



Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Engenharia Elétrica
Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

LORENÇO SANTOS VASCONCELOS

**ANÁLISE DA PROPAGAÇÃO TROPOSFÉRICA SOBRE TERRENOS
IRREGULARES EM VHF E UHF UTILIZANDO EQUAÇÕES PARABÓLICAS E O
DESENVOLVIMENTO DE UM NOVO MODELO HÍBRIDO PARA PREDIÇÃO DE
PERDA DE PERCURSO**

Uberlândia
2017

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Engenharia Elétrica
Núcleo de Processamento Digital de Sinais

LORENÇO SANTOS VASCONCELOS

**ANÁLISE DA PROPAGAÇÃO TROPOSFÉRICA SOBRE TERRENOS
IRREGULARES EM VHF E UHF UTILIZANDO EQUAÇÕES PARABÓLICAS E O
DESENVOLVIMENTO DE UM NOVO MODELO HÍBRIDO PARA PREDIÇÃO DE
PERDA DE PERCURSO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador: Gilberto Arantes Carrijo

Assinatura do Orientador

Uberlândia
2017

LORENÇO SANTOS VASCONCELOS

**ANÁLISE DA PROPAGAÇÃO TROPOSFÉRICA SOBRE TERRENOS
IRREGULARES EM VHF E UHF UTILIZANDO EQUAÇÕES PARABÓLICAS E O
DESENVOLVIMENTO DE UM NOVO MODELO HÍBRIDO PARA PREDIÇÃO DE
PERDA DE PERCURSO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Uberlândia, 21 de dezembro de 2017

Banca examinadora

Prof. Dr. Alexandre Coutinho Mateus

Dr. Benedito Alencar de Arruda

Prof. Dr. Edgar Silva Júnior

Prof. Dr. Geraldo Caixeta Guimarães

Prof. Dr. Gilberto Arantes Carrijo
Uberlândia
2017

Dedico este trabalho aos meus pais Marival e Elza.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo cuidado e por me sustentar em todas as atividades.

Ao Prof. Gilberto Arantes Carrijo, por ter aceitado o desafio da orientação deste trabalho, se fazendo presente e auxiliando em todo o desenvolvimento.

A Lara de Lima Braz, pela revisão deste trabalho e pelo amor, companheirismo e carinho.

Ao Tiago Nunes Santos, pelo tempo e disposição investidos na coleta de medidas de campo importantíssimas para a realização deste trabalho e por ter, gentilmente, cedido parte desses dados.

Ao Prof. Edgar Silva Júnior, que, prontamente, disponibilizou equipamentos importantes e também auxiliou na realização de medidas de campo imprescindíveis para a realização deste trabalho.

Ao Prof. Antônio Cláudio Paschoarelli Veiga, que sempre esteve presente, cooperando e cedendo valiosas dicas.

À minha família, por todo o apoio, incentivo nos estudos e amor.

Aos meus amigos e a todas as pessoas que me apoiaram na realização deste trabalho.

RESUMO

VASCONCELOS, L. S. Análise da propagação troposférica sobre terrenos irregulares em VHF e UHF utilizando equações parabólicas e o desenvolvimento de um novo modelo híbrido para predição de perda de percurso. 2017. 530 p. Tese (Doutorado) – Faculdade de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2017.

Neste trabalho, é feita uma análise geral da propagação de ondas eletromagnéticas na troposfera sobre terrenos irregulares nas faixas VHF e UHF. Esse é o cenário das chamadas ondas terrestres, que compreendem boa parte dos serviços de telecomunicações mais difundidos na sociedade. A análise começa com conceitos de eletromagnetismo, passa por importantes aspectos de antenas e cobre a maioria dos mecanismos que afetam esse tipo de propagação, como: propagação no espaço livre, propagação sobre Terra plana e esférica, propagação na troposfera, difração em obstáculos e a propagação sobre terrenos irregulares. Além disso, o método das equações parabólicas é, detalhadamente, desenvolvido para a propagação nesse cenário e são realizados vários testes e comparações que comprovam seu funcionamento. Entretanto, esse método não é muito simples de se implementar de modo a considerar todos os aspectos da propagação como o terreno irregular, por exemplo. Por isso, um novo modelo de propagação híbrido é desenvolvido com o objetivo de aproveitar uma parte mais fácil do modelo de equações parabólicas e incorporá-la a um modelo simples de difração em gumes de faca: o modelo de Bullington. Desse modo, os efeitos das irregularidades do terreno são considerados explicitamente. Os resultados demonstram grande potencial do modelo desenvolvido e sua superioridade em relação a modelos difundidos como o da Recomendação ITU-R P. 1546.

Palavras chave: Bullington, difração, equações parabólicas, ITU-R P.1546, propagação, terreno irregular, troposfera.

ABSTRACT

VASCONCELOS, L. S. **Analysis of tropospheric propagation over irregular terrain in VHF and UHF bands using parabolic equations and the development of a new hybrid path loss prediction model.** 2017. 530 p. Tese (Doutorado) – Faculdade de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2017.

This work performs a general analysis on the propagation of electromagnetic waves through the troposphere over irregular terrain in the VHF and UHF bands. This is the main scenario of the so-called terrestrial waves, which comprise most of the widespread telecommunications services in society. The analysis begins with concepts of electromagnetics, passes through important aspects of antennas and covers most mechanisms that affects this type of propagation, such as: free-space propagation, propagation over flat and spherical Earth, Tropospheric propagation, diffraction over obstacles and propagation over irregular terrain. In addition, the parabolic equation method is developed in detail for propagation in this scenario and a number of tests and comparisons are performed to prove its operation. However, this method is intricate to implement in order to consider all aspects of propagation like the irregular terrain, for example. Therefore, a new hybrid propagation model is developed aiming to take advantage of an easier part of the parabolic equation model and combining it with the simple Bullington knife-edge diffraction model. In this case, the effects of terrain irregularities are considered explicitly. Results demonstrate the great potential of the developed model and its superiority compared to well known models such as the Recommendation of ITU-R P. 1546.

Keywords: Bullington, diffraction, irregular terrain, ITU-R P.1546, parabolic equation, propagation, troposphere.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Relacionamento entre as grandezas variáveis no tempo e as fasoriais.	55
Figura 2 – Distorção das moléculas de um dielétrico quando um campo externo é aplicado.	62
Figura 3 – Polarização em um dielétrico devido a um campo externo.	62
Figura 4 – Representação dos momentos magnéticos dos materiais.	64
Figura 5 – Alinhamento dos dipolos magnéticos.	65
Figura 6 – Ilustração da polarização magnética em uma placa.	66
Figura 7 – Fronteira entre dois meios.	74
Figura 8 – Geração de uma onda eletromagnética a partir de uma espira de corrente.	77
Figura 9 – Geração de uma onda eletromagnética a partir de uma corrente magnética equivalente.	77
Figura 10 – Função de uma onda propagando.	83
Figura 11 – Onda TEM (a) e onda TEM plana (b).	89
Figura 12 – Pol. linear (a), pol. elíptica (b) e pol. circular (c).	93
Figura 13 – Porção da esfera de Poincaré.	95
Figura 14 – Alguns estados de polarização no primeiro octante da esfera.	96
Figura 15 – Projeção da esfera de Poincaré em um plano.	96
Figura 16 – Volume V delimitado por S	102
Figura 17 – Sistema de coordenadas para análise dos potenciais auxiliares.	119
Figura 18 – Antena como dispositivo de transição.	121
Figura 19 – Equivalente elétrico de um sistema de transmissão.	122
Figura 20 – Exemplo dos três tipos de diagrama de radiação.	126
Figura 21 – Regiões de campo de uma antena.	128
Figura 22 – Mudanças típicas na distribuição do campo.	129
Figura 23 – Diagramas de potência (linear) tridimensional e um corte bidimensional explicitando o HPBW e o FNBW.	132
Figura 24 – Sistema de transmissão real vs. radiador isotrópico.	147
Figura 25 – Atribuição das faixas de frequência no Brasil.	154
Figura 26 – Alocação de frequências das faixas de VHF e UHF no Brasil.	155
Figura 27 – Legenda das Figuras 25 e 26.	156

Figura 28 – Onda direta e onda refletida pelo solo.....	158
Figura 29 – Regiões de campo próximo e de campo distante.....	164
Figura 30 – Propagação sobre terreno esférico de raio efetivo r_e	165
Figura 31 – Divergência dos raios refletidos por uma superfície esférica.	170
Figura 32 – Modelo de dois raios da propagação em terreno plano.	171
Figura 33 – Variação da intensidade do sinal recebido para o modelo de terreno plano....	174
Figura 34 – Geometria para determinar o raio de curvatura do percurso de uma onda.	180
Figura 35 – Percurso de um raio (a) sobre a Terra verdadeira e (b) sobre a Terra equivalente.....	182
Figura 36 – Curva para obtenção do fator k mínimo.....	183
Figura 37 – Exemplos de condições de refração.....	185
Figura 38 – Exemplos de (a) duto de superfície e (b) duto elevado.	186
Figura 39 – Comunicação que ocorre em razão da difração.....	188
Figura 40 – Princípio de Huygens na propagação de uma onda esférica.	189
Figura 41 – Princípio de Huygens na propagação de uma onda plana.....	189
Figura 42 – Propagação de uma onda plana.....	190
Figura 43 – Difração de uma onda plana na quina de um obstáculo semi-infinito.	191
Figura 44 – Família de circunferências das zonas de Fresnel.	192
Figura 45 – Definição das zonas de Fresnel.	196
Figura 46 – Elipsóides das zonas de Fresnel.....	196
Figura 47 – Três cenários diferentes de obstáculo posicionado entre Tx e Rx.	198
Figura 48 – Difração por gume de faca: (a) h e v positivos; (b) h e v negativos.	199
Figura 49 – Perda da difração por gume de faca em função do parâmetro v	201
Figura 50 – Difração em gume de faca com reflexões no solo.....	202
Figura 51 – Difração em cunha sólida.	203
Figura 52 – Difração sobre objeto cilíndrico.	204
Figura 53 – (a) Terreno rugoso e (b) representação de terreno rugoso.	208
Figura 54 – Construção do equivalente de Bullington.	212
Figura 55 – Construção do modelo de Epstein-Peterson.....	213
Figura 56 – Construção do modelo Japonês.....	214
Figura 57 – Construção do modelo de Deygout.....	216
Figura 58 – Construção do modelo de Giovanelli.....	218
Figura 59 – Variação <i>long-term</i> sobreposta por variação <i>short-term</i>	221
Figura 60 – Curva de intensidade de campo da ITU-R P. 1546-5.....	228
Figura 61 – Dados tabelados da Rec. ITU-R P. 1546-5.....	228
Figura 62 – Modelagem com base analítica.....	238
Figura 63 – Modelagem com base numérica.....	239

Figura 64 – Processos fundamentais de modelagem e simulação.	241
Figura 65 – Processo genérico de modelagem e simulação.	242
Figura 66 – Esquema de utilização do método PE.	248
Figura 67 – Cenário típico de propagação paraxial.	249
Figura 68 – Ilustração do procedimento iterativo para resolução da equação parabólica. .	255
Figura 69 – Ilustração do ângulo de propagação α	256
Figura 70 – Avanço histórico do método SSPE.	260
Figura 71 – Sistema de coordenadas esféricas.	263
Figura 72 – Transformação de coordenadas utilizada.	269
Figura 73 – Transformação para Terra plana.	279
Figura 74 – Representação de terreno em formato de escada.	286
Figura 75 – Avanço da solução em um terreno de escada (a) ascendente e (b) descendente.	287
Figura 76 – Efeito de uma camada absorvedora de espessura H um raio com elevação θ	294
Figura 77 – Ilustração da malha de integração.	310
Figura 78 – Grid para um esquema- θ	311
Figura 79 – Grid para o esquema de Crank-Nicolson.	313
Figura 80 – Esquema para aproximação unilateral na fronteira inferior.	317
Figura 81 – Campo normalizado do caso 1 calculado pelo método (a) analítico, (b) WAPE e (c) NAPE.	340
Figura 82 – Erro para o caso 1 cometido pelo método (a) WAPE e (b) NAPE.	341
Figura 83 – Campo normalizado para o caso 1 em algumas alturas fixas.	342
Figura 84 – Campo normalizado para o caso 1 em algumas distâncias fixas.	343
Figura 85 – Campo normalizado do caso 2 calculado pelo método (a) analítico, (b) WAPE e (c) NAPE.	345
Figura 86 – Erro para o caso 2 cometido pelo método (a) WAPE e (b) NAPE.	346
Figura 87 – Campo normalizado para o caso 2 em algumas alturas fixas.	347
Figura 88 – Campo normalizado para o caso 2 em algumas distâncias fixas.	348
Figura 89 – Campo normalizado do caso 3 calculado pelo método (a) analítico, (b) WAPE e (c) NAPE.	355
Figura 90 – Erro para o caso 3 cometido pelo método (a) WAPE e (b) NAPE.	356
Figura 91 – Campo normalizado para o caso 3 em algumas alturas fixas.	357
Figura 92 – Campo normalizado para o caso 3 em algumas distâncias fixas.	358
Figura 93 – Campo normalizado do caso 4 calculado pelo método (a) analítico, (b) WAPE e (c) NAPE.	359
Figura 94 – Erro para o caso 4 cometido pelo método (a) WAPE e (b) NAPE.	360

Figura 95 – Campo normalizado para o caso 4 em algumas alturas fixas.....	361
Figura 96 – Campo normalizado para o caso 4 em algumas distâncias fixas.....	362
Figura 97 – Campo normalizado do caso 5 calculado pelo método (a) analítico, (b) WAPE e (c) NAPE.....	363
Figura 98 – Erro para o caso 5 cometido pelo método (a) WAPE e (b) NAPE.....	364
Figura 99 – Campo normalizado para o caso 5 em algumas alturas fixas.....	365
Figura 100 – Campo normalizado para o caso 5 em algumas distâncias fixas.....	366
Figura 101 – Campo normalizado do caso 6 calculado pelo método (a) analítico, (b) WAPE e (c) NAPE.....	367
Figura 102 – Erro para o caso 6 cometido pelo método (a) WAPE e (b) NAPE.....	368
Figura 103 – Campo normalizado para o caso 6 em algumas alturas fixas.....	369
Figura 104 – Campo normalizado para o caso 6 em algumas distâncias fixas.....	370
Figura 105 – Exemplos de perfis de refratividade.....	371
Figura 106 – Comparação entre o campo do modelo (a) WAPE e (b) o traçado de raios para o caso 7.....	375
Figura 107 – Comparação entre o campo do modelo (a) WAPE e (b) o traçado de raios para o caso 8.....	376
Figura 108 – Comparação entre o método WAPE e as medidas de Millington e Isted para o efeito recuperação.....	378
Figura 109 – Resultados de campo para (a) Terra explícita e (b) conversão para Terra plana.....	380
Figura 110 – Fator de propagação para (a) Terra explícita e (b) Terra plana.....	381
Figura 111 – Perda de percurso para (a) Terra explícita, (b) Terra plana e (c) a 25 m acima da superfície para os 2 métodos.....	382
Figura 112 – Construção do equivalente de Bullington.....	389
Figura 113 – Cenário para aplicação para cálculo das perdas troposféricas.....	390
Figura 114 – Domínio computacional equivalente para o cenário da Figura 113.....	391
Figura 115 – Fluxograma do funcionamento geral do programa desenvolvido.....	395
Figura 116 – Exemplo de datasheet de linha de transmissão.....	396
Figura 117 – Exemplo de diagrama de radiação.....	397
Figura 118 – Ilustração do <i>beam-tilt</i> para antena com polarização horizontal.....	397
Figura 119 – Representação esquemática de uma resposta da <i>Google Elevation</i> API a uma solicitação de caminho.....	407
Figura 120 – Exemplo de perfil de terreno.....	408
Figura 121 – Aplicação do algoritmo de busca de gumes de faca.....	408
Figura 122 – Aplicação do algoritmo de busca de gumes de faca.....	409
Figura 123 – Aplicação do algoritmo de busca de gumes de faca.....	409

Figura 124 – Aplicação do algoritmo de busca de gumes de faca.....	410
Figura 125 – Mapa da rota de medições.....	414
Figura 126 – Mapa de elevação da rota de medições.....	414
Figura 127 – Visualização 3D do terreno na rota de medições.....	415
Figura 128 – Visualização 3D do terreno na rota de medições.....	415
Figura 129 – Perfil de elevação da rota de medições.....	416
Figura 130 – Diagrama de elevação da antena ISDE083022UT pol. V com <i>tilt</i> elétrico de 4° e sem preenchimento de nulos.....	418
Figura 131 – Diagrama de azimuth da antena ISD083022UT pol. V.....	418
Figura 132 – Atenuação da linha de transmissão HCA158-50J.....	419
Figura 133 – Exemplos da definição de altitude média do terreno.....	429
Figura 134 – Exemplos de possíveis formatos para a correção.....	430
Figura 135 – Correlação entre a altura efetiva e o resultado do método proposto.....	431
Figura 136 – Rotas de medição em ambiente urbano.....	435
Figura 137 – Porção da Rota 1 afetada pelo <i>gap-filler</i>	439
Figura 138 – Porção da Rota 2 afetada pelo <i>gap-filler</i>	440
Figura 139 – Visualização geográfica dos erros cometidos pelo método proposto.....	443
Figura 140 – Mapa de cobertura gerado a partir dos dados medidos.....	444
Figura 141 – Mapa de cobertura elaborado a partir dos resultados do modelo proposto...	444
Figura 142 – Mapa de cobertura elaborado a partir da ITU-R P.1546-5.....	445
Figura 143 – Geometria para análise das condições de contorno.....	453

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Condições de contorno para os campos elétrico e magnético.....	74
Tabela 2 – Designação das bandas de frequência.	151
Tabela 3 – Distâncias máximas para utilização do modelo de terreno plano.	175
Tabela 4 – Relação dos fatores de difração e propagação dos modelos.	220
Tabela 5 – Expoentes n para alguns ambientes.	222
Tabela 6 – Parâmetros de entrada da Rec. ITU-R P. 1546-5.	229
Tabela 7 – Dados do caso de teste 1.....	339
Tabela 8 – Dados do caso de teste 2.....	344
Tabela 9 – Coeficientes para a Equação (8.24).	352
Tabela 10 – Coeficientes para a Equação (8.27).	353
Tabela 11 – Dados do caso de teste 3.....	354
Tabela 12 – Dados do caso de teste 4.....	358
Tabela 13 – Dados para o caso de teste 5.....	362
Tabela 14 – Dados para o caso de teste 6.....	366
Tabela 15 – Dados para o caso de teste 7.....	374
Tabela 16 – Dados para o caso de teste 8.....	376
Tabela 17 – Dados para o caso de teste 9.....	377
Tabela 18 – Dados para o caso de teste 10.....	379
Tabela 19 – Dados do sistema de transmissão da emissora de TVD.....	417
Tabela 20 – Condições de contorno para os campos elétrico e magnético.....	456

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 1 – Comparativo entre o método proposto sem nenhuma correção e os dados medidos.	419
Gráfico 2 – Comparativo entre o modelo proposto sem correção, modelo do espaço livre e dados medidos.	420
Gráfico 3 – Comparativo entre o método proposto sem correção, método de Bullington e dados medidos.	421
Gráfico 4 – Comparativo entre o método proposto sem correção, método de equações parabólicas e dados medidos.	421
Gráfico 5 – Comparativo entre o método proposto sem correção, modelo log-distância(1) e dados medidos.	422
Gráfico 6 – Comparativo entre o método proposto, log-distância(2) e dados medidos.	423
Gráfico 7 – Comparativo entre o método proposto sem correção, ITU-R P.1546-5 e dados medidos.	423
Gráfico 8 – Comparativo entre todos os modelos analisados e os dados medidos.	424
Gráfico 9 – Filtragem do sinal recebido para considerar apenas a propagação de larga escala.	426
Gráfico 10 – Comparativo entre o modelo proposto sem correção, com a primeira parte da correção (<i>offset</i>) e dados medidos.	427
Gráfico 11 – Curva da segunda parte da correção proposta.	432
Gráfico 12 – Comparação entre o modelo final, sem correções e os dados medidos.	433
Gráfico 13 – Comparativo entre o modelo com <i>offset</i> de área rural e os dados medidos da rota 1.	436
Gráfico 14 – Comparativo entre o modelo com <i>offset</i> de área rural e os dados medidos da rota 2.	436
Gráfico 15 – Comparativo entre o modelo com <i>offset</i> de área rural e os dados medidos da rota 3.	437
Gráfico 16 – Comparativo entre o modelo com <i>offset</i> de área rural e os dados medidos da rota 4.	437
Gráfico 17 – Comparativo entre o modelo com <i>offset</i> de área rural e os dados medidos da rota 5.	438

Gráfico 18 – Comparativo entre o modelo com <i>offset</i> urbano e os dados medidos da rota 1.	
.....	439
Gráfico 19 – Comparativo entre o modelo com <i>offset</i> urbano e os dados medidos da rota 2.	
.....	441
Gráfico 20 – Comparativo entre o modelo com <i>offset</i> urbano e os dados medidos da rota 3.	
.....	441
Gráfico 21 – Comparativo entre o modelo com <i>offset</i> urbano e os dados medidos da rota 4.	
.....	442
Gráfico 22 – Comparativo entre o modelo com <i>offset</i> urbano e os dados medidos da rota 5.	
.....	442

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

3G	Terceira Geração
4G	Quarta Geração
AEIRP	<i>Average Effectively Isotropic Radiated Power</i>
AERP	<i>Average Effectively Radiated Power</i>
ANATEL	Agência Nacional de Telecomunicações
API	<i>Application Programing Interface</i>
CCIR	International Radio Consultative Committee
EBU	European Broadcast Union
EDGE	<i>Enhanced Data Rates for GSM Evolution</i>
EHF	<i>Extremely High Frequency</i>
ELF	<i>Extremely Low Frequency</i>
FD	<i>Finite Difference</i>
FDPE	<i>Finite Difference Parabolic Equation</i>
FDTD	<i>Finite Difference Time Domain</i>
FEM	<i>Finite Element Method</i>
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i>
FM	<i>Frequency Modulation</i>
FNBW	<i>First Null Beamwidth</i>
GLOBE	Global One-km Base Elevation
GLONASS	Глобальная навигационная спутниковая система
GPS	<i>Global Positioning System</i>
GSM	<i>Global System for Mobile Communications</i>
GTD	<i>Geometrical Theory of Diffraction</i>
HF	<i>High Frequency</i>
HPBW	<i>Half Power Beamwidth</i>
HTTP	<i>HyperText Transfer Protocol</i>
IEEE	Institute of Electrical and Electronics Engineers
INPE	Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais

IP	<i>Internet Protocol</i>
ITS	Institute for Telecommunication Sciences
ITU	International Telecommunications Union
JRC	Joint Radio Committee of the Nationalized Power Industries
JSON	<i>JavaScript Object Notation</i>
LF	<i>Low Frequency</i>
LHCP	<i>Left Hand Circular Polarization</i>
LHEP	<i>Left Hand Elliptical Polarization</i>
LTE	<i>Long Term Evolution</i>
MDE	Modelo Digital de Elevação
MF	<i>Medium Frequency</i>
MG	Minas Gerais
MoM	<i>Method of Moments</i>
NAPE	<i>Narrow Angle Parabolic Equation</i>
NLBC	<i>Non-Local Boundary Condition</i>
PE	<i>Parabolic Equation</i>
PEC	<i>Perfectly Electrical Conductor</i>
PLF	<i>Polarization Loss Factor</i>
PML	<i>Perfectly Matched Layer</i>
PVI	Problema de Valor Inicial
RF	Radiofrequência
RFID	<i>Radio Frequency Identification</i>
RHCP	<i>Right Hand Circular Polarization</i>
RHEP	<i>Right Hand Elliptical Polarization</i>
RMS	<i>Root Mean Square</i>
Rx	Receptor
SHF	<i>Super High Frequency</i>
SRTM	<i>Shuttle Radar Topography Mission</i>
SSFM	<i>Split-Step Fourier Method</i>
SSPE	<i>Split-Step Parabolic Equation</i>
TE	<i>Transverse Electric</i>
TEM	<i>Transverse Electromagnetic</i>
TLM	<i>Transmission Line Matrix</i>

TM	<i>Transverse Magnetic</i>
TV	Televisão
TVD	Televisão Digital
Tx	Transmissor
UHF	<i>Ultra High Frequency</i>
URL	<i>Uniform Resource Locator</i>
UTD	<i>Uniform Theory of Diffraction</i>
VHF	<i>Very High Frequency</i>
VLF	<i>Very Low Frequency</i>
VV&C	<i>Verification Validation and Calibration</i>
WAPE	<i>Wide Angle Parabolic Equation</i>
WARC	World Administrative Radio Conference
WLAN	<i>Wireless Local Area Network</i>
WWAN	<i>Wireless Wide Area Network</i>
XML	eXtensible Markup Language

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	31
1.1 Introdução	31
1.2 Motivação	35
1.3 Objetivos.....	36
1.4 Estrutura deste Trabalho	36
2 FUNDAMENTOS DE ELETROMAGNETISMO	41
2.1 Introdução	41
2.2 Campos Variáveis no Tempo e as Equações de Maxwell.....	41
<i>2.2.1 Breve histórico.....</i>	<i>41</i>
<i>2.2.2 Equações de Maxwell na forma pontual.....</i>	<i>43</i>
<i>2.2.3 Equações de Maxwell na forma integral.....</i>	<i>46</i>
2.3 Campos Harmônicos no Tempo e Representação Fasorial	47
<i>2.3.1 Natureza dos campos e fontes.....</i>	<i>47</i>
<i>2.3.2 Fasores e representação analítica de funções.....</i>	<i>48</i>
<i>2.3.3 Representação fasorial de campos harmônicos</i>	<i>52</i>
<i>2.3.4 Interpretação geométrica de fasores.....</i>	<i>53</i>
<i>2.3.5 Diferenciação e integração de fasores.....</i>	<i>55</i>
<i>2.3.6 Equações de Maxwell na forma fasorial.....</i>	<i>57</i>
2.4 Relações construtivas da matéria.....	59
<i>2.4.1 Caracterização dos materiais.....</i>	<i>60</i>
<i>2.4.2 Materiais dielétricos, polarização e permissividade</i>	<i>61</i>
<i>2.4.3 Materiais magnéticos, magnetização e permeabilidade</i>	<i>63</i>
<i>2.4.4 Materiais condutores, corrente e condutividade.....</i>	<i>67</i>
<i>2.4.5 Materiais e campos harmônicos no tempo.....</i>	<i>69</i>
<i>2.4.6 Permissividade complexa.....</i>	<i>70</i>
<i>2.4.7 Permeabilidade complexa</i>	<i>71</i>
<i>2.4.8 Condutividade equivalente</i>	<i>72</i>
2.5 Condições de Contorno	73

2.6 Propagação de Ondas e a Onda Plana Uniforme	75
2.6.1 <i>Esboço da propagação de ondas</i>	76
2.6.2 <i>Ondas planas uniformes</i>	78
2.6.3 <i>Constante de atenuação</i>	83
2.6.4 <i>Constante de fase, velocidade de fase, comprimento de onda e índice de refração</i>	84
2.6.5 <i>Velocidade de grupo</i>	85
2.6.6 <i>Impedância e admitância características</i>	86
2.6.7 <i>Equação geral da onda</i>	88
2.7 Polarização de Onda	92
2.7.1 <i>Polarização linear</i>	93
2.7.2 <i>Polarização elíptica</i>	93
2.7.3 <i>Polarização circular</i>	94
2.7.4 <i>Esfera de Poincaré</i>	94
2.7.5 <i>Aplicação da esfera de Poincaré</i>	97
2.7.6 <i>Outros estados de polarização e os parâmetros de Stokes</i>	98
2.8 Reflexão de Ondas Planas.....	99
2.8.1 <i>Reflexão por um dielétrico perfeito – incidência normal</i>	99
2.8.2 <i>Reflexão por um dielétrico perfeito – incidência oblíqua</i>	100
2.8.3 <i>Reflexão em meios com perdas</i>	101
2.9 Energia, Fluxo de Potência e Vetor de Poynting.....	101
2.9.1 <i>O vetor de Poynting instantâneo.....</i>	101
2.9.2 <i>O vetor Poynting complexo.....</i>	105
2.10 Considerações Finais	113
3 RADIAÇÃO E ANTENAS	115
3.1 Introdução	115
3.2 O Mecanismo de Radiação	115
3.2.1 <i>Potenciais vetores auxiliares</i>	116
3.2.2 <i>Construção das soluções.....</i>	117
3.3 Antenas	121
3.3.1 <i>Sistema equivalente de transmissão/recepção</i>	122
3.3.2 <i>Alguns tipos de antenas.....</i>	123
3.3.2.1 <i>Antenas de fios.....</i>	123

3.3.2.2 Antenas de aberturas.....	123
3.3.2.3 Antenas de microfita	124
3.3.2.4 Arranjos de antenas.....	124
3.3.2.5 Antenas refletoras.....	124
3.3.2.6 Antenas de lentes	125
3.4 Principais Parâmetros de Antenas.....	125
3.4.1 <i>Diagrama de radiação</i>	125
3.4.1.1 Diagramas isotrópico, direcional e omnidirecional.....	127
3.4.2 <i>Regiões de campo</i>	128
3.4.3 <i>Densidade de potência de radiação e intensidade de radiação</i>	129
3.4.4 <i>Largura de feixe</i>	131
3.4.5 <i>Diretividade</i>	132
3.4.6 <i>Eficiência de antena e ganho</i>	134
3.4.7 <i>Eficiência de feixe</i>	136
3.4.8 <i>Largura de faixa</i>	137
3.4.9 <i>Polarização</i>	137
3.4.10 <i>Comprimento e áreas equivalentes</i>	139
3.4.10.1 Vetor comprimento efetivo	139
3.4.10.2 Áreas equivalentes	140
3.5 Diretividade Máxima e Área Efetiva Máxima	142
3.6 Equação da Transmissão de Friis.....	144
3.6.1 <i>Fator de perda no espaço livre</i>	146
3.7 Potência Isotrópica Média Efetivamente Radiada (AEIRP).....	146
3.7.1 <i>Eficiência de linha de transmissão</i>	147
3.7.2 <i>Potência isotrópica média efetivamente radiada</i>	148
3.8 Considerações Finais.....	149
4 FUNDAMENTOS DE PROPAGAÇÃO EM VHF E UHF	151
4.1 <i>Introdução</i>	151
4.2 <i>A Faixa de Frequências</i>	152
4.3 <i>Propagação no Espaço Livre</i>	158
4.4 <i>Propagação em Terreno Esférico</i>	165
4.5 <i>Propagação em Terreno Plano</i>	171
4.6 <i>Propagação na Troposfera</i>	175

4.6.1 A troposfera	175
4.6.2 Índice de refração da troposfera	177
4.6.3 Efeitos da troposfera na propagação de rádio.....	178
4.6.4 A refração atmosférica.....	179
4.6.5 Propagação anômala.....	186
4.7 Propagação por Difração.....	187
4.8 Difração Sobre Obstáculos Reais.....	202
4.9 Considerações Finais	205
5 PROPAGAÇÃO EM TERRENOS IRREGULARES	207
5.1 Introdução.....	207
5.2 Rugosidade do Terreno	207
5.3 Difração em Terreno Irregular.....	210
5.4 Difração Sobre Múltiplos Gumes de Faca.....	211
5.4.1 O modelo de Bullington.....	211
5.4.2 O modelo de Epstein-Peterson.....	212
5.4.3 O modelo Japonês.....	214
5.4.4 O modelo de Deygout.....	215
5.4.5 O modelo de Giovaneli	216
5.4.6 Discussão sobre os modelos apresentados	219
5.5 Modelos de Perda de Percurso em Terrenos Irregulares.....	220
5.5.1 Modelo log-distância	221
5.5.2 Modelo log-normal	222
5.5.3 Modelo de Egli	223
5.5.4 O modelo JRC	224
5.5.5 O modelo de Blomquist-Ladell.....	225
5.5.6 O modelo de Longley-Rice	225
5.5.7 Métodos CCIR	226
5.5.8 Método da Recomendação ITU-R P. 1546-5.....	226
5.5.8.1 Procedimento de Aplicação.....	229
5.6 O Perfil do Terreno.....	233
5.7 Considerações Finais	235
6 MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE PROBLEMAS ELETROMAGNÉTICOS	237
6.1 Introdução.....	237

6.2 Modelagem	237
6.2.1 Boas práticas de modelagem.....	240
6.3 Alguns Modelos Comuns.....	242
6.4 Considerações Finais.....	245
7 O MÉTODO DE EQUAÇÕES PARABÓLICAS	247
7.1 Introdução	247
7.2 Formulação do Método	248
7.3 Aproximações para o Operador Q.....	255
7.4 Métodos de Solução	259
7.4.1 Método do divisor de passos de Fourier	260
7.4.2 Método das diferenças finitas.....	261
7.4.3 Método dos elementos finitos.....	262
7.5 Equações para Propagação de Ondas	263
7.5.1 Polarização horizontal	266
7.5.2 Polarização vertical	271
7.6 Transformação para Terra Plana.....	279
7.7 Resumo das Equações para Propagação Troposférica.....	283
7.8 Modelagem do Terreno	285
7.8.1 Representação em formato de escada	285
7.8.2 Terreno definido por partes	287
7.8.3 Mapeamento conformal.....	288
7.8.4 Modelagem por diferenças finitas.....	292
7.9 Truncamento de Domínio.....	292
7.10 Modelagem de Fronteira de Impedância	296
7.11 Perda de Percurso e Fator de Propagação	300
7.11.1 Polarização horizontal	303
7.11.2 Polarização vertical	307
7.12 Modelagem da Fonte e Campo Inicial.....	307
7.13 Implementação por Diferenças Finitas e o Esquema de Crank-Nicolson	310
7.13.1 Resolução para ângulo estreito – Modo 1	313
7.13.1.1 Equações na fronteira inferior.....	316
7.13.1.2 Equações para fronteira superior.....	321

7.13.2 Resolução para ângulo amplo	325
7.13.2.1 Equações para a fronteira inferior	328
7.13.2.2 Equações para fronteira superior	330
7.13.3 Resolução para ângulo estreito – Modo 2	333
7.14 Considerações Finais	334
8 TESTES CANÔNICOS, COMPARAÇÕES E EXEMPLOS	337
8.1 Introdução	337
8.2 Guia de Onda Retangular Não Penetrável	337
8.2.1 Caso 1 – guia de onda pequeno	339
8.2.2 Caso 2 – guia de onda comprido	344
8.3 Atmosfera com Refratividade Linear Decrescente	348
8.3.1 Caso 3 – Atmosfera linear decrescente sem inclinação de feixe	354
8.3.2 Caso 4 – atmosfera linear decrescente com inclinação de feixe	358
8.3.3 Caso 5 – atmosfera linear muito decrescente com inclinação de feixe ...	362
8.3.4 Caso 6 – atmosfera linear decrescente com 2 fontes Gaussianas	366
8.4 Atmosfera com Perfil Bilinear e Trilinear	370
8.4.1 Caso 7 – atmosfera com perfil trilinear	374
8.4.2 Caso 8 – atmosfera com perfil trilinear invertido	375
8.5 Refração Costal e Efeito Recuperação	377
8.5.1 Caso 9 – efeito recuperação	377
8.6 Conversão para Terra Plana e a Difração pela Terra	379
8.6.1 Caso 10 – conversão para Terra plana	379
8.7 Considerações Finais	383
9 METODOLOGIA PROPOSTA	385
9.1 Introdução	385
9.2 Modelagem de Perda de Percurso	385
9.3 Formulação do Método	386
9.3.1 Cálculo da perda no espaço livre	388
9.3.2 Cálculo da perda por difração devido ao terreno irregular	389
9.3.3 Cálculo da perda troposférica pelo método de equações parabólicas	390
9.3.4 Refinamento do modelo	391
9.4 Considerações Finais	392
10 PACOTE PARA PREDIÇÃO DE INTENSIDADE DE SINAL	393

10.1 Introdução	393
10.2 O MATLAB®	393
10.3 Funcionamento Geral do Programa.....	394
10.4 Informações do Sistema de Transmissão	395
10.5 Obtenção dos Dados do Terreno	398
10.5.1 Limites de Uso.....	399
10.5.2 Solicitações	400
10.5.3 Formatos de Saída.....	400
10.5.4 Parâmetros.....	400
10.5.5 Especificando locais.....	401
10.5.6 Especificando Caminhos.....	402
10.5.7 Respostas da Google Elevation API	402
10.5.8 Exemplos.....	403
10.5.9 Interpretação dos dados obtidos	405
10.6 Representação por Gumes de Faca.....	408
10.7 Cálculo da Perda Total e Potência Recebida	410
10.8 Considerações Finais.....	411
11 RESULTADOS	413
11.1 Introdução	413
11.2 Cenário de Teste	413
11.3 Equipamento de Medição.....	416
11.4 Estação Transmissora.....	417
11.5 Resultados.....	419
11.6 Calibração do Modelo Proposto – Parte 1.....	424
11.7 Calibração do Modelo Proposto – Parte 2.....	427
11.8 Adaptação Para o Cenário Urbano.....	433
11.9 Considerações Finais.....	445
12 CONCLUSÕES E CONTRIBUIÇÕES.....	447
12.1 Conclusões.....	447
12.2 Contribuições.....	450
12.3 Sugestões para Trabalhos Futuros.....	451
APÊNDICE A – CONDIÇÕES DE CONTORNO.....	453

APÊNDICE B – CÁLCULO DA PARTE REAL E IMAGINÁRIA DA CONSTANTE DE PROPAGAÇÃO	457
APÊNDICE C – DEMONSTRAÇÃO DO LUGAR GEOMÉTRICO DA POLARIZAÇÃO	459
C.1 – Polarização Linear	459
C.2 – Polarização Elíptica	459
C.3 – Polarização Circular	462
APÊNDICE D – CÓDIGOS DE PROGRAMAS UTILIZADOS.....	463
D.1 – Programa para Cálculo Analítico no Guia de Onda Paralelo Não Penetrável.....	463
D.2 – Programa NAPE para Cálculo no Guia de Onda Paralelo Não Penetrável	465
D.3 – Programa WAPE para Cálculo no Guia de Onda Paralelo Não Penetrável.....	467
D.4 – Programa para Cálculo Analítico em Atmosfera Linear Decrescente .	469
D.5 – Programa NAPE para Cálculo em Atmosfera Linear Decrescente	471
D.6 – Programa WAPE para Cálculo em Atmosfera Linear Decrescente	474
D.7 – Função para Calcular n-ésima Raiz da Função de Airy de Primeiro Tipo	477
D.8 – Função para Calcular a n-ésima Raiz da Derivada da Função de Airy de Primeiro Tipo.....	477
D.9 – 150 Primeiras Raízes da Função de Airy de Primeiro tipo e da Derivada da Função de Airy de Primeiro Tipo	477
D.10 – Programa para Cálculo do Traçado de Raios em Atmosfera Trilinear	483
D.11 – Programa WAPE para Cálculo em Atmosfera Trilinear	485
D.12 – Programa WAPE para Demonstração do Efeito Recuperação.....	488
D.13 – Função que Calcula a Condição de Contorno de Impedância do Solo	492
D.14 – Função que Calcula Constantes do Solo	492
D.15 – Programa WAPE que Calcula a Propagação Sobre a Superfície Esférica da Terra.....	495

D.16 – Programa WAPE que Calcula a Propagação Utilizando a Conversão para Terra Plana	500
D.17 – Função que Gera Atmosfera Radialmente Estratificada	504
D.18 – Função que Gera a Distribuição Inicial de Campo da Fonte Gaussiana	504
D.19 – Programa Para Cálculo do Modelo Proposto	505
D.20 – Função que Calcula a Perda Troposférica no Método Proposto.....	508
D.21 – Função que Calcula a Perda do Método de Bullington	511
D.22 – Função que Calcula a Atenuação da Linha de Transmissão.....	512
D.23 – Função que Calcula a AEIRP em Determinada Direção	512
D.24 – Função que Calcula a Distância Geodésica e o Azimute entre Duas Coordenadas Geográficas.....	513
D.25 – Função que Calcula a AEIRP Máxima do Sistema Radiante.....	513
D.26 – Função que Retorna os Valores Mais Próximos de um Valor Desejado em um Vetor.....	514
D.27 – Função para Detectar Gumes de Faca no Perfil de Terreno	515
D.28 – Função que Calcula o Parâmetro de Fresnel-Kirchoff	515
D.29 – Função para Encontrar Ponto na Primeira Zona de Fresnel.....	516
D.30 – Função para Gerar um Elipsoide	516
D.31 – Função para Rotacionar o Elipsoide de Fresnel	517
D.32 – Função para Obter o Perfil de Terreno no Google Elevation API.....	517
D.33 – Função que Verifica se os Dados Informados Estão Corretos.....	518
13 REFERÊNCIAS	519

1 INTRODUÇÃO

1.1 Introdução

WIRELESS TELEGRAPHY—*At a time when relations are strained between Spain and this country, nothing could be more welcome than a practical method of carrying on electrical communication between distant points on land, and between ships at sea, without any prearranged connection between the two points. During the last year Guglielmo Marconi, an Italian student, developed a system of wireless telegraphy able to transmit intelligible Morse signals to a distance of over ten miles. It has been left, however, for an American inventor to design an apparatus suitable to the requirements of wireless telegraphy in this country. After months of experimenting, Mr. W. J. Clarke, of the United States Electrical Supply Company, has designed a complete wireless telegraphy apparatus that will probably come rapidly into use.*

—Scientific American April 1898

Essa manchete apareceu na revista *Scientific American* nos primórdios da tecnologia de rádio. Uma definição de rádio é: “a transmissão e recepção de impulsos elétricos ou sinais por meio de ondas eletromagnéticas sem a conexão de fios” [1]. Existe uma grande polêmica sobre quem realmente inventou o rádio.

Mahlon Loomis, um dentista, experimentou a telegrafia sem fio utilizando cabos presos a pipas e um galvanômetro para medir as mudanças na corrente de um cabo quando o aterramento de outro era interrompido. Em 1873 ele recebeu uma patente por esses sistema [1].

James Clerk Maxwell previu a propagação de ondas eletromagnéticas no vácuo entre 1862 e 1864. Nathan Stubblefield, um fazendeiro de Kentucky e reparador de telefones demonstrou telefonia sem fio em 1892 para apenas uma pessoa e, mais tarde, em 1902 para um grupo [1].

Alexander Popov, em 7 de maio de 1895, em uma aula, disse ter transmitido e recebido sinais a uma distância de 600 jardas. Em 1887, Herich Hertz conduziu uma demonstração experimental em uma sala de aula sobre a geração e detecção das ondas eletromagnéticas previstas por Maxwell [1].

Sir Oliver Lodge, professor da Universidade de Liverpool, fez vários experimentos com telegrafia sem fio em 1888 e patenteou um sistema em 1897. Finalmente, Marconi patenteou seu sistema em 1911 [1].

Em geral, Marconi é visto como o inventor do rádio, mas sua contribuição foi mais no sentido de pesquisa aplicada e engenharia do que de invenção. Embora

Marconi tenha recebido patentes, Nikola Tesla já tinha patentes anteriores, embora seu foco tenha sido na transmissão de potência do que na comunicação e detectou, anteriormente, sinais de ruído impulsivo resultantes das grandes descargas atmosféricas que ele mesmo causava e que viajavam completamente ao redor da Terra [1].

Além da polêmica entre Tesla e Marconi, é preciso lembrar do padre Roberto Landell de Moura, que é um dos pioneiros da tecnologia de rádio no Brasil e, possivelmente, o primeiro do mundo a estabelecer comunicação sem fio. Ele desenvolveu uma série de pesquisas e experimentos e diz-se que foi um dos primeiros cientistas a conseguir a transmissão de som e sinais telegráficos sem fio. Vários testemunhos afirmam que ele realizou testes bem sucedidos a partir de 1893 ou 1894, mas a documentação comprobatória sobre esses primeiros experimentos é escassa. O primeiro registro documentado publicamente é de 3 de junho de 1900, ocasião em que ele testou, com sucesso, aparelhos que transmitiram sons e sinais telegráficos.

Embora seja possível que Landell tenha sido o grande pioneiro, sua realização permanece largamente ignorada fora do Brasil, mas o número de fontes internacionais que aceitam sua primazia está aumentando. Além do rádio, Landell também parece ter sido pioneiro na transmissão de imagens sem fio e é considerando, no Brasil, o precursor da televisão e das fibras ópticas, embora a documentação também não seja clara.

Apesar de toda polêmica, o fato é que os cientistas e matemáticos do Século XIX construíram as bases dos sistemas de telecomunicações e da tecnologia sem fio, que afeta inúmeras áreas da sociedade atual [2]. Em 1864, Maxwell criou quatro relações de campos eletromagnéticos que condensaram todas as descobertas de Laplace, Poisson, Faraday, Gauss e outros, mas também previu a propagação de sinais elétricos pelo espaço. Hertz, posteriormente, verificou esse efeito em 1887 e, em 1899, baseado em estudos de Nikola Tesla, Guglielmo Marconi demonstrou que era possível estabelecer contato contínuo entre a terra e barcos que navegavam no canal da Mancha por meio de ondas de rádio [3].

Desde então, a capacidade de estabelecer comunicação sem fio se desenvolveu bastante e novos métodos e serviços foram criados e adotados no mundo todo. Alguns exemplos são: comunicação celular (GSM, EDGE, LTE), identificação por radio frequência (RFID), redes sem fio (WWAN e WLAN), difusão

de rádio e televisão, sistemas de posicionamento e navegação global (GPS, GLONASS, GALILEO, COMPASS), telefonia via satélite, entre outros. Hoje, vários desses sistemas são utilizados diariamente por grande parte da população mundial e a tendência é que novas tecnologias de comunicação sem fio sejam desenvolvidas.

Dentre as várias modalidades de sistemas de comunicação sem fio, pode-se destacar os sistemas de comunicação terrestre, que são utilizados por uma grande variedade de aplicações, tanto nas cidades como nas regiões rurais. Um exemplo de sistema terrestre é a radiodifusão de televisão. Em sistemas desse tipo, os receptores mais distantes da estação base estão, geralmente, a cerca de 20 ou 30 km desta. Já em um sistema celular, por outro lado, os raios de cobertura das células chegam a ser menores que 1 km [4].

Embora cada sistema de comunicação terrestre possua suas peculiaridades, como raio de cobertura, modulação e polarização, todos eles têm algo em comum: suas ondas eletromagnéticas propagam sobre uma superfície irregular e pela atmosfera terrestre. Essa característica exerce influência direta sobre a qualidade da comunicação.

É sabido que o desvanecimento por multipercurso pode afetar significativamente a confiabilidade de um enlace de comunicações. Em geral, os enlaces são obstruídos por obstáculos naturais ou artificiais, como morros, construções, diferentes camadas atmosféricas, árvores, chuva, neblina, entre outros. Portanto, a degradação da comunicação depende, de uma maneira complexa, do clima, de características atmosféricas e do terreno [5].

Em se tratando de comunicação terrestre, é possível observar dois tipos principais de multipercurso: atmosférico e de solo. O multipercurso atmosférico é causado pela interferência de dois ou mais raios supra-refratados que chegam ao receptor por diferentes caminhos e pode conduzir a uma perda completa do sinal no receptor. Além disso, condições anômalas de propagação causadas por variações troposféricas podem fazer com que o horizonte de rádio seja modificado, favorecendo ou comprometendo a comunicação. Portanto, em geral, o comportamento desse tipo de multipercurso depende da refratividade da atmosfera.

Por outro lado, o multipercurso de solo é devido à interferência entre os raios direto e refletido pelo solo e seu comportamento depende fortemente da geometria do terreno e das características do solo. Além disso, a propagação de ondas de

rádio em terrenos irregulares pode encontrar uma variedade de obstáculos que bloqueiam a visada direta entre os terminais de transmissão e recepção ou que obstruem a primeira zona de Fresnel do enlace. Isso pode sombrear completamente o receptor, levando a perdas severas do sinal [5].

Devido, principalmente, ao multipercurso, é muito importante estimar os efeitos do ambiente nos enlaces de comunicação na tentativa de prever e minimizar as perdas ainda na etapa de projeto. Para isso, um modelo de propagação que considere o perfil de índice de refração da atmosfera, a topografia do terreno e as características do solo seria bastante adequado na predição da performance de enlaces.

Um método que tem sido estudado nos últimos anos e tem se tornado muito popular e aceito na comunidade eletromagnética é o método de equações parabólicas. Para os problemas de propagação eletromagnética, uma grande vantagem é que a equação parabólica consegue considerar todos os aspectos da propagação de ondas como: reflexão, refração, difração e ondas de superfície. Nesse sentido, esse método é muito superior aos métodos comuns de teoria de raios. Outra vantagem dos métodos de equações parabólicas é que eles continuam válidos nas regiões de sombra em que os métodos de raios falham completamente.

Entretanto, mesmo muito poderoso, o método de equações parabólicas tem seus inconvenientes. Em geral, seus principais desafios estão no tratamento das condições de contorno do domínio e na modelagem do terreno irregular. Muitas vezes, esse método acaba na resolução de matrizes muito grandes e um grande custo computacional é envolvido.

Por outro lado, existem alguns modelos de propagação muito simples, como o modelo de Bullington, que é utilizado para quantificar perdas por difração, mas que, por sua simplicidade, acabam não fornecendo resultados condizentes com a realidade. Por isso, pensando de maneira pragmática e na tentativa de simplificar a predição de perda de percurso, esta tese propõe o desenvolvimento de um novo método de cálculo, híbrido, e baseado nos métodos de equações parabólicas, do espaço livre e de Bullington.

Sendo assim, ao longo deste trabalho são discutidos aspectos sobre a propagação de ondas em terrenos irregulares nas faixas de VHF e UHF desde os fundamentos de eletromagnetismo até questões importantes sobre modelagem e simulação de problemas eletromagnéticos pelos métodos escolhidos.

Além disso, a tese também mostra o desenvolvimento de uma ferramenta computacional capaz de, automaticamente, obter dados de elevação do terreno para efetuar os cálculos de atenuação do modelo proposto. Isso é algo muito importante, pois automatiza um dos processos mais complicados dos cálculos, que é a obtenção do perfil vertical do terreno de propagação. Além de obter o perfil de terreno *online*, a ferramenta desenvolvida é capaz de realizar a predição de intensidade de sinal em qualquer ponto da Terra, uma vez informadas as localizações do transmissor e receptor e os parâmetros do sistema radiante. Também destaca-se a utilidade da ferramenta como forma de apoiar o planejamento e o projeto de instalações transmissoras, por exemplo, de rádio e TV.

1.2 Motivação

A predição e o cálculo de intensidade de campo elétrico (ou da perda de propagação) são imprescindíveis na instalação e manutenção de qualquer sistema de telecomunicações sem fio. O cálculo da atenuação é muito importante no projeto de tais sistemas, pois, a partir das predições de intensidade de campo, pode-se determinar (ou predizer) várias características do seu desempenho, como a área de cobertura, os contornos interferentes, áreas de sombra, entre outros. Pode-se, ainda, fazer estudos e simulações da intensidade do sinal em uma dada área, alterando a posição do transmissor, a fim de estimar o melhor local para instalar uma estação base.

Na grande área de comunicação sem fio, pode-se destacar alguns sistemas terrestres importantes como os de difusão de rádio e televisão, seja analógica ou digital, e os sistemas de comunicações móveis, principalmente a tecnologia celular. No atual contexto de migração do sistema televisivo analógico para o digital e, também, das migrações de tecnologia 3G para LTE (4G), muitas emissoras e operadoras deverão modificar suas instalações e/ou instalar novas bases de transmissão, o que, sem dúvida, irá requerer estudos da intensidade de campo (atenuação do sinal). Também é importante ressaltar que o cálculo de campo é necessário para a regulamentação desses serviços nos padrões da Agência Nacional de Telecomunicações (ANATEL) e do Ministério das Comunicações.

Há vários métodos para realizar predições e cada um tem sua peculiaridade, complexidade e aplicação, mas, independente do método, é certo que a sua

utilização é bastante importante em situações de projeto e de avaliação de desempenho dos sistemas. Por isso, a motivação principal desta tese de doutorado foi a tentativa de simplificar o cálculo da predição de perda de percurso por meio do desenvolvimento de um novo método de cálculo. Método, este que se apropria de partes simples de outros métodos para formar um híbrido de simples aplicação.

1.3 Objetivos

Para se chegar ao objetivo final do desenvolvimento de um novo método de predição de perda de propagação, alguns objetivos específicos devem ser atingidos. São eles:

- forte pesquisa e embasamento das teorias e aspectos físicos e matemáticos que regem a propagação de ondas;
- pesquisa sobre diferentes modelos de propagação já existentes e o entendimento dos pontos fortes e fracos de cada um;
- pesquisa e desenvolvimento do modelo proposto;
- implementação computacional e eficaz do modelo proposto e a sua aplicação em percursos reais de propagação em terreno irregular em diferentes frequências nas faixas de VHF e UHF;
- testes e simulações com o modelo proposto para sua verificação, validação e calibração.

Ao final, espera-se ter desenvolvido uma forte fundamentação teórica e prática sobre a predição de perda de propagação e, também, obter um modelo de propagação que seja capaz de prever, efetivamente, a propagação de sinais VHF e UHF em regiões suburbanas e rurais sobre terrenos irregulares. Também espera-se que o modelo desenvolvido possa ser de viável utilização para projetistas e analistas de sistemas de comunicação.

1.4 Estrutura deste Trabalho

A estrutura desta tese foi dividida em doze capítulos, com os respectivos títulos:

1. Introdução (este capítulo);
2. Fundamentos de Eletromagnetismo;

3. Radiação e Antenas;
4. Fundamentos de Propagação em VHF e UHF;
5. Propagação em Terrenos Irregulares;
6. Modelagem e Simulação de Problemas Eletromagnéticos;
7. O Método de Equações Parabólicas;
8. Testes Canônicos, Comparações e Exemplos;
9. Metodologia Proposta;
10. Pacote para Predição de Intensidade de Sinal;
11. Resultados;
12. Conclusões e Contribuições.

A Introdução do Capítulo 1 tem por objetivo delimitar e apresentar os objetos de estudo deste trabalho, bem como justificar e dar relevância para as questões pesquisadas. Além disso, ela ambienta o leitor à estrutura observada nos capítulos seguintes.

O Capítulo 2, Fundamentos de Eletromagnetismo, faz uma recordação da estrutura física e matemática que dá base para os demais capítulos deste trabalho. Ele é necessário para compreender bem o que é perda de propagação e quais os mecanismos físicos que regem esse fenômeno.

O Capítulo 3, Radiação e Antenas, traz uma explanação (mais qualitativa do que matemática) do mecanismo de radiação e, também, discute, brevemente, alguns tipos de antenas utilizados e os principais parâmetros utilizados na análise da performance de antenas. Isso é muito importante, pois um dos principais passos da predição de intensidade de sinal é o conhecimento do sistema de transmissão e a maneira como as ondas eletromagnéticas são radiadas por ele.

O Capítulo 4, Fundamentos de Propagação em VHF e UHF, visa apresentar e caracterizar as faixas de frequências VHF e UHF, e, portanto, justificar a sua escolha como um dos objetos de estudo desta tese. Além disso, esse capítulo mostra as bases matemáticas dos principais mecanismos de propagação que ocorrem quando se utiliza tais bandas para comunicações terrestres. Todo tipo cálculo de predição de atenuação, ou intensidade de campo, parte das bases apresentadas nesse capítulo e nos capítulos anteriores.

Uma vez que os conhecimentos básicos foram apresentados nos Capítulos 2, 3 e 4, o Capítulo 5, Propagação em Terrenos Irregulares, busca caracterizar a

propagação de ondas quando o terreno é irregular, aplicando os conhecimentos dos capítulos precedentes. Além disso, esse capítulo apresenta os principais métodos utilizados para o cálculo da atenuação por difração em terrenos irregulares e, também, métodos famosos de cálculo de perda de propagação nesse cenário. Por fim, também comenta sobre a importância dos dados topográficos nesse tipo de cálculo.

O Capítulo 6, Modelagem e Simulação de Problemas Eletromagnéticos, explora a importância da modelagem e simulação computacional na atualidade e comenta sobre boas práticas para se modelar problemas eletromagnéticos. Além disso, apresenta vários métodos fundamentais e muito utilizados para modelagem numérica desse tipo de problema.

O Capítulo 7, por sua vez, traz uma grande revisão bibliográfica sobre o método das equações parabólicas e desenvolve, matematicamente, inúmeros aspectos de sua implementação. Além disso, é mostrado como resolver esse tipo de método por meio de esquemas numéricos baseados no método das diferenças finitas.

O Capítulo 8 é destinado a testar e comprovar a validade do método de equações parabólicas apresentado no Capítulo 7. Nesse capítulo, são feitos vários testes canônicos e comparações como parte de um procedimento de verificação e validação do método de equações parabólicas. Além disso, traz alguns exemplos práticos de sua aplicação e os compara com resultados de outros métodos.

O Capítulo 9 propõe uma metodologia própria para realizar a predição de perda de propagação utilizando um método híbrido. Esse método foi desenvolvido na busca de um modelo simples, mas capaz de considerar, com precisão, os aspectos troposféricos e das irregularidades do terreno. Ele é híbrido, pois é baseado no método de Bullington para terrenos irregulares e em um modelo de equações parabólicas modificado para a propagação troposférica.

O Capítulo 10, Pacote de Predição de Intensidade de Sinal, descreve todo o desenvolvimento da ferramenta computacional utilizada para implementar o método proposto no Capítulo 9. Além disso, mostra como essa ferramenta desenvolvida é capaz de obter dados topográficos do enlace analisado automaticamente e *online*.

O Capítulo 11, apresenta, de maneira organizada, os dados que foram obtidos a partir da aplicação da metodologia proposta e os compara com resultados medidos e com outros métodos existentes. À medida que os resultados são apresentados,

são feitas ponderações e conclusões sobre os objetos estudados e, finalmente, é analisado um tipo de calibração para melhoria dos resultados do modelo proposto.

Por fim, o Capítulo 12 realiza o fechamento da tese, por meio da conclusão de tudo o que foi apresentado e pontua as principais contribuições que este trabalho pode trazer à comunidade científica e à sociedade. Além disso, continuações para o trabalho apresentado são propostas.

2 FUNDAMENTOS DE ELETROMAGNETISMO

2.1 Introdução

O propósito principal deste trabalho é analisar alguns tipos de métodos de predição de perda de propagação e introduzir um novo método híbrido a partir da combinação de dois métodos existentes. Para que se tenha sucesso, é necessário compreender bem o que é perda de propagação e quais os mecanismos físicos que regem esse fenômeno e isso é feito nos capítulos seguintes. Entretanto, para compreender com solidez os conceitos apresentados nos capítulos subsequentes, é preciso uma boa recordação da estrutura física e matemática que dá base para os demais capítulos deste trabalho. Portanto, esse é o propósito deste capítulo.

Em primeiro lugar, é comentada a importância dos campos variáveis no tempo e são introduzidas as equações de Maxwell. Além disso, é feito um estudo sobre a variação harmônica dos campos vetoriais e as simplificações que podem ser obtidas quando se trabalha com esse tipo de campo. Mais ainda, os fenômenos que ocorrem na interação entre os campos eletromagnéticos e a matéria são revisados, bem como as condições de contorno que devem ser satisfeitas nas fronteiras.

Aproximando mais ainda do tema central da pesquisa, as equações que dão suporte para o estudo de propagação de ondas eletromagnéticas são desenvolvidas, particularmente para as ondas planas uniformes e aspectos importantes como a polarização são discutidos. Também é, brevemente, apresentada a teoria de reflexão de ondas em superfícies e, por fim, um estudo mais detalhado sobre fluxo de potência e energia é feito de maneira a convergir no importante conceito do vetor de Poynting.

2.2 Campos Variáveis no Tempo e as Equações de Maxwell

2.2.1 Breve histórico

Em geral, os campos de força e as fontes relacionadas à eletricidade e magnetismo podem, ou não, ser variáveis no tempo e no espaço. Quando são variáveis no tempo, sabe-se que existe uma relação íntima entre os campos elétrico e magnético e, então, passa-se a utilizar a nomenclatura campos eletromagnéticos.

Embora a eletrostática seja muito importante em várias áreas da ciência, apenas os campos variáveis no tempo são capazes de substantiar o enorme valor

da teoria eletromagnética [6]. Deve-se notar que as experiências de Faraday, Hertz e outros, e as análises teóricas de Maxwell, envolveram, todas, campos variáveis no tempo.

Certamente, é possível que exista um campo eletrostático na ausência de um campo magnético; um capacitor com carga estática Q é um bom exemplo. Por outro lado, um condutor com corrente constante também gera um campo magnetostático sem um campo elétrico [6]. Entretanto, quando os campos são variáveis no tempo, um não pode existir sem o outro e vice versa.

Um exemplo dessa inter-relação entre os campos é dado pela lei da indução de Faraday, que mostra que um campo magnético variável no tempo induz um campo elétrico (também variável no tempo). Um efeito recíproco também existe: um campo elétrico variável no tempo induz um campo magnético.

Esse suporte mútuo entre os campos de força mostrado no exemplo anterior resulta no fenômeno da propagação de ondas. Pode-se dizer que a previsão da existência das ondas eletromagnéticas e o seu valioso uso nos sistemas de comunicação foram o grande clímax dos séculos de exploração e experimentação precedentes [7].

Todo tipo de transmissão sem fio ocorre por meio da propagação dos campos elétrico e magnético. O campo elétrico (\mathbf{e}) e o campo magnético (\mathbf{h}) são campos de força vetoriais que possuem magnitude, direção e sentido definidos em todos os pontos. Eles podem ser estacionários, mas, para que se propaguem, eles devem, obrigatoriamente, variar com tempo.

O bom entendimento da propagação de sinais eletromagnéticos começa entendendo-se, fisicamente, como os campos elétrico e magnético interagem entre si. Felizmente, muito já foi pesquisado sobre o tema e há uma forte base matemática desenvolvida: as equações de Maxwell.

O trabalho de James Clerk Maxwell é um dos mais importantes na área do eletromagnetismo e há duas grandes razões para isso. Em primeiro lugar, seu trabalho foi pioneiro, pois sumariou o estado da ciência eletromagnética na sua época ao formular uma teoria unificada sobre a eletricidade e magnetismo [8]. Todos os resultados teóricos e as evidências experimentais sobre o comportamento dos campos elétrico e magnético, observadas por vários pesquisadores como Gauss, Faraday, Ampère, entre outros, foram unificados em sua teoria.

Ela continha numerosas equações e conceitos e, algum tempo depois, Oliver Heaviside fez uma redução para quatro principais equações [1] que, juntamente com algumas relações auxiliares, conseguem descrever completamente o comportamento eletromagnético. Assim, a importância das equações de Maxwell não pode ser subestimada porque elas resumem todas as leis conhecidas do eletromagnetismo. Mais ainda, para um campo ser classificado como um campo eletromagnético, ele deve satisfazer todas as quatro equações de Maxwell.

Além disso, o trabalho de Maxwell é de suma importância, pois levou à descoberta experimental da propagação de ondas eletromagnéticas por Hertz posteriormente. A partir de considerações teóricas, Maxwell hipotetizou e introduziu o conceito de corrente de deslocamento em suas equações e fez a previsão da existência das ondas eletromagnéticas [9] com velocidade de propagação igual a da luz. Essa predição levou à conclusão da natureza eletromagnética da luz [7].

Apesar do brilhante trabalho de Maxwell, suas equações não foram inicialmente aceitas por muitos cientistas, pois, à época, não havia tecnologia suficiente para confirmar a propagação de ondas. Mais tarde, suas previsões foram confirmadas por Heinrich Rudolf Hertz, professor de física alemão, que foi bem sucedido na sua tentativa de gerar e detectar ondas de rádio [8].

2.2.2 Equações de Maxwell na forma pontual

Do ponto de vista histórico, as equações de Maxwell foram resultado de várias observações experimentais e teóricas. Entretanto, do ponto de vista didático, é mais interessante partir das equações já formuladas para entender os efeitos dos campos variáveis e a propagação de ondas.

O conjunto mais geral das equações de Maxwell na forma pontual (diferencial) para campos variáveis no tempo e a importante equação da continuidade são mostrados nas Equações (2.1a) a (2.1d) e Equação (2.1e), respectivamente. Na notação utilizada, as variáveis em negrito são vetoriais e variáveis no tempo. A partir da Seção 2.3 começam a aparecer variáveis maiúsculas, pois não variam no tempo.

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} - \mathbf{m} \quad (2.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \mathbf{j}_{\text{Total}} \quad (2.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{d} = \rho \quad (2.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{b} = \rho_m = 0 \quad (2.1d)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{j}_{\text{Total}} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (2.1e)$$

em que:

- $\mathbf{e}(x, y, z, t)$ é o campo elétrico, em V/m.
- $\mathbf{h}(x, y, z, t)$ é o campo magnético, em A/m.
- $\mathbf{d}(x, y, z, t)$ é a densidade de fluxo elétrico, em C/m².
- $\mathbf{b}(x, y, z, t)$ é a densidade de fluxo magnético, em Wb/m².
- $\mathbf{m}(x, y, z, t)$ é a densidade de corrente magnética fictícia, em V/m².
- $\mathbf{j}_{\text{Total}}(x, y, z, t)$ é a densidade de corrente elétrica total, em A/m².
- $\rho(x, y, z, t)$ é a densidade de carga, em C/m³.
- $\rho_m(x, y, z, t)$ é a densidade de carga magnética fictícia, em Wb/m³.

Na Equação (2.1b), a densidade de corrente elétrica total, $\mathbf{j}_{\text{Total}}$, consiste, em geral, de uma corrente imposta por uma fonte, $\mathbf{j}_{\text{Fonte}}$, uma corrente de condução $\mathbf{j}_C = \sigma \mathbf{e}$, causada pela presença do campo elétrico imposto pela fonte em um material com condutividade finita σ e de uma corrente de convecção $\rho \mathbf{v}$, que é resultado de uma distribuição de cargas livres ρ fluindo com velocidade \mathbf{v} .

A corrente de convecção é de grande importância em muitos dispositivos práticos, como tubos de elétrons, tubos de raios catódicos, entre outros, porém, na maioria das situações tratadas nesse trabalho, a corrente de convecção é nula. Portanto, neste trabalho sempre será utilizado $\mathbf{j}_{\text{Total}} = \mathbf{j}_{\text{Fonte}} + \sigma \mathbf{e}$.

Em problemas de antenas, a densidade de corrente imposta pela fonte geralmente é assumida como conhecida na antena e a densidade de corrente de condução representa uma densidade de corrente que flui em um condutor próximo devido aos campos criados pela densidade de corrente da fonte [10].

A densidade de corrente magnética, \mathbf{m} , é uma fonte fictícia e é apenas uma conveniência matemática. A real fonte de corrente magnética é sempre um caminho fechado de corrente elétrica ou algum tipo de dipolo magnético, não um fluxo de cargas (monopolos) magnéticas (que não existem). Essa corrente magnética é incluída nas equações apenas para que elas sejam matematicamente completas e é muito útil para lidar com problemas em aberturas [10]. Além disso, também pode exercer o papel de fonte equivalente para substituir distribuições de corrente elétrica muito complexas.

Como exemplo, seja uma região em que existem dois tipos de corrente elétrica: uma corrente linear, que flui ou oscila em uma direção linear e uma corrente circulatória infinitesimal, que flui ou oscila em um caminho fechado infinitesimal. Nesse caso, é muito complicado descrever, matematicamente, a densidade de corrente total causada por essas duas correntes.

Do ponto de vista matemático, é mais vantajoso considerar que apenas a corrente linear é responsável pela densidade de corrente elétrica e imaginar que a corrente circulatória infinitesimal é um dipolo magnético equivalente. Assim, se a corrente circulatória varia em magnitude e direção ou oscila com o tempo, o dipolo magnético equivalente também varia sua intensidade. Quando a magnitude desse dipolo equivalente oscila com o tempo, pode-se considerar como se existisse uma corrente magnética imaginária fluindo [2]. Portanto, uma corrente circulatória variante no tempo pode ser representada pelas densidades fictícias de corrente \mathbf{m} e de carga ρ_m .

As densidades de corrente impostas, \mathbf{m} e $\mathbf{j}_{\text{Fonte}}$, geralmente são utilizadas nos problemas de eletromagnetismo como grandezas equivalentes com papel de representar fontes de energia que geram campos elétricos e magnéticos. Portanto, na maioria das vezes, essas grandezas são conhecidas.

Observando as equações de Maxwell, é natural pensar que $\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}$ seja a fonte geradora de \mathbf{e} e $\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t}$, a fonte geradora de \mathbf{h} . Entretanto, as reais fontes de um campo eletromagnético são representadas por \mathbf{m} , $\mathbf{j}_{\text{Total}}$ e ρ . Lembrando que \mathbf{m} é fictícia e, na verdade, faz parte da densidade de corrente elétrica.

Também é importante notar que, para campos variáveis no tempo, a densidade de carga ρ é relacionada à densidade de corrente j_{Total} pela equação da continuidade – Equação (2.1e). Sendo assim, pode-se dizer que a principal fonte de um campo eletromagnético é uma densidade de corrente elétrica variável no tempo [11].

2.2.3 Equações de Maxwell na forma integral

Até agora, foram apresentadas as equações de Maxwell na sua forma pontual, pois é uma representação matematicamente mais elegante; equações diferenciais sempre representam bem uma teoria. Além disso, em geral, a forma pontual é a mais utilizada na solução de problemas físicos e também será utilizada no decorrer deste trabalho.

Entretanto, é possível escrever um conjunto equivalente dessas equações de Maxwell na forma integral, utilizando o teorema de Stokes e o teorema da divergência. Assim, uma forma pode ser obtida a partir da outra e vice-versa.

Equações na forma integral são mais fáceis de se interpretar fisicamente em termos das leis experimentais com as quais foram obtidas por processos de generalização [12]. Experimentos sempre lidam com quantidades físicas macroscópicas e os seus resultados são expressos em termos de relações integrais. Além disso, utilizar as equações na forma integral é muito útil na elaboração de condições de contorno que os campos devem satisfazer. As Equações (2.2a) a (2.2e) mostram as equações de Maxwell e a equação da continuidade na forma integral, respectivamente.

$$\oint \mathbf{e} \cdot d\ell = - \int_S \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} - i_m \quad (2.2a)$$

$$\oint \mathbf{h} \cdot d\ell = i_{\text{Total}} + \int_S \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.2b)$$

$$\oint_S \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV \quad (2.2c)$$

$$\oint_S \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho_m dV = 0 \quad (2.2d)$$

$$i_{\text{Total}} = \oint_S \mathbf{j}_{\text{Total}} \cdot d\mathbf{S} = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (2.2e)$$

em que:

- $e(x, y, z, t)$ é o campo elétrico, em V/m.
- $h(x, y, z, t)$ é o campo magnético, em A/m.
- $d(x, y, z, t)$ é a densidade de fluxo elétrico, em C/m².
- $b(x, y, z, t)$ é a densidade de fluxo magnético, em Wb/m².
- $i_m(x, y, z, t)$ é a corrente magnética fictícia, em V.
- $i_{\text{Total}}(x, y, z, t)$ é a corrente elétrica total, em A.
- $j_{\text{Total}}(x, y, z, t)$ é a densidade de corrente elétrica, em A/m².
- $\rho(x, y, z, t)$ é a densidade de carga, em C/m³.
- $\rho_m(x, y, z, t)$ é a densidade de carga magnética fictícia, em Wb/m³.

Esse formato das equações de Maxwell é utilizado no Apêndice A para lidar com condições de contorno.

2.3 Campos Harmônicos no Tempo e Representação Fasorial

2.3.1 Natureza dos campos e fontes

Os campos e fontes eletromagnéticas apresentados até agora foram considerados como uma função arbitrária do tempo e do espaço. Entretanto, a análise e resolução dos problemas eletromagnéticos pode ser significativamente simplificada quando assume-se que os campos possuem variações sinusoidais com o tempo. Esses tipos particulares de campos são chamados de campos harmônicos no tempo.

É importante notar que assumir essa condição não implica em perda de generalidade, pois um grande número de casos práticos atende tal condição. Além disso, essa formulação pode ser estendida para contemplar casos não sinusoidais por meio de séries, integrais e transformadas de Fourier, caso necessário [10].

Na prática, a maioria dos geradores produzem tensões e correntes com variação harmônica (ao menos aproximadamente). Consequentemente, os campos elétricos e magnéticos respectivos herdam tal característica. Uma grande variedade de campos eletromagnéticos encontrados possuem variação sinusoidal e, mais

ainda, em aplicações de comunicação, os campos quase sempre são harmônicos no tempo.

Mesmo quando não é o caso, qualquer variação periódica pode ser sempre analisada em termos de variações sinusoidais com frequências fundamental e harmônicas. Sendo assim, é possível, na maioria dos problemas, assumir campos harmônicos no tempo.

Se um campo eletromagnético for composto de mais de uma frequência, as formas de onda temporais das grandezas eletromagnéticas podem ser encontradas por meio de transformadas inversas depois que as equações de Maxwell forem resolvidas no domínio da frequência. Felizmente, isso ocorre raramente nos problemas de propagação, uma vez que a largura de banda dos sinais é, usualmente, muito pequena. Um caso típico é o de uma portadora que sofre algum tipo de modulação e tem o espectro espalhado em torno da sua frequência. Nesses casos, é considerada uma única frequência: a da portadora.

Na Seção 2.2.2 foi visto que a fonte última de um campo eletromagnético variável no tempo é uma densidade de corrente (geralmente imposta por um gerador/fonte). Assim, se $\mathbf{j}_{\text{Fonte}}$ varia sinusoidalmente com o tempo e com uma frequência angular ω , então o campo eletromagnético resultante também variará sinusoidalmente e será chamado de campo harmônico no tempo.

2.3.2 Fasores e representação analítica de funções

Sinusóides são expressas de maneira simples como fasores, com os quais é muito mais fácil de se trabalhar. Portanto, assim como na teoria de circuitos, é conveniente introduzir essa notação abreviada para representar cada campo vetorial como um fasor complexo.

Para entender o conceito de fasores, antes, é necessário apresentar o conceito de sinal analítico e representação analítica de funções, pois a representação analítica é uma generalização do conceito de fasores. Enquanto o fasor é restrito a sinais com amplitude, fase e frequência fixas, a representação analítica permite trabalhar com sinais nos quais esses parâmetros podem ser dependentes do tempo.

A ideia básica é: matematicamente, sempre é possível representar uma função real qualquer por meio de uma outra função complexa que deve ser um sinal analítico. Um sinal analítico é, por definição, uma função complexa que não possui

componentes negativos de frequência e suas partes real e imaginária são funções reais relacionadas pela transformada de Hilbert.

Esse processo de utilizar um sinal complexo no lugar de um sinal real é chamado de representação analítica. Pode parecer estranho e custoso trabalhar com uma função complexa no lugar de uma real, mas utilizar a representação analítica de uma função real tem certas vantagens e pode facilitar muitas manipulações matemáticas.

O fundamento é o seguinte: como a função original que se deseja representar é real, suas componentes de frequência negativa são supérfluas, devido à simetria Hermitiana¹ do espectro. Portanto, essas componentes de frequência negativa podem ser descartadas sem perda de informação, desde que haja interesse e disposição em lidar com uma função complexa em vez da função real original.

Isso faz com que certos atributos da função real original sejam mais acessíveis e facilita certos tipos de cálculo. Como a nova representação da função é um sinal analítico (não tem frequências negativas), então a conversão de volta da representação complexa para a função real original é apenas uma questão de descartar a sua parte imaginária.

A formalidade matemática a seguir ajuda a entender melhor o conceito. O primeiro passo para obter a representação analítica, $s_a(t)$, de um sinal real $s(t)$ é eliminar as componentes de frequência negativa supérfluas de $s(t)$. Para isso, deve-se trabalhar no domínio da frequência.

Assim, seja a transformada de Fourier de $s(t)$, isto é, $S(f)$. Para eliminar a parte negativa de $S(f)$, tal espectro deve ser zerado para $f < 0$ e sua parte positiva deve ser duplicada. Isso resulta no espectro da representação analítica $s_a(t)$, $S_a(f)$. Algebricamente, esse processo é mostrado pela Equação (2.3).

$$S_a(f) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 2S(f), & \text{para } f > 0 \\ S(f), & \text{para } f = 0 \\ 0, & \text{para } f < 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

¹ Uma função Hermitiana é uma função complexa com a propriedade de que o seu conjugado complexo é igual à função original com o sinal do argumento trocado, ou seja, $f^*(x) = f(-x)$.

em que $S_a(f)$ é o espectro de $s_a(t)$, $S(f)$ é o espectro de $s(t)$ e $s_a(t)$ é a representação analítica de $s(t)$.

A definição da Equação (2.3) é equivalente à Equação (2.4).

$$S_a(f) = S(f)[1 + \text{sgn}(f)] \quad (2.4)$$

em que $\text{sgn}(f)$ é a função sinal.

Uma vez que se tem o espectro $S_a(f)$, a representação analítica $s_a(t)$ pode ser obtida fazendo a transformada inversa de Fourier de $S_a(f)$, como desenvolvido nas Equações (2.5a) a (2.5f).

$$s_a(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{F}^{-1}[S_a(f)] \quad (2.5a)$$

$$s_a(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{F}^{-1}[S(f) + S(f)\text{sgn}(f)] \quad (2.5b)$$

$$s_a(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{F}^{-1}[S(f)] + \mathfrak{F}^{-1}[S(f)\text{sgn}(f)] \quad (2.5c)$$

em que o operador \mathfrak{F}^{-1} representa a transformada inversa de Fourier.

A Equação (2.5c) é resolvida utilizando a propriedade da convolução da transformada de Fourier, de acordo com as Equações (2.5d) e (2.5e).

$$s_a(t) \stackrel{\text{def}}{=} s(t) + \mathfrak{F}^{-1}[S(f)] * \mathfrak{F}^{-1}[\text{sgn}(f)] \quad (2.5d)$$

$$s_a(t) \stackrel{\text{def}}{=} s(t) + j \left[\frac{1}{\pi t} * s(t) \right] \quad (2.5e)$$

em que o operador $*$ representa a convolução.

Sabe-se, também, que a transformada de Hilbert de $s(t)$ é $H[s(t)] = \frac{1}{\pi t} * s(t)$.

Então, esse resultado pode ser substituído na Equação (2.5e), o que resulta na Equação (2.5f).

$$s_a(t) \stackrel{\text{def}}{=} s(t) + jH[s(t)] \quad (2.5f)$$

em que o operador H representa a transformada de Hilbert.

Portanto, a representação analítica $s_a(t)$ da função real $s(t)$ é uma função complexa cuja parte real é $s(t)$ e a parte imaginária é $H[s(t)]$.

Como mencionado anteriormente, a conversão de volta da representação analítica para a função real original é apenas uma questão de descartar a sua parte imaginária. Isso é definido na Equação (2.6).

$$s(t) = \text{Re}\{s_a(t)\} \quad (2.6)$$

Como exemplo, seja a função real harmônica no tempo $s(t) = A \cos(\omega t + \phi)$. A representação analítica de $s(t)$, $s_a(t)$, é calculada nas Equações (2.7a) a (2.7e).

$$s_a(t) \stackrel{\text{def}}{=} s(t) + jH[s(t)] \quad (2.7a)$$

$$s_a(t) = A \cos(\omega t + \phi) + jA \sin(\omega t + \phi) \quad (2.7b)$$

$$s_a(t) = A [\cos(\omega t + \phi) + j \sin(\omega t + \phi)] \quad (2.7c)$$

$$s_a(t) = A e^{j(\omega t + \phi)} \quad (2.7d)$$

$$s_a(t) = A e^{j\phi} e^{j\omega t} \quad (2.7e)$$

em que foi utilizado $H[\cos(\omega t + \phi)] = \sin(\omega t + \phi)$, de acordo com as propriedades de escala e deslocamento da transformada de Hilbert [13].

Para recuperar $s(t)$, basta tomar a parte real de $s_a(t)$. Isso é feito nas Equações (2.8a) a (2.8e):

$$s(t) = \text{Re}\{s_a(t)\} \quad (2.8a)$$

$$s(t) = \text{Re}\{A e^{j\phi} e^{j\omega t}\} \quad (2.8b)$$

$$s(t) = \text{Re}\{A e^{j(\omega t + \phi)}\} \quad (2.8c)$$

$$s(t) = \text{Re}\{A[\cos(\omega t + \phi) + j\sin(\omega t + \phi)]\} \quad (2.8d)$$

$$s(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (2.8e)$$

Nesse exemplo, já foi utilizado o conceito de fasor, pois os parâmetros amplitude, fase e frequência de $s(t)$ eram independentes do tempo. Aqui, uma sinusóide $s(t) = A \cos(\omega t + \phi)$ foi representada pelo produto de uma constante complexa e um fator que encapsula a dependência do tempo e da frequência $\{s_a(t) = A e^{j\phi} \cdot e^{j\omega t}\}$. Essa constante complexa $\{A e^{j\phi}\}$, que encapsula a amplitude e a fase, é chamada de fasor, amplitude complexa, sinor ou complexor. O inventor da transformação fasorial foi Charles Proteus Steinmetz, que trabalhava na General Electric no final do Século XIX.

Uma característica importante da transformação para fasor é que a diferenciação e integração de sinais harmônicos (com amplitude, fase e frequência constantes) correspondem a operações algébricas simples com os fasores. Isso ficará evidente na Seção 2.3.5.

2.3.3 Representação fasorial de campos harmônicos

Exposto o conceito geral de representação analítica de funções e de fasores, é preciso aplicar essa ideia para os campos harmônicos no tempo. Um campo harmônico vetorial pode ser escrito como na Equação (2.9).

$$\mathbf{a}(x, y, z, t) = \mathbf{A}(x, y, z) \cos(\omega t) \quad (2.9)$$

em que $\mathbf{A}(x, y, z)$ é um vetor, geralmente complexo, e $f = \omega/2\pi$ é a frequência da variação harmônica.

A Equação (2.9) sugere que um fator de tempo sinusoidal deve sempre acompanhar a amplitude complexa $\mathbf{A}(x, y, z)$. Felizmente, isso não é necessário, uma vez que o fator temporal pode ser suprimido com o uso de notação fasorial. A explanação segue.

De acordo com a teoria de representação analítica de funções, o campo vetorial $\mathbf{a}(x, y, z, t) = \mathbf{A}(x, y, z) \cos(\omega t)$ pode ser representado pela parte real de sua representação analítica, assim como mostra a Equação (2.10).

$$\mathbf{a}(x, y, z, t) = \text{Re}\{\mathbf{a}_a(x, y, z, t)\} \quad (2.10)$$

em que $\mathbf{a}_a(x, y, z, t)$ é a representação analítica de $\mathbf{a}(x, y, z, t)$.

Utilizando o resultado obtido na Equação (2.5f), pode-se escrever as Equações (2.11a) a (2.11d):

$$\mathbf{a}_a(x, y, z, t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{a}(x, y, z, t) + jH[\mathbf{a}(x, y, z, t)] \quad (2.11a)$$

$$\mathbf{a}_a(x, y, z, t) = \mathbf{A}(x, y, z) \cos(\omega t) + jH[\mathbf{A}(x, y, z) \cos(\omega t)] \quad (2.11b)$$

$$\mathbf{a}_a(x, y, z, t) = \mathbf{A}(x, y, z) \cos(\omega t) + j\mathbf{A}(x, y, z) \sin(\omega t) \quad (2.11c)$$

$$\mathbf{a}_a(x, y, z, t) = \mathbf{A}(x, y, z) e^{j\omega t} \quad (2.11d)$$

em que $H[\cos(\omega t)] = \sin(\omega t)$ e o vetor complexo $\mathbf{A}(x, y, z) = |\mathbf{A}(x, y, z)| e^{j\phi}$ é o fasor de $\mathbf{a}(x, y, z, t)$ e carrega a informação de amplitude e fase.

Portanto, em notação fasorial, o campo harmônico $\mathbf{a}(x, y, z, t)$ pode ser representado por $\mathbf{A}(x, y, z)$. Mais ainda, o campo $\mathbf{a}(x, y, z, t)$ e seu fasor $\mathbf{A}(x, y, z)$ estão relacionados de acordo com a equação $\mathbf{a}(x, y, z, t) = \text{Re}\{\mathbf{A}(x, y, z) e^{j\omega t}\}$.

2.3.4 Interpretação geométrica de fasores

Muitas vezes, o termo fasor é definido como um vetor girante ou um vetor cujas componentes são girantes no plano complexo. Para entender esse conceito no caso de campos de força vetoriais é necessário considerar cada componente espacial do fasor separadamente.

No exemplo anterior, foi mostrado que o vetor complexo $\mathbf{A}(x, y, z) = |\mathbf{A}(x, y, z)| e^{j\phi}$ é o fasor utilizado para representar o campo $\mathbf{a}(x, y, z, t)$ e carrega a informação de

amplitude e fase. Esse vetor é composto por suas componentes espaciais, sendo que $\mathbf{A}(x, y, z) = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$.

Escrevendo o campo $\mathbf{a}(x, y, z, t)$ em termos das componentes espaciais do seu fasor $\mathbf{A}(x, y, z)$, tem-se as Equações (2.12a) e (2.12b):

$$\mathbf{a}(x, y, z, t) = \text{Re}\left\{\left(A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}\right)e^{j\omega t}\right\} \quad (2.12a)$$

$$\mathbf{a}(x, y, z, t) = \text{Re}\left\{A_x e^{j\omega t} \hat{x} + A_y e^{j\omega t} \hat{y} + A_z e^{j\omega t} \hat{z}\right\} \quad (2.12b)$$

em que \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} são os vetores unitários da base canônica retangular e A_x , A_y e A_z são as componentes escalares de $\mathbf{A}(x, y, z)$ nas respectivas direções.

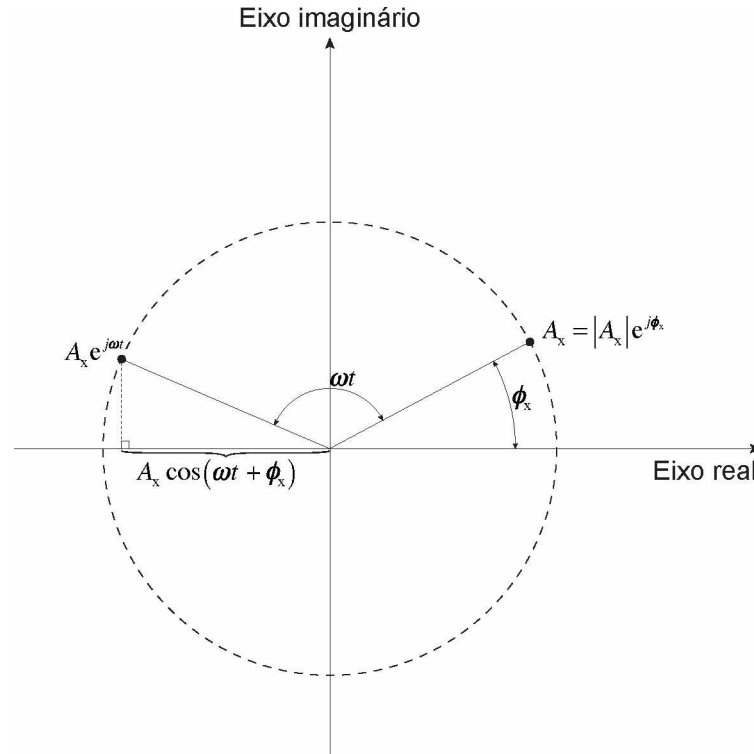
Entretanto, cada componente espacial pode ser escrita em termos de seu módulo e fase, de acordo com a Equação (2.12c):

$$\mathbf{a}(x, y, z, t) = \text{Re}\left\{|A_x|e^{j\phi_x} \cdot e^{j\omega t} \hat{x} + |A_y|e^{j\phi_y} \cdot e^{j\omega t} \hat{y} + |A_z|e^{j\phi_z} \cdot e^{j\omega t} \hat{z}\right\} \quad (2.12c)$$

em que $|A_x|$, $|A_y|$ e $|A_z|$ são os módulos e ϕ_x , ϕ_y e ϕ_z são as fases das quantidades complexas A_x , A_y e A_z , respectivamente.

Observando a componente x no plano complexo da Figura 1, percebe-se uma rotação de um ângulo ωt a partir do ângulo inicial ϕ_x . Portanto, multiplicar A_x por $e^{j\omega t}$ faz com que o ponto $A_x e^{j\omega t}$ gire e trace uma circunferência no plano complexo com centro na origem à medida que o tempo passa. Da mesma maneira, ocorre para as componentes espaciais y e z . Portanto, pode-se dizer que o fasor de $\mathbf{a}(x, y, z, t)$, que é $\mathbf{A}(x, y, z)$, é um vetor cujas componentes são girantes no plano complexo.

Figura 1 – Relacionamento entre as grandezas variáveis no tempo e as fasoriais.



Fonte: *Electromagnetic Waves and Radiating Systems* [14].

Mais ainda, é possível perceber que cada componente de $\mathbf{A}(x, y, z) = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$ é um fasor escalar e, juntos, compõem o fasor vetorial. Fazendo uma analogia com o círculo trigonométrico, é possível notar que as projeções no eixo real e imaginário variam sinusoidalmente com o tempo, sendo que a projeção no eixo real é representada pelo cosseno e a projeção no eixo imaginário é representada pelo seno.

2.3.5 Diferenciação e integração de fasores

Anteriormente, foi mencionado que as operações de diferenciação e integração de sinais harmônicos correspondem a operações algébricas simples com os fasores. Para mostrar isso, seja a operação de diferenciação no tempo do campo harmônico $\mathbf{a}(x, y, z, t) = \mathbf{A}(x, y, z) \cos(\omega t)$ feita nas Equações (2.13a) a (2.13d).

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}(x, y, z, t) = \frac{\partial}{\partial t} \text{Re} \left\{ \mathbf{A}(x, y, z) e^{j\omega t} \right\} \quad (2.13a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}(x, y, z, t) = \text{Re} \left\{ \mathbf{A}(x, y, z) \frac{\partial}{\partial t} e^{j\omega t} \right\} \quad (2.13b)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}(x, y, z, t) = \operatorname{Re} \left\{ j\omega \mathbf{A}(x, y, z) e^{j\omega t} \right\} \quad (2.13c)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t}(x, y, z, t) = \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{A}'(x, y, z) e^{j\omega t} \right\} \quad (2.13d)$$

em que $\mathbf{A}'(x, y, z) = j\omega \mathbf{A}(x, y, z)$.

Portanto, diferenciar uma função harmônica no tempo, equivale a multiplicar seu fasor por $j\omega$ no domínio fasorial.

Seja, agora, a operação de integração das Equações (2.14a) a (2.14e):

$$\int \mathbf{a}(x, y, z, t) dt = \int \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{A}(x, y, z) e^{j\omega t} \right\} dt \quad (2.14a)$$

$$\int \mathbf{a}(x, y, z, t) dt = \operatorname{Re} \left\{ \int \mathbf{A}(x, y, z) e^{j\omega t} dt \right\} \quad (2.14b)$$

$$\int \mathbf{a}(x, y, z, t) dt = \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{A}(x, y, z) \int e^{j\omega t} dt \right\} \quad (2.14c)$$

$$\int \mathbf{a}(x, y, z, t) dt = \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{j\omega} \mathbf{A}(x, y, z) e^{j\omega t} \right\} \quad (2.14d)$$

$$\int \mathbf{a}(x, y, z, t) dt = \operatorname{Re} \left\{ \mathbf{A}'(x, y, z) e^{j\omega t} \right\} \quad (2.14e)$$

em que $\mathbf{A}'(x, y, z) = \frac{1}{j\omega} \mathbf{A}(x, y, z)$.

Assim, integrar uma função harmônica no tempo, equivale a dividir seu fasor por $j\omega$ no domínio fasorial.

Concluindo, o ponto principal da representação fasorial é que pode-se trabalhar nas equações desejadas apenas com o vetor complexo $\mathbf{A}(x, y, z) = |\mathbf{A}(x, y, z)| e^{j\theta}$ (uma quantidade fasorial, pois não varia em amplitude, fase e frequência com o tempo) cujas componentes são girantes em vez de trabalhar com o vetor $\mathbf{a}(x, y, z, t)$. Além disso, $j\omega$ pode substituir as derivadas temporais e $e^{j\omega t}$ pode ser suprimido durante a análise.

Quando necessário, após resolvidas as equações, a dependência do tempo pode ser recuperada apenas pela multiplicação do vetor complexo por $e^{j\omega t}$ e toma-

se a parte real. Também é possível considerar que a rotação do fasor ocorre no sentido contrário e utilizar o fator $e^{-j\omega t}$ no lugar de $e^{j\omega t}$, porém, neste trabalho, será utilizado sempre o fator $e^{j\omega t}$ por convenção e porque o fator temporal $e^{j\omega t}$ é tradicional da sociedade de engenharia, enquanto o fator $e^{-j\omega t}$, ou $e^{-i\omega t}$, é tradicional da sociedade de física.

2.3.6 Equações de Maxwell na forma fasorial

Uma vez definidas as equações de Maxwell para quaisquer campos variáveis no tempo na Seção 2.2.2 e tendo visto o conceito de fasores, é desejável encontrar o conjunto correspondente das equações de Maxwell na forma fasorial. Lembrando que esse novo conjunto apenas é aplicável para campos harmônicos no tempo.

As Equações (2.15a) a (2.15d) trazem as quatro equações de Maxwell e a Equação (2.15e) traz a importante equação da continuidade na forma fasorial.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (2.15a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J}_{\text{Total}} \quad (2.15b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.15c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \rho_m = 0 \quad (2.15d)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_{\text{Total}} = -j\omega \rho \quad (2.15e)$$

em que:

- $\mathbf{E}(x, y, z)$ é fasor vetorial do campo elétrico, em V/m.
- $\mathbf{H}(x, y, z)$ é o fasor vetorial do campo magnético, em A/m.
- $\mathbf{D}(x, y, z)$ é o fasor vetorial da densidade de fluxo elétrico, em C/m².
- $\mathbf{B}(x, y, z)$ é o fasor vetorial da densidade de fluxo magnético, em Wb/m².
- $\mathbf{M}(x, y, z)$ é o fasor vetorial da densidade de corrente magnética fictícia, em V/m².
- $\mathbf{J}_{\text{Total}}(x, y, z)$ é o fasor vetorial da densidade de corrente elétrica total, em A/m².

- $\rho(x, y, z)$ é o fasor escalar da densidade de carga, em C/m^3 .
- $\rho_m(x, y, z)$ é o fasor escalar da densidade de carga magnética fictícia em Wb/m^3 .

Agora, não existe mais a dependência do tempo, todas as variáveis estão em letras maiúsculas e as derivadas temporais foram substituídas por $j\omega$. Semelhantemente, as Equações (2.15a) a (2.15e) podem ser escritas na forma integral, como mostram as Equações (2.16a) a (2.16e).

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\ell = - \int_S j\omega \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} - \mathbf{I}_m \quad (2.16a)$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\ell = \mathbf{I}_{\text{Total}} + \int_S j\omega \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.16b)$$

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV \quad (2.16c)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho_m dV = 0 \quad (2.16d)$$

$$\mathbf{I}_{\text{Total}} = \oint_S \mathbf{J}_{\text{Total}} \cdot d\mathbf{S} = - \int_V j\omega \rho dV \quad (2.16e)$$

em que:

- $\mathbf{E}(x, y, z)$ é fasor vetorial do campo elétrico, em V/m .
- $\mathbf{H}(x, y, z)$ é o fasor vetorial do campo magnético, em A/m .
- $\mathbf{D}(x, y, z)$ é o fasor vetorial da densidade de fluxo elétrico, em C/m^2 .
- $\mathbf{B}(x, y, z)$ é o fasor vetorial da densidade de fluxo magnético, em Wb/m^2 .
- $\mathbf{I}_m(x, y, z)$ é o fasor vetorial da corrente magnética fictícia, em V .
- $\mathbf{I}_{\text{Total}}(x, y, z)$ é o fasor vetorial da corrente elétrica total, em A .
- $\mathbf{J}_{\text{Total}}(x, y, z)$ é o fasor vetorial da densidade de corrente de condução, em A/m^2 .
- $\rho(x, y, z)$ é o fasor escalar da densidade de carga, em C/m^3 .
- $\rho_m(x, y, z)$ é o fasor escalar da densidade de carga magnética fictícia em Wb/m^3 .

2.4 Relações construtivas da matéria

Uma análise eletromagnética geral envolve o conhecimento dos campos \mathbf{e} , \mathbf{h} , \mathbf{d} e \mathbf{b} , dadas as suas fontes (densidades de corrente $\mathbf{j}_{\text{Total}}$ e \mathbf{m} e de carga ρ). Considerando que cada campo possui três componentes espaciais, é necessário o conhecimento de doze componentes escalares para caracterizar completamente os quatro campos \mathbf{e} , \mathbf{h} , \mathbf{d} e \mathbf{b} [2].

As quatro equações de Maxwell representam apenas oito equações escalares. Além disso, as duas leis de Gauss – Equações (2.1c) e (2.1d) – podem ser encontradas a partir das outras duas equações de Maxwell – Equações (2.1a) e (2.1b) – juntamente com a equação da continuidade – Equação (2.1e). Por isso, as equações de Maxwell fornecem apenas seis equações escalares independentes, das doze necessárias para encontrar todas as componentes dos campos desconhecidos. Assim, surge a necessidade das relações constitutivas, que proveem as seis equações escalares independentes restantes para a solução dos problemas de eletromagnetismo [2].

Em meios materiais, os campos auxiliares \mathbf{d} e \mathbf{h} são definidos em termos dos parâmetros constitutivos do material e dos campos fundamentais \mathbf{b} e \mathbf{e} . As relações entre \mathbf{h} e \mathbf{b} e entre \mathbf{d} e \mathbf{e} são chamadas de relações constitutivas e devem ser conhecidas antes de se tentar chegar à solução das equações de Maxwell. Essas relações são muito importantes, pois descrevem a maneira com que os processos físicos afetam os campos elétrico e magnético nos meios materiais.

Existem três relações constitutivas: a primeira relaciona o campo elétrico \mathbf{e} à densidade de fluxo elétrico \mathbf{d} , a segunda relaciona o campo magnético \mathbf{h} à densidade de fluxo magnético \mathbf{b} e, a terceira, relaciona a densidade de corrente de deslocamento \mathbf{j}_C ao campo elétrico \mathbf{e} .

No vácuo, ou espaço livre, essas relações são dadas pelas simples expressões das Equações (2.17), (2.18) e (2.19) [15].

$$\mathbf{d} = \epsilon_0(t) * \mathbf{e} \quad (2.17)$$

$$\mathbf{b} = \mu_0(t) * \mathbf{h} \quad (2.18)$$

$$\mathbf{j}_C = \sigma_0(t) * \mathbf{e} = 0 \quad (2.19)$$

em que $\epsilon_0 \approx 8,8542 \times 10^{-12} \cong \frac{10^{-9}}{36\pi}$ é a permissividade elétrica do vácuo em farads/metro [F/m], $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ é a permeabilidade magnética do vácuo em Henries/metro [H/m] e $\sigma_0 = 0$ é a condutividade do vácuo em Siemens/metro [S/m] ou [mohs/m].

Assim como as Equações (2.17), (2.18) e (2.19) são chamadas de relações constitutivas, ϵ , μ e σ são chamados de parâmetros constitutivos e são, em geral, funções das intensidades de campo aplicadas ao material, da posição, da direção dos campos aplicados e da frequência de operação. Eles caracterizam o comportamento dos materiais quando estes são submetidos a campos eletromagnéticos [15].

Qualquer material possui partículas carregadas e, quando são sujeitos a campos eletromagnéticos, suas partículas interagem com o campo eletromagnético. Essa interação é expressa em termos de correntes e a propagação nesses meios é modificada face àquela no espaço livre.

2.4.1 Caracterização dos materiais

Os parâmetros constitutivos são utilizados para caracterizar as propriedades elétricas e magnéticas de um material. Em geral, materiais são classificados como dielétricos (isolantes), magnéticos ou condutores, dependendo se a polarização elétrica, magnetização ou condução é o fenômeno predominante no material. Além disso, materiais são classificados como lineares/não lineares, homogêneos/não homogêneos, isotrópicos/anisotrópicos e dispersivos/não dispersivos de acordo com sua estrutura e comportamento.

Se todos os parâmetros constitutivos de um dado material não são funções da intensidade dos campos aplicados, o material é classificado como linear; caso contrário, ele é não linear. Na prática, muitos materiais exibem característica aproximadamente linear quando os campos aplicados estão dentro de uma certa região. Fora dessas regiões, os materiais podem exibir alto grau de não linearidade. Por exemplo, o ar é praticamente linear para campos elétricos aplicados até cerca de 10^6 V/m. Acima desse valor, o ar exibe um alto grau de não linearidade.

Meios em que os parâmetros constitutivos não são funções da posição são conhecidos como homogêneos e, caso contrário, são não homogêneos. Quase

todos os materiais possuem não homogeneidades, entretanto, na maioria dos materiais utilizados na prática, as não homogeneidades são tão pequenas que podem ser desconsideradas [15].

Materiais isotrópicos são aqueles em que os parâmetros constitutivos não são funções da direção do campo aplicado; caso contrário são anisotrópicos. Muitos materiais, especialmente cristais, possuem alto grau de anisotropia. Nesses materiais, os parâmetros constitutivos dependem de mais de uma componente dos campos aplicados e não podem ser representados por um valor único. Em vez disso, os parâmetros são representados por tensores 3×3 .

Por fim, materiais cujos parâmetros são função da frequência são referidos como dispersivos e, caso contrário, são não dispersivos. Todos os materiais utilizados na prática exibem algum grau de dispersão. As permissividades e condutividades, especialmente em materiais dielétricos, e as permeabilidades de materiais ferromagnéticos e ferrites possuem características dispersivas proeminentes.

Nota: no domínio da frequência ou em materiais não dispersivos, as Equações (2.17), (2.18) e (2.19) deixam de ser convoluções e se tornam produtos simples. No restante deste trabalho, todos os parâmetros constitutivos são considerados constantes no tempo e as Equações (2.17), (2.18) e (2.19) se tornam produtos.

2.4.2 Materiais dielétricos, polarização e permissividade

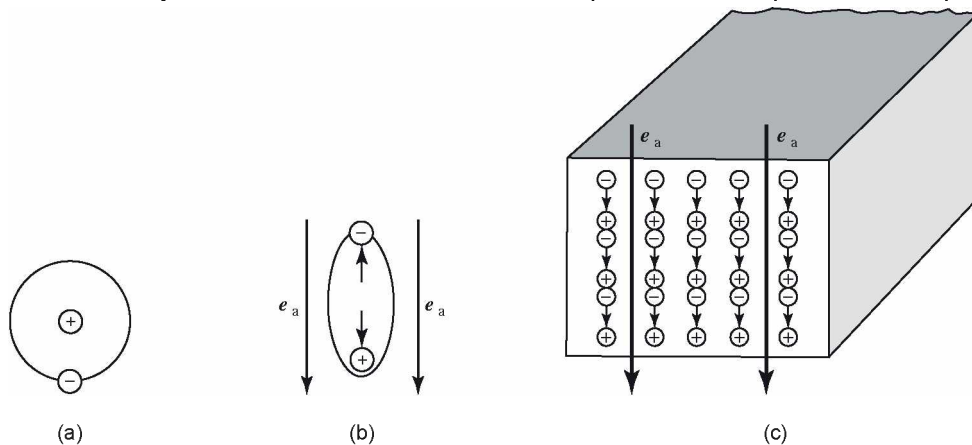
Dielétricos (isolantes) são materiais cujas cargas positivas e negativas nos átomos e moléculas são fixas e presas pelas forças atômicas e moleculares, portanto não são livres para se movimentar (grandes distâncias). Assim, dielétricos ideais não possuem nenhuma carga livre e seus átomos e moléculas são, macroscopicamente, neutros – Figura 2(a). Além disso, esses materiais podem já conter alguns dipolos orientados aleatoriamente em seu estado natural.

Seja um campo elétrico externo \mathcal{E}_a aplicado a um dielétrico cuja intensidade se mantém constante durante certo período. As cargas fixas dos átomos e moléculas do dielétrico não se movem para a superfície do material (como é o caso dos condutores), mas apresentam ligeiro deslocamento microscópico, causando a distorção dos átomos ou moléculas e criando numerosos dipolos elétricos alinhados

com o campo imposto – Figura 2(b). Caso o material já possua dipolos naturais orientados aleatoriamente, estes são alinhados quando o campo é aplicado.

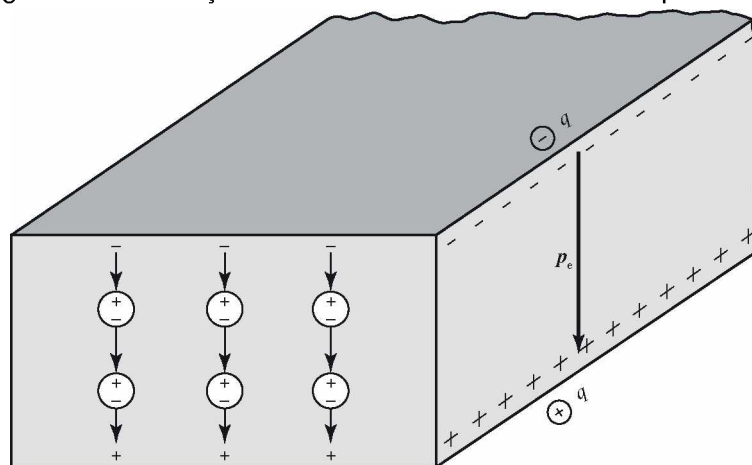
Como as cargas não se movem por distâncias macroscópicas, as cargas opostas dos dipolos adjacentes se cancelam e o efeito final é que, entre as superfícies do dielétrico, aparece uma polarização elétrica líquida \mathbf{p}_e na mesma direção do campo aplicado. Isso é mostrado nas Figuras 2(c) e 3.

Figura 2 – Distorção das moléculas de um dielétrico quando um campo externo é aplicado.



Fonte: *Advanced Engineering Electromagnetics* [15].

Figura 3 – Polarização em um dielétrico devido a um campo externo.



Fonte: *Advanced Engineering Electromagnetics* [15].

Assim, quando um dielétrico é sujeito a um campo elétrico, suas cargas de polarização interagem com o campo e isso provê ao material a capacidade de armazenar energia potencial elétrica. É um efeito análogo ao de esticar uma mola ou suspender um peso.

Enquanto o campo aplicado for mantido, a densidade de fluxo elétrico no material será diferente daquela que existiria no vácuo. Os momentos de dipolo criados aumentam a densidade de fluxo elétrico no vácuo ($\epsilon_0 \mathbf{e}_a$) de uma quantidade

adicional \mathbf{p}_e , chamada de densidade de polarização elétrica e o campo \mathbf{d} passa a ser $\mathbf{d} = \epsilon_0 \mathbf{e}_a + \mathbf{p}_e$. Essa é a relação constitutiva para o campo elétrico.

Nessa situação, em que o campo aplicado possui um valor constante, pode-se utilizar a relação da Equação (2.20)

$$\mathbf{d} = \epsilon_0 \mathbf{e}_a + \mathbf{p}_e = \epsilon_0 (1 + \chi_{es}) \mathbf{e}_a = \epsilon_{rs} \epsilon_0 \mathbf{e}_a = \epsilon_s \mathbf{e}_a \quad (2.20)$$

em que χ_{es} é uma constante real de proporcionalidade chamada de susceptibilidade elétrica estática, $\epsilon_s = \epsilon_0 (1 + \chi_{es})$ é chamada a permissividade estática do meio e $\epsilon_{rs} = \epsilon_s / \epsilon_0$ é a constante dielétrica estática do meio.

É importante notar a nomenclatura estática nesse momento na Equação (2.20). Essas relações não podem ser aplicadas dessa maneira com campos variáveis no tempo e isso é analisado mais adiante.

O padrão do IEEE “IEEE Standard Definitions of Terms for Radio Wave Propagation”, IEEE Standard 211-1997, sugere que o termo “permissividade relativa” seja utilizado em vez do termo “constante dielétrica”. Entretanto, o padrão do IEEE “IEEE Standard Definitions of Terms for Antennas”, IEEE Standard 145-1993, ainda reconhece o termo “constante dielétrica” [9]. Uma vez que esse termo ainda é muito utilizado na área, ele pode ser ocasionalmente utilizado no decorrer deste trabalho.

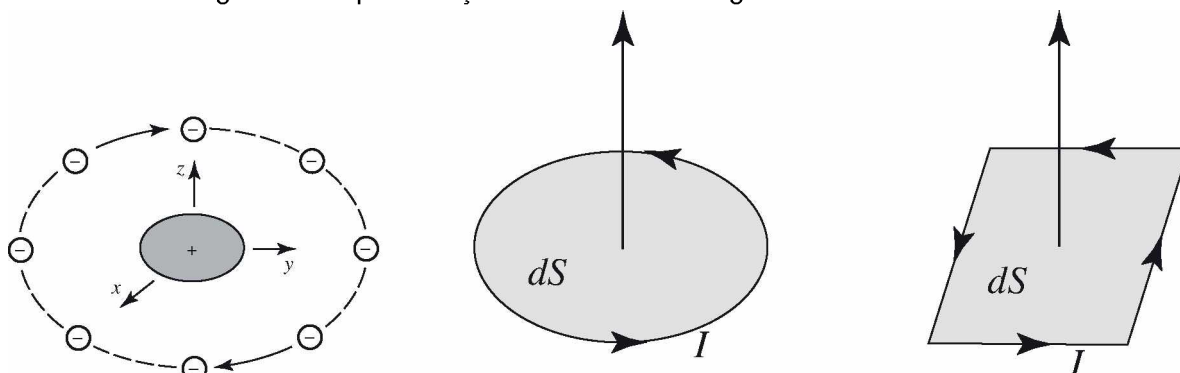
2.4.3 Materiais magnéticos, magnetização e permeabilidade

Materiais magnéticos são aqueles que exibem uma polarização magnética (ou magnetização) quando sujeitos a um campo magnético aplicado. O fenômeno da magnetização é representado pelo alinhamento dos dipolos magnéticos do material quando um campo magnético é aplicado, similar ao alinhamento dos dipolos elétricos em um material dielétrico quando um campo elétrico é aplicado.

Infelizmente, resultados muito acurados sobre o comportamento de materiais magnéticos quando sujeitos a campos magnéticos somente podem ser obtidos com uso de teoria quântica e isso é, normalmente, muito complexo e desnecessário para aplicações de engenharia. Felizmente, resultados satisfatórios podem ser obtidos utilizando modelos atômicos simples para representar a estrutura do material [15].

O modelo aqui utilizado representa os elétrons como cargas negativas que orbitam ao redor de um núcleo positivo, como mostra a Figura 4. Cada elétron orbitante pode ser modelado como uma pequena espira de corrente convencional equivalente com área dS cuja corrente flui no sentido oposto do sentido de órbita. Como a órbita é muito pequena, o formato da espira equivalente pode ser circular, quadrado ou pode assumir qualquer outra configuração que facilite cálculos.

Figura 4 – Representação dos momentos magnéticos dos materiais.



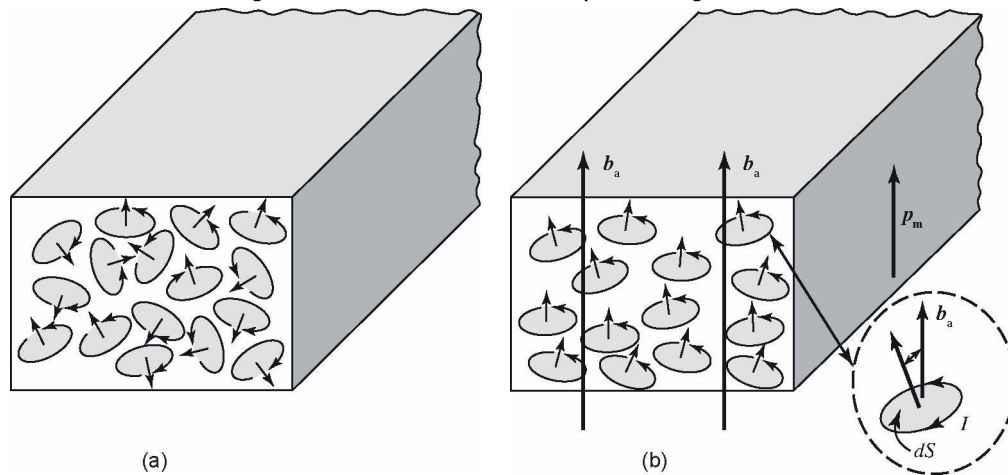
Fonte: *Advanced Engineering Electromagnetics* [15].

Assim como na explicação da corrente magnética fictícia, uma pequena espira de corrente elétrica gera um campo magnético que é, a grandes distâncias, o mesmo de um ímã de barra (dipolo magnético). Portanto, um elétron orbitando equivale, nesse modelo, a um dipolo magnético. Assim, um material magnético é representado por um número de dipolos magnéticos e, conseqüentemente, por vários momentos magnéticos².

Na ausência de um campo magnético aplicado, os dipolos magnéticos (e suas espiras correspondentes) estão orientados de maneira aleatória de modo que, em uma escala macroscópica, a soma vetorial dos momentos magnéticos é nula e o material não possui polarização magnética. Isso é mostrado na Figura 5(a). Entretanto, quando esse material é sujeito a um campo magnético aplicado, representado pela densidade de fluxo magnético \mathbf{b}_a , um torque será exercido em cada um dos dipolos e a sua maioria tenderá a se alinhar na direção de \mathbf{b}_a , como ilustrado pela Figura 5(b).

² O termo dipolo magnético é utilizado como nomenclatura de uma estrutura física. Já o termo momento magnético é um número utilizado para mensurar a intensidade do dipolo magnético. Esses dois termos estão interligados de modo que o primeiro é uma definição e o segundo é uma intensidade.

Figura 5 – Alinhamento dos dipolos magnéticos.

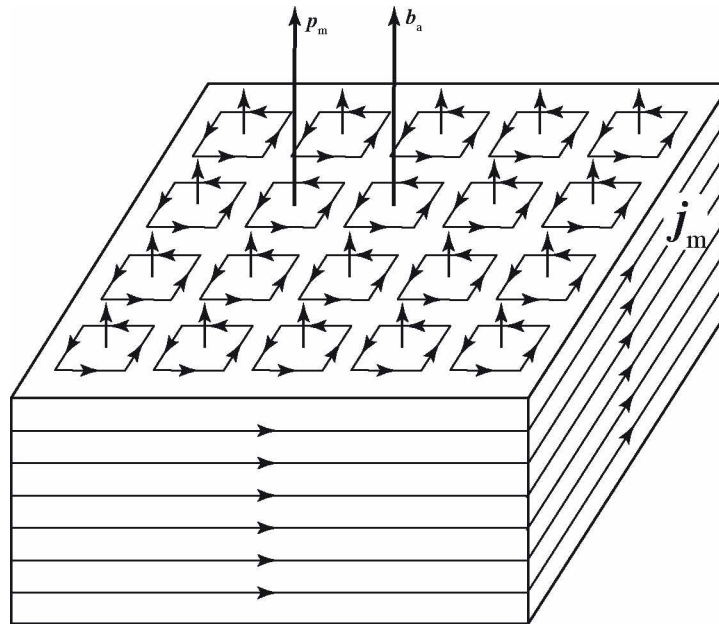


Fonte: *Advanced Engineering Electromagnetics* [15].

Tal torque existirá até que cada um dos elétrons orbitantes rotacionem seu eixo de maneira que o campo magnético produzido por cada uma das suas espiras equivalentes (ou momentos magnéticos) esteja alinhado com o campo aplicado. Desse modo, o campo magnético resultante em cada ponto do material será maior do que seria se o material estivesse ausente (espaço livre).

O vetor polarização magnética (ou magnetização) p_m resultante do alinhamento dos dipolos magnéticos pode ser melhor ilustrado considerando uma placa de material magnético na qual é aplicada uma densidade de fluxo magnético b_a , de acordo com a Figura 6. Idealmente, em uma escala microscópica, na maioria dos materiais magnéticos, todos os dipolos magnéticos irão se alinhar de maneira que os momentos magnéticos individuais sejam alinhados com o campo aplicado. No limite, à medida que o número de dipolos magnéticos e suas espiras de corrente equivalentes se torna muito grande, as correntes cancelam umas às outras no interior da placa e, em uma escala macroscópica, uma densidade de corrente de magnetização equivalente aparece na superfície exterior da placa. Essa densidade de corrente de magnetização equivalente (j_m) é responsável pela introdução do vetor magnetização p_m na direção de b_a .

Figura 6 – Ilustração da polarização magnética em uma placa.



Fonte: *Advanced Engineering Electromagnetics* [15].

A densidade de fluxo magnético é, então, aumentada pela presença de p_m enquanto o campo aplicado for mantido, de maneira que a densidade de fluxo magnético no interior do material é dada por $b = b_a + p_m = \mu_0 h_a + p_m$. Essa é a relação constitutiva para o campo magnético.

Na situação em que o campo aplicado possui um valor constante, pode-se utilizar a relação da Equação (2.21).

$$b = \mu_0 h_a + p_m = \mu_0 (1 + \chi_{ms}) h_a = \mu_s \mu_0 h_a = \mu_s h_a \quad (2.21)$$

em que χ_{ms} é uma constante real de proporcionalidade chamada de susceptibilidade magnética estática, $\mu_s = \mu_0 (1 + \chi_{ms})$ é chamada a permeabilidade estática do meio e $\mu_{rs} = \mu_s / \mu_0$ é a permeabilidade estática relativa do meio.

Também é importante notar a nomenclatura estática na Equação (2.21). Essas relações não podem ser aplicadas dessa maneira com campos variáveis no tempo e isso é analisado mais adiante.

Além de orbitar, os elétrons ao redor do núcleo de um átomo também giram em torno do seu próprio eixo. Isso é chamado de *spin* do elétron. Por isso, momentos magnéticos da ordem de $\pm 9.10^{-24} \text{ A}\cdot\text{m}^2$ associados ao giro dos elétrons que favorecem ou se opõem ao campo aplicado (o sinal + é utilizado quando estão a favor e o sinal –, quando estão contra) são capazes de contribuir para o momento

magnético dos átomos. Um terceiro fator que contribui para o momento magnético total é associado ao *spin* do núcleo (*spin* nuclear). Entretanto, o momento magnético desse efeito é geralmente muito menor (1000x) do que os momentos magnéticos atribuídos às órbitas e ao *spin* dos elétrons [15].

Finalmente, é preciso notar que, exceto em materiais ferromagnéticos, a maioria das permeabilidades relativas são muito próximas da unidade e, para propósitos de engenharia, o valor unitário é quase sempre utilizado.

2.4.4 Materiais condutores, corrente e condutividade

A característica proeminente dos materiais dielétricos é a polarização elétrica, introduzida pela formação de dipolos elétricos entre as cargas opostas dos átomos. No caso dos materiais magnéticos, é a polarização magnética, causada pelo alinhamento dos dipolos magnéticos dos átomos modelados por pequenas espiras de corrente elétrica equivalentes. A terceira classe de materiais estudada neste trabalho são os condutores. Eles são materiais cuja característica proeminente é o movimento de cargas elétricas e a criação de corrente elétrica.

Condutores são materiais cujos elétrons da camada de valência de seus átomos não são presos com muita força e podem migrar de um átomo para outro. Esses elétrons são chamados de elétrons livres e, em condutores metálicos, estão presentes em grande número. Quando não há campo externo aplicado, esses elétrons livres se movem em direções aleatórias e com diferentes velocidades, fazendo com que a corrente macroscópica líquida seja zero no condutor.

Quando uma densidade de carga livre ρ_0 é inserida em um condutor sujeito a um campo estático, a densidade de carga em qualquer ponto decairá exponencialmente de acordo com a Equação (2.22) [15].

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-t/\tau} = \rho_0 e^{-(\sigma/\epsilon)t} \quad (2.22)$$

em que $\tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$ é o tempo de relaxação do condutor, ϵ é sua permissividade em [F/m] e σ é sua condutividade, em [S/m].

Isso ocorre porque as cargas migram para a superfície do condutor devido à repulsão Coulombiana. O tempo necessário para completar esse movimento depende da condutividade do material. Durante esse tempo (transitório), as cargas

se movem, uma corrente flui e existe uma condição não estática. O tempo t_r é o tempo gasto para que a densidade de carga inserida no condutor decaia para 36,8 % do seu valor inicial e é conhecido como constante de tempo de relaxação.

Quando um condutor muito bom ($\sigma \rightarrow \infty$) é submetido a um campo externo, suas cargas livres migram rapidamente e se distribuem como uma densidade superficial de carga ρ_s na superfície do condutor em um período de tempo muito curto. Essa densidade superficial de carga criada irá induzir, no condutor, uma intensidade de campo elétrico e_i de maneira que o campo elétrico total dentro do condutor ($e_i + e_a$) será praticamente zero. Por isso, em bons condutores, o campo elétrico interno é aproximadamente nulo.

Quando um condutor é sujeito a um campo elétrico, os elétrons livres ainda continuam se movendo em direções aleatórias, mas são arrastados lentamente com uma velocidade de arrasto v_e na direção contrária do campo aplicado, criando, então, uma corrente de condução no condutor. Assim, a densidade de corrente de condução pode ser dada pela Equação (2.23).

$$j_c = \rho_e v_e = \rho_e (-\mu_e e_a) = -\rho_e \mu_e e_a = \sigma_s e_a \quad (2.23)$$

em que ρ_e é a densidade eletrônica de carga, v_e é a velocidade de arrasto dos elétrons, dada por $v_e = -\mu_e e_a$, μ_e é a mobilidade dos elétrons em $[m^2/V-s]$ e σ_s é a condutividade estática do material, dada por $\sigma_s = -\rho_e \mu_e$, em $[S/m]$.

A condutividade estática σ_s de um condutor é um parâmetro que caracteriza as propriedades condutivas dos elétrons livres de um condutor. À medida que a temperatura aumenta, a energia térmica aumenta as vibrações da estrutura do condutor e a possibilidade de haver colisões entre os elétrons livres aumenta e isso resulta na diminuição da mobilidade dos elétrons e, conseqüentemente, da condutividade.

Materiais com condutividade muito pequena são classificados como dielétricos (isolantes) e, para um dielétrico perfeito a condutividade deve ser nula. Por outro lado, para um condutor perfeito, a condutividade deve ser infinita.

A condutividade da Equação (2.23) é chamada condutividade estática ou condutividade em corrente contínua. Quando campos variáveis no tempo são aplicados, as relações são alteradas e isso é visto adiante.

2.4.5 Materiais e campos harmônicos no tempo

Nas seções anteriores, foi visto como campos estáticos interagem com os materiais e formam os vetores polarização elétrica, polarização magnética e densidade de corrente de condução. Entretanto, quando os campos aplicados passam a alternar a polaridade, os vetores \mathbf{p}_e e \mathbf{p}_m passam a alterar o sentido e, conseqüentemente, as permissividades e permeabilidades estáticas são afetadas e passam a ser função da frequência dos campos aplicados. Isso também causa mudanças simultâneas na condutividade estática.

No caso da polarização elétrica, os átomos são representados por um equivalente mecânico que consiste em sistemas massa-mola se movendo sobre plataformas com fricção [12]. Assim, para efetivar a polarização (separar as cargas atômicas de distâncias microscópicas), é preciso vencer as forças de amortecimento, representadas pela tensão da mola e da fricção da plataforma e isso requer realização de trabalho.

Quando um campo estático é aplicado, o trabalho é realizado apenas uma vez, mas, quando o campo é variável no tempo, a cada ciclo, a polarização deve ser realizada novamente em sentido oposto e a energia dissipada passa a ser considerável. Além disso, a polarização não é efetivada instantaneamente por causa do amortecimento e há uma equação dinâmica que governa o movimento das cargas.

Processos análogos ocorrem no caso de materiais magnéticos, mas não serão discutidos por duas razões: os materiais utilizados neste trabalho não apresentam tal característica e uma análise detalhada nos materiais magnéticos foge ao escopo do trabalho.

Em termos gerais, quando campos variáveis no tempo são aplicados a corpos materiais, os vetores polarização \mathbf{p}_e e \mathbf{p}_m também variam com o tempo e na mesma frequência que os campos aplicados. Além disso, devido às forças de amortecimento (que sempre estão presentes em alguma quantidade), os vetores densidade de polarização \mathbf{p}_e e \mathbf{p}_m são, normalmente, atrasados em fase em

relação aos campos e e h [11]. Esse fato significa que, em geral, as relações constitutivas têm natureza complexa e isso reflete uma manifestação de perda de potência que ocorre no material devido ao trabalho realizado para superar as forças friccionais, de amortecimento e efetivar a polarização.

Como os vetores p_e e p_m são, normalmente, atrasados em fase em relação aos campos e e h , utilizar as equações $d = \varepsilon_0 e + p_e$ e $b = \mu_0 h + p_m$ torna-se algo muito complexo, pois deve-se relacionar p_e e p_m a e e h por meio das equações dinâmicas dos movimentos que governam os mecanismos de polarização. Entretanto, tal dificuldade pode ser superada utilizando-se representação fasorial e o conceito de permissividade e permeabilidade complexas [11]. Desse modo, as relações constitutivas podem ser expressas por equações simples da forma $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ e $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, pois a natureza complexa de ε e μ considera as diferenças de fase entre os campos. A partir de agora será utilizada a notação fasorial na análise das relações constitutivas.

2.4.6 Permissividade complexa

Em geral, para meios lineares e isotrópicos, a polarização \mathbf{P}_e por unidade de volume é dada pela Equação (2.24) [14].

$$\mathbf{P}_e = \varepsilon_0 \alpha e^{-j\phi} \mathbf{E} \quad (2.24)$$

em que α é uma constante real positiva e ϕ é o ângulo de fase pelo qual \mathbf{P}_e está atrasada de \mathbf{E} . Assim, $\chi_e = \alpha e^{-j\phi}$ é uma constante complexa de proporcionalidade chamada de susceptibilidade elétrica.

Escrevendo a densidade de fluxo elétrico total, tem-se a Equação (2.25).

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}_e = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \mathbf{E} = \varepsilon_0 [1 + \alpha \cos(\phi) - j\alpha \sin(\phi)] \mathbf{E} \\ &= (\varepsilon' - j\varepsilon'') \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E} \end{aligned} \quad (2.25)$$

em que $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)$ é chamada a permissividade elétrica do meio e $\varepsilon_r = \varepsilon / \varepsilon_0$ é a constante dielétrica do meio.

Note que ε é complexo sempre que efeitos de amortecimento estão presentes e que a parte imaginária é sempre negativa. Uma parte imaginária positiva implicaria em criação de energia, ao contrário de perda de energia.

2.4.7 Permeabilidade complexa

Para o caso magnético, \mathbf{H} é definido pela seguinte relação constitutiva da Equação (2.26).

$$\mu_0 \mathbf{H} = \mathbf{B} - \mathbf{P}_m \quad (2.26)$$

em que \mathbf{P}_m é a polarização magnética por unidade de volume.

Para a maioria dos materiais, \mathbf{P}_m é linearmente relacionado a \mathbf{B} e \mathbf{H} e, por convenção, isso é expresso como na Equação (2.27).

$$\mathbf{P}_m = \chi_m \mu_0 \mathbf{H} \quad (2.27)$$

em que χ_m é chamada a susceptibilidade magnética e também tem natureza complexa, pois \mathbf{P}_m é defasado de \mathbf{H} . Assim, desenvolve-se a relação constitutiva para o caso magnético na Equação (2.28).

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{P}_m = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} \quad (2.28)$$

em que $\mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$ é chamada a permeabilidade magnética do meio e $\mu_r = \mu / \mu_0$ é a permeabilidade magnética relativa.

Assim como no caso elétrico, as forças de amortecimento fazem com que μ seja complexo com uma parte imaginária negativa, ou seja, $\mu = \mu' - j\mu''$. Entretanto, a resposta magnética é, usualmente, muito fraca quando comparada à dielétrica na maioria dos materiais de interesse para a propagação de ondas [12]; nesses materiais, quase sempre pode-se fazer $\mu \approx \mu_0$. Consequentemente, as discussões sobre os mecanismos de perda são, comumente, confinadas apenas àqueles relacionados à permissividade complexa. Portanto, em grande parte deste trabalho, será considerado que μ é inteiramente real e $\mu \approx \mu_0$.

2.4.8 Condutividade equivalente

A perda advinda da parte imaginária da permissividade pode ser considerada como uma perda equivalente em condutor quando observada em dielétricos ou como um aumento na condutividade do material (em materiais com condutividade finita). Para verificar esses efeitos, deve-se observar a Equação (2.15b) juntamente com a relação constitutiva da Equação (2.25). No caso de um material dielétrico sem fontes ($\mathbf{J}_{\text{fonte}} = 0$, $\sigma = 0$), pode-se escrever as Equações (2.29a) e (2.29b).

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega(\epsilon' - j\epsilon'')\mathbf{E} \quad (2.29a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon'\mathbf{E} + \omega\epsilon''\mathbf{E} \quad (2.29b)$$

Comparando a Equação (2.29b) com a Equação (2.15b), nota-se que o efeito é do material ter uma permissividade real $\epsilon = \epsilon'$ e uma condutividade equivalente $\sigma_{\text{eq}} = \omega\epsilon''$.

No caso de um meio que já possui alguma condutividade estática ($\mathbf{J}_C = \sigma_s\mathbf{E}$), as Equações (2.30a) e (2.30b) repetem o mesmo processo feito acima.

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega(\epsilon' - j\epsilon'')\mathbf{E} + \sigma_s\mathbf{E} \quad (2.30a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon'\mathbf{E} + (\omega\epsilon'' + \sigma_s)\mathbf{E} \quad (2.30b)$$

Comparando a Equação (2.30b) com a Equação (2.15b), o efeito é como se o material possuísse uma permissividade real $\epsilon = \epsilon'$ e passasse a ter uma condutividade equivalente maior do que a condutividade original $\sigma_{\text{eq}} = \omega\epsilon'' + \sigma_s$.

Ao analisar as Equações (2.29b) e (2.30b), verifica-se que a perda por amortecimento dielétrico é indistinguível da perda por condutividade e o termo $(\omega\epsilon'' + \sigma_s)$ pode ser considerado como a condutividade total equivalente.

A condutividade equivalente é composta pela porção estática σ_s e por uma parte alternada $\sigma_a = \omega\epsilon''$ causada pela rotação dos dipolos elétricos à medida que eles tentam se alinhar com o campo alternado aplicado. Esse fenômeno é chamado de histerese dielétrica.

Muitas matérias dielétricas (como vidro e plástico) possuem condutividades estáticas muito baixas e atuam como bons isolantes. Porém, quando sujeitos a campos alternados, exibem valores expressivos de condutividade alternada e consomem energia considerável. O calor gerado por esse processo de radiofrequência é utilizado em processos industriais de aquecimento e até no conhecido forno micro ondas.

2.5 Condições de Contorno

Em um meio infinito e homogêneo, é relativamente fácil obter as soluções para as equações de Maxwell. Porém, na maioria das situações práticas, os campos estão na presença de diferentes corpos e fronteiras que separam meios materiais e regiões com diferentes propriedades elétricas (ϵ, μ, σ) . Portanto, para encontrar soluções adequadas e únicas para as equações de Maxwell, o conhecimento do comportamento do campo eletromagnético nas fronteiras é necessário e esse conhecimento vem a partir das condições de contorno.

Do ponto de vista matemático, a solução de uma equação diferencial parcial como a equação da onda em um meio não é única, a menos que sejam especificadas condições de contorno. Elas exercem o mesmo papel na solução de equações diferenciais parciais que as condições iniciais exercem na solução de circuitos elétricos ou problemas de valor inicial.

Além disso, as equações de Maxwell na forma diferencial expressam as relações que existem entre os campos vetoriais em qualquer ponto dentro de um meio contínuo e quando as quantidades envolvidas possuem apenas um único valor. Ao longo de fronteiras, onde existem descontinuidades nas propriedades elétricas ou existem fontes e cargas, os campos vetoriais são descontínuos e seu comportamento é governado pelas condições de contorno.

As equações de Maxwell na forma diferencial representam derivadas com respeito às coordenadas espaciais e, em pontos de descontinuidade, essas derivadas não possuem significado e não podem ser utilizadas para definir o comportamento dos campos ao longo das fronteiras. Nessas regiões, não se pode esperar que elas forneçam alguma informação válida.

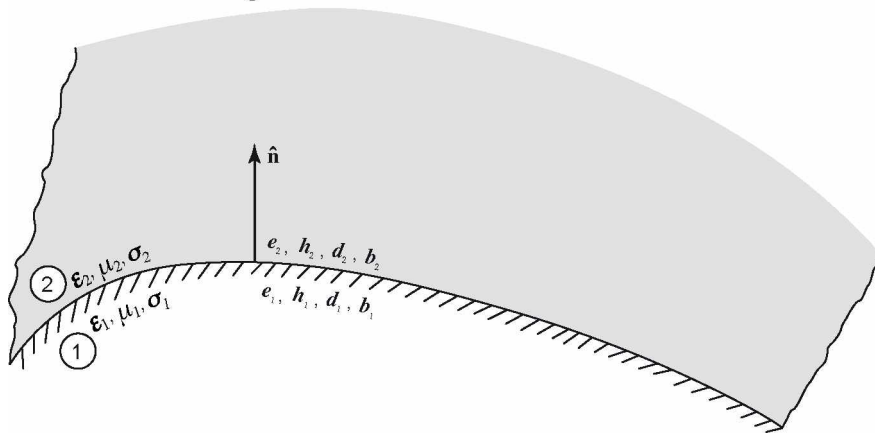
Em fronteiras, o comportamento dos campos deve ser determinado examinando os próprios campos, em vez das suas derivadas. Portanto, como

ponderado na Seção 2.2.3, as equações de Maxwell na forma integral proveem uma formulação mais conveniente para o tratamento das condições de contorno e podem ser sempre utilizadas para determinar o que acontece na fronteira entre dois meios.

Para fins de simplicidade, a demonstração das condições de contorno será omitida aqui, mas pode ser encontrada no Apêndice A. Aqui, é suficiente mostrar uma tabela resumo das condições de contorno.

Considere a Figura 7, em que o meio 1 é caracterizado por ϵ_1 , μ_1 e σ_1 , o meio 2 é caracterizado por ϵ_2 , μ_2 e σ_2 e \hat{n} é o vetor unitário normal à superfície de separação dos meios.

Figura 7 – Fronteira entre dois meios.



Fonte: *Advanced Engineering Electromagnetics* [15].

A Tabela 1 traz as condições de contorno para as componentes normal e tangencial dos campos elétrico e magnético na fronteira.

Tabela 1 – Condições de contorno para os campos elétrico e magnético.

	Geral	Meios com condutividade finita, sem fontes e sem cargas $\sigma_1, \sigma_2 \neq \infty$ $j_s = 0$ $\rho_s = 0$ $m_s = 0$ $\rho_{ms} = 0$	Meio 1 condutor elétrico perfeito $e_1 = h_1 = 0$ $\sigma_1 = \infty$ $\sigma_2 \neq \infty$ $m_s = 0$ $\rho_{ms} = 0$	Meio 1 condutor magnético perfeito $e_1 = h_1 = 0$ $j_s = 0$ $\rho_s = 0$
Campo elétrico tangencial	$-\hat{n} \times (e_2 - e_1) = m_s$	$\hat{n} \times (e_2 - e_1) = 0$	$\hat{n} \times e_2 = 0$	$-\hat{n} \times e_2 = m_s$
Campo magnético tangencial	$\hat{n} \times (h_2 - h_1) = j_s$	$\hat{n} \times (h_2 - h_1) = 0$	$\hat{n} \times h_2 = j_s$	$\hat{n} \times h_2 = 0$
Densidade de fluxo elétrico normal	$\hat{n} \cdot (d_2 - d_1) = \rho_s$	$\hat{n} \cdot (d_2 - d_1) = 0$	$\hat{n} \cdot d_2 = \rho_s$	$\hat{n} \cdot d_2 = 0$
Densidade de fluxo magnético normal	$\hat{n} \cdot (b_2 - b_1) = \rho_{ms}$	$\hat{n} \cdot (b_2 - b_1) = 0$	$\hat{n} \cdot b_2 = 0$	$\hat{n} \cdot b_2 = \rho_{ms}$

Fonte: *Advanced Engineering Electromagnetics* [15].

em que m_s e j_s são densidades lineares de corrente magnética e elétrica na superfície e ρ_s e ρ_{ms} são densidades superficiais de carga elétrica e magnética na superfície, respectivamente.

A última coluna da tabela considera um meio condutor magnético perfeito. Em geral, um meio desse tipo é definido como um material no qual os campos elétrico e magnético variáveis no tempo são nulos. A componente tangencial do campo magnético é nula na superfície e cargas magnéticas se movem para a superfície do material, criando uma densidade de corrente magnética em uma camada muito fina na superfície. Embora esses materiais não existam fisicamente, eles geralmente são utilizados como equivalente para descrever algumas situações elétricas complexas.

Além das condições de contorno mostradas na Tabela 1, existe uma condição muito importante para lidar com problemas em que existem fronteiras infinitas. Exemplos disso são: ondas planas em um meio infinito ou linhas de transmissão muito longas [9].

Nesses casos, deve-se impor uma condição para os campos no infinito. Essa condição de contorno é chamada de condição de radiação e é, essencialmente, ligada à conservação de energia. Ela diz que, em uma distância infinita de uma fonte, os campos devem ser muito pequenos (praticamente nulos) ou devem estar propagando para longe da fonte.

Esse resultado pode ser conseguido fazendo com que os meios que devem ser representados como infinitos contenham um pequeno fator de perdas (como um meio real tem). Assim, ondas que viriam do infinito com amplitudes finitas deveriam ter fontes com energia infinita e, portanto, não são permitidas.

2.6 Propagação de Ondas e a Onda Plana Uniforme

A existência das ondas eletromagnéticas, prevista pelas equações de Maxwell, foi inicialmente investigada por Hertz, que teve sucesso na geração e detecção de ondas de rádio após vários cálculos e experimentos. O trabalho pioneiro de Maxwell e Hertz foi fundamental para se chegar à alta tecnologia de comunicação atual.

Em geral, ondas são um meio de transportar energia e, conseqüentemente, informação. No caso das ondas eletromagnéticas, elas transportam energia elétrica e magnética e alguns exemplos típicos incluem ondas de rádio, sinais de TV, feixes de radar, raios luminosos, entre outros. Todas as formas de ondas eletromagnéticas

compartilham três características principais: viajam em altíssima velocidade; apresentam propriedades ondulatórias; são radiadas a partir de uma fonte sem a necessidade de um meio físico de propagação.

Com isso, o foco principal desta seção é estudar a propagação de ondas a partir das equações de Maxwell. Entretanto, preliminarmente, não é difícil mostrar, de uma maneira qualitativa, que as equações de Maxwell (2.1a) e (2.1b) levam à propagação de ondas.

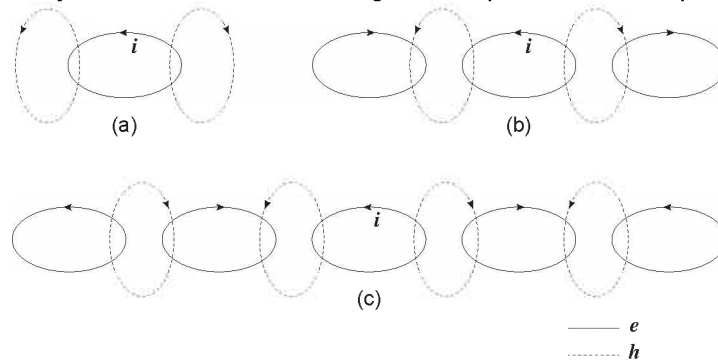
2.6.1 Esboço da propagação de ondas

Na Seção 2.2.2, foi mencionado que as reais fontes de um campo eletromagnético são as densidades de corrente impostas por uma fonte, \mathbf{m} e $\mathbf{j}_{\text{Fonte}}$. Lembrando que \mathbf{m} é fictícia e, na verdade, faz parte de $\mathbf{j}_{\text{Fonte}}$. Como exemplo, seja uma espira condutora imersa no vácuo na qual flui uma corrente i variável com o tempo.

É preciso notar que, no vácuo, $\sigma = 0$, $\epsilon = \epsilon_0$ e $\mu = \mu_0$. Essa corrente pode ser vista como uma corrente elétrica, o que realmente é ($\mathbf{j}_{\text{Fonte}}$) ou como uma corrente magnética equivalente (\mathbf{m}).

Considerando o primeiro caso, essa corrente gera uma circulação (ou rotacional) de campo magnético em torno da espira ($\nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{j}_{\text{Fonte}}$). Esse campo magnético variável em torno da espira cria um campo elétrico circulatório (ou rotacional) cujas linhas de campo englobam as linhas do campo magnético que o criou ($\nabla \times \mathbf{e} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}$). Esse novo campo elétrico variável cria, agora, um campo magnético e assim por diante ($\nabla \times \mathbf{h} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t}$). O resultado líquido é um crescimento contínuo e um espalhamento do campo eletromagnético em todo o espaço ao redor da espira condutora. Esse processo é ilustrado nas Figuras 8(a), 8(b) e 8(c).

Figura 8 – Geração de uma onda eletromagnética a partir de uma espira de corrente.

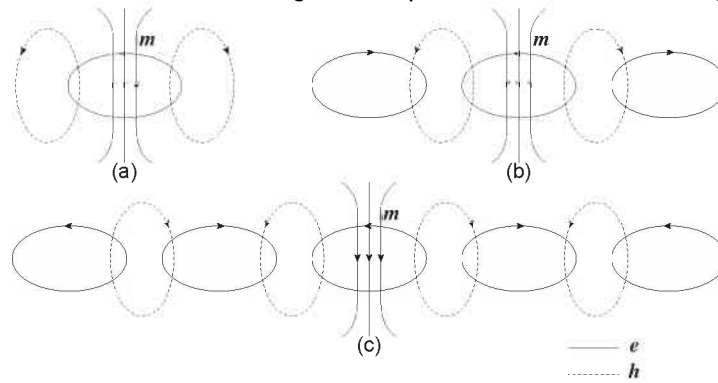


Fonte: *Foundations for Microwave Engineering* [11].

Considerando o segundo caso, a densidade de corrente magnética equivalente (\mathbf{m}) gera uma circulação de campo elétrico ao seu redor ($\nabla \times \mathbf{e} = -\mathbf{m}$). Esse campo elétrico gerado cria, por sua vez, um campo magnético que circula ao redor de suas linhas de força e assim por diante $\left(\nabla \times \mathbf{h} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} \right)$.

Assim, a perturbação causada pela fonte ($\mathbf{j}_{\text{Fonte}}$ ou \mathbf{m}) se move e se espalha pelo espaço, como mostram as Figuras 9(a), 9(b) e 9(c).

Figura 9 – Geração de uma onda eletromagnética a partir de uma corrente magnética equivalente.



Fonte: Elaborada pelo autor [4].

Esse efeito mútuo característico entre duas quantidades sempre deve existir para a propagação de qualquer tipo de onda. Ou seja, uma quantidade A deve ser gerada por uma quantidade B e vice-versa. Por exemplo, em ondas acústicas, um excesso de pressão cria um movimento da massa de ar adjacente. O movimento da massa de ar, por virtude de sua inércia, cria uma condensação, ou excesso de pressão, e assim por diante. A repetição desse processo cria uma onda acústica, que transmitirá o excesso de pressão inicial para outros pontos no espaço (considerando ausência de atenuação) [11].

2.6.2 Ondas planas uniformes

Feita uma explanação preliminar qualitativa, deve-se fazer uma análise matemática da propagação de ondas. Inicialmente, é desenvolvida a equação geral da onda e, posteriormente, para efeito didático, é considerada uma onda que propaga em uma direção específica.

Em geral, existem quatro principais tipos de meios nos quais as ondas eletromagnéticas podem propagar:

- espaço livre ($\sigma = 0$, $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$);
- dielétricos sem perdas ($\sigma = 0$, $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$, $\mu = \mu_r \mu_0$);
- dielétricos com perdas ($\sigma \neq 0$, $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$, $\mu = \mu_r \mu_0$);
- bons condutores ($\sigma \approx \infty$, $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_r \mu_0$ ou $\sigma \gg \omega \epsilon$).

em que ω é a frequência angular das ondas [8].

O caso dos dielétricos com perdas é mais geral e, portanto, analisado aqui. Os demais casos podem ser resolvidos a partir de simplificações no caso de dielétricos com perdas.

Um dielétrico com perdas é um meio no qual as ondas eletromagnéticas perdem energia por efeito joule à medida que propagam, devido à condutividade desse meio. Em outras palavras, um dielétrico com perdas é um meio parcialmente condutor (dielétrico imperfeito ou condutor imperfeito), no qual $\sigma \neq 0$.

É importante notar que as equações da onda desenvolvidas a partir de agora consideram que o campo eletromagnético já foi criado por uma fonte e lidam apenas com sua propagação. A criação do campo eletromagnético foi brevemente exemplificada na análise qualitativa prévia e é melhor tratada na seção sobre radiação.

As duas equações de Maxwell dos rotacionais na forma fasorial em um meio dielétrico sem fontes ($\mathbf{M} = 0$, $\mathbf{J}_{\text{Fonte}} = 0$ e $\rho = 0$) e com perdas, linear, isotrópico e homogêneo, caracterizado por μ , ϵ e σ são mostradas nas Equações (2.31) e (2.32).

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu \mathbf{H} \quad (2.31)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon \mathbf{E} + \sigma \mathbf{E} \quad (2.32)$$

Fazendo o rotacional da Equação (2.31) e introduzindo o valor de $\nabla \times \mathbf{H}$, tem-se as Equações (2.33) e (2.34).

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -j\omega\mu(j\omega\epsilon\mathbf{E} + \sigma\mathbf{E}) \quad (2.33)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \omega^2\mu\epsilon\mathbf{E} - j\omega\mu\sigma\mathbf{E} \quad (2.34)$$

Utilizando a identidade vetorial $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$, que tem validade apenas em coordenadas retangulares, a Equação (2.34) pode ser expressa como a Equação (2.35).

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \omega^2\mu\epsilon\mathbf{E} - j\omega\mu\sigma\mathbf{E} \quad (2.35)$$

Entretanto, como o meio é livre de fontes, $\rho = 0 \Rightarrow \nabla \cdot \mathbf{E} = 0$. Assim, a Equação (2.35) se torna a Equação (2.36).

$$\nabla^2 \mathbf{E} = (-\omega^2\mu\epsilon + j\omega\mu\sigma)\mathbf{E} = \gamma^2 \mathbf{E} \quad (2.36)$$

ou a Equação (2.37).

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \gamma^2 \mathbf{E} = 0 \quad (2.37)$$

em que $\gamma^2 = -\omega^2\mu\epsilon + j\omega\mu\sigma$ é chamada constante de propagação do meio e é dada em m^{-1} .

Por um procedimento similar, pode-se mostrar que a Equação (2.38) é utilizada para o campo magnético.

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \gamma^2 \mathbf{H} = 0 \quad (2.38)$$

As Equações (2.37) e (2.38) são conhecidas como as equações vetoriais homogêneas de Helmholtz ou, simplesmente, como equações vetoriais da onda. Em coordenadas cartesianas, as equações vetoriais de Helmholtz são equivalentes a, cada uma, três equações de onda escalares, uma para cada componente espacial de \mathbf{E} e de \mathbf{H} .

Como γ é uma quantidade complexa, pode-se fazer $\gamma = \alpha + j\beta$, sendo que α e β são dados pelas Equações (2.39) e (2.40), cuja demonstração pode ser encontrada no Apêndice B.

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right]} \quad (2.39)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right]} \quad (2.40)$$

Sem perda de generalidade e para efeito didático, pode-se assumir que o campo elétrico é função apenas de z e possui apenas uma componente em x , conforme Equação (2.41). Os resultados obtidos podem ser estendidos para a componente y .

$$\mathbf{E} = E_x(z) \hat{x} \quad (2.41)$$

A Equação (2.41) pode ser escrita da seguinte maneira, como mostrado nas Equações (2.42) a (2.44).

$$(\nabla^2 - \gamma^2)[E_x(z)\hat{x}] = 0 \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial^2 E_x(z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x(z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x(z)}{\partial z^2} - \gamma^2 E_x(z) = 0 \quad (2.43)$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \gamma^2 \right] E_x(z) = 0 \quad (2.44)$$

A Equação (2.44) é uma equação de onda escalar e uma equação diferencial homogênea e linear cuja solução é dada pela Equação (2.45).

$$E_x(z) = E_0 e^{-\gamma z} + E'_0 e^{+\gamma z} \quad (2.45)$$

em que E_0 e E'_0 são constantes reais.

O campo físico real $e_x(z, t)$ é dado pela Equação (2.46) ao recuperar a dependência do tempo na Equação (2.45).

$$\begin{aligned}
 e_x(z, t) &= \text{Re} \left\{ E_0 e^{-\gamma z + j\omega t} + E'_0 e^{+\gamma z + j\omega t} \right\} \\
 &= \text{Re} \left\{ E_0 e^{-(\alpha + j\beta)z + j\omega t} + E'_0 e^{(\alpha + j\beta)z + j\omega t} \right\} \\
 &= \text{Re} \left\{ E_0 e^{-\alpha z + j(\omega t - \beta z)} + E'_0 e^{\alpha z + j(\omega t + \beta z)} \right\} \\
 &= E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) + E'_0 e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z)
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

O campo magnético correspondente aos campos elétricos dados pelas Equações (2.45) e (2.46) pode ser obtido facilmente utilizando a Equação (2.31). Assim, desenvolve-se as Equações (2.47a) a (2.47f).

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu \mathbf{H} \tag{2.47a}$$

$$\nabla \times [E_x(z) \hat{x}] = -j\omega\mu \mathbf{H} \tag{2.47b}$$

$$\frac{\partial E_x(z)}{\partial z} \hat{y} = -j\omega\mu \mathbf{H} \tag{2.47c}$$

$$\mathbf{H} = \frac{j}{\omega\mu} \frac{\partial}{\partial z} [E_0 e^{-\gamma z} + E'_0 e^{+\gamma z}] \hat{y} \tag{2.47d}$$

$$\mathbf{H} = \frac{-j\gamma}{\omega\mu} (E_0 e^{-\gamma z} - E'_0 e^{+\gamma z}) \hat{y} \tag{2.47e}$$

$$H_y(z) = H_0 e^{-\gamma z} + H'_0 e^{+\gamma z} \tag{2.47f}$$

em que $H_0 = -\frac{j\gamma}{\omega\mu} E_0$ e $H'_0 = \frac{j\gamma}{\omega\mu} E'_0$.

O campo físico real $h_y(z, t)$ é dado pela Equação (2.48) ao recuperar a dependência do tempo na Equação (2.47f).

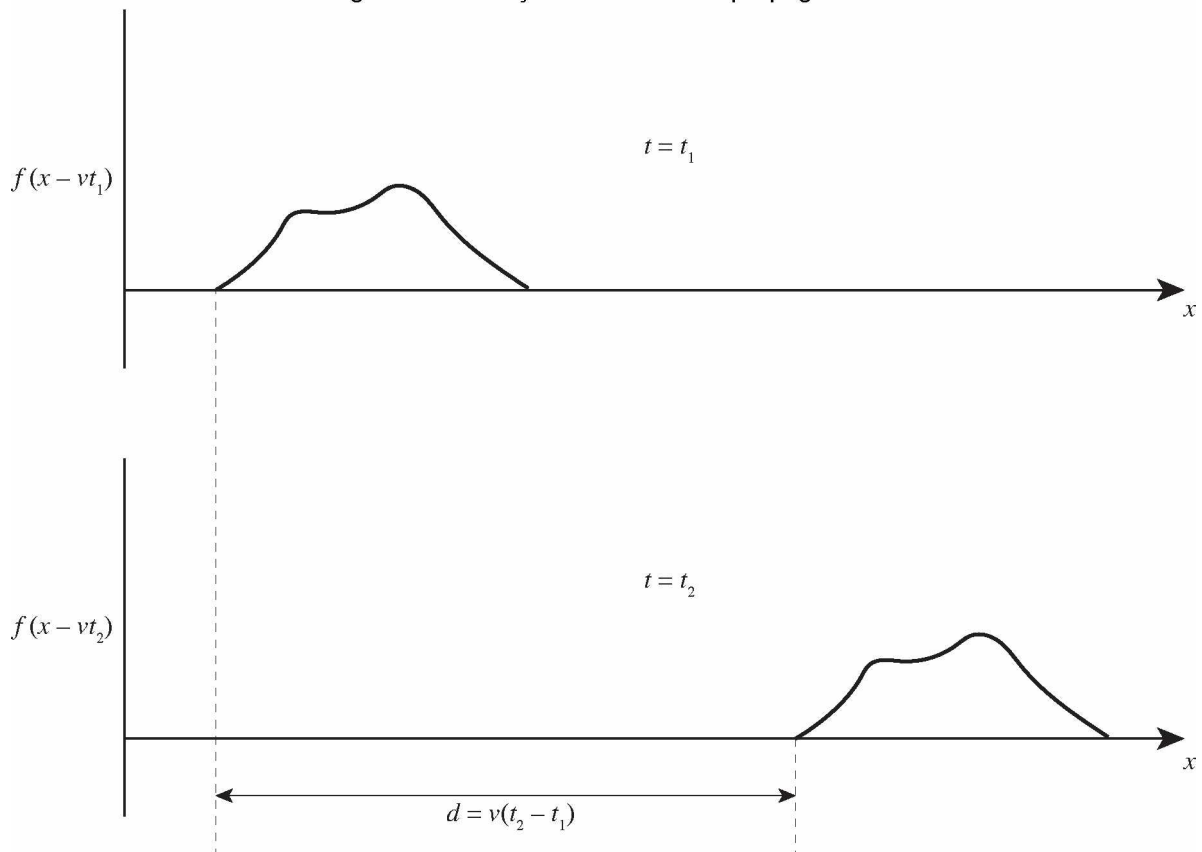
$$\begin{aligned}
 h_y(z, t) &= \text{Re} \left\{ H_0 e^{-\gamma z + j\omega t} + H'_0 e^{+\gamma z + j\omega t} \right\} \\
 &= \text{Re} \left\{ H_0 e^{-(\alpha + j\beta)z + j\omega t} + H'_0 e^{(\alpha + j\beta)z + j\omega t} \right\} \\
 &= \text{Re} \left\{ H_0 e^{-\alpha z + j(\omega t - \beta z)} + H'_0 e^{\alpha z + j(\omega t + \beta z)} \right\} \\
 &= H_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) + H'_0 e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z)
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

As Equações (2.45), (2.46), (2.47f) e (2.48) representam duas ondas planas, uma que propaga na direção positiva de z e outra na direção negativa de z . Da Equação (2.47f), nota-se que o campo magnético possui apenas a componente $H_y(z)$ e que a direção de \mathbf{H} é revertida na onda que propaga na direção negativa de z . Isso é um requerimento necessário para obter a reversão na direção do fluxo de potência.

