JOSÉ HENRIQUE SOUZA BRAZ

Dinâmica de Operadores Lineares em Espaços de Fréchet

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2017

JOSÉ HENRIQUE SOUZA BRAZ

Dinâmica de Operadores Lineares em Espaços de Fréchet

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Análise Funcional.

Orientador(a): Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro.

UBERLÂNDIA - MG
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

B827d
2017

Braz, José Henrique Souza, 1993-
Dinâmica de operadores lineares em Espaços de Fréchet / José Henrique Souza Braz. - 2017.
84 f. : il.

Orientador: Vinícius Vieira Fávaro.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Disponível em: http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2018.35
Inclui bibliografia.

1. Matemática - Teses. 2. Espaços de Fréchet - Teses. I. Fávaro, Vinícius Vieira. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Maria Salete de Freitas Pinheiro – CRB6/1262

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO(A): José Henrique Souza Braz

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11612MAT004.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Análise Funcional.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Dinâmica de Operadores Lineares em Espaços de Fréchet.

ORIENTADOR(A): Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 19 de Dezembro de 2017, às 09h30min, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME	ASSINATURA
Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro UFU - Universidade Federal de Uberlândia	VVFávaro
Prof. Dr. Nacib André Gurgel e Albuquerque UFPB - Universidade Federal da Paraíba	NGAlbuquerque
Prof. Dr. Daniel Cariello UFU - Universidade Federal de Uberlândia	Daniel Cariello

Uberlândia-MG, 19 de Dezembro de 2017.

Dedicatória

À minha mãe Kenia, meus avós Eloisa e José Edson, e minha tia Katilther.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus pela força a esperança que Ele me deu para continuar essa trajetória. Com Ele compartilhei meus mais difíceis momentos e pude realizar mais essa etapa.

Agradeço à minha mãe Kenia, pelo amor e dedicação que sempre teve comigo e por ter me ajudado e apoiado nas diversas decisões durante toda a minha vida. Agradeço também a ela por todo o incentivo que tenho para continuar meus estudos e construir a minha carreira profissional fazendo o que eu mais gosto. A ela, devo tudo o que consegui e ainda vou conseguir.

Agradeço aos meus avós Eloisa e José Edson que também sempre ajudaram a mim e a minha mãe desde o meu nascimento. Juntamente com a minha mãe e minha tia Katilther, esses quatro são as pessoas mais importantes da minha vida, pois me ensinaram os verdadeiros valores de um ser humano como, por exemplo, a honestidade e a perseverança. Agradeço à minha tia Katilther, por tudo que já fez por mim.

Agradeço aos meus demais familiares, primos, tios e bisavós, por todo amor e dedicação que sempre tiveram comigo e por todo apoio que sempre deram.

Agradeço ao meu orientador deste trabalho, professor Vinícius Vieira Fávaro, pela disponibilidade em me orientar, por toda atenção e paciência que teve comigo e principalmente por ter me ensinado muito sobre Análise Funcional.

Agradeço aos meus grandes amigos Anália Barreto Souza e Mizael Borges Campos Netto pelo companheirismo e amizade sincera desde a nossa graduação.

Agradeço aos meus amigos de mestrado, em especial, Augusto, Aluízio, Richard, Javier e Milton, pela amizade e por todos os momentos que vivenciamos no mestrado. Também agradeço aos alunos da turma de 2015 que ajudaram bastante a minha turma nos primeiros meses de 2016.

Agradeço também aos meus amigos da Escola Municipal Machado de Assis, pelo companheirismo e diversos momentos divertidos que foram proporcionados neste ano e por todo o incentivo que sempre me deram para continuar os meus estudos.

Por fim, não menos importante, agradeço aos professores da FAMAT, em especial aos que foram os meus professores em disciplinas, que nesses dois anos de mestrado colaboraram significativamente com a minha formação.

BRAZ, J. H. S. *Dinâmica de operadores lineares em espaços de Fréchet*. 2017. 84 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Neste trabalho estudaremos a noção de hiperciclicidade, um dos principais fenômenos tratados em dinâmica linear de operadores. Investigaremos as noções de operadores mixing e fracamente mixing que sob determinadas hipóteses são hipercíclicos. Mostraremos também alguns critérios para provar hiperciclicidade e finalmente demonstraremos que em qualquer espaço de Fréchet separável de dimensão infinita é possível definir um operador que seja hipercíclico.

Palavras-chave: Hiperciclicidade; Dinâmica linear; Espaços de Fréchet.

BRAZ, J. H. S. *Dynamics of linear operators in Fréchet spaces.* 2017. 84 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

In this work we study the notion of hypercyclicity, which is the main phenomenon studied in linear dynamics of operators. We will investigate the notions of mixing and weakly mixing operators that under certain hypotheses are hypercyclic. We will also show some criteria to obtain hypercyclicity and finally we will prove that in any separable infinite dimensional Fréchet space it is possible to define an operator that is hypercyclic.

Keywords: Hypercyclicity; Linear dynamics; Fréchet spaces.

Lista de Símbolos

$\mathbb{N}$ - $\{1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{N}_0$ - $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

$\mathbb{Q}$ - Conjunto dos números racionais

$\mathbb{R}$ - Conjunto dos números reais

$\mathbb{C}$ - Conjunto dos números complexos

$\mathbb{K}$ - Corpo $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

$D(a, r)$ - $\{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$

$\mathcal{H}(U)$ - Espaço das funções inteiras $f \colon U \longrightarrow \mathbb{C}$, onde $U \subseteq \mathbb{C}$ é um aberto em $\mathbb{C}$

$B(x, r)$ - Bola aberta de centro x e raio r em um espaço métrico

$\|\cdot\|$ - Norma

$\mathcal{L}(E, F)$ - Conjunto dos operadores lineares e contínuos de E em F

$[A]$ ou $spanA$ - Espaço gerado pelo conjunto A

U° - Interior do conjunto U

$\mathcal{U}_x$ - Família das vizinhanças do ponto x

$\mathcal{B}_0$ - Base de vizinhanças de 0

$\mathcal{B}_0(E)$ - Base de vizinhanças de 0 em E

E' - Dual topológico do espaço E

δ_{jk} - Delta de Kronecker

$M \oplus N$ - Soma direta topológica dos espaços M e N

$F^n(x)$ - $(\underbrace{F \circ \ldots \circ F}_{\text{n vezes}})(x)$

$Orb(F,x)$ - $\{x, F(x), F^2(x), \ldots\}$

$F^{-n}(U)$ - Imagem inversa de U por F^n

$arg(z)$ - Argumento do número complexo z

$re^{i\theta}$ - $r(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$

ℓ_p - $\left\{(\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K} : \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty, 1 \leq p < \infty\right\}$

c_0 - $\{(\xi_j)_{j=1}^{\infty} : \xi_j \to 0 \text{ quando } j \to \infty\}$

c_{00} - $\{(\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K} : \text{ existe } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } \xi_j = 0, \forall j \geq k\}$

$M_n(\mathbb{K})$ - Espaço das matrizes $n \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$

$\overline{A}$ - Fecho do conjunto A

G_δ - Conjunto escrito como a interseção enumerável de conjuntos abertos

$\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ - $\mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K} \times \ldots$

e_n - $(0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots)$ onde o 1 ocupa a n-ésima entrada

$\overline{A}^{\tau}$ - Fecho de A na topologia τ

$card(A)$ - Cardinalidade do conjunto A

$X^{\mathbb{N}}$ - $X \times \cdots \times X \times \cdots$

Sumário

Introdução

De acordo com [6], a dinâmica linear é uma área recente da Matemática que teve um dos seus primeiros indícios em 1982, na tese de C. Kitai e vem se tornando popular entre os matemáticos de todo o mundo. Como o próprio nome indica, a dinâmica linear consiste em estudar o comportamento das iteradas de transformações lineares. Em espaços de dimensão finita, o comportamento das iteradas são bem conhecidos já que as transformações lineares são bem descritas pela sua forma canônica de Jordan. Entretanto, um novo fenômeno aparece quando estamos em espaços de dimensão infinita: operadores lineares podem ter órbitas densas.

Seja X um espaço vetorial topológico e T um operador linear contínuo definido em X, isto é, $T \in \mathcal{L}(X)$. A T-órbita de um vetor $x \in X$ é o conjunto

$$Orb(T, x) = \{x, T(x), T^2(x), \ldots\}$$

e dizemos que um operador linear tem órbita densa quando existe algum vetor $x \in X$ tal que o conjunto $Orb(T, x)$ é denso em X. Quando isso acontece, dizemos que o operador é **hipercíclico**. Hiperciclicidade é o principal assunto desta dissertação. Note que para falarmos em hiperciclicidade de um operador definido em um espaço vetorial topológico X, é condição necessária X ser um espaço separável, pois caso contrário, não existiria nenhum subconjunto denso e enumerável em X e então nenhuma órbita poderia ser densa.

De acordo com [16], os operadores de Birkhoff (1929), $L\colon \mathcal{H}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{C})$ definido por $L(f)(z) = f(z+1), \forall z \in \mathbb{C}$ e MacLane (1952), $D\colon \mathcal{H}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{C})$ definido por $D(f) = f'$, ambos definidos no espaço das funções inteiras de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$, foram os primeiros operadores hipercíclicos que apareceram na literatura. Conforme [11], os primeiros exemplos conhecidos de operadores hipercíclicos em espaços de Banach são devidos a Rolewicz, em 1969. Seja ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ o espaço de Banach das sequências p-somáveis, isto é, o espaço

$$\ell_p = \left\{ (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty \right\}$$

munido com a norma

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Para cada $a \in \mathbb{R}$, o *operador de Rolewicz* $T_a\colon \ell_p \longrightarrow \ell_p$ é definido por

$$T_a(\xi_1, \xi_2, \ldots) = a(\xi_2, \xi_3, \ldots).$$

Rolewicz provou que esses operadores são hipercíclicos quando $a > 1$.

Neste trabalho, apresentaremos a definição de hiperciclicidade, fenômeno estudado pela dinâmica linear que apenas acontece em espaços de dimensão infinita. Começaremos com a noção de operadores que são topologicamente transitivos e que, sob algumas hipóteses, vão ser hipercíclicos e nos fornecerão uma caracterização para a hiperciclicidade em espaços de Fréchet separáveis. Também trabalharemos com operadores mixing e fracamente mixing e veremos a relação entre eles e a hiperciclicidade. Existem teoremas, os quais chamaremos de critérios, que nos permitem dizer se um operador é hipercíclico ou não e eles são muito úteis para a demonstração de alguns resultados relacionados à hiperciclicidade. Esses critérios são muito interessantes, pois não é necessário exibir um vetor hipercíclico para se garantir a hiperciclicidade do operador. A seguir, mostraremos como os capítulos desse trabalho foram divididos.

No primeiro capítulo deste trabalho serão apresentados alguns resultados que serão necessários no decorrer dos demais capítulos. No segundo capítulo, é apresentado a definição de operadores hipercíclicos e alguns resultados que envolvem essa definição. Posteriormente, é apresentado o conceito de operadores mixing e fracamente mixing e alguns resultados que envolvem esse tipo de operadores com os hipercíclicos. No terceiro capítulo são apresentados teoremas (critérios) tal que se o operador linear satisfaz as hipóteses deles, então ele será hipercíclico. E, por fim, no quarto capítulo, é mostrado que em qualquer espaço de Fréchet separável há operadores hipercíclicos.

José Henrique Souza Braz

Uberlândia-MG, 19 de Dezembro de 2017.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados sobre números reais, números complexos, espaços topológicos e espaços vetoriais topológicos que serão utilizados em algumas demonstrações no decorrer deste trabalho.

1.1 Números Reais e Números Complexos

Proposição 1.1.1 *O conjunto*

$$\left\{\frac{n}{2^k} : n, k \in \mathbb{N}\right\}$$

é denso em $\mathbb{R}$.

Demonstração. Sejam $x > 0$ e $\varepsilon > 0$. Tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x + \varepsilon$. Logo, $n - \varepsilon > x$. Tome $k \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{n}{2^k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Daí

$$\frac{2^k}{n} > \frac{2}{\varepsilon}. \tag{1.1}$$

Como $(x - \varepsilon) \leq (x + \varepsilon)$, segue que

$$\frac{2^k}{n}(x - \varepsilon) < \frac{2^k}{n}(x + \varepsilon).$$

Afirmamos que existe $l \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{2^k}{n}(x - \varepsilon) < l < \frac{2^k}{n}(x + \varepsilon).$$

De fato,

$$\frac{2^k}{n}(x + \varepsilon) - \frac{2^k}{n}(x - \varepsilon) = \frac{2^k}{n}(x + \varepsilon - x + \varepsilon) = \frac{2^k}{n} \cdot 2\varepsilon \overset{(1.1)}{>} \frac{2}{\varepsilon} \cdot 2\varepsilon = 4 > 1.$$

Tomando esse l, mostremos que $\frac{l \cdot n}{2^k} \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$. De fato,

$$\frac{2^k}{n}(x - \varepsilon) < l < \frac{2^k}{n}(x + \varepsilon) \Rightarrow$$

$$2^k(x - \varepsilon) < l \cdot n < 2^k(x + \varepsilon) \Rightarrow$$

$$x - \varepsilon < \frac{l \cdot n}{2^k} < x + \varepsilon \Rightarrow$$

$$\frac{l \cdot n}{2^k} \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$$

Portanto,

$$\left\{ \frac{n}{2^k} : n, k \in \mathbb{N} \right\}$$

é denso em $\mathbb{R}$. ■

Para demonstrar um resultado da dissertação, apresentaremos a seguir a definição de plano estendido e o Teorema de Runge. Mais detalhes sobre essa definição e resultados relacionados podem ser vistos em [10].

Definição 1.1.2 Chamaremos de *plano estendido* o conjunto $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, munido da única topologia tal que

(a) Para cada $a \in \mathbb{C}$, os discos $D(a; r)$, com $r > 0$ formam uma base de vizinhanças abertas de a.

(b) Os conjuntos

$$D(\infty; R) = \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\},$$

com $R > 0$, formam uma base de vizinhanças abertas de ∞.

Teorema 1.1.3 (Teorema de Runge) *Sejam K um compacto em $\mathbb{C}$ e A um subconjunto de $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ que intercepta cada componente conexa de $\mathbb{C}_\infty \setminus K$. Seja U uma vizinhança aberta de K em $\mathbb{C}$ e seja $f \in \mathcal{H}(U)$. Então existe uma sequência $(R_n)_{n=1}^{\infty}$ de funções racionais, com todos os seus polos em A, que converge a f uniformemente sobre K.*

Demonstração. Veja [10, Theorem 1.7, p. 198]. ■

Corolário 1.1.4 *Seja K um compacto de $\mathbb{C}$ tal que $\mathbb{C}_\infty \setminus K$ é conexo. Seja U uma vizinhança aberta de K e seja $f \in \mathcal{H}(U)$. Então existe uma sequência $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ de polinômios que converge a f uniformemente sobre K.*

Demonstração. Basta aplicar o teorema de Runge com $A = \{\infty\}$. ■

Proposição 1.1.5 *Sejam K um subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ e G uma vizinhança de K tal que $\mathbb{C} \setminus G$ é conexo. Então, para cada função analítica f em G, existe uma sequência de polinômios $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathbb{C}$ que converge uniformemente para f em K.*

Demonstração. Veja [10, Corollary 1.15, p. 200]. ■

1.2 Espaços Topológicos

Nessa seção estudaremos alguns resultados básicos de topologia, principalmente para espaços métricos e normados.

Proposição 1.2.1 *Seja M um espaço métrico sem pontos isolados e $D \subseteq M$ denso em M. Então $D \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}, x_j \in D, j = 1, \ldots, n$ é denso em M.*

Demonstração.

Façamos para o caso $n = 1$ e o resultado segue fazendo-se indução sobre n. Como x_1 não é isolado, $M \setminus \{x_1\}$ é denso em M. Mas $D \setminus \{x_1\}$ é denso em $M \setminus \{x_1\}$. Assim, $D \setminus \{x_1\}$ é denso em M. ■

Teorema 1.2.2 *Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $T \colon E \longrightarrow F$ linear. As seguintes condições são equivalentes:*

(a) T é lipschitziano.

(b) T é uniformemente contínuo.

(c) T é contínuo.

(d) T é contínuo em algum ponto de E.

(e) T é contínuo na origem.

(f) $\sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty$.

(g) Existe uma constante $C \geq 0$ tal que $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ para todo $x \in E$.

Demonstração. Veja [9, Teorema 2.1.1, p. 32]. ■

O conjunto de todos os operadores lineares e contínuos de E em F será denotado por $\mathcal{L}(E, F)$. Quando $E = F$ escrevemos simplesmente $\mathcal{L}(E)$.

Proposição 1.2.3 *Sejam E um espaço vetorial normado, com norma $\|\cdot\|$, de dimensão finita n, $u_k, u \in \mathcal{L}(E)$ e $k \in \mathbb{N}$. Se $u_k(x) \longrightarrow u(x)$, para todo $x \in E$, então $\|u_k - u\| \longrightarrow 0$.*

Demonstração. Fixe $\{e_1, \ldots, e_n\}$ uma base em E e defina

$$\|x\|_1 = \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j \right\|_1 := \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|,$$

onde $x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$. É claro que $\|\cdot\|_1$ é uma norma em E e como E tem dimensão finita, sabemos que todas as normas em E são equivalentes. Logo existe $c > 0$ tal que

$$\|x\|_1 \leq c\|x\|, \forall x \in E.$$

Temos que $u_k(e_j) \xrightarrow{k} u(e_j), \forall j = 1, \ldots, n$. Daí

$$\|u_k(e_j) - u(e_j)\| \xrightarrow{k} 0, \forall j = 1, \ldots, n \Rightarrow \text{máx}_{j=1,\ldots,n}\|u_k(e_j) - u(e_j)\| \xrightarrow{k} 0.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\|u_k - u\| &= \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|u_k(x) - u(x)\| \\
&= \sup_{\|x\|_E \leq 1} \left\| u_k\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\right) - u\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j\right)\right\| \\
&= \sup_{\|x\|_E \leq 1} \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u_k(e_j) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j u(e_j)\right\| \\
&= \sup_{\|x\|_E \leq 1} \left\| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (u_k(e_j) - u(e_j))\right\| \\
&\leq \sup_{\|x\|_E \leq 1} \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \|u_k(e_j) - u(e_j)\| \\
&\leq \sup_{\|x\|_E \leq 1} \left(\sum_{j=1}^{n} |\lambda_j| \text{máx}_{j=1,\ldots,n}\|u_k(e_j) - u(e_j)\|\right) \\
&= \sup_{\|x\|_E \leq 1} (\|x\|_1 \cdot \text{máx}_{j=1,\ldots,n}\|u_k(e_j) - u(e_j)\|) \\
&= \text{máx}_{j=1,\ldots,n}\|u_k(e_j) - u(e_j)\| \cdot \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|x\|_1 \\
&\leq \text{máx}_{j=1,\ldots,n}\|u_k(e_j) - u(e_j)\| \cdot \sup_{\|x\|_E \leq 1} c\|x\|_E \\
&= c \cdot \text{máx}_{j=1,\ldots,n}\|u_k(e_j) - u(e_j)\| \xrightarrow{k} 0
\end{aligned}$$

■

Teorema 1.2.4 *Sejam X e Y espaços métricos, $S \subseteq X$ denso e Y completo. Se $f \colon S \longrightarrow Y$ é uniformemente contínua então existe uma única extensão contínua de f em $\overline{S}$ que também é uniformemente contínua.*

Demonstração. Seja $g \colon X \longrightarrow Y$ dada por

$$g(a) = \lim_{n\to\infty} f(x_n), (x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq S \text{ tal que } x_n \longrightarrow a.$$

Mostremos que g está bem definida. De fato, seja $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq S$ tal que $x_n \longrightarrow a$ e considere também $\varepsilon > 0$. Daí, existe $\delta > 0$ tal que se

$$a, b \in S, d(a, b) < \delta \Rightarrow d(f(a), f(b)) < \varepsilon.$$

Como $x_n \longrightarrow a$, segue que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em X e então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, x_m) < \delta, \forall m, n \geq N.$$

Logo, se $m, n \geq N$, temos que $d(x_n, x_m) < \delta$ e então $d(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$, provando que $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em Y. Como Y é completo, $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ existe. Agora, se $x_n \longrightarrow a$ e $y_n \longrightarrow a$, seja $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ a sequência definida por

$$z_n = \begin{cases} y_{n/2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ x_{\frac{n+1}{2}}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

isto é, a sequência $(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)$. Seja $\varepsilon > 0$. Como $x_n \longrightarrow a$, exite $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, a) < \varepsilon, \forall n \geq N_1$$

e também como $y_n \longrightarrow a$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(y_n, a) < \varepsilon, \forall n \geq N_2.$$

Tomando $M = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, temos que

$$d(x_n, a) < \varepsilon \text{ e } d(y_n, a) < \varepsilon, \forall n \geq M.$$

Daí, se $n \geq 2M$, então $\frac{n}{2} \geq M$ e $n + 1 \geq 2M$, isto é, $\frac{n+1}{2} \geq M$. Logo, se $n \geq 2M$ e n é par,

$$d(z_n, a) = d(y_{\frac{n}{2}}, a) < \varepsilon$$

e se n é ímpar,

$$d(z_n, a) = d(x_{\frac{n+1}{2}}, a) < \varepsilon.$$

Portanto, $\forall n \geq 2M$ temos que $d(z_n, a) < \varepsilon$, provando que $z_n \longrightarrow a$. Daí, $\lim_{n\to\infty} f(z_n)$ existe e como $(f(x_n))_{n=1}^{\infty}$ e $(f(y_n))_{n=1}^{\infty}$ são subsequências de $(f(z_n))_{n=1}^{\infty}$, segue que

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(z_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n).$$

Isso conclui que $g(a)$ não depende da sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge para a, isto é, $g(a)$ é bem definida. Mostremos agora que g é uma extensão de f. Se $a \in S$, tome a sequência constante $x_n = a, \forall n \in \mathbb{N}$. É claro que $x_n \to a$ e

$$g(a) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(a) = f(a),$$

logo $g(a) = f(a), \forall a \in S$. Por fim, mostremos que g é uniformemente contínua. Seja $\varepsilon > 0$. Como f é uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que se

$$a, b \in S, d(a, b) < \delta \Rightarrow d(f(a), f(b)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sejam $a, b \in \overline{S}$ tal que $d(a, b) < \frac{\delta}{3}$. Daí, existem sequências $(x_n)_{n=1}^{\infty}, (y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq S$ tais que $x_n \longrightarrow a$ e $y_n \longrightarrow b$. Como $x_n \longrightarrow a$, existe $K_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(x_n, a) < \frac{\delta}{3}, \forall n \geq K_1$$

e como $y_n \longrightarrow b$, existe $K_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(y_n, b) < \frac{\delta}{3}, \forall n \geq K_2.$$

Tome $N_1 = \text{máx}\{K_1, K_2\}$. Daí, se $n \geq N_1$,

$$d(x_n, a) < \frac{\delta}{3} \text{ e } d(y_n, b) < \frac{\delta}{3}.$$

Logo, se $n \geq N_1$,

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, a) + d(a, b) + d(b, y_n) \leq \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta$$

e então,

$$d(f(x_n), f(y_n)) < \frac{\varepsilon}{3}, \forall n \geq N_1.$$

Como, por definição, $f(x_n) \longrightarrow g(a)$ e $f(y_n) \longrightarrow g(b)$, existe $K_3 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f(x_n), g(a)) < \frac{\varepsilon}{3}, \forall n \geq K_3$$

e existe $K_4 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(f(y_n), g(b)) < \frac{\varepsilon}{3}, \forall n \geq K_4.$$

Tomando $N_2 = \text{máx}\{K_3, K_4\}$, temos que $\forall n \geq N_2$,

$$d(f(x_n), g(a)) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ e } d(f(y_n), g(b)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Tome $N' = \text{máx}\{N_1, N_2\}$. Assim, se $a, b \in \overline{S}$ e $d(a, b) < \frac{\delta}{3}$,

$$d(g(a), g(b)) \leq d(g(a), f(x_{N'})) + d(f(x_{N'}), f(y_{N'})) + d(f(y_{N'}), g(b)) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}$$

provando que g é uniformemente contínua e, consequentemente, contínua.

Agora note que g é única. Se h é uma extensão contínua de f em $\overline{S}$, tomando $a \in \overline{S}$, existe $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq S$ tal que $x_n \longrightarrow a$. Como h é contínua, $h(x_n) \longrightarrow h(a)$. Mas, $h(x_n) = f(x_n) \longrightarrow g(a)$, e então, pela unicidade do limite, $h(a) = g(a)$. ■

Definição 1.2.5 Um espaço métrico (em particular um espaço normado) E é dito *separável* se E contém um subconjunto enumerável e denso em X.

Proposição 1.2.6 *Um espaço normado E é separável se, e somente se, existe um subconjunto enumerável $A \subseteq E$ tal que $[A]$ é denso em E.*

Demonstração. Veja [9, Lema 1.6.3, p. 19]. ■

Para a próxima proposicação, precisamos das definições a seguir.

Definição 1.2.7 Seja (X, τ) um espaço topológico. Diremos que uma família $\mathcal{B} \subseteq \tau$ é uma *base* para τ se dado $U \in \tau$ existe $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ tal que

$$U = \bigcup_{V \in \mathcal{C}} V.$$

Definição 1.2.8 Seja (X, τ) um espaço topológico. Diremos que (X, τ) *satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade* se existe uma base $\mathcal{B}$ para τ que é enumerável.

Proposição 1.2.9 *Seja X um espaço métrico. São equivalentes:*

(i) X satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade.

(ii) X é separável.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$ Suponha que X satisfaça o segundo axioma de enumarabilidade e seja $(V_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base para a topologia de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $x_n \in V_n$ e tome $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. É claro que D é enumerável. Provemos que D é denso em X.

Seja U um aberto não vazio de X. Logo, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $V_k \subseteq U$ e então $x_k \in V_k \subseteq U$. Portanto, $x_k \in U \cap D$, provando que $U \cap D \neq \emptyset$ e então D é denso em X.
$(b) \Rightarrow (a)$ Seja $D = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ um subconjunto denso de X e seja

$$\mathcal{B} = \left\{ B\left(x_m, \frac{1}{n}\right) : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

É claro que $\mathcal{B}$ é enumerável. Provemos que $\mathcal{B}$ é uma base para os abertos de X.

Seja U um aberto não vazio de X e seja $x \in U$. Como U é aberto, existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subseteq U$. Tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < r$. Logo, $B(x, \frac{1}{n}) \subseteq U$.

Como D é denso em X, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m \in B(x, \frac{1}{2n})$, isto é, $x \in B(x_m, \frac{1}{2n})$. Agora note que

$$B\left(x_m, \frac{1}{2n}\right) \subseteq B\left(x, \frac{1}{n}\right) \subseteq U.$$

De fato, dado $y \in B\left(x_m, \frac{1}{2n}\right)$,

$$d(y, x) \leq d(y, x_m) + d(x_m, x) < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{2}{2n} = \frac{1}{n} < r$$

e então $y \in B\left(x, \frac{1}{n}\right)$. Logo, dado $x \in U$, existem $r, s \in \mathbb{N}$ tal que

$$x \in B\left(x_r, \frac{1}{s}\right) \subseteq U.$$

Daí, U é escrito como a união de elementos de $\mathcal{B}$ e então $\mathcal{B}$ é uma base para os abertos de X.
■

Corolário 1.2.10 *Seja X um espaço métrico separável. Se $M \subseteq X$ é subespaço de X então M é separável.*

Demonstração. Como X é separável, pela Proposição 1.2.9 X satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade. Logo M satisfaz o segundo axioma de enumerabilidade e novamente pela Proposição 1.2.9 segue que M é separável. ■

1.3 Espaços Vetoriais Topológicos

Definição 1.3.1 Diremos que X é um *espaço vetorial topológico* se X é um espaço vetorial munido de uma topologia τ tal que as seguintes aplicações são contínuas:

$$s\colon X \times X \longrightarrow X \text{ dada por } s(x, y) = x + y$$

$$m\colon \mathbb{K} \times X \longrightarrow X \text{ dada por } m(\lambda, x) = \lambda x$$

Neste caso dizemos que τ é uma *topologia vetorial.*

Note que pela definição de espaço vetorial topológico, as translações $T_a\colon X \longrightarrow X, a \neq 0$ definidas por $T_a(x) = a + x$ e as homotetias $H_\lambda\colon X \longrightarrow X, \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \neq 0$ definidas por $H_\lambda(x) = \lambda x$ são homeomorfismos.

Proposição 1.3.2 *Seja X um espaço vetorial topológico. Então dado U uma vizinhança de zero, existe V também vizinhança de zero tal que $V + V \subseteq U$.*

Demonstração. Como U é vizinhança de zero, segue que $0 \in U^\circ$. Como U° é aberto em X e $s\colon X \times X \longrightarrow X$ é contínua, segue que $s^{-1}(U^\circ)$ é aberto em $X \times X$. É claro que $(0, 0) \in s^{-1}(U^\circ)$.

Como $s^{-1}(U^\circ)$ é aberto em $X \times X$, existem $V_1, V_2 \subseteq X$ abertos tal que $(0, 0) \in V_1 \times V_2 \subseteq s^{-1}(U^\circ)$. Tome $V = V_1 \cap V_2$. É claro que $0 \in V$, V é aberto e $(0, 0) \in V \times V \subseteq V_1 \times V_2 \subseteq s^{-1}(U^\circ)$. Daí, $0 = s(0, 0) \in s(V \times V) \subseteq U^\circ \subseteq U$. Como $s(V \times V) = V + V$, segue que $V + V \subseteq U$. ■

Corolário 1.3.3 *Seja X um espaço vetorial topológico. Se $U \subseteq X$ é um conjunto aberto e não vazio, então existe um conjunto aberto e não vazio $U_1 \subseteq U$ e uma vizinhança W de zero tal que $U_1 + W \subseteq U$.*

Demonstração. Como U é não vazio, seja $a \in U$. Como U é aberto, segue que $U \in \mathcal{U}_a$. Logo, $-a + U \in \mathcal{U}_0$. Pela Proposição 1.3.2 existe $V \in \mathcal{U}_0$ tal que

$$V^\circ + V^\circ \subseteq -a + U.$$

Daí,

$$(a + V^\circ) + V^\circ \subseteq U.$$

■

Definição 1.3.4 Seja X um espaço vetorial e $A \subseteq X$.

(i) A é dito *equilibrado* se $\lambda x \in A$ para todo $x \in A$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, com $|\lambda| \leq 1$.

(ii) A é dito *absorvente* se para cada $x \in X$ existe $\delta > 0$ tal que $\lambda x \in A$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq \delta$.

Proposição 1.3.5 *Em um espaço vetorial topológico X, cada vizinhança de zero é absorvente.*

Demonstração. Seja U uma vizinhança de zero e $x \in X$. Como a aplicação

$$\lambda \in \mathbb{K} \to \lambda x \in X$$

é contínua em 0, existe $\delta > 0$ tal que $\lambda x \in U$ para todo $|\lambda| \leq \delta$. Logo U é absorvente. ■

Proposição 1.3.6 *Seja $X \neq \{0\}$ um espaço vetorial topológico. Então X não tem pontos isolados.*

Demonstração. Suponha que $x \in X$ tal que $x \neq 0$. Seja $U \in \mathcal{U}_x$. Então existe $U_0 \in \mathcal{U}_0$ tal que $U = x + U_0$. Pela Proposição 1.3.5, segue que U_0 é absorvente, isto é, existe $\delta > 0$ tal que $\lambda x \in U_0$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ com $|\lambda| \leq \delta$. Daí, $\frac{\delta}{2}x \in U_0$ e então

$$x + \frac{\delta}{2}x \in x + U_0 = U.$$

Como $x + \frac{\delta}{2}x \neq x$, segue que x não é ponto isolado.

Agora, se $x = 0$, tome $y \in X$ tal que $y \neq 0$. Seja $U_0 \in \mathcal{U}_0$. Novamente pela Proposição 1.3.5 segue que U_0 é absorvente e então existe $\delta > 0$ tal que $\lambda y \in U_0$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ com $|\lambda| \leq \delta$. Assim, $\frac{\delta}{2}y \in U_0$ e $\frac{\delta}{2}y \neq 0$ o que implica que 0 também não é um ponto isolado. ■

Definição 1.3.7 Em um espaço vetorial E, um conjunto $A \subseteq E$ é dito convexo se $\alpha x + \beta y \in A$ para todo $x, y \in A$ e $\alpha, \beta \geq 0$ com $\alpha + \beta = 1$.

Definição 1.3.8 Diremos que X é um *espaço localmente convexo* se X é um espaço vetorial topológico tal que cada vizinhança de zero contém uma vizinhança convexa de zero. Neste caso diremos que a topologia de X é uma *topologia localmente convexa*.

