Usando o gráfico da figura 16 do método de Smith temos:

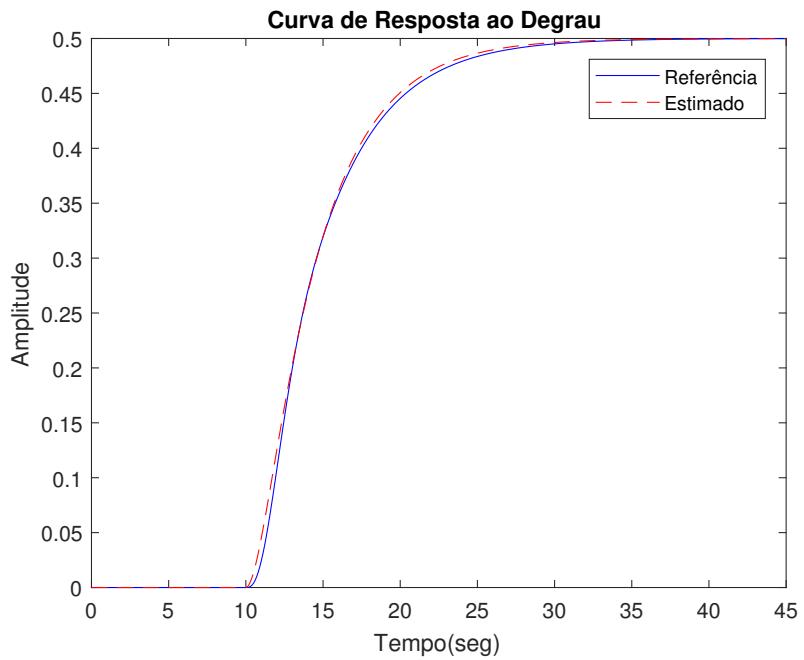


Figura 15: Gráfico de comparação das curvas.

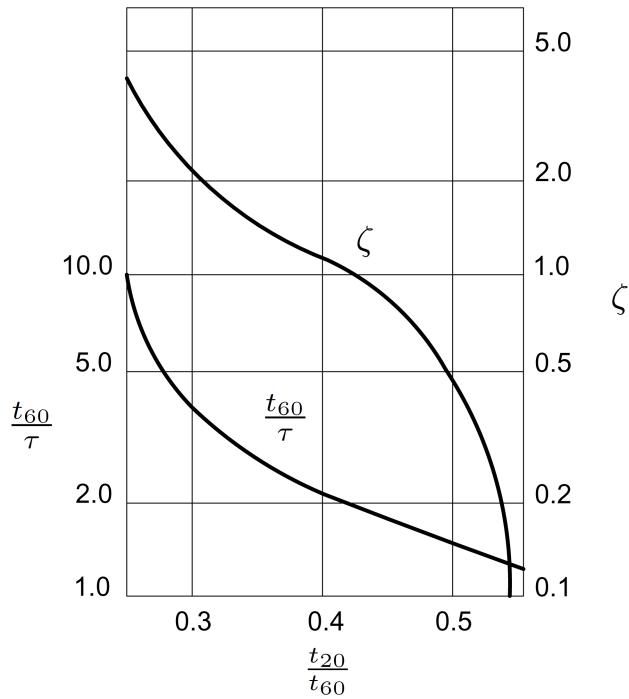


Figura 16: Gráfico de Smith

$$\frac{t_{60\%}}{\tau} = 2; \zeta = 1; \tau = \frac{t_{60\%}}{2} = 2.29$$

A função de transferência obtida:

$$F(s) = \frac{0.5 \cdot e^{-10 \cdot s}}{5.244 \cdot s^2 + 4.58 \cdot s + 1} \quad (53)$$

A Figura 17 representa a comparação da função de referência com a função estimada.

