UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE CIÊNCIAS INTEGRADAS DO PONTAL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

CARLOS EDUARDO PETRONILHO BOIAGO

ÁREA DE FIGURAS PLANAS: UMA PROPOSTA DE ENSINO COM MODELAGEM MATEMÁTICA

Ituiutaba-MG/2015

CARLOS EDUARDO PETRONILHO BOIAGO

ÁREA DE FIGURAS PLANAS: UMA PROPOSTA DE ENSINO COM MODELAGEM MATEMÁTICA

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, área de concentração em Ensino e Aprendizagem de Ciências e Matemática, sob a orientação do Profª. Drª. Odaléa Aparecida Viana, para obtenção do título de mestrado.

Ituiutaba-MG/2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

B678a 2015

Boiago, Carlos Eduardo Petronilho, 1989-
Área de figuras planas : uma proposta de ensino com modelagem matemática / Carlos Eduardo Petronilho Boiago. - 2015.
251 f. : il.

Orientador: Odaléa Aparecida Viana.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.
Inclui bibliografia.

1. Ciência - Estudo e ensino - Teses. 2. Geometria - Estudo e ensino (Ensino fundamental) - Teses. 3. Modelagem matemática - Teses. 4. semiótica - Teses. I. Viana, Odaléa Aparecida. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

CDU: 50:37

À minha mãe Agmar e ao meu Pai Sérgio,
que com muito carinho e compreensão
me apoiam em todas as minhas escolhas.

AGRADECIMENTOS

A Deus por todas as minhas conquistas.

À professora Dra. Odaléa Aparecida Viana, pelas incansáveis horas de orientação, leituras, cobrança, amizade e total competência e profissionalismo em seu trabalho.

Aos professores do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, por todo aprendizado possibilitado.

Ao Professor Doutor Nelson Antônio Pirola e a Professora Doutora Erica Alves por terem aceitado participar desta banca e pelas contribuições realizadas.

Ao Subprojeto da Matemática, do Programa de Iniciação de Bolsa à Docência (PIBID), da Faculdades de Ciências Integradas do Pontal (FACIP), da Universidade Federal de Uberlândia (UFU), por terem me acompanhado, apoiado e contribuído para o melhor desenvolvimento de todas as etapas deste trabalho.

Aos meus pais, Sérgio e Agmar, e ao meu irmão por toda credibilidade, compreensão, paciência, amor e carinho ao longo desta etapa da minha vida.

Aos meus amigos Larini Rosa Inácio e Cassiano Canaverde, pelas leituras, amizade e apoio ao longo da realização deste trabalho.

À minha amiga Patrícia Alves por todo apoio, companheirismo e ajuda principalmente na etapa final deste trabalho.

Ao professor Doutor Gilmar Alexandre, de História, do IFTM, pelas conversas e questionamentos acerca do meu trabalho essas me fizeram ter mais clareza do que realizar e analisar.

Aos alunos do curso de informática que aceitaram esse desafio e “compraram” a ideia desde o primeiro momento que foi apresentado aos mesmos a proposta.

Aos diretores, funcionários e colegas de trabalho que de uma forma ou de outra, me auxiliaram e organizaram toda parte burocrática para que este projeto seja desenvolvido.

Enfim, a todos meus familiares, amigos e colegas parceiros que, de uma maneira ou de outra, ajudaram-me a realizar este sonho.

RESUMO

Os conteúdos geométricos constituem uma parte importante no currículo de Matemática, visto que é por meio deles que os alunos desenvolvem habilidades que permitem compreender, descrever e representar as formas presentes em seu cotidiano além de formarem um campo produtivo de situações que podem favorecer a capacidade de resolver problemas. O presente trabalho, caracterizado como pesquisa do professor, tem por objetivo verificar quais são as contribuições de uma proposta de ensino – composta por uma sequência didática envolvendo cálculo de área de figuras planas com composição e decomposição de formas geométricas e um processo de modelagem de logotipos figurais – para o ensino de geometria plana. Foram levantados os conhecimentos prévios dos estudantes e, a partir deles, foi elaborada, aplicada e analisada uma sequência didática com vistas à aprendizagem significativa de alguns procedimentos de determinação do valor de área de figuras planas. Também foi proposto e analisado um processo de modelagem de logotipos figurais cuja finalização se deu por meio do software Geogebra. As propostas foram aplicadas a alunos do terceiro ano do ensino médio de um instituto federal de educação e as análises foram fundamentadas na teoria da aprendizagem significativa de procedimentos, feitas a partir dos registros de representação semiótica produzidos pelos alunos nas atividades propostas. Considerou-se que é possível tratar não apenas de conceitos, mas também de procedimentos atendendo às condições da aprendizagem significativa; que a modelagem de logotipos figurais pode favorecer a aprendizagem de área de figuras planas e que esta, ao ser desenvolvida no âmbito da sala de aula, evidenciou alguns aspectos importantes: organização do professor (tempo e modo de tratar os conteúdos relativos ao conteúdo de geometria); disponibilização de computadores para os alunos; persistência por parte dos alunos; e necessidade de o professor ter uma experiência prévia com este tipo de modelagem.

Palavras-chaves: Ensino de geometria, aprendizagem significativa, registros de representação semiótica, modelagem matemática.

ABSTRACT

Geometry constitutes a central part in the Mathematics curriculum, since by means of it students get to develop the necessary skills to understand, describe and represent different shapes in their everyday lives. This work, characterized as a teacher's research, aims at verifying the contributions of a didactic sequence for the teaching of plane geometry, involving the process of finding the area of plane figures by means of composing and decomposing geometric shapes and modeling figural logos. To achieve such purpose, we have raised the students' previous knowledge on the subject, and afterwards we have produced, applied and analyzed a didactic sequence intending to determine the area of plane figures. Afterwards we have proposed and analysed a procedure for modeling figural logos. The propositions have been applied to senior high school students from a state-funded education center, and the analyses have been rooted on the Meaningful Learning of Procedures Theory, based on the registers of semiotic representation produced by students while performing the activities proposed. We have concluded that it is possible to deal not only with concepts, but also with procedures when complying with the conditions of meaningful learning, and that the modeling of figural logos can be developed in class since it answers to specific aspects such as: organization of the teacher; availability of computers for students; previous experience of the teacher with this sort of modeling. The porposed activities can contribute for both teachers and students to make up, deal with and convert the registers of semiotic representation related to the calculus of area, thus favoring the development of sequential, perceptive, discoursive and operative apprehensions.

Keywords: geometry teaching; meaningful learning; registers of representation; mathematical modeling.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

CAPÍTULO I
INTRODUÇÃO

1 INTRODUÇÃO

A presença da Matemática como uma das disciplinas obrigatórias nos currículos oficiais do ensino fundamental é justificada por sua utilização prática na vida das pessoas e por conta do desenvolvimento do raciocínio lógico que ela pode promover. Se no primeiro caso são evidenciados os aspectos utilitários da matemática na formação do cidadão – verificáveis nas compras, no cálculo do aumento dos salários, nas estatísticas publicadas nos jornais, na utilização das grandezas e medidas em muitas situações do cotidiano – no segundo, coloca-se foco no desenvolvimento das formas de pensamento demonstráveis pelo sujeito que investiga, compreende, relaciona, argumenta, generaliza e representa aspectos estruturais da matemática. Essas justificativas podem ser vistas nos Parâmetros Curriculares Nacionais do ensino fundamental (BRASIL, 1998).

Nesse sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais do ensino médio realçam o valor formativo da disciplina e também o instrumental (principalmente na aplicação do conhecimento matemático em outras ciências) além do valor científico da matemática (BRASIL, 2000; 2002). O documento também propõe, como objetivo da disciplina, o desenvolvimento das competências relativas à representação e comunicação; à investigação e compreensão e também à contextualização sociocultural – o que ajuda a entender a obrigatoriedade da matemática na educação básica.

Quanto aos conteúdos, os documentos citados propõem um ensino em que os mesmos sejam vistos como um meio para que o aluno possa desenvolver as capacidades que lhe permitam produzir e usufruir de bens culturais, sociais e econômicos. Nesta perspectiva, os documentos demandam uma reflexão sobre a seleção de conteúdos e também uma busca de novos significados para os mesmos, ampliando-os para além de fatos e conceitos, incluindo, assim, procedimentos, valores, normas e atitudes. Assim, os conteúdos são classificados em três categorias: conteúdos conceituais (que envolvem fatos e princípios), conteúdos procedimentais (que indicam um saber fazer) e atitudinais (que envolvem normas, valores e atitudes).

Dentre os vários conteúdos da matemática da educação básica nos quais os estudantes apresentam dificuldades, destacam-se os conceitos e procedimentos em geometria, especialmente o tema área de figuras geométricas planas – tema deste trabalho. Vários estudos apontam as dificuldades dos alunos na geometria; outros indicam algumas perspectivas de ensino desses conceitos, como pode ser visto em Andrade (2007), Baldini (2004), Chiummo (1998), Facco (2003), Frade (2012), Perrota e Perrota (2005) e Pirola (2000).

Com relação aos conceitos, Sternberg (2000), aponta que existem dois enfoques teóricos da psicologia que buscam explicar a aprendizagem: o enfoque associacionista (aquisição de conceitos artificiais, categorias naturais e computacionais a partir do processamento da informação) e o estruturalismo, em que se destacam as teorias clássicas de aprendizagem como as da Gestalt, de Piaget e de Vygotsky. Conforme Brito (2011), existem diferentes tipos de aprendizagem e várias formas de um conteúdo incorporar-se à estrutura cognitiva do sujeito. Neste trabalho, será adotada a perspectiva cognitiva clássica da aprendizagem significativa proposta por David Ausubel na década de sessenta e reiterada recentemente (Ausubel, 2003).

Nesta perspectiva, aprendizagem significativa é aquela que permite ao indivíduo relacionar os conhecimentos já adquiridos (conhecimentos prévios) com as informações novas recebidas pelo mesmo. O autor realça duas condições para que a aprendizagem significativa ocorra: as relativas ao material e aquelas relativas ao próprio aprendiz. Quanto ao material, este deve ter uma estruturação lógica e ser apresentado com linguagem adequada. Nas condições relativas ao aluno, destacam-se os conhecimentos prévios e a predisposição para empregar esforço cognitivo para atribuição de significados e sentido ao conteúdo.

A predisposição para a aprendizagem é um aspecto comportamental das atitudes, sendo verificada na aceitação de desafios, no estabelecimento de relações e na busca de estratégias próprias de solução de problemas –

características de competências relativas à investigação e compreensão (BRASIL, 2000).

Nas pesquisas referentes à aprendizagem de área de figuras planas, verificou-se uma discussão muito ampla no que se refere à dimensão conceitual desse conteúdo (ALMOULOUD et al., 2004; BALDRINI, 2004; FACCO, 2003; MACHADO, 2011; NUNES, 2011; PAULA, 2011; SANTOS, 2011). No entanto, a revisão bibliográfica que pôde ser feita indicou a ausência de trabalhos que discutissem a dimensão procedimental dos conteúdos em geometria.

Para Coll e Valls (1998), ao ensinar procedimentos, o que se propõe para a aprendizagem dos alunos é um conjunto de ações em que sua realização permite chegar, finalmente, a determinadas metas. Em outras palavras, trabalhar com procedimento significa revelar a capacidade de saber fazer, de saber agir de maneira eficaz. O ensino de procedimentos requer, entre outras ações, que o professor enfatize e trabalhe com a natureza do mesmo.

Os PCN (BRASIL, 1998) propõem diferentes caminhos para o professor fazer matemática em sala de aula, como, por exemplo, a resolução de problemas e as tecnologias da informação.

No que se refere ao uso das tecnologias de informação, o documento refere-se à possibilidade de utilização de softwares nas aulas de matemática. O uso destes justifica-se pelo perfil da sociedade atual e pelas possibilidades de criação, interação e interpretações que os softwares educativos podem oferecer.

De acordo com Valente (1999), a utilização do computador no processo de ensino e aprendizagem pode enriquecer ambientes educacionais e auxiliar o aprendiz no processo de construção do seu conhecimento. Em outras palavras, a aprendizagem deixa de ser a simples memorização da informação transmitida pelo professor e passa a ser a construção do conhecimento realizada pelo aluno de maneira significativa, em que o professor será o mediador do processo de formação de conceitos e de procedimentos. As Orientações Curriculares para o Ensino Médio referem-se às possibilidades dos softwares matemáticos como provocadores do “pensar matematicamente”, ou seja, do testar hipóteses, esboçar conjecturas e resolver problemas (BRASIL, 2006).

Nesse sentido, o documento sugere situações de aprendizagem que exponham os alunos a problemas que exijam a elaboração de hipóteses e a construção de modelos matemáticos para situações do mundo real.

A modelagem matemática pode ser compreendida enquanto uma metodologia de ensino em que o aluno entra em contato com uma situação problema e, por meio dos processos de interação, matematização e validação, constrói um modelo, isto é, um conjunto de conceitos e de símbolos matemáticos que representam a realidade estudada. Na obtenção do modelo estariam envolvidos conceitos e procedimentos matemáticos relativos à série ou ao ano escolar dos alunos envolvidos no processo, caracterizando assim a modelagem como método de ensino. Essa visão de modelagem tem sido defendida por vários autores, muitos tomando por base a ideia de modelo matemático de Bassanezi (2006) e de Bienbengut e Hein (2007) e outros explorando os ambientes de aprendizagem propostos por Barbosa (2001).

Apesar do grande número de trabalhos sobre a modelagem matemática nessa perspectiva, verificou-se em Biembengut (2009) e em Silveira (2007) que poucos exploram essa metodologia para o ensino de conceitos e procedimentos de geometria.

Considera-se – a partir da experiência vivenciada pelo autor deste trabalho com alunos do ensino médio[1] – que é possível trabalhar conteúdos de geometria plana explorando as figuras geométricas que podem ser identificadas nas formas que diariamente são vistas pelos alunos nas telas do computador, nos anúncios na televisão e nos apelos visuais de propagandas: é o caso dos logotipos, símbolos que representam uma marca e quem tem forte apelo visual nas chamadas publicitárias.

Explorar a forma de um logotipo, identificar e decompor e compor as figuras geométricas envolvidas, determinar medidas de lados e ângulos das figuras identificadas, representá-las e construí-las sistematicamente (no papel e na tela do computador) e também calcular as áreas das superfícies coloridas, podem se constituir em um problema a ser resolvido – este, entendido como um processamento cognitivo direcionado para a transformação de uma

[1] A experiência foi relatada em Durães; Ramos; Batista e Boiago (2013).

determinada situação na busca de um objetivo quando nenhum método óbvio de solução está disponível para solucioná-lo (MAYER, 1992). Os processos de formulação e de solução do problema podem ser associados à modelagem matemática.

Aliás, conforme apontaram Bicudo e Klüber (2011), são vários os trabalhos de modelagem matemática que buscam compreender como a resolução de problemas, os modelos matemáticos, as investigações matemáticas e os conteúdos matemáticos podem ser trabalhados nas aulas, especialmente em ambientes de aprendizagem com computadores.

A experiência também tem mostrado que a percepção e a representação de figuras em uma composição aparentemente não geométrica demandam processos de pensamento ainda pouco estudados – principalmente quando as construções geométricas são feitas com o auxilio de softwares específicos. Na busca de entender alguns desses processos, optou-se por interpretar os desenhos e símbolos utilizados pelos alunos como registros de representação semiótica, na perspectiva de Raymond Duval.

O processo de modelagem matemática parece envolver a formação, o tratamento e a conversão dos símbolos geométricos, conforme descrição feita por Duval (2003, 2011, 2012). A construção dessas representações na tela do computador utilizando o GeoGebra – um software de geometria dinâmica – requer procedimentos um tanto diferenciados, envolvendo processos cognitivos que merecem ser mais bem entendidos.

A articulação da Modelagem Matemática – enquanto metodologia para o processo de ensino e aprendizagem – com uma teoria de representações semióticas permite um melhor entendimento das conceitualizações necessárias para a resolução dos problemas levantados pelos temas propostos, conforme propôs Burack (2010). A breve revisão de literatura permitiu identificar vários trabalhos que buscam compreender a aprendizagem da geometria por meio das representações semióticas (BURATTO, 2006; FLORES & MORETTI, 2006), mas não foram encontrados trabalhos que tratassem especificamente da resolução de problemas geométricos que envolvessem os procedimentos aqui elencados.

Diante do exposto, vale apresentar o problema desse trabalho, fruto da breve revisão bibliográfica apresentada e principalmente da experiência deste autor enquanto professor do ensino básico. Com o intuito de contribuir com as pesquisas, reflexões e compreensões que existem acerca da aprendizagem da geometria básica, elaborou-se a seguinte questão: **Quais são as contribuições de uma proposta de ensino – composta por uma sequência didática envolvendo cálculo de área de figuras planas com composição e decomposição de formas geométricas e um processo de modelagem de logotipos figurais[2] utilizando o software GeoGebra – para o ensino de geometria plana?**

A finalidade deste trabalho é caracterizar as ações pedagógicas propostas: a sequência didática e a modelagem matemática como possibilidade metodológica para o ensino e aprendizagem da geometria básica. Para essa caracterização, algumas perguntas devem ser respondidas: Que condições relativas ao material (estrutura lógica) podem favorecer a aprendizagem significativa de conceitos e procedimentos relativos ao conteúdo áreas de figuras geométricas planas? Quais condições relativas ao aprendiz (conhecimento prévio e registros de representação) podem ser evidenciadas nesse processo? Quais são as características de um trabalho em que se utiliza o software GeoGebra para a modelagem matemática de logotipos?

O produto final deste trabalho, que está vinculado ao Mestrado Profissional em Ensino de Ciências e Matemática, será constituído por uma proposta de ensino na forma de duas sequências didáticas: uma para o ensino de áreas de figuras geométricas planas e a outra para a modelagem matemática de logotipos. O produto será acompanhado da fundamentação teórica brevemente mencionada nesta introdução além das reflexões oriundas da experiência de aplicação das sequências didáticas.

[2] Logotipo figural é uma representação gráfica de uma marca comercial ou da sigla de uma instituição, apresentada na forma de figuras.

CAPÍTULO II
REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Ser pesquisador antes de tudo é ter clareza do seu problema de pesquisa e para que isto aconteça necessita-se que o mesmo tenha domínio, ainda que de forma parcial, das discussões realizadas acerca dos temas investigados. Desta maneira, considera-se de suma importância fazer uma revisão da literatura, que de acordo com Luna (1997) e Alves (1992), possui a importante função de evidenciar como as problemáticas do pesquisador têm sido tratadas por outros estudiosos. Alves (1992) ainda pondera que a revisão da literatura tem por objetivo iluminar o caminho a ser trilhado pelo pesquisador, desde a definição do problema, a elaboração de referenciais teóricos e metodológicos até a interpretação dos resultados. Tal revisão serve também para analisar até que ponto a pesquisa e o produto construído a partir dela avançaram em relação a outros de mesma natureza.

Nesse sentido, a presente pesquisa realizou uma breve busca no banco de dissertações e teses sobre as principais temáticas em questão – além de alguns artigos já discutidos por outros autores.

Quanto ao conteúdo da área, foi possível encontrar alguns trabalhos que discutiram essa temática sob a perspectiva conceitual, dentre eles tem-se o desenvolvido por Facco (2003) cujo objetivo era estudar os fenômenos que interferem nos processos de ensino e aprendizagem do conceito de área. Na pesquisa, a mesma organizou uma proposta de ensino do conceito de área na forma de uma sequência didática envolvendo composição e decomposição de figuras planas. Com base metodológica na engenharia didática, a autora se fundamentou na dialética ferramenta-objeto e mudança de quadros de Régine Douady (1986, 1987) e na teoria dos registros de representação semiótica de Raymond Duval (1993, 1994, 1995), todos citados por Facco (2003). A pesquisa contou com a participação de um grupo de professores que faziam parte de um projeto de geometria da PUC-SP e 32 alunos da quinta série do ensino fundamental (atual sexto ano). Vale salientar que as atividades aplicadas ao longo da pesquisa foram elaboradas por meio de discussões e reflexões dos professores que faziam parte deste grupo e que a aplicação desta ocorreu em 12 sessões. A mesma constatou que, dentre outros obstáculos didáticos na sua proposta de pesquisa, foi possível observar que os alunos confundiram as unidades de área e perímetro, utilizaram o mesmo cálculo para calcular área e perímetro; por parte dos professores, houve poucas argumentações no momento da explanação dos conteúdos. No entanto, na medida em que as atividades eram desenvolvidas, foi possível verificar que os alunos deixavam de confundir unidades de área com perímetro, bem como o cálculo destes. As atividades possibilitaram a investigadora concluir que as figuras possuem um papel heurístico, na resolução de situações e que no processo de composição e decomposição de figuras evidenciou as apreensões discursiva, perceptiva, operatória e sequencial. Além disso, as figuras trabalhadas com subsídio nas apreensões propostas por Duval possibilitaram uma evolução na atribuição de sentido às operações, ou seja, os alunos conseguiram ao final da proposta interpretar, raciocinar e resolver o cálculo das áreas de figuras mais complexas.

Já a pesquisa de Buratto (2006) foi desenvolvida com 30 licenciandos do 5º semestre de um curso de Matemática. O objetivo da pesquisa foi elaborar uma sequência de atividades tanto para alunos da educação básica, quanto para os alunos do curso de matemática. Após a aplicação de alguns instrumentos aos licenciandos, em que se notou a existência de algumas falhas no formação inicial dos mesmos – ao que se refere ao conhecimento geométrico e as concepções de ensinar e aprender geometria – a autora concluiu que, para construção do conhecimento geométrico, é fundamental a compreensão da utilização do registros de representação: a figura geométrica torna-se apoio “na economia de processos cognitivos” durante o desenvolvimento da resolução. Outro ponto relevante discutido pela autora é o ensino de geometria por meio de situações-problemas envolvendo os registros de representação semiótica e os seus respectivos tratamentos, o que permite que as figuras se tornem um objeto de exploração heurística, possibilitando aos licenciandos desenvolvimento de habilidades visuais e da capacidade de interpretar objetos matemáticos.

Santos (2011) em sua pesquisa de mestrado tinha por objetivo verificar os erros dos alunos na resolução de problemas de perímetro e área de figuras planas, e também como os professores de Matemática os analisavam. Esta pesquisa foi dividida em duas partes, sendo a primeira desenvolvida com aplicação de duas questões do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (SARESP) de 2007 e 2008 com 85 alunos da 7ª série e uma entrevista com 13 alunos. Na segunda parte, realizou-se uma entrevista com 3 professores que lecionavam no ensino fundamental e que tinham sido professores desses alunos. A finalidade destas etapas era investigar qual era o entendimento dos alunos frente ao conceito de área e perímetro e também identificar as possíveis dificuldades dos professores de Matemática no ensino desses conceitos, compreendendo sua maneira de analisar os erros dos alunos. A pesquisadora concluiu que os alunos não tinham apreendido os conceitos e que os professores revelavam uma deficiência no seu processo de formação docente, além de práticas tradicionais de ensino restritas à memorização de definições, repetições de exercícios e atividades pouco significativas.

Já o trabalho de Frade (2012) foi desenvolvido com 98 alunos do 3º ano do ensino médio e tinha como objetivo estudar uma forma de desenvolver o tópico composição e/ou decomposição de figuras planas na resolução de problemas geométricos, tendo com foco área e perímetro. A pesquisa foi realizada em uma escola particular do município de Contagem - MG. Inicialmente foram selecionadas e aplicadas algumas questões que exigiam que os sujeitos evidenciassem essas habilidades. Foram reveladas, no grupo analisado, dificuldades de assimilação de conceitos e de procedimentos relativos ao tema. Posteriormente, realizou-se uma análise comparativa das coleções de livros didáticos dos ensinos fundamental e médio e também de questões dos exames do ENEM, da OBMEP e Vestibulares. Foi possível constatar que alguns livros didáticos apresentam o assunto sem realizar uma sistematização adequada quanto aos conceitos e procedimentos e que as questões dos exames exigiam um domínio de conhecimentos e habilidades mais complexas do que as oferecidas nos materiais pesquisados. Por fim, o pesquisador elaborou uma proposta de intervenção pedagógica com base no modelo de Van Hiele, com vistas ao desenvolvimento do pensamento geométrico.

Ao que se refere ao processo modelagem matemática, pode-se constatar uma vasta produção de artigos, dissertações e teses frente a este tema, nas variadas vertentes que este possui. Biembengut (2009), em um dos seus estudos constatou esse aumento de produções e discussões nos trinta anos de instauração das primeiras propostas. No mapeamento realizado pela pesquisadora, foram identificados 288 trabalhos acadêmicos (teses, dissertações, monografias), 836 artigos e 112 cursos de licenciatura que tinham a disciplina de modelagem ou que abordavam o tema. Mesmo com todas essas pesquisas apontando as vantagens que a modelagem matemática possibilita aos processos de ensino e aprendizagem, a autora pondera que ainda existe resistência por parte de estudantes, em especial no ensino superior, e de muitos professores do ensino básico e superior em adotá-la como metodologia de ensino e aprendizagem. De acordo com a referida autora, pode ser que essa resistência por parte de estudantes e professores seja fruto da dificuldade em que eles possuem em solucionar situações problemas que requerem algum tipo de raciocínio não adequadamente desenvolvido.

Apesar do grande número de autores que trabalham com a modelagem matemática, verificou-se em Silveira (2007) e em Biembengut (2009) que esta vem sendo pouco explorada como metodologia de ensino para trabalhar conceitos de geometria.

No entanto, é possível algumas pesquisas como a de Zukauskas (2012) que propôs uma atividade no extra-turno para 15 alunos do sexto ano do ensino fundamental com intuito de analisar a motivação destes em aprender conteúdos de geometria a partir da construção de embalagens. Nesse sentido, a pesquisadora concluiu que a atividade favorece a aprendizagem de conteúdos, mas foi possível verificar momentos de motivação e desmotivação dos mesmos ao longo do processo.

Vertuan (2007) desenvolveu um trabalho de investigação sobre a utilização de diferentes registros em atividades de Modelagem Matemática, fundamentado na teoria de Raymond Duval e na Modelagem Matemática como alternativa pedagógica. O mesmo investigou se os diferentes registros associados a um objeto matemático tornam-se presentes em atividades de Modelagem Matemática e se essas atividades possibilitam o tratamento, a conversão e a coordenação entre os registros. O mesmo organizou um curso de Modelagem Matemática, para alunos do 1º ano do Curso de Licenciatura em Matemática que cursavam a disciplina de Cálculo e Geometria Analítica I pela primeira vez, em que foram propostas discussões analíticas acerca do objeto matemático “derivada”. Pautado na observação, descrição e análise dos registros produzidos pelos alunos nas atividades de Modelagem, concluiu-se que os registros dos alunos interferem no processo de modelagem bem como possibilita que os mesmos realizem o tratamento, a conversão e a coordenação entre eles. Tal coordenação, por sua vez, contribuiu para a compreensão dos objetos matemáticos discutidos e para situação-problema investigada.

Outra pesquisa de modelagem envolvendo conteúdos de geometria é a de Reinheimer (2011); esta se desenvolveu com alunos do terceiro ano do Ensino Médio da Educação Jovens e Adultos (EJA). Respaldado na teoria de Ausubel (2003), o pesquisador tinha como finalidade analisar uma metodologia que favorecesse a aprendizagem significativa da geometria. O pesquisador, juntamente com os alunos, propôs uma problemática – a construção do novo prédio na escola - e a partir daí realizou-se um projeto de modelagem matemática, que considerava desde situações de gastos para construção e a quantidade de materiais até a questão do espaço. A pesquisa concluiu que as condições o trabalho em grupo, as interações, a coletividade, o movimento dos próprios alunos de relacionar o conhecimento matemático com a situação real contribuíram para que houvesse atribuição de significados, ou seja, aprendizagem significativa dos conteúdos.

Já Bisognin e Bisognin (2012) analisaram as percepções de professores que concluíram um curso de Mestrado em Ensino de Matemática e que utilizaram a Modelagem Matemática em suas dissertações. Os autores destacaram três eixos principais, a partir das falas destes professores: possibilidade de mudança na prática docente, dificuldades no exercício da docência com Modelagem Matemática e repercussões na aprendizagem docente e discente.

Ao que se refere ao eixo de possibilidade de mudança na prática docente, foram encontrados relatos de professores indicando que a modelagem favorece o desvencilhar de aulas livrescas e a utilização de metodologias que promovem mudanças de concepções sobre o ensino de matemática.

Para o eixo das dificuldades no exercício da docência com Modelagem Matemática, os professores queixaram-se do tempo, da quantidade de leitura e interpretações de situações para que atividade de modelagem seja bem sucedida, o trabalho com a leitura e a escrita e a insegurança dos alunos em ter que construir algo novo, já que estes estão acostumados ao fato de ser o professor a figura responsável pela condução das tarefas.

E, por fim, o eixo das repercussões em que, para os docentes, o desenvolvimento desse tipo de atividade promove uma transformação no modo de pensar e agir no âmbito da sala de aula, uma mudança de concepção sobre o que é ensinar matemática; para os discentes, a modelagem promove um maior contato com o conteúdo matemático e o desenvolvimento da capacidade de trabalhar em grupo. Em resumo, as autoras apontaram que a modelagem pode ser vista como uma das possibilidades de mudanças na prática pedagógica, porém há alguns obstáculos que ainda necessitam ser transpostos para que tais se efetivem.

Já Silveira e Caldeira (2012) verificaram que professores e futuros professores egressos de curso de formação de professores de matemática possuem algumas resistências à prática da modelagem na sala de aula: estas se referem às relações do professor com o trabalho, com a escola, com o currículo, com os alunos e com a família dos alunos, conforme se observa no Quadro 1.

Quadro 1. Obstáculos e resistências em aplicações com Modelagem Matemática

CATEGORIAS	OBSTÁCULOS E RESITÊNCIAS
Professor e suas relações com o trabalho	• Maior exigência do professor na preparação e no momento da aula (ROMA, 2002; JACOBINI, 2004; DIAS, 2005). • Insegurança diante do novo (BURAK, 1987, 1992; GAZZETTA, 1989; ANASTÁCIO, 1990; GAVANSKI, 1995; CALDEIRA, 1998; BARBOSA, 2001; DIAS, 2005) • O não acompanhamento de um profissional que tenha maior experiência e domínio sobre a Modelagem Matemática (BURAK, 1992). • Grande quantidade de alunos por turma (ANASTÁCIO, 1990; BARBOSA, 2001).
Professor e suas relações com a escola	• Ausência de colaboração da parte administrativa da escola (ANASTÁCIO, 1990; BURAK, 1992; MARTINELLO, 1994; BARBOSA, 2001; ROMA, 2002) • Estrutura da escola (BARBOSA, 2001). • Objetivos diferentes dos objetivos da instituição (ROMA, 2002; FIDELIS, 2005).
Professor e suas relações com o currículo	• Preocupação em cumprir o conteúdo (BURAK, 1987; ANASTÁCIO, 1990; 1992; MARTINELLO, 1994; LUZ, 2003; DIAS, 2005; FIDELIS, 2005). • Preocupação com a sequência dos conteúdos diferente da "sequência lógica" (MARTINELLO, 1994). • Falta de tempo ou preocupação com gasto excessivo (BARBOSA, 2001; ROMA, 2002; DIAS, 2005; FIDELIS, 2005). • Preocupação acerca do processo de construção do conhecimento (LUZ, 2003; ANASTÁCIO, 1990).
Alunos e suas relações com a Modelagem	• Reação dos alunos (BARBOSA, 2001). • Indisposição e cansaço por parte dos alunos do noturno em desenvolver as atividades (ROMA, 2002). • Os alunos não gostam desse novo método (ROMA, 2002).
Professor e suas relações com a família dos alunos	• Preocupação com a reação dos pais (BURAK, 1992; CALDEIRA, 1998; BARBOSA, 2001). • Ausência de colaboração dos pais (ANASTÁCIO, 1990; BURAK, 1992; MARTINELLO, 1994; BARBOSA, 2001; ROMA, 2002).

Fonte: Silveira e Caldeira (2012), p. 1034.

Uma das tendências da educação matemática é a utilização de novas tecnologias; nesse sentido Pereira (2012) realizou uma pesquisa com objetivo de verificar como se dá a interação entre professor e os alunos em um ambiente colaborativo de geometria para o ensino fundamental e médio a partir da utilização do software GeoGebra. A pesquisa tinha a finalidade de analisar as atividades realizadas pelos alunos em sala de aula com o acompanhamento do professor. Foi observado que os alunos demonstraram segurança quanto aos conceitos adotados durante a realização da pesquisa. As tarefas organizadas pelo pesquisador permitiram que os alunos interagissem, conjecturassem e refletissem sobre os conceitos em questão. O uso do software possibilitou que os alunos visualizassem e discutissem o conhecimento matemático, em particular aquele relativo à geometria, e o papel do professor foi o de mediador e de facilitador da aprendizagem.

Na revisão bibliográfica que pôde ser feita, foi possível perceber uma carência no que se refere ao trabalho de modelagem matemática envolvendo conceitos de geometria e também trabalhos de modelagem utilizando o software GeoGebra.

A breve revisão aqui exposta possibilitou entender algumas formas de trabalho com a modelagem matemática e com o uso do computador, com vistas à aprendizagem significativa da geometria plana.

CAPÍTULO III
UMA FORMA DE VER E CONCEBER O ENSINO DE GEOMETRIA

3.1 O Ensino de Geometria de acordo com documentos oficiais

De acordo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), (BRASIL,1998) os conceitos geométricos constituem uma parte importante do currículo de Matemática, visto que é por meio deles que os alunos desenvolvem habilidades que permitem compreender, descrever e representar as formas presentes em seu cotidiano.

Outro aspecto importante é que a geometria trata de um bloco de conteúdos da matemática que pode ser considerado como um campo produtivo de situações que, ao serem exploradas pelo professor na sala de aula, favorecem não só a formação de conceitos e de procedimentos nessa área, mas também a capacidade de resolver problemas.

Nesse sentido, considera-se que, se os trabalhos com os conceitos geométricos fossem realizados por meio da exploração das formas dos objetos do mundo físico e também de obras de artes, de esculturas, de pinturas, de desenhos e de artesanatos, isso proporcionaria uma aprendizagem mais significativa da geometria, além de permitir um estabelecimento de conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento.

Em relação às formas, estudos ligados à Psicologia mostram que as crianças as percebem bem mais cedo do que as representam internamente. Na aprendizagem de conceitos, sabe-se que o pensamento geométrico se desenvolve primeiramente pela visualização, em que as figuras são reconhecidas por sua aparência física, em sua totalidade e não por suas partes e propriedades, conforme revela Van Hiele (1986).

É por meio da observação, da ação e da reflexão que elas começam a discernir e relacionar as características das figuras e a usar propriedades para conceituar as classes, como a dos paralelepípedos, a dos quadriláteros etc.

Assim, os objetos que povoam o espaço físico são fontes imprescindíveis do trabalho de exploração das formas. Portanto, faz-se necessário que o aluno seja incentivado a identificar posições relativas de objetos, a reconhecer no seu entorno objetos com formas distintas (planas e não planas) e a fazer construções tridimensionais, modelos ou desenhos (mostrando diferentes pontos de vistas), sendo incentivadas, sempre que possível, a descrever as propriedades das formas.

O professor pode realizar um trabalho constante de incentivo à observação, solicitando aos alunos que descrevam semelhanças e diferenças entre formas, por meio de atividades como compor e decompor figuras, perceber simetria como característica de alguma figura e não de outras etc. Com essa exploração, ele poderá contribuir para o desenvolvimento de habilidades visuais, verbais, gráficas, lógicas e de aplicação (Hoffer,1981) que são importantes para a aprendizagem da geometria.

Desta maneira, os alunos completariam os dois primeiros ciclos do ensino fundamental (atuais primeiro ao quinto ano) conhecendo e nomeando formas elementares da geometria espacial e plana, e reconhecendo parte de suas propriedades e das classificações.

No ciclo III (atuais sexto e sétimo anos) os PCN (BRASIL, 1998) sugerem que o aluno, ao distinguir figuras bidimensionais de tridimensionais, saiba descrever suas principais características, estabelecendo relações entre elas e utilizando vocabulário próprio. Além disso, é indispensável também que o aluno aprenda a identificar diferentes planificações de sólidos tridimensionais e a classificar figuras tridimensionais e bidimensionais, com a utilização de critérios diversos como: corpos redondos e poliedros, poliedros regulares e não regulares, prismas, pirâmides e outros poliedros, círculos, polígonos e outras figuras, números de lados de um polígono, eixos de simetria de um polígono, paralelismo de lados, medidas de ângulos e de lados etc.

Por fim, no ciclo IV (atuais oitavo e nono anos), além de um trabalho mais efetivo com os triângulos (congruência e semelhança) e com as áreas de polígonos e círculos, os alunos aprenderiam a realizar secções de figuras tridimensionais por um plano e análise das mesmas obtidas, a analisar em poliedros posições relativas de duas arestas (paralelas, perpendiculares, reversas) e de duas faces (paralelas, perpendiculares), a representar diferentes visões de sólidos tridimensionais (frontal, lateral e superior) e reconhecimentos destas diferentes vistas.

Para o Ensino Médio, os documentos PCN (1998), PCN+(2002) PCNEM (2000) e OCNEM(2006), apresentam quatro unidades temáticas: geometrias plana, espacial, métrica e analítica e indicam o estudo de definições e propriedades, posições relativas de objetos métricos, relações entre figuras espaciais e planas, sólidos geométricos, propriedades de congruência e semelhança de figuras bidimensionais e tridimensionais, análise de diferentes representações das figuras planas e espaciais, tais como desenho, planificações e construções com instrumentos. O documento também sugere a interpretação e a utilização de modelos para a resolução de problemas geométricos, o que indica a concepção do conhecimento em geometria como meio para leitura, compreensão e ação sobre a realidade.

Porém, para que haja um maior desenvolvimento do raciocínio lógico, é conveniente que se faça um aprofundamento dessas ideias já trabalhadas no ensino fundamental. O raciocínio dedutivo é desenvolvido em um processo no qual o aluno percebe a necessidade de provar suas conclusões, dando sentido às demonstrações para fatos que lhe são familiares.

Assim, nota-se que para qualquer conteúdo matemático é necessário primeiramente conhecê-lo enquanto parte do currículo de matemática e verificar os enfoques conceituais, procedimentais e atitudinais para então organizar a prática educativa a partir das condições de aprendizagem dos alunos.

3.2 Os processos de ensino e aprendizagem na perspectiva ausubeliana

Os processos de ensino e aprendizagem acontecem tanto no âmbito escolar quanto fora dele. O presente trabalho pretende adotar uma concepção de aprendizagem escolar de conceitos e procedimentos com base na atribuição de significados.

Com relação aos conceitos, Ausubel (2003) os define como sendo objetos, eventos, situações ou propriedades que possuem atributos comuns de critérios comuns e que são representados por meio de algum símbolo ou signo. Já os procedimentos são definidos por Coll e Valls (1998) como um conjunto de ações ordenadas, orientadas para a consecução de uma meta.

No âmbito escolar, Ausubel (2003) evidencia que a aprendizagem de conceitos e de procedimentos deve acontecer de modo significativo. Este tipo de aprendizagem refere-se a um processo que permite que uma nova informação recebida pelo aluno se relacione com um aspecto relevante da sua estrutura cognitiva. A nova informação pode, neste processo, interagir com uma estrutura de conhecimento específica, onde existem os chamados conceitos subsunçores e, dessa forma, modificar, ampliar ou complementar o conhecimento já existente.

Caso haja uma carência de significados e de sentidos, ou seja, pouca associação com os conceitos ou procedimentos relevantes que o aluno possui, a aprendizagem será chamada de mecânica ou memorística. A diferença existente entre elas é que na mecânica ou memorística o sujeito estabelece relações restritas e aleatórias; já na significativa, o mesmo estabelece relações amplas e não aleatórias.

Segundo Ausubel (2003) e Pozo (1998), existem diferenças entre as condições necessárias para aprendizagem significativa e a mecânica. Para a aprendizagem significativa é necessário que o aluno empreenda um esforço deliberado para relacionar os novos conceitos com os já existentes na sua estrutura cognitiva, relacionando experiências, fatos, objetos ou ações, além de um envolvimento afetivo que motive seus pensamentos e ações.

Por outro lado, na aprendizagem mecânica ou memorística, o aluno não realiza nenhum esforço para integrar novos conceitos ou procedimentos aos existentes em sua estrutura cognitiva, nem fatores afetivos e motivacionais para que se mobilizem os conhecimentos anteriores.

Apesar das diferenças entre a aprendizagem mecânica e a significativa, elas fazem parte de um processo contínuo, não sendo uma simples dicotomia. Assim, tais não são excludentes e podem coexistir em algumas situações.

De acordo com Ausubel (2003), existem duas condições para que a aprendizagem significativa aconteça: uma refere-se ao material a ser aprendido e outra é relativa ao sujeito que aprende. Quanto ao material, ele deve possuir uma organização interna, isto é, os elementos que o compõem devem estar organizados em uma estrutura lógica e conceitual explícita, e não apenas sobrepostos. Além disso, é preciso que seja apresentado por meio de um vocabulário e de uma terminologia adaptados ao aluno. Para que o material seja potencialmente significativo ele deve procurar mobilizar ideias âncoras relevantes e promover uma interação entre estas e os novos significados.

Quanto ao sujeito que aprende, é necessária uma predisposição favorável para a compreensão, para a procura do sentido e do significado da aprendizagem. Segundo Coll e Valls (1998), não se podem analisar separadamente características do material das condições dos sujeitos aprendizes, visto que uma condição para que a aprendizagem seja significativa é a motivação[3] no empenho do esforço deliberado e intencional para a compreensão. A experiência de situações nas quais suas ideias não foram reconhecidas pelo professor, a falta de confiança em suas capacidades, as atitudes desfavoráveis com relação à atividade ou ao objeto são alguns motivos pelos quais o aluno não empenharia esforços para a aprendizagem significativa.

O sujeito deve, também, mobilizar conhecimentos prévios sobre o material a ser aprendido. Pozo (1998) define conhecimento prévio como construções pessoais dos alunos, que possuem coerência do ponto de vista individual, mas não necessariamente do ponto de vista científico; são estáveis e resistentes à mudança; possuem elementos implícitos – muitas vezes verificados nas atividades ou em previsões –, podem ser compartilhados por pessoas e buscam, em última análise, a utilidade mais do que a "verdade".

Os conhecimentos prévios dos alunos, além de diferirem quanto à área do conhecimento, diferem também na sua natureza. De acordo com Pozo (1998), alguns conhecimentos são mais conceituais e outros mais procedimentais, uns mais descritivos e outros mais explicativos, uns mais gerais e outros mais específicos etc. Segundo o referido autor, o conhecimento prévio pode ter origem nas concepções espontâneas (quando formadas na tentativa de dar significado às atividades cotidianas); nas concepções transmitidas socialmente (quando o conhecimento se origina do meio social e

---

[3] A aprendizagem significativa está vinculada a uma motivação intrínseca, enquanto aprendizagem memorística se relaciona à motivação extrínseca. Entende-se o termo motivação sob a perspectiva de Guimarães (2001), em que ela pode ser intrínseca quando o sujeito escolhe ou realiza uma determinada atividade por ter interesse próprio, por considerá-la atraente e pela satisfação em realizá-la e extrínseca quando o sujeito realiza uma atividade apenas para cumprir uma determinada obrigação em atendimento a pressões externas, seja para obter recompensas e demonstrar competências ou para evitar castigos e punições.

das crenças socialmente induzidas sobre fatos e fenômenos) e nas concepções analógicas, que ocorrem por meio da ativação de um pensamento analógico utilizado para dar significado a algo.

O autor aponta que existem várias maneiras de diagnosticar o conhecimento prévio, como a aplicação de questionários, a resolução de situações-problema e as entrevistas, individuais ou coletivas. Uma das justificativas para a avaliação do conhecimento prévio dos alunos é que esta permite conhecer as ideias principais destes a respeito de determinado assunto e, assim, o professor pode planejar melhor a sequência didática. A avaliação do conhecimento prévio é importante para o próprio aluno, pois permite a ele tomar consciência dos conceitos e procedimentos que já estão formados na sua estrutura cognitiva, justificar suas crenças, refletir sobre elas, resolver contradições, organizar as ideias, comparar seus pontos de vista por meio de discussões em grupo, de modo a favorecer também a aprendizagem de procedimentos e de atitudes.

Ausubel (2003) afirma que na aprendizagem significativa a aquisição de novas ideias relacionadas àquelas relevantes na estrutura cognitiva dos sujeitos aprendizes dá origem a significados verdadeiros ou psicológicos. Como a estrutura cognitiva de cada sujeito aprendiz é única, todos os novos significados adquiridos são – também eles – obrigatoriamente únicos; em outras palavras, cada sujeito aprendiz produz um significado frente a um material.

A aprendizagem significativa não pode ser considerada como sinônimo de aprendizagem de material significativo, uma vez que este processo é próprio do aprendiz. O material de aprendizagem pode ser constituído de componentes significativas, mas cada uma das componentes, de uma tarefa da aprendizagem, não é “logicamente” significativa. O conteúdo de área pode ser potencialmente significativo em uma sequência de atividades de ensino organizada pelo professor, mas o cálculo de cada uma das formas pode não ser significativo para os aprendizes.

Com isso, pode se concluir que, ainda que o material seja potencialmente significativo, ele pode ser aprendido por meio da memorização (caso o mecanismo da aprendizagem do aprendiz não seja significativo). As tarefas de aprendizagem por memorização podem relacionar-se com a estrutura cognitiva, mas de forma aleatória e restrita, não resultando na aquisição de novos significados.

Um tipo de aprendizagem evidenciada pelo autor, e que se aproxima da memorização, é a aprendizagem representacional. Na aprendizagem de representações há aquisição de vocabulário que pode ser prévia – em que as palavras representam fatos ou objetos reais e não categorias – ou posterior à formação dos conceitos. Já a aprendizagem de proposições consiste em adquirir o significado de novas ideias que se expressam em uma frase ou oração que contenha dois ou mais conceitos. Um exemplo de proposição em geometria é que todos os losangos têm diagonais perpendiculares.

Ausubel (2003) menciona que a linguagem desempenha um papel importante nos processos de aprendizagem significativa, tanto por recepção, quanto por descoberta. De acordo com o autor, a linguagem aumenta a manipulação de conceitos e de proposições, pois é por meio das propriedades representacionais da palavra que ocorrem o aperfeiçoamento das compreensões subverbais emergentes na aprendizagem. Nesse sentido, a palavra possui a função de clarificar e tornar os significados mais precisos e verdadeiros e, sem ela, a aprendizagem significativa fica rudimentar (como no caso dos animais).

A aprendizagem significativa de conceitos e procedimentos, dentro do âmbito escolar, ocorre a partir de duas dimensões: a primeira se refere ao tipo de aprendizagem realizada pelo aluno (significativa ou memorística); a segunda está relacionada à estratégia de instrução planejada para estimular essa aprendizagem (por recepção ou por descoberta).

Na aprendizagem por recepção, o conteúdo total do que está por aprender apresenta-se ao aprendiz em forma acabada. Já a característica essencial da aprendizagem pela descoberta (ex.: formação de conceitos, resolução de problemas por memorização ou significativa) é que o conteúdo principal do que está por aprender não é dado, mas deve ser descoberto de modo independente pelo aprendiz antes de este o poder interiorizar.

Existe uma tendência, por parte de alguns estudantes e professores da educação básica, em afirmar que a aprendizagem está condicionada à elaboração e desenvolvimento de atividades que fujam do modelo tradicional de ensino; este estaria ligado ao ensino expositivo em que o aluno aprenderia por recepção verbal. Na perspectiva de Ausubel (2003), aprendizagem por recepção nem sempre é memorizada ou passiva, desde que se utilizem métodos de ensino que levem a mesma a ter uma carga significativa.

Da mesma forma, a aprendizagem por descoberta – muito defendida por educadores matemáticos – não é necessariamente ativa ou significativa, ela necessita ser adaptada às condições da aprendizagem significativa.

A aprendizagem por recepção, de acordo com Ausubel (2003), é por inerência um processo ativo, pois esta exige, no mínimo, três passos considerados fundamentais para o processo ser significativo.

O primeiro refere-se à análise cognitiva que deve ser feita para averiguação de quais são os aspectos mais relevantes presentes na estrutura cognitiva do aprendiz para que o novo material seja potencialmente significativo. O segundo remete ao grau de reconciliação que os aspectos existentes na estrutura cognitiva do aluno – quais são as semelhanças e diferenças; relações de contradições reais ou aparentes – mantém com os conceitos e preposições novos e já enraizados. E, por fim, o terceiro passo indica o processo de formulação do material, organizando a estrutura lógica do material e adaptando a linguagem ao vocabulário do aprendiz.

A natureza do processo e as condições de aprendizagem significativa por recepção significativa ativa exigem, também, um tipo de ensino expositivo que reconheça os princípios da diferenciação progressiva e da reconciliação integradora nos materiais de instrução. O princípio da diferenciação progressiva reconhece que a aprendizagem, a retenção e organização das matérias são hierárquicas por natureza, procedendo de cima para baixo em termos de abstração, generalidade e inclusão.

Já a reconciliação integradora é realizada a partir de uma ação simbiótica entre as ideias relevantes e novas ideias, tendo por objetivo facilitar o ensino expositivo por meio de problematizações que explicitam as semelhanças e diferença entre as novas ideias e as ideias relevantes.

Além disto, o professor necessita se apropriar tanto das condições relativas ao material quanto das condições relativas ao aprendizado do aluno, caracterizando, desta maneira, o processo de aprendizagem, o de retenção e o de organização do conteúdo das matérias na estrutura cognitiva do aprendiz.

Ainda na perspectiva do autor, vale mencionar que muitos teóricos repudiam essa questão da aprendizagem significativa por recepção ser ativa, ou seja, que o método de ensino seja voltado para instrução verbal. Para muitos, a apropriação deste método, no processo de ensino e aprendizagem, não é mais que a realização de um trabalho voltado para repetição, em que os alunos memorizam fatos isolados que serão rejeitados.

Ausubel (2003) argumenta que a rejeição do processo de ensino/aprendizagem pautado na oralidade remonta há algumas décadas, onde foram introduzidas atividades e projetos, em larga escala, dentre outras formas de maximizar a experiência não verbal em sala de aula, e com ênfase na aprendizagem por meio da "autodescoberta" e da aprendizagem por meio da resolução de problemas. Isto aconteceu devido às inadequações gerais da instrução verbal, que ainda hoje pode ser encontrada de forma demasiada nas escolas.

A existência de algumas críticas referentes ao processo de ensino e aprendizagem expositivo ocorre devido a duas falhas: a primeira, relacionada a psicólogos que possuem uma tendência de subsumir vários tipos qualitativamente diferentes a um único modelo de explicação; o segundo se volta à ausência de uma teoria para aprendizagem verbal significativa.

De acordo com Ausubel (2003) existem quatro aspectos que explicam a aprendizagem verbal mal sucedida:

1) O uso prematuro de técnicas verbais puras com alunos imaturos em termos cognitivos; em outras palavras, o uso inadequado da linguagem.
2) A apresentação arbitrária de fatos não relacionados sem quaisquer princípios de organização e explicação.
3) A falta de integração de novas tarefas de aprendizagem com materiais anteriormente apresentados.
4) A apropriação de métodos avaliativos que valorizam, de forma demasiada, a capacidade de reconhecimento de fatos discretos e a reprodução de ideias com as mesmas palavras ou em um contexto idêntico ao apresentado anteriormente.

Sendo assim, a aprendizagem por recepção pode ser significativa para o aluno assimilar um conhecimento quando o professor organiza a estrutura lógica do material com base nos conhecimentos prévios dos seus alunos; quando ele promove um trabalho que favoreça a interação entre os conhecimentos prévios dos alunos e os novos significados de modo a levá-los a atribuir significados enquanto produto desta interação.

Os novos significados desempenham um papel fundamental no aumento da estabilidade do conhecimento, bem como no aumento da força de dissociabilidade associada, pois estes resultam da ligação dos mesmos conhecimentos prévios mais estáveis que lhes correspondem.

Os conhecimentos prévios se alteram de forma variável no processo interativo, quer com as novas ideias de instrução com as quais interagem, quer com os novos significados emergentes às quais estão ligadas no armazenamento da memória. Vale salientar que a história da aprendizagem significativa não termina com a aquisição de novos significados. Ela deve ser seguida de uma retenção ou de um esquecimento, tudo que se aprende pode ser retido ou esquecido.

O processo de retenção, de acordo com Ausubel (2003), evidencia um processo de ligação entre os novos significados com os conhecimentos prévios correspondentes ao intervalo da memória. No entanto, os conhecimentos adquiridos de forma dissociada por meio da reprodução, funcionam como ideias âncoras apenas por algum tempo limitado – a não ser que sejam bem apreendidos por meio da repetição ou do ensaio – ocorrendo o esquecimento ou uma redução gradual em relação às ideias âncoras em questão.

Nesse sentido, a eficácia da aprendizagem significativa reside em duas características principais: a não arbitrariedade e a substantivação, em que a aprendizagem por recepção significativa exerce um papel essencial para as retenções, pois o armazenamento de um conhecimento do aprendiz - quer dentro ou fora da sala de aula - depende de colocações verbais potencialmente estruturadas como fonte de conclusões e relações entre os conhecimentos prévios e os novos significados produzidos pelos mesmos.

O que se pretende nesse trabalho é organizar uma proposta de ensino que retome conceitos e procedimentos relativos à geometria plana de maneira que os alunos atribuam sentido e significado a esses conteúdos.

3.3 As características do conhecimento procedimental e o que é próprio do ensino e da aprendizagem de procedimentos.

Sabe-se que os procedimentos também são considerados como conteúdos escolares – tal como os fatos, os conceitos, os princípios e as atitudes – e que eles estão presentes em todas as áreas do conhecimento e em todos os ciclos escolares, portanto, espera-se que os professores planejem suas práticas objetivando sua aprendizagem.

Anderson (1983) em seus estudos apontou que existem apenas dois tipos de conhecimentos: declarativos que são os ligados a fatos, descrições e conceitos; e os procedimentais que se refere ao modo de execução de tarefas físicas ou cognitivas. Para o autor eles diferenciam pelo fato de um estar relacionado ao saber o quê e o outro consiste em como fazer. A tabela a seguir apresenta breves aspectos dessa distinção.

Tabela 1. Diferenças entre o conhecimento declarativo e procedimental

Conhecimento declarativo	Conhecimento procedimental
- Consiste em saber o quê. - É fácil de verbalizar. - Possui-se tudo ou nada. - Adquire-se de uma vez. -Adquire-se por exposição. (aquisição receptiva). -Processamento essencialmente controlado	- Consiste em saber como. - É difícil de verbalizar. - Possui-se em parte. - Adquire-se gradualmente. - Adquire-se por prática (aquisição por descobrimento) -Processamento essencialmente automático.

Fonte: Pozo e Angón, 1998, p.141.

Nota-se que a distinção realizada por Anderson (1983) permite dar um significado preciso à divergência entre o saber dizer e o fazer; por se tratarem de tipos de conhecimentos de natureza distintas, em muitos casos podem ser adquiridos por caminhos diferentes. De acordo com Pozo e Angón (1998, p. 142) tal distinção, sem dúvida, é importante para compreender a natureza psicológica dos procedimentos, mas não é isenta de críticas.

De acordo com Glaser (1990) apud Pozo e Angón (1998), do ponto de vista educacional, a distinção realizada é insuficiente para a análise dos conteúdos do currículo por dois motivos. Primeiro, pelo fato do conhecimento declarativo não ser exclusivamente descritivo, pois nem a sua natureza, nem os processos pelos quais ele é adquirido são semelhantes ao conhecimento factual. Já o segundo motivo refere-se à natureza dos procedimentos, pois embora em muitos casos eles sejam sequências de ações automatizadas, existem outros que só podem ser executados de forma consciente e deliberada, por exemplo, solucionar problemas.

Desta maneira, Coll e Valls (1998) e Pozo (1998), realizaram uma caracterização detalhada dos tipos de conhecimento e apontaram que o conhecimento procedimental refere-se a um conjunto de ações ordenadas, orientadas para consecução de uma meta. Assim, ao ensinar procedimentos, o que se propõe para aprendizagem dos alunos é um conjunto de ações em que sua realização permite chegar finalmente a determinadas metas. Em outras palavras, trabalhar com procedimento significa revelar a capacidade de saber fazer, de saber agir de maneira eficaz.

Os procedimentos são maneiras determinadas e concretas de agir, cuja principal característica é que estas não são arbitrárias ou desordenadas, mas sistemáticas e ordenadas, uma etapa se seguindo à outra, até a consecução de uma meta.

Pozo (2008) faz distinção entre alguns processos: aprendizagem de técnicas, de estratégias para planejar e de estratégias de aprendizagem.

A aprendizagem de técnicas refere-se a encadeamentos complexos que requerem uma série de treinamentos explícitos baseados numa aprendizagem associativa, por repetição; esta resulta em uma automatização da cadeia de ações, fazendo com que a própria ação seja mais rápida e menos dispendiosa em matéria de recursos cognitivos.

De acordo com Pozo (2008), as técnicas são muito funcionais quando os sujeitos se deparam com exercícios, tarefas rotineiras, sempre iguais; no entanto, não basta dominá-las: é preciso também saber modificá-las, em meio as ações a fim de adequá-las à nova situação.

Uma situação em geometria plana pode exemplificar a teoria. Em uma situação conhecida, o aluno domina a técnica para calcular a área de um triângulo equilátero de lado conhecido – o que se configura como um exercício. Mas, se o triângulo estiver inscrito em uma circunferência de raio conhecido, é necessário conhecer estratégias para adequar as técnicas conhecidas à nova situação – que passou a ser um problema.

A aprendizagem de estratégias para planejar, implica num processo em que o sujeito deve aprender como, onde e de que forma ele utiliza as técnicas que domina. Note-se que esse processo envolve tomada de decisão e o controle da aplicação dessas técnicas para adaptá-las às necessidades especificas de cada tarefa.

Além disso, o autor pondera que as estratégias são necessárias diante de situações novas ou muito complexas que dão origem a um problema. Essas nos obrigam a refletir sobre os erros e corrigi-los. Nesse sentido, observa-se que estas não são adquiridas por meio de processos associativos e sim por reconstrução da própria prática como produto de uma reflexão e tomada de consciência sobre o que fazer e como fazer. Tal aprendizagem ocorre a partir do momento em que o sujeito conhece as técnicas e suas limitações.

Por fim, a aprendizagem de estratégias de aprendizagem trata do controle dos próprios processos de aprender com a finalidade de utilizá-los de maneira mais eficiente. Para que isso ocorra, o sujeito necessita saber como controlar os seus próprios processos cognitivos, assim como se habituar a pensar sobre seu próprio conhecimento, quer dizer, exercitar o seu metaconhecimento.

É claro que os procedimentos estão relacionados ao saber fazer e, conforme Coll e Valls (1998), são muito diversos e, ao mesmo tempo, complexos, não permitindo assim uma classificação absolutamente correta ou completa. Apesar disso, os autores indicam quatro categorias: procedimentos mais ou menos gerais; procedimentos como destrezas, técnicas e estratégias; procedimentos de componentes motriz e cognitivo; procedimentos algoritmos e heurísticos.

Ao discutir se um procedimento é mais ou menos geral, os autores mencionam que são usados três critérios para definir o seu grau de generalidade: o número de componentes, a ordem dos passos e as metas a serem alcançadas.

Os procedimentos mais complexos, em relação aos simples, são os que exigem uma atuação mais diversificada, por possuírem um maior número de passos ou de ações que os compõem ou, por outro lado, quando levamos em consideração o número maior de alternativas no momento da realização. Assim, os procedimentos mais complexos são também considerados como os menos gerais.

Já os procedimentos simples são usados de maneira idêntica em diversas situações, sem que seja possível ou conveniente inserir variações na sua execução e, por isto, são considerados mais gerais.

Outra maneira de tratar procedimentos ocorre por meio da utilização da denominação de “destreza” (habilidades motoras e mentais), “técnica” ou “método” (de laboratório ou de estudo, de leitura, de escrita, etc.) ou mesmo “estratégia” (de aprendizagem, de resolução de problemas).

Esses termos apresentados possuem características que definem os procedimentos. Deste modo, não é difícil reconhecer que todas as atuações dos alunos consistem em um conjunto de práticas que os levam a conseguir uma determinada meta.

Ao distinguir procedimentos em cognitivos e motrizes, os autores diferenciam destrezas motoras de habilidades ou estratégias cognitivas, evidenciando que não se trata de um processo composto de duas categorias de procedimentos excludentes, mas que se completam.

As destrezas motoras são aquelas que são demonstradas por meio de uma atividade corporal; já as habilidades, ou estratégias cognitivas, são procedimentos estruturais que dão suporte para a realização de tarefas intelectuais.

Por fim, os procedimentos algoritmos e heurísticos indicam uma sequência de passos para a consecução de uma meta ou solução, correta ou não. Os procedimentos algoritmos são aqueles que possuem, exatamente, um conjunto de passos necessários para se chegar de forma correta à meta ou solução. Já os heurísticos, somente orientam de maneira geral sobre a sequência a ser respeitada, e não dizem de maneira exata ou (ou por completo) como se deve agir.

Os algoritmos especificam com precisão a sequência de ações e de decisões que devem ser respeitadas para resolver um determinado problema e, uma vez não realizadas em sua totalidade, dificilmente se chegará à solução. A natureza desses procedimentos pressupõe que todos aqueles que dominam o algoritmo correspondente se comportem de maneira idêntica em outras situações, como por exemplo, a maneira de dividir dois números, de resolver uma equação do primeiro e do segundo, etc. O que se ensina com estes é o curso exaustivo de movimentos ou passos possíveis – ao contrário dos heurísticos, onde seu uso não garante a possibilidade de sucesso.

Considera-se quase impossível construir e aprender algoritmos para todas as atuações escolares no tocante à consecução de metas. De acordo com Coll e Valls (1998), a maior parte do trabalho procedimental consiste, e deve consistir, no ensino e na aprendizagem de procedimentos heurísticos.

Nesse sentido, o que os PCN (BRASIL, 1997), propõem enquanto ensino de conteúdos procedimentais pode ser entendido, na maioria dos casos, como um ensino voltado para a natureza heurística e não algorítmica dos mesmos.

Embora exista uma diferenciação de definições entre conceitos, procedimentos e atitudes, a base da aprendizagem significativa é válida para todos os conteúdos. Como o presente trabalho irá tratar do processo de ensino e aprendizagem significativa, de conceitos e procedimentos, especificamente, faz-se necessário ressaltarmos não apenas a especificidade desses processos mas, sobretudo, suas respectivas aplicabilidades no ambiente escolar.

Não se espera que os alunos tenham uma aprendizagem baseada na memorização, superficial, pouco proveitosa, que logo é esquecida. O que se espera, dentro deste contexto e, independente de qual seja o procedimento proposto na aprendizagem, que o aluno possa atribuir novos significados e elaborar, ou construir, um modelo pessoal de sua ação.

Espera-se, enfim, que o discente insira a sua estrutura cognitiva numa rede de significados mais ampla, vinculando cada procedimento a outros já conhecidos permitindo, assim, que sua aprendizagem seja significativa e, ao mesmo tempo seja uma revisão, modificação e enriquecimento de saberes adquiridos.

A quantidade e a qualidade de aprendizagens anteriores, juntamente com os tipos de conexões estabelecidas entre os procedimentos, são atributos que possibilitam à aprendizagem de procedimentos ganhar um grau significativo, ou seja, quanto mais vínculos possam ser estabelecidos entre os conhecimentos referentes à ação que possuímos e aos novos conhecimentos procedimentais, mais e melhor podemos seguir agindo.

O diferencial da aprendizagem significativa de procedimentos encontra-se no momento em que os novos procedimentos vão sendo aprendidos; estes últimos se vinculam à estrutura cognitiva não só com os procedimentos, mas também, com um conjunto de componentes – integrados e não isolados – que constituem essa estrutura (os valores, os conceitos, os princípios e etc.) resultando em um processo de melhoria global na capacidade de aprender.

Nesse sentido, salienta-se que a aprendizagem significativa de procedimentos não se apresenta como um modelo totalizante, fechado. Aqui, não se trata de "tudo ou nada", como ocorre com alguns conteúdos, na medida em que esta tipologia de aprendizagem admite graus e, neste sentido, os alunos podem não assimilar, num primeiro momento, a gama procedimental ora em questão e, assim, cabe aos discentes reverem conceitos e saberes de forma contínua.

O processo de assimilação na aprendizagem de procedimentos é progressivo. Ao longo das ações, o aluno vai se aperfeiçoando e, com isso, garantindo um valor funcional a cada procedimento ou a possibilidade de se aplicar o mesmo em situações novas e mais complexas. No processo de ensino e aprendizagem significativa de procedimentos, o professor faz distinções claras entre aquele que realiza os procedimentos de maneira correta, que se preocupa com o processo, que se especializa na temática, em detrimento daquele que realiza a tentativa e não alcança sucesso em suas ações.

Na aprendizagem significativa de procedimentos, espera-se que o sujeito aprenda:

1) Corrigir a execução dos passos para conseguir chegar à meta, ou seja, que ele amplie e complete a assimilação do conjunto de passos ou de operações que compõem um determinado procedimento.
2) Observar a frequência com que eles aparecem nas diferentes situações, ou seja, a força que ele possui ou a probabilidade de ele se tornar facilmente presente e onde é pertinente que se faça adequações as diversas situações.
3) Tornar os procedimentos automáticos ou diminuir a atenção para realizar os mesmos.

4) Identificar o grau das ações da sequência, ou seja, a forma progressiva eficaz adotada, a fim de diminuir erros e aplicá-la de maneira rápida em outros contextos e;
5) Identificar a quantidade de informações relevantes que se conhece em relação à tarefa.

Sabe-se que nem todos os procedimentos podem ser ensinados na escola (a escola não é a única transmissora deste tipo de saber), e que o ensino de procedimentos, como mencionado anteriormente, deve atender algumas particularidades em relação aos outros tipos de conteúdos.

De acordo com Coll e Valls (1998), na escola, muitos procedimentos são adquiridos simplesmente por estar com contato com as coisas (objetos, situações, símbolos, etc.) que se manipulam ou tratam, sem que exista uma intenção expressa de trabalha-los. A aprendizagem de procedimentos ocorre a margem de qualquer intervenção externa ao aluno.

Neste sentido, um exemplo evidente ocorre quando o aluno é induzido a tentar, até chegar ao sucesso; daí, então ele fixa essa execução, observando o professor ou os colegas que se demonstraram competentes, levando o mesmo assim, ao processo de imitação.

Ao verificar uma situação deste tipo, torna-se evidente a necessidade de pensarmos numa intenção para que cada aluno adquira esse conjunto de ações que os tornem capazes de manipular o seu meio problemático por meio de uma atuação educativa. Sendo assim, os autores mencionam que pouco se sabe no que se refere à atuação educativa para o ensino de procedimentos: o que parece claro, é que o professor necessita de um contexto de aprendizagem ativo, da utilização dos procedimentos prévios dos alunos e de uma prática que estimule as relações existentes entre outros conhecimentos, de modo a permitir ao aluno verbalizar o que está fazendo.

Não se deve negligenciar, também, que este tipo de conteúdo envolve a aquisição (e até o desenvolvimento de habilidades), generalização e ação e que estes componentes são essenciais no momento de projetar o ensino, desvendando as aquisições de seus usos e aplicações. Neste momento, os autores advertem que não se deve confundir este tipo de aprendizagem com a de conceitos.

O professor, ao trabalhar com aprendizagem de procedimentos, deve se comportar em função do domínio dos aspectos procedimentais do material, do uso e de suas aplicações. Daí que o domínio dos procedimentos não implica, necessariamente, em domínio de conceitos e vice-versa. Uma aprendizagem significativa dos conteúdos requer um trabalho completo de todos seus tipos, para que se garanta a funcionalidade dessas aprendizagens.

Coll e Valls (1998) mencionam dois métodos de ensino para facilitar a aprendizagem dos procedimentos: o primeiro, a imitação de modelos; o segundo, o ensino direto da parte do professor ou de outros alunos. Antes de adentrarem às discussões sobre esses métodos, os autores fazem referência a um antigo axioma geral que rege o ensino e que parece especialmente idealizado, numa perspectiva metodológica de ensino por professores. Apresentando o princípio primeiro "eu o faço", depois "nós o faremos junto" e depois "você o fará sozinho". Esses determinam três funções tradicionalmente conhecidas no núcleo da atividade docente: a exposição; a prática guiada e a prática autônoma ou independente.

Embora existam críticas a este tipo de atividade, vale lembrar que o propósito dos conteúdos procedimentais é progressivo e, principalmente, que tais conteúdos são aprendidos em atividades compartilhadas, propostas, em primeiro lugar, de um ambiente externo ao aluno.

No que se refere ao primeiro modelo apresentado anteriormente, trata-se dos alunos observando um especialista que está agindo e construindo um modelo - melhor ainda se eles expressarem verbalmente os raciocínios e atuações – mental adequado das atividades necessárias para executar a tarefa para qual se preparam. Um dos problemas deste método é a garantia de transferência do controle da execução do procedimento desde o modelo até o aluno imitando as ações.

Ao segundo método, indica-se diretamente a forma de compor determinadas atuações, guiando a prática do aluno. Esse tipo de instrução, para não se produzir uma aprendizagem memorística, requer a presença de muita atividade mental no aluno, dentre a qual se destaca atividade de atenção, a de memória e compreensão, a busca de sentido para o que lhe dizem que deve fazer. Enquanto o professor, ou aquele que está ensinando, apresenta o procedimento, o aluno deve prestar atenção nas palavras, nas ordens, ou nas instruções, nas ilustrações que as possam acompanhar os comportamentos do professor ou daquele que ensina, de forma a perceber os aspectos relevantes. O aluno deve lembrar, também, das instruções, indicações, comportamento, mantendo-os atualizados em sua memória; compreender realmente o significado da atividade que lhe é proposta, possibilitando-o de verificar, de forma clara, os passos a realizar; saber converter em ação as ordens recebidas e se manter adequadamente motivado para adotar o procedimento.

Tal maneira direta de ensinar os procedimentos exige do professor determinadas ações que orientem o modo correto, a fim de garantir que a aprendizagem seja significativa. Inicialmente, é de suma importância que o professor (ou aquele que ensina), apresente uma imagem clara da execução do procedimento a adquirir, dos componentes da ação do procedimento, da ordem que é seguida e da natureza dos procedimentos.

Em seguida o professor deve explicar os benefícios (a rentabilidade, a funcionalidade, a economia de ação, etc.), alcançados com o uso do procedimento. Posteriormente, aquele que ensina deve referir-se às condições de execução, aos possíveis obstáculos e erros que podem aparecer proporcionando assim pistas que ajudarão os discentes em ações futuras, possibilitando o avanço cognitivo e intelectual do aprendiz.

E, por fim, aquele que ensina deve permitir a execução do processo de indução, de análise e reflexão sobre as atuações que tratam da verbalização a propósito das atuações realizadas, para que o próprio aprendiz adquira, de forma consciente e voluntária, a sua atuação desde o primeiro momento.

Entende-se que, este último processo, é mais do que um passo a compor o escopo do ensino: chega a ser um recurso complementar, pois de nada valeria a reflexão conjunta ou a autorreflexão, a produção de um texto escrito ou oral, se o aluno não possuísse, por exemplo, algum nível de aprendizagem.

Conforme apontado por Coll e Valls (1998), ao longo do processo de ensino e aprendizagem de procedimentos, o professor deve ter consciência de que a maior significação do ensino de procedimentos reside nos processos e não nos produtos, no modo de como as coisas são feitas pelos seus alunos e não, simplesmente, no que se refere à meta alcançada, independentemente da metodologia adotada. Nesse sentido, os referidos autores propõem que a avaliação seja feita ao longo de todo processo de ensino e aprendizagem.

A aquisição dos procedimentos, de acordo com Pozo e Argón (1998) refere-se a um processo de transferência de controle, composto por fases, em que incialmente o professor é quem possui o controle estratégico das tarefas e os alunos contemplam como mero exercício e aos poucos esse controle é transferido aos próprios alunos – que devem ir aprendendo a usar de modo estratégico as suas próprias técnicas. O Quadro 2 resume as fases citadas.

Quadro 2. Fases da aquisição de conteúdos procedimentais

Fases	**Controle interno**	**Controle externo**	**Execução**
1.Inicial	Impossível	Impossível	Nula
2.Domínio técnico	Impossível	Possível e necessário	Regular ou boa
3.Domínio Estratégico	Possível e necessário	Desnecessário	Boa ou regular
4.Domínio Especializado	Possível e desnecessário	Desnecessário	Muito boa e eficaz

Fonte: Pozo e Argón, 1998, p.163.

De acordo com os autores, na fase 1 os alunos não são capazes de executar sozinhos – nem com ajuda ou apoio externo – as técnicas necessárias para realizar uma determinada tarefa. Os mesmos só conseguem dominar tais técnicas quando recebem ajuda ou controle externo, mas não são capazes de conseguir executá-las sem nenhuma orientação.

A fase 2 é marcada pelo domínio técnico; o aluno compreende as técnicas para a realização de um determinado procedimento, mas não é capaz de colocar em ação as suas habilidades quando não estão presentes o professor, o livro, o caderno ou suas anotações.

A fase 3 está ligada à busca por estratégias, em que o aluno é capaz de definir qual é a melhor estratégia para a realização de uma determinada tarefa. Nesse sentido, os autores mencionam que antes de chegar nesta fase, os alunos necessitam enfrentar tarefas que exijam reflexões e tomada de decisões, para que eles próprios assumam o controle no processo de resolução e aos poucos se desliguem de controles externos, adotando diversas estratégias para enfrentar diferentes tipos de problemas.

Por fim, na fase 4 o aluno terá um domínio especializado das técnicas que compõem um determinado procedimento.

Assim, considera-se que essa perspectiva de aprendizagem seja adequada para o tema proposto por este trabalho: a determinação da área de figuras planas – compreendendo que esta ação seja um procedimento. A presente pesquisa tem por intuito caracterizar uma proposta de ensino que valoriza o ensino de diferentes tipos de procedimentos, sejam eles tratados enquanto destrezas, técnicas e estratégias; componentes motriz e cognitivo; algoritmos e heurísticos. O que se espera é que o aluno desenvolva diferentes estratégias para a identificação de formas geométricas em logotipos e que empregue procedimentos de ordem cognitiva para determinar a área das figuras planas identificadas e representadas.

3.4 A modelagem Matemática diferentes concepções e as perspectivas desta metodologia no processo de ensino e aprendizagem

Segundo levantamento feito por Biembengut (2009), a modelagem matemática – entendida como o processo utilizado para descrever, formular, modelar e resolver uma situação problema de alguma área do conhecimento (Engenharia e Ciências Econômicas) – já era conhecida no início do século XX.

Na educação matemática, as discussões em âmbito internacional sobre a aplicação da modelagem no ensino surgem especialmente na década de 1960, durante o chamado movimento “utilitarista” – em que os conhecimentos matemáticos seriam aplicados para a ciência e a sociedade.

Autores como Aristides C. Barreto, Ubiratan D’ Ambrosio, Rodney C. Bassanezi, João Frederico Mayer, Marineuza Gazzetta e Eduardo Sebastiani, iniciaram um movimento pela modelagem no final dos anos 1970 e impulsionaram as pesquisas no cenário brasileiro.

Na década seguinte, com o surgimento do Programa de Mestrado em Ensino de Matemática pela UNESP – Campus de Rio Claro e com a busca de formas alternativas para o ensino de Matemática, ampliaram-se as discussões acerca da Modelagem enquanto uma metodologia diferenciada de ensino.

Na atualidade, várias são as vertentes adotadas para a modelagem matemática, conforme pode ser visto, entre outros, nos trabalhos de Araújo (2002); Barbosa (2001); Bassanezi (2006); Biembengut e Hein (2007), Burak (2010); Diniz (2007) e Jacobini (1999).

Para Biembengut e Hein (2007), a ideia de modelagem tem muito a ver com o trabalho de um escultor trabalhando com argila e produzindo um determinado objeto, caracterizado como um modelo que representa algo real ou imaginado. A modelagem é entendida, assim, como a arte de modelar.