Definição 1.3.9 Seja E um espaço vetorial. Uma função $p\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada de *seminorma* se verifica as seguintes condições:

(i) $p(x) \geq 0, \forall x \in E$.

(ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ para todo $x \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$.

(iii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ para todo $x, y \in E$.

Note que se uma seminorma p é tal que $p(x) = 0$ implica $x = 0$, então p é uma norma.

Proposição 1.3.10 *Sejam E um espaço vetorial topológico, e seja $p\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma seminorma. São equivalentes:*

a) p é contínua.

b) O conjunto $U_{p,1} = \{x \in E : p(x) < 1\}$ é aberto.

c) O conjunto $U_{p,\varepsilon} = \{x \in E : p(x) < \varepsilon\}$ é aberto para cada $\varepsilon > 0$.

d) p é contínua na origem.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$ Note que $U_{p,1} = p^{-1}((-\infty, 1)) = \{x \in E : p(x) < 1\}$. Como $(-\infty, 1)$ é aberto em $\mathbb{R}$, segue que $U_{p,1}$ é aberto em E.
$(b) \Rightarrow (c)$ Seja $\varepsilon > 0$. Note que $U_{p,\varepsilon} = \varepsilon \cdot U_{p,1}$. De fato, seja $x \in U_{p,\varepsilon}$. É claro que $x = \varepsilon \cdot \frac{x}{\varepsilon}$ e

$$p\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{\varepsilon}p(x) < \frac{1}{\varepsilon}\varepsilon = 1.$$

Logo, $x = \varepsilon \cdot \frac{x}{\varepsilon} \in \varepsilon \cdot U_{p,1}$. Analogamente, se $x \in \varepsilon U_{p,1}$, existe $y \in U_{p,1}$ tal que $x = \varepsilon y$. Daí,

$$p(x) = p(\varepsilon y) = \varepsilon p(y) < \varepsilon \cdot 1 = \varepsilon$$

mostrando que $x \in U_{p,\varepsilon}$. Como E é espaço vetorial topológico e $U_{p,1}$ é aberto então $U_{p,\varepsilon}$ é aberto.
$(c) \Rightarrow (d)$ Seja $\varepsilon > 0$. Tome $U_{p,\varepsilon}$ a vizinhança de zero em E. Daí, para todo $x \in U_{p,\varepsilon}$,

$$p(x) < \varepsilon \Rightarrow p(U_{p,\varepsilon}) \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)$$

provando que p é contínua na origem.
$(d) \Rightarrow (a)$ Suponha p contínua na origem. Sejam $a \in E, \varepsilon > 0$ e $(p(a) - \varepsilon, p(a) + \varepsilon)$. Daí, $-p(a) + (p(a) - \varepsilon, p(a) + \varepsilon)$ é vizinhança de zero. Daí, existe V, vizinhança de zero em E tal que

$$p(V) \subseteq -p(a) + (p(a) - \varepsilon, p(a) + \varepsilon) = (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Tome $W = a + V$. É claro que W é vizinhança de a. Mostremos que $p(W) \subseteq (p(a) - \varepsilon, p(a) + \varepsilon)$. Seja $x \in W$, isto é, $x = a + v$ com $v \in V$. Daí, $x - a = v$ e

$$|p(x) - p(a)| \leq p(x - a) = p(v) < \varepsilon.$$

Logo, $p(x) \in (p(a) - \varepsilon, p(a) + \varepsilon)$ e então $p(W) \subseteq (p(a) - \varepsilon, p(a) + \varepsilon)$. Daí, p é contínua em a.
■

Proposição 1.3.11 *Seja E um espaço vetorial e seja $p \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma seminorma. Então o conjunto*

$$U_{p,\varepsilon} = \{x \in E : p(x) < \varepsilon\}$$

é convexo, equilibrado e absorvente para todo $\varepsilon > 0$.

Demonstração. Sejam $\varepsilon > 0, x, y \in U_{p,\varepsilon}, \alpha, \beta \geq 0$ tais que $\alpha + \beta = 1$. Daí,

$$p(\alpha x + \beta y) \leq p(\alpha x) + p(\beta y) = \alpha p(x) + \beta p(y) < \alpha\varepsilon + \beta\varepsilon = (\alpha + \beta)\varepsilon = \varepsilon.$$

Logo, $\alpha x + \beta y \in U_{p,\varepsilon}$, provando que $U_{p,\varepsilon}$ é convexo. Para provarmos que é equilibrado, seja $x \in U_{p,\varepsilon}, \lambda \in \mathbb{K}$ tal que $|\lambda| \leq 1$. Daí,

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \leq p(x) < \varepsilon$$

e então $\lambda x \in U_{p,\varepsilon}$. Finalmente, seja $x \in E$. Se $p(x) = 0$, tome $\delta = 1$. Logo, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ com $|\lambda| \leq 1$,

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x) = 0 < \varepsilon$$

implicando que $\lambda x \in U_{p,\varepsilon}$. Se $p(x) \neq 0$, tome $\delta = \frac{\varepsilon}{2p(x)}$. Assim, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ com $|\lambda| \leq \delta$,

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x) \leq \frac{\varepsilon}{2p(x)} \cdot p(x) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

implicando que $\lambda x \in U_{p,\varepsilon}$ e então $U_{p,\varepsilon}$ é absorvente. ■

Proposição 1.3.12 *Seja E um espaço vetorial e seja $\mathcal{P}$ uma família de seminormas em E. Seja*

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ \bigcap_{p \in \mathcal{P}_0} U_{p,\varepsilon} : \mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{P} \textit{ finito }, \varepsilon > 0 \right\}$$

Então existe uma única topologia localmente convexa $\tau_{\mathcal{P}}$ em E que admite $\mathcal{B}_0$ como base de vizinhanças de zero. A topologia $\tau_{\mathcal{P}}$ é a mais fraca em E tal que cada $p \in \mathcal{P}$ é contínua. Diremos que $\tau_{\mathcal{P}}$ é a topologia localmente convexa definida por $\mathcal{P}$.

Demonstração. Veja [21, Proposição 4.3, p. 10]. ■

Corolário 1.3.13 *Seja E um espaço vetorial e seja $\mathcal{P}$ uma família dirigida de seminormas em E, ou seja, dadas $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$, existe $p_3 \in \mathcal{P}$ tal que $p_3 \geq p_1$ e $p_3 \geq p_2$. Então os conjuntos $U_{p,\varepsilon}$ com $p \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0$ formam uma base de vizinhanças de zero em $(E, \tau_{\mathcal{P}})$*

Demonstração. Seja U uma vizinhança de zero. Então existem $p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0$ tais que

$$\bigcap_{j=1}^{n} U_{p_j,\varepsilon} \subseteq U.$$

Tome p maior que $p_1, \ldots, p_n$ e considere $U_{p,\varepsilon}$. É claro que

$$U_{p,\varepsilon} \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} U_{p_j,\varepsilon} \subseteq U.$$

Logo, $\{U_{p,\varepsilon} : p \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0\}$ forma uma base de vizinhanças de zero em $(E, \tau_{\mathcal{P}})$. ■

Corolário 1.3.14 *Seja E um espaço localmente convexo e $\mathcal{P}$ uma família dirigida de seminormas em E que define a topologia de E. Então os conjuntos $U_{p,\varepsilon}, p \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0$ formam uma base de vizinhanças de zero na topologia de E.*

Demonstração. Segue imediatamente do Corolário 1.3.13. ■

Proposição 1.3.15 *Seja E um espaço vetorial topológico e E_0 um subespaço vetorial denso de E, e seja F um espaço vetorial topológico de Hausdorff completo. Então, dada $T_0 \in \mathcal{L}(E_0, F)$, existe uma única $T \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $T(x) = T_0(x)$ para todo $x \in E_0$.*

Demonstração. Veja [21, Proposição 10.3, p. 29]. ■

Proposição 1.3.16 *Seja E um espaço vetorial topológico. Se E é de Hausdorff, então cada subespaço de E de dimensão finita é fechado.*

Demonstração. Veja [21, Corolário 11.2, p. 34]. ■

Definição 1.3.17 (a) Um espaço vetorial topológico E é dito *metrizável* se existe uma métrica em E que define a topologia de E.

(b) Se E é um espaço vetorial, então uma métrica d em E é dita *invariante sob translações* se

$$d(x, y) = d(a + x, a + y) \text{ para todo } x, y, a \in E.$$

Teorema 1.3.18 *Seja E um espaço vetorial topológico de Hausdorff. Então E é metrizável se, e somente se, existe uma base enumerável de vizinhanças de zero. Neste caso existe uma métrica em E, invariante sob translações, que define a topologia de E.*

Demonstração. Veja [21, Teorema 12.3, p. 40]. ■

Definição 1.3.19 Dizemos que E é um *espaço de Fréchet* se E é um espaço localmente convexo metrizável e completo.

Um exemplo importante de espaço de Fréchet que utilizaremos nesse trabalho é o espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ das funções inteiras $f\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Esse espaço munido com a topologia compacto-aberta, isto é, a topologia localmente convexa gerada pelas seminormas $p_K\colon \mathcal{H}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por

$$p_K(f) = \sup_{z\in K} |f(z)|,$$

com $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto, se torna um espaço de Fréchet. Os conjuntos

$$U_{K,\varepsilon} = \left\{ f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) : \sup_{z\in K} |f(z)| < \varepsilon \right\},$$

com $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto e $\varepsilon > 0$, formam uma base de vizinhanças de zero que são convexas, equilibradas e abertas nessa topologia.

Lema 1.3.20 *Sejam X um espaço de Fréchet e $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência dirigida de seminormas que define a topologia de X. Sejam $x_k, x \in X, k \geq 1$ e $U \subseteq X$. Então:*

(a) $x_k \to x$ se, e somente se, $p_n(x_k - x) \to 0$, quando $k \to \infty, \forall n \geq 1$.

(b) $(x_k)_k$ é de Cauchy se, e somente se, $p_n(x_k - x_l) \to 0$, quando $k, l \to \infty, \forall n \geq 1$.

(c) U é vizinhança de x se, e somente se, existem $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ tais que

$$\{y \in X : p_n(y - x) < \varepsilon\} \subseteq U.$$

Demonstração. $(a)(\Rightarrow)$ Seja $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$. Pelo Corolário 1.3.14, $U_{p_n,\varepsilon}$ é vizinhança de zero. Logo, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_k - x \in U_{p_n,\varepsilon}, \forall k \geq k_0.$$

Daí, para todo $k \geq k_0$, $p_n(x_k - x) < \varepsilon$ e então $p_n(x_k - x) \to 0$.
$(\Leftarrow)$ Seja U uma vizinhança de zero. Pelo Corolário 1.3.14, existem $n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$ tal que $U_{p_n,\varepsilon} \subseteq U$. Por hipótese, $p_n(x_k - x) \to 0$, logo existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_0$, $p_n(x_k - x) < \varepsilon$. Então para todo $k \geq k_0$,

$$x_k - x \in U_{p_n,\varepsilon} \subseteq U$$

e portanto, $x_k \to x$.
$(b)(\Rightarrow)$ Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$. Pelo Corolário 1.3.14, $U_{p_n,\varepsilon}$ é vizinhança de zero. Logo, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $k, l \geq k_0$, $x_k - x_l \in U_{p_n,\varepsilon}$. Daí, para todos $k, l \geq k_0$, $p_n(x_k - x_l) < \varepsilon$, provando que $p_n(x_k - x_l) \to 0$ quando $k, l \to \infty$.
$(\Leftarrow)$ Seja U uma vizinhança de zero. Pelo Corolário 1.3.14, existem $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ tal que $U_{p_n,\varepsilon} \subseteq U$. Por hipótese, $p_n(x_k - x_l) \to 0$ quando $k, l \to \infty$. Logo, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todos $k, l \geq k_0, p_n(x_k - x_l) < \varepsilon$. Então, para todos $k, l \geq k_0$,

$$x_k - x_l \in U_{p_n,\varepsilon} \subseteq U$$

e então $(x_k)_k$ é de Cauchy.
$(c)(\Rightarrow)$ Seja U uma vizinhança de x. Logo, $-x + U$ é uma vizinhança de zero e pelo Corolário 1.3.14 existem $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon > 0$ tal que

$$U_{p_n,\varepsilon} \subseteq -x + U.$$

Daí,

$$\{y \in X : p_n(y - x) < \varepsilon\} = x + U_{p_n,\varepsilon} \subseteq U.$$

$(\Leftarrow)$ Suponha que existam $n \geq 1$ e $\varepsilon > 0$ tal que

$$\{y \in X : p_n(y - x) < \varepsilon\} \subseteq U.$$

Pelo Corolário 1.3.14, $U_{p_n,\varepsilon}$ é vizinhança de zero, logo $x + U_{p_n,\varepsilon}$ é vizinhança de x. Daí,

$$x \in (x + U_{p_n,\varepsilon})^\circ \subseteq x + U_{p_n,\varepsilon} = \{y \in X : p_n(y - x) < \varepsilon\} \subseteq U$$

e portanto, U é vizinhança de x. ■

Proposição 1.3.21 *Sejam E e F dois espaços localmente convexos, e sejam P e Q famílias dirigidas de seminormas que definem as topologias de E e F, respectivamente. Então uma aplicação linear $T\colon E \longrightarrow F$ é contínua se, e somente se, dada $q \in Q$, existem $p \in P$ e $c > 0$ tais que*

$$q(T(x)) \leq cp(x), \forall x \in E.$$

Demonstração. Primeiramente, lembre que se a topologia de um espaço localmente convexo E é definida por uma família dirigida de seminormas $\mathcal{P}$, então os conjuntos

$$U_{p,\varepsilon} = \{x \in E : p(x) < \varepsilon\}, p \in \mathcal{P}$$

formam uma base de vizinhanças de zero em E conforme o Corolário 1.3.14. Além disso, dados E e F espaços vetoriais topológicos, $\mathcal{B}_0(E)$ e $\mathcal{B}_0(F)$ bases de vizinhanças de zero em E e F, respectivamente, uma aplicação linear $T\colon E \longrightarrow F$ é contínua se, e somente se, dada $V \in \mathcal{B}_0(F)$, existe $U \in \mathcal{B}_0(E)$ tal que $T(U) \subseteq V$.

($\Rightarrow$) Suponha T contínua e seja $q \in Q$. Considerando a vizinhança $U_{q,1}$, existem $p \in P$ e $\varepsilon > 0$ tal que

$$T(U_{p,\varepsilon}) \subseteq U_{q,1}$$

ou seja, se $x \in E$ é tal que $p(x) < \varepsilon$, então $q(T(x)) < 1$. Seja $x \in E$ e suponha que $p(x) \neq 0$. Então $\frac{\varepsilon}{2p(x)}x \in E$ e

$$p\left(\frac{\varepsilon}{2p(x)}x\right) = \frac{\varepsilon}{2p(x)}p(x) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

daí, $\frac{\varepsilon}{2p(x)}x \in U_{p,\varepsilon}$, logo

$$q\left(T\left(\frac{\varepsilon}{2p(x)}x\right)\right) < 1 \Rightarrow q(T(x)) < \frac{2}{\varepsilon}p(x).$$

Tomando $0 < c := \frac{2}{\varepsilon}$, então $q(T(x)) \leq cp(x)$. Agora suponha que $p(x) = 0$. Mostremos que $q(T(x)) = 0$. Suponha que $q(T(x)) > 0$. Como $p(x) = 0 < \varepsilon$, segue que $x \in U_{p,\varepsilon}$, e então $q(T(x)) < 1$. Daí, $0 < q(T(x)) < 1$. Seja $b > 0$ tal que $bq(T(x)) \geq 1$. Então

$$0 = bp(x) = p(bx) < \varepsilon \Rightarrow q(T(bx)) < 1. \tag{1.2}$$

Mas,

$$q(T(bx)) = bq(T(x)) \geq 1 \tag{1.3}$$

e então, de (1.2) e (1.3) temos um absurdo. Logo $q(T(x)) = 0$ e então

$$0 = q(T(x)) \leq cp(x) = 0.$$

Logo,

$$q(T(x)) \leq cp(x), \forall x \in E.$$

($\Leftarrow$) Seja $U_{q,\varepsilon}$ uma vizinhança de zero em F, com $q \in Q$ e $\varepsilon > 0$. Por hipótese, existem $p \in P$ e $c > 0$ tal que $q(T(x)) \leq cp(x)$, para todo $x \in E$. Tome $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{c} > 0$ e $U_{p,\varepsilon'}$ a vizinhança de zero em E. Afirmamos que $T(U_{p,\varepsilon'}) \subseteq U_{q,\varepsilon}$. De fato, seja $x \in U_{p,\varepsilon'}$, daí $p(x) < \varepsilon'$. Logo,

$$q(T(x)) \leq cp(x) < c\varepsilon' = c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$$

e então $T(x) \in U_{q,\varepsilon}$. Portanto, T é contínua. ∎

Proposição 1.3.22 *Em um espaço localmente convexo E, cada vizinhança de zero contém uma vizinhança convexa e equilibrada de zero.*

Demonstração. Veja [21, Proposição 3.6, p. 8]. ■

Proposição 1.3.23 *Seja E um espaço localmente convexo, e seja $\mathcal{B}_0$ uma base de vizinhanças convexas e equilibradas de zero em E. Então existe uma família dirigida de seminormas que define a topologia de E.*

Demonstração. Veja [21, Corolário 4.8, p. 12] ■

Definição 1.3.24 Sejam E um espaço localmente convexo, $\mathcal{P}$ a família de seminormas que define a topologia de E e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E. Diremos que a série $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ é *absolutamente convergente* em E se, e somente se,

$$\sum_{j=1}^{\infty} p(x_j) < \infty,\ \forall p \in \mathcal{P}.$$

Proposição 1.3.25 *Seja E um espaço localmente convexo. Então E é completo se, e somente se, toda série absolutamente convergente for convergente.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Sejam $\mathcal{P}$ a família de seminormas que definem a topologia de E, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq E$ e considere a série absolutamente convergente

$$\sum_{j=1}^{\infty} x_j.$$

Seja $p \in \mathcal{P}$ e $\varepsilon > 0$. Como a série é absolutamente convergente, segue que

$$\sum_{j=1}^{\infty} p(x_j) < \infty$$

e então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{j=m_1}^{\infty} p(x_j) < \varepsilon, \forall m \geq n_0.$$

Assim, se $n > m \geq n_0$, sendo $s_k = \sum_{j=1}^{k} x_j$, então

$$p(s_n - s_m) = p\left(\sum_{j=1}^{n} x_j - \sum_{j=1}^{m} x_j\right) = p\left(\sum_{j=m+1}^{n} x_j\right) \leq \sum_{j=m+1}^{n} p(x_j) \leq \sum_{j=m+1}^{\infty} p(x_j) < \varepsilon$$

provando que $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em E, pelo Lema 1.3.20. Como por hipótese E é completo, segue que (s_n) converge. Portanto, $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ converge.

$(\Leftarrow)$ Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ uma sequência de Cauchy. Provemos que $(x_n)_n$ converge em E. Sejam $p \in \mathcal{P}$ e tome $(n_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ estritamente crescente tal que

$$p(x_n - x_m) \leq \frac{1}{2^j}, \forall m, n \geq n_j.$$

Em particular, $p(x_{n_{j+1}} - x_{n_j}) \leq \frac{1}{2^j}$ e então

$$\sum_{j=1}^{\infty} p(x_{n_{j+1}} - x_{n_j}) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1$$

provando que

$$\sum_{j=1}^{\infty} (x_{n_{j+1}} - x_{n_j})$$

é absolutamente convergente e então $\sum_{j=1}^{\infty} x_{n_{(j+1)}} - x_{n_j}$ converge. Como

$$x_{n_{k+1}} = x_{n_1} + \sum_{j=1}^{k} (x_{n_{j+1}} - x_{n_j})$$

segue que $(x_{n_{k+1}})_{k=1}^{\infty}$ converge em E. Como $(x_{n_{k+1}})_k$ é subsequência da sequência de Cauchy $(x_n)_n$, segue que $(x_n)_n$ converge e então E é completo. ■

Definição 1.3.26 Seja X um espaço topológico, F um espaço vetorial topológico e $\mathcal{F}$ uma família de aplicações de X em $\mathcal{F}$. Diremos que $\mathcal{F}$ é *equicontínua em um ponto* $a \in X$ se dado V vizinhança de zero em F, existe U vizinhança de a em X tal que

$$f(x) \in f(a) + V, \forall x \in U, \forall f \in \mathcal{F}.$$

Diremos que $\mathcal{F}$ é *equicontínua* quando for equicontínua em todos os pontos de X.

Definição 1.3.27 Seja X um espaço vetorial topológico. Diremos que X é um *espaço de Baire* quando a interseção de cada sequência de subconjuntos abertos e densos em X for um subconjunto denso em X.

Teorema 1.3.28 *Todo espaço métrico completo é um espaço de Baire.*

Demonstração. Veja [18, Theorem 1, p. 87]. ■

Definição 1.3.29 Em um espaço vetorial topológico E, um conjunto $A \subseteq E$ é dito *limitado* se dado qualquer vizinhança de zero U, existe $\delta > 0$ tal que $\lambda A \subseteq U$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, com $|\lambda| \leq \delta$.

Proposição 1.3.30 *Seja E um espaço vetorial topológico. Um subconjunto $A \subseteq E$ é limitado se, e somente se, dadas sequências $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq A$ e $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{K}$, com $\lambda_n \longrightarrow 0$, tem-se que $\lambda_n x_n \longrightarrow 0$.*

Demonstração. Veja [24, Proposition 5.3, p. 26]. ■

Lema 1.3.31 *Seja E um espaço vetorial topológico metrizável. Então*

$$\lim_{\alpha \to 0} d(\alpha x, 0) = 0$$

para todo $x \in E$.

Demonstração. Relembre que em um espaço métrico, $x_n \longrightarrow x$ se, e somente se, $d(x_n, x) \longrightarrow 0$ em $\mathbb{R}$.

Sejam $x \in E$ e $\lambda_n \longrightarrow 0$. Como $\{x\}$ é limitado, segue da Proposição 1.3.30 que $\lambda_n x \longrightarrow 0$ em E e como E é metrizável, segue que $d(\lambda_n x, 0) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$. Logo

$$\lim_{\alpha \to 0} d(\alpha x, 0) = 0$$

para todo $x \in E$. ∎

Proposição 1.3.32 *Sejam E um espaço vetorial topológico metrizável e $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$. Então existem $\alpha_n \in (0, 1], n \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_n x_n \longrightarrow 0$.*

Demonstração. Pelo Lema 1.3.31, como $\lim_{\alpha \to 0} d(\alpha y_1, 0) = 0$, existe $\alpha_1 \in (0, 1]$ tal que $d(\alpha_1 y_1, 0) < 1$.

Da mesma forma, como $\lim_{\alpha \to 0} d(\alpha y_2, 0) = 0$, existe $\alpha_2 \in (0, 1]$ tal que $d(\alpha_2 y_2, 0) < \frac{1}{2}$.

Procedendo dessa forma, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $\alpha_n \in (0, 1]$ tal que

$$d(\alpha_n y_n, 0) < \frac{1}{n}. \tag{1.4}$$

Daí, fazendo $n \to \infty$ na equação 1.4, temos que $d(\alpha_n y_n, 0) \to 0$ e como E é metrizável, segue que $\alpha_n y_n \to 0$. ∎

Teorema 1.3.33 (Teorema da Aplicação Aberta) *Seja E um espaço vetorial topológico metrizável e completo, seja F um espaço vetorial topológico de Baire, e seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Então as sequintes condições são equivalentes:*

(i) T é sobrejetiva;

(ii) T é aberta.

Demonstração. Veja [21, Teorema 13.4, p. 47]. ∎

Corolário 1.3.34 *Seja E um espaço vetorial topológico metrizável e completo, seja F um espaço vetorial topológico de Baire, e seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$ uma aplicação bijetiva. Então T é um isomorfismo topológico.*

Demonstração. Segue do Teorema 1.3.33. ∎

Teorema 1.3.35 (Teorema do Gráfico Fechado) *Sejam E e F dois espaços vetoriais topológicos metrizáveis e completos. Seja $T\colon E \longrightarrow F$ uma aplicação linear cujo gráfico G_T é fechado em $E \times F$. Então T é contínua.*

Demonstração. Veja [21, Teorema 13.7, p. 49]. ∎

Teorema 1.3.36 (Teorema de Hahn-Banach) *Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ e seja $p\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ uma seminorma. Seja M_0 um subespaço de E, e seja $\phi_0\colon M_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear tal que $|\phi_0(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in M_0$. Então existe um funcional linear $\phi\colon E \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $\phi(x) = \phi_0(x)$ para todo $x \in M_0$ e $|\phi(x)| \leq p(x)$ para todo $x \in E$.*

Demonstração. Veja [18, Theorem 2, p. 126]. ■

Proposição 1.3.37 *Seja E um espaço localmente convexo de Hausdorff, e sejam $x_1, \ldots, x_n$ n vetores linearmente independentes em E. Então existem $\phi_1, \ldots, \phi_n \in E'$ tais que $\phi_j(x_k) = \delta_{jk}$ para $j, k = 1, \ldots, n$.*

Demonstração. Veja [21, Corolário 16.5, p. 60]. ■

Finalizamos as preliminares com o Teorema 1.3.42 que é um resultado essencial na prova do Lema 4.2.3 que é necessário para demonstrar o principal resultado deste trabalho. Para demonstrar esse teorema precisamos das definições e dos dois resultados a seguir.

Definição 1.3.38 Seja E um espaço vetorial e M um subespaço de E. Definimos a codimensão de M como sendo a dimensão do espaço E/M.

Definição 1.3.39 Seja E um espaço vetorial topológico, e sejam $M_1, M_2, \ldots, M_n$ subespaços vetoriais de E. Diremos que E é a *soma direta topológica* de $M_1, \ldots, M_n$, e escrevemos $E = M_1 \oplus M_2 \oplus \ldots \oplus M_n$, se a aplicação $S\colon M_1 \times \ldots \times M_n \longrightarrow E$ definida por

$$S(x_1, \ldots, x_n) = x_1 + \ldots + x_n$$

é um isomorfismo topológico.

Proposição 1.3.40 *Seja E um espaço vetorial, e seja $\mathcal{P}$ uma família de seminormas em E. Então $(E, \tau_{\mathcal{P}})$ é um espaço topológico de Hausdorff se, e somente se,*

$$\bigcap_{\mathrm{p} \in \mathcal{P}} \mathrm{p}^{-1}\{0\} = \{0\}.$$

Demonstração. Veja [21, Corolário 4.5, p. 11]. ■

Proposição 1.3.41 *Seja E um espaço vetorial topológico de Hausdorff. Então para cada subespaço fechado M de E de codimensão finita, existe N subespaço de E tal que* $\dim N < +\infty$ *e*

$$E = M \oplus N.$$

Demonstração. Veja [21, Corolário 11.6, p. 36]. ■

O próximo teorema será importante num lema necessário para demonstrar o último resultado desta dissertação.

Teorema 1.3.42 *Seja F um espaço localmente convexo, completo e de Hausdorff, $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência crescente de seminormas que define a topologia de F. Suponha que $\ker p_n$ tenha codimensão finita para todo $n \in \mathbb{N}$. Então F é topologicamente isomorfo à $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, munido da topologia produto.*

Demonstração. Defina $K_n = \ker p_n, n \in \mathbb{N}$. É fácil ver que $\ker p_n$ é um subespaço fechado de F e como $p_n \leq p_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$, temos que $K_{n+1} \subseteq K_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Como a codimensão de K_1 é finita segue da Proposição 1.3.41 que podemos escrever

$$F = K_1 \oplus M_1, \text{ com } \dim M_1 < +\infty.$$

Da mesma forma, podemos escrever

$$K_1 = K_2 \oplus M_2, \text{ com } \dim M_2 < +\infty,$$

$$K_2 = K_3 \oplus M_3, \text{ com } \dim M_3 < +\infty,$$

$$\vdots$$

$$K_n = K_{n+1} \oplus M_{n+1}, \text{ com } \dim M_{n+1} < +\infty.$$

Note que

$$F = K_n \oplus M_n \oplus M_{n-1} \oplus \ldots \oplus M_1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Seja $\pi_n \colon F \longrightarrow M_n$ a projeção sobre M_n e considere

$$E = \prod_{n=1}^{\infty} M_n.$$

Como E é o produto cartesiano de espaços de dimensão finita, é fácil ver que E e $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ são algebricamente isomorfos e considerando a topologia produto em E segue que eles são topologicamente isomorfos. Sendo assim, basta mostrarmos que E e F são topologicamente isomorfos que o resultado segue. Para isso, defina $T \colon F \longrightarrow E$ por

$$T(x) = (\pi_n(x))_{n=1}^{\infty}$$

É claro que T é linear e contínua, pois cada π_n é contínua. Mostremos que T é injetora e sobrejetora. Suponha que $T(x) = 0$. Logo, $(\pi_n(x))_{n=1}^{\infty} = 0$, isto é, $\pi_n(x) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Daí,

$$x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \ker p_n$$

e então, $x = 0$, mostrando que T é injetora. Para mostrar que T é sobrejetora, seja $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in E$. Defina $x_n = y_1 + \ldots + y_n$. Fixando uma seminorma $p_r, r \in \mathbb{N}$ temos que para todos $m > n > r$

$$p_r(x_m - x_n) = p_r(y_{n+1} + \ldots + y_m) = 0.$$

Logo, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy em F. Digamos que $x_n \to x$ quando $n \to \infty$. Note que $\pi_r(x_n) = y_r, \forall n \geq r$. De fato, se $n \geq r$, como

$$F = K_n \oplus M_n \oplus \ldots \oplus M_r \oplus \ldots \oplus \ldots \oplus M_1,$$

segue que

$$\pi_r(x_n) = \pi_r(y_1) + \ldots + \pi_r(y_r) + \ldots + \pi_r(y_n) = \pi_r(y_r) = y_r.$$

Daí, segue que $\pi_r(x_n) \to y_r$ quando $n \to \infty$. Mas, $\pi_r(x_n) \to \pi_r(x)$. Daí, $\pi_r(x) = y_r, \forall r \in \mathbb{N}$. Logo,

$$T(x) = (\pi_n(x))_{n=1}^{\infty} = (y_n)_{n=1}^{\infty} = y.$$

Pelo Teorema 1.3.33 segue que T é um isomorfismo topológico, isto é, T é contínua, bijetora e T^{-1} é contínua. Logo, F é isomorfo a $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. ■

Capítulo 2

Operadores Hipercíclicos

Conforme já dito na introdução, neste capítulo estudaremos principalmente a noção de hiperciclicidade. Mas além disso abordaremos as noções de transitividade topológica, operadores mixing e fracamente mixing e veremos a relação entre elas. Estudaremos também diversos resultados básicos a respeito dessas noções.

2.1 Hiperciclicidade

Definição 2.1.1 Um *sistema dinâmico* é um par (X, F) onde X é um espaço métrico e $F\colon X \longrightarrow X$ é uma função contínua. Muitas vezes vamos nos referir ao sistema dinâmico (X, F) simplesmente por $F\colon X \longrightarrow X$.

Definição 2.1.2 Sejam (X, F) um sistema dinâmico e $x \in F$. Definimos a F-órbita de x como sendo o conjunto

$$Orb(F, x) = \{x, F(x), F^2(x), \ldots\}$$

e dizemos que F tem órbita densa quando existe algum $x \in X$ tal que o conjunto $Orb(F, x)$ é denso em X.

Definição 2.1.3 Um sistema dinâmico $F\colon X \longrightarrow X$ é *topologicamente transitivo* se para quaisquer $U, V \subset X$ abertos e não vazios, existe um $n \geq 0$ tal que $F^n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Proposição 2.1.4 *Seja $F\colon X \longrightarrow X$ uma função contínua no espaço métrico X sem pontos isolados.*

(a) Se $x \in X$ tem órbita densa sobre F, então $F^n(x)$ também tem órbita densa sobre F, para todo $n \geq 1$.

(b) Se F tem órbita densa então F é topologicamente transitivo.

Demonstração.

