SUÉLEN ALMEIDA CARVALHO

NUCLEARIDADE DE OPERADORES INTEGRAIS POSITIVOS

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2017

SUÉLEN ALMEIDA CARVALHO

NUCLEARIDADE DE OPERADORES INTEGRAIS POSITIVOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de MESTRE EM MATEMÁTICA.

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Análise Funcional.

Orientador: Prof. Dr. José Claudinei Ferreira.

UBERLÂNDIA - MG
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

C331n 2017

Carvalho, Suélen Almeida, 1990-
Nuclearidade de operadores integrais positivos / Suélen Almeida Carvalho. - 2017.
73 f.

Orientador: José Claudinei Ferreira.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Inclui bibliografia.

1. Matemática - Teses. 2. Hilbert, Espaço de - Teses. 3. Operadores integrais - Teses. I. Ferreira, José Claudinei. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO: Suélen Almeida Carvalho

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11512MAT010.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Análise Funcional.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Nuclearidade de Operadores Integrais Positivos.

ORIENTADOR: Prof. Dr. José Claudinei Ferreira.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso 1F119 da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 03 de Março de 2017, às 14h, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME	ASSINATURA
Prof. Dr. José Claudinei Ferreira UNIFAL-MG - Universidade Federal de Alfenas (orientador)	José C. Ferreira
Prof. Dr. Mário Henrique de Castro UFU - Universidade Federal de Uberlândia	Mario H. de Castro
Prof. Dr. Valdir Antônio Menegatto USP - Universidade de São Paulo	

Uberlândia-MG, 03 de Março de 2017.

Dedico este trabalho à minha amada mãe, Maria.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à minha família. À minha mãe por ter me trazido a este mundo, ter cuidado e, ainda cuidar, tão bem de mim. Nunca faltou apoio quando isso nela busquei. Ao meu irmão Alcimar, meu sentimento de gratidão por todo zelo dos últimos anos. Aos meus tios Noé e Regina, obrigada pelo teto, amor e cuidados que me ofertaram durante a graduação. Às primas Aline e Karen sou grata pelo companheirismo e por me permitirem compartilhar o dia a dia com Sofia, Ágatha e Pihetra.

Na vida acadêmica meus sinceros agradecimentos a todos os professores que um dia disseram que poderia ir mais longe. Sou grata ainda ao meu orientador José Claudinei, não só pela inesgotável paciência, mas pela amizade, pela motivação e por acreditar quando eu mesma achava que já não era mais capaz.

Aos amigos que estiveram presentes nos grupos de estudo durante a graduação, muito obrigada. Obrigada aos colegas de mestrado Alexandre, Augusto, Davidson, Edmilson, Guilherme, Javier, Julian, Leozinho, Magna, Paulo Victor, Ueslei e Wagner pelos estudos, pelas risadas e por compartilharem uma cerveja de vez em quando. Em especial, agradeço José Lucas por toda ajuda com a pesquisa, com as disciplinas e por ter se tornado um "amiguinho do peito".

Um abraço para Amanda, Elis, Fran, Sara e Reji pela parceria nos apês. Outro abraço para os amigos André, Aline, Bruna, Janaína, Jonathan, Juliene, Mariana, Nathália, Rafaela e Rejane, que incentivaram, ouviram meus lamentos, aconselharam e ajudaram da maneira que podiam. De teto à abraços, vocês ofereceram tudo que tinham de melhor. Acreditem, são os melhores.

Por fim e não menos importante, agradeço à FAMAT pela oportunidade e à CAPES pelo auxílio financeiro.

CARVALHO, S. A. *Nuclearidade de operadores integrais positivos* 2017. - 73p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é apresentar condições para que um operador integral positivo $K : L^2(X, \sigma) \to L^2(X, \sigma)$, dado por $K(f)(x) = \int_X f(y)k(x, y)d\sigma(y)$, para cada $f \in L^2(X, \sigma)$, seja nuclear (ou classe traço), isto é, seja tal que $\sum_{f\in B} \|K(f)\| < \infty$, para alguma base ortonormal B de $L^2(X, \sigma)$. Primeiramente será tratado o caso em que X é um conjunto Lebesgue mensurável em $\mathbb{R}^n$ e analisada a nuclearidade de operadores por meio da aplicação do Teorema de Mercer para o núcleo k. Quando não for possível aplicar esse teorema em k serão feitas aproximações por meio de operadores com núcleos que satisfazem tal teorema e majorados pela função máximo de Hardy-Littlewood. Depois disso, a nuclearidade será analisada usando limites em normas adequadas. Esse processo pode ser adaptado para estudar a nuclearidade de operadores cujos núcleos não são positivos definidos, mas podem ser escritos como combinação de outros núcleos que são. O trabalho termina com a análise da nuclearidade no caso em que X é um conjunto de medida σ-finita, não necessariamente em $\mathbb{R}^n$, que possui uma estrutura de filtro adequada. Para isso será usada uma adaptação dos núcleos aproximados e auxiliares, sem o uso do Teorema de Mercer, através de martingais, majorados por meio da função máximo para martingais.

Palavras-chave: Espaços de Hilbert, operadores integrais, traço, nuclearidade.

CARVALHO, S. A. *Nuclearity of positive integral operators* 2017. - 73p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

This work is to presents conditions to ensure that a positive integral operator $K : L^2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\sigma}) \to L^2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\sigma})$, given by $K(f)(x) = \int_X f(y)k(x,y)d\boldsymbol{\sigma}(y)$, for all $f \in L^2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\sigma})$, is nuclear, that is, to ensure that $\sum_{f\in B} \|K(f)\| < \infty$, when B is an orthonormal bases to $L^2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\sigma})$. We first analyze the case in which X is a Lebesgue mensurable subset of $\mathbb{R}^n$, by using the Mercer's Theorem. When we can't use this theorem, we use approximations methods by operators whose kernels satisfies such theorem, by using Hardy-Littlewood's maximal function. In that case, the nuclearity of K is related to limits in appropriate norms. This procedure may be used to integral operators whose kernels are linear combinations of positive definite kernels. To finish this work, looking to the case where X is a σ-finite measure space, not necessarily in $\mathbb{R}^n$, and endowed with a special filter, a similar method to approximate the auxiliary operators and kernels is used, without the use of Mercer's Theorem and using martingals and maximal function instead.

Keywords: Hilbert spaces, integral operators, trace, nuclearity.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produto interno em um espaço de Hilbert
$\xi \perp \eta$	elementos ortogonais entre si
$\lambda_j(T)$	autovalores do operador T
$\partial(X)$	fronteira do conjunto X
$B_0(V)$	conjunto dos operadores limitados compactos de V em V
$B_1(V)$	conjunto dos operadores nucleares de V em V
$B_f(V)$	conjunto dos operadores lineares de posto finito de V em V
$B(V)$	conjunto dos operadores limitados de V em V
$\mathcal{B}, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \ldots$	espaços de Banach
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
D^t	família de úcleos
$\mathcal{D}^t$	operador integral associado a D^t
F_n	filtro de Lusin ou σ-filtro de Lusin
$\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots$	espaços de Hilbert
H	operador maximal
Id	função Identidade
$\mathfrak{Im}$	parte imaginária
$\mathbb{K}$	corpo dos números reais ou complexos
$k(x, y), k$	núcleo do operador integral K
K	operador integral K
$Ker(T)$	núcleo do operador T (conjunto dos vetores o anulam)
k^t	núcleo auxiliar
K^t	operador integral associado a k^t
$Lin(A)$	espaço vetorial gerado por um subconjunto A de V
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathcal{N}$	espaço vetorial normado
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathfrak{Re}$	parte real
$s_j(T)$	valores singulares do operador T
$tr(T)$	traço do operador T
$V, V_1, V_2, \ldots$	espaços vetoriais

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A nuclearidade de operadores foi tratada inicialmente na literatura por interesses físicos, devido às propriedades que operadores nucleares preservam [1]. Um trabalho que aborda o assunto, tem raízes na mecânica quântica e foi escrito por John von Neumman em 1932, segundo [1].

Considerando ainda interesses da Física, estudar a respeito da nuclearidade de um operador pode ser útil pois isto fornece uma fórmula para o cálculo do traço do operador, que tem uma forte ligação com determinantes, como podemos perceber em [2]. Por sua vez, os determinantes têm relação com os chamados determinantes de Fredholm, que foram utilizados por John Wheeler em 1937 num trabalho sobre ressonância [3]. Em um artigo recente, [4] apresenta o conjunto dos operadores nucleares positivos definidos e estende o determinante de Fredholm para este conjunto. Mais ainda, apresenta uma nova família parametrizada de log determinantes entre operadores nucleares em um espaço de Hilbert.

Saindo do âmbito das aplicações físicas, [5] reforça a importância das pesquisas sobre nuclearidade ao afirmar que existem aplicações em geometria algébrica e geometria não comutativa. Artigos atuais como [6] estudam extensões de operadores positivos definidos contínuos definidos em conjuntos localmente compactos num grupo G e em grupos de Lie fazendo uso do traço.

Este trabalho, em especial, é dedicado ao estudo do cálculo do traço e da nuclearidade de operadores integrais positivos $T : L^2(X, \sigma) \to L^2(X, \sigma)$, isto é, ao estudo de condições para que os operadores citados sejam nucleares em conjuntos X com medida σ-finita, não necessariamente em $\mathbb{R}^n$.

Um operador integral $T : L^2(X, \sigma) \to L^2(X, \sigma)$ é dado por

$$T(\xi)(x) = \int_X k(x,y)\xi(y)d\sigma(y), \quad \xi \in L^2(X, \sigma), \quad x \in X,$$

para o qual $k : X \times X \to \mathbb{C}$. O operador T é positivo, ou seja, $\langle T\xi, \xi\rangle \geq 0$, para todo $\xi \in L^2(X, \sigma)$ e logo o núcleo k positivo definido. Um operador T é classe traço (ou nuclear) quando

$$\sum_{\xi \in B} \langle T^*T(\xi), \xi\rangle^{\frac{1}{2}} = \sum_{\xi \in B} \|T(\xi)\| < \infty,$$

para uma (e qualquer) base ortonormal B do espaço $(L^2(X,\sigma), \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Uma boa maneira de estudar sobre convergência da série acima consiste em analisar a existência de autovalores. Mesmo que o operador T seja compacto, ele pode não ter autovalores caso não seja autoadjunto. Entretanto, ele sempre possuirá valores singulares. O j-ésimo valor singular do operador T é o número $s_j(T) := (\lambda_j(T^*T))^{\frac{1}{2}}$, uma vez garantidos os autovalores λ_j do operador compacto e autoadjunto T^*T pelo Teorema Espectral. Sob as condições acima tem-se uma relação entre nuclearidade e valores singulares [7].

Desta maneira, o primeiro capítulo foi destinado a apresentar resultados sobre espaços de Hilbert, operadores autoadjuntos, compactos, integrais, além de questões ligadas a existência de autovalores e valores singulares.

Um resultado importante que permite fazer conexões entre operadores integrais positivos, nuclearidade e cálculo do traço é o Teorema de Mercer aplicado ao núcleo k. Assim, o Capítulo 2 ficou responsável por apresentar conceitos sobre núcleos positivos definidos e L^2 positivos definidos. Apresentamos a teoria de Mercer de forma gradual, primeiro para um intervalo $[a,b] \in \mathbb{R}$, como foi primeiramente feito em 1909 por J. Mercer, e depois para um conjunto X Lebesgue mensurável de $\mathbb{R}^n$ (veja outras versões desse teorema em [8, 9]).

O terceiro capítulo discute a nuclearidade de operadores integrais para o qual X é novamente um conjunto Lebesgue mensurável de $\mathbb{R}^n$. Quando não podemos aplicar o Teorema de Mercer em k fazemos aproximações por meio de operadores com núcleos que satisfazem tal teorema e são majorados pela função máximo de Hardy-Littlewood, com base em [7]. Primeiramente, o estudo será feito para o caso em que o núcleo é somente L^2-positivo definido e depois, com nenhuma hipótese acrescida ao núcleo k, escrevendo-o como combinação linear de outros quatro núcleos L^2-positivos definidos, garantindo os resultados possíveis.

O quarto e último capítulo faz uma discussão semelhante à do terceiro, mas para conjuntos X com medida σ-finita, que podem estar contidos ou não em $\mathbb{R}^n$, adaptando desta maneira, os núcleos aproximados e auxiliares através dos Martingais, que por sua vez precisam da estrutura dos filtros de Lusin, com base em [5, 10].

Suélen Almeida Carvalho
Uberlândia, 03 de março de 2017.

CAPÍTULO 1

RESULTADOS AUXILIARES

1.1 Espaços de Hilbert

Neste trabalho serão discutidas questões ligadas aos espaços de Hilbert, por isso, alguns resultados serão apresentados aqui, alguns bem conhecidos, outros nem tanto. A referência [11] foi a principal para a escrita desta seção.

Definição 1.1.1 *Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador linear, onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial. Entenda pelo corpo $\mathbb{K}$ os conjuntos dos números reais $\mathbb{R}$ ou complexos $\mathbb{C}$. Seja $W \subseteq V$ um subespaço de V. Diz-se que W é um subespaço invariante de V se $T(w) \in W$ para todo $w \in W$.*

Lembrando que um espaço de Hilbert é um espaço vetorial com produto interno que é completo com a norma induzida pelo produto interno [11, p. 122]. Em todo o texto $\mathcal{H}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \ldots$, denotarão espaços de Hilbert.

