

EDMILSON PAULO DE OLIVEIRA

**Estudo da Incerteza do Escoamento de Rios
através das Equações de Saint Venant**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2017**

EDMILSON PAULO DE OLIVEIRA

Estudo da Incerteza do Escoamento de Rios através das Equações de Saint Venant

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.

Linha de Pesquisa: Equações Diferenciais e Análise Numérica.

Orientadora: Profa. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice.

UBERLÂNDIA - MG
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

O48e
2017

Oliveira, Edmilson Paulo de, 1989-
Estudo da incerteza do escoamento de rios através das Equações de
Saint Venant / Edmilson Paulo de Oliveira. - 2017.
93 f. : il.

Orientadora: Rosana Sueli da Motta Jafelice.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Inclui bibliografia.

1. Matemática - Teses. 2. Equações diferenciais - Teses. 3. Sistemas
difusos - Teses. 4. Escoamento - Teses. I. Jafelice, Rosana Sueli da
Motta. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-
Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
 Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
 Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO: Edmilson Paulo de Oliveira.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11512MAT003.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Equações Diferenciais e Análise Numérica.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Estudo da Incerteza do Escoamento de Rios através das Equações de Saint Venant.

ORIENTADORA: Profa. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 20 de fevereiro de 2017, às 14h00min, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME

ASSINATURA

Profa. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Rosana Sueli da Motta Jafelice

Prof. Dr. Laecio Carvalho de Barros
Unicamp - Universidade Estadual de Campinas

Laecio Carvalho de Barros

Prof. Dr. Marcos Antônio da Câmara
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Marcos Antônio da Câmara

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha mãe Lúcia, ao meu pai Amilton (*in memoriam*) e a minha irmã Aline, por bastarem como família, me proporcionando a forma mais pura de amor.

Agradecimentos

Agradecer: mostrar ou manifestar gratidão; render graças; reconhecer. Tenho muito a agradecer...

Antes de tudo, agradeço à minha mãe, pelo amor incondicional, pelo exemplo de luta, garra, perseverança e por ser a pessoa mais forte que conheço.

Ao meu pai, esteja onde estiver (tenho certeza que no melhor lugar possível), pelo dom da vida e pelo exemplo de bondade.

À minha irmã, por ser, apesar de tudo, uma exímia amiga nos momentos mais difíceis.

Aos meus grandes amigos, pelo suporte inquestionável diante de todas as dificuldades. Em especial, a Ailana, pelo amor puro e verdadeiro e por, muitas vezes, acreditar mais em mim do que eu mesmo.

Ao querido Diti, por se tornar um verdadeiro amigo e não somente um colega de apartamento.

Aos colegas do mestrado, que se revelaram amigos, por toda a ajuda quando me senti “um estranho no ninho”. Em especial a Angélica e Magna, pela presença e companhia diárias e por todas as risadas.

Aos amigos da Aero, pela acolhida, pelas farras e diversão, pelo reconhecimento das semelhanças diante de todas as diferenças. Muito obrigado de coração, Vini, Gu, JV, Naresse, Kano, Leo, Cice, Lara e Filipe, vocês são demais!

Aos professores da Escola Estadual Loren Rios Feres, pelo ensino básico que me deu suporte para trilhar meu caminho.

Aos professores do CEFET-MG/UnED Araxá, pelo crescimento acadêmico inigualável. Foram os três melhores anos da minha vida, em todos os aspectos.

Aos professores da Universidade Federal de Ouro Preto, pela graduação de altíssima qualidade e pela inspiração. Em especial, ao prof. Eder Marinho Martins, por ter sido o maior entusiasta da minha carreira na ciência mais bela, a Matemática.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática da FAMAT/UFU, pelos ensinamentos enriquecedores e conhecimento adquirido.

Aos professores Ana Maria Amarillo Bertone, Cesar Guilherme de Almeida, Marcos Antônio da Câmara e Alessandro Alves Santana, por toda a contribuição durante os seminários em Matemática Aplicada da FAMAT.

Ao professor José Eduardo Alamy Filho, da FECIV/UFU, pelo auxílio inestimável e prestatividade ímpar.

À minha orientadora, profa. Rosana Sueli da Motta Jafelice, por ter se tornado a melhor orientadora que eu poderia esperar. Mais ainda, por me mostrar, ainda que involuntariamente, que sonhos não podem ter limites e que tudo é possível com trabalho e dedicação.

A todos aqueles que acreditam, como eu, que um ensino público gratuito e de qualidade é possível e que depende apenas de amor, dedicação e gestão, por compartilhar sonhos comigo.

Ao meu Deus, força suprema que rege o Universo, por tudo que sou como pessoa.

À CAPES, pelo auxílio financeiro.

OLIVEIRA, E. P. *Estudo da Incerteza do Escoamento de Rios através das Equações de Saint Venant*. 2017. 93 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

As equações diferenciais estão presentes na modelagem de inúmeros fenômenos científicos, nos mais diversos ramos do conhecimento. Muitas destas equações dependem de parâmetros de difícil obtenção, que possuem incertezas ou imprecisões em sua determinação. Nesse contexto, o objetivo geral deste trabalho é estudar a incerteza existente no processo de escoamento de águas em canais abertos, mais especificamente de rios, utilizando as equações de Saint Venant. Essa incerteza é abordada sob dois aspectos: através de um parâmetro modelado pela Lógica Fuzzy e através da consideração da inclinação do leito de um rio como aleatória. Para isso, estudamos inicialmente conceitos relacionados às equações diferenciais e métodos analíticos e numéricos de resolução das mesmas. Para modelar matematicamente essa incerteza no fenômeno de escoamento, utilizamos a Teoria dos Conjuntos Fuzzy. Assim, estudamos conceitos básicos relacionados a esta teoria e o princípio da extensão de Zadeh, que estende conceitos matemáticos não-fuzzy em conceitos fuzzy. Construímos a solução fuzzy para as equações de Saint Venant a partir da solução analítica e da consideração da contribuição lateral de vazão ao fluxo como um número fuzzy triangular. Além disso, resolvemos numericamente as equações, para dadas condições de fronteira, tomando um dos parâmetros ora como determinístico, ora como variável de saída de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy, construído com o conhecimento de um especialista na área. Por fim, avaliamos a influência da inclinação do leito do rio sob o escoamento, considerando esta inclinação como variável ao longo do canal. Este trabalho apresenta, assim, uma abordagem do problema de escoamento de rios que permite encontrar diferentes soluções para diversas situações de forma rápida, dinâmica e com possível economia de recursos financeiros.

Palavras-chave: Equações de Saint Venant; Sistema Baseado em Regras Fuzzy; Extensão de Zadeh; Escoamento de Rios; Equações Diferenciais.

OLIVEIRA, E. P. *A Study of the Uncertainty in River Flows using the Saint Venant Equations.* 2017. 93 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

The differential equations are present in the modeling of countless scientific phenomena, in several fields of knowledge. Many of these equations depend on parameters of difficult obtainment, which display uncertainties or imprecisions in their determination. In this respect, the general purpose of this research is to study the uncertainty surrounding the process of an open-channel flow, specifically that of rivers, using the Saint Venant equations. This uncertainty is approached in two aspects: through a parameter modeled by the Fuzzy Logic and by considering the slope of a river channel as random. For this purpose, we have initially studied concepts related to the differential equations, as well as analytical and numerical methods for solving them. To model this uncertainty mathematically in the river flow phenomenon, we have used the Fuzzy Set Theory. Thus, we have studied basic concepts related to this theory and Zadeh's Extension Principle, which extends nonfuzzy mathematical concepts to fuzzy concepts. We have built the fuzzy solution for the Saint Venant Equations from the analytical solution and from due consideration about the contribution of lateral flow rate to the total river flow as a triangular fuzzy number. Additionally, we have solved the equations numerically, for specific boundary conditions, regarding one of the parameters as deterministic at one time and at another as an output variable of a Fuzzy Rule-Based System, built with expert knowledge. Finally, we have assessed the influence of the river channel slope on the flow, regarding this slope as a variable along the channel. This study presents, thus, an approach of the problem of river flow, which enables to find different solutions for several situations in a quick and dynamic way, with a possible saving in financial resources.

Keywords: Saint Venant Equations; Fuzzy Rule-Based System; Zadeh's Extension Principle; River Flows; Differential Equations.

Listas de Figuras

1	Seção transversal genérica de um rio e a área molhada.	2
1.1	Vibrações da ponte de Tacoma Narrows [6].	13
1.2	Desmoronamento da ponte de Tacoma Narrows [6].	14
1.3	Soluções analítica e numérica do PVI que modela o deslocamento de uma ponte pênsil.	19
1.4	Erro absoluto cometido pela aproximação através do método de Runge-Kutta.	19
1.5	Evolução da oscilação da ponte ao longo do tempo.	20
2.1	Gráfico das funções de pertinência de dois conjuntos fuzzy A e B genéricos.	23
2.2	Gráfico da função de pertinência do conjunto fuzzy $A \cup B$.	23
2.3	Gráfico da função de pertinência do conjunto $A \cap B$.	23
2.4	Gráfico da função de pertinência do conjunto fuzzy A^c .	23
2.5	Representação esquemática da obtenção da imagem de um conjunto fuzzy A por uma função f [26].	25
2.6	Funções de pertinência da variável “porosidade”.	26
2.7	Componentes de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy [9].	26
2.8	Aplicação genérica do Método de Inferência de Mamdani com composição max-min.	28
2.9	Representação de uma viga engastada.	30
2.10	Representação de uma viga biapoiada.	30
2.11	Representação de uma viga apoiada com balanço.	30
2.12	Representação de uma viga biengastada.	30
2.13	Representação de uma viga engastada e apoiada.	30
2.14	Deflexão de uma viga engastada-livre sob ação de carregamento uniforme.	32
2.15	Representação de uma viga de concreto com seção transversal variável.	33
2.16	Esquema representativo dos dois SBRF utilizados.	33
2.17	Funções de pertinência para a variável de entrada “posição”.	34
2.18	Funções de pertinência para a variável de saída “medida da base”.	34
2.19	Funções de pertinência para a variável de saída “medida da altura”.	35
2.20	Funções de pertinência para a variável de saída “momento de inércia”.	35
2.21	Solução numérica utilizando os SBRF.	36
3.1	Seção transversal retangular de um rio.	38
3.2	Representação do perfil longitudinal de um escoamento sobre uma superfície impermeável.	40
3.3	Curva $x(t)$.	44
3.4	Superfície $h(x, t)$ para $R = 0,001$ m/s.	44
3.5	Superfície $h(x, t)$ para $R = 0,005$ m/s.	44
3.6	Superfície $h(x, t)$ para $R = 0,01$ m/s.	44
3.7	Número fuzzy triangular genérico	44
3.8	Número fuzzy triangular $(0,001; 0,005; 0,01)$.	45

3.9	Gráficos da função $h(R)$ para diversos valores de t .	46
3.10	Graus de pertinência de h para $x = 200$ m ao longo do tempo t .	46
3.11	Graus de pertinência de h para $x = 400$ m ao longo do tempo t .	47
3.12	Graus de pertinência de h para $x = 800$ m ao longo do tempo t .	47
3.13	Comparativo entre as soluções fuzzy para várias seções.	47
3.14	Número fuzzy triangular $(0,005; 0,01; 0,02)$.	47
3.15	Número fuzzy triangular $(0,01; 0,02; 0,03)$.	47
3.16	Comparativo entre os três números fuzzy triangulares.	48
3.17	Comparativo entre as soluções fuzzy para diferentes números fuzzy R .	48
3.18	Gráficos da função $h(R)$ para diversos valores de x .	49
3.19	Graus de pertinência de h para $t = 30$ s ao longo do rio.	50
3.20	Graus de pertinência de h para $t = 60$ s ao longo do rio.	50
3.21	Graus de pertinência de h para $t = 120$ s ao longo do rio.	50
3.22	Comparativo entre as soluções fuzzy para três tempos distintos.	50
3.23	Comparativo entre as funções de pertinência de h ao longo das seções para diferentes números fuzzy R .	51
4.1	Seção transversal do rio estudado.	53
4.2	Evolução da altura da lâmina d'água para $R = 0,05$ m/s.	56
4.3	Evolução da altura da lâmina d'água em seções iniciais do escoamento para $R = 0,05$ m/s.	56
4.4	Evolução da velocidade do escoamento para $R = 0,05$ m/s.	57
4.5	Evolução da velocidade de escoamento nas seções iniciais para $R = 0,05$ m/s.	57
4.6	Evolução da altura da lâmina d'água para $R = 0,01$ m/s.	57
4.7	Evolução da altura da lâmina d'água para $R = 0,02$ m/s.	58
4.8	Evolução da altura da lâmina d'água para $R = 0,03$ m/s.	58
4.9	Evolução da altura da lâmina d'água para $R = 0,04$ m/s.	58
4.10	Evolução da altura da lâmina d'água nas seções iniciais para $R = 0,01$ m/s.	59
4.11	Evolução da velocidade de escoamento para $R = 0,01$ m/s.	59
4.12	Evolução da velocidade de escoamento para $R = 0,02$ m/s.	59
4.13	Evolução da velocidade de escoamento para $R = 0,03$ m/s.	60
4.14	Evolução da velocidade de escoamento para $R = 0,04$ m/s.	60
4.15	Evolução da velocidade de escoamento nas seções iniciais para $R = 0,04$ m/s.	60
4.16	Funções de pertinência da variável de entrada “porosidade”.	61
4.17	Funções de pertinência da variável de entrada “diferença de altura”.	62
4.18	Funções de pertinência da variável de saída “contribuição lateral”.	62
4.19	Evolução da altura da lâmina d'água para $p = 0,20$ e $N_L = 1,5$ m.	63
4.20	Evolução da velocidade de escoamento para $p = 0,20$ e $N_L = 1,5$ m.	63
4.21	Evolução da altura da lâmina d'água nas seções à montante para $p = 0,20$ e $N_L = 1,5$ m.	64
4.22	Evolução da altura da lâmina d'água para $p = 0,20$ e $N_L = 2,5$ m.	64
4.23	Evolução da altura da lâmina d'água nas seções à montante para $p = 0,20$ e $N_L = 2,5$ m.	65
4.24	Evolução da velocidade de escoamento para $p = 0,20$ e $N_L = 2,5$ m.	65
4.25	Evolução da altura da lâmina d'água para $p = 0,20$ e $N_L = 3,5$ m.	65
4.26	Evolução da velocidade de escoamento para $p = 0,20$ e $N_L = 3,5$ m.	66
4.27	Evolução da altura da lâmina d'água para $p = 0,20$ e $N_L = 4,5$ m.	66
4.28	Evolução da velocidade de escoamento para $p = 0,20$ e $N_L = 4,5$ m.	66
4.29	Evolução da altura da lâmina d'água para $p = 0,30$ e $N_L = 1,5$ m.	67
4.30	Evolução da velocidade de escoamento para $p = 0,30$ e $N_L = 1,5$ m.	67

4.31 Evolução da altura da lâmina d'água nas seções iniciais para $p = 0,30$ e $N_L = 1,5$ m.	68
4.32 Evolução da altura da lâmina d'água para $p = 0,30$ e $N_L = 2,5$ m.	68
4.33 Evolução da velocidade de escoamento para $p = 0,30$ e $N_L = 2,5$ m.	69
4.34 Evolução da altura da lâmina d'água para $p = 0,30$ e $N_L = 3,5$ m.	69
4.35 Evolução da velocidade de escoamento para $p = 0,30$ e $N_L = 3,5$ m.	69
4.36 Evolução da altura da lâmina d'água para $p = 0,30$ e $N_L = 4,5$ m.	70
4.37 Evolução da velocidade de escoamento para $p = 0,30$ e $N_L = 4,5$ m.	70
4.38 Evolução da contribuição lateral para $p = 0,20$ e $N_L = 1,5$ m.	71
4.39 Evolução da contribuição lateral para $p = 0,20$ e $N_L = 2,5$ m.	71
4.40 Evolução da contribuição lateral para $p = 0,20$ e $N_L = 3,5$ m.	71
4.41 Evolução da contribuição lateral para $p = 0,20$ e $N_L = 4,5$ m.	72
4.42 Evolução da contribuição lateral para $p = 0,30$ e $N_L = 1,5$ m.	72
4.43 Evolução da contribuição lateral para $p = 0,30$ e $N_L = 2,5$ m.	72
4.44 Evolução da contribuição lateral para $p = 0,30$ e $N_L = 3,5$ m.	73
4.45 Evolução da contribuição lateral para $p = 0,30$ e $N_L = 4,5$ m.	73
4.46 Valores da inclinação do leito S_0 por seção.	74
4.47 Evolução de altura da lâmina d'água para $p = 0,20$ e $N_L = 1,5$ m com inclinação do leito variável.	75
4.48 Evolução de velocidade de escoamento para $p = 0,20$ e $N_L = 1,5$ m com inclinação do leito variável.	75
4.49 Evolução da altura para $p = 0,20$ e $N_L = 1,5$ m com inclinação do leito variável para 200 iterações.	75
4.50 Evolução de velocidade para $p = 0,20$ e $N_L = 1,5$ m com inclinação do leito variável para 200 iterações de tempo.	75
4.51 Evolução da altura para $p = 0,20$ e $N_L = 2,5$ m com inclinação do leito variável.	76
4.52 Evolução da velocidade para $p = 0,20$ e $N_L = 2,5$ m com inclinação do leito variável.	76
4.53 Evolução da altura para $p = 0,20$ e $N_L = 3,5$ m com inclinação do leito variável.	76
4.54 Evolução da velocidade para $p = 0,20$ e $N_L = 3,5$ m com inclinação do leito variável.	76
4.55 Evolução da altura para $p = 0,20$ e $N_L = 4,5$ m com inclinação do leito variável.	77
4.56 Evolução da velocidade para $p = 0,20$ e $N_L = 4,5$ m com inclinação do leito variável.	77
4.57 Evolução da altura para $p = 0,30$ e $N_L = 1,5$ m com inclinação do leito variável.	77
4.58 Evolução da velocidade para $p = 0,30$ e $N_L = 1,5$ m com inclinação do leito variável.	77
4.59 Evolução da altura para $p = 0,30$ e $N_L = 2,5$ m com inclinação do leito variável.	77
4.60 Evolução da velocidade para $p = 0,30$ e $N_L = 2,5$ m com inclinação do leito variável.	77
4.61 Evolução da altura para $p = 0,30$ e $N_L = 3,5$ m com inclinação do leito variável.	78
4.62 Evolução da velocidade para $p = 0,30$ e $N_L = 3,5$ m com inclinação do leito variável.	78
4.63 Evolução da altura para $p = 0,30$ e $N_L = 4,5$ m com inclinação do leito variável.	78
4.64 Evolução da velocidade para $p = 0,30$ e $N_L = 4,5$ m com inclinação do leito variável.	78
4.65 Evolução da contribuição lateral para $p = 0,20$ e $N_L = 1,5$ m para inclinação do leito variável.	79
4.66 Evolução da contribuição lateral para $p = 0,20$ e $N_L = 2,5$ m para inclinação do leito variável.	79

4.67 Evolução da contribuição lateral para $p = 0,20$ e $N_L = 3,5$ m para inclinação do leito variável.	79
4.68 Evolução da contribuição lateral para $p = 0,20$ e $N_L = 4,5$ m para inclinação do leito variável.	79
4.69 Evolução da contribuição lateral para $p = 0,30$ e $N_L = 1,5$ m para inclinação do leito variável.	79
4.70 Evolução da contribuição lateral para $p = 0,30$ e $N_L = 2,5$ m para inclinação do leito variável.	79
4.71 Evolução da contribuição lateral para $p = 0,30$ e $N_L = 3,5$ m para inclinação do leito variável.	80
4.72 Evolução da contribuição lateral para $p = 0,30$ e $N_L = 4,5$ m para inclinação do leito variável.	80

Lista de Tabelas

2.1	Termos linguísticos para a variável de entrada “posição”	33
2.2	Termos linguísticos para a variável de saída “medida da base”	33
2.3	Termos linguísticos para a variável de saída “medida da altura”	34
2.4	Base de regras para o primeiro SBRF.	34
2.5	Termos linguísticos para a variável de saída “momento de inércia”	35
2.6	Base de regras para o segundo SBRF.	36
4.1	Termos linguísticos para a variável de entrada “porosidade”	61
4.2	Termos linguísticos para a variável de entrada “diferença de altura”	61
4.3	Termos linguísticos da variável de saída “contribuição lateral”	62
4.4	Base de regras para o SBRF.	63

Listas de Símbolos

∂	Derivada parcial.
A	Área molhada.
t	Tempo de escoamento.
Q	Vazão.
x	Posição da seção transversal.
q	Contribuição lateral de vazão ao escoamento por unidade de comprimento.
g	Aceleração da gravidade.
h	Altura da lâmina d'água.
S_0	Inclinação do leito de um rio.
S_f	Perda de energia por atrito.
u	Velocidade de escoamento.
R	Contribuição lateral de vazão ao escoamento por unidade de área.
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais.
\mathbb{R}^n	Conjunto dos vetores de n coordenadas reais.
$C^1(\mathbb{R}^2)$	Conjunto das funções de duas variáveis reais com derivadas de 1ª ordem contínuas.
U	Conjunto universo.
χ_A	Função característica do conjunto A.
μ_F	Função de pertinência do conjunto fuzzy F.
$supp(F)$	Suporte do conjunto fuzzy F.
$[A]^\alpha$	α -nível do conjunto fuzzy A.
$[A]^0$	Nível zero do conjunto fuzzy A.
$\overline{supp(A)}$	Fecho do suporte do conjunto fuzzy A.
sup	Supremo de um conjunto.
max	Máximo de um conjunto.
min	Mínimo de um conjunto.
NA	Nível da superfície de água no escoamento.
Δx	Espaçamento da posição na malha.
Δt	Espaçamento do tempo na malha.

Sumário

Resumo	vi
Abstract	vii
Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	xii
Lista de Símbolos	xiii
Sumário	xiv
Introdução	1
1 Equações Diferenciais e Métodos de Resolução	4
1.1 Equações Diferenciais	4
1.1.1 Classificação quanto ao tipo	5
1.1.2 Classificação quanto à ordem	6
1.1.3 Classificação quanto à linearidade	6
1.2 O Método das Características	8
1.3 O Método das Diferenças Finitas	10
1.4 O Método de Runge-Kutta de 4 ^a ordem	12
1.4.1 Um exemplo de aplicação do Método de Runge-Kutta	13
2 Conjuntos Fuzzy	21
2.1 Conjunto Clássico e Conjunto Fuzzy	21
2.2 Operações com Subconjuntos Fuzzy	22
2.3 Os α -níveis	22
2.4 Princípio de Extensão de Zadeh	24
2.5 Sistema Baseado em Regras Fuzzy	25
2.5.1 Processador de Entrada - Fuzzificação	27
2.5.2 Base de Regras	27
2.5.3 Máquina de Inferência Fuzzy	27
2.5.4 Processador de Saída - Defuzzificação	28
2.6 Deflexão em uma Viga Engastada: uma Aplicação de SBRF	29
2.6.1 Apoios e classificação de vigas	29
2.6.2 Solução analítica	31
2.6.3 Cálculo da deflexão utilizando dois SBRF	32

3 Solução Analítica das Equações de Saint Venant	37
3.1 As Equações de Saint Venant	37
3.2 Solução Analítica das Equações de Saint Venant	39
3.3 A Extensão de Zadeh Aplicada à Solução das Equações de Saint Venant	44
3.3.1 Seção transversal fixa	45
3.3.2 Tempo fixo	48
4 Estudo do Escoamento de Rios através de um SBRF	52
4.1 Solução Numérica das Equações de Saint Venant	52
4.1.1 Discretização das equações e utilização do método numérico	53
4.1.2 Simulações	56
4.2 Solução Numérica das Equações de Saint Venant Utilizando um SBRF com S_0 Fixo	60
4.2.1 Valor de porosidade: $p = 0,20$	63
4.2.2 Valor de porosidade: $p = 0,30$	67
4.2.3 Evolução dos valores da contribuição lateral R	70
4.2.4 Discussão dos resultados	73
4.3 Solução Numérica das Equações de Saint Venant Utilizando um SBRF com S_0 Variável	74
4.3.1 Valor de porosidade: $p = 0,20$	74
4.3.2 Valor da porosidade: $p = 0,30$	76
4.3.3 Evolução dos valores da contribuição lateral R	78
4.3.4 Discussão dos resultados	80
5 Conclusões e Trabalhos Futuros	81
Referências Bibliográficas	83
Apêndice	86

Introdução

Inúmeros fenômenos presentes nas mais diversas áreas do conhecimento científico são modelados matematicamente por equações que apresentam derivadas das suas incógnitas, as chamadas equações diferenciais. Por este motivo, o estudo das equações diferenciais é fundamental para quase todo pesquisador que trabalha, de forma direta ou indireta, com modelagem matemática. Uma das áreas do conhecimento que faz uso recorrente das equações diferenciais é a engenharia civil. Desde o cálculo de estruturas até o estudo do solo, passando pela hidráulica de canais abertos, esse tipo de equação é muito comum no dia a dia de um pesquisador na área de engenharia civil.

No contexto da hidráulica de canais abertos, um assunto de bastante relevância é o estudo de escoamento de rios. Diversas são as razões que motivam esse estudo, tais como a previsão de cheias e secas, a prevenção de enchentes e o controle de erosões. Quando se quer estudar um escoamento, duas equações tradicionalmente conhecidas como Equações de Saint Venant são frequentemente utilizadas. Mujumdar (2001) apresentou estas equação na forma

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} - q = 0 \\ \frac{1}{A} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + g \frac{\partial h}{\partial x} - g(S_0 - S_f) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

ou ainda

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \\ \frac{1}{A} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_0 - S_f), \end{cases} \quad (2)$$

em que Q é a vazão em dada seção [m/s], A é a área chamada área molhada (área do canal onde ocorre o escoamento que está em contato com o fluido que escoa) [m^2], h é a altura ou espessura da lâmina d'água [m], x é a posição ao longo do eixo do canal [m], q é a contribuição lateral por unidade de comprimento [$m^3/s/m$], t é o tempo de escoamento [s], g é a aceleração da gravidade [m/s^2], S_0 é a inclinação do canal e S_f é a perda de energia por atrito, sendo ambos S_0 e S_f adimensionais. A Figura 1 apresenta uma seção transversal genérica e exibe a área molhada da seção. A primeira equação do sistema (2) é conhecida equação da continuidade ou de conservação da massa, enquanto a segunda é conhecida como equação de conservação do momento. As equações recebem esse nome em homenagem ao engenheiro francês Adhemar-Jean-Claude Barre de Saint Venant, que prestou diversas contribuições nas áreas de elasticidade e hidráulica.

As equações do sistema (2) não podem ser resolvidas simultaneamente de maneira analítica, exceto para casos muito simplificados. Suponhamos que a contribuição lateral seja devida a precipitação atmosférica que cai a uma determinada taxa. Se as forças de atrito e gravidade forem dominantes sobre as forças de inércia e pressão, a segunda equação se reduz a $S_0 = S_f$ (essa simplificação é detalhada no Capítulo 3). Henderson e Wooding (1964) apresentaram

solução para a forma simplificada das equações de Saint Venant no caso em que a contribuição lateral q é constante, com as seguintes condições de fronteira:

$$h(x = 0, t) = 0, \forall t; \quad h(x, t = 0) = 0, \forall x. \quad (3)$$

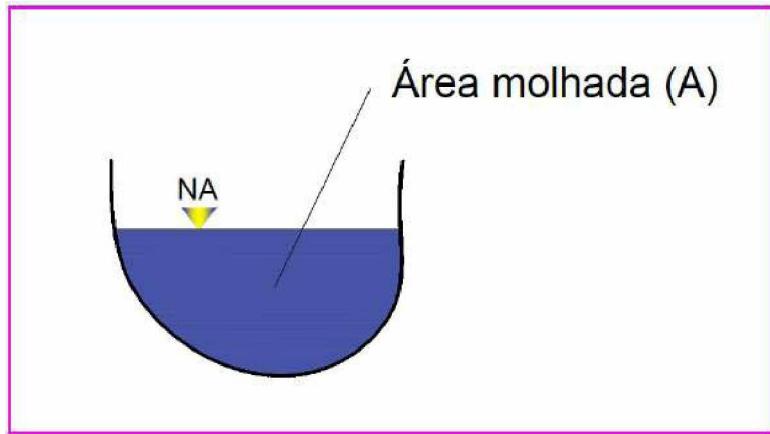


Figura 1: Seção transversal genérica de um rio e a área molhada.

Woolhiser e Liggett (1967) mostraram que um modelo conhecido como onda cinemática é uma boa aproximação para as equações de Saint Venant sob determinadas condições. Mais tarde, Morris e Woolhiser (1980) modificaram as condições de validade para essa aproximação.

Parlange et al (1981) generalizaram a solução proposta por Henderson e Wooding (1964) para o caso em que a contribuição lateral depende do tempo, mas é positiva. Se a contribuição lateral é negativa, ou seja, se o rio cede água para o meio externo, as soluções propostas por Henderson e Wooding (1964) e por Parlange et al (1981) não se aplicam. Posteriormente, Cundy e Tento (1985) e Giraldez e Woolhiser (1996) apresentaram soluções para a situação em que a contribuição se torna negativa após determinado tempo depois de a chuva cessar. Além disso, Sander et al (1990) desenvolveram uma solução para o caso em que a contribuição lateral é uma função arbitrária, não-negativa até certo tempo t^* e negativa após esse tempo t^* .

Do ponto de vista numérico, segundo Venâncio (2003), Massau (1889) foi o primeiro a tentar uma solução gráfica as equações de Saint Venant. Porém, esta proposta não teve aceitação devido ao tempo e esforço necessários para sua obtenção. Alguns anos mais tarde, Isaacson et al (1956) realizaram estudos de cheias do rio Ohio, nos EUA.

A partir daí, diversos pesquisadores utilizaram técnicas explícitas ou implícitas para resolver as equações, tais como Garrison et al (1969), Abbott e Ionescu (1966), Baltzer e Lai (1968), Fread (1973), entre outros. Venâncio (2003) utilizou um esquema de diferenças finitas conhecido como esquema de Preissmann para obter a solução das equações. Ainda, Steinstrasser (2005) resolveu as equações através um método chamado de Método Difusivo de Lax, também baseado em diferenças finitas.

Assim como em diversos outros problemas, estudar o escoamento de um rio envolve incertezas. Com o objetivo de propor uma abordagem mais flexível a modelos matemáticos, L. Zadeh desenvolveu a primeira publicação sobre conjuntos fuzzy [3]. Desde então, a teoria dos conjuntos fuzzy e suas aplicações apresentam uma evolução rápida e estão presentes nos mais diversos ramos do conhecimento científico. Diferentemente dos demais trabalhos realizados sobre as equações de Saint Venant, que utilizaram modelos e parâmetros determinísticos, neste trabalho a contribuição lateral é um parâmetro fuzzy.

Os objetivos específicos deste trabalho são aplicar o princípio da extensão de Zadeh para a solução analítica das equações de Saint Venant com a contribuição lateral sendo um número fuzzy triangular e resolver numericamente as equações de Saint Venant obtendo os valores da

contribuição lateral de vazão ao fluxo através de um SBRF. Desta forma, estudamos neste trabalho métodos numéricos e analíticos para resolução de equações diferenciais, com vista a aplicá-los, em conjunto com um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF), na solução das equações de Saint Venant. Em outras palavras, fazemos um estudo que aborda algumas incertezas existentes na modelagem do escoamento de rios. Elaboramos um SBRF, cujas variáveis de entrada são a porosidade do leito do rio e a diferença entre o nível do lençol freático e a altura da lâmina d'água e cuja variável de saída é a contribuição lateral de vazão ao fluxo por unidade de área. A partir de uma base de regras desenvolvida em conjunto com um especialista na área de Hidráulica e Mecânica dos Fluidos, utilizamos o SBRF para estudar o comportamento das variáveis de interesse em diversas situações. A utilização de um SBRF no problema de escoamento de rios possibilita tratar o problema com dinamismo e rapidez, na medida em que fornece uma solução correspondente a cada conjunto de valores para as variáveis de entrada. Por este motivo utilizamos um SBRF no problema principal deste trabalho.

Os exemplos apresentados no texto são todos relacionados à engenharia civil, bem como o problema principal.

A organização do trabalho é feita a seguir.

No Capítulo 1, apresentamos conceitos básicos sobre equações diferenciais e métodos de resolução analítica e numérica. Ao fim do capítulo, com o objetivo de exemplificar o método de Runge-Kutta, estudamos o problema do desmoronamento da ponte de Tacoma Narrows.

No Capítulo 2, introduzimos conceitos iniciais da teoria de conjuntos fuzzy, definimos os α -níveis, explicamos o princípio de extensão de Zadeh e apresentamos a estrutura de um SBRF. Também, como exemplo, construímos um SBRF aplicado à engenharia civil.

No Capítulo 3, apresentamos a primeira parte do problema central deste trabalho. Construímos a solução analítica das equações de Saint Venant, sob determinadas hipóteses, e aplicamos o princípio da extensão de Zadeh a esta solução.

No Capítulo 4, realizamos um estudo aprofundado sobre o comportamento das soluções das equações de Saint de Venant obtidas a partir de um SBRF e estudamos a influência da inclinação do leito do rio sobre essas soluções.

No Capítulo 5, apresentamos as conclusões, considerações finais e sugestões para trabalhos futuros.

Edmilson Paulo de Oliveira
Uberlândia-MG, 20 de fevereiro de 2017.

Capítulo 1

Equações Diferenciais e Métodos de Resolução

Diversos fenômenos da natureza, modelos físicos, biológicos e de engenharia são descritos por equações matemáticas nas quais aparecem derivadas das variáveis que descrevem os problemas em questão. Essas equações são chamadas equações diferenciais e têm ampla aplicação nos mais diversos ramos do conhecimento. Algumas vezes, é possível encontrar funções que satisfazem uma equação diferencial de interesse. Nesse caso, dizemos que a equação possui solução analítica. Em outros casos, não é possível encontrar tais funções. Quando isso ocorre, precisamos encontrar soluções aproximadas para as equações através dos chamados métodos numéricos. Neste capítulo, apresentamos conceitos e definições sobre equações diferenciais e alguns métodos para resolvê-las. Além disso, apresentamos, como exemplo da utilização do Método de Runge-Kutta, um breve estudo sobre o desmoronamento da ponte de Tacoma Narrows, nos EUA.

1.1 Equações Diferenciais

Definição 1.1. Uma equação que contém as derivadas de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada de equação diferencial [33].

Uma solução de uma equação diferencial é uma função cujas derivadas satisfazem a equação. Evidentemente que nem sempre existe solução analítica para uma equação diferencial e, quando existe, não é sempre que podemos garantir a unicidade dessa solução.

Exemplo 1.1. Seja a equação diferencial $\frac{dx}{dt} = \frac{3t}{x}$. A função $x = t\sqrt{3}$ é uma solução para a equação diferencial, visto que sua derivada torna a equação verdadeira.

Muitas vezes, ao trabalharmos com problemas físicos, estamos interessados em uma solução particular que satisfaça determinadas condições adicionais. Quando todas essas condições são dadas em um único ponto, estamos diante de um problema de valor inicial (PVI). Caso essas condições sejam dadas em mais de um ponto, temos um problema de valor de contorno (PVC).

Exemplo 1.2. O problema

$$\begin{cases} y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1) \\ y(0) = 2. \end{cases} \quad (1.1)$$

é um PVI, pois é uma equação diferencial acrescida de uma condição adicional em único ponto.

Exemplo 1.3.

$$\begin{cases} u''(x) + 2u'(x) + u(x) = x \\ u(0) = 0 \\ u(1) = -1. \end{cases} \quad (1.2)$$

é um PVC, pois se trata-se de uma equação diferencial acrescida de duas condições adicionais em pontos distintos.

Podemos classificar equações diferenciais quanto ao tipo, ordem e linearidade.

1.1.1 Classificação quanto ao tipo

Se uma equação diferencial apresenta apenas derivadas ordinárias de uma variável dependente, em relação a uma única variável independente, esta é dita equação diferencial ordinária (EDO) [33]. De maneira mais formal, definimos a seguir.

Definição 1.2. Uma equação diferencial ordinária (EDO) é uma equação da forma

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0, \quad (1.3)$$

em que y é uma função n vezes diferenciável, chamada de variável dependente, e $x \in I \subset \mathbb{R}$ é chamada de variável independente [33].

Exemplo 1.4. A equação diferencial

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

é uma EDO, uma vez que apresenta apenas derivadas ordinárias em relação à variável x .

Podemos definir também um sistema de EDO, que é um conjunto de equações diferenciais que apresentam apenas derivadas ordinárias de várias variáveis dependentes em relação a uma única variável independente. Matematicamente, temos:

Definição 1.3. Um sistema de equações diferenciais ordinárias é um sistema da forma

$$\begin{cases} F_1\left(x, y_1, y_2, \dots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{d^{m_{11}} y_1}{dx^{m_{11}}}, \frac{dy_2}{dx}, \dots, \frac{d^{m_{21}} y_2}{dx^{m_{21}}}, \dots, \frac{dy_n}{dx}, \dots, \frac{d^{m_{n1}} y_n}{dx^{m_{n1}}}\right) = 0 \\ F_2\left(x, y_1, y_2, \dots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{d^{m_{12}} y_1}{dx^{m_{12}}}, \frac{dy_2}{dx}, \dots, \frac{d^{m_{22}} y_2}{dx^{m_{22}}}, \dots, \frac{dy_n}{dx}, \dots, \frac{d^{m_{n2}} y_n}{dx^{m_{n2}}}\right) = 0 \\ \vdots \\ F_k\left(x, y_1, y_2, \dots, y_n, \frac{dy_1}{dx}, \dots, \frac{d^{m_{1k}} y_1}{dx^{m_{1k}}}, \frac{dy_2}{dx}, \dots, \frac{d^{m_{2k}} y_2}{dx^{m_{2k}}}, \dots, \frac{dy_n}{dx}, \dots, \frac{d^{m_{nk}} y_n}{dx^{m_{nk}}}\right) = 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

em que y_1, \dots, y_n são variáveis dependentes da variável independente x .

Por outro lado, uma equação que envolve derivadas parciais de uma variável dependente de duas ou mais variáveis independentes é dita equação diferencial parcial (EDP). De maneira formal:

Definição 1.4. Uma equação diferencial parcial (EDP) é uma equação da forma

$$F\left(x_1, \dots, x_n, y, \frac{\partial y}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}, \dots, \frac{\partial^m y}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}}\right) = 0, \quad (1.5)$$

em que $x = (x_1, \dots, x_n)$ pertence a algum domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função com derivadas parciais até a ordem m . As coordenadas x_1, \dots, x_n são chamadas variáveis independentes e y variável dependente.

Exemplo 1.5. A equação diferencial

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

é uma EDP, pois apresenta derivadas parciais da variável u em relação às variáveis x e y .

Definição 1.5. Um sistema de equações diferenciais parciais é um conjunto de equações da forma

$$F \left(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k, \frac{\partial y_1}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 y_1}{\partial x_i \partial x_j}, \dots, \frac{\partial^{m_1} y_1}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{m_1}}}, \dots, \frac{\partial y_k}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 y_k}{\partial x_i \partial x_j}, \dots, \frac{\partial^{m_k} y_k}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{m_k}}} \right) = 0, \quad (1.6)$$

em que y_1, \dots, y_k são variáveis dependentes das variáveis independentes x_1, \dots, x_n .

1.1.2 Classificação quanto à ordem

A ordem de uma equação diferencial é, por definição, igual à ordem da derivada de mais alta ordem presente na equação.

Exemplo 1.6. A EDO

$$4x \frac{dy}{dx} + y = x$$

é de primeira ordem, uma vez que a derivada de maior ordem que aparece na equação é uma derivada primeira.

Exemplo 1.7. A EDO

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 5 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 - 4y = e^x$$

é de segunda ordem, pois a derivada de maior ordem que aparece é uma derivada segunda.

Exemplo 1.8. A EDP

$$a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

é de quarta ordem, pois a derivada de maior ordem que aparece é uma derivada quarta.

1.1.3 Classificação quanto à linearidade

Dizemos que uma EDO na forma (1.3) é linear se F for linear em relação a y e todas as suas derivadas. Analogamente, dizemos que uma EDP na forma (1.5) é linear se F for linear em relação a y e todas as suas derivadas parciais [5].