(a) Seja $x \in X$ tal que $Orb(F,x)$ é denso em X e $n \geq 1$. Então $Orb(F,x) \backslash \{x, F(x), \ldots, F^{n-1}(x)\}$ é denso em X pela Proposição 1.2.1.
(b) Seja $x \in X$ tal que $\{x, F(x), F^2(x), \ldots\}$ seja denso em X. Sejam $U, V \subset X$ abertos não vazios. Como $Orb(F,x)$ é denso em X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $F^n(x) \in U$. Pelo item (a), existe $m \geq n$ tal que $F^m(x) \in V$. Note que $F^m(x) = F^{m-n}(F^n(x)) \in F^{m-n}(U)$ e $F^m(x) \in V$. Assim, $F^{m-n}(U) \cap V \neq \emptyset$ e assim concluímos que F é topologicamente transitivo. ■

Proposição 2.1.5 *Seja $F\colon X \longrightarrow X$ um sistema dinâmico. Então F é topologicamente transitivo se, e somente se, para qualquer $U \subset X$ aberto não vazio, $\bigcup_{n=0}^{\infty} F^{-n}(U)$ é denso em X.*

Demonstração.
($\Rightarrow$) Seja $U \subset X$ aberto e não vazio e considere $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} F^{-n}(U)$. Seja $V \subset X$ aberto não vazio. Como F é topologicamente transitivo, existe $n \geq 0$ tal que $F^n(V) \cap U \neq \emptyset$, ou seja, existe $v \in V$ tal que $F^n(v) \in U$ e então, $v \in F^{-n}(U)$, o que implica que $v \in \bigcup_{n=0}^{\infty} F^{-n}(U) = A$. Como $v \in V$ e $v \in A$, $V \cap A \neq \emptyset$ e então A é denso em X.
($\Leftarrow$) Sejam $U, V \subset X$ abertos e não vazios. Por hipótese, $\bigcup_{n=0}^{\infty} F^{-n}(V)$ é denso em X. Então, existe $n \geq 0$ tal que $F^{-n}(V) \cap U \neq \emptyset$, ou seja, existe $u \in U$ tal que $u \in F^{-n}(V)$ e então, $F^n(u) \in V$. É claro que $F^n(u) \in F^n(U)$. Logo $F^n(U) \cap V \neq \emptyset$ e então F é topologicamente transitivo. ■

Teorema 2.1.6 (Teorema da Transitividade de Birkhoff) *Seja $F\colon X \longrightarrow X$ uma função contínua no espaço métrico, separável e completo X sem pontos isolados. Então as seguintes proposições são equivalentes:*

(i) F é topologicamente transitivo.

(ii) Existe $x \in X$ tal que $Orb(F,x)$ é denso em X.

Demonstração.
Pela Proposição 2.1.4 item (b), temos que $(ii) \Rightarrow (i)$. Mostremos que $(i) \Rightarrow (ii)$. Seja $D(F)$ o conjunto dos pontos de X que possuem órbita densa sobre F. Como X é separável, existe um subconjunto denso e enumerável. Digamos $\{y_j : j \geq 1\}$ esse conjunto. Assim, para $m, j \geq 1$, as bolas $B\left(y_j, \dfrac{1}{m}\right)$ formam uma base enumerável para a topologia de X. Seja $(U_k)_{k\geq 1}$ essa base. Assim, $x \in D(F)$ se e somente se para todo $k \geq 1$, existe $n \geq 1$ tal que $F^n(x) \in U_k$, isto é:

$$D(F) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} F^{-n}(U_k).$$

Pela continuidade de F, como U_k é aberto, $F^{-n}(U_k)$ é aberto, logo $\bigcup_{n=0}^{\infty} F^{-n}(U_k)$ é aberto para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso, como cada U_k é aberto, segue pela Proposição 2.1.5 que $\bigcup_{n=0}^{\infty} F^{-n}(U_k)$ é denso em X.

Como X é métrico e completo, X é um espaço de Baire, logo $D(F) = \bigcap_{k=0}^{\infty} \bigcup_{n=0}^{\infty} F^{-n}(U_k)$ é denso em X e consequentemente, não vazio. Então existe $x \in X$ tal que $Orb(F, x)$ é denso em X. $\blacksquare$

Como foi demonstrado, a implicação $(ii) \Rightarrow (i)$ sempre é verdadeira pelo item (b) da Proposição 2.1.4. Entretanto, se retirarmos a hipótese de X ser completo, a implicação $(i) \Rightarrow (ii)$ não é sempre verdadeira. No exemplo a seguir, mostraremos um exemplo de operador que é topologicamente transitivo mas não tem órbita densa para nenhum ponto.

Exemplo 2.1.7 Seja $B_{\mathbb{C}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ com a topologia induzida de $\mathbb{C}$ e $T\colon B_{\mathbb{C}} \longrightarrow B_{\mathbb{C}}$ dado por $T(z) = z^2$. É claro que T está bem definido, pois se $z \in B_{\mathbb{C}}$ temos que $|T(z)| = |z^2| = |z|^2 = 1$ e então $T(z) \in B_{\mathbb{C}}$.

Mostremos que T é topologicamente transitivo. Sejam $U, V \subseteq B_{\mathbb{C}}$ abertos e não vazios. Como U é aberto, U contém um arco fechado de medida $\dfrac{2\pi}{2^n}$ para algum $n \geq 1$. Observe também que se $z = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$ então $z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\text{sen}2\theta)$, ou seja, ao aplicar T em $z \in \mathbb{C}$ temos que o argumento de z^2 é o dobro do argumento de z.

Como U contém um arco fechado de medida $\dfrac{2\pi}{2^n}$, $T^n(U)$ contém um arco fechado de medida

$$2^n \cdot \frac{2\pi}{2^n} = 2\pi.$$

Então $T^n(U) = B_{\mathbb{C}}$ e, assim, $T^n(U) \cap V = B_{\mathbb{C}} \cap V = V \neq \emptyset$, provando que T é topologicamente transitivo.

Agora considere $X = \{z \in \mathbb{C} : z^{2^n} = 1, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}$ e $T_X\colon X \longrightarrow X$ dado por $T_X(z) = T(z)$. Mostremos que T_X está bem definida ($T(X) \subseteq X$), é topologicamente transitivo mas para nenhum ponto tem órbita densa.

Primeiramente mostremos a boa definição. Seja $z \in X$. Então $z^{2^n} = 1$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Mostremos que $T_X(z)^{2^k} = 1$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Se $n = 1$, então $z^2 = 1$ e daí,

$$T_X(z) = T(z) = z^2 = 1 \Rightarrow T_X(z)^{2^2} = T(z)^{2^2} = 1^4 = 1 \Rightarrow T(z) \in X.$$

Agora se $n > 1$, tomando $k = n - 1$ temos que

$$T_X(z)^{2^k} = T(z)^{2^k} = (z^2)^{2^k} = z^{2 \cdot 2^k} = z^{2^{k+1}} = z^{2^{n-1+1}} = z^{2^n} = 1 \Rightarrow T_X(z) = T(z) \in X.$$

Mostremos agora que X é denso em $B_{\mathbb{C}}$. Seja $x = e^{i\theta} \in B_{\mathbb{C}}$ e $U \in \mathcal{U}_x$. Daí $x \in U^\circ$ e como U° é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $e^{i\varphi} \in U^\circ$ sempre que $\theta - \delta \leq \varphi \leq \theta + \delta$. Tome $k, n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\theta < \frac{2k\pi}{2^n} \leq \theta + \delta.$$

Como $\theta - \delta \leq \theta < \dfrac{2k\pi}{2^n} \leq \theta + \delta$, segue que $z = e^{i\left(\frac{2k\pi}{2^n}\right)} \in X, z \in U^\circ \subseteq U$.

Para mostrar que T_X é topologicamente transitivo, sejam $U, V \subseteq X$ abertos e não vazios. Então $U = \tilde{U} \cap X, V = \tilde{V} \cap X$, onde $\tilde{U}, \tilde{V} \subseteq B_{\mathbb{C}}$ são abertos e não vazios. Já provamos no início do exemplo que T é topologicamente transitivo. Logo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(\tilde{U}) \cap \tilde{V} \neq \emptyset$, isto é, existe $z_0 \in \tilde{U}$ tal que $T^n(z_0) \in \tilde{V}$.

Como $\tilde{U}$ é aberto, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $arg(z_0) - \delta_1 \leq \varphi \leq arg(z_0) + \delta_1$, então $e^{i\varphi} \in \tilde{U}$. Também como V é aberto, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $arg(T^n(z_0)) - \delta_2 \leq \varphi \leq arg(T^n(z_0)) + \delta_2$ então $e^{i\varphi} \in \tilde{V}$. Seja $\theta = arg(z_0)$ e $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Tome $k, l \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left| \theta - \frac{2k\pi}{2^l} \right| < \frac{1}{2^n}\delta$$

e considere $z = e^{i\left(\dfrac{2k\pi}{2^l}\right)}$. Temos que

$$\left| \theta - \frac{2k\pi}{2^l} \right| < \frac{1}{2^n}\delta < 1 \cdot \delta \leq \delta_1$$

e então $z \in \tilde{U}$. Como $z \in X$, segue da definição que $z \in U$. Agora

$$\begin{aligned} |arg(T^n(z)) - arg(T^n(z_0))| &= \left| 2^n \cdot \frac{2k\pi}{2^l} - 2^n\theta \right| = \left| 2^n \left(\frac{2k\pi}{2^l} - \theta \right) \right| = 2^n \left| \frac{2k\pi}{2^l} - \theta \right| \\ &< 2^n \cdot \frac{1}{2^n} \cdot \delta = \delta \leq \delta_2 \end{aligned}$$

e então $T^n(z) \in \tilde{V}$. Como $z \in X$ e $T(X) \subseteq X$, segue que $T^n(z) \in X$ e daí $T^n(z) \in \tilde{V} \cap X = V$.

Portanto, existe $z \in U$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $T_X^n(z) = T^n(z) \in V$ o que implica que T_X é topologicamente transitivo.

Por fim, mostremos que T_X não tem órbita densa para nenhum ponto de X. De fato, se $x \in X$ então existem $k, n \in \mathbb{N}$ tais que $k \in \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ e $x = e^{i\left(\dfrac{2k\pi}{2^n}\right)}$. Daí,

$$T_X^n(x) = T^n(x) = e^{i\left(2^n \cdot \dfrac{2k\pi}{2^n}\right)} = e^{2k\pi i} = \cos(2k\pi) + i\mathrm{sen}(2k\pi) = 1$$

logo, para todo $k > n$, $T_X^k(x) = T^k(x) = 1$ e assim $Orb(T_X, x) = \{T^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ não pode ser denso em X.

É claro que X não é completo. Seja $z \in B_{\mathbb{C}}$ tal que $z^3 = 1$. É claro que $z \notin X$. Como X é denso em $B_{\mathbb{C}}$, existe $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X$ tal que $z_n \longrightarrow z$, provando que X não é fechado e consequentemente, não é completo.

Definição 2.1.8 Um *sistema dinâmico linear* é um par (X, T) onde X é um espaço de Fréchet separável e $T \colon X \longrightarrow X$ é um operador linear e contínuo.

A principal noção estudada na dinâmica linear é o conceito de hiperciclicidade, que trataremos agora.

A definição de função hipercíclica pode ser feita em qualquer espaço topológico X. No nosso caso, vamos nos restringir a espaços de Fréchet separáveis e operadores lineares contínuos entre esses espaços.

Definição 2.1.9 Seja (X,T) um sistema dinâmico linear. Dizemos que T é hipercíclico se existe $x \in X$ tal que $Orb(T,x) = \{x, T(x), \ldots, T^n(x), \ldots\}$ é denso em X. Nesse caso, x é um vetor hipercíclico de T. O conjunto de todos os vetores hipercíclicos de T será denotado por $HC(T)$.

Vejamos a seguir dois exemplos de operadores lineares que são hipercíclicos.

Exemplo 2.1.10 Seja $\ell_p(1 \leq p < \infty)$ o espaço de Banach das sequências p-somáveis e para cada $a \in \mathbb{R}$, considere o operador $T_a \colon \ell_p \longrightarrow \ell_p$ definido por

$$T_a(\xi_1, \xi_2, \ldots) = a(\xi_2, \xi_3, \ldots).$$

Se $a > 1$, então T será hipercíclico.
De fato, considere $T \colon \ell_p \longrightarrow \ell_p$ e $S \colon \ell_p \longrightarrow \ell_p$ definido por

$$T(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (\xi_2, \xi_3, \ldots), S(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (0, \xi_1, \xi_2, \ldots)$$

e sejam $T_a = aT$ e $B = \dfrac{1}{a}S$, com $a > 1$. Como ℓ_p é separável, existe um conjunto que é denso e enumerável em ℓ_p e formado por sequências de c_{00}. Digamos que $\{x_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ seja esse conjunto. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $k(n)$ o maior índice das coordenadas de x_n tal que $x_n \neq 0$ e considere $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de inteiros positivos tomados da seguinte forma

$$r_n > \text{máx}_{1\leq i \leq n} k(i) \text{ e } \|B^{r_n}(x_n)\| = \left\| \frac{1}{a^{r_n}}(0, 0, \ldots, \xi_1, \xi_2, \ldots) \right\| = \frac{1}{a^{r_n}} \|x_n\| < \frac{1}{2^n}. \tag{2.1}$$

Considere $p_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} r_j$ e tome $y = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} B^{p_n}(x_n)$. Mostremos que y está bem definido. De fato, como $p_n \geq r_n$ e $a > 1$, segue que $a^{p_n} \geq a^{r_n}$ e então

$$\|B^{p_n}(x_n)\| = \frac{1}{a^{p_n}} \|x_n\| \leq \frac{1}{a^{r_n}} \|x_n\| \overset{(2.1)}{<} \frac{1}{2^n}, \forall n.$$

Logo, $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \|B^{p_n}(x_n)\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty$. Como ℓ_p é um espaço de Banach, segue que

$$\sum_{j=1}^{\infty} B^{p_n}(x_n) < \infty$$

e y está bem definido, isto é, a série é convergente.

Por outro lado, se $i < n$, então $r_n > \text{máx}_{1 \leq i \leq n} k(i) \geq k(i), i = 1, \ldots, n$. Logo, $k(i) < r_n, i = 1, \ldots, n$ e então

$$T_a^{r_n}(x_i) = 0. \tag{2.2}$$

Portanto,

$$T_a^{p_n}(y) \quad = \quad T_a^{p_n}\left(\sum_{k=1}^{\infty} B^{p_k}(x_k)\right) = T_a^{p_n}\left(\lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{j} B^{p_k}(x_k)\right) = \lim_{j\to\infty} T_a^{p_n}\left(\sum_{k=1}^{j} B^{p_k}(x_k)\right)$$

$$= \lim_{j\to\infty}\sum_{k=1}^{j} T_a^{p_n}(B^{p_k}(x_k)) = \sum_{k=1}^{\infty} T_a^{p_n}(B^{p_k}(x_k)) = \sum_{k=1}^{n} T_a^{p_n}(B^{p_k}(x_k)) + \sum_{k=n+1}^{\infty} T_a^{p_n}(B^{p_k}(x_k)).$$

Para $k < n$, temos que $p_k < p_n$ e então $p_n = p_k + r_{k+1} + \ldots + r_n$. Daí, pela equação (2.2), segue que $T_a^{p_n}(B^{p_k}(x_k)) = 0$ e consequentemente, $\sum_{k=1}^{n} T_a^{p_n}(B^{p_k}(x_k)) = x_n$.

Agora, para $k > n$, $p_k > p_n$ e então $T_a^{p_n}(B^{p_k}(x_k)) = B^{p_k - p_n}(x_k)$ e daí, $\sum_{k=n+1}^{\infty} T_a^{p_n}(B^{p_k}(x_k)) = \sum_{k=n+1}^{\infty} B^{p_k-p_n}(x_k)$. Portanto,

$$T_a^{p_n}(y) = x_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} B^{p_k-p_n}(x_k).$$

Note que

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} B^{p_k-p_n}(x_k) \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|B^{p_k-p_n}(x_k)\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{a^{p_k-p_n}}\|x_k\| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{a^{r_k}}\|x_k\| \overset{(2.1)}{\leq} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$

Portanto, $\|T_a^{p_n}(y) - x_n\| \leq \dfrac{1}{2^n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Mostremos que $Orb(T_a, y)$ é denso em ℓ_p. Seja $\varepsilon > 0$, então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{2^m} < \varepsilon$. Seja $I = \mathbb{N} \setminus \{n : n < m\}$ e considere a subsequência $(x_k)_{k\in I}$. É claro que $(x_k)_{k\in I}$ continua densa em ℓ_p. Seja $z \in \ell_p$. Então existe $n \in I$ tal que $\|z - x_n\| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Note que tal n cumpre

$$\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^m} < \varepsilon.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|T_a^{p_n}(y) - z\| &= \|T_a^{p_n}(y) - x_n + x_n - z\| \\ &\leq \|T_a^{p_n}(y) - x_n\| + \|x_n - z\| \\ &\leq \frac{1}{2^n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Como $z \in \ell_p$ é arbitrário, segue que $Orb(T_a, y)$ é denso em ℓ_p e, portanto, T_a é um operador hipercíclico em ℓ_p.

Exemplo 2.1.11 Considere o espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ das funções holomorfas de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$. Existe uma função $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ com a seguinte propriedade: dados uma função $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ e $\varepsilon > 0$ quaisquer, para todo $R > 0$ existe um número natural n tal que $|f(z+n) - g(z)| < \varepsilon$ qualquer que seja z com $|z| \leq R$. Em outras palavras, o operador $L\colon \mathcal{H}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{C})$ definido por $L(f)(z) = f(z+1), \forall z \in \mathbb{C}$ é hipercíclico.

De fato, note que para toda função $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, temos que $L^n(f)(z) = f(z+n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para $n = 1$, é claro que $L(f)(z) = f(z+1)$. Suponha que isso seja válido para $k = n$, isto é, $L^n(f)(z) = f(z+n)$. Então

$$L^{n+1}(f)(z) = L(L^n(f))(z) = L^n(f)(z+1) = f(z+1+n) = f(z+n+1).$$

Portanto, $Orb(L, f) = \{f_n \colon n \in \mathbb{N}\}$, onde $f_n(z) = f(z+n), \forall z \in \mathbb{C}$. Para mostrar que esse operador é hipercíclico, vamos exibir uma função $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ e mostrar que sua órbita é densa em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Para isso, observe que toda função inteira pode ser aproximada por polinômios complexos definidos em compactos $K \subset \mathbb{C}$, pois basta considerar a sequência das somas parciais da expansão em série de Taylor de cada função inteira f e além disso, essa sequência de polinômios converge uniformemente para f em K. Mais ainda, podemos aproximar os polinômios complexos por polinômios com coeficientes em $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$. Sendo assim, existe uma sequência de polinômios $(P_j)_{j=1}^{\infty}$ densa em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Para facilitar o argumento de demonstração, podemos supor que cada P_j aparece uma quantidade infinita de vezes na sequência, pois caso contrário, se a sequência $(P_j)_{j=1}^{\infty}$ contém apenas uma quantidade finita de um certo polinômio P_k para algum $k \in \mathbb{N}$, basta acrescentar uma quantidade infinita e enumerável do polinômio (P_k) à sequência.

Consideremos agora uma sequência $(D_j)_{j=1}^{\infty}$ de discos fechados e disjuntos, onde cada D_j tem raio j e centro c_j de tal forma que a sequência $(c_j)_{j=1}^{\infty}$ formada pelos centros desses discos formem uma sequência crescente de números inteiros positivos. Consideremos também uma sequência $(E_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência de discos fechados e centrados na origem de tal forma que $D_j \subset E_j$ e $D_{j+1} \cap E_j = \emptyset$. Em outros termos, $D_k \subset E_j$, para todo $1 \leq k \leq j$ e $D_k \cap E_j = \emptyset$, para todo $k > j$.

Seja $Q_1 = P_1$ e consideremos $K_1 = E_1 \cup D_2$. Como E_1 e D_2 são compactos, segue que K_1 é compacto. Considere h_1 uma função analítica em um aberto contendo K_1 da seguinte forma: Como E_1 e D_2 são compactos disjuntos, tem-se que a distância entre eles é estritamente maior que zero e assim é possível encontrar abertos A_1 e A_2, com $E_1 \subset A_1$, $D_2 \subset A_2$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Tal função será definida como:

$$h_1(z) = \begin{cases} 0, \text{ se } z \in A_1 \\ P_2(z - c_2) - Q_1(z), \text{ se } z \in A_2 \end{cases}$$

Em particular, temos

$$h_1(z) = \begin{cases} 0, \text{ se } z \in E_1 \\ P_2(z - c_2) - Q_1(z), \text{ se } z \in D_2 \end{cases}$$

Como $\mathbb{C} \setminus K_1$ é conexo por caminhos, e portanto conexo, pela Proposição 1.1.5 existe um polinômio Q_2 tal que

$$\sup_{z \in K_1} |Q_2(z) - h_1(z)| = \sup_{z \in K_1} |Q_2(z) - (P_2(z - c_2) - Q_1(z))| < \frac{1}{2}. \tag{2.3}$$

Assim, como $E_1 \subset K_1$, temos

$$\sup_{z \in E_1} |Q_2(z) - h_1(z)| \leq \sup_{z \in K_1} |Q_2(z) - h_1(z)| < \frac{1}{2}.$$

Agora, $h_1(z) = 0$ sempre que $z \in E_1$, logo

$$\sup_{z\in E_1} |Q_2(z) - h_1(z)| = \sup_{z\in E_1} |Q_2(z) - 0| = \sup_{z\in E_1} |Q_2(z)| < \frac{1}{2},$$

e, portanto,

$$\|Q_2\|_{E_1} = \sup_{z\in E_1} |Q_2(z)| < \frac{1}{2}.$$

Observe que $D_2 \subset K_1$ e então, pela equação (2.3)

$$\sup_{z\in D_2} |Q_2(z) - (P_2(z-c_2) - Q_1(z))| \leq \sup_{z\in K_1} |Q_2(z) - (P_2(z-c_2) - Q_1(z))| < \frac{1}{2}.$$

Considere agora $K_2 = E_2 \cup D_3$ e defina a função h_2, que será analítica em um aberto conveniente (análogo ao caso da função h_1) por

$$h_2(z) = \begin{cases} 0, \text{ se } z \in E_2 \\ P_3(z-c_3) - Q_1(z) - Q_2(z), \text{ se } z \in D_3 \end{cases}$$

Como $\mathbb{C} \setminus K_2$ é conexo por caminhos, e portanto, conexo, novamente pela Proposição 1.1.5 temos que existe um polinômio Q_3 tal que

$$\sup_{z\in K_2} |Q_3(z) - h_2(z)| = \sup_{z\in K_2} |Q_3(z) - (P_3(z-c_3) - Q_1(z) - Q_2(z))| < \frac{1}{2^2}.$$

E, como fizemos no caso anterior, temos que

$$\|Q_3\|_{E_2} < \frac{1}{2^2} \text{ e } \sup_{z\in D_3} |Q_3(z) - h_2(z)| < \frac{1}{2^2}.$$

Para o caso geral, considere $K_{n-1} = E_{n-1} \cup D_n$ e a função analítica h_{n-1} satisfazendo

$$h_{n-1}(z) = \begin{cases} 0, \text{ se } z \in E_{n-1} \\ P_n(z-c_n) - \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} Q_j(z), \text{ se } z \in D_n \end{cases}$$

Repetindo o procedimento acima, existe um polinômio Q_n tal que

$$\|Q_n\|_{E_{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1}} \text{ e } \sup_{z\in D_n} \left| Q_n(z) - (P_n(z-c_n) - \sum_{j=1}^{n-1} Q_j(z)) \right| < \frac{1}{2^{n-1}}. \tag{2.4}$$

Considere a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$. Essa série é de Cauchy. De fato, seja $\varepsilon > 0$. Então, dado um compacto K de $\mathbb{C}$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset E_N$ e $\dfrac{1}{2^N} < \varepsilon$. Assim, para $n > m \geq N$, com $m - 1 \geq N$, temos que

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} Q_j - \sum_{j=1}^{m} Q_j \right\| = \sup_{z\in K} \left| \sum_{j=1}^{n} Q_j(z) - \sum_{j=1}^{m} Q_j(z) \right| \leq \sup_{z\in E_N} \left| \sum_{j=1}^{n} Q_j(z) - \sum_{j=1}^{m} Q_j(z) \right| =$$

$$= \sup_{z\in E_N}\left|\sum_{j=m+1}^{n} Q_j(z)\right| \leq \sup_{z\in E_N}\sum_{j=m+1}^{n}|Q_j(z)|. \tag{2.5}$$

Agora, se $m+1 \leq j \leq n$ e $z \in E_N$, tem-se que $|Q_j(z)| \leq \|Q_j\|_{E_N}$. Como $N \leq m \leq j-1$, segue que $\|Q_j\|_{E_N} \leq \|Q_j\|_{E_{j-1}}$, já que $E_N \subset E_{j-1}$.

Logo, para todo $z \in E_N$, $|Q_j(z)| \leq \|Q_j\|_{E_{j-1}} < \frac{1}{2^{j-1}}$, e então $\sum_{j=m+1}^{n}|Q_j(z)| < \sum_{j=m+1}^{n}\frac{1}{2^{j-1}}$, o que implica que

$$\sup_{z\in E_N}\sum_{j=m+1}^{n}|Q_j(z)| < \sum_{j=m+1}^{n}\frac{1}{2^{j-1}} < \sum_{j=m+1}^{\infty}\frac{1}{2^{j-1}} = \frac{1}{2^{m-1}} \leq \frac{1}{2^N} < \varepsilon \tag{2.6}$$

provando que $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ é de Cauchy.

Como o espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ é completo, seque que $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ é convergente. Considere $f = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ e mostremos que a órbita de f é densa em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, ou seja, dados $\varepsilon > 0, R > 0$ e $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{|z|\leq R}|L^n(f)(z) - g(z)| = \sup_{|z|\leq R}|f(z+n) - g(z)| < \varepsilon.$$

Mostremos que dados $\varepsilon > 0$ e $R > 0$, é possível para cada P_k de $(P_j)_{j=1}^{\infty}$ encontrar $l_k \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{|z|\leq R}|f(z+c_{l_k}) - P_k(z)| < \varepsilon$. De fato, sejam $\varepsilon > 0$, $R > 0$ e $P_k \in (P_j)_{j=1}^{\infty}$. Sejam $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$l_1 > R \text{ e } \frac{1}{2^{l_2-1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tome $l = \text{máx}\{l_1, l_2\}$. Então, como por hipótese P_k aparece uma quantidade infinita de vezes na sequência, podemos tomar l suficientemente grande tal que

$$l > R, \frac{1}{2^{l-1}} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } P_l = P_k. \tag{2.7}$$

Note que se $z \in \mathbb{C}$ for tal que $|z| \leq R$, então $w = z + c_l \in (RB_{\mathbb{C}} + c_l) \subset (lB_{\mathbb{C}} + c_l) \subset D_l \subset E_l$. Logo

$$\begin{aligned}
\sup_{|z|\leq R}|f(z+c_l) - P_k(z)| &\leq \sup_{w\in D_l}|f(w) - P_l(w-c_l)| \\
&= \sup_{w\in D_l}\left|f(w) - \sum_{j=1}^{l} Q_j(w) + \sum_{j=1}^{l} Q_j(w) - P_l(w-c_l)\right| \\
&\leq \sup_{w\in D_l}\left|f(w) - \sum_{j=1}^{l} Q_j(w)\right| + \sup_{w\in D_l}\left|\sum_{j=1}^{l} Q_j(w) - P_l(w-c_l)\right| \\
&\leq \sup_{w\in D_l}\left|\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(w) - \sum_{j=1}^{l} Q_j(w)\right| + \sup_{w\in D_l}\left|\sum_{j=1}^{l} Q_j(w) - P_l(w-c_l)\right| \\
&= \sup_{w\in D_l}\left|\sum_{n=l+1}^{\infty} Q_n(w)\right| + \sup_{w\in D_l}\left|\sum_{j=1}^{l} Q_j(w) - P_l(w-c_l)\right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \sup_{w\in D_l}\sum_{n=l+1}^{\infty}|Q_n(w)| + \sup_{w\in D_l}\left|\sum_{j=1}^{l-1}Q_j(w)+Q_l(w)-P_l(w-c_l)\right| \\
&\leq \sup_{w\in D_l}\sum_{n=l+1}^{\infty}|Q_n(w)| + \sup_{w\in D_l}\left|Q_l(w)-\left(P_l(w-c_l)-\sum_{j=1}^{l-1}Q_j(w)\right)\right| \\
&\leq \frac{1}{2^l}+\frac{1}{2^{l-1}}<\varepsilon,
\end{aligned}$$

pelas equações (2.5), (2.6), (2.4) e (2.7).

Mostremos finalmente que a órbita de f sob translações é densa em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Sejam $\varepsilon > 0, R > 0$ e $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Como a sequência $(P_j)_{j=1}^{\infty}$ é densa em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{|z|\leq R}|g(z) - P_k(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Pelo o que provamos anteriormente, existe $l_k \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{|z|\leq R}|f(z+c_{l_k}) - P_k(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim,

$$\sup_{|z|\leq R}|f(z+c_{l_k})-g(z)| \leq \sup_{|z|\leq R}|f(z+c_{l_k})-P_k(z)| + \sup_{|z|\leq R}|g(z)-P_k(z)| < \varepsilon$$

provando que $Orb(L, f)$ é denso em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Como pudemos ver nos exemplos anteriores, os operadores hipercíclicos foram definidos em espaços de dimensão infinita. Isso é de fato uma exclusividade da dimensão infinita, conforme resultado a seguir.

Teorema 2.1.12 *Seja X um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(X)$. Então T não é hipercíclico.*

Demonstração. Seja $n = \dim X$ e $T \in \mathcal{L}(X)$. Suponha que T seja hipercíclico. Então existe $x \in X$ tal que $Orb(T, x) = \{x, T(x), T^2(x), \ldots\}$ é denso em X. Note que $\{x, T(x), \ldots, T^{n-1}(x)\}$ é linearmente independente, pois se fossem linearmente dependentes, existiriam $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ não todos nulos tais que $a_0x + a_1T(x) + \ldots + a_{n-1}T^{n-1}(x) = 0$. Seja $l = \text{máx}\{s = 0, \ldots, n-1 : a_s \neq 0\}$. Então

$$a_0x + a_1T(x) + \ldots + a_lT^l(x) = 0.$$

Daí,

$$T^{n-l}(a_0x + a_1T(x) + \ldots + a_lT^l(x)) = 0 \Rightarrow a_0T^{n-l}(x) + a_1T^{n-l+1}(x) + \ldots + a_lT^{n-l+l}(x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_lT^n(x) = -a_0T^{n-l}(x) - a_1T^{n-l+1}(x) - \ldots - a_{l-1}T^{n-1}(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T^n(x) = \frac{1}{a_l}\left[-a_0T^{n-l}(x) - a_1T^{n-l+1}(x) - \ldots - a_{l-1}T^{n-1}(x)\right] \tag{2.8}$$

logo $T^n(x)$ é combinação linear de $\{x, T(x), \ldots, T^{n-1}(x)\}$. Aplicando T sucessivamente em (2.8), teremos que

$$Orb(T, x) \subseteq [x, T(x), \ldots, T^{n-1}(x)].$$

Como $\dim[x, T(x), \ldots, T^{n-1}(x)] < n$, segue que $\dim[Orb(T, x)] < n$ e então $Orb(T, x)$ não pode ser denso em X, o que é um absurdo pois estamos supondo $Orb(T, x)$ denso em X. Logo

$\{x, T(x), \ldots, T^{n-1}(x)\}$ é linearmente independente e portanto é uma base de X. Denotemos por $\mathcal{B} = \{x, T(x), \ldots, T^{n-1}(x)\}$.

Seja $\alpha \in \mathbb{R}_+$. Como $\alpha x \in X$ e $Orb(T, x)$ é denso em X, existe uma sequência $(n_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $T^{n_k}(x) \longrightarrow \alpha x$. Daí, para todo índice i menor que n tem-se que

$$T^{n_k}(T^i(x)) = T^i(T^{n_k}(x)) \longrightarrow T^i(\alpha x) = \alpha T^i(x).$$

Logo, dado $z \in X$, como $\mathcal{B}$ é base de X,

$$z = \sum_{j=0}^{n-1} a_j T^j(x)$$

e então

$$T^{n_k}(z) = T^{n_k}\left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j T^j(x)\right) = \sum_{j=0}^{n-1} T^{n_k}(a_j T^j(x)) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j T^{n_k}(T^j(x)) \longrightarrow \sum_{j=0}^{n-1} a_j \cdot \alpha T^j(x) =$$

$$= \alpha \sum_{j=0}^{n-1} a_j T^j(x) = \alpha z.$$

Portanto, $T^{n_k}(z) \longrightarrow \alpha z, \forall z \in X$.