Definição 1.1.2 *Uma família $\{\xi_j\}_{j\in J}$ em $\mathcal{H}$ é ortonormal se $\|\xi_j\| = 1$, para todo $j \in J$, cujos elementos são dois a dois ortogonais, isto é, $\xi_j \perp \xi_l$, se $j \neq l \in J$. Uma base ortonormal de $\mathcal{H}$ é um conjunto ortonormal total, ou seja, tal que $\overline{Lin(\{\xi_j\}_{j\in J})} = \mathcal{H}$, ou seja, quando o fecho do conjunto [11, p. 4] gerado por $\{\xi_j\}$ é o espaço todo.*

Teorema 1.1.3 *Todo espaço de Hilbert não trivial possui uma base ortonormal. Ainda, se $A \subset \mathcal{H}$ é ortonormal, existe uma base ortonormal que contém A.*

Demonstração. Seja $\mathcal{H} \neq \{0\}$. Denote por $\mathcal{O}$ o conjunto de todas as famílias ortonormais em $\mathcal{H}$, a qual não é vazia pois se $0 \neq \xi \in \mathcal{H}$, então $\{\xi/\|\xi\|\}$ é um conjunto ortonormal. Ordenando $\mathcal{O}$ por inclusão de conjuntos, dada uma família totalmente ordenada em $\mathcal{O}$, a união dos membros dessa família é seu limite superior (a qual pertence a $\mathcal{O}$). Pelo Lema de Zorn [11, p. 69], existe um elemento maximal M em $\mathcal{O}$. Será mostrado que M é uma base ortonormal de $\mathcal{H}$. Se M não for uma base ortonormal, então pelo Teorema da Projeção Ortogonal [11, p. 147] existe um vetor $0 \neq \eta \in \overline{Lin(M)}^{\perp}$ de forma que $M \cup \{\eta/\|\eta\|\}$ seria uma família ortonormal, contradizendo a maximalidade de M em $\mathcal{O}$. Portanto M é uma base ortonormal de $\mathcal{H}$. ■

Os resultados seguintes formalizam a representação dos elementos do espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ numa base ortonormal.

Proposição 1.1.4 *Seja $\{\xi_j\}_{j\in J}$ um conjunto ortonormal em $\mathcal{H}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$\{\xi_j\}_{j\in J}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}$;*

2. *Se $\xi \in \mathcal{H}$ satisfaz $\xi \perp \xi_j$, para todo $j \in J$, então $\xi = 0$.*

Demonstração. 1. $\Rightarrow$ 2.) Sejam $\{\xi_j\}_{j\in J}$ uma base ortonormal de $\mathcal{H}$ e $\xi \perp \xi_j$, para todo $j \in J$. Logo, para cada $\varepsilon > 0$ existe uma combinação linear finita $\sum\limits_{l=1}^{n} \alpha_{j_l}\xi_{j_l}$ tal que

$$\left\|\xi - \sum_{l=1}^{n} \alpha_{j_l}\xi_{j_l}\right\|^2 = \|\xi\|^2 + \sum_{l=1}^{n} |\alpha_{j_l}|^2 < \varepsilon,$$

implicando que $\|\xi\|^2 < \varepsilon$. Portanto $\xi = 0$.

2. $\Rightarrow$ 1.) Se $M = Lin(\{\xi_j\}_{j\in J})$ então $M^\perp = \overline{M}^\perp = (\{\xi_j\}_j)^\perp$. Como o fecho de um conjunto é sempre fechado, pelo Teorema da Projeção Ortogonal [11, p. 147], tem-se que

$$\mathcal{H} = \overline{M} \oplus (\{\xi_j\}_{j\in J})^\perp.$$

Agora, 2. implica que $(\{\xi_j\}_{j\in J})^\perp = \{0\}$, e assim $\{\xi_j\}_j$ é um conjunto ortonormal maximal, ou seja, $\overline{M} = \mathcal{H}$ e $\{\xi_j\}_{j\in J}$ é base ortonormal. ■

Pode-se refinar o resultado acima da seguinte maneira.

Proposição 1.1.5 (Desigualdade de Bessel) *Se $\{\xi_j\}_{j\in J}$ é um conjunto ortonormal em $\mathcal{H}$, então para cada $\xi \in \mathcal{H}$,*

$$\sum_{j\in J} |\langle \xi_j, \xi\rangle|^2 \leq \|\xi\|^2.$$

Em particular, $\langle \xi_j, \xi\rangle \neq 0$ apenas num conjunto contável de índices $j \in J$.

Demonstração. Considere inicialmente um conjunto contável ortonormal denotado por $\{\xi_l\}$. Dado $\xi \in \mathcal{H}$, seja $\eta_n = \xi - \sum\limits_{l=1}^{n} \langle \xi_l, \xi\rangle \xi_l$, o qual é ortogonal a todo ξ_l com $1 \leq l \leq n$.

Note que

$$\|\xi\|^2 = \|\eta_n\|^2 + \sum_{l=1}^{n} |\langle \xi_l, \xi\rangle|^2 \geq \sum_{l=1}^{n} |\langle \xi_l, \xi\rangle|^2.$$

Assim, se J é finito a demonstração terminou. Se J não é finito, desta desigualdade segue que

$$\|\xi\|^2 \geq \sum_{l=1}^{\infty} |\langle \xi_l, \xi\rangle|^2,$$

para todo conjunto contável ortonormal $\{\xi_l\}$.

Para cada $m \geq 1$, denote por $J_m = \{j \in J : |\langle \xi_j, \xi \rangle|^2 \geq 1/m\}$. Da relação acima vem que J_m é finito para todo m. Como

$$\{j \in J : \langle \xi_j, \xi \rangle \neq 0\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} J_m,$$

conclui-se que para cada $\xi \in \mathcal{H}$ o conjunto de índices em que $\langle \xi_j, \xi \rangle \neq 0$ é contável. ■

Corolário 1.1.6 *Todas as bases ortonormais, num certo espaço de Hilbert dado, possuem a mesma cardinalidade.*

Demonstração. Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Suponha que exista uma base ortonormal infinita. Sejam $U = \{\xi_j\}_{j\in J}$ e $V = \{\eta_l\}_{l\in L}$ duas bases ortonormais $\mathcal{H}$. Para cada $j \in J$, segue da Desigualdade de Bessel que o conjunto

$$V_j := \{\eta_l \in V; \langle \eta_l, \xi_j \rangle \neq 0\}$$

é contável e pela Proposição 1.1.4 cada η_l pertence a pelo menos um V_j; desta maneira, $V = \bigcup_{j\in J} V_j$. Sendo cada V_j contável, segue que cardinalidade de V é menor ou igual a cardinalidade de U. De forma análoga mostra-se a desigualdade inversa. Portanto U e V possuem a mesma cardinalidade. ■

Pode-se refinar ainda mais a Desigualdade de Bessel, como segue.

Teorema 1.1.7 *Se $\{\xi_j\}_{j\in J}$ é um conjunto ortonormal no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então as seguintes afirmações são equivalentes.*

1. *$\{\xi_j\}_{j\in J}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}$;*
2. *Se $\xi \in \mathcal{H}$, então $\xi = \sum_{j\in J} \langle \xi_j, \xi \rangle \xi_j$, para todo $\xi \in \mathcal{H}$.*
3. **(Identidade de Parseval)** Para todo $\xi \in \mathcal{H}$ tem-se $\|\xi\|^2 = \sum_{j\in J} |\langle \xi_j, \xi \rangle|^2$.

Demonstração. Se $\xi \in \mathcal{H}$, então $\langle \xi_j, \xi \rangle \neq 0$ apenas num conjunto contável.

1. $\Rightarrow$ 2.) Pela Desigualdade de Bessel $\sum_{l\in J} |\langle \xi_l, \xi \rangle|^2$ é convergente, assim

$$\left\| \sum_{l=m}^{n} \langle \xi_l, \xi \rangle \xi \right\|^2 = \sum_{l=m}^{n} |\langle \xi_l, \xi \rangle|^2 \to 0, \quad \text{para } n, m \to \infty,$$

de forma que $\sum_{l\in J} \langle \xi_l, \xi \rangle \xi$ é convergente, pois as somas parciais dos termos não-nulos formam uma sequência de Cauchy. Definindo $\eta = \xi - \sum_{l\in J} \langle \xi_l, \xi \rangle \xi$ e usando a continuidade do produto interno, vem que $\langle \xi_j, \eta \rangle = 0$ para todo $j \in J$, e sendo $\{\xi_j\}_{j\in J}$ uma base ortonormal conclui-se pela Proposição 1.1.4, que $\eta = 0$, ou seja,

$$\xi = \sum_{j\in J} \langle \xi_j, \xi \rangle \xi_j, \quad \forall\, \xi \in \mathcal{H}.$$

2. $\Rightarrow$ 3.) Usando a notação da demonstração acima, tem-se que para $n < \infty$

$$\left| \|\xi\|^2 - \sum_{l=1}^{n} |\langle \xi_l, \xi \rangle|^2 \right| = \left\| \xi - \sum_{l=1}^{n} \langle \xi_l, \xi \rangle \xi_l \right\|^2 ,$$

o qual converge para zero para $n \to \infty$, pois $\|\eta\| = 0$.

3. $\Rightarrow$ 1.) Suponha que valha a Identidade de Parseval e que $\langle \xi_j, \xi \rangle = 0$, para todo $j \in J$. Então $\xi = 0$ e, pelo item 2 da Proposição 1.1.4, conclui-se que $\{\xi_j\}_{j \in J}$ é base ortonormal de $\mathcal{H}$. ■

1.2 Operadores compactos em espaços de Hilbert

Como este trabalho é dedicado ao estudo da nuclearidade de operadores integrais positivos em espaços de Hilbert, que podem ser compactos e limitados, cabe estudar alguns resultados acerca da compacidade e da limitação de operadores nestes espaços. Quanto a notação, o conjunto dos operadores limitados entre espaços vetoriais normados V e V_1 será denotado por $B(V, V_1)$. Se $V = V_1$ denota-se $B(V)$. Cabe lembrar que um operador linear contínuo também é limitado. Novamente, [11] é a tomado como referência para a seção.

Se $T \in B(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, então pode-se usar o Lema de Riesz [11, p. 10] para mostrar que existe um único operador $T^* \in B(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, chamado de adjunto de T, que satisfaz

$$\langle T^*\eta, \xi \rangle = \langle \eta, T\xi \rangle, \quad \xi \in \mathcal{H}_1, \quad \eta \in \mathcal{H}_2.$$

Definição 1.2.1 *O operador $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ será chamado de autoadjunto se*

$$\langle T\eta, \xi \rangle = \langle \eta, T\xi \rangle, \quad \forall\, \eta, \xi \in \mathcal{H}.$$

Dos vários resultados a respeito de operadores lineares compactos em espaços de Hilbert destacam-se os inseridos a seguir.

Proposição 1.2.2 *Seja $T \in B(\mathcal{H})$, sendo $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert complexo. Então T é autoadjunto se, e somente se, $\langle T\xi, \xi \rangle \in \mathbb{R}$ para todo $\xi \in \mathcal{H}$.*

Demonstração. Suponha primeiramente que T é autoadjunto. Se T é autoadjunto então para todo $\xi \in \mathcal{H}$, tem-se por definição que $\overline{\langle T\xi, \xi \rangle} = \langle \xi, T\xi \rangle = \langle T\xi, \xi \rangle$; portanto $\langle T\xi, \xi \rangle$ é real.

Agora, se $\langle T\xi, \xi \rangle$ é real para todo $\xi \in \mathcal{H}$, então

$$\begin{aligned} \langle (T - T^*)\xi, \xi \rangle &= \langle T\xi, \xi \rangle - \langle T^*\xi, \xi \rangle = \langle \xi, T\xi \rangle - \langle T^*\xi, \xi \rangle \\ &= \langle T^*\xi, \xi \rangle - \langle T^*\xi, \xi \rangle = 0. \end{aligned}$$

Portanto $T = T^*$. ■

Os resultados a seguir permitem dizer como é a norma de um operador autoadjunto. Ainda, se tal norma é atingida para algum elemento de $\mathcal{H}$ de tamanho um, então $\|T\|$ é um autovalor. Existe um resultado similar para quando o operador é compacto.

Proposição 1.2.3 *Se $T \in B(\mathcal{H})$ é autoadjunto, então* $\|T\| = \sup_{\|\xi\|=1} |\langle T\xi, \xi\rangle|$.