Exemplo 1.9. As EDO

- $x \frac{dy}{dx} + y = 0,$

- $y'' - 2y' + y = 0$ e

- $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} - x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + 5y = e^x$

são lineares, pois não apresentam y e suas derivadas em graus maiores do que um, tampouco produtos entre derivadas ou entre uma derivada e y .

Exemplo 1.10. A Equação do Transporte, dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

é uma EDP linear.

Exemplo 1.11. A EDO

$$yy'' - 2y' = x$$

não é linear, pois apresenta um produto entre y e y'' .

Observação 1.1. Existe uma classificação muito conhecida e de suma importância para EDP lineares de segunda ordem em duas variáveis [11]. Suponha uma EDP linear de segunda ordem da forma

$$a(x, t)u_{xx} + 2b(x, t)u_{xt} + c(x, t)u_{tt} + d(x, t)u_x + e(x, t)u_t + f(x, t)u = g(x, t). \quad (1.7)$$

Usualmente, a soma dos termos que contêm as derivadas de ordem superior, isto é, $a(x, t)u_{xx} + 2b(x, t)u_{xt} + c(x, t)u_{tt}$, é conhecida como parte principal da EDP. Vamos considerar a matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

em que $a = a(x, t)$, $b = b(x, t)$ e $c = c(x, t)$.

Podemos classificar a EDP (1.7) de acordo com os autovalores da matriz A . Uma vez que A é simétrica, seus dois autovalores são ambos reais e são as raízes da equação

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(c - \lambda) - b^2 = \lambda^2 - (a + c)\lambda - (b^2 - ac) = 0. \quad (1.9)$$

Em cada ponto (x, t) , os autovalores são definidos pelo sinal do discriminante $d(x, t) = b^2 - ac$. Assim, para cada ponto fixado (x, t) , temos que

- Se $b^2 - ac < 0$, as duas raízes da equação (1.9) possuem o mesmo sinal e a EDP é dita elíptica.
- Se $b^2 - ac = 0$, uma das raízes da equação (1.9) é nula e a EDP é dita parabólica.
- Se $b^2 - ac > 0$, as duas raízes da equação (1.9) possuem sinais opostos e a EDP é dita hiperbólica.

Assim, toda EDP na forma da equação (1.7) pode ser classificada em cada ponto (x, y) como elíptica, parabólica ou hiperbólica.

Exemplo 1.12. A equação $u_{xx} + u_{yy} = 0$, conhecida como Equação de Laplace, é elíptica, pois o discriminante é igual a $d(x, y) = 0^2 - 1 \cdot 1 = -1 < 0$ para todo (x, y) .

Exemplo 1.13. A equação $u_{xx} - u_y = 0$, conhecida como equação do calor, é parabólica, pois o discriminante é igual a $d(x, y) = 0^2 - 1 \cdot 0 = 0$ para todo (x, y) .

Exemplo 1.14. A equação $u_{xx} - u_{yy} = 0$, conhecida como equação da onda, é hiperbólica, pois o discriminante é igual a $d(x, y) = 0^2 - 1 \cdot (-1) = 1$ para todo (x, y) .

Exemplo 1.15. A equação $yu_{xx} + u_{yy}$ é elíptica, parabólica ou hiperbólica, de acordo com o valor de y . De fato, temos que o discriminante é igual a $d(x, y) = 0^2 - y \cdot 1 = -y$. Assim,

- A equação é elíptica se $y > 0$.
- A equação é parabólica se $y = 0$.
- A equação é hiperbólica se $y < 0$.

1.2 O Método das Características

Uma infinidade de problemas de natureza prática são descritos pelas EDP. Nem sempre encontrar uma solução para uma EDP é trabalho simples. Na verdade, em diversos casos, as soluções analíticas não são conhecidas e é, nesses casos, necessário lançar mão de métodos numéricos. Em algumas situações, uma ferramenta conhecida como método das características permite transformar, de certa forma, uma EDP em uma EDO, facilitando, assim, o processo de busca pela solução da EDP original.

O método das características tem como ideia básica obter curvas ao longo das quais a EDP se reduz a uma EDO. Tais curvas são chamadas de curvas características da equação, daí o nome do método. O nome curvas características se deve ao fato de que elas independem das condições iniciais da EDP. Uma vez obtidas as curvas características, podemos integrar a EDO obtida ao longo das características, obtendo dessa forma a solução. Apresentamos o método a partir de um exemplo [5].

Consideremos a equação unidimensional de convecção homogênea para um fluido incompressível com velocidade variável, que corresponde à equação (1.10):

$$u_t(x, t) + c(x, t)u_x(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \quad c \in C^1(\mathbb{R}^2), \quad (1.10)$$

em que u é a densidade de massa do fluido, c é sua velocidade e $C^1(\mathbb{R}^2)$ representa o conjunto das funções de duas variáveis reais cujas derivadas parciais de primeira ordem são todas funções contínuas.

Seja $(x(t), t)$ uma curva arbitrária no plano xt . A derivada de uma função u qualquer ao longo desta curva é dada, através da Regra da Cadeia, por:

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_t(x(t), t) + x'(t)u_x(x(t), t). \quad (1.11)$$

Se u é uma função que satisfaz a equação (1.10), então devemos ter

$$\frac{du}{dt} = 0 \text{ ao longo das curvas para as quais } x'(t) = c(x, t),$$

ou seja,

$$u = k \text{ ao longo das curvas } x'(t) = c(x, t).$$

Assim, ao longo das curvas características dessa equação, a EDP $u_t + cu_x = 0$ foi reduzida à EDO $u' = 0$. Para obter a solução do problema, basta agora integrar a EDO ao longo dessas curvas características.

É importante salientar que as curvas características são definidas a partir de uma EDO não necessariamente linear. Assim, não podemos garantir que as características estejam definidas para todos os pontos do domínio do problema. Em geral, estão definidas apenas localmente. Vejamos, a seguir, um exemplo mais detalhado.

Exemplo 1.16. Consideremos o PVI a seguir [5].

$$u_t - xt u_x = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.12)$$

Seja $(x(t), t)$ uma curva em \mathbb{R}^2 . A derivada de uma função u qualquer, ao longo dessa curva, é dada por

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = u_t + x'(t)u_x \quad (1.13)$$

Se u satisfaz a EDP do PVI (1.13), então devemos ter

$$x'(t) = -xt, \quad (1.14)$$

que é, justamente, a EDO que define as curvas características da EDP. A equação (1.14) é uma EDO separável. Assim, podemos reescrevê-la da forma

$$\frac{dx}{x} = -tdt. \quad (1.15)$$

Resolvendo a equação (1.15), temos

$$x(t) = ce^{-\frac{t^2}{2}}, \quad (1.16)$$

em que c é a constante de integração. Para $t = 0$, temos $x(0) = c$. Dado um ponto (x_0, t_0) , a curva característica que passa por esse ponto é dada por

$$x_0 = ce^{-\frac{t_0^2}{2}} \quad (1.17)$$

Isolando c em (1.17), temos que

$$c = x_0 e^{\frac{t_0^2}{2}}. \quad (1.18)$$

Substituindo (1.18) em (1.17), obtemos

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{t^2-t_0^2}{2}}. \quad (1.19)$$

Como u é constante ao longo das curvas características, temos que

$$u(x_0, t_0) = u(c, 0) = u(x_0 e^{\frac{t_0^2}{2}}, 0) = f(x_0 e^{\frac{t_0^2}{2}}). \quad (1.20)$$

Dessa forma, a solução do PVI é

$$u(x, t) = f(x e^{\frac{t^2}{2}}). \quad (1.21)$$

No capítulo 3, utilizamos o método das características para resolver analiticamente as equações de Saint Venant.

1.3 O Método das Diferenças Finitas

O Método das Diferenças Finitas (MDF) é um método numérico para resolução de equações diferenciais. Tem como base as chamadas Fórmulas de Diferenças Finitas, que são expressões utilizadas para aproximar derivadas ordinárias ou parciais, a partir da expansão em série de Taylor das funções cujas derivadas deseja-se aproximar [7].

Observação 1.2. Ao trabalharmos com métodos numéricos, é necessário efetuar a chamada discretização do problema. Assim, o domínio do problema, que geralmente é um intervalo contínuo (ou um produto cartesiano de intervalos contínuos), é particionado e o problema é resolvido de forma discreta para os pontos que definem essa partição. É usual, no contexto da discretização, utilizar notações do tipo x_n, x_{n+1}, x_{n-1} . Suponha que o domínio do problema seja o intervalo $[a, b]$ e que esse domínio será particionado em subintervalos de comprimento h . Nessa situação, temos que $x_0 = a, x_1 = a + h, x_n = a + nh$ e assim por diante.

Existem três tipos de aproximações para as derivadas: diferença progressiva, diferença atrasada e diferença centrada.

Diferença Progressiva

Seja $y = f(x)$ uma função infinitamente diferenciável definida num intervalo aberto contendo um ponto x_0 . Temos que a expansão de $f(x)$ em série de Taylor em torno de x_0 é dada por

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x - x_0)^3}{3!} + \dots \quad (1.22)$$

Fazendo, na equação (1.22), $x_0 = x_n, x = x_{n+1}$ e $x_{n+1} - x_n = h$, temos:

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)h + \frac{f''(x_n)h^2}{2!} + \frac{f'''(x_n)h^3}{3!} + \dots \quad (1.23)$$

Truncando a soma no termo da derivada primeira, temos que, para $\xi_{x_{n+1}} \in (x_n, x_{n+1})$,

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)h + \frac{f''(\xi_{x_{n+1}})h^2}{2!}. \quad (1.24)$$

Explicitando $f'(x_n)$ na equação (1.24), temos

$$f'(x_n) = \frac{f(x_{n+1}) - f(x_n)}{h} - \frac{h}{2}f''(\xi_{x_{n+1}}). \quad (1.25)$$

O termo $\frac{h}{2}f''(\xi_{x_{n+1}})$ é o resto de truncamento e, sendo a potência de h igual a 1, dizemos que o método é de primeira ordem. De forma simplificada, se $y = f(x)$, temos:

$$y'_n \approx \frac{y_{n+1} - y_n}{h}. \quad (1.26)$$

Diferença Atrasada

Nesse tipo de aproximação, a expansão em série de Taylor é calculada para $x = x_{n-1}$. Assim, fazendo, na equação (1.22), $x_0 = x_n, x = x_{n-1}$ e $x_n - x_{n-1} = h$, temos:

$$f(x_{n-1}) = f(x_n) - f'(x_n)h + \frac{f''(x_n)h^2}{2!} - \frac{f'''(x_n)h^3}{3!} + \dots \quad (1.27)$$

Truncando a soma no termo da derivada primeira, temos que, para $\xi_{x_{n-1}} \in (x_{n-1}, x_n)$,

$$f(x_{n-1}) = f(x_n) - f'(x_n)h + \frac{f''(\xi_{x_{n-1}})h^2}{2!}. \quad (1.28)$$

Explicitando $f'(x_n)$ na equação (1.28), temos

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{h} + \frac{h}{2}f''(\xi_{x_{n-1}}). \quad (1.29)$$

O termo $\frac{h}{2}f''(\xi_{x_{n-1}})$ é o resto de truncamento e o método também é de primeira ordem. De forma simplificada, se $y = f(x)$, temos:

$$y'_n \approx \frac{y_n - y_{n-1}}{h}. \quad (1.30)$$

Diferença Centrada

A fórmula para a aproximação da derivada primeira pelo método da diferença centrada é obtida da mesma forma que nos casos de diferença atrasada e diferença progressiva.

Calculando a expansão em série de Taylor para o ponto $x = x_{n+1}$ e truncando a soma no termo da derivada segunda, temos:

$$f(x_{n+1}) = f(x_n) + f'(x_n)h + \frac{f''(x_n)h^2}{2!} + \frac{f'''(\xi_{x_{n+1}})h^3}{3!}, \quad (1.31)$$

com $\xi_{x_{n+1}} \in (x_n, x_{n+1})$.

Por outro lado, calculando a expansão para $x = x_{n-1}$, obtemos:

$$f(x_{n-1}) = f(x_n) - f'(x_n)h + \frac{f''(x_n)h^2}{2!} - \frac{f'''(\xi_{x_{n-1}})h^3}{3!}, \quad (1.32)$$

com $\xi_{x_{n-1}} \in (x_{n-1}, x_n)$.

Subtraindo a equação (1.32) da equação (1.31), temos:

$$f(x_{n+1}) - f(x_{n-1}) = 2f'(x_n)h + \frac{h^3}{6}[f'''(\xi_{x_{n+1}}) + f'''(\xi_{x_{n-1}})]. \quad (1.33)$$

Explicitando $f'(x_n)$,

$$f'(x_n) = \frac{f(x_{n+1} - f(x_{n-1})}{2h} - \frac{h^2}{12}[f'''(\xi_{x_{n+1}}) + f'''(\xi_{x_{n-1}})]. \quad (1.34)$$

O resto, nesse caso, é igual a $\frac{h^2}{12}[f'''(\xi_{x_{n+1}}) + f'''(\xi_{x_{n-1}})]$ e, visto que a potência de h é 2, dizemos que o método é de ordem 2. Escrevendo de maneira simplificada chegamos em:

$$y'_n \approx \frac{y_{n+1} - y_{n-1}}{2h}. \quad (1.35)$$

É possível, ainda, encontrar aproximações para outras derivadas, também a partir da expansão em série de Taylor. As expressões a seguir mostram as aproximações adequadas para a derivada segunda.

- Diferença progressiva

$$y''_n \approx 2 \left(\frac{y_{n+1} - y_n - hy'_n}{h^2} \right). \quad (1.36)$$

- Diferença atrasada

$$y_n'' \approx 2 \left(\frac{y_{n-1} - y_n + hy'_n}{h^2} \right). \quad (1.37)$$

- Diferença centrada

$$y_n'' \approx \frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2}. \quad (1.38)$$

Um exemplo de aplicação do Método das Diferenças Finitas é apresentado no Capítulo 2.

1.4 O Método de Runge-Kutta de 4^a ordem

Uma importante família de métodos para resolução numérica de equações diferenciais ordinárias é a família dos métodos iterativos de Runge-Kutta. Os métodos recebem este nome pois foram desenvolvidos por volta de 1900 pelos matemáticos alemães C. Runge e M. W. Kutta. São diversos os métodos dessa família, sendo nomeados de acordo com a ordem do erro global de truncamento. Assim, o método de Runge-Kutta de 1^a ordem apresenta, por exemplo, erro de truncamento global de ordem 1. Abordamos, neste trabalho, o método de Runge-Kutta de 4^a ordem.

Considere o PVI

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0, \end{cases} \quad (1.39)$$

em que $y = (y_1, \dots, y_n) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função de valores reais a valores no \mathbb{R}^n , $t, t_0 \in I \subset \mathbb{R}$, $f(t, y) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função determinada e y_0 é um vetor do \mathbb{R}^n .

O método de Runge-Kutta de 4^a ordem estabelece expressões para a obtenção da solução aproximada desse PVI, conforme a seguir.

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6}(K_j + 2L_j + 2M_j + N_j), \quad (1.40)$$

em que:

$$\begin{aligned} K_j &= hf(t_j, y_j); \\ L_j &= hf\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{K_j}{2}\right); \\ M_j &= hf\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{L_j}{2}\right); \\ N_j &= hf(t_j + h, y_j + M_j). \end{aligned}$$

Note que K, L, M, N são vetores do \mathbb{R}^n e que

$$f(t, y) = \begin{pmatrix} f_1(t, y) \\ \vdots \\ f_n(t, y) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad K_j = \begin{pmatrix} K_{1j} \\ \vdots \\ K_{nj} \end{pmatrix}.$$

Assim, a partir deste momento, quando escrevemos K_{ij} , estamos nos referindo à i-ésima coordenada do vetor K na j-ésima iteração. A notação é análoga para os vetores L, M e N .

O erro de truncamento desse método é de 4^a ordem, e por isso, recebe o nome Runge-Kutta de 4^a ordem.

1.4.1 Um exemplo de aplicação do Método de Runge-Kutta

Um dos mais conhecidos e lembrados incidentes envolvendo engenharia civil é o colapso da ponte de Tacoma Narrows, nos Estados Unidos. Tratava-se de uma ponte pênsil que, devido a fortes ventos e ausência de formato aerodinâmico, caiu em novembro de 1940.

Desde sua inauguração, a ponte atraía curiosos, já que era possível perceber oscilações verticais na estrutura. No dia 7 de novembro de 1940, durante uma forte tempestade, as oscilações aumentaram a níveis não vistos anteriormente. Rapidamente, as oscilações verticais tornaram-se oscilações rotacionais, causando abalos estruturais na ponte, que logo veio a desmoronar. A Figura 1.1 mostra o movimento de torção da ponte e a Figura 1.2 mostra o desmoronamento.



Figura 1.1: Vibrações da ponte de Tacoma Narrows [6].

Durante muitos anos, atribuiu-se a ruína da estrutura ao fenômeno da ressonância. A ressonância é um fenômeno físico que ocorre quando a frequência natural de um sistema vibratório é igual à frequência das forças externas que atuam sobre este sistema. Mas, em pesquisas mais recentes, os matemáticos Lazer e McKenna (1990) sustentaram que o que causou o desmoronamento foram efeitos não-lineares, e não ressonância. Para que a ressonância fosse a causa dos deslocamentos incomuns da estrutura, os ventos deveriam atuar de forma periódica e constante sobre a ponte, incidindo sempre com um ângulo específico sobre a mesma, o que parece improvável para uma força natural. Surgiu, então, um novo modelo que poderia explicar o desastre. Apresentamos um modelo similar ao proposto por Lazer e McKenna (1990) a fim de exemplificar a utilização do Método de Runge-Kutta de 4^a Ordem.

Consideremos uma ponte suspensa e um único cabo vertical dessa ponte. Suponhamos que esse cabo tenha princípio de funcionamento similar ao de uma mola, mas com uma diferença: diferentes características sob tensão e compressão. Quando tracionado, o cabo se comporta como uma mola com constante elástica b e, quando comprimido, com constante elástica a , de modo que $0 < a < b$. Representamos por $x(t)$ a deflexão vertical da parte da pista ligado ao cabo, em que t representa o tempo e $x = 0$ a posição de equilíbrio [32]. Definimos o sentido

positivo da deflexão para baixo. Não havendo amortecimento, uma equação que modela o problema em questão é

$$mx'' + F(x) = g(t), \quad (1.41)$$

em que $g(t)$ é a força aplicada, m é a massa do elemento da ponte ligado ao cabo e $F(x)$ é a função definida por partes a seguir:

$$F(x) = \begin{cases} bx, & \text{se } x \geq 0 \\ ax, & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

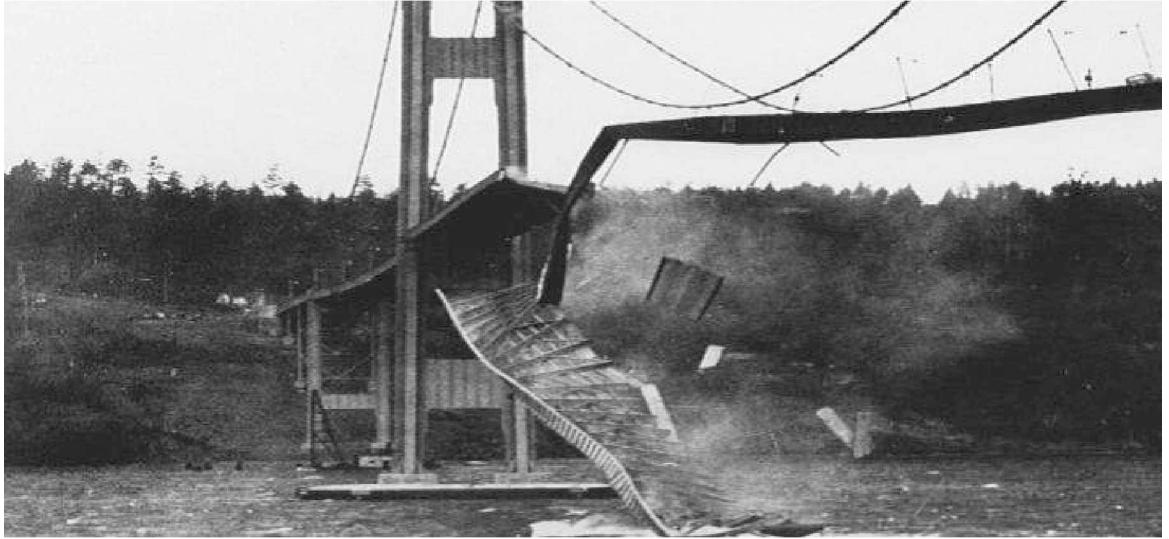


Figura 1.2: Desmoronamento da ponte de Tacoma Narrows [6].

Para que a ressonância fosse responsável pelo colapso da estrutura, a frequência natural do sistema composto pelo cabo e pela seção do tabuleiro a este ligada deveria ser igual à frequência da força $g(t)$ [34]. A frequência natural do sistema é a frequência com a qual o sistema vibra quando não há forças externas atuando. Neste caso, a equação (1.41) assume a forma

$$mx'' + F(x) = 0. \quad (1.42)$$

Vamos supor, por simplicidade, que $F(x) = kx$. Temos, então

$$mx'' + kx = 0. \quad (1.43)$$

Uma vez que a massa m não é nula, podemos escrever

$$x'' + \frac{k}{m}x = 0. \quad (1.44)$$

A razão $\frac{k}{m}$ é definida como ω_0^2 , ou seja,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (1.45)$$

Assim, para que houvesse ressonância, a força externa atuante sobre o sistema deveria ter frequência $\omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Por exemplo, poderíamos ter uma força externa da forma $g(t) = \sin(\omega_0 t)$. Para que a igualdade ocorra, é necessário que a constante elástica dos cabos

presos à ponte seja a mesma sob tração e compressão, o que não é verdade do ponto de vista do modelo apresentado por Lazer e McKenna (1990). No modelo que apresentamos, a constante elástica é igual a 4, quando o cabo está sujeito a tração, e é igual a 1, quando o cabo está sujeito a compressão.

Solução analítica

Vejamos uma situação particular para esse problema. Suponhamos $m = 1$, $b = 4$, $a = 1$, $g(t) = \operatorname{sen}(4t)$ e que o tabuleiro da ponte esteja inicialmente na posição de equilíbrio, a uma velocidade $v = 1$ m/s para baixo. Então, temos o PVI

$$\begin{cases} x'' + F(x) = \operatorname{sen}(4t); \\ x(0) = 0; \\ x'(0) = 1. \end{cases} \quad (1.46)$$

O PVI (1.46) possui solução analítica. Por se tratar de um PVI composto por uma EDO linear de segunda ordem, podemos resolvê-la usando o método dos coeficientes a determinar. Resolvemos o PVI no intervalo $[0, 3\pi]$. Vamos considerar inicialmente $x \geq 0$, uma vez que a velocidade é considerada positiva para baixo e o sentido considerado positivo para a deflexão também é para baixo. Assim, temos o seguinte PVI

$$\begin{cases} x'' + 4x = \operatorname{sen}(4t); \\ x(0) = 0; \\ x'(0) = 1. \end{cases} \quad (1.47)$$

A solução do PVI é da forma

$$x(t) = x_p(t) + x_h(t), \quad (1.48)$$

em que $x_p(t)$ é uma solução particular da EDO não homogênea e $x_h(t)$ é a solução geral da homogênea associada.

Vamos considerar primeiramente a EDO homogênea

$$x'' + 4x = 0. \quad (1.49)$$

A partir da equação característica $y^2 + 4 = 0$, obtemos a solução

$$x_h(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \operatorname{sen}(2t). \quad (1.50)$$

Para encontrar uma solução particular da EDO não homogênea, utilizamos o método dos coeficientes a determinar. Uma vez que a EDO não homogênea é

$$x'' + 4x = \operatorname{sen}(4t), \quad (1.51)$$

uma possível solução é da forma $x_p(t) = A\operatorname{sen}(4t) + B\cos(4t)$. Calculando as derivadas de $x_p(t)$ e substituindo na EDO (1.51), obtemos, através da simples igualdade das funções, que $A = -\frac{1}{12}$ e $B = 0$. Assim, uma solução particular da EDO é

$$x_p(t) = -\frac{1}{12}\operatorname{sen}(4t). \quad (1.52)$$

Portanto, a solução geral da EDO (1.51) é dada por

$$x(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \operatorname{sen}(2t) - \frac{1}{12}\operatorname{sen}(4t). \quad (1.53)$$

Aplicando as condições iniciais, obtemos

$$x(t) = \frac{2}{3} \operatorname{sen}(2t) - \frac{1}{12} \operatorname{sen}(4t). \quad (1.54)$$

Utilizando a identidade $\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)$ em (1.54), temos

$$x(t) = \frac{2}{3} \operatorname{sen}(2t) - \frac{1}{12} 2\operatorname{sen}(2t)\cos(2t) = \frac{2}{3} \operatorname{sen}(2t) - \frac{1}{6} \operatorname{sen}(2t)\cos(2t). \quad (1.55)$$

De forma simplificada, temos

$$x(t) = \operatorname{sen}(2t) \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{6} \cos(2t) \right]. \quad (1.56)$$

Note que o primeiro valor positivo de t que torna $x(t) = 0$ é $t = \frac{\pi}{2}$. Nesse instante, a ponte volta à posição de equilíbrio. É fácil ver que $x' \left(\frac{\pi}{2} \right) = -\frac{5}{3}$, ou seja, a velocidade é negativa, o que diz que o tabuleiro da ponte está se movimentando para cima. Nesse caso, o cabo é comprimido. Assim, a partir de $t = \frac{\pi}{2}$, o PVI a ser resolvido é

$$\begin{cases} x'' + x = \operatorname{sen}(4t); \\ x \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0; \\ x' \left(\frac{\pi}{2} \right) = -\frac{5}{3}. \end{cases} \quad (1.57)$$

Usando métodos idênticos aos utilizados para a solução do primeiro PVI, obtemos a solução de (1.57). A equação característica da EDO homogênea associada a este PVI é

$$y^2 + 1 = 0, \quad (1.58)$$

o que leva a uma solução geral

$$x_h(t) = c_3 \cos(t) + c_4 \operatorname{sen}(t). \quad (1.59)$$

Usando novamente o método dos coeficientes a determinar para encontrar uma solução particular para a EDO não homogênea do PVI (1.57), obtemos

$$x_p(t) = -\frac{1}{15} \operatorname{sen}(4t). \quad (1.60)$$

Assim, a solução geral da EDO do PVI (1.57) é

$$x(t) = c_3 \cos(t) + c_4 \operatorname{sen}(t) - \frac{1}{15} \operatorname{sen}(4t). \quad (1.61)$$

Aplicando as condições iniciais, obtemos $c_3 = \frac{7}{5}$ e $c_4 = 0$. Dessa forma, a solução do PVI (1.57) é

$$x(t) = \frac{7}{5} \cos(t) - \frac{1}{15} \operatorname{sen}(4t), \quad (1.62)$$

que reescrita assume a forma

$$x(t) = \cos(t) \left[\frac{7}{5} - \frac{4}{15} \operatorname{sen}(t) \cos(2t) \right]. \quad (1.63)$$

A partir de (1.63), notamos que o próximo valor positivo de t que torna $x(t) = 0$ é $t = \frac{3\pi}{2}$. Nesse instante, temos $x'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{17}{15}$, ou seja, o tabuleiro retorna à posição inicial e está se movimentando novamente para baixo. Dessa forma, o novo PVI a ser resolvido é

$$\begin{cases} x'' + 4x = \sin(4t); \\ x\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0; \\ x'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{17}{15}. \end{cases} \quad (1.64)$$

O processo de resolução é idêntico aos PVI anteriores. A solução da EDO homogênea é

$$x_h(t) = c_5 \cos(2t) + c_6 \sin(2t), \quad (1.65)$$

enquanto uma solução particular da não homogênea é

$$x_p(t) = -\frac{1}{12} \sin(4t). \quad (1.66)$$

Dessa forma, a solução geral da EDO do PVI (1.64) é

$$x(t) = c_5 \cos(2t) + c_6 \sin(2t) - \frac{1}{12} \sin(4t). \quad (1.67)$$

Aplicando as condições de fronteira, obtemos $c_5 = 0$ e $c_6 = -\frac{11}{15}$. Assim, a solução do PVI (1.64) é

$$x(t) = -\frac{11}{15} \sin(2t) - \frac{1}{12} \sin(4t). \quad (1.68)$$

Reescrevendo, obtemos

$$x(t) = \sin(2t) \left[-\frac{11}{15} - \frac{1}{6} \cos(2t) \right]. \quad (1.69)$$

De maneira inteiramente análoga, obtemos as soluções para o próximo intervalo, até $t = 3\pi$. Assim, a solução para o intervalo $[0, 3\pi]$ é dada por

$$x(t) = \begin{cases} \sin(2t) \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{6} \cos(2t) \right], & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2} \\ \cos(t) \left[\frac{7}{5} - \frac{4}{15} \sin(t) \cos(2t) \right], & \text{se } \frac{\pi}{2} < t \leq \frac{3\pi}{2} \\ \sin(2t) \left[-\frac{11}{15} - \frac{1}{6} \cos(2t) \right], & \text{se } \frac{3\pi}{2} < t \leq 2\pi \\ \sin(t) \left[-\frac{23}{15} - \frac{4}{15} \cos(t) \cos(2t) \right], & \text{se } 2\pi < t \leq 3\pi. \end{cases} \quad (1.70)$$

Solução numérica

Vamos agora resolver o PVI (1.46) numericamente. A EDO associada ao PVI é de segunda ordem, mas podemos, através de uma mudança de variável, transformá-la em um sistema de EDO de primeira ordem. Fazendo $w = x$ e $z = \frac{dx}{dt}$, temos

$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = z \\ \frac{dz}{dt} = \operatorname{sen}(4t) - F(w). \end{cases} \quad (1.71)$$

Para resolvemos o sistema (1.71), utilizamos o método de Runge-Kutta de quarta ordem. Assim, seja h o espaçamento desejado. Neste caso, temos

$$f(t, y) = \begin{pmatrix} f_1(t, y) \\ f_2(t, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ \operatorname{sen}(4t) - F(w) \end{pmatrix},$$

em que

$$y = \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}.$$

Apresentamos, a seguir, o cálculo dos coeficientes K , L , M e N para uma j -ésima iteração genérica.

$$K_j = hf(t_j, y_j), \quad (1.72)$$

$$L_j = hf\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{K_j}{2}\right), \quad (1.73)$$

$$M_j = hf\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{L_j}{2}\right), \quad (1.74)$$

$$N_j = hf(t_j + h, y_j + M_j), \quad (1.75)$$

sendo

$$y_j + \frac{K}{2} = \begin{pmatrix} w_j \\ z_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{K_{1j}}{2} \\ \frac{K_{2j}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_j + \frac{K_{1j}}{2} \\ z_j + \frac{K_{2j}}{2} \end{pmatrix}, \quad (1.76)$$

$$y_j + \frac{L}{2} = \begin{pmatrix} w_j \\ z_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{L_{1j}}{2} \\ \frac{L_{2j}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_j + \frac{L_{1j}}{2} \\ z_j + \frac{L_{2j}}{2} \end{pmatrix}, \quad (1.77)$$

$$y_j + M = \begin{pmatrix} w_j \\ z_j \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_{1j} \\ M_{2j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_j + M_{1j} \\ z_j + M_{2j} \end{pmatrix}. \quad (1.78)$$

Então,

$$f(t_j, y_j) = \begin{pmatrix} f_1(t_j, y_j) \\ f_2(t_j, y_j) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_j \\ \operatorname{sen}(4t_j) + F(w_j) \end{pmatrix}, \quad (1.79)$$

$$f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{K}{2}\right) = \begin{pmatrix} z_j + \frac{K_{2j}}{2} \\ \operatorname{sen}(4t_j + 2h) + F\left(w_j + \frac{K_{1j}}{2}\right) \end{pmatrix}, \quad (1.80)$$

$$f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{L}{2}\right) = \begin{pmatrix} z_j + \frac{L_{2j}}{2} \\ \sin(4t_j + 2h) + F(w_j + \frac{L_{1j}}{2}) \end{pmatrix}, \quad (1.81)$$

$$f(t_j + h, y_j + M) = \begin{pmatrix} z_j + M_{2j} \\ \sin(4t_j + 4h) + F(w_j + M_{1j}) \end{pmatrix}. \quad (1.82)$$

Calculando-se os vetores K , L , M e N em cada tempo t_j , é possível obter os valores de w e z no tempo t_{j+1} . Como $y = (w, z)$, temos

$$y_{j+1} = y_j + \frac{1}{6}(K_j + 2L_j + 2M_j + N_j). \quad (1.83)$$

Utilizando-se a equação (1.83) para todos os tempos da malha, obtemos todos os valores desejados para $y = (w, z)$. O problema pode ser resolvido computacionalmente utilizando o software MATLAB.

Podemos comparar as soluções analítica e numérica. A Figura 1.3 apresenta os gráficos das solução analítica e numérica. Para a solução numérica, é adotado um passo de $h = 1,5 \cdot 10^{-6}\pi$.

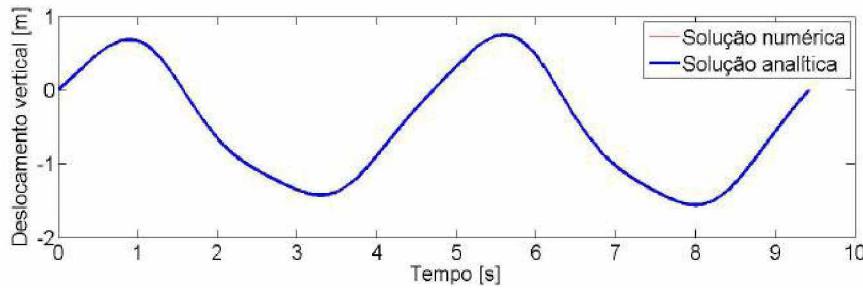


Figura 1.3: Soluções analítica e numérica do PVI que modela o deslocamento de uma ponte pênsil.

Como é possível notar, a diferença entre os resultados obtidos pelo método de Runge-Kutta e pelo método analítico é imperceptível nos gráficos. A Figura 1.4 mostra o erro absoluto cometido pela aproximação numérica, calculado como sendo $|x_{num} - x_{an}|$, em que x_{num} é o valor obtido pelo método numérico de Runge-Kutta e o x_{an} é o valor calculado analiticamente.

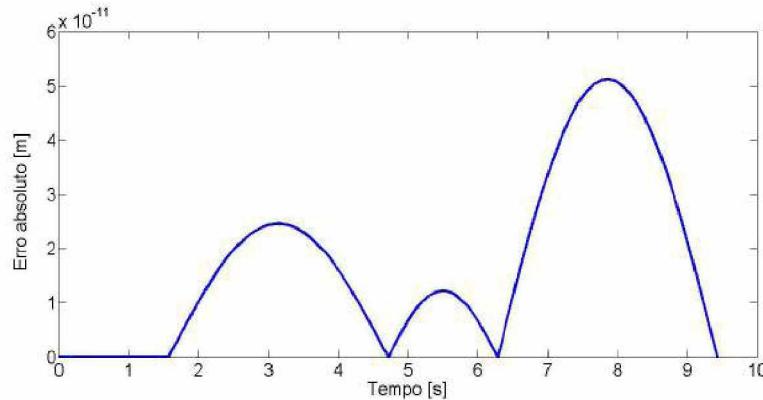


Figura 1.4: Erro absoluto cometido pela aproximação através do método de Runge-Kutta.

Uma outra análise interessante a ser feita é a respeito do comportamento da estrutura conforme o tempo passa. A Figura 1.5 mostra que, conforme o tempo passa, a amplitude da oscilação da ponte aumenta cada vez mais. O resultado foi obtido numericamente, também utilizando o Método de Runge-Kutta, apenas ampliando-se o intervalo de tempo considerado. A partir do observado no gráfico, surge uma possível explicação para o colapso da ponte: as amplitudes aumentaram gradativamente, de modo que atingiram níveis não suportados por sua estrutura.

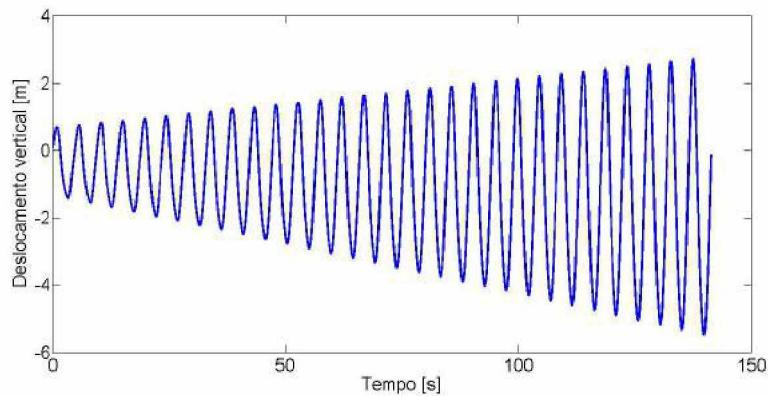


Figura 1.5: Evolução da oscilação da ponte ao longo do tempo.

No próximo capítulo, apresentamos uma introdução à Teoria dos Conjuntos Fuzzy e ao Princípio da Extensão de Zadeh, que são utilizados no estudo dos problemas principais deste trabalho. Além disso, analisamos um exemplo de aplicação dos Sistemas Baseados em Regras Fuzzy, que também são usados posteriormente.

Capítulo 2

Conjuntos Fuzzy

Em diversos campos do conhecimento, surgem problemas que não são muito bem representados através da teoria clássica de conjuntos, na qual um elemento pertence ou não a um conjunto. Em um estudo médico, por exemplo, pode não ser adequado classificar pacientes acometidos por certa doença apenas como “febris” ou “não febris”. Poderia, neste caso, ser mais interessante, do ponto de vista de modelagem, tratar os pacientes como tendo febre alta, média ou baixa, ou seja, atribuir graus para a febre dos paciente. Nesse sentido, para trabalhar com a incerteza presente em diversos problemas, tem se desenvolvido a Teoria dos Conjuntos Fuzzy.

A primeira publicação acerca dos conjuntos fuzzy é atribuída a L. Zadeh (1965). Desde então, muito se tem evoluído nesse campo e inúmeras são as aplicações dessa teoria. Uma área da matemática aplicada com grande número de aplicações dos conjuntos fuzzy é a biomatemática. Neste capítulo, apresentamos conceitos básicos sobre a teoria dos Conjuntos Fuzzy e ainda, como exemplo, o cálculo da deflexão de uma viga utilizando dois SBRF.

2.1 Conjunto Clássico e Conjunto Fuzzy

Na teoria clássica de conjuntos, um conjunto pode ser definido em termos de sua chamada função característica [3].

Definição 2.1. Seja U um conjunto e A um subconjunto de U . A função característica de A é dada por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}. \quad (2.1)$$

Dessa forma, temos que o domínio da função χ_A é o conjunto U e a imagem está contida no conjunto $\{0, 1\}$. Nesse contexto, $\chi_A(x) = 1$ indica que o elemento x está em A , ao passo que $\chi_A(x) = 0$ indica que o elemento x não é elemento de A . Assim, um conjunto A está completamente descrito pela sua função característica χ_A , na medida em que diz exatamente quais são os elementos de U que pertencem a A .

Por outro lado, em algumas situações, não conseguimos definir com precisão se um elemento pertence ou não a um dado conjunto. Considere, por exemplo, os habitantes de uma determinada cidade [3]. A cada pessoa desta cidade podemos atribuir um número real que corresponde a sua idade. Mas, se quisermos definir o conjunto dos jovens dessa cidade, teríamos dificuldades de definir binariamente se uma pessoa de 30 anos, por exemplo, pertence ou não ao conjunto de jovens. Seria mais adequado, nesse caso, atribuir graus de pertinência ao conjunto de jovens de acordo com a idade de cada indivíduo. Assim, um habitante com 25 anos teria um maior grau de pertinência ao conjunto dos jovens da cidade do que um habitante com 40 anos.