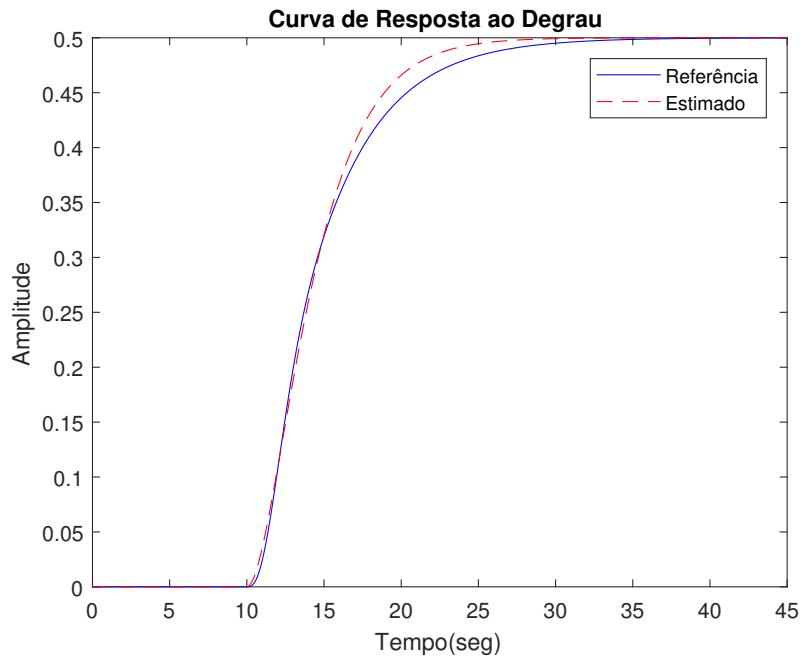


Figura 17: Gráfico de comparação das curvas.

4.6 Aproximação de sistema de segunda ordem usando método não convencional

Para determinar o ganho do sistema, optou-se por em usar o seguinte método:

$$K_p = \frac{\delta y(t)}{\delta u(t)} \quad (54)$$

onde: K_p : Ganho da planta; $\frac{\delta y(t)}{\delta u(t)}$: Variação da saída pela entrada;

O ganho proporcional da planta foi determinado utilizando a divisão de variação da saída pela variação da entrada.

$$F(s) = \frac{K_p \cdot e^{-\theta \cdot s}}{a \cdot s^2 + b \cdot s + 1} \quad (55)$$

$$\text{Cromossomo} = [K_p, \theta, a, b]$$

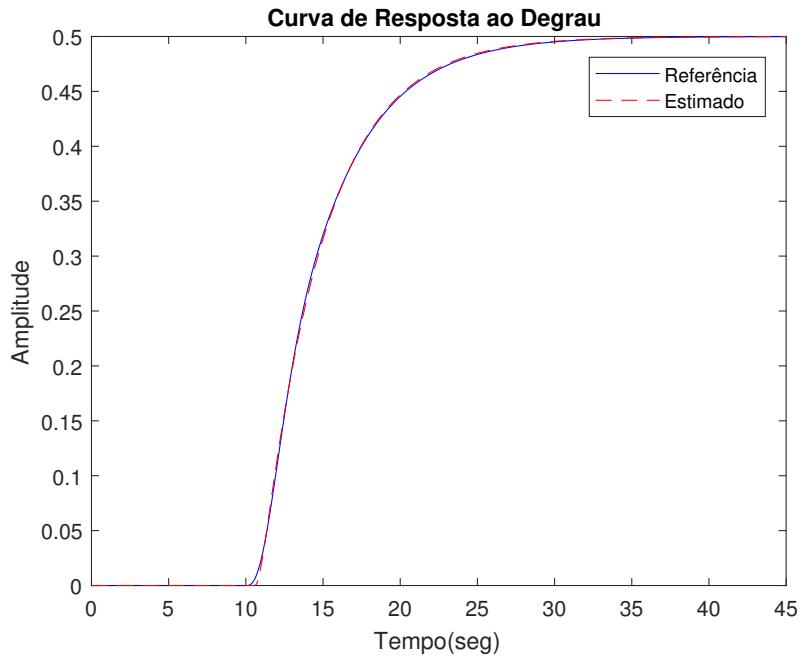


Figura 18: Gráfico de comparação das curvas.

A Figura 18 representa a comparação da função de referência com a função estimada.

A função *fitness* usada será a mesma adotada no sistema de 1^a ordem, que leva em consideração o erro entre a curva de referência e a curva adotada. Após a execução do algoritmo, obtemos a seguinte função de transferência:

$$F(s) = \frac{0.5 \cdot e^{-10.59 \cdot s}}{1.474 \cdot s^2 + 4.39 \cdot s + 1} \quad (56)$$

4.6.1 Comparação entre os métodos

A Tabela 3 a seguir apresenta as funções e erros quadráticos encontrados, onde μ^{14} identifica a média e σ o desvio padrão do erro de aproximação da curva de referência para a aproximação de um sistema de 2^a ordem.

Observando a Tabela 3, temos que o algoritmo genético apresentou um menor erro quadrático quando comparado aos dois métodos convencionais.

¹⁴Representa a média de trinta função de transferências encontradas pelo algoritmo genético.