Demonstração. Se $m = sup_{\|\xi\|=1}|\langle T\xi, \xi\rangle|$, então para cada $\|\xi\| = 1$ tem-se

$$|\langle T\xi, \xi\rangle| \leq \|T\|\|\xi\| \leq \|T\|.$$

Agora, se $\xi, \eta \in \mathcal{H}$, então

$$\langle T(\xi+\eta), \xi+\eta\rangle = \langle T\xi, \xi\rangle + 2\mathfrak{Re}\langle T\xi, \eta\rangle + \langle T\eta, \eta\rangle.$$

Portanto, pelas Leis do Paralelogramo [11, p. 126]

$$4\mathfrak{Re}\langle T\xi, \eta\rangle \leq m(\|\xi+\eta\|^2 + \|\xi-\eta\|^2) = 2m(\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2). \tag{1.1}$$

Como, $\langle T\xi, \eta\rangle = |\langle T\xi, \eta\rangle|e^{i\theta}$ para algum θ. Substituindo $e^{-i\theta}\xi$ por ξ na Equação (1.1) segue que

$$|\langle T\xi, \eta\rangle| \leq \frac{m}{2}(\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2).$$

Tomando $\eta = T\xi\|\xi\|/\|T\xi\|$ segue $\|T\xi\|\|\xi\| \leq m\|\xi\|^2$ e desta maneira, $\|T\xi\| \leq m$. ■

Proposição 1.2.4 *Suponha que T seja autoadjunto e $\lambda = \inf_{\|\xi\|=1}\langle T\xi, \xi\rangle$. Se existe $\xi_0 \in \mathcal{H}$, com $\|\xi_0\| = 1$ tal que $\lambda = \langle T\xi_0, \xi_0\rangle$, então λ é um autovalor de T correspondendo a ξ_0. Analogamente o resultado vale para $\lambda = \sup_{\|\xi\|=1}\langle T\xi, \xi\rangle$.*

Demonstração. Para $\alpha \in \mathbb{K}$ e $\eta \in \mathcal{H}$ segue da definição de λ que

$$\left\langle \frac{T(\xi_0 + \alpha\eta)}{\|\xi_0 + \alpha\eta\|}, \frac{\xi_0 + \alpha\eta}{\|\xi_0 + \alpha\eta\|} \right\rangle \geq \lambda, \text{ para } \xi_0 + \alpha\eta \neq 0.$$

Expandindo o produto interno tem-se que

$$\begin{aligned} \langle T\xi_0, \xi_0\rangle + 2\mathfrak{Re}\langle T\xi_0, \alpha\eta\rangle + \langle T\alpha\eta, \alpha\eta\rangle &= \langle T\xi_0, \xi_0\rangle + 2\mathfrak{Re}\ \alpha\langle T\xi_0, \eta\rangle + |\alpha|^2\langle T\eta, \eta\rangle \\ &\geq \lambda(\langle \xi_0, \xi_0\rangle + 2\mathfrak{Re}\ \alpha\langle \xi_0, \eta\rangle + |\alpha|^2\langle \eta, \eta\rangle). \end{aligned}$$

Assim

$$2\mathfrak{Re}\ \alpha\overline{\langle \eta, (T-\lambda)\xi_0\rangle} + |\alpha|^2\langle (T-\lambda)\eta, \eta\rangle \geq 0.$$

Tomando $\alpha = r\langle \eta, (T-\lambda)\xi_0\rangle$ tem-se que $2r\beta + r^2\gamma \geq 0$, $\forall\ r \in \mathbb{R}$, para β dado como $\beta = |\langle \eta, (T-\lambda)\xi_0\rangle|$. Assim,

$$\langle \eta, (T-\lambda)\xi_0\rangle = 0.$$

Como η é arbitrário, segue que $T\xi_0 - \lambda\xi_0 = 0$. ■

Observação 1.2.5 *Faz parte deste trabalho estudar a existência de autovalores e, no caso em que os operadores estão em espaços de dimensão finita, tal estudo pode ser feito por meio de determinantes [12, p. 174].*

Agora é necessário definir um operador de posto finito, útil em diversas demonstrações ao longo do trabalho, porque muitas vezes o fato de um operador ser linear ou autoadjunto não é suficiente para responder algumas questões, como por exemplo, garantir a existência de autovalores. Por esta razão torna-se necessário inserir mais hipóteses sobre o operador e será adicionada aqui a hipótese da compacidade.

Definição 1.2.6 *Um operador $T \in B(V, V_1)$ é dito de posto finito se a dimensão da imagem de T é finita. O conjunto dos operadores de posto finito será denotado por $B_f(V, V_1)$. Se $V = V_1$ denota-se $B_f(V)$.*

Proposição 1.2.7 *Um operador T é de posto finito se, e somente se, seu adjunto T^* também é de posto finito [11, p. 189].*

Definição 1.2.8 *Um operador linear $T : V \to V_1$ é compacto se $(T\xi_n)$ possui subsequência convergente em V_1, para toda sequência limitada $(\xi_n) \subset V$. O conjunto dos operadores compactos será denotado por $B_0(V, V_1)$. Se $V = V_1$ denota-se $B_0(V)$.*

Vale lembrar que:

Proposição 1.2.9 *Todo operador de posto finito é compacto.*

Demonstração. Sejam $T \in B_f(V_1, V_2)$ e $A \subset V_1$ um conjunto limitado. Como T é um operador limitado, $T(A)$ é limitado e seu fecho $\overline{T(A)}$ é um conjunto fechado e limitado e, como $dim\ Img\ T < \infty$, segue que $\overline{T(A)}$ é compacto, pois a bola fechada de centro zero e raio $r > 0$ é compacta se, e somente se, dimensão do espaço é finita [11, p. 11]. ■

O próximo teorema garante que um operador T que é limite de uma sequência de operadores compactos é compacto, ou seja, $B_0(V, \mathcal{B})$ é espaço de Banach.

Teorema 1.2.10 *Se $\mathcal{B}$ é um espaço de Banach, então $B_0(V, \mathcal{B})$ é um subespaço fechado de $B(V, \mathcal{B})$. Em particular, $B_0(V, \mathcal{B})$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $\{T_n\} \subset B_0(V, \mathcal{B})$, com $T_n \to T$ no espaço de Banach $B(V, \mathcal{B})$. Será mostrado que, para todo $r > 0$, o conjunto $TB(0; r)$ é totalmente limitado e, portanto, precompacto. O resultado que garante tal afirmação pode ser encontrado em [11, p. 175]. Disto seguirá que T também é um operador compacto.

Fixe $r > 0$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ de forma que $\|T_n - T\| < \varepsilon/r$. Sendo T_n compacto e $B(0; r)$ limitado, o conjunto $\overline{T_n B(0; r)}$ é compacto e pela definição de conjunto compacto em espaços métricos, $T_n B(0; r)$ é totalmente limitado pois está contido na união de bolas abertas

$$B(T_n\xi_1; \varepsilon), B(T_n\xi_2; \varepsilon), \ldots, B(T_n\xi_m; \varepsilon), \text{ para algum } m \in \mathbb{N},$$

com $\xi_j \in B(0; r)$, para todo $1 \leq j \leq m$. Assim, se $\xi \in B(0; r)$, existe um desses ξ_j em que $T_n\xi \in B(T_n\xi_j; \varepsilon)$. A partir disto

$$\begin{aligned} \|T\xi - T\xi_j\| &\leq \|T\xi - T_n\xi\| + \|T_n\xi - T_n\xi_j\| + \|T_n\xi_j - T\xi_j\| \\ &< \|T - T_n\|\ \|\xi\| + \varepsilon + \|T_n - T\|\ \|\xi_j\| \\ &< r\varepsilon/r + \varepsilon + r\varepsilon/r = 3\varepsilon, \end{aligned}$$

mostrando que $TB(0; r) \subset \bigcup_{j=1}^{m} B(T_n\xi_j; 3\varepsilon)$. Portanto $TB(0; r)$ é totalmente limitado para todo $r > 0$.

Segue que $T \in B_0(V, \mathcal{B})$ e, pela primeira frase da demonstração, segue que $B_0(V, \mathcal{B})$ é subespaço fechado de $B(V, \mathcal{B})$. ■

Dessa maneira pode-se concluir que:

Corolário 1.2.11 *Se $(T_n) \subset B_f(V, \mathcal{B})$ e $T_n \to T$ em $B(V, \mathcal{B})$, então o operador T é compacto.*

Demonstração. T_n é de posto finito, logo é compacto. Pelo teorema anterior se $T_n \to T$ em $B(V, \mathcal{B})$, então T é compacto. ■

O resultado a seguir possui aplicabilidade ao longo do terceiro capítulo e pode ser encontrado no artigo [7]. Além disso, existe uma versão mais fraca para ele demonstrada no Capítulo 4.

Teorema 1.2.12 *Seja $\{T_n\} \subset B(\mathcal{H})$ uma sequência satisfazendo*

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n(f) - f\|_{\mathcal{H}} = 0, \quad f \in \mathcal{H}.$$

Se cada T_n é autoadjunto e $T \in B_0(\mathcal{H})$, então

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n T T_n - T\| = 0.$$

Demonstração. Suponha que cada T_n é autoadjunto e $T \in B_0(\mathcal{H})$. O Princípio da Limitação Uniforme [13, p. 163] garante que existe $0 < C \leq \infty$ tal que $\|T_n\| \leq C$, $n \geq 1$, enquanto

$$\begin{aligned}
\|T_n T T_n - T\| &= \|T_n T T_n - T_n T + T_n T - T\| \\
&\leq \|TnTT_n - T_n T\| + \|T_n T - T\| \\
&\leq \|T_n\| \|TT_n - T\| + \|(T_n - Id)T\| \\
&= \|T_n\| \|T(T_n - Id)\| + \|(T_n - Id)T\| \\
&= \|T_n\| \|(T_n - Id)T^*\| + \|(T_n - Id)T\|.
\end{aligned}$$

Resta mostrar que $\|(T_n - Id)T^*\| + \|(T_n - Id)T\| \to 0$ quando $n \to \infty$. Para tanto, considere o conjunto $A = \{T(f) : \|f\| \leq 1\}$. Como $\overline{A}$ é compacto, segue que

$$\begin{aligned}
\|(T_n - Id)T\| &= \sup_{\|f\|=1} \|(T_n - Id)T(f)\| = \sup_{g\in\overline{A}} \|(T_n - Id)(g)\| \\
&= \max_{g\in\overline{A}} \|(T_n - Id)(g)\| = \|(T_n - Id)(g_n)\| \to 0, \quad \text{para algum } g_n \in \overline{A}.
\end{aligned}$$

De fato, supondo que $\max_{g\in\overline{A}} \|(T_n - Id)(g)\| \nrightarrow 0$, existe um $\varepsilon > 0$ e $g_n \in \overline{A}$ tal que $\|(T_n - Id)(g_n)\| \geq \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$. Como $\overline{A}$ é compacto podemos supor que $g_n \to g \in \overline{A}$ e assim,

$$\begin{aligned}
\|T_n(g_n) - g_n\| &= \|T_n(g_n) - T_n(g) + T_n(g) + g - g - g_n\| \\
&\leq \|T_n\| \|g_n - g\| + \|T_n(g) - g\| + \|g_n - g\| \to 0,
\end{aligned}$$

o que contradiz $\|(T_n - Id)(g_n)\| \geq \varepsilon$. O mesmo se aplica a $\|(T_n - Id)T^*\|$. ■

Lema 1.2.13 *$T \in B_0(\mathcal{H})$ se, e somente se, existe uma sequência T_n de operadores de posto finito convergente para T.*

Veja a demonstração deste resultado em [11, p. 185].

Proposição 1.2.14 *Um operador linear T é compacto se, e somente se, seu adjunto T^* também é compacto.*

Demonstração. Um operador T é compacto se, e somente se, existe uma sequência de operadores T_n de posto finito convergindo para ele. Como o adjunto de T_n também é de posto finito como garante a Proposição 1.2.7 e $\|T^* - T_n^*\| = \|(T - T_n)^*\| = \|T - T_n\|$ conclui-se que T é compacto se, e somente se, T^* é compacto. ■

Mais a frente será apresentado um exemplo de operador compacto.

Exemplo 1.2.15 *Seja $L^2([a, b])$ o espaço vetorial complexo de todas as funções complexas Lebesgue mensuráveis f definidas no intervalo $[a, b]$ tais que $|f|^2$ é Lebesgue integrável. Define-se um um produto interno em $L^2([a, b])$ por*

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}d(x), \quad f,\ g \in L^2([a, b]).$$

O operador integral $K : L^2([a, b]) \to L^2([a, b])$ definido por

$$K(f)(x) = \int_a^b k(x, y)f(y)d(y), \quad f \in L^2([a, b]), \quad k \in L^2([a, b] \times [a, b]),$$

é autoadjunto se, e somente se, $k(x, y) = \overline{k(y, x)},\ x, y \in [a, b]$ quase sempre. De fato, pelo Teorema de Fubini [14, p. 119] temos que

$$\begin{aligned}
\langle K(f), g\rangle &= \int_a^b K(f)(y)\overline{g(y)}d(y) \\
&= \int_a^b \left(\int_a^b k(y, x)f(x)d(x)\right)\overline{g(y)}d(y) \\
&= \int_a^b \int_a^b \overline{\overline{k(y, x)}}f(x)\overline{g(y)}d(x)d(y) \\
&= \int_a^b \overline{\left(\int_a^b \overline{k(x, y)}g(y)d(y)\right)}f(x)d(x) \\
&= \langle f, Tg\rangle,
\end{aligned}$$

onde $Tg(x) = \int_a^b \overline{k(y, x)}g(y)d(y)$. Segue que $T = K^*$.