Os autores justificam a concepção da modelagem enquanto arte alegando que, para se produzir um modelo, além de conhecimento o modelador necessita ter uma dose significativa de criatividade e intuição a fim de interpretar o contexto, saber discernir qual o melhor conteúdo matemático a ser utilizado e ainda ter um senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas.

Não limitando a visão de modelagem apenas para a área da matemática, os autores mencionam que a noção de modelo está presente na Arte, Moda, Arquitetura, História, Economia, Literatura etc. e que o objetivo do modelo pode ser explicativo, pedagógico, heurístico, diretivo, de previsão – entre outros.

Várias são as concepções de modelo matemático. Este pode ser entendido, conforme Biembengut e Hein (2007), como sendo uma representação do mundo real por meio da linguagem matemática, seja ela um conjunto de expressões numéricas, equações, gráficos, representações ou programa computacional que leve a solução ou permita a dedução da solução de um determinado problema.

Nesse sentido, para Biembengut e Hein (2007) a modelagem matemática é definida como o processo de obtenção do modelo e compreenderia algumas fases: (a) interação; (b) matematização e (c) modelo matemático.

É na primeira fase que se faz o reconhecimento da situação-problema e para se familiarizar com o assunto a ser modelado, deve-se buscar informações de maneira indireta – por meio de pesquisa na internet, em livros, revistas, etc. – ou de maneira direta, a partir de uma experiência de campo, dados experimentais obtidos por especialista da área etc.

A segunda etapa (matematização), subdividida em formulação e resolução do problema, é vista pelos autores como a mais complexa e desafiante de todo processo de modelagem, pois é nesse momento em que o modelador deve traduzir a situação problema para a linguagem matemática e isso requer intuição e criatividade.

Na busca de formular o problema e estabelecer as hipóteses de implicação, o modelador deve realizar um estudo e classificar as informações (relevantes e não relevantes), identificando fatos envolvidos; decidir quais são os fatores a serem perseguidos, levantando hipóteses; selecionar variáveis relevantes e constantes envolvidas; selecionar símbolos apropriados para essas variáveis; e descrever essas relações em termos matemáticos. O modelador deverá chegar, então, “a um conjunto de expressões aritméticas ou fórmulas, ou equações algébricas, ou gráficos, ou representações, ou programa computacional, que levem à solução ou permitam a dedução de uma solução” (p. 14).

Tendo formulado o problema, o modelador passa a resolvê-lo em termos do modelo. Nesse processo, Biembengut e Hein (2007) mencionam que o modelador deve possuir um conhecimento desenvolvido sobre as entidades matemáticas usadas na sua formulação e que o computador pode ser uma ferramenta de auxílio nesta subetapa.

A terceira etapa refere-se à conclusão do modelo em que se faz necessária uma avaliação para verificar em que nível o mesmo se aproxima da situação real e o grau de confiabilidade na sua utilização. Se o modelo não atender às necessidades que o geraram, o processo deve ser retomado na segunda etapa para a realização de ajustes nas hipóteses, variáveis etc. Os autores apontam a necessidade - ao concluir o modelo - da elaboração de um relatório que registre todos os procedimentos desenvolvidos, de modo a propiciar seu uso de forma adequada.

Concepção um tanto distinta dos autores citados tem Burak (2010). Para ele, a ideia de modelo fica ampliada, constituindo-se como qualquer representação que permite uma tomada de decisão. O processo de modelagem não exige a obrigatoriedade da criação de modelos, mas precisa resultar em uma tomada de decisão e essa é vista muito mais como um processo metodológico. Modelar matematicamente significa organizar um conjunto de procedimentos que tem por finalidade construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, algum fenômeno presente no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e inclusive tomar decisões.

Essa definição de Burak (2010) se assemelha à dada por Bassanezi em que modelagem consiste na “arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real" (BASSANEZI, 2006, p. 16).

Ao se respaldar em um ensino por meio da modelagem, o professor deveria considerar que essa metodologia exige pesquisa por parte dele e por parte do aluno. Na escolha do tema feita pelos alunos, Burak (2004) realça que o papel do professor é favorecer ações investigativas que permitam a eles conhecer, compreender e atuar naquela realidade.

Para desenvolver esse tipo de trabalho, Burak (2010) sugere que o professor divida a turma em pequenos grupos e siga algumas etapas: (a) escolha do tema; (b) pesquisa exploratória; (c) levantamento do(s) problema(s); (d) resolução do(s) problema(s) e o desenvolvimento da matemática relacionada ao tema e (e) análise crítica da(s) solução(es).

Na primeira etapa, denominada como escolha do tema, o aluno (ou grupo, ou a sala toda) realiza, em comum acordo, juntamente com o professor a escolha do tema. Cabe salientar que neste momento o docente como orientador deve levar em conta o nível de conhecimento matemático do aluno e o tempo disponível para desenvolver o trabalho.

Já a segunda, pesquisa exploratória, é caracterizada como a fase de exploração e obtenção de informação acerca do assunto em vários aspectos. Aqui o aluno se interage de forma direta com o que ele escolheu para estudar, inicia a coleta de dados, registra esses dados e começa a realizar indagações.

A terceira etapa, levantamento do(s) problema(s), é oriunda da coleta de dados e das indagações realizadas pelos alunos na etapa anterior; os problemas podem ser elaborados a partir de uma linguagem natural e necessitam ser transferidos para a linguagem matemática. Nesse momento, o professor como mediador pode contribuir de maneira significativa no desenvolvimento da autonomia e na formação crítica dos alunos.

A quarta etapa de resolução do(s) problema(s) dá-se com o desenvolvimento da matemática relacionada ao tema, traduzindo-se na solução na linguagem matemática. Nessa fase, o aluno pode realizar comparações, levantar hipóteses para apontar as relações entre as variáveis em questão, constituindo assim um modelo. Na maioria das vezes esse modelo constitui-se em uma equação, inequação ou sistema de equações, mas pode ser um gráfico, um mapa, a planta de uma casa, uma tabela, etc. A atenção por parte do docente nesta etapa deve ser dobrada uma vez que, ao transformar o problema para a linguagem matemática, o aluno pode começar a lidar com conteúdos – com intuito de resolver o problema – que ainda não foram vistos, tornando assim este o momento oportuno para a introdução do conhecimento que ainda não foi trabalhado.

Por fim, na quinta etapa, análise crítica da(s) solução(es), o aluno deverá verificar a coerência lógica e veracidade das soluções encontradas matematicamente para a situação real. Para Burak (2010), trata-se de uma etapa muito importante na modelagem, pois ela permite que o aluno realize e discuta as soluções obtidas com as hipóteses levantadas em etapas anteriores. Esse processo de discussão possibilita que o aluno tenha um aprofundamento sob os aspectos matemáticos, verificando, por exemplo, a coerência lógica e o sentido da(s) solução (es) encontrada(s), e sob aspectos não matemáticos envolvidos no tema, verificando a adequação das soluções, os cuidados com a linguagem e outros.

Com uma concepção um pouco diferente dos autores citados, Barbosa (2001) trata a modelagem matemática como um ambiente de aprendizagem em que os alunos são convidados a investigar situações com referência na realidade. A combinação de termos – ambiente de aprendizagem – é fundamentada por Skovsmose (2000) ao referir-se às condições a que os estudantes são conduzidos para o desenvolvimento de determinadas atividades. No entanto, vale salientar que esses ambientes de aprendizagens se diferenciam um dos outros uma vez que cada atividade possui um foco e uma organização. O referido autor faz distinção dos ambientes de aprendizagens em dois tipos: os que obedecem ao paradigma do exercício – em que o papel do professor é apresentar algumas ideias e técnicas e depois os alunos trabalham com os exercícios selecionados – e os que favorecem a abordagem de investigação.

Essa perspectiva trata a modelagem matemática na visão sociocrítica – isto é, na visão de Barbosa e Santos (2007) ela exprime um esforço de cientificar os estudos críticos sobre o papel da matemática na sociedade, no contexto de desenvolvimento do ambiente de modelagem Matemática. A perspectiva sociocrítica está relacionada com debates reflexivos sobre o papel das aplicações da Matemática na sociedade, e possui como principal objetivo auxiliar os indivíduos a reconhecerem o conhecimento matemático nas diversas situações do cotidiano.

Barbosa (2007) menciona que os alunos, no ambiente de modelagem matemática, podem realizar muitas ações, como fazer operações, desenhos, organizar esquemas, elaborarem gráficos e tabelas e principalmente produzir discursos. O autor ainda pondera que nesse ambiente tanto o aluno quanto o professor saem da tradicional posição de receptor e transmissor e passam a ser colaboradores para a construção da aula, produzindo um só discurso, o de busca de solução para o problema.

Para esse autor, pode ser chamado de modelagem matemática todo processo de investigação de um problema real – que inclui a formulação do modelo matemático, elaborado a partir de um problema que será resolvido por meio de teorias matemáticas. Nessa perspectiva, o modelo é visto como uma forma de fornecer subsídios para a tomada de decisões nas práticas sociais.

O processo de investigação concebido nessa vertente não possui um caminho ou um esquema definido a priori, a situação de pesquisa tem origem nas questões do cotidiano ou em outras ciências que não são a Matemática. Pelo fato de estar em consonância com a Educação Matemática Crítica, a modelagem não se restringe à construção de modelos nem a conteúdos da Matemática, rompendo assim com a linearidade do currículo escolar.

Nesse trabalho, pretende-se caracterizar a modelagem matemática voltada para o ensino da geometria em uma vertente cognitivista, isto é, busca-se entender as fases e também alguns processos cognitivos evidenciáveis na obtenção de um modelo geométrico.

3.5 O processo de solução de problemas e os problemas procedimentais

Uma vez que a modelagem envolve o processo de solução de problemas e que para modelar logotipos os alunos devem empregar conhecimentos de natureza procedimental, existe a necessidade de discutir o que caracteriza o tipo de problema envolvido nesta pesquisa.

De acordo com Polya (1978), uma grande descoberta é capaz de resolver um grande problema, mas sempre há uma pitada de descoberta na solução de qualquer problema. No caso desta pesquisa, os alunos devem entrar em contato com situações que devem requerer alguns processos que necessitam ser mais bem entendidos. Seja, por exemplo, calcular a área de uma forma aparentemente desconhecida para ele (Figura 01).

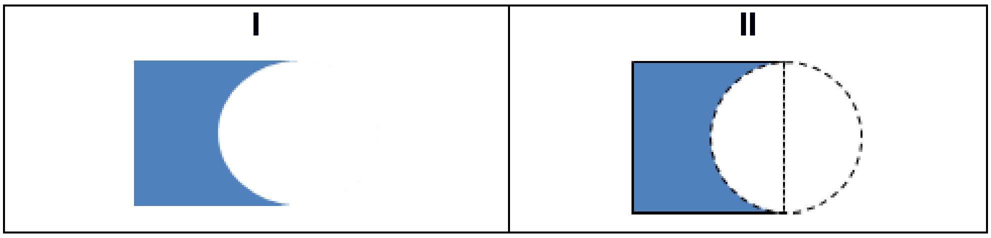


Figura 1. Forma apresentada (I) e decomposição em figuras geométricas (II).

Frente à situação, o aluno necessita reconhecer as possíveis figuras geométricas nas quais a forma pode ser decomposta, verificar as medidas necessárias e empregar procedimentos de cálculos para determiná-las; empregar as fórmulas de área de figuras planas e, finalmente, decidir por compor as áreas que formam o desenho inicial.

De acordo com Pozo e Angón (1998), o processo de solução de problemas envolve essencialmente procedimentos, uma vez que exige que o solucionador desenvolva uma sequência de ações de acordo com uma hipótese preconcebida e orientada para consecução de uma meta – que é a resposta.

Vale salientar que a solução de problemas também envolve os conteúdos atitudinais e também os conceituais, mas pauta-se no caráter procedimental, pois solucionar um determinado problema implica em saber fazer algo, e não dizê-lo ou compreendê-lo.

O processo de solução de problemas tem sido estudado por vários pesquisadores da área da psicologia, como, por exemplo, Echeverría e Pozo (1998), Mayer (1992), Polya (1978) e Sternberg (2000).

Os autores Echeverría e Pozo (1998) concordam com Lester (1983) que afirma que um problema é uma situação que um indivíduo necessita resolver e que para se obter a solução este não dispõe de um caminho rápido e direto.

Já Mayer (1992) define problema como um processo cognitivo direcionado para a transformação de uma situação na busca de um objetivo quando nenhum método de solução óbvio esta disponível para solucioná-lo. Quando um sujeito encontra-se em meio a um problema, ele necessita realizar algumas etapas até que se atinja o objetivo chegar a uma solução.

Com base em estudos anteriores da psicologia, Brito (2006) sintetizou as etapas empregadas pelo sujeito no processo de solução de um problema:

a) compreensão do texto: essa etapa tem por objetivo auxiliar o aluno a desenvolver e utilizar da sua habilidade verbal que permite ler e compreender o problema para entender a natureza matemática do mesmo.

b) representação do problema: ao ler um problema o aluno deve criar uma imagem mental a partir do momento em que o cérebro recebe uma informação, organiza e a transforma em uma representação coerente (codificação e retenção);

c) categorização do problema: com a representação do problema o aluno deve categorizar o mesmo com base em um conjunto de problemas já conhecidos, além de observar se ele se enquadra a um determinado tipo, ou relativo a um determinado conteúdo;

d) estimativa de solução: quando, por exemplo, é possível apresentar um resultado numérico com valor aproximado ao da solução correta;

e) planejamento de solução: em que podem ser planejadas as estratégias, técnicas e/ou algoritmos que serão empregados;

f) monitoramento do procedimento: que pode conduzir a uma mudança nos objetivos ou nas estratégias;

g) monitoramento do resultado: que pode ser entendido como validação dos resultados e

h) resposta: que pode levar o aluno a uma nova leitura da proposição do problema e compreensão do texto.

Autores como Echeverría e Pozo (1998) mencionam que ensinar a solucionar problemas não consiste somente em dotar os alunos de habilidades e estratégias eficazes, e sim em criar nos alunos hábitos e atitudes favoráveis à investigação. Nesse sentido, evidencia-se que o professor deve criar situações que permitam aos alunos a proposição de problemas reais a serem estudados e investigados em sala de aula.

Neste trabalho, serão analisados os procedimentos empregados pelos alunos diante dos logotipos a serem modelados. Devem ser identificadas e descritas as etapas e também as estratégias empregadas por eles no processo de solução dos problemas.

3.6 Os registros de representação de semiótica

Um dos objetivos do ensino da matemática, na perspectiva de Duval (2012), é o de contribuir para o desenvolvimento integral dos alunos e de suas capacidades de raciocinar, de analisar e de visualizar. Nesse sentido, a caracterização de uma atividade matemática do ponto de vista cognitivo se diferencia das demais ciências; de acordo com o referido autor, o importante não é evidenciar aquela por meio de conceitos e sim por meio das diferentes maneiras de se representar um conhecimento matemático, seja por meio de sistemas de numeração, figuras geométricas, escritas algébricas e formais representações gráficas e a própria língua natural. As formas citadas foram chamadas de registros de representações semióticas, definidas como produções constituídas pelo emprego de signos que pertencem a um sistema de representação.

Na matemática, o autor classificou as formas discursiva e não-discursiva dos registros de representação semiótica, além de observar que alguns registros são algoritmizáveis, ou seja, requerem tratamentos mais específicos e formais, enquanto que outros, os multifuncionais, são mais gerais e utilizados em diferentes domínios. O Quadro 3 resume a classificação.

Quadro 3: Classificação dos diferentes registros.

REGISTROS	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO-DISCURSIVA
MULTIFUNCIONAIS (não-algoritmizáveis)	Língua Natural Associações verbais (conceituais) • Forma de raciocinar: argumentos a partir de observações, de crenças; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
MONOFUNCIONAIS (algoritmizáveis)	Sistemas de escritas: • numéricas (binária, decimal, fracionária...); • algébricas; simbólicas (línguas formais). • Cálculo	Gráficos cartesiano. • mudanças de coordenadas; • interpolação, extrapolação.

Fonte: DUVAL, 2010, p. 14.

De acordo com o autor o conhecimento matemático se difere de outros conhecimentos pelo fato de ser possível mobilizar “ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação” (DUVAL, 2010, p.14).

Para Duval (2012), os objetos matemáticos não devem ser confundidos com a sua representação. A distinção entre um objeto e sua representação é, portanto, um ponto estratégico para a compreensão da matemática.

Dentro de um paradoxo cognitivo do pensamento matemático, tem-se, por um lado, que a apreensão de objetos matemáticos não pode ser mais que uma apreensão conceitual e, por outro, que somente por meio das representações semióticas que a atividade matemática sobre os objetos matemáticos se torna possível.

O referido autor diferencia as representações mentais das representações semióticas – apesar de não colocá-las em planos distintos. As representações mentais pautam-se num conjunto de imagens, e mais globalmente, nas conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado; já as representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação que possui inconvenientes próprios de significação e de funcionamento.

De acordo com Duval (2012), as representações semióticas não são apenas um meio de exteriorização de representações mentais para fins de comunicação, com o intuito de tornar uma informação visível ou acessível para outrem. Ao contrário, as representações semióticas são essenciais à atividade cognitiva do pensamento por desempenhar um papel primordial no desenvolvimento das representações mentais, na realização de diferentes funções cognitivas e na produção de conhecimentos.

A partir dessa perspectiva, o autor pondera ser inadmissível que as representações semióticas sejam subordinadas às representações mentais, uma vez que o desenvolvimento destas pode depender da interiorização daquelas e que apenas as semióticas permitem preencher algumas funções cognitivas essenciais – como a de tratamento.

Com intuito de explicar as relações entre os registros de representação semióticas e as representações mentais, o autor define dois conceitos: a *semiósis* – apreensão ou a produção de uma representação semiótica – e a *noésis* – apreensão conceitual de um objeto matemático – pontuando que a *noésis* é inseparável da *semiósis*.

Para que um sistema semiótico seja um registro de representação, este necessita atender as características das três atividades cognitivas fundamentais ligadas à *semiósis*: formação, conversão e tratamento de uma representação identificável.

A formação é a representação de um registro dado (enunciação de uma frase, composição de um texto, desenho de uma forma geométrica, elaboração de um esquema, expressão de uma fórmula, dentre outras). Essa função implica no processo de seleção de relações e de dados presentes no conteúdo a representar. Estas relações se fazem em função de unidades e de regras de formação próprias de um registro cognitivo, em que a representação é o processo final, possibilitando, assim, que a formação seja comparada à realização de uma tarefa de descrição.

O tratamento de uma representação é a transformação desta dentro de um mesmo registro semiótico em que ela foi formada; em outras palavras, ele é a transformação interna de um registro. O autor pondera que em geometria um tipo particular de tratamento com figuras é o de reconfiguração.

A conversão de uma representação é a transformação desta em outro registro, conservando a totalidade ou uma parte apenas do conteúdo da representação inicial; esta seria uma transformação externa a um registro dado, por exemplo, a figura, a tradução de um texto de uma língua para outra, a descrição, etc.

De acordo com Duval (2011) as figuras se constituem num registro de representação semiótico específico, uma vez que as operações figurais são as que permitem transformar uma figura em outra com o objetivo de aparecer uma solução ou de produzir um contra exemplo ou ainda a de modelar uma situação. A tomada de consciência dessas operações figurais, segundo o autor, permite entrar na maneira matemática de ver a geometria.

Para Duval (2011), ver uma figura é reconhecer imediatamente as formas, isto é, os contornos fechados justapostos, superpostos e separados. Nesse sentido, para ver matematicamente uma figura ou um desenho é preciso mudar o olhar sem que a representação no papel ou no monitor seja modificada. As figuras geométricas se diferem de todas as outras representações pelo fato de existir sempre várias maneiras de reconhecer as formas ou unidades figurais, mesmo que o fato de reconhecer umas exclua a possibilidade de reconhecer outras.

Para analisar o funcionamento cognitivo dessa mudança de olhar deve-se considerar a dimensão dessas unidades figurais: espaço tridimensional (3D), espaço bidimensional (2D), espaço unidimensional (1D) ou ainda pontos (0D).

De acordo com Duval (2011), a passagem de uma dimensão para outra implica na mudança de um numerador de uma “fração” (mD/nD), podendo ser visto assim como um salto cognitivo considerável, e de modo análogo, a passagem de uma representação física para um numérica. Um aspecto importante mencionado pelo autor é que a unidade figural da dimensão superior se impõe imediatamente à percepção, e bloqueia o reconhecimento de todas as unidades figurais da dimensão inferior que ela se envolve e se funde visualmente.

Para o referido autor ver geometricamente uma figura é operar uma desconstrução dimensional das formas reconhecidas imediatamente em outras formas não reconhecidas, isto sem que nada mude a figura afixada no monitor ou construída no papel.

Além disto, o autor considera que a atividade com geometria envolve três processos cognitivos que preenchem específicas funções epistemológicas:
a) visualização: exploração heurística de uma situação complexa, seja por uma simples observação ou por uma verificação subjetiva;
b) construção: processo por instrumentos de configurações que podem ser trabalhadas como um modelo, no qual ações e resultados observados são ligados aos objetos matemáticos representados;
c) raciocínio: processo do discurso para a prova e a explicação.

Ainda segundo Duval (2012), esses três tipos de processos cognitivos estão entrelaçados em sua sinergia, sendo esta interrelação cognitivamente necessária para a proficiência em geometria. Nesse sentido, o desenvolvimento de atividades geométricas está apoiado em dois tipos de registros que auxiliam a compreensão: nas figuras e na linguagem materna.

Com intuito de compreender como as figuras permitem a conduta de abdução, Duval (1995) diferencia em dois níveis as apreensões das figuras geométricas, o primeiro em que o sujeito opera o reconhecimento das diferentes unidades figurais que são distintas dentro de uma figura dada e o segundo onde se efetuam as modificações mereológicas e óticas ou posicionais, das unidades figurais reconhecidas e da figura dada.

O primeiro nível está diretamente ligado com a percepção e de acordo o autor ele é composto por três formas de apreensão: **sequencial –** quando o sujeito nota que a reprodução de uma figura geométrica depende das propriedades figurais ou de um instrumento; **perceptiva** – quando o mesmo realiza a interpretação das formas de uma figura geométrica numa situação dada; **discursiva –** quando o sujeito explicita outras propriedades matemáticas da figura, articulando o desenho e os elementos discursivos.

Já o segundo nível é marcado pelas operações do sujeito, denominada pelo autor de apreensão **operatória** das figuras; nesta, o mesmo realiza modificações e/ou transformações possíveis da figura inicial. Nesse nível, é possível realizar modificações: mereológicas que tratam dos processos de separação da figura em partes; óticas que são as transformações de uma figura em outra e posicionais que tratam do deslocamento em relação a um referencial.

Neste trabalho, considera-se que, no processo de obtenção do modelo geométrico para o logotipo, o aluno estará em atividade matemática e que esta exigirá um trabalho com os registros de representação semióticas produzidos. Considera-se também que são necessárias operações mentais que merecem ser mais bem conhecidas, já que o aluno, para compor e decompor as formas do logotipo deverá formar e tratar os registros; já para descrever as formas obtidas e calcular as áreas, deverá converter os registros.

A pesquisa pretende, então, estudar esses processos e compreender os níveis de apreensão geométrica de um aluno quando o mesmo está em uma atividade matemática, especificamente na de modelagem.

3.7 O uso da informática na sala de aula e as contribuições do GeoGebra para o ensino de geometria

A presença de computadores no processo de ensino e aprendizagem implica em um novo cenário de sala de aula, especificamente no que se refere aos papeis do professor e do aluno na construção do conhecimento.

De acordo com Nóvoa e Maia (1995) a organização diferente do espaço físico da sala de aula é uma evidência das transformações produzidas pelo surgimento de novas tecnologias no contexto da sociedade atual. O "desenho" diferenciado deste espaço afeta diretamente as formas de comunicação de alunos e professores no desenrolar das atividades.

Complementando essa ideia, Valente (1999) pondera que o uso de computadores no processo de ensino e aprendizagem faz com que o papel do professor seja o de facilitador e o do aluno de aprendiz ativo e construtor do seu conhecimento.

Segundo Valente (1999), há diferentes formas de se utilizar o computador no âmbito da educação; ele pode ser um instrumento para transmitir informações ao aluno – o que constitui a chamada informatização dos métodos tradicionais – e também para resolver problemas.

Conforme o mesmo autor, o envolvimento do aluno com o objeto em construção possibilita oportunidades para colocar em prática todos os conhecimentos que possui. Caso estes não sejam suficientes para resolver um determinado problema, o aluno poderá pesquisar nas mais diversas fontes de informação disponíveis pelo computador.

De acordo com Borba e Penteado (2007), a tecnologia informática no ensino de matemática permite que os alunos realizem a experimentação e a ênfase no processo de visualização, pois por meio dela o aluno pode realizar descobertas e dar significado ao conhecimento matemático.

Uma das maneiras de utilizar a informática no ensino da matemática é utilizar alguns softwares específicos que, de acordo com Kenski (1994), interferem na forma de raciocinar, de relacionar e de adquirir conhecimentos.

Dentre os softwares matemáticos, destacam-se os de Geometria Dinâmica, cuja principal característica é permitir a movimentação das formas produzidas na tela do computador. Com isto, pode-se estabelecer um ambiente de investigação, de descobertas, simulações, validações de resultados, em que os alunos podem levantar questionamentos frente à aplicação do conhecimento obtido nas suas práticas cotidianas.

Valente (1993) afirma que o uso das tecnologias da informática pode ser relevante no processo de ensino e aprendizagem da Matemática e destaca algumas modalidades de programas computacionais que podem ser utilizadas em sala de aula como os tutoriais, sistemas de exercícios e práticas, jogos educacionais e simuladores.

Os tutoriais possuem como característica a utilização de modelos com animação e som, diferindo assim da abordagem tipo lápis e papel, comuns na sala de aula. Os sistemas de exercícios e práticas possibilitam a revisão do material visto em classe, envolvendo assim a questão da memorização e repetição. Os jogos educacionais servem para explorar um determinado conteúdo e os simuladores – com o processo de criação de modelos dinâmicos e simplificados do mundo real – permitem a exploração de diferentes situações, possibilitando ao aluno desenvolver hipóteses, testá-las e analisar os resultados, formular conjecturas e analisar as propriedades dos objetos construídos.

Deste modo, considerando como referência as modalidades e características dos softwares citadas por Valente (1993), compreende-se que o GeoGebra possui características semelhantes a de um software simulador e que com esse recurso o aluno pode, após fazer uma determinada construção, alterar as formas preservando as características originais.

O GeoGebra é um software matemático livre, de matemática dinâmica, que possui recursos de geometria, álgebra e cálculo, esse foi desenvolvido por Markus Hohenwarter, da Universidade Austríaca de Salzburg no ano de 2001. O mesmo possui o seu funcionamento com duas janelas de trabalho, sendo uma algébrica e outra geométrica. Na primeira visualizam-se todos os objetos construídos em forma geométrica por meio de equações, pontos, etc. Já na geométrica é possível realizar construções geométricas, utilizando vários recursos como: construção de ângulos, circunferências, polígonos, setores circulares, retas paralelas, perpendiculares, etc. No mesmo é permitido também que o usuário meça e movimente as figuras. Na interface deste software também é possível trabalhar com ou sem malha quadriculada, eixos de coordenadas - cartesianas ou polares – em que os objetos podem ser construídos ou editados.

Valente (1993) menciona também que um software possibilita uma maior influência no processo de ensino aprendizagem devido à interação que o aluno deve ter com um determinado conteúdo para criar algo no computador. Nesse sentido, utilizando o GeoGebra, o aluno tende a superar suas dificuldades de compreensão em geometria e desenvolver habilidades, já que a própria interface do software é formada por termos definidores de conceitos e por figuras geométricos.

Assim, considera-se que o uso da informática pode promover algumas mudanças no âmbito escolar, especialmente naquelas que se referem aos processos cognitivos empregados pelo aluno quando trata as figuras na tela do computador. A presente pesquisa pretende identificar alguns dos processos cognitivos envolvidos na tarefa de formação, tratamento e conversão das representações produzidas no processo de modelagem de logotipos – já que os desenhos deverão ser reproduzidos por meio do software GeoGebra.

Pretende-se, assim, ponderar algumas contribuições que este recurso pode trazer para o processo de ensino e aprendizagem em geometria.

CAPÍTULO IV

CONTEXTO DA PESQUISA

4.1 Participantes e contexto da pesquisa

Participaram desta pesquisa 37 alunos do terceiro ano do ensino médio do Instituto Federal do Triângulo Mineiro – Campus Ituiutaba – MG. A aplicação da pesquisa foi realizada em sala de aula em horários de aulas normais.

A escolha desta instituição deu-se pelo fato do autor deste trabalho ser professor de matemática do referido instituto. Uma das condições de participação do programa é o mestrando estar em efetivo exercício profissional, conforme pode ser verificado no parágrafo primeiro, do artigo 12, da Resolução nº 05/2013, do Conselho de Pesquisa e Pós-Graduação (UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA, 2013) que dispõe sobre alteração e republica o Regulamento do Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática – Mestrado Profissional.

Nesse sentido, o trabalho desenvolvido tem características que o classificam como pesquisa do professor, conforme definições de André (2006), Fazenda (2005), Ludke (2001a, 2001b) e Zeichner (1998). Esses autores diferenciam a pesquisa acadêmica ou científica da pesquisa do professor. A primeira tem por finalidade a preocupação com a originalidade, a validade e o reconhecimento da comunidade científica; já a pesquisa do professor visa buscar conhecimentos acerca da sua realidade, o âmbito da sala de aula, com intuito de promover melhoria na sua prática pedagógica.

Fiorentini e Lorenzato (2006) apontam que este tipo de pesquisa deve atender algumas etapas, bem como a escolha de um tema oriundo de inquietações do professor, uma justificativa, uma revisão bibliográfica, uma questão norteadora, uma teoria que serviu de base para as análises de sua prática, um referencial metodológico, uma ação didática e, posteriormente, uma análise dos dados, as considerações finais e, a partir disso, a geração de um material didático pedagógico.

A escolha da terceira série do Ensino Médio deu-se pelo fato de, além de esta ser a etapa final do processo de educação básica, nela estava previsto o conteúdo área de figuras planas, segundo plano curricular da referida instituição, o que caracterizou uma amostra de conveniência para aplicação da proposta.

4.2 Objetivo

Este trabalho tem por objetivo verificar quais são as contribuições de uma proposta de ensino – composta por uma sequência didática envolvendo cálculo de área de figuras planas com composição e decomposição de formas geométricas e um processo de modelagem de logotipos figurais utilizando o software GeoGebra – para o ensino de geometria plana.

Especificamente, pretende-se:

a) Analisar a proposta da sequência didática, evidenciando algumas condições para a aprendizagem significativa: as que são relativas aos alunos (conhecimentos prévios) e as relativas ao material (estrutura lógica das atividades propostas).

b) Analisar as fases de aplicação da modelagem matemática de logotipos, especialmente o processo de solução do problema – obtenção do modelo.

c) Analisar alguns registros de representação semióticas produzidos pelos participantes durante a aplicação das propostas.

4.3 Procedimentos e Instrumentos

A proposta foi composta pelas fases descritas a seguir:

1ª fase: Levantamento dos conhecimentos prévios acerca da composição e decomposição e do cálculo de área de figuras geométricas planas.

2ª fase: Elaboração e aplicação da sequência didática para o tema.

3ª fase: Aplicação do trabalho com a modelagem matemática.

Na primeira fase foram aplicadas duas provas de conhecimentos contendo questões relativas a decomposição/composição e a áreas de figuras planas (ANEXOS I e II). A prova é do tipo lápis e papel, aplicada individualmente, em um período normal de aulas, cada uma com duração de 50 minutos, pelo professor pesquisador.

Com base na análise do desempenho nas questões da prova, foi elaborada uma sequência didática com vistas à aprendizagem significativa do tema. Esta foi aplicada em seis aulas, sendo composta por atividades de exposição de conteúdos e também por exercícios de fixação. Os alunos realizaram anotações em um diário de bordo a partir da exposição feita pelo professor.

O trabalho de modelagem contou com as seguintes subfases:

a) Apresentação e discussão de uma figura aos participantes, em que foram identificadas as formas e calculadas as áreas pretendidas, obtendo, assim, o modelo geométrico, com posterior elaboração do mesmo no GeoGebra.

b) Escolha da figura a ser modelada pelo participante, com orientação do professor.

c) Identificação das formas geométricas que compunham a figura e elaboração do primeiro esboço.

d) Atribuição de medidas para as figuras encontradas.

e) Determinação das áreas das superfícies que compunham o modelo.

f) Elaboração do modelo no GeoGebra, e arte final do trabalho.

Vale salientar que estas atividades foram desenvolvidas no âmbito da sala de aula no horário regular das aulas de matemática, exceto as atividades com a utilização do software GeoGebra – que foram desenvolvidas no laboratório de informática do instituto.

4.4 Análises

A investigação também pode ser caracterizada como pesquisa de campo ou naturalística, em que o pesquisador colhe os dados no ambiente, no contexto em que o fenômeno é observado (FIORENTINI e LORENZATO, 2006). Neste tipo de pesquisa podem ser feitas análises qualitativas e quantitativas.

A proposta da sequência didática – esta entendida como um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais e que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos, conforme Zabala (1998) – foi descrita com base nas condições para a aprendizagem significativa, com base na teoria de Ausubel (2003). Assim, foi feito um levantamento do desempenho dos participantes na prova (pontuando erros e acertos) de modo a diagnosticar os conhecimentos prévios sobre o tema. Elaboradas as atividades, descreveu-se a estrutura lógica do material a ser apresentado. A descrição observou os fundamentos de Ausubel (2003) sobre aprendizagem por recepção verbal e de Coll e Valls (1998) e Pozo (2008) sobre o processo de ensino e aprendizagem de procedimentos.

Foram analisadas também as figuras, palavras e expressões empregadas pelos participantes nas respostas das questões com base nos processos de formação, de tratamento e de conversão dos registros de representações semióticas, sendo também formadas algumas categorias relativas à apreensão operatória das figuras geométricas, conforme definições de Duval (2010, 2011, 2012).

As fases da modelagem foram descritas e relacionadas com aquelas propostas por Barbosa (2001); Bassanezi (2006); Biembengut e Hein (2007) e Burak (2010). A fase de obtenção do modelo foi descrita com base nas etapas de solução de problemas, conforme elencadas por Brito (2006). Os processos cognitivos desencadeados pela representação do modelo na tela do GeoGebra foram descritos com base nas categorias relativas à apreensão operatória da geometria de Duval (2011) e no papel da informática no ensino e na aprendizagem, conforme Valente (1999).

A análise qualitativa aqui pretendida buscou corresponder ao que foi fundamentado por Lüdke e André (1986, p.11), já que tende a seguir um processo indutivo – sem preocupação em buscar evidências que comprovem hipóteses definidas e sim em entender os processos cognitivos empregados pelos participantes e as características das propostas didáticas às quais estes foram submetidos. Ou seja, a pesquisa aqui realizada não buscou fazer generalizações e sim compreender alguns aspectos cognitivos empregados pelos sujeitos participantes durante o processo de desenvolvimento das atividades matemáticas aqui propostas.

CAPÍTULO V
RESULTADOS DA AVALIAÇÃO DOS CONHECIMENTOS PRÉVIOS DOS ALUNOS

Conforme descrito na metodologia, a elaboração e a aplicação da sequência didática foram precedidas da avaliação do conhecimento prévio referente à área de figuras planas, realizada por meio de duas provas aplicadas aos alunos individualmente, sem utilizar fontes para consulta e no horário de uma aula de 50 minutos.

Prova 1- Decomposição e composição de figuras

A primeira prova continha oito desenhos (Figura 2) e tinha por finalidade verificar se os alunos tinham conhecimentos de procedimentos referentes à composição e decomposição, isto é, se conseguiam decompor as formas apresentadas em figuras geométricas conhecidas que, sendo combinadas – por adição ou subtração de superfícies – comporiam o desenho original. As figuras deveriam ser identificadas por meio de traçados a lápis ou à caneta e tinham que ser nomeadas. A Figura 3 mostra dois exemplos que foram apresentados aos alunos de modo a orientá-los quanto ao que era esperado como resposta na prova. Acrescenta-se que foi explicado aos alunos que, nas decomposições apresentadas, as figuras não precisariam ser exatamente aquelas, mas que poderiam ter sido identificadas outras e que as respostas poderiam variar de aluno para aluno.

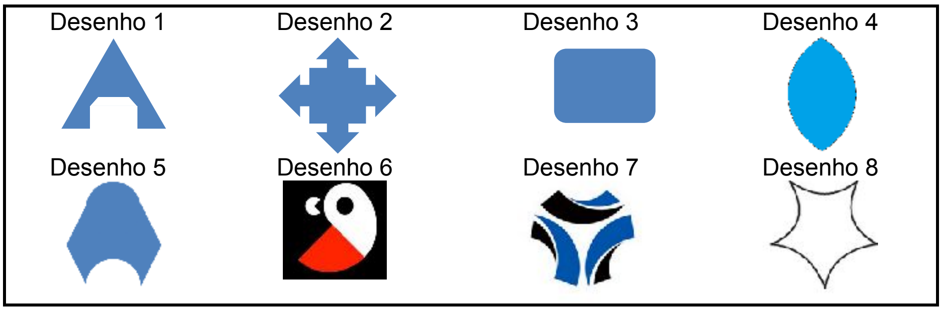


Figura 2. Desenhos constantes na Prova 1

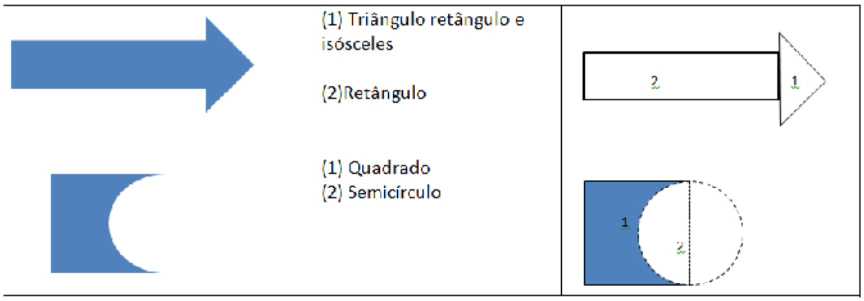


Figura 3. Questões exemplos da Prova 1

As respostas a cada desenho apresentado foram analisadas por meio dos registros de representação semiótica produzidos pelos alunos e foram classificadas nas seguintes categorias: as corretas, as incorretas ou incompletas e aquelas em branco.

A primeira categoria foi formada pelos registros que evidenciavam a decomposição e composição do desenho apresentado por meio de figuras geométricas adequadas e por denominação correta das mesmas.

Já a segunda categoria foi composta pelos registros que evidenciavam que os alunos conseguiam identificar parte das formas que compunham o desenho dado; em outros casos a decomposição realizada pelo aluno consistia em apresentar algumas figuras (quadrados, retângulos, triângulos), mas não evidenciava que ele havia conseguido recompô-las de modo a obter o desenho original. Considerou-se importante computar as respostas em branco que poderiam evidenciar os alunos que não tinham conseguido realizar a tarefa.

Com relação ao Desenho 1, verificou-se que a maioria dos alunos conseguiu identificar o triângulo, mas não as formas que deveriam ser subtraídas para que se obter o desenho dado. A Figura 4 mostra o Desenho 1 e também exemplos de respostas dos alunos, nas categorias anunciadas.

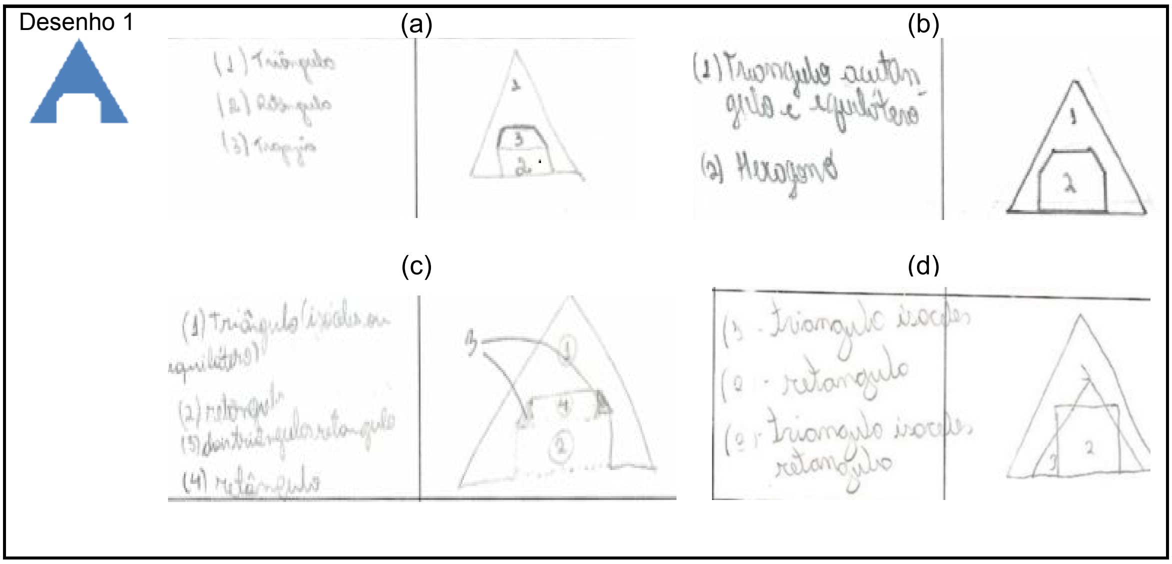


Figura 4. Respostas apresentadas para o Desenho 1: corretas (a,b,c) e incorreta/incompleta (d)

Foi possível verificar que catorze alunos conseguiram decompor o Desenho 1, sendo que seis deles identificaram as formas como triângulo, retângulo e trapézio (Figura 4-a), e cinco alunos utilizaram um triângulo e um hexágono não regular (Figura 4-b). Nota-se a decomposição feita por um estudante, que identificou um triângulo, um retângulo e dois triângulos retângulos (Figura 4-c) e o restante visualizaram outras forma e não conseguiram deixar a figura do mesmo modo que a apresentada (Figura 4-d).

Com relação ao Desenho 2, notou-se que apenas um aluno visualizou um quadrado e oito trapézios retângulos; o restante visualizou um quadrado, quatro retângulos e triângulos. Vale salientar que alguns até conseguiram classificar os triângulos como retângulos e isósceles. A Figura 5 ilustra algumas as categorias anunciadas.

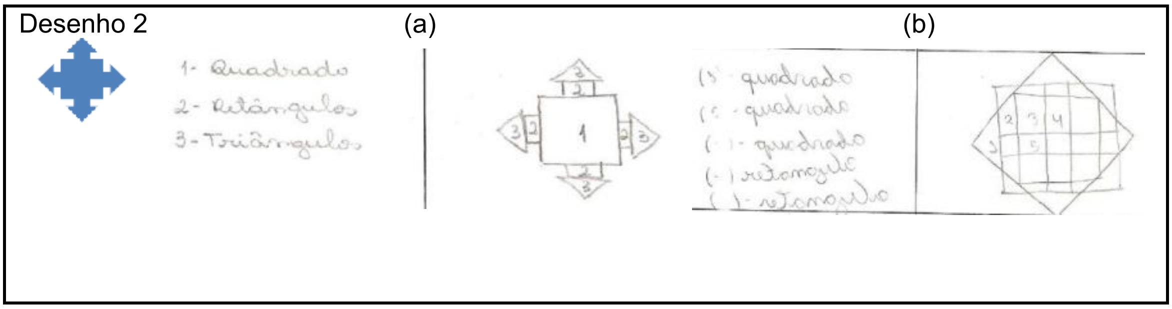


Figura 5. Respostas apresentadas para o Desenho 2: correta (a) e incorreta/incompleta (b)

O Desenho 3 foi decomposto corretamente por cinco alunos: estes identificaram que, para formar o desenho, eram necessários um retângulo e quatro setores circulares de 90º. Já os que não conseguiram decompor o desenho, ao menos visualizaram o retângulo, porém não as partes circulares (Figura 6).

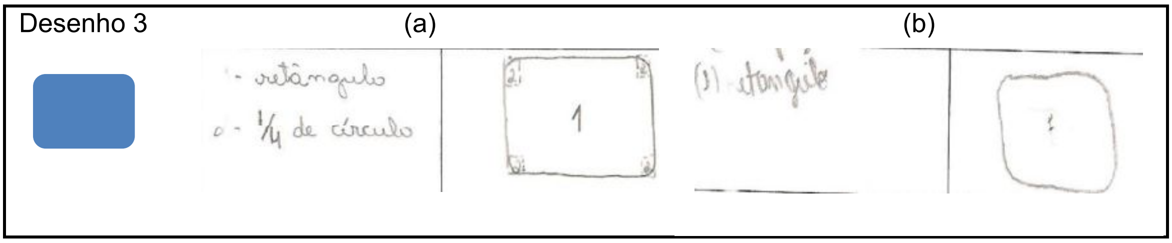


Figura 6. Respostas apresentadas para o Desenho 3: correta (a) e incorreta/incompleta (b)

Ao que se refere ao Desenho 4, dez participantes pareciam reconhecer o procedimento de construção geométrica para se obter o desenho dado. Apesar de não terem acertado a nomeação correta (dois segmentos circulares), as respostas apresentadas foram consideradas corretas (Figura 7-a e 7-b). Apenas dois estudantes mencionaram que a superfície do desenho era resultado da intersecção de dois círculos (Figura 7-c). Já os 43,24% que não conseguiram identificar as formas tentavam fazer decomposições do desenho utilizando polígonos, conforme mostra a Figura 7-d.

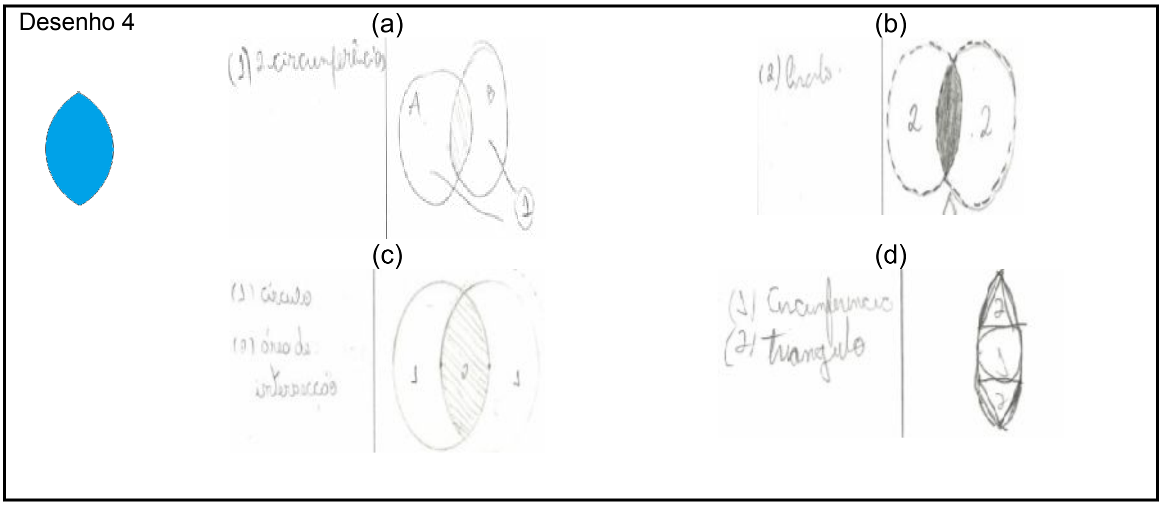


Figura 7. Respostas apresentadas para o Desenho 4: consideradas corretas (a, b, c) e incorreta/incompleta (d)

O Desenho 5 foi decomposto em um hexágono e dois semicírculos, um deles a ser somado na parte superior e outro subtraído da parte inferior do desenho (Figura 8-a). Muitos alunos parecem não ter visualizado o hexágono, já que a decomposição consistiu na união de figuras mais comuns, como semicírculos, retângulo e triângulos (Figura 8-b). Notou-se a tentativa de buscar figuras que não satisfaziam a decomposição adequada, conforme mostra a Figura 8-c.

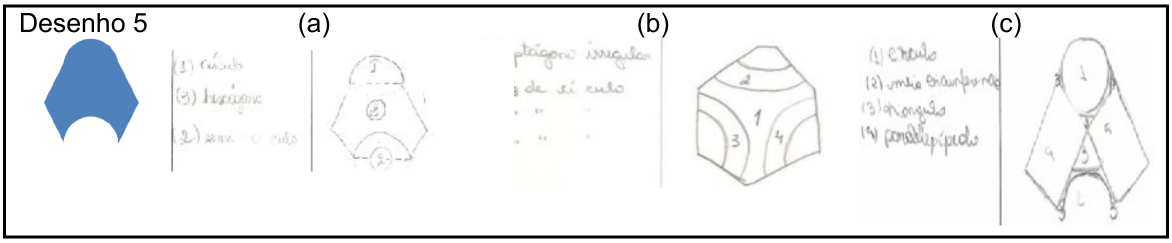


Figura 8. Respostas apresentadas para o Desenho 5: corretas (a, b) e incorreta/incompleta (c)

O Desenho 6 foi decomposto por oito alunos como uma semicoroa circular, dois setores de 90º e um de 270º – todos na região interna de um quadrado – o que foi considerado correto (Figura 9-a). Alguns dividiram a figura em partes menores, recorrendo a formas mais conhecidas, chamando os setores de triângulos, por exemplo. Outros confundiram a nomeação de figuras planas com espaciais e nomearam partes da figura de cone e de esfera (Figura 9-b).

.

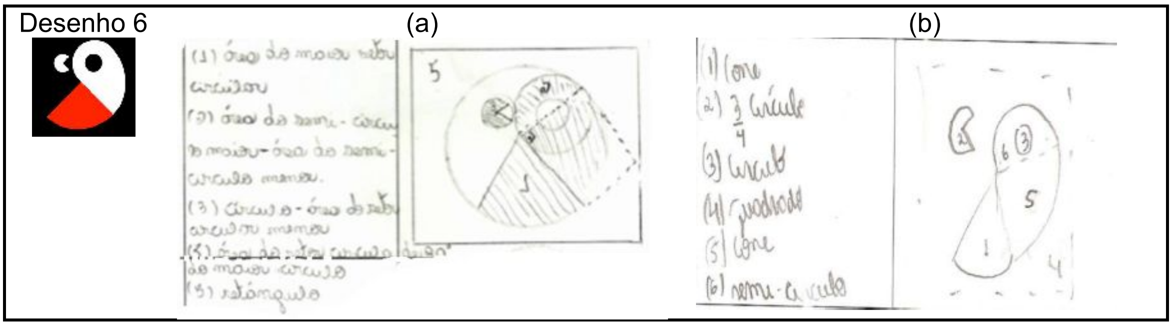


Figura 9. Respostas apresentadas para o Desenho 6: correta (a) e incorreta/incompleta (b)

Já o Desenho 7 foi decomposto corretamente por apenas um aluno (Figura 10-a), sendo que a maioria identificou partes circulares e triângulos (Figura 10-b). Os alunos também tiveram dificuldades para decompor o

Desenho 8, que era formado pela região interna de um pentágono do qual foram retirados cinco segmentos de círculo. Os alunos não nomearam corretamente os segmentos de círculo, o que leva a crer que se trata de uma forma não conhecida por eles (Figura 11-a), sendo que vários deles tentaram identificar formas mais simples, conforme aconteceu em figuras anteriores (Figura 11-b).

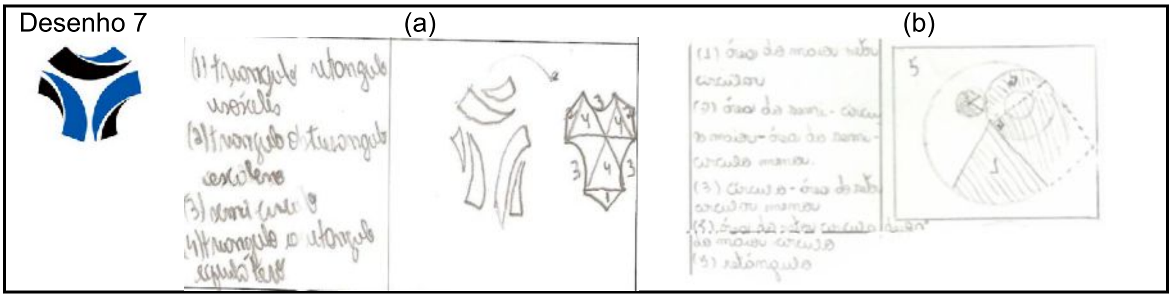


Figura 10. Respostas apresentadas para o Desenho 7: correta (a) e incorreta/incompleta (b)

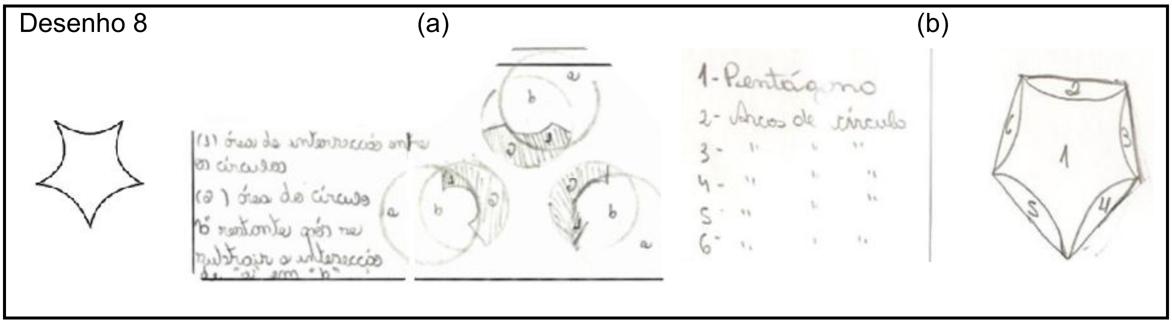
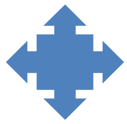


Figura 11. Respostas apresentadas para o Desenho 8: correta (a) e incorreta/incompleta (b)

A Tabela 2 mostra a distribuição dos alunos por categoria de respostas dadas a cada desenho apresentado na Prova 1.

Tabela 2. Distribuição dos alunos por categoria de respostas para cada desenho da Prova 1

Respostas	Desenho 1		Desenho 2		Desenho 3		Desenho 4	
								
Corretas	14	37,8%	31	83,8%	5	13,5%	10	27,0%
Incorreta/incompletas	22	59,5%	5	13,5%	26	70,3%	16	43,3%
Em branco	1	2,7%	1	2,7%	6	16,2%	11	29,7%
Total	37	100,0%	37	100,0%	37	100,0%	37	100,0%
	Desenho 5		Desenho 6		Desenho 7		Desenho 8	
								
Corretas	9	24,4%	8	21,6%	1	2,7%	1	2,7%
Incorreta/incompletas	23	62,2%	27	73,0%	16	43,3%	16	43,3%
Em branco	2	5,4%	2	5,4%	20	54,0%	20	54,0%
Total	37	100,0%	37	100,0%	37	100,0%	37	100,0%

De modo geral, a Prova 1 que avaliou o conhecimento de procedimentos referentes à composição e decomposição, revelou que os alunos tinham dificuldades para identificar e nomear as figuras, especialmente quando o desenho apresentado era formado por curvas. Nestes casos, a maioria dos alunos buscaram formas mais conhecidas para completar espaços e realizar aproximações.

Prova 2 – Cálculo de áreas

Passada uma semana da aplicação da prova 1, aplicou-se a Prova 2. Esta tinha por objetivo avaliar o conhecimento de procedimentos relativos ao cálculo de área de figuras planas. A mesma era composta por nove figuras geométricas planas – polígonos (quadrado, triângulo, hexágono, octógono e trapézio) e não polígonos (círculo, semicírculo e setor circular) –, com indicações de algumas de suas medidas e era solicitada a área de cada uma delas. Estas figuras foram escolhidas por serem básicas no estudo da geometria plana e indicadas pelos PCN (BRASIL, 1998) e CBC (MINAS GERAIS, 2008) (Figura 12).

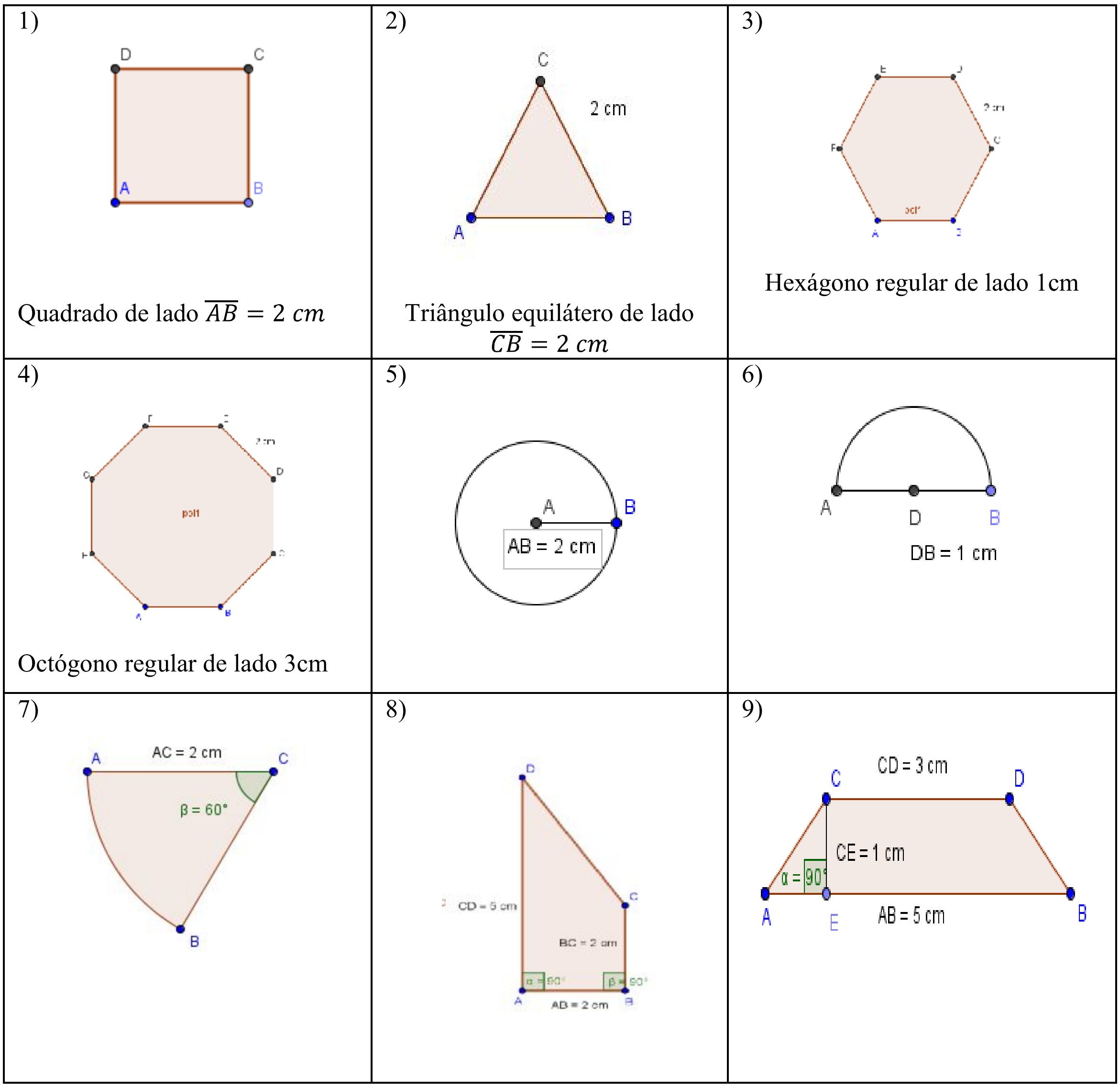
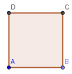
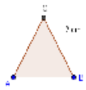
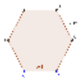
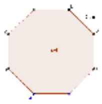
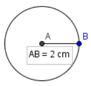
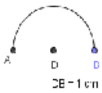
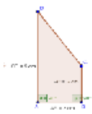
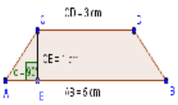


Figura 12. Questões da Prova 2

Foram observados os procedimentos utilizados para a determinação das áreas, sendo montadas as categorias: respostas corretas, respostas incorretas e aquelas deixadas em branco. A Tabela 3 mostra os resultados.

Tabela 3. Distribuição dos alunos quanto às respostas dadas a cada figura da Prova 2

	Questão/figura	Corretas		Incorretas		Em branco		Total	
		Nº	%	Nº	%	Nº	%	Nº	%
	Quadrado	32	86,5	04	10,8	01	2,7	37	100,0
	Triângulo equilátero	09	24,3	22	70,3	05	13,5	37	100,0
	Hexágono regular	02	5,4	14	37,8	21	56,8	37	100,0
	Octógono regular	01	2,7	11	29,7	25	67,5	37	100,0
	Círculo	06	16.2	22	59,4	09	24,3	37	100,0
	Semicírculo	04	10,8	20	54,0	13	35,2	37	100,0
	Setor circular	01	2,7	10	27,0	26	70,3	37	100,0
	Trapézio retângulo	11	29,7	14	37,8	12	32,4	37	100,0
	Trapézio	04	10,8	11	29,7	22	59,5	37	100,0

Observou-se que aproximadamente 86,5% dos estudantes conseguiram efetuar o cálculo da área do quadrado; estes apresentaram a fórmula $A = l^2$; outros utilizaram $A = b \cdot h$ e vários deram a resposta direto. Entre aqueles que não conseguiram efetuar o cálculo, dois utilizaram a fórmula do triângulo e outros cometeram erros nos cálculos.

Dos nove alunos que conseguiram realizar o procedimento de cálculo da área do triângulo equilátero, apenas um aluno utilizou o seno de 60º; outros encontraram a medida da altura por meio do Teorema de Pitágoras e aplicaram a fórmula $A = \frac{b \cdot h}{2}$. Além de insucessos nos cálculos aritméticos, verificou-se a utilização da linguagem materna para descrever o procedimento.

Todos os sujeitos que não efetuaram o cálculo da área do triângulo equilátero, também não calcularam corretamente as outras áreas.

Mais da metade dos alunos não apresentou nenhum procedimento para determinar a área do hexágono regular. Dos dois alunos que realizaram o procedimento correto, um deles descreveu os passos para encontrar a solução utilizando a língua materna e o outro decompôs o hexágono em seis triângulos equiláteros e, após encontrar separadamente a área de um triângulo, multiplicou por seis o valor encontrado. Verificou-se certa confusão entre perímetro e área – já que alguns apresentaram o perímetro do hexágono – e entre as fórmulas de áreas – pois vários utilizaram as fórmulas de área do triângulo, trapézio e retângulo.

Embora nenhum aluno tenha acertado o valor da área do octógono, cabe mencionar que um aluno decompôs o octógono em oito triângulos e descreveu que a área total da figura seria oito vezes a área de cada triângulo (mas não apresentou o valor da área). Estes alunos foram os que acertaram os procedimentos para a área do hexágono.

Notou-se que mais da metade dos alunos não conseguiu realizar o procedimento correto para o cálculo da área do círculo; 21 estudantes utilizaram a fórmula do comprimento da circunferência, ou seja, $C = 2\pi r,$ sendo que quatro alunos elevaram o raio ao quadrado.

Dos 17 alunos que utilizaram a fórmula do comprimento da circunferência para calcular a área do círculo, 13 utilizaram a mesma fórmula (dividindo o resultado por dois) para determinar a área do semicírculo. Aqueles alunos que elevaram o raio o quadrado no cálculo da área do círculo repetiram o procedimento no caso do semicírculo.

Os nove alunos que não calcularam a área do circulo também deixaram em branco as respostas para o semicírculo e o setor circular. Apenas um aluno conseguiu utilizar o procedimento correto para determinar a área do setor circular. Cinco alunos pareciam visualizar que a área do setor apresentado tratava-se de um sexto da área do círculo completo; um estudante fez o desenho ilustrando que a resposta seria um terço da metade da área do círculo, mas não conseguiu realizar os procedimentos algébricos e aritméticos de maneira correta.

Apesar de onze alunos terem apresentado um procedimento para calcular a área do trapézio retângulo, nenhum dos participantes desta pesquisa nomeou corretamente a figura. Entre os 37,84% que erraram o procedimento, apenas quatro visualizaram a figura em um quadrado e um triângulo retângulo – decomposição que seria, aparentemente, bastante simples.

Apenas quatro estudantes calcularam corretamente a área do trapézio isósceles: dois utilizaram a fórmula $A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$ e os outros realizaram a decomposição em dois triângulos e um paralelogramo, aproximando as medidas.

Finalmente, cada resposta correta foi pontuada, totalizando 9 pontos; as estatísticas do desempenho são mostradas na Tabela 4. Conforme pode ser observado, considera-se que o desempenho foi bastante fraco, já que as figuras apresentadas eram aquelas trabalhadas no ensino fundamental.

Tabela 4. Estatísticas de desempenho na prova

Estatísticas	Participantes
Nº de sujeitos	37
Média	1,837
Desvio padrão	1,405
Mediana	2
Mínimo	0
Máximo	7

Pelos resultados encontrados, foi possível notar que muitos deles, embora fossem alunos do terceiro ano do Ensino Médio, pareciam não ter formado o conceito de área, nem compreendido as unidades de medida para área – já que muitos davam a resposta em *cm* e não em cm^2. Pareceu também que vários não compreendiam a natureza do procedimento para cada área, já que confundiam as fórmulas, substituíam os valores de maneira equivocada ou realizavam cálculos incorretos.

Desta forma, as análises puderam contribuir para a elaboração de uma sequência didática que favorecesse, em especial, a aprendizagem significativa dos procedimentos relativos ao cálculo de áreas de figuras planas, tema deste trabalho.

CAPÍTULO VI

O MATERIAL DE APRENDIZAGEM: ELABORAÇÃO E APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

6.1 A elaboração da sequência didática

A sequência didática foi elaborada de modo a favorecer a aprendizagem significativa dos conceitos e procedimentos relativos à área de figuras planas. O esquema mostrado na Figura 13 ilustra a estrutura adotada para a sequência de atividades.

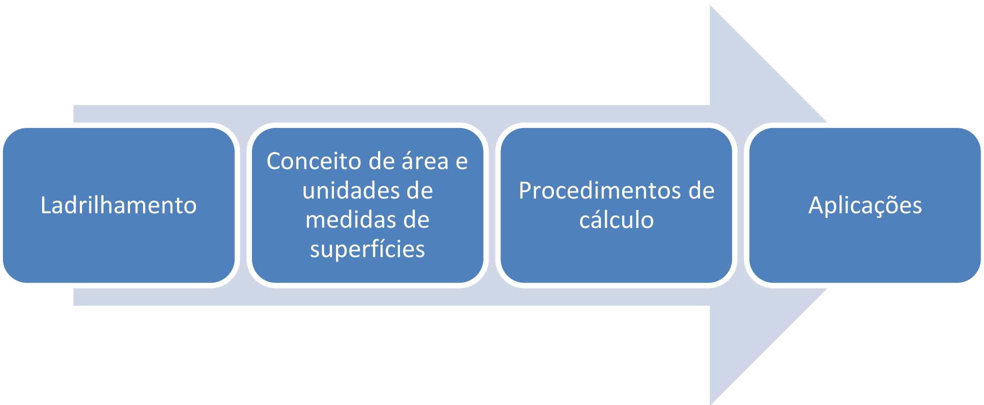


Figura 13. Esquema da estrutura adota para elaboração da sequência

Assim, optou-se por uma estrutura lógica que tivesse início das principais ideias de ladrilhamento, já que a análise do conhecimento prévio evidenciou que alguns dos participantes desta pesquisa pareciam não diferenciar medidas de comprimento e de superfícies. Ao entender área como superfície e ao estabelecer relação com o processo de ladrilhar (ou pavimentar), esperava-se que os alunos compreendessem as unidades de medidas de superfície e concluíssem porque são utilizadas unidades quadradas.

A partir disso, a sequência de atividades deveria favorecer a aprendizagem dos procedimentos para determinação das áreas das principais figuras geométricas planas. A partir das áreas do quadrado e do retângulo, os procedimentos de determinação das áreas de todos os outros polígonos apresentados (paralelogramo, triângulo, trapézio e losango) bem como dos não polígonos (círculo, setor e segmento circular) seriam obtidos por meio da composição e decomposição de formas, o que levaria à obtenção das fórmulas. Convém esclarecer que não foram planejadas atividades envolvendo todas as figuras contidas nas provas que avaliaram o conhecimento prévio dos alunos, por entender que estas poderiam ser exploradas no processo de modelagem matemática que sucederia a sequência didática.

Visando organizar a exposição dos temas e orientar as discussões em sala – além de otimizar o tempo disponível para aplicação da sequência – , optou-se por utilizar slides a serem apresentados nas aulas pelo professor. As atividades da sequência foram, então, ordenadas, estruturadas e articuladas conforme mostra o Quadro 3, na forma de sessenta e um slides dinâmicos elaborados no software *Power Point*, especialmente elaborados para a pesquisa.

Quadro 4. Itens e objetivos para elaboração dos slides da sequência

Etapas	Item da sequência	Objetivos	Slides
LADRILHAMENTO	1. Ladrilhando superfícies	a) Verificar que as superfícies planas podem ser recobertas por outras superfícies planas, mas que nem todas as figuras podem ser utilizadas como ladrilhos. b) Verificar que é possível ladrilhar não apenas com quadrados (unidade utilizada para a medida da área), mas também com triângulos, quadriláteros e hexágonos – revendo o conceito de polígono, de polígono regular, da soma dos ângulos internos e de ângulo interno de polígono regular. c) Identificar área como grandeza, reconhecendo o quadrado como unidade de medida, entendendo os múltiplos e submúltiplos da unidade padronizada metro quadrado.	1-26
CONCEITO DE ÁREA E UNIDADES DE MEDIDA	2. Determinando a área de retângulos e quadrados	a) Determinar a área de retângulos e quadrados por: – contagem de unidades quadradas; – multiplicação de medidas da base *B* e altura h e, no caso especial, quando estas forem iguais *B* = *h* = *l* . – fórmulas encontradas $\boldsymbol{A_{\text{retângulo}}} = \boldsymbol{Bh}$ e $\boldsymbol{A_{quadrado}} = \boldsymbol{l^2}$ b) Aplicação	27-28-29
PROCEDIMENTOS DE CÁLCULO	3. Determinando a área de paralelogramos	a) Determinar a área de paralelogramo por: – contagem de unidades quadradas; – decomposição e composição em retângulo, a partir da base *B* e da altura *h*; – multiplicação de medidas. – fórmula encontrada $\boldsymbol{A_{paralelogramo}} = \boldsymbol{Bh}$ b) Aplicação	30-31-32
	4. Conhecendo o princípio de Cavaliere	Reconhecer que paralelogramos com a mesma base e mesma altura têm a mesma área.	33-34
	5. Determinando a área de triângulos	a) Determinar a área de triângulos por: – contagem de unidades quadradas; – composição de triângulos em paralelogramo a partir da base e da altura; – determinação da metade da área do paralelogramo; – fórmula encontrada $\boldsymbol{A_{\text{triângulo}}} = \frac{\boldsymbol{Bh}}{\boldsymbol{2}}$ b) Aplicação	35-41
	6. Determinando a área de trapézios	a) Determinar a área de trapézios por: – composição de trapézios em paralelogramo a partir das bases *(B+b)* e da altura *h*; – determinação da metade da área do paralelogramo;	42-43

		–fórmula encontrada $A_{trapézio} = \frac{(B+b)h}{2}$ b) Aplicação	
	7. Determinando a área de losangos	a) Determinar a área de losangos por: – composição de losangos em paralelogramo a partir das duas diagonais *D* e *d*; – determinação da metade da área do paralelogramo; – fórmula encontrada $A_{losango} = \frac{Dd}{2}$ b) Aplicação	44-46
	8. Determinando a área do círculo	a) Determinar a área do círculo por: – contagem de unidades quadradas; – composição de setores em paralelogramo a partir do comprimento e do raio; – determinação da metade da área do paralelogramo e considerando a base $2\pi r$ e a altura *r*; – fórmula encontrada $A_{círculo} = \pi r^2$ b) Aplicação	47-50
	9. Determinando a área do setor circular	a) Verificar que a área do setor circular de raio dado é diretamente proporcional ao ângulo central; b) Determinar a área do setor circular por: – regra de três simples, sendo α o ângulo central e *r* o raio do círculo; – fórmula encontrada $A_{setor} = \frac{\alpha.\pi.r^2}{360°}$ c) Aplicação	51-52
	10. Determinando a área do segmento circular	a) Verificar que a área do segmento circular é obtida a partir resultado da diferença entre as áreas de um setor circular e um triângulo.	53-55
APLICA-ÇÕES	11. Aplicações	Determinar as áreas de figuras planas	56-61

Conforme apontado em Viana e Boiago (2015), os slides dinâmicos caracterizam-se por apresentar:

> (a) perguntas iniciais para introduzir o conceito ou o procedimento a ser tratado; (b) situações variadas na forma de figuras, palavras ou outros símbolos, de modo a elucidar a pergunta, quando necessário; (c) exemplos e contraexemplos de modo a explorar as possíveis conjecturas e encaminhar as conclusões; (d) a resposta, a conclusão e a formalização matemática; (e) exercícios de aplicação; (f) uma pergunta de modo a estabelecer a relação com o item seguinte do conteúdo (p.411).

Ainda conforme consta em Viana e Boiago (2015), os slides foram elaborados utilizando-se “o efeito de animação tanto para as palavras (que aparecem sequencialmente na forma de perguntas ou respostas intermediárias dentro de cada item do conteúdo) como para as figuras em decomposição e composição (que simulam ações com materiais manipuláveis, como se estes estivessem dispostos em cima da carteira do estudante)” (p.412).

6.2 A aplicação da sequência didática

Considerando o esquema adotado para estruturar a sequência de atividades (Figura 13), a aplicação da sequência será descrita nas mesmas etapas indicadas: (1) ladrilhamento; (2) conceito de área e unidades de medidas; (3) procedimentos de cálculo de área de algumas superfícies planas e (4) aplicações.

Para cada etapa a ser descrita, será apresentada uma justificativa acerca da estrutura lógica do material, acompanhada:

a) de algumas percepções do professor realizadas a partir do diálogos estabelecidos;
b) dos apontamentos feitos pelos alunos no diário de bordo;
c) e de algumas sugestões de melhoria na apresentação.

Etapa 1: Ladrilhamento

Para introduzir o conceito de área utilizou-se a ideia de ladrilhamento (ou pavimentação). Sallum (s/d) menciona-se que a arte de ladrilhar consiste no preenchimento do plano, por moldes, sem superposição ou buracos. Assim, o ladrilhamento consiste no recobrimento de uma superfície plana atendendo às seguintes condições: a) os ladrilhos são polígonos congruentes, sendo que a intersecção de dois polígonos é sempre um lado ou um vértice ou vazia e b) o tipo de cada vértice é sempre o mesmo, isto é, a distribuição ao redor de cada vértice é sempre a mesma.

Assim, considerou-se que a ideia de ladrilhamento poderia ser mobilizada de modo a levar o aluno a atribuir significados para o conceito de área de superfícies planas e também para as unidades de medida – justificando, por exemplo, a utilização de cm^2, m^2, ou km^2 nos exercícios sobre o assunto.

Com ajuda dos slides de 1 a 13 buscou-se desenvolver as ideias envolvidas no ladrilhamento. No primeiro slide, os alunos foram convidados a pensar em uma folha em branco e nas possíveis figuras geométricas que preencheriam essa folha, de maneira que estas fossem iguais. Questionou-se se com qualquer polígono seria possível preencher a folha (Figura 14-a).