Tabela 3: Comparaçāo de resultados de 2^a ordem

Método	Função encontrada	Erro Quadrático
Smith	$F(s) = \frac{0.5 \cdot e^{-10 \cdot s}}{5.244 \cdot s^2 + 4.58 \cdot s + 1}$	0.587
Harriot	$F(s) = \frac{0.5 \cdot e^{-10 \cdot s}}{3.686 \cdot s^2 + 4.8s + 1}$	0.325
Algorítimo		
Genético	$F(s) = \frac{0.5 \cdot e^{-10.59 \cdot s}}{1.474 \cdot s^2 + 4.39 \cdot s + 1}$	$\mu = 0.041 \sigma = 0.016$

4.7 Aproximação de sistema de 3^a ordem usando método não convencional

Não foi encontrado nenhum método de aproximação para sistema de terceira ordem. Aplicando o algorítimo agora com o cromossomo igual a $[K_p, \theta, a, b, c]$, foi encontrada a seguinte função de transferência mostrada na tabela 4 .

Tabela 4: Resultados de aproximação 3^a ordem

Método	Função encontrada	Erro Quadrático
Algorítimo		
Genético	$F(s) = \frac{0.5 \cdot e^{-9.9778 \cdot s}}{2.095 \cdot s^3 + 4.09 \cdot s^2 + 5.023 \cdot s + 1}$	$\mu = 0.0031 \sigma = 0.00205$

A Figura 19 representa a comparação da função de referência com a função estimada.

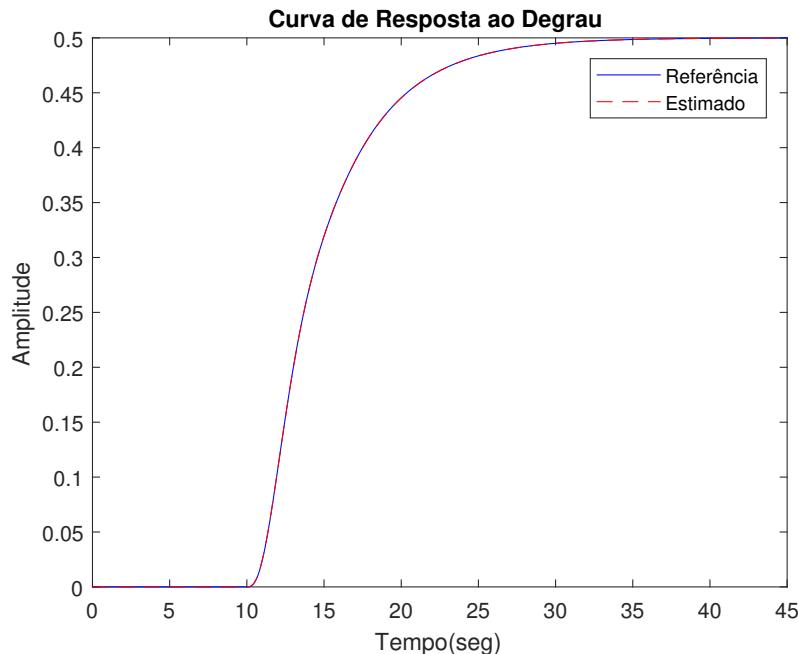


Figura 19: Gráfico de comparação das curvas.

Quando comparamos as duas funções na tabela 5, observa-se que a diferença é mínima.

Tabela 5: Função Alvo versus Função Encontrada

Função Alvo	Função Encontrada
$F(s) = \frac{0.5 \cdot e^{-10 \cdot s}}{2 \cdot s^3 + 4 \cdot s^2 + 5 \cdot s + 1}$	$F(s) = \frac{0.5 \cdot e^{-9.9778 \cdot s}}{2.095 \cdot s^3 + 4.09 \cdot s^2 + 5.023 \cdot s + 1}$

4.8 Modelagem de processos em malha fechada

Na realidade existem plantas industriais para as quais existe uma série de dificuldades de se interromper o processo e colocá-las em malha aberta. Por exemplo, o controle de temperatura de petróleo. Somada à dificuldade matemática para a modelagem dessa estrutura, optou-se também por adaptar o método proposto para determinar o modelo matemático da função de transferência em malha fechada. A estrutura do algoritmo usado foi análoga à da usada na malha aberta, alterando-se apenas parte da função de avaliação. Note, que em malha fechada, não é possível predefinir o valor do ganho K da planta a ser modelada, uma vez que a mesma é ligada em série com o compensador e perde essa referência. Assim, com o uso do método da síntese direta na equação de 1^a ordem encontra em malha aberta, determina-se os parâmetros do controlador PID apresentado na Equação (57) .

$$PID(s) = 1.215 + \frac{0.0422}{s} \quad (57)$$

Com o uso do Matlab®, código apresentado a seguir, foi gerada a curva de referência para o AG. Note que tal controlador PID não se conseguiu um controle suave (figura 20).