1.3 Operadores do tipo Hilbert-Schmidt

Antes de partir para próxima parte do trabalho - que faz conexão entre operadores autoadjuntos, compactos e existência de autovalores - será apresentado um tipo de operador que também é compacto, chamado de operador do tipo Hilbert-Schmidt. Para mais informações a respeito destes veja [11].

Definição 1.3.1 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Um operador $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1)$ é do tipo Hilbert-Schmidt se existe uma base ortonormal $\{\xi_j\}_{j\in J}$ de $\mathcal{H}$ tal que*

$$\|T\|_{HS} := \left(\sum_{j\in J} \|T\xi_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Um fato importante é que a série acima só depende de T.

Proposição 1.3.2 *Se $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1)$, então $\|T\|_{HS}$ não depende da base tomada.*

Demonstração. Sejam $\{\xi_j\}_{j\in J}$ e $\{\eta_l\}_{l\in L}$ bases ortonormais de $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}_1$. Pela Identidade de Parseval

$$\sum_{j\in J} \|T\xi_j\|^2 = \sum_{\substack{j\in J \\ l\in L}} |\langle T\xi_j, \eta_l\rangle|^2 = \sum_{\substack{j\in J \\ l\in L}} |\langle \xi_j, T^*\eta_l\rangle|^2 = \sum_{l\in L} \|T^*\eta_l\|^2,$$

mostrando deste modo que a base não interfere na definição de $\|T\|_{HS}$. ■

O resultado acima ainda garante que $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1)$ é do tipo Hilbert-Schmidt se, somente se, T^* também é do tipo Hilbert-Schmidt.

Teorema 1.3.3 *Sejam $\mathcal{H}$ e $\mathcal{H}_1$ espaços de Hilbert. Se $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{H}_1)$ é do tipo Hilbert-Schmidt, então T é compacto.*

Demonstração. Seja $\{\xi_j\}_{j\in J}$ uma base ortonormal do espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Como $\|T\|_{HS}^2 = \sum_{j\in J} \|T\xi_j\|^2 < \infty$ pode-se supor J enumerável, ou que todo $\xi \in \mathcal{H}$ pode ser escrito como

$$\xi = \sum_{j\in J_1} \langle \xi, \xi_j\rangle \xi_j + u, \quad u \perp \xi_j \text{ e } T(u) = 0, \quad \forall\, j \in J \text{ enumerável.}$$

Logo,

$$T(\xi) = \sum_{j\in J} \langle \xi, \xi_j\rangle T\xi_j,$$

e se,

$$T_n(\xi) = \sum_{j=1}^{n} \langle \xi, \xi_j\rangle_j T\xi_j,$$

tem-se que

$$\begin{aligned} \|(T - T_n)\xi\| &= \left\| \sum_{j>n} \langle \xi, \xi_j\rangle T\xi_j \right\| \\ &\leq \left(\sum_{j>n} |\langle \xi, \xi_j\rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j>n} \|T\xi_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\xi\| \left(\sum_{j>n} \|T\xi\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \to 0, \end{aligned}$$

o que implica que $T_n \to T$. ■

Teorema 1.3.4 *Sejam $(X, \mathcal{M}, \sigma)$ um espaço de medida σ-finito para o qual $\mathcal{H} = L^2(X, \sigma)$ é separável e $T \in B(\mathcal{H})$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *T é do tipo Hilbert-Schmidt;*
2. *Existe $k \in L^2(X \times X, \sigma \times \sigma)$ tal que*
$$T(f)(x) = \int_X k(x,y)f(y)d\sigma(y), \quad f \in \mathcal{H},\ x \in X.$$

Demonstração. Se $\{\phi_j\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}$, então o conjunto $\{\phi_l \otimes \overline{\phi_j}\}_{j,l \in \mathbb{N}}$, onde $\phi_l \otimes \overline{\phi_j}(x,y) = \phi_l(x)\overline{\phi_j(y)}$, $x, y \in X$, é base ortonormal de $L^2(X \times X, \sigma \times \sigma)$ como é possível ver em [11, p. 194]. Suponha que exista um k tal que $T = T_k$, assim

$$\sum_j \|T\phi_j\|_{L^2}^2 = \sum_{j,l} |\langle T\phi_j, \phi_l\rangle|^2 = \sum_{j,l} |\langle k, \phi_j \otimes \overline{\phi_l}\rangle_{L^2}|^2 = \|k\|_{L^2}^2 < \infty.$$

Logo, T é do tipo Hilbert-Schmidt. Agora, se T é do tipo Hilbert-Schmidt,

$$\sum_l \|T\phi_l\|^2 = \sum_{j,l} |\langle \phi_j, T\phi_l\rangle_{L^2}|^2 = \|T\|_{HS} < \infty,$$

o que permite definir $k(x,y) := \sum_{j,l}\langle T\phi_j, \phi_l\rangle_{L^2}\phi_l(x)\overline{\phi_j(y)}$, $x, y \in X$, em $L^2(X \times X, \sigma \times \sigma)$. Para mais detalhes sobre a última desigualdade veja [11, p. 195]. ∎

Observação 1.3.5 *Um contexto onde podem estar satisfeitas todas as condições do teorema anterior é dado pela Proposição 4.1.7, que por questões técnicas será exibido apenas no Capítulo 4. Uma versão um pouco diferente para o Teorema 1.3.4 é apresentada depois, como Lema 4.2.9.*

Uma vez que este trabalho trata da nuclearidade de operadores integrais positivos, torna-se interessante analisar uma das principais propriedades desses operadores, a compacidade, que segue diretamente do teorema e corolário anteriores.

Corolário 1.3.6 *Seja K um núcleo em $L^2(X \times X, \sigma \times \sigma)$ com $L^2(X, \sigma)$ separável. O operador integral $K : L^2(X, \sigma) \to L^2(X, \sigma)$, dado por*

$$K(f)(x) = \int_X k(x,y)f(y)d\sigma(y), \quad f \in \mathcal{H}, \quad x \in X,$$

é compacto.

1.4 Teoria espectral em espaços de Hilbert

Um resultado importante em Álgebra Linear é o Teorema Espectral que afirma que se $\mathcal{H}$ é de dimensão finita e $T \in B(\mathcal{H})$ autoadjunto, então existe uma base ortonormal $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_j$ e $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j$ reais tais que $\{\lambda_j\}$ são autovalores e $\{\xi_j\}$ autovetores de T. A matriz de transformação nesta base é diagonal. Se $dim\ \mathcal{H} = \infty$ o Teorema Espectral vale quando T é compacto e autoadjunto e esta seção está dedicada a isso. Caso o leitor se interesse, pode consultar as principais referências para esta seção, que são [11] e [12].

Exemplo 1.4.1 *Um exemplo de operador autoadjunto que tem infinitos autovalores é o operador linear limitado* $(Kf)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} h(x-y)f(y)d(y)$, *para o qual* h *é uma função contínua de período* 2π. *A matriz de representação de* K *na base* $\left\{\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}\right\}$ *de* $L^2([-\pi,\pi])$ *é diagonal.*

$$\begin{pmatrix} \ddots & & & & & \\ & \lambda_{-2} & & & & \\ & & \lambda_{-1} & & & \\ & & & \lambda_0 & & \\ & & & & \lambda_1 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}.$$

Para mais detalhes veja [12, p. 171].

Todo operador linear autoadjunto em um espaço de Hilbert que tem dimensão finita tem autovalores, pelo Teorema Espectral para Operadores Autoadjuntos [12, p. 178], entretanto, um operador autoadjunto em um espaço de dimensão infinita pode não ter autovalores.

Exemplo 1.4.2 *O operador* $T : L^2([a,b]) \to L^2([a,b])$ *definido por* $(Tf)(x) = xf(x)$ *é autoadjunto e não tem autovalores, para o qual as funções em* $L^2([a,b])$ *só assumem valores reais.*

Olhando para x *como a função identidade, isto é,* $x = i(x)$, *tem-se que* i *é uma função Lebesgue Mensurável e como*

$$\begin{aligned} \langle Tf, g\rangle &= \int_a^b xf(x)\overline{g(x)}d(x) \\ &= \int_a^b \overline{x}f(x)\overline{g(x)}d(x) \\ &= \int_a^b f(x)\overline{xg(x)}d(x) \\ &= \langle f, Tg\rangle, \quad \forall\ g \in L^2([a,b]), \end{aligned}$$

então T *é autoadjunto e limitado. De fato*

$$|T(f)|_{L^2}^2 = \int_a^b |xf(x)|^2 d(x) \leq |b|^2 \int_a^b |f(x)|^2 d(x),$$

o que implica que $\|T\| \leq |b|$. *Entretanto,* T *não tem autovalores, pois se* $T\xi = \lambda\xi$, *então*

$$\begin{aligned} T\xi - \lambda\xi = 0 &\Leftrightarrow T\xi(x) - \lambda\xi(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow x\xi(x) - \lambda\xi(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-\lambda)\xi(x) = 0, \text{ quase sempre.} \end{aligned}$$

Como x *assume infinitos valores diferentes de* λ, *então* $\xi(x) = 0$, *o que implica que* $\xi = 0$. *Portanto* ξ *não é autovetor e* λ *não é autovalor, para qualquer* $\lambda \in \mathbb{K}$.

O lema a seguir será enunciado porque é necessário na discussão sobre valores singulares realizada mais adiante e também porque é a chave da demonstração do Teorema Espectral.

Lema 1.4.3 *Se $T \in B_0(\mathcal{H})$ é um operador não-nulo e autoadjunto, então $-\|T\|$ ou $\|T\|$ é autovalor de T.*

Demonstração. Demonstrar que $-\|T\|$ ou $\|T\|$ é autovalor é equivalente a demonstrar que existe $\zeta \in \mathcal{H}$ não nulo tal que

$$(T^2 - \|T\|^2 Id)\zeta = (T - \|T\| Id)(T + \|T\| Id)\zeta = 0.$$

Seja (ξ_j) tal que $\|\xi_j\| = 1$, para todo j, de modo que $\|T\xi_j\| \to \|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$. Sendo T compacto, existe subsequência de $(T\xi_j)$, também denotada por $(T\xi_j)$, convergente. Como T é contínuo, $(T^2\xi_j)$ também converge. A estimativa

$$\begin{aligned}
0 &\leq \|T^2\xi_j - \|T\|^2\xi_j\|^2 \\
&= \langle T^2\xi_j - \|T\|^2\xi_j, T^2\xi_j - \|T\|^2\xi_j\rangle \\
&= \|T^2\xi_j\|^2 - \|T\|^2\langle T^2\xi_j, \xi_j\rangle - \|T\|^2\langle \xi_j, T^2\xi_j\rangle + \|T\|^4 \\
&= \|T^2\xi_j\|^2 + \|T\|^4 - 2\|T\|^2\|T\xi_j\|^2 \\
&\leq -\|T\|^2\|T\xi_j\|^2 + \|T\|^4 \to 0 \text{ para } n \to \infty,
\end{aligned}$$

implica que a sequência $\eta_j = T^2\xi_j - \|T\xi_j\|^2\xi_j$ converge para zero e, assim a sequência $\xi_j = (T^2\xi_j - \eta_j)/\|T\xi_j\|^2$ converge para um vetor ζ, com $\|\zeta\| = 1$. Portanto, denotando por $\lambda = \|T\|$ e lembrando que T é contínuo, $0 = T^2\zeta - \|T\|^2\zeta = (T - \lambda Id)(T + \lambda Id)\zeta$.

Disso segue que $T\zeta = -\lambda\zeta$ ou $Tu = \lambda u$ para $u = (T + \lambda Id)\zeta$. Logo $\|T\|$ ou $-\|T\|$ é um autovalor de T. ■

Observação 1.4.4 *Nas condições do lema acima ainda é possível garantir que todo autovalor de T é um número real e, se λ_1 e λ_2 são autovalores distintos de T, dessa maneira, $Ker(T_{\lambda_1}) \perp Ker(T_{\lambda_2})$. De fato, suponha agora que $\xi \in Ker(T_{\lambda_1})$ e $\zeta \in Ker(T_{\lambda_2})$, onde $T_\lambda = T - \lambda Id$. Nesse caso, da definição de produto interno segue que*

$$\lambda_1\langle \xi, \zeta\rangle = \langle \lambda_1\xi, \zeta\rangle = \overline{\langle \zeta, \lambda_1\xi\rangle} = \overline{\lambda_1}\overline{\langle \zeta, \xi\rangle} = \overline{\lambda_1}\langle \xi, \zeta\rangle,$$

e portanto $\lambda_1 = \overline{\lambda_1}$.

$$\lambda_1\langle \xi, \zeta\rangle = \langle T\xi, \zeta\rangle = \langle \xi, T\zeta\rangle = \overline{\lambda_2}\langle \xi, \zeta\rangle$$

o que implica que $\langle \xi, \zeta\rangle = 0$, pois T é autoadjunto.

O resultado abaixo garante que todo operador T autoadjunto e compacto tem autovalores. Além disso os autovetores associados a autovalores não nulos geram a imagem de T.