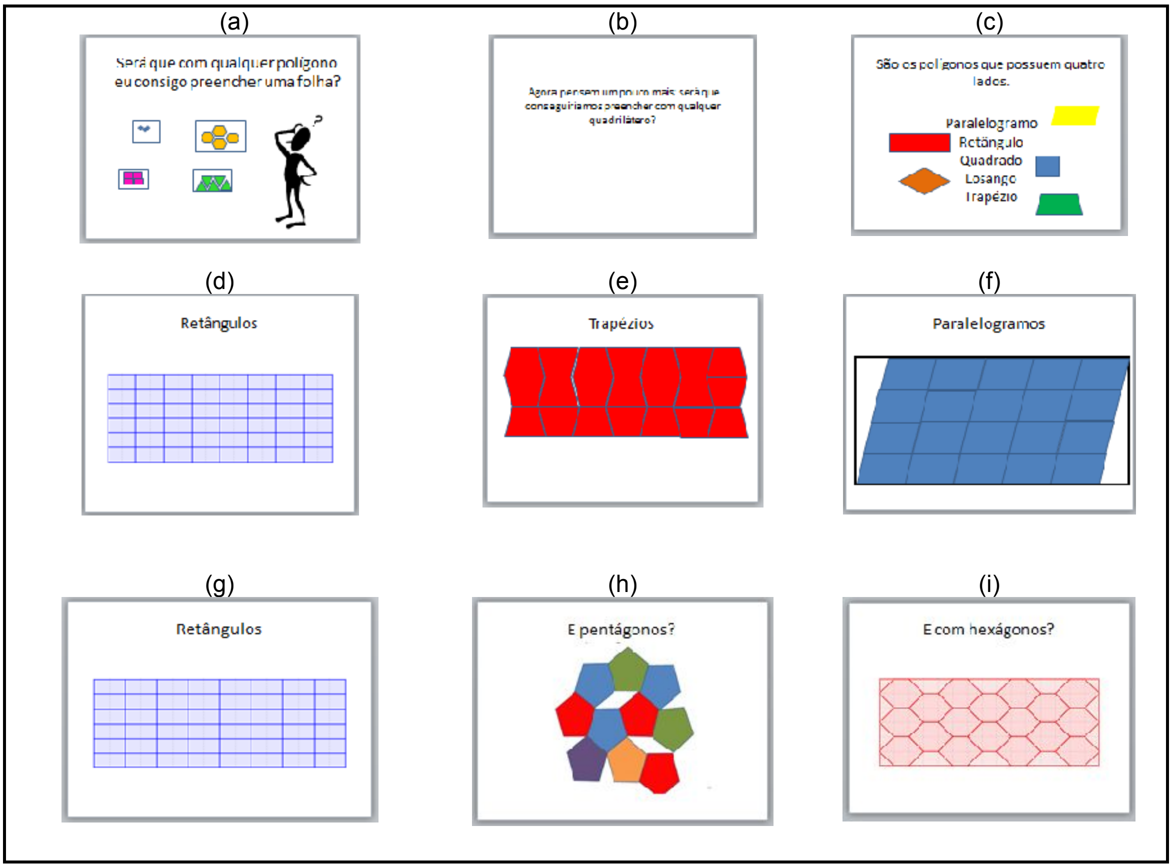


Figura 14. Slides utilizados na sequência (Etapa 1: Ladrilhamento)

Ao se colocar a pergunta para os alunos, foi possível notar certa inquietação e a primeira resposta dada por eles foi “quadrado”. A partir disso, questionou-se se qualquer quadrilátero ladrilharia a superfície (Figura 14-b), o que fez surgir dúvidas nos alunos, já que não se lembravam do conceito de quadriláteros. Como vários deles associavam quadriláteros a apenas retângulos e quadrados, foi retomado o conceito de quadrilátero como sendo um polígono de quatro lados. (Figura 14-c).

O slide 9 (Figura 14-f) provocou questionamentos, já que os alunos alegaram que a folha não estava totalmente preenchida por paralelogramos, sobrando espaços descobertos na superfície.

Nesse momento o professor retomou a ideia de ladrilhamento exemplificando que o piso da sala de aula poderia ser pavimentado com pisos na forma de quadrados, de retângulos e de triângulos, mas não na forma de círculos – já que, neste caso, seria impossível preencher a superfície sem sobreposição e sem sobrar espaço. Alguns esboços de ladrilhamento com polígonos regulares e não regulares foram feitos na lousa, para complementar a explicação.

Logo em seguida foi retomado o uso dos slides e solicitado que os alunos olhassem para o ladrilhamento do quadrado para que observassem encontro dos vértices, em outras palavras, quanto valia a soma dos ângulos que se encontram neles. Nesse momento, eles responderam trezentos e sessenta. Com outro questionamento o professor juntamente com os alunos concluiu que só é possível ladrilhar com figuras planas em que o encontro dos ângulos delas em um único vértice fosse igual a trezentos e sessenta.

Na sequência, os alunos foram questionados se era possível ladrilhar com triângulos, pentágonos regulares e hexágonos regulares (Figura 14 –g, h, i). Depois disto, o professor questionou os alunos sobre a maneira de determinar medidas de comprimentos – altura e distâncias entre quaisquer dois objetos, pessoas ou coisas - tendo como respostas a partir da utilização de instrumentos de medidas.

Posteriormente, o professor questionou para os alunos se era possível medir uma folha tomando como unidade cada um destes polígonos mencionados e os alunos mencionaram que sim. Vale mencionar a importância de se incluir um conjunto de slides para melhor encaminhar essas discussões.

Ao longo da aplicação da sequência os alunos portavam um caderno brochura pequeno de capa dura (aqui chamado de diário de bordo) onde podiam registrar discussões, definições, conclusões, reflexões sobre pontos específicos da aula ou qualquer outra questão considerada como relevante por eles.

Observe que, dos 37 sujeitos participantes, 17 não descreveram nada no diário de bordo sobre o que foi desenvolvido ao que se refere ao conceito de ladrilhamento. Entre aqueles que fizeram anotações, quase todos se referiram à necessidade de que os ângulos internos dos polígonos que se juntam em cada vértice somarem 360º. Alguns alunos utilizaram desenhos; outros descreveram a situação e se valeram de exemplos de polígonos (Figura 15). Entre os vinte alunos que fizeram anotações sobre o assunto, apenas dois não se referiram à soma dos ângulos.

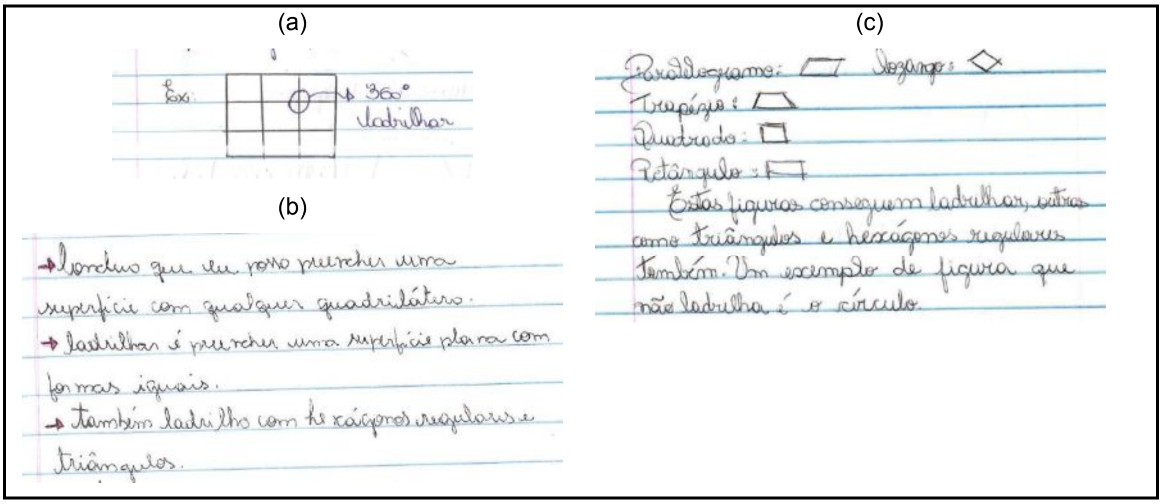


Figura 15. Anotações constantes nos diários de bordo (Etapa 1: Ladrilhamento)

Foram, então, analisadas as anotações sobre ladrilhamento que se referiam à soma dos ângulos; estas foram categorizadas como completas ou incorretas/incompletas, conforme mostra a Tabela 5.

Tabela 5. Anotações sobre ladrilhamento que se referiram à soma dos ângulos

Forma de descrição	Nº de alunos
Incorretas ou incompletas	6
Corretas	14
Total	20

Nas anotações incompletas, percebeu-se que os alunos não descreviam as ideias com clareza, apresentando um texto com conceitos expostos de maneira equivocada ou carecendo de relações entre as frases (Figura 16).

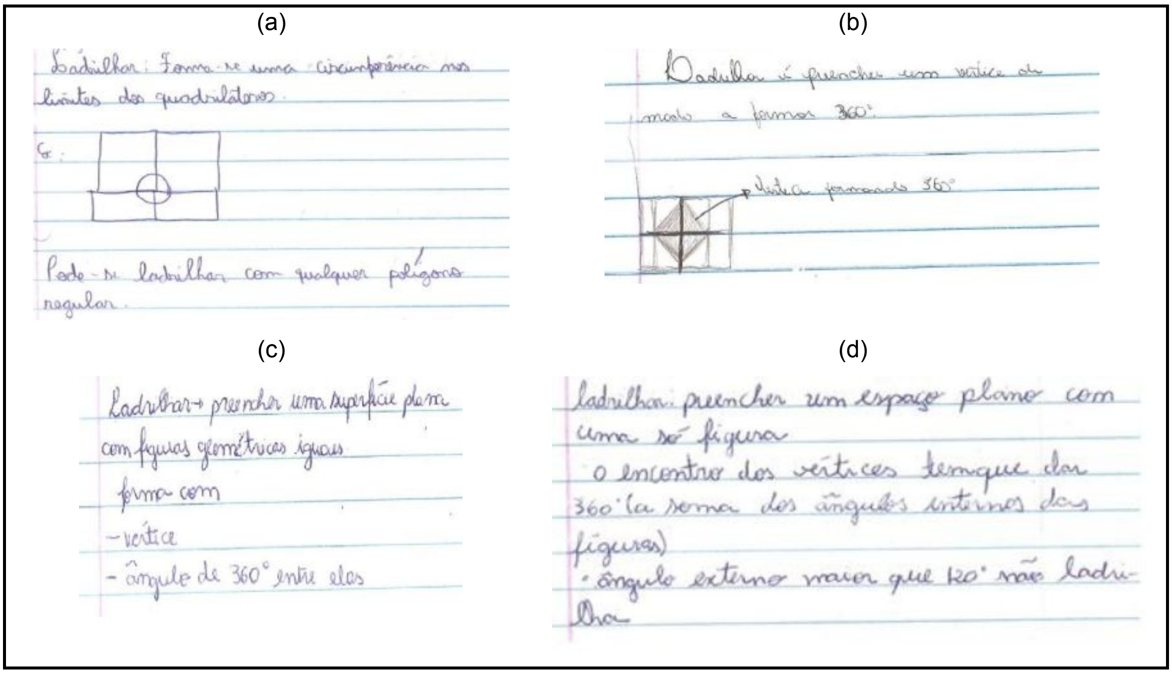


Figura 16. Anotações incompletas/incompletas sobre ângulos - constantes nos diários de bordo (Etapa 1: Ladrilhamento)

Nota-se, na descrição apresentada na Figura 16-a, que o aluno não conseguiu verbalizar que a soma dos ângulos que se encontram num único vértice deve ser igual a 360°; no entanto, o desenho evidenciou uma representação mental da situação. Apesar disso, considera-se que o aluno não compreendia, de fato, ladrilhamento, já que apresentou a conclusão “é possível ladrilhar com qualquer polígono regular”.

Com relação à anotação da Figura 16-b, nota-se que a expressão utilizada pelo aluno caracteriza seu entendimento de que o ladrilhamento se faz a partir de um ponto tomado e, então, “preencher um vértice de forma a formar 360°”.

O registro da Figura 16-c também evidencia a dificuldade em discorrer sobre as ideias formadas. A explicação “forma com vértice, ângulo de 360° entre elas” mostra a falta de clareza ao expressar as proposições entre os conceitos.

Como pode ser observado na anotação da Figura 16-d, ficou evidente a ideia de ladrilhamento a partir de uma só figura. Apesar da clareza da explicação “a soma dos ângulos internos das figuras tem que ser 360°”, o aluno generaliza de maneira equivocada que o “ângulo externo maior que 120° não ladrilha”.

Melhor compreensão pareceu demonstrar outro aluno, já que a descrição apresentada refere-se à possibilidade de se usar partes de uma figura para ladrilhar uma superfície (Figura 17-a-b).

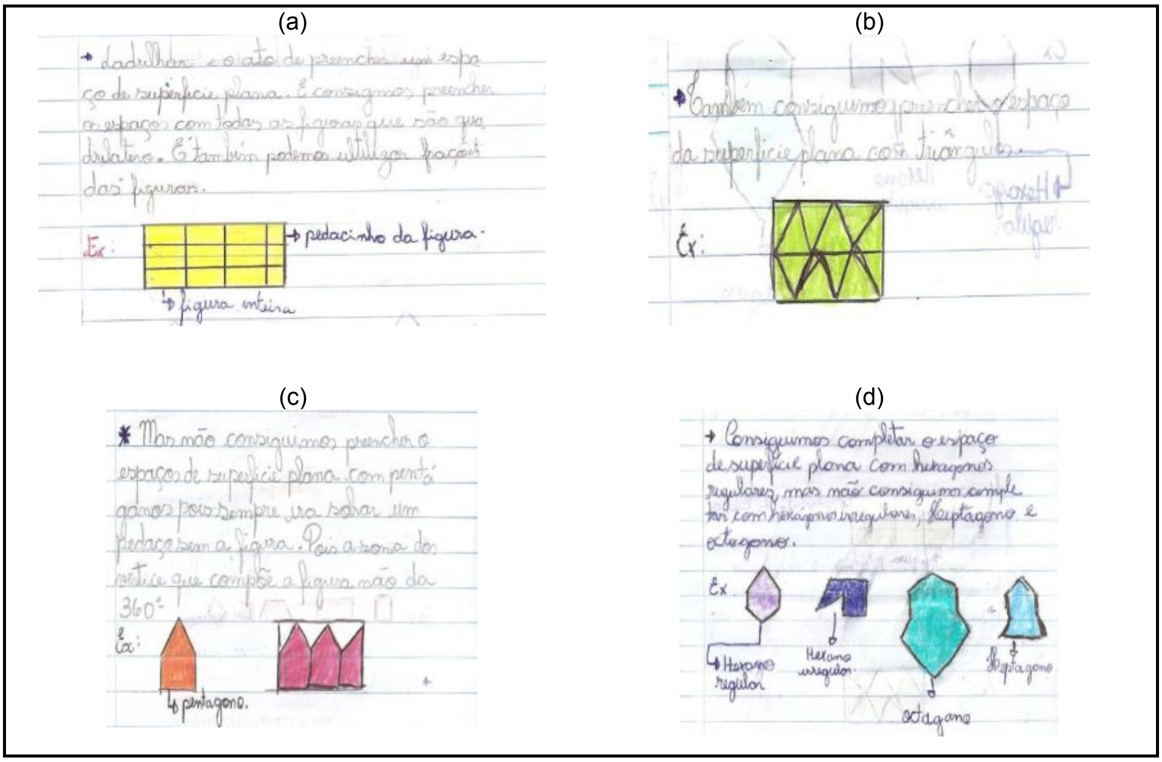


Figura 17. Anotações sobre polígonos que ladrilham (Etapa 1: Ladrilhamento)

O mesmo estudante fez outros registros, em que é possível notar certa falta de clareza nas ideias: o desenho mostrado na Figura 17-c (ou seja, pentágonos não regulares) parecia indicar uma contradição à argumentação “não conseguimos preencher espaços de superfície plana com pentágonos”[4]. Se a princípio poder-se-ia concluir que ele não dominava o conceito de polígonos regulares ou que suas ideias ainda não estavam totalmente organizadas, no último registro feito (Figura 17-d), o aluno se vale de exemplos e não exemplos, o que leva a crer que ele dominava o conceito.

Uma tentativa de generalização pode ser observada nas anotações “quanto maior os lados e menor os ângulos, mais impossível será de ladrilhar”. Ao que parece, o aluno se referia ao número de lados dos polígonos regulares. Realmente, partindo do hexágono, os demais polígonos (heptágonos,

[4] Note que o ladrilhamento seria possível se os pentágonos apresentados tivessem os lados correspondentes com medidas iguais e se os ângulos internos medissem 90º, 90º, 120º, 60º e 120º.

octógonos, eneágonos etc.) não ladrilham: unindo-se dois polígonos, o espaço para se encaixar um terceiro polígono vai ficando cada vez menor – já que a medida do ângulo interno também aumenta. O aluno afirma que o ângulo fica menor, talvez se referindo ao ângulo central, pois acerta a medida do ângulo central do heptágono regular. A Figura 18-a mostra as anotações aqui comentadas.

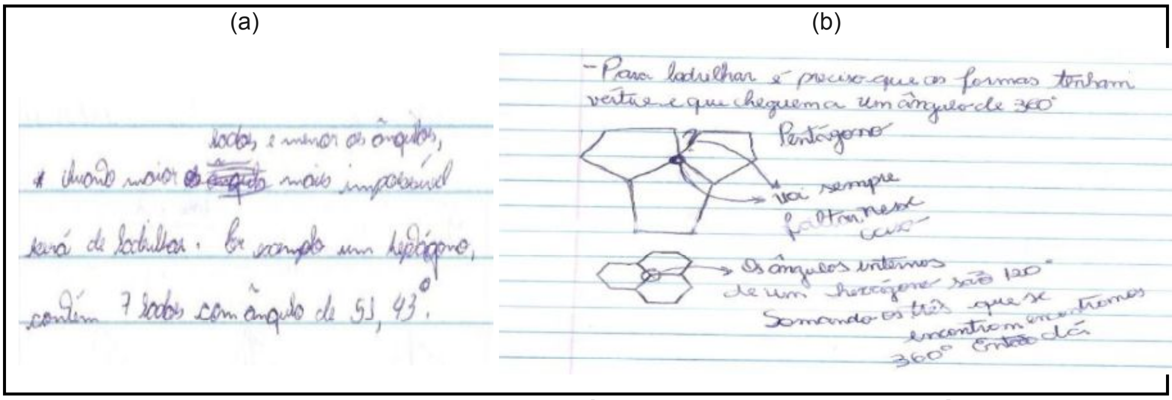


Figura 18. Anotações gerais sobre ângulos - constantes nos diários de bordo (Etapa 1: Ladrilhamento)

A figura 18-b mostra os registros de um aluno que descreveu de forma correta uma das observações sobre o processo de ladrilhamento: que a soma dos ângulos internos ao redor de cada vértice deveria ser 360°. O mesmo exemplificou, por meio de um esboço, que o ladrilhamento não é possível quando se utilizam pentágonos regulares, demonstrando compreensão sobre o tema.

Outro apontamento a ser realizado é sobre a impossibilidade de ladrilhamento com figuras circulares ou com contornos em curvas. Dez alunos discorreram sobre o assunto, sendo que vários se valeram de desenhos para explicar o que tinham entendido (Figura 19).

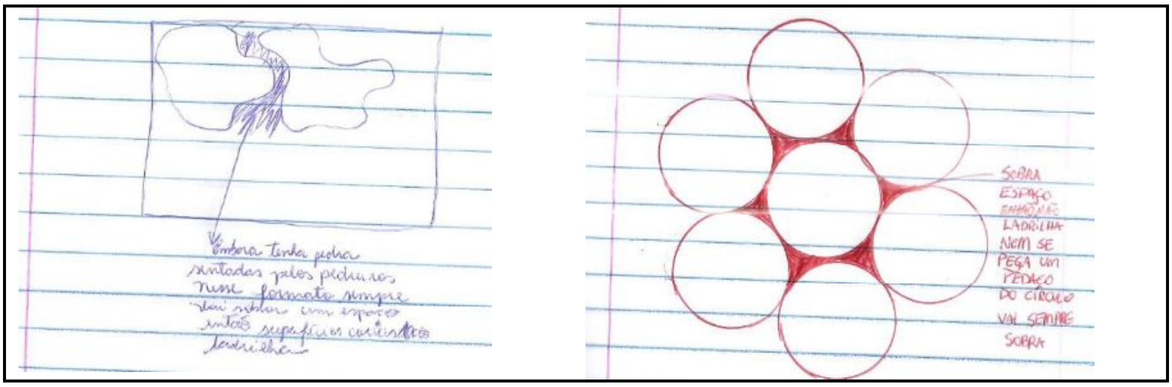
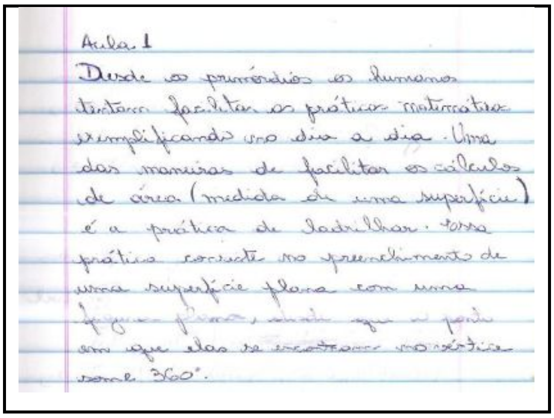


Figura 19. Anotações sobre figuras com curvas - constantes nos diários de bordo (Etapa 1: Ladrilhamento)

Um registro a ser destacado é o do aluno que pareceu ter estabelecido algumas relações entre o conceito de ladrilhamento e o conceito de área, já que mencionou: "uma das maneiras de facilitar os cálculos de área (medida de uma superfície) é a prática de ladrilhar"(Figura 20).



Aula 1
Desde os primórdios os humanos
tentam facilitar as práticas matemáticas
simplificando no dia a dia. Uma
das maneiras de facilitar os cálculos
de área (medida de uma superfície)
é a prática de ladrilhar. Essa
prática consiste no preenchimento de
uma superfície plana com uma
figura plana, sendo que o ponto
em que elas se encontram no vértice
some 360°.

Figura 20. Anotação destacada - constante no diário de bordo (Etapa 1: Ladrilhamento)

Etapa 2: Conceito de área e as unidades de medidas

Na expectativa de que compreendessem que, intuitivamente, a área refere-se à superfície limitada por uma figura plana e que esta superfície pode ser medida com outra superfície tomada como unidade, os estudantes foram questionados sobre o tema (Figura 21), sendo que poucos relacionaram medida de área com medida de superfície.

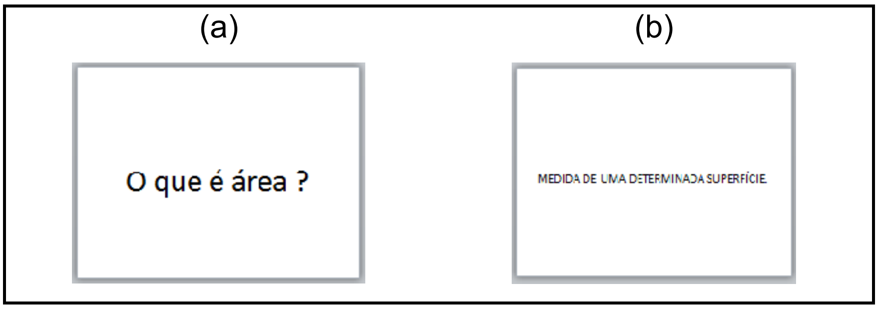


Figura 21. Slides utilizados na sequência
(Etapa 2: Conceito de área e unidades de medida)

O professor explicou que para se medir uma superfície era necessário se ter outra superfície que seria a unidade de medida. Quando questionados acerca da forma dessa unidade de medida, alguns alunos responderam “polígonos”. Assim, o professor indagou “o polígono é uma superfície plana?”; diante da resposta afirmativa, indagou novamente: “então eu só posso medir uma superfície com outra superfície?”.

Foi explicado que a superfície mais simples para ser usada como unidade de medida seria o quadrado, já que este poderia facilmente ser subdivido em outros quadrados quando se necessitasse de frações da unidade. Além de se fazer menção ao nosso sistema de numeração decimal e às medidas de comprimento, foi apresentada a unidade padrão metro quadrado, sendo evidenciados seus múltiplos e submúltiplos escritos de acordo com o sistema métrico decimal, internacionalmente utilizado. Algumas transformações de unidades foram mostradas por meio de ilustrações (Figura 22).

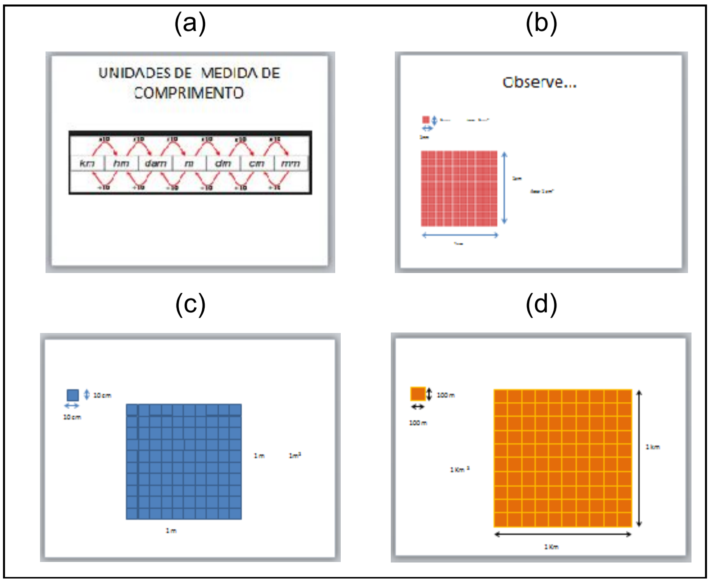


Figura 22. Slides utilizados na sequência
(Etapa 2: Conceito de área e unidades de medida)

Apesar das discussões promovidas na sala de aula com relação aos conceitos de área e suas unidades de medida, poucos alunos realizaram anotações frente a estes tópicos. Os poucos registros encontrados nos diários de bordo evidenciaram certa compreensão desses conceitos (Figura 23-a,b,g).

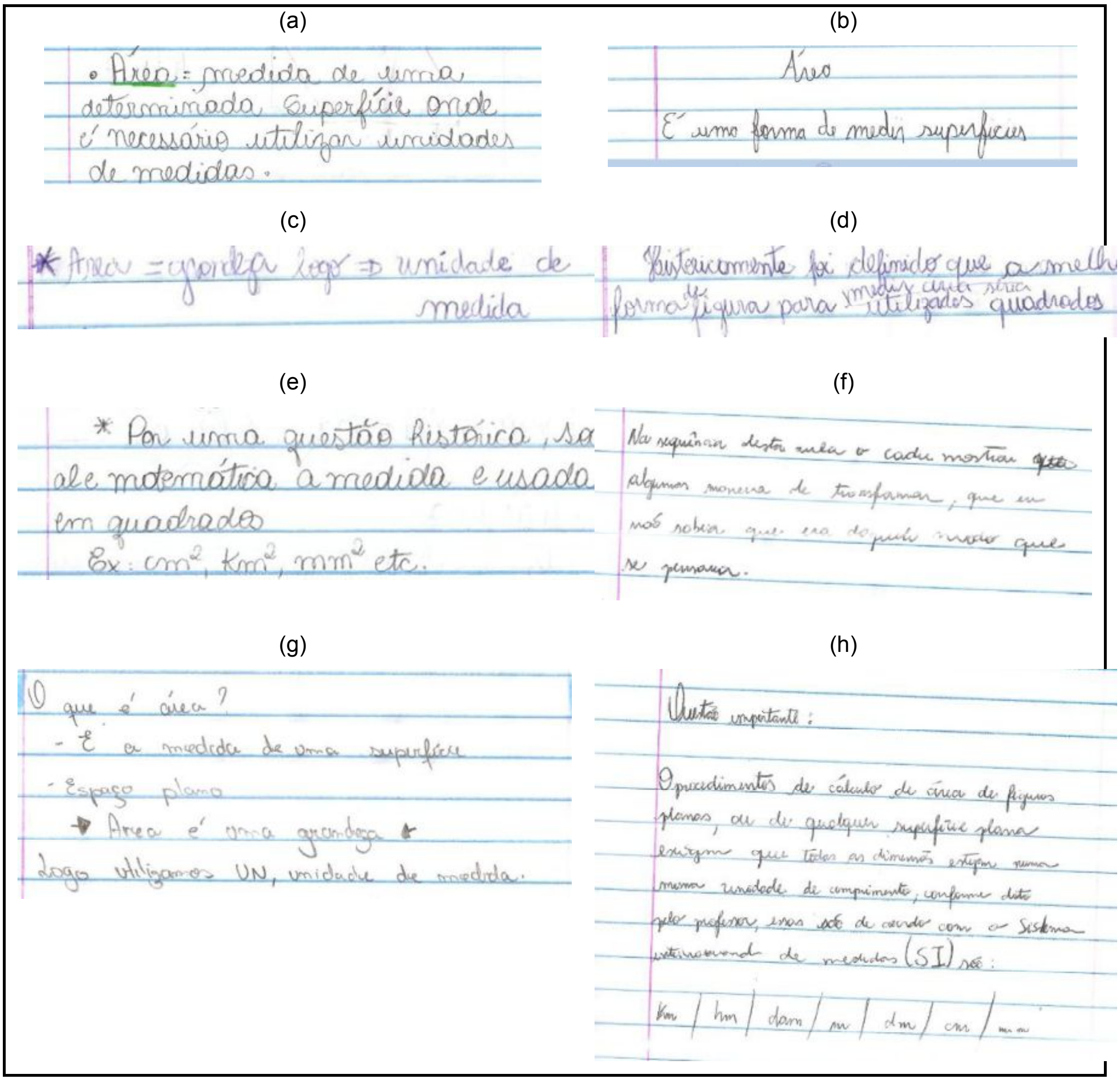


Figura 23. Anotações sobre área e unidades de medida
(Etapa 2: Conceito de área e unidades de medidas de superfícies)

Alguns mencionaram que a área é uma grandeza, sendo, assim, necessária a utilização de uma unidade de medida (Figura 23-c,g).

Apesar de apresentar certa semelhança quanto ao conteúdo exposto, os registros parecem diferir quanto à natureza de algumas ideias. Ao mencionarem que a área é uma forma de medir superfície, é possível que esses alunos inicialmente tenham representado mentalmente uma figura e a partir dessa imagem tenham concluído que ela pode ser medida: área seria, portanto, uma superfície a ser medida. Já os que mencionaram que área é uma grandeza, podem ter imaginado um número seguido de uma unidade convencional que representa uma superfície.

Alguns alunos se referiram à convenção sobre unidades de medidas na forma de quadrados (Figura 23-d,e) e um participante avaliou que desconhecia as transformações de unidades apresentadas pelo professor (Figura 23-f). Verificou-se a apresentação de algumas unidades mais utilizadas para a medida da área (Figura 23-e) e da unidade de comprimento, com seus múltiplos e submúltiplos, com registro acerca da necessidade de transformar as dimensões de uma figura em uma mesma unidade para se realizar o procedimento de cálculo da área (Figura 23-h).

Etapa 3: Procedimentos de cálculo

- Área do retângulo

O professor mostrou para os alunos uma sequência de slides com retângulos (optou-se por apresentar o retângulo, já esta seria, talvez, a figura mais conhecida por eles) desenhados em uma malha quadriculada, de modo a facilitar a contagem de quadradinhos tomados como unidade de medidas de área.

Ao indagar os alunos sobre a área do retângulo (Figura 24), obteve-se como resposta "*6*", ou seja, os alunos não mencionaram a unidade. À pergunta do professor "seis o quê?", alguns alunos responderam "quadrados", ao que o professor corrigiu "seis unidades quadradas, ou $6u^2$". Na sequência, os slides animados buscam evidenciar os segmentos de reta referentes à base e à altura do retângulo, depois a nomeação destes elementos, a medida deles (*3u* e *2u*, respectivamente), a multiplicação $3u{\cdot}2u$ e, finalmente, a área do retângulo expressa por $A=6u^2$, sendo feito a generalização *A=base x altura* ou *A= b.h* (Figura 24-a).

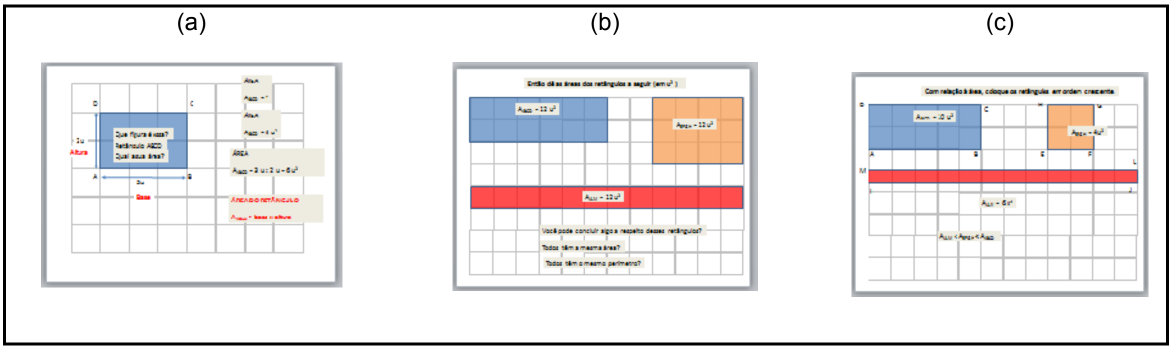


Figura 24. Slides dinâmicos para área do retângulo
(Etapa 2: Procedimentos de cálculo)

Os slides seguintes (Figura 24-b, c) solicitavam as áreas de três retângulos (entre eles um quadrado) e indagavam a respeito de características comuns a esses retângulos; esperava-se que os alunos concluíssem que as figuras possuíam mesma área e perímetros variados. As respostas dos alunos levam a crer que eles tinham percebido a relação entre as grandezas.

Nos diários de bordo, alguns alunos relacionaram o quadrado com o retângulo (Figura 25-a); outros escreveram apenas a fórmula (Figura 25-b) ou a acompanharam de exemplo (Figura 25-c) e tentaram mostrar as unidades de comprimento – às vezes de maneira equivocada, como no caso da Figura 25-d.

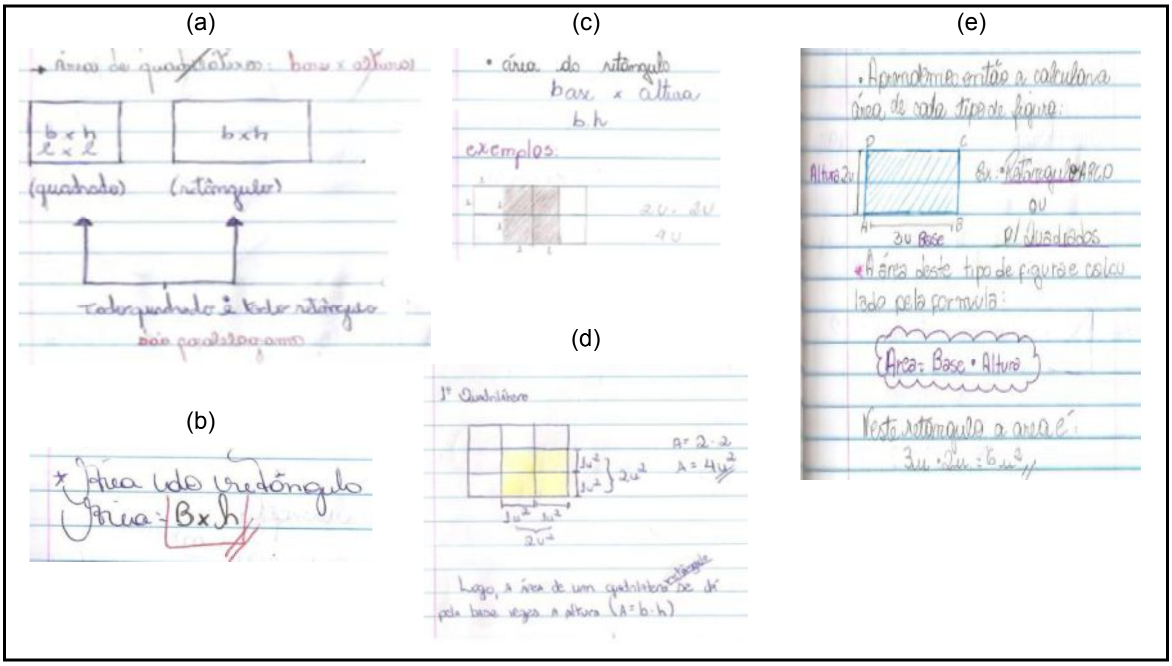


Figura 25. Anotações sobre o procedimento de área do retângulo
(Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

O último registro mostrado (Figura 25-e) demonstra que as ideias pareciam mais bem organizadas, com uma sequencia lógica na apresentação.

-Área do paralelogramo

Uma das características dos slides dinâmicos era sempre indagar o nome da figura apresentada. Assim aconteceu com o paralelogramo, que foi nomeado acertadamente por grande parte dos alunos. Para reforçar a ideia de medida de área, os slides mostraram uma animação que consistia no preenchimento da superfície do paralelogramo com quadradinhos que apareciam um de cada vez, inteiros ou em metades. Como a apresentação era sequenciada, os alunos fizeram a contagem em voz alta até chegarem ao total da área: *15* u^2. Para a compreensão do procedimento de cálculo da área do paralelogramo, os slides evidenciaram a base e a altura da figura (mas não a medida do lado inclinado); suas medidas foram indagadas e os alunos atribuíram os valores de *5u* e de *3u*, respectivamente. Ao multiplicarem as medidas destacadas obtiveram *15* u^2, o que deve ter favorecido a generalização, ou seja, a conclusão de que basta determinar o produto da medida da base pela medida da altura para determinar a área do paralelogramo e que a fórmula seria *A=base x altura* ou *A= b.h* – a mesma do retângulo (Figura 26-a). Foi solicitado que calculassem as áreas de outros paralelogramos e colocassem estes valores ordem crescente: esta atividade foi realizada com facilidade pelos alunos (Figura 26-b).

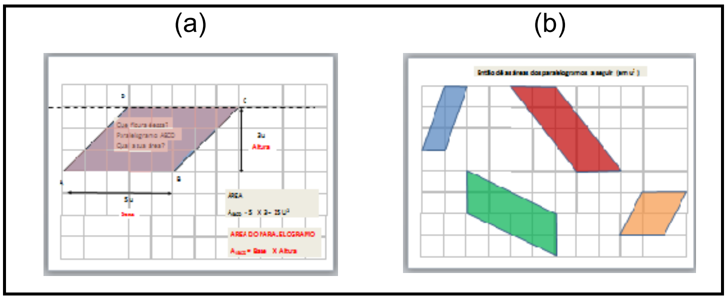


Figura 26. Slides dinâmicos para área do paralelogramo (Etapa 2: Procedimentos de cálculo)

Para os paralelogramos, observou-se que os registros apresentavam diretamente a fórmula (Figura 27-a) ou a acompanhavam de exemplo (Figura 27-b).

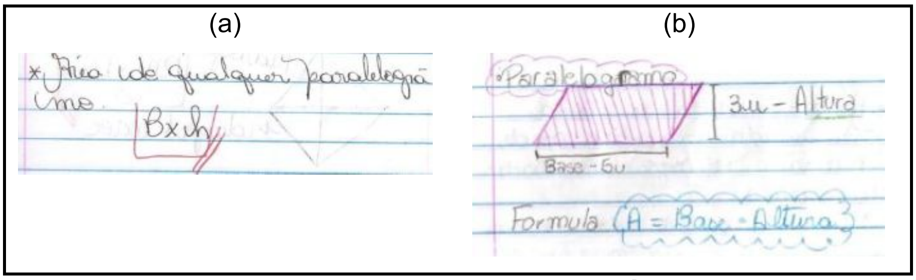


Figura 27. Anotações sobre o procedimento de área do paralelogramo (Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

Para fixar o entendimento de que a área do paralelogramo depende apenas de um de seus lados e da altura (mas não depende do outro lado), os slides seguintes mostraram uma animação: nesta, vários paralelogramos com mesma base e altura eram apresentados (Figura 28). Após indagações, os alunos concluíram que, como os paralelogramos possuíam mesma base e mesma altura, então teriam mesma área[5].

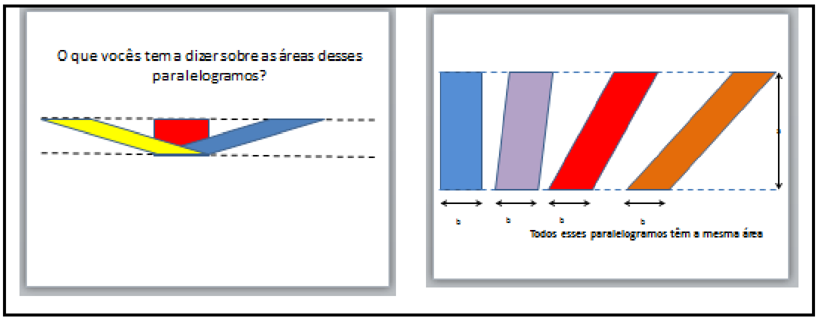


Figura 28. Slides sobre o sobre o princípio de Cavalieri (Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

- Área do triângulo

Optou-se por apresentar três triângulos, nesta ordem: triângulo retângulo de catetos 4u e 3u (apoiado no cateto maior), triângulo escaleno e acutângulo

[5] Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre essas as áreas dessa porção é a mesmo constante. (EVES, 2004, p. 426).

com 4u de base e 3u de altura e triângulo isósceles e acutângulo de base 4u e altura 3u – estes, tendo por plano de fundo uma malha quadriculada, poderiam ter suas áreas facilmente comprovadas. A ideia utilizada foi a de, após evidenciar suas bases e alturas, replicar cada triângulo de modo a compor um retângulo (nos primeiro e terceiro casos) e um paralelogramo (no segundo caso). Feito isso, os alunos foram solicitados a determinar a fração que representada a superfície do triângulo dado em relação ao retângulo (ou paralelogramo) formado. Observando que nos três casos, tratava-se da metade da superfície composta, formalizou-se que a área do triângulo era dada pelo semiproduto da base pela altura, ou por $A = \frac{b \cdot h}{2}$. (Figura 29).

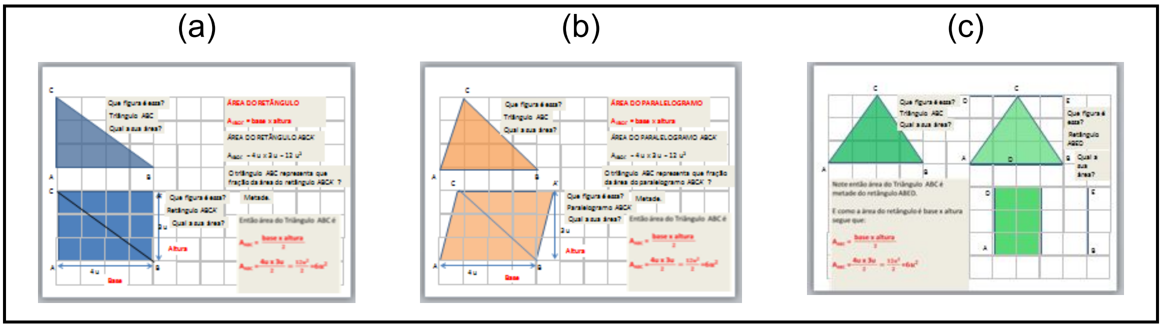


Figura 29. Slides dinâmicos para área do triângulo (Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

Ainda para justificar o procedimento, simulou-se uma ação que poderia ser feita com materiais manipuláveis em cima da carteira: nestes casos, o triângulo é replicado e é girado até se encaixar com o triângulo original e assim compor um paralelogramo (Figura 30-a,b,c). Finalmente, outro slide solicitava o cálculo das áreas de três triângulos, em que as medidas da base e da altura poderiam ser determinadas por meio da malha quadriculada.

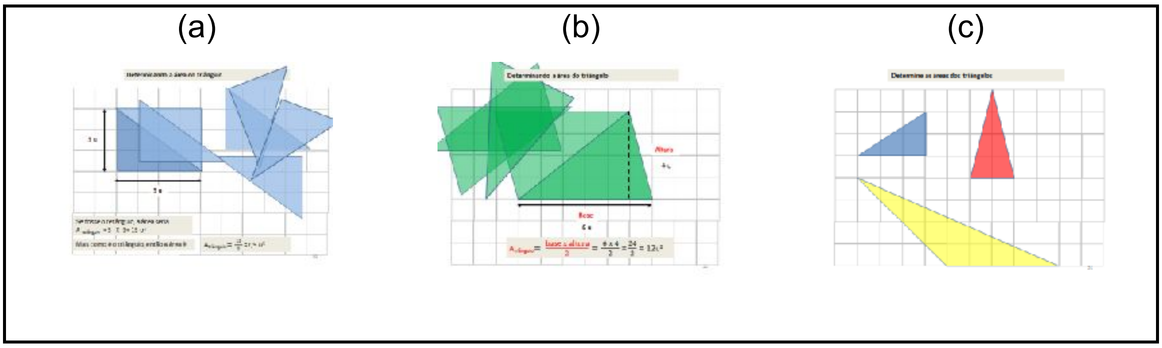


Figura 30. Slides dinâmicos para área do triângulo (Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

Os registros nos diários de bordo indicaram que vários alunos se valeram do retângulo para explicar a fórmula da área do triângulo, seja utilizando apenas a forma discursiva (Figura 31-a), seja utilizando figuras e indicando as dimensões algebricamente (Figura 31- b) ou substituindo valores numéricos (Figura 31-c).

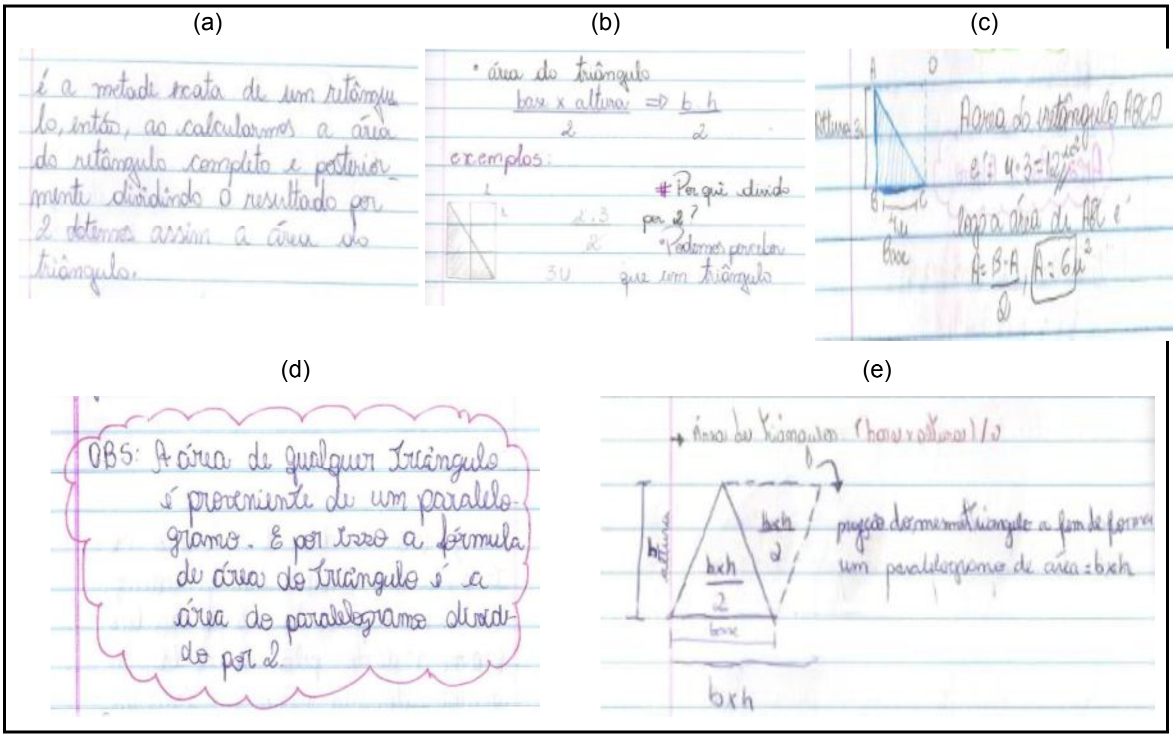


Figura 31. Anotações sobre o procedimento de área do triângulo (Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

Outros alunos referiram-se à fórmula da área do triângulo tentando explicar a natureza do procedimento a partir da composição de um paralelogramo com dois triângulos (Figura 31-d); nota-se que foram poucos os que indicaram a altura de um triângulo não retângulo (Figura 31-e).

- Área do trapézio

Na sequência, os slides apresentaram o desenho de um trapézio, sendo questionados os nomes da figura e de seus principais elementos: base maior, base menor e altura. Os slides dinâmicos mostravam a replicação do trapézio dado, mas de forma invertida verticalmente, simulando a justaposição de maneira a compor um paralelogramo (Figura 32). Os alunos foram, então, questionados a respeito de como determinar a área desta última figura; parece que a dificuldade estava na identificação da base do paralelogramo como sendo a soma da base maior com a base menor do trapézio dado.

Após algumas discussões, os alunos conseguiram verbalizar a fórmula da área do trapézio como sendo o semiproduto da altura pela soma das bases, ou seja, $A = \frac{(B+b)\cdot h}{2}$

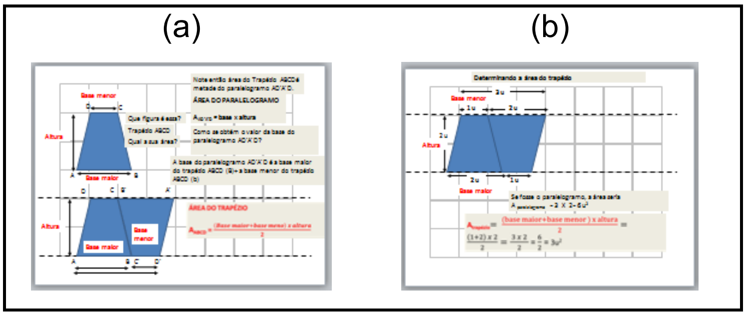


Figura 32. Slides sobre área do trapézio
(Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

Os registros produzidos no diário de bordo indicaram que vários alunos nomeavam os elementos (base maior, base menor e altura) e a fórmula da área do trapézio (Figura 33-a) e outros acrescentavam um exemplo, valendo-se, inclusive, de malha quadriculada (Figura 33-b-c). Foram encontrados registros em que os alunos descreviam a natureza do procedimento a partir da composição de um paralelogramo (Figura 33-c-d-e).

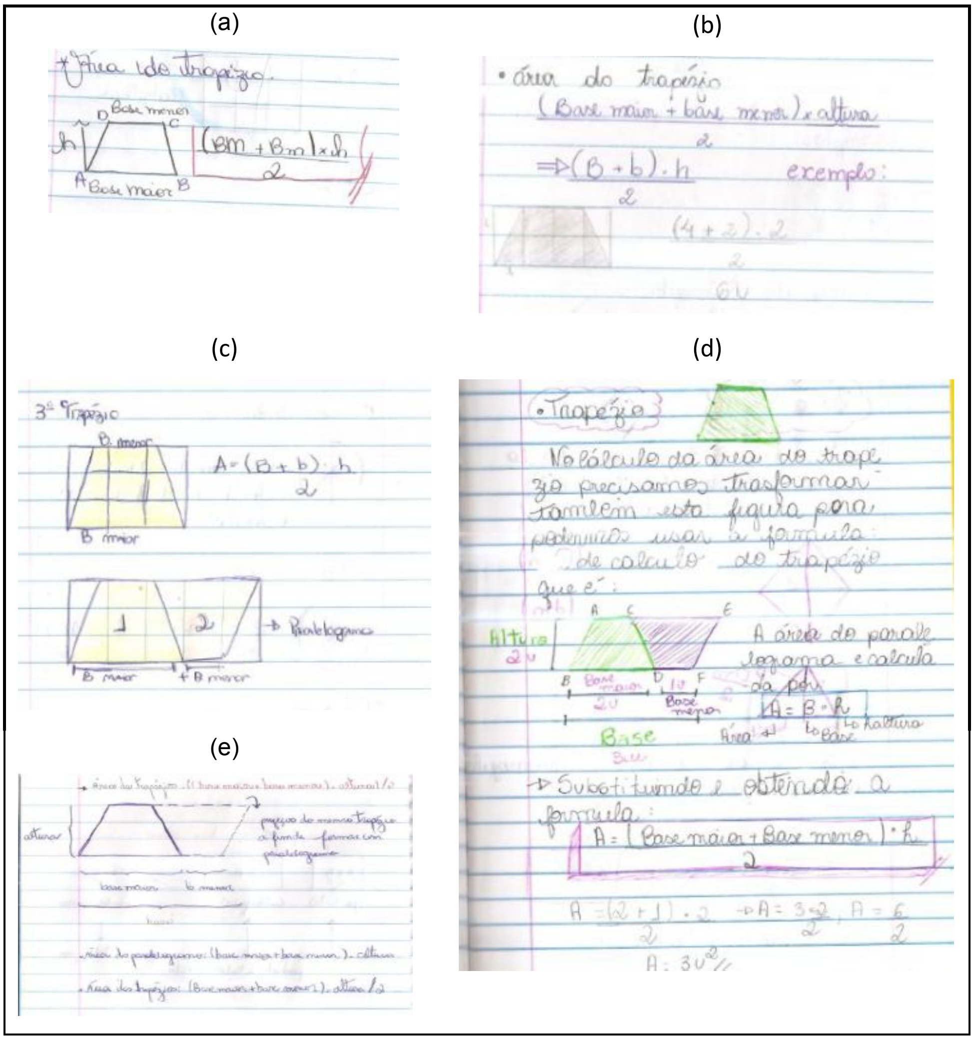


Figura 33. Anotações sobre o procedimento de área do trapézio (Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

- Área do losango

Da mesma maneira como ocorreu com as figuras anteriores, ou seja, por meio de questionamentos acerca da nomeação e das propriedades, os slides seguintes mostraram o losango e seus principais elementos, tais como diagonal maior e diagonal menor – e também a perpendicularidade e o ponto médio de intersecção entre elas etc. A decomposição do losango deu-se com a divisão da figura por meio da diagonal maior e a identificação de dois triângulos congruentes com a base tendo a mesma medida da diagonal maior e a altura medindo a metade da diagonal menor. Assim, a partir da área de um dos triângulos, obteve-se a área do losango, ou seja, se cada triângulo tinha por área $A = \frac{D.\left(\frac{d}{2}\right)}{2} = \frac{D \cdot d}{4}$, então a área do losango seria dada pelo semiproduto das diagonais, ou $A = \frac{D \cdot d}{4} \cdot 2$ ou $A = \frac{D \cdot d}{2}$ (Figura 34).

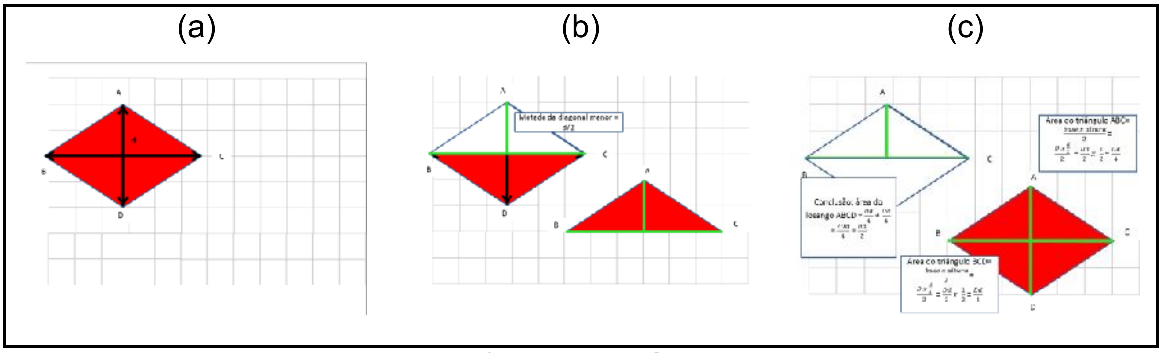


Figura 34. Slides sobre área do losango
(Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

Cabe mencionar que vários alunos demonstraram dificuldades para acompanhar esses cálculos apenas com a ajuda dos slides, sendo, então, necessária a utilização do quadro. Nos diários de bordo, observou-se que a maioria reproduziu a decomposição apresentada pelo professor (Figura 34-a) – alguns até ilustrando a ação de recortar com o desenho de uma tesoura (Figura 34-b). Nota-se que alguns alunos se valeram de outras maneiras de se chegar à fórmula da área do losango: compondo um retângulo (Figura 34-c) ou um paralelogramo (Figura 34-d), o que parece demonstrar entendimento do assunto.

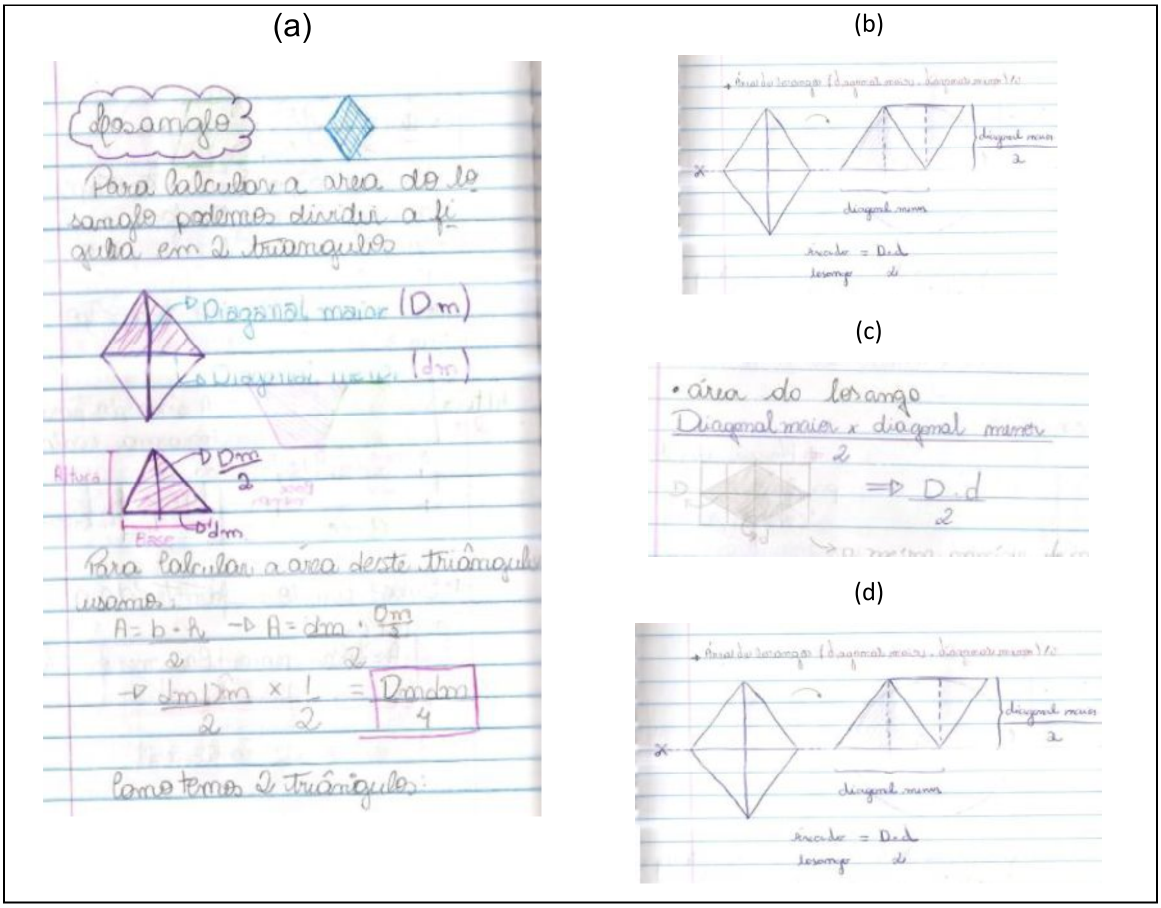


Figura 35. Anotações sobre o procedimento de área do losango (Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

Seguindo o objetivo de evidenciar a natureza dos procedimentos, o professor introduziu uma discussão acerca do cálculo da área do círculo: por meio da imagem do slide (Figura 35-a), solicitou que os estudantes contassem a quantidade de quadradinhos e realizem aproximações de modo a chegar num valor aproximado, sendo encaminho que a área aproximada poderia ser determinada por meio da média entre os valores indicados, ou seja, $A = \frac{16+36}{2} = 26\ u^2$. (Figura 35-b,c).

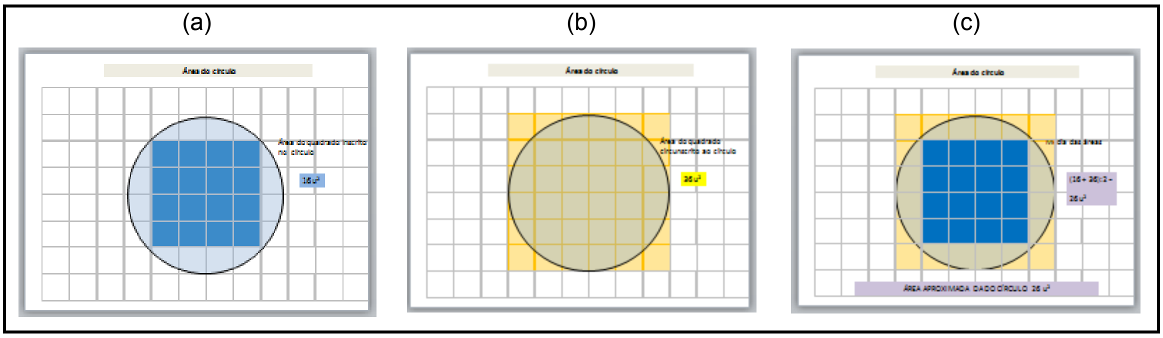


Figura 36. Slides sobre área do círculo (Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

Com auxílio dos slides e de alguns questionamentos, foram apresentados os elementos do círculo: raio, diâmetro, arco e comprimento. A partir disso, questionou-se acerca da medida do comprimento da circunferência; alguns alunos lembraram-se da fórmula[6] $C = 2\pi r$ (Figura 36-c).

Com o auxílio das animações dos slides, o círculo foi decomposto em setores circulares que, organizados, compuseram uma figura que tinha como base uma linha com medida igual à metade do comprimento da circunferência do círculo apresentado inicialmente (Figura 37-a-b-c-d-e).

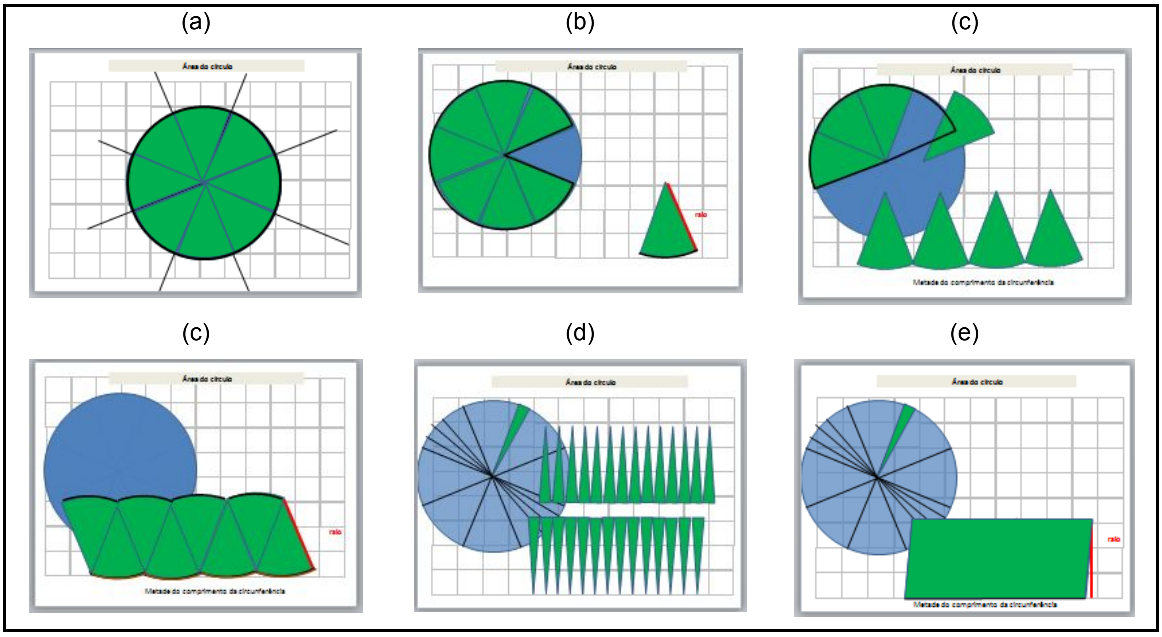


Figura 37. Slides sobre área do círculo
(Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

Aumentando o número de cortes no círculo, os setores ficaram menores e a figura composta aproximava-se de um retângulo, sendo que o raio do círculo tendia para a altura do retângulo formado (Figura 37-e-d). Assim, questionados acerca das dimensões do retângulo, os estudantes concluíram que a base era $\frac{2\pi r}{2} = \pi r$, que a altura era a medida do raio e que a fórmula da área do círculo podia ser escrita como $A = \pi r^2$.

Quanto aos registros produzidos pelos alunos frente ao processo de obtenção da fórmula final do procedimento do cálculo de área do círculo, foram

[6] Nesta etapa da sequência, percebeu-se que faltou desenvolver um conjunto de atividades que permitissem aos alunos concluir o porquê desta fórmula.

encontradas tentativas de se reproduzir a ação de compor retângulos a partir de setores circulares (Figura 38).

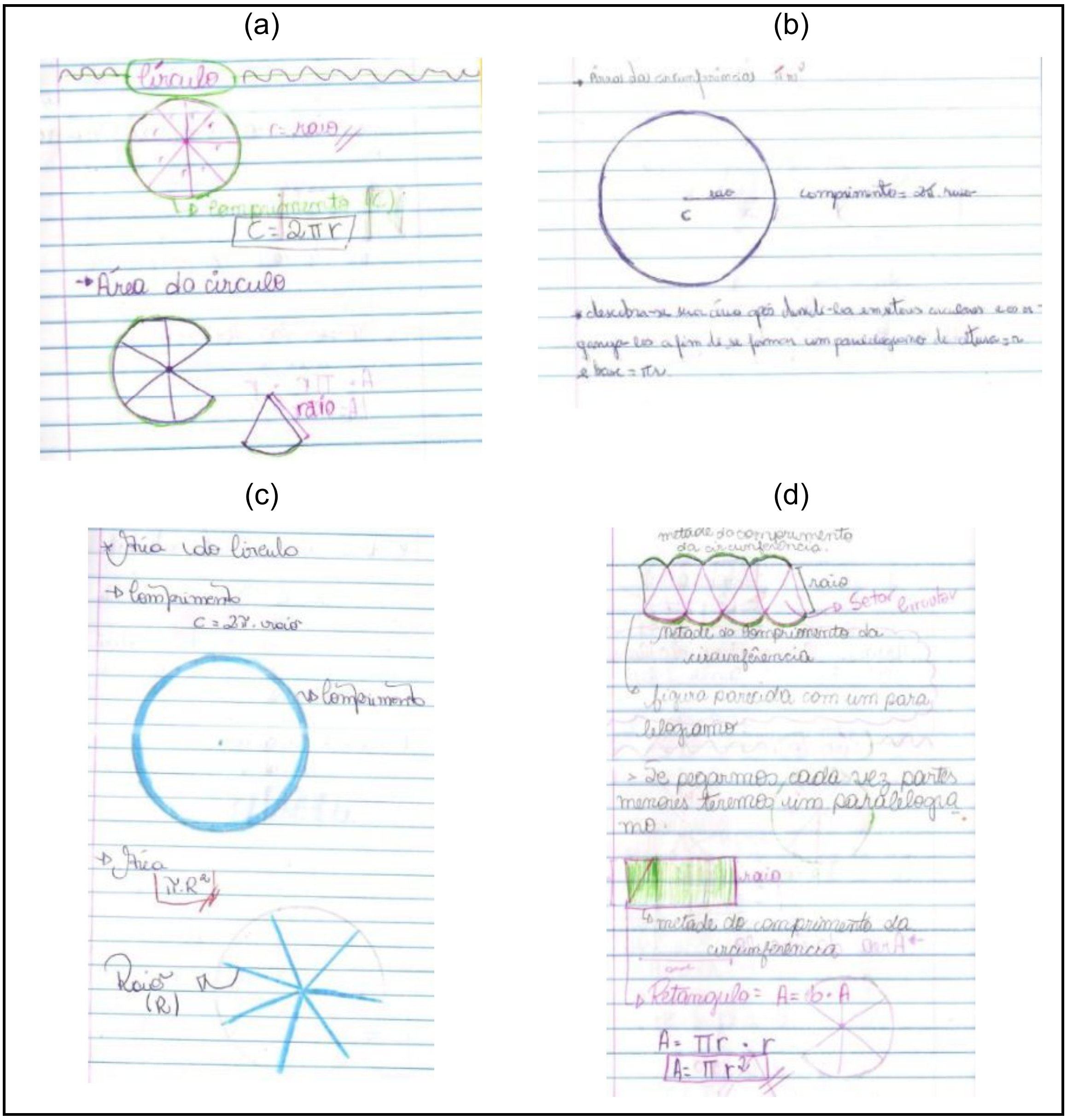


Figura 38. Anotações sobre o procedimento de área do círculo (Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

Área do setor circular

Após identificação de que a figura era relativa a uma parte de um círculo, obtida por meio de cortes a partir de seu centro, o professor explicou que sua área poderia ser determinada se fosse calculada a fração da área do círculo. Fez, então, alguns esboços no quadro mostrando que se fosse um semicírculo o aluno iria utilizar o valor de $\frac{\pi r^2}{2}$, se fosse metade de um semicírculo, $\frac{\pi r^2}{4}$, se for metade da metade de um semicírculo $\frac{\pi r^2}{8}$ e assim por diante.

Com a finalidade de discutir se o valor da área do setor circular depende da medida do ângulo, o professor inicialmente questionou se a área do círculo depende do valor do raio. Os mesmos responderam que sim e foram indagados se a área do círculo é diretamente proporcional à medida do seu raio.

Como vários alunos responderam afirmativamente, o professor encaminhou uma discussão sobre o assunto e, utilizando-se do quadro, explicou que duas grandezas seriam diretamente proporcionais apenas se variassem na mesma razão. Para mostrar que a área do círculo não variava proporcionalmente ao seu raio, preencheu, junto com os alunos, uma tabela; os elementos da tabela foram explorados de modo a verificar que as razões de variação do raio não eram respectivamente iguais às razões de variação da área (Tabela 6).

Tabela 6. Variação do raio e da área do círculo (Registro feito no quadro pelo professor)

Raio do círculo	Área do círculo
1 cm	$A = \pi$ cm^2
2 cm	$A = 4\pi$ cm^2
3 cm	$A = 9\pi$ cm^2
4 cm	$A = 16\pi$ cm^2

Na continuidade, o professor questionou os alunos acerca da medida do ângulo central de um círculo, do semicírculo, de sua metade etc e das áreas dos respectivos setores. Os resultados foram dispostos em uma tabela, sendo, então, explorados de modo a levar os alunos a concluírem de que a medida da área do setor circular era diretamente proporcional à medida do ângulo (Tabela 7).

Tabela 7. Variação do ângulo e da área do setor (Registro feito no quadro pelo professor)

Ângulo do setor	Área do setor
360º	$A = r\pi$ cm^2
180º	$A = \frac{\pi r^2}{2}$cm^2
45º	$A = \frac{\pi r^2}{4}$cm^2
22,5º	$A = \frac{\pi r^2}{8}$cm^2

Sendo assim, foi possível utilizar a regra de três para chegar à fórmula da área de setor circular como $A = \frac{\alpha \pi r^2}{360^o}$, sendo α a medida do ângulo do setor.

Os registros produzidos pareciam indicar entendimento acerca da área do setor, já que indicavam a relação entre a área do círculo, a medida do ângulo e a fórmula obtida (Figura 39).

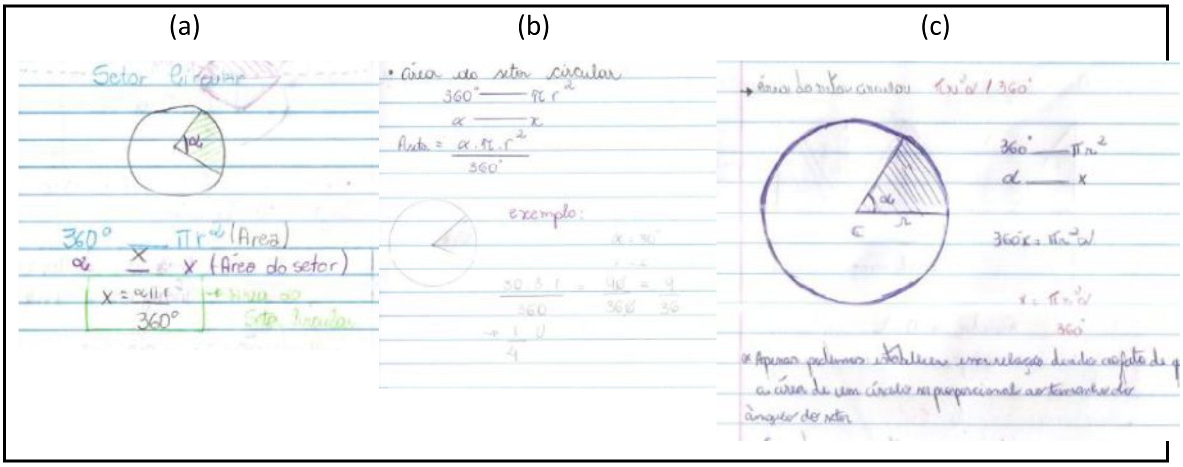


Figura 39. Anotações sobre o procedimento de área do setor circular (Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

Vale mencionar que em todos os registros produzidos, o desenho do setor circular era sempre representado como parte de um círculo.

-Área do segmento de círculo

Na sequência, os slides mostravam um segmento de círculo e eram questionados o nome da figura, se esta era parte de um setor e qual seria a maneira de calcular sua área (Figura 40).

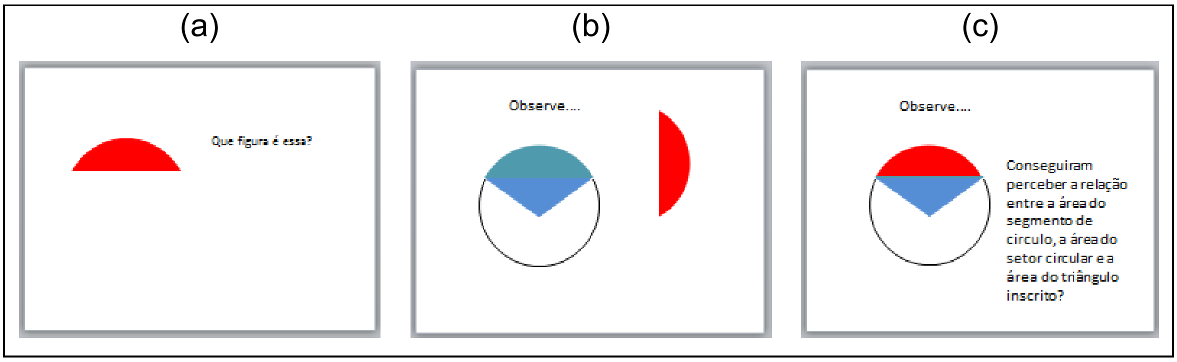


Figura 40. Slides sobre área do círculo
(Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

Os alunos, a principio, identificaram a figura como parte de um círculo, mas não como parte de um setor circular. As animações dos slides ajudaram os alunos a identificar o segmento e a relacionar sua área com a do setor.

Com o conjunto de animações apresentadas na sequência, evidenciou-se que o setor circular apresentado era composto por um segmento de círculo e mais um triângulo, sendo assim a área do segmento circular era a área do setor circular menos a área de um triângulo.

