

**MARCELO SAMORA SOUSA JÚNIOR**

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE  
ROTORES EMBARCADOS**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**2017**

*Página intencionalmente deixada em branco.*

**MARCELO SAMORA SOUSA JÚNIOR**

**ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE ROTORES  
EMBARCADOS**

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

Orientador: Prof. Dr. Valder Steffen Jr.

Co-orientador: Prof. Dr. Aldemir Ap. Cavalini Jr.

**UBERLÂNDIA – MG**

**2017**

*Página intencionalmente deixada em branco.*

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

---

S725a Sousa Júnior, Marcelo Samora, 1991-  
2017 Análise do comportamento dinâmico de rotores embarcados /  
Marcelo Samora Sousa Júnior. - 2017.  
51 f. : il.

Orientador: Valder Steffen Júnior.  
Coorientador: Aldemir Aparecido Cavalini Junior.  
Dissertação (mestrado) -- Universidade Federal de Uberlândia,  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.  
Disponível em: <http://dx.doi.org/10.14393/ufu.di.2017.42>  
Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Rotores - Dinâmica - Teses. 3.  
Rotores - Vibração - Teses. I. Steffen Júnior, Valder. II. Cavalini Junior,  
Aldemir Aparecido, 1983-. III. Universidade Federal de Uberlândia.  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. IV. Título.

---

CDU: 621

*Página intencionalmente deixada em branco.*



**ALUNO:** Marcelo Samora Sousa Júnior

**NÚMERO DE MATRÍCULA:** 11612EMC012

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO:** Mecânica dos Sólidos e Vibrações

**LINHA DE PESQUISA:** Dinâmica de Sistemas Mecânicos

**PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA: NÍVEL MESTRADO**

**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:**

***“Análise do Comportamento Dinâmico de Rotores Embarcados”***

**ORIENTADOR:** Prof. Dr. Valder Steffen Júnior

**CO-ORIENTADOR:** Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavalini Júnior

A Dissertação foi **APROVADA** em reunião pública, realizada na Sala 313 - Bloco 1M, Campus Santa Mônica, em 06 de setembro de 2017, às 13:30 horas, com a seguinte Banca Examinadora:

**NOME**

Prof. Dr. Valder Steffen Júnior

Prof. Dr. Aldemir Ap. Cavalini Júnior

Prof. Dr. Rogério Sales Gonçalves

Prof. Dr. Rodrigo Nicoletti

**ASSINATURA**

UFU

UFU

UFU

USP/São Carlos

Uberlândia, 06 de setembro de 2017

*Página intencionalmente deixada em branco.*

*À minha família.*

x

*Página intencionalmente deixada em branco.*

## AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente aos meus pais, Wilma e Marcelo, pelos ensinamentos e amor que tive deles desde sempre. Agradeço a meus irmãos, Rafael, Drielly e Nayara que sempre me ajudaram no que eu precisasse. Além disso, agradeço aos meus avós Sergio e Orlando, Ilíu e Sebastiana pelo carinho e paciência em todos os momentos da minha vida e que sempre acreditaram na minha pessoa. Agradeço também aos meus tios, que mesmo de longe sempre são atenciosos e prestativos em todos os momentos, em especial a minha tia Ueimar.

Agradeço ao meu amigo e fisioterapeuta MSc. Silas Rezende e a minha grande amiga Michele Ramos de Azevedo pelos conselhos e ensinamentos, pelas conversas longas e pelas risadas. Obrigado de coração.

Aos meus orientadores, Prof. Dr. Valder Steffen Jr e Prof. Dr. Aldemir Aparecido Cavalini Jr, por sua orientação e convívio. Os senhores mostraram-se muito empenhados e pacientes em nosso trabalho, e durante esses anos pude aprender muito com vocês, sempre me motivando a alcançar o meu melhor e assim realizar grandes trabalhos. Muito obrigado.

Aos grandes amigos e colegas do Laboratório de Mecânica de Estruturas Prof. José Eduardo Tannús Reis – LMEst. Tenho convicção de que sabem quem são. De certa forma, vocês participaram da elaboração deste trabalho. Em especial ao Me. Vergílio Torezan Silingardi Del Claro, Eng. Vinícius Nunes Carvalho e Eng. Felipe Machini que seriamente me auxiliou durante a realização deste trabalho.

Agradeço aos meus amigos, colegas e pessoas não citadas e que mesmo por um breve momento me ajudaram, pois sem a ajuda de cada um eu não chegaria aonde estou hoje. Espero que um dia eu possa retribuir de uma melhor maneira tudo o que me foi concedido.

Agradeço ao grupo PETMEC (Programa de Educação Tutorial da FEMEC) e aos meus amigos do Intercâmbio. Foi um tempo de grande aprendizado profissional e pessoal, graças às pessoas envolvidas no grupo.

Aos professores e técnicos da Faculdade de Engenharia Mecânica com quem tive a satisfação de aprender, conviver e trabalhar durante a minha graduação. Muito obrigado a todos.

Agradeço ao apoio das pessoas que trabalham no Laboratório de Mecânica de Estruturas (LMEst).

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Instituto Nacional de Ciência e Tecnologia – Estruturas Inteligentes em Engenharia (INCT – EIE), Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), e a Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG), agradeço pelo auxílio financeiro e apoio à infraestrutura de laboratório sem a qual esta dissertação não poderia ter sido desenvolvida.

SOUZA Jr, M. S.. **Análise Do Comportamento Dinâmico De Rotores Embarcados.** 2017. 51 f. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG.

## RESUMO

Este trabalho apresenta uma investigação numérica e experimental sobre o comportamento dinâmico de um sistema rotativo submetido a uma excitação pela base. Na área de aplicações aeronáuticas, o motor de uma aeronave é considerado um típico rotor embarcado, no qual seu comportamento dinâmico é afetado pela excitação da base. O modelo matemático do rotor é obtido a partir das equações de Lagrange e do método de elementos finitos, considerando as energias de deformação e cinética do eixo e as energias cinéticas do disco e da massa desbalanceada. A base do sistema rotativo é considerada rígida. As equações de movimento do sistema são utilizadas para determinar as respostas de vibração do rotor a partir das excitações devido ao desbalanceamento e ao movimento da base. Na análise numérica foi investigada uma máquina rotativa composta por um eixo horizontal flexível contendo dois discos e apoiada em suas extremidades. As diferenças entre o comportamento de rotores de base fixa e em movimento foram exploradas. Uma máquina rotativa composta por um eixo horizontal flexível apoiada em suas extremidades e um disco rígido foi utilizada na validação experimental do modelo adotado. As respostas de vibração do modelo matemático construído e medidas experimentalmente foram comparadas. Diferentes análises foram realizadas nos domínios de tempo e da frequência, onde foram obtidos funções de resposta em frequência, órbitas, respostas ao desbalanceamento e o diagrama de Campbell. Os resultados obtidos representam adequadamente o comportamento do sistema.

---

*Palavras Chave:* *Dinâmica de Rotação, Rotores Embarcados, Método de Elementos Finitos, Respostas de Vibração, Investigação Numérica e Experimental.*

*Página intencionalmente deixada em branco.*

SOUZA Jr, M. S.. **Analysis of the Dynamic Behavior of Onboard Rotor.** 2017. 51 f. M.Sc. Dissertation - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brazil.

## ABSTRACT

In the present work, a numerical and experimental investigation regarding the dynamic behavior of a rotating machine subjected to a base excitation is presented. Regarding the aeronautical applications, the aircraft engine is considered a typical onboard rotor which has its dynamic behavior influenced by base excitations. The mathematical model of the rotor is derived from the Lagrange's equation and the finite element method, which is obtained by considering the strain and kinetic energies of the shaft, and the kinetic energy of the discs and mass unbalance. In this case, the base of the rotor system is considered as being rigid. The resulting differential equations are used to provide information about the vibration responses of the rotor under base and unbalance excitations simultaneously. In the numerical analysis a rotating machine composed by a horizontal flexible shaft containing two rigid discs and supported by two ball bearings was investigated. The differences between the dynamic behavior of a fixed base and onboard rotors were explored. A rotating machine is composed by a horizontal flexible shaft, one rigid disc, and two self-aligning ball bearings was used in the experimental validation of the adopted model. The vibration responses of the mathematical model and the experimental results were compared. Different analyses were performed both in the time and frequency domains, as generated by the orbits, unbalance response, and Campbell diagram. The obtained results adequately represent the behavior of the system.

---

*Keywords: Rotordynamics, Onboard Rotors, Finite Element Method, Vibration Responses and Numerical Investigation, Experimental Investigation.*

*Página intencionalmente deixada em branco.*

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1- Motor aeronáutico CFM LEAP-X (GE Aviation, 2016).....	2
Figura 3.1 – Representação esquemática de um rotor embarcado (DUCHEMIN, 2003).....	13
Figura 3.2 – Transformação de coordenadas do referencial $R_s$ ao referencial $R$ .....	14
Figura 3.3 – Transformação de coordenadas do referencial $R_0$ ao referencial $R_s$ .....	15
Figura 3.4 – Massa de desbalanceamento.....	18
Figura 3.5 – Coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais (Adaptado de: CAVALINI Jr, 2013). .....	19
Figura 3.6 – Representação do elemento de disco (Adaptado de: CAVALINI Jr, 2013).....	20
Figura 3.7 – Graus de liberdade associados ao elemento finito do eixo (Adaptado de: CAVALINI Jr, 2013). .....	22
Figura 4.1 – Máquina rotativa utilizada nas análises numéricas (Fonte: CAVALINI Jr, 2013). .....	30
Figura 4.2 – Diagrama de Campbell da máquina rotativa (Fonte: CAVALINI Jr, 2013).....	32
Figura 4.3 – Respostas de vibração da máquina rotativa. Resultado numérico (---) e experimental (—) (Fonte: CAVALINI Jr, 2013).....	32
Figura 4.4 – Comportamento das velocidades críticas de acordo com as velocidades angulares $\dot{\alpha}_s$ (—) e $\dot{\gamma}_s$ (---) da base do rotor.....	33
Figura 4.5 – Comportamento das velocidades críticas de acordo com a velocidade angular $\dot{\beta}_s$ da base do rotor.....	34
Figura 4.6 – Comportamento das velocidades críticas de acordo com a aceleração angular $\ddot{\beta}_s$ da base do rotor.....	35
Figura 4.7 – Respostas de vibração determinadas no plano $S_8$ do rotor considerando diferentes acelerações da base (— direção $x_s$ ; --- direção $z_s$ ).....	36

Figura 4.8 – Respostas de vibração determinadas no plano $S_8$ do rotor considerando diferentes excitações de base.....	37
Figura 4.9 – Órbitas determinadas no plano $S_8$ considerando excitações senoidais aplicadas em torno da direção $x_s$ com frequências de excitação supersíncronas da velocidade de operação do rotor (---- base em repouso; - - - excitação da base). .....	39
Figura 4.10 – Órbitas determinadas no plano $S_8$ considerando excitações senoidais aplicadas em torno da direção $x_s$ com frequências de excitação supersíncronas da velocidade crítica do rotor (---- base em repouso; - - - excitação da base).....	40
Figura 4.11 – Respostas de vibração determinadas no plano $S_8$ para excitações senoidais na base do rotor com $n = 1/3$ (---- base em repouso; - - - excitação da base). .....	41
Figura 4.12 – Respostas de vibração determinadas no plano $S_8$ para excitações senoidais na base do rotor com $n = 1/2$ (---- base em repouso; - - - excitação da base). .....	42
Figura 5.1 – Máquina rotativa utilizada nas análises experimentais. ....	44
Figura 5.2 – Diagrama de Campbell da máquina rotativa.....	46
Figura 5.3 – FRFs numéricas (- - -) e experimentais (----) da máquina rotativa.....	46
Figura 5.4 – Respostas de vibração da máquina rotativa operando em 900 RPM. Resultados simulado (----) e experimental (----). .....	47
Figura 5.5 – Respostas de vibração da máquina rotativa operando em 1600 RPM. Resultados simulado (----) e experimental (----). .....	47
Figura 5.6 – Excitador eletrodinâmico Dongling Vibration <sup>®</sup> .....	48
Figura 5.7 – Respostas de vibração do rotor ao longo da direção $x_s$ para um impacto com uma amplitude de $1 \text{ m/s}^2$ . Resultado simulado (----) e experimental (----). .....	49
Figura 5.8 – Respostas de vibração do rotor ao longo da direção $x_s$ para um impacto com uma amplitude de $3 \text{ m/s}^2$ . Resultado simulado (----) e experimental (----). .....	49
Figura 5.9 – Respostas de vibração do rotor ao longo da direção $x_s$ para um impacto com uma amplitude de $6 \text{ m/s}^2$ . Resultado simulado (----) e experimental (----). .....	50
Figura 5.10 – Respostas de vibração do rotor ao longo da direção $x_s$ para um impacto com uma amplitude de $9 \text{ m/s}^2$ . Resultado simulado (----) e experimental (----). .....	50
Figura 5.11 – Respostas de vibração do rotor em 900 RPM para um impacto aplicado ao longo da direção $x_s$ . Resultado simulado (----) e experimental (----). .....	51

Figura 5.12 – Respostas de vibração do rotor a 1600 RPM para um impacto aplicado ao longo da direção $x_s$ . Resultado simulado (—) e experimental (---). ....	52
Figura 5.13 – Respostas de vibração do rotor a 900 RPM para excitações senoidais aplicadas ao longo da direção $x_s$ . Resultado simulado (—) e experimental (---). ....	53
Figura 5.14 – Respostas de vibração do rotor a 1600 RPM para excitações senoidais subsíncronas aplicadas na direção $x_s$ . Resultado simulado (—) e experimental (---). ....	54
Figura 5.15 – Respostas de vibração do rotor a 1600 RPM para excitações senoidais supersíncronas aplicadas na direção $x_s$ . Resultado simulado (—) e experimental (---). ....	54
Figura 5.16 – Respostas de vibração do rotor a 1600 RPM para um pulso seno com frequência de 1 Hz aplicado ao longo da direção $x_s$ . Resultado simulado (—) e experimental (---). ....	55
Figura 5.17 – Respostas de vibração do rotor a 1600 RPM para um pulso seno com frequência de 6 Hz aplicado ao longo da direção $x_s$ . Resultado simulado (—) e experimental (---). ....	56
Figura 5.18 – Respostas de vibração do rotor em 900 RPM para uma excitação típica observada em asas de aeronaves. Resultado simulado (—) e experimental (---). ....	58
Figura 5.19 – Respostas de vibração do rotor em 1600 RPM para uma excitação típica observada em asas de aeronaves. Resultado simulado (—) e experimental (---). ....	58

*Página intencionalmente deixada em branco.*

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Parâmetros determinados pelo procedimento de atualização do modelo.....	31
Tabela 5.1– Parâmetros determinados pelo procedimento de atualização do modelo.....	45

*Página intencionalmente deixada em branco.*

## LISTA DE SÍMBOLOS

<b>C</b>	Centro geométrico do eixo
<b>d</b>	Distância entre a massa de desbalanceamento (ponto D) e o centro do eixo (ponto C)
$d_{xx}$	Coeficiente de amortecimento do mancal na direção $x_s$
$d_{xz}$	Coeficiente de amortecimento cruzado do mancal da direção $x_s$ com a direção $z_s$
$d_{zx}$	Coeficiente de amortecimento cruzado do mancal da direção $z_s$ com a direção $x_s$
$d_{zz}$	Coeficiente de amortecimento do mancal na direção $z_s$
<b>D<sub>m</sub></b>	Matriz de amortecimento do mancal
<b>D<sub>D</sub></b>	Matriz clássica de efeito giroscópico do disco
<b>D<sub>D</sub>*</b>	Matriz de efeito giroscópico do disco relacionada com o movimento da base
<b>D<sub>E</sub></b>	Matriz de efeito giroscópico do eixo
<b>D<sub>1</sub></b>	Matriz relacionada com a matriz de amortecimento do eixo
<b>D<sub>2</sub></b>	Matriz relacionada com as matriz de amortecimento do eixo
<b>D</b>	Matriz de amortecimento do sistema rotativo
<b>D*</b>	Matriz de efeito giroscópico/amortecimento do sistema rotativo relacionada com o movimento da base
<b>D<sub>p</sub></b>	Matriz de amortecimento proporcional
<b>E</b>	Módulo de elasticidade do eixo
<b>F<sub>u</sub></b>	Força de sustentação do mancal na direção $x_s$
<b>F<sub>w</sub></b>	Força de sustentação do mancal na direção $z_s$

$\mathbf{F}_D^*$	Vetor de forças do disco relacionado com o movimento da base
$\mathbf{F}_E$	Vetor de forças do eixo
$F_{du}$	Força devido aos desbalanceamento ao longo da direção x
$F_{dw}$	Força devido aos desbalanceamento ao longo da direção z
$F_{d\theta}$	Força devido aos desbalanceamento ao longo da rotação $\theta$
$F_{d\psi}$	Força devido aos desbalanceamento ao longo da rotação $\psi$
$\mathbf{F}$	Vetor de força do sistema rotativo
$\mathbf{F}^*$	Vetor de força do sistema rotativo relacionada com o movimento da base
$I_D$	Tensor de momentos de inércia de massa do disco
$I_{Dx}$	Momento de inércia de massa do disco em torno da direção x
$I_{Dy}$	Momento de inércia de massa do disco em torno da direção y
$I_{Dz}$	Momento de inércia de massa do disco em torno da direção z
$I_x$	Momento de inércia de área do eixo na direção x
$I_y$	Momento de inércia de área do eixo na direção y
$I_z$	Momento de inércia de área do eixo na direção z
$k_{xx}$	Coeficiente de rigidez do mancal na direção $x_S$
$k_{xz}$	Coeficiente de rigidez cruzado do mancal da direção $x_S$ com a direção $z_S$
$k_{zx}$	Coeficiente de rigidez cruzado do mancal da direção $z_S$ com a direção $x_S$
$k_{zz}$	Coeficiente de rigidez do mancal na direção $z_S$
$\mathbf{K}_m$	Matriz de rigidez do mancal
$\mathbf{K}_D^*$	Matriz de rigidez do disco relacionada com o movimento da base
$\mathbf{K}_E$	Matriz de rigidez do eixo
$\mathbf{K}_1$	Matriz relacionada com a matriz de rigidez do eixo

$\mathbf{K}_2$	Matriz relacionada com a matriz de rigidez do eixo
$\mathbf{K}_3$	Matriz relacionada com a matriz de rigidez do eixo
$\mathbf{K}_{u1}$	Matriz relacionada com a matriz de rigidez do eixo
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez do sistema rotativo
$\mathbf{K}^*$	Matriz de efeito rigidez do sistema rotativo relacionada com o movimento da base
$k_{ROT}$	Rigidez de rotação devido ao acoplamento
$L$	Comprimento do eixo
$m_D$	Massa do disco
$m_u$	Massa de desbalanceamento
$\mathbf{M}_D$	Matriz clássica de massa do disco
$\mathbf{M}_E$	Matriz de massa do eixo
$\mathbf{M}_1$	Matriz relacionada com a matriz de massa do eixo
$\mathbf{M}_2$	Matriz relacionada com a matriz de massa do eixo
$\mathbf{M}_4$	Matriz relacionada com a matriz de massa do eixo
$\mathbf{M}$	Matriz de massa do sistema rotativo
$\mathbf{N}_1$	Vetor de funções de forma de um elemento de viga associa ao vetor $\mathbf{q}_u$
$\mathbf{N}_2$	Vetor de funções de forma de um elemento de viga associa ao vetor $\mathbf{q}_w$
$n$	constante
$\mathbf{q}_D$	Vetor de coordenadas generalizadas associado ao disco
$\mathbf{q}_E$	Vetor de deslocamentos nodais associado ao eixo
$\mathbf{q}_u$	Vetor de deslocamentos nodais associado ao nó 1 do elemento finito de eixo

$\mathbf{q}_w$	Vetor de deslocamentos nodais associado ao nó 2 do elemento finito de eixo
$R_0$	Referencial inercial
$R_S$	Referencial fixo na base do rotor
$R$	Referencial fixo ao disco
$R_1$	Referencial intermediário
$R_2$	Referencial intermediário
$R_3$	Referencial intermediário
$R_4$	Referencial intermediário
$S$	Área da secção transversal do eixo
$t$	Tempo
$T_D$	Energia cinética do disco
$T_E$	Energia cinética do eixo
$T_u$	Energia cinética da massa de desbalanceamento
$u$	Translação do ponto C ao longo da direção $x_S$
$u_C$	Amplitude de vibração do disco expressa em $R_S$ com relação a $R_0$ na direção $x_S$
$u_E$	Amplitude de vibração do eixo expressa em $R_S$ com relação a $R_0$ na direção $x_S$
$U$	Energia de deformação do eixo
$\vec{V}_{D_{R_S}}$	Velocidade de translação do ponto D expressa em $R_S$ com relação a $R_0$
$\vec{V}_{C_{R_S}}$	Velocidade de translação do disco expressa em $R_S$ com relação a $R_0$

$v_c$	Amplitude de vibração do disco expressa em $R_s$ com relação a $R_0$ na direção $y_s$
$v_E$	Amplitude de vibração do disco expressa em $R_s$ com relação a $R_0$ na direção $y_s$
$\mathbf{V}_1$	Vetor relacionado com o vetor de forças externas do eixo
$\mathbf{V}_2$	Vetor relacionado com o vetor de forças externas do eixo
$\mathbf{V}_3$	Vetor relacionado com o vetor de forças externas do eixo
$\mathbf{V}_4$	Vetor relacionado com o vetor de forças externas do eixo
$\mathbf{V}_5$	Vetor relacionado com o vetor de forças externas do eixo
$\mathbf{V}_6$	Vetor relacionado com o vetor de forças externas do eixo
$x_s$	Eixo de referência no ponto O
$x_0$	Eixo de referência no ponto A
$x$	Eixo de referência no ponto R
$x_1$	Eixo do referencial $R_1$
$x_2$	Eixo do referencial $R_2$
$x_3$	Eixo do referencial $R_3$
$x_4$	Eixo do referencial $R_4$
$x_A$	Valor do vetor $\overrightarrow{OA}$ na direção x
$X$	Valor do vetor $\overrightarrow{OA}$ na direção $x_s$
$y_s$	Eixo de referência no ponto O
$y_0$	Eixo de referência no ponto A
$y$	Eixo de referência no ponto R
$y_1$	Eixo do referencial $R_1$
$y_2$	Eixo do referencial $R_2$
$y_3$	Eixo do referencial $R_3$

$y_4$	Eixo do referencial $R_4$
$y_A$	Valor do vetor $\overrightarrow{OA}$ na direção $y$
$Y$	Valor do vetor $\overrightarrow{OA}$ na direção $y_s$
$z_S$	Eixo de referência no ponto O
$z_0$	Eixo de referência no ponto A
$z$	Eixo de referência no ponto R
$z_1$	Eixo do referencial $R_1$
$z_2$	Eixo do referencial $R_2$
$z_3$	Eixo do referencial $R_3$
$z_4$	Eixo do referencial $R_4$
$z_A$	Valor do vetor $\overrightarrow{OA}$ na direção $z$
$Z$	Valor do vetor $\overrightarrow{OA}$ na direção $z_s$
$w$	Translação do ponto C ao longo da direção $z_s$
$w_C$	Amplitude de vibração do disco expressa em $R_s$ com relação a $R_0$ na direção $z_s$
$w_E$	Amplitude de vibração do disco expressa em $R_s$ com relação a $R_0$ na direção $z_s$
$W$	Vetor peso dos componentes do sistema rotativo
$\overrightarrow{OA}$	Vetor posição do ponto O ao ponto A
$\overrightarrow{AC}$	Vetor posição do ponto A ao ponto C
$\overrightarrow{OC}$	Vetor posição do ponto O ao ponto C
$\overrightarrow{OD}$	Vetor posição do ponto O ao ponto D

$\alpha$	Rotação angular em torno de $z_s$
$\alpha_s$	Rotação angular do eixo de coordenadas $R_0$ em relação ao referencial $R_s$ na direção $x_s$
$\beta$	Rotação angular em torno de $x_3$
$\beta_s$	Rotação angular do eixo de coordenadas $R_0$ em relação ao referencial $R_s$ na direção $y_s$
$\gamma$	Rotação angular em torno de $y$
$\gamma_s$	Rotação angular do eixo de coordenadas $R_0$ em relação ao referencial $R_s$ na direção $z_s$
$\psi$	Rotação angular em torno de $z_s$
$\theta$	Rotação angular em torno de $x_1$
$\phi$	Rotação angular em torno de $y$
$\Omega$	Velocidade de rotação do eixo
$\gamma$	Coeficiente da matriz $D_p$
$\beta$	Coeficiente da matriz $D_p$
$\xi_i$	Amortecimento modal
$\rho$	Densidade do material do eixo
$\mu$	Posição angular
$\Lambda$	Constante
$\Omega_R^{R_s}$	Velocidade angular de $R$ em relação a $R_s$
$\dot{\Omega}_{R_s}^{R_0}$	Velocidade angular de $R_s$ em relação a $R_0$
$\dot{\Omega}_R^{R_0}$	Velocidade angular de $R$ em relação a $R_0$
$\omega_x$	Velocidade angular do eixo de coordenadas $R$ em relação ao referencial $R_0$ na direção $x$

$\omega_y$	Velocidade angular do eixo de coordenadas $R$ em relação ao referencial $R_0$ na direção $y$
$\omega_z$	Velocidade angular do eixo de coordenadas $R$ em relação ao referencial $R_0$ na direção $z$
BW	<i>Backward Whirl</i> – Precessão inversa
EF	Elementos Finitos
FRF	Função de Resposta em Frequência
<b>FRF</b> <sub>exp</sub>	Função de Resposta em Frequência experimental
<b>FRF</b> <sub>num</sub>	Função de Resposta em Frequência numérica
FW	<i>Forward Whirl</i> – Precessão direta
RPM	Rotações por minuto

# SUMÁRIO

<b>AGRADECIMENTOS .....</b>	<b>XI</b>
<b>RESUMO .....</b>	<b>XIII</b>
<b>ABSTRACT .....</b>	<b>XV</b>
<b>LISTA DE FIGURAS.....</b>	<b>XVII</b>
<b>LISTA DE TABELAS .....</b>	<b>XXI</b>
<b>LISTA DE SÍMBOLOS .....</b>	<b>XXIII</b>
<b>SUMÁRIO .....</b>	<b>XXXI</b>
<b>CAPITULO I: INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1. CONTEXTUALIZAÇÃO .....	1
1.2. CONTRIBUIÇÕES DO ESTUDO .....	3
1.3. OBJETIVOS DO ESTUDO.....	4
1.4. ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO .....	4
<b>CAPITULO II: REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....</b>	<b>7</b>
<b>CAPITULO III: MODELO MATEMÁTICO DE ROTORES EMBARCADOS.....</b>	<b>13</b>
3.1 ENERGIAS CINÉTICA E POTENCIAL .....	13
3.2 FORMULAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS .....	20

<b>CAPITULO IV: APLICAÇÃO NUMÉRICA.....</b>	<b>29</b>
<b>4.1 BANCADA DE TESTES .....</b>	<b>29</b>
<b>4.2 SIMULAÇÕES DO ROTOR EMBARCADO .....</b>	<b>32</b>
<b>CAPITULO V: RESULTADOS EXPERIMENTAIS.....</b>	<b>43</b>
<b>5.1 BANCADA DE TESTES .....</b>	<b>43</b>
<b>5.2 VALIDAÇÃO EXPERIMENTAL DO ROTOR EMBARCADO.....</b>	<b>48</b>
<b>CAPITULO VI: CONCLUSÃO E PERSPECTIVAS FUTURAS.....</b>	<b>59</b>
<b>REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>63</b>

*Página intencionalmente deixada em branco.*

*Página intencionalmente deixada em branco.*

# CAPÍTULO I

## Introdução

### 1.1. Contextualização

Segundo relatos de Ishida e Yamamoto (2012), as pesquisas em dinâmica de rotação têm mais de 140 anos de história. Seu início foi marcado com o trabalho de W. J. Macquorn Rankine, Rankine (1869), onde erroneamente foi concluído ser impossível para as máquinas rotativas operarem acima de uma determinada velocidade. Esta velocidade foi posteriormente denominada por Dunkerley (1894) como velocidade crítica.