Seja $S\colon X \longrightarrow X$ tal que a matriz de S na base $\mathcal{B}$ seja

$$[S]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha \end{pmatrix}$$

Assim, dado $x = (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}$, temos que

$$S(x) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \alpha & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

É claro que $S \in \mathcal{L}(X)$. De fato, S é contínuo pois a dimensão de X é finita e dados $x = (x_1, \ldots, x_n)_{\mathcal{B}}, y = (y_1, \ldots, y_n)_{\mathcal{B}}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} S(x + \lambda y) &= (\alpha(x_1 + \lambda y_1), \alpha(x_2 + \lambda y_2), \ldots, \alpha(x_n + \lambda y_n))_{\mathcal{B}} \\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)_{\mathcal{B}} + (\alpha\lambda y_1, \alpha\lambda y_2, \ldots, \alpha\lambda y_n)_{\mathcal{B}} \\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)_{\mathcal{B}} + \lambda(\alpha y_1, \alpha y_2, \ldots, \alpha y_n)_{\mathcal{B}} \\ &= S(x) + \lambda S(y). \end{aligned}$$

Daí, $T^{n_k}(z) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} S(z), \forall z \in X$. Pela Proposição 1.2.3, segue que

$$\|T^{n_k} - S\| \longrightarrow 0$$

e então $T^{n_k} \longrightarrow S$ em $\mathcal{L}(X)$. Considere a função determinante $\det\colon M_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$. Como essa função é contínua, segue que

$$\det[T^{n_k}] \longrightarrow \det[S] = \alpha^n.$$

Assim, dado $\alpha \in \mathbb{R}_+$, existe $(n_k)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{N}$ tal que $\det[T^{n_k}] \longrightarrow \alpha^n$, o que implica que $|\det[T^{n_k}]| \longrightarrow |\alpha^n| = \alpha^n$. E então, segue que o conjunto $\{|\det[T^n]| : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em $\mathbb{R}_+$, o que é um absurdo, pois se $|\det[T]| \geq 1$, então $|\det[T^n]| = |\det[T]|^n \geq 1, \forall n$. Caso contrário, se $|\det[T]| < 1$, então $|\det[T^n]| = |\det[T]|^n < 1, \forall n$. Portanto T não pode ser hipercíclico. ∎

Voltando aos exemplos de operadores hipercíclicos, podemos perceber que exibir um vetor hipercíclico pode se tornar uma tarefa muito complicada o que nos faz buscar por outras alternativas para mostrar quando um operador é hipercíclico ou não.

Seja X um espaço de Fréchet separável e $T \in \mathcal{L}(X)$. Por X ser um espaço de Fréchet separável, segue que X não tem pontos isolados, é separável e é completo. Assim, pelo Teorema 2.1.6, podemos afirmar que T é topologicamente transitivo $\Leftrightarrow$ existe $x \in X$ tal que $Orb(T, x)$ é denso $X \Leftrightarrow T$ é hipercíclico. Dessa forma, o teorema da transitividade de Birkhoff aplicado em espaços de Fréchet separáveis nos fornece uma caracterização para operadores lineares hipercíclicos.

Teorema 2.1.13 (Teorema da Transitividade de Birkhoff) *Seja X um espaço de Fréchet separável e $T \in \mathcal{L}(X)$. T é hipercíclico se, e somente se, T é topologicamente transitivo.*

Diretamente ou indiretamente, esse teorema será uma das principais ferramentas para provar se um operador T é hipercíclico ou não. A seguir, utilizaremos o Teorema da Transitividade de Birkhoff para mostrar que os operadores de Birkhoff, MacLane e Rolewicz são hipercíclicos.

Exemplo 2.1.14 Considere o operador de $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ dado por

$$T_a f(z) = f(z + a), a \neq 0.$$

Sejam $U, V \subseteq \mathcal{H}(\mathbb{C})$ conjuntos abertos e não vazios e fixe $f \in U$ e $g \in V$. Como U é aberto e $f \in U$, segue que U é uma vizinhança de f, logo existe um disco fechado K_1 centrado na origem e $\varepsilon_1 > 0$ tal que $\{h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})\colon \sup_{z\in K_1} |h(z) - f(z)| < \varepsilon_1\} \subseteq U$. Da mesma forma, como V é aberto e $g \in V$, temos que V é vizinhança de g e então existe um disco fechado K_2 centrado na origem e $\varepsilon_2 > 0$ tal que $\{h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})\colon \sup_{z\in K_2} |h(z) - g(z)| < \varepsilon_2\} \subseteq V$. Tome $K = K_1 \cup K_2$ e $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. É claro que $\{h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})\colon \sup_{z\in K} |h(z) - f(z)| < \varepsilon\}$ e $\{h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})\colon \sup_{z\in K} |h(z) - g(z)| < \varepsilon\}$ são vizinhanças de f e g, respectivamente e que $\{h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})\colon \sup_{z\in K} |h(z) - f(z)| < \varepsilon\} \subseteq \{h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})\colon \sup_{z\in K_1} |h(z) - f(z)| < \varepsilon_1\}$ e $\{h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})\colon \sup_{z\in K} |h(z) - g(z)| < \varepsilon\} \subseteq \{h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})\colon \sup_{z\in K_2} |h(z) - g(z)| < \varepsilon_2\}$.

Seja $n \in \mathbb{N}$ qualquer inteiro positivo tal que K e $K + na$ pertençam a discos disjuntos. Seja $s\colon \mathcal{H}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{C})$ definida como

$$s(z) = \begin{cases} f(z), & \text{se } z \in K \\ g(z - na), & \text{se } z \in (K + na) \end{cases}$$

Considere $\hat{K} = K \cup (K + na)$. É claro que $\hat{K}$ é compacto. Além disso, como K e $(K + na)$ são fechados, tem-se que a distância entre eles é maior que zero. Daí, é possível encontrar bolas abertas B_1 e B_2 tal que $K \subseteq B_1$ e $(K+na) \subseteq B_2$ e $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Tomando $B = B_1 \cup B_2$, temos que s é holomorfa em B. Como $\hat{K}$ é compacto, s é holomorfa em B que é uma vizinhança de $\hat{K}$, segue pelo Corolário 1.1.4 que existe uma função p polinomial tal que

$$\sup_{z \in K} |f(z) - p(z)| < \varepsilon \text{ e } \sup_{z \in K+na} |g(z - na) - p(z)| < \varepsilon.$$

Então,

$$\sup_{z \in K} |g(z) - (T_a^n p)(z)| = \sup_{z \in K} |g(z) - p(z + na)| < \varepsilon.$$

Daí, temos que $p \in U$ e $T_a^n(p) \in V$, logo T_a é topologicamente transitivo. Como $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ é um espaço de Fréchet separável, pelo Teorema da Transitividade de Birkhoff temos que T_a é hipercíclico.

Exemplo 2.1.15 Considere o operador diferenciação $D\colon \mathcal{H}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{C})$ definido por $D(f) = f'$.

Como os polinômios são densos em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, dados $U, V \subseteq \mathcal{H}(\mathbb{C})$ abertos e não vazios, existem polinômios $p \in U$ e $q \in V$ tais que

$$p(z) = \sum_{k=0}^{N} a_k z^k \text{ e } q(z) = \sum_{k=0}^{N} b_k z^k$$

para algum $N \in \mathbb{N}$. Como $p \in U$ e U é aberto, existe um disco fechado centrado na origem de raio $R > 0$ e $\varepsilon > 0$ tal que $\{h \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) : \sup_{|z| \leq R} |h(z) - p(z)| < \varepsilon\} \subseteq U$. Vamos criar um polinômio r tal que $r \in U$ e $D^n(r) \in V$ para algum $n \in \mathbb{N}$ e então teremos que $D^n(U) \cap V \neq \emptyset$, o que implicará que D é hipercíclico, pelo Teorema da Transitividade de Birkhoff.

Para isso, note que

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{k!|b_k|}{(k+n)!} R^{k+n} = \frac{|b_0|}{n!} R^n + \frac{|b_1|}{(n+1)!} R^{n+1} + \ldots + \frac{N!|b_N|}{(n+N)!} R^{N+n} \longrightarrow 0$$

quando $n \longrightarrow \infty$. Dessa forma, tome $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{k!|b_k|}{(k+n)!} R^{k+n} < \varepsilon \text{ e } n \geq N + 1$$

e considere

$$r(z) = p(z) + \sum_{k=0}^{N} \frac{k! b_k}{(k+n)!} z^{k+n}.$$

Temos que $r \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ pois é um polinômio e

$$|r(z) - p(z)| = \left| \sum_{k=0}^{N} \frac{k!b_k}{(k+n)!} z^{k+n} \right| \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{k!|b_k|}{(k+n)!} R^{k+n} < \varepsilon, \forall z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z| \leq R$$

e então

$$\sup_{|z| \leq R} |r(z) - p(z)| < \varepsilon$$

o que implica que $r \in U$. Além disso,

$$D^n(r(z)) = D^n(p(z)) + D^n \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{k!b_k}{(k+n)!} z^{k+n} \right) = 0 + \sum_{k=0}^{N} \frac{k!b_k}{(k+n)!} D^n(z^{k+n}) =$$

$$= \sum_{k=0}^{N} \frac{k!b_k}{(k+n)!} \cdot \frac{(k+n)!}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{N} b_k z^k = q(z) \in V.$$

Daí, segue que D é topologicamente transitivo e então D é hipercíclico.

Exemplo 2.1.16 Seja $1 \leq p < \infty$ e $T \colon \ell_p \longrightarrow \ell_p$ definido por

$$T((\xi_1, \xi_2, \ldots)) = (\xi_2, \xi_3, \ldots)$$

e considere também $\lambda \in \mathbb{K}$ e $\lambda T \colon \ell_p \longrightarrow \ell_p$ definido por

$$\lambda T((\xi_1, \xi_2, \ldots)) = \lambda(\xi_2, \xi_3, \ldots).$$

Se $|\lambda| \leq 1$, λT não pode ser hipercíclico. Consideremos então $|\lambda| > 1$. Sejam $U, V \subseteq \ell_p$ abertos e não vazios. Como c_{00} é denso em ℓ_p, podemos encontrar $x \in U$ e $y \in V$, com $y \neq 0$ tais que x e y são da seguinte forma

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots)$$

$$y = (y_1, y_2, \ldots, y_N, 0, 0, \ldots)$$

para algum $N \in \mathbb{N}$. Encontremos $z \in \ell_p$ tal que $z \in U$ e $(\lambda T)^n(z) \in V$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Como $x \in U$ e U é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subseteq U$. Como $|\lambda| > 1$, $\dfrac{1}{|\lambda|^n} \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$. Tome $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\lambda|^{-n} < \frac{\delta}{\|y\|_p} \text{ e } n \geq N$$

e defina z da seguinte forma

$$z_k = \begin{cases} x_k, \text{ se } 1 \leq k \leq N \\ \lambda^{-n} y_{k-n}, \text{ se } n+1 \leq k \leq n+N \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}$$

É claro que $z \in \ell_p$ já que $z \in c_{00}$ e

$$\|x - z\|_p \;=\; \|(0, 0, \ldots, 0, 0, \lambda^{-n} y_1, \lambda^{-n} y_2, \ldots, \lambda^{-n} y_N, 0, 0, \ldots)\|_p$$

$$
\begin{aligned}
&= \|\lambda^{-n}(0,0,\ldots,0,0,y_1,y_2,\ldots,y_N,0,0,0,\ldots)\|_p \\
&= |\lambda^{-n}|\|y\|_p < \frac{\delta}{\|y\|_p} \cdot \|y\|_P = \delta.
\end{aligned}
$$

o que implica que $z \in U$ e além disso,

$$
\begin{aligned}
(\lambda T)^n(z) &= (\lambda T)^n((x_1,x_2,\ldots,x_N,0,\ldots,\lambda^{-n}y_1,\lambda^{-n}y_2,\ldots,\lambda^{-n}y_N,0,0,\ldots)) \\
&= \lambda^n(\lambda^{-n}y_1,\lambda^{-n}y_2,\ldots,\lambda^{-n}y_N,0,0,\ldots) \\
&= (y_1,y_2,\ldots,y_N,0,0,\ldots) \\
&= y \in V
\end{aligned}
$$

o que implica que λT é topologicamente transitivo. Como ℓ_p é um espaço de Fréchet, segue que λT é hipercíclico, pelo Teorema da Transitividade de Birkhoff.

Vejamos agora diversas propriedades básicas e importantes dos operadores hipercíclicos.

Proposição 2.1.17 *Seja (X,T) um sistema dinâmico linear com T inversível. Então T é hipercíclico se, e somente se, T^{-1} é hipercíclico.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Note que pelo Corolário 1.3.34, T é um isomorfismo topológico e então T^{-1} é contínuo. Suponha T hipercíclico. Pelo Teorema da Transitividade de Birkhoff segue que T é topologicamente transitivo. Sejam $U, V \subseteq X$ abertos e não vazios. Logo existe $n \geq 0$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$, isto é, existe $x \in U$ tal que $T^n(x) \in V$. Logo $x \in T^{-n}(V)$ e então $T^{-n}(V) \cap U \neq \emptyset$. Logo, T^{-1} é topologicamente transitivo e novamente pelo Teorema da Transitividade de Birkhoff temos que T^{-1} é hipercíclico.
($\Leftarrow$) Análogo à demonstração anterior. ∎

Proposição 2.1.18 *Sejam (X,T) um sistema dinâmico linear com T hipercíclico. Então T^n é hipercíclico para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. A demonstração não será feita neste trabalho por já ter sido objeto de estudo de outras dissertações, por exemplo de [4]. Para mais detalhes sobre essa demonstração, veja [1] ou [4]. ∎

Proposição 2.1.19 *Seja (X,T) um sistema dinâmico linear com T hipercíclico. Então $\overline{T(X)} = X$.*

Demonstração. Seja $x \in X$ tal que $Orb(T,x)$ é denso em X. Por X ser um espaço de Fréchet, segue da Proposição 1.3.6 que X é um espaço métrico sem pontos isolados. Daí, pela Proposição 1.2.1 temos que $Orb(T,x) \setminus \{x\}$ é denso em X. Portanto,

$$
Orb(T,x) \setminus \{x\} \subseteq T(X) \subseteq X \Rightarrow X = \overline{Orb(T,x) \setminus \{x\}} \subseteq \overline{T(X)} \subseteq \overline{X} = X.
$$

∎

Definição 2.1.20 Sejam $S\colon Y \longrightarrow Y$ e $T\colon X \longrightarrow X$ sistemas dinâmicos.

(a) T é *quase conjugado* de S se existe uma função contínua $\phi\colon Y \longrightarrow X$ com imagem densa tal que $T \circ \phi = \phi \circ S$, isto é, o diagrama a seguir comuta.

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\phi"] & Y \arrow[d, "\phi"] \\ X \arrow[r, "T"] & X \end{tikzcd}$$

(b) Se ϕ é um homeomorfismo então S e T são chamados de *conjugados*.

Proposição 2.1.21 *Sejam $S\colon Y \longrightarrow Y$ e $T\colon X \longrightarrow X$ sistemas dinâmicos quase conjugados. Se S é topologicamente transitivo então T é topologicamente transitivo.*

Demonstração. Seja $\phi\colon Y \longrightarrow X$ uma função contínua com imagem densa tal que $T\circ\phi = \phi\circ S$. Note que é válido $T^n\circ\phi = \phi\circ S^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Sejam $U, V \subseteq X$ abertos e não vazios. Como ϕ é contínua e tem imagem densa, $\phi^{-1}(U)$ e $\phi^{-1}(V)$ são subconjuntos abertos e não vazios de X. Então, como S é topologicamente transitivo, existe $n \geq 0$ tal que $S^n(\phi^{-1}(U)) \cap \phi^{-1}(V) \neq \emptyset$, isto é, existe $y \in \phi^{-1}(U)$ tal que $S^n(y) \in \phi^{-1}(V)$. Logo $\phi(y) \in U$ e $\phi(S^n(y)) \in V$. Daí, $T^n(\phi(y)) = (T^n \circ \phi)(y) = (\phi \circ S^n)(y) = \phi(S^n(y)) \in V$ o que implica que T é topologicamente transitivo. ■

Corolário 2.1.22 *Sejam X e Y espaços de Fréchet separáveis, $T\colon X \longrightarrow X$ e $S\colon Y \longrightarrow Y$ sistemas dinâmicos lineares quase conjugados. Se T é hipercíclico então S é hipercíclico.*

Demonstração. Supondo T hipercíclico, pelo Teorema 2.1.6 tem-se que T é topologicamente transitivo. Pela Proposição 2.1.21, tem-se que S é topologicamente transitivo e novamente pelo Teorema 2.1.6, S é hipercíclico. ■

Definição 2.1.23 Sejam $S\colon X \longrightarrow X$ e $T\colon Y \longrightarrow Y$ sistemas dinâmicos. Definimos a função $S \times T\colon X \times Y \longrightarrow X \times Y$ por

$$(S \times T)(x, y) = (S(x), T(y)).$$

Proposição 2.1.24 *Sejam $S\colon X \longrightarrow X$ e $T\colon Y \longrightarrow Y$ sistemas dinâmicos. Então:*

(i) $S \times T$ é contínuo e $(S \times T)^n = S^n \times T^n$.

(ii) Se $Orb(S \times T, (x_0, y_0))$ é denso para algum $(x_0, y_0) \in X \times Y$, então $Orb(S, x)$ e $Orb(T, y)$ são densos para algum $x \in X$ e $y \in Y$.

(iii) Se $S \times T$ é topologicamente transitivo, então S e T também são topologicamente transitivos.

Demonstração.

(i) Seja $(x_0, y_0) \in X \times Y$ e mostremos que $S \times T$ é contínua em (x_0, y_0). Seja $W \in \mathcal{U}_{(S(x_0), T(y_0))}$, então $(S(x_0), T(y_0)) \in W^\circ$. Daí existem $U \subseteq X, V \subseteq Y$ abertos tais que

$$(S(x_0), T(y_0)) \in U \times V,$$

isto é, $S(x_0) \in U$ e $T(y_0) \in V$. Como S é contínua em x_0, existe $A \in \mathcal{U}_{x_0}$ tal que $S(A) \subseteq U$. Da mesma forma, como T é contínua em y_0, existe $B \in \mathcal{U}_{y_0}$ tal que $T(B) \subseteq V$. Portanto, tomando $A^\circ \times B^\circ$ temos que

- $A^\circ \times B^\circ \in \mathcal{U}_{(x_0, y_0)}$ já que $(x_0, y_0) \in A^\circ \times B^\circ = (A^\circ \times B^\circ)^\circ$.
- $(S \times T)(A^\circ \times B^\circ) = S(A^\circ) \times T(B^\circ) \subseteq S(A) \times T(B) \subseteq U \times V \subseteq W^\circ \subseteq W$

provando que $S \times T$ é contínua em (x_0, y_0). Como (x_0, y_0) foi tomado arbitrariamente, segue que $S \times T$ é contínua em $X \times Y$.

Para ver que $(S \times T)^n = S^n \times T^n$, seja $(x, y) \in X \times Y$, então

$$(S \times T)^n(x, y) = (S^n(x), T^n(y)) = (S^n \times T^n)(x, y).$$

(ii) Suponha que existe $(x_0, y_0) \in X \times Y$ tal que

$$\{(S \times T)^n(x_0, y_0) : n \geq 0\} \tag{2.9}$$

é denso em $X \times Y$. Sejam $x \in X, U \in \mathcal{U}_x, y \in Y$ e $V \in \mathcal{U}_y$. Como $(x, y) \in U^\circ \times V^\circ \subseteq (U \times V)^\circ$, segue que $U \times V \in \mathcal{U}_{(x,y)}$. Pela densidade do conjunto (2.9), existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $(S \times T)^m(x_0, y_0) = (S^m(x_0), T^m(y_0)) \in U \times V$, isto é, $S^m(x_0) \in U$ e $T^m(y_0) \in V$ e então o conjunto $\{S^n(x_0) : n \geq 0\}$ é denso em X e $\{T^n(y_0) : n \geq 0\}$ é denso em Y, provando que S e T também tem órbita densa.
(iii) Sejam $U_1, U_2 \subseteq X$, $V_1, V_2 \subseteq Y$ abertos e não vazios. Daí, $U_1 \times V_1$ e $U_2 \times V_2$ são abertos e não vazios de $X \times Y$. Como $S \times T$ é topologicamente transitivo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(S \times T)^n(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) \neq \emptyset$$

isto é, existe $(x, y) \in U_1 \times V_1$ tal que $(S \times T)^n(x, y) = (S^n(x), T^n(y)) \in U_2 \times V_2$. Logo, existem $x \in U_1, y \in V_1$ tais que $S^n(x) \in U_2$ e $T^n(y) \in V_2$, provando que $S^n(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ e $T^n(V_1) \cap V_2 \neq \emptyset$, ou seja, S e T são topologicamente transitivo. ■

Sejam X e Y espaços de Fréchet, $(p_n)_{n=1}^\infty \subseteq X$, $(q_n)_{n=1}^\infty \subseteq Y$ sequências crescentes de seminormas que definem as topologias de X e Y. Então o espaço

$$X \oplus Y := \{(x, y) : x \in X \text{ e } y \in Y\}$$

munido das seminormas $(x, y) \longmapsto p_n(x) + q_n(y), n \geq 1$ induz a topologia produto em $X \oplus Y$. Esse espaço se torna um espaço de Fréchet separável se X e Y também são separáveis.

Definição 2.1.25 Sejam $S\colon X \longrightarrow X$ e $T\colon Y \longrightarrow Y$ operadores lineares definidos nos espaços de Fréchet X e Y. Definimos o operador $S \oplus T\colon X \oplus Y \longrightarrow X \oplus Y$ por

$$(S \oplus T)(x, y) = (S(x), T(y))$$

Proposição 2.1.26 *Sejam (X, S) e (Y, T) sistemas dinâmicos lineares. Se $S \oplus T$ é hipercíclico então S e T também são hipercíclicos.*

Demonstração. Segue imediatamente do item (iii) da Proposição 2.1.24. ■

2.2 Operadores Mixing e Fracamente Mixing

Definição 2.2.1 Seja (X, T) um sistema dinâmico. Dizemos que (X, T) é *mixing* se para quaisquer abertos e não vazios $U, V \subseteq X$, existe $N \geq 0$ tal que

$$T^n(U) \cap V \neq \emptyset, \forall n \geq N.$$

Vejamos a seguir um exemplo de uma função que é mixing.

Exemplo 2.2.2 Considere $B_{\mathbb{C}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ e $T\colon B_{\mathbb{C}} \longrightarrow B_{\mathbb{C}}$ dado por $T(z) = z^2$. Sejam $U, V \subseteq B_{\mathbb{C}}$ abertos e não vazios. Já provamos no Exemplo 2.1.7 que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U) = B_{\mathbb{C}}$. Daí, para todo $j \geq n$,

$$T^j(U) \cap V = T^{j-n}(T^n(U)) \cap V = T^{j-n}(B_{\mathbb{C}}) \cap V = B_{\mathbb{C}} \cap V = V \neq \emptyset$$

e então segue que o operador T é mixing.

Proposição 2.2.3 *A propriedade mixing é preservada por quase conjugação.*

Demonstração. Sejam $T\colon X \longrightarrow X$, $R\colon Y \longrightarrow Y$ sistemas dinâmicos quase conjugados definidos nos espaços métricos X e Y, com T mixing. Seja $\phi\colon X \longrightarrow Y$ uma função contínua com imagem densa tal que $R \circ \phi = \phi \circ T$.

Sejam $U, V \subseteq Y$ abertos e não vazios. Como ϕ é contínua e tem a imagem densa, segue que $\phi^{-1}(U)$ e $\phi^{-1}(V)$ são abertos e não vazios de X. Como T é mixing, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^n(\phi^{-1}(U)) \cap \phi^{-1}(V) \neq \emptyset, \forall n \geq N.$$

Assim, $\forall n \geq N$, existe $x_n \in \phi^{-1}(U)$ tal que $T^n(x_n) \in \phi^{-1}(V)$. Logo, $\forall n \geq N$, existe $x_n \in X$ tal que $\phi(x_n) \in U$ e $\phi(T^n(x_n)) \in V$.

Daí, concluimos que $\forall n \geq N$, existe $x_n \in X$ tal que $\phi(x_n) \in U$ e $R^n(\phi(x_n)) \in V$ e então, $\forall n \geq N$, $R^n(U) \cap V \neq \emptyset$. Portanto R é mixing. ■

Definição 2.2.4 Seja (X, T) um sistema dinâmico. Dizemos que T é *fracamente mixing* se, e somente se, $T \times T$ é topologicamente transitivo.

Proposição 2.2.5 *Seja (X,T) um sistema dinâmico. T é fracamente mixing se, e somente se, dados $U_1, V_1, U_2, V_2 \subseteq X$ abertos e não vazios, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ e $T^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponha que T é fracamente mixing, então $T \times T$ é topologicamente transitivo. Sejam $U_1, V_1, U_2, V_2 \subseteq X$ abertos e não vazios. É claro que $U_1 \times U_2$ e $V_1 \times V_2$ são abertos e não vazios de $X \times X$. Logo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(T \times T)^n(U_1 \times U_2) \cap V_1 \times V_2 \neq \emptyset$$

isto é, existem $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2$ tal que

$$(T \times T)^n(x_1, x_2) = (T^n \times T^n)(x_1, x_2) = (T^n(x_1), T^n(x_2)) \in V_1 \times V_2.$$

Logo, como $x_1 \in U_1$ e $T^n(x_1) \in V_1$, temos que $T^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ e da mesma forma, como $x_2 \in U_2$ e $T^n(x_2) \in V_2$, segue que $T^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$.
$(\Leftarrow)$ Sejam $U, V \subseteq X \times X$ abertos e não vazios. Sem perda de generalidade, suponha $U = U_1 \times U_2, V = V_1 \times V_2$, onde $U_1, V_1, U_2, V_2 \subseteq X$ são abertos e não vazios.

Por hipótese, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ e $T^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$. Logo, existem $x \in U_1, y \in U_2$ tais que $T^n(x) \in V_1$ e $T^n(y) \in V_2$. É claro que $(x, y) \in U_1 \times U_2 = U$ e

$$(T \times T)^n(x, y) = (T^n \times T^n)(x, y) = (T^n(x), T^n(y)) \in V_1 \times V_2 = V$$

e então $(T \times T)^n(U) \cap V \neq \emptyset$, mostrando que $T \times T$ é topologicamente transitivo. Logo, por definição, T é fracamente mixing. ■

Note que são válidas as seguintes implicações.

$$\text{mixing} \Rightarrow \text{fracamente mixing} \Rightarrow \text{topologicamente transitivo.}$$

De fato, para vermos que mixing $\Rightarrow$ fracamente mixing, sejam (X,T) um sistema dinâmico tal que T é mixing. Considere $U_1, V_1, U_2, V_2 \subseteq X$ abertos e não vazios. Como T é mixing, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset, \forall n \geq N_1$$

e existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset, \forall n \geq N_2.$$

Tome $N = \max\{N_1, N_2\}$. Daí, temos que $T^N(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ e $T^N(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$, e então T é fracamente mixing.

Para vermos que fracamente mixing $\Rightarrow$ topologicamente transitivo, considere novamente (X,T) um sistema dinâmico, com T fracamente mixing. Tome $U, V \subseteq X$ abertos e não vazios. Como T é fracamente mixing, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$, e então T é topologicamente transitivo.

Entretanto, as duas implicações contrárias são falsas. Abaixo daremos apenas um exemplo de operador que é topologicamente transitivo mas não é fracamente mixing.

Antes cabe ressaltar que quando estamos com operadores lineares contínuos em um espaço de Fréchet separável, temos as implicações

$$\text{mixing} \Rightarrow \text{fracamente mixing} \Rightarrow \text{topologicamente transitivo} \Leftrightarrow \text{hipercíclico}$$

já que pelo Teorema da Transitividade de Birkhoff, T é hipercíclico se, e somente se, T é topologicamente transitivo.

Exemplo 2.2.6 (Operador topologicamente transitivo que não é fracamente mixing) Seja $B_{\mathbb{C}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ e $T_\alpha \colon B_{\mathbb{C}} \longrightarrow B_{\mathbb{C}}$ definido por $T_\alpha(z) = e^{i\alpha}z$, onde $\alpha \in [0, 2\pi[$. Esse operador T_α rotaciona o ponto z em $B_{\mathbb{C}}$ de acordo com o ângulo α. Se $\alpha \in \pi\mathbb{Q}$, chamaremos T_α de rotação racional, caso contrário, T_α será chamado de rotação irracional. As rotações irracionais são exemplos de operadores que são topologicamente transitivos mas não são fracamente mixing.

Seja $\alpha \notin \pi\mathbb{Q}$. Então $\alpha = \pi t$, onde t é um número irracional. Seja $z = e^{i\theta} \in B_{\mathbb{C}}$. Mostremos que $T_\alpha^n(z) \neq T_\alpha^m(z)$ sempre que $m \neq n$. De fato, seja $m \neq n$ e suponha que $T_\alpha^n(z) = T_\alpha^m(z)$. Então $e^{i(n\alpha+\theta)} = e^{i(m\alpha+\theta)}$ o que implica que $n\alpha + \theta = m\alpha + \theta + 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Daí,

$$n\alpha = m\alpha + 2k\pi \Rightarrow n\alpha - m\alpha = 2k\pi \Rightarrow (n-m)\pi t = 2k\pi \Rightarrow t = \frac{2k}{n-m}$$

o que é um absurdo já que t é um número irracional. Portanto $T_\alpha^n(z) \neq T_\alpha^m(z)$ sempre que $m \neq n$.

Agora, sejam $z_1, z_2 \in B_{\mathbb{C}}$ e defina $d(z_1, z_2)$ como sendo o comprimento do menor arco que "liga"o ponto z_1 ao ponto z_2. É claro que $d(T_\alpha^n(z_1), T_\alpha^n(z_2)) = d(z_1, z_2)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Provemos que $\{T_\alpha^n(z_1) : n \geq 0\}$ é denso em $B_{\mathbb{C}}$.

Seja $z_2 \in B_{\mathbb{C}}$ e A o arco centrado em z_2 de "comprimento"ε. Tome $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$ e considere o conjunto dos pontos $\{z_1, T_\alpha(z_1), \ldots, T_\alpha^N(z_1)\}$ que é formado por pontos distintos como já provamos anteriormente. Dividindo $B_{\mathbb{C}}$ em N arcos de comprimentos iguais, pelo Princípio da Caixa dos Pombos, existem $0 \leq n < m \leq N$ tais que $d(T_\alpha^n(z_1), T_\alpha^m(z_1)) < \frac{1}{N} < \varepsilon$.

Consideremos agora T_α^{m-n} e note que

$$d(T_\alpha^{m-n}(z_1), z_1) = d(T_\alpha^m(z_1), T_\alpha^n(z_1)) < \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

isto é, T_α^{m-n} rotaciona z_1 por um ângulo menor que ε. Logo, considerando

$$\{z_1, T_\alpha^{m-n}(z_1), T_\alpha^{2(m-n)}(z_1), \ldots\}$$

temos que a distância entre dois pontos consecutivos desse conjunto é menor do que ε. Tome $j \in \mathbb{N}$ tal que $T_\alpha^{j(m-n)}(z_1) \in A$. Daí $\{T_\alpha^n(z_1) : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em $B_{\mathbb{C}}$.

Para provar que T_α é topologicamente transitivo, sejam $U, V \subseteq B_{\mathbb{C}}$ abertos e não vazios. Como $U \neq \emptyset$, existe $x \in U$. Pelo que acabamos de provar, $\{T_\alpha^n(x) : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em

$B_{\mathbb{C}}$. Logo, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T_\alpha^k(x) \in V$ e então $T_\alpha^k(U) \cap V \neq \emptyset$, mostrando que T_α é topologicamente transitivo.

Agora, suponha por absurdo que T_α seja fracamente mixing. Seja W um arco aberto em $B_{\mathbb{C}}$ de comprimento θ. Tome U e V arcos abertos em $B_{\mathbb{C}}$ tais que U e V são disjuntos e $|\theta_1 - \theta_2| > \theta$ para todo $e^{i\theta_1} \in U$ e $e^{i\theta_2} \in V$. Como estamos supondo T_α fracamente mixing, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T_\alpha^n(U) \cap W \neq \emptyset$ e $T_\alpha^n(V) \cap W \neq \emptyset$. Logo, existem $z \in U$ e $v \in V$ tais que $T_\alpha^n(z) \in W$ e $T_\alpha^n(v) \in W$. Sendo $z = e^{i\varphi}$ e $v = e^{i\xi}$, então

$$T_\alpha^n(z) = e^{i(n\alpha+\varphi)} \in W$$

$$T_\alpha^n(v) = e^{i(n\alpha+\xi)} \in W.$$

Daí, segue que $|n\alpha + \varphi - n\alpha - \xi| \leq \theta$, ou seja $|\varphi - \xi| \leq \theta$, o que é um absurdo, pois como $e^{i\varphi} \in U$ e $e^{i\xi} \in V$, temos que $|\varphi - \xi| > \theta$. Portanto, T_α não é fracamente mixing.

A partir de agora até o término desta seção veremos diversos resultados envolvendo operadores mixing e fracamente mixing.