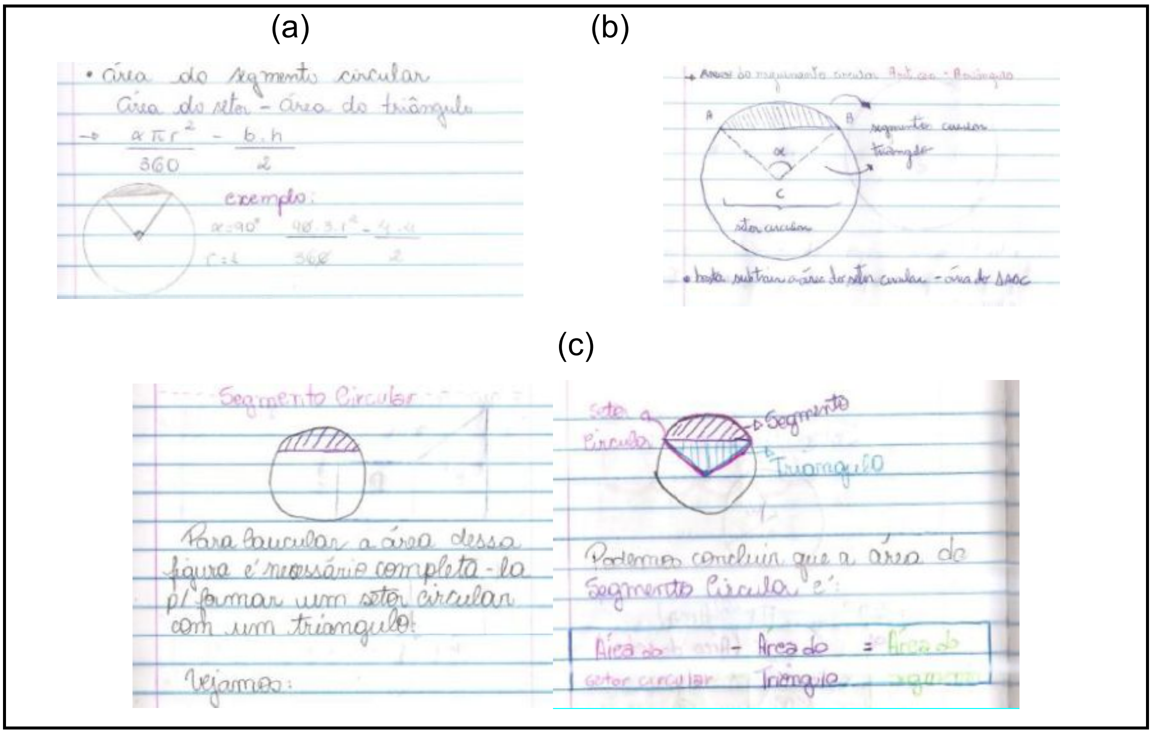


Figura 41. Anotações sobre o procedimento de área do segmento circular
(Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

Ao que se refere ao registro do processo de obtenção da fórmula final do procedimento de como calcular a área de um segmento circular foi possível verificar três maneiras de representar (Figura 41-a-b-c). A primeira trata-se de um registro que contém o nome da forma, a forma como parte de um arco, que é parte de um círculo e a fórmula de como calcular (Figura 41-a). Já a segunda maneira trata-se de uma forma mais detalhada em que o participante indica o nome das formas e de cada uma de suas partes, bem como o processo de subtração de áreas existentes para encontrar a área do mesmo (Figura 41-b). E na terceira maneira, a participante, além de representar a forma, nomeia cada uma delas e indica a fórmula final do procedimento de cálculo da área de um segmento circular, tentando descrever cada uma das etapas (Figura 41-c).

Etapa 4: Aplicações

As aplicações se deram na forma de seis figuras que precisavam ser decompostas de modo a se obter as respetivas áreas (Figura 42).

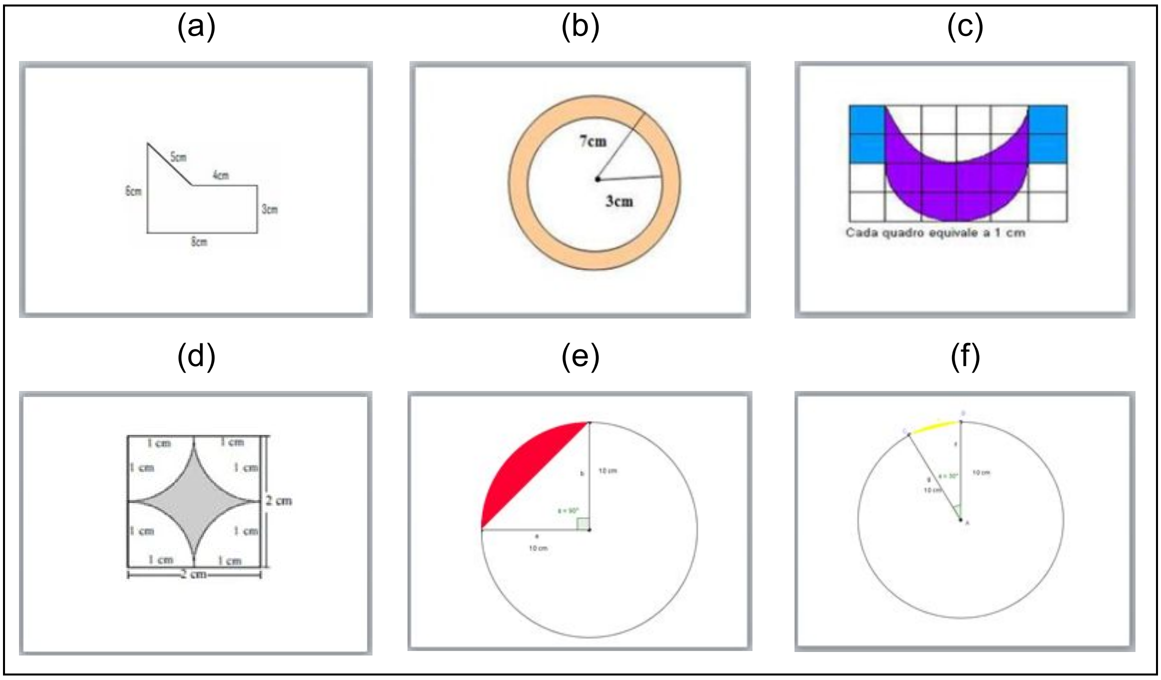


Figura 42. Slides das figuras para que os alunos determinassem o valor da área (Etapa 4: Aplicação)

A resolução dos exercícios de fixação foi feita no diário de bordo onde o professor apresentava uma figura por vez no slide e os alunos tinham um tempo para determinar a área da mesma. Antes de passar para a figura seguinte, foi realizada a correção e discussão sobre os procedimentos empregados pelos alunos; caso os mesmos tivessem errado, não era permitido apagar o que haviam desenvolvido anteriormente. Com isto, foi possível analisar o desempenho dos alunos nestas questões e o resultado é mostrado na Tabela 8.

Tabela 8. Desempenho dos alunos na resolução das questões de aplicação

Figura	Nº de alunos	
	Acertaram	Erraram
A	28	9
B	29	8
C	33	4
D	37	0
E	33	4
F	28	9

Para a Figura 42-a, observou-se que quase todos fizeram a decomposição da figura em um retângulo de dimensões 8 cm e 3 cm mais um triângulo de base 4cm e altura 3 cm (Figura 43-a). Foi possível encontrar também alunos que fizeram a decomposição da figura em trapézios e retângulos (Figura 43-b-e). Foram encontrados dois tipos de erros: problemas de cálculo (Figura 43-c) e por aplicação errada do procedimento de cálculo de área de triângulo (Figura 43-e-d).

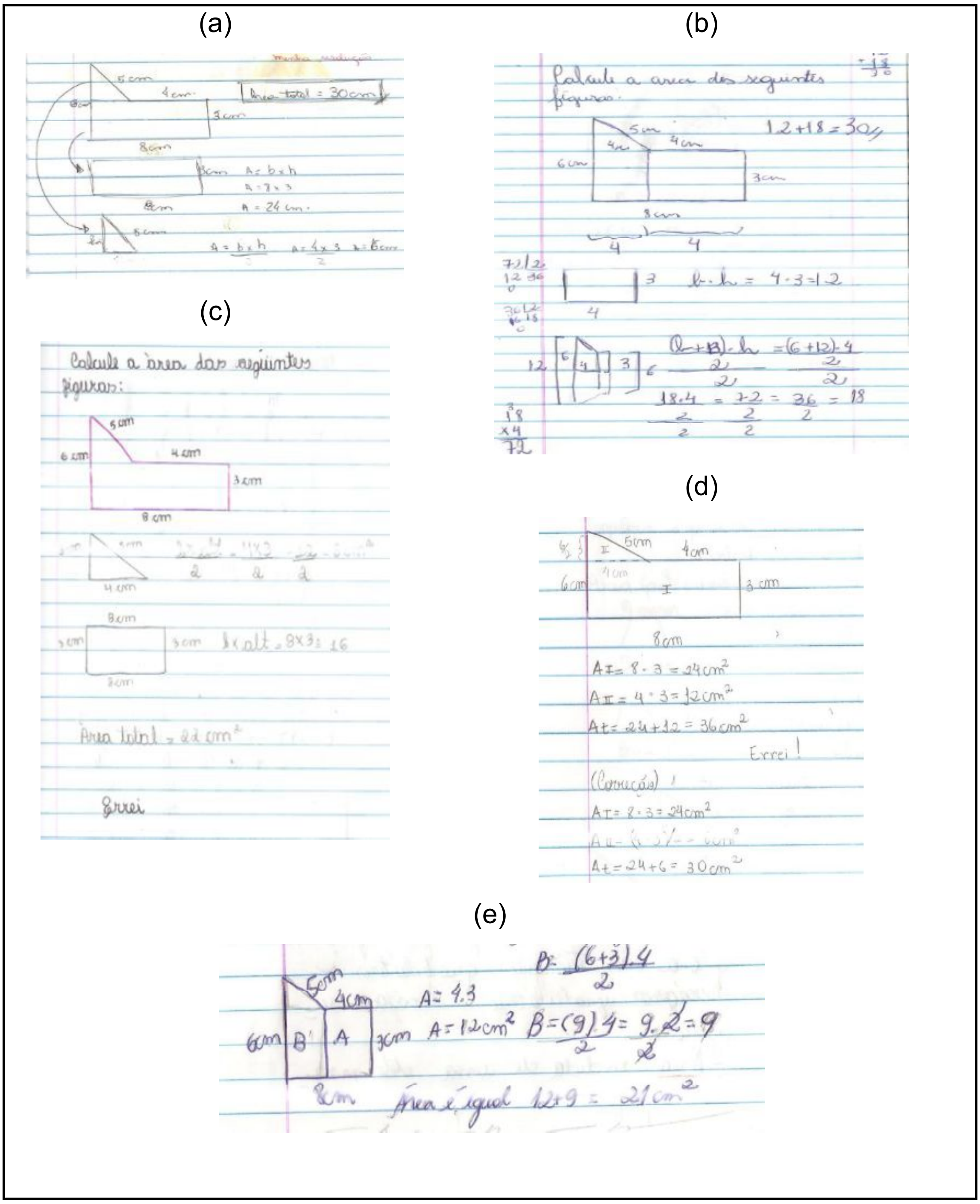


Figura 43. Anotações sobre o procedimento para determinar a área da figura 42-a (Etapa 4: Aplicação)

Na determinação da área da Figura 42-b, foi possível encontrar alunos que representaram dois círculos de raios 3 cm e 7cm, determinaram o valor das respectivas áreas e posteriormente subtraíram as áreas (Figura 44-a-b) e outros que adicionaram as áreas (Figura 44 c-d).

Os que erraram tentaram calcular utilizando regra de três, considerando a área da coroa circular como se fosse a de um setor circular (Figura 44-e) ou subtraindo as medidas do raio e substituindo na fórmula do cálculo de área de círculo (Figura 44-f).

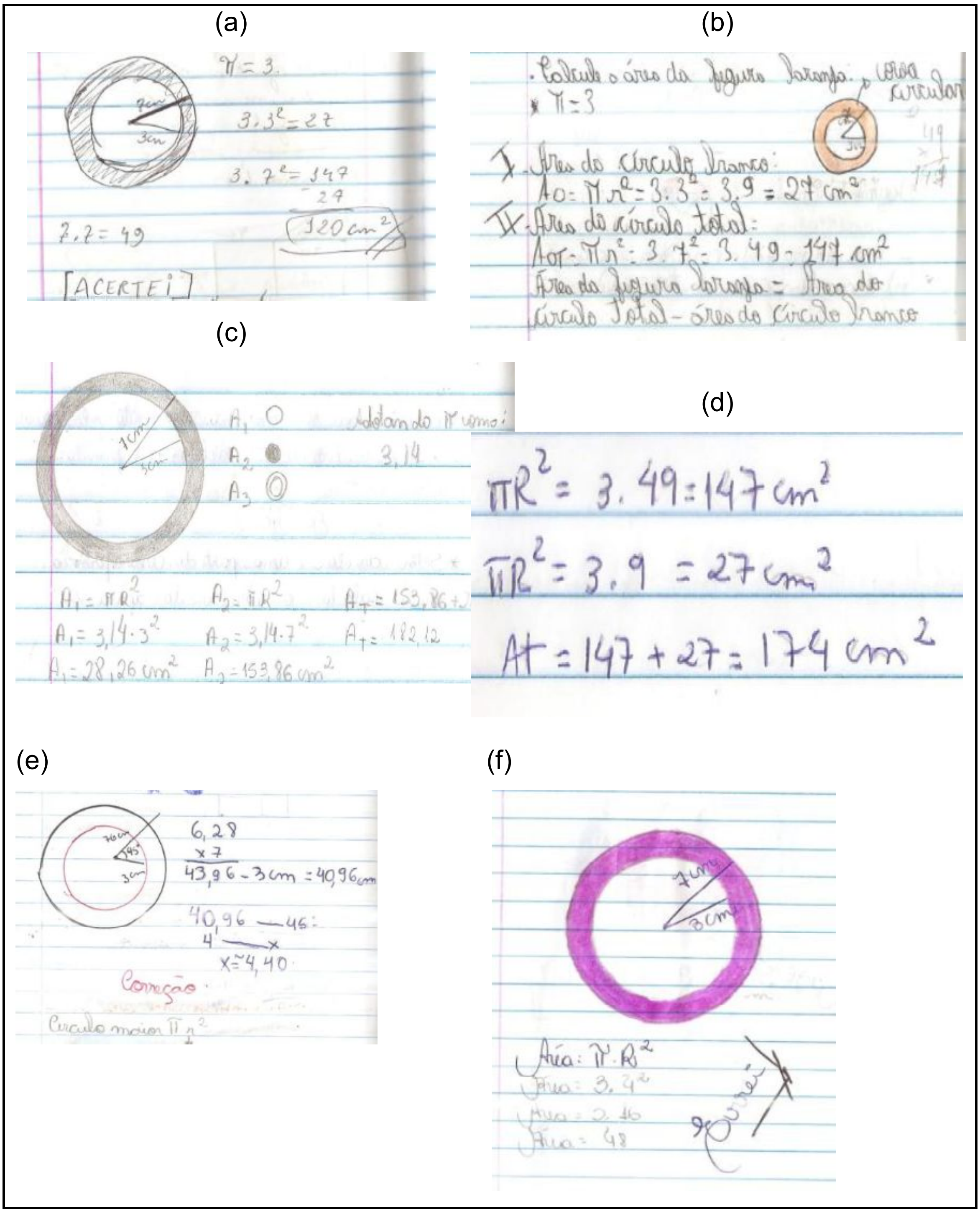


Figura 44. Anotações sobre o procedimento para determinar a área da figura 42-b (Etapa 4: Aplicação)

Nesse sentido, parece que as atividades desenvolvidas na sequência didática permitiram que os alunos tivessem um avanço no conhecimento do assunto, já que a prova de levantamento de conhecimento prévio indicou que apenas seis estudantes evidenciaram o procedimento correto do cálculo da área do círculo; nesse exercício, exatamente 36 participantes conseguiram identificar os círculos e aplicaram o procedimento correto de cálculo dos círculos.

Apesar de a Figura 42-c permitir que os participantes da pesquisa buscassem outros procedimentos para determinar o valor da área, 29 estudantes efetuaram o cálculo (Figura 45-a). O restante dos alunos indicaram que, apenas “encaixando” o semicírculo na parte superior da figura, sua área seria igual à área de um retângulo de medidas 6 cm e 2 cm, ou seja, 12 cm^2. (Figura 45-b).

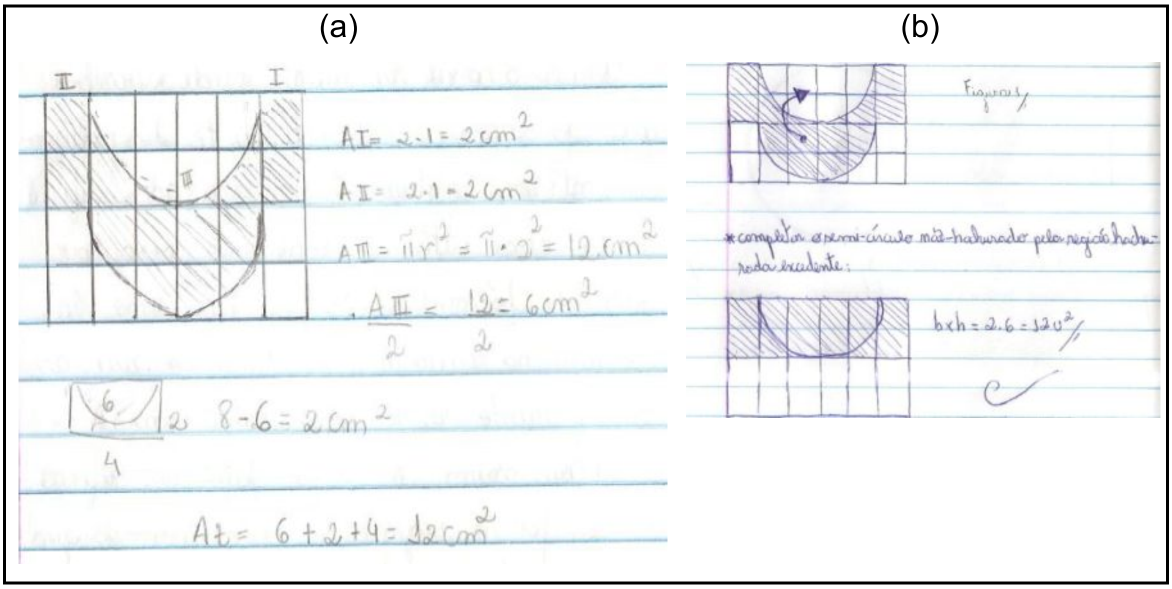


Figura 45. Anotações sobre o procedimento para determinar a área da figura 42-c (Etapa 4: Aplicação)

Para determinar a área da Figura 42-d, todos os participantes que acertaram primeiramente calcularam a área de um quadrado de lado de 2 cm, adicionaram as quatro partes iguais de um círculo presente na figura, formando assim um círculo de raio de um centímetro, calcularam a área deste e por fim subtraíram da área do quadrado encontrando assim o valor da área colorida (Figura 46).

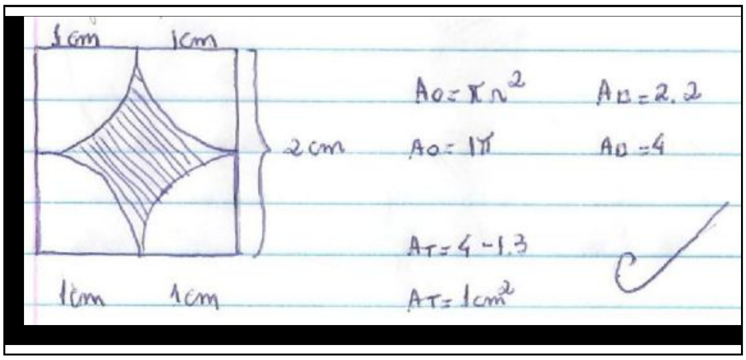


Figura 46. Anotações sobre o procedimento para determinar a área da figura 42-d (Etapa 4: Aplicação)

O cálculo de área da figura 42-e exigia que os alunos identificassem que se tratava de um segmento circular e que o cálculo deste é realizado por meio do cálculo de área de um setor de 90°, ou seja, um quarto da área do círculo menos a área de um triângulo retângulo cuja base mede dez centímetros e a altura também. Todos que acertaram realizaram esse raciocínio (Figura 47).

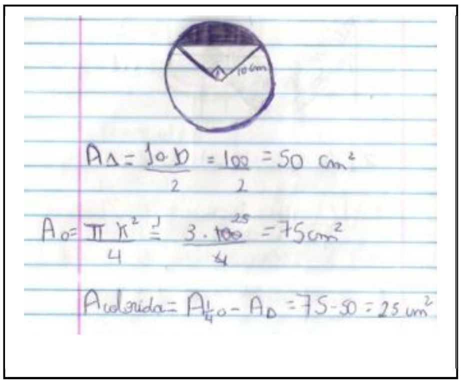


Figura 47. Anotações sobre o procedimento para determinar a área da figura 42-e (Etapa 4: Aplicação)

Dos participantes que erraram ou realizaram de forma incompleta, um não fez e três erraram em cálculos matemáticos ao utilizar a regra de três para calcular a área do setor circular de noventa graus.

No desenvolvimento do cálculo de área da Figura 42-f, 35 participantes conseguiram realizar a decomposição das figuras para encontrar o valor da área deste segmento circular, que neste caso seria a área do setor circular de 30º menos a área de um triângulo isósceles de lados medindo 10 cm e um ângulo de 30.

Cabe mencionar que os participantes que erraram foram os mesmos que confundiram os procedimentos para calcular a área da coroa circular. 28 alunos que acertarem, desenvolveram uma mesma estratégia para encontrar a medida da altura e da base do triângulo, conforme evidencia o registro a seguir (Figura 48).

Figura 48. Anotações sobre o procedimento para determinar a área da figura 42-f (Etapa 4: Aplicação)

Observando os diários de bordo verificou-se também que três dos participantes erraram no processo de utilização da trigonometria e outros 4 conseguiram apenas identificar o triângulo não conseguindo estabelecer nenhuma estratégia para encontrar a medida dos ângulos internos do triângulo não podendo assim encontrar nem altura e nem o valor da base.

CAPÍTULO VII

A SEQUÊNCIA DIDÁTICA E UMA DISCUSSÃO DAS TEORIAS

A análise e a discussão teórica da elaboração e aplicação da sequência didática pressupõem elencar elementos relevantes das teorias apresentadas. Assim, este capítulo se apresenta em três partes: na primeira, será evidenciada a potencialidade significativa do material de aprendizagem; na segunda, a especificidade do processo de ensino e aprendizagem de procedimentos e, finalmente, será exposto o que se evidenciou sobre a atividade cognitiva dos alunos, tomando por base os registros de representação semiótica produzidos.

1ª PARTE: A POTENCIALIDADE SIGNIFICATIVA DO MATERIAL DE APRENDIZAGEM

7.1 Aprendizagem significativa e mecânica de conceitos e procedimentos

A sequência didática elaborada para este trabalho envolveu os três tipos de conteúdo, conforme classificação dos PCN (BRASIL, 1998): conceituais, procedimentais e atitudinais.

Foram trabalhados conceitos como ladrilhamento, área e unidades de medida, já que estes objetos – conforme a definição de conceito proposta por Ausubel (2003) – possuem atributos comuns de critérios comuns e que podem ser representados por meio de símbolos ou signos.

A sequência abordou procedimentos, pois conforme mencionam Coll e Valls (1998), encaminhou conjuntos de ações ordenadas e orientadas para a consecução da fórmula algébrica do cálculo de área.

E, finalmente, a formação de atitudes também estava envolvida na aplicação da sequência, pois, com base em Sarabia (1998), pode-se supor que os estudantes que vivenciaram a experiência tenham desenvolvido tendências ou adquirido disposições favoráveis frente ao conteúdo de área de figuras planas.

No âmbito escolar, a teoria de Ausubel (2003) indica que a aprendizagem significativa de conceitos e procedimentos ocorre a partir de duas dimensões: a primeira se refere ao tipo de aprendizagem realizada pelo aluno (significativa ou memorística); a segunda está relacionada à estratégia de instrução planejada para estimular essa aprendizagem (por recepção ou por descoberta).

A sequência apresentada neste trabalho foi elaborada com vistas à aprendizagem significativa, já que buscou a mobilização de conhecimentos prévios e a relação do conhecimento novo com ideias âncoras que estariam disponíveis na estrutura cognitiva dos alunos.

Para aprender significativamente, a nova informação precisa interagir com estruturas específicas do conhecimento. Com base na observação do comportamento dos alunos e também por meio da análise dos registros produzidos por eles nos seus diários de bordo, exemplifica-se que aquela interação pode ter acontecido quando perceberam a vantagem do ladrilhamento de uma superfície por meio de quadrados e associaram esta ideia à unidade de medida de área de uma figura geométrica, atribuindo, assim, significado ao conceito de área. Já os recortes de figuras – cujas ações foram simuladas por meio dos slides – podem ter servido de ideias subsunçoras para entendimento das etapas desenvolvidas com a finalidade de concluir o porquê de cada fórmula para o cálculo de área. Pode ter acontecido, em vários momentos da aplicação da sequência, de os alunos terem formado, modificado ou complementado os conhecimentos que já possuíam sobre o conceito de área e/ou sobre cada fórmula aprendida ao longo do ensino básico.

A meta que se procurou alcançar ao longo do processo de elaboração da sequência foi a atribuição de significados verdadeiros frente a cada conceito e a cada procedimento aprendido e também a de sentido para todas as atividades realizadas.

Apesar disso, em alguns momentos percebeu-se que os alunos realizaram relações restritas e aleatórias, por exemplo, na obtenção da fórmula do cálculo da área do círculo. Apesar das animações dos slides evidenciar que a área era calculada a partir da multiplicação da metade do comprimento do círculo pela medida de seu raio, verificou-se que alguns alunos confundiram procedimentos, pois usaram a fórmula do comprimento para calcular a área do círculo e da coroa circular, fato que já tinha sido notado na prova de conhecimento prévio.

Observou-se que, durante as aulas, aqueles alunos que respondiam corretamente aos questionamentos feitos pelo professor sobre esses procedimentos foram, em sua maioria, os que realizaram corretamente os cálculos da área do círculo na prova de levantamento do conhecimento prévio. Como na sequência não foi abordada a construção do procedimento do cálculo de comprimento do círculo, aqueles que não responderam aos mesmos questionamentos possivelmente não conseguiram atribuir significado à fórmula da área, errando-a novamente, como constatado em outros momentos dessa proposta.

A opção por desenvolver a sequência didática por meio de apresentações em slides foi tomada para orientar o professor durante a apresentação, já que as animações proporcionavam os questionamentos, simulavam ações com materiais e também antecipavam e organizavam as possíveis respostas dos alunos. A intenção era resgatar, a todo o momento, os conhecimentos prévios dos alunos para que eles os relacionassem com os novos conhecimentos que estavam sendo trabalhados, na perspectiva de Ausubel (2003) e Pozo (1998).

Por um lado, considera-se que grande parte dos participantes, na aplicação da sequência, empreendeu um esforço deliberado para relacionar os novos conceitos com os já existentes em sua estrutura cognitiva deles. O que evidencia esta situação são as respostas verbalizadas frente aos questionamentos, em vários momentos da aplicação, quando relatavam experiências, fatos, objetos ou ações anteriormente vivenciadas por eles. Assim, existem indicativos de que foram satisfeitas algumas condições para a aprendizagem significativa.

Por outro, pode ser que uma minoria dos alunos tenha aprendido de maneira mecânica ou memorística, já que a observação de seu comportamento revelou nenhuma manifestação de interesse nas discussões nem respostas aos questionamentos realizados.

7.2 As condições para a aprendizagem significativa

O material de aprendizagem

Como pondera Ausubel (2003), existem duas condições para que a aprendizagem significativa aconteça: uma refere-se ao material a ser aprendido e outra é relativa ao sujeito que aprende. Quanto ao material, considera-se que a sequência didática tinha uma organização interna hierárquica conceitual e procedimental explícita, conforme se observa na Figura 49.

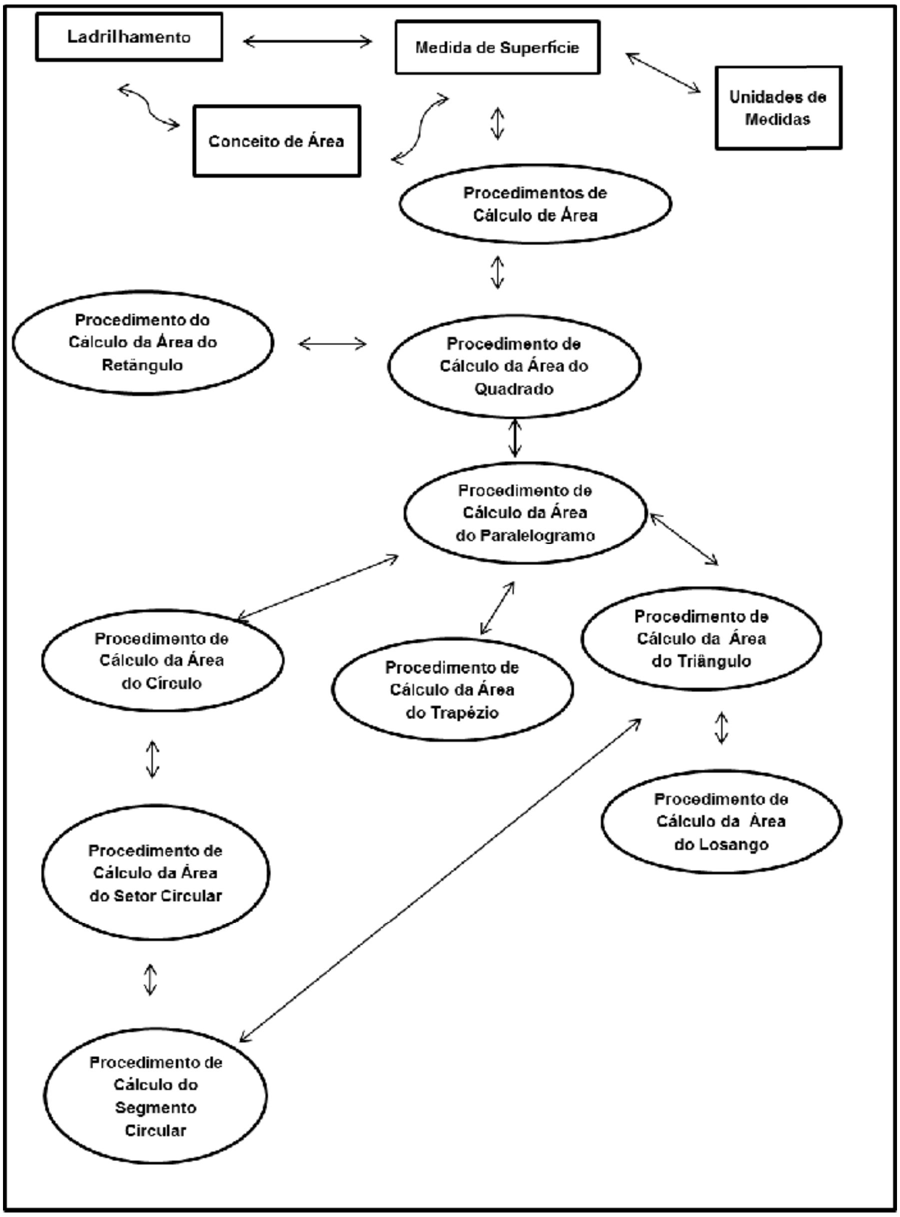


Figura 49: Estrutura do Material presente na sequência de atividades.

Conforme pode ser verificado, o material em questão possuía uma organização interna, isto é, os elementos que o compunham (conceitos e procedimentos) estavam organizados em uma estrutura lógica explícita e não apenas sobrepostos. Cabe salientar que o vocabulário e a terminologia utilizados para cada questionamento foram adaptados aos alunos.

Assim, a sequência didática pode ser avaliada como um material potencialmente significativo; no entanto, cabe ponderar, com base em Ausubel (2003), que aprendizagem significativa não pode ser considerada como sinônimo de aprendizagem de material significativo, uma vez que aquele processo é próprio do aprendiz.

As condições dos alunos

O material de aprendizagem era constituído de componentes significativos, mas nem todos “logicamente” significativos.

Com a ajuda dos slides dinâmicos e dos questionamentos realizados, os alunos puderam ter acesso à aquisição de novas ideias frente ao conceito e aos procedimentos de cálculo de área e relacioná-las aos conhecimentos relevantes em sua estrutura cognitiva – o que pode ter originado significados verdadeiros ou psicológicos. Entretanto, cabe salientar que a estrutura cognitiva de cada aprendiz é única, todos os novos significados adquiridos são – também eles – obrigatoriamente únicos (AUSUBEL, 2003); em outras palavras, cada sujeito aprendiz produziu um significado frente ao material, talvez seja por isso que cada participante, ao escrever no diário de bordo, produziu registros de representação únicos.

Nesse sentido, ainda que o material seja potencialmente significativo, o conteúdo pode ter sido aprendido por meio da memorização (quando o mecanismo da aprendizagem do aprendiz não foi significativo) – o que não favoreceu modificação ou ampliação dos conceitos e procedimentos demonstrados na avaliação de conhecimentos prévios feita antes da sequência. A Figura 50-a-b mostra imagens em que o único registro produzido refere-se ao nome da figura e à fórmula, diferente de outras representações de alunos (Figura 50-c) que detalharam as explicações do professor, escrevendo o máximo de informações relevantes acerca do conteúdo.

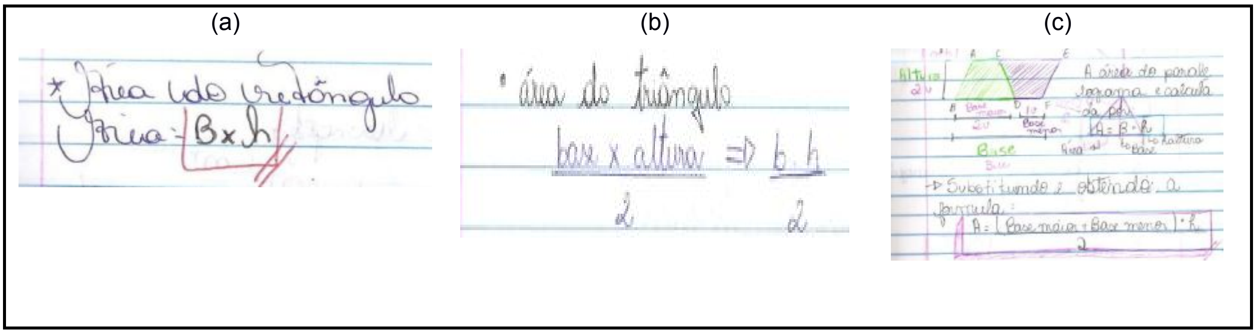


Figura 50. Registro dos participantes frente ao procedimento do cálculo de área.

Nos dois primeiros casos, pode ser que as relações tenham sido estabelecidas de forma aleatória ou restrita, não resultando na aquisição de novos significados. Tais registros parecem indicar apenas reprodução dos conhecimentos prévios. Estes, como pondera Pozo (1998), são construções pessoais que possuem coerência do ponto de vista individual; podem ser estáveis e resistentes à mudança; possuem elementos implícitos – muitas vezes verificados nas atividades ou em previsões –, podem ser compartilhados por pessoas e buscam, em última análise, a utilidade mais do que a "verdade".

Na avaliação do conhecimento prévio foi possível detectar alunos que apresentavam ideias equivocadas – confundiram fórmulas, erraram cálculos, erraram procedimentos de composição ou decomposição de figuras – ou que apenas associaram a fórmula à forma geométrica. Já em vários momentos da aplicação da sequência, foi possível notar – para atender às indagações do professor – um esforço cognitivo de alguns alunos para mobilizar as ideias anteriores e dar sentido ao conteúdo de área. Isso pode ter contribuído para a atribuição de novos significados frente aos procedimentos de composição e decomposição de figuras e às fórmulas do cálculo de área de figuras planas.

7.3 Recepção verbal e os processos envolvidos

Esta sequência didática foi elaborada para se trabalhar com o conceito de área de figuras planas por meio da estratégia de instrução por recepção verbal e não por descoberta. Entretanto, é importante mencionar que, em vários momentos, promoveu-se a aprendizagem por descobrimento guiado, conforme anuncia Pozo (1998), já que o conteúdo não era dado de início: esperava-se que o aluno ordenasse e generalizasse as ideias e, só então, era apresentada definição do conceito ou a fórmula para encaminhar o procedimento.

O uso da linguagem foi essencial no desenvolvimento desta sequência didática, tanto no que se refere à elaboração quanto à aplicação. A linguagem permitiu, em diversas situações, que tanto o professor como o aluno manipulassem constantemente as representações, os conceitos e as proposições.

A linguagem presente nos slides e também a utilizada pelo professor favoreceram a aprendizagem representacional (como é a aprendizagem dos nomes das figuras e de seus elementos) e esta pode ter sido significativa para o aluno se este tiver estabelecido relações não arbitrárias – apesar de literais – entre as representações. Por exemplo, na aprendizagem de setor circular e ângulo central, os desenhos apresentados com animação e o encaminhamento dado pelo professor podem ter ajudado o aluno a atribuir significado aos nomes e símbolos empregados.

A assimilação de conceitos – estes, por definição de Ausubel (2003), são objetos que possuem atributos específicos comuns e são designados pelo mesmo signo – deve ter sido favorecida pela linguagem utilizada na sequência. Quando o aluno escreve, na obtenção da fórmula do setor circular, que "podemos estabelecer essa relação devido ao fato de [...] a área [...] ser proporcional ao tamanho do ângulo do setor", pode-se identificar a tentativa de manipulação de conceitos – talvez parecida como a que foi realizada pelo professor.

No que se refere à aprendizagem de proposições – em que "uma ideia é expressa verbalmente numa frase que contém significados de palavras quer denotativos, quer conotativos, e nas funções sintáticas e nas relações entre as palavras" (AUSUBEL, 2003, p.3) – é possível identificar indícios de que ela tenha ocorrido quando os alunos tentaram explicar o Princípio de Cavalieri em que "todos os paralelogramos que possuem a mesma base e a mesma altura também possuem a mesma área".

Assim, como nos slides dinâmicos havia uma linguagem adequada, como o professor valeu-se de explicações verbais em que buscou clarificar as representações, conceitos e proposições e como foi favorecida aos estudantes a descrição das experiências vivenciadas ao longo de cada aula (nos diários de bordo), acredita-se que os participantes tiveram acesso às propriedades representacionais da palavra e puderam aperfeiçoar suas compreensões subverbais emergentes no processo de aprendizagem.

Ao usar cada palavra, havia necessidade de pensar no significado dela; nesse sentido, a palavra tinha a função de clarificar e tornar os significados mais precisos e verdadeiros.

A aprendizagem por recepção, de acordo com Ausubel (2003), é por inerência um processo ativo; no caso da sequência apresentada, esta exigiu, no mínimo, três passos considerados fundamentais para o processo ser significativo.

O primeiro é o levantamento dos conhecimentos prévios necessários para a aprendizagem dos procedimentos de cálculo de áreas de figuras planas. Além da prova aplicada antes da aplicação da sequência, a elaboração desta foi precedida por um levantamento dos principais conceitos e ideias envolvidas; isto, na perspectiva do autor, se faz necessário para averiguar quais são os aspectos mais relevantes presentes na estrutura cognitiva do aprendiz para que o novo material seja potencialmente significativo.

O segundo remete ao grau de reconciliação que o material de aprendizagem possibilitou entre os conhecimentos novos e aqueles já enraizados, pois cada questionamento proposto pelo professor tinha como objetivo fazer com que os participantes tomassem consciência das suas ideias de modo a justificar suas crenças e refletir sobre elas, a estabelecer relações de semelhança e diferença e resolver contradições reais ou aparentes ao que foi evidenciado na avaliação do conhecimento prévio. Ainda, conforme estabelecido por Pozo (1998), levar os alunos a comparar os seus pontos de vista por meio de discussões em grupo, favorecendo a aprendizagem de conceitos, de procedimentos e de atitudes.

E, por fim, o terceiro passo indica o processo de formulação do material, em que foi necessário retomar as ideias de ladrilhamento, a fim de possibilitar que os alunos reconhecessem que uma superfície só pode ser medida com outra superfície, que esta pode ser quadrados, retângulos, hexágonos regulares, etc.; e que o quadrado é a melhor unidade para se medir uma determinada superfície, pelo fato de nosso sistema ser decimal, pela facilidade de sua divisão em dez partes iguais em relação às demais formas. E, por fim, a natureza de cada cálculo de área de algumas formas geométricas.

Ao organizar toda essa sequência buscou-se obedecer a uma estrutura lógica, contendo hierarquias – conceitos e procedimentos específicos ligados a conceitos e procedimentos mais gerais - além de adaptar a linguagem do material ao vocabulário do aprendiz.

Foi possível verificar, como mencionado por Ausubel (2003), que a natureza do processo de instrução por recepção verbal ativa exige um tipo de ensino expositivo que reconheça os princípios da diferenciação progressiva e da reconciliação integradora no material de instrução.

A presente maneira de conceber o ensino de geometria obedeceu a uma estrutura hierárquica que procede de conceitos e procedimentos mais gerais para mais específicos, possibilitando, assim, o processo de aprendizagem subordinada; acredita-se que os participantes puderam diferenciar, de forma progressiva, os significados das ideias apresentadas na sequência.

Nesse sentido, cabe salientar que cada etapa desta estrutura lógica adotada (ladrilhamento, conceito de área e unidade de medida, procedimento de cálculo e aplicações) favoreceu dois processos cognitivos simultâneos e independentes: a diferenciação progressiva e a reconciliação integrativa.

No ladrilhamento, é possível verificar o favorecimento de uma aprendizagem mais associada à aprendizagem subordinada, ou seja, quando a nova ideia que está sendo aprendida se encontra hierarquicamente subordinada a uma ideia geral preexistente na estrutura cognitiva (AUSUBEL, 2003). Nesta etapa, as atividades propostas permitiam que os alunos diferenciassem os significados, delineando as diferenças e as similaridades entre as formas que ladrilhavam e as que não ladrilhavam uma superfície plana (ideia geral ativada) e reconciliassem essas ideias, integrando-as de modo a concluir que a melhor forma era o quadrado e que ele seria tomado como unidade de medida de área (ideia específica formada). Neste processo, a teoria indica que a inclusão pode ser: **derivativa (**em que a nova informação *a* é vinculada à ideia estabelecida *A* e representa um exemplo específico ou ilustrativo, mas não se mudam os atributos do critério do conceito *A*, apenas se reconhecem novos exemplos como relevantes) ou **correlativa (quando a** nova informação *x* é vinculada à ideia *X*, porém é uma modificação, uma elaboração, uma qualificação ou uma limitação de *X*). Não se pode afirmar, ao certo, como o processo ocorreu.

Já na etapa que se refere ao conceito de área, o professor parte de ideias específicas, mas que estão em um mesmo patamar de hierarquia, utilizando questionamentos do tipo: "como medir uma determinada altura?"; "como medir uma determinada distância?"; "qual a possibilidade de medir uma folha utilizando como unidades os polígonos mencionados?". As perguntas tinham por objetivo levar os alunos a concluírem que os polígonos determinam superfícies e só se pode medir área de um polígono a partir de outra superfície. Note que a característica desta aprendizagem está mais associada à aprendizagem combinatória, pois a nova informação não pode ser abarcada por elementos mais gerais e nem por elementos específicos já disponíveis na estrutura cognitiva do aprendiz.

Por fim, na etapa em que se trabalha com a natureza dos procedimentos de cálculo de área, eram apresentados, por exemplo, vários triângulos que eram duplicados para comporem um retângulo ou um paralelogramo (ideias especificas) e assim se promover a ideia geral de que a área do triângulo era a metade da área de um paralelogramo com as mesmas base e altura do triângulo original (ideia mais geral), o que caracteriza a aprendizagem superordenada, conforme definição de Ausubel (2003).

Com base no autor, considera-se que o processo de elaboração e aplicação desta sequência didática possibilitou uma aprendizagem verbal bem sucedida, já que:

5) O material foi organizado a partir do conhecimento dos alunos o que possibilitou o uso não prematuro de técnicas verbais puras com alunos imaturos em termos cognitivos; em outras palavras, o uso inadequado da linguagem.
6) Os conceitos e procedimentos foram apresentados de forma não arbitrária obedecendo a uma estrutura lógica.
7) O material possuía integração de novas tarefas de aprendizagem com materiais anteriormente apresentados.
8) E em nenhum momento se apropriou de métodos avaliativos que valorizavam, de forma demasiada, a capacidade de reconhecimento de

fatos discretos e a reprodução de ideias com as mesmas palavras ou em um contexto idêntico ao apresentado anteriormente.

Por meio dos registros dos alunos foi possível verificar que a presente sequência permitiu a atribuição de novos significados para o conceito de área e para os procedimentos de cálculo. Vários alunos mencionaram que já sabiam a fórmula, mas não conheciam a origem da mesma. Esses novos significados adquiridos pelos alunos desempenham um papel fundamental no aumento da estabilidade do conhecimento, já que eles resultam da ligação com os conhecimentos prévios mais estáveis que lhes correspondem aumentando a força de dissociabilidade associada.

Dessa forma, concorda-se com Ausubel (2003) quando este afirma que a aprendizagem por recepção pode ser significativa para o aluno quando o professor consegue organizar a estrutura lógica do material com base nos conhecimentos prévios dos seus alunos; quando ele promove um trabalho que favoreça a interação entre os conhecimentos prévios dos alunos e os novos significados de modo a levá-los a atribuir significados enquanto produto desta interação.

A análise dos registros produzidos pelos alunos permite afirmar que os aprendizes que conseguiram associar a fórmula à figura, os valores às fórmulas e que fizeram boa parte dos procedimentos de forma correta, também atribuíram novos significados, e esses aumentaram a força de dissociabilidade associada. Tal aumento ocorre pelo fato do novo significado ser fruto da ligação dos significados presentes na sequência didática com conhecimento prévios desses participantes – fórmula correta, identificação das medidas corretas, etc. – que eram mais estáveis.

A cada questionamento do professor foi possível perceber que os conhecimentos prévios dos alunos se alteravam ao longo do processo interativo, quer seja com as novas ideias presentes nos slides e na exposição do professor com as quais interagiram, quer seja com os novos significados emergentes, no processo, de aplicação da sequência.

Percebeu-se também, ainda com base em Ausubel (2003), que o processo de aprendizagem não terminou na aquisição dos novos significados frente aos conceitos e procedimentos, pois este trata-se de ciclo: a todo o momento, o aprendiz será capaz de apresentar um novo conhecimento prévio frente a algo novo.

Por se tratar de um conteúdo anteriormente ensinado – área de figuras planas consta nos currículos oficiais desde os anos iniciais do ensino fundamental (BRASIL, 1998) –, pode ser que para algum dos aprendizes o processo de ligação entre os conhecimentos prévios e novos significados tenha favorecido a retenção destes. Nota-se que a experiência relatada não nos permite fazer mais afirmações sobre os processos de retenção e esquecimento já que o período de análise foi pequeno. Entretanto, sabe-se que a eficácia da aprendizagem significativa reside na não arbitrariedade e na substantivação.

Ao que se refere a não arbitrariedade, por meio dos dados e da breve análise aqui realizada, é possível afirmar que foram estabelecidas relações específicas e relevantes. Já a substantivação refere-se aos significados não mensuráveis apenas por meio de palavras, ações ou comportamentos. O processo diz respeito à forma idiossincrática de se estabelecer relações e são estas que favorecem a retenção e/ou esquecimento.

Nesse sentido, é possível afirmar que o processo de ensino adotado para a aplicação desta sequência foi o de recepção significativa com estratégia de instrução verbal – este, de acordo com Ausubel (2003), pode exercer um papel essencial para as retenções dos conhecimentos abordados – já que o armazenamento dos conhecimentos abordados dependeu de colocações verbais e essas foram realizadas pelos aprendizes (na forma oral ou em texto), como fonte de conclusões e relações entre os conhecimentos prévios e os novos significados produzidos ao longo da aplicação da sequência didática.

2ª PARTE: O ESPECÍFICO DO ENSINO E DA APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA DE PROCEDIMENTOS

7.4 Características específicas do ensino e da aprendizagem significativa de procedimentos

Os PCN (BRASIL, 1998) indicam que os procedimentos são considerados como conteúdos escolares e que estão presentes também no tema de área de figuras planas – conteúdo que integra o bloco de conteúdos Espaço e Forma. Assim, ao se entender o conceito de área como uma grandeza a ser medida com uma unidade de medida (na forma quadrada e com base no sistema métrico decimal), faz-se necessário utilizar de procedimentos algoritmos para encontrar o valor de uma determinada superfície.

Com base em Coll e Valls (1998) e Pozo (2008), pode-se afirmar que o conhecimento procedimental do cálculo da área de uma figura plana refere-se a um conjunto de ações ordenadas e orientadas para encontrar um valor (um número acompanhado de uma unidade de medida) que representa tal superfície. A aprendizagem significativa dos procedimentos relativos às formas geométricas (quadrado, retângulo, paralelogramo, triângulo, losangos, círculos etc) – conforme planejamento da sequência didática aqui apresentada – baseou-se em ações ordenadas de modo a generalizar o procedimento para cada figura.

De fato, ao ensinar procedimentos, o que se propõe para aprendizagem dos alunos é um conjunto de ações cuja realização permite alcançar, finalmente, determinadas metas. Nesse sentido, o trabalho envolvendo procedimentos buscou desenvolver a capacidade para saber agir, de maneira eficaz, frente à tarefa de determinar a área das principais formas geométricas. O processo possibilitou aos sujeitos participantes conhecer um conjunto de ações que levassem não só à determinação da área da figura apresentada, mas à generalização do procedimento para outras figuras.

Os procedimentos foram construídos a partir dos processos de decomposição e de composição de formas; estes podem ser analisados como maneiras determinadas e concretas de agir, em que a principal característica foi a apresentação – feita de forma ordenada e não arbitrária – de cada uma das ações. Isto é, adotou-se, para cada figura, uma sistemática ordenada de ações em que uma etapa era seguida da outra até a consecução de uma meta que era a forma algébrica generalizada do procedimento.

A sequência didática deste trabalho evidenciou o ensino e a aprendizagem de procedimentos algorítmicos e heurísticos. Os procedimentos algorítmicos caracterizaram-se pelos conjuntos de passos necessários para se encontrar a fórmula que, em boa parte dos casos, já tinham sido apresentadas pelos alunos na prova de conhecimento prévio.

O que se pretendeu, a cada apresentação de uma nova forma geométrica, foi trabalhar com a natureza dos procedimentos para obtenção da respectiva fórmula algébrica, ou seja, buscou-se evidenciar aos aprendizes o “porquê matemático” de cada fórmula.

Considera-se quase impossível construir e aprender algoritmos para calcular a área de todas as figuras planas possíveis. No entanto, com base nas ponderações de Coll e Valls (1998), considera-se que parte deste trabalho procedimental consistiu na aprendizagem de procedimentos heurísticos. Assim, espera-se que o aluno, quando estiver diante de uma figura geométrica – mesmo que esta não seja conhecida –, possa, por meio dos procedimentos ensinados, valer-se da decomposição e da composição para determinar a área da mesma.

Nesse sentido, a sequência de atividades proposta aos alunos atendeu às indicações dos PCN (BRASIL, 1997) em que o ensino de procedimentos deve estar voltado, na maioria dos casos, para sua natureza heurística – e não algorítmica.

Tais atividades foram planejadas para que os alunos pudessem ter uma aprendizagem de procedimentos que não estivesse baseada na memorização e que não fosse superficial e pouco proveitosa (que logo é esquecida). Ao contrário, buscou-se o desenvolvimento de processos cognitivos que favorecessem a compreensão da natureza dos procedimentos para que os alunos pudessem utilizar esses procedimentos na solução de diferentes problemas em situações futuras.

Os tipos de aprendizagem diferenciados por Ausubel (2003) – subordinada, superordenada e combinatória – juntamente com os tipos de conexões estabelecidas entre os procedimentos e a sua natureza, são atributos que possibilitam a aprendizagem significativa de procedimentos; ou seja, quanto mais vínculos os alunos conseguirem estabelecer entre as ações já conhecidas e os novos conhecimentos procedimentais aprendidos, melhores serão as capacidades de compreensão e aplicação dos mesmos.

Observando os resultados obtidos na resolução de cada exercício proposto em sala de aula, é possível verificar que, de fato, o processo de assimilação na aprendizagem de procedimentos é progressivo. Ao longo das ações desenvolvidas nessa sequência, alguns alunos foram se aperfeiçoando e, com isso, garantindo um valor funcional a cada procedimento ou a possibilidade de se aplicar o mesmo em situações novas e mais complexas.

A aplicação dos procedimentos nos exercícios propostos, em que vários alunos discutiram as vantagens e desvantagens das diferentes estratégias adotadas – inclusive dos erros identificados em algumas soluções – possibilitou ao professor distinguir aqueles alunos que se preocupavam com o processo de solução e acabam realizando procedimentos corretos daqueles que buscavam acertar por tentativa e erro e não alcançavam sucesso em suas ações.

Por meio da observação dos comportamentos manifestados pelos alunos durante a aplicação dos exercícios, notou-se que o processo de aprendizagem significativa de procedimentos pôde possibilitar aos aprendizes:

6) Corrigir a execução dos passos para conseguir alcançar a meta, ou seja, ampliar a complementar a assimilação do conjunto de passos e de operações que compunham determinado procedimento.
7) Observar a frequência com que os procedimentos apareciam nas diferentes situações, ou seja, a probabilidade deles se tornarem facilmente presentes; essa observação leva a decidir sobre a pertinência de fazer adequações às diversas situações.
8) Dar início ao processo de automatização – o que leva a diminuir a atenção quando na execução do procedimento.
9) Identificar o grau das ações da sequência, ou seja, a forma progressiva adotada, a fim de diminuir os erros e aplicar os procedimentos de maneira rápida em outros contextos.
10) Identificar a quantidade de informações relevantes que se conhece em relação à tarefa.

Note que o professor optou por promover a aprendizagem por recepção verbal; assim, a exposição do material na forma de slides foi acompanhada por questionamentos que exigiam simulação de ações de decomposição e composição de figuras e também respostas dos alunos, tornando assim, ativo o contexto de aprendizagem.

A estrutura lógica adotada para a sequência didática permitiu que os alunos observassem que alguns procedimentos dependiam de outros: o triângulo do paralelogramo, o segmento circular do setor circular e do triângulo, etc. Além disso, o material em questão exigiu a manipulação de conceitos (propriedades das figuras geométricas, fração, porcentagem etc). Apesar de o domínio dos procedimentos não implicar, necessariamente, no domínio de conceitos e vice-versa (COLL & VALLS, 1998), a metodologia adotada deve ter possibilitado a atribuição de sentido e de significado para cada fórmula – mesmo àquelas que eles já traziam memorizadas.

No entanto, o mesmo não se reduzia no ensino pautado no “primeiro farei, depois faremos juntos e depois o fará você ou vocês sozinhos” (COLL & VALLS, 1998, p.110); a cada nova situação, novos significados eram atribuídos e, ao se repetir o processo, o aluno passava, gradativamente, a executar o procedimento de maneira autonomia.

Assim, o conjunto de slides para cada figura tinha por finalidade levar o aluno a: compreender a natureza do procedimento de determinação da área, aprender e fixar o procedimento e aplicar o procedimento em outras situações.

À medida que os alunos entenderam a sequência de ações proposta pelos slides dinâmicos, eles pareciam mais independentes. Isso permitiu o professor transitar da prática guiada para a autônoma – quando os próprios alunos encontravam o procedimento correto para determinar as áreas solicitadas.

Com base em Coll e Valls (1998), considerou-se que a maior significação do ensino de procedimentos reside nos processos e não nos produtos. Assim, na correção dos exercícios, o professor não se deteve nas respostas finais e sim nas estratégias empregadas, de forma consciente e voluntária, pelos alunos.

Esses processos pareciam complementar toda a sequência lógica desenvolvida. A reflexão para descrever seus procedimentos - em texto escrito ou oral – deve ter permitido o surgimento de novos significados.

3ª PARTE: OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

7.5 Os registros de representação semiótica na sequência

Na perspectiva de Duval (2012), a matemática desempenha um papel fundamental para o desenvolvimento integral dos alunos e de suas capacidades. Nesse sentido, a sequência didática em questão evidenciou que toda atividade matemática exige um registro de representação semiótica para o desenvolvimento da capacidade de raciocinar, analisar e de visualizar conteúdos matemáticos.

Uma vez que a sequência didática aplicada possui traços que atendem às perspectivas da aprendizagem significativa por recepção verbal e que os alunos produziram ao longo dela vários registros de representação semióticos, é possível também estabelecer uma análise tanto dos registros de representação semiótica elaborados pelo professor (nos slides dinâmicos) quanto daqueles produzidos pelos alunos no diário de bordo. A análise pretende evidenciar a aprendizagem do conteúdo em questão.

Para realizar este estudo, observa-se que a sequência foi realizada em etapas que exigiam tanto do professor quanto do aluno um trabalho matemático e, por consequência, o uso de registros de representação semiótica (DUVAL, 2012).

Na etapa referente ao conceito de área e às unidades de medidas e também aos procedimentos de cálculos, o professor trabalhou com quatro tipos de representação: língua natural, geométricos, numéricos e algébricos. As representações ligadas à língua natural referem-se aos questionamentos e às respostas constantes nos slides; as geométricas são as formas planas presentes em cada item; as numéricas são as medidas dos elementos das figuras (base, altura, raio, comprimento, etc.) e as algébricas referem-se ao conjunto de símbolos que representam a generalização do procedimento para o cálculo de área para cada figura.

Com base em Duval (2012), pode-se afirmar que as representações ligadas à língua natural, as formas geométricas e suas partes são registros multifuncionais – em outras palavras, trata-se de registros que podem atribuir diferentes papéis na atividade matemática. Nesse sentido, nota-se que cada questionamento realizado pelo professor e cada uma das respostas dadas pelos alunos pareciam desempenhar diferentes maneiras de racionar, já os indivíduos realizam observações e possuem crenças distintas sobre um mesmo objeto. No que se refere às figuras geométricas, é possível observar que elas podem receber mais de um nome e pertencer a uma determinada classe de figuras; um exemplo é o retângulo: este pode ser visto como um polígono, um quadrilátero e um paralelogramo. Estes registros são classificados como não algoritmizáveis, sendo que os questionamentos realizados acerca do objeto são representações discursivas e as formas geométricas e suas partes são representações não discursivas.

Para o referido autor, as representações numéricas e algébricas são registros discursivos e monofuncionais, já que na atividade matemática possuem uma única função.

Nesse sentido, por meio da análise de dados foi possível verificar que, na etapa de ladrilhamento, o conjunto de slides dinâmicos utilizados para verificar a viabilidade de uma figura ladrilhar ou não, permitiu ao professor manipular registros multifuncionais na forma discursiva e não discursiva, em que para cada questionamento e se utilizava uma forma geométrica para verificar a possibilidade de se ladrilhar ou não. Neste caso, observa-se que os questionamentos (representação discursiva) encaminharam as figuras geométricas (representações não discursivas), de modo, a evidenciar o seu papel na atividade matemática.

Para os itens que tinham como objetivo apresentar a natureza do procedimento para a determinação da área (de retângulos e quadrados, paralelogramos, triângulos e círculo), observou-se que atividade matemática partia de um registro multifuncional (a figura, os questionamentos e a contagem de unidades quadradas)e que, posteriormente, a tomada de cada quadradinho como $1u^2$, a determinação das medidas e a generalização na forma de uma expressão algébrica, resultaram na formação de um registro monofuncional.

Já os itens de determinação da área de trapézios e losangos diferem dos descritos anteriormente apenas por não possuírem a etapa em que ocorria contagem dos quadradinhos; esses partem também de um registro multifuncional e, por meio da realização de ações com a figura, atribuíram valores numéricos e algébricos, ou seja, registros monofuncionais.

Já a atividade desenvolvida para o conhecimento do Princípio de Cavaliere parte um registro multifuncional a partir de uma representação não discursiva e esta foi encaminhada para uma forma discursiva quando foram atribuídos valores às dimensões (*a* e *b)* de cada um dos paralelogramos: isto permitiu formar o registro monofuncional que sintetizava que todas as figuras apresentadas naquele slide tinham área igual a *ab.* Situação semelhante aconteceu com as atividades relativas à determinação da área do setor circular e o do segmento circular e também com a última atividade de aplicação dos procedimentos: partiu-se de registros multifuncionais com representações não discursivas e estas foram encaminhadas pelas discursivas e tornaram-se registros monofuncionais.

Nota-se que todos os slides dinâmicos partiam de registros multifuncionais com representações não discursivas e essas encaminhadas pelas discursivas a fim de possibilitar a obtenção de registros monofuncionais.

Conforme a perspectiva da aprendizagem por meio de registros de representação semiótica, não de pode confundir os objetos matemáticos presentes nos slides dinâmicos com a sua representação; no entanto, tais representações podem ter possibilitado aos alunos alguns pontos estratégicos para compreensão do conteúdo em questão.

De fato, para elaborar as representações semióticas contidas nos slides dinâmicos, o professor produzia suas representações mentais e essas eram pautadas num conjunto de imagens, e mais globalmente, nas conceitualizações que o mesmo possuía frente ao conteúdo de área.

Na perspectiva de Duval (2012), considera-se que todas as representações presentes nos slides não foram apenas um meio do professor exteriorizar suas representações mentais para fins de comunicação, com intuito de tornar as informações acerca do conteúdo de área visível ou acessível para os alunos; ao contrário, elas constituíram um conjunto de representações semióticas essenciais à atividade cognitiva do pensamento, já que estas desempenharam um papel primordial no desenvolvimento das representações mentais dos alunos e na realização de diferentes funções cognitivas e na produção de conhecimentos.

As representações constantes nos slides dinâmicos podem ser denominadas de registros de representação semiótica, pois atendiam às características das atividades cognitivas ligadas à *semiósis*: formação, conversão e tratamento de uma representação identificável. Conforme já descrito, na constituição de todos os slides partia-se de registros multifuncionais não discursivos e, por meio de tratamentos e conversões, obtinham-se registros monofuncionais discursivos.

Cabe mencionar que os slides dinâmicos também podem ter proporcionado aos alunos a participação na formação dos seus próprios registros de representação semiótica, pois, além da apresentação de cada figura e de cada procedimento, existiu um conjunto de indagações que podem ter permitido os alunos participar do processo de seleção, de relações e de dados presentes no conteúdo a representar.

Parece que esse processo realizado juntamente com o professor, nas condições em que o estudo foi realizado, contribuiu para que os alunos tomassem consciência das regras da formação própria de um registro cognitivo, em que a representação foi o processo final.

A sequência de slides possibilitou também aos alunos tratar as representações formadas, ou seja, realizar transformações internas dentro do registro apresentado. Isto pode ser observado no processo de obtenção do procedimento de cálculo de área do triângulo, do trapézio, do círculo e do segmento circular: antes da obtenção da fórmula algébrica, existiu um tratamento geométrico de modo a representar a natureza de cada procedimento.

Outra atividade cognitiva que os alunos vivenciaram ao longo do processo de ensino e aprendizagem foi a de conversão. Nota-se que inicialmente se apresentou um registro de representação semiótica na forma de figura e esse foi transformado em outro registro de representação semiótica numérico. Por exemplo, mencionava-se a figura (quadrado, retângulo, paralelogramo), identificava-se sua base e sua altura e se fazia a conversão para números seguidos de uma unidade de medida de comprimento; o produto destes números passava a ser a medida da área da figura.

Observa-se também que o desenvolvimento das atividades geométricas estava apoiado em dois tipos de registros que podem ter auxiliado na compreensão: as figuras e a linguagem materna. Isso deve ter possibilitado a apreensão conceitual do objeto matemático – processo denominado por Duval (2012) de *noésis*.

O processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de área evidenciado nesta sequência didática parece ter sido desenvolvido em dois níveis de apreensão geométrica. Num primeiro nível buscou-se desenvolver capacidades cognitivas ligadas à operação com diferentes unidades de figurais (base, altura, etc.) que são distintas dentro de uma figura dada; e, num segundo nível, efetuaram-se modificações mereológicas e óticas ou posicionais, das unidades figurais reconhecidas e da cada figura dada.

De um modo geral, ao que se refere ao primeiro nível, a sequência didática permitiu aos alunos terem uma apreensão: **sequencial –** quando alguns estudantes, ao reproduzirem as figuras no diário de bordo, notaram que essa construção dependia das propriedades figurais ou de um instrumento; **perceptiva** – quando tiveram que interpretar as formas geométricas em uma composição de formas nos exercícios para aplicar os respectivos procedimentos; **discursiva –** quando os alunos, ao descreverem os procedimentos nos diários de bordo, explicitaram outras propriedades matemáticas da figura, articulando o desenho com os elementos discursivos.

Já o segundo nível, da apreensão **operatória** das figuras, está ligado ao processo de construção dos procedimentos e à resolução dos exercícios – quando os sujeitos realizaram ou visualizaram modificações e/ou transformações possíveis da figura inicial para se calcular área das mesmas. As transformações mereológicas podem ser identificadas quando os alunos separaram as figuras em partes; as óticas, quando transformaram uma figura em outra e as transformações posicionais referem-se aos deslocamentos em relação a um referencial.

CAPÍTULO VIII

O PROCESSO DE MODELAGEM MATEMÁTICA DE LOGOTIPOS FIGURAIS: ELABORAÇÃO E APLICAÇÃO

8.1 Elaboração

O processo de modelagem matemática foi elaborado de modo a favorecer aplicação de conceitos e procedimentos relativos à área de figuras planas. O esquema mostrado na Figura 51 ilustra a estrutura adotada para a sequência de atividades deste processo.

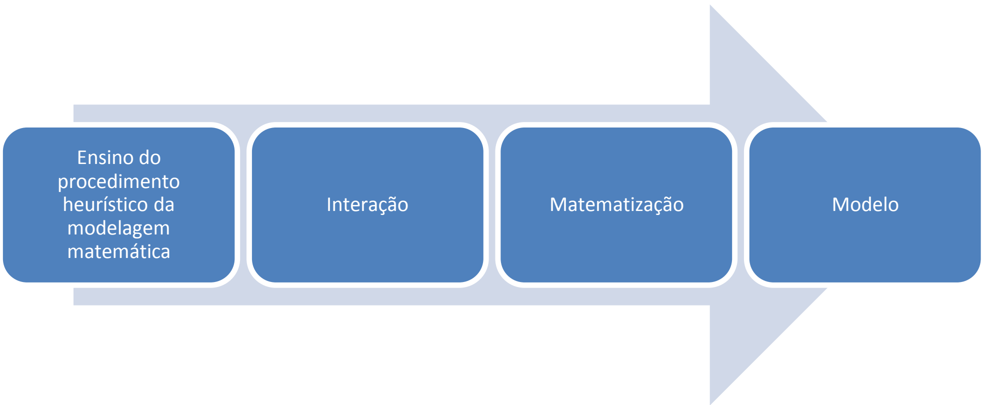


Figura 51. Esquema da estrutura adota para o processo de modelagem matemática na sala de aula.

Assim, optou-se por essa estrutura lógica por entender que o desenvolvimento deste trabalho no âmbito da sala de aula deveria ser em etapas.

Serão descritos, na primeira etapa, o conjunto de slides dinâmicos cuja finalidade era mostrar aos alunos os procedimentos heurísticos de modelagem matemática do logotipo figural do Google Drive, como exemplo. Serão mostrados, também, a forma como estes slides foram apresentados aos estudantes, bem como alguns registros produzidos por eles ao longo da etapa. Já nas segunda, terceira e quarta etapas do processo serão descritas as experiências vivenciadas pelo autor na aplicação da modelagem junto aos alunos.

8.2 Aplicação

Etapa 1: Ensino do procedimento heurístico da modelagem matemática

Inicialmente, o professor apresentou para os alunos um slide contendo o logotipo figural do Google Drive (Figura 52), e questionou acerca da área do mesmo. A partir disto, solicitou aos alunos que verbalizem quais formas geométricas conseguiam visualizar no logotipo em questão.

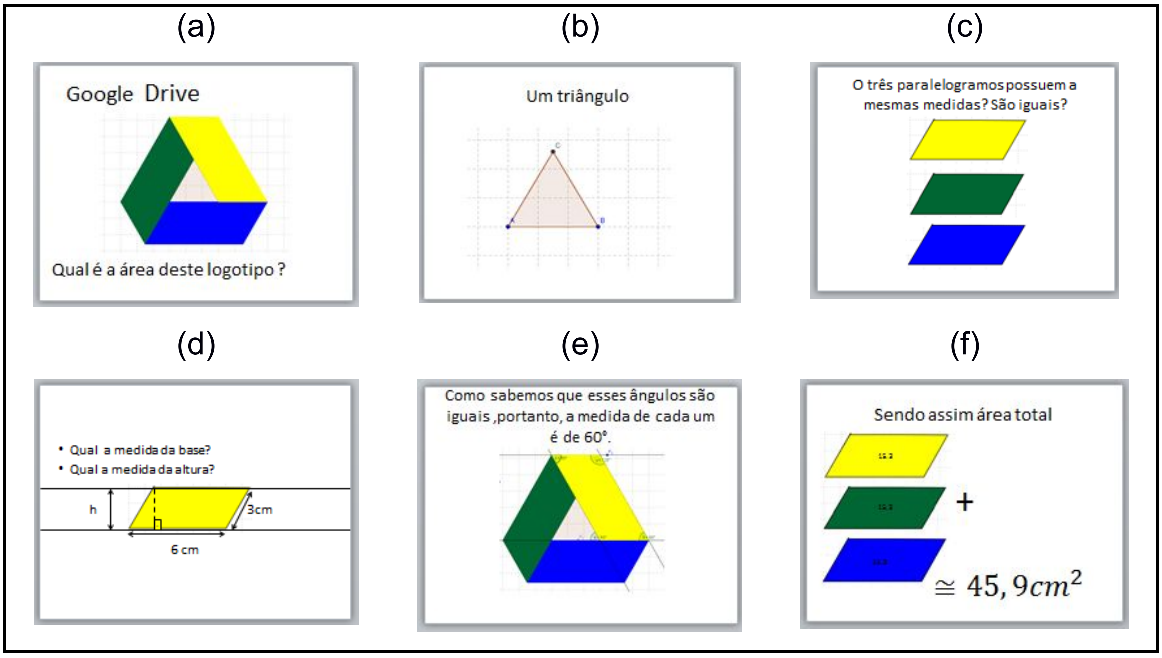


Figura 52. Slides utilizados na modelagem (Etapa 1: Ensino do procedimento heurístico)

Como resposta, eles mencionaram que era um triângulo e três paralelogramos e que, para calcular a área total, bastaria calcular a área dos três paralelogramos em questão (Figura 52 b-c). Em seguida foi solicitado aos mesmos que fizessem um esboço inicial no diário de bordo do logotipo figural e das figuras que eles conseguiram identificar no mesmo. As sequências de slides mostradas nas figuras a seguir ilustram como foi dada a orientação aos alunos para que atribuíssem as medidas necessárias para o triângulo (Figura 53) e para os paralelogramos (Figura 54).

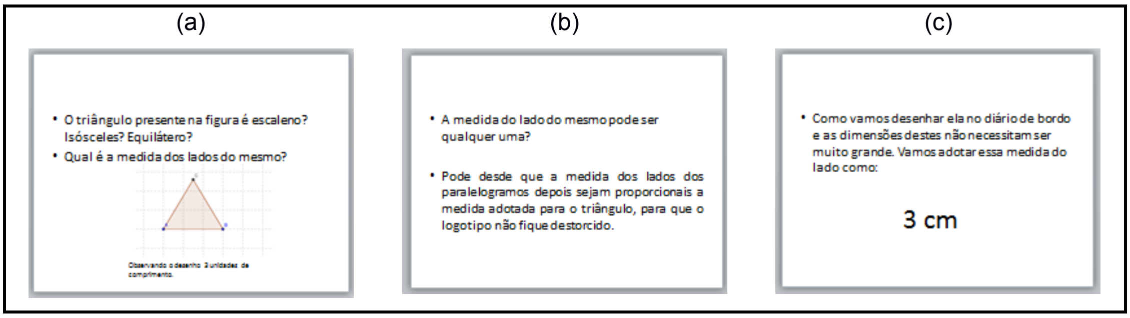


Figura 53. Slides utilizados na modelagem
(Etapa 1: Ensino do procedimento heurístico)

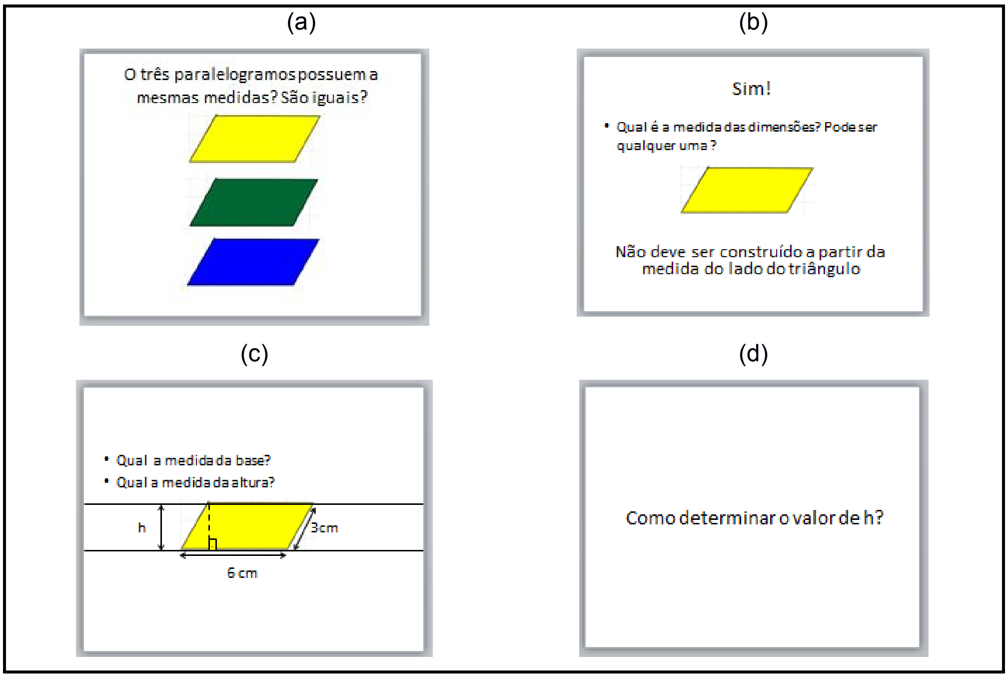


Figura 54. Slides utilizados na modelagem
(Etapa 1: Ensino do procedimento heurístico)

Após discutir e considerar que a medida da base do paralelogramo poderia ser o dobro da medida da base do triângulo o professor questionou os alunos sobre a medida da altura (Figura 54-d). Com isto, iniciou-se uma discussão para descobrir a medida dos ângulos internos do paralelogramo. Um primeiro apontamento apresentado pelos alunos é que um dos ângulos é o suplementar de 60°, ou seja, 120°. A partir disso, foram recordados alguns princípios e feitas algumas conclusões, tais como: se os ângulos dos vértices não consecutivos de um paralelogramo têm mesma medida e como a soma dos ângulos internos de um paralelogramo é 360° e sabendo-se que para esta soma já se tinha 240°, então restavam apenas 120°; portanto, cada ângulo deveria medir 60°. Sendo assim, utilizando-se da razão seno de um ângulo, foi possível determinar a altura e, posteriormente, o valor da área do paralelogramo, como mostra a ilustração da Figura 55-a.