Teorema 1.4.5 (Espectral) *Seja T um operador compacto e autoadjunto em $\mathcal{H}$. Existe um sistema de autovetores $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ correspondentes aos autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ tal que, para todo $\xi \in \mathcal{H}$, vale a representação*

$$T\xi = \sum_j \lambda_j \langle \xi, \xi_j\rangle \xi_j,$$

com convergência em $\mathcal{H}$. Ainda, $|\lambda_j| \geq |\lambda_{j+1}| \to 0$, se $\dim \mathcal{H} = \infty$.

Demonstração. Primeiramente será discutida a existência de cada λ_j. A demonstração será feita por construção.

Seja $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}$ e $T_1 = T$. Pelo Lema 1.4.3 segue que existe um autovalor λ_1 de T_1 e um autovetor ξ_1 tal que $\|\xi_1\| = 1$ e $|\lambda_1| = \|T_1\|$. Agora, $\mathcal{H}_2 = \{\xi_1\}^\perp$ é um subespaço fechado de $\mathcal{H}_1$ e $T(\mathcal{H}_2) \subset \mathcal{H}_2$. De fato,

$$\langle T\eta, \xi_1\rangle = \langle \eta, T\xi_1\rangle = \lambda_1\langle \eta, \xi_1\rangle = 0, \quad \forall\ \eta \in \mathcal{H}_2,$$

isto é, $T(\eta) \perp \xi_1$ e $T(\mathcal{H}_2) \subset \mathcal{H}_2$.

Seja $T_2 = T|_{\mathcal{H}_2}$ que é compacto e autoadjunto em $B(\mathcal{H}_2)$. Se $T_2 \neq 0$, pelo Lema 1.4.3 existe um autovalor λ_2 de T_2 correspondente a ξ_2 tal que $\|\xi_2\| = 1$ e

$$|\lambda_2| = \|T_2\| \leq \|T\| = |\lambda_1|.$$

Claramente $\{\xi_2, \xi_2\}$ é ortonormal.

Agora, $\mathcal{H}_3 = \{\xi_1, \xi_2\}^\perp$ é um subespaço fechado de $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_3 \subset \mathcal{H}_2$ e $T(\mathcal{H}_3) \subset \mathcal{H}_3$. Defina $T_3 = T|_{\mathcal{H}_3}$. T_3 é compacto e autoadjunto em $B(\mathcal{H}_3)$, possibilitando uma construção análoga a feita acima.

Dessa maneira o processo vai parar quando $T_n = 0$ ou tiver sido encontrada (por indução) uma sequência de autovalores de T correspondentes ao conjunto ortonormal $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots\}$, tal que

$$|\lambda_{n+1}| = \|T_{n+1}\| \leq \|T_n\| = |\lambda_n|, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Então se $\{\lambda_n\}$ é uma sequência infinita, $\lambda_n \to 0$. De fato, $|\lambda_n| \nrightarrow 0$, como $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $|\lambda_n| \geq \varepsilon$, $\forall\ n$.

Seja $y_n = \xi_n/\lambda_n$. Segue que $Ty_n = \xi_n$ não tem subsequência convergente o que contradiz a compacidade de T.

Agora cabe mostrar que $T\xi = \sum_j \lambda_j\langle \xi, \xi_j\rangle\xi_j$.

1. Caso 1: $T_n = 0$ para algum n.

   Como $\xi_n = \xi - \sum_{j=1}^{n}\langle \xi, \xi_j\rangle\xi_j$ é ortogonal a ξ_j, $1 \leq j \leq n$, o vetor ξ_n pertence a $\mathcal{H}_n$. Então
   $$0 = T_n\xi_n = T\xi - \sum_j \lambda j\langle \xi, \xi_j\rangle\xi_j.$$

2. Caso 2: $T_n \neq 0$ para todo n. Neste caso, pela Identidade de Parseval $\xi \in \mathcal{H}$ é dado por
   $$\xi = \sum_{j=1}^{n}\langle \xi, \xi_j\rangle\xi_j + u, \quad \text{onde } u \perp \xi_j,\ \forall\ j.$$
   Isto implica que $T\xi = \sum_j \lambda j\langle \xi, \xi_j\rangle\xi_j$, por continuidade de T e de $T(u) = 0$, que vem da construção anterior.

E o teorema está demonstrado. ■

Este resultado motiva a definição seguinte.

Definição 1.4.6 *Um sistema ortonormal* $\xi_1, \xi_2 \ldots$ *de autovetores de* $T \in B(\mathcal{H})$ *correspondendo a autovalores* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *é chamado sistema básico de* T *se para qualquer* $\xi \in \mathcal{H}$ *tem-se que*

$$T\xi = \sum \lambda_j \langle \xi, \xi_j \rangle \xi_j.$$

Observação 1.4.7 *Note que* T *não precisa ser autoadjunto ou compacto na definição acima, entretanto, se for ambas as coisas, os autovalores e autovetores que satisfazem o Teorema Espectral formam um sistema básico.*

Proposição 1.4.8 *Suponha que* $\{\xi_j\}$ *seja um sistema ortonormal em* $\mathcal{H}$ *e que* $\{\lambda_j\}$ *seja uma sequência de números reais finita ou convergente para zero. O operador* T *definido em* $\mathcal{H}$ *por*

$$T\xi = \sum_j \lambda_j \langle \xi, \xi_j \rangle \xi_j$$

é compacto e autoadjunto.

Demonstração. Primeiro será mostrado que $T \in B(\mathcal{H})$.

Seja $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ uma base ortonormal de $\mathcal{H}$ e $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ uma sequência limitada de números reais. Para cada $\xi \in \mathcal{H}$, defina $T\xi = \sum_j \lambda_j \langle \xi, \xi_j \rangle \xi_j$. T é um operador linear em $\mathcal{H}$ e pela desigualdade de Bessel

$$\|T\xi\|^2 = \sum_j |\lambda_j|^2 |\langle \xi, \xi_j \rangle|^2 \leq m\|\xi\|^2,$$

onde $m = \sup_j |\lambda_j|$. Então $\|T\| \leq m$. Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, existe um λ_l tal que $|\lambda_l| > m - \varepsilon$. Portanto

$$\|T\| \geq \|T\xi_l\| = \|\lambda_l \xi_l\| = |\lambda_l| \geq m - \varepsilon.$$

Tomando $\varepsilon \to 0$, tem-se que $\|T\| \geq m$. Portanto $\|T\| = \sup_j |\lambda_j|$, isto é, $T \in B(\mathcal{H})$. Agora, se $\{\lambda_j\}$ é uma sequência finita então T é de posto finto, logo compacto. Se $\{\lambda_n\}$ é tal que $\lambda_n \to 0$, seja $T_n \in B(\mathcal{H})$ um operador compacto definido por

$$T_n\xi = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle \xi, \xi_j \rangle \xi_j.$$

Como $\|T\xi - T_n\xi\|^2 = \left\| \sum\limits_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j \langle \xi, \xi_j \rangle \xi_j \right\|^2 \leq \sup\limits_{j>n} |\lambda_j|^2 \to 0$, quando $n \to \infty$ e $\|\xi\| = 1$ com $\xi \in \mathcal{H}$, então T é compacto.

Para $\xi, \eta \in \mathcal{H}$ tem-se que

$$\langle T\xi, \eta \rangle = \sum_j \lambda_j \langle \xi, \xi_j \rangle \langle \xi_j, \eta \rangle = \langle \xi, T\eta \rangle.$$

Então T é autoadjunto. ■

1.5 Valores singulares

Uma parte importante deste trabalho se concentra no estudo dos valores singulares, pela relação destes com autovalores e com a nuclearidade de operadores. Aos leitores interessados, os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em [12] e de maneira complementar em [2].

Definição 1.5.1 *Seja T um operador linear, autoadjunto e limitado de $\mathcal{H}$. O operador T é positivo se*

$$\langle T\xi, \xi \rangle \geq 0, \text{ para todo } \xi \in \mathcal{H}.$$

Observações 1.5.2

1. *Se $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert complexo, então não é necessário incluir o fato de $T \in B(\mathcal{H})$ ser autoadjunto na definição anterior. De fato, $\langle T\xi, \xi \rangle \geq 0$ implica que $\langle T\xi, \xi \rangle \in \mathbb{R}$. O resultado segue da Proposição 1.2.2.*

2. *Se $T : V \to V$ com V espaço real, então $\langle T(f), f \rangle \geq 0$ não é suficiente para garantir que T é autoadjunto, um exemplo disso é o operador $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix},$$

que não tem autovalores.

O leitor deve ficar atento ao fato de que um operador compacto pode não ter autovalores e que isso não é algo desejável na aplicação do Teorema Espectral. Será aqui trabalhada uma representação similar a deste teorema para quando o operador não é autoadjunto.

Note que o operador T^*T é autoadjunto e compacto, então basta aplicar o Teorema Espectral para a existência dos autovalores

$$\lambda_1(T^*T) \geq \lambda_2(T^*T) \geq \lambda_3(T^*T) \geq \cdots \geq 0,$$

onde cada um é repetido de acordo com a multiplicidade.

Definição 1.5.3 *Seja T um operador compacto em $\mathcal{H}$. O j-ésimo valor singular de T é o número*

$$s_j(T) := \sqrt{\lambda_j(T^*T)}.$$

Observações 1.5.4

1. *Se T é autoadjunto, compacto e positivo então seus valores singulares e autovalores coincidem. Se for apenas compacto e autoadjunto $s_j(T) = |\lambda_j(T)|$.*

2. *Um operador compacto T pode não ter autovalores mas sempre terá valores singulares. Um exemplo é o operador de Volterra definido por*

$$T(f)(x) = \int_0^x f(y)d(y), \quad x \in [0,1], \quad \forall\ f \in L^2([0,1]),$$

onde são consideradas apenas funções reais. O operador T é definido pelo núcleo integral $k_0(x,y) = \chi_{[0,x]}(y), y \in [0,1]$ e tem como valores singulares

$$s_n = \frac{2}{\pi(2n+1)}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Para mais informações veja [12, p. 293].

A seguir serão apresentados alguns resultados acerca dos valores singulares. O teorema abaixo é uma versão do Teorema Espectral, no caso em que T não é autoadjunto. A representação dada pelo teorema é conhecida como Representação de Schmidt ou Teorema da Decomposição Singular.

Teorema 1.5.5 (Decomposição Singular) *Um operador $T \in B_0(\mathcal{H})$ admite uma representação na forma*

$$T(\xi) = \sum_{j=1}^{\nu(T)} s_j(T)\langle \xi, \xi_j \rangle \eta_j, \quad \xi \in \mathcal{H},$$

onde $\nu(T)$ é a cardinalidade enumerável do conjunto de índices dos valores singulares diferentes de zero, $(\xi_j)_{j=1}^{\nu(T)}$ e $(\eta_j)_{j=1}^{\nu(T)}$ são um sistema ortonormal em $\mathcal{H}$ e a série converge na norma de operadores, se $\nu(T) = \infty$. Ainda, se

$$S(\xi) = \sum_{j=1}^{\nu(S)} a_j \langle \xi, \xi_j \rangle \eta_j, \quad \xi \in \mathcal{H},$$

onde $(\xi_j)_{j=1}^{\nu(S)}$ e $(\eta_j)_{j=1}^{\nu(S)}$ são um sistema ortonormal e $(a_j)_{j=1}^{\nu(S)}$ é uma sequência não crescente de números positivos que converge para zero, se $\nu(S) = \infty$, então S é um operador compacto e $s_j(S) = a_j;\ 1 \leq j < \nu(S) + 1$ são valores singulares de S.

Demonstração. Pelo Teorema Espectral para operadores compactos autoadjuntos mostra-se que existe um sistema ortonormal $\xi_1, \xi_2, \cdots$, tal que

$$T^*T(\xi) = \sum_{j=1}^{\nu(T)} s_j^2 \langle \xi, \xi_j \rangle \xi_j, \quad \xi \in \mathcal{H}.$$

Escreva $\eta_j = s_j^{-1} T\xi_j$, para cada j em que $s_j \neq 0$, assim

$$\begin{aligned} \langle \eta_j, \eta_l \rangle &= s_j^{-1} s_l^{-1} \langle T\xi_j, T\xi_l \rangle \\ &= s_j^{-1} s_l^{-1} \langle T^*T\xi_j, \xi_l \rangle \\ &= s_j^{-1} s_l^{-1} \end{aligned}$$

$$= \quad \delta_{jl},$$

onde $\delta_{jl} = 1$, se $l = j$ ou $\delta_{jl} = 0$, se $l \neq j$. Então $\{\eta_1, \eta_2, \ldots\}$ é um sistema ortonormal. Qualquer $\xi \in \mathcal{H}$ pode ser escrito na forma

$$\xi = \sum_{j=1}^{\nu(T)} \langle \xi, \xi_j \rangle \xi_j + u, \tag{1.2}$$

onde $u \in Ker\ T^*T$ e $u \perp \xi_j$. Para saber mais sobre esta decomposição veja [12, p. 180, 6.1a] ou note que ela segue do fato de $\{\xi_j\}$ poder ser completado de modo a formar uma base. De $\langle T^*Tu, u \rangle = \|Tu\|^2$ segue que $Ker\ T^*T = Ker\ T$. Uma vez que

$$T\xi_j = s_j \eta_j.$$

Aplicando T na Equação (1.2) segue que

$$T\xi = \sum_{j=1}^{\nu(T)} s_j \langle \xi, \xi_j \rangle \eta_j.$$

Agora, suponha que $\nu(T) = \infty$ e seja $T_n = \sum_{j=1}^{n} s_j \langle \cdot, \xi_j \rangle \eta_j$. Para cada $\xi \in \mathcal{H}$,

$$\|(T - T_n)\xi\|^2 \leq \sum_{j=n+1}^{\infty} s_j^2 |\langle \xi, \xi_j \rangle|^2 \leq \left(\sup_{j>n} s_j^2 \right) \|\xi\|^2,$$

e $T_n \to T$ na norma de operadores.