Proposição 2.2.7 *Sejam (X, S) e (Y, T) sistemas dinâmicos onde S e T são quase conjugados. Se S é fracamente mixing então T é fracamente mixing.*

Demonstração. Sejam $U_1, U_2, V_1, V_2 \subseteq Y$ abertos e não vazios e $\phi\colon X \longrightarrow Y$ contínua com imagem densa tal que $T \circ \phi = \phi \circ S$. Como ϕ é contínua, segue que $\phi^{-1}(U_1), \phi^{-1}(U_2), \phi^{-1}(V_1), \phi^{-1}(V_2)$ são abertos e não vazios de X.

Como S é fracamente mixing, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $S^n(\phi^{-1}(U_1)) \cap \phi^{-1}(U_2) \neq \emptyset$ e $S^n(\phi^{-1}(V_1)) \cap \phi^{-1}(V_2) \neq \emptyset$, isto é, existe $x \in \phi^{-1}(U_1)$ tal que $S^n(x) \in \phi^{-1}(U_2)$ e existe $y \in \phi^{-1}(V_1)$ tal que $S^n(y) \in \phi^{-1}(V_2)$. Daí, $\phi(x) \in U_1$ e $T^n(\phi(x)) = \phi(S^n(x)) \in U_2$ e $\phi(y) \in V_1, T^n(\phi(y)) = \phi(S^n(y)) \in V_2$. Então $T^n(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ e $T^n(V_1) \cap V_2 \neq \emptyset$, o que implica que T é fracamente mixing. ■

Proposição 2.2.8 *Sejam (X, S) e (Y, T) sistemas dinâmicos. Se $S \times T$ é fracamente mixing então S e T também são fracamente mixing.*

Demonstração. Sejam $U_1, U_2, V_1, V_2 \subseteq X$ abertos e não vazios, $W_1, W_2, R_1, R_2 \subseteq Y$ abertos e não vazios. Como $S \times T$ é fracamente mixing, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$(S \times T)^n(U_1 \times W_1) \cap (U_2 \times W_2) \neq \emptyset \text{ e } (S \times T)^n(V_1 \times R_1) \cap (V_2 \times R_2) \neq \emptyset.$$

Logo, existem $u_1 \in U_1, w_1 \in W_1$ tal que $(S \times T)^n(u_1, w_1) = (S^n(u_1), T^n(w_1)) \in U_2 \times W_2$ o que implica que

$$S^n(u_1) \in U_2 \text{ e } T^n(w_1) \in W_2. \tag{2.10}$$

Também existem $v_1 \in V_1$ e $r_1 \in R_1$ tal que $(S \times T)^n(v_1, r_1) = (S^n(v_1), T^n(r_1)) \in V_2 \times R_2$, o que implica que

$$S^n(v_1) \in V_2 \text{ e } T^n(r_1) \in R_2. \tag{2.11}$$

De (2.10) e (2.11) segue que $S^n(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$, $S^n(V_1) \cap V_2 \neq \emptyset$, $T^n(W_1) \cap W_2 \neq \emptyset$ e $T^n(R_1) \cap R_2 \neq \emptyset$. Logo S e T são fracamente mixing. ■

Definição 2.2.9 Seja $A \subseteq \mathbb{N}$. Dizemos que A é *cofinito* se o seu complementar é da forma $A^c = \{1, 2, \ldots, n\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$.

Definição 2.2.10 Seja (X, T) um sistema dinâmico. Para quaisquer conjuntos $A, B \subseteq X$, definimos o *retorno* de A para B por

$$N_T(A, B) = N(A, B) = \{n \in \mathbb{N}_0 : T^n(A) \cap B \neq \emptyset\}.$$

Note que nessa notação, temos que T é topologicamente transitivo se, e somente se, para quaisquer $U, V \subseteq X$ abertos e não vazios, $N(U, V) \neq \emptyset$; T é mixing se, e somente se, para quaisquer $U, V \subseteq X$ abertos e não vazios, $N(U, V)$ é cofinito e T é fracamente mixing se, e somente se, para quaisquer $U_1, U_2, V_1, V_2 \subseteq X$ abertos e não vazios, $N(U_1, U_2) \cap N(V_1, V_2) \neq \emptyset$.

Proposição 2.2.11 *Seja (X, T) um sistema dinâmico linear. Temos que T é mixing se, e somente se, para qualquer aberto e não vazio $U \subseteq X$ e para qualquer vizinhança de zero W, $N(U, W)$ e $N(W, U)$ são cofinitos.*

Demonstração. ($\Leftarrow$) Sejam $U, V \subseteq X$ abertos e não vazios. Pelo Lema 1.3.3, existe um aberto $U_1 \subseteq U$ e uma vizinhança de zero W_1 tal que $U_1 + W_1 \subseteq U$ e existe também um aberto $V_1 \subseteq V$ e uma vizinhança de zero W_2 tal que $V_1 + W_2 \subset V$. Tome $W = W_1 \cap W_2$, que também é vizinhança de zero. Daí

$$U_1 + W \subseteq U_1 + W_1 \subseteq U \text{ e } V_1 + W \subseteq V_1 + W_2 \subseteq V.$$

Por hipótese, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq N$,

$$T^n(U_1) \cap W \neq \emptyset \text{ e } T^n(W) \cap V_1 \neq \emptyset$$

isto é, para todo $n \geq N$, existe $u_n \in U_1$ tal que $T^n(u_n) \in W$ e existe $w_n \in W$ tal que $T^n(w_n) \in V_1$. Mas, $u_n + w_n \in U_1 + W \subseteq U$ e então $T^n(u_n + w_n) = T^n(u_n) + T^n(w_n) \in W + V_1 \subseteq V$ e então $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$. Portanto, T é mixing.
($\Rightarrow$) É imediato da definição de mixing. ■

Utilizando a Proposição 2.2.11, vejamos um exemplo concreto de um operador linear definido em um espaço de Banach que é mixing.

Exemplo 2.2.12 Seja $T \colon \ell_1 \longrightarrow \ell_1$ o operador dado por

$$T((x_1, x_2, \ldots)) = \left(2x_2, \frac{3}{2}x_3, \frac{4}{3}x_4, \ldots\right).$$

Sejam $x, y \in \ell_1, \lambda \in \mathbb{K}$ daí,

$$\begin{aligned}
T(x+\lambda y) &= T((x_n)_{n=1}^{\infty} + \lambda(y_n)_{n=1}^{\infty}) \\
&= T((x_n+\lambda y_n)_{n=1}^{\infty}) \\
&= \left(2(x_2+\lambda y_2), \frac{3}{2}(x_3+\lambda y_3), \ldots\right) \\
&= \left(2x_2+\lambda\cdot 2y_2, \frac{3}{2}x_3+\lambda\cdot\frac{3}{2}y_3, \ldots\right) \\
&= \left(2x_2, \frac{3}{2}x_3, \ldots) + (\lambda\cdot 2y_2, \lambda\cdot\frac{3}{2}y_3, \ldots\right) \\
&= T(x)+\lambda T(y)
\end{aligned}$$

mostrando que T é linear. Agora, para mostrar que T é contínua, note que para todo $x \in \ell_1$,

$$\begin{aligned}
\|T(x)\| &= \left\|\left(2x_2, \frac{3}{2}x_3, \frac{4}{3}x_4, \ldots\right)\right\| \\
&= \sum_{j=2}^{\infty} \frac{j}{j-1}|x_j| \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j+1}{j}|x_j| \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} 2|x_j| = 2\sum_{j=1}^{\infty}|x_j| = 2\|x\|
\end{aligned}$$

provando que T é contínuo.

Agora, seja $U \subseteq \ell_1$ um aberto não vazio e W uma vizinhança de zero. Como $\overline{c_{00}} = \ell_1$, existe uma sequência não nula $u = (u_1, u_2, \ldots, u_N, 0, 0, \ldots) \in U$ para algum $N \in \mathbb{N}$. Assim, para todo $n \geq N, T^n(u) = 0 \in W$, logo $N(U, W)$ é cofinito. Note agora que

$$T^k(x) = \left((k+1)x_{k+1}, \frac{k+2}{2}x_{k+2}, \frac{k+3}{3}x_{k+3}, \ldots\right), k \geq 1.$$

onde $x = (x_k)_{k=1}^{\infty}$. Como W é vizinhança de zero, segue que $0 \in W^{\circ}$ e então existe $r > 0$ tal que $B_{\ell_1}(0, r) \subseteq W^{\circ} \subseteq W$.

Defina $w_n \in \ell_1$, onde $w_n = (w_{nk})_{k=1}^{\infty}$ da seguinte forma

$$w_{n,k} = \begin{cases} \frac{k-n}{k}u_{k-n}, k = n+1, \ldots, n+N, n \in \mathbb{N} \\ 0, \text{ caso contrário} \end{cases}.$$

Note que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
T^n(w_n) &= \left((n+1)w_{n,n+1}, \frac{n+2}{2}w_{n,n+2}, \frac{n+3}{3}w_{n,n+3}, \ldots\right) \\
&= \left((n+1)\cdot\frac{1}{n+1}u_1, \frac{n+2}{2}\cdot\frac{2}{n+2}u_2, \ldots\right) \\
&= (u_1, u_2, \ldots, u_N, 0, 0, \ldots) = u \in U.
\end{aligned}$$

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{N}{n_0}\|u\| < r$. Daí, para todo $n \geq n_0$, temos que

$$\begin{aligned}
\|w_n\| &= \left\| \left(0, 0, \ldots, \frac{1}{n+1}u_1, \frac{2}{n+2}u_2, \ldots, \frac{N}{n+N}u_N, 0, 0 \ldots \right) \right\| \\
&= \sum_{j=1}^{N} \left| \frac{j}{n+j} u_j \right| \\
&= \sum_{j=1}^{N} \frac{j}{n+j} |u_j| \\
&\leq \frac{N}{n} \sum_{j=1}^{N} |u_j| \leq \frac{N}{n_0}\|u\| < r,
\end{aligned}$$

provando que $w_n \in W, \forall n \geq n_0$. Logo, para todo $n \geq n_0, w_n \in W$ e $T^n(w_n) \in U$ e então $T^n(W) \cap U \neq \emptyset, \forall n \geq n_0$. Daí, $n \in N(W, U), \forall n \geq n_0$, mostrando que $N(W, U)$ é cofinito. Portanto, segue da Proposição 2.2.11 que T é mixing.

Teorema 2.2.13 *Sejam (X, T) um sistema dinâmico linear com T hipercíclico, $U, V \subseteq X$ conjuntos abertos e não vazios e W uma vizinhança de zero. Então existe um aberto não vazio $U_1 \subseteq U$ e uma vizinhança de zero W_1, $W_1 \subseteq W$ tal que*

$$N(U_1, W_1) \subseteq N(V, W) \text{ e } N(W_1, U_1) \subseteq N(W, V).$$

Demonstração. Pelo Teorema da Transitividade de Birkhoff temos que T é topologicamente transitivo. Afirmamos que existem $m \in \mathbb{N}_0$, $U_1 \subseteq U$ aberto e não vazio, $W_1 \subseteq W$ uma vizinhança de zero tal que

$$T^m(U_1) \subseteq V \text{ e } T^m(W_1) \subseteq W. \tag{2.12}$$

De fato, como T é topologicamente transitivo existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $T^m(U) \cap V \neq \emptyset$. Daí, $U \cap T^{-m}(V) \neq \emptyset$. Tome $U_1 = U \cap T^{-m}(V)$. Como T é contínua, T^m é contínua e então $T^{-m}(V)$ é aberto. Como U é aberto por hipótese, segue que U_1 á aberto, pois é a interseção de dois abertos. É claro que $U_1 \subseteq U, U_1 \neq \emptyset$ e se $y = T^m(x), x \in U_1$ então $y \in V$, provando que $T^m(U_1) \subseteq V$.

Agora, como W é vizinhança de zero, segue que $0 \in W^\circ$. Tome $W_1 = W^\circ \cap T^{-m}(W^\circ)$. É claro que W_1 é aberto e $0 \in W^\circ \cap T^{-m}(W^\circ)$, provando que W_1 é vizinhança de zero. Além disso, se $y = T^m(x), x \in W_1$, segue que $y = T^m(x) \in W^\circ \subseteq W$, mostrando que $T^m(W_1) \subseteq W$.

Considerando então $N(U_1, W_1)$ e $N(W_1, U_1)$, vejamos que

$$N(U_1, W_1) \subseteq N(V, W) \text{ e } N(W_1, U_1) \subseteq N(W, V).$$

De fato, se $n \in N(U_1, W_1)$, existe $x \in U_1$ tal que $T^n(x) \in W_1$. Como $x \in U_1$, segue que $T^m(x) \in V$. Daí, $T^n(T^m(x)) = T^m(T^n(x)) \in W$, por (2.12), mostrando que $n \in N(V, W)$ e então $N(U_1, W_1) \subseteq N(V, W)$.

Agora, se $n \in N(W_1, U_1)$, existe $x \in W_1$ tal que $T^n(x) \in U_1$. Como $x \in W_1$, temos que $T^m(x) \in W$ e então $T^n(T^m(x)) = T^m(T^n(x)) \in V$, novamente por (2.12). Daí $n \in N(W, V)$ e então, $N(W_1, U_1) \subseteq N(W, V)$. ■

Lema 2.2.14 (4-Set Trick) *Seja (X, T) um sistema dinâmico, $U_1, V_1, U_2, V_2 \subseteq X$ abertos e não vazios.*

a) Se existe uma função contínua $S\colon X \longrightarrow X$ tal que $S \circ T = T \circ S$, $S(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$ e $S(V_1) \cap V_2 \neq \emptyset$, então existem conjuntos abertos e não vazios $U_1' \subseteq U_1$, $V_1' \subseteq V_1$ tal que

$$N(U_1', V_1') \subseteq N(U_2, V_2) \text{ e } N(V_1', U_1') \subseteq N(V_2, U_2).$$

Além disso, se T é topologicamente transitivo, então $N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset$.

b) Se T é topologicamente transitivo, então

$$N(U_1, U_2) \cap N(V_1, V_2) \neq \emptyset \Rightarrow N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset.$$

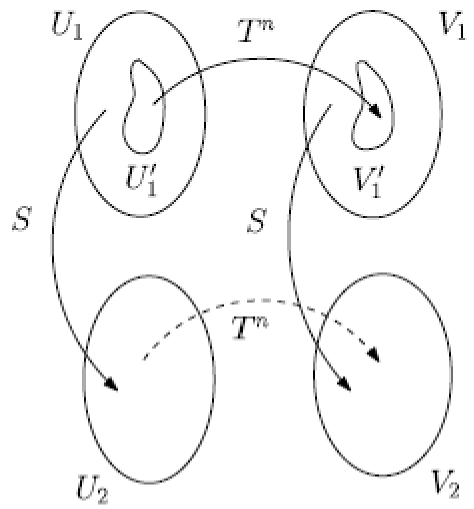

Figura 2.1: 4-Set Trick

Demonstração. (a) Como $S(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset$, existe $x \in U_1$ tal que $S(x) \in U_2$. Como S é contínua, existe um aberto $U_1' \subseteq U_1$ tal que $S(U_1') \subseteq U_2$. Da mesma forma, existe um aberto $V_1' \subseteq V_1$ tal que $S(V_1') \subseteq V_2$. Agora, se $n \in N(U_1', V_1')$, existe $y \in U_1'$ tal que $T^n(y) \in V_1'$. Daí, como $S(y) \in U_2$, $T^n(S(y)) = S(T^n(y)) \in V_2$, provando que $n \in N(U_2, V_2)$. Da mesma forma, se $n \in N(V_1', U_1')$, existe $z \in V_1'$ tal que $T^n(z) \in U_1'$. Daí, $T^n(S(z)) = S(T^n(z)) \in U_2$ e então $n \in N(V_2, U_2)$.

Agora, supondo T topologicamente transitivo, temos que $N(U_1', V_1') \neq \emptyset$. Já provamos que $N(U_1', V_1') \subseteq N(U_2, V_2)$. Agora se $n \in N(U_1', V_1')$, existe $x \in U_1'$ tal que $T^n(x) \in V_1'$. Logo $x \in U_1$ e $T^n(x) \in V_1$ o que implica que $n \in N(U_1, V_1)$e portanto, $N(U_1', V_1') \subseteq N(U_1, V_1)$. Logo

$$\emptyset \neq N(U_1', V_1') \subseteq N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2).$$

(b) Suponha que T seja topologicamente transitivo e $N(U_1, U_2) \cap N(V_1, V_2) \neq \emptyset$. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \in N(U_1, U_2) \text{ e } n \in N(V_1, V_2). \tag{2.13}$$

Defina $S = T^n$. É claro que S é contínua, $S \circ T = T^n \circ T = T \circ T^n = T \circ S$ e

$$S(U_1) \cap U_2 = T^n(U_1) \cap U_2 \neq \emptyset \text{ e } S(V_1) \cap V_2 = T^n(V_1) \cap V_2 \neq \emptyset$$

por (2.13). Como T é topologicamente transitivo segue do item (a) que $N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset$. ∎

Proposição 2.2.15 *Seja (X, T) um sistema dinâmico. T é fracamente mixing se, e somente se, dados $U, V_1, V_2 \subseteq X$ abertos e não vazios, $N(U, V_1) \cap N(U, V_2) \neq \emptyset$.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Simples de verificar pela Proposição 2.2.5.
$(\Leftarrow)$ Sejam $U_1, U_2, V_1, V_2 \subseteq X$ abertos e não vazios. Por hipótese, existe $n \in N(U_1, U_2) \cap N(U_1, V_2)$. Definindo $U = U_1 \cap T^{-n}(U_2)$, segue que U é aberto e não vazio. Como $T^{-n}(V_2)$ também é aberto e não vazio, novamente por hopótese, existe $m \in N(U, V_1) \cap N(U, T^{-n}(V_2))$, daí existe $x \in U$ tal que $T^m(x) \in T^{-n}(V_2)$. Então $T^m(T^n(x)) = T^n(T^m(x)) \in V_2$. Como $T^n(x) \in U_2$ e $T^m(T^n(x)) \in V_2$ segue que $m \in N(U_2, V_2)$.

Também existe $y \in U$ tal que $T^m(y) \in V_1$. Daí, $y \in U_1$ e $T^m(y) \in V_1$ e então $m \in N(U_1, V_1)$. Logo $m \in N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2)$ e então $N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset$, provando que T é fracamente mixing. ∎

Proposição 2.2.16 *Seja (X, T) um sistema dinâmico. T é fracamente mixing se, e somente se, dados $U, V \subseteq X$ abertos e não vazios, $N(U, U) \cap N(U, V) \neq \emptyset$.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Óbvio (pela definição de fracamente mixing).
$(\Leftarrow)$ Utilizaremos a Proposição 2.2.15. Sejam $U, V_1, V_2 \subseteq X$ conjuntos abertos e não vazios. Por hipótese, $N(U, U) \cap N(U, V_1) \neq \emptyset$. Logo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U) \cap V_1 \neq \emptyset$ e então $U \cap T^{-n}(V_1) \neq \emptyset$. Seja $U_1 = U \cap T^{-n}(V_1)$. É claro que U_1 é aberto.

Como $T^{-n}(V_2)$ também é aberto e não vazio, por hipótese, existe

$$m \in N(U_1, U_1) \cap N(U_1, T^{-n}(V_2)).$$

Daí, existem $x, y \in U_1$ tais que $T^m(x) \in U_1$ e $T^m(y) \in T^{-n}(V_2)$, isto é, $T^n(T^m(y)) \in V_2$. Portanto $T^{m+n}(x) = T^n(T^m(x)) \in V_1$ o que implica que $m + n \in N(U, V_1)$ e $T^{m+n}(y) = T^n(T^m(y)) \in V_2$, e então segue que $m + n \in N(U, V_2)$. Logo $N(U, V_1) \cap N(U, V_2) \neq \emptyset$ e pela Proposição 2.2.15 segue que T é fracamente mixing. ∎

Teorema 2.2.17 *Seja (X, T) um sistema dinâmico linear com T hipercíclico. Se para qualquer aberto e não vazio $U \subseteq X$ e W vizinhança de zero existe uma função contínua $S\colon X \longrightarrow X$ tal que $S \circ T = T \circ S$, $S(U) \cap W \neq \emptyset$ e $S(W) \cap U \neq \emptyset$, então T é fracamente mixing.*

Demonstração. Como T é hipercíclico, segue do Teorema da Transitivade de Birkhoff que T é topologicamente transitivo e então, segue do Lema 2.2.14 (item (a)) que $N(U, W) \cap N(W, U) \neq \emptyset$ para todo aberto U e vizinhança de zero W, não vazios. Para demonstrar o teorema, utilizaremos a Proposição 2.2.16.

Sejam $U, V \subseteq X$ abertos e não vazios. Pelo Lema 1.3.3, existem $U_1 \subseteq U, V_1 \subseteq V$ abertos e não vazios e uma vizinhança de zero W_1 tal que

$$U_1 + W_1 \subseteq U \text{ e } V_1 + W_1 \subseteq V.$$

Pelo Teorema 2.2.13, sendo U_1, V_1 abertos e não vazios e W_1 uma vizinhança de zero, existe um aberto não vazio $U_2 \subseteq U_1$ e uma vizinhança de zero W_2 tal que $W_2 \subseteq W_1$ e

$$N(W_2, U_2) \subseteq N(W_1, V_1). \tag{2.14}$$

Seja $n \in N(U_2, W_2) \cap N(W_2, U_2)$ (note que isso é possível de acordo com o argumento do início dessa demonstração). Então existe $u_2 \in U_2$ tal que $T^n(u_2) \in W_2$. Mas como $n \in N(W_2, U_2)$, segue de (2.14) que $n \in N(W_1, V_1)$ e então existe $w_1 \in W_1$ tal que $T^n(w_1) \in V_1$.

Também existe $w_2 \in W_2$ tal que $T^n(w_2) \in U_2$. Definindo $u_3 = u_2 + w_2 \in U_2 + W_2 \subseteq U_1 + W_1 \subseteq U$ e $u_4 = u_2 + w_1 \in U_2 + W_1 \subseteq U_1 + W_1 \subseteq U$, temos que

$$T^n(u_3) = T^n(u_2 + w_2) = T^n(u_2) + T^n(w_2) \in W_2 + U_2 \subseteq W_1 + U_1 \subseteq U$$

e então, $n \in N(U, U)$. Da mesma forma,

$$T^n(u_4) = T^n(u_2 + w_1) = T^n(u_2) + T^n(w_1) \in W_2 + V_1 \subseteq W_1 + V_1 \subseteq V$$

e então $n \in N(U, V)$. Logo $N(U, U) \cap N(U, V) \neq \emptyset$ e então, pela Proposição 2.2.16 segue que T é fracamente mixing. ■

Teorema 2.2.18 (Furstenberg [13]) *Seja (X, T) um sistema dinâmico, com T fracamente mixing. Então $\underbrace{T \times \cdots \times T}_{n \text{ vezes}}$ é fracamente mixing para $n \geq 2$.*

Demonstração. Pela definição, o produto cartesiano $\underbrace{T \times \cdots \times T}_{\text{n vezes}}$ é fracamente mixing se, e somente se, $\underbrace{T \times \cdots \times T}_{\text{2n vezes}}$ é topologicamente transitivo. Logo, basta mostrarmos que $\underbrace{T \times \cdots \times T}_{\text{n vezes}}$ é topologicamente transitivo para $n \geq 2$.

Façamos por indução. Para $n = 2$, como T é fracamente mixing por hipótese, já temos pela definição que $T \times T$ é topologicamente transitivo. Suponha que $\underbrace{T \times \cdots \times T}_{\text{n vezes}}$ é topologicamente transitivo.

Para mostrarmos que $\underbrace{T \times \cdots \times T}_{\text{n + 1 vezes}}$ é topologicamente transitivo, sejam $U, V \subset \underbrace{X \times \cdots \times X}_{\text{n+1 vezes}}$ abertos e não vazios. Sem perda de generalidade, suponha que $U = U_1 \times \cdots \times U_{n+1}, V = V_1 \times \cdots \times V_{n+1}$, onde $U_k, V_k \subseteq X$ são abertos e não vazios. Daí

$$\underbrace{T \times \cdots \times T}_{\text{n+1 vezes}} \text{ é topologicamente transitivo}$$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow &\quad \text{existe } s \in \mathbb{N} \text{ tal que } (\underbrace{T \times \cdots \times T}_{\text{n+1 vezes}})^s(U) \cap V \neq \emptyset \\
\Leftrightarrow &\quad \text{existe } s \in \mathbb{N} \text{ e } x \in U \text{ tal que } (\underbrace{T \times \cdots \times T}_{\text{n+1 vezes}})^s(x) \in V \\
\Leftrightarrow &\quad \text{existe } s \in \mathbb{N} \text{ e } x = (x_1, \ldots, x_{n+1}), x_i \in U_i, i = 1, \ldots, n+1 \\
&\quad \text{tal que } (\underbrace{T \times \cdots \times T}_{\text{n+1 vezes}})^s(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in V \\
\Leftrightarrow &\quad \text{existe } s \in \mathbb{N} \text{ e } x = (x_1, \ldots, x_{n+1}), x_i \in U_i, i = 1, \ldots, n+1 \\
&\quad \text{tal que } (\underbrace{T^s \times \cdots \times T^s}_{\text{n+1 vezes}})(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (T^s(x_1), \ldots, T^s(x_{n+1})) \in V_1 \times \ldots \times V_{n+1} \\
\Leftrightarrow &\quad \text{existem } s \in \mathbb{N}, x_i \in U_i \text{ tais que } T^s(x_i) \in V_i, \\
&\quad i = 1, \ldots, n+1 \\
\Leftrightarrow &\quad s \in N(U_i, V_i), \text{ para todo } i = 1, \ldots, n+1 \\
\Leftrightarrow &\quad \bigcap_{k=1}^{n+1} N(U_k, V_k) \neq \emptyset.
\end{aligned}$$

Como T é fracamente mixing, existe $m \in \mathbb{N}_0$ tal que $T^m(U_n) \cap U_{n+1} \neq \emptyset$ e $T^m(V_n) \cap V_{n+1} \neq \emptyset$. Pelo Lema 2.2.14, existem abertos e não vazios $U_n^{'} \subseteq U_n, V_n^{'} \subseteq V_n$ tais que

$$N(U_n^{'}, V_n^{'}) \subseteq N(U_{n+1}, V_{n+1}) \text{ e } N(V_n^{'}, U_n^{'}) \subseteq N(V_{n+1}, U_{n+1}).$$

Agora note que se $l \in N(U_n^{'}, V_n^{'})$, então $T^l(U_n^{'}) \cap V_n^{'} \neq \emptyset$, isto é, existe $x \in U_n^{'}$ tal que $T^l(x) \in V_n^{'}$. Daí $x \in U_n$ e $T^l(x) \in V_n$, mostrando que $T^l(U_n) \cap V_n \neq \emptyset$ e portanto, $l \in N(U_n, V_n)$. Logo, $N(U_n^{'}, V_n^{'}) \subseteq N(U_n, V_n)$ e então $N(U_n^{'}, V_n^{'}) \subseteq N(U_n, V_n) \cap N(U_{n+1}, V_{n+1})$

Por hipótese de indução, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$(T \times \ldots \times T)^k (U_1 \times \ldots \times U_{n-1} \times U_n^{'}) \cap (V_1 \times \ldots \times V_{n-1} \times V_n^{'}) \neq \emptyset$$

isto é

$$(T^k \times \ldots \times T^k)(U_1 \times \ldots \times U_{n-1} \times U_n^{'}) \cap (V_1 \times \ldots \times V_{n-1} \times V_n^{'}) \neq \emptyset$$

logo existe $x = (x_1, \ldots, x_n), x_i \in U_i, i = 1, \ldots, n-1$ e $x_n \in U_n^{'}$ tal que

$$(T^k \times \ldots \times T^k)(x_1, \ldots, x_n) = (T^k(x_1), \ldots, T^k(x_n)) \in V_1 \times \ldots \times V_{n-1} \times V_n^{'}.$$

Daí, $T^k(x_i) \in V_i, i = 1, \ldots, n-1$ e $T^k(x_n) \in V_n^{'}$. Logo, $k \in N(U_i, V_i)$ para todo $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ e $k \in N(U_n^{'}, V_n^{'})$. Então

$$k \in \bigcap_{j=1}^{n-1} N(U_j, V_j) \cap N(U_n^{'}, V_n^{'}).$$

Mas como $k \in N(U_n', V_n')$, segue que $k \in N(U_n, V_n)$ e $k \in N(U_{n+1}, V_{n+1})$ e então

$$k \in \bigcap_{j=1}^{n+1} N(U_j, V_j)$$

e o resultado segue. ■

Teorema 2.2.19 *Seja (X, T) um sistema dinâmico. $T \oplus T$ é fracamente mixing se, e somente se, T é fracamente mixing.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que $T \oplus T$ é fracamente mixing. Sejam $U_1, V_1, U_2, V_2 \subseteq X$ abertos e não vazios. Como $T \oplus T$ é fracamente mixing, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(T \oplus T)^n(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2) \neq \emptyset$. Daí, existem $u_1 \in U_1$ e $u_2 \in U_2$ tal que $(T \oplus T)^n(u_1, u_2) = (T^n(u_1), T^n(u_2)) \in V_1 \times V_2$ o que implica que $T^n(u_1) \in V_1$ e $T^n(u_2) \in V_2$. Logo, $T^n(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$ e $T^n(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$ e portanto T é fracamente mixing.
($\Leftarrow$) É o Teorema 2.2.18. ■

O último resultado dessa seção dá uma interessante decomposição dos vetores de um espaço de Fréchet separável, em termos de vetores hipercíclicos.

Teorema 2.2.20 *Seja (X, T) um sistema dinâmico linear, com T hipercíclico. Então*

$$X = HC(T) + HC(T),$$

ou seja, todo vetor de X pode ser escrito como a soma de dois vetores hipercíclicos.

Demonstração. Seja $x \in X$. Pelo argumento na demonstração do Teorema da Transitividade de Birkhoff, temos que $HC(T)$ é um G_δ-conjunto denso. Note que $x - HC(T)$ também é um G_δ-conjunto. De fato, como $HC(T)$ é G_δ-conjunto, temos que

$$HC(T) = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k,$$

$A_k \subseteq X$ é aberto para todo $k \in \mathbb{N}$.

Agora, note que

$$\begin{aligned} y \in x - HC(T) &\Rightarrow y \in x - \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \\ &\Rightarrow y = x - z, z \in A_k, \forall k \\ &\Rightarrow y \in x - A_k, \forall k \\ &\Rightarrow y \in \bigcap_{k=1}^{\infty} (x - A_k) \end{aligned}$$

provando que

$$x - HC(T) \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} (x - A_k). \tag{2.15}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
y \in \bigcap_{k=1}^{\infty}(x - A_k) &\Rightarrow y \in (x - A_k), \forall k \\
&\Rightarrow y = x - a_k, a_k \in A_k, k \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow a_k = x - y, \forall k \in \mathbb{N} \\
&\Rightarrow y = x - (x - y), x - y \in A_k \forall k \\
&\Rightarrow y \in x - \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k = x - HC(T),
\end{aligned}$$

provando que

$$\bigcap_{k=1}^{\infty}(x - A_k) \subseteq x - HC(T). \tag{2.16}$$

De (2.15) e (2.16) concluimos que $x - HC(T) = \bigcap_{k=1}^{\infty}(x - A_k)$. Como A_k é aberto para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que $x - A_k$ também é aberto para todo $k \in \mathbb{N}$ porque translação e homotetia são homeomorfismos. Daí, segue que $x - HC(T)$ é um G_δ conjunto.

Como $HC(T)$ e $x - HC(T)$ são G_δ conjuntos densos, pelo Teorema de Baire segue que

$$HC(T) \cap (x - HC(T)) \neq \emptyset$$

isto é, existe $y \in HC(T)$ tal que $y = x - z, z \in HC(T)$. Logo, $x = y + z \in HC(T) + HC(T)$.

■

Capítulo 3

Critérios de Hiperciclicidade

O Teorema da Transitividade de Birkhoff reduz a hiperciclicidade para um problema de transitividade topológica. Entretanto, em muitas situações não é tarefa simples verificar se um operador é topologicamente transitivo ou não. O nosso objetivo agora é estudar alguns critérios que podem ser aplicados em operadores a fim de sabermos quando o operador é hipercíclico ou se mixing, ou fracamente mixing e consequentemente, hipercíclico.

Alguns desses critérios tiveram sua origem em situações específicas, isto é, inicialmente foram estabelecidos para operadores definidos em espaços de sequências ou de funções, mas estudaremos todos eles de maneira geral.

Teorema 3.0.21 *Seja (X,T) um sistema dinâmico linear. Suponha que*

$$X_0 := span\{x \in X : T(x) = \lambda x \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| < 1\}$$

$$Y_0 := span\{x \in X : T(x) = \lambda x \text{ para algum } \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| > 1\}$$

sejam densos em X. Então T é mixing e, em particular, hipercíclico.