É importante notar que os campos elétrico e magnético estão no mesmo plano (xy ou $z = cte$), têm o mesmo valor em todo o plano e, também, estão em quadratura espacial. Isso faz com que esse tipo de onda seja chamado de onda plana uniforme transversal eletromagnética.

Uma onda pode ser definida da seguinte maneira: se um fenômeno físico que ocorreu em uma posição e em dado instante é reproduzido em outras posições em instantes posteriores e o atraso entre os acontecimentos é proporcional à distância de separação entre as posições em que as repetições são observadas, então esse conjunto de acontecimentos constitui uma onda. Isso é melhor observado na Figura 10.

Figura 10 – Função de uma onda propagando.



Fonte: Elaborada pelo autor.

É possível ver que a perturbação ocorrida em $t = t_1$ se repetiu em $t = t_2$, porém d unidades de comprimento à frente. Assim, com o passar do tempo, a perturbação percorre o espaço com uma velocidade constante v e pode ser representada por uma função do tipo $f(x \pm vt)$, dependendo do sentido de propagação.

2.6.3 Constante de atenuação

É importante notar que os campos que compõem as ondas das Equações (2.46) e (2.48) são atenuados à medida que caminham por um fator $e^{-\alpha z}$. Portanto, α é conhecida como a constante de atenuação ou fator de atenuação do meio e é uma medida da taxa de decaimento espacial da amplitude da onda no meio, em nepers por metro (Np/m) ou em decibéis por metro (dB/m). É importante notar que α é dependente da frequência e a atenuação tende a ser maior para frequências mais altas.

2.6.4 Constante de fase, velocidade de fase, comprimento de onda e índice de refração

Ainda, observando as ondas das Equações (2.46) e (2.48), os campos elétrico e magnético que as compõem propagam com velocidade de fase dada pela Equação (2.49d). A velocidade de fase é a velocidade com que um ponto de fase constante caminha no espaço. Assim, desenvolve-se as Equações (2.49a) a (2.49d).

$$\phi = \omega t \pm \beta z = \text{cte} \quad (2.49a)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\omega t \pm \beta z) = 0 \quad (2.49b)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} t + \omega \frac{\partial t}{\partial t} \pm \beta \frac{\partial z}{\partial t} = 0 \quad (2.49c)$$

$$v = \pm \frac{\omega}{\beta} \quad (2.49d)$$

em que o sinal \pm tem função de indicar o sentido de propagação.

No vácuo, $\beta = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ e a velocidade de fase é dada pela Equação (2.50).

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \approx 299.792.458 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right] \quad (2.50)$$

A quantidade β é uma medida do deslocamento de fase por unidade de comprimento e é chamada de constante de fase ou número de onda. Por meio dela, é possível encontrar o “tamanho” de um período da onda no espaço. Isso é chamado de comprimento de onda e é calculado segundo as Equações (2.51a) a (2.51c).

$$v = \frac{\omega}{\beta} \quad (2.51a)$$

$$\frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi}{T\beta} \quad (2.51b)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (2.51c)$$

em que T é o tempo de ocorrência de uma oscilação da onda.

É comum definir a velocidade de fase de uma onda em um meio em termos da velocidade de fase da onda se ela estivesse no vácuo. Assim, a velocidade de fase relativa é dada pela Equação (2.52).

$$v' = \frac{v}{v_{\text{vácuo}}} = \frac{\omega/\beta}{\omega/\beta_{\text{vácuo}}} = \frac{\beta_{\text{vácuo}}}{\beta} \quad (2.52)$$

Como $\beta_{\text{vácuo}} = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$, a velocidade de fase relativa pode ser expressa como na Equação (2.53).

$$v' = \sqrt{\frac{2}{\mu_r\epsilon_r \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right]}} \quad (2.53)$$

Um outro parâmetro importante é o índice de refração do meio, que é definido como o recíproco da velocidade de fase relativa, de acordo com a Equação (2.54).

$$n = \frac{1}{v'} = \sqrt{\frac{\mu_r\epsilon_r \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right]}{2}} \quad (2.54)$$

2.6.5 Velocidade de grupo

Quando uma onda é composta por de mais de uma frequência, como é o caso de uma portadora modulada por um sinal de certa largura de banda, por exemplo, é comum trabalhar com velocidade de grupo. Nesses casos, cada frequência apresenta sua velocidade de fase, mas a composição das duas ou mais frequências causa batimentos, que se traduzem em uma variação lenta sobreposta a uma variação mais rápida. Assim, velocidade de grupo pode ser entendida como a velocidade da envoltória da onda e também é chamada de velocidade de energia, que sempre é menor ou igual à velocidade da luz.

Existem meios em que a velocidade de grupo é a mesma da velocidade de fase e são chamados meios não dispersivos. Por outro lado, há meios em que a velocidade de grupo e de fase são diferentes. Esses são os meios dispersivos e, neles, essa velocidade é calculada pela Equação (2.55).

$$v_g = v + \beta \frac{\partial v}{\partial \beta} = v - \lambda \frac{\partial v}{\partial \lambda} \quad (2.55)$$

2.6.6 Impedância e admitância características

Da Equação (2.47e) para a Equação (2.47f) foi utilizado $H_0 = -\frac{j\gamma}{\omega\mu} E_0$ e $H'_0 = \frac{j\gamma}{\omega\mu} E'_0$. Então, é preciso investigar o significado do fator de proporcionalidade $-\frac{j\gamma}{\omega\mu}$. Isso é feito nas Equações (2.56a) a (2.57).

Da Equação (2.36), sabe-se que $\gamma = \sqrt{-\omega^2\mu\epsilon + j\omega\mu\sigma}$. Então, desenvolve-se as Equações (2.56a) e (2.56b).

$$-\frac{j\gamma}{\omega\mu} = \frac{\sqrt{-\omega^2\mu\epsilon + j\omega\mu\sigma}}{j\omega\mu} \quad (2.56a)$$

$$-\frac{j\gamma}{\omega\mu} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu} - j\frac{\sigma}{\omega\mu}} \quad (2.56b)$$

Essa constante dá a relação entre o campo magnético e o campo elétrico e é chamada de admitância característica do meio, definida na Equação (2.57).

$$Y = \frac{H_0}{E_0} = -\frac{H'_0}{E'_0} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu} - j\frac{\sigma}{\omega\mu}} \quad (2.57)$$

Seu inverso é, obviamente, a impedância característica do meio, que é definida pela relação da Equação (2.58).

$$Z = \frac{E_0}{H_0} = -\frac{E'_0}{H'_0} = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\omega\epsilon - j\sigma}} \quad (2.58)$$

Utilizando a Equação (2.58), a Equação (2.47f) pode ser reescrita em termos da impedância característica do meio e se torna a Equação (2.59).

$$H_y(z) = H_0 e^{-\gamma z} + H'_0 e^{+\gamma z} = \frac{1}{Z} (E_0 e^{-\gamma z} - E'_0 e^{+\gamma z}) \quad (2.59)$$

Como a impedância da Equação (2.58) é uma grandeza complexa, ela pode ser escrita em forma polar, como na Equação (2.60).

$$Z = |Z| e^{j\theta_Z} \quad (2.60)$$

em que $|Z| = \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}}$, $\tan(2\theta_Z) = \frac{\sigma}{\omega\varepsilon}$ e $0 \leq \theta_Z \leq 45^\circ$.

Portanto, a Equação (2.59) passa a ser a Equação (2.61).

$$H_y(z) = \frac{1}{|Z|} (E_0 e^{-\gamma z - j\theta_Z} - E'_0 e^{+\gamma z - j\theta_Z}) \quad (2.61)$$

Da mesma maneira, a Equação (2.48) passa a ser a Equação (2.62).

$$\begin{aligned} h_y(z, t) &= \frac{1}{|Z|} \operatorname{Re} \left\{ E_0 e^{-\gamma z - j\theta_Z + j\omega t} - E'_0 e^{+\gamma z - j\theta_Z + j\omega t} \right\} \\ &= \frac{1}{|Z|} \operatorname{Re} \left\{ E_0 e^{-(\alpha + j\beta)z - j\theta_Z + j\omega t} - E'_0 e^{(\alpha + j\beta)z - j\theta_Z + j\omega t} \right\} \\ &= \frac{1}{|Z|} \operatorname{Re} \left\{ E_0 e^{-\alpha z + j(\omega t - \beta z - \theta_Z)} - E'_0 e^{\alpha z + j(\omega t + \beta z - \theta_Z)} \right\} \\ &= \frac{1}{|Z|} E_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z - \theta_Z) - \frac{1}{|Z|} E'_0 e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z - \theta_Z) \end{aligned} \quad (2.62)$$

É importante perceber, das Equações (2.46) e (2.62), que e e h estão defasados de θ_Z em qualquer instante de tempo, devido à impedância intrínseca complexa do meio.

Como estipulado, foi resolvido o caso mais geral do meio com perdas ($\sigma \neq 0$, $\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$, $\mu = \mu_r \mu_0$) e os demais casos podem ser derivados desse.

2.6.7 Equação geral da onda

Anteriormente, foi desenvolvida a equação de uma onda plana uniforme que propaga em um eixo principal (z). Entretanto, apesar de ser um caso muito utilizado, é apenas uma situação particular entre vários modos de propagação existentes.

Um modo é uma configuração particular do campo eletromagnético. Para um dado problema de valor de contorno, existem múltiplas configurações de campo que satisfazem a equação da onda, as equações de Maxwell e as condições de contorno. Todas essas configurações (soluções) diferentes são chamadas modos [15].

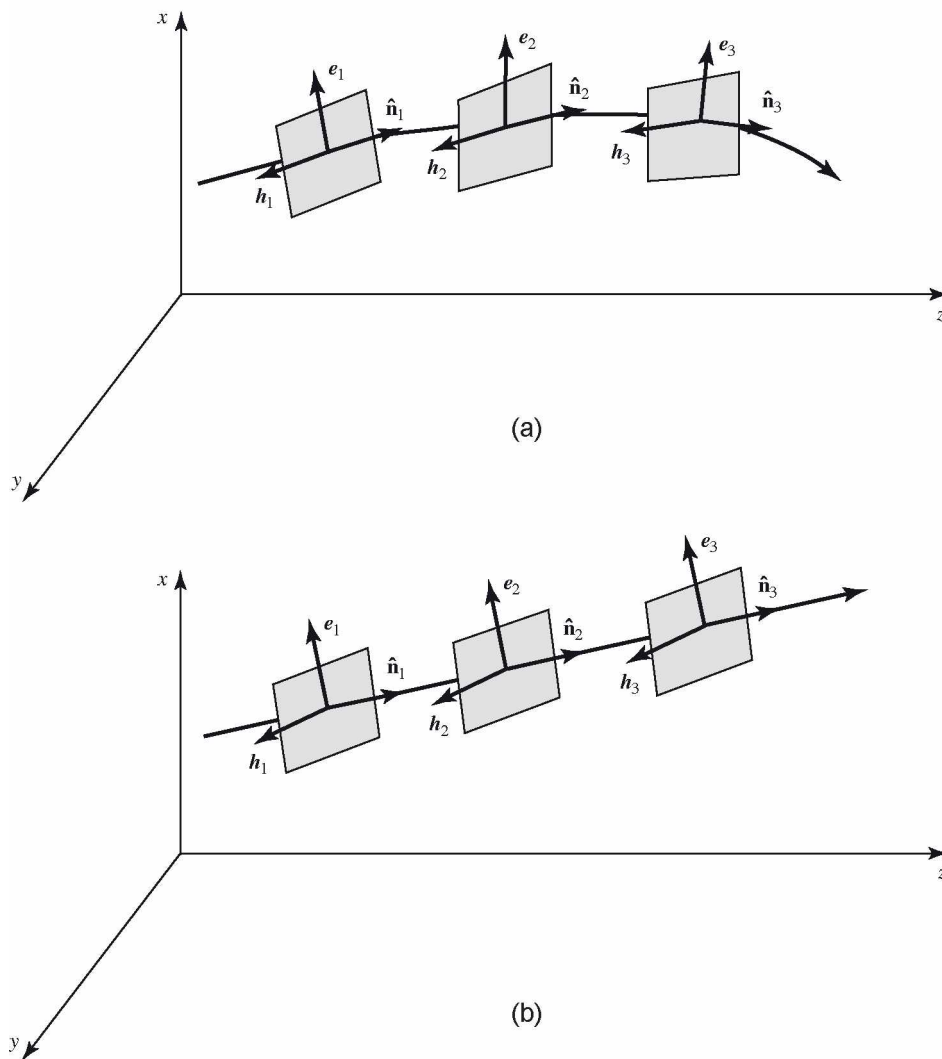
Para a maioria dos problemas de importância prática, é possível separar as soluções das equações de Maxwell em uma região livre de fontes em três tipos básicos de campos. Essas classificações são: modo transversal eletromagnético (TEM), modo transversal elétrico (TE ou H) e modo transversal magnético (TM ou E) [7].

O modo TEM é aquele cujas intensidades dos campos elétrico e magnético, em cada ponto do espaço, estão contidas em um plano local, chamado plano equifásico, que é perpendicular à direção de propagação, e isso é independente do tempo. Assim, os campos elétrico e magnético não possuem componentes na direção de propagação.

Em geral, as orientações desses planos locais associados à onda TEM são diferentes em diferentes pontos do espaço. No ponto (x_1, y_1, z_1) , todas as componentes de campo estão em um plano; em outro ponto (x_2, y_2, z_2) , todas as componentes estão, novamente, em um plano, porém esses dois planos não precisam ser paralelos, como mostra a Figura 11(a) [15].

Se a orientação dos planos do modo TEM for a mesma, ou seja, se os planos equifásicos forem paralelos, então esses campos formam uma onda plana, como na Figura 11(b). Em outras palavras, as superfícies equifásicas são superfícies planas e paralelas. Caso, além disso, os campos possuam a mesma amplitude ao longo de cada uma das superfícies planares, então tem-se uma onda plana uniforme. Assim, o campo não é função das coordenadas espaciais que formam os planos, exatamente como foi feito na Seção 2.6.2.

Figura 11 – Onda TEM (a) e onda TEM plana (b).



Fonte: *Advanced Engineering Electromagnetics* [15].

O modo transversal elétrico (TE) ou modo H é caracterizado por ter um campo elétrico inteiramente num plano perpendicular à direção de propagação, porém o campo magnético possui componente nessa direção. Para ondas TE, é possível expressar todas as componentes de campo em termos da componente magnética axial.

O modo transversal magnético (TM) ou modo E é aquele em que o campo magnético é sempre perpendicular à direção de propagação, mas o campo elétrico possui alguma componente no eixo de propagação. Nesse caso, todas as componentes dos campos podem ser expressas em termos do campo elétrico axial.

Os três modos descritos são suficientemente gerais e qualquer campo arbitrário que é solução das equações de Maxwell pode ser expresso como uma composição desses modos básicos. É importante notar que a grande maioria das

soluções de problemas práticos se enquadra, naturalmente, em algum dos tipos descritos [7].

Na Equação (2.58), foi apresentado o conceito de impedância característica do meio. Para aquela situação de onda plana uniforme, isso é verdadeiro. Entretanto, isso não é verdade em todas as situações. O correto é utilizar o termo impedância de onda. Em geral, a impedância de onda é igual à impedância do meio para ondas planas uniformes e para qualquer onda no modo TEM. Porém, isso não é válido para os modos TE ou TM.

Muitas vezes, é necessário escrever a expressão de uma onda plana que propaga em uma direção arbitrária com respeito aos eixos fixos. Isso pode ser feito convenientemente em termos dos cossenos diretores do vetor normal ao plano de propagação da onda.

Pela definição de ondas planas apresentada, as superfícies equifásicas são planas. Portanto, a equação que dá o lugar geométrico de uma superfície plana é do tipo da Equação (2.63).

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} = cte \quad (2.63)$$

em que $\hat{\mathbf{n}}$ é o vetor unitário normal ao plano e \mathbf{r} é o vetor posição de qualquer ponto do plano.

Assim, o campo elétrico de uma onda plana uniforme pode ser escrito na forma da Equação (2.64).

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-\gamma \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}} + \mathbf{E}'_0 e^{+\gamma \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}} \quad (2.64)$$

Para efeito didático, pode-se considerar apenas a onda que propaga no sentido positivo, escrita na Equação (2.65) e desenvolvida nas Equações (2.66a) a (2.66e).

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-\gamma \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}} \quad (2.65)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-\gamma(\cos A \hat{x} + \cos B \hat{y} + \cos C \hat{z}) \cdot \mathbf{r}} \quad (2.66a)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0 e^{-\gamma(x \cos A + y \cos B + z \cos C)} \quad (2.66b)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = (E_{0x} \hat{x} + E_{0y} \hat{y} + E_{0z} \hat{z}) e^{-\gamma(x \cos A + y \cos B + z \cos C)} \quad (2.66c)$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \left(E_{0x} \hat{x} + E_{0y} \hat{y} + E_{0z} \hat{z} \right) e^{-\gamma(x \cos A + y \cos B + z \cos C)} e^{j\omega t} \right\} \quad (2.66d)$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{r}, t) = \left(E_{0x} \hat{x} + E_{0y} \hat{y} + E_{0z} \hat{z} \right) e^{-\alpha(x \cos A + y \cos B + z \cos C)} \cos \left[\omega t - \beta(x \cos A + y \cos B + z \cos C) \right] \quad (2.66e)$$

em que x , y e z são as componentes do vetor \mathbf{r} e A , B e C são os ângulos que o vetor unitário $\hat{\mathbf{n}}$ forma com os eixos positivos, respectivamente.

A partir do campo elétrico da Equação (2.66c), o campo magnético pode ser encontrado utilizando a Equação (2.67).

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{Z} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.67)$$

Assim, na direção de propagação, a velocidade de fase, comprimento de onda e impedância da onda são as mesmas encontradas anteriormente. Porém, em direções diferentes, como as direções dos eixos cartesianos, seus valores são alterados, sendo que o comprimento de onda e a velocidade de fase são dados pelas Equações (2.68) e (2.69).

$$\lambda_x = \frac{2\pi}{\beta \cos A} \quad \lambda_y = \frac{2\pi}{\beta \cos B} \quad \lambda_z = \frac{2\pi}{\beta \cos C} \quad (2.68)$$

$$v_x = \frac{\omega}{\beta \cos A} \quad v_y = \frac{\omega}{\beta \cos B} \quad v_z = \frac{\omega}{\beta \cos C} \quad (2.69)$$

2.7 Polarização de Onda

Na Seção 2.6, além do estudo da propagação de ondas, foram apresentadas as ondas planas uniformes, nas quais os vetores de campo elétrico e magnético estão em direções fixas no espaço. Especificamente, para uma onda que propaga no eixo z , o campo elétrico foi tomado no eixo x e, portanto, o campo magnético no eixo y . Essa relação ortogonal é sempre verdadeira para ondas planas uniformes e ondas TEM em geral.

Entretanto, as direções de \mathbf{e} e \mathbf{h} no plano perpendicular à direção de propagação podem variar com o tempo e com a posição, dependendo de como a onda foi gerada ou do meio de propagação. Assim, uma descrição completa de uma onda eletromagnética deve considerar não somente parâmetros como comprimento de onda, velocidade de fase e potência, mas, também, uma descrição da orientação instantânea dos campos vetoriais.

De acordo com o IEEE [16,17], a polarização de uma onda radiada é definida como “a propriedade de uma onda eletromagnética que descreve a direção e magnitude relativa variáveis com o tempo do vetor campo elétrico. Especificamente, a Figura traçada, em função do tempo, pela extremidade do vetor em uma posição fixa no espaço quando observado na direção de propagação”.

Existem três tipos de polarização de onda: linear, circular e elíptica. A polarização elíptica é o caso mais geral e as polarizações linear e circular são casos especiais desse tipo de polarização. Nesse caso, a extremidade do vetor campo elétrico traça uma elipse nos planos equifásicos.

Quando uma elipse é extremamente fina, a polarização passa a ser linear. Nesse caso, o vetor campo elétrico, em um ponto fixo, está sempre direcionado ao longo de uma reta normal à direção de propagação.

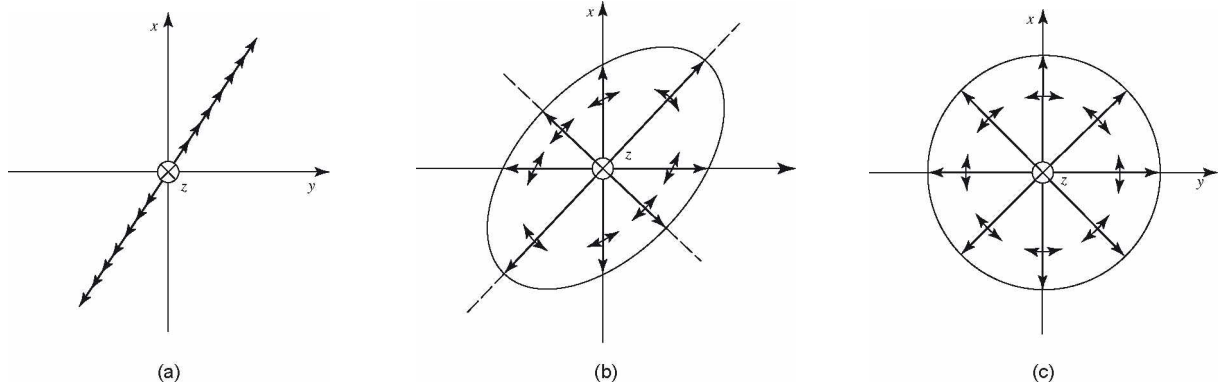
No caso de uma elipse de eixos iguais, tem-se uma circunferência e a polarização é chamada de circular. Aqui, o campo elétrico descreve uma circunferência no plano perpendicular à direção de propagação.

Quando a polarização é elíptica ou circular, o vetor campo elétrico precisa rotacionar para formar a Figura de elipse ou circunferência e essa rotação pode ser no sentido horário ou anti-horário. Quando é no sentido horário, a polarização é chamada de polarização elíptica/circular de mão direita (RHEP – *right hand elliptical polarization* ou RHCP – *right hand circular polarization*). No caso do sentido anti-

horário, é chamada de polarização elíptica/circular de mão esquerda (LHEP – *left and elliptical polarization* ou LHCP – *left hand circular polarization*). É importante lembrar que essa convenção de sentidos é feita observando o campo no sentido de propagação, ou seja, com o eixo de propagação entrando no plano de observação.

A Figura 12 mostra o desenho traçado pelo vetor campo elétrico para os três casos.

Figura 12 – Pol. linear (a), pol. elíptica (b) e pol. circular (c).



Fonte: *Advanced Engineering Electromagnetics* [15].

2.7.1 Polarização linear

No caso da polarização linear, o campo elétrico pode estar orientado em qualquer direção fixa no plano xy (no caso da onda propagando em z). Por exemplo, o fasor do campo elétrico será do tipo da Equação (2.70).

$$\mathbf{E}(z) = (E_x \hat{x} + E_y \hat{y}) e^{-\gamma z} \quad (2.70)$$

Por isso, o campo físico é como o da Equação (2.71).

$$\mathbf{e}(z, t) = (E_x \hat{x} + E_y \hat{y}) e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \quad (2.71)$$

Fixando uma posição em z , o vetor $\mathbf{e}_z(t) = (E_x \hat{x} + E_y \hat{y}) e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$ descreve uma reta no plano xy e isso é demonstrado no Apêndice C.

2.7.2 Polarização elíptica

Agora, se existir uma diferença de fase entre as componentes y e x , o campo elétrico fasorial passa a ser como na Equação (2.72).

$$\mathbf{E}(z) = (E_x \hat{x} + E_y e^{j\theta} \hat{y}) e^{-\gamma z} \quad (2.72)$$

em que θ é a diferença de fase entre as componentes em x e y .

Agora, o campo físico é dado pela Equação (2.73).

$$\mathbf{e}(z, t) = E_x e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \hat{x} + E_y e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta) \hat{y} \quad (2.73)$$

Assim, em uma posição fixa de z , o campo elétrico traça uma elipse no plano xy e a polarização é dita elíptica. A demonstração encontra-se no Apêndice C.

2.7.3 Polarização circular

No caso em que a diferença de fase da polarização elíptica é $\theta = \pm 90^\circ$ e $|E_x| = |E_y| = E$, o campo real é expresso pela Equação (2.75).

$$\mathbf{e}(z, t) = E_x e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \hat{x} + E_y e^{-\alpha z} \cos\left(\omega t - \beta z \pm \frac{\pi}{2}\right) \hat{y} \quad (2.74)$$

$$\mathbf{e}(z, t) = E e^{-\alpha z} [\cos(\omega t - \beta z) \hat{x} \mp \sin(\omega t - \beta z) \hat{y}] \quad (2.75)$$

Portanto, as componentes de \mathbf{e} estão em quadratura espacial e traçam uma circunferência no sentido horário ou anti-horário, a depender do sinal do seno. A demonstração está no Apêndice C.

2.7.4 Esfera de Poincaré

A polarização de qualquer onda pode ser unicamente representada por um ponto na superfície de uma esfera, [18–22], chamada de esfera de Poincaré. Para isso, é necessário utilizar um par de ângulos, que pode ser (γ, δ) ou (ε, τ) , definidos pelas Equações (2.76a) e (2.76b) e (2.77a) e (2.77b) [15].

$$\gamma = \tan^{-1}\left(\frac{E_y}{E_x}\right) \text{ ou } \gamma = \tan^{-1}\left(\frac{E_x}{E_y}\right), \quad 0^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ \quad (2.76a)$$

$$\delta = \phi_y - \phi_x = \theta, \quad -180^\circ \leq \delta \leq 180^\circ \quad (2.76b)$$

$$\varepsilon = \cot^{-1}(AR), \quad -45^\circ \leq \varepsilon \leq +45^\circ \quad (2.77a)$$

$$\tau = \text{ângulo de inclinação}, \quad 0^\circ \leq \tau \leq 180^\circ \quad (2.77b)$$

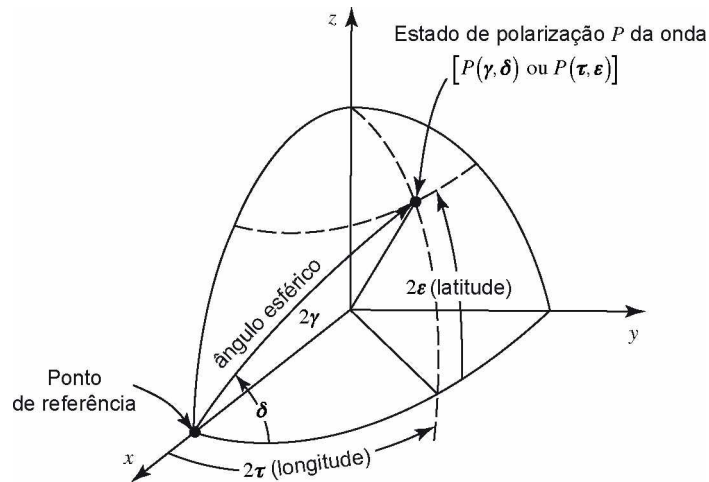
em que 2ε é a latitude do ponto na esfera e 2τ é a longitude e os dois pares de ângulos são relacionados por geometria esférica pela Equação (2.78) ou pela Equação (2.79) [15]. Na Equação (2.76), a razão apropriada é aquela que satisfaz os limites angulares de todos os parâmetros (γ, δ) e (ε, τ) .

$$\begin{aligned} \cos(2\gamma) &= \cos(2\varepsilon)\cos(2\tau) \\ \tan(\delta) &= \frac{\tan(2\varepsilon)}{\sin(2\tau)} \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} \sin(2\varepsilon) &= \sin(2\gamma)\sin(\delta) \\ \tan(2\tau) &= \tan(2\gamma)\cos(\delta) \end{aligned} \quad (2.79)$$

A Figura 13 ilustra os pares de ângulos na esfera.

Figura 13 – Porção da esfera de Poincaré.



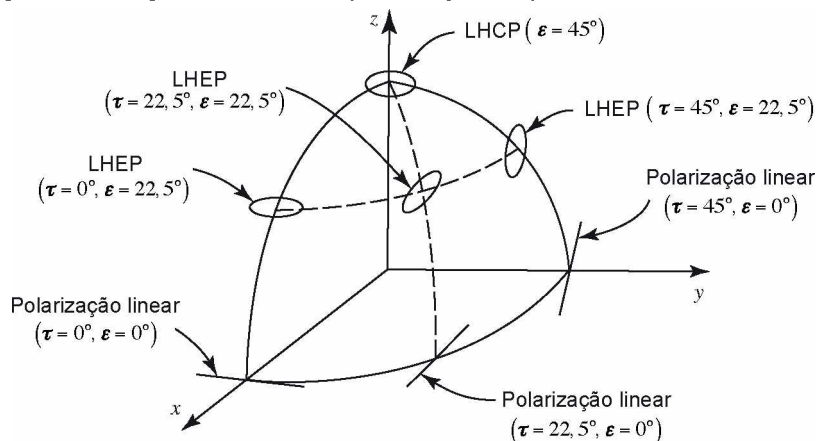
Fonte: *Advanced Engineering Electromagnetics* [15].

A razão axial da Equação (2.77a) é a razão axial da elipse. No caso da polarização linear, $AR = \infty$. Para polarização circular, $AR = \pm 1$ e, para polarização elíptica, $AR = \pm \frac{\text{eixo maior}}{\text{eixo menor}}$. Em que o sinal positivo é utilizado nos caso de polarização de mão esquerda (LHEP ou LHCP) e o sinal negativo nos casos de polarização de mão direita (RHEP ou RHCP).

Como os parâmetros da esfera de Poincaré estão relacionados por funções transcendentais das Equações (2.78) e (2.79), pode existir alguma ambiguidade sobre qual quadrante os ângulos deve ser tomados. Esses ângulos devem ser escolhidos de maneira a satisfazer os limites das Equações (2.76a) a (2.77b) e o par (γ, δ) e o par (ε, τ) devem representar um mesmo ponto. Além disso, a razão axial deve estar na faixa $1 \leq |AR| \leq \infty$, com valores positivos no caso de polarização de mão esquerda e com valores negativos para polarização de mão direita.

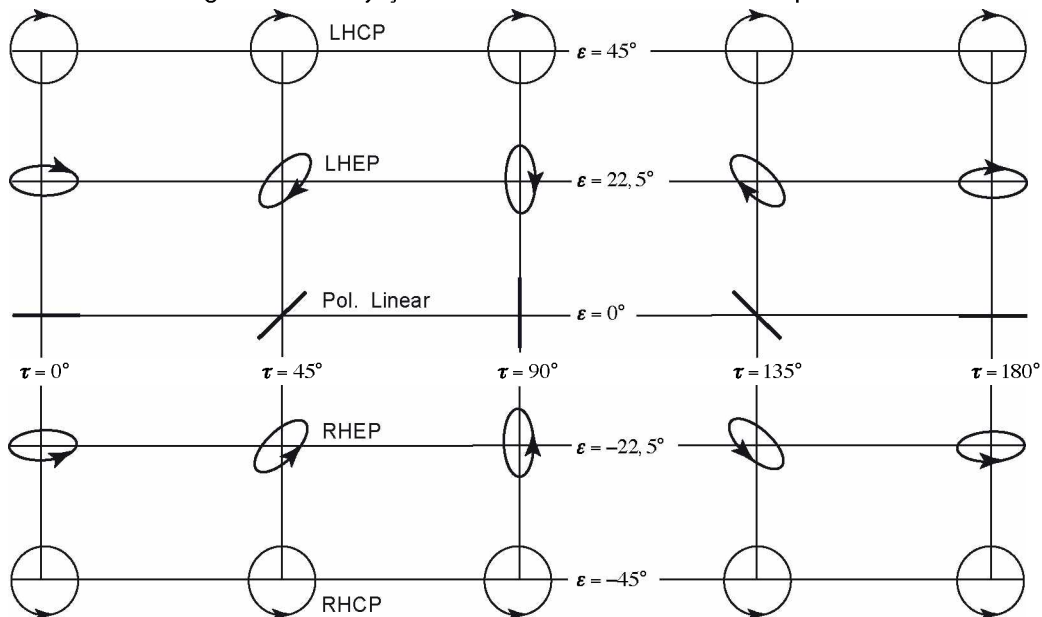
Alguns tipos de polarização são mostrados no primeiro octante da esfera de Poincaré na Figura 14. Algumas projeções numa superfície plana $(-45^\circ \leq \varepsilon \leq +45^\circ, 0^\circ \leq \tau \leq 180^\circ)$ são mostradas na Figura 15.

Figura 14 – Alguns estados de polarização no primeiro octante da esfera.



Fonte: *Advanced Engineering Electromagnetics* [15].

Figura 15 – Projeção da esfera de Poincaré em um plano.



Fonte: *Advanced Engineering Electromagnetics* [15].

Da Figura 14, é possível perceber que a polarização linear sempre será encontrada no equador, a polarização circular de mão direita no polo sul e a polarização circular de mão esquerda no polo norte. O restante da superfície da esfera é utilizada para representar as polarizações elípticas de mão esquerda no hemisfério norte e as de mão direita no hemisfério sul.

2.7.5 Aplicação da esfera de Poincaré

Seja uma onda transmitida por uma antena transmissora e uma antena receptora distante. Se a polarização da onda é P_w e a polarização da antena receptora é P_a , então a resposta de tensão da antena receptora devido à onda incidente é mostrada na Equação (2.80) [22,23].

$$V = C \cos\left(\frac{P_w P_a}{2}\right) \quad (2.80)$$

em que C é uma constante que depende da geometria da antena e da intensidade de campo da onda e $P_w P_a$ é o ângulo subtendido por um arco esférico que vai do ponto P_w ao ponto P_a na esfera.

Para determinar a polarização da antena receptora P_a , é importante lembrar que, na norma do IEEE [16], a polarização é determinada quando a onda é observada por trás. Portanto, a polarização da antena receptora é determinada pelo seu campo radiado caso estivesse em modo de transmissão.

Se $P_w P_a = 0^\circ$, a polarização da onda e da antena é a mesma e a antena está casada com a onda, assim a resposta é maximizada. Porém, se $P_w P_a = 180^\circ$, a resposta é zero. Em um sistema de recepção, a polarização da antena e da onda incidente devem ser casadas para máxima resposta. Caso contrário, haverá perda de sinal, conhecida como perda por polarização. Note que, uma vez que o sentido de propagação é invertido dos pontos de vista do transmissor e receptor, se uma antena de polarização de mão direita foi utilizada na transmissão, uma antena de polarização de mão esquerda deve ser utilizada na recepção para maximização.

Isso ocorre, por exemplo, se a onda é linearmente polarizada na vertical e a antena é linearmente polarizada na horizontal. Ou, ainda, se a onda possui polarização LHCP e a antena receptora também é LHCP. Em sistemas com

polarização linear, é possível definir a perda por polarização como $\cos^2 \phi$, em que ϕ é o ângulo entre as direções da polarização da onda e da antena receptora.

As polarizações circular e elípticas são importantes em sistemas de comunicação por alguns motivos. Em sistemas cujas antenas receptoras são linearmente polarizadas (como monopolos ou dipolos) e a onda incidente possui polarização elíptica ou circular, o sinal será recebido independentemente da posição da antena receptora, porém apenas parcialmente. No caso de onda com polarização circular e antena receptora linear, será recebida apenas metade da potência disponível [2].

Outra situação possível é utilizar antenas com polarização elíptica ou circular na recepção. Isso é importante para aumentar sua rejeição a ondas de diferentes polarizações e ondas refletidas. Por exemplo, num sistema com uma onda RHCP e uma antena receptora casada LHCP, se parte da onda RHCP for refletida em alguma superfície, ela se torna LHCP. Assim, se a parcela refletida incidir na antena, será rejeitada naturalmente. Esse é um dos artifícios utilizados em sistemas GPS, por exemplo.

2.7.6 Outros estados de polarização e os parâmetros de Stokes

As seções anteriores lidaram apenas com ondas completamente polarizadas, caso em que E_x , E_y e θ são constantes (ou, pelo menos, variam lentamente com o tempo). A radiação de uma única frequência (monocromática) é desse tipo. Entretanto, a radiação de muitas fontes celestes se estende sobre uma ampla faixa de frequências com largura de banda Δf e consiste da superposição de um grande número de ondas estatisticamente independentes e de diferentes polarizações.

Nesse caso, a onda resultante é dita incoerente ou não polarizada. Para esse tipo de onda, E_x , E_y e θ variam com o tempo, porém de maneira mais lenta do que a frequência média e sua frequência de variação é da ordem da largura de banda Δf .

A situação mais geral da polarização de uma onda ocorre quando a onda é parcialmente polarizada e, para lidar com esses casos, é conveniente utilizar os parâmetros de Stokes, introduzidos em 1852 por Sir George Stokes. Mais detalhes sobre esse assunto podem ser encontrados nas referências [22,24].

2.8 Reflexão de Ondas Planas

Nas seções precedentes, foram discutidas ondas TEM em meios infinitos. Porém, em situações reais, os campos encontram fronteiras, espalhadores e outros objetos e essas descontinuidades devem ser consideradas. Nesta seção, são discutidas soluções de ondas TEM em dois meios semi-infinitos separados por uma fronteira plana infinita e os coeficientes de reflexão e transmissão serão utilizados para caracterizar o comportamento dos campos na fronteira.

Quando uma onda eletromagnética que está propagando em um meio encontra um outro meio com propriedades (ϵ, μ, σ) diferentes, em geral, ela é parcialmente transmitida e parcialmente refletida. Na maioria das situações práticas, as ondas podem encontrar interfaces com dielétricos considerados perfeitos, dielétricos imperfeitos e condutores perfeitos e sua incidência pode ser normal à fronteira ou oblíqua.

Assim como foi feito na Seção 2.5, por praticidade, é apresentado um resumo dos coeficientes de reflexão e transmissão para os casos estudados e detalhes sobre os desenvolvimentos matemáticos poderão ser encontrados nas referências [6,11,14,15,22].

2.8.1 Reflexão por um dielétrico perfeito – incidência normal

Quando uma onda TEM incide perpendicularmente à uma superfície plana infinita que separa um meio 1 $(\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1)$ de um meio 2 $(\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2)$, os coeficientes de reflexão e de transmissão na fronteira são dados pelas Equações (2.81) e (2.82).

$$\Gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = \frac{\sqrt{\mu_2/\epsilon_2} - \sqrt{\mu_1/\epsilon_1}}{\sqrt{\mu_2/\epsilon_2} + \sqrt{\mu_1/\epsilon_1}} \quad (2.81)$$

$$T = 1 + \Gamma = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1} = \frac{2\sqrt{\mu_2/\epsilon_2}}{\sqrt{\mu_2/\epsilon_2} + \sqrt{\mu_1/\epsilon_1}} \quad (2.82)$$

em que Z_1 e Z_2 são as impedâncias características dos meios 1 e 2, respectivamente.

2.8.2 Reflexão por um dielétrico perfeito – incidência oblíqua

Quando a incidência da onda é oblíqua, é necessário trabalhar com o conceito de plano de incidência. Este é um plano formado por um vetor unitário normal à superfície de reflexão e um vetor na direção de incidência.

Para analisar a incidência oblíqua das ondas TEM, é conveniente decompor o campo elétrico em suas componentes perpendicular e paralela ao plano de incidência e estudar cada uma separadamente. Por fim, o campo elétrico final será a soma vetorial das duas polarizações.

Quando o campo elétrico é perpendicular ao plano de incidência, tem-se a polarização perpendicular, horizontal ou polarização E. Quando o campo elétrico é paralelo ao plano de incidência, a polarização é chamada de paralela, vertical ou polarização H.

As Equações (2.83) e (2.84) trazem os coeficientes de reflexão e transmissão na fronteira para a polarização perpendicular e as Equações (2.85) e (2.86) trazem os coeficientes de reflexão e transmissão para a polarização paralela.

$$\Gamma_{\perp} = \frac{Z_2 \cos \theta_i - Z_1 \cos \theta_t}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \cos \theta_t} = \frac{\sqrt{\mu_2/\epsilon_2} \cos \theta_i - \sqrt{\mu_1/\epsilon_1} \sqrt{1 - \frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2} \sin^2 \theta_i}}{\sqrt{\mu_2/\epsilon_2} \cos \theta_i + \sqrt{\mu_1/\epsilon_1} \sqrt{1 - \frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2} \sin^2 \theta_i}} \quad (2.83)$$

$$T_{\perp} = \frac{2Z_2 \cos \theta_i}{Z_2 \cos \theta_i + Z_1 \cos \theta_t} = \frac{2\sqrt{\mu_2/\epsilon_2} \cos \theta_i}{\sqrt{\mu_2/\epsilon_2} \cos \theta_i + \sqrt{\mu_1/\epsilon_1} \sqrt{1 - \frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2} \sin^2 \theta_i}} \quad (2.84)$$

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{-Z_1 \cos \theta_i + Z_2 \cos \theta_t}{Z_1 \cos \theta_i + Z_2 \cos \theta_t} = \frac{-\sqrt{\mu_1/\epsilon_1} \cos \theta_i + \sqrt{\mu_2/\epsilon_2} \sqrt{1 - \frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2} \sin^2 \theta_i}}{\sqrt{\mu_1/\epsilon_1} \cos \theta_i + \sqrt{\mu_2/\epsilon_2} \sqrt{1 - \frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2} \sin^2 \theta_i}} \quad (2.85)$$

$$T_{\parallel} = \frac{2Z_2 \cos \theta_i}{Z_1 \cos \theta_i + Z_2 \cos \theta_t} = \frac{2\sqrt{\mu_2/\epsilon_2} \cos \theta_i}{\sqrt{\mu_1/\epsilon_1} \cos \theta_i + \sqrt{\mu_2/\epsilon_2} \sqrt{1 - \frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2} \sin^2 \theta_i}} \quad (2.86)$$

2.8.3 Reflexão em meios com perdas

No caso de meios com perdas, os coeficientes de reflexão e transmissão são definidos de maneira semelhante ao caso dos meios sem perdas. Entretanto, as impedâncias intrínsecas dos meios devem considerar as condutividades.

Em geral, para incidência oblíqua, há a geração de ondas não uniformes. Esse tipo de onda é examinado em [25,26], mas, devido à alta complexidade das formulações, não será apresentado aqui. Uma boa discussão sobre o tema pode ser encontrada nos Capítulos 7 e 8 de [27].

2.9 Energia, Fluxo de Potência e Vetor de Poynting

Da eletrostática, sabe-se que os campos elétrico e magnético armazenam energia no meio em que estão inseridos. Mas, quando lida-se com um campo eletromagnético que propaga, é possível notar que a energia, ora armazenada nos campos eletrostáticos, pode, agora, ser transportada pelo espaço por meio das ondas eletromagnéticas. Assim, o objetivo dessa seção é apresentar métodos que permitem avaliar esse transporte ou fluxo de energia no campo eletromagnético.

Na teoria de circuitos, fluxo de potência está relacionado ao produto das quantidades macroscópicas tensão e corrente. Para o campo eletromagnético, o fluxo de potência em um elemento diferencial de área dS é dado por $\mathbf{e} \times \mathbf{h} \cdot d\mathbf{S}$. Nessa expressão, \mathbf{e} é análogo à tensão e tem dimensão de V/m, enquanto \mathbf{h} é análogo à corrente e tem dimensão de A/m.

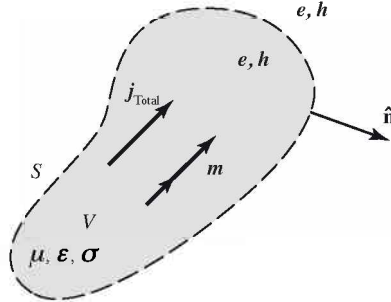
À medida que as ondas eletromagnéticas propagam da sua fonte para pontos de recepção distantes, ocorre uma transferência de energia da fonte para os receptores. Existe uma relação simples e direta entre a taxa dessa transferência de energia e as amplitudes das intensidades do campo elétrico e magnético da onda eletromagnética. Essa relação pode ser obtida a partir das equações de Maxwell para um campo variável no tempo genérico como segue.

2.9.1 O vetor de Poynting instantâneo

Seja um volume V delimitado por uma superfície fechada S e seja o material dentro de S isotrópico, homogêneo, linear e caracterizado pelos parâmetros μ , ϵ e σ . Dentro dessa região, existem as fontes elétrica e magnética representadas,

respectivamente, pelas densidades de corrente $\mathbf{j}_{\text{Fonte}}$ e \mathbf{m} . Os campos gerados por $\mathbf{j}_{\text{Fonte}}$ e \mathbf{m} que existem em V são representados por \mathbf{e} e \mathbf{h} . A Figura 16 ilustra essa situação.

Figura 16 – Volume V delimitado por S .



Fonte: *Advanced Engineering Electromagnetics* [15].

Seja a identidade vetorial da Equação (2.87).

$$\nabla \cdot \mathbf{e} \times \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \nabla \times \mathbf{e} - \mathbf{e} \cdot \nabla \times \mathbf{h} \quad (2.87)$$

e as equações de Maxwell reescritas nas Equações (2.88) e (2.89).

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} - \mathbf{m} \quad (2.88)$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} + \mathbf{j}_{\text{Total}} \quad (2.89)$$

em que a densidade de corrente $\mathbf{j}_{\text{Total}}$ é composta por uma corrente imposta por uma fonte e uma corrente de condução $\mathbf{j}_C = \sigma \mathbf{e}$ que aparece no meio, então $\mathbf{j}_{\text{Total}} = \mathbf{j}_{\text{Fonte}} + \mathbf{j}_C = \mathbf{j}_{\text{Fonte}} + \sigma \mathbf{e}$.

Utilizando as relações constitutivas $\mathbf{d} = \epsilon_0 \mathbf{e} + \mathbf{p}_e$ e $\mathbf{b} = \mu_0 \mathbf{h} + \mathbf{p}_m$, pode-se reescrever as Equações (2.88) e (2.89) e elas se tornam as Equações (2.90) e (2.91).

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} - \frac{\partial \mathbf{p}_m}{\partial t} - \mathbf{m} \quad (2.90)$$

$$\nabla \times \mathbf{h} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{p}_e}{\partial t} + \mathbf{j}_{\text{Total}} \quad (2.91)$$

Substituindo as Equações (2.90) e (2.91) na Equação (2.87), chega-se à Equação (2.92).

$$\nabla \cdot \mathbf{e} \times \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \left(-\mu_0 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} - \frac{\mathbf{p}_m}{\partial t} - \mathbf{m} \right) - \mathbf{e} \cdot \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{p}_e}{\partial t} + \mathbf{j}_{\text{Total}} \right) \quad (2.92)$$

Lembrando que $\mathbf{j}_{\text{Total}} = \mathbf{j}_{\text{Fonte}} + \sigma \mathbf{e}$, a Equação (2.92) passa a ser a Equação (2.94).

$$\nabla \cdot \mathbf{e} \times \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \left(-\mu_0 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} - \frac{\mathbf{p}_m}{\partial t} - \mathbf{m} \right) - \mathbf{e} \cdot \left(\varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{p}_e}{\partial t} + \mathbf{j}_{\text{Fonte}} + \sigma \mathbf{e} \right) \quad (2.93)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{e} \times \mathbf{h} = -\mu_0 \mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} - \mathbf{h} \cdot \frac{\mathbf{p}_m}{\partial t} - \mathbf{h} \cdot \mathbf{m} - \varepsilon_0 \mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} - \mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_e}{\partial t} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{j}_{\text{Fonte}} - \sigma \mathbf{e} \cdot \mathbf{e} \quad (2.94)$$

Agora, deve-se utilizar a regra da cadeia na Equação (2.94) e rearranjar os termos para chegar à Equação (2.95).

$$-(\mathbf{e} \cdot \mathbf{j}_{\text{Fonte}} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{m}) = \nabla \cdot \mathbf{e} \times \mathbf{h} + \left(\mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_m}{\partial t} + \mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_e}{\partial t} \right) + \sigma |\mathbf{e}|^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu_0}{2} |\mathbf{h}|^2 + \frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{e}|^2 \right) \quad (2.95)$$

Relembrando alguns conceitos de eletromagnetismo, sabe-se que os termos $\frac{\mu_0}{2} |\mathbf{h}|^2$ e $\frac{\varepsilon_0}{2} |\mathbf{e}|^2$ da Equação (2.95) representam as densidades instantâneas de energia armazenada nos campos magnético e elétrico no vácuo, respectivamente. Portanto, a sua derivada temporal representa a potência instantânea armazenada no campo eletromagnético no vácuo por unidade de volume ou a taxa instantânea de fluxo de energia armazenada pelo campo eletromagnético no vácuo por unidade de volume.

O termo $\left(\mathbf{h} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_m}{\partial t} + \mathbf{e} \cdot \frac{\partial \mathbf{p}_e}{\partial t} \right)$ do lado direito da Equação (2.95) representa a potência instantânea por unidade de volume empregada para efetivar as polarizações magnética e elétrica no material. Ou seja, é uma potência líquida relacionada ao fluxo de energia armazenada no material (além do vácuo) e a potência dissipada no processo de polarização devido às forças de amortecimento.

Já terceiro termo do lado direito da Equação (2.95), $\sigma |e|^2$, representa a potência por unidade de volume dissipada por efeito joule. Isso é causado pelo fluxo da corrente j_c (imposta por e) no material que tem condutividade σ . Já o termo $-(e \cdot j_{\text{Fonte}} + h \cdot m)$ que aparece do lado esquerdo da Equação (2.95) representa a potência por unidade de volume entregue pelas fontes j_{Fonte} e m [9].

Agora, para uma primeira interpretação do termo $\nabla \cdot e \times h$, pode-se fazer uma análise dimensional. Ele tem grandeza de potência/volume, assim como os outros termos da Equação (2.95) e é a divergência de uma grandeza com unidade W/m^2 . Como é uma divergência, imagina-se que representa uma saída de potência.

Para uma análise melhor, pode-se notar a lei da conservação de energia: *a energia que entra em um sistema deve igual à soma da energia líquida armazenada no seu interior com a energia dissipada nele e a que sai do sistema*. Como, juntos, os termos $\left(h \cdot \frac{\partial p_m}{\partial t} + e \cdot \frac{\partial p_e}{\partial t} \right) + \sigma |e|^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu_0}{2} |h|^2 + \frac{\epsilon_0}{2} |e|^2 \right)$ representam toda a potência instantânea por unidade de volume armazenada e dissipada. Então, obviamente, o termo $\nabla \cdot e \times h$ representa a potência instantânea por unidade de volume que deixa do sistema.

Para se ter uma visão macroscópica da situação, integra-se a Equação (2.95) sobre o volume V e transforma-se a integral da divergência em uma integral sobre a superfície fechada S que delimita V utilizando o teorema da divergência. Isso é mostrado na Equação (2.96).

$$\begin{aligned} -\int_V (e \cdot j_{\text{Fonte}} + h \cdot m) dV = \\ = \oint_S e \times h \cdot dS + \int_V \left(h \cdot \frac{\partial p_m}{\partial t} + e \cdot \frac{\partial p_e}{\partial t} \right) dV + \int_V \sigma |e|^2 dV + \int_V \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mu_0}{2} |h|^2 + \frac{\epsilon_0}{2} |e|^2 \right) dV \end{aligned} \quad (2.96)$$

Portanto, tem-se que a potência instantânea total entregue pelas fontes ao volume V é igual à soma das potências dissipadas por efeito joule e na polarização, da taxa de aumento de energia armazenada no sistema e da potência que sai do volume V através da sua superfície fechada S .

Assim, o vetor da Equação (2.97) é chamado de vetor de Poynting instantâneo e representa a densidade de potencia eletromagnética instantânea em W/m^2 .

$$\mathbf{p} = \mathbf{e} \times \mathbf{h} \quad (2.97)$$

Sua magnitude expressa a potência, por unidade de área, que deixa uma superfície na sua direção normal. Já o fluxo instantâneo total de energia que atravessa uma dada superfície é obtido integrando a componente de $\mathbf{p} = \mathbf{e} \times \mathbf{h}$ normal à superfície em questão, ou seja, $\int_S \mathbf{e} \times \mathbf{h} \cdot d\mathbf{S}$. O vetor de Poynting também identifica a direção do fluxo de energia, que é uma direção perpendicular a \mathbf{e} e a \mathbf{h} e dá a direção de propagação de uma onda TEM.

2.9.2 O vetor Poynting complexo

No caso de campos harmônicos, é mais interessante trabalhar com potência média em vez de potência instantânea. A densidade de potência média poderia ser obtida integrando o vetor de Poynting instantâneo $\mathbf{p} = \mathbf{e} \times \mathbf{h}$ sobre um período e dividindo o resultado pelo período. No entanto, é mais conveniente trabalhar com notação fasorial nesse caso. Portanto, agora é definido o vetor de Poynting complexo para se trabalhar com campos harmônicos.

Seja o mesmo volume V delimitado por uma superfície fechada S e seja o material dentro de S isotrópico, homogêneo, linear e caracterizado pelos parâmetros μ , ϵ e σ .

Primeiro, deve-se multiplicar a primeira equação de Maxwell na forma fasorial, dada pela Equação (2.15a), pelo termo \mathbf{H}^* . Assim, tem-se a Equação (2.98).

$$\mathbf{H}^* \cdot \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{B} - \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{M} \quad (2.98)$$

em que o asterisco representa o conjugado complexo.

Trabalhando com representação fasorial, pode-se utilizar a relação $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$, então chega-se à Equação (2.99).

$$\mathbf{H}^* \cdot \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H} - \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{M} \quad (2.99)$$

Agora, é necessário tomar o conjugado complexo da segunda equação de Maxwell, dada pela Equação (2.15b). Isso é feito na Equação (2.100).

$$\nabla \times \mathbf{H}^* = -j\omega \mathbf{D}^* + \mathbf{J}_{\text{Total}}^* \quad (2.100)$$

em que a densidade de corrente total é composta por uma densidade de corrente imposta por alguma fonte e uma densidade de corrente de condução que aparece no meio $\mathbf{J}_{\text{Total}} = \mathbf{J}_{\text{Fonte}} + \mathbf{J}_C = \mathbf{J}_{\text{Fonte}} + \sigma \mathbf{E}$.

Agora, multiplica-se a Equação (2.100) por \mathbf{E} e utiliza-se a relação $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$. Assim, tem-se a Equação (2.101).

$$\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}^* = -j\omega \epsilon^* \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \mathbf{E} \cdot (\mathbf{J}_{\text{Fonte}}^* + \sigma \mathbf{E}^*) \quad (2.101)$$

Partindo, agora, da identidade vetorial da Equação (2.102), desenvolve-se as Equações (2.103) e (2.104), utilizando as Equações (2.99) e (2.101).

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = \mathbf{H}^* \cdot \nabla \times \mathbf{E} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{H}^* \quad (2.102)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = -j\omega \mu \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H} - \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{M} + j\omega \epsilon^* \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* - \mathbf{E} \cdot (\mathbf{J}_{\text{Fonte}}^* + \sigma \mathbf{E}^*) \quad (2.103)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = -j\omega \mu \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H} + j\omega \epsilon^* \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_{\text{Fonte}}^* + \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{M}) - \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \quad (2.104)$$

É importante considerar que as grandezas μ , ϵ são complexas. Assim, a Equação (2.104) se torna as Equações (2.105) e (2.106).

$$\nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = -j\omega(\mu' - j\mu'')\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H} + j\omega(\epsilon' + j\epsilon'')\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_{\text{Fonte}}^* + \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{M}) - \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \quad (2.105)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* = & -\omega(\epsilon''\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \mu''\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H}) - j\omega(\mu'\mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H} - \epsilon'\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) - \dots \\ & \dots - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_{\text{Fonte}}^* + \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{M}) - \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \end{aligned} \quad (2.106)$$

Rearranjando os termos da Equação (2.106) e multiplicando-a por $\frac{1}{2}$, tem-se a Equação (2.107).

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_{\text{Fonte}}^* + \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{M}) = \\ = \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \frac{\omega}{2} (\varepsilon'' \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \mu'' \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H}) + \frac{1}{2} \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \frac{1}{2} j\omega (\mu' \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H} - \varepsilon' \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) \end{aligned} \quad (2.107)$$

É necessário ter uma visão macroscópica do problema, então integra-se a Equação (2.107) no volume V e, também, utiliza-se o teorema da divergência na integral da divergência de $\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$. Isso resulta na Equação (2.108).

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_{\text{Fonte}}^* + \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{M}) dV = \\ = \frac{1}{2} \oint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot d\mathbf{S} + \frac{\omega}{2} \int_V (\varepsilon'' \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \mu'' \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H}) dV + \dots \\ \dots + \frac{1}{2} \int_V \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dV + \frac{1}{2} j\omega \int_V (\mu' \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H} - \varepsilon' \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^*) dV \end{aligned} \quad (2.108)$$

Para se ter uma ideia melhor de alguns termos que aparecem na Equação (2.108), é preciso lembrar do conceito de energia armazenada em um campo elétrico e magnético.

A Equação (2.109) dá a energia instantânea armazenada por um campo elétrico em um volume V .

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{e} \cdot \mathbf{d} dV \quad (2.109)$$

Os campos \mathbf{e} e \mathbf{d} da Equação (2.109) podem ser escritos lembrando-se do conceito de representação analítica, como mostra a Equação (2.110a), que é desenvolvida até a Equação (2.110f).

$$U_e = \frac{1}{2} \int_V \text{Re} \{ \mathbf{E} e^{j\omega t} \} \cdot \text{Re} \{ \mathbf{D} e^{j\omega t} \} dV \quad (2.110a)$$

$$U_e = \frac{1}{8} \int_V [\mathbf{E} e^{j\omega t} + \mathbf{E}^* e^{-j\omega t}] \cdot [\mathbf{D} e^{j\omega t} + \mathbf{D}^* e^{-j\omega t}] dV \quad (2.110b)$$

$$U_e = \frac{1}{8} \int_V [\mathbf{E} e^{j\omega t} \cdot \mathbf{D} e^{j\omega t} + \mathbf{E} e^{j\omega t} \cdot \mathbf{D}^* e^{-j\omega t} + \mathbf{E}^* e^{-j\omega t} \cdot \mathbf{D} e^{j\omega t} + \mathbf{E}^* e^{-j\omega t} \cdot \mathbf{D}^* e^{-j\omega t}] dV \quad (2.110c)$$

$$U_e = \frac{1}{8} \int_V [\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* + \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{D} + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} e^{2j\omega t} + \mathbf{E}^* \cdot \mathbf{D}^* e^{-2j\omega t}] dV \quad (2.110d)$$

$$U_e = \frac{1}{8} \int_V [\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^* + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*)^* + \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} e^{2j\omega t} + (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D})^* e^{-2j\omega t}] dV \quad (2.110e)$$

$$U_e = \frac{1}{4} \int_V [\operatorname{Re}\{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*\} + \operatorname{Re}\{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} e^{2j\omega t}\}] dV \quad (2.110f)$$

A expressão da Equação (2.110f) é a energia instantânea armazenada no campo elétrico no volume V .

Para encontrar a energia média, deve-se integrar essa expressão em um período e dividir o resultado pelo período, como mostra a Equação (2.111).

$$\bar{U}_e = \frac{1}{4T_0} \int_V \int_{T_0} [\operatorname{Re}\{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*\} + \operatorname{Re}\{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} e^{2j\omega t}\}] dt dV \quad (2.111)$$

Por inspeção, o primeiro termo não depende do tempo e o segundo termo é uma função que, quando integrada em um período, resulta de zero. Assim, a energia média armazenada no campo elétrico é mostrada na Equação (2.112).

$$\bar{U}_e = \frac{1}{4} \int_V \operatorname{Re}\{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*\} dV \quad (2.112)$$

Por outro lado, a Equação (2.110f) pode ser vista como composta por uma parcela de energia média (não dependente do tempo) e uma parcela variável.

Portanto, já poderia se dizer que $\bar{U}_e = \frac{1}{4} \int_V \operatorname{Re}\{\mathbf{E} \cdot \mathbf{D}^*\} dV$ apenas por inspeção na Equação (2.110f).

Também é importante considerar que a permissividade é complexa. Isso faz com que a Equação (2.112) se torne a Equação (2.114).

$$\bar{U}_e = \frac{1}{4} \int_V \operatorname{Re} \{ \epsilon^* \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* \} dV \quad (2.113)$$

$$\bar{U}_e = \frac{\epsilon'}{4} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dV \quad (2.114)$$

De maneira similar, energia média armazenada no campo magnético é dada pela Equação (2.115).

$$\bar{U}_m = \frac{\mu'}{4} \int_V \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}^* dV \quad (2.115)$$

Finalmente, a Equação (2.108) pode ser reescrita como a Equação (2.116), utilizando as Equações (2.114) e (2.115).

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_{\text{Fonte}}^* + \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{M}) dV = \\ = \frac{1}{2} \oint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot d\mathbf{S} + \frac{\omega}{2} \int_V (\epsilon'' \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \mu'' \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H}) dV + \frac{1}{2} \int_V \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dV + 2j\omega(\bar{U}_m - \bar{U}_e) \end{aligned} \quad (2.116)$$

Nessa expressão da Equação (2.116), o termo $2j\omega(\bar{U}_m - \bar{U}_e)$ é imaginário e representa a potência reativa associada à taxa de energia reativa líquida armazenada pelo campo eletromagnético no volume V , tanto no espaço livre como no material. O termo $\frac{1}{2} \int_V \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* dV$ é real e deve ser visto como a potência média dissipada no volume V devido ao aquecimento joulico resultante do fluxo da corrente \mathbf{j}_c no meio de condutividade σ . Já o termo $\frac{\omega}{2} \int_V (\epsilon'' \mathbf{E} \cdot \mathbf{E}^* + \mu'' \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{H}) dV$ também é real e representa a potência média dissipada no volume V para vencer as forças de amortecimento dos mecanismos de polarização elétrica e magnética. O termo do lado esquerdo da Equação (2.116), $-\frac{1}{2} \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_{\text{Fonte}}^* + \mathbf{H}^* \cdot \mathbf{M}) dV$, representa a potência complexa que é injetada no volume pelas fontes $\mathbf{j}_{\text{Fonte}}$ e \mathbf{m} e sua parte real indica a potência média entregue pelas fontes ao volume.

Finalmente, para interpretar o termo $\frac{1}{2} \oint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot d\mathbf{S}$, deve-se notar a lei da conservação da energia: *a energia que entra em um sistema deve igual à soma da energia líquida armazenada no seu interior com a energia dissipada nele e a que sai do sistema*. Portanto, $\frac{1}{2} \oint_S \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \cdot d\mathbf{S}$ deve representar a potência complexa que deixa o volume V através da sua superfície fechada S . Esse é o teorema de Poynting na versão complexa e nada mais é do que uma forma de balanço de energia [9].

Parte da potência complexa injetada pelas fontes é empregada no meio para realizar os mecanismos de polarização, parte é dissipada por efeito joule, uma parcela reativa é armazenada no campo eletromagnético e outra parcela complexa deixa o volume V no sentido de propagação da onda eletromagnética.

O vetor $\mathbf{P} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$ é chamado de vetor de Poynting complexo e sua parte real representa a potência média que flui para fora do volume V através de uma unidade de área dS . Então, de acordo com a Equação (2.117), a potência média total que atravessa uma superfície é dada pela integral do vetor de Poynting complexo sobre a área.

$$P_{\text{méd}} = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \int_S \mathbf{e} \times \mathbf{h} \cdot d\mathbf{S} dt = \frac{1}{2} \text{Re} \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot d\mathbf{S} \quad (2.117)$$

Para enxergar que a parte real do vetor de Poynting complexo representa a densidade de potência média, deve-se considerar o vetor de Poynting instantâneo da Equação (2.118).

$$\mathbf{p} = \mathbf{e} \times \mathbf{h} \quad (2.118)$$

Lembrando da representação analítica, escreve-se a Equação (2.118) como a Equação (2.119a), que é desenvolvida até a Equação (2.119h).

$$\mathbf{p} = \text{Re} \{ \mathbf{E} e^{j\omega t} \} \times \text{Re} \{ \mathbf{H} e^{j\omega t} \} \quad (2.119a)$$

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2} (\mathbf{E} e^{j\omega t} + \mathbf{E}^* e^{-j\omega t}) \times \frac{1}{2} (\mathbf{H} e^{j\omega t} + \mathbf{H}^* e^{-j\omega t}) \quad (2.119b)$$

$$\mathbf{p} = \frac{1}{4} (\mathbf{E} e^{j\omega t} + \mathbf{E}^* e^{-j\omega t}) \times (\mathbf{H} e^{j\omega t} + \mathbf{H}^* e^{-j\omega t}) \quad (2.119c)$$

$$\mathbf{p} = \frac{1}{4} (\mathbf{E} e^{j\omega t} \times \mathbf{H}^* e^{-j\omega t} + \mathbf{E}^* e^{-j\omega t} \times \mathbf{H} e^{j\omega t} + \mathbf{E} e^{j\omega t} \times \mathbf{H} e^{j\omega t} + \mathbf{E}^* e^{-j\omega t} \times \mathbf{H}^* e^{-j\omega t}) \quad (2.119d)$$

$$\mathbf{p} = \frac{1}{4} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H} + \mathbf{E} \times \mathbf{H} e^{2j\omega t} + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}^* e^{-2j\omega t}) \quad (2.119e)$$

$$\mathbf{p} = \frac{1}{4} [\mathbf{E} \times \mathbf{H}^* + (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*)^* + \mathbf{E} \times \mathbf{H} e^{2j\omega t} + (\mathbf{E} \times \mathbf{H} e^{2j\omega t})^*] \quad (2.119f)$$

$$\mathbf{p} = \frac{1}{4} [2 \operatorname{Re} \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \} + 2 \operatorname{Re} \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H} e^{2j\omega t} \}] \quad (2.119g)$$

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2} [\operatorname{Re} \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \} + \operatorname{Re} \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H} e^{2j\omega t} \}] \quad (2.119h)$$

Analisando a Equação (2.119h), é possível notar que o vetor de Poynting instantâneo é formado por uma parcela fixa e uma parcela variável no tempo, ou seja, um valor médio e um valor variável.

Assim, a média do vetor de Poynting instantâneo é dada pela Equação (2.120).

$$\mathbf{p}_{\text{méd}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{ \mathbf{P} \} \quad (2.120)$$

Consequentemente, a potência média que atravessa uma superfície S é dada pela Equação (2.121).

$$P_{\text{méd}} = \frac{1}{2} \int_S \operatorname{Re} \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \int_S \operatorname{Re} \{ \mathbf{P} \} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.121)$$

Voltando na Equação (2.119h) para uma análise mais rigorosa, a potência instantânea total que atravessa uma superfície S é dada pela Equação (2.123).

$$P_{\text{Total}} = \frac{1}{2} \int_S [\operatorname{Re} \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \} + \operatorname{Re} \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H} e^{2j\omega t} \}] \cdot d\mathbf{S} \quad (2.122)$$

$$P_{\text{Total}} = \frac{1}{2} \int_S \operatorname{Re} \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}^* \} \cdot d\mathbf{S} + \frac{1}{2} \int_S \operatorname{Re} \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H} e^{2j\omega t} \} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.123)$$

Então, a potência média é obtida integrando-se a Equação (2.123) ao longo de um período e dividindo o resultado pelo período. Isso é feito na Equação (2.124).

$$P_{\text{méd}} = \frac{1}{2T_0} \int_S \int_{T_0} \text{Re}\{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\} \cdot d\mathbf{S} dt + \frac{1}{2T_0} \int_S \int_{T_0} \text{Re}\{\mathbf{E} \times \mathbf{H} e^{2j\omega t}\} \cdot d\mathbf{S} dt \quad (2.124)$$

Obviamente, a segunda integral resulta em zero, pois é a integração de uma onda com oscilação $e^{2j\omega t}$ ao longo um período, em que $T_0 = \frac{2\pi}{\omega}$. Então, resta apenas a primeira integral, cujo integrando não depende do tempo. Logo, tem-se a Equação (2.126), que é idêntica à Equação (2.121), que foi obtida por inspeção.

$$P_{\text{méd}} = \frac{1}{2T_0} T_0 \int_S \text{Re}\{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.125)$$

$$P_{\text{méd}} = \frac{1}{2} \int_S \text{Re}\{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.126)$$

Por fim, também é importante notar que a parte imaginária do vetor de Poynting complexo remete a uma potência reativa da onda eletromagnética, como mostra a Equação (2.127).

$$P_{\text{Reativa}} = \frac{1}{2} \int_S \text{Im}\{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.127)$$

A presença de uma componente reativa (ou fora de fase) indica que a potência instantânea muda de sinal (reverte o sentido do fluxo) em parte de um ciclo de variação harmônica [14]. É importante notar, também, que, em regiões de campo distante de antenas, a densidade de potência é predominantemente real e referida como densidade de radiação [17].

2.10 Considerações Finais

O propósito deste capítulo foi uma recordação da estrutura física e matemática que dá base para os demais capítulos deste trabalho. Foram discutidas as formulações matemáticas e físicas necessárias para compreender, posteriormente, a perda de propagação.

Em primeiro lugar, foi comentada a importância dos campos variáveis no tempo e apresentado um breve histórico das formulações de Maxwell, que são a base do eletromagnetismo moderno. Também foi considerada a variação harmônica dos campos vetoriais e as simplificações inerentes a essa particularidade, utilizando o conceito de representação fasorial.

Os fenômenos que ocorrem na interação entre os campos eletromagnéticos e a matéria foram explicados e foram formuladas as conhecidas relações constitutivas da matéria, bem como os parâmetros constitutivos (μ, ϵ, σ) . Esses parâmetros são muito importantes para a caracterização da propagação em meios materiais.

Importantes condições de contorno para a solução única das equações de Maxwell (ou equação da onda) foram apresentadas para dar completude à análise e também foram desenvolvidas equações que dão suporte para o estudo de propagação de ondas eletromagnéticas, particularmente as equações homogêneas de Helmholtz para ondas planas uniformes.

Além disso, foi apresentado e discutido o conceito de polarização de onda e a grande importância da sua análise para otimização de sistemas de transmissão/recepção por meio do casamento de polarização. Posteriormente foi brevemente apresentada a teoria de reflexão de ondas em superfícies, caracterizada pelos coeficientes de reflexão e transmissão para alguns casos específicos.

Por fim, foi apresentado um estudo de fluxo de potência e energia nas ondas eletromagnéticas por meio do vetor de Poynting. Esse conceito é muito importante na derivação e análise das formulações de perda de percurso nos capítulos posteriores. Agora, o próximo capítulo traz uma breve discussão e explanação do fenômeno de radiação, que é a base da transmissão sem fio, e apresenta importantes características relacionadas às antenas utilizadas em sistemas *wireless*.

3 RADIAÇÃO E ANTENAS

3.1 Introdução

Até o momento, pouco foi discutido sobre a formação das ondas eletromagnéticas, apenas foi visto que as densidades de corrente $\mathbf{j}_{\text{Fonte}}$ e \mathbf{m} e de carga ρ e ρ_m são as fontes do campo eletromagnético e que esse campo propaga pelo meio onde está. Ocorre que, raramente, um campo eletromagnético é completamente confinado em um meio e, em geral, parte dele é radiado para fora.

A radiação pode ser considerada, em alguns casos, como um efeito indesejado e um mecanismo de perda de potência, mas, por outro lado, pode ser vista como uma “porta de saída” do campo eletromagnético de um meio para outro. Por exemplo: uma interface (ou transição) entre um guia de onda e o espaço que o circunda.

Portanto, a radiação deve ser bem compreendida para, em um caso, ser minimizada e, em outro, ocorrer da maneira mais eficiente possível [12]. No caso em que a radiação deve ser eficiente, existem estruturas especiais para que esse objetivo seja atingido e são chamadas de antenas. Assim, uma antena é um dispositivo que facilita a emissão de ondas eletromagnéticas de um meio guiado para um meio livre, como o espaço. Além disso, uma antena também pode ser a “porta de entrada” de campos eletromagnéticos no espaço para um meio guiado e, portanto, também funcionam como dispositivos receptores de radiação.

Dessa forma, este capítulo tem dois principais objetivos. Em primeiro lugar, explicar (mais qualitativamente do que matematicamente) um pouco do mecanismo de radiação e, também, discutir, brevemente, alguns tipos de antenas utilizados e os principais parâmetros utilizados na análise da performance de antenas.

3.2 O Mecanismo de Radiação

Antes de entrar nos aspectos práticos de antenas, é preciso introduzir o mecanismo de radiação. Devido à complexidade das formulações matemáticas e por não ser o foco principal deste trabalho, o equacionamento completo dos problemas de radiação foi omitido, mas pode ser examinado na bibliografia. Nesta seção, é feita uma análise mais qualitativa.

O ponto chave do mecanismo de radiação é que qualquer distribuição de corrente ou carga variável no tempo é capaz de radiar energia eletromagnética. De maneira genérica, isso pode ser conseguido com fontes variáveis no tempo e por curvaturas e descontinuidades em condutores [17].

A radiação ocorre porque a distribuição de corrente ou carga variável gera campos elétrico e magnético também variáveis com o tempo no espaço circundante. Logo, como foi visto na Seção 2.6, tais campos podem propagar pelo meio ao redor da fonte e as variações que ocorrem na fonte são “sentidas”, algum tempo depois, no espaço à sua volta, expressas como variações nos campos elétrico e magnético criados. Assim, as cargas ou correntes elétricas são necessárias apenas para excitar os campos, mas não para mantê-los propagando.

3.2.1 Potenciais vetores auxiliares

Para começar o entendimento da radiação, é importante entender os potenciais auxiliares. Em problemas de eletromagnetismo, é muito comum utilizar os potenciais vetores auxiliares como uma ferramenta para obter as soluções de \mathbf{e} e de \mathbf{h} . Embora as intensidades de campo \mathbf{e} e \mathbf{h} sejam as quantidades físicas mensuráveis, os potenciais vetores são ferramentas matemáticas que ajudam a simplificar as soluções. Assim, é comum enxergar os problemas de maneira que as fontes geram os potenciais auxiliares e estes, por sua vez, geram as intensidades de campo.

Os potenciais vetores mais comuns são o potencial vetor magnético \mathbf{A} e o potencial vetor elétrico \mathbf{F} e são muito utilizados na solução de problemas de radiação. Os potenciais hertzianos Π_e e Π_h formam um outro par, em que Π_e é análogo a \mathbf{A} e Π_h é análogo a \mathbf{F} . A relação entre esses pares é feita com uma constante de proporcionalidade que é função da frequência e dos parâmetros constitutivos do meio [15]. Neste trabalho será utilizado o par formado por \mathbf{A} e \mathbf{F} .

Todo problema de eletromagnetismo pode ser resumido em encontrar configurações de campo eletromagnético (modos) que satisfazem as equações de Maxwell ou a equação da onda e, também, as condições de contorno especificadas. Isso pode ser feito de duas maneiras.

A primeira consiste em obter, diretamente, as intensidades de campo elétrico e magnético a partir da integração das fontes (aqui, a matemática representa a física). A segunda opção é encontrar os potenciais auxiliares \mathbf{A} e \mathbf{F} primeiramente, por

meio da integração das fontes e, depois, determinar os campos elétrico e magnético a partir da diferenciação dos potenciais. Essa opção envolve dois passos, porém, geralmente, é mais simples de se fazer e costuma ser mais utilizada.

Na segunda alternativa, os potenciais vetores elétrico e magnético são quantidades auxiliares geradas pelas fontes (densidade de corrente ou carga) e que produzem os campos elétrico e magnético. Assim, uma fonte variável no tempo gera, em todos os pontos ao seu redor, potenciais \mathbf{A} e \mathbf{F} variáveis no tempo que estão diretamente relacionados aos campos elétrico e magnético. Tais potenciais também são chamados de retardados, pois uma variação na sua fonte é sentida, num ponto distante, apenas algum tempo depois. Tempo este que depende da distância e da velocidade de propagação no meio.

Portanto, um resumo do mecanismo de radiação utilizando os potenciais auxiliares como ferramenta é:

- Fonte variável (densidade de corrente ou carga) gera potenciais variáveis com tempo no espaço ao redor;
- Potenciais gerados implicam em campos elétricos e magnéticos variáveis no espaço;
- Campos elétricos e magnéticos variáveis propagam no meio.

3.2.2 Construção das soluções

Basicamente, em um meio homogêneo e sem perdas ($\sigma = 0$), uma densidade de corrente $\mathbf{J}_{\text{Fonte}}$ gera um potencial vetor magnético \mathbf{A} de acordo com a Equação (3.1).

$$\nabla^2 \mathbf{A} + \beta^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}_{\text{fonte}} \quad (3.1)$$

em que β é a constante de fase e ∇^2 representa o operador Laplaciano.

Uma densidade de corrente magnética equivalente \mathbf{M} também gera um potencial vetor elétrico \mathbf{F} dado pela Equação (3.2).

$$\nabla^2 \mathbf{F} + \beta^2 \mathbf{F} = -\epsilon \mathbf{M} \quad (3.2)$$

O potencial vetor \mathbf{A} gera, por sua vez um campo elétrico e um campo magnético tais como nas Equações (3.3) e (3.4) ou (3.5).

$$\mathbf{H}_A = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.3)$$

$$\mathbf{E}_A = -j\omega\mathbf{A} - j\frac{1}{\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (3.4)$$

ou

$$\mathbf{E}_A = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \mathbf{H}_A \quad (3.5)$$

E o potencial vetor \mathbf{F} também gera um campo elétrico e um campo magnético, mostrados nas Equações (3.6), (3.7) ou (3.8).

$$\mathbf{E}_F = -\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \mathbf{F} \quad (3.6)$$

$$\mathbf{H}_F = -j\omega\mathbf{F} - j\frac{1}{\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) \quad (3.7)$$

ou

$$\mathbf{H}_F = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \mathbf{E}_F \quad (3.8)$$

Por fim, os campos totais são a soma vetorial dos campos das Equações (3.3) a (3.8). Assim, obtém-se as Equações (3.9) a (3.12).

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_F = -j\omega\mathbf{A} - j\frac{1}{\omega\mu\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \mathbf{F} \quad (3.9)$$

ou

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_A + \mathbf{E}_F = \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times \mathbf{H}_A - \frac{1}{\epsilon} \nabla \times \mathbf{F} \quad (3.10)$$

e

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_A + \mathbf{H}_F = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} - j\omega \mathbf{F} - j \frac{1}{\omega \mu \epsilon} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) \quad (3.11)$$

ou

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_A + \mathbf{H}_F = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} - \frac{1}{j\omega \epsilon} \nabla \times \mathbf{E}_F \quad (3.12)$$

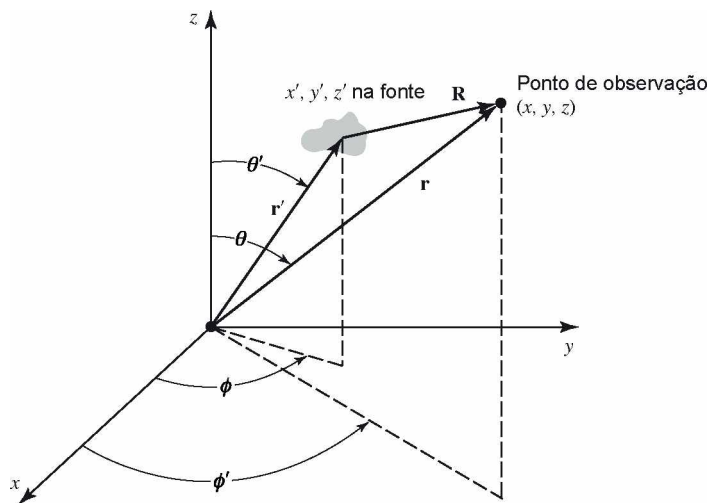
O primeiro passo para a solução dessas equações é encontrar \mathbf{A} e \mathbf{F} . De maneira geral, esses potenciais podem ser encontrados pelas Equações (3.13) e (3.14) [15,17].

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \iiint_V \mathbf{J}_{\text{fonte}}(x', y', z') \frac{e^{-j\beta R}}{R} dv' \quad (3.13)$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\epsilon}{4\pi} \iiint_V \mathbf{M}(x', y', z') \frac{e^{-j\beta R}}{R} dv' \quad (3.14)$$

em que as coordenadas com linha representam a fonte e as coordenadas sem linha são do ponto de observação de \mathbf{A} e \mathbf{F} , de acordo com a Figura 17.

Figura 17 – Sistema de coordenadas para análise dos potenciais auxiliares



Fonte: *Advanced Engineering Electromagnetics* [15]

No caso do campo próximo (a definição de campo próximo é feita na Seção 3.4.2), basta encontrar \mathbf{E}_A e \mathbf{E}_F e \mathbf{H}_A e \mathbf{H}_F a partir das Equações (3.3) a (3.8) juntamente com as Equações (3.13) e (3.14).

Na região de campo distante, as expressões de campo próximo são simplificadas e os campos são dados, em coordenadas esféricas pelas Equações (3.15) e (3.16). É usual utilizar coordenadas esféricas para o campo distante devido à característica de radiação esférica das antenas com dimensões finitas.

$$\mathbf{E}(r, \theta, \phi) = E_r \hat{r} + E_\theta \hat{\theta} + E_\phi \hat{\phi} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{H}(r, \theta, \phi) = H_r \hat{r} + H_\theta \hat{\theta} + H_\phi \hat{\phi} \quad (3.16)$$

em que [15,17]

$$E_r \approx 0 \quad (3.17a)$$

$$E_\theta \approx \frac{-j\beta e^{-j\beta r}}{4\pi r} (L_\phi + Z N_\theta) \quad (3.17b)$$

$$E_\phi \approx \frac{j\beta e^{-j\beta r}}{4\pi r} (L_\theta - Z N_\phi) \quad (3.17c)$$

$$H_r \approx 0 \quad (3.18a)$$

$$H_\theta \approx \frac{j\beta e^{-j\beta r}}{4\pi r} \left(N_\phi - \frac{1}{Z} L_\theta \right) \quad (3.18b)$$

$$H_\phi \approx \frac{-j\beta e^{-j\beta r}}{4\pi r} \left(N_\theta + \frac{1}{Z} L_\phi \right) \quad (3.18c)$$

e os termos L_ϕ , L_θ , N_ϕ e N_θ são calculados pelas expressões das Equações (3.19) e (3.20).

$$\mathbf{N} = \iint_S \mathbf{J}_{s_{\text{fonte}}} e^{j\beta r' \cos \psi} ds' \quad (3.19)$$

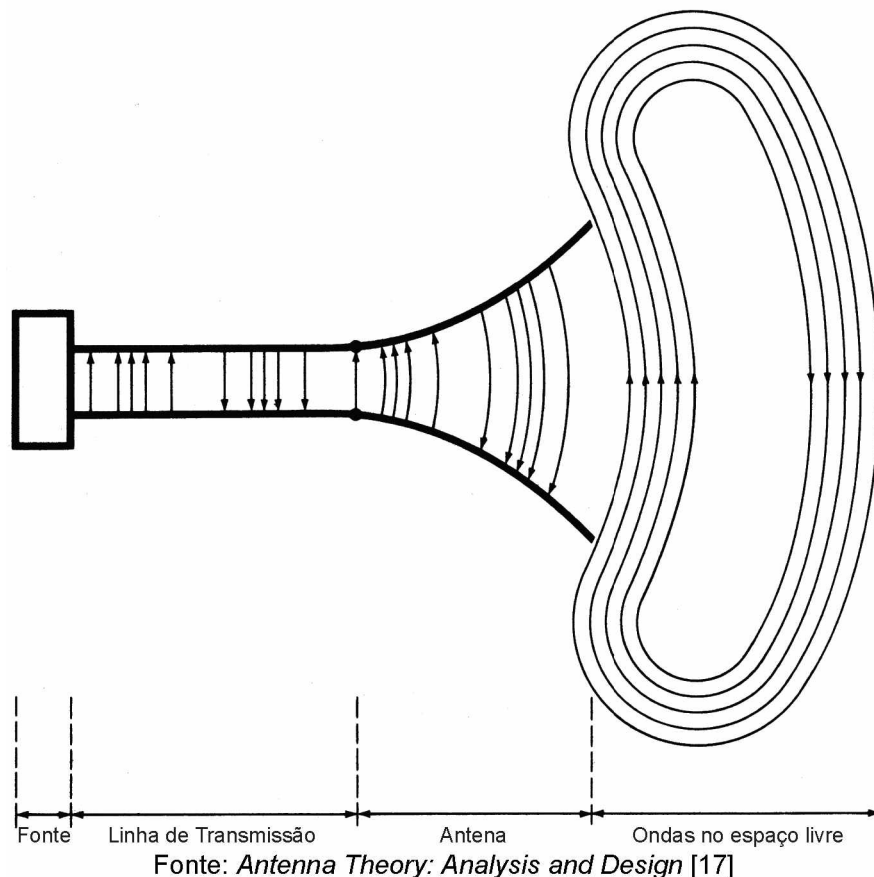
$$\mathbf{L} = \iint_S \mathbf{M}_s e^{j\beta r' \cos \psi} ds' \quad (3.20)$$

e considerando que as densidades de corrente são superficiais na fonte e que ψ é o ângulo entre um vetor posição da fonte e o vetor posição do ponto de observação.

3.3 Antenas

Anteriormente, as antenas foram comparadas a “portas de entrada/saída” dos campos eletromagnéticos para dentro/fora de meios guiados. Em outras palavras, uma antena é uma estrutura de transição entre o espaço livre e um dispositivo guia, como mostra a Figura 18. O guia de onda ou linha de transmissão transporta a energia eletromagnética da fonte até a antena ou da antena até um receptor. Isso define se a antena está sendo utilizada como transmissora ou receptora.

Figura 18 – Antena como dispositivo de transição

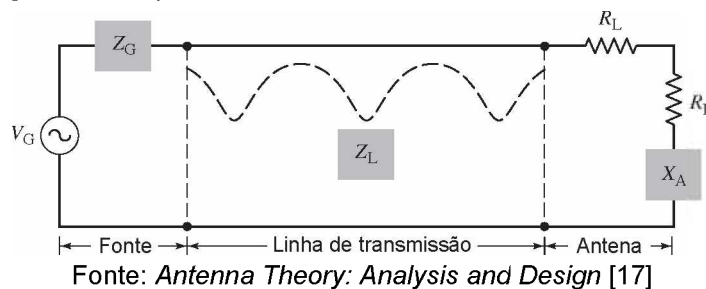


Além da função de transmitir ou receber energia, as antenas têm função de otimizar ou acentuar a radiação de energia em algumas direções específicas, ou seja, antenas também servem como dispositivos direcionadores. Em sistemas de comunicação sem fio, as antenas são um dos componentes mais críticos e o bom projeto da antena pode ajudar a diminuir restrições sobre outros elementos do sistema e melhorar a performance geral [17].

3.3.1 Sistema equivalente de transmissão/recepção

É possível representar um sistema de transmissão por meio de um circuito elétrico, como na Figura 19. Nesse circuito, a fonte é representada por um gerador com impedância interna Z_G , a linha de transmissão é representada por uma linha com impedância característica Z_L e a antena é representada por uma impedância Z_A , em que $Z_A = (R_L + R_R) + jX_A$.

Figura 19 – Equivalente elétrico de um sistema de transmissão.



A resistência R_L representa as perdas dielétricas e condutivas associadas aos materiais da antena, a resistência R_R representa a radiação pela antena e a reatância X_A representa a parte imaginária da impedância associada com a radiação da antena. Quando a antena é utilizada como receptora, a resistência de radiação R_R é utilizada para representar a transferência de energia do espaço livre para a antena e o gerador é substituído por um receptor e passa a ser carga.

Como discutido no início dessa seção, a radiação pode ser vista como uma dissipação de potência e, nesse caso, é desejado que toda a potência entregue pela linha seja consumida pela resistência R_R e que a resistência R_L seja nula, ou seja, toda a potência seja radiada. Entretanto, em sistemas práticos, sempre existem perdas dielétricas e condutivas associadas à matéria da linha de transmissão e da antena, bem como reflexões (descasamento) entre a linha e a antena. Por isso, nem toda a potência é sempre radiada.

As ondas refletidas na interface linha/antena criam ondas estacionárias na linha de transmissão, desse modo ocorre a formação de pacotes de concentração de energia, assim como em dispositivos ressonantes. Portanto, se o sistema não é bem projetado, a linha de transmissão pode passar a agir como um grande armazenador de energia no seu interior em vez de um guia de onda. Mais ainda, se as amplitudes

dos campos eletromagnéticos forem altas, pode ocorrer a formação de arcos elétricos no interior da linha, prejudicando todo o sistema [17].

As perdas devido à linha, antena e ondas estacionárias são altamente indesejáveis nos sistemas radiantes. Felizmente, perdas na linha podem ser minimizadas selecionando linhas de baixas perdas para as frequências de operação, enquanto que as perdas na antena podem ser minimizadas pela redução da resistência R_L . Já as ondas estacionárias e o armazenamento de energia na linha podem ser minimizados por meio do casamento da impedância da linha à impedância da antena.

3.3.2 Alguns tipos de antenas

Uma antena ideal é aquela que radia toda a potência entregue pela linha em uma (ou mais de uma) direção preferida. Na prática, entretanto, performances ideais não são obtidas, mas podem ser bem aproximadas. Para isso, existem vários tipos de antenas e cada um utiliza diferentes artifícios para conseguir as características de radiação desejadas para uma aplicação específica.

Para satisfazer os requisitos de cada aplicação, as antenas podem assumir diferentes configurações, desde um pedaço de fio condutor, uma abertura, um trecho (*patch*) de condutor, conjuntos de elementos, refletores, lentes, entre outros. Nesta seção são brevemente apresentados alguns tipos comuns de antenas.

3.3.2.1 Antenas de fios

Antenas de fios são muito familiares à maioria das pessoas e são vistas em muitos lugares: automóveis, construções, barcos, aviões, espaçonaves, entre outros. Existem diversos formatos de antenas de fios, como um fio reto (dipolo ou monopolo), uma espira ou hélice. As antenas de espiras podem assumir formatos circulares, retangulares, quadrados, elipses ou qualquer outra configuração. Entretanto, o formato circular é muito utilizado devido à facilidade de construção [17].

3.3.2.2 Antenas de aberturas

Antenas de aberturas são menos familiares do que as de fios, mas são muito utilizadas, atualmente, devido aos sinais de alta frequência. Esse tipo de antena é muito útil para uso em aviões e espaçonaves, pois podem ser, convenientemente,

montadas na estrutura externa desses veículos. Mais ainda, podem ser cobertas com materiais dielétricos para protegê-las das condições extremas do ambiente [17].

3.3.2.3 Antenas de microfita

As antenas de microfita (*patch*) são utilizadas em inúmeras aplicações comerciais e militares e se tornaram muito populares nos anos 70 com as aplicações espaciais. Tais antenas consistem de um trecho (*patch*) condutor sobre um substrato aterrado e esse trecho metálico pode assumir diferentes formatos. Apesar da liberdade de geometrias, os caminhos circulares ou retangulares são os mais populares, devido à facilidade de análise, projeto, fabricação e pelas características atrativas de radiação, especialmente baixa radiação de polarização cruzada [17].

Outras vantagens desse tipo de antena são: grande discricção, podem ser conformadas a superfícies planas ou curvas e são simples e baratas de fabricar utilizando técnicas modernas de circuitos impressos. Além disso, são mecanicamente robustas quando montadas em superfícies rígidas e muito versáteis em termos de frequência de ressonância, polarização, diagrama de radiação e impedância. Tais antenas podem ser montadas nas superfícies de aviões, espaçonaves, satélites, mísseis, carros e em telefones celulares.

3.3.2.4 Arranjos de antenas

Apesar de antenas simples atenderem vários casos, muitas aplicações de radiação requerem características que não podem ser conseguidas com um único elemento, mas podem ser alcançadas pela possível agregação de mais elementos em um arranjo elétrico e geométrico singular. A disposição dos elementos no arranjo pode ser feita para maximizar a radiação em dadas direções e minimizar em outras, ou para atingir qualquer outro objetivo de radiação [17].

3.3.2.5 Antenas refletoras

O sucesso nas explorações espaciais impulsionou fortemente o avanço da teoria de antenas. Por causa da necessidade de comunicação a enormes distâncias, antenas sofisticadas precisaram ser utilizadas para transmitir e receber sinais que viajam centenas de milhares de quilômetros. Nesse contexto, as antenas refletoras começaram a ser muito utilizadas.

Um tipo muito comum de antena refletora é a parabólica e existem antenas enormes desse tipo, com grandes diâmetros da ordem de 300 metros. Dimensões dessa ordem são necessárias para obter os altos ganhos necessários para transmissão e recepção de sinais a milhares (ou até milhões) de quilômetros. Um outro formato de refletor, porém não tão comum como o parabólico, é o refletor de canto ou quina [17].

3.3.2.6 Antenas de lentes

Em diversas aplicações, as lentes são utilizadas, primariamente, para colimar quantidades divergentes de energia e prevenir, assim, seu espalhamento em direções indesejadas. Ao ajustar devidamente uma configuração geométrica e utilizar materiais adequados nas lentes, elas podem transformar vários tipos de energia divergente em ondas planas, fazendo o mesmo papel dos refletores parabólicos. Esse tipo de antena é especialmente utilizado em frequências muito altas, pois, em baixas frequências, suas dimensões e peso se tornam impraticáveis [17].

3.4 Principais Parâmetros de Antenas

Na maioria dos campos da ciência, são criados ou definidos parâmetros com o intuito de avaliar e descrever sistemas. No caso das antenas, existem vários parâmetros utilizados para descrever sua performance de radiação e, nesta seção, são apresentados e brevemente discutidos alguns dos parâmetros mais importantes de antenas.

3.4.1 Diagrama de radiação

O diagrama de radiação de uma antena (ou diagrama de antena) é uma função matemática ou representação gráfica das propriedades de radiação de uma antena em função das coordenadas espaciais. Em um diagrama de radiação, podem ser expressas as seguintes propriedades: densidade de fluxo de potência, intensidade de radiação, intensidade de campo, diretividade, fase ou polarização. Todas essas propriedades são exibidas no diagrama em função das coordenadas espaciais. É importante salientar que, na maioria dos casos, o diagrama de radiação é determinado a partir da medida dessas propriedades na região de campo distante.

Uma das propriedades de radiação de maior importância é a distribuição espacial da energia radiada em função da posição de um observador ao longo de um caminho ou superfície de raio constante. O traçado da intensidade de campo elétrico ou magnético recebido em uma esfera de raio constante é chamado de diagrama de amplitude de campo. Por outro lado, esse gráfico pode ser feito utilizando a densidade de potência e, nesse caso, é chamado de diagrama de amplitude de potência [17].

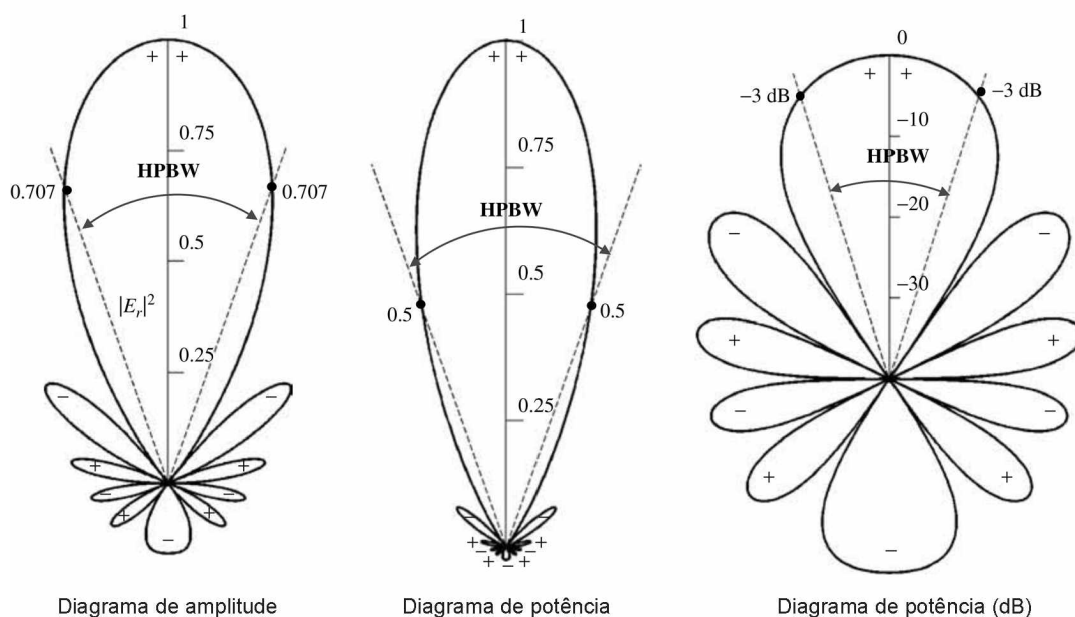
Em geral, os diagramas de campo ou de potência são normalizados com respeito ao seu valor máximo. Além disso, o diagrama de potência é normalmente plotado em escala logarítmica (dB), pois esse tipo de escala descreve com mais detalhes as partes do diagrama que possuem valores muito pequenos, também referidos como lóbulos secundários.

Os três tipos diagramas mais encontrados são:

- diagrama de campo (escala linear);
- diagrama de potência (escala linear);
- diagrama de potência (dB).

A Figura 20 traz um exemplo dos três diagramas e explicita o ângulo de meia potência em cada um deles.

Figura 20 – Exemplo dos três tipos de diagrama de radiação.



Fonte: *Antenna Theory: Analysis and Design* [17]

As várias porções de um diagrama de radiação são comumente chamadas de lóbulos e, em geral, são classificados como: principal ou maior, menores ou secundários, laterais e traseiros. Um lóbulo é uma porção do diagrama de radiação que é limitada por regiões de baixíssima intensidade de radiação.

O lóbulo maior ou feixe principal é o que contém a direção de máxima radiação. Em geral, a maioria das antenas possui apenas um lóbulo principal, porém existem antenas que podem possuir mais de um.

Lóbulos menores ou secundários são uma definição genérica para qualquer lóbulo exceto o lóbulo principal. Tais lóbulos, geralmente, representam a radiação nas direções indesejadas e devem ser minimizados. Dentre esses, é comum existir a classificação de lóbulo lateral e lóbulo traseiro. Os lóbulos laterais, geralmente, são adjacentes ao lóbulo principal e ocupam o mesmo hemisfério no diagrama; também costumam ser um pouco maiores que o restante dos lóbulos. Já um lóbulo traseiro é um lóbulo secundário que está, aproximadamente, a 180° com respeito ao feixe da antena e, normalmente, ocupa o hemisfério oposto ao do lóbulo principal.

3.4.1.1 Diagramas isotrópico, direcional e omnidirecional

Um radiador isotrópico é uma antena hipotética sem perdas com radiação igual em todas as direções. Embora seja ideal e não realizável, ele é utilizado como referência para expressar as propriedades diretivas das antenas reais.

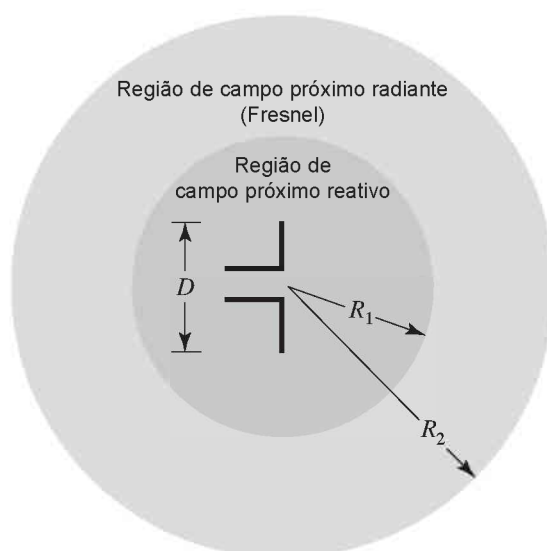
Ao contrário da antena isotrópica, uma antena direcional tem a propriedade de radiar ou receber ondas eletromagnéticas com mais eficiência em algumas direções em detrimento de outras. É comum utilizar o termo “antena direcional” para designar antenas cuja máxima diretividade é significativamente maior do que a de um dipolo de meia onda.

Existem antenas que não são direcionais em algum plano (azimutal por exemplo) e são direcionais em outro plano (elevação por exemplo). Esse tipo de antena é chamado de omnidirecional e é um caso especial de um diagrama direcional [17].

3.4.2 Regiões de campo

O espaço ao redor de uma antena é subdividido em três regiões: região de campo próximo reativo, região de campo próximo radiante (região de Fresnel) e região de campo distante (região de Fraunhofer), como mostrado na Figura 21. Tais regiões são assim definidas, pois a estrutura do campo eletromagnético tem características diferentes em cada uma, mesmo não existindo mudanças abruptas na configuração dos campos. As fronteiras que separam essas regiões não são únicas e existem vários critérios para defini-las.

Figura 21 – Regiões de campo de uma antena
Região de campo distante
(Fraunhofer)



Fonte: *Antenna Theory: Analysis and Design* [17]

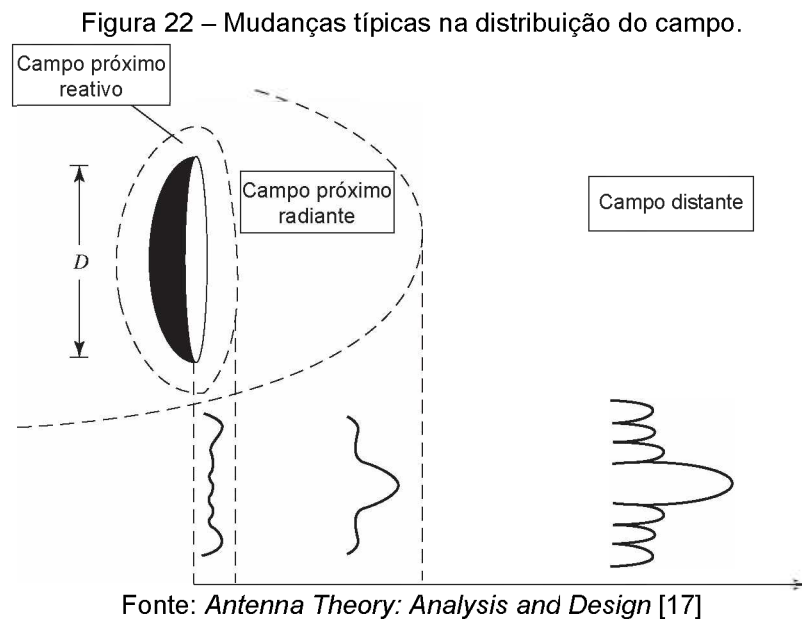
A região de campo próximo reativo é a região que circunda imediatamente a antena e, nela, o campo reativo é predominante. Para a maioria das antenas, a fronteira dessa região está em uma distância $R_1 = 0,62\sqrt{D^3/\lambda}$ da superfície da antena, em que λ é o comprimento de onda e D é a maior dimensão da antena. No caso de dipolos muito curtos ou radiadores equivalentes a eles, essa fronteira está, geralmente, a $R_1 = \lambda/2\pi$ da superfície da antena.

A região de campo próximo radiante ou região de Fresnel começa logo após a região de campo próximo reativo e termina quando começa a região de campo distante. Nessa região, a distribuição angular do campo é função da distância radial da antena e a componente radial do campo pode ser apreciável. Em geral, essa região

termina em uma distância $R_2 = 2D^2/\lambda$. Para antenas que não possuem uma dimensão grande comparada ao comprimento de onda, essa região pode não existir.

Por último, a região de campo distante ou região de Fraunhofer é aquela em que a distribuição angular de campo é independente da distância da antena e as componentes de campo são essencialmente transversais. Em meios físicos, se uma antena tem uma dimensão máxima D grande comparada a $\pi/|\gamma|$, o início da região de campo distante pode ser considerado a partir de $R_2 = |\gamma|D^2/\pi$ da antena.

Se o diagrama de radiação de uma antena for traçado considerando o ponto de observação em cada uma dessas regiões, mudanças significativas podem ser notadas, como ilustra a Figura 22. Quando o ponto de observação está muito próximo da antena, o diagrama é praticamente uniforme e muito espalhado. À medida que o ponto de observação se afasta, o diagrama começa a suavizar e formar lóbulos. Na região de campo distante, o diagrama está completamente formado e consiste do lóbulo principal e lóbulos secundários.



3.4.3 Densidade de potência de radiação e intensidade de radiação

À medida que as ondas eletromagnéticas propagam da sua fonte para pontos de recepção distantes, ocorre uma transferência de energia da fonte para os receptores e existe uma relação simples e direta entre a taxa dessa transferência de energia e as amplitudes das intensidades do campo elétrico e magnético da onda. A quantidade utilizada para descrever a potência associada a uma onda

eletromagnética é o vetor de Poynting instantâneo, definido na Seção 2.9.1 e mostrado novamente na Equação (3.21).

$$\mathbf{p} = \mathbf{e} \times \mathbf{h} \quad (3.21)$$

Para aplicações de campos harmônicos, é mais desejável trabalhar com a densidade de potência média, que é obtida com o vetor de Poynting complexo mostrado novamente na Equação (3.22).

$$\mathbf{p}_{\text{méd}} = \frac{1}{2} \text{Re}\{\mathbf{P}\} = \frac{1}{2} \text{Re}\{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\} \quad (3.22)$$

em que o fator $\frac{1}{2}$ aparece porque \mathbf{E} e \mathbf{H}^* representam valores de pico. No caso de valores RMS, o fator $\frac{1}{2}$ deve ser omitido.

Baseado na definição da Equação (3.22), a potência média radiada por uma antena pode ser escrita como na Equação (3.23).

$$P_{\text{rad}} = P_{\text{méd}} = \frac{1}{2} \oint_S \text{Re}\{\mathbf{P}\} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{2} \oint_S \text{Re}\{\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*\} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.23)$$

Para um radiador isotrópico, o vetor de Poynting não é função dos ângulos esféricos θ e ϕ e sua potência total radiada é calculada na Equação (3.24).

$$P_{\text{rad}} = \oint_S \mathbf{W}_0(r) \cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi |\mathbf{W}_0(r)| \hat{r} \cdot (r^2 \sin\theta d\theta d\phi \hat{r}) = 4\pi r^2 |\mathbf{W}_0(r)| \quad (3.24)$$

em que \mathbf{W}_0 é a densidade de potência média ou o vetor de Poynting instantâneo médio devido à um radiador isotrópico.

Entretanto, em regiões de campo distante, a densidade de potência é predominantemente real e referida como densidade de radiação. Portanto, a densidade de potência radiada por um radiador isotrópico em campo distante é definida como na Equação (3.25).

$$\mathbf{W}_0 = |\mathbf{W}_0(r)|\hat{r} = W_0\hat{r} = \frac{P_{\text{rad}}}{4\pi r^2}\hat{r} \quad (3.25)$$

que é uniformemente distribuída sobre uma superfície esférica de raio r .

Outro parâmetro importante é a intensidade de radiação. A intensidade de radiação em uma direção é definida como a potência total radiada por uma antena por unidade de ângulo sólido. A intensidade de radiação é um parâmetro de campo distante e pode ser obtida multiplicando a densidade de radiação pelo quadrado da distância, como na Equação (3.26) [17].

$$U = r^2 W_{\text{rad}} \quad (3.26)$$

A intensidade de radiação também pode ser relacionada com o campo distante assim como na Equação (3.27) [17].

$$U(\theta, \phi) = \frac{r^2}{2Z} |\mathbf{E}(r, \theta, \phi)|^2 \approx \frac{r^2}{2Z} \left| \frac{\mathbf{E}^\circ(\theta, \phi) e^{-j\beta r}}{r} \right|^2 = \frac{1}{2Z} |\mathbf{E}^\circ(\theta, \phi)|^2 \quad (3.27)$$

No caso de um radiador isotrópico, a intensidade de radiação pode ser calculada pela Equação (3.28) juntamente com a Equação (3.25).

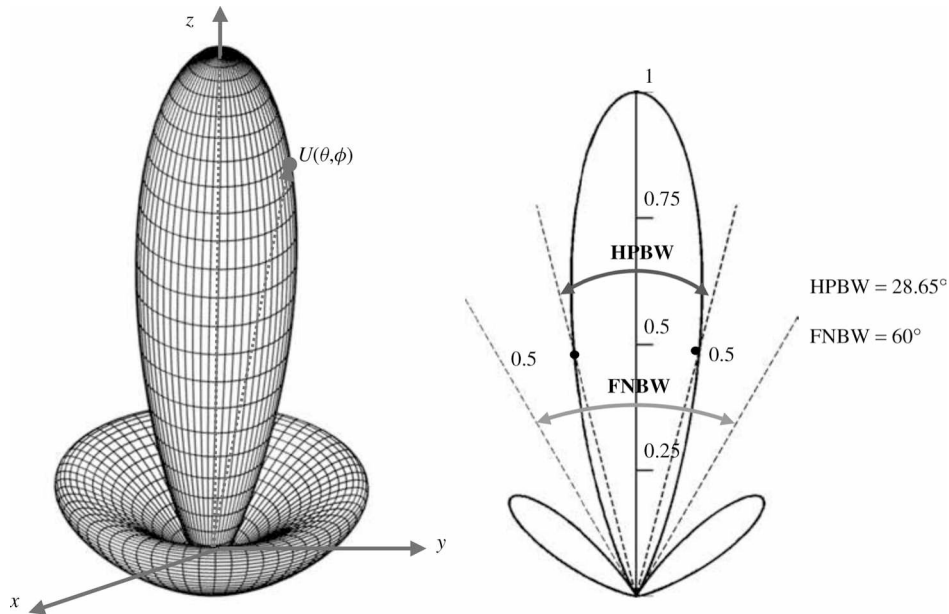
$$U_0 = r^2 W_0 = \frac{P_{\text{rad}}}{4\pi} \quad (3.28)$$

3.4.4 Largura de feixe

A largura de feixe é um parâmetro diretamente relacionado com o diagrama de radiação de uma antena e é a separação angular entre dois pontos idênticos em lados opostos ao máximo do diagrama. Em um diagrama de radiação, existem várias larguras de feixe, porém a mais utilizada é a largura de feixe de meia potência ou *Half-Power Beamwidth* (HPBW), que é o ângulo entre as duas direções nas quais a intensidade de radiação é metade da intensidade máxima do feixe. Outra largura de feixe importante é a largura de feixe de primeiro nulo, ou *First-Null Beamwidth* (FNBW). A largura de feixe de uma antena é uma importante Figura de mérito para

efeitos comparativos. A Figura 23 traz um exemplo de diagrama de radiação com as indicações do HPBW e do FNBW.

Figura 23 – Diagramas de potência (linear) tridimensional e um corte bidimensional explicitando o HPBW e o FNBW.



Fonte: *Antenna Theory: Analysis and Design* [17]

3.4.5 Diretividade

A definição de diretividade de uma antena é a razão entre a intensidade de radiação em uma direção e a intensidade de radiação média em todas as outras direções. Isso é equivalente a dizer que a diretividade de uma fonte não isotrópica é a razão entre sua intensidade de radiação em uma dada direção e a de uma fonte isotrópica. Esse parâmetro é uma Figura de mérito relativa e dá uma indicação das propriedades direcionais da antena em relação a uma fonte isotrópica [17]. Matematicamente, isso é expresso pela Equação (3.29).

$$D = \frac{U}{U_0} = \frac{4\pi U}{P_{\text{rad}}} \quad (3.29)$$

Quando não é especificada uma direção, é comum utilizar a direção de máxima radiação e tem-se a máxima diretividade, dada pela Equação (3.30).

$$D_{\text{máx}} = \frac{U_{\text{máx}}}{U_0} = \frac{4\pi U_{\text{máx}}}{P_{\text{rad}}} \quad (3.30)$$

em que P_{rad} é a potência total radiada pela antena.

A diretividade de uma fonte isotrópica é, obviamente, unitária e, para qualquer outra fonte, a diretividade máxima sempre será maior que a unidade. Para outras direções, a diretividade sempre estará na faixa $0 \leq D \leq D_{\text{máx}}$.

Também é possível desenvolver uma expressão mais geral para a diretividade com o intuito de incorporar fontes com diagramas de radiação que podem ser função das coordenadas esféricas θ e ϕ . Para isso, é preciso lembrar que a intensidade de radiação de uma antena é dada, no campo distante, pela Equação (3.31).

$$U(\theta, \phi) = \frac{r^2}{2Z} |\mathbf{E}(\theta, \phi)|^2 \quad (3.31)$$

Introduzindo a variável $F(\theta, \phi) = |\mathbf{E}(\theta, \phi)|^2$, a Equação (3.31) se torna a Equação (3.32).

$$U(\theta, \phi) = \frac{r^2}{2Z} F(\theta, \phi) \quad (3.32)$$

No caso da direção de máxima radiação, tem-se a Equação (3.33).

$$U_{\text{máx}} = \frac{r^2}{2Z} F_{\text{máx}} \quad (3.33)$$

Utilizando a definição da Equação (3.29) e sabendo que a potência total radiada pode ser obtida pela Equação (3.34), a diretividade e a diretividade máxima podem ser expressas como nas Equações (3.35) e (3.36).

$$P_{\text{rad}} = \oint_{\Omega} U(\theta, \phi) d\Omega = \frac{r^2}{2Z} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi \quad (3.34)$$

$$D(\theta, \phi) = \frac{4\pi F(\theta, \phi)}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi} \quad (3.35)$$

$$D_{\text{máx}} = \frac{4\pi F_{\text{máx}}}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F(\theta, \phi) \sin\theta d\theta d\phi} = \frac{4\pi}{\Omega_A} \quad (3.36)$$

em que $\Omega_A = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi}{F_{\text{máx}}}$.

O ângulo sólido Ω_A é definido como o ângulo sólido pelo qual toda a potência radiada pela antena fluiria caso a sua intensidade de radiação fosse constante e igual a $U_{\text{máx}}$ para todos os ângulos internos a Ω_A [17].

3.4.6 Eficiência de antena e ganho

Quando se trata de eficiência, é comum considerar que a eficiência total de uma antena se relaciona com as perdas nos terminais de entrada e na estrutura da antena. As perdas nos terminais de entrada ocorrem devido às reflexões causadas pelo descasamento com a linha de transmissão e as perdas na estrutura da antena são relacionadas à condutividade e perdas dielétricas no material da antena.

Assim, a eficiência geral de uma antena pode ser calculada pela Equação (3.37) [17].

$$e = e_r e_{\text{cd}} = (1 - |\Gamma|^2) e_{\text{cd}} \quad (3.37)$$

em que $\Gamma = \frac{Z_A - Z_L}{Z_A + Z_L}$ é o coeficiente de reflexão na interface linha/antena e e_{cd} é a eficiência de radiação da antena relativa às perdas condutivas e dielétricas. Essas perdas aparecem condensadas porque é extremamente difícil calculá-las ou medidas separadamente.

Essa eficiência de radiação é definida como a razão entre a potência consumida pela resistência de radiação R_R e a potência consumida nas resistências R_R e R_L do circuito equivalente da antena [17]. A Equação (3.38) traz essa definição.

$$e_{\text{cd}} = \frac{R_R}{R_L + R_R} \quad (3.38)$$

Associada com a efetividade, uma outra medida muito útil para descrever a performance de antenas é o ganho. Ele é intimamente ligado à diretividade, mas também considera a eficiência da antena.

O ganho de uma antena em uma dada direção é dado pela razão entre a intensidade de radiação nessa direção e a intensidade de radiação que seria obtida caso a potência fosse radiada isotropicamente [17]. Essa definição pode ser expressa pela expressão mostrada na Equação (3.39).

$$Ganho = 4\pi \frac{U(\theta, \phi)}{P_{in}} \quad (3.39)$$

É importante notar a diferença entre a Equação (3.39) e a Equação (3.29). No caso da diretividade, é considerada a potência radiada e, para o ganho, é considerada a potência aplicada na antena. Por isso, aqui, é considerada a efetividade da antena.

Em quase todos os casos práticos, é comum utilizar o conceito de ganho relativo com o intuito de comparar uma antena em relação a um outra. A diferença é que ele é dado pela razão entre o ganho de potência em uma dada direção e o ganho de potência de uma antena de referência na mesma direção, considerando a mesma potência de entrada para as duas antenas. Essa antena de referência pode ser um dipolo, corneta ou qualquer outra cujo ganho pode ser calculado ou já é conhecido [17]. Na maioria dos casos, entretanto, a antena de referência utilizada é a fonte isotrópica sem perdas. Assim, o ganho relativo a uma fonte isotrópica é dado pela Equação (3.40).

$$G = 4\pi \frac{U(\theta, \phi)}{P_{in} \text{ (fonte isotrópica sem perdas)}} \quad (3.40)$$

Assim como para a diretividade, quando não é especificada uma direção, o ganho é tomado na direção de máxima radiação e o ganho máximo é mostrado na Equação (3.41).

$$G_{\max} = 4\pi \frac{U_{\max}}{P_{in} \text{ (fonte isotrópica sem perdas)}} \quad (3.41)$$

De acordo com o IEEE, o ganho não deve incluir as perdas advindas do descasamento linha/antena ou perdas por descasamento de polarização, então a potência radiada é relacionada com a potência de entrada pela eficiência de

radiação de acordo com a Equação (3.42). A perda por descasamento na linha/antena é considerada apenas na grandeza chamada ganho absoluto.

$$P_{\text{rad}} = e_{\text{cd}} P_{\text{in}} \quad (3.42)$$

Assim, reescreve-se a Equação (3.40) como a Equação (3.43) e a Equação (3.41) como a Equação (3.44).

$$G(\theta, \phi) = e_{\text{cd}} 4\pi \frac{U(\theta, \phi)}{P_{\text{rad}}} = e_{\text{cd}} D(\theta, \phi) \quad (3.43)$$

$$G_{\text{máx}} = e_{\text{cd}} D_{\text{máx}} \quad (3.44)$$

Para considerar a eficiência do casamento linha/antena, o ganho absoluto e o ganho absoluto máximo são calculados pelas Equações (3.45) e (3.46).

$$G_{\text{abs}}(\theta, \phi) = (1 - |\Gamma|^2) G(\theta, \phi) = (1 - |\Gamma|^2) e_{\text{cd}} D(\theta, \phi) \quad (3.45)$$

$$G_{\text{abs máx}} = (1 - |\Gamma|^2) G_{\text{máx}} = (1 - |\Gamma|^2) e_{\text{cd}} D_{\text{máx}} \quad (3.46)$$

3.4.7 Eficiência de feixe

Mais um parâmetro frequentemente utilizado para julgar a qualidade das antenas transmissoras e receptoras é a eficiência de feixe. Seja uma antena cujo lóbulo principal está sobre o eixo z . Isso é feito apenas para que a variável θ_1 da Equação (3.47) seja a mesma da coordenada esférica θ . Assim, a eficiência de feixe é calculada com a Equação (3.47).

$$e_{\text{F}} = \frac{\text{potência transmitida/recebida dentro do cone definido pelo ângulo } \theta_1}{\text{potência total transmitida/recebida pela antena}} \quad (3.47)$$

Em outras palavras, a eficiência de feixe dá a relação entre a potência associada a uma porção do diagrama e a potência total. Se θ_1 for o ângulo no qual ocorre o primeiro nulo, então a eficiência de feixe indicará a relação entre a potência no lóbulo principal em relação à potência total.

3.4.8 Largura de faixa

Assim como a maioria dos dispositivos elétricos e eletrônicos, as antenas também funcionam de maneiras diferentes dependendo da frequência de operação. A largura de faixa de uma antena é, então, definida como a região de frequências dentro da qual a performance da antena, com respeito a alguma característica, obedece alguma restrição. A largura de banda também pode ser considerada como a região de frequências, em torno de uma frequência central, na qual características da antena (impedância de entrada, diagrama de radiação, largura de feixe, polarização, ganho, eficiência de radiação) possuem valores aceitáveis e próximos daqueles na frequência central [17].

Para antenas de faixa larga, a largura de banda é expressa como a razão entre a maior e a menor frequência para operação aceitável, por exemplo, 10:1 ou 5:1. No caso de antenas faixa estreita, a largura de faixa é expressa de maneira mais familiar de acordo com a Equação (3.48).

$$LF = \frac{f_{\text{máx}} - f_{\text{mín}}}{f_c} \cdot 100\% \quad (3.48)$$

Como todas as características de uma antena não variam com a frequência da mesma maneira, não existe uma única caracterização de largura de banda e, geralmente, é feita uma distinção entre largura de banda de diagrama e largura de banda de impedância, pois, muitas vezes, variações na frequência podem alterar pouco ou quase nada os parâmetros de diagrama de radiação, mas podem alterar significativamente a impedância de entrada e a eficiência de radiação. Da mesma maneira, o contrário também pode ocorrer.

Assim, a largura de banda de diagrama está relacionada com características como ganho, nível de lóbulos laterais, largura de feixe, polarização, entre outros, enquanto que a largura de banda de impedância está relacionada à impedância de entrada e a eficiência de radiação.

3.4.9 Polarização

No capítulo anterior, foi discutido sobre a polarização de ondas e, nesta seção, o foco são as perdas relacionadas à diferença de polarização entre as ondas e as

antenas. Na prática, a polarização da energia radiada por uma antena varia com a direção de radiação a partir do centro da antena, então porções diferentes do diagrama de radiação podem ter polarizações diferentes.

A polarização de uma antena em uma dada direção é definida como a polarização de uma onda transmitida por ela nessa direção. Se uma antena transmite uma onda RHCP, então diz-se que a antena tem polarização RHCP.

Em um sistema de comunicação sem fio, em geral, a polarização de uma onda recebida não é exatamente a mesma da antena receptora. Isso é chamado de descasamento de polarização e a quantidade de potência extraída pela antena não será máxima devido à essa perda de polarização. Um pouco disso foi discutido na Seção 2.7.5.

Seja o campo elétrico de uma onda incidente escrito como na Equação (3.49).

$$\mathbf{E} = E \hat{\mathbf{u}} \quad (3.49)$$

em que $\hat{\mathbf{u}}$ é o vetor unitário que dá a direção do campo elétrico da onda.

Considerando que a polarização da antena receptora pode ser representada pelo versor $\hat{\mathbf{v}}$, o fator de perda por polarização pode ser definido como na Equação (3.50) [17].

$$PLF = |\hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{v}}|^2 = \cos^2 \psi \quad (3.50)$$

em que ψ é o ângulo entre os dois versores.

Uma alternativa similar ao PLF é a eficiência de polarização [17], que é definida como a razão entre a potência recebida por uma antena quando incide uma onda de polarização qualquer e a potência que seria recebida pela mesma antena quando uma onda com mesmo fluxo de potência e direção de propagação incide, mas cuja polarização foi ajustada para máxima resposta. Essa eficiência é dada pela Equação (3.51).

$$e_p = \frac{|\boldsymbol{\ell}_e \cdot \mathbf{E}^{\text{inc}}|^2}{|\boldsymbol{\ell}_e|^2 |\mathbf{E}^{\text{inc}}|^2} \quad (3.51)$$

em que ℓ_e é o vetor comprimento efetivo da antena e \mathbf{E}^{inc} é o campo elétrico da onda incidente.

A perda por polarização é um fator muito importante e sempre deve ser considerada em cálculos de projeto de enlaces pois, em alguns casos, pode ser um fator crítico, principalmente em sistemas que a potência disponível é bem limitada.

3.4.10 Comprimento e áreas equivalentes

Uma antena em modo de recepção é utilizada para capturar ondas eletromagnéticas e extrair potência delas. Para cada antena, um comprimento e áreas efetivas podem ser definidos. Essas quantidades são utilizadas para descrever as características de recepção da antena.

3.4.10.1 Vetor comprimento efetivo

O comprimento efetivo de uma antena, seja ela linear ou de abertura, é uma quantidade utilizada para determinar a tensão induzida nos seus terminais em circuito aberto devido à uma onda incidente.

O vetor comprimento efetivo de uma antena é, geralmente, uma quantidade complexa e calculada pela Equação (3.52).

$$\ell_e(\theta, \phi) = \ell_\theta(\theta, \phi)\hat{\theta} + \ell_\phi(\theta, \phi)\hat{\phi} \quad (3.52)$$

O comprimento efetivo é relacionado ao campo distante \mathbf{E}_a radiado por uma antena com corrente I_{in} nos seus terminais pela Equação (3.53) [15,18–21,23].

$$\mathbf{E}_a = E_\theta(\theta, \phi)\hat{\theta} + E_\phi(\theta, \phi)\hat{\phi} = -jZ \frac{k I_{\text{in}}}{4\pi r} \ell_e e^{-jkr} \quad (3.53)$$

Esse comprimento efetivo é útil para relacionar a tensão em circuito aberto que aparece nos terminais de uma antena receptora quando incide sobre ela uma onda eletromagnética. Isso é dado pela Equação (3.54).

$$V_{\text{oc}} = \mathbf{E}^{\text{inc}} \cdot \ell_e \quad (3.54)$$

em que V_{oc} pode ser enxergado como a tensão que seria induzida em uma antena linear equivalente de comprimento ℓ_e quando ℓ_e e \mathbf{E}^{inc} são linearmente polarizados [28,29].

3.4.10.2 Áreas equivalentes

Para cada antena, é possível associar um número de áreas equivalentes utilizadas para descrever as características de captura de potência da antena quando uma onda incide sobre ela. Uma dessas áreas é a área efetiva (área de abertura) que, em uma dada direção, é definida como a razão entre a potência disponível nos terminais da antena receptora e a densidade de fluxo de potência de uma onda plana incidente na antena com polarização casada vindo da direção especificada [17]. A Equação (3.55) traduz isso.

$$A_e = \frac{P_T}{W^{inc}} = \frac{|I_T|^2 R_T}{2W^{inc}} \quad (3.55)$$

A abertura efetiva é a área que, quando multiplicada pela densidade de potência incidente, dá a potência entregue à carga. Isso pode ser escrito como na Equação (3.56) [17].

$$A_e = \frac{|V_T|^2}{2W^{inc}} \left[\frac{R_T}{(R_R + R_L + R_T)^2 + (X_A + X_T)^2} \right] \quad (3.56)$$

Em condições de máxima transferência de potência ($R_T = R_R + R_L$ e $X_A = -X_T$), a área efetiva se reduz à máxima abertura efetiva, dada pela Equação (3.57).

$$A_{e \text{ máx}} = \frac{|V_T|^2}{8W^{inc}} \left[\frac{1}{R_R + R_L} \right] \quad (3.57)$$

Quando a área da Equação (3.57) é multiplicada pela densidade de potência, o resultado é a máxima potência entregue à carga.

Ocorre que toda a potência que é interceptada, coletada ou capturada por uma antena não é entregue à carga. De fato, em condições de máxima transferência de potência, apenas metade da potência capturada é transferida para a carga e a outra

metade é espalhada ou dissipada como calor. Assim, para considerar as parcelas espalhada e dissipada, é necessário introduzir as áreas equivalentes de espalhamento, de perda e de captura.

A área de espalhamento é definida como a área equivalente que, quando multiplicada pela densidade de potência incidente, é igual à potência espalhada ou rerradiada. Em condições de máxima transferência de potência, essa área é dada pela Equação (3.58) [17].

$$A_s = \frac{|V_T|^2}{8W^{inc}} \left[\frac{R_R}{(R_R + R_L)^2} \right] \quad (3.58)$$

De maneira similar, a área de perda é definida como na Equação (3.59).

$$A_L = \frac{|V_T|^2}{8W^{inc}} \left[\frac{R_L}{(R_R + R_L)^2} \right] \quad (3.59)$$

Por fim, a área de captura, que, em geral, é igual à soma das outras três áreas é mostrada na Equação (3.60) [17].

$$A_c = \frac{|V_T|^2}{8W^{inc}} \left[\frac{R_T + R_R + R_L}{(R_R + R_L)^2} \right] \quad (3.60)$$

3.5 Diretividade Máxima e Área Efetiva Máxima

Dos conceitos apresentados até aqui, dois deles possuem uma relação que é muito importante para os cálculos de propagação. É possível estabelecer uma relação entre a diretividade máxima de uma antena e sua área efetiva máxima. Para isso, seja um sistema de duas antenas, sendo uma transmissora e outra receptora. As áreas efetivas e diretividades são designadas como A_e^t , A_e^r , D^t e D^r .

Se a antena transmissora fosse isotrópica, sua densidade de potência radiada em uma distância R seria dada pela Equação (3.61)

$$W_0 = \frac{P_{\text{rad}}}{4\pi R^2} \quad (3.61)$$

Entretanto, por causa de suas propriedades diretivas, a densidade de potência real é dada pela Equação (3.62).

$$W = D^t W_0 = \frac{P_{\text{rad}} D^t}{4\pi R^2} \quad (3.62)$$

e a potência recebida pela antena receptora e entregue à carga é dada pela Equação (3.63).

$$P_r = W A_e^r = \frac{P_{\text{rad}} D^t A_e^r}{4\pi R^2} \quad (3.63)$$

Pode-se rearranjar os termos da Equação (3.63) e obter a Equação (3.64).

$$D^t A_e^r = 4\pi R^2 \frac{P_r}{P_{\text{rad}}} \quad (3.64)$$

Invertendo os papéis das antenas, agora, a antena receptora passa a transmitir e a antena transmissora passa a receber. Se o meio for linear, passivo e isotrópico, pode-se escrever a Equação (3.65).

$$D^r A_e^t = 4\pi R^2 \frac{P_r}{P_{\text{rad}}} \quad (3.65)$$

Como os lados direitos das Equações (3.64) e (3.65) são iguais, chega-se à Equação (3.66).

$$\frac{D^t}{D^r} = \frac{A_e^t}{A_e^r} \quad (3.66)$$

A Equação (3.66) sugere que há uma relação de proporcionalidade entre a diretividade e área efetiva de uma antena. Em termos dos valores máximos, tem-se a Equação (3.67).

$$\frac{D_{\text{máx}}^t}{D_{\text{máx}}^r} = \frac{A_{e \text{ máx}}^t}{A_{e \text{ máx}}^r} \quad (3.67)$$

Considerando a antena transmissora isotrópica, a Equação (3.67) se torna a Equação (3.68).

$$A_{e \text{ máx}}^t = \frac{A_{e \text{ máx}}^r}{D_{\text{máx}}^r} \quad (3.68)$$

Essa equação diz que a área efetiva máxima de uma fonte isotrópica é igual à razão entre a área efetiva máxima e a diretividade máxima de uma outra fonte qualquer.

Tomando um dipolo muito curto ($\ell \ll \lambda$) por exemplo, sabe-se que sua área efetiva máxima é $\frac{3\lambda^2}{8\pi}$ e que sua diretividade máxima é 1,5. Com isso, pode-se calcular a área efetiva máxima de uma fonte isotrópica pela Equação (3.69).

$$A_{e \text{ máx}}^t = \frac{3\lambda^2}{8\pi \cdot 1,5} = \frac{\lambda^2}{4\pi} \quad (3.69)$$

Esse cálculo poderia ser feito com qualquer outra antena cuja área efetiva máxima e diretividade são conhecidos. O dipolo muito curto foi utilizado como exemplo.

Portanto, em geral, a área efetiva máxima de uma antena é relacionada à sua diretividade máxima pela Equação (3.70).

$$A_{e \text{ máx}} = \frac{\lambda^2}{4\pi} D_{\text{máx}} \quad (3.70)$$

É importante notar que a área efetiva máxima da Equação (3.70) assume que não há perdas condutivas ou dielétricas ($e_{\text{cd}} = 1$), que a antena é casada com a linha ($\Gamma = 1$) e que a polarização da onda é casada à polarização da antena ($PLF = 1$ ou $e_p = 1$).

Caso essas perdas devam ser consideradas, a Equação (3.71) deve ser utilizada no lugar da Equação (3.70).

$$A_{e \text{ máx}} = e_{\text{cd}} (1 - |\Gamma|^2) \left(\frac{\lambda^2}{4\pi} \right) \cdot PLF \cdot D_{\text{máx}} \quad (3.71)$$

3.6 Equação da Transmissão de Friis

A equação da transmissão de Friis é muito importante na análise e projeto de sistemas de comunicação sem fio. Essa equação relaciona a potência recebida por uma antena à potência transmitida por outra antena separadas por uma distância $R > 2D^2/\lambda$, ou seja, na região de campo distante.

Assumindo, inicialmente, que a antena transmissora é isotrópica e que a potência aplicada nos seus terminais é P_t , a densidade de potência isotrópica em uma distância $R > 2D^2/\lambda$ é dada pela Equação (3.72).

$$W_0 = e_{\text{cd}}^t \frac{P_t}{4\pi R^2} \quad (3.72)$$

em que e_{cd}^t é a eficiência de radiação da antena transmissora.

Agora, considerando uma antena transmissora não isotrópica, a densidade de potência da Equação (3.72) na direção (θ^t, ϕ^t) é calculada pela Equação (3.73).

$$W = e_{cd}^t \frac{P_t D^t(\theta^t, \phi^t)}{4\pi R^2} \quad (3.73)$$

Sabe-se que a área efetiva da antena receptora é dada pela Equação (3.74).

$$A_e^r = e_{cd}^r D^r(\theta^r, \phi^r) \left(\frac{\lambda^2}{4\pi} \right) \quad (3.74)$$

Assim, a potência recebida P_r pode ser calculada assim como na Equação (3.75).

$$P_r = W A_e^r = e_{cd}^t e_{cd}^r P_t D^t(\theta^t, \phi^t) D^r(\theta^r, \phi^r) \left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2 \quad (3.75)$$

Então, a relação entre potência recebida e a potência transmitida é a da Equação (3.76).

$$\frac{P_r}{P_t} = e_{cd}^t e_{cd}^r D^t(\theta^t, \phi^t) D^r(\theta^r, \phi^r) \left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2 \quad (3.76)$$

Essa relação da Equação (3.76) considera que as antenas transmissora e receptora estão casadas com suas respectivas linhas ou cargas (coeficientes de reflexão são zero) e que a polarização da antena receptora está casada à onda incidente ($PLF = 1$ ou $e_p = 1$). Para incluir esses fatores, deve-se utilizar a Equação (3.77).

$$\frac{P_r}{P_t} = e_{cd}^t e_{cd}^r \left(1 - |\Gamma_t|^2 \right) \left(1 - |\Gamma_r|^2 \right) D^t(\theta^t, \phi^t) D^r(\theta^r, \phi^r) \left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2 \cdot PLF \quad (3.77)$$

Quando as antenas estão casadas com respeito à polarização, linha de transmissão e alinhadas para máxima recepção, a Equação (3.77) se reduz à Equação (3.78).

$$\frac{P_r}{P_t} = G_{\text{máx}}^t G_{\text{máx}}^r \left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2 \quad (3.78)$$

3.6.1 Fator de perda no espaço livre

Na teoria de propagação, muito se utiliza a definição de ondas planas para simplificar muitos cálculos. Na realidade, é impossível uma antena real emitir uma onda perfeitamente plana porque isso requereria um campo uniforme infinito. No entanto, uma antena direcional pode gerar uma aproximação boa de onda plana. Quanto maiores as dimensões da abertura (área efetiva) comparado ao comprimento de onda, mais diretivo será o feixe e mais parecida com uma onda plana será a onda emitida.

Embora uma onda real emitida por uma antena possa ser aproximada por uma onda plana no campo distante, sua frente de onda tende a assumir uma forma esférica. Assim, a quantidade de potencia que atravessa uma dada área se torna cada vez menor à medida que a distância da fonte aumenta e a densidade de potencia se aproxima de uma relação com o inverso do quadrado da distância. Por isso, na equação de Friis, o termo $\left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2$ é chamado de fator de perda no espaço livre e é responsável por considerar as perdas devido a esse espalhamento esférico da energia no espaço.

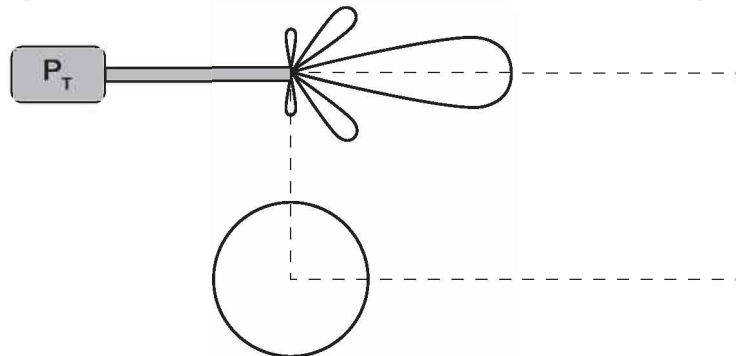
3.7 Potência Isotrópica Média Efetivamente Radiada (AEIRP)

Uma das grandezas de maior interesse e utilidade em um sistema de comunicação sem fio é a potência isotrópica média efetivamente radiada – *Average Effective Isotropic Radiated Power* (AEIRP) – por um sistema de transmissão. Ela é uma medida do ganho de potência do sistema radiante e considera as características diretivas e eficiência da antena, bem como a eficiência da linha de transmissão utilizada. O termo média foi colocado aqui, pois, geralmente, trabalha-se com campos harmônicos, então é interessante utilizar essa nomenclatura.

Para se ter uma ideia, pode-se imaginar uma antenna real direcional colocada ao lado de um radiador isotrópico e que uma linha de transmissão faz a conexão da antenna diretiva ao rádio como na Figura 24. Se a mesma potência de saída do transmissor, P_T , estiver disponível na entrada do radiador isotrópico, obviamente a intensidade de campo, num ponto distante, produzida pelo sistema de transmissão real será diferente da intensidade de campo produzida pelo radiador isotrópico no mesmo ponto. Isso se dá devido às propriedades diretivas da antenna real e da perda ou eficiência da linha de transmissão.

Agora, ajusta-se a potência disponível na entrada do radiador isotrópico por um fator até que as intensidades de campo, no ponto distante, sejam iguais. Essa nova potência aplicada ao radiador isotrópico é a potência isotrópica efetivamente radiada e esse ganho de potência é útil na sua definição. Portanto, basicamente, a potência isotrópica efetivamente radiada é uma potência que, se aplicada a um radiador isotrópico, produz a mesma intensidade de campo que uma outra potência aplicada em um sistema real produz.

Figura 24 – Sistema de transmissão real vs. radiador isotrópico.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Antes de definir a AEIRP, é necessário relembrar o conceito de eficiência da linha de transmissão.

3.7.1 Eficiência de linha de transmissão

A eficiência de uma linha de transmissão é um fator muito importante na performance geral de um sistema e algo que deve ser valorizado em projetos de sistemas. Essa eficiência é dependente da atenuação por unidade de comprimento da linha, parâmetro que pode ser encontrado nos *datasheets* dos fabricantes.

Em porcentagem, a eficiência da linha de transmissão é calculada por meio da Equação (3.79).

$$e_L = 10^{\frac{C_L \alpha_{dB}}{10}} \cdot 100\% \quad (3.79)$$

em que C_L é o comprimento da linha de transmissão e α_{dB} é a atenuação da linha em decibéis por metro.

Tipicamente, a atenuação é encontrada nos *datasheets* em decibéis por 100 metros. Então, é comum utilizar a Equação (3.80) para o cálculo da eficiência da linha.

$$e_L = 10^{\frac{C_L/100 \times \alpha_{dB/100m}}{10}} \cdot 100\% \quad (3.80)$$

Na maioria das situações de operação normal, há o casamento de impedância entre a linha de transmissão e a antena, mas, em situações anormais, isso pode não ocorrer e é necessário considerar uma atenuação maior na linha de transmissão. Isso foi considerado na Seção 3.4.6 por meio do ganho absoluto. Por outro lado, pode-se considerar esse efeito na eficiência da linha e utilizar o ganho normal da antena.

Assim, a eficiência da linha de transmissão passa a ser dada pela Equação (3.81).

$$e_L = \left[\left(1 + |\Gamma|^2 \right) 10^{\frac{C_L/100 \times \alpha_{dB/100m}}{10}} - |\Gamma|^2 \right] \cdot 100\% \quad (3.81)$$

3.7.2 Potência isotrópica média efetivamente radiada

Considerando a eficiência da linha, a potência isotrópica média efetivamente radiada por uma antena em uma direção pode ser calculada pela Equação (3.82).

$$AEIRP = P_T \times G(\theta, \phi) \times e_L \quad (3.82)$$

em que o ganho relativo $G(\theta, \phi)$ é relativo a uma fonte isotrópica e P_T é a potência de saída do transmissor.

Na prática, muitas vezes, é utilizada a potência média efetiva radiada (AERP) para denotar a potência média radiada em relação a uma antena de referência dipolo de meia onda. A diferença é apenas o ganho relativo utilizado no cálculo.

Comumente, ganhos relativos de antenas são dados em dBi (em relação a uma fonte isotrópica) ou em dBd (em relação ao dipolo de meia onda). Como o ganho de um dipolo de meia onda é 1,643 (2,156 dBi) em relação a um radiador isotrópico, então a AERP será 2,156 dB menor que a AEIRP para o mesmo sistema de transmissão.

3.8 Considerações Finais

Este capítulo teve por objetivo descrever e relembrar algumas características importantes do processo de radiação e como esse processo pode ser otimizado, quando necessário, com a utilização de antenas. Em primeiro lugar, foi explicado qualitativamente o processo de radiação e uma breve formulação matemática foi apresentada.

Posteriormente, tratou-se das antenas, do seu princípio de funcionamento e das suas características mais importantes. Alguns tipos básicos de antenas foram apresentados e os parâmetros mais utilizados para sua avaliação foram discutidos e definidos. Entre estes estão: diagrama de radiação, diretividade, ganho e eficiência, perdas por polarização, entre outros.

Além disso, foram abordados brevemente alguns aspectos de eficiência de linhas de transmissão e importantes equações utilizadas nos cálculos de perda de propagação foram apresentadas, como a equação da transmissão de Friis e a definição da potência isotrópica média efetivamente radiada (AEIRP) por um sistema.

O capítulo seguinte trata da importância das faixas VHF e UHF e dos mecanismos de propagação predominantes nesses sistemas. Muitas das informações deste e do capítulo anterior são utilizadas nos capítulos seguintes.

4 FUNDAMENTOS DE PROPAGAÇÃO EM VHF E UHF

4.1 Introdução

O entendimento de como a energia de radiofrequência propaga é muito importante para realizar qualquer estudo sobre propagação de sinais. Em geral, o termo radiofrequência (RF) é utilizado para referenciar uma faixa que se estende de, aproximadamente, 30 kHz a 300 GHz. Esse espectro é internacionalmente dividido em bandas, como mostrado na Tabela 2.

Tabela 2 – Designação das bandas de frequência.

Banda	Faixa de Frequência
<i>Extremely low frequency (ELF)</i>	< 3 kHz
<i>Very low frequency (VLF)</i>	3 – 30 kHz
<i>Low frequency (LF)</i>	30 – 300 kHz
<i>Medium frequency (MF)</i>	300 kHz – 3 MHz
<i>High frequency (HF)</i>	3 – 30 MHz
<i>Very high frequency (VHF)</i>	30 – 300 MHz
<i>Ultra high frequency (UHF)</i>	300 MHz – 3 GHz
<i>Super high frequency (SHF)</i>	3 – 30 GHz
<i>Extra high frequency (EHF)</i>	30 – 300 GHz

Fonte: *The Mobile Radio Propagation Channel* [4].

A energia eletromagnética que propaga, na forma de ondas de rádio, para fora de uma antena transmissora pode viajar enormes distâncias e os mecanismos pelos quais essas ondas viajam são muito variados e dependem fortemente da frequência de transmissão e das condições ambientais. Por isso, o estudo de propagação é muito vasto.

As ondas que propagam nas camadas da ionosfera são chamadas de ondas ionosféricas ou ondas celestes. As que propagam na baixa atmosfera e na troposfera são denominadas ondas troposféricas e as ondas que propagam bem próximas à superfície da Terra são chamadas de ondas terrestres. Essas são subdivididas em: ondas diretas, ondas refletidas pelo solo e ondas de superfície.

A principal diferença entre esses tipos de ondas é que, em cada um deles, alguns mecanismos de propagação são mais expressivos do que outros. Por exemplo: a propagação das ondas celestes é fortemente afetada pelos mecanismos da refração e da absorção. De forma diferente, a propagação das ondas terrestres é muito influenciada pela difração e reflexão.

Existem vários mecanismos de propagação e os mais importantes, geralmente, são: absorção, espalhamento, reflexão, refração, difração, múltiplo percurso, cintilação, desvanecimento, dispersão de frequência. Evidentemente, é importante, em um estudo de propagação, definir as situações em que eles são mais ou menos expressivos, quais deles predominam e quais deles não ocorrem.

Em geral, o que define os mecanismos de propagação que estarão mais presentes em alguma situação são as condições do meio de propagação e a frequência de operação. Por exemplo, saber se o meio é ionizado (como a ionosfera) ou se existe alguma superfície refletora próxima (transmissões próximas da Terra) é importante para se considerar, ou não, a absorção ou a reflexão nos cálculos. Além disso, o comprimento de onda também pode definir, por exemplo, se haverá, ou não, a ocorrência de difração nos objetos que estão no percurso de propagação.

Visto que as ondas de rádio podem propagar de diferentes maneiras e que as características do meio e a frequência de operação determinam isso, o objetivo deste capítulo é definir a faixa de frequências analisada neste trabalho, bem como os mecanismos básicos de propagação para essas frequências.

4.2 A Faixa de Frequências

Existe uma grande variedade de serviços que operam nas bandas de VHF e UHF. Alguns deles são: televisão, rádio amador, rádios licenciadas, rádio para navegação e aviação, instrumentos utilizados em torres de controle para aterrissagem e decolagem, telefonia celular e aplicações militares. Muitos desses serviços são essenciais e, por isso, é muito importante que o uso do espectro seja estritamente regulado com a finalidade de garantir a máxima eficiência e prevenir interferências entre os serviços.

As frequências exatas que são alocadas para os diferentes serviços são definidas em acordos e resoluções da International Telecommunications Union (ITU). A cada vinte anos, é realizada uma conferência administrativa mundial chamada World Administrative Radio Conference (WARC), na qual a regulamentação é revisada, atualizada e são realizadas mudanças na alocação das frequências. Em cada país, o uso do espectro de frequência é controlado por uma autoridade reguladora responsável por alocar partes específicas do espectro

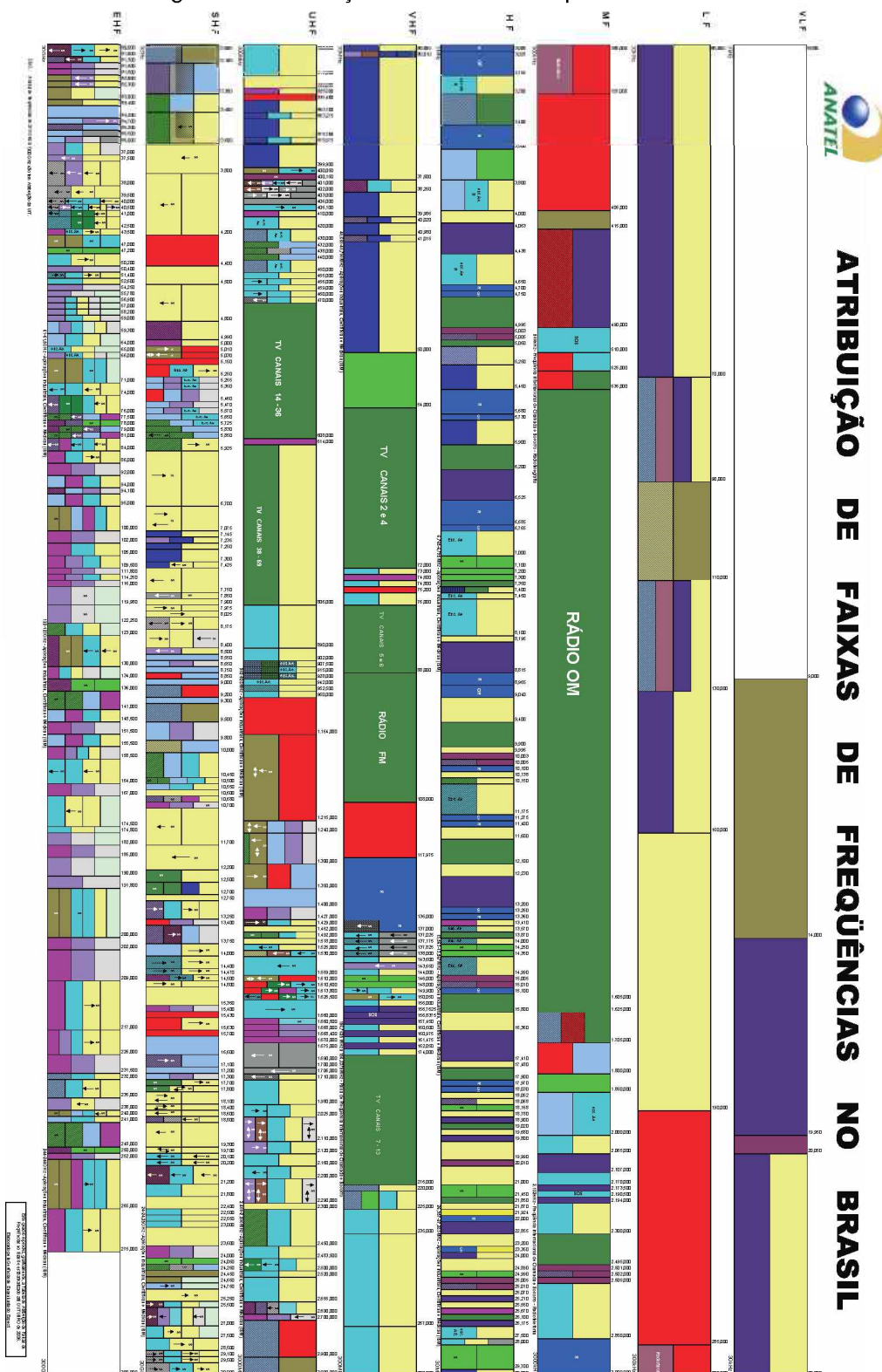
disponível para os devidos fins e por licenciar a utilização dos canais [4]. No Brasil, isso é feito pela Agência Nacional de Telecomunicações (ANATEL).

A Figura 25 mostra a alocação de frequências no Brasil, definida pela ANATEL. Analisando a atribuição de frequências, fica evidente a grande importância das faixas VHF e UHF, pois elas acomodam grande parte dos serviços de radiodifusão de televisão, rádio FM, serviços móveis (telefonia e dados celulares) e radio navegação aeronáutica, além de vários outros serviços. A Figura 26 é uma ampliação da Figura 25 nas faixas de VHF e UHF, para ilustrar, com mais detalhes, os serviços alocados nessas faixas. A Figura 27 é a legenda utilizada nas Figuras 25 e 26.

Existem vários fatores a ser considerados na decisão de qual faixa de frequências deve ser utilizada em um serviço de radiocomunicação. Para os serviços de *broadcast* locais (TV, rádio) e rádio móvel (telefonia celular e dados móveis), a comunicação geralmente se dá ao longo de distâncias que não passam de algumas dezenas de quilômetros e, muitas vezes, são bem menores que isso.

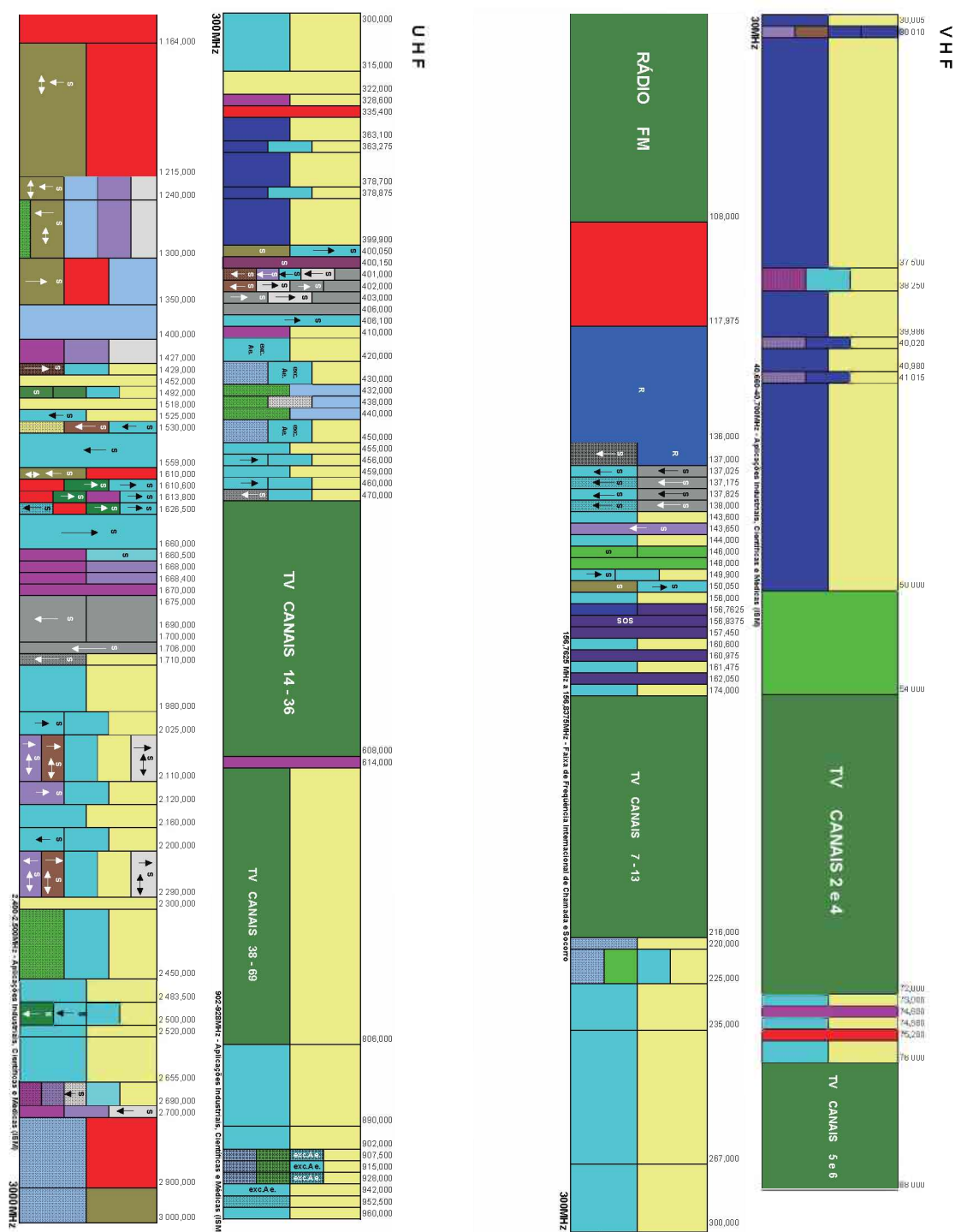
Por exemplo, em um sistema de difusão de televisão, os receptores mais distantes do transmissor estão, geralmente, a cerca de 20 ou 30 km deste. Por outro lado, em um sistema celular, os raios de cobertura das células podem ser até menores do que 200 m nas regiões com maior densidade de clientes (as chamadas *pico células*). Para esses serviços, é evidente que o sinal não precisa propagar a longas distâncias. Mais ainda, se isso ocorrer, interferências desnecessárias e prejudiciais podem aparecer em outros sistemas e usuários. Logo, a faixa de frequências deve ser tal que satisfaça essa condição.