Agora, seja S como no enunciado. Se $\nu(S)$ é finito, então S tem posto finito e então é compacto. Se $\nu(S)$ é infinito, escreva $S_n = \sum_{j=1}^{n} a_j \langle \cdot, \xi_j \rangle \eta_j$. Como S_n é de posto finito segue que S é compacto. Veja que $S^* = \sum_{j=1}^{\nu(S)} a_j \langle \cdot, \eta_j \rangle \xi_j$, pois

$$\begin{aligned}
\langle S(\xi), \eta \rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{\nu(S)} a_j \langle \xi, \xi_j \rangle \eta_j, \sum_{j=1}^{\nu(S)} \langle \eta, \eta_j \rangle \eta_j \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\nu(S)} a_j \langle \xi, \xi_j \rangle \left\langle \eta_j, \sum_{l=1}^{\nu(S)} \langle \eta, \eta_l \rangle \eta_l \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\nu(S)} \sum_{l=1}^{\nu(S)} a_j \langle \xi, \xi_j \rangle \langle \eta, \eta_l \rangle \langle \eta_j, \eta_l \rangle \\
&= \sum_{j=1}^{\nu(S)} \sum_{l=1}^{\nu(S)} a_l \langle \xi, \xi_j \rangle \langle \eta, \eta_l \rangle \langle \xi_j, \xi_l \rangle \\
&= \left\langle \sum_{j=1}^{\nu(S)} \langle \xi, \xi_j \rangle \xi_j, \sum_{l=1}^{\nu(S)} a_l \langle \eta, \eta_l \rangle \xi_l \right\rangle \\
&= \langle \xi, S^*(\eta) \rangle.
\end{aligned}$$

Também, $S^*S = \sum_{j=1}^{\nu(S)} {a_j}^2 \langle \cdot, \xi_j \rangle \xi_j$ e assim tem-se que $s_j = (\lambda_j(S^*S))^{\frac{1}{2}} = a_j$. Tomando o adjunto de T tem-se $T^* = \sum_{j=1}^{\nu(T)} s_j(T) \langle \cdot, \eta_j \rangle \xi_j$. ■

Observação 1.5.6 *Como podemos notar no teorema acima os valores singulares de T e T^* são os mesmos.*

Mais do que garantir a existência de valores singulares é necessário saber como eles se apresentam na hora de fazer algumas demonstrações ou como se comportam numa composição de operadores, por isso, segue o teorema que ajuda a responder essas questões.

Teorema 1.5.7 (Min-Max) *Se $T \in B_0(\mathcal{H})$ autoadjunto e positivo, então existe $\{v_l\}$ autovetores de norma um tais que*

$$\begin{array}{rcl} s_1 & = & \max\limits_{\|\xi\|=1} \|T\xi\| = \max\limits_{\|\xi\|=1} \langle T\xi, \xi\rangle = \|T(v_1)\| \\ s_2 & = & \max\limits_{\substack{\|\xi\|=1 \\ \xi \perp v_1}} \|T\xi\| = \max\limits_{\substack{\|\xi\|=1 \\ \xi \perp v_1}} \langle T\xi, \xi\rangle = \|T(v_2)\| \\ \vdots & \vdots & \\ s_l & = & \max\limits_{\substack{\|\xi\|=1 \\ \xi \perp v_l \\ l \leq j-1}} \|T\xi\| = \max\limits_{\substack{\|\xi\|=1 \\ \xi \perp v_l \\ l \leq j-1}} \langle T\xi, \xi\rangle = \|T(v_l)\| \\ \vdots & \vdots & \\ s_j & = & \min\limits_{\dim M = j-1} \left(\max\limits_{\substack{\|\xi\|=1 \\ \xi \in M^\perp}} \|T\xi\| \right) = \min\limits_{\dim M = j-1} \left(\max\limits_{\substack{\|\xi\|=1 \\ \xi \in M^\perp}} \langle T\xi, \xi\rangle \right), \end{array}$$

*onde M **um subespaço de** $\mathcal{H}$, com dimensão $j-1$.*

Demonstração. Como T é autoadjunto segue da construção do Teorema Espectral que

$$s_j = \max_{\substack{\|\xi\|=1 \\ \xi \perp v_l \\ l \leq j-1}} \|T\xi\| = \max_{\substack{\|\xi\|=1 \\ \xi \perp v_l \\ l \leq j-1}} \langle T\xi, \xi\rangle = \|T(v_l)\|,$$

onde v_j é autovetor associado ao autovalor λ_j.

Seja S o subespaço gerado pelos autovetores ortonormais $\{v_1, v_2, \dots v_{j-1}\}$. Deste modo, $M \cap S$ tem dimensão menor ou igual a $j-1$ e, se existe $\xi \in M \setminus S$, então ele pode ser escrito como

$$\xi = \sum_{l=1}^{j-1} \alpha_l v_l + \beta v; \quad \|v\| = 1, \quad \beta \neq 0,$$

com $v \perp \{v_1, v_2, \dots, v_j\}$. Logo,

$$\begin{array}{rcl} \langle T\xi, \xi\rangle & = & \left\langle T \sum\limits_{l=1}^{j-1} \alpha_l v_l + \beta v, \sum\limits_{l=1}^{j-1} \alpha_l v_l + \beta v \right\rangle \\ & = & \left\langle \sum\limits_{l=1}^{j-1} \alpha_l T v_l, \sum\limits_{l=1}^{j-1} \alpha_l v_l \right\rangle + \left\langle \sum\limits_{l=1}^{j-1} \alpha_l T v_l, \beta v \right\rangle + \left\langle \beta T v, \sum\limits_{l=1}^{j-1} \alpha_l v_l \right\rangle + \beta^2 \langle Tv, v\rangle \end{array}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{l=1}^{j} {\alpha_l}^2 \lambda_l + \beta^2 \langle T(v), v\rangle \\
&\geq \lambda_j \left(\sum_{l=1}^{j-1} \alpha_l^2 \right) + \beta^2 \langle T(v), v\rangle \geq \lambda_j \|\xi\|^2 = \lambda_j.
\end{aligned}
$$

Como T é autoadjunto e positivo $s_j = |\lambda_j|$ e a demonstração segue. ■

Corolário 1.5.8 *Se $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ é um operador compacto e $S_1, S_2 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ são operadores lineares limitados, então*

$$
s_j(S_1 T S_2) \leq \|S_1\| s_j(T) \|S_2\|.
$$

Demonstração. Primeiro será mostrado que $s_j(S_1T) \leq \|S_1\| s_j(T)$, mas antes note que $s_j(S_1T) = s_j(T^* S_1^*)$. Como $s_j(S_1T) = s_j(|S_1T|)$, pode-se supor que são positivos. Logo,

$$
\begin{aligned}
s_j(S_1T) &= \min_{\dim M = j-1} \left(\max_{\substack{\|\xi\|=1 \\ \xi \in M^\perp}} \|S_1 T\xi\| \right) \\
&\leq \|S_1\| \min_{\dim M = j-1} \left(\max_{\substack{\|\xi\|=1 \\ \xi \in M^\perp}} \|T\xi\| \right) \\
&\leq \|S_1\| s_j(T).
\end{aligned}
$$

Deste modo,

$$
s_j(S_1TS_2) \leq \|S_1\| s_j(TS_2) = \|S_1\| s_j(S_2^* T^*) \leq \|S_1\| \|S_2^*\| s_j(T^*) = \|S_1\| \|S_2\| s_j(T),
$$

pois $s_j(T^*) = s_j(T)$ pela observação anterior. ■

Corolário 1.5.9 *Se T é um operador compacto em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então para $j = 1, 2, \ldots$*

$$
s_j(T) = \min\{\|T - K\|,\ K \in B(\mathcal{H}), \textit{posto } K \leq j-1\}.
$$

Demonstração. Suponha que posto $K = m \leq j-1$, então dim $(Ker\ K)^\perp = m$. Logo,

$$
s_j(T) \leq s_{m+1}(T) \leq \max_{0 \neq \xi \perp KerK} \|T\xi\| = \max_{0 \neq \xi \perp KerK} \frac{\|(T-K)\xi\|}{\|\xi\|} \leq \|T - K\|.
$$

Então $s_j(T) \leq \|T - K\|$ para todo K cujo posto é menor que $j - 1$.

Agora será demonstrado que o ínfimo é atingido e é igual a $s_j(T)$. Para fazer isso, seja $T = \sum_{l=1}^{\nu(T)} s_l(T) \langle \cdot, \xi_l \rangle \eta_l$ a decomposição singular de T. Tome $j < \nu(T) + 1$ e considere $K_j = \sum_{l=1}^{j-1} s_l(T) \langle \cdot, \xi_l \rangle \eta_l$. O posto de $K_j = j - 1$ e $\|T - K_j\| \leq \sup_{l \geq j} s_j(T) = s_j(T)$. Portanto o mínimo é atingido em $K = K_j$ e é igual a $s_j(T)$. Se $j > \nu(T)$ então o posto de T deve ser menor que $j - 1$ e $s_j(T) = 0$ e então o mínimo é atingido em $K = T$. ■

Corolário 1.5.10 *Se T e S são elementos de $B_0(\mathcal{H})$, então*

$$|s_j(T) - s_j(S)| \leq \|T - S\|, \quad j = 1, 2, \ldots.$$

Demonstração. Segue que $s_j(T) - \|T - S\|$ é um limitante inferior para $\|S - K\|$ quando K percorre todos os operadores de posto menor que $j-1$, de acordo com o corolário anterior. Isto implica que $s_j(T) - \|T - S\| \leq s_j(S)$ e então $s_j(T) - s_j(S) \leq \|T - S\|$. Trocando na última igualdade os papéis de T e S, a desigualdade segue. ∎

É possível definir agora os operadores que são objeto de estudo deste trabalho.

Definição 1.5.11 *Um operador integral $T \in B_0(\mathcal{H})$ é classe traço ou nuclear quando*

$$\sum_{\xi \in B} \langle T^*T(\xi), \xi \rangle^{\frac{1}{2}} = \sum_{\xi \in B} \|T(\xi)\| < \infty,$$

para uma base ortonormal B do espaço $\mathcal{H}$. O espaço dos operadores nucleares de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{H}$ é denotado por $B_1(\mathcal{H})$.

Definição 1.5.12 *O traço de um operador $T \in B_1(\mathcal{H})$ é definido por*

$$tr(T) := \sum_{l=1}^{\infty} \langle T(\xi_j), \xi_j \rangle_{\mathcal{H}}, \quad \text{onde } \{\xi_j\} \text{ é base ortonormal de } \mathcal{H}.$$

Observações 1.5.13

1. *Pode-se mostrar (veja [2, p. 60]) que a fórmula abaixo define uma norma em $B_1(\mathcal{H})$*

$$\|T\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(T), \quad T \in B_1(\mathcal{H}).$$

2. *Note que a convergência das séries das Definições 1.5.11 e 1.5.12 implica que o traço não depende da base selecionada, veja [12, p. 253]. Ainda,*

$$\sum_{\xi \in B} \|T(\xi)\| = \sum_{j} s_j(T),$$

onde B é uma base ortonormal do espaço $\mathcal{H}$ que contém os autovetores de T^*T.

3. *Se T é nuclear, então ele será do tipo Hilbert-Schmidt e, portanto, compacto.*

4. *Pode-se perceber que*

$$|tr(ST)| \leq \|S\|\|T\|_1, \quad S \in B(\mathcal{H}), \quad T \in B_1(\mathcal{H}). \tag{1.3}$$

De fato,

$$|tr(ST)| = \left| \sum_{\xi \in B} \langle ST(\xi), \xi \rangle \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} s_j(ST) \leq \|S\| \sum_{j=1}^{\infty} s_j(T).$$

5. A norma do operador traço é igual a um, de fato

$$\|tr(T)\| \leq \sum_{\xi \in B} |\langle T(\xi), \xi \rangle| \leq \|T\|_1.$$

Os resultados a seguir finalizam o capítulo, sendo que o primeiro deles pode ser encontrado em [2] e [7] e, uma versão para o segundo em [2] e [5]. Tais teoremas são fundamentais para a convergência na norma adequada citada na introdução deste trabalho, respectivamente, de acordo com os contextos do Capítulo 3 e do Capítulo 4.