Definição 2.2. Seja U um conjunto. Um subconjunto (ou simplesmente conjunto) fuzzy F de U é caracterizado por uma função chamada função de pertinência dada por

$$\mu_F : U \longrightarrow [0, 1]. \quad (2.2)$$

Cada elemento x de U é associado a um número $\mu_F(x)$, com $0 \leq \mu_F(x) \leq 1$, chamado de grau de pertinência de x a F . O valor $\mu_F(x) = 1$ indica que o elemento x de U tem pertinência plena a F , ao passo que o valor $\mu_F(x) = 0$ indica que o elemento de x de U tem pertinência nula a F .

O subconjunto clássico de U dado por

$$\text{supp}(F) = \{x \in U : \mu_F(x) > 0\}$$

é chamado de suporte de F .

2.2 Operações com Subconjuntos Fuzzy

Sejam A e B conjuntos clássicos de U representados, respectivamente, por suas funções características χ_A e χ_B . Definimos então os conjuntos

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in U : x \in A \text{ ou } x \in B\}, \\ A \cap B &= \{x \in U : x \in A \text{ e } x \in B\}, \\ A^c &= \{x \in U : x \notin A\}, \end{aligned}$$

respectivamente chamados de conjunto “união entre A e B ”, conjunto “intersecção entre A e B ” e conjunto “complementar ao conjunto A ”.

As funções características de tais conjuntos são, respectivamente

$$\begin{aligned} \chi_{A \cup B}(x) &= \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}, \\ \chi_{A \cap B}(x) &= \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\}, \\ \chi_{A^c}(x) &= 1 - \chi_A(x), \quad \forall x \in U. \end{aligned}$$

Pensando nos conjuntos fuzzy caracterizados pelas funções de pertinência, podemos definir união, intersecção e complementar dos mesmos.

Definição 2.3. Sejam A e B conjuntos fuzzy. As funções de pertinência que caracterizam os conjuntos fuzzy união, intersecção e complementar são, respectivamente, dadas por

$$\begin{aligned} \mu_{A \cup B}(x) &= \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \\ \mu_{A \cap B}(x) &= \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \\ \mu_{A^c}(x) &= 1 - \mu_A(x), \quad \forall x \in U. \end{aligned}$$

A Figura 2.1 mostra o gráfico das funções de pertinência de dois conjuntos fuzzy A e B genéricos. As Figuras 2.2, 2.3 e 2.4 mostram, respectivamente, os gráficos das funções de pertinência dos conjuntos fuzzy $A \cup B$, $A \cap B$ e A^c .

2.3 Os α -níveis

Dado um subconjunto fuzzy A de U , podemos dizer que seus elementos, que também são elementos de U , possuem uma certa hierarquia, traduzida através de uma classificação por graus. Assim, um elemento x de U está em uma classe se seu grau de pertinência a A é maior que um determinado valor ou nível $\alpha \in [0, 1]$ que determina aquela classe. O conjunto clássico desses elementos é chamada de α -nível de A e é denotado por $[A]^\alpha$.

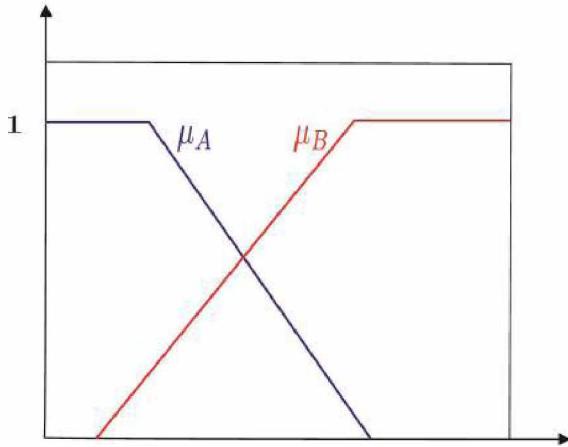


Figura 2.1: Gráfico das funções de pertinência de dois conjuntos fuzzy A e B genéricos.

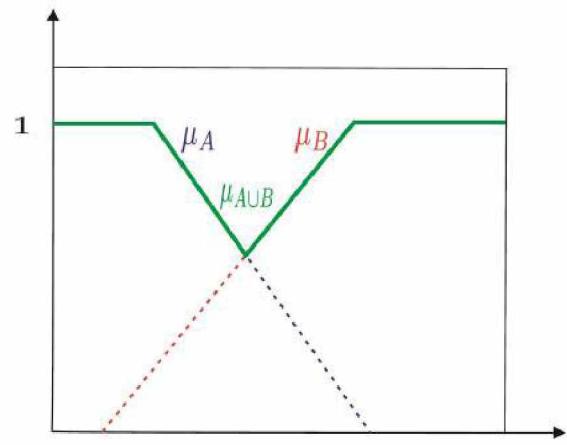


Figura 2.2: Gráfico da função de pertinência do conjunto fuzzy $A \cup B$.

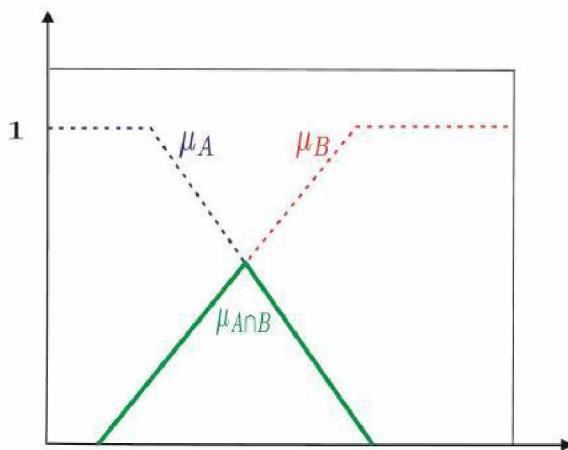


Figura 2.3: Gráfico da função de pertinência do conjunto $A \cap B$.

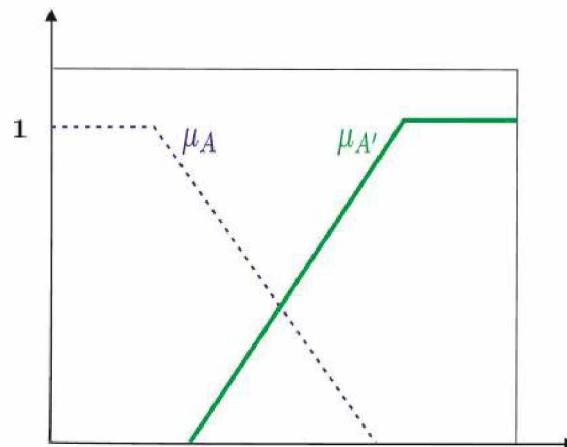


Figura 2.4: Gráfico da função de pertinência do conjunto fuzzy A^c .

Definição 2.4. Sejam A um subconjunto fuzzy de U e $\alpha \in [0, 1]$. O α -nível de A é o subconjunto clássico de U definido por

$$[A]^\alpha = \{x \in U : \mu_A(x) \geq \alpha\}, \text{ para } 0 < \alpha \leq 1.$$

O nível zero de um subconjunto fuzzy A é o menor subconjunto clássico fechado de U que contém o suporte de A . Em linguagem matemática, $[A]^0 = \overline{\text{supp}(A)}$.

Apresentamos a seguir um exemplo que pode ser encontrado em Barros e Bassanezi (2015).

Exemplo 2.1. Sejam $U = [0, 1]$ e A o subconjunto fuzzy de U cuja função de pertinência é dada por $\mu_A(x) = 4(x - x^2)$. Assim, se $\alpha \in [0, 1]$, o α -nível é o conjunto formado pelos valores x tais que

$$4(x - x^2) \geq \alpha. \quad (2.3)$$

Rearranjando a inequação (2.3), temos

$$x^2 - x \leq -\frac{\alpha}{4}. \quad (2.4)$$

Completando o quadrado, obtemos

$$x^2 - x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \leq -\frac{\alpha}{4}, \quad (2.5)$$

ou ainda

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1-\alpha}{4} \quad (2.6)$$

Extraindo raiz quadrada em ambos os membros da desigualdade (2.6), chegamos a

$$\left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{\sqrt{1-\alpha}}{2}. \quad (2.7)$$

Utilizando a propriedade de desigualdade modular [12], obtemos

$$\frac{\sqrt{1-\alpha}}{2} \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{\sqrt{1-\alpha}}{2}. \quad (2.8)$$

Reescrevendo,

$$\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-\alpha}) \leq x \leq \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-\alpha}) \quad (2.9)$$

Dessa forma,

$$[A]^\alpha = \left[\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-\alpha}), \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-\alpha})\right] \text{ para todo } \alpha \in [0, 1].$$

2.4 Princípio de Extensão de Zadeh

Em muitas situações, surge a necessidade de estender conceitos da teoria de conjuntos clássicos para a teoria dos conjuntos fuzzy. Lofti A. Zadeh propôs um método de extensão, conhecido como Princípio de Extensão, que é uma das bases para a extensão de conceitos não-fuzzy em conceitos fuzzy [3].

O Princípio da Extensão de Zadeh para uma função $f : X \rightarrow Z$ descreve como deve ser a imagem de um subconjunto fuzzy A de X por f .

Definição 2.5. Sejam $f : X \rightarrow Z$ uma função e A um subconjunto fuzzy de X . A extensão de Zadeh de f é a função \hat{f} que, aplicada a A , dá o subconjunto fuzzy $\hat{f}(A)$ de Z , com função de pertinência dada por

$$\mu_{\hat{f}(A)}(z) = \begin{cases} \sup_{f^{-1}(z)} \mu_A(x), & \text{se } f^{-1}(z) \neq \emptyset \\ 0, & \text{se } f^{-1}(z) = \emptyset \end{cases},$$

em que $f^{-1}(z) = \{x : f(x) = z\}$ denomina-se pré-imagem de z [3].

Se f for uma função bijetora, então

$$\{x : f(x) = z\} = \{f^{-1}(z)\},$$

em que f^{-1} é a função inversa de f .

Notamos que, se A é um subconjunto fuzzy de X , com função de pertinência μ_A , e se f é bijetora, então a função de pertinência de $\hat{f}(A)$ é dada por

$$\mu_{\hat{f}(A)}(z) = \sup_{\{x: f(x)=z\}} \mu_A(x) = \sup_{\{x \in f^{-1}(z)\}} \mu_A(x) = \mu_A(f^{-1}(z)).$$

A Figura 2.5 ilustra o funcionamento do Princípio de Extensão de Zadeh.

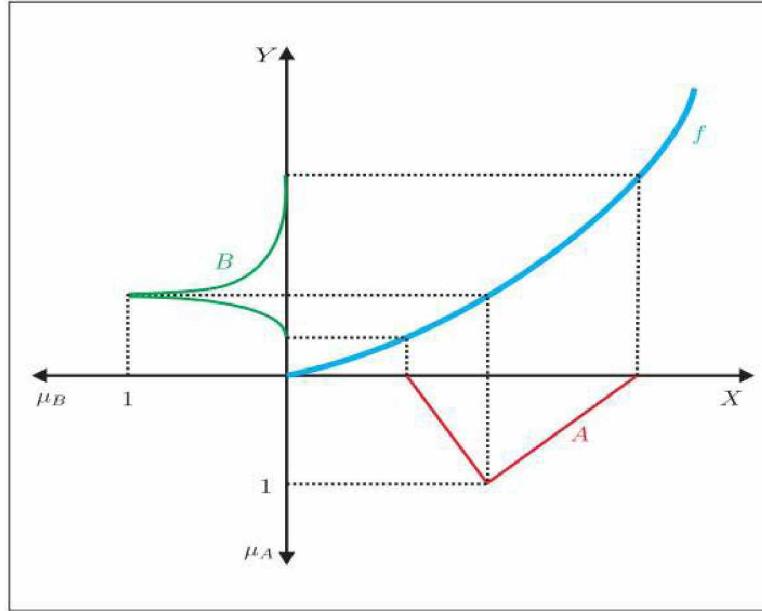


Figura 2.5: Representação esquemática da obtenção da imagem de um conjunto fuzzy A por uma função f [26].

O Teorema a seguir nos fornece um importante resultado que auxilia na obtenção da extensão de Zadeh de uma função contínua.

Teorema 2.1. Sejam X um espaço topológico, $f : X \rightarrow Z$ uma função contínua e A um subconjunto fuzzy de X , com α -níveis compactos e não vazios. Então, $\forall \alpha \in [0, 1]$ vale

$$[\hat{f}(A)]^\alpha = f([A]^\alpha).$$

O resultado acima nos diz que os α -níveis do conjunto fuzzy, obtidos pelo Princípio da Extensão de Zadeh, coincidem com as imagens dos α -níveis pela função f [3].

Na próxima seção, detalhamos a estrutura de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy, que é utilizado posteriormente no estudo da Equações de Saint Venant.

2.5 Sistema Baseado em Regras Fuzzy

No dia a dia, as ações humanas controlam diversos tipos de sistemas reais por meio de informações, sob algum aspecto, imprecisas. Um indivíduo recebe informações, que são interpretadas segundo seus parâmetros, e decide qual atitude deve tomar [3]. Um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF) segue esse preceito: trata-se de um sistema que utiliza a lógica fuzzy para produzir saídas a partir de entradas fuzzy. Antes de detalhar o funcionamento de um SBRF, precisamos definir o que são variáveis linguísticas. Uma variável linguística fuzzy é uma variável cujo valor é expresso qualitativamente por termos linguísticos e quantitativamente por funções de pertinência.

Exemplo 2.2. Suponha que estejamos interessados em estudar o escoamento de um rio em um meio poroso. A porosidade desse meio poderia ser tratada como uma variável linguística, expressa pelos termos linguísticos “pequena”, “média” e “grande”. Cada um dos termos linguísticos seria definido por uma função de pertinência. A Figura 2.6 apresenta uma possibilidade para as funções de pertinência da variável linguística “porosidade”.

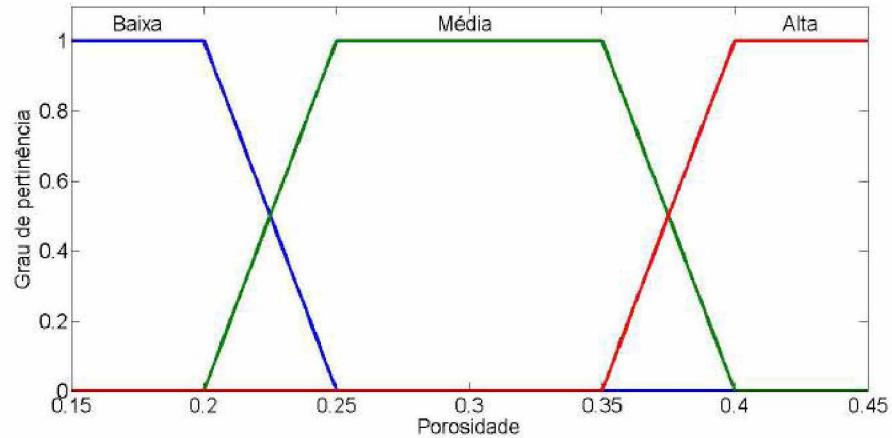


Figura 2.6: Funções de pertinência da variável “porosidade”.

Um SBRF contém basicamente quatro componentes: processador de entrada, base de regras, máquina de inferência fuzzy e processador de saída. A Figura 2.7 apresenta esquematicamente estas quatro componentes, que detalhamos a seguir.

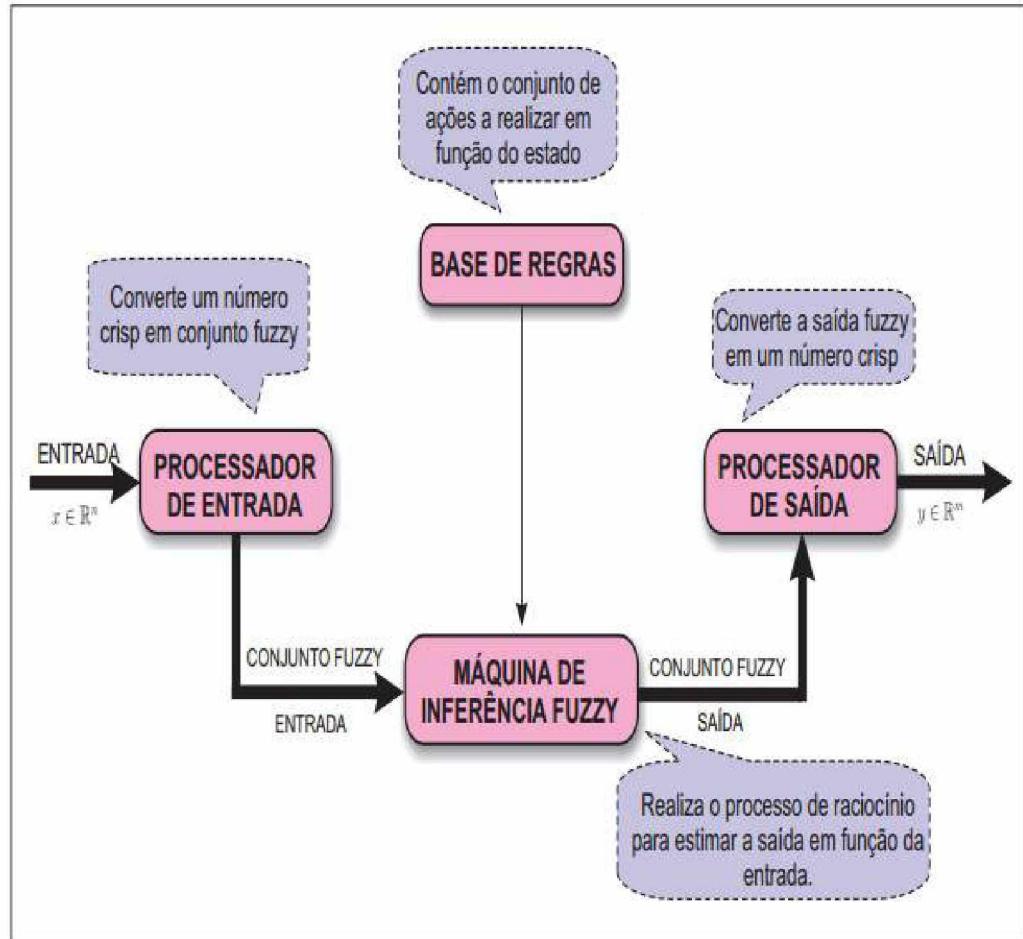


Figura 2.7: Componentes de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy [9].

2.5.1 Processador de Entrada - Fuzzificação

Nesta componente, as variáveis de entrada do sistema são transformadas em conjuntos fuzzy, de acordo com seus respectivos domínios, em um processo conhecido como fuzzificação. Assim, são atribuídos termos linguísticos a cada variável de entrada e funções de pertinência a cada termo linguístico. Nessa etapa, é fundamental a atuação de um especialista da área em que se está aplicando o SBRF para a construção das funções de pertinência.

2.5.2 Base de Regras

Trata-se um módulo que compõem o que pode ser chamado de “núcleo” do SBRF. É composto por uma coleção de proposições fuzzy na forma linguística

$$\begin{aligned} &\text{Se } x_1 \text{ é } A_1 \text{ e } x_2 \text{ é } A_2 \text{ e } \dots \text{ e } x_n \text{ é } A_n, \\ &\text{então } u_1 \text{ é } B_1 \text{ e } u_2 \text{ é } B_2 \text{ e } \dots \text{ e } u_m \text{ é } B_m, \end{aligned}$$

em que x_1, x_2, \dots, x_n são as entradas do SBRF e u_1, u_2, \dots, u_m são as saídas.

Naturalmente, as regras são definidas com a utilização das informações fornecidas por um especialista.

2.5.3 Máquina de Inferência Fuzzy

Nesta componente, cada proposição fuzzy é traduzida matematicamente a partir das técnicas da lógica fuzzy. Os operadores matemáticos aplicados nas proposições são selecionados e definem a relação que modela a base de regras. O sucesso do sistema depende basicamente da máquina de inferência, uma vez que é ela quem apresenta as saídas do SBRF, a partir das entradas e das relações definidas pela base de regras. Existem diversos métodos de inferência fuzzy. Tratamos, neste trabalho, do Método de Mamdani.

O Método de Inferência de Mamdani

Mamdani propõe uma relação fuzzy binária M entre a entrada x e a saída u para modelar matematicamente a base de regras. O método é baseado na regra de composição max-min conforme descrito a seguir [3].

- Em cada regra R_j da base de regras, a condicional “se x é A_j , então u é B_j ” é modelada pela aplicação mínimo;
- Adota-se a aplicação mínimo também para o conectivo lógico “e”;
- Para o conectivo lógico “ou”, adota-se a aplicação máximo, que conecta as regras fuzzy da base de regras.

Formalmente, podemos definir a relação fuzzy M como sendo o subconjunto fuzzy de $X \times U$, com função de pertinência dada por

$$\mu_M(x, u) = \max_{1 \leq j \leq r} (\mu_{R_j}(x, u)) = \max_{1 \leq j \leq r} [\min(\mu_{A_j}(x), \mu_{B_j}(u))], \quad (2.10)$$

em que r é o número de regras da base e A_j e B_j são os subconjuntos fuzzy da j -ésima regra.

Evidentemente, os subconjuntos fuzzy A_j e B_j que aparecem na equação (2.10) podem representar o produto cartesiano fuzzy A_{ji} e B_{jk} . Por exemplo, podemos ter

$$\mu_{A_j}(x) = \min[\mu_{A_{j1}}(x_1), \mu_{A_{j2}}(x_2)] \quad \text{e} \quad \mu_{B_j}(u) = \min[\mu_{B_{j1}}(u_1), \mu_{B_{j2}}(u_2)],$$

tratando-se, nesse caso, de um SBRF de duas entradas e duas saídas. A Figura 2.8 apresenta um exemplo de utilização do Método de Inferência de Mamdani.

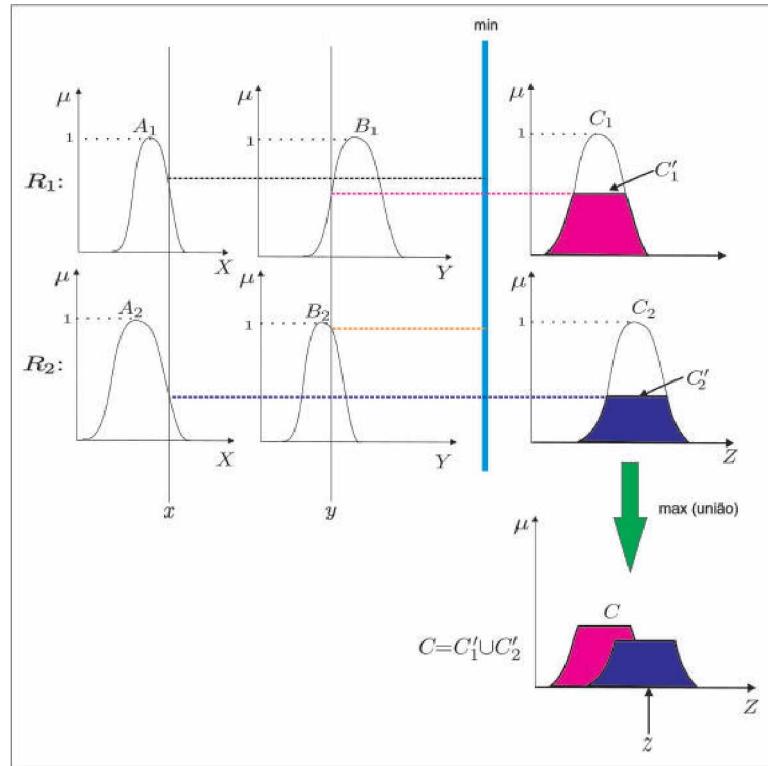


Figura 2.8: Aplicação genérica do Método de Inferência de Mamdani com composição max-min.

2.5.4 Processador de Saída - Defuzzificação

Em geral, a saída da máquina de inferência fuzzy é um conjunto fuzzy. O processador de saída faz o processo que permite representar o conjunto fuzzy por um número real, a chamada defuzzificação.

São diversos os métodos de defuzzificação. Apresentamos o método do centroide, o método do centro dos máximos e o método da média dos máximos.

Método do Centroide

Trata-se de um método de defuzzificação semelhante a uma média ponderada, em que os pesos aqui são dados pelos valores $\mu_B(u_i)$, que indicam o grau de compatibilidade do valor u_i com o conceito modelado pelo conjunto fuzzy B .

Para um domínio discreto, temos

$$G(B) = \frac{\sum_{i=0}^n u_i \mu_B(u_i)}{\sum_{i=0}^n \mu_B(u_i)}. \quad (2.11)$$

Para o caso de domínio contínuo, temos

$$G(B) = \frac{\int_R u \mu_B(u) du}{\int_R \mu_B(u) du}, \quad (2.12)$$

em que R é a região de integração.

Método do centro dos máximos

Este método leva em consideração na defuzzificação apenas os valores do suporte que possuem maior grau de pertinência. Temos que o defuzzificador é dado por

$$C(B) = \frac{i + s}{2}, \quad (2.13)$$

em que

$$i = \inf\{u \in U : \mu_B(u) = \max_u \mu_B(u)\}$$

e

$$s = \sup\{u \in U : \mu_B(u) = \max_u \mu_B(u)\}$$

Método da média dos máximos

Trata-se de um método comumente utilizado para domínios discretos. O defuzzificador é a média dos máximos, ou seja

$$M(B) = \frac{\sum u_i}{n}, \quad (2.14)$$

em que $u_i, 1 \leq i \leq n$, são os elementos de maior pertinência ao conjunto fuzzy B .

Na próxima seção, apresentamos um exemplo de aplicação de um SBRF ao cálculo das deflexões de uma viga, elemento estrutural usado na engenharia civil.

2.6 Deflexão em uma Viga Engastada: uma Aplicação de SBRF

Um dos elementos estruturais mais importantes na engenharia civil é a viga, elemento sujeito usualmente a cargas transversais. Geralmente, tal elemento estrutural é usado em conjunto com pilares e lajes, para transferir os esforços verticais recebidos da laje para o pilar. As vigas podem ser de madeira, aço ou concreto.

2.6.1 Apoios e classificação de vigas

Essencialmente, as vigas podem ser classificadas quanto aos tipos de apoios presentes. Os apoios são elementos que fazem o contato da viga com as superfícies para as quais a viga transmite os esforços.

Os apoios de vigas podem permitir deslocamentos de três tipos: rotação, translação vertical e translação horizontal. Cada um desses deslocamentos é chamado de grau de liberdade [18]. De acordo com os tipos de deslocamentos que cada apoio permite, eles podem ser classificados em:

- Apoio de primeiro gênero: restringe um grau de liberdade.
- Apoio de segundo gênero: restringe dois graus de liberdade.
- Apoio de terceiro gênero: restringe três graus de liberdade.

Os tipos mais comuns de vigas são:

- Viga em balanço ou engastada ou engastada-livre: apresenta um apoio de terceiro gênero (engaste) em uma extremidade e a outra extremidade livre de apoios;
- Viga biapoiada ou simplesmente apoiada: possui dois apoios, geralmente um de primeiro gênero numa extremidade e um de segundo gênero na outra;
- Viga biapoiada com balanço: apresenta trechos em balanço além dos apoios;
- Viga biengastada: apresenta engaste em ambas as extremidades;
- Viga engastada e apoiada: apresenta engaste em uma extremidade e um apoio de primeiro ou segundo gênero na outra extremidade.

As Figuras 2.9, 2.10, 2.11, 2.12 e 2.13 mostram representações esquemáticas das vigas de tipo engastada, biapoiada, biapoiada com balanço, biengastada e engastada e apoiada, respectivamente.

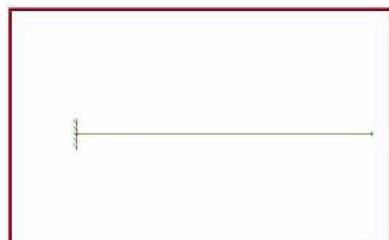


Figura 2.9: Representação de uma viga engastada.

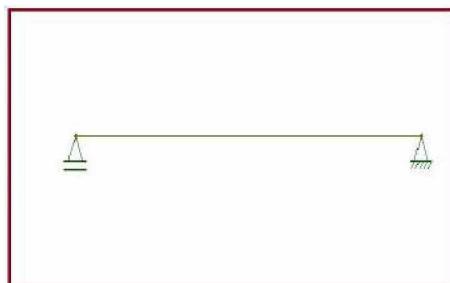


Figura 2.10: Representação de uma viga biapoiada.

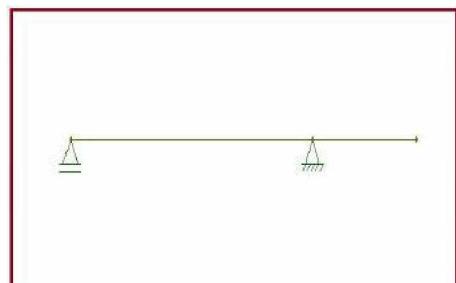


Figura 2.11: Representação de uma viga apoiada com balanço.

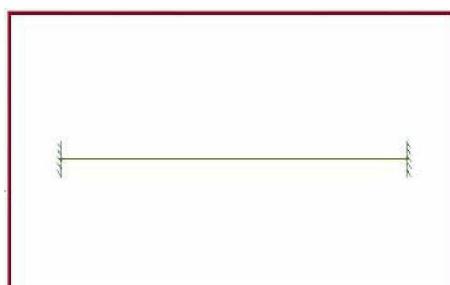


Figura 2.12: Representação de uma viga biengastada.

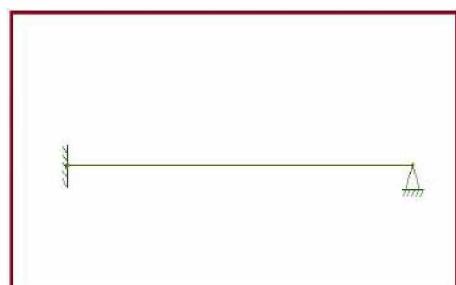


Figura 2.13: Representação de uma viga engastada e apoiada.

Na Figura 2.10, o apoio da esquerda é um apoio de primeiro gênero, pois restringe apenas o deslocamento vertical, ao passo que o apoio da direita é um apoio de segundo gênero, uma vez

que restringe deslocamentos vertical e horizontal. Na Figura 2.9, na extremidade esquerda, temos a representação de um engaste, que restringe deslocamentos horizontal e vertical e também a rotação.

Independentemente do material do qual é feito a viga e dos tipos de apoios nela presentes, quando esta se encontra sob a ação de forças (esforços), sofrerá deslocamentos (que chamaremos de deflexões) perpendiculares a seu eixo. As deflexões sofridas por uma viga podem ser obtidas a partir da solução da seguinte EDO.

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI(x)}, \quad (2.15)$$

em que $y(x)$ é a deflexão na seção transversal de posição x , $M(x)$ é o chamado momento fletor atuante na seção transversal de posição x , E é o chamado módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young, que é uma propriedade do material da viga, e $I(x)$ é o momento de inércia da seção transversal de posição x . O momento de inércia é, na verdade, função da dimensões e forma da seção transversal e que esta seção transversal pode variar suas dimensões conforme varia a posição x . Já o momento fletor em uma determinada seção depende da localização dessa seção ao longo da viga e da força atuante sobre a estrutura.

Naturalmente, não é desejável que uma viga sofra grandes deflexões, uma vez que é aplicada em sistemas estáticos de engenharia. Assim, é fundamental ao engenheiro estrutural o controle das deflexões sofrida por vigas dentro de limites aceitáveis do ponto de vista de segurança.

2.6.2 Solução analítica

Suponhamos inicialmente uma viga engastada de comprimento 1 m, cuja seção transversal é retangular, com base e altura constantes, respectivamente de 35 cm e 60 cm. Suponha, ainda, que essa viga está sob ação de um carregamento uniformemente distribuído de 1 kN/m. Nessa situação, o momento fletor, que pode ser calculado através do equilíbrio de forças em determinada seção, é dado por

$$M(x) = 1000 \frac{(1-x)^2}{2} = 500(1-x)^2. \quad (2.16)$$

Nesse caso, como a base e a altura da viga são as mesmas em todas as posições x , o momento de inércia é constante. A EDO (2.15) assume a forma

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} = -\frac{500(1-x)^2}{2EI}. \quad (2.17)$$

Admitindo que a viga é engastada, temos, como condições de valor inicial, que $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$. A solução do PVI, obtida por duas integrações diretas, é

$$y(x) = -\frac{125x^2}{3EI}(6 - 4x + x^2). \quad (2.18)$$

O momento de inércia de área ou simplesmente momento de inércia é uma propriedade de uma seção plana de um corpo, que tem relação com a resistência à deformação dessa seção [18]. É definido pela integral

$$I = \int_{y_1}^{y_2} y^2 dS. \quad (2.19)$$

em que dS é um elemento infinitesimal da área da seção. Para uma seção retangular de base b e altura h , temos que $dS = bdy$. Assim,

$$I = \int_{-b/2}^{b/2} y^2 b dy. \quad (2.20)$$

Resolvendo a integral (2.20), obtemos que o momento de inércia para seções retangulares é dado por

$$I = \frac{bh^3}{12}. \quad (2.21)$$

Para a viga em questão, temos $b = 0,35$ m e $h = 0,60$ m. Além disso, suponhamos que a viga seja feita de concreto, cujo módulo de Young é $E = 210$ GPa. Substituindo tais valores na equação (2.18), podemos obter o gráfico que representa a deflexão da viga, cujo resultado é mostrado pela Figura 2.14.

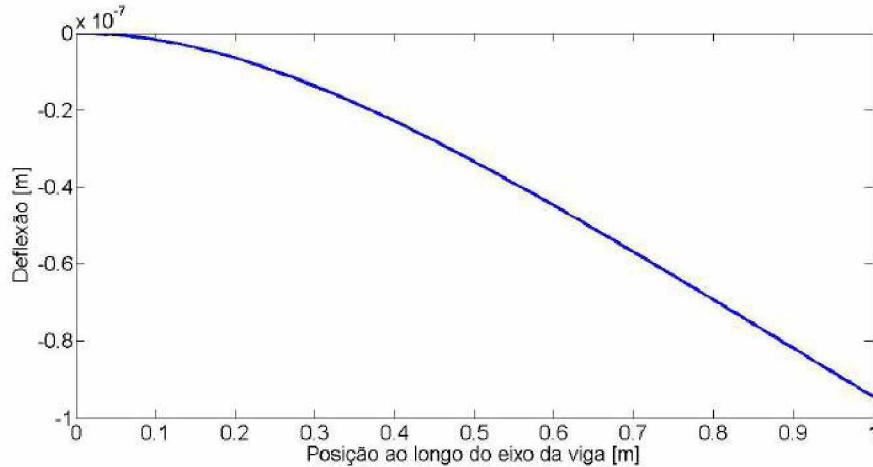


Figura 2.14: Deflexão de uma viga engastada-livre sob ação de carregamento uniforme.

Observação 2.1. A unidade do módulo de Young é um múltiplo da unidade pascal, representada por Pa. O pascal equivale ao newton dividido pelo metro quadrado, ou seja, $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ e é utilizado para medir pressões.

É interessante observar que as deflexões são, de fato, muito pequenas, da ordem 10^{-7} , conforme é esperado para esse tipo de elemento estrutural.

2.6.3 Cálculo da deflexão utilizando dois SBRF

Suponhamos, agora, que estamos interessados em estudar deflexões em vigas com seções transversais que variem ao longo do seu eixo, conforme ilustrado pela Figura 2.15. Nesse caso, o momento de inércia $I(x)$ não seria mais constante, o que tornaria substancialmente mais complicado resolver a EDO (2.15). Além disso, para resolvê-la analiticamente, seria necessário determinar uma expressão analítica para $I(x)$. Na prática, esta expressão pode não ser de fácil obtenção. Numericamente, apenas poderíamos efetuar o cálculo das deflexões caso conhecêssemos valores de altura e base para diversas seções. Assim, pela praticidade de não necessitarmos conhecê-la, utilizamos dois SBRF para modelar o problema.

O primeiro SBRF tem como entrada a posição x ao longo da viga e como saídas a base $b = b(x)$ e a altura $h = h(x)$ da seção transversal da viga. O segundo SBRF tem como entradas a base b e a altura h e como saída o momento de inércia $I = I(b, h)$. A Figura 2.16 mostra esquematicamente os dois sistemas.

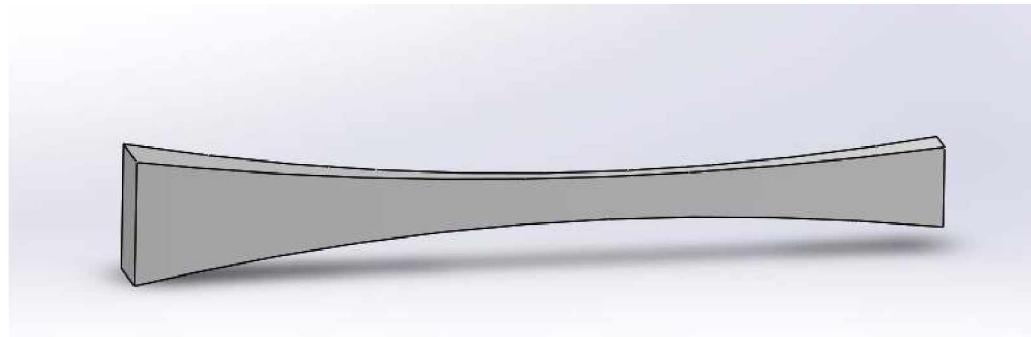


Figura 2.15: Representação de uma viga de concreto com seção transversal variável.

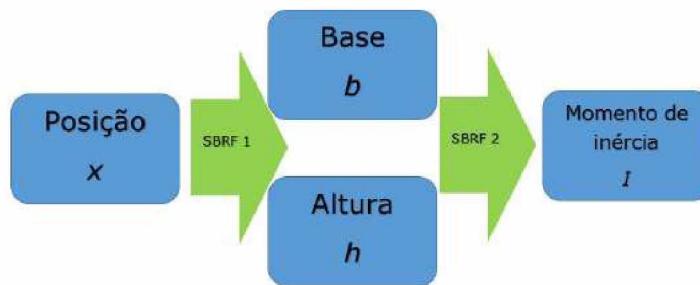


Figura 2.16: Esquema representativo dos dois SBRF utilizados.

Primeiro SBRF

Para o primeiro SBRF, temos uma variável linguística de entrada, a distância da origem (posição) ao longo do eixo x , com os termos linguísticos: “pequena”, “média”e “grande”, conforme apresentado pela Tabela 2.1. A Figura 2.17 apresenta as funções de pertinência para cada termo linguístico.

Posição	Nível zero
Pequena	[0;0,3]
Média	[0,2;0,8]
Grande	[0,7;1,0]

Tabela 2.1: Termos linguísticos para a variável de entrada “posição”.

Com relação às variáveis linguísticas de saída, temos a medida da base b e a medida da altura h . Ambas recebem três termos linguísticos, denominados “pequena”, “média”e “grande”, cujos intervalos são dados pelas Tabelas 2.2 e 2.3.

Medida da base	Nível zero
Pequena	[0,15;0,25]
Média	[0,20;0,45]
Grande	[0,40;0,50]

Tabela 2.2: Termos linguísticos para a variável de saída “medida da base”.

As funções de pertinência atribuídas aos termos linguísticos das variáveis saída são mostradas nas Figuras 2.18 e 2.19.

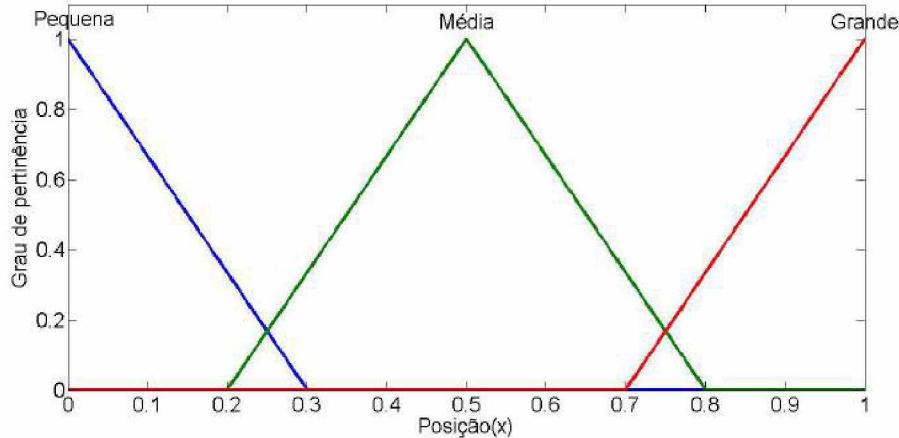


Figura 2.17: Funções de pertinência para a variável de entrada “posição”.