4.8.1 Determinação dos parâmetros do cromossomo

Para a determinação do cromossomo montou-se o seguinte cenário.

Um controlador com função em frequência igual a:

$$G(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d \cdot s \quad (58)$$

Algoritmo 6: Simulação de controle em malha fechada

```

g = tf ([ 0.5 ], [ 2 4 5 1 ]);
g . OutputDelay = 10 ;
g1 = ss ( pid ( 1.215 , 0.0422 , 0 ) * g );
h = feedback ( g1 , 1 );
[ referencia , tempo ] = step ( h , 0 : 0.1 : 450 );
ganho_degrau = 1;

```

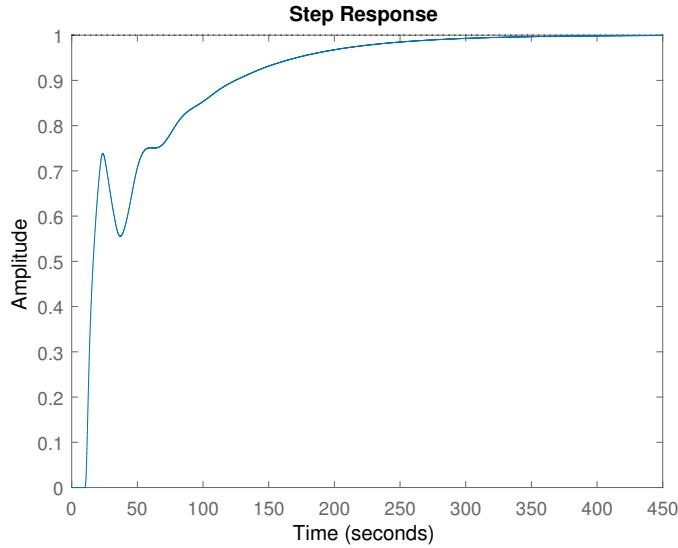


Figura 20: Curva de resposta em malha fechada

Em série com uma planta industrial igual a:

$$F(s) = \frac{K_p \cdot e^{-\theta \cdot s}}{a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_0} \quad (59)$$

Realizando o método de redução de blocos, chamado de realimentação negativa, geramos a seguinte função de transferência (equação 60):

$$\frac{PV(s)}{SP(s)} = \frac{\left(K_p + \frac{K_i}{s} + K_d \cdot s \right) \cdot \left(\frac{K \cdot e^{-\theta \cdot s}}{a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_0} \right)}{1 + \left(K_p + \frac{K_i}{s} + K_d \cdot s \right) \cdot \left(\frac{K \cdot e^{-\theta \cdot s}}{a_n \cdot s^n + a_{n-1} \cdot s^{n-1} + \dots + a_0} \right)} \quad (60)$$

Após finalizarmos as reduções, temos que o cromossomo pode ser representado conforme estrutura apresentada a seguir:

$$\text{Cromossomo} = [K_p, \theta, a_n, a_{n-1}, \dots, a]$$

Aplicando o algoritmo modificado para determinação em malha fechada, foram obtidos os resultados das tabelas 6 e 7, para estimativa de primeira, segunda e terceira ordem da

planta fictícia descrita pela Equação (39), a partir de uma curva de referência amostrada em situação de malha fechada, com conhecimento prévio dos parâmetros do conversor PID atuante. (DP é o desvio-padrão)

Tabela 6: Modelagem por ordem do sistema fictício em malha fechada

Parâmetro	1 ^a ordem		2 ^a ordem		3 ^a ordem	
	Média	DP	Média	DP	Média	DP
θ	10.80	0.323	9.988	0.269	9.951	0.307
K_p	0.501	$1.949 \cdot 10^{-3}$	0.500	$0.103 \cdot 10^{-3}$	0.500	$0.513 \cdot 10^{-3}$
coeficientes	4.205	0.307	4.018 4.984	$69.80 \cdot 10^{-3}$ $6.092 \cdot 10^{-3}$	1.999 4.004 5.000	0.134 0.133 0.011
Erro Quadrático	$14.64 \cdot 10^{-3}$	$14.72 \cdot 10^{-3}$	$7.73 \cdot 10^{-3}$	$3.38 \cdot 10^{-4}$	$2.34 \cdot 10^{-3}$	$2.69 \cdot 10^{-3}$

Tabela 7: Modelo estimado em malha fechada

Ordem	Modelo Estimado
1 ^a	$F(s) = \frac{0.501 \cdot e^{-10.80 \cdot s}}{4.205 \cdot s + 1}$
2 ^a	$F(s) = \frac{0.500 \cdot e^{-9.988 \cdot s}}{4.018 \cdot s^2 + 4.984 \cdot s + 1}$
3 ^a	$F(s) = \frac{0.500 \cdot e^{-9.951 \cdot s}}{1.999 \cdot s^3 + 4.004 \cdot s^2 + 5.000 \cdot s + 1}$

Como pode-se observar no modelo de 3^a ordem estimado pelo AG e descrito na Tabela 5, na comparação com o modelo da planta fictícia descrita na equação 39, a estimativa foi praticamente certeira. Note que os autores não encontraram, na literatura métodos que pudessem ser usados no caso de malha fechada, o que inviabilizou comparações com o AG.