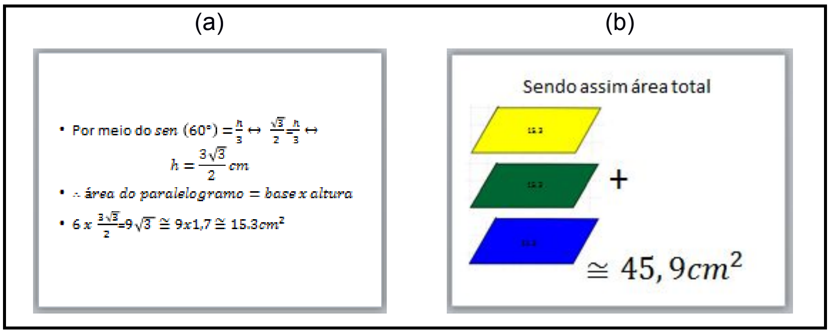


Figura 55. Slides utilizados na modelagem
(Etapa 1: Ensino do procedimento heurístico)

Como a área de um dos paralelogramos era aproximadamente 15,3 cm^{2,} e como o logotipo era formado por três deles, concluiu-se que a área total era de aproximadamente 45,9 cm^2 (Figura 6-b).

Os alunos foram questionados sobre o significado do valor encontrado, sobre a adequação das medidas para se reproduzir o logotipo em um painel de propaganda, sobre a área da figura caso as medidas fossem aumentadas, sobre a medida máxima do lado do triângulo para aquele logotipo ser reproduzido na parede de uma sala etc. Essas perguntas tinham por objetivo fazer com que os alunos estabelecem relações entre o valor encontrado e a quantidade de quadrados de um centímetro que seria necessária para reproduzir o mesmo, favorecendo, assim, a construção do conceito de área enquanto grandeza.

Observando os diários de bordos, foi possível encontrar alunos que realizaram o esboço do logotipo figural da mesma forma que o professor (Figura 56 a-c); já outros esboçaram de outra maneira (Figura 56-b).

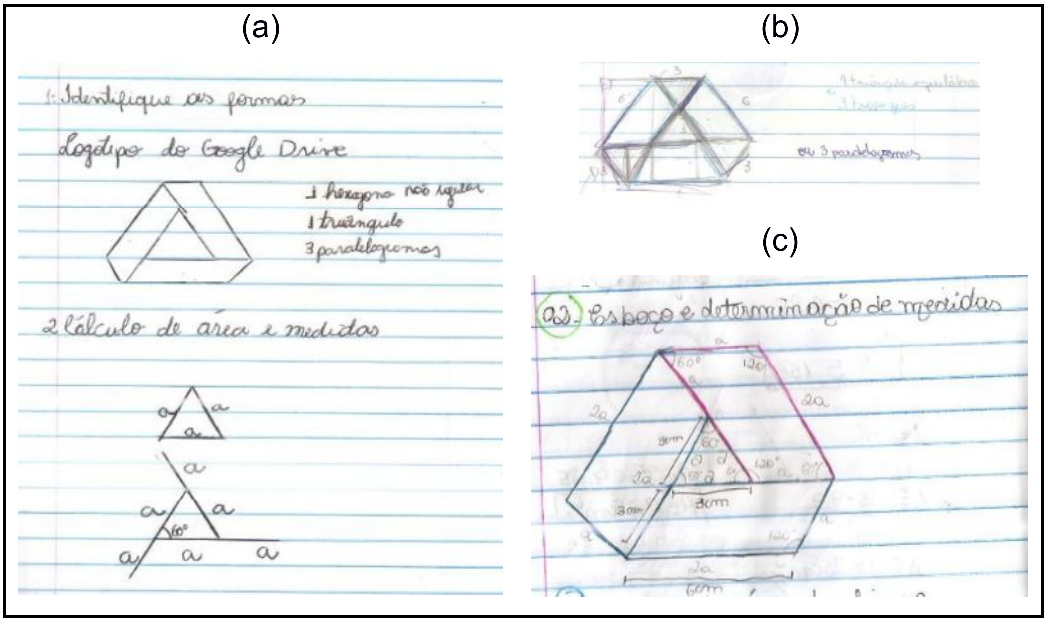


Figura 56. Anotações dos alunos na modelagem (Etapa 1: Ensino do procedimento heurístico)

Posteriormente a esta atividade, os alunos foram encaminhados para o laboratório de informática da instituição; lá, com ajuda do professor e da apresentação de slides, realizaram os passos para a construção do logotipo na tela do computador, utilizando o software Geogebra (Figura 57).

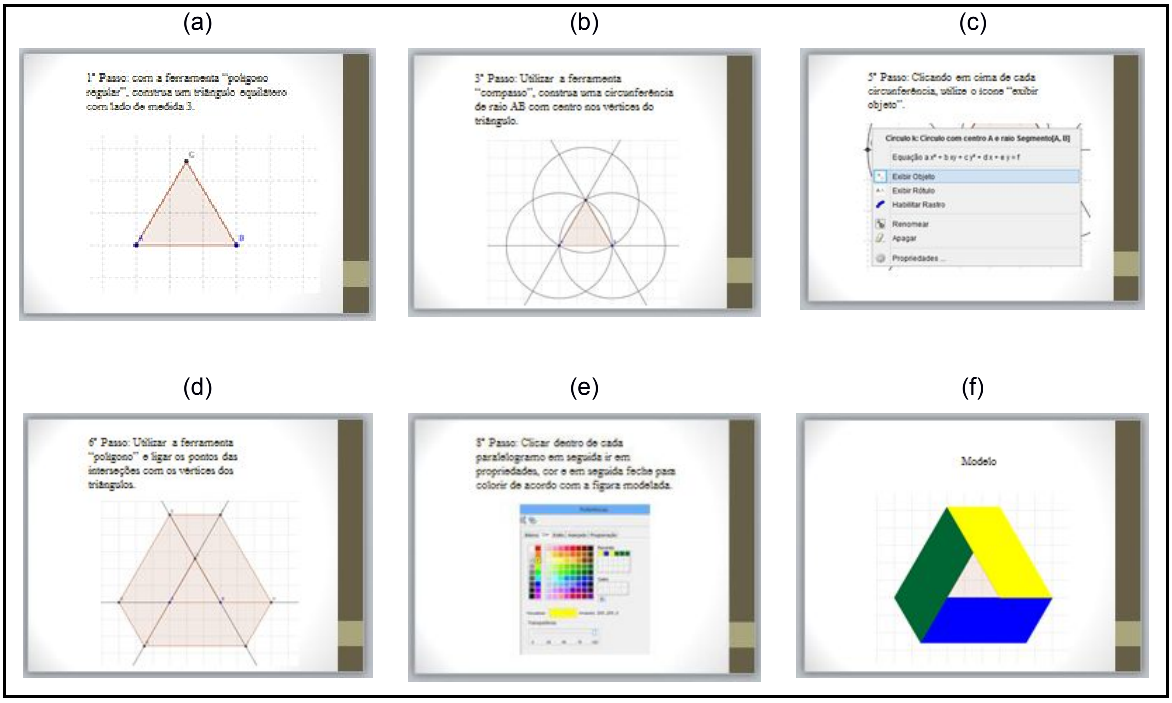


Figura 57. Slides utilizados na modelagem (Etapa 1: Ensino do procedimento heurístico)

Ao longo do processo, observou-se que os alunos acompanharam a atividade, sendo que alguns questionaram o passo 3 (Figura 57-b), querendo saber porque eram utilizadas circunferências de raio AB e com centro nos vértices do triângulo.

Evidencia-se que, a cada passo, o professor se dirigia à mesa do aluno, orientando aquele que não conseguia realizar a ação, fazendo com que todos caminhassem juntos, até a obtenção do modelo final.

O professor informou aos alunos que a atividade realizada era parte de um processo denominado de modelagem matemática. Solicitou, então, que trouxessem impresso na aula seguinte três logotipos figurais; um deles seria escolhido para a modelagem.

Etapa 2: Interação

Com os três logotipos impressos na mão, cada aluno escolheu, com auxílio do professor, um deles para ser modelado. Essa orientação do professor esteve relacionada à escolha de logotipos figurais que possuíam formas possíveis de serem identificadas e cujas áreas poderiam ser calculadas com os conhecimentos de geometria relativos ao ensino médio.

Deste modo, menciona-se que apareceram logotipos em que as figuras geométricas podiam ser identificadas de forma rápida; nesse sentido, o professor escolheu logotipos que ofereciam algum desafio, ou seja, que possibilitavam ao aluno estar diante de uma situação problema.

Pelo fato de o professor pesquisador já ter tido outras experiências frente ao processo de modelagem de logotipos figurais, a escolha ocorreu de forma rápida.

Para apresentar, neste trabalho, os logotipos figurais escolhidos, optou-se por agrupá-los de acordo com algumas características e as categorias obtidas são descritas rapidamente a seguir; as mesmas serão comentadas posteriormente ao longo da descrição do processo de modelagem.

1ª categoria: Logotipos figurais do nível I de modelagem

Nessa categoria, estão presentes os logotipos figurais que permitiam a identificação mais imediata das figuras geométricas que os compunham;

utilizando noções de simetria e instrumentos adequadas, era possível determinar as medidas dos lados e ângulos.

2ª categoria: Logotipos figurais do nível II de modelagem

Nessa categoria, encontram-se os logotipos figurais em que a identificação das figuras não se dava de maneira imediata: era preciso decompor algumas formas e empregar algumas estratégias para determinar as medidas de lados e ângulos, o que caracterizou o contato do aluno com uma situação problema.

3ª categoria: Logotipos figurais no nível III de modelagem

A identificação das figuras geométricas, bem como de suas medidas, demandava muitas estratégias, o que caracterizou uma situação-problema mais complexa, em que o aluno deveria ter conhecimento mais amplo dos conceitos e procedimentos em geometria plana.

Quadro 5. Distribuição de exemplos de logotipos figurais de acordo com categorias

1ª categoria: Logotipos figurais do nível I de modelagem

2ª categoria: Logotipos figurais do nível II de modelagem

3ª categoria: Logotipos figurais no nível III de modelagem

O professor questionou os alunos a respeito dos logotipos figurais escolhidos por eles. Os estudantes justificaram que os logotipos eram de um aplicativo de celular, ou de um produto que gostariam de possuir, ou de jogo preferido etc. Poucos alegaram que a escolha se deu pela facilidade na identificação das formas, atribuição de medidas e determinação da área.

Etapa 3: Matematização

Após ter realizado a escolha dos logotipos, os alunos foram organizados em grupos e solicitou-se que os mesmos identificassem as formas geométricas e as rascunhassem no caderno (Figura 58).

Figura 58. Alunos no momento da identificação das formas (Etapa 3: Matematização)

Observou-se que essa disposição das carteiras na sala de aula possibilitou o professor circular pela sala e ter um contado mais direto com os alunos, além de permitir que eles interagissem, colaborando na elaboração dos esboços. A Figura 59 ilustra três esboços feitos por alunos nessa etapa de identificação das formas geométricas que compunham os logotipos figurais escolhidos.

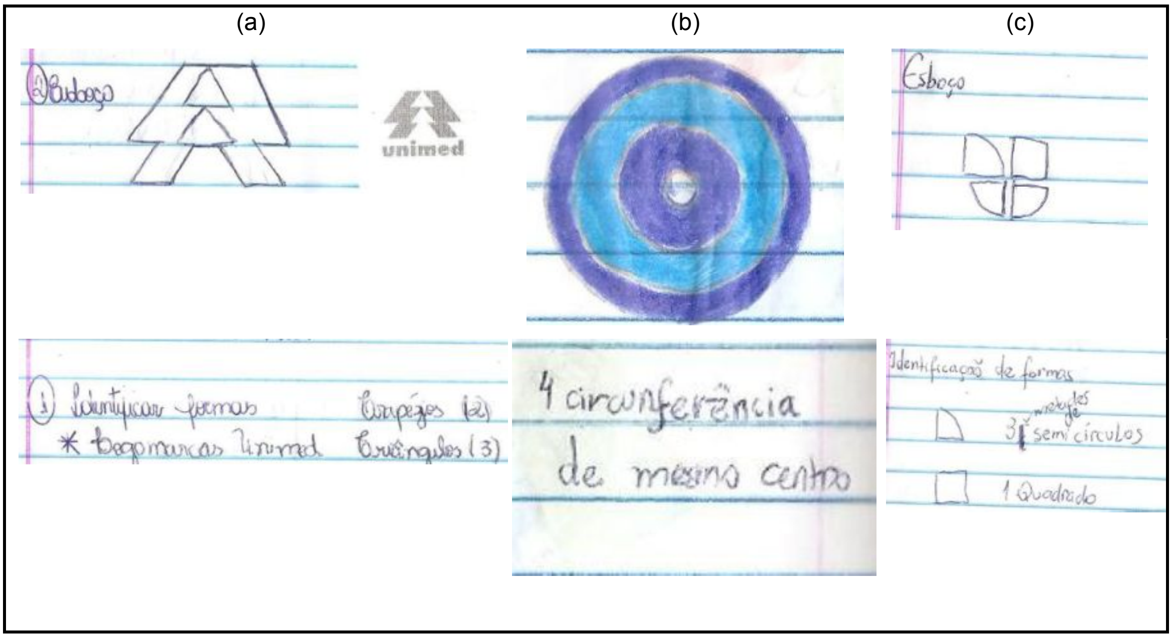


Figura 59. Esboços e identificação das figuras geométricas (Etapa 3: Matematização)

Para os logotipos considerados como sendo do nível I, foi possível encontrar dois tipos de esboços: um em que foram utilizados instrumentos de desenho geométrico (régua e compasso - Figura 59-b) e outro feito à mão livre (Figura 59 a-c).

A nomeação das figuras identificadas pareceu não apresentar dificuldade para a maioria dos alunos. Apesar de quase todos os participantes terem intitulado essas subfases em seus cadernos como “esboço” e “identificação de formas”, um participante escreveu “forma da divisão do logotipo para calcular” – o que deve ter ajudado na organização do cálculo das áreas, feito posteriormente por ele (Figura 60-a). No entanto, percebe-se que a forma de decomposição poderia ter sido mais simplificada, conforme mostra a Figura 60-b.

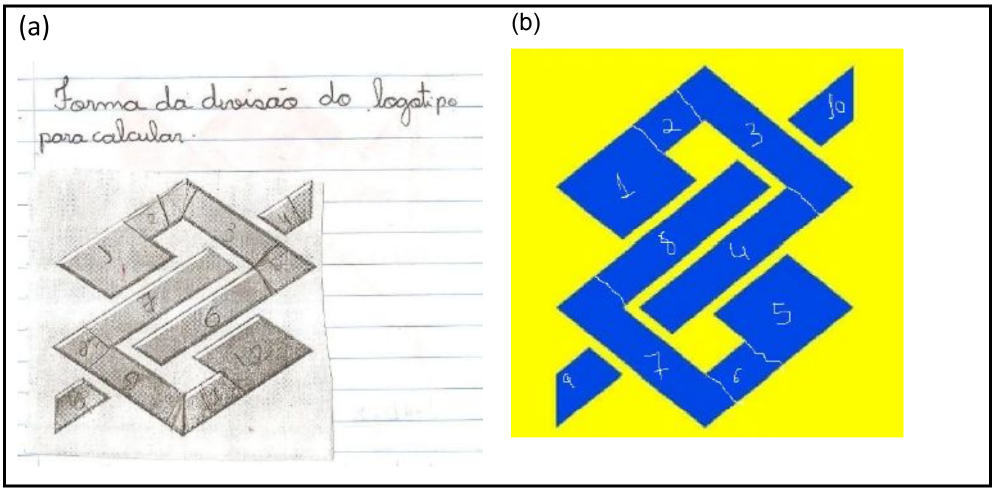


Figura 60. Anotações dos alunos no processo de identificação de formas (Etapa 3: Matematização)

A Figura 61 mostra alguns exemplos de esboços em que é possível verificar como os alunos identificaram as formas geométricas nos logotipos figurais do nível II. Assim como aconteceu no nível I, alguns logotipos foram esboçados com desenhos feitos à mão livre e outros com instrumentos de desenho geométrico e/ou papel quadriculado. Analisando estes esboços, foi possível formar duas categorias de análise para os processos de identificação de figuras de logotipos do nível II encaminhados pelos estudantes: (a) processos completos e (b) processos incompletos ou aproximados.

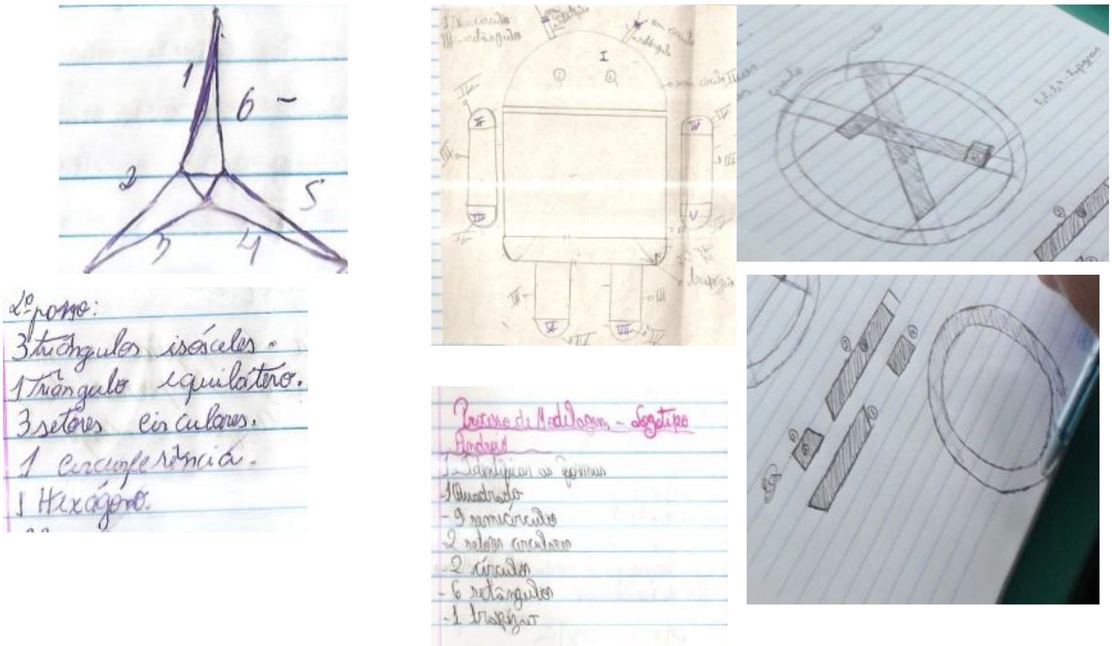
No primeiro caso, todas as figuras que compunham o logotipo foram identificadas corretamente; no segundo, várias figuras foram identificadas corretamente, mas outras formas foram identificadas de maneira incompleta ou aproximada, ou seja, o estudante valeu-se de uma figura geométrica conhecida cujas formas se aproximavam daquela que compunha o logotipo figural modelado.

Nota-se que, na Figura 61-a, o participante iniciou o desenho identificando as partes da figura interna do logotipo figural; na sequência, ele identifica três setores circulares e, posteriormente, retorna para a figura interna e identifica-a na sua totalidade como um hexágono.

E por fim, na Figura 61-c o sujeito identificou as figuras no esboço e esboçou o desenho de cada uma das formas separadamente, decompondo a região interna do logotipo figural em várias formas geométricas.

Processos completos

(a) (b) (c)



Processos incompletos ou aproximados

(d) (e) (f)

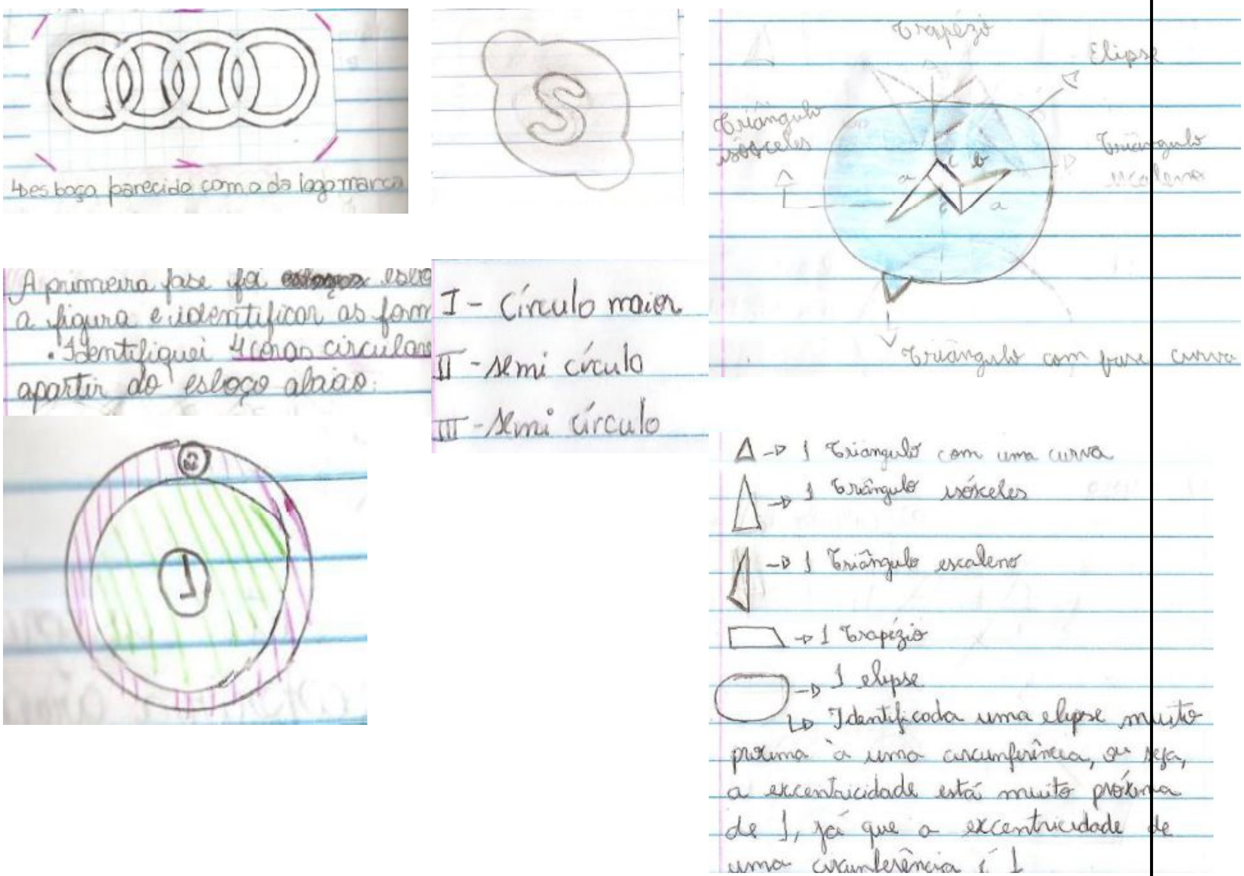


Figura 61. Anotações dos alunos na modelagem na subfase de identificação de formas (Etapa 3: Matematização)

Observa-se, na Figura 61-d, que a aluna identificou apenas quatro coroas circulares e não evidenciou em seus registros, as intersecções existentes entre elas; na Figura 61-e, que a aluna realiza uma aproximação quando identifica a figura como um círculo maior e dois semi-círculos menores e na Figura 61-f, que o participante identificou que “um triângulo com uma curva” – que seria, se corretamente identificado, um triângulo menos um segmento de círculo.

Para os logotipos figurais da categoria do nível III, foi possível identificar apenas processos incompletos ou aproximados.

Na Figura 62-a é possível verificar que o aluno fez alguns esboços e identificou quase todas as formas geométricas. Poucos alunos fizeram o esboço da figura separadamente da identificação das formas, conforme se verifica na Figura 62-b: note-se que a participante nomeou as figuras, fez o esboço e posteriormente desenhou as figuras.

Nota-se que os exemplos (c), (d) e (e) da Figura 62, além do esboço possuem a identificação das formas geométricas que compõem os logotipos figurais. No exemplo (c), observa-se que a aluna ao esboçar a figura, já identificou as formas, fez a decomposição em partes, pensou nas medidas e indicou as fórmulas para determinar o valor da área das mesmas. Já no exemplo (d) a participante fez o esboço e no mesmo identificou as formas.

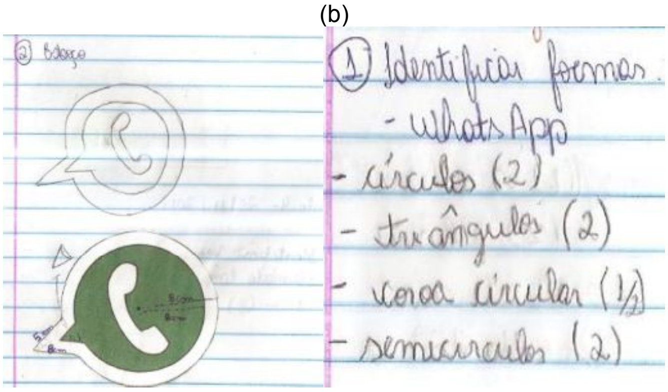
Por fim, na Figura 62-e é possível observar que o aluno fez o esboço do logotipo figural separando as formas geométricas e indicou os procedimentos que podiam ser utilizados para determinar o valor da área de cada uma delas.

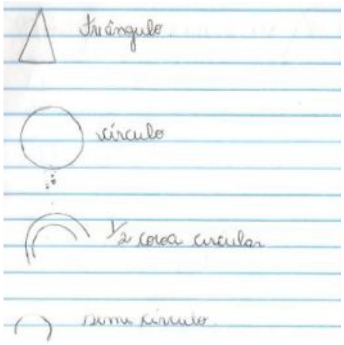
É possível verificar que, em todos os logotipos figurais pertencentes ao nível III, os alunos, de um modo geral, realizaram aproximações de formas.

Processos Incompletos/Aproximações

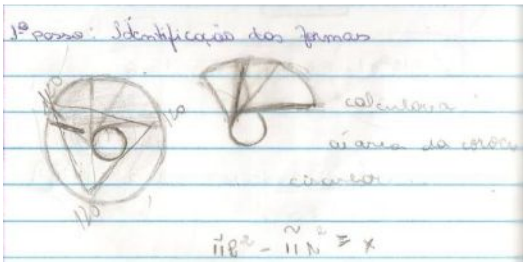
(a)

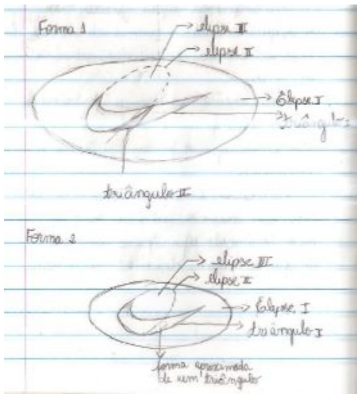
(b)





(c) (d)





(e)

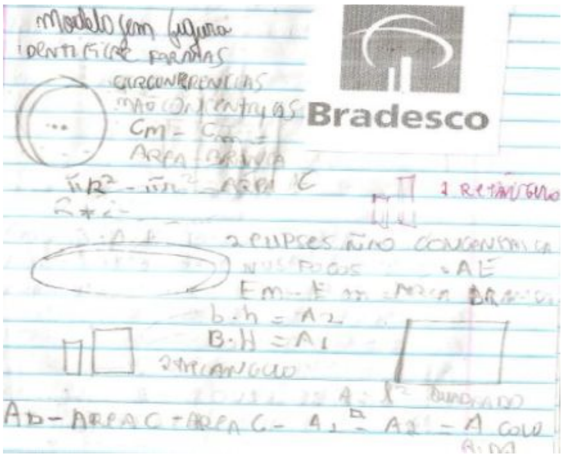


Figura 62. Anotações dos alunos na modelagem no processo de identificação de formas (Etapa 3: Matematização)

Nesta subfase da modelagem, os alunos tiveram que atribuir valores para elaboração do modelo, tendo sido encontrados procedimentos diferentes de se fazer essa atribuição de medidas, a partir do logotipo figural disposto na impressão em papel. Alguns mediram os lados e ângulos das figuras identificadas no próprio logotipo impresso, utilizando régua e transferidor (Figura 63). Outros estudantes elaboraram: um esboço do logotipo, um desenho em papel quadriculado ou uma construção geométrica com régua e compasso – todos obtidos a partir de medidas proporcionais ao logotipo impresso.

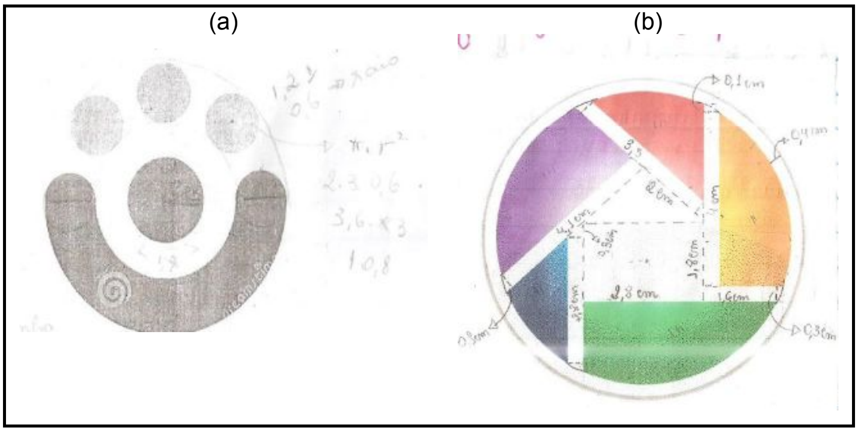


Figura 63. Anotações dos alunos na modelagem (Etapa 3: Matematização)

A Figura 64 mostra o processo de atribuição de medidas realizado por alguns estudantes. Na Figura 64-a, observa-se que o aluno construiu os dois círculos concêntricos com régua e compasso e o retângulo de forma centralizada na coroa circular, identificou a medida dos raios, mas não mencionou o valor da medida da base e nem da altura do retângulo.

Nota-se, na Figura 64-b, que a participante parece ter utilizado a régua e compasso para desenhar a coroa circular; no entanto, o desenho na região interna não pareceu ser feito de maneira sistemática. Na Figura 64-c-d, os estudantes parecem ter seguido uma sequência lógica para a construção, já que utilizaram régua e compasso e indicaram as medidas utilizadas.

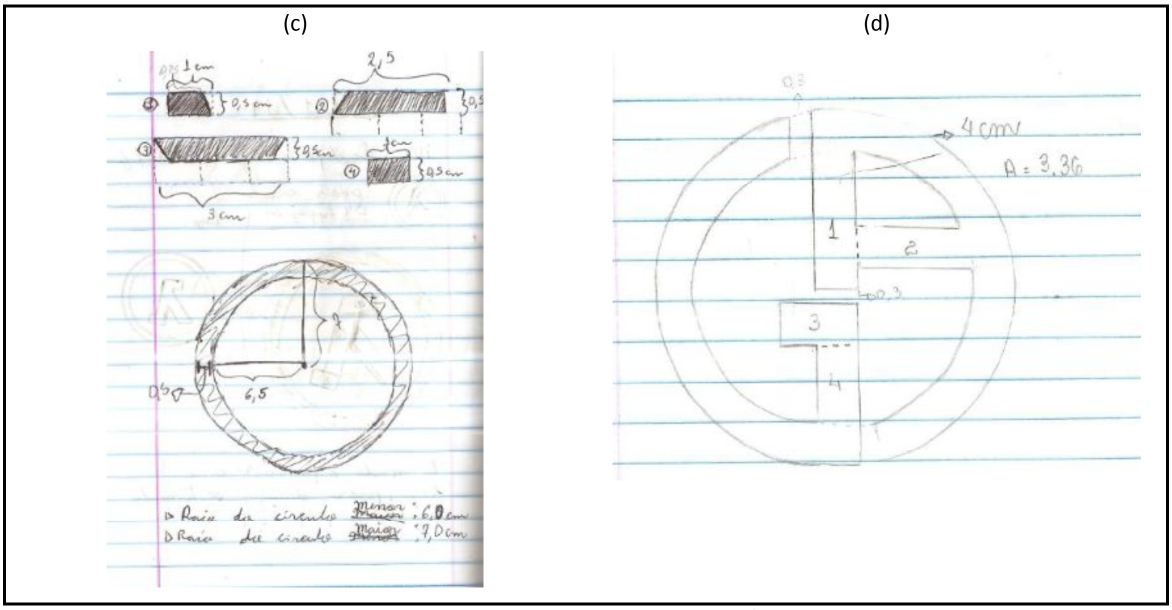


Figura 64. Anotações dos alunos na modelagem na subfase de atribuição de medidas (Etapa 3: Matematização)

Alguns alunos se valeram do papel quadriculado, o que deve ter auxiliado na atribuição de medidas e no cálculo da área (Figura 65). Neste caso, o aluno não utilizou régua e compasso: nota-se que os semicírculos parecem com segmentos circulares, as antenas não estão posicionadas de maneira a manter a simetria, assim como o trapézio desenhado não é isósceles. A legenda com cores sistematiza o processo de identificação de figuras encaminhado pelo aluno.

Figura 65. Anotações dos alunos na modelagem
(Etapa 3: Matematização)

Finalmente, apresentam-se os registros em que se é possível perceber que os alunos elaboraram o desenho de forma sistemática, utilizando papel quadriculado e/ou desenhando eixos cartesianos de modo a respeitar as formas identificadas nos logotipos figurais (Figura 66).

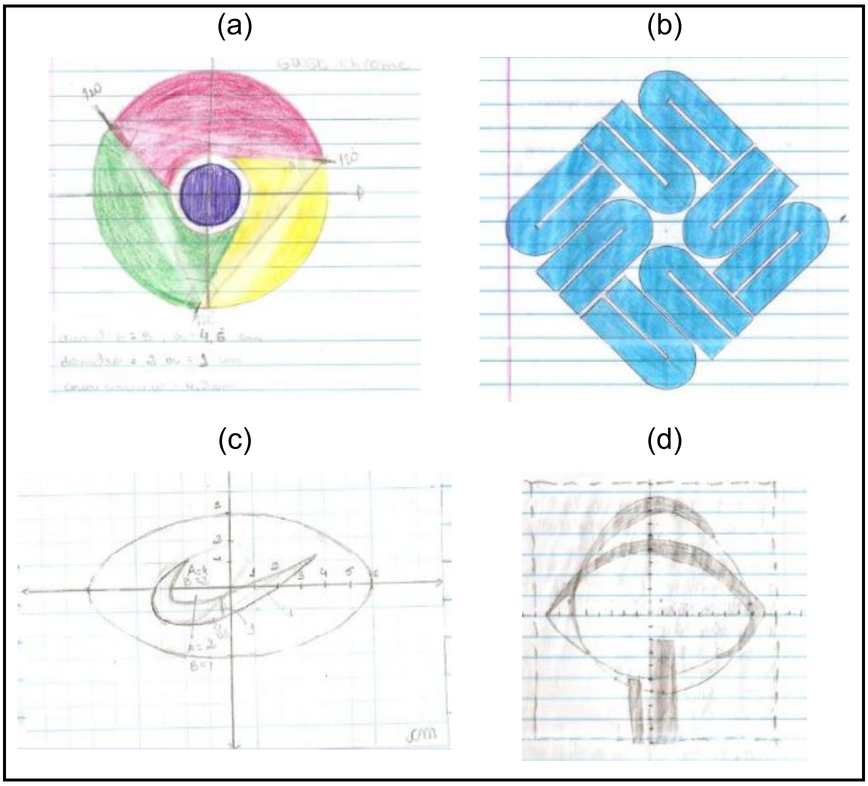


Figura 66. Anotações dos alunos na modelagem na subfase de atribuição de medidas (Etapa 3: Matematização)

Para determinar as áreas dos logotipos figurais do nível I, alguns desenharam as formas geométricas e, a partir das medidas atribuídas para a construção, aplicaram a fórmula de imediato. Na Figura 67, nota-se que o aluno desenhou os losangos a partir das medidas das diagonais e empregou a fórmula – o que não deve ter exigido muito esforço cognitivo para a realização da tarefa, já que não explorou outras propriedades do losango, como as medidas dos lados e dos ângulos.

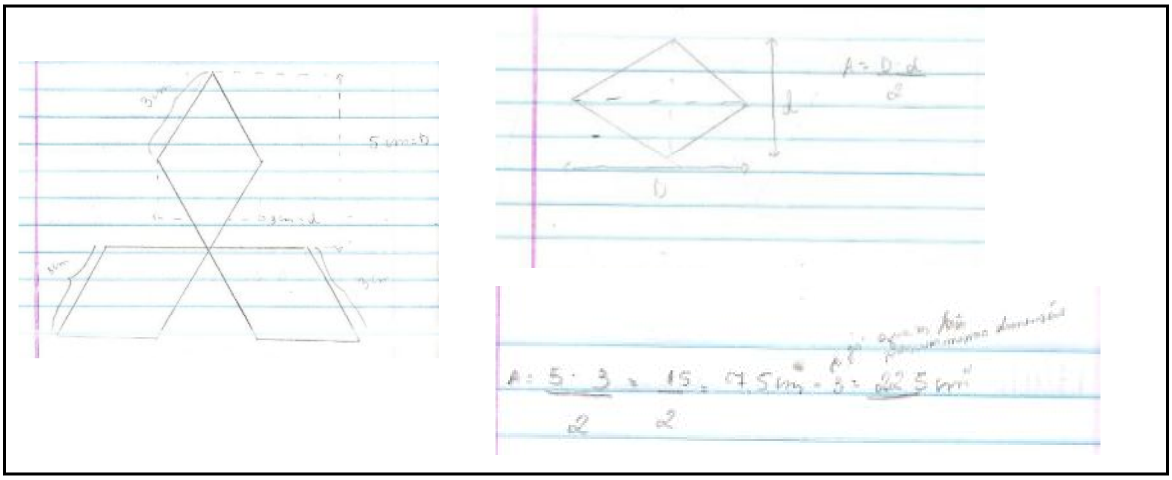


Figura 67. Anotações dos alunos na subfase de determinação das áreas (Etapa 3: Matematização)

Para logotipos figurais da categoria II, foi possível encontrar alunos que realizaram aproximações de curvas como frações de regiões circulares e de paralelogramos, outros que aproximaram as formas para figuras geométricas mais conhecidas e ainda outros que empregaram estratégias de composição e decomposição de formas geométricas.

A Figura 68 indica que o aluno calculou a área do retângulo, adicionou a área da coroa circular e depois subtraiu duas intersecções – a cada uma delas foi atribuída uma área aproximada de um oitavo da área da coroa circular. Neste caso, observa-se que o aluno empregou procedimentos heurísticos para determinar as medidas de área; entretanto, não realizou um estudo mais detalhado para determinar as áreas das intersecções citadas.

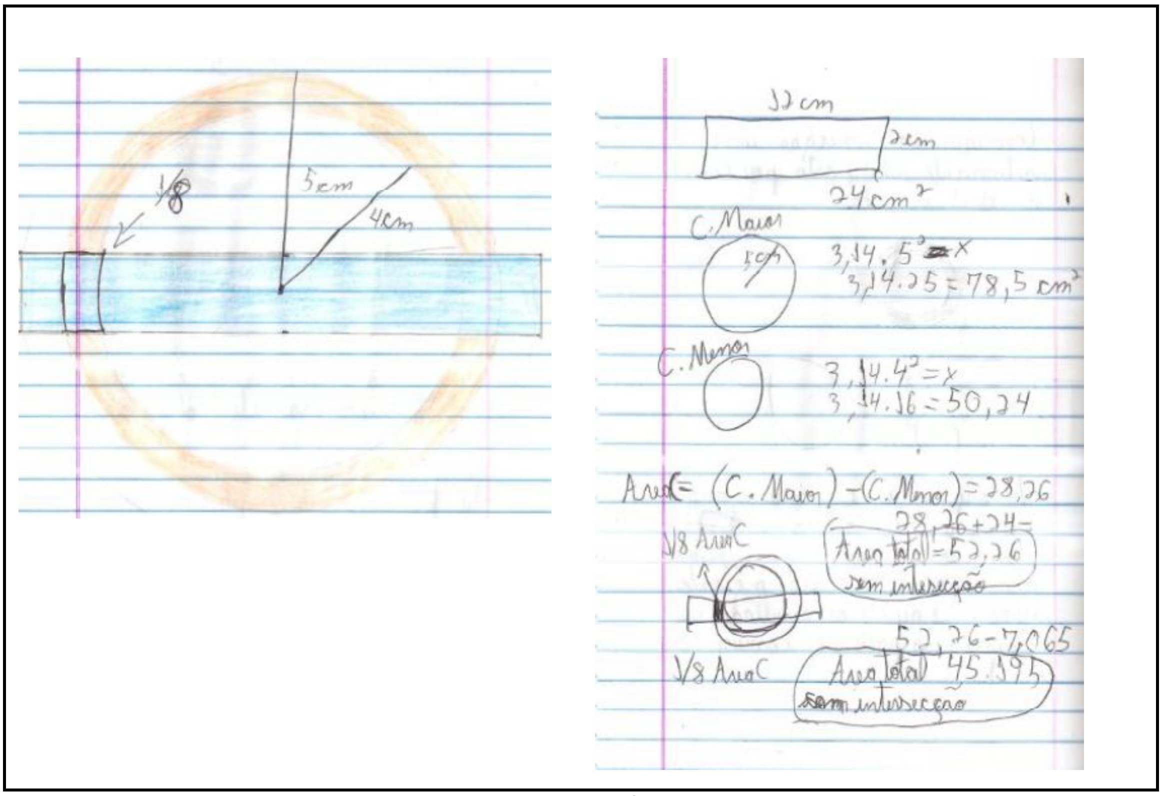
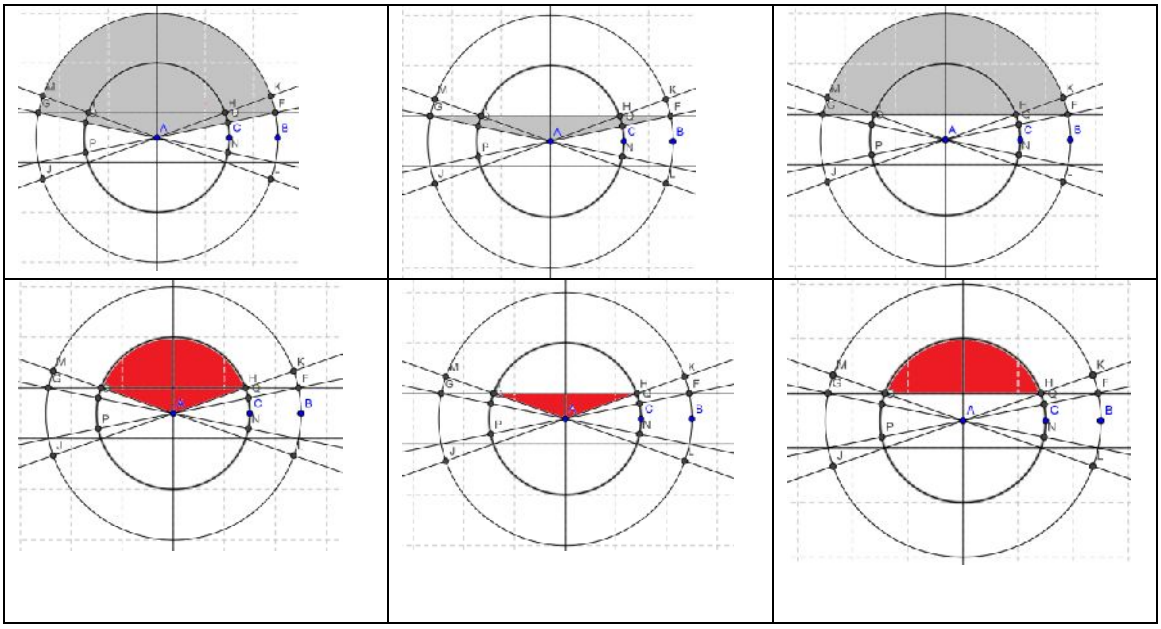


Figura 68. Anotações dos alunos na subfase de determinação de medidas (Etapa 3: Matematização)

A determinação da área indicada pelo aluno na cor laranja poderia ter sido feita de maneira sistemática, calculando-se as áreas dos dois segmentos circulares a partir das medidas dos raios e dos ângulos centrais, conforme mostra a Figura 69.



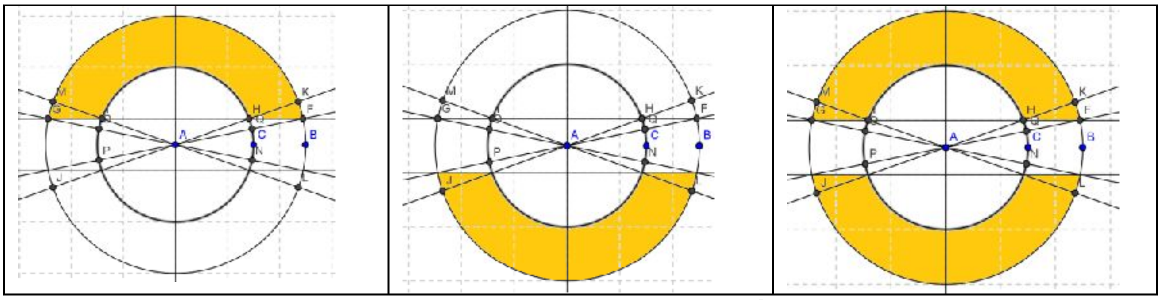
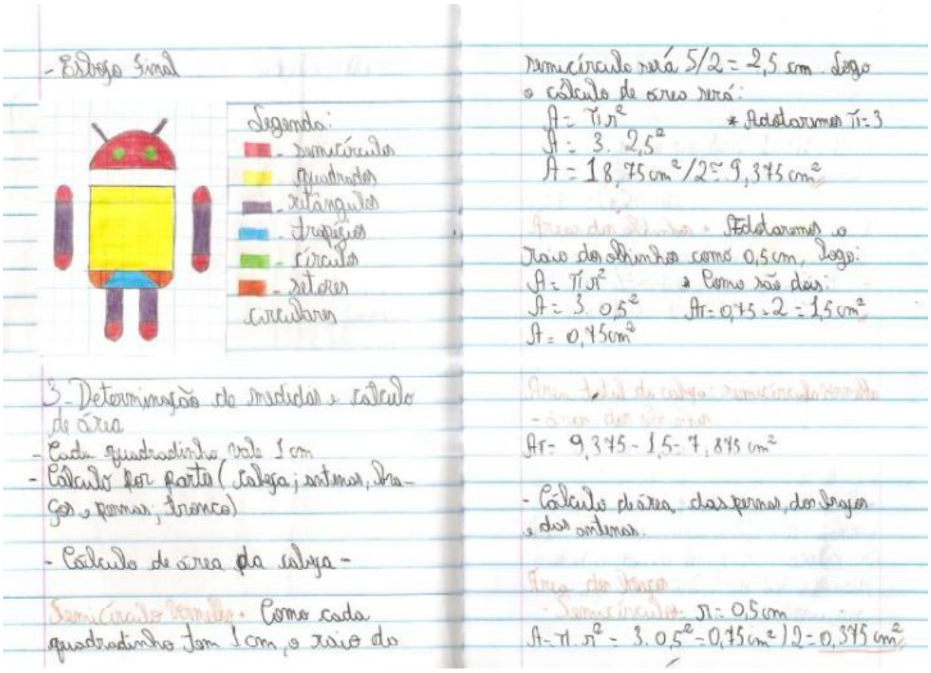


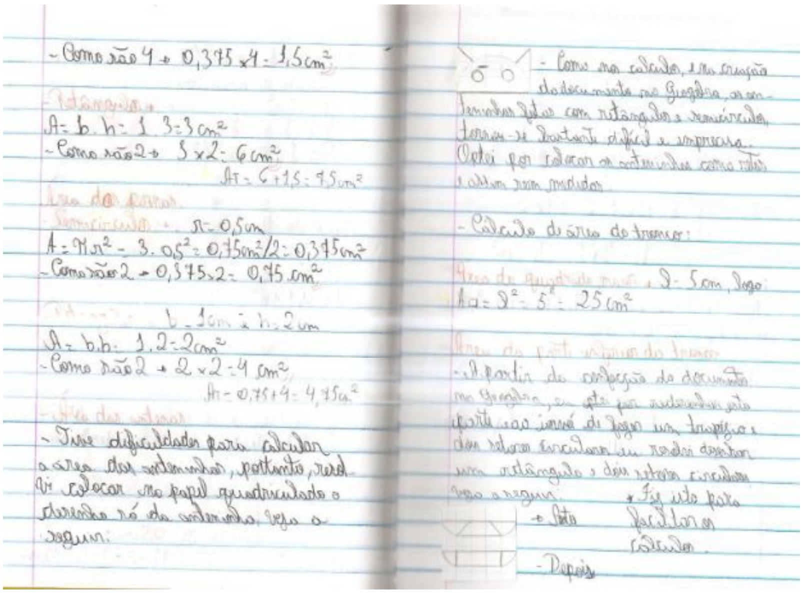
Figura 69. Exemplo de procedimento para determinar a área do logotipo da Figura 68 (Etapa 3: Matematização)

Em outro exemplo, para determinar a medida das áreas, a aluna adotou a medida do lado de cada quadradinho do quadriculado como sendo 1 cm, indicou que o cálculo seria determinado por partes - cabeça, antenas, braços, pernas e tronco – e por fim determinou as áreas do logotipo figural (Figura 70).

(a)



(b)



(c)

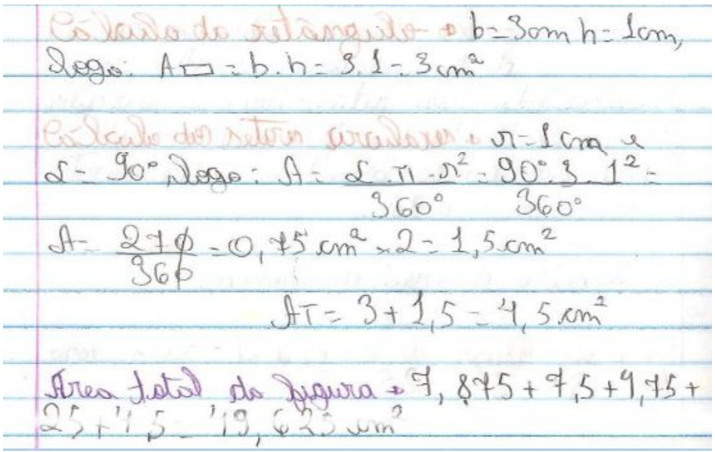


Figura 70. Anotações dos alunos na subfase de determinação das áreas (Etapa 3: Matematização)

Nota-se que, para determinar a medida da cabeça, a aluna identificou o raio como sendo metade de um diâmetro e aplicou a fórmula da área do círculo, dividindo essa área por dois por visualizar a cabeça do mesmo como um semicírculo. Depois de isto feito, determinou as medida das áreas dos olhos, subtraiu-as da área do semicírculo encontrada e indicou esse valor como a medida da área da cabeça do logotipo figural.

Na sequência, a mesma apresentou o seu raciocínio para determinar o valor da medida das áreas das antenas, das pernas e dos braços sempre aplicando valores nas suas respetivas fórmulas.

Parece que a aluna, ao ter que realizar o cálculo de área das antenas, esteve frente a uma situação problema. No registro da Figura 70–b nota-se que ela teve como estratégia recorrer ao papel quadriculado; não obtendo sucesso, aproximou as mesmas para segmentos de retas. Outra situação mencionada pela aluna refere-se à construção do logotipo no Geogebra, quando optou por redesenhar as formas geométricas presentes no tronco do “Android”.

A Figura 71 mostra uma exatidão nas formas identificadas, nas medidas atribuídas e no processo de determinação da área. Nota-se a descrição detalhada dos procedimentos de cálculo realizados pelo aluno.

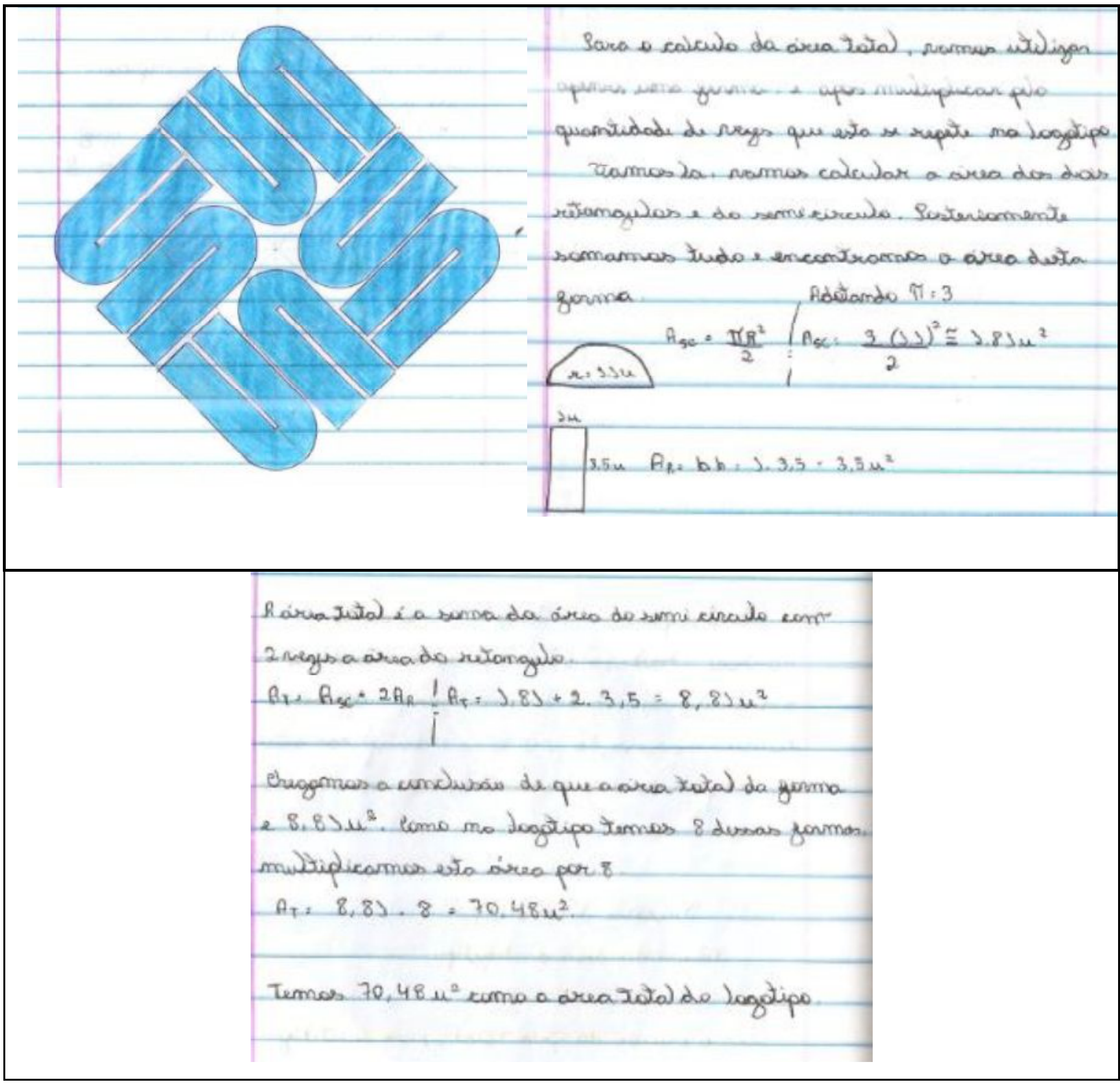


Figura 71. Anotações do aluno no processo de determinação das áreas (Etapa 3: Matematização)

Para modelar logotipos do nível II, foi possível encontrar registros em que, para determinar a área do logotipo figural, o aluno identificou coroas circulares e posteriormente subtraiu as intersecções, considerando cada uma delas como um quadrado de lado 1cm, conforme mostra a Figura 72.

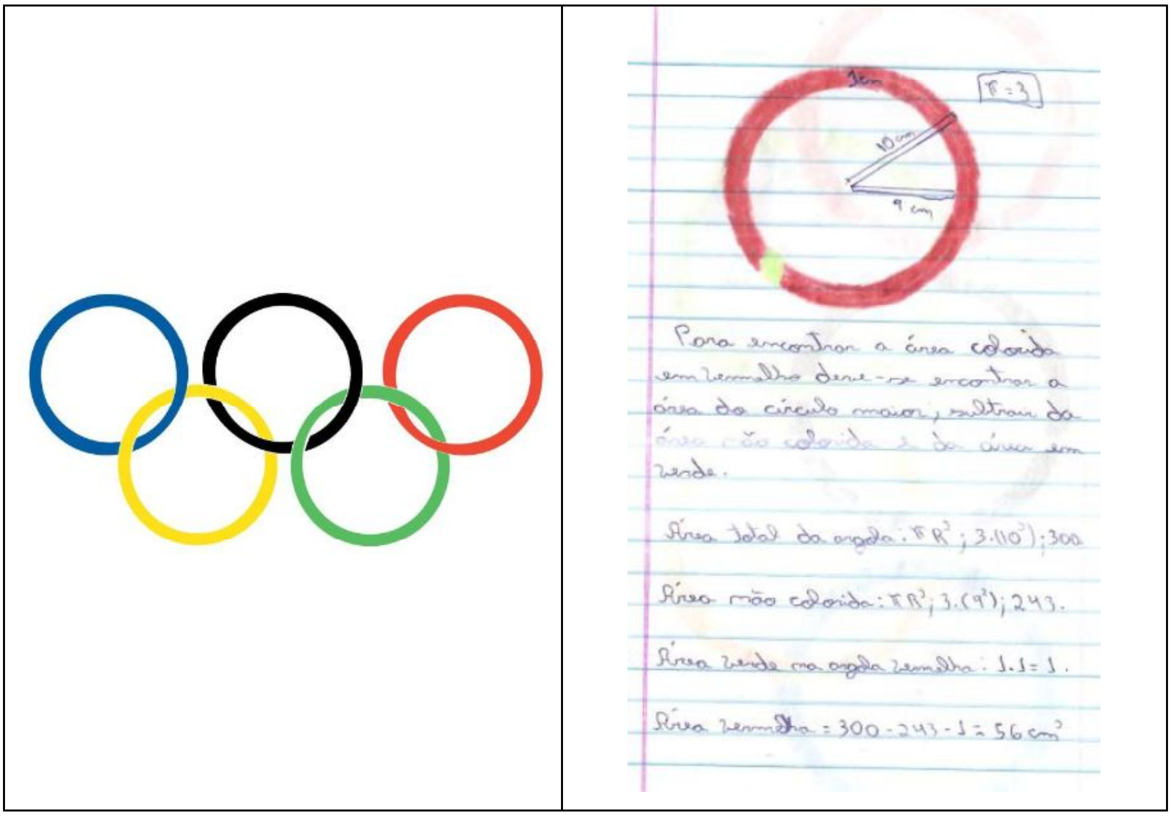


Figura 72. Anotações dos alunos na subfase de determinação das áreas (Etapa 3: Matematização)

No exemplo mostrado na Figura 73, o aluno valeu-se de razão trigonométrica para encontrar a altura do retângulo e, por conseguinte, a área de paralelogramo identificado em seu logotipo figural.

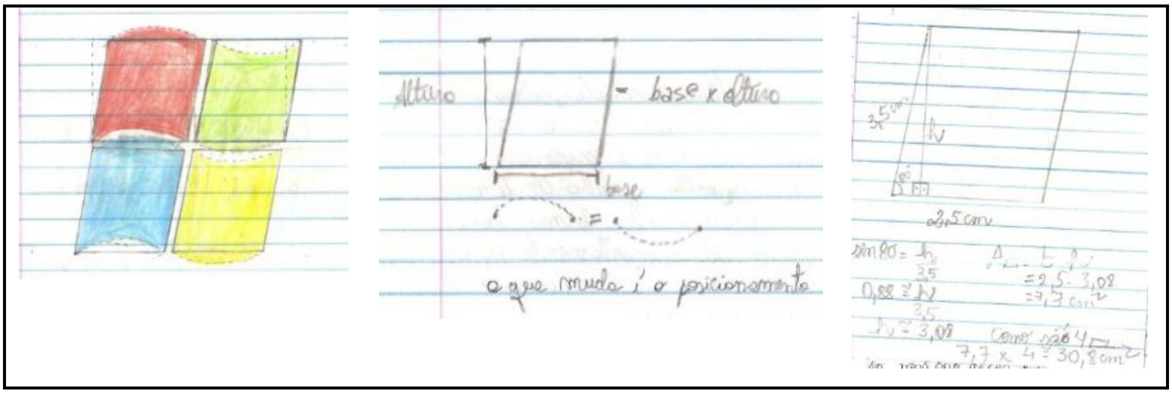
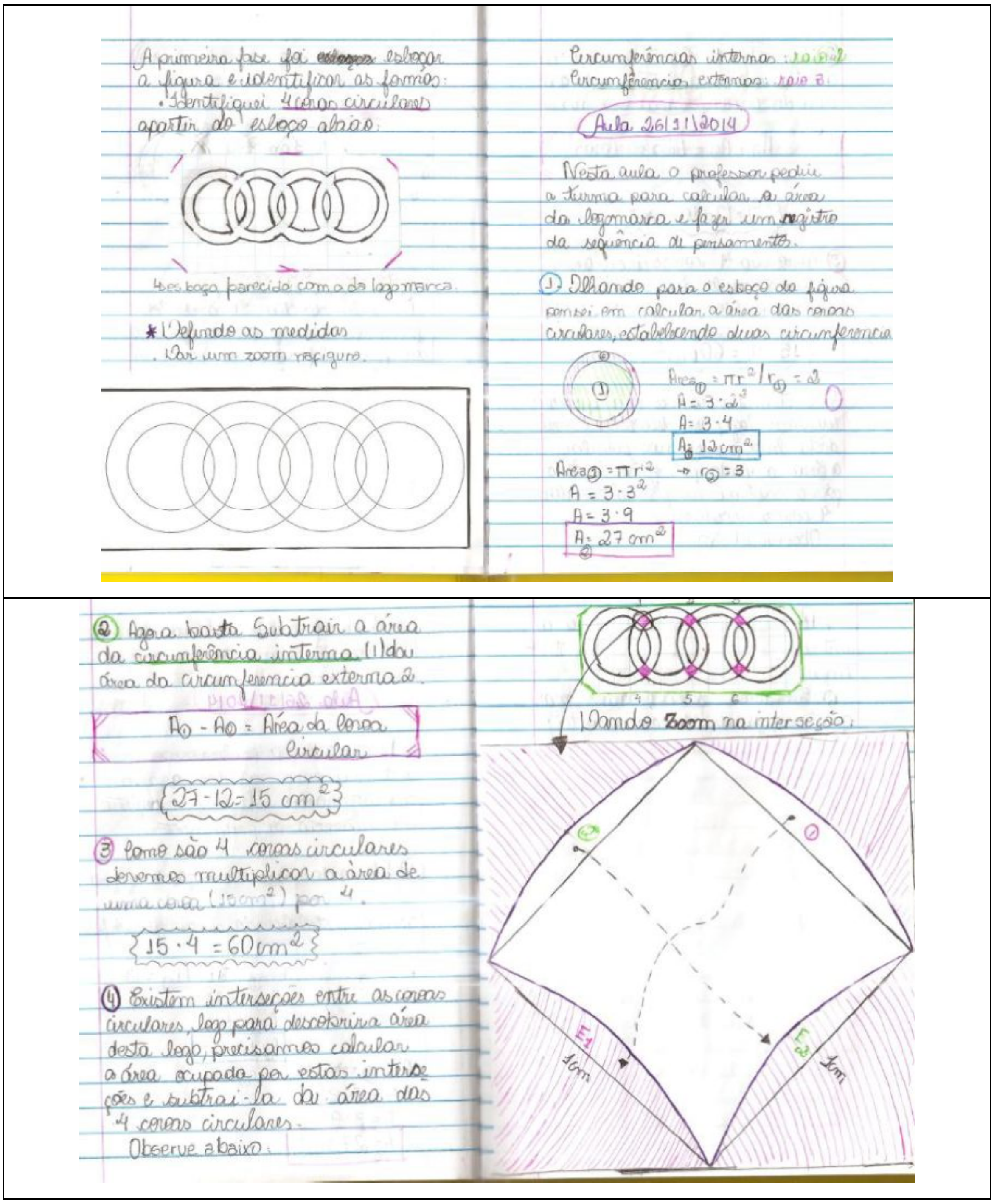


Figura 73. Anotações dos alunos na subfase de determinação das áreas (Etapa 3: Matematização)

Na Figura 74 é apresentado um exemplo de modelagem de logotipo figural do nível III em que a aluna realiza algumas aproximações utilizando composição e decomposição de figuras.



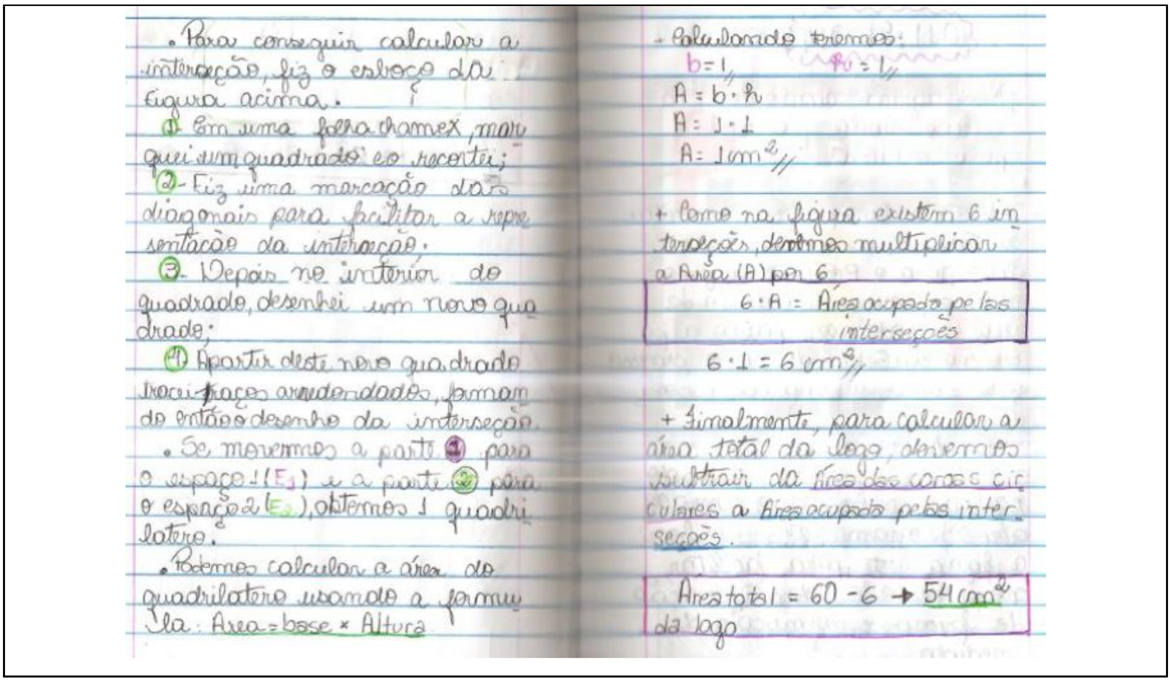


Figura 74. Anotações de aluno no processo de modelagem do logotipo figural (Etapa 3: Matematização)

Já no nível III, vários alunos determinaram as áreas com aplicação direta de fórmulas, com aproximação de formas ou por meio do emprego de algumas estratégias. A figura 75 mostra um exemplo em que a aluna, antes de determinar a medida das áreas, investigou e concluiu – identificando os arcos de 120º – que as três formas geométricas presentes no interior da coroa circular eram congruentes: isto facilitou o cálculo final da área.

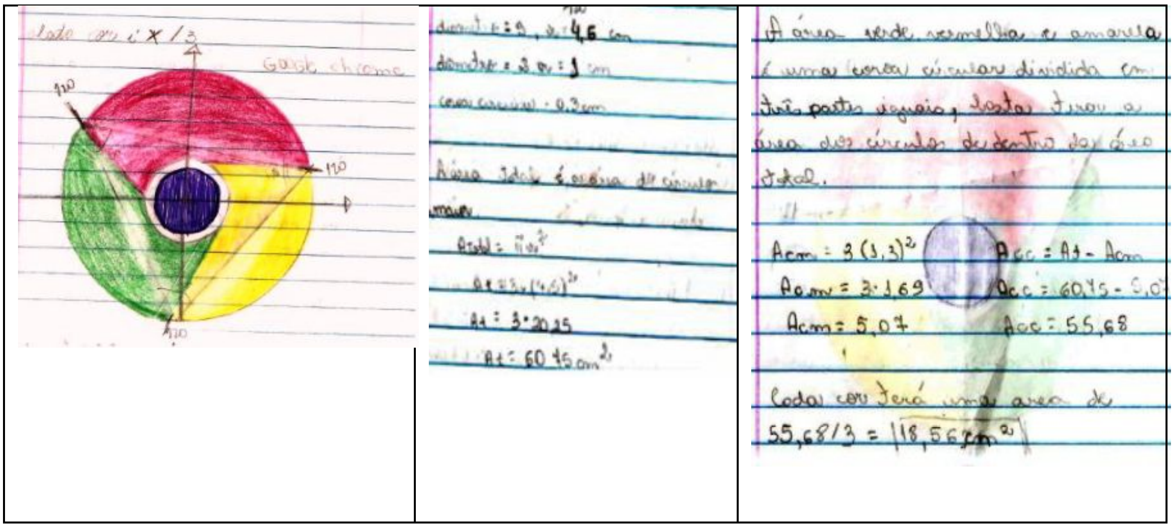


Figura 75. Anotações dos alunos na subfase de determinação das áreas (Etapa 3: Matematização)

Etapa 4: Modelo Matemático

No processo de elaboração dos logotipos figurais utilizando o software Geogebra, foi possível perceber que os alunos estavam empenhados em realizar a atividade. De início, os alunos apresentaram dificuldades no desenvolvimento desta etapa, mas, a cada figura corrigida, os mesmos pareciam se familiarizar com o software. Cabe mencionar que esta etapa tinha por finalidade levar os alunos a validar o modelo, ou seja, verificar a correção das medidas e dos cálculos feitos anteriormente.

As representações produzidas na tela foram categorizadas como corretas ou como incorretas/incompletas. No primeiro caso, consideraram-se como corretas aquelas produções em que os alunos conseguiram representar o logotipo figural com as mesmas medidas atribuídas e encontradas ao longo do processo de modelagem elaborado no diário de bordo. Já as incorretas /incompletas foram aquelas que se aproximaram das representações feitas no papel, mas que careciam de precisão quanto às medidas, à simetria, ao alinhamento de pontos e às dimensões indicadas na atribuição de medidas.

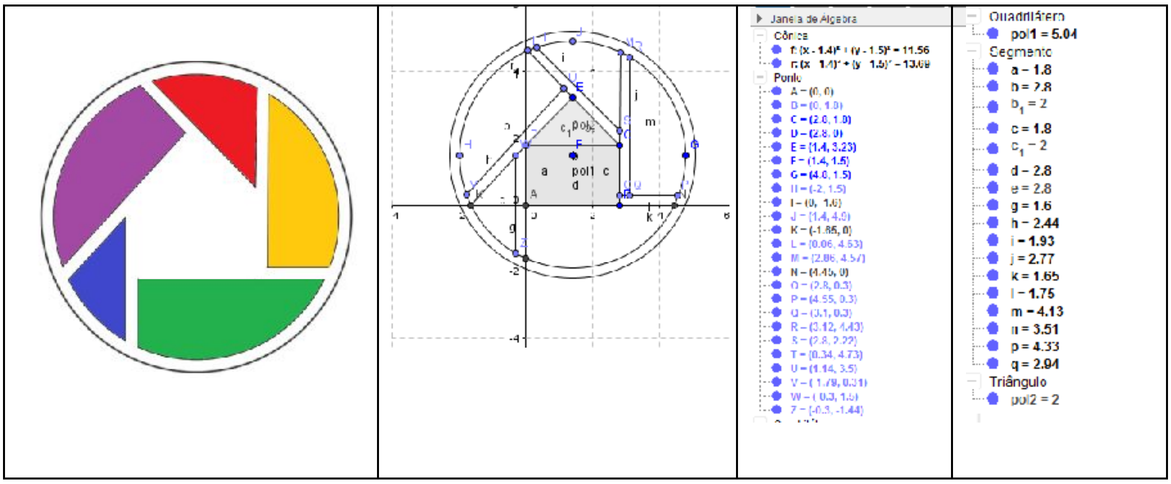


Figura 76. Janelas do Geogebra com um modelo matemático (Etapa 4: Modelo Matemático)

Observe que a construção da aluna iniciou-se com duas circunferências concêntricas de raios com diferença de 0,3. Depois, apoiada nas medidas dos eixos perpendiculares, mencionou os pontos a partir da origem e formando os polígonos.

Nota-se que figura foi elaborada seguindo as medidas do caderno e que ela parece ter se esquecido de observar o alinhamento e as distâncias entre alguns pontos. Como, por exemplo, as abcissas dos pontos Q e R são próximas, mas não são as mesmas – os pontos não estão alinhados - diferentemente das dos pontos Z e W, D e O – os pontos estão alinhados - e as distâncias entre os pontos $d_{O,Q}$= $d_{O,D}$ = 0,30, portanto diferente, de $d_{V,K}$ = 0,34 ; $d_{E,U}$=0,37 e $d_{L,T}$= 0,29. Outro aspecto a ser considerado é que a aluna identificou formas geométricas planas, determinou a área de cada uma delas e nessa subfase do processo de modelagem, trabalhou com uma delas – círculos – as restantes foram construídas por meio de pontos e segmentos de retas, conforme se verifica na Figura 76.

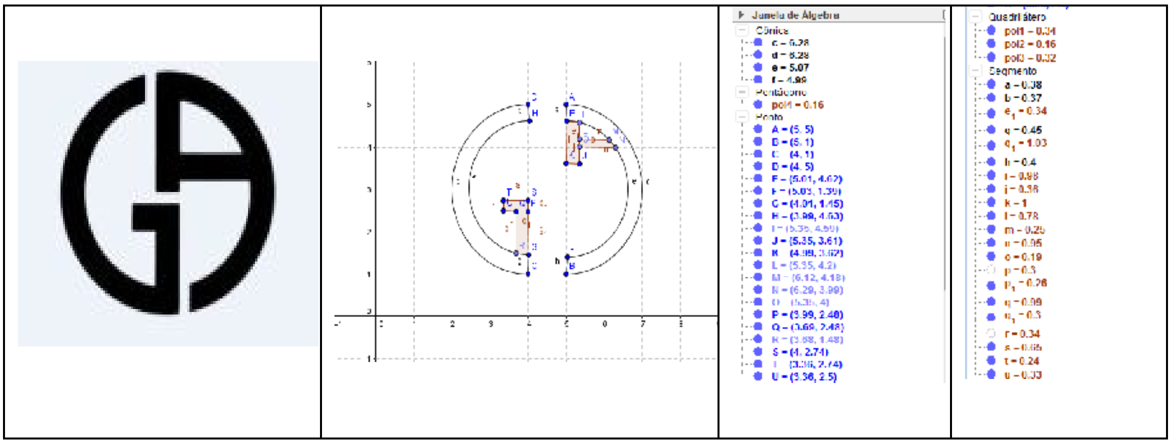


Figura 77. Janelas do Geogebra com um modelo matemático (Etapa 4: Modelo Matemático)

Na Figura 77 observa-se que a arte final elaborada pela estudante não foi bem sucedida, uma vez que o tamanho e a posição das formas estão diferentes do logotipo figural em questão. Em alguns momentos, ela parece ter se apoiado na malha quadriculada e nos eixos para a elaboração do desenho; já em outros a construção parece ter sido realizada de forma aleatória.

Nota-se que os pontos que formam os retângulos internos não estão alinhados, os segmentos a, b, g e h não estão perpendiculares ao eixo horizontal, as medidas de a e b são diferentes g e h. Menciona-se também que a estudante, não utilizou círculos concêntricos e retângulos – como identificados na determinação do cálculo; usou formas geométricas como semicírculo definido por dois pontos, segmentos de reta e pontos, conforme verifica-se na Figura 77.