Fundamentos simplificados acerca da dinâmica de rotação foram apresentados por Jeffcott (1919). Logo após o trabalho de H. H. Jeffcott vieram outras pesquisas imprescindíveis para o desenvolvimento da teoria de rotores, como é o caso de Wilfred Campbell, da General Electric Co. (criação do diagrama de Campbell; CAMPBELL, 1924). Métodos mais eficientes de balanceamento foram propostos e o comportamento de rotores suportados por mancais hidrodinâmicos foi investigado com maior rigor, levando ao projeto de máquinas mais leves operando em velocidades mais altas. Conjuntamente, a necessidade de representar matematicamente os fenômenos físicos específicos de máquinas rotativas foi crescendo com a exigência do aumento do desempenho dessas máquinas. O desenvolvimento do método dos elementos finitos para a dinâmica de rotação é consequência do avanço da ciência, cabendo lembrar que este método foi originalmente dedicado para a análise estática de estruturas (RADE, 2008).

Ishida e Yamamoto (2012) comentam que foram Nelson e MacVaugh (1976) os responsáveis por incluir os efeitos de inércia de rotação, momento giroscópico e força axial, no método dos elementos finitos. Antes da popularização do método dos elementos finitos, utilizava-se geralmente o chamado método das Matrizes de Transferência, considerando o sistema como sendo contínuo, conforme o trabalho realizado por Lallement; Lecoanet; Steffen Jr (1982). Assim, chegamos a nossos dias, onde os sistemas rotativos atuais são empregados

nos mais diversos setores industriais, como é o caso de motores aeronáuticos, um equipamento de alta responsabilidade e elevado custo que possui componentes fabricados a partir de materiais compostos (Fig. 1.1). Os motores que garantem a propulsão de navios, os turbocompressores automotivos, as unidades de energia auxiliar de aeronaves, as máquinas responsáveis pela geração de energia elétrica, as ultracentrífugas são alguns exemplos de aplicações no contexto industrial. Deve-se salientar que alguns destes rotores funcionam instalados sobre uma base móvel. O motor aeronáutico de propulsão a jato é considerado um típico rotor embarcado, uma vez que o seu comportamento dinâmico é diretamente influenciado pelas excitações externas.



Figura 1.1- Motor aeronáutico CFM LEAP-X (GE Aviation, 2016).

Um modelo matemático capaz de representar o comportamento dinâmico de rotores embarcados é obtido considerando diversos subsistemas, como segue: em primeiro lugar, os subsistemas que podem ser definidos pela sua geometria, tais como o eixo (tipicamente modelado pelo método dos elementos finitos), discos e acoplamentos; depois, os subsistemas que são dependentes da frequência e/ou deslocamentos laterais e da velocidade de rotação, tais como mancais hidrodinâmicos. Por último o efeito giroscópico os esforços aplicados no sistema através da sua base.

O modelo matemático de rotores de base fixa é derivado de dois eixos de referência, ou seja, o referencial inercial e um referencial móvel fixo ao disco (LALANNE; FERRARIS, 1998). Diferentemente, as equações do movimento que regem o comportamento dinâmico de rotores embarcados são obtidas considerando um sistema de referência adicional que é fixado à base do rotor. Portanto, a formulação matemática de sistemas embarcados requer um referencial inercial, outro fixo à base do rotor e por fim um referencial fixo aos discos (DUCHEMIN;

BELIOZ; FERRARIS, 2006).

Atualmente, na literatura é pequeno o número de contribuições científicas relacionadas com a análise de máquinas rotativas quando sujeitas a excitações na base. Dessa forma, este trabalho se propõe a realizar um estudo abrangente, apresentando a metodologia adotada na modelagem matemática do sistema embarcado, bem como uma validação experimental do modelo construído.

## **1.2. Contribuições do estudo**

Nos últimos anos, as pesquisas realizadas na área de dinâmica de máquinas rotativas vêm crescendo na Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia (FEMEC-UFU). O Laboratório de Mecânica de Estruturas “José Eduardo Tannús Reis” (LMEst) é um dos responsáveis por diversificar os estudos nesta área dentro da instituição.

Simões (2006) utilizou atuadores piezelétricos tipo pilha (*piezoelectric stack actuator*) para controlar os níveis de vibração de rotores flexíveis. Estes atuadores foram instalados em um dos mancais da máquina rotativa e empregou-se o método de elementos finitos para as análises numéricas. Os resultados obtidos durante o trabalho do autor foram satisfatórios, com comprovação experimental.

Seguindo a mesma linha de pesquisa de controle de vibração em rotores, Saldarriaga (2007) propôs uma metodologia de controle de vibração com absorvedores viscoelásticos nos apoios dos mancais do sistema. Os níveis de vibração da máquina foram reduzidos, mas as rótulas usadas para o acionamento dos absorvedores introduziram efeitos não lineares ao problema.

Morais (2010) em sua tese de doutorado avaliou o efeito de não-linearidades em rotores. As não-linearidades foram causadas por trincas transversais no eixo da máquina e por atuadores eletromagnéticos que apresentam funções de deslocamento de caráter não-linear.

Cavalini Jr (2013) investigou duas técnicas de monitoramento da integridade estrutural (*SHM – Structural Health Monitoring*). Neste trabalho, as respostas de vibração foram utilizadas como base para monitorar a condição estrutural do rotor, com o objetivo de identificar trincas transversais no eixo. O primeiro método proposto é baseado no comportamento não-linear da trinca, sendo capaz de determinar a posição e a profundidade da trinca no eixo da máquina rotativa. O segundo método é baseado na impedância eletromecânica.

Koroishi (2013) estudou o controle ativo de vibrações em máquinas rotativas utilizando um mancal híbrido. Neste caso, foram utilizados atuadores eletromagnéticos para o controle ativo de vibrações. Outra pesquisa realizada na área de controle foi feita por Alves (2015).

Nesse caso, o controle foi realizado por aquecimento de fios confeccionados com ligas de memória de forma conectados aos mancais.

Oliveira (2015) avaliou o comportamento de uma bancada experimental que possui mancais magnéticos ativos. Foi desenvolvido um modelo robusto para uma futura aplicação de técnicas de controle na bancada de testes utilizada como referência. Os resultados encontrados neste trabalho foram satisfatórios segundo o autor. Borges (2016) apresentou todas as etapas envolvidas no projeto de um controlador robusto com base na técnica de atribuição de auto estrutura utilizando múltiplos modelos.

Neste contexto, o presente trabalho contribui para a expansão das linhas de pesquisa em máquinas rotativas do LMEst. Percebe-se que ao longo desses anos os trabalhos realizados pelo grupo têm diversificado bastante. É importante ressaltar que este é o primeiro trabalho realizado no LMEst sobre o tema de rotores embarcados.

### **1.3. Objetivos do Estudo**

O presente trabalho tem os seguintes objetivos:

1. Expandir as linhas de pesquisa em máquinas rotativas do LMEst;
2. Analisar o comportamento dinâmico de uma máquina rotativa considerando excitações oriundas de sua base;
3. Apresentar de forma clara e abrangente o modelo matemático do sistema rotativo, derivado a partir das equações de Lagrange e do método de elementos finitos;
4. Validar experimentalmente os resultados obtidos com o modelo em elementos finitos adotado para diferentes condições de operação do rotor e excitação da base.

### **1.4. Organização do Trabalho**

Além deste primeiro capítulo que contextualiza o problema abordado no presente trabalho, os assuntos tratados nesta dissertação foram divididos em outros cinco capítulos.

No Capítulo II é apresentada uma revisão bibliográfica sobre rotores embarcados e as diferentes análises encontradas na literatura acerca do tema. No Capítulo III são descritas as etapas do desenvolvimento do modelo de elementos finitos aplicado aos rotores embarcados.

O Capítulo IV mostra os resultados numéricos obtidos. No Capítulo V é apresentada a validação experimental dos resultados encontrados. As conclusões acerca do trabalho realizado e perspectivas de trabalhos futuros são apresentadas no Capítulo VI.

*Página intencionalmente deixada em branco.*

## CAPÍTULO II

### Revisão Bibliográfica

De acordo com Duchemin; Berlioz; Ferraris (2006), vários fenômenos dinâmicos relativos a máquinas rotativas vêm sendo estudados ao longo dos anos. Nesse sentido, as contribuições de A. Muszynska, B.E. Bently, N. Bachschmid, D. Childs, D. Ewins, Y. Ishida, G. Kirk, M. Lalanne, R. Markert, C. Nataraj, H.D. Nelson, R. Nordman, J.S. Rao, J. Vance e outros especialistas forneceram informações importantes sobre modelos matemáticos de máquinas rotativas e seus sistemas associados. Portanto, o comportamento dinâmico dos chamados rotores de base fixa (ou seja, sistemas para os quais os mancais são fixados em bases inerciais ou quase inerciais) têm sido amplamente estudados.

Hoje em dia, a atenção de vários pesquisadores está se voltando para máquinas rotativas sujeitas a excitações pela base. Os motores de navios, os turbocompressores automotivos, as unidades de energia auxiliares de aeronaves e os próprios motores de aeronaves são exemplos de rotores que operam em uma base móvel. O motor aeronáutico é considerado um típico rotor embarcado, uma vez que seu comportamento dinâmico é diretamente influenciado por excitações externas. Além disso, a excitação pela base em máquinas rotativas pode ocorrer quando o sistema é instalado em locais propensos a abalos sísmicos (EL-SAEIDY; STICHER, 2010).

Como mencionado, é pequeno o número de contribuições científicas relacionadas à análise de máquinas rotativas flexíveis quando sujeitas a excitações de base (DAKEL; BAGUET; DUFOUR, 2014a). De acordo com El-Saeidy e Sticher (2010), os trabalhos em rotores embarcados são geralmente restritos a eixos rígidos. Os autores afirmam que os estudos sobre rotores embarcados podem ser divididos em aqueles com excitações do tipo sísmica e os que sofrem deslocamentos e rotações aplicados na base devido a sua vizinhança com outros tipos de máquinas e equipamentos ou ainda instalados em veículos.

Um dos primeiros trabalhos que estudou o comportamento dinâmico de um rotor com excitação na base foi o de Kim; Yang; Lin (1986). Neste trabalho, os autores analisaram a resposta de vibração de uma máquina rotativa com eixo flexível submetida a acelerações aleatórias (sísmicas) na sua base. O sistema analisado contém um disco rígido e um eixo

flexível, modelado de acordo com a teoria de viga de Timoshenko. Foram utilizados uma aproximação do vetor de Markov usando a equação de Ito e os procedimentos de média de Stratonovich para análise numérica do sistema. Os resultados foram comparados com a simulação de Monte Carlo. Os autores encontraram grande dificuldade em obter as respostas analíticas do sistema, uma vez que não existia na literatura métodos eficazes para a solução do problema.

Um modelo de Jeffcott é usado com frequência no estudo de máquinas rotativas embarcadas. Contudo, a formulação é limitada por não considerar o efeito giroscópico. Hori e Kato (1990) analisaram a resposta sísmica de um rotor do tipo Jeffcott suportado por mancais hidrodinâmicos. Esta investigação abordou a análise de estabilidade do sistema.

Ryan (2000) na sua tese de doutorado estudou o comportamento de um rotor embarcado com mancais magnéticos ativos. Foi construído um equipamento de teste que permitiu excitar o sistema com grandes amplitudes. Os resultados obtidos a partir dos experimentos foram comparados com modelos lineares comumente usados.

Kasarda et al. (2000) analisou uma bancada de rotor embarcado considerando diferentes coeficientes de rigidez e amortecimento associados ao mancal magnético do sistema. Os resultados encontrados evidenciaram comportamentos linear e não linear. Os testes também revelaram os níveis requeridos de rigidez e amortecimento do mancal para a operação eficaz do rotor submetido a excitações na base.

O método de elementos finitos é amplamente utilizado na modelagem de rotores. Duchemin (2003) avaliou o comportamento dinâmico de uma máquina rotativa com excitações na base utilizando o método dos elementos finitos. O autor considerou que a base possui 6 graus de liberdade (3 translações e 3 rotações). Diferentes configurações do rotor (simétrico e assimétrico) fizeram parte das análises do trabalho. A instabilidade do sistema também foi um ponto abordado pelo autor. Os resultados numéricos obtidos foram validados a partir de testes experimentais.

Cavalca; Cavalcante; Okabe (2004) analisaram a influência da estrutura dos mancais no comportamento dinâmico do rotor. A validação experimental da metodologia proposta foi apresentada.

Por outro lado, Zhao (2005) estudou a resposta dinâmica do rotor de um helicóptero durante um voo com manobra. Ele propôs um novo modelo dinâmico de rotor que leva em conta diferentes efeitos que não foram considerados nos trabalhos anteriores, como por exemplo a manobra do helicóptero durante o voo. Os resultados obtidos na análise numérica foram comparados com dados experimentais do UH-60 *Black Hawk*.

Marx e Nataraj (2007) mostraram um novo procedimento de controle ótimo com uma combinação de controle de *feedback* convencional, proporcional e diferencial para atenuar as

excitações provenientes da base aplicadas em um eixo rotativo suportado por mancais magnéticos.

O fenômeno de *whirl* em um rotor do tipo Jeffcott foi investigado por Al-Wedyan; Tahat; Mutasher (2008). Foram utilizadas as equações de energia cinética, potencial e de dissipação para a modelagem do problema. A excitação foi inserida como uma vibração aleatória na base do mancal do tipo hidrodinâmico. As equações do movimento foram obtidas pelas equações de Lagrange e utilizou-se o *Simulink®* do software *Matlab®* para simular o comportamento dinâmico do rotor. A influência de diferentes valores de massa do eixo e disco, e dos coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais foi avaliada. Além disso, a estabilidade do rotor foi analisada matematicamente.

Das; Dutt; Ray (2010) usaram um atuador eletromagnético para controlar as vibrações laterais de uma máquina rotativa embarcada. Uma abordagem ativa do controle de vibração foi aplicada no eixo flexível do sistema.

Tian; Wang; Peng (2011) estudaram a influência das vibrações originadas em motores onde turbocompressores estão instalados. Foi criado um modelo de elementos finitos do turbocompressor, que é suportado por mancais hidrodinâmicos. Os resultados mostraram que o desbalanceamento do turbocompressor influencia a resposta do motor para baixas velocidade de trabalho. Em altas velocidades, este efeito é minimizado pelas vibrações subsíncronas dominantes, que também mascaram o surgimento de um estado caótico. Para velocidades baixas, as excitações induzidas pelos motores mudaram o comportamento dinâmico da máquina rotativa. Para velocidades muito altas, as vibrações subsíncronas mantêm o comportamento do sistema embarcado próximo de um sistema sem excitação do motor.

Han e Chu (2013) avaliaram a resposta dinâmica de um rotor com trinca submetido a movimentos de base dependentes do tempo. Três movimentos típicos de uma aeronave foram avaliados durante o trabalho: *rolling*, *pitching* e *yawing*. No modelo de trincas transversais os casos de *breathing* e *open crack* são considerados. Os autores desenvolveram um modelo de elementos finitos para a avaliação das respostas do rotor. Os coeficientes de rigidez, o efeito giroscópico e as excitações da base foram considerados dependentes do tempo. A influência dos tipos de movimento da base, frequência e amplitude das excitações empregadas e profundidade da trinca foram avaliadas no comportamento dinâmico da máquina rotativa analisada.

Máquinas rotativas com excitações de base são considerados sistemas complexos e de difícil análise por possuírem características não lineares. Em geral, adota-se uma solução linear a fim de simplificar o sistema tornando possível obter a resposta do rotor. Dakel; Baguet; Dufour (2014b) investigaram o comportamento dinâmico não-linear de um rotor embarcado com mancais hidrodinâmicos. O modelo de elementos finitos proposto pelos autores levou em

conta a geometria do eixo e do disco (simétrico ou assimétrico), os 6 graus de liberdade da base (3 translações e 3 rotações) e o comportamento não-linear do filme de óleo do mancal. Foi utilizado um integrador de Newmark para resolver as equações do movimento que são dependentes do tempo. Os efeitos não-lineares do sistema foram observados através do diagrama de bifurcação, das órbitas do rotor e dos mapas de Poincaré.

Lei e Yushu (2014) apresentaram a simulação dinâmica de um sistema rotativo não-linear considerando como excitação uma manobra de voo conhecida como Herbst, que foi formulada usando os parâmetros de uma aeronave. Uma abordagem de controle de vibração foi incorporada ao sistema. Os resultados fornecem uma melhor compreensão do efeito da manobra sobre o comportamento dinâmico do rotor.

Han e Chu (2014) estudaram o comportamento dinâmico de um sistema de engrenagens com excitações aplicadas na base. O modelo leva em conta 3 movimentos de rotação da base (*rolling*, *pitching* e *yawing*). Foi utilizado um método numérico para obter as respostas laterais e torcionais do sistema de engrenagens. O movimento de *rolling* apresentou maior impacto no comportamento dinâmico do sistema, quando comparado com os outros dois tipos de movimento (*pitching* e *yawing*).

Liu et al. (2016) investigaram a influência da excitação pela base nas forças de sustentação geradas em um mancal hidrodinâmico. O modelo de elementos finitos do rotor apresentado levou em conta um eixo flexível, um disco rígido e dois mancais hidrodinâmicos. Nesse trabalho, foi proposto um novo modelo para os esforços do mancal, permitindo considerar a velocidade da base em movimento. As respostas temporais, respostas espectrais, órbitas e mapas de Poincaré foram analisados, comparando o modelo de mancal proposto com o convencional. A influência da amplitude e frequência do movimento da base no comportamento dinâmico do sistema foi investigada. Os resultados obtidos mostram que a velocidade da base não deve ser ignorada em alguns casos para determinar as forças de sustentação geradas nos mancais.

Recentemente os efeitos não-lineares de máquinas rotativas embarcadas foram estudados por Chen et al. (2017). Os autores desenvolveram um modelo genérico do rotor baseado no método dos elementos finitos. Foi observado que as excitações da base geram não-linearidades ao sistema. Para a verificação do modelo proposto, foi construída uma bancada de testes capaz de simular excitações harmônicas na base do rotor. Os efeitos de parâmetros como a amplitude do deslocamento da base, a frequência de excitação e a velocidade de rotação do eixo foram avaliados e discutidos a partir das respostas de vibração da máquina rotativa.

Neste contexto, este trabalho de mestrado tem como objetivo analisar o comportamento dinâmico de uma máquina rotativa flexível considerando excitações provenientes da

base. O modelo matemático do rotor é obtido pelo método de elementos finitos. As equações diferenciais resultantes são usadas para fornecer informações sobre as respostas de vibração do rotor considerando excitações de desbalanceamento e da base, simultaneamente. Os resultados experimentais deste trabalho contribuem para os estudos na área de dinâmica de máquinas rotativas embarcadas. Vale ressaltar que o modelo matemático que será apresentado neste trabalho é baseado no trabalho de Duchemin (2003).

*Página intencionalmente deixada em branco.*

# CAPÍTULO III

## Modelo Matemático de Rotores Embarcados

Este capítulo apresenta os conceitos associados ao modelo de elementos finitos de rotore embarcados. Desta forma, serão utilizadas as equações de Lagrange e o método de elementos finitos para obter as equações diferenciais capazes de representar adequadamente o comportamento dinâmico de rotore embarcados.

### 3.1 Energias Cinética e Potencial

A Fig. 3.1 mostra a representação esquemática de um rotor embarcado na qual três eixos de referência são utilizados (DUCHEMIN; BERLIOZ; FERRARI, 2006). Neste caso,  $R_0 (x_0, y_0, z_0)$  é o sistema de coordenadas inercial,  $R_s (x_s, y_s, z_s)$  é o referencial móvel fixo na base do rotor, e  $R (x, y, z)$  é o sistema de referência móvel fixo ao disco.

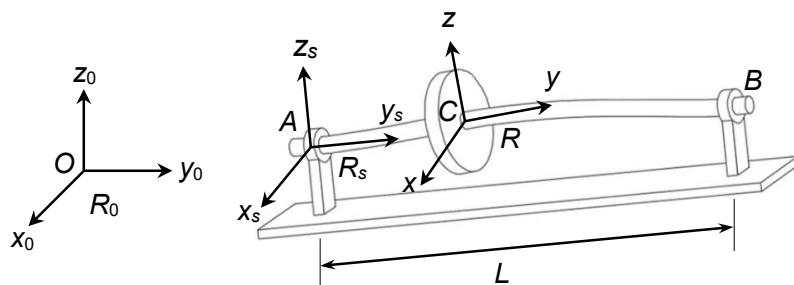


Figura 3.1 – Representação esquemática de um rotor embarcado (DUCHEMIN, 2003).

O movimento do referencial  $R$  em relação ao sistema de coordenadas  $R_s$  é descrito pelos ângulos  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\phi$ . A orientação de  $R$  é obtida a partir de uma rotação  $\psi$  em torno de  $z_s$ , levando assim a um referencial intermediário  $R_1 (x_1, y_1, z_1)$ ; uma rotação  $\theta$  em torno da direção  $x_1$  é realizada na sequência, resultando em um referencial intermediário  $R_2 (x_2, y_2, z_2)$ ; e uma rotação  $\phi$  é finalmente realizada em torno de  $y$ , sendo que  $y \parallel y_2$ , como apresenta a

Fig. 3.2 (LALANNE; FERRARIS, 1998). Na Fig. 3.2,  $\Omega$  é a velocidade de rotação do rotor, e  $\phi = \Omega t$ .

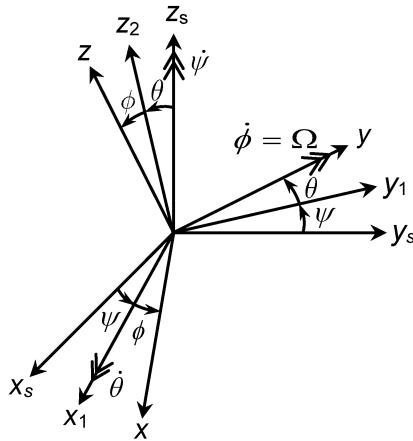


Figura 3.2 – Transformação de coordenadas do referencial  $R_s$  ao referencial  $R$ .

A partir das transformações mostradas, a velocidade instantânea de rotação do sistema de coordenadas  $R$  com relação a  $R_s$  é dada pela Eq. (3.1).

$$\Omega_R^{R_s} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}_{R_s} + \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_2} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\phi} \\ 0 \end{Bmatrix}_R = \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \cos \phi - \dot{\psi} \cos \theta \sin \phi \\ \dot{\phi} + \dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \sin \phi + \dot{\psi} \cos \theta \cos \phi \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

onde  $[ \cdot ]$  indica a derivada temporal da variável  $[ \cdot ]$ .

O movimento do referencial  $R_s$  em direção ao sistema de coordenadas  $R_0$  é descrito pelos ângulos  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$ , conforme mostra a Fig. 3.3. A orientação de  $R_s$  é obtida a partir de uma rotação  $\alpha$  em torno de  $z_s$ , que resulta no sistema de coordenadas  $R_3$  ( $x_3$ ,  $y_3$ ,  $z_3$ ); uma subsequente rotação  $\beta$  em torno da nova direção  $x_3$ , levando ao referencial  $R_4$  ( $x_4$ ,  $y_4$ ,  $z_4$ ); e finalmente uma rotação de  $\gamma$  em relação ao eixo  $y$ , sendo que  $y \parallel y_3$ .

A partir das transformações mostradas, a velocidade angular do sistema de coordenadas  $R_s$  com relação a  $R_0$  é dada pela Eq. (3.2).

$$\bar{\Omega}_{R_s}^{R_0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix}_R + \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_3} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{\gamma} \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_s} = \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \cos \gamma - \dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma \\ \dot{\gamma} + \dot{\alpha} \sin \beta \\ \dot{\beta} \sin \gamma + \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma \end{Bmatrix}_{R_s} = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}_s \\ \dot{\beta}_s \\ \dot{\gamma}_s \end{Bmatrix}_{R_s} \quad (3.2)$$

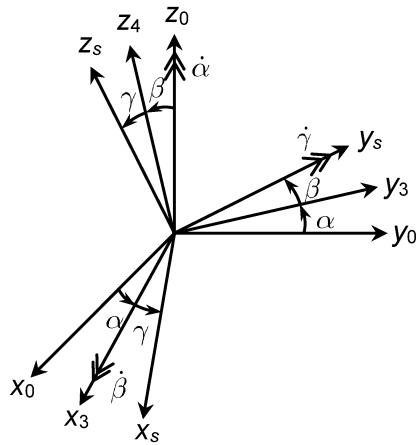


Figura 3.3 – Transformação de coordenadas do referencial  $R_0$  ao referencial  $R_s$ .

Consequentemente, o vetor que define a velocidade angular do referencial  $R$  em relação a  $R_0$  é dado pela Eq. (3.3).

$$\vec{\Omega}_R^{R_0} = \vec{\Omega}_{R_s}^{R_0} + \vec{\Omega}_R^{R_s} = \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}_s \\ \dot{\beta}_s \\ \dot{\gamma}_s \end{Bmatrix}_{R_s} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{Bmatrix}_{R_s} + \begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{R_2} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix}_R =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\dot{\alpha}_s \cos \psi + \dot{\beta}_s \sin \psi + \dot{\theta}) \cos \phi - ((\dot{\alpha}_s \sin \psi - \dot{\beta}_s \cos \psi) \sin \theta + (\dot{\gamma}_s + \dot{\psi}) \cos \theta) \sin \phi \\ -(\dot{\alpha}_s \sin \psi - \dot{\beta}_s \cos \psi) \cos \theta + (\dot{\gamma}_s + \dot{\psi}) \sin \theta + \dot{\phi} \\ (\dot{\alpha}_s \cos \psi + \dot{\beta}_s \sin \psi + \dot{\theta}) \sin \phi + ((\dot{\alpha}_s \sin \psi - \dot{\beta}_s \cos \psi) \sin \theta + (\dot{\gamma}_s + \dot{\psi}) \cos \theta) \cos \phi \end{array} \right\}$$

$$= \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix}_R \quad (3.3)$$

A posição da base do rotor (vetor  $\overrightarrow{OA}$ ; Fig. 3.1) em relação ao referencial  $R_0$  é definida pelas coordenadas  $x_A$ ,  $y_A$  e  $z_A$ , como mostra a Eq. (3.4). As coordenadas  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  descrevem a posição deste mesmo vetor em relação ao referencial  $R_s$ . É importante ressaltar que a transformação de  $R_0$  para  $R_s$  é realizada a partir das mesmas rotações utilizadas para formular a Eq. (3.2).

$$\overrightarrow{OA} = \begin{Bmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{Bmatrix}_{R_0} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}_{R_s} = \begin{Bmatrix} (x_A \cos \alpha + y_A \sin \alpha) \cos \gamma - [z_A \cos \beta + (x_A \sin \alpha - y_A \cos \alpha) \sin \beta] \sin \gamma \\ z_A \sin \beta - (x_A \sin \alpha - y_A \cos \alpha) \cos \beta \\ (x_A \cos \alpha + y_A \sin \alpha) \sin \gamma + [z_A \cos \beta + (x_A \sin \alpha - y_A \cos \alpha) \sin \beta] \cos \gamma \end{Bmatrix}_{R_s} \quad (3.4)$$

A posição do ponto C (vetor  $\overrightarrow{AC}$ ; Fig. 3.1) em relação ao referencial  $R_s$  é definido pela Eq. (3.5). Desta forma, o vetor  $\overrightarrow{OC}$  em relação ao referencial  $R_s$  é descrito como mostra a Eq. (3.6).

$$\overrightarrow{AC} = \begin{Bmatrix} u(y, t) \\ y \\ w(y, t) \end{Bmatrix}_{R_s} \quad (3.5)$$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \begin{Bmatrix} X + u(y, t) \\ Y + y \\ Z + w(y, t) \end{Bmatrix}_{R_s} \quad (3.6)$$

onde a vibração lateral do eixo no ponto C é descrita pelas translações  $u$  e  $w$  ao longo das direções  $x_s$  e  $z_s$ , respectivamente. Os deslocamentos  $u$  e  $w$  são variáveis, enquanto que  $y$  é constante. Destaca-se que  $\theta$  e  $\psi$  fornecem as rotações ao longo do eixo em torno das direções  $x_s$  e  $z_s$ , respectivamente.