Figura 25 – Atribuição das faixas de frequência no Brasil.

Fonte: Site da ANATEL³.

³Disponível em: <<http://www.anatel.gov.br/Portal/verificaDocumentos/documento.asp?numeroPublicacao=98580&assuntoPublicacao=Quadro%20de%20Atribui%27E%30%20caminhoRel=null&filtro=1&documentoPath=radiofrequencia/qaff.pdf>>. Acesso em: 05 mai, 2017.

Figura 26 – Alocação de frequências das faixas de VHF e UHF no Brasil.

Fonte: Site da ANATEL⁴.

⁴Disponível em: <<http://www.anatel.gov.br/Portal/verificaDocumentos/documento.asp?numeroPublicacao=98580&assuntoPublicacao=Quadro%20de%20Atribui%E7%E3o%20&caminhoRel=null&filtro=1&documentoPath=radiofrequencia/qaff.pdf>>. Acesso em: 05 mai, 2017.

Figura 27 – Legenda das Figuras 25 e 26.

LEGENDA:

	Não Atribuída		Radiodifusão
	Móvel		Radioamador
	Móvel Marítimo		Radioastronomia
	Móvel Aeronáutico		Operação Espacial
	Móvel Terrestre		Pesquisa Espacial
	Fixo		Frequência Padrão/Sinais Horários
	Fixo Aeronáutico		Entre Satélites
	Radionavegação		Exploração da Terra por Satélite
	Radionavegação Marítima		Radiodeterminação por Satélite
	Radionavegação Aeronáutica		Auxílio à Meteorologia
	Radiolocalização		Meteorologia por Satélite
	Serviço em Carater Secundário		
	Rota		
	Fora de Rota		
	Exceto Móvel Aeronáutico		
	Terra para Espaço		
	Espaço para Terra		
	Espaço p/ Terra e Terra p/ Espaço		
	Por Satélite		
	Socorro e Chamada		
	Espaço para espaço		

Fonte: Site da ANATEL⁵.

⁵ Disponível em: <http://www.anatel.gov.br/Portal/verificaDocumentos/documento.asp?numeroPublicacao=98580&assuntoPublicacao=Quadro%20de%20Atribui%E7%E3o%20&caminhoRel=null&filtro=1&documentoPath=radiofr equencia/qaff.pdf>. Acesso em: 05 mai, 2017.

As frequências de operação também devem ser escolhidas em uma região do espectro de RF em que seja possível projetar antenas eficientes, mas com tamanho adequado para montagem em torres, telhados de casas, veículos e equipamentos portáteis. Também é importante que as frequências escolhidas sejam tais que os transmissores utilizados possam gerar a potência necessária e, ao mesmo tempo, ser fisicamente pequenos [4].

Além disso, quando a propagação é em áreas de terreno irregular, é provável que não exista visada direta entre o transmissor e o receptor. Então, para que ainda ocorra a comunicação, as frequências utilizadas devem estar em uma faixa na qual é possível ocorrer a difração nas obstruções, mas que, ao mesmo tempo, minimize as perdas inerentes ao fenômeno.

Observando esses fatores, as faixas de frequências VHF e UHF são ideais para aplicação nos sistemas terrestres pelos seguintes motivos:

- a cobertura é, essencialmente, local (bairros e/ou cidades);
- o comprimento de onda, nessas frequências, permite que ocorra a difração na maioria das obstruções encontradas;
- a largura de banda disponível é tal que serviços de FM de alta qualidade, canais de telefonia celular e canais de televisão podem ser acomodados facilmente [4];
- nessas bandas, as antenas são relativamente pequenas fisicamente e podem ser montadas em torres a muitos comprimentos de onda acima do solo e, também, podem ser montadas dentro de dispositivos portáteis;
- é possível realizar, com eficácia, o reuso de frequência, tanto na mesma cidade (sistema celular), quanto em cidades diferentes, desde que não existam condições anormais de propagação (existência de dutos, por exemplo).

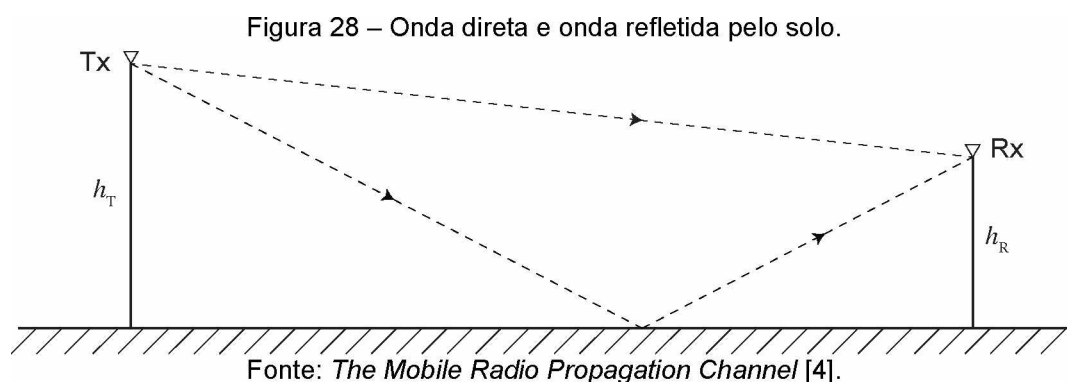
Uma vez definidas as faixas de frequências e quais os serviços que operam nelas, deve-se estudar como é a propagação nessas condições.

4.3 Propagação no Espaço Livre

Ao estudar a comunicação sem fio, é muito importante caracterizar o canal de propagação e entender que ele impõe algumas limitações fundamentais na performance dos sistemas. Os cenários reais podem conter percursos de propagação simples, como um transmissor e receptor com visada direta, ou percursos mais complexos, severamente obstruídos pelo terreno, por construções ou vegetação. Ao contrário dos sistemas cabeados, onde o canal pode ser modelado como estacionário e previsível, os canais sem fio são extremamente aleatórios e de difícil análise.

Existem vários mecanismos de propagação, mas, no caso de interesse deste trabalho (propagação em VHF e UHF sobre terrenos irregulares), os mecanismos mais importantes são a difração, refração, reflexão e o espalhamento. Outros mecanismos, como a absorção, são pouco expressivos, pois as frequências VHF e UHF são muito altas para que ocorra a propagação ionosférica.

Em um sistema que trabalha nessas bandas, quando há visada direta, a comunicação se dá, basicamente, pelas componentes direta e refletida pelo solo da onda eletromagnética. Isso é mostrado na Figura 28. Quando não existe visada direta, o estudo deve considerar, também, a difração que ocorre nas obstruções.



É denominado de propagação no espaço livre o mecanismo que ocorre quando o transmissor e o receptor têm a visada direta completamente desobstruída. Alguns exemplos típicos onde ocorre esse tipo de propagação são sistemas de comunicação via satélite e *links* de micro ondas. Todavia, essa situação pode ocorrer, também, em sistemas de radiodifusão terrestre.

Seja uma antena transmissora, no espaço livre, cujo ganho, na direção de uma antena receptora, é G_T . Então, a densidade de potência, W , a uma distância d , na direção escolhida, é dada pela Equação (4.1) [4].

$$W = \frac{P_T G_T}{4\pi d^2} \quad (4.1)$$

Com isso, a potência disponível na antena receptora, que possui área efetiva A , é mostrada na Equação (4.2).

$$P_R = \frac{P_T G_T}{4\pi d^2} A = \frac{P_T G_T}{4\pi d^2} \left(\frac{\lambda^2 G_R}{4\pi} \right) \quad (4.2)$$

em que G_R é o ganho da antena receptora na direção da antena transmissora.

A Equação (4.3) apresenta, então, a relação entre a potência recebida e a potência transmitida.

$$\frac{P_R}{P_T} = G_T G_R \left(\frac{\lambda}{4\pi d} \right)^2 \quad (4.3)$$

A Equação (4.3) é uma relação fundamental da teoria da propagação e é conhecida como Fórmula de Friis.

Sabendo que $\lambda = c/f$ e fazendo a substituição na Equação (4.3), obtém-se a Equação (4.4).

$$\frac{P_R}{P_T} = G_T G_R \left(\frac{c}{4\pi f d} \right)^2 \quad (4.4)$$

É possível expressar a perda de propagação, ou perda de percurso, implícita na Equação (4.4), na forma de um valor positivo numérico, utilizando o decibel.

Definindo L_{FS} como a perda de propagação no espaço livre (de *Free-Space loss*), pode-se desenvolver a Equação (4.5a) da seguinte maneira.

$$L_{FS} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_T}{P_R} \right) = -10 \log_{10} \left(\frac{P_R}{P_T} \right) \quad (4.5a)$$

$$L_{FS} = -10 \log_{10} \left[G_T G_R \left(\frac{c}{4\pi f d} \right)^2 \right] \quad (4.5b)$$

$$L_{FS} = -10 \log_{10} G_T - 10 \log_{10} G_R - 20 \log_{10} c + 20 \log_{10} (4\pi) + 20 \log_{10} f + 20 \log_{10} d \quad (4.5c)$$

$$L_{FS} = -10 \log_{10} G_T - 10 \log_{10} G_R + 20 \log_{10} f + 20 \log_{10} d - 147,558228 \quad (4.5d)$$

Pode-se verificar que os três últimos termos da Equação (4.5d) expressam a perda de percurso caso as antenas transmissora e receptora fossem isotrópicas. É comum definir essa perda como perda básica de transmissão, L_B (de *basic loss*), de acordo com as Equações (4.6a) a (4.6c).

$$L_B = 20 \log_{10} f + 20 \log_{10} d - 147,558228 \quad (4.6a)$$

$$L_B = 20 \log_{10} (10^6 f_{\text{MHz}}) + 20 \log_{10} (10^3 d_{\text{km}}) - 147,558228 \quad (4.6b)$$

$$L_B = 20 \log_{10} f_{\text{MHz}} + 20 \log_{10} d_{\text{km}} + 32,4418 \quad (4.6c)$$

Então, para um sistema com antenas não isotrópicas, a perda de propagação no espaço livre, dada pela Equação (4.5d) pode ser expressa pelas Equações (4.7a) e (4.7b), em termos da perda básica de transmissão.

$$L_{FS} = -10 \log_{10} G_T - 10 \log_{10} G_R + L_B \quad (4.7a)$$

$$L_{FS} = -10 \log_{10} G_T - 10 \log_{10} G_R + 20 \log_{10} f_{\text{MHz}} + 20 \log_{10} d_{\text{km}} + 32,4418 \quad (4.7b)$$

A Equação (4.4) mostra que a potência recebida é inversamente proporcional ao quadrado da distância (ela diminui 6 dB quando a distância é dobrada, ou reduz 20 dB por década). De maneira similar, a perda de percurso aumenta com o quadrado da frequência, então as perdas aumentam 6 dB quando a frequência é dobrada. Antenas de alto ganho podem ser utilizadas para compensar essas perdas e isso pode ser facilmente aplicado em enlaces fixos, mas não é possível utilizar essa solução em sistemas de radiodifusão e de comunicações móveis, nos quais a cobertura deve ser omnidirecional [4].

Além de calcular as perdas de potência, muitas vezes é interessante obter a intensidade do campo elétrico a uma determinada distância do transmissor. Para

isso, deve-se utilizar a relação entre ele e a densidade de potência. Pode-se chegar a essa relação observando que a densidade de potência é, também, dada pelo modulo do vetor de Poynting, como mostrado nas Equações (4.8) e (4.9).

$$W = \frac{1}{2} E_{\text{máx}} H_{\text{máx}} = E_{\text{rms}} H_{\text{rms}} \quad (4.8)$$

Mas como $H_{\text{rms}} = \frac{E_{\text{rms}}}{Z_0}$ e $H_{\text{máx}} = \frac{E_{\text{máx}}}{Z_0}$, chega-se às Equações (4.9a) e (4.9b).

$$W = \frac{E_{\text{rms}}^2}{Z_0} \quad (4.9a)$$

$$W = \frac{E_{\text{máx}}^2}{2Z_0} \quad (4.9b)$$

em que Z_0 é a impedância característica do espaço livre ($Z_0 \equiv 120\pi$). Com isso, tem-se as Equações (4.10a) a (4.10d).

$$\frac{E_{\text{rms}}^2}{120\pi} = \frac{P_T G_T}{4\pi d^2} \quad (4.10a)$$

$$\frac{E_{\text{máx}}^2}{2 \cdot 120\pi} = \frac{P_T G_T}{4\pi d^2} \quad (4.10b)$$

$$E_{\text{rms}} = \frac{\sqrt{30 P_T G_T}}{d} \quad [\text{V/m}] \quad (4.10c)$$

$$E_{\text{máx}} = \frac{\sqrt{60 P_T G_T}}{d} \quad [\text{V/m}] \quad (4.10d)$$

Como visto no capítulo anterior, é importante considerar a eficiência da linha no sistema de transmissão. Desse modo, também é comum escrever as Equações (4.10a) e (4.10b) em função da potência média isotrópica efetiva radiada (*AEIRP*) em kW e da distância em km. Assim, obtém-se as Equações (4.11a) a (4.11d).

$$E_{\text{rms}} = \frac{\sqrt{30 AEIRP}}{d} \quad [\text{V/m}] \quad (4.11a)$$

$$E_{\text{rms}} = \frac{\sqrt{30 \cdot 10^3 AEIRP_{\text{kw}}}}{10^3 d_{\text{km}}} \quad [\text{V/m}] \quad (4.11b)$$

$$E_{\text{rms}} = \frac{\sqrt{3 AEIRP_{\text{kw}}}}{10 d_{\text{km}}} \quad [\text{V/m}] \quad (4.11c)$$

$$E_{\text{máx}} = \frac{\sqrt{6 AEIRP_{\text{kw}}}}{10 d_{\text{km}}} \quad [\text{V/m}] \quad (4.11d)$$

Na prática, muitas vezes, é utilizada a potência média efetiva radiada (*AERP*) para denotar a máxima potência radiada em relação a uma antena dipolo de meia onda. Então, o campo elétrico das Equações (4.11c) e (4.11d) pode ser escrito, também, em função da *AERP*, de acordo com as Equações (4.12a) e (4.12b).

$$E_{\text{rms}} = \frac{\sqrt{4,929 AERP_{\text{kw}}}}{10 d_{\text{km}}} \quad [\text{V/m}] \quad (4.12a)$$

$$E_{\text{máx}} = \frac{\sqrt{9,858 AERP_{\text{kw}}}}{10 d_{\text{km}}} \quad [\text{V/m}] \quad (4.12b)$$

Outra forma que é bastante utilizada é expressar o campo elétrico em $[\text{dB}\mu\text{V/m}]$, como apresentado nas Equações (4.13a) a (4.13f).

$$E_{\text{rms}} = \frac{\sqrt{3 AEIRP_{\text{kw}}}}{10 d_{\text{km}}} \quad [\text{V/m}] \quad (4.13a)$$

$$E_{\text{rms}(\mu\text{V/m})} = \frac{10^5 \sqrt{3 AEIRP_{\text{kw}}}}{d_{\text{km}}} \quad [\mu\text{V/m}] \quad (4.13b)$$

$$E_{\text{rms}(\text{dB}\mu\text{V/m})} = 20 \log_{10} \left(E_{\text{rms}(\mu\text{V/m})} \right) \quad (4.13c)$$

$$E_{\text{rms}(\text{dB}\mu\text{V/m})} = 20 \log_{10} \left(\frac{10^5 \sqrt{3 AEIRP_{\text{kw}}}}{d_{\text{km}}} \right) \quad (4.13d)$$

$$E_{\text{rms}(\text{dB}\mu\text{V/m})} = 100 + 10 \log_{10} \left(\frac{3 AEIRP_{\text{kw}}}{d_{\text{km}}^2} \right) \quad (4.13e)$$

$$E_{\text{máx(dB}\mu\text{V/m)}} = 100 + 10 \log_{10} \left(\frac{6AEIRP_{\text{kW}}}{d_{\text{km}}^2} \right) \quad (4.13f)$$

As Equações (4.14a) e (4.14b) mostram o campo elétrico RMS e máximo em termos de *AERP*.

$$E_{\text{rms(dB}\mu\text{V/m)}} = 100 + 10 \log_{10} \left(\frac{4,929AERP_{\text{kW}}}{d_{\text{km}}^2} \right) \quad (4.14a)$$

$$E_{\text{máx(dB}\mu\text{V/m)}} = 100 + 10 \log_{10} \left(\frac{9,858AERP_{\text{kW}}}{d_{\text{km}}^2} \right) \quad (4.14b)$$

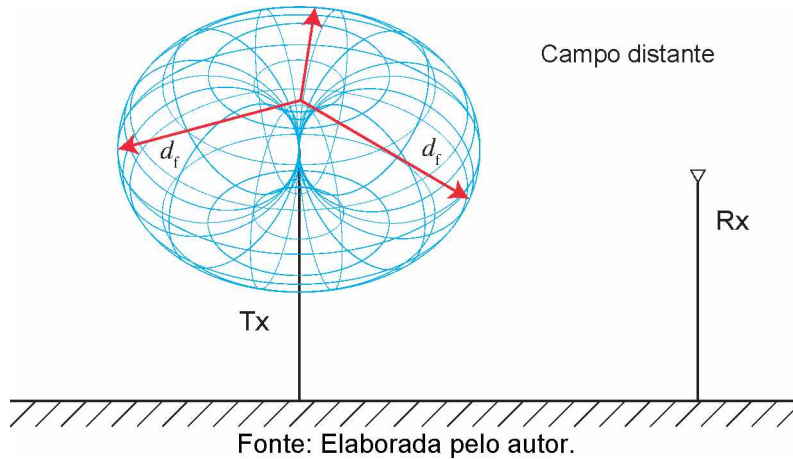
É preciso relembrar, do capítulo anterior, que o modelo de Friis para o espaço livre é válido apenas na região de campo distante da antena transmissora. A região de campo distante (ou região de Fraunhofer) de uma antena é definida como a região além da distância de campo distante, d_f , que é relacionada à maior dimensão linear da antena e ao comprimento de onda utilizado. A distância de Fraunhofer é obtida como apresentado na Equação (4.15).

$$d_f = \frac{2D^2}{\lambda} \quad (4.15)$$

em que D é a maior dimensão linear da antena. Adicionalmente, a condição $d_f \gg D, \lambda$ deve ser satisfeita para caracterizar a região de campo distante [17].

A Figura 29 mostra a fronteira entre a região de Fresnel (campo próximo) e a região de campo distante. Dentro da região de campo próximo, é extremamente difícil medir a potência do sinal ou o campo elétrico pelos métodos convencionais, como o método de Friis. Isso ocorre, porque, nessa região, os campos elétrico e magnético estão defasados de 90° e o campo eletromagnético é altamente reativo. Isso causa inversão do sentido do vetor de Poynting duas vezes por período da onda eletromagnética e a formação de ondas estacionárias.

Figura 29 – Regiões de campo próximo e de campo distante.



Como as equações básicas são válidas apenas na região de campo distante, os modelos de propagação de larga escala costumam utilizar uma distância de referencia, d_0 , em que é conhecida a potência recebida para prever a potência recebida em outras distâncias. O valor de $P_r(d_0)$ pode ser predito pela Equação (4.4) ou pode ser medido experimentalmente em vários pontos cuja distância do transmissor é d_0 . É importante que essa distância de referencia esteja na região de campo distante da antena transmissora, ou seja, $d_0 \geq d_f$.

Desse modo, a potência recebida em qualquer outra distância maior que d_0 pode ser extrapolada de acordo com a Equação (4.16) [3].

$$P_r(d) = P_r(d_0) \left(\frac{d_0}{d} \right)^2 \quad (4.16)$$

Em sistemas de radiocomunicação, é comum que os valores de potência recebida variem dentro de uma faixa extensa, uma vez que as áreas de cobertura podem ser muito grandes. Por causa dessa grande faixa dinâmica dos sinais recebidos, é usual expressar sua intensidade em escala logarítmica, especialmente em dBm. Assim, a potência recebida pode ser expressa como na Equação (4.17).

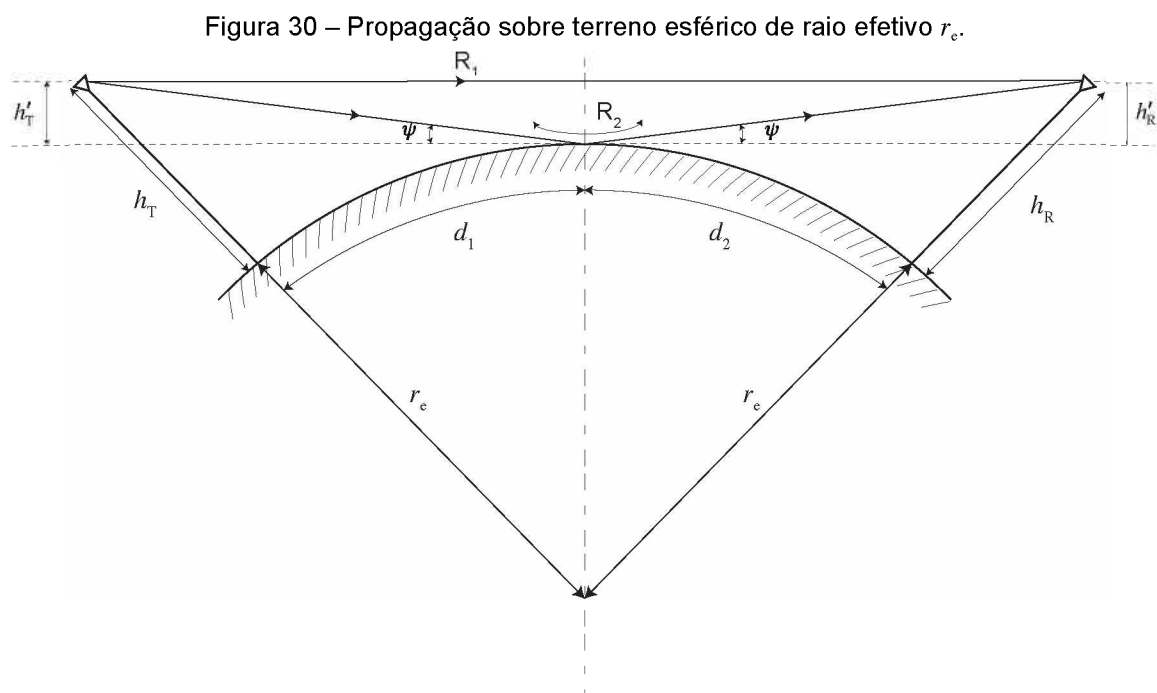
$$P_{r(\text{dBm})}(d) = P_{r(\text{dBm})}(d_0) + 20 \log_{10} \left(\frac{d_0}{d} \right) \quad (4.17)$$

Essa técnica de extrapolar a potência recebida a partir de uma distância de referencia dá origem a modelos de propagação muito conhecidos como o log-distância e o log-normal. Esses modelos são discutidos mais adiante.

4.4 Propagação em Terreno Esférico

Embora sejam as bases do cálculo de campo e muito úteis, as equações da propagação no espaço livre se aplicam apenas em condições muito restritas. Em situações mais realistas, quase sempre há obstruções no percurso de propagação e/ou existem superfícies que refletem e espalham as ondas eletromagnéticas. Então, o modelo do espaço livre – Equação (4.7b) – é, na maioria dos casos, inadequado, se utilizado sozinho. Por isso, é muito importante estudar como as reflexões e obstruções influenciam na transmissão dos sinais.

O caso canônico de estudo da reflexão na Terra é a propagação entre duas antenas com visada direta sobre a superfície esférica da Terra, como mostra a Figura 30.



Fonte: *The Mobile Radio Propagation Channel* [4].

O coeficiente de reflexão é a medida de como a amplitude e a fase das ondas se alteram quando são submetidas ao processo de reflexão. Ele depende da polarização da onda incidente e das características do solo no ponto onde ocorre a reflexão.

Considerando a superfície da Terra perfeitamente lisa, o coeficiente de reflexão, para uma onda com polarização horizontal, pode ser dado pela Equação (2.83). Entretanto, em termos da geometria da Figura 30, o ângulo ψ é complementar ao ângulo de incidência da Equação (2.83). Assim, o coeficiente de reflexão pode ser dado pela Equação (4.18).

$$\Gamma_h = \frac{\sin \psi - \sqrt{(\epsilon/\epsilon_0 - j\sigma/\omega\epsilon_0) - \cos^2 \psi}}{\sin \psi + \sqrt{(\epsilon/\epsilon_0 - j\sigma/\omega\epsilon_0) - \cos^2 \psi}} \quad (4.18)$$

em que ϵ é a constante dielétrica do solo no ponto de reflexão.

Fazendo $x = \frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}$ e $\epsilon_R = \epsilon/\epsilon_0$ na Equação (4.18), obtém-se a Equação (4.19).

$$\Gamma_h = \frac{\sin \psi - \sqrt{(\epsilon_R - jx) - \cos^2 \psi}}{\sin \psi + \sqrt{(\epsilon_R - jx) - \cos^2 \psi}} \quad (4.19)$$

Para uma onda incidente com polarização vertical, o coeficiente de reflexão é apresentado na Equação (4.20).

$$\Gamma_v = \frac{(\epsilon_R - jx)\sin \psi - \sqrt{(\epsilon_R - jx) - \cos^2 \psi}}{(\epsilon_R - jx)\sin \psi + \sqrt{(\epsilon_R - jx) - \cos^2 \psi}} \quad (4.20)$$

É importante entender o que ocorre com o coeficiente de reflexão quando a incidência é rasante, ou seja, ψ (ângulo de incidência) é muito pequeno. Isso pode ocorrer quando a distância entre as antenas é muito grande ou quando as alturas das antenas são muito pequenas em relação à distância entre elas. A segunda situação ocorre com bastante frequência nos sistemas de *broadcast* para regiões rurais.

Para fazer essa análise, basta avaliar o resultado das Equações (4.19) e (4.20) quando $\psi \rightarrow 0$. Fazendo isso, pode-se verificar que $\Gamma_h|_{\psi \rightarrow 0} \approx \Gamma_v|_{\psi \rightarrow 0} \cong -1$, ou seja, ocorre defasagem de 180° entre a onda refletida e incidente.

Após conhecer o coeficiente de reflexão, é necessário equacionar as ondas direta e refletida e a resultante da sua combinação no receptor.

Sejam as alturas das antenas transmissora e receptora h_T e h_R , respectivamente, e h'_T e h'_R as alturas das antenas acima do plano tangente ao ponto de reflexão, como mostrado na Figura 30.

Pela geometria da Figura 30, obtém-se as Equações (4.21) e (4.22).

$$d_1^2 = (r_e + h_T - h'_T)^2 - r_e^2 \quad (4.21)$$

$$d_1^2 = (h_T - h'_T)^2 + 2r_e(h_T - h'_T) \quad (4.22)$$

Como $(h_T - h'_T)$ é pequeno comparado a r_e , então o termo $(h_T - h'_T)^2$ pode ser desconsiderado, resultando na Equação (4.23).

$$d_1^2 \cong 2r_e(h_T - h'_T) \quad (4.23)$$

De maneira similar, obtém-se a Equação (4.24).

$$d_2^2 \cong 2r_e(h_R - h'_R) \quad (4.24)$$

Rearranjando as Equações (4.23) e (4.24), obtém-se a Equação (4.25).

$$h'_T \cong h_T - \frac{d_1^2}{2r_e} \quad \text{e} \quad h'_R \cong h_R - \frac{d_2^2}{2r_e} \quad (4.25)$$

Inicialmente, as variáveis d_1 e d_2 não são conhecidas e, para determiná-las, é necessário encontrar o ponto de reflexão. Para isso, assume-se que $h_T, h_R \ll d_1, d_2$. Dessa forma, obtém-se a Equação (4.26).

$$\tan(\psi) = \frac{h'_T}{d_1} = \frac{h'_R}{d_2} \quad (4.26)$$

Mas, como, nesse caso, ψ é pequeno (porque $h_T, h_R \ll d_1, d_2$), então $\tan(\psi) \approx \psi$. Portanto, a Equação (4.26) se torna a Equação (4.27).

$$\psi \approx \frac{h'_T}{d_1} = \frac{h'_R}{d_2} \quad (4.27)$$

A Equação (4.27) leva à Equação (4.28).

$$\frac{h'_T}{h'_R} \cong \frac{d_1}{d_2} \quad (4.28)$$

Substituindo a simples relação $d = d_1 + d_2$ e os valores da Equação (4.27) na Equação (4.28), encontra-se a Equação (4.29).

$$2d_1^3 - 3dd_1^2 + [d^2 - 2r_e(h_T + h_R)]d_1 + 2r_e h_T d = 0 \quad (4.29)$$

A solução da Equação (4.29) pode ser conseguida utilizando métodos numéricos convencionais, partindo da aproximação inicial $d_1 \cong \frac{d}{1 + h_T/h_R}$.

Uma vez encontrado o valor de d_1 , $d_2 = d - d_1$. Assim, pode-se determinar os valores de h'_T e h'_R da Equação (4.25).

A fim de calcular o campo elétrico resultante na antena receptora, uma importante consideração é feita: que a diferença de percurso entre os raios é pequena e pode ser desconsiderada quanto à atenuação, mas não pode ser desconsiderada com respeito à diferença de fase. Logo, é necessário conhecer a diferença de fase entre a onda direta e a refletida. Para isso, deve-se determinar a diferença entre os dois caminhos.

Por geometria, o comprimento do caminho direto é obtido utilizando a Equação (4.30).

$$R_1 = d \sqrt{1 + \frac{(h'_T - h'_R)^2}{d^2}} \quad (4.30)$$

E o comprimento do caminho da onda refletida é obtido com a Equação (4.31).

$$R_2 = d \sqrt{1 + \frac{(h'_T + h'_R)^2}{d^2}} \quad (4.31)$$

Com isso, a diferença de percurso, $\Delta = R_2 - R_1$, é encontrada na Equação (4.32).

$$\Delta = d \left[\sqrt{1 + \frac{(h'_T + h'_R)^2}{d^2}} - \sqrt{1 + \frac{(h'_T - h'_R)^2}{d^2}} \right] \quad (4.32)$$

Considerando $d \gg h'_T, h'_R$, o que é razoável, na prática, pode-se afirmar que $\frac{(h'_T - h'_R)^2}{d^2}, \frac{(h'_T + h'_R)^2}{d^2} \ll 1$. Assim, pode-se utilizar a aproximação $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2}$ para $x \ll 1$ na Equação (4.32), obtendo-se as Equações (4.33a) e (4.33b).

$$\sqrt{1 + \frac{(h'_T + h'_R)^2}{d^2}} = 1 + \frac{(h'_T + h'_R)^2}{2d^2} \quad (4.33a)$$

$$\sqrt{1 + \frac{(h'_T - h'_R)^2}{d^2}} = 1 + \frac{(h'_T - h'_R)^2}{2d^2} \quad (4.33b)$$

Voltando à Equação (4.32) e aplicando o resultado das Equações (4.33a) e (4.33b), obtém-se as Equações (4.34a) e (4.34b).

$$\Delta = \frac{(h'_T + h'_R)^2 - (h'_T - h'_R)^2}{2d} \quad (4.34a)$$

$$\Delta = \frac{2h'_T h'_R}{d} \quad (4.34b)$$

De posse da diferença de percurso, dada pela Equação (4.34b), a diferença de fase é facilmente obtida através das Equações (4.35a) e (4.35b).

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta \quad (4.35a)$$

$$\Delta\phi = \frac{4\pi h'_T h'_R}{\lambda d} \quad (4.35b)$$

em que h'_T e h'_R são obtidos utilizando a Equação (4.25) a partir da solução da Equação (4.29).

Como o campo elétrico recebido é a soma da componente direta e da refletida, então o seu valor é calculado com as Equações (4.36a) a (4.36c).

$$E = E_d + E_r \quad (4.36a)$$

$$E = E_d + E_d \Gamma e^{-j\Delta\phi} \quad (4.36b)$$

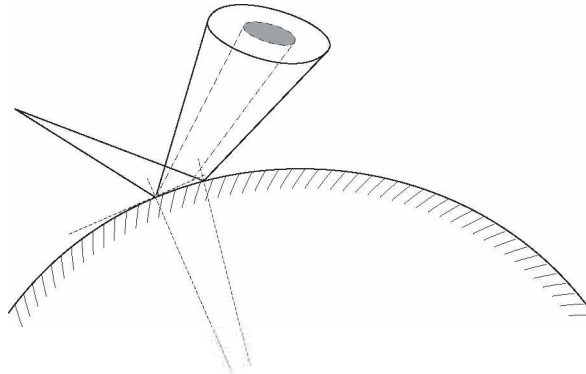
$$E = E_d \left[1 + |\Gamma| e^{-j(\Delta\phi - \theta)} \right] \quad (4.36c)$$

em que θ é a fase do coeficiente de reflexão.

Ainda, deve-se considerar que, pelo fato da superfície da Terra ser esférica, há uma divergência entre os raios refletidos, conforme mostra a Figura 31. Tal divergência reduz o efeito da reflexão no solo, então deve-se corrigir o valor do coeficiente de reflexão e a Equação (4.36c) se torna a Equação (4.37) [4].

$$E = E_d \left[1 + \frac{|\Gamma|}{\sqrt{1 + \frac{2d_1 d_2}{r_e (h'_T + h'_R)}}} e^{-j(\Delta\phi - \theta)} \right] \quad (4.37)$$

Figura 31 – Divergência dos raios refletidos por uma superfície esférica.

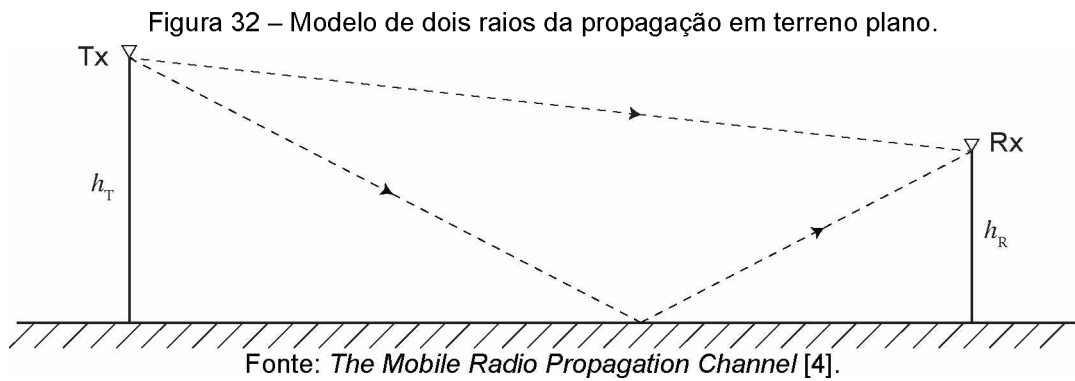


Fonte: *The Mobile Radio Propagation Channel* [4].

4.5 Propagação em Terreno Plano

Quando a propagação é em VHF e UHF para cobertura local, a distância entre as antenas é pequena em relação ao raio da Terra. Com isso, a curvatura da Terra pode ser desconsiderada e a situação passa a ser chamada de propagação em terreno plano. Ainda, é razoável considerar que a incidência é rasante, ou seja, $\Gamma = -1$, pois, em geral, as alturas das antenas são pequenas em relação à distância de separação das mesmas.

Dessa maneira, o modelo apresentado na Figura 30 pode ser simplificado para o caso mostrado na Figura 32. Esse modelo simplificado foi muito estudado e é razoavelmente preciso na predição de larga escala⁶ da intensidade de campo em uma grande faixa de distâncias [3].



Como foi considerado incidência rasante, então a Equação (4.37) se reduz às Equações (4.38a) a (4.38d).

$$E = E_d (1 - e^{-j\Delta\phi}) \quad (4.38a)$$

$$E = E_d [1 - \cos(\Delta\phi) + j\sin(\Delta\phi)] \quad (4.38b)$$

$$|E| = |E_d| \sqrt{[1 - \cos^2(\Delta\phi)] + \sin^2(\Delta\phi)} \quad (4.38c)$$

$$|E| = 2|E_d| \sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) \quad (4.38d)$$

⁶ Modelos de propagação de larga escala são aqueles que caracterizam a intensidade média do sinal ao longo de grandes distâncias de separação Tx–Rx. São muito utilizados na estimativa de área de cobertura.

Da Equação (4.35b), $\Delta\phi = \frac{4\pi h'_T h'_R}{\lambda d}$ e, na propagação em terreno plano, $h'_T = h_T$ e $h'_R = h_R$. Portanto, chega-se à Equação (4.39), que fornece o valor de intensidade do campo elétrico no caso da propagação em terreno plano.

$$|E| = 2|E_d| \sin\left(\frac{2\pi h_T h_R}{\lambda d}\right) \quad (4.39)$$

Muitas vezes, é necessário o conhecimento da potência recebida, então basta converter o resultado da Equação (4.39), utilizando a Equação (4.40), resultando nas Equações (4.41a) e (4.41b). Sabe-se que

$$P_R = WA = \frac{E^2 A}{Z_0} \quad (4.40)$$

em que: W é a densidade de potência no ponto desejado, A é a área efetiva da antena receptora e Z_0 é a impedância característica do espaço livre. Então, substituindo o campo elétrico pelo valor da Equação (4.39) e utilizando $Z_0 = 120\pi$, tem-se as Equações (4.41a) e (4.41b).

$$P_R = \frac{\left[2|E_d| \sin\left(\frac{2\pi h_T h_R}{\lambda d}\right)\right]^2 A}{120\pi} \quad (4.41a)$$

$$P_R = \frac{4|E_d|^2 \sin^2\left(\frac{2\pi h_T h_R}{\lambda d}\right) A}{120\pi} \quad (4.41b)$$

Utilizando a Equação (4.10c), pode-se escrever que $E_d = \frac{\sqrt{30P_T G_T}}{d}$, então obtém-se as Equações (4.42a) e (4.42b).

$$P_R = \frac{4\left(\frac{30P_T G_T}{d^2}\right) \sin^2\left(\frac{2\pi h_T h_R}{\lambda d}\right) A}{120\pi} \quad (4.42a)$$

$$P_R = \frac{P_T G_T \sin^2 \left(\frac{2\pi h_T h_R}{\lambda d} \right) A}{\pi d^2} \quad (4.42b)$$

Como a área efetiva da antena receptora é dada por $A = \frac{G_R \lambda^2}{4\pi}$, então a relação entre as potências recebida e transmitida é tal como mostrada na Equação (4.43).

$$\frac{P_R}{P_T} = G_T G_R \left(\frac{\lambda}{2\pi d} \right)^2 \sin^2 \left(\frac{2\pi h_T h_R}{\lambda d} \right) \quad (4.43)$$

Como foi considerado incidência rasante ($d \gg h_T, h_R$), pode-se aproximar $\sin \left(\frac{2\pi h_T h_R}{\lambda d} \right) \approx \frac{2\pi h_T h_R}{\lambda d}$. Dessa maneira, a Equação (4.43) torna-se a Equação (4.44b).

$$\frac{P_R}{P_T} = G_T G_R \left(\frac{\lambda}{2\pi d} \right)^2 \left(\frac{2\pi h_T h_R}{\lambda d} \right)^2 \quad (4.44a)$$

$$\frac{P_R}{P_T} = G_T G_R \left(\frac{h_T h_R}{d^2} \right)^2 \quad (4.44b)$$

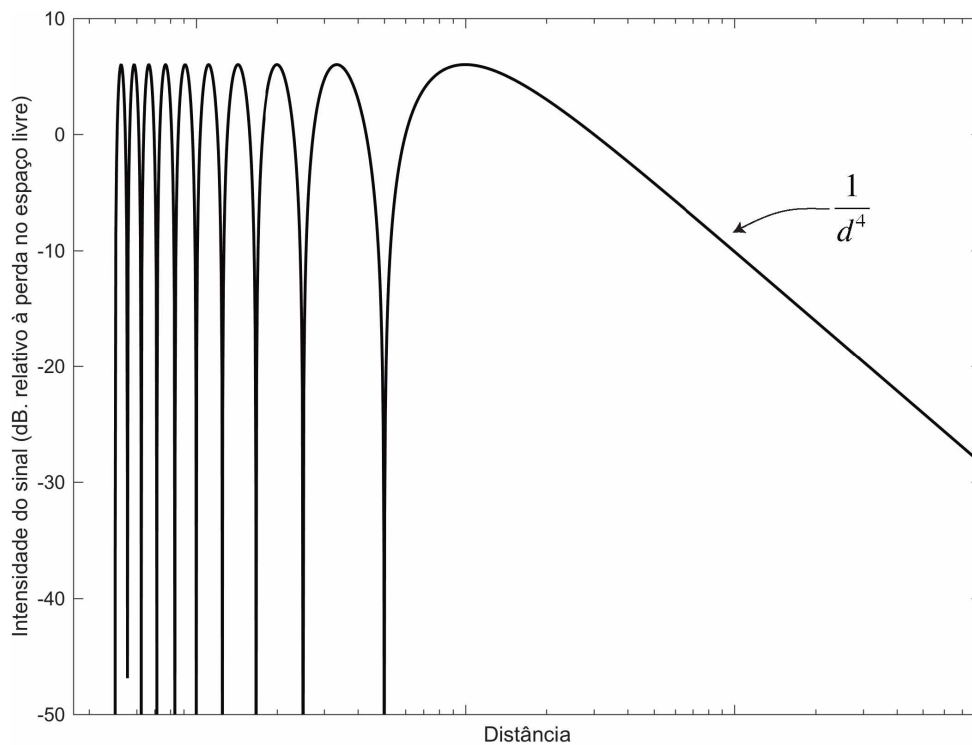
A Equação (4.44b) é conhecida como a equação da propagação em terreno plano. Quando comparada com a Equação para o espaço livre, Equação (4.7b), existem duas diferenças importantes:

- Como foi considerada incidência rasante, a diferença de fase entre os raios direto e refletido é muito pequena e, com isso, o termo do comprimento de onda foi cancelado, tornando a Equação (4.44b) independente da frequência [4];
- Na Equação (4.44b), a potência recebida tem relação com o inverso da quarta potência da distância. Por outro lado, na Equação (4.7b), a relação é com o inverso do quadrado da distância, ou seja, na Equação (4.44b) existe uma queda mais rápida da potência recebida com o aumento da distância [4].

Além disso, é muito importante ressaltar que a Equação (4.44b) é válida apenas para situações onde $d \gg h_T, h_R$. Próximo ao transmissor, onde, geralmente, essa condição não é satisfeita, a Equação (4.43) deve ser utilizada e a intensidade do sinal recebido oscila, conforme mostra a Figura 33.

Para distâncias menores, a Figura 33 mostra, claramente, as oscilações da intensidade do sinal. Conforme a distância aumenta, o comportamento é o mesmo da Equação (4.44b), na qual a potência recebida cai com a quarta potência da distância.

Figura 33 – Variação da intensidade do sinal recebido para o modelo de terreno plano.



Fonte: *The Mobile Radio Propagation Channel* [4].

Como de costume, pode-se expressar a perda de potência da Equação (4.44b) em decibéis. Definindo L_{PE} como a perda da propagação em terreno plano (de *plane Earth loss*), seu valor é calculado pelas Equações (4.45a) a (4.45c).

$$L_{PE} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_T}{P_R} \right) \quad (4.45a)$$

$$L_{PE} = -10 \log_{10} \left[G_T G_R \left(\frac{h_T h_R}{d^2} \right)^2 \right] \quad (4.45b)$$

$$L_{PE} = -10\log_{10}(G_T) - 10\log_{10}(G_R) - 20\log_{10}(h_T) - 20\log_{10}(h_R) + 40\log_{10}(d) \quad (4.45c)$$

Considerando antenas isotrópicas, a perda básica da propagação em terreno plano é obtida pela Equação (4.46).

$$L_{BPE} = -20\log_{10}(h_T) - 20\log_{10}(h_R) + 40\log_{10}(d) \quad (4.46)$$

Finalmente, é importante considerar que o modelo de terreno plano é razoavelmente preciso quando a curvatura da Terra pode ser desconsiderada. É possível estabelecer um limite para sua utilização em função da distância entre os terminais de acordo com a Equação (4.47) [14].

$$d \leq \frac{80,4672}{\sqrt[3]{f_{\text{MHz}}}} \quad [\text{km}] \quad (4.47)$$

Para distâncias maiores do que a encontrada pela Equação (4.47), a curvatura da Terra começa a ter efeito significativo sobre a intensidade do campo. A Tabela 3 mostra a relação entre as distâncias máximas e a frequência de operação.

Tabela 3 – Distâncias máximas para utilização do modelo de terreno plano.

Frequência	Distância
30 MHz	25,9 km
300 MHz	12 km
3000 MHz	5,58 km

Fonte: Elaborada pelo autor.

Quando a distância entre os terminais é grande o suficiente de modo que a curvatura da Terra deva ser considerada, então o modelo de terreno esférico, apresentado na Equação (4.37), é que deve ser utilizado para o cálculo de campo.

4.6 Propagação na Troposfera

4.6.1 A troposfera

A troposfera é a região da atmosfera que se estende da superfície da Terra até altitudes em torno de 8 a 10 quilômetros em regiões polares, 10 a 12 quilômetros em latitudes moderadas e 16 a 18 quilômetros no equador. Na troposfera, a porcentagem de gases é praticamente constante com a altitude, com exceção do

vapor de água, que é fortemente dependente das condições do tempo e, normalmente, muito decrescente com a altitude.

Além disso, uma das características mais importantes da troposfera é que sua temperatura também é decrescente com a altitude. O gradiente vertical médio de temperatura da troposfera é $6^{\circ}\text{C}/\text{km}$, sendo, aproximadamente, $5^{\circ}\text{C}/\text{km}$ na baixa troposfera e $7^{\circ}\text{C}/\text{km}$ na alta troposfera. No fim na alta troposfera, existe uma fronteira delimitadora que é chamada de tropopausa: uma camada estreita de temperatura constante.

A principal causa da diminuição gradual da temperatura do ar com a altitude está no fato de que a troposfera é, praticamente, transparente aos raios solares. Desse modo, os raios que passam por ela causam pouquíssimo aquecimento, mas atingem a superfície da Terra e são absorvidos. Desse modo, a superfície da Terra aquece e se comporta como uma fonte de radiação de calor para o ar da baixa troposfera. Mais ainda, o aquecimento não uniforme em diferentes áreas da superfície terrestre produzem correntes de ar ascendentes e descendentes que resultam em turbulências e na mistura de massas de ar. Todos esses efeitos combinados contribuem para a determinação da temperatura na troposfera.

Embora a troposfera seja uma camada pequena, comparada à toda a atmosfera, quatro quintos de toda a massa de ar se encontram nela, portanto, essa camada tem grande responsabilidade na pressão atmosférica e o gradiente de pressão é expressivo no seu interior. A pressão média na superfície terrestre é de 1014 milibares, aproximadamente 1 atm.; em uma altitude de 5 km, a pressão média passa para, aproximadamente, 0,5 atm.; em 11 km, 0,22 atm. e, em 17 km (final da troposfera), a pressão média é cerca de 0,09 atm.

O vapor de água contido na troposfera é proveniente da evaporação da água dos oceanos, rios e reservatórios e, por isso, a troposfera acima de corpos d'água carrega mais umidade. Em geral, a quantidade de vapor de água na troposfera diminui rapidamente com a altitude. Em 1,5 km, essa quantidade é, aproximadamente, metade daquela encontrada na superfície e, no final da troposfera, chega a milésimos.

As características chave para caracterizar a troposfera são pressão, temperatura absoluta e umidade absoluta. Em 1925, a Comissão Internacional para Aeronavegação definiu a atmosfera padrão internacional, mais conhecida apenas

como atmosfera padrão. Ela é uma troposfera hipotética composta por um conjunto selecionado de características que refletem as condições médias da atmosfera real.

A atmosfera padrão considera uma pressão de 1 atm. a nível do mar, temperatura do mar de 15°C e uma umidade relativa de 60%. Também considera que a pressão e a temperatura decaem a taxas fixas de 0,012 atm. e 0,55°C a cada 100 m de altitude.

4.6.2 Índice de refração da troposfera

Do ponto de vista do índice de refração, a troposfera pode ser tratada como uma mistura de ar seco e vapor de água. Para cada um desses componentes, o índice de refração é uma quantidade conhecida. Assim, o índice de refração da mistura pode ser encontrado a partir da quantidade de vapor de água na atmosfera, da pressão parcial de ar seco e da pressão parcial de vapor de água, uma vez que a refratividade de uma mistura pode ser calculada pela soma das refratividades das partes individuais.

Em frequências de rádio (abaixo de 100 GHz), a propagação na atmosfera é afetada principalmente pelas moléculas de oxigênio e de vapor de água. Em uma aproximação, o ar pode ser considerado como um meio não dispersivo nas frequências de rádio e a parte real do índice de refração é dada pela fórmula de Debye, da Equação (4.48) [30].

$$n = 1 + \frac{77,6}{10^6 T} \left(P + \frac{4810e}{T} \right) \quad (4.48)$$

em que P é a pressão atmosférica em milibares, T é a temperatura em Kelvin e e é a pressão do vapor de água em milibares.

Entretanto, como o índice de refração da troposfera na superfície da Terra é cerca de 1,0003, é mais conveniente trabalhar com o índice de refração excessivo, N , definido na Equação (4.49). Ele é o excesso, acima da unidade, do índice de refração, expresso em milionésimos. Isso é feito apenas para se trabalhar com números não tão pequenos.

$$N = (n - 1)10^6 \quad (4.49)$$

$$N = \frac{77,6}{T} \left(P + \frac{4810e}{T} \right) \quad (4.50)$$

Em uma atmosfera balanceada, a pressão, temperatura e umidade tendem a diminuir exponencialmente em função da altitude. Isso resulta em um modelo exponencial para N , da forma da Equação (4.51).

$$N = N_0 e^{-\frac{h}{h_0}} \quad (4.51)$$

em que N_0 é a refratividade ao nível do mar e h_0 é uma altitude de escala. Para a atmosfera padrão, definida pela ITU [31], a refratividade é dada pela Equação (4.52).

$$N = 315 e^{-0,136 h_{\text{km}}} \quad (4.52)$$

Em altitudes até 1 km, o perfil de refratividade exponencial pode ser aproximado por um perfil linear e a refratividade da atmosfera padrão pode ser representada pela Equação (4.53).

$$N = N_0 - 39 h_{\text{km}} \quad (4.53)$$

em que o gradiente de -39 unidades-N/km é um gradiente médio representativo de climas em latitude média. Dependendo da temperatura e umidade locais, esse gradiente do primeiro quilômetro pode variar fortemente [32].

4.6.3 Efeitos da troposfera na propagação de rádio

A troposfera, portanto, é um dielétrico não homogêneo cujo índice de refração varia com a altitude. Como consequência, a velocidade de propagação das ondas eletromagnéticas também acaba por ser variável. Além disso, como as propriedades desse dielétrico variam continuamente com o tempo, podem ocorrer formação, movimento ou desaparecimento de não-homogeneidades locais superpostas às variações lentas normais e isso leva à flutuações no índice de refração.

Em frequências acima de 30 MHz, três situações são de maior influência na propagação:

- presença de flutuações locais no índice de refração, que causam espalhamento;
- mudanças abruptas no índice de refração como função da altitude, que podem causar reflexão;
- surgimento de camadas com mudanças muito bruscas no índice de refração, que podem gerar dutos atmosféricos.

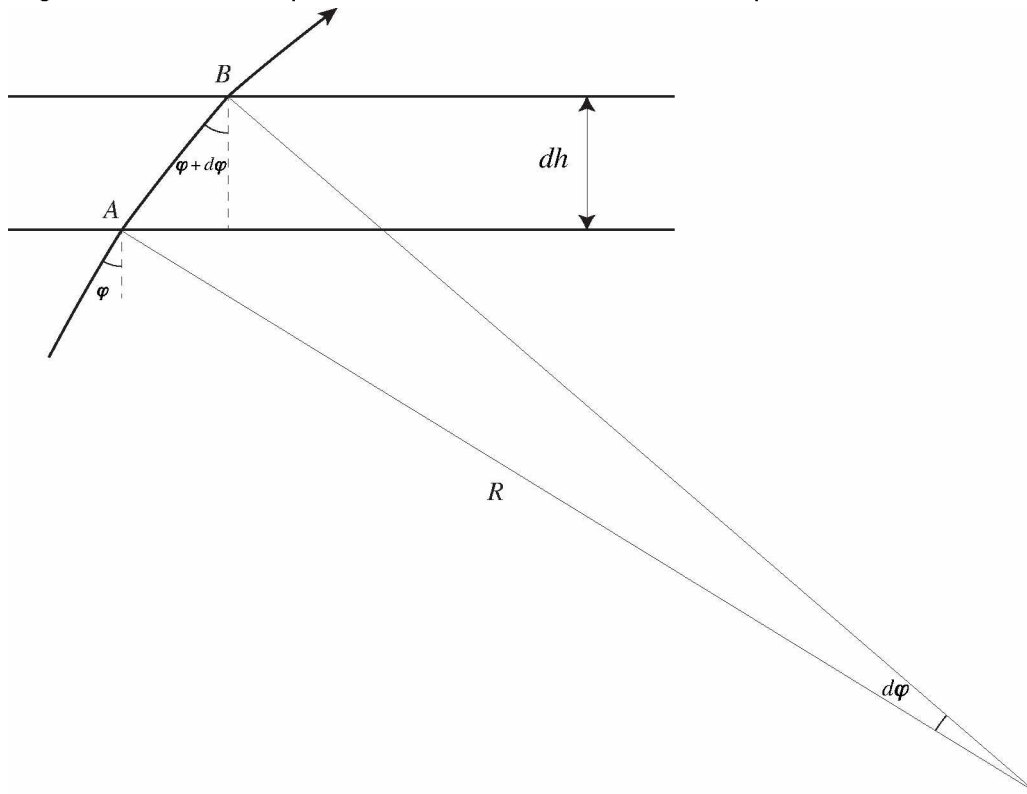
Todos esses mecanismos podem carregar energia além do horizonte ótico normal e têm o potencial de causar interferência entre diferentes sistemas de comunicação. O espalhamento troposférico é suficientemente confiável e até pode ser utilizado como um mecanismo para comunicações de longa distâncias, especialmente em frequências entre 300 MHz e 10 GHz. Já os mecanismos de reflexão e de criação de dutos são muito imprevisíveis para serem utilizados intencionalmente.

4.6.4 A refração atmosférica

De todas as influências que a atmosfera pode exercer nos sinais de rádio, a refração é a que exerce maior efeito nos sistemas VHF e UHF. As mudanças na constante dielétrica do ar com a altitude fazem com que as ondas eletromagnéticas sejam curvadas e propaguem em caminhos curvos que as mantêm mais próximas da superfície da Terra do que se viajassem em linhas retas.

A refração atmosférica, primeiramente notada no Século II a.c [30], consiste no fato de um raio de luz, ou onda eletromagnética, encontrar variações no índice de refração ao longo de sua trajetória, o que faz com que seu percurso se torne curvo. Para sistematizar esse efeito, é preciso considerar, por simplicidade, que a troposfera é estratificada e consiste de camadas sucessivas de índice de refração constante e paralelas à superfície terrestre. O índice de refração de uma camada é n e o índice de refração da camada adjacente superior é $n + dn$. A Figura 34 traz a geometria necessária para essa análise [30].

Figura 34 – Geometria para determinar o raio de curvatura do percurso de uma onda.



Fonte: *Propagation of Radio Waves* [30].

Assim, um raio incidente na primeira camada em um ângulo φ e refratado por uma distância dh irá incidir na camada superior em um ângulo $\varphi + d\varphi$. Como o vetor diretor do percurso do raio sofreu uma mudança de direção de $d\varphi$, esse mesmo ângulo $d\varphi$ é encontrado entre as normais à esses vetores, ou seja, o ângulo no centro de curvatura.

Portanto, o raio de curvatura pode ser dado pela Equação (4.54) [30].

$$R = \frac{\overline{AB}}{d\varphi} \quad (4.54)$$

Por trigonometria, chega-se à Equação (4.55).

$$R = \frac{dh}{\cos \varphi d\varphi} \quad (4.55)$$

Em meios com índice de refração gradualmente variável, a lei de Snell da refração deve ser válida em qualquer ponto, portanto, pode-se escrever a Equação (4.56b).

$$n \sin \varphi = (n + dn) \sin(\varphi + d\varphi) \quad (4.56a)$$

$$n \sin \varphi = n \sin(\varphi) + n d\varphi \cos \varphi + dn \sin \varphi + dn d\varphi \cos \varphi \quad (4.56b)$$

As infinitesimais de segunda ordem podem ser desconsideradas, então chega-se à Equação (4.57).

$$\cos \varphi d\varphi = -\frac{dn \sin \varphi}{n} \quad (4.57)$$

Substituindo a Equação (4.57) na Equação (4.55), o raio de curvatura passa a ser expresso pela Equação (4.58).

$$R = \frac{n}{\left(-\frac{dn}{dh}\right) \sin \varphi} \quad (4.58)$$

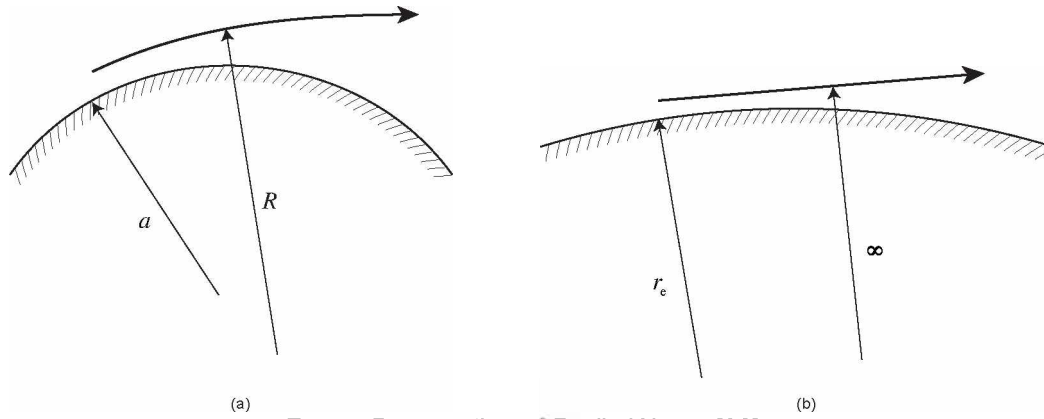
Considerando a propagação próxima à superfície e ângulos de elevação pequenos, $n \cong 1$ e $\sin \varphi \cong 1$, o raio da Equação (4.58) pode ser aproximado pela Equação (4.59) [30].

$$R \cong \frac{1}{\left(-\frac{dn}{dh}\right)} = \frac{10^6}{\left(-\frac{dN}{dh}\right)} \quad (4.59)$$

A Equação (4.59) mostra que, na baixa troposfera, o raio de curvatura dos raios é definido apenas pela variação da refratividade, não pelo seu valor absoluto. Além disso, é possível perceber que, sempre que o índice de refração diminui com a altitude, o raio de curvatura será positivo. Para uma atmosfera padrão, com gradiente de -39 unidades-N/km, o raio de curvatura é de 25640 km.

Como visto, o percurso dos raios é curvado e a superfície da Terra também é, como ilustra a geometria da Figura 35, onde um raio emitido paralelamente à superfície é curvado para baixo, mas não o suficiente para alcançar o solo. Essa geometria, de raios curvos propagando sobre uma superfície curva é complicada de se lidar e, em cálculos práticos, é comum reduzir essa complexidade utilizando um raio efetivo para a Terra, de modo que os raios propaguem em linha reta [30].

Figura 35 – Percurso de um raio (a) sobre a Terra verdadeira e (b) sobre a Terra equivalente.



Fonte: *Propagation of Radio Waves* [30].

Esse método foi introduzido em 1933 por Schelling, Burrows e Ferrel [33] e assume um raio de curvatura maior para a Terra. Em geometria analítica, curvatura relativa é definida como a diferença entre duas curvaturas. Como a curvatura relativa entre o raio e a Terra da situação real deve ser a mesma na situação efetiva, pode-se escrever a Equação (4.60) e o raio efetivo da Terra é dado pela Equação (4.61).

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{R} = \frac{1}{r_e} - \frac{1}{\infty} \quad (4.60)$$

$$r_e = \frac{a}{1 - a/R} \quad (4.61)$$

Substituindo a Equação (4.59) na Equação (4.61), o raio efetivo pode ser dado pela Equação (4.62).

$$r_e = \frac{a}{1 + a \frac{dN}{dh} 10^{-6}} \quad (4.62)$$

Desse modo, a razão entre o raio efetivo e o raio real da Terra, ou seja, o fator de raio efetivo, ou fator k , é dado pela Equação (4.63).

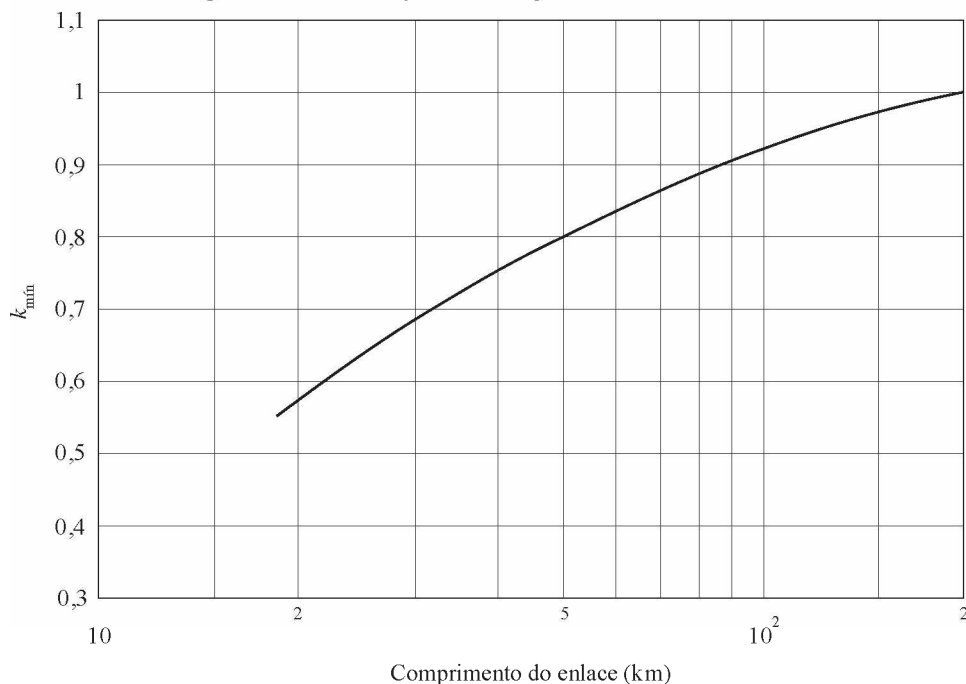
$$k = \frac{r_e}{a} = \frac{1}{1 + a \frac{dN}{dh} 10^{-6}} \quad (4.63)$$

Para a atmosfera padrão, o fator k vale, aproximadamente, $4/3$. A análise de terreno esférico só foi possível em termos da geometria de raios retos da Figura 30 porque foi feita considerando um raio efetivo.

Deve-se atentar que variações nas condições atmosféricas podem causar alterações no valor médio de $4/3$ do fator k para a atmosfera padrão. Estatísticas do fator k podem ser determinadas a partir de medidas ou predições do gradiente de refratividade nos primeiros 100 metros da troposfera e deve ser feita a média desses gradientes para obter um valor efetivo do fator k para a distância de propagação em questão.

Para propagação em frequências entre 2 GHz e 13 GHz e distâncias de propagação maiores que 17 km, deve-se considerar dois valores para o fator k : o médio e o mínimo. Os cálculos devem ser feitos para utilizando o valor de fator k que representa a pior condição de propagação. O valor mínimo do fator k pode ser obtido na curva da Figura 36.

Figura 36 – Curva para obtenção do fator k mínimo.



Fonte: Recomendação ITU-R P. 530-16 [34].

A discussão sobre refração atmosférica iniciou considerando um cenário de atmosfera padrão. Entretanto, as condições climáticas da troposfera podem levar à distribuições de índice de refração substancialmente diferentes dessa condição média e, obviamente, os efeitos da refração serão diferentes.

De maneira simples, existem três principais classificações para a refração atmosférica: negativa, positiva ou zero. A refração é dita negativa quando $dN/dh > 0$, ou seja, quando a refratividade aumenta com a altitude (ao contrário das condições normais). Nesses casos, de acordo com a Equação (4.59), o raio de curvatura será negativo e os raios são direcionados para cima. Com isso, as ondas propagam para longe da superfície terrestre e o alcance da propagação diminui.

Por outro lado, as condições atmosféricas podem ser tais que a refratividade permaneça constante em algum intervalo de altitudes. Nesse caso, haverá refração zero, o raio de curvatura será infinito e os raios tendem a propagar em linhas retas.

A refração positiva ocorre quando $dN/dh < 0$ e o raio de curvatura é positivo. Nesses casos, os raios se curvam em direção à Terra e, conseqüentemente, o alcance da propagação aumenta. A refração positiva pode ser subdividida em [30]:

- sub-refração: quando a curvatura é menor do que a curvatura da atmosfera padrão;
- refração padrão: refração em atmosfera padrão);
- refração aumentada: quando a curvatura dos raios é um pouco maior do que na refração padrão e menor do que a curvatura da Terra;
- crítica: quando a curvatura é a mesma da Terra;
- super-refração: quando a curvatura dos raios é maior do que a da Terra.

Para estabelecer limites de dN/dh para esses tipos de refração, basta comparar as curvaturas dos raios. No caso da sub-refração, a curvatura dos raios deve ser menor do que a curvatura da atmosfera padrão, então tem-se as Equações (4.63a) a (4.63c).

$$0 < \frac{1}{R} < \frac{1}{R'} \quad (4.63a)$$

$$0 < \frac{-\frac{dN}{dh}}{10^6} < \frac{-(-39)}{10^6} \quad (4.63b)$$

$$-39 < \frac{dN}{dh} < 0 \quad \text{unidades-N/km} \quad (4.63c)$$

Para a refração padrão, $\frac{dN}{dh} = -39$ unidades-N/km . Para a refração aumentada, tem-se as Equações (4.64a) a (4.64c).

$$\frac{1}{R'} < \frac{1}{R} < \frac{1}{r_e} \quad (4.64)$$

$$\frac{39}{10^6} < \frac{-\frac{dN}{dh}}{10^6} < \frac{1}{6370,008} \quad (4.64b)$$

$$-157 < \frac{dN}{dh} < -39 \text{ unidades-N/km} \quad (4.64c)$$

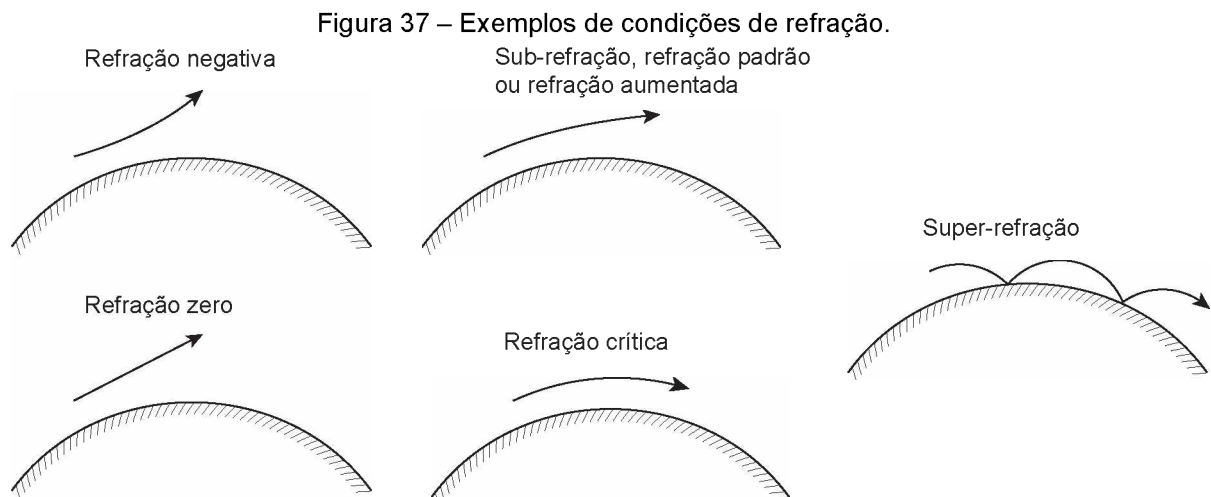
Para a refração crítica, $\frac{dN}{dh} = -157$ unidades-N/km . E, para a super-refração, tem-se as Equações (4.65a) a (4.65c).

$$\frac{1}{R} > \frac{1}{r_e} \quad (4.65a)$$

$$\frac{-\left(\frac{dN}{dh}\right)}{10^6} > \frac{1}{6370,008} \quad (4.65b)$$

$$\frac{dN}{dh} < -157 \text{ unidades-N/km} \quad (4.65c)$$

A Figura 37 mostra alguns esboços da trajetória de raios nessas condições.

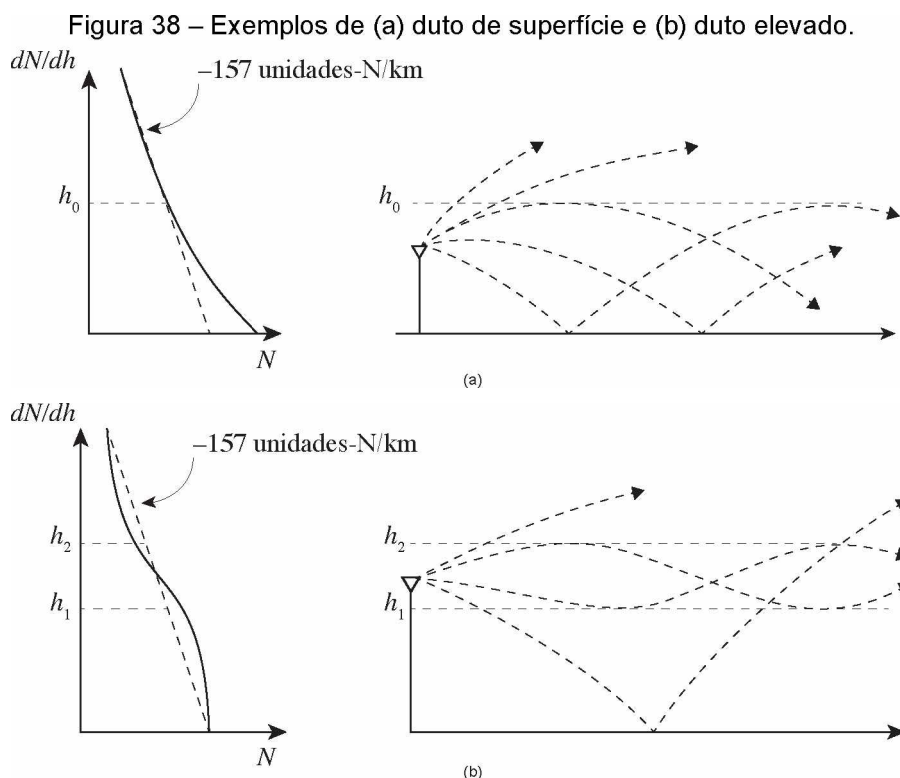


Fonte: Adaptada de *Propagation of Radio Waves* [30].

4.6.5 Propagação anômala

Em certas regiões, o índice de refração pode apresentar taxas de variação bem diferentes da condição padrão. Há casos em que a refratividade pode variar mais rapidamente ou mais lentamente do que o gradiente crítico de -157 unidades-N/km.

Próximo à superfície, $dN/dh < -157$ unidades-N/km e, acima de uma altitude h_0 , $dN/dh > -157$ unidades-N/km. Abaixo de h_0 , os raios emitidos pelas antenas em pequenos ângulos de elevação são refratados para a superfície da Terra e nela são refletidos. Esse processo se repete, como ilustrado na Figura 38(a), de modo que o campo é aprisionado, ou guiado, na camada inferior a h_0 próxima à superfície da Terra. Esse fenômeno é conhecido como aprisionamento ou duto. Assim, as ondas de rádio propagam enormes distâncias e com muito menos atenuação do que no espaço livre. É um processo semelhante ao que ocorre entre a Terra e a ionosfera em baixas frequências e pode causar interferência em sistemas distantes. Alguns raios lançados com grandes ângulos de elevação são pouco afetados e continuam um percurso normal. Quando a alteração no gradiente ocorre em uma altitude elevada, os dutos podem se formar bem acima da superfície terrestre, como ilustra a Figura 38(b), e inúmeros raios podem ser aprisionados no duto.



Fonte: *The Mobile Radio Propagation Channel* [4].

Os dutos podem se formar próximos à superfície terrestre (dutos de superfície) ou em altitudes de até 1500 m (dutos elevados) e, para aproveitar seu guiamento, as antenas de transmissão e recepção devem estar localizadas dentro deles para um acoplamento ideal do campo dentro do duto. A espessura dos dutos pode variar entre alguns metros e centenas deles. Além disso, os raios devem ser lançados praticamente na horizontal para se ter um bom guiamento e o comprimento de onda deve ser apropriado.

O comprimento de onda máximo que pode ser aprisionado em um duto depende da espessura do duto, de acordo com a Equação (4.66) [4].

$$\lambda \cong 8,5 \cdot 10^{-4} \sqrt{h_0^3} \quad (4.66)$$

em que h_0 é a espessura do duto. Em geral, essa espessura é cerca de 1,5 a 2 m.

Por exemplo, o comprimento de onda máximo que pode ser aprisionado em um duto de espessura 100 m é de, aproximadamente, 0,85, ou seja, uma frequência de 353 MHz. Por isso, as condições mais favoráveis para utilização de dutos estão nas bandas VHF e UHF.

A formação de dutos é causada, principalmente, por variações na quantidade do vapor de água na troposfera. Por essa razão, é mais comum ocorrer nas proximidades de grandes corpos d'água, devido aos efeitos de advecção de massas de ar quente e seco sobre massas mais frias. Além disso, podem ocorrer pela inversão térmica de fortes geadas noturnas. Por fim, uma atmosfera estável é essencial para que os dutos ocorram. Eles são mais observados em condições atmosféricas calmas e sobre porções de água ou planícies.

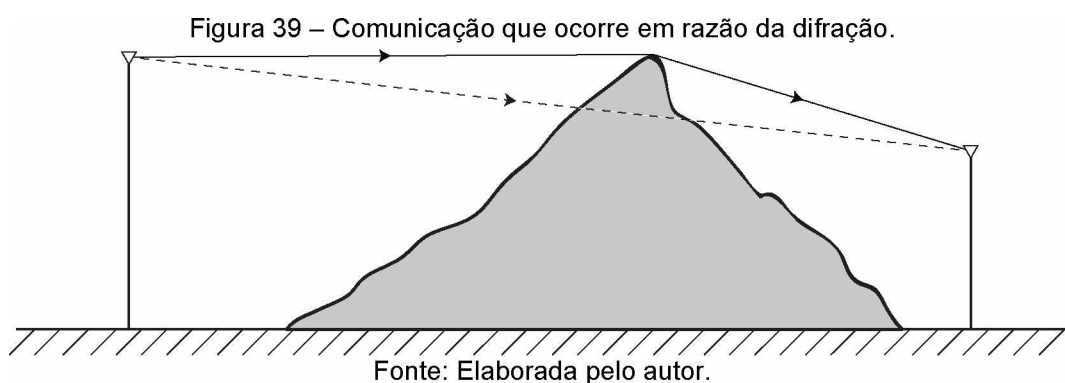
4.7 Propagação por Difração

A difração é um fenômeno muito importante quando se trata de propagação de ondas, tanto eletromagnéticas, como mecânicas. O mecanismo da difração é fundamental, pois permite que os sinais de rádio se propaguem ao redor da superfície curvada da Terra, além do horizonte, e, também, “contornem” obstáculos existentes na linha de visada entre os terminais.

Por outro lado, o “custo” da difração é a atenuação que o sinal experimenta (principalmente à medida que o receptor se aproxima da região sombreada pelos

obstáculos). Ainda assim, muitas vezes, o campo difratado continua com intensidade suficiente para produzir um sinal utilizável no receptor. Portanto, muitas vezes, a comunicação apenas ocorre devido ao fenômeno da difração.

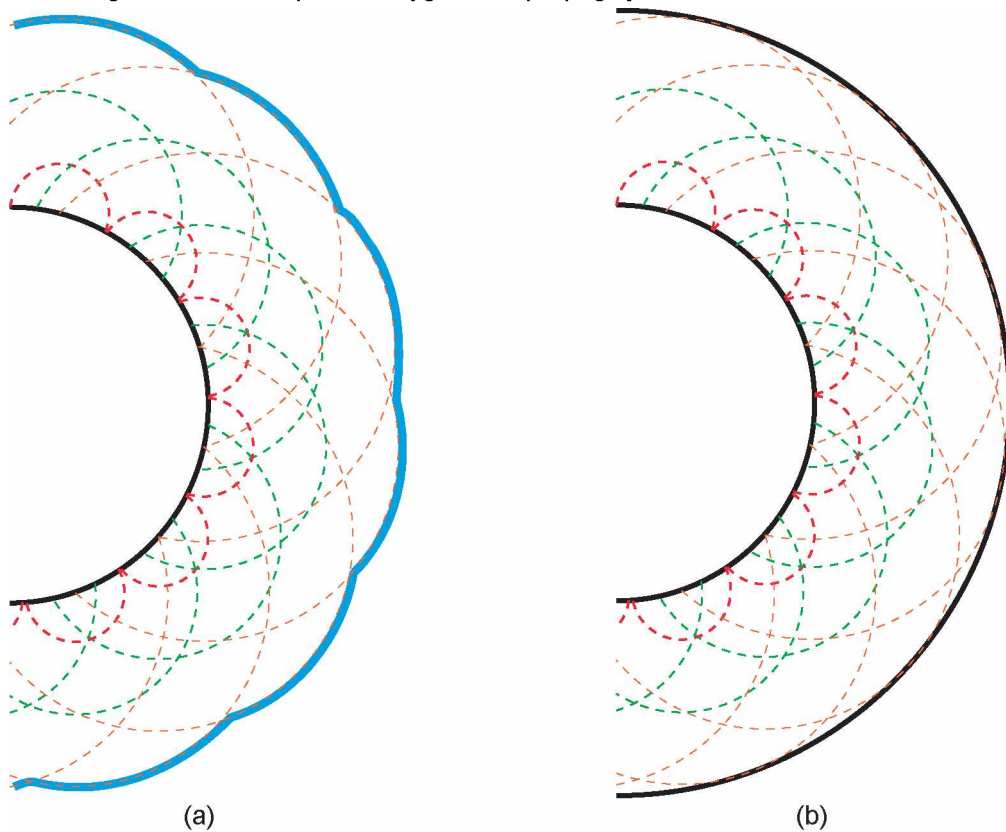
A Figura 39 ilustra o que ocorre na difração. O raio direto (tracejado) é impedido pela obstrução, mas, mesmo assim, a comunicação pode ocorrer, como mostram os raios com traço cheio. A qualidade da comunicação depende se a intensidade do campo difratado (que foi atenuado) é suficiente para a aplicação.



O fenômeno da difração pode ser explicado pelo princípio de Huygens. Ele pode ser deduzido através das equações de Maxwell e é muito útil na solução desse problema de propagação. Segundo Huygens, cada ponto de uma frente de onda se comporta como uma fonte pontual de outras pequenas ondaletas (ou “ondinhas”), de maneira que a composição de todas elas forma uma nova frente de onda na mesma direção e sentido de propagação originais.

A Figura 40 ilustra esse efeito para uma frente de onda esférica. Pode-se observar, na Figura 40(a), que os centros dos arcos vermelhos são pontos da frente de onda original. Esses pontos geram novas ondaletas (tracejadas em vermelho, verde e laranja) que interferem entre si e formam uma nova frente de onda (azul claro). Imaginando que isso ocorre em infinitos pontos da frente de onda original, a Figura 40(b) mostra o resultado da nova frente de onda formada.

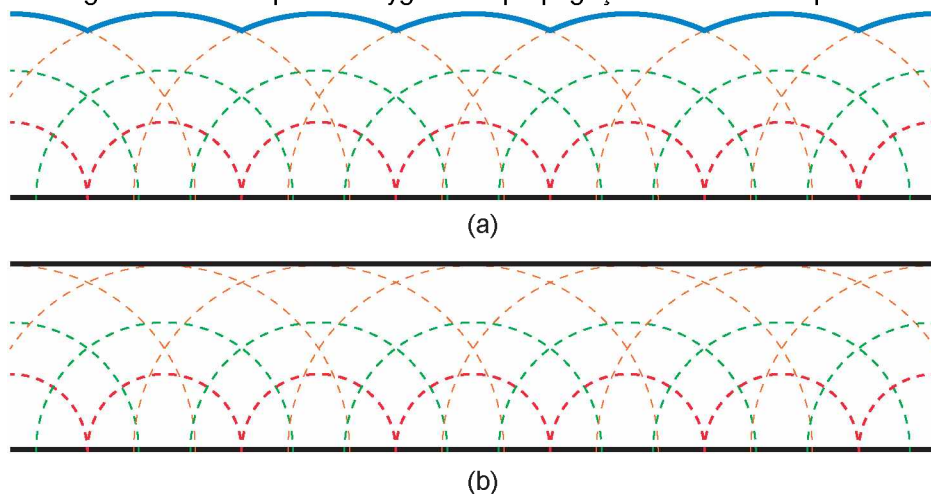
Figura 40 – Princípio de Huygens na propagação de uma onda esférica.



Fonte: Elaborada pelo autor.

De modo semelhante, o princípio de Huygens também pode ser aplicado no caso de uma onda plana, como mostrado na Figura 41. Da mesma forma, na Figura 41(a), os centros dos arcos vermelhos são pontos da frente da onda original que geram novas ondaletas (tracejadas em vermelho, verde e laranja), as quais formam uma nova frente de onda (azul claro). Estendendo esse conceito para infinitos pontos, a Figura 41(b) mostra o resultado da nova frente de onda formada.

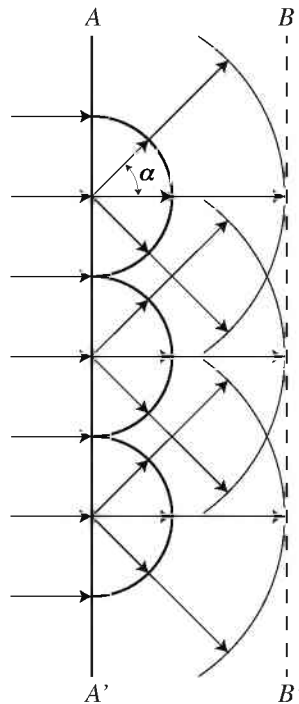
Figura 41 – Princípio de Huygens na propagação de uma onda plana.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Visto o funcionamento do princípio de Huygens, é preciso uma análise mais detalhada para o entendimento da difração. A Figura 42 mostra uma frente de onda plana na posição AA' em determinado instante de tempo. Conforme Huygens, pequenas ondas se originam de cada ponto do segmento AA' e formam uma nova frente de onda na posição BB' após certo intervalo de tempo.

Figura 42 – Propagação de uma onda plana.



Fonte: *The Mobile Radio Propagation Channel* [4].

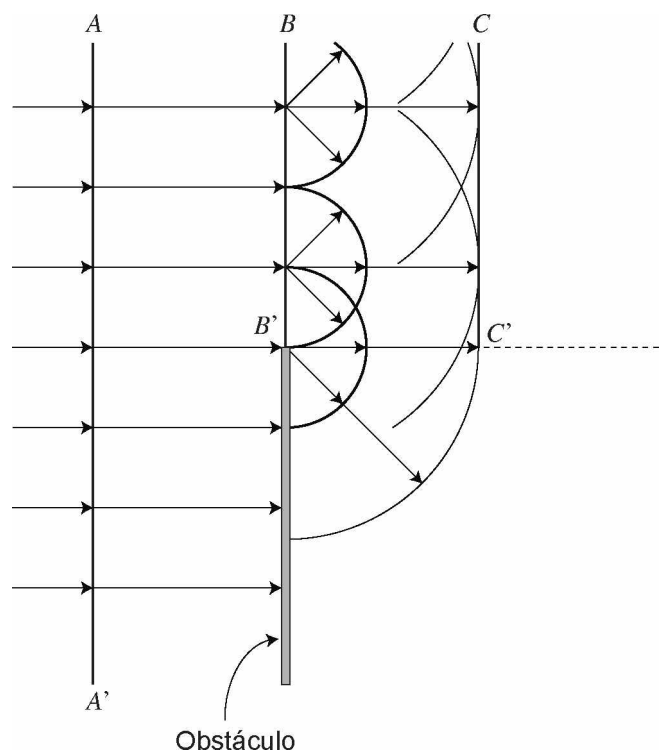
Então, sabendo que a onda propaga apenas na direção e sentido de AA' para BB' , é possível inferir que as fontes pontuais ao longo de AA' não podem ser isotrópicas, ou seja, a amplitude das pequenas ondas secundárias não é uniforme em todas as direções. Para modelar isso, considera-se um ângulo α entre uma direção qualquer e a direção de propagação da onda plana, como está ilustrado na Figura 42. É razoável afirmar que a amplitude de uma onda secundária é proporcional a $\cos^2(\alpha/2)$. Isso satisfaz duas condições essenciais:

- Na direção de propagação, a amplitude é proporcional a $\cos^2 0 = 1$. Essa amplitude é máxima. Em qualquer outra direção, ela será menor;
- Na direção oposta à de propagação ($\alpha = 180^\circ$), a amplitude é proporcional a $\cos^2(90^\circ) = 0$, ou seja, é nula.

As duas condições anteriores garantem que a onda propague na direção e sentido de AA' para BB' . Além disso, o fato de se considerar que infinitos pontos em AA' geram ondas secundárias torna AA' uma fonte contínua e distribuída de ondas eletromagnéticas. Logo, o campo em BB' é obtido por uma expressão integral. A solução dessa equação integral mostra que o valor do campo, em qualquer ponto de BB' , é exatamente o mesmo que no ponto mais próximo em AA' , mas com a fase atrasada de $2\pi d/\lambda$ (d é a distância entre BB' e AA'). Dessa maneira, fica claro que o comportamento das ondas é de propagar ao longo de linhas retas normais à frente de onda. No entanto, esse resultado se aplica apenas se a frente de onda for infinita ou, na prática, se AA' for grande comparado ao comprimento de onda.

Por outro lado, a Figura 43 mostra uma situação em que uma frente de onda encontra um obstáculo e a suposição anterior não é válida.

Figura 43 – Difração de uma onda plana na quina de um obstáculo semi-infinito.



Fonte: *The Mobile Radio Propagation Channel* [4].

De acordo com a teoria de raios, após o obstáculo (considerado impenetrável ou perfeitamente absorvedor), existiria apenas uma frente de onda semi-infinita CC' , ou seja, não existiria campo eletromagnético na região sombreada abaixo da linha tracejada BC . No entanto, o princípio de Huygens mostra que as ondas secundárias originadas em todos os pontos de BB' propagam para a região sombreada, de modo

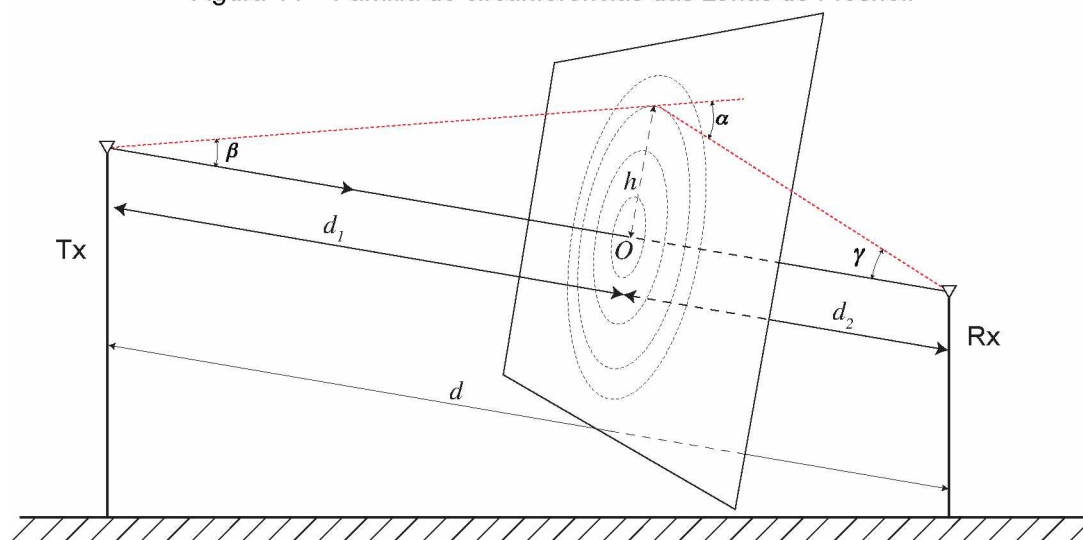
que o campo, nessa região, seja o resultado da interferência de todas elas. Este efeito, das ondas se encurvarem ao passar por uma obstrução, é chamado de difração.

Muitas vezes, é a difração que possibilita a comunicação, pois ela faz com que as ondas contornem os obstáculos. Evidentemente, isso acarreta perdas na intensidade do sinal e pode degradá-lo de forma que se torne inutilizável pelo sistema de comunicação. Então, é importante quantificar essa atenuação.

Seja um sistema de comunicação em que transmissor e receptor têm visada direta, como mostra a Figura 44. Nessa figura, foi desenhado um plano normal à linha de visada e algumas circunferências com centro no ponto O (esse ponto é a interseção do plano com a linha de visada). Evidentemente, o menor percurso Tx-Rx é o da linha de visada direta (percurso Tx- O -Rx). Qualquer outro caminho de propagação que passe por algum ponto das circunferências (o caminho em vermelho tracejado, por exemplo) terá comprimento maior. Essa família de circunferências é utilizada na definição das zonas de Fresnel, que são um importante parâmetro para análise da difração.

De acordo com a geometria da Figura 44, as Equações (4.67a) a (4.67c) calculam a diferença de percurso entre o raio direto e o raio vermelho tracejado.

Figura 44 – Família de circunferências das zonas de Fresnel.



Fonte: Elaborada pelo autor.

$$\Delta = \sqrt{d_1^2 + h^2} + \sqrt{d_2^2 + h^2} - (d_1 + d_2) \quad (4.67a)$$

$$\Delta = \sqrt{d_1^2 \left(1 + \frac{h^2}{d_1^2}\right)} + \sqrt{d_2^2 \left(1 + \frac{h^2}{d_2^2}\right)} - (d_1 + d_2) \quad (4.67b)$$

$$\Delta = d_1 \sqrt{1 + \frac{h^2}{d_1^2}} + d_2 \sqrt{1 + \frac{h^2}{d_2^2}} - (d_1 + d_2) \quad (4.67c)$$

Considerando $h \ll d_1, d_2$, $\frac{h^2}{d_1^2}, \frac{h^2}{d_2^2} \ll 1$. Com isso, pode-se utilizar a aproximação

$\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{x}{2}$ ($x \ll 1$) na Equação (4.67c). Assim, obtém-se as Equações (4.68a) a (4.68c).

$$\Delta \cong d_1 \left(1 + \frac{h^2}{2d_1^2}\right) + d_2 \left(1 + \frac{h^2}{2d_2^2}\right) - (d_1 + d_2) \quad (4.68a)$$

$$\Delta \cong \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}\right) \quad (4.68b)$$

$$\Delta \cong \frac{h^2}{2} \left(\frac{d_1 + d_2}{d_1 d_2}\right) \quad (4.68c)$$

Uma vez calculada a diferença de percurso, a diferença de fase entre os dois raios é calculada pelas Equações (4.69a) e (4.69b).

$$\Delta\phi = \frac{2\pi\Delta}{\lambda} \quad (4.69a)$$

$$\Delta\phi \cong \frac{\pi h^2}{\lambda} \left(\frac{d_1 + d_2}{d_1 d_2}\right) \quad (4.69b)$$

A Equação (4.70) define o parâmetro de difração de Fresnel-Kirchhoff como:

$$v = h \sqrt{\frac{2(d_1 + d_2)}{\lambda d_1 d_2}} \quad (4.70)$$

Então, a Equação (4.69b) torna-se a Equação (4.71).

$$\Delta\phi \cong \frac{\pi v^2}{2} \quad (4.71)$$

Pode-se, também, escrever a diferença de fase em função do ângulo α da Figura 44. Por geometria plana, sabe-se que α pode ser escrito como mostrado na Equação (4.72).

$$\alpha = \beta + \gamma \quad (4.72)$$

Então, a tangente de α pode ser encontrada utilizando as Equações (4.73a) a (4.73d).

$$\tan \alpha = \tan(\beta + \gamma) \quad (4.73a)$$

$$\tan \alpha = \frac{\tan \beta + \tan \gamma}{1 - \tan \beta \tan \gamma} \quad (4.73b)$$

$$\tan \alpha = \frac{\frac{h}{d_1} + \frac{h}{d_2}}{1 - \frac{h}{d_1} \frac{h}{d_2}} \quad (4.73c)$$

$$\tan \alpha = \frac{h \left(\frac{d_1 + d_2}{d_1 d_2} \right)}{1 - \frac{h^2}{d_1 d_2}} \quad (4.73d)$$

Como foi considerado que $h \ll d_1, d_2$, então $\frac{h^2}{d_1 d_2} \ll 1$ e esse termo pode ser desconsiderado da Equação (4.73d). Logo, obtém-se a Equação (4.74).

$$\tan \alpha = h \left(\frac{d_1 + d_2}{d_1 d_2} \right) \quad (4.74)$$

Ainda, porque $h \ll d_1, d_2$, pode-se fazer $\alpha \cong \tan \alpha$ e a Equação (4.74) é substituída pela Equação (4.75).

$$\alpha \cong h \left(\frac{d_1 + d_2}{d_1 d_2} \right) \quad (4.75)$$

Com isso, o parâmetro de Fresnel-Kirchhoff pode ser obtido pelas Equações (4.76a) e (4.76b).

$$v = \frac{\alpha \sqrt{\frac{2(d_1 + d_2)}{\lambda d_1 d_2}}}{\left(\frac{d_1 + d_2}{d_1 d_2} \right)} \quad (4.76a)$$

$$v = \alpha \sqrt{\frac{2d_1 d_2}{\lambda(d_1 + d_2)}} \quad (4.76b)$$

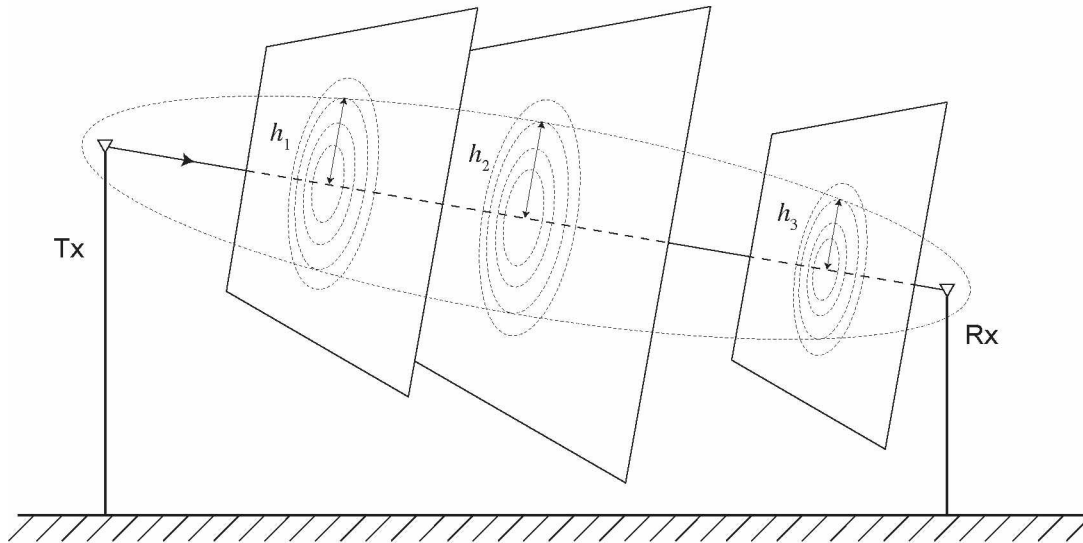
Portanto, a diferença de fase, em função de α , é obtida pela Equação (4.77).

$$\Delta\phi \cong \frac{\pi \alpha^2}{\lambda} \left(\frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} \right) \quad (4.77)$$

Anteriormente, foi citado neste capítulo que as circunferências desenhadas no plano da Figura 44 definem as zonas de Fresnel. Imaginando que se deseja construir tais circunferências de maneira que a diferença de caminho entre um raio que passa por alguma delas e o raio direto seja $n\lambda/2$, com n inteiro, então, claramente, os raios dessas circunferências dependerão da posição em que o plano foi traçado, como mostra a Figura 45.

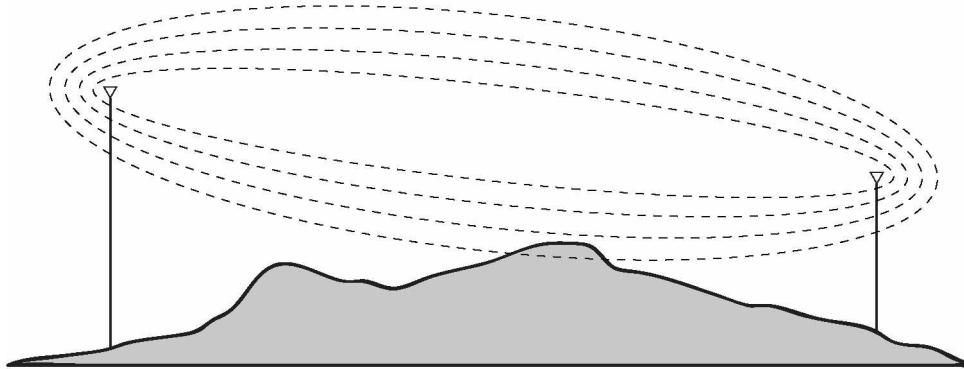
De acordo com a Figura 45 ($h_3 < h_1 < h_2$), os raios serão máximos na metade do caminho ($d_1 = d_2$) e diminuirão à medida que o plano se aproxima dos terminais. Dessa maneira, o lugar geométrico dos pontos em que a diferença de caminho é $n\lambda/2$ define uma família de elipsoides, como mostra a Figura 46 [4].

Figura 45 – Definição das zonas de Fresnel.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 46 – Elipsóides das zonas de Fresnel.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O volume do elipsoide para o qual $n=1$ é chamado de primeira zona de Fresnel; o volume compreendido entre esse primeiro elipsoide e o elipsoide para o qual $n=2$ é chamado de segunda zona de Fresnel, e assim por diante. Para cada posição de plano traçado, os raios das circunferências correspondentes aos membros da família podem ser encontrados em função de n , de acordo com a Equação (4.78).

$$h = r_n = \sqrt{\frac{n\lambda d_1 d_2}{d_1 + d_2}} \quad (4.78)$$

em que d_1 e d_2 definem a posição do plano.

A Figura 47(a) mostra um cenário semelhante ao da Figura 44, porém com um obstáculo colocado entre o transmissor e o receptor, mas a uma altura bem abaixo da linha de visada. Nessas condições, a influência do obstáculo é mínima e o valor

do campo elétrico no receptor, E_0 , é obtido pela equação da propagação no espaço livre – Equações (4.12a) ou (4.12b).

À medida que a altura do obstáculo aumenta, ou seja, mais zonas de Fresnel são obstruídas abaixo da linha de visada, como mostra a Figura 47(b), a intensidade do campo elétrico no Rx começa a oscilar em torno de E_0 . A amplitude de tal oscilação também aumenta, até que o topo do obstáculo esteja alinhado com Tx e Rx e não haja mais visada direta. Nesse caso, como ilustra a Figura 47(c), o valor do campo elétrico será $\frac{E_0}{2}$. Se a altura do obstáculo ultrapassa esse nível, então a oscilação cessa e a intensidade de campo passa a decrescer monotonicamente.

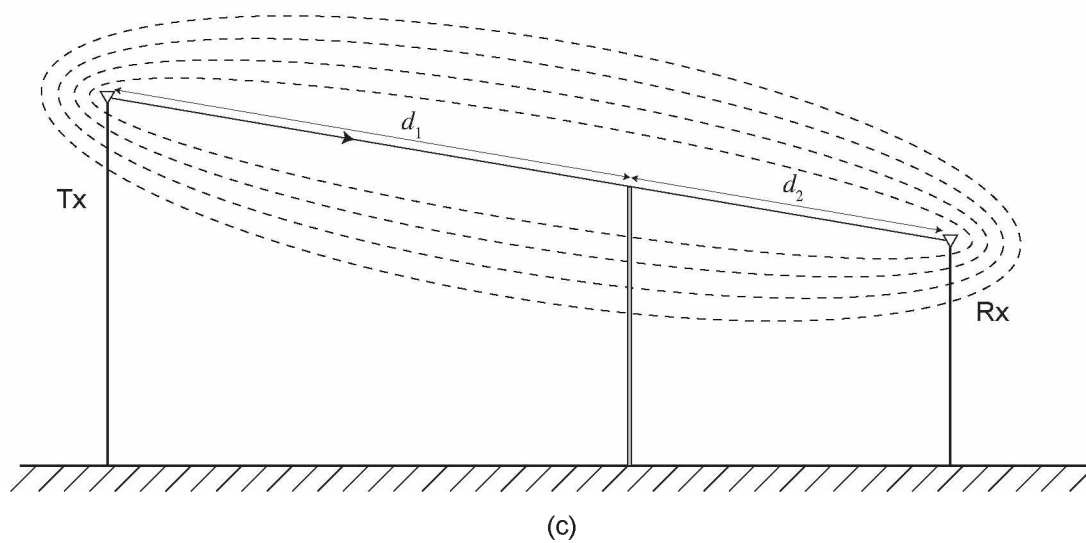
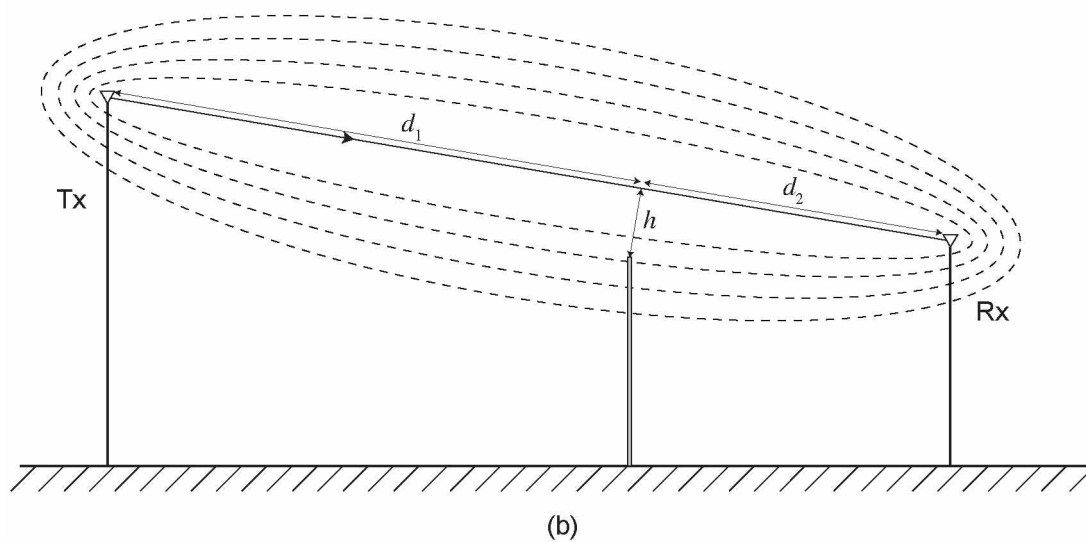
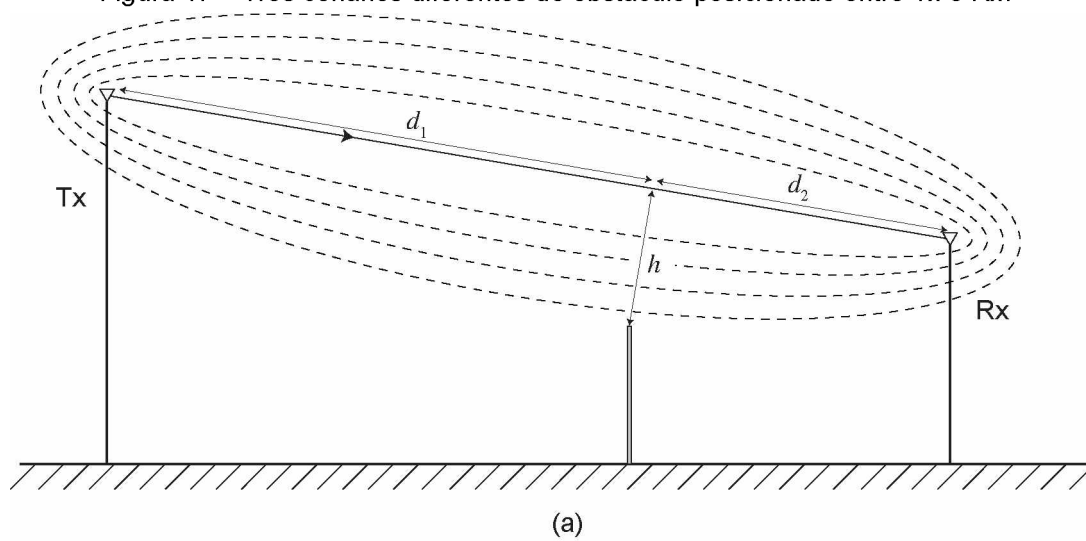
Para quantificar esses efeitos observados, utiliza-se a Teoria Clássica da Difração da seguinte maneira: o obstáculo é substituído por um plano semi-infinito, perfeitamente absorvedor e na mesma posição. Ele deve ser normal à linha de visada e infinito em todas as direções, exceto na vertical, na qual deve terminar na altura da obstrução original. A difração que ocorre nesse cenário é chamada de difração por gume de faca [4].

A intensidade de campo no receptor das Figuras 47(a), (b) e (c) é determinada pela soma de todas as fontes secundárias de Huygens que estão no plano acima da obstrução e pode ser expressa pela integral complexa de Fresnel, mostrada na Equação (4.79).

$$E = E_0 \left(\frac{1+j}{2} \right) \int_v^{\infty} e^{-j\frac{\pi}{2}t^2} dt \quad (4.79)$$

em que v é o parâmetro de difração de Fresnel-Kirchhoff, obtido pela Equação (4.70).

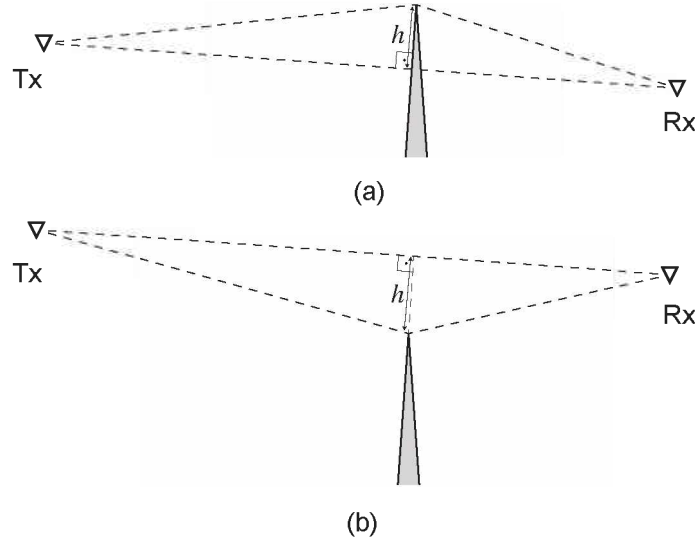
Figura 47 – Três cenários diferentes de obstáculo posicionado entre Tx e Rx.



Fonte: Elaborada pelo autor.

É importante observar, nas Figuras 48(a) e (b), que, quando a linha de visada direta está obstruída, h e v são positivos e, quando não está obstruída, h e v são negativos.

Figura 48 – Difração por gume de faca: (a) h e v positivos; (b) h e v negativos.



Fonte: *The Mobile Radio Propagation Channel* [4].

Aplicando a identidade de Euler da Equação (4.80) na Equação (4.79), chega-se às Equações (4.81a) e (4.81b).

$$e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sin \theta \quad (4.80)$$

$$E = E_0 \left(\frac{1+j}{2} \right) \int_v^{\infty} \cos \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) dt - j \sin \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) dt \quad (4.81a)$$

$$E = E_0 \left(\frac{1+j}{2} \right) \left[\int_v^{\infty} \cos \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) dt - j \int_v^{\infty} \sin \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) dt \right] \quad (4.81b)$$

A primeira integral da Equação (4.81b) pode ser escrita como apresentado nas Equações (4.82a) e (4.82b).

$$\int_v^{\infty} \cos \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) dt = \int_0^{\infty} \cos \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) dt - \int_0^v \cos \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) dt \quad (4.82a)$$

$$\int_v^{\infty} \cos \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) dt = \frac{1}{2} - C(v) \quad (4.82b)$$

em que $C(v) = \int_0^v \cos \left(\frac{\pi}{2} t^2 \right) dt$ é a integral cosseno de Fresnel.

De maneira similar, a segunda integral da Equação (4.81b) pode ser escrita na forma das Equações (4.83a) e (4.83b).

$$\int_v^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt = \int_0^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt - \int_0^v \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt \quad (4.83a)$$

$$\int_v^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt = \frac{1}{2} - S(v) \quad (4.83b)$$

em que $S(v) = \int_0^v \sin\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt$ é a integral seno de Fresnel.

Assim, substituindo as Equações (4.82b) e (4.83b) na Equação (4.81b), ela se torna a Equação (4.84b).

$$E = E_0 \left(\frac{1+j}{2} \right) \left\{ \left[\frac{1}{2} - C(v) \right] - j \left[\frac{1}{2} - S(v) \right] \right\} \quad (4.84a)$$

$$\frac{E}{E_0} = \left(\frac{1+j}{2} \right) \left\{ \left[\frac{1}{2} - C(v) \right] - j \left[\frac{1}{2} - S(v) \right] \right\} \quad (4.84b)$$

Expressando a Equação (4.84b) em termos de uma perda positiva, em dB, a perda por gume de faca, L_{GF} , é obtida utilizando as Equações (4.85a) e (4.85b).

$$L_{GF} = 20 \log_{10} \left| \frac{E_0}{E} \right| \quad (4.85a)$$

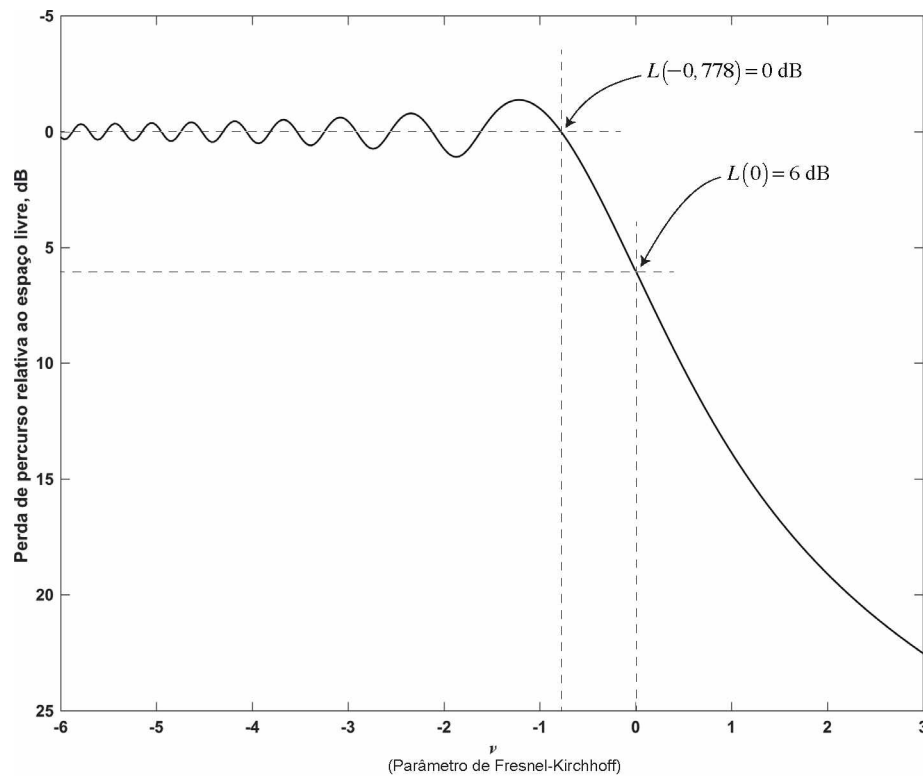
$$L_{GF} = -20 \log_{10} \left| \left(\frac{1+j}{2} \right) \left\{ \left[\frac{1}{2} - C(v) \right] - j \left[\frac{1}{2} - S(v) \right] \right\} \right| \quad (4.85b)$$

A Figura 49 ilustra a perda da difração por gume de faca relativa à perda no espaço livre, em dB, em função do parâmetro v . Para um receptor na região de sombra ($v > 0$), a perda de percurso aumenta suavemente; para um receptor acima da região de sombra ($v < 0$), a perda de percurso oscila em torno do seu valor no espaço livre. Conforme v se torna muito negativo, mais zonas de Fresnel estão livres e a amplitude da oscilação diminui. Quando $v \rightarrow 0$ (raio rasante ao obstáculo), a

perda é de 6,0206 dB, ou seja, a intensidade de campo é metade daquela produzida se a propagação fosse no espaço livre.

Uma maneira de eliminar a perda adicional da difração é fazer $v \cong -0,778$, o que equivale a aproximadamente 56% da primeira zona de Fresnel livre de obstruções. Na prática, os projetistas tentam fazer com que o máximo da primeira zona de Fresnel esteja livre de obstruções.

Figura 49 – Perda da difração por gume de faca em função do parâmetro v .



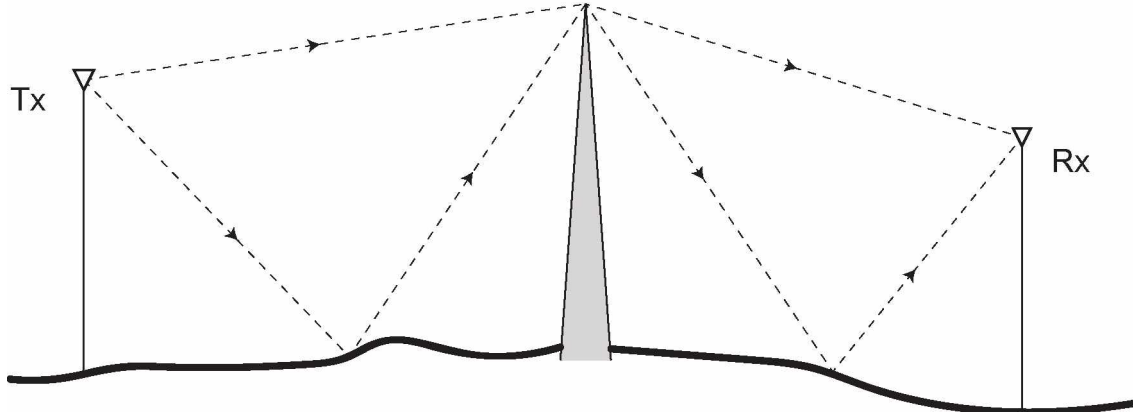
Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma alternativa à utilização da curva da Figura 49, ou da Equação (4.85b), é utilizar aproximações simples para calcular a perda. Lee [35] desenvolveu algumas dessas aproximações, apresentadas na Equação (4.86).

$$L_{GF}(v) = \begin{cases} -20 \log_{10}(0,5 - 0,62v) & -0,8 < v < 0 \\ -20 \log_{10}(0,5e^{-0,95v}) & 0 < v < 1 \\ -20 \log_{10}\left(0,4 - \sqrt{0,1184 - (0,38 - 0,1v)^2}\right) & 1 < v < 2,4 \\ -20 \log_{10}\left(\frac{0,225}{v}\right) & v > 2,4 \end{cases} \quad (4.86)$$

A análise anterior desconsiderou a possibilidade de reflexões no solo em ambos os lados do obstáculo, como mostra a Figura 50.

Figura 50 – Difração em gume de faca com reflexões no solo.



Fonte: *The Mobile Radio Propagation Channel* [4].

Nessa situação, quatro percursos devem ser considerados no cálculo do campo no receptor. Os quatro raios percorrerão distâncias diferentes e terão fases diferentes no ponto de recepção e o parâmetro v será diferente para cada caso. Então, o campo deve ser calculado através da Equação (4.87) [4]:

$$E = E_0 \sum_{k=1}^4 L(v_k) e^{j\phi_k} \quad (4.87)$$

4.8 Difração Sobre Obstáculos Reais

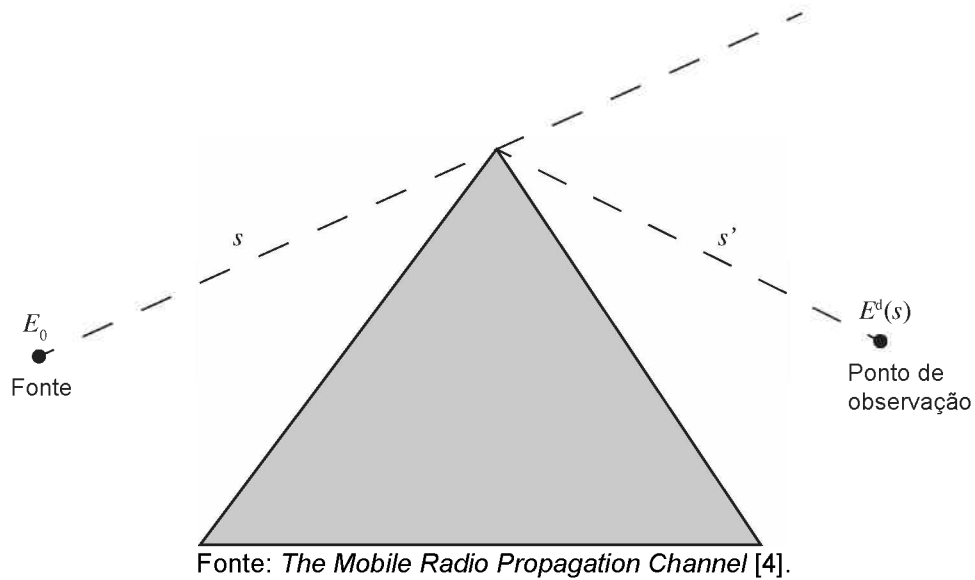
Na Seção 4.7, foi visto que a ótica geométrica não pode ser utilizada para calcular o campo elétrico nas regiões de sombra e que o princípio de Huygens explica a existência de campo nessas regiões. Foi, então, considerada uma teoria simples para a difração, na qual o obstáculo foi considerado ideal (plano semi-infinito, fino e absorvedor). Em geral, isso é uma aproximação grosseira que desconsidera efeitos importantes como a polarização da onda, a rugosidade e propriedades elétricas do local e o perfil lateral do obstáculo. Os objetos encontrados na prática têm dimensões grandes comparadas com o comprimento de onda e nem morros ou prédios podem ser representados por um gume de faca muito fino. Para considerar tais fatores, algumas aproximações alternativas foram criadas.

Em 1962, Keller publicou um artigo com o desenvolvimento da teoria geométrica da difração (GTD) [36]. Nesse artigo, ele desenvolveu sua teoria

utilizando a difração em uma cunha como um problema canônico, mas sua teoria ainda não era completa, pois ela se aplicava apenas a uma região próxima às fronteiras da região de sombra e considerava a cunha perfeitamente condutora. Em 1974, Kouyoumjian e Pathak propuseram a teoria uniforme da difração (UTD) [37], que era aplicável em qualquer ponto do espaço, mas ainda havia algumas imperfeições. A partir daí, foram feitos inúmeros trabalhos (Luebbers, Maliuzhinets, etc.) a fim de melhorar a teoria e deixá-la aplicável em qualquer situação.

Seja a cunha da Figura 51. Se E_0 é o valor do campo na fonte, então o campo observado após a difração é dado pela Equação (4.88).

Figura 51 – Difração em cunha sólida.



$$E^d(s) = E_0 \bar{D} A(s', s) e^{-j\beta s} \quad (4.88)$$

em que \bar{D} representa o coeficiente de difração da cunha, s' e s são as distâncias ao longo do percurso entre a fonte e o vértice e do vértice ao ponto de recepção, respectivamente, $A(s', s)$ é um fator de espalhamento que descreve a amplitude da variação do campo difratado e $e^{-j\beta s}$ é um fator de fase, com $\beta = 2\pi/\lambda$.

O método da teoria uniforme da difração pode ser facilmente aplicado para cunhas com faces curvas e ângulos internos diferentes, então torna-se simples uma modelagem precisa do terreno. Além disso, uma cunha com ângulo de 90° pode ser utilizada para modelar prédios e considerar a difração nas quinas. As equações da UTD podem ser facilmente implementadas em computador, mas as rotinas

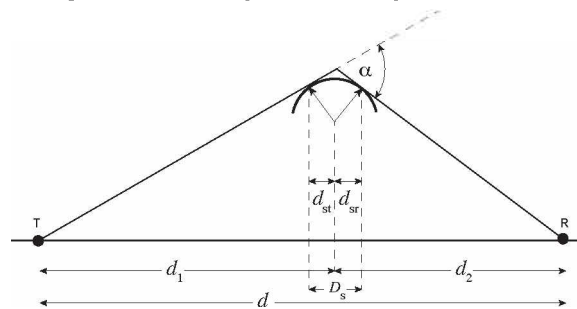
demandam mais processamento do que para o modelo de gume de faca. As vantagens são que a polarização, a rugosidade local e as propriedades elétricas da cunha são consideradas nos cálculos.

O problema de obstáculos não ideais também foi tratado de outras maneiras. Pathak [38] representou obstáculos como superfícies convexas e Hacking [39] mostrou que a perda devido a obstáculos arredondados excede a perda por gume de faca. O topo arredondado de um morro pode ser substituído por um cilindro e as reflexões no cilindro modificam a frente de onda, então uma perda adicional deve ser adicionada à perda do gume de faca, conforme a Equação (4.89) [4].

$$L_{ex} \approx 11,7 \left(\frac{\pi r}{\lambda} \right)^{1/3} \alpha \quad (4.89)$$

Se o topo da colina for rugoso, devido à presença de árvores, então a perda é cerca de 65% do valor dado na Equação (4.89).

Figura 52 – Difração sobre objeto cilíndrico.



Fonte: *The Mobile Radio Propagation Channel* [4].

O valor de r pode ser aproximado como na Equação (4.90).

$$r = \frac{2D_s d_{st} d_{sr}}{\alpha (d_{st}^2 d_{sr}^2)} \quad (4.90)$$

Uma solução alternativa é utilizar o parâmetro adimensional ρ , definido pela Equação (4.91).

$$\rho = \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^{1/6} r^{1/3} \left(\frac{d_1 + d_2}{d_1 d_2} \right)^{1/2} \quad (4.91)$$

Assim, a perda pela difração pode ser expressa pela Equação (4.92).

$$A(v, \rho) = A(v, 0) + A(0, \rho) + U(v\rho) \quad (4.92)$$

em que os valores de A e U são dados pela Equação (4.93).

$$\begin{aligned} A(0, \rho) &= 6 + 7,19\rho - 2,02\rho^2 + 3,63\rho^3 - 0,75\rho^4 & \rho < 1,4 \\ U(v\rho) &= \begin{cases} (43,6 + 23,5v\rho)\log_{10}(1 + v\rho) - 6 - 6,7v\rho & v\rho < 1 \\ 22v\rho - 20\log_{10}(v\rho) - 14,13 & v\rho \geq 2 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.93)$$

Estritamente, esses métodos só podem ser aplicados para ondas com polarização horizontal, mas medidas mostram que, em VHF e UHF, eles podem ser aplicados para polarização vertical.

4.9 Considerações Finais

Esse capítulo apresentou e caracterizou as faixas de frequências VHF e UHF devido à sua importância para os serviços de telecomunicações terrestres. Foram apresentadas características da propagação nessas bandas que fazem com que elas sejam ideais para uso nos sistemas de comunicação terrestre, justificando sua ampla utilização por diversos serviços.

Além disso, os principais mecanismos de propagação que ocorrem quando se utiliza tais bandas para comunicações terrestres foram apresentados e analisados. As bases do cálculo de perda de propagação foram apresentadas com o mecanismo de propagação no espaço livre e também foram consideradas a propagação sobre terreno esférico e terreno plano.

Em geral, para pequenas distâncias de propagação, pode-se desconsiderar a curvatura da Terra e, então, utilizar o modelo de terreno plano. No entanto, quando as distâncias são grandes e a curvatura da Terra deve ser considerada, então o modelo de terreno esférico deve ser utilizado.

Além disso, este capítulo apresentou as bases da propagação por difração, caracterizando qualitativa e quantitativamente esse mecanismo de propagação. Foram apresentados os recursos matemáticos necessários para se fazer o cálculo da difração sobre um gume de faca e essa base é importante para a aplicação dos métodos dos capítulos seguintes.

Tendo definido esses pontos, o próximo capítulo tratará da aplicação dos mecanismos estudados na propagação sobre terrenos irregulares.

5 PROPAGAÇÃO EM TERRENOS IRREGULARES

5.1 Introdução

Como descrito no Capítulo 4 deste trabalho, a maioria dos serviços que utilizam as bandas VHF e UHF opera sobre regiões urbanas e rurais e sua cobertura é, essencialmente, local. Alguns exemplos típicos são a difusão de rádio e televisão. As áreas de cobertura desses sistemas são, em geral, grandes, tais como bairros e cidades e suas áreas rurais. Então, dentro de um percurso de propagação, é comum que o terreno contenha irregularidades e é preciso considerar os efeitos dessa topografia na previsão da intensidade de campo.

Em áreas com terreno irregular, tem-se, basicamente, dois cenários principais:

1. as irregularidades não são muito intensas, mas a alta rugosidade do terreno causa reflexões difusas. Isso minimiza a contribuição das ondas refletidas pela Terra na composição do campo elétrico recebido;
2. irregularidades mais intensas, tais como como morros e vales, podem afetar o campo por meio da difração, obstruindo as zonas de Fresnel do enlace ou obstruindo a visada direta.

Considerando os cenários apresentados acima e os fenômenos de propagação estudados no Capítulo 4, este capítulo descreve o cálculo de campo elétrico nos terrenos irregulares.

5.2 Rugosidade do Terreno

Nas análises de reflexão em terreno plano e terreno esférico, a superfície refletora foi considerada suave e a reflexão, especular. No entanto, quando a superfície é rugosa (caso real da Terra), não é válido admitir que a reflexão será especular, mas deve-se trabalhar com reflexão difusa, pois a onda incidente encontra várias superfícies de reflexão diferentes.

O efeito da reflexão difusa é semelhante a um espalhamento. Portanto, apenas uma pequena parcela da energia incidente é refletida na direção da antena de recepção. Dessa maneira, a sua contribuição na composição do campo elétrico recebido será pequena e, muitas vezes, dependendo do grau de espalhamento, as componentes refletidas podem ser desconsideradas. Então, é necessário um estudo

para quantificar e classificar a rugosidade do terreno, a fim de considerar, ou não, as reflexões na composição do campo elétrico.

Evidentemente, uma superfície considerada rugosa para uma determinada frequência e ângulo de incidência pode ser considerada lisa para outras frequências e ângulos de incidência. Para se ter uma ideia sobre isso, a Figura 53(a) mostra uma situação real de terreno rugoso e a Figura 53(b) mostra uma representação ideal desse terreno.

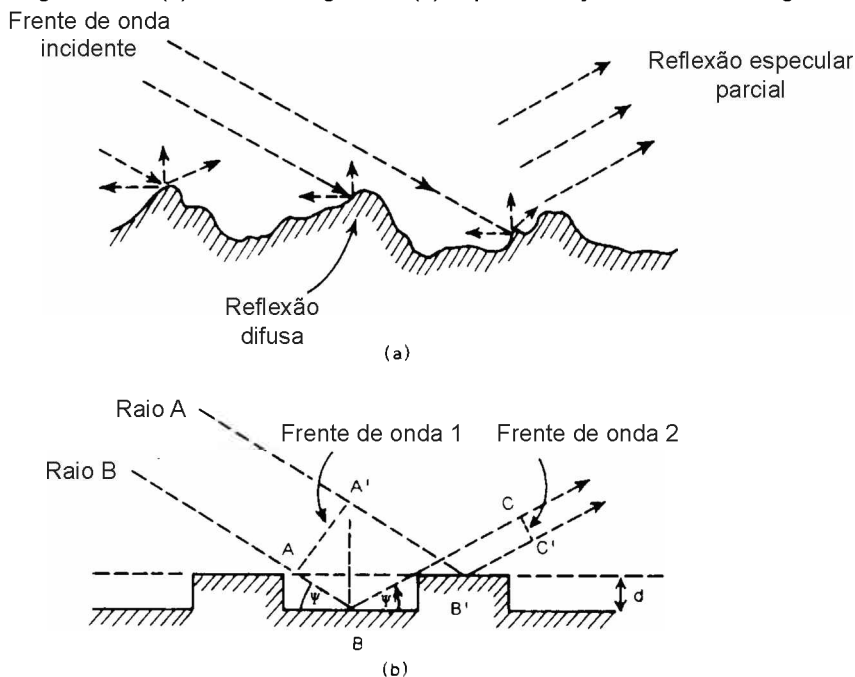
Sejam dois raios A e B incidentes na superfície da Figura 53(b). Com referência na frente de onda AA', a diferença de caminho entre eles quando atingem os pontos C e C' é dada pelas Equações (5.1a) a (5.1c) [4].

$$\Delta\ell = (AB + BC) - (A'B' + B'C') \quad (5.1a)$$

$$\Delta\ell = \frac{d}{\sin \psi} (1 - \cos 2\psi) \quad (5.1b)$$

$$\Delta\ell = 2d \sin \psi \quad (5.1c)$$

Figura 53 – (a) Terreno rugoso e (b) representação de terreno rugoso.



Fonte: *The Mobile Radio Propagation Channel* [4].

Portanto, a diferença de fase entre os raios nos pontos C e C' é dada pela Equação (5.2b).

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta\ell \quad (5.2a)$$

$$\Delta\theta = \frac{4\pi d \sin \psi}{\lambda} \quad (5.2b)$$

Se a altura das irregularidades é pequena em relação ao comprimento de onda, a diferença de fase também é pequena. Assim, é possível considerar a superfície lisa e a reflexão, especular.

Por outro lado, protuberâncias mais expressivas podem levar a diferenças de fase grandes como $\Delta\theta = \pi$. Desse modo, um critério prático para classificar as superfícies em lisa ou rugosa é o limiar $\Delta\theta = \pi/2$ [4]. Substituindo esse valor na Equação (5.2b), tem-se a Equação (5.3), que especifica a altura mínima das irregularidades para que o terreno seja considerado rugoso.

$$d_R \geq \frac{\lambda}{8 \sin \psi} \quad (5.3)$$

Em geral, em comunicações móveis, ψ é quase sempre pequeno. Por isso, a Equação (5.3) pode ser escrita como na Equação (5.4).

$$d_R \geq \frac{\lambda}{8\psi} \quad (5.4)$$

Entretanto, na prática, a superfície da Terra é mais parecida com o caso mostrado na Figura 53(a) e o conceito de d ainda precisa de uma melhor interpretação. Logo, o fator utilizado como medida de rugosidade da superfície é o desvio padrão das irregularidades do terreno com relação à sua altitude média. Com isso, o critério de Rayleigh é expresso como na Equação (5.5).

$$C = \frac{4\pi\sigma \sin \psi}{\lambda} \cong \frac{4\pi\sigma \psi}{\lambda} \quad (5.5)$$

em que: σ é o desvio padrão das irregularidades do terreno em relação à sua altitude média, λ é o comprimento de onda e ψ é o ângulo de incidência [4].

Para $C < 0,1$, o terreno pode ser considerado liso e a reflexão, especular. Para $C > 10$, o terreno é muito rugoso e a reflexão é difusa. Isso permite que a componente refletida pelo solo seja desconsiderada no cálculo do campo recebido.

5.3 Difração em Terreno Irregular

Em geral, os dispositivos receptores, sejam móveis ou estáticos, estão localizados aleatoriamente em um terreno irregular. Logo, há grande chance de existir algum obstáculo entre eles e o transmissor.

Embora esses obstáculos sejam de formas e tamanhos muito variados, em frequências como VHF e UHF, eles podem ser representados (com alguma perda de fidelidade) por planos absorvedores semi-infinitos, os chamados gumes de faca. Essa representação facilita o estudo e o cálculo da atenuação por difração nesses obstáculos. A partir dessa representação, ainda é possível tornar o estudo da atenuação por difração em terrenos irregulares mais completo e preciso à medida que:

- o terreno é representado de maneira mais fiel e detalhada;
- os obstáculos são considerados como reais e não apenas gumes de faca;
- as ondas refletidas pelo solo são consideradas (Figura 50);
- efeitos da atmosfera, condições climáticas e propriedades do solo são considerados;
- o perfil lateral do terreno é considerado;
- a vegetação é considerada;
- o retro espalhamento é considerado.

Inúmeros fatores podem ser incluídos no cálculo de campo para melhorar a precisão, mas com o custo do aumento da complexidade dos cálculos. Em geral, quando o cenário é apenas terreno irregular, principalmente em regiões rurais, o principal efeito considerado nos cálculos de campo é a difração nas irregularidades do terreno. Métodos de predição desse tipo conseguem resultados razoáveis da medida da intensidade média do sinal quando utilizados adequadamente.

5.4 Difração Sobre Múltiplos Gumes de Faca

A atenuação do campo elétrico causada por um gume de faca pode ser calculada analiticamente pelas equações de Fresnel-Kirchhoff – Equações (4.85b) e (4.70) – ou pelas equações da UTD (Teoria Uniforme da Difração) [37] e da GTD (Teoria Geométrica da Difração) [36]. No entanto, quando se deseja calcular a atenuação causada por uma série de gumes de faca, o cálculo se torna muito mais complicado e de difícil solução. Millington *et al.* [40] desenvolveram soluções analíticas para o caso de dois gumes de faca e Vogler [41], baseado no trabalho de Furutsu [42], desenvolveu uma complexa expressão para o caso de múltiplos gumes de faca.

Também existem modelos computacionais intensivos, que consideram mais detalhadamente as características do perfil vertical do terreno, mas são de maior complexidade. Dentre eles, pode-se citar: modelos de traçado de raios, baseados na ótica geométrica e na UTD; modelos baseados na solução numérica da equação parabólica pelos métodos de diferenças finitas ou *split-step*; modelos baseados na solução numérica de equações integrais pelo Método dos Momentos.

Devido à alta complexidade dos cálculos analíticos, foram criados vários métodos alternativos, mas que não têm grandes comprovações teóricas do seu funcionamento. Os modelos alternativos mais difundidos são: Bullington [43]; Epstein-Peterson[44]; Modelo do Atlas Japonês [45] (chamado de modelo Japonês); Deygout [46] e Giovaneli [47].

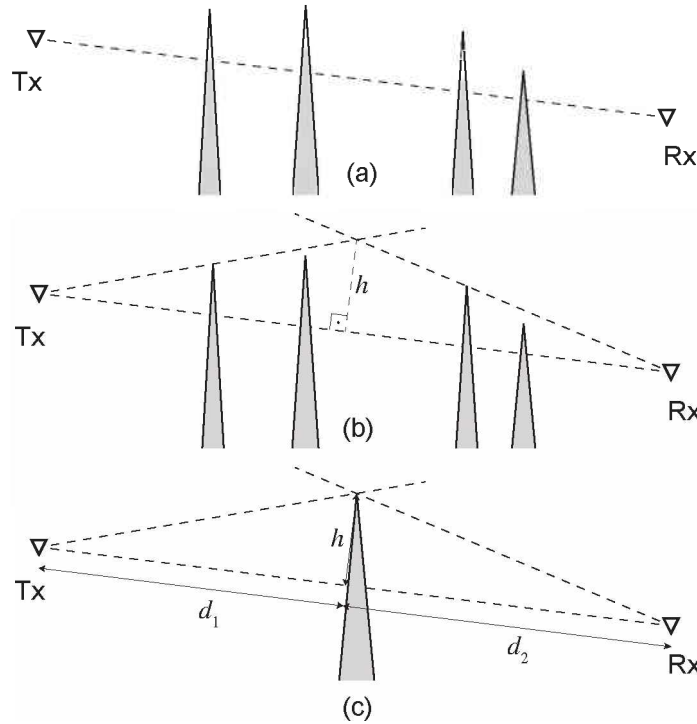
5.4.1 O modelo de Bullington

O método proposto por Bullington substitui o terreno verdadeiro por um único gume de faca equivalente. Esse gume é colocado no ponto de interseção entre os raios de horizonte de cada terminal. A Figura 54 ilustra a construção do equivalente de Bullington.

A Figura 54(a) mostra quatro obstruções da visada direta. A primeira obstrui o horizonte do transmissor e a terceira, o horizonte do receptor. Na Figura 54(b), são traçadas as retas de horizonte dos terminais e encontrado o seu ponto de interseção. Finalmente, o terreno real é substituído pelo equivalente, como ilustra a Figura 54(c).

O parâmetro de Fresnel-Kirchhoff do equivalente de Bullington é calculado de acordo com a Equação (4.70) e a perda pela difração é calculada pela Equação (4.85b), com $L_{GF} = f(v) = f(d_1, d_2, h)$.

Figura 54 – Construção do equivalente de Bullington.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A vantagem do método de Bullington é a simplicidade, mas alguns obstáculos importantes podem ser ignorados e isso pode causar grandes erros. Em geral, esse método subestima a perda de percurso e produz uma estimativa otimista do campo no receptor.

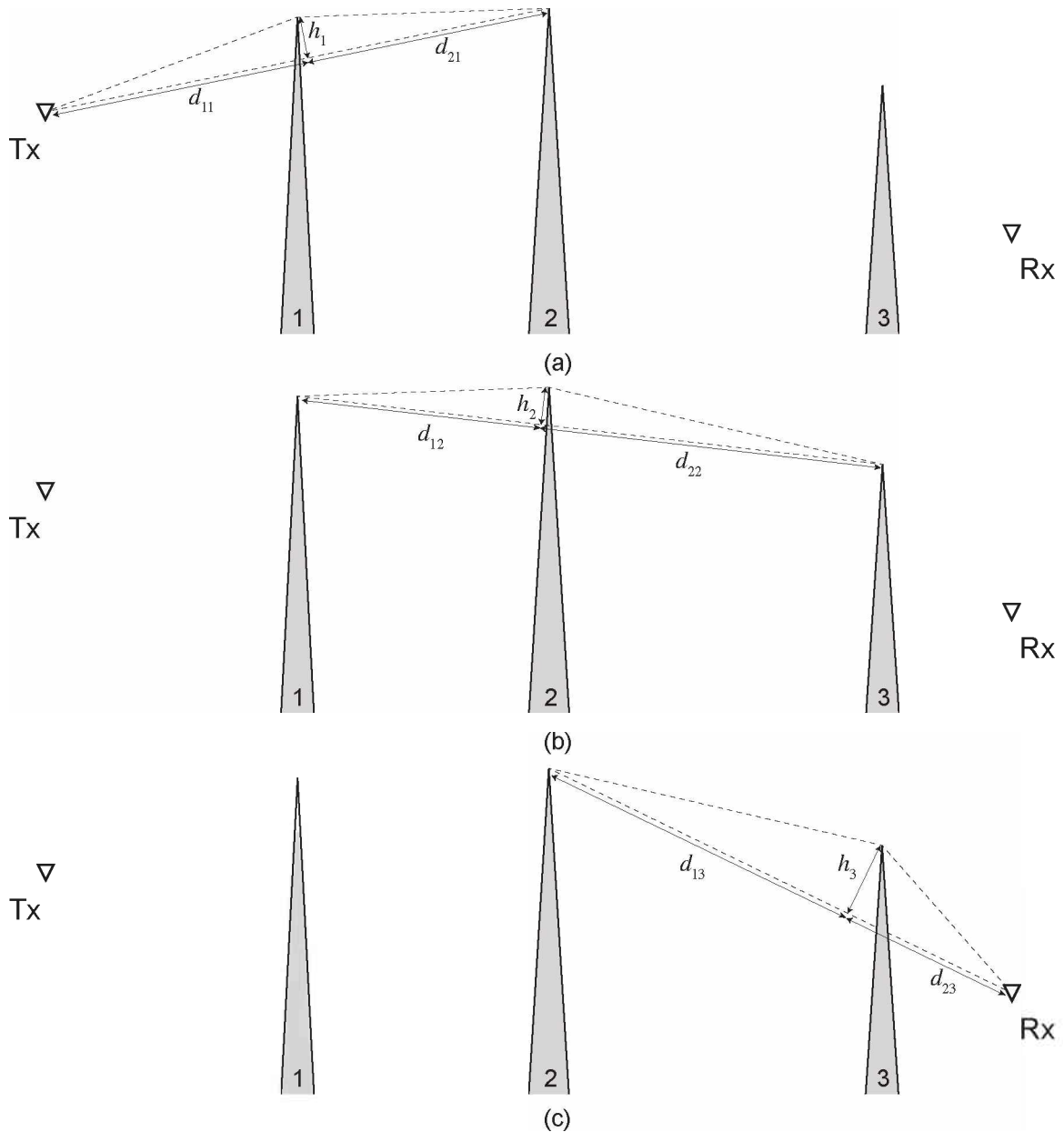
5.4.2 O modelo de Epstein-Peterson

A principal característica do modelo de Epstein-Peterson é que ele considera vários obstáculos no percurso de propagação, ao contrário do modelo de Bullington. Nesse modelo, a atenuação de cada obstáculo é calculada individualmente pelos métodos tradicionais e, depois, somadas para obter a atenuação total.

Por exemplo, na Figura 55(a), primeiramente, é calculada a atenuação entre o transmissor e o obstáculo 2 por obra do gume 1, $L_{GF1} = f(v_1) = f(d_{11}, d_{21}, h_1)$. Em seguida, é encontrada a atenuação entre 1 e 3 causada pelo gume 2, $L_{GF2} = f(v_2) = f(d_{12}, d_{22}, h_2)$, como ilustra a Figura 55(b). Finalmente, é calculada a

atenuação entre 2 e o receptor pela difração no gume 3, $L_{GF3} = f(v_3) = f(d_{13}, d_{23}, h_3)$, como mostra a Figura 55(c).

Figura 55 – Construção do modelo de Epstein-Peterson.



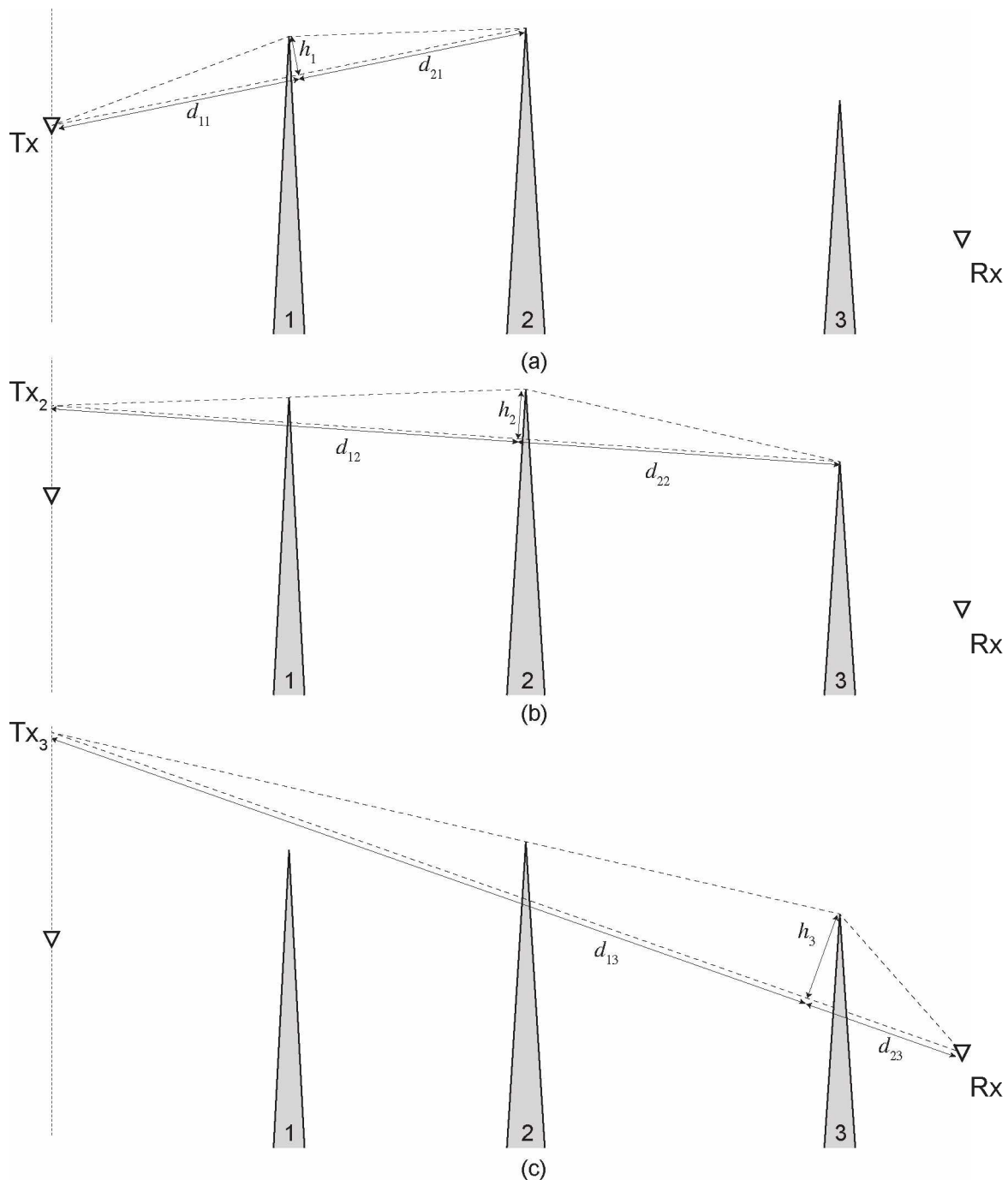
Fonte: Elaborada pelo autor.

Quando o perfil do terreno é formado por apenas dois gumes de faca, a comparação entre os resultados obtidos com esse método e a solução exata de Millington mostra que grandes erros ocorrem se os dois obstáculos estão muito próximos. Para esses casos, Millington criou uma correção que pode ser adicionada aos resultados do modelo de Epstein-Peterson e, assim, garantir a concordância com a solução exata.

5.4.3 O modelo Japonês

O método Japonês é similar ao de Epstein-Peterson. A diferença é que, no cálculo do parâmetro v de cada obstrução, a fonte efetiva de radiação não é o topo da obstrução anterior, mas sim a projeção, no plano do transmissor, do raio de horizonte que passa por esse ponto. Esses pontos estão identificados na Figura 56 como Tx_2 e Tx_3 .

Figura 56 – Construção do modelo Japonês.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Considerando a geometria da Figura 56, a perda de percurso total é calculada pela soma das perdas L_{GF1} , L_{GF2} , L_{GF3} , em que $L_{GF1} = f(v_1) = f(d_{11}, d_{21}, h_1)$, $L_{GF2} = f(v_2) = f(d_{12}, d_{22}, h_2)$ e $L_{GF3} = f(v_3) = f(d_{13}, d_{23}, h_3)$. Os números v são calculados pela Equação (4.70) e as perdas individuais são calculadas pela Equação (4.85b).

Hacking, K. [48] mostrou que a construção do modelo Japonês corrige o problema do modelo de Epstein-Peterson quando duas obstruções estão muito próximas. Embora esses métodos (Epstein-Peterson e Japonês) sejam, em geral, melhores do que o de Bullington, eles ainda tendem a subestimar a perda de percurso.

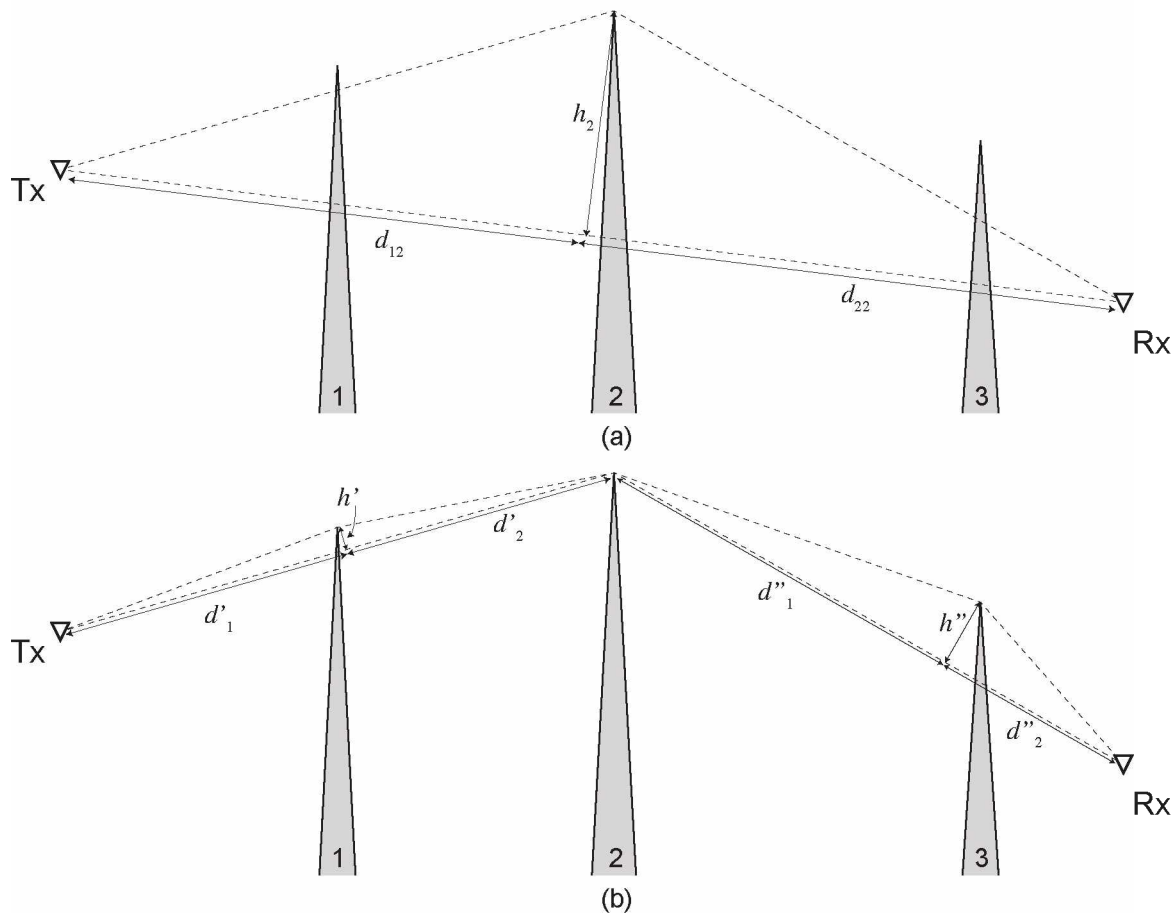
5.4.4 O modelo de Deygout

O primeiro passo do método de Deygout é calcular o parâmetro v para cada gume, individualmente, como se todos os outros obstáculos estivessem ausentes. Por exemplo, na Figura 57, encontra-se o parâmetro v para os caminhos Tx–1–Rx, Tx–2–Rx e Tx–3–Rx. O obstáculo que causar o maior valor de v (nesse exemplo é o gume 2) é denominado o gume principal e a sua perda por difração é calculada da maneira convencional, ou seja, $L_{GF2} = f(v_2) = f(d_{12}, d_{22}, h_2)$, em que v_2 é calculado pela Equação (4.70) e L_{GF2} é calculado pela Equação (4.85b).

As perdas dos obstáculos secundários são calculadas em relação a uma linha que une o gume principal aos terminais Tx e Rx e, depois, somadas à perda do gume principal. Dessa maneira, $L_{GF1} = f(v_1) = f(d'_1, d'_2, h')$ e $L_{GF3} = f(v_3) = f(d''_1, d''_2, h'')$, em que v_1 e v_3 são calculados pela Equação (4.70) e L_{GF1} e L_{GF3} são calculados pela Equação (4.85b).

Para percursos com vários obstáculos, esse procedimento é repetido recursivamente à direita e à esquerda do gume principal. No entanto, na prática, é comum considerar apenas três perdas para compor a perda de percurso total: a do gume principal e as dos gumes secundários de cada lado [4].

Figura 57 – Construção do modelo de Deygout.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Normalmente, as estimativas de perda de percurso feitas com esse método apresentam boa concordância com a abordagem mais rigorosa, mas elas tendem a ser pessimistas (superestimam a perda) quando há muitos obstáculos e/ou quando as obstruções estão muito próximas. De maneira geral, a acurácia do método é grande quando existe apenas um obstáculo dominante e, para o caso de dois obstáculos importantes, correções podem ser encontradas na literatura (Causebrook J.H. e Davies B. [49]).

5.4.5 O modelo de Giovaneli

O modelo de Deygout se torna pessimista conforme o número de obstruções consideradas aumenta. Isso ocorre, pois os ângulos de difração utilizados no cálculo das perdas dos gumes principais são maiores do que na realidade, principalmente quando as obstruções estão próximas.

O fato de se utilizar ângulos maiores do que os reais acarreta uma perda excessiva e essa perda aumenta à medida que mais gumes principais são

considerados no cálculo. Para resolver esse problema, Giovaneli propôs uma geometria que considera os verdadeiros ângulos de difração para os gumes principais, reduzindo, assim, o pessimismo do método de Deygout e mantendo boa concordância com os resultados rigorosos obtidos por Vogler.

Nesse método, é colocado um plano de observação que passa por cada terminal (transmissor e receptor) e um plano de observação que passa pelo gume principal de cada iteração. Assim, os cálculos das perdas dos gumes principais são feitos de acordo com os raios que alcançam esses planos, o que leva à utilização dos ângulos corretos de difração. A Figura 58 ilustra um exemplo para o caso de quatro gumes de faca.