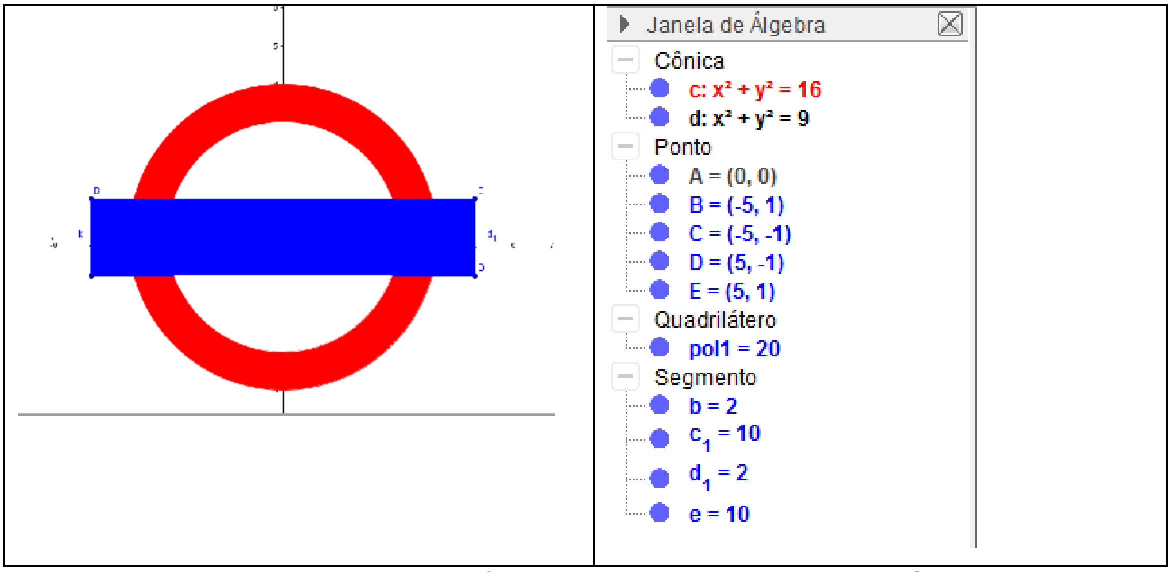


Figura 78. Janelas do Geogebra com um modelo matemático (Etapa 4: Modelo Matemático)

Na representação do logotipo figural de nível II, apresentado na Figura 78, é possível observar que o aluno vale-se de eixos perpendiculares; a origem foi adotada como centro da figura, os raios se diferem em uma unidade e os pontos estão alinhados.

Já na Figura 79, nota-se que a representação obedece uma estrutura geométrica: pela janela algébrica é possível concluir que para representar a coroa circular o aluno desenhou dois círculos de raios 4 cm e 3 cm centrados na origem e que dispôs os pontos A_0 e A_1 de maneira a serem simétricos. As diagonais parecem direcionar o aluno na confecção das regiões de intersecção entre os círculos concêntricos elaborados pelo mesmo para representar o logotipo figural.

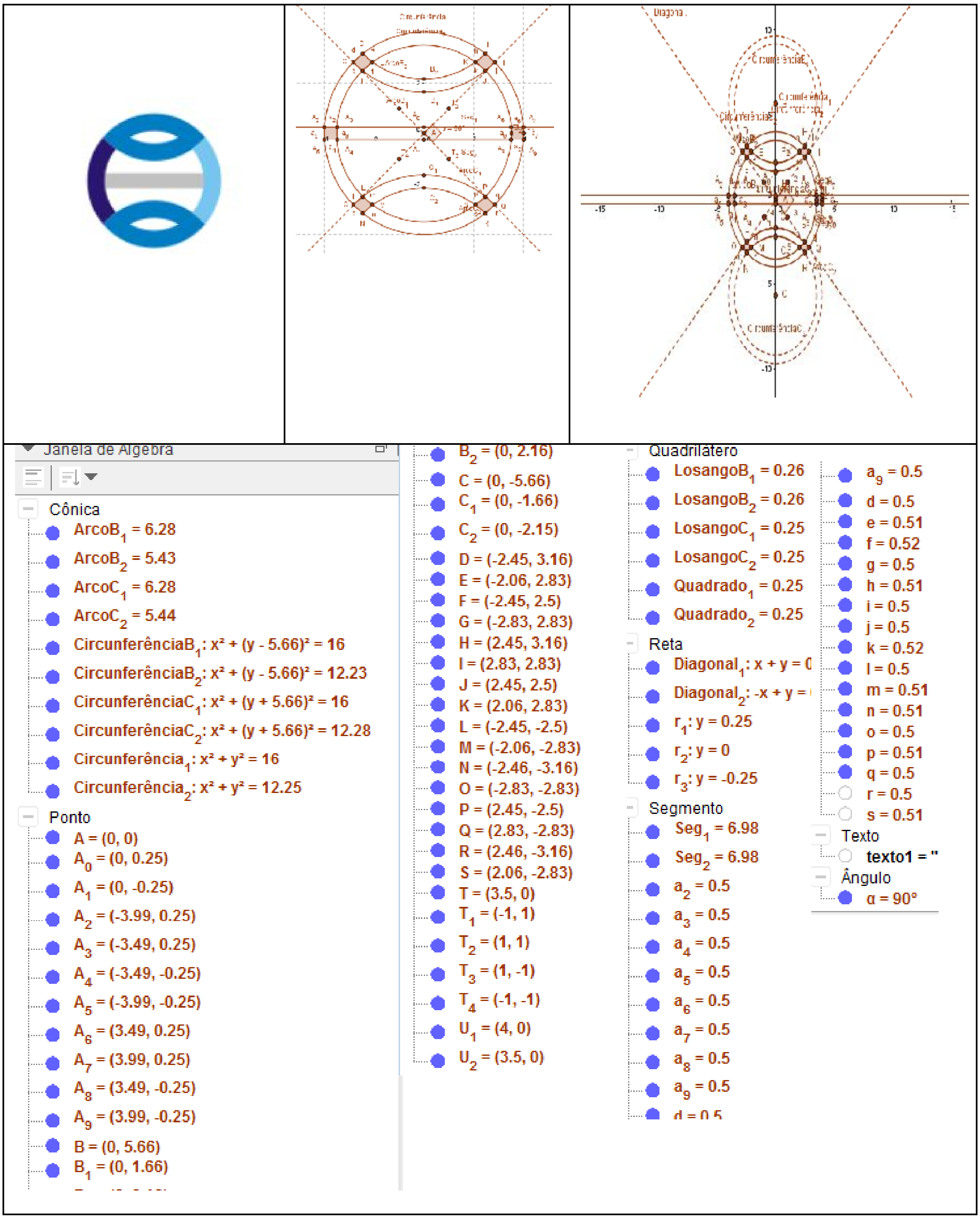


Figura 79. Janelas do Geogebra com um modelo matemático (Etapa 4: Modelo Matemático)

CAPÍTULO IX

A MODELAGEM MATEMÁTICA DE LOGOTIPOS FIGURAIS E UMA DISCUSSÃO DAS TEORIAS

1ª PARTE: CARACTERÍSTICAS DO PROCESSO DE MODELAGEM DO LOGOTIPO FIGURAL

9.1 Caracterização do processo de modelagem dos logotipos figurais

A presente discussão pretende caracterizar o processo de modelagem matemática de logotipos figurais de acordo com algumas vertentes apontadas na literatura.

Com base em Biembengut e Hein (2007), considera-se que o processo de modelagem em questão tem muito a ver com o trabalho de um artista: o aluno escolhe um logotipo figural e passa a identificar as formas, atribuir medidas, determinar as áreas, reproduzir no Geogebra e elaborar a arte final – o que permite concordar com os autores quando definem a modelagem como “a arte de expressar por intermédio de linguagem matemática situações problema de nosso meio (...)” (2007, p. 8).

O tipo de modelagem aqui apresentada exige do aluno conhecimentos prévios acerca das figuras geométricas e também de composição e decomposição de figuras, para que o mesmo saiba interpretar geometricamente o logotipo.

Assim, a modelagem matemática realizada pelos alunos consistiu no processo de obtenção de um modelo, ou seja, o logotipo foi representado por um conjunto de símbolos, de conceitos e de relações próprios da geometria do ensino básico. O processo pode ser explicado por meio de algumas fases: (a) interação; (b) matematização e (c) modelo matemático, com características próximas àquelas propostas por Biembengut e Hein (2007).

O Quadro 6 mostra a comparação entre as fases propostas pelos autores e aquelas identificadas no processo de modelagem aqui discutido.

Quadro 6. Fases da modelagem matemática

Fases propostas por Biembengut e Hein (2007)	**Fases propostas para modelagem do logotipo figural**
Interação • Reconhecimento da situação-problema. • Familiarização com o assunto a ser modelado (referencial teórico).	Interação • Aproximação do aluno com o procedimento heurístico do processo de modelagem de logotipo figural. • Escolha do logotipo a ser modelado.
Matematização • Formulação do problema. • Resolução do problema em termos do modelo.	Matematização • Identificação de formas. • Atribuição de medidas. • Determinação da medida das áreas.
Modelo Matemático • Interpretação da solução. • Validação do modelo (avaliação).	Modelo Matemático • Interpretação do modelo e representação no Geogebra. • Validação das áreas encontradas para cada forma. • Arte final.

A etapa da interação proposta pelos autores está relacionada ao reconhecimento da situação problema e familiarização com o assunto a ser modelado (referencial teórico). Não obstante disso, no processo de modelagem do logotipo figural os alunos, inicialmente, por meio da exposição do professor, tiveram contado com a situação-problema que eles deveriam resolver; de antemão, eles já estavam familiarizados com o conteúdo a ser utilizado, ou seja, área de figuras planas. Os logotipos figurais estão presentes nos diversos canais de comunicação (internet, panfletos, placas, cartazes etc.) e a pesquisa e escolha dos desenhos a serem modelados caracterizaram a familiarização dos alunos com a situação; nesta fase, a situação – utilizando a indicação feita por Bassanezi (2006) – ainda não se constituía em um problema a ser resolvido.

A etapa denominada por matematização está subdividida em formulação e resolução do problema e estas foram seguidas pelos participantes a partir do momento em que eles identificavam as formas, atribuíam medidas e determinavam o valor das áreas. Concordando com o que foi mencionado por Biembengut e Hein (2007), essa etapa pareceu ser a mais complexa e desafiante de todo processo de modelagem do logotipo figural, pois foi nesse momento em que os modeladores estiveram frente à situação-problema e tiveram que empregar estratégias de solução para determinar as áreas.

Assim, o processo de modelagem de logotipo figural, pareceu exigir dos alunos o estabelecimento de hipóteses relativas ao processo de decomposição e composição de figuras, além da determinação das medidas de seus lados e ângulos.

Em várias ilustrações, é possível verificar que os alunos estiveram diante de uma situação problema e para isto desenvolveram uma série de estratégias – aproximação, decomposição em formas conhecidas, atribuição de medidas proporcionais - para determinação do logotipo figural.

A terceira etapa do processo, como apresentado por Biembengut e Hien (2007), refere-se à conclusão do modelo; o professor avaliou as figuras identificadas, as fórmulas e os cálculos realizados referentes a cada logotipo figural modelado e apresentadas no diário de bordo. Em alguns casos, o modelo encontrado pelo aluno não apresentava todas as formas na escrita algébrica, sendo, assim, retomada a segunda etapa com intuito da realização de alguns ajustes: identificação de outras formas, por exemplo.

A sequência de ações para interpretar o modelo de modo a representa-lo na tela do computador já envolveu, de certa maneira, a validação do modelo, pois qualquer deformação da figura a ser modelada geometricamente implicou, consequentemente, ao retorno da fase anterior. A confirmação das medidas das áreas obtidas pelo aluno pôde ser feita, em vários casos, por meio dos comandos do Geogebra, o que também contribuiu para validar o modelo.

A arte final foi feita com o objetivo de colorir as superfícies obtidas de modo a aproximar o modelo obtido ao logotipo figural escolhido.

Ao longo de todo processo de modelagem do logotipo figural os alunos tiveram que elaborar um relatório – conforme descrito nos resultados – em que fizeram anotações dos procedimentos desenvolvidos.

A presente proposta parece divergir em partes da concepção de Burack (2010) devido a ideia de modelo aqui não se constituir como qualquer representação que permitia ao aluno tomar decisão; tal processo não exigiu dos alunos a criação de uma fórmula algébrica para calcular área de logotipos figurais semelhantes ao modelado por cada aluno.

O que se pode afirmar é que o processo de modelagem de logotipo figural parece ter sido exigido dos alunos uma tomada de decisão frente ao conjunto de procedimentos heurísticos relativos à determinação das áreas, mas em nenhum momento preocupou-se em tentar explicar, matematicamente, algum fenômeno presente no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer previsões e inclusive tomar decisões. Inicialmente, os alunos pareciam não estar diante de um problema e sim de uma tarefa, ou seja, determinar a área de logotipos figurais. Apenas na fase de interação, ao identificar formas, eles entravam em contato com as primeiras situações problemas.

A definição dada por Bassanezi (2006) parece estar também em desacordo com a modelagem aqui realizada, já que esta não consistiu na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos – e muito menos em interpretar suas soluções na linguagem do mundo real. O que se fez foi tomar logotipos figurais presentes no cotidiano dos alunos e se aplicou conhecimentos matemáticos, especificamente, geométricos, para determinar formas, medidas e a área das mesmas.

Nota-se que a metodologia de ensino aqui desenvolvida não exigiu pesquisa por parte dos alunos e nem por parte do professor, parecendo, assim distanciar do estilo de trabalho proposto por Burak (2004), visto que a escolha do tema foi realizada pelo professor – área de figuras planas – e os logotipos figurais a serem modelados foram escolhidos pelos alunos com ajuda do professor.

Nas ideias de Skovsmose (2000), o processo de modelagem matemática consiste em um ambiente de aprendizagem; a modelagem de logotipos figurais deve ter proporcionado aprendizagem do tema, já que tiveram que identificar e nomear figuras, atribuir medidas e determinar as áreas.

Sendo um ambiente de aprendizagem, é possível ponderar que a modelagem matemática desenvolvida vai de encontro ao que é proposto por Barbosa (2001), pelo fato de os alunos serem convidados a investigar a área de logotipos figurais presentes no cotidiano deles. Mas, vale salientar que essa perspectiva de modelagem aqui desenvolvida não trata a modelagem matemática na visão sociocrítica – como proposto por Barbosa e Santos (2007) - já que essa não exprime um esforço de cientificar os estudos críticos sobre o papel da matemática na sociedade, no contexto de desenvolvimento do ambiente de modelagem Matemática.

Conforme mencionou Barbosa (2007), o processo de modelagem do logotipo figural realizado pelos alunos, no ambiente de modelagem matemática, favoreceu a realização de muitas ações como fazer operações, desenhos, organizar esquemas e principalmente produzir discursos no diário de bordo. Permitindo assim, com que tanto o aluno quanto o professor saíssem da tradicional posição de receptor e transmissor e passarem a ser colaboradores para a construção da aula, produzindo um só discurso, o de busca de solução para cada problema surgido.

Observa-se que, embora o processo de modelagem de logotipo figural atenda alguns pontos da perspectiva proposta por Barbosa (2007), ele não apresenta um modelo com vistas a fornecer subsídios para a tomada de decisões nas práticas sociais; o processo de investigação da área de um logotipo figural possui um caminho ou um esquema definido a priori, a situação de pesquisa tem origem em um logotipo do cotidiano, mas se restringe apenas conteúdos de matemática, especificamente a geometria.

2ª PARTE: A FORMULAÇÃO E A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS NO PROCESSO DE MODELAGEM DO LOGOTIPO FIGURAL

9.2 A formulação e a solução de situações problemas

Na fase de matematização da modelagem de logotipos figurais os alunos parecem formular e solucionar um dado problema. De acordo com Biembengut e Hein (2007), é na fase da matematização que os sujeitos envolvidos no processo de modelagem formulam e solucionam um problema.

Em três momentos foi possível identificar que os alunos formulam problemas: na subfase de identificação das formas, no processo de atribuição de medidas (metrificação) e na determinação das áreas (algebrização e aritmetização). Cabe mencionar que, para cada momento, obtinham-se problemas de características distintas.

O tipo de problema formulado na etapa de identificação das formas é de natureza figural e exigia que o aluno empregasse procedimentos heurísticos frente aos processos de composição de formas geométricas para representar uma dada figura.

Com a identificação das formas, os alunos formulavam um novo problema: esse, então, tinha natureza métrica e exigia que o aluno determinasse as medidas de comprimento de cada contorno das figuras anteriormente identificadas.

Após determinar as medidas, os alunos formulavam um problema de natureza aritmética ou algébrica e esse exigia que ele empregasse um procedimento para determinar a área de cada superfície.

Com base nas ponderações de Pozo e Angón (1998), pode-se afirmar que cada tipo de problema anteriormente mencionado envolve, essencialmente, procedimentos específicos, já que o solucionador deverá desenvolver uma sequência de ações de acordo com uma hipótese preconcebida e orientada para consecução de uma meta – que é a resposta.

No problema de natureza figural, os solucionadores aplicaram procedimentos heurísticos, afim de reconhecer formas conhecidas que compunham o desenho original. No de natureza métrica, o mesmos utilizaram réguas e transferidores para determinar medidas dos segmentos e ângulos; em alguns casos ainda aplicaram procedimentos matemáticos – como, por exemplo, razões trigonométricas, leis dos senos e cossenos e Teorema de Pitágoras – para determinar uma medida em decorrência de outra.

No processo de determinação das áreas foi possível encontrar alunos que realizaram a adição ou subtração de figuras para se determinar o valor de determinada superfície. Esse tipo de problema pareceu exigir do solucionador o conhecimento de alguma fórmula algébrica ou de um procedimento específico para determinar a área de uma superfície a partir da composição ou decomposição de duas ou mais formas geométricas.

De fato, as situações aqui não se caracterizavam enquanto um texto matemático e sim como uma necessidade do aluno, enquanto sujeito modelador, de determinar o logotipo figural a partir de formas geométricas. Evidencia-se também que em alguns casos as respostas desses problemas eram imediatas; em outros momentos não, sendo necessário empregar estratégias, conforme pode ser observado nos registros dos alunos no processo de modelagem. Na perspectiva psicológica de Echeverría e Pozo (1998), Mayer (1992), Polya (1978) e Sternberg (2000), a situação descrita anteriormente se caracteriza como problema, já nem sempre os alunos dispunham de um caminho rápido para identificar formas, atribuir medidas e determinar as áreas; em vários casos os alunos não tinham nenhum método de solução óbvio para solucioná-lo; e eles tiveram que realizar algumas etapas até que se atingir o objetivo de identificar uma determinada região, atribuir uma medida ou determinar a área das mesmas.

No que se refere à identificação das formas, é possível mencionar que esse processo, com base em Brito (2006), possui características da etapa da representação mental do problema: o sujeito forma uma imagem mental – a partir da percepção visual – e tenta organizá-la em uma representação.

Evidentemente, os alunos sabiam que o processo de identificação de formas ocorre no âmbito da geometria. Assim, a etapa de categorização do problema – em que o mesmo pode ser classificado em um determinado tipo, ou relativo a um determinado conteúdo – já fora antecipada: o que se fazia necessário, nesse momento, era identificar, entre as formas geométricas conhecidas, aquelas que, no todo ou partes, poderiam ser utilizadas para representar, ainda que não plenamente, o logotipo escolhido.

A estimativa de solução parece ser realizada quando os participantes deste processo representavam o logotipo figural a ser modelado no papel quadriculado e por meio da contagem de quadrados indicavam o valor aproximado da área do mesmo. Cabe mencionar que nem todos os alunos realizaram esse processo de estimativa.

Em todos os processos desenvolvidos pelos alunos, foi possível identificar o planejamento de estratégias, técnicas e/ou algoritmos ao ter que atribuir medidas e determinar a medida da área de cada logotipo figural. Em alguns casos verificou-se que os alunos conseguiram monitorar as estratégias a ponto de perceber que a estratégia empregada não levaria a solução correta.

Ao longo do processo de modelagem do logotipo figural de cada aluno, foi possível perceber, por meio dos registros realizados no diário de bordo, dois momentos em que os alunos conseguiam monitorar o resultado do problema formulado e solucionado pelos mesmos.

Um refere-se ao momento em que os alunos encontraram o resultado final da solução e observaram que o valor encontrado era muito grande ou muito pequeno em relação às medidas atribuídas para as dimensões de cada uma das formas; e outro se refere ao processo de representação do logotipo no computador em que, ao representar o mesmo com as medidas atribuídas para determinar as áreas, os alunos verificavam distorções ou alguma deformação.

Com características um pouco distintas do que foi proposto por Brito

(2006), ao dar a resposta final – ou seja, o modelo com as descrições realizadas no diário de bordo – os modeladores não compreendiam um texto e sim pareciam compreender a heurística das figuras que fazem parte de cada logotipo figural e reconhecer a área não apenas como um número e sim como grandeza.

A solução dos problemas realizada ao longo do processo de modelagem parece atender o que é mencionado por Echeverría e Pozo (1998), ou seja, que ensinar a solucionar problemas não consiste somente em dotar os alunos de habilidades e estratégias eficazes. Observa-se que o desenvolvimento das estratégias de solução empregadas por cada aluno, tanto para identificar as formas, quanto para atribuir medidas e determinar as áreas de cada logotipo figural, parecem permitir que alunos criassem hábitos e atitudes para conceber a aprendizagem como um problema para o qual deve ser encontrada uma resposta.

Além disso, as situações formuladas e solucionadas pelos alunos parecem permitir o reconhecimento deles frente à capacidade de formular problemas reais e de transformar algumas situações em problemas a serem estudados e investigados.

3ª PARTE: OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA NO PROCESSO DE MODELAGEM DE LOGOTIPOS FIGURAIS

9.3 Os registros de representação na modelagem

Na perspectiva de Duval (2012), o processo de modelagem aqui desenvolvido parece contribuir para o desenvolvimento integral dos alunos e de suas capacidades de raciocinar, de analisar e de visualizar, já que a caracterização desta atividade matemática do ponto de vista cognitivo pautou-se em diferentes maneiras de se representar o conhecimento, seja por meio de figuras geométricas, escritas algébricas e numéricas e da própria língua natural. Ou seja, ao longo do processo desenvolvido os alunos puderam formar vários registros de representação semiótica.

Pelas análises apresentadas anteriormente, sabe-se que a etapa de interação da modelagem do logotipo figural foi composta por duas subfases: a primeira foi caracterizada pelo ensino do procedimento heurístico de modelagem de um logotipo figural, tomado como exemplo, e a outra de escolha do logotipo figural a ser modelado pelos alunos.

Na primeira subfase deste processo de modelagem o professor ao expor para os alunos o logotipo figural, Google Drive, ele parece partir de um registro multifuncional – figura geométrica plana em dimensão 2 – e por meio dos questionamentos realizados – se utilizando da língua materna – transformou o mesmo em um registro monofuncional um número ou a medida da superfície. Nota-se que nesse processo o professor partiu de uma representação não discursiva, se utilizou de uma representação discursiva para transformar um registro multifuncional em monofuncional.

A atividade matemática aqui proposta também possibilitou o desenvolvimento das funções cognitivas *semiósis* e *noésis*. O sistema semiótico utilizado pelo professor na exposição dessa subfase de apresentação do processo de modelagem pode ser denominado por registros de representação já que o mesmo atende as três atividades cognitivas do pensamento ligadas à *semiósis*: formação, conversão e tratamento de uma figura identificável (Google Drive).

Ainda na primeira é possível notar que ela possibilitou os alunos formarem, por meio dos slides utilizados, registros de representação semióticos no diário de bordo. A formação desses registros de representação parece apenas ter sido possível pelo fato dos alunos participarem da construção do registro de representação elaborados pelo professor.

Ao ver a figura – reconhecer as unidades figurais em (2D) – os alunos, juntamente com os registros de representação elaborados pelo professor, puderam realizar transformações dentro do mesmo registro semiótico formado – tratamento – identificando triângulos, paralelogramos e até hexágonos não regulares.

Na primeira subfase, no processo de atribuição e determinação de medidas para cada parte do paralelogramo – base e altura – os alunos parecem ter que descontruir a dimensão (2D) para (1D) além de iniciar o processo de transformação deste registro de representação em outro. Nota-se que o professor juntamente com os alunos converte uma figura em um número.

É possível identificar nesta subfase mais dois aspectos importantes frente apreensão figuras dos alunos um se refere ao desenvolvimento da percepção diante de figuras e outro ao modo de realizar operações com as mesmas.

Ao expor o modo de se representar o logotipo figural no Geogebra, o professor apresentou um modo de como representar o mesmo no computador, realizando a desconstrução dimensional ((n-1)/D) do logotipo figural do Google Drive, conforme a nomeação por Duval (2011).

Já na segunda subfase de forma implícita o professor parece ter observado as figuras escolhidas pelos alunos se atentando todos os níveis de apreensão propostos por Duval (2011), pela viabilidade do processo de modelagem matemática nesse nível de ensino.

Ao que se refere a etapa de matematização do logotipo figural, como mencionado, percebeu-se três subetapas identificação das formas, atribuição de medidas (metrificação) e determinação das áreas (algebrização e aritmetização) dos logotipos.

Na subfase de identificação das formas foi possível verificar dois procedimentos utilizados pelos alunos: um em que eles realizavam o esboço e a partir dele identificava as formas e outro em que eles no próprio logotipo impresso identificavam as mesmas. Acredita-se que em ambos ocorreram as atividades de formação e tratamento dos registros de representação semióticas (DUVAL, 2012, p.18).

Evidentemente, que em alguns casos essa subfase parece ter exigido os alunos, na perspectiva de Duval (2011), ver a figura. Nota-se que o mesmo teve que reconhecer formas, isto é, os contornos fechados justapostos, superpostos e separados do logotipo figural a ser modelado.

Pode ser que alunos que realizaram o esboço tiveram a oportunidade de desenvolver as suas capacidades de apreensão: *sequencial* diante de figuras geométricas, pois esses podem ter notado que na reprodução do logotipo figural dependia de propriedades figurais ou de um instrumento; *perceptiva* quando teve que realizar a interpretação das formas geométricas do logotipo figural; *mereológicas* quando teve que reconhecer partes da figura; *posicional* quando tiveram que estudar a posição de uma dada figura diante de um referencial.

Diferente dos alunos que realizaram a divisão das figuras em partes no próprio logotipo figural impresso, podendo ter desenvolvido assim apenas a capacidade apreender *mereológicamente* figuras geométricas.

Na subfase de atribuição de medidas, diante dos cinco procedimentos ocasionados para se atribuir medidas para os logotipos figurais – utilizando instrumentos, medindo o logotipo impresso, elaborando desenho com medidas a partir das medidas do impresso ou proporcionais, desenhando no papel quadriculado e desenhando de forma sistemática – os alunos parece aqui iniciar o processo de transformação de um dado registro geométrico para um numérico. Convertendo assim, formas de (1D) e (2D) para um número.

Ainda nessa subfase é possível perceber os alunos realizaram a desconstrução dimensional de formas geométricas de um dado (2D/1D). Os alunos que utilizaram instrumentos para determinar as medidas podem não ter desenvolvido nenhuma capacidade de apreensão perceptiva e nem operatória. Já os que desenharam com medidas iguais a um desenho ou proporcionais aos impressos ou utilizando o papel quadriculado esses tiveram a oportunidade de desenvolver as apreensões perceptivas – sequencial e perceptiva e as operatórias – mereológicas, óticas e posicionais – sendo a ótica para logotipos figurais do nível III de modelagem, já que eles exigiam a transformação de uma dada figura em outras.

E por fim os que desenvolveram o processo de atribuição de medidas de forma sistemática esses utilizaram eixos ortogonais e determinaram a localização de pontos ou distâncias em relação aos mesmos. Nota-se que os alunos que atribuíram medidas as figuras desta forma, de fato, tiveram a oportunidade de além de desenvolver capacidade de apreender sequencialmente as figuras. Esses alunos também estiveram a todo o momento diante das capacidades de apreensão operatória –mereológicas, óticas e posicionais- que de acordo com o autor tratam de apreensões de um segundo nível na atividade cognitiva.

Na subfase de determinação das áreas os alunos parecem tratar registros de representação semióticos – números - e em alguns casos convertendo para – letras - fórmulas gerais.

Na fase de validação do modelo matemático foi necessário os alunos terem o cuidado com a posição das formas, ou seja, do deslocamento destas em relação a um referencial, podendo assim, ser caracterizado como um tipo de apreensão operatória. Nota-se que ao ter que representar uma dada forma geométrica no computador era preciso que o aluno delimitasse as distâncias das formas, os ângulos de inclinação e a existência ou não de eixos de simetria.

Observou-se também que os desenhos realizados a partir dos ícones do Geogebra, exigiam dos alunos a tomada de decisões que só foram identificadas a partir de outras unidades figurais – ainda não percebidas em nenhuma fase anterior.

De acordo com Duval (2011), as representações que foram exibidas na tela do computador são as mesmas que aquelas produzidas no papel para uma apreensão visual (p.137). Entretanto, ao analisar as etapas de construção dos logotipos figurais foi possível identificar a operação de desconstrução dimensional das formas. Parece que em todos os casos a escolha dos comandos constantes no menu do software exigia dos alunos considerar as unidades figurais de um nível inferior. Essas construções exigiam também um planejamento das etapas de construção e também um conhecimento de termos geométricos presentes no menu.

Conforme pondera Duval (2011) as representações realizadas no computador aceleram os tratamentos, uma vez que, os softwares exibem no monitor tão rapidamente quanto à produção mental, mas com uma potência de tratamento ilimitada em comparação as possibilidades da modalidade feita à mão livre. Observa-se que o aspecto dinâmico do software Geogebra permitiu tratamentos que a figura representada no papel não permitiria, como por exemplo, mover pontos, posicionar formas, etc.

Representar os logotipos figurais no Geogebra exigiu dos alunos que não haviam tido nenhum contato com o mesmo um alto grau da atividade cognitiva. A interface real do software – os ícones com a representação da figura e os procedimentos que se deve realizar para representar a forma geométrica – nem sempre permitia o aluno representar no computador a região que ele queria, às vezes era necessário mais de ícone para realização de uma região do logotipo figural. Como apontado por Duval (2011) os alunos ao representar os logotipos figurais no computador, realizaram atividades cognitivas como: observar a lista de termos designando os objetos matemáticos (menu), escolher um termo para uma instrução ou compor uma sequência de várias instruções (ação) e ter conhecimento dos termos matemáticos, neste caso, especificamente, geométricos e decomposição e composição da figura esperada em função da escolha dos termos do menu (p.138).

4ª PARTE: O USO DA INFORMÁTICA E AS CONTRIBUIÇÕES DO GEOGEBRA PARA O ENSINO DE GEOMETRIA

9.4 Algumas características do processo de ensino e aprendizagem utilizando o Geogebra

Sabe-se que a presença de computadores no processo de ensino e aprendizagem implica em um novo cenário de sala de aula, especificamente no que se refere aos papéis do professor e do aluno na construção do conhecimento. Como ponderam Nóvoa e Maia (1995) a organização diferente do espaço físico da sala de aula evidenciou algumas transformações produzidas pelo surgimento das tecnologias na sociedade atual. No decorrer do desenvolvimento das atividades relacionadas ao uso do computador, por meio de alguns traços, evidencia-se, que os alunos participantes dessa pesquisa se empenharam no desenvolvimento do processo de representação dos logotipos figurais no computador.

Cabe mencionar que as atividades desenvolvidas no laboratório de informática eram marcadas pelo silêncio e concentração dos alunos frente a atividade que estavam desenvolvendo, uma vez ou outra o professor era solicitado para esclarecer pequenas dúvidas, podendo assim, mencionar conforme pondera Valente (1999) que o uso de computadores no processo de ensino e aprendizagem faz com que o papel do professor seja o de facilitador e o do aluno de aprendiz ativo e construtor do seu conhecimento.

Nota-se que parte dos processos ensino e aprendizagem que aconteceram no laboratório de informática estavam relacionados a procedimentos, como apresentado por Coll e Valls (1998) e Pozo (2008) o professor teve que ensinar conjuntos de ícones e ações, ambos ordenados e orientados para consecução da representação do logotipo figural no computador.

O tipo de procedimento ensinado a eles é de natureza heurística, pois para representar logotipos figurais existiam vários caminhos e estes podiam ou não levar a representação do logotipo figural modelado pelos alunos.

Como mencionado por Valente (1999), existem diferentes formas de se utilizar o computador no âmbito da educação; Ao ensinar os alunos representarem o logotipo figural do Google Drive o computador parece ter sido utilizado como um instrumento para transmitir informações aos alunos de como manipular o software Geogebra para representar figuras. Já quando os alunos estavam modelando o logotipo figural, o computador parece estar sendo utilizado para auxiliar no processo solucionar problemas.

Muito dos termos geométricos presentes nos ícones do Geogebra, não eram conhecidos pelos alunos. Deste modo, para compreender o que era apresentado ao clicar em cada ícone, os alunos além de observar as indicações e a representação das figuras em todos os ícones, como pondera Valente (1999) tinham oportunidade de colocar em prática oportunidades para colocar em prática alguns conhecimentos geométricos que possuíam.

As atividades desenvolvidas utilizando a tecnologia como mencionado por Borba e Penteado (2007), permitiram os alunos realizarem a experimentação e a ênfase no processo de visualização, podendo ter possibilitando aos alunos a realização de algumas descobertas e até atribuição de significados aos conhecimentos geométricos.

O uso do software Geogebra no processo de modelagem de logotipos figurais pode ser entendido com uma maneira de se utilizar a informática no ensino da matemática, pois como apresentado por Kenski (1994), interferiram na forma de raciocinar, de relacionar e de adquirir conhecimentos.

A característica dinâmica do software Geogebra, pode ter permitido o estabelecimento de um ambiente de investigação, de descobertas, simulações, validações de resultados. Durante o processo representação de logotipos figurais no computador alguns alunos levantam questionamentos frente à aplicação dos conhecimentos obtidos nas suas práticas cotidianas.

Nota-se que como menciona Valente (1993) o software Geogebra pode possibilitar uma maior influência no processo de ensino aprendizagem devido à interação que o aluno deve ter com um determinado conteúdo para criar algo no computador, pois a cada ícone clicado os alunos deveriam ter ou uma representação da figura ou dos seus atributos definidores para representar parte de uma figura.

CAPÍTULO X
ALGUMAS CONCLUSÕES E AS CONSIDERAÇÕES FINAIS

"Que contribuições essa proposta de ensino pode trazer para o ensino de geometria?"

Elaborar uma proposta para o ensino de áreas de figuras planas envolvendo dois momentos – uma sequência didática e um processo de modelagem de logotipos figurais – foi uma tarefa um tanto desafiadora.

Talvez um dos maiores desafios para os professores de matemática que atuam na rede pública de ensino seja desencadear nos alunos o processo de aprendizagem significativa de conceitos e de procedimentos. Considerando que muitos são os fatores que explicam o sucesso e o fracasso escolar, destaca-se, neste trabalho, a importância de o professor refletir antes, durante e depois do planejamento e da aplicação de uma proposta didática.

O planejamento de uma sequência didática com vistas à aprendizagem significativa requer do professor uma reflexão acerca das condições relativas ao material e daquelas relativas ao aluno. Em relação ao material, existe a necessidade de estudar a estrutura do conteúdo e organizá-la de forma hierárquica, de adaptar a linguagem à realidade dos alunos e de utilizar diferentes formas de representação, mesmo que o ensino seja concebido na forma expositiva.

Quanto aos alunos, espera-se que o professor promova atividades que os motivem a empregar esforço cognitivo para atribuir significados ao que aprendem, desenvolvendo, também, atitudes mais positivas frente à matemática.

Na aplicação da proposta, o professor deve estar consciente do seu papel de mobilizador dos conhecimentos prévios, além de conhecer o papel da linguagem na aprendizagem por recepção verbal.

Destaca-se a importância de o professor refletir depois da ação, de modo a avaliar a proposta como um todo com vistas a promover melhorias na estrutura-lógica do material, levando em conta: a linguagem utilizada, os questionamentos provocados com o intuito de mobilizar os conhecimentos prévios dos alunos, os exemplos apresentados, a avaliação dos alunos frente a cada tarefa proposta, a melhor forma de elaborar e executar cada uma das atividades propostas em questão.

Para o desenvolvimento desta proposta de ensino, duas questões foram imprescindíveis: a primeira foi a valorização da avaliação diagnóstica dos conhecimentos prévios que permitiu ao professor planejar sua prática a partir do que o aluno já sabia de modo a favorecer a atribuição de novos significados ao conteúdo de área de figuras planas; e a segunda refere-se à importância atribuída aos registros de representação semiótica produzidos pelos alunos e pelo professor – nas atividades matemáticas desencadeadas pela sequência didática e pelo processo de modelagem matemática dos logotipos figurais.

A aplicação da sequência didática em questão mostrou a importância de se buscar aspectos teóricos relativos à aprendizagem significativa de conceitos e procedimentos. Nesse sentido, cabe mencionar que o levantamento dos conhecimentos prévios e a organização da estrutura conceitual hierárquica do conteúdo de área foram imprescindíveis para a elaboração da sequência de slides dinâmicos e para a metodologia adotada em um processo de ensino e aprendizagem significativa.

A sequência didática em questão pode ser aplicada por outros professores de matemática, cabendo a eles adequar à sua realidade o planejamento, o material, a linguagem e os questionamentos, respeitando o tempo de aprendizagem e o nível conceitual em que se encontram os alunos.

As fases da modelagem propostas por Biembengut e Hein (2007) direcionam os procedimentos heurísticos que devem ser realizados em um processo de modelagem matemática no âmbito da sala de aula.

O trabalho com a modelagem matemática de logotipos figurais permite que o professor modifique a dinâmica da sala de aula – deixando de ser um mero transmissor de conteúdos e ganhando um status de professor orientador – o que pode favorecer a formação de atitudes mais favoráveis à matemática. Nesta perspectiva, a figura do professor orientador é aquela voltada para acompanhar de perto o raciocínio dos alunos, mostrando/apontando caminhos para que eles alcancem seus objetivos, acompanhando não só as tentativas de solução, mas todo o desenvolvimento da modelagem matemática.

O professor orientador é aquele que ouve os alunos, ajuda a organizar os dados, incentiva a formação de registros de representação semiótica, discute procedimentos e conceitos, tira dúvidas, promove a troca de informações, propicia situações motivadoras e desafiadoras e garante o espaço para que os alunos tenham autonomia para empregar esforços e tomar decisões.

A modelagem matemática de logotipos figurais evidenciou alguns processos cognitivos empregados pelos estudantes durante a realização dessa atividade, com base na análise dos registros de representação semiótica em suas fases de formação, tratamento e conversão. Partindo-se do princípio de que não há *noésis* sem *semiósis*, que as transformações de representações em outras transformações semióticas estão no coração da atividade matemática e que a conceitualização requer a coordenação de registros de representação na atividade cognitiva de conversão, conforme aponta Duval (2012), então acredita-se que a modelagem matemática aqui apresentada pode favorecer a compreensão de alguns conceitos e procedimentos referentes à geometria plana básica.

Evidentemente, não foi possível acompanhar todas as formas de apreensão das figuras, nem descrever outras dificuldades do estudante em identificar as unidades figurais ou em tratar e converter os registros, nas diversas etapas do processo de obtenção de cada modelo. Análises mais densas, utilizando os registros de alunos, merecem ser realizadas. Espera-se, assim, refletir sobre as reais contribuições que este tipo de trabalho pode dar à aprendizagem da geometria escolar – como o desenvolvimento da habilidade de visualização, da capacidade de estabelecer relações entre propriedades dos conceitos e de realizar cálculos com medidas de comprimentos, ângulos e áreas.

Ao que se refere aos obstáculos e resistências em aplicações com modelagem matemática na sala de aula, como mencionado por Silveira e Caldeira (2012), é possível afirmar que a modelagem de logotipos figurais pode causar insegurança no professor nos seguintes aspectos: a quantidade de logotipos cuja modelagem deve ser orientada, a possível falta de apoio estrutural e administrativo da escola, a preocupação em cumprir o conteúdo planejado para aquele ano ou série, a reação dos alunos diante da atividade e a preocupação com a construção do conhecimento.

Deste modo, pondera-se que o apoio e a estrutura da instituição de ensino em que esta proposta foi aplicada foram indispensáveis para a obtenção desses resultados, já que o laboratório de informática da escola possuía computadores disponíveis para todos os alunos. Além disso, os alunos pareciam depositar confiança no estilo de trabalho do professor.

O ensino e aprendizagem da matemática, como apontado por Pereira (2012), quando pautado na utilização de novas tecnologias, pode favorecer a aprendizagem da geometria. No entanto, existem processos cognitivos que ainda não foram compreendidos; por exemplo, a apreensão operatória de uma figura produzida na tela do computador com o Geogebra ou feita no papel utilizando instrumentos de desenho geométrico.

Um dos apontamentos a serem realizados é que, em outra aplicação desta proposta, faz-se necessário que o professor modele com os alunos logotipos de diferentes níveis, para que conheçam as possíveis dificuldades que possam surgir no decorrer do processo. Espera-se, assim, que a construção do logotipo no Geogebra seja feita de forma mais sistemática.

Espera-se que o produto gerado a partir desse estudo chegue ao alcance dos professores que ensinam matemática e que as ações pedagógicas propostas – a sequência didática e a modelagem matemática – sejam vistas como um modo de ver e conceber o processo de ensino e aprendizagem da geometria, no sentido de contribuir para a prática em sala de aula e de abrir caminhos para outras pesquisas da área de educação matemática.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, S. A. et al. A geometria no ensino fundamental: reflexões sobre uma experiência de formação envolvendo professores e alunos. **Revista Brasileira de Educação**, n. 27, 2004.

ALVES, A. J. A "revisão da bibliografia" em teses e dissertações: meus tipos inesquecíveis. **Cadernos de Pesquisa**, n. 81, p. 53-60, 1992.

ARAÚJO, J.L. **Cálculo, tecnologia e modelagem matemática: as discussões dos alunos.** Tese (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas UNESP-Rio Claro-SP, 2002.

ANDERSON, J.R. **The architecture of cognition**. Harvard: University Press, 1983

ANDRADE, J. B. **Composição e decomposição de figuras geométricas planas por alunos do ensino médio.** In: IX ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática, Belo Horizonte/MG, 2007.

ANDRÉ, M.(Org.). **O papel da pesquisa na formação e na prática dos professores.** 5. ed. Campinas: Papirus, 2006.

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e Retenção de Conhecimentos: Uma Perspectiva Cognitiva.** Lisboa: Plátano, 2003.

BALDRINI, L.A.F. **Construção do conceito de área e perímetro: uma sequência didática com auxílio de software de geometria dinâmica**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática)- Universidade Estadual de Londrina. Londrina-PR, 2004.

BARBOSA,J.C. **A modelagem matemática, perspectivas e discussões.** In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, Belo Horizonte-MG, Anais..., Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2007.

_________ . **Modelagem Matemática: Concepções e Experiências de Futuros Professores**, (Tese de Doutorado) – UNESP - Rio Claro, 2001.

__________. A **prática dos alunos no ambiente de Modelagem Matemática: o esboço de um framework.** In: BARBOSA, J. C.; CALDEIRA, A. D.; ARAÚJO, J. L. (Org.). Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais. p.161-174. Recife: SBEM, 2007.

BARBOSA, J. C. e SANTOS, M. A. **Modelagem matemática, perspectivas e discussões.** In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 9, Belo

Horizonte. Anais... Recife, Sociedade Brasileira de Educação Matemática. 1 CD-ROM. 2007.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto**, 2006.

BICUDO, M. A. V.; KLUBER, T. E.; Pesquisa em modelagem matemática no Brasil: a caminho de uma metacompreensão. **Cadernos de Pesquisa**. V.41, N.144 set./dez. 2011.p.904-907.

BIEMBENGUT, M. S. 30 Anos de Modelagem Matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. **Alexandria Revista de Educação em Ciência e Tecnologia,** Florianópolis, v. 2, n. 2, p. 7-32, jul. 2009. Disponível em: http://alexandria.ppgect.ufsc.br/files/2012/03/mariasalett.pdf. Acesso em: 11 ago. 2014.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino.** 4ª. ed. São Paulo: Contexto, 2007.

BISOGNIN. E; BISOGNIN. V. Percepções de Professores sobre o Uso da Modelagem Matemática em Sala de Aula. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 26, n. 43, p. 1049-1079, ago. 2012. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/bolema/v26n43/13.pdf. Acesso em 11.08.2014.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática.** 3ª ed. 2ª reimp. - Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Introdução aos Parâmetros Curriculares Nacionais.** Brasília: MEC, 1997.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. (3º e 4º ciclos do ensino fundamental).** Brasília: MEC, 1998.

______. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio).** Brasília: MEC, 2000.

______. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) - Ciências da Natureza e suas Tecnologias.** Brasília: MEC, 2002.

_______. Ministério da Educação e Cultura / Secretária de Educação Básica. Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio: Matemática. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio.** Brasília, 2006.

BRITO, M. R. F. Psicologia da Educação Matemática: ponto de vista. **Educar em Revista,** Curitiba; n Especial 1/2011, p. 29-45, 2011. Disponível em: http://

http://ojs.c3sl.ufpr.br/ojs/index.php/educar/article/viewFile/22594/14833. Acesso em: 12.08.2015.

_______. **Solução de problemas e a matemática escolar.** Campinas: Alínea, 2006.

BURATTO, I. C. F. **Representação semiótica no ensino da geometria: uma alternativa metodológica na formação de professores.** 2006. 143 f. Dissertação (Programa de Pós Graduação em Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2006.

BURAK, D. **Modelagem Matemática e a Sala de Aula.** In: I EPMEM-Encontro Paranaense da Modelagem Na Educação Matemática, 2004, Londrina. Anais...do I EPMEM, 2004. Disponível em http://www.dionisioburak.com.br/trabalhos.html . Acesso em 30/ 05/ 2014.

BURAK, D.; BRANDT,C.F. Modelagem Matemática e Representações Semióticas: contribuições para o desenvolvimento do pensamento algébrico. **Zetetiqué** – FE – Unicamp, v. 18, n. 33, 2010. p.63-102.

CHIUMMO, A. **O conceito de áreas de figuras planas: capacitação para professores do Ensino Fundamental.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP. São Paulo-SP, 1998.

COLL, C.; VALLS, E. Aprendizagem e o Ensino de Procedimentos. In: COLL, C.; POZO, J. I; SARABIA, B.; VALLS, E. **Os Conteúdos na Reforma. Ensino e Aprendizagem de Conceitos, Procedimentos e Atitudes.** Tradução de Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artes Médica, 1998. p.70-118.

COLL, C. Introdução. In: COLL, C.; POZO, J. I; SARABIA, B.; VALLS, E. **Os Conteúdos na Reforma. Ensino e Aprendizagem de Conceitos, Procedimentos e Atitudes.** Tradução de Beatriz Affonso Neves.Porto Alegre: Artes Médica, 1998. p. 9-16.

DINIZ, L.N. **O papel das tecnologias da informação nos projetos de modelagem matemática.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas – UNESP-Rio Claro - SP, 2007.

DUVAL, R. Registros de representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica.** Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

_______. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem**. Florianópolis, v. 07, n. 2, 2012. p.266-297.

_______. Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. IN: Machado, Silvia Dias Alcântara (org.).

Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica. Campinas, São Paulo. Papirus, 2010. p.11- 33.

________. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas.** Organização de Tânia M. M. Campos. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011. 160 p.

DURÃES, J. L.; RAMOS, M. E. S.; BATISTA, Y. A.; BOIAGO, C. E. P. Geometrizando logotipos. Mostra de Ciência e Tecnologia da Cidade de Ituiutaba - 29 e 30 de outubro de 2013 - MOCTI, 3, 2013, Ituiutaba, MG. **Anais...** Ituiutaba, MG, 2013. Disponível em: <http://www.cienciaitba.facip.ufu.br/sites/cienciaitba.facip.ufu.br/files/Anexos/Comunicados/anais_III_mostra.pdf. > Acesso em 20 de set de 2014.

ECHEVERRÍA, M. P. P.; POZO, J. I. Aprender a resolver problemas e resolver problemas para aprender. In: POZO, J. I. **A solução de problemas: Aprender a resolver, resolver para aprender.** Porto Alegre: Artmed, 1998. p. 13-42.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. vol 1. 5ªed.Rio de Janeiro:LTC, 2001.

FACCO, S.R. **Conceito de área: uma proposta de ensino-aprendizagem.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). PUC/SP. São Paulo –SP, 2003.

FAZENDA, I. A **formação do professor-pesquisador –30 anos de pesquisa. Revista E-Curriculum,** São Paulo, v. 1, n. 1, 2005. Disponível em: <http://www.pucsp.br/ecurriculum>. Acesso em: 08 agosto 2013.

FIORENTINI, D. & LORENZATO, S. **Investigação em educação Matemática: percursos teóricos e metodológicos.** Autores Associados: Campinas, SP, 2006. – Coleção formação de professores.

FLORES, C.R.; MORETTI, M. T. As figuras geométricas enquanto suporte para a aprendizagem em geometria: um estudo sobre a heurística e a reconfiguração. **Revemat- Revista Eletrônica de Educação Matemática** – 2006.UFSC. V1.1, 5 -13.

FRADE, R. **Composição e/ ou decomposição de figuras planas no ensino médio: Van Hiele, uma opção.** Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – PUC-MG, Belo Horizonte, 2012.

GUIMARÃES, S. É. R. Motivação Intrínseca, extrínseca e o uso de recompensas em sala de aula. In: BORUCHOVITH, E. BZUNECK, J. A. **A motivação do aluno: Contribuições da Psicologia Contemporânea.** Petrópolis: Vozes, 2001

HOFFER, A. **Geometria é mais que prova.** Tradução de Antonio Carlos Brolezzi. Mathematics Teacher, NCTM, v.74, p.11-18, jan. 1981.

JACOBINI, O.R. **A modelação matemática aplicada ao ensino de estatística em cursos de graduação.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas – UNESP-Rio Claro - SP, 1999.

KENSKI,V.M. **O professor, a escola e os recursos didáticos em uma sociedade cheia de tecnologias.** Campinas: Unicamp,1994.

LÜDKE, M. A complexa relação entre o professor e a pesquisa. In: ANDRÉ, M. (Org.). **O papel da pesquisa na formação e na prática dos professores**. Campinas: Papirus, 2001a. p. 27-54.

_________. **O professor, seu saber e sua pesquisa. Educação e Sociedade**, v. 22, n. 74, p. 77-96, 2001b. Disponível em: <http://www.scielo.br/cgi-bin/wxis.exe/iah/>. Acesso em: 08 agosto 2013.

LÜDKE, M., ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em Educação: abordagens qualitativas.** São Paulo: E.P.U., 1986.

LUNA, S. V. **Planejamento de pesquisa: uma introdução - elementos para uma análise metodológica**. São Paulo: EDUC, 1997.

MACHADO, J.P.de A. **A significação dos conceitos de perímetro e área, na ótica do pensamento reflexivo, trabalhando em ambientes de geometria dinâmica.** 2011. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – Universidade Federal de Ouro Preto.

MAYER, R. E. A Capacidade para a Matemática. In: R. J. Sternberg. **As Capacidades Intelectuais Humanas:** Uma Abordagem em Processamento de Informações. Porto Alegre: Artes Médicas, 1992.

MINAS GERAIS - Secretaria de Estado de Educação. **CBC Matemática – Ensinos fundamental e médio**. Disponível em: http://www.educacao.mg.gov.br. Acesso em:18/10/2015.

NOVOA, A.; MAIA,J. Professores e computadores: crenças e obstáculos. **Informática e Educação.** v.6, p.19-41, dez. 1995.

NUNES, J.M.V.; **A prática da argumentação como método de ensino: o caso dos conceitos de área e perímetro de figuras planas.** Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo/ PUC-SP, 2011.

PAULA, A.P.M.de; **Ensino de área de figuras planas por atividades.** Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação) – Universidade do Estado do Pará, 2011.

PEREIRA, T.de.L.M. **O uso do software GeoGebra em uma escola pública: interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria**

para o ensino fundamental e médio. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) – UFOP, Ouro Preto-MG, 2012.

PEROTTA, R. C; PEROTTA, S. G. M. Considerações sobre o ensino de área e perímetro. **Dialogia**. São Paulo, v. 4, 2005, p. 81-88.

PIROLA, N.A. **Solução de problemas geométricos: dificuldades e perspectivas**. 2000. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas.** Rio de Janeiro: Interciência, 1978.

POZO, J.I.; ANGÓN,Y.P. A solução de problemas como conteúdo procedimental da educação básica. In: POZO, J. I. (org.) et all. **A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender.** Tradução Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: ArtMed, 1998.

POZO, J. I. Aprendizagem e o Ensino de Fatos e Conceitos In: COLL, C; POZO, J. I; SARABIA; VALLS, E. **Os Conteúdos na Reforma. Ensino e Aprendizagem de Conceitos, Procedimentos e Atitudes.** Tradução de Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998. p.17-70.

_______. **Mestre e aprendizes a nova cultura da aprendizagem**. Tradução Ernani Rosa. Porto Alegre: Artes Médicas, 2008.

REINHEIMER, J. R. **O uso da modelagem matemática no ensino da geometria estudo de caso: EJA.** 2011. Dissertação (Mestrado) – Curso de Ensino de Ciências Exatas, Centro Universitário UNIVATES, Lajeado, 28 set. 2011. Disponível em: <http://hdl.handle.net/10737/244>. Acesso em: 13.05. 2014.

SALLUM,E.M. **Ladrilhamentos.** Matemática – IME - USP. Disponível em: http://www.ime.usp.br/~matemateca/textos/ladrilhamentos.pdf. Acesso em:13.03.2015.

SANTOS, J.A.S. dos; **Problemas de ensino e aprendizagem em perímetro da área: um estudo de caso com professores de matemática e alunos de 7ªsérie do ensino fundamental**. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação) – Universidade Metodista de Piracicaba- SP, 2011.

SILVEIRA, E. **Modelagem Matemática em educação no Brasil: entendendo o universo de teses e dissertações.** Dissertação (Mestrado em Educação) - Setor de Educação, UFPR, Curitiba, 2007.

SILVEIRA. E;CALDEIRA, A.D. Modelagem na Sala de Aula: resistências e obstáculos. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 26, n. 43, p. 1021-1047, ago. 2012. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/bolema/v26n43/12.pdf . Acesso em 11.08.2014.

SKOVSMOSE, O. Cenários de investigação. **Boletim de educação Matemática,** Rio Claro – SP, p.66-91, 2000.

STERNBERG, R. J. **Psicologia Cognitiva.** Trad. Maria Regina Borges Osorio. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

VALENTE, J. A. (Org.) **Computadores e conhecimento: repensando a educação.** Campinas: Gráfica Unicamp, 1993.

__________.Org. **O Computador na sociedade do conhecimento.** Campinas: São Paulo-SP. UNICAMP/NIED, 1999.

VAN HIELE, P. **Structure and Insight**. Orlando: Academic Press, 1986.

VERTUAN, R. E. **Um olhar sobre a modelagem matemática à luz da teoria dos registros de representação semiótica**. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) −Universidade Estadual de Londrina, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, 2007.

VIANA, A.O; BOIAGO, C.E.P. Recepção verbal e material potencialmente significativo para a aprendizagem de procedimentos em geometria: área e perímetro de figuras planas. **EDUSK. Revista monográfica de educación skepsis.org**, n. 4. São Paulo: editorial skepsis +,2015. pp. 390 – 425. Disponível em: http://www.editorialskepsis.org/pdf/2013/p.390-425.pdf. Acesso: 01/10/2015.

ZABALA, A. **A prática educativa.** Porto Alegre: Artmed, 1998.

ZEICHNER, K. M. **Para além da divisão entre professor-pesquisador e pesquisador acadêmico.** In: GERALDI, M.; FIORENTINI, DÁRIO & PEREIRA, E. M. (orgs.) Cartografia do trabalho docente: professor(a)-pesquisador(a). Campinas, Mercado de Letras ABL, 1998. pp. 207-236.

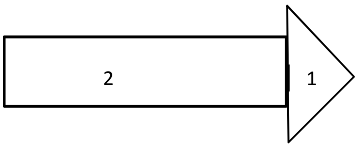
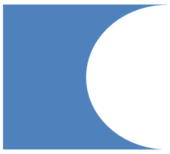
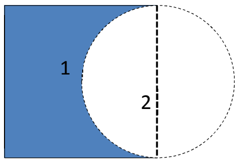
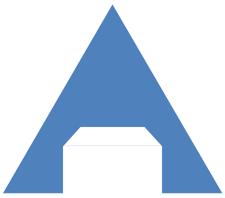
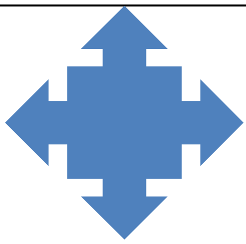
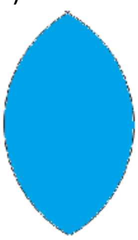
ZUKAUSKAS, N.S. **Modelação matemática no ensino fundamental: motivação dos estudantes em aprender geometria.** Dissertação (Mestrado Educação em Ciência e Matemática). PUC-RS. Porto Alegre- RS, 2012.

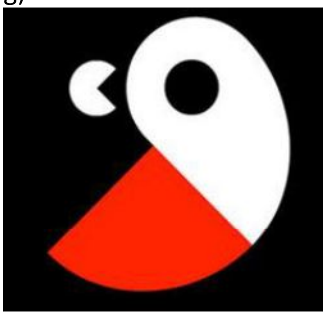
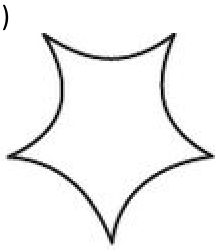
ANEXO I

PROVA I

Prezado participante. Não se preocupe se você vai acertar ou errar essas questões. Queremos saber como você pensa. Por isso, faça rascunhos, esboços, cálculos, etc. e, por favor, não apague os rascunhos. Obrigado.

01 – Identifique as formas. Conforme o modelo realizado na primeira linha da tabela a seguir:

	(1) Triângulo retângulo e isósceles (2)Retângulo	
a) 	(1) Quadrado (2) Semi-círculo	
b) 		
c) 		
d) 		
e) 		

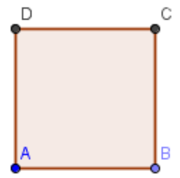
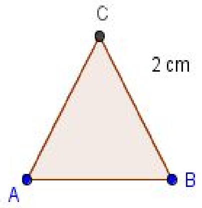
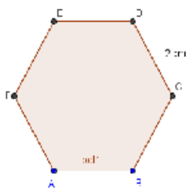
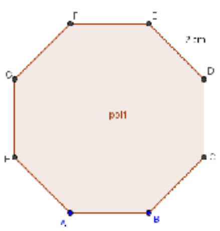
f) 		
g) 		
h) 		
i) 		

ANEXO II

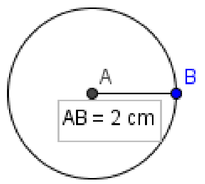
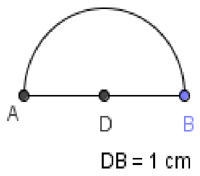
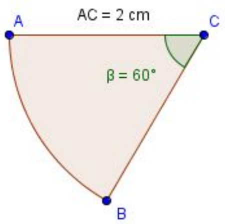
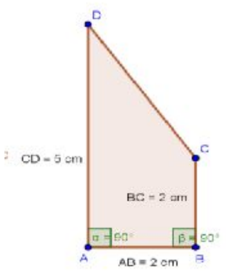
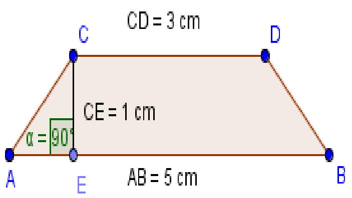
PROVA II

Prezado participante. Não se preocupe se você vai acertar ou errar essas questões. Queremos saber como você pensa. Por isso, faça rascunhos, esboços, cálculos, etc. e, por favor, não apague os rascunhos. Obrigado.

01 - Calcule a área das seguintes polígonos regulares:

a)  Quadrado de lado $\overline{AB} = 2\ cm$	
b)  Triângulo equilátero de lado $\overline{CB} = 2\ cm$	
c)  Hexágono regular de lado 1cm	
d)  Octógono regular de lado 3cm	

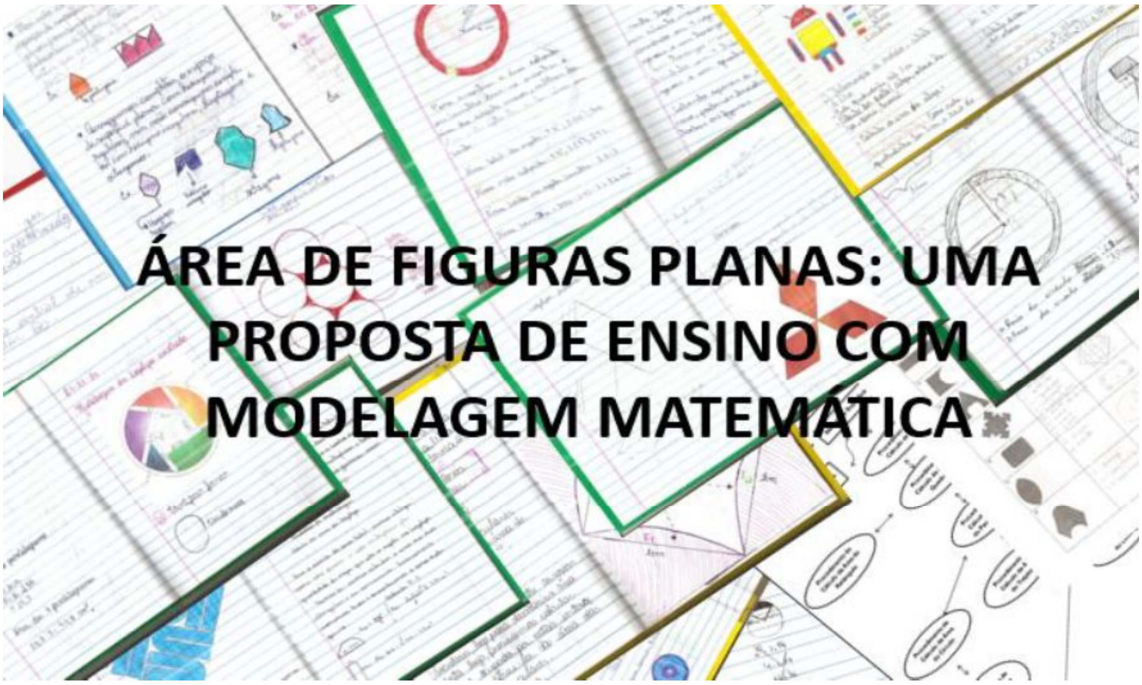
02 – Calcule a área das seguintes formas:

<table>
<tr><td>a)

</td><td></td></tr>
<tr><td>b)

</td><td></td></tr>
<tr><td>c)

</td><td></td></tr>
<tr><td>d)

</td><td></td></tr>
<tr><td>e)

</td><td></td></tr>
</table>

APÊNDICE – PRODUTO EDUCACIONAL

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Ciências Integradas do Pontal
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática

Produto Educacional



Mestrando: Carlos Eduardo Petronilho Boiago
Professora Orientadora: Drª.Odaléa Aparecida Viana

Ituiutaba-MG/2015

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO

Caro(a) Professor(a),

Esta é uma proposta didática para o ensino de geometria produzida no âmbito do Mestrado Profissional de Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Uberlândia e é parte da dissertação defendida por este autor.

A proposta tem como tema o conteúdo Área de Figuras Planas e contempla o ensino de conceitos e de procedimentos, além de promover o desenvolvimento de atitudes favoráveis à geometria.

Esta proposta de ensino é composta por duas partes.

A primeira parte contempla uma sequência didática, isto é, uma série de atividades sequenciadas e que devem ser aplicadas em várias aulas, visando à aprendizagem dos conceitos de área e de suas medidas e também do cálculo das áreas das principais figuras geométricas planas. As atividades contemplam composição e decomposição de figuras, simulando ações com materiais concretos e buscam incentivar a investigação e a compreensão em geometria.

Na segunda parte é apresentada uma sugestão de trabalho com modelagem matemática de logotipos figurais[7], em que os alunos escolhem um logotipo, identificam as formas, atribuem medidas, calculam as áreas e depois constroem o desenho no computador, utilizando o software Geogebra. Busca-se, com este tipo de atividade, incentivar o uso de tecnologias, despertar a criatividade e desenvolver atitudes favoráveis à geometria.

Para orientar o professor, são descritas as atividades que foram planejadas para compor este produto e, como estas foram de fato aplicadas a alunos, tomou-se como base a experiência vivenciada pelo autor. Assim, procurou-se trazer alguns exemplos de questionamentos, de dúvidas e de discussões oriundos das interações promovidas na sala de aula. Além disso,

[7] Logotipo figural é uma representação gráfica de uma marca comercial ou da sigla de uma instituição.

são apresentados alguns registros de representação (desenhos, frases, esquemas etc) produzidos pelos alunos em seus cadernos (aqui chamados de diários de bordo) no decorrer das aulas, de modo a mostrar ao professor os possíveis avanços e dificuldades dos estudantes – o que pode caracterizar a avaliação da proposta.

O trabalho foi direcionado ao ensino médio, mas pode ser aplicado, com algumas adequações, a estudantes no final do ensino fundamental.

Espera-se que o produto possa trazer contribuições para a prática do professor de matemática do ensino básico no tema área de figuras planas. Acrescenta-se que as ações do professor, suas escolhas pedagógicas, a metodologia empregada e as formas de avaliação são fruto de suas próprias concepções e nenhum trabalho pode ser copiado ou repetido, mas pode, sim, ser reaplicado e melhorado quando apoiado nos saberes da experiência e nas convicções do docente.

1 ª parte

A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Planejamento

A sequência didática foi elaborada de modo a favorecer a aprendizagem significativa dos conceitos e procedimentos relativos à área de figuras planas. O esquema mostrado na Figura 1 ilustra a estrutura na forma de quatro etapas que o professor deve adotar para a sequência de atividades.

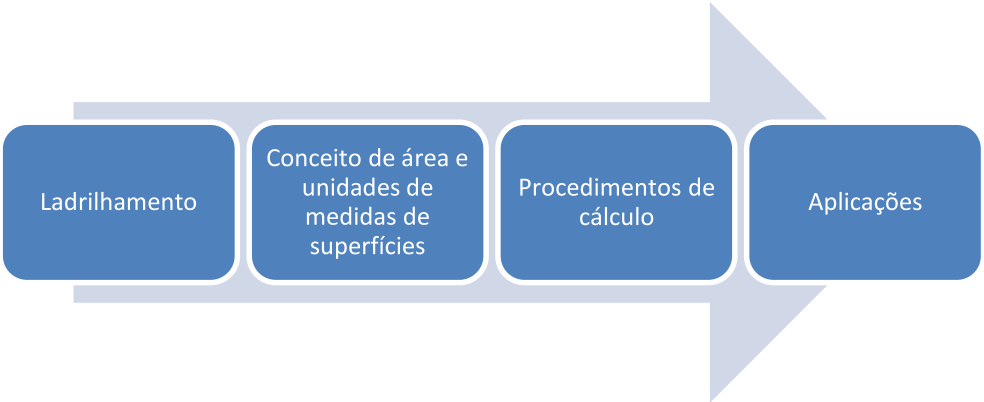


Figura 1. Esquema da estrutura adotada para elaboração da sequência.

Para organizar a exposição dos temas e orientar as discussões em sala – além de otimizar o tempo disponível para aplicação da sequência – , 61 slides dinâmicos. Conforme apontado em Viana e Boiago (2015), os slides dinâmicos caracterizam-se por apresentar:

> (a) perguntas iniciais para introduzir o conceito ou o procedimento a ser tratado; (b) situações variadas na forma de figuras, palavras ou outros símbolos, de modo a elucidar a pergunta, quando necessário; (c) exemplos e contraexemplos de modo a explorar as possíveis conjecturas e encaminhar as conclusões; (d) a resposta, a conclusão e a formalização matemática; (e) exercícios de aplicação; (f) uma pergunta de modo a estabelecer a relação com o item seguinte do conteúdo (p.411).

Ainda de acordo com Viana e Boiago (2015), os slides foram elaborados utilizando-se “o efeito de animação tanto para as palavras (que aparecem sequencialmente na forma de perguntas ou respostas intermediárias dentro de cada item do conteúdo) como para as figuras em decomposição e composição (que simulam ações com materiais manipuláveis, como se estes estivessem dispostos em cima da carteira do estudante)" (p.412).

O Quadro 1 mostra as atividades que constantes em cada etapa prevista bem como os objetivos a serem atingidos por meio da apresentação e discussão dos slides dinâmicos.

Quadro 1. Itens e objetivos dos slides da sequência.

Etapas	Item da sequência	Objetivos	Slides
LADRILHAMENTO	1. Ladrilhando superfícies	a) Verificar que as superfícies planas podem ser recobertas por outras superfícies planas, mas que nem todas as figuras podem ser utilizadas como ladrilhos. b) Verificar que é possível ladrilhar não apenas com quadrados (unidade utilizada para a medida da área), mas também com triângulos, quadriláteros e hexágonos – revendo o conceito de polígono, de polígono regular, da soma dos ângulos internos e de ângulo interno de polígono regular. c) Identificar área como grandeza, reconhecendo o quadrado como unidade de medida, entendendo os múltiplos e submúltiplos da unidade padronizada metro quadrado.	1-26
CONCEITO DE ÁREA E UNIDADES DE MEDIDA	2. Determinando a área de retângulos e quadrados	a) Determinar a área de retângulos e quadrados por: – contagem de unidades quadradas; – multiplicação de medidas da base *B* e altura h e, no caso especial, quando estas forem iguais *B* = *h* = *l* . – fórmulas encontradas $\boldsymbol{A_{ret\hat{a}ngulo}} = \boldsymbol{Bh}$ e $\boldsymbol{A_{quadrado}} = \boldsymbol{l^2}$ b) Aplicação	27-28-29
PROCEDIMENTOS DE CÁLCULO	3. Determinando a área de paralelogramos	a) Determinar a área de paralelogramo por: – contagem de unidades quadradas; – decomposição e composição em retângulo, a partir da base *B* e da altura *h*; – multiplicação de medidas. – fórmula encontrada $\boldsymbol{A_{paralelogramo}} = \boldsymbol{Bh}$ b) Aplicação	30-31-32
	4. Conhecendo o princípio de Cavaliere	Reconhecer que paralelogramos com a mesma base e mesma altura têm a mesma área.	33-34
	5. Determinando a área de triângulos	a) Determinar a área de triângulos por: – contagem de unidades quadradas; – composição de triângulos em paralelogramo a partir da base e da altura; – determinação da metade da área do paralelogramo; – fórmula encontrada $\boldsymbol{A_{tri\hat{a}ngulo}} = \boldsymbol{\frac{Bh}{2}}$ b) Aplicação	35-41
PROCEDIMENTOS DE CÁLCULO	6. Determinando a área de trapézios	a) Determinar a área de trapézios por: – composição de trapézios em paralelogramo a partir das bases *(B+b)* e da altura *h*; – determinação da metade da área do paralelogramo; –fórmula encontrada $\boldsymbol{A_{trap\acute{e}zio}} = \boldsymbol{\frac{(B+b)h}{2}}$ b) Aplicação	42-43
	7. Determinando a área de losangos	a) Determinar a área de losangos por: – composição de losangos em paralelogramo a partir das duas diagonais *D* e *d*; – determinação da metade da área do paralelogramo; – fórmula encontrada $\boldsymbol{A_{losango}} = \boldsymbol{\frac{Dd}{2}}$ b) Aplicação	44-46

	8. Determinando a área do círculo	a) Determinar a área do círculo por: – contagem de unidades quadradas; – composição de setores em paralelogramo a partir do comprimento e do raio; – determinação da metade da área do paralelogramo e considerando a base $2\pi r$ e a altura r; – fórmula encontrada $\boldsymbol{A_{círculo} = \pi r^2}$ b) Aplicação	47-50
	9. Determinando a área do setor circular	a) Verificar que a área do setor circular de raio dado é diretamente proporcional ao ângulo central; b) Determinar a área do setor circular por: – regra de três simples, sendo α o ângulo central e r o raio do círculo; – fórmula encontrada $\boldsymbol{A_{setor} = \frac{\alpha.\pi.r^2}{360°}}$ c) Aplicação	51-52
	10. Determinando a área do segmento circular	a) Verificar que a área do segmento circular é obtida a partir resultado da diferença entre as áreas de um setor circular e um triângulo.	53-55
APLICA-ÇÕES	11. Aplicações	Determinar as áreas de figuras planas	56-61

Aplicação

Considerando o esquema adotado para estruturar a sequência de atividades (Figura 1), a aplicação da sequência será descrita nas mesmas etapas indicadas: (1) ladrilhamento; (2) conceito de área e unidades de medidas; (3) procedimentos de cálculo de área de algumas superfícies planas e (4) aplicações.

Para cada etapa a ser descrita, considerou-se importante apresentar uma justificativa acerca da estrutura lógica do material. Além disso, como a sequência foi aplicada a alunos, decidiu-se destacar alguns aspectos vivenciados a partir da experiência do autor, a saber:

d) percepções do professor realizadas a partir do diálogos estabelecidos;
e) apontamentos feitos pelos alunos nos diários de bordo e
f) sugestões de melhoria na apresentação.

Etapa 1: Ladrilhamento

Para introduzir o conceito de medida de área optou-se pela utilização da ideia de ladrilhamento (ou pavimentação). Sallum (s/d) menciona que a arte de ladrilhar consiste no preenchimento do plano, por moldes, sem superposição ou buracos. Assim, o ladrilhamento consiste no recobrimento de uma superfície plana atendendo às seguintes condições: a) os ladrilhos são polígonos congruentes, sendo que a intersecção de dois polígonos é sempre um lado ou um vértice ou vazia e b) o tipo de cada vértice é sempre o mesmo, isto é, a distribuição ao redor de cada vértice é sempre a mesma.

Assim, a ideia de ladrilhamento pode ser mobilizada de modo a levar o aluno a atribuir significados para o conceito de área de superfícies planas e também para as unidades de medida – o que justifica, por exemplo, a utilização de cm^2, m^2, ou km^2 nos exercícios sobre o assunto.

Os slides de 1 a 13 são importantes para desenvolver as ideias envolvidas no ladrilhamento. No primeiro slide, os alunos são convidados a pensar em uma folha em branco e nas possíveis figuras geométricas que preencham essa folha, de maneira que estas sejam iguais. Questiona-se se com qualquer polígono é possível preencher a folha (Figura 2-a).