Neste contexto, a energia cinética  $T_D$  do disco é obtida a partir da Eq. (3.7).

$$T_D = \frac{1}{2} m_D \left( \overrightarrow{V}_C^{R_0} \right)^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{\Omega}_R^{R_0} I_D \overrightarrow{\Omega}_R^{R_0} \quad (3.7)$$

onde  $m_D$  é a massa do disco,  $\overrightarrow{V}_C^{R_0}$  é a velocidade de translação do disco expressa em  $R_s$  com relação a  $R_0$  (Eq. (3.8)),  $\overrightarrow{\Omega}_R^{R_0}$  é o vetor de velocidade angular (Eq. (3.3)) e  $I_D$  é o tensor de momentos de inércia de massa (Eq. (3.9)).

$$\begin{aligned}\vec{V}_C^{R_0} &= \left( \frac{d\vec{OC}}{dt} \right)_{R_0} = \left( \frac{d\vec{OC}}{dt} \right)_{R_S} + \vec{\Omega}_{R_S}^{R_0} \times (\vec{OC})_{R_S} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \dot{X} + \dot{u} + \dot{\beta}_S(Z + w) - \dot{\gamma}_S(Y + y) \\ \dot{Y} + \dot{\gamma}_S(X + u) - \dot{\alpha}_S(Z + w) \\ \dot{Z} + \dot{w} + \dot{\alpha}_S(Y + y) - \dot{\beta}_S(X + u) \end{array} \right\}_{R_S} = \left\{ \begin{array}{l} \dot{u}_C \\ \dot{v}_C \\ \dot{w}_C \end{array} \right\}_{R_S}\end{aligned}\quad (3.8)$$

$$I_D = \begin{bmatrix} I_{Dx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{Dy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dz} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

onde  $I_{Dx}$ ,  $I_{Dy}$  e  $I_{Dz}$  são os momentos de inércia da massa do disco associados com as direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente (referencial  $R$ ; veja a Fig. 3.1).  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  e  $\omega_z$  são as velocidades angulares definidas na Eq. (3.3).

As expressões da energia cinética para o eixo e para a massa desbalanceada  $m_u$  são dadas por:

$$\begin{aligned}T_E &= \frac{1}{2} \rho S \int_0^L (\dot{u}_E^2 + \dot{v}_E^2 + \dot{w}_E^2) dy + \frac{1}{2} \rho \int_0^L [I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2] dy \\ T_u &= \frac{1}{2} m_u (\vec{V}_D^{R_0})^2\end{aligned}\quad (3.10)$$

onde  $T_E$  e  $T_u$  são as energias cinéticas do eixo e da massa de desbalanceamento, respectivamente. As velocidades de translação  $\dot{u}_E$ ,  $\dot{v}_E$  e  $\dot{w}_E$  são derivadas a partir de uma formulação semelhante à apresentada na Eq. (3.8) em relação a qualquer posição  $y$  ao longo do eixo (veja a Fig. 3.1).  $I_x$ ,  $I_y$  e  $I_z$  são os momentos de inércia de área do eixo de acordo com as direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.  $\rho$  é a densidade do material,  $S$  é a área da secção transversal do eixo e  $L$  é o comprimento do eixo. Adicionalmente,

$$\begin{aligned}\vec{V}_D^{R_0} &= \left( \frac{d\vec{OD}}{dt} \right)_{R_0} = \left( \frac{d\vec{OD}}{dt} \right)_{R_S} + \vec{\Omega}_{R_S}^{R_0} \times (\vec{OD})_{R_S} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} \dot{X} + \dot{u} + d\Omega \cos \Omega t + \dot{\beta}_S(Z + w + d\Omega \cos \Omega t) - \dot{\gamma}_S(Y + y) \\ \dot{Y} + \dot{\gamma}_S(X + u + d\Omega \sin \Omega t) - \dot{\alpha}_S(Z + w + d\Omega \cos \Omega t) \\ \dot{Z} + \dot{w} - d\Omega \sin \Omega t + \dot{\alpha}_S(Y + y) - \dot{\beta}_S(X + u - d\Omega \sin \Omega t) \end{array} \right\}_{R_S}\end{aligned}\quad (3.11)$$

onde  $\vec{V}_D^{R_0}$  é a velocidade de translação do ponto  $D$  expressa em  $R_s$  em relação ao referencial  $R_0$  (ver Fig. 3.4) e  $d$  é a distância da massa de desbalanceamento  $m_u$  a partir do centro geométrico do eixo na posição  $C$ .

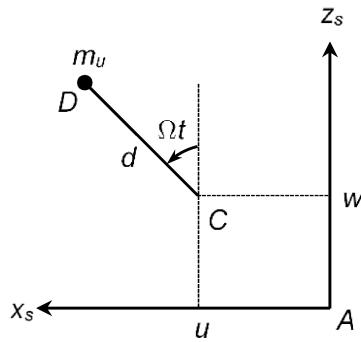


Figura 3.4 – Massa de desbalanceamento.

Neste caso, a posição do ponto  $D$  (vetor  $\vec{OD}$ ; ver a Fig. 3.1 e Fig. 3.4) em relação ao referencial  $R_s$  é definida pela Eq. (3.12).

$$\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{CD} = \begin{Bmatrix} X + u(y, t) + d \sin \Omega t \\ Y + y \\ Z + w(y, t) + d \cos \Omega t \end{Bmatrix}_{R_s} \quad (3.12)$$

É importante ressaltar que a energia de deformação  $U$  do eixo não é modificada pelo movimento da base do rotor (DUCHEMIN, 2003). Isso ocorre porque a energia de deformação depende apenas das restrições adotadas (mancais). Assim, a deformação do eixo não depende do movimento da base. Nesta formulação, as deformações devido à flexão do eixo são levadas em conta enquanto que os efeitos de cisalhamento são desconsiderados. A Eq. (3.13) apresenta a energia de deformação  $U$  do eixo.

$$U = \frac{1}{2} EI_m \int_0^L \left[ \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \right] dy \quad I_m = \frac{I_x + I_z}{2} \quad (3.13)$$

onde  $E$  é o módulo de Young do eixo.

Os mancais são representados por coeficientes de rigidez e amortecimento ( $k$  e  $c$ , respectivamente), introduzidos nas equações do movimento do rotor embarcado (referencial  $R_s$ ) a partir do trabalho virtual das forças de sustentação que atuam no eixo. A disposição dos

coeficientes de rigidez ( $k_{xx}$ ,  $k_{xz}$ ,  $k_{zx}$  e  $k_{zz}$ ) e amortecimento ( $d_{xx}$ ,  $d_{xz}$ ,  $d_{zx}$  e  $d_{zz}$ ) entre o mancal e o eixo é ilustrada pela Fig. 3.5.

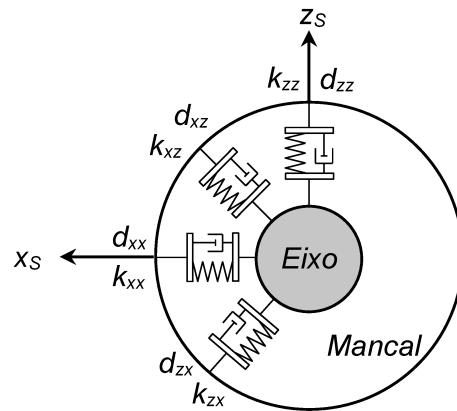


Figura 3.5 – Coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais (Adaptado de: CAVALINI Jr, 2013).

O trabalho virtual das forças que atuam sobre o eixo é apresentado na Eq. (3.14), que está associado as direções  $x_s$  e  $z_s$ .

$$\delta W = F_u \delta u + F_w \delta w \quad (3.14)$$

As forças de sustentação dos mancais  $F_u$  e  $F_w$  são dadas pela Eq. (3.15). As matrizes de rigidez  $\mathbf{K}_m$  e amortecimento  $\mathbf{D}_m$ , mostradas na Eq. (3.15), são incorporadas convenientemente na matriz de rigidez em nível global do modelo EF do rotor.

$$\begin{bmatrix} F_u \\ F_w \end{bmatrix} = -\underbrace{\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xz} \\ k_{zx} & k_{zz} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}_m} \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix} - \underbrace{\begin{bmatrix} d_{xx} & d_{xz} \\ d_{zx} & d_{zz} \end{bmatrix}}_{\mathbf{D}_m} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

### 3.2 Formulação em Elementos Finitos

O disco é considerado rígido e é modelado por um único elemento de massa  $m_D$  (centro de massa em  $C$ ), possuindo quatro graus de liberdade, dois associados à translação ao longo das direções  $x$  e  $z$  do referencial  $R$  (deslocamento  $u$  e  $w$ ) e dois de rotação ( $\theta$  e  $\psi$ ), como é mostrado na Fig. 3.6.

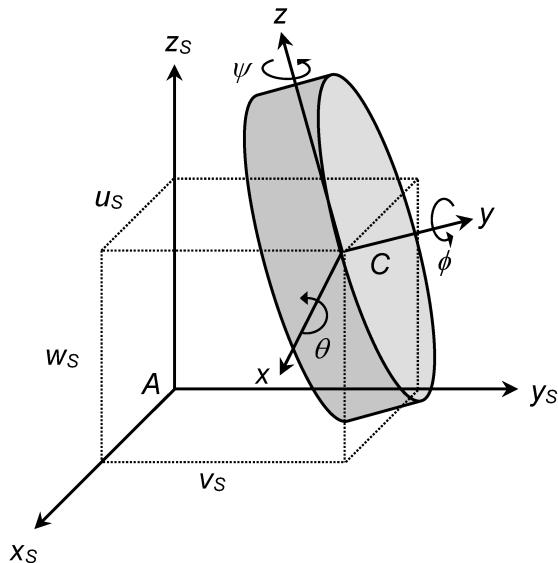


Figura 3.6 – Representação do elemento de disco (Adaptado de: CAVALINI Jr, 2013).

O vetor de coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}_D$  associado ao disco é apresentado na Eq. (3.16).

$$\mathbf{q}_D = [u \ w \ \theta \ \psi]^T \quad (3.16)$$

O disco é modelado considerando apenas sua energia cinética (disco rígido), conforme mostra a Eq. (3.7). Assim, aplicando as equações de Lagrange em relação ao vetor de coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}_D$ , chega-se a:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_D}{\partial \dot{\mathbf{q}}_D} \right) - \frac{\partial T_D}{\partial \mathbf{q}_D} = \mathbf{M}_D \ddot{\mathbf{q}}_D + (\mathbf{D}_D + \mathbf{D}_D^*) \dot{\mathbf{q}}_D + \mathbf{K}_D^* \mathbf{q}_D - \mathbf{F}_D^* \quad (3.17)$$

onde  $\mathbf{M}_D$  e  $\mathbf{D}_D$  são as matrizes clássicas de massa e de efeito giroscópico do disco. As matrizes  $\mathbf{D}^*_D$  e  $\mathbf{K}^*_D$  estão relacionadas com o movimento da base, bem como o vetor  $\mathbf{F}^*_D$ . Estas matrizes e vetores são apresentados a seguir.

$$\mathbf{M}_D = \begin{bmatrix} m_D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{Dm} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{Dm} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$\mathbf{C}_D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_{Dy}\Omega \\ 0 & 0 & I_{Dy}\Omega & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\mathbf{D}^*_D = \begin{bmatrix} 0 & 2m_D\dot{\beta}_S & 0 & 0 \\ -2m_D\dot{\beta}_S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\dot{\beta}_S I_{Dm} - \dot{\beta}_S I_{Dy} \\ 0 & 0 & -2\dot{\beta}_S I_{Dm} + \dot{\beta}_S I_{Dy} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$\mathbf{K}^*_D = \begin{bmatrix} -m_D(\dot{\gamma}_S^2 + \dot{\beta}_S^2) & m_D(\dot{\alpha}_S\dot{\gamma}_S + \ddot{\beta}_S) & 0 & 0 \\ m_D(\dot{\alpha}_S\dot{\gamma}_S - \ddot{\beta}_S) & -m_D(\dot{\alpha}_S^2 + \dot{\beta}_S^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (I_{Dm} - I_{Dy})(\dot{\gamma}_S^2 - \dot{\beta}_S^2) + I_{Dy}\dot{\beta}_S\Omega & I_{Dy}\dot{\alpha}_S\dot{\gamma}_S + (-\dot{\alpha}_S\dot{\gamma}_S + \ddot{\beta}_S)I_{Dm} \\ 0 & 0 & (\dot{\alpha}_S\dot{\gamma}_S + \ddot{\beta}_S)(I_{Dy} - I_{Dm}) & (I_{Dm} - I_{Dy})(\dot{\alpha}_S^2 - \dot{\beta}_S^2) + I_{Dy}\dot{\beta}_S\Omega \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$\mathbf{F}^*_D = \begin{bmatrix} m_D[\ddot{X} - 2\dot{\gamma}_S\dot{Y} + 2\dot{\beta}_S\dot{Z} - (\dot{\gamma}_S^2 + \dot{\beta}_S^2)X + (\dot{\alpha}_S\dot{\beta}_S - \ddot{\gamma}_S)(Y + y) + (\ddot{\beta}_S + \dot{\gamma}_S\dot{\alpha}_S)Z] \\ m_D[\ddot{Z} - 2\dot{\beta}_S\dot{X} + 2\dot{\alpha}_S\dot{Y} - (\ddot{\beta}_S - \dot{\alpha}_S\dot{\gamma}_S)X + (\ddot{\alpha}_S + \dot{\beta}_S\dot{\gamma}_S)(y + Y) - (\dot{\beta}_S^2 + \dot{\alpha}_S^2)Z] \\ I_{Dm}(\ddot{\alpha}_S + \dot{\beta}_S\dot{\gamma}_S) - I_{Dm}\dot{\gamma}_S(\dot{\beta}_S + \Omega) \\ I_{Dm}(\ddot{\gamma}_S - \dot{\alpha}_S\dot{\beta}_S) + I_{Dm}\dot{\alpha}_S(\dot{\beta}_S + \Omega) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

onde  $I_{Dm} = (I_{Dx} + I_{Dz}) / 2$ .

O modelo EF do eixo é derivado com base na teoria de viga de Euler-Bernoulli com seção transversal circular e diâmetro constante, conforme mostra o elemento finito de comprimento  $L$  apresentado na Fig. 3.7. O elemento finito do eixo possui dois nós, sendo que cada

nó possui quatro graus de liberdade, sendo dois deslocamentos e duas rotações (deslocamentos  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $w_1$  e  $w_2$ ; e rotações  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\psi_1$  e  $\psi_2$ ).

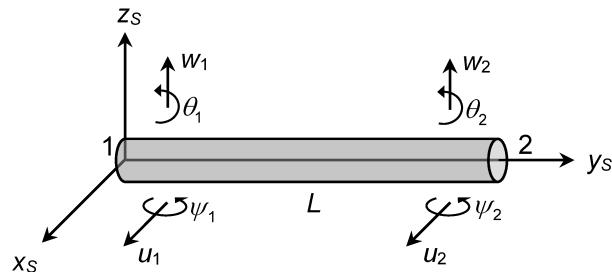


Figura 3.7 – Graus de liberdade associados ao elemento finito do eixo (Adaptado de: CAVALINI Jr, 2013).

O vetor de deslocamentos nodais do eixo é dado por:

$$\mathbf{q}_E = [u_1 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad \psi_1 \quad u_2 \quad w_2 \quad \theta_2 \quad \psi_2]^T \quad (3.23)$$

O vetor  $\mathbf{q}_E$  pode ser representado da seguinte forma:

$$\mathbf{q}_u = [u_1 \quad w_1 \quad \theta_1 \quad \psi_1]^T \quad (3.24)$$

$$\mathbf{q}_w = [u_2 \quad w_2 \quad \theta_2 \quad \psi_2]^T$$

A partir das relações apresentadas na Eq. (3.25) é possível construir o elemento finito do eixo.

$$u = \mathbf{N}_1(y)\mathbf{q}_u \quad (3.25)$$

$$w = \mathbf{N}_2(y)\mathbf{q}_w$$

onde os vetores  $\mathbf{N}_1$  e  $\mathbf{N}_2$  correspondem às funções de forma de um elemento de viga em flexão apresentado por Zienkiewicz (1979).

$$\begin{aligned}\mathbf{N}_1(y) &= \left[ 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; \quad -y + \frac{2y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2}; \quad \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \quad \frac{y^2}{L} - \frac{y^3}{L^2} \right] \\ \mathbf{N}_2(y) &= \left[ 1 - \frac{3y^2}{L^2} + \frac{2y^3}{L^3}; \quad y - \frac{2y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2}; \quad \frac{3y^2}{L^2} - \frac{2y^3}{L^3}; \quad -\frac{y^2}{L} + \frac{y^3}{L^2} \right]\end{aligned}\quad (3.26)$$

Aplicando a Eq. (3.26) na energia cinética do eixo (Eq. (3.10)) e substituindo as equações resultantes nas equações de Lagrange, obtém-se a seguinte relação:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_E}{\partial \dot{\mathbf{q}}_E} \right) - \frac{\partial T_E}{\partial \mathbf{q}_E} = \mathbf{M}_E \ddot{\mathbf{q}}_E + \mathbf{D}_E \dot{\mathbf{q}}_E + \mathbf{K}_E \mathbf{q}_E - \mathbf{F}_E^* \quad (3.27)$$

As matrizes  $\mathbf{M}_E$ ,  $\mathbf{D}_E$  e  $\mathbf{K}_E$  e o vetor  $\mathbf{F}_E^*$  são dados por:

$$\mathbf{M}_E = \rho S \mathbf{M}_1 + \rho I_m \mathbf{M}_2 \quad (3.28)$$

$$\mathbf{D}_E = 2\rho(\dot{\beta}_S S \mathbf{D}_1 - I_m \Omega \mathbf{D}_2) \quad (3.29)$$

$$\mathbf{K}_E = \rho S (\mathbf{K}_1 + \ddot{\beta}_S \mathbf{D}_1 + \dot{\gamma}_S \dot{\alpha}_S \mathbf{K}_2) + \rho I_m [\mathbf{K}_3 - (\ddot{\beta}_S + \dot{\gamma}_S \dot{\alpha}_S) \mathbf{M}_4 + 2\dot{\beta}_S (\dot{\beta}_S + \Omega) \mathbf{M}_2] \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_E^* &= \rho S [\ddot{X} + 2\dot{\beta}_S \dot{Z} - 2\dot{\gamma}_S \dot{Y} + (\ddot{\beta}_S + \dot{\gamma}_S \dot{\alpha}_S) Z + (\dot{\alpha}_S \dot{\beta}_S - \dot{\gamma}_S) Y - (\dot{\gamma}_S^2 + \dot{\beta}_S^2) X] \mathbf{V}_1 \\ &+ [\ddot{Z} + 2\dot{\alpha}_S \dot{Y} - 2\dot{\beta}_S \dot{X} + (\dot{\alpha}_S \dot{\gamma}_S - \dot{\beta}_S) X + (\ddot{\alpha}_S + \dot{\gamma}_S \dot{\beta}_S) Y - (\dot{\alpha}_S^2 + \dot{\beta}_S^2) Z] \mathbf{V}_2 \\ &+ (\dot{\alpha}_S \dot{\beta}_S - \dot{\gamma}_S) \mathbf{V}_3 + (\ddot{\alpha}_S + \dot{\gamma}_S \dot{\beta}_S) \mathbf{V}_4 \\ &+ \rho I_m \{(\dot{\alpha}_S \dot{\beta}_S - \dot{\gamma}_S) \mathbf{V}_5 + (\ddot{\alpha}_S + \dot{\gamma}_S \dot{\beta}_S) \mathbf{V}_6 - 2(\dot{\beta}_S + \Omega)(\dot{\alpha}_S \mathbf{V}_5 + \dot{\gamma}_S \mathbf{V}_6)\}\end{aligned}\quad (3.31)$$

As matrizes  $\mathbf{M}_1$ ,  $\mathbf{M}_2$ ,  $\mathbf{M}_4$ ,  $\mathbf{D}_1$ ,  $\mathbf{D}_2$ ,  $\mathbf{K}_1$ ,  $\mathbf{K}_2$  e  $\mathbf{K}_3$ , bem como os vetores  $\mathbf{V}_1$ ,  $\mathbf{V}_2$ ,  $\mathbf{V}_3$ ,  $\mathbf{V}_4$ ,  $\mathbf{V}_5$  e  $\mathbf{V}_6$  são dados por:

$$\mathbf{M}_1 = \frac{L}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 13L \\ & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ & & 4L^2 & 0 & 0 & 13L & -3L^2 & 0 \\ & & & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ & & & & 156 & 0 & 0 & 22L \\ & & & & & 156 & -22L & 0 \\ & & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

*SIM.*

$$\mathbf{M}_2 = \frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ & & 4L^2 & 0 & 0 & -3L & -L^2 & 0 \\ & & & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ & & & & 36 & 0 & 0 & 3L \\ & & SIM. & & & 36 & -3L & 0 \\ & & & & & & 4L^2 & 0 \\ & & & & & & & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$\mathbf{M}_4 = \frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ & 0 & 0 & -3L & -36 & 0 & 0 & -3L \\ & & 0 & -4L^2 & -3L & 0 & 0 & L^2 \\ & & & 0 & 0 & 3L & L^2 & 0 \\ & & & & 0 & 36 & -3L & 0 \\ & & SIM. & & & 0 & 0 & 3L \\ & & & & & & 0 & -4L^2 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

$$\mathbf{D}_1 = \frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ & 0 & 0 & 22L & -54 & 0 & 0 & -13L \\ & & 0 & 4L^2 & -13L & 0 & 0 & -3L^2 \\ & & & 0 & 0 & -13L & 3L^2 & 0 \\ & & & & 0 & 156 & -22L & 0 \\ & & ANTISIM. & & & 0 & 0 & -22L \\ & & & & & & 0 & 4L^2 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\mathbf{D}_2 = \frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 0 & 36 & 3L & 0 & 0 & -36 & 3L & 0 \\ & 0 & 0 & 3L & 36 & 0 & 0 & 3L \\ & & 0 & 4L^2 & 3L & 0 & 0 & -L^2 \\ & & & 0 & 0 & 3L & L^2 & 0 \\ & & & & 0 & 36 & -3L & 0 \\ & & ANTISIM. & & & 0 & 0 & -3L \\ & & & & & & 0 & 4L^2 \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$\mathbf{K}_1 = \frac{L}{420} \begin{bmatrix} -156c_1 & 0 & 0 & 22Lc_1 & -54c_1 & 0 & 0 & -13Lc_1 \\ -156c_2 & -22Lc_2 & 0 & 0 & -54c_2 & 13Lc_2 & 0 & 0 \\ -4L^2c_2 & 0 & 0 & -13Lc_2 & 3L^2c_2 & 0 & 0 & 0 \\ -4L^2c_1 & 13Lc_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3L^2c_1 & 0 \\ -156c_1 & 0 & 0 & -156c_2 & 0 & 22Lc_2 & 0 & -22Lc_1 \\ -156c_2 & 0 & 0 & -4L^2c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4L^2c_1 & 0 & 0 & -4L^2c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4L^2c_2 & 0 & 0 & -4L^2c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c_1 = \dot{\beta}_s^2 + \dot{\gamma}_s^2 \quad c_2 = \dot{\alpha}_s^2 + \dot{\beta}_s^2 \quad (3.37)$$

$$\mathbf{K}_2 = \frac{L}{420} \begin{bmatrix} 0 & 156 & 22L & 0 & 0 & 54 & -13L & 0 \\ 0 & 0 & -22L & 54 & 0 & 0 & 0 & 13L \\ 0 & -4L^2 & 13L & 0 & 0 & 0 & 3L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -13L & 3L^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 0 & -22L & 0 & 0 & 22L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$\mathbf{K}_3 = \frac{1}{30L} \begin{bmatrix} 36c_2 & 0 & 0 & -3Lc_2 & -36c_2 & 0 & 0 & -3Lc_2 \\ 36c_1 & 3Lc_1 & 0 & 0 & -36c_1 & 3Lc_1 & 0 & 0 \\ 4L^2c_1 & 0 & 0 & -3Lc_1 & -L^2c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 4L^2c_2 & 3Lc_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -L^2c_2 & 0 \\ 36c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3Lc_2 & 0 \\ 36c_1 & -3Lc_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4L^2c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4L^2c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$c_1 = \dot{\alpha}_s^2 - \dot{\beta}_s^2 \quad c_2 = \dot{\gamma}_s^2 - \dot{\beta}_s^2$$

$$\mathbf{V}_1 = \frac{L}{12} \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ -L \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ L \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}_2 = \frac{L}{12} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ L \\ 0 \\ 0 \\ 6 \\ -L \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}_3 = \frac{L^2}{60} \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \\ -2L \\ 21 \\ 0 \\ 0 \\ 3L \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 9 \\ 2L \\ 0 \\ 0 \\ 21 \\ -3L \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}_5 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{V}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Aplicando a Eq. (3.26) na energia potencial do eixo (Eq. (3.13)) e substituindo as equações resultantes nas equações de Lagrange, obtém-se a seguinte relação:

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}_E} = EI_m \mathbf{K}_{u1} \mathbf{q}_E \quad (3.41)$$

onde a matriz  $\mathbf{K}_{u1}$  é dada por:

$$\mathbf{K}_{u1} = \frac{1}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & -6L & -12 & 0 & 0 & -6L \\ 12 & 6L & 0 & 0 & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 4L^2 & 0 & 0 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 & 0 \\ 4L^2 & 6L & 0 & 0 & 0 & 2L^2 & 0 & 0 \\ 12 & 0 & 0 & 6L & 0 & 0 & 6L & 0 \\ S/M. & 12 & -6L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 4L^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & 4L^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

A massa de desbalanceamento do rotor é incorporada nas equações do movimento do rotor apenas por sua energia cinética, como apresentado na Eq. (3.10). Sendo assim, aplicando as equações de Lagrange, tem-se:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T_u}{\partial \dot{\mathbf{q}}_u} \right) - \frac{\partial T_u}{\partial \mathbf{q}_u} = m_u d \begin{bmatrix} (\ddot{\beta}_s + \dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s) \cos(\Omega t + \mu) - [(\Omega + \dot{\beta}_s)^2 + \dot{\gamma}_s^2] \sin(\Omega t + \mu) \\ (-\ddot{\beta}_s + \dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s) \sin(\Omega t + \mu) - [(\Omega + \dot{\beta}_s)^2 + \dot{\alpha}_s^2] \cos(\Omega t + \mu) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Portanto, as forças devidas ao desbalanceamento  $F_{du}$  e  $F_{dw}$  a serem aplicadas em um nó do modelo de EF ao longo das direções x e z para uma massa situada em uma posição angular  $\mu$  são dadas matricialmente pela Eq. (3.44).

$$\begin{bmatrix} F_{du} \\ F_{dw} \\ F_{d\theta} \\ F_{d\psi} \end{bmatrix} = m_u d \begin{bmatrix} (\ddot{\beta}_s + \dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s) \cos(\Omega t + \mu) - [(\Omega + \dot{\beta}_s)^2 + \dot{\gamma}_s^2] \sin(\Omega t + \mu) \\ (-\ddot{\beta}_s + \dot{\gamma}_s \dot{\alpha}_s) \sin(\Omega t + \mu) - [(\Omega + \dot{\beta}_s)^2 + \dot{\alpha}_s^2] \cos(\Omega t + \mu) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Neste contexto, a equação do movimento do rotor embarcado na sua forma matricial é apresentada na Eq. (3.45).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + [\mathbf{D} + \mathbf{D}^*]\dot{\mathbf{q}} + [\mathbf{K} + \mathbf{K}^*]\mathbf{q} = \mathbf{W} + \mathbf{F} + \mathbf{F}^* \quad (3.45)$$

onde  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{K}$  são as matrizes de massa, rigidez e do efeito giroscópico/amortecimento do sistema rotativo, respectivamente. Por exemplo, as matrizes  $\mathbf{M}_D$  e  $\mathbf{M}_E$  (Eq. (3.18) e Eq. (3.28), respectivamente) são agrupadas convenientemente para formar a matriz  $\mathbf{M}$  mostrada na Eq. (3.45). Os termos adicionais associados ao movimento da base são incorporados nas matrizes  $\mathbf{D}^*$  e  $\mathbf{K}^*$ , bem como o vetor de força  $\mathbf{F}^*$ . O vetor  $\mathbf{F}$  contém as forças de desbalanceamento.  $\mathbf{W}$  representa o peso dos componentes da máquina rotativa. Neste caso,  $\mathbf{q} = \mathbf{q}_E$ .