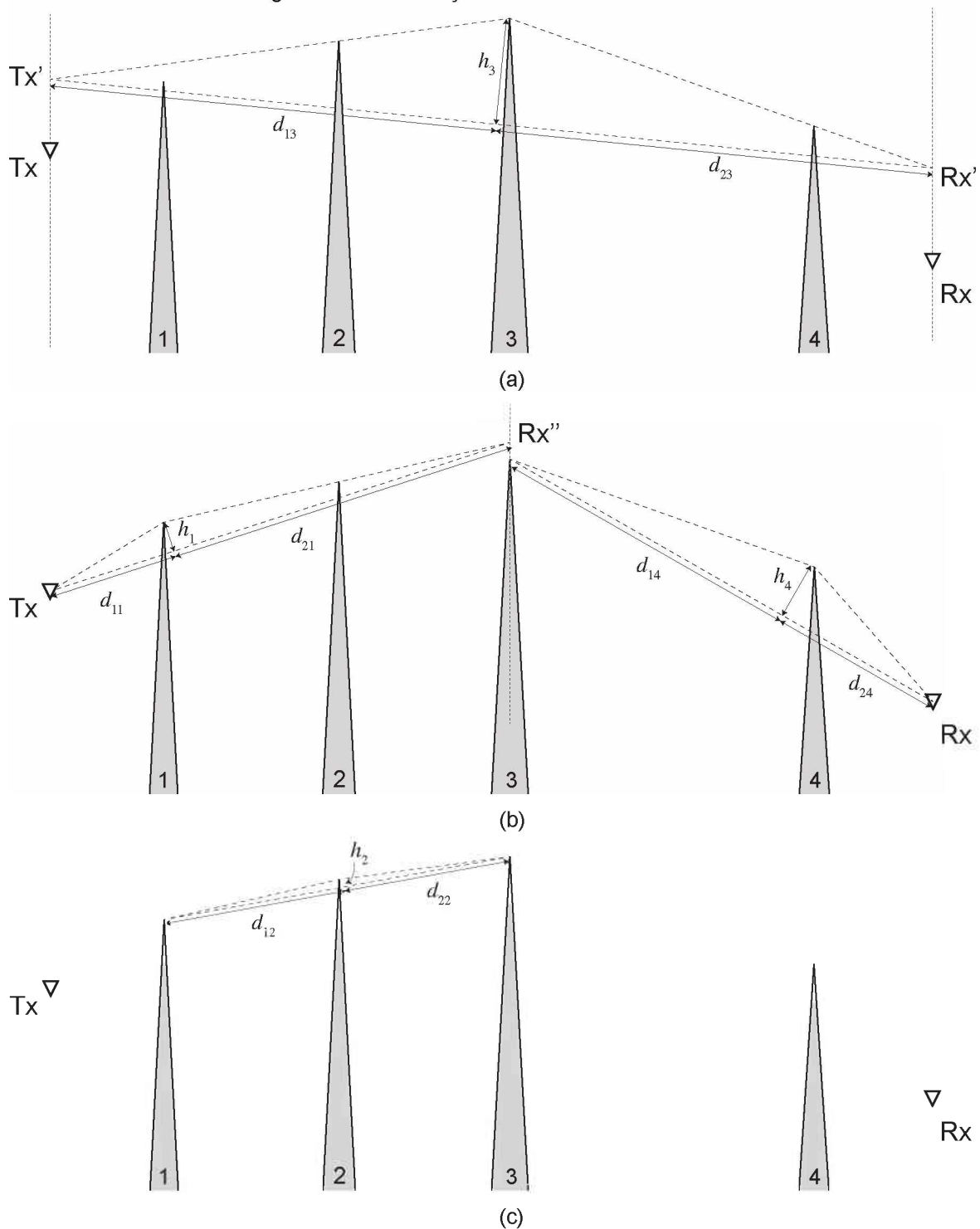
Na Figura 58(a), o gume principal é o 3, então é traçado o raio que sai desse gume e alcança os planos de observação do transmissor e do receptor. Esses raios alcançam os planos nos pontos Tx' e Rx'. Então, o número ν para essa difração é calculado em termos dessa geometria e a perda é calculada de acordo com $L_{GF3} = f(\nu_3) = f(d_{13}, d_{23}, h_3)$.

Após calculada a perda do gume principal, deve-se procurar por gumes “principais secundários” à direita e à esquerda do gume principal. Na Figura 58(b), o gume 1 é um principal secundário à esquerda de 3 e, à direita, existe apenas o gume 4. Com isso, deve-se calcular a perda do gume 1, traçando o raio que sai dele e alcança o plano de observação do gume 3 e, também, a perda do gume 4.

O raio que parte do gume 1 alcança o plano de observação do gume 3 no ponto Rx'', então o número ν para essa difração é calculado em termos dessa geometria. Assim, $L_{GF1} = f(\nu_1) = f(d_{11}, d_{21}, h_1)$. O mesmo procedimento deve ser feito à direita do gume 3, então $L_{GF4} = f(\nu_4) = f(d_{14}, d_{24}, h_4)$.

Finalmente, deve-se calcular a perda auxiliar causada pelo gume 2, conforme mostra a Figura 58(c). Dessa maneira, $L_{GF2} = f(\nu_2) = f(d_{12}, d_{22}, h_2)$. Todos os números ν (ν_1, ν_2, ν_3 e ν_4) são calculados pela Equação (4.70) e todas as perdas ($L_{GF1}, L_{GF2}, L_{GF3}$ e L_{GF4}) são calculadas pela Equação (4.85b).

Figura 58 – Construção do modelo de Giovaneli.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O método de Giovaneli pode ser estendido para percursos com várias obstruções através de aplicações recursivas. Pode-se demonstrar que os resultados obtidos utilizando esse método são compatíveis com os resultados de Vogler nas condições em que o método original de Deygout se torna pessimista.

5.4.6 Discussão sobre os modelos apresentados

O método de Bullington é bastante simples de se analisar. Como ele converte toda a topografia em apenas um gume de faca equivalente, é natural que esse método produza resultados que subestimam a perda de percurso. Logo, entende-se que ele pode fornecer resultados bons quando aplicado em percursos com, no máximo, dois ou três gumes de faca. A análise dos outros modelos deve ser feita de maneira mais rigorosa.

A UTD, formulada com base na GTD, postula que o campo elétrico difratado por um gume de faca é dado por uma expressão do tipo da Equação (5.6).

$$E^d = E_0 \bar{D}(\cdot) A(\cdot) e^{-j(\cdot)} \quad (5.6)$$

em que: $\bar{D}(\cdot)$ é um coeficiente de difração que é função da geometria do gume e dos ângulos de difração; $A(\cdot)$ representa a variação em amplitude do campo difratado em função da geometria da difração e da onda incidente; $e^{-j(\cdot)}$ representa a variação em fase do campo difratado. Dessa maneira, pode-se dizer que a atenuação total é o produto de um fator de difração, \bar{D} , e um fator de propagação, A .

Pogorzelski [50], baseado na GTD, mostrou que a abordagem de Epstein-Peterson considera corretamente o fator \bar{D} de cada difração, mas é otimista em relação ao fator A . Isso ocorre porque os ângulos de difração são tomados corretamente nesse modelo. Com isso, os fatores $\bar{D}(\cdot)$ de cada difração também são corretos. No entanto, esse modelo considera que, em cada difração, a onda incidente é plana, e isso não é a realidade. Apenas a onda incidente na primeira difração pode ser considerada plana. Por isso, de acordo com a UTD e a GTD, o fator A é tomado incorretamente.

De maneira semelhante ao de Epstein-Peterson, o modelo Japonês considera corretamente o fator de difração, \bar{D} , pois também utiliza os verdadeiros ângulos de difração. No entanto, ele corrige, parcialmente, o fator de propagação (A), ao considerar que as fontes efetivas estão no mesmo plano que o transmissor.

Por outro lado, Pogorzelski também mostrou que a solução de Deygout considera o fator de propagação (A) correto, mas é pessimista em relação ao fator de difração (\bar{D}). Isso ocorre, pois os ângulos de difração dos gumes principais são

maiores do que os reais. A Tabela 4 sintetiza como cada modelo considera os fatores de difração e propagação.

Tabela 4 – Relação dos fatores de difração e propagação dos modelos.

Modelo	Fator de difração	Fator de propagação
Bullington	–	–
Epstein-Peterson	Correto	Incorreto
Japonês	Correto	Parcialmente correto
Deygout	Incorreto	Correto
Giovaneli	Correto	Correto

Fonte: Elaborada pelo autor.

A partir dessa análise, é natural ponderar que os resultados mais exatos estejam em algum ponto intermediário entre as soluções do método Japonês e do método de Deygout. A alternativa sugerida por Giovaneli corrige o fator de difração incorreto do modelo de Deygout ao considerar os ângulos reais de difração. Assim, essa nova abordagem considera corretamente os dois fatores e isso faz com que ela produza resultados mais consistentes com a UTD e GTD e, também, com os resultados obtidos por Vogler.

Giovaneli comprovou a eficácia de sua abordagem ao encontrar erros menores que 0,9 dB entre as suas predições e valores medidos experimentalmente. Bibb *et al.* [51] também mostraram que o modelo de Giovaneli se mantém mais próximo dos resultados de Vogler em várias situações.

5.5 Modelos de Perda de Percurso em Terrenos Irregulares

Os modelos de difração sobre múltiplos gumes de faca apresentados anteriormente não são, sozinhos, adequados para a predição da perda de propagação. Além dos efeitos da difração, outros fenômenos de propagação contribuem para a composição final do sinal recebido. Por isso, muitas vezes, os modelos de difração sobre múltiplos gumes de faca são apenas parte do processo de predição e são incluídos em modelos mais abrangentes. Nesta seção, serão brevemente apresentados alguns dos modelos mais difundidos na literatura.

Tradicionalmente, os modelos de propagação podem ser focados em prever a intensidade média do sinal recebido em várias distâncias do transmissor ou podem ter interesse na variabilidade do sinal nas proximidades de um local particular. Os modelos de propagação que predizem a intensidade média do sinal em variadas

distâncias de separação transmissor-receptor são muito úteis para estimar a área de cobertura de sistemas e são chamados de modelos de larga escala ou *long-term*. Por outro lado, modelos que caracterizam as flutuações rápidas do sinal recebido sobre pequenas distâncias (poucos comprimentos de onda) são chamados de modelos de pequena escala, ou *short-term*.

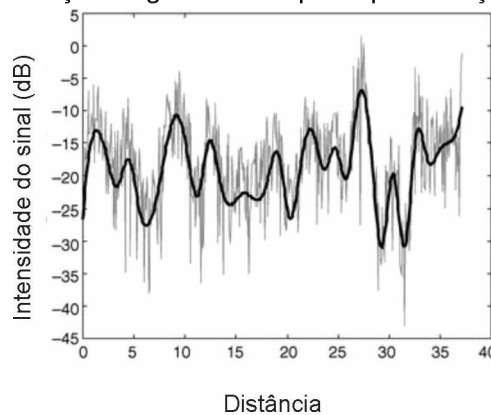
À medida que a distância de propagação aumenta, a média local da intensidade do sinal recebido diminui gradualmente e é sobreposta por uma variação rápida. Assim, o sinal recebido em função da distância de separação pode ser expresso em termos de duas componentes, como na Equação (5.7).

$$r(d) = m(d)s(d) \quad (5.7)$$

em que m é um valor médio e s é uma componente de variação rápida.

A Figura 59 mostra claramente a variação de larga escala sobreposta pela variação de pequena escala.

Figura 59 – Variação *long-term* sobreposta por variação *short-term*.



Fonte: *Modeling the Wireless Propagation Channel* [52].

Todos os modelos apresentados neste trabalho são de larga escala e não há nenhuma preocupação na modelagem de pequena escala.

5.5.1 Modelo log-distância

Como visto na Seção 4.3, é possível dizer que, em geral, a potência média de um sinal recebido diminui de maneira logarítmica com a distância. Muitas medidas experimentais também reforçam essa hipótese. Por isso, a perda de percurso de larga escala pode ser expressa, em função da distância, como na Equação (5.8) ou (5.9).

$$L(d) \propto \left(\frac{d}{d_0} \right)^n \quad (5.8)$$

ou

$$L(d) = L(d_0) + 10n \log_{10} \left(\frac{d}{d_0} \right) \quad (5.9)$$

em que n é um expoente que indica a taxa com que a perda de percurso aumenta com a distância e d_0 é uma distância de referência na região de campo distante em que a perda de percurso é conhecida.

O valor de n depende fortemente do ambiente de propagação e alguns valores típicos são mostrados na Tabela 5.

Tabela 5 – Expoentes n para alguns ambientes.

Ambiente	n
Espaço livre	2
Área urbana aberta	2,7 a 3,5
Área urbana sombreada	3 a 5
Linha de visada dentro de construções	1,6 a 1,8
Sem linha de visada dentro construções	4 a 6

Fonte: *Wireless Communications: Principles and Practice* [3].

5.5.2 Modelo log-normal

O modelo log-normal é uma adaptação do modelo log-distância para considerar o fato de que os ambientes podem apresentar características muito diferentes, mesmo a distâncias iguais do transmissor. Várias medidas empíricas mostraram que a perda de percurso em determinado local pode ser representada por uma variável aleatória com distribuição log-normal. Assim, a perda de percurso passa a ser uma variável aleatória cuja média é dada pela Equação (5.9). Portanto, a Equação (5.10) representa a perda de percurso do modelo log-normal.

$$L(d) = L(d_0) + 10n \log_{10} \left(\frac{d}{d_0} \right) + X_\sigma \quad (5.10)$$

em que X_σ é uma variável aleatória Gaussiana de média zero e desvio padrão σ .

Na prática, os valores de n e σ são calculados a partir de dados medidos e utilizando regressão linear de modo a minimizar a diferença entre as predições e os

dados experimentais. Portanto, os modelos log-distância e log-normal são modelos baseados em dados empíricos.

5.5.3 Modelo de Egli

Analisando uma série de medidas sobre terreno irregular na faixa de frequências entre 90 e 1000 MHz, Egli [53] observou que a intensidade média do sinal em uma pequena área tinha uma tendência de seguir uma lei de proporcionalidade com o inverso da quarta potência da distância do transmissor. A partir disso, ele produziu um modelo baseado na propagação em terra plana, que também segue a lei da quarta potência.

No entanto, ele também observou que havia uma diferença, positiva ou negativa, entre a predição e a equação da propagação em terra plana e que essa diferença dependia da frequência e da natureza do terreno. Assim, ele introduziu um fator multiplicativo para refinar seu modelo. Portanto, o modelo de Egli para a perda de percurso média é dado pela Equação (5.11)

$$L_{50} = G_T G_R \left(\frac{h_T h_R}{d^2} \right)^2 \beta \quad (5.11)$$

em que β é o fator multiplicativo, dado pela Equação (5.12).

$$\beta = \left(\frac{40}{f} \right)^2 \quad (f \text{ em MHz}) \quad (5.12)$$

Na prática, Egli também descobriu que o valor de β era uma função das irregularidades do terreno e que o valor dado pela Equação (5.12) representa apenas um valor médio. Ele então relacionou o desvio padrão de β ao desvio padrão das ondulações do terreno, assumindo que a altitude do terreno segue uma distribuição log-normal em torno do seu valor médio. É importante notar que, mesmo que o método de Egli inclua um fator do terreno, ele é dado empiricamente e o método não considera explicitamente as perdas devido à difração. Mais detalhes sobre esse método podem ser encontrados em [4].

5.5.4 O modelo JRC

Edwards e Durkin [54], bem como Dadson [55], formularam programas de computador para predição da perda de percurso. Esse método foi muito utilizado durante vários anos, principalmente no Reino Unido e foi a técnica originalmente adotada pelo Joint Radio Committee of the Nationalized Power Industries (JRC). O método utiliza um banco de dados digital da topografia que, na sua versão original, continha valores de altitude de pontos espaçados em intervalos de 500 m.

O programa de computador utiliza os dados topográficos para reconstruir o perfil do terreno entre o transmissor e um dado local de recepção e, a partir daí, determina as alturas e posições das obstruções. Com isso, ele procura pela existência de linha de visada e, também, se há desobstrução adequada das zonas de Fresnel.

Em condições de linha de visada e desobstrução das zonas de Fresnel, a perda de percurso é dada pela maior entre a perda no o espaço livre e a perda para a Terra plana. Isso é mostrado na Equação (5.13).

$$L = \max(L_{FS}, L_{PE}) \quad (5.13)$$

em que L_{FS} é a perda de percurso no espaço livre e L_{PE} é a perda de percurso na Terra plana.

Se a condição acima não for satisfeita, então o programa estima a perda por difração ao longo do percurso, L_D , e calcula a perda total como na Equação (5.14).

$$L = \max(L_F, L_P) + L_D \quad (5.14)$$

Para calcular a perda por difração, o programa utiliza o modelo de Epstein-Peterson para até três obstáculos. Se houver mais de três obstruções, um gume de faca equivalente é construído de acordo com Bullington para representar todas as outras obstruções entre a primeira e a última.

No cálculo da perda de percurso sobre a Terra plana, o plano de referência para as alturas das antenas é aquele que contém a base de menor altitude dos terminais. Entretanto, essa definição pode causar grandes erros e Frazer e Targett [56] sugeriram uma alternativa. Segundo eles, o plano de reflexão efetivo

deve ser formado por uma reta que melhor representa o perfil do terreno entre os terminais.

O princípio do método JRC ainda é muito utilizado, mesmo que sua forma original tenda a subestimar as perdas. Sua maior limitação é de não considerar perdas devido à vegetação e construções.

5.5.5 O modelo de Blomquist-Ladell

O modelo de Blomquist-Ladell considera os mesmos tipos de perdas que o método JRC, porém as combina de maneira diferente, de modo a obter uma transição suave entre pontos em a predição foi baseada em no espaço livre e aqueles em que a predição foi baseada na Terra plana. Sua formulação básica é dada pela Equação (5.15).

$$L = L_{FS} + \sqrt{(L'_{PE} - L_{FS})^2 + L_D^2} \quad (5.15)$$

em que L'_{PE} é uma perda de percurso sobre terra plana modificada, que considera fatores como o efeito da troposfera e, para grandes percursos, a curvatura da Terra.

A Equação (5.15) mostra, claramente, que, para percursos altamente obstruídos ($L_D \gg L'_{PE} - L_{FS}$), a perda total pode ser aproximada pela Equação (5.16).

$$L = L_{FS} + L_D \quad (5.16)$$

e, para percursos pouco obstruídos ($L_D \ll L'_{PE} - L_{FS}$), a perda total é dada pela Equação (5.17).

$$L = L'_{PE} \quad (5.17)$$

5.5.6 O modelo de Longley-Rice

O modelo de Longley-Rice, também referido como modelo de terreno irregular do ITS, é aplicável em sistemas de comunicação ponto a ponto em uma faixa de frequências que vai de 40 MHz a 100 GHz e sobre diferentes tipos de terreno. Esse modelo calcula uma perda de transmissão média utilizando a geometria do terreno e a refratividade da troposfera. Além disso, o modelo de Terra plana é utilizado para a

predição da intensidade do sinal dentro do horizonte ótico e as perdas por difração são calculadas pelo modelo de gume de faca de Fresnel-Kirchhoff.

O modelo de Longley-Rice também gerou um programa de computador para calcular a perda de percurso de larga escala sobre terrenos irregulares na faixa de frequências entre 20 MHz a 10 GHz. Nesse caso, há dois modos de operação.

Quando há informações detalhadas do terreno, os parâmetros do percurso são facilmente determinados, mas, quando o perfil de terreno não está disponível, o método provê técnicas para estimar os parâmetros do percurso em função de um parâmetro de irregularidade do terreno.

5.5.7 Métodos CCIR

Os métodos do CCIR são baseados na interpolação e extrapolação de resultados obtidos experimentalmente. Várias curvas de predição de intensidade de campo foram publicadas na literatura do CCIR e são baseadas em análises estatísticas de uma quantidade considerável de dados experimentais coletados em muitos países.

A partir das curvas de referência de intensidade de campo, é necessário determinar, em outra curva, um valor de correção relacionado à irregularidade do terreno. Entretanto, esse método pode incorrer em severos erros e, portanto, foi proposto um novo método para encontrar esse fator de correção. Ele foi, primeiramente, proposto pela European Broadcasting Union (EBU) e, depois, adotado pelo CCIR. O princípio é utilizar as curvas de intensidade de campo do CCIR como referência, mas considerar as variações do terreno em pequenas áreas em torno do ponto de recepção.

5.5.8 Método da Recomendação ITU-R P. 1546-5

A Recomendação ITU-R P.1546 é um importante modelo de propagação utilizado para predições ponto-área no planejamento de serviços terrestres na faixa de frequências entre 30 MHz e 3000 MHz. Seu uso é indicado para circuitos troposféricos de rádio sobre terra, mar ou percursos mistos, com distâncias de até 1000 km e alturas efetivas de antena transmissora de até 3000 m.

O método utilizado pela recomendação é baseado na interpolação e extrapolação de curvas de intensidade de campo que foram obtidas empiricamente

pelo grupo de estudos 3 da ITU. Essas curvas são função da distância, altura efetiva da antena transmissora, frequência de operação e porcentagem de tempo. Essa recomendação também inclui correções para os resultados obtidos a fim de considerar a altura da antena receptora, as características do entorno dos terminais de transmissão e recepção e as características do ambiente (urbano, suburbano, rural).

A recomendação já está na quinta versão, de setembro de 2013, e pode ser encontrada no site do ITU-R por meio do link <http://www.itu.int/dms_pubrec/itu-r/rec/p/R-REC-P.1546-5-201309-1!!PDF-E.pdf>. A primeira versão (ITU-R P 1546) foi aprovada em outubro de 2001 e foi continuamente atualizada até a versão atual.

As principais mudanças com relação à versão anterior (ITU-R P 1546-4) são:

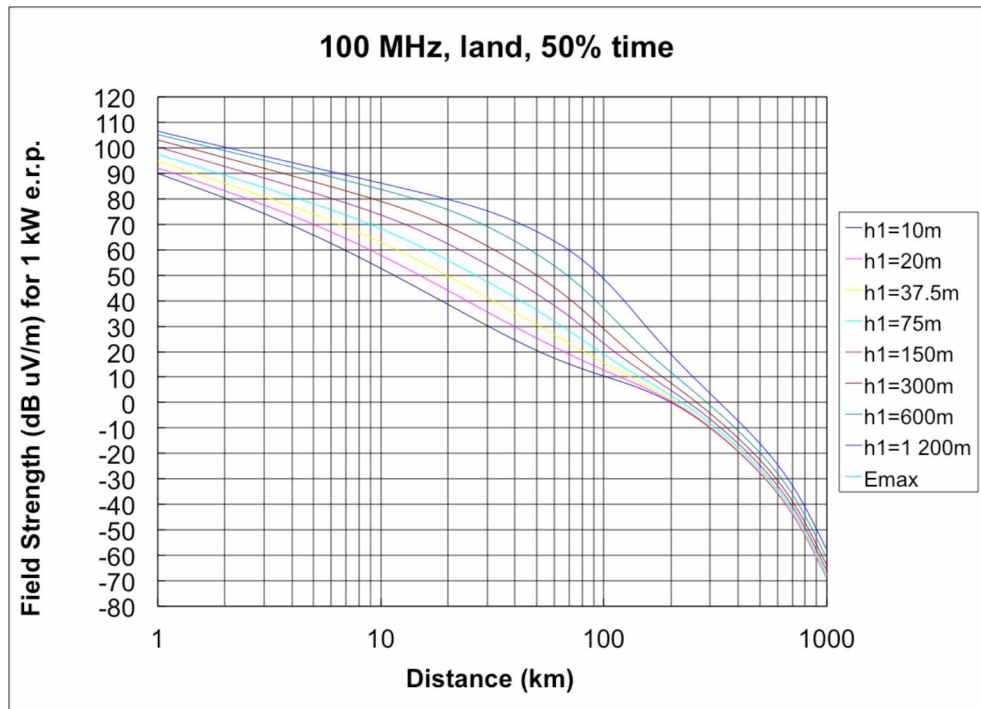
- Alteração no procedimento de cálculo para distâncias menores que 1 km;
- Adição de procedimento de correção levando em conta o nível de urbanização próximo da antena transmissora;
- Adição de procedimento de correção para a diferença de altitude entre antena transmissora e receptora;
- A correção para caminhos curtos em ambientes urbanos e suburbanos foi removida.

A recomendação traz curvas de intensidade de campo para três frequências nominais: 100, 600 e 2000 MHz, três porcentagens de tempo nominais: 50, 10 e 1% e para ambientes terrestres ou marítimos. A Figura 60 ilustra um exemplo para a frequência de 100 MHz, porcentagem de tempo de 50% e caminho terrestre.

Embora os valores de intensidade de campo possam ser obtidos diretamente das curvas, aplicações de computador, como o presente trabalho, podem utilizar dados tabelados de tais curvas. Esses dados encontram-se disponíveis para *download* no site da ITU-R e vêm em formato de planilha do Microsoft Excel, como mostra a Figura 61.

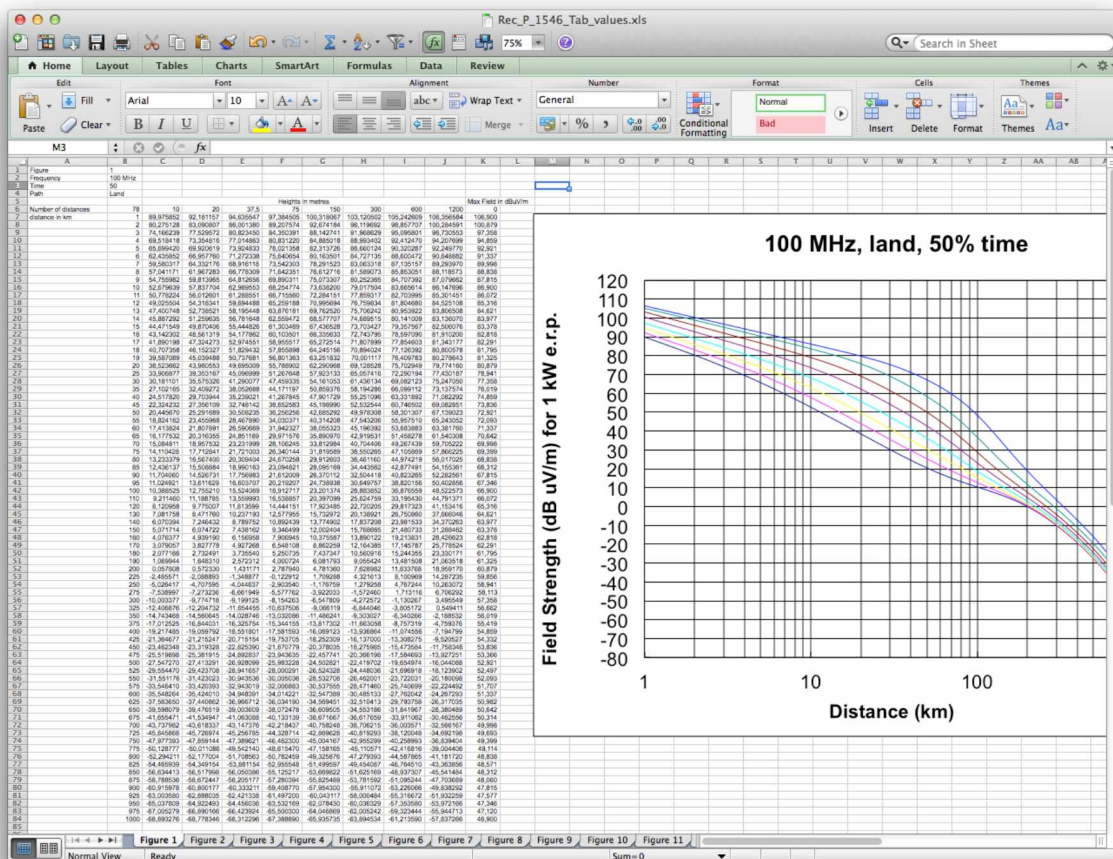
Todo procedimento de cálculo e correções necessárias para utilização das curvas está resumido em um modelo de utilização passo-a-passo descrito no Anexo 6 do documento. Parte desse procedimento é mostrada na Seção 5.5.8.1.

Figura 60 – Curva de intensidade de campo da ITU-R P. 1546-5.



Fonte: Recomendação ITU-R P. 1546-5.

Figura 61 – Dados tabelados da Rec. ITU-R P. 1546-5.



Fonte: Elaborada pelo autor.

5.5.8.1 Procedimento de Aplicação

O procedimento passo-a-passo deve ser aplicado aos valores obtidos das curvas de intensidade de campo ou das tabelas correspondentes. A altura representativa da urbanização em torno do transmissor e do receptor.

Tabela 6, a seguir, contém a lista dos parâmetros de entrada e seus limites. Esses dados servem de base para obter os valores das tabelas.

Como o objetivo desse trabalho é realizar o cálculo apenas em situações de caminhos terrestres e casos em que informações precisas do receptor não são conhecidas, alguns passos não são necessários e algumas variáveis de entrada também não foram utilizadas. Por exemplo, não se sabe a altura representativa da urbanização em torno do transmissor e do receptor.

Tabela 6 – Parâmetros de entrada da Rec. ITU-R P. 1546-5.

Parâmetro	Unidade	Definição	Limites
f	MHz	Frequência de operação	30 – 3000 MHz
d	km	Comprimento horizontal do caminho	< 1000 km
p	%	Porcentagem de tempo	1 – 50%
h_1	m	Altura da antena transmissora/base	< 3000 m
h_a	m	Altura da antena transmissora acima do solo	> 1 m
h_b	m	Altura da antena transmissora sobre o nível médio do terreno medido entre 0.2d e d	–
h_2	m	Altura da antena receptora	1 – 3000 m
R_1	m	Altura representativa da urbanização em torno do transmissor	–
R_2	m	Altura representativa da urbanização em torno do receptor	–
θ_{tca}	graus	Ângulo de obstrução do terreno	0,55° – 40°
θ_{eff1} θ_{eff2} θ_{eff3}	graus	Ângulos de obstrução do terreno efetivos do transmissor/base	> 0

Fonte: Recomendação ITU-R P. 1546-5.

Se a distância horizontal do percurso de propagação for menor ou igual a 40 m, deve-se começar no *Passo 17*. Se a distância horizontal for maior que 40 m e menor que 1 km, os passos 1 a 16 devem ser feitos com $d = 1$ e os passos restantes com d valendo o valor real da distância de propagação. Para outros casos, todos os passos deverão ser feitos com d valendo o valor real da distância de propagação.

- *Passo 1:* Determinar o tipo do caminho de propagação como terrestre, mar gelado ou mar quente. Se o caminho for misto, determinar dois tipos de caminho que serão tratados como primeiro e segundo tipos de propagação. Se o caminho puder ser representado por um único tipo, então ele deve ser tratado como o primeiro tipo de propagação e o método para caminhos mistos do *Passo 11* não é necessário.
- *Passo 2:* Para a porcentagem de tempo requerida (entre 1 e 50%), determinar duas porcentagens de tempo nominais da seguinte maneira:
 - Para $1 < p < 10$, as porcentagens de tempo nominais inferior e superior serão 1 e 10, respectivamente;
 - Para $10 < p < 50$, as porcentagens de tempo nominais inferior e superior serão 10 e 50, respectivamente;
 - Se a porcentagem requerida for igual a 1%, 10% ou 50%, esse valor deve ser considerado como a porcentagem nominal inferior e a interpolação do *Passo 10* não é necessária.
- *Passo 3:* Para a frequência dada (entre 30 e 3000 MHz), determinar duas frequências nominais como segue:
 - Se $f < 600$, as frequências nominais inferior e superior deverão ser 100 e 600 MHz, respectivamente;
 - Se $f > 600$, as frequências nominais inferior e superior deverão ser 600 e 2000 MHz, respectivamente;
 - Se f for 100, 600 ou 2000 MHz, esse valor deve ser considerado como a frequência nominal inferior e a interpolação do *Passo 9* não é necessária.
- *Passo 4:* Determinar as distâncias nominais inferior e superior na Tabela 1 (da recomendação) mais próximas da distância de propagação. Se a distância requerida coincidir com um valor nominal, esse valor deve ser considerado como a distância nominal inferior e a interpolação do *Passo 8.1.5* não é necessária.
- *Passo 5:* Para o primeiro tipo de propagação, prosseguir com os passos 6 até 11.
- *Passo 6:* Para a porcentagem de tempo nominal inferior, seguir os passos 7 a 10.

- *Passo 7:* Para a frequência nominal inferior, seguir os passos 8 e 9.
- *Passo 8:* Obter a intensidade de campo excedida em 50% das localidades para uma antena receptora/móvel na altura R_2 para a distância requerida e para a altura da antena transmissora/base como segue:
 - *Passo 8.1:* Para uma altura de antena transmissora/base $h_1 \geq 10$ m maior que 10 m, seguir os passos 8.1.1 até 8.1.6.
 - *Passo 8.1.1:* Determinar os valores nominais superior e inferior de h_1 utilizando o método do Anexo 5, § 4.1 (da recomendação). Se h_1 coincidir com um dos valores nominais (10; 20; 37,5; 75; 150; 300; 600 ou 1200 m), esse valor deve ser tomado como o valor nominal inferior para h_1 e a interpolação do *Passo 8.1.6* não é requerida.
 - *Passo 8.1.2:* Para o valor nominal inferior de h_1 , seguir os passos 8.1.3 a 8.1.5.
 - *Passo 8.1.3:* Para o valor nominal inferior da distância, seguir o *Passo 8.1.4*.
 - *Passo 8.1.4:* Obter a intensidade de campo excedida em 50% das localidades para uma antena receptora/móvel na altura R_2 para os valores requeridos de distância e altura h_1 .
 - *Passo 8.1.5:* Se a distância requerida não coincidir com a distância nominal inferior, repetir o *Passo 8.1.4* para a distância nominal superior e interpolar as duas intensidades de campo para a distância utilizando o método do Anexo 5, § 5 (da recomendação).
 - *Passo 8.1.6:* Se a altura da antena transmissora/base, h_1 , não coincidir com um dos valores nominais, repetir dos passos de 8.1.3 a 8.1.5 e interpolar/extrapolar para h_1 utilizando o método do Anexo 5, § 4.1 (da recomendação). Se necessário, limitar o resultado ao máximo dado pelo Anexo 5, § 2 (da recomendação).

- *Passo 8.2:* Para $h_1 \leq 10\text{m}$, determinar a intensidade de campo utilizando o método dado no Anexo 5, § 4.2 (da recomendação). Se h_1 for menor que zero, o método do Anexo 5, § 4.3 (da recomendação) deverá ser utilizado.
- *Passo 9:* Se a frequência requerida não coincidir com a frequência nominal inferior, repetir o *Passo 8* para a frequência nominal superior e interpolar/extrapolar as duas intensidades de campo utilizando o método do Anexo 5, § 6 (da recomendação). Se necessário, limitar o resultado à máxima intensidade de campo de acordo com o Anexo 5, § 2 (da recomendação).
- *Passo 10:* Se a porcentagem de tempo requerida não coincidir com a porcentagem de tempo nominal inferior, repetir os passos de 7 a 9 para a porcentagem de tempo nominal superior e interpolar as duas intensidades de campo utilizando o método do Anexo 5, § 7 (da recomendação).
- *Passo 11:* Se a predição for para um caminho misto, seguir o procedimento passo-a-passo do Anexo 5, § 8 (da recomendação). Ele requer o uso dos passos de 6 até 10 para caminhos de cada tipo de propagação.
- *Passo 12:* Se houver informação disponível do ângulo de obstrução do terreno na antena receptora/móvel próximo ao solo, corrigir a intensidade de campo no receptor utilizando o método do Anexo 5, § 11 (da recomendação).
- *Passo 13:* Calcular a intensidade de campo estimada devido ao espalhamento troposférico utilizando o método do Anexo 5 § 13 (da recomendação) e tomar o valor máximo entre E e E_{ts} .
- *Passo 14:* Corrigir a intensidade de campo no receptor para uma altura da antena receptora/móvel h_2 de acordo com o Anexo 5, § 9 (da recomendação).
- *Passo 15:* Se houver urbanização ao redor do terminal transmissor, aplicar a correção do Anexo 5, § 10 (da recomendação).
- *Passo 16:* Aplicar a correção de inclinação dada no Anexo 5, § 14 (da recomendação).

- *Passo 17:* O Anexo 5, § 15 (da recomendação) mostra um método para caminhos menores que 1 km.
- *Passo 18:* Se for necessária uma intensidade de campo excedida numa porcentagem de localidades diferente de 50%, corrigir a intensidade de campo para a porcentagem de localidades desejada utilizando o método do Anexo 5, § 12 (da recomendação).
- *Passo 19:* Se necessário, limitar a intensidade de campo resultante ao valor máximo do Anexo 5, § 2 (da recomendação).
- *Passo 20:* Se necessário, converter a intensidade de campo para a perda básica de transmissão equivalente utilizando o Anexo 5, § 17 (da recomendação).

5.6 O Perfil do Terreno

Em geral, qualquer método de cálculo de campo ou de previsão de perda de percurso requer o conhecimento de algumas informações a priori. Ao escolher um determinado método para efetuar os cálculos, é prudente verificar a disponibilidade e precisão dos dados requeridos por ele, bem como os efeitos sobre os resultados se apenas uma parte dos dados requeridos estiver disponível ou se eles forem simplesmente arbitrados.

Os métodos para o cálculo das perdas por difração sobre terreno irregular apresentados anteriormente, neste capítulo, requerem apenas o conhecimento prévio do perfil do terreno e das alturas dos terminais transmissor e receptor. Com isso, os dados de perfil do terreno são muito importantes para que se possa obter um bom resultado. Logo, deve-se obter tais dados (perfil do terreno) da melhor forma possível.

No passado (e atualmente, em algumas aplicações de pequeno porte), os perfis verticais de terreno eram obtidos a partir de mapas ou levantamentos topográficos, o que é, geralmente, um árduo e demorado trabalho. No entanto, mais recentemente, tornaram-se disponíveis dados de terreno com maior precisão e facilidade de obtenção, graças a técnicas de sensoriamento remoto e ao uso de armazenamento digital.

Atualmente, os perfis verticais de terreno podem ser determinados a partir de Modelos Digitais de Elevação (MDE). Entre os disponíveis gratuitamente em escala global, encontram-se os resultantes dos projetos Global One-km Base Elevation (GLOBE) e do Shuttle Radar Topography Mission (SRTM).

Não há dúvida de que a qualidade dos resultados dos cálculos é proporcional à precisão dos dados do terreno, mas ainda não há nenhuma prova disso no sentido matemático. E, embora já existam bancos de dados de terreno com resoluções de até 10 m, não há estudos que comprovam que a sua utilização melhora substancialmente a qualidade das predições.

Ao contrário dos bancos de dados de menor resolução, os bancos mais acurados, normalmente, não são de uso gratuito (na verdade, são muito caros) e nem cobrem uma escala global. Logo, é de grande interesse ponderar se é necessário utilizar um banco de dados de alta resolução ou se os bancos mais comuns, de menor resolução, conseguem prover resultados satisfatórios.

Normalmente, os bancos de dados têm dois tipos de resolução: horizontal e vertical. A resolução horizontal determina o menor espaçamento entre pontos que podem ser extraídos do banco de dados. Por exemplo: de 1 em 1 km ou de 100 em 100 m. No caso de baixa resolução horizontal, 1 km, por exemplo, algumas obstruções íngremes podem ser omitidas no perfil e isso causará grandes erros nos cálculos.

Por outro lado, a resolução vertical influencia na qualidade da geometria extraída do banco de dados. Uma boa resolução vertical é crucial principalmente quando se deseja identificar pontos que causam pequenas perdas por difração como, por exemplo, obstruções na primeira zona de Fresnel.

Em muitos casos, os bancos de dados são utilizados apenas para localizar as altitudes e posições dos obstáculos mais significativos, e representar o terreno por uma série de gumes de faca. Então, um perfil de terreno altamente detalhado não é tão necessário. Isso pode ser bem razoável para grandes distâncias de transmissão, mas, no caso de caminhos curtos, dados com baixa resolução farão com que apenas poucos pontos estejam disponíveis e isso pode degradar a precisão dos resultados.

Nos casos de caminhos pequenos, é claramente vantajoso contar com um perfil mais detalhado. Em particular, perto do receptor, quando a antena é baixa, a informação sobre a altitude do terreno é extremamente importante [4]. Trajetos de

curta distancia são, a cada dia, mais utilizados, principalmente com o crescimento da tecnologia celular e o interesse em micro células.

Segundo Kvicera *et al.* [57], a utilização de bancos de dados com baixa resolução horizontal (1 km) reduz, de maneira significativa, a confiabilidade das predições. A provável causa disso é a omissão de picos íngremes que o terreno real pode conter. No entanto, é possível melhorar os resultados das previsões utilizando modelos de elevação com resolução espacial média (em torno de 90 m no equador). Com essa resolução, praticamente todos os vértices importantes do terreno são preservados.

Kvicera *et al.* também mostraram que perfis de terreno extraídos do banco de dados SRTM com média resolução espacial levaram a predições quase iguais às aquelas feitas com bancos altamente detalhados. Então, geralmente, é recomendado utilizar modelos de elevação globais com resolução horizontal média (por volta de 100 m) e alta resolução vertical.

5.7 Considerações Finais

Esse capítulo abordou as condições de propagação quando o terreno é considerado irregular. Caso as irregularidades sejam muitas e pequenas, as reflexões no solo passam a ser difusas e podem ser desconsideradas no cálculo de campo. Caso o terreno contenha grandes irregularidades que obstruam as primeiras zonas de Fresnel ou a linha de visada direta entre o transmissor e o receptor, é necessário considerar o efeito da difração nesses obstáculos e o campo é, principalmente, influenciado por esse mecanismo de propagação.

Também foram apresentados alguns métodos simples para calcular as perdas por difração em terreno irregular. Esses métodos representam as obstruções por gumes de faca e cada um deles tem suas peculiaridades na maneira de calcular as perdas por difração. Alguns são bem simples, mas não muito precisos; outros já são mais precisos, porém mais complexos.

Além disso, foram apresentados vários modelos utilizados para o cálculo de perda de percurso sobre terrenos irregulares. Muitos desses modelos utilizam algum dos modelos de difração apresentados anteriormente como parte do processo de cálculo. Em geral, a precisão desses modelos é influenciada pelo perfil do terreno:

alguns deles funcionam bem quando há poucas obstruções, mas incorrem em grandes erros conforme o número de obstruções aumenta.

Quando se trata de precisão, é difícil um método superar todos os outros, mas, em sua maioria, todos eles são capazes de ajudar a prever os limites da área de cobertura de um determinado transmissor e identificar regiões de sombra que podem ocorrer. A escolha do método adequado deve considerar as especificidades do problema em questão e, muitas vezes, um método considerado bom em alguma situação pode ser considerado ruim em outra diferente.

Outro ponto abordado foi a qualidade da representação do perfil do terreno de propagação. Existem, atualmente, alguns bancos de dados de elevação do terreno gratuitos, porém com resolução não muito alta. Por outro lado, há bancos de dados de altíssima resolução, mas, em geral, eles cobrem pequenas áreas e são pagos. Logo, uma orientação geral é procurar bancos de dados gratuitos de cobertura global e que tenham resolução média. Dessa maneira, bons resultados podem ser conseguidos sem a necessidade de pagar por um modelo de elevação altamente acurado.

6 MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE PROBLEMAS ELETROMAGNÉTICOS

6.1 Introdução

Na engenharia elétrica, a grande maioria dos sistemas realistas, independentemente da escala, é muito complexa e envolve, quase totalmente, o eletromagnetismo. Como fundamentado no Capítulo 2 deste trabalho, a teoria eletromagnética é totalmente baseada e explicada pelas equações de Maxwell. Entretanto, seu ensino e aprendizagem são sempre um grande desafio, pois, em geral, o eletromagnetismo não é muito palpável. Por isso, procedimentos experimentais e medições práticas sempre são utilizados como uma das bases do ensino/aprendizado de eletromagnetismo.

É certo que uma forte fundamentação teórica e evidências experimentais são importantes, mas é preciso reconhecer que as recentes simulações numéricas também são essenciais nesse campo. Portanto, é importante fazer uso conjunto de modelagem analítica, procedimentos experimentais, modelagem numérica e simulação computacional para um bom entendimento dos fenômenos eletromagnéticos.

Há algum tempo, as simulações computacionais têm sido muito utilizadas e se mostrado eficientes na área de engenharia elétrica. Esse tipo de análise ganhou grande importância e, com isso, devem ser feitos estudos e desenvolvidas técnicas que garantam o sucesso de sua utilização. Portanto, a proposta deste capítulo é trazer um breve comentário dos processos de modelagem e simulação computacional. Aqui, os aspectos de modelagem, validação, verificação, calibração e seleção de modelos são abordados.

6.2 Modelagem

Modelagem e simulação de problemas eletromagnéticos é um assunto sempre desafiador e constantemente estudado e inovado. Esse campo requer computação de alta performance, matemática e física aplicadas, sistemas inteligentes, tecnologias da informação, entre outros aspectos multidisciplinares. Seu emprego possibilita uma ótima maneira de solucionar problemas eletromagnéticos que vão além do alcance dos métodos analíticos e resulta em poderosos *softwares* para estudantes, professores e cientistas.

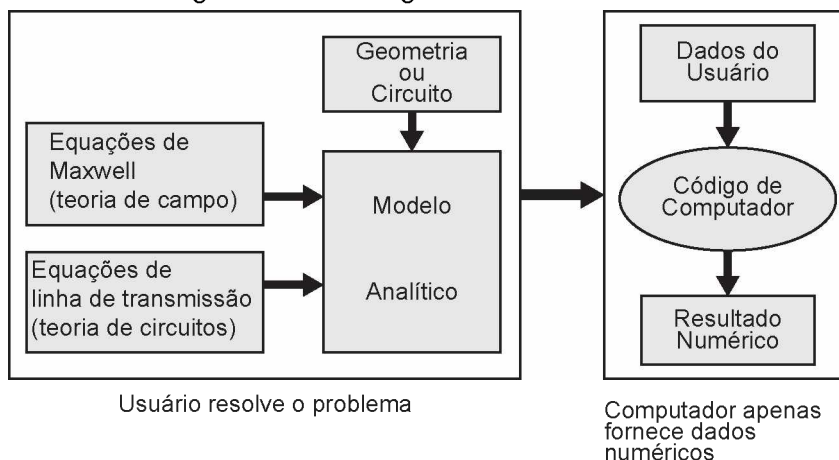
A área de engenharia lida, continuamente, com modelos numéricos de problemas reais com o intuito de analisar, projetar e implementar soluções. Dentro desse aspecto, duas situações são comumente encontradas: a utilização de modelos já prontos ou a elaboração de novos modelos.

Utilizar modelos já desenvolvidos e aceitos é, relativamente, fácil e a única dificuldade costuma ser a escolha correta do modelo a ser utilizado e sua utilização com o devido cuidado e parcimônia. Por outro lado, o processo de desenvolvimento de novos modelos é muito mais complexo, requer boa percepção e imaginação dos engenheiros e, muitas vezes, medidas de dados reais.

O ponto de partida de qualquer modelagem de problemas eletromagnéticos é conhecimento das equações de Maxwell. Elas estabelecem a física da engenharia elétrica, definem a interação das ondas e campos eletromagnéticos com a matéria e formam uma base para o entendimento dos problemas de eletromagnetismo e suas soluções.

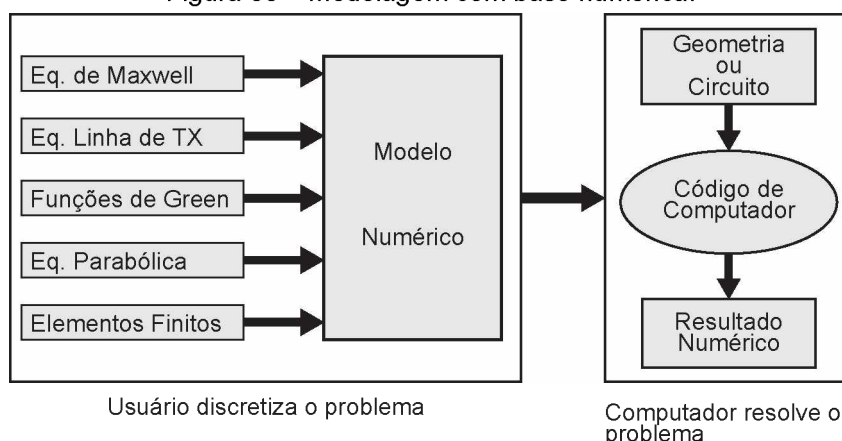
Após o problema ser fundamentado nas equações de Maxwell, existem, basicamente, duas vertentes principais para solução dos problemas eletromagnéticos: modelagem analítica direta ou métodos diretos de simulação numérica. A principal diferença entre essas abordagens é onde entra a modelagem da geometria do problema (ex.: condições de contorno). A abordagem analítica é dependente do problema (ou da sua geometria), enquanto a abordagem numérica é independente. As Figuras 62 e 63 esquematizam essas duas abordagens [58].

Figura 62 – Modelagem com base analítica.



Fonte: *Electromagnetic Modeling and Simulation* [58].

Figura 63 – Modelagem com base numérica.



Fonte: *Electromagnetic Modeling and Simulation* [58].

Na abordagem analítica, o modelo é desenvolvido a partir das equações de Maxwell ou teoria de circuitos (que vem das equações de Maxwell) com base na geometria do problema (condições de contorno e parâmetros do meio). Modelos criados dessa forma expressam as soluções (campo elétrico/magnético ou tensão/corrente) em termos de funções analíticas como senos/cossenos, funções de Bessel/Henkel, funções de Airy, entre outras. Por fim, um programa de computador é necessário apenas para calcular um valor numérico de saída. Em outras palavras, o engenheiro resolve o problema analiticamente dada sua geometria e o computador apenas realiza os cálculos discretos [58].

Já na abordagem numérica, por outro lado, um algoritmo principal modela o comportamento dos campos/circuitos sem a especificação de fronteiras e configurações materiais. Esse modelo numérico genérico é aplicado no início do processo e, posteriormente, são satisfeitas as devidas condições de contorno. Portanto, diferentes problemas com respeito à geometria e parâmetros do meio podem ser resolvidos. Em outras palavras, o engenheiro apenas discretiza o problema, independentemente de geometria, e o computador resolve o problema.

Enquanto o modelo baseado em soluções analíticas é construído para um problema particular, o modelo numérico é geral e as particularidades de cada caso são fornecidas depois que o modelo está construído, já na fase de utilização. Isto é, as condições de fronteira ou condições iniciais são inseridas externamente no modelo numérico, juntamente com parâmetros do meio, frequência de operação, largura de banda do sinal, entre outros parâmetros. Após estas especificações, as simulações são feitas e tem-se um conjunto de saídas calculadas para um conjunto particular de entradas.

Além desses dois tipos de abordagem iniciais, a Figura 63 mostrou alguns modelos numéricos bastante utilizados atualmente. Com isso, surge a dúvida de qual abordagem e modelo utilizar, uma vez que um mesmo problema físico pode ser tratado de diferentes modos com diferentes complexidades.

A melhor resposta para isso é experiência. Boa experiência e fundamentação sobre o assunto é um ótimo ponto de partida para escolher qual tipo de modelo utilizar em cada situação. Por exemplo, querer utilizar o modelo mais sofisticado existente ou um modelo mais complexo do que o necessário pode ser computacionalmente intensivo e requerer grande conhecimento de áreas obscuras do problema.

6.2.1 Boas práticas de modelagem

A correta modelagem e simulação de problemas de eletromagnetismo requer o conhecimento de conceitos fundamentais como modelagem analítica e numérica, simulação, validação de modelo, verificação de código por meio de testes e comparações canônicas, acreditação, entre outros. Em geral, pode-se dizer que um procedimento de simulação computacional eficiente é relacionado a quatro expressões-chave:

1. Validação de modelo;
2. Verificação de código;
3. Calibração;
4. Interpretação física dos resultados obtidos.

As três primeiras expressões citadas acima formam o procedimento VV&C, muito utilizado para calibrar os modelos desenvolvidos. Isso inclui:

- Testes e comparações com dados analíticos de referência;
- Testes e comparações entre diferentes soluções numéricas;
- Comparações com medidas reais.

Todos esses passos são muito desafiadores. Muitas vezes, soluções analíticas exatas não necessariamente significam dados analíticos de referência, pois foram calculadas inadequadamente. Além disso, comparações entre diferentes modelos

numéricos podem estar totalmente concordantes, mas todas incorretas se utilizadas além da sua faixa de aplicabilidade.

As quatro expressões-chave citadas anteriormente também estão intimamente relacionadas a outras quatro palavras-chave: matemática; física; experiência e prática. Portanto, uma boa modelagem e simulação de problemas eletromagnéticos deve cobrir todas essas áreas simultaneamente [58]. A Figura 64 traz um diagrama de processos fundamentais em modelagem e simulação.

Figura 64 – Processos fundamentais de modelagem e simulação.

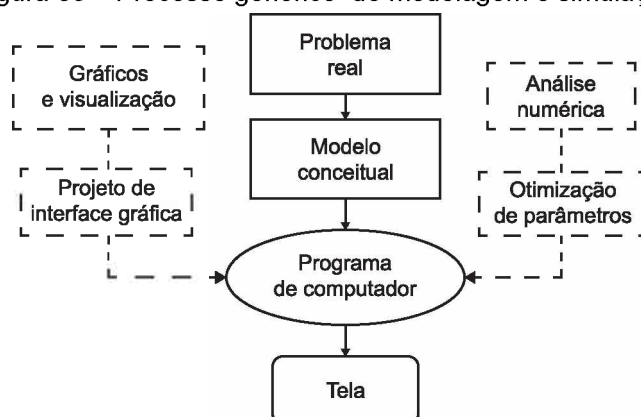


Fonte: *Electromagnetic Modeling and Simulation* [58].

Por exemplo: se um fenômeno físico foi modelado de maneira analítica corretamente, mesmo assim a simulação numérica desse modelo correto pode possuir erros inerentes ao método numérico de solução. Além disso, simplificações na estrutura física do problema e outras considerações, até mesmo limitações computacionais, podem afetar a qualidade dos resultados. Portanto, estabelecer confiabilidade nos resultados de simulações numéricas é algo complicado e que leva tempo. Para isso, é necessário caracterizar e comparar as simulações numéricas em termos de acurácia, confiabilidade, eficiência e aplicabilidade.

Mais ainda, a modelagem pode ser extremamente valiosa na engenharia se feita a partir de física juntamente com parametrização baseada na observação. Um problema real de engenharia é, primeiramente, representado por um modelo conceitual (matemático ou não) e, então, é implementado no mundo discreto em um código de computador. O código pode conter vários métodos de análise numérica como pesquisa de raízes, diferenciação e integração numérica, solução de sistemas de equações, algoritmos de otimização, entre outros. Capacidades de visualização também podem ser inseridas como interfaces gráficas. Um exemplo genérico de modelagem e simulação é mostrado na Figura 65.

Figura 65 – Processo genérico de modelagem e simulação.



Fonte: *Electromagnetic Modeling and Simulation* [58].

6.3 Alguns Modelos Comuns

Na área de modelagem e simulação de problemas eletromagnéticos, existem alguns modelos muito famosos e aceitos. Alguns deles são: o Método dos Elementos Finitos – *Finite Element Method* (FEM), Método dos Momentos – *Method of Moments* (MoM), Método de Equações Parabólicas – *Parabolic Equation Method* (PE), Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo – *Finite Difference Time Domain Method* (FDTD) e Método de Matriz de Linha de Transmissão – *Transmission Line Matrix* (TLM).

O Método dos Elementos Finitos [59] é utilizado para encontrar soluções numéricas aproximadas para, quase sempre, equações diferenciais parciais e, raramente, para equações integrais. Esse método discretiza a região de solução do problema em um número finito de sub-regiões ou elementos, desenvolve as equações que governam o problema para um elemento típico, arranja todos os elementos na região de solução e resolve o sistema de equações para uma dada condição de contorno. Ele é muito utilizado em eletromagnetismo, dinâmica dos fluidos, mecânica estrutural, engenharia civil, entre outras áreas. Sua capacidade de lidar com geometrias complicadas é muito alta e a principal dificuldade encontrada é a geração dos elementos. Felizmente, geradores especiais de malha foram desenvolvidos com esse propósito [58].

O Método dos Momentos [60] tem sido utilizado para resolver um vasto número de problemas eletromagnéticos por várias décadas e é uma técnica numérica utilizada para resolver, aproximadamente, equações com operadores lineares como equações diferenciais ou integrais. De modo geral, uma equação resolvida pelo método dos momentos tem a forma de uma integral de campo elétrico ou magnético,

que é a função desconhecida. Essa variável desconhecida é aproximada por uma série finita de funções de expansão conhecidas, mas com coeficientes desconhecidos. Para encontrar esses coeficientes, a função aproximada é substituída na equação original e a equação aproximada resultante é testada até que se tenha residual zero. Isso resulta em um número de equações algébricas simultâneas para os coeficientes desconhecidos e que são resolvidas utilizando cálculo matricial. O MoM também pode ser aplicado no domínio do tempo, mas a maioria das aplicações é no domínio da frequência.

O modelo de Equações Parabólicas, também conhecido como o método da propagação de feixe, em ótica [61,62], é amplamente utilizado em cenários de propagação de longa distância e implementa a solução de uma equação de onda parabólica por meio de transformada rápida de Fourier – *Fast Fourier Transform* (FFT), método das diferenças finitas (FD) ou método dos elementos finitos. Resolver a equação parabólica por esses métodos dá origem às variações *Split-Step Fourier Parabolic Equation*, *Finite-Difference Parabolic Equation* e *Finite-Element Parabolic Equation* [62]. A forma mais comum desse modelo despreza os efeitos de retroespalhamento (1-way) e é válida em regiões próximas a uma direção para-axial de propagação. Modelos que consideram o retroespalhamento (2-way) também foram introduzidos [63–65]. O método PE é um problema de valor inicial e que considera características transversais e longitudinais do ambiente (perfil de terreno irregular bem como variações de refratividade atmosférica) e as condições de contorno devem ser satisfeitas artificialmente.

O Método das Diferenças Finitas no Domínio do Tempo [66] discretiza as equações de Maxwell substituindo as derivadas temporais por aproximações de diferenças finitas diretamente no domínio do tempo. É um método simples, fácil de codificar, mas tem solução iterativa e, por isso, é condicionalmente estável. Ele apenas consegue modelar campo próximo, mas é possível extrapolar campos distantes utilizando princípios de equivalência (Stratton-Chu). Um de seus maiores inconvenientes é que seu volume é finito, ou seja, é possível modelar apenas regiões fechadas. Felizmente, foram desenvolvidas várias condições de fronteira efetivas para representar terminações e simular regiões fechadas. Além disso, esse método pode acomodar excitação em banda larga ou de pulso, porém deve-se lidar, nesses casos, como dispersão numérica.

Finalmente, o método de Matriz de Linha de Transmissão [67] utiliza o princípio de Huygens e teoria de circuitos para discretizar os campos eletromagnéticos tridimensionais em um vetor tridimensional de elementos discretos. Ele é baseado na analogia entre os campos eletromagnéticos e uma malha de linhas de transmissão, portanto, discretiza o domínio computacional em termos de uma malha com várias linhas de transmissão interconectadas em nós. Essa técnica envolve dois passos básicos: (1) substituir o problema de campo por uma rede equivalente e estabelecer a conexão entre as quantidades de campo e de rede; (2) resolver a rede equivalente por métodos iterativos. Os problemas desse método são muito parecidos com os do método FDTD, como estabilidade condicional, dispersão numérica, incapacidade de campo distantes, entre outros.

Dada tal variedade de modelos, com seus prós e contras, é muito importante fazer escolhas corretas para sua utilização. O primeiro passo para uma boa escolha é entender as necessidades do usuário:

- qual tipo de problema deve ser resolvido;
- é desejada resposta em banda estreita ou banda larga;
- o problema é de circuito ou de campo eletromagnético;
- geometria é simples ou complexa;
- é necessário modelar detalhes muito específicos;
- qual a maior e a menor dimensão da geometria em termos de comprimento de onda;
- qual sistema de coordenadas é mais indicado: retangular, cilíndrico, esférico;
- é necessário algo rápido computacionalmente;
- quanto de memória computacional é necessária;
- qual a acurácia esperada;
- entre outros.

Tudo isso influencia na escolha correta dos modelos. Para isso, deve-se conhecer muito bem o que se deseja como resultado e, também, conhecer muito bem o que cada método oferece, seus prós e contras para cada situação. Além disso, problemas realistas não possuem soluções analíticas exatas e nem

aproximadas. Portanto, para uma sábia escolha, é interessante fazer comparações dos modelos pretendidos com medidas empíricas e com outros modelos numéricos.

6.4 Considerações Finais

Dada a grande importância dos processos de modelagem e simulação numérica na área de engenharia elétrica, este capítulo trouxe uma breve discussão sobre alguns aspectos que devem ser observados, como modelagem com base analítica e numérica e os processos fundamentais de modelagem e simulação. Além disso, é importante tal discussão no âmbito deste trabalho, pois, em vários momentos, lida-se com modelos e, mais ainda, é proposto um modelo no Capítulo 9.

Vale destacar que uma das etapas mais desafiadoras de modelagem e simulação é estabelecer confiabilidade aos modelos. Esse é, geralmente, um processo trabalhoso e que envolve esforço na verificação e validação dos resultados numéricos obtidos frente ao que se conhece do problema real. Além disso, é necessário experiência e boa percepção tanto da parte de quem cria modelos quanto da parte de quem apenas utiliza, pois a má utilização de um modelo considerado correto, pode gerar resultados que em nada representam a realidade física.

7 O MÉTODO DE EQUAÇÕES PARABÓLICAS

7.1 Introdução

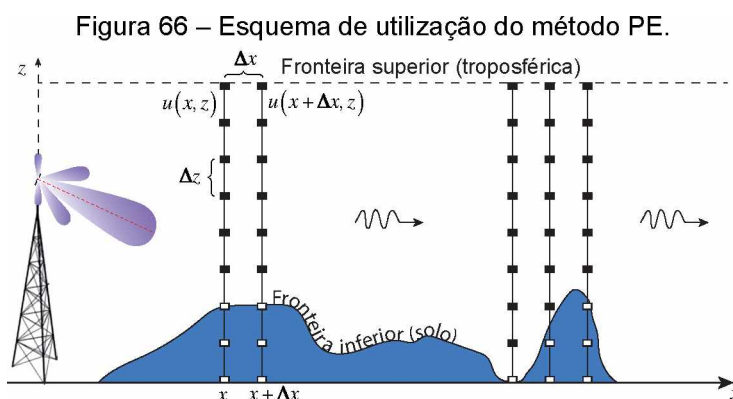
Anteriormente, de maneira especial no Capítulo 4, foram estudadas algumas das maneiras com que o ambiente interage com os enlaces de comunicação e, em geral, tal interação é no sentido de degradar a propagação de ondas. Por isso, é sempre interessante prever essa interação na tentativa de minimizar as perdas ainda na etapa de projeto dos sistemas. Portanto, é muito interessante utilizar um modelo de propagação que considera a refratividade atmosférica, a topografia e as características do solo da região de interesse.

Um método bastante estudado nos últimos anos e que consegue considerar vários aspectos da propagação de ondas como reflexão, refração, difração e ondas de superfície é o método das equações parabólicas – *Parabolic Equation* (PE). Utilizando esse método, a refratividade atmosférica, a forma e as constantes elétricas do terreno podem ser precisamente incorporadas ao modelo e os resultados são, geralmente, muito bons [62]. Nesse sentido, esse método é muito superior aos métodos comuns de teoria de raios. Outra vantagem sobre os métodos tradicionais é que o método PE continua válido nas regiões de sombra, onde os métodos de raios falham completamente.

O método PE consiste em simplificar a equação da onda de Helmholtz para uma equação parabólica e, então, obter a sua solução por meio de métodos de resolução numérica. A base para essa abordagem é considerar que a energia eletromagnética propaga, predominantemente, num sentido, ou seja, a componente de campo retroespalhado é desprezada. Desse modo, em vez de trabalhar com a equação de Helmholtz (elíptica), que conduz a ondas bidirecionais e ao acoplamento global dos campos, trabalha-se com uma aproximação parabólica.

Uma das principais vantagens é que, desse modo, a resolução passa a ser iterativa e não precisa ser calculada em todos os pontos ao mesmo tempo. Ao contrário, a solução da equação parabólica pode ser calculada separadamente em cada plano transversal à direção de propagação e é "marchada" para frente passo a passo. Os valores de campo em cada passo são, então, obtidos a partir dos valores de campo do passo anterior e isso é feito dentro de um domínio limitado por uma fronteira troposférica superior sob condição de radiação e por uma fronteira inferior

de terreno irregular sob condição de contorno apropriada. Isso é mostrado na Figura 66.



Fonte: *PETOOOL: MATLAB-based one-way and two-way split-step parabolic equation tool for radiowave propagation over variable terrain* [68].

Apesar de ignorar o retroespalhamento, a equação parabólica produz resultados muito úteis para problemas de propagação a longa distância, como observado por vários investigadores [69–94] e pode, adicionalmente, modelar o espalhamento e a despolarização do campo eletromagnético. Além de aplicações de grande distância, a equação parabólica também pode ser utilizada para fornecer resultados precisos em cálculo de espalhamento de objetos com dimensões comparáveis ao comprimento de onda [70,72,75].

Além do caso aqui apresentado que despreza o retroespalhamento (1-way *propagation*), também existem métodos de equações parabólicas que consideram esse fenômeno e são chamados de métodos 2-way *propagation*. Estes não serão abordados neste trabalho, pois o método 1-way é capaz de fornecer resultados bons para as aplicações trabalhadas aqui.

Dada a apresentação do método PE, este capítulo tem a intenção de descrever, com detalhes, aspectos teórico-matemáticos do método. Além disso, apresenta questões de implementação desse método para resolução de problemas de propagação troposférica.

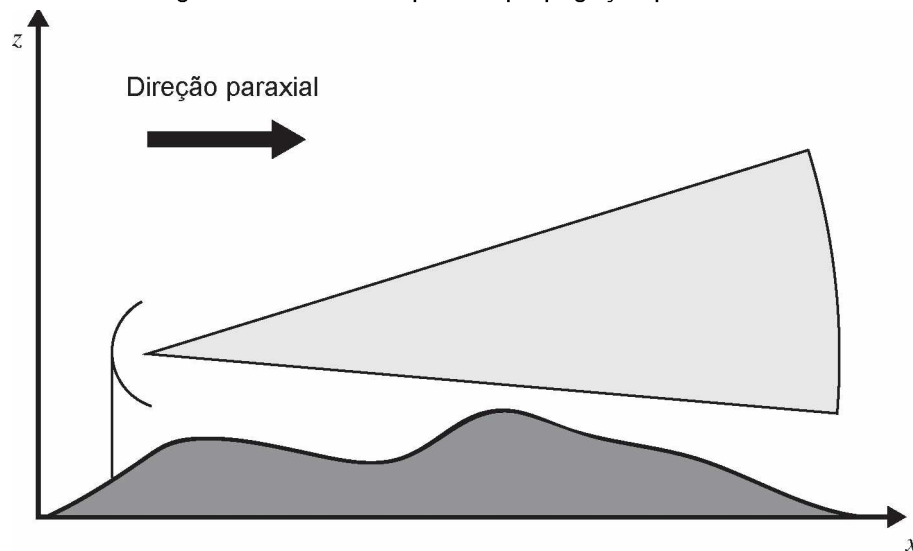
7.2 Formulação do Método

O método de equações parabólicas (PE) é, basicamente, uma aproximação da equação da onda que modela a propagação de energia dentro de um cone centrado em uma direção de interesse, comumente chamada de direção para-axial. Esse cone deve ser colocado em uma região em que o índice de refração da atmosfera

possui variações suaves e na qual podem ser estabelecidas condições de contorno apropriadas nas suas fronteiras.

Na maioria dos problemas, a fronteira inferior representa a interface atmosfera/solo e a fronteira superior deveria se estender para o infinito. Certamente, não é possível implementar um domínio infinito, mas podem ser utilizadas técnicas que simulam tal condição. Isso será discutido adiante. A Figura 67 ilustra o cenário típico de aplicação do método PE.

Figura 67 – Cenário típico de propagação para-axial.



Fonte: *Parabolic equation methods for electromagnetic wave propagation* [62].

Para o desenvolvimento genérico do método a seguir, são feitas as seguintes observações:

- é assumida a variação harmônica dos campos com frequência angular ω e a notação fasorial é utilizada;
- o método aqui apresentado destina-se a solucionar problemas bidimensionais (em muitas situações o problema completo tridimensional pode ser reduzido ao bidimensional sem grande perda de precisão);
- o sistema cartesiano de coordenadas espaciais é utilizado. Problemas em outros sistemas (cilíndrico e esférico) podem ser reduzidos ao sistema retangular;
- por convenção, a direção positiva do eixo x é tomada como a direção para-axial e a altitude é representada no eixo z ;

- os campos elétrico e magnético são independentes da coordenada transversa y (não são considerados efeitos de despolarização)
- todo o problema pode ser decomposto em dois casos: problema horizontalmente polarizado ou problema verticalmente polarizado.
- no caso da polarização horizontal, o campo elétrico $\mathbf{E}(x, z)$ possui apenas uma componente escalar $E_y(x, z)$;
- no caso da polarização vertical, o campo magnético $\mathbf{H}(x, z)$ possui apenas uma componente escalar $H_y(x, z)$
- para generalidade nos cálculos, é utilizada a componente de campo $\psi(x, z)$, definida na Equação (7.1). Em um caso, $\psi(x, z)$ representa o campo elétrico e, em outro, representa o campo magnético.

$$\begin{aligned}\psi(x, z) &= E_y(x, z) && \text{pol. horizontal} \\ \psi(x, z) &= H_y(x, z) && \text{pol. vertical}\end{aligned}\tag{7.1}$$

Pontuadas as observações e convenções necessárias, pode-se prosseguir com o desenvolvimento. A equação homogênea vetorial de Helmholtz em um meio livre de fontes foi discutida na Seção 2.6.2 e é dada pela Equação (7.2).

$$\nabla^2 \boldsymbol{\Psi} - \gamma^2 \boldsymbol{\Psi} = 0\tag{7.2}$$

em que o campo vetorial $\boldsymbol{\Psi}$ possui apenas uma componente na direção y ($\boldsymbol{\Psi} = \psi \hat{y}$).

Como $\boldsymbol{\Psi} = \psi \hat{y}$, a expressão vetorial da Equação (7.2) se reduz à expressão escalar da Equação (7.3).

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \gamma^2 \psi = 0\tag{7.3}$$

em que a constante de propagação é dada por $\gamma^2 = -\omega^2 \mu \epsilon + j\omega \mu \sigma$.

Considerando um meio sem perdas e não magnético ($\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$, $\mu = \mu_0$, $\sigma = 0$), o termo $\gamma^2 = -\omega^2 \mu \epsilon + j\omega \mu \sigma$ pode ser escrito como $\gamma^2 = -\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r$ e a Equação (7.3) se torna a Equação (7.5).

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \psi = 0 \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \beta_0^2 \epsilon_r \psi = 0 \quad (7.5)$$

em que $\beta_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ é a constante de fase do vácuo.

Além disso, em um meio sem perdas e não magnético, o índice de refração pode ser dado por $n = \sqrt{\epsilon_r}$. Assim, chega-se à Equação (7.6).

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \beta_0^2 n^2 \psi = 0 \quad (7.6)$$

em que n é o índice de refração do meio.

Apenas para concordar com grande parte da bibliografia de propagação, será feita uma mudança de variável e a constante de fase β_0 passa a ser representada por $k_0 = \beta_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$. Assim, escreve-se novamente a Equação (7.6) no formato da Equação (7.7), que é uma equação escalar homogênea de onda.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k_0^2 n^2 \psi = 0 \quad (7.7)$$

Quando o índice de refração varia espacialmente, a Equação (7.7) não é exatamente válida, mas ainda pode ser uma boa aproximação se as variações do índice de refração forem suaves na escala do comprimento de onda. Então, considerando esse comportamento, a Equação (7.8) pode ser utilizada nesses casos.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k_0^2 n^2(x, z) \psi = 0 \quad (7.8)$$

Continuando, o cerne da aproximação parabólica é considerar que a componente de campo $\psi(x, z)$ pode ser fatorada em dois termos, de acordo com a Equação (7.9).

$$\psi(x, z) = u(x, z)e^{jk_0x} \quad (7.9)$$

em que o termo e^{jk_0x} é uma variação rápida de fase e $u(x, z)$ é uma variação lenta de amplitude. Isso só pode ser feito porque o interesse está nas variações do campo em escalas grandes em relação ao comprimento de onda.

Grande parte de simplicidade da equação parabólica frente à equação elíptica vem dessa decomposição. Porém, a acurácia dessa aproximação é boa apenas dentro de uma região para-axial dentro do cone mostrado na Figura 67. Para pontos distantes do cone, o erro entre a modelagem parabólica e elíptica aumenta consideravelmente.

Prosseguindo com a fatoração da Equação (7.9), é necessário substituir a aproximação da Equação (7.9) na Equação (7.8). Assim, desenvolve-se as Equações (7.10a) e (7.10b).

$$\frac{\partial^2 (ue^{jk_0x})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (ue^{jk_0x})}{\partial z^2} + k_0^2 n^2(x, z) ue^{jk_0x} = 0 \quad (7.10a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2jk_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k_0^2 [n^2(x, z) - 1] u = 0 \quad (7.10b)$$

Agora, a Equação (7.10b) pode ser fatorada de acordo com a Equação (7.11) por meio da utilização de um operador pseudodiferencial [62].

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} + jk_0(1-Q) \right] \left[\frac{\partial}{\partial x} + jk_0(1+Q) \right] u = 0 \quad (7.11)$$

em que $Q = \sqrt{\frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + n^2(x, z)}$ é o operador pseudodiferencial.

Operadores pseudodiferenciais são operadores formados por derivadas parciais e funções ordinárias das variáveis em questão. A operação de raiz

quadrada em Q existe para representar a composição de operações no sentido mostrado na Equação (7.12). Nesse caso, também assume-se que expansões comuns para a operação de raiz quadrada podem ser aplicadas a Q [62].

$$Q(Q(u)) = \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x, z) + n^2(x, z)u(x, z) \quad (7.12)$$

Fatorar a Equação (7.10b) nos dois termos da Equação (7.11) produz alguns erros porque o índice de refração varia com a distância para-axial x . Assim, o operador Q não comuta com a derivada em x (não considera variação em x) e, portanto, a fatoração é incorreta. Entretanto, tomando os cuidados necessários para que seja possível considerar que as variações de n com x são pequenas, os erros resultantes também permanecem pequenos.

Considerando a Equação (7.11) válida, o próximo passo do desenvolvimento é dividi-la em duas equações separadas e encontrar suas soluções. Assim, a Equação (7.11) gera as equações pseudodiferenciais (7.13) e (7.14).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -jk_0(1 - Q)u \quad (7.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -jk_0(1 + Q)u \quad (7.14)$$

As Equações (7.13) e (7.14) correspondem, respectivamente, a ondas que propagam no sentido positivo e negativo da direção para-axial x e são chamadas de *forward* e *backward propagation*. Em meios independentes da distância para-axial ou naqueles que pode-se fazer tal aproximação sem incorrer em problemas com a fatoração da Equação (7.10b), a solução de uma das Equações (7.13) ou (7.14) satisfaz, automaticamente, a Equação (7.10b), porém não representa o campo eletromagnético real [62].

Por exemplo, uma solução da Equação (7.13) não considera o retroespalhamento do campo e, para se ter uma solução completa do campo eletromagnético, é necessário resolver, simultaneamente, o sistema de equações mostrado na Equação (7.15). Assim, o campo eletromagnético real é a soma da componente *forward* e da componente retroespalhada (*backward*).

$$\begin{cases} u &= u^+ + u^- \\ \frac{\partial u^+}{\partial x} &= -jk_0(1-Q)u^+ \\ \frac{\partial u^-}{\partial x} &= -jk_0(1+Q)u^- \end{cases} \quad (7.15)$$

Entretanto, quando a distância entre o transmissor e o receptor é grande comparada às alturas das antenas, é possível considerar que a energia eletromagnética propaga entre as duas antenas em ângulos rasantes em relação ao terreno. Mais ainda, supondo que as superfícies de propagação (terreno, oceano, entre outros) são suavemente inclinadas, é válido considerar que a energia eletromagnética propaga, predominantemente, no sentido do transmissor para receptor e que a componente de campo retroespalhado é relativamente pequena e pode ser desprezada [73].

Sob essas condições, despreza-se a Equação (7.14) e resolve-se apenas a Equação (7.13). Desse modo, a equação de Helmholtz (elíptica), que conduz a ondas bidirecionais e ao acoplamento global dos campos, pode ser substituída por uma única equação parabólica mais simples. Esse procedimento é chamado de aproximação para-axial.

As Equações (7.13) e (7.14) são equações pseudodiferenciais de primeira ordem em x (por isso a nomenclatura parabólica) e, matematicamente, a solução formal da Equação (7.13) é mostrada na Equação (7.16).

$$u(x + \Delta x, z) = e^{jk_0 \Delta x (-1+Q)} u(x, z) \quad (7.16)$$

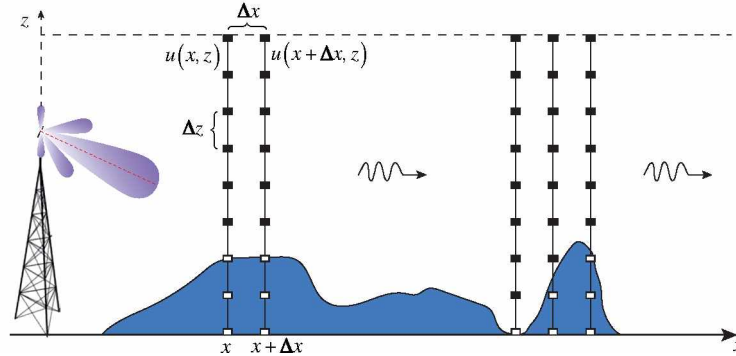
Desse modo, a componente de campo reduzida u é obtida, em uma distância $x + \Delta x$, a partir dos valores de campo na distância anterior x e das condições de contorno apropriadas. É como se a solução “marchasse” ao longo da distância para-axial a partir de uma distribuição inicial de campo.

Resolver esse tipo de equação implica em um ganho computacional substancial frente à solução da equação elíptica da onda. Isso ocorre, pois esta é de segunda ordem em x e em z e deve ser resolvida, simultaneamente, em todos os pontos do domínio de integração, ao contrário da resolução da equação parabólica,

que é iterativa e calculada, separadamente, em cada reta transversal à direção de propagação até que todo o domínio seja processado.

Como mostra a Figura 68, a distribuição de campo inicial $u(0, z)$ deve ser conhecida e, a partir dessa distribuição, as distribuições a cada incremento de distância são encontradas iterativamente. Assim, $u(x + \Delta x, z)$ depende de $u(x, z)$.

Figura 68 – Ilustração do procedimento iterativo para resolução da equação parabólica.



Fonte: PETOOL: MATLAB-based one-way and two-way split-step parabolic equation tool for radiowave propagation over variable terrain [68].

É importante lembrar que a fatoração feita na Equação (7.11) em dois termos para-axiais implica que apenas a energia que propaga dentro de um cone para-axial pode ser corretamente modelada. Isso limita o tipo de propagação que pode ser representado fielmente por essa técnica, mas ela continua acurada para um grande número de problemas e tem vantagens computacionais.

7.3 Aproximações para o Operador \mathcal{Q}

O objetivo final do método é resolver a Equação (7.13), que pode ser reescrita na forma da Equação (7.17). Para prosseguir com a solução, é necessário resolver a raiz quadrada da Equação (7.17) e há vários modos para se fazer isso.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -jk_0 \left(1 - \sqrt{\frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + n^2(x, z)} \right) u \quad (7.17)$$

O método mais simples é fazer uma aproximação de Taylor de primeira ordem para a raiz quadrada [62]. Assim, desenvolve-se as Equações (7.18a) a (7.18d).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -jk_0 \left(1 - \sqrt{\frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + n^2(x, z)} + 1 - 1 \right) u \quad (7.18a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{jk_0}{2} \left[\frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + n^2(x, z) - 1 \right] u \quad (7.18b)$$

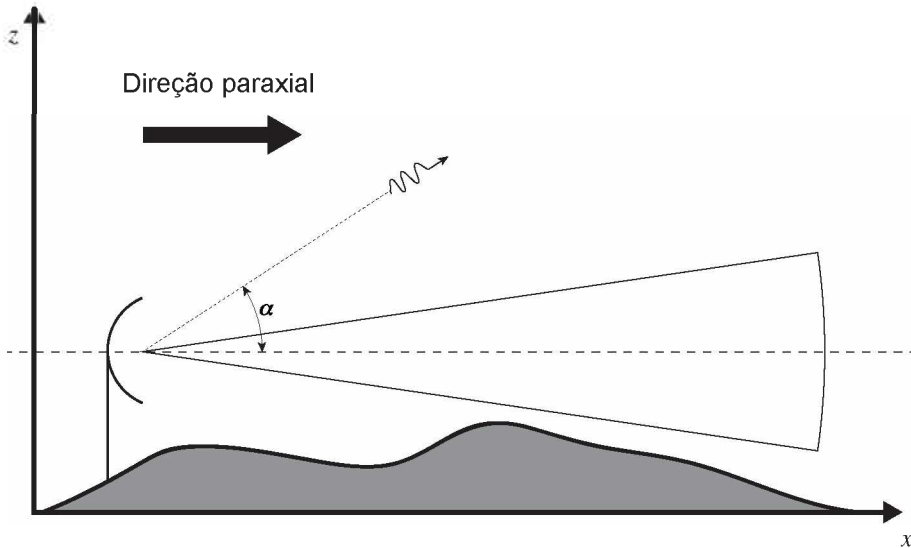
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{j}{2k_0} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{jk_0}{2} [n^2(x, z) - 1] u \quad (7.18c)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x, z) + 2jk_0 \frac{\partial u}{\partial x}(x, z) + k_0^2 [n^2(x, z) - 1] u(x, z) = 0 \quad (7.18d)$$

A Equação (7.18d) é a forma mais simples da equação parabólica e é extremamente útil para solucionar problemas de propagação troposférica de longo alcance. Nesses ambientes, o índice de refração do ar é muito próximo da unidade e não causa grandes problemas de acurácia. Entretanto, as limitações dessa formulação são devido ao seu mau comportamento em grandes ângulos de propagação, ou seja, em pontos distantes do cone para-axial.

Considere uma onda plana que propaga a um ângulo α da direção para-axial (horizontal na convenção utilizada) como mostra a Figura 69.

Figura 69 – Ilustração do ângulo de propagação α .



Fonte: Elaborada pelo autor.

O primeiro termo descartado na expansão de Taylor é proporcional à expressão da Equação (7.19).

$$\frac{1}{k_0^2} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| = \sin^2 \alpha \quad (7.19)$$

Portanto, o erro será proporcional a $\sin^4 \alpha$. Assim, para um ângulo de 1° , o erro será de $9,277 \cdot 10^{-8}$ e, para um ângulo de 10° , o erro será de $9,09 \cdot 10^{-4}$, que é considerado um erro grande.

Analisando a Figura 69 e a Equação (7.19), fica evidente que, para ângulos grandes fora do cone para-axial, a exatidão do resultado diminui bastante. Por esse comportamento, a equação parabólica padrão da Equação (7.18d) é chamada de aproximação de ângulo estreito ou equação parabólica de ângulo estreito – *Narrow-Angle Parabolic Equation* (NAPE) – e acomoda ângulos de propagação de até 10° a 15° . Para problemas troposféricos de longas distâncias, isso não é um problema, pois os ângulos de interesse costumam ser menores que alguns graus.

Quando os problemas envolvem grandes ângulos de propagação, expansões mais acuradas do operador Q são necessárias para formular a equação parabólica de ângulo amplo – *Wide-Angle Parabolic Equation* (WAPE). Alguém poderia prontamente querer utilizar expansões de Taylor de maior ordem, mas já se sabe que isso produz instabilidades nos esquemas numéricos de resolução [95,96] e não é utilizado. Uma das melhores soluções é a utilização de aproximações racionais para a raiz quadrada. Essa ideia foi introduzida no ambiente de equações parabólicas por Claerbout [97] e envolve esquemas Padé.

Um aproximador Padé- (p_1, p_2) de uma função $f(t)$ é uma função racional F da forma da Equação (7.20).

$$F(t) = \frac{P_2(t)}{P_1(t)} \quad (7.20)$$

em que $P_1(t)$ e $P_2(t)$ são polinômios de grau p_1 e p_2 , respectivamente.

O número de graus de liberdade de $F(t)$ é $p_1 + p_2 + 1$, então é possível obter resultados com uma aproximação Padé equivalentes a expansões de Taylor de ordem $p_1 + p_2$. Uma das expansões racionais mais simples utiliza um esquema Padé-(1,1) e é dada pela Equação (7.21).

$$\sqrt{1+Z} = \frac{1+aZ}{1+bZ} \quad (7.21)$$

em que os coeficientes a e b podem assumir diversos valores.

Se for utilizado $a = 3/4$ e $b = 1/4$, a Equação (7.21) é equivalente a uma expansão de Taylor de segunda ordem. De fato, esses valores de a e b foram os utilizados por Claerbout quando sugeriu esse tipo de aproximação.

Voltando dessa pequena digressão, no caso da equação parabólica da Equação (7.17), reescreve-se o operador Q como na Equação (7.22).

$$Q = \sqrt{\frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + n^2(x, z)} = \sqrt{1+Z} = \frac{1+aZ}{1+bZ} \quad (7.22)$$

em que $Z = \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + n^2(x, z) - 1$.

Utilizando $a = 3/4$ e $b = 1/4$, desenvolve-se as Equações (7.23a) a (7.23e).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -jk_0 \left(1 - \sqrt{\frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + n^2(x, z)} \right) u \quad (7.23a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -jk_0 (1 - \sqrt{1+Z}) u \quad (7.23b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -jk_0 \left(1 - \frac{1+aZ}{1+bZ} \right) u \quad (7.23c)$$

$$(1+bZ) \frac{\partial u}{\partial x} - jk_0 Z(a-b) u = 0 \quad (7.23d)$$

$$\left(1 + \frac{Z}{4} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - jk_0 \frac{Z}{2} u = 0 \quad (7.23e)$$

A Equação (7.23e) é uma equação parabólica do tipo WAPE (de ângulo amplo). Nesse caso, o erro para uma onda plana propagando a um ângulo α da horizontal passa a ser da ordem de $\sin^6 \alpha$ e a solução passa a ser aceitável para ângulos de até 45° .

A aproximação de Claerbout utiliza um esquema Padé-(1,1) e os coeficientes $a = 3/4$ e $b = 1/4$. Outras aproximações podem ser feitas com outros valores de a e b e com esquemas Padé de outros tipos. Ainda, outros tipos de aproximações podem ser utilizadas para o operador Q e a escolha ótima depende do setor angular de interesse e do tipo de condição de contorno a ser modelada.

7.4 Métodos de Solução

A predição rigorosa da propagação de ondas tridimensional requer a solução da equação de onda vetorial derivada das equações de Maxwell no domínio do tempo ou da equação de Helmholtz vetorial no domínio da frequência. Entretanto, isso é muito difícil, devido ao acoplamento das componentes do campo elétrico pela presença de terreno irregular e pelas não-homogeneidades da atmosfera. Na maioria das situações, essas complicações são tantas que soluções analíticas não são viáveis e é necessário utilizar cálculos numéricos como o único recurso.

Os métodos numéricos aplicados ao problema de propagação tridimensional são, geralmente, divididos entre métodos de equação integral e métodos de equação diferencial. Os métodos baseados em equações integrais envolvem sistemas lineares cheios com matrizes de ordem muito elevada que precisam ser invertidas. Além disso, o tratamento rigoroso de uma troposfera não homogênea pelo método de equação integral é extremamente difícil [77,78].

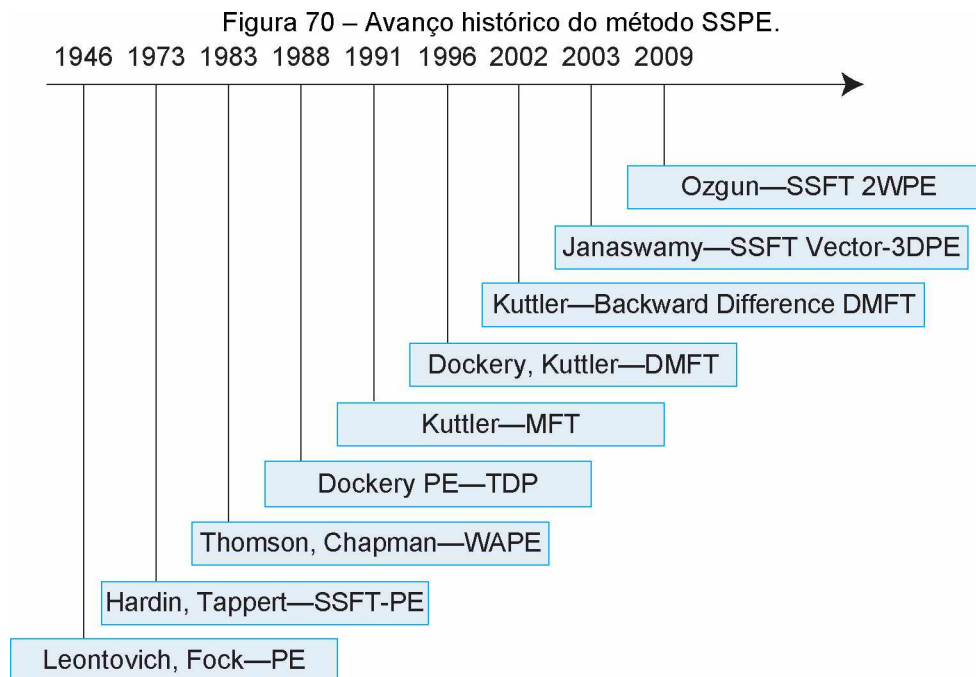
Já os métodos de equação diferencial, por outro lado, tratam inomogeneidades atmosféricas de forma mais simples e costumam trabalhar com sistemas de ordem elevada, porém esparsos [79]. Sendo assim, é mais desejável o tratamento por meio de métodos de equação diferencial. A referência [87] fornece uma revisão abrangente dos vários modelos analíticos e numéricos utilizados para estudar propagação terrestre bidimensional tanto no domínio da frequência como do tempo.

Já o problema simplificado de propagação bidimensional é formulado em termos de uma equação parabólica escalar que governa as componentes de campo $E_y(x,z)$ (polarização horizontal) e $H_y(x,z)$ (polarização vertical) também pode ser resolvido por técnicas numéricas diferenciais e integrais. As mais utilizadas são o método de divisor de passos de Fourier ou *Fourier Split-Step* (SSPE – *Split-Step Parabolic Equation*) [83,84] e o método das diferenças finitas (FDPE – *Finite Difference Parabolic Equation*) [62]. Esses métodos dividem a distância entre

transmissor e receptor e determinam a componente de campo em pequenos incrementos a partir de um valor inicial.

7.4.1 Método do divisor de passos de Fourier

O método de equações parabólicas foi desenvolvido, primeiramente, por Leontovich e Fock em 1946 [80,81], mas não foi utilizado como uma solução prática para ambientes complexos até 1973, quando Hardin e Tappert desenvolveram um método computacional eficiente chamado de divisor de passos de Fourier – *Split-Step Fourier Method* (SSFM) [82]. Após seu surgimento, o SSFM foi aplicado para modelar a propagação de ondas acústicas subaquáticas [82] com sucesso e, apenas algum tempo depois, começou a ser utilizado em problemas eletromagnéticos. Com o passar dos anos, se tornou um dos métodos famosos para modelar a propagação troposférica. A Figura 70 mostra o esquema do histórico do desenvolvimento do método SSPE.



Fonte: *Applying the Parabolic Equation to Tropospheric Groundwave Propagation* [98].

No método SSPE, o campo em $(x + \Delta x, z)$ é obtido, a cada incremento, a partir do campo em x e pela ação de um operador que é dividido em três partes (daí o nome de divisor de passos). A solução segue a estrutura da Equação (7.24).

$$u(x + \Delta x, z) = A B A u(x, z) \quad (7.24)$$

Os operadores simétricos A consideram as variações atmosféricas e o operador central B é responsável por propagar o campo no vácuo sobre um plano horizontal. O ponto importante é que a ação do operador B é implementada no domínio transformado pela utilização da transformada de Fourier. Por isso, o método leva o nome de Fourier *Split-Step*.

Em geral, o procedimento a cada iteração é:

1. fazer a transformada de Fourier do campo em x , $U(x, p) = \mathfrak{F}[u(x, z)]$;
2. multiplicar o campo transformado por um operador de propagação no domínio transformado;
3. fazer a transformada inversa;
4. multiplicar o resultado por um propagador no domínio espacial.

Esse processo é representado na Equação (7.25).

$$u(x + \Delta x, z) = e^{jk_0(n^2 - 1)\frac{\Delta x}{2}} \times \mathfrak{F}^{-1} \left\{ e^{\frac{jp^2 \Delta x}{2k_0}} \mathfrak{F}[u(x, z)] \right\} \quad (7.25)$$

em que p é a variável do domínio transformado.

É importante salientar que, aqui, é utilizada a nomenclatura Transformada de Fourier genericamente. As transformadas não precisam ser, obrigatoriamente, a Transformada de Fourier padrão. Pelo contrário, muitas vezes é utilizada a Transformada Seno de Fourier.

Mais detalhes do formalismo desse método para propagação troposférica podem ser encontrados em [83,84].

7.4.2 Método das diferenças finitas

O método das diferenças finitas é um dos métodos existentes mais simples para a solução numérica de equações diferenciais parciais e Malyuzhinets [85] propôs sua utilização para a solução de problemas de propagação de ondas eletromagnéticas. Sua implementação se deu com Popov [86].

A base desse método é substituir as derivadas das equações diferenciais por diferenças finitas. Desse modo, as equações diferenciais passam a ser equações de diferenças. Basicamente, o domínio de interesse é dividido em uma grade ou malha

e as equações diferenças são escritas em termos dos pontos da malha. Isso implica em grandes sistemas algébricos que podem ser facilmente resolvidos computacionalmente.

As equações diferença podem ser escritas com diferenças finitas progressivas ou regressivas, implicando nos métodos ditos explícitos e implícitos, respectivamente. Uma outra opção é realizar uma média ponderada entre esses dois métodos e isso é chamado de esquema- θ . Quando o fator de ponderação dessa média é $1/2$, ou seja, tem-se a média aritmética, o esquema é conhecido como esquema de Crank-Nicolson. Neste trabalho, é utilizado o método de diferenças finitas com o esquema de Crank-Nicolson e seu procedimento é abordado em alto nível de detalhes ao final deste capítulo na Seção 7.13.

Em relação ao SSPE, o método de diferenças finitas tem a desvantagem de requerer incrementos menores de distância. Entretanto, o SSPE exige que a condição de contorno do terreno seja imposta sobre uma fronteira plana no domínio da transformada. Por isso, para acomodar terrenos irregulares no SSPE, deve ser feito um mapeamento ou mudança de coordenadas para planificar o terreno [95]. O FDPE, por outro lado, força a condição de contorno do terreno diretamente no domínio espacial e, portanto, trata o terreno irregular de uma forma mais simples [59]. Portanto, situações com fronteiras complicadas são melhor tratadas com o método de diferenças finitas.

Além do exposto aqui e no final deste capítulo, mais detalhes do método FDPE podem ser encontrados em [62].

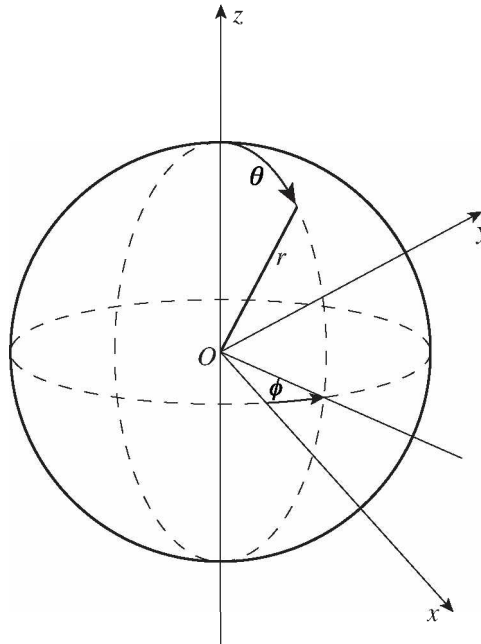
7.4.3 Método dos elementos finitos

Embora não seja tão comum em aplicações de equação parabólica, também é importante citar o método dos elementos finitos – *Finite-Element Method* (FEM). Esse método já foi utilizado na solução da equação parabólica bidimensional [100] e seu ponto mais forte é a modelagem da propagação em ambientes com fortes dutos troposféricos e quando o índice de refração varia rapidamente [101]. Além disso, ele também é utilizado na resolução de problemas de espalhamento e seção transversal.

7.5 Equações para Propagação de Ondas

Na Seção 7.2, o conceito do método de equações parabólicas foi desenvolvido considerando coordenadas retangulares e explorando o fato de que as soluções das equações de Maxwell podem ser representadas em termos de campos polarizados vertical ou horizontalmente. Entretanto, a propagação real de ondas se dá ao redor da Terra e, claramente, coordenadas retangulares ou cilíndricas não são as ideais. Portanto, a ideia natural é utilizar as coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) com origem no centro da Terra, de acordo com a Figura 71.

Figura 71 – Sistema de coordenadas esféricas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Por convenção, a fonte de radiação é colocada no eixo z e a atmosfera é considerada como um meio de propagação não homogêneo, mas com variação suave e com permeabilidade magnética igual à do vácuo. Assim, as equações de Maxwell na forma fasorial da Seção 2.3.6 podem ser escritas como nas Equações (7.26a) a (7.26d), considerando um meio livre de fontes.

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mathbf{B} \quad (7.26a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega \mathbf{D} \quad (7.26b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (7.26c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (7.26d)$$

Utilizando as relações constitutivas discutidas na Seção 2.4, o conceito de impedância característica da Seção 2.6.6 e o conceito de índice de refração da Seção 2.6.4, chega-se às Equações (7.27a) a (7.27d).

$$\nabla \times \mathbf{E} = -jk_0 Z_0 \mathbf{H} \quad (7.27a)$$

$$Z_0 \nabla \times \mathbf{H} = jk_0 n^2 \mathbf{E} \quad (7.27b)$$

$$\nabla \cdot n^2 \mathbf{E} = 0 \quad (7.27c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (7.27d)$$

Agora, é preciso desenvolver os rotacionais em coordenadas esféricas. Para isso, a Equação (7.28) traz a fórmula do rotacional.

$$\nabla \times \mathbf{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial (A_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi} \quad (7.28)$$

Portanto, chega-se ao conjunto de seis equações escalares da Equação (7.29).

$$\begin{aligned} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial (E_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial E_\theta}{\partial \phi} \right] \right] &= -jk_0 Z_0 H_r \\ \left[\frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r E_\phi)}{\partial r} \right] \right] &= -jk_0 Z_0 H_\theta \\ \left[\frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r E_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] \right] &= -jk_0 Z_0 H_\phi \\ \left[\frac{Z_0}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial (H_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial \phi} \right] \right] &= jk_0 n^2 E_r \\ \left[\frac{Z_0}{r} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial H_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r H_\phi)}{\partial r} \right] \right] &= jk_0 n^2 E_\theta \\ \left[\frac{Z_0}{r} \left[\frac{\partial (r H_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] \right] &= jk_0 n^2 E_\phi \end{aligned} \quad (7.29)$$

O sistema da Equação (7.29) representa um problema vetorial tridimensional completo e resolvê-lo em cenários reais de propagação é muito difícil. Em vez disso,

é possível chegar a uma solução tratável se alguma simetria for assumida. Isso é alcançado por meio das seguintes suposições principais:

- o terreno bidimensional vizinho ao plano de propagação é azimutalmente uniforme e, conseqüentemente, pode ser aproximado por um terreno unidimensional num plano que contém o transmissor, receptor e o centro da Terra;
- a atmosfera interveniente é azimutalmente uniforme;
- a fonte de radiação possui simetria azimutal.

De fato, vários problemas de propagação podem ser tratados dessa forma, pois, muitas vezes, as variações azimutais do terreno e da atmosfera são realmente lentas. Além disso, quando o comprimento de onda de interesse é pequeno em relação ao raio da Terra, é possível desprezar os efeitos laterais de propagação, ou seja, a maioria da energia que flui do transmissor para o receptor está confinada à vizinhança do plano que contém as antenas e o centro da Terra [102]. Infelizmente, devem ser feitas essas simplificações, pois essa é a única maneira prática para tratar problemas de propagação a longas distâncias desse tipo e vários autores fazem a mesma consideração.

A modelagem aproximada descrita acima ignora as variações laterais do terreno e despreza a energia que propaga fora do plano que contém as antenas e o centro da Terra. Essa suposição oferece, obviamente, uma grande simplificação do problema tridimensional original em dois problemas bidimensionais uniformes no plano transversal.

Estes são o problema horizontalmente polarizado e o problema verticalmente polarizado [99,73]. O problema de polarização horizontal envolve uma única componente de campo elétrico (E_ϕ) e o problema de polarização vertical envolve uma única componente de campo magnético (H_ϕ), perpendiculares ao plano de propagação.

Assim, as equações escalares da Equação (7.29) se tornam as expressões da Equação (7.30).

$$\begin{cases}
 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (E_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} = -jk_0 Z_0 H_r \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial (r E_\phi)}{\partial r} = jk_0 Z_0 H_\theta \\
 \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r E_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] = -jk_0 Z_0 H_\phi \\
 \frac{Z_0}{r \sin \theta} \frac{\partial (H_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} = jk_0 n^2 E_r \\
 \frac{Z_0}{r} \frac{\partial (r H_\phi)}{\partial r} = -jk_0 n^2 E_\theta \\
 \frac{Z_0}{r} \left[\frac{\partial (r H_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] = jk_0 n^2 E_\phi
 \end{cases} \quad (7.30)$$

De posse das equações escalares simplificadas, é necessário obter as equações de onda escalares para cada tipo de campo.

7.5.1 Polarização horizontal

Considerando, primeiramente, a polarização horizontal, E_r , E_θ e H_ϕ são nulos e a única componente não nula de \mathbf{E} é E_ϕ . Por isso, o sistema da Equação (7.30) é reduzido para o sistema da Equação (7.31).

$$\begin{cases}
 \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (E_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} = -jk_0 Z_0 H_r \\
 \frac{1}{r} \frac{\partial (r E_\phi)}{\partial r} = jk_0 Z_0 H_\theta \\
 \frac{Z_0}{r} \left[\frac{\partial (r H_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \right] = jk_0 n^2 E_\phi
 \end{cases} \quad (7.31)$$

A resolução do sistema da Equação (7.31) leva à Equação (7.32).

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r E_\phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial (E_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} + k_0^2 n^2 E_\phi = 0 \quad (7.32)$$

Agora, é introduzida a componente de campo ψ_h em que é fatorado o espalhamento cilíndrico do campo por meio da substituição da Equação (7.33).

As Equações (7.34a) a (7.34l) mostram a substituição da Equação (7.33) na Equação (7.32).

$$E_\phi = \frac{\psi_h}{\sqrt{k_0 r \sin \theta}} \quad (7.33)$$

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\partial^2 (\sqrt{r} \psi_h)}{\partial r^2} + \frac{\sqrt{\sin \theta}}{r^2} \frac{\partial \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial (\psi_h \sqrt{\sin \theta})}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} + k_0^2 n^2 \psi_h = 0 \quad (7.34a)$$

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\psi_h}{2\sqrt{r}} + \sqrt{r} \frac{\partial \psi_h}{\partial r} \right] \right] + \frac{\sqrt{\sin \theta}}{r^2} \frac{\partial \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial (\psi_h \sqrt{\sin \theta})}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} + k_0^2 n^2 \psi_h = 0 \quad (7.34b)$$

$$\frac{1}{\sqrt{r}} \left[\frac{1}{2\sqrt{r}} \frac{\partial \psi_h}{\partial r} - \frac{\psi_h}{4r\sqrt{r}} + \frac{\partial}{\partial r} \left[\sqrt{r} \frac{\partial \psi_h}{\partial r} \right] \right] + \frac{\sqrt{\sin \theta}}{r^2} \frac{\partial \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial (\psi_h \sqrt{\sin \theta})}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} + k_0^2 n^2 \psi_h = 0 \quad (7.34c)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_h}{\partial r} - \frac{\psi_h}{4r^2} + \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial r^2} + \frac{\sqrt{\sin \theta}}{r^2} \frac{\partial \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial (\psi_h \sqrt{\sin \theta})}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} + k_0^2 n^2 \psi_h = 0 \quad (7.34d)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_h}{\partial r} - \frac{\psi_h}{4r^2} + \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial r^2} + \dots \\ & \dots + \frac{\sqrt{\sin \theta}}{r^2} \left[-\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial (\psi_h \sqrt{\sin \theta})}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \left(\frac{\partial (\psi_h \sqrt{\sin \theta})}{\partial \theta} \right)}{\partial \theta} \right] + k_0^2 n^2 \psi_h = 0 \end{aligned} \quad (7.34e)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_h}{\partial r} - \frac{\psi_h}{4r^2} + \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial r^2} + \dots \\
& \dots + \frac{\sqrt{\sin \theta}}{r^2} \left[-\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial (\psi_h \sqrt{\sin \theta})}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \left(\sqrt{\sin \theta} \frac{\partial \psi_h}{\partial \theta} + \frac{\psi_h \cos \theta}{2\sqrt{\sin \theta}} \right)}{\partial \theta} \right] + \dots \quad (7.34f) \\
& \dots + k_0^2 n^2 \psi_h = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_h}{\partial r} - \frac{\psi_h}{4r^2} + \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial r^2} + \dots \\
& + \frac{\sqrt{\sin \theta}}{r^2} \left[-\frac{\cos \theta}{\sin \theta \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial \psi_h}{\partial \theta} - \frac{\psi_h \cos^2 \theta}{2 \sin^2 \theta \sqrt{\sin \theta}} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \left(\sqrt{\sin \theta} \frac{\partial \psi_h}{\partial \theta} + \frac{\psi_h \cos \theta}{2\sqrt{\sin \theta}} \right)}{\partial \theta} \right] + \dots \quad (7.34g) \\
& \dots + k_0^2 n^2 \psi_h = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_h}{\partial r} - \frac{\psi_h}{4r^2} + \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial r^2} + \dots \\
& \dots + \frac{\sqrt{\sin \theta}}{r^2} \left[-\frac{\cos \theta}{\sin \theta \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial \psi_h}{\partial \theta} - \frac{\psi_h \cos^2 \theta}{2 \sin^2 \theta \sqrt{\sin \theta}} + \dots \right. \\
& \left. \dots + \frac{1}{\sin \theta} \left[\frac{\cos \theta}{2\sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial \psi_h}{\partial \theta} + \sqrt{\sin \theta} \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial \theta^2} + \dots \right. \right. \\
& \left. \left. \dots + \frac{1}{2} \left[\frac{\cos \theta}{\sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial \psi_h}{\partial \theta} - \psi_h \sqrt{\sin \theta} - \frac{\psi_h \cos^2 \theta}{2 \sin \theta \sqrt{\sin \theta}} \right] \right] \right] + \dots \quad (7.34h) \\
& \dots + k_0^2 n^2 \psi_h = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_h}{\partial r} - \frac{\psi_h}{4r^2} + \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial r^2} + \frac{\sqrt{\sin \theta}}{r^2} \left[\frac{1}{\sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial \theta^2} - \frac{\psi_h}{2\sqrt{\sin \theta}} - \frac{3\psi_h \cos^2 \theta}{4 \sin^2 \theta \sqrt{\sin \theta}} \right] + \dots \quad (7.34i) \\
& \dots + k_0^2 n^2 \psi_h = 0
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \psi_h}{\partial r} - \frac{\psi_h}{4r^2} + \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial \theta^2} - \frac{\psi_h}{2r^2} - \frac{3\psi_h \cos^2 \theta}{4r^2 \sin^2 \theta} + k_0^2 n^2 \psi_h = 0 \quad (7.34j)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_h}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial \theta^2} + \psi_h \left(k_0^2 n^2 - \frac{3}{4r^2} - \frac{3 \cos^2 \theta}{4r^2 \sin^2 \theta} \right) = 0 \quad (7.34k)$$

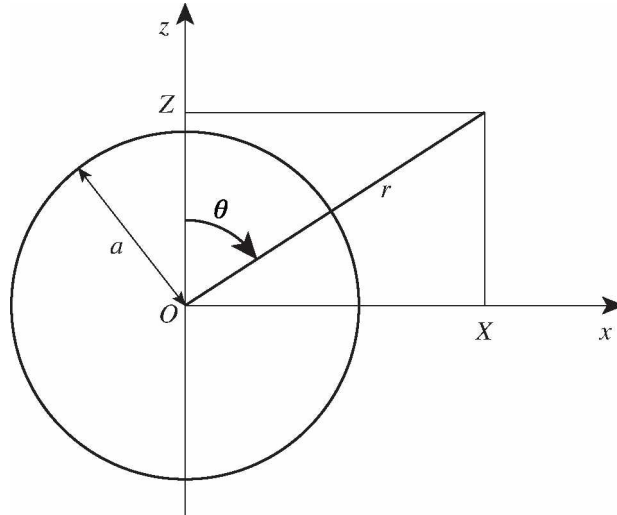
$$\frac{\partial^2 \psi_h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_h}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial \theta^2} + \left(k_0^2 n^2 - \frac{3}{4r^2 \sin^2 \theta} \right) \psi_h = 0 \quad (7.34l)$$

Neste ponto, é necessário simplificar a Equação (7.34l), considerando que a região de interesse está na região de campo distante da fonte. Isso é equivalente a fazer $k_0 r \gg 1$. Com isso, chega-se à Equação (7.35).

$$\frac{\partial^2 \psi_h}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_h}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial \theta^2} + k_0^2 n^2 \psi_h = 0 \quad (7.35)$$

De posse da Equação (7.35), é interessante fazer a substituição de variáveis da Equação (7.36) para trabalhar com as coordenadas cartesianas mostradas na Figura 72.

Figura 72 – Transformação de coordenadas utilizada.



Fonte: *Parabolic equation methods for electromagnetic wave propagation* [62].

$$\begin{cases} X = r \sin \theta \\ Z = r \cos \theta \end{cases} \quad (7.36)$$

Então, para reescrever a Equação (7.35) em termos das novas variáveis da Equação (7.36), é necessário escrever as derivadas. Isso é feito nas Equações (7.37a) a (7.38). Primeiramente, as derivadas com respeito a r são calculadas nas Equações (7.37a) a (7.37e) e na Equação (7.38).

$$\frac{\partial^2 \psi_h}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial \psi_h}{\partial r} \quad (7.37a)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_h}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \psi_h}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial r} + \frac{\partial \psi_h}{\partial Z} \frac{\partial Z}{\partial r} \right) \quad (7.37b)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_h}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \psi_h}{\partial X} \sin \theta + \frac{\partial \psi_h}{\partial Z} \cos \theta \right) \quad (7.37c)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_h}{\partial r^2} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial X} \frac{\partial \psi_h}{\partial r} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial Z} \frac{\partial \psi_h}{\partial r} \quad (7.37d)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_h}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial X^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial X \partial Z} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial Z^2} \cos^2 \theta \quad (7.37e)$$

$$\frac{\partial \psi_h}{\partial r} = \frac{\partial \psi_h}{\partial X} \sin \theta + \frac{\partial \psi_h}{\partial Z} \cos \theta \quad (7.38)$$

Agora, a derivada com respeito a θ é computada da equação (7.39a) a (7.39d).

$$\frac{\partial^2 \psi_h}{\partial \theta^2} = \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_h}{\partial \theta} \quad (7.39a)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_h}{\partial \theta^2} = r \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \psi_h}{\partial X} \cos \theta - \frac{\partial \psi_h}{\partial Z} \sin \theta \right) \quad (7.39b)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_h}{\partial \theta^2} = r \left[\cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \psi_h}{\partial X} \right) - \frac{\partial \psi_h}{\partial X} \sin \theta - \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \psi_h}{\partial Z} \right) - \frac{\partial \psi_h}{\partial Z} \cos \theta \right] \quad (7.39c)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_h}{\partial \theta^2} = r^2 \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial X^2} \cos^2 \theta - 2r^2 \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial X \partial Z} \sin \theta \cos \theta - r \frac{\partial \psi_h}{\partial X} \sin \theta + r^2 \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial Z^2} \sin^2 \theta - r \frac{\partial \psi_h}{\partial Z} \cos \theta \quad (7.39d)$$

Conhecendo as expressões das derivadas, basta substituir as Equações (7.37e), (7.38) e (7.39d) na Equação (7.35). Isso é feito nas Equações (7.40a) a (7.40d).

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial X^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial X \partial Z} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial Z^2} \cos^2 \theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \psi_h}{\partial X} \sin \theta + \frac{\partial \psi_h}{\partial Z} \cos \theta \right] + \dots \\ & \dots + \frac{1}{r^2} \left[r^2 \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial X^2} \cos^2 \theta - 2r^2 \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial X \partial Z} \sin \theta \cos \theta - r \frac{\partial \psi_h}{\partial X} \sin \theta + \dots \right] + \dots \\ & \dots + k_0^2 n^2 \psi_h = 0 \end{aligned} \quad (7.40a)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial X^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial X \partial Z} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial Z^2} \cos^2 \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_h}{\partial X} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_h}{\partial Z} \cos \theta + \dots \\
& \dots + \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial X^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial X \partial Z} \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_h}{\partial X} \sin \theta + \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial Z^2} \sin^2 \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_h}{\partial Z} \cos \theta + \dots (7.40b) \\
& \dots + k_0^2 n^2 \psi_h = 0
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_h}{\partial X^2} (X, Z) + \frac{\partial^2 \psi_h}{\partial Z^2} (X, Z) + k_0^2 n^2 \psi_h (X, Z) = 0 \quad (7.40c)$$

$$\nabla^2 \psi_h (X, Z) + k_0^2 n^2 \psi_h (X, Z) = 0 \quad (7.40d)$$

Agora, a Equação (7.40d) tem o mesmo formato da equação da onda usual.

7.5.2 Polarização vertical

É necessário fazer o mesmo procedimento no caso da polarização vertical, em que H_r , H_θ e E_ϕ são nulos e a única componente não nula de \mathbf{H} é H_ϕ . Aqui, é importante notar que o índice de refração pode variar com r e com θ e isso torna o processo um pouco mais complicado.

Para começar, é necessário resolver o sistema da Equação (7.41).

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1}{r} \left[\frac{\partial(rE_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right] \right] &= -jk_0 Z_0 H_\phi \\
\left[\frac{Z_0}{r \sin \theta} \frac{\partial(H_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} \right] &= jk_0 n^2 E_r \\
\left[\frac{Z_0}{r} \frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r} \right] &= -jk_0 n^2 E_\theta
\end{aligned} \quad (7.41)$$

Fazendo isso, obtém-se a Equação (7.42).

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{n^2} \frac{\partial(rH_\phi)}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{n^2 \sin \theta} \frac{\partial(H_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} \right] + k_0^2 H_\phi = 0 \quad (7.42)$$

No caso vertical, a fatoração correta do campo magnético é a da Equação (7.43) e é necessário substituí-la na Equação (7.42). Isso é mostrado nas Equações (7.44) a (7.47d).

$$H_\phi = \frac{n\psi_v}{\sqrt{k_0 r \sin \theta}} \quad (7.43)$$

$$\frac{n}{\sqrt{r}} \frac{\partial \left[\frac{1}{n^2} \frac{\partial (\sqrt{r} n \psi_v)}{\partial r} \right]}{\partial r} + \frac{n\sqrt{\sin \theta}}{r^2} \frac{\partial \left[\frac{1}{n^2 \sin \theta} \frac{\partial (n\psi_v \sqrt{\sin \theta})}{\partial \theta} \right]}{\partial \theta} + k_0^2 n^2 \psi_v = 0 \quad (7.44)$$

Para maior clareza, é calculada cada derivada separadamente. Em primeiro

lugar, as Equações (7.45a) a (7.45f) mostram o cálculo da derivada $\frac{\partial \left[\frac{1}{n^2} \frac{\partial (\sqrt{r} n \psi_v)}{\partial r} \right]}{\partial r}$.

$$\frac{\partial \left[\frac{1}{n^2} \frac{\partial (\sqrt{r} n \psi_v)}{\partial r} \right]}{\partial r} = -\frac{2}{n^3} \frac{\partial n}{\partial r} \frac{\partial (\sqrt{r} n \psi_v)}{\partial r} + \frac{1}{n^2} \frac{\partial \left[\psi_v \frac{\partial (\sqrt{r} n)}{\partial r} + \sqrt{r} n \frac{\partial \psi_v}{\partial r} \right]}{\partial r} \quad (7.45a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left[\frac{1}{n^2} \frac{\partial (\sqrt{r} n \psi_v)}{\partial r} \right]}{\partial r} &= -\frac{2}{n^3} \frac{\partial n}{\partial r} \left[\frac{n\psi_v}{2\sqrt{r}} + \sqrt{r}\psi_v \frac{\partial n}{\partial r} + \sqrt{r}n \frac{\partial \psi_v}{\partial r} \right] + \dots \\ &\dots + \frac{1}{n^2} \frac{\partial \left[\frac{n\psi_v}{2\sqrt{r}} + \sqrt{r}\psi_v \frac{\partial n}{\partial r} + \sqrt{r}n \frac{\partial \psi_v}{\partial r} \right]}{\partial r} \end{aligned} \quad (7.45b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left[\frac{1}{n^2} \frac{\partial (\sqrt{r} n \psi_v)}{\partial r} \right]}{\partial r} &= -\frac{2}{n^3} \frac{\partial n}{\partial r} \left[\frac{n\psi_v}{2\sqrt{r}} + \sqrt{r}\psi_v \frac{\partial n}{\partial r} + \sqrt{r}n \frac{\partial \psi_v}{\partial r} \right] + \dots \\ &\dots + \frac{1}{n^2} \left[\frac{\psi_v}{2\sqrt{r}} \frac{\partial n}{\partial r} - \frac{n\psi_v}{4r\sqrt{r}} + \frac{n}{2\sqrt{r}} \frac{\partial \psi_v}{\partial r} + \frac{\partial \left[\sqrt{r}\psi_v \frac{\partial n}{\partial r} \right]}{\partial r} + \frac{\partial \left[\sqrt{r}n \frac{\partial \psi_v}{\partial r} \right]}{\partial r} \right] \end{aligned} \quad (7.45c)$$

$$\frac{\partial \left[\frac{1}{n^2} \frac{\partial(\sqrt{r} n \psi_v)}{\partial r} \right]}{\partial r} = -\frac{2}{n^3} \frac{\partial n}{\partial r} \left[\frac{n \psi_v}{2\sqrt{r}} + \sqrt{r} \psi_v \frac{\partial n}{\partial r} + \sqrt{r} n \frac{\partial \psi_v}{\partial r} \right] + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n^2} \left[\frac{\psi_v}{2\sqrt{r}} \frac{\partial n}{\partial r} - \frac{n \psi_v}{4r\sqrt{r}} + \frac{n}{2\sqrt{r}} \frac{\partial \psi_v}{\partial r} + \frac{\psi_v}{2\sqrt{r}} \frac{\partial n}{\partial r} + \sqrt{r} \psi_v \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} + \sqrt{r} \frac{\partial n}{\partial r} \frac{\partial \psi_v}{\partial r} + \frac{\partial \left[\sqrt{r} n \frac{\partial \psi_v}{\partial r} \right]}{\partial r} \right] \quad (7.45d)$$

$$\frac{\partial \left[\frac{1}{n^2} \frac{\partial(\sqrt{r} n \psi_v)}{\partial r} \right]}{\partial r} = -\frac{2}{n^3} \frac{\partial n}{\partial r} \left[\frac{n \psi_v}{2\sqrt{r}} + \sqrt{r} \psi_v \frac{\partial n}{\partial r} + \sqrt{r} n \frac{\partial \psi_v}{\partial r} \right] + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n^2} \left[\frac{\psi_v}{2\sqrt{r}} \frac{\partial n}{\partial r} - \frac{n \psi_v}{4r\sqrt{r}} + \frac{n}{2\sqrt{r}} \frac{\partial \psi_v}{\partial r} + \frac{\psi_v}{2\sqrt{r}} \frac{\partial n}{\partial r} + \sqrt{r} \psi_v \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} + \dots \right]$$

$$+ \sqrt{r} \frac{\partial n}{\partial r} \frac{\partial \psi_v}{\partial r} + \frac{n}{2\sqrt{r}} \frac{\partial \psi_v}{\partial r} + \sqrt{r} \frac{\partial \psi_v}{\partial r} \frac{\partial n}{\partial r} + \sqrt{r} n \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial r^2} \quad (7.45e)$$

$$\frac{\partial \left[\frac{1}{n^2} \frac{\partial(\sqrt{r} n \psi_v)}{\partial r} \right]}{\partial r} = -\frac{2\sqrt{r} \psi_v}{n^3} \left(\frac{\partial n}{\partial r} \right)^2 - \frac{\psi_v}{4nr\sqrt{r}} + \frac{1}{n\sqrt{r}} \frac{\partial \psi_v}{\partial r} + \frac{\sqrt{r} \psi_v}{n^2} \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} + \frac{\sqrt{r}}{n} \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial r^2} \quad (7.45f)$$

Agora, as Equações (7.46a) a (7.46h) trazem o desenvolvimento da derivada

$$\frac{\partial \left[\frac{1}{n^2 \sin \theta} \frac{\partial(n \psi_v \sqrt{\sin \theta})}{\partial \theta} \right]}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial \left[\frac{1}{n^2 \sin \theta} \frac{\partial(n \psi_v \sqrt{\sin \theta})}{\partial \theta} \right]}{\partial \theta} = \frac{\partial(n \psi_v \sqrt{\sin \theta})}{\partial \theta} \frac{\partial \left[\frac{1}{n^2 \sin \theta} \right]}{\partial \theta} + \frac{1}{n^2 \sin \theta} \frac{\partial \left[\frac{\partial(n \psi_v \sqrt{\sin \theta})}{\partial \theta} \right]}{\partial \theta} \quad (7.46a)$$

$$\frac{\partial \left[\frac{1}{n^2 \sin \theta} \frac{\partial(n \psi_v \sqrt{\sin \theta})}{\partial \theta} \right]}{\partial \theta} = \frac{\partial(n \psi_v \sqrt{\sin \theta})}{\partial \theta} \left[-\frac{2}{n^3 \sin \theta} \frac{\partial n}{\partial \theta} - \frac{1 \cos \theta}{n^2 \sin^2 \theta} \right] + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{n^2 \sin \theta} \frac{\partial \left[\frac{\partial(n \psi_v \sqrt{\sin \theta})}{\partial \theta} \right]}{\partial \theta} \quad (7.46b)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \left[\frac{1}{n^2 \sin \theta} \frac{\partial (n \psi_v \sqrt{\sin \theta})}{\partial \theta} \right]}{\partial \theta} = - \frac{2}{n^3 \sqrt{\sin \theta}} \left(\frac{\partial n}{\partial \theta} \right)^2 \psi_v - \frac{2 \psi_v \cos \theta}{n^2 \sin \theta \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial n}{\partial \theta} - \dots \\
& \dots - \frac{2}{n^2 \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial \psi_v}{\partial \theta} \frac{\partial n}{\partial \theta} - \frac{\psi_v \cos^2 \theta}{2 n \sin^2 \theta \sqrt{\sin \theta}} - \dots \\
& \dots - \frac{\cos \theta}{n \sin \theta \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial \psi_v}{\partial \theta} + \frac{1}{n^2 \sin \theta} \frac{\partial \left[\frac{\partial (n \psi_v \sqrt{\sin \theta})}{\partial \theta} \right]}{\partial \theta}
\end{aligned} \tag{7.46c}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \left[\frac{1}{n^2 \sin \theta} \frac{\partial (n \psi_v \sqrt{\sin \theta})}{\partial \theta} \right]}{\partial \theta} = - \frac{2}{n^3 \sqrt{\sin \theta}} \left(\frac{\partial n}{\partial \theta} \right)^2 \psi_v - \frac{2 \psi_v \cos \theta}{n^2 \sin \theta \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial n}{\partial \theta} - \dots \\
& \dots - \frac{2}{n^2 \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial \psi_v}{\partial \theta} \frac{\partial n}{\partial \theta} - \frac{\psi_v \cos^2 \theta}{2 n \sin^2 \theta \sqrt{\sin \theta}} - \dots \\
& \dots - \frac{\cos \theta}{n \sin \theta \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial \psi_v}{\partial \theta} + \frac{1}{n^2 \sin \theta} \frac{\partial \left[\psi_v \sqrt{\sin \theta} \frac{\partial n}{\partial \theta} + \frac{n \psi_v \cos \theta}{2 \sqrt{\sin \theta}} + n \sqrt{\sin \theta} \frac{\partial \psi_v}{\partial \theta} \right]}{\partial \theta}
\end{aligned} \tag{7.46d}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \left[\frac{1}{n^2 \sin \theta} \frac{\partial (n \psi_v \sqrt{\sin \theta})}{\partial \theta} \right]}{\partial \theta} = - \frac{2}{n^3 \sqrt{\sin \theta}} \left(\frac{\partial n}{\partial \theta} \right)^2 \psi_v - \frac{2 \psi_v \cos \theta}{n^2 \sin \theta \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial n}{\partial \theta} - \dots \\
& \dots - \frac{2}{n^2 \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial \psi_v}{\partial \theta} \frac{\partial n}{\partial \theta} - \frac{\psi_v \cos^2 \theta}{2 n \sin^2 \theta \sqrt{\sin \theta}} - \dots \\
& \dots - \frac{\cos \theta}{n \sin \theta \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial \psi_v}{\partial \theta} + \frac{1}{n^2 \sin \theta} \left[\begin{aligned} & \sqrt{\sin \theta} \frac{\partial \psi_v}{\partial \theta} \frac{\partial n}{\partial \theta} + \frac{\psi_v \cos \theta}{2 \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial n}{\partial \theta} + \psi_v \sqrt{\sin \theta} \frac{\partial^2 n}{\partial \theta^2} + \dots \\ & \frac{\partial \left[\frac{n \psi_v \cos \theta}{2 \sqrt{\sin \theta}} \right]}{\partial \theta} + \frac{\partial \left[n \sqrt{\sin \theta} \frac{\partial \psi_v}{\partial \theta} \right]}{\partial \theta} \\ & \dots + \frac{\partial \left[\frac{n \psi_v \cos \theta}{2 \sqrt{\sin \theta}} \right]}{\partial \theta} + \frac{\partial \left[n \sqrt{\sin \theta} \frac{\partial \psi_v}{\partial \theta} \right]}{\partial \theta} \end{aligned} \right]
\end{aligned} \tag{7.46e}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{n^2 \sin \theta} \frac{\partial (n \psi_v \sqrt{\sin \theta})}{\partial \theta} \right] &= -\frac{2}{n^3 \sqrt{\sin \theta}} \left(\frac{\partial n}{\partial \theta} \right)^2 \psi_v - \frac{2 \psi_v \cos \theta}{n^2 \sin \theta \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial n}{\partial \theta} - \dots \\
&\dots - \frac{2}{n^2 \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial \psi_v}{\partial \theta} \frac{\partial n}{\partial \theta} - \frac{\psi_v \cos^2 \theta}{2 n \sin^2 \theta \sqrt{\sin \theta}} - \dots \\
&\dots - \frac{\cos \theta}{n \sin \theta \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial \psi_v}{\partial \theta} + \frac{1}{n^2 \sin \theta} \left[\begin{aligned} &\sqrt{\sin \theta} \frac{\partial \psi_v}{\partial \theta} \frac{\partial n}{\partial \theta} + \frac{\psi_v \cos \theta}{2 \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial n}{\partial \theta} + \psi_v \sqrt{\sin \theta} \frac{\partial^2 n}{\partial \theta^2} + \dots \\ &\dots + \frac{\psi_v \cos \theta}{2 \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial n}{\partial \theta} - \frac{n \psi_v \sqrt{\sin \theta}}{2} - \frac{n \psi_v \cos^2 \theta}{4 \sin \theta \sqrt{\sin \theta}} + \dots \\ &\dots + \frac{n \cos \theta}{2 \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial \psi_v}{\partial \theta} + \frac{\partial \left[n \sqrt{\sin \theta} \frac{\partial \psi_v}{\partial \theta} \right]}{\partial \theta} \end{aligned} \right]
\end{aligned} \quad (7.46f)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{n^2 \sin \theta} \frac{\partial (n \psi_v \sqrt{\sin \theta})}{\partial \theta} \right] &= -\frac{2 \psi_v}{n^3 \sqrt{\sin \theta}} \left(\frac{\partial n}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{2 \psi_v \cos \theta}{n^2 \sin \theta \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial n}{\partial \theta} - \dots \\
&\dots - \frac{2}{n^2 \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial \psi_v}{\partial \theta} \frac{\partial n}{\partial \theta} - \frac{\psi_v \cos^2 \theta}{2 n \sin^2 \theta \sqrt{\sin \theta}} - \frac{\cos \theta}{n \sin \theta \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial \psi_v}{\partial \theta} + \dots \\
&\dots + \frac{2}{n^2 \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial \psi_v}{\partial \theta} \frac{\partial n}{\partial \theta} + \frac{\psi_v \cos \theta}{n^2 \sin \theta \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial n}{\partial \theta} + \frac{\psi_v}{n^2 \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial^2 n}{\partial \theta^2} - \dots \\
&\dots - \frac{\psi_v}{2 n \sqrt{\sin \theta}} - \frac{\psi_v \cos^2 \theta}{4 n \sin^2 \theta \sqrt{\sin \theta}} + \dots \\
&\dots + \frac{\cos \theta}{n \sin \theta \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial \psi_v}{\partial \theta} + \frac{1}{n \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial \theta^2}
\end{aligned} \quad (7.46g)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{n^2 \sin \theta} \frac{\partial (n \psi_v \sqrt{\sin \theta})}{\partial \theta} \right] &= -\frac{2 \psi_v}{n^3 \sqrt{\sin \theta}} \left(\frac{\partial n}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{\psi_v \cos \theta}{n^2 \sin \theta \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial n}{\partial \theta} - \dots \\
&\dots - \frac{3 \psi_v \cos^2 \theta}{4 n \sin^2 \theta \sqrt{\sin \theta}} + \frac{\psi_v}{n^2 \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial^2 n}{\partial \theta^2} - \frac{\psi_v}{2 n \sqrt{\sin \theta}} + \frac{1}{n \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial \theta^2}
\end{aligned} \quad (7.46h)$$

Calculadas as derivadas, basta substituir os resultados das Equações (7.45f) e (7.46h) na Equação (7.42), como é feito nas Equações (7.47a) a (7.47d).

$$\begin{aligned} & \frac{n}{\sqrt{r}} \left[-\frac{2\sqrt{r}\psi_v}{n^3} \left(\frac{\partial n}{\partial r} \right)^2 - \frac{\psi_v}{4nr\sqrt{r}} + \frac{1}{n\sqrt{r}} \frac{\partial \psi_v}{\partial r} + \frac{\sqrt{r}\psi_v}{n^2} \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} + \frac{\sqrt{r}}{n} \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial r^2} \right] + \dots \\ & \dots + \frac{n\sqrt{\sin \theta}}{r^2} \left[-\frac{2\psi_v}{n^3\sqrt{\sin \theta}} \left(\frac{\partial n}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{\psi_v \cos \theta}{n^2 \sin \theta \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial n}{\partial \theta} - \frac{3\psi_v \cos^2 \theta}{4n \sin^2 \theta \sqrt{\sin \theta}} + \dots \right] + \dots \quad (7.47a) \\ & \dots + k_0^2 n^2 \psi_v = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{2\psi_v}{n^2} \left(\frac{\partial n}{\partial r} \right)^2 - \frac{\psi_v}{4r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_v}{\partial r} + \frac{\psi_v}{n} \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial r^2} + \dots \\ & \dots + \frac{n\sqrt{\sin \theta}}{r^2} \left[-\frac{2\psi_v}{n^3\sqrt{\sin \theta}} \left(\frac{\partial n}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{\psi_v \cos \theta}{n^2 \sin \theta \sqrt{\sin \theta}} \frac{\partial n}{\partial \theta} - \frac{3\psi_v \cos^2 \theta}{4n \sin^2 \theta \sqrt{\sin \theta}} + \dots \right] + \dots \quad (7.47b) \\ & \dots + k_0^2 n^2 \psi_v = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{2\psi_v}{n^2} \left(\frac{\partial n}{\partial r} \right)^2 - \frac{\psi_v}{4r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_v}{\partial r} + \frac{\psi_v}{n} \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial r^2} - \dots \quad (7.47c) \\ & \dots - \frac{2\psi_v}{r^2 n^2} \left(\frac{\partial n}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{\psi_v \cos \theta}{nr^2 \sin \theta} \frac{\partial n}{\partial \theta} - \frac{3\psi_v \cos^2 \theta}{4r^2 \sin^2 \theta} + \frac{\psi_v}{nr^2} \frac{\partial^2 n}{\partial \theta^2} - \frac{\psi_v}{2r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial \theta^2} + k_0^2 n^2 \psi_v = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial \theta^2} + \dots \\ & \dots + \psi_v \left[-\frac{2}{n^2} \left[\left(\frac{\partial n}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial n}{\partial \theta} \right)^2 \right] - \frac{3}{4r^2 \sin^2 \theta} + \frac{1}{n} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 n}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} \right] - \dots \right] = 0 \quad (7.47d) \\ & \dots - \frac{\cos \theta}{nr^2 \sin \theta} \frac{\partial n}{\partial \theta} + k_0^2 n^2 \end{aligned}$$

Neste ponto, é necessário considerar que n depende apenas de r . Assim, a Equação (7.37d) é desenvolvida nas Equações (7.48a) a (7.48e).

$$\frac{\partial^2 \psi_v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial \theta^2} + \left[k_0^2 n^2 - \frac{2}{n^2} \left(\frac{\partial n}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{n} \frac{\partial^2 n}{\partial r^2} - \frac{3}{4r^2 \sin^2 \theta} \right] \psi_v = 0 \quad (7.48a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial \theta^2} + \dots \\ & \dots + \left\{ k_0^2 n^2 - \frac{2}{n^2} \left(\frac{\partial n}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{n^2} \left(\frac{\partial n}{\partial r} \right)^2 + \frac{\partial^2 [\ln(n)]}{\partial r^2} - \frac{3}{4r^2 \sin^2 \theta} \right\} \psi_v = 0 \end{aligned} \quad (7.48b)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial \theta^2} + \left\{ k_0^2 n^2 - \frac{1}{n^2} \left(\frac{\partial n}{\partial r} \right)^2 + \frac{\partial^2 [\ln(n)]}{\partial r^2} - \frac{3}{4r^2 \sin^2 \theta} \right\} \psi_v = 0 \quad (7.48c)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial \theta^2} + \left\{ k_0^2 n^2 - \left(\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial r} \right)^2 + \frac{\partial^2 [\ln(n)]}{\partial r^2} - \frac{3}{4r^2 \sin^2 \theta} \right\} \psi_v = 0 \quad (7.48d)$$

$$\frac{\partial^2 \psi_v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial \theta^2} + \left[k_0^2 n^2 + \frac{\partial^2 [\ln(n)]}{\partial r^2} - \left(\frac{\partial [\ln(n)]}{\partial r} \right)^2 - \frac{3}{4r^2 \sin^2 \theta} \right] \psi_v = 0 \quad (7.48e)$$

Ainda, é necessário considerar que as derivadas de primeira e segunda ordem de $\ln(n)$ são pequenas comparado ao comprimento de onda, o que realmente ocorre na prática. Portanto, a Equação (7.48e) se torna a Equação (7.49).

$$\frac{\partial^2 \psi_v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial \theta^2} + \left(k_0^2 n^2 - \frac{3}{4r^2 \sin^2 \theta} \right) \psi_v = 0 \quad (7.49)$$

Assim como no caso horizontal, é necessário simplificar a Equação (7.49), considerando que a região de interesse está na região de campo distante da fonte. Isso é equivalente a fazer $k_0 r \gg 1$. Com isso, chega-se à Equação (7.50).

$$\frac{\partial^2 \psi_v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_v}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial \theta^2} + k_0^2 n^2 \psi_v = 0 \quad (7.50)$$

Agora, é interessante fazer a substituição de variáveis da Equação (7.51) mostrada na Figura 72.

$$\begin{cases} X = r \sin \theta \\ Z = r \cos \theta \end{cases} \quad (7.51)$$

Para reescrever a Equação (7.50), é necessário converter as suas derivadas em função das novas coordenadas. As derivadas com respeito a r são calculadas nas Equações (7.52) e (7.53).

$$\frac{\partial^2 \psi_v}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial X^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial X \partial Z} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial Z^2} \cos^2 \theta \quad (7.52)$$

$$\frac{\partial \psi_v}{\partial r} = \frac{\partial \psi_v}{\partial X} \sin \theta + \frac{\partial \psi_v}{\partial Z} \cos \theta \quad (7.53)$$

A derivada com respeito a θ é calculada na Equação (7.54).

$$\frac{\partial^2 \psi_v}{\partial \theta^2} = r^2 \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial X^2} \cos^2 \theta - 2r^2 \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial X \partial Z} \sin \theta \cos \theta - r \frac{\partial \psi_v}{\partial X} \sin \theta + r^2 \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial Z^2} \sin^2 \theta - r \frac{\partial \psi_v}{\partial Z} \cos \theta \quad (7.54)$$

Agora, basta substituir as diferenciais das Equações (7.52), (7.53) e (7.54) na Equação (7.50). Esse desenvolvimento se dá nas Equações (7.55a) a (7.55d).

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial X^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial X \partial Z} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial Z^2} \cos^2 \theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \psi_v}{\partial X} \sin \theta + \frac{\partial \psi_v}{\partial Z} \cos \theta \right] + \dots \\ & \dots + \frac{1}{r^2} \left[r^2 \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial X^2} \cos^2 \theta - 2r^2 \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial X \partial Z} \sin \theta \cos \theta - r \frac{\partial \psi_v}{\partial X} \sin \theta + \dots \right] + \dots \\ & \dots + k_0^2 n^2 \psi_v = 0 \end{aligned} \quad (7.55a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial X^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial X \partial Z} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial Z^2} \cos^2 \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_v}{\partial X} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_v}{\partial Z} \cos \theta + \dots \\ & \dots + \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial X^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial X \partial Z} \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_v}{\partial X} \sin \theta + \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial Z^2} \sin^2 \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_v}{\partial Z} \cos \theta + \dots \\ & \dots + k_0^2 n^2 \psi_v = 0 \end{aligned} \quad (7.55b)$$

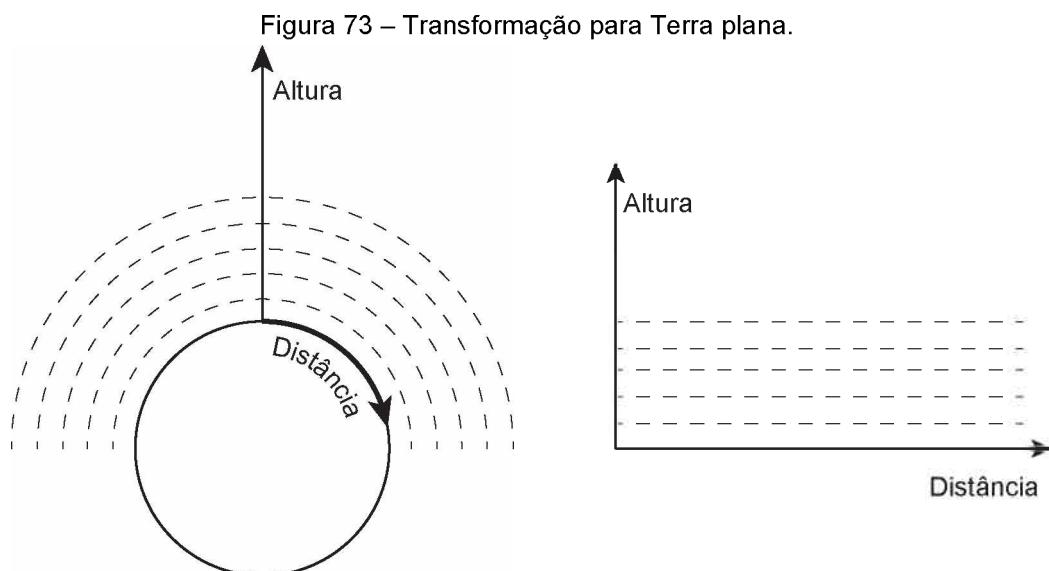
$$\frac{\partial^2 \psi_v}{\partial X^2} (X, Z) + \frac{\partial^2 \psi_v}{\partial Z^2} (X, Z) + k_0^2 n^2 \psi_v (X, Z) = 0 \quad (7.55c)$$

$$\nabla^2 \psi_v (X, Z) + k_0^2 n^2 \psi_v (X, Z) = 0 \quad (7.55d)$$

Nesse ponto, é possível estabelecer equações parabólicas para as equações de onda encontradas para \mathcal{I}_h e \mathcal{I}_v , fazendo de X a direção para-axial e fatorando a variação de fase rápida com X , assim como foi mostrado na Seção 7.2. Entretanto, há um problema: embora foi necessário utilizar as coordenadas retangulares (X, Z) para reduzir o problema para a equação da onda familiar, essa transformação de coordenadas causa grande dificuldade para estabelecer as condições de contorno na superfície esférica da Terra e para modelar a estrutura atmosférica que tende a ser estratificada radialmente. A solução para esse problema encontra-se na próxima seção.

7.6 Transformação para Terra Plana

Para continuar a utilizar um sistema simples de coordenadas retangulares, é conveniente que a transformação seja feita para um sistema em que as distâncias sejam medidas ao longo da superfície esférica da Terra e as altitudes sejam medidas ao longo de radiais que saem do centro da Terra, como na Figura 73. Essa ideia foi introduzida por Pekeris [103] e, mesmo com tal transformação, a equação da onda continua válida em baixas altitudes se o índice de refração n for substituído pelo índice de refração modificado m .



Fonte: *Parabolic equation methods for electromagnetic wave propagation* [62].

A modificação ideal de Pekeris para o índice de refração é a da Equação (7.56).

$$m(x, h) = n(x, h) + \frac{h}{a} \quad (7.56)$$

em que a é o raio médio da Terra e h é a altitude acima da superfície da Terra.

Infelizmente, essa substituição ideal (ou processo de transformação ideal para Terra plana) não pode ser feita sem que haja uma distorção da equação da onda, pois essa não é uma transformação conformal. Em vez de utilizar a transformação da Equação (7.56), deve-se definir uma nova coordenada de altitude z de maneira que a transformação corresponda a um mapa conformal no plano complexo. Essa nova coordenada de altitude é definida na Equação (7.57).

$$z = a \ln \left(1 + \frac{h}{a} \right) \quad (7.57)$$

Voltando na transformação de coordenadas da Equação (7.35) feita na Seção 7.5, agora é preciso explicitar a altitude radial h , fazendo $r = (a + h)$. Por isso, a relação entre os sistemas retangular e polar passa a ser dada pela Equação (7.58).

$$\begin{cases} X = (a + h) \sin \theta \\ Z = (a + h) \cos \theta \end{cases} \quad (7.58)$$

em que a é o raio da Terra e h é a altitude radial.

Prosseguindo, a intenção é desenvolver uma nova equação diferencial parcial em função da distância $a\theta$ e da altitude z . Portanto, a transformação a ser feita deve mapear um ponto u como o da Equação (7.59) em um ponto v como o da Equação (7.60)

$$u = X + jZ \quad (7.59)$$

$$v = x + jz \quad (7.60)$$

$$\text{em que } \begin{cases} x = a\theta \\ z = a \ln \left(1 + \frac{h}{a} \right) \end{cases}$$

A transformação necessária para mapear o ponto $u = X + jZ$ no ponto $v = x + jz$ é a transformação no plano complexo mostrada na Equação (7.61).

$$v = ja \ln \left(\frac{u}{ja} \right) \quad (7.61)$$

Essa transformação é capaz de mapear o círculo centrado na origem e com raio $r = (a + h)$ em um segmento horizontal definido por $-\pi a \leq x \leq \pi a$ e $z = a \ln \left(1 + \frac{h}{a} \right)$, como mostrado na Figura 73.

Definida a transformação, é necessário converter a Equação (7.55d) do domínio (X, Z) para o domínio (x, z) , ou seja, realizar a mudança de coordenadas $(X, Z) \mapsto (x, z)$.

Como demonstrado em [104], quando a mudança de coordenadas é um mapa conformal, o Laplaciano no novo sistema de coordenadas é proporcional ao Laplaciano no antigo sistema de coordenadas e a constante de proporcionalidade é dada na Equação (7.62). Então, deve-se desenvolver a Equação (7.62) com o auxílio da Equação (7.61). Isso é feito nas Equações (7.63a) a (7.63e).

$$\nabla^2(x, z) = \left| \frac{\partial u}{\partial v} \right|^2 \nabla^2(X, Z) \quad (7.62)$$

$$\nabla^2(x, z) = \left| \frac{\partial}{\partial v} \left(ja e^{\frac{v}{ja}} \right) \right|^2 \nabla^2(X, Z) \quad (7.63a)$$

$$\nabla^2(x, z) = \left| e^{-j\frac{v}{a}} \right|^2 \nabla^2(X, Z) \quad (7.63b)$$

$$\nabla^2(x, z) = \left| e^{-j\frac{x+jz}{a}} \right|^2 \nabla^2(X, Z) \quad (7.63c)$$

$$\nabla^2(x, z) = \left| e^{\frac{z}{a}} e^{-j\frac{x}{a}} \right|^2 \nabla^2(X, Z) \quad (7.63d)$$

$$\nabla^2(x, z) = e^{\frac{2z}{a}} \nabla^2(X, Z) \quad (7.63e)$$

Agora, basta substituir o Laplaciano da Equação (7.63e) na Equação (7.55d) para obter a equação da onda no novo sistema de coordenadas. Assim, chega-se à Equação (7.64c).

$$\nabla^2 \psi(X, Z) + k_0^2 n^2 \psi(X, Z) = 0 \quad (7.64a)$$

$$\frac{1}{e^{\frac{2z}{a}}} \nabla^2 \psi(x, z) + k_0^2 \tilde{n}^2(x, z) \psi(x, z) = 0 \quad (7.64b)$$

$$\nabla^2 \psi(x, z) + k_0^2 \tilde{n}^2(x, z) e^{\frac{2z}{a}} \psi(x, z) = 0 \quad (7.64c)$$

Fazendo a definição da Equação (7.65), a equação da onda se torna a Equação (7.66).

$$\tilde{m}(x, z) = \tilde{n}(x, z) e^{\frac{z}{a}} \quad (7.65)$$

$$\nabla^2 \psi(x, z) + k_0^2 \tilde{m}^2(x, z) \psi(x, z) = 0 \quad (7.66)$$

Quando a região de interesse envolve baixas altitudes, h é pequeno em relação ao raio da Terra e a diferença entre h e z é muito pequena. Nesses casos, pode-se dizer que $\tilde{m}(x, z) \approx m(x, h)$ e pode ser utilizada a transformação usual para Terra plana da Equação (7.56). Nesse caso, a equação da onda se torna a Equação (7.67).

$$\nabla^2 \psi(x, z) + k_0^2 m^2(x, h) \psi(x, z) = 0 \quad (7.67)$$

7.7 Resumo das Equações para Propagação Troposférica

Considerando todas as simetrias utilizadas nas seções anteriores, o problema de propagação troposférica pode ser reduzido a uma equação de onda escalar bidimensional do tipo da Equação (7.68).

$$\nabla^2 \psi(x, z) + k_0^2 \tilde{m}^2(x, z) \psi(x, z) = 0 \quad (7.68)$$

em que

$$\psi_h = E_\phi \sqrt{k_0 r \sin \theta} \quad (7.69)$$

$$\psi_h = E_\phi \sqrt{k_0 (a + h) \sin \left(\frac{x}{a} \right)} \quad (7.70)$$

$$\psi_h = E_\phi \sqrt{k_0 \left[a + a \left(e^{\frac{z}{a}} - 1 \right) \right] \sin \left(\frac{x}{a} \right)} \quad (7.71)$$

$$\psi_h = E_\phi \sqrt{k_0 e^{\frac{z}{a}} a \sin \left(\frac{x}{a} \right)} \quad (7.72)$$

$$\psi_h = E_\phi \sqrt{k_0 a \sin \left(\frac{x}{a} \right)} e^{\frac{z}{2a}} \quad (7.73)$$

e, de semelhante modo,

$$\psi_v = H_\phi \frac{\sqrt{k_0 r \sin \theta}}{n} \quad (7.74)$$

$$\psi_v = \frac{1}{n} H_\phi \sqrt{k_0 a \sin \left(\frac{x}{a} \right)} e^{\frac{z}{2a}} \quad (7.75)$$

Finalmente, pode-se desenvolver a equação parabólica para o caso de propagação troposférica. Assim como na Seção 7.2, o primeiro passo é fatorar a variação de fase e amplitude complexa da componente de campo, como na Equação (7.76).

$$\psi(x, z) = u(x, z) e^{jk_0 x} \quad (7.76)$$

Assim, reescreve-se a Equação (7.68) no desenvolvimento mostrado nas Equações (7.77a) a (7.77d).

$$\frac{\partial^2 u e^{jk_0 x}}{\partial x^2}(x, z) + \frac{\partial^2 u e^{jk_0 x}}{\partial z^2}(x, z) + k_0^2 \tilde{m}^2(x, z) u e^{jk_0 x}(x, z) = 0 \quad (7.77a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u e^{jk_0 x}}{\partial x} \right) (x, z) + e^{jk_0 x} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x, z) + k_0^2 \tilde{m}^2(x, z) u e^{jk_0 x}(x, z) = 0 \quad (7.77b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(e^{jk_0 x} \frac{\partial u}{\partial x} + jk_0 u e^{jk_0 x} \right) (x, z) + e^{jk_0 x} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x, z) + k_0^2 \tilde{m}^2(x, z) u e^{jk_0 x}(x, z) = 0 \quad (7.77c)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, z) + 2jk_0 \frac{\partial u}{\partial x}(x, z) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x, z) + k_0^2 [\tilde{m}^2(x, z) - 1] u(x, z) = 0 \quad (7.77d)$$

A Equação (7.77d) pode ser fatorada conforme a Equação (7.78) sugere.

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} + jk_0(1 - Q) \right] \left[\frac{\partial}{\partial x} + jk_0(1 + Q) \right] u = 0 \quad (7.78)$$

em que $Q = \sqrt{\frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \tilde{m}^2(x, z)}$.

O próximo passo do desenvolvimento é desprezar a componente de campo retroespalhado e manter apenas o termo que é relativo à propagação no sentido positivo da direção para-axial, dado pela Equação (7.79).

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -jk_0(1 - Q)u \quad (7.79)$$

A Equação (7.79) é reescrita no formato da Equação (7.80) e, finalmente, tem-se a equação parabólica a ser resolvida para propagação troposférica.

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, z) = -jk_0 \left[1 - \sqrt{\frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \tilde{m}^2(x, z)} \right] u(x, z) \quad (7.80)$$

A raiz quadrada da Equação (7.80) pode ser expandida pelo método de Taylor, levando ao caso de ângulo estreito ou por métodos mais avançados, levando ao caso de ângulo amplo.

Também é importante lembrar que, após encontrar o resultado de $u(x, z)$, a componente de campo $\psi(x, z) = u(x, z)e^{jk_0x}$ deve ser encontrada e, posteriormente, convertida no campo físico real.

No caso de polarização horizontal, o campo elétrico é dado pela Equação (7.81).

$$E_\phi(x, z) = \frac{\psi_h(x, z)}{\sqrt{k_0 a \sin\left(\frac{x}{a}\right) e^{\frac{z}{2a}}}} = \frac{u(x, z)e^{jk_0x}}{\sqrt{k_0 a \sin\left(\frac{x}{a}\right) e^{\frac{z}{2a}}}} \quad (7.81)$$

E, para polarização vertical, o campo magnético é dado pela Equação 6.82

$$H_\phi(x, z) = \frac{n\psi_v(x, z)}{\sqrt{k_0 a \sin\left(\frac{x}{a}\right) e^{\frac{z}{2a}}}} = \frac{nu(x, z)e^{jk_0x}}{\sqrt{k_0 a \sin\left(\frac{x}{a}\right) e^{\frac{z}{2a}}}} \quad (7.82)$$

7.8 Modelagem do Terreno

Até agora, as equações desenvolvidas consideraram uma fronteira inferior plana – Equação (7.18d) – ou apenas a superfície esférica da Terra por meio da transformação para terra plana – Equação (7.80). Entretanto, a modelagem acurada da propagação sobre terrenos irregulares é crucial para o planejamento dos sistemas de comunicação sem fio.

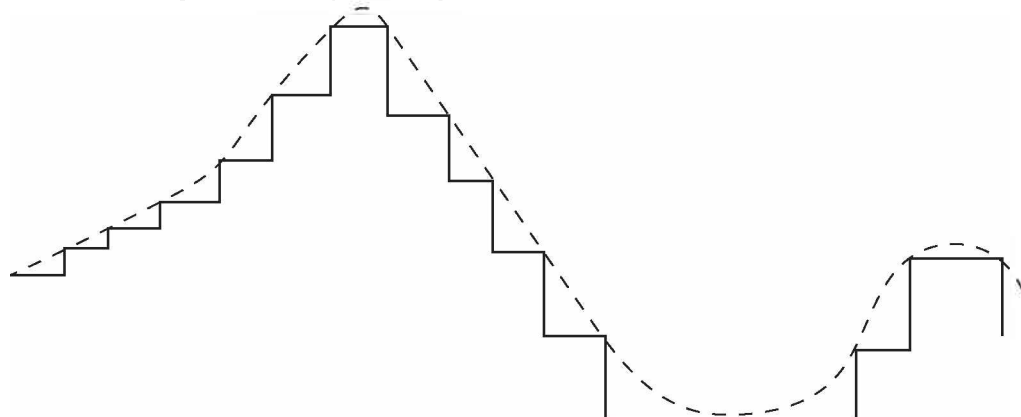
Existem algumas formas mais comuns de tratamento do terreno e elas dependem fortemente do sistema de coordenadas utilizado e de como o terreno é representado. Alguns métodos serão discutidos brevemente nesta seção.