Medida da altura	Nível zero
Pequena	[0,25;0,35]
Média	[0,30;0,65]
Grande	[0,60;0,70]

Tabela 2.3: Termos linguísticos para a variável de saída “medida da altura”.

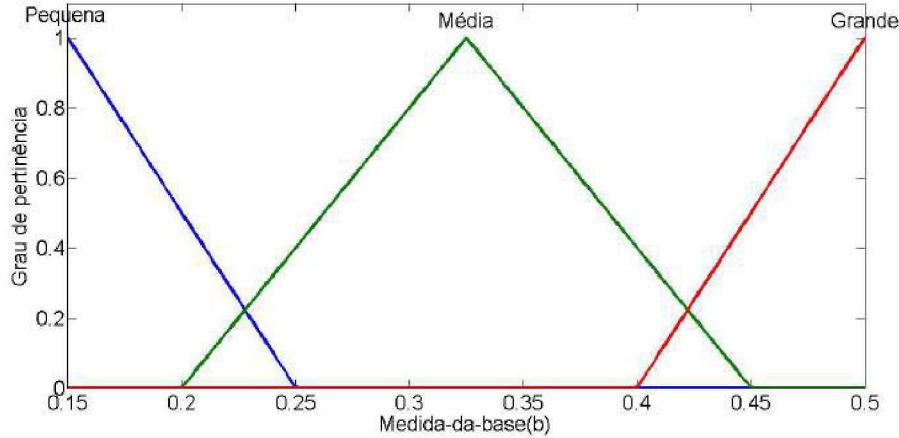


Figura 2.18: Funções de pertinência para a variável de saída “medida da base”.

Variável de entrada Posição	Variáveis de saída	
	Base	Altura
Pequena	Grande	Grande
Média	Pequena	Pequena
Grande	Média	Média

Tabela 2.4: Base de regras para o primeiro SBRF.

A partir das variáveis de entrada e saída e das funções de pertinência, estabelecemos uma base de regras. A Tabela 2.4 apresenta as regras utilizadas.

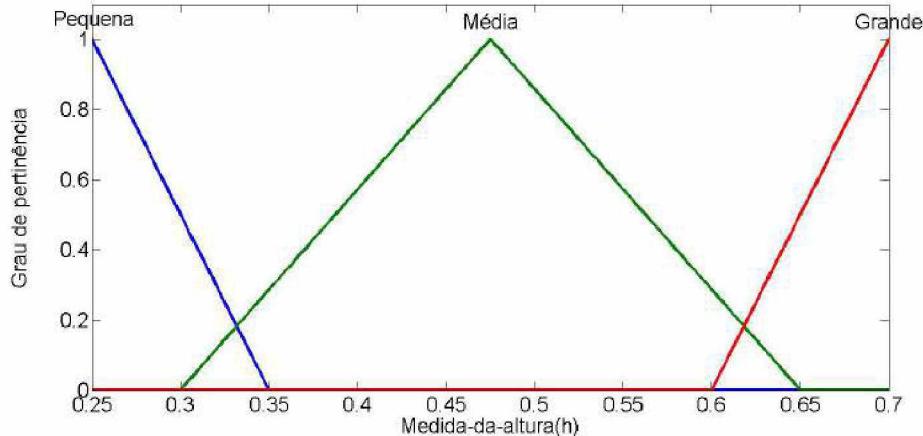


Figura 2.19: Funções de pertinência para a variável de saída “medida da altura”.

Segundo SBRF

As saídas base b e altura h do primeiro SBRF são as entradas do segundo SBRF. Os termos linguísticos e funções de pertinência são os mesmos do SBRF anterior. A variável linguística de saída desse segundo sistema é o momento de inércia I . Os termos linguísticos são “baixo”, “médio” e “alto”. A Tabela 2.5 apresenta os suportes dos termos linguísticos.

Momento de inércia	Nível zero
Baixo	$[1, 953 \cdot 10^{-4}; 5, 774 \cdot 10^{-3}]$
Médio	$[3, 719 \cdot 10^{-3}; 1, 077 \cdot 10^{-2}]$
Alto	$[8, 715 \cdot 10^{-3}; 1, 429 \cdot 10^{-2}]$

Tabela 2.5: Termos linguísticos para a variável de saída “momento de inércia”.

As funções de pertinência adotadas para a saída, momento de inércia I , também são do tipo triangular. Os gráficos destas funções são apresentados na Figura 2.20. A base de regras do segundo SBRF é apresentada na Tabela 2.6.

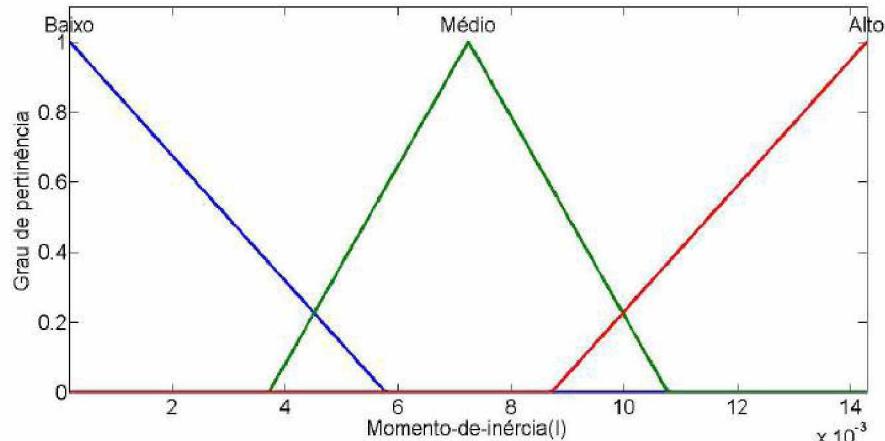


Figura 2.20: Funções de pertinência para a variável de saída “momento de inércia”.

		Altura	Pequena	Média	Grande
		Base			
Base	Pequena	Baixo	Médio	Médio	Médio
	Média	Baixo	Médio	Alto	
	Grande	Médio	Médio	Alto	

Tabela 2.6: Base de regras para o segundo SBRF.

Resultados

A partir dos dois SBRF, é possível encontrar as deflexões esperadas para uma viga engastada-livre de concreto, sujeita à ação de um carregamento distribuído de 1 kN/m , com seções transversais variáveis. A EDO (2.15) é resolvida numericamente utilizando o Método das Diferenças Finitas e o valor de $I(x)$ obtido através dos SBRF. O gráfico das deflexões obtidas para essa viga é apresentado na Figura 2.21.

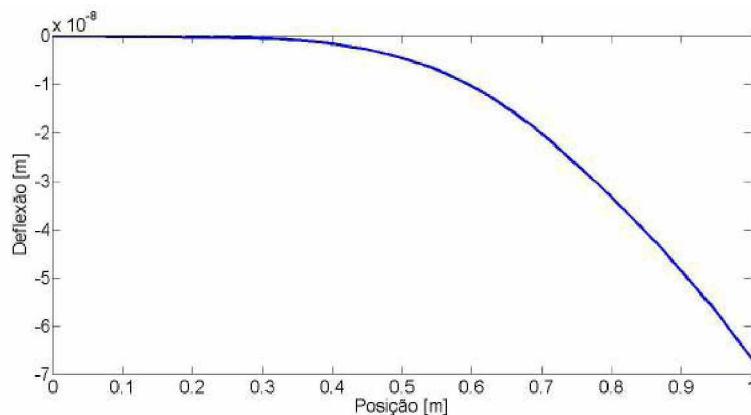


Figura 2.21: Solução numérica utilizando os SBRF.

Caso seja de interesse analisar as deflexões em uma viga com outra configuração de seções transversais, basta construir novos SBRF e utilizá-los para estimar os valores do momento de inércia I , evitando a necessidade de conhecer expressões analíticas para I .

No próximo capítulo, apresentamos a solução analítica e a solução fuzzy das equações de Saint Venant, quando utilizamos a contribuição lateral de vazão ao escoamento de um rio como um parâmetro fuzzy triangular.

Capítulo 3

Solução Analítica das Equações de Saint Venant

As Equações de Saint Venant formam um sistema de duas equações que descrevem o escoamento de rios em termos da velocidade do escoamento e da profundidade de lâmina d'água. Na literatura, tais equações são apresentadas de diversas formas, de acordo com a abordagem desejada. Na Introdução, apresentamos estas equações em função das derivadas da área molhada A , da vazão Q e da altura da lâmina d'água h , sendo A , Q e h todos dependentes da posição x e do tempo de escoamento t . Neste capítulo, apresentamos as mudanças de variáveis convenientes para obter as equações em função das derivadas da altura da lâmina d'água h e da velocidade de escoamento u , ambas funções da posição x e do tempo t [28]. Além disso, estudamos a primeira parte do problema central deste trabalho: a aplicação do princípio de Extensão de Zadeh à solução analítica das equações de Saint Venant.

3.1 As Equações de Saint Venant

Na Introdução deste trabalho, apresentamos a seguinte forma das Equações de Saint Venant:

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q \\ \frac{1}{A} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial \left(\frac{Q^2}{A} \right)}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_0 - S_f). \end{cases} \quad (3.1)$$

Suponhamos um rio com seção transversal constante, por exemplo retangular, com largura b ao longo de toda a extensão do canal, conforme apresentado na Figura 3.1.

Neste caso, a área molhada é dada por $A = bh$ e a vazão por $Q = uA = ubh$, em que u é a velocidade de escoamento. Utilizando ambas as relações na primeira equação do sistema (3.1), temos

$$\frac{\partial(bh)}{\partial t} + \frac{\partial(ubh)}{\partial x} = q. \quad (3.2)$$

Como b é considerado constante ao longo de todo o curso do rio, temos que

$$b \frac{\partial h}{\partial t} + b \frac{\partial(uh)}{\partial x} = q. \quad (3.3)$$

Dividindo a equação (3.3) por b , que é diferente de zero, obtemos

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = \frac{q}{b}. \quad (3.4)$$

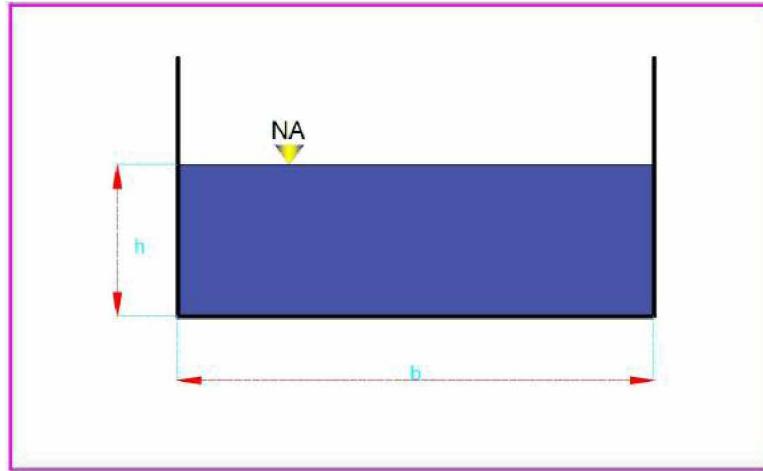


Figura 3.1: Seção transversal retangular de um rio.

Fazendo $\frac{q}{b} = R$, chegamos a

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = R. \quad (3.5)$$

Na equação (3.5), R é chamado de contribuição lateral de vazão por unidade de área, uma vez que se trata de uma grandeza com unidade de vazão/área [m/s].

Por outro lado, podemos também utilizar as relações $A = bh$ e $Q = ubh$ na segunda equação do sistema (3.1). Assim, temos

$$\frac{1}{bh} \frac{\partial(ubh)}{\partial t} + \frac{1}{bh} \frac{\partial\left(\frac{u^2 b^2 h^2}{bh}\right)}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_0 - S_f). \quad (3.6)$$

Mais uma vez, pelo fato de b ser considerado constante, podemos simplificar a equação (3.6), obtendo

$$\frac{1}{h} \frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{1}{h} \frac{\partial(u^2 h)}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_0 - S_f). \quad (3.7)$$

Utilizando a Regra do Produto para as derivadas [12], temos

$$\frac{\partial(uh)}{\partial t} = h \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial t} \quad (3.8)$$

e

$$\frac{\partial(u^2 h)}{\partial x} = u^2 \frac{\partial h}{\partial x} + 2uh \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3.9)$$

Substituindo as equações (3.8) e (3.9) na equação (3.7), temos

$$\frac{1}{h} \left(h \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial t} \right) + \frac{1}{h} \left(u^2 \frac{\partial h}{\partial x} + 2uh \frac{\partial u}{\partial x} \right) + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_0 - S_f). \quad (3.10)$$

Fazendo as multiplicações indicadas, temos

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u \partial h}{h \partial t} + \frac{u^2 \partial h}{h \partial x} + 2u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_0 - S_f). \quad (3.11)$$

A parcela $2u \frac{\partial u}{\partial x}$ pode ser escrita como $u \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x}$. Rearranjando os termos da equação (3.11), temos

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{u^2}{h} \frac{\partial h}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{u}{h} \frac{\partial h}{\partial t} = g(S_0 - S_f). \quad (3.12)$$

Colocando em evidência o termo $\frac{u}{h}$ nas três últimas parcelas do primeiro membro, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{u}{h} \left(u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial t} \right) = g(S_0 - S_f). \quad (3.13)$$

Mas, pela Regra da Cadeia, temos que:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x}. \quad (3.14)$$

Igualando as equações (3.14) e (3.5) e substituindo na equação (3.13), chegamos a

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{Ru}{h} = g(S_0 - S_f), \quad (3.15)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_0 - S_f) - \frac{Ru}{h}. \quad (3.16)$$

Assim, o sistema de equação (3.1) pode ser escrito de forma equivalente como

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = R \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_0 - S_f) - \frac{Ru}{h}. \end{cases} \quad (3.17)$$

Na segunda equação do sistema (3.17), podemos separar as parcelas da seguinte forma:

$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{Ru}{h}$: parcelas devidas à inércia do escoamento;

$g \frac{\partial h}{\partial x}$: parcela devida à pressão;

gS_0 : parcela devida à gravidade;

gS_f : parcela devida ao atrito do escoamento.

3.2 Solução Analítica das Equações de Saint Venant

Consideremos uma superfície impermeável, inicialmente seca. Suponhamos que comece a existir uma contribuição lateral de vazão constante R sobre a superfície, devida a chuva ou a outras fontes. Após algum tempo, se forma uma lâmina d'água de espessura h . A Figura 3.2 representa o perfil longitudinal desta situação de escoamento, em que θ é o ângulo de inclinação do leito do escoamento, com $tg(\theta)$ sendo denominada S_0 . As seções iniciais do escoamento são ditas seções à montante, ao passo que as seções mais ao final do escoamento são ditas seções à jusante. Assim, quando dizemos que uma seção A está à montante de uma seção B, temos que a seção A está em uma posição mais inicial do escoamento em relação à seção B.

Se as parcelas devidas à gravidade e ao atrito são dominantes sobre os termos de inércia e pressão, podemos considerar estes termos como nulos e assim determinar a solução analítica do sistema (3.17). Neste caso, a segunda equação se resume a

$$g(S_0 - S_f) = 0. \quad (3.18)$$

Logo,

$$S_0 = S_f. \quad (3.19)$$

Na literatura [17], encontramos que

$$q = Kh^m, \quad (3.20)$$

em que K e m são valores positivos obtidos empiricamente, que variam de acordo com o tipo de fluxo. Os casos mais comuns segundo Henderson e Wooding (1964) são:

1. Regime laminar: $K = \frac{gS_0}{3\nu}$, $m = 3$, em que ν é a viscosidade cinemática do líquido em escoamento;
2. Regime turbulento: $K = CS_0^{0,5}$, $m = \frac{3}{2}$, em que C é o chamado coeficiente de Chézy;
3. Fluxo em um meio poroso de permeabilidade variável: $K = \frac{k_0 g S_0}{\mu \nu y_0^{m-1}}$, em que ν é a viscosidade cinemática do líquido em escoamento, $m \geq 1$ e k_0, y_0 são constantes. Nesse caso, é necessário substituir $\frac{\partial h}{\partial t}$ por $\frac{\epsilon \partial h}{\partial t}$ na primeira equação do sistema (3.17), em que ϵ é a porosidade do meio.

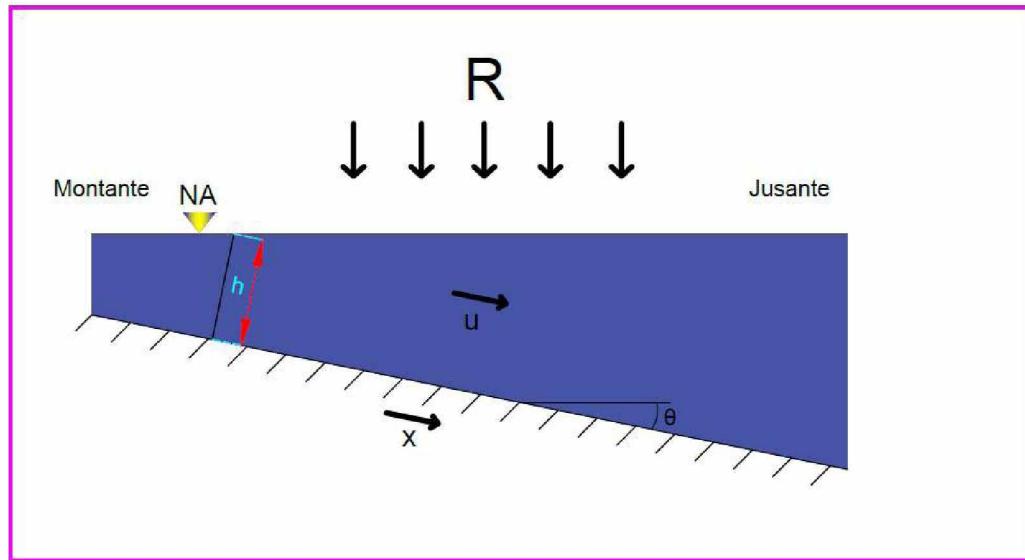


Figura 3.2: Representação do perfil longitudinal de um escoamento sobre uma superfície impermeável.

Podemos introduzir a velocidade

$$c(h) = c = \frac{dq}{dh} = mKh^{m-1}. \quad (3.21)$$

Desprezando os efeitos do afluxo sobre o escoamento e os termos de aceleração e considerando que a profundidade é suficientemente pequena, a inclinação da superfície de água relativamente ao declive S_0 pode ser também desprezada. Uma vez que q é contribuição lateral de vazão ao escoamento por unidade de comprimento, temos que $q = uh$. Substituindo na primeira equação do sistema (3.17), temos

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = R. \quad (3.22)$$

Como q é função de h , sendo que este depende tanto de x quanto de t , podemos utilizar a Regra da Cadeia em $q(h(x, t))$ e a equação (3.21) para escrever

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{dq}{dh} \frac{\partial h}{\partial x} = c \frac{\partial h}{\partial x}. \quad (3.23)$$

Substituindo a equação (3.23) na equação (3.22), temos

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} = R. \quad (3.24)$$

Utilizamos o Método das Características, que foi apresentado no Capítulo 1, para resolver a equação (3.24). Seja $r(t) = (x(t), t)$ uma curva em \mathbb{R}^2 passando pelo ponto (x, t) . Consideramos, então, a função composta $h(r(t))$. Temos

$$\frac{dh(r(t))}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial t} \frac{dt}{dt} = \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial h}{\partial t}. \quad (3.25)$$

Comparando as equações (3.24) e (3.25), temos que

$$\frac{dx}{dt} = c \quad (3.26)$$

e também que

$$\frac{dh}{dt} = R. \quad (3.27)$$

Integrando a equação (3.27) e aplicando a condição de fronteira $h(x, 0) = 0, \forall x$, temos

$$h = Rt. \quad (3.28)$$

Por outro lado, podemos considerar h como função de q , conforme a equação (3.20), ou seja, $h(q(x, t))$. Aplicando a Regra da Cadeia [21], temos

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{dh}{dq} \frac{\partial q}{\partial t}. \quad (3.29)$$

Substituindo a equação (3.29) na equação (3.22), temos

$$\frac{dh}{dq} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = R. \quad (3.30)$$

Utilizando o Teorema da Função Inversa [21] na equação (3.21) e substituindo na equação (3.30), temos

$$\frac{1}{c} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = R. \quad (3.31)$$

Aplicando novamente o Método das Características para resolver (3.31), seja $s(x) = (x, t(x))$ uma curva em \mathbb{R}^2 passando pelo ponto (x, t) . Considerando a função composta $q(s(x))$, temos

$$\frac{dq(s(x))}{dx} = \frac{\partial q}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{dt}{dx} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial t} \frac{dt}{dx}. \quad (3.32)$$

Da comparação entre as equações (3.31) e (3.32), temos que

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{c} \quad (3.33)$$

e, ainda,

$$\frac{dq}{dx} = R. \quad (3.34)$$

Integrando a equação (3.34) e aplicando a condição de fronteira $h(0, t) = 0, \forall t$, temos que

$$q = Rx. \quad (3.35)$$

Após um determinado tempo, o curso d'água se torna estável, ou seja, a altura da lâmina d'água h_s não mais se altera. O escoamento, nesse momento, entra no chamado regime permanente. Esse tempo t_s é dado, a partir da equação (3.28), por

$$t_s = \frac{h_s}{R} = \frac{h_s}{\frac{q}{x}} = \frac{h_s x}{K h_s^m} = \frac{x}{K h_s^{m-1}}. \quad (3.36)$$

Dessa forma, temos que

$$q = K h^m = \begin{cases} K R^m t^m, & \text{se } t < t_s, \\ Rx, & \text{se } t \geq t_s. \end{cases} \quad (3.37)$$

Podemos explicitar a equação (3.37) em termos de h . Para $t < t_s$, temos:

$$K h^m = K R^m t^m. \quad (3.38)$$

Simplificando a equação (3.38), obtemos

$$h^m = R^m t^m. \quad (3.39)$$

Logo, extraindo a raiz m-ésima,

$$h = R t. \quad (3.40)$$

Para $t \geq t_s$, temos

$$K h^m = Rx. \quad (3.41)$$

Explicitando h na equação (3.41), obtemos

$$h = \left(\frac{Rx}{K} \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (3.42)$$

Mais ainda, podemos exprimir o domínio das sentenças em termos de x e t . Utilizando a equação (3.36), temos que, para $t < t_s$,

$$t < \frac{x}{K h_s^{m-1}}. \quad (3.43)$$

Explicitando x na equação (3.43), obtemos

$$x > t K h_s^{m-1}. \quad (3.44)$$

Mas, da equação (3.36), temos que

$$h_s^m = \frac{Rx}{K}, \quad (3.45)$$

ou seja,

$$h_s = \left(\frac{Rx}{K} \right)^{\frac{1}{m}}. \quad (3.46)$$

Substituindo a equação (3.46) na inequação (3.44), chegamos em

$$x > tK \left[\left(\frac{Rx}{K} \right)^{\frac{1}{m}} \right]^{m-1}. \quad (3.47)$$

Rearranjando a equação (3.47), obtemos

$$x > tK \left(\frac{Rx}{K} \right)^{\frac{m-1}{m}}, \quad (3.48)$$

ou ainda,

$$x > tK \left(\frac{Rx}{K} \right)^{1-\frac{1}{m}}. \quad (3.49)$$

Uma vez que, para $x > tKh_s^{m-1}$, x é sempre positivo, podemos escrever

$$\frac{x}{x^{1-\frac{1}{m}}} > tK \frac{R^{1-\frac{1}{m}}}{K^{1-\frac{1}{m}}}. \quad (3.50)$$

Efetuando as simplificações possíveis na inequação (3.50), temos

$$x^{\frac{1}{m}} > tK^{\frac{1}{m}} R^{1-\frac{1}{m}}. \quad (3.51)$$

Por fim, elevando ambos os membros da inequação (3.51) a m ,

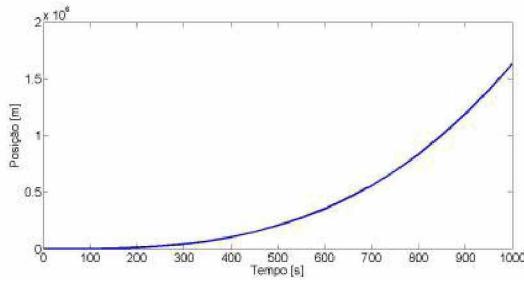
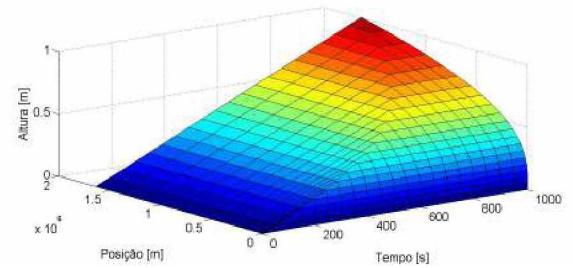
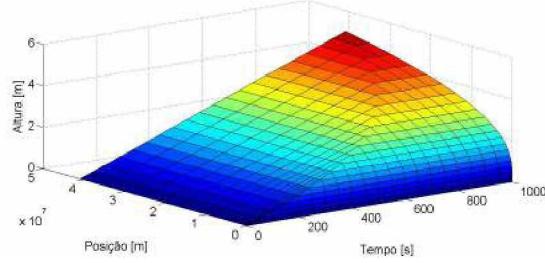
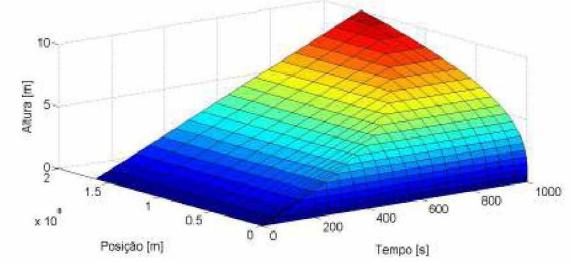
$$x > t^m K R^{m-1}. \quad (3.52)$$

Assim, obtemos que

$$h(x, t) = \begin{cases} \left(\frac{Rx}{K} \right)^{\frac{1}{m}}, & \text{se } x \leq K R^{m-1} t^m, \\ R t, & \text{se } x > K R^{m-1} t^m. \end{cases} \quad (3.53)$$

Atribuindo valores para as constantes da solução (3.53), podemos observar os gráficos da curva que representa o domínio da solução e da superfície que representa a solução. Admitindo um regime laminar, inclinação do leito $S_0 = 0,0005$, contribuição lateral $R = 0,001$ m/s, aceleração da gravidade $g = 9,81$ m/s² e viscosidade cinemática da água $\nu = 10^{-6}$ m²/s, obtemos um valor de $K = 1635$. A Figura 3.3 mostra o gráfico da curva $x = x(t)$, para os valores adotados, ao passo que a Figura 3.4 mostra a superfície $h(x, t)$ para os mesmos valores. Podemos, ainda, comparar a superfície $h(x, t)$ para diferentes valores de R . A Figura 3.5 mostra a superfície para uma contribuição lateral $R = 0,005$ m/s e a Figura 3.6, para $R = 0,01$ m/s.

Comparando os gráficos das superfícies, podemos observar que o valor da contribuição lateral R influencia fortemente nos valores atingidos pelo nível d'água h , de modo que, quanto maior o valor de R , maiores são as alturas observadas. Naturalmente, quanto maior a contribuição lateral de água ao fluxo, maior deve ser a espessura da lâmina d'água conforme o tempo passa. Assim, os resultados obtidos são fisicamente coerentes com o esperado.

Figura 3.3: Curva $x(t)$.Figura 3.4: Superfície $h(x, t)$ para $R = 0,001$ m/s.Figura 3.5: Superfície $h(x, t)$ para $R = 0,005$ m/s.Figura 3.6: Superfície $h(x, t)$ para $R = 0,01$ m/s.

3.3 A Extensão de Zadeh Aplicada à Solução das Equações de Saint Venant

Podemos utilizar o princípio da Extensão de Zadeh para estudar o comportamento da altura da lâmina d'água de um rio considerando a contribuição lateral R como número fuzzy triangular. Para isso, consideramos inicialmente uma seção transversal do rio fixa (x fixo) e analisamos o comportamento ao longo do tempo. Posteriormente, fixamos o tempo (t fixo) e analisamos o comportamento ao longo do canal do rio. As constantes assumem os mesmos valores considerados na seção anterior.

Suponhamos o parâmetro contribuição lateral R como um número fuzzy triangular. Os seus vértices são designados genericamente pelos pontos $(a, 0)$, $(b, 1)$ e $(c, 0)$, conforme mostrado na Figura 3.7. Por simplicidade, referiremo-nos a esse número fuzzy triangular como $(a; b; c)$.

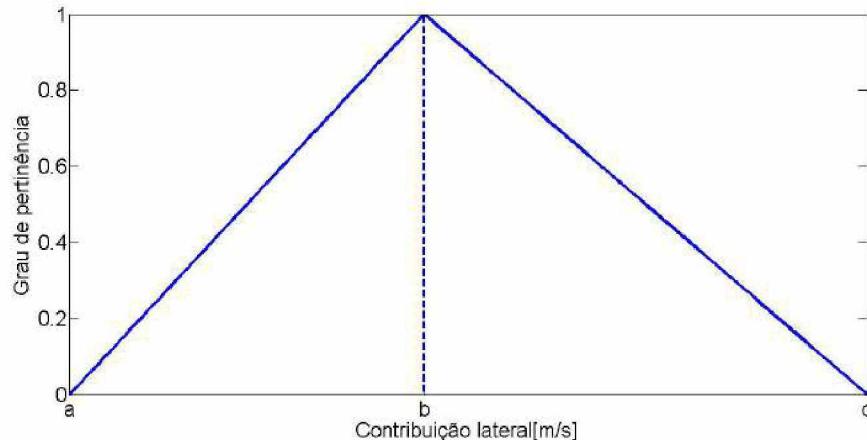


Figura 3.7: Número fuzzy triangular genérico

3.3.1 Seção transversal fixa

Fixamos uma seção transversal do rio e verificamos qual é a função de pertinência da variável altura da lámina d'água h utilizando o princípio de extensão de Zadeh. Consideraremos, a princípio, a seção transversal de posição $x = 200$ m e a contribuição lateral R como o número fuzzy triangular $(0,001; 0,005; 0,01)$, conforme apresentado na Figura 3.8.

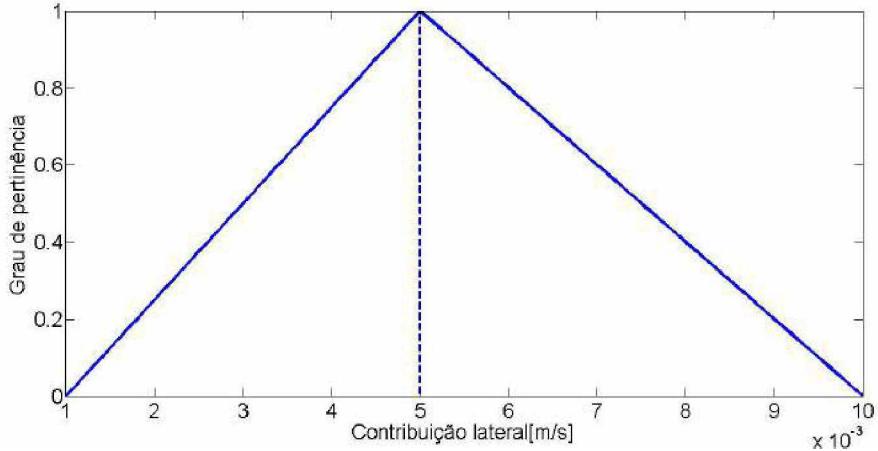


Figura 3.8: Número fuzzy triangular $(0,001; 0,005; 0,01)$.

Podemos observar a altura da lámina d'água h como uma função de R e t , uma vez que a posição x foi fixada. Assim, a equação (3.53) assume a forma

$$h(R, t) = \begin{cases} Rt, & \text{se } 1635R^2t^3 < 200, \\ \left(\frac{200R}{1635}\right)^{\frac{1}{3}}, & \text{se } 1635R^2t^3 \geq 200. \end{cases} \quad (3.54)$$

Uma vez que a contribuição lateral nas situações consideradas é positiva, explicitando R nas desigualdades, temos

$$h(R, t) = \begin{cases} Rt, & \text{se } R < \frac{0,3497}{\sqrt{t^3}}, \\ 0,4964R^{\frac{1}{3}}, & \text{se } R \geq \frac{0,3497}{\sqrt{t^3}}. \end{cases} \quad (3.55)$$

Note, que para cada tempo t fixo, a função $h = h(R)$ é contínua. De fato, para $R < \frac{0,3497}{\sqrt{t^3}}$, h é contínua pois é uma função linear. Para $R > \frac{0,3497}{\sqrt{t^3}}$, h também é contínua, pois é uma raiz cúbica. Além disso,

$$h\left(\frac{0,3497}{\sqrt{t^3}}\right) = 0,4964\left(\frac{0,3497}{\sqrt{t^3}}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{0,3497}{\sqrt{t}}$$

e

$$\lim_{R \rightarrow (0,3497/\sqrt{t^3})^-} Rt = \frac{0,3497}{\sqrt{t}} = \lim_{R \rightarrow (0,3497/\sqrt{t^3})^+} 0,4964R^{\frac{1}{3}}.$$

Logo, $\lim_{R \rightarrow (0,3497/\sqrt{t^3})} h(R) = h\left(\frac{0,3497}{\sqrt{t^3}}\right)$ e, daí, h é contínua para todo R . A Figura 3.9 mostra o gráfico de $h(R)$ para vários valores de t , comprovando graficamente a continuidade da função. Assim, podemos usar o Teorema 2.1 para encontrar a solução fuzzy de h em função de t [4]. Esta solução é apresentada na Figura 3.10. As cores na superfície representam os graus de pertinência da altura da lâmina d'água h em função de t . A cor vermelha escura está associada ao grau de pertinência um, enquanto a cor azul escura está associada ao grau de pertinência zero.

Podemos observar, a partir da Figura 3.13, que quanto mais à jusante está a seção (ou seja, quanto mais distante a seção está da posição inicial do rio), maiores são as alturas da lâmina d'água com grau de pertinência máximo. Este resultado é coerente com o modelo físico de escoamento de um rio, uma vez que, considerando a inclinação do leito do rio, é esperado que seções mais à jusante apresentem lâminas d'água mais espessas.

Uma outra observação que pode ser feita a partir da análise das Figuras 3.10, 3.11 e 3.12 diz respeito ao tempo necessário para que a função de pertinência da altura da lâmina d'água passe a não variar com o tempo. É fácil notar que esse tempo é maior para o caso em que a seção fixada está mais à jusante do rio. Mais uma vez, esse resultado está de acordo o modelo em questão. Quanto maior é o valor de x fixado, maior é o tempo necessário para que a altura da lâmina d'água h passe a depender apenas de x .

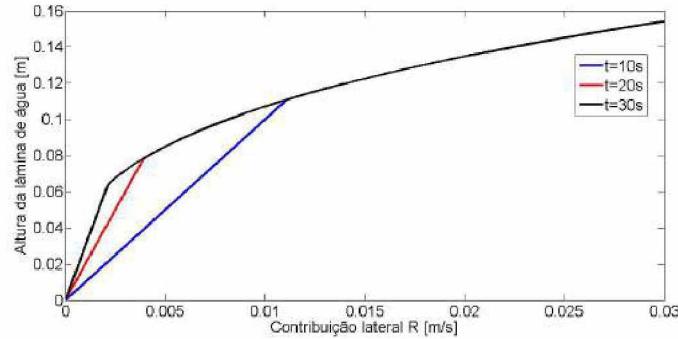


Figura 3.9: Gráficos da função $h(R)$ para diversos valores de t .

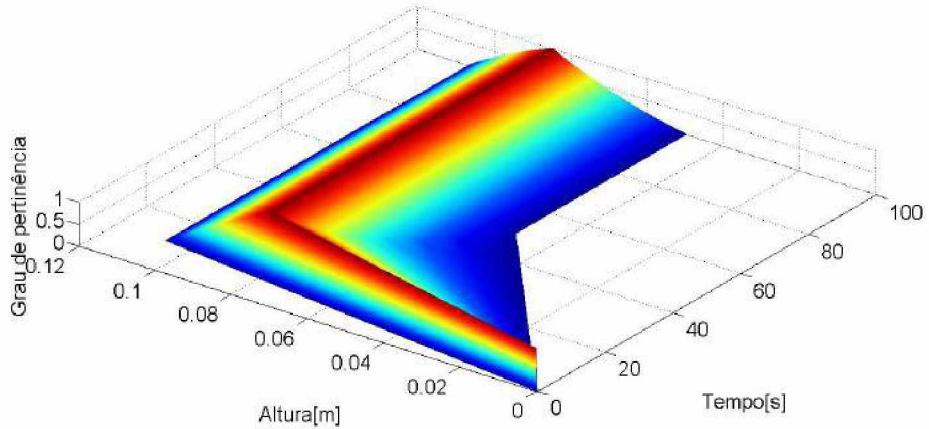


Figura 3.10: Graus de pertinência de h para $x = 200$ m ao longo do tempo t .

Naturalmente, conforme mudamos a seção transversal fixada, um novo comportamento será observado para a altura da lâmina d'água. Consequentemente, novos graus de pertinência serão obtidos para h através do Princípio de Extensão de Zadeh. A Figura 3.11 mostra o resultado

obtido para a seção transversal de posição $x = 400$ m , ao passo que a Figura 3.12 mostra o resultado para $x = 800$ m. A Figura 3.13 mostra as três superfícies em um único sistema de eixos.

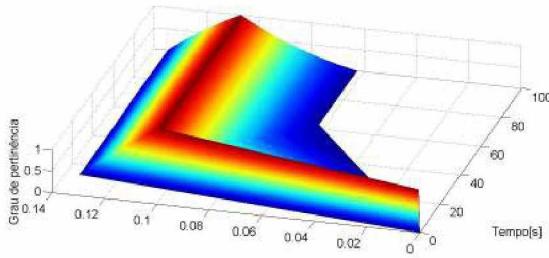


Figura 3.11: Graus de pertinência de h para $x = 400$ m ao longo do tempo t .

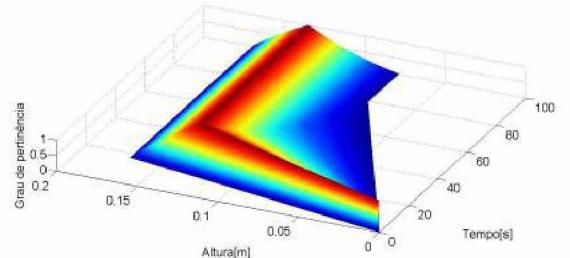


Figura 3.12: Graus de pertinência de h para $x = 800$ m ao longo do tempo t .

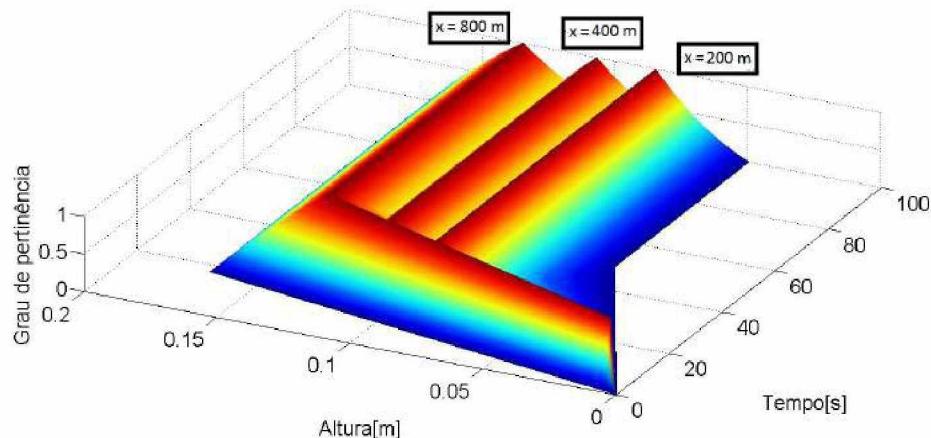


Figura 3.13: Comparativo entre as soluções fuzzy para várias seções.