Para obter as respostas de vibração do rotor embarcado, a Eq. (3.45) foi integrada numericamente utilizando o método de Newton-Raphson em conjunto com as regras trapezoidais de Newmark. Este processo de integração é apresentado em detalhes por Cavalini Jr et al. (2015a).

*Página intencionalmente deixada em branco.*

# CAPÍTULO IV

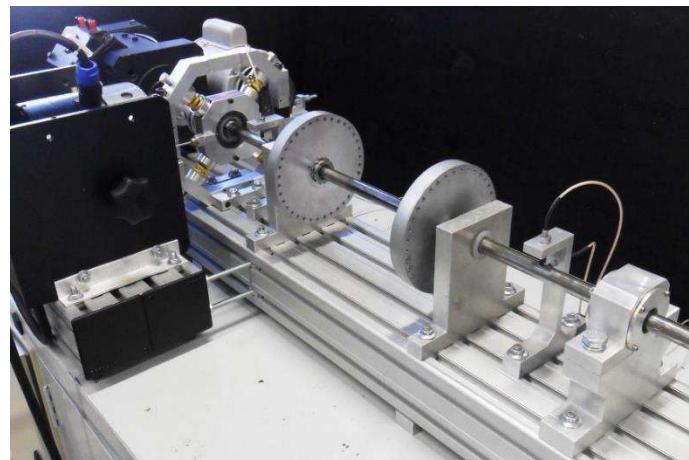
## Aplicação Numérica

Este capítulo apresenta os resultados numéricos obtidos do modelo de elementos finitos (modelo EF) do rotor embarcado aplicado para uma bancada de testes. Diferentes análises foram realizadas buscando caracterizar o comportamento dinâmico do rotor, a saber: *i.* influência dos parâmetros  $\dot{\alpha}_s$ ,  $\dot{\beta}_s$ ,  $\dot{\gamma}_s$ , e  $\ddot{\beta}_s$  nas velocidades críticas da bancada de teste; *ii.* aceleração constante aplicada ao longo da direção  $z_0$ ; *iii.* diferentes deslocamentos nas direções  $x_0$  e  $z_0$ ; *iv.* excitação senoidal aplicada em torno da direção  $x_s$ ; *v.* *run-up* considerando uma excitação senoidal da base.

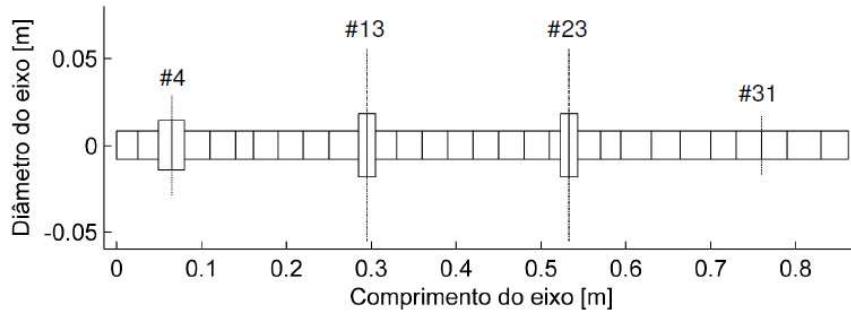
### 4.1 Bancada de Testes

A Fig. 4.1a mostra a bancada de testes do rotor utilizada como referência na análise do comportamento dinâmico do sistema, que é matematicamente representada por um modelo com 33 elementos finitos (Fig. 4.1b). A bancada é composta por um eixo flexível de aço com um comprimento de 860 mm e 17 mm de diâmetro ( $E = 205 \text{ GPa}$ ,  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$  e  $\nu = 0,29$ ), dois discos rígidos  $D_1$  (nó #13 do modelo EF; 2.637 kg) e  $D_2$  (nó #23; 2,649 kg), ambos de aço e com 150 mm de diâmetro e 20 mm de espessura ( $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ ) e dois mancais de rolamento ( $B_1$  e  $B_2$  localizados nos nós #4 e #31, respectivamente). Sensores de deslocamento estão dispostos ortogonalmente nos nós #8 ( $S_{8xs}$  e  $S_{8zs}$ ) e #28 ( $S_{28xs}$  e  $S_{28zs}$ ) para medir a vibração do eixo. O sistema é movido por um motor elétrico do tipo CC.

Um procedimento de ajuste foi usado para obter um modelo EF representativo (Fig. 4.1b). Neste sentido, utilizou-se a técnica de otimização heurística denominada como Evolução Diferencial (STORN; PRICE, 1995) para determinar os parâmetros desconhecidos do modelo. Os parâmetros desconhecidos foram os coeficientes de rigidez e amortecimento dos mancais, amortecimento proporcional adicionado à matriz  $\mathbf{D}$  da Eq. (3.45) (coeficientes  $\gamma$  e  $\beta$ ;  $\mathbf{D}_p = \gamma\mathbf{M} + \beta\mathbf{K}$ ) e uma rigidez de rotação  $k_{ROT}$  devido ao acoplamento entre o motor elétrico e o eixo (adicionado em torno das direções ortogonais  $x_s$  e  $z_s$  do nó #1; veja a Fig. 3.1 e a Fig. 4.1a).



a) Bancada de testes.



b) Representação esquemática.

Figura 4.1 – Máquina rotativa utilizada nas análises numéricas (Fonte: CAVALINI Jr, 2013).

O processo de ajuste do modelo foi realizado com base nas funções de resposta em frequência (FRFs) simuladas e experimentais do rotor. A função objetivo adotada neste caso é dada pela Eq. (4.1). A minimização da função objetivo foi realizada 10 vezes para determinar a solução de mínimo global do problema, considerando 100 indivíduos na população inicial do otimizador. No entanto, neste caso, apenas as regiões próximas aos picos associados as frequências naturais foram levadas em consideração para fins de ajuste.

$$\text{Objetivo} = \sum_{i=1}^n \frac{\|\mathbf{FRF}_{\text{exp},i} - \mathbf{FRF}_{\text{num},i}\|}{\|\mathbf{FRF}_{\text{exp},i}\|} \quad (4.1)$$

onde  $n$  é o número de FRFs utilizadas no procedimento,  $\mathbf{FRF}_{\text{exp}}$  representa os dados experimentais e  $\mathbf{FRF}_{\text{num}}$  corresponde aos resultados numéricos obtidos pelo modelo EF do sistema de rotativo (ver Fig. 4.1).

As FRFs experimentais foram medidas para a bancada de teste em repouso através da aplicação de forças de impacto ao longo das direções  $x_s$  e  $z_s$  de ambos os discos, separa-

damente. Os sinais de resposta foram medidos pelos dois sensores de proximidade posicionados ao longo da mesma direção de aplicação das forças de impacto, resultando em 8 FRFs. As medições foram realizadas pelo analisador Agilent® (modelo 35670A) em uma faixa de 0 a 200 Hz e passos de 0,25 Hz.

A Tab. 4.1 apresenta os parâmetros determinados no final do processo de minimização associado ao menor valor da função objetivo. A Fig. 4.2 apresenta o Diagrama de Campbell determinado a partir do modelo EF representativo da máquina rotativa. Note-se que as velocidades críticas do rotor são, aproximadamente, 1675 RPM ( $BW_1$ : velocidade crítica de *backward*), 1714 RPM ( $FW_1$ : velocidade crítica de *forward*), 5426 RPM ( $BW_2$ ), e 5912 RPM ( $FW_2$ ).

Tabela 4.1 – Parâmetros determinados pelo procedimento de atualização do modelo.

Parâmetros	Valor	Parâmetros	Valor	Parâmetros	Valor
$k_{xx} / B_1$	$8,551 \times 10^5$	$k_{xx} / B_2$	$5,202 \times 10^7$	$\gamma$	2,730
$k_{zz} / B_1$	$1,198 \times 10^6$	$k_{zz} / B_2$	$7,023 \times 10^8$	$\beta$	$4,85 \times 10^{-6}$
$d_{xx} / B_1$	7,452	$d_{xx} / B_2$	25,587	$k_{ROT}$	770,442
$d_{zz} / B_1$	33,679	$d_{zz} / B_2$	91,033		

\* $k$ : rigidez [N/m];  $d$ : amortecimento [Ns/m].

A Fig. 4.3a compara o Diagrama de Bode experimental e aquele obtido a partir do modelo EF ajustado, considerando os parâmetros mostrados na Tab. 4.1. Neste caso, o Diagrama de Bode é associado ao impacto realizado na direção  $x_s$  de  $D_1$  e ao sensor  $S_{8X}$ . Pode-se observar que a FRF gerada a partir do modelo de EF é satisfatoriamente próxima ao resultado obtido diretamente sobre a bancada de testes. A Fig. 4.3b compara a órbita experimental medida no plano  $S_8$  (tempo de aquisição total de 4 s em passos de 0,002 s, aproximadamente) com a que foi determinada pelo modelo EF ajustado. Neste caso, a velocidade de rotação do rotor é  $\Omega = 1200$  RPM e o desbalanceamento é 487,5 g.mm / 0° aplicado no disco  $D_1$ . Observe que as respostas numéricas e experimentais estão próximas, validando o procedimento de ajuste realizado.

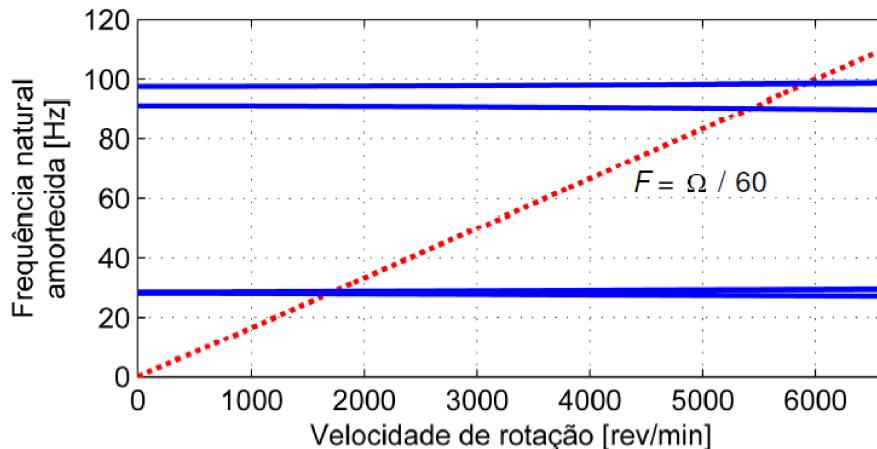
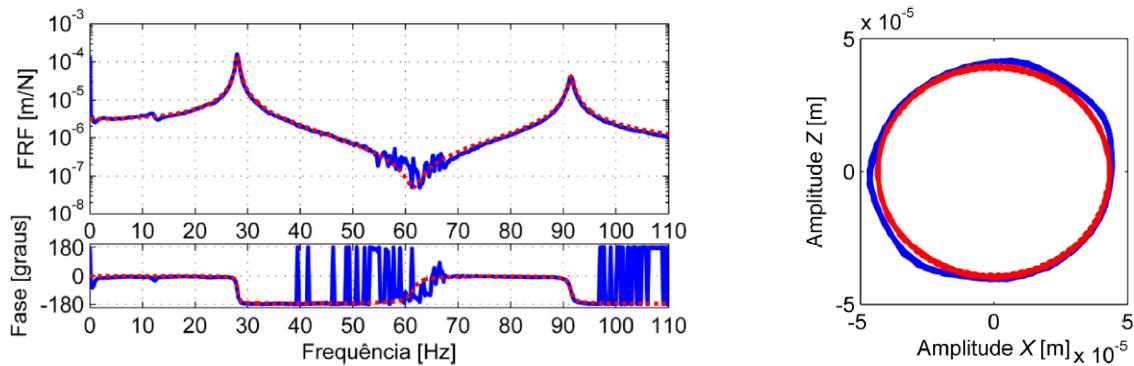


Figura 4.2 – Diagrama de Campbell da máquina rotativa (Fonte: CAVALINI Jr, 2013).



a) Diagrama de Bode (impacto ao longo da direção  $x_s$  de  $D_1$  e sensor  $S_{8x}$ ).

b) Órbita do plano  $S_8$ .

Figura 4.3 – Respostas de vibração da máquina rotativa. Resultado numérico (—) e experimental (—) (Fonte: CAVALINI Jr, 2013).

## 4.2 Simulações do Rotor Embarcado

Nesta seção, o comportamento dinâmico do modelo EF representativo é avaliado considerando diferentes excitações de base. No Capítulo III, pode-se observar que os coeficientes das matrizes  $D^*$  e  $K^*$  (ver Eq. (3.47)) mudam de acordo com as velocidades angulares  $\dot{\alpha}_s$ ,  $\dot{\beta}_s$  e  $\dot{\gamma}_s$ , bem como de acordo com a aceleração angular  $\ddot{\beta}_s$ ; todos associados à base do sistema rotativo (ver Fig. 3.1 e Eq. (3.3)). Consequentemente, as velocidades críticas do rotor mudam quando o sistema é submetido às excitações de base mencionadas.

A Fig. 4.4 apresenta como as quatro primeiras velocidades críticas da máquina rotativa analisada variam de acordo com as velocidades angulares  $\dot{\alpha}_s$  e  $\dot{\gamma}_s$ . Neste caso, a solução do problema de autovalor foi obtida considerando  $-50 \text{ rad/s} \leq \dot{\alpha}_s \leq 50 \text{ rad/s}$  e  $-50 \text{ rad/s} \leq \dot{\gamma}_s \leq 50 \text{ rad/s}$  (velocidades angulares aplicadas separadamente na base do rotor). Observe que as velocidades críticas diminuem à medida que as velocidades angulares  $\dot{\alpha}_s$  e  $\dot{\gamma}_s$  afastam-se de zero. Como esperado, diferentes comportamentos podem ser observados quando  $\dot{\alpha}_s$  e  $\dot{\gamma}_s$  são considerados devido à assimetria dos mancais (ver Tab. 4.1).

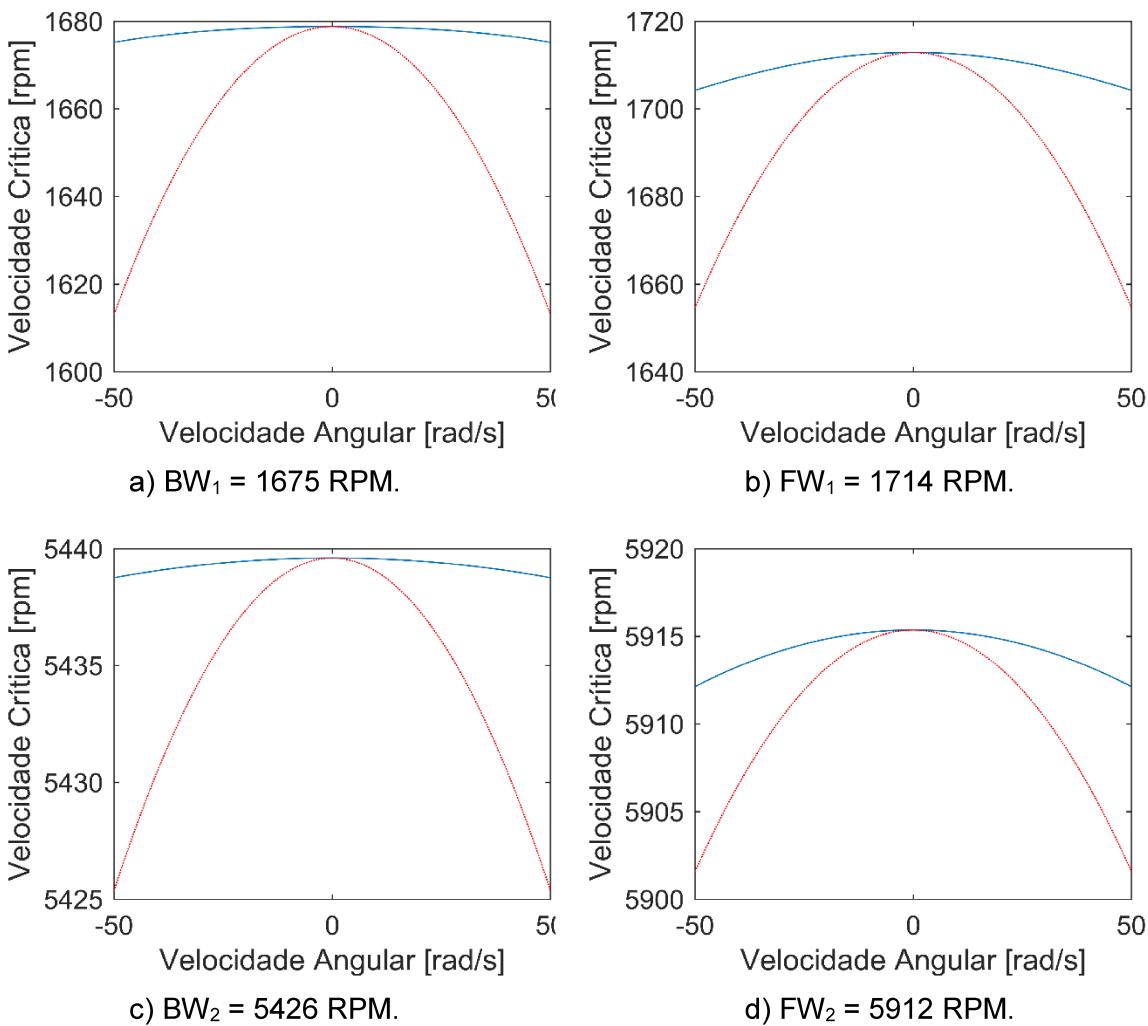


Figura 4.4 – Comportamento das velocidades críticas de acordo com as velocidades angulares  $\dot{\alpha}_s$  (—) e  $\dot{\gamma}_s$  (---) da base do rotor.

A Figura 4.5 mostra que as quatro primeiras velocidades críticas mudam significativamente quando  $-50 \text{ rad/s} \leq \dot{\beta}_s \leq 50 \text{ rad/s}$  (compare com os resultados apresentados na Fig.

4.4). Neste caso, as velocidades críticas de BW e FW diminuem e aumentam, respectivamente, quando  $\dot{\beta}_s$  afasta-se de zero. Nota-se uma variação assimétrica das velocidades críticas em correspondência com  $\dot{\beta}_s = 0$  rad/s. Este é um resultado esperado, pois o rotor está funcionando de forma semelhante aos multi-rotore coaxiais sob diferentes velocidades de rotação com direções de rotação inversas ( $\Omega$  é sempre positivo). Conforme apresentado por Lalanne e Ferraris (1998), as velocidades críticas dos multi-rotore coaxiais são afetadas pelas direções de rotação ( $\Omega$  e  $\dot{\beta}_s$  nesse caso).

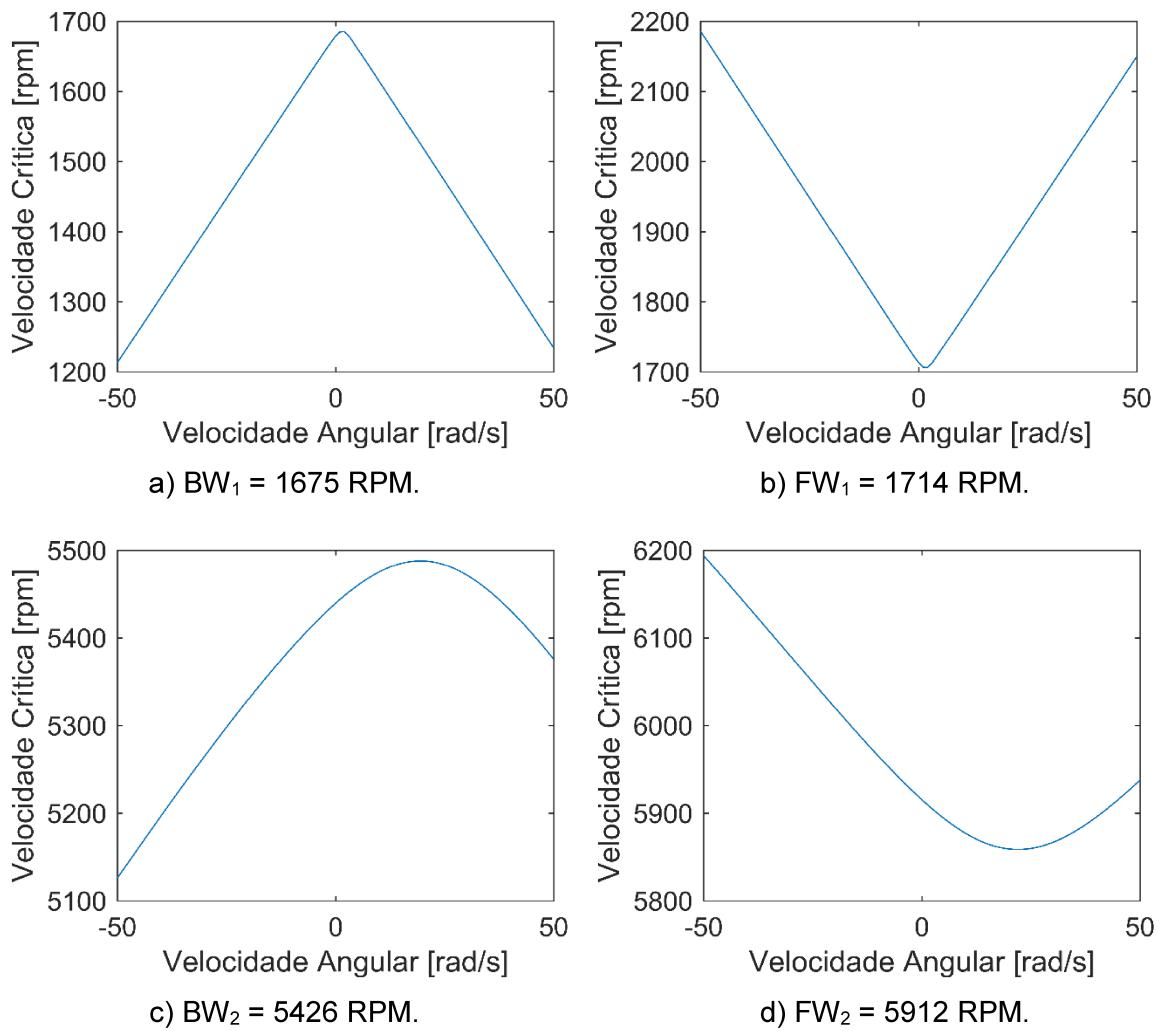


Figura 4.5 – Comportamento das velocidades críticas de acordo com a velocidade angular  $\dot{\beta}_s$  da base do rotor.

Quanto à aceleração angular  $\ddot{\beta}_s$  (veja a Fig. 4.6), pode-se observar que as velocidades críticas não mudam significativamente na faixa de aceleração analisada. A condição de re-

gime permanente do rotor é considerada para a solução dos problemas de autovalor associados. Vale ressaltar que as velocidades e acelerações angulares utilizadas para obter os resultados apresentados nas Fig. 4.4, Fig. 4.5, e Fig. 4.6 (-50 rad/s a 50 rad/s e -50 rad/s<sup>2</sup> a 50 rad/s<sup>2</sup>, respectivamente) foram escolhidas com o propósito de demonstrar sua influência sobre as velocidades críticas do rotor embarcado.

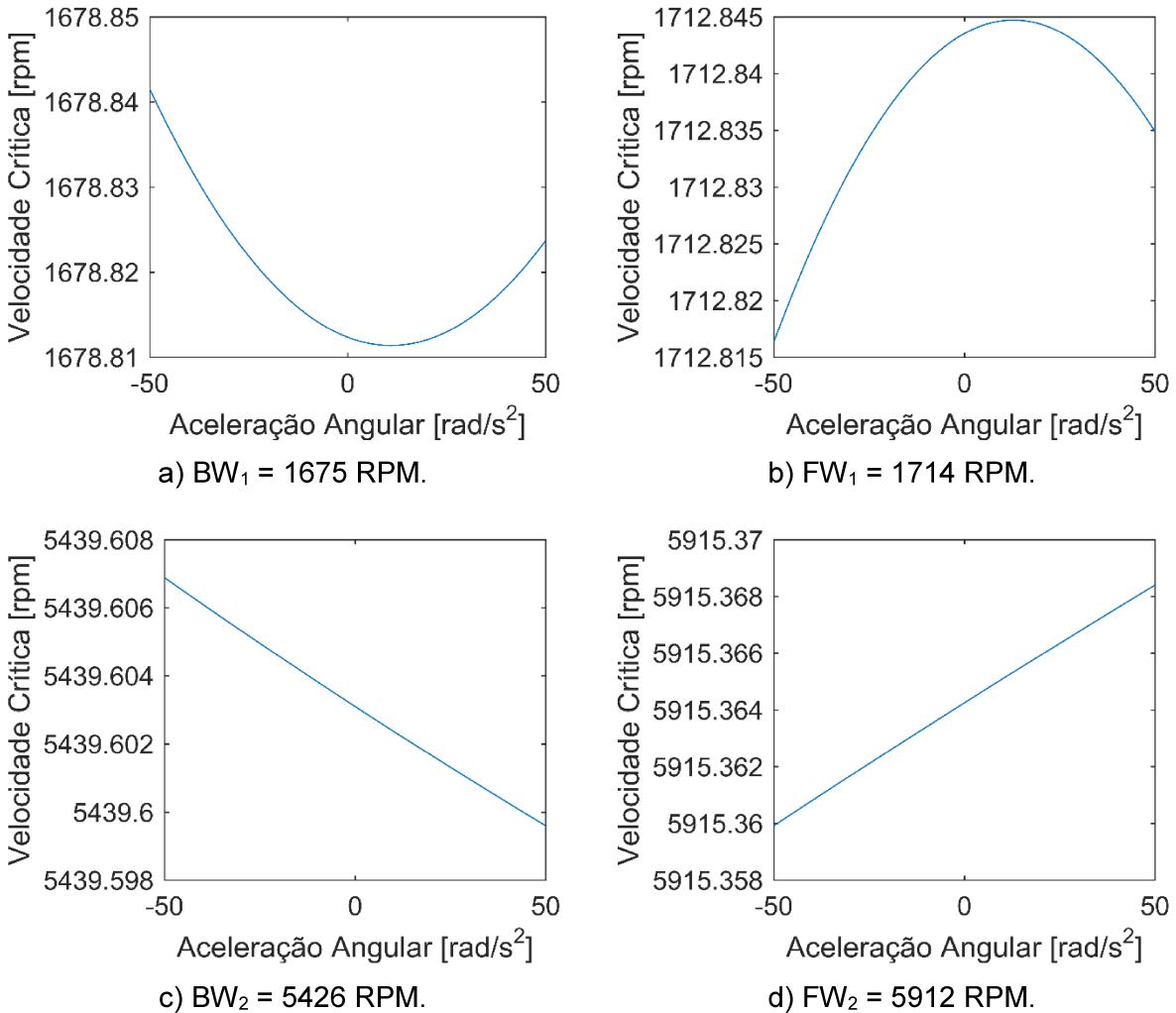


Figura 4.6 – Comportamento das velocidades críticas de acordo com a aceleração angular  $\ddot{\beta}_s$  da base do rotor.