Proposição 1.5.14 *Sejam $\{T_n\}$ e $\{S_n\}$ duas sequências em $B(\mathcal{H})$ tais que $T_n(f) \to T(f)$ e $S_n(f) \to S(f)$ para toda $f \in \mathcal{H}$. Se R é um elemento de $B_1(\mathcal{H})$, então*

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n R S_n^* - TRS^*\|_1 = 0.$$

Demonstração. Primeiro suponha que $R(f) = \langle f, \xi \rangle \eta$, $f \in \mathcal{H}$, o qual tem posto um. Como

$$TRS(f) = T(\langle S(f), \xi \rangle \xi) = \langle S(f), \eta \rangle T(\eta) = \langle f, S^*(\xi) \rangle T(\eta),$$

tem-se que

$$\|TRS\|_1 = \|TRS\|_{B(\mathcal{H})} = \|S^*\xi\| \|T\eta\|.$$

Tem-se

$$\begin{aligned} \|T_n R S_n^* - TRS^*\|_1 &\leq \|T_n R(S_n^* - S^*)\|_1 + \|(T - T_n)RS^*\|_1 \\ &= \|(S_n - S)^*\xi\| \|T_n \eta\| + \|S^*\xi\| \|(T - T_n)\eta\| \to 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Tomando combinações lineares finitas, o teorema está demonstrado para o caso em que R é de posto finito. O caso geral será demonstrado por aproximação. Tome $R \in B_1$. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como $\{T_n\}$ e $\{S_n\}$ são sequências que convergem pontualmente, pelo Princípio da Limitação Uniforme existe uma constante positiva C tal que $\|T_n\| \leq C$ e $\|S_n\| \leq C$, $\forall\, n \leq 1$. Escolha um operador de posto finito F tal que $\|R - F\|_1 < \varepsilon/3C^2$. Segue pelo Corolário 1.5.8 que se $B, D \in B(\mathcal{H})$

$$\|BRD\|_1 \leq \|B\| \|D\| \|R\|_1.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|T_n R S_n^* - TRS^*\|_1 &\leq \|T_n\| \|R - F\|_1 \|S_n^*\| + \|T_n F S_n^* - TFS*\|_1 + \|T\| \|R - F\|_1 \|S^*\| \\ &\leq \frac{2}{3}\varepsilon + \|T_n F S_n^* - TFS^*\|_1. \end{aligned}$$

Aplicando a Equação (1.4) nos operadores de posto finito, existe um natural N tal que $\|T_n F S_n^* - TFS^*\|_1 < \varepsilon/3$ para $n > N$. Mas então $\|T_n A S_n^* - TAS^*\|_1 < \varepsilon, \forall\, n > N$. ■

Existe uma versão mais geral para o resultado anterior, como podemos encontrar em [2, p. 89]. Da mesma forma, existe uma versão mais geral do resultado abaixo, como citado em [5], mas a apresentada aqui atende as necessidades deste trabalho.

Teorema 1.5.15 *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert separável e uma sequência de operadores $T_n \in B_1(\mathcal{H})$ com $C = \sup_n \|T_n\|_1 < \infty$. Se $T_n(f)$ converge $T(f)$, para todo $f \in \mathcal{H}$ e algum operador $T \in B(\mathcal{H})$. Então, $T \in B_1(\mathcal{H})$ e $\|T\|_1 \leq C$.*

Demonstração. Como

$$\|T_n\|_1 = \sum_{f \in B} \|T_n(f)\| \leq C < \infty,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e B base ortonormal $\mathcal{H}$. Para cada $p \in \mathbb{N}$ e $f_1, f_2, \ldots, f_p \in B$ distintos, tem-se

$$\sum_{j=1}^{p} \|T(f_j)\| = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{p} \|T_n(f_j)\| \leq C < \infty.$$

Segue que

$$\|T\|_1 = \sup_{\substack{D \in B \\ D\, finito}} \sum_{f \in D} \|T(f)\| \leq C < \infty,$$

e $T \in B_1(\mathcal{H})$. ■

CAPÍTULO 2

TEORIA DE MERCER

2.1 Núcleos positivos definidos e L^2-positivos definidos

Núcleos positivos definidos são objetos de estudos desde o início do século XX e matemáticos vêm fazendo esforços para abranger os resultados dos teoremas que os caracterizam, como o Teorema de Mercer, como os artigos recentes [8] e [16]. Este teorema teve sua primeira versão em 1909 e tem como exemplo de sua importância, a caracterização de núcleos positvos definidos. Neste trabalho, em especial, o Teorema de Mercer faz conexão com a nuclearidade de operadores integrais positivos. Esta seção foi baseada no Capítulo III de [9].

Definição 2.1.1 *Uma matriz $A_{n\times n}$ com coeficientes complexos é não negativa definida quando*

$$\overline{x}Ax^t \geq 0, \quad \forall\ x \in \mathbb{C}^n.$$

Proposição 2.1.2 *Seja $A_{n\times n}$ uma matriz não negativa definida. Valem as afirmações:*

1. *Qualquer submatriz principal de A é não negativa definida;*
2. *Todo autovalor de A é não-negativo;*
3. *As entradas na diagonal principal de A são todas não-negativas;*
4. *A é hermitiana, ou seja, $A_{ij} = \overline{A_{ji}}, i, j = 1, 2, \ldots, n$.*

Demonstração.

1. Submatriz principal é qualquer submatriz obtida eliminando linhas e colunas de A com os mesmos índices. Retirando as linhas e colunas $\{i_1, i_2, \ldots, i_p\}$ da matriz $A_{n\times n}$ tem-se a submatriz $B_{(n-p)\times(n-p)}$ tal que

$$\overline{x}Ax^t = \overline{y}By^t \geq 0,$$

quando as coordenadas $i_1, i_2, \ldots, i_p$ de x são iguais a 0, e y é obtido de x retirando essas coordenadas.

2. Sejam x autovetor e λ autovalor de A, com $\|x\| = 1$. Segue que

$$0 \leq \overline{x}Ax^t = \langle x, Ax^t \rangle = \langle x, \lambda x^t \rangle = \lambda \|x\|^2 = \lambda.$$

3. Os elementos A_{ii} da diagonal são isolados tomando $x_1 = (1, 0, \ldots, 0), x_2 = (0, 1, \ldots, 0)$ até $x_n = (0, 0, \ldots, 1)$. Assim

$$0 \leq \overline{x_i}A{x_i}^t = A_{ii} \quad \text{i = 1,...,n.}$$

4. Pode-se associar a matriz A a um operador positivo T no espaço de Hilbert $\mathbb{C}^n$, ou seja, $\langle T\xi, \xi \rangle \geq 0$, para todo $\xi \in \mathcal{H}$, então $T = T^*$.

E a demonstração está completa. ■

Definição 2.1.3 *Seja X um conjunto não vazio. Diz-se que $k : X \times X \to \mathbb{C}$ **é um núcleo positivo definido sobre** X quando a matriz $A = (k(x_i, x_j))$ de ordem n **é não negativa,** para qualquer $n \geq 1$ e qualquer n-upla $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X^n$. Denota-se por $PD(X)$ a **classe de núcleos positivos definidos sobre** X.*

Não é difícil ver que a definição acima equivale à validade da desigualdade

$$\sum_{i,j=1}^{n} \overline{c_i}c_j K(x_i, x_j) \geq 0, \ n \geq 1, \ \{x_1, \ldots, x_n\} \subset X, \ \{c_1, \ldots, c_n\} \subset \mathbb{C}.$$

De fato, basta notar que, para qualquer $c = (c_1, c_2, \cdots, c_n) \in \mathbb{C}^n$, tem-se que

$$\begin{aligned}
\overline{c}(K(x_i, x_j))c^t &= \overline{(c_1\, c_2\, \cdots\, c_n)} \begin{pmatrix} k(x_1, x_1) & k(x_1, x_2) & \cdots & k(x_1, x_n) \\ k(x_2, x_1) & k(x_2, x_2) & \cdots & k(x_2, x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k(x_n, x_1) & k(x_n, x_2) & \cdots & k(x_n, x_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \\
&= \overline{(c_1\, c_2\, \cdots\, c_n)} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} c_j k(x_1, x_j) \\ \sum_{j=1}^{n} c_j k(x_2, x_j) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} c_j k(x_n, x_j) \end{pmatrix} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \overline{c_1}c_j k(x_1, x_j) + \cdots + \sum_{j=1}^{n} \overline{c_n}c_j k(x_n, x_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \overline{c_i}c_j k(x_i, x_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{c_i}c_j k(x_i, x_j).
\end{aligned}$$

Para habituar o leitor com o conceito de positividade definida, seguem dois exemplos De como checar se um núcleo é positivo definido.

Exemplo 2.1.4 *Se $f : X \to \mathbb{C}$ é uma função qualquer, o núcleo dado pela fórmula $k(x,y) = f(x)\overline{f(y)}$ é positivo definido. De fato, se $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset X$ e $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\} \subset \mathbb{C}$, então*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \overline{c_i} c_j k(x_i, x_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{c_i} c_j f(x_i)\overline{f(x_j)} = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{c_i} f(x_i)\overline{\overline{c_j} f(x_j)} = \left|\sum_{i=1}^{n} \overline{c_i} f(x_i)\right|^2 \geq 0.$$

Exemplo 2.1.5 *Seja X e $S : X \times X \to \mathbb{C}$ tal que $S(\cdot, x) \in L^2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\sigma})$, para todo $x \in X$. Neste caso o núcleo k dado por*

$$k(x,y) = \int_X S(z,y)\overline{S(x,y)}dz, \quad x \in X,$$

é um elemento de $PD(X)$. De fato, a forma quadrática da definição é

$$\sum_{i,j=1}^{n} \overline{c_i} c_j k(x_i, x_j) = \int_X \sum_{i,j=1}^{n} \overline{c_i} c_j S(z, x_j)\overline{S(z, x_i)}dz = \int_X \left|\sum_{j=1}^{n} c_j S(z, x_j)\right|^2 dz \geq 0.$$

Uma importante propriedade a ser observada é que a combinação de núcleos positivos com coeficientes não negativos é um núcleo positivo definido, assim como é positivo definido o limite de uma sequência de núcleos que o são.

Propriedades 2.1.6 *Valem as seguintes propriedades para os núcleos positivos definidos:*

1. *Se $k_1, k_2, \ldots, k_p \in PD(X)$ e $d_1, d_2, \ldots, d_p \geq 0$, então $\sum_{j=1}^{p} d_j k_j \in PD(X)$. Basta notar*
$$\sum_{i,j=1}^{n} \overline{c_i} c_j k(x_i, x_j) = \sum_{l=1}^{p} d_l \left(\sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j k_l(x_i, x_j)\right) \geq 0.$$

2. *Se (k_p) é uma sequência em $PD(X)$ que converge pontualmente para k, então $k \in PD(X)$. De fato*
$$\sum_{i,j=1}^{n} \overline{c_i} c_j k(x_i, x_j) = \lim_{p \to \infty} \sum_{i,j=1}^{n} \overline{c_i} c_j k_p(x_i, x_j) \geq 0.$$

Teorema 2.1.7 *Se $k \in PD(X)$, então:*

1. *$k(x,x) \geq 0$, para todo $x \in X$;*

2. *k é hermitiano;*

3. *$|k(x,y)|^2 \leq k(x,x)k(y,y)$, para todo $x, y \in X$.*

Demonstração.

1. Tomando $n = 1$, $c_1 = 1$ e $x_1 = x$ na forma quadrática da definição temos $k(x, x) \geqslant 0$.

2. Como $k \in PD(X)$ então a matriz $A = (k(x_i, x_j))_{2\times 2}$ é não negativa definida. Segue da Propriedade 2.1.2 que $k(x_i, x_j) = \overline{k(x_j, x_i)}$, $\forall\ x_i \in X$, $i \leq 2$.

3. Como a matriz $A = (a_{ij}) = (k(x_i, x_j))_{2\times 2}$ é não negativa definida segue que

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \overline{a_{21}} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - |a_{21}|^2 = \boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{\lambda}_2 \geqslant 0, \quad \boldsymbol{\lambda}_1, \boldsymbol{\lambda}_2 \text{ autovalores de } A.$$

   Logo, $|a_{21}|^2 \leqslant a_{11}a_{22}$, isto é, $|k(x_1, x_2)|^2 \leqslant k(x_1, x_1)k(x_2, x_2)$.

E a demonstração está completa. ∎

Este teorema aparecerá durante o trabalho com o intuito de auxiliar na prova de outras demonstrações.

Corolário 2.1.8 *Seja $(X, \mathcal{A}, \sigma)$ um espaço de medida. Se $k \in PD(X)$ é mensurável em $X \times X$ e a função $x \in X \mapsto k(x, x)$ pertence a $L^1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\sigma})$, então $k \in L^2(X \times \boldsymbol{X}, \sigma \times \sigma)$ e*

$$\|k\|_{L^2} \leq \int_X k(x, x)\boldsymbol{d\sigma}(x).$$

Demonstração. Se $k \in PD(X)$, então pelo item 3. do teorema anterior segue que

$$|k(x, y)|^2 \leq k(x, x)k(y, y), \quad x, y \in X.$$

Se $x \in X \mapsto k(x, x)$ pertence a $L^1(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\sigma})$, é possível integrar esta desigualdade para obter,

$$\int_X \int_X |k(x, y)|^2 \boldsymbol{d\sigma}(x)\boldsymbol{d\sigma}(y) \leq \int_X \int_X k(x, x)k(y, y)\boldsymbol{d\sigma}(x)\boldsymbol{d\sigma}(y) = \left(\int_X k(x, x)\boldsymbol{d\sigma}(x)\right)^2.$$

Lembrando que $k(x, x) \geq 0$. A desigualdade segue. ∎

Além da positividade definida existe ainda a positivade L^2-definida, que possuem relação entre si, com o Teorema de Mercer e com nuclearidade. Um fato interessante a ser observado é que sobre a hipótese da continuidade, núcleos L^2PD e PD são equivalentes em certos contextos [9]. Ainda tem-se a positividade de operador integral K, objeto de estudo deste trabalho.