Por fim, podemos ainda verificar o efeito da mudança do número fuzzy R sobre a função de pertinência da altura da lâmina d'água. Consideremos, por exemplo, dois outros números fuzzy triangulares: o número fuzzy $(0,005; 0,01; 0,02)$, mostrado pela Figura 3.14, e o número fuzzy $(0,01; 0,02; 0,03)$, mostrado pela Figura 3.15. A Figura 3.16 mostra os três números fuzzy em um mesmo plano.

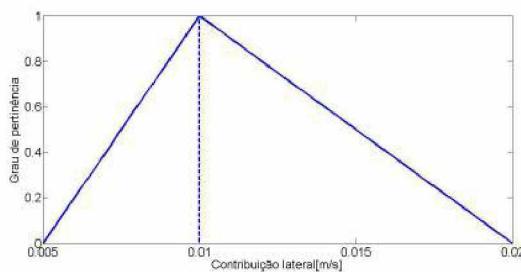


Figura 3.14: Número fuzzy triangular $(0,005; 0,01; 0,02)$.

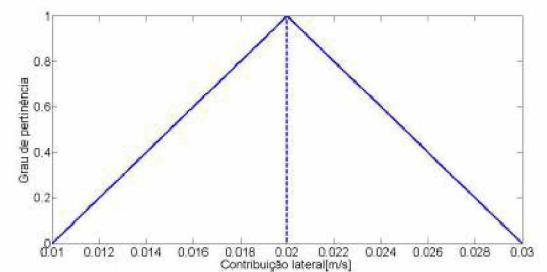


Figura 3.15: Número fuzzy triangular $(0,01; 0,02; 0,03)$.

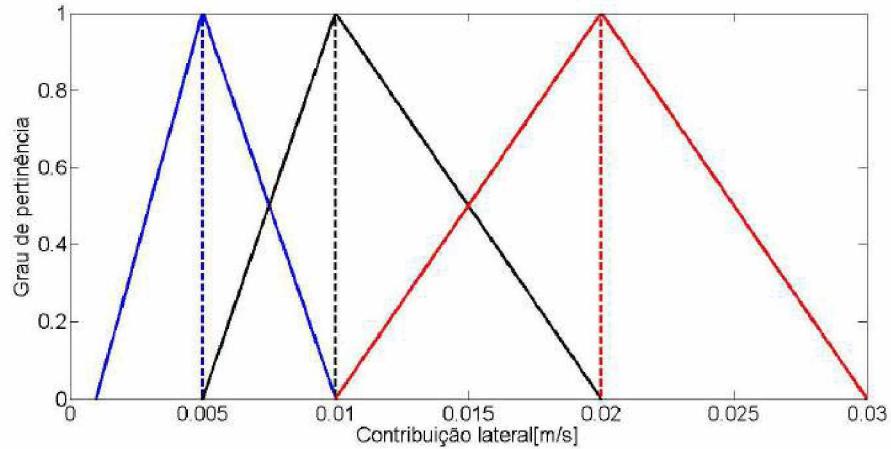


Figura 3.16: Comparativo entre os três números fuzzy triangulares.

Utilizando novamente o Teorema 2.1 de Zadeh, obtemos a solução fuzzy de h para $x = 200$ m fixo, para cada um dos números triangulares definidos para R . A Figura 3.17 mostra as superfícies obtidas.

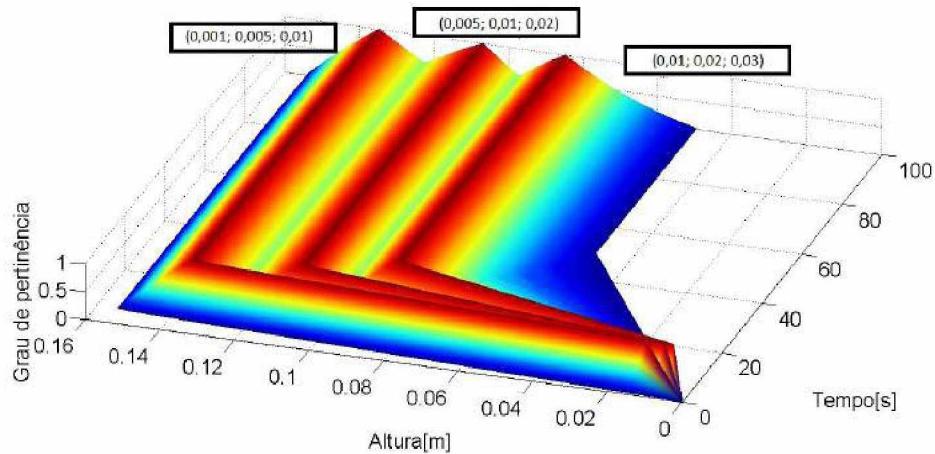


Figura 3.17: Comparativo entre as soluções fuzzy para diferentes números fuzzy R .

Podemos notar que, quanto maiores são os valores contidos no suporte do número fuzzy, maiores são as alturas com pertinência igual a 1 e menor é o tempo necessário até o momento em que função de pertinência da altura da lâmina d'água passa a independe do tempo.

3.3.2 Tempo fixo

Agora vamos fixar o tempo e verificar a variação das funções de pertinência da altura da lâmina d'água conforme avançamos ao longo das seções do rio. Considere, inicialmente, um tempo $t = 30$ s. Nesse caso, podemos enxergar a altura da lâmina d'água h como uma função de R e x , uma vez que o tempo t foi fixado. A equação (3.53) assume a forma

$$h(R, x) = \begin{cases} 30R, & \text{se } x > 1635R^230^3, \\ \left(\frac{Rx}{1635}\right)^{\frac{1}{3}}, & \text{se } x \leq 1635R^230^3. \end{cases} \quad (3.56)$$

Explicitando R em ambas as desigualdades, temos

$$h(R, x) = \begin{cases} 30R, & \text{se } R < \frac{\sqrt{x}}{6644,1704}, \\ \left(\frac{Rx}{1635}\right)^{\frac{1}{3}}, & \text{se } R \geq \frac{\sqrt{x}}{6644,1704}. \end{cases} \quad (3.57)$$

Para cada posição x , utilizamos o princípio da extensão de Zadeh para encontrar a função de pertinência de h a partir da função de pertinência de R . Consideraremos o número triangular fuzzy $R = (0,001; 0,005; 0,01)$. A função $h(R)$ apresentada em (3.57) é contínua para cada valor de x fixo. Temos, que para cada tempo x fixo, a função $h = h(R)$ é contínua. De fato, para $R < \frac{\sqrt{x}}{6644,1704}$, h é contínua pois é uma função linear. Para $R > \frac{\sqrt{x}}{6644,1704}$, h também é contínua, pois é uma raiz cúbica. Além disso,

$$h\left(\frac{\sqrt{x}}{6644,1704}\right) = \left(\frac{\frac{\sqrt{x}}{6644,1704}x}{1635}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{x}}{221,4723}$$

e

$$\lim_{R \rightarrow (\sqrt{x}/6644,1704)^{-}} 30R = \frac{\sqrt{x}}{221,4723} = \lim_{R \rightarrow (\sqrt{x}/6644,1704)^{+}} \left(\frac{Rx}{1635}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Concluímos então que $\lim_{R \rightarrow (\sqrt{x}/6644,1704)} = h\left(\frac{\sqrt{x}}{6644,1704}\right)$. Segue que h é contínua para todo R . A Figura 3.18 mostra o gráfico de h para alguns valores de x . Devido à continuidade, podemos, mais uma vez, aplicar o Teorema 2.1 para obter a solução fuzzy para h para t fixo. A Figura 3.19 mostra o resultado obtido.

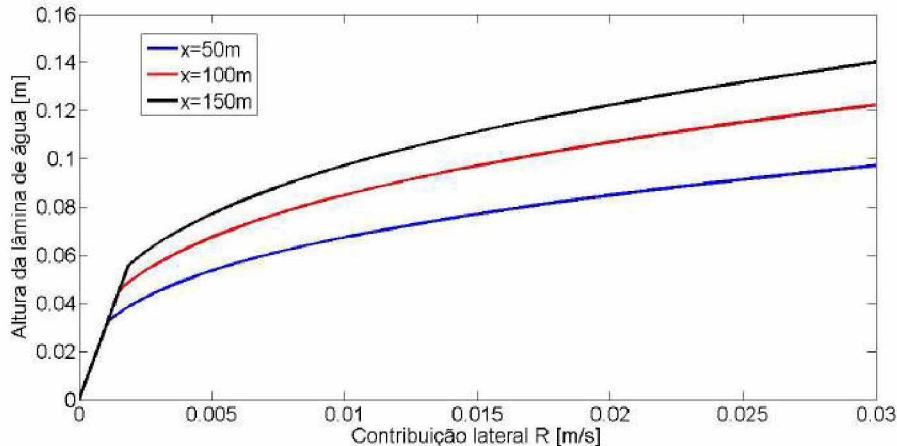


Figura 3.18: Gráficos da função $h(R)$ para diversos valores de x .

Podemos fixar novos valores para o tempo para analisar a mudança ocorrida nas funções de pertinência de h . A Figura 3.20 mostra a extensão para $t = 60$ s e a Figura 3.21 para $t = 120$ s.

Para facilitar a comparação entre os resultados obtidos para os diferentes valores de tempo, a Figura 3.22 apresenta todas as superfícies em um mesmo sistema de eixos.

Observe que, para seções à montante (isto é, seções mais próximas do início do escoamento), não há distinção entre as superfícies. Isso quer dizer que, para os tempos considerados, as

funções de pertinência da altura nas seções mais próximas do início do escoamento são iguais (observe que a equação (3.53) nos diz que a altura da lâmina d'água depende do tempo apenas a partir de determinado valor de x). A partir de certas seções, passa a haver diferenciação entre as superfícies. Nas situações analisadas, observa-se que essa diferenciação ocorre para elevados valores de x .

Uma outra análise possível é observar a influência da escolha dos números fuzzy R sobre as funções de pertinência obtidas para h pela extensão de Zadeh. Utilizamos novamente os números fuzzy $(0,001; 0,005; 0,01)$, $(0,005; 0,01; 0,02)$ e $(0,01; 0,02; 0,03)$. Em todos os casos, o tempo foi fixado em 30 s. Os resultados obtidos são apresentados na Figura 3.23.

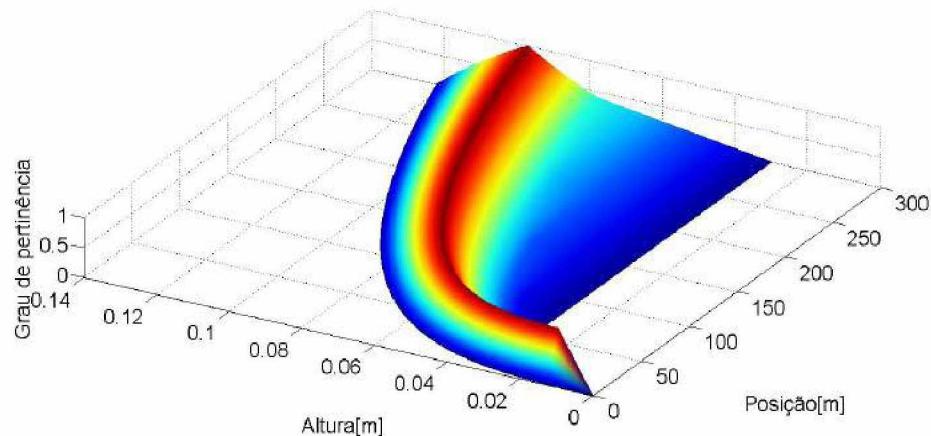


Figura 3.19: Graus de pertinência de h para $t = 30$ s ao longo do rio.

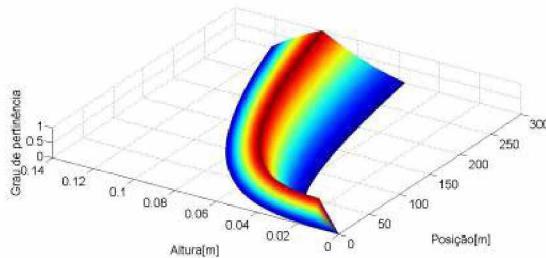


Figura 3.20: Graus de pertinência de h para $t = 60$ s ao longo do rio.

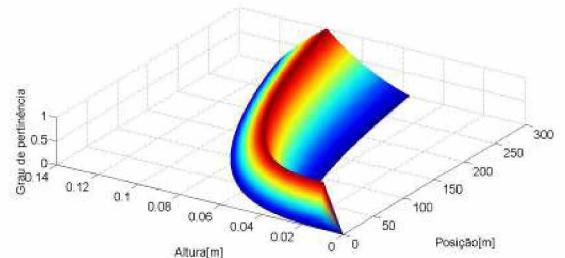


Figura 3.21: Graus de pertinência de h para $t = 120$ s ao longo do rio.

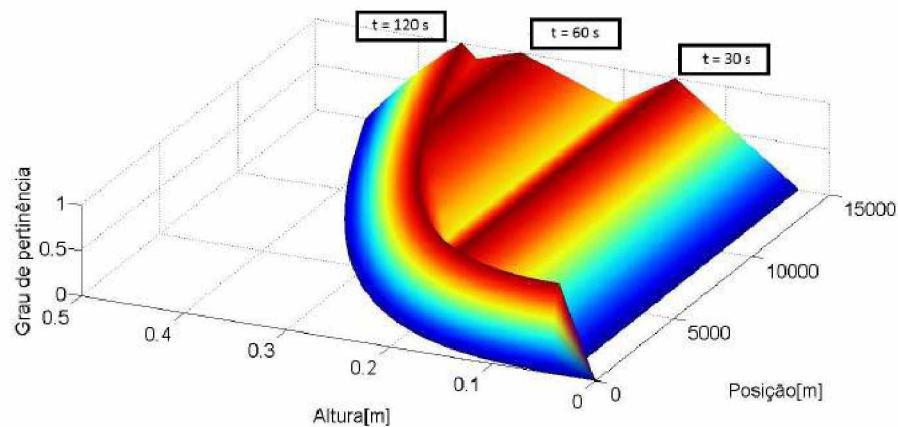


Figura 3.22: Comparativo entre as soluções fuzzy para três tempos distintos.

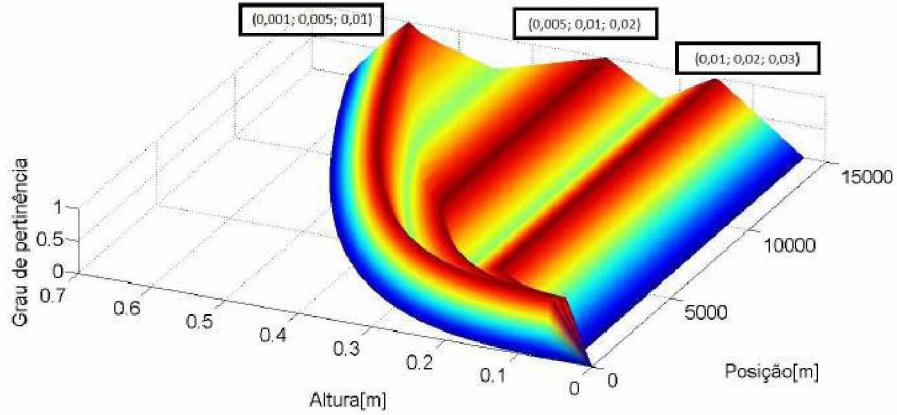


Figura 3.23: Comparativo entre as funções de pertinência de h ao longo das seções para diferentes números fuzzy R .

Na Figura 3.23, a superfície mais à direita corresponde ao número fuzzy $(0,001; 0,005; 0,01)$ e aquela mais à esquerda, ao número fuzzy $(0,01; 0,02; 0,03)$. Assim, podemos notar que, para o número fuzzy $(0,001; 0,005; 0,01)$ as alturas com pertinência 1, para uma determinada seção fixada, são maiores do que aquelas associadas aos números fuzzy $(0,005; 0,01; 0,02)$ e $(0,01; 0,02; 0,03)$.

No próximo capítulo, estudamos as equações de Saint Venant considerando a contribuição lateral de vazão ao fluxo R como um parâmetro fuzzy através de um SBRF.

Capítulo 4

Estudo do Escoamento de Rios através de um SBRF

Suponhamos um rio com canal de seções trapezoidais escoando de forma que a única contribuição lateral de vazão ao fluxo seja proveniente da troca de água entre o canal e o lençol freático adjacente. O escoamento é matematicamente governado pelas equações de Saint Venant. Do ponto de vista prático, pode ser trabalhoso e financeiramente dispendioso avaliar quantitativamente a contribuição lateral do lençol para o escoamento. Seria necessário avaliar a porosidade do leito do rio e adjacências e a diferença entre o nível d'água do escoamento e do nível d'água do lençol. Haveria, portanto, incerteza na determinação do valor dessa contribuição. Neste capítulo, apresentamos a segunda parte do problema central deste trabalho: uma solução numérica para as equações de Saint Venant. O valor da contribuição lateral R é obtido a partir de um SBRF, cujas variáveis de entrada são porosidade e diferença de altura entre o lençol freático e a lâmina d'água. As condições de escoamento são distintas daquelas adotadas no Capítulo 3, uma vez que não são consideradas simplificações no modelo de forma a facilitar a solução das equações. Assim, opta-se pela solução numérica, uma vez que a solução analítica é desconhecida para o caso geral de escoamento.

4.1 Solução Numérica das Equações de Saint Venant

Consideremos um rio de seção transversal trapezoidal, conforme mostrado na Figura 4.1, constante ao longo de todo o canal. Vamos impor condições iniciais para a altura da lâmina d'água h e para a velocidade do escoamento u , conforme mostrado no sistema de equações (4.1).

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = R \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_0 - S_f) - \frac{Ru}{h} \\ h(x, 0) = 1 + \frac{100000}{t} \\ h(0, t) = 1 + \frac{100000}{t} \\ u(x, 0) = \frac{1}{n} [R_h(x, 0)]^{\frac{2}{3}} S_0^{\frac{1}{2}} \\ u(0, t) = \frac{1}{n} [R_h(0, t)]^{\frac{2}{3}} S_0^{\frac{1}{2}} \end{array} \right. , \quad (4.1)$$

em que n é chamado de coeficiente de Manning, geralmente assumido na literatura como 0,020 para canais naturais, R_h é o raio hidráulico, definido como a razão entre a área molhada e o perímetro molhado, h é a altura ou espessura da lâmina d'água, x é a posição ao longo do

eixo do canal, R é a contribuição lateral por unidade de área, t é o tempo de escoamento, g é a aceleração da gravidade, S_0 é a inclinação do canal e S_f é a perda de energia por atrito. Além disso, $x \in [0, l_r]$, em que l_r é o comprimento do rio estudado, e $t \in \mathbb{R}_+$. As condições de fronteira para a altura h foram adotadas após diversos testes empíricos computacionais envolvendo funções de primeiro grau e exponenciais. As funções que geraram soluções mais adequadas para as Equações de Saint Venant são $h(x, 0)$ e $h(0, t)$ conforme apresentado no sistema (4.1). Tais escolhas foram validadas pelo especialista em Hidráulica e Mecânica dos Fluidos, prof. Dr. José Eduardo Alamy Filho da Faculdade de Engenharia Civil da UFU. As condições de fronteira para a velocidade u são provenientes da chamada Equação de Manning, clássica equação conhecida na Hidráulica. Esta equação é utilizada como uma aproximação para essas condições de fronteira. Informações detalhadas sobre a Equação de Manning podem ser obtidas em Fox et al (2010).

Vamos trabalhar as equações de Saint Venant:

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(uh)}{\partial x} = R \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} = g(S_0 - S_f) - \frac{Ru}{h}. \end{cases} \quad (4.2)$$

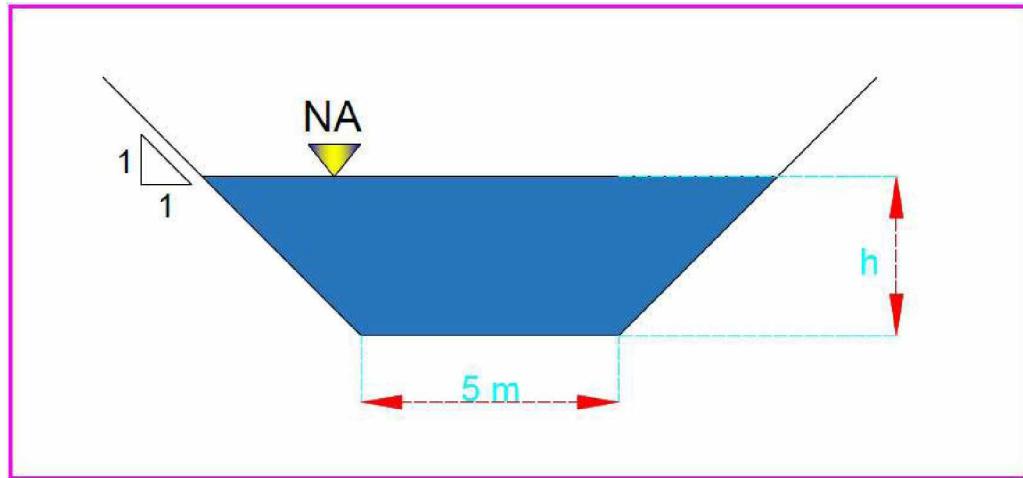


Figura 4.1: Seção transversal do rio estudado.

4.1.1 Discretização das equações e utilização do método numérico

Uma vez que não utilizamos neste problema as mesmas simplificações que utilizamos no Capítulo 3, precisamos resolver numericamente as equações. Se isolarmos as derivadas temporais nas equações do sistema (4.2), obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = R - \frac{\partial(uh)}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial t} = g(S_0 - S_f) - \frac{Ru}{h} - u \frac{\partial u}{\partial x} - g \frac{\partial h}{\partial x}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Discretizando as derivadas relativas a x através das diferenças finitas, temos

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = R - \left(\frac{u^m h^m - u^{m-1} h^{m-1}}{\Delta x} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial t} = g(S_0 - S_f) - \frac{R u^m}{h^m} - u^m \left(\frac{u^m - u^{m-1}}{\Delta x} \right) - g \left(\frac{h^m - h^{m-1}}{\Delta x} \right), \end{cases} \quad (4.4)$$

em que Δx é o espaçamento da malha em relação à posição. Os sobrescritos nas variáveis u e h e na contribuição lateral R se referem ao passo da posição.

Podemos então utilizar o método de Runge-Kutta para resolver o sistema (4.4). Adotamos, inicialmente, o valor constante de 0,05 m/s para a contribuição lateral R . Analisamos um trecho de 2 km de rio, com inclinação suposta constante e igual a $S_0 = 0,03$. Por simplificação, vamos supor ainda que a perda de energia por atrito S_f seja constante e igual a 0,005.

No problema em questão, as funções f_1 e f_2 dependem de y nos passos $m-1$ e m , em que $y^{m-1} = \begin{pmatrix} h^{m-1} \\ u^{m-1} \end{pmatrix}$ e $y^m = \begin{pmatrix} h^m \\ u^m \end{pmatrix}$. Assim,

$$f(t, y^{m-1}, y^m) = \begin{pmatrix} R - \left(\frac{u^m h^m - u^{m-1} h^{m-1}}{\Delta x} \right) \\ g(S_0 - S_f) - \frac{R u^m}{h^m} - u^m \left(\frac{u^m - u^{m-1}}{\Delta x} \right) - g \left(\frac{h^m - h^{m-1}}{\Delta x} \right) \end{pmatrix}. \quad (4.5)$$

Como $y \in \mathbb{R}^2$, segue que $K, L, M, N \in \mathbb{R}^2$.

Para uma j -ésima iteração genérica de tempo e m -ésima iteração genérica de posição, temos

$$K_j^m = \Delta t f(t_j, y_j^{m-1}, y_j^m), \quad (4.6)$$

$$L_j^m = \Delta t f \left(t_j + \frac{\Delta t}{2}, y_j^{m-1} + \frac{K_j^{m-1}}{2}, y_j^m + \frac{K_j^m}{2} \right), \quad (4.7)$$

$$M_j^m = \Delta t f \left(t_j + \frac{\Delta t}{2}, y_j^{m-1} + \frac{L_j^{m-1}}{2}, y_j^m + \frac{L_j^m}{2} \right), \quad (4.8)$$

$$N_j^m = \Delta t f(t_j + \Delta t, y_j^{m-1} + M_j^{m-1}, y_j^m + M_j^m), \quad (4.9)$$

em que Δt é o espaçamento em relação ao tempo e

$$y_j^m + \frac{K_j^m}{2} = \begin{pmatrix} h_j^m \\ u_j^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{K_{1j}^m}{2} \\ \frac{K_{2j}^m}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_j^m + \frac{K_{1j}^m}{2} \\ u_j^m + \frac{K_{2j}^m}{2} \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

$$y_j^m + \frac{L_j^m}{2} = \begin{pmatrix} h_j^m \\ u_j^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{L_{1j}^m}{2} \\ \frac{L_{2j}^m}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_j^m + \frac{L_{1j}^m}{2} \\ u_j^m + \frac{L_{2j}^m}{2} \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

$$y_j^m + M_j^m = \begin{pmatrix} h_j^m \\ u_j^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_{1j}^m \\ M_{2j}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_j^m + M_{1j}^m \\ u_j^m + M_{2j}^m \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Dessa forma, temos que

$$f(t_j, y_j^{m-1}, y_j^m) = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

em que

$$B_1 = R - \left(\frac{u_j^m h_j^m - u_j^{m-1} h_j^{m-1}}{\Delta x} \right),$$

$$B_2 = g(S_0 - S_f) - \frac{R u_j^m}{h_j^m} - u_j^m \left(\frac{u_j^m - u_j^{m-1}}{\Delta x} \right) - g \left(\frac{h_j^m - h_j^{m-1}}{\Delta x} \right);$$

$$f \left(t_j + \frac{\Delta t}{2}, y_j^{m-1} + \frac{K_j^{m-1}}{2}, y_j^m + \frac{K_j^m}{2} \right) = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

em que

$$\begin{aligned} C_1 &= R - \left[\frac{\left(u_j^m + \frac{K_{2j}^m}{2} \right) \left(h_j^m + \frac{K_{1j}^m}{2} \right) - \left(u_j^{m-1} + \frac{K_{2j}^{m-1}}{2} \right) \left(h_j^{m-1} + \frac{K_{1j}^{m-1}}{2} \right)}{\Delta x} \right], \\ C_2 &= g(S_0 - S_f) - \frac{R \left(u_j^m + \frac{K_{2j}^m}{2} \right)}{h_j^m + \frac{K_{1j}^m}{2}} - \left(u_j^m + \frac{K_{2j}^m}{2} \right) \left[\frac{\left(u_j^m + \frac{K_{2j}^m}{2} \right) - \left(u_j^{m-1} + \frac{K_{2j}^{m-1}}{2} \right)}{\Delta x} \right] - g \left[\frac{\left(h_j^m + \frac{K_{1j}^m}{2} \right) - \left(h_j^{m-1} + \frac{K_{1j}^{m-1}}{2} \right)}{\Delta x} \right]; \\ f \left(t_j + \frac{\Delta t}{2}, y_j^{m-1} + \frac{L_j^{m-1}}{2}, y_j^m + \frac{L_j^m}{2} \right) &= \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

em que

$$\begin{aligned} D_1 &= R - \left[\frac{\left(u_j^m + \frac{L_{2j}^m}{2} \right) \left(h_j^m + \frac{L_{1j}^m}{2} \right) - \left(u_j^{m-1} + \frac{L_{2j}^{m-1}}{2} \right) \left(h_j^{m-1} + \frac{L_{1j}^{m-1}}{2} \right)}{\Delta x} \right], \\ D_2 &= g(S_0 - S_f) - \frac{R \left(u_j^m + \frac{L_{2j}^m}{2} \right)}{h_j^m + \frac{L_{1j}^m}{2}} - \left(u_j^m + \frac{L_{2j}^m}{2} \right) \left[\frac{\left(u_j^m + \frac{L_{2j}^m}{2} \right) - \left(u_j^{m-1} + \frac{L_{2j}^{m-1}}{2} \right)}{\Delta x} \right] - g \left[\frac{\left(h_j^m + \frac{L_{1j}^m}{2} \right) - \left(h_j^{m-1} + \frac{L_{1j}^{m-1}}{2} \right)}{\Delta x} \right]; \\ f(t_j + \Delta t, y_j^{m-1} + M_j^{m-1}, y_j^m + M_j^m) &= \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.16)$$

em que

$$\begin{aligned} E_1 &= R - \left[\frac{(u_j^m + M_{2j}^m)(h_j^m + M_{1j}^m) - (u_j^{m-1} + M_{2j}^{m-1})(h_j^{m-1} + M_{1j}^{m-1})}{\Delta x} \right], \\ E_2 &= g(S_0 - S_f) - \frac{R(u_j^m + M_{2j}^m)}{h_j^m + M_{1j}^m} - (u_j^m + M_{2j}^m) \left[\frac{(u_j^m + M_{2j}^m) - (u_j^{m-1} + M_{2j}^{m-1})}{\Delta x} \right] - g \left[\frac{(h_j^m + M_{1j}^m) - (h_j^{m-1} + M_{1j}^{m-1})}{\Delta x} \right]. \end{aligned}$$

Uma vez calculados os vetores K , L , M e N , podemos calcular o vetor y no tempo t_{j+1} para cada valor de posição da malha, isto é,

$$y_{j+1}^m = y_j^m + \frac{1}{6} (K_j^m + 2L_j^m + 2M_j^m + N_j^m). \quad (4.17)$$

4.1.2 Simulações

Usamos o *software* MATLAB para resolver computacionalmente o problema, através de um código de autoria própria.

A Figura 4.2 mostra o comportamento da altura da lâmina d'água em todas as seções transversais para 100 iterações no tempo.

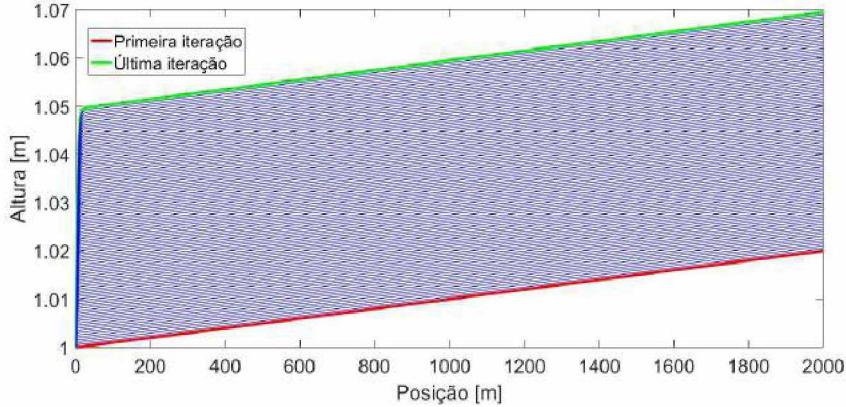


Figura 4.2: Evolução da altura da lâmina d'água para $R = 0,05$ m/s.

Podemos notar um comportamento de crescimento na altura da lâmina d'água em todas as seções ao longo do tempo. Nas seções iniciais do escoamento, há uma variação maior da altura de uma seção para outra. A Figura 4.3 mostra uma aproximação da Figura 4.2 para estas seções iniciais.

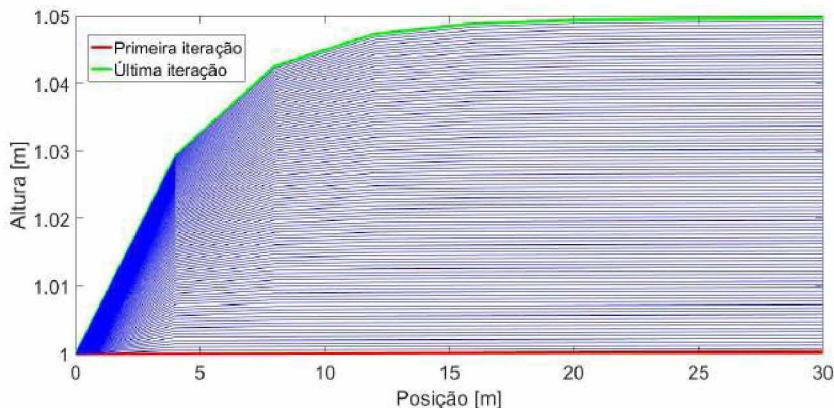


Figura 4.3: Evolução da altura da lâmina d'água em seções iniciais do escoamento para $R = 0,05$ m/s.

Com relação à velocidade do escoamento, podemos observar que a mesma diminui inicialmente ao longo do canal, mas posteriormente aumenta, conforme avançamos nas seções. Em cada seção, observa-se a diminuição da velocidade ao longo do tempo, conforme podemos notar na Figura 4.4.

A Figura 4.5 mostra uma aproximação das curvas que representam a velocidade nas seções iniciais, evidenciando a tendência de diminuição brusca da velocidade do fluxo ao longo destas seções.

Evidentemente, uma alteração no valor de R causa alteração no comportamento de h e u . As Figuras 4.6, 4.7, 4.8 e 4.9 mostram, respectivamente, a evolução da altura da lâmina d'água ao longo do tempo para os valores de R iguais a 0,01 m/s; 0,02 m/s; 0,03 m/s e 0,04 m/s.

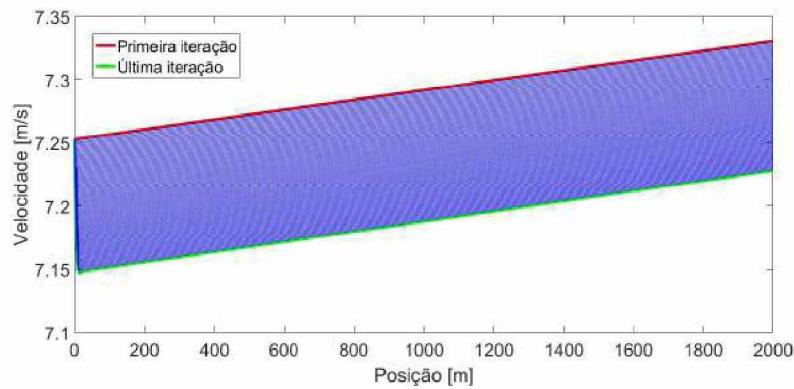


Figura 4.4: Evolução da velocidade do escoamento para $R = 0,05$ m/s.

Podemos notar que o comportamento da altura da lâmina d'água h é similar em todos os casos, apresentando um aumento nos valores observados conforme se aumenta a contribuição lateral R . Este comportamento está em acordo com o esperado do ponto de vista físico: quanto maior a entrada de água no escoamento, maior deve ser a altura da lâmina d'água. Para o caso em que $R = 0,01$ m/s, é possível verificar uma diminuição na altura da lâmina d'água, após certo tempo, nas seções mais à montante do escoamento, conforme mostra a Figura 4.10.

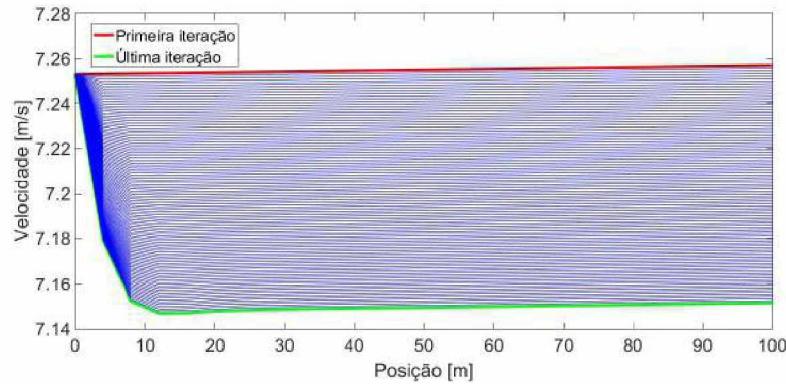


Figura 4.5: Evolução da velocidade de escoamento nas seções iniciais para $R = 0,05$ m/s.

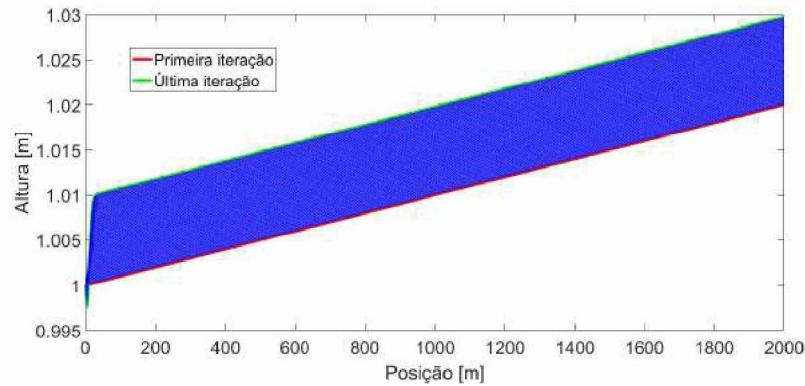


Figura 4.6: Evolução da altura da lâmina d'água para $R = 0,01$ m/s.

Com relação à velocidade, o comportamento observado é bem similar para quase todos os casos, conforme mostrado nas Figuras 4.11, 4.12, 4.13 e 4.14. A velocidade do escoamento tende a aumentar com o passar do tempo em todas as seções, para $R = 0,01$ m/s, $R = 0,02$

m/s e $R = 0,02$ m/s. Para $R = 0,04$ m/s, entretanto, nota-se uma diminuição dos valores de velocidade para todas as seções, sendo esta queda mais acentuada para seções à montante, conforme mostra a Figura 4.15.

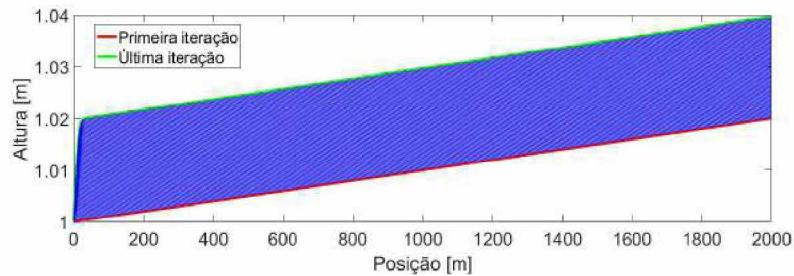


Figura 4.7: Evolução da altura da lâmina d'água para $R = 0,02$ m/s.

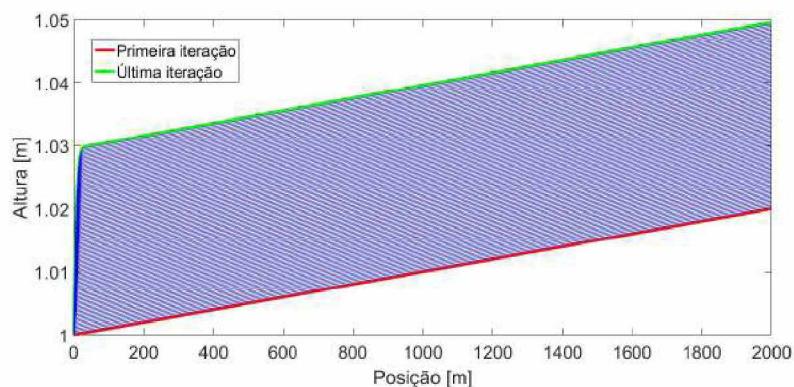


Figura 4.8: Evolução da altura da lâmina d'água para $R = 0,03$ m/s.

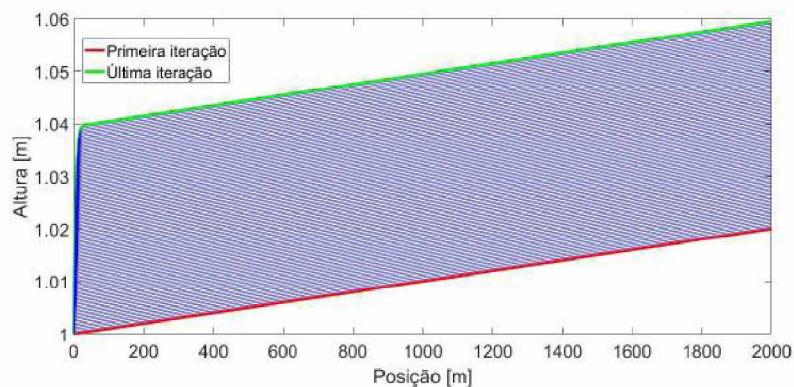


Figura 4.9: Evolução da altura da lâmina d'água para $R = 0,04$ m/s.