A Figura 4.7 mostra as respostas de vibração da máquina rotativa medidas ao longo das direções  $x_s$  e  $z_s$  no plano  $S_8$  (tempo de simulação completo de 10 s em intervalos de 0,001 s), considerando o sistema excitado em quatro condições diferentes: base em repouso e aceleração constante aplicada ao longo da direção  $z_0$  (ver Fig. 3.1) de 1,5 m/s<sup>2</sup>, 5,0 m/s<sup>2</sup>, e 10,0 m/s<sup>2</sup> (Fig. 4.7a, Fig. 4.7b, Fig. 4.7c e Fig. 4.7d, respectivamente). A velocidade de rotação do rotor  $\Omega$  foi fixada em 1200 RPM com um desbalanceamento de 487,5 g.mm/0° aplicado no

disco  $D_1$ . Foram adotadas condições idênticas para obter os resultados apresentados na Fig. 4.3b. Como esperado, apenas as respostas de vibração determinadas ao longo da direção  $z_s$  mudam de acordo com a aceleração crescente. Resultados semelhantes foram obtidos considerando as respostas de vibração medidas no plano  $S_{28}$ . As amplitudes de vibração pico-a-pico e os ângulos de fase determinados ao longo das direções  $x_s$  e  $z_s$  não foram modificadas com as acelerações de base impostas. Vale ressaltar que as respostas de vibração apresentadas na Fig. 4.7a são deslocadas devido a ação da gravidade  $\mathbf{W}$  (ver Eq. (3.45)).

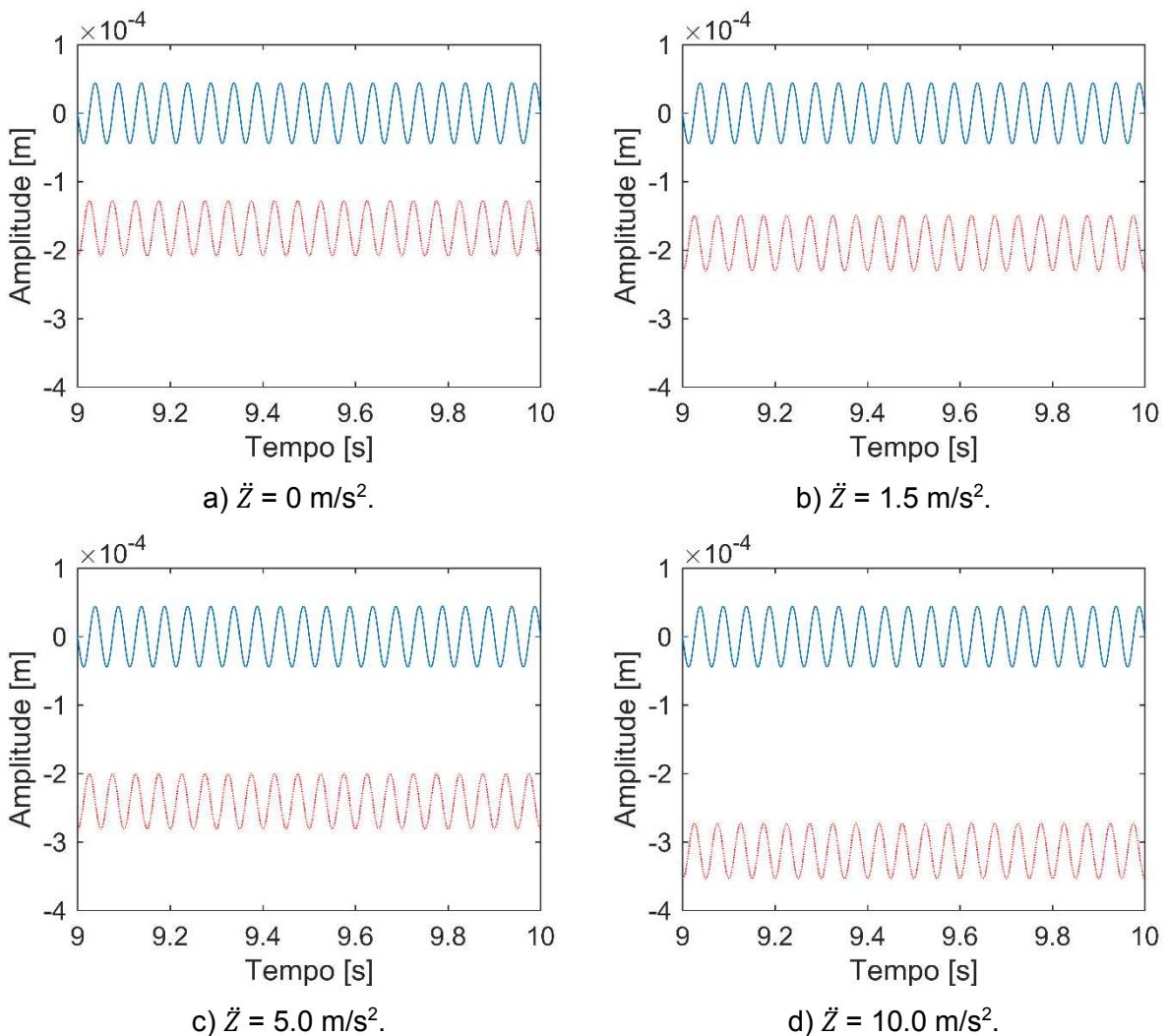


Figura 4.7 – Respostas de vibração determinadas no plano  $S_8$  do rotor considerando diferentes acelerações da base (— direção  $x_s$ ; - - - direção  $z_s$ ).

A Figura 4.8 mostra as respostas de vibração do sistema rotativo considerando a base em repouso e excitada. As respostas de vibração foram determinadas ao longo das direções  $x_s$  e  $z_s$  do plano de medição  $S_8$ . Neste caso, duas excitações diferentes foram aplicadas,

sendo o deslocamento da base do rotor ao longo das direções  $x_0$  e  $z_0$  (Fig. 4.8a e a Fig. 4.8c, respectivamente). A Fig. 4.8c apresenta uma curva de deslocamento que simula a vibração das asas de uma aeronave durante um voo típico usado como referência. É importante ressaltar que o tempo de simulação e a amplitude de deslocamento não coincidem com as excitações reais de voo.

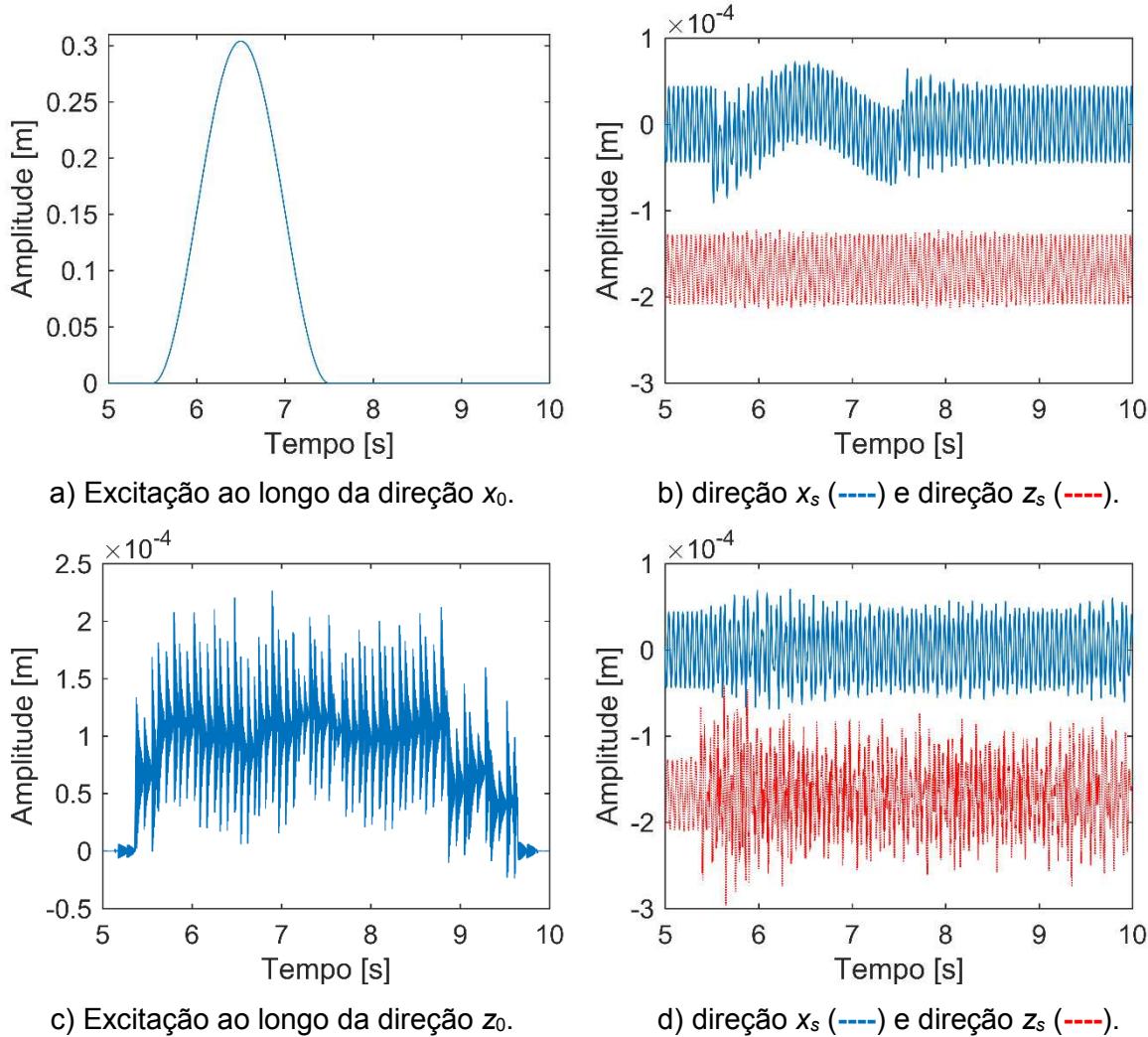


Figura 4.8 – Respostas de vibração determinadas no plano  $S_8$  do rotor considerando diferentes excitações de base.

Neste contexto, as respostas de vibração associadas a cada curva de excitação são mostradas pela Fig. 4.8b e Fig. 4.8d (excitações mostradas na Fig. 4.8a e Fig. 4.8c, respectivamente; tempo de simulação completo de 10 s em passos de 0,001 s). As acelerações máximas da base ao longo das direções  $x_s$  e  $z_s$  foram de  $1,5 \text{ m/s}^2$  e  $10 \text{ m/s}^2$ , respectivamente. A velocidade de rotação do rotor  $\Omega$  foi fixada em 1200 RPM com um desbalanceamento de 487,5 g.mm/0° aplicado no disco  $D_1$ . Nota-se que as respostas de vibração do sistema do rotor

mudaram de acordo com os deslocamentos da base impostos. Como esperado, as respostas de vibração determinadas ao longo da direção  $x_s$  são maiores que as obtidas ao longo da direção  $z_s$  quando o deslocamento da base aplicado ao longo da direção  $x_0$  é considerado (e vice-versa). Resultados semelhantes foram obtidos considerando as respostas de vibração medidas no plano  $S_{28}$ .

A Fig. 4.9 mostra as órbitas da máquina rotativa determinadas no plano de medição  $S_8$  (ver Fig. 4.1), considerando uma excitação senoidal aplicada em torno da direção  $x_s$  dada por:

$$\ddot{\alpha}_s = \Lambda \sin\left(n \frac{2\pi\Omega}{60} t\right) \quad (4.2)$$

onde  $\Lambda$  foi fixado como sendo igual a  $5 \text{ rad/s}^2$  e  $n$  é uma constante utilizada para produzir excitações da base com frequências de excitação supersíncronas da velocidade de operação da máquina rotativa. Neste caso  $n = 2, 3, 4$  e  $5$  (Fig. 4.9a, 4.9b, 4.9c, e 4.9d, respectivamente). As escalas utilizadas para as direções  $x_s$  e  $z_s$  são diferentes para proporcionar uma melhor visualização dos efeitos dinâmicos sobre as órbitas do rotor. A amplitude de excitação foi escolhida de forma a melhorar a visualização do efeito nas órbitas do rotor. A velocidade de operação do rotor  $\Omega$  foi mantida em 1200 RPM com um desbalanceamento de 487,5 g.mm/0° aplicado no disco  $D_1$ . Observe que a forma das órbitas do rotor muda de acordo com o movimento da base. Resultados semelhantes foram obtidos considerando as respostas de vibração medidas no plano  $S_{28}$ .

A Fig. 4.10 mostra as órbitas do sistema rotativo determinadas no plano de medição  $S_8$  considerando uma excitação senoidal aplicada em torno da direção  $x_s$  como mostra a Eq. (4.3).

$$\ddot{\alpha}_s = \Lambda \sin\left(n \frac{2\pi\Omega_{cr}}{60} t\right) \quad (4.3)$$

onde  $\Lambda$  foi fixado como sendo igual a  $2 \text{ rad/s}^2$ ,  $\Omega_{cr}$  é uma velocidade crítica do rotor ( $\Omega_{cr} = 1700 \text{ RPM}$ ;  $BW_1 = 1675 \text{ RPM}$  e  $FW_1 = 1714 \text{ RPM}$ ), e  $n$  é uma constante utilizada para produzir excitações subsíncronas de  $\Omega_{cr}$ . Neste caso,  $n = 1/5, 1/4, 1/3$ , e  $1/2$  (Fig. 4.10a, 4.10b, 4.10c, e 4.10d, respectivamente). A velocidade de operação do rotor  $\Omega$  foi fixada em 1200 RPM com um desbalanceamento de 487,5 g.mm/0° aplicado no disco  $D_1$  (valor adotado para determinar os resultados apresentados na Fig. 4.9). Nota-se que evidentes laços internos são observados

nas órbitas do rotor quando os movimentos da base são levados em conta. Resultados semelhantes foram obtidos considerando as respostas de vibração medidas no plano  $S_{28}$  e a terceira e quarta velocidades críticas da máquina rotativa na Eq. (4.3).

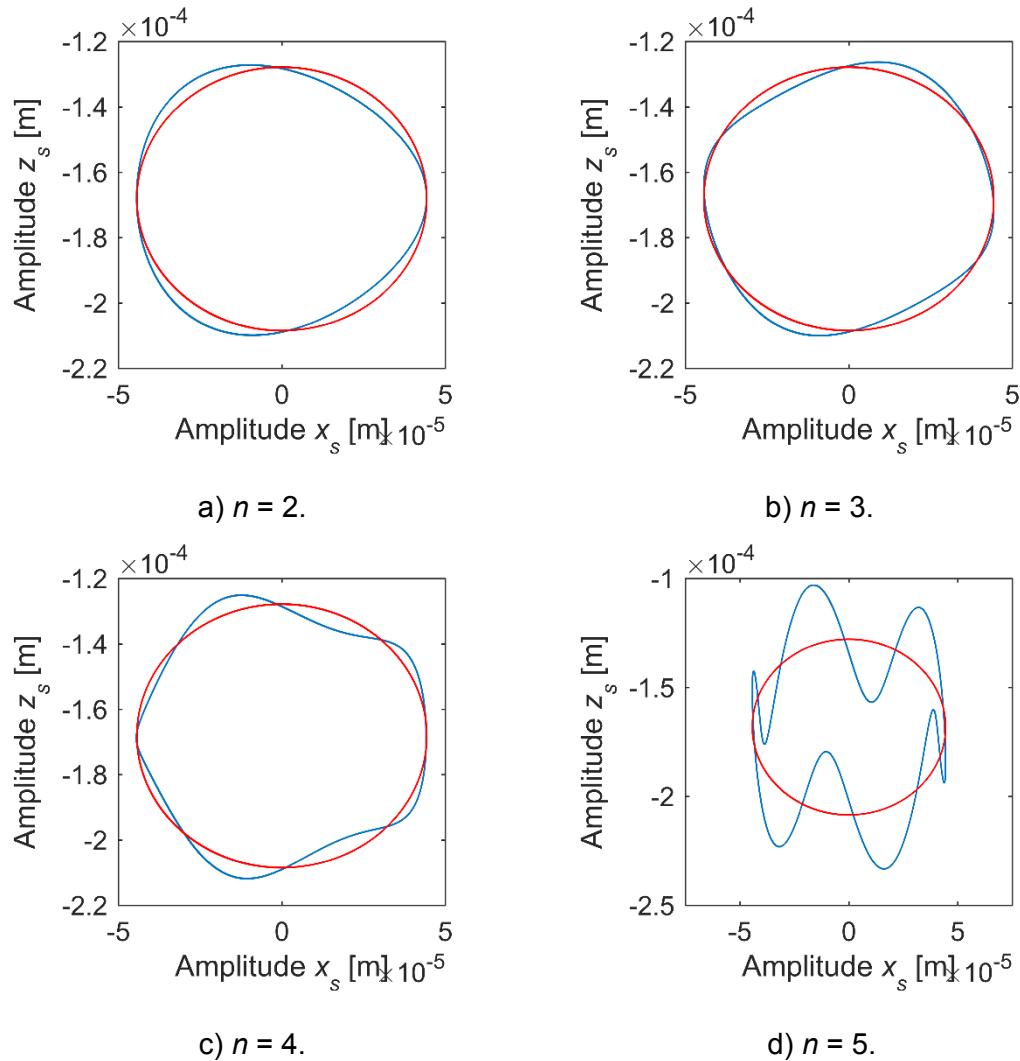


Figura 4.9 – Órbitas determinadas no plano  $S_8$  considerando excitações senoidais aplicadas em torno da direção  $x_s$  com frequências de excitação supersíncronas da velocidade de operação do rotor (--- base em repouso; ---- excitação da base).

As excitações consideradas na Fig. 4.10 são condições críticas de operação para o sistema embarcado. Portanto, a Fig. 4.11a, Fig. 4.11b, Fig. 4.12a e Fig. 4.12b mostram as respostas de vibração da máquina rotativa determinadas no plano  $S_8$  para um procedimento quase-estático de *run-up* (0-6500 RPM em 100 s), considerando uma excitação senoidal da base dada pela Eq. (4.3). Neste caso,  $n = 1/3$  e  $1/2$  (Fig. 4.11 e Fig. 4.12, respectivamente). As

Fig. 4.11c, Fig. 4.11d, Fig. 4.12c e Fig. 4.12d mostram a diferença de amplitude entre as respostas de vibração da máquina para os casos da base em repouso e excitada.

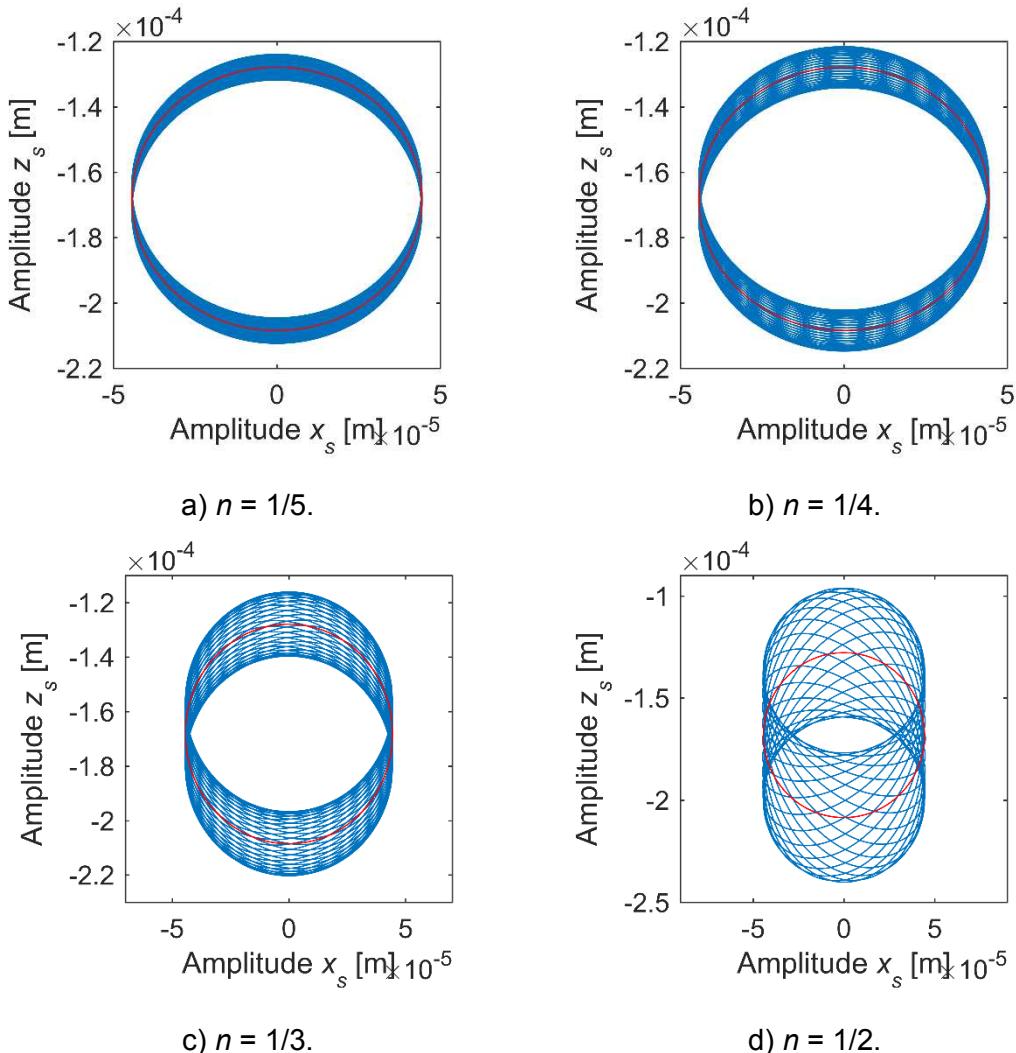


Figura 4.10 – Órbitas determinadas no plano  $S_8$  considerando excitações senoidais aplicadas em torno da direção  $x_s$  com frequências de excitação supersíncronas da velocidade crítica do rotor (--- base em repouso; ----- excitação da base).

A velocidade de rotação do rotor  $\Omega$  foi fixada em 1200 RPM com um desbalanceamento de 487,5 g.mm/0° aplicado no disco  $D_1$  (valor adotado para determinar os resultados apresentados na Fig. 4.10). Como esperado, as amplitudes de vibração ao longo da direção  $z_s$  foram alteradas de maneira mais significativa devido ao movimento da base. Resultados semelhantes foram obtidos considerando as respostas de vibração medidas no plano  $S_{28}$ . Os resultados encontrados usando  $n = 1/5$  e  $n = 1/4$  são equivalentes aos obtidos e apresentados nas Fig. 4.11 e Fig. 4.12.

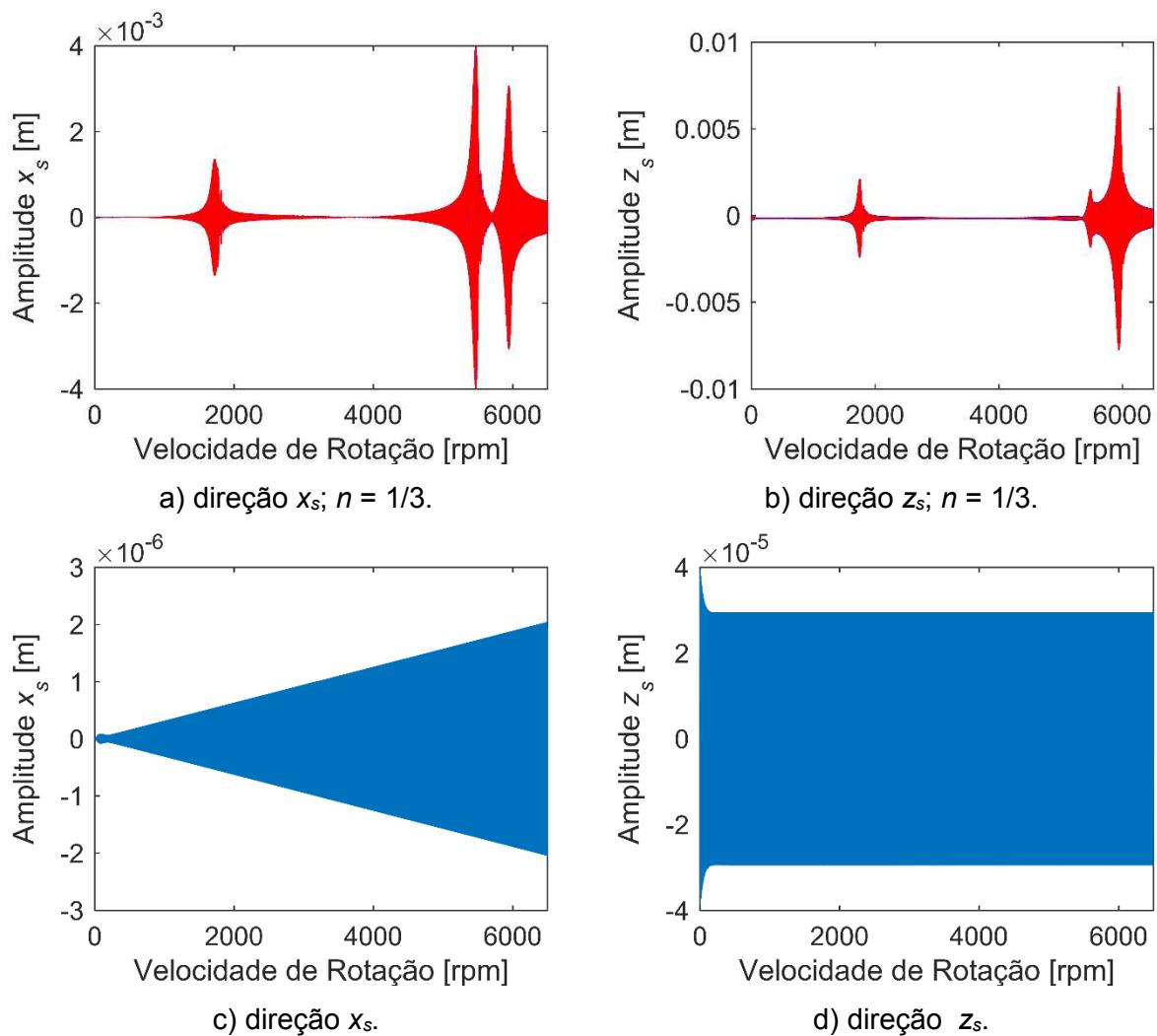


Figura 4.11 – Respostas de vibração determinadas no plano  $S_8$  para excitações senoidais na base do rotor com  $n = 1/3$  (— base em repouso; - - - excitação de base).

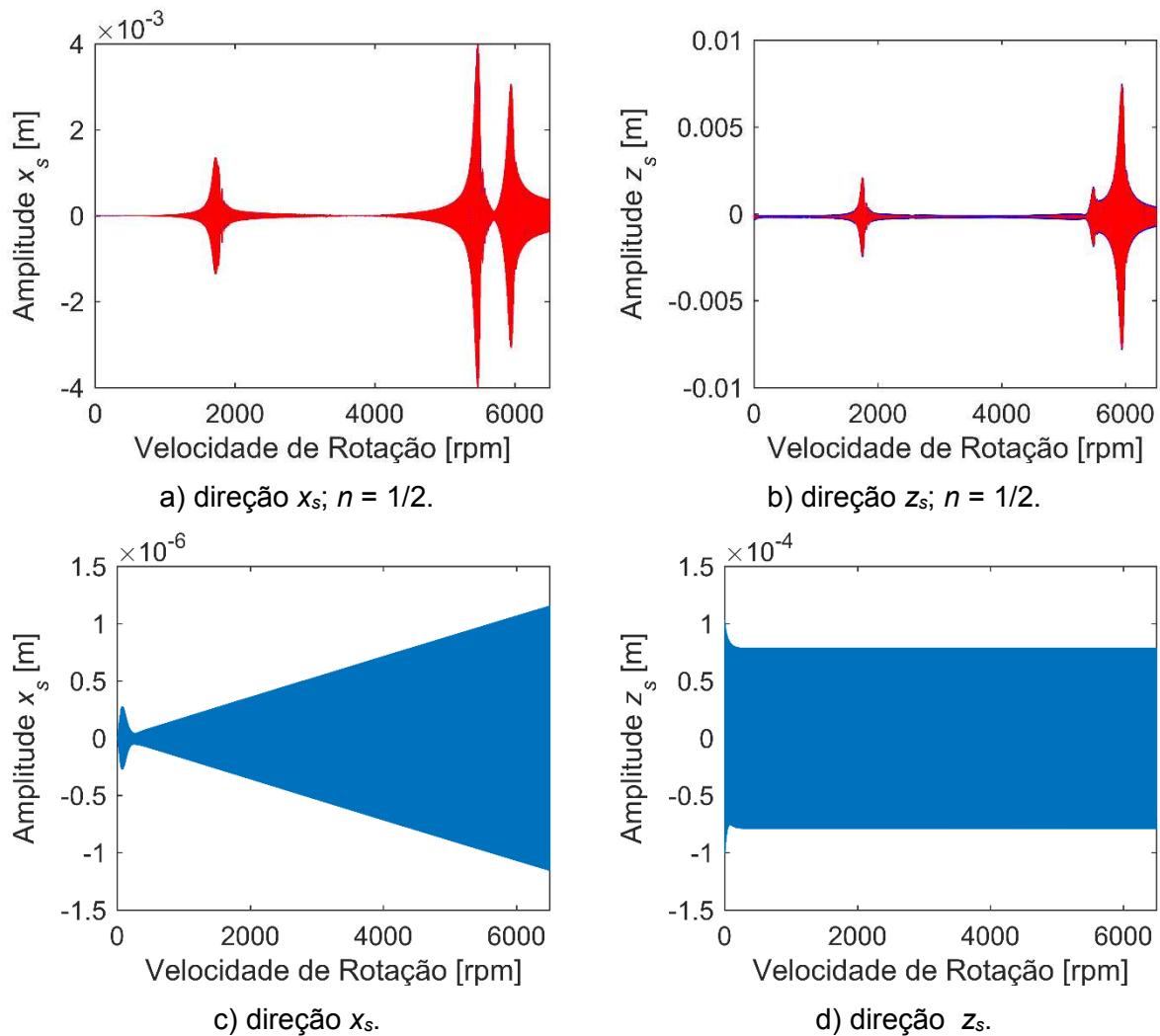


Figura 4.12 – Respostas de vibração determinadas no plano  $S_8$  para excitações senoidais na base do rotor com  $n = 1/2$  (---- base em repouso; - - - excitação de base).