7.8.1 Representação em formato de escada

A representação do terreno em formato de escada é a técnica mais simples e modela o terreno como uma sequência de degraus horizontais. Como nenhum terreno realista é assim, os efeitos de inclinação do terreno são modelados apenas

aproximadamente por essa técnica. A Figura 74 mostra uma ilustração de terreno com um formato de escada.

Figura 74 – Representação de terreno em formato de escada.

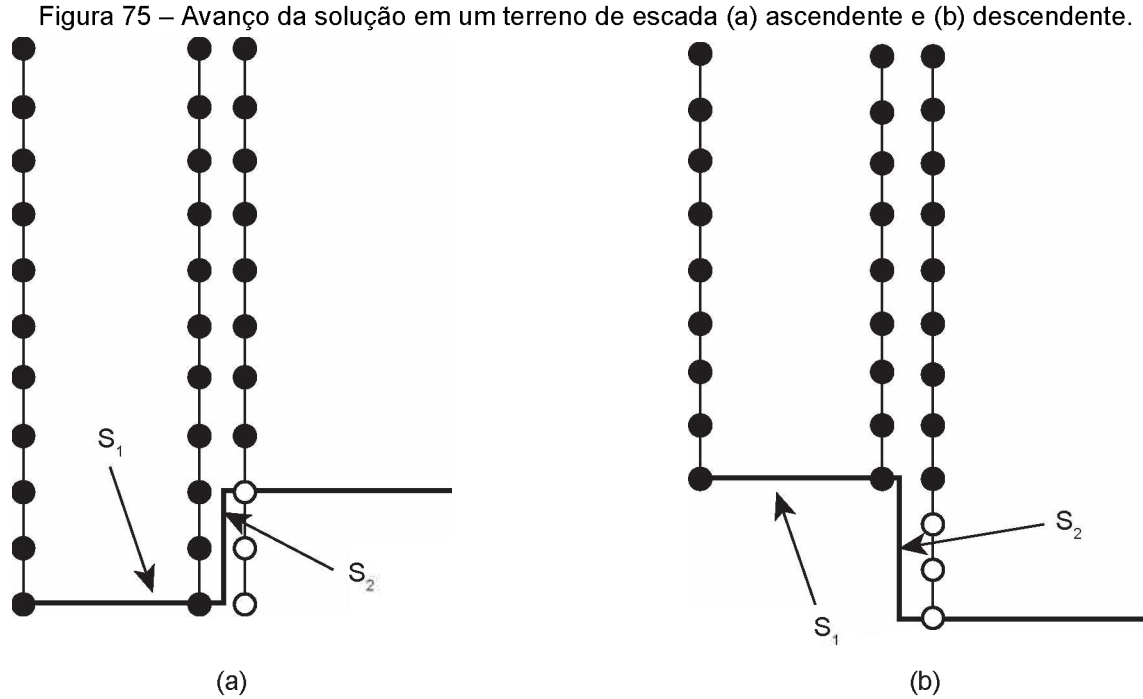


Fonte: *Parabolic equation methods for electromagnetic wave propagation* [62].

Apesar da desvantagem da precisão, esse método é muito eficiente computacionalmente, pois a malha de discretização é, essencialmente, independente do terreno e incrementos maiores da distância podem ser utilizados. Isso faz com que esse modelo seja um dos mais utilizados.

Em cada degrau (segmento de altitude constante), o campo é propagado da maneira usual e as condições de contorno são aplicadas na fronteira. Quando a altura do terreno muda, a difração nas quinas é desprezada e o campo é feito zero no espelho do degrau. A seguir é mostrado o procedimento de aplicação ilustrado na Figura 75.

- Altitude do terreno aumentando – Figura 75(a)
 - 1 Propagar o campo no segmento horizontal S_1 (piso do degrau 1) ignorando a fronteira vertical S_2 (espelho do degrau 2); isso é consistente com a aproximação para-axial, que desconsidera o retroespalhamento;
 - 2 Truncar o campo forçando-o a zero em S_2 ; isso é consistente com a condição de que o solo não suporta propagação no comprimento de onda de interesse;
- Altitude do terreno decrescendo – Figura 75(b)
 - 1 Propagar o campo no segmento horizontal S_1 (piso do degrau 1) ignorando a difração na quina de S_2 ;
 - 2 Atenuar o campo forçando-o a zero em S_2



Fonte: *Parabolic equation methods for electromagnetic wave propagation* [62].

7.8.2 Terreno definido por partes

Nesta abordagem, o terreno é representado por uma sequência de segmentos lineares e é utilizado um sistema de coordenadas que mede a altitude a partir do terreno. Isso é expresso por uma mudança de coordenadas de acordo com a Equação (7.83). Esse método não é abordado em detalhes, pois é utilizado nos métodos de solução *Fourier Split-Step*, que não é utilizado neste trabalho.

$$\begin{cases} p = x \\ q = z - h(x) \end{cases} \quad (7.83)$$

em que $h(x)$ é a altitude do terreno no ponto x .

Considerando um segmento de terreno definido em $x_1 \leq x \leq x_2$ e que a inclinação desse segmento é α , nessa região, o terreno é dado pela reta $h(x) = \alpha(x - x_1) + h(x_1)$ e a mudança de coordenadas pode ser expressa pela Equação (7.84).

$$\begin{cases} p = x \\ q = z - \alpha(x - x_1) - h(x_1) \end{cases} \quad (7.84)$$

Agora, é definida uma nova função reduzida para ser utilizada no lugar de $u(x, z)$ e que considera o deslocamento da frente de onda relativo ao terreno. Essa função é a da Equação (7.85).

$$w(p, q) = e^{-jk_0 \alpha q} u(x, z) \quad (7.85)$$

Fazendo a substituição de coordenadas da Equação (7.84) na Equação (7.18d), tem-se a nova Equação (7.86).

$$\frac{\partial^2 w}{\partial q^2} + 2jk_0 \frac{\partial w}{\partial p} + k_0^2 [n^2 - 1] w = 0 \quad (7.86)$$

Nesse ponto, tem-se uma equação semelhante à equação parabólica tradicional, mas em relação a uma função que acompanha o terreno. Diz-se que a função $w(p, q)$ acompanha o terreno, pois, em cada segmento de terreno, ela possui um deslocamento da frente de onda que é função da inclinação do terreno.

A solução desse problema pode ser feita por meio do método SSPE com transformadas seno de Fourier. Maiores detalhes sobre a implementação podem ser encontrados em [62].

7.8.3 Mapeamento conformal

Esta abordagem considera que o terreno é suave pode ser descrito por uma função $h(x)$ e que h possui derivada de segunda ordem contínua em x . Novamente, é definida a mudança de coordenadas da Equação (7.87).

$$\begin{cases} \xi = x \\ \zeta = z - h(x) \end{cases} \quad (7.87)$$

E uma nova função é definida pela Equação (7.88).

$$v(\xi, \zeta) = e^{-j\theta(\xi, \zeta)} u(x, z) \quad (7.88)$$

em que a função dependente do terreno $\theta(\xi, \zeta)$ é dada na Equação (7.89).

$$\theta(\xi, \zeta) = k_0 \xi h'(\xi) + \frac{k_0}{2} \int_0^\xi [h'(s)]^2 ds \quad (7.89)$$

O primeiro passo para fazer a mudança global de variáveis é encontrar as derivadas parciais que aparecem na equação parabólica. As Equações (7.90a) a (7.90c) calculam a derivada de primeira ordem com respeito a x .

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (7.90a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \zeta} h'(x) + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} h'(x) \quad (7.90b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{j\theta} \left[\frac{\partial v}{\partial \xi} + jv \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - h'(x) \left[\frac{\partial v}{\partial \zeta} + jv \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right] \right] \quad (7.90c)$$

Agora, as Equações (7.91a) e (7.91b) trazem a derivada de primeira ordem com respeito a z .

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial z} \quad (7.91a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = e^{j\theta} \left(\frac{\partial v}{\partial \zeta} + jv \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right) \quad (7.91b)$$

E as Equações (7.92a) a (7.92f) calculam a diferencial de segunda ordem em z .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[e^{j\theta} \left(\frac{\partial v}{\partial \zeta} + jv \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right) \right] \quad (7.92a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} = \left(\frac{\partial v}{\partial \zeta} + jv \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right) \frac{\partial e^{j\theta}}{\partial z} + e^{j\theta} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial \zeta} + jv \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right) \quad (7.92b)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} = \left(\frac{\partial v}{\partial \zeta} + jv \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right) \left(j e^{j\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right) + e^{j\theta} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial \zeta} \right) + j \frac{\partial}{\partial z} \left(v \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right) \right] \quad (7.92c)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} = \left(\frac{\partial v}{\partial \zeta} + jv \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right) \left(j e^{j\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right) + e^{j\theta} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \zeta^2} + j \left[\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} \right] \right] \quad (7.92d)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} = \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + jv \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) \left(j e^{j\theta} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) + e^{j\theta} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + j \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} \right) + jv \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \right) \right] \quad (7.92e)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 z} = e^{j\theta} \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2j \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + v \left[j \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \right) - \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)^2 \right] \right\} \quad (7.92f)$$

Com as derivadas parciais calculadas, é necessário reescrever a Equação (7.18d) em termos da nova função $v(\xi, \zeta)$. Isso aparece nas Equações (7.93a) a (7.93c).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2jk_0 \frac{\partial u}{\partial x} + k_0^2 [n^2 - 1]u = 0 \quad (7.93a)$$

$$e^{j\theta} \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2j \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + v \left[j \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \right) - \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)^2 \right] \right\} + \dots \quad (7.93b)$$

$$\dots + 2jk_0 e^{j\theta} \left\{ \frac{\partial v}{\partial \xi} + jv \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - h'(x) \left[\frac{\partial v}{\partial \xi} + jv \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right] \right\} + k_0^2 [n^2 - 1] v e^{j\theta} = 0$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2jk_0 \frac{\partial v}{\partial \xi} + 2j \left[\frac{\partial \theta}{\partial \xi} - k_0 h'(\xi) \right] \frac{\partial v}{\partial \xi} + \dots \\ & \dots + \left[k_0^2 (n^2 - 1) - 2k_0 \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + 2k_0 h'(\xi) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} + j \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \left(\frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)^2 \right] v = 0 \end{aligned} \quad (7.93c)$$

Como $\theta(\xi, \zeta) = k_0 \zeta h'(\xi) + \frac{k_0}{2} \int_0^\xi [h'(s)]^2 ds$, a Equação (7.93c) se reduz para a forma da equação parabólica tradicional de ângulo estreito, como mostram as Equações (7.94a) a (7.95b).

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = k_0 h'(\xi) \quad (7.94a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = k_0 \zeta h''(\xi) + \frac{k_0}{2} [h'(\xi)]^2 \quad (7.94b)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2jk_0 \frac{\partial v}{\partial \xi} + k_0^2 [n^2 - 2\zeta h''(\xi) - 1] v = 0 \quad (7.95a)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2jk_0 \frac{\partial v}{\partial \xi} + k_0^2 (m_h^2 - 1)v = 0 \quad (7.95b)$$

em que $m_h(\xi, \zeta) = \sqrt{n^2(\xi, h(\xi) + \zeta) - 2\zeta h''(\xi)}$ é um índice de refração modificado de acordo com o terreno.

É bom notar que a Equação (7.96b) pode ser resolvida em $v(\xi, \zeta)$ e, se apenas valores de amplitude de campo forem necessários, o resultado já está pronto, uma vez que a diferença entre u e v é apenas uma fase. Caso seja necessário informações de fase, deve-se encontrar u a partir de $v(\xi, \zeta) = e^{-j\theta(\xi, \zeta)}u(x, z)$.

Um ponto desfavorável desse método é que há uma derivada de segunda ordem do terreno na Equação (7.95a) do índice de refração modificado. Na prática, é difícil obter essa informação e o máximo que pode ser feito é aproximar esse termo como na Equação (7.96).

$$h''(\xi_{m-1}) \approx \frac{\alpha_m - \alpha_{m-1}}{\Delta \xi} \quad (7.96)$$

em que α é a inclinação do terreno.

Esse método de modelagem de terreno via mapa conformal é geral e também pode ser utilizado para considerar a curvatura da Terra em vez de se fazer a transformação para Terra plana da Seção 7.6. Para isso, a função do terreno deve representar a curvatura aproximada da Terra, de acordo com a Equação (7.97).

$$h(x) = -\frac{x^2}{2a} \quad (7.97)$$

em que a é o raio da Terra.

Dessa maneira, o índice de refração modificado passa a ser o da Equação (7.98).

$$m_h(\xi, \zeta) = \sqrt{n^2(\xi, h(\xi) + \zeta) + \frac{2\zeta}{a}} \quad (7.98)$$

7.8.4 Modelagem por diferenças finitas

Na modelagem por diferenças finitas, as fronteiras irregulares podem ser implementadas forçando a condição de contorno apropriada diretamente. Isso é um grande ponto positivo para essa abordagem.

Quando a inclinação do terreno é positiva, a equação diferença padrão deve ser utilizada nos pontos acima do terreno e, nos pontos de terreno, a condição de contorno é aplicada. Quando a inclinação do terreno é negativa, deve-se assumir que a diferença de altura entre uma amostra e a amostra seguinte de terreno é exatamente um incremento Δz e utilizar uma aproximação unilateral para a derivada de segunda ordem em z .

Essa implementação é mais precisa do que a de escada, porém o seu inconveniente é que o incremento de distância deve ser adaptado às inclinações de terreno por causa da consideração que a diferença de altura entre uma amostra e a amostra seguinte de terreno é exatamente um incremento Δz .

7.9 Truncamento de Domínio

Na maioria dos problemas de propagação troposférica, a fronteira inferior do domínio é a interface ar/solo, representada por uma condição de contorno de impedância, e a fronteira superior deveria estar no infinito, para que a energia se propague para fora do domínio de interesse. Isso é a condição de contorno de radiação de Sommerfeld no infinito comentada na Seção 2.5. O problema é que, computacionalmente, é impossível construir um domínio infinito. Não existe *hardware* com memória e capacidade de processamento de sobra para acomodar matrizes infinitas e, mesmo que sejam tão grandes a ponto de se considerar infinito, não é viável.

O que pode ser feito é construir um artefato computacional na fronteira superior que simule, em uma distância finita, a condição de contorno de radiação de Sommerfeld no infinito. Assim, a fronteira superior do domínio deve ser determinada de maneira a ser transparente e simular que toda a energia incidente escapa para o infinito.

O primeiro método utilizado para se conseguir esse efeito no âmbito das equações parabólicas foi a construção de camadas absorvedoras. Nesse caso, basta aumentar um pouco o domínio de interesse e introduzir uma camada com

material absorvedor. Assim, a energia é absorvida na nova camada e o efeito é como se ela tivesse propagado para o infinito. Fazendo uma analogia, é a mesma ideia de projetos de absorção acústica.

Imagine que as paredes de determinada sala de aula refletem muito bem as ondas sonoras e, quando alguém fala no ambiente, as várias reflexões causam reverberação e isso compromete a inteligibilidade da fala. Imagine, agora, a mesma pessoa falando em um espaço aberto, onde as ondas sonoras propagam para muito longe (infinito) e não há reverberação.

Para resolver o problema da sala, alguém poderia sugerir aumentá-la de tamanho até que suas paredes estejam muito longe (infinito) e não haja mais reflexão e reverberação. Obviamente, isso não é viável, assim como trabalhar com matrizes e números infinitos no computador.

Se um engenheiro de acústica for chamado para resolver o problema da reverberação na sala, prontamente ele irá recomendar revestir as paredes com um material absorvedor para que não haja reflexão e o efeito seja o mesmo de um ambiente aberto ou da hipotética sala infinita. O importante é atentar que essa camada absorvedora adicionada ocupa uma porção das matrizes do problema. Então, se a camada precisar ser muito espessa para absorver toda a energia necessária, as matrizes podem ficar consideravelmente grandes, aumentando o custo computacional.

De fato, as camadas absorvedoras têm grande custo quando os ângulos de propagação são grandes com relação à horizontal, mas funcionam muito bem para ângulos pequenos. Apesar de haver outros métodos de tratar esse problema, a camada absorvedora ainda é um dos mais populares pela sua facilidade de implementação e é a utilizada neste trabalho.

As camadas absorvedoras são adicionadas acima da região de interesse e um filtro é aplicado à equação parabólica para que a energia seja absorvida e quase nenhuma energia seja refletida de volta para o domínio de interesse. Isso é equivalente a adicionar uma parte imaginária no índice de refração ou na permissividade do meio. Como visto na Seção 2.4.6, a parte imaginária da permissividade implica em perda dielétrica.

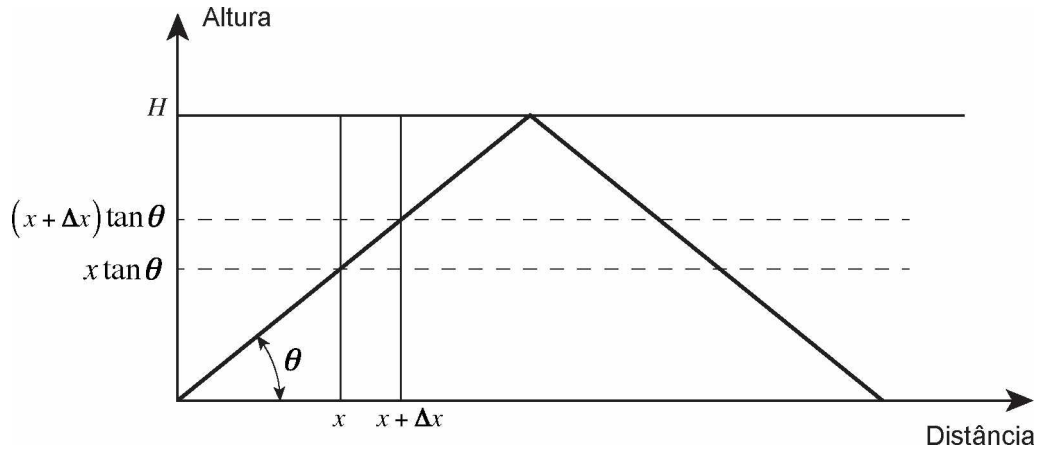
O filtro mais simples e eficaz utilizado é a janela de Hanning, também muito utilizada em processamento de sinais. Um filtro desse tipo é dado pela Equação (7.99).

$$\phi(t) = \frac{1 + \cos(\pi t)}{2} \quad (7.99)$$

Assim, $\phi(0)=1$ e $\phi(1)=0$ e as derivadas nas extremidades são nulas. Isso garante um casamento suave com o restante do domínio.

Para uma melhor análise, considere a Figura 76. Em uma fatia vertical entre x e $x + \Delta x$, a atenuação em dB é dada pela Equação (7.100).

Figura 76 – Efeito de uma camada absorvedora de espessura H um raio com elevação θ .



Fonte: *Parabolic equation methods for electromagnetic wave propagation* [62].

$$L = -\frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} 20 \log_{10} \left[\phi \left(\frac{\xi \tan \theta}{H} \right) \right] d\xi \quad (7.100)$$

Assim, a atenuação total sofrida por um raio incidente em um ângulo θ com a horizontal é dada pela Equação (7.101), de acordo com [62].

$$L_{\text{Total}} = -\frac{40H}{\Delta x \tan \theta} \int_0^1 \log_{10} [\phi(t)] dt \quad (7.101)$$

Para o caso do filtro de Hanning da Equação (7.99), a atenuação total passa a ser a da Equação (7.102).

$$L_{\text{Total}} = \frac{80H \log_{10} 2}{\Delta x \tan \theta} \quad (7.102)$$

Observando a Equação (7.102), fica evidente que, quanto maior o ângulo de propagação, maior deve ser a espessura da camada absorvedora. Além disso, a

discretização do problema também tem efeito importante. Quando o espaçamento da grade é grande, a camada deve ser maior. Portanto, existe um *trade-off* entre a eficiência computacional e a eficiência da camada.

Além das camadas absorvedoras, um método um pouco parecido é o das camadas perfeitamente casadas, *Perfectly Matched Layer* (PML). Em vez de adicionar um meio com perdas em que a espessura da camada depende do ângulo de incidência da energia, é adicionado um meio especial que tem a propriedade de absorver toda a energia independentemente da direção de incidência.

Esse método é muito poderoso e tem suas aplicações na modelagem de equações parabólicas, principalmente em problemas de espalhamento por objetos. Entretanto, ele não é o mais apropriado para lidar com problemas de propagação em longas distâncias.

Um último método famoso e poderoso para truncamento de domínio é a utilização de condições de contorno não locais – *Non-Local Boundary Conditions* (NLBCs). Aqui, a ideia é utilizar, na fronteira superior, uma espécie de condição de contorno virtual, que está em uma posição, mas que representa o comportamento dos campos em uma outra posição. Nesse caso, ela está na fronteira superior, mas representa uma condição no infinito, daí o nome não local. Sua grande vantagem computacional é que o meio não precisa ser aumentado para o infinito ou para acomodar uma camada absorvedora ou uma PML.

As NLBCs foram introduzidas por Papadakis [105], Baskakov e Popov [106] e Marcus [107,108] e, além das vantagens computacionais óbvias, elas permitem posicionar a fonte de radiação fora do domínio computacional. Imagine que se deseja modelar a propagação de um sinal enviado por um satélite apenas na baixa troposfera. Se a antena transmissora do satélite precisasse estar dentro do domínio computacional, ele seria enorme. Felizmente, com o uso das NLBCs, é possível utilizar um domínio computacional apenas do tamanho de interesse e fazer com que a energia que vem da fonte (satélite) seja representada na condição de contorno superior.

7.10 Modelagem de Fronteira de Impedância

Já foi visto como lidar com a fronteira troposférica na parte superior do domínio. Agora, é necessário lidar com a fronteira inferior em que há a interface ar/solo.

Em vários problemas, principalmente em frequências acima de 100–200 Hz, é suficiente utilizar a condição de condutor perfeito para a Terra, mas essa condição não é universalmente aplicável. Para a modelagem de ondas de superfície, dos efeitos da reflexão na polarização vertical ou propagação sobre superfícies muito irregulares, é necessário um modelo mais preciso da interface ar/solo.

De maneira rigorosa, as equações de Maxwell devem ser resolvidas para o ar e para o solo e a sua solução deve ser tal que as condições de contorno da Seção 2.5 sejam satisfeitas, juntamente com a continuidade dos campos. Entretanto, em 1944, Leontovich [109] mostrou que o problema pode ser simplificado se as condições de contorno exatas forem substituídas por relações aproximadas conhecidas como condições de contorno de Leontovich ou condições de impedância de superfície.

As condições de contorno de Leontovich são chamadas de aproximadas, pois se aplicam apenas nos casos em que a magnitude da permissividade complexa do meio é muito maior que a unidade. Isso é equivalente a considerar que o índice de refração do solo é muito grande em relação ao do ar para que a propagação ocorra na Terra.

A permissividade complexa nada mais é do que a permissividade equivalente devido ao efeito da condutividade do meio. Para um meio geral, sua permissividade é dada pela Equação (7.103).

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon'' \quad (7.103)$$

Quando o meio é um condutor imperfeito, pode-se considerar que sua condutividade finita representa um aumento de perda dielétrica, como na Equação (7.104).

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\left(\varepsilon'' + \frac{\sigma}{\omega}\right) \quad (7.104)$$

Neste trabalho, os meios utilizados possuem ε'' nulo e, portanto, a permissividade complexa acaba sendo apenas a da Equação (7.105).

$$\varepsilon = \varepsilon' - j \frac{\sigma}{\omega} \quad (7.105)$$

Agora, a constante dielétrica complexa do meio é dada pela Equação (7.106).

$$\varepsilon_r = \varepsilon'_r - j \frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0} \quad (7.106)$$

E seu módulo é dado pela Equação (7.107).

$$|\varepsilon_r| = \sqrt{(\varepsilon'_r)^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}\right)^2} \quad (7.107)$$

Agora, é preciso recordar o índice de refração em um meio com perdas da Equação (2.53), repetida na Equação (7.108).

$$n = \sqrt{\frac{\mu_r \varepsilon_r \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)^2} + 1 \right]}{2}} \quad (7.108)$$

Como os meios são considerados não magnéticos neste trabalho, $\mu_r = 1$. Além disso, foi considerado que ε'' é nulo, ou seja, $\varepsilon_r = \varepsilon'_r$. Portanto, o índice de refração pode ser escrito como na Equação (7.109).

$$n = \sqrt{\frac{\varepsilon'_r + \sqrt{(\varepsilon'_r)^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}\right)^2}}{2}} \quad (7.109)$$

Note que a expressão da Equação (7.107) aparece dentro da Equação (7.109). Portanto, quando a Equação (7.110) for válida, seja por uma alta permissividade elétrica real ou por uma grande condutividade do meio, o índice de refração também será bem maior que a unidade, como na Equação (7.111).

$$|\epsilon_r| = \sqrt{(\epsilon'_r)^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}\right)^2} \gg 1 \quad (7.110)$$

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon'_r + \sqrt{(\epsilon'_r)^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}\right)^2}}{2}} \gg 1 \quad (7.111)$$

Também se sabe que os comprimentos de onda e os índices de refração de dois meios podem ser relacionados pela Equação (7.112).

$$\lambda_2 = \frac{n_1}{n_2} \lambda_1 \quad (7.112)$$

em que, no caso deste trabalho, o meio 1 é o ar e o meio 2 é o solo.

Como o índice de refração do ar costuma ser muito próximo da unidade e, como visto, o índice de refração do meio 2 tende a ser bem maior do que 1, assim, o comprimento de onda no solo será muito menor do que aquele no ar.

Nessas circunstâncias, que quase sempre são satisfeitas na realidade, pode-se considerar que a propagação se dá, basicamente, na atmosfera e não há propagação dos campos no solo. Sendo assim, a condição de contorno aproximada da Equação (7.113) pode ser utilizada na fronteira inferior do domínio de integração.

$$\left(\alpha_1 \frac{\partial}{\partial z} + \alpha_2\right) u(x, 0) = 0 \quad (7.113)$$

em que α_1 e α_2 são constantes e dependem do tipo de condição de contorno a ser implementada.

Quando é possível considerar a Terra como condutor perfeito, a Equação (7.113) se torna as condições de contorno de Dirichlet para polarização horizontal ($\alpha_1 = 0$) ou de Neumann para polarização vertical ($\alpha_2 = 0$). Assim, tem-se a Equação (7.114) para uma Terra condutora elétrica perfeita – *Perfectly Electrical Conductor* (PEC).

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0 & \text{Dirichlet (pol. horizontal)} \\ \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0) = 0 & \text{Neumann (pol. vertical)} \end{cases} \quad (7.114)$$

Quando a Terra não é tratada como condutor perfeito, as condições de contorno de Leontovich passam a ser do tipo Cauchy. Nesse caso, $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = jk_0\delta$. Portanto, a Equação (7.115) deve ser utilizada.

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + jk_0\delta\right)u(x,0) = 0 \quad (7.115)$$

em que δ é chamado de impedância de superfície e assume diferentes valores para o caso de polarização horizontal e vertical, como dado pela Equação (7.116).

$$\delta = \begin{cases} \sqrt{\epsilon_r - \cos^2 \gamma} & \text{pol. horizontal} \\ \frac{\sqrt{\epsilon_r - \cos^2 \gamma}}{\epsilon_r} & \text{pol. vertical} \end{cases} \quad (7.116)$$

em que γ é o ângulo de incidência da onda no solo.

Porém, sabe-se que a constante dielétrica complexa do meio é dada pela Equação (7.106). Fazendo a substituição, chega-se à Equação (7.117b).

$$\delta = \begin{cases} \sqrt{\epsilon'_r - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} - \cos^2 \gamma} & \text{pol. horizontal} \\ \frac{\sqrt{\epsilon'_r - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0} - \cos^2 \gamma}}{\epsilon'_r - j\frac{\sigma}{\omega\epsilon_0}} & \text{pol. vertical} \end{cases} \quad (7.117a)$$

$$\delta = \begin{cases} \sqrt{\epsilon'_r - j\frac{\sigma Z_0}{k_0} - \cos^2 \gamma} & \text{pol. horizontal} \\ \frac{\sqrt{\epsilon'_r - j\frac{\sigma Z_0}{k_0} - \cos^2 \gamma}}{\epsilon'_r - j\frac{\sigma Z_0}{k_0}} & \text{pol. vertical} \end{cases} \quad (7.117b)$$

em que ϵ'_r é a permissividade real relativa do solo, σ é a condutividade do solo e Z_0 é a impedância característica do espaço livre.

Em muitos problemas de longa distância, o ângulo de incidência é muito pequeno e pode ser aproximado como nulo. Portanto, a Equação (7.117b) pode se tornar a Equação (7.117c).

$$\delta = \begin{cases} \sqrt{\epsilon'_r - j \frac{\sigma Z_0}{k_0}} - 1 & \text{pol. horizontal} \\ \frac{\sqrt{\epsilon'_r - j \frac{\sigma Z_0}{k_0}} - 1}{\epsilon'_r - j \frac{\sigma Z_0}{k_0}} & \text{pol. vertical} \end{cases} \quad (7.117c)$$

7.11 Perda de Percurso e Fator de Propagação

Para aplicações de comunicação sem fio, um dos resultados mais importantes e desejados é a perda de percurso. Por isso, a resolução da equação parabólica em termos dos campos elétrico ou magnético ou da componente de campo ψ ou u deve ser convertida para uma perda de percurso equivalente. A perda de transmissão de um enlace de rádio em um ambiente é definida pela ITU como a razão entre a potência radiada pela antena transmissora e a potência disponível na antena receptora, considerando que não há perdas adicionais no circuito de comunicação.

Algo que facilita bastante a avaliação de performance de enlaces é a tentativa de desacoplar os efeitos da propagação dos efeitos das antenas. Fazendo isso, a perda de transmissão é dada por uma parcela que considera a propagação (perda básica) e uma parcela que envolve as antenas (ganhos). Isso é mostrado na Equação (7.118).

$$L_{\text{Total}} = L_B - G_T - G_R \quad (7.118)$$

em que G_T e G_R são os ganhos das antenas transmissora e receptora, respectivamente.

No espaço livre e quando a distância entre os terminais é grande comparada ao comprimento de onda, a perda básica do espaço livre pode ser obtida a partir do fator de perda no espaço livre da equação da transmissão de Friis – Equação (3.78). Assim, a perda básica passa a ser calculada pela Equação (7.119).

$$L_B = -10 \log_{10} \left(\frac{\lambda}{4\pi R} \right)^2 = 20 \log_{10} \left(\frac{4\pi R}{\lambda} \right) \quad (7.119)$$

Isso é muito útil quando é possível utilizar ótica geométrica para descrever os percursos dos raios. Entretanto, em ambientes com fortes efeitos refrativos da atmosfera, o problema se torna um pouco mais complicado, pois o meio de propagação é dependente do caminho dos raios.

Nesses casos, deve-se trabalhar o conceito de perda de percurso, que é a razão entre a potência média isotrópica efetivamente radiada na direção de interesse (*AEIRP*) e a potência recebida por uma antena isotrópica de mesma polarização. Relembrando os conceitos da Seção 3.7, a *AEIRP* de uma antena é a potência média requerida na entrada de uma antena isotrópica para produzir, no campo distante, a mesma densidade de potência na direção de interesse que a antena real produz. É importante salientar que a *AEIRP* não leva em consideração os efeitos do solo na antena transmissora.

Em uma distância R da fonte, a densidade de potência isotropicamente radiada pela antena isotrópica equivalente é dada pela Equação (7.120).

$$W_0 = \frac{AEIRP}{4\pi r^2} \quad (7.120)$$

Agora, é preciso lembrar da Equação (3.27) da Seção 0, que é repetida aqui como a Equação (7.121).

$$U(\theta, \phi) \cong \frac{r^2 \left| \frac{\mathbf{E}^\circ(\theta, \phi) e^{-jkr}}{r} \right|^2}{2Z} = \frac{|\mathbf{E}^\circ(\theta, \phi)|^2}{2Z} \quad (7.121)$$

em que $\mathbf{E}^\circ(\theta, \phi)$ é a intensidade aproximada de campo distante da antena.

Lembrando que $U(\theta, \phi) = r^2 W(\theta, \phi)$, a densidade de potência também pode ser escrita como na Equação (7.122).

$$W(\theta, \phi) = \frac{U(\theta, \phi)}{r^2} \cong \frac{|\mathbf{E}^\circ(\theta, \phi)|^2}{2Z r^2} \quad (7.122)$$

Agora, é preciso concordar com as seções anteriores que consideraram simetria azimutal do problema. Assim, a Equação (7.122) passa a ser a Equação (7.123).

$$W(\theta) = \frac{U(\theta)}{r^2} \cong \frac{|\mathbf{E}^\circ(\theta)|^2}{2Zr^2} \quad (7.123)$$

A intensidade de radiação de campo distante é a grandeza utilizada para a construção dos diagramas de radiação das antenas. Então, pode-se substituir o termo $|\mathbf{E}^\circ(\theta)|^2$ por $|B(\theta)|^2$, em que $B(\theta)$ é a função que descreve o diagrama de radiação da antena.

Portanto, a densidade de potência está relacionada ao diagrama da antena de acordo com a Equação (7.124).

$$W(\theta) = \frac{|B(\theta)|^2}{2Zr^2} \quad (7.124)$$

Tomando a direção de propagação (interesse) e considerando que a antena transmissora está posicionada corretamente nessa direção, tem-se a Equação (7.125).

$$W_{\text{máx}} = \frac{|B_{\text{máx}}(\theta)|^2}{2Zr^2} \quad (7.125)$$

Agora, é possível igualar as Equações (7.125) e (7.120) e chega-se à Equação (7.126).

$$AEIRP = \frac{2\pi |B_{\text{máx}}(\theta)|^2}{Z} \quad (7.126)$$

Como o conceito de perda de percurso trabalha com a razão $\frac{AEIRP}{P_r}$, pode-se escolher qualquer valor para $B_{\text{máx}}(\theta)$, ou seja, pode-se trabalhar com um diagrama de radiação normalizado. Trabalhando com um diagrama normalizado, os valores da

componente de campo não serão os valores reais em V/m ou A/m, mas isso não é requerido para o cálculo da perda de percurso. O importante para o cálculo de perda de percurso não são os valores absolutos, mas a razão entre as componentes de campo em dois pontos. Portanto, será utilizado $B_{\max}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Com isso, a Equação (7.126) passa a ser a Equação (7.127).

$$AEIRP = \frac{1}{Z} \quad (7.127)$$

em que Z é a impedância intrínseca do meio.

Apenas nesta seção, a impedância intrínseca será representada pela letra grega η , para evitar confusão com a variável espacial Z . Assim, reescreve-se a Equação (7.127) como a Equação (7.128).

$$AEIRP = \frac{1}{\eta} \quad (7.128)$$

Agora, deve-se relacionar a saída do método de equações parabólicas, $u(x, z)$, à perda de percurso.

7.11.1 Polarização horizontal

Considerando a região de campo distante, a parte imaginária do vetor de Poynting complexo é praticamente inexistente. Assim, a densidade de potência total no campo distante é a densidade de potência média, como na Equação (7.129).

$$\mathbf{W}(X, Z) = \mathbf{p}_{\text{méd}} = \frac{1}{2} \text{Re} \{ \mathbf{E}(X, Z) \times \mathbf{H}^*(X, Z) \} \quad (7.129)$$

Como o vetor de Poynting complexo só possui parte real no campo distante, tem-se a Equação (7.130).

$$\mathbf{W}(X, Z) = \frac{1}{2} [\mathbf{E}(X, Z) \times \mathbf{H}^*(X, Z)] \quad (7.130)$$

Assim, a magnitude da densidade de potência em um ponto de campo distante é dada pelas Equações (7.131a) e (7.131b).

$$W(X, Z) = \frac{1}{2} |\mathbf{E}(X, Z) \times \mathbf{H}^*(X, Z)| \quad (7.131a)$$

$$W(X, Z) = \frac{1}{2} \|\mathbf{E}(X, Z)\| \|\mathbf{H}^*(X, Z)\| \sin \phi \quad (7.131b)$$

Considerando que, no campo distante, a onda é aproximadamente plana, o ângulo entre os vetores de campo elétrico e magnético é 90° . Então $\sin \phi = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ e chega-se à Equação (7.132).

$$W(X, Z) = \frac{1}{2} \|\mathbf{E}(X, Z)\| \|\mathbf{H}(X, Z)\| \quad (7.132)$$

Agora, é preciso lembrar da relação entre o campo magnético e elétrico em uma onda plana. Essa relação é a da Equação (7.133).

$$\|\mathbf{H}(X, Z)\| = \frac{1}{\eta} \|\mathbf{E}(X, Z)\| \quad (7.133)$$

em que η é a impedância intrínseca do meio. Portanto, a Equação (7.132) se torna a Equação (7.134).

$$W(X, Z) = \frac{1}{2\eta} \|\mathbf{E}(X, Z)\|^2 \quad (7.134)$$

Continuando o processo, a potência recebida por uma antena receptora isotrópica no ponto (X, Z) da atmosfera é dada pela Equação (7.135).

$$P_r(X, Z) = W(X, Z) A_{\text{eff}} = W(X, Z) \frac{\lambda_0^2}{4\pi} \quad (7.135)$$

Substituindo o resultado da Equação (7.134) na Equação (7.135), tem-se a Equação (7.136).

$$P_r(X, Z) = \frac{\lambda_0^2 |\mathbf{E}(X, Z)|^2}{8\pi\eta} \quad (7.136)$$

Então, a razão entre a potência transmitida e a potência recebida pode ser calculada pela Equação (7.137).

$$\frac{AEIRP}{P_r(X, Z)} = \frac{8\pi}{\lambda_0^2 |\mathbf{E}(X, Z)|^2} \quad (7.137)$$

Agora, é preciso relacionar o vetor campo elétrico $\mathbf{E}(X, Z)$ com a componente de campo E_ϕ da equação parabólica. Primeiramente, sabe-se que $\mathbf{E}(X, Z) = E_\phi(X, Z)\mathbf{e}$, recordando a Equação (7.33), desenvolve-se as Equações (7.137a) a (7.138b).

$$E_\phi(r, \theta) = \frac{\psi_h(r, \theta)}{\sqrt{k_0 r \sin \theta}} \quad (7.137a)$$

$$E_\phi(X, Z) = \frac{\psi_h(X, Z)}{\sqrt{k_0 X}} \quad (7.137b)$$

$$\frac{AEIRP}{P_r(X, Z)} = \frac{8\pi k_0 X}{\lambda_0^2 |\psi_h(X, Z)|^2} \quad (7.138a)$$

$$\frac{AEIRP}{P_r(X, Z)} = \frac{(4\pi)^2 X}{\lambda_0^3 |\psi_h(X, Z)|^2} \quad (7.138b)$$

Nesse ponto, ainda é preciso converter a componente de campo $\psi_h(X, Z)$ para coordenadas de Terra plana (x, z) . Para isso, deve-se lembrar das relações da Seção 7.6. Então, escreve-se as Equações (7.139) a (7.141b).

$$\begin{cases} X = (a + h) \sin \theta \\ Z = (a + h) \cos \theta \end{cases} \quad (7.139)$$

$$\begin{cases} x = a\theta \\ z = a \ln \left(1 + \frac{h}{a} \right) \end{cases} \quad (7.140)$$

$$X = \left(a + a e^{\frac{z}{a}} - a \right) \sin \left(\frac{x}{a} \right) \quad (7.141a)$$

$$X = a e^{\frac{z}{a}} \sin \left(\frac{x}{a} \right) \quad (7.141b)$$

Por isso, a Equação (7.138b) passa a ser escrita como a Equação (7.142).

$$\frac{AEIRP}{P_r(X, Z)} = \frac{(4\pi)^2 a e^{\frac{z}{a}} \sin \left(\frac{x}{a} \right)}{\lambda_0^3 |\psi_h(x, z)|^2} \quad (7.142)$$

Finalmente, calcula-se a perda de percurso nas Equações (7.143) e (7.144).

$$L_p(x, z) = 10 \log_{10} \left[\frac{(4\pi)^2 a e^{\frac{z}{a}} \sin \left(\frac{x}{a} \right)}{\lambda_0^3 |\psi_h(x, z)|^2} \right] \quad (7.143)$$

$$L_p(x, z) = -20 \log_{10} |\psi_h(x, z)| + 20 \log_{10} (4\pi) + 10 \log_{10} \left[a e^{\frac{z}{a}} \sin \left(\frac{x}{a} \right) \right] - 30 \log_{10} (\lambda_0) \quad (7.144)$$

Como $\psi(x, z) = u(x, z) e^{jk_0 x}$, $|\psi(x, z)| = |u(x, z)|$, então chega-se à Equação (7.145).

$$L_p(x, z) = -20 \log_{10} |u(x, z)| + 20 \log_{10} (4\pi) + 10 \log_{10} \left[a e^{\frac{z}{a}} \sin \left(\frac{x}{a} \right) \right] - 30 \log_{10} (\lambda_0) \quad (7.145)$$

E o fator de propagação também pode ser calculado pelas Equações (7.146a) a (7.146c).

$$PF(x, z) = L_B(x, z) - L_P(x, z) \quad (7.146a)$$

$$\begin{aligned} PF(x, z) &= 20 \log_{10} (4\pi) + 20 \log_{10} (R) - 20 \log_{10} \lambda - \dots \\ &\dots - \left[-20 \log_{10} |u(x, z)| + 20 \log_{10} (4\pi) + 10 \log_{10} \left[a e^{\frac{z}{a}} \sin \left(\frac{x}{a} \right) \right] - 30 \log_{10} (\lambda_0) \right] \end{aligned} \quad (7.146b)$$

$$PF(x, z) = 20 \log_{10} |u(x, z)| - 10 \log_{10} \left[a e^{\frac{z}{a}} \sin \left(\frac{x}{a} \right) \right] + 10 \log_{10} (\lambda_0) + 10 \log_{10} (x^2 + z^2) \quad (7.146c)$$

7.11.2 Polarização vertical

No caso da polarização vertical, as Equações (7.145) e (7.146c) também são válidas. Para se chegar nesse resultado, basta trabalhar com o campo magnético e utilizar a admitância característica do meio.

7.12 Modelagem da Fonte e Campo Inicial

Uma das partes mais importantes da modelagem de propagação por equações parabólicas é a injeção da fonte. É necessário modelar como a fonte injeta a energia eletromagnética que propagará no domínio. Além disso, já foi visto que a resolução do problema de equações parabólicas pode ser feita avançando a solução em cada vertical do domínio e, normalmente, considera-se que a fonte encontra-se na posição inicial do domínio ($x=0$). Dessa maneira, o problema passa a ser um problema de valor inicial e é necessário conhecer os valores da distribuição de campo na vertical definida por $(0,z)$.

Felizmente, a distribuição de campo vertical inicial $(0,z)$ é a distribuição na abertura da antena. Embora esse campo de abertura não seja diretamente conhecido, é possível utilizar a transformação campo próximo/campo distante para resolver esse problema, uma vez que essa transformação relaciona o campo de abertura com o diagrama de radiação da fonte no campo distante. Além disso, também é preciso utilizar a teoria das imagens na determinação do campo inicial.

O primeiro passo é notar que a distribuição de campo na abertura de uma antena e seu diagrama de radiação de campo distante formam um par de transformadas de Fourier, como na Equação (7.147).

$$A(z) \leftrightarrow B(k_z) \quad (7.147)$$

em que a o número de onda transversal k_z é relacionado ao ângulo com a horizontal

por $\sin[\theta(k_z)] = \frac{\lambda k_z}{2\pi}$, devido às relações de cossenos diretores da Seção 2.6.7.

Também é importante perceber que é necessário transladar a distribuição da abertura da antena para a sua altura respectiva. Portanto, o campo inicial $u'(0,z)$ é dado pela Equação (7.148).

$$u'(0, z) = A(z - z_F) \quad (7.148)$$

Além disso, é necessário incorporar o efeito de uma possível inclinação de feixe da antena transmissora. No domínio transformado, isso é equivalente a uma translação. Portanto, no domínio espacial, equivale a um deslocamento de fase. Assim, o campo inicial $u'(0, z)$ é dado pela Equação (7.149).

$$u'(0, z) = A(z - z_F) e^{-jk_0 z \sin \theta_{\text{tilt}}} \quad (7.149)$$

em que θ_{tilt} é o ângulo de inclinação de feixe.

A expressão da Equação (7.149) já é suficiente para representar o campo inicial em situações em que é possível desprezar a interação do solo com a antena. Isso ocorre quando as antenas estão posicionadas a muitos comprimentos de onda acima do solo e quando trabalha-se em altas frequências.

Caso esse efeito não possa ser desconsiderado, é necessário desenvolver uma expressão mais precisa utilizando o método das imagens. Pelo método das imagens, o campo inicial é dado pela Equação (7.150).

$$u(0, z) = \begin{cases} u'(0, z) - u'(0, -z) & \text{pol. horizontal (Dirichlet)} \\ u'(0, z) + u'(0, -z) & \text{pol. vertical (Neumann)} \end{cases} \quad (7.150)$$

Agora, é necessário o conhecimento do diagrama da antena transmissora. Um dos diagramas mais utilizados e que consegue representar bem vários tipos de antenas reais é o feixe gaussiano. Ele é dado, no domínio transformado, pela Equação (7.152).

$$B(k_z) = e^{-\frac{k_z^2 \ln 2}{2k_0^2 \sin^2(\theta_{\text{BW}}/2)}} \quad (7.151)$$

$$B(k_z) = e^{-\frac{k_z^2 w^2}{4}} \quad (7.152)$$

em que $w = \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{k_0 \sin(\theta_{\text{BW}}/2)}$.

É preciso lembrar que, na definição da perda de percurso da Seção 7.11, foi convencionado utilizar um diagrama normalizado com $B_{\text{máx}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$. Então, deve ser utilizada a Equação (7.153) em vez da Equação (7.152).

$$B(k_z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k_z^2 w^2}{4}} \quad (7.153)$$

em que $w = \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{k_0 \sin(\theta_{\text{BW}}/2)}$.

Conhecido o diagrama da antena, pode-se fazer a transformada inversa de Fourier e encontrar o campo de abertura da antena $A(z)$. Isso é mostrado na Equação (7.154).

$$A(z) = \mathfrak{F}^{-1}[B(k_z)] = \frac{1}{w\pi\sqrt{2}} e^{-\frac{z^2}{w^2}} \quad (7.154)$$

Com isso, o campo inicial $u'(0, z) = A(z - z_F) e^{-jk_0 z \sin \theta_{\text{ilt}}}$ é determinado na Equação (7.155).

$$u'(0, z) = \frac{1}{w\pi\sqrt{2}} e^{-\frac{(z-z_F)^2}{w^2}} e^{-jk_0 z \sin \theta_{\text{ilt}}} \quad (7.155)$$

em que $w = \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{k_0 \sin(\theta_{\text{BW}}/2)}$.

Para considerar os efeitos de um solo perfeitamente condutor abaixo da antena, utiliza-se a Equação (7.156).

$$u(0, z) = \frac{1}{w\pi\sqrt{2}} \begin{cases} e^{-\frac{(z-z_F)^2}{w^2}} e^{-jk_0 z \sin \theta_{\text{ilt}}} - e^{-\frac{(-z-z_F)^2}{w^2}} e^{jk_0 z \sin \theta_{\text{ilt}}} & \text{pol. horizontal (Dirichlet)} \\ e^{-\frac{(z-z_F)^2}{w^2}} e^{-jk_0 z \sin \theta_{\text{ilt}}} + e^{-\frac{(-z-z_F)^2}{w^2}} e^{jk_0 z \sin \theta_{\text{ilt}}} & \text{pol. vertical (Neumann)} \end{cases} \quad (7.156)$$

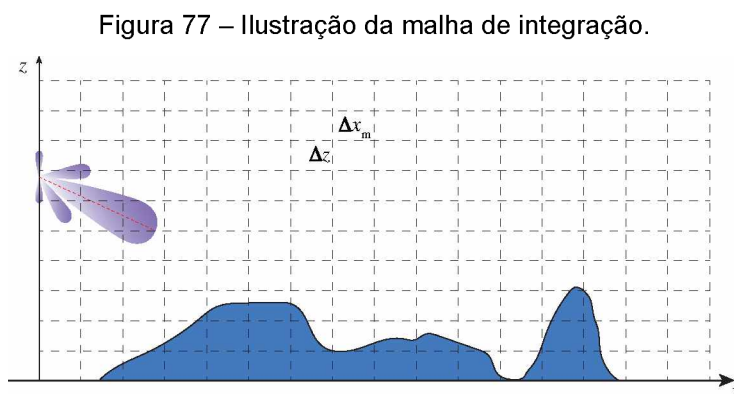
7.13 Implementação por Diferenças Finitas e o Esquema de Crank-Nicolson

Nesta seção, será introduzida a implementação da solução da equação parabólica pelo método de diferenças finitas. Essa implementação é baseada no esquema de Crank-Nicolson, o que permite a modelagem de fronteiras arbitrárias e é uma adaptação das técnicas utilizadas para propagação acústica submarina [110].

O método de Crank-Nicolson foi desenvolvido por John Crank e Phyllis Nicolson na metade do Século XX e é um método de diferenças finitas utilizado para resolver, numericamente, a equação do calor e equações diferenciais parciais similares. No caso da equação parabólica neste trabalho, ele é um método de segunda ordem na direção z e de primeira ordem na direção para-axial.

Como esse método é implícito na direção para-axial, cada vertical pode ser resolvida por vez e a distribuição vertical de campo em cada incremento é o resultado de um sistema de equações. Esse método é muito utilizado na solução das equações parabólicas, pois é incondicionalmente estável e o seu erro é da ordem $O(\Delta x^2) + O(\Delta z^4)$, ao contrário de muitos métodos em que o erro é da ordem $O(\Delta x) + O(\Delta z^4)$.

O primeiro passo é a discretização do domínio, definindo uma malha de integração como a da Figura 77. Essa malha deve ser regular na direção vertical, mas não precisa ser uniforme na direção para-axial com o intuito de se adaptar ao terreno. Por isso aparece Δx_m na Figura 77.



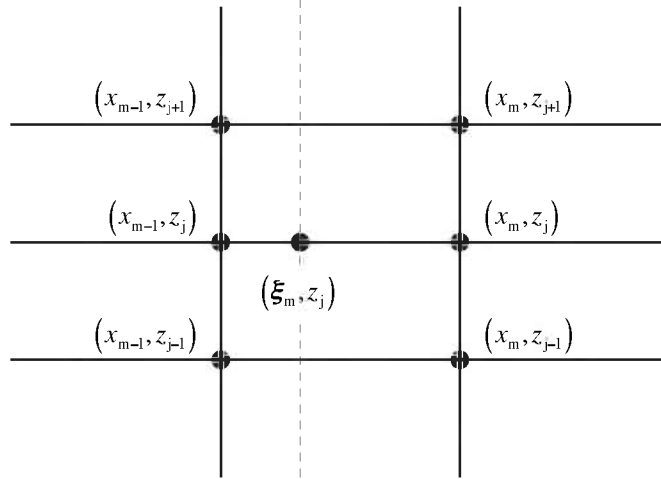
Fonte: Elaborada pelo autor.

Com a discretização, as distâncias discretas passam a ser escritas como na Equação (7.157).

$$\begin{cases} x_0 = 0 & m = 0 \\ x_m = x_{m-1} + \Delta x_m & m = 1, M \\ z_j = j\Delta z & j = 0, N \end{cases} \quad (7.157)$$

O esquema de Crank-Nicolson é um caso particular dos esquemas- θ . O cerne desses esquemas é considerar um ponto virtual entre cada passo de integração na direção para-axial e avaliar as derivadas nesse ponto. Para isso, considere a ilustração da Figura 78.

Figura 78 – Grid para um esquema- θ .



Fonte: Elaborada pelo autor.

O ponto intermediário (ξ_m, z_j) pode estar em qualquer lugar entre os pontos (x_{m-1}, z_j) e (x_m, z_j) e é definido pela Equação (7.158).

$$(\xi_m, z_j) = (x_{m-1} + \theta \Delta x_m, z_j) = (x_m - (1 - \theta) \Delta x_m, z_j) \quad (7.158)$$

em que θ é uma constante no intervalo $[0, 1]$ que indica se o ponto (ξ_m, z_j) está mais próximo de (x_{m-1}, z_j) ou de (x_m, z_j) .

Sendo assim, a derivada de primeira ordem na direção para-axial no ponto (ξ_m, z_j) pode ser definida por meio de uma diferença finita central como na Equação (7.159).

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_m, z_j) = \frac{u(x_m, z_j) - u(x_{m-1}, z_j)}{\theta \Delta x_m + (1-\theta) \Delta x_m} = \frac{u(x_m, z_j) - u(x_{m-1}, z_j)}{\Delta x_m} \quad (7.159)$$

De modo semelhante, a derivada de segunda ordem com relação a z é definida no ponto (ξ_m, z_j) como uma média ponderada das derivadas nos pontos (x_{m-1}, z_j) e (x_m, z_j) , como mostra a Equação (7.160).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\xi_m, z_j) = (1-\theta) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x_{m-1}, z_j) + \theta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x_m, z_j) \quad (7.160)$$

em que as derivadas de segunda ordem são calculadas como diferenças finitas centrais pelas Equações (7.161) e (7.162).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x_{m-1}, z_j) = \frac{u(x_{m-1}, z_{j+1}) + u(x_{m-1}, z_{j-1}) - 2u(x_{m-1}, z_j)}{\Delta z^2} \quad (7.161)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x_m, z_j) = \frac{u(x_m, z_{j+1}) + u(x_m, z_{j-1}) - 2u(x_m, z_j)}{\Delta z^2} \quad (7.162)$$

Substituindo as Equações (7.161) e (7.162) na Equação (7.160) chega-se às Equações (7.163a) a (7.163c).

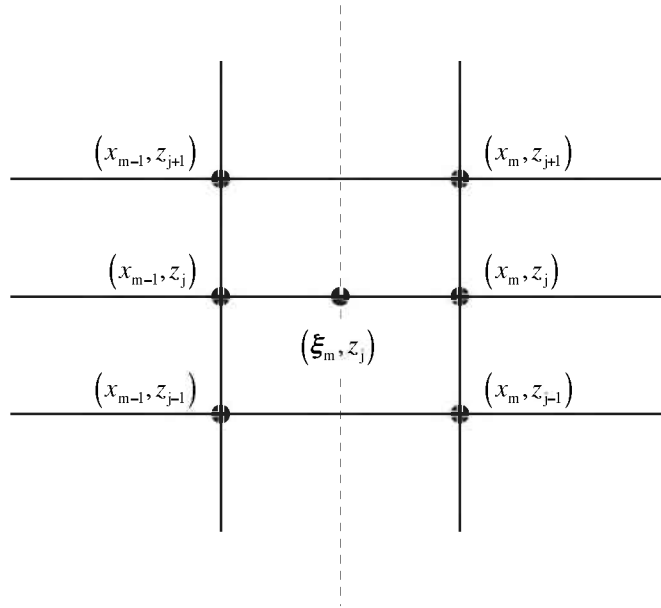
$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\xi_m, z_j) = (1-\theta) & \left[\frac{u(x_{m-1}, z_{j+1}) + u(x_{m-1}, z_{j-1}) - 2u(x_{m-1}, z_j)}{\Delta z^2} \right] + \dots \\ & \dots + \theta \left[\frac{u(x_m, z_{j+1}) + u(x_m, z_{j-1}) - 2u(x_m, z_j)}{\Delta z^2} \right] \end{aligned} \quad (7.163a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\xi_m, z_j) = \frac{1}{\Delta z^2} \left\{ \begin{aligned} & \left[(1-\theta)u(x_{m-1}, z_{j+1}) + \theta u(x_m, z_{j+1}) \right] + \dots \\ & \dots + \left[(1-\theta)u(x_{m-1}, z_{j-1}) + \theta u(x_m, z_{j-1}) \right] - \\ & \dots - 2 \left[(1-\theta)u(x_{m-1}, z_j) + \theta u(x_m, z_j) \right] \end{aligned} \right\} \quad (7.163b)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\xi_m, z_j) = \frac{1}{\Delta z^2} \left[u(\xi_m, z_{j+1}) + u(\xi_m, z_{j-1}) - 2u(\xi_m, z_j) \right] \quad (7.163c)$$

Para o esquema de Crank-Nicolson, o ponto (ξ_m, z_j) está exatamente no ponto médio entre (x_{m-1}, z_j) e (x_m, z_j) , ou seja, $\theta = \frac{1}{2}$. Existem outros esquemas em que θ assume outros valores e o comportamento da solução é alterado. Por exemplo, quando $\theta = 0$, tem-se um esquema explícito e, quando $\theta = 1$ tem-se um esquema implícito puro. Portanto, para o esquema de Crank-Nicolson, o *grid* é o da Figura 79.

Figura 79 – Grid para o esquema de Crank-Nicolson.



Fonte: *Parabolic equation methods for electromagnetic wave propagation* [62].

Observando a Equação (7.163c), percebe-se que esse esquema só pode ser utilizado quando todos os quatro pontos ao redor de (ξ_m, z_j) estão dentro do domínio. Assim, o esquema só pode ser utilizado quando $m \geq 1$ e $1 \leq j \leq N-1$. Para $m = 0$, não há problema, pois, nessa vertical, o campo é dado pela distribuição inicial. Já para o caso em $j = 0$ (solo) e $j = N$ (fronteira superior), outras expressões devem ser utilizadas para incorporar as condições de contorno adequadas.

7.13.1 Resolução para ângulo estreito – Modo 1

Considere a equação parabólica para propagação troposférica em Terra plana desenvolvida na Seção 7.7 e reescrita, aqui, como a Equação (7.164).

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, z) = -jk_0 \left[1 - \sqrt{\frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \tilde{m}^2(x, z)} \right] u(x, z) \quad (7.164)$$

Para expandir o operador Q , é preciso somar e subtrair 1 dentro da raiz quadrada, como na Equação (7.165).

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, z) = -jk_0 \left[1 - \sqrt{\frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \tilde{m}^2(x, z) + 1 - 1} \right] u(x, z) \quad (7.165)$$

Então, para o caso de ângulo estreito, deve-se fazer uma expansão de Taylor de primeira ordem do tipo $\sqrt{1+A} \cong 1 + \frac{A}{2}$. Portanto, chega-se às Equações (7.166a) a (7.166c).

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, z) = -\frac{jk_0}{2} \left[1 - \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \tilde{m}^2(x, z) \right] u(x, z) \quad (7.166a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, z) = \frac{j}{2k_0} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x, z) + \frac{jk_0}{2} [\tilde{m}^2(x, z) - 1] u(x, z) \quad (7.166b)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x, z) + 2jk_0 \frac{\partial u}{\partial x}(x, z) + k_0^2 [\tilde{m}^2(x, z) - 1] u(x, z) = 0 \quad (7.166c)$$

Nesse ponto, é necessário discretizá-la utilizando o esquema de Crank-Nicolson no ponto (ξ_m, z_j) . Para isso, é necessário conhecer as seguintes expressões:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\xi_m, z_j) \quad (7.167)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_m, z_j) \quad (7.168)$$

$$u(\xi_m, z_j) \quad (7.169)$$

A derivada de segunda ordem da Equação (7.167) é calculada de acordo com a Equação (7.163c). Agora, é trocada a notação para dar mais clareza ao texto, de modo que $u(\xi_m, z_j) = \frac{u_j^m + u_j^{m-1}}{2}$. Portanto, a Equação (7.163c) é reescrita como a Equação (7.170b).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\xi_m, z_j) = \frac{1}{\Delta z^2} \left[\frac{u_{j+1}^m + u_{j+1}^{m-1}}{2} + \frac{u_{j-1}^m + u_{j-1}^{m-1}}{2} - 2 \frac{u_j^m + u_j^{m-1}}{2} \right] \quad (7.170a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\xi_m, z_j) = \frac{1}{2\Delta z^2} \left[u_{j+1}^m + u_{j+1}^{m-1} + u_{j-1}^m + u_{j-1}^{m-1} - 2(u_j^m + u_j^{m-1}) \right] \quad (7.170b)$$

A derivada de primeira ordem é calculada de acordo com a Equação (7.159), reescrita em nova notação na Equação (7.171).

$$\frac{\partial u}{\partial x}(\xi_m, z_j) = \frac{u_j^m - u_j^{m-1}}{\Delta x_m} \quad (7.171)$$

Por fim, o campo da Equação (7.169) é avaliado, no ponto médio, pela Equação (7.172).

$$u(\xi_m, z_j) = \frac{u_j^m + u_j^{m-1}}{2} \quad (7.172)$$

Agora, basta substituir as expressões das Equações (7.170b), (7.171) e (7.172) na Equação (7.166c). Isso é feito nas Equações (7.173a) a (7.173d).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\xi_m, z_j) + 2jk_0 \frac{\partial u}{\partial x}(\xi_m, z_j) + k_0^2 [\tilde{m}^2(\xi_m, z_j) - 1] u(\xi_m, z_j) = 0 \quad (7.173a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\Delta z^2} \left[u_{j+1}^m + u_{j+1}^{m-1} + u_{j-1}^m + u_{j-1}^{m-1} - 2(u_j^m + u_j^{m-1}) \right] + \dots \\ & \dots + 2jk_0 \frac{u_j^m - u_j^{m-1}}{\Delta x_m} + k_0^2 [\tilde{m}^2(\xi_m, z_j) - 1] \frac{u_j^m + u_j^{m-1}}{2} = 0 \end{aligned} \quad (7.173b)$$

$$\begin{aligned} & u_{j+1}^m + u_{j+1}^{m-1} + u_{j-1}^m + u_{j-1}^{m-1} - 2(u_j^m + u_j^{m-1}) + \dots \\ & \dots + 4jk_0 \frac{\Delta z^2}{\Delta x_m} [u_j^m - u_j^{m-1}] + k_0^2 \Delta z^2 [\tilde{m}^2(\xi_m, z_j) - 1] [u_j^m + u_j^{m-1}] = 0 \end{aligned} \quad (7.173c)$$

$$\begin{aligned} & u_{j+1}^m + u_{j+1}^{m-1} + u_j^m \left\{ -2 + 4jk_0 \frac{\Delta z^2}{\Delta x_m} + k_0^2 \Delta z^2 [\tilde{m}^2(\xi_m, z_j) - 1] \right\} = \dots \\ & \dots = -u_{j+1}^{m-1} - u_{j-1}^{m-1} + u_j^{m-1} \left\{ 2 + 4jk_0 \frac{\Delta z^2}{\Delta x_m} - k_0^2 \Delta z^2 [\tilde{m}^2(\xi_m, z_j) - 1] \right\} \end{aligned} \quad (7.173d)$$

Para simplificar a escrita, define-se as expressões das Equações (7.174) e (7.175).

$$a_j^m = k_0^2 \Delta z^2 \left[\tilde{m}^2(\xi_m, z_j) - 1 \right] \quad (7.174)$$

$$b^m = 4jk_0 \frac{\Delta z^2}{\Delta x_m} \quad (7.175)$$

Utilizando essas definições, reescreve-se a Equação (7.173d) como a Equação (7.176).

$$u_{j+1}^m + u_{j-1}^m + u_j^m (-2 + b^m + a_j^m) = -u_{j+1}^{m-1} - u_{j-1}^{m-1} + u_j^{m-1} (2 + b^m - a_j^m) \quad (7.176)$$

Definindo os termos dos parênteses como nas Equações (7.177) e (7.178), a Equação (7.176) se torna a Equação (7.179).

$$\alpha_j^m = -2 + b + a_j^m \quad (7.177)$$

$$\beta_j^m = 2 + b - a_j^m \quad (7.178)$$

$$u_{j+1}^m + u_{j-1}^m + \alpha_j^m u_j^m = -u_{j+1}^{m-1} - u_{j-1}^{m-1} + \beta_j^m u_j^{m-1} \quad (7.179)$$

Como alertado anteriormente, a Equação (7.179) é válida apenas para $m = 1, 2, \dots, M$ e $j = 1, 2, \dots, N-1$. Nos limites $m = 0$, $j = 0$ e $j = N$, outras equações devem ser utilizadas.

Para $m = 0$, o valor de u_j^0 deve ser conhecido, sendo este o campo inicial do problema de valor inicial (PVI). Já nos casos $j = 0$ e $j = N$, devem ser utilizadas as condições de contorno do problema nas fronteiras inferior e superior, respectivamente.

7.13.1.1 Equações na fronteira inferior

Para o caso $j = 0$, que representa a fronteira ar/solo, devem ser utilizadas as condições de contorno de Leontovich apropriadas. Se a modelagem for de um solo

PEC, utiliza-se as condições de Dirichlet ou Neumann, dadas nas Equações (7.180) e (7.181).

$$u(x, 0) = 0 \quad \text{Dirichlet (pol. horizontal)} \quad (7.180)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}(x, 0) = 0 \quad \text{Neumann (pol. vertical)} \quad (7.181)$$

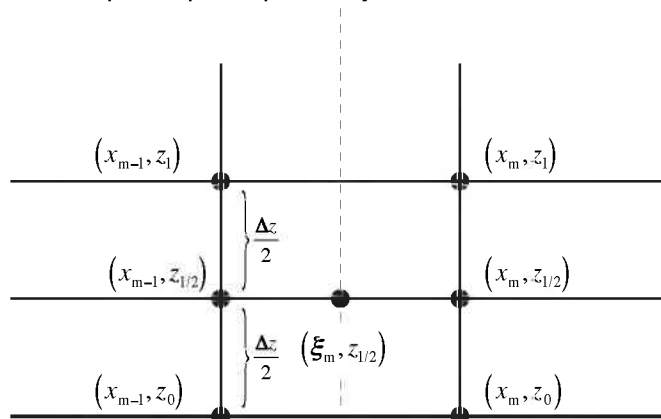
No caso da polarização horizontal, a condição de contorno de Dirichlet pode ser imposta diretamente fazendo $u_0^m = 0, \forall m$. Para o caso da polarização vertical, a solução é mais trabalhosa.

Aqui, o problema é que a Equação (7.173a) deve ser discretizada no ponto $(\xi_m, 0)$ e a expressão regular utilizada para a derivada de segunda ordem em z requer o conhecimento do ponto (ξ_m, z_{-1}) , que está fora do domínio de integração. Isso é mostrado na Equação (7.182).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\xi_m, 0) = \frac{1}{2\Delta z^2} \left[u_1^m + u_1^{m-1} + u_{-1}^m + u_{-1}^{m-1} - 2(u_0^m + u_0^{m-1}) \right] \quad (7.182)$$

A solução para isso é fazer uma aproximação unilateral para a derivada de segunda ordem em vez de utilizar a Equação (7.182). Para isso, considere o ponto médio $(\xi_m, z_{1/2})$ como na Figura 80.

Figura 80 – Esquema para aproximação unilateral na fronteira inferior.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A derivada de segunda ordem em $(\xi_m, 0)$ deve ser aproximada pela derivada de segunda ordem em $(\xi_m, \Delta z/2)$, como mostra a Equação (7.183).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\xi_m, 0) \cong \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\xi_m, \Delta z/2) \quad (7.183)$$

Então, é preciso desenvolver uma expressão para a derivada de segunda ordem no ponto $(\xi_m, \Delta z/2)$. Isso é feito nas Equações (7.184a) a (7.184d).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\xi_m, \Delta z/2) = \frac{1}{2\left(\frac{\Delta z}{2}\right)^2} \left[u_1^m + u_1^{m-1} + u_0^m + u_0^{m-1} - 2(u_{1/2}^m + u_{1/2}^{m-1}) \right] \quad (7.184a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\xi_m, \Delta z/2) = \frac{1}{\Delta z} \left[\frac{u_1^m + u_1^{m-1} + u_0^m + u_0^{m-1} - 2(u_{1/2}^m + u_{1/2}^{m-1})}{\Delta z/2} \right] \quad (7.184b)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\xi_m, \Delta z/2) = \frac{1}{\Delta z} \left[\frac{u_1^m - u_{1/2}^m + u_1^{m-1} - u_{1/2}^{m-1} + u_0^m - u_{1/2}^m + u_0^{m-1} - u_{1/2}^{m-1}}{\Delta z/2} \right] \quad (7.184c)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\xi_m, \Delta z/2) = \frac{1}{\Delta z} \left[\frac{(u_1^m - u_{1/2}^m)}{\Delta z/2} + \frac{(u_1^{m-1} - u_{1/2}^{m-1})}{\Delta z/2} - \frac{(u_{1/2}^m - u_0^m)}{\Delta z/2} - \frac{(u_{1/2}^{m-1} - u_0^{m-1})}{\Delta z/2} \right] \quad (7.184d)$$

É possível identificar expressões de diferenças finitas progressivas na Equação (7.184d), que pode ser reescrita na forma da Equação (7.185).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\xi_m, \Delta z/2) = \frac{1}{\Delta z} \left[\frac{\partial u}{\partial z}(x_m, \Delta z/2) + \frac{\partial u}{\partial z}(x_{m-1}, \Delta z/2) - \frac{\partial u}{\partial z}(x_m, 0) - \frac{\partial u}{\partial z}(x_{m-1}, 0) \right] \quad (7.185)$$

Agora, como a condição de Neumann diz que $\frac{\partial u}{\partial z}(x, 0) = 0$, basta substituí-la na Equação (7.185) e obter a Equação (7.186).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\xi_m, \Delta z/2) = \frac{1}{\Delta z} \left[\frac{\partial u}{\partial z}(x_m, \Delta z/2) + \frac{\partial u}{\partial z}(x_{m-1}, \Delta z/2) \right] \quad (7.186)$$

Por fim, é necessário calcular a derivada de primeira ordem no ponto médio por diferença central, como nas Equações (7.187a) e (7.187b).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\xi_m, \Delta z/2) = \frac{1}{\Delta z} \left[\frac{u_1^m - u_0^m}{\Delta z} + \frac{u_1^{m-1} - u_0^{m-1}}{\Delta z} \right] \quad (7.187a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\xi_m, \Delta z/2) = \frac{1}{\Delta z^2} [u_1^m - u_0^m + u_1^{m-1} - u_0^{m-1}] \quad (7.187b)$$

Portanto, a derivada de segunda ordem em z é aproximada unilateralmente como na Equação (7.188) quando a condição de Neumann se aplica.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\xi_m, 0) \cong \frac{1}{\Delta z^2} [u_1^m - u_0^m + u_1^{m-1} - u_0^{m-1}] \quad (7.188)$$

Agora, é possível desenvolver a equação parabólica discreta no ponto $(\xi_m, 0)$, de acordo com as Equações (7.189a) a (7.189e).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\xi_m, 0) + 2jk_0 \frac{\partial u}{\partial x}(\xi_m, 0) + k_0^2 [\tilde{m}^2(\xi_m, 0) - 1] u(\xi_m, 0) = 0 \quad (7.189a)$$

$$\frac{1}{\Delta z^2} [u_1^m - u_0^m + u_1^{m-1} - u_0^{m-1}] + 2jk_0 \frac{u_0^m - u_0^{m-1}}{\Delta x_m} + k_0^2 [\tilde{m}^2(\xi_m, 0) - 1] \frac{u_0^m + u_0^{m-1}}{2} = 0 \quad (7.189b)$$

$$u_1^m - u_0^m + u_1^{m-1} - u_0^{m-1} + 2jk_0 \frac{\Delta z^2}{\Delta x_m} [u_0^m - u_0^{m-1}] + \frac{k_0^2 \Delta z^2}{2} [\tilde{m}^2(\xi_m, 0) - 1] [u_0^m + u_0^{m-1}] = 0 \quad (7.189c)$$

$$\begin{aligned} u_1^m + u_0^m \left\{ -1 + 2jk_0 \frac{\Delta z^2}{\Delta x_m} + \frac{k_0^2 \Delta z^2}{2} [\tilde{m}^2(\xi_m, 0) - 1] \right\} = \dots \\ \dots = -u_1^{m-1} + u_0^{m-1} \left\{ 1 + 2jk_0 \frac{\Delta z^2}{\Delta x_m} - \frac{k_0^2 \Delta z^2}{2} [\tilde{m}^2(\xi_m, 0) - 1] \right\} \end{aligned} \quad (7.189d)$$

$$u_1^m + u_0^m \left(-1 + \frac{b^m + a_0^m}{2} \right) = -u_1^{m-1} + u_0^{m-1} \left(1 + \frac{b^m - a_0^m}{2} \right) \quad (7.189e)$$

em que b^m e a_0^m são definidos nas Equações (7.175) e (7.174).

Mais ainda, a Equação (7.189e) se torna a Equação (7.190) em termos de α_0^m e β_0^m .

$$u_1^m + u_0^m \frac{\alpha_0^m}{2} = -u_1^{m-1} + u_0^{m-1} \frac{\beta_0^m}{2} \quad (7.190)$$

Lembrando que a Equação (7.190) foi desenvolvida para a condição de contorno de Neumann. Para considerar o caso de um solo não perfeitamente condutor, descrito pela condição de contorno do tipo Cauchy, basta substituir essa condição, dada pela Equação (7.115), na expressão da aproximação unilateral desenvolvida. Desse modo, chega-se às Equações (7.191a) a (7.191c).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\xi_m, \Delta z/2) = \frac{1}{\Delta z} \left[\frac{\partial u}{\partial z}(x_m, \Delta z/2) + \frac{\partial u}{\partial z}(x_{m-1}, \Delta z/2) - \frac{\partial u}{\partial z}(x_m, 0) - \frac{\partial u}{\partial z}(x_{m-1}, 0) \right] \quad (7.191a)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\xi_m, \Delta z/2) = \frac{1}{\Delta z} \left[\frac{\partial u}{\partial z}(x_m, \Delta z/2) + \frac{\partial u}{\partial z}(x_{m-1}, \Delta z/2) + \alpha_{BC}(x_m)u(x_m, 0) + \dots \right. \\ \left. \dots + \alpha_{BC}(x_{m-1})u(x_{m-1}, 0) \right] \quad (7.191b)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\xi_m, \Delta z/2) = \frac{1}{\Delta z^2} \left[u_1^m + u_1^{m-1} - u_0^m (1 - \alpha_{BC}^m \Delta z) - u_0^{m-1} (1 - \alpha_{BC}^{m-1} \Delta z) \right] \quad (7.191c)$$

em que $\alpha_{BC}^m = j k_0 \delta^m$ e δ^m é a impedância superficial do solo no ponto $(x_m, 0)$ e é dada pela Equação (7.192).

$$\delta^m = \begin{cases} \sqrt{\epsilon_r' - j \frac{\sigma^m Z_0}{k_0}} - 1 & \text{pol. horizontal} \\ \frac{\sqrt{\epsilon_r' - j \frac{\sigma^m Z_0}{k_0}} - 1}{\epsilon_r' - j \frac{\sigma^m Z_0}{k_0}} & \text{pol. vertical} \end{cases} \quad (7.192)$$

Por fim, basta substituir a expressão encontrada na Equação (7.191c) na equação parabólica, desenvolvendo as Equações (7.193a) a (7.193e).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(\xi_m, 0) + 2 j k_0 \frac{\partial u}{\partial x}(\xi_m, 0) + k_0^2 [\tilde{m}^2(\xi_m, 0) - 1] u(\xi_m, 0) = 0 \quad (7.193a)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta z^2} \left[u_1^m + u_1^{m-1} - u_0^m (1 - \alpha_{BC}^m \Delta z) - u_0^{m-1} (1 - \alpha_{BC}^{m-1} \Delta z) \right] + \dots \\ & \dots + 2jk_0 \frac{u_0^m - u_0^{m-1}}{\Delta x_m} + k_0^2 \left[\tilde{m}^2(\xi_m, 0) - 1 \right] \frac{u_0^m + u_0^{m-1}}{2} = 0 \end{aligned} \quad (7.193b)$$

$$\begin{aligned} & u_1^m + u_1^{m-1} - u_0^m (1 - \alpha_{BC}^m \Delta z) - u_0^{m-1} (1 - \alpha_{BC}^{m-1} \Delta z) + \dots \\ & \dots + 2jk_0 \frac{\Delta z^2}{\Delta x_m} \left[u_0^m - u_0^{m-1} \right] + \frac{k_0^2 \Delta z^2}{2} \left[\tilde{m}^2(\xi_m, 0) - 1 \right] \left[u_0^m + u_0^{m-1} \right] = 0 \end{aligned} \quad (7.193c)$$

$$\begin{aligned} & u_1^m + u_0^m \left\{ -1 + \alpha_{BC}^m \Delta z + 2jk_0 \frac{\Delta z^2}{\Delta x_m} + \frac{k_0^2 \Delta z^2}{2} \left[\tilde{m}^2(\xi_m, 0) - 1 \right] \right\} = \\ & = -u_1^{m-1} + u_0^{m-1} \left\{ 1 - \alpha_{BC}^{m-1} \Delta z + 2jk_0 \frac{\Delta z^2}{\Delta x_m} - \frac{k_0^2 \Delta z^2}{2} \left[\tilde{m}^2(\xi_m, 0) - 1 \right] \right\} \end{aligned} \quad (7.193d)$$

$$u_1^m + u_0^m \left\{ \frac{\alpha_0^m}{2} + \alpha_{BC}^m \Delta z \right\} = -u_1^{m-1} + u_0^{m-1} \left\{ \frac{\beta_0^m}{2} - \alpha_{BC}^{m-1} \Delta z \right\} \quad (7.193e)$$

em que $\alpha_{BC}^m = jk_0 \delta^m$ e δ^m é a impedância superficial do solo no ponto $(x_m, 0)$, definida na Equação (7.192).

7.13.1.2 Equações para fronteira superior

Para a fronteira superior, como o domínio será estendido e uma camada absorvedora será utilizada, pode-se deixar que essa fronteira seja um espelho, pois a camada absorvedora não deixará que ocorram reflexões. Assim, utiliza-se as condições da Equação (7.194).

$$\begin{cases} u(x, N) = 0 & \text{Dirichlet (pol. horizontal)} \\ \frac{\partial u}{\partial z}(x, N) = 0 & \text{Neumann (pol. vertical)} \end{cases} \quad (7.194)$$

No caso da polarização horizontal, a condição de contorno de Dirichlet pode ser imposta diretamente fazendo $u_N^m = 0$, $\forall m$. Para o caso da polarização vertical, deve ser feita a aproximação unilateral para a derivada de segunda ordem em z .

De modo semelhante à Equação (7.190), tem-se a Equação (7.195) para a fronteira superior.

$$u_{N-1}^m + \frac{\alpha_N^m}{2} u_N^m = u_{N-1}^{m-1} + \frac{\beta_N^m}{2} u_N^{m-1} \quad (7.195)$$

Finalmente, tem-se todas as equações necessárias e o sistema completo é mostrado na Equação (7.196).

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_N^m = 0 & j = N \text{ e Dirichlet} \\ u_{N-1}^m + u_N^m \frac{\alpha_N^m}{2} = -u_{N-1}^{m-1} + u_N^{m-1} \frac{\beta_N^m}{2} & j = N \text{ e Neumann} \\ u_{j+1}^m + u_{j-1}^m + \alpha_j^m u_j^m = -u_{j+1}^{m-1} - u_{j-1}^{m-1} + \beta_j^m u_j^{m-1} & 1 \leq j \leq N-1 \\ u_0^m = 0 & j = 0 \text{ e Dirichlet} \\ u_1^m + u_0^m \frac{\alpha_0^m}{2} = -u_1^{m-1} + u_0^{m-1} \frac{\beta_0^m}{2} & j = 0 \text{ e Neumann} \\ u_1^m + u_0^m \left\{ \frac{\alpha_0^m}{2} + \alpha_{BC}^m \Delta z \right\} = -u_1^{m-1} + u_0^{m-1} \left\{ \frac{\beta_0^m}{2} - \alpha_{BC}^{m-1} \Delta z \right\} & j = 0 \text{ e Cauchy} \end{array} \right. \quad (7.196)$$

É possível escrever o sistema da Equação (7.196) em formato matricial da maneira mostrada na Equação (7.197).

$$\mathbf{A}^m \mathbf{U}^m = \mathbf{B}^m \mathbf{U}^{m-1} \quad (7.197)$$

em que

$$\mathbf{U}^m = \begin{bmatrix} u_0^m \\ u_1^m \\ \vdots \\ u_j^m \\ \vdots \\ u_N^m \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}^{m-1} = \begin{bmatrix} u_0^{m-1} \\ u_1^{m-1} \\ \vdots \\ u_j^{m-1} \\ \vdots \\ u_N^{m-1} \end{bmatrix} \quad (7.198)$$

$$\mathbf{A}^m = \begin{bmatrix} A_0^m & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \alpha_1^m & 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & 0 & 0 & 1 & \alpha_j^m & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & \ddots & 1 \\ 0 & & \cdots & & 0 & 0 & A_N^m \end{bmatrix} \quad (7.199)$$

$$\mathbf{B}^m = \begin{bmatrix} B_0^m & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \beta_1^m & -1 & 0 & \\ 0 & -1 & \ddots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ddots & -1 & 0 \\ & & 0 & -1 & \ddots & -1 & 0 \\ \vdots & & 0 & 0 & -1 & \beta_j^m & -1 & 0 \\ & & & & 0 & -1 & \ddots & -1 \\ 0 & & \cdots & & 0 & 0 & B_N^m \end{bmatrix} \quad (7.200)$$

em que

$$A_0^m = \begin{cases} 1 & \text{Dirichlet} \\ \frac{\alpha_0^m}{2} & \text{Neumann} \\ \frac{\alpha_0^m}{2} + \alpha_{BC}^m \Delta z & \text{Cauchy} \end{cases} \quad (7.201)$$

$$A_N^m = \begin{cases} 1 & \text{Dirichlet} \\ \frac{\alpha_N^m}{2} & \text{Neumann} \end{cases} \quad (7.202)$$

$$B_0^m = \begin{cases} 1 & \text{Dirichlet} \\ \frac{\beta_0^m}{2} & \text{Neumann} \\ \frac{\beta_0^m}{2} - \alpha_{BC}^{m-1} \Delta z & \text{Cauchy} \end{cases} \quad (7.203)$$

$$B_N^m = \begin{cases} 1 & \text{Dirichlet} \\ \frac{\beta_N^m}{2} & \text{Neumann} \end{cases} \quad (7.204)$$

Assim, o perfil vertical de campo a cada posição x_m é dado pela Equação (7.205).

$$\mathbf{U}^m = \mathbf{A}^{m-1} \mathbf{B}^m \mathbf{U}^{m-1} \quad (7.205)$$

As matrizes \mathbf{A}^m e \mathbf{B}^m são tridiagonais e a inversão de \mathbf{A}^m pode ser feita por eliminação Gaussiana, posto que \mathbf{A}^m é não singular.

Primeiramente, calcula-se o vetor \mathbf{V}^m dado pela Equação (7.206).

$$\mathbf{V}^m = \mathbf{B}^m \mathbf{U}^{m-1} \quad (7.206)$$

Agora, deve-se calcular um vetor auxiliar como na Equação (7.207).

$$\begin{cases} \mathbf{AUX}^m(0) = \frac{\mathbf{V}^m(0)}{\alpha^m(0)} \\ \mathbf{V}^m(j) = \frac{\mathbf{V}^m(j) - \mathbf{AUX}^m(j-1)}{\alpha_j^m} \end{cases} \quad j = 1, \dots, N \quad (7.207)$$

Finalmente, o vetor \mathbf{U}^m é calculado pela Equação (7.208)

$$\begin{cases} \mathbf{U}^m(N) = \mathbf{AUX}^m(N) \\ \mathbf{U}^m(j) = \mathbf{AUX}^m(j) - \frac{\mathbf{U}^m(j+1)}{\alpha_j^m} \end{cases} \quad j = N-1, \dots, 0 \quad (7.208)$$

Fazendo esse procedimento, o número de operações é da ordem N .

7.13.2 Resolução para ângulo amplo

No caso da equação parabólica de ângulo amplo, a expansão do operador Q é feita por um aproximador Padé-(1,1) como sugerido por Claerbout. Dessa maneira, utiliza-se a expansão da Equação (7.209).

$$\sqrt{1+Z} \cong \frac{1+\frac{3}{4}Z}{1+\frac{1}{4}Z} \quad (7.209)$$

em que $Z = \frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \tilde{m}^2(x, z) - 1$.

Desse modo, a equação parabólica pode ser desenvolvida como na Equação (7.210).

$$(4+Z) \frac{\partial u}{\partial x}(x, z) = 2jk_0 Z u(x, z) \quad (7.210)$$

Entretanto, foi mostrado [92,93] que aproximações Padé de maior ordem do operador $\sqrt{1+Z}$ causam instabilidades no esquema numérico. Então, a abordagem precisa ser um pouco diferente nesse caso. Para isso, considere a solução formal da equação parabólica da Equação (7.211b).

$$u(x + \Delta x_m, z) = e^{jk_0 \Delta x_m (-1+Q)} u(x, z) \quad (7.211a)$$

$$u(x + \Delta x_m, z) = e^{jk_0 \Delta x_m (-1+\sqrt{1+Z})} u(x, z) \quad (7.211b)$$

Em vez de expandir a raiz da Equação (7.209), deve-se expandir a exponencial $e^{jk_0 \Delta x (-1+\sqrt{1+Z})}$ como na Equação (7.212).

$$e^{jk_0 \Delta x_m (-1+\sqrt{1+Z})} \cong \frac{P_2(Z)}{P_1(Z)} \quad (7.212)$$

Fazendo isso, a Equação (7.211b) torna-se a Equação (7.213b).

$$u(x + \Delta x, z) = \frac{P_2(Z)}{P_1(Z)} u(x, z) \quad (7.213a)$$

$$P_1(Z)u(x + \Delta x, z) = P_2(Z)u(x, z) \quad (7.213b)$$

De posse da Equação (7.213b), basta discretizá-la em z , uma vez que já está discretizada em x .

O aproximador Padé-(1,1) para a exponencial que é equivalente ao aproximador Padé-(1,1) para Q da Equação (7.209) e equivalente a uma expansão de Taylor de segunda ordem é dado na Equação (7.214).

$$e^{jk_0 \Delta x_m (-1 + \sqrt{1+Z})} \cong \frac{1 + \frac{1}{4}(1 - jk_0 \Delta x_m)Z}{1 + \frac{1}{4}(1 + jk_0 \Delta x_m)Z} \quad (7.214)$$

Portanto, chega-se à Equação (7.215).

$$\left[1 + \frac{1}{4}(1 + jk_0 \Delta x_m)Z\right]u(x + \Delta x_m, z) = \left[1 + \frac{1}{4}(1 - jk_0 \Delta x_m)Z\right]u(x, z) \quad (7.215)$$

Substituindo Z na Equação (7.215), desenvolve-se as Equações (7.216a) e (7.216b).

$$\begin{aligned} &\left[1 + \frac{1}{4}(1 + jk_0 \Delta x_m) \left[\frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \tilde{m}^2(x, z) - 1 \right]\right] u(x + \Delta x_m, z) = \dots \\ &\dots = \left[1 + \frac{1}{4}(1 - jk_0 \Delta x_m) \left[\frac{1}{k_0^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \tilde{m}^2(x, z) - 1 \right]\right] u(x, z) \end{aligned} \quad (7.216a)$$

$$\begin{aligned} &(1 + jk_0 \Delta x_m) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x + \Delta x_m, z) + k_0^2 \left\{ (1 + jk_0 \Delta x_m) [\tilde{m}^2(x, z) - 1] + 4 \right\} u(x + \Delta x_m, z) = \dots \\ &\dots = (1 - jk_0 \Delta x_m) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x, z) + k_0^2 \left\{ (1 - jk_0 \Delta x_m) [\tilde{m}^2(x, z) - 1] + 4 \right\} u(x, z) \end{aligned} \quad (7.216b)$$

Agora, é preciso discretizar a Equação (7.216b) em z por meio de diferença central. Isso resulta nas Equações (7.217a) a (7.217d).

$$\begin{aligned} &(1 + jk_0 \Delta x_m) \frac{1}{\Delta z^2} [u_{j+1}^m + u_{j-1}^m - 2u_j^m] + k_0^2 \left\{ (1 + jk_0 \Delta x_m) [\tilde{m}^2(x, z) - 1] + 4 \right\} u_j^m = \dots \\ &\dots = (1 - jk_0 \Delta x_m) \frac{1}{\Delta z^2} [u_{j+1}^{m-1} + u_{j-1}^{m-1} - 2u_j^{m-1}] + k_0^2 \left\{ (1 - jk_0 \Delta x_m) [\tilde{m}^2(x, z) - 1] + 4 \right\} u_j^{m-1} \end{aligned} \quad (7.217a)$$

$$\begin{aligned}
 (1 + jk_0 \Delta x_m) \left\{ \left[u_{j+1}^m + u_{j-1}^m - 2u_j^m \right] + k_0^2 \Delta z^2 \left\{ \left[\tilde{m}^2(x, z) - 1 \right] + \frac{4}{(1 + jk_0 \Delta x_m)} \right\} u_j^m \right\} = \dots \\
 \dots = (1 - jk_0 \Delta x_m) \left\{ \left[u_{j+1}^{m-1} + u_{j-1}^{m-1} - 2u_j^{m-1} \right] + k_0^2 \Delta z^2 \left\{ \left[\tilde{m}^2(x, z) - 1 \right] + \frac{4}{(1 - jk_0 \Delta x_m)} \right\} u_j^{m-1} \right\}
 \end{aligned} \quad (7.217b)$$

$$\begin{aligned}
 u_{j+1}^m + u_{j-1}^m + u_j^m \left[-2 + k_0^2 \Delta z^2 \left[\tilde{m}^2(x, z) - 1 \right] + \frac{4k_0^2 \Delta z^2}{(1 + jk_0 \Delta x_m)} \right] = \dots \\
 \dots = \frac{(1 - jk_0 \Delta x_m)}{(1 + jk_0 \Delta x_m)} \left\{ u_{j+1}^{m-1} + u_{j-1}^{m-1} + u_j^{m-1} \left[-2 + k_0^2 \Delta z^2 \left[\tilde{m}^2(x, z) - 1 \right] + \frac{4k_0^2 \Delta z^2}{(1 - jk_0 \Delta x_m)} \right] \right\}
 \end{aligned} \quad (7.217c)$$

$$u_{j+1}^m + u_{j-1}^m + u_j^m (-2 + a_j^m + b'^m) = c^m \left\{ u_{j+1}^{m-1} + u_{j-1}^{m-1} + u_j^{m-1} (-2 + a_j^m + b'^m) \right\} \quad (7.217d)$$

em que

$$a_j^m = k_0^2 \Delta z^2 \left[\tilde{m}^2(x, z) - 1 \right] \quad (7.218)$$

$$b'^m = \frac{4k_0^2 \Delta z^2}{(1 + jk_0 \Delta x_m)} \quad (7.218)$$

$$c^m = \frac{(1 - jk_0 \Delta x_m)}{(1 + jk_0 \Delta x_m)} \quad (7.220)$$

A Equação (7.217d) ainda pode ser escrita como a Equação (7.221).

$$u_{j+1}^m + u_{j-1}^m + u_j^m \alpha_j'^m = c^m \left\{ u_{j+1}^{m-1} + u_{j-1}^{m-1} + u_j^{m-1} \alpha_j'^{m*} \right\} \quad (7.221)$$

em que

$$\alpha_j'^m = -2 + a_j^m + b'^m \quad (7.222)$$

Da mesma maneira que no caso de ângulo estreito, a Equação (7.221) é válida apenas para $m = 1, 2, \dots, M$ e $j = 1, 2, \dots, N - 1$. Nos limites $m = 0$, $j = 0$ e $j = N$, outras equações devem ser utilizadas.

Para $m = 0$, o valor de u_j^0 deve ser conhecido, sendo este o campo inicial do PVI. Já nos casos $j = 0$ e $j = N$, devem ser utilizadas as condições de contorno do problema nas fronteiras inferior e superior, respectivamente.

7.13.2.1 Equações para a fronteira inferior

Para o caso $j = 0$, que representa a fronteira ar/solo, devem ser utilizadas as condições de contorno de Leontovich apropriadas. Se a modelagem for de um solo PEC, utiliza-se as condições de Dirichlet ou Neumann, dadas na Equação (7.223).

$$\begin{cases} u(x, 0) = 0 & \text{Dirichlet (pol. horizontal)} \\ \frac{\partial u}{\partial z}(x, 0) = 0 & \text{Neumann (pol. vertical)} \end{cases} \quad (7.223)$$

No caso da polarização horizontal, a condição de contorno de Dirichlet pode ser imposta diretamente fazendo $u_0^m = 0$, $\forall m$.

Para o caso da polarização vertical, assim como antes, a Equação (7.216b) deve ser discretizada no limite do domínio e a expressão regular utilizada para a derivada de segunda ordem em z requer o conhecimento do ponto (x_m, z_{-1}) , que está fora do domínio de integração. A solução é utilizar a aproximação unilateral desenvolvida anteriormente para essas derivadas.

Assim, a derivada de segunda ordem é aproximada como na Equação (7.224) para a condição de contorno de Neumann.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x + \Delta x_m, 0) \cong \frac{2}{\Delta z^2} [u_1^m - u_0^m] \quad (7.224)$$

Agora, a discretização da equação parabólica se dá nas Equações (7.225a) a (7.225d).

$$\begin{aligned} (1 + jk_0 \Delta x_m) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x + \Delta x_m, 0) + k_0^2 \left\{ (1 + jk_0 \Delta x_m) [\tilde{m}^2(x, 0) - 1] + 4 \right\} u(x + \Delta x_m, 0) = \dots \\ \dots = (1 - jk_0 \Delta x_m) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x, 0) + k_0^2 \left\{ (1 - jk_0 \Delta x_m) [\tilde{m}^2(x, 0) - 1] + 4 \right\} u(x, 0) \end{aligned} \quad (7.225a)$$

$$u_1^m + \frac{1}{2} \left\{ -2 + k_0^2 \Delta z^2 [\tilde{m}^2(x, 0) - 1] + \frac{4k_0^2 \Delta z^2}{(1 + jk_0 \Delta x_m)} \right\} u_0^m = \dots$$

$$\dots = \frac{(1 - jk_0 \Delta x_m)}{(1 + jk_0 \Delta x_m)} \left\{ u_1^{m-1} + \frac{1}{2} \left\{ -2 + k_0^2 \Delta z^2 [\tilde{m}^2(x, 0) - 1] + \frac{4k_0^2 \Delta z^2}{(1 - jk_0 \Delta x_m)} \right\} u_0^{m-1} \right\} \quad (7.225b)$$

$$u_1^m + \frac{1}{2} (-2 + a_0^m + b'^m) u_0^m = c^m \left\{ u_1^{m-1} + \frac{1}{2} (-2 + a_0^m + b'^m) u_0^{m-1} \right\} \quad (7.225c)$$

$$u_1^m + \frac{\alpha_0'^m}{2} u_0^m = c^m \left\{ u_1^{m-1} + \frac{\alpha_0'^m}{2} u_0^{m-1} \right\} \quad (7.225d)$$

Para considerar o caso de um solo não perfeitamente condutor, descrito pela condição de contorno do tipo Cauchy, basta substituir essa condição na expressão da aproximação unilateral desenvolvida. Desse modo, a derivada de segunda ordem em z é dada pela Equação (7.226).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x + \Delta x_m, 0) \cong \frac{2}{\Delta z^2} [u_1^m - u_0^m (1 - \alpha_{BC}^m \Delta z)] \quad (7.226)$$

em que $\alpha_{BC}^m = jk_0 \delta^m$ e δ^m é a impedância superficial do solo no ponto $(x_m, 0)$ e é dada pela Equação (7.227).

$$\delta^m = \begin{cases} \sqrt{\frac{\epsilon_r'^m - j \frac{\sigma^m Z_0}{k_0} - 1}{\epsilon_r'^m - j \frac{\sigma^m Z_0}{k_0} - 1}} & \text{pol. horizontal} \\ \frac{\epsilon_r'^m - j \frac{\sigma^m Z_0}{k_0}}{\sqrt{\epsilon_r'^m - j \frac{\sigma^m Z_0}{k_0} - 1}} & \text{pol. vertical} \end{cases} \quad (7.227)$$

Por fim, basta substituir a Equação (7.226) na equação parabólica, desenvolvendo as Equações (7.228a) a (7.228d).

$$(1 + jk_0 \Delta x_m) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x + \Delta x_m, 0) + k_0^2 \left\{ (1 + jk_0 \Delta x_m) [\tilde{m}^2(x, 0) - 1] + 4 \right\} u(x + \Delta x_m, 0) = \dots$$

$$\dots = (1 - jk_0 \Delta x_m) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(x, 0) + k_0^2 \left\{ (1 - jk_0 \Delta x_m) [\tilde{m}^2(x, 0) - 1] + 4 \right\} u(x, 0) \quad (7.228a)$$

$$\begin{aligned}
 u_1^m - u_0^m (1 - \alpha_{BC}^m \Delta z) + \frac{1}{2} \left\{ k_0^2 \Delta z^2 [\tilde{m}^2(x, 0) - 1] + \frac{4k_0^2 \Delta z^2}{(1 + jk_0 \Delta x_m)} \right\} u_0^m = \dots \\
 \dots = \frac{(1 - jk_0 \Delta x_m)}{(1 + jk_0 \Delta x_m)} \left\{ u_1^{m-1} - u_0^{m-1} (1 - \alpha_{BC}^{m-1} \Delta z) + \dots \right. \\
 \left. \dots + \frac{1}{2} \left\{ k_0^2 \Delta z^2 [\tilde{m}^2(x, 0) - 1] + \frac{4k_0^2 \Delta z^2}{(1 - jk_0 \Delta x_m)} \right\} u_0^{m-1} \right\} \quad (7.228b)
 \end{aligned}$$

$$u_1^m + \frac{1}{2} (-2 + a_0^m + b^m + 2\alpha_{BC}^m \Delta z) u_0^m = c^m \left\{ u_1^{m-1} + \frac{1}{2} (-2 + a_0^m + b'^m + 2\alpha_{BC}^{m-1} \Delta z) u_0^{m-1} \right\} \quad (7.228c)$$

$$u_1^m + \frac{(\alpha_0^m + 2\alpha_{BC}^m \Delta z)}{2} u_0^m = c^m \left\{ u_1^{m-1} + \frac{(\alpha_0'^m + 2\alpha_{BC}^{m-1} \Delta z)}{2} u_0^{m-1} \right\} \quad (7.228d)$$

7.13.2.2 Equações para fronteira superior

Para a fronteira superior, como o domínio será estendido e uma camada absorvedora será utilizada, pode-se deixar que essa fronteira seja um espelho, pois a camada absorvedora não deixará que ocorram reflexões. Assim, utiliza-se as condições da Equação (7.229).

$$\begin{cases} u(x, N) = 0 & \text{Dirichlet (pol. horizontal)} \\ \frac{\partial u}{\partial z}(x, N) = 0 & \text{Neumann (pol. vertical)} \end{cases} \quad (7.229)$$

No caso da polarização horizontal, a condição de contorno de Dirichlet pode ser imposta diretamente fazendo $u_N^m = 0$, $\forall m$. Para o caso da polarização vertical, deve ser feita a aproximação unilateral para a derivada de segunda ordem em z .

De modo semelhante à Equação (7.225d), tem-se a Equação (7.230) para a fronteira superior.

$$u_{N-1}^m + \frac{\alpha_N^m}{2} u_N^m = c^m \left\{ u_{N-1}^{m-1} + \frac{\alpha_N'^m}{2} u_N^{m-1} \right\} \quad (7.230)$$

Finalmente, tem-se todas as equações necessárias e o sistema completo é mostrado na Equação (7.231).

$$\begin{cases}
 u_N^m = 0 & j = N \text{ e Dirichlet} \\
 u_{N-1}^m + \frac{\alpha_N^m}{2} u_N^m = c^m \left\{ u_{N-1}^{m-1} + \frac{\alpha_N^{m*}}{2} u_N^{m-1} \right\} & j = N \text{ e Neumann} \\
 u_{j+1}^m + u_{j-1}^m + u_j^m \alpha_j^m = c^m \left\{ u_{j+1}^{m-1} + u_{j-1}^{m-1} + u_j^{m-1} \alpha_j^{m*} \right\} & 1 \leq j \leq N-1 \\
 u_0^m = 0 & j = 0 \text{ e Dirichlet} \\
 u_1^m + \frac{\alpha_0^m}{2} u_0^m = c^m \left\{ u_1^{m-1} + \frac{\alpha_0^{m*}}{2} u_0^{m-1} \right\} & j = 0 \text{ e Neumann} \\
 u_1^m + \left(\frac{\alpha_0^m}{2} + \alpha_{BC}^m \Delta z \right) u_0^m = c^m \left\{ u_1^{m-1} + \left(\frac{\alpha_0^{m*}}{2} + \alpha_{BC}^{m-1} \Delta z \right) u_0^{m-1} \right\} & j = 0 \text{ e Cauchy}
 \end{cases} \quad (7.231)$$

É possível escrever o sistema da Equação (7.231) em formato matricial da maneira mostrada na Equação (7.197).

$$\mathbf{A}^m \mathbf{U}^m = \mathbf{B}^m \mathbf{U}^{m-1} \quad (7.232)$$

em que

$$\mathbf{U}^m = \begin{bmatrix} u_0^m \\ u_1^m \\ \vdots \\ u_j^m \\ \vdots \\ u_N^m \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}^{m-1} = \begin{bmatrix} u_0^{m-1} \\ u_1^{m-1} \\ \vdots \\ u_j^{m-1} \\ \vdots \\ u_N^{m-1} \end{bmatrix} \quad (7.233)$$

$$\mathbf{A}^m = \begin{bmatrix} A_0^m & 1 & 0 & \dots & & 0 \\ 1 & \alpha_1^m & 1 & 0 & & \\ 0 & 1 & \ddots & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 & \ddots & 1 & 0 \\ \vdots & & 0 & 0 & 1 & \alpha_j^m & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & \ddots & 1 \\ 0 & & \dots & & 0 & 0 & A_N^m \end{bmatrix} \quad (7.234)$$

$$\mathbf{B}^m = \begin{bmatrix} B_0^m & c^m & 0 & \cdots & 0 \\ c^m & c^m \alpha_1'^{m*} & c^m & 0 & \\ 0 & c^m & \ddots & c^m & 0 \\ 0 & 0 & c^m & \ddots & c^m & 0 \\ \vdots & & 0 & c^m & \ddots & c^m \alpha_j'^{m*} & c^m & 0 \\ & & & 0 & c^m & \ddots & c^m \\ 0 & & \cdots & 0 & 0 & B_N^m \end{bmatrix} \quad (7.235)$$

em que

$$A_0^m = \begin{cases} 1 & \text{Dirichlet} \\ \frac{\alpha_0'^m}{2} & \text{Neumann} \\ \frac{\alpha_0'^m}{2} + \alpha_{BC}^m \Delta z & \text{Cauchy} \end{cases} \quad (7.236)$$

$$A_N^m = \begin{cases} 1 & \text{Dirichlet} \\ \frac{\alpha_N'^m}{2} & \text{Neumann} \end{cases} \quad (7.237)$$

$$B_0^m = \begin{cases} 1 & \text{Dirichlet} \\ c^m \frac{\alpha_0'^{m*}}{2} & \text{Neumann} \\ c^m \left(\frac{\alpha_0'^{m*}}{2} + \alpha_{BC}^{m-1} \Delta z \right) & \text{Cauchy} \end{cases} \quad (7.238)$$

$$B_N^m = \begin{cases} 1 & \text{Dirichlet} \\ c^m \frac{\alpha_N'^m}{2} & \text{Neumann} \end{cases} \quad (7.239)$$

Assim, o perfil vertical de campo a cada posição x_m é dado pela Equação (7.240).

$$\mathbf{U}^m = \mathbf{A}^{m-1} \mathbf{B}^m \mathbf{U}^{m-1} \quad (7.240)$$

As matrizes \mathbf{A}^m e \mathbf{B}^m são tridiagonais e a inversão de \mathbf{A}^m pode ser feita por eliminação Gaussiana, dado que \mathbf{A}^m é não singular.

7.13.3 Resolução para ângulo estreito – Modo 2

Embora não cause instabilidades numéricas, a expansão de Taylor de primeira ordem de $\sqrt{1+Z}$ também pode ser vista como um esquema Padé-(1,1) e, em vez de expandir a raiz quadrada, pode-se expandir a exponencial da solução formal da equação parabólica da Equação (7.241).

$$u(x + \Delta x_m, z) = e^{jk_0 \Delta x_m (-1 + \sqrt{1+Z})} u(x, z) \quad (7.241)$$

A expansão da exponencial é feita como na Equação (7.242).

$$e^{jk_0 \Delta x_m (-1 + \sqrt{1+Z})} \cong \frac{P_2(Z)}{P_1(Z)} \quad (7.242)$$

Fazendo isso, a Equação (7.241) torna-se a Equação (7.243b).

$$u(x + \Delta x, z) = \frac{P_2(Z)}{P_1(Z)} u(x, z) \quad (7.243a)$$

$$P_1(Z) u(x + \Delta x, z) = P_2(Z) u(x, z) \quad (7.243b)$$

De posse da Equação (7.242b), basta discretizá-la em z , uma vez que já está discretizada em x .

O aproximador Padé-(1,1) para a exponencial que é equivalente à expansão de Taylor de primeira ordem é dado na Equação (7.244).

$$e^{jk_0 \Delta x_m (-1 + \sqrt{1+Z})} \cong \frac{1 + \frac{1}{4}(jk_0 \Delta x_m)Z}{1 - \frac{1}{4}(jk_0 \Delta x_m)Z} \quad (7.244)$$

Portanto, chega-se à Equação (7.245).

$$\left[1 - \frac{1}{4}(jk_0 \Delta x_m)Z\right] u(x + \Delta x_m, z) = \left[1 + \frac{1}{4}(jk_0 \Delta x_m)Z\right] u(x, z) \quad (7.245)$$

Substituindo Z na Equação (7.245) e considerando as condições de contorno apropriadas, chega-se ao mesmo resultado da aplicação do método de Crank-Nicolson.

7.14 Considerações Finais

Este capítulo apresentou detalhadamente toda a fundamentação teórica e matemática utilizada neste trabalho para a implementação do método de equações parabólicas. Primeiramente, foi apresentada e justificada a formulação padrão do método utilizando aproximação para-axial. Com isso, foi desenvolvida a equação parabólica padrão em coordenadas retangulares.

Em seguida, foram discutidos os métodos mais utilizados para a solução desse tipo de problema. Os métodos mais difundidos se baseiam em equações diferenciais e são os métodos do divisor de passos de Fourier, das diferenças finitas e elementos finitos. Salienta-se que o método escolhido para este trabalho é o das diferenças finitas.

Também foram desenvolvidas, em muitos detalhes, as equações para propagação troposférica sobre a superfície esférica da Terra e equações para propagação sobre uma Terra plana. A transformação de Terra esférica para Terra plana se dá por meio de mapeamento conformal no domínio complexo.

Na Seção 7.8, foram apresentados quatro métodos para modelagem de terreno irregular: representação por escada, terreno definido por partes lineares, mapeamento conformal e por diferenças finitas. Cada método tem vantagens e desvantagens e os mais utilizados na prática são os métodos de representação por escada e por diferenças finitas. Quando não é necessário considerar retroespalhamento, tais métodos fornecem precisão suficiente.

O truncamento do domínio na fronteira superior do problema também foi discutido e apresentadas três maneiras comuns para se fazer isso. Esse truncamento pode ser realizado com o uso de camadas absorvedoras, camadas perfeitamente casadas (PML) ou por condições de contorno não locais (NLBCs). A mais simples delas é utilizar camadas absorvedoras e fornece bons resultados. Por outro lado, esse método se torna computacionalmente intensivo quando grandes ângulos de propagação estão envolvidos.

Além disso, mostrou-se que a fronteira inferior ar/solo pode ser, muitas vezes, tratada como uma fronteira PEC, mas, caso seja necessário uma modelagem mais precisa, é possível utilizar as condições de contorno de Leontovich e simplificar bastante esse tratamento. Nesses casos, a impedância da superfície é modelada em função das características do solo permissividade e condutividade.

Outro tópico abordou a maneira de relacionar os resultados do método de equações parabólicas, ou seja, a componente de campo reduzida, com o conceito de perda de percurso e fator de propagação. Essas duas medidas são, em geral, as mais desejadas na análise de propagação em longas distâncias e é preciso obtê-las com o método de equações parabólicas.

Como o problema das equações parabólicas é um problema de valor inicial, foi necessário construir expressões para determinação do perfil inicial de campo. Sem esse dado, é impossível utilizar o método. Tal condição inicial pode ser obtida por meio do diagrama de campo distante da antena utilizada, uma vez que essas grandezas são relacionadas por transformadas de Fourier. Entretanto, é muito comum utilizar um diagrama de antena Gaussiano, pois ele consegue representar bem vários tipos de antenas reais.

Finalmente, desenvolveu-se várias equações para a solução da equação parabólica de ângulo estreito e ângulo amplo por meio de diferenças finitas e utilizando o esquema numérico de Crank-Nicolson. Com esse método implícito, o problema pode ser resolvido, a cada passo, pela solução de um sistema de equações com inversão de matrizes.

8 TESTES CANÔNICOS, COMPARAÇÕES E EXEMPLOS

8.1 Introdução

No Capítulo 6, foi destacado a importância de se fazer testes e comparações entre os resultados obtidos com modelos numéricos e resultados de referência, sejam analíticos ou dados reais. Embora já se saiba que o método das equações parabólicas é adequado para utilização em problemas de propagação a grandes distâncias (*long-range*) sem presença de retroespalhamento (1-way), este capítulo traz algumas comparações feitas entre os resultados desse método com alguns casos canônicos muito utilizados para VV&C.

Para a realização desses testes, o ambiente de propagação bidimensional é especificado em termos da distância e altura (ou altitude, conforme o caso) máxima do domínio e a frequência de operação e os parâmetros de discretização Δx e Δz são informados. Em alguns casos, também são informados parâmetros relativos à atmosfera e ao terreno local. Além disso, a fonte de radiação Gaussiana da Seção 7.12 é aplicada e computada de acordo seus parâmetros: altura da antena, largura de feixe e *tilt* vertical.

8.2 Guia de Onda Retangular Não Penetrável

O primeiro teste canônico é feito em um ambiente de guia de onda retangular não penetrável, ou seja, o campo eletromagnético no seu interior não propaga para o exterior e não há campo evanescente. Dessa maneira, suas fronteiras são consideradas como condutores perfeitos.

A propagação dentro de um guia de onda paralelo bidimensional com fronteiras impenetráveis é um problema canônico [111–114] e, também, clássico, pois pode ser explicado por meio de teoria de raios, modos e outras formas híbridas. Quando ondas harmônicas de alta frequência são transversalmente restringidas por fronteiras físicas impenetráveis ou por fronteiras “virtuais” estabelecidas pelo aprisionamento das ondas (dutos), o resultado é um guiamento longitudinal das ondas.

O caso mais geral lida com raios, modos e fórmulas de campo híbridas para o guia de onda bidimensional com condições de contorno de impedância gerais do tipo Cauchy. Nesse caso, os raios entre a fonte e um observador apresentam

deslocamentos laterais a cada reflexão quando interagem com as fronteiras. Quando as fronteiras são condutoras perfeitas, que é o caso, as condições de Dirichlet e Neumann são utilizadas e os deslocamentos laterais desaparecem, ou seja, os raios são refletidos pelas fronteiras como na lei de Snell para reflexão.

Para um guia de onda paralelo com fronteiras PEC, a componente de campo pode ser dada pela Equação (8.1).

$$u(x, z) = \sqrt{\frac{2}{a}} \begin{cases} \sum_{q=1}^{NM} K_q \sin\left(\frac{q\pi x}{a}\right) e^{j\beta_q z} & \text{pol. horizontal} \\ \frac{1}{2} K_1 e^{j\beta_1 x} + \sum_{q=2}^{NM} K_q \cos\left[\frac{(q-1)\pi x}{a}\right] e^{j\beta_q x} & \text{pol. vertical} \end{cases} \quad (8.1)$$

em que a é a espessura do guia, NM é o número de modos utilizado no cálculo, β_q é a constante de propagação longitudinal para o modo q e K_q é o coeficiente de excitação modal, calculado numericamente a partir da função da fonte Gaussiana.

A fonte Gaussiana é expressa como na Equação (8.2) e β_q e K_q são dados nas Equações (8.3) e (8.4).

$$G(z) = \frac{1}{w\pi\sqrt{2}} \begin{cases} e^{-\frac{(z-z_F)^2}{w^2}} e^{-jk_0 z \sin\theta_{ilt}} - e^{-\frac{(-z-z_F)^2}{w^2}} e^{jk_0 z \sin\theta_{ilt}} & \text{(Dirichlet)} \\ e^{-\frac{(z-z_F)^2}{w^2}} e^{-jk_0 z \sin\theta_{ilt}} + e^{-\frac{(-z-z_F)^2}{w^2}} e^{jk_0 z \sin\theta_{ilt}} & \text{(Neumann)} \end{cases} \quad (8.2)$$

em que $w = \frac{\sqrt{2\ln 2}}{k_0 \sin\left(\frac{\theta_{BW}}{2}\right)}$, θ_{BW} é o ângulo de meia potência da fonte, θ_{ilt} é a inclinação

de feixe da fonte e z_F é altura da fonte.

$$\beta_q = \begin{cases} \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{q\pi}{a}\right)^2} & \text{pol. horizontal} \\ \sqrt{k_0^2 - \left[\frac{(q-1)\pi}{a}\right]^2} & \text{pol. vertical} \end{cases} \quad (8.3)$$

$$K_q = \sqrt{\frac{2}{a}} \begin{cases} \int_0^a G(z) \sin\left(\frac{q\pi z}{a}\right) dz & \text{pol. horizontal} \\ \int_0^a G(z) \cos\left[\frac{(q-1)\pi z}{a}\right] dz & \text{pol. vertical} \end{cases} \quad (8.4)$$

Dois tipos de testes foram feitos utilizando polarização horizontal e vertical para o guia de onda retangular não penetrável. Nesses testes, o guia de onda é excitado por uma fonte Gaussiana e é plotado o campo elétrico/magnético normalizado. Os resultados foram obtidos por três métodos: analítico por somatória de modos, equação parabólica de ângulo amplo (WAPE) e equação parabólica de ângulo estreito (NAPE).

8.2.1 Caso 1 – guia de onda pequeno

A Tabela 7 é um quadro resumo das características do primeiro caso.

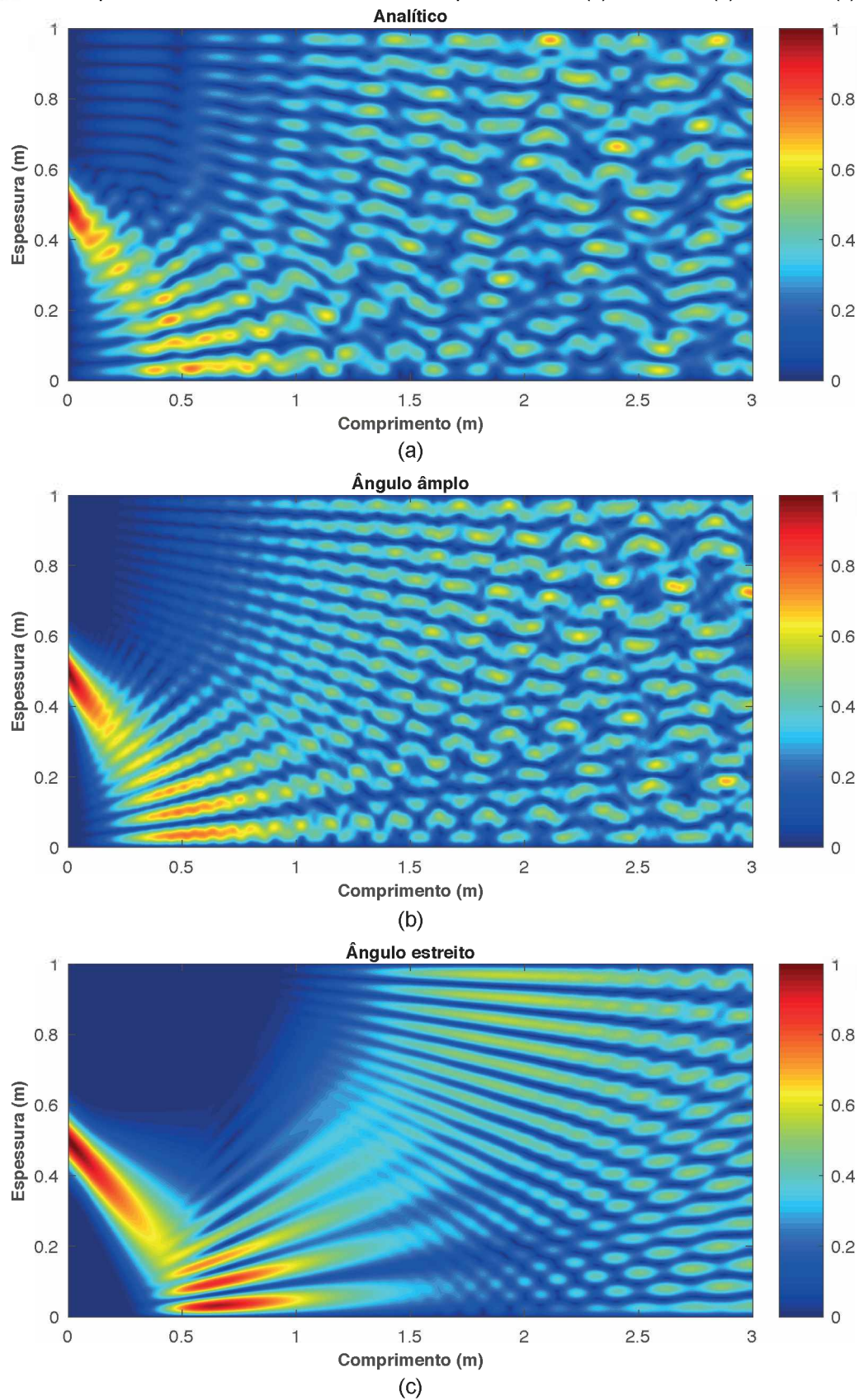
Tabela 7 – Dados do caso de teste 1.

Comprimento	3 m
Espessura	1 m
z_F	0,5 m
θ_{BW}	30°
θ_{tilt}	45°
Frequência	3 GHz
Δx	0,0001 m
Δz	0,000125 m
Num. modos	90
Pol.	H

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 81 mostra uma comparação entre o campo elétrico normalizado calculado pelos três métodos diferentes. É possível notar alguma semelhança entre os resultados da equação parabólica de ângulo amplo e o analítico. Já a equação parabólica de ângulo estreito produziu resultados com maior erro em relação ao analítico. Para melhor visualização, a imagem foi colocada, propositalmente, na próxima página.

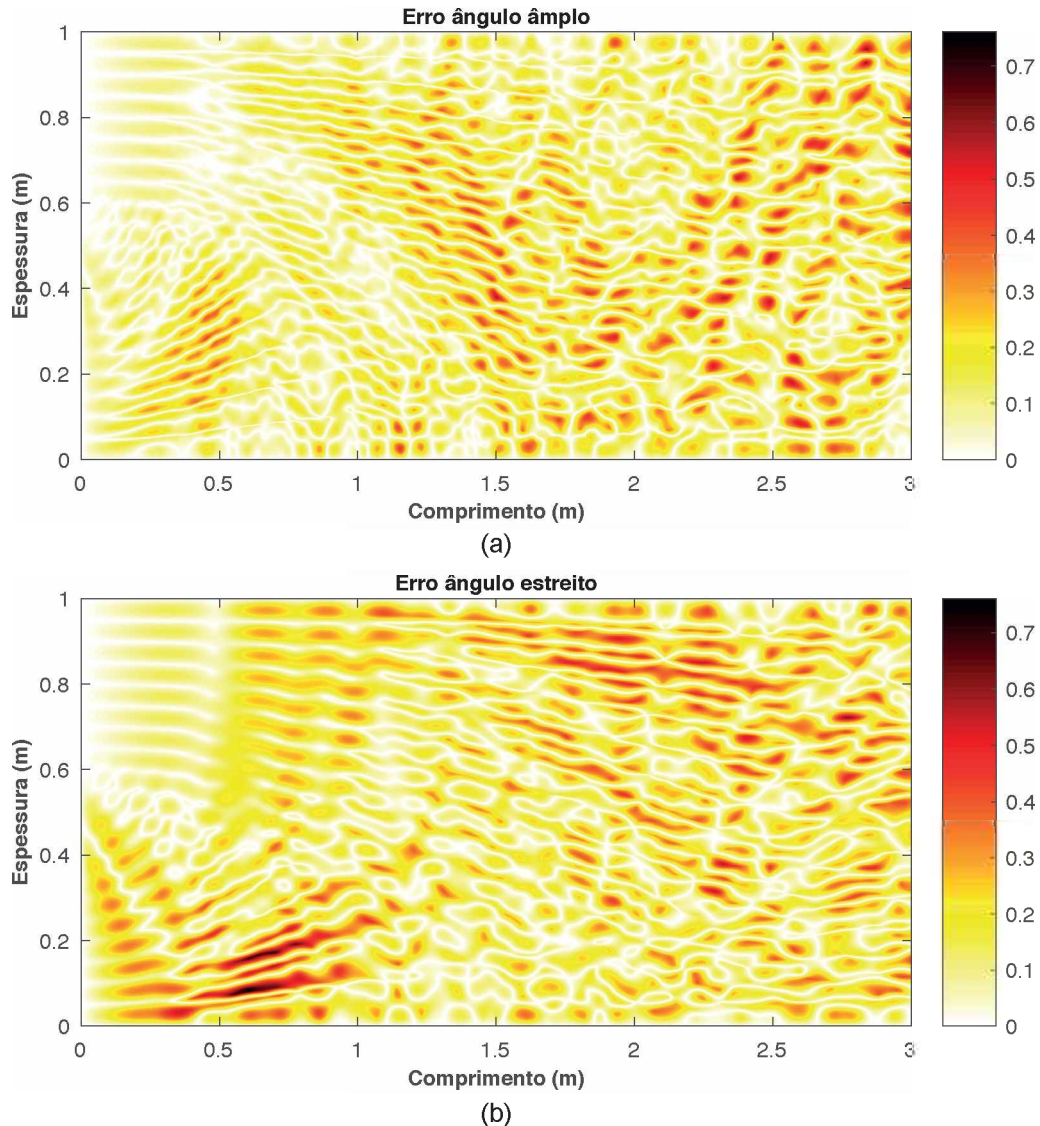
Figura 81 – Campo normalizado do caso 1 calculado pelo método (a) analítico, (b) WAPE e (c) NAPE.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para melhor visualização das diferenças entre os métodos de equação parabólica e o método analítico, a Figura 82 mostra uma visualização espacial dos erros relativos dos métodos de equação parabólica.

Figura 82 – Erro para o caso 1 cometido pelo método (a) WAPE e (b) NAPE.



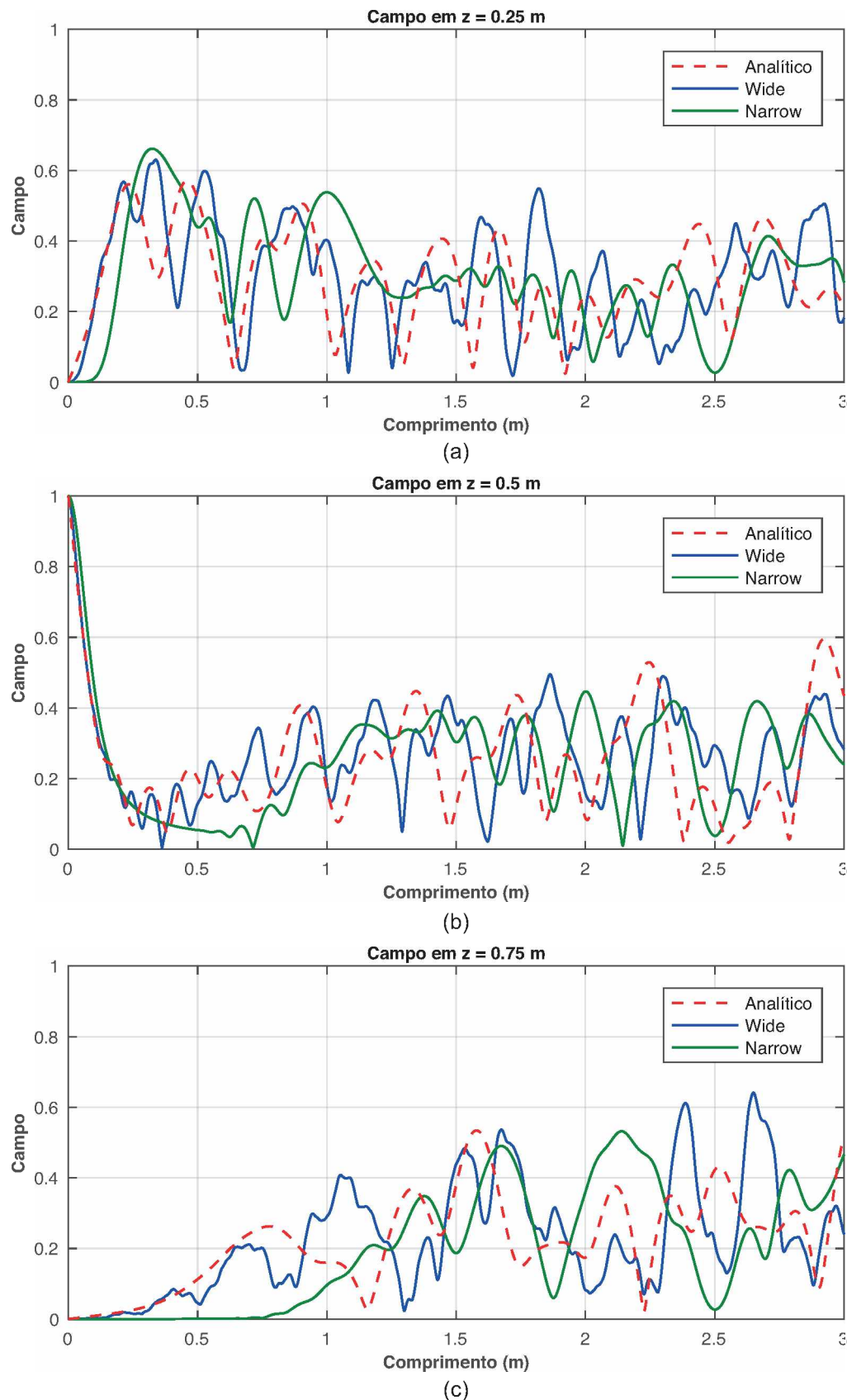
Fonte: Elaborada pelo autor.

Como visto no Capítulo 7, o método de equações parabólicas procede de uma aproximação para-axial e sua acurácia é razoável apenas para pequenos ângulos de propagação. No caso desse guia de onda com comprimento 3 m e largura 1 m, grandes ângulos de propagação estão envolvidos. Portanto, as distribuições iniciais de campo têm grande erro, que propaga.

O método NAPE fugiu bastante do resultado analítico. Entretanto, o método WAPE, que acomoda ângulos de propagação maiores, se aproximou do resultado analítico e pode ser utilizado para se ter ideia da propagação no cenário do caso 1.

A Figura 83 traz o campo normalizado para algumas posições específicas.

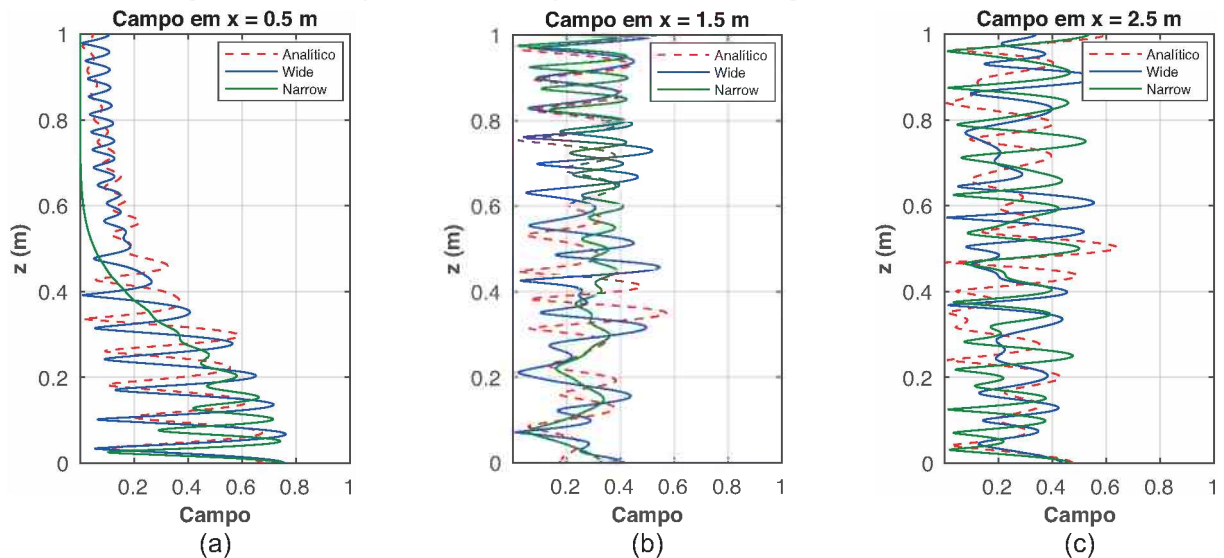
Figura 83 – Campo normalizado para o caso 1 em algumas alturas fixas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Já a Figura 84 traz a comparação do campo normalizado nas distâncias fixas de 0,5; 1,5 e 2,5 metros.

Figura 84 – Campo normalizado para o caso 1 em algumas distâncias fixas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Como esse guia de onda tem uma geometria dada por comprimento de 3 m e espessura de 1 m e ha uma inclinação de feixe de 30° , grandes ângulos de propagação estão envolvidos nas primeiras verticais em que o campo é calculado. É possível notar que o erro causado por esses grandes ângulos de propagação nas primeiras verticais propaga ou se acumula (pois a solução é iterativa). Com isso, em distâncias maiores como 2,5 m, o erro cometido é maior do que em distâncias menores como 0,5 m.

Para melhor visualização, o próximo caso foi colocado na próxima página.

8.2.2 Caso 2 – guia de onda comprido

A Tabela 8 traz o quadro resumo das características do segundo caso.

Tabela 8 – Dados do caso de teste 2.

Comprimento	40 m
Espessura	8 m
z_F	4 m
θ_{BW}	7°
θ_{tilt}	30°
Frequência	1 GHz
Δx	0,001 m
Δz	0,0001 m
Num. modos	90
Pol.	V

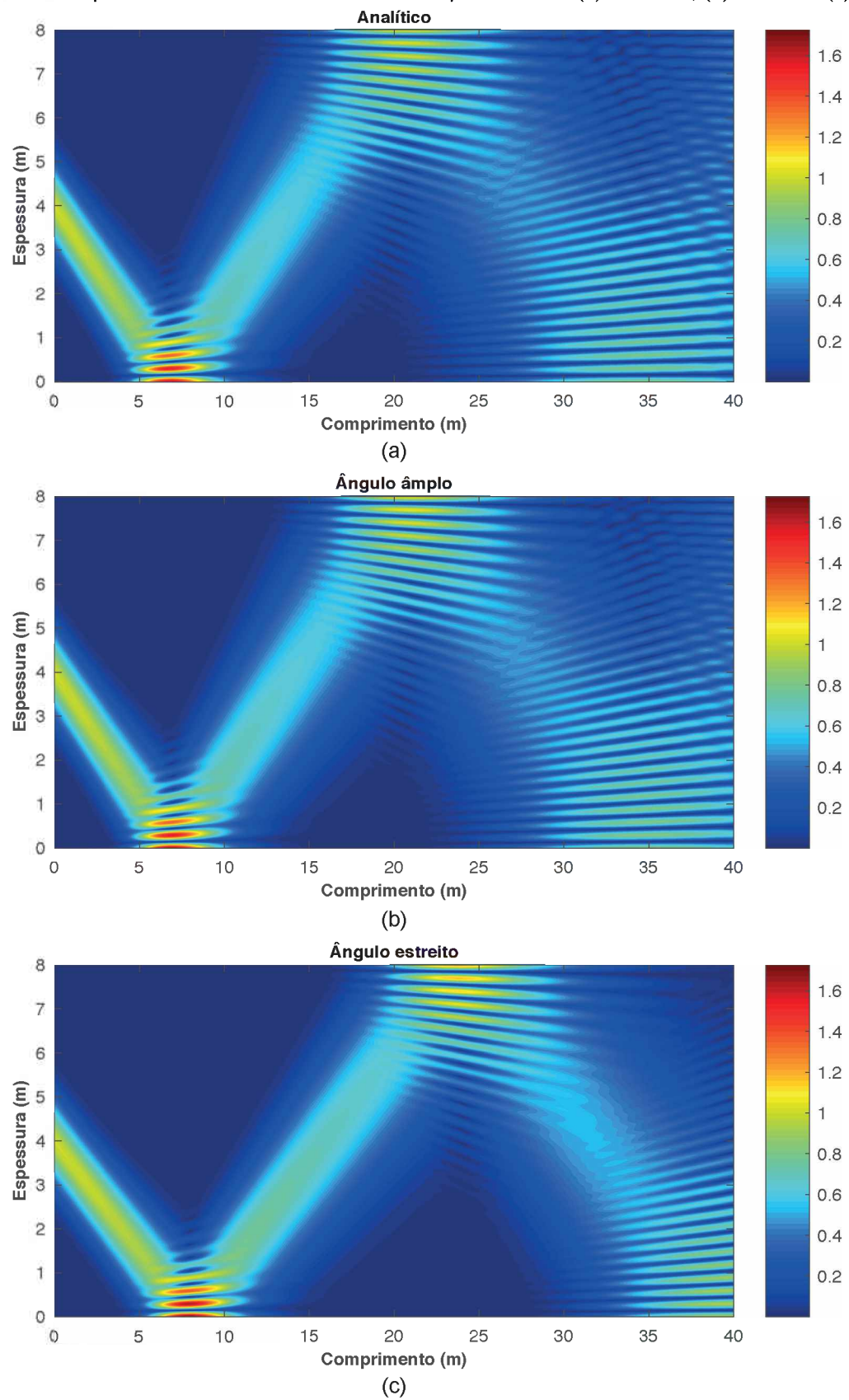
Fonte: Elaborada pelo autor.

Passando para o segundo caso de teste, detalhado na Tabela 8, a Figura 85 mostra a comparação entre os resultados analítico, WAPE e NAPE para esse outro guia de onda. Nesse caso, a polarização é vertical e, portanto, o campo normalizado mostrado nos resultados é o campo magnético e não elétrico. Deve-se reparar no comportamento desse campo na fronteira PEC, que é diferente do comportamento do campo elétrico.

Para esse guia de onda de 40 m de extensão e 8 m de largura, os ângulos de propagação envolvidos são bem menores do que os ângulos do primeiro caso. Por isso, os resultados das equações parabólicas são bem mais próximos do analítico, mesmo os resultados do método NAPE.

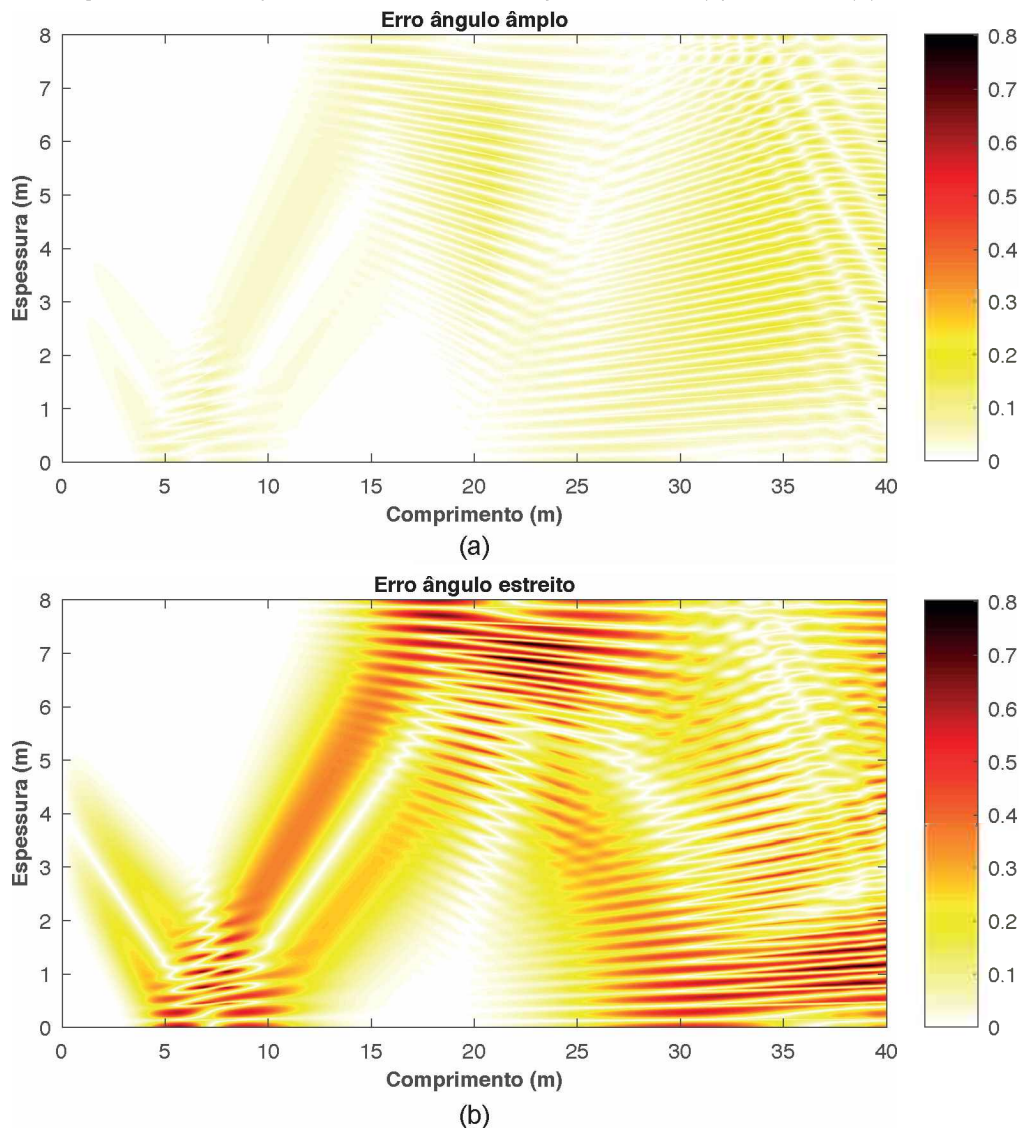
Como mostra a Figura 86, o erro relativo cometido pela WAPE é muito pequeno e esse resultado representa, fielmente, o resultado analítico. O erro da NAPE é mais expressivo e se apresenta em vários pontos do domínio. Também é importante notar, na Figura 85, que o ponto de reflexão na fronteira superior sofreu um certo erro para o método NAPE.

Figura 85 – Campo normalizado do caso 2 calculado pelo método (a) analítico, (b) WAPE e (c) NAPE.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 86 – Erro para o caso 2 cometido pelo método (a) WAPE e (b) NAPE.

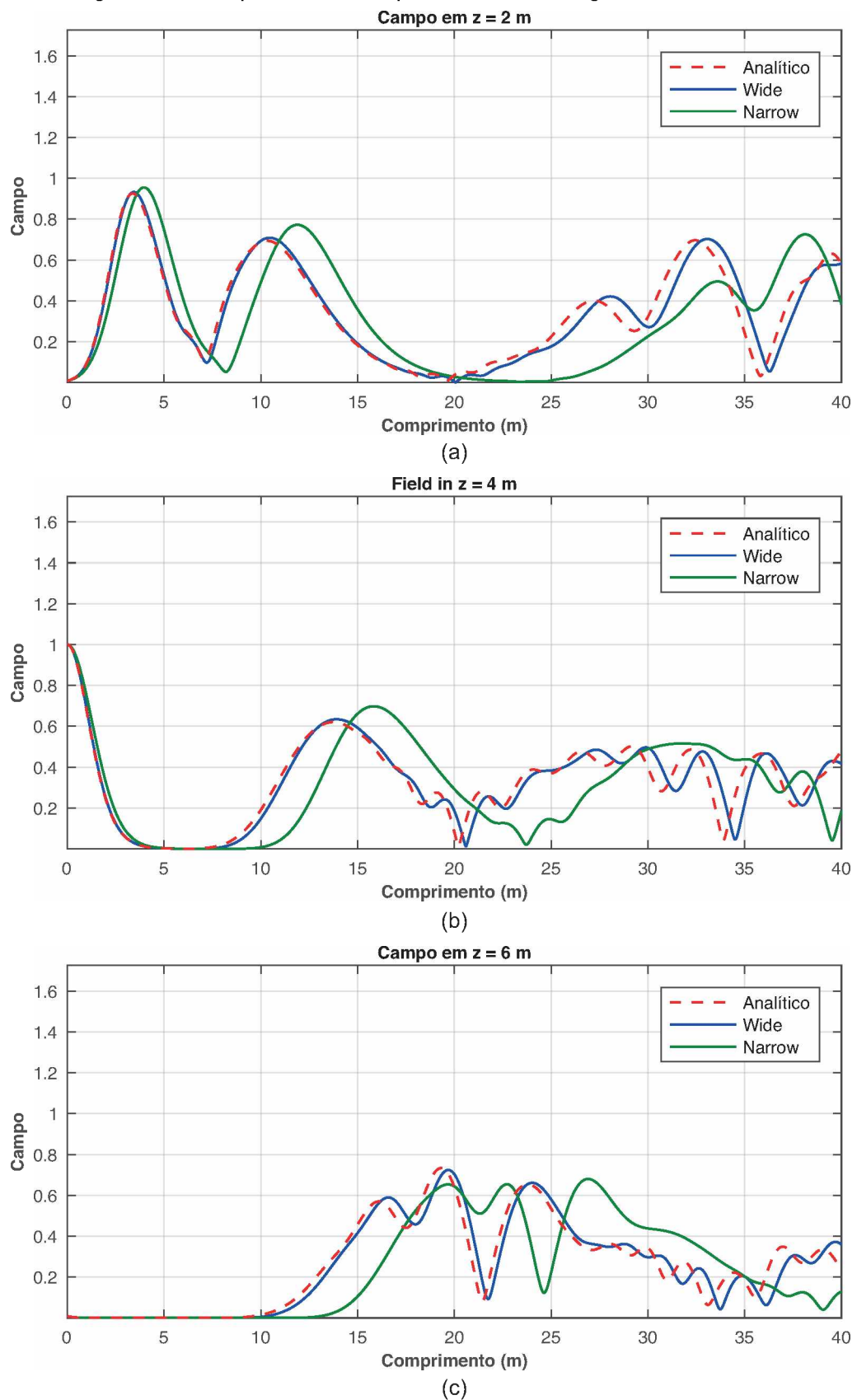


Fonte: Elaborada pelo autor.

As Figuras 87 e 88 trazem os valores de campo normalizado calculados pelos 3 métodos nas alturas fixas de 2, 4 e 6 m e para as distâncias fixas de 10, 20 e 30 m, respectivamente. Nessas imagens, é fácil notar que a WAPE se aproxima muito do resultado analítico e que até a NAPE se aproximou mais do resultado analítico.

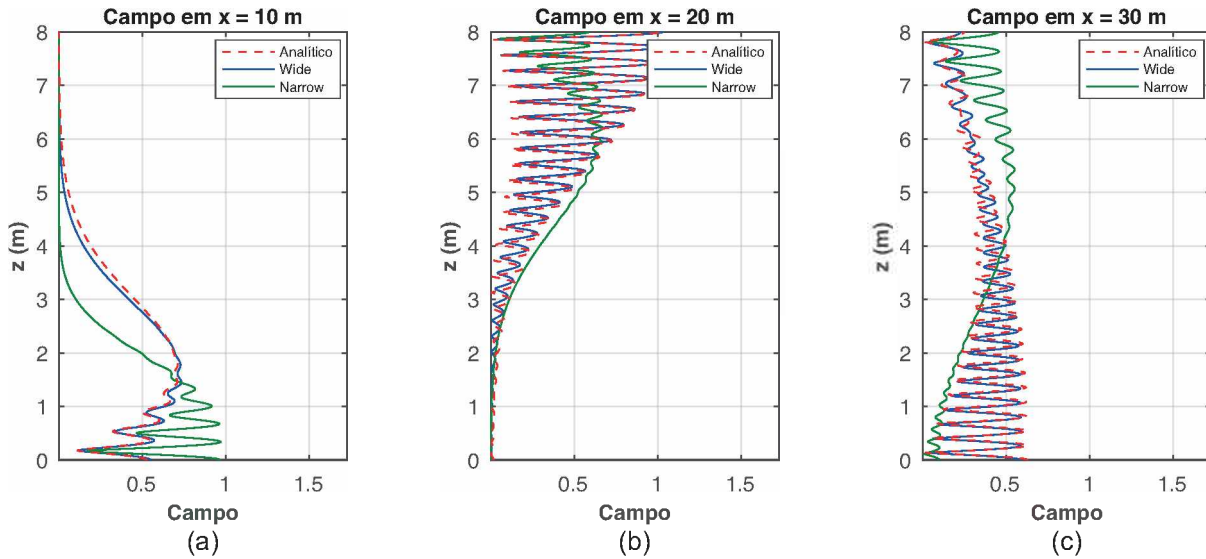
Fica evidente, comparando o caso 2 com o caso 1, ou seja, guia de onda comprido vs. guia de onda pequeno que, para maiores distâncias de propagação e menores ângulos de propagação, o resultado da equação parabólica se torna mais preciso. Isso ocorre devido à aproximação para-axial do operador pseudodiferencial e foi discutido no capítulo específico.

Figura 87 – Campo normalizado para o caso 2 em algumas alturas fixas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 88 – Campo normalizado para o caso 2 em algumas distâncias fixas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

8.3 Atmosfera com Refratividade Linear Decrescente

A atmosfera da Terra é formada por uma variedade de gases juntamente com partículas suspensas de líquidos e sólidos e é variável com a distância e altitude. Por isso, as ondas de rádio são diretamente afetadas pelas variações atmosféricas, que devem ser cuidadosamente consideradas nos modelos de propagação.

Normalmente, esses efeitos são modelados em termos do índice de refração ou da refratividade atmosférica. Se o índice de refração fosse constante, as ondas propagariam em linhas retas para o infinito. Entretanto, como, em uma atmosfera padrão, o índice de refração diminui com a altitude, as ondas de rádio são redirecionadas para a Terra e o horizonte de rádio se torna maior do que o horizonte ótico. No caso de uma atmosfera com índice de refração crescente, o efeito seria de um redirecionamento das ondas para longe da superfície da Terra.

A propagação sobre Terra plana perfeitamente condutora em uma atmosfera com refratividade linearmente decrescente é uma estrutura canônica para gerar soluções de referência [115,116]. Em um ambiente não homogêneo como esse, a função escalar $u(x, z)$ satisfaz a equação escalar bidimensional da onda da Equação (8.5), em que o índice de refração é dado pela Equação (8.6).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k_0^2 n^2(z) u = 0 \quad (8.5)$$

$$n(z) = n_0 + \frac{\partial n}{\partial z} z \quad (8.6)$$

A solução $u(x, z)$ é sujeita às condições de contorno para uma Terra PEC (Dirichlet ou Neumann) e à condição de radiação. Desse modo, esse problema possui soluções analíticas exatas em termos de funções de Airy quando o índice de refração é independente da distância x .

Em condições de campos harmônicos no tempo, a solução modal para esse problema é dada pela Equação (8.7)

$$u(x, z) = \sum_{q=0}^{\infty} C_{0q} \psi_q(z) e^{j\beta_q x} \quad (8.7)$$

em que β_q é a constante de propagação longitudinal para o modo q .

A nova função $\psi_q(z)$ satisfaz a equação da onda escalar unidimensional no domínio transversal de acordo com a Equação (8.8).

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_0^2 n^2(z) - \beta_q^2 \right] \psi_q(z) = 0 \quad (8.8)$$

Rigorosamente, como o índice de refração é do tipo da Equação (8.6), então o seu valor quadrático deveria ser do tipo da Equação (8.9).

$$n^2(z) = n_0^2 + 2 \frac{\partial n}{\partial z} z + \left(\frac{\partial n}{\partial z} \right)^2 z^2 \quad (8.9)$$

Entretanto, $\frac{\partial n}{\partial z}$ costuma ser muito pequeno e, por isso, o último termo da Equação (8.9) pode ser desprezado. Além disso, por simplicidade, pode-se considerar $n_0 = 1$, pois o interesse está apenas nos efeitos de $\frac{\partial n}{\partial z}$. Portanto, tem-se a Equação (8.10).

$$n^2(z) \cong 1 + 2 \frac{\partial n}{\partial z} z = 1 - a_0 z \quad (8.10)$$

Agora, pode-se fazer as substituições das Equações (8.11a) e (8.11b).

$$k_0^2 n^2(z) - \beta_q^2 = K_1 z + K_2 \quad (8.11a)$$

$$\rho = -K_1^{-2/3} (K_1 z + K_2) \quad (8.11b)$$

Portanto, a Equação (8.8) passa a ser a Equação (8.12), que é uma equação de Airy [115,116].

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} - \rho \right) \psi_q(\rho) = 0 \quad (8.12)$$

A solução da Equação (8.12) é construída em termos de modos, que são representados pela função de Airy do primeiro tipo $\text{Ai}(\rho)$, como na Equação (8.13).

$$\psi_q(\rho) = C_{0q} \text{Ai}(\rho) \quad (8.13)$$

em que $\psi_q(\rho) = C_{0q} \text{Ai}(\rho)$ é uma constante de normalização definida pela Equação (8.14).

$$C_{0q} = \frac{1}{\sqrt{\int_0^\infty \text{Ai}^2(\rho) d\rho}} \quad (8.14)$$

Na fronteira inferior, a condição de contorno de Cauchy passa a ser definida como na Equação (8.15).

$$\text{Ai}'(-\sigma_q) + \alpha \text{Ai}(-\sigma_q) = 0 \quad (8.15)$$

Para o caso da Terra perfeitamente condutora, as condições de Dirichlet e Neumann são as da Equação (8.16).

$$\begin{cases} \text{Ai}(-\sigma_q) = 0 & \text{Dirichlet (pol. horizontal)} \\ \text{Ai}'(-\sigma_q) = 0 & \text{Neumann (pol. vertical)} \end{cases} \quad (8.16)$$

A constante de propagação longitudinal passa a ser dada pela Equação (8.17) e os modos são confinados entre a superfície e suas cáusticas de acordo com a Equação (8.18).

$$\beta_q = \pm \sqrt{k_0^2 - \sigma_q (a_0 k_0^2)^{2/3}} \quad (8.17)$$

$$Z_{cq} = -\sigma_q (a_0 k_0^2)^{-1/3} \quad (8.18)$$

Finalmente, a solução modal exata para a equação da onda de Airy é dada pela Equação (8.19).

$$u(x, z) = \sum_{q=1}^{NM} C_{0q} \text{Ai} \left[(a_0 k_0^2)^{1/3} z - \sigma_q \right] e^{j\beta_q x} \quad (8.19)$$

em que NM é o número de modos utilizado no cálculo, β_q é a constante de propagação longitudinal para o modo q e C_{0q} é a constante de normalização para o modo q .

Para considerar a fonte Gaussiana, deve ser utilizado um coeficiente de excitação modal que depende da função Gaussiana. Desse modo, deve-se utilizar a Equação (8.20) no lugar da Equação (8.19).

$$u(x, z) = \sum_{q=1}^{NM} C_{0q} E_q \text{Ai} \left[(a_0 k_0^2)^{1/3} z - \sigma_q \right] e^{j\beta_q x} \quad (8.20)$$

em que o coeficiente de excitação E_q é dado pela Equação (8.21).

$$E_q = \int_0^\infty G(z) C_{0q} \text{Ai} \left[(a_0 k_0^2)^{1/3} z - \sigma_q \right] dz \quad (8.21)$$

e a fonte Gaussiana é a da Equação (8.22).

$$G(z) = \frac{1}{w\pi\sqrt{2}} \begin{cases} e^{-\frac{(z-z_F)^2}{w^2}} e^{-jk_0 z \sin \theta_{\text{tilt}}} - e^{-\frac{(-z-z_F)^2}{w^2}} e^{jk_0 z \sin \theta_{\text{tilt}}} & \text{(Dirichlet)} \\ e^{-\frac{(z-z_F)^2}{w^2}} e^{-jk_0 z \sin \theta_{\text{tilt}}} + e^{-\frac{(-z-z_F)^2}{w^2}} e^{jk_0 z \sin \theta_{\text{tilt}}} & \text{(Neumann)} \end{cases} \quad (8.22)$$

Nesse ponto, é desejável fazer um programa de computador que calcule as soluções analíticas para fazer a comparação com os resultados das equações parabólicas. É importante observar que este programa precisa conhecer raízes da função de Airy de primeiro tipo e raízes da derivada da função de Airy de primeiro tipo. Essas raízes são expressas pela variável σ_q que aparece nas equações anteriores e definida na Equação (8.16).

Portanto, é necessário algum artifício para o conhecimento desses valores necessários. Neste trabalho, foi utilizado o seguinte artifício: para os 150 primeiros modos, ou 150 primeiras raízes reais, foi construída uma tabela dos valores de σ_q com precisão de 50 dígitos. É necessário ter alta precisão nos modos de menor ordem, pois sua contribuição é muito grande na construção da solução. Para os modos a partir de 150, foi utilizada uma expansão assintótica de nona ordem para calcular os valores de σ_q de acordo com [117].

As raízes da função de Airy de primeiro tipo podem ser calculadas pela Equação (8.23).

$$\sigma_q = -T \left[\frac{3\pi}{8} (4q - 1) \right] \quad (8.23)$$

em que o operador T é dado pela Equação (8.24).

$$T(t) \approx t^{2/3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{T_j}{t^{2j}} \quad (8.24)$$

e os coeficientes T_j são números racionais. A Tabela 9 traz os nove primeiros coeficientes T_j .

Tabela 9 – Coeficientes para a Equação (8.24).