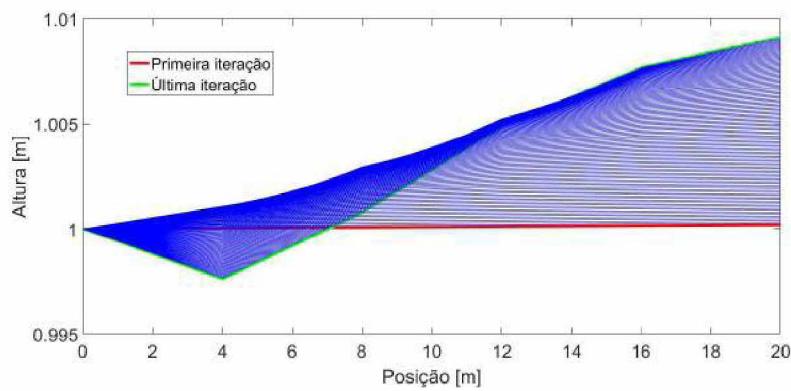


Figura 4.10: Evolução da altura da lâmina d'água nas seções iniciais para $R = 0,01$ m/s.

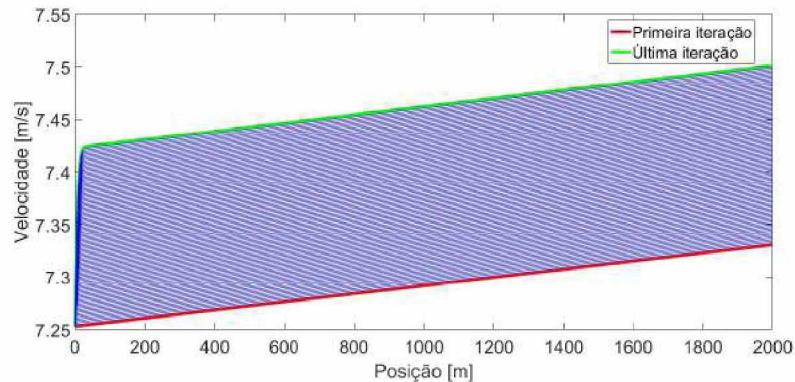


Figura 4.11: Evolução da velocidade de escoamento para $R = 0,01$ m/s.

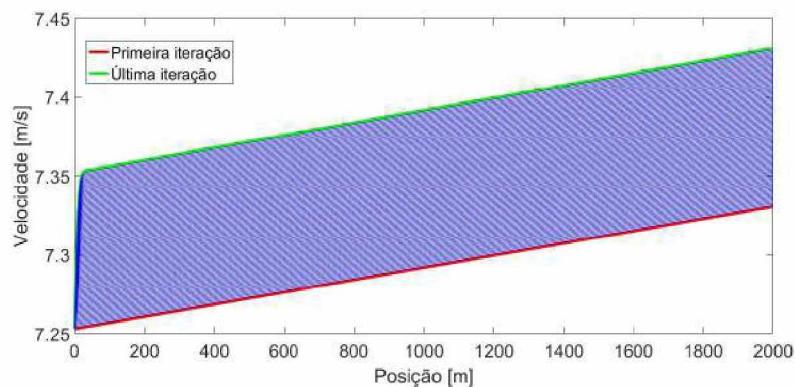


Figura 4.12: Evolução da velocidade de escoamento para $R = 0,02$ m/s.

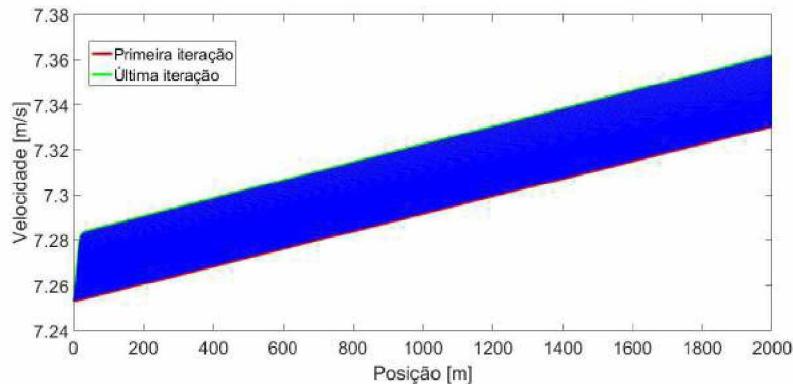


Figura 4.13: Evolução da velocidade de escoamento para $R = 0,03 \text{ m/s}$.

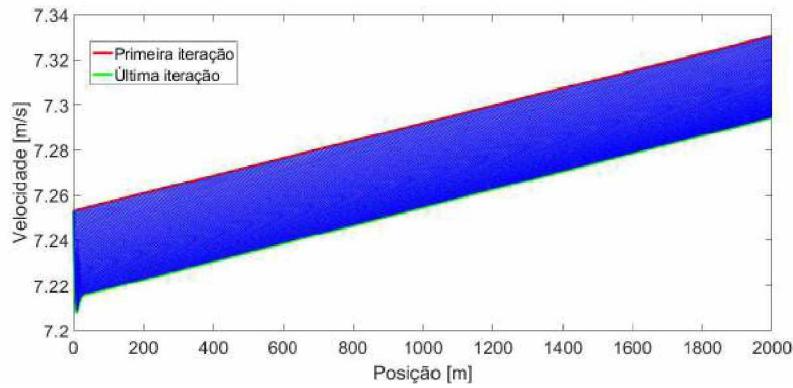


Figura 4.14: Evolução da velocidade de escoamento para $R = 0,04 \text{ m/s}$.

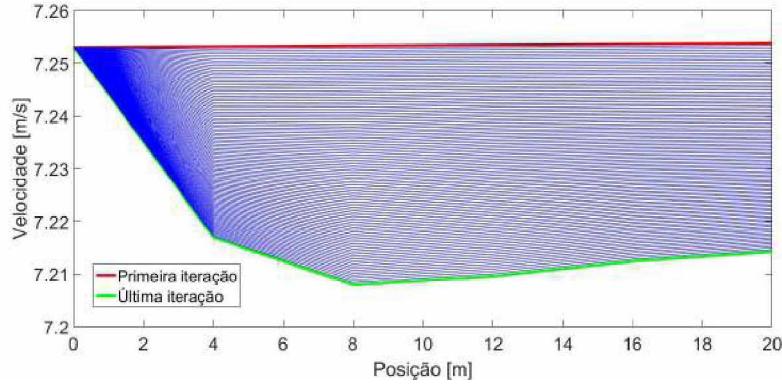


Figura 4.15: Evolução da velocidade de escoamento nas seções iniciais para $R = 0,04 \text{ m/s}$.

4.2 Solução Numérica das Equações de Saint Venant Utilizando um SBRF com S_0 Fixo

Vamos considerar o problema discutido na seção anterior sob uma ótica diferente. O valor da contribuição lateral ao escoamento R é obtido a partir de um SBRF. Em uma situação de escoamento em que a única contribuição lateral ao escoamento é proveniente da troca de água entre o lençol freático e a lâmina d'água do rio, a intensidade dessa contribuição depende basicamente da porosidade do solo sobre o qual o rio escoa e da diferença entre o nível do lençol

e a altura da lâmina d'água. A porosidade pode ser definida como sendo a razão entre o volume de poros do solo e o volume total do solo.

As variáveis de entrada do SBRF são “porosidade” e “diferença entre o nível do lençol freático e a altura da lâmina d’água”. A esta variável nos referimos de maneira simplificada por “diferença de altura”. A variável de saída é “contribuição lateral”. O método de inferência utilizado é o Método de Mamdani e o método de defuzzificação é o Centroide.

Para a variável “porosidade”, os termos linguísticos adotados são “baixa”, “média” e “alta”. A Tabela 4.1 apresenta os níveis zero das funções de pertinência de cada um dos termos linguísticos. Os gráficos das funções de pertinência de cada termo linguístico são apresentados na Figura 4.16.

Porosidade	Nível zero
Baixa	[0,15; 0,25]
Média	[0,20; 0,40]
Alta	[0,35; 0,45]

Tabela 4.1: Termos linguísticos para a variável de entrada “porosidade”.

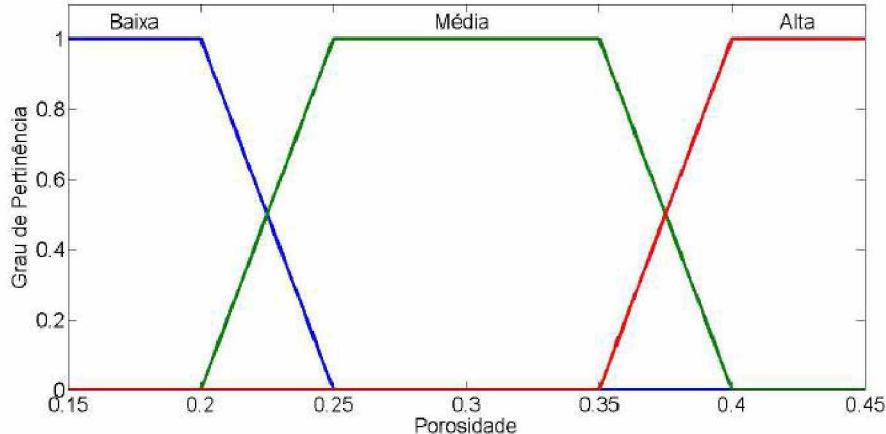


Figura 4.16: Funções de pertinência da variável de entrada “porosidade”.

Para a variável “diferença de altura”, os termos linguísticos são “muito pequena”, “pequena”, “média” e “grande”. A Tabela 4.2 apresenta os termos linguísticos e os respectivos níveis zero de suas funções de pertinência. A Figura 4.17 mostra os gráficos das funções de pertinência.

Diferença de altura	Nível zero
Muito Pequena	[0; 0,04]
Pequena	[0; 1,6]
Média	[0,8; 3,2]
Grande	[2,4; 4,0]

Tabela 4.2: Termos linguísticos para a variável de entrada “diferença de altura”.

Para a variável de saída “contribuição lateral”, são atribuídos os termos linguísticos “muito baixa”, “baixa”, “média” e “alta”, conforme apresentado na Tabela 4.3. Os gráficos das funções de pertinência são mostrados na Figura 4.18.

Uma vez definidas as variáveis linguísticas, seus termos linguísticos e funções de pertinência, a base de regras é construída. A Tabela 4.4 apresenta o conjunto de regras definido.

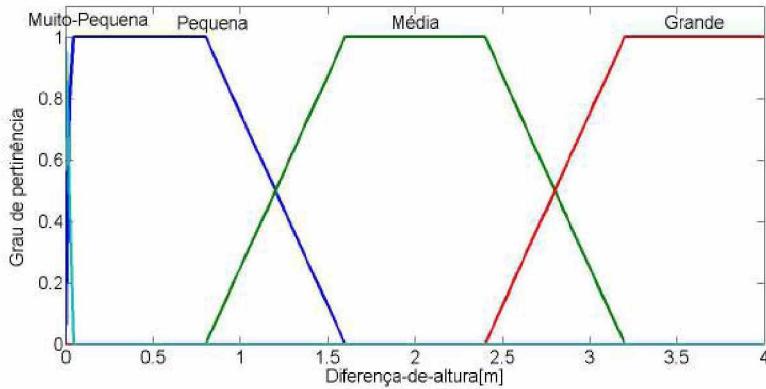


Figura 4.17: Funções de pertinência da variável de entrada “diferença de altura”.

Contribuição lateral	Nível zero
Muito Baixa	[0; 0,00075]
Baixa	[0,0002; 0,03]
Média	[0,015; 0,06]
Alta	[0,045; 0,075]

Tabela 4.3: Termos linguísticos da variável de saída “contribuição lateral”.

É importante salientar que os termos linguísticos, a forma trapezoidal das funções de pertinência e os valores utilizados para a construção das funções são determinados com o auxílio de um especialista na área de Hidráulica e Mecânica dos Fluidos.

Definido o SBRF, o problema a ser resolvido é o mesmo da seção anterior, mas agora o valor da contribuição lateral R é determinado através desse SBRF. Para cada seção transversal do rio, em cada tempo, a contribuição lateral é obtida através da porosidade e diferença de altura para aquela seção. Ou seja, o valor de R é calculado de forma iterativa através do SBRF para cada seção, em cada tempo. Mais uma vez, os cálculos são realizados através do software MATLAB.

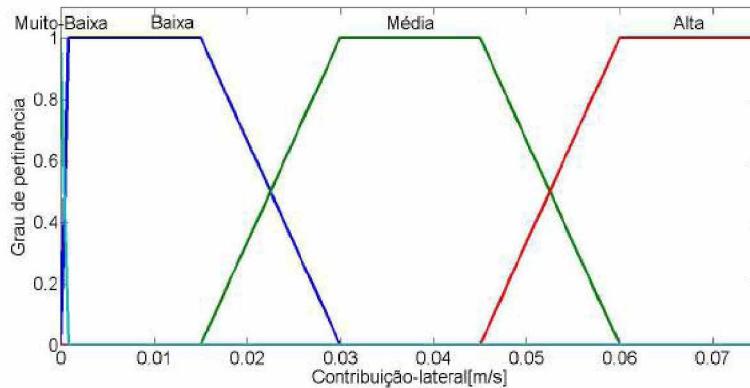


Figura 4.18: Funções de pertinência da variável de saída “contribuição lateral”.

Apresentamos os resultados para diversos valores de porosidade e diferença de altura. Uma vez que a altura da lâmina d’água varia com o tempo e com a posição da seção, fixamos alguns valores de porosidade e de nível do lençol freático. Representamos a porosidade por p e o nível do lençol freático por N_L .

Diferença de altura \ Porosidade	Baixa	Média	Alta
Muito Pequena	Muito Baixa	Muito Baixa	Muito Baixa
Pequena	Baixa	Baixa	Baixa
Média	Baixa	Média	Média
Grande	Média	Alta	Alta

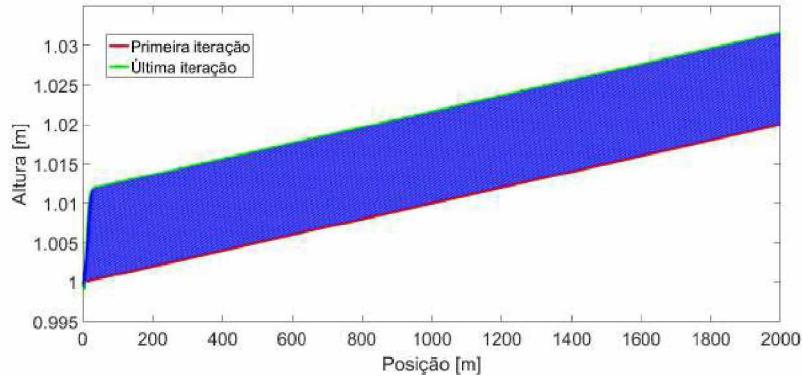
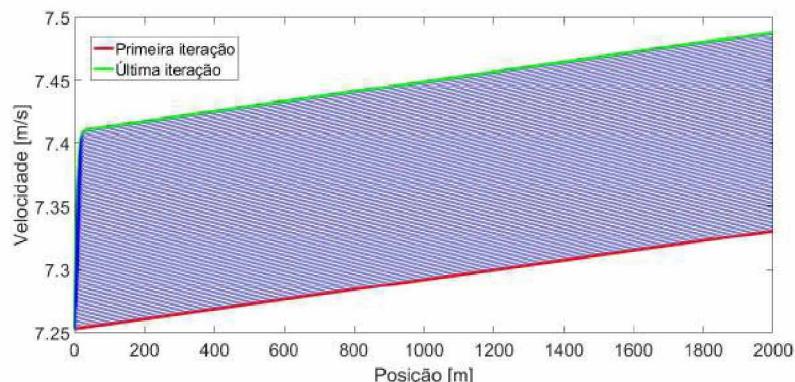
Tabela 4.4: Base de regras para o SBRF.

4.2.1 Valor de porosidade: $p = 0,20$

Fixamos inicialmente a porosidade no valor de 0,20. Variamos o nível do lençol freático amplamente. Para cada seção, através da altura da lâmina d'água no tempo anterior, é calculada a diferença de altura. Tem-se, assim, os valores das duas entradas do SBRF, que são utilizados para obtenção do valor da saída. O número real obtido após a defuzzificação é a contribuição lateral R . Todos os gráficos apresentados apresentam 100 iterações de tempo, salvo dito o contrário.

- $N_L = 1,5$ m

A Figura 4.19 apresenta a evolução da altura da lâmina d'água, para os valores $p = 0,20$ e $N_L = 1,5$ m. A Figura 4.20 mostra os resultados obtidos para a velocidade de escoamento.

Figura 4.19: Evolução da altura da lâmina d'água para $p = 0,20$ e $N_L = 1,5$ m.Figura 4.20: Evolução da velocidade de escoamento para $p = 0,20$ e $N_L = 1,5$ m.

Podemos notar que, conforme o tempo passa, há uma tendência de aumento da altura da lâmina d'água para quase todas as seções. Isso não ocorre apenas para as seções mais à montante, conforme podemos observar na Figura 4.21. Com relação à velocidade, nota-se um aumento em todas as seções com o passar do tempo.

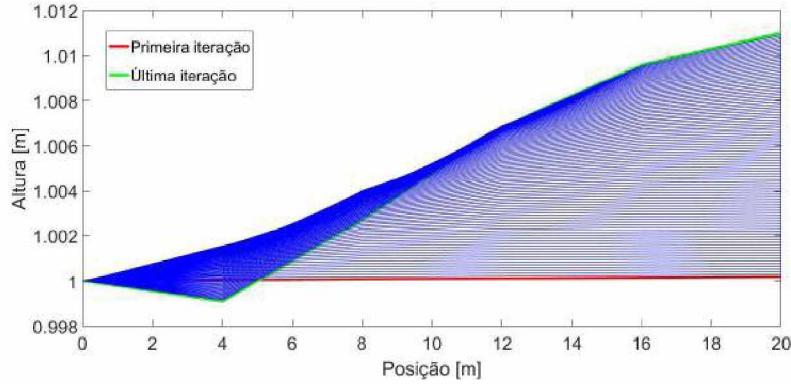


Figura 4.21: Evolução da altura da lâmina d'água nas seções à montante para $p = 0,20$ e $N_L = 1,5$ m.

- $N_L = 2,5$ m

A Figura 4.22 apresenta a evolução da altura da lâmina d'água ao longo do tempo para $p = 0,20$ e $N_L = 2,5$ m. O resultado observado é muito semelhante àquele encontrado para $N_L = 1,5$ m, com aumento da espessura da lâmina para quase todas as seções, exceto aquelas mais à montante do rio, conforme mostra a Figura 4.23.

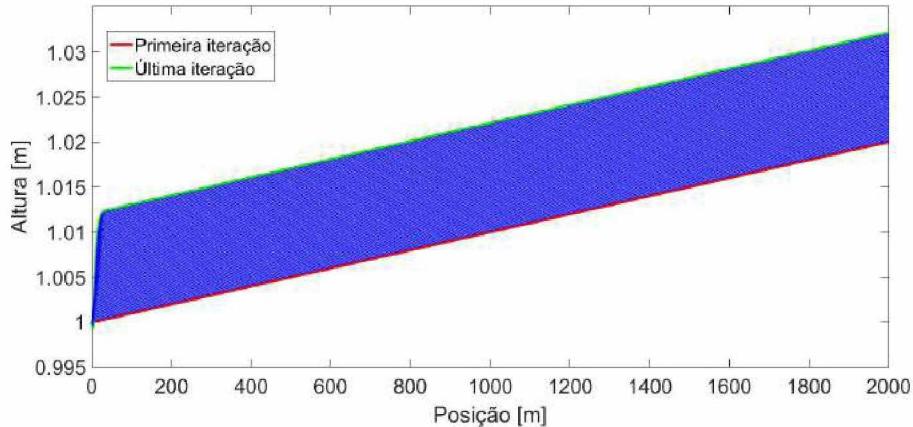


Figura 4.22: Evolução da altura da lâmina d'água para $p = 0,20$ e $N_L = 2,5$ m.

A Figura 4.24 apresenta a evolução da velocidade de escoamento. Também é possível notar um comportamento bastante semelhante àquele observado para a situação em que $N_L = 1,5$ m, ou seja, crescimento da velocidade em todas as seções com o passar do tempo.

- $N_L = 3,5$ m

Para $N_L = 3,5$ m podemos observar um aumento na altura da lâmina d'água com o passar do tempo para todas as seções, conforme mostra a Figura 4.25. Além disso, as alturas máximas atingidas também aumentam, se comparadas com a situação em que $N_L = 2,5$ m.

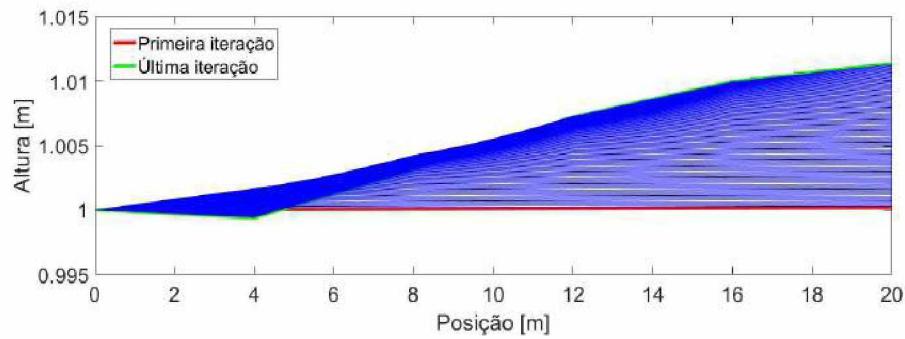


Figura 4.23: Evolução da altura da lâmina d'água nas seções à montante para $p = 0,20$ e $N_L = 2,5$ m.

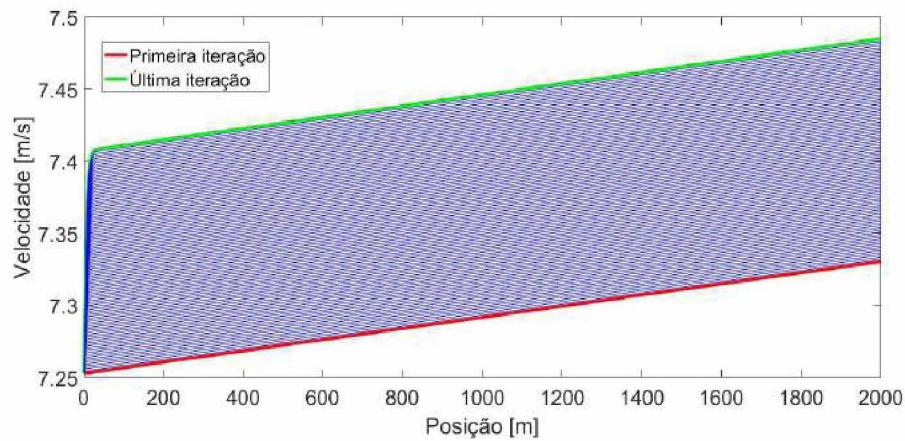


Figura 4.24: Evolução da velocidade de escoamento para $p = 0,20$ e $N_L = 2,5$ m.

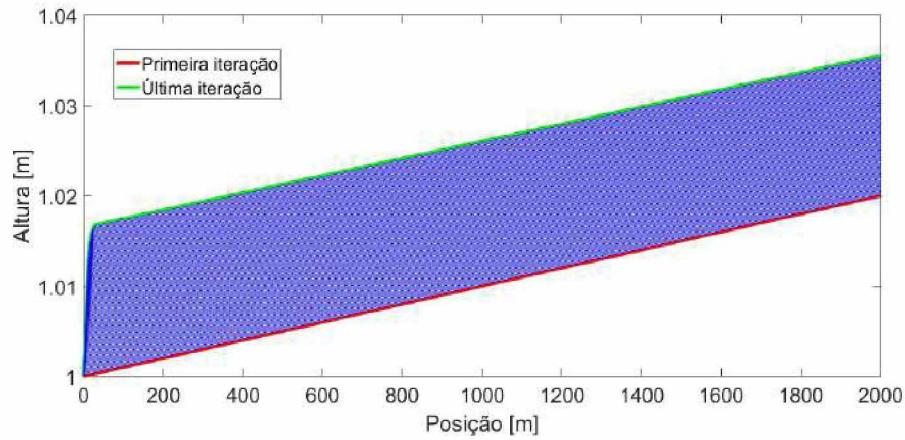


Figura 4.25: Evolução da altura da lâmina d'água para $p = 0,20$ e $N_L = 3,5$ m.

Com relação à velocidade, é possível notar também um aumento dos valores máximos observados, embora o aspecto das curvas que a representa seja o mesmo observado para os casos anteriores. A Figura 4.26 apresenta os resultados obtidos.

- $N_L = 4,5$ m

Para um nível do lençol de $N_L = 4,5$ m, podemos notar um comportamento de aumento da lâmina d'água ao longo do tempo, conforme apresentado na Figura 4.27.

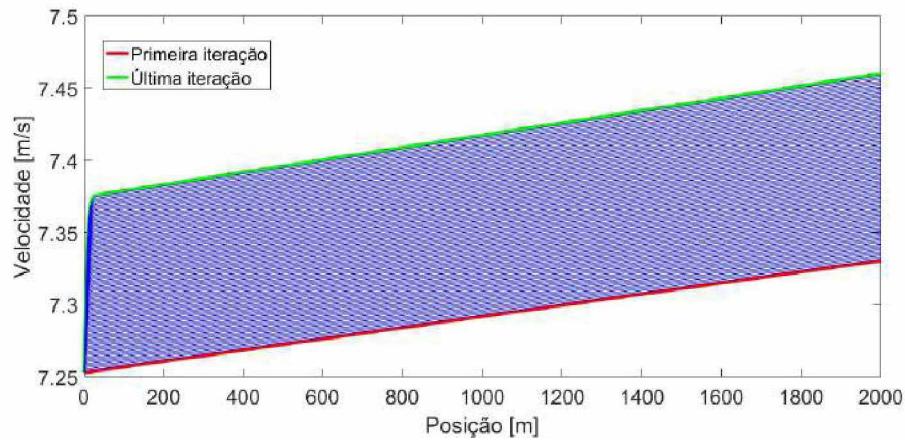


Figura 4.26: Evolução da velocidade de escoamento para $p = 0,20$ e $N_L = 3,5$ m.

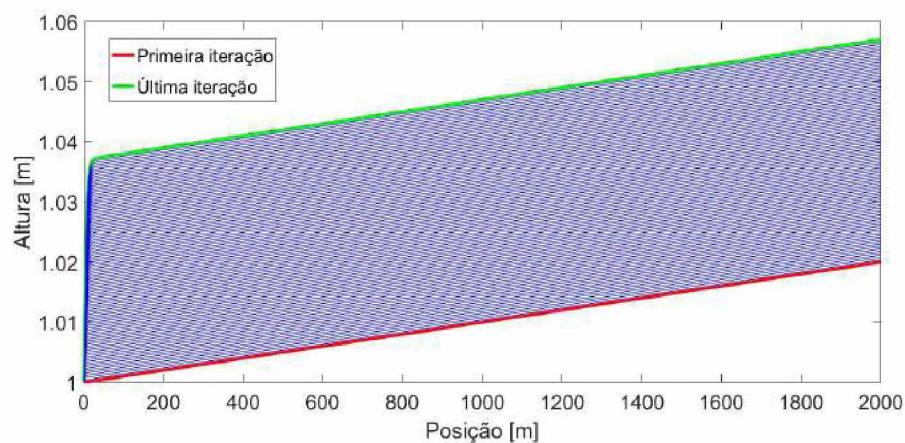


Figura 4.27: Evolução da altura da lâmina d'água para $p = 0,20$ e $N_L = 4,5$ m.

Há uma alteração no comportamento da velocidade de escoamento. A velocidade diminui ao longo do tempo nas seções, ao contrário do que ocorre nas situações anteriores. A Figura 4.28 mostra o resultado obtido.

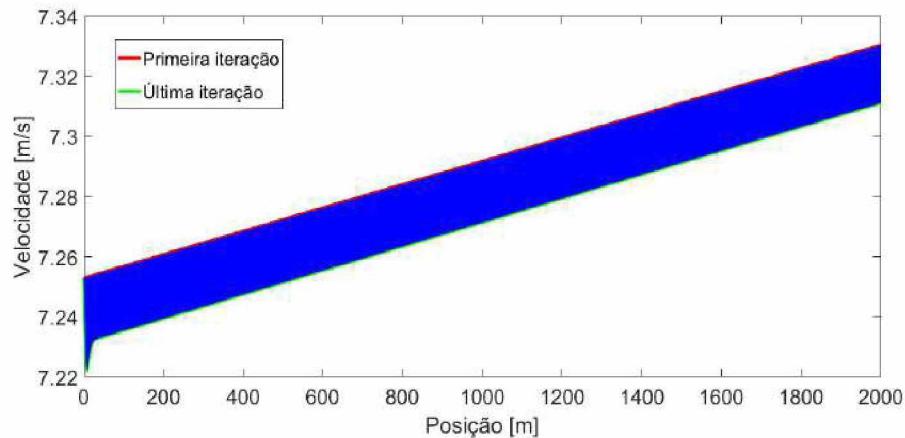


Figura 4.28: Evolução da velocidade de escoamento para $p = 0,20$ e $N_L = 4,5$ m.

4.2.2 Valor de porosidade: $p = 0,30$

Fixamos agora a porosidade em $p = 0,30$ e analisamos o comportamento da altura da lâmina d'água e da velocidade de escoamento para os mesmos valores de nível do lençol adotados para $p = 0,20$.

- $N_L = 1,5 \text{ m}$

Para $p = 0,30$ e $N_L = 1,5 \text{ m}$ observamos uma evolução bastante similar àquela observada para $p = 0,20$ e $N_L = 1,5 \text{ m}$, tanto para a altura da lâmina d'água quanto para a velocidade de escoamento. As Figuras 4.29 e 4.30 mostram os resultados para altura e velocidade, respectivamente.

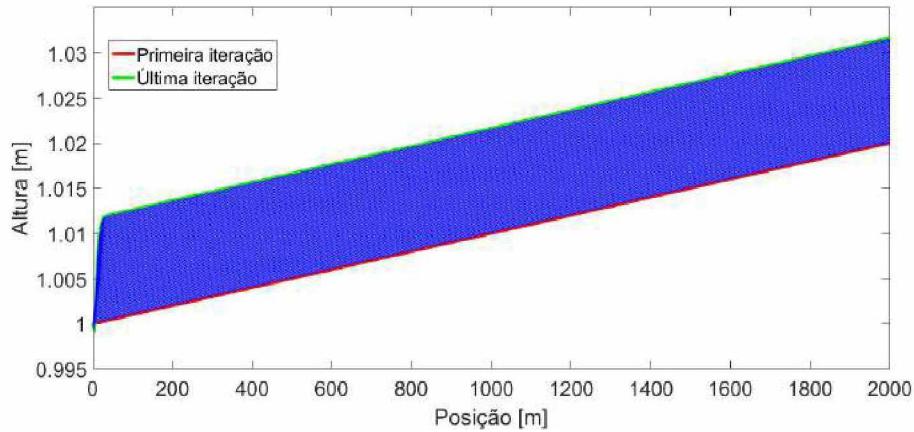


Figura 4.29: Evolução da altura da lâmina d'água para $p = 0,30$ e $N_L = 1,5 \text{ m}$.

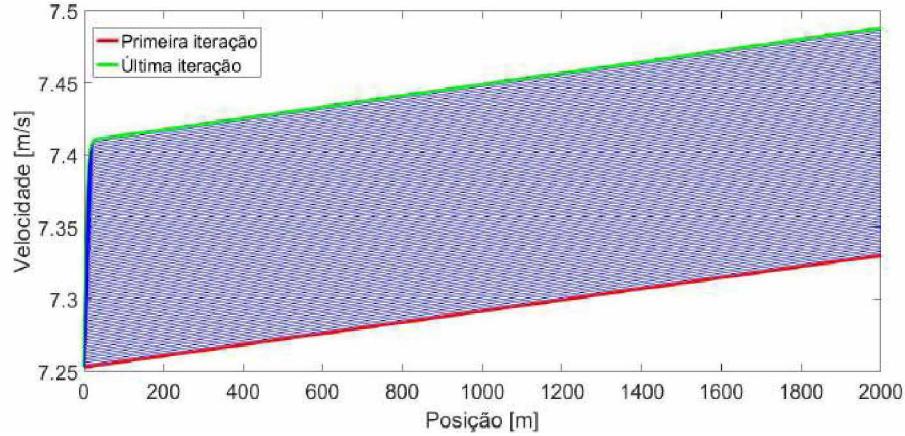


Figura 4.30: Evolução da velocidade de escoamento para $p = 0,30$ e $N_L = 1,5 \text{ m}$.

Mais uma vez, notamos uma diminuição na altura da lâmina d'água nas seções mais à montante, conforme mostrado na Figura 4.31.

- $N_L = 2,5 \text{ m}$

Fixamos agora os valores $p = 0,30$ e $N_L = 2,5 \text{ m}$. A altura da lâmina d'água cresce ao longo do tempo em todas as seções, conforme apresentado na Figura 4.32, indicando possivelmente valores elevados para a contribuição lateral R . A velocidade tende a diminuir em todas as

seções, sendo esta queda mais acentuada nas seções à montante, como podemos observar na Figura 4.33.

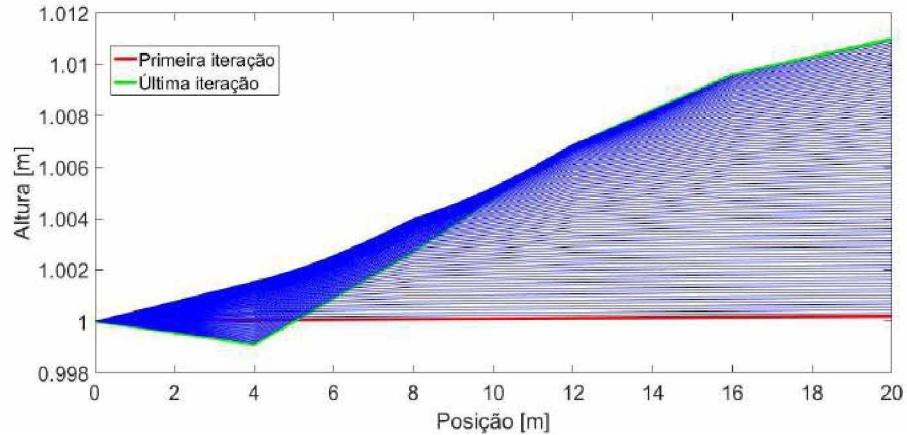


Figura 4.31: Evolução da altura da lâmina d'água nas seções iniciais para $p = 0,30$ e $N_L = 1,5$ m.

- $N_L = 3,5$ m

Fixando $p = 0,30$ e $N_L = 3,5$ m, notamos um comportamento para altura da lâmina d'água e velocidade de escoamento semelhantes àqueles observados na situação em que $p = 0,30$ e $N_L = 2,5$ m. Entretanto, podemos notar incrementos nos valores da altura, conforme mostrado na Figura 4.34 e uma maior variação nos valores da velocidade de escoamento, conforme apresentado na Figura 4.35.

- $N_L = 4,5$ m

Consideramos, por fim, $N_L = 4,5$ m. Para a altura da lâmina d'água, observamos uma evolução bem semelhante à situação anterior, com $N_L = 3,5$ m, mas com um aumento considerável nas alturas atingidas pela lâmina. Este fato pode ser observado na Figura 4.36. Com relação à velocidade, há uma diminuição dos valores ao longo do tempo para todas as seções observadas, conforme apresentado na Figura 4.37.

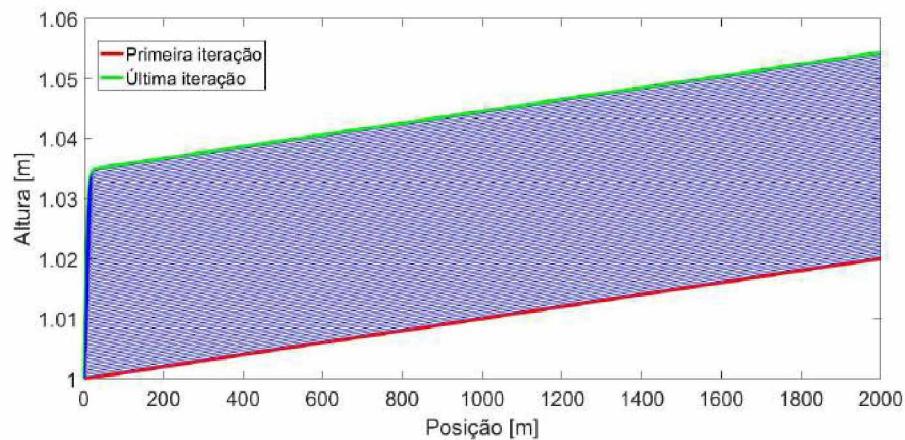


Figura 4.32: Evolução da altura da lâmina d'água para $p = 0,30$ e $N_L = 2,5$ m.

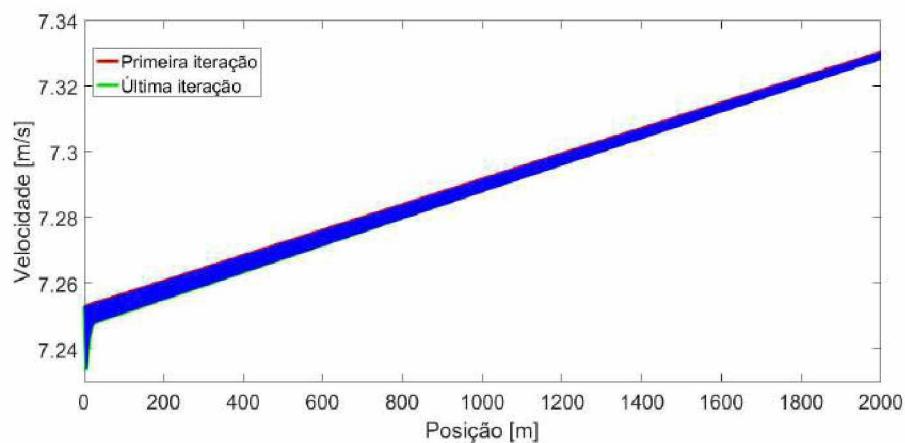


Figura 4.33: Evolução da velocidade de escoamento para $p = 0,30$ e $N_L = 2,5$ m.

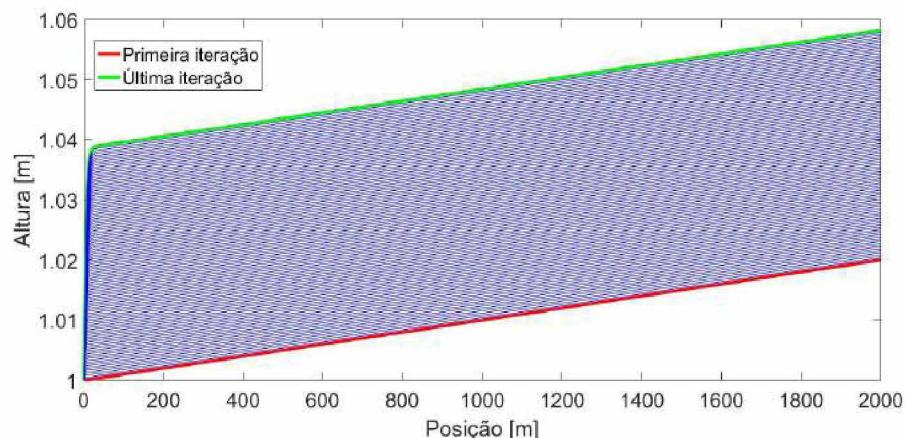


Figura 4.34: Evolução da altura da lâmina d'água para $p = 0,30$ e $N_L = 3,5$ m.