4.9 Aplicação em um sistema de controle real

Para a aplicação do sistema, foi usada a curva de resposta ao degrau unitário de um sistema real(controle de nível de H_2O), oriundo de uma usina de cana do interior de São Paulo, a qual não quis se identificar. Para recolher os dados, foi ativado, no CLP¹⁵, a ferramenta *Datalink*¹⁶ que foi utilizada como meio de transmissão dos dados de resposta que continham a amplitude do sinal, com seu devido instante de tempo. Aplicando o

¹⁵Controlador Lógico Programável

¹⁶Função no CLP que permite a troca de dados em alta velocidade com a estação à distância recomendada máxima de 100m (par trançado blindado)

degrau unitário de amplitude 5, na entrada do sistema, foi obtida a resposta apresentada na figura 21 . Todos os parâmetros de configuração usados foram análogos aos da planta virtual.

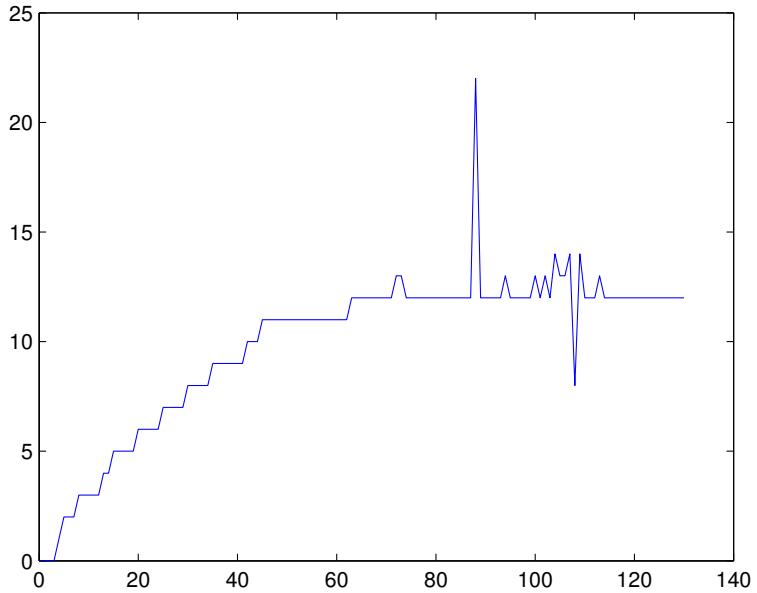


Figura 21: Resposta real ao degrau em malha aberta

Os dados foram carregados para o sistema e feitas as aproximações para 1^a,2^a e 3^o ordem. Ao término da aproximação para primeira ordem, o sistema apresentou a seguinte curva de aproximação, demonstrada na Figura 22, e sua função de transferência representada pela Equação (61), gerando um erro quadrático de 13.2104 quando comparado com a referência.

$$F(s) = \frac{2.4 \cdot e^{-3.74 \cdot s}}{22.27 \cdot s + 1} \quad (61)$$

Aplicando a mesma operação, mas, agora, para a segunda ordem, foram obtidos os seguintes resultados mostrados na Figura 23, apresentando um erro quadrático de 12.6920, e sua função de transferência apresentada pela Equação (62).

$$F(s) = \frac{2.4 \cdot e^{-0.0001 \cdot s}}{176.42 \cdot s^2 + 25.51 \cdot s + 1} \quad (62)$$

E, finalizando, a aproximação em 3^a ordem, que gerou os seguintes resultados com erro quadrático de 12.7013, com função de transferência representada pela Equação (63).