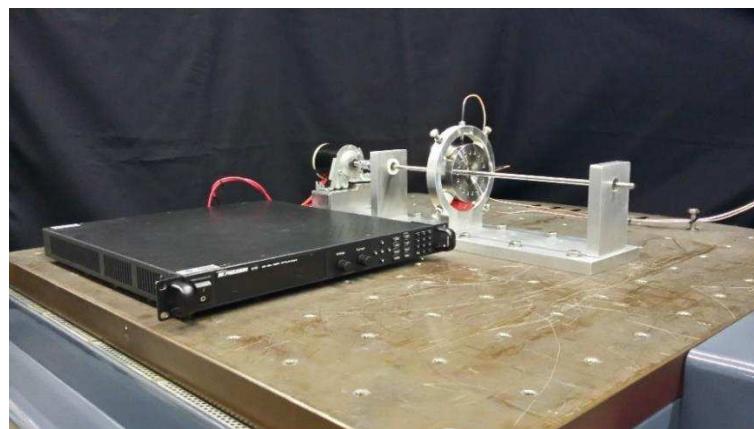
# CAPÍTULO V

## Resultados Experimentais

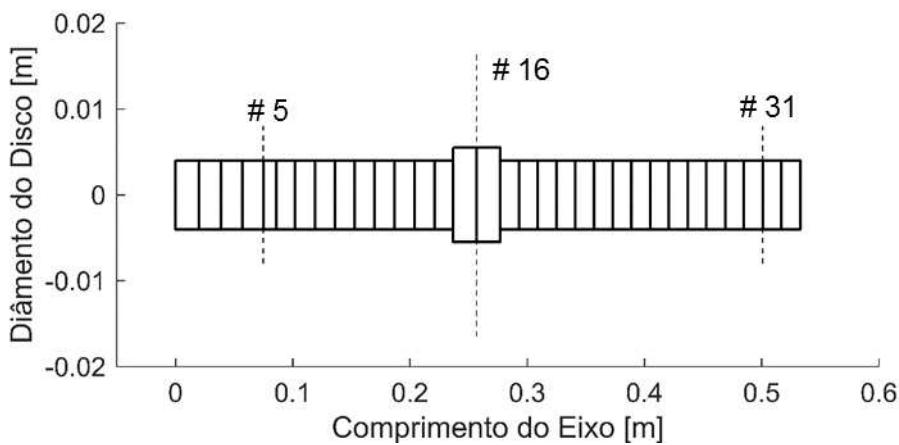
Este capítulo apresenta a validação experimental do modelo EF de rotores embarcados descrito neste trabalho. É também apresentado o ajuste do modelo EF realizado a partir de resultados experimentais obtidos em uma bancada de testes que foi projetada e construída para o estudo de rotores embarcados. Várias análises foram realizadas buscando caracterizar o comportamento dinâmico do rotor, a saber: *i.* excitação do tipo impacto aplicada ao longo da direção  $x_s$  para  $\Omega = 0$  RPM; *ii.* excitação do tipo impacto aplicada ao longo da direção  $x_s$  para  $\Omega = 900$  RPM; *iii.* excitação do tipo impacto aplicada ao longo da direção  $x_s$  para  $\Omega = 1600$  RPM; *iv.* excitação senoidal aplicada em torno da direção  $x_s$ ; *v.* excitação do tipo pulso de seno ao longo da direção  $x_s$ ; *vi.* excitação aplicada na direção  $x_s$  que simula a vibração das asas de uma aeronave durante um voo típico.

### 5.1 Bancada de Testes

A Figura 5.1a mostra a bancada de testes utilizada na análise experimental do rotor embarcado, sendo esta matematicamente representada por um modelo com 33 elementos finitos (Fig. 5.1b). A bancada é composta por um eixo flexível de aço com um comprimento de 548 mm e 8 mm de diâmetro ( $E = 205$  GPa,  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>,  $\nu = 0,29$ ), um disco rígido  $D$  (nó #16, de acordo para o modelo EF) de aço com 100 mm de diâmetro e 40 mm de espessura ( $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>) e dois mancais de rolamento ( $B_1$  e  $B_2$  localizados nos nós #5 e #31, respectivamente). Sensores de deslocamento estão dispostos ortogonalmente no nó #16 ( $S_{16xs}$  e  $S_{16zs}$ ) para medir a vibração do eixo sobre o disco. É importante ressaltar que a vibração do rotor é medida em relação ao referencial  $R_s$  (veja a Fig. 3.1), o mesmo referencial adotado pelo modelo EF. O sistema é movido por um motor elétrico do tipo CC. A velocidade do rotor foi controlada através de uma fonte, variando sua tensão (ver Fig. 5.1a). A velocidade foi aferida por um tacômetro manual.



a) Bancada de testes.



b) Representação esquemática.

Figura 5.1 – Máquina rotativa utilizada nas análises experimentais.

Um procedimento de ajuste de modelos foi usado para obter um modelo EF representativo (Fig. 5.1b). Neste sentido, utilizou-se a técnica de otimização heurística denominada Evolução Diferencial para determinar os parâmetros desconhecidos do modelo.

Os parâmetros desconhecidos são os coeficientes de rigidez dos mancais, a rigidez de rotação  $k_{ROT}$  devido ao acoplamento entre o motor elétrico e o eixo (adicionado em torno das direções ortogonais  $x_s$  e  $z_s$  do nó #1; veja a Fig. 5.1a) e os coeficientes de amortecimento modal associados aos dois primeiros modos de vibrar do rotor.

O processo de ajuste do modelo foi realizado com base nas funções de resposta em frequência (FRFs) simuladas e experimentais do rotor. A função objetivo adotada neste caso é apresentada pela Eq. (5.1). A minimização da função objetivo foi realizada 10 vezes para determinar a solução de mínimo global do problema, considerando 100 indivíduos na população inicial do otimizador. Neste caso, apenas as regiões próximas aos picos associados as frequências naturais foram levadas em consideração.

$$\text{Objetivo} = \sum_{i=1}^n \frac{\|\mathbf{FRF}_{\text{exp},i} - \mathbf{FRF}_{\text{num},i}\|}{\|\mathbf{FRF}_{\text{exp},i}\|} \quad (5.1)$$

onde  $n$  é o número de FRFs utilizadas no procedimento,  $\mathbf{FRF}_{\text{exp}}$  representa os dados experimentais e  $\mathbf{FRF}_{\text{num}}$  corresponde aos resultados numéricos obtidos pelo modelo EF do sistema de rotativo (veja a Fig. 5.1).

As FRFs experimentais foram medidas com a bancada de testes em repouso através da aplicação de forças de impacto ao longo das direções  $x_s$  e  $z_s$  do disco. Os sinais de resposta foram medidos pelo sensor de proximidade posicionado ao longo da mesma direção de aplicação das forças de impacto, resultando em 2 FRFs. As medições foram realizadas pelo analisador Agilent® (modelo 35670A) em uma faixa de 0 a 250 Hz e passos de 0,25 Hz.

A Tab. 5.1 apresenta os parâmetros determinados no final do processo de minimização associado ao menor valor da função objetivo. A Fig. 5.2 apresenta o Diagrama de Campbell que foi determinado a partir do modelo EF representativo da máquina rotativa. Note-se que as velocidades críticas do rotor são, aproximadamente, 1177 RPM (BW) e 1375 RPM (FW).

Tabela 5.1– Parâmetros determinados pelo procedimento de atualização do modelo.

Parâmetros	Valor	Parâmetros	Valor	Parâmetros	Valor
$k_{xx} / B_1$	$1,365 \times 10^{11}$	$k_{xx} / B_2$	$4,113 \times 10^{11}$	$k_{ROTxs}$	203,66
$k_{zz} / B_1$	$1,674 \times 10^{11}$	$k_{zz} / B_2$	$2,914 \times 10^{11}$	$k_{ROTzs}$	959,27
$\xi_1$	0.045	$\xi_2$	0.0405		
$\xi_3$	0.0134	$\xi_4$	0.010		

\* $k$ : rigidez [N/m];  $\xi$ : fator de amortecimento.

A Fig. 5.3 compara a FRF experimental com a que foi obtida a partir do modelo EF ajustado, considerando os parâmetros mostrados na Tab. 5.1. Neste caso, a FRF é associada ao impacto realizado na direção  $x_s$  do disco e ao sensor  $S_{16x}$ . Pode-se observar que a FRF gerada a partir do modelo de EF é satisfatoriamente próxima ao resultado obtido diretamente na bancada de testes. As respostas de vibração da bancada de testes foram medidas pelos sensores  $S_{16x}$  e  $S_{16z}$  com o sistema operando em duas condições distintas em termos de sua

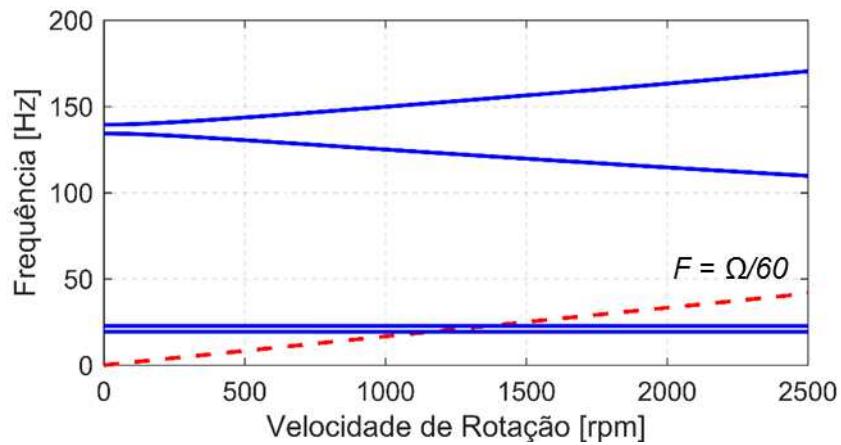


Figura 5.2 – Diagrama de Campbell da máquina rotativa.

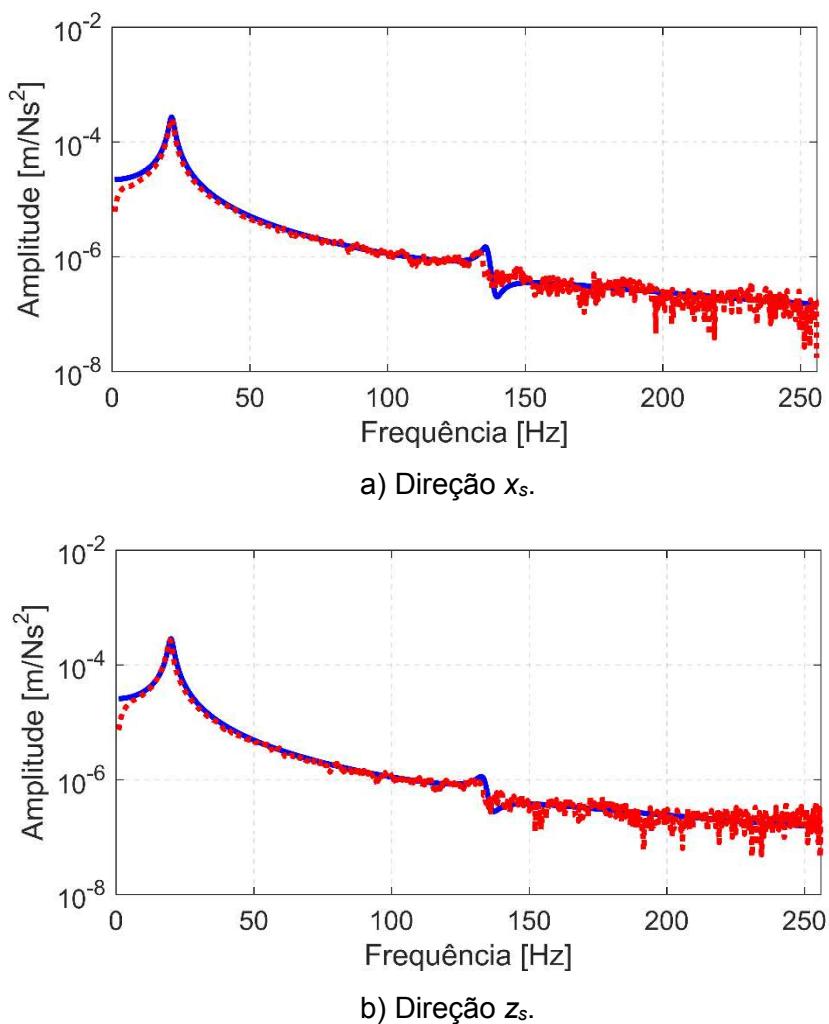


Figura 5.3 – FRFs numéricas (—) e experimentais (---) da máquina rotativa.

A Fig. 5.4 mostra as respostas de vibração experimentais e os resultados determinados no modelo EF ajustado, com o sistema operando a 900 RPM (tempo de aquisição total de 4 s em passos de 0,002 s).

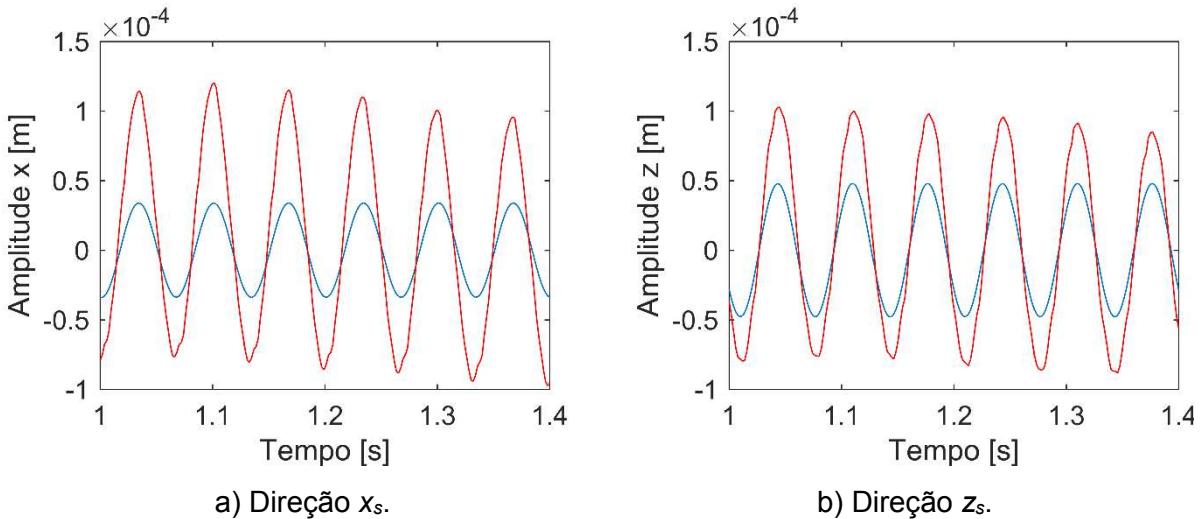


Figura 5.4 – Respostas de vibração da máquina rotativa operando em 900 RPM. Resultados simulado (----) e experimental (—).

De forma similar, a Fig. 5.5 mostra as respostas de vibração experimentais e os resultados determinados no modelo EF ajustado com o sistema operando a 1600 RPM. Neste caso, o desbalanceamento inserido no disco do modelo EF foi de 850 g.mm / 0° para ajustar as respostas de vibração numéricas e experimentais com o rotor operando a 1600 RPM. É importante ressaltar que o desbalanceamento inserido no modelo EF não foi capaz de repre-

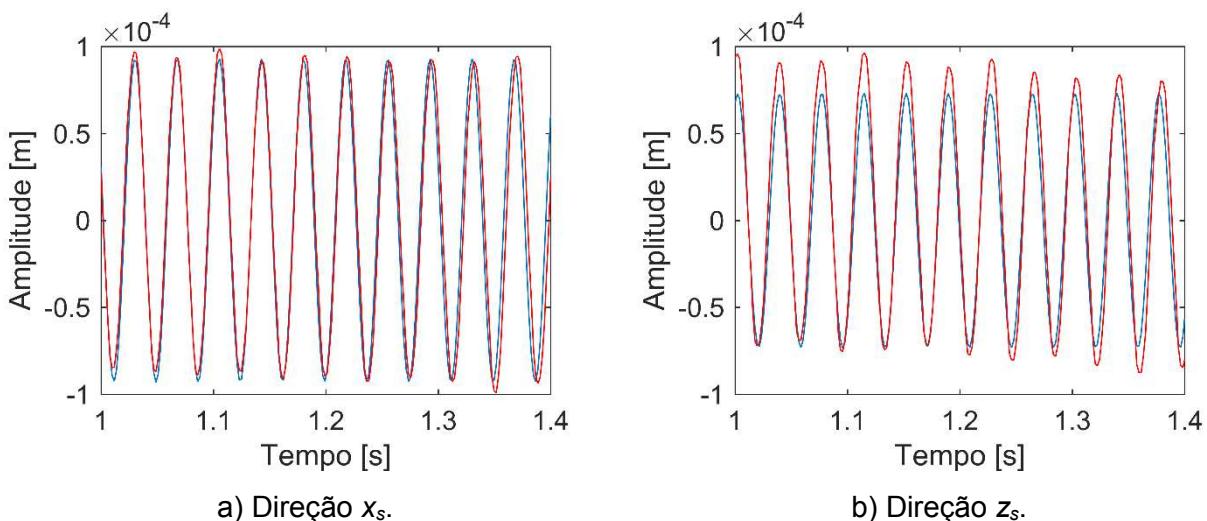


Figura 5.5 – Respostas de vibração da máquina rotativa operando em 1600 RPM. Resultados simulado (----) e experimental (—).

sentar o comportamento dinâmico do rotor operando nas duas velocidades consideradas devido, possivelmente, a um empenamento residual no eixo do rotor. Contudo, as respostas de vibração do rotor embarcado operando nas duas velocidades de rotação consideradas serão apresentadas na próxima seção.

## 5.2 Validação Experimental do Rotor Embarcado

Nesta seção, o comportamento dinâmico da bancada de testes mostrada na Fig. 5.1 é avaliado considerando diferentes excitações de base. As respostas de vibração do sistema são comparadas com os resultados obtidos pelo modelo EF ajustado para diferentes condições de excitação da base. Os sinais de excitação avaliados foram produzidos por um excitador eletrodinâmico da Dongling Vibration® (modelo GT1000), como mostra a Fig. 5.6. Neste caso, os sinais de excitação da base foram medidos por um acelerômetro instalado na base da bancada de testes.

Inicialmente, o comportamento dinâmico do rotor foi analisado considerando uma excitação do tipo impacto aplicada ao longo da direção  $x_s$ . As respostas de vibração da bancada de testes foram medidas pelo sensor  $S_{16X}$  para um impacto com quatro amplitude diferentes: 1,0 m/s<sup>2</sup>, 3 m/s<sup>2</sup>, 6 m/s<sup>2</sup> e 9 m/s<sup>2</sup> (Fig. 5.7, Fig. 5.8, Fig. 5.9 e Fig. 5.10, respectivamente). Neste caso,  $\Omega = 0$  RPM. Note que o modelo EF reproduziu satisfatoriamente as respostas de vibração medidas na bancada de testes validando, inicialmente, o modelo EF formulado.



Figura 5.6 – Excitador eletrodinâmico Dongling Vibration®.

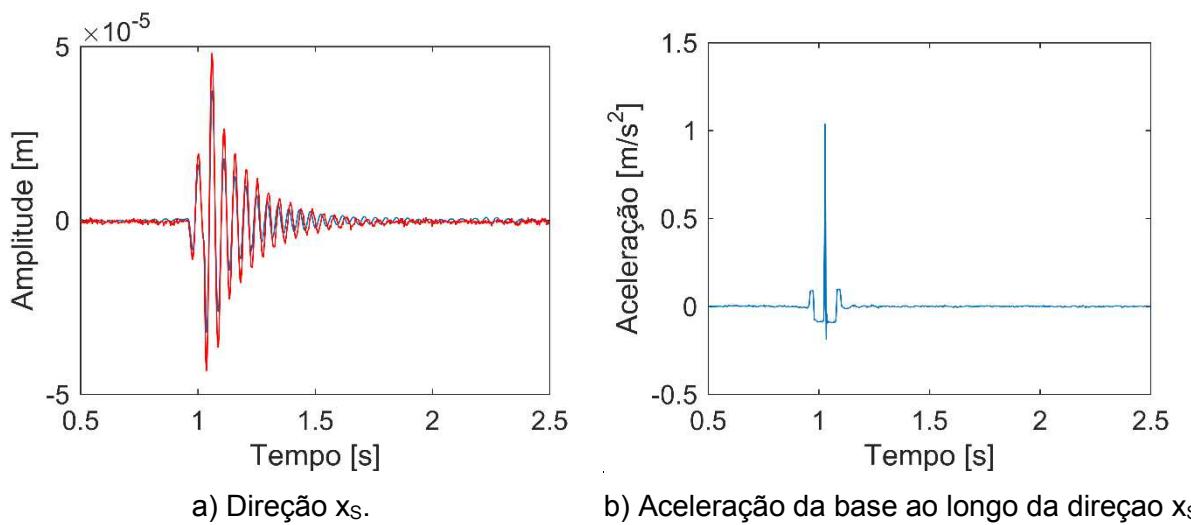


Figura 5.7 – Respostas de vibração do rotor ao longo da direção  $x_s$  para um impacto com uma amplitude de  $1 \text{ m/s}^2$ . Resultado simulado (—) e experimental (---).

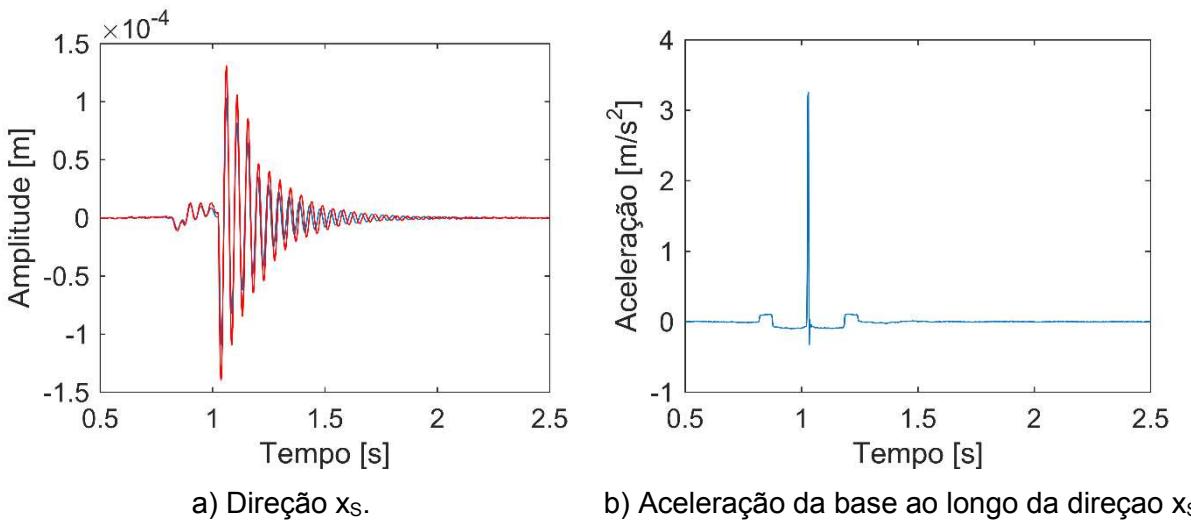


Figura 5.8 – Respostas de vibração do rotor ao longo da direção  $x_s$  para um impacto com uma amplitude de  $3 \text{ m/s}^2$ . Resultado simulado (—) e experimental (---).

As Fig. 5.11a e Fig. 5.11b apresentam as respostas de vibração da bancada de testes medidas ao longo das direções  $x_s$  e  $z_s$  no plano de medição  $S_{16}$  (tempo de simulação completo de 4 s em intervalos de 0,001 s). O sistema foi excitado na direção  $x_s$  com um impacto com  $12,0 \text{ m/s}^2$  de amplitude em um intervalo de duração de 5 ms. A aceleração imposta na base do rotor é apresentada na Fig. 5.11c. Neste caso, a velocidade de rotação do rotor é de 900 RPM. É possível observar que o modelo EF foi capaz de representar adequadamente o comportamento dinâmico do rotor ao longo da direção  $x_s$ ; porém, diferenças de frequência e am-

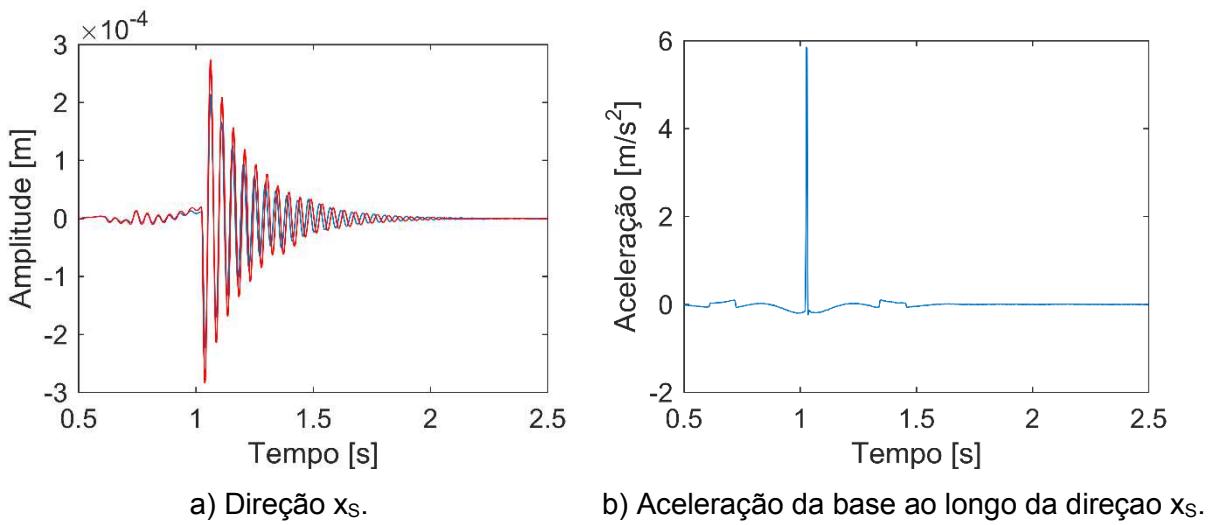


Figura 5.9 – Respostas de vibração do rotor ao longo da direção  $x_s$  para um impacto com uma amplitude de  $6 \text{ m/s}^2$ . Resultado simulado (—) e experimental (---).