Demonstração. Sejam $U, V \subseteq X$ abertos e não vazios. Por hipótese, podemos encontrar $x \in X_0 \cap U$ e $y \in Y_0 \cap V$. Daí,

$$x = \sum_{k=1}^{m} a_k x_k \text{ e } y = \sum_{k=1}^{m} b_k y_k,$$

onde $T(x_k) = \lambda_k x_k, T(y_k) = \mu_k y_k$ para escalares $a_k, b_k, \lambda_k, \mu_k \in \mathbb{K}$, com $|\lambda_k| < 1$ e $|\mu_k| > 1, k = 1, \ldots, m$.

Agora, para cada $k \in \mathbb{N}$, considere a sequência $(a_k \lambda_k^n x_k)_{n=1}^{\infty}$ e $(p_j)_{j=1}^{\infty}$ a sequência de seminormas que define a topologia de X. Daí, para todo $j \geq 1$,

$$p_j(a_k \lambda_k^n x_k) = |a_k||\lambda_k|^n p_j(x_k) \longrightarrow 0$$

quando $n \longrightarrow \infty$, provando que $a_k \lambda_k^n x_k \longrightarrow 0$ em X quando $n \longrightarrow \infty$. Daí

$$T^n(x) = T^n\left(\sum_{k=1}^{m} a_k x_k\right) = \sum_{k=1}^{m} a_k T^n(x_k) = \sum_{k=1}^{m} a_k \lambda_k^n x_k \longrightarrow 0$$

quando $n \longrightarrow \infty$. Definindo

$$u_n := \sum_{k=1}^{m} b_k \cdot \frac{1}{\mu_k^n} \cdot y_k$$

temos que $u_n \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$ e para todo $n \geq 0$

$$T^n(u_n) = T^n\left(\sum_{k=1}^{m} b_k \cdot \frac{1}{\mu_k^n} \cdot y_k\right) = \sum_{k=1}^{m} b_k \cdot \frac{1}{\mu_k^n} \cdot \mu_k^n \cdot y_k = \sum_{k=1}^{m} b_k y_k = y.$$

Daí, $x + u_n \longrightarrow x + 0 = x$ e $T^n(x + u_n) = T^n(x) + T^n(u_n) = T^n(x) + y \longrightarrow 0 + y = y$, quando $n \longrightarrow \infty$.

Como $x + u_n \longrightarrow x$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x + u_n \in U, \forall n \geq N_1$. Como $T^n(x + u_n) \longrightarrow y$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(x + u_n) \in V, \forall n \geq N_2$. Tome $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$. Daí, para todo $n \geq N$, $x + u_n \in U$ e $T^n(x + u_n) \in V$ o que implica que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset, \forall n \geq N$. Logo T é mixing. ∎

Teorema 3.0.22 (Critério de Kitai [19]) *Seja (X, T) um sistema dinâmico linear. Se existem conjuntos densos $X_0, Y_0 \subseteq X$ e uma função $S\colon Y_0 \longrightarrow Y_0$ tal que para todos $x \in X_0$ e $y \in Y_0$*

(i) $T^n(x) \longrightarrow 0$

(ii) $S^n(y) \longrightarrow 0$

(iii) $(T \circ S)(y) = y$

então T é mixing e, em particular, hipercíclico.

Demonstração. Sejam $U, V \subseteq X$ abertos e não vazios. Por hipótese, existem $x \in X_0 \cap U$ e $y \in Y_0 \cap V$. Pelo item (i) da hipótese, segue que $T^n(x) \longrightarrow 0$. Defina $u_n = S^n(y)$. Daí, pelo item (ii) da hipótese, $u_n \longrightarrow 0$. Mostremos que para todo $n \geq 0$, $T^n(u_n) = y$.

Se $n = 1$, $T(u_1) = T(S(y)) = y$, pela condição (iii) da hipótese. Suponha que $T^n(u_n) = T^n(S^n(y)) = y$, mostremos que $T^{n+1}(u_{n+1}) = T^{n+1}(S^{n+1}(y)) = y$. De fato,

$$\begin{aligned}
T^{n+1}(u_{n+1}) &= T^{n+1}(S^{n+1}(y)) \\
&= (\underbrace{T \circ \ldots \circ T}_{n+1 \text{ vezes}}) \circ (\underbrace{S \circ \ldots \circ S}_{n+1 \text{ vezes}})(y) \\
&= (T^n \circ T) \circ (S \circ S^n)(y) \\
&= (T^n \circ (T \circ S) \circ S^n)(y) \\
&= T^n((T \circ S)(S^n(y))) = T^n(S^n(y)) = y
\end{aligned}$$

portanto, $T^n(u_n) = y$ para todo $n \geq 0$.

Como $x + u_n \longrightarrow x + 0 = x$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x + u_n \in U, \forall n \geq N_1$. Também, como $T^n(x + u_n) = T^n(x) + y \longrightarrow 0 + y = y$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(x + u_n) \in V, \forall n \geq N_2$. Tomando $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$, temos que para todo $n \geq N$, $x + u_n \in U$ e $T^n(x + u_n) \in V$, o que implica que $T^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq N$ e então, T é mixing. ∎

Como aplicação do critério de Kitai mostraremos que os operadores de Rolewicz e MacLane são mixing. Apesar de não provarmos aqui, o operador translação de Birkhoff, que já provamos ser hipercíclico, também satisfaz critério de Kitai, logo é mixing.

Exemplo 3.0.23 Seja $1 \leq p < \infty, \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| > 1$ e $T\colon \ell_p \longrightarrow \ell_p$ definido por

$$T((\xi_1, \xi_2, \ldots)) = \lambda(\xi_2, \xi_3, \ldots).$$

Tome $X_0 = Y_0 = c_{00}$ e $S\colon c_{00} \longrightarrow c_{00}$ definido por

$$S((\xi_1, \xi_2, \ldots) = \frac{1}{\lambda}(0, \xi_1, \xi_2, \ldots).$$

Já sabemos que T é linear e contínuo e já sabemos também que X_0 e Y_0 são densos em ℓ_p. Provemos que as três condições do Critério de Kitai são satisfeitas.
(i) Seja $x \in X_0$. Então $x = (x_1, x_2, \ldots, x_N, 0, 0, \ldots)$ para algum $N \geq 1$. Logo, para todo $n \geq N$, $T^n(x) = 0$ e então $T^n(x) \longrightarrow 0$.
(ii) Seja $y \in Y_0$. Então $y = (y_1, y_2, \ldots, y_N, 0, 0, \ldots)$ para algum $N \geq 1$. Logo

$$S^n(y) = \frac{1}{\lambda^n}(0, 0, \ldots, 0, y_1, y_2, \ldots, y_N, 0, 0, \ldots) \longrightarrow 0$$

quando $n \longrightarrow \infty$.
(iii) Seja $y \in Y_0$. Então $y = (y_1, y_2, \ldots, y_N, 0, 0, \ldots)$ para algum $N \geq 1$. Logo

$$S(y) = \frac{1}{\lambda}(0, y_1, y_2, \ldots, y_N, 0, \ldots) \Rightarrow T(S(y)) = (y_1, y_2, \ldots, y_N, 0, 0, \ldots) = y.$$

Portanto, de (i), (ii) e (iii), temos pelo Critério de Kitai que T é mixing.

Exemplo 3.0.24 Seja $D\colon \mathcal{H}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{C})$ o operador diferenciação. Já sabemos que D é linear e contínuo. Mostremos que D satisfaz o critério de Kitai.

Tome $X_0 = Y_0 = \mathcal{P}(\mathbb{C})$, onde $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ é o espaço dos polinômios com coeficientes em $\mathbb{C}$. Já sabemos que $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ é denso em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Considere $S\colon Y_0 \longrightarrow Y_0$ definida por

$$S(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_k z^k) = a_0 + a_1 \cdot \frac{z^2}{2} + \ldots + a_k \cdot \frac{z^{k+1}}{k+1}$$

$k \in \mathbb{N}$. Note que dado $P \in X_0, D^n(P) = 0$ sempre que n for maior que o grau do polinômio P. Logo $D^n(P) \longrightarrow 0$, quando $n \longrightarrow \infty$, para todo $P \in X_0$.

Seja $K \subseteq \mathbb{C}$ compacto. Então existe $R > 0$ tal que $K \subseteq B(0, R)$. Note que

$$S^n(z^k) = \frac{z^{k+n}}{(k+1)(k+2)\ldots(k+n-1)(k+n)},$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Note também que

$$\frac{k! z^{k+n}}{(k+n)!} = \frac{k! z^{k+n}}{(k+n)(k+n-1)\ldots(k+1)k!} = \frac{z^{k+n}}{(k+n)(k+n-1)\ldots(k+1)} = S^n(z^k)$$

e então

$$|S^n(z^k)| = \left|\frac{k!z^{k+n}}{(k+n)!}\right| = \frac{k!|z|^{k+n}}{(k+n)!}.$$

Assim, se $z \in \mathbb{C}$ é tal que $|z| \leq R$, então $|z|^{k+n} \leq R^{k+n}$ e

$$|S^n(z^k)| = \frac{k!|z|^{k+n}}{(k+n)!} \leq \frac{k!R^{k+n}}{(k+n)!},$$

o que implica que

$$\sup_{z\in K}|S^n(z^k)| \leq \frac{k!R^{k+n}}{(k+n)!}, \forall k \in \mathbb{N}$$

e então

$$\sup_{z\in K}|S^n(z^k)| \longrightarrow 0 \tag{3.1}$$

quando $n \longrightarrow \infty$.

Sejam $P \in Y_0$, digamos $P(z) = a_k z^k + \ldots + a_1 z + a_0$ e $\varepsilon > 0$. Então

$$S^n(P)(z) = S^n(a_k z^k + \ldots + a_1 z + a_0) = a_k S^n(z^k) + \ldots + a_1 S^n(z) + a_0 S^n(z^0),$$

logo

$$|S^n(P)(z)| \leq |a_k||S^n(z^k)| + \ldots + |a_1||S^n(z)| + |a_0||S^n(z^0)|.$$

Por (3.1), existem constantes $n_0, n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$ tais que

$$|S^n(z^0)| < \frac{\varepsilon}{2(k+1)|a_0|}, \text{ sempre que } n \geq n_0$$

$$|S^n(z)| < \frac{\varepsilon}{2(k+1)|a_1|}, \text{ sempre que } n \geq n_1$$

$$\vdots$$

$$|S^n(z^k)| < \frac{\varepsilon}{2(k+1)|a_k|}, \text{ sempre que } n \geq n_k.$$

Tomando $\tilde{n} = \text{máx}\{n_0, n_1, \ldots, n_k\}$, temos que sempre que $n \geq \tilde{n}$,

$$\begin{aligned}
|S^n(P)(z)| &\leq |a_k||S^n(z^k)| + \ldots + |a_1||S^n(z)| + |a_0||S^n(z^0)| \\
&\leq |a_k| \cdot \frac{\varepsilon}{2(k+1)|a_k|} + \ldots + |a_1| \cdot \frac{\varepsilon}{2(k+1)|a_1|} + |a_0| \cdot \frac{\varepsilon}{2(k+1)|a_0|} \\
&= \frac{\varepsilon}{2(k+1)} + \ldots + \frac{\varepsilon}{2(k+1)} + \frac{\varepsilon}{2(k+1)} = \frac{\varepsilon(k+1)}{2(k+1)} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo, $|S^n(P)| < \varepsilon$ sempre que $n \geq \tilde{n}$, ou seja, $S^n(P) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$.

Por fim, se $P(z) = a_k z^k + \ldots + a_1 z + a_0 \in Y_0$, então

$$\begin{aligned}
(D \circ S)(P) = D(S(P)) &= D\left(a_k \cdot \frac{z^{k+1}}{k+1} + \ldots + a_1 \cdot \frac{z^2}{2} + a_0 z\right) \\
&= \frac{a_k}{k+1} D(z^{k+1}) + \ldots + \frac{a_1}{2} D(z^2) + a_0 D(z) \\
&= \frac{a_k}{k+1} \cdot (k+1) z^k + \ldots + \frac{a_1}{2} \cdot 2z + a_0 \\
&= a_k z^k + \ldots + a_1 z + a_0 = P.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo critério de Kitai, segue que D é mixing.

Teorema 3.0.25 (Critério de Gethner-Shapiro [14]) *Seja (X,T) um sistema dinâmico linear. Se existem conjuntos densos $X_0, Y_0 \subseteq X$, uma sequência crescente $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ de inteiros positivos e uma função $S\colon Y_0 \longrightarrow Y_0$ tal que para todo $x \in X_0$ e $y \in Y_0$*

(i) $T^{n_k}(x) \longrightarrow 0$

(ii) $S^{n_k}(y) \longrightarrow 0$

(iii) $(T \circ S)(y) = y$

então T é fracamente mixing.

Demonstração. Sejam $U_1, U_2, V_1, V_2 \subseteq X$ abertos e não vazios. Por hipótese, podemos encontrar vetores $x_j \in U_j \cap X_0, y_j \in V_j \cap Y_0, j = 1, 2$. Note que

$$x_j + S^{n_k}(y_j) \longrightarrow x_j + 0 = x_j, j = 1, 2$$

e

$$T^{n_k}(x_j + S^{n_k}(y_j)) = T^{n_k}(x_j) + y_j \longrightarrow 0 + y_j = y_j, j = 1, 2$$

quando $k \longrightarrow \infty$.

Daí, existem $n_1, n_2, n_3, n_4 \in \mathbb{N}$ tais que

$$x_1 + S^{n_k}(y_1) \in U_1, \text{ sempre que } k \geq n_1,$$

$$x_2 + S^{n_k}(y_2) \in U_2, \text{ sempre que } k \geq n_2,$$

$$T^{n_k}(x_1 + S^{n_k}(y_1)) \in V_1, \text{ sempre que } k \geq n_3,$$

$$T^{n_k}(x_2 + S^{n_k}(y_2)) \in V_2, \text{ sempre que } k \geq n_4.$$

Tome $\tilde{k} = \text{máx}\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$. Daí

$$x_1 + S^{n_{\tilde{k}}}(y_1) \in U_1 \text{ e } T^{n_{\tilde{k}}}(x_1 + S^{n_{\tilde{k}}}(y_1)) \in V_1 \Rightarrow n_{\tilde{k}} \in N(U_1, V_1)$$

$$x_2 + S^{n_{\tilde{k}}}(y_2) \in U_2 \text{ e } T^{n_{\tilde{k}}}(x_2 + S^{n_{\tilde{k}}}(y_2)) \in V_2 \Rightarrow n_{\tilde{k}} \in N(U_2, V_2).$$

Logo, $N(U_1, V_1) \cap N(U_2, V_2) \neq \emptyset$ e então, T é fracamente mixing. ■

Lema 3.0.26 *Sejam X um espaço de Fréchet separável e T um operador hipercíclico em X. Tome $(y_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq X$ uma sequência densa em X e defina*

$$G_{j,k} = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}\left(B\left(y_j, \frac{1}{k}\right)\right),$$

para todos $j, k \in \mathbb{N}$. Seja $HC(T)$ o conjunto de todos os vetores hipercíclicos para T. Então

$$HC(T) = \bigcap_{j,k \in \mathbb{N}} G_{j,k}.$$

Demonstração. Como T é hipercíclico, segue por definição que T é contínuo. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, T^n é contínuo como composição de funções contínuas e então $T^{-n}\left(B\left(y_j, \frac{1}{k}\right)\right)$ é aberto para quaisquer $n, j, k \in \mathbb{N}$.

Por hipótese, como T é hipercíclico, então $HC(T) \neq \emptyset$. Seja $x \in HC(T)$. Então para cada $j, k \in \mathbb{N}$, existe $n_{j,k} \in \mathbb{N}$ tal que $T^{n_{j,k}}(x) \in B\left(y_j, \frac{1}{k}\right)$. Logo, para cada $j, k \in \mathbb{N}$, $x \in T^{-n_{j,k}}\left(B\left(y_j, \frac{1}{k}\right)\right) \subseteq G_{j,k}$, provando que $HC(T) \subseteq \bigcap\limits_{j,k\in\mathbb{N}} G_{j,k}$.

Para demonstrar a outra inclusão, seja $x \in \bigcap\limits_{j,k\in\mathbb{N}} G_{j,k}$, mostremos que $Orb(T,x)$ é denso em X.

Seja $z \in X$ e $\varepsilon > 0$. Tome $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{k_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ e como $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ é densa em X, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(z, y_{j_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Como $x \in G_{j_0,k_0}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in T^{-n_0}\left(B\left(y_{j_0}, \frac{1}{k_0}\right)\right)$, isto é, $T^{n_0}(x) \in B\left(y_0, \frac{1}{k_0}\right)$. Daí

$$d(T^{n_0}(x), z) \leq d(T^{n_0}(x), y_{j_0}) + d(y_{j_0}, z) < \frac{1}{k_0} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, $Orb(T,x)$ é denso em X o que implica que $x \in HC(T)$, concluindo que $\bigcap\limits_{j,k\in\mathbb{N}} G_{j,k} \subseteq HC(T)$. Portanto,

$$HC(T) = \bigcap_{j,k\in\mathbb{N}} G_{j,k}.$$

■

Teorema 3.0.27 (Critério de Hiperciclicidade) *Seja (X,T) um sistema dinâmico linear. Suponhamos que existam subconjuntos densos $Z, Y \subseteq X$, uma sequência crescente de inteiros positivos $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ e uma família de aplicações $S_{n_k}\colon Z \longrightarrow X$ tais que*

(i) para cada $y \in Y$, $T^{n_k}(y) \longrightarrow 0$ quando $k \longrightarrow \infty$;

(ii) para cada $z \in Z$, $S_{n_k}(z) \longrightarrow 0$ quando $k \longrightarrow \infty$;

(iii) $T^{n_k} \circ S_{n_k}(z) \longrightarrow z$ quando $k \longrightarrow \infty$ para todo $z \in Z$.

Então T é hipercíclico.

Demonstração. Como X é separável, consideremos uma sequência $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ densa em X. Para cada $j, l \in \mathbb{N}$, seja

$$G_{j,l} = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-n}\left(B\left(y_j, \frac{1}{l}\right)\right),$$

definidos no Lema 3.0.26. Mostremos que para cada j e para cada l, $G_{j,l}$ é denso em X, pois se $G_{j,l}$ é denso em X para cada $j, l \in \mathbb{N}$, pelo teorema de Baire segue que $\bigcap\limits_{j,l} G_{j,l}$ é denso em X e então $\bigcap\limits_{j,l} G_{j,l} \neq \emptyset$. Daí, pelo Lema 3.0.26 segue que $HC(T) \neq \emptyset$ e, portanto, T é hipercíclico.

Sejam $j, l \in \mathbb{N}$ fixos e considere $G_{j,l}$. Para facilitar a notação, vamos denotar y_j por y e $\frac{1}{l}$ por ε. Seja $z \in X$ e $\delta > 0$, devemos encontrar $x \in G_{j,l}$ tal que $d(x, z) < \delta$.

Como Z e Y são densos, existem $y_0 \in Y$ e $z_0 \in Z$ tais que

$$d(y, z_0) < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } d(z, y_0) < \frac{\delta}{2}.$$

Por (i), $T^{n_k}(y_0) \longrightarrow 0$, assim existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$d(T^{n_k}(y_0), 0) < \frac{\varepsilon}{4}, \text{ sempre que } k \geq k_1,$$

isto é, $T^{n_k}(y_0) \in B(0, \frac{\varepsilon}{4})$ sempre que $k \geq k_1$.

Por (ii), $S_{n_k}(z_0) \longrightarrow 0$ e então existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$S_{n_k}(z_0) \in B\left(0, \frac{\delta}{2}\right), \text{ sempre que } k \geq k_2.$$

Por (iii), $T^{n_k} \circ S_{n_k}(z_0) \longrightarrow z_0$ e então existe $k_3 \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^{n_k} \circ S_{n_k}(z_0) \in B\left(z_0, \frac{\varepsilon}{4}\right), \text{ sempre que } k \geq k_3.$$

Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > \text{máx}\{k_1, k_2, k_3\}$ e considere $x = S_{n_k}(z_0) + y_0 \in X$. Note que

$$T^{n_k}(x) = T^{n_k}(S_{n_k}(z_0) + y_0) = T^{n_k} S_{n_k}(z_0) + T^{n_k}(y_0)$$

e como d é invariante sob translações

$$\begin{aligned}
d(T^{n_k}(x), z_0) &= d(T^{n_k} S_{n_k}(z_0) + T^{n_k}(y_0), z_0) \\
&\leq d(T^{n_k} S_{n_k}(z_0) + T^{n_k}(y_0), T^{n_k} S_{n_k}(z_0)) + d(T^{n_k} S_{n_k}(z_0), z_0) \\
&= d(T^{n_k} S_{n_k}(z_0) + T^{n_k}(y_0) - T^{n_k} S_{n_k}(z_0), T^{n_k} S_{n_k}(z_0) - T^{n_k} S_{n_k}(z_0)) \\
&\quad + d(T^{n_k} S_{n_k}(z_0), z_0) \\
&= d(T^{n_k}(y_0), 0) + d(T^{n_k} S_{n_k}(z_0), z_0) \\
&< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

daí, $T^{n_k}(x) \in B\left(z_0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Como $y \in B\left(z_0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, segue que

$$d(T^{n_k}(x), y) \leq d(T^{n_k}(x), z_0) + d(z_0, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

e então $T^{n_k}(x) \in B(y, \varepsilon)$ o que implica que $x \in T^{-n_k}(B(y, \varepsilon)) \subseteq G_{j,l}$.

Como $x = S_{n_k}(z_0) + y_0$, temos que $x - y_0 = S_{n_k}(z_0)$ e então $x - y_0 \in B\left(0, \frac{\delta}{2}\right)$. Agora, note que

$$d(x, y_0) = d(x - y_0, y_0 - y_0) = d(x - y_0, 0) < \frac{\delta}{2}$$

o que implica que $x \in B\left(y_0, \frac{\delta}{2}\right)$. Como $z \in B\left(y_0, \frac{\delta}{2}\right)$,

$$d(x, z) \leq d(x, y_0) + d(y_0, z) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Como z foi escolhido arbitrariamente, segue que $G_{j,l}$ é denso em X para todos $j, l \in \mathbb{N}$. Logo pelo Teorema de Baire segue que $\bigcap_{j,l} G_{j,l}$ é denso em X. $\blacksquare$

Corolário 3.0.28 *Seja (X,T) um sistema dinâmico linear. Se T satisfaz o critério de hiperciclicidade então $T \oplus T$ também satisfaz o critério de hiperciclicidade.*

Demonstração. Como T satisfaz o critério de hiperciclicidade, existem subconjuntos densos $Z, Y \subseteq X$, uma sequência de inteiros positivos $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ e uma família de aplicações $S_{n_k} : Z \longrightarrow X$ tais que

(i) $T^{n_k}(y) \longrightarrow 0, \forall y \in Y$

(ii) $S_{n_k}(z) \longrightarrow 0, \forall z \in Z$

(iii) $T^{n_k} S_{n_k}(z) \longrightarrow z, \forall z \in Z$

Para mostrar que $T \oplus T$ satisfaz o critério de hiperciclicidade, considere os conjuntos $Z \oplus Z, Y \oplus Y \subseteq X \times X$, a sequência $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ e a família de aplicações $S_{n_k} \oplus S_{n_k}$.

Provemos que $Z \oplus Z$ e $Y \oplus Y$ são densos em $X \times X$. De fato, seja $(x_1, x_2) \in X \times X$ e $\varepsilon > 0$. Como Z e Y são densos em X, existem $z_1, z_2 \in Z, y_1, y_2 \in Y$ tais que $d(z_1, x_1) < \frac{\varepsilon}{2}, d(z_2, x_2) < \frac{\varepsilon}{2}, d(y_1, x_1) < \frac{\varepsilon}{2}$ e $d(y_2, x_2) < \frac{\varepsilon}{2}$.

É claro que $(z_1, z_2) \in Z \oplus Z$ e $(y_1, y_2) \in Y \oplus Y$. Além disso,

$$d((z_1, z_2), (x_1, x_2)) = d(z_1, x_1) + d(z_2, x_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e

$$d((y_1, y_2), (x_1, x_2)) = d(y_1, x_1) + d(y_2, x_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

provando que $(z_1, z_2), (y_1, y_2) \in B((x_1, x_2), \varepsilon)$. Logo, $Z \oplus Z$ e $Y \oplus Y$ são densos em $X \times X$.

Mostremos agora que $T \oplus T$ satisfaz o critério de hiperciclicidade.

(i) Seja $(y_1, y_2) \in Y \oplus Y$. Temos que $(T \oplus T)^{n_k}(y_1, y_2) = (T^{n_k} \oplus T^{n_k})(y_1, y_2) = (T^{n_k}(y_1), T^{n_k}(y_2)) \longrightarrow (0,0)$.

(ii) Seja $(z_1, z_2) \in Z \oplus Z$. Temos que $(S_{n_k} \oplus S_{n_k})(z_1, z_2) = (S_{n_k}(z_1), S_{n_k}(z_2)) \longrightarrow (0,0)$.

(iii) Seja $(z_1, z_2) \in Z \oplus Z$. Então $(T \oplus T)^{n_k} \circ (S_{n_k} \oplus S_{n_k})(z_1, z_2) = (T^{n_k} \oplus T^{n_k})(S_{n_k}(z_1), S_{n_k}(z_2)) = (T^{n_k} S_{n_k}(z_1), T^{n_k} S_{n_k}(z_2)) \longrightarrow (z_1, z_2)$.

De (i), (ii) e (iii) segue que $T \oplus T$ satisfaz o critério de hiperciclicidade. ■

Introduziremos agora uma variação da noção de hiperciclicidade que também é estudada na dinâmica linear.

Definição 3.0.29 Sejam X um espaço de Fréchet separável e $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência crescente de inteiros positivos. Um operador T é chamado *hereditariamente hipercíclico* com respeito a $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ se para cada subsequência $(n_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ de $(n_k)_{k=1}^{\infty}$, existe $x \in X$ tal que $\{T^{n_{k_j}}(x) : j \geq 1\}$ é denso em X. Um operador é chamado apenas de hereditariamente hipercíclico se é hereditariamente hipercíclico com respeito a alguma sequência $(n_k)_{k=1}^{\infty}$.

Para provar alguns resultados adiante, precisamos de uma noção mais geral do que hiperciclicidade, que definiremos agora.

Definição 3.0.30 Sejam X e Y espaços métricos, $T_n \colon X \longrightarrow Y$ funções contínuas. A órbita de $x \in X$ com respeito a $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ é o conjunto

$$Orb((T_n), x) = \{T_n(x) : n \geq 1\}.$$

Um elemento $x \in X$ é *universal* para $(T_n)_n$ se $Orb((T_n), x)$ é denso em Y.

Definição 3.0.31 Sejam $T_n \colon X \longrightarrow Y, n \geq 0$ funções contínuas entre os espaços métricos X e Y. $(T_n)_n$ é *topologicamente transitivo* se para qualquer par $U \subseteq X$ e $V \subseteq Y$ de conjuntos abertos e não vazios, existe $n \geq 0$ tal que $T_n(U) \cap V \neq \emptyset$.

Teorema 3.0.32 (Critério Universal) *Sejam X um espaço métrico completo, Y um espaço métrico separável e $T_n \colon X \longrightarrow Y, n \geq 1$ funções contínuas. São equivalentes:*

(i) $(T_n)_n$ é topologicamente transitivo.

(ii) Existe um conjunto de pontos $Z \subseteq X$ denso tal que $Orb((T_n), x)$ é denso em Y para todo $x \in Z$.

Se uma dessas condições é satisfeita, $\{x \in X : Orb((T_n), x)$ é denso em $Y\}$ é um G_δ conjunto denso.

Demonstração. (ii) $\Rightarrow$ (i) Suponha que $A = \{x \in X : Orb((T_n), x)$ é denso em $Y\}$ seja denso em X. Sejam $U \subseteq X, V \subseteq Y$ abertos e não vazios. Como A é denso em X é possível encontrar $y \in A \cap U$. Daí, $Orb((T_n), y)$ é denso em Y e então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T_n(y) \in V$. Portanto, $T_n(U) \cap V \neq \emptyset$.
(i) $\Rightarrow$ (ii) Suponha $(T_n)_n$ topologicamente transitivo. Seja

$$A = \{x \in X : Orb((T_n), x) \text{ é denso em } Y\}.$$

Como Y é separável, existe $\{y_j : j \in \mathbb{N}\}$ denso em Y. Assim, para $m, j \geq 1$, as bolas $B\left(y_j, \frac{1}{m})\right)$ formam uma base enumerável para a topologia de Y. Seja $(U_k)_{k \geq 1}$ essa base.

Se $x \in A$, então $Orb((T_n), x)$ é denso em Y. Logo, dado $k \geq 1$, existe $n_0 \geq 1$ tal que $T_{n_0}(x) \in U_k$, provando que

$$A \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n^{-1}(U_k). \tag{3.2}$$

Supondo que $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n^{-1}(U_k)$, provemos que $Orb((T_n), x)$ é denso em Y. Seja $U \subseteq Y$ um aberto não vazio. Logo, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $U_{k_0} \subseteq U$. Como $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n^{-1}(U_{k_0})$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x \in T_{n_0}^{-1}(U_{k_0})$ e então $T_{n_0}(x) \in U_{k_0} \subseteq U$, provando que $Orb((T_n), x)$ é denso em Y e

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n^{-1}(U_k) \subseteq A. \tag{3.3}$$

De (3.2) e (3.3) concluimos que

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n^{-1}(U_k).$$

Para cada $n, k \in \mathbb{N}$, como T_n é contínua e U_k é aberto em Y, segue que $T_n^{-1}(U_k)$ é aberto em X. Logo $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n^{-1}(U_k)$ é aberto em X para cada $k \in \mathbb{N}$. Mostremos que para cada $k \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n^{-1}(U_k)$ é denso em X. De fato, seja $k \in \mathbb{N}$ e $V \subseteq X$ um aberto não vazio. Como $(T_n)_n$ é topologicamente transitivo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T_{n_0}(V) \cap U_k \neq \emptyset$, ou seja, existe $v \in V$ tal que $T_{n_0}(v) \in U_k$ e então $v \in T_{n_0}^{-1}(U_k) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n^{-1}(U_k)$. Daí,

$$V \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n^{-1}(U_k) \right) \neq \emptyset$$

e então $\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n^{-1}(U_k)$ é denso em X para cada $k \in \mathbb{N}$.

Como X é completo, segue que X é um espaço de Baire e então

$$A = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} T_n^{-1}(U_k)$$

é denso em X. ■

Proposição 3.0.33 *Seja $(T_n)_n$ uma sequência de operadores contínuos $T_n \colon X \longrightarrow X, n \in \mathbb{N}$, que comutam entre si e de imagem densa definidos em um espaço métrico completo e separável X. São equivalentes:*

(i) $(T_n)_n$ é topologicamente transitivo.

(ii) Existe $x \in X$ tal que $Orb((T_n), x)$ é denso em X.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Como $(T_n)_n$ é topologicamente transitivo, segue do Teorema 3.0.32 que

$$Z = \{x \in X : Orb((T_n), x) \text{ é denso em X}\}$$

é denso em X. Logo $Z \neq \emptyset$ e existe $y \in X$ tal que $Orb((T_n), y)$ é denso em X.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Sejam $U, V \subseteq X$ abertos e não vazios. Como $Orb((T_n), x)$ é denso em X, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T_{n_0}(x) \in U$. Agora note que $Orb((T_n), T_{n_0}(x))$ é denso em X. De fato, sejam $y \in X$ e $\varepsilon > 0$. Como $\overline{T_{n_0}(X)} = X$, existe $w_0 \in X$ tal que $d(T_{n_0}(w_0), y) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Como T_{n_0} é contínua, existe $\delta > 0$ tal que para todo $w \in X$,

$$d(w, w_0) < \delta \Rightarrow d(T_{n_0}(w), T_{n_0}(w_0)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $Orb((T_n), x)$ é denso em X, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $d(T_{k_0}(x), w_0) < \delta$. Daí,

$$d(T_{k_0}(T_{n_0}(x)), T_{n_0}(w_0)) = d(T_{n_0}(T_{k_0}(x)), T_{n_0}(w_0)) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Logo

$$d(T_{k_0}(T_{n_0}(x)), y) \leq d(T_{k_0}(T_{n_0}(x)), T_{n_0}(w_0)) + d(T_{n_0}(w_0), y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

e então $T_{k_0}(T_{n_0}(x)) \in B(y, \varepsilon)$ e isso prova que $Orb((T_n), T_{n_0}(x))$ é denso em X.