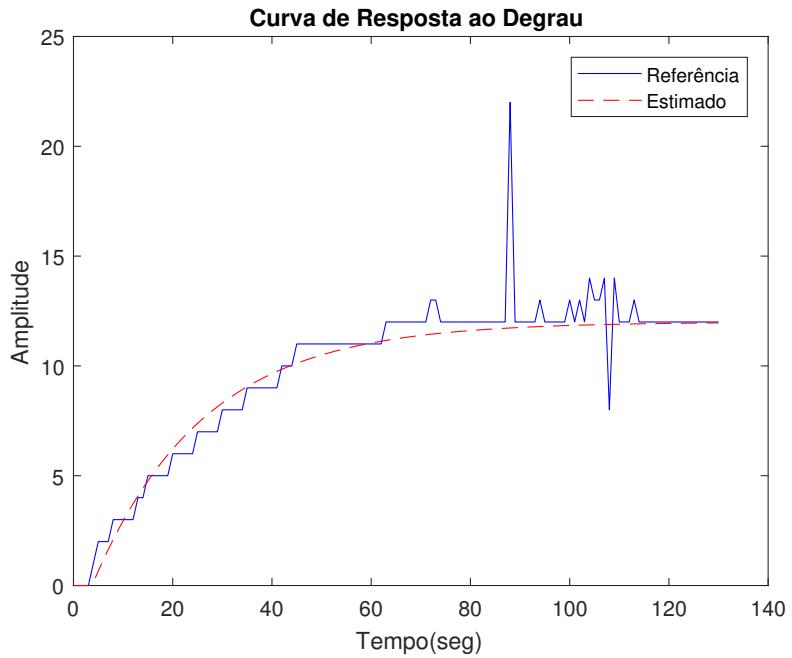


Figura 22: Curva de aproximação 1^a ordem

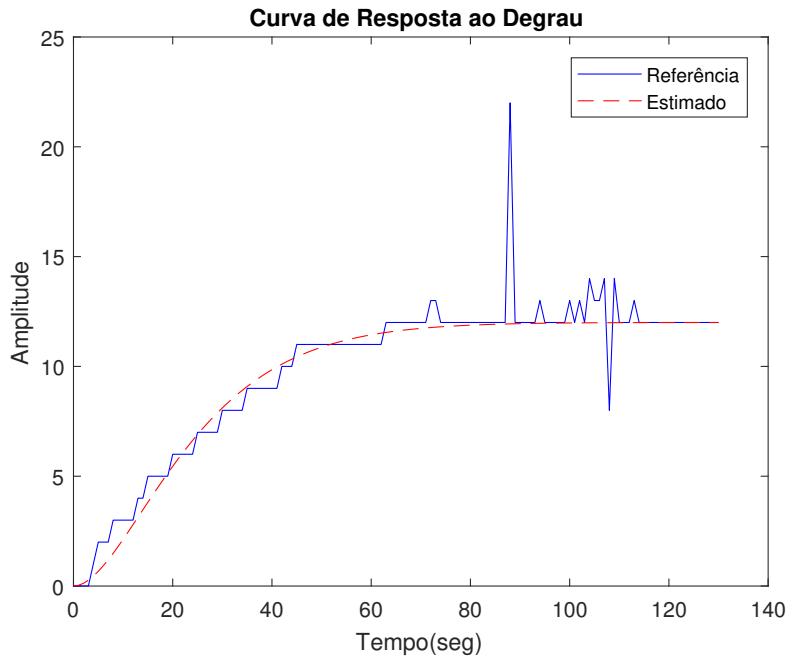


Figura 23: Curva de aproximação 2^a ordem

$$F(s) = \frac{2.4 \cdot e^{-0.0181 \cdot s}}{0.0016 \cdot s^3 + 159.47 \cdot s^2 + 25.4860 \cdot s + 1} \quad (63)$$

As aproximações indicaram que o sistema aproximado é de primeira ou segunda ordem, pois, como podemos observar, o termo de terceira ordem (s^3) está tendendo a zero, indicando que o sistema não pertence a essa ordem. De posse com a função de transferê-