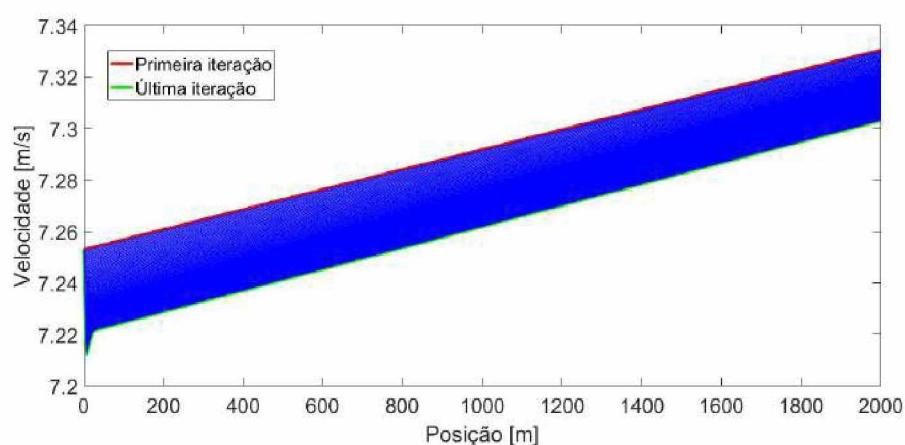


Figura 4.35: Evolução da velocidade de escoamento para $p = 0,30$ e $N_L = 3,5$ m.

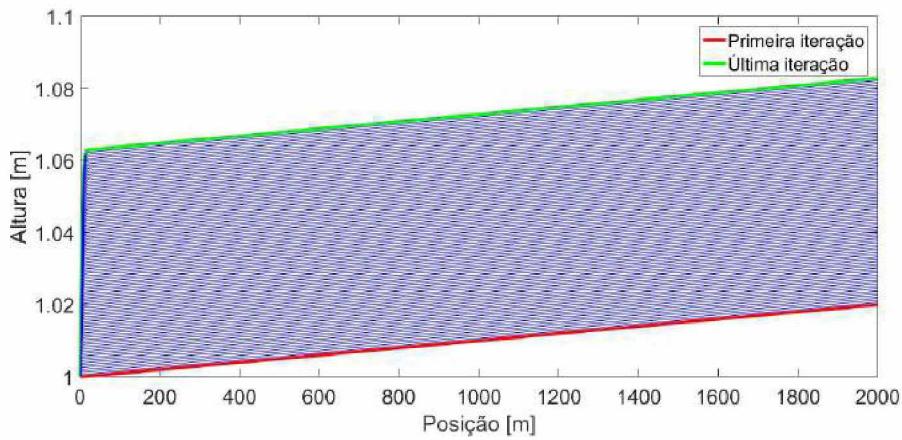


Figura 4.36: Evolução da altura da lâmina d’água para $p = 0,30$ e $N_L = 4,5$ m.

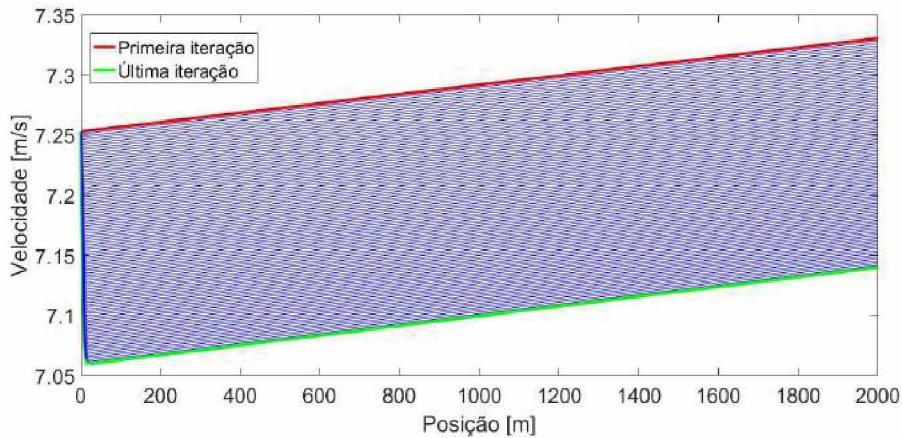


Figura 4.37: Evolução da velocidade de escoamento para $p = 0,30$ e $N_L = 4,5$ m.

4.2.3 Evolução dos valores da contribuição lateral R

Avaliamos a seguir a variação dos valores da contribuição lateral R para cada situação estudada na seção anterior.

Valor de porosidade: $p = 0,20$

Para a porosidade fixada em $p = 0,20$, obtemos os comportamentos de R conforme apresentado nas Figuras 4.38, 4.39, 4.40 e 4.41, para valores de N_L iguais a 1,5 m, 2,5 m, 3,5 m e 4,5 m, respectivamente.

Notamos que, para os casos em $N_L = 1,5$ m e $N_L = 4,5$ m, o valor da contribuição lateral se mantém constante. Para a situação $N_L = 2,5$ m, observamos um aumento do valor de R ao longo do tempo. Em contrapartida, quando $N_L = 3,5$ m, há diminuição do valor de R com o passar do tempo. Além disso, mesmo considerando-se as variações observadas, podemos notar que o valor de R aumenta significativamente quando N_L aumenta, o que está de acordo com o modelo físico proposto, uma vez que quanto maior o valor do nível do lençol, maior deve ser a diferença de altura entre este nível e a altura da lâmina d’água. Esta maior diferença, para uma porosidade constante, resulta em uma maior transferência de água do lençol para o rio.

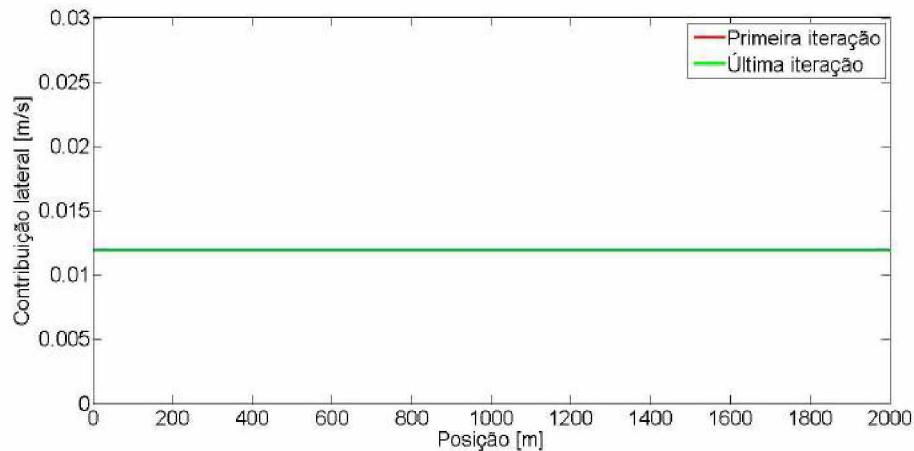


Figura 4.38: Evolução da contribuição lateral para $p = 0,20$ e $N_L = 1,5$ m.

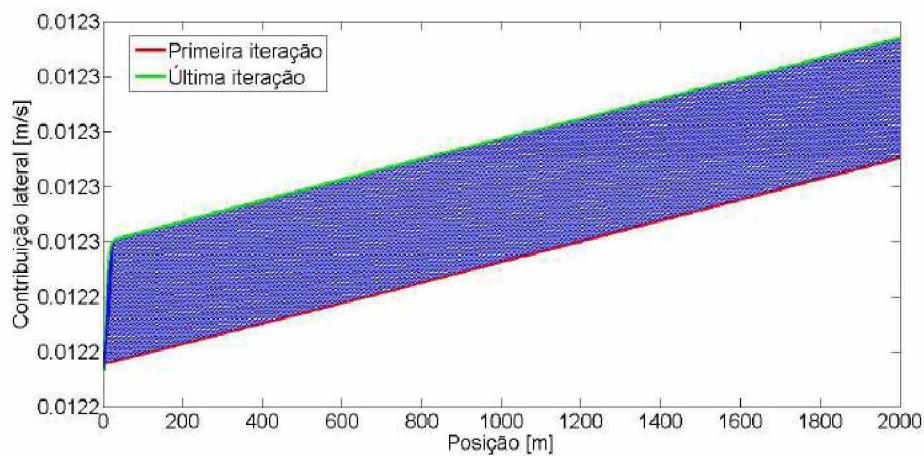


Figura 4.39: Evolução da contribuição lateral para $p = 0,20$ e $N_L = 2,5$ m.

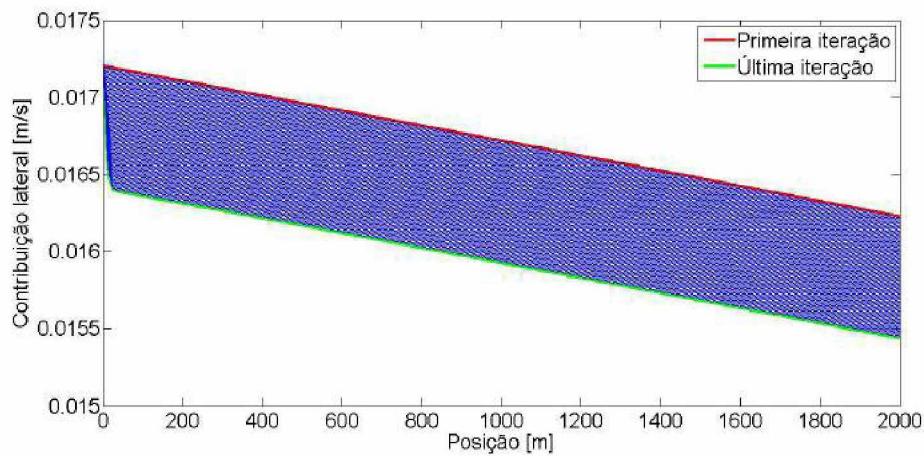


Figura 4.40: Evolução da contribuição lateral para $p = 0,20$ e $N_L = 3,5$ m.

Valor de porosidade: $p = 0,30$

Fixamos a porosidade em $p = 0,30$. As variações de R são apresentadas nas Figuras 4.42, 4.43, 4.44 e 4.45, para valores de N_L iguais a 1,5 m, 2,5 m, 3,5 m e 4,5 m, respectivamente.

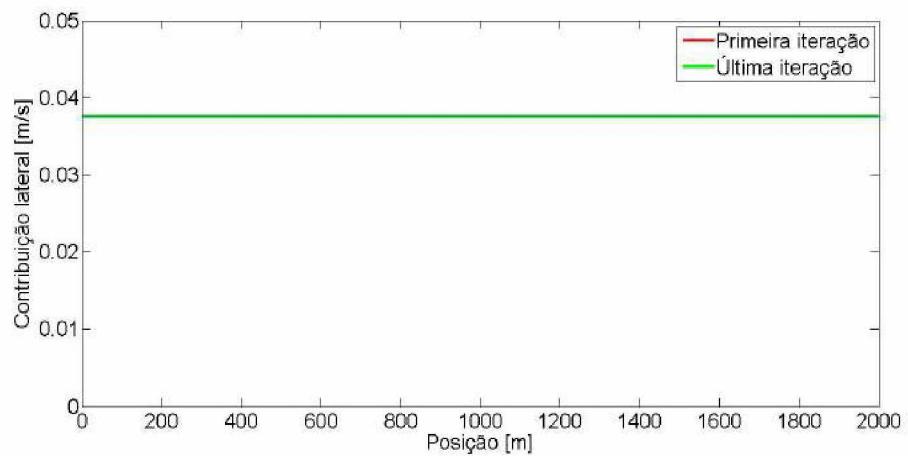


Figura 4.41: Evolução da contribuição lateral para $p = 0,20$ e $N_L = 4,5$ m.

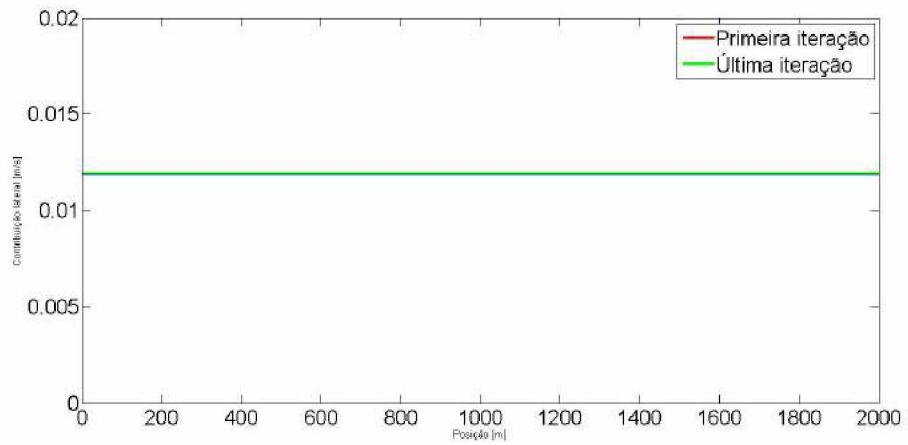


Figura 4.42: Evolução da contribuição lateral para $p = 0,30$ e $N_L = 1,5$ m.

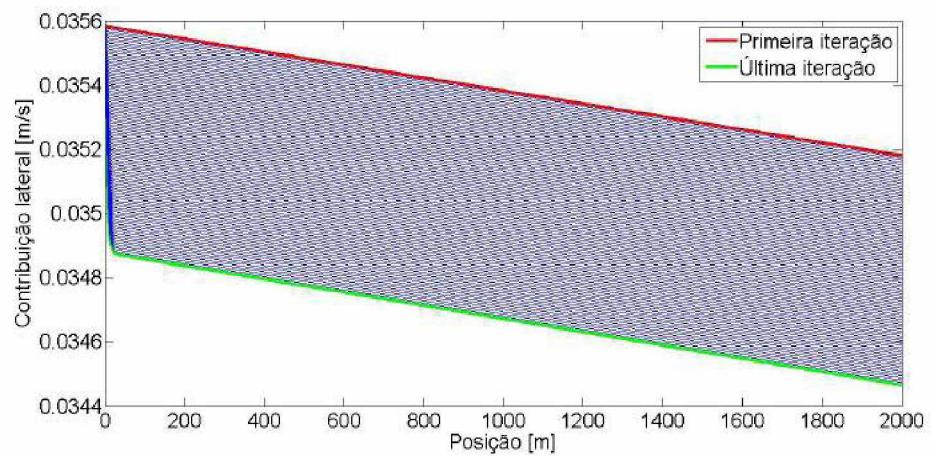


Figura 4.43: Evolução da contribuição lateral para $p = 0,30$ e $N_L = 2,5$ m.

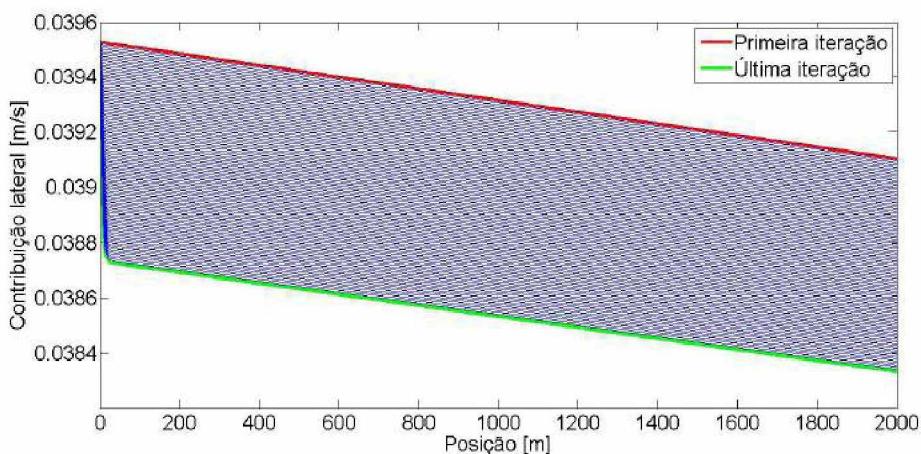


Figura 4.44: Evolução da contribuição lateral para $p = 0,30$ e $N_L = 3,5$ m.

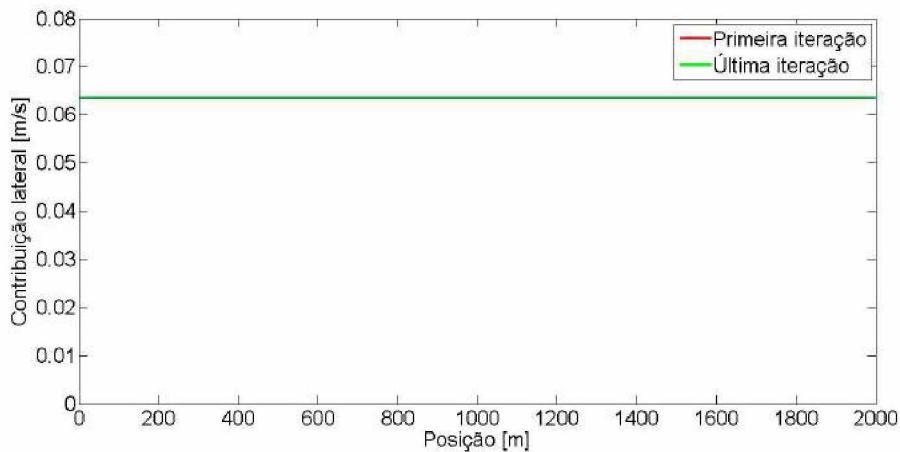


Figura 4.45: Evolução da contribuição lateral para $p = 0,30$ e $N_L = 4,5$ m.

Assim como no caso de $p = 0,20$, observa-se um valor de R constante para $N_L = 1,5$ m e $N_L = 4,5$ m. Para $N_L = 2,5$ m e $N_L = 3,5$ m, notamos uma diminuição dos valores de R ao longo do tempo. Também se mantém a tendência de aumento na contribuição lateral para um aumento no nível do lençol. Além disso, se compararmos o resultado para cada valor de N_L com o resultado obtido para $p = 0,20$ com o mesmo valor, notamos que os valores de R são maiores para $p = 0,30$ do que para $p = 0,20$.

4.2.4 Discussão dos resultados

Após as variações feitas nos valores das variáveis de entrada do SBRF, podemos notar as consequentes variações na solução das equações de Saint Venant. Naturalmente, conforme variarmos as variáveis de entrada, há um reflexo no valor obtido para a variável de saída, o que influencia diretamente no comportamento da altura da lâmina d'água e da velocidade de escoamento.

Um ponto bastante claro a ser destacado é a influência que os aumentos do nível d'água do lençol e da porosidade exercem sobre o valor da contribuição lateral. Aumentos nos valores das variáveis de entrada acarretam em aumentos nos valores da variável de saída. Além disso, os resultados obtidos para altura e velocidade estão em consonância com aqueles obtidos sem o SBRF, se observarmos os valores de contribuição lateral encontrados.

4.3 Solução Numérica das Equações de Saint Venant Utilizando um SBRF com S_0 Variável

Vamos estudar, por fim, a influência do parâmetro S_0 sobre a solução das equações de Saint Venant. Para isso, encontramos tal solução utilizando a inclinação do leito variável ao longo de sua extensão. Na seção anterior, S_0 foi fixado em 0,03. Aplicamos uma pequena perturbação neste valor. A partir da função que gera números aleatórios no software MATLAB, obtemos um vetor para S_0 , com todas as coordenadas variando entre 0,029 e 0,031. A Figura 4.46 mostra em um gráfico os valores de S_0 para cada seção. A partir daí, em cada seção, utilizamos um valor diferente para S_0 e resolvemos o sistema de equações de Saint Venant da mesma forma que na seção anterior, inclusive com as mesmas condições de fronteira. Apresentamos a seguir os resultados obtidos para alguns valores fixados de porosidade e nível do lençol freático.

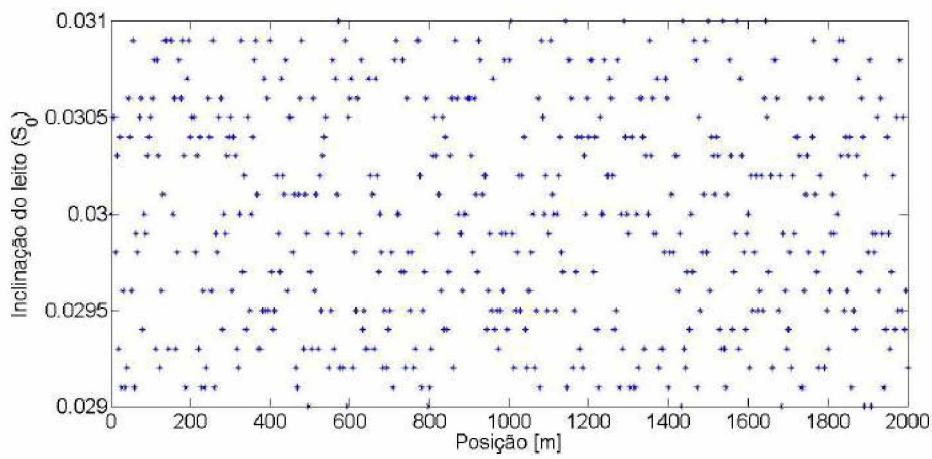


Figura 4.46: Valores da inclinação do leito S_0 por seção.

4.3.1 Valor de porosidade: $p = 0,20$

Avaliamos os comportamentos da altura e da velocidade, com a porosidade fixada em $p = 0,20$, para os valores de nível do lençol freático iguais a $N_L = 1,5$ m, $N_L = 2,5$ m, $N_L = 3,5$ m e $N_L = 4,5$ m.

- $N_L = 1,5$ m

Para as condições de $N_L = 1,5$ m e $p = 0,20$, observamos um comportamento bastante variável tanto para a altura da lâmina d'água quanto para a velocidade, conforme mostrado pelas Figuras 4.47 e 4.48, respectivamente.

As Figuras 4.49 e 4.50 mostram a evolução da altura da lâmina d'água e da velocidade, respectivamente, para 200 iterações. É possível notar que a influência maior da variação de S_0 sobre o comportamento da altura e da velocidade é maior nas primeiras iterações de tempo. Conforme o tempo passa, a altura da lâmina d'água e da velocidade tendem a ter um comportamento mais regular.

$N_L = 2,5$ m

Fixando o nível do lençol em 2,5 m e com a porosidade definida em 0,20, obtemos uma evolução da altura da lâmina d'água semelhante àquele obtido para $N_L = 1,5$ m. Porém, notamos um pequeno aumento nos valores de altura encontrados. A Figura 4.51 mostra o resultado. Com

relação à velocidade de escoamento, também obtemos um resultado semelhante, com uma pequena variação nos valores encontrados. A Figura 4.52 apresenta os gráficos de velocidade.

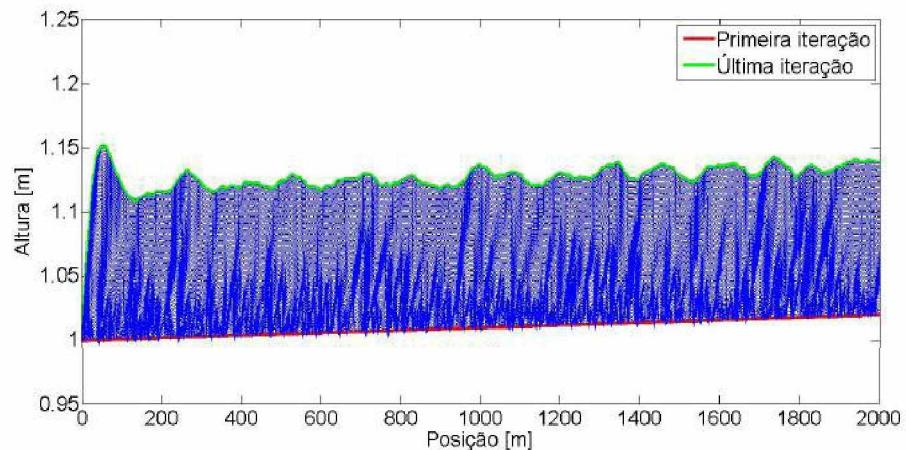


Figura 4.47: Evolução de altura da lâmina d'água para $p = 0,20$ e $N_L = 1,5$ m com inclinação do leito variável.

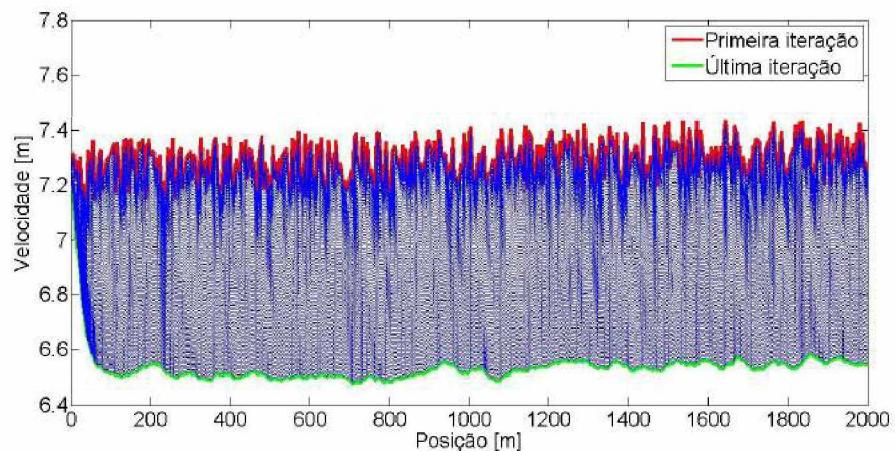


Figura 4.48: Evolução de velocidade de escoamento para $p = 0,20$ e $N_L = 1,5$ m com inclinação do leito variável.

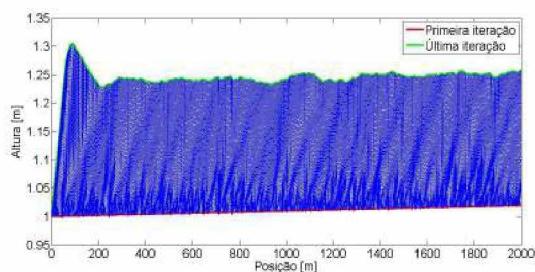


Figura 4.49: Evolução da altura para $p = 0,20$ e $N_L = 1,5$ m com inclinação do leito variável para 200 iterações.

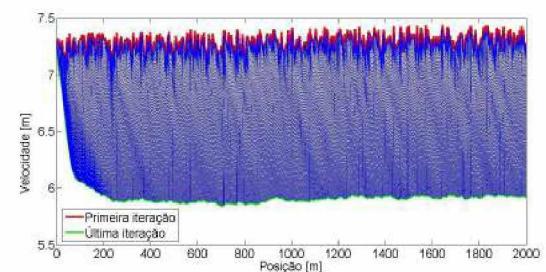


Figura 4.50: Evolução de velocidade para $p = 0,20$ e $N_L = 1,5$ m com inclinação do leito variável para 200 iterações.

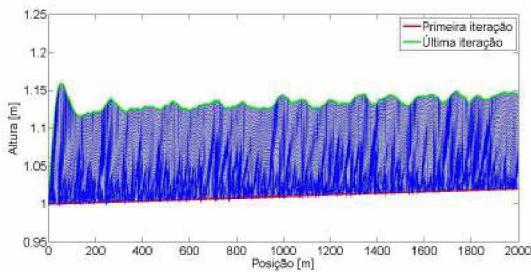


Figura 4.51: Evolução da altura para $p = 0,20$ e $N_L = 2,5$ m com inclinação do leito variável.

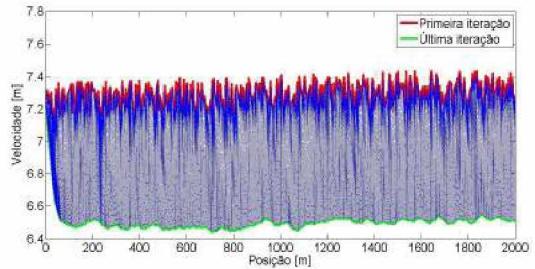


Figura 4.52: Evolução da velocidade para $p = 0,20$ e $N_L = 2,5$ m com inclinação do leito variável.

- $N_L = 3,5$ m

Para o nível do lençol fixado em $N_L = 3,5$ m, notamos comportamento semelhante àquele observado para a situação anterior. Entretanto, há acréscimo nos valores finais de altura da lâmina d'água e uma redução nos valores finais de velocidade, conforme mostram as Figuras 4.53 e 4.54, respectivamente.

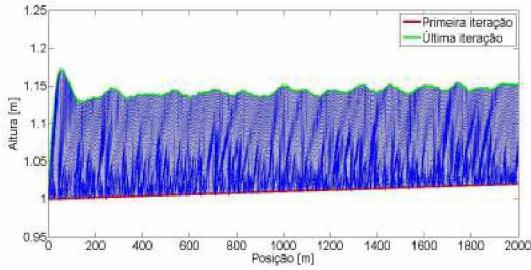


Figura 4.53: Evolução da altura para $p = 0,20$ e $N_L = 3,5$ m com inclinação do leito variável.

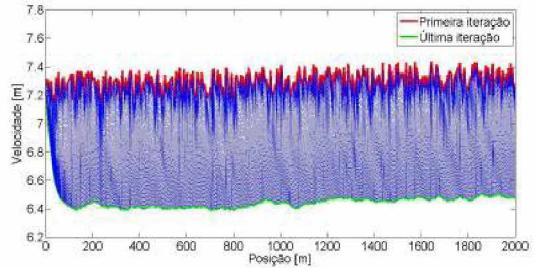


Figura 4.54: Evolução da velocidade para $p = 0,20$ e $N_L = 3,5$ m com inclinação do leito variável.

Mais uma vez, é possível notar a tendência de regularização no comportamento de altura da lâmina d'água e velocidade de escoamento conforme o tempo passa.

- $N_L = 4,5$ m

Para o nível do lençol fixado em 4,5 m, obtemos os resultados apresentados na Figuras 4.55 e 4.56. Para a altura da lâmina d'água, encontramos um comportamento muito semelhante às situações anteriores, com maiores incrementos nos valores finais. Para a velocidade, há uma diminuição maior nos valores finais.

4.3.2 Valor da porosidade: $p = 0,30$

Fixamos agora a porosidade em 0,30 e variamos o nível do lençol freático. Os resultados encontrados são bastante semelhantes àqueles encontrados para o caso em $p = 0,20$. As diferenças existem nos valores finais encontrados. Os valores de altura da lâmina d'água para a última iteração de tempo são maiores para $p = 0,30$, ao passo que os valores de velocidade do escoamento são menores para este valor de porosidade.

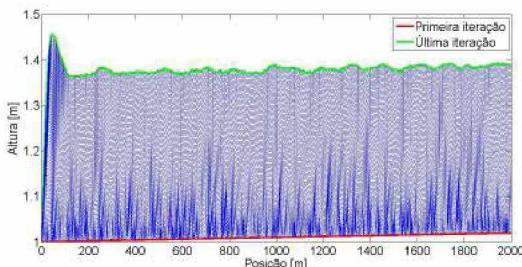


Figura 4.55: Evolução da altura para $p = 0,20$ e $N_L = 4,5$ m com inclinação do leito variável.

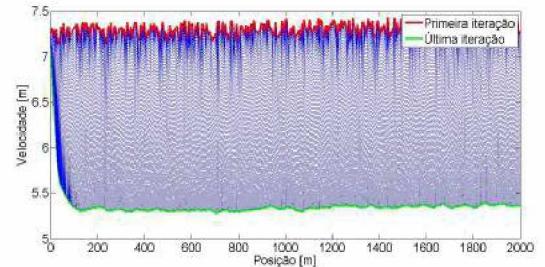


Figura 4.56: Evolução da velocidade para $p = 0,20$ e $N_L = 4,5$ m com inclinação do leito variável.

- $N_L = 1,5$ m

Para um nível do lençol freático igual a 1,5 m, os resultados obtidos são mostrados pelas Figuras 4.57 e 4.58.

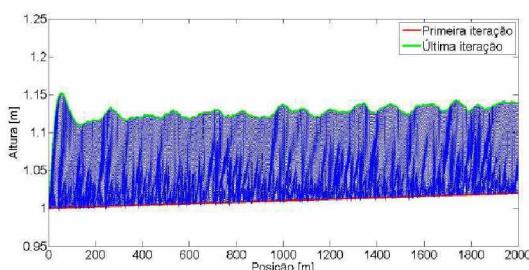


Figura 4.57: Evolução da altura para $p = 0,30$ e $N_L = 1,5$ m com inclinação do leito variável.

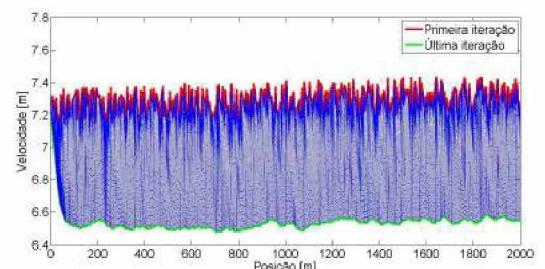


Figura 4.58: Evolução da velocidade para $p = 0,30$ e $N_L = 1,5$ m com inclinação do leito variável.

Nesta situação, os resultados encontrados são idênticos àqueles observados para $p = 0,20$ e $N_L = 1,5$ m.

- $N_L = 2,5$ m

Para um nível do lençol freático igual a 2,5 m, os resultados obtidos são mostrados pelas Figuras 4.59 e 4.60. Se compararmos os resultados obtidos neste caso com aqueles encontrados quando $p = 0,20$ e $N_L = 2,5$ m, notamos que os resultados são bastante similares. Entretanto, há um considerável aumento nos valores observados para a altura da lâmina d'água e uma diminuição nos valores de velocidade.

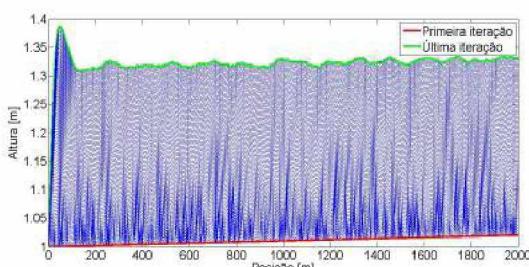


Figura 4.59: Evolução da altura para $p = 0,30$ e $N_L = 2,5$ m com inclinação do leito variável.

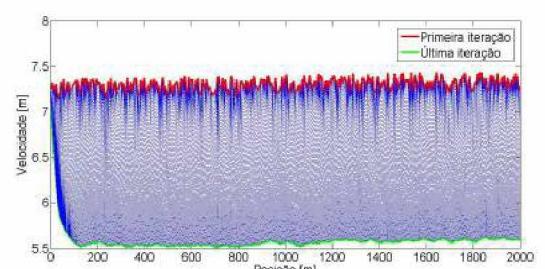


Figura 4.60: Evolução da velocidade para $p = 0,30$ e $N_L = 2,5$ m com inclinação do leito variável.

- $N_L = 3,5$ m

Para um nível do lençol freático igual a 3,5 m, os resultados obtidos são mostrados pelas Figuras 4.61 e 4.62. Mais uma vez, notamos um aumento nos valores encontrados para a altura da lâmina d'água e uma diminuição nos valores de velocidade, em comparação com os valores observados para $p = 0,20$ e $N_L = 3,5$ m.

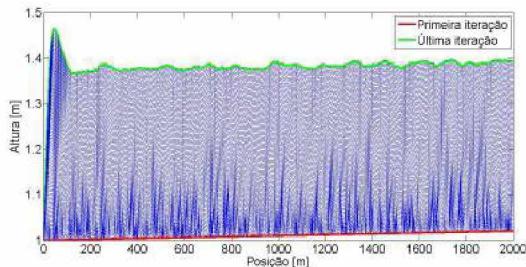


Figura 4.61: Evolução da altura para $p = 0,30$ e $N_L = 3,5$ m com inclinação do leito variável.

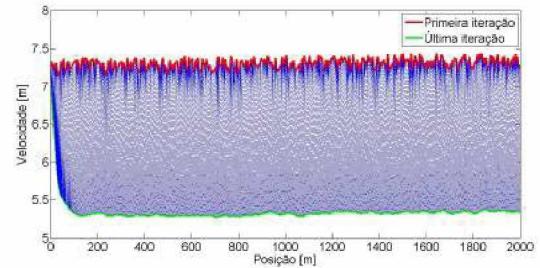


Figura 4.62: Evolução da velocidade para $p = 0,30$ e $N_L = 3,5$ m com inclinação do leito variável.

- $N_L = 4,5$ m

Para um nível do lençol freático igual a 4,5 m, os resultados obtidos são mostrados pelas Figuras 4.63 e 4.64. Assim como nos casos anteriores, os resultados são qualitativamente semelhantes àqueles encontrados para mesmo nível do lençol e porosidade 0,20, com aumento nos valores de altura e diminuição nos valores de velocidade.

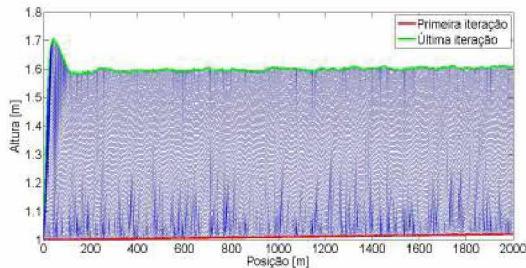


Figura 4.63: Evolução da altura para $p = 0,30$ e $N_L = 4,5$ m com inclinação do leito variável.

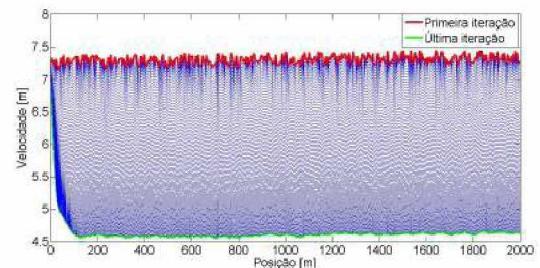


Figura 4.64: Evolução da velocidade para $p = 0,30$ e $N_L = 4,5$ m com inclinação do leito variável.

4.3.3 Evolução dos valores da contribuição lateral R

Avaliamos a seguir a variação nos valores da contribuição lateral para o caso em que a inclinação do leito S_0 é variável.

Valor de porosidade: $p = 0,20$

Para o valor de porosidade igual a 0,20, a variação da contribuição lateral é apresentada pelas Figuras 4.65, 4.66, 4.67 e 4.68, para os valores de nível do lençol freático iguais a 1,5 m, 2,5 m, 3,5 m e 4,5 m, respectivamente.

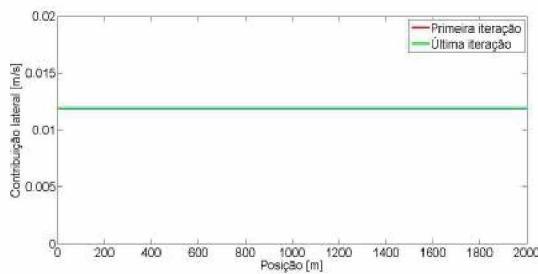


Figura 4.65: Evolução da contribuição lateral para $p = 0,20$ e $N_L = 1,5$ m para inclinação do leito variável.

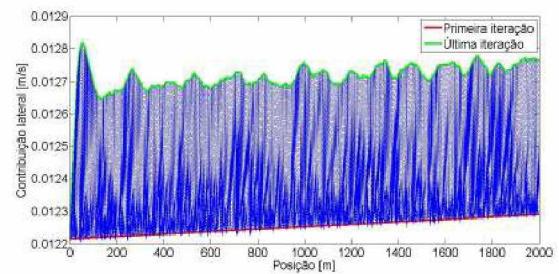


Figura 4.66: Evolução da contribuição lateral para $p = 0,20$ e $N_L = 2,5$ m para inclinação do leito variável.

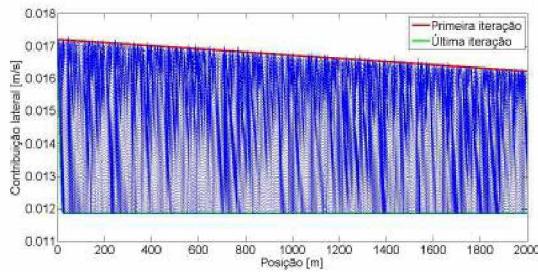


Figura 4.67: Evolução da contribuição lateral para $p = 0,20$ e $N_L = 3,5$ m para inclinação do leito variável.