Daí, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T_{j_0}(T_{n_0}(x)) \in V$ e então $T_{j_0}(U) \cap V \neq \emptyset$. Logo $(T_n)_n$ é topologicamente transitivo. ■

Os Teoremas 3.0.34 e 3.0.36 que estudaremos a seguir, darão equivalências entre alguns dos critérios estudados nesta seção.

Teorema 3.0.34 (Bès-Peris [7]) *Seja (X, T) um sistema dinâmico linear. São equivalentes:*

(i) T satisfaz o critério de hiperciclicidade.

(ii) T é fracamente mixing.

(iii) T é hereditariamente hipercíclico.

Demonstração. (i) $\Rightarrow$ (ii) Como T satisfaz o critério de hiperciclicidade, segue do Corolário 3.0.28 que $T \oplus T$ também satisfaz o critério de hiperciclicidade. Daí, $T \oplus T$ é hipercíclico e pelo Teorema da Transitividade de Birkhoff, $T \oplus T$ é topologicamente transitivo e então, por definição, T é fracamente mixing.
(ii) $\Rightarrow$ (iii) Como X é separável, seja $(y_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq X$ densa. Assim, $B\left(y_j, \frac{1}{k}\right), j, k \in \mathbb{N}$ formam uma base enumerável para a topologia de X. Seja $(O_n)_{n=1}^{\infty}$ essa base de conjuntos abertos. Seja $(U_j, V_j)_{j=1}^{\infty}$ uma enumeração de todos os pares $(O_m, O_n), m, n \geq 1$. Como T é fracamente mixing, segue do Teorema 2.2.18 que $\underbrace{T \times \ldots \times T}_{k \text{ vezes}}$ é fracamente mixing para todo $k \geq 2$.

Como T é topologicamente transitivo, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $T^{n_1}(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$. Agora, como $T \oplus T$ é topologicamente transitivo, segue do Teorema da Transitividade de Birkhoff que $T \oplus T$ é hipercíclico. Daí, existe $(x, y) \in X \times X$ tal que $\{(T \oplus T)^n(x, y) : n \geq 0\}$ é denso em $X \times X$ e então $\{(T \oplus T)^k(x, y) : k > n_1\}$ também é denso em $X \times X$.

Como $U_1 \times U_2 \subseteq X \times X$ é aberto e não vazio, exite $k_0 > n_1$ tal que $(T \oplus T)^{k_0}(x, y) \in U_1 \times U_2$, isto é, $T^{k_0}(x) \in U_1$ e $T^{k_0}(y) \in U_2$.

Seja $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que $k_1 > k_0$ e $k_1 - k_0 > n_1$. Como $\{(T \oplus T)^l(x, y) : l > k_1\}$ é denso em $X \times X$, existe $l_0 \in \mathbb{N}$ tal que $l_0 > k_1$ e $(T \oplus T)^{l_0}(x, y) \in V_1 \times V_2$, isto é, $T^{l_0}(x) \in V_1$ e $T^{l_0}(y) \in V_2$. Tome $n_2 = l_0 - k_0$. É claro que $n_2 = l_0 - k_0 > k_1 - k_0 > n_1$ e como $T^{k_0}(x) \in U_1$ e $T^{n_2}(T^{k_0}(x)) = T^{l_0 - k_0}(T^{k_0}(x)) = T^{l_0}(x) \in V_1$, segue que $T^{n_2}(U_1) \cap V_1 \neq \emptyset$. Também, como $T^{k_0}(y) \in U_2$ e $T^{n_2}(T^{k_0}(y)) = T^{l_0 - k_0}(T^{k_0}(y)) = T^{l_0}(y) \in V_2$ e então $T^{n_2}(U_2) \cap V_2 \neq \emptyset$.

Procedendo dessa forma, podemos encontrar uma sequência crescente de números inteiros positivos $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$T^{n_k}(U_j) \cap V_j \neq \emptyset, j = 1, \ldots, k.$$

Agora, seja $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ uma subsequência de $(n_k)_{k=1}^{\infty}$, $U, V \subseteq X$ abertos e não vazios. Pela construção, existe $l \geq 1$ tal que $U_l \subseteq U$ e $V_l \subseteq V$ e então para um j suficientemente grande

$$\emptyset \neq T^{m_j}(U_l) \cap V_l \subseteq T^{m_j}(U) \cap V$$

e então, segue do Critério Universal que $(T^{m_k})_k$ tem órbita densa o que implica que T é hereditariamente hipercíclico.
(iii) $\Rightarrow$ (i) Seja T hereditariamente hipercíclico com respeito a uma sequência crescente de inteiros positivos $(m_k)_{k=1}^{\infty}$. Em particular, podemos encontrar $x \in X$ tal que $\{T^{m_k}(x) : k \geq 1\}$ é denso em X. Como $0 \in X$, existe $(q_k)_{k=1}^{\infty}$ subsequência de $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que $T^{q_k}(x) \longrightarrow 0$. Como T é hereditariamente hipercíclico, existe $y \in X$ tal que $\{T^{q_k}(y) : k \geq 1\}$ é denso em X.

Seja $U_k = B\left(x, \frac{1}{k}\right)$. Então podemos encontrar uma subsequência $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ de $(q_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$T^{n_k}(y) \in k \cdot U_k, k \geq 1.$$

Definindo $x_k := \frac{y}{k}, k \geq 1$ temos que $x_k \longrightarrow 0$ e $T^{n_k}(x_k) \longrightarrow x$. De fato, seja $\varepsilon > 0$ e $B(x, \varepsilon)$. Tome $l \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{l} < \varepsilon$. Note que $U_l \subseteq B(x, \varepsilon)$. Daí, para todo $k \geq l$,

$$T^{n_k}(x_k) = T^{n_k}\left(\frac{y}{k}\right) = \frac{1}{k} \cdot T^{n_k}(y) \in \frac{1}{k} \cdot k \cdot U_k = U_k \subseteq U_l \subseteq B(x, \varepsilon),$$

provando que $T^{n_k}(x_k) \longrightarrow x$.

Sejam $Z = Y = Orb(T, x)$ o qual é denso em X. Como $(n_k)_k$ é subsequência de $(q_k)_k$, $T^{n_k}(x) \longrightarrow 0$, logo dado $z \in Z$, existe $n \geq 0$ tal que $z = T^n(x)$ e então

$$T^{n_k}(T^n(x)) = T^n(T^{n_k}(x)) \longrightarrow T^n(0) = 0, \text{ quando } k \longrightarrow \infty$$

e então a condição (i) do Critério de Hiperciclicidade é satisfeito.

Por outro lado, seja $y \in Y$. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y = T^n(x)$. Defina $S_{n_k}(y) = T^n(x_k), k \geq 1$. Daí,

$$S_{n_k}(y) = T^n(x_k) \longrightarrow T^n(0) = 0, \text{ quando } k \longrightarrow \infty$$

e

$$T^{n_k} S_{n_k}(y) = T^{n_k}(T^n(x_k)) = T^n(T^{n_k}(x_k)) \longrightarrow T^n(x) = y, \text{ quando } k \longrightarrow \infty$$

provando as condições (ii) e (iii) do Critério de Hiperciclicidade. ■

Teorema 3.0.35 (Mittag-Leffler) *Seja $(X_n)_n$ uma sequência de espaços métricos completos e $f_n\colon X_{n+1} \longrightarrow X_n, n \in \mathbb{N}$ funções contínuas com imagem densa. Então, para todo aberto e não vazio $U \subseteq X_1$, existe uma sequência $(x_n)_n$, onde $x_n \in X_n, x_1 \in U$ e $f_n(x_{n+1}) = x_n, n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Veja [17, Theorem 3.21, p. 79] ou [3, Theorem 2.4]. ■

Teorema 3.0.36 *Seja X um espaço de Fréchet separável. Um operador satisfaz o critério de hiperciclicidade se e somente se satisfaz o critério de Gethner-Shapiro.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponha que T satisfaz o critério de hiperciclicidade. Definindo $X_n = X, f_n = T, n \in \mathbb{N}$, considere

$$Y := \{x \in X : \exists (x_n)_n \in X^{\mathbb{N}} \text{ com } x_1 = x, T(x_{n+1}) = x_n, n \in \mathbb{N}\}.$$

Mostremos que Y é subespaço denso de X. Para ver que Y é subespaço de X, sejam $x, y \in Y$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Logo, por definição, existem subsequências $(x_n)_n$ e $(y_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ tal que $x_1 = x, y_1 = y, T(x_{n+1}) = x_n, T(y_{n+1}) = y_n, n \in \mathbb{N}$. Considere a sequência $(x_n + \lambda y_n)_n$.

Temos que $x_1 + \lambda y_1 = x + \lambda y$ e $T(x_{n+1} + \lambda y_{n+1}) = T(x_{n+1}) + \lambda T(y_{n+1}) = x_n + \lambda y_n$, provando que $x + \lambda y \in Y$. Para provar que Y é subespaço denso de X, note primeiro que $\overline{T(X)} = X$, isto é, T tem imagem densa em X. De fato, como T satisfaz o critério de hiperciclicidade, segue que T é hipercíclico. Logo, da Proposição 2.1.19 segue que $\overline{T(X)} = X$.

Sejam $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ e considere $B(x, \varepsilon)$. Pelo Teorema 3.0.35, existe $(x_n)_n$, onde $x_n \in X_n, x_1 \in B(x, \varepsilon)$ e $T(x_{n+1}) = x_n, n \in \mathbb{N}$. Note que $x_1 \in Y$, o que implica que $Y \cap B(x, \varepsilon) \neq \emptyset$ e então Y é denso em X.

Considere $X^{\mathbb{N}}$ munido com a topologia produto. Então

$$\mathcal{X} = \{(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}} : T(x_{n+1}) = x_n, n \in \mathbb{N}\}$$

é subespaço fechado de $X^{\mathbb{N}}$. De fato, sejam $(x_n)_n, (y_n)_n \in \mathcal{X}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Temos que $(x_n)_n + \lambda(y_n)_n = (x_n + \lambda y_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ e

$$T(x_{n+1} + \lambda y_{n+1}) = T(x_{n+1}) + \lambda T(y_{n+1}) = x_n + \lambda y_n$$

provando que $(x_n)_n + \lambda(y_n)_n \in \mathcal{X}$. Para ver que $\mathcal{X}$ é fechado, seja $(y_k)_k \subseteq \mathcal{X}$ tal que $y_k \longrightarrow y \in X^{\mathbb{N}}$ quando $k \longrightarrow \infty$. Mostremos que $y \in \mathcal{X}$.

Digamos que para cada $k \in \mathbb{N}, y_k = (x_n^k)_n$, com $T(x_{n+1}^k) = x_n^k, \forall n \in \mathbb{N}$. Sendo $y = (\pi_n(y))_n$, devemos mostrar que $T(y_{j+1}) = y_j, \forall j \in \mathbb{N}$.

Seja $j \in \mathbb{N}$. Da topologia produto segue que $\pi_{j+1}(y_k) \longrightarrow \pi_{j+1}(y)$ quando $k \longrightarrow \infty$, onde π_{j+1} é a projeção sobre a $(j+1)-$ésima coordenada. Logo, $x_{j+1}^k \longrightarrow y_{j+1}$ quando $k \longrightarrow \infty$ e então $T(x_{j+1}^k) \longrightarrow T(y_{j+1})$, quando $k \longrightarrow \infty$, isto é, $x_j^k \longrightarrow T(y_{j+1})$ quando $k \longrightarrow \infty$. Por outro lado, $\pi_j(y_k) \longrightarrow \pi_j(y)$ quando $k \longrightarrow \infty$ e então $x_j^k \longrightarrow y_j$ quando $k \longrightarrow \infty$. Daí, pela unicidade do limite, segue que $T(y_{j+1}) = y_j$ e então $y \in \mathcal{X}$, provando que $\mathcal{X}$ é fechado.

Como X é espaço de Fréchet separável, segue que $X^{\mathbb{N}}$ também é um espaço de Fréchet separável sobre a topologia induzida. Considere o operador $\mathcal{T} \colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ definido por

$$\mathcal{T}((x_1, x_2, x_3, \ldots)) = (T(x_1), T(x_2), T(x_3), \ldots) = (T(x_1), x_1, x_2, \ldots).$$

Note que $\mathcal{T}$ é invertível com $\mathcal{T}^{-1} = \mathcal{B} \colon \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$ dado por

$$\mathcal{B}((x_1, x_2, \ldots)) = (x_2, x_3, \ldots).$$

De fato, para qualquer $(x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \mathcal{X}$,

$$(\mathcal{T} \circ \mathcal{B})((x_1, x_2, x_3, \ldots)) = \mathcal{T}((x_2, x_3, \ldots)) = (T(x_2), T(x_3), \ldots) = (x_1, x_2, \ldots)$$

e

$$(\mathcal{B} \circ \mathcal{T})((x_1, x_2, x_3, \ldots)) = \mathcal{B}((T(x_1), x_1, x_2, \ldots)) = (x_1, x_2, \ldots).$$

Pelo Teorema 3.0.34, temos que T é hereditariamente hipercíclico com respeito a uma sequência $(m_k)_k$ de inteiros positivos.

Afirmamos que $(\mathcal{T}^{m_k})_k$ é uma sequência de operadores topologicamente transitivos. Para provarmos isso, sejam $U, V \subseteq \mathcal{X}$ conjuntos abertos e não vazios. Sem perda de generalidade, considere que

$$U = \{(x_n)_n \in \mathcal{X} : x_n \in U_n, n = 1, \ldots, N\}$$

$$V = \{(x_n)_n \in \mathcal{X} : x_n \in V_n, n = 1, \ldots, N\}$$

com $N \in \mathbb{N}$ e $U_n, V_n \subseteq X, n = 1, \ldots, N$ conjuntos abertos e não vazios.

Fixe $x = (x_n)_n \in U$ e $y = (y_n)_n \in V$. Como T é contínua e U_{N-1} é vizinhança de x_{N-1}, existe uma vizinhança $U_1^{'}$ de x_N tal que $T(U_1^{'}) \subseteq U_{N-1}$. Também, como T^2 é contínua e U_{N-2} é vizinhança de x_{N-2}, existe uma vizinhança $U_2^{'}$ de x_N tal que $T^2(U_2^{'}) \subseteq U_{N-2}$. Procedendo assim, como T^{N-1} é contínua e U_1 é vizinhança de x_1, existe uma vizinhança $U_{N-1}^{'}$ de x_N tal que $T^{N-1}(U_{N-1}^{'}) \subseteq U_1$. Dessa forma, tomando

$$U_N^{'} = U_1^{'} \cap U_2^{'} \cap \ldots \cap U_{N-1}^{'} \cap U_N$$

segue que $U_N^{'}$ é vizinhança de x_N e

$$T^j(U_N^{'}) \subseteq U_{N-j}, j = 1, \ldots, N-1.$$

Da mesma forma também encontramos uma vizinhança $V_N^{'} \subseteq V_N$ de y_N tal que

$$T^j(V_N^{'}) \subseteq V_{N-j}, j = 1, \ldots, N-1.$$

Como T é hereditariamente hipercíclico com respeito a $(m_k)_k$, então existe $x \in X$ tal que $\{T^{m_k}(x) : k \geq 1\}$ é denso em X. Também, temos que T^{m_k} é hipercíclico para todo $k \in \mathbb{N}$ em virtude da Proposição 2.1.18. Daí, pela Proposição 2.1.19, $\overline{T^{m_k}(X)} = X$ para todo $k \in \mathbb{N}$. É claro que para todo $x \in X$, $k, j \in \mathbb{N}$

$$T^{m_k}(T^{m_j}(x)) = T^{m_k+m_j}(x) = T^{m_j+m_k}(x) = T^{m_j}(T^{m_k}(x)).$$

Logo, pela Proposição 3.0.33 segue que $(T^{m_k})_k$ é topologicamente transitivo. Daí, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $T^{m_k}(U_N^{'}) \cap V_N^{'} \neq \emptyset$ e então $U_N^{'} \cap T^{-m_k}(V_N^{'}) \neq \emptyset$. Definindo $U_N^{''} := U_N^{'} \cap T^{-m_k}(V_N^{'})$, temos que $U_N^{''}$ é aberto, $U_N^{''} \subseteq U_N^{'}$ e

$$T^{m_k}(U_N^{''}) = T^{m_k}(U_N^{'} \cap T^{-m_k}(V_N^{'})) \subseteq T^{m_k}(U_N^{'}) \cap T^{m_k}(T^{-m_k}(V_N^{'})) \subseteq T^{m_k}(T^{-m_k}(V_N^{'})) \subseteq V_N^{'}.$$

Como Y é denso, existe $u_N \in Y \cap U_N^{''}$. Logo existe $(w_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ tal que $w_1 = u_N$ e $T(w_{n+1}) = w_n, n \in \mathbb{N}$. Considere agora

$$z = (T^{N-1}(u_N), T^{N-2}(u_N), \ldots, T(u_N), u_N, w_2, w_3, \ldots).$$

É claro que $z \in \mathcal{X}$. Agora, se $n = 1, \ldots, N-1$ temos que

$$T^{N-n}(u_N) \in T^{N-n}(U_N^{''}) \subseteq T^{N-n}(U_N^{'}) \subseteq U_{N-N+n} = U_n$$

e como $u_N \in U_N^{''} \subseteq U_N^{'} \subseteq U_N$, segue que $z \in U$. Por outro lado, para facilitar a notação, defina $z_n = T^{N-n}(u_N), n = 1, \ldots, N-1$. Logo,

$$\mathcal{T}^{m_k}(z) = (T^{m_k}(z_1), \ldots, T^{m_k}(z_{N-1}), T^{m_k}(u_N), T^{m_k}(w_2), \ldots).$$

Daí, para $n = 1, \ldots, N-1$,

$$T^{m_k}(z_n) = T^{m_k}(T^{N-n}(u_N)) = T^{N-n}(T^{m_k}(u_N)) \in T^{N-n}(T^{m_k}(U_N'')) \subseteq T^{N-n}(V_N') \subseteq V_{N-N+n} = V_n$$

e como $T^{m_k}(u_N) \in T^{m_k}(U_N'') \subseteq V_N' \subseteq V_N$, segue que $\mathcal{T}^{m_k}(z) \in V$, provando que $\mathcal{T}^{m_k}(U) \cap V \neq \emptyset$. Portanto, $(\mathcal{T}^{m_k})_k$ é topologicamente transitivo.

Mostraremos agora que existe $Y_0 \subseteq X$ denso, $S\colon Y_0 \longrightarrow Y_0$ e uma subsequência $(q_k)_k$ de $(m_k)_k$ tal que $S^{q_k}(y) \longrightarrow 0$ e $T \circ S(y) = y, \forall y \in Y_0$.

Como $(\mathcal{T}^{m_k})_k$ é topologicamente transitivo, dados $U, V \subseteq \mathcal{X}$ abertos e não vazios, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\mathcal{T}^{m_k}(U) \cap V \neq \emptyset$, isto é, existem $k \in \mathbb{N}$ e $x \in U$ tal que $\mathcal{T}^{m_k}(x) \in V$, o que implica que $\mathcal{B}^{m_k}(\mathcal{T}^{m_k}(x)) = x \in U$ e então $\mathcal{B}^{m_k}(V) \cap U \neq \emptyset$, provando que $(\mathcal{B}^{m_k})_k$ também é topologicamente transitivo.

Pelo Teorema 3.0.32, temos que os conjuntos

$$\{x \in \mathcal{X} : Orb((\mathcal{T}^{m_k}), x) \text{ é denso em} \mathcal{X}\} \text{ e } \{y \in \mathcal{X} : Orb((\mathcal{B}^{m_k}), y) \text{ é denso em } \mathcal{X}\}$$

são densos em $\mathcal{X}$ (e portanto, não vazios). Logo,

$$\{x \in \mathcal{X} : Orb((\mathcal{T}^{m_k}), x) \text{ é denso em} \mathcal{X}\} \cap \{y \in \mathcal{X} : Orb((\mathcal{B}^{m_k}), y) \text{ é denso em } \mathcal{X}\} \neq \emptyset,$$

pois eles são conjuntos G_δ. Seja $y \in \mathcal{X}$ nessa interseção. Logo $Orb((\mathcal{T}^{m_k}), y)$ e $Orb((\mathcal{B}^{m_k}), y)$ são densos em $\mathcal{X}$, isto é,

$$\overline{Orb((\mathcal{T}^{m_k}), y)} = \overline{\{\mathcal{T}^{m_k}(y) : k \in \mathbb{N}\}} = \overline{\{(T^{m_k}(y_1), T^{m_k}(y_2), \ldots) : k \in \mathbb{N}\}} = \mathcal{X}$$

e

$$\overline{Orb((\mathcal{B}^{m_k}), y)} = \overline{\{\mathcal{B}^{m_k}(y) : k \in \mathbb{N}\}} = \overline{\{(y_{m_k+1}, y_{m_k+2}, \ldots) : k \in \mathbb{N}\}} = \mathcal{X}.$$

Defina $Y_0 = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como $\{(y_{m_k+1}, y_{m_k+2}, \ldots) : k \in \mathbb{N}\}$ é denso em $\mathcal{X}$, segue que Y_0 é subconjunto denso de X. De fato, seja $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ e considere $B(x, \varepsilon)$. Como Y é denso em X, existe $y \in Y$ tal que $y \in B(x, \varepsilon)$. Como $B(x, \varepsilon)$ é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $B(y, \delta) \subseteq B(x, \varepsilon)$.

Como $y \in Y$, existe $(x_n)_n \in X^{\mathbb{N}}$ tal que $x_1 = y$ e $T(x_{n+1}) = x_n, n \in \mathbb{N}$. Considere a sequência $(y, x_2, x_3, \ldots) \in \mathcal{X}$. Como $\{(y_{m_k+1}, y_{m_k+2}, \ldots) : k \in \mathbb{N}\}$ é denso em $\mathcal{X}$, existe uma subsequência $(l_k)_k$ de $(q_k)_k$ tal que

$$(y_{l_k+1}, y_{l_k+2}, \ldots) \longrightarrow (y, x_2, x_3, \ldots), \text{ quando } k \longrightarrow \infty.$$

Sendo $\pi_1\colon X^{\mathbb{N}} \longrightarrow X$ a projeção na primeira coordenada, como esta é contínua segue que

$$\pi_1((y_{l_k+1}, y_{l_k+2}, \ldots)) \longrightarrow \pi_1((y, x_2, x_3, \ldots)), \text{ quando } k \longrightarrow \infty$$

isto é,

$$y_{l_k+1} \longrightarrow y, \text{ quando } k \longrightarrow \infty$$

Assim, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_{l_k+1} \in B(y,\delta), \forall k \geq k_0$. Daí, $y_{l_{k_0}+1} \in B(y,\delta) \subseteq B(x,\varepsilon)$, provando que Y_0 é denso em X.

Agora, defina $S\colon Y_0 \longrightarrow Y_0$ por $S(y_n) = y_{n+1}, n \in \mathbb{N}$. S está bem definida desde que $y_m \neq y_n$ se $m \neq n$, pois caso contrário, se $y_m = y_n$ para algum $m > n$, $T^{m-n}(y_n) = T^{m-n}(y_m) = y_{m-m+n} = y_n$ e então

$$T^{m-n}(y_1) = T^{m-n}(T^{n-1}(y_n)) = T^{m-n+n-1}(y_n) = T^{m-1}(y_n) = T^{m-1}(y_m) = y_{m-m+1} = y_1.$$

Logo, y_1 seria um ponto periódico para T e isso contradiz o fato de $\{(T^{m_k}(y_1), \ldots) : k \in \mathbb{N}\}$ é denso em $\mathcal{X}$ (novamente tomando a projeção na primeira coordenada).

Como $(y_n)_n \in \mathcal{X}$, temos que dado $y \in Y_0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y = y_n$ e então $S(y) = S(y_n) = y_{n+1}$ o que implica que $T(S(y)) = T(y_{n+1}) = y_n = y$. Portanto, $T(S(y)) = y, \forall y \in Y_0$.

Como $\overline{\{\mathcal{B}^{m_k}(y) : k \in \mathbb{N}\}} = \mathcal{X}$, existe $(q_k)_k$ subsequência de $(m_k)_k$ tal que

$$\mathcal{B}^{q_k}(y) = (y_{1+q_k}, y_{2+q_k}, \ldots) \longrightarrow 0, \text{ quando } k \longrightarrow \infty$$

em $\mathcal{X}$. Então

$$S^{q_k}(y_n) = y_{n+q_k} \longrightarrow 0, n \in \mathbb{N}, \text{ quando } k \longrightarrow \infty.$$

Agora, provemos que o operador T satisfaz o critério de Gethner-Shapiro. De fato, como T é hereditariamente hipercíclico com respeito a sequência $(m_k)_k$, existe $w \in X$ tal que $\{T^{q_k}(w) : k \in \mathbb{N}\}$ é denso em X. Logo existe uma subsequência $(n_k)_k$ de $(q_k)_k$ tal que $T^{n_k}(w) \longrightarrow 0$. Defina $X_0 = Orb(T, w)$. Daí, como $Y_0 = \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, temos que

(i) Dado $x \in X_0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x = T^n(w)$ e então

$$T^{n_k}(x) = T^{n_k}(T^n(w)) = T^n(T^{n_k}(w)) \longrightarrow T^n(0) = 0.$$

(ii) e (iii) Dado $y \in Y_0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $y = y_n$ e

$$S^{n_k}(y) = S^{n_k}(y_n) = y_{n+n_k} \longrightarrow 0$$

e

$$T(S(y)) = T(S(y_n)) = T(y_{n+1}) = y_n = y$$

provando que T satisfaz o critério de Gethner-Shapiro.

($\Leftarrow$) Suponha que T satisfaz o critério de Gethner-Shapiro. Então existem subconjuntos densos $X_0, Y_0 \subseteq X$, uma sequência crescente $(n_k)_k$ de inteiros positivos e $S\colon Y_0 \longrightarrow Y_0$ tal que

(i) $T^{n_k}(x) \longrightarrow 0, \forall x \in X_0$

(ii) $S^{n_k}(y) \longrightarrow 0, \forall y \in Y_0$

(iii) $T(S(y)) = y, \forall y \in Y_0$

Basta tomar $S_{n_k} = S^{n_k}, k \in \mathbb{N}$ e então

(i) $T^{n_k}(x) \longrightarrow 0, \forall x \in X_0$

(ii) $S_{n_k}(y) = S^{n_k}(y) \longrightarrow 0, \forall y \in Y_0$

(iii) $T^{n_k} S_{n_k}(y) = T^{n_k}(S^{n_k}(y)) = y \longrightarrow y$

e então T satisfaz o critério de hiperciclicidade. ■

Durante um longo tempo, todos os operadores hipercíclicos que eram conhecidos satisfaziam o Critério de Hiperciclicidade. Portanto, era natural se perguntar se existia algum operador hipercíclico que não satisfazia o Critério de Hiperciclicidade. Esta pergunta foi, durante muitos anos, um dos principais problemas em aberto envolvendo hiperciclicidade. Em 2006, de la Rosa e Read construíram um operador hipercíclico que não satisfazia o Critério de Hiperciclicidade. Tal construção, apesar de feita em 2006, só foi publicada em 2009 em [12]. De posse de tal construção, em 2007 Bayart e Matheron [5] construíram um contraexemplo nos espaços de Banach de sequências clássicos c_0 e ℓ_p, $1 \leq p < \infty$. Esta construção de Bayart e Matheron também é bastante complexa e foi tema principal da dissertação de mestrado [22], por isso não a abordaremos aqui. Para mais detalhes, veja [4, Capítulo 4], [5, 12] ou [22, Capítulo 8, páginas 73 - 84].

Capítulo 4

Existência de Operadores Hipercíclicos

O principal resultado dessa seção é que que em todo espaço de Fréchet separável de dimensão infinita há operadores hipercíclicos. Para isso, precisamos de alguns resultados relacionados aos operadores denominados *Unilateral Weighted Shifts*.

4.1 Unilateral Weighted Shifts

Definição 4.1.1 Um espaço vetorial topológico X é dito *espaço de sequências* se $X \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ e a inclusão é contínua, em que $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ é munido da topologia produto.

Definição 4.1.2 Seja X um espaço de sequências. Definimos $B_w\colon X \longrightarrow X$ por

$$B_w(x_1, x_2, \ldots) = (w_2 x_2, w_3 x_3, w_4 x_4, \ldots)$$

onde $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de escalares não nulos chamada de *weighted sequence*. B_w assim definido é chamado de *unilateral weighted shift*.

Proposição 4.1.3 *Seja X um espaço de Fréchet de sequências. Todo operador B_w é linear e contínuo.*

Demonstração. Sejam $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}, y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq X, \lambda \in \mathbb{K}$ e $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ uma weighted sequence. Então,

$$\begin{aligned}
B_w(x + \lambda y) &= B_w((x_n + \lambda y_n)_{n=1}^{\infty}) \\
&= (w_2(x_2 + \lambda y_2), w_3(x_3 + \lambda y_3), \ldots) \\
&= (w_2 x_2, w_3 x_3, \ldots) + (w_2 \lambda y_2, w_3 \lambda y_3, \ldots) \\
&= B_w(x) + \lambda(w_2 y_2, w_3 y_3, \ldots) \\
&= B_w(x) + \lambda B_w(y).
\end{aligned}$$

Para provar a continuidade usaremos o Teorema do Gráfico Fechado. Seja $(x_n, B_w(x_n))_{n=1}^{\infty} \subseteq G_{B_w}$ tal que

$$(x_n, B_w(x_n)) \longrightarrow (a, b)$$

quando $n \to \infty$. Devemos mostrar que $b = B_w(a)$. Sendo $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$, $b = (b_1, b_2, b_3, \ldots)$, note que $b = B_w(a) \Leftrightarrow b_j = w_{j+1}a_{j+1}, j \geq 1$.

Como $x_n \to a$, segue que $\psi_k(x_n) \to \psi_k(a), k \geq 1$, isto é

$$\xi_{nk} \to a_k, k \geq 1 \tag{4.1}$$

onde $x_n = (\xi_{nj})_{j=1}^{\infty}$. Como $B_w(x_n) \to b$, segue que $\psi_k(B_w(x_n)) \to \psi_k(b), k \geq 1$, isto é,

$$w_{k+1}\xi_{n,k+1} \to b_k, k \geq 1,$$

logo

$$\xi_{n,k+1} \to \frac{1}{w_{k+1}} b_k, k \geq 1. \tag{4.2}$$

Portanto, para cada $k \in \mathbb{N}$, por (4.1) temos que $\xi_{n,k+1} \to a_{k+1}$. Por outro lado, por (4.2) temos que $\xi_{n,k+1} \to \frac{1}{w_{k+1}} b_k$. Logo, pela unicidade do limite

$$\frac{1}{w_{k+1}} b_k = a_{k+1}, k \geq 1$$

e então $b_k = w_{k+1}a_{k+1}, k \geq 1$, provando que $b = B_w(a)$, mostrando que G_{B_w} é fechado. Pelo Teorema 1.3.35 segue que B_w é contínuo. ■

Os próximos resultados sobre os weighted shifts são preparatórios para o principal resultado deste capítulo. Começamos com um lema sobre convergência de séries em $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Lema 4.1.4 *Sejam $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ a sequência dos vetores canônicos de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ e $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ um elemento qualquer de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Então, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ converge em $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.*

Demonstração. Seja $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j e_j$$

isto é, s_n é a sequência das somas parciais de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$. Provemos que

$$s_n \to s = (a_1, a_2, a_3, \ldots).$$

Temos que $s_n \to s$ em $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ se, e somente se, $\pi_j(s_n) \to \pi_j(s)$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Seja $j \in \mathbb{N}$ e note que para todo $n \geq j, \pi_j(s_n) = a_j$. Logo $\pi_j(s_n) \to a_j = \pi_j(s)$ quando $n \to \infty$. Portanto, $s_n \to s$ e então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ converge em $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

■

Definição 4.1.5 Seja B_w um weighted shift qualquer definido em um espaço de sequências X. Seja $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ a sequência de escalares não nulos que definem esse operador. Definimos

$$v_n = \left(\prod_{j=1}^{n} w_j \right)^{-1}, n \geq 1,$$

$$X_v = \{(x_n)_{n=1}^\infty : (v_n x_n)_{n=1}^\infty \in X\}$$

e $\phi_v \colon X_v \longrightarrow X$ por

$$\phi_v((x_n)_{n=1}^\infty) = (v_n x_n)_{n=1}^\infty.$$

Proposição 4.1.6 *Sejam X um espaço de sequências de Fréchet, B_w um weighted shift qualquer definido em X. Defina*

$$\tau_v = \{A \subseteq X_v : \phi_v(A) \text{ é aberto em } X\}.$$

Então τ_v é uma topologia para X_v e $\phi_v \colon (X_v, \tau_v) \longrightarrow X$ é um isomorfismo topológico entre X_v e X.