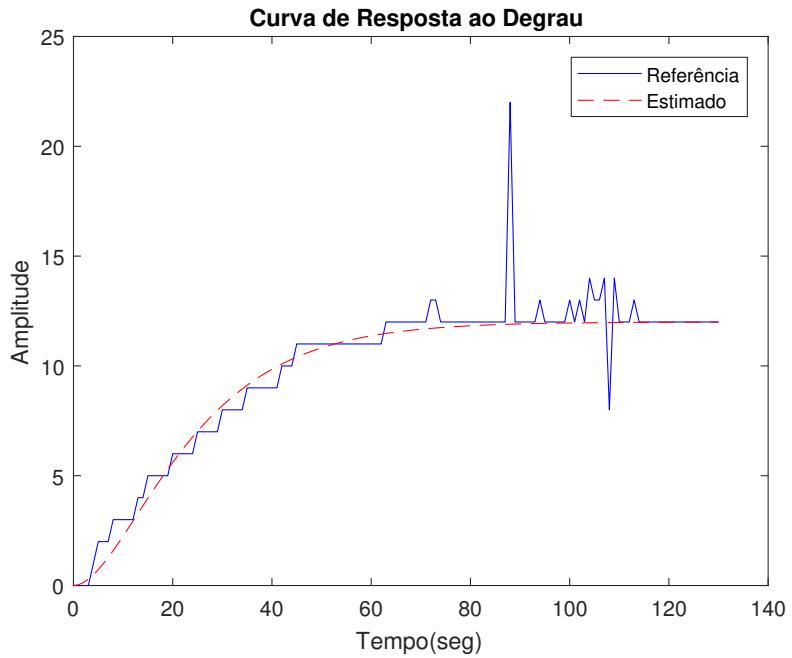


Figura 24: Curva de aproximação 3^a ordem

cia obtida pelo AG, determinou-se os valores dos parâmetros do controlador PID, usando como função de transferência a modelagem de segunda ordem, por meio da síntese direta. Os parâmetros foram introduzidos no sistema real e retornou a curva representada na Figura 26.

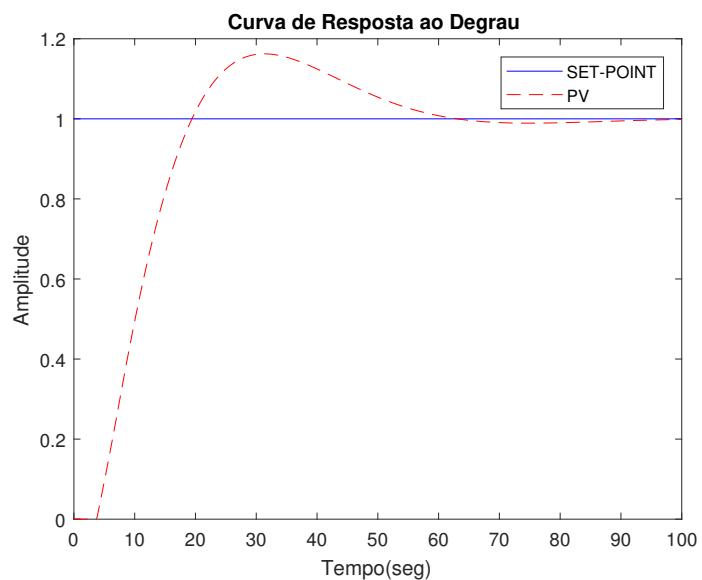


Figura 25: Malha fechada com parâmetros antigos.

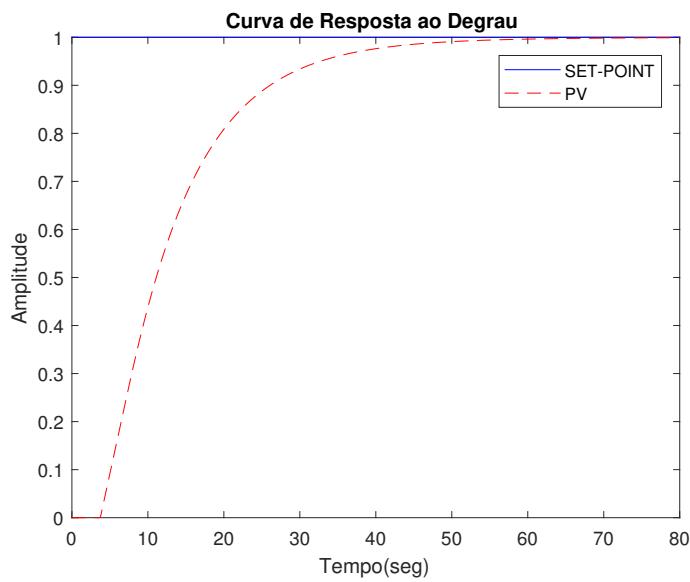


Figura 26: Malha fechada com parâmetros novos

Quando comparamos a curva de resposta da Figura 25, que estava com os parâmetros antigos, notamos que o sistema não apresentou *overshoot*¹⁷.

O AG possibilitou o cálculo mais apropriado do controlador PID ao convergir para F.T. da planta a partir de simulações com dados originais de plantas em circuito de malha fechada com o PID otimizado.