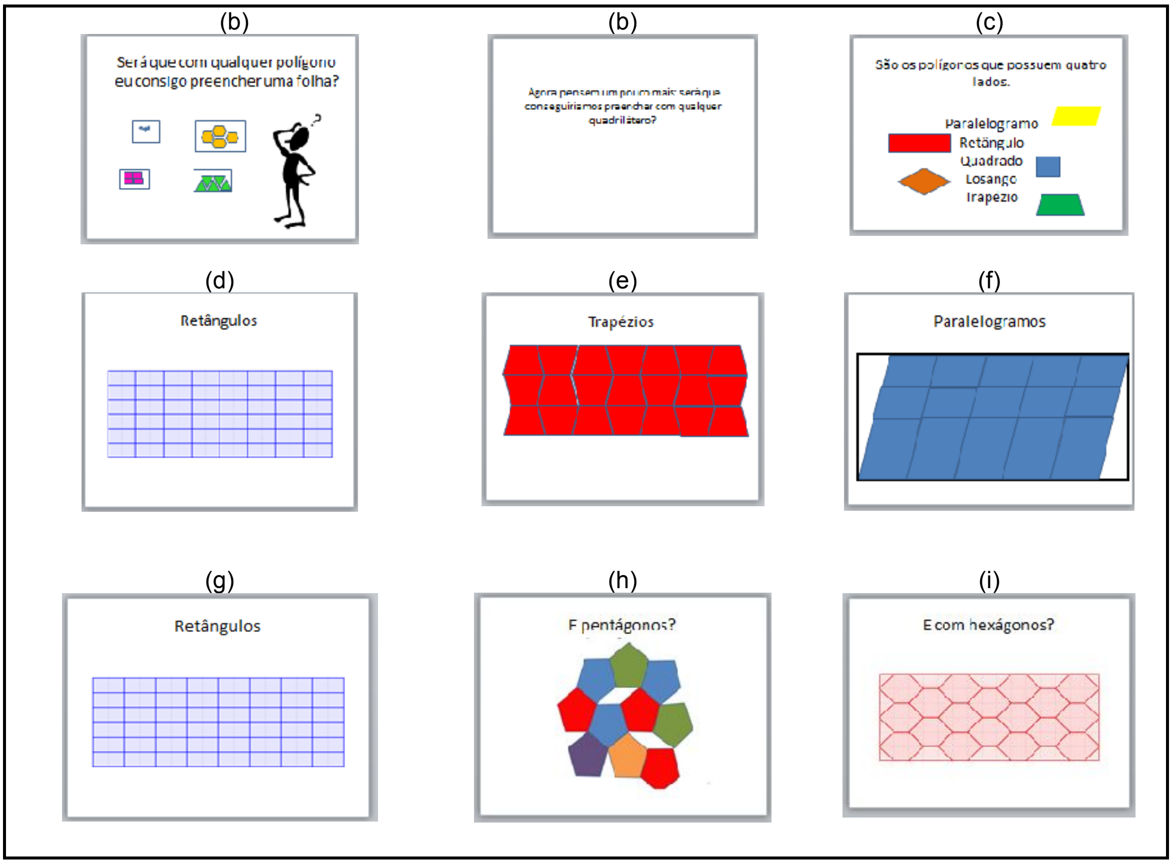


Figura 2. Slides utilizados na sequência (Etapa 1: Ladrilhamento)

Ao se colocar a pergunta para os alunos, é possível que a primeira resposta dada por eles seja “quadrado”. A partir disso, questiona-se se qualquer quadrilátero ladrilha a superfície (Figura 2-b); isso pode produzir dúvidas nos alunos caso não se lembrem do conceito de quadriláteros. Em geral, os alunos associam quadriláteros a apenas retângulos e quadrados, é importante retomar o conceito de quadrilátero como sendo um polígono de quatro lados. (Figura 2-c).

O slide 9 (Figura 2-f) provoca questionamentos, já que os alunos podem alegar que a folha não está totalmente preenchida por paralelogramos, sobrando espaços descobertos na superfície.

Nesse momento o professor deve retomar a ideia de ladrilhamento exemplificando que o piso da sala de aula poderia ser pavimentado com pisos na forma de quadrados, de retângulos e de triângulos, mas não na forma de círculos – já que, neste caso, seria impossível preencher a superfície sem sobreposição e sem sobrar espaço. Alguns esboços de ladrilhamento com polígonos regulares e não regulares podem ser feitos na lousa, para complementar a explicação.

Em seguida, é necessário retomar o uso dos slides e solicitar que os alunos olhem para o ladrilhamento do quadrado para que observem o encontro dos vértices, verifiquem os ângulos formados em cada vértice e tentem dar o valor da soma de suas medidas. Com outro questionamento o professor juntamente com os alunos concluirá que só é possível ladrilhar com figuras planas em que o encontro dos ângulos delas em um único vértice for igual a trezentos e sessenta graus.

Na sequência, os alunos tem que ser questionados se é possível ladrilhar com triângulos, pentágonos regulares e hexágonos regulares (Figura 2 –g, h, i).

Depois disto, o professor deve questionar os alunos sobre a maneira de determinar medidas de comprimentos – altura e distâncias entre quaisquer dois objetos, pessoas ou coisas.

Posteriormente, seria interessante o professor questionar para os alunos se é possível medir uma folha tomando como unidade cada um destes polígonos mencionados. Vale mencionar a importância de se incluir um conjunto de slides que encaminhem melhor essas discussões.

Ao longo de toda aplicação e desenvolvimento das atividades aqui relatadas, os alunos devem estar de posse de um caderno onde possam registrar discussões, conceitos matemáticos, conclusões, reflexões sobre pontos específicos da aula ou qualquer outra questão considerada como relevante por eles.

A Figura 3 traz os resultados da aplicação da etapa de ladrilhamento, realizado no diário de bordo de alunos em que foi realizada essa aplicação. Foi possível observar vários exemplos de registros produzidos pelos alunos ao longo da aplicação desta sequência.

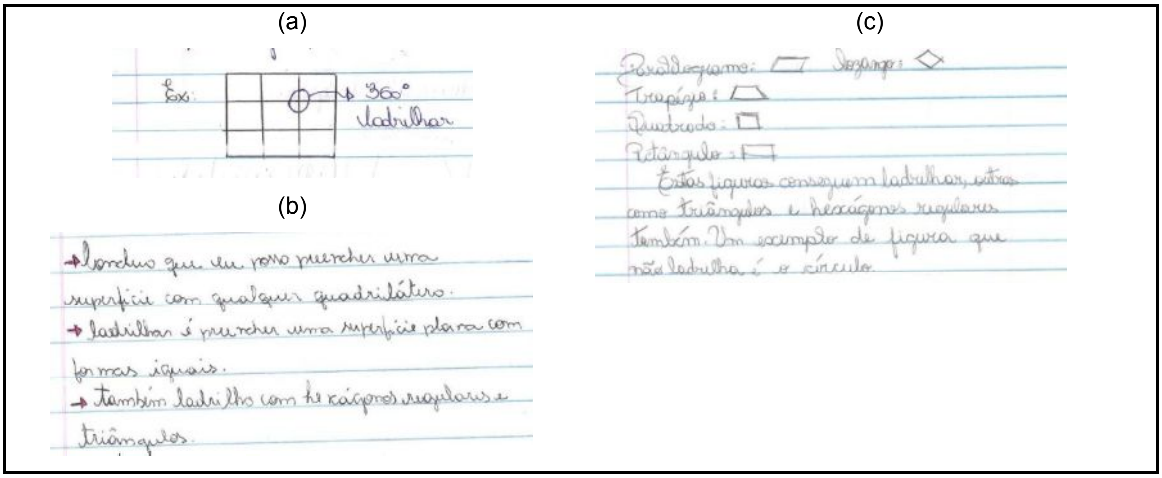
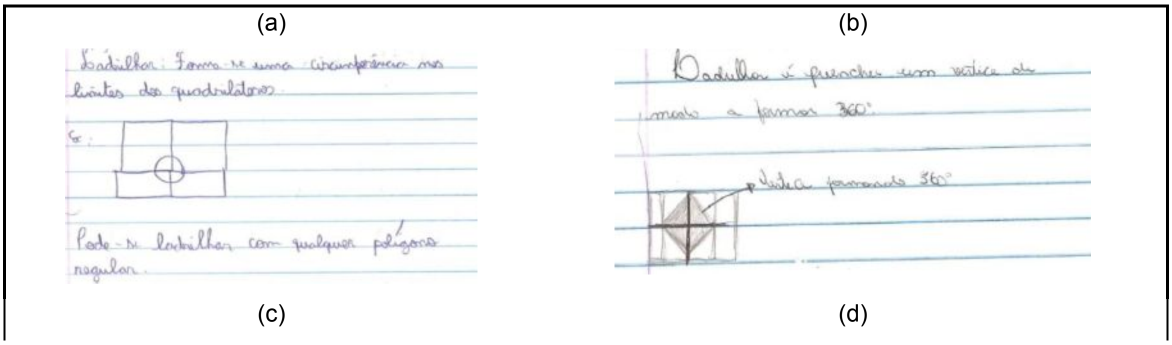


Figura 3. Anotações constantes nos diários de bordo (Etapa 1: Ladrilhamento)

Foram observadas anotações que demonstraram entendimento, mas outras estavam incorretas ou incompletas, conforme mostra a Figura 4.



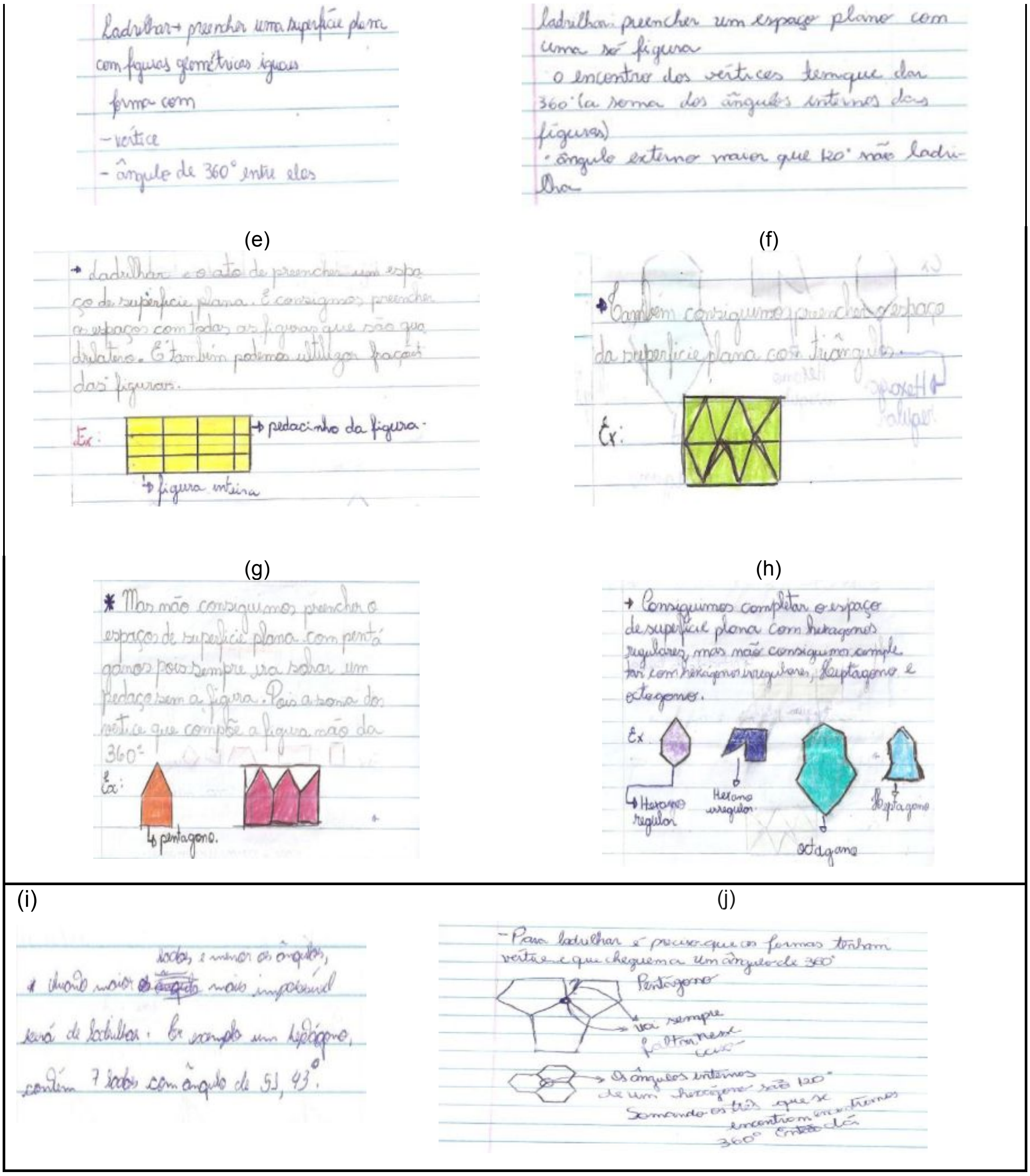


Figura 4. Anotações sobre Ladrilhamento
(Etapa 1: Ladrilhamento)

Outro apontamento a ser realizado é sobre a impossibilidade de ladrilhamento com figuras circulares ou com contornos em curvas. Dez alunos discorreram sobre o assunto, sendo que vários se valeram de desenhos para explicar o que tinham entendido (Figura 5).

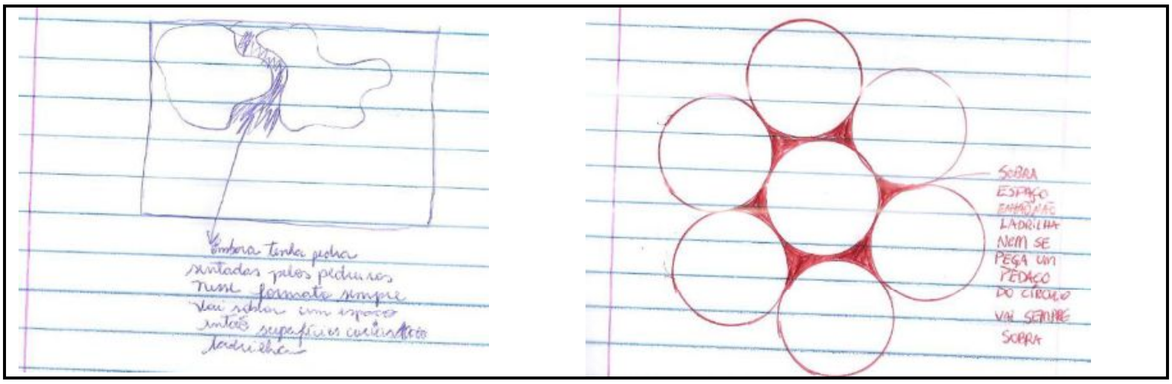


Figura 5. Anotações sobre figuras com curvas - constantes nos diários de bordo (Etapa 1: Ladrilhamento)

Um registro a ser destacado é o do aluno que pareceu ter estabelecido algumas relações entre o conceito de ladrilhamento e o conceito de área, já que mencionou: “uma das maneiras de facilitar os cálculos de área (medida de uma superfície) é a prática de ladrilhar”(Figura 6).

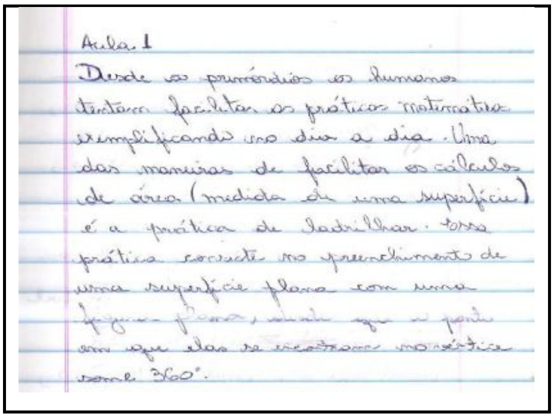


Figura 6. Anotação destacada - constante no diário de bordo (Etapa 1: Ladrilhamento)

Etapa 2: Conceito de área e as unidades de medidas.

Para que os alunos compreendam intuitivamente que a área refere-se à superfície limitada por uma figura plana e que esta superfície pode ser medida com outra superfície, tomada como unidade, convém questionar os estudantes sobre o tema (Figura 7), com a finalidade de que consigam relacionar a medida da área com a superfície.

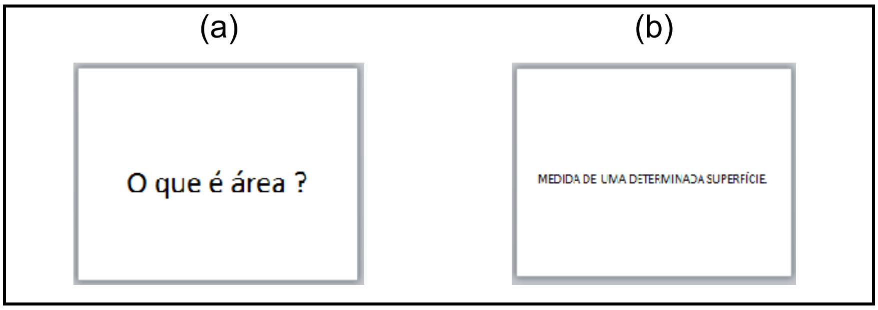


Figura 7. Slides utilizados na sequência
(Etapa 2: Conceito de área e unidades de medida)

Contando-se com a ideia de que serão poucos os alunos que conseguirão fazer relações entre a medida de área e superfície, o professor deve explicar que para se medir uma superfície é necessário se ter outra superfície que seria a unidade de medida. Posteriormente, é desejável que se se evidencie que é possível medir uma superfície plana com diferentes superfícies ou com frações da mesma.

Um ponto a ser mencionado nesse momento é o sistema de numeração decimal e uma forma geométrica mais simples de medir uma superfície é o quadrado até mesmo pela simplicidade de se obter, seus múltiplos e submúltiplos. Algumas transformações de unidades podem ser mostradas por meio de ilustrações (Figura 8).

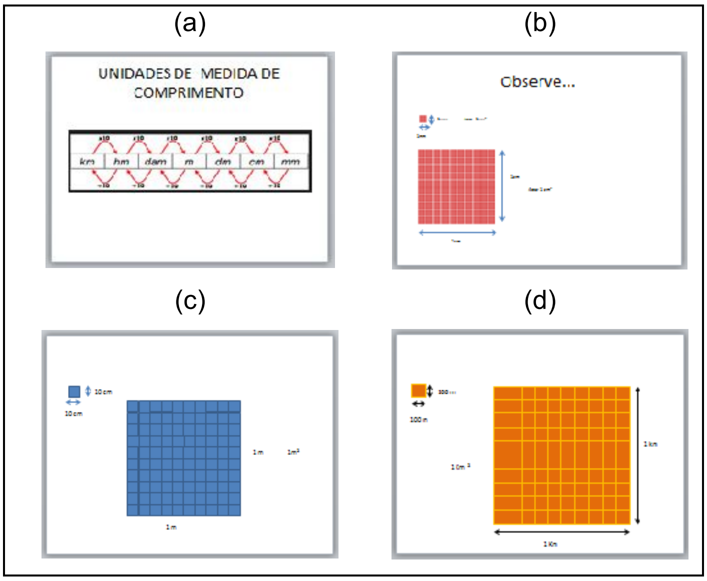


Figura 8. Slides utilizados na sequência
(Etapa 2: Conceito de área e unidades de medida)

Na sequência, considera-se de cunho imprescindível promover discussões na sala de aula com relação aos conceitos de área e suas unidades de medida, afim de que os alunos realizem anotações frente a estes tópicos. A seguir encontra-se alguns possíveis registros dos diários de bordo de alguns alunos, aos quais a atividade foi aplicada, evidenciando alguma compreensão dos conceitos apresentados (Figura 9).

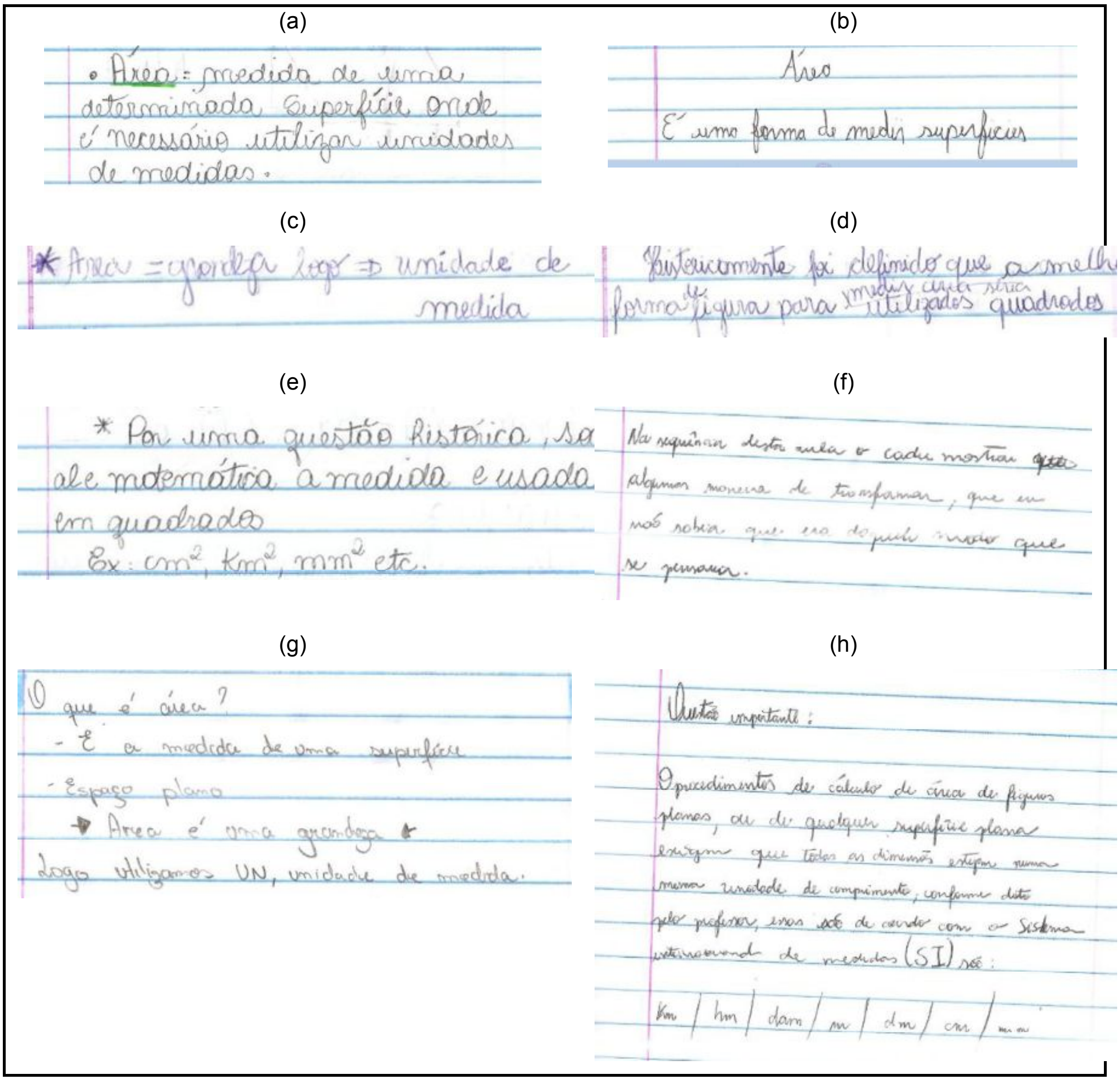


Figura 9. Anotações sobre área e unidades de medida
(Etapa 2: Conceito de área e unidades de medidas de superfícies)

Etapa 3: Procedimentos de cálculo

- Área do retângulo

O professor poderá evidenciar para os alunos uma sequência de slides com retângulos (optou-se por apresentar o retângulo, já esta seria, talvez, a figura mais conhecida por eles) desenhados em uma malha quadriculada, de modo a facilitar a contagem de quadradinhos tomados como unidade de medidas de área.

Em seguida, alunos devem ser questionados sobre a área do retângulo (Figura 10), e esperando que os mesmos não se recordem de nenhum procedimento para indicar o valor da mesma, pode-se iniciar com a contagem dos quadrados da malha quadriculada que fazem parte da área do mesmo e, posteriormente, indicar o produto entre as dimensões do mesmo.

Na sequência de slides animados inicialmente busca-se evidenciar a medida de comprimento da à base e à altura do retângulo, depois a nomeação destes elementos, a medida deles (*3u* e *2u*, respectivamente), a multiplicação $3u{\cdot}2u$ e, finalmente, a área do retângulo expressa por $A=6u^2$, sendo feito a generalização *A=base x altura* ou *A= b.h* (Figura 11).

(a) (b) (c)

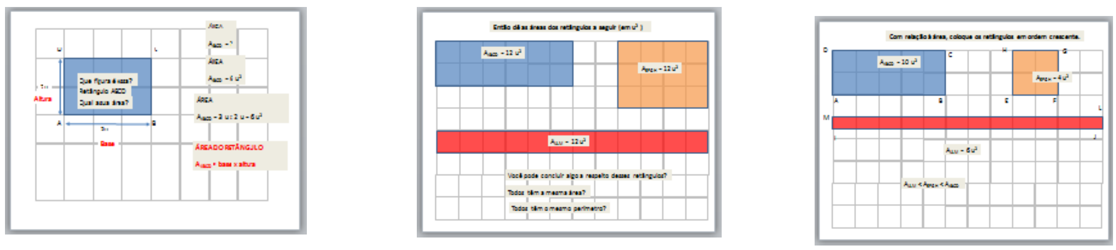


Figura 10. Slides dinâmicos para área do retângulo
(Etapa 2: Procedimentos de cálculo)

Os slides seguintes solicitam as áreas de três retângulos (entre eles um quadrado) e indagam a respeito de características comuns a esses retângulos; espera-se que os alunos concluam que as três figuras possuam mesma área, porém com perímetros variados. Dessa forma, faz-se importante que cada aluno tenha por si suas conclusões.

Nos diários de bordo, oriundos da aplicação desse material já realizada, alguns alunos relacionaram o quadrado com o retângulo (Figura 11); outros escreveram apenas a fórmula ou a acompanharam de exemplo e tentaram mostrar as unidades de comprimento – às vezes de maneira equivocada.

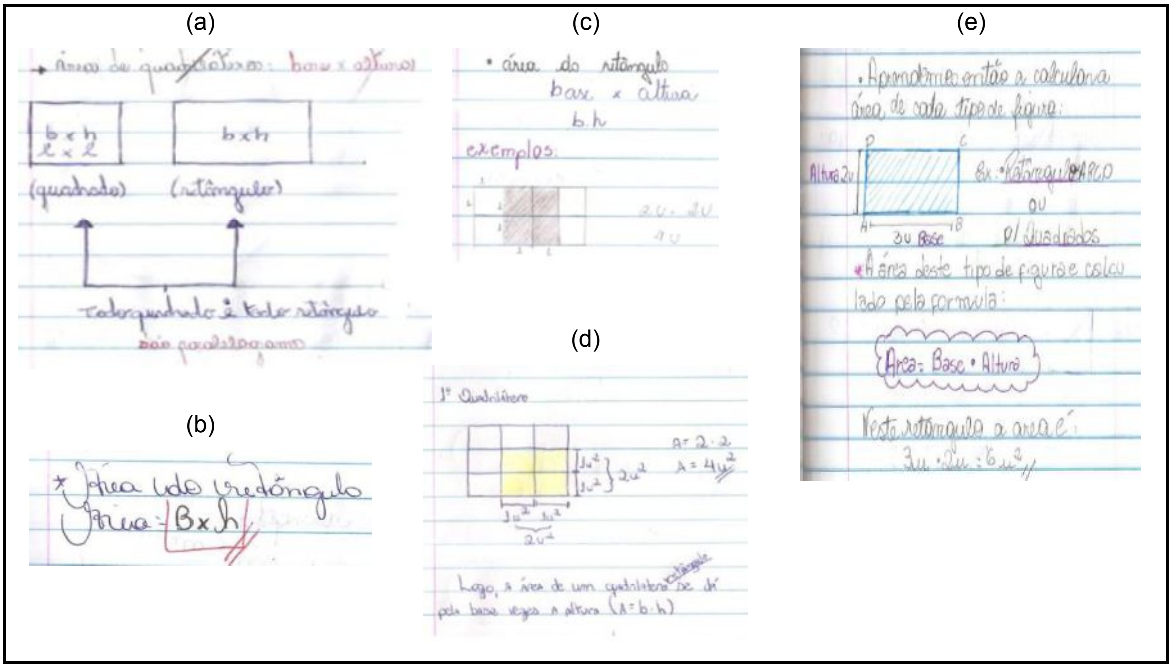


Figura 11. Anotações sobre o procedimento de área do retângulo (Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

-Área do paralelogramo

Uma das características dos slides dinâmicos é sempre indagar o nome da figura apresentada, como também acontece com o paralelogramo. Para reforçar a ideia de medida de área, os slides mostram uma animação que consiste no preenchimento da superfície do paralelogramo com quadradinhos que aparecem um de cada vez, inteiros ou em metades.

Como a apresentação é sequenciada, os alunos podem fazer a contagem em voz alta até chegarem ao total da área: *15 u^2*. Para a compreensão do procedimento de cálculo da área do paralelogramo, os slides evidenciam a base e a altura da figura (mas não a medida do lado inclinado); essas medidas devem ser questionadas, afim de que os alunos atribuam valores como *5u* e de *3u*, respectivamente.

Ao multiplicarem as medidas destacadas e obterem *15 u^2*, acaba-se favorecendo a generalização, ou seja, a conclusão de que basta determinar o produto da medida da base pela medida da altura para determinar a área do paralelogramo e que a fórmula seria *A=base x altura* ou *A= b.h* – a mesma do retângulo (Figura 12). Logo em seguida, solicita-se o cálculo das áreas de outros paralelogramos e que coloquem estes valores em ordem crescente.

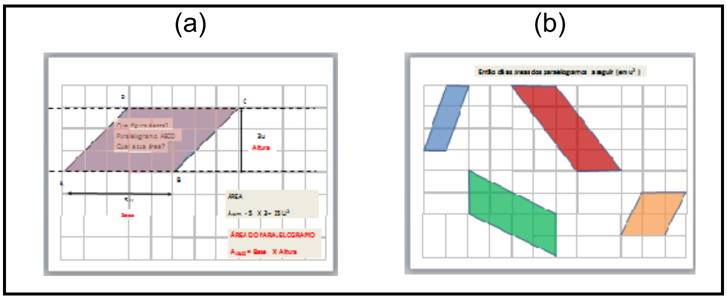


Figura 12. Slides dinâmicos para área do paralelogramo (Etapa 2: Procedimentos de cálculo)

Para os paralelogramos, observa-se que os registros apresentam diretamente a fórmula ou a acompanhavam de exemplo (Figura 13).

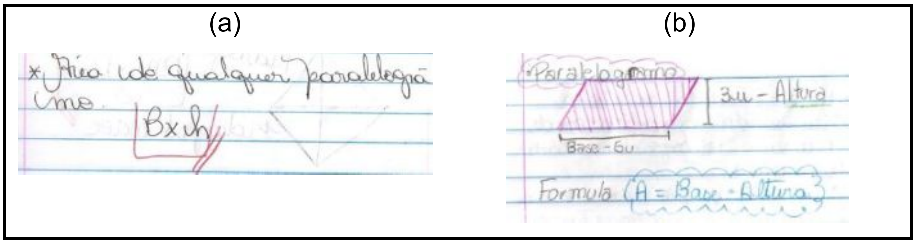


Figura 13. Anotações sobre o procedimento de área do paralelogramo (Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

Para fixar o entendimento de que a área do paralelogramo depende apenas de um de seus lados e da altura (mas não depende do outro lado), os slides seguintes mostram uma animação: nesta, vários paralelogramos com mesma base e altura são apresentados (Figura 14).

Sendo feitas indagações aos alunos sobre os paralelogramos, espera-se obter a conclusão que todos tem a mesma área[8], já que possuem mesma base e mesma altura.

[8] Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre essas as áreas dessa porção é a mesmo constante. (EVES, 2004, p. 426).

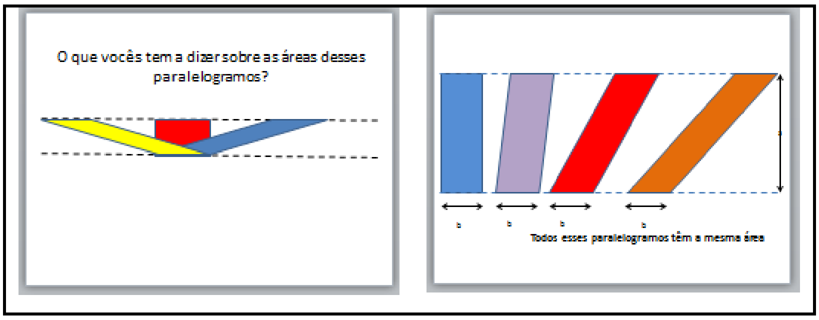


Figura 14. Slides sobre o sobre o princípio de Cavalieri (Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

- Área do triângulo

A sequência de slides de triângulos é formada por três triângulos, sendo o primeiro um triângulo retângulo de catetos 4u e 3u (apoiado no cateto maior),o segundo triângulo escaleno e acutângulo com 4u de base e 3u de altura e o terceiro um triângulo isósceles e acutângulo de base 4u e altura 3u – estes.

Inicialmente os triângulos serão replicados de modo a compor um retângulo (no primeiro e no terceiro) e um paralelogramo (no segundo). Feito isso, os alunos poderão ser indagados quanto que fração representa a superfície do triângulo, em relação ao retângulo (ou paralelogramo) formado.

Observando que nos três casos, trata-se da metade da superfície composta, formaliza-se que a área do triângulo é dada pelo semiproduto da base pela altura, ou por $A = \frac{b \cdot h}{2}$. (Figura 15).

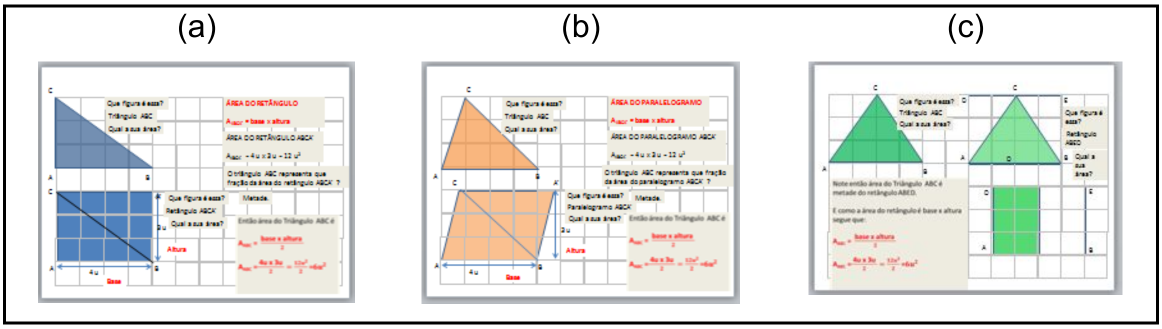


Figura 15. Slides dinâmicos para área do triângulo (Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

Ainda para justificar o procedimento, simula-se uma ação a ser feita com materiais manipuláveis em cima da carteira, por meio dos slides, em que cada triângulo é replicado e girado até se encaixar com o triângulo original e assim compor um paralelogramo (Figura 16). E finalmente, outro slide solicita o cálculo das áreas de três triângulos, em que as medidas da base e da altura podem ser determinadas por meio da malha quadriculada.

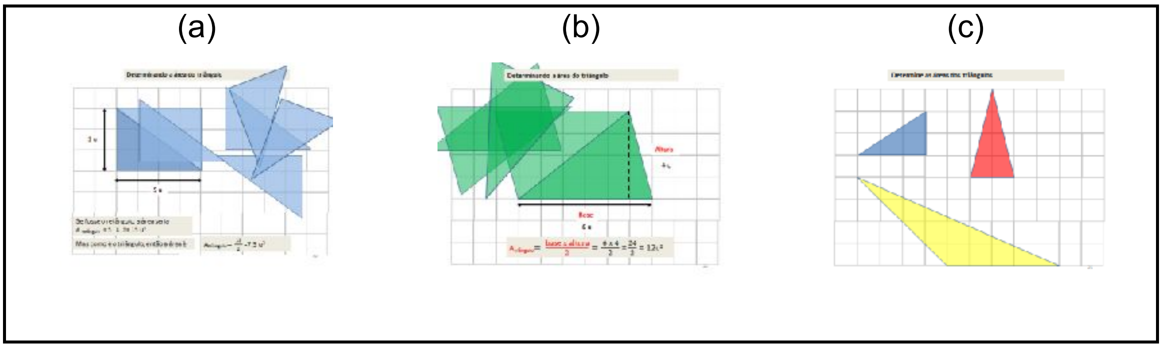


Figura 16. Slides dinâmicos para área do triângulo
(Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

Os registros nos diários de bordo dos alunos indicam que vários alunos se valeram do retângulo para explicar a fórmula da área do triângulo, seja utilizando apenas a forma discursiva, seja utilizando figuras e indicando as dimensões algebricamente ou substituindo valores numéricos (Figura 17).

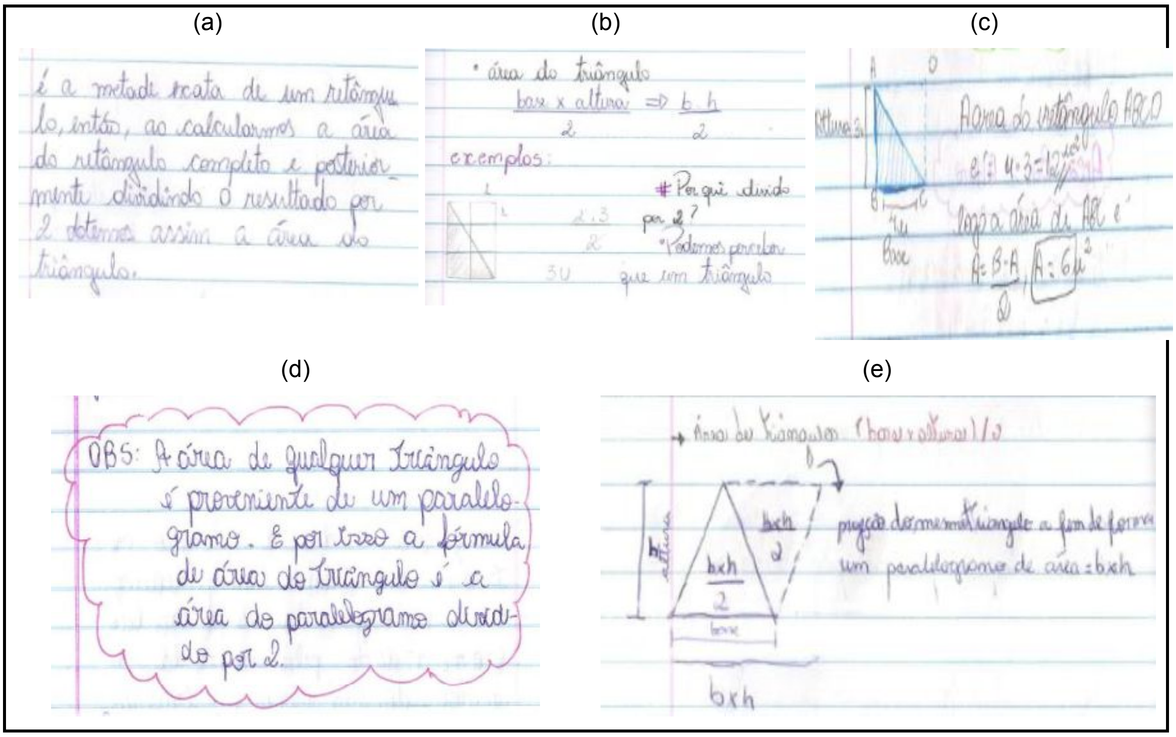


Figura 17. Anotações sobre o procedimento de área do triângulo
(Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

- Área do trapézio

Na sequência, os slides apresentam o desenho de um trapézio, sendo questionados os nomes da figura e de seus principais elementos: base maior, base menor e altura.

Esses slides dinâmicos mostram a replicação do trapézio dado, mas de forma invertida verticalmente, simulando a justaposição de maneira a compor um paralelogramo (Figura 18). Questiona-se então, a respeito de como determinar a área desta última figura.

Nesse caso é possível, por meio de um conjunto de indagações, permitir que os alunos consigam verbalizar que o procedimento que se deve realizar para determinar a área do trapézio é a soma da medida da base maior e base menor multiplicado pela altura dividido por dois: $A = \frac{(B+b) \cdot h}{2}$.

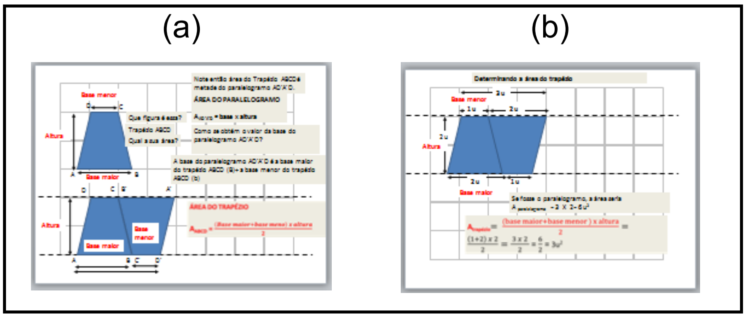


Figura 18. Slides sobre área do trapézio
(Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

Os registros produzidos indicam que vários alunos apresentaram a figura e o nome dos elementos (base maior, base menor e altura) e a fórmula da área do trapézio e outros acrescentavam um exemplo, valendo-se, inclusive, de malha quadriculada. Foram encontrados registros em que os alunos descreviam a natureza do procedimento a partir da composição de um paralelogramo (Figura 19).

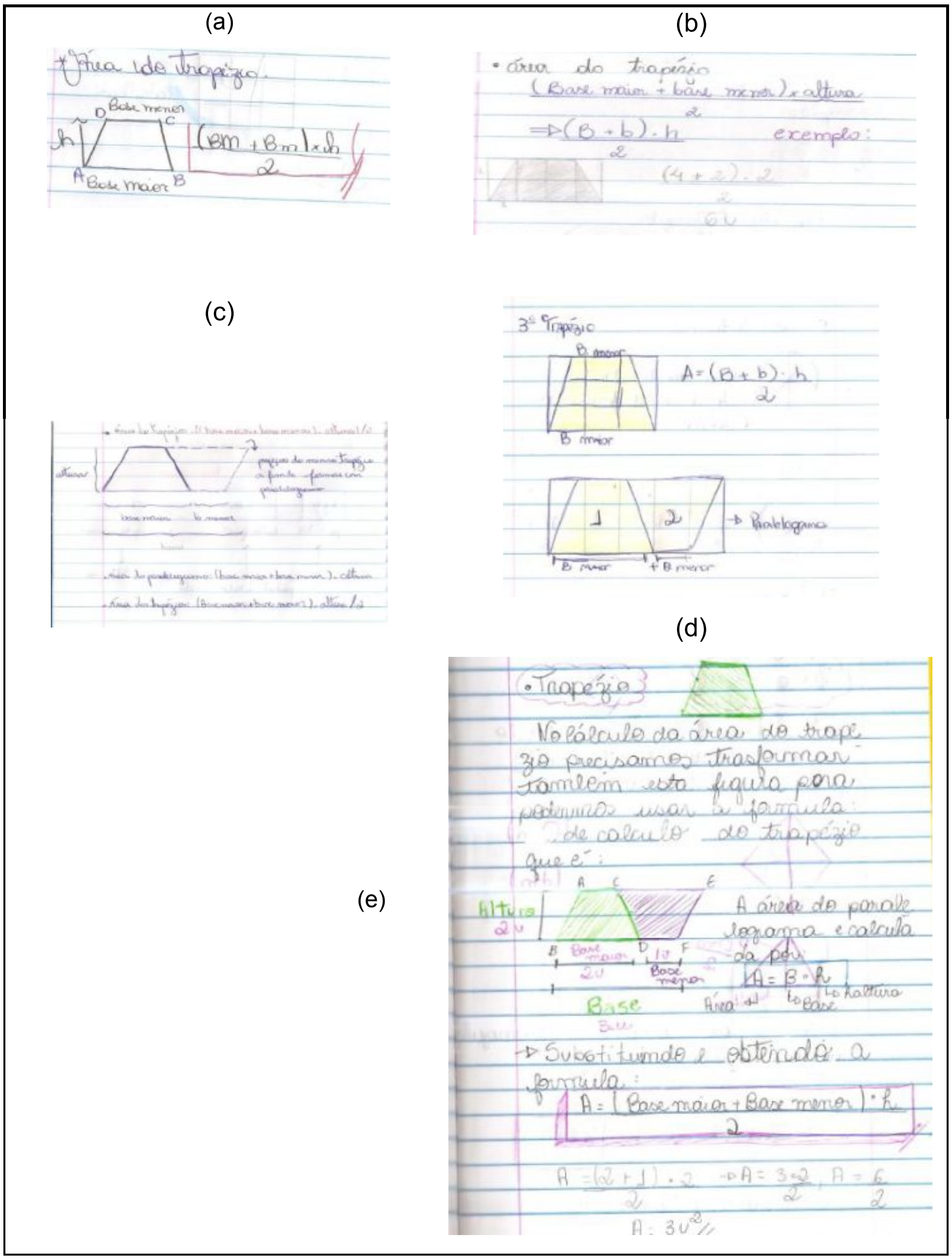


Figura 19. Anotações sobre o procedimento de área do trapézio (Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

- Área do losango

Da mesma maneira como foi proposto com as figuras anteriores, ou seja, por meio de questionamentos acerca da nomeação e das propriedades, os slides seguintes mostram o losango e seus principais elementos, tais como diagonal maior e diagonal menor – e também a perpendicularidade e o ponto médio de intersecção entre elas etc.

A decomposição do losango dá-se com a divisão da figura por meio da diagonal maior e a identificação de dois triângulos congruentes com a base tendo a mesma medida da diagonal maior e a altura medindo a metade da diagonal menor. Assim, a partir da área de um dos triângulos, obteve-se a área do losango, ou seja, se cada triângulo tinha por área $A = \frac{D.\left(\frac{d}{2}\right)}{2} = \frac{D \cdot d}{4}$, então a área do losango seria dada pelo semiproduto das diagonais, ou $A = \frac{D \cdot d}{4} \cdot 2$ ou $A = \frac{D \cdot d}{2}$ (Figura 20).

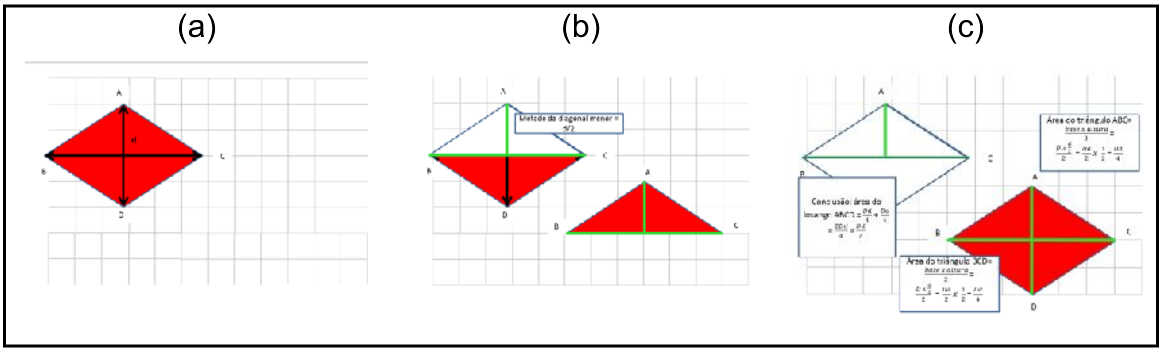


Figura 20. Slides sobre área do trapézio
(Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

Cabe mencionar que os alunos podem demonstrar dificuldades para acompanhar esses cálculos apenas com a ajuda dos slides, sendo, então, necessária a utilização do quadro. Nos diários de bordo, observou-se que a maioria reproduziu a decomposição apresentada pelo professor, alguns até ilustrando a ação de recortar com o desenho de uma tesoura. Nota-se que alguns alunos se valeram de outras maneiras de se chegar à fórmula da área do losango: compondo um retângulo ou um paralelogramo, o que parece demonstrar entendimento do assunto (Figura 21).

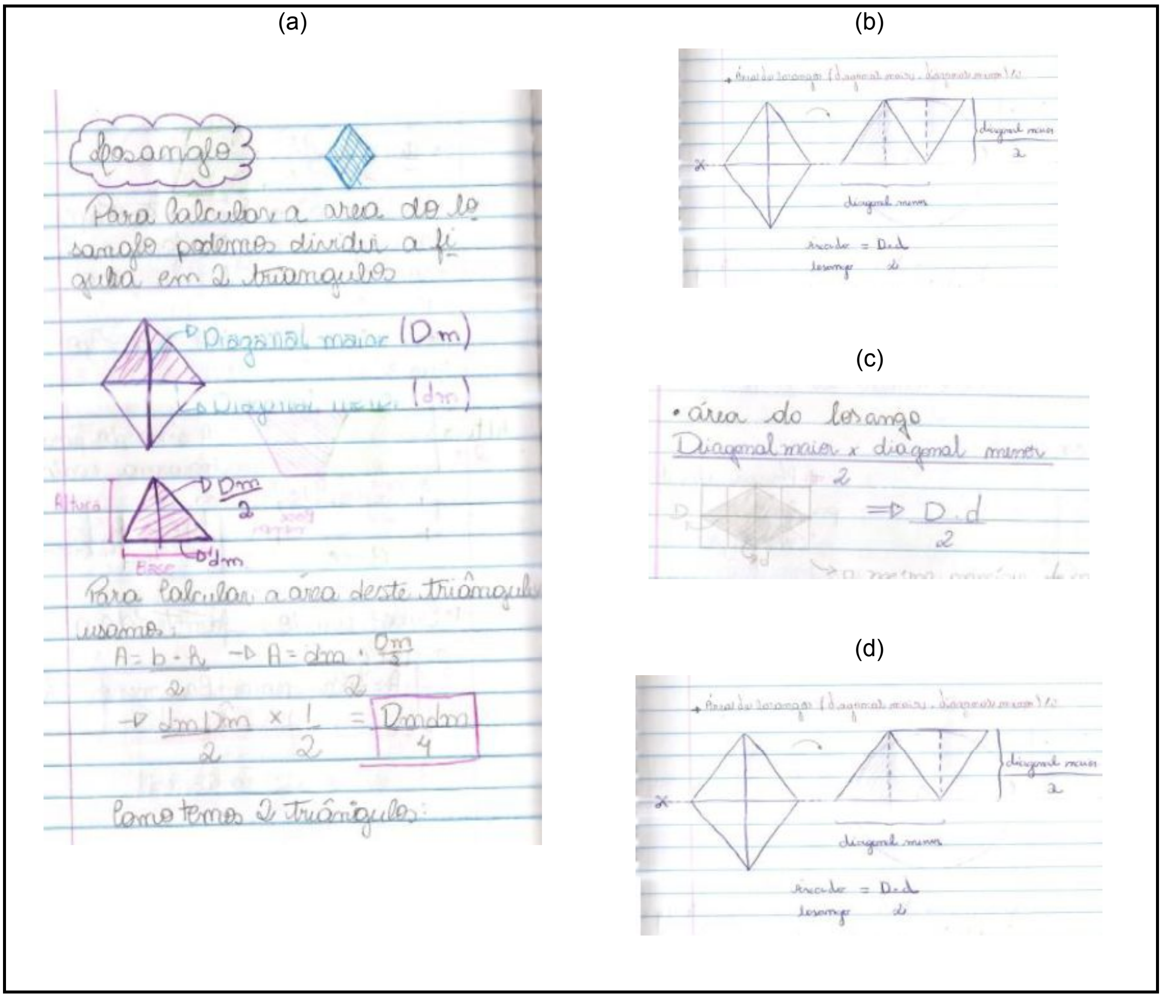


Figura 21. Anotações sobre o procedimento de área do losango
(Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

Seguindo o objetivo de evidenciar a natureza dos procedimentos, o professor introduz uma discussão acerca do cálculo da área do círculo: por meio da imagem do slide (Figura 22), e solicita que os estudantes contem a quantidade de quadradinhos inteiros e realizem aproximações com os que não são inteiros de modo a se chegar num valor aproximado.

Mostra-se também a quantidade de unidades de área do quadrado inscrito no círculo e a do quadrado circunscrito ao círculo. Abra questionamentos se por meio destes valores existe a possibilidade de se determinar a área do círculo. Se não houver resposta afirmativa, encaminhe que a área aproximada pode ser determinada por meio da média entre os valores citados, sendo encontrado o valor $A = \frac{16+36}{2} = 21\,u^2$.

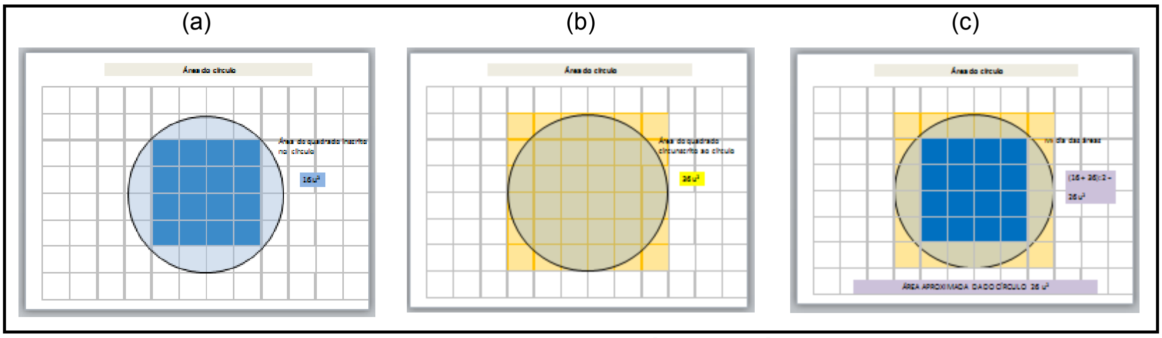


Figura 22. Slides sobre área do círculo
(Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

Com auxílio dos slides, é possível apresentar os elementos do círculo: raio, diâmetro, arco e comprimento. A partir disso, questiona-se acerca da medida do comprimento da circunferência.

Com o auxílio das animações dos slides, o círculo decompõe-se em setores circulares que, organizados, compõem uma figura que tem como base uma linha com medida igual à metade do comprimento da circunferência do círculo apresentado inicialmente (Figura 23).

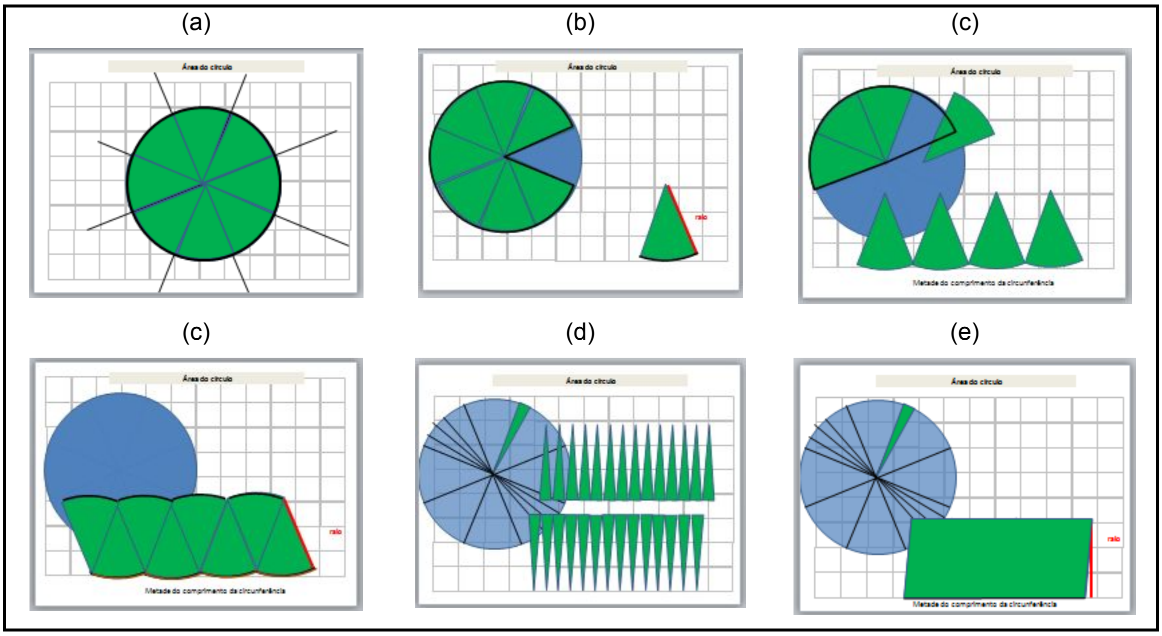


Figura 23. Slides sobre área do círculo
(Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

Aumentando o número de cortes no círculo, menores ficam os setores que compõem a figura, que se aproxima de um retângulo, sendo que o raio do círculo tende para a altura do retângulo formado. Assim, a partir de questionamentos acerca das dimensões do retângulo, espera-se que os estudantes concluam que a base é $\frac{2\pi r}{2} = \pi r$, que a altura era a medida do raio e que a fórmula da área do círculo podia ser escrita como $A = \pi r^2$.

Quanto aos registros produzidos frente ao processo de obtenção da fórmula final do procedimento do cálculo de área do círculo, foram encontradas tentativas de se reproduzir a ação de compor retângulos a partir de setores circulares (Figura 24).

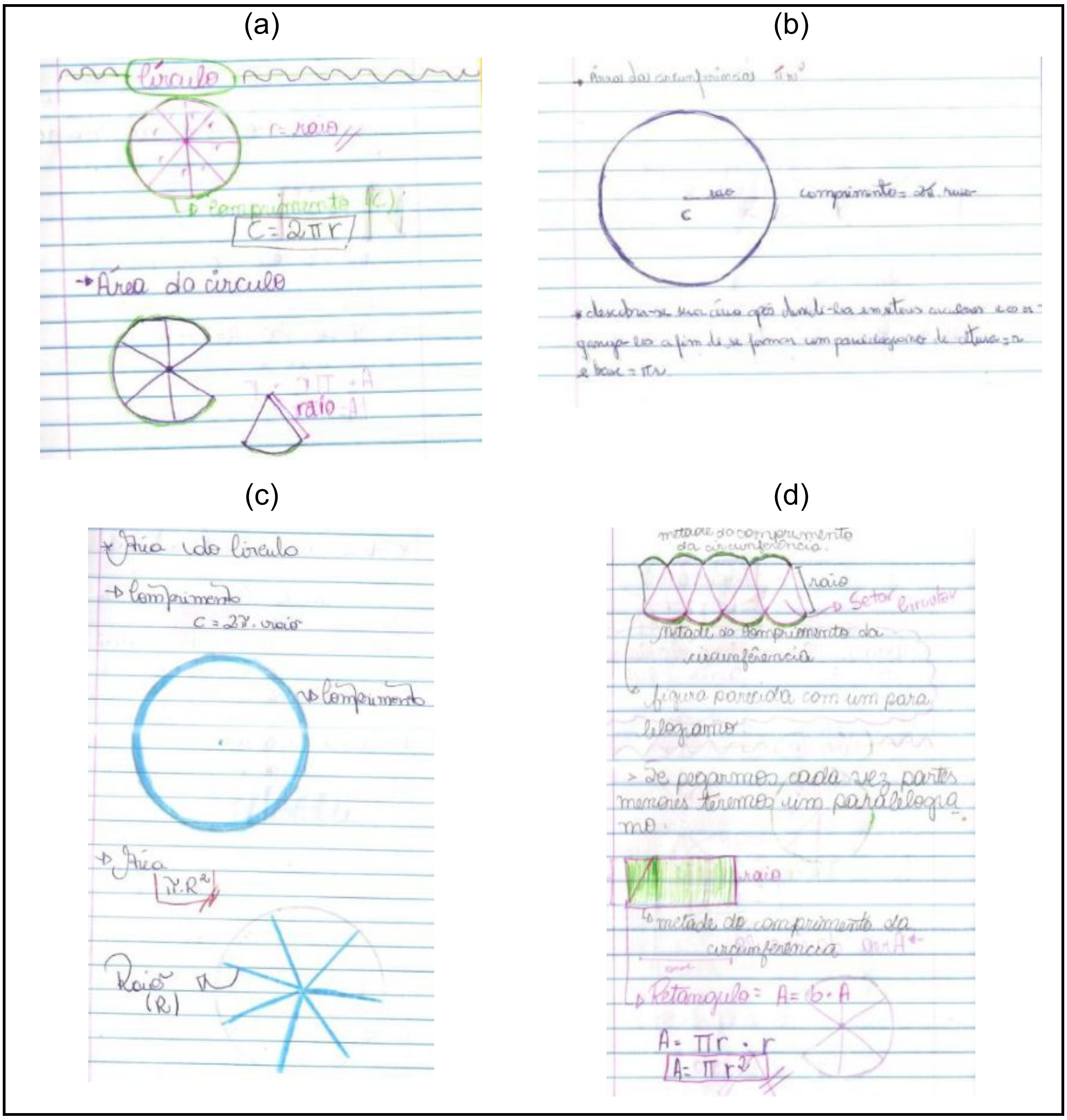


Figura 24. Anotações sobre o procedimento de área do losango (Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

-Área do setor circular

Após identificação de que a figura é relativa a uma parte de um círculo, obtida por meio de cortes a partir de seu centro, o professor deve explicar que sua área pode ser determinada se for calculada a fração da área do círculo.

Tendo concluído que o cálculo da área do setor circular depende da fração que ele representa da figura, o professor faz alguns esboços no quadro mostrando que se for um semicírculo o aluno vai utilizar o valor de $\frac{\pi r^2}{2}$, se for metade de um semicírculo, noutras palavras $\frac{\pi r^2}{4}$, se for metade da metade de um semicírculo $\frac{\pi r^2}{8}$ e assim por diante.

Com a finalidade de conduzir o pensamento do aluno que o valor da área do setor circular depende da medida do ângulo que ele possui, inicialmente, questiona-se se a área do círculo depende do valor do raio. Posteriormente, se a área do círculo é diretamente proporcional ao tamanho do seu raio, dessa forma se faz necessário encaminhar uma discussão sobre o assunto e com ajuda do quadro, explicar que duas grandezas seriam diretamente proporcionais apenas se variarem na mesma razão.

Para mostrar que a área do círculo não varia proporcionalmente ao seu raio, faz-se uma tabela; os elementos da tabela, explorados de modo a verificar que a razão de variação da grandeza raio não é igual à respectiva variação da grandeza área (Tabela 1).

Tabela 1. Variação do raio e da área do círculo (Registro feito no quadro pelo professor)

Raio do círculo	Área do círculo
1 cm	$A = \pi$ cm^2
2 cm	$A = 4\pi$ cm^2
3 cm	$A = 9\pi$ cm^2
4 cm	$A = 16\pi$ cm^2

Dando continuidade questione os alunos acerca da medida do ângulo central de um círculo, do semicírculo, de sua metade, etc. e das áreas dos respectivos setores. Os resultados, dispostos em uma tabela, podem ser então explorados de modo a levar os alunos a concluírem que o valor da área do setor circular é diretamente proporcional ao ângulo (Tabela 2).

Tabela 2. Variação do ângulo e da área do setor (Registro feito no quadro pelo professor)

Ângulo do setor	Área do setor
360º	$A = r\pi$ cm^2
180º	$A = \frac{\pi r^2}{2}$cm^2
45º	$A = \frac{\pi r^2}{4}$cm^2
22,5º	$A = \frac{\pi r^2}{8}$cm^2

Sendo assim, é possível utilizar a regra de três para chegar à fórmula da área de setor circular como $A = \frac{\alpha\pi r^2}{360^o}$, sendo α a medida do ângulo do setor.

Os registros produzidos parecem indicar entendimento acerca da área do setor, já que indica a relação entre a área do círculo, a medida do ângulo e a fórmula obtida (Figura 25).

(a) (b) (c)

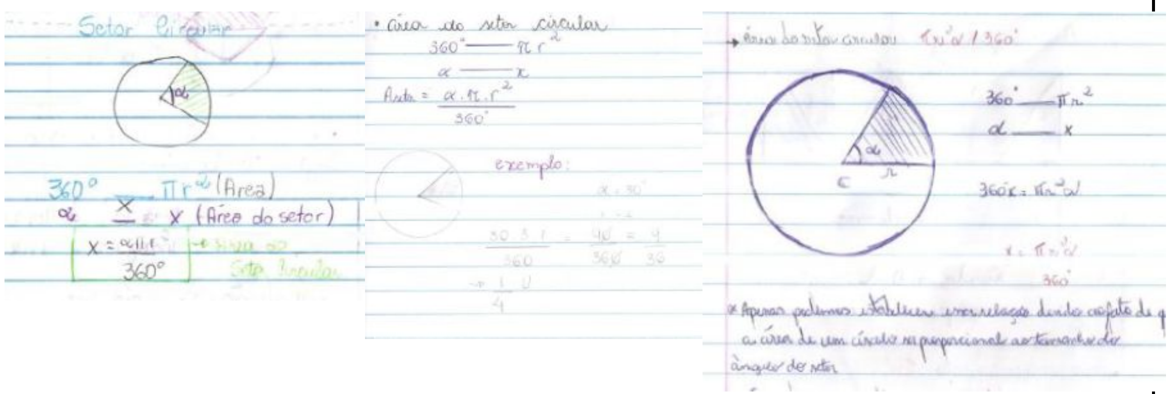


Figura 25. Anotações sobre o procedimento de área do setor circular (Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

Vale mencionar que em todos os registros produzidos, o desenho do setor circular sempre está representado como parte de um círculo.

-Área do segmento de círculo

Na sequência dos slides encontra-se um segmento de círculo e questiona-se o nome da figura, se esta é parte de um setor e qual será a maneira de calcular sua área (Figura 26).

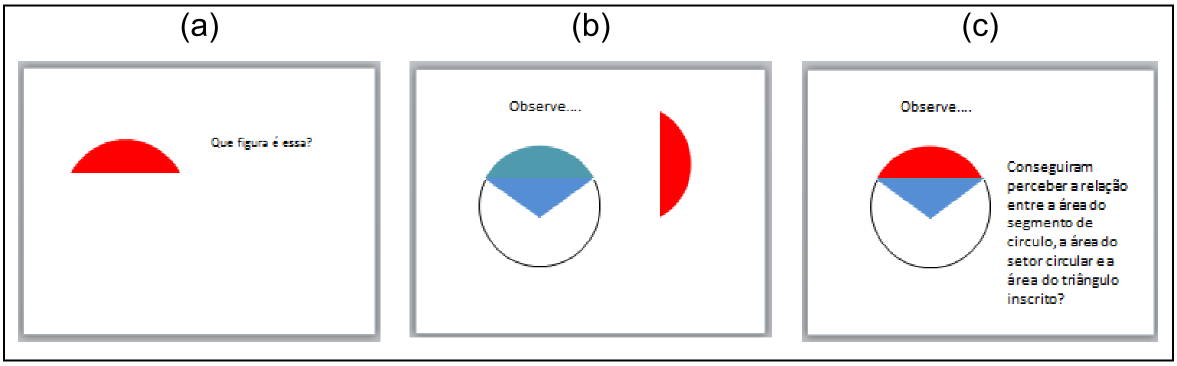


Figura 26. Slides sobre área do círculo
(Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

A princípio é possível que os alunos identifiquem que a figura é parte de um círculo, mas não como parte de um setor circular. As animações dos slides ajudam os alunos a identificar o segmento e a relacionar sua área com a do setor.

Com um conjunto de animações apresentadas a seguir, evidencia-se que o setor circular apresentado é composto por um segmento de círculo e mais um triângulo, sendo assim a área do segmento circular é a área do setor circular menos a área de um triângulo. A figura 27 ilustra as observações e conclusões dadas pelos alunos.

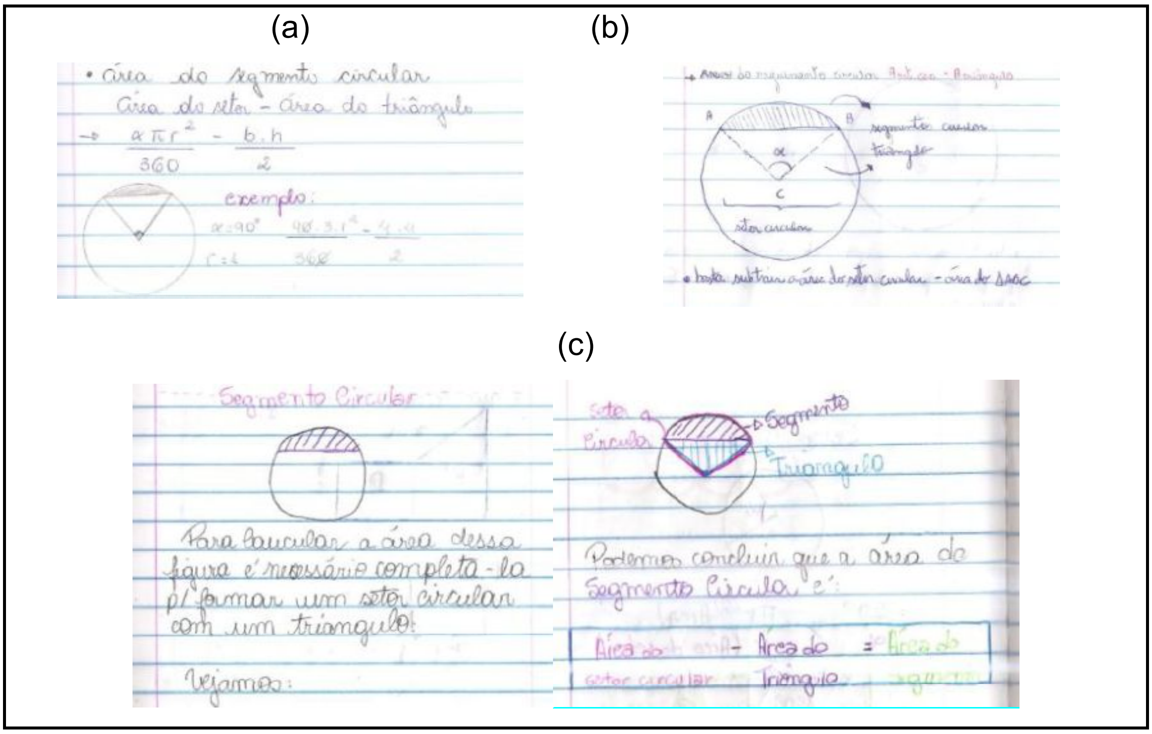


Figura 27. Anotações sobre o procedimento de área do segmento circular
(Etapa 3: Procedimentos de cálculo)

Etapa 4: Aplicações

Para finalizar a sequência didática são apresentadas seis figuras que precisam ser decompostas de modo a se obter suas respetivas áreas (Figura 28).

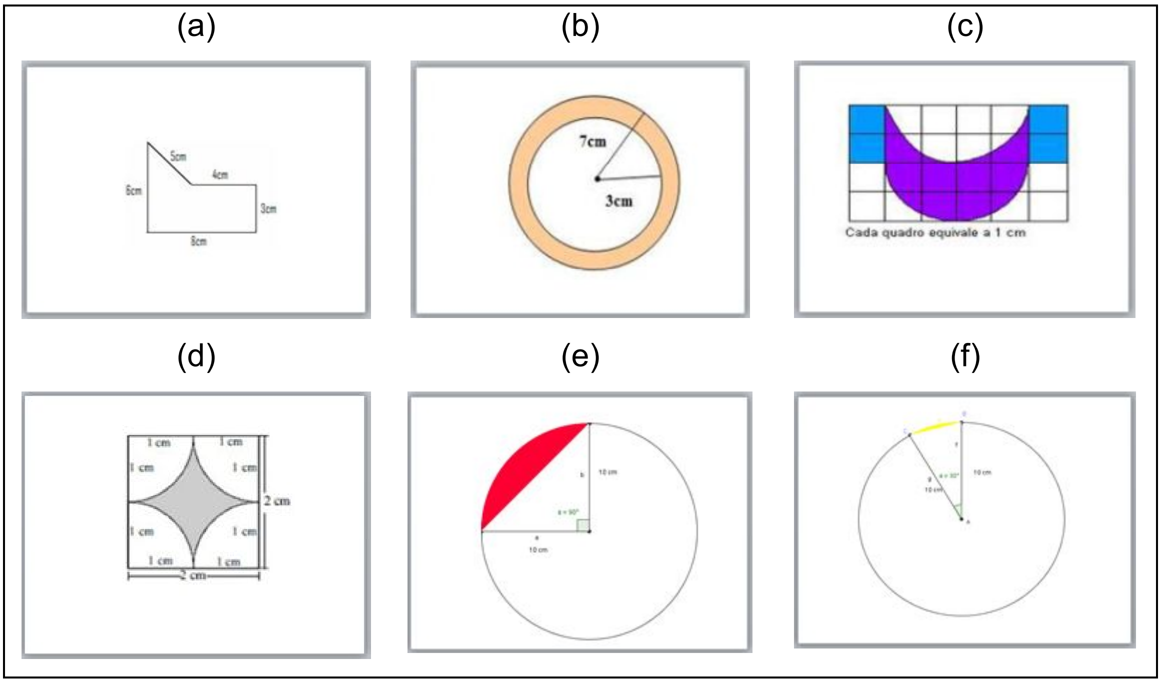


Figura 28. Slides das figuras para que os alunos determinassem o valor da área (Etapa 4: Aplicação)

A resolução dos exercícios de fixação deve ser feita no diário de bordo onde o professor apresenta uma figura por vez no slide e os alunos tenham um tempo para determinar a área da mesma. Antes de passar para a próxima figura, orienta-se que sejam realizadas a correção e a discussão sobre os procedimentos empregados pelos alunos, caso os mesmos tenham errado. É importante pedir que não apaguem o que desenvolveram anteriormente, para que se possa fazer a discussão dos acertos e erros.

2ª parte

O PROCESSO DE MODELAGEM MATEMÁTICA DE LOGOTIPOS FIGURAIS

Planejamento

O processo de modelagem matemática tem por objetivo favorecer a aplicação de conceitos e de procedimentos relativos à área de figuras planas e deve ser desenvolvido em quatro etapas. A estrutura do processo está mostrada na Figura 29.

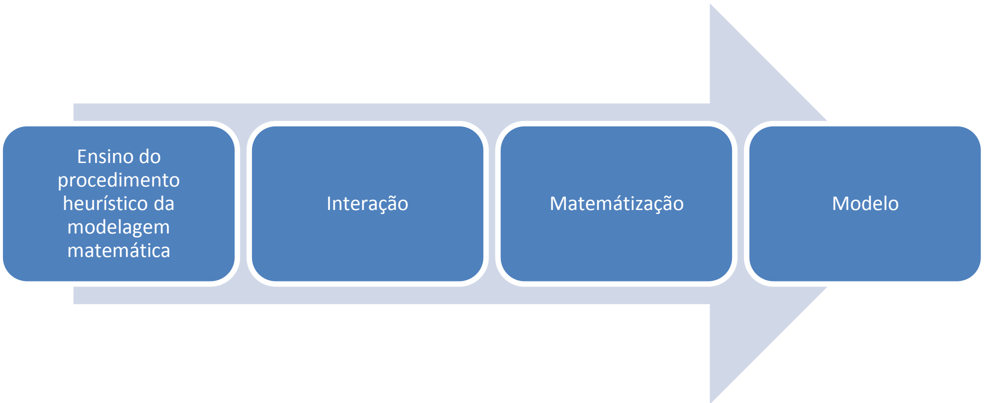


Figura 29. Esquema da estrutura adotada para o processo de modelagem matemática na sala de aula.

A primeira etapa consiste na apresentação de um conjunto de slides dinâmicos com a finalidade evidenciar o procedimento heurístico da modelagem matemática do logotipo figural do Google Drive, como exemplo. Já a segunda, terceira e quarta etapas deste processo sistematizam as experiências vivenciadas pelo autor neste tipo de trabalho.

Aplicação

Etapa 1: Ensino do procedimento heurístico

Inicialmente é desejável que o professor apresente aos alunos, utilizando slides (Figura 30), o logotipo figural do Google Drive e questionar os mesmos sobre qual era a medida da área do mesmo. A partir disto, solicitar para que eles verbalizem as formas geométricas que eles conseguem visualizar no logotipo em questão.