T_0	1	T_5	$\frac{162375596875}{334430208}$
T_1	$-\frac{5}{48}$	T_6	$-\frac{1622671914671875}{66217181184}$
T_2	$-\frac{5}{36}$	T_7	$\frac{150126478779573265625}{82639042117632}$
T_3	$\frac{77125}{82944}$	T_8	$-\frac{644932726927939889453125}{3470839768940544}$
T_4	$-\frac{108056875}{6967296}$	T_9	$\frac{13042116997445589075044921875}{520200964553048064}$

Fonte: *On the Reversion of an Asymptotic Expansion and the Zeros of the Airy Functions* [117].

Para encontrar as raízes da derivada da função de Airy de primeiro tipo, utiliza-se a Equação (8.25).

$$\sigma_q = -U \left[\frac{3\pi}{8} (4q - 3) \right] \quad (8.25)$$

em que o operador U é dado pela Equação (8.26).

$$U(t) \approx t^{2/3} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{U_j}{t^{2j}} \quad (8.26)$$

e os coeficientes U_j são números racionais. A Tabela 10 traz os nove primeiros coeficientes U_j .

Tabela 10 – Coeficientes para a Equação (8.27).

U_0	1	U_5	$-\frac{91145884361}{191102976}$
U_1	$-\frac{7}{48}$	U_6	$\frac{91725210265629647}{3783838924800}$
U_2	$\frac{35}{288}$	U_7	$-\frac{8517284704344771067699}{4722230978150400}$
U_3	$-\frac{181223}{207360}$	U_8	$\frac{130949163695424727759631}{708334646722560}$
U_4	$\frac{18683371}{1244160}$	U_9	$-\frac{207878641847010708789807726484553}{8323215432848769024000}$

Fonte: *On the Reversion of an Asymptotic Expansion and the Zeros of the Airy Functions* [117].

Definida a solução modal exata, alguns cenários foram utilizados para os testes na atmosfera com refratividade linear decrescente. Eles são detalhados a seguir pelos casos 3, 4, 5 e 6.

8.3.1 Caso 3 – Atmosfera linear decrescente sem inclinação de feixe

Tabela 11 – Dados do caso de teste 3.

Distância máx.	100 km
Altitude máx.	750 m
z_F	250 m
θ_{BW}	0,5°
θ_{tilt}	0°
Frequência	300 MHz
Δx	0,09 m
Δz	10 m
Num. modos	300
$\frac{\partial n}{\partial z}$	$-0,6 \cdot 10^{-6} \text{ 1/m}$
Pol.	V

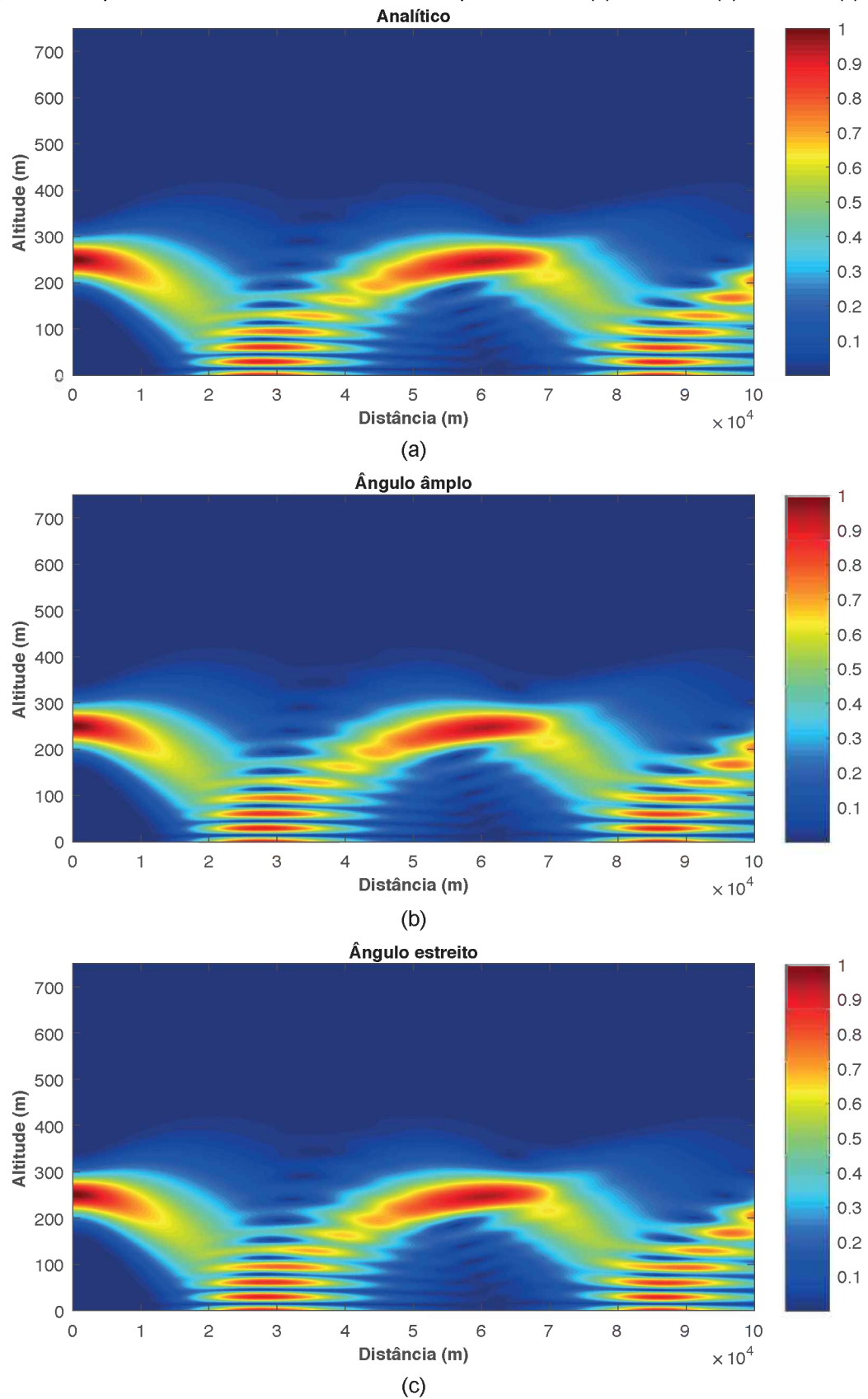
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesse caso, uma fonte Gaussiana com polarização vertical é colocada sobre uma Terra plana PEC e o campo é calculado em uma região de 100 km de extensão e 750 m de altitude. Essa fonte não possui inclinação de feixe e sua largura de feixe é de 0,5°.

A Figura 89 traz a comparação dos resultados de campo normalizado para os três métodos. Nela, é nítida a condição de super refração que ocorre devido ao forte gradiente de índice de refração, então os raios são todos redirecionados para a superfície da Terra e a energia é aprisionada em uma camada baixa.

A Figura 89 também mostra que os resultados analítico, WAPE e NAPE são praticamente idênticos e a equação parabólica representa fielmente o resultado da análise modal. Isso ocorre, pois a distância envolvida é muito grande (100 km). Desse modo, os ângulos de propagação são pequenos e a acurácia do método PE é grande. Esse é um caso típico de aplicação correta desse método, que é ideal para aplicações *long-range*.

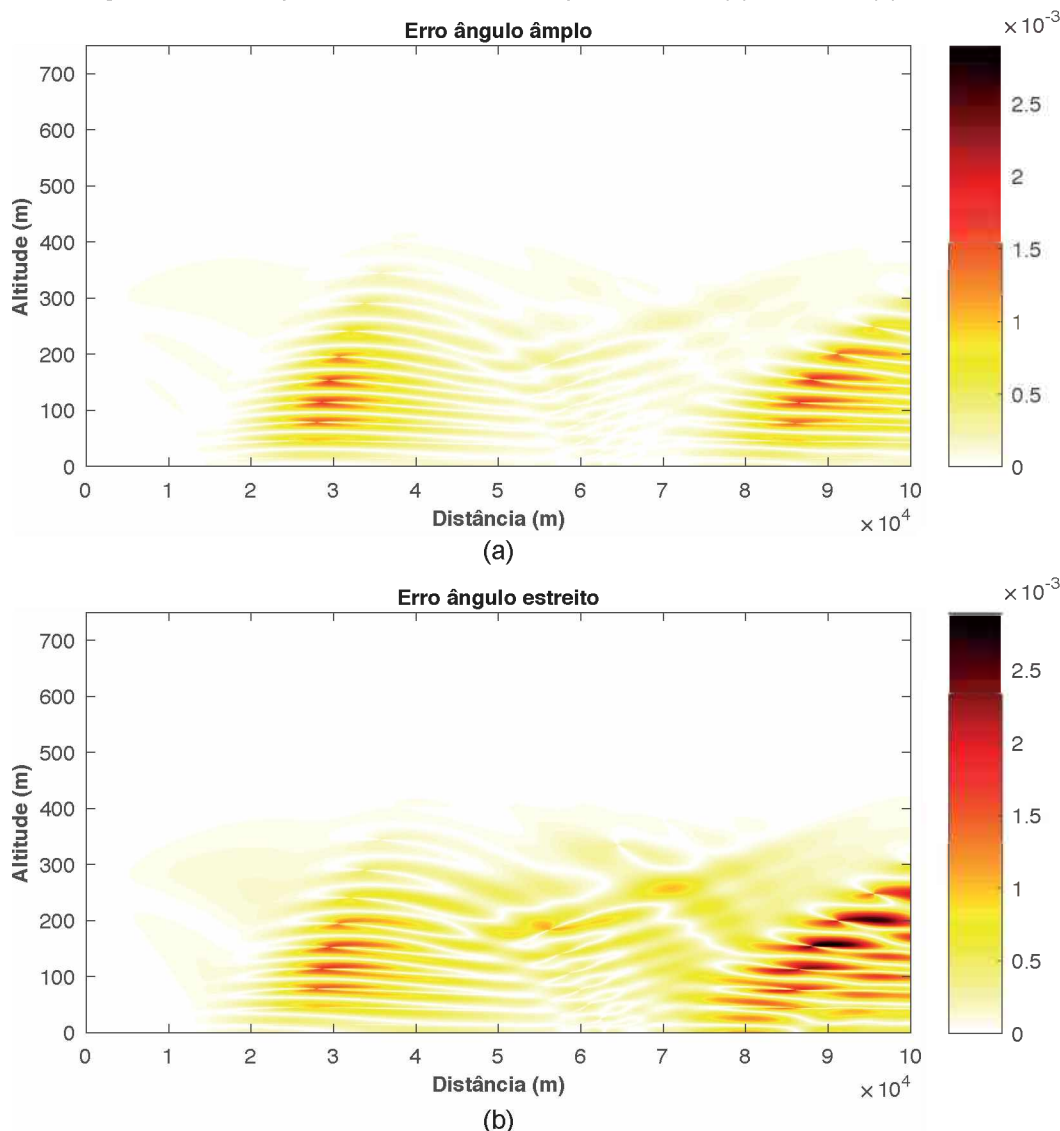
Figura 89 – Campo normalizado do caso 3 calculado pelo método (a) analítico, (b) WAPE e (c) NAPE.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 90, ilustra o erro relativo entre os resultados WAPE e NAPE em relação ao resultado analítico. Nessa imagem, a fidelidade dos métodos WAPE e NAPE fica mais evidente ainda, pois é possível ver que o erro relativo dos métodos é da ordem de 10^{-3} , sendo o erro absoluto bem menor.

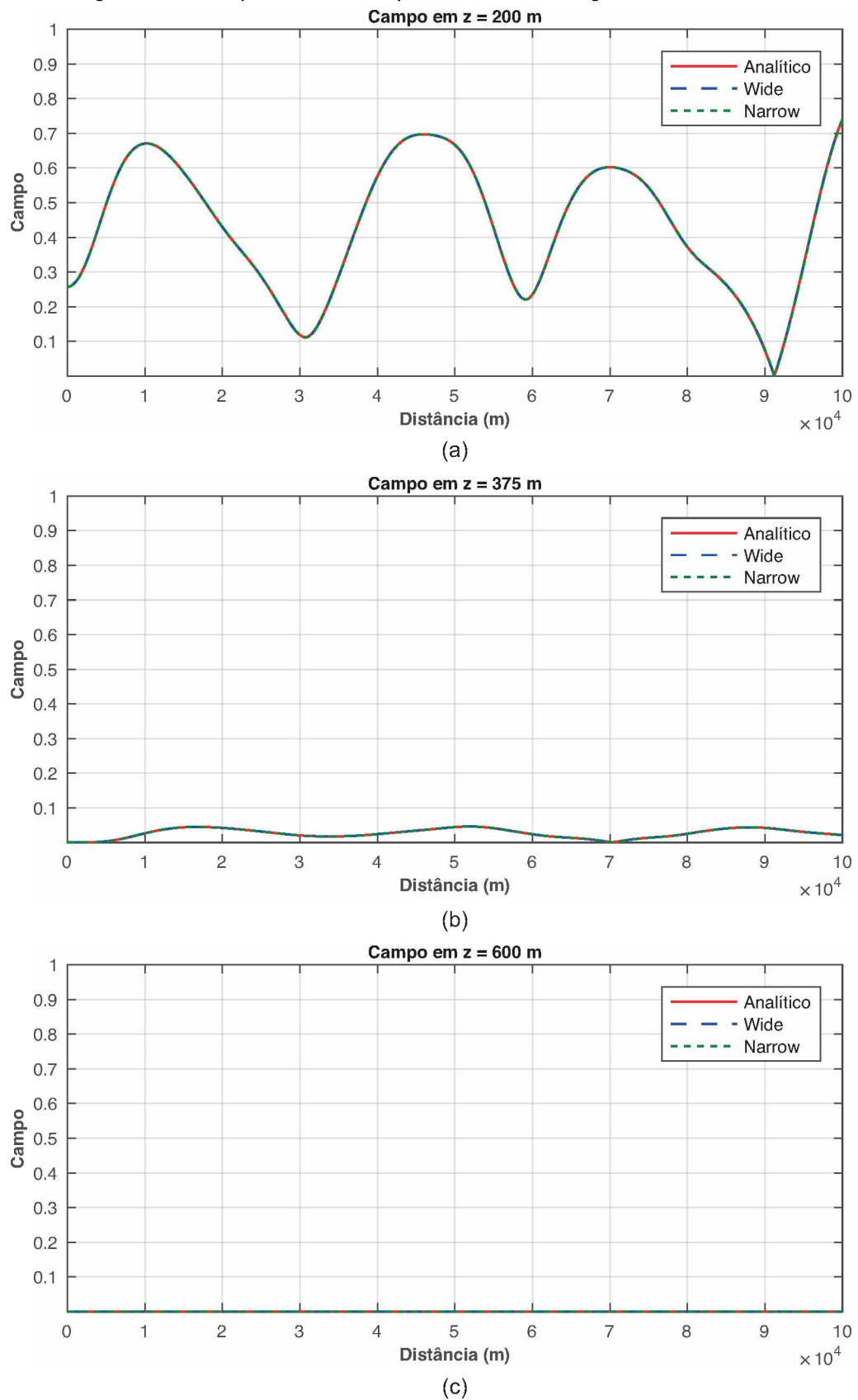
Figura 90 – Erro para o caso 3 cometido pelo método (a) WAPE e (b) NAPE.



Fonte: Elaborada pelo autor.

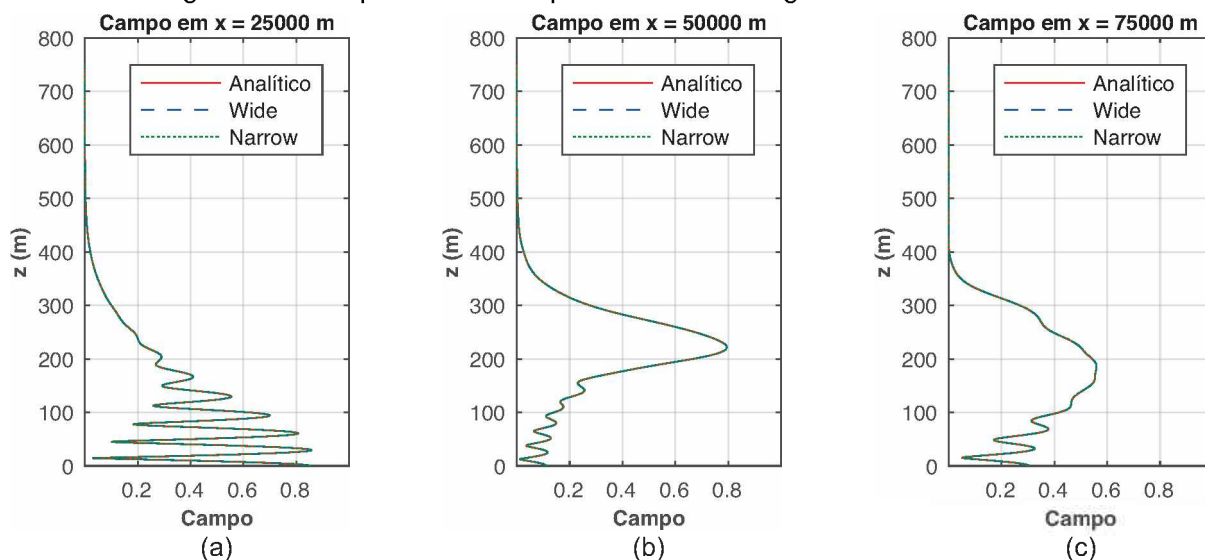
A seguir, a Figura 91 traz a comparação dos resultados para algumas posições de altitude fixas: 200, 375 e 600 m e a Figura 92 traz essa comparação para posições de distância fixas em 25, 50 e 75 km.

Figura 91 – Campo normalizado para o caso 3 em algumas alturas fixas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 92 – Campo normalizado para o caso 3 em algumas distâncias fixas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Observando as Figuras 91 e 92, fica muito evidente a capacidade do método PE (WAPE ou NAPE) para lidar com ambientes de propagação grandes. Os resultados foram praticamente idênticos ao resultado analítico, podendo ser utilizado o método de ângulo amplo ou o método de ângulo estreito.

8.3.2 Caso 4 – atmosfera linear decrescente com inclinação de feixe

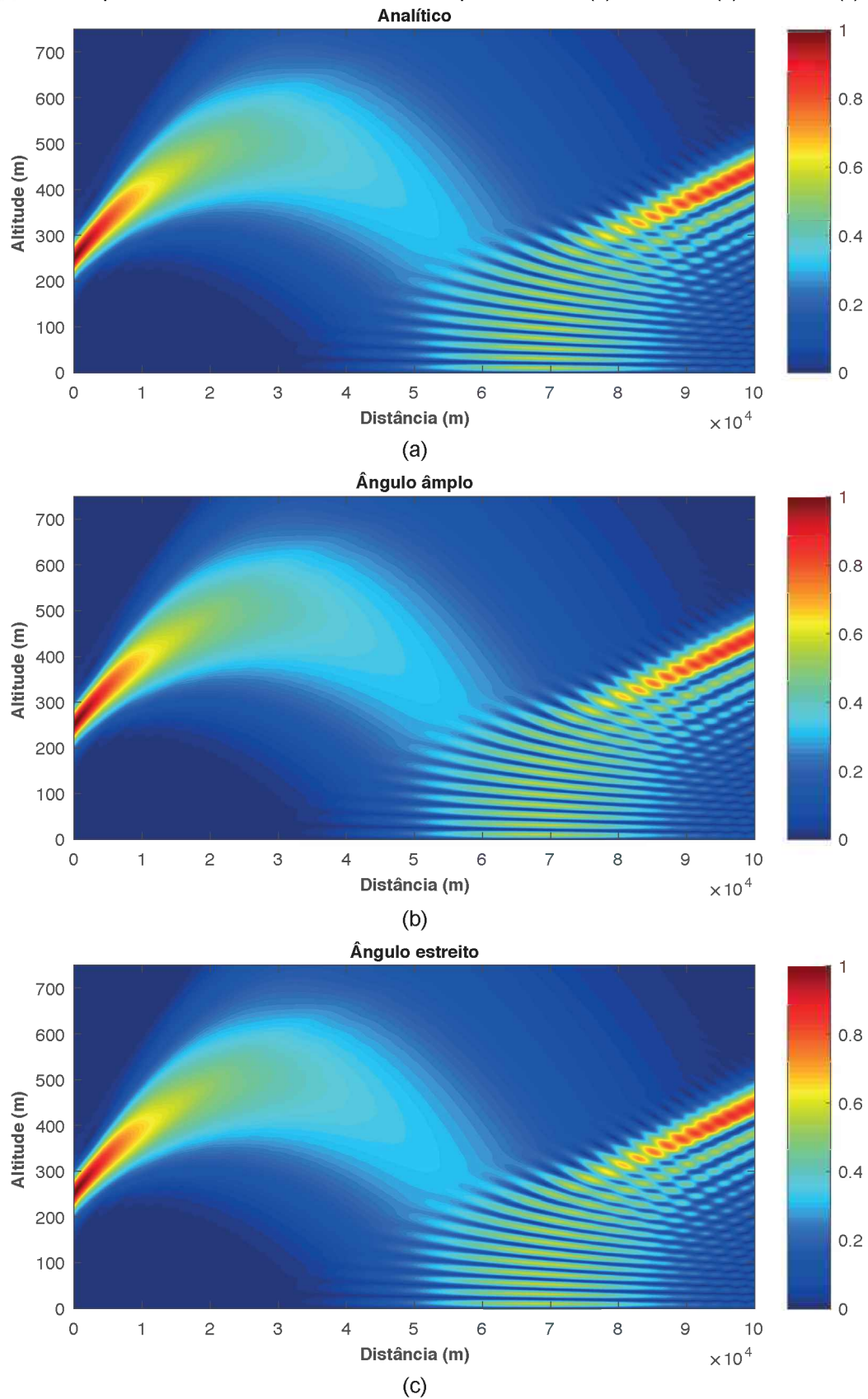
O caso 4, detalhado na Tabela 12, é uma variação do caso 3 em que foi introduzido um *tilt* de 1° na fonte Gaussiana. Todos os outros parâmetros permaneceram idênticos.

Tabela 12 – Dados do caso de teste 4.

Distância máx.	100 km
Altitude máx.	750 m
z_F	250 m
θ_{BW}	$0,5^\circ$
θ_{tilt}	1°
Frequência	300 MHz
Δx	0,09 m
Δz	10 m
Num. modos	300
$\frac{\partial n}{\partial z}$	$-0,6 \cdot 10^{-6} \text{ 1/m}$
Pol.	H

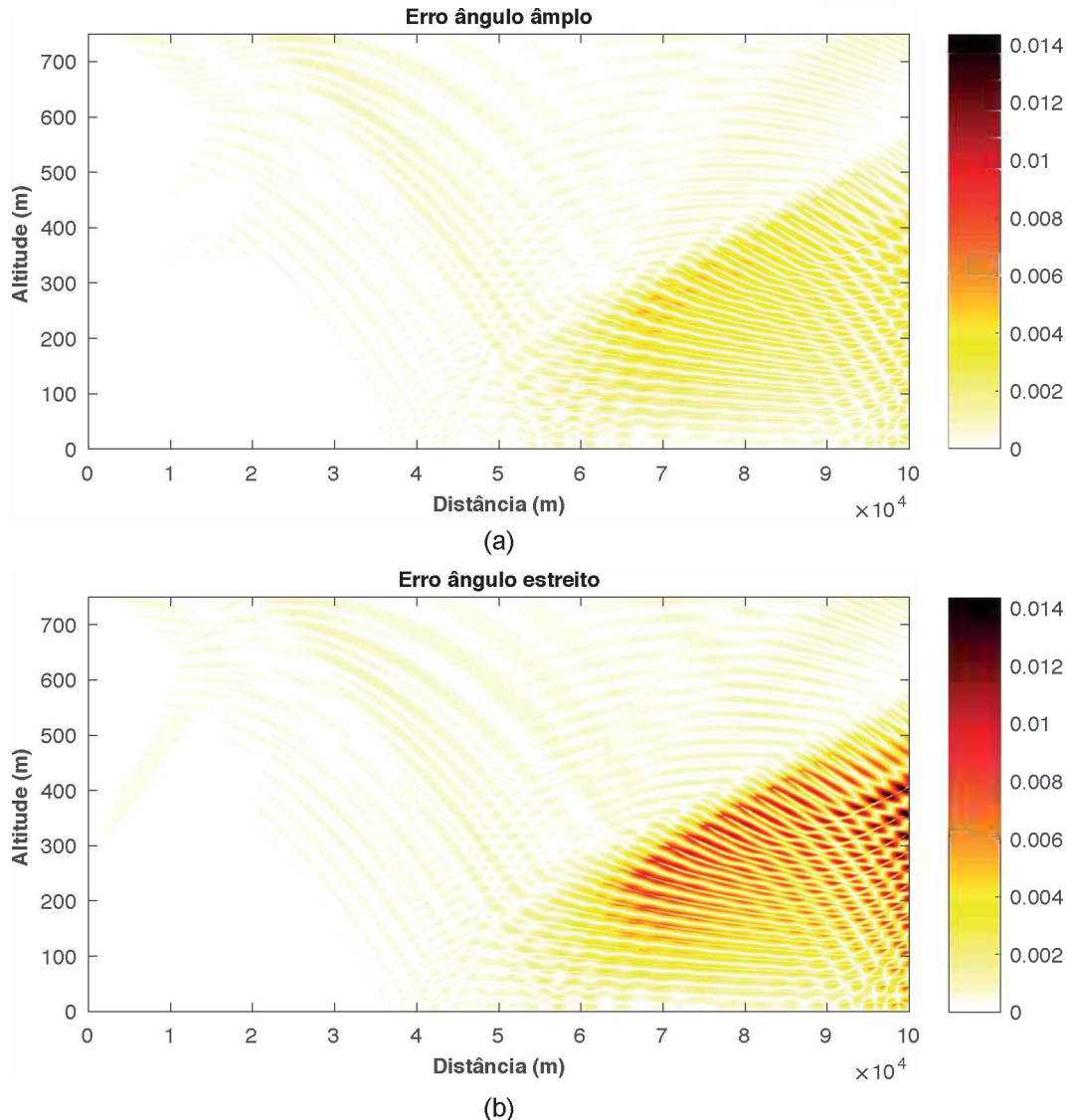
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 93 – Campo normalizado do caso 4 calculado pelo método (a) analítico, (b) WAPE e (c) NAPE.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 94 – Erro para o caso 4 cometido pelo método (a) WAPE e (b) NAPE.



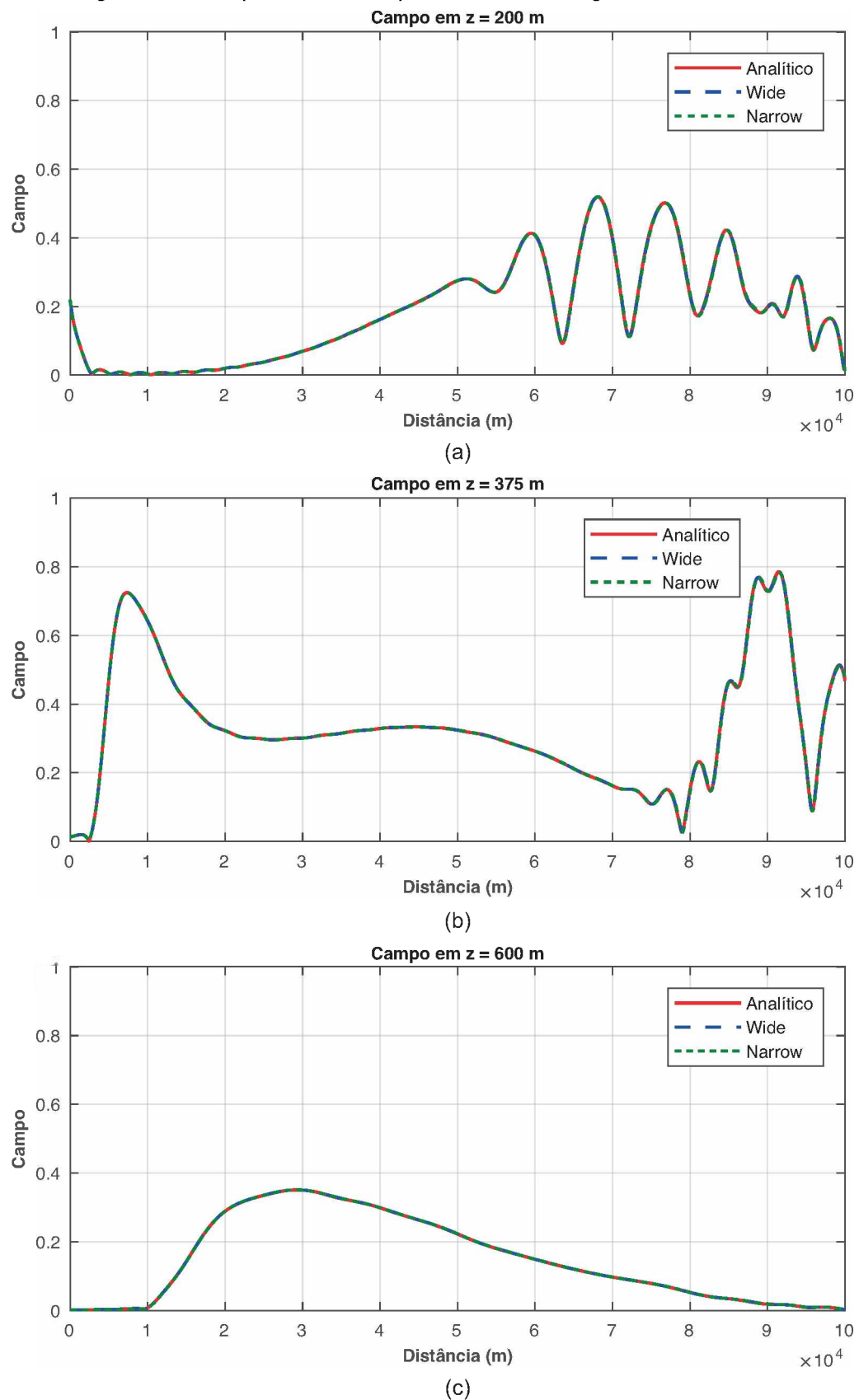
Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 93 mostra o resultado de campo normalizado para os três métodos e a Figura 94 mostra o erro relativo cometido pelo método de equações parabólicas. A Figura 94 é muito importante para perceber os erros que não são percebidos na Figura 93.

Comparando o caso 4 com o caso 3, é possível perceber que a inclinação de feixe da antena aumentou um pouco o nível de erro, mas, ainda assim, continua muito pequeno. Isso era esperado, uma vez que o *tilt* implica em maiores ângulos de propagação e o erro do método de equações parabólicas é proporcional ao seno do ângulo de propagação.

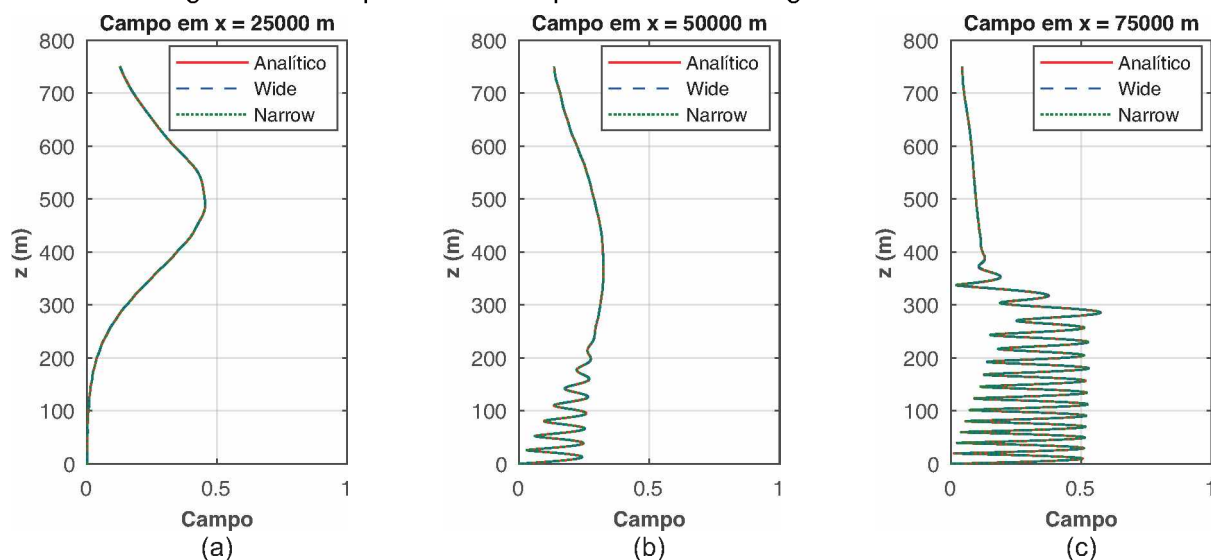
A seguir, a Figura 95 traz os resultados desse caso para algumas alturas específicas (200, 375 e 600 m).

Figura 95 – Campo normalizado para o caso 4 em algumas alturas fixas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 96 – Campo normalizado para o caso 4 em algumas distâncias fixas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

As Figuras 95 e 96 deixam muito claro a enorme concordância entre o método PE e o analítico em várias porções do domínio de integração do problema.

8.3.3 Caso 5 – atmosfera linear muito decrescente com inclinação de feixe

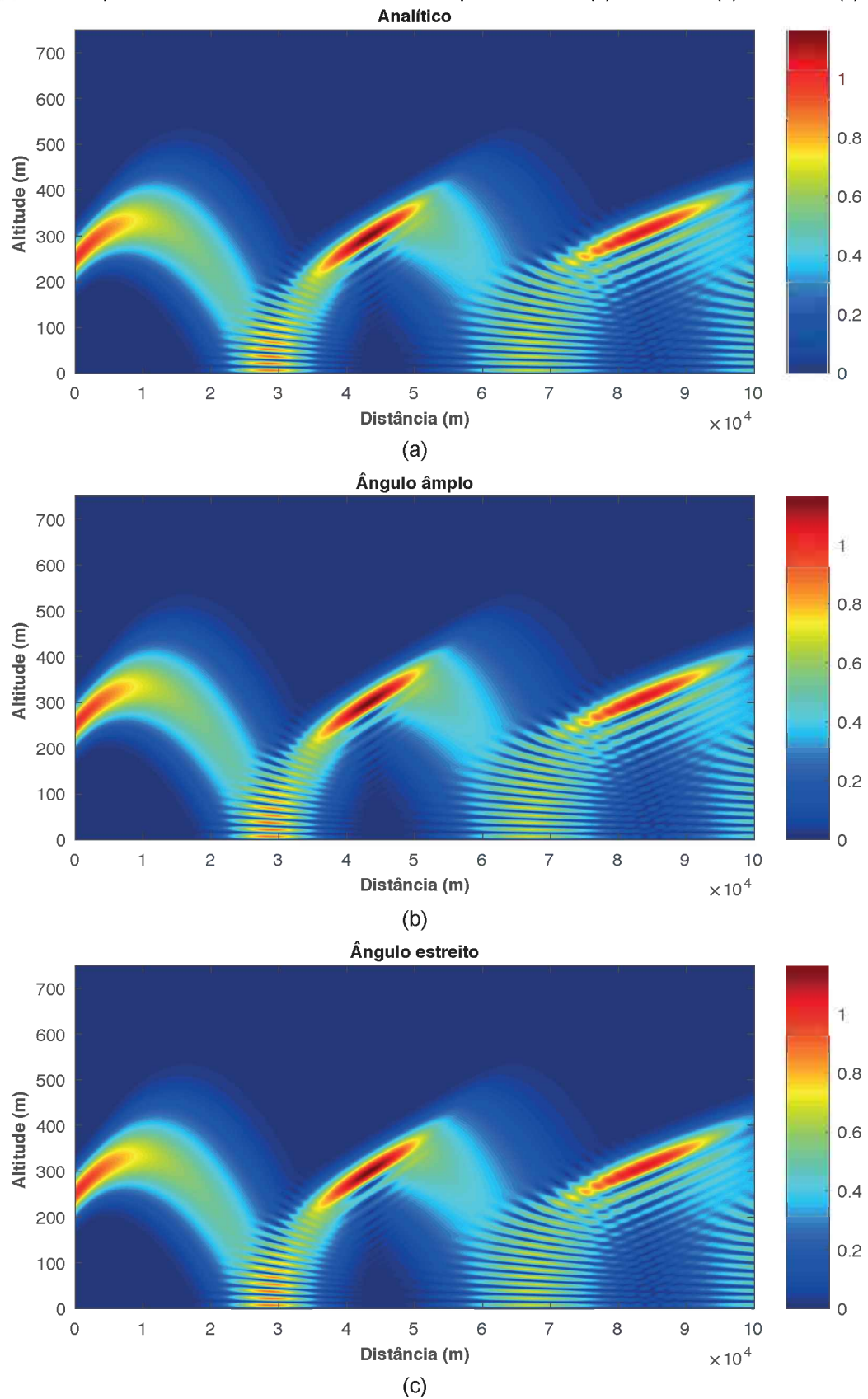
O caso 5 contempla a mesma situação do caso 4, porém o gradiente do índice de refração foi triplicado, provocando uma forte super-refração e aprisionando as ondas. Embora a antena tenha uma inclinação de feixe para cima, o campo é totalmente redirecionado para a Terra plana. Isso fica claro na Figura 97.

Tabela 13 – Dados para o caso de teste 5.

Distância máx.	100 km
Altitude máx.	750 m
z_F	250 m
θ_{BW}	$0,5^\circ$
θ_{tilt}	1°
Frequência	300 MHz
Δx	0,09 m
Δz	10 m
Num. modos	300
$\frac{\partial n}{\partial z}$	$-1,8 \cdot 10^{-6} \text{ 1/m}$
Pol.	H

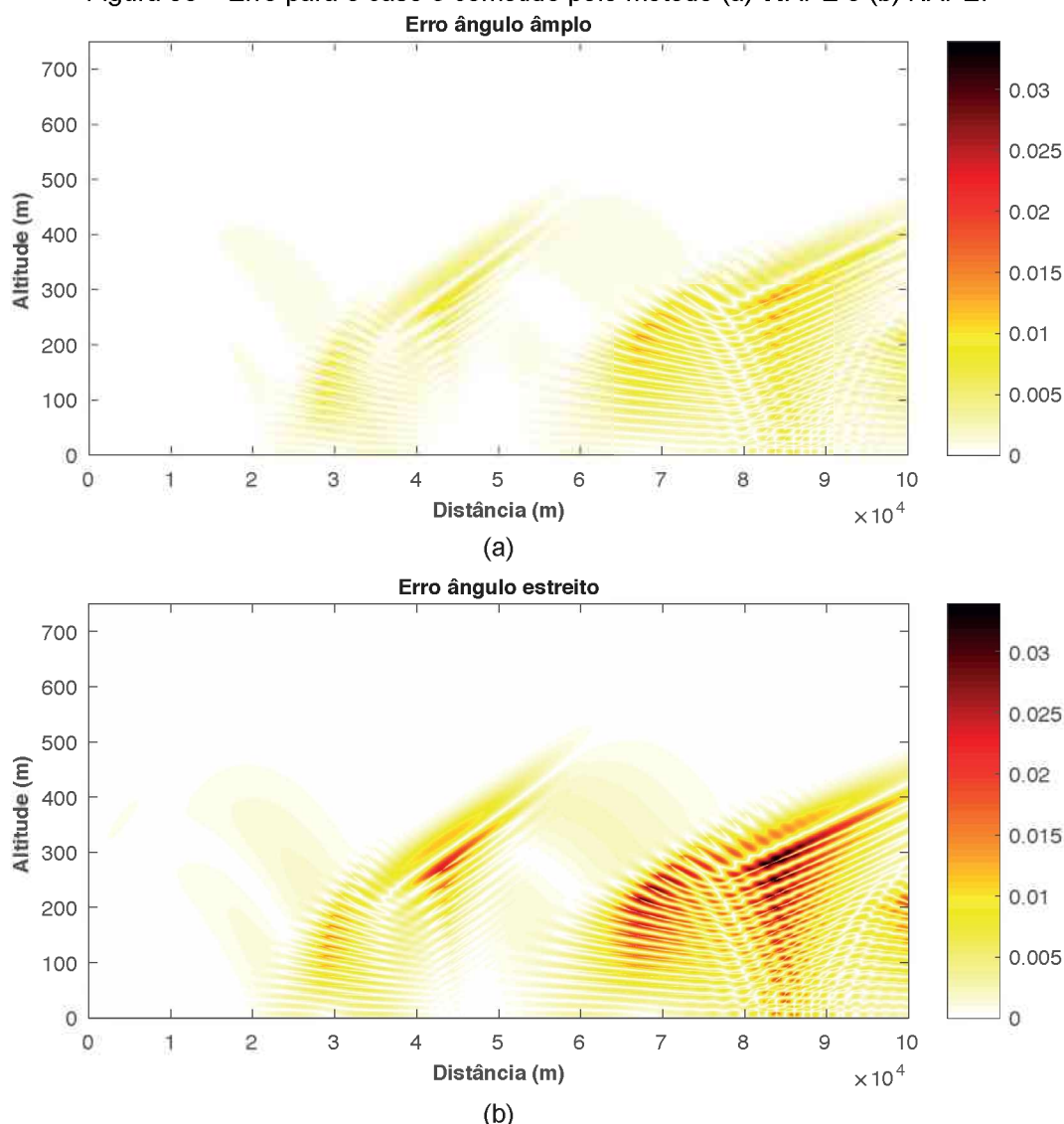
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 97 – Campo normalizado do caso 5 calculado pelo método (a) analítico, (b) WAPE e (c) NAPE.



Fonte: Elaborada pelo autor.

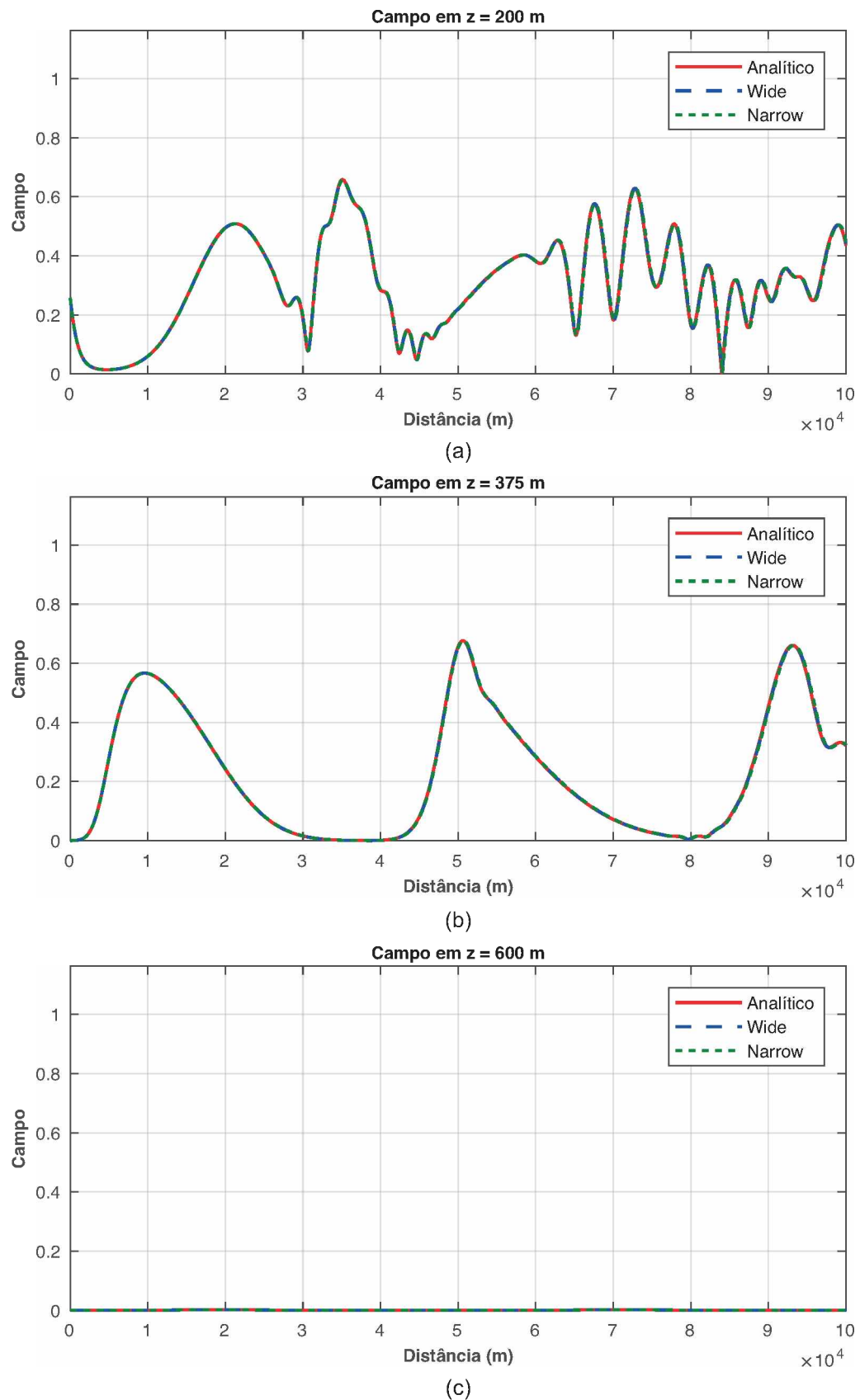
Figura 98 – Erro para o caso 5 cometido pelo método (a) WAPE e (b) NAPE.



Fonte: Elaborada pelo autor.

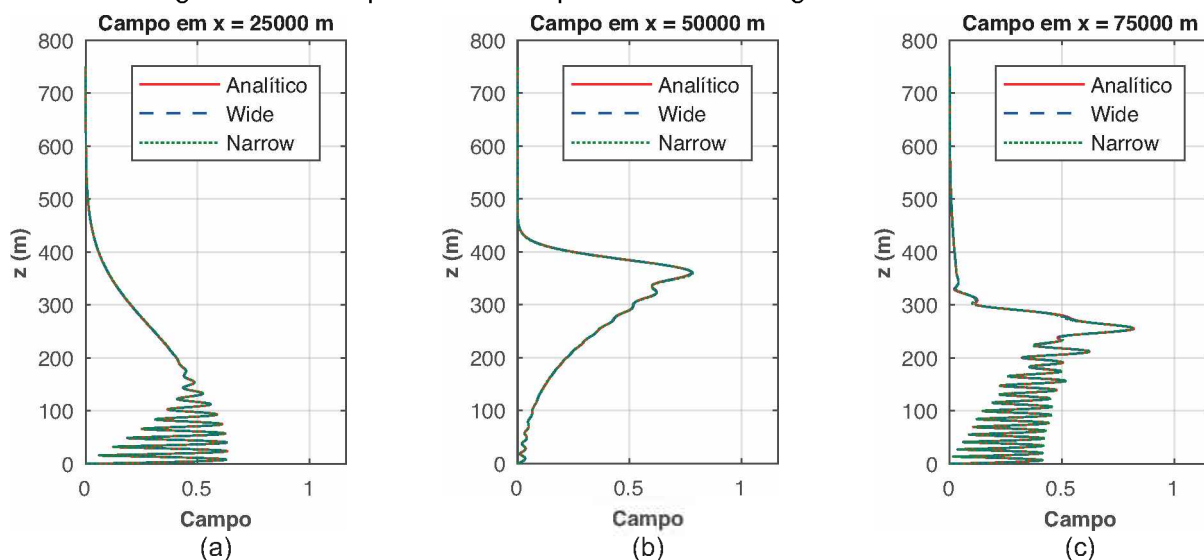
As Figuras 97, 98, 99 e 100 seguem no mesmo padrão das anteriores e continuam mostrando grande acordo entre os resultados analíticos e do método de equações parabólicas. Observando apenas as Figuras 99 e 100, não se percebe nenhuma diferença entre os resultados analítico, WAPE e NAPE. Apenas na Figura 98 que pode-se perceber que o método NAPE teve um erro levemente maior do que o WAPE. Em geral, o método de ângulo estreito possui alguns erros maiores do que o ângulo amplo principalmente em cenários de inclinação de feixe.

Figura 99 – Campo normalizado para o caso 5 em algumas alturas fixas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 100 – Campo normalizado para o caso 5 em algumas distâncias fixas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

8.3.4 Caso 6 – atmosfera linear decrescente com 2 fontes Gaussianas

Encerrando a seção sobre atmosfera linear decrescente, o caso 6 é uma variação dos outros casos. Aqui, há duas fontes Gaussianas apontadas para cima e para baixo com inclinação de $-0,5^\circ$ e $+0,5^\circ$.

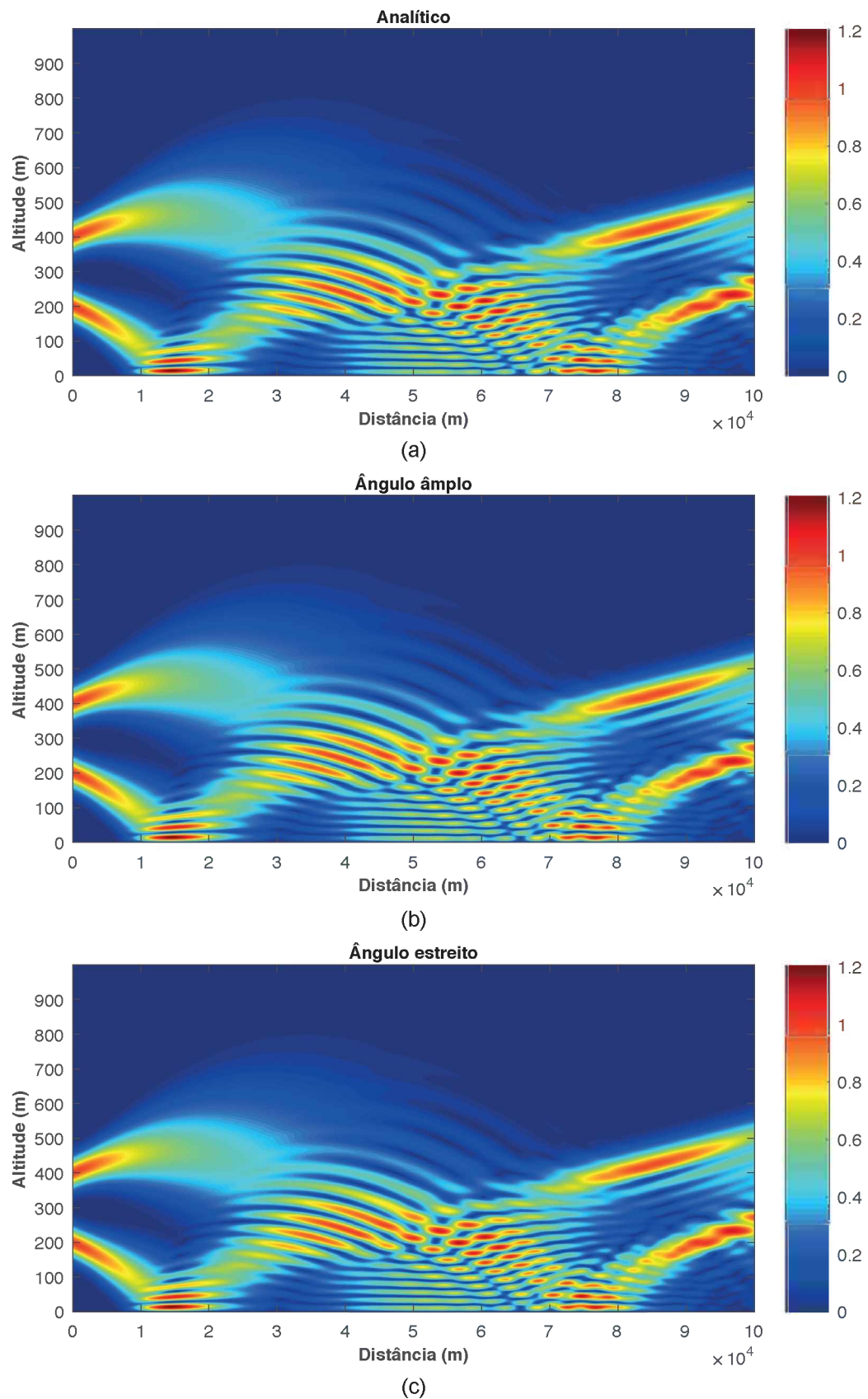
Tabela 14 – Dados para o caso de teste 6.

Distância máx.	100 km
Altitude máx.	1000 m
z_F	200 e 400 m
θ_{BW}	$0,5^\circ$
θ_{tilt}	$0,5^\circ$ e $-0,5^\circ$
Frequência	300 MHz
Δx	0,09 m
Δz	10 m
Num. modos	300
$\frac{\partial n}{\partial z}$	$-0,6 \cdot 10^{-6} \text{ 1/m}$
Pol.	H

Fonte: Elaborada pelo autor.

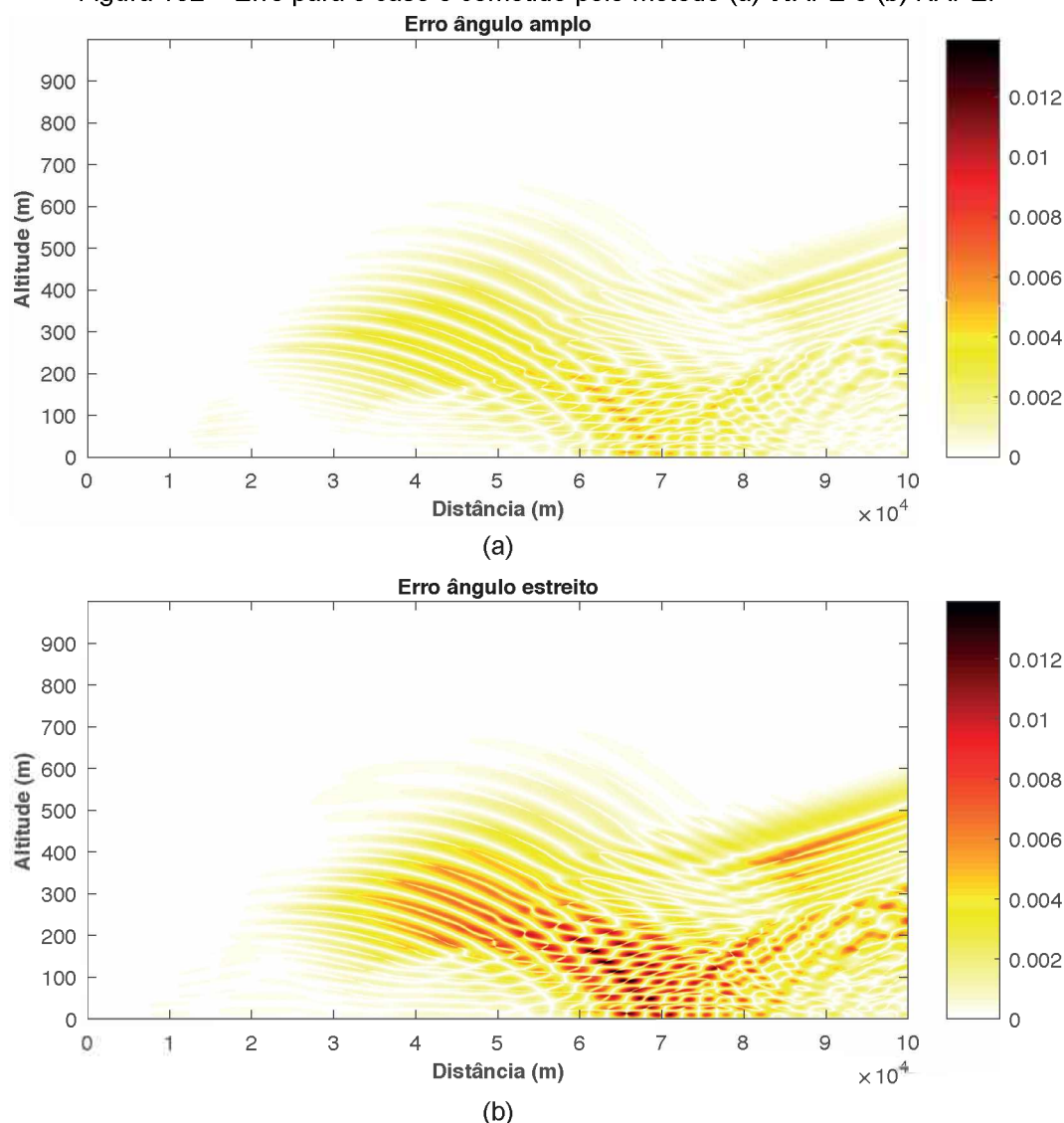
A Figura 101 mostra que a super-refração redireciona o feixe da antena superior para a Terra e causa uma interação entre os 2 feixes e toda sua energia fica confinada próximo à superfície.

Figura 101 – Campo normalizado do caso 6 calculado pelo método (a) analítico, (b) WAPE e (c) NAPE.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 102 – Erro para o caso 6 cometido pelo método (a) WAPE e (b) NAPE.

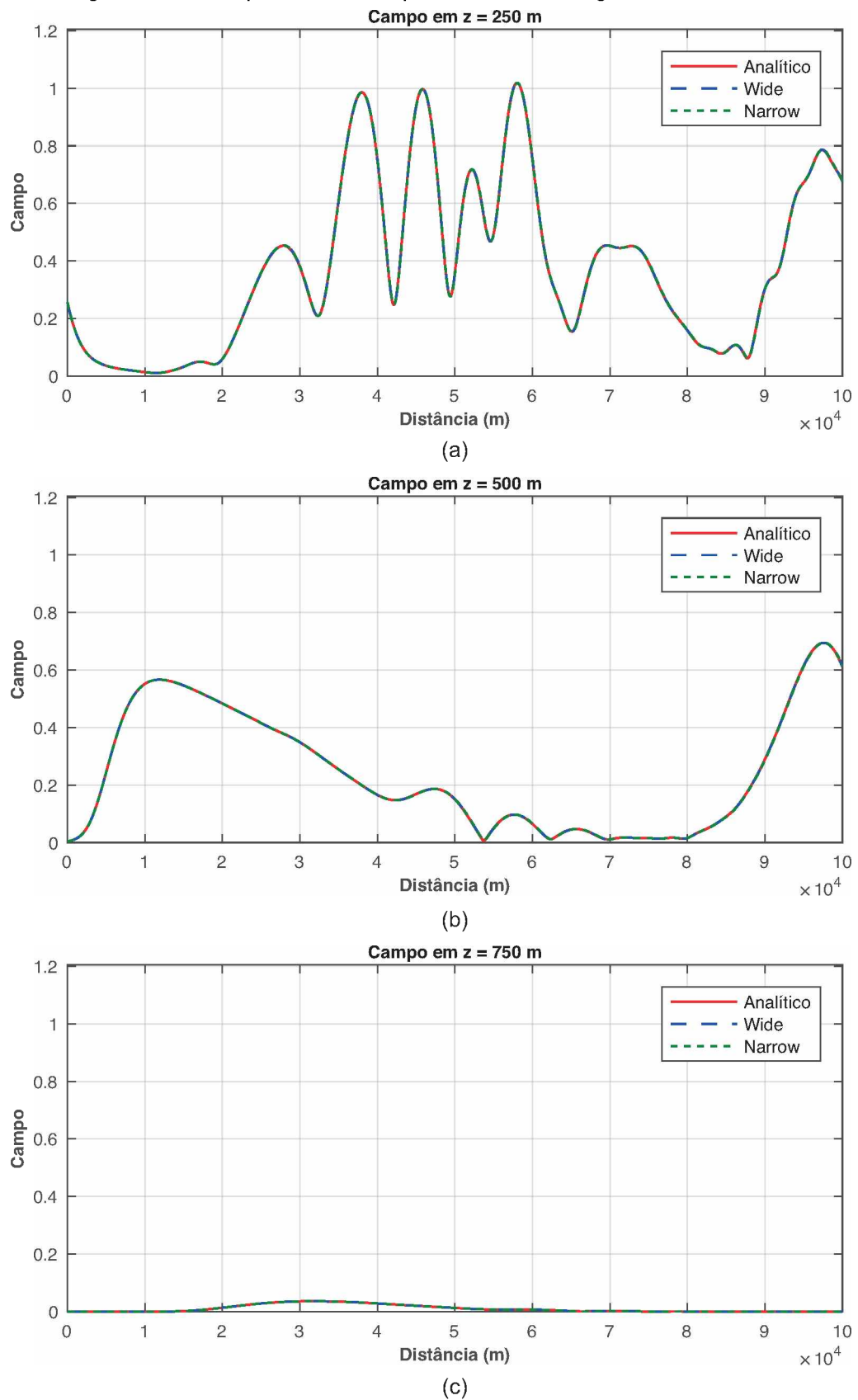


Fonte: Elaborada pelo autor.

Mesmo no caso de múltiplas fontes Gaussianas, os métodos são bastante corretos e seus erros relativos são muito pequenos. As Figuras 103 e 104 também ajudam a mostrar essa concordância em várias partes da região analisada.

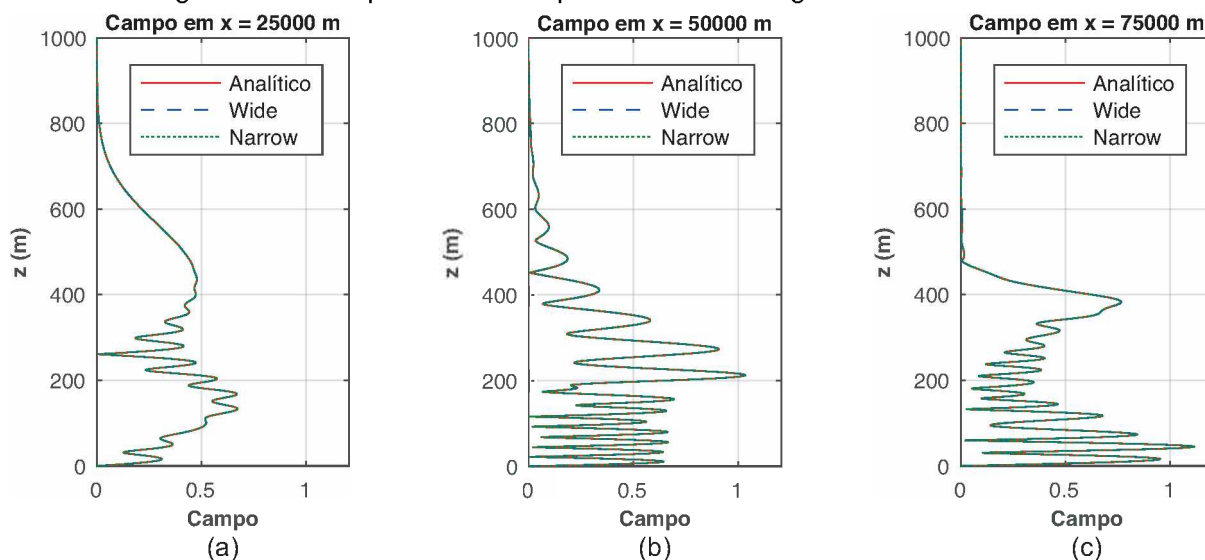
Como mostrado aqui, o método de equações parabólicas é muito útil para lidar com perfis de refratividade de vários tipos. A atmosfera da Terra, que é, fora de condições anormais, decrescente, é bem representada e tratada por esse método. Perfis de refratividade que variam com a distância também podem ser utilizados desde que suas variações sejam suaves na escala do comprimento de onda.

Figura 103 – Campo normalizado para o caso 6 em algumas alturas fixas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 104 – Campo normalizado para o caso 6 em algumas distâncias fixas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

8.4 Atmosfera com Perfil Bilinear e Trilinear

A baixa troposfera afeta a propagação das ondas de rádio de várias maneiras. Especialmente, sua natureza não uniforme faz com que as ondas sejam curvadas ou refratadas. A refração de ondas eletromagnéticas ocorre devido à variação da velocidade de propagação com a altitude e isso é expresso em termos da variação do índice de refração, que é a razão entre a velocidade de fase no espaço livre e a velocidade de fase no meio. As variações do índice de refração são causadas, por sua vez, pelas variações espaciais e temporais de pressão, temperatura e vapor de água.

Em geral, costuma-se analisar o perfil de refratividade da atmosférica em termos de seu gradiente vertical e diferentes configurações de gradiente vertical determinam diferentes tipos de condições atmosféricas. Condições que não sejam de atmosfera padrão causam propagação anômala porque os raios são curvados para cima, para baixo ou são aprisionados em dutos.

Para simplificação das análises, é comum aproximar o perfil vertical do índice de refração ou da refratividade por uma função definida por partes, em que cada parte possui um gradiente específico. Assim, perfis lineares, bilineares e trilineares definidos por partes causam a formação de dutos de superfície ou de dutos elevados. Os dutos atmosféricos (camadas aprisionadoras) são de especial interesse, pois o gradiente vertical negativo leva a uma captura de energia e essa

energia aprisionada pode propagar enormes distâncias além do horizonte normal que seria esperado para uma atmosfera padrão.

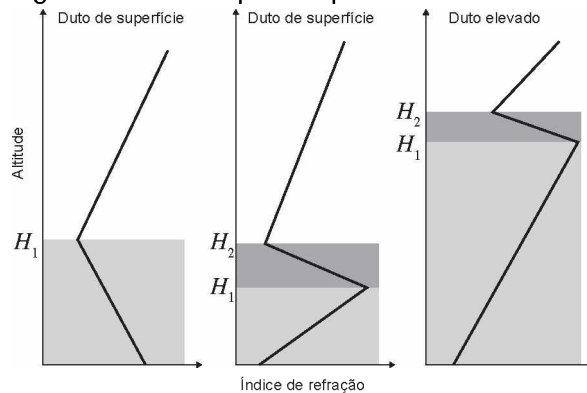
Matematicamente, pode-se representar um perfil trilinear genérico como na Equação (8.27).

$$n(z) = \begin{cases} \frac{\partial n}{\partial z_{(1)}} z + n_0 & , z \leq H_1 \\ \frac{\partial n}{\partial z_{(2)}} z + H_1 \left(\frac{\partial n}{\partial z_{(1)}} - \frac{\partial n}{\partial z_{(2)}} \right) + n_0 & , H_1 < z \leq H_2 \\ \frac{\partial n}{\partial z_{(3)}} z + H_2 \left(\frac{\partial n}{\partial z_{(2)}} - \frac{\partial n}{\partial z_{(3)}} \right) + H_1 \left(\frac{\partial n}{\partial z_{(1)}} - \frac{\partial n}{\partial z_{(2)}} \right) + n_0 & , z > H_2 \end{cases} \quad (8.27)$$

em que n_0 é o índice de refração na superfície.

Desse modo, é possível representar vários tipos de dutos, como os exemplos da Figura 105.

Figura 105 – Exemplos de perfis de refratividade.



Fonte: *Electromagnetic Modeling and Simulation* [58].

Para uma simples comparação e visualização dos efeitos dos dutos, foi selecionado o modelo de traçado de raios. Modelos de traçado de raios ganharam atenção especial nas últimas décadas paralelamente à introdução de sistemas de comunicação pessoal [87, 119–123].

A parte mais difícil na simulação de propagação em termos de soma de raios é prever o percurso dos raios entre um transmissor e um receptor. Os caminhos dos raios refletidos e refratados são construídos por busca de “autoraio” (procura de raios característicos em um caminho especificado) ou por força bruta (lançando uma variedade de raios que podem, ou não, alcançar o receptor). O desafio de um

modelo de traçado de raios é encontrar uma maneira computacionalmente rápida para especificar os percursos dominantes que influenciam na intensidade de campo.

A contribuição do campo eletromagnético de um raio em uma distância $R(x, y, z)$ de uma fonte harmônica pontual em (x', y', z') é dada pela Equação (8.28).

$$E(R) = \frac{e^{-jk_0 R}}{R} \quad (8.28)$$

em que $R = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ em um ambiente 3D.

Em um ambiente 2D, a contribuição de uma fonte linear em (x', z') em uma distância $\rho(x, z)$ é dada pela Equação (8.29).

$$E(\rho) = \frac{e^{-jk_0 \rho}}{\sqrt{\rho}} \quad (8.29)$$

em que $\rho = \sqrt{(x - x')^2 + (z - z')^2}$.

Uma vez que um raio é lançado, há três tipos de mecanismos que podem mudar sua direção de propagação: reflexão em fronteiras, refração devido às variações na refratividade do ambiente e difração em obstáculos. Aqui, foram tratadas apenas a reflexão em fronteiras e variações na refratividade.

Foi feita uma simples simulação para visualização de traçado de raios. O programa lança um número de raios, cujos ângulos de partida são especificados pelo usuário, em um meio de propagação caracterizado por um perfil de refratividade trilinear e independente da distância horizontal. O cerne do programa é baseado na aplicação direta da lei de Snell entre camadas horizontais adjacentes nas quais o índice de refração é considerado constante.

O programa emite raios da fonte, um por um, e armazena os pontos do seu percurso como pares ordenados (x, z) enquanto as coordenadas do raio são menores que a altura e distância máximas. Para isso, três procedimentos são feitos. O primeiro consiste na aplicação consecutiva da lei de Snell em um meio de propagação com múltiplas camadas horizontais, cuja espessura, Δz , é uma constante especificada pelo usuário. A camada inicial é a camada que corresponde

à altitude da fonte. Assim, o primeiro raio emana da fonte com o primeiro ângulo e a lei de Snell é aplicada, de acordo com a Equação (8.30).

$$n_i \sin \phi_i = n_{i+1} \sin \phi_{i+1} \quad (8.30)$$

Com isso, encontra-se o ângulo do raio refratado na próxima camada.

A distância horizontal Δx e o segmento de raio Δs da próxima camada são calculados por meio de trigonometria, como na Equação (8.31) e (8.32).

$$\Delta x_{i+1} = |\Delta z| \tan \phi_{i+1} \quad (8.31)$$

$$\Delta s_{i+1} = \sqrt{(\Delta x_{i+1})^2 + \Delta z^2} \quad (8.32)$$

O raio propaga por essa camada da mesma maneira que na anterior até atingir a máxima distância ou máxima altitude. Os pontos percorridos pelo raio são dados pela Equação (8.33) e são armazenados para plotar o lugar geométrico dos raios.

$$\begin{aligned} x(i+1) &= x(i) + \Delta x_{i+1} \\ z(i+1) &= z(i) \pm \Delta z \end{aligned} \quad (8.33)$$

O comprimento do percurso de um raio é dado pela soma de todos os segmentos, como na Equação (8.34).

$$R = \sum \Delta s \quad (8.34)$$

O segundo procedimento considera a reflexão dos raios pela superfície inferior PEC e é realizado apenas invertendo o sentido de propagação do raio obedecendo o mesmo ângulo com o qual ele incidiu no fronteira, ou seja, troca-se Δz por $-\Delta z$.

O terceiro procedimento é importante para tratar os raios que propagam em ângulos próximos a 90° e é o tratamento das cáusticas dos raios. Os raios que chegam a 90° e estão propagando para cima são desviados para baixo trocando Δz por $-\Delta z$.

Esse programa é destinado apenas a desenhar os percursos dos raios. A contribuição dos campos eletromagnéticos dos raios em determinado ponto pode ser

adicionada por meio da acumulação das contribuições dos raios que passam pelo mesmo ponto de observação da seguinte maneira:

- calcular a percurso de cada raio com a Equação (8.34);
- armazenar o número de reflexões na superfície PEC, NR ;
- armazenar o número de pontos de inversão na cáustica, NC ;
- calcular a contribuição de cada raio com a Equação (8.35).

$$E(\text{raio } k) = e^{-jk_0 R_k} \begin{cases} \prod_{j=0}^{NR} e^{-j\pi} \prod_{q=0}^{NC} e^{-j\frac{\pi}{2}} & \text{pol. horizontal} \\ \prod_{q=0}^{NC} e^{-j\frac{\pi}{2}} & \text{pol. vertical} \end{cases} \quad (8.35)$$

8.4.1 Caso 7 – atmosfera com perfil trilinear

Para esse caso, foi utilizado um perfil de refratividade trilinear caracterizado na Tabela 15.

Tabela 15 – Dados para o caso de teste 7.

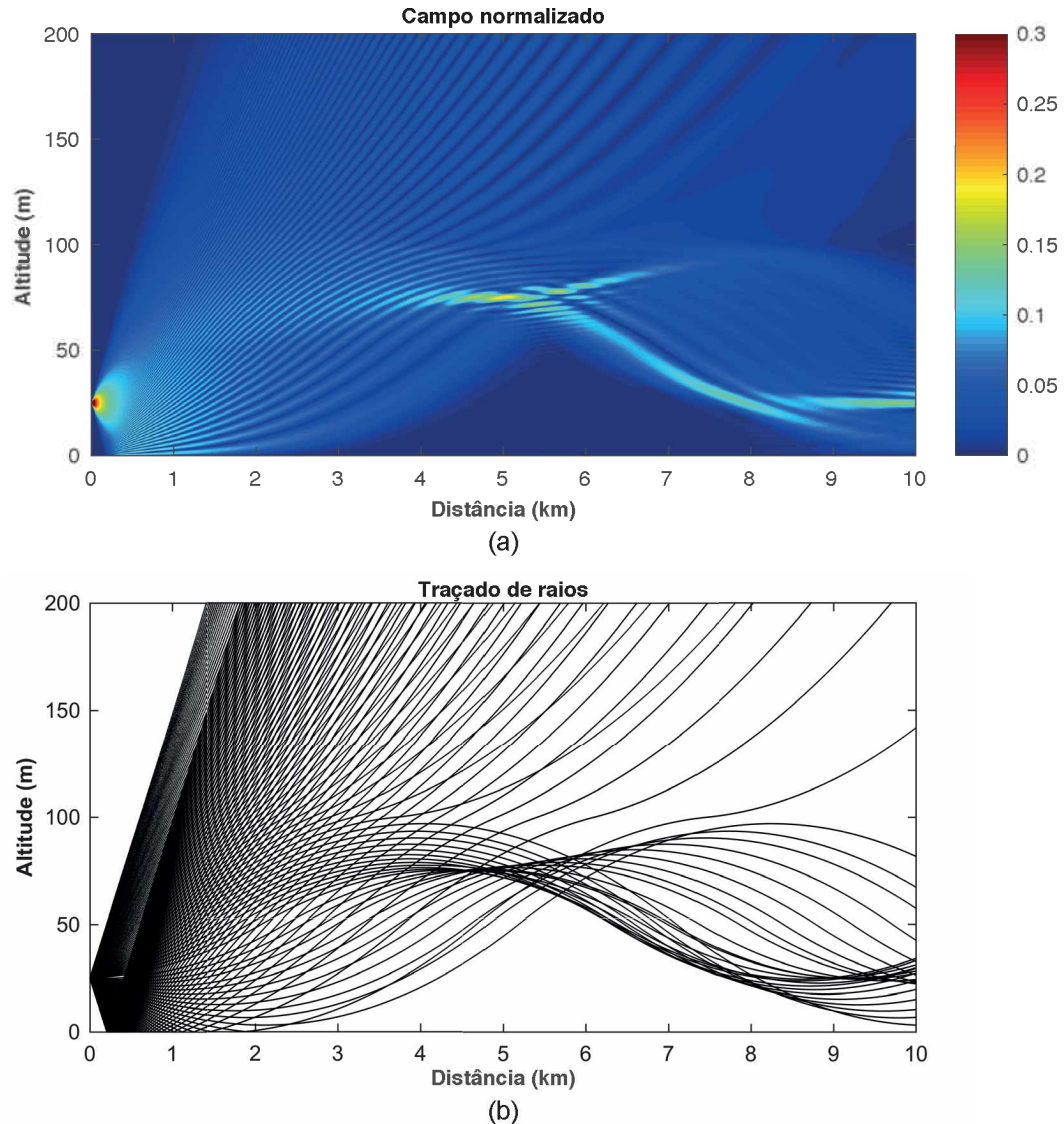
Distância máx.	10 km
Altitude máx.	200 m
z_F	25 m
θ_{BW}	6°
θ_{tilt}	0°
Frequência	3 GHz
Δx	1 m
Δz	0,009 m
H_1, H_2	50, 100 m
n_0	1,0003
$\frac{\partial n}{\partial z_1}, \frac{\partial n}{\partial z_2}, \frac{\partial n}{\partial z_3}$	$10^{-5}, -10^{-5}, 10^{-5}$ 1/m
Pol.	H

Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 106 ilustra a comparação entre os resultados do caso 7 calculados pelo método de equações parabólicas de ângulo amplo e uma visualização de traçado de raios. Devido à descontinuidade do perfil de refratividade entre 50 e 100

metros de altura, grande parte da energia fica canalizada próxima à superfície e pode viajar centenas de quilômetros dessa maneira.

Figura 106 – Comparação entre o campo do modelo (a) WAPE e (b) o traçado de raios para o caso 7.



Fonte: Elaborada pelo autor.

8.4.2 Caso 8 – atmosfera com perfil trilinear invertido

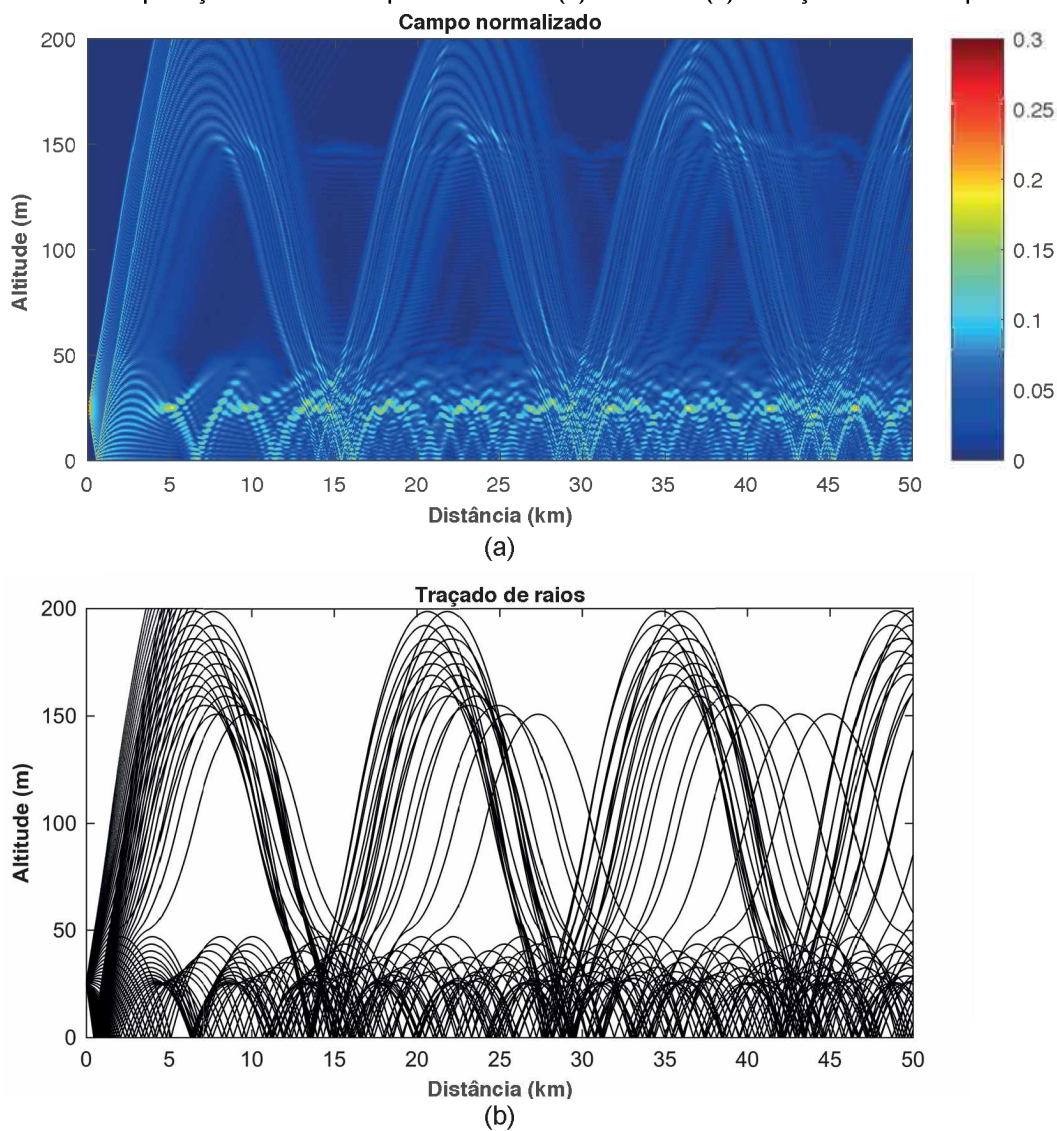
O caso 8 é uma variação do caso 7 com distância maior e o perfil de refratividade foi invertido. A inversão do perfil de índice de refração implicou na criação de dois dutos, um em baixa altitude (50 m) e outro duto de maior altitude (entre 100 e 200 m). Alguns raios são aprisionados entre o solo e 50 m e, os que atravessam essa primeira camada, são refratados de volta para a Terra por uma outra camada que inicia em 100 m de altitude. Isso fica muito claro na visualização da Figura 107.

Tabela 16 – Dados para o caso de teste 8.

Distância máx.	50 km
Altitude máx.	200 m
z_F	25 m
θ_{BW}	6°
θ_{tilt}	0°
Frequência	3 GHz
Δx	1 m
Δz	0,009 m
H_1, H_2	50, 100 m
n_0	1,0003
$\frac{\partial n}{\partial z_1}, \frac{\partial n}{\partial z_2}, \frac{\partial n}{\partial z_3}$	$-10^{-5}, 10^{-5}, -10^{-5}$ 1/m
Pol.	H

Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 107 – Comparação entre o campo do modelo (a) WAPE e (b) o traçado de raios para o caso 8.



Fonte: Elaborada pelo autor.

8.5 Refração Costal e Efeito Recuperação

Na prática, a propagação raramente ocorre sobre superfícies homogêneas e é mais comum que as ondas viajem sobre superfícies com diferentes propriedades elétricas. Um caso interessante é quando as propriedades são uniformes em uma parcela particular de solo, mas são muito diferentes de outra parcela adjacente. Portanto, existe uma fronteira bem definida entre os dois tipos de superfície. Um bom exemplo prático é a propagação de um sinal que inicia em terra e continua até o oceano.

Nesse caso, o percurso se inicia em um solo com baixa condutividade (terra seca) e continua sobre um bom condutor (água do mar). Assim, é esperado um aumento na intensidade do sinal logo na fronteira entre as regiões devido ao fato que, agora, menos energia é perdida dentro do solo. Esse é o efeito recuperação que foi observado experimentalmente por Millington e Isted [124] e pode ser calculado analiticamente por um método proposto por Eckersley [125], pelo teorema da compensação [126,127].

8.5.1 Caso 9 – efeito recuperação

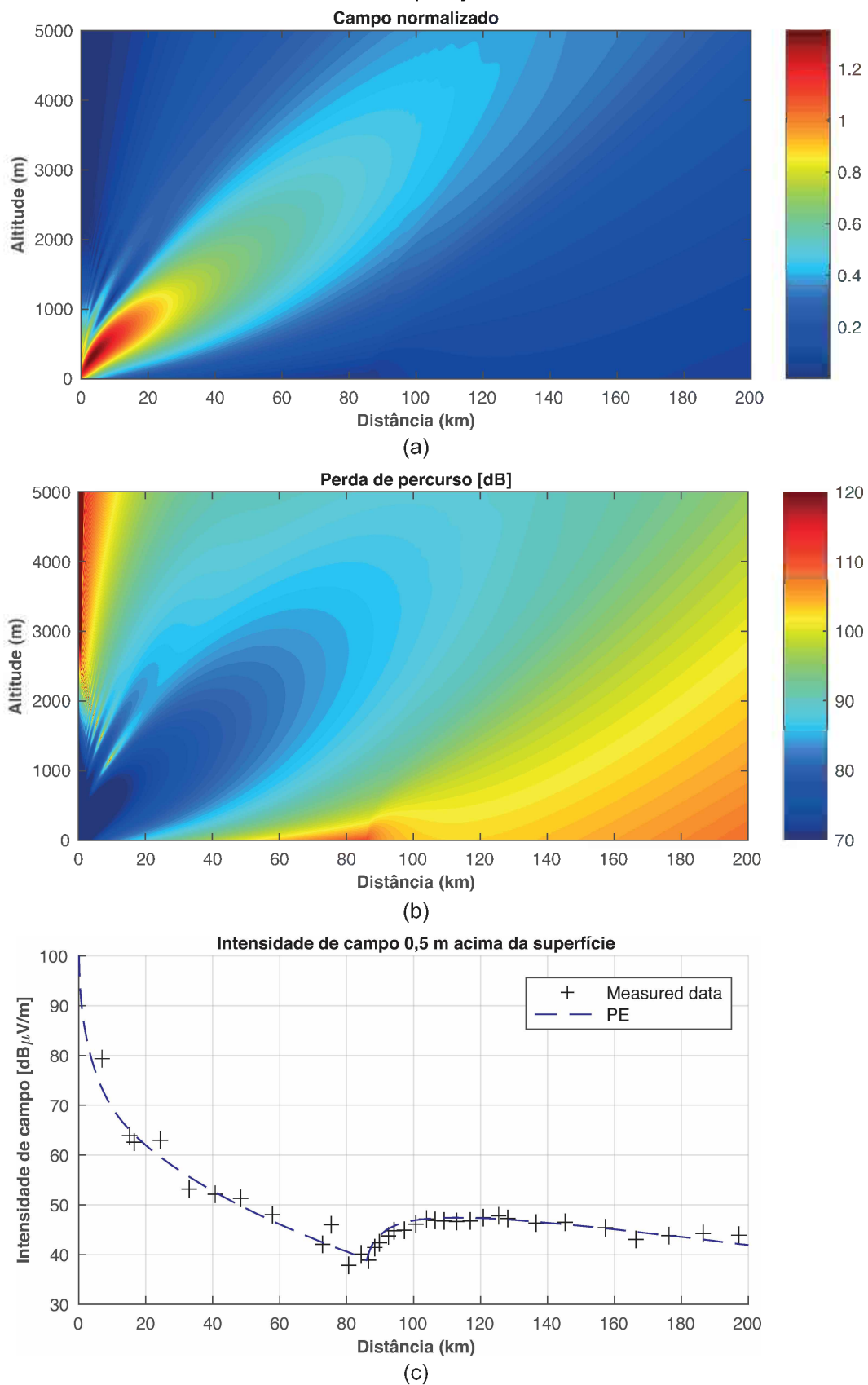
Tabela 17 – Dados para o caso de teste 9.

Distância máx.	200 km
Altitude máx.	5000 m
z_F	0,25 m
θ_{BW}	2°
θ_{tilt}	0°
Frequência	3,13 MHz
Δx	15 m
Δz	0,25 m
ϵ_r, σ Terra	5; 0,01 S/m
ϵ_r, σ Mar	81; 4 S/m
Pol.	V

Fonte: Elaborada pelo autor.

Esse caso é a reprodução de um experimento feito por Millington e Isted [124] sobre o efeito recuperação. A Figura 108 traz o resultado de campo, perda de percurso e uma comparação entre o método e os dados medidos.

Figura 108 – Comparação entre o método WAPE e as medidas de Millington e Isted para o efeito recuperação.



Fonte: Elaborada pelo autor.

8.6 Conversão para Terra Plana e a Difração pela Terra

A difração pela Terra esférica pode ser tratada de duas maneiras: representando explicitamente a superfície da Terra ou utilizando a conversão de Terra plana desenvolvida na Seção 7.6. Na representação explícita da superfície terrestre como um terreno variável, foi utilizada a técnica de escada da Seção 7.8.1 e uma atmosfera padrão radialmente estratificada. Para a representação convertida em Terra plana, o perfil de refratividade radialmente estratificado é convertido para um perfil verticalmente estratificado de acordo com o índice de refração modificado da Seção 7.8.1. Em ambos os casos, a Terra foi tratada como PEC.

Quando a superfície é tratada explicitamente em uma atmosfera padrão, como esperado, a energia propaga em trajetórias curvas para o sentido da Terra com um raio de curvatura maior do que o raio da Terra, uma vez que o índice de refração é decrescente com a altitude. Por outro lado, na representação por Terra plana, o índice de refração modificado aumenta com a altitude e o efeito é como se a energia propagasse suavemente para fora da superfície terrestre, o que é análogo à situação explícita.

Além disso, devido à difração na superfície esférica da Terra, não há transição aguda no horizonte de rádio, mas sim um decréscimo suave da intensidade do sinal além do horizonte. Todos esses efeitos podem ser verificados nas imagens das Figuras 109, 110 e 111, geradas para o caso 10.

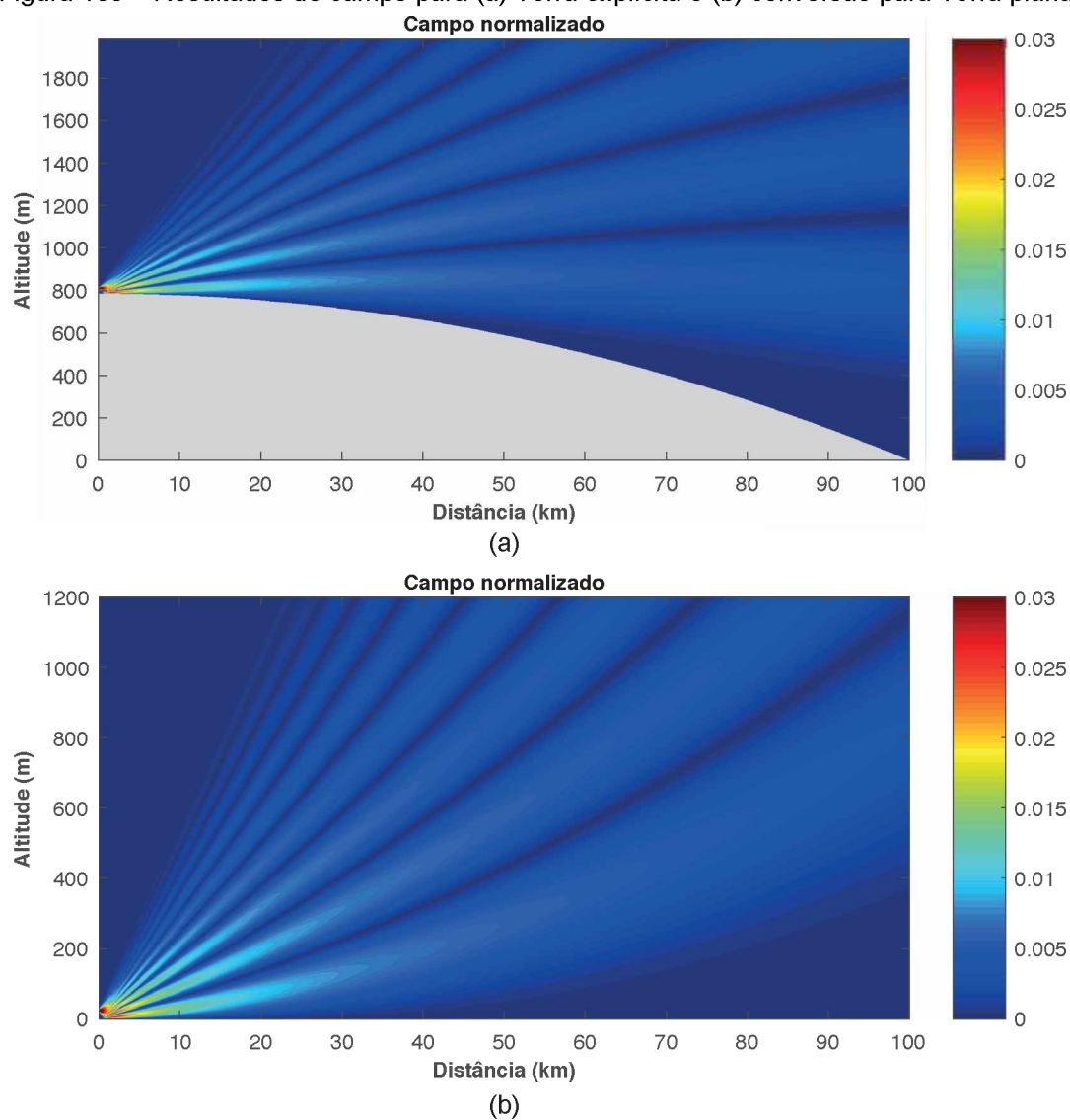
8.6.1 Caso 10 – conversão para Terra plana

Tabela 18 – Dados para o caso de teste 10.

Distância máx.	100 km
Altitude máx.	1200 m
z_F	25 m
θ_{BW}	2°
θ_{tilt}	0°
Frequência	1 GHz
Δx	10 m
Δz	0,06 m
Pol.	H

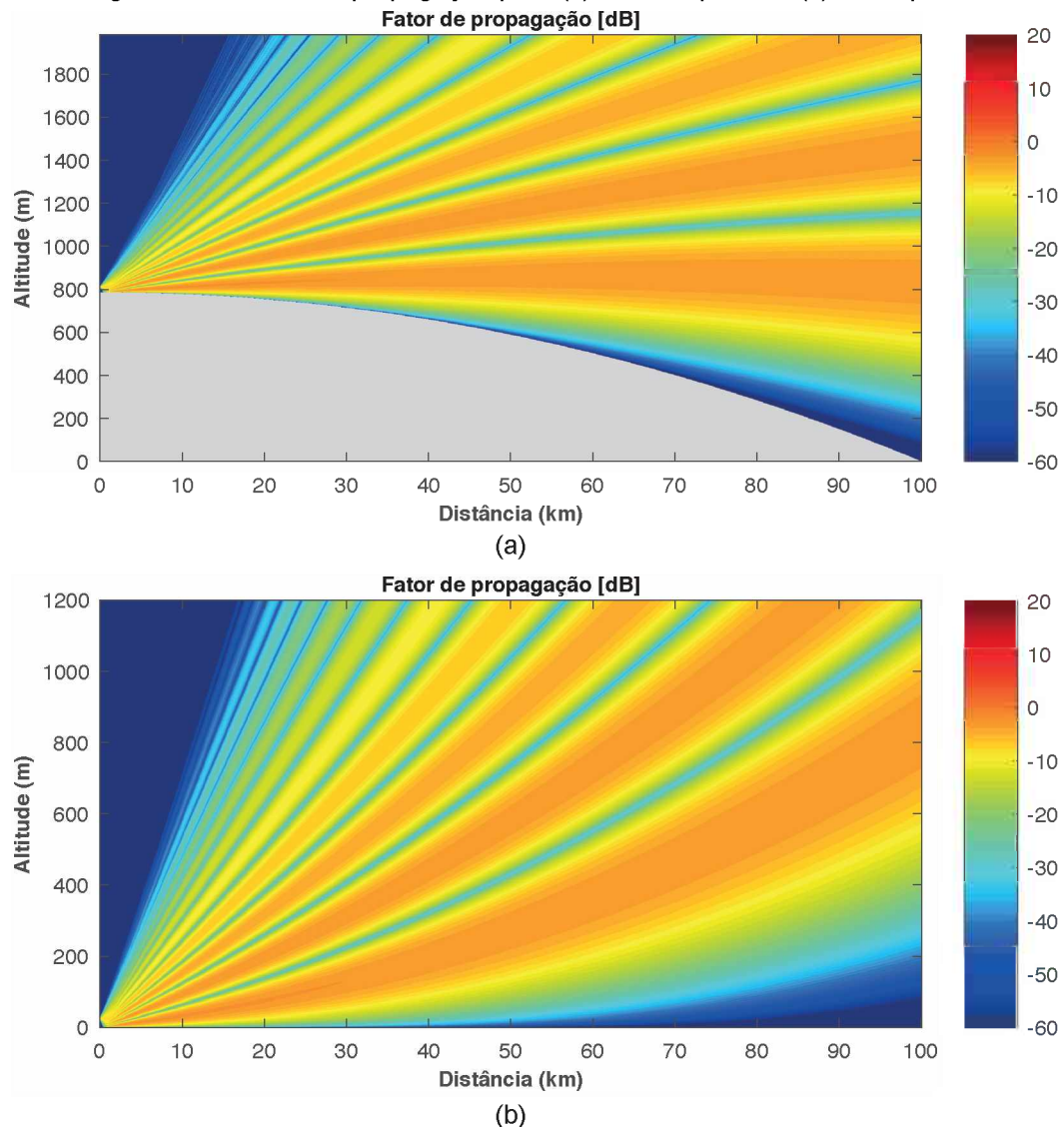
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 109 – Resultados de campo para (a) Terra explícita e (b) conversão para Terra plana.



Fonte: Elaborada pelo autor.

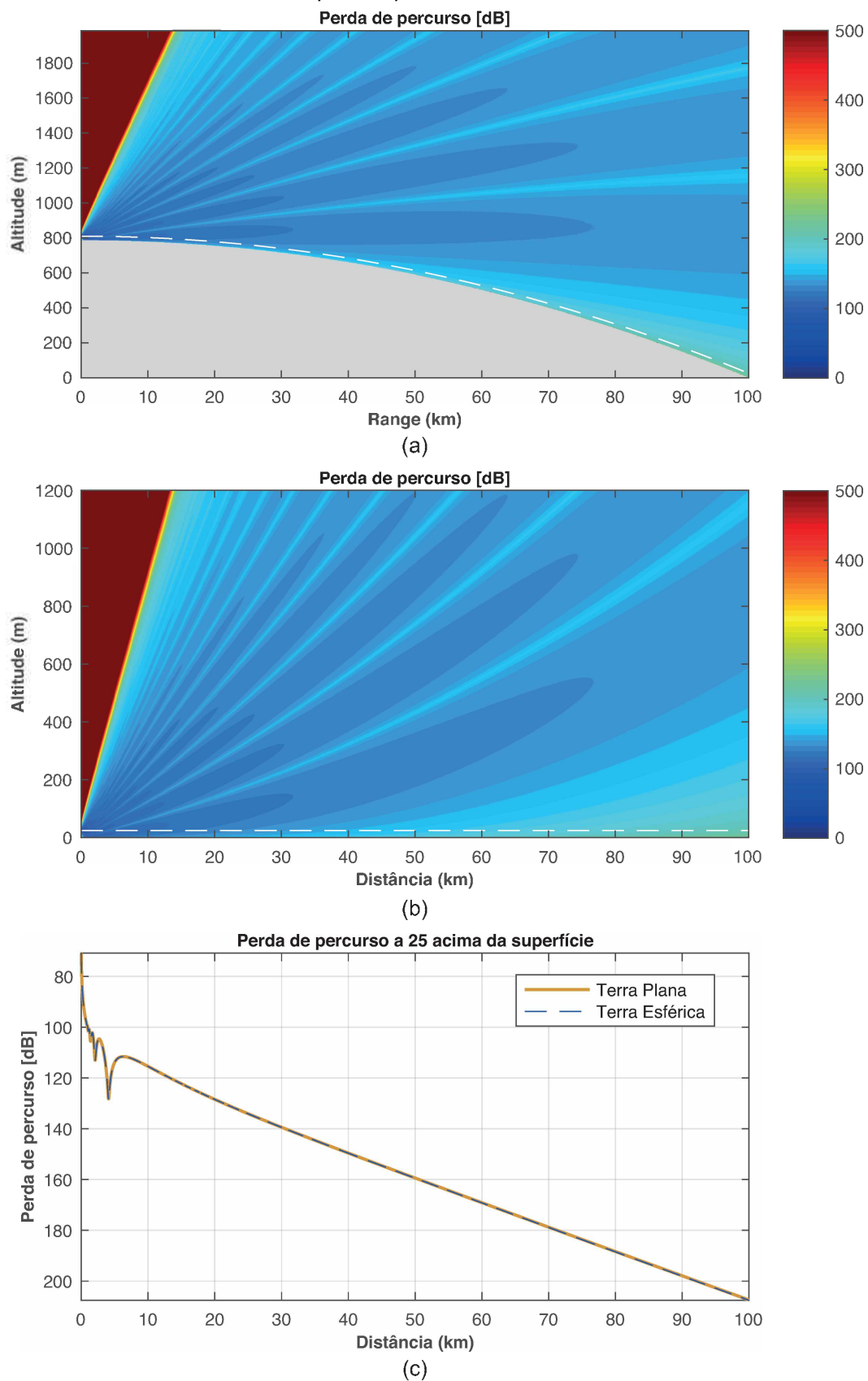
Figura 110 – Fator de propagação para (a) Terra explícita e (b) Terra plana.



Fonte: Elaborada pelo autor.

A Figura 111 a seguir mostra a perda de percurso calculada pelos dois métodos. Além disso, ela traz uma comparação da perda de percurso medida a 25 m acima da superfície terrestre ao longo de toda a extensão calculada. Obviamente, para o caso de Terra esférica, isso é medido ao longo de uma superfície curva, como mostra a linha branca tracejada da Figura 111(a). Para o caso de Terra plana, esses pontos são representados por uma linha reta horizontal, como a linha branca tracejada da Figura 111(b). A Figura 111(c) mostra os valores obtidos ao longo desses caminhos. Isso mostra o poder da transformação para Terra plana, pois os resultados são idênticos e trabalhar com Terra plana é muito mais fácil do que lidar com representação explícita de terreno.

Figura 111 – Perda de percurso para (a) Terra explícita, (b) Terra plana e (c) a 25 m acima da superfície para os 2 métodos.



Fonte: Elaborada pelo autor.

8.7 Considerações Finais

O propósito desse capítulo foi apresentar alguns testes canônicos de VV&C e exemplos da utilização do método de equações parabólicas. Foram apresentados vários casos, como em guias de onda, diversas situações de atmosfera e até comparações com dados reais medidos experimentalmente. Todos os programas utilizados nesse capítulo podem ser encontrados no Apêndice D.

Ficou claro, ao longo do capítulo, que o método de equações parabólicas é muito satisfatório para tratamento de situações de propagação a longas distâncias e em que é possível desconsiderar o retroespalhamento. Em situações de curtíssima distância, como os guias de onda, o método não é tão próximo da solução analítica, mas o WAPE ainda consegue uma representação razoável do problema. Conforme as distâncias de propagação aumentam, os métodos PE se tornam mais precisos e, praticamente, o método de ângulo estreito fica tão bom como o método de ângulo amplo.

Também foi possível verificar a capacidade do método de equações parabólicas em tratar diversos tipos de variações atmosféricas, comparando com a solução analítica ou traçado de raios. Além disso, um importante caso mostrou a capacidade de tratar superfícies com impedâncias diferentes de condutor perfeito, como no caso do efeito recuperação. Os resultados obtidos com o método são muito parecidos com os resultados calculados pelo teorema da compensação e com os resultados experimentais de Millington e Isted. Finalmente, ainda foi apresentado um caso que mostrou quão eficaz é a transformação para Terra plana. Essa conversão produziu resultados idênticos aos resultados quando a Terra esférica foi considerada, entretanto, é muito mais simples se trabalhar com Terra plana.

Agora que o método de equações parabólicas já foi apresentado, verificado e exemplificado, os próximos capítulos tratam da aplicação desse método, juntamente com o método de Bullington para aplicações sobre terrenos irregulares em regiões rurais. A seguir são, então, apresentadas a metodologia utilizada no trabalho e os resultados obtidos.

9 METODOLOGIA PROPOSTA

9.1 Introdução

Nos capítulos 2, 4 e 5, foram discutidos muitos aspectos físicos sobre a propagação de ondas e, também, alguns modelos de cálculo de perda de propagação foram apresentados. A partir dessa fundamentação teórica, este capítulo traz a formulação de um novo modelo de propagação híbrido para ser aplicado em regiões rurais de terreno irregular.

9.2 Modelagem de Perda de Percurso

A modelagem de perda de percurso é um dos aspectos mais importantes no projeto e análise de sistemas de comunicação sem fio. Como discutido em detalhes no Capítulo 6, isso requer alto conhecimento de modelagem física, solução numérica, procedimentos de VV&C e parametrização e otimização baseada na experimentação. Além disso, uma boa modelagem numérica de problemas eletromagnéticos engloba os seguintes passos:

1. Definição e modelagem física do problema (equações de Maxwell);
2. Modelagem numérica e discretização (código de computador);
3. Introdução de parâmetros (geometria, condições de contorno, parâmetros ambientais);
4. Execução;
5. Apresentação de resultados.

No Capítulo 6 foram citados vários métodos conhecidos para geração da modelagem numérica (Método dos Momentos, Equações Parabólicas, Matriz de Linha de Transmissão, entre outros). De maneira especial, este trabalho propõe uma modelagem da propagação troposférica sobre terrenos irregulares utilizando o método de equações parabólicas, definido no Capítulo 7 e demonstrado no Capítulo 8.

Também já foi discutido que é preciso experiência e percepção para escolher qual tipo de modelagem utilizar para cada aplicação. Apesar de fornecer resultados muito acurados, a modelagem e simulação muito completas e refinadas podem se tornar obscuras, muito difíceis e consumir tempo e recursos computacionais em

excesso. Portanto, a métrica utilizada neste trabalho é de se buscar um modelo simples e efetivo para a predição de perda de propagação de larga escala em ambientes rurais de terreno irregular.

9.3 Formulação do Método

A partir de toda a fundamentação teórico-física sobre propagação apresentada nos capítulos iniciais, é possível estabelecer que um bom modelo de predição de perda de propagação de larga escala em ambientes rurais de terreno irregular deve considerar, a rigor, um sem número de fenômenos físicos. Pode-se citar: propagação troposférica, espalhamento troposférico, ondas de superfície, reflexões, difração, retroespalhamento, atenuação por chuva, neve, vegetação, entre vários outros.

Um modelo que considere todos esses e mais efeitos é altamente desejado por qualquer engenheiro de telecomunicações. Entretanto, a modelagem conjunta de todos esses aspectos é, praticamente, impossível ou extremamente difícil de se fazer.

Primeiramente, é muito difícil estabelecer uma fundamentação matemática com todos esses efeitos. Provavelmente, tal modelagem analítica seria demasiado complexa e envolveria diversas funções sem solução analítica ou até transcendentais.

Em segundo lugar, um modelo tão completo assim provavelmente teria desafiadora implementação/codificação, pois é raro se ter um modelo numérico (FEM, PE, MoM, ...) que representa bem vários fenômenos físicos diferentes. Em geral, cada modelo numérico é bom para um tipo de fenômeno. Por exemplo, o MoM é mais robusto para problemas de radiação, enquanto o FDTD é ideal para situações de excitação banda larga ou de pulso.

Pensando de maneira pragmática e utilizando a métrica do modelo mais simples, mas efetivo, é desejável buscar alternativas para se fazer a predição de perda de propagação nesses ambientes tão complexos. Nos capítulos anteriores de fundamentação teórica, foi visto que a propagação nos ambientes é classificada de acordo com os fenômenos que são mais expressivos.

A partir de tudo o que foi estudado, é possível dizer que, em cenários de propagação em VHF e UHF sobre terrenos irregulares, os mecanismos de

propagação mais expressivos são a propagação no espaço livre, a atenuação troposférica e a propagação por difração. Nessas bandas de frequência, as características elétricas do solo exercem pouca influência e este pode ser considerado como perfeitamente condutor, principalmente acima de 100, 200 MHz. Além disso, as irregularidades do terreno fazem com que as reflexões sejam difusas, em vez de especulares. Assim, o terreno se comporta como um difusor (espalhador) e a energia eletromagnética refletida é dispersa e pouco contribui na intensidade do sinal recebido. Por outro lado, o sombreamento devido às irregularidades mais expressivas causa grande atenuação e deve ser considerado, bem como as variações de refratividade, que alteram os percursos dos raios.

Visto esses mecanismos mais importantes nesse cenário, percebe-se, imediatamente, que o modelo de equações parabólicas é ideal para seu tratamento. Nos Capítulos 7 e 8 foi mostrado que esse método pode lidar com todos esses efeitos: propagação no espaço livre, irregularidades troposféricas e modelagem de terreno.

Entretanto, como se busca uma modelagem simples, ainda é necessário mais uma simplificação. O tratamento de terrenos irregulares pelo método de equações parabólicas é um pouco complicado. Pelo método de diferenças finitas, a geometria do terreno é incorporada com maior facilidade, mas terrenos com porções íngremes exigem malhas de discretização muito refinadas, o que aumenta a complexidade computacional. Por outro lado, o método SSPE não requer malhas tão refinadas, mas precisa de artifício mais complexos como mapas conformais e transformadas de Fourier mistas para lidar com as fronteiras irregulares do terreno.

Portanto, frente à tal dificuldade no tratamento do terreno, traz-se à memória um artifício muito utilizado na engenharia elétrica: a superposição de efeitos. Embora todos os efeitos de propagação devessem ser tratados simultânea e unicamente, isso esbarra em complicações. Com isso, o modelo proposto aqui separa os mecanismos de propagação e utiliza a superposição de seus efeitos computados separadamente. Isso torna a modelagem e a implementação muito mais fáceis, porém há uma perda de acurácia e requer certos ajustes. Entretanto, para aplicações de larga escala e grandes distâncias, podem fornecer resultados muito interessantes.

O modelo proposto considera, então:

- propagação no espaço livre;
- efeitos atmosféricos (refratividade, curvatura de raios, efeitos de dutos e curvatura da Terra); e
- perdas no terreno por difração.

A propagação no espaço livre é tratada por meio da equação de Friis, a propagação troposférica é tratada pelo método de equações parabólicas e as perdas no terreno são incorporadas pelo método de Bullington. Então, a proposta inicial é um modelo híbrido de equações parabólicas e Bullington em que a perda de propagação total é dada pela superposição de efeitos de acordo com a Equação (9.1).

$$L = L_{FS} + L_{PE} + L_B \quad (9.1)$$

em que L_{FS} é a perda no espaço livre, definida nas Seções 3.6.1 e 4.3, L_{PE} é a perda devido à troposfera resultado do método de equações parabólicas, definida na Seção 7.11 e L_B é a perda de propagação devido ao terreno irregular e calculada pelo método de Bullington, definido na Seção 5.4.1.

Agora, é necessário formalizar como deve ser feito o cálculo dos termos L_{FS} , L_{PE} e L_B .

9.3.1 Cálculo da perda no espaço livre

A perda de percurso no espaço livre deve ser calculada considerando o fator de perda no espaço livre da equação da transmissão de Friis definida na Equação (3.78). Portanto, tem-se a Equação (9.2).

$$L_{FS} = 20 \log_{10} \left(\frac{4\pi d}{\lambda} \right) \quad (9.2)$$

em que d é a distância de propagação em linha reta entre a antena transmissora e o ponto de recepção.

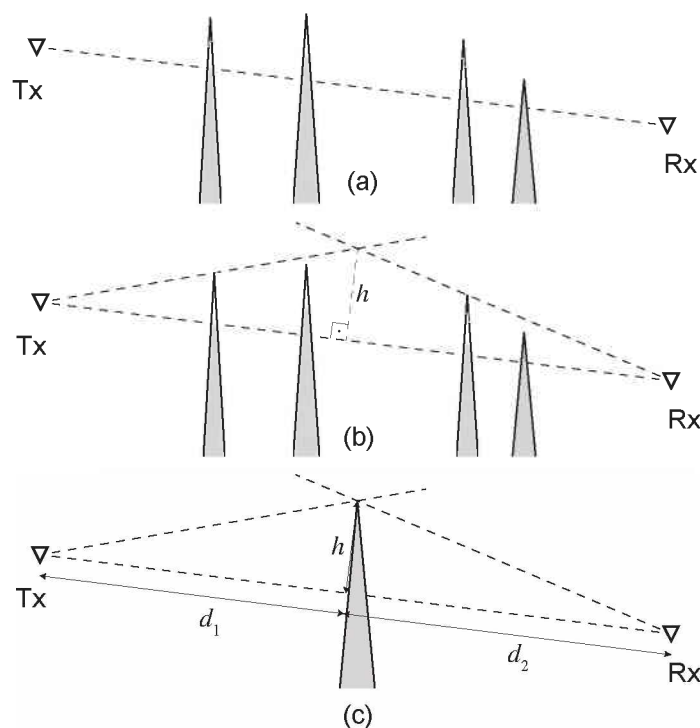
Essa perda funciona como uma perda básica e as perdas inerentes aos outros efeitos são como perdas adicionais além dessa perda da Equação (9.2).

9.3.2 Cálculo da perda por difração devido ao terreno irregular

Como proposto, as perdas por difração devem ser calculadas utilizando o modelo de Bullington. Como a perda no espaço livre funciona como uma perda básica, então é necessário utilizar o fator de propagação do modelo de Bullington.

O método proposto por Bullington substitui o terreno verdadeiro por um único gume de faca equivalente, que é colocado no ponto de interseção entre os raios de horizonte de cada terminal, de acordo com a Figura 112.

Figura 112 – Construção do equivalente de Bullington.



Fonte: Elaborada pelo autor.

O parâmetro de Fresnel-Kirchhoff do equivalente de Bullington é calculado de acordo com a Equação (9.3) e o fator de propagação, ou perda sobre a perda básica, é calculada pela Equação (9.4).

$$v = h \sqrt{\frac{2(d_1 + d_2)}{\lambda d_1 d_2}} \quad (9.3)$$

$$L_B = 20 \log_{10} \left| \left(\frac{1+j}{2} \right) \cdot \left[\frac{1}{2} - C(v) \right] - j \left[\frac{1}{2} - S(v) \right] \right| \quad (9.4)$$

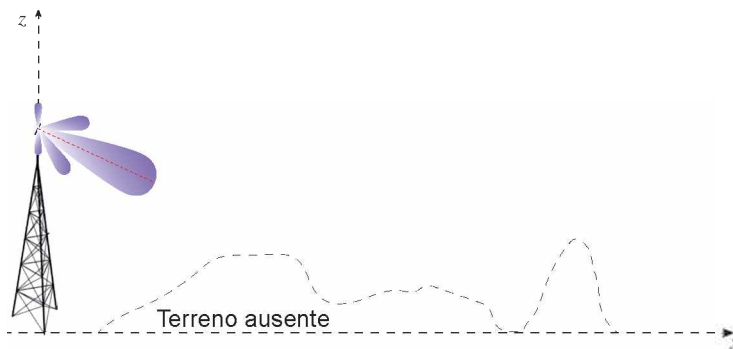
em que $C(v)$ e $S(v)$ são as integrais cosseno e seno de Fresnel, respectivamente.

9.3.3 Cálculo da perda troposférica pelo método de equações parabólicas

Posto que os efeitos de reflexão no solo serão desconsiderados no cenário de terreno irregular devido à característica difusora da superfície e que os efeitos de difração serão computados pelo método de Bullington, o modelo de equações parabólicas é utilizado para modelar apenas os fenômenos troposféricos. Para isso, o método apresentado no Capítulo 7 e exemplificado no Capítulo 8 deve ser levemente modificado.

Aqui, é preciso considerar a propagação na baixa atmosfera longe da presença de terreno e como se não existisse fronteiras superior e inferior. No método do Capítulo 7, já foram utilizadas camadas absorvedoras para “levar” a fronteira superior para o infinito e, agora, também será necessário fazer o mesmo com a fronteira inferior do domínio. A Figura 113 ilustra o cenário desejado para aplicação do método e a Figura 114 mostra o cenário computacional equivalente ao físico.

Figura 113 – Cenário para aplicação para cálculo das perdas troposféricas.



Fonte: Elaborada pelo autor.

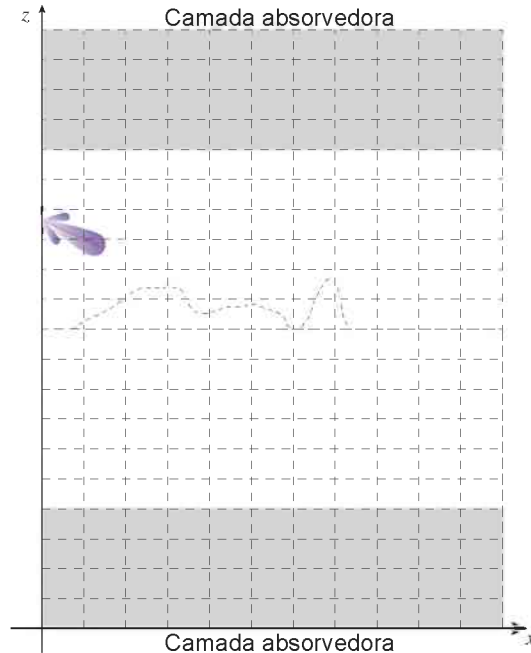
A principal modificação necessária é, portanto, adicionar, também, uma camada absorvedora na fronteira inferior. Desse modo, simula-se a condição de radiação de Sommerfeld na base e no topo do domínio.

A partir desse ponto, basta aplicar o método de equações parabólicas considerando o perfil de atmosfera desejado. Após se ter o resultado da componente de campo em todos os pontos do domínio, é necessário calcular o fator de propagação correspondente no ponto de recepção por meio da Equação (9.5).

$$L_{PE} = 20 \log_{10} |u(x_{Rx}, z_{Rx})| - 10 \log_{10} \left[a e^{\frac{z_{Rx}}{a}} \sin \left(\frac{x_{Rx}}{a} \right) \right] + 10 \log_{10} (\lambda_0) + 10 \log_{10} (x_{Rx}^2 + z_{Rx}^2) \quad (9.5)$$

em que (x_{Rx}, z_{Rx}) é o ponto de recepção e a é o raio da Terra.

Figura 114 – Domínio computacional equivalente para o cenário da Figura 113.



Fonte: Elaborada pelo autor.

9.3.4 Refinamento do modelo

Obviamente, considerar apenas os efeitos de propagação mais expressivos, a separação das perdas e sua superposição incorre em certos erros e o modelo requer algum ajuste. Além disso, no Capítulo 5, o método de Bullington é considerado otimista quando utilizado sozinho para a predição de perda de percurso, pois ele converte todo o terreno real em um gume de faca equivalente. Desse modo, atenção especial deve ser gasta para refinar os resultados e, aqui, é previsto um fator de correção para o modelo, fazendo com que a Equação (9.1) se torne a Equação (9.6).

$$L = L_{FS} + L_{PE} + L_B + C(.) \quad (9.6)$$

em que $C(.)$ é o fator de correção a ser estudado.

Entretanto, melhor discernimento sobre a forma dessa correção só pode ser obtido em procedimentos VV&C do modelo proposto. Por isso, esse fator de

correção já previsto aqui é melhor discutido após a apresentação dos primeiros resultados. Assim, é possível entender o seu comportamento.

9.4 Considerações Finais

Após toda a fundamentação teórica e outras observações dos capítulos anteriores, foi proposto um método diferente para realizar o cálculo da perda de propagação em regiões rurais de terrenos irregulares nas faixas VHF e UHF. O modelo proposto foi baseado no princípio de superposição de efeitos e na separação de perdas.

Com isso, chegou-se a uma modelagem híbrida que utiliza propagação no espaço livre, propagação troposférica pelo método PE e perdas por difração pelo método de Bullington. Além disso, já foi previsto que pode existir certa quantidade de erros entre as predições realizadas com esse novo modelos e a realidade. Por isso, foi adicionado um termo de correção, que é definido e discutido no Capítulo 11.

10 PACOTE PARA PREDIÇÃO DE INTENSIDADE DE SINAL

10.1 Introdução

Para estudar e verificar o comportamento do modelo de perda de propagação proposto no Capítulo 9, é necessário realizar vários testes em diferentes cenários. No entanto, seria uma atividade muito árdua realizar todas essas operações manualmente, por isso foi necessário implementar um programa computacional capaz de realizar essas tarefas. Além de ferramenta para aplicação do método, esse pacote é um resultado deste trabalho e pode ser encontrado no Anexo D.

Foi desenvolvido um programa, na plataforma MATLAB®, capaz de realizar todos os procedimentos necessários para o cálculo da perda de propagação sobre áreas rurais de terrenos irregulares por meio do método proposto. Esses procedimentos vão desde a obtenção do perfil do terreno, passam pelo cálculo de parâmetros do sistema radiante e culminam com o cálculo da atenuação total entre o transmissor e um ponto de recepção. Nesse sentido, o objetivo deste capítulo é apresentar o programa desenvolvido, bem como descrever seus princípios de funcionamento e modo de utilização.

10.2 O MATLAB®

O MATLAB® é um *software* de alto desempenho destinado a fazer cálculos com matrizes (*MATrix LABoratory*). Sua linguagem matricial o torna muito parecido com a maneira como as pessoas tratam as operações matemáticas. Assim, ao contrário de outras linguagens de programação, como FORTRAN, Pascal ou C, os comandos do MATLAB® são mais próximos da forma como se escreve expressões algébricas, tornando mais simples o seu uso.

Atualmente, o MATLAB® é definido como um sistema interativo e uma linguagem de programação de alto nível para computação técnica e científica em geral. Ele integra a capacidade de fazer cálculos, visualização gráfica e programação em um mesmo *software*.

Devido à facilidade do MATLAB® em implementar operações algébricas e gerar visualizações de resultados, ele foi escolhido para o desenvolvimento do *software* deste trabalho. Mas, de qualquer maneira, tudo o que foi desenvolvido

pode ser facilmente convertido para outra linguagem de programação mais rápida, como o C.

10.3 Funcionamento Geral do Programa

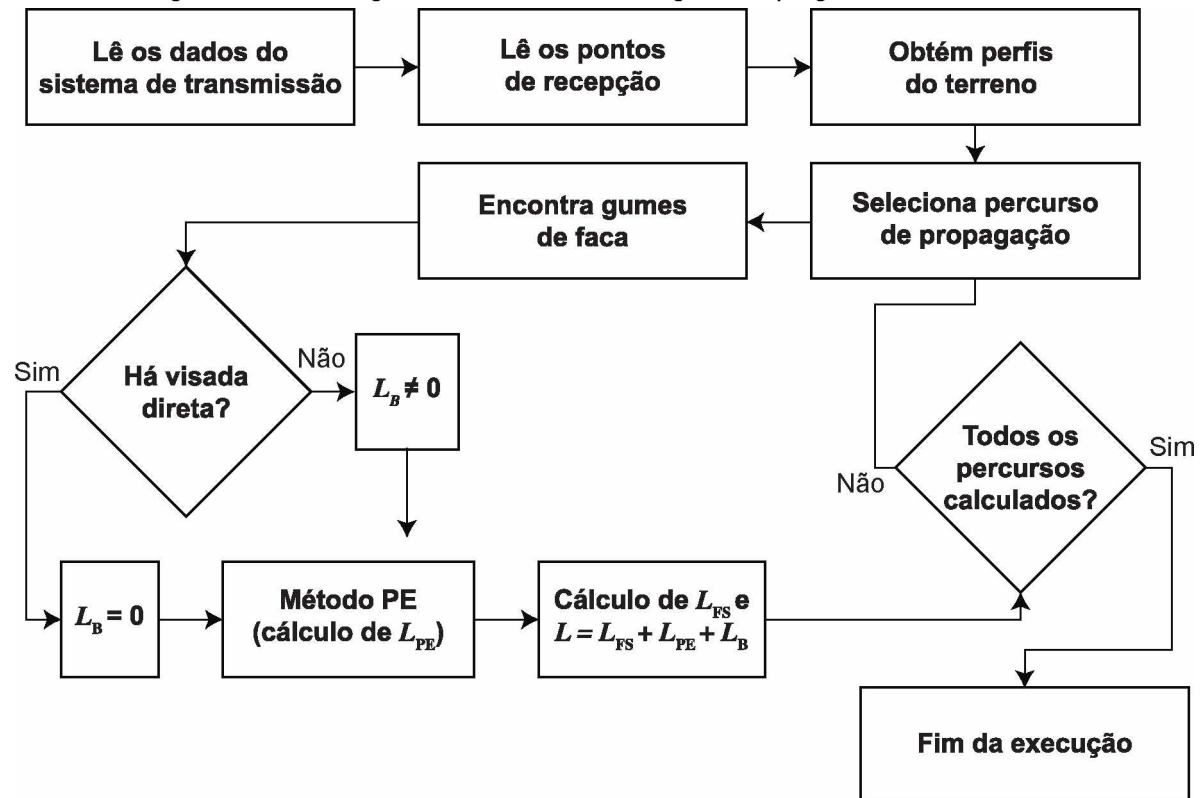
Esta seção tem o objetivo de detalhar o funcionamento geral do programa desenvolvido. O funcionamento de procedimentos mais específicos será tratado mais adiante, nas respectivas seções.

O programa implementado realiza as seguintes tarefas básicas:

1. Lê, em um arquivo, os dados do sistema de transmissão;
2. Lê, em outro arquivo, todos os pontos onde se deseja calcular a perda de propagação;
3. Obtém os perfis verticais do terreno entre o ponto de transmissão (estação base) e os vários pontos de recepção informados no arquivo;
4. Converte os perfis de terreno em séries de gumes de faca para encontrar o equivalente de Bullington;
5. Realiza o cálculo da atenuação por difração por meio do método de Bullington;
6. Realiza o cálculo da atenuação troposférica por meio do método de equações parabólicas;
7. Calcula a perda básica no espaço livre;
8. Encontra a atenuação total como uma combinação das três componentes e da correção apropriada;
9. Encontra a potência recebida e salva os resultados em arquivo.

Conforme mostra a Figura 115, o programa salva os resultados da atenuação para cada percurso de propagação. Dessa maneira, os resultados podem ser utilizados posteriormente, sem necessidade de executar o *software* novamente. Isso é interessante, pois os resultados ficam disponíveis para quaisquer outros tipos de análises que o usuário queira fazer.

Figura 115 – Fluxograma do funcionamento geral do programa desenvolvido.



Fonte: Elaborada pelo autor.

As seções seguintes descrevem, mais detalhadamente, os processos gerais mostrados nos itens 1 a 9 da Seção 10.3 e na Figura 115.

10.4 Informações do Sistema de Transmissão

Para realizar o cálculo da perda de propagação e, conseqüentemente, da potência recebida, são necessárias várias informações, como descrito a seguir:

- Localização do transmissor;
- Altura do centro de radiação da antena transmissora;
- Altura da antena receptora;
- Frequência de operação;
- Comprimento da linha de transmissão entre o rádio e a antena transmissora;
- *Datasheet* da linha de transmissão;
- Perdas acessórias;
- Potência de operação do rádio;
- Diagrama de azimuth da antena transmissora;
- Diagrama de elevação da antena transmissora;

- *Beam-tilt* da antena transmissora;
- Azimute da antena transmissora;
- Ganho da antena transmissora;
- Polarização utilizada.

A **localização da antena transmissora** é fundamental, pois o programa irá obter os perfis de terreno entre esse ponto e todos os pontos de recepção. Ela deve ser informada como coordenadas geográficas decimais (ex.: -18.4236 -48.7843). Os valores de latitude devem estar no intervalo $[-90^\circ \ 90^\circ]$ e, os de longitude, no intervalo $[-180^\circ \ 180^\circ]$.

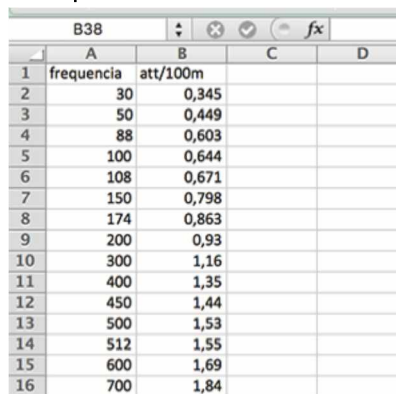
A **altura do centro de radiação da antena transmissora** e a **altura da antena receptora** também são importantes parâmetros. Elas correspondem à altura do centro geométrico da antena a partir do solo e devem ser informadas em metros.

A **frequência de operação** também é parâmetro obrigatório e deve ser informada em MHz.

O **comprimento da linha de transmissão** é importante para calcular a eficiência da linha e, portanto, a AEIRP do sistema de radiação. Esse parâmetro deve ser informado em metros.

O **datasheet da linha de transmissão** contém as informações sobre a atenuação da linha em função da frequência. Esses valores são utilizados para calcular a eficiência da linha de transmissão na frequência informada pelo usuário. O *datasheet* deve ser um vetor bidimensional com os valores de frequência, em MHz, em ordem crescente e com os valores respectivos da atenuação, em dB/100m. A Figura 116 mostra um exemplo de um arquivo com esses dados.

Figura 116 – Exemplo de *datasheet* de linha de transmissão.



	A	B	C	D
1	frequencia	att/100m		
2	30	0,345		
3	50	0,449		
4	88	0,603		
5	100	0,644		
6	108	0,671		
7	150	0,798		
8	174	0,863		
9	200	0,93		
10	300	1,16		
11	400	1,35		
12	450	1,44		
13	500	1,53		
14	512	1,55		
15	600	1,69		
16	700	1,84		

Fonte: Elaborada pelo autor.

As **perdas acessórias** representam as perdas em conectores, divisores de potência, entre outros acessórios utilizados no sistema de transmissão. São utilizadas no cálculo da eficiência da linha e devem ser informadas em dB. Um valor típico é 1 dB.

A **potência de operação do rádio** é utilizada no cálculo da AEIRP do sistema radiante e deve ser informada em kW.

O **diagrama de azimuth e de elevação da antena transmissora** são os parâmetros que consideram a diretividade da antena e são utilizados para calcular a AEIRP na direção de recepção. Esses diagramas devem ter o seguinte padrão: um vetor bidimensional com o azimuth (ou ângulo de elevação), em graus, em ordem crescente e os respectivos valores de $E/E_{\text{máx}}$. A Figura 117 exemplifica isso.

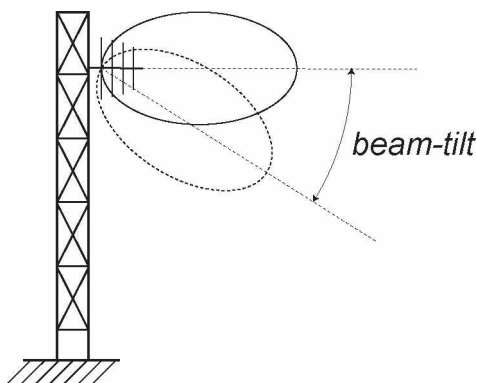
Figura 117 – Exemplo de diagrama de radiação.

E37				
	A	B	C	D
1	grau	E/E _{max}		
2	0	1		
3	5	1		
4	10	1		
5	15	0,99		
6	20	0,99		
7	25	0,99		
8	30	0,99		
9	35	0,99		
10	40	0,99		
11	45	0,99		
12	50	0,99		
13	55	0,98		
14	60	0,97		
15	65	0,96		
16	70	0,95		
17	75	0,93		
18	80	0,92		

Fonte: Elaborada pelo autor.

O **beam-tilt**, ou inclinação de feixe, indica o ângulo, em graus, que a antena está inclinada em relação à direção de sua polarização. A Figura 118 mostra o **beam-tilt** para uma antena com polarização horizontal.

Figura 118 – Ilustração do **beam-tilt** para antena com polarização horizontal.



Fonte: Formulário de informações técnicas da ANATEL [128].

O **azimute da antena transmissora** indica o ângulo compreendido entre o 0° do diagrama de azimute da antena e o norte verdadeiro. A partir desse parâmetro, o programa pode determinar para qual direção a antena está apontada e isso é imprescindível para a qualidade dos resultados. Esse valor deve ser informado em graus.

O **ganho da antena transmissora** é um importante parâmetro utilizado no cálculo da sua AEIRP. Esse valor deve ser especificado em dBi.

10.5 Obtenção dos Dados do Terreno

Na lista de tarefas básicas executadas pelo programa, mostrada na Seção 10.3, a terceira tarefa é a obtenção dos dados do perfil do terreno. Esta, geralmente, não é uma tarefa muito simples e requer certa atenção. A Seção 5.6 deste trabalho discutiu, de maneira mais aprofundada, como deve ser essa coleta de dados.

Para obter os dados do terreno, foram pensadas, a priori, duas possibilidades bastante escaláveis: obtenção de dados topográficos com o Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) ou por meio do *Google Elevation API* (sistema de dados de elevação do *Google*). A primeira opção foi descartada devido à dificuldade de utilização dos dados. O INPE disponibiliza-os distribuídos em arquivos de texto “.txt”, cada um com mais de 2 milhões de linhas, totalizando mais de 53 Gb (*gigabytes*) de dados. Além disso, eles são apenas do território nacional.

Logo, a opção escolhida foi o sistema do *Google*, devido, principalmente, às seguintes características:

- facilidade na manipulação dos dados;
- utilização dos dados sob demanda;
- não é necessário grande espaço de armazenamento, pois os dados estão armazenados nos servidores do *Google*.

Uma vez escolhida a fonte de dados do perfil do terreno, um dos desafios deste trabalho foi implementar, no MATLAB®, a coleta automática dos dados do terreno no *Google Elevation API*. Isso é mostrado a seguir.

A *Google Elevation API* é uma interface de consulta de dados de elevação em todos os locais da superfície terrestre, inclusive locais no fundo do oceano (representados por valores negativos de altitude). Nos casos em que a API não

possui medidas de elevação exatas do local solicitado, o serviço realiza uma interpolação com os quatro locais mais próximos e retorna um valor médio [129].

Apesar do serviço *Google Elevation API* ser bom, foi encontrada uma dificuldade: o acesso gratuito permite apenas 2500 solicitações de altitude por dia. Para aumentar essa cota, existem duas opções: adquirir uma licença empresarial com custo de mais de 16.000 dólares/ano, o que é inviável, ou utilizar um serviço do tipo *pay as you go*. Nessa última opção, que foi utilizada, o usuário pode continuar realizando solicitações após ultrapassar a cota gratuita e paga \$0,50 a cada 1000 solicitações excedidas. Isso foi feito para obter, uma única vez, todos os dados de terreno que foram utilizados. Após essa primeira obtenção, os dados foram salvos em arquivo para utilização posterior.

API é a sigla de *Application Programming Interface* (Interface de Programação de Aplicativos). Uma API é um conjunto de rotinas e padrões estabelecidos por um *software* para a utilização das suas funcionalidades por aplicativos que não pretendem entrar nos detalhes da sua implementação, mas apenas usar seus serviços, como neste trabalho. O foco é utilizar apenas o serviço que o sistema oferece, não importando o modo que ele obtém e disponibiliza os dados.

De modo geral, uma API é composta por uma série de funções acessíveis somente por linhas de código. No contexto de desenvolvimento *Web*, uma API é um conjunto definido de mensagens de requisição e resposta HTTP (*Hypertext Transfer Protocol*), geralmente expresso nos formatos XML (*eXtensible Markup Language*) ou JSON (*JavaScript Object Notation*).

10.5.1 Limites de Uso

O uso dessa API está sujeito a um limite de 2500 solicitações gratuitas por dia, mas usuários da versão empresarial ou *pay as you go* podem enviar até 100.000 solicitações diárias. Em cada solicitação, é possível consultar a elevação de até 512 locais, contanto que o total de 25000 locais por dia não seja excedido (ou um milhão de locais para os usuários da versão empresarial ou *pay as you go*).

Tal limite é aplicado para evitar o uso abusivo e/ou indevido da API e pode ser alterado sem aviso prévio. Além disso, há um limite de 10 solicitações/segundo para evitar o uso intenso do serviço. Se o limite diário for excedido ou for detectado uso abusivo do serviço, a *Google Elevation API* pode parar de funcionar

temporariamente para o endereço IP “abusador”. Caso o limite continue sendo excedido, o acesso à *Google Elevation API* poderá ser bloqueado [129].

10.5.2 Solicitações

A *Google Elevation API* retorna dados para consultas de pontos individuais com a maior precisão possível. Consultas em lote, que contém diversos locais, podem retornar dados com menor precisão, especialmente se os locais estiverem muito espalhados.

Existem duas formas de especificar locais:

- Como um conjunto de um ou mais locais (*locations*);
- Como uma série de pontos conectados ao longo de um caminho (*path*).

As duas abordagens utilizam coordenadas de latitude/longitude em formato decimal para identificar os locais ou caminhos. Um URL (*Uniform Resource Locator*) típico de requisição da *Google Elevation API* segue o seguinte formato: <http://maps.googleapis.com/maps/api/elevation/outputFormat?parameters>.

10.5.3 Formatos de Saída

Os formatos de saída são especificados através do sinalizador de serviço no final do URL da solicitação. Atualmente, a *Google Elevation API* oferece suporte aos seguintes formatos de saída:

- */json*: retorna resultados em um objeto JSON;
- */xml*: retorna resultados em XML, envolvidos em um nó com nome `<ElevationResponse>`.

As solicitações para a *Google Elevation API* utilizam diferentes parâmetros, dependendo se a solicitação for para locais isolados ou para um caminho ordenado. Para locais isolados, as solicitações de elevação retornam os dados nos locais específicos transmitidos na solicitação. Para caminhos, as respostas às solicitações são amostras de elevação ao longo do caminho em questão [129].

10.5.4 Parâmetros

Assim como ocorre em todos os URL's padrão, os parâmetros são separados utilizando-se o caractere "e" comercial (&). A lista de parâmetros e seus possíveis valores é mostrada a seguir [129].

Solicitações de posição:

- **locations** (obrigatório): define os locais da Terra para os quais os dados de elevação devem ser retornados. Esse parâmetro utiliza um único local como um par {latitude,longitude} separado por vírgula (por exemplo, "40.714728,-73.998672") ou vários pares latitude/longitude transmitidos como uma matriz ou como uma polilinha codificada [129].

Solicitações de caminho:

- **path** (obrigatório): define um caminho na Terra para o qual os dados de elevação devem ser retornados. Esse parâmetro define um conjunto de dois ou mais pares {latitude,longitude} ordenados que definem um caminho na superfície da Terra. Deve ser usado junto com o parâmetro **samples** descrito a seguir [129].
- **samples** (obrigatório): especifica o número de pontos em um caminho para os quais os dados de elevação devem ser retornados. O parâmetro **samples** divide o comprimento do **path** fornecido em um conjunto ordenado de pontos equidistantes [129].

10.5.5 Especificando locais

As solicitações de posição são indicadas por meio do parâmetro **locations**. Ele pode utilizar os seguintes argumentos:

- Uma única coordenada: **locations=40.714728,-73.998672**;
- Uma matriz de coordenadas separadas pelo caractere de barra vertical ("|"): **locations=40.714728,-73.998672|-34.397,150.644**;
- Um conjunto de coordenadas codificadas usando o Algoritmo da polilinha codificada: **locations=enc:gfo}EtohhU**.

Os valores de latitude e longitude devem corresponder a um local válido na superfície da Terra. As latitudes e longitudes podem estar nos intervalos $[-90^\circ \ 90^\circ]$ e $[-180^\circ \ 180^\circ]$, respectivamente. Se for especificado um valor de latitude ou longitude inválido, a solicitação será rejeitada e um erro, retornado [129].

10.5.6 Especificando Caminhos

As solicitações de caminho são indicadas pelo uso dos parâmetros `path` e `samples`. Assim como ocorre nas solicitações de posição que utilizam o parâmetro `locations`, o parâmetro `path` especifica um conjunto de valores de latitude e longitude. No entanto, diferentemente de uma solicitação de posição, o `path` especifica um conjunto ordenado de vértices. Em vez de retornar dados de elevação apenas nos vértices, as solicitações de caminho têm amostragem ao longo do comprimento do percurso, dependendo do número de `samples` especificado [129].

O parâmetro `path` pode utilizar os seguintes argumentos:

- Uma matriz de coordenadas separadas por vírgula usando o caractere de barra vertical ("`|`"): `path=40.714728,-73.998672|-34.397,150.644`;
- Coordenadas codificadas usando o Algoritmo da polilinha codificada: `path=enc:gfo}EtohhUxD@bAxJmGF`.

10.5.7 Respostas da Google Elevation API

Para cada solicitação válida, o serviço da *Google Elevation API* retorna uma resposta de elevação no formato indicado no URL da solicitação. Cada resposta terá os seguintes elementos [129]:

- Um código de status da *Google Elevation API*, que pode ser um dos seguintes:
 - `OK`: indica que a solicitação da API foi concluída;
 - `INVALID_REQUEST`: indica que a solicitação da API estava incorreta;
 - `OVER_QUERY_LIMIT`: indica que o solicitante excedeu a cota;
 - `REQUEST_DENIED`: indica que a API não concluiu a solicitação;
 - `UNKNOWN_ERROR`: indica um erro desconhecido.
- Uma matriz de `results` contendo os seguintes elementos:
 - Um elemento `location` (contendo elementos `lat` e `lng`) da posição para a qual os dados de elevação foram calculados. Para solicitações de caminho, o conjunto de elementos `location` terá pontos de amostragem ao longo do caminho;
 - Um elemento `elevation`, que indica a elevação do local em metros;

- Um valor **resolution**, que indica a distância máxima entre pontos de dados a partir dos quais a elevação foi interpolada, em metros. Esta propriedade estará ausente se a resolução não for conhecida. Os dados de elevação tornam-se mais aproximados (valores maiores de **resolution**) quando são informados diversos pontos. Para obter o valor de elevação mais preciso de um ponto, ele deve ser consultado de forma independente [129].

10.5.8 Exemplos

O exemplo a seguir solicita a elevação de Denver, Colorado no formato JSON:

```
http://maps.googleapis.com/maps/api/elevation/json?locations=39.7391536,-104.9847034
```

Resposta:

```
{
  "results" : [
    {
      "elevation" : 1608.637939453125,
      "location" : {
        "lat" : 39.73915360,
        "lng" : -104.98470340
      },
      "resolution" : 4.771975994110107
    }
  ],
  "status" : "OK"
}
```

O exemplo a seguir solicita dados de elevação de um **path** em linha reta. Foram pedidos três **samples** para incluir os dois pontos de extremidade e o ponto localizado na metade do caminho [129].

```
http://maps.googleapis.com/maps/api/elevation/json?path=36.578581,-118.291994|36.23998,-116.83171&samples=3
```

Resposta:

```
{
  "results" : [
    {
      "elevation" : 4411.941894531250,
      "location" : {
        "lat" : 36.5785810,
        "lng" : -118.2919940
      },
      "resolution" : 19.08790397644043
    },
    {
      "elevation" : 1381.861694335938,
      "location" : {
        "lat" : 36.41150289067028,
        "lng" : -117.5602607523847
      },
      "resolution" : 19.08790397644043
    },
    {
      "elevation" : -84.61699676513672,
      "location" : {
        "lat" : 36.239980,
        "lng" : -116.831710
      },
      "resolution" : 19.08790397644043
    }
  ],
  "status" : "OK"
}
```

A partir da descrição das funcionalidades da *Google Elevation API*, fica claro que é um serviço bastante útil na realização deste trabalho. De maneira geral, ela é usada, no programa desenvolvido, para obter os dados de elevação do local da antena transmissora e para obter os dados de elevação ao longo de um caminho que liga o transmissor e o receptor. Essas solicitações são feitas da seguinte maneira:

Para obter a altitude de apenas um ponto.

```
http://maps.googleapis.com/maps/api/elevation/json?locations=latitude_TX,longitude_TX
```

em que: `latitude_TX` e `longitude_TX` são as coordenadas do transmissor.

Para obter o perfil de um caminho entre dois pontos.

```
http://maps.googleapis.com/maps/api/elevation/json?path=latitude_TX,longitude_TX|latitude_RX,longitude_RX&samples=n_amostras
```

em que: `latitude_TX` e `longitude_TX` são as coordenadas do transmissor; `latitude_RX` e `longitude_RX` são as coordenadas do ponto de recepção; `n_amostras` é o número de amostras desejado para esse caminho (no máximo 512).

10.5.9 Interpretação dos dados obtidos

Como descrito anteriormente, os dados obtidos com a *Google Elevation API* podem estar em dois formatos diferentes, XML e JSON, a depender da escolha do usuário. No caso deste trabalho, foi selecionado o formato JSON.

O JSON é um formato leve de troca de dados que possui várias características atrativas. Ele é fácil de ler e escrever, para os seres humanos, e, para as máquinas, fácil de interpretar e gerar. Além disso, a sintaxe do JSON é baseada em texto e é completamente independente da linguagem de programação utilizada, pois usa convenções que são familiares às linguagens C e derivadas, incluindo C++, C#, Java, Java Script, Perl, Python, entre outras. Essas propriedades fazem com que o JSON seja ideal para troca de dados.

O JSON possui duas estruturas básicas para representar os dados:

- Objeto: uma coleção de pares nome/valor;
- Array: uma lista ordenada de valores.

Os nomes pertencentes aos objetos são formados por *strings* e os valores respectivos podem ser de vários tipos: *string*, *number*, *object*, *array*, *true*, *false*, *null*. Dessa maneira, o valor de um nome dentro de um objeto pode, também, ser um outro objeto ou um *array*. É importante ressaltar que as *strings* devem ser escritas entre aspas duplas. Ex.: "texto".

Um objeto é formado da seguinte maneira: é inicializado por chave "{", são colocados os pares "nome: valor", separados por "." e cada par é separado por vírgula ",". Após todos os pares, é finalizado por chave "}".

O código a seguir mostra um exemplo de objeto formado por dois pares nome/valor. Os nomes são *strings*, escritas entre aspas, ("cliente" e "valor") e os valores correspondentes são uma *string* ("Pedro Paulo") e um número (500).

```
{
  "cliente" : "Pedro Paulo",
  "valor" : 500
}
```

Um *array* é formado da seguinte maneira: é inicializado com colchete "[", os seus valores são separados por vírgula "," e o *array* é finalizado com colchete "]". Os valores de um *array* podem ser *string*, *number*, *object*, *array*, *true*, *false*, *null*.

O código a seguir mostra um exemplo de um *array* de *strings*.

```
[
  "banana",
  "uva",
  "pera"
]
```

Uma resposta típica da *Google Elevation API* para uma requisição de caminho é um objeto com dois pares nome/valor, os quais são "results": valor_results e "status": valor_status. O valor do nome "results" é um *array* de objetos do tamanho do número de *samples* escolhido. Cada objeto desse *array* contém três pares nome/valor: "elevation": valor_elevation, "location": valor_location e "resolution": valor_resolution. O valor do nome "location" é, por sua vez, um objeto com dois pares nome/valor: "lat": valor_lat e "lng": valor_lng.

O código a seguir exemplifica essa estrutura para *samples*=2:

```
{
  "results" : [
    {
      "elevation" : valor_elevation,
      "location" : {
        "lat" : valor_lat,
        "lng" : valor_lng
      }
    }
  ]
}
```

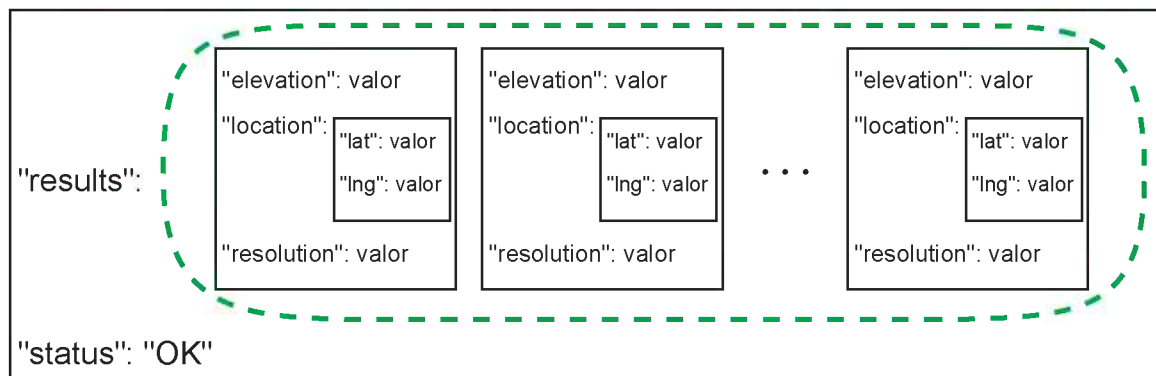
```

    },
    "resolution" : valor_resolução
  },
  {
    "elevation" : valor_elevação,
    "location" : {
      "lat" : valor_lat,
      "lng" : valor_lng
    },
    "resolution" : valor_resolução
  }
],
"status" : "OK"
}

```

A Figura 119 ilustra a resposta de uma requisição desse tipo. Nela, os retângulos representam objetos e o tracejado verde representa *array*.

Figura 119 – Representação esquemática de uma resposta da *Google Elevation API* a uma solicitação de caminho.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Apesar do objeto JSON recebido dos servidores do *Google* estar em um formato bem estruturado, como visto anteriormente, ele está em formato de texto. Na prática, o MATLAB® recebe o objeto JSON como um vetor de *char*. Por isso, então, esse vetor de *char* deve ser percorrido e interpretado corretamente para que os dados sejam extraídos e utilizados.

Para fazer isso, foi utilizada uma rotina, no MATLAB®, que percorre cada posição desse vetor de *char* e retorna um *struct* com os dados analisados e convertidos para as estruturas correspondentes. De posse dos dados já convertidos para um formato adequado ao MATLAB®, basta acessar as posições correspondentes do *struct* gerado para obter os dados desejados.

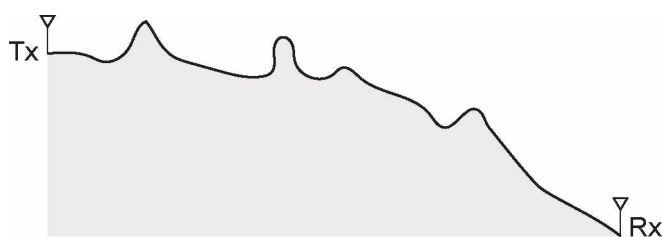
10.6 Representação por Gumes de Faca

De posse dos dados do perfil do terreno entre um ponto de transmissão e um ponto de recepção e as alturas das antenas transmissora e receptora, a próxima etapa é identificar os gumes de faca dessa topografia. Isso é realizado por um algoritmo muito simples que encontra, recursivamente, a obstrução do horizonte a partir de um ponto variável, chamado de *ponto atual* [130]. O algoritmo funciona da seguinte forma:

1. Inicializa o *ponto atual* como o ponto onde está a antena transmissora;
2. Encontra a obstrução do horizonte a partir desse ponto;
3. Busca, opcionalmente, por alguma obstrução de primeira zona de Fresnel entre o *ponto atual* e a obstrução encontrada no passo 2;
4. Move o ponto atual para o local da obstrução encontrada no passo 2 e repete o procedimento até que o receptor seja atingido.

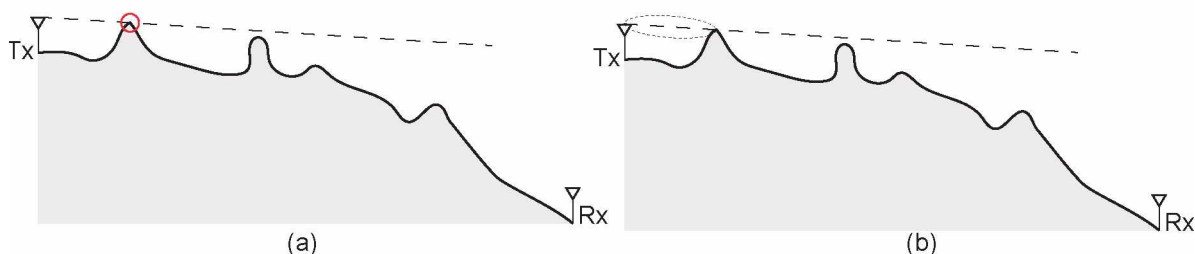
As Figuras 120 e 121 a 124 ilustram um exemplo de perfil de terreno e a aplicação do algoritmo que busca os gumes de faca, respectivamente.

Figura 120 – Exemplo de perfil de terreno



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 121 – Aplicação do algoritmo de busca de gumes de faca.

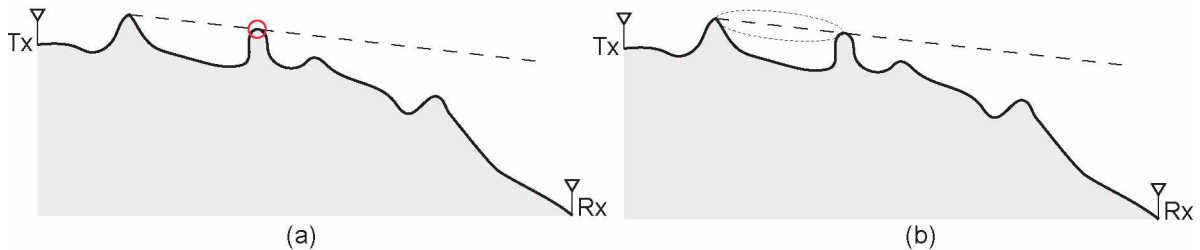


Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 121(a), o *ponto atual* é a antena transmissora. A partir desse ponto, o algoritmo encontra a obstrução do horizonte, indicada pela circunferência vermelha. Opcionalmente, o algoritmo busca por alguma obstrução de primeira zona de Fresnel entre o *ponto atual* e a obstrução encontrada. O resultado dessa busca,

mostrado na Figura 121(b), indica que não existe obstrução da primeira zona de Fresnel. Feito isso, o *ponto atual* passa a ser a obstrução encontrada na Figura 121(a) e o programa prossegue da mesma maneira.

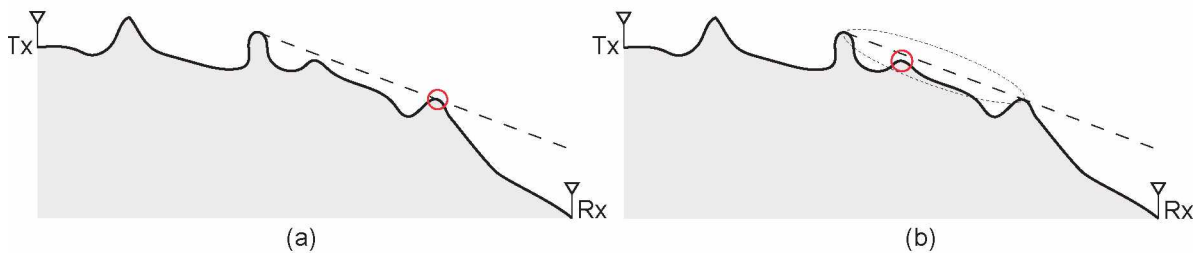
Figura 122 – Aplicação do algoritmo de busca de gumes de faca.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 122(a), o algoritmo encontra a nova obstrução do horizonte a partir do novo *ponto atual*, indicada pela circunferência vermelha. Então, o algoritmo busca, opcionalmente, por alguma obstrução de primeira zona de Fresnel entre o *ponto atual* e a obstrução que acabou de encontrar, como ilustra a Figura 122(b). Nessa busca, não foi encontrada nenhuma obstrução da primeira zona de Fresnel. Feito isso, o novo *ponto atual* passa a ser a obstrução encontrada na Figura 122(a) e é realizada mais uma iteração.