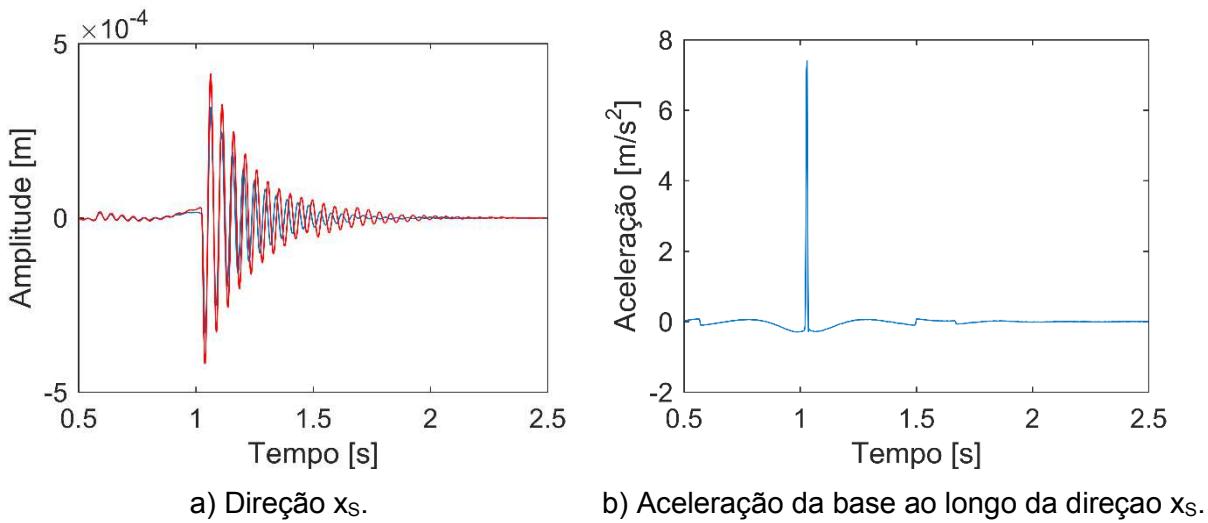


Figura 5.10 – Respostas de vibração do rotor ao longo da direção  $x_s$  para um impacto com uma amplitude de  $9 \text{ m/s}^2$ . Resultado simulado (—) e experimental (---).

plitude são observadas. Além disso, como esperado, a resposta de vibração medida na bancada de testes ao longo da direção  $z_s$  é afetada pela excitação aplicada na base do rotor (excitação na direção  $x_s$ ). Contudo, este efeito não foi representado pelo modelo EF.

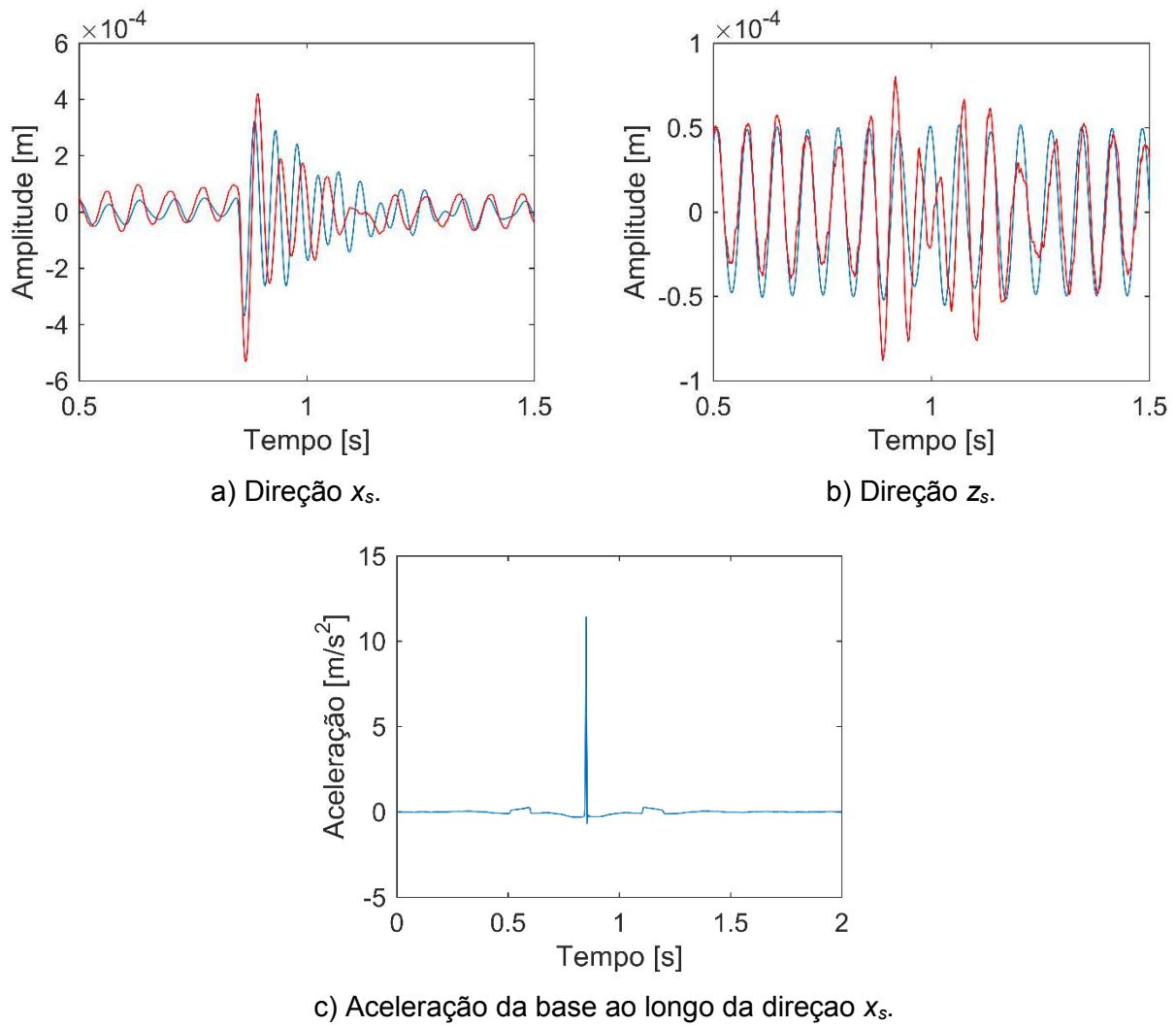


Figura 5.11 – Respostas de vibração do rotor em 900 RPM para um impacto aplicado ao longo da direção  $x_s$ . Resultado simulado (----) e experimental (—).

A Fig. 5.12 mostra as respostas de vibração da máquina rotativa medidas nas direções  $x_s$  e  $z_s$  (plano de medição  $S_{16}$ ) considerando as mesmas condições de excitação adotadas na Fig. 5.11, porém com o rotor operando a 1600 RPM. Pode-se observar que o modelo EF foi capaz de representar adequadamente o comportamento dinâmico do rotor ao longo da direção  $x_s$ . Além disso, como esperado, a resposta de vibração medida na bancada de testes ao longo da direção  $z_s$  é afetada com a excitação aplicada na base do rotor (excitação na direção  $x_s$ ). É importante ressaltar que a amplitude de vibração medida na direção  $z_s$  cresceu (veja a Fig. 5.12b) após a base do rotor ser excitada. Este efeito não foi representado pelas respostas do modelo EF.

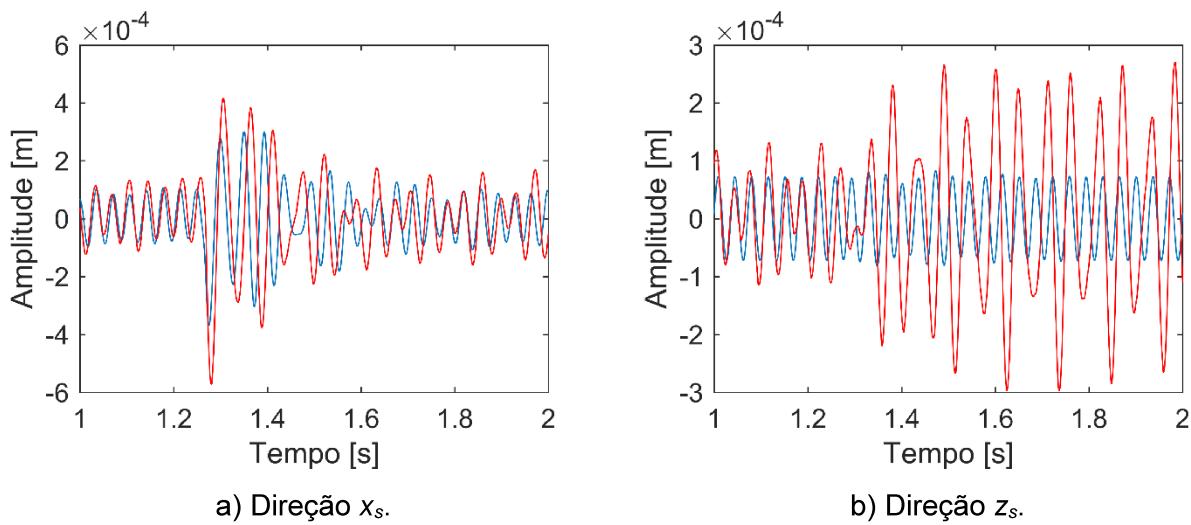


Figura 5.12 – Respostas de vibração do rotor a 1600 RPM para um impacto aplicado ao longo da direção  $x_s$ . Resultado simulado (—) e experimental (---).

A Fig. 5.13 apresenta as respostas de vibração medidas ao longo da direção  $x_s$  da máquina rotativa juntamente com as curvas numéricas determinadas pelo modelo EF, considerando uma excitação senoidal aplicada na direção  $x_s$  conforme mostra a Eq. (5.2).

$$\ddot{x}_s = \Lambda \sin\left(n \frac{2\pi \Omega_{cr}}{60} t\right) \quad (5.2)$$

onde  $\Lambda$  foi fixado como sendo igual a  $2,5 \text{ m/s}^2$  e  $n$  é uma constante utilizada para produzir excitações da base com frequências de excitação subsíncronas da velocidade crítica BW do rotor ( $\Omega_{cr} = 1177 \text{ RPM}$ ). Neste caso,  $n = 1/2, 1/3, 1/4$  e  $1/5$  (Fig. 5.13a, 5.13b, 5.13c e 5.13d, respectivamente). A velocidade de operação do rotor  $\Omega$  foi mantida em 900 RPM. Como esperado, as respostas de vibração obtidas na direção  $x_s$  foram mais influenciadas pela excitação de base. Assim, as respostas medidas ao longo da direção  $z_s$  não serão apresentadas.

A Fig. 5.14 apresenta as respostas de vibração medidas ao longo da direção  $x_s$  da máquina rotativa juntamente com as curvas com os resultados numéricos determinados a partir do modelo EF, considerando a mesma excitação adotada na Fig. 5.13. Contudo, neste caso, a velocidade de operação do rotor  $\Omega$  foi mantida em 1600 RPM ( $n = 1/2$  e  $1/3$ ; Fig. 5.14a e 5.14b, respectivamente).

Nas Fig. 5.13 e 5.14 é possível observar que o modelo EF foi capaz de representar o comportamento dinâmico do rotor para o caso em que a base é excitada ao longo da direção  $x_s$  conforme a Eq. (5.2).

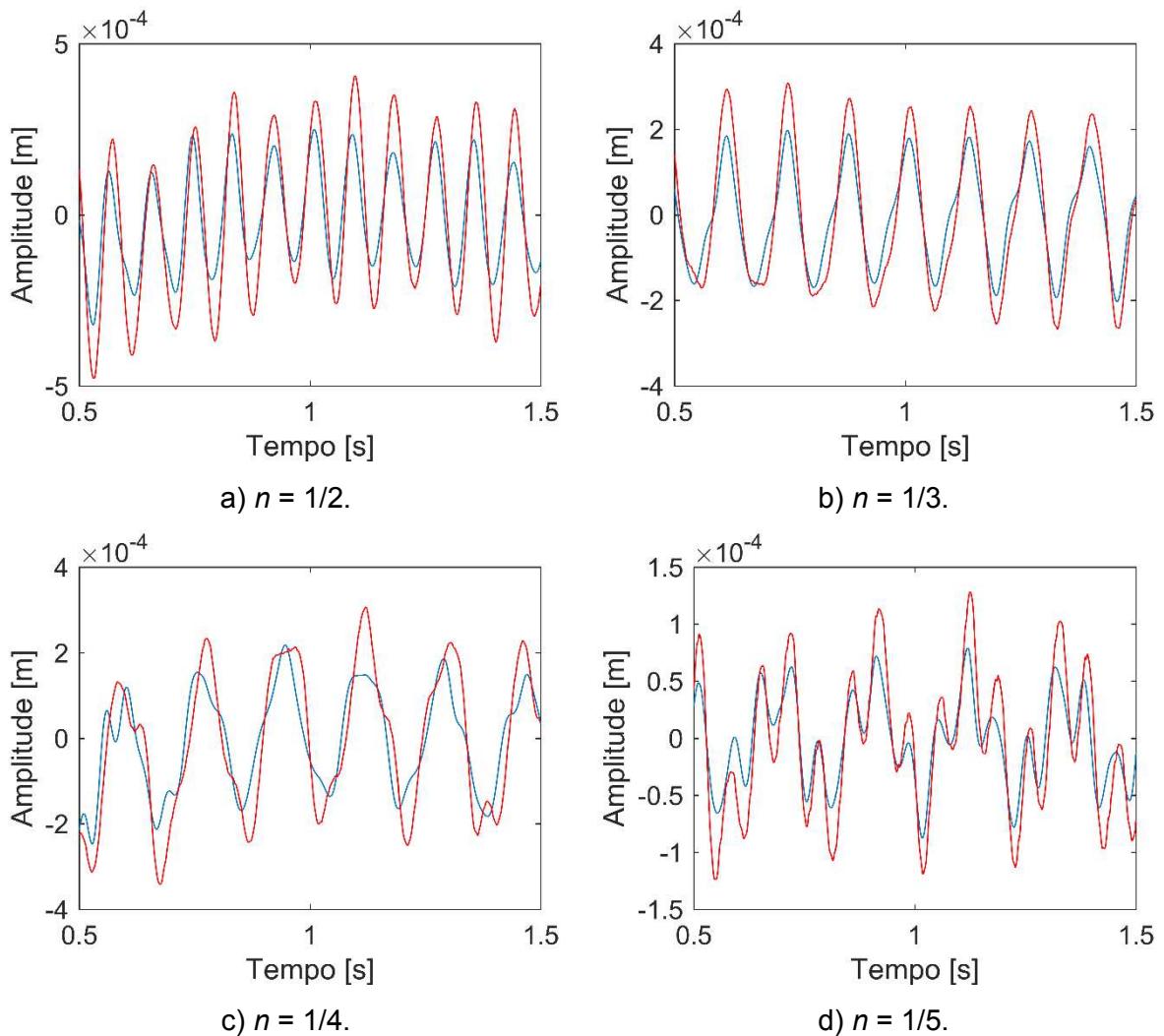


Figura 5.13 – Respostas de vibração do rotor a 900 RPM para excitações senoidais aplicadas ao longo da direção  $x_s$ . Resultado simulado (—) e experimental (—).

A Fig. 5.15 apresenta as respostas de vibração medidas ao longo da direção  $x_s$  da máquina rotativa juntamente com as curvas numéricas determinadas pelo modelo EF, considerando a base do sistema sendo excitada ao longo da direção  $x_s$ , conforme a Eq. (5.2). Neste caso,  $n = 2, 3, 4$  e  $5$  (Fig. 5.15a, 5.15b, 5.15c e 5.15d, respectivamente) e a velocidade de operação do rotor  $\Omega$  foi mantida em 1600 RPM. Desta forma, excitações da base com frequências supersíncronas da velocidade crítica BW do rotor ( $\Omega_{cr} = 1375$  RPM) foram aplicadas no sistema. Novamente, é possível observar que o modelo EF foi capaz de representar satisfatoriamente o comportamento dinâmico do rotor.

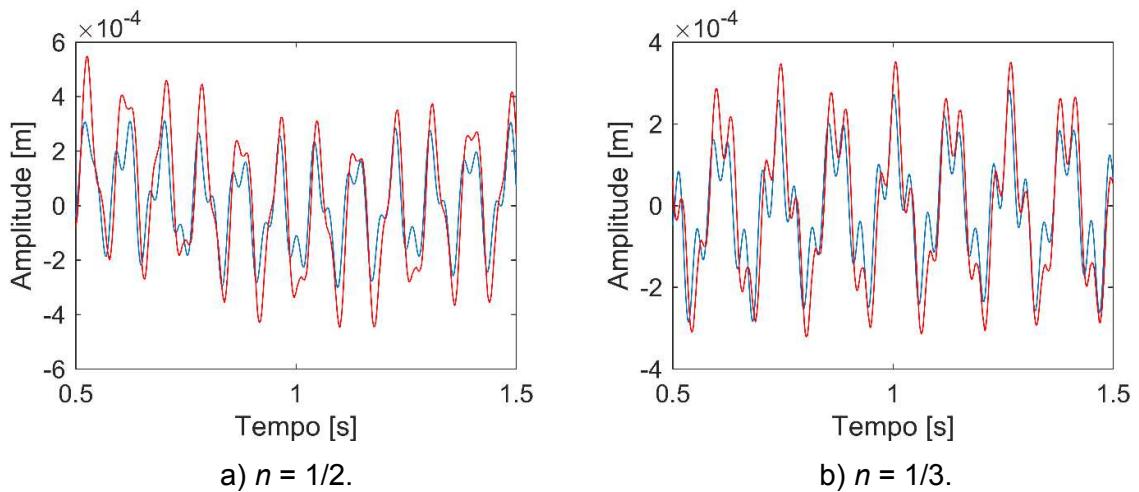


Figura 5.14 – Respostas de vibração do rotor a 1600 RPM para excitações senoidais subsíncronas aplicadas na direção  $x_s$ . Resultado simulado (---) e experimental (—).

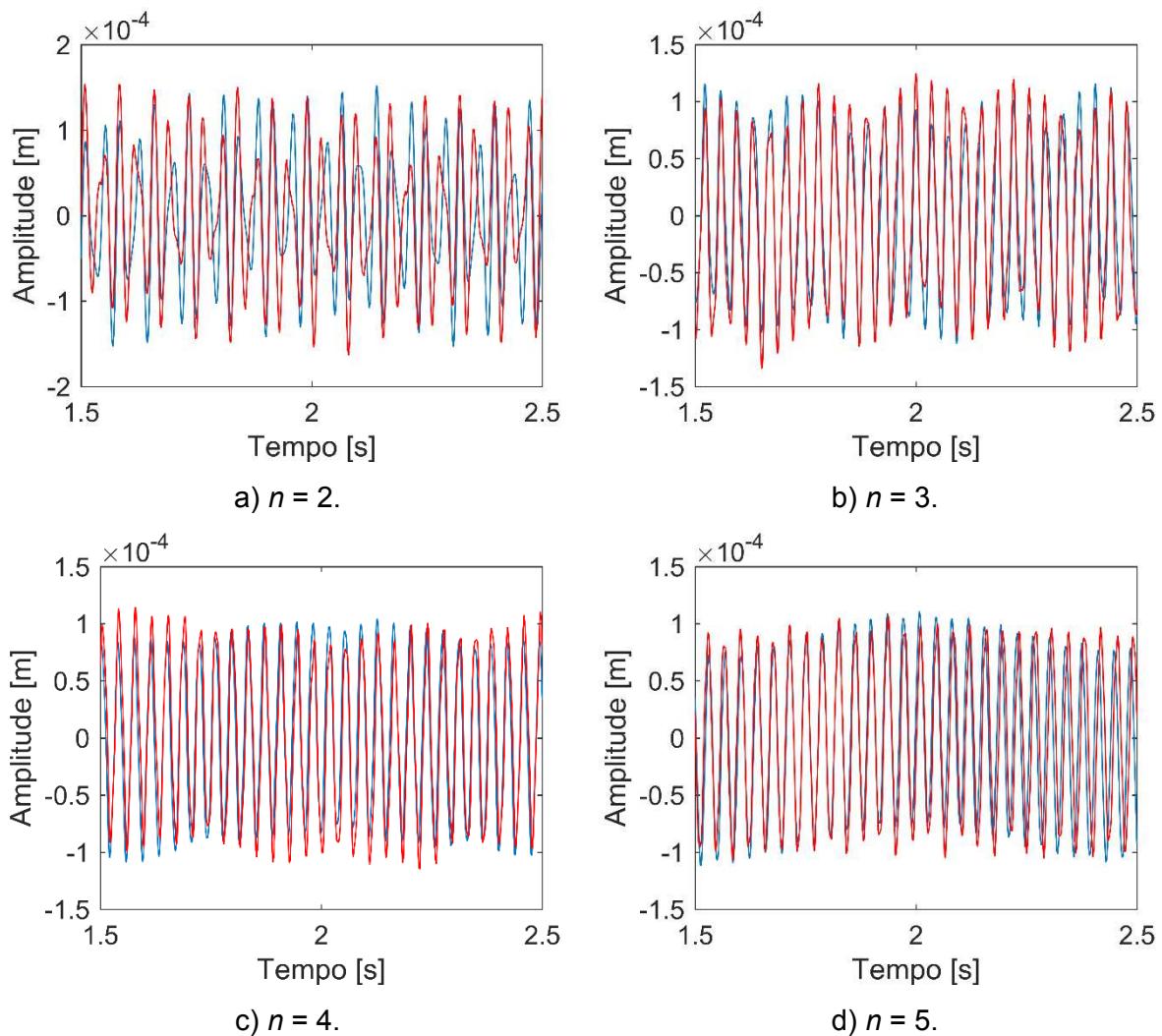


Figura 5.15 – Respostas de vibração do rotor a 1600 RPM para excitações senoidais supersíncronas aplicadas na direção  $x_s$ . Resultado simulado (---) e experimental (—).

A Fig. 5.16 apresenta as respostas de vibração do sistema sendo excitado por uma força do tipo pulso de seno ao longo da direção  $x_s$ . O pulso possui frequência de 1 Hz e amplitude de 1 m/s<sup>2</sup>. Assim, as respostas de vibração da máquina rotativa ao longo das direções  $x_s$  e  $z_s$  são mostradas na Fig. 5.16a e 5.16b, respectivamente, considerando a excitação dada pela Fig. 5.16c. A velocidade de rotação do rotor  $\Omega$  foi fixada em 1600 RPM. Como esperado, as amplitudes de vibração foram alteradas devido ao movimento da base, sendo que a direção  $x_s$  foi a mais afetada. Além disso, veja que o modelo EF foi capaz de representar adequadamente o comportamento dinâmico do rotor.

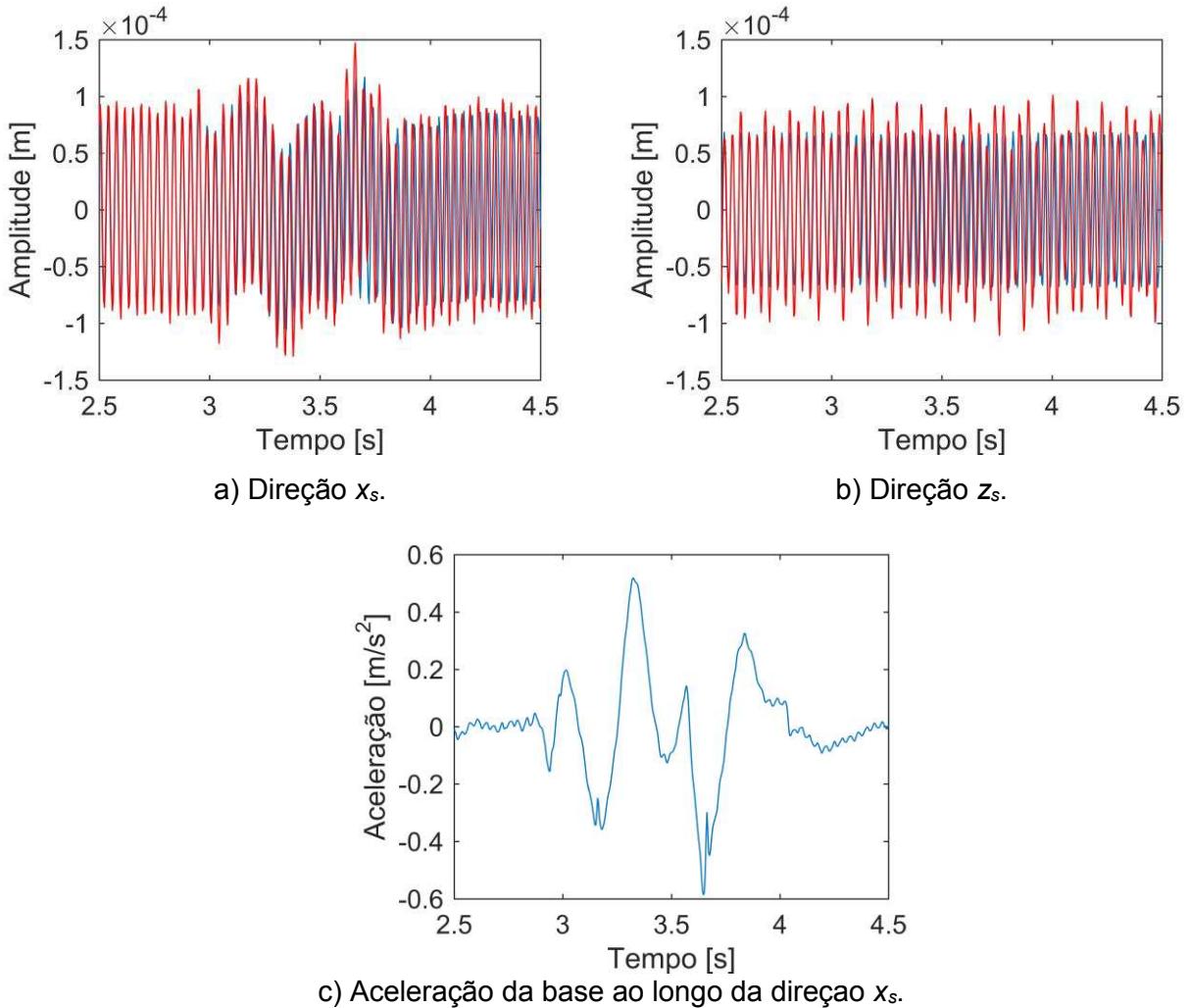


Figura 5.16 – Respostas de vibração do rotor a 1600 RPM para um pulso seno com frequência de 1 Hz aplicado ao longo da direção  $x_s$ . Resultado simulado (---) e experimental (—).

A Fig. 5.17 também apresenta as respostas de vibração do sistema sendo excitado por uma força do tipo pulso de seno ao longo da direção  $x_s$ . O pulso possui frequência de 6 Hz e amplitude de  $1 \text{ m/s}^2$ . As respostas de vibração da máquina rotativa ao longo das direções  $x_s$  e  $z_s$  são mostradas na Fig. 5.17a e 5.17b, respectivamente, considerando a excitação dada pela Fig. 5.17c. A velocidade de rotação do rotor  $\Omega$  foi fixada em 1600 RPM. Novamente é possível observar que, apesar do modelo EF não ser capaz de representar o comportamento dinâmico do rotor, as respostas de vibração numéricas e experimentais ao longo da direção  $z_s$  apresentaram uma diferença. Note que o acoplamento entre as direções  $x_s$  e  $z_s$  verificado experimentalmente é mais significativo que o reproduzido pelo modelo EF.