¹⁷É uma reação exagerada da variável controlada ultrapassando o valor desejado.(KATSUHIRO, O. et al, 2015)

5 Conclusão

Por meio de todas as simulações e validações realizadas, demonstra-se que o Algoritmo Genético proposto atende às expectativas de ser uma ferramenta de modelagem de plantas industriais, com funções de transferência desconhecidas. Na primeira etapa, a função de transferência desconhecida em malha aberta foi aproximada para um sistema de primeira, segunda e terceira ordens. Os métodos que apresentaram maior aproximação foram do AG proposto e o de Nishikawa, para primeira ordem. O AG proposto se destacou com um erro quadrático inferior aos dois métodos convencionais disponíveis para segunda ordem. Note que os métodos convencionais somente conseguem determinar a função de transferência sem atraso e que foi necessário adicioná-lo após a aplicação do respectivo método. Para uma aproximação de terceira ordem, não houve comparação com nenhum outro método, pois não foram encontrados métodos para aproximação em tal cenário. Na segunda etapa existe a possibilidade de malha fechada com um controle nada suave. O AG proposto também se mostrou robusto, uma vez que todas as ordens de aproximação convergiram praticamente para a mesma função que havia收敛ido em malha aberta e, ainda, a aproximação de terceira ordem foi praticamente a função de transferência desejada.

Em vista dos resultados apresentados, é válido afirmar que o AG aqui proposto é uma importante ferramenta de modelagem, seja em malha aberta ou fechada, e que ainda é viável para aplicações industriais uma vez que torna-se viável para processos ininterruptos, os quais, não é possível abrir a malha de controle. Para plantas reais, o AG apresentou aproximação nas três primeiras ordens em que a função encontrada foi usada para a determinação dos novos parâmetros do controlador que apresentou um melhor desempenho. E para estudos futuros desenvolver o AG capaz de modelar sistemas de forma *online*.

Referências

- [1] Biradar, S., Hote, Y. V., and Saxena, S. (2016). Reduced-order modeling of linear time invariant systems using big bang big crunch optimization and time moment matching method. *Applied Mathematical Modelling*, 40(15–16):7225 – 7244.
<https://doi.org/10.1016/j.apm.2016.03.006>
- [2] Cabral, H. A. and de Melo, M. T. (2011). Using genetic algorithms for device modeling. *IEEE Transactions on Magnetics*, 47(5).<https://doi.org/10.1109/TMAG.2010.2099107>
- [3] Deb, Kalyanmoy; Agrawal, R. B. (1995). Simulated binary crossover for continuous search space. *Complex Systems*, 9:115–148.
- [4] Goldberg, D. (1989). *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*. Addison-Wesley Professional.
- [5] He, T., Hong, L., Kaufman, A., and Pfister, H. (1996). Generation of transfer functions with stochastic search techniques. In *Proceedings of the 7th Conference on Visualization'96, VIS '96*, pages 227–ff., Los Alamitos, CA, USA. IEEE Computer Society Press.
- [6] Loyka, S. L. (1999). Applying genetic algorithm to modeling nonlinear transfer functions. In *Telecommunications in Modern Satellite, Cable and Broadcasting Services, 1999.4th International Conference on*, volume 1, pages 247–250 vol.1.<https://doi.org/10.1109/TELSKS.1999.804737>
- [7] Marlin, T. E. (2014). *Process Control: designing processes and control systems for dynamic performance*. McGraw-Hill, Inc., 2 edition.
- [8] McCall, J. (2005). Genetic algorithms for modelling and optimisation. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 184:205–222.<https://doi.org/10.1016/j.cam.2004.07.034>
- [9] Nedelea, L., Neag, M., Topa, M., Festila, L., and Topa, V. (2006). Analog filter transfer function optimization based on a genetic algorithm. In *Applied Electronics, Pielsen*.<https://doi.org/10.1109/AE.2006.4382981>

- [10] Tavakolpour, A. R., Darus, I. Z. M., Tokhi, O., and Mailah, M. (2010). Genetic algorithmbased identification of transfer function parameters for a rectangular flexible plate system Engineering Applications of Artificial Intelligence.<https://doi.org/10.1016/j.engappai.2010.01.005>
- [11] MAYA, Paulo Alvaro, and Fabrizio LEONARDI. "Controle essencial."Ed Pearson Prentice Hall (2011). NBR 6023
- [12] OGATA, Katsuhiko et al. Engenharia de Controle moderno; tradução Paulo Álvaro Maya; revisão técnica Fabrizio Leonardi.[et al]. São Paulo: Prentice Hall, v. 12, p. 15-17, 2003.
- [13] NISHIKAWA, Hiroaki. A first-order system approach for diffusion equation. I: Second-order residual-distribution schemes. Journal of Computational Physics, v. 227, n. 1, p. 315-352, 2007.<https://doi.org/10.1016/j.jcp.2007.07.029>
- [14] ARENALES, Selma; DAREZZO, Artur. Cálculo numérico: aprendizagem com apoio de software. Cengage Learning, 2008.
- [15] COLEY, David A. An introduction to genetic algorithms for scientists and engineers. World Scientific Publishing Co Inc, 1999.