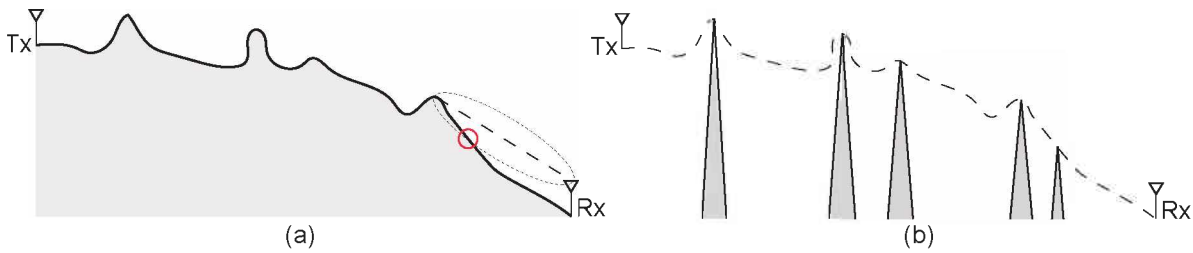
Figura 123 – Aplicação do algoritmo de busca de gumes de faca.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 123(a), o programa obtém a obstrução de horizonte a partir do novo *ponto atual*, mostrada na circunferência vermelha. Mais uma vez, opcionalmente, o algoritmo busca por alguma obstrução de primeira zona de Fresnel entre o *ponto atual* e a obstrução encontrada. A obstrução obtida é a circunferência vermelha mostrada na Figura 123(b). Prosseguindo, o novo *ponto atual* passa a ser a obstrução encontrada na Figura 123(a).

Figura 124 – Aplicação do algoritmo de busca de gumes de faca.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Na Figura 124(a), como não há obstrução entre o novo *ponto atual* e o receptor, então o algoritmo apenas busca, opcionalmente, por alguma obstrução de primeira zona de Fresnel entre o *ponto atual* e o receptor e encontra a obstrução indicada pela circunferência vermelha. Como o receptor foi atingido, isso indica o fim da execução.

Como mostrado nas Figuras 121 a 124, o algoritmo encontrou, no perfil do terreno da Figura 120, os gumes de faca mostrados na Figura 124(b). A partir dessa representação de gumes de faca, o próximo passo é aplicar o método de Bullington para calcular a atenuação por difração. O modo de aplicação desse método está detalhado na Seção 5.4.1.

10.7 Cálculo da Perda Total e Potência Recebida

Uma vez que o perfil de terreno já foi utilizado pelo método de Bullington para calcular a atenuação por difração, ainda resta calcular a perda troposférica e a perda no espaço livre.

A perda troposférica é calculada com o método de equações parabólicas modificado como mostrado na Seção 9.3.3 e a perda básica no espaço livre é calculada de acordo com a Seção 9.3.1. Finalmente, os três efeitos são somados e chega-se à atenuação total.

De posse da atenuação total, a potência recebida no ponto de recepção pode ser calculada como na Equação (10.1c).

$$P_{\text{dBW}} = 10 \log_{10}(AEIRP) - L \quad (10.1a)$$

$$P_{\text{dBm}} = 10 \log_{10}(AEIRP_{\text{kW}}) - L + 60 \quad (10.1b)$$

$$P_{\text{dBm}} = 10 \log_{10}(AEIRP_{\text{kW}}) - L_{\text{FS}} - L_{\text{PE}} - L_{\text{B}} + 60 \quad (10.1c)$$

10.8 Considerações Finais

O objetivo deste capítulo foi apresentar o programa desenvolvido para calcular a atenuação ou potência recebida pelo método proposto no Capítulo 9. Foi mostrado o princípio geral de funcionamento do *software*, em que o usuário informa as condições de transmissão e de recepção e o programa busca todas as informações necessárias para realizar os cálculos.

Após realizados todos os cálculos, um arquivo é armazenado contendo as coordenadas geográficas de todos os pontos de recepção e o valor respectivo da potência recebida.

Apresentada a metodologia empregada neste trabalho, o próximo capítulo mostra quais os tipos de testes realizados e os respectivos resultados.

11 RESULTADOS

11.1 Introdução

Nos capítulos iniciais desta tese, foram recordados inúmeros conceitos teóricos de física, matemática e eletromagnetismo para dar fundamentação aos capítulos seguintes, que apresentaram métodos de cálculo de perda de propagação sobre terrenos irregulares em regiões rurais. Nos capítulos 9 e 10, foi proposto um método híbrido para realizar esse tipo de cálculo e foi apresentado um programa computacional que implementa tal método.

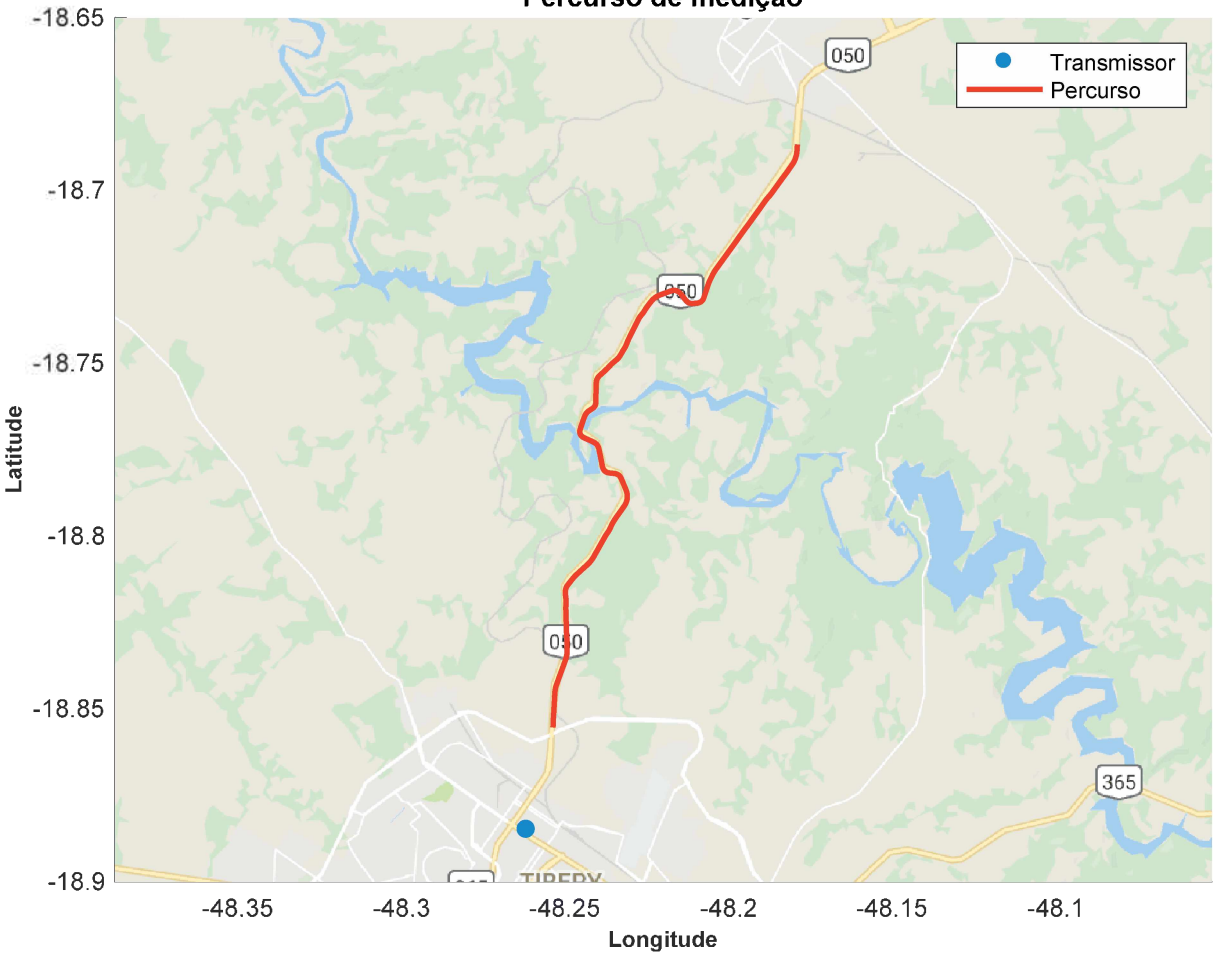
Agora, como parte do fechamento da tese, este presente capítulo tem o objetivo de apresentar os resultados conseguidos com a aplicação do método proposto. Além disso, objetiva-se levantar discussões sobre a validade dos resultados e, também possíveis maneiras de melhorá-los.

11.2 Cenário de Teste

O método proposto foi testado em cenários reais de propagação para que seus resultados pudessem ser confrontados por dados reais medidos experimentalmente. Dessa maneira, foi escolhida uma estação de transmissão de televisão digital e o seu sinal foi medido em uma rodovia ao longo de, aproximadamente, 20 quilômetros. A Figura 125 demonstra, em mapa, a localização da estação transmissora e o percurso em que os dados foram medidos. É um trecho da BR-050 entre as cidades de Uberlândia-MG e Araguari-MG. Já as Figuras 126 a 128 mostram uma visualização 3D do ambiente de propagação. É possível ver que a rodovia passa por uma região montanhosa e pelo vale de um rio. A Figura 129 mostra um perfil de terreno bidimensional ao longo da estrada.

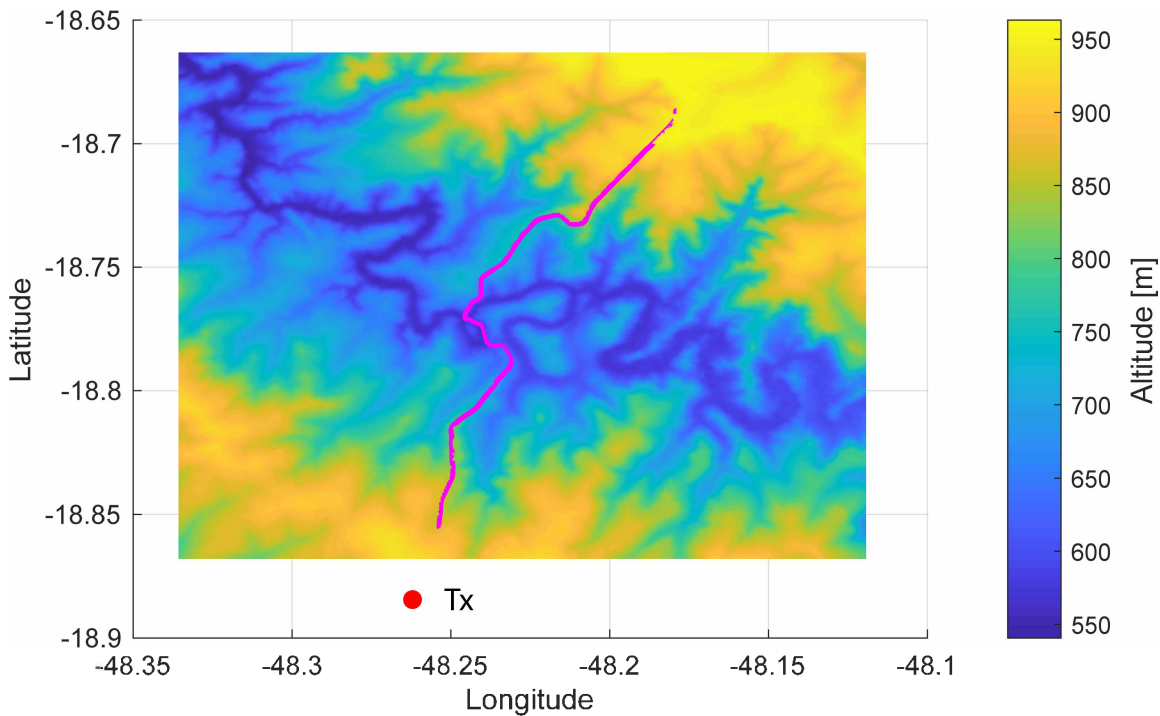
Esse cenário é ideal, pois o relevo sofre grandes variações, há um grande vale em que corre um importante rio da região e sabe-se que a rodovia é sombreada por morros em vários trechos. Assim, é muito interessante avaliar o comportamento desse método em uma região desse tipo. É um cenário típico de propagação rural sobre terrenos irregulares.

Figura 125 – Mapa da rota de medições.
Percurso de medição



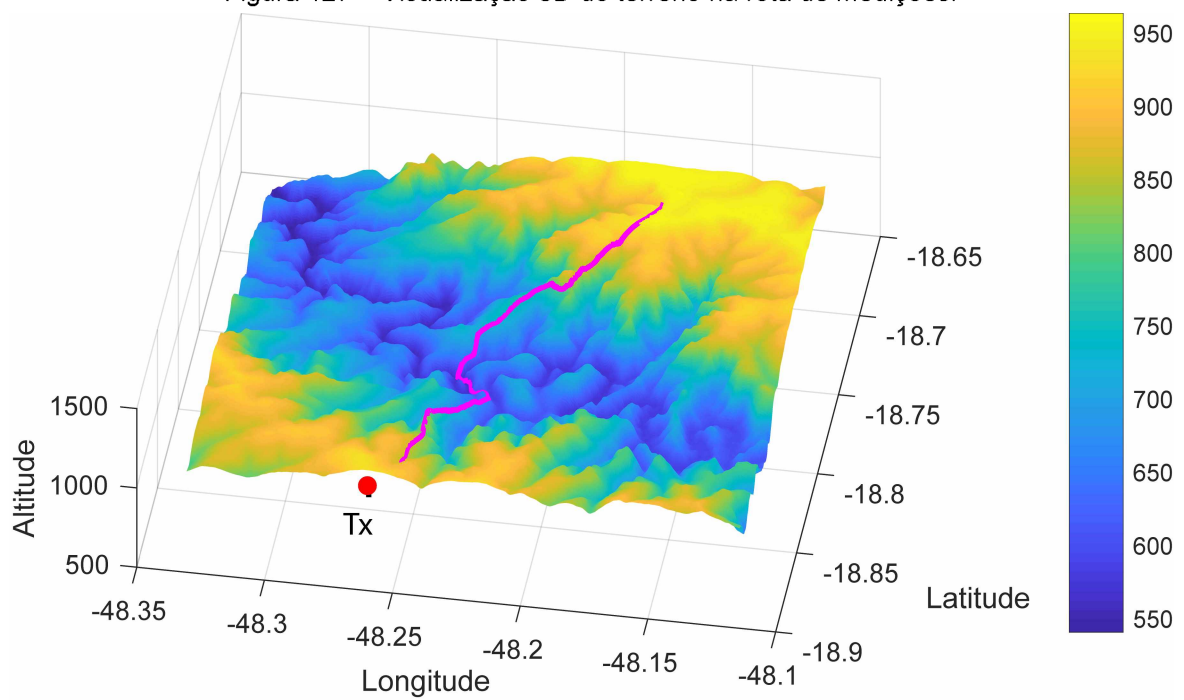
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 126 – Mapa de elevação da rota de medições.



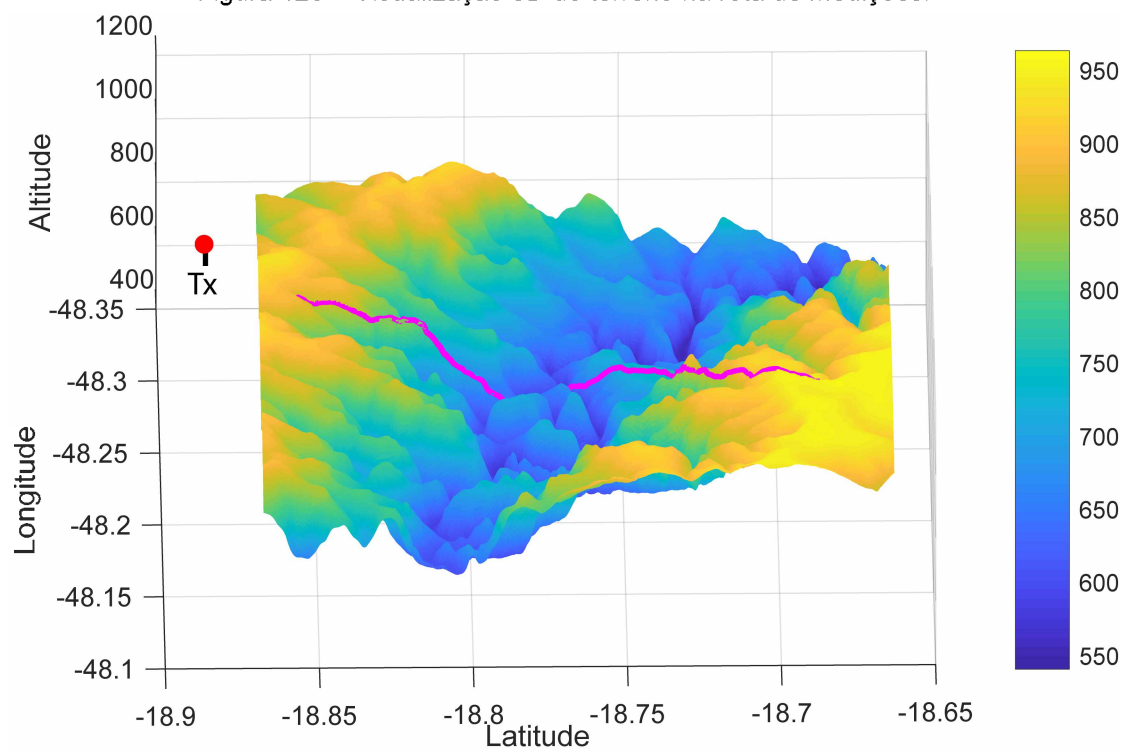
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 127 – Visualização 3D do terreno na rota de medições.



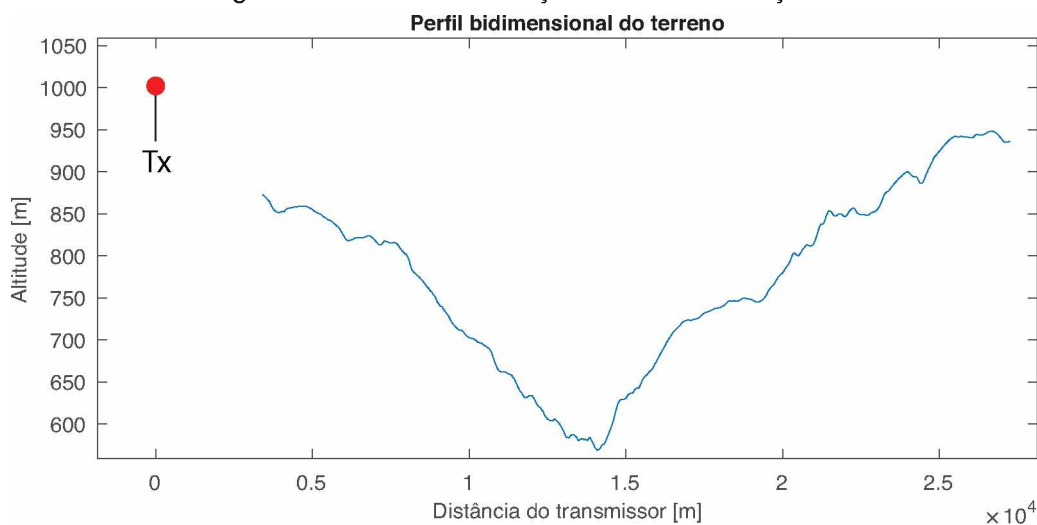
Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 128 – Visualização 3D do terreno na rota de medições.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Figura 129 – Perfil de elevação da rota de medições.



Nessa rota de, aproximadamente, 20 km, foram tomados inúmeros pontos, cerca de 80 medições por segundo. Entretanto, tantos pontos assim não são necessários para avaliação de larga escala. Por isso, o total de pontos foi filtrado e o banco de dados final foi composto de medidas de 1 em 1 segundo.

11.3 Equipamento de Medição

O equipamento utilizado para a obtenção da intensidade do sinal na rota escolhida foi o analisador de cobertura TSMW da Rhode & Schwarz, que foi, gentilmente, cedido pelo Prof. Edgar Silva Júnior. A campanha de medições foi realizada, com proeza, pelo Tiago Nunes Santos, que exerceu importantíssimo papel com a colaboração do Prof. Edgar Silva Júnior. Para que as medidas fossem geolocalizadas, um módulo GPS foi acoplado ao analisador e o *software* ROMES 4.63, também da Rhode & Schwarz, foi utilizado em um *notebook* [131]. Desse modo, foi possível construir uma base de dados em que cada ponto de medida é relacionado a uma coordenada geográfica.

O analisador TSMW é capaz de medir dois canais simultaneamente, então foram utilizadas duas antenas monopolo vertical omnidirecionais de ganho 0 dBi no teto de um carro (1,70 m de altura) para a recepção do sinal da estação TVD. Após a coleta de todos os dados, a potência recebida em dBm final foi calculada pela média da potencia recebida nas duas antenas.

11.4 Estação Transmissora

Além da rota e do equipamento de medição, é necessário conhecer as informações da estação transmissora. Tais dados são muito importantes e estão discriminados na Tabela 19.

Tabela 19 – Dados do sistema de transmissão da emissora de TVD.

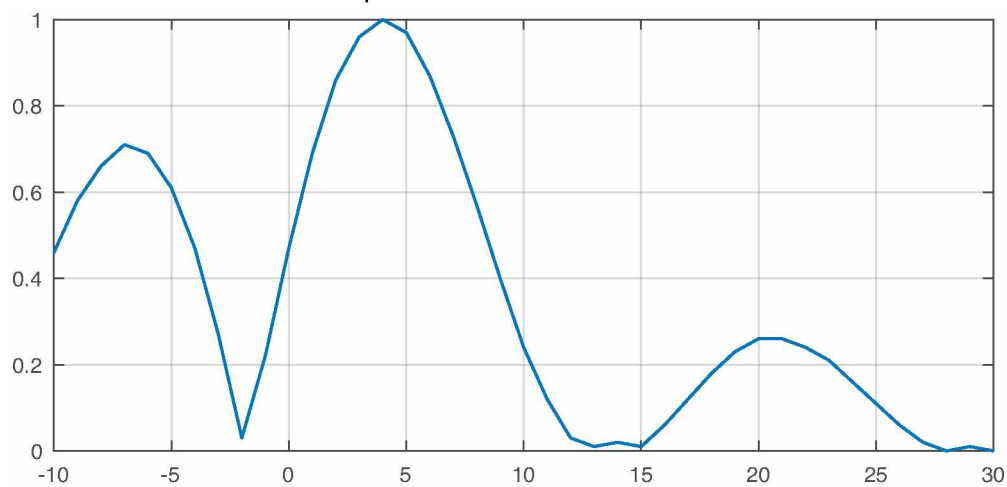
Localização da estação transmissora	–18,885° –48,2617°
Canal digital	30 (566 a 572 MHz)
Frequência de operação	569,142857 MHz
Potência de operação do transmissor	2,5 kW
Antena	ISDE083022UT
<i>Beam-tilt</i> elétrico	4°
Azimute	210°
Polarização	Elíptica (70x30)
Ganho da antena transmissora	13,3484 dBi (H) 9,6684 dBi (V)
Altura do centro de radiação	64 m
Linha de transmissão	HCA158-50J
Comprimento da linha de transmissão	71 m
Perdas acessórias	1,27 dB
Largura de feixe vertical da antena transmissora	6,5°

Fonte: Dados cedidos pela emissora TV Integração de Uberlândia-MG.

Como a emissora utiliza polarização elíptica 70x30, então são emitidas polarização horizontal e vertical na respectiva proporção. Entretanto, o equipamento utilizado para medição contava com antenas monopolo vertical omnidirecionais de ganho 0 dBi. Por isso, foi preciso considerar apenas a parcela vertical da polarização elíptica. Assim, foram utilizados os diagramas de azimute e elevação da antena transmissora apenas da sua componente vertical.

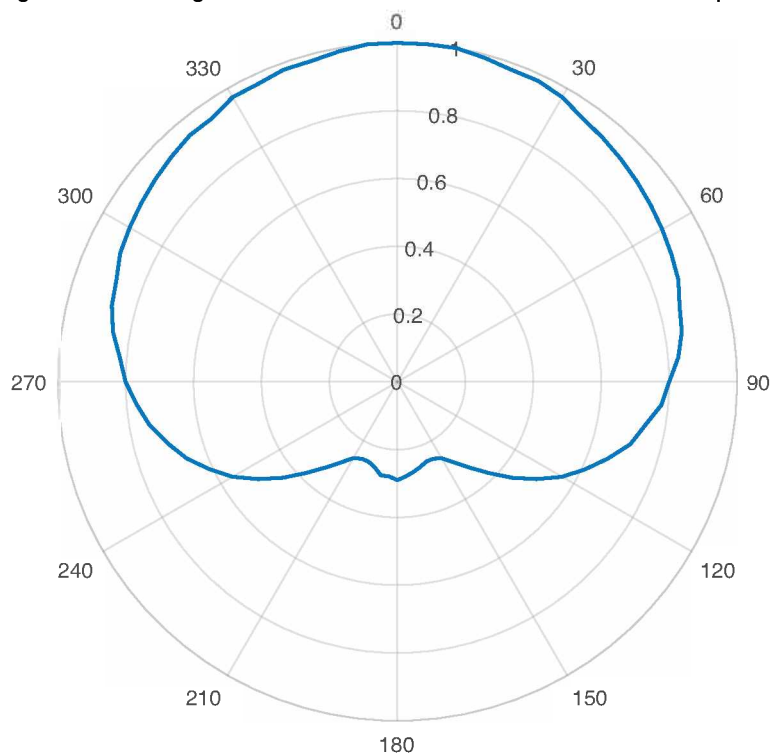
As Figuras 130 e 131 ilustram, respectivamente, os diagramas de elevação e de azimute da antena utilizada por essa emissora. É uma antena *slot* de oito fendas da marca Ideal Antenas, com largura de feixe horizontal de 220° e vertical de 6,5° e impedância de entrada de 50 Ω .

Figura 130 – Diagrama de elevação da antena ISDE083022UT pol. V com *tilt* elétrico de 4° e sem preenchimento de nulos.



Fonte: *Datasheet* da antena ISD083022UT [132].

Figura 131 – Diagrama de azimuth da antena ISD083022UT pol. V.



Fonte: *Datasheet* da antena ISD083022UT [132].

A linha de transmissão utilizada para alimentar a antena é a HCA158-50J do fabricante RFS. A atenuação dessa linha é mostrada na Figura 132.

Figura 132 – Atenuação da linha de transmissão HCA158-50J.

ATTENUATION AND POWER RATING

Frequency MHz	Attenuation		Power kW
	dB/100m	dB/100ft	
0.5	0.04	0.013	270.00
1	0.06	0.019	196.00
1.5	0.08	0.023	160.00
2	0.09	0.027	138.00
10	0.20	0.06	61.40
20	0.28	0.085	43.40
30	0.34	0.104	35.40
50	0.44	0.135	27.30
88	0.59	0.18	20.50
100	0.63	0.193	19.20
108	0.66	0.20	18.40
150	0.78	0.237	15.60
174	0.84	0.256	14.40
200	0.90	0.275	13.50
300	1.11	0.339	11.00
400	1.29	0.394	9.44
450	1.38	0.419	8.83
500	1.45	0.443	8.41

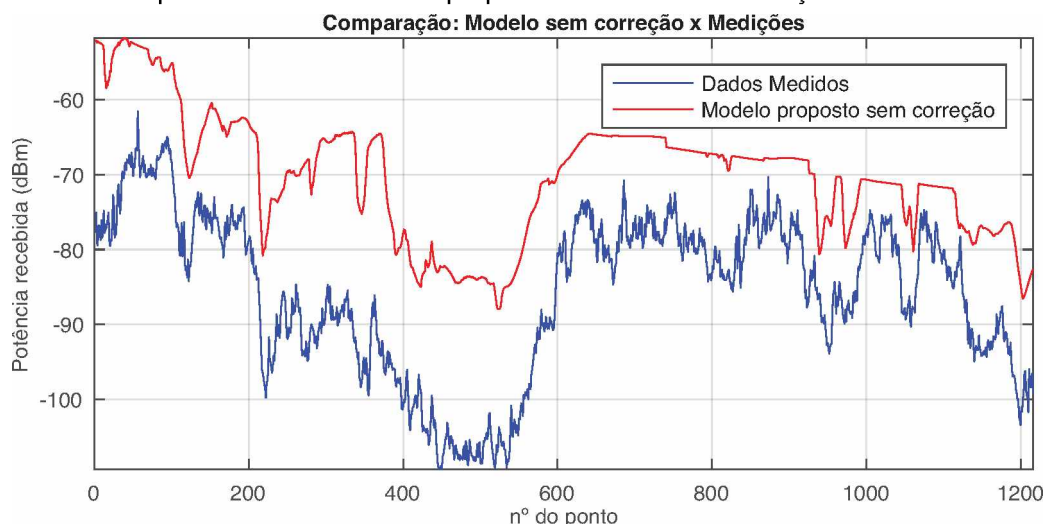
Frequency MHz	Attenuation		Power kW
	dB/100m	dB/100ft	
512	1.47	0.449	8.30
600	1.60	0.488	7.64
700	1.74	0.529	7.03
800	1.86	0.568	6.59
824	1.89	0.577	6.49
894	1.98	0.603	6.20
900	1.98	0.605	6.20
925	2.01	0.614	6.11
960	2.05	0.626	6.00
1000	2.10	0.64	5.86
1250	2.37	0.722	5.21
1500	2.61	0.797	4.75
1700	2.80	0.853	4.44
1800	2.89	0.88	4.31
2000	3.06	0.932	4.08
2200	3.22	0.982	3.89
2300	3.30	1.01	3.81
3000	3.83	1.17	3.32

Fonte: *Datasheet* da linha de transmissão HCA158-50J [133].

11.5 Resultados

Após a aplicação do método proposto, seus resultados foram confrontados com os resultados medidos e, também com outros métodos existentes. Inicialmente, o Gráfico 1 traz a comparação entre os resultados preliminares do método (sem a correção prevista) e os dados medidos.

Gráfico 1 – Comparativo entre o método proposto sem nenhuma correção e os dados medidos.

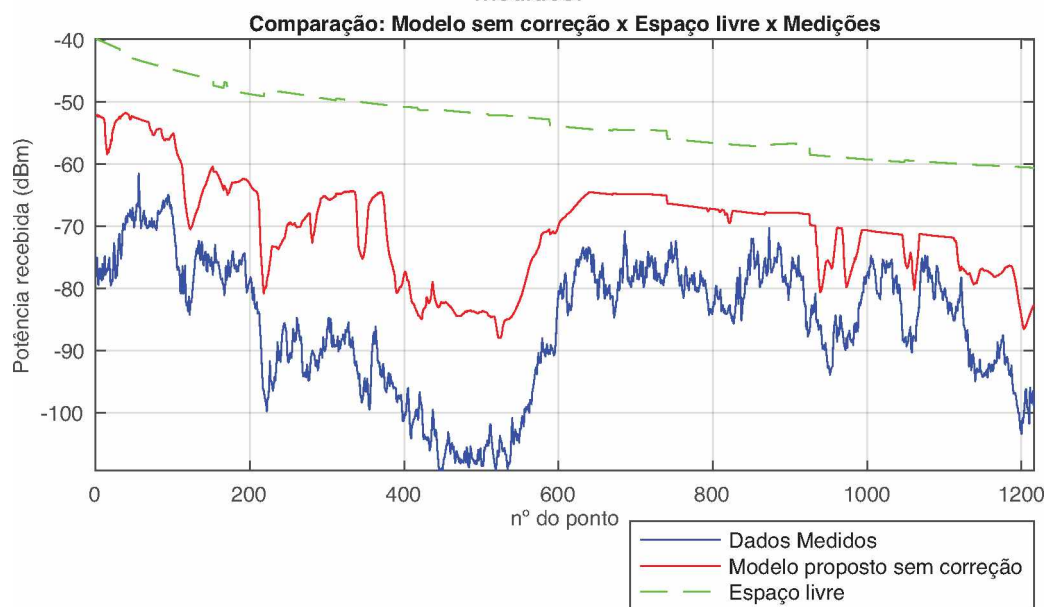


Nessa primeira avaliação, o erro RMS entre o modelo sem correção e o valor medido foi 16,4143 dBm. Esse valor de erro RMS parece um pouco elevado, à princípio, mas é preciso notar que, apesar de um deslocamento na potência recebida, a curva do método proposto acompanhou muito bem o formato da curva

dos dados medidos. Esse já é um resultado que demonstra o potencial desse método para lidar com as regiões de sombra causadas pela difração nas irregularidades do terreno. Isso fica mais claro ao confrontar esse primeiro resultado com outros métodos.

O Gráfico 2 traz a comparação entre a potência recebida calculada pelo método proposto, pelo método do espaço livre e os dados medidos. Obviamente, o cenário não é de espaço livre e essa perda é muito otimista em relação à realidade. O erro RMS do método do espaço livre foi de 34,3328 dBm.

Gráfico 2 – Comparativo entre o modelo proposto sem correção, modelo do espaço livre e dados medidos.

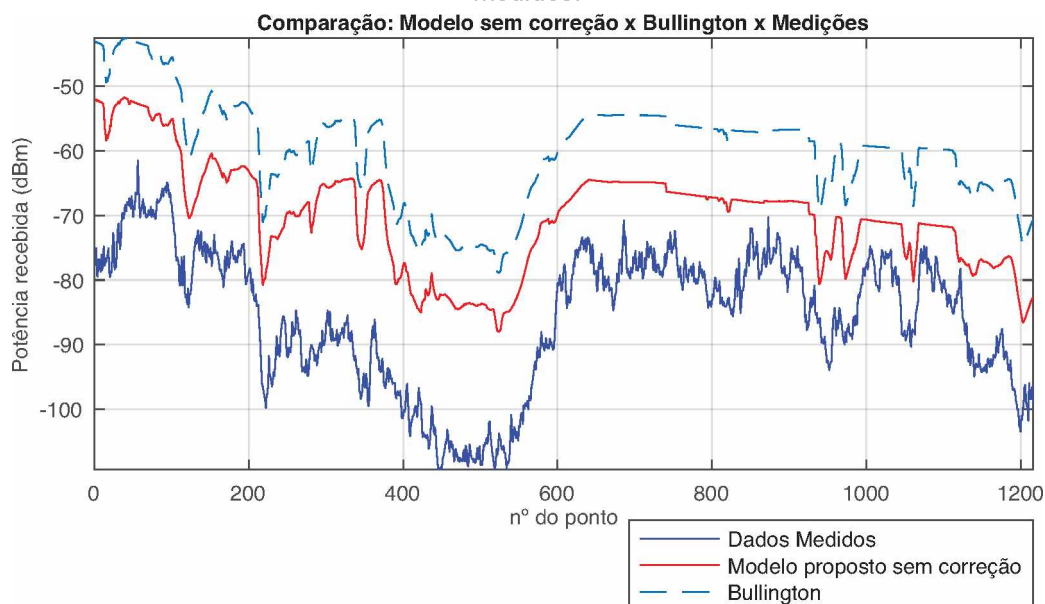


Fonte: Elaborado pelo autor.

O Gráfico 3, a seguir, mostra a comparação entre o modelo proposto, o método de Bullington puro e os dados medidos. É possível perceber que o método de Bullington puro é muito otimista, como dito no Capítulo 5, entretanto, qualitativamente, ele consegue reproduzir a forma geral de larga escala dos dados medidos.

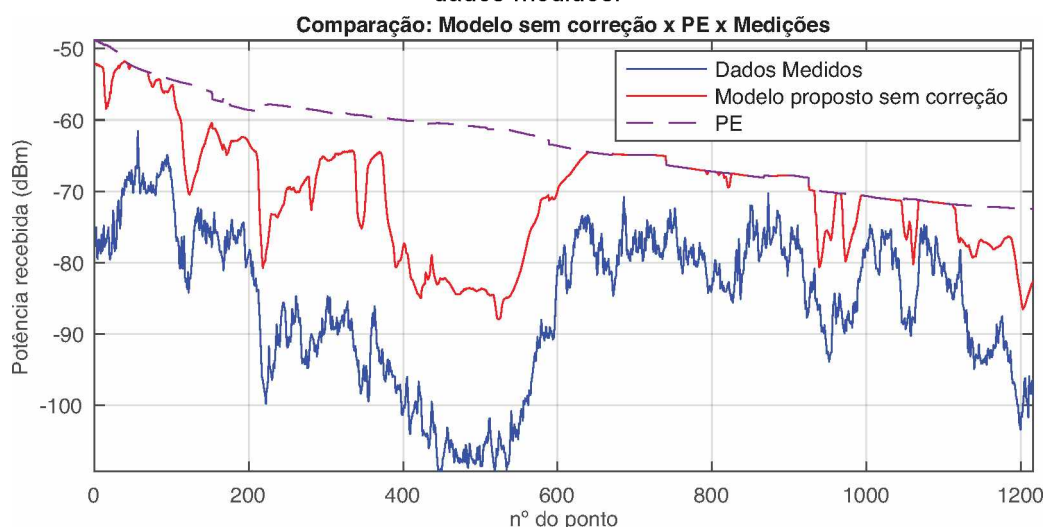
Essa é a justificativa de se ter utilizado o método de Bullington na composição do modelo híbrido. A presença do método de Bullington é responsável por fazer o modelo proposto acompanhar as perdas por difração e sombreamento ao longo do terreno. O erro RMS para o método de Bullington puro já foi bem menor do que o do espaço livre e igual a 26,1407 dBm.

Gráfico 3 – Comparativo entre o método proposto sem correção, método de Bullington e dados medidos.



O Gráfico 4 mostra a diferença entre o modelo proposto sem correção, o modelo de equações parabólicas modificado apenas para propagação troposférica e os dados medidos. Analisando esse gráfico e o gráfico anterior de Bullington, fica evidente que a perda troposférica dada pelo método PE modificado é um valor básico e que a perda devido ao terreno é como uma perda excessiva em torno dessa perda básica. O erro RMS do método de equações parabólicas modificado foi de 25,1812 dBm, bem melhor do que a perda no espaço livre.

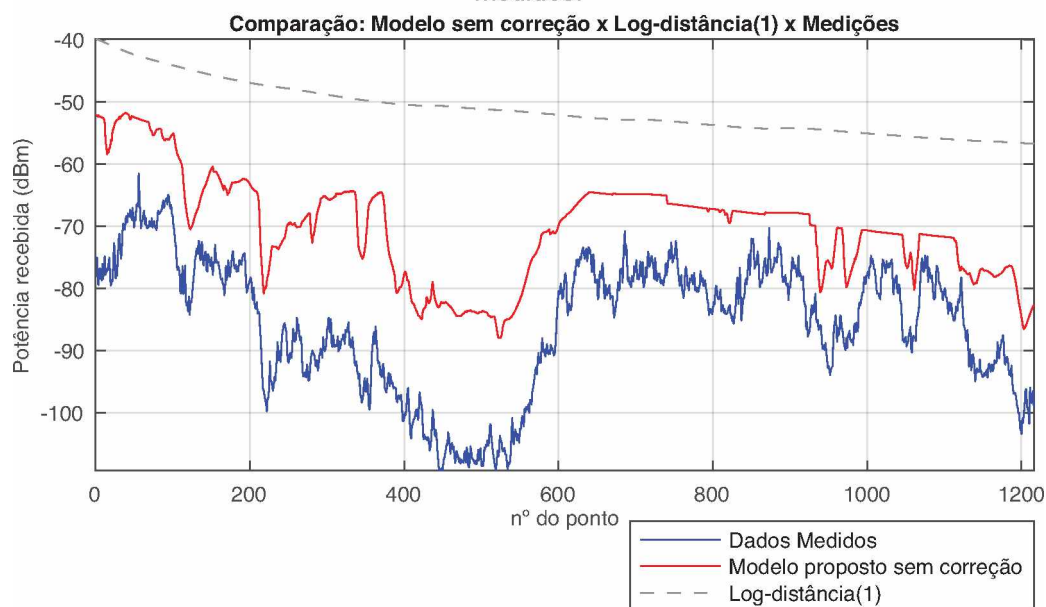
Gráfico 4 – Comparativo entre o método proposto sem correção, método de equações parabólicas e dados medidos.



Como apresentado no Capítulo 5, o método log-distância extrapola a perda de percurso em qualquer distância desejada a partir da perda de percurso em uma distância de referência. Como o cenário é de propagação rural, foi utilizado $n = 2$, que equivale à perda no espaço livre.

O Gráfico 5 foi gerado considerando a perda de referência do modelo log-distância como a perda no espaço livre no primeiro ponto de recepção. Desse modo, esse modelo fica muito distante dos dados medidos e do modelo proposto, com um erro RMS de 35,9532 dBm.

Gráfico 5 – Comparativo entre o método proposto sem correção, modelo log-distância(1) e dados medidos.

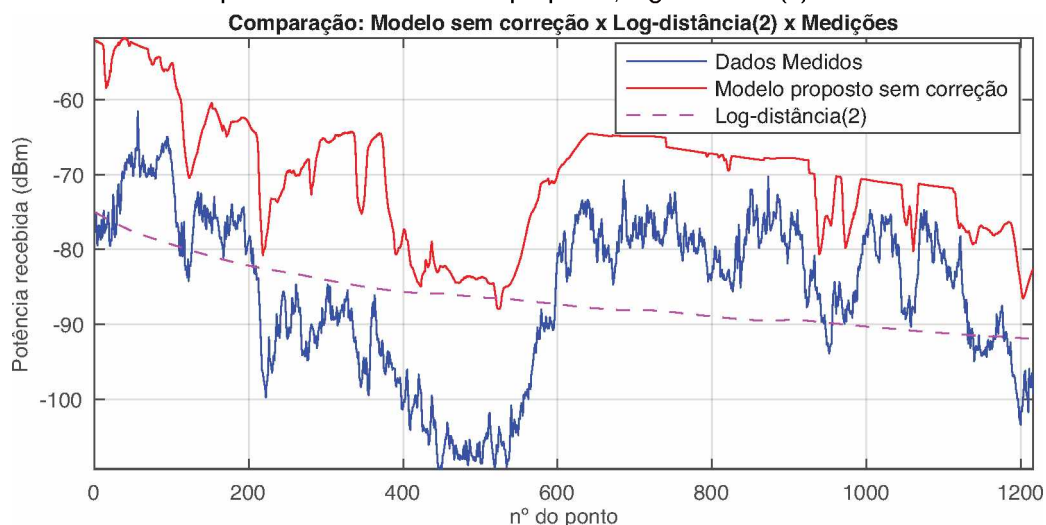


Fonte: Elaborado pelo autor.

Entretanto, se a perda de referência for considerada àquela referente à potência recebida real do primeiro ponto de recepção, tem-se o Gráfico 6. Esse gráfico mostra que o modelo log-distância conseguiu um resultado melhor quando sua perda de referência foi baseada em um dado real, e não em uma predição.

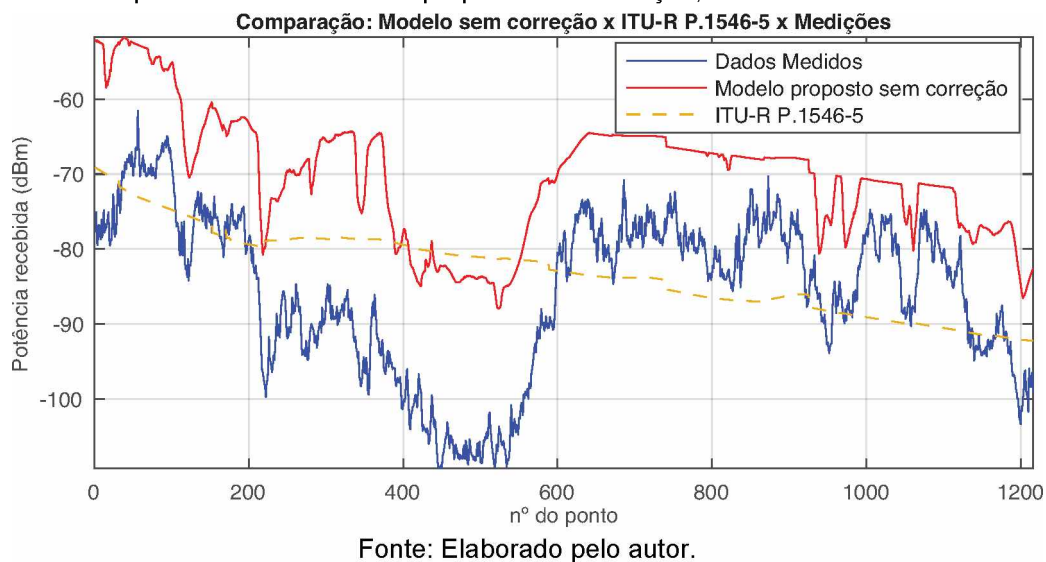
Entretanto, o resultado do modelo log-distância ainda fica aquém do desejado, pois ele não considera, em nenhum momento, as perdas por sombreamento e difração e tenta representar apenas uma média grosseira. Seu erro RMS foi 10,5841 dBm.

Gráfico 6 – Comparativo entre o método proposto, log-distância(2) e dados medidos.



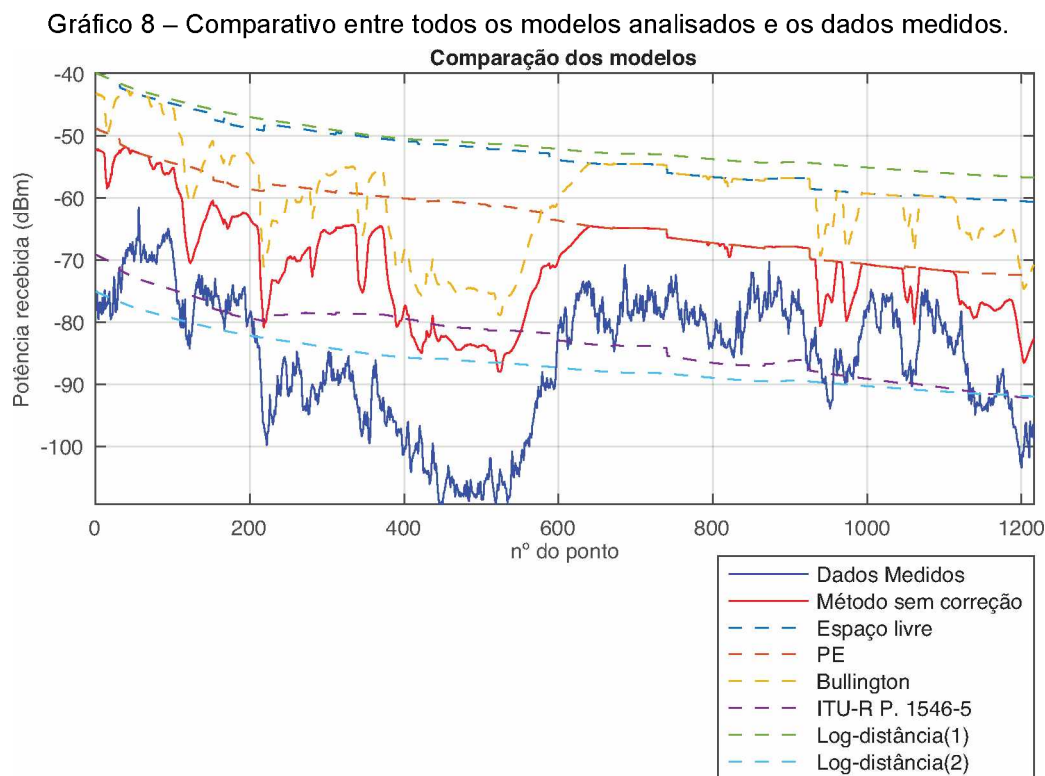
Um dos modelos mais utilizados para predição em cenários de terreno irregular é o modelo da recomendação ITU-R P. 1546-5, da União Internacional de Telecomunicações. Esse modelo é baseado na interpolação de curvas medidas experimentalmente. O Gráfico 7 traz a comparação dos seus resultados com o modelo proposto e os dados reais.

Gráfico 7 – Comparativo entre o método proposto sem correção, ITU-R P.1546-5 e dados medidos.



O modelo da ITU-R P.1546-5 resultou em um erro RMS de 11,8710 dBm e reflete uma perda média que é um pouco melhor do que o modelo proposto sem correção. Entretanto, a ITU-R P. 1546-5 é melhor apenas em uma média geral e isso fica evidente no Gráfico 7. Esse método não acompanha, em nenhum momento, as perdas por difração como o modelo proposto o faz.

Por fim, o Gráfico 8 traz todos esses modelos juntos e evidencia o grande potencial do método híbrido proposto. Fica muito claro que ele é o único, dentre os analisados, capaz de representar com mais fidelidade as perdas devido às irregularidades do terreno.



Fonte: Elaborado pelo autor.

11.6 Calibração do Modelo Proposto – Parte 1

O Capítulo 6 tratou da importância de se fazer procedimentos de VV&C quando se está criando/avaliando algum modelo de propagação. Na seção anterior, parte desse procedimento VV&C foi feito comparando os resultados do modelo proposto sem correção com os resultados de outros modelos e com os dados medidos. Nessa primeira etapa, ficou claro que o modelo proposto tem grande potencial, pois consegue representar bem a questão do terreno irregular, mas ainda está um pouco distante dos dados reais.

O Gráfico 1 mostrou que o comportamento do modelo proposto é muito parecido com o comportamento dos dados reais, mas parece existir um deslocamento vertical entre as curvas. É preciso uma investigação sobre o significado desse *offset*.

Na Seção 3.4.10.2, foram associadas áreas equivalentes para descrever as características de captura de potência de uma antena quando uma onda eletromagnética incide sobre ela. A área de abertura efetiva é uma área que, quando multiplicada pela densidade de potência incidente, resulta na potência entregue à carga. Em geral, é comum utilizar a área efetiva máxima $\lambda^2/4\pi$ nos cálculos de propagação, mas isso só pode ser utilizado em condições de máxima transferência de potência entre a antena e a carga, quando não há perdas condutivas e dielétricas na estrutura da antena e quando a polarização da onda incidente é perfeitamente casada com a antena.

Em cenários reais, é muito difícil observar um casamento perfeito das polarizações da onda e da antena receptora devido ao seu desalinhamento e, também, porque o sinal pode sofrer despolarização ao longo do percurso de propagação. Por isso, parte desse *offset* é devido a essa perda por polarização, que não é considerada nos modelos. Além disso, com certeza existem perdas dielétricas e condutivas na estrutura da antena (muito difíceis de mensurar) e que tem sua parcela de responsabilidade nesse *offset*.

Mais ainda, é preciso considerar que pode haver descasamento de impedância nas interfaces antena/linha e linha/medidor e que há uma perda de potência na linha de transmissão, conectores e *hardware* do receptor. Por fim, o fato de se desconsiderar inúmeros outros fenômenos como espalhamento troposférico, atenuação devido a gases e hidrometeoros, vegetação e, também, o fato de utilizar a separação e superposição das perdas são fatores que podem resultar nesse *offset*.

Portanto, os fatores responsáveis pelo *offset* são:

- Perda por polarização;
- Perdas na antena receptora (eficiência);
- Perdas no *hardware* (linha, conectores, receptor) por descasamento e aquecimento;
- Outros fatores desconsiderados (vegetação, hidrometeoros, etc.);
- Separação e superposição das perdas.

Infelizmente, é praticamente impossível determinar a proporção com que esses fatores influem na composição desse *offset* e seus efeitos são combinados.

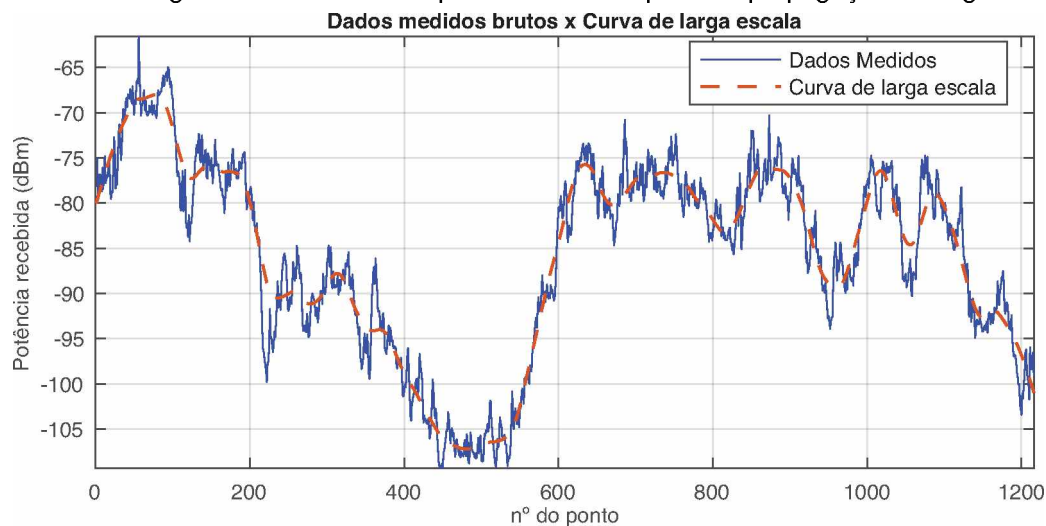
Além desse tipo de erro, há também um outro fator com grande influência, mas que será considerado posteriormente. Desse modo, a correção prevista na Equação (9.6) foi separada em dois termos, como na Equação (11.1) e, agora, o foco é apenas no *offset* do primeiro termo da Equação (11.1).

$$C(.) = offset + c(.) \quad (11.1)$$

O Capítulo 6 também evidenciou que a calibração dos modelos criados deve ser feita com base em resultados reais ou com base em resultados analíticos de referência. Obviamente, não existem resultados analíticos de referência para um caso como esse, de propagação em terreno irregular em áreas rurais. Por isso, o refinamento do modelo é feito com base nos dados medidos.

Como dito na Seção 11.2, a quantidade de dados medidos já havia sido reduzida de modo que trabalhou-se com medidas de 1 em 1 segundo, num total de 1216 pontos. Entretanto, para representar, mais ainda, uma perda de larga escala, foi aplicado um filtro de média móvel nos dados medidos para que o processo de calibração seja feito. Dessa maneira, tem-se o Gráfico 9, que mostra o sinal recebido em larga escala sobreposto ao sinal recebido com variação de pequena escala.

Gráfico 9 – Filtragem do sinal recebido para considerar apenas a propagação de larga escala.



Tendo como referência a curva de larga escala mostrada no Gráfico 9, uma análise de dados foi feita considerando os cenários de visada totalmente obstruída e constatou-se que o *offset* necessário para a Equação (11.1) é de, aproximadamente, 10,325 dB. É preciso notar que este é um passo necessário do procedimento VV&C

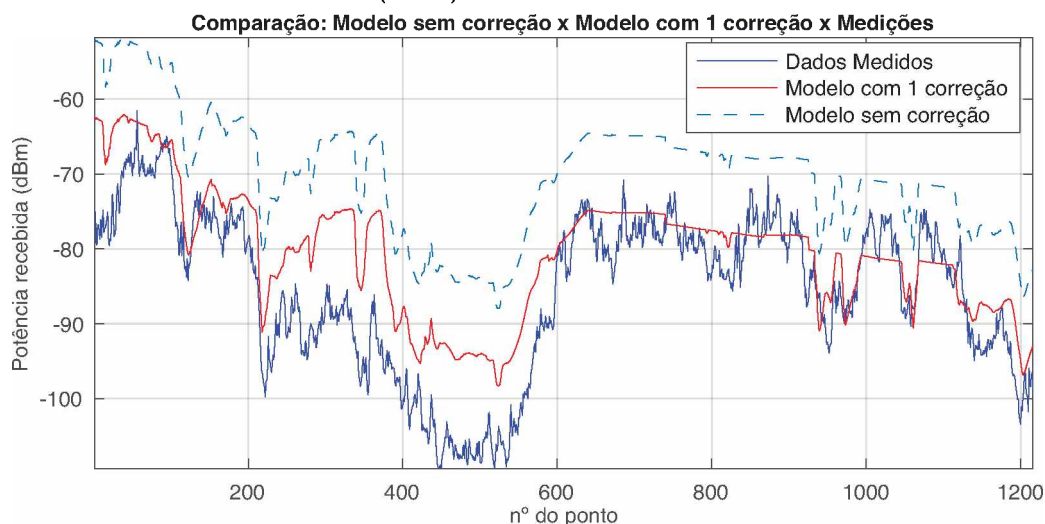
e que foi calculado com base em um número muito grande de amostras (1216 medidas de intensidade de sinal) ao longo de 20 km de percurso.

Portanto, a correção necessária para a perda de percurso do método proposto passa a ser como na Equação (11.2).

$$C(.) = 10,325 + c(.) \quad (11.2)$$

Deixando de lado o segundo termo da correção e considerando apenas o *offset*, foi criado o Gráfico 10, que compara o resultado do modelo proposto sem correção, com o resultado do modelo proposto apenas com a correção de *offset* e os dados medidos. Dessa maneira, o erro RMS do modelo proposto diminuiu de 16,4143 dBm para 7,6115 dBm.

Gráfico 10 – Comparativo entre o modelo proposto sem correção, com a primeira parte da correção (*offset*) e dados medidos.



A primeira parte da correção (*offset*) aproximou ainda mais o modelo proposto dos resultados reais. Além de representar muito bem as perdas devido ao terreno, o valor médio ficou bem mais próximo do resultado real, como desejado e esperado.

11.7 Calibração do Modelo Proposto – Parte 2

O Gráfico 10 já mostrou quão próximos estão os resultados do modelo proposto com correção de *offset* e os dados medidos. Entretanto, é preciso lembrar, de acordo com a Equação (11.2), que ainda resta uma parte da correção proposta para ser analisada.

No Capítulo 9, a primeira parte da correção (*offset*) foi atribuída ao erro devido à não consideração de fatores como perda por polarização, perdas na antena e *hardware*, outros fenômenos menos expressivos e à separação e superposição de perdas. Já a segunda parte da correção pode ser atribuída à utilização do modelo de Bullington.

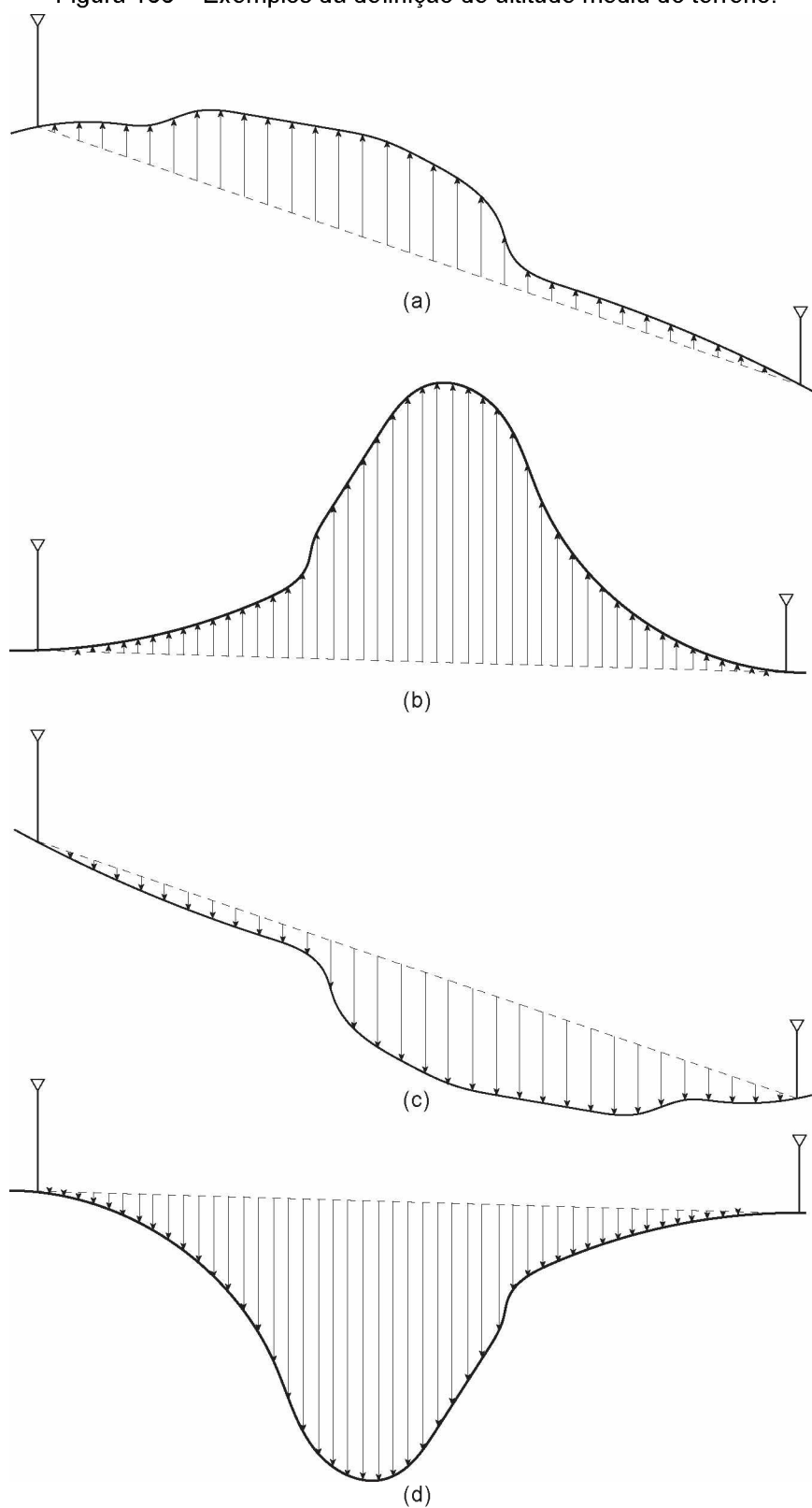
A perda por difração em um gume de faca é um limite mínimo e, certamente, para obstáculos reais que não são infinitamente finos, essa perda é maior. O sombreamento que existe devido a um terreno real causa mais perdas do que o sombreamento causado por um gume de faca. Isso produz um erro que pode ser atribuído ao fato de se representar obstáculos reais por gumes de faca.

Além de representar obstáculos reais como gumes de faca, o método de Bullington despreza diversos gumes e considera apenas as obstruções de horizonte do transmissor e do receptor para construir o equivalente. O fato de transformar toda uma série de gumes de faca em apenas um gume equivalente é outra fonte de erros e que precisa ser ajustada.

Para tratar isso, é necessário utilizar um conceito diferente de altitude média do terreno, definida em [134]. A altitude média do terreno é definida como a média das diferenças entre o terreno e uma reta que conecta as bases da antena transmissora e receptora, como na Figura 133. Essa definição elimina problemas com valores negativos no caso de se utilizar a altitude sobre o nível médio do terreno e problemas de reciprocidade que estão presentes em outras definições encontradas na literatura.

Analisando as imagens da Figura 133, é possível perceber que, quando a altitude média é negativa, não há nenhum tipo de obstrução ou sombreamento que afeta a recepção – Figuras 133(c) e 133(d). Entretanto, conforme a altitude média se torna positiva e passa a aumentar, o sombreamento se torna muito grande e diferente de apenas um único gume de faca. Isso pode ser verificado nas Figuras 133(a) e 133(b).

Figura 133 – Exemplos da definição de altitude média do terreno.

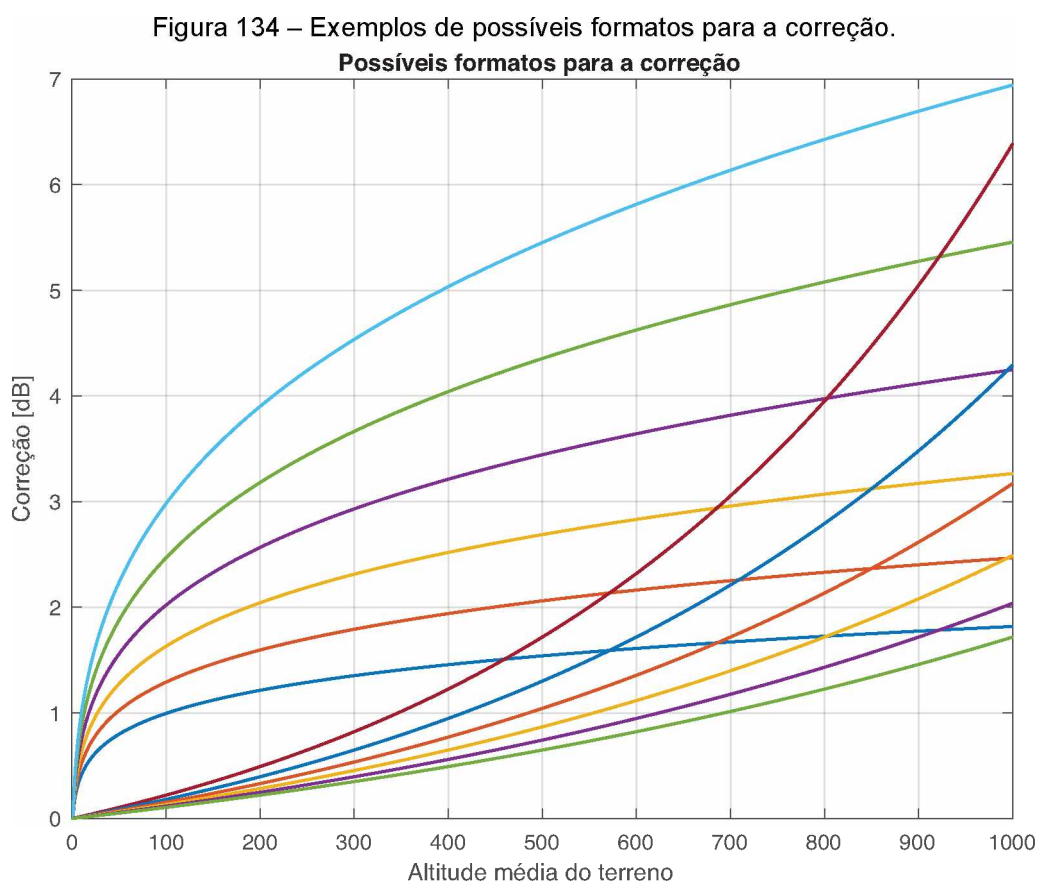


Fonte: Elaborada pelo autor.

O desafio, agora, é ter conhecimento dessa correção e saber como é seu comportamento em relação à altitude média. As ponderações realizadas sobre a relação entre a altitude média e o sombreamento, a experiência e o conhecimento do problema induzem a uma ideia inicial da forma desse fator de correção. É natural considerar que ele deve ser do tipo de uma reta, ou uma exponencial ou de uma potência pelas seguintes razões:

- altitudes médias negativas não representam sombreamento algum, portanto não é necessário correção;
- altitudes médias positivas, mas próximas de zero representam pouco sombreamento, portanto a correção deve ser pequena;
- altitudes médias positivas e crescentes representam sombreamento cada vez maior, portanto a correção deve ser maior.

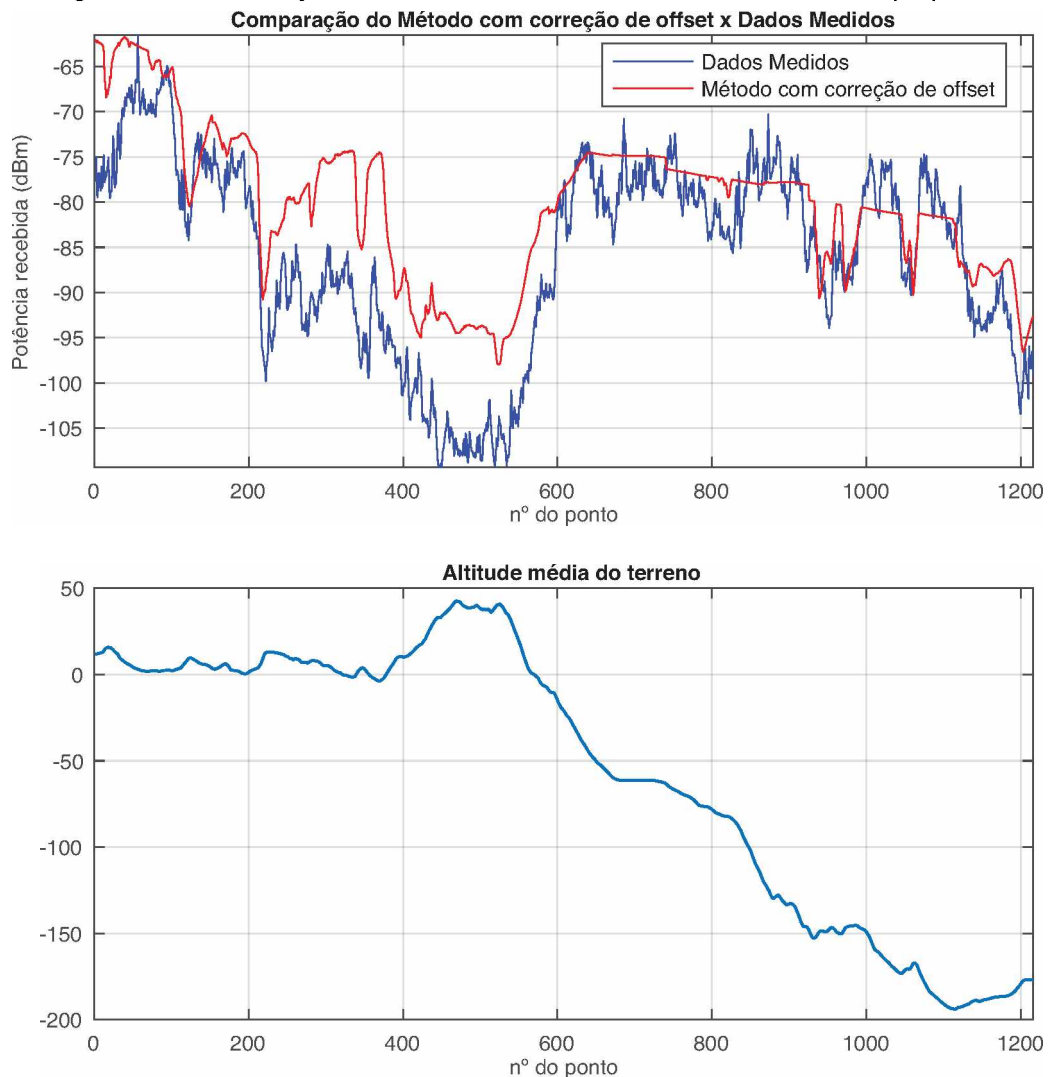
A Figura 134 mostra alguns exemplos de como poderia ser o comportamento dessa correção.



Fonte: Elaborada pelo autor.

Para corroborar essas ponderações, a Figura 135 mostra o comparativo entre o modelo proposto com correção de *offset* juntamente com o valor de altitude média do terreno para cada ponto de recepção. Fica evidente, observando a Figura 135, que as regiões que mais necessitam de correção são aquelas em que a altitude média do terreno é positiva e de maior magnitude. Geograficamente, essas regiões são um vale no qual a altitude decresce rapidamente até o leito do rio Araguari.

Figura 135 – Correlação entre a altura efetiva e o resultado do método proposto.



Fonte: Elaborada pelo autor.

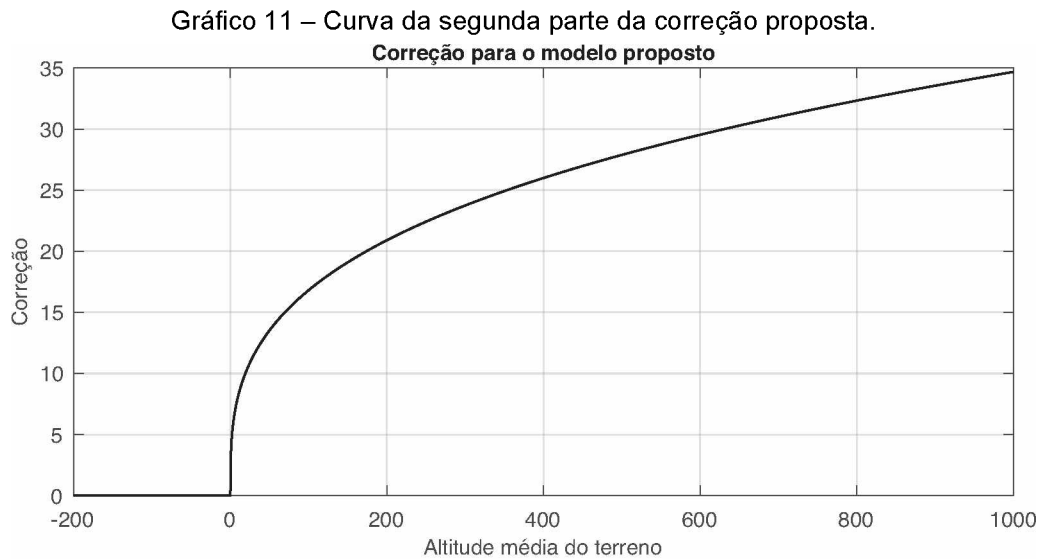
Como ponderado anteriormente, essa correção deve ser aplicada apenas quando a altitude média do terreno é positiva. Dessa maneira, foram analisados apenas os pontos para os quais a altitude média era maior do que zero e, a partir de ajuste curva chegou-se a um formato de potência dado pela Equação (11.4).

$$c(\bar{h}) = 3,94866\bar{h}^{0,31457} \quad (11.4)$$

Com isso, a correção da Equação (11.3) para a ser a da Equação (11.5).

$$C(\bar{h}) = 10,325 + 3,94866\bar{h}^{0,31457} \quad (11.5)$$

Com base na expressão da Equação (11.5), o Gráfico 11 mostra o formato da correção. Como sugerido anteriormente, a correção é nula para valores negativos e se comporta de forma exponencial para valores maiores do que 0.

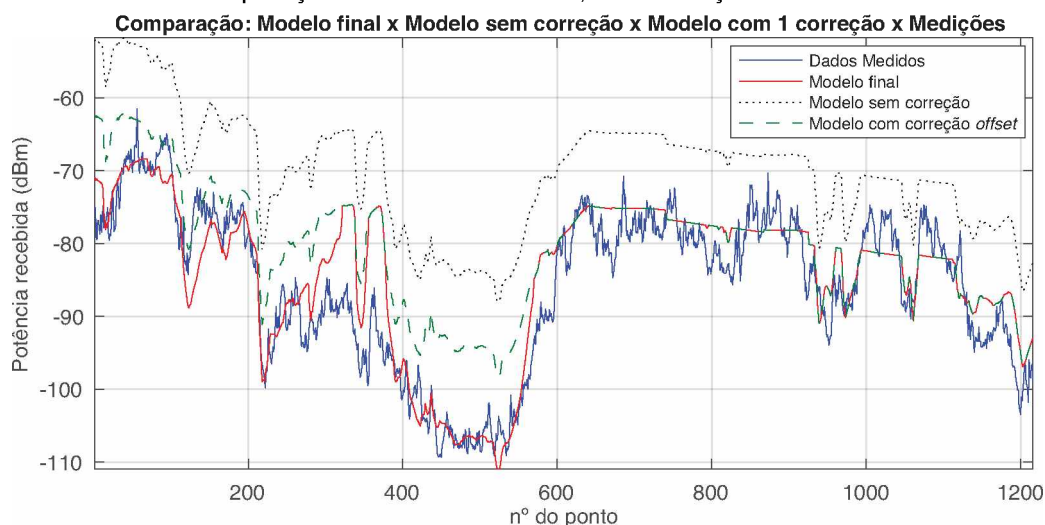


Portanto, o equacionamento final do modelo para aplicação nos cenários rurais de terreno irregular é dado pela Equação (11.6).

$$L = \begin{cases} L_{FS} + L_{PE} + L_B + 10,325 & \bar{h} \leq 0 \\ L_{FS} + L_{PE} + L_B + 10,325 + 3,94866\bar{h}^{0,31457} & \bar{h} > 0 \end{cases} \quad (11.6)$$

Finalmente, o Gráfico 12 traz a comparação entre o modelo totalmente corrigido, sem correção e os dados medidos. É possível perceber como a aplicação das duas partes da correção aproximou muito o modelo dos dados reais e o erro RMS passou a ser de 4,9871 dBm.

Gráfico 12 – Comparação entre o modelo final, sem correções e os dados medidos.



11.8 Adaptação Para o Cenário Urbano

O ambiente urbano pode ser considerado uma extensão do ambiente rural de terreno irregular, ou seja, também é um cenário de propagação troposférica sobre terrenos irregulares, mas com o adicional das construções. A existência das construções faz com que alguns outros mecanismos de propagação que não estavam presentes no cenário rural se tornem mais expressivos. Por exemplo, nas cidades, muitas áreas são niveladas por meio de aterramento, portanto podem ocorrer reflexões especulares com mais frequência do que nas áreas rurais. Além disso, a presença de construções faz com que ocorram inúmeras reflexões e o fenômeno de multipercurso se torna mais expressivo.

O fenômeno de multipercurso é de grande interesse quando se quer estudar o comportamento de pequena escala do sinal e suas rápidas variações. Nesses estudos, a intensidade do sinal pode variar, significativamente, ao longo de pequenas distâncias da ordem do comprimento de onda e modelos específicos devem ser utilizados.

Entretanto, muitas vezes, é necessário realizar estudos apenas de larga escala dentro de cidades. Isso é feito, principalmente, por emissoras de rádio, televisão e telefonia celular. Em seus projetos, elas não estão muito interessadas em pequenas variações do sinal no comprimento de onda, mas seu interesse é, primordialmente, fazer com que o nível médio do sinal fique sempre acima de um determinado limiar. Mais ainda, seu interesse é fornecer um sinal adequado dentro de áreas grandes como um ou mais bairros ou toda a cidade. Além disso, grande parte dos

dispositivos móveis (que mais sofrem com o multipercurso) já são equipados e desenvolvidos com técnicas de mitigação do multipercurso.

Portanto, assim como foi feito para as regiões rurais, também é válida a tentativa de se estabelecer um modelo de propagação de larga escala para o ambiente urbano. Porém, como mencionado anteriormente, devido às diferenças de ambiente, alguns outros fatores devem ser observados.

Como o modelo é de larga escala, não é preciso considerar, explicitamente, as reflexões que ocorrem na cidade devido à planificação do terreno e devido às construções. Em vez de uma modelagem explícita, pode-se considerar que, em grande escala, a presença de muitas construções de alturas diferentes forma uma superfície difusora da energia refletida e os efeitos das reflexões devem ser incluídos no *offset* necessário, assim como foi feito com outros fenômenos menos expressivos no modelo de regiões rurais.

Portanto, para o ambiente urbano, os fatores responsáveis pelo *offset* são:

- Múltiplas reflexões na cidade;
- Presença de veículos;
- Perda por polarização;
- Perdas na antena receptora (eficiência);
- Perdas no *hardware* (linha, conectores, receptor) por descasamento e aquecimento;
- Outros fatores desconsiderados (vegetação, hidrometeoros, etc.);
- Separação e superposição das perdas.

Além disso, os ambientes urbanos não costumam ser muito grandes como regiões rurais e rodovias e, conseqüentemente, o sombreamento devido à grandes irregularidades quase não existe e o modelo de Bullington já é capaz de estimar os efeitos do terreno. Sendo assim, não é necessário utilizar um fator de correção relacionado à altitude efetiva do terreno como foi feito para região rural.

Finalmente, para cidades, a Equação (11.7) mostra a formulação necessária para o modelo proposto.

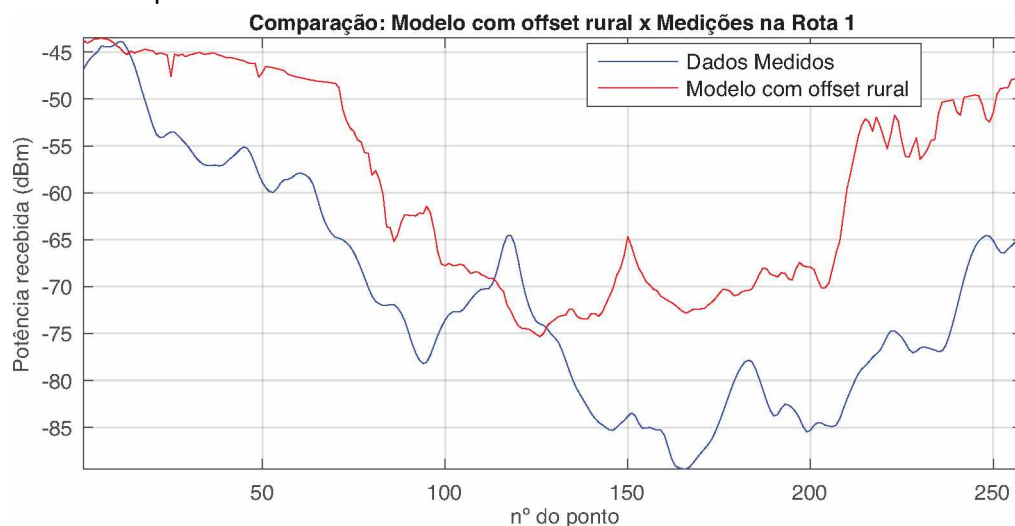
$$L = L_{\text{FS}} + L_{\text{PE}} + L_{\text{B}} + \text{offset} \quad (11.7)$$

O método proposto foi aplicado nas cinco rotas e considerando apenas o *offset* encontrado para região rural de acordo com a Equação (11.8).

$$L = L_{FS} + L_{PE} + L_B + 10,325 \quad (11.8)$$

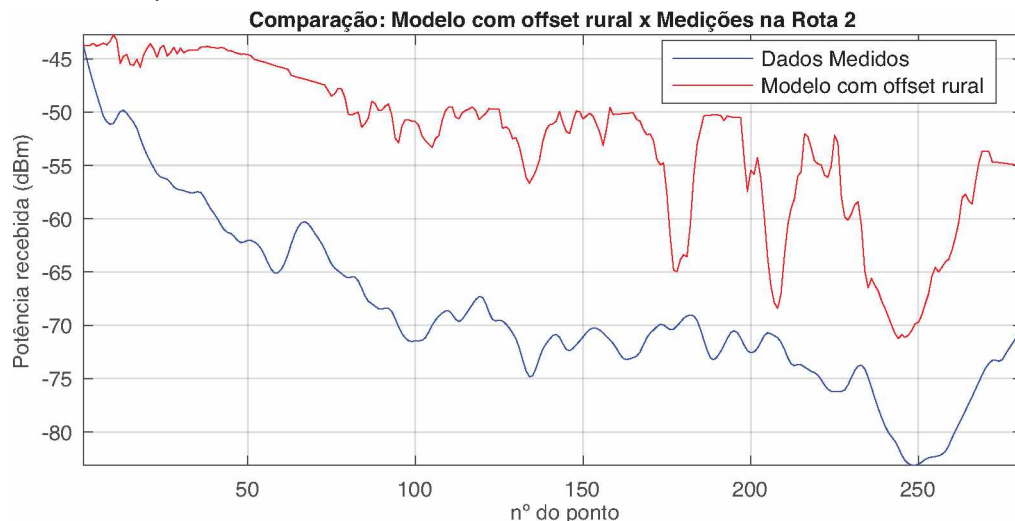
Para a rota 1, o Gráfico 13 traz a comparação entre os resultados da aplicação do método e os dados medidos experimentalmente. Para essa rota, o erro RMS foi de 13,7794 dBm. Apesar desse valor, é possível perceber que, na maioria do percurso, o método proposto conseguiu acompanhar bem as variações apresentadas nos dados medidos.

Gráfico 13 – Comparativo entre o modelo com *offset* de área rural e os dados medidos da rota 1.



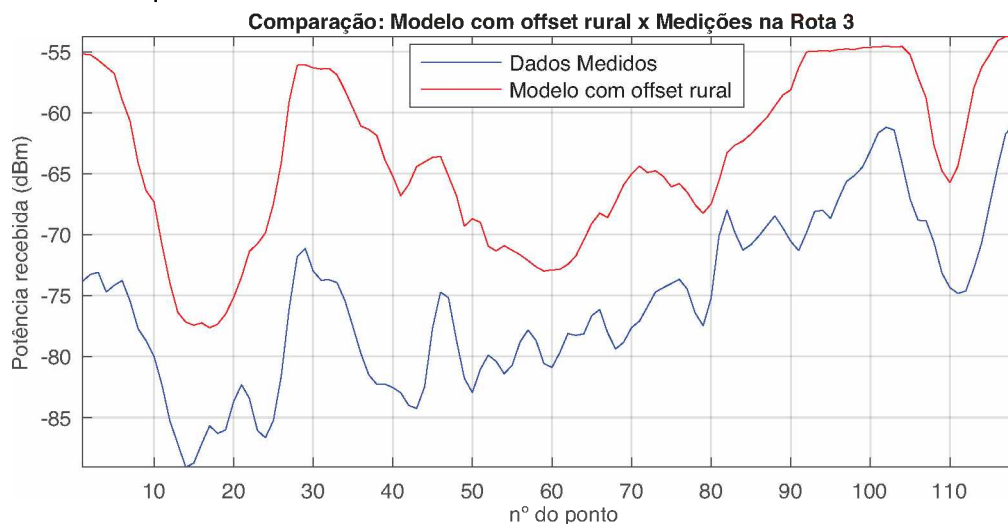
Agora, o Gráfico 14 traz a comparação para a rota 2. Nessa rota, o erro RMS foi de 16,7252 dBm e também é possível ver uma semelhança entre os resultados.

Gráfico 14 – Comparativo entre o modelo com *offset* de área rural e os dados medidos da rota 2.



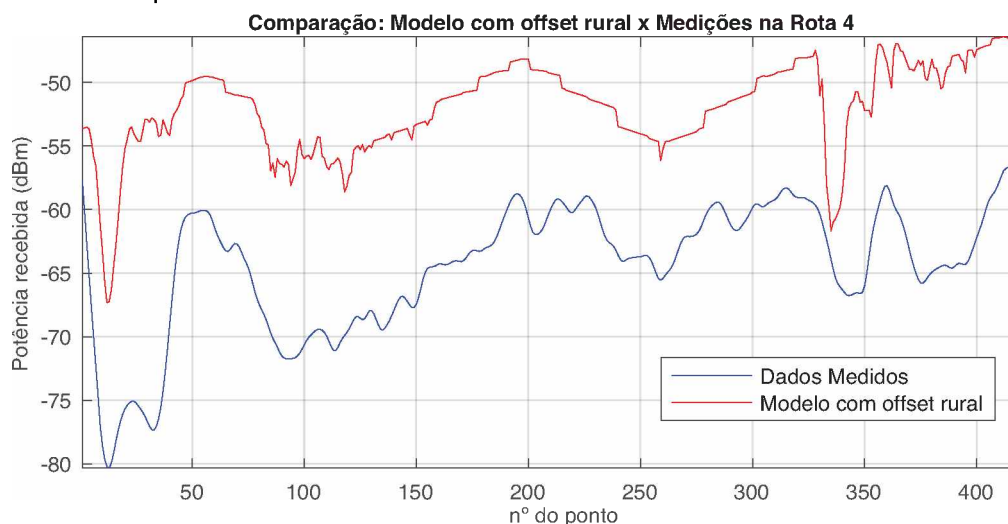
No caso da rota 3, ilustrada no Gráfico 15, a semelhança entre as curvas é muito nítida, apesar do deslocamento vertical e o erro RMS foi de 12,3953 dBm.

Gráfico 15 – Comparativo entre o modelo com *offset* de área rural e os dados medidos da rota 3.

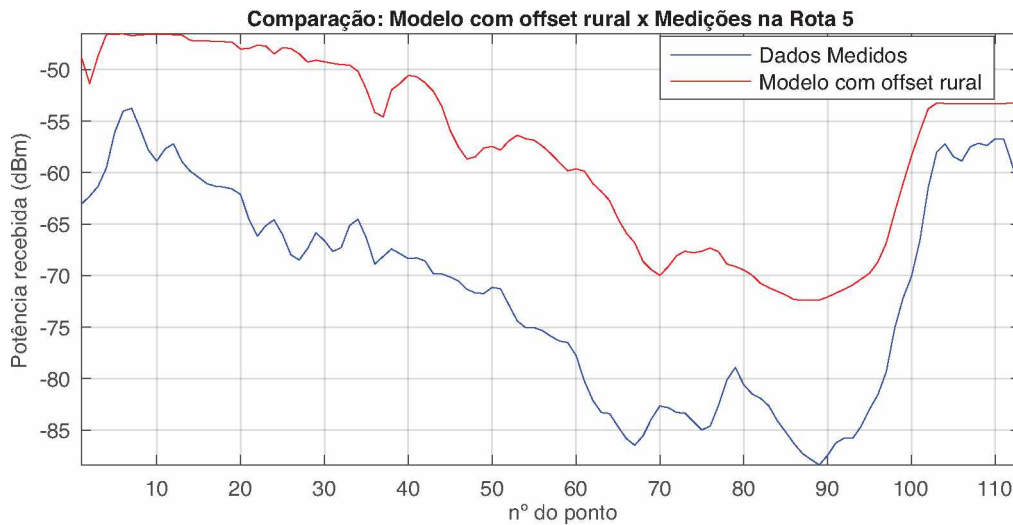


O Gráfico 16 mostra os resultados obtidos para a rota 4. Nele, também é possível ver grande semelhança entre os valores preditos e os valores medidos experimentalmente. O erro RMS para essa rota foi de 12,8135 dBm.

Gráfico 16 – Comparativo entre o modelo com *offset* de área rural e os dados medidos da rota 4.



Por fim, o Gráfico 17 faz a comparação entre o modelo e os dados reais para a rota 5. Para essa rota, o erro RMS foi de 14,4708 dBm e o formato das curvas é bem semelhante.

Gráfico 17 – Comparativo entre o modelo com *offset* de área rural e os dados medidos da rota 5.

Apesar dos valores de erro RMS e do deslocamento vertical que há entre todas as curvas mostradas nos Gráficos 13 a 17, foi possível verificar que, em grande parte, o modelo proposto com *offset* de área rural também conseguiu representar bem os resultados de potência recebida na área urbana.

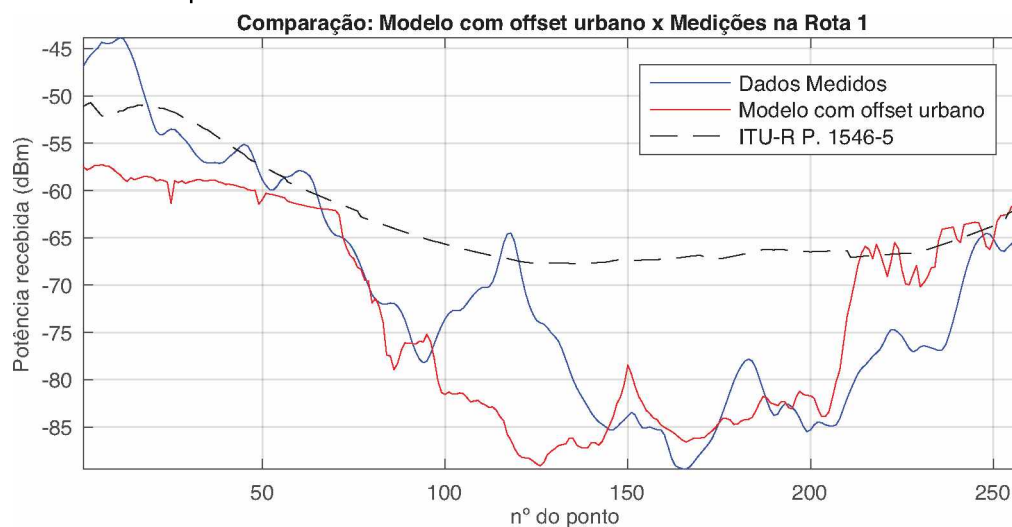
Agora, pode-se partir para um procedimento de análise de dados para calibração desse modelo para área urbana. Fazendo uma análise de dados semelhante àquela feita para o caso rural, foi possível concluir que, no cenário urbano, devido à inclusão das construções, veículos e múltiplas reflexões, o *offset* de 10,325 dB deve ser modificado para 24,1 dB. Isso reflete que, em média, no cenário urbano, a atenuação é de 13,775 dB a mais do que no cenário rural, considerando larga escala.

Com esse resultado, corrige-se a Equação (11.8) com o *offset* urbano e escreve-se a Equação (11.9).

$$L = L_{FS} + L_{PE} + L_B + 24,1 \quad (11.9)$$

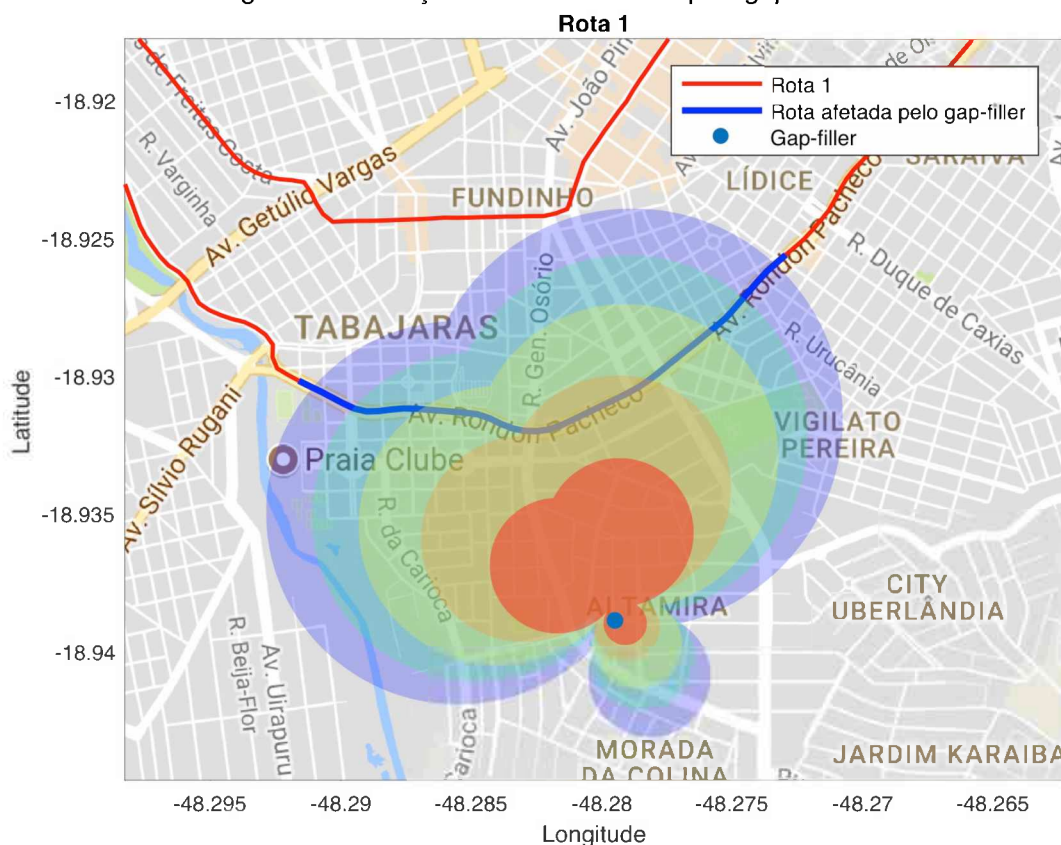
Finalmente, os Gráficos 18 a 22 trazem os comparativos para as 5 rotas utilizando os resultados do modelo dado pela Equação (11.9). Além disso, esses gráficos também comparam os resultados com o modelo da recomendação ITU-R P. 1546-5, que é o modelo recomendado pela ANATEL para predição de cobertura em serviços de rádio de televisão.

Na rota 1, o modelo com *offset* para área urbana se aproximou bastante dos resultados medidos e teve seu erro RMS diminuído de 13,7794 para 7,4812 dBm.

Gráfico 18 – Comparativo entre o modelo com *offset* urbano e os dados medidos da rota 1.

Já o modelo da ITU não conseguiu acompanhar muito bem as variações dos dados medidos, pois não considera, explicitamente, o efeito do terreno como o método proposto. O erro RMS do modelo da ITU foi de 10,8754 dBm.

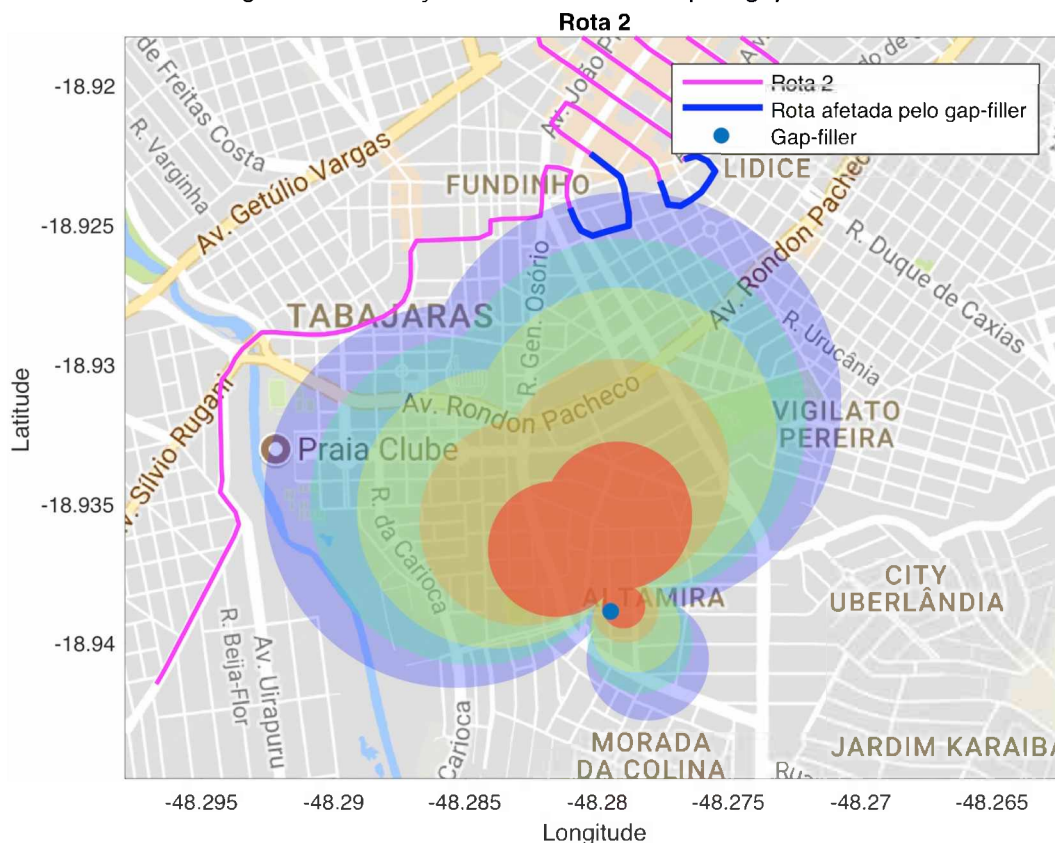
Além disso, é necessário observar, na Figura 137, a presença de uma estação reforçadora de sinal (*gap-filler*).

Figura 137 – Porção da Rota 1 afetada pelo *gap-filler*.

A estação reforçadora afeta as medições na porção da rota 1 compreendida entre os pontos 97 e 142, aproximadamente, e torna o sinal medido mais intenso do que seria na realidade, pois, nesse caso, se está medindo a soma do sinal principal e do sinal reforçador. Por isso, o erro RMS é um pouco maior para essa rota (7,4812 dBm). Ainda, é preciso notar que no começo da rota (muito próximo ao transmissor), a diferença entre os resultados do modelo e os dados reais é maior.

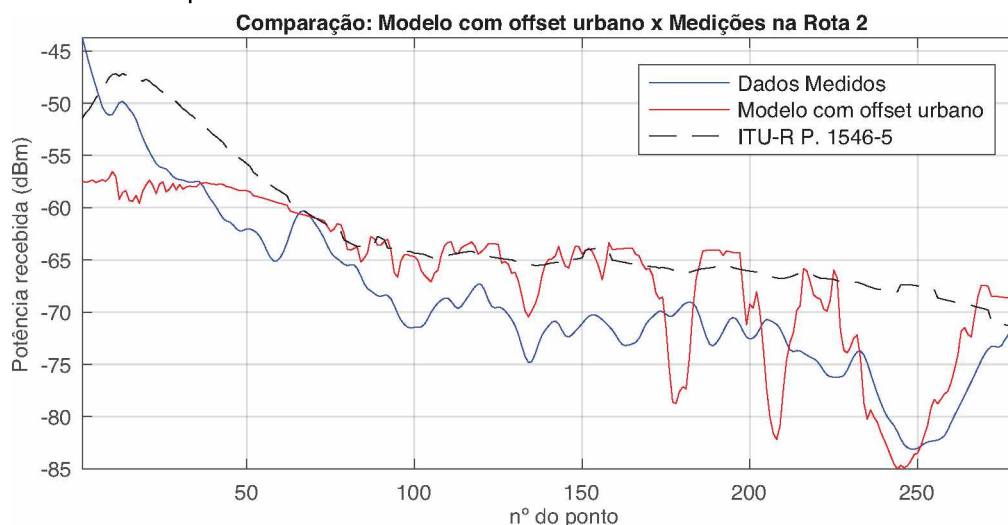
Também é possível verificar que a presença do *gap-filler* também afetou uma pequena porção da rota 2 entre os pontos 173 e 183 e entre os pontos 199 a 212 aproximadamente. Nesses pontos ainda há um resquício da área de cobertura da estação reforçadora, como mostra a Figura 138.

Figura 138 – Porção da Rota 2 afetada pelo *gap-filler*.

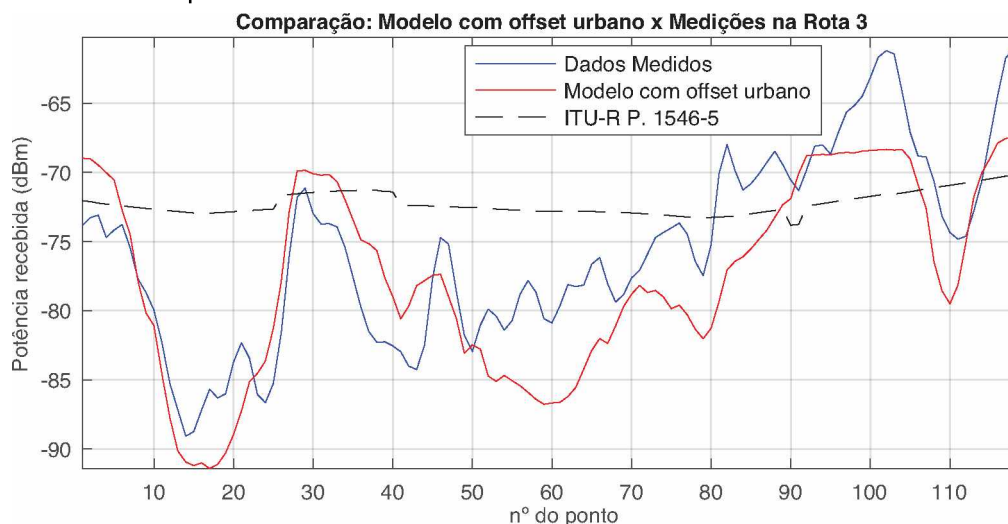


Fonte: Elaborada pelo autor.

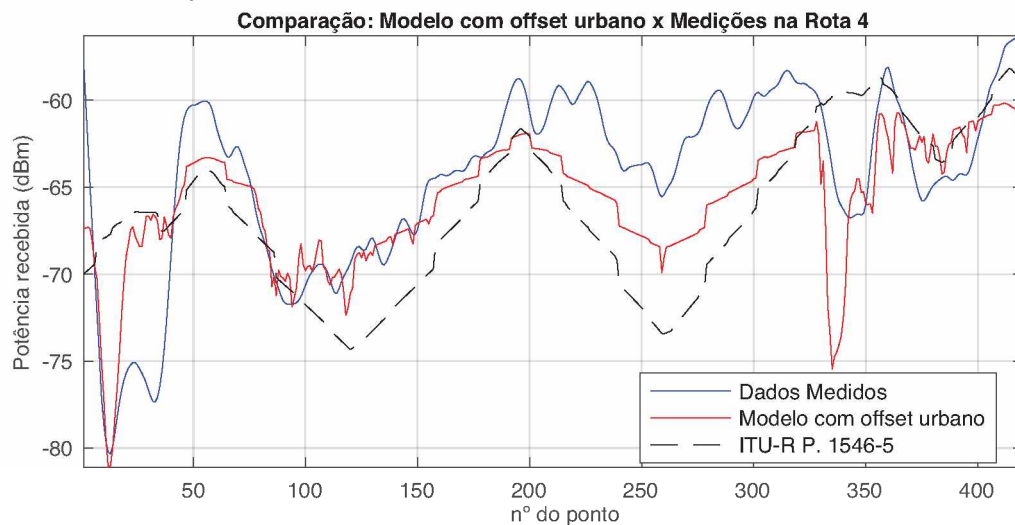
O Gráfico 19 traz a comparação de resultados para a rota 2. Após a correção para cidade, o erro RMS foi de 16,7252 para 5,3542 dBm. Próximo ao transmissor também ocorreu um erro maior no sentido pessimista e, em média, o método proposto acompanhou bem a tendência do sinal medido e foi levemente otimista em alguns pontos. O método proposto também produziu resultados melhores do que o método da ITU, que teve erro RMS de 6,8791 dBm.

Gráfico 19 – Comparativo entre o modelo com *offset* urbano e os dados medidos da rota 2.

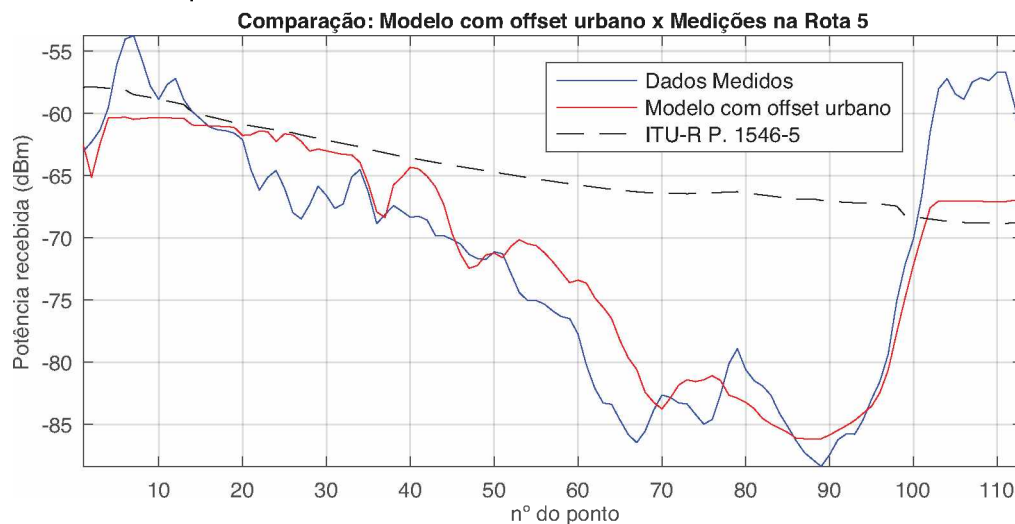
No caso da rota 3, ilustrada no Gráfico 20, o resultado foi muito satisfatório e o erro RMS caiu de 12,3953 para 4,4302 dBm. Mais uma vez, o método da ITU não conseguiu acompanhar tão bem os dados medidos como o modelo proposto e teve erro RMS de 7,2365 dBm. Como a rota 3 não começa próxima ao transmissor (Figura 136), quase não há erro pessimista no seu início.

Gráfico 20 – Comparativo entre o modelo com *offset* urbano e os dados medidos da rota 3.

O Gráfico 21 mostra os resultados obtidos para a rota 4 após a aplicação do modelo com *offset* urbano. Nele, o erro RMS diminuiu muito, de 12,8135 para 3,6430 dBm e o resultado também foi muito satisfatório. Assim como nas outras rotas, o método proposto também superou o modelo da ITU, que forneceu um erro RMS de 5,3838 dBm.

Gráfico 21 – Comparativo entre o modelo com *offset* urbano e os dados medidos da rota 4.

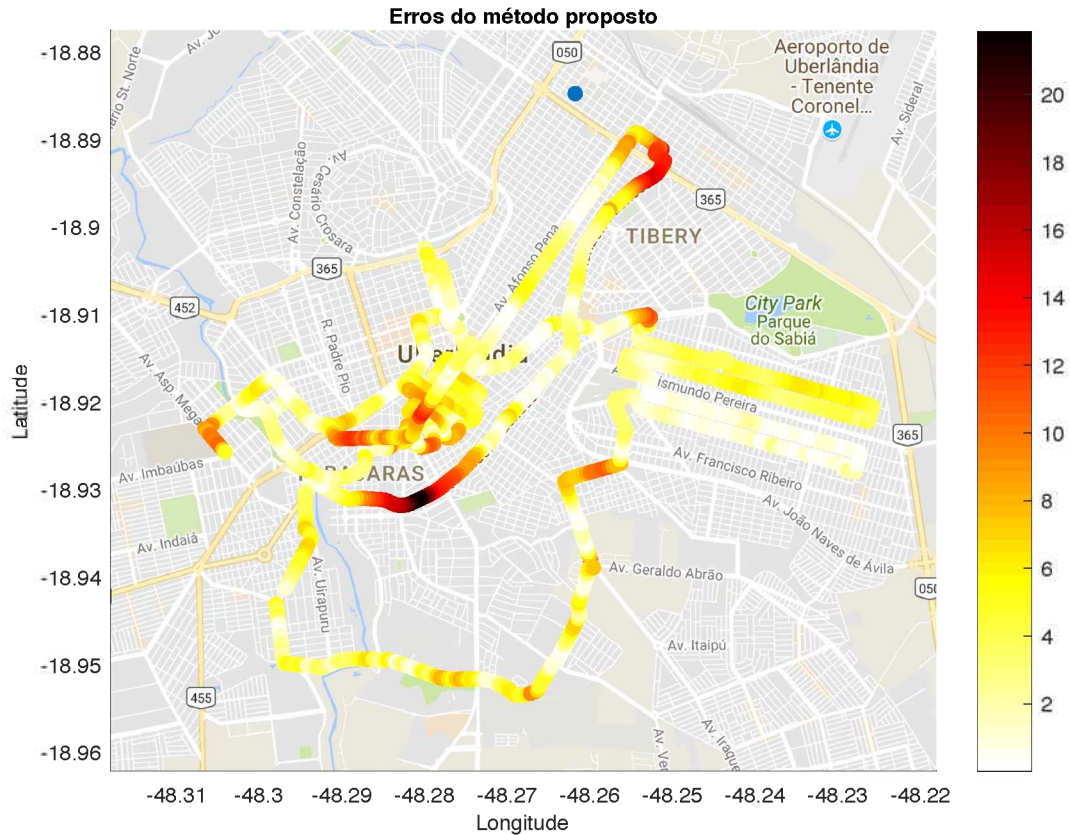
Por fim, o Gráfico 22 faz a comparação entre o modelo e os dados reais para a rota 5. Para essa rota, o erro RMS diminuiu de 14,4708 para 4,2161 dBm com o uso do *offset* para áreas urbanas. O formato das curvas ficou bem semelhante, com exceção da curva do modelo da ITU, que não conseguiu acompanhar as outras. O erro RMS da ITU foi de 11,3207 dBm.

Gráfico 22 – Comparativo entre o modelo com *offset* urbano e os dados medidos da rota 5.

Finalizando, a Figura 139 mostra que as regiões em que o erro do método proposto foi mais expressivo foram apenas a região afetada pelo *gap-filler* e as proximidades do transmissor. Obviamente, se não existisse o *gap-filler*, provavelmente não haveria esse tipo de erro. Sendo assim, pode-se dizer que o

modelo proposto fornece bons resultados, mas é razoavelmente pessimista nas proximidades do transmissor.

Figura 139 – Visualização geográfica dos erros cometidos pelo método proposto.



Por fim, as Figuras 140, 141, 142 mostram mapas de cobertura da região central da cidade obtidos por meio da interpolação dos dados das cinco rotas. É possível perceber que, nas proximidades do transmissor, o método proposto é um pouco pessimista, mas, nas outras regiões, principalmente próximo aos vales, ele representa muito bem a realidade. Já o método da ITU acerta mais nas proximidades da estação transmissora, porém não acompanha a realidade nas outras áreas e próximo às diversas irregularidades do terreno da cidade.

Finalmente, pode-se escrever uma formulação completa para o modelo proposto como na Equação (11.10).

$$L = \begin{cases} L_{FS} + L_{PE} + L_B + 10,325 & \bar{h} \leq 0 \text{ e rural} \\ L_{FS} + L_{PE} + L_B + 10,325 + 3,94866\bar{h}^{0,31457} & \bar{h} > 0 \text{ e rural} \\ L_{FS} + L_{PE} + L_B + 24,1 & \text{urbano} \end{cases} \quad (11.10)$$

Figura 140 – Mapa de cobertura gerado a partir dos dados medidos.

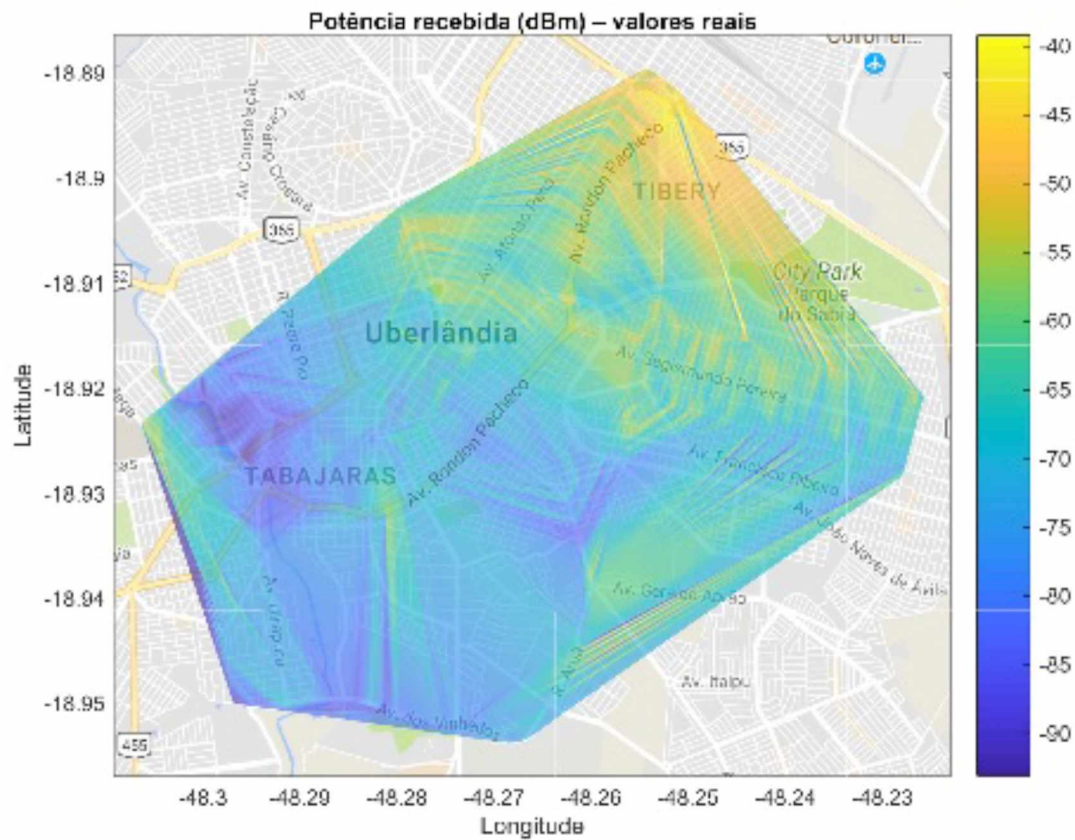


Figura 141 – Mapa de cobertura elaborado a partir dos resultados do modelo proposto.

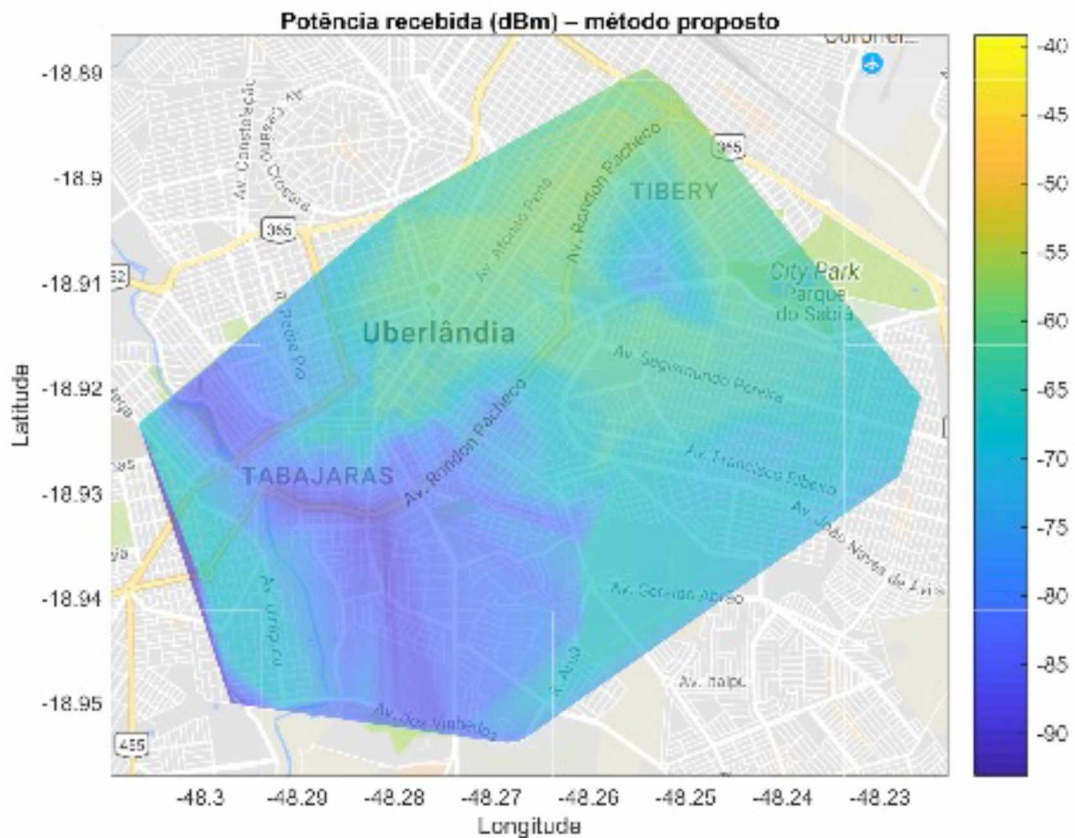
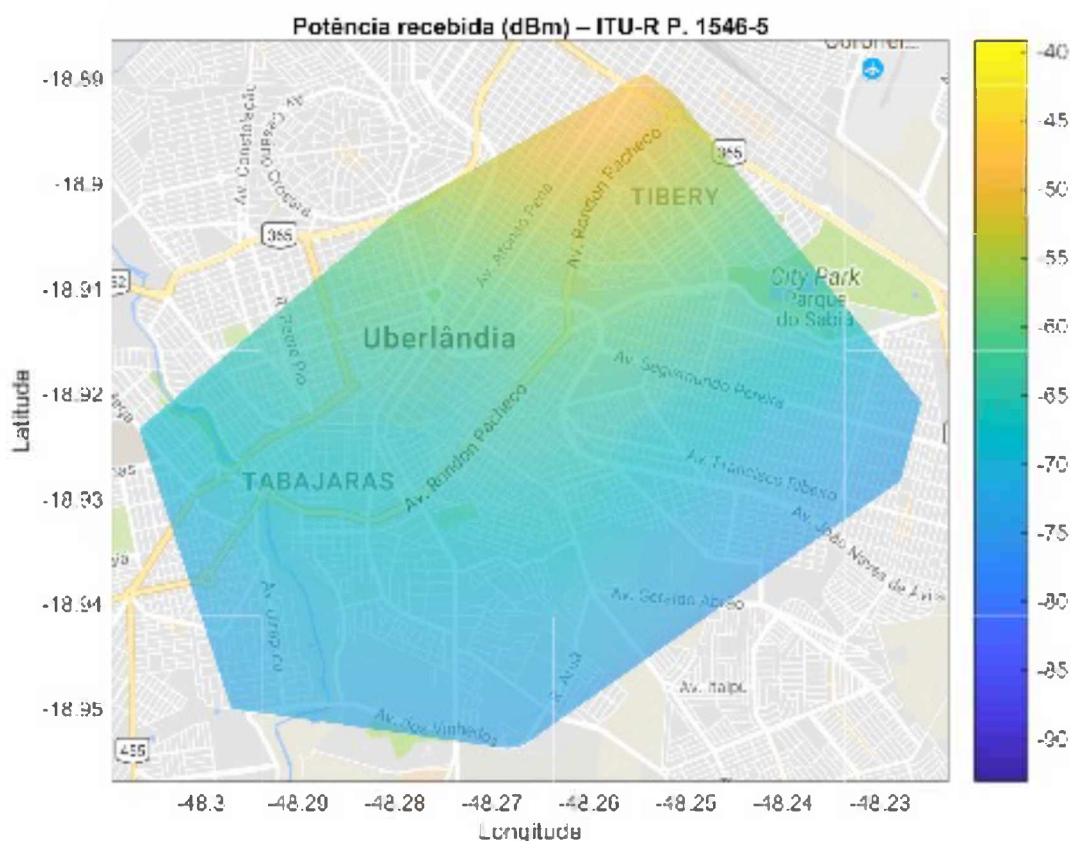


Figura 142 – Mapa de cobertura elaborado a partir da ITU-R P.1546-5.



Fonte: Elaborada pelo autor.

11.9 Considerações Finais

Este capítulo apresentou os resultados obtidos com a aplicação do método proposto para regiões rurais e fez sua comparação tanto com dados reais medidos como com resultados de outros famosos modelos de propagação. Além disso, também deu início ao processo de VV&C e começou a definir quais os tipos de correções necessárias para o refinamento adequado do modelo.

Primeiramente, foram feitas comparações do modelo proposto sem correção nenhuma e ficou evidente que, apesar de um resultado médio um pouco distante do real (cerca de 16 dBm), o método proposto foi o único capaz, dentre os analisados, de representar com mais fidelidade as perdas devido ao terreno irregular. Isso demonstrou que esse modelo tinha potencial para fornecer bons resultados e, a partir daí, passou-se para uma fase de melhorar esse primeiro resultado.

Na primeira fase de calibração do modelo, foi descoberto, por meio de análise de dados e comparação com os dados medidos, que o erro inerente à separação e superposição de perdas e por outros efeitos não considerados pode ser eliminado aplicando uma parcela de correção que equivale a um *offset* de 10,325 dB. Essa

primeira parcela de correção conseguiu aproximar ainda mais os resultados do modelo proposto aos resultados reais e fez com que ele apresentasse um erro RMS de apenas 7,6 dBm, que é razoável para predições de larga escala.

Na segunda fase de calibração do modelo, foi apresentada uma definição alternativa de altitude média do terreno e foi mostrado que os erros devido à representação de obstáculos reais por gumes de faca e devido ao equivalente de Bullington podem ser considerados por meio dessa altitude média. Também foi evidenciado que a segunda parte da correção deve ser função dessa altitude média e que ela deve ser mais expressiva em regiões com maior sombreamento. A partir dessas ponderações, foi possível ter uma ideia geral do seu comportamento e o seu formato específico foi determinado como um função de potência.

Como era esperado, essa correção melhorou, mais ainda, os resultados do método proposto para aplicações em regiões rurais. Assim, o modelo conseguiu representar muito bem a realidade e apresentou um pequeno erro RMS de 4,987 dBm.

Como o modelo apresentou bons resultados no cenário rural, ele também foi testado no cenário urbano, uma vez que, para o cálculo de larga escala, o cenário urbano pode ser considerado como uma variação do cenário rural. Por meio da análise dos dados, verificou-se que apenas a correção de offset era necessária para aplicação em cidades e que, devido a efeitos desse ambiente, esse *offset* deveria ser aumentado de 10,325 para 24,1 dB. Isso indicou que, em média, as perdas na cidade são 13,775 dB maiores do que nas regiões rurais.

Após essa adaptação para o ambiente urbano, o modelo foi testado em cinco rotas diferentes na cidade de Uberlândia e constatou-se boa concordância entre seus resultados e os dados medidos experimentalmente, com erros tão pequenos como 3,6 dBm. Além disso, os resultados também foram comparados com resultados da Recomendação ITU-R P. 1546-5 e foi possível verificar que, em todos os casos, o modelo proposto se saiu melhor do que essa recomendação e conseguiu representar com mais fidelidade a atenuação sofrida pelo sinal devido às irregularidades do terreno.

12 CONCLUSÕES E CONTRIBUIÇÕES

12.1 Conclusões

Neste trabalho, foi abordado o problema do cálculo da perda de propagação sobre terrenos irregulares. Mais especificamente, o foco dos estudos foi voltado para as faixas de frequência VHF e UHF, devido à sua importância e ampla utilização em diversos serviços utilizados diariamente.

Entretanto, antes de iniciar a discussão específica, o Capítulo 2 apresentou diversos fundamentos de eletromagnetismo. Isso foi necessário para justificar muitas das equações que foram utilizadas no trabalho e, também, porque qualquer modelagem de problemas eletromagnéticos começa com um bom entendimento de eletromagnetismo e das equações de Maxwell.

No mesmo sentido do Capítulo 2, o Capítulo 3 trouxe vários conceitos sobre o mecanismo de radiação e sobre antenas. Mais especificamente, concentrou-se em apresentar e definir parâmetros característicos de antenas e que são, na maioria das vezes, muito importantes para as previsões de perda de percurso.

Mais adiante, o Capítulo 4 justificou a escolha da faixa de frequências VHF e UHF e, tendo como fundamento os Capítulos 2 e 3, apresentou as bases teóricas e matemáticas da propagação de ondas eletromagnéticas no cenário de terreno irregular. Mais especificamente, trabalhou a questão da propagação no espaço livre, sobre Terra esférica, Terra plana, discutiu o efeito da troposfera na propagação das ondas em VHF e UHF e também mostrou as bases do cálculo de difração de ondas eletromagnéticas em obstáculos.

No Capítulo 5 desta tese, foi caracterizado o ambiente de terreno irregular, mais especificamente em termos da sua rugosidade e apresentadas as situações de propagação mais comuns. Além disso, foram apresentadas as dificuldades de se fazer um cálculo analítico exato da atenuação por difração nas irregularidades do terreno e mostrou-se, então, que as irregularidades podem ser representadas por séries de gumes de faca para facilitar os cálculos. Entretanto, os métodos que utilizam representação por gumes de faca não são muito precisos..

Além disso, foram apresentados diversos outros modelos utilizados para o cálculo da perda de percurso em terrenos irregulares, seus pontos fracos e fortes. Ainda, considerou-se a importância do uso de bases de dados topográficos para a

utilização dos modelos de cálculo apresentados e as dificuldades decorrentes na sua obtenção. Muitas das dificuldades encontradas para se fazer cálculos de propagação sobre terrenos irregulares existem pelo fato dos bancos de dados topográficos nem sempre serem detalhados e acurados o suficiente ou pelo simples fato de não se ter acesso a eles.

Na sequência, o Capítulo 6 abordou a importância da modelagem e simulação no campo de eletromagnetismo e propagação de ondas. Além da importância, esse capítulo apresentou, brevemente, as bases de bons procedimentos de modelagem e simulação, trouxe importantes conceitos como VV&C e citou alguns dos métodos mais utilizados para a modelagem numérica de problemas de eletromagnetismo.

Dentre os métodos citados no Capítulo 6, foi escolhido o método de equações parabólicas para utilização neste trabalho e o Capítulo 7 trouxe um desenvolvimento detalhado sobre esse método, bem como questões práticas de implementação numérica. Em conjunto com o Capítulo 7, o Capítulo 8 aplicou procedimentos de VV&C no método de equações parabólicas por diferenças finitas e também apresentou algumas comparações desse método com outros métodos.

Como o ponto principal deste trabalho, o Capítulo 9 propôs uma metodologia própria para realizar a predição de perda de propagação utilizando um método híbrido. Esse método foi desenvolvido na busca de um modelo simples, mas que fosse capaz de considerar, com precisão, os aspectos troposféricos e das irregularidades do terreno. Com isso, o modelo foi desenvolvido como um híbrido entre o modelo de Bullington e um modelo de equações parabólicas modificado.

Entretanto, foi necessário implementar um *software* que fosse capaz de realizar todos os cálculos necessários para a aplicação do modelo proposto. Nesse contexto, o Capítulo 10 deste trabalho propôs e mostrou o desenvolvimento de um pacote, em MATLAB®, capaz de implementar o método do Capítulo 9. Os códigos incluem aspectos desde a obtenção dos dados topográficos na *Google Elevation API* como incorporação de aspectos do sistema de transmissão como ganho das antenas e eficiência de linha de transmissão.

Com a metodologia definida no Capítulo 9 e sua implementação computacional definida no Capítulo 10, o Capítulo 11 tratou da apresentação dos resultados obtidos e sua comparação com dados reais medidos e resultados de outros modelos de propagação conhecidos. Inicialmente, o modelo proposto foi confrontado sem nenhum tipo de correção e ficou evidente que ele possuía potencial para uma boa

representação da perda de propagação em terrenos irregulares. Ele foi o único método, dentre os analisados, que teve sucesso em representar as perdas devido às irregularidades do terreno.

Após essa primeira análise, começou-se a discussão sobre o refinamento desse modelo proposto e foi definido que a correção prevista no Capítulo 9 deveria ser composta de dois termos. Com isso, uma análise de dados mostrou que o primeiro termo da correção representa o erro inerente à separação e superposição das perdas, a outros fenômenos desconsiderados e deveria ser um *offset* de 10,325 dB. A aplicação do primeiro termo da correção foi feita e mostrou um excelente resultado: o erro RMS do modelo proposto passou de cerca de 16 para 7,6 dBm em relação aos dados reais.

Posteriormente, foi iniciada a discussão sobre a segunda parte da correção prevista. Ela é um artifício para representar os erros devido à conversão do terreno real no equivalente de Bullington e devido à utilização de gumes de faca. Também ficou claro a sua correlação com a definição alternativa de altitude média do terreno e que o valor dessa correção é função desse parâmetro. Foram feitas algumas observações qualitativas sobre essa correção e sua forma matemática pôde ser encontrada. Como esperado, a aplicação desse segundo termo foi satisfatória em melhorar ainda mais os resultados e gerou erros RMS pequenos da ordem de 4,9 dBm.

Uma vez que o modelo forneceu bons resultados para a área rural (principal cenário de aplicação), foi estudada uma possível modificação para tornar sua aplicação possível também em problemas de larga escala em áreas urbanas. Após as ponderações e análises iniciais, constatou-se que era necessário um *offset* adicional de 13,775 dB para o cenário urbano. Esse *offset* é maior devido às características morfológicas das cidades que fazem com que outros mecanismos de propagação (multipercurso) também sejam expressivos. Com esse novo *offset*, o modelo também forneceu bons resultados com erros RMS da ordem de 3 a 4 dBm também se mostrou melhor do que o modelo da Recomendação ITU-R P. 1546-5. A única ressalva é que o modelo proposto parece ser um pouco pessimista nas proximidades do transmissor para o cenário urbano.

12.2 Contribuições

O estudo apresentado nesta tese trouxe algumas contribuições importantes. Em primeiro lugar, destaca-se uma aprofundada revisão sobre a propagação de ondas em terrenos irregulares nas faixas de VHF e UHF. Tal revisão considerou desde aspectos fundamentais do eletromagnetismo até aspectos importantes da modelagem e simulação de problemas eletromagnéticos. Foram abordados temas importantes como o vetor de Poynting, radiação e antenas, propagação sobre a Terra, efeitos troposféricos e difração. Além disso, foram recordados e apresentados vários modelos já existentes de propagação nesse cenário de interesse.

Além disso, outra importante contribuição foi o tratamento e exposição aprofundados do método de equações parabólicas e sua implementação pelo método de diferenças finitas. Esse assunto foi apresentado de maneira detalhada e com o intuito de esclarecer pontos obscuros de sua implementação. Assim, toda essa revisão bibliográfica compreende uma contribuição, pois pode funcionar como referência para outros trabalhos e ajudar no aprendizado de propagação de ondas.

Além dessas contribuições menores, a maior contribuição desta pesquisa foi o desenvolvimento de um modelo de propagação híbrido para cenários de terreno irregular em regiões rurais. As análises realizadas mostraram grande potencial desse modelo, que é de simples aplicação e modelagem. Após o refinamento necessário, o método desenvolvido foi capaz de representar fielmente a atenuação por difração e apresentou erro RMS de apenas 4,98 dBm em relação a medidas reais.

Mais ainda, foi possível estender a aplicação do método para as regiões urbanas a partir de uma modificação na correção de *offset*. As análises no cenário urbano também foram muito satisfatórias, superando o modelo de propagação da Recomendação ITU-R P. 1546-5. Apesar de fornecer bons resultados no cenário urbano, existe uma ressalva quando o modelo é aplicado nas proximidades do transmissor, pois tem comportamento um pouco pessimista.

Em conjunto com a contribuição anterior, outra grande contribuição foi o desenvolvimento de uma ferramenta computacional capaz de, automaticamente, obter dados de elevação do terreno para efetuar os cálculos de atenuação do modelo proposto. Isso é algo muito importante, pois automatiza um dos processos mais complicados dos cálculos, que é a obtenção do perfil vertical do terreno de

propagação. Além disso, esse procedimento de obtenção do terreno é geral e pode ser aplicado em qualquer outro modelo de propagação existente.

Além de obter o perfil de terreno *online*, a ferramenta desenvolvida é capaz de realizar a predição de intensidade de sinal em qualquer ponto da Terra, uma vez informadas as localizações do transmissor e receptor e os parâmetros do sistema radiante. Também destaca-se a utilidade da ferramenta como forma de apoiar o planejamento e o projeto de instalações transmissoras, por exemplo, de rádio e TV.

12.3 Sugestões para Trabalhos Futuros

No Capítulo 7, que tratou sobre o método das equações parabólicas, foi discutido como é possível realizar o truncamento do domínio de integração. A técnica mais simples e, também, mais utilizada atualmente é a inserção de camadas absorvedoras nos limites do domínio para simular a condição de radiação de Sommerfeld no infinito.

Entretanto, essa metodologia tem a desvantagem de elevar, significativamente, a complexidade computacional do problema. Portanto, uma possível continuidade deste trabalho seria a tentativa de modelar e implementar uma outra técnica de truncamento de domínio (como condições de contorno não locais) para reduzir a complexidade computacional e tornar a aplicação do método proposto ainda mais rápida e leve.

Ainda no Capítulo 7, tratou-se da distribuição de campo inicial para o método de equações parabólicas. Essa distribuição inicial é a distribuição de campo na abertura da antena e sua acurácia é muito importante para obter bons resultados. Valor iniciais que não representam a realidade implicarão em resultados muito distorcidos.

A distribuição inicial pode ser obtida por meio da transformada inversa de Fourier de uma função que representa o feixe da antena transmissora e, na literatura existente e neste trabalho, é utilizado um feixe Gaussiano que é muito útil para representar diversos tipos de antenas. Ele é utilizado, pois sua transformada de Fourier pode ser obtida analiticamente e não gera custo computacional.

Entretanto, o mais correto seria utilizar um feixe idêntico ao diagrama de radiação fornecido pelos fabricantes, mas esse é um processo que ainda tem certas complicações e tem grande custo computacional. Portanto, outra possível sugestão

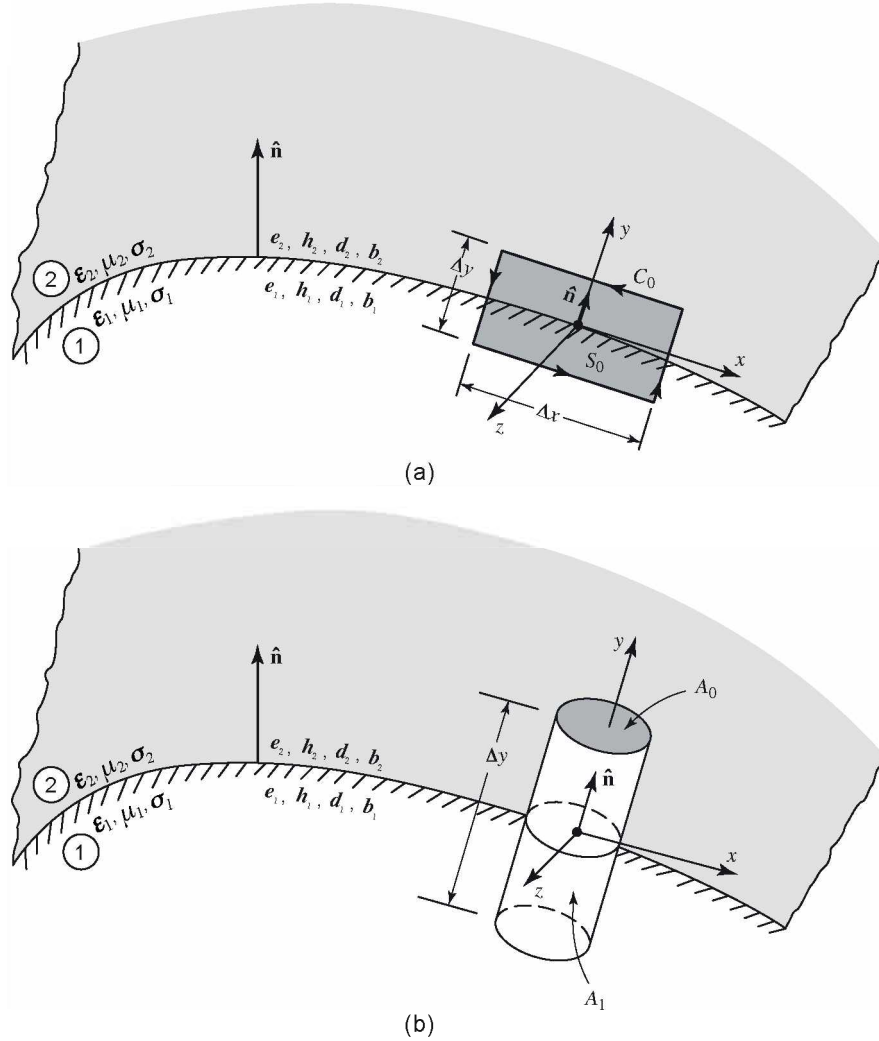
de trabalho é no sentido de encontrar a distribuição de campo inicial a partir do diagrama real da antena.

Como verificado no Capítulo 11, o modelo proposto fornece bons resultados também para o ambiente urbano, porém tende a ser um pouco pessimista quando as predições são feitas nas proximidades do transmissor. Sendo assim, outra possível continuação deste trabalho é uma investigação mais profunda sobre os efeitos que acontecem nessas regiões próximas ao transmissor para tentar melhorar a acurácia do modelo nesses casos. Além disso, pode ser possível que os erros nas proximidades do transmissor sejam advindos da utilização do feixe Gaussiano e não do diagrama real da antena no método de equações parabólicas.

APÊNDICE A – CONDIÇÕES DE CONTORNO

Inicialmente, deve-se considerar uma interface entre dois meios na qual não há cargas ou fontes, ou seja, nenhum dos meios é um condutor perfeito e as fontes reais dos campos não estão nesses meios. O meio 1 é caracterizado pelos parâmetros constitutivos $\epsilon_1, \mu_1, \sigma_1$ e o meio 2, pelos parâmetros $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$.

Figura 143 – Geometria para análise das condições de contorno.



Fonte: *Advanced Engineering Electromagnetics* [15].

Em determinado ponto na interface, imagine um percurso retangular denotado por C_0 cuja área é denotada por S_0 , como na Figura 143(a). Aplicando a equação de Maxwell na forma integral da Equação (A.1) nesse percurso e considerando a ausência de corrente magnética, tem-se a Equação (A.2).

$$\oint \mathbf{e} \cdot d\boldsymbol{\ell} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} - i_m \quad (\text{A.1})$$

$$\oint_{C_0} \mathbf{e} \cdot d\ell = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_0} \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{A.2})$$

À medida que a altura do percurso retangular se torna pequena, a área S_0 também se torna pequena e a contribuição da integral de superfície passa a ser desprezível. Além disso, a contribuição da integral de linha ao longo de y é mínima. Portanto, no limite $\Delta y \rightarrow 0$, a Equação (A.2) se torna as Equações (A.3) e (A.4).

$$\mathbf{e}_1 \cdot \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{e}_2 \cdot (-\hat{\mathbf{x}}) = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{e}_{1t} = \mathbf{e}_{2t} \quad (\text{A.4})$$

A Equação (A.4) pode ser escrita vetorialmente como a Equação (A.5).

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_1) = 0 \quad (\text{A.5})$$

As Equações (A.4) e (A.5) dizem que as componentes tangenciais do campo elétrico são contínuas na fronteira entre dois meios, desde que não haja densidade de corrente magnética imposta na fronteira.

Utilizando um procedimento similar no mesmo retângulo e utilizando a Equação integral (A.6), chega-se à Equação (A.7).

$$\oint \mathbf{h} \cdot d\ell = i_{\text{Total}} + \int_S \frac{\partial d}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{A.6})$$

$$\oint_{C_0} \mathbf{h} \cdot d\ell = \frac{\partial}{\partial t} \iint_{S_0} \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{A.7})$$

No limite $\Delta y \rightarrow 0$, a Equação (A.7) se torna a Equação (A.8) ou a Equação (A.9).

$$\mathbf{h}_{1t} = \mathbf{h}_{2t} \quad (\text{A.8})$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{h}_2 - \mathbf{h}_1) = 0 \quad (\text{A.9})$$

As Equações (A.8) e (A.9) dizem que as componentes tangenciais do campo magnético são contínuas na fronteira entre dois meios, desde que não haja densidade de corrente elétrica imposta na fronteira.

Agora, deve-se considerar um cilindro em algum ponto da fronteira, como na Figura 143(b). Na ausência de cargas e fontes, a equação da lei de Gauss da Equação (A.10) se torna a Equação (A.11).

$$\oint_S \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho dV \quad (\text{A.10})$$

$$\oint_{A_0} \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S} + \oint_{A_1} \mathbf{d} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (\text{A.11})$$

À medida que a altura do cilindro diminui, a sua área lateral A_l também diminui e sua integral de área pode ser desprezada. Portanto, no limite $\Delta y \rightarrow 0$, tem-se a Equação (A.14).

$$\mathbf{d}_1 \cdot (-\hat{\mathbf{y}}) + \mathbf{d}_2 \cdot \hat{\mathbf{y}} = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$\mathbf{d}_{2n} = \mathbf{d}_{1n} \quad (\text{A.13})$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1) = 0 \quad (\text{A.14})$$

Essas equações dizem que as componentes normais da densidade de fluxo elétrico na interface entre dois meios são contínuas na ausência de cargas elétricas na fronteira. Da mesma maneira, utiliza-se a equação de Maxwell da Equação (A.15) para se chegar às Equações (A.17) e (A.18).

$$\oint_S \mathbf{b} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \rho_m dV = 0 \quad (\text{A.15})$$

$$\mathbf{b}_1 \cdot (-\hat{\mathbf{y}}) + \mathbf{b}_2 \cdot \hat{\mathbf{y}} = 0 \quad (\text{A.16})$$

$$\mathbf{b}_{2n} = \mathbf{b}_{1n} \quad (\text{A.17})$$

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1) = 0 \quad (\text{A.18})$$

As Equações (A.17) e (A.18) dizem que as componentes normais da densidade de fluxo magnético na interface entre dois meios são contínuas na ausência de cargas magnéticas na fronteira.

Se existirem fontes na interface ou se algum dos meios for um condutor elétrico perfeito, as condições de contorno estabelecidas devem ser modificadas para incluir as fontes e/ou cargas ou a corrente elétrica induzida e densidade superficial de carga induzida. O mesmo deve ser feito caso fontes e/ou cargas magnéticas existam na fronteira ou se algum dos meios for um condutor magnético perfeito.

Nesses casos, a Tabela 20 traz um resumo das equações que devem ser utilizadas.

Tabela 20 – Condições de contorno para os campos elétrico e magnético.

	Geral	Meios com condutividade finita, sem fontes e sem cargas $\sigma_1, \sigma_2 \neq \infty$ $j_s = 0$ $\rho_s = 0$ $m_s = 0$ $\rho_{ms} = 0$	Meio 1 condutor elétrico perfeito $e_1 = h_1 = 0$ $\sigma_1 = \infty$ $\sigma_2 \neq \infty$ $m_s = 0$ $\rho_{ms} = 0$	Meio 1 condutor magnético perfeito $e_1 = h_1 = 0$ $j_s = 0$ $\rho_s = 0$
Campo elétrico tangencial	$-\hat{n} \times (e_2 - e_1) = m_s$	$\hat{n} \times (e_2 - e_1) = 0$	$\hat{n} \times e_2 = 0$	$-\hat{n} \times e_2 = m_s$
Campo magnético tangencial	$\hat{n} \times (h_2 - h_1) = j_s$	$\hat{n} \times (h_2 - h_1) = 0$	$\hat{n} \times h_2 = j_s$	$\hat{n} \times h_2 = 0$
Densidade de fluxo elétrico normal	$\hat{n} \cdot (d_2 - d_1) = \rho_s$	$\hat{n} \cdot (d_2 - d_1) = 0$	$\hat{n} \cdot d_2 = \rho_s$	$\hat{n} \cdot d_2 = 0$
Densidade de fluxo magnético normal	$\hat{n} \cdot (b_2 - b_1) = \rho_{ms}$	$\hat{n} \cdot (b_2 - b_1) = 0$	$\hat{n} \cdot b_2 = 0$	$\hat{n} \cdot b_2 = \rho_{ms}$

Fonte: *Advanced Engineering Electromagnetics* [15].

APÊNDICE B – CÁLCULO DA PARTE REAL E IMAGINÁRIA DA CONSTANTE DE PROPAGAÇÃO

O quadrado da constante de propagação é dado pela Equação (B.1)

$$\gamma^2 = -\omega^2 \mu \epsilon + j\omega \mu \sigma \quad (\text{B.1})$$

Como essa constante é complexa, pode-se fazer $\gamma = \alpha + j\beta$. Assim, tem-se a Equação (B.2), que é desenvolvida e se torna o sistema da Equação (B.4).

$$(\alpha + j\beta)^2 = -\omega^2 \mu \epsilon + j\omega \mu \sigma \quad (\text{B.2})$$

$$\alpha^2 + j2\alpha\beta - \beta^2 = -\omega^2 \mu \epsilon + j\omega \mu \sigma \quad (\text{B.3})$$

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2 \mu \epsilon \\ \alpha\beta = \frac{\omega \mu \sigma}{2} \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

As Equações (B.5) a (B.9) resolvem esse sistema para α .

$$\alpha^2 - \frac{\omega^2 \mu^2 \sigma^2}{4\alpha^2} = -\omega^2 \mu \epsilon \quad (\text{B.5})$$

$$\alpha^4 + \omega^2 \mu \epsilon \alpha^2 - \frac{\omega^2 \mu^2 \sigma^2}{4} = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$\alpha^2 = \frac{-\omega^2 \mu \epsilon \pm \omega^2 \mu \epsilon \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2 \epsilon^2}}}{2} \quad (\text{B.7})$$

$$\alpha^2 = \frac{\omega^2 \mu \epsilon}{2} \left(\pm \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} - 1 \right) \quad (\text{B.8})$$

Nesse ponto, como α e β devem ser reais, é preciso considerar apenas a soma e desprezar a subtração do sinal mais ou menos. Desse modo, α é dado pela Equação (B.9).

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right]} \quad (\text{B.9})$$

Agora, basta substituir o resultado de α na primeira equação do sistema da Equação (B.4), como segue nas Equações (B.10) a (B.14)

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2 \mu\epsilon \quad (\text{B.10})$$

$$\beta^2 = \alpha^2 + \omega^2 \mu\epsilon \quad (\text{B.11})$$

$$\beta^2 = \frac{\omega^2 \mu\epsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right) + \omega^2 \mu\epsilon \quad (\text{B.12})$$

$$\beta^2 = \frac{\omega^2 \mu\epsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right) \quad (\text{B.13})$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{2} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right]} \quad (\text{B.14})$$

APÊNDICE C – DEMONSTRAÇÃO DO LUGAR GEOMÉTRICO DA POLARIZAÇÃO

C.1 – Polarização Linear

No caso da polarização linear, o vetor campo elétrico é do tipo da Equação (C.1).

$$\mathbf{e}(z, t) = (E_x \hat{x} + E_y \hat{y}) e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \quad (\text{C.1})$$

Em um plano cartesiano e para determinado z , a abcissa é dada pela Equação (C.2) e, a ordenada, pela Equação (C.3).

$$x = E_x e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \quad (\text{C.2})$$

$$y = E_y e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \quad (\text{C.3})$$

Das Equações (C.2) e (C.3), chega-se à Equação (C.4) e Equação (C.5).

$$\frac{x}{E_x} = \frac{y}{E_y} \quad (\text{C.4})$$

$$y = \frac{E_y}{E_x} x \quad (\text{C.5})$$

Na Equação (C.5), fica evidente que a Figura geométrica traçada é uma reta que passa pela origem cujo coeficiente angular é a razão $\frac{E_y}{E_x}$.

C.2 – Polarização Elíptica

No caso da polarização elíptica, o campo elétrico é dado pela Equação (C.6).

$$\mathbf{e}(z, t) = E_x e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \hat{x} + E_y e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta) \hat{y} \quad (\text{C.6})$$

Para z fixo, a abcissa é dada pela Equação (C.7) e, a ordenada, pela Equação (C.8).

$$x = E_x e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \quad (\text{C.7})$$

$$y = E_y e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta) \quad (\text{C.8})$$

Pode-se desenvolver o cosseno da Equação (C.8) como na Equação (C.9).

$$y = E_y e^{-\alpha z} [\cos(\omega t - \beta z) \cos \theta - \sin(\omega t - \beta z) \sin \theta] \quad (\text{C.9})$$

Agora, é necessário rearranjar os termos da Equação (C.9) como na Equação (C.10).

$$\sin(\omega t - \beta z) = \frac{\cos(\omega t - \beta z) \cos \theta - \frac{y}{E_y e^{-\alpha z}}}{\sin \theta} \quad (\text{C.10})$$

É necessário substituir a Equação (C.7) na Equação (C.10). Assim, chega-se à Equação (C.11).

$$\sin(\omega t - \beta z) = \frac{\frac{x}{E_x e^{-\alpha z}} \cos \theta - \frac{y}{E_y e^{-\alpha z}}}{\sin \theta} \quad (\text{C.11})$$

Neste ponto, escreve-se a identidade trigonométrica da Equação (C.12), que é desenvolvida até a Equação (C.17).

$$\sin^2(\omega t - \beta z) + \cos^2(\omega t - \beta z) = 1 \quad (\text{C.12})$$

$$\left[\frac{\frac{x}{E_x e^{-\alpha z}} \cos \theta - \frac{y}{E_y e^{-\alpha z}}}{\sin \theta} \right]^2 + \left(\frac{x}{E_x e^{-\alpha z}} \right)^2 = 1 \quad (\text{C.13})$$

$$\frac{\left(\frac{x}{E_x e^{-\alpha z}} \cos \theta - \frac{y}{E_y e^{-\alpha z}} \right)^2}{\sin^2 \theta} + \frac{x^2}{(E_x e^{-\alpha z})^2} = 1 \quad (\text{C.14})$$

$$\frac{\frac{x^2}{(E_x e^{-\alpha z})^2} \cos^2 \theta - 2 \cos \theta \frac{x}{E_x e^{-\alpha z}} \frac{y}{E_y e^{-\alpha z}} + \frac{y^2}{(E_y e^{-\alpha z})^2}}{\sin^2 \theta} + \frac{x^2}{(E_x e^{-\alpha z})^2} = 1 \quad (\text{C.15})$$

$$\begin{aligned}
 & x^2 \left(E_y e^{-\alpha z} \right)^2 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta E_x e^{-\alpha z} E_y e^{-\alpha z} xy + y^2 \left(E_x e^{-\alpha z} \right)^2 + \dots \\
 & \dots + x^2 \left(E_y e^{-\alpha z} \right)^2 \sin^2 \theta - \left(E_y e^{-\alpha z} \right)^2 \left(E_x e^{-\alpha z} \right)^2 \sin^2 \theta = 0
 \end{aligned} \tag{C.16}$$

$$\begin{aligned}
 & x^2 \left(E_y e^{-\alpha z} \right)^2 - 2 \cos \theta E_x e^{-\alpha z} E_y e^{-\alpha z} xy + y^2 \left(E_x e^{-\alpha z} \right)^2 + \dots \\
 & \dots - \left(E_y e^{-\alpha z} \right)^2 \left(E_x e^{-\alpha z} \right)^2 \sin^2 \theta = 0
 \end{aligned} \tag{C.17}$$

Agora, é preciso notar a semelhança da Equação (C.17) com a equação quadrática da Equação (C.18).

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{C.18}$$

Por comparação, encontra-se as constantes como na Equação (C.19)

$$\begin{aligned}
 a &= \left(E_y e^{-\alpha z} \right)^2 \\
 b &= -2 \cos \theta E_x e^{-\alpha z} E_y e^{-\alpha z} \\
 c &= \left(E_x e^{-\alpha z} \right)^2 \\
 d &= 0 \\
 e &= 0 \\
 f &= - \left(E_y e^{-\alpha z} \right)^2 \left(E_x e^{-\alpha z} \right)^2 \sin^2 \theta
 \end{aligned} \tag{C.19}$$

O formato do lugar geométrico da Equação (C.17) é determinado a partir da análise do discriminante da Equação (C.20).

$$D = b^2 - 4ac \tag{C.20}$$

$$D = \left(-2 \cos \theta E_x e^{-\alpha z} E_y e^{-\alpha z} \right)^2 - 4 \left(E_y e^{-\alpha z} \right)^2 \left(E_x e^{-\alpha z} \right)^2 \tag{C.21}$$

$$D = -4 \left(E_x e^{-\alpha z} \right)^2 \left(E_y e^{-\alpha z} \right)^2 \sin^2 \theta \tag{C.22}$$

O discriminante da Equação (C.22) sempre será negativo, a menos que $\theta = 0$, que é o caso da polarização linear já discutida. Portanto, a Figura resultante será uma elipse.