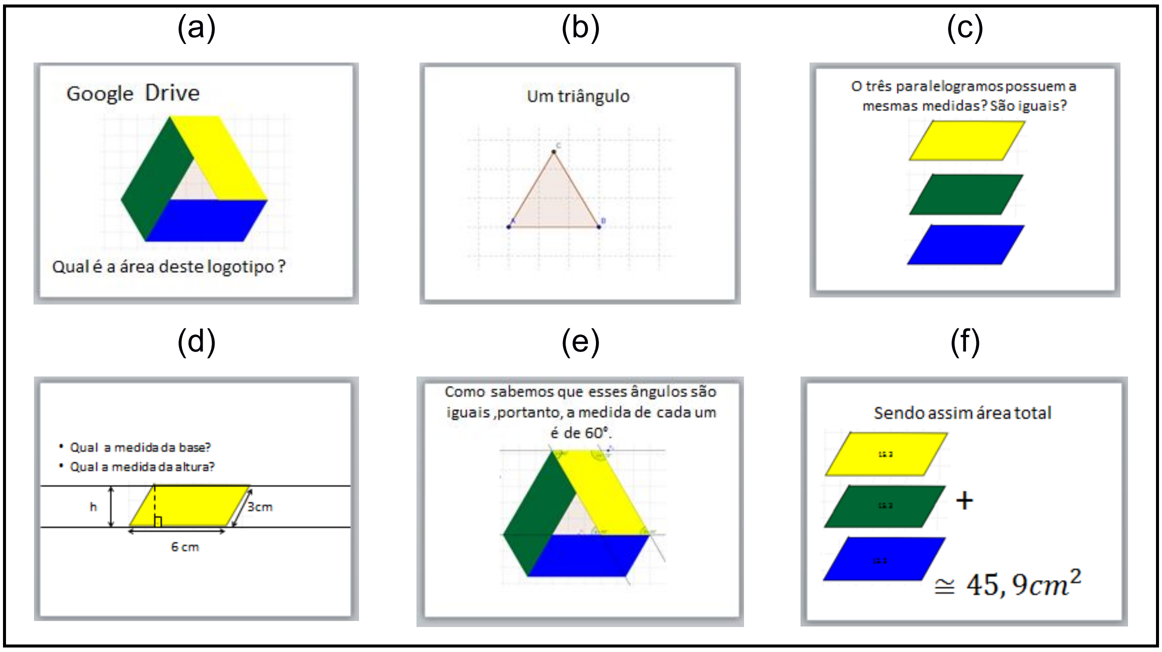


Figura 30. Slides utilizados na modelagem
(Etapa 1: Ensino do procedimento heurístico)

Após a identificação das figuras, solicita-se aos alunos que façam um esboço inicial do logotipo no diário de bordo. A Figura 31 mostra a sequência adotada.

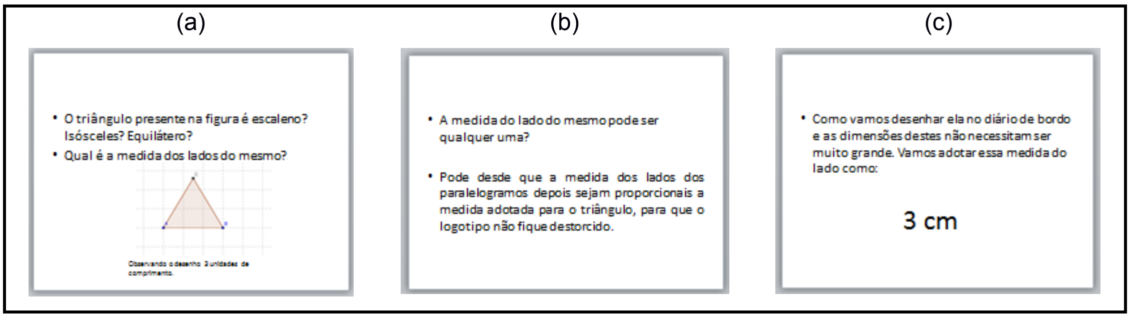


Figura 31. Slides utilizados na modelagem
(Etapa 1: Ensino do procedimento heurístico)

Em seguida pode-se indagar acerca das medidas e da congruência dos três paralelogramos que fazem parte da composição do logotipo (Figura 32).

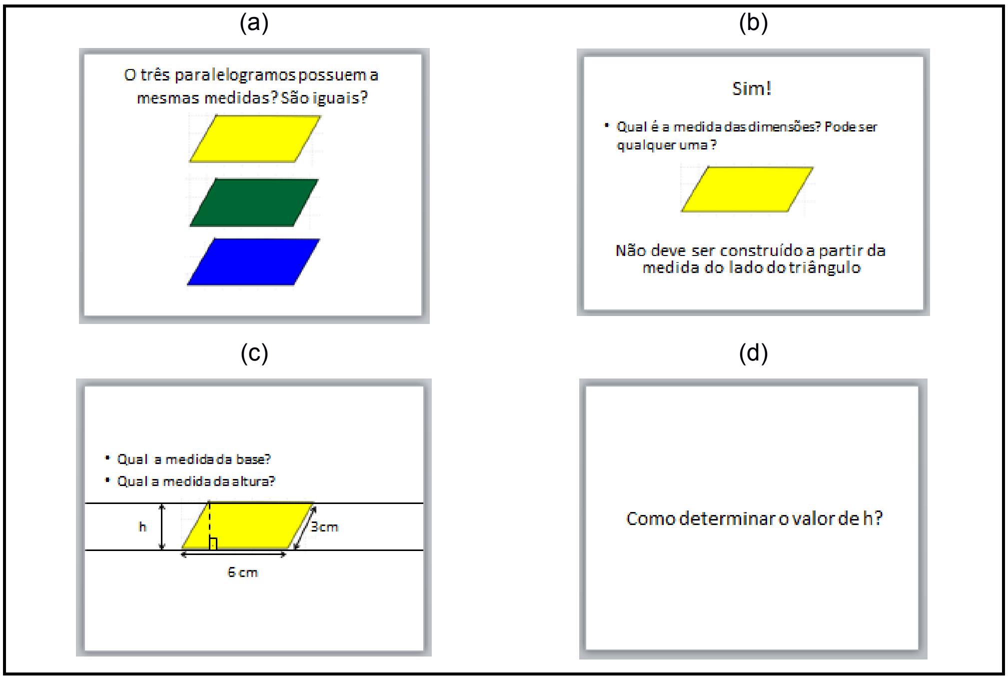


Figura 32. Slides utilizados na modelagem
(Etapa 1: Ensino do procedimento heurístico)

Após discutir e considerar que a medida da base do paralelogramo pode ser o dobro da medida da base do triângulo o professor deverá questionar aos alunos sobre o valor da altura (Figura 33). Com isto inicia-se uma discussão para descobrir a medida dos ângulos internos do paralelogramo, recordando ângulos suplementares, ângulos opostos e congruentes de um paralelogramo, soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero etc. Então, utilizando a razão seno é possível determinar a altura e posteriormente o valor da área, como mostra a ilustração a seguir (Figura 33).

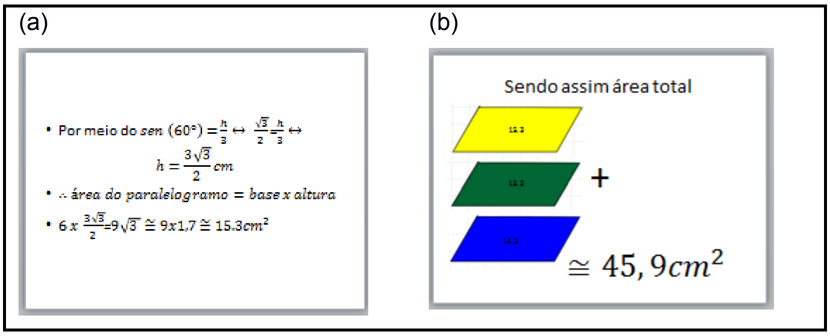


Figura 33. Slides utilizados na modelagem
(Etapa 1: Ensino do procedimento heurístico)

Como a área de um paralelogramo é aproximadamente 15,3 $cm^{2,}$ e o logotipo é formado por três deles conclui-se que a área será de aproximadamente 45, 9 cm^2 (Figura 34). Em seguida, podem ser feitos alguns questionamentos para os alunos: o que o valor encontrado estava representando; se a figura encontrada possuía um tamanho adequado para colocar em um painel de propaganda; se o aumento nas medidas dos lados das figuras aumentaria a área na mesma razão; qual a medida máxima do lado do triângulo para pintar o logotipo em uma parede da sala de aula, etc.

Essas perguntas têm por objetivo fazer com que os alunos estabeleçam relações entre o valor encontrado e a quantidade de quadrados de um centímetro que será necessária para reproduzir o mesmo, além de possibilitar os alunos estabelecer algumas relações entre o número, quantidade de quadradinho e tamanho do logotipo.

Observando os diários de bordos é possível encontrar alunos que realizaram o esboço do logotipo figural da mesma forma que o professor e outros que fizeram de forma diferente da apresentada pelo mesmo (Figura 34).

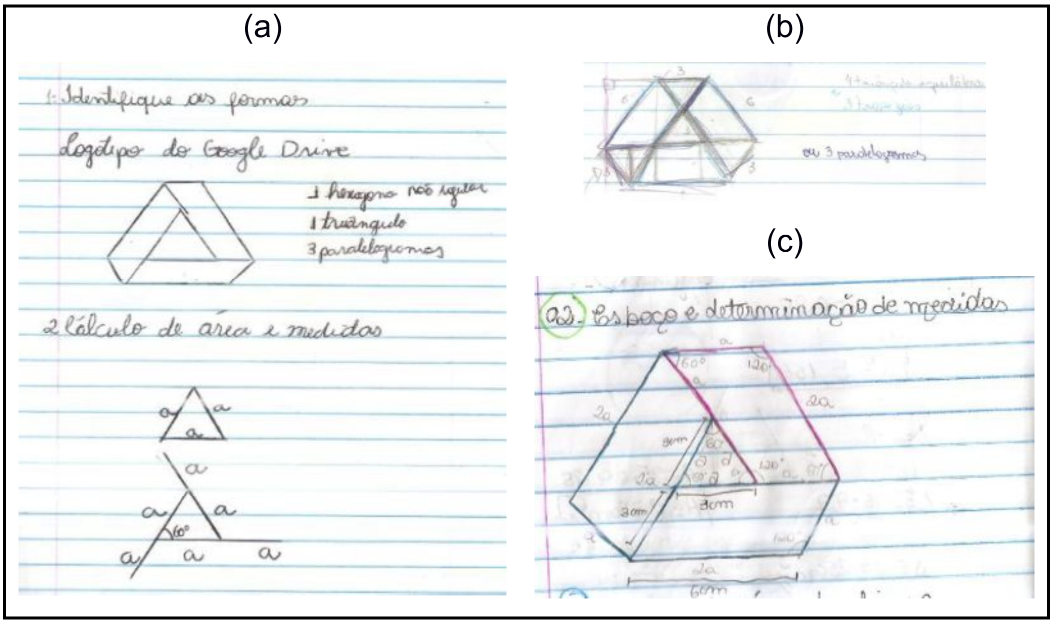


Figura 34. Anotações dos alunos na modelagem
(Etapa 1: Ensino do procedimento heurístico)

Posteriormente, a esta atividade os alunos podem ser encaminhados para um laboratório de informática da instituição; com ajuda do professor e de um conjunto de slides, devem realizar os passos para construção do logotipo utilizando o software Geogebra. A figura a seguir ilustra alguns passos que foram desenvolvidos para obtenção deste modelo (Figura 35).

O software Geogebra é um *software* matemático livre, de matemática dinâmica, que possui recursos de geometria, álgebra e cálculo. O mesmo possui o seu funcionamento com duas janelas de trabalho, sendo uma algébrica e outra geométrica. Na primeira visualizam-se todos os objetos construídos em forma geométrica por meio de equações, pontos, etc. Já na geométrica é possível realizar construções geométricas, utilizando vários recursos como: construção de ângulos, circunferências, polígonos, setores circulares, retas paralelas, perpendiculares, etc. O software permite também que o usuário meça e movimente as figuras. Na interface deste software também é possível trabalhar com ou sem malha quadriculada, eixos de coordenadas - cartesianas ou polares – em que os objetos podem ser construídos ou editados. Ele está disponível no site: https://www.geogebra.org/ e pode ser usado off-line realizando o download do mesmo, ou até mesmo online.

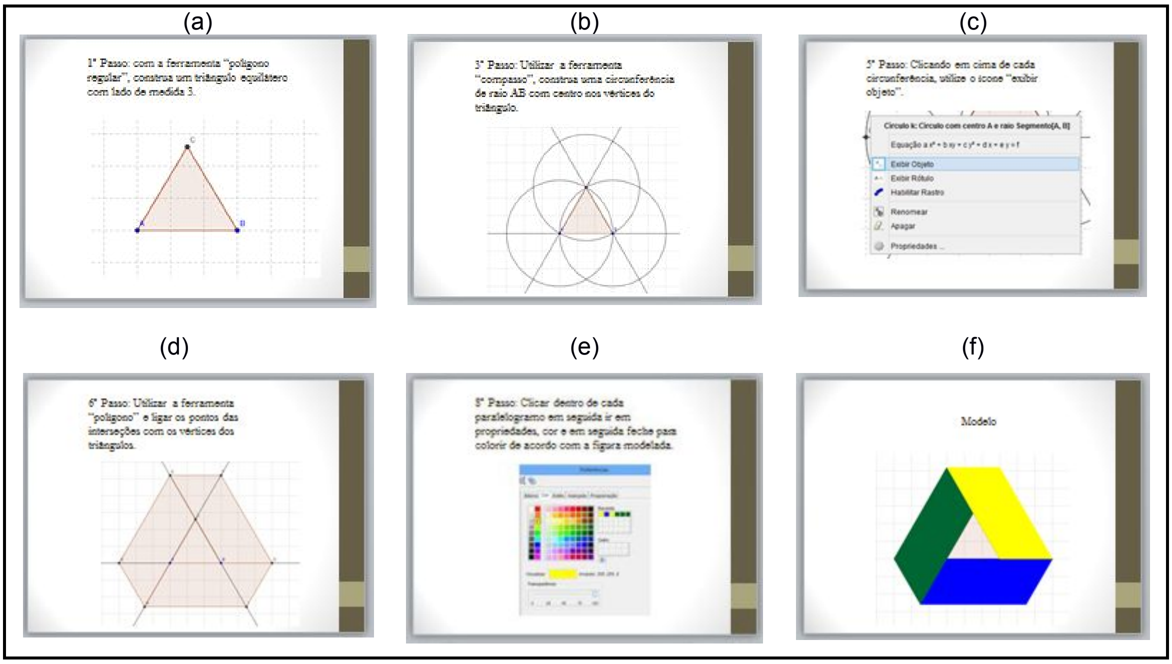


Figura 35. Slides utilizados na modelagem
(Etapa 1: Ensino do procedimento heurístico)

É importante evidenciar que a cada passo – ou cada slide – o professor deve acompanhar as ações no computador, fazendo com que todos caminhem juntos, até a obtenção do modelo final.

Após esse processo o professor deve mencionar que este tipo de atividade refere-se ao processo que é denominado por modelagem matemática. Então, deve propor uma tarefa para ser realizada em casa: escolher três logotipos, imprimir e trazer impresso na aula seguinte.

Etapa 2: Interação

O professor pode orientar os alunos quanto à escolha do logotipo a ser modelado. Existem logotipos figurais em que as formas geométricas são identificadas rapidamente; outros são mais complexos e requerem algumas estratégias – composição ou decomposição – para encontrar as formas em questão. Uma classificação possível é apresentada a seguir.

1ª categoria: Logotipos figurais do nível I de modelagem.

Nessa categoria, estão presentes os logotipos figurais, que permitem os alunos identificarem todas as formas geométricas, de modo imediato, e atribuírem às medidas sem estarem em contato, em nenhum momento, com uma situação problema.

2ª categoria: Logotipos figurais do nível II de modelagem.

Nessa categoria, encontram-se os logotipos figurais em que é possível os alunos identificarem as formas geométricas, de maneira imediata, mas que em algum momento eles terão contato com uma situação problema, que exige a utilização de algumas estratégias para determinar as medidas de comprimento para determinar a área do mesmo.

3ª categoria: Logotipos figurais no nível III de modelagem.

Não se é possível identificar as formas geométricas e nem atribuir e/ou encontrar os valores para as medidas de comprimento e de área, possibilitando assim, os alunos estarem frente a diversas situações problemas.

Dentro de cada categoria é possível perceber um avanço ao que se refere aos níveis de dificuldades de modelar os logotipos figurais, ou seja, quanto maior for o nível maior será o grau de dificuldades de modelar o mesmo. Alguns exemplos são mostrados no Quadro 2.

Quadro 2. Distribuição de exemplos de logotipos figurais de acordo com categorias.

1ª categoria: Logotipos figurais do nível I de modelagem.
2ª categoria: Logotipos figurais do nível II de modelagem.

3ª categoria: Logotipos figurais no nível III de modelagem.

Dentre os três logotipos apresentados inicialmente é esperado que a maioria dos alunos escolha logotipos figurais em que os mesmos possuam alguma relação afetiva, e alguns escolham por facilidade na identificação das formas, atribuição de medidas e determinação da área.

Etapa 3: Matematização

Após realizar a escolha de um logotipo figural, os alunos iniciam a identificação das figuras. A

Figura 36. Alunos identificando as formas (Etapa 3: Matematização)

Orienta-se que se disponham as carteiras de um modo a facilitar a circulação do professor entre as carteiras e também a interação entre os alunos.

Na figura a seguir é possível verificar na primeira linha três esboços de logotipos figurais do nível I e na segunda linha o processo de identificação de formas dos respectivos (Figura 37).

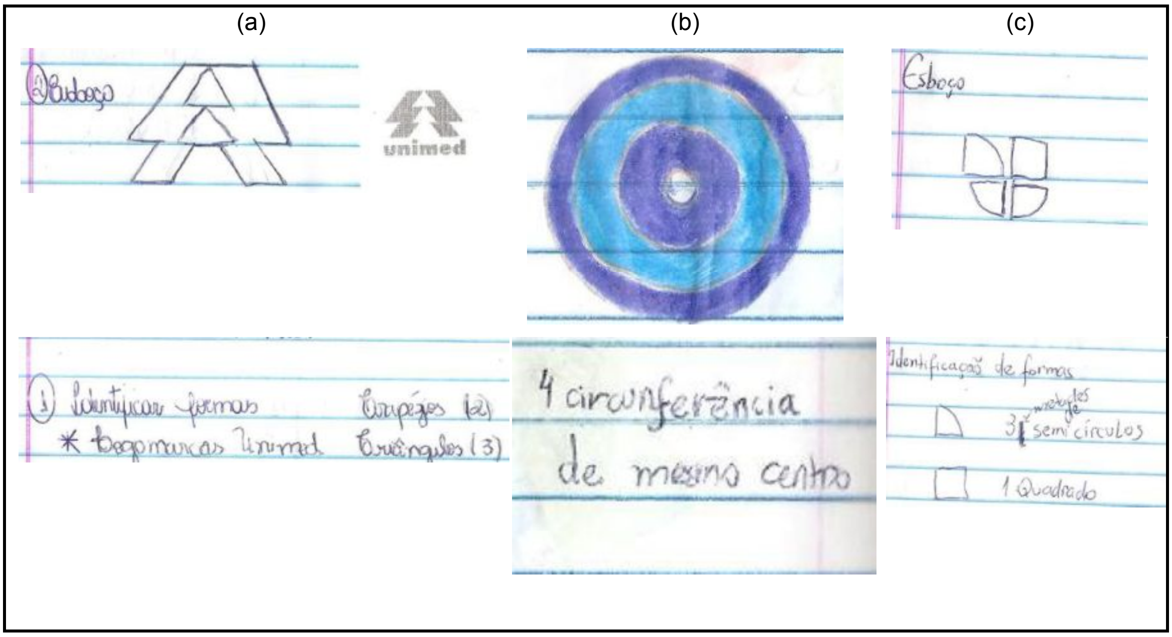


Figura 37. Anotações dos alunos na modelagem
(Etapa 3: Matematização)

Para os logotipos considerados como sendo do nível I, é possível encontrar dois tipos de esboços: um em que os participantes utilizem instrumentos de desenho geométrico – régua e compasso – e outro em que os mesmos façam a mão livre.

E possível que alguns alunos tenham dificuldades na identificação das formas geométricas, conforme mostra a Figura 38.

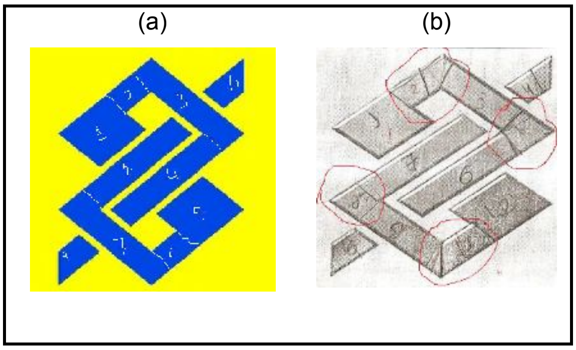


Figura 38. Possibilidade de identificação de formas (a) e identificação de formas de uma participante (Etapa 3: Matematização)

Vale ressaltar que alguns alunos realizaram o desenho a mão livre, outros optaram por instrumentos de desenho geométrico e/ou papel quadriculado. Será possível perceber que, diferente dos logotipos figurais de nível I, os de nível II e de nível III permitem a realização de uma categorização de processos completos e incompletos/ aproximados.

Os processos completos são considerados como aqueles em que os alunos conseguem identificar todas as formas geométricas sem realizar nenhuma aproximação. Os incompletos/ aproximados são aqueles ou que foram realizados de maneira incompleta ou que se utilizaram algumas aproximações.

Nota-se, na Figura 39, as diferentes maneiras de os alunos identificarem e nomearem as formas, inclusive destacando a posição relativa entre elas.

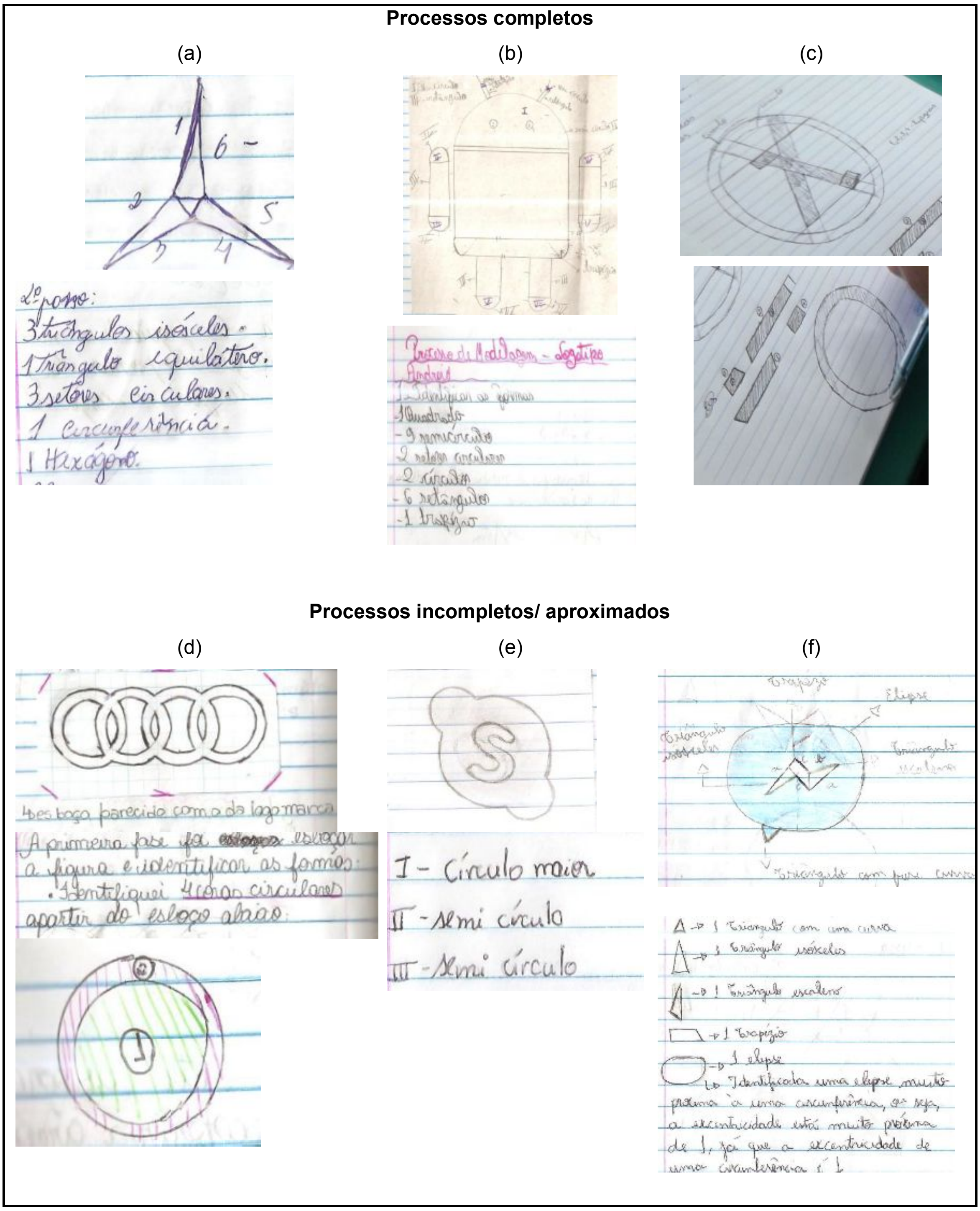
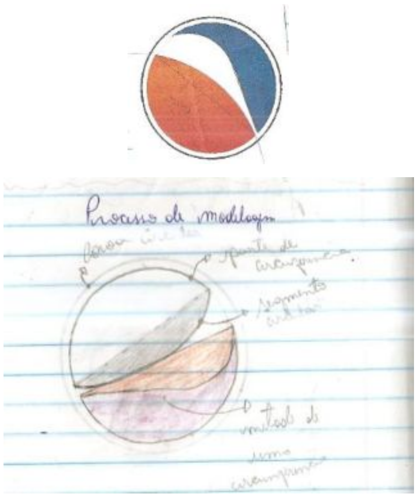


Figura 39. Anotações dos alunos na modelagem na subfase de identificação de formas (Etapa 3: Matematização)

Para os logotipos figurais da categoria do nível III da modelagem é possível identificar apenas processos incompletos/ aproximados (Figura 40).

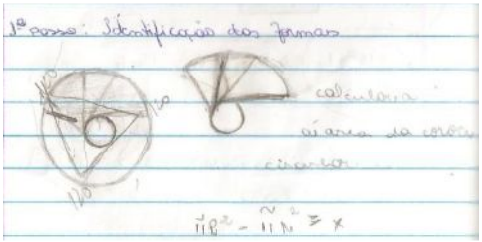
Processos Incompletos/Aproximações

(a)

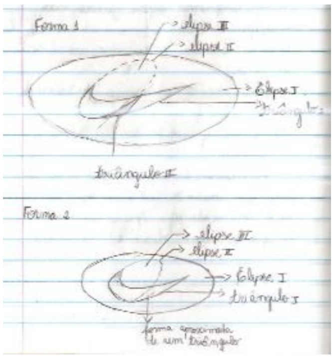


(b)

(c)



(d)



(e)

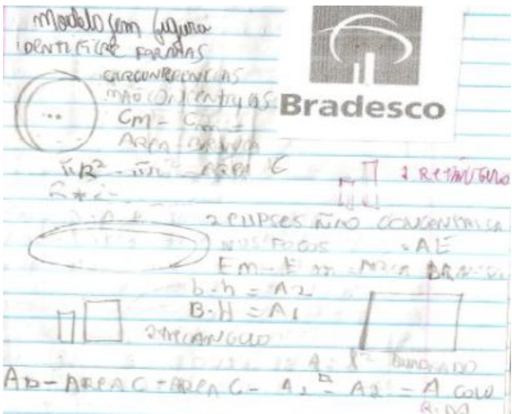


Figura 40. Anotações dos alunos na modelagem no processo de identificação de formas (Etapa 3: Matematização)

Nesta subfase da modelagem os alunos tem que atribuir valores para elaboração do modelo. Encontram-se cinco procedimentos diferentes de se fazer essa atribuição de medidas: utilizando instrumentos e medindo na figura impressa, elaborando um esboço utilizando medidas proporcionais ao logotipo figural do papel impresso, elaborando um desenho a partir das medidas do papel impresso, desenhando no papel quadriculado e desenhando de forma sistemática.

O procedimento realizado, na figura impressa, a partir das figuras do é possível identificar que os alunos inicialmente, mediram utilizando régua e transferidor a medida de cada uma das figuras (Figura 41).

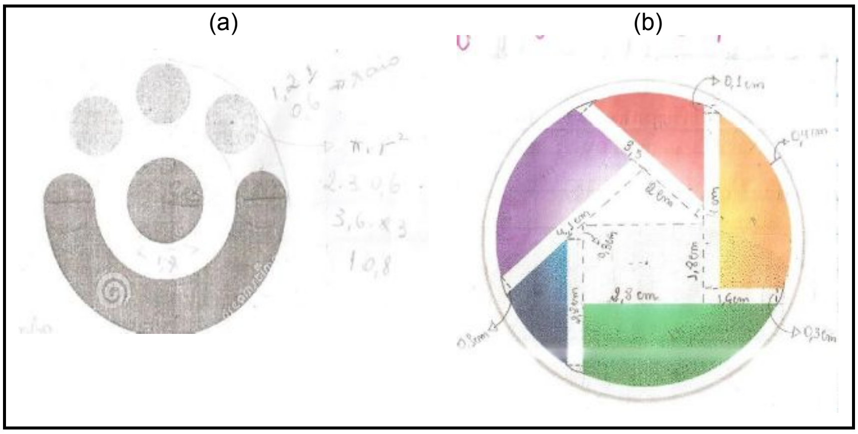


Figura 41. Anotações dos alunos na modelagem (Etapa 2: Matematização)

A Figura 42 mostram algumas maneiras de atribuição de medidas realizada no esboço.

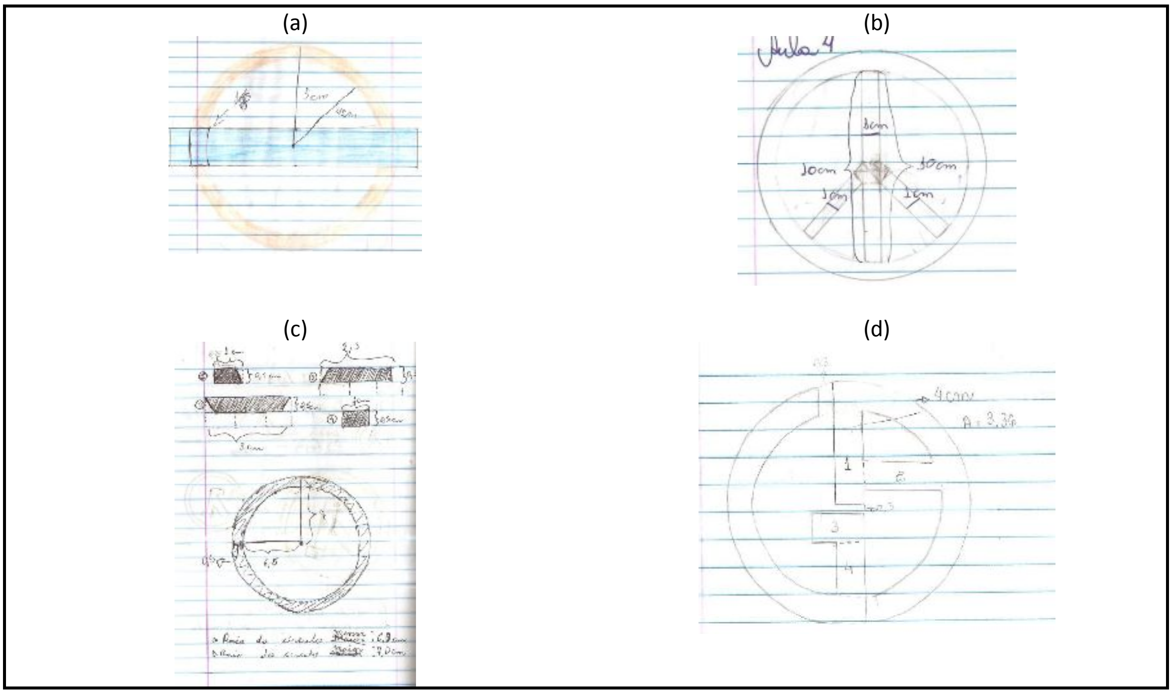


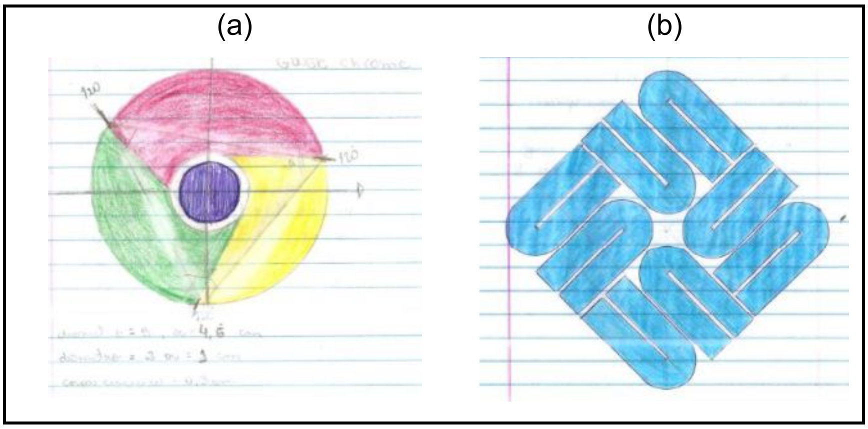
Figura 42. Anotações dos alunos na modelagem na subfase de atribuição de medidas (Etapa 3: Matematização)

Alguns alunos fizeram o logotipo figural utilizando o papel quadriculado, o mesmo auxiliou no processo de atribuição de medidas e no cálculo da área (Figura 43).

Figura 43. Anotações dos alunos na modelagem (Etapa 2: Matematização)

Observa-se que para a elaboração do desenho da Figura 43, o aluno não utilizou régua e compasso, uma vez que os semicírculos considerados por ela de acordo com a sequência tendem a parecer com segmentos circulares, às posições das antenas está diferente, o desenho do trapézio no final do tronco está torto, etc.

Outros alunos elaboram o desenho de uma forma sistemática desenhando eixos cartesianos no diário de bordo (Figura 44).



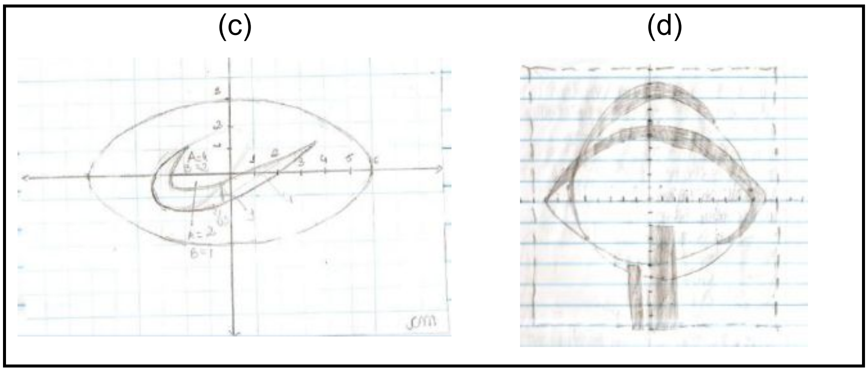


Figura 44. Anotações dos alunos na modelagem na subfase de atribuição de medidas (Etapa 3: Matematização)

Para determinar as áreas dos logotipos figurais do nível I de modelagem é possível encontrar alunos que desenhem as formas geométricas que façam parte do mesmo e a partir das medidas atribuídas para construção do desenho aplicaram a fórmula (Figura 45).

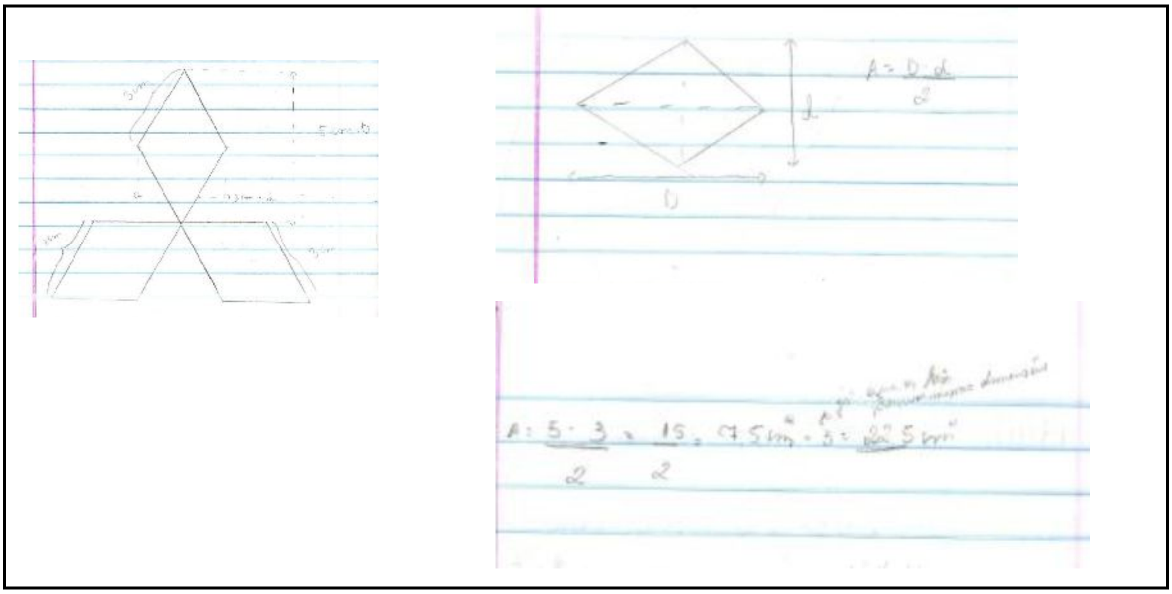


Figura 45. Anotações dos alunos na subfase de determinação das áreas (Etapa 3: Matematização)

Para logotipos figurais da categoria II é possível encontrar alunos que realizem aproximações de curvas como fração de regiões circulares e paralelogramos, alunos que aproximem formas e empreguem estratégias de composição e decomposição de formas geométricas (Figuras 46, 47 e 48).

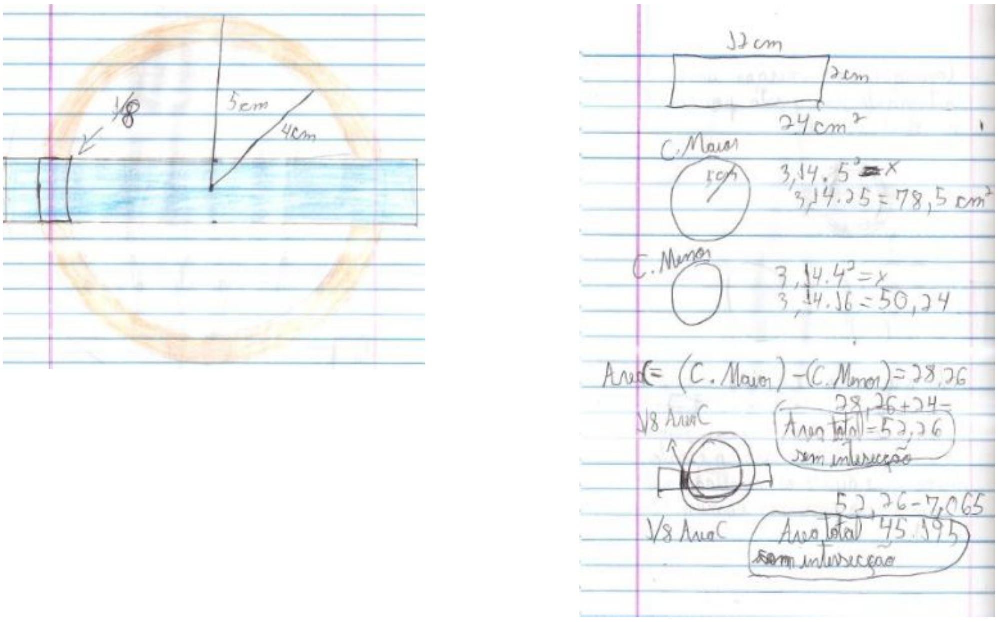
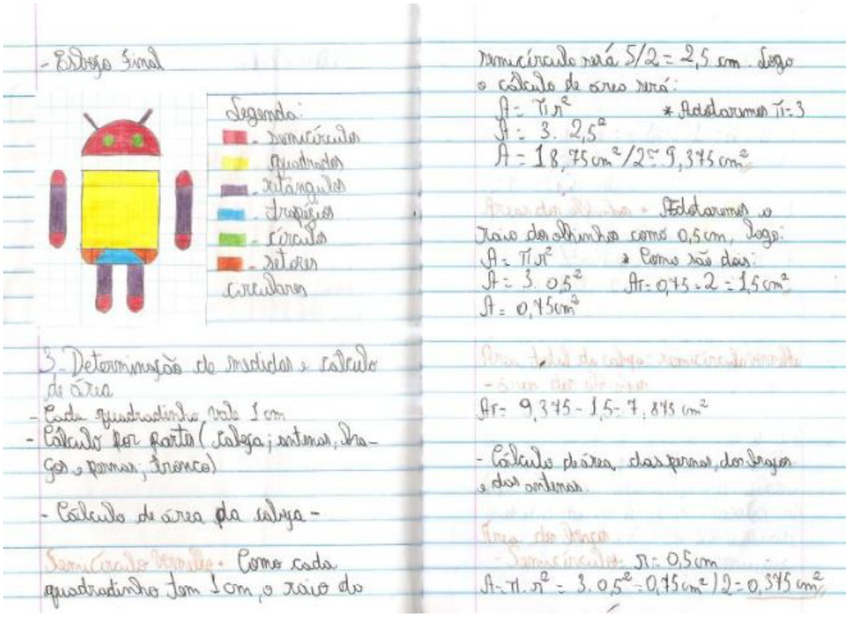
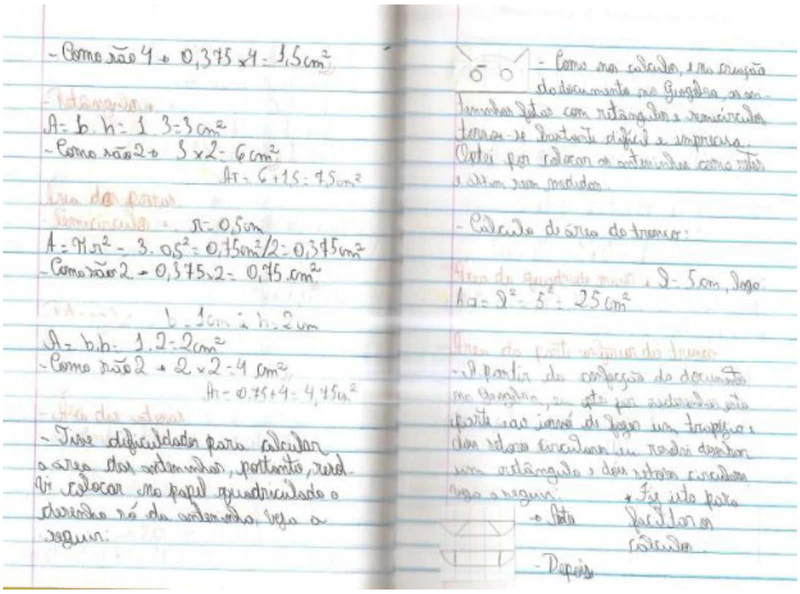


Figura 50. Anotações dos alunos na subfase de determinação de medidas (Etapa 3: Matematização)

(a)



(b)



- Como são 4 → 0,375 x 4 = 1,5cm²

Retângulos

A = b.h = 1.3 = 3cm²

- Como são 2 → 3 x 2 = 6cm²

AT = 6 + 1,5 = 7,5cm²

Área dos ... semicírculo → r = 0,5cm

A = π.r² = 3.0,5² = 0,75cm²/2 = 0,375cm²

- Como são 2 → 0,375.2 = 0,75cm²

Retângulo ... b = 1cm e h = 2cm

A = b.h = 1.2 = 2cm²

- Como são 2 → 2 x 2 = 4cm²

AT = 0,75 + 4 = 4,75cm²

Área dos setores

- Tive dificuldades para calcular a área dos setorzinhos, portanto, resolvi colocar no papel quadriculado o desenho só do setorzinho, veja a seguir:

- Como nos cálculos, e na criação do documento no GeoGebra, os setorzinhos feitos com retângulos e semicírculos tornou-se bastante difícil e imprecisa. Optei por colocar os setorzinhos como retos e assim com medidas.

- Cálculo da área do tronco:

Área do quadrado maior → l = 5cm, logo:

A = l² = 5² = 25cm²

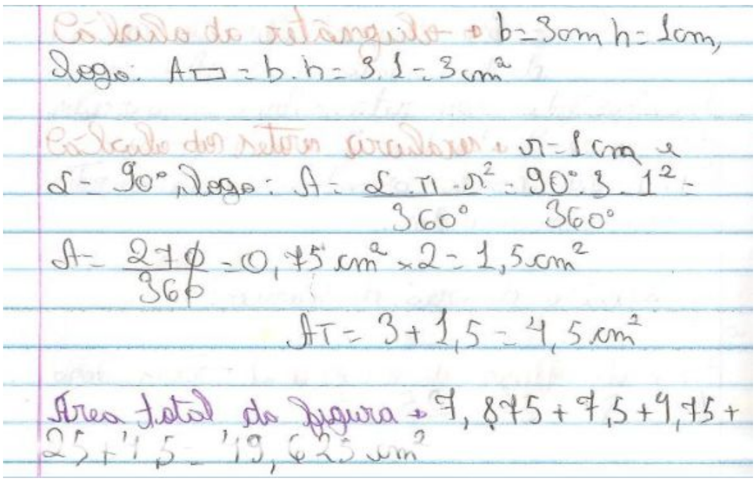
Área da parte inferior do tronco

- A partir da confecção do documento no GeoGebra, ... parte ... um trapézio e dois setores circulares ... um retângulo e dois setores circulares, veja a seguir:

→ Antes → Fiz isto para facilitar os cálculos.

- Depois

(c)



Cálculo do retângulo → b = 3cm h = 1cm,

logo: A▭ = b.h = 3.1 = 3cm²

Cálculo dos setores circulares → r = 1cm e

α = 90°, logo: $A = \frac{\alpha.\pi.r^2}{360°} = \frac{90°.3.1^2}{360°}$

$A = \frac{270}{360} = 0,75cm^2 \times 2 = 1,5cm^2$

AT = 3 + 1,5 = 4,5cm²

Área total da figura → 7,875 + 7,5 + 4,75 + 25 + 4,5 = 49,625 cm²

Figura 47. Anotações dos alunos na subfase de determinação das áreas (Etapa 3: Matematização)

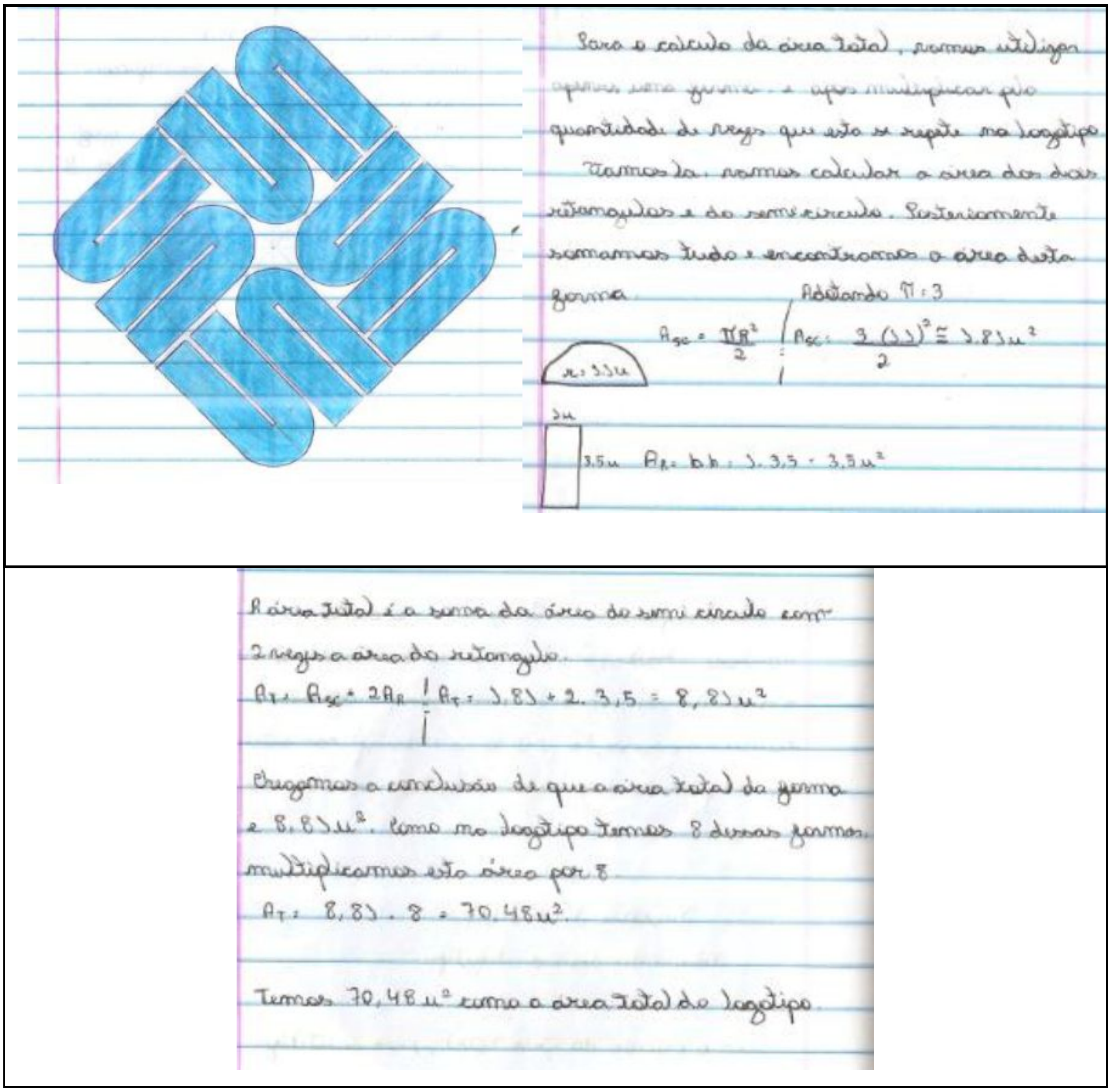
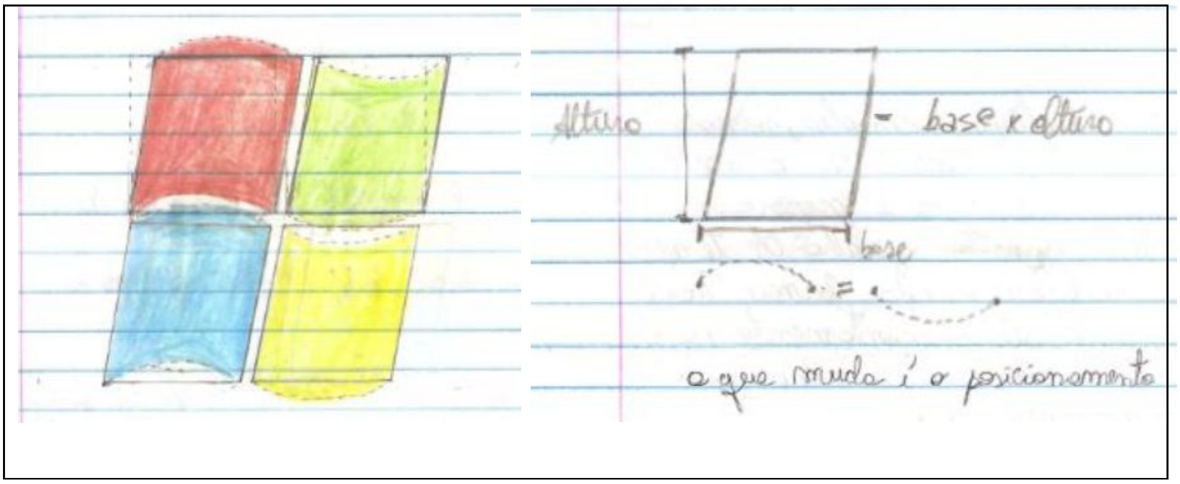


Figura 48. Anotações do aluno no processo de determinação das áreas (Etapa 3: Matematização)

Outra estratégia para determinar a área foi a compensação de áreas, conforme mostra a Figura 49.



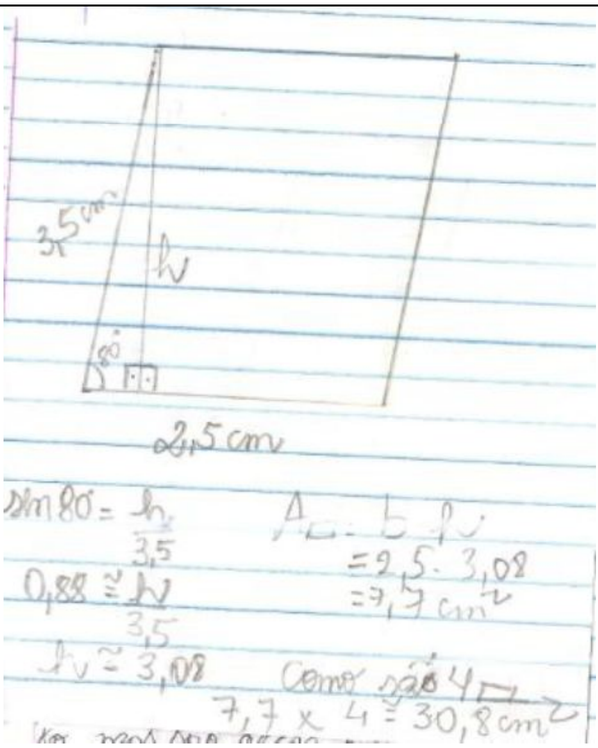
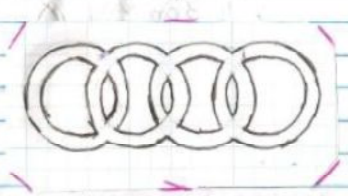


Figura 49. Anotações dos alunos na subfase de determinação das áreas (Etapa 3: Matematização)

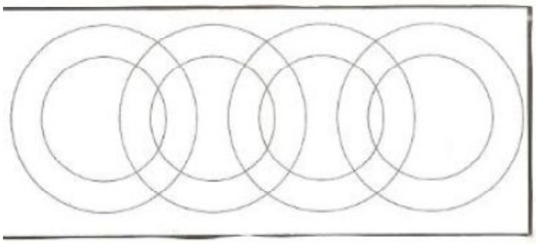
Na próxima figura se apresenta um exemplo de modelagem de um logotipo figural do nível III em que a aluna realiza algumas aproximações utilizando composição e decomposição de figuras.

A primeira fase foi ~~esboços~~ esboçar a figura e identificar as formas:
· Identifiquei 4 coroas circulares a partir do esboço abaixo:



Esboço parecido com o da logomarca.

* Definindo as medidas
. Dar um zoom na figura.



Circunferências internas: raio 2
Circunferências externas: raio 3.

Aula 26/11/2014

Nesta aula o professor pediu a turma para calcular a área da logomarca e fazer um registro da sequência de pensamentos.

1. Olhando para o esboço da figura pensei em calcular a área das coroas circulares, estabelecendo duas circunferência

$Área_{1} = \pi r^2 \,/\, r_{1} = 2$
$A = 3 \cdot 2^2$
$A = 3 \cdot 4$
$\boxed{A_{1} = 12 cm^2}$

$Área_{2} = \pi r^2 \rightarrow r_{2} = 3$
$A = 3 \cdot 3^2$
$A = 3 \cdot 9$
$\boxed{A_{2} = 27 cm^2}$

2. Agora basta subtrair a área da circunferência interna (1) da área da circunferência externa 2.

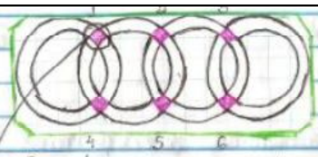
$\boxed{A_{2} - A_{1} = \text{Área da coroa circular}}$

$\{27 - 12 = 15 cm^2\}$

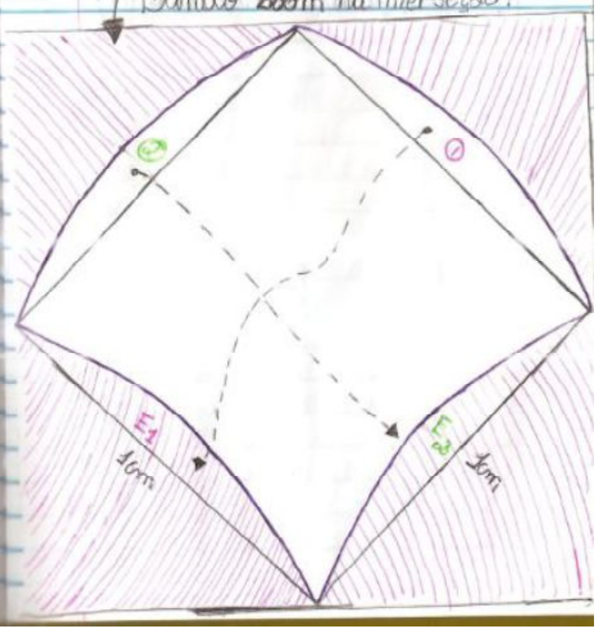
3. Como são 4 coroas circulares devemos multiplicar a área de uma coroa (15 cm²) por 4.

$\{15 \cdot 4 = 60 cm^2\}$

4. Existem interseções entre as coroas circulares, logo para descobrir a área desta logo, precisamos calcular a área ocupada por estas interseções e subtraí-la da área das 4 coroas circulares.
Observe abaixo:



Dando zoom na interseção:



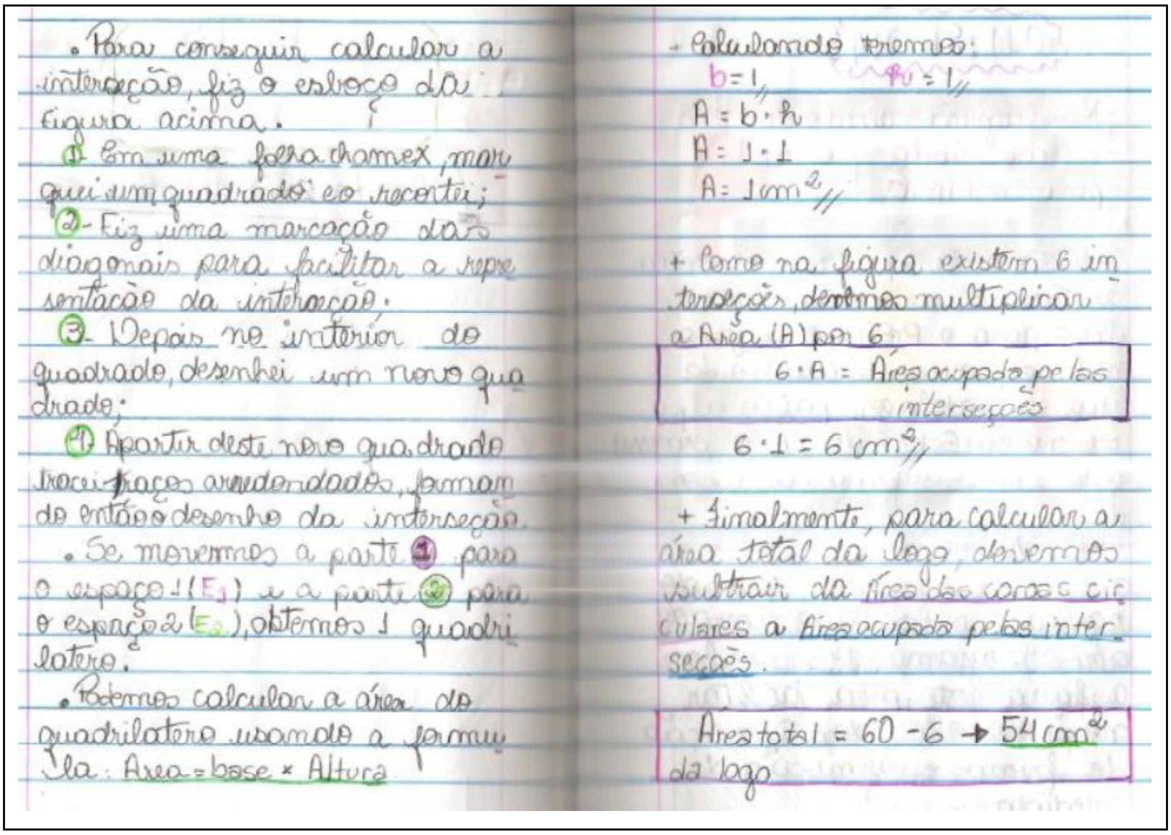


Figura 50. Anotações de aluno no processo de modelagem do logotipo figural (Etapa 3: Matematização)

Etapa 4: Modelo Matemático

Nesta etapa, os alunos devem reproduzir o desenho do logotipo figural, utilizando o software Geogebra. Esta tem por finalidade realizar o processo de validação dos cálculos encontrados na etapa de determinação das medidas das áreas.

É possível que alguns alunos apresentem dificuldades nesta etapa da modelagem; nem sempre as construções são bem elaboradas por todos.

Podem ser consideradas como representações corretas aquelas em que as medidas atribuídas e encontradas ao longo do processo de modelagem são utilizadas para construir o desenho na tela do computador. Já as representações dos logotipos figurais incorretas /incompletas são aquelas em que não há precisão quanto às medidas de segmentos e de ângulos, à simetria, ao alinhamento de pontos e dimensões mencionadas no processo anterior. Alguns exemplos são mostrados na Figura 51.

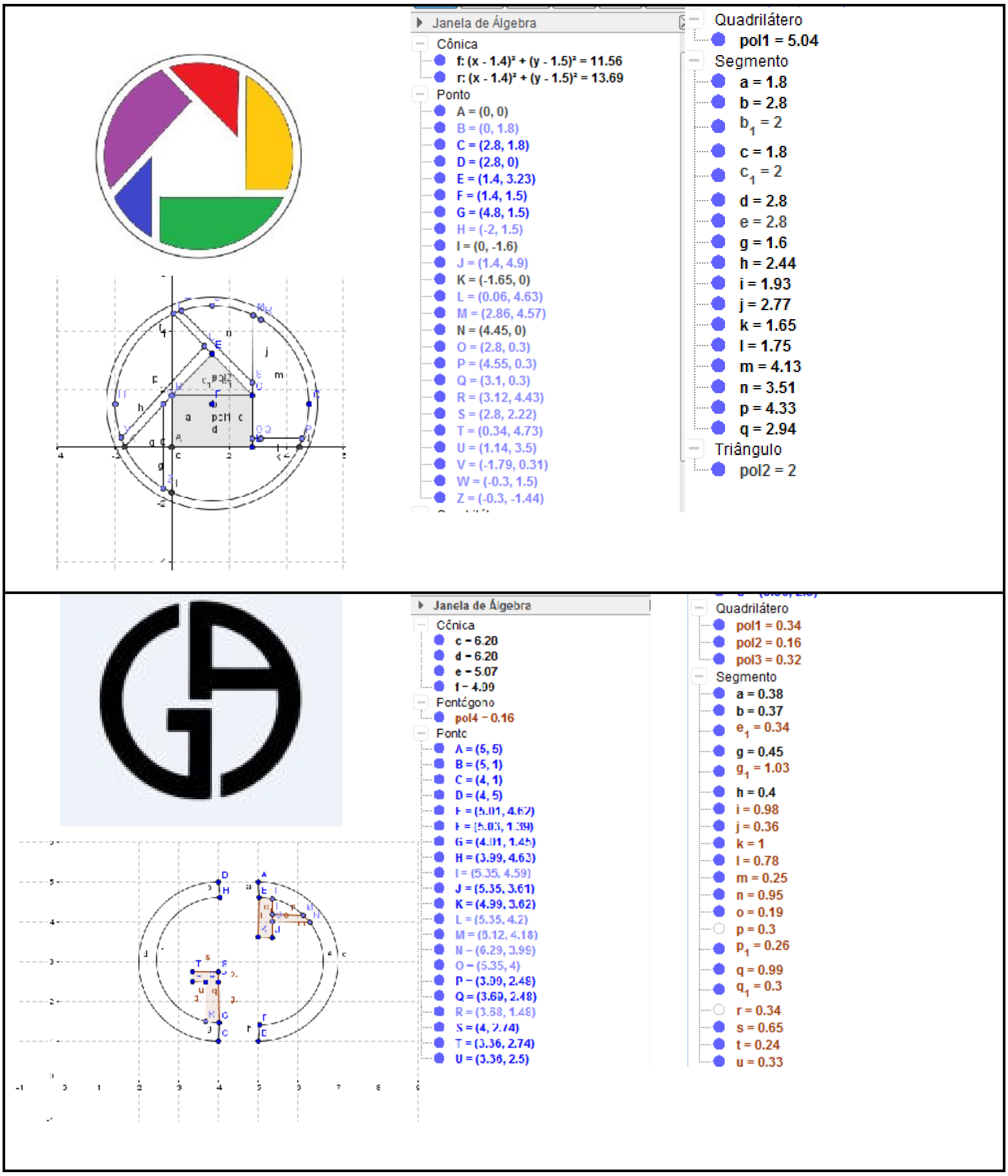
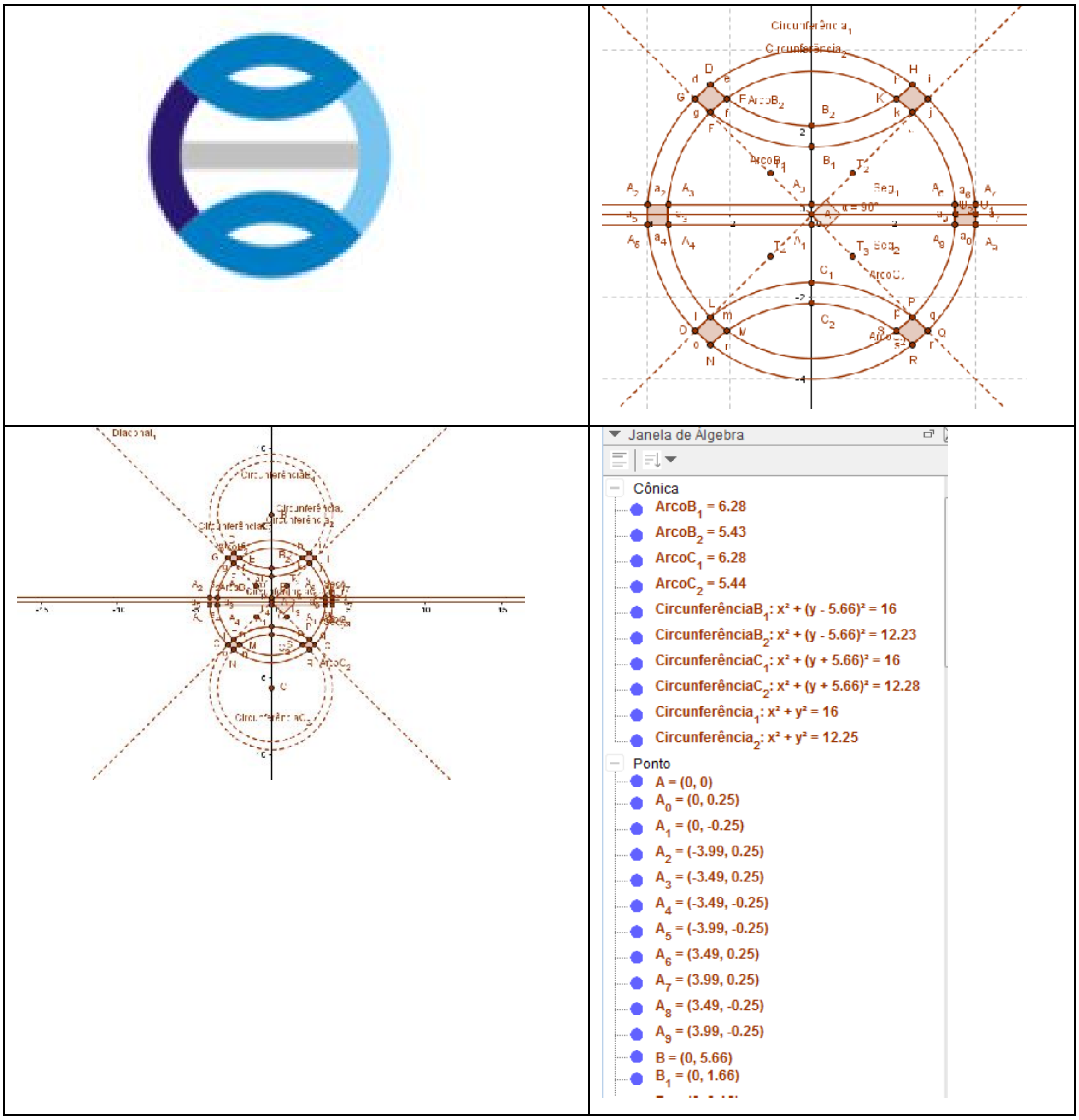


Figura 51. Janelas do Geogebra com um modelo matemático (Etapa 4: Modelo Matemático)

O professor poderá observar que nem sempre a arte final elaborada pelo estudante é bem sucedida, uma vez que o tamanho e a posição das formas podem estar diferentes do logotipo figural em questão. Em alguns momentos, o aluno pode se apoiar na malha quadriculada; em outros, nos eixos perpendiculares e em alguns casos as posições e medidas se dão de maneira aleatória.

No exemplo a seguir (Figura 52), nota-se que o aluno apoia a construção nos eixos perpendiculares; a origem foi adotada como centro da figura, a diferença entre as medidas dos raios é de uma unidade e os pontos estão alinhados.



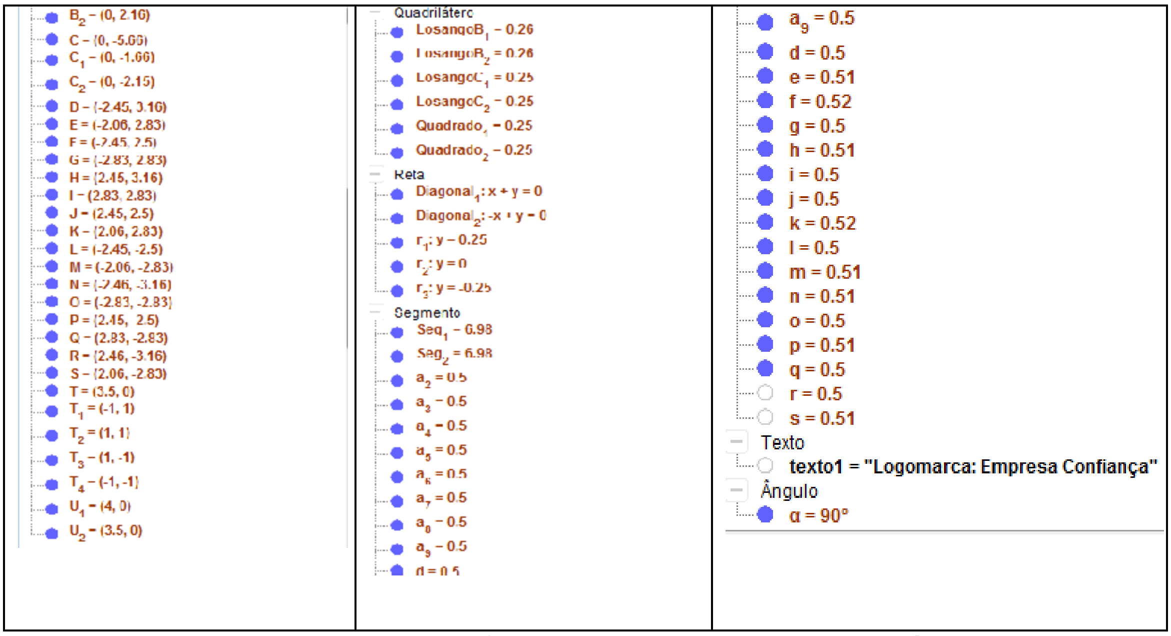


Figura 81. Janelas do Geogebra com um modelo matemático (Etapa 4: Modelo Matemático)

CONSIDERAÇÕES

Elaborar, aplicar e refletir sobre uma proposta para o ensino de áreas de figuras planas envolvendo dois momentos – uma sequência didática e um processo de modelagem de logotipos figurais – foi uma tarefa um tanto desafiadora.

A partir de algumas reflexões baseadas em Ausubel (2003) e Coll e Valls (1998) elaborou-se uma sequência de atividades que favorecesse a aprendizagem significativa de conceitos e procedimentos relativos ao conteúdo de área.

O planejamento de uma sequência didática com vistas à aprendizagem significativa requer inicialmente do professor uma reflexão acerca das condições relativas ao material e daquelas relativas ao aluno. Em relação ao material, existe a necessidade de estudar a estrutura do conteúdo e organizá-la de forma hierárquica, de adaptar a linguagem à realidade dos alunos e de utilizar diferentes formas de representação, mesmo que o ensino seja concebido na forma expositiva.

As atividades devem levar motivar os a empregar esforço cognitivo para atribuir significados ao que aprendem, desenvolvendo, também, atitudes mais positivas frente à matemática.

Neste trabalho, tanto ao longo da sequência quanto no processo de modelagem de logotipos figurais, os alunos formaram, trataram e converteram registros de representação semiótica. Esses foram analisados com base nas ideias de Duval (2003, 2011, 2010, 2012) que nos permite afirmar que tais processos cognitivos parecem ser imprescindíveis para ensino e aprendizagem da geometria.

O desenvolvimento da modelagem matemática foi pautado nas fases da modelagem propostas por Bassanezi (2006), Biembengut e Hein (2007); tais fases direcionam a organização do trabalho do professor no processo de modelagem matemática quando realizado no âmbito da sala de aula.

Nota-se que o trabalho com a modelagem matemática de logotipos figurais permite que o professor modifique a dinâmica da sala de aula – deixando de ser um mero transmissor de conteúdos e ganhando um status de professor orientador – o que pode favorecer a formação de atitudes mais favoráveis à matemática. Nesta perspectiva, a figura do professor orientador é aquela voltada para acompanhar de perto o raciocínio dos alunos, mostrando/apontando caminhos para que eles alcancem seus objetivos, acompanhando não só as tentativas de solução, mas todo o desenvolvimento da modelagem matemática.

Outro aspecto em questão é que a modelagem matemática de logotipos figurais evidenciou alguns processos cognitivos empregados pelos alunos e que podem contribuir para a compreensão de vários conceitos e procedimentos referentes à geometria plana básica.

Desta maneira, espera-se que esse produto auxilie professores que ensinam Matemática nas suas práticas em sala de aula e que esse possa servir de fonte para outras pesquisas da área de educação matemática.

Nesse sentido, convidam-se todos os leitores desse trabalho a realizarem um estudo mais detalhado da dissertação que gerou esse produto, uma vez que ela apresenta essa proposta de ensino acompanhada de uma série de reflexões a partir de conhecimentos teóricos e esses podem servir como sustentação das decisões do professor no âmbito da sala de aula.

REFERÊNCIAS

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e Retenção de Conhecimentos: Uma Perspectiva Cognitiva.** Lisboa: Plátano, 2003.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto**, 2006.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem Matemática no Ensino.** 4ª. ed. São Paulo: Contexto, 2007.

COLL, C.; VALLS, E. Aprendizagem e o Ensino de Procedimentos. In: COLL, C.; POZO, J. I; SARABIA, B.; VALLS, E. **Os Conteúdos na Reforma. Ensino e Aprendizagem de Conceitos, Procedimentos e Atitudes.** Tradução de Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artes Médica, 1998. p.70-118.

DUVAL, R. Registros de representação semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica.** Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

_______. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. **Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem**. Florianópolis, v. 07, n. 2, 2012. p.266-297.

_______. Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. IN: Machado, Silvia Dias Alcântara (org.). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica.** Campinas, São Paulo. Papirus, 2010. p.11- 33.

________. **Ver e ensinar a matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas.** Organização de Tânia M. M. Campos. Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: PROEM, 2011. 160 p.

EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. vol 1. 5ªed.Rio de Janeiro:LTC, 2001.

SALLUM,E.M. **Ladrilhamentos.** Matemática – IME - USP. Disponível em: http://www.ime.usp.br/~matemateca/textos/ladrilhamentos.pdf. Acesso em:13.03.2015.

VIANA, A.O; BOIAGO, C.E.P. Recepção verbal e material potencialmente significativo para a aprendizagem de procedimentos em geometria: área e perímetro de figuras planas. **EDUSK. Revista monográfica de educación skepsis.org**, n. 4. São Paulo: editorial skepsis +,2015. pp. 390 – 425. Disponível em: http://www.editorialskepsis.org/pdf/2013/p.390-425.pdf. Acesso: 01/10/2015.