Demonstração. É claro que τ_v é uma topologia para X_v. Provemos que ϕ_v é linear. De fato, sejam $(x_n)_{n=1}^\infty, (y_n)_{n=1}^\infty \in X_v$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Daí,

$$\begin{aligned} \phi_v((x_n)_{n=1}^\infty + \lambda (y_n)_{n=1}^\infty) &= \phi_v((x_n + \lambda y_n)_{n=1}^\infty) \\ &= ((x_n + \lambda y_n) v_n)_{n=1}^\infty \\ &= (x_n v_n + \lambda y_n v_n)_{n=1}^\infty \\ &= (x_n v_n)_{n=1}^\infty + \lambda (y_n v_n)_{n=1}^\infty \\ &= \phi_v((x_n)_{n=1}^\infty) + \lambda \phi_v((y_n)_{n=1}^\infty) \end{aligned}$$

Para mostrarmos que ϕ_v é injetora, seja $(x_n)_{n=1}^\infty \in X_v$ tal que $\phi_v((x_n)_{n=1}^\infty) = 0$. Daí, $(v_n x_n)_{n=1}^\infty = 0$ e então $v_j x_j = 0, \forall j \in \mathbb{N}$. Como $v_j \neq 0, \forall j \in \mathbb{N}$, segue que $x_j = 0, \forall j \in \mathbb{N}$ e então $(x_n)_{n=1}^\infty = 0$.

Enfim, para mostrarmos a sobrejetividade, seja $(x_n)_{n=1}^\infty \in X$. Tome a sequência $(x_n v_n^{-1})_{n=1}^\infty$. É claro que $(x_n v_n^{-1})_{n=1}^\infty \in X_v$, pois

$$(x_n v_n^{-1} v_n)_{n=1}^\infty = (x_n)_{n=1}^\infty \in X$$

e $\phi_v((x_n v_n^{-1})_{n=1}^\infty) = (x_n)_{n=1}^\infty$.

Pela definição de τ_v, ϕ_v é contínua, pois dado $A \subseteq X$ aberto,

$$\phi_v(\phi_v^{-1}(A)) = A$$

mostrando que $\phi_v^{-1}(A)$ é aberto em X_v. Logo, pelo Teorema 1.3.33 segue que ϕ_v é um isomorfimo topológico. ∎

Proposição 4.1.7 *Seja X um espaço de sequências, B_w um weighted shift definido em X e X_v o espaço de sequências associado a X. Então os operadores $B_w \colon X \longrightarrow X$ e $B \colon X_v \longrightarrow X_v$ definido por*

$$B(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$$

são conjugados.

Demonstração. Considere ϕ_v a aplicação definida na Proposição 4.1.6. Pela Proposição 4.1.6, segue que ϕ_v é contínua. Logo, basta mostrarmos que $B_w \circ \phi_v = \phi_v \circ B$. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in X_v$, então

$$\begin{aligned}
B_w(\phi_v((x_n)_{n=1}^{\infty})) &= B_w((x_n v_n)_{n=1}^{\infty}) \\
&= (w_{n+1} x_{n+1} v_{n+1})_{n=1}^{\infty} \\
&= (w_{n+1} v_{n+1} x_{n+1})_{n=1}^{\infty} \\
&= (w_{n+1} \cdot w_1^{-1} \cdot w_2^{-1} \cdot \ldots \cdot w_{n+1}^{-1} \cdot x_{n+1})_{n=1}^{\infty} \\
&= (w_1^{-1} \cdot w_2^{-1} \cdot \ldots \cdot w_n^{-1} \cdot x_{n+1})_{n=1}^{\infty} \\
&= (v_n x_{n+1})_{n=1}^{\infty} \\
&= \phi_v((x_{n+1})_{n=1}^{\infty}) \\
&= \phi_v(B((x_n)_{n=1}^{\infty})).
\end{aligned}$$

■

Definição 4.1.8 Seja X um espaço de sequências de Fréchet e $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ a sequência dos vetores canônicos de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Dizemos que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ é *base* para X se cada e_n pertence a X e, para todo $x \in X$, temos

$$x = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=1}^{N} x_n e_n = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n.$$

Proposição 4.1.9 *Seja X um espaço de sequências de Fréchet tal que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ é base para X. Então $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ também é base para o espaço X_v associado a qualquer operador B_w.*

Demonstração. Seja $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X_v$. Basta notar que como

$$\phi_v(x) = (x_j v_j)_{j=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n,$$

então

$$\begin{aligned}
x = \phi_v^{-1}((x_j v_j)_{j=1}^{\infty}) = \phi_v^{-1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \phi_v^{-1}(e_n) \\
= \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \left(0, 0, \ldots, \frac{1}{v_n}, 0, \ldots\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta_n}{v_n} e_n.
\end{aligned}$$

■

Proposição 4.1.10 *Seja X um espaço de sequências de Fréchet tal que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base para X. Sendo B o operador backward shift definido em X, são equivalentes:*

(i) B é mixing.

(ii) $e_n \to 0$ em X quando $n \to \infty$.

Demonstração. A demonstração desse resultado pode ser feita de modo análogo à demonstração de [17, Theorem 4.3, p. 91] substituindo o Critério de Hiperciclicidade pelo Critério de Kitai. ∎

Proposição 4.1.11 *Seja X um espaço de Fréchet de sequências tal que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base para X. Suponha que B_w é um operador definido em X. São equivalentes:*

(a) B_w é mixing;

(b)
$$\left(\prod_{j=1}^{n} w_j\right)^{-1} e_n \to 0 \text{ em } X \text{ quando } n \to \infty.$$

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$. Suponha B_w mixing. Pela Proposição 4.1.7, os operadores B_w e B são conjugados. Pela Proposição 2.2.3, segue que B também é mixing. Daí, pela Proposição 4.1.10 temos que $e_n \to 0$ em X_v quando $n \to \infty$. Como ϕ_v é contínua, segue que $\phi_v(e_n) \to 0$ em X quando $n \to \infty$, isto é, $v_n e_n \to 0$ em X quando $n \to \infty$. Portanto,
$$\left(\prod_{j=1}^{n} w_j\right)^{-1} e_n \to 0$$
em X quando $n \to \infty$.
$(b) \Rightarrow (a)$ Suponha que
$$\left(\prod_{j=1}^{n} w_j\right)^{-1} e_n \to 0$$
em X quando $n \to \infty$, isto é, $v_n e_n \to 0$ em X quando $n \to \infty$. Como ϕ_v^{-1} é contínua, segue que $\phi_v^{-1}(v_n e_n) \to \phi_v^{-1}(0)$ em X_v quando $n \to \infty$, isto é,
$$v_n^{-1} v_n e_n = e_n \to 0$$
em X_v quando $n \to \infty$.

Novamente, pela Proposição 4.1.10 segue que o backward shift $B\colon X_v \longrightarrow X_v$ é mixing. Daí, novamente pela Proposição 2.2.3, segue que B_w é mixing. ∎

Proposição 4.1.12 *Todo operador B_w definido em $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ é mixing.*

Demonstração. De fato, seja $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de escalares não nulos que define B_w. Pelo Lema 4.1.4 temos que
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^{n} w_j\right)^{-1} e_n$$
converge em $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Logo,
$$\left(\prod_{j=1}^{n} w_j\right)^{-1} e_n \to 0$$
em $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ quando $n \to \infty$. Daí, pela Proposição 4.1.11 temos que B_w é mixing. ∎

Proposição 4.1.13 *Seja* $1 \leq p < \infty$ *e* $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ *uma sequência de escalares não nulos tal que* $\sup_{n\in\mathbb{N}} |w_n| < \infty$. *Então* $I + B_w$ *é mixing em* ℓ_p.

Demonstração. Veja [17, Corollary 8.3, p.217] ■

4.2 Existência de Operadores Hipercíclicos

Finalmente, nessa seção vamos provar que todo espaço de Fréchet separável de dimensão infinita admite um operador mixing e, portanto, hipercíclico. A existência de operadores hipercíclicos definidos em espaços de Banach separáveis de dimensão infinita foi obtida por Ansari [2] e Bernal [15], resolvendo um problema de Rolewicz [23]. Posteriormente, esse resultado foi generalizado para espaços de Fréchet separáveis por Bonet e Peris [8].

Um dos resultados centrais para a demonstração de tal resultado está baseado no seguinte lema devido a Metafune e Moscatelli [20]. A demonstração deste lema é bastante complexa e usa vários resultados de teoria de conjuntos que fogem do escopo deste trabalho, por isso não a apresentaremos aqui.

Lema 4.2.1 *Seja* F *um espaço de Fréchet e* $K \subsetneq F$ *um subespaço fechado de codimensão infinita tal que* $d(F/K) = d(F)$, *onde* $d(F) = \min\{card(D) : D \subseteq F \text{ é denso}\}$. *Então existe um subespaço* $M \subseteq F$ *denso tal que* $M \cap K = \{0\}$.

Lema 4.2.2 *Seja* F *um espaço de Fréchet de dimensão infinita. Se existe uma seminorma contínua* p *tal que* $\ker p$ *tem codimensão infinita e* $d(F/\ker p) = d(F)$, *então* F *contém um subespaço denso com norma contínua.*

Demonstração. Seja p como na hipótese do Lema, isto é, p seminorma contínua tal que $\ker p$ tem codimensão infinita e $d(F/\ker p) = d(F)$. Como $\ker p$ é subespaço fechado de F, segue do Lema 4.2.1 que existe $M \subseteq F$ denso tal que $M \cap \ker p = \{0\}$. É claro que p é uma norma em M. De fato, se $x \in M$ é tal que $p(x) = 0$, segue que $x \in M \cap \ker p$, e então $x = 0$. ■

Lema 4.2.3 Todo espaço de Fréchet separável de dimensão infinita que não é isomorfo a $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ admite um subespaço denso com uma norma contínua.

Demonstração. Seja F um espaço de Fréchet separável de dimensão infinita que não é isomorfo à $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ e $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ a sequência de seminormas que define a topologia de F. Pela Proposição 1.3.42, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\ker p_k$ tem codimensão infinita. É claro que p_k é contínua, pois a sequência $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ gera a topologia de F e essa é a topologia mais fraca que torna cada p_n contínua. Como $d(F/\ker p_k) = d(F) = card(\mathbb{N})$, segue do Lema 4.2.2 que F admite um subespaço com norma contínua. ■

Lema 4.2.4 Seja X um espaço de Fréchet separável e de dimensão infinita que não seja isomorfo a $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Então existem sequências $(x_n)_n \subseteq X$ e $(x_n^*)_n \subseteq X'$ tais que

(i) $x_n \longrightarrow 0$ e $span\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em X.

(ii) $(x_n^*)_n$ é equicontínua.

(iii) $x_n^*(x_k) = 0$ se $k \neq n$ e $0 < x_n^*(x_n) \leq 1$ para todo n.

Demonstração. Do Lema 4.2.3, existe $M \subseteq X$ subespaço denso em X munido de uma norma $\|\cdot\|$ contínua. Como M é separável, existe $(w_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ tal que

$$\overline{[w_n : n \in \mathbb{N}]}^{\tau_M} = M$$

onde τ_M é a topologia de X induzida em M. Note que

$$\dim[w_n : n \in \mathbb{N}] \leq card(\mathbb{N}).$$

Afirmamos que $\dim[w_n : n \in \mathbb{N}] = card(\mathbb{N})$. De fato, suponha que $\dim[w_n : n \in \mathbb{N}] < \infty$. Então, $[w_n : n \in \mathbb{N}]$ é fechado em M. Logo,

$$M = \overline{[w_n : n \in \mathbb{N}]}^{\tau_M} = [w_n : n \in \mathbb{N}].$$

Daí, $\dim M < \infty$ e então, M é fechado em X, o que implica que

$$M = \overline{M}^{\tau_X} = X$$

e então, $\dim X < \infty$, o que é um absurdo. Logo $\dim[w_n : n \in \mathbb{N}] = card(\mathbb{N})$.

Tome $(z_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ uma base de $[w_n : n \in \mathbb{N}]$. É claro que

$$\overline{[z_n : n \in \mathbb{N}]}^{\tau_M} = \overline{[w_n : n \in \mathbb{N}]}^{\tau_M} = M,$$

isto é, $[z_n : n \in \mathbb{N}]$ é denso em M. Também, temos que $[z_n : n \in \mathbb{N}]$ é denso em X. De fato, seja $x \in X$ e U uma vizinhança de zero. Tome V uma vizinhança de zero tal que $V + V \subseteq U$. Como M é denso em X, existe $y \in M$ tal que $y - x \in V$. Como V é vizinhança de zero em X, segue que $V \cap M$ é vizinhança de zero em M e então, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $z_n - y \in V \cap M$. Daí,

$$z_n - x = z_n - y + y - x \in V \cap M + V \subseteq V + V \subseteq U$$

provando que $[z_n : n \in \mathbb{N}]$ é denso em X.

Agora, pelo Teorema de Hahn-Banach, existem funcionais $y_n^* \in (M, \|\cdot\|)'$ tais que para todo $n \geq 1$,

$$y_n^*(z_n) = 1 \text{ e } y_n^*(z_k) = 0, k < n.$$

Definindo $y_1 = z_1$ e

$$y_n = z_n - \sum_{k=1}^{n-1} y_k^*(z_n) y_k \tag{4.3}$$

obtemos uma sequência $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ tal que $[y_n : n \in \mathbb{N}] = [z_n : n \in \mathbb{N}]$. De fato, da equação (4.3) obtemos que

$$z_n = y_n + \sum_{k=1}^{n-1} y_k^*(z_n) y_k, n > 1$$

provando que $z_n \in [y_n : n \in \mathbb{N}]$ e então $[z_n : n \in \mathbb{N}] \subseteq [y_n : n \in \mathbb{N}]$. Para ver a outra inclusão, basta notar que $y_j \in [z_1, \ldots, z_j], j \geq 1$. De fato, façamos por indução. Para $j = 1$, é claro que $y_1 = z_1 \in [z_1]$. Suponha que $y_j \in [z, \ldots, z_j]$ e provemos que $y_{j+1} \in [z_1, \ldots, z_j, z_{j+1}]$. Pela equação (4.3) temos que

$$y_{j+1} = z_{j+1} - \sum_{k=1}^{j} y_k^*(z_{j+1}) y_k \in z_{j+1} + [z_1, \ldots, z_j] \subseteq [z_1, \ldots, z_j, z_{j+1}]$$

e então $[y_n : n \in \mathbb{N}] \subseteq [z_n : n \in \mathbb{N}]$ o que implica que $[y_n : n \in \mathbb{N}] = [z_n : n \in \mathbb{N}]$.

Note que

$$\overline{[y_n : n \in \mathbb{N}]}^{\tau_M} = \overline{[z_n : n \in \mathbb{N}]}^{\tau_M} = M,$$

isto é, $[y_n : n \in \mathbb{N}]$ é denso em M e portanto, denso em X.

Note também que como, para cada $n \in \mathbb{N}$, y_n^* é contínuo, existe $K_n \geq 1$ tal que

$$|y_n^*(x)| \leq K_n \|x\|, \forall x \in M$$

Como M é denso em X e $\| \cdot \| \colon M \longrightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente contínua, segue pelo Teorema 1.2.4 que existe uma única p contínua em X tal que

$$p(x) = \|x\|, \forall x \in M$$

Também, para cada $n \in \mathbb{N}$, y_n^* admite uma única extensão linear para X e que continuaremos denotando por y_n^*.

Agora, dado $x \in X$, existe $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq M$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Como $|y_n^*(x_k)| \leq K_n \|x_k\|, \forall k \in \mathbb{N}$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ temos que

$$\lim_{k \to \infty} |y_n^*(x_k)| \leq \lim_{k \to \infty} K_n \|x_k\|,$$

isto é,

$$\left| y_n^* \left(\lim_{k \to \infty} x_k \right) \right| \leq K_n \lim_{k \to \infty} \|x_k\|$$

ou seja,

$$|y_n^*(x)| \leq K_n p(x).$$

Como x foi tomado arbitrariamente, temos que

$$|y_n^*(x)| \leq K_n p(x), \forall x \in X, n \geq 1.$$

Daí, temos que a família $\{K_n^{-1} y_n^* : n \in \mathbb{N}\}$ é equicontínua. De fato, seja $B(0, \varepsilon)$, tome $U = U_{p,\varepsilon}$ vizinhança de zero em X (é aberto, pois p é contínua). Assim, para todo $x \in U$ e $n \in \mathbb{N}$,

$$|K_n^{-1} y_n^*(x)| = K_n^{-1} |y_n^*(x)| \leq K_n^{-1} \cdot K_n p(x) = p(x) < \varepsilon.$$

Como X é metrizável, segue da Proposição 1.3.32 que existem números $\alpha_n \in (0,1]$ tal que $\alpha_n y_n \longrightarrow 0$ em X. Definindo $x_n^* = K_n^{-1} y_n^*$ e $x_n = \alpha_n y_n$, é claro que $x_n \longrightarrow 0$, $(x_n^*)_n$ é equicontínua. Além disso, se $k = n$,

$$x_n^*(x_n) = K_n^{-1} y_n^*(\alpha_n y_n) = \alpha_n K_n^{-1} y_n^*(y_n) = \alpha_n K_n^{-1} \in (0,1].$$

■

Teorema 4.2.5 *Todo espaço de Fréchet separável de dimensão infinita X admite um operador mixing e, portanto, hipercíclico.*

Demonstração. Suponha que X seja isomorfo a $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Considere $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de escalares não nulos, $\phi\colon X \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ o isomorfismo topológico, B_w o weighted shift definido pela sequência $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ e considere o operador

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{B}_w & : & X & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{B_w} & \mathbb{K}^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\phi^{-1}} & X \\ & & x & \longmapsto & (x_n)_n & \longmapsto & (w_{n+1}x_{n+1})_n & \longmapsto & wx. \end{array}$$

Note que $\mathcal{B}_w = \phi^{-1} \circ B_w \circ \phi$. É claro que $\mathcal{B}_w \in \mathcal{L}(X)$ e pela Proposição 4.1.12 segue que $\mathcal{B}_w$ é mixing.

Agora suponha que X não seja isomorfo a $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Pelo Lema 4.2.4, existem sequências $(x_n)_n \subseteq X$ e $(x_n^*)_n \subseteq X'$ tal que

(i) $x_n \longrightarrow 0$ e $span\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em X.

(ii) $(x_n^*)_n$ é equicontínua.

(iii) $x_n^*(x_k) = 0$ se $k \neq n$ e $0 < x_n^*(x_n) \leq 1, n \geq 1$.

Tome $T\colon X \longrightarrow X$ definido por

$$T(x) = x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_{n+1}^*(x) x_n, x \in X.$$

É claro que T está bem definido. De fato, seja $(p_n)_n$ a sequência de seminormas que define a topologia de X, $j \in \mathbb{N}$ e $x \in X$. Daí,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_j \left(\frac{1}{2^n} x_{n+1}^*(x) x_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |x_{n+1}^*(x)| p_j(x_n).$$

Como $(x_n^*)_n$ é equicontínua, para a $B(0,1)$ existe uma vizinhança de zero $V \subseteq X$ tal que $x_n^*(V) \subseteq B(0,1), \forall n \in \mathbb{N}$. Como V é absorvente, existe $\delta > 0$ tal que $\delta x \in V$. Logo,

$$x_n^*(\delta x) \in B(0,1), \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_n^*(\delta x)| < 1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \delta |x_n^*(x)| < 1, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow |x_n^*(x)| < \frac{1}{\delta}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Também, como $x_n \longrightarrow 0$, segue que $p_j(x_n) \longrightarrow p_j(0) = 0$ e assim, existe $M_j > 0$ tal que $p_j(x_n) \leq M_j, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |x_{n+1}^*(x)| p_j(x_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{1}{\delta} \cdot M_j = \frac{M_j}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{M_j}{\delta}$$

provando que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_{n+1}^*(x) x_n$ é absolutamente convergente em X. Como X é completo, segue que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_{n+1}^*(x) x_n$ converge e então T está bem definido. Mostremos agora que T é linear e contínuo. Para mostrar a linearidade da T, sejam $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Daí

$$\begin{aligned} T(x + \lambda y) &= x + \lambda y + \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+1}^*(x + \lambda y) x_n \\ &= x + \lambda y + \sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1}^*(x) + \lambda x_{n+1}^*(y)) x_n \\ &= x + \lambda y + \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+1}^*(x) x_n + \lambda x_{n+1}^*(y) x_n \\ &= x + \lambda y + \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+1}^*(x) x_n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+1}^*(y) x_n \\ &= \left(x + \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+1}^*(x) x_n \right) + \lambda \left(y + \sum_{n=1}^{\infty} x_{n+1}^*(y) x_n \right) \\ &= T(x) + \lambda T(y). \end{aligned}$$

Para mostrar a continuidade de T, considere $S\colon X \longrightarrow X$ dada por

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} x_{n+1}^*(x) x_n.$$

É claro que S está bem definida. Mostraremos que S é contínua. Seja p_k uma das seminormas que define a topologia de X. Daí, para todo $x \in X$,

$$p_k(S(x)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |x_{n+1}^*(x)| p_k(x_n).$$

Defina $\phi\colon X \longrightarrow \ell_\infty$ por

$$\phi(x) = (x_n^*(x))_n$$

É claro que ϕ está bem definida, pois novamente como $(x_n^*)_n$ é equicontínua, para $B(0,1)$ existe V vizinhança de zero em X tal que $x_n^*(V) \subseteq B(0,1)$. Daí, dado $x \in X$, existe $\delta > 0$ tal que $\delta x \in V$ e então $|x_n^*(x)| < \frac{1}{\delta}, \forall n \in \mathbb{N}$ o que implica que $\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n^*(x)| \leq \frac{1}{\delta}$, provando que $x_n^*(x) \in \ell_\infty, \forall x \in X$. Também temos que ϕ é linear. De fato, sejam $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \phi(x + \lambda y) &= (x_n^*(x) + \lambda y))_n \\ &= (x_n^*(x) + \lambda x_n^*(y))_n \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (x_n^*(x))_n + \lambda(x_n^*(y))_n \\
&= \phi(x) + \lambda\phi(y).
\end{aligned}
$$

Para mostrarmos que ϕ é contínua, seja $(x_j, \phi(x_j)) \subseteq G_\phi$ uma sequência tal que

$$(x_j, \phi(x_j)) \longrightarrow (x, y) \in X \times \ell_\infty, \text{ quando } j \longrightarrow \infty.$$

Daí, $x_j \longrightarrow x$ quando $j \longrightarrow \infty$ e $\phi(x_j) \longrightarrow y$ quando $j \longrightarrow \infty$. Note que para cada $k \in \mathbb{N}$, sendo $y = (y_n)_n$,

$$|x_k^*(x_j) - y_k| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} |x_k^*(x_j) - y_k| = \|\phi(x_j) - y\| \longrightarrow 0$$

quando $j \longrightarrow \infty$ e então

$$x_k^*(x_j) \longrightarrow y_k, \text{ quando } j \longrightarrow \infty, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$x_k^*(x_j) \longrightarrow x_k^*(x)$$

e pela unicidade do limite, $y_k = x_k^*(x)$. Portanto,

$$\phi(x) = (x_n^*(x))_n = (y_n)_n = y$$

provando que o gráfico de ϕ é fechado. Pelo Teorema do Gráfico Fechado segue que ϕ é contínua. Como ϕ é contínua, pela Proposição 1.3.21, existem uma seminorma p_j definida em X e $c > 0$ tal que

$$\|\phi(x)\|_\infty \leq cp_j(x), \forall x \in X.$$

Como p_k é contínua e $x_n \longrightarrow 0$, segue que $p_k(x_n) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$ e então existe $M_k > 0$ tal que $p_k(x_n) \leq M_k, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo, para todo $x \in X$,

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |x_{n+1}^*(x)| p_k(x_n) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j^*(x)| \cdot M_k \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \|(x_j^*(x))_{j=1}^{\infty}\|_\infty \cdot M_k \\
&= M_k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \|\phi(x)\|_\infty \\
&\leq M_k \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot c \cdot p_j(x) \\
&= M_k \cdot c \cdot p_j(x) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\
&= M_k \cdot C \cdot p_j(x)
\end{aligned}
$$

isto é, existe $K > 0$ tal que

$$p_k(S(x)) \leq K \cdot p_j(x), \forall x \in X$$

e então temos novamente pela Proposição 1.3.21 que S é contínua. Denotando $I\colon X \longrightarrow X$ a identidade em X, temos que $T = I + S$ e então T é contínua como soma de duas funções contínuas.

Agora, tome $R\colon \ell_1 \longrightarrow \ell_1$ definido por

$$R((\alpha_n)_n) = \left(\alpha_1 + \frac{x_2^*(x_2)}{2}\alpha_2, \alpha_2 + \frac{x_3^*(x_3)}{2^2}\alpha_3, \ldots,\right).$$

É claro que R está bem definida. De fato,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty}\left|\alpha_j + \frac{x_{j+1}^*(x_{j+1})}{2^j}\alpha_{j+1}\right| &\leq \sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_j| + \left|\frac{x_{j+1}^*(x_{j+1})}{2^j}\alpha_{j+1}\right| \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_j| + \frac{|x_{j+1}^*(x_{j+1})|}{2^j}|\alpha_{j+1}| \\
&= \sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_j| + \frac{x_{j+1}^*(x_{j+1})}{2^j}|\alpha_{j+1}| \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_j| + |\alpha_{j+1}| < \infty.
\end{aligned}$$

Note que R é uma pertubação da identidade, isto é, $R = I + \mathcal{B}_w$, onde $\mathcal{B}_w$ é um weighted backward shift, com $w = (w_n)_n$ dada por

$$w_n = \frac{x_{n+1}^*(x_{n+1})}{2^n}, n \in \mathbb{N}.$$

Como

$$|w_n| = \left|\frac{x_{n+1}^*(x_{n+1})}{2^n}\right| \leq \frac{1}{2^n} \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

segue que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}|w_n| < \infty$$

e então, pela Proposição 4.1.13, segue que R é mixing. Considerando agora a aplicação $\psi\colon \ell_1 \longrightarrow X$ dada por

$$\psi((\alpha_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$$

temos que ψ é contínua e $\overline{\psi(\ell_1)} = X$. De fato, provemos primeiro que ψ está bem definida. Sejam $(\alpha_n)_n \in \ell_1$ e p_j uma seminorma definida em X. Daí,

$$\sum_{n=1}^{\infty}p_j(\alpha_n x_n) = \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|p_j(x_n) \leq M_j\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n| = M_j\|(\alpha_n)_n\|_1 < \infty.$$

Como X é completo, segue que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$ converge em X para toda sequência $(\alpha_n)_n \in \ell_1$. Para ver que ψ é contínua, dada uma seminorma p_k em X, para todo $(\alpha_n)_n \in \ell_1$ temos que

$$p_k(\psi((\alpha_n)_n)) = p_k\left(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}p_k(\alpha_n x_n) \leq M_k \cdot \|(\alpha_n)_n\|_1.$$

Agora mostremos que $\overline{\psi(\ell_1)} = X$. Sejam $x \in X$ e U uma vizinhança de x. Como $span\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em X, existem $\alpha_{n_1}, \alpha_{n_2}, \ldots, \alpha_{n_k} \in \mathbb{K}$ tal que

$$\alpha_{n_1} x_{n_1} + \ldots + \alpha_{n_k} x_{n_k} \in U$$

$n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$. Tome y a sequência

$$y = \alpha_{n_1} e_{n_1} + \ldots + \alpha_{n_k} e_{n_k}.$$

Daí,

$$\psi(y) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{n_j} x_{n_j} \in U$$

provando que $\overline{\psi(\ell_1)} = X$.

Agora, note que $T \circ \psi = \psi \circ R$. De fato, para $(\alpha_j)_j \in \ell_1$,

$$\begin{aligned}
T \circ \psi((\alpha_j)_j) &= T(\psi((\alpha_j)_j) \\
&= T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n T(x_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \left(x_n + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} x_{k+1}^*(x_n) x_k\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n x_n + \alpha_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} x_{k+1}^*(x_n) x_k\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n x_n + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_n \cdot \frac{1}{2^k} x_{k+1}^*(x_n) x_k\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n x_n + \alpha_{n+1} \cdot \frac{1}{2^n} x_{n+1}^*(x_{n+1}) x_n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n x_n + \frac{x_{n+1}^*(x_{n+1})}{2^n} \alpha_{n+1} x_n\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\alpha_n + \frac{x_{n+1}^*(x_{n+1})}{2^n} \alpha_{n+1}\right) x_n \\
&= \psi\left(\alpha_1 + \frac{x_2^*(x_2)}{2} \alpha_2, \alpha_2 + \frac{x_3^*(x_3)}{2^2} \alpha_3, \ldots\right) \\
&= \psi(R((\alpha_j)_j) = \psi \circ R((\alpha_j)_j)
\end{aligned}$$

e daí segue que T e R são quase conjugados e pela Proposição 2.2.3 temos que T é mixing e consequentemente, T é hipercíclico. ■

Referências Bibliográficas

[1] ANSARI, S.I., *Hypercyclic and cyclic vectors*, J. Funct. Anal. **128** (1995), 374-383. https://doi.org/10.1006/jfan.1995.1036

[2] ANSARI, S.I., *Existence of hypercyclic operators on topological vector spaces*, J. Funct. Anal. 148 (1997), 384–390. https://doi.org/10.1006/jfan.1996.3093

[3] ARENS, R., *Dense inverse limit rings*, Michigan Math. J. 5 (1958), 169–182. https://doi.org/10.1307/mmj/1028998062

[4] AUGUSTO, A. Q., *Operadores hipercíclicos e o Critério de Hiperciclicidade.* 2015. 95 f. Dissertação (mestrado) - Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2015.

[5] BAYART, F. AND MATHERON, É., *Hypercyclic operators failing the Hypercyclicity Criterion on classical Banach spaces*, J. Funct. Anal. **250** (2007), 426–441. https://doi.org/10.1016/j.jfa.2007.05.001

[6] BAYART, F. AND MATHERON, É., *Dynamics of Linear Operators*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009. https://doi.org/10.1017/CBO9780511581113

[7] BÈS, J. AND PERIS, A., *Hereditarily hypercyclic operators*, J. Funct. Anal. 167 (1999), 94–112. https://doi.org/10.1006/jfan.1999.3437

[8] BONET, J. AND PERIS, A., *Hypercyclic operators on non-normable Fréchet spaces*, J. Funct. Anal. 159 (1998), 587–595. https://doi.org/10.1006/jfan.1998.3315

[9] BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E., *Fundamentos de Análise Funcional*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[10] CONWAY, J. B., *Functions of One Complex Variable I*, second edition, Springer, 1978. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-6313-5

[11] COSTA, D. C. B., *Operadores Hipercíclicos em Espaços Vetoriais Topológicos*, 2007. 91 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

[12] DE LA ROSA, M. AND READ, C. J., *A hypercyclic operator whose direct sum $T \oplus T$ is not hypercyclic*, J. Op. Theory **61** (2009), 369-380.

[13] FURSTENBERG, H., *Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in Diophantine approximation*, Math. Systems Theory 1 (1967), 1–49. https://doi.org/10.1007/BF01692494

[14] GETHNER, R. M. AND SHAPIRO, J. H., *Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. 100 (1987), 281–288. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1987-0884467-4

[15] GONZÁLEZ, L. B., *On hypercyclic operators on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999), 1003–1010. https://doi.org/10.1090/S0002-9939-99-04657-2

[16] GROSSE-ERDMANN, K., *Universal families and hypercyclic operators*, Bull. Amer. Math. Soc. **3** (1999), 345-381.

[17] GROSSE-ERDMANN, K. AND MANGUILLOT, A. P., *Linear Chaos*, Springer, 2011. https://doi.org/10.1007/978-1-4471-2170-1

[18] JARCHOW, H., *Locally Convex Spaces.* Stuttgart: Teubner, 1981. https://doi.org/10.1007/978-3-322-90559-8

[19] KITAI, C., *Invariant closed sets for linear operators*, Thesis, University of Toronto, Toronto, 1982.

[20] METAFUNE, G. AND MOSCATELLI, V. B., *Dense subspaces with continuous norm in Fréchet soaces*, Bull. Polish. Acad. Sci. Math. **37** (1989), 477-479.

[21] MUJICA, J., *Notas de Aulas de Espaços Vetoriais Topológicos*, IMECC - UNICAMP, 2011.

[22] REIS, T. S. DOS, *Operadores Hipercíclicos.* 2012. 87 f. Dissertação (mestrado) - Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.

[23] ROLEWICZ, S., *On orbits of elements*, Studia Math. 32 (1969), 17–22. https://doi.org/10.4064/sm-32-1-17-22

[24] SCHAEFER, H. H., *Topological Vector Spaces*, Springer-Verlag, New York, 1971. https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9928-5