Essa elipse é centrada na origem e seu eixo possui inclinação dada pela Equação (C.23) contada no sentido positivo a partir do eixo x .

$$\phi = \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{2 \cos \theta E_x E_y}{E_x^2 - E_y^2} \right] \quad (\text{C.23})$$

Além disso, seus eixos maior e menor são dados pelas Equações (C.24) e (C.25).

$$E_{\text{maior}} = \frac{\sqrt{2} E_y E_x \sin \theta}{\sqrt{E_y^2 + E_x^2} - \sqrt{E_y^4 + E_x^4 + 2 E_x^2 E_y^2 \cos(2\theta)}} \quad (\text{C.24})$$

$$E_{\text{menor}} = \frac{\sqrt{2} E_y E_x \sin \theta}{\sqrt{E_y^2 + E_x^2} + \sqrt{E_y^4 + E_x^4 + 2 E_x^2 E_y^2 \cos(2\theta)}} \quad (\text{C.25})$$

C.3 – Polarização Circular

No caso da polarização circular, o campo elétrico é dado pela Equação (C.26).

$$\mathbf{e}(z, t) = E e^{-\alpha z} [\cos(\omega t - \beta z) \hat{x} \mp \sin(\omega t - \beta z) \hat{y}] \quad (\text{C.26})$$

Assim, a abcissa é dada pela Equação (C.27) e a ordenada pela Equação (C.28).

$$x = E e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \quad (\text{C.27})$$

$$y = \mp E e^{-\alpha z} \sin(\omega t - \beta z) \quad (\text{C.28})$$

Utilizando a identidade trigonométrica da Equação (C.29), desenvolve-se as Equações (C.30) e (C.31).

$$\sin^2(\omega t - \beta z) + \cos^2(\omega t - \beta z) = 1 \quad (\text{C.29})$$

$$\frac{y^2}{(E e^{-\alpha z})^2} + \frac{x^2}{(E e^{-\alpha z})^2} = 1 \quad (\text{C.30})$$

$$x^2 + y^2 = (E e^{-\alpha z})^2 \quad (\text{C.31})$$

Automaticamente, percebe-se que a Equação (C.31) representa uma circunferência centrada na origem e com raio $E e^{-\alpha z}$.

APÊNDICE D – CÓDIGOS DE PROGRAMAS UTILIZADOS

D.1 – Programa para Cálculo Analítico no Guia de Onda Paralelo Não Penetrável

```

clc
clear variables
%*****
% PARAMETERS DEFINITIONS
%*****
freq = 3000;           % FREQUENCY [MHz]
BW = 30;               % SOURCE 3dB BEAMWIDTH ARRAY [°]
BT = 45;               % SOURCE BEAM-TILT ARRAY [°]
max_range = 3;         % MAX RANGE [m]
max_z = 1;             % MAX ALTITUDE [m]
delz = 0.000125;       % Z STEP [m]
delx = 0.0001;         % RANGE STEP [m]
H = 0.5;               % SOURCE ALTITUDE ARRAY [m]
MAX_MODES = 90;        % MAX NUM. OF MODES
POL = 'H';             % WAVE POLARIZATION [H/V]

%*****
% PARAMETERS CALCULATION
%*****
freq = freq*1E6;        % CONVERSION FROM [MHz] TO [Hz]
clight = 299792458;     % SPEED OF LIGHT IN FREE-SPACE [m/s]
lambda0 = clight/freq;  % FREE-SPACE WAVELENGTH [m]
k0 = 2*pi/lambda0;      % FREE-SPACE WAVE NUMBER [1/m]
BW = pi*BW/180;         % CONVERSION FROM [°] TO [rad]
BT = pi*BT/180;         % CONVERSION FROM [°] TO [rad]
M = floor(max_range/delx) + 1; % NUM. OF COLS
N = floor(max_z/delz) + 1; % NUM. OF ROWS
z = (linspace(0,max_z,N))'; % ALTITUDE ARRAY
range = linspace(0,max_range,M); % RANGE ARRAY

%*****
% PREPARE FOR CALCULATION
%*****
% COMPUTE INITIAL FIELD FOR GAUSSIAN SOURCE
gauss_field = initialGaussField(k0, BW, BT, z, POL, H);

% APPLY BOUNDARY CONDITIONS ON INITIAL FIELD
if POL == 'H' % DIRICHLET
    gauss_field(1) = 0;
    gauss_field(end) = 0;
else % NEUMANN
    gauss_field(1) = gauss_field(2);
    gauss_field(end) = gauss_field(end-1);
end

% INITIALIZE SOME VARS
field = zeros(N,M);
beta = zeros(1,MAX_MODES);
kn = zeros(1,MAX_MODES);
w = sqrt(2*log(2))/(k0*sin(BW/2));

%*****
% CALCULATION STARTS
%*****
if POL == 'H'
    for mode_n = 1:MAX_MODES

```

```

if k0 > (mode_n*pi/max_z)
    beta(mode_n) = sqrt(k0^2 - (mode_n*pi/max_z)^2);
else
    beta(mode_n) = 1i*sqrt((mode_n*pi/max_z)^2 - k0^2);
end
% Use orthonormality & extract excitation coefficients
% This needs the chebfun package
coeff = chebfun(@(t)((exp(-(t-H)/w).^2).* ...
    exp(-1i*k0*sin(BT)*t) - exp(-((-t-H)/w).^2).* ...
    exp(1i*k0*sin(BT)*t)).*sin(mode_n*pi*t/max_z)./ ...
    (w*pi*sqrt(2))),[0,max_z]);
kn(mode_n) = sqrt(2/max_z)*sum(coeff);
% Compute field over all range in terms of given modes
nm = kn(mode_n)*sqrt(2/max_z)*sin(mode_n*pi*z/max_z);
field = field + nm*exp(1i*beta(mode_n).*range);

% Compute error between source field and actual field on 1 col.
err = max(abs(gauss_field - field(:,1)));
end
elseif POL == 'V'
for mode_n = 1:MAX_MODES
    if k0 > ((mode_n-1)*pi/max_z)
        beta(mode_n) = sqrt(k0^2 - ((mode_n-1)*pi/max_z)^2);
    else
        beta(mode_n) = 1i*sqrt(((mode_n-1)*pi/max_z)^2 - k0^2);
    end

    % Use orthonormality & extract excitation coefficients
    % This needs the chebfun package
    coeff = chebfun(@(t) ((exp(-(t-H)/w).^2).* ...
        exp(-1i*k0*sin(BT)*t) + exp(-((-t-H)/w).^2).* ...
        exp(1i*k0*sin(BT)*t)).*cos((mode_n-1)*pi*t/max_z)./...
        (w*pi*sqrt(2))),[0,max_z]);
    kn(mode_n) = sum(sqrt(2/max_z)*coeff);

    % Compute field in terms of given modes
    nm = kn(mode_n)*sqrt(2/max_z)*cos(((mode_n-1)*pi*z)/max_z);
    if mode_n == 1
        nm = nm/2;
    end
    field = field + nm*exp(1i*beta(mode_n).*range);

    % Compute error between source field and actual field on 1 col.
    err = max(abs(gauss_field - field(:,1)));
end
end

display(['Number of modes used: ', num2str(mode_n), ' with error: ',
num2str(err(end))]);

% GET ONLY ABSOLUTE VALUE OF FIELD
u = abs(field);

% PRINTS THE SOLUTION OF FIELD |u(x,z)|
figure
imagesc(range, z, u)
colormap(jet)
set(gca,'Ydir','normal');
xlabel('Range (m)','Linewidth',2,'fontsize',9,'FontWeight','bold');
ylabel('Altitude (m)','Linewidth',2,'fontsize',9,'FontWeight','bold');
colorbar

```

D.2 – Programa NAPE para Cálculo no Guia de Onda Paralelo Não Penetrável

```

clc
clear variables

%*****
% PARAMETERS DEFINITIONS
%*****
freq = 3000;           % FREQUENCY [MHz]
BW = 30;               % SOURCE 3dB BEAMWIDTH ARRAY [°]
BT = 45;               % SOURCE BEAM-TILT ARRAY [°]
max_range = 3;         % MAX RANGE [m]
max_z = 1;             % MAX ALTITUDE [m]
delz = 0.000125;       % Z STEP [m]
delx = 0.0001;         % RANGE STEP [m]
H = 0.5;               % SOURCE ALTITUDE ARRAY [m]
POL = 'H';             % WAVE POLARIZATION [H/V]

%*****
% PARAMETERS CALCULATION
%*****
freq = freq*1E6;        % CONVERSION FROM [MHz] TO [Hz]
clight = 299792458;     % SPEED OF LIGHT IN FREE-SPACE [m/s]
lambda0 = clight/freq;  % FREE-SPACE WAVELENGTH [m]
k0 = 2*pi/lambda0;      % FREE-SPACE WAVE NUMBER [1/m]
BW = pi*BW/180;         % CONVERSION FROM [°] TO [rad]
BT = pi*BT/180;         % CONVERSION FROM [°] TO [rad]
M = floor(max_range/delx); % NUM. OF COLS
N = floor(max_z/delz);  % MATRIX NUM. OF ROWS
z = (linspace(0,max_z,N))'; % ALTITUDE ARRAY
range = linspace(0,max_range,M); % RANGE ARRAY

%*****
% PREPARE FOR CALCULATION
%*****
% COMPUTE INITIAL FIELD FOR GAUSSIAN SOURCE
gauss_field = initialGaussField(k0, BW, BT, z, POL, H);

% APPLY BOUNDARY CONDITIONS ON INITIAL FIELD
if POL == 'H' % DIRICHLET
    gauss_field(1) = 0;
    gauss_field(end) = 0;
else % NEUMANN
    gauss_field(1) = gauss_field(2);
    gauss_field(end) = gauss_field(end-1);
end

% INITIALIZE SOME VARS
n_ref = ones(N,1);
field = zeros(N,M);
field(:,1) = gauss_field;

%*****
% CALCULATION STARTS
%*****
b = 4*1i*k0*delz^2/delx;
for m=2:M
    % CREATES THE ARRAY OF VALUES a_mj
    a_mj = k0^2*delz^2*(n_ref.^2 - 1);

    % CREATES THE DIAGONAL OF MATRIX A

```

```

diagA = -2 + b + a_mj;

% CREATES THE DIAGONAL OF MATRIX B
diagB = 2 + b - a_mj;

% CREATES THE SUBDIAGONAL OF THE MATRIX A
subdiagA = ones(1,N-1);

% CREATES THE SUPERDIAGONAL OF THE MATRIX A
superdiagA = ones(1,N-1);

% CREATES THE SUBDIAGONAL OF THE MATRIX B
subdiagB = -ones(1,N-1);

% CREATES THE SUPERDIAGONAL OF THE MATRIX B
superdiagB = -ones(1,N-1);

% CHANGE THE MATRIX ACCORDING TO BOUNDARY CONDITIONS
if POL == 'H' % DIRICHLET
    diagA(1) = 1;
    diagB(1) = 1;
    diagA(end) = 1;
    diagB(end) = 1;
    superdiagA(1) = 0;
    superdiagB(1) = 0;
    subdiagA(end) = 0;
    subdiagB(end) = 0;

elseif POL == 'V' % NEUMANN
    diagA(1) = diagA(1)/2;
    diagB(1) = diagB(1)/2;
    diagA(end) = diagA(end)/2;
    diagB(end) = diagB(end)/2;
end

% CREATES THE TRIDIAGONAL SPARSE MATRIX A and B
A = gallery('tridiag', subdiagA, diagA, superdiagA);
B = gallery('tridiag', subdiagB, diagB, superdiagB);

% COMPUTE ARRAY V
V = B*field(:,m-1);

% COMPUTE THE FIELD IN RANGE m
field(:,m) = A\V;
end

% GET ONLY ABSOLUTE VALUE OF FIELD
u = abs(field);

% PRINTS THE SOLUTION OF FIELD |u(x,z)|
figure
imagesc(range, z, u)
colormap(jet)
set(gca,'Ydir','normal');
xlabel('Range (km)','Linewidth',2,'fontsize',9,'FontWeight','bold');
ylabel('Altitude (m)','Linewidth',2,'fontsize',9,'FontWeight','bold');
colorbar

```


D.3 – Programa WAPE para Cálculo no Guia de Onda Paralelo Não Penetrável

```

clc
clear variables

%*****
% PARAMETERS DEFINITIONS
%*****
freq = 3000;           % FREQUENCY [MHz]
BW = 30;               % SOURCE 3dB BEAMWIDTH ARRAY [°]
BT = -45;              % SOURCE BEAM-TILT ARRAY [°]
max_range = 3;         % MAX RANGE [m]
max_z = 1;             % MAX ALTITUDE [m]
delz = 0.00125;        % Z STEP [m]
delx = 0.0005;         % RANGE STEP [m]
H = 0.5;               % SOURCE ALTITUDE ARRAY [m]
POL = 'H';             % WAVE POLARIZATION [H/V]

%*****
% PARAMETERS CALCULATION
%*****
freq = freq*1E6;        % CONVERSION FROM [MHz] TO [Hz]
clight = 299792458;     % SPEED OF LIGHT IN FREE-SPACE [m/s]
lambda0 = clight/freq;  % FREE-SPACE WAVELENGTH [m]
k0 = 2*pi/lambda0;      % FREE-SPACE WAVE NUMBER [1/m]
BW = pi*BW/180;         % CONVERSION FROM [°] TO [rad]
BT = pi*BT/180;         % CONVERSION FROM [°] TO [rad]
M = floor(max_range/delx) + 1; % NUM. OF COLS
N = floor(max_z/delz) + 1; % MATRIX NUM. OF ROWS
z = (linspace(0,max_z,N))'; % ALTITUDE ARRAY
range = linspace(0,max_range,M); % RANGE ARRAY

%*****
% PREPARE FOR CALCULATION
%*****
% COMPUTE INITIAL FIELD FOR GAUSSIAN SOURCE
gauss_field = initialGaussField(k0, BW, BT, z, POL, H);

% APPLY BOUNDARY CONDITIONS ON INITIAL FIELD
if POL == 'H' % DIRICHLET
    gauss_field(1) = 0;
    gauss_field(end) = 0;
else % NEUMANN
    gauss_field(1) = gauss_field(2);
    gauss_field(end) = gauss_field(end-1);
end

% INITIALIZE SOME VARS
n_ref = ones(N,1);
field = zeros(N,M);
field(:,1) = gauss_field;

%*****
% CALCULATION STARTS
%*****
c = (1 - 1i*k0*delx)/(1 + 1i*k0*delx);
b = 4*k0^2*delz^2/(1 + 1i*k0*delx);
for m=2:M
    % CREATES THE ARRAY OF VALUES a_mj
    a_mj = k0^2*delz^2*(n_ref.^2 - 1);

```

```

% CREATES THE DIAGONAL OF MATRIX A
diagA = -2 + b + a_mj;

% CREATES THE DIAGONAL OF MATRIX B
diagB = c*conj(diagA);

% CREATES THE SUBDIAGONAL OF THE MATRIX A
subdiagA = ones(1,N-1);

% CREATES THE SUPERDIAGONAL OF THE MATRIX A
superdiagA = ones(1,N-1);

% CREATES THE SUBDIAGONAL OF THE MATRIX B
subdiagB = c*ones(1,N-1);

% CREATES THE SUPERDIAGONAL OF THE MATRIX B
superdiagB = c*ones(1,N-1);

% CHANGE THE MATRIX ACCORDING TO BOUNDARY CONDITIONS
if POL == 'H' % DIRICHLET
    diagA(1) = 1;
    diagB(1) = 1;
    diagA(end) = 1;
    diagB(end) = 1;
    superdiagA(1) = 0;
    superdiagB(1) = 0;
    subdiagA(end) = 0;
    subdiagB(end) = 0;

elseif POL == 'V' % NEUMANN
    diagA(1) = diagA(1)/2;
    diagB(1) = diagB(1)/2;
    diagA(end) = diagA(end)/2;
    diagB(end) = diagB(end)/2;
end

% CREATES THE TRIDIAGONAL SPARSE MATRIX A and B
A = gallery('tridiag', subdiagA, diagA, superdiagA);
B = gallery('tridiag', subdiagB, diagB, superdiagB);

% COMPUTE ARRAY V
V = B*field(:,m-1);

% COMPUTE THE FIELD IN RANGE m
field(:,m) = A\V;
end

% GET ONLY ABSOLUTE VALUE OF FIELD
u = abs(field);

% PRINTS THE SOLUTION OF FIELD |u(x,z)|
figure
imagesc(range, z, u)
colormap(jet)
set(gca,'Ydir','normal');
xlabel('Range (m)','Linewidth',2,'fontsize',9, 'FontWeight','bold');
ylabel('Altitude (m)','Linewidth',2,'fontsize',9,'FontWeight','bold');
colorbar

```

D.4 – Programa para Cálculo Analítico em Atmosfera Linear Decrescente

```

clc
clear variables
format long
digits(50)

%*****
% PARAMETERS DEFINITIONS
%*****
freq = 300;           % FREQUENCY [MHz]
BW = [0.5];          % SOURCE 3dB BEAMWIDTH ARRAY [°]
BT = [-1];           % SOURCE BEAM-TILT ARRAY [°]
max_range = 100000;  % MAX RANGE [m]
max_z = 750;         % MAX ALTITUDE [m]
delz = 0.09;         % Z STEP [m]
delx = 10;           % RANGE STEP [m]
H = [250];           % SOURCE ALTITUDE ARRAY [m]
POL = 'H';           % SOURCE POLARIZATION [H/V]
dndz = -0.6*1E-6;    % REFRACTIVE INDEX SLOPE
MAX_MODES = 300;     % MAX NUM. OF MODES

%*****
% PARAMETERS CALCULATION
%*****
M = floor(max_range/delx); % NUM. OF COLS
N = floor(max_z/delz);    % MATRIX NUM. OF ROWS
z = (linspace(0,max_z,N))'; % ALTITUDE ARRAY
range = linspace(0,max_range,M); % RANGE ARRAY
freq = freq*1E6;          % CONVERSION FROM [MHz] TO [Hz]
clight = 299792458;       % SPEED OF LIGHT IN FREE-SPACE [m/s]
lambda0 = clight/freq;    % FREE-SPACE WAVELENGTH [m]
k0 = 2*pi/lambda0;        % FREE-SPACE WAVE NUMBER [1/m]
BW = pi*BW/180;           % CONVERSION FROM [°] TO [rad]
BT = pi*BT/180;           % CONVERSION FROM [°] TO [rad]
a0 = -2*dndz;             % REFRACTIVITY SLOPE CONSTANT
P1 = (a0*k0^2)^(1/3);     % RHO COEFF

% LOAD FIRST 150 AIRY ROOTS
load('Airy150Roots.mat');

%*****
% PREPARE FOR CALCULATION
%*****
% COMPUTE INITIAL FIELD FOR GAUSSIAN SOURCE
SGAUSS = initialGaussField(k0,BW,BT,z,POL,H);

% APPLY BOUNDARY CONDITIONS ON INITIAL FIELD
if POL == 'H' % DIRICHLET
    SGAUSS(1) = 0;
    SGAUSS(end) = 0;
else % NEUMANN
    SGAUSS(1) = SGAUSS(2);
    SGAUSS(end) = SGAUSS(end-1);
end

% INITIALIZE SOME VARS
field = zeros(N,M);
ROOT = zeros(1,MAX_MODES);
BETA = zeros(1,MAX_MODES);
RMODE = zeros(MAX_MODES,N);

```

```

RM = zeros(1,N);
SG = zeros(1,N);
Mode = zeros(1,N);
EXC = zeros(1,MAX_MODES);

%*****
% CALCULATION STARTS
%*****
for mode_num = 1:MAX_MODES
    % ASSING EIGENVALUES TO CURRENT MODE
    if POL == 'H'
        if (mode_num < length(airy_roots))
            ROOT(mode_num) = airy_roots(mode_num);
        else
            ROOT(mode_num) = airyroot(mode_num);
        end
    elseif POL == 'V'
        if (mode_num < length(airy_derivative_roots))
            ROOT(mode_num) = airy_derivative_roots(mode_num);
        else
            ROOT(mode_num) = airyderivativeroot(mode_num);
        end
    end
    ZCQ = -ROOT(mode_num)/P1;
    BETA(mode_num) = sqrt(k0^2 - ROOT(mode_num)*P1^2);

    % COMPUTE MODAL NORMALIZATION CONSTANTS
    CRT = -ROOT(mode_num) + z*P1;
    RMODE(mode_num,:) = airy(CRT);
    RM = (airy(CRT)).^2;
    V0 = 1/sqrt(trapz(z,RM));

    % COMPUTE MODAL EXCITATION CONSTANTS
    SG = SGAUSS'*V0.*RMODE(mode_num,:);

    % EXCITATION WITH NORM. FACTOR
    EXC(mode_num) = V0*trapz(z,SG);
    Mode = EXC(mode_num)*airy(CRT);

    % COMPUTE FIELD OVER ALL ENTIRE RANGE
    field = field + Mode.*exp(1i*BETA(mode_num).*range);

    % Compute error between source field and actual field on 1 col.
    err = max(abs(SGAUSS - field(:,1)));
end

display(['Number of modes used: ', num2str(mode_num), ' with error: ',
num2str(err)]);

% GET ONLY ABSOLUTE VALUE OF FIELD
u = abs(field);

% PRINTS THE SOLUTION OF FIELD |u(x,z)|
figure
imagesc(range/1E3, z, u)
colormap(jet)
set(gca,'Ydir','normal');
xlabel('Range (km)','Linewidth',2,'fontsize',9,'FontWeight','bold');
ylabel('Altitude (m)','Linewidth',2,'fontsize',9,'FontWeight','bold');
colorbar

```

D.5 – Programa NAPE para Cálculo em Atmosfera Linear Decrescente

```

clc
clear variables

%*****
% PARAMETERS DEFINITIONS
%*****
freq = 300;                % FREQUENCY [MHz]
BW = [0.5];               % SOURCE 3dB BEAMWIDTH ARRAY [J]
BT = [-1];                % SOURCE BEAM-TILT ARRAY [J]
max_range = 100000;       % MAX RANGE [m]
max_z_user = 750;         % MAX ALTITUDE [m]
delz = 0.09;              % Z STEP [m]
delx = 10;                % RANGE STEP [m]
H = [250];                % SOURCE ALTITUDE ARRAY [m]
POL = 'H';                % SOURCE POLARIZATION [H/V]
dndz = -0.6*1E-6;         % REFRACTIVE INDEX SLOPE

%*****
% PARAMETERS CALCULATION
%*****
% DEFINE THE ABSORBING LAYER SIZE
% THE SIZE DEPENDS ON THE FREQUENCY
% FOR LOWER FREQUENCIES, LARGER THE LAYER
win_ratio = 1/2;
if freq <= 401
    win_ratio = 8; % N used in the program = N*win_ratio
elseif freq <= 1001
    win_ratio = 4; % N used in the program = N*win_ratio
elseif freq < 2001
    win_ratio = 2; % N used in the program = N*win_ratio
end

% EXPAND THE DOMAIN FROM max_z_user TO max_z
% USER HAVE SELECTED MAX. HEIGHT OF max_z_user BUT
% THE DOMAIN IS EXTENDED TO max_z DUE TO THE
% ABSORBING LAYER
max_z = max_z_user*(1 + win_ratio);
if freq < 2001
    max_z = max_z_user*win_ratio;
end

% COMPUTE GRID
M = floor(max_range/delx); % NUM. OF COLS
N = floor(max_z/delz);     % NUM. OF ROWS
z = (linspace(0,max_z,N))'; % ALTITUDE ARRAY
range = linspace(0,max_range,M); % RANGE ARRAY

% COMPUTE THE WINDOW FUNCTION WITH HANNING WINDOW
if freq < 2001
    N2 = round(N/2);
    win = ones(1,N);
    ha = hanning(2*N2 + 1).';
    ha = ha(N2 + 1:end);
else
    win_ratio = win_ratio/2;
    win = ones(1,N);
    ha = hanning(2*round(N*win_ratio) + 1).';
    ha = ha(round(N*win_ratio) + 1:end);
end

```

```

win(N - length(ha) + 1:N) = ha;
win = win';

freq = freq*1E6; % CONVERSION FROM [MHz] TO [Hz]
clight = 299792458; % SPEED OF LIGHT IN FREE-SPACE [m/s]
lambda0 = clight/freq; % FREE-SPACE WAVELENGTH [m]
k0 = 2*pi/lambda0; % FREE-SPACE WAVE NUMBER [1/m]
BW = pi*BW/180; % CONVERSION FROM [°] TO [rad]
BT = pi*BT/180; % CONVERSION FROM [°] TO [rad]

%*****
% PREPARE FOR CALCULATION
%*****
% CREATE VERTICAL LINEAR DECREASING REFRACTIVE INDEX
n_ref2 = ones(N,1) + 2*dndz*z;

% GENERATE INITIAL FIELD PROFILE
initial = initialGaussField(k0, BW, BT, z, POL, H);

% APPLY WINDOW TO INITIAL FIELD
initial = initial.*win;

% APPLY BOUNDARY CONDITIONS ON INITIAL FIELD
if POL == 'H' % DIRICHLET
    initial(1) = 0;
    initial(end) = 0;
else % NEUMANN
    initial(1) = initial(2);
    initial(end) = initial(end-1);
end

% INITIALIZE SOME VARS
field = zeros(N,M);
field(:,1) = initial;

%*****
% CALCULATION STARTS
%*****
b = 4*1i*k0*delz^2/delx;
for m=2:M
    % CREATES THE ARRAY OF VALUES a_mj
    a_mj = k0^2*delz^2*(n_ref2 - 1);

    % CREATES THE DIAGONAL OF MATRIX A
    diagA = -2 + b + a_mj;

    % CREATES THE DIAGONAL OF MATRIX B
    diagB = 2 + b - a_mj;

    % CREATES THE SUBDIAGONAL OF THE MATRIX A
    subdiagA = ones(1,N-1);

    % CREATES THE SUPERDIAGONAL OF THE MATRIX A
    superdiagA = ones(1,N-1);

    % CREATES THE SUBDIAGONAL OF THE MATRIX B
    subdiagB = -ones(1,N-1);

    % CREATES THE SUPERDIAGONAL OF THE MATRIX B
    superdiagB = -ones(1,N-1);

```

```

% CHANGE THE MATRIX ACCORDING TO BOUNDARY CONDITIONS
if POL == 'H' % DIRICHLET
    diagA(1) = 1;
    diagB(1) = 1;
    diagA(end) = 1;
    diagB(end) = 1;
    superdiagA(1) = 0;
    superdiagB(1) = 0;
    subdiagA(end) = 0;
    subdiagB(end) = 0;

elseif POL == 'V' % NEUMANN
    diagA(1) = diagA(1)/2;
    diagB(1) = diagB(1)/2;
    diagA(end) = diagA(end)/2;
    diagB(end) = diagB(end)/2;
end

% CREATES THE TRIDIAGONAL SPARSE MATRIX A and B
A = gallery('tridiag', subdiagA, diagA, superdiagA);
B = gallery('tridiag', subdiagB, diagB, superdiagB);

% COMPUTE ARRAY V
V = B*field(:,m-1);

% COMPUTE THE FIELD IN RANGE m
field(:,m) = A\V;
field(:,m) = field(:,m).*win;
end

% GET USER PARAMS FOR PLOTS
[~,savez] = min(abs(z-max_z_user)); % IDX OF max_z_user
z_user = z(1:savez);

% DISCARD THE ABSORBING LAYER
u = field(1:savez,:);

% GET ONLY ABSOLUTE VALUE OF FIELD AND NORMALIZE
u = abs(u);

% PRINTS THE SOLUTION OF FIELD |u(x,z)|
figure
imagesc(range/1E3, z_user, u)
colormap(jet)
set(gca,'Ydir','normal');
xlabel('Range (km)','Linewidth',2,'fontsize',9,'FontWeight','bold');
ylabel('Altitude (m)','Linewidth',2,'fontsize',9,'FontWeight','bold');
colorbar

```

D.6 – Programa WAPE para Cálculo em Atmosfera Linear Decrescente

```

clc
clear variables

%*****
% PARAMETERS DEFINITIONS
%*****
freq = 300;                % FREQUENCY [MHz]
BW = [0.5];               % SOURCE 3dB BEAMWIDTH ARRAY [°]
BT = [1];                 % SOURCE BEAM-TILT ARRAY [°]
max_range = 100000;        % MAX RANGE [m]
max_z_user = 750;          % MAX ALTITUDE [m]
delz = 0.09;              % Z STEP [m]
delx = 10;                % RANGE STEP [m]
H = [250];                % SOURCE ALTITUDE ARRAY [m]
POL = 'H';                % SOURCE POLARIZATION [H/V]
dndz = -0.6*1E-6;         % REFRACTIVE INDEX SLOPE

%*****
% PARAMETERS CALCULATION
%*****
% DEFINE THE ABSORBING LAYER SIZE
% THE SIZE DEPENDS ON THE FREQUENCY
% FOR LOWER FREQUENCIES, LARGER THE LAYER
win_ratio = 1/2;
if freq <= 401
    win_ratio = 8; % N used in the program = N*win_ratio
elseif freq <= 1001
    win_ratio = 4; % N used in the program = N*win_ratio
elseif freq < 2001
    win_ratio = 2; % N used in the program = N*win_ratio
end

% EXPAND THE DOMAIN FROM max_z_user TO max_z
% USER HAVE SELECTED MAX. HEIGHT OF max_z_user BUT
% THE DOMAIN IS EXTENDED TO max_z DUE TO THE
% ABSORBING LAYER
max_z = max_z_user*(1 + win_ratio);
if freq < 2001
    max_z = max_z_user*win_ratio;
end

% COMPUTE GRID
M = floor(max_range/delx); % NUM. OF COLS
N = floor(max_z/delz);     % NUM. OF ROWS
z = (linspace(0,max_z,N))'; % ALTITUDE ARRAY
range = linspace(0,max_range,M); % RANGE ARRAY

% COMPUTE THE WINDOW FUNCTION WITH HANNING WINDOW
if freq < 2001
    N2 = round(N/2);
    win = ones(1,N);
    ha = hanning(2*N2 + 1).';
    ha = ha(N2 + 1:end);
else
    win_ratio = win_ratio/2;
    win = ones(1,N);
    ha = hanning(2*round(N*win_ratio) + 1).';
    ha = ha(round(N*win_ratio) + 1:end);
end

```



```

win(N - length(ha) + 1:N) = ha;
win = win';

freq = freq*1E6; % CONVERSION FROM [MHz] TO [Hz]
clight = 299792458; % SPEED OF LIGHT IN FREE-SPACE [m/s]
lambda0 = clight/freq; % FREE-SPACE WAVELENGTH [m]
k0 = 2*pi/lambda0; % FREE-SPACE WAVE NUMBER [1/m]
BW = pi*BW/180; % CONVERSION FROM [°] TO [rad]
BT = pi*BT/180; % CONVERSION FROM [°] TO [rad]

%*****
% PREPARE FOR CALCULATION
%*****
% CREATE VERTICAL LINEAR DECREASING REFRACTIVE INDEX
n_ref2 = ones(N,1) + 2*dndz*z;

% GENERATE INITIAL FIELD PROFILE
initial = initialGaussField(k0, BW, BT, z, POL, H);

% APPLY WINDOW TO INITIAL FIELD
initial = initial.*win;

% APPLY BOUNDARY CONDITIONS ON INITIAL FIELD
if POL == 'H' % DIRICHLET
    initial(1) = 0;
    initial(end) = 0;
else % NEUMANN
    initial(1) = initial(2);
    initial(end) = initial(end-1);
end

% INITIALIZE SOME VARS
field = zeros(N,M);
field(:,1) = initial;

%*****
% CALCULATION STARTS
%*****
c = (1 - 1i*k0*delx)/(1 + 1i*k0*delx);
b = 4*k0^2*delz^2/(1 + 1i*k0*delx);
for m=2:M
    % CREATES THE ARRAY OF VALUES a_mj
    a_mj = k0^2*delz^2*(n_ref2 - 1);

    % CREATES THE DIAGONAL OF MATRIX A
    diagA = -2 + b + a_mj;

    % CREATES THE DIAGONAL OF MATRIX B
    diagB = c*conj(diagA);

    % CREATES THE SUBDIAGONAL OF THE MATRIX A
    subdiagA = ones(1,N-1);

    % CREATES THE SUPERDIAGONAL OF THE MATRIX A
    superdiagA = ones(1,N-1);

    % CREATES THE SUBDIAGONAL OF THE MATRIX B
    subdiagB = c*ones(1,N-1);

    % CREATES THE SUPERDIAGONAL OF THE MATRIX B

```

```

superdiagB = c*ones(1,N-1);

% CHANGE THE MATRIX ACCORDING TO BOUNDARY CONDITIONS
if POL == 'H' % DIRICHLET
    diagA(1) = 1;
    diagB(1) = 1;
    diagA(end) = 1;
    diagB(end) = 1;
    superdiagA(1) = 0;
    superdiagB(1) = 0;
    subdiagA(end) = 0;
    subdiagB(end) = 0;

elseif POL == 'V' % NEUMANN
    diagA(1) = diagA(1)/2;
    diagB(1) = diagB(1)/2;
    diagA(end) = diagA(end)/2;
    diagB(end) = diagB(end)/2;
end

% CREATES THE TRIDIAGONAL SPARSE MATRIX A and B
A = gallery('tridiag', subdiagA, diagA, superdiagA);
B = gallery('tridiag', subdiagB, diagB, superdiagB);

% COMPUTE ARRAY V
V = B*field(:,m-1);

% COMPUTE THE FIELD IN RANGE m
field(:,m) = A\V;
field(:,m) = field(:,m).*win;
end

% GET USER PARAMS FOR PLOTS
[~,savez] = min(abs(z-max_z_user)); % IDX OF max_z_user
z_user = z(1:savez);

% DISCARD THE ABSORBING LAYER
u = field(1:savez,:);

% GET ONLY ABSOLUTE VALUE OF FIELD AND NORMALIZE
u = abs(u);

% PRINTS THE SOLUTION OF FIELD |u(x,z)|
figure
imagesc(range/1E3, z_user, u)
colormap(jet)
set(gca,'Ydir','normal');
xlabel('Range (km)','Linewidth',2,'fontsize',9,'FontWeight','bold');
ylabel('Altitude (m)','Linewidth',2,'fontsize',9,'FontWeight','bold');
colorbar

```

D.7 – Função para Calcular n-ésima Raiz da Função de Airy de Primeiro Tipo

```

function root = airyroot(n)
    format long
    digits(50)
    t = (3*pi/8)*(4*n-1);
    A = [1 t^-2 t^-4 t^-6 t^-8 t^-10 t^-12 t^-14 t^-16 t^-18];
    B = [1 5/48 -5/36 77125/82944 -108056875/6967296 162375596875/334430208
    ...
    -1622671914671875/66217181184 150126478779573265625/82639042117632
    ...
    -644932726927939889453125/3470839768940544 ...
    13042116997445589075044921875/520200964553048064];
    root = t^(2/3)*sum(A.*B);
end

```

D.8 – Função para Calcular a n-ésima Raiz da Derivada da Função de Airy de Primeiro Tipo

```

function root = airyderivativeroot(n)
    format long
    digits(50)
    t = (3*pi/8)*(4*n-3);
    A = [1 t^-2 t^-4 t^-6 t^-8 t^-10 t^-12 t^-14 t^-16 t^-18];
    B = [1 -7/48 35/288 -181223/207360 18683371/1244160 ...
    -91145884361/191102976 91725210265629647/3783838924800 ...
    -8517284704344771067699/4722230978150400 ...
    130949163695424727759631/708334646722560 ...
    -207878641847010708789807726484553/8323215432848769024000];
    root = t^(2/3)*sum(A.*B);
end

```

D.9 – 150 Primeiras Raízes da Função de Airy de Primeiro tipo e da Derivada da Função de Airy de Primeiro Tipo

```

airy_roots = [2.3381074104597670384891972524467354406385401456724;
    4.0879494441309706166369887014573910602247646991085;
    5.5205598280955510591298555129312935737972142806175;
    6.7867080900717589987802463844961769660538824773935;
    7.9441335871208531231382805557982685321406743969722;
    9.0226508533409803801581908398800892565246775351561;
    10.040174341558085930594556737362518094042902569106;
    11.008524303733262893235439649590151016730825381504;
    11.93601556323626251700636490293058431557788623212;
    12.828776752865757200406729407241824477386415599573;
    13.691489035210717928295696779466920541665369809201;
    14.527829951775334982073981442995893378714164869835;
    15.340755135977996857146208513481486705117583320248;
    16.132685156945771439345980447202521790518272397076;
    16.905633997429942627035238770611476599090051095032;
    17.66130010569705750925365030401805595215321866812;
    18.40113259920711541586139792950433675459381460602;
    19.126380474246952144124148689732494689075458384753;
    19.838129891721499700947563616011404198335682494539;
    20.537332907677566359982681411308101745304218014738;
    21.224829943642096955197676725405201331283720226951;
    21.901367595585130707408237042105806260149440521256;
    22.567612917496502831459174856843070409400785661039;
    23.22416500112168106132095039028827471366842731267;

```

23.871564455535918567118576209159784170263682514699;
24.510301236589677489817287209173626258551534915951;
25.140821166148963747751586620711065392535413632472;
25.763531400982756458519268139851793132182474858321;
26.378805052137232374159862666882169450704610755939;
26.986985111606367686346632798762520213573647124652;
27.588387809882444811950364414088684929841881389543;
28.183305502632644923205745298643022057118056778521;
28.772009165237435382296845357346754183751561069004;
29.354750558766287963406332352319793321204551072124;
29.93176411908655591271114221562892053876785226846;
30.50326861141850528681301867601321696145042728347;
31.069468585183755603800075016075616996513409171255;
31.630555658012659340807931172347071011903778847963;
32.186709652952050688968442748189822612170613018964;
32.73809960900026913312941014647018666298807246234;
33.284884681901401879619739895974011864614995862401;
33.827214949508651939607500767610610607063608586982;
34.365232133863659058496387155621028055694531648554;
34.899070250345312102308687166943573536427129318807;
35.428856192747888461600540490654727285663762120681;
35.954710261898629264666041626316228032155939550768;
36.476746644374808961925155825081468175355261361972;
36.995073846994501609785071742563000414809438925338;
37.509795092005016131230498115735252769910546670305;
38.021008677255254433132468290748644840663195569078;
38.528808305094248822629896744745379304891503317649;
39.033283383272513907821676717631581258529627059694;
39.534519300723018051967158317046014387773546406897;
40.032597680754176031144939800119827468224551829273;
40.527596613889718210108387154628927011275914897649;
41.019590872332489660211946340430603060480467862864;
41.508652107805250178893734421262887563472964466794;
41.994849034326430040637485054603940640996423196611;
42.478247597308391878338340782403269866815582351259;
42.9589111302165600918002890875831204073873048729;
43.436900499896854122345794617791600830305886761533;
43.912274241563701678067376333503780303707171990591;
44.385088684339390229528636889848964224608822985992;
44.85539806814583242646319924781845258917801674855;
45.323254652670430109724605387301909357506855620116;
45.78870881905730086497541209789206174666845940155;
46.251809164912546294513283040019889558050241001504;
46.712602593156516325825366776056946824149078204729;
47.171134395206317047198593894695248445264014756297;
47.627448328927392920585957477477842417366935448935;
48.081586691753257111037618009946047402713920245271;
48.533590389336798450069610133778234293246387467971;
48.98349900006458366445540368005620062023086850734;
49.431350835736783410218834389340247847921977622347;
49.877182998689417292244869371431403348788108729655;
50.321031435612218600956907125126947824424955591157;
50.762930988294285217823437609463751528935427150284;
51.202915441510564119437376764653643510187390458649;
51.641017568244897576092022361207234445794844322135;
52.077269172429649425061381767289767896611038525596;
52.511701129367661832743057816673082597169245110714;
52.944343423989318240927663466979085555674794513158;
53.375225187085675140803295838547524733345208118611;
53.804374729647857167259580697685686508546562669605;
54.231819575433082977902844427468133544892381545692;
54.657586491868711106269406336957717877632126591365;
55.081701519397483123140665252981992122386685509229;

55.504189999359622512194202695336027088278137647712;
55.925076600500555978041851605576751786987885254705;
56.344385344186700663631640796077489868637790430572;
56.762139628405953271082832348268767727787500590103;
57.178362250624178075976269588657556637697161067205;
57.593075429564077822028808286294141766737115307571;
58.006300825968306270393053002171558119692223769528;
58.418059562404509342768848583767297495983253795629;
58.828372242166132311585225557332327854674192392894;
59.237258967319275344831152185874515489275951162195;
59.644739355942593596432335775504130123224202040515;
60.050832558604198047052120928243225748892013112064;
60.455557274116698707316143204035707259327710829514;
60.858931764608923795521455753946048731657254666901;
61.260973869950430033615927497935249493836317753823;
61.661701021562674769943964569269552130959065144454;
62.06113025564863614195836620060859470678426763305;
62.459278225870730109696330937085506872100332970851;
62.856161215505071235411898320270787022317249387635;
63.25179514909844690030165036032335006561288361977;
63.646195603652812510018376432758949403743219432651;
64.039377819360659262121981858344464477865209184241;
64.431356709913248107654364245799416236480734514989;
64.822146872402436202347511686783482549925422779353;
65.211762596835638602828595921089247014603790734369;
65.600217875282361979601709011892632573737158515745;
65.987526410669712967410844282603760774594101389343;
66.373701625243316199695015397824394223563367920759;
66.758756668709171248952386750310887065964219812514;
67.14270442607112917944614936178892476565042824116;
67.525557525177874127747565216176782560080231639141;
67.907328343992549498422948608543386632136766849688;
68.288029017597468530296809940085692085535874770103;
68.667671444945691956546859554392213298063653491076;
69.046267295370638299550377085319529012184597107903;
69.423828014864312284890132024549975455542671436115;
69.800364832134191411080850961158176742832111875971;
70.175888764448297544837372822024310929426448986696;
70.550410623277497372434739237689897763917239232318;
70.923941019743620631914954479768848875404592050765;
71.296490369881556431227314837452451985099413085849;
71.668068899723083911300083487831328284770437005956;
72.03868665020981245197508867808221330456260700832;
72.408353481942247068268089962290763537212039935716;
72.777079079771655235242376776190448640750910977817;
73.144872957241090839483336302960340183515697872689;
73.511744460881628100673645399413801840701574379532;
73.877702774369572037486802869573269412599437854106;
74.242756922550141343477995923288766626854218769193;
74.606915775332863436746187514118758961833270080115;
74.970188051463679062803537893799972408561500639658;
75.332582322178524334421243736740854540408069665072;
75.694107014742940712021698326269165155553074075031;
76.05477041588205744183293772721834941638312154499;
76.4145806751050957026877486046199577637864435777;
76.773545807928358536528921617380585271468564636724;
77.131673699000494963979071559733936391226951668654;
77.4889721051336599645140330793510651585263970663;
77.845448658244033716048381744010891838408422885662;
78.201110868205013159235068537358929888340292209863;
78.555966125616246126246859897238642499204924551658;
78.910021704491542529468298832541062788156832984978;
79.263284764868568046105023733564890727287209097088];

```
airy_derivative_roots =
```

```
[1.0187929716474710890173247833997438242182054412544;
 3.2481975821798365378754237707758433841536230365172;
 4.8200992111787356394006162604163794144626882314956;
 6.1633073556394865476378435330914075929744838772035;
 7.3721772550477701770921822711279890100201345609841;
 8.4884867340197221328809954157307729511296435966841;
 9.5354490524335474707026334270006396953882021716105;
 10.527660396957407281978142491422228642986546369728;
 11.475056633480245294937216522405638734755720848993;
 12.384788371845747325493339235382624100992370194785;
 13.262218961665210382437278421238129653666371233824;
 14.111501970462995281632745953671914756595960575042;
 14.935937196720517466507282053262794211179722552821;
 15.738201373692538302686453230117245064669870517246;
 16.520503825433793542205193089460628090312674013231;
 17.284695050216437356643738423320821071650099098745;
 18.032344622504393395265208622991537020979033367871;
 18.764798437665954740151651210776010652875587884885;
 19.483221656567231177524718047595025585947975834259;
 20.188631509463373153654532142889269022602404329679;
 20.881922755516737700868956192349654369514970443159;
 21.563887723198974957701180285173127438276082876409;
 22.235232285348913330754853280850165553681395342999;
 22.896588738874619001466587262205334867554458243391;
 23.548526295928801573963985638901958890835674202039;
 24.191559709526353840706856582749359008958002039705;
 24.826156425921155001134488258411993741635953934314;
 25.452742561777649947836617347553234556362909865958;
 26.071707935173912514580220994921279082382841370851;
 26.683410328322449767101185216024873238399513207544;
 27.288179121523985028831361127439177547178933782856;
 27.886318408768461191738013800213905217138573080165;
 28.478109683102278107715249847490431987930740487527;
 29.063814162638199089666229050571225041241494437426;
 29.643674814632015920555638417946814448032415085953;
 30.217918124468574603092295035415174305166424147062;
 30.786755648012502518644477977875440300949931908972;
 31.350385379083034670707623378393121707562839718143;
 31.90899295843046320267243459894642535241502146123;
 32.462752746238479820305761493708577534265576369629;
 33.011828776634287090035211591880751593264245953166;
 33.55637560978942189939399231445658380626637263491;
 34.096539094809137706899724051418104571020948542062;
 34.632457054635865885163110718552331532295189390982;
 35.164259902553407577715483921134870178057188582851;
 33.55637560978942189939399231445658380626637263491;
 36.21600815233519918160665408514113342703544892331;
 36.736182079946803210523174063016085721552877421665;
 37.252698817854148267073089418244575492001711542721;
 37.76565910053887107895968346343344756114764653671;
 38.275158904730879328048306749249767394834693441428;
 38.781289764080368764754526901655262720486391046004;
 39.284139057298596438258188792289383309494078786931;
 39.783790272468232780390817764023557575120457651206;
 40.280323249903719349667023659699612196293610964433;
 40.773814405664866370999972621438644255141806435704;
 41.264336937586433825688692666411474609398209911476;
 41.751961015477227033954418819525663842981550600847;
 42.23675395695976011738630994911788135055482015337;
 42.718780390261982327296884922477356639377105356041;
 43.198102405132706695579641395799168614887891821282;
 43.67477969292950868834328070814929573452769394151;
```

44.148869676819668861272414623030478321717590992703;
 44.620427632939257238766505966838130161156611306267;
 45.089506803271026298932691598856380557144823703165;
 45.556158500926964456486951856583954091541096514547;
 46.020432208454937280398534047363333177008104684559;
 46.482375669729756151597747792524660963168743648501;
 46.942034975936356327040877684627568398979871155174;
 47.399454646105754934081905576851903557607770267934;
 47.854677702622416169662064100627491378896406763403;
 48.307745742083987737162678165104393575609296810019;
 48.758699001860578036802348459694462330035486382374;
 49.207576422670372473750193148466527991707784008754;
 49.654415707461050742993391468626676828057107882354;
 50.099253376861825145083811395354761594859664273636;
 50.542124821448675022709414754104107707812720167684;
 50.983064351045242818489380323133439895042725181292;
 51.422105241263653107131826904732389087841196677367;
 51.859279777473014694552354778352206915359810784777;
 52.294619296368388760442100671788833484152012994032;
 52.728154225299395059004944886764529475600982550688;
 53.159914119505243512456991724219148079070289433197;
 53.589927697391696105746576649148437508096619641759;
 54.018222873975173672707039532347326167683314754314;
 54.444826792609825989149656240760218851348603044535;
 54.869765855104794300469392040327448905644499127501;
 55.293065750331035180201310702409424119582907310621;
 55.714751481409873923791292841961545733742558789513;
 56.134847391568852351180270556174303312040352855395;
 56.553377188744374237047378800358599653153545759389;
 56.970363969005081672824759741358218750245999272315;
 57.385830238864772653598511311700923189291753838562;
 57.799797936548953768704547984667573908041950117735;
 58.212288452274775778276535170171428696780447417093;
 58.623322647600091387401531648023603976472983698804;
 59.032920873893674191640811250615469698596562570079;
 59.441102989975218924900294884198057014470408514702;
 59.847888378970581708090669992052325388456353999195;
 60.253295964424793174400578395302385471318998891219;
 60.657344225712667381094618124527702713628352156377;
 61.060051212784317391693972282873630587671431450656;
 61.461434560280558058577990529244972758786330855569;
 61.861511501051013069624792662798908778540178561007;
 62.260298879105733293248691929060680056974206702796;
 62.657813162029264616345099198727925574610940710191;
 63.054070452884364656067290246828179872602189467719;
 63.449086501630948755137398565219155834439333429306;
 63.842876716084337242673022113060588617710000329694;
 64.235456172435469560090468058088549634932908045221;
 64.626839625354438741358593138822898833483628489725;
 65.017041517697474782723970932703713283513234391827;
 65.406075989836361119216562519556288703708385020737;
 65.793956888628198765376756772027197605371252563767;
 66.180697776042432189379770445796669536049219861433;
 66.566311937461114634343398328776881618270034930278;
 66.950812389667513746890658561135923716479400340157;
 67.334211888537336761150670351146082568792571996702;
 67.71652293644608419513333957974054434571447354058;
 68.097757789405318433726275557102440676094863913769;
 68.477928463939955368710054862021052472930824778437;
 68.857046743718050369565180389843754901629645379159;
 69.235124185943951433994815536572599360480929260897;
 69.612172127525129794768077268007214097299136837216;
 69.988201691022469118562676145105234407349332535317;

70.363223790393296483467073435388899280069926628274;
70.737249136535969491887109420795994673569354842353;
71.110288242644392245041589556720091397421695313331;
71.482351429380416694917879495905857049574314522026;
71.853448829871693449706783970656959170371430763144;
72.223590394542165908555596416899078485030212864279;
72.592785895782052219744372938102759810499180799092;
72.961044932463829672827480852269850433385578774781;
73.328376934310424522684916995067565335593575891167;
73.694791166121515760451353506280859273836715450283;
74.060296731863582930850422385220524586706233000787;
74.424902578629064758683092309261361585473132826825;
74.788617500469746167892166742794109545311100138553;
75.151450142109255396115542355008391287717782723581;
75.513409002539329525217995608522180784861716953687;
75.874502438504295116835255245748991734022781254142;
76.234738667878010064020823299564194939917769343242;
76.594125772937322594237305073433745281366065565833;
76.952671703535922976457179231078012725657134080777;
77.310384280182292326929064298698889938585715968228;
77.667271197025290441904370977780748763516088313029;
78.023340024750770313155054237946913347449238111784;
78.37859821339246043705303780697315892953543324304;
78.733053095060216773464244683914711921900349854253;
79.086711886588613837348617244812674820596273303034];

D.10 – Programa para Cálculo do Traçado de Raios em Atmosfera Trilinear

```

clc
clear variables

%*****
% PARAMETERS DEFINITIONS
%*****

max_range = 10000;           % MAX RANGE [m]
max_z_user = 200;           % MAX ALTITUDE [m]
delz = 0.009;               % HEIGHT STEP [m]
delTeta = 0.1;              % ANGLE STEP [°]
tetaInit = 83;              % INITIAL SHOOT ANGLE [°]
tetaEnd = 97;               % FINAL SHOOT ANGLE [°]
H = 25;                     % SOURCE HEIGHT [m]
dndz1 = 1E-5;               % TRILINEAR PROFILE FIRST SLOPE [1/m]
dndz2 = -1E-5;              % TRILINEAR PROFILE SECOND SLOPE [1/m]
dndz3 = 1E-5;               % TRILINEAR PROFILE THIRD SLOPE [1/m]
H1 = 50;                    % TRILINEAR PROFILE FIRST HEIGHT [m]
H2 = 100;                   % TRILINEAR PROFILE SECOND HEIGHT [m]
n0 = 1.0003;                % INITIAL REFRACTIVE INDEX
max_ppr = 30000000;         % MAX NUM. OF POINTS PER RAY

%*****
% PREPARE FOR CALCULATION
%*****
% build refractive index array
z_arr = 0:delz:max_z_user;
ref = (z_arr <= H1).*(n0 + dndz1*z_arr) + ...
      (z_arr > H1 & z_arr <= H2).*(n0 + dndz2*z_arr + H1*(dndz1 - dndz2)) +
      ...
      (z_arr > H2).*(n0 + dndz3*z_arr + H2*(dndz2 - dndz3) + H1*(dndz1 -
dndz2));

nteta = (tetaEnd - tetaInit)/delTeta;
figure
%*****
% CALCULATION STARTS
%*****
% RAY LOOP
x = zeros(1,max_ppr);
z = zeros(1,max_ppr);
for n = 1:nteta + 1
    teta = tetaInit + (n - 1)*delTeta;
    delz = abs(delz);

    % DECIDE IF RAY IS UPWARD OR DOWNWARD
    if teta > 90
        teta = 180 - teta;
        delz = -delz;
    end
    teta = teta*pi/180;

    % FIRT POINT OF RAY
    ray_pt = 1;
    x(ray_pt) = 0;
    z(ray_pt) = H;

    while x(ray_pt) < max_range % EXIT WHEN RAY REACH MAX RANGE
        % EXIT WHEN RAY REACH MAX HEIGHT

```

```

if z(ray_pt) >= max_z_user
    break;
end

% GET CURRENT LAYER REFRACTIVE INDEX
idx_z = floor(z(ray_pt)/abs(delz)) + 1;
if(idx_z == 0)
    idx_z = 1;
end
nf = ref(idx_z);

% COMPUTE INCREMENT IN RANGE
if abs(pi - teta) > pi/20000
    xart = abs(delz)*tan(teta);
end

% PASS TO NEXT POINT
ray_pt = ray_pt + 1;

% EXIT IF ITERATION EXCEEDS MAX NUM OF POINTS PER RAY
if ray_pt > max_ppr
    break;
end

% STORE THE NEXT POINT COORDINATES
x(ray_pt) = x(ray_pt - 1) + xart;
z(ray_pt) = z(ray_pt - 1) + delz;

% IF RAY REACHES BOTTOM BOUNDARY, UPWARD
if z(ray_pt) <= 0
    delz = -delz;
end

% GET ADJACENT LAYER REFRACTIVE INDEX
idx_z = floor(z(ray_pt)/abs(delz)) + 1;
if(idx_z == 0)
    idx_z = 1;
end
ns = ref(idx_z);

% SNELL' LAW
sine = nf*(sin(teta)/ns);

% IF RAY REACHS CAUSTIC, DOWNWARD
if sine >= .99999999999999999999
    delz = -delz;
end

% COMPUTE NEW ANGLE
teta = asin(sine);
end

% PLOT LOCI OF CURRENT RAY
xx = x(1:ray_pt-1);
zz = z(1:ray_pt-1);
plot(real(xx)/1E3,real(zz),'k-')
hold on
end

axis([0 max_range/1E3 0 max_z_user]);
title('Ray-tracing','fontsize',9, 'FontWeight','bold');
ylabel('Altitude (m)','Linewidth',2,'fontsize',9,'FontWeight','bold');
xlabel('Range (km)','Linewidth',2,'fontsize',9, 'FontWeight','bold');

```

D.11 – Programa WAPE para Cálculo em Atmosfera Trilinear

```

clc
clear variables

%*****
% PARAMETERS DEFINITIONS
%*****
freq = 3000;           % FREQUENCY [MHz]
BW = [6];              % SOURCE 3dB BEAMWIDTH ARRAY [J]
BT = [0];              % SOURCE BEAM-TILT ARRAY [J]
max_range = 50000;     % MAX RANGE [m]
max_z_user = 200;      % MAX ALTITUDE [m]
delz = 0.009;          % Z STEP [m]
delx = 10;             % RANGE STEP [m]
H = [25];              % SOURCE ALTITUDE ARRAY [m]
POL = 'H';             % SOURCE POLARIZATION [H/V]
dndz1 = -1E-5;         % TRILINEAR PROFILE FIRST SLOPE [1/m]
dndz2 = 1E-5;          % TRILINEAR PROFILE SECOND SLOPE [1/m]
dndz3 = -1E-5;         % TRILINEAR PROFILE THIRD SLOPE [1/m]
H1 = 50;               % TRILINEAR PROFILE FIRST HEIGHT [m]
H2 = 100;              % TRILINEAR PROFILE SECOND HEIGHT [m]
n0 = 1.0003;           % INITIAL REFRACTIVE INDEX

%*****
% PARAMETERS CALCULATION
%*****
% DEFINE THE ABSORBING LAYER SIZE
% THE SIZE DEPENDS ON THE FREQUENCY
% FOR LOWER FREQUENCIES, LARGER THE LAYER
win_ratio = 1/2;
if freq <= 401
    win_ratio = 8; % N used in the program = N*win_ratio
elseif freq <= 1001
    win_ratio = 4; % N used in the program = N*win_ratio
elseif freq < 2001
    win_ratio = 2; % N used in the program = N*win_ratio
end

% EXPAND THE DOMAIN FROM max_z_user TO max_z
% USER HAVE SELECTED MAX. HEIGHT OF max_z_user BUT
% THE DOMAIN IS EXTENDED TO max_z DUE TO THE
% ABSORBING LAYER
max_z = max_z_user*(1 + win_ratio);
if freq < 2001
    max_z = max_z_user*win_ratio;
end

% COMPUTE GRID
M = floor(max_range/delx); % NUM. OF COLS
N = floor(max_z/delz);     % NUM. OF ROWS
z = (linspace(0,max_z,N))'; % ALTITUDE ARRAY
range = linspace(0,max_range,M); % RANGE ARRAY

% COMPUTE THE WINDOW FUNCTION WITH HANNING WINDOW
if freq < 2001
    N2 = round(N/2);
    win = ones(1,N);
    ha = hanning(2*N2 + 1).';
    ha = ha(N2 + 1:end);
else

```

```

win_ratio = win_ratio/2;
win = ones(1,N);
ha = hanning(2*round(N*win_ratio) + 1).';
ha = ha(round(N*win_ratio) + 1:end);
end
win(N - length(ha) + 1:N) = ha;
win = win';

freq = freq*1E6; % CONVERSION FROM [MHz] TO [Hz]
clight = 299792458; % SPEED OF LIGHT IN FREE-SPACE [m/s]
lambda0 = clight/freq; % FREE-SPACE WAVELENGTH [m]
k0 = 2*pi/lambda0; % FREE-SPACE WAVE NUMBER [1/m]
BW = pi*BW/180; % CONVERSION FROM [°] TO [rad]
BT = pi*BT/180; % CONVERSION FROM [°] TO [rad]

%*****
% PREPARE FOR CALCULATION
%*****
% CREATE VERTICAL LINEAR DECREASING REFRACTIVE INDEX
n_ref = (z <= H1).*(n0 + dndz1*z) + ...
        (z > H1 & z <= H2).*(n0 + dndz2*z + H1*(dndz1 - dndz2)) + ...
        (z > H2).*(n0 + dndz3*z + H2*(dndz2 - dndz3) + H1*(dndz1 - dndz2));

% GENERATE INITIAL FIELD PROFILE
initial = initialGaussField(k0, BW, BT, z, POL, H);

% APPLY WINDOW TO INITIAL FIELD
initial = initial.*win;

% APPLY BOUNDARY CONDITIONS ON INITIAL FIELD
if POL == 'H' % DIRICHLET
    initial(1) = 0;
    initial(end) = 0;
else % NEUMANN
    initial(1) = initial(2);
    initial(end) = initial(end-1);
end

% INITIALIZE SOME VARS
field = zeros(N,M);
field(:,1) = initial;

%*****
% CALCULATION STARTS
%*****
c = (1 - 1i*k0*delx)/(1 + 1i*k0*delx);
b = 4*k0^2*delz^2/(1 + 1i*k0*delx);
for m=2:M
    % CREATES THE ARRAY OF VALUES a_mj
    a_mj = k0^2*delz^2*(n_ref.^2 - 1);

    % CREATES THE DIAGONAL OF MATRIX A
    diagA = -2 + b + a_mj;

    % CREATES THE DIAGONAL OF MATRIX B
    diagB = c*conj(diagA);

    % CREATES THE SUBDIAGONAL OF THE MATRIX A
    subdiagA = ones(1,N-1);

    % CREATES THE SUPERDIAGONAL OF THE MATRIX A

```

```

superdiagA = ones(1,N-1);

% CREATES THE SUBDIAGONAL OF THE MATRIX B
subdiagB = c*ones(1,N-1);

% CREATES THE SUPERDIAGONAL OF THE MATRIX B
superdiagB = c*ones(1,N-1);

% CHANGE THE MATRIX ACCORDING TO BOUNDARY CONDITIONS
if POL == 'H' % DIRICHLET
    diagA(1) = 1;
    diagB(1) = 1;
    diagA(end) = 1;
    diagB(end) = 1;
    superdiagA(1) = 0;
    superdiagB(1) = 0;
    subdiagA(end) = 0;
    subdiagB(end) = 0;

elseif POL == 'V' % NEUMANN
    diagA(1) = diagA(1)/2;
    diagB(1) = diagB(1)/2;
    diagA(end) = diagA(end)/2;
    diagB(end) = diagB(end)/2;
end

% CREATES THE TRIDIAGONAL SPARSE MATRIX A and B
A = gallery('tridiag', subdiagA, diagA, superdiagA);
B = gallery('tridiag', subdiagB, diagB, superdiagB);

% COMPUTE ARRAY V
V = B*field(:,m-1);

% COMPUTE THE FIELD IN RANGE m
field(:,m) = A\V;
field(:,m) = field(:,m).*win;
end

% GET USER PARAMS FOR PLOTS
[~,savez] = min(abs(z-max_z_user)); % IDX OF max_z_user
z_user = z(1:savez);

% DISCARD THE ABSORBING LAYER
u = field(1:savez,:);

% GET ONLY ABSOLUTE VALUE OF FIELD AND NORMALIZE
u = abs(u);
u = u/max(u(:,1));

% PRINTS THE SOLUTION OF FIELD |u(x,z)|
figure
imagesc(range/1E3, z_user, u)
colormap(jet)
set(gca,'Ydir','normal');
xlabel('Range (km)','Linewidth',2,'fontsize',9,'FontWeight','bold');
ylabel('Altitude (m)','Linewidth',2,'fontsize',9,'FontWeight','bold');
title('Field','fontsize',11,'FontWeight','bold')
colorbar

```

D.12 – Programa WAPE para Demonstração do Efeito Recuperação

```

clc
clear variables

%*****
% PARAMETERS DEFINITIONS
%*****
freq = 3.13;                % FREQUENCY [MHz]
BW = 2;                    % SOURCE 3dB BEAMWIDTH ARRAY [°]
BT = 0;                    % SOURCE BEAM-TILT ARRAY [°]
max_range = 200000;        % MAX RANGE [m]
max_z_user = 5000;         % MAX ALTITUDE [m]
delz = 0.25;               % Z STEP [m]
delx = 15;                 % RANGE STEP [m]
H = delz;                  % SOURCE ALTITUDE ARRAY [m]
POL = 'V';                 % SOURCE POLARIZATION [H/V]
PLOT_HEIGHT = 0.5;         % HEIGHT ABOVE GROUND TO PLOT
PATH_LOSS
ae = 6371008;              % EARTH RADIUS
N0 = 315;                  % SEA LEVEL REFRACTIVITY
h0 = -0.136;               % REFRACTIVITY SCALE HEIGHT
Z0 = sqrt(4*pi*1E-7/(8.854187817620E-12)); % FREE-SPACE IMPEDANCE

%*****
% PARAMETERS CALCULATION
%*****
% DEFINE THE ABSORBING LAYER SIZE
% THE SIZE DEPENDS ON THE FREQUENCY
% FOR LOWER FREQUENCIES, LARGER THE LAYER
win_ratio = 1/2;
if freq <= 401
    win_ratio = 8; % N used in the program = N*win_ratio
elseif freq <= 1001
    win_ratio = 4; % N used in the program = N*win_ratio
elseif freq < 2001
    win_ratio = 2; % N used in the program = N*win_ratio
end

% EXPAND THE DOMAIN FROM max_z_user TO max_z
% USER SELECTET MAX. HEIGHT OF max_z_user BUT
% THE DOMAIN IS EXTENDED TO max_z DUE TO THE
% ABSORBING LAYER
max_z = max_z_user*(1 + win_ratio);
if freq < 2001
    max_z = max_z_user*win_ratio;
end

% COMPUTE GRID
M = floor(max_range/delx) + 1; % NUM. OF COLS
N = floor(max_z/delz) + 1;      % NUM. OF ROWS
z = (linspace(0,max_z,N))';    % ALTITUDE ARRAY
range = linspace(0,max_range,M); % RANGE ARRAY

% COMPUTE THE WINDOW FUNCTION WITH HANNING WINDOW
if freq < 2001
    N2 = round(N/2);
    win = ones(1,N);
    ha = hanning(2*N2 + 1).';
    ha = ha(N2 + 1:end);
else

```

```

    win_ratio = win_ratio/2;
    win = ones(1,N);
    ha = hanning(2*round(N*win_ratio) + 1).';
    ha = ha(round(N*win_ratio) + 1:end);
end
win(N - length(ha) + 1:N) = ha;
win = win';

% CREATE VERTICAL MODIFIED REFRACTIVE INDEX
% PROFILE TO PLANE EARTH CONVERSION
N_ref = N0*exp(h0*z/1E3);           % REFRACTIVITY ARRAY
n_ref = N_ref/1E6 + 1;              % REFRACTIVE INDEX ARRAY
m_ref = n_ref.*exp(z/ae);           % MODIFIED REFRACTIVE INDEX ARRAY

freq = freq*1E6;                    % CONVERSION FROM [MHz] TO [Hz]
clight = 299792458;                 % SPEED OF LIGHT IN FREE-SPACE [m/s]
lambda0 = clight/freq;              % FREE-SPACE WAVELENGTH [m]
k0 = 2*pi/lambda0;                  % FREE-SPACE WAVE NUMBER [1/m]
BW = pi*BW/180;                     % CONVERSION FROM [°] TO [rad]
BT = pi*BT/180;                     % CONVERSION FROM [°] TO [rad]

%*****
% BOUNDARY CONDITIONS
%*****

% 1 - sea  2 - fresh water  3 - wet ground  4 - medium dry ground  5 - very
dry ground

grounds = [0 0;0 86000];
user_grounds = [5 0.01;81 4];
alpha_BC = impBound(grounds, freq, delx, k0, Z0, POL, M, user_grounds);

%*****
% PREPARE FOR CALCULATION
%*****
% GENERATE INITIAL FIELD PROFILE
initial = initialGaussField(k0, BW, BT, z, POL, H);

% APPLY WINDOW TO INITIAL FIELD
initial = initial.*win;

% APPLY BOUNDARY CONDITIONS ON INITIAL FIELD
if POL == 'H'
    initial(1) = initial(2)/(1 - alpha_BC(1)*delz);
    initial(end) = 0;
else
    initial(1) = initial(2)/(1 - alpha_BC(1)*delz);
    initial(end) = initial(end-1);
end

% INITIALIZE SOME VARS
field = zeros(N,M);
field(:,1) = initial;

%*****
% CALCULATION STARTS
%*****
c = (1 - 1i*k0*delx)/(1 + 1i*k0*delx);
b = 4*k0^2*delz^2/(1 + 1i*k0*delx);
for m=2:M
    % CREATES THE ARRAY OF VALUES a_mj

```

```

a_mj = k0^2*delz^2*(m_ref.^2 - 1);

% CREATES THE DIAGONAL OF MATRIX A
diagA = -2 + b + a_mj;

% CREATES THE DIAGONAL OF MATRIX B
diagB = c*conj(diagA);

% CREATES THE SUBDIAGONAL OF THE MATRIX A
subdiagA = ones(1,N-1);

% CREATES THE SUPERDIAGONAL OF THE MATRIX A
superdiagA = ones(1,N-1);

% CREATES THE SUBDIAGONAL OF THE MATRIX B
subdiagB = c*ones(1,N-1);

% CREATES THE SUPERDIAGONAL OF THE MATRIX B
superdiagB = c*ones(1,N-1);

% CHANGE THE MATRIX ACCORDING TO BOUNDARY CONDITIONS
if POL == 'H'
    diagA(1) = diagA(1)/2 + alpha_BC(m)*delz;
    diagB(1) = diagB(1)/2 + c*alpha_BC(m-1)*delz;
    diagA(end) = 1;
    diagB(end) = 1;
    subdiagA(end) = 0;
    subdiagB(end) = 0;

elseif POL == 'V'
    diagA(1) = diagA(1)/2 + alpha_BC(m)*delz;
    diagB(1) = diagB(1)/2 + c*alpha_BC(m-1)*delz;
    diagA(end) = diagA(end)/2;
    diagB(end) = diagB(end)/2;
end

% CREATES THE TRIDIAGONAL SPARSE MATRIX A and B
A = gallery('tridiag', subdiagA, diagA, superdiagA);
B = gallery('tridiag', subdiagB, diagB, superdiagB);

% COMPUTE ARRAY V
V = B*field(:,m-1);

% COMPUTE THE FIELD IN RANGE m
field(:,m) = A\V;

% APPLY WINDOW ON u
field(:,m) = field(:,m).*win;
end

% GET USER PARAMS FOR PLOTS
[~,savez] = min(abs(z-max_z_user)); % IDX OF max_z_user
z_user = z(1:savez);

% DISCARD THE ABSORBING LAYER
u = field(1:savez,:);

% GET ONLY ABSOLUTE VALUE OF FIELD AND NORMALIZE
u = abs(u);

```



```

% COMPUTE PATH LOSS AND PROPAGATION FACTOR
PATH_LOSS = -20*log10(u) + 20*log10(4*pi) + ...
            10*log10(ae*sin(range/ae).*exp(z_user/ae)) - 30*log10(lambda0);

PROP_FACT = 20*log10(u) - 10*log10(ae*sin(range/ae).*exp(z_user/ae)) + ...
            10*log10(lambda0) + 10*log10(range.^2 + (mean(H) - z_user).^2);

% LOAD MILLINGTON MEASURED DATA
load('mill.mat')
ptsMeas = floor(mMeas(:,1)/delx) + 1;
ptsMeas(ptsMeas > M) = [];
diff = mMeas(1:length(ptsMeas),2)' +
PATH_LOSS(floor((PLOT_HEIGHT)/delz)+1,ptsMeas);
figure
scatter(mMeas(:,1)/1E3, mMeas(:,2), 60, 'k+', 'linewidth', 0.9)
hold on
plot(range/1E3,mean(diff) - PATH_LOSS(floor((PLOT_HEIGHT)/delz)+1,:), 'b--',
'linewidth', 1.5)
grid
hold off
xlim([0 200])
ylim([30 100])
xlabel('Range (km)', 'Linewidth', 2, 'fontsize', 9, 'FontWeight', 'bold');
ylabel('Field Strenght
[dB\muV/m]', 'Linewidth', 2, 'fontsize', 9, 'FontWeight', 'bold');
legend('PE', 'Measured data', 'AutoUpdate', 'on')
title('Field Strenght vs Range at 0,5 m height')

% PRINTS THE SOLUTION OF FIELD |u(x,z)|
figure
imagesc(range/1E3, z_user, u/max(initial))
colormap(jet)
set(gca, 'Ydir', 'normal');
xlabel('Range (km)', 'Linewidth', 2, 'fontsize', 9, 'FontWeight', 'bold');
ylabel('Altitude (m)', 'Linewidth', 2, 'fontsize', 9, 'FontWeight', 'bold');
title('Field');
colorbar

% PRINTS THE SOLUTION OF PATH LOSS
figure
imagesc(range/1E3, z_user, PATH_LOSS);
colormap(jet)
set(gca, 'Ydir', 'normal');
xlabel('Range (km)', 'Linewidth', 2, 'fontsize', 9, 'FontWeight', 'bold');
ylabel('Altitude (m)', 'Linewidth', 2, 'fontsize', 9, 'FontWeight', 'bold');
title('Path Loss [dB]');
colorbar
caxis([70,120])

% PRINTS THE SOLUTION OF PROPAGATION FACTOR
figure
imagesc(range/1E3, z_user, PROP_FACT)
colormap(jet)
set(gca, 'Ydir', 'normal');
xlabel('Range (km)', 'Linewidth', 2, 'fontsize', 9, 'FontWeight', 'bold');
ylabel('Altitude (m)', 'Linewidth', 2, 'fontsize', 9, 'FontWeight', 'bold');
title('Propagation Factor [dB]');
colorbar
caxis([-30 0])

```

D.13 – Função que Calcula a Condição de Contorno de Impedância do Solo

```
function alpha_BC = impBound(grounds, freq, delx, k0, Z0, POL, M,
user_grounds)

alpha_BC = zeros(1,M);
ng = size(grounds,2);
idx = floor(grounds(2,:)/delx) + 1;
idx = [idx M+1];

for i=1:ng
    if(grounds(1,i) == 0)
        er = user_grounds(i,1);
        sigma = user_grounds(i,2);
    else
        [er, sigma] = groundsConsts(grounds(1,i),freq*1E-6);
    end
    ecomplex = er - 1i*sigma*Z0/k0;
    if POL == 'H'
        delta = sqrt(ecomplex - 1);
    elseif POL == 'V'
        delta = sqrt(ecomplex - 1)/ecomplex;
    end
    alpha_BC(idx(i):idx(i+1)-1) = 1i*k0*delta;
end
end
```

D.14 – Função que Calcula Constantes do Solo

```
function [epsilon, sigma] = groundsConsts(ground_type, freq)
% *****
% This function calculates the surface parameters (dielectric constant and
% conductivity) for a given frequency and surface type, if impedance
% surface is chosen in the main window
% *****
% freq in MHz

a = [1.4114535e-2; 3.8586749; 79.027635; -0.65750351; 201.97103; ...
857.94335; 915.31026; 0.8756665; 5.5990969e-3; 215.87521; ...
0.17381269; 2.4625032e-2; -4.9560275e-2; 2.2953743e-4; ...
0.000038814567; 1.2434792e-4; 51852.543; 4.13105e-5];

b = [-5.2122497e-8; -2.1179295e-5; -2.2083308e-5; 5.5620223e-5; ...
-2.5539582e-3; -8.9983662e-5; -9.4530022e-6; 4.7236085e-5; ...
8.7798277e-5; -7.6649237e-5; 1.2655183e-4; 1.8254018e-4; ...
2.9876572e-5; -8.1212741e-7; 8.467523e-2; 2.824598e-4; ...
3.883854e-2; 2.03589e-7];

c = [5.8547829e-11; 9.1253873e-4; -3.5486605e-4; 6.6113198e-4; ...
1.2197967e-2; 5.5275278e-2; -4.0348211e-3; 2.6051966e-8; ...
6.2451017e-8; -2.6151055e-3; -1.6790756e-9; -2.664754e-8; ...
-3.0561848e-10; 1.8045461e-9; 9.878241e-6; 8.680839e-7; ...
389.58894; -3.1739e-12];

d = [-7.6717423e-16; 6.5727504e-10; 2.7067836e-9; 3.0140816e-10; ...
3.7853169e-5; 8.8247139e-8; 4.892281e-8; -9.235936e-13; ...
-7.1317207e-12; 1.2565999e-8; 1.1037608e-14; 7.6508732e-12; ...
1.1131828e-15; -1.960677e-12; -9.736703e-5; -6.755389e-8; ...
6.832108e-5; 4.52331e-17];
```

```

e = [2.9856318e-21; 1.5309921e-8; 8.210184e-9; 1.4876952e-9; ...
     -1.728776e-6; 0.0; 7.4342897e-7; 1.4560078e-17; 4.2515914e-16; ...
     1.9484482e-7; -2.9223433e-20; -7.4193268e-16; 0.0; 1.2569594e-15; ...
     7.990284e-8; 7.2701689e-11; 0.0; 0.0];

f = [0.0; -1.9647664e-15; -1.0007669e-14; 0.0; 0.0; 0.0; 0.0; ...
     -1.1129348e-22; -1.240806e-20; 0.0; 0.0; 0.0; 0.0; -4.46811e-19; ...
     3.269059e-7; 2.8728975e-12; 0.0; 0.0];

f1 = freq;
f2 = f1^2;
f3 = f1^3;
f4 = f1^4;
f5 = f1^5;
f6 = f1^6;
f7 = f1^7;
f8 = f1^8;
f9 = f1^9;

if (ground_type == 1) % saltwater
    epsilon = 70.0;
    sigma = 5.0; % S/m
    mi = 1;
    mil = mi + 1;

    if (f1 > 2253.5895)
        epsilon = 1.0/(a(mi)+b(mi)*f1+c(mi)*f2+d(mi)*f3+e(mi)*f4);
    end

    if (f1 > 1106.207)
        sigma = a(mil)+c(mil)*f1+e(mil)*f2;
        sigma = sigma/(1.0+b(mil)*f1+d(mil)*f2+f(mil)*f3);
    end

elseif (ground_type == 2) % freshwater
    epsilon = 80.0;
    mi = 3;
    mil = mi+1;

    if (f1 > 6165.776)
        epsilon = a(mi)+c(mi)*f1+e(mi)*f2;
        epsilon = epsilon/(1.0+b(mi)*f1+d(mi)*f2+f(mi)*f3);
    end

    if (f1 > 5776.157)
        ki = 2;
    else
        mil = mil+1;
        ki = -1;
    end

    sigma = a(mil)+c(mil)*f1+e(mil)*f2;
    sigma = (sigma/(1.0+b(mil)*f1+d(mil)*f2))^ki;

elseif (ground_type == 3) % wet ground
    epsilon = 30.0;
    mi = 6;
    if (f1 >= 4228.11)
        mi = 7;
    end

```

```

if (f1 > 1312.054)
    epsilon = a(mi)+c(mi)*f1+e(mi)*f2;
    epsilon = sqrt(epsilon/(1.0+b(mi)*f1+d(mi)*f2));
end

if (f1 > 15454.4)
    mil = 8;
    gi = 3.3253339e-28;
else
    mil = 9;
    gi = 1.3854354e-25;
end

sigma = a(mil)+b(mil)*f1+c(mil)*f2+d(mil)*f3+e(mil)*f4;
sigma = sigma+f(mil)*f5+gi*f6;

elseif (ground_type == 4) % medium dry ground
    epsilon = 15.0;

    if (f1 > 4841.945)
        mi = 10;
        epsilon = a(mi)+c(mi)*f1+e(mi)*f2;
        epsilon = sqrt(epsilon/(1.0+b(mi)*f1+d(mi)*f2));
    end

    mil = 12;
    if (f1 > 4946.751)
        mil = 11;
    end

    sigma = (a(mil)+b(mil)*f1+c(mil)*f2+d(mil)*f3+e(mil)*f4)^2;

elseif (ground_type == 5) % very dry ground
    epsilon = 3.0;

    if (f1 < 590.8924)
        sigma = 1.0e-4;
    else
        if (f1 > 7131.933)
            mil = 13;
            sigma = (a(mil)+b(mil)*f1+c(mil)*f2+d(mil)*f3)^2;
        else
            mil = 14;
            gi = 9.4623158e-23;
            hi = -1.1787443e-26;
            si = 7.9254217e-31;
            ti = -2.2088286e-35;
            sigma = a(mil)+b(mil)*f1+c(mil)*f2+d(mil)*f3;
            sigma = sigma+e(mil)*f4+f(mil)*f5+gi*f6;
            sigma = sigma+hi*f7+si*f8+ti*f9;
        end
    end

elseif (ground_type == 6) % user-defined
    epsilon = 80;
    sigma = 4;
end
end

```

D.15 – Programa WAPE que Calcula a Propagação Sobre a Superfície Esférica da Terra

```

clc
clear variables

%*****
% PARAMETERS DEFINITIONS
%*****
freq = 1000;           % FREQUENCY [MHz]
BW = 2;               % SOURCE 3dB BEAMWIDTH ARRAY [°]
BT = 0;               % SOURCE BEAM-TILT ARRAY [°]
max_range = 100000;    % MAX RANGE [m]
max_z_user = 1200;     % MAX ALTITUDE [m]
delz = 0.06;          % Z STEP [m]
delx = 10;            % RANGE STEP [m]
H = 25;               % SOURCE ALTITUDE ARRAY [m]
POL = 'H';            % SOURCE POLARIZATION [H/V]
PLOT_HEIGHT = 25;      % HEIGHT ABOVE GROUND TO PLOT PATH_LOSS
ae = 6371008;          % EARTH RADIUS
N0 = 315;             % SEA LEVEL REFRACTIVITY
h0 = -0.136;          % REFRACTIVITY SCALE HEIGHT

%*****
% PARAMETERS CALCULATION
%*****
% CHANGE max_z_user TO ACCOUNT THE EARTH SURFACE
START_HEIGHT = max_range^2/(2*ae);
max_z_user = max_z_user + START_HEIGHT;

% DEFINE THE ABSORBING LAYER SIZE
% THE SIZE DEPENDS ON THE FREQUENCY
% FOR LOWER FREQUENCIES, LARGER THE LAYER
win_ratio = 1/2;
if freq <= 401
    win_ratio = 8; % N used in the program = N*win_ratio
elseif freq <= 1001
    win_ratio = 4; % N used in the program = N*win_ratio
elseif freq < 2001
    win_ratio = 2; % N used in the program = N*win_ratio
end

% EXPAND THE DOMAIN FROM max_z_user TO max_z
% USER SELECTED MAX. HEIGHT OF max_z_user BUT
% THE DOMAIN IS EXTENDED TO max_z DUE TO THE
% ABSORBING LAYER
max_z = max_z_user*(1 + win_ratio);
if freq < 2001
    max_z = max_z_user*win_ratio;
end

% COMPUTE GRID
M = floor(max_range/delx) + 1; % NUM. OF COLS
N = floor(max_z/delz) + 1;      % NUM. OF ROWS
z = (linspace(0,max_z,N))';    % ALTITUDE ARRAY
range = linspace(0,max_range,M); % RANGE ARRAY

% COMPUTE THE WINDOW FUNCTION WITH HANNING WINDOW
if freq < 2001
    N2 = round(N/2);
    win = ones(1,N);

```

```

    ha = hanning(2*N2 + 1).';
    ha = ha(N2 + 1:end);
else
    win_ratio = win_ratio/2;
    win = ones(1,N);
    ha = hanning(2*round(N*win_ratio) + 1).';
    ha = ha(round(N*win_ratio) + 1:end);
end
win(N - length(ha) + 1:N) = ha;
win = win';

% CREATE EARTH TERRAIN FUNCTION
j_terrain_old = floor(START_HEIGHT/delz) + 1;
TERRAIN = j_terrain_old - floor(range.^2/(2*ae*delz));
freq = freq*1E6; % CONVERSION FROM [MHz] TO [Hz]
clight = 299792458; % SPEED OF LIGHT IN FREE-SPACE [m/s]
lambda0 = clight/freq; % FREE-SPACE WAVELENGTH [m]
k0 = 2*pi/lambda0; % FREE-SPACE WAVE NUMBER [1/m]
BW = pi*BW/180; % CONVERSION FROM [°] TO [rad]
BT = pi*BT/180; % CONVERSION FROM [°] TO [rad]

% CREATE RADIAL LAYERED ATMOSPHERE
n_ref = atmosfera_radial(z, range, N, M, ae, delz, j_terrain_old, N0, h0);

%*****
% PREPARE FOR CALCULATION
%*****
% GENERATE INITIAL FIELD PROFILE
initial = initialGaussField(k0, BW, BT, z, POL, H+START_HEIGHT);

% APPLY WINDOW TO INITIAL FIELD
initial = initial.*win;

% APPLY BOUNDARY CONDITIONS ON INITIAL FIELD
if POL == 'H'
    initial(j_terrain_old) = 0;
    initial(end) = 0;
else
    initial(j_terrain_old) = initial(j_terrain_old + 1);
    initial(end) = initial(end-1);
end
initial(1:j_terrain_old-1) = 0;

% INITIALIZE SOME VARS
field = zeros(N,M);
field(:,1) = initial;

%*****
% CALCULATION STARTS
%*****
c = (1 - 1i*k0*delx)/(1 + 1i*k0*delx);
b = 4*k0^2*delz^2/(1 + 1i*k0*delx);
for m=2:M
    % FIND CURRENT TERRAIN INDEX
    pt = TERRAIN(m);

    % TEST IF SLOPE IS UPWARD OR DOWNWARD
    if (pt < j_terrain_old)
        pt = j_terrain_old - 1;
    end
end

```

```

% CREATES THE ARRAY OF VALUES a_mj
n_curr = (n_ref(:,m) + n_ref(:,m-1))/2;
a_mj = k0^2*delz^2*(n_curr.^2 - 1);

% CREATES THE DIAGONAL OF MATRIX A
diagA = -2 + b + a_mj;

% CREATES THE DIAGONAL OF MATRIX B
diagB = c*conj(diagA);

% CREATES THE SUBDIAGONAL OF THE MATRIX A
subdiagA = ones(1,N-1);

% CREATES THE SUPERDIAGONAL OF THE MATRIX A
superdiagA = ones(1,N-1);

% CREATES THE SUBDIAGONAL OF THE MATRIX B
subdiagB = c*ones(1,N-1);

% CREATES THE SUPERDIAGONAL OF THE MATRIX B
superdiagB = c*ones(1,N-1);

% CHANGE THE MATRIX ACCORDING TO
% BOUNDARY CONDITIONS ON TERRAIN POINT
if POL == 'H'
    diagA(1:pt) = 1;
    diagB(1:pt) = 0;
    superdiagA(1:pt) = 0;
    subdiagA(1:pt-1) = 0;
    superdiagB(1:pt) = 0;
    subdiagB(1:pt-1) = 0;
    diagA(end) = 1;
    diagB(end) = 1;
    subdiagA(end) = 0;
    subdiagB(end) = 0;

elseif POL == 'V'
    diagA(1:pt-1) = 1;
    diagA(pt) = diagA(1)/2;
    diagB(pt) = diagB(1)/2;
    diagB(1:pt-1) = 0;
    superdiagA(1:pt-1) = 0;
    subdiagA(1:pt-1) = 0;
    superdiagB(1:pt-1) = 0;
    subdiagB(1:pt-1) = 0;
    diagA(end) = diagA(end)/2;
    diagB(end) = diagB(end)/2;
end

% CREATES THE TRIDIAGONAL SPARSE MATRIX A and B
A = gallery('tridiag', subdiagA, diagA, superdiagA);
B = gallery('tridiag', subdiagB, diagB, superdiagB);

% COMPUTE ARRAY V
V = B*field(:,m-1);

% COMPUTE THE FIELD IN RANGE m
field(:,m) = A\V;

% APPLY WINDOW ON u

```

```

    field(:,m) = field(:,m).*win;

    % UPDATE OLD TERRAIN POINT
    j_terrain_old = TERRAIN(m);
end

% GET USER PARAMS FOR PLOTS
[~,savez] = min(abs(z-max_z_user)); % IDX OF max_z_user
z_user = z(1:savez);

% DISCARD THE ABSORBING LAYER
u = field(1:savez,:);

% GET ONLY ABSOLUTE VALUE OF FIELD AND NORMALIZE
u = abs(u);
for m = 1:M
    u(1:TERRAIN(m),m) = NaN;
end
imAlpha=ones(size(u));
imAlpha(isnan(u))=0;

% COMPUTE PATH LOSS AND PROPAGATION FACTOR
PATH_LOSS = -20*log10(u) + 20*log10(4*pi) + 10*log10(range) -
30*log10(lambda0);
PROP_FACT = 20*log10(u) + 10*log10(range.^2 + (mean(H) + START_HEIGHT -
z_user).^2) - ...
    10*log10(range) + 10*log10(lambda0);

% PRINTS THE SOLUTION OF FIELD |u(x,z)|
figure
imagesc(range/1E3, z_user, u,'AlphaData',imAlpha)
set(gca,'color',204/255*[1 1 1]);
colormap(jet)
set(gca,'Ydir','normal');
xlabel('Range (km)','Linewidth',2,'fontsize',9, 'FontWeight','bold');
ylabel('Altitude (m)','Linewidth',2,'fontsize',9,'FontWeight','bold');
title('Field');
colorbar
caxis([0 0.03])

% PRINTS THE SOLUTION OF PATH LOSS
figure
imagesc(range/1E3, z_user, PATH_LOSS,'AlphaData',imAlpha);
set(gca,'color',204/255*[1 1 1]);
colormap(jet)
set(gca,'Ydir','normal');
xlabel('Range (km)','Linewidth',2,'fontsize',9, 'FontWeight','bold');
ylabel('Altitude (m)','Linewidth',2,'fontsize',9,'FontWeight','bold');
title('Path Loss [dB]');
colorbar
caxis([0,500])

% PRINTS THE SOLUTION OF PROPAGATION FACTOR
figure
imagesc(range/1E3, z_user, PROP_FACT,'AlphaData',imAlpha)
set(gca,'color',204/255*[1 1 1]);
colormap(jet)
set(gca,'Ydir','normal');
xlabel('Range (km)','Linewidth',2,'fontsize',9, 'FontWeight','bold');
ylabel('Altitude (m)','Linewidth',2,'fontsize',9,'FontWeight','bold');
title('Propagation Factor [dB]');

```



```

colorbar
caxis([-60 20])

% PRINTS RESULTS IN THE PLOT_HEIGHT
LAYER1 = floor((PLOT_HEIGHT + START_HEIGHT)/delz) + 1;
LAYER = LAYER1 - floor(range.^2/(2*ae*delz));
idx = [LAYER' (1:M)'];
PATH_LOSS_LAYER = PATH_LOSS(idx(:,1) + (idx(:,2) - 1)*size(PATH_LOSS,1));
figure
plot(range/1E3,PATH_LOSS_LAYER, 'linewidth', 3)
set(gca,'Ydir','reverse');
xlabel('Range (km)','Linewidth',2,'fontsize',9,'FontWeight','bold');
ylabel('Path Loss','Linewidth',2,'fontsize',9,'FontWeight','bold');
title('Path Loss in 25 m height [dB]')
grid
ylim([min(PATH_LOSS_LAYER), max(PATH_LOSS_LAYER)])

% PRINTS THE SOLUTION OF PATH LOSS
figure
imagesc(range/1E3, z_user, PATH_LOSS,'AlphaData',imAlpha);
hold on
plot(range/1E3,z_user(LAYER),'--w','linewidth', 1)
set(gca,'color',204/255*[1 1 1]);
colormap(jet)
set(gca,'Ydir','normal');
xlabel('Range (km)','Linewidth',2,'fontsize',9,'FontWeight','bold');
ylabel('Altitude (m)','Linewidth',2,'fontsize',9,'FontWeight','bold');
title('Path Loss [dB]');
colorbar
caxis([0,500])

```

D.16 – Programa WAPE que Calcula a Propagação Utilizando a Conversão para Terra Plana

```

clc
clear variables

%*****
% PARAMETERS DEFINITIONS
%*****
freq = 1000;           % FREQUENCY [MHz]
BW = 2;               % SOURCE 3dB BEAMWIDTH ARRAY [f]
BT = 0;              % SOURCE BEAM-TILT ARRAY [f]
max_range = 100000;   % MAX RANGE [m]
max_z_user = 1200;    % MAX ALTITUDE [m]
delz = 0.06;         % Z STEP [m]
delx = 10;           % RANGE STEP [m]
H = 25;              % SOURCE ALTITUDE ARRAY [m]
POL = 'H';           % SOURCE POLARIZATION [H/V]
PLOT_HEIGHT = 25;     % HEIGHT ABOVE GROUND TO PLOT PATH_LOSS
ae = 6371008;         % EARTH RADIUS
N0 = 315;            % SEA LEVEL REFRACTIVITY
h0 = -0.136;         % REFRACTIVITY SCALE HEIGHT

%*****
% PARAMETERS CALCULATION
%*****
% DEFINE THE ABSORBING LAYER SIZE
% THE SIZE DEPENDS ON THE FREQUENCY
% FOR LOWER FREQUENCIES, LARGER THE LAYER
win_ratio = 1/2;
if freq <= 401
    win_ratio = 8; % N used in the program = N*win_ratio
elseif freq <= 1001
    win_ratio = 4; % N used in the program = N*win_ratio
elseif freq < 2001
    win_ratio = 2; % N used in the program = N*win_ratio
end

% EXPAND THE DOMAIN FROM max_z_user TO max_z
% USER SELECTET MAX. HEIGHT OF max_z_user BUT
% THE DOMAIN IS EXTENDED TO max_z DUE TO THE
% ABSORBING LAYER
max_z = max_z_user*(1 + win_ratio);
if freq < 2001
    max_z = max_z_user*win_ratio;
end

% COMPUTE GRID
M = floor(max_range/delx) + 1; % NUM. OF COLS
N = floor(max_z/delz) + 1;      % NUM. OF ROWS
z = (linspace(0,max_z,N))';    % ALTITUDE ARRAY
range = linspace(0,max_range,M); % RANGE ARRAY

% COMPUTE THE WINDOW FUNCTION WITH HANNING WINDOW
if freq < 2001
    N2 = round(N/2);
    win = ones(1,N);
    ha = hanning(2*N2 + 1).';
    ha = ha(N2 + 1:end);
else
    win_ratio = win_ratio/2;

```

```

    win = ones(1,N);
    ha = hanning(2*round(N*win_ratio) + 1).';
    ha = ha(round(N*win_ratio) + 1:end);
end
win(N - length(ha) + 1:N) = ha;
win = win';

% CREATE VERTICAL MODIFIED REFRACTIVE INDEX
% PROFILE TO PLANE EARTH CONVERSION
N_ref = N0*exp(h0*z/1E3);           % REFRACTIVITY ARRAY
n_ref = N_ref/1E6 + 1;              % REFRACTIVE INDEX ARRAY
m_ref = n_ref.*exp(z/ae);           % MODIFIED REFRACTIVE INDEX ARRAY
freq = freq*1E6;                   % CONVERSION FROM [MHz] TO [Hz]
clight = 299792458;                % SPEED OF LIGHT IN FREE-SPACE [m/s]
lambda0 = clight/freq;              % FREE-SPACE WAVELENGTH [m]
k0 = 2*pi/lambda0;                 % FREE-SPACE WAVE NUMBER [1/m]
BW = pi*BW/180;                    % CONVERSION FROM [°] TO [rad]
BT = pi*BT/180;                    % CONVERSION FROM [°] TO [rad]

%*****
% PREPARE FOR CALCULATION
%*****
% GENERATE INITIAL FIELD PROFILE
initial = initialGaussField(k0, BW, BT, z, POL, H);

% APPLY WINDOW TO INITIAL FIELD
initial = initial.*win;

% APPLY BOUNDARY CONDITIONS ON INITIAL FIELD
if POL == 'H' % DIRICHLET
    initial(1) = 0;
    initial(end) = 0;
else % NEUMANN
    initial(1) = initial(2);
    initial(end) = initial(end-1);
end

% INITIALIZE SOME VARS
field = zeros(N,M);
field(:,1) = initial;

%*****
% CALCULATION STARTS
%*****
c = (1 - 1i*k0*delx)/(1 + 1i*k0*delx);
b = 4*k0^2*delz^2/(1 + 1i*k0*delx);
for m=2:M
    % CREATES THE ARRAY OF VALUES a_mj
    a_mj = k0^2*delz^2*(m_ref.^2 - 1);

    % CREATES THE DIAGONAL OF MATRIX A
    diagA = -2 + b + a_mj;

    % CREATES THE DIAGONAL OF MATRIX B
    diagB = c*conj(diagA);

    % CREATES THE SUBDIAGONAL OF THE MATRIX A
    subdiagA = ones(1,N-1);

    % CREATES THE SUPERDIAGONAL OF THE MATRIX A
    superdiagA = ones(1,N-1);

```

```

% CREATES THE SUBDIAGONAL OF THE MATRIX B
subdiagB = c*ones(1,N-1);

% CREATES THE SUPERDIAGONAL OF THE MATRIX B
superdiagB = c*ones(1,N-1);

% CHANGE THE MATRIX ACCORDING TO BOUNDARY CONDITIONS
if POL == 'H' % DIRICHLET
    diagA(1) = 1;
    diagB(1) = 1;
    diagA(end) = 1;
    diagB(end) = 1;
    superdiagA(1) = 0;
    superdiagB(1) = 0;
    subdiagA(end) = 0;
    subdiagB(end) = 0;

elseif POL == 'V' % NEUMANN
    diagA(1) = diagA(1)/2;
    diagB(1) = diagB(1)/2;
    diagA(end) = diagA(end)/2;
    diagB(end) = diagB(end)/2;
end

% CREATES THE TRIDIAGONAL SPARSE MATRIX A and B
A = gallery('tridiag', subdiagA, diagA, superdiagA);
B = gallery('tridiag', subdiagB, diagB, superdiagB);

% COMPUTE ARRAY V
V = B*field(:,m-1);

% COMPUTE THE FIELD IN RANGE m
field(:,m) = A\V;

% APPLY WINDOW ON u
field(:,m) = field(:,m).*win;
end

% GET USER PARAMS FOR PLOTS
[~,savez] = min(abs(z-max_z_user)); % IDX OF max_z_user
z_user = z(1:savez);

% DISCARD THE ABSORBING LAYER
u = field(1:savez,:);

% GET ONLY ABSOLUTE VALUE OF FIELD AND NORMALIZE
u = abs(u);

% COMPUTE PATH LOSS AND PROPAGATION FACTOR
PATH_LOSS = -20*log10(u) + 20*log10(4*pi) + ...
    10*log10(ae*sin(range/ae).*exp(z_user/ae)) - 30*log10(lambda0);

PROP_FACT = 20*log10(u) - 10*log10(ae*sin(range/ae).*exp(z_user/ae)) + ...
    10*log10(lambda0) + 10*log10(range.^2 + (mean(H) - z_user).^2);

% PRINTS THE SOLUTION OF FIELD |u(x,z)|
figure
imagesc(range/1E3, z_user, u)
colormap(jet)

```

```

set(gca,'Ydir','normal');
xlabel('Range (km)','Linewidth',2,'fontsize',9,'FontWeight','bold');
ylabel('Altitude (m)','Linewidth',2,'fontsize',9,'FontWeight','bold');
title('Field');
colorbar
caxis([0 0.03])

% PRINTS THE SOLUTION OF PATH LOSS
figure
imagesc(range/1E3, z_user, PATH_LOSS);
colormap(jet)
set(gca,'Ydir','normal');
xlabel('Range (km)','Linewidth',2,'fontsize',9,'FontWeight','bold');
ylabel('Altitude (m)','Linewidth',2,'fontsize',9,'FontWeight','bold');
title('Path Loss [dB]');
colorbar
caxis([0,500])

% PRINTS THE SOLUTION OF PROPAGATION FACTOR
figure
imagesc(range/1E3, z_user, PROP_FACT)
colormap(jet)
set(gca,'Ydir','normal');
xlabel('Range (km)','Linewidth',2,'fontsize',9,'FontWeight','bold');
ylabel('Altitude (m)','Linewidth',2,'fontsize',9,'FontWeight','bold');
title('Propagation Factor [dB]');
colorbar
caxis([-60 20])

% PRINTS RESULTS IN THE PLOT_HEIGHT
p = floor(PLOT_HEIGHT/delz) + 1;
PATH_LOSS_LAYER = PATH_LOSS(p,:);
figure
plot(range/1E3,PATH_LOSS_LAYER, 'linewidth', 3)
set(gca,'Ydir','reverse');
xlabel('Range (km)','Linewidth',2,'fontsize',9,'FontWeight','bold');
ylabel('Path Loss','Linewidth',2,'fontsize',9,'FontWeight','bold');
title('Path Loss in 25 m height [dB]')
grid
ylim([min(PATH_LOSS_LAYER), max(PATH_LOSS_LAYER)])

% PRINTS THE SOLUTION OF PATH LOSS
figure
imagesc(range/1E3, z_user, PATH_LOSS);
hold on
line([0 range(end)/1e3],[z_user(p) z_user(p)],'Color','w','LineStyle','--',
'linewidth', 1)
colormap(jet)
set(gca,'Ydir','normal');
xlabel('Range (km)','Linewidth',2,'fontsize',9,'FontWeight','bold');
ylabel('Altitude (m)','Linewidth',2,'fontsize',9,'FontWeight','bold');
title('Path Loss [dB]');
colorbar
caxis([0,500])

```

D.17 – Função que Gera Atmosfera Radialmente Estratificada

```
function ref = atmosfera_radial(z, range, N, M, ae, delz, j_terrain_old, N0,
h0)

camadas = (j_terrain_old:N)'.*ones(N-j_terrain_old+1,M);
camadas = camadas - floor(range.^2/(2*ae*delz));
ref = zeros(N,M);

for i = 1:size(camadas,1)
    camada = camadas(i,:);
    idx = [camada' (1:M)'];
    N_ref = N0*exp(h0*z(i)/1E3);
    n = N_ref/1E6 + 1;
    ref(idx(:,1) + (idx(:,2) - 1)*size(ref,1)) = n;
end
end
```

D.18 – Função que Gera a Distribuição Inicial de Campo da Fonte Gaussiana

```
function u = initialGaussField(k0, BW, BT, z, POL, Hs)
%*****
% THIS FUNCTION CALCULATES THE INITIAL FIELD WITH GAUSSIAN PATTERN AND
% PARAMETERS SIGMA AND HEIGHT
% k0 --> free-space wave-length in meters
% BW --> source beamwidth array in rad
% BT --> source beam-tilt array in rad
% z --> height variable in meters
% POL --> source polarization (horizontal / vertical)
% Hs --> source height array in meters
%*****

u = 0;
for i = 1:length(Hs)
    w = sqrt(2*log(2))/(k0*sin(BW(i)/2));
    ufsp = exp(-((z-Hs(i))/w).^2).*exp(-1i*k0*sin(BT(i))*z);
    ufsn = exp(-((-z-Hs(i))/w).^2).*exp(1i*k0*sin(BT(i))*z);
    if POL == 'H'
        u = u + (ufsp-ufsn)/(w*pi*sqrt(2));
    else % V polrz
        u = u + (ufsp+ufsn)/(w*pi*sqrt(2));
    end
end
end
```

D.19 – Programa Para Cálculo do Modelo Proposto

```

clc
clear variables
close all

% SET CASE NUMBER
CASE = 1;

%% variables initialization -----
format long
mainWaitbar = waitbar(0,'Initializing...'); % waitbar initialize

% Loads general data
GENDATA_FILENAME = 'GENERALDATA';
waitbar(0,mainWaitbar,sprintf('Loading general data ...'))

try
    load(GENDATA_FILENAME);
catch
    mode = struct('WindowStyle','nonmodal','Interpreter','tex');
    msg = strcat('The file ',GENDATA_FILENAME,'.mat do not exists.');
```

errordlg(msg,'Erro', mode);

```
end

% Loads case data
waitbar(0,mainWaitbar,sprintf('Loading case data ...'))
CASE_FILENAME = strcat('CASES/CASE_',int2str(CASE));
try
    load(CASE_FILENAME);
catch
    mode = struct('WindowStyle','nonmodal','Interpreter','tex');
    msg = strcat('The file ',CASE_FILENAME,'.mat do not exists.');
```

errordlg(msg,'Erro', mode);

```
end

waitbar(0,mainWaitbar,sprintf('Preparing for calculations ...'))

% Choose the correct system
SYSTEM = SYSTEMS.(SYSTEM_NAME);

%% validate system data -----
SYSTEM = DataValidation(SYSTEM);
TXLINE_DATASHEET = TXLINES.(SYSTEM.TXLINE_NAME);
ANT_DATASHEET = ANTENNAS.(strcat(SYSTEM.ANT_NAME,'_',SYSTEM.POL));

%% computes required variables -----
LAMBDA = SPEED_LIGHT/(SYSTEM.FREQ*1E6); % WAVELENGTH [METERS]
MAX_EIRP_kW = EIRPmax(SYSTEM, TXLINE_DATASHEET); % MAXIMUM EIRP [kW]
nPoints = size(RXPOINTS,1);
RESULTS = [RXPOINTS zeros(nPoints,5)]; % RESULTS ARRAY

%% get terrain data
if(~exist('PROFILES','var'))
    PROFILES = cell(nPoints,1);
    for i=1:nPoints
        RXPOINT = RXPOINTS(i,:);
        % compute range and bearing
        [RANGE,BEARING] = d_Bearing(SYSTEM.TX_LOC, RXPOINT);
        DEM_RESOLUTION = 50; % DEM PLANAR RESOLUTION [METERS]
```

```

        SAMPLES = floor(RANGE/DEM_RESOLUTION);
        if (SAMPLES > 511)
            SAMPLES = 512;
        end
        % get terrain profile in Google Elevation API
        PROFILES{i} = LineElevation(SYSTEM.TX_LOC, RXPOINT, SAMPLES);
    end
    save(CASE_FILENAME, 'SYSTEM_NAME', 'RXPOINTS', 'PROFILES');
end

%% compute effective antenna height
he = zeros(nPoints,1);
med = zeros(nPoints,1);
p_tx = [PointElevation(SYSTEM.TX_LOC) 0]; % tx point
for i=1:nPoints
    p_rx = [PROFILES{i}(end,1) PROFILES{i}(end,2)]; % rx point
    %coefficients of the line from p_tx to p_l (a1x + b1y + c1 = 0)
    a1 = p_tx(1) - p_rx(1);
    b1 = p_rx(2) - p_tx(2);
    c1 = p_tx(2)*p_rx(1) - p_rx(2)*p_tx(1);
    reta = (-c1 -a1*PROFILES{i}(:,2))/b1;
    med(i) = mean(PROFILES{i}(:,1) - reta);
    he(i) = SYSTEM.TX_HEIGHT - med(i);
end

%% normalize profiles
MINPROFILES = zeros(nPoints,1);
for i=1:nPoints
    MINPROFILES(i) = min(PROFILES{i}(:,1));
end
GLOBALMINPROFILES = min(MINPROFILES);

for i=1:nPoints
    PROFILES{i}(:,1) = PROFILES{i}(:,1) - GLOBALMINPROFILES;
end

MAXPROFILES = zeros(nPoints,1);
for i=1:nPoints
    MAXPROFILES(i) = max(PROFILES{i}(:,1));
end
GLOBALMAXPROFILES = max(MAXPROFILES);

%% calculation starts -----
% for each reception point
% - compute the terrain attenuation using bullington method
% - compute tropospheric attenuation using PE method
% - compute free-space loss
% - combine results

for i=1:nPoints
    % waitbar refresh
    waitbar(i/nPoints, mainWaitbar, sprintf('Processing point %d of %d ...'
    ...
        , i, nPoints))

    % current reception point
    RXPOINT = RXPOINTS(i,:);

    % compute range and bearing
    [RANGE,BEARING] = d_Bearing(SYSTEM.TX_LOC, RXPOINT);
    PROFILE = PROFILES{i};

```



```

PROFILE(1,2) = 0;

TX_ELEVATION = PROFILE(1,1);
RX_ELEVATION = PROFILE(end,1);
H1 = TX_ELEVATION + SYSTEM.TX_HEIGHT;
H2 = RX_ELEVATION + SYSTEM.RX_HEIGHT;

% find knife-edges in elevation profile
KNIFE_EDGES = KnifeEdgeSimpleDetect(H1,H2,PROFILE);
nKNIFE_EDGES = length(KNIFE_EDGES);

% compute bullington loss
BULLINGTON_LOSS = 0;
if(nKNIFE_EDGES > 0)
    BULLINGTON_LOSS = -bullington(H1,H2,PROFILE,KNIFE_EDGES,LAMBDA);
else
    PROFILE(1,1) = H1;
    PROFILE(end,1) = H2;
    p_fresnel = FresnelPoint(PROFILE,2,size(PROFILE,1)-1,LAMBDA);
    if(~isempty(p_fresnel))
        KNIFE_EDGES = p_fresnel;
        BULLINGTON_LOSS = -
bullington(H1,H2,PROFILE,KNIFE_EDGES,LAMBDA);
    end
end

% compute tropospheric loss
DELZ = LAMBDA/10;
DELX = 10;
TROP_LOSS = -troposphericLoss2(SYSTEM, RANGE, H1, H2, LAMBDA, DELZ,
...
    DELX, GLOBALMAXPROFILES, GLOBALMINPROFILES);

% compute line of sight angle
BETA = atan2d(H1 - H2, RANGE);
PROP_DIST = RANGE/cosd(BETA);
BASIC_LOSS = 20*log10(4*pi*PROP_DIST/LAMBDA);

EIRP_kW = BoresightEIRP(SYSTEM, ANT_DATASHEET, BEARING,BETA,
MAX_EIRP_kW);
RX_PWR_dBkW = 10*log10(EIRP_kW) - BULLINGTON_LOSS - TROP_LOSS -
BASIC_LOSS;
RX_PWR_dBm = RX_PWR_dBkW + 60;
RESULTS(i,3:7) = [RX_PWR_dBm EIRP_kW BULLINGTON_LOSS TROP_LOSS
BASIC_LOSS];
save('RESULTS.mat','RESULTS');
end
close(mainWaitbar);

```

D.20 – Função que Calcula a Perda Troposférica no Método Proposto

```

function PF = troposphericLoss2(SYSTEM, RANGE, HTX, HRX, LAMBDA, delz, ...
    delx, MAXPROF, MINPROF)
%*****
% PARAMETERS DEFINITIONS
%*****
ae = 6371008;           % EARTH RADIUS
N0 = 315;               % SEA LEVEL REFRACTIVITY
h0 = -0.136;
z_max_user = max([HTX HRX MAXPROF]);

%*****
% WINDOW RATIO DETERMINATION
%*****
% DEFINE THE ABSORBING LAYER SIZE
% THE SIZE DEPENDS ON THE FREQUENCY
% FOR LOWER FREQUENCIES, LARGER THE LAYER
win_ratio = 1/2;
if SYSTEM.FREQ <= 401
    win_ratio = 8; % N used in the program = N*win_ratio
elseif SYSTEM.FREQ <= 1001
    win_ratio = 4; % N used in the program = N*win_ratio
elseif SYSTEM.FREQ < 2001
    win_ratio = 2; % N used in the program = N*win_ratio
end

z_range = z_max_user*(1 + win_ratio);
if SYSTEM.FREQ < 2001
    z_range = z_max_user*win_ratio;
end

N = floor(2*z_range/delz) + 1;
z = linspace(-z_range, z_range, N).';
z_atm = MINPROF + linspace(-z_range, z_range, N).';
M = floor(RANGE/delx) + 1;
%*****
% WINDOW CALCULATION
%*****
% COMPUTE THE WINDOW FUNCTION WITH HANNING WINDOW
if SYSTEM.FREQ < 2001
    N2 = round(N/4);
    win = ones(1,N);
    ha = hanning(2*N2 + 1).';
    ha = ha(N2 + 1:end);
else
    win_ratio = win_ratio/4;
    win = ones(1,N);
    ha = hanning(2*round(N*win_ratio) + 1).';
    ha = ha(round(N*win_ratio) + 1:end);
end
win(N - length(ha) + 1:N) = ha;
win(1:length(ha)) = fliplr(ha);
win = win';

%*****
% REFRACTIVE INDEX CALCULATION
%*****

N_ref = N0*exp(-h0*z_atm/1E3);
n_ref = N_ref/1E6 + 1;

```

```

m_ref = n_ref.*exp(z_atm/ae);
m_ref(z<0) = m_ref(floor(N/2) + 1);

%*****
% PARAMETERS CALCULATION
%*****

SYSTEM.FREQ = SYSTEM.FREQ*1E6;      % CONVERSION FROM MHz TO Hz
k0 = 2*pi/LAMBDA;
SYSTEM.ANT_BW = pi*SYSTEM.ANT_BW/180;      % CONVERSION FROM degrees TO rad
SYSTEM.ANT_TILT = -pi*SYSTEM.ANT_TILT/180; % CONVERSION FROM degrees TO rad

% GENERATE INITIAL FIELD
initial = initialGaussField(k0, SYSTEM.ANT_BW, SYSTEM.ANT_TILT, z, HTX);

% APPLY WINDOW TO INITIAL FIELD
initial = initial.*win;

% APPLY BOUNDARY CONDITIONS ON INITIAL FIELD
if SYSTEM.POL == 'H' % DIRICHLET
    initial(1) = 0;
    initial(end) = 0;
else % NEUMANN
    initial(1) = initial(2);
    initial(end) = initial(end-1);
end

% INITIALIZE SOME VARS
field = zeros(N,M);
field(:,1) = initial;

%*****
% CALCULATION STARTS
%*****
c = (1 - 1i*k0*delx)/(1 + 1i*k0*delx);
b = 4*k0^2*delz^2/(1 + 1i*k0*delx);
for m=2:M
    % CREATES THE ARRAY OF VALUES a_mj
    a_mj = k0^2*delz^2*(m_ref.^2 - 1);

    % CREATES THE DIAGONAL OF MATRIX A
    diagA = -2 + b + a_mj;

    % CREATES THE DIAGONAL OF MATRIX B
    diagB = c*conj(diagA);

    % CREATES THE SUBDIAGONAL OF THE MATRIX A
    subdiagA = ones(1,N-1);

    % CREATES THE SUPERDIAGONAL OF THE MATRIX A
    superdiagA = ones(1,N-1);

    % CREATES THE SUBDIAGONAL OF THE MATRIX B
    subdiagB = c*ones(1,N-1);

    % CREATES THE SUPERDIAGONAL OF THE MATRIX B
    superdiagB = c*ones(1,N-1);

    % CHANGE THE MATRIX ACCORDING TO BOUNDARY CONDITIONS
    if SYSTEM.POL == 'H' % DIRICHLET

```

```

diagA(1) = 1;
diagB(1) = 1;
diagA(end) = 1;
diagB(end) = 1;
superdiagA(1) = 0;
superdiagB(1) = 0;
subdiagA(end) = 0;
subdiagB(end) = 0;

elseif SYSTEM.POL == 'V' % NEUMANN
    diagA(1) = diagA(1)/2;
    diagB(1) = diagB(1)/2;
    diagA(end) = diagA(end)/2;
    diagB(end) = diagB(end)/2;
end

% CREATES THE TRIDIAGONAL SPARSE MATRIX A and B
A = gallery('tridiag', subdiagA, diagA, superdiagA);
B = gallery('tridiag', subdiagB, diagB, superdiagB);

% COMPUTE ARRAY V
V = B*field(:,m-1);

% COMPUTE THE FIELD IN RANGE m
field(:,m) = A\V;
field(:,m) = field(:,m).*win;
end
% GET ONLY ABSOLUTE VALUE OF FIELD
u = abs(field);
z_user = z(0<=z & z<=z_max_user);
u = u(0<=z & z<=z_max_user,:);
RX_IDX = floor(HRX/delz) + 1;
urx = u(RX_IDX,end);
PF = 20*log10(urx) - 10*log10(ae*sin(RANGE/ae).* ...
    exp((z_user(RX_IDX) + MINPROF)/ae)) + 10*log10(LAMBDA) + ...
    10*log10(RANGE^2 + (HTX-HRX)^2);
end

```

D.21 – Função que Calcula a Perda do Método de Bullington

```

function L = bullington(h1,h2,perfil,gumes,lambda)

% this function computes the bullington's excess path loss from the terrain
% profile, antennas heights, wavelength and knife-edges position and
% heights.

p_tx = [h1 perfil(1,2)]; % tx point
p_rx = [h2 perfil(end,2)]; % rx point

if (length(gumes)==1) % if there's just a knife-edge
    p = perfil(gumes,:); % the knife-edge point

else % if there's more than 1 knife-edge, must find the equivalent
    p1 = perfil(gumes(1),:); % tx horizon clearance knife-edge
    p2 = perfil(gumes(end),:); % rx horizon clearance knife-edge

    % coefficients of the line from p_tx to p1 (a1x + b1y + c1 = 0)
    a1 = p_tx(1) - p1(1);
    b1 = p1(2) - p_tx(2);
    c1 = p_tx(2)*p1(1) - p1(2)*p_tx(1);

    % coefficients of the line from p2 to p_rx (a2x + b2y + c2 = 0)
    a2 = p2(1) - p_rx(1);
    b2 = p_rx(2) - p2(2);
    c2 = p2(2)*p_rx(1) - p_rx(2)*p2(1);

    % finds the intersection point of the 2 lines
    p = ([a1 b1;a2 b2]\[-c1;-c2]);
    p = p';
    p = fliplr(p);
end

% computes the v parameter for the unique (or equivalent) knife-edge
v = vParameter(p_tx,p,p_rx,lambda);

% computes the ratio E/E0 from v parameter
EE0 = ((0.5 - fresnelc(v)) - 1i*(0.5 - fresnels(v)))*(1+1i)/2;

% computes the path loss in dB
L = 20*log10(abs(EE0));

end

```

D.22 – Função que Calcula a Atenuação da Linha de Transmissão

```
function att100 = att100m( f,datasheet )

% this function computes the dB/100m transmission line attenuation from its
% datasheet and operating frequency

% finds in datasheet the nearest frequencies
[finf, fsup, i_inf, i_sup] = FindNearest(datasheet(:,1),f);

if (finf == fsup) % if the operating frequency is on the datasheet
    att100 = datasheet(datasheet(:,1) == finf,2);
    return;

else % if we must do interpolation
    ainf = datasheet(i_inf,2); % inferior frequency attenuation
    asup = datasheet(i_sup,2); % superior frequency attenuation
    att100 = ainf + (asup - ainf)*log10(f/finf)/log10(fsup/finf); % log
    interp.
    return;
end
end
```

D.23 – Função que Calcula a AEIRP em Determinada Direção

```
function eirp = BoresightEIRP( SYSTEM, ANT_DATASHEET, BEARING,BETA,
MAX_EIRP )

% this function computes the EIRP [kW] in the boresight direction given the
% antenna patterns, the boresight bearing and the max EIRP of the system

AZ = BEARING - SYSTEM.ANT_AZ;
AZ = mod(AZ+360,360);
ELEV = BETA - SYSTEM.ANT_TILT;
[~, ~, ia1, ia2] = FindNearest(ANT_DATASHEET{1}(:,1),AZ);
[~, ~, ib1, ib2] = FindNearest(ANT_DATASHEET{2}(:,1),ELEV);
if (ia1 == ia2)
    Eh = ANT_DATASHEET{1}(ia1,2);
else
    Eh = mean([ANT_DATASHEET{1}(ia1,2) ANT_DATASHEET{1}(ia2,2)]);
end
if (ib1 == ib2)
    Ev = ANT_DATASHEET{2}(ib1,2);
else
    Ev = mean([ANT_DATASHEET{2}(ib1,2) ANT_DATASHEET{2}(ib2,2)]);
end
eirp = MAX_EIRP*Eh^2*Ev^2;
end
```

D.24 – Função que Calcula a Distância Geodésica e o Azimute entre Duas Coordenadas Geográficas

```
function [ d,teta ] = d_Bearing( p1,p2 )

% this function computes the distance and bearing given 2 points in the
% [lat lng] degree format

% convert degree coordinates into radians
p1 = p1*pi/180;
p2 = p2*pi/180;

a = sin((p2(1)-p1(1))/2)^2 + cos(p1(1))*cos(p2(1))*sin((p2(2)-p1(2))/2)^2;
c = 2*atan2(sqrt(a), sqrt(1-a));

d = 6371000*c; % geodesic distance
teta = atan2(sin(p2(2)-p1(2))*cos(p2(1)),cos(p1(1))*sin(p2(1))-...
    sin(p1(1))*cos(p2(1))*cos(p2(2)-p1(2)))*180/pi;

teta = mod(teta+360,360);
end
```

D.25 – Função que Calcula a AEIRP Máxima do Sistema Radiante

```
function MAXEIRP = EIRPmax( SYSTEM, TXLINE_DATASHEET )

% this function computes the maximum EIRP of the system in kW given the
% transmission line characteristics, TX antenna gain and radio operating
power

if(strcmp(SYSTEM.TXLINE_NAME,'GENERIC'))
    LINE_LOSS = 0;
else
    ATT100 = att100m(SYSTEM.FREQ, TXLINE_DATASHEET); % LINE ATT. [dB/100m]
    LINE_LOSS = SYSTEM.TXLINE_LENGTH*ATT100/100;
end
TOTAL_LOSS_dB = LINE_LOSS + SYSTEM.TX_LOSSES;
TOTAL_LOSS = 10^(TOTAL_LOSS_dB/10);
EFFICIENCY = 1/TOTAL_LOSS;
ABS_GAIN = 10^(SYSTEM.ANT_GAIN/10);
MAXEIRP = SYSTEM.TX_PWR*ABS_GAIN*EFFICIENCY;
end
```

D.26 – Função que Retorna os Valores Mais Próximos de um Valor Desejado em um Vetor

```
function [inf,sup,a,b] = FindNearest(x,v)

% this function finds the nearest values from value v in an ascend. ordered
% array x

% if v is greater than the last element in array
if x(end) < v
    inf = x(end-1);
    sup = x(end);
    a = length(x)-1;
    b = length(x);
    return
elseif x(1) > v % if v is lower than the first element in array
    inf = x(1);
    sup = x(2);
    a = 1;
    b = 2;
    return
end

inicio=1;
fim=length(x);
% if v is inside the array bounds
while inicio<=fim
    meio = round((inicio + fim)/2);
    dif = x(meio)-v;
    if dif==0
        inf=v;
        sup=v;
        a = meio;
        b = meio;
        return
    elseif dif<0 % v is on the upper half
        inicio=meio+1;
    else % v is on the lower half
        fim=meio-1;
    end
end
inf = x(fim:inicio);
sup = inf(2);
inf = inf(1);
a = fim;
b = inicio;
end
```


D.27 – Função para Detectar Gumes de Faca no Perfil de Terreno

```
function pontos = KnifeEdgeSimpleDetect(h1,h2,perfil)

% this function locates the knife-edges indexes in the terrain profile

perfil(1,1) = h1;
perfil(end,1) = h2;
ponto = 1;
pontos = zeros(size(perfil,1),1);
k = 1;

while(1)
    ref = perfil(ponto,:);
    perfil_teste = perfil(ponto:end,:);
    tangentes = (perfil_teste(:,1) - ref(1))./(perfil_teste(:,2) - ref(2));
    [~,i_max] = max(tangentes);
    ponto = ponto + i_max -1;
    if(ponto==size(perfil,1))
        break
    end
    pontos(k) = ponto;
    k = k+1;
end
pontos(pontos==0) = [];
end
```

D.28 – Função que Calcula o Parâmetro de Fresnel-Kirchoff

```
function v = vParameter(p0, p1, p2, lambda)

% this function computes the v parameter of the diffraction between p0,
% p1 and p2, where p1 is the knife-edge point and p0 and p2 are the
% terminals

% line of sight between p0 e p2 (a1x + b1y + c1 = 0)
a1 = p0(1) - p2(1);
b1 = p2(2) - p0(2);
c1 = p0(2)*p2(1) - p2(2)*p0(1);
% computes the line that is orthogonal to the line of sight and passes on
% p1 point (a2x + b2y + c2 = 0)
a2 = b1;
b2 = -a1;
c2 = a1*p1(1) - b1*p1(2);
% intersection point of the lines
q = ([a1 b1;a2 b2])\[-c1;-c2];
q = q';
q = fliplr(q);

% computes the orthogonal distance from p1 to the line of sight
h = (a1*p1(2) + b1*p1(1) + c1)/sqrt(a1^2 + b1^2);

% computes d1 e d2 (distances along the line of sight)
d1 = norm(q-p0);
d2 = norm(p2-q);

% computes v parameter of the diffraction
v = h*sqrt((2/lambda)*(1/d1 + 1/d2));
end
```

D.29 – Função para Encontrar Ponto na Primeira Zona de Fresnel

```
function pto_fresnel = FresnelPoint( perfil, ini, fim, lambda )

% this function finds the point within the 56% fresnel zone between p0 and
% p1 wich causes the largest v parameter

pto_fresnel = [];
p0 = perfil(1,:);
p2 = perfil(end,:);
D = p2(2) - p0(2);
m = (p2(1) - p0(1))/D; % coeficiente da reta de visada
d = norm(p2-p0);

% computes the 56% of first fresnel zone ellipsoid
fresnel = [FresnelEllipsoid(perfil(:,2),lambda,d) perfil(:,2)];
rotacionado = DataRotate(fresnel(:,2),fresnel(:,1),atan(m),p0(2),p0(1));
fresnel(:,1) = rotacionado(:,1) + p0(1);

% finds the points within the ellipsoid and get that has largest v
% parameter
diferencas = fresnel(ini:fim,:);
diferencas = perfil(ini:fim,1) - diferencas(:,1);
pontos_fresnel = find(diferencas>=0);
if(~isempty(pontos_fresnel))
    vs = zeros(1,length(pontos_fresnel));
    for i=1:length(pontos_fresnel)
        ind = pontos_fresnel(i) + ini-1;
        p = perfil(ind,:);
        vs(i) = vParameter(p0,p,p2,lambda);
    end
    [~,i_v_max] = max(vs);
    pto_fresnel = ini + pontos_fresnel(i_v_max)-1;
end
end
```

D.30 – Função para Gerar um Elipsoide

```
function fresnel = FresnelEllipsoid(x,lambda,d)

% this function generates an ellipse for the 56% of the first fresnel zone

h = d/2 + x(1);
b = (-0.7780217/2)*sqrt(lambda*d/2);
c = d/2;
a2 = b^2 + c^2;

fresnel = b*sqrt(1-((x(:)-h).^2)/a2);
end
```

D.31 – Função para Rotacionar o Elipsoide de Fresnel

```
function rotacionado = DataRotate(x,y,teta,xc,yc)

% this function rotates a set of 2D points by an angle teta with axis on
% the point [xc yc]

R = [cos(teta) -sin(teta) 0; sin(teta) cos(teta) 0; 0 0 1];
a = [1 0 xc;0 1 yc; 0 0 1];
c = [1 0 -xc;0 1 -yc; 0 0 1];
M = a*R*c;
rot = zeros(3,length(x));
for i=1:length(x)
    rot(:,i) = M*[x(i) y(i) 1]';
end
rotacionado(:,2) = rot(1,:);
rotacionado(:,1) = rot(2,:);
```

D.32 – Função para Obter o Perfil de Terreno no Google Elevation API

```
function vetor = LineElevation( ponto1, ponto2, n )

% this function gets the elevation profile along a path from point 1 to
% point 2 with n samples

precisao = 8;
vetor = zeros(n,2);
caminho =
strcat('http://maps.googleapis.com/maps/api/elevation/json?path=', ...
    num2str(ponto1(1),precisao), ',', num2str(ponto1(2),precisao), '|', ...
    num2str(ponto2(1),precisao), ',', num2str(ponto2(2),precisao), ...
    '&samples=', num2str(n));
resultado = jsonParse(urlread(caminho));
try
    for i=1:n
        vetor(i,1) = resultado.results{i}.elevation;
        lat = resultado.results{i}.location.lat;
        long = resultado.results{i}.location.lng;
        p=[lat long];
        [d,~] = d_Bearing(ponto1,p);
        vetor(i,2) = d;
    end
catch
    mode = struct('WindowStyle','nonmodal','Interpreter','tex');
    errordlg(resultado.error_message,'Erro', mode);
end
```

D.33 – Função que Verifica se os Dados Informados Estão Corretos

```

function [ SYSTEM ] = DataValidation( SYSTEM )

% this function validates the system data
if (isempty(SYSTEM.TX_LOC) || isempty(SYSTEM.TX_HEIGHT) || ...
    isempty(SYSTEM.FREQ) || isempty(SYSTEM.ANT_GAINS) ||
    isempty(SYSTEM.TX_PWR))

    mode = struct('WindowStyle','nonmodal','Interpreter','tex');
    errordlg('Missing data.','Error', mode);

else
    SYSTEM.ANT_GAIN = SYSTEM.ANT_GAINS(1);
    if(SYSTEM.POL == 'V')
        SYSTEM.ANT_GAIN = SYSTEM.ANT_GAINS(2);
    end
    if isempty(SYSTEM.RX_HEIGHT)
        SYSTEM.RX_HEIGHT = 1.5;
    end
    if isempty(SYSTEM.ANT_AZ)
        SYSTEM.ANT_AZ = 0;
    end
    if isempty(SYSTEM.ANT_TILT)
        SYSTEM.ANT_TILT = 0;
    end
    if isempty(SYSTEM.ANT_NAME)
        SYSTEM.ANT_NAME = 'OMNI';
    end
    if isempty(SYSTEM.TXLINE_NAME)
        SYSTEM.TXLINE_NAME = 'GENERIC';
    end
    if isempty(SYSTEM.TXLINE_LENGTH)
        SYSTEM.TXLINE_LENGTH = SYSTEM.TX_HEIGHT + 10;
    end
    if isempty(SYSTEM.TX_LOSSES)
        SYSTEM.TX_LOSSES = 1;
    end
end
end
end

```

13 REFERÊNCIAS

- [1] WHITE, J. F. **High Frequency Techniques: an introduction to RF and microwave engineering**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2004. 506 p.
- [2] MISRA, D. K. **Radio-frequency and Microwave Communication Circuits: analysis and design**. New Jersey: John Wiley & Sons, 2004. 614 p.
- [3] RAPPAPORT, T. S. **Wireless Communications Principles and Practice**. 2. ed. New Jersey: Prentice Hall, 2002. 641 p.
- [4] PARSONS, J. D. **The Mobile Radio Propagation Channel**. 2. ed. Liverpool: John Wiley & Sons, 2000. 418 p.
- [5] JANASWAMY, R. **Efficient parabolic equation solution of radiowave propagation in an inhomogeneous atmosphere and over irregular terrain**. Monterey: Naval Postgraduate School, 1994.
- [6] EDMINISTER, J. A. **Eletromagnetismo**. McGraw-Hill: São Paulo, 1980. 232 p.
- [7] PLONSEY, R.; COLLIN, R. E. **Principles and Applications of Electromagnetic Fields**. New York: McGraw-Hill, 1961. 554 p.
- [8] SADIKU, M. N. O. **Elementos de Eletromagnetismo**, Bookman. 687 p.
- [9] POZAR, D. M. **Microwave Engineering**. 4 ed, John Wiley & Sons, 2012. 736 p.
- [10] STUTZMAN, W. L.; THIELE, G. A. **Antenna Theory and Design**. John Wiley & Sons, 1981. 598 p.
- [11] COLLIN, R. E. **Foundations for Microwave Engineering**. 2ed. IEEE Press, Wiley-Interscience, 2001. 924 p.
- [12] HAYT, W. H.; BUCK, J. A. **Engineering Electromagnetics**, 8ed, McGraw-Hill 2012. 593 p.
- [13] POULARIKAS, A. D. **The Hilbert Transform: The Handbook of Formulas and Tables for Signal Processing**. Boca Raton: CRC Press LLC, 1999.
- [14] JORDAN, E. C.; BALMAIN, K. G. **Electromagnetic waves and Radiating Systems**. 2ed. New Jersey: Prentice Hall, 1968. 753 p.
- [15] BALANIS, C. A. **Advanced Engineering Electromagnetics**. 2ed. John Wiley & Sons, 2012. 1018 p.

- [16] **IEEE Standard 145-1983, IEEE Standard Definitions of Terms for Antennas.** Reprinted in IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. AP-31, no. 6, part II, pp. 1–29, 1983.
- [17] BALANIS, C. A. **Antenna Theory Analysis and Design.** 3ed. John Wiley & Sons, 2005. 1047.
- [18] POINCARÉ. H. **Théorie Mathématique de la Limière.** Georges Carré: Paris, 1892.
- [19] DESCHAMPS, G. A. **Part II-Geometrical representation of the polarization of a plane electromagnetic wave.** Proc. IRE, vol. 39, pp. 540–544 1951.
- [20] BOLINDER, E. F, **Geometric analysis of partially polarized electromagnetic waves,** IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. AP-15, no. 1, pp. 37-40, 1967.
- [21] DESCHAMPS, G. A; MAST. P. E. **Poincaré sphere representation of partially polarized fields.** IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. AP-21, no. 4, pp. 474-478, 1973.
- [22] KRAUS. J. D. **Electromagnetics,** Third Edition, New York: McGraw-Hill, 1984.
- [23] SINCLAIR, G. **The transmission and reception of elliptically polarized waves.** Proc. IRE, vol. 38, pp. 148-151, 1950.
- [24] STOKES, G. **On the composition resolution of streams of polarized light from different fources.** Trans. Camb. Phil. Soc, 9(3), pp. 399-416, 1852.
- [25] HOLMES, J. J.; BALANIS, C. A. **Refraction of a uniform plane wave incident on a plane boundary between two lossy media.** IEEE Trans. Antennas Propagat., vol. AP-26, no. 5, pp. 738-741, 1978.
- [26] RADCLIFF, R. D.; BALANIS, C. A. **Modified propagation constants for nonuniform plane wave transmission through conducting media.** IEEE Trans. Geoscience Remote Sensing, vol. GE-20, no. 3, pp. 408–411, 1982.
- [27] ADLER, R. B.; CHU, L. J.; FANO, R. M. **Electromagnetic energy transmission and radiation,** New York: John Wiley & Sons, Chapters 7 and 8, 1960.
- [28] BALANIS, C. A. **Antenna Theory: A Review.** Proc. IEEE, vol. 80, No. 1, pp. 7–23, 1992.
- [29] COLLIN, R. E. **Antennas and Radiowave Propagation,** New York: McGraw-Hill Book Co, 1985.

- [30] DOLUKHANOV, M. **Propagation of Radio Waves**. Moscow: URSS, 1995. 372 p.
- [31] International Telecommunication Union. **Propagation in non-ionized media**. Reports of the CCIR, vol. 5, Geneva, 1990.
- [32] HALL, M. P. M.; BARCLAY, L. W.; HEWITT, M. T. **Propagation of Radiowaves**. The Institution of Electrical Engineers, London, 1996.
- [33] SCHELLING, J.; BURROWS, C.; FERREL, E. Proc. *IRE*. vol. 21, pp. 426-463, 1933.
- [34] International Telecommunication Union. **Recommendation ITU-R P. 530-16: Propagation data and prediction methods required for the design of terrestrial line-of-sight systems**. Genebra, 2015. 55 p.
- [35] LEE, W. C.-Y. **Mobile Communications Engineering**. New York: McGraw Hill, 1983.
- [36] KELLER, J. B. **Geometrical theory of diffraction**. J. Opt. Soc. Am., 52, pp. 116–30, 1962.
- [37] KOUYOUMJIAN, R. G; PATHAK, P. H. **A uniform geometrical theory of diffraction for an edge in a perfectly conducting surface**. Proc. IEEE, 62(11), pp. 1448–61, 1974.
- [38] PATHAK, P. H. et al; **A uniform GTD analysis of the diffraction of electromagnetic waves by a smooth convex surface**. IEEE Trans., AP28, pp. 631-42, 1988.
- [39] HACKING, K.; **Propagation over rounded hills**. BBC Research Report RA-21, 1968.
- [40] MILLINGTON, G; HEWITT, R; IMMIRZI, F. S. **Double knife-edge diffraction in field-strength prediction**. IEE Monograph 507E, pp. 419–29, 1963.
- [41] VOGLER, L. E. **The attenuation of electromagnetic waves by multiple knife-edge diffraction**. NTIA Report 81–86. Available as PB82-139239, National Technical Information Service, SpringFeld VA, 1981.
- [42] FURUTSU, K. **On the theory of radiowave propagation over inhomogeneous earth**. J. Res. NBS, 67D, pp. 39–62, 1963.
- [43] BULLINGTON, K. **Radio Propagation at Frequencies Above 30 Megacycles**. Proc. Inst. Radio Eng., v. 35, n. 10, pp. 1122-1136, 1947.

- [44] EPSTEIN, J; PETERSON, D. W. **An Experimental Study of Wave Propagation at 850 Mc/s.** Proc. Inst. Radio Eng., vol. 41, n. 5, pp. 595-611, 1953.
- [45] **Atlas of radio wave propagation curves for frequencies between 30 and 10,000 Mc/s.** Radio Research Lab, Ministry of Postal Services, Tokyo, Japan, pp. 172–9, 1957.
- [46] DEYGOUT, J. **Multiple Knife-edge Diffraction of Microwaves.** IEEE Trans. Antennas Propaga., v. 14, n. 4, p. 480-489, 1966.
- [47] GIOVANELI, C. L. **An analysis of simplified solutions for multiple knife-edge diffraction.** IEEE Trans., AP32(3), pp. 297–301, 1984.
- [48] HACKING, K. **Approximate methods for calculating multiple-diffraction losses.** Electron. Lett., 2(5), 179–80, 1966.
- [49] CAUSEBROOK, J. H; DAVIES B. **Tropospheric radio wave propagation over irregular terrain: the computation of field strength for UHF broadcasting.** BBC Research Report 43, 1971.
- [50] POGORZELSKI, R. J. **A Note on Some Common Diffraction Link Loss Models.** Radio Science, pp. 1536-1540, 1983.
- [51] BIBB, D. A; DANG, J; YUN, Z; ISKANDER, M. F. **Computational Accuracy and Speed of Some Knife-Edge Diffraction Models.** Antennas and Propagation Society International Symposium (APSURSI), IEEE, pp. 705-706, 2014.
- [52] FONTÁN, F. P; ESPÍÑEIRA, P. M. **Modeling the Wireless Propagation Channel.** 1. ed. Vigo: John Wiley & Sons, 2008. 252 p.
- [53] EGLI, J. J. **Radio propagation above 40 Mc over irregular terrain.** Proc, *IRE*, 45 (10), pp. 1383-91, 1957.
- [54] EDWARDS, R.; DURKIN, J. **Computer prediction of service area for VHF mobile radio networks.** Proc. IEE, 116 (9), pp. 1493-500, 1969.
- [55] DADSON, C. E. **Radio network and radio link surveys derived by computer from a terrain data base.** NATO-AGARD Conference Publication CPP-269, 1979.
- [56] FRAZER, E. L.; TARGETT, D. J. **A comparison of models for the prediction of service area of cellular radio telephone sites.** Proc. ICAP'85 IEE Conference Publication (248), pp. 390-94, 1985.

- [57] KVICERA, M; PECHAC, P; VALTR, P; KORINEK, T; KVICERA, V; GRABNER, M; MARTELLUCI A. **Influence of Input Terrain Profile Resolution on Diffraction Modeling**. IEEE Antennas and Wireless Propagation Letters, v. 14, pp. 1318-21, 2015.
- [58] SEVGI, L. **Electromagnetic Modeling and Simulation**. IEEE Press, Wiley, 2014. 663 p.
- [59] JIN, J.-M. **The Finite Element Method in Electromagnetics**. New York: John Wiley Press, 2002.
- [60] HARRINGTON, R. F. **Field Computation by Moment Method**. New York: IEEE Press, 1993.
- [61] FOCK, V. A. **Electromagnetic Diffraction and Propagation Problems**. Oxford: Pergamon, 1965.
- [62] LEVY, M. F. **Parabolic equation methods for electromagnetic wave propagation**. London: IEE, 2000. 366 p.
- [63] COLLINS, M. D.; EVANS, R. B. **A Two-Way Parabolic Equation for Acoustic Backscattering in the Ocean**. The Journal of the Acoustical Society of America, 91 (3), pp. 1357–1368, 1992.
- [64] OZGUN, O. **Recursive Two-Way Parabolic Equation Approach for Modeling Terrain Effects in Tropospheric Propagation**. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 57 (9), pp. 2706–2714, 2009.
- [65] APAYDIN, G.; OZGUN, O.; KUZUOGLU, M.; SEVGI, L. **A Novel Two-Way Finite-Element Parabolic Equation Groundwave Propagation Tool: Tests With Canonical Structures and Calibration**. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 49 (8), pp. 2887–2899, 2011.
- [66] YEE, K. S. **Numerical Solution of Initial Boundary Value Problems Involving Maxwell's Equations in Isotropic Media**. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 14, pp. 302–307, 1966.
- [67] JOHNS, P. B.; BEURLE, R. L. **Numerical Solution of 2-dimensional Scattering Problems Using a Transmission Line Matrix**. Proceedings of the IEEE, 119 (9), pp. 1203–1208, 1971.
- [68] OZGUN, O.; APAYDIN, G.; KUZUOGLU, M.; SEVGI, L. **PETool: MATLAB-based one-way and two-way split-step parabolic equation tool for radiowave propagation over variable terrain**. Computer Physics Communications, 182, 10.1016/j.cpc., pp. 2638-2654, 2011.

- [69] JANASWAMY, R. **Path Loss Predictions in the Presence of Buildings on Flat Terrain: a 3-D Vector Parabolic Equation Approach**. IEEE Trans. Antennas Propagat., v. 51, n. 8, pp. 1716–1728, 2003.
- [70] LEVY, M. F.; ZAPOROZHETS, A. A. **Target Scattering Calculations with the Parabolic Equation Method**. J. Acoust. Soc. Am., v. 103(2), pp. 735-741, 1998.
- [71] ZELLEY, C. A.; CONSTANTINOU, C. C. **A Three-dimensional Parabolic Equation Applied to VHF/UHF Propagation over Irregular Terrain**. IEEE Trans. Antennas Propagat., v. 47, n. 10, pp. 1586–1596, 1999.
- [72] ZAPOROZHETS, A. A.; LEVY, M. F. **Bistatic RCS Calculations with the Vector Parabolic Equation Method**. IEEE Trans. Antennas Propagat., v. 47, n. 11, pp. 1688–1696, 1999.
- [73] AWADALLAH, R. S. *et al.* **Effects of Lateral Terrain Variations on Tropospheric Radar Propagation**. IEEE Trans. Antennas Propagat., v. 53, n.1, pp. 420-434, 2005.
- [74] HUIBIN, H. *et al.* **Research on Mobile Communication Radio Propagation Characteristic Based on 3DPE**. IEEE Microwave Conference Proceedings, v.1, 2005.
- [75] MALLAHZADEH, A. R.; SOLEIMANI, M. **RCS Computation of Airplane Using Parabolic Equation**. Progress In Electromagnetics Research: PIER, v. 57, pp. 265–276, 2006.
- [76] DOCKERY, G. D. *et al.* **An Overview of Recent Advances for the TEMPER Radar Propagation Model**. IEEE Radar Conference., pp. 896-905, 2007.
- [77] AWADALLAH, R. S.; BROWN, G. S. **Low-Grazing Angle Scattering from Rough Surfaces in a Duct Formed by a Linear-Square Refractive Index Profile**. IEEE Trans. Antennas Propagat., v. 48, n. 9, pp. 1461–1474, 2000.
- [78] AWADALLAH, R. S.; LAMAR, M. T.; KUTLER, J. R. **An Accelerated Boundary Integral Equation Scheme for Propagation over the Ocean Surface**. Radio Sci., v. 37, n. 5, pp. 8.1–8.16, 2002.
- [79] SADIKU, M. N. O. **Numerical Techniques in Electromagnetics**. 2ed, New York: CRC Press, 2001.
- [80] LEONTOVICH, M. A.; FOCK, V. A. **Solution of Propagation of Electromagnetic Waves Along the Earth's Surface by the Method of Parabolic Equations**. J. Phys. USSR, v. 10, pp. 13–23, 1946.

- [81] FOCK, V. A. **Electromagnetic Diffraction and Propagation Problems**. 1ed, New York: Pergamon, 1965.
- [82] HARDIN, R. H.; TAPPERT, F. D. **Application of the Split-step Fourier Method to the Numerical Solution of Nonlinear and Variable Coefficient Wave Equations**. SIAM Rev., v. 15, pp. 423, 1973.
- [83] KUTTLER, J. R.; DOCKERY, G. D. **Theoretical Description of the Parabolic Approximation/Fourier Split-step Method of Representing Electromagnetic Propagation in the Troposphere**. Radio Sci., v. 26, pp. 381-393, 1991.
- [84] DOCKERY, G. D.; KUTTLER, J. R. **An Improved Impedance Boundary Algorithm for Fourier Split-step Solutions of the Parabolic Wave Equation**. IEEE Trans. Antennas Propagat., v. 44, n. 12, pp. 1592–1599, 1996.
- [85] MALYUZHINETS, G. D. **Progress in Understanding Diffraction Phenomena**. Sov. Phys. Usp., v. 69, pp. 321–334, 1959.
- [86] POPOV, A. V. **Solution of the Parabolic Equation of Diffraction Theory by a Finite-difference Method**. USSR Comp. Math. and Math. Phys., v. 8, n. 5, pp. 282–288, 1968.
- [87] SEVGI, L.; AKLEMAN, F.; FELSEN, L. B. **Groundwave Propagation Modeling: Problem-matched Analytic Formulations and Direct Numerical Techniques**. IEEE Antennas Propagat. Mag., v. 44, n. 1, pp. 55–75, 2002.
- [88] NEIVERE, M.; CADILHAC, M.; PETIT, R. **Applications of Conformal Mappings to the Diffraction of Electromagnetic Waves by a Grating**. IEEE Trans. Antennas Propagat., v. AP-21, n. 1, pp. 37-46, 1973.
- [89] ZAPOROZHETS, A. A. **Application of Vector Parabolic Equation Method to Urban Radiowave Propagation Problems**. Proc. Inst. Elect. Eng. Microw. Antennas Propagat., v. 146, n. 4, pp. 253-256, 1999.
- [90] BARRIOS, A. E. **Parabolic Equation Modeling in Horizontally Inhomogeneous Environments**. IEEE Trans. Antennas Propagat., v. 40, n. 7, pp. 791-797, 1992.
- [91] DOCKERY, G. D. **Modeling Electromagnetic Wave Propagation in the Troposphere Using the Parabolic Equation**. IEEE Trans. Antennas Propagat., v. 36, n. 10, pp. 1464-1470, 1988.

- [92] SILVA, M. A. N. **Aplicação de Modelos Computacionalmente Intensivos na Previsão das Perdas de Propagação Devidas a Terrenos Irregulares na Faixa de VHF**. Dissertação de Mestrado, CETUC PUC-Rio, Rio de Janeiro, RJ, 2005.
- [93] SILVA, M. A. N.; COSTA, E.; LINIGER, M. **Application of Computationally-Intensive Propagation Models to the Prediction of Path Losses Due to Mountainous Terrain in the VHF Frequency Band**. In: Commission meeting on climatic parameters and diffraction effects on radio wave propagation prediction, ClimDiff2005, Cleveland, Diff.23, 2005.
- [94] SILVA, M. A. N.; COSTA, E.; LINIGER, M. **Digital Elevation Data And Their Use For Improved Broadcast Coverage And Frequency Utilization**. In: First european conference on antennas and propagation, EuCAP 2006, Nice, 349467MS, 2006.
- [95] BAMBERGER, A.; ENGQUIST, B.; HALPERN, L.; JOLY, P. **Parabolic wave equation approximations in heterogeneous media**. SIAM J. Appl. Math., vol. 48, pp. 99-128, 1988.
- [96] BAMBERGER, A.; ENGQUIST, B.; HALPERN, L.; JOLY, P. **Higher order paraxial wave equation approximations in heterogeneous media**. SIAM J. Appl. Math., vol. 48, pp. 129-154, 1988.
- [97] CLAERBOUT, J. F. **Fundamentals of Geophysical Data Processing with Application to Petroleum Prospect**. New York: McGraw-Hill, 1976.
- [98] ZHANG, P.; BAI, L.; WU, Z.; GUO L. **Applying the Parabolic Equation to Tropospheric Groundwave Propagation**. IEEE Antennas & Propagation Magazine, pp. 31–44, 2016.
- [99] BARRIOS, A. E. **A Terrain Parabolic Equation Model for Propagation in the Troposphere**. IEEE Trans. Antennas Propagat., v. 42, n. 1, pp. 90-98, 1994.
- [100] SIRKOVA, I.; FIGUEROA, H. E. H. **Local Transparent Boundary Condition Applied to the Modeling of Tropospheric Ducting Propagation**. Microwave and Optical Technology Letters, v. 21, n. 5, pp. 343-346, 1999.
- [101] ARSHAD, K.; KATSRIKU, F.; LASEBAE, A. **Finite Element based Beam Propagation Method for 3D Wave Propagation in Troposphere**. In: The 8th international conference on advanced communication technology , ICACT 2006, Phoenix Park, 10.1109/ICACT.2006.206410, 2006.

- [102] BERENGER, J. **A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves**. J. Comp. Phys., v. 114, n. 2, pp. 185–200, 1994.
- [103] PEKERIS, C. L. **Accuracy of the earth-flattening approximation in the theory of microwave propagation**. Phys. Rev., vol. 70, pp. 518-522, 1946.
- [104] HENRICI, P. **Applied and Computational Complex Analysis**. Wiley-Interscience, 1977.
- [105] PAPADAKIS, J. S. **Exact nonreflecting boundary conditions for parabolic type approximations in underwater acoustics**. J/ Comput. Acoust. vol. 2, pp 83-98, 1994.
- [106] BASAKOV, V.A.; POPOV, A. V. **Implementation of transparent boudaries for numerical solutions of thhe Schodinger Equation**. Wave Motion, vol. 14, pp. 123-128, 1991.
- [107] MARCUS, S. H. **A generalized impedance method for application of the parabolic approximation to underwater acoustics**. J. Acoust. Soc. Am, vol. 90, pp. 391-398, 1991
- [108] MARCUS, S. H. **A hybrid (finite difference-surface Green's function) method for computing transmission losses in an inhomogeneous atmosphere over irregular terrain**. IEEE Trans. Antennas Propagat. vol. 40, pp. 1451-1458, 1992.
- [109] LEONTOVICH, M. A. **Studies into Radio Propagation**, vol. 2, USSR Academy Press, pp. 5-12, 1948.
- [110] LEE, D.; MCDANIEL, S. T. **Ocean acoustics propagation by finite difference methods**. Comput. Math. Applic., vol. 14, pp. 305-423, 1987.
- [111] FELSEN, L. B.; MARCUVITZ, N. **Radiation and Scattering of Waves**. New Jersey: Prentice-Hall, 1973, Classic reissue IEEE Press, 1994.
- [112] DUDLEY, D. G. **Mathematical Foundations for Electromagnetic Theory**. New York: IEEE Press, 1994.
- [113] COLLIN, R. E. **Field Theory of Guided Waves**, New York: McGraw-Hill, 1960.
- [114] FELSEN, L. B.; KAMEL, A. H. **Hybrid Ray-Mode Formulation of Parallel Plate Waveguide Green's Functions**. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 29 (4), pp. 637–649, 1981.
- [115] FELSEN, L. B.; SEVGI, L. **Adiabatic and Intrinsic Modes for Wave Propagation in Guiding Environments with Longitudinal and Transverse**

- Variations: Formulation and Canonical Test.** IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 39 (8), pp. 1130–1136, 1991.
- [116] FELSEN, L. B.; SEVGI, L. **Adiabatic and Intrinsic Modes for Wave Propagation in Guiding Environments with Longitudinal and Transverse Variations: Continuously Refracting Media.** IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 39 (8), pp. 1137–1142, 1991.
- [117] FABIJONAS, B. R.; OLVER, F. W. J. **On the Reversion of an Asymptotic Expansion and the Zeros of the Airy Functions.** Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM REVIEW Vol. 41, No. 4, pp. 762–773, 1999.
- [118] SEVGI, L. **Complex Electromagnetic Problems and Numerical Simulation Approaches,** New York: IEEE & John Wiley Press, 2003.
- [119] RIZL, K. WAGEN, J. F.; GARDIOL, F. **Two-Dimensional Ray-Tracing Modeling for Propagation Prediction in Microcellular Environments.** IEEE Transactions on Vehicular Technology, 46 (2), pp. 508–518, 1997.
- [120] TARNG, J. H.; CHANG, W. R.; HSU, B. J. **Three-Dimensional Modeling of 900 MHz and 2.44 GHz Radio Propagation in Corridors,”** IEEE Transactions on Vehicular Technology, 46 (2), pp. 519–527, 2002.
- [121] LIANG, G.; BERTONI, H. L. **A New Approach to 3D Ray Tracing for Propagation Prediction in Cities.** IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 46 (6), pp. 853–863, 1998.
- [122] DURGIN, G.; PATWARI, N.; RAPPAPORT, T. S. **Improved 3D Ray Launching Method for Wireless Propagation Prediction.** Electronics Letters, 33 (16), pp. 1412–1413, 1997.
- [123] ERRICOLO, D.; USLENG, P. L. E. **Two-Dimensional Simulator for Propagation in Urban Environments.** IEEE Transactions on Vehicular Technology, 50 (4), pp. 1158–1168, 2001.
- [124] MILLINGTON, G.; ISTED, G. A. **Ground-wave propagation over an inhomogeneous smooth earth: part 2, experimental evidence and practical implementation.** Proc. IEE, vol. 97, Pt. III, pp. 209–221, 1950.
- [125] ECKERSLEY, T. L. Proc. IRE, vol. 18, 0. 1160, 1930.
- [126] MACLEAN, T. S. M.; WU, Z. **Radiowave Propagation over Ground.** London: Chapman & Hall, 1993.

- [127] WU, Z.; MACLEAN, T. S. M.; JAYASUNDERE, N.; CARTER, L. J.; WILLIAMSON, A. A. **Recovery effect in radiowave propagation**. Electronics Letters, vol. 26, pp 162-163, 1990.
- [128] AGÊNCIA NACIONAL DE TELECOMUNICAÇÕES: **Formulário de informações técnicas para instalações de televisão digital**. Disponível em: <http://www.anatel.gov.br/hotsites/Direito_Telecomunicacoes/TextoIntegral/ANE/prt/minicom_20090211_024.pdf>. Acesso em: 5 mai. 2017.
- [129] GOOGLE DEVELOPERS: **Google Elevation API**. Disponível em: <<http://developers.google.com/maps/documentation/elevation/>>. Acesso em: 13 mai. 2017.
- [130] VASCONCELOS, L. S.; **Comportamento de modelos de cálculo de difração sobre terrenos irregulares nas faixas de VHF e UHF**. Dissertação (Mestrado), Uberlândia, p. 170, 2017.
- [131] ALMEIDA, K. S.; SANTOS, R. T.; SILVA, E.; CARDOSO, C. C.; OLIVEIRA, I. M. L.; **UHF Signal Measurements and Prediction Using Propagation Models**. Microwave and Optoelectronics Conference (IMOC), SBMO/IEEE MTT-S International, 2015.
- [132] IDEAL ANTENAS: **Datasheet Antena Slot Pol. Circular/Elíptica**. Disponível em: <http://www.idealantenas.com.br/produtosport/digital/SLOT%20Polarização%20Circular_Eliptica.pdf>. Acesso em: 20 jun. 2017.
- [133] RFS World: **Datasheet Linha de Transmissão HCA158-50J**. Disponível em: <<http://81.3.15.2/WebSearchECat/datasheets/pdf/?q=HCA158-50J+>>. Acesso em: 20 jun. 2017.
- [134] OSTLIN, E.; SUZUKI, H.; ZEPERNICK, H.-J. **Evaluation of the Propagation Model Recommendation ITU-R P.1546 for Mobile Services in Rural Australia**. IEEE transactions on vehicular technology, vol. 57, no. 1, pp. 38–51, 2008.
- [135] GHASEMI, A; ABEDI, A; GHASEMI, F. **Propagation Engineering in Wireless Communications**. 2ed. Springer International Publishing, 2016. 452 p.
- [136] DA SILVA, M. A. N. **Análise dos Efeitos do Terreno Irregular na Propagação de Ondas Eletromagnéticas com Base na Equação**

Parabólica Tridimensional. 2010. 152 p. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Elétrica, PUC-RJ, Rio de Janeiro, 2010.

- [137] **AGÊNCIA NACIONAL DE TELECOMUNICAÇÕES. RESOLUÇÃO 284 de 7 de dezembro de 2001: REGULAMENTO TÉCNICO PARA A PRESTAÇÃO DOS SERVIÇOS DE RADIODIFUSÃO DE SONS E IMAGENS E DE RETRANSMISSÃO DE TELEVISÃO.** Brasília: Anatel, 2001.
- [138] **AGÊNCIA NACIONAL DE TELECOMUNICAÇÕES. RESOLUÇÃO 67 de 12 de novembro de 1998: REGULAMENTO TÉCNICO PARA EMISSORAS DE RADIODIFUSÃO SONORA EM FREQUÊNCIA MODULADA.** Brasília: Anatel, 1998.