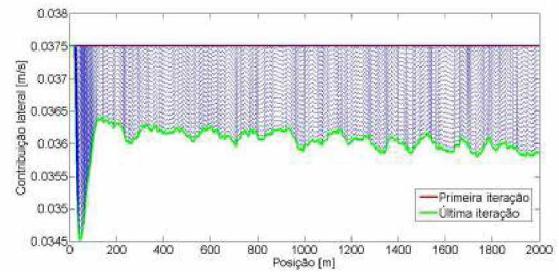


Figura 4.68: Evolução da contribuição lateral para $p = 0,20$ e $N_L = 4,5$ m para inclinação do leito variável.

Para o nível freático fixado em 1,5 m, o valor de R se mantém constante nas seções e também ao longo do tempo. Para o caso em que $N_L = 2,5$ m, observamos um aumento do valor da contribuição lateral ao longo do tempo. Por outro lado, para $N_L = 3,5$ m e $N_L = 4,5$ m, podemos notar diminuições nos valores da contribuição lateral conforme o tempo passa. Ainda assim, quanto maior o nível do lençol freático, maiores são os valores assumidos por R .

Valor de porosidade: $p = 0,30$

Para a porosidade fixada em $p = 0,30$, o comportamento dos valores da contribuição lateral é apresentado pelas Figuras 4.69, 4.70, 4.71 e 4.72, para os valores de nível do lençol freático iguais a 1,5 m, 2,5 m, 3,5 m e 4,5 m, respectivamente.

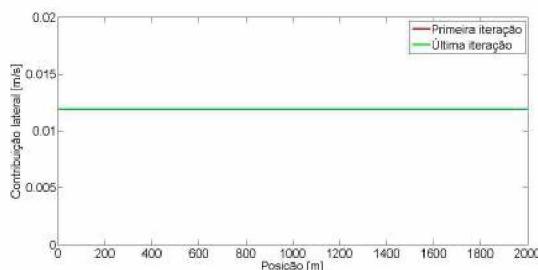


Figura 4.69: Evolução da contribuição lateral para $p = 0,30$ e $N_L = 1,5$ m para inclinação do leito variável.

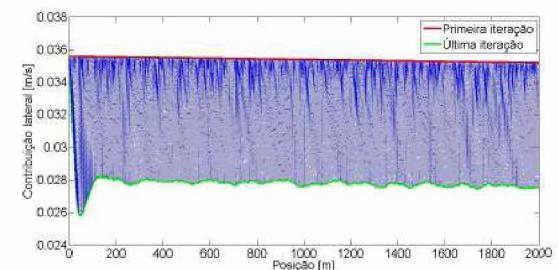


Figura 4.70: Evolução da contribuição lateral para $p = 0,30$ e $N_L = 2,5$ m para inclinação do leito variável.

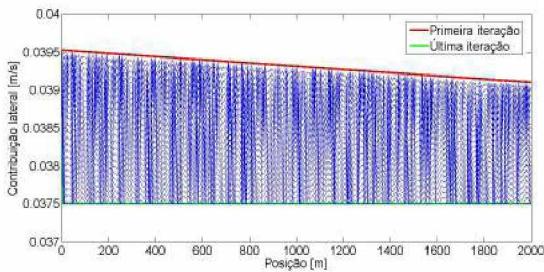


Figura 4.71: Evolução da contribuição lateral para $p = 0,30$ e $N_L = 3,5$ m para inclinação do leito variável.

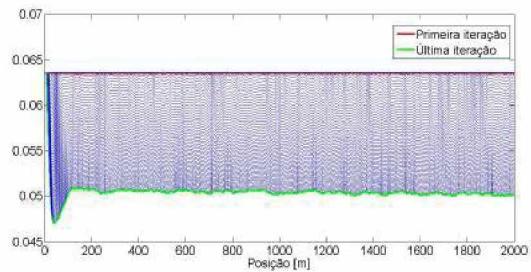


Figura 4.72: Evolução da contribuição lateral para $p = 0,30$ e $N_L = 4,5$ m para inclinação do leito variável.

Podemos notar que R se mantém constante quando $N_L = 1,5$ m. Para os demais casos, o valor da contribuição lateral diminui ao longo do tempo. Além disso, podemos notar também que os valores da contribuição lateral são maiores quando o nível do lençol é maior. Ou seja, um aumento no nível do lençol freático causa um aumento da contribuição.

4.3.4 Discussão dos resultados

Após as diversas simulações de valores de porosidade e nível do lençol freático, notamos comportamentos bastante semelhantes em todas as situações tanto para altura da lâmina d'água quanto para velocidade de escoamento. As diferenças estão nos valores observados. Para menores valores de porosidade e nível do lençol, obtemos menores valores de altura e maiores valores de velocidade. Quando aumentamos os valores de porosidade e nível do lençol, a situação é de aumento das alturas da lâmina d'água e diminuição das velocidades. Ao contrário da situação em que a inclinação do leito é constante, quando esta varia, o valor da contribuição lateral não influencia fortemente no aspecto das curvas que representam graficamente altura e velocidade. Assim, podemos observar que a inclinação do leito é uma variável com bastante influência sobre a solução das equações de Saint Venant. No próximo capítulo, apresentamos as conclusões deste trabalho e considerações para trabalhos futuros.

Capítulo 5

Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste trabalho, estudamos diversas ferramentas que auxiliam na resolução de equações diferenciais, problemas de valores iniciais e de contorno. Vimos conceitos e definições importantes relacionados às equações diferenciais, métodos analíticos e numéricos para resolvê-las. Estudamos o Método das Características para resolução de EDP, ferramenta fundamental para a obtenção da solução analítica do problema central deste trabalho, as Equações de Saint Venant. Vimos também o clássico Método das Diferenças Finitas e o utilizamos para resolver um problema aplicado à engenharia civil: o cálculo das deflexões em uma viga. Abordamos também o Método de Runge-Kutta de 4^a ordem e o aplicamos num problema que vem sido estudado há décadas, o desmoronamento da ponte de Tacoma Narrows, nos Estados Unidos.

O problema central deste trabalho consiste no estudo das chamadas Equações de Saint Venant, um sistema de duas equações diferenciais parciais não lineares que modela o escoamento de um rio. Trata-se de um problema complexo, com diversas variáveis e parâmetros envolvidos. Nesse contexto, aplicamos a teoria dos conjuntos fuzzy para modelar esse problema. Assim, estudamos conceitos importantes relacionados à teoria dos conjuntos fuzzy, vimos como funciona o princípio da extensão de Zadeh, que transforma conceitos matemáticos não-fuzzy em conceitos fuzzy, e discutimos o funcionamento um Sistema Baseado em Regras Fuzzy.

Através do princípio da extensão de Zadeh pudemos analisar a solução analítica do sistema de equações de Saint Venant sobre uma outra ótica. Tratando a contribuição lateral como um parâmetro fuzzy, utilizamos a continuidade dessa solução para obter a solução fuzzy para o problema. Desta forma, conseguimos estudar a altura da lâmina d'água do escoamento como um número fuzzy e, fixado o tempo de escoamento ou a seção transversal de interesse, obter graus de pertinência para valores dessa altura. Essa abordagem difere do tratamento determinístico do modelo, uma vez que este determina apenas uma solução, sem a consideração de possíveis incertezas contidas na determinação dos parâmetros.

Em situações reais, estimar a contribuição lateral de vazão ao fluxo em cada seção transversal do rio, para cada instante de tempo, se torna um trabalho difícil, dispendioso e, muitas vezes, economicamente inviável. Para a situação em que a contribuição lateral é proveniente exclusivamente da troca de água entre o lençol freático e o escoamento, seria necessário medir a altura de água em cada seção, em cada instante de tempo, além de avaliar a porosidade no meio em que o rio escoa em diversas seções. Na prática, isso não seria viável. Quando empregamos um SBRF, torna-se possível explorar as incertezas e variações existentes nos parâmetros envolvidos de forma simples e dinâmica. Esta é uma grande vantagem da utilização de SBRF em problemas que envolvem incertezas relacionadas a algum de seus parâmetros: a facilidade com que obtemos novas soluções para o problema, a partir de novos valores das variáveis de entrada.

Assim, neste trabalho, utilizamos um SBRF para avaliar diferentes situações de escoamento, de acordo com a variação dos valores de porosidade e nível do lençol freático. Um estudo

completo foi realizado de modo a entender os comportamentos da altura da lâmina d'água e da velocidade de escoamento. Notamos que maiores valores de porosidade e nível do lençol freático acarretam uma maior contribuição lateral, fato que influencia diretamente no comportamento das variáveis altura e velocidade.

Além disso, consideramos ainda uma situação em que a inclinação do leito do rio é variável. Através de um comando computacional, geramos números aleatórios e, assim, obtivemos um vetor de inclinações hipotéticas ao longo do canal do rio. Para estas inclinações, estudamos o comportamento da altura da lâmina d'água e da velocidade de escoamento para alguns valores de porosidade e nível do lençol freático. Observamos que, para a variação da inclinação utilizada neste trabalho, a influência nos valores de entrada não se dá em termos qualitativos, mas apenas quantitativos, na medida em que o aspecto gráfico de altura e velocidade é o mesmo em todas as simulações, havendo alterações apenas nos valores obtidos. Assim, foi possível concluirmos que a inclinação do leito exerce uma forte influência no modelo de escoamento proposto pelas equações de Saint Venant.

Em trabalhos futuros, podemos explorar de forma mais ampla a influência da inclinação do leito sobre o problema, além de trabalhar a variação da perda de energia por atrito, que neste trabalho foi considerada constante. Também podemos considerar outras formas de contribuição lateral no modelo, tais como precipitação e escoamento superficial. Isto levaria a novos SBRF, com novas variáveis de entrada e novas bases de regras. Outro estudo possível é o de canais artificiais reais, tais como aqueles construídos na transposição de rios, utilizando dados reais sobre a geometria das seções transversais, entre outros. Ademais, podemos realizar um estudo aprofundado aliando a incerteza em escoamento de rios e a prevenção de enchentes e alagamentos em cidades brasileiras.

Referências Bibliográficas

- [1] ABBOTT, M. B.; IONESCU, F. On the numerical computation of nearly horizontal flows. *Journal of Hydraulic Research*, v.5, n.2, p.97-117, 1967.
- [2] BALTZER, R. A.; LAI, C. Computer simulation of unsteady flows in waterways. *Journal of the Hydraulics Division*, v.94, n.4, p.1083-1120, 1968.
- [3] BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*. 3^a edição. Campinas: IMECC/Unicamp, 2015.
- [4] BERTONE, A. M.; JAFELICE, R. M.; BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. On fuzzy solutions for partial differential equations. *Fuzzy sets and systems*, v.219, p.68-80, 2012.
- [5] BIEZUNER, R. J. *Equações Diferenciais Parciais I/II*, 6 de out. de 2010. 305p. Notas de Aula.
- [6] BLOG DA ENGENHARIA. Ponte Tacoma Narrows: Aeroelasticidade ou Ressonância? Disponível em: < <http://blogdaengenharia.com/ponte-tacoma-narrows-aeroelasticidade-ou-ressonancia/> >. Acesso em: 10 de jan. 2017.
- [7] BORGES, J. C. *Algumas Abordagens das Equações Diferenciais Parciais utilizando a Teoria dos Conjuntos Fuzzy*. 72f. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Matemática) - Faculdade de Matemática. Universidade Federal de Uberlândia. Uberlândia, 2014.
- [8] BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. *Numerical Analysis*. 9^a edição. Boston: Cengage Learning, 2010.
- [9] CABRERA, N. V. *Aplicação da Extensão de Zadeh para Conjuntos Fuzzy Tipo 2 Intervalar*. 72f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Faculdade de Matemática. Universidade Federal de Uberlândia. Uberlândia, 2014.
- [10] CUNDY, T. W.; TENTO, S. W. Solution to the kinematic wave approach to overland flow routing with rainfall excess given by Philip's equation. *Water Resources Research*, v.21, p.1132-1140, 1985.
- [11] DUCHATEAU, P.; ZUCHMANN, D. W. *Applied Partial Differential Equations*. Mineola: Dover Publications, 2002.
- [12] FLEMMING, D. M.; GONÇALVES, M. B. *Cálculo A: funções, limite, derivação, integração*. 6^a edição. São Paulo: Prentice Hall, 2006.
- [13] FOX, R. W.; PRITCHARD, P. H.; MCDONALD, A. T. *Introdução à Mecânica dos Fluidos*. 7^a edição. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

- [14] FREAD, D. L. Technique for implicit dynamic routing in rivers with tributaries. *Water Resources Research*, v.9, n.4, p.918-926, 1973.
- [15] GARRISON, J.M.; GRANJU, J. P.; PRICE, J. T. Unsteady Flow Simulation in Rivers and Reservoirs. *Journal of the Hydraulics Division*, v.95, p.1559-1576, 1969.
- [16] GIRALDEZ, J. V.; WOOLHISER, D. A. Analytical integration of the kinematic equation for runoff on a plane under constant rainfall rate and Smith and Parlange infiltration. *Water Resources Research*, v.32, p.3385-3389, 1996.
- [17] HENDERSON, F. M.; WOODING, R. A. Overland Flow and Groundwater Flow from a Steady Rainfall of Finite Duration. *Journal of Geophysical Research*, v.69, n.8, p.1531-1540, 1964.
- [18] HIBBELER, R. C. *Estática - Mecânica para Engenharia*. 12^a edição. São Paulo: Prentice Hall, 2011.
- [19] ISAACSON, E.; STOKER, J. J.; TROESCH, A. *Numerical Solution of Flood Prediction and River Regulation Problems: Results of the Numerical Prediction of the 1945 and 1948 Floods in the Ohio River, of the 1947 Flood Through the Junction of the Ohio and Mississippi Rivers, and of the Floods of 1950 and 1948 Through Kentucky Reservoir. Report III*. New York: Courant Institute of Mathematical Sciences - New York University, 1956.
- [20] LAZER, A. C.; MCKENNA, P. J. Large-amplitude periodic oscillations in suspension bridges: some new connections with nonlinear analysis. *Siam Review*, v.32, n.4, p.537-578, 1990.
- [21] LIMA, E. L. *Curso de Análise*. v.1. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1992.
- [22] MASSAU, J. L'integration graphique and Appendice au memoire sur l'integration graphique. In: ASSOC. DES INGENIEURS SORTIS DES ECOLES SPECIALES DE GAND, 12., 1889. Bélgica. *Anais...* p.185-444.
- [23] MORRIS, E. M.; WOOLHISER, D. A. Unsteady one-dimensional flow over a plane: partial equilibrium and recession hydrographs. *Water Resources Research*, v.16, p.355-360, 1967.
- [24] MUJUMDAR, P. P. Flood Wave Propagation - The Saint Venant Equation. *Resonance*, v.6, n.5, p.66-73, 2001.
- [25] PARLANGE, J. Y.; ROSE, C. W.; SANDER, G. Kinematic flow approximation of runoff on a plane: an exact analytical solution. *Journal of Hydrology*, v.52, p.171-176, 1981.
- [26] PEDRYCZ, W; GOMIDE, F. *An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design*. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, 1998.
- [27] SANDER, G. C.; PARLANGE, J. Y.; HOGARTH, W. L.; ROSE, C. W.; HAVERKAMP, R. Kinematic flow approximation to runoff on a plane: solution for infiltration rate exceeding rainfall rate. *Journal of Hydrology*, v.113, p.193-206, 1990.
- [28] SANDER, G. C.; ROSE, C. W.; HOGARTH, W. L.; PARLANGE, J. -Y.; LISLE, I. G. Mathematical Soil Erosion Modeling. *Water Interactions with Energy, Environment, Food and Agriculture*, v.2, p.318-368, 2009.

- [29] STEINSTRASSER, C. E. *Método Difusivo de Lax Aplicado na Solução das Equações de Saint Venant.* 101f. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Recursos Hídricos). Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2005.
- [30] VENÂNCIO, S. S. *Modelo Computacional para Análise de Transiente Hidráulico em Canais.* 288f. Dissertação (Mestrado em Hidráulica e Saneamento) - Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo. São Carlos, 2003.
- [31] WOOLHISER, D. A.; LIGGETT, J. A. Unsteady one-dimensional flow over a plane. The rising hydrograph. *Water Resources Research*, v.3, p.753-771, 1967.
- [32] ZILL, D. G. *Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem.* 2^a edição. São Paulo: Thomson, 2011.
- [33] ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. *Equações Diferenciais.* 3^a edição. São Paulo: Makron Books, v.1, 2001.
- [34] ZUMPANO, A.; ERCOLE, G.; BUENO, H. P. *Ressonância - Para além dos cursos de Física.*, 15 de set. de 2004. 54p. Notas de Aula.

Apêndice

- Código do programa que calcula o deslocamento do tabuleiro da ponte de Tacoma Narrows (Problema apresentado no Capítulo 1)

```
%Solução Numérica
%Inicialização
m=1; %Massa
b=4; %Constante Elástica sob tração
a=1; %Constante Elástica sob compressão
k=0; %Constante Elástica genérica
h=1.5*10^-3*pi; %Passo de malha
t=0:h:3*pi; %Vetor de tempo
x=zeros(length(t)); %Vetor de deslocamento
x(1)=0; %Deslocamento no tempo inicial
z=zeros(length(t)); %Vetor das derivadas
z(1)=1; %Derivada no tempo inicial
%Malha de Cálculo
for i=1:length(t)-1
if x(i) ≥ 0
k=b;
elseif x(i) < 0
k=a;
end
K1(i)=h*z(i);
K2(i)=h*(sin(4*t(i))-k*x(i));
L1(i)=h*(z(i)+K2(i)/2);
L2(i)=h*(sin(4*t(i)+2*h)-k*(x(i)+K1(i)/2));
M1(i)=h*(z(i)+L2(i)/2);
M2(i)=h*(sin(4*t(i)+2*h)-k*(x(i)+L1(i)/2));
N1(i)=h*(z(i)+M2(i));
N2(i)=h*(sin(4*t(i)+4*h)-k*(x(i)+M1(i)));
x(i+1)=x(i)+(1/6)*(K1(i)+2*L1(i)+2*M1(i)+N1(i));
z(i+1)=z(i)+(1/6)*(K2(i)+2*L2(i)+2*M2(i)+N2(i));
end
%Solução Analítica
%Inicialização
xnum=zeros(length(t));
%Malha de Cálculo
for j=1:length(t)
if t(j) ≥ 0 && t(j) ≤ pi/2
xnum(j)=sin(2*t(j))*(2/3-(1/6)*cos(2*t(j)));
end
if t(j) > pi/2 && t(j) ≤ 3*pi/2
```

```

xnum(j)=cos(t(j))*(7/5-(4/15)*sin(t(j))*cos(2*t(j)));
end
if t(j) > 3*pi/2 && t(j) ≤ 2*pi
xnum(j)=sin(2*t(j))*(-11/15-(1/6)*cos(2*t(j)));
end
if t(j) > 2*pi && t(j) ≤ 3*pi
xnum(j)=sin(t(j))*(-23/15-(4/15)*cos(t(j))*cos(2*t(j)));
end
end
plot(t,x,'b',t,xnum,'r')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Deslocamento [m]');
%Cálculo do erro
erro=zeros(length(t));
for i=1:length(t)
erro(i)=abs(xnum(i)-x(i));
end
figure
plot(t,erro,'b')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Erro absoluto [m]');
%Análise ao longo do tempo
t1=0:h:45*pi; %Vetor de tempo
for i=1:length(t)-1
if x(i) ≥ 0
k=b;
elseif x(i) < 0
k=a;
end
K1(i)=h*z(i);
K2(i)=h*(sin(4*t1(i))-k*x(i));
L1(i)=h*(z(i)+K2(i)/2);
L2(i)=h*(sin(4*t1(i)+2*h)-k*(x(i)+K1(i)/2));
M1(i)=h*(z(i)+L2(i)/2);
M2(i)=h*(sin(4*t1(i)+2*h)-k*(x(i)+L1(i)/2));
N1(i)=h*(z(i)+M2(i));
N2(i)=h*(sin(4*t1(i)+4*h)-k*(x(i)+M1(i)));
x(i+1)=x(i)+(1/6)*(K1(i)+2*L1(i)+2*M1(i)+N1(i));
z(i+1)=z(i)+(1/6)*(K2(i)+2*L2(i)+2*M2(i)+N2(i));
end
figure
plot(t1,x,'b')
xlabel('Tempo [s]');
ylabel('Deslocamento [m]');

```

- Código do programa que calcula a deflexão de uma viga engastada através de um SBRF (Problema apresentado no Capítulo 2)

```

%Inicialização
E=210*10^9; %Módulo de Young

```

```

x=0:0.01:1; %Vetor Posição
M=zeros(length(x));%Vetor Momento de inércia
y=zeros(length(x)); %Vetor Deflexão
y(1)=0; %Deflexão na posição inicial
h=0.01;

%Malha de cálculo
for i=1:length(x)
M(i)=1000*(1-x(i)) $\hat{2}$ /2; %Cálculo do momento fletor em cada seção
end
a=readfis('SBRF1Viga');
b=readfis('SBRF2Viga');
bh=evalfis(x(1),a);
momin=evalfis([bh(1) bh(2)],b);
y(2)=-M(1)*h $\hat{2}$ /(2*E*momin)+y(1);
for j=3:length(x)
bh=evalfis(x(j-1),a);
momin=evalfis([bh(1) bh(2)],b);
der=(y(j-1)-y(j-2))/h;
y(j)=-M(j-1)*h $\hat{2}$ /(2*E*momin)+y(j-1)+h*der;
end
plot(x,y)
xlabel('Posição [m]');
ylabel('Deflexão [m]')

```

- Código do programa que plota as superfícies que representam graficamente a solução das Equações de Saint Venant (Problema apresentado no Capítulo 3)

```

%Inicialização
R=0.01; %Contribuição lateral
g=9.81; %Aceleração da gravidade
K=1635; %Constante do escoamento
m=3; %Constante do escoamento
t=0:0.1:1000; %Vetor de tempo
x=linspace(0,10 $\hat{7}$ ,length(t)); %Vetor de posição
h=zeros(length(x),length(t)); %Matriz de alturas
T=zeros(length(x),length(t)); %Matriz de tempos
X=zeros(length(x),length(t)); %Matriz de posições

```

```

%Malha de Cálculo - Cálculo das alturas
for i=1:length(t)
for j=1:length(x)
if x(j)  $\leq$  K*R^(m-1)*(t(i)) $\hat{m}$ 
h(j,i)=(R*x(j)/K) $(1/m)$ ;
elseif x(j)  $\geq$  K*R^(m-1)*(t(i)) $\hat{m}$ 
h(j,i)=R*t(i);
end
end
end

```

```
%Composição de matrizes para plotagem
for l=1:length(x)
T(l,:)=t;
end
for n=1:length(t)
X(:,n)=x;
end
surf(T,X,h)
xlabel('Tempo [s]')
ylabel('Posição [m]')
zlabel('Altura [m]')
```

- Código do programa que resolve numericamente as Equações de Saint Venant através do Método de Runge-Kutta de 4^a Ordem, com contribuição lateral constante (Problema apresentado no Capítulo 4)

```
%Inicialização
R=0.04; %Contribuição lateral
g=9.81; %Aceleração da gravidade
deltax=4; %Espaçamento de posição
deltat=0.01; %Espaçamento de tempo
x=0:deltax:2000; %Vetor de Posições
t=0:deltat:100; %Vetor de Tempos
S0=0.03; %Inclinação do leito
Sf=0.005; %Perda de energia por atrito
b=5; %Largura da seção trapezoidal
h=zeros(length(t),length(x)); %Matriz de alturas
u=zeros(length(t),length(x)); %Matriz de velocidades
rh=0; %Raio Hidráulico
n=0.020; %Coeficiente de Manning
```

```
%Condições iniciais
for i=1:length(x)
h(1,i)=1+x(i)/100000;
end
for j=1:length(t)
h(j,1)=1+t(j)/100000;
end
for k=1:length(x)
rh=((b+h(1,k))*h(1,k))/(b+2*h(1,k)*sqrt(2));
u(1,k)=(1/n)*(rh^(2/3))*S0^0.5;
end
for l=1:length(t)
rh=((b+h(l,1))*h(l,1))/(b+2*h(l,1)*sqrt(2));
u(l,1)=(1/n)*(rh^(2/3))*S0^0.5;
end
%Malha de Cálculo
for i=2:100
```

```

K1=deltat*(R-(u(i-1,2)*h(i-1,2)-u(i-1,1)*h(i-1,1))/deltax);
K2=deltat*(g*(S0-Sf)-R*u(i-1,2)/h(i-1,2)-u(i-1,2)*(u(i-1,2)-u(i-1,1))/deltax-g*(h(i-1,2)-h(i-1,1))/deltax);
L1=deltat*(R-((u(i-1,2)+K2/2)*(h(i-1,2)+K1/2)-(u(i-1,1)+K2/2)*(h(i-1,1)+K1/2))/deltax);
L2=deltat*(g*(S0-Sf)-R*(u(i-1,2)+K2/2)/(h(i-1,2)+K1/2)-(u(i-1,2)+K2/2)*((u(i-1,2)+K2/2)-(u(i-1,1)+K2/2))/deltax-g*((h(i-1,2)+K1/2)-(h(i-1,1)+K1/2))/deltax);
M1=deltat*(R-((u(i-1,2)+L2/2)*(h(i-1,2)+L1/2)-(u(i-1,1)+L2/2)*(h(i-1,1)+L1/2))/deltax);
M2=deltat*(g*(S0-Sf)-R*(u(i-1,2)+L2/2)/(h(i-1,2)+L1/2)-(u(i-1,2)+L2/2)*((u(i-1,2)+L2/2)-(u(i-1,1)+L2/2))/deltax-g*((h(i-1,2)+L1/2)-(h(i-1,1)+L1/2))/deltax);
N1=deltat*(R-((u(i-1,2)+M2)*(h(i-1,2)+M1)-(u(i-1,1)+M2)*(h(i-1,1)+M1))/deltax);
N2=deltat*(g*(S0-Sf)-R*(u(i-1,2)+M2)/(h(i-1,2)+M1)-(u(i-1,2)+M2)*((u(i-1,2)+M2)-(u(i-1,1)+M2))/deltax-g*((h(i-1,2)+M1)-(h(i-1,1)+M1))/deltax);
h(i,2)=h(i-1,2)+(1/6)*(K1+2*L1+2*M1+N1);
u(i,2)=u(i-1,2)+(1/6)*(K2+2*L2+2*M2+N2);
for j=3:length(x)
K1a=deltat*(R-(u(i-1,j-1)*h(i-1,j-1)-u(i-1,j-2)*h(i-1,j-2))/deltax);
K1=deltat*(R-(u(i-1,j)*h(i-1,j)-u(i-1,j-1)*h(i-1,j-1))/deltax);
K2a=deltat*(g*(S0-Sf)-R*u(i-1,j-1)/h(i-1,j-1)-u(i-1,j-1)*(u(i-1,j-1)-u(i-1,j-2))/deltax-g*(h(i-1,j-1)-h(i-1,j-2))/deltax);
K2=deltat*(g*(S0-Sf)-R*u(i-1,j)/h(i-1,j)-u(i-1,j)*(u(i-1,j)-u(i-1,j-1))/deltax-g*(h(i-1,j)-h(i-1,j-1))/deltax);
L1a=deltat*(R-((u(i-1,j-1)+K2/2)*(h(i-1,j-1)+K1/2)-(u(i-1,j-2)+K2a/2)*(h(i-1,j-2)+K1a/2))/deltax);
L1=deltat*(R-((u(i-1,j)+K2/2)*(h(i-1,j)+K1/2)-(u(i-1,j-1)+K2a/2)*(h(i-1,j-1)+K1a/2))/deltax);
L2a=deltat*(g*(S0-Sf)-R*(u(i-1,j-1)+K2/2)/(h(i-1,j-1)+K1/2)-(u(i-1,j-1)+K2/2)*((u(i-1,j-1)+K2/2)-(u(i-1,j-2)+K2a/2))/deltax-g*((h(i-1,j-1)+K1/2)-(h(i-1,j-2)+K1a/2))/deltax);
L2=deltat*(g*(S0-Sf)-R*(u(i-1,j)+K2/2)/(h(i-1,j)+K1/2)-(u(i-1,j)+K2/2)*((u(i-1,j)+K2/2)-(u(i-1,j-1)+K2a/2))/deltax-g*((h(i-1,j)+K1/2)-(h(i-1,j-1)+K1a/2))/deltax);
M1a=deltat*(R-((u(i-1,j-1)+L2/2)*(h(i-1,j-1)+L1/2)-(u(i-1,j-2)+L2a/2)*(h(i-1,j-2)+L1a/2))/deltax);
M1=deltat*(R-((u(i-1,j)+L2/2)*(h(i-1,j)+L1/2)-(u(i-1,j-1)+L2a/2)*(h(i-1,j-1)+L1a/2))/deltax);
M2a=deltat*(g*(S0-Sf)-R*(u(i-1,j-1)+L2/2)/(h(i-1,j-1)+L1/2)-(u(i-1,j-1)+L2/2)*((u(i-1,j-1)+L2/2)-(u(i-1,j-2)+L2a/2))/deltax-g*((h(i-1,j-1)+L1/2)-(h(i-1,j-2)+L1a/2))/deltax);
M2=deltat*(g*(S0-Sf)-R*(u(i-1,j)+L2/2)/(h(i-1,j)+L1/2)-(u(i-1,j)+L2/2)*((u(i-1,j)+L2/2)-(u(i-1,j-1)+L2a/2))/deltax-g*((h(i-1,j)+L1/2)-(h(i-1,j-1)+L1a/2))/deltax);
N1a=deltat*(R-((u(i-1,j-1)+M2)*(h(i-1,j-1)+M1)-(u(i-1,j-2)+M2a)*(h(i-1,j-2)+M1a))/deltax);
N1=deltat*(R-((u(i-1,j)+M2)*(h(i-1,j)+M1)-(u(i-1,j-1)+M2a)*(h(i-1,j-1)+M1a))/deltax);
N2a=deltat*(g*(S0-Sf)-R*(u(i-1,j-1)+M2)/(h(i-1,j-1)+M1)-(u(i-1,j-1)+M2)*((u(i-1,j-1)+M2)-(u(i-1,j-2)+M2a))/deltax-g*((h(i-1,j-1)+M1)-(h(i-1,j-2)+M1a))/deltax);
N2=deltat*(g*(S0-Sf)-R*(u(i-1,j)+M2)/(h(i-1,j)+M1)-(u(i-1,j)+M2)*((u(i-1,j)+M2)-(u(i-1,j-1)+M2a))/deltax-g*((h(i-1,j)+M1)-(h(i-1,j-1)+M1a))/deltax);
h(i,j)=h(i-1,j)+(1/6)*(K1+2*L1+2*M1+N1);
u(i,j)=u(i-1,j)+(1/6)*(K2+2*L2+2*M2+N2);
end
end

```

```
%Plotagem
plot(x,h(1,:),'ok')
xlabel('Posição [m]')
ylabel('Altura [m]')
set(gca,'FontSize',20)
hold on
plot(x,h(100,:),'xr')
legend('Primeira iteração','Última iteração')
set(gca,'FontSize',20)
for w=2:99
    plot(x,h(w,:),'b')
    set(gca,'FontSize',20)
    hold on
end
figure
plot(x,u(1,:),'ok')
xlabel('Posição [m]')
ylabel('Velocidade [m/s]')
set(gca,'FontSize',20)
hold on
plot(x,u(100,:),'xr')
legend('Primeira iteração','Última iteração')
set(gca,'FontSize',20)
for w=2:99
    plot(x,u(w,:),'b')
    set(gca,'FontSize',20)
    hold on
end
```

- Códido do programa que resolve numericamente as Equações de Saint Venant com a contribuição lateral obtida a partir de um SBRF (Problema apresentado no Capítulo 4)

```
%Inicialização
NL=4.5; %Nível do lençol
p=0.30; %Porosidade
g=9.81; %Aceleração da gravidade
deltax=4; %Espaçamento de posição
deltat=0.01; %Espaçamento de tempo
x=0:deltax:2000; %Vetor de Posições
t=0:deltat:100; %Vetor de Tempos
S0=0.03; %Inclinação do leito
Sf=0.005; %Perda de energia por atrito
b=5; %Largura da seção trapezoidal
h=zeros(length(t),length(x)); %Matriz de alturas
u=zeros(length(t),length(x)); %Matriz de velocidades
rh=0; %Raio Hidráulico
n=0.020; %Coeficiente de Manning

%Condições iniciais
for i=1:length(x)
```

```

h(1,i)=1+x(i)/100000;
end
for j=1:length(t)
h(j,1)=1+t(j)/100000;
end
for k=1:length(x)
rh=((b+h(1,k))*h(1,k))/(b+2*h(1,k)*sqrt(2));
u(1,k)=(1/n)*(rh^(2/3))*S0^0.5;
end
for l=1:length(t)
rh=((b+h(l,1))*h(l,1))/(b+2*h(l,1)*sqrt(2));
u(l,1)=(1/n)*(rh^(2/3))*S0^0.5;
end

%Malha de Cálculo
a=readfis('SaintVenant');
for i=2:100
R=evalfis([p NL-h(i-1,1)],a);
K1=deltat*(R-(u(i-1,2)*h(i-1,2)-u(i-1,1)*h(i-1,1))/deltax);
K2=deltat*(g*(S0-Sf)-R*u(i-1,2)/h(i-1,2)-u(i-1,2)*(u(i-1,2)-u(i-1,1))/deltax-g*(h(i-1,2)-h(i-1,1))/deltax);
L1=deltat*(R-((u(i-1,2)+K2/2)*(h(i-1,2)+K1/2)-(u(i-1,1)+K2/2)*(h(i-1,1)+K1/2))/deltax);
L2=deltat*(g*(S0-Sf)-R*(u(i-1,2)+K2/2)/(h(i-1,2)+K1/2)-(u(i-1,2)+K2/2)*((u(i-1,2)+K2/2)-(u(i-1,1)+K2/2))/deltax-g*((h(i-1,2)+K1/2)-(h(i-1,1)+K1/2))/deltax);
M1=deltat*(R-((u(i-1,2)+L2/2)*(h(i-1,2)+L1/2)-(u(i-1,1)+L2/2)*(h(i-1,1)+L1/2))/deltax);
M2=deltat*(g*(S0-Sf)-R*(u(i-1,2)+L2/2)/(h(i-1,2)+L1/2)-(u(i-1,2)+L2/2)*((u(i-1,2)+L2/2)-(u(i-1,1)+L2/2))/deltax-g*((h(i-1,2)+L1/2)-(h(i-1,1)+L1/2))/deltax);
N1=deltat*(R-((u(i-1,2)+M2)*(h(i-1,2)+M1)-(u(i-1,1)+M2)*(h(i-1,1)+M1))/deltax);
N2=deltat*(g*(S0-Sf)-R*(u(i-1,2)+M2)/(h(i-1,2)+M1)-(u(i-1,2)+M2)*((u(i-1,2)+M2)-(u(i-1,1)+M2))/deltax-g*((h(i-1,2)+M1)-(h(i-1,1)+M1))/deltax);
h(i,2)=h(i-1,2)+(1/6)*(K1+2*L1+2*M1+N1);
u(i,2)=u(i-1,2)+(1/6)*(K2+2*L2+2*M2+N2);
for j=3:length(x)
R=evalfis([p NL-h(i-1,j)],a);
K1a=deltat*(R-(u(i-1,j-1)*h(i-1,j-1)-u(i-1,j-2)*h(i-1,j-2))/deltax);
K1=deltat*(R-(u(i-1,j)*h(i-1,j)-u(i-1,j-1)*h(i-1,j-1))/deltax);
K2a=deltat*(g*(S0-Sf)-R*u(i-1,j-1)/h(i-1,j-1)-u(i-1,j-1)*(u(i-1,j-1)-u(i-1,j-2))/deltax-g*(h(i-1,j-1)-h(i-1,j-2))/deltax);
K2=deltat*(g*(S0-Sf)-R*u(i-1,j)/h(i-1,j)-u(i-1,j)*(u(i-1,j)-u(i-1,j-1))/deltax-g*(h(i-1,j)-h(i-1,j-1))/deltax);
L1a=deltat*(R-((u(i-1,j-1)+K2/2)*(h(i-1,j-1)+K1/2)-(u(i-1,j-2)+K2a/2)*(h(i-1,j-2)+K1a/2))/deltax);
L1=deltat*(R-((u(i-1,j)+K2/2)*(h(i-1,j)+K1/2)-(u(i-1,j-1)+K2a/2)*(h(i-1,j-1)+K1a/2))/deltax);
L2a=deltat*(g*(S0-Sf)-R*(u(i-1,j-1)+K2/2)/(h(i-1,j-1)+K1/2)-(u(i-1,j-1)+K2/2)*((u(i-1,j-1)+K2/2)-(u(i-1,j-2)+K2a/2))/deltax-g*((h(i-1,j-1)+K1/2)-(h(i-1,j-2)+K1a/2))/deltax);
L2=deltat*(g*(S0-Sf)-R*(u(i-1,j)+K2/2)/(h(i-1,j)+K1/2)-(u(i-1,j)+K2/2)*((u(i-1,j)+K2/2)-(u(i-1,j-1)+K2a/2))/deltax-g*((h(i-1,j)+K1/2)-(h(i-1,j-1)+K1a/2))/deltax);

```

```

M1a=deltat*(R-((u(i-1,j-1)+L2/2)*(h(i-1,j-1)+L1/2)-(u(i-1,j-2)+L2a/2)*(h(i-1,j-2)+L1a/2))/deltax);
M1=deltat*(R-((u(i-1,j)+L2/2)*(h(i-1,j)+L1/2)-(u(i-1,j-1)+L2a/2)*(h(i-1,j-1)+L1a/2))/deltax);
M2a=deltat*(g*(S0-Sf)-R*(u(i-1,j-1)+L2/2)/(h(i-1,j-1)+L1/2)-(u(i-1,j-1)+L2/2)*((u(i-1,j-1)+L2/2)-(u(i-1,j-2)+L2a/2))/deltax-g*((h(i-1,j-1)+L1/2)-(h(i-1,j-2)+L1a/2))/deltax);
M2=deltat*(g*(S0-Sf)-R*(u(i-1,j)+L2/2)/(h(i-1,j)+L1/2)-(u(i-1,j)+L2/2)*((u(i-1,j)+L2/2)-(u(i-1,j-1)+L2a/2))/deltax-g*((h(i-1,j)+L1/2)-(h(i-1,j-1)+L1a/2))/deltax);
N1a=deltat*(R-((u(i-1,j-1)+M2)*(h(i-1,j-1)+M1)-(u(i-1,j-2)+M2a)*(h(i-1,j-2)+M1a))/deltax);
N1=deltat*(R-((u(i-1,j)+M2)*(h(i-1,j)+M1)-(u(i-1,j-1)+M2a)*(h(i-1,j-1)+M1a))/deltax);
N2a=deltat*(g*(S0-Sf)-R*(u(i-1,j-1)+M2)/(h(i-1,j-1)+M1)-(u(i-1,j-1)+M2)*((u(i-1,j-1)+M2)-(u(i-1,j-2)+M2a))/deltax-g*((h(i-1,j-1)+M1)-(h(i-1,j-2)+M1a))/deltax);
N2=deltat*(g*(S0-Sf)-R*(u(i-1,j)+M2)/(h(i-1,j)+M1)-(u(i-1,j)+M2)*((u(i-1,j)+M2)-(u(i-1,j-1)+M2a))/deltax-g*((h(i-1,j)+M1)-(h(i-1,j-1)+M1a))/deltax);
h(i,j)=h(i-1,j)+(1/6)*(K1+2*L1+2*M1+N1);
u(i,j)=u(i-1,j)+(1/6)*(K2+2*L2+2*M2+N2);
end
end
%Plotagem
plot(x,h(1,:),'ok')
xlabel('Posição [m]')
ylabel('Altura [m]')
set(gca,'FontSize',20)
hold on
plot(x,h(100,:),'xr')
legend('Primeira iteração','Última iteração')
set(gca,'FontSize',20)
for w=2:99
plot(x,h(w,:),'b')
set(gca,'FontSize',20)
hold on
end
figure
plot(x,u(1,:),'ok')
xlabel('Posição [m]')
ylabel('Velocidade [m/s]')
set(gca,'FontSize',20)
hold on
plot(x,u(100,:),'xr')
legend('Primeira iteração','Última iteração')
set(gca,'FontSize',20)
for w=2:99
plot(x,u(w,:),'b')
set(gca,'FontSize',20)
hold on
end

```