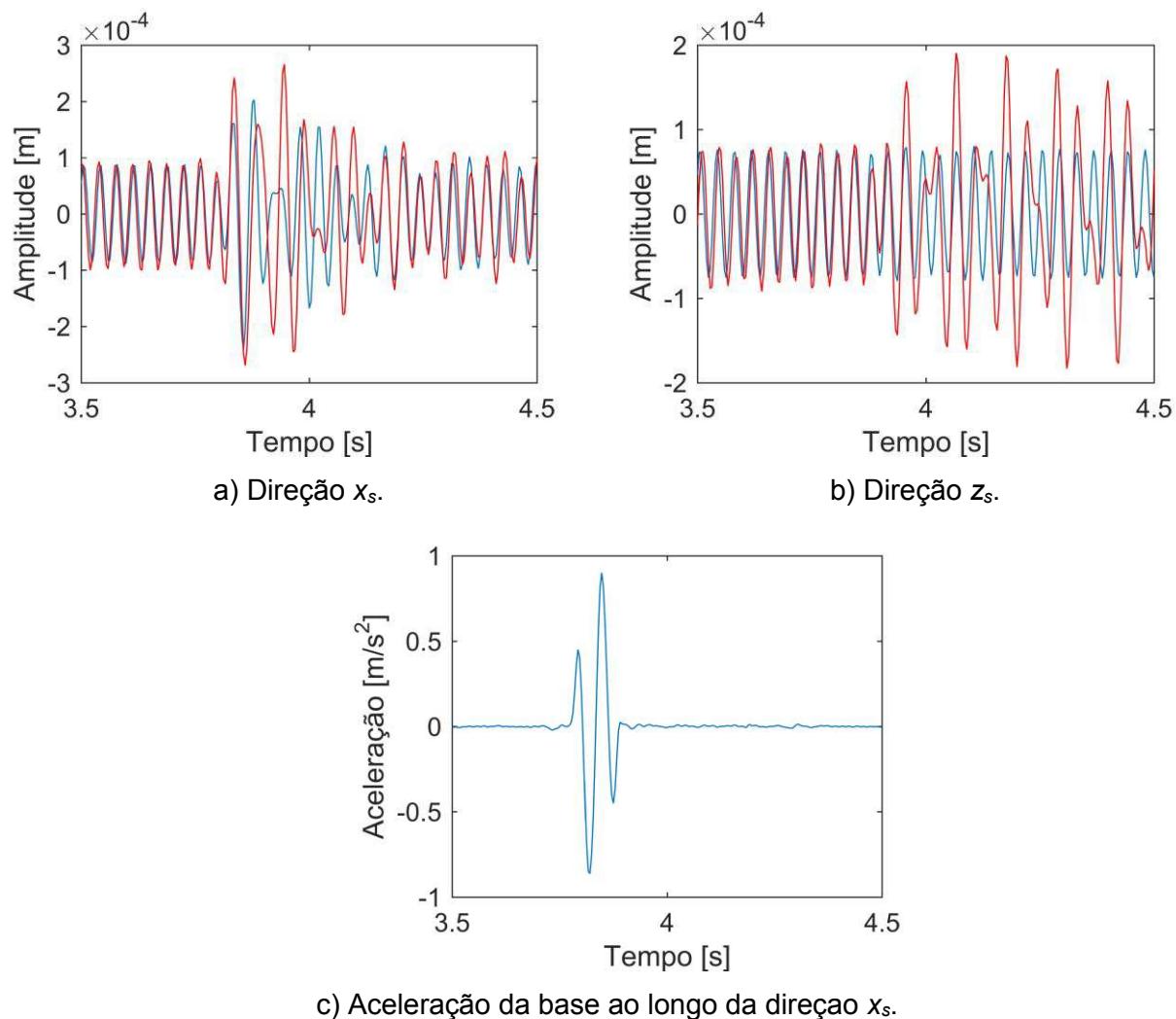
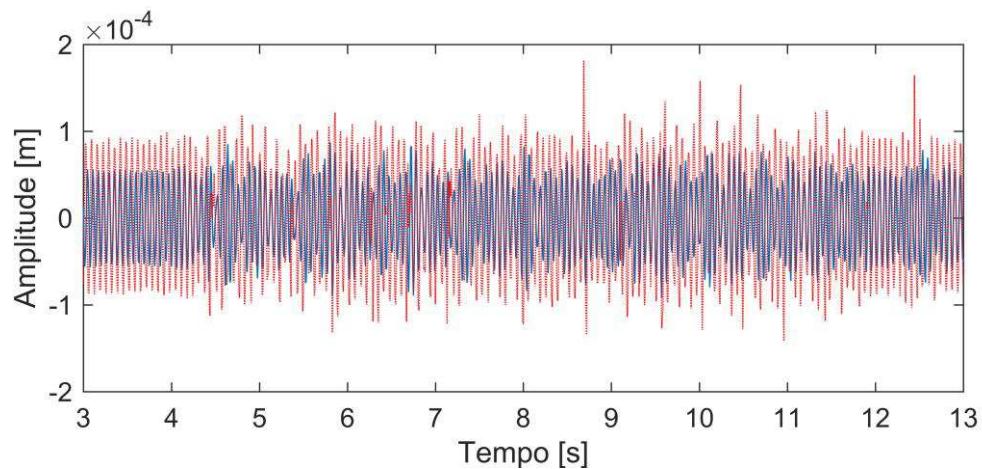
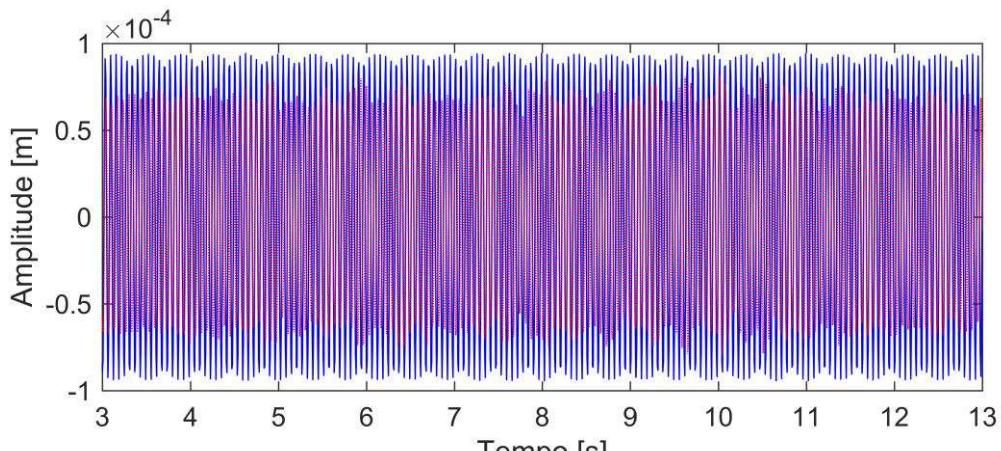


Figura 5.17 – Respostas de vibração do rotor a 1600 RPM para um pulso seno com frequência de 6 Hz aplicado ao longo da direção  $x_s$ . Resultado simulado (---) e experimental (—).

As Fig. 5.18 e Fig. 5.19 mostram as respostas de vibração do sistema rotativo considerando uma curva de excitação aplicada na direção  $x_s$  que simula a vibração das asas de uma aeronave durante um voo típico (veja a Fig. 5.18c). É importante ressaltar que o tempo de simulação e a amplitude do sinal de excitação não coincidem com as forças reais aplicadas nas aeronaves durante os voos. Neste contexto, as respostas de vibração (simulada e experimental) associadas às curvas de excitação são mostradas pelas Fig. 5.18a, Fig. 5.18b, Fig. 5.19a e Fig. 5.19b (tempo de simulação completo de 10 s em intervalos de 0,001 s). A velocidade de rotação do rotor para a Fig. 5.18 foi fixada em 900 RPM e para a Fig. 5.19 foi de 1600 RPM. Note que as respostas de vibração numéricas e experimentais ao longo da direção  $x_s$  são similares.



a) Direção  $x_s$ .



b) Direção  $z_s$ .

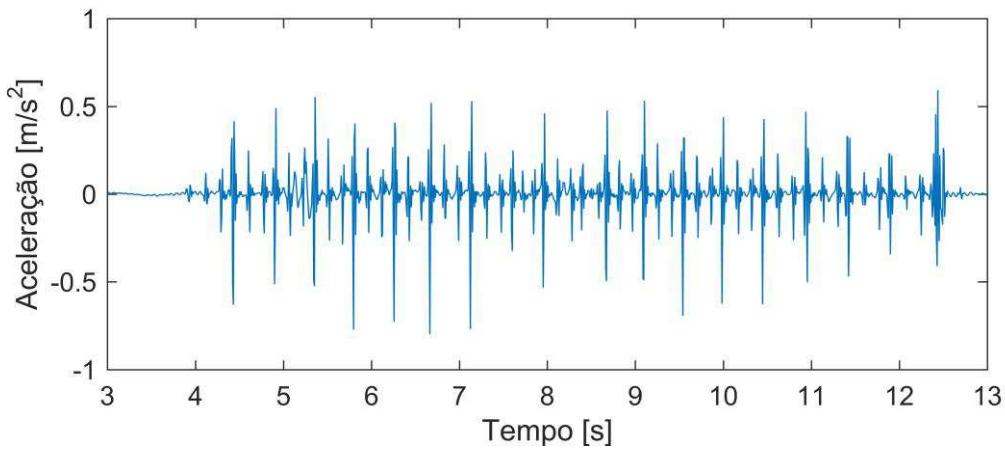
c) Aceleração da base ao longo da direção  $x_s$ .

Figura 5.18 – Respostas de vibração do rotor em 900 RPM para uma excitação típica observada em asas de aeronaves. Resultado simulado (---) e experimental (—).

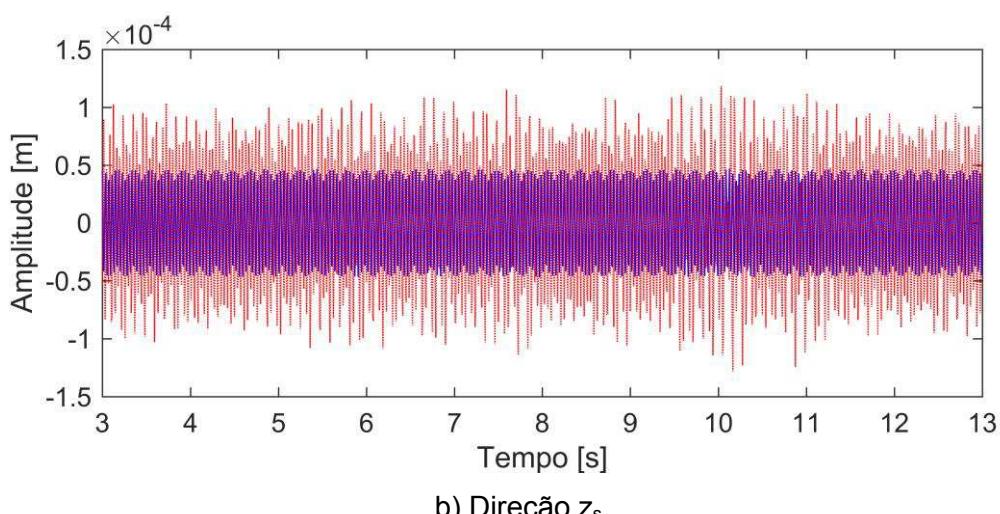
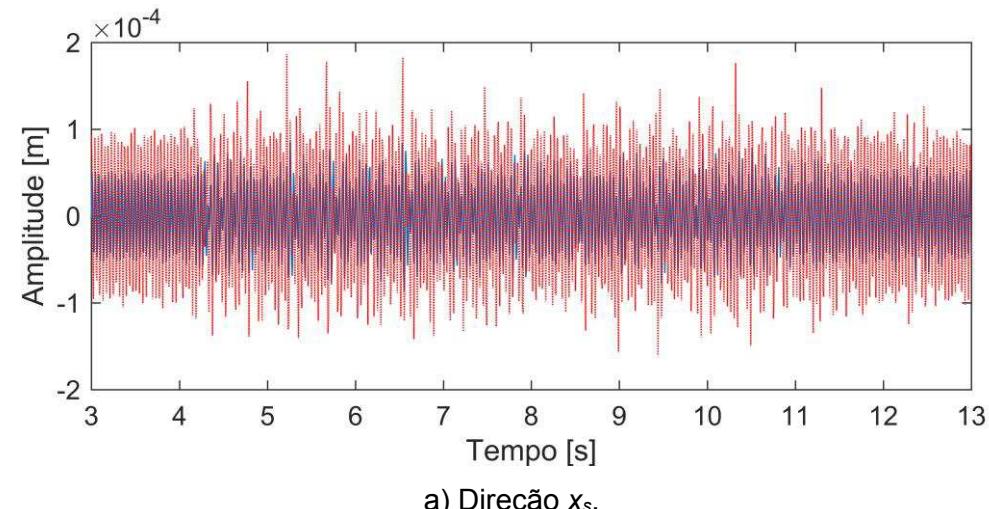


Figura 5.19 – Respostas de vibração do rotor em 1600 RPM para uma excitação típica observada em asas de aeronaves. Resultado simulado (---) e experimental (—).

## CAPÍTULO VI

### Conclusão e Perspectivas Futuras

Neste trabalho foi analisado o comportamento dinâmico de uma máquina rotativa excitada pela base tanto do ponto de vista numérico como experimental. Atualmente, é pequeno o número de trabalhos científicos voltados para a análise de sistemas rotativos embarcados. De forma geral, o trabalho se justifica por oferecer uma perspectiva diferente de trabalhos encontrados atualmente na área pela validação experimental do modelo desenvolvido para rotores flexíveis embarcados.

Nesta dissertação, primeiramente foi introduzido o tema sobre rotores embarcados mostrando as principais diferenças desses rotores com os aqueles montados sobre base fixa. Neste sentido, foram brevemente discutidos diferentes trabalhos disponíveis na literatura voltados para a análise de várias configurações do tipo de sistema estudado nesta dissertação. Diversas considerações a respeito do comportamento dinâmico de máquinas rotativas excitadas pela base também foram apresentadas.

A seguir, foi apresentado o modelo matemático de rotores embarcados que foi adotado neste trabalho. A máquina rotativa é composta de diferentes subsistemas, como aqueles que podem ser definidos pela sua geometria, como o eixo (modelo de elementos finitos), discos e acoplamentos; posteriormente, os subsistemas de sustentação, como os mancais de rolemento; então, o efeito giroscópico, que depende da velocidade de rotação e, finalmente, os esforços aplicados no sistema através de sua base. Para cada subsistema foram apresentadas as equações utilizadas para a construção do modelo e, por último, a equação final que representa o movimento do rotor embarcado.

A análise numérica de uma máquina rotativa com dois discos foi realizada no Capítulo IV. Para tanto, foram apresentados o ajuste e a validação do modelo EF da bancada de testes utilizada. O Diagrama de Campbell, as FRFs e as respostas de vibração a partir de diferentes condições de excitação fazem parte do processo de validação. Foi investigada numericamente a influência da rotação da base no comportamento dinâmico da bancada. Analisou-se a influência de diferentes parâmetros nas quatro primeiras velocidades críticas da máquina rotativa. Foi constatado que eles podem mudar as velocidades críticas do sistema rotativo. A resposta de vibração do rotor pode ser alterada devido a uma aceleração na base, sendo que

a direção mais afetada pela excitação é a mesma em que a excitação ocorre. Para a excitação que simula a vibração das asas de uma aeronave também se observou o mesmo comportamento, ou seja, dada uma excitação ao longo da direção  $z_0$  a resposta de vibração do sistema na direção  $z_s$  é a mais afetada. O comportamento da máquina rotativa também foi investigado numericamente para o procedimento de *run-up* avaliando as respostas do sistema em repouso e para uma excitação sinusoidal. Foi constatado que as respostas apresentam diferenças. As excitações de translação e rotação da base foram investigadas com o intuito de entender melhor o comportamento deste tipo de sistema.

No Capítulo V foi realizada a análise experimental de uma bancada de testes construída a fim de validar o modelo proposto no Capítulo III. Como realizado no Capítulo IV, o modelo da bancada de testes foi ajustado a partir de FRFs experimentais medidas diretamente no sistema instalado. O comportamento dinâmico da bancada de testes foi investigado para diferentes tipos de excitação, níveis de aceleração, frequência de excitação e deslocamento da base. Os resultados obtidos experimentalmente foram comparados com os resultados simulados. As respostas de vibração no domínio do tempo da máquina rotativa operando a uma certa velocidade de rotação sem excitação de base foram comparadas com as respostas do modelo matemático. Excitações do tipo impacto foram avaliadas para as condições da máquina parada ( $\Omega = 0$  RPM) e em operação. Os resultados obtidos experimentalmente e numericamente do rotor em repouso são semelhantes. Quando o rotor está em operação, os resultados experimentais dada uma excitação do tipo impacto mostram que existe um acoplamento das direções, aspecto este que o modelo matemático não consegue representar. As respostas de vibração do rotor para uma excitação sinusoidal ao longo da direção  $x_s$  foram avaliadas. Para estas excitações o modelo foi capaz de reproduzir adequadamente o comportamento obtido experimentalmente. Para a excitação que simula a vibração das asas de uma aeronave e para a excitação do tipo pulso de seno, os resultados experimentais e numéricos obtidos também se mostraram próximos. Observou-se novamente o acoplamento entre as direções como obtido para o ensaio do tipo impacto. Portanto, o modelo EF adotado neste trabalho representa de forma satisfatória o comportamento dinâmico de rotores embarcados, em que pese a dificuldade do modelo para algumas situações específicas.

As principais contribuições desta dissertação podem ser assim resumidas:

- Procedimento de construção de um modelo matemático para representar sistemas rotativos embarcados.

- Análises teóricas voltadas para a validação do modelo de rotores embarcados e para o estudo do comportamento dinâmico do sistema quando submetido a excitações de base.
- Resultados experimentais que demonstram a capacidade do modelo proposto de representar o comportamento dinâmico de máquinas rotativas embarcadas. Estes resultados, quando comparados com as respostas obtidas numericamente, demonstram a eficiência da metodologia utilizada na modelagem do sistema.

Os seguintes trabalhos científicos resultam desta dissertação:

a) Trabalhos publicados em anais de congressos

1. SOUSA JR, M.S., CAVALINI JR, A.A., STEFFEN JR, V. Analysis of the dynamic behavior of a rotor system under base excitation. 23rd International Congress of Mechanical Engineering - COBEM 2015, 12, 2015, Rio de Janeiro, Brasil.
2. SOUSA JR, M.S., CAVALINI JR, A.A., STEFFEN JR, V. Análise do comportamento dinâmico de um rotor assimétrico excitado pela base. XXII Congresso Nacional de Estudantes de Engenharia Mecânica – CREEM 2015, 10, 2015, Campos dos Goytacazes - RJ, Brasil.
3. SOUSA JR, M.S., CAVALINI JR, A.A., STEFFEN JR, V. Analysis of the vibration responses of an onboard rotor system. International Conference on Noise and Vibration Engineering – ISMA 2016, 9, 2016, Leuven, Bélgica.

b) Trabalho publicado em periódico

1. SOUSA JR, M.S., DEL CLARO, V.T.S., CAVALINI JR, A.A., STEFFEN JR, V. Numerical investigation on the dynamic behavior of an onboard rotor system by using the FEM approach. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**. Brasil, v. 39, n. 7, p. 2447-2458, 2017.

### **Perspectivas de Trabalhos Futuros**

Como sugestão de trabalhos futuros relacionados ao tema abordado nesta dissertação de mestrado, é possível apontar:

- a) Verificar os motivos pelos quais o modelo EF foi capaz de representar de forma mais fiel as vibrações ao longo da direção  $x_s$ ;
- b) Analisar a representatividade do modelo EF para outras condições de excitação que podem ser aplicadas na base;
- c) Explorar diferentes configurações de rotores, como rotores suportados por mancais magnéticos e hidrodinâmicos, eixo de material composto, discos flexíveis e outros;
- d) Aplicação do modelo matemático proposto neste trabalho em motores a jato de pequeno porte, aproximando ainda mais das condições encontradas em aeronaves reais;
- e) Aplicação de técnicas de controle que consideram as vibrações geradas pelas máquinas rotativas embarcadas utilizando materiais periódicos.

## REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICAS

ALVES, M. T. S. Controle de Vibrações em Rotores Flexíveis usando Liga com Memória de Forma. 2015. Tese de Doutorado – Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

AL-WEDYAN, H. M.; TAHAT, M. S.; MUTASHER, S. A. The behaviour of the jeffcott rotor under a vibrating base of fluid film bearing. Suranaree Journal of Science and Technology. v.15, n.3, p.167-176, 2008.

BORGES, A. S. Controle Modal de Rotores com Mancais Magnéticos – Projeto robusto. 2016. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

CAMPBELL, W. Protection of steam turbine disk wheels from axial vibration. General Electric Review. London, v. 27, n. 6-8, p. 459-484, 1924.

CAVALCA, K.L.; CAVALVANTE, P.F.; OKABE, E.P. An investigation on the influence of the supporting structure on the dynamics of the rotor system. Mechanical Systems and Signal Processing. v. 19, n. 1, p. 157-174, 2004. <https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2004.04.001>

CAVALINI JR., A.A., LARA-MOLINA, F.A., SALES. T.P., KOROISHI, E.H., STEFFEN JR, V., Uncertainty analysis of a flexible rotor supported by fluid film bearings. Latin American Journal of Solids and Structures. v. 12, v. 8, p. 1487-1504, 2015a.

CAVALINI JR, A. A. Detecção e identificação de trincas transversais em eixos horizontais de máquinas flexíveis. 2013. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

CHEN, L.; WANG, J.; HAN, Q.; CHU, F. Nonlinear dynamic modeling of a simple flexible rotor system subjected to time-variable base motions. Journal of Sound and Vibration. v. 404, p. 58-83, 2017. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2017.05.032>

DAKEL, M.; BAGUET, S.; DUFOUR, R. Bifurcation analysis of a non-linear on-board rotor-bearing system". ASME 2014 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Agosto, 2014, New York.

DAKEL, M.; BAGUET, S.; DUFOUR, R. Steady-state dynamic behavior of an on-board rotor under combined base motions. *Journal of Vibration and Control*. v. 20, n. 15, p. 2254-2287, 2014. <https://doi.org/10.1177/1077546313483791>

DAS, A.S.; DUTT, J.K.; RAY, K. Active vibration control of unbalanced flexible rotor-shaft systems parametrically excited due to base motion. *Applied Mathematical Modelling*. v. 34, n. 1, p. 2353-2369, 2010. <https://doi.org/10.1016/j.apm.2009.11.002>

DUCHEMIN, M. Contribuition à l'étude du comportement dynamic d'un rotor embarqué. 2003. Tese de Doutorado - INSA Lyon, Lyon.

DUNCHEMIM, M.; BERLIOZ, A.; FERRARIS, G. Dynamic behavior and stability of a rotor under base excitation. ASME. v. 128, p. 576, 2006.

DUNKERLEY, S. On the whirling and vibration of shaft. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*. v. 195, n. 1, p. 279-359, 1894. <https://doi.org/10.1098/rsta.1894.0008>

EL-SAEIDY, F.M.A.; STICHER, F. Dynamics of a rigid rotor linear/nonlinear bearings system subject to rotating unbalance and base excitations. *Journal of Vibration and Control*. v. 16, n. 3, p. 403-438, 2010. <https://doi.org/10.1177/1077546309103565>

GENERAL ELETRIC AVIATION. Website: <<http://www.geaviation.com/manufacturing/CFM-LEAP.html>>. Acessado em: 07 de Fevereiro de 2016.

HAN, Q.; CHU, F. Dynamic behaviors of a geared rotor system under time-periodic base angular motions. *Mechanism and Machine Theory*. v. 78, p. 1-14, 2014. <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2014.02.016>

HAN, Q.; CHU, F. Dynamic response of cracked rotor-bearing system under time dependent base movements. *Journal of Sound and Vibration.* v. 332, n.25, p. 6847-6870, 2013.  
<https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.07.025>

HORI, Y., KATO, T. Earthquake-induced instability of a rotor supported by oil film bearings. *ASME Journal of Vibration and Acoustics.* v. 112, n. 2, p. 160-165, 1990.  
<https://doi.org/10.1115/1.2930108>

ISHIDA, Y.; YAMAMOTO, T. Linear and nonlinear rotordynamics. Wiley-VCH, 2012. 474p.  
<https://doi.org/10.1002/9783527651894>

JEFFCOTT, H. H. The lateral vibration of loaded shafts in the neighborhood of a whirling speed: the effect of want of balance. *Philosophical Magazine A.* v. 37, n. 1, p. 304-315, 1919.  
<https://doi.org/10.1080/14786440308635889>

KASARDA, M. E.; CLEMENTS, J.; WICKS, A. L.; HALL, C.D.; KIRK, R. G. Effect of Sinusoidal Base Motion on a Magnetic Bearing. *International Conference on Control Applications Anchorage*, 2000, Alaska, USA.

KIM, K. B.; YANG, J. N.; LIN, Y. K. Stochastic response of flexible rotor-bearing system to seismic excitations. *Probabilistic Engineering Mechanics.* v. 1, n. 3, 1986.  
[https://doi.org/10.1016/0266-8920\(86\)90021-4](https://doi.org/10.1016/0266-8920(86)90021-4)

KOROISHI, E. H. Controle de Vibrações em Máquinas Rotativas utilizando Atuadores Eletromagnéticos. 2013. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

LALANNE, M.; FERRARIS, G. Rotordynamics prediction in engineering. John Wiley & Sons, 1998. 266p.

LALLEMENT, G.; LECOANET, H.; STEFFEN JR, V. Vibrations de rotors sur paliers à matrice de raideur non symétrique. *Machine and Mechanism Theory*, v. 17, n. 1, p. 47-55, 1982.  
[https://doi.org/10.1016/0094-114X\(82\)90023-4](https://doi.org/10.1016/0094-114X(82)90023-4)

LEI, H.; YUSHU, C. Dynamical simulation and load control of a Jeffcott rotor system in Herbst maneuvering flight. *Journal of Vibration and Control.* v. 1, n. 1, p. 1-14, 2014.

LIU, Z.; LIU, Z.; LI, Y.; ZHANG, G. Dynamics response of an on-board rotor supported on modified oil-film force considering base motion. *Journal of Mechanical Engineering Science.* 2016.

MARX, S.; NATARAJ, C. Suppression of base excitation of rotors on magnetic bearings. *International Journal of Rotating Machinery.* v. 1, n. 1, p. 1-10, 2007.

MORAIS, T. S. Contribuição ao Estudo de Máquinas Rotativas contendo não Linearidades. 2010. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

NELSON, H. D.; MACVAUGH, J. M. The dynamics of rotor bearing systems using finite elements. *Journal of Engineering for Industry.* v. 98, n. 2, p. 593-600, 1976.  
<https://doi.org/10.1115/1.3438942>

OLIVEIRA, M. V. F. Caracterização Numérica e Experimental de uma Bancada de Rotor Flexível Suportada por Mancais Magnéticos Ativos. 2015. Dissertação de Mestrado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

RADE, D. A. Introdução ao método dos elementos finitos. 2008. Notas de Aula - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

RANKINE, B. J. M. On the centrifugal force of rotating shafts. *The Engineer.* v. 1, n.1, 1869.

RYAN, J. CLEMENTS. The experimental testing of an active magnetic bearing/rotor system undergoing base excitation. 2000. PhD Thesis - Virginia Polytechnic Institute and State University, Virginia.

SALDARRIAGA, M. V. Atenuação de Vibrações em Máquinas Rotativas Flexíveis usan-do Materiais Viscoelásticos nos Suportes. 2007. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

SIMÕES, R. C. Controle Modal Ótimo de um Rotor Flexível Utilizando Atuadores Piezelétricos do Tipo Pilha. 2006. Tese de Doutorado - Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

STORN, R., PRICE, K. Differential evolution: a simple and efficient adaptive scheme for global optimization over continuous spaces. International Computer Science Institute. v. 12, n. 1, p. 1-16, 1995.

TIAN, L.; WANG, W.J.; PENG, Z.J. Dynamic behaviours of a full floating ring bearing supported Turbocharger rotor with engine excitation. Journal of Sound and Vibration, v. 330, n. 20, p. 4851-4874, 2011. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2011.04.031>

ZHAO, J. Dynamic wake distortion model for helicopter maneuvering flight. 2005. PhD Thesis - School of Aerospace Engineering, Georgia Institute of Technology, Georgia.

ZIENKIEWICZ, O. C. La Méthode des Éléments-Finis. Paris: MacGraw-Hill, 1979. 851p.