Definição 2.1.9 *Seja $k \in L^2(X \times \boldsymbol{X}, \sigma \times \sigma)$. Diz-se que k é um núcleo L^2-positivo definido, e escreve-se $k \in L^2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\sigma})PD$, quando*

$$\langle K(f), f\rangle = \int_X \left(\int_X k(x, y)f(y)\boldsymbol{d\sigma}(y)\right)\overline{f(x)}\boldsymbol{d\sigma}(x) \geq 0, \quad f \in L^2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\sigma}).$$

Exemplo 2.1.10 *Sejam $f \in L^2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\sigma})$ e $k := f(x)\overline{f(y)} \in L^2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\sigma})PD$. Tem-se*

$$\langle K(f), f\rangle = \int_X \left(\int_X f(x)\overline{f(y)}\boldsymbol{\xi}(y)\boldsymbol{d\sigma}(y)\right)\overline{\boldsymbol{\xi}(x)}\boldsymbol{d\sigma}(x) = \left|\int_X f(x)\overline{\boldsymbol{\xi}(x)}\boldsymbol{d\sigma}(x)\right|^2, \ \boldsymbol{\xi} \in L^2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\sigma}).$$

Teorema 2.1.11 *Seja $k \in L^2(X \times X, \sigma \times \sigma) \cap C(X \times X)$, para o qual $C(X \times X)$ denota o conjunto das funções contínuas definidas em $X \times X$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$k \in PD$;*
2. *$k \in L^2(X, \sigma)PD$;*
3. *K é um operador positivo.*

A demonstração pode ser encontrada em [9, p. 27].

Teorema 2.1.12 *Seja $(X, \mathcal{A}, \sigma)$ um espaço de medida σ-finito tal que $L^2(X, \sigma)$ é separável. Se $k \in L^2(X\sigma)PD$, então o operador K é autoadjunto, do tipo Hilbert-Schmidt e compacto. Em particular, as conclusões do Teorema Espectral valem para K.*

Demonstração. Como $K \geq 0$ e o corpo em questão é o dos complexos, o operador K é autoadjunto. O restante segue do Corolário 1.3.6. ■

2.2 Teoria de Mercer para um intervalo $[a, b]$

Nesta seção pretende-se introduzir ideias sobre a representação em série do traço, inicialmente com $X = [a, b]$ com a medida de Lebesgue, de maneira a apresentar o problema para o leitor em um contexto mais simples e, mais adiante, em um conjunto Lebesgue mensurável de $\mathbb{R}^n$. Para tanto, a seção foi baseada em [12].

A representação espectral em série de operadores integrais autoadjuntos e compactos converge na norma de L^2 mas isso não é forte o suficiente em certas aplicações. Serão estudados aqui mais casos onde estas informações são necessárias. É válido recordar que, se $k \in L^2([a, b] \times [a, b])$ é um núcleo hermitiano, ou seja, $\overline{k(x, y)} = k(y, x)$ quase sempre, então o operador integral definido por

$$(Kf)(x) = \int_a^b k(x, y)f(y)d(y)$$

é compacto e autoadjunto definido em $L^2([a, b])$. Consequentemente, existe um sistema básico de autovetores $\{\xi_n\}$ e autovalores $\{\lambda_n\}$ de K tais que, pelo Teorema Espectral e pela definição de produto interno, com $f \in L^2([a, b])$

$$(Kf)(x) = \int_a^b k(x, y)f(y)d(y) = \sum_j \lambda_j \left(\int_a^b f(y)\overline{\xi_j(y)}d(y) \right) \xi_j(x) \text{ quase sempre.} \quad (2.1)$$

A convergência da série significa convergência com respeito a norma em $L^2([a, b])$, isto é,

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b \left| (Kf)(x) - \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle f, \xi_j \rangle \xi_j(x) \right|^2 d(x) = 0.$$

Para muitos propósitos este tipo de convergência é muito fraca e é desejável a convergência pontual ou uniforme, mas o problema é dar condições razoáveis e suficientes para que a série convirja uniformemente, para cada $f \in L^2([a,b])$. O teorema a seguir dará tais condições.

Teorema 2.2.1 *Seja k um núcleo Lebesgue mensurável em $[a,b] \times [a,b]$ de modo que $\overline{k(x,y)} = k(y,x)$, quase sempre, e*

$$\sup_x \int_a^b |k(x,y)|^2 d(y) \leq \infty.$$

Se $\{\xi_n\}$ e $\{\lambda_n\}$ formam um sistema básico de autovetores e autovalores do operador integral K com núcleo k, então, para todo $f \in L^2([a,b])$,

$$(Kf)(x) = \int_a^b k(x,y)f(y)d(y) = \sum_j \lambda_j \left(\int_a^b f(y)\overline{\xi_j(y)}d(y) \right) \xi_j(x), \text{ quase sempre}, x \in [a,b].$$

A série converge absolutamente e uniformemente em $[a,b]$.

Demonstração. Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz tem-se que

$$\sum_{j=l}^{n} |\lambda_j \langle f, \xi_j \rangle \xi_j(x)| \leq \left(\sum_{j=l}^{n} |\lambda_j \xi_j(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=l}^{n} |\langle f, \xi_j \rangle|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Como $k \in L^2([a,b])$ e $\overline{k(x,y)} = k(y,x)$ tem-se que

$$\lambda_j \xi_j(x) = (K\xi_j)(x) = \int_a^b k(x,y)\xi_j(y)d(y) = \langle k_x, \overline{\xi_j} \rangle,$$

onde $k_x(y) = k(x,y)$. Assim, segue da Desigualdade de Bessel e da hipótese que

$$\begin{aligned} \sum_j |\lambda_j \xi_j(x)|^2 &= \sum_j |\langle k_x, \overline{\xi_j} \rangle|^2 \leq \|k(x,\cdot)\|^2 = \int_a^b |k(x,y)|^2 d(y) \\ &\leq \sup_x \int_a^b |k(x,y)|^2 d(y) = C \leq \infty. \end{aligned}$$

Como $\sum_j |\langle f, \xi_j \rangle|^2 \leq \|f\|^2$, pela Desigualdade de Bessel, existe um natural N tal que se $n > l > N$, então $\sum_{j=l}^{n} |\langle f, \xi_j \rangle|^2 \leq \varepsilon^2$, para cada $\varepsilon > 0$ fixo. Segue que

$$\sum_{j=l}^{n} |\lambda_j \langle f, \xi_j \rangle \xi_j(x)| \leq C\ \varepsilon; \quad n > l > N, \quad x \in [a,b].$$

Pelo Critério de Cauchy para séries [15, p. 42], a série converge absoluta e uniformemente. Como a série também converge para $(Kf)(x)$ com respeito a norma em $L^2([a,b])$ segue que $(Kf)(x)$ é o limite da série para quase todo x. ■

O resultado seguinte relaciona autovalores a um núcleo hermitiano quase sempre, de forma que será possível associar valores singulares ao operadores integrais com este mesmo tipo de núcleo posteriormente.

Teorema 2.2.2 *Suponha que $k \in L^2([a,b] \times [a,b])$ e $\overline{k(x,y)} = k(y,x)$ quase sempre. Se $\{\lambda_j\}$ é um sistema de autovalores do operador integral K com núcleo k, então*

$$\int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2 d(y)d(x) = \sum_j \lambda_j^2.$$

Demonstração. É possível escrever a Equação (2.1) como

$$\int_a^b k(x,y)f(y)d(y) = \sum_j \int_a^b \lambda_j \xi_j(x)\overline{\xi_j(y)}f(y)d(y) = \int_a^b \sum_j \lambda_j \xi_j(x)\overline{\xi_j(y)}f(y)d(y).$$

Já que f é arbitrário em $L^2([a,b])$ é aceitável esperar, sob condições razoáveis, que $k(x,y) = \sum_j \lambda_j \xi_j(x)\overline{\xi_j(y)}$ quase sempre. O espaço de Hilbert $L^2([a,b])$ tem uma base ortonormal contendo autovetores $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$, sendo que pode ocorrer que $Ker\ K \neq 0$, sem nenhum problema. Como $\xi_{lj}(x,y) = \xi_l(x)\overline{\xi_j(y)}$ formam um conjunto ortonormal em $L^2([a,b] \times [a,b])$, [11, p. 186] o núcleo $k \in L^2([a,b] \times [a,b])$ pode ser escrito através de Identidade de Parseval como

$$k = \sum_{l,j=1}^{\infty} \langle k, \xi_{lj} \rangle \xi_{lj}.$$

Pelo Teorema de Fubini [14, p. 119]

$$\begin{aligned} \langle k, \xi_{lj} \rangle &= \int_a^b \int_a^b k(x,y)\overline{\xi_l(x)}\xi_j(y)d(y)d(x) \\ &= \int_a^b \overline{\xi_l(x)} \left(\int_a^b k(x,y)\xi_j(y)d(y) \right) d(x) \\ &= \langle K\xi_j, \xi_l \rangle = \lambda_j \langle \xi_j, \xi_l \rangle = \lambda_j \delta_{jl}, \end{aligned}$$

onde $\delta_{jl} = 1$, se $l = j$ ou $\delta_{jl} = 0$, se $l \neq j$. Novamente, pela Identidade de Parseval,

$$\int_a^b \int_a^b |k(x,y)|^2 d(y)d(x) = \|k\|^2 = \sum_{l,j=1}^{\infty} |\langle k, \xi_{l,j} \rangle|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^2.$$

E o resultado está demonstrado. ■

Muitos resultados desta seção aparecerão novamente na seção seguinte mas com uma proposta mais geral, aqui entretanto, eles aparecem com o intuito de apresentar o problema da nuclearidade num contexto mais simples. Note que isso segue também do Teorema 2.1.11.

Lema 2.2.3 *Se k é contínuo em $[a,b] \times [a,b]$ e*

$$\int_a^b \int_a^b k(x,y)f(y)\overline{f(x)}d(y)d(x) \geq 0,$$

para todo $f \in L^2([a,b])$, então

$$k(x,x) \geq 0; \quad \forall\ x \in [a,b].$$

Demonstração. Este resultado segue do Teorema 2.1.11 porém será apresentada uma demonstração direta. A função $k(x,x)$ assume valores reais. De fato, pela Definição 2.1.9 k é $L^2(X,\sigma)$PD e é autoadjunto. Logo, $k(x,x)=\overline{k(x,x)}, \forall\ x\in[a,b]$, pois k é contínuo. Suponha por absurdo que $k(x_0,x_0)\leq 0$ para algum $x_0\in[a,b]$. Segue da continuidade de k que a parte real de $k(x,y)$ denotada por $\mathfrak{Re}\ k(x,y)$ é menor que zero para todo par (x,y) em algum quadrado $[c,d]\times[c,d]$ que contenha (x_0,x_0). Então para

$$g:=\begin{cases}1, & \text{se } y\in[c,d]\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases},$$

pode-se escrever

$$0\leq\int_a^b\int_a^b k(x,y)g(y)\overline{g(x)}d(y)d(x)=\mathfrak{Re}\int_c^d\int_c^d k(x,y)d(y)d(x)\leq 0,$$

que é um absurdo. Portanto $k(x,x)\geq 0,\ \forall\ x\in[a,b]$. ■

O próximo resultado tem grande influência sobre o Teorema de Mercer, que será válido somente quando o lema abaixo também for. A grande dificuldade de demonstrar o Teorema de Mercer está em garantir a continuidade da função h definida a seguir.

Lema 2.2.4 *Se $k:[a,b]^2\to\mathbb{C}$ é um núcleo L^2-positivo definido contínuo. Então, para todo $f\in L^2([a,b])$, a função $h:[a,b]\to\mathbb{C}$ dada por*

$$h(x)=\int_a^b k(x,y)f(y)d(y),\quad x\in[a,b]$$

é contínua.

Demonstração. Pelas propriedades de integral e pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned}|h(x)-h(x_0)| &= \left|\int_a^b k(x,y)f(y)d(y)-\int_a^b k(x_0,y)f(y)d(y)\right|\\ &= \left|\int_a^b [k(x,y)-k(x_0,y)]f(y)d(y)\right|\\ &\leq \int_a^b |[k(x,y)-k(x_0,y)]f(y)|\,d(y)\\ &\leq \int_a^b |k(x,y)-k(x_0,y)||f(y)|d(y)\\ &\leq \|f\|_{L^2}\left(\int_a^b |k(x,y)-k(x_0,y)|^2d(y)\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Como k é uniformemente contínua, se $x\to x_0$, então $k(x,y)\to k(x_0,y)$ e portanto $\int_a^b|k(x,y)-k(x_0,y)|^2d(y)\to 0, \forall\ y\in[a,b]$, o que implica que $h(x)\to h(x_0)$, sendo assim contínua. ■

Observação 2.2.5 *Note pelo resultado acima que se f for um autovetor de K, então $h = \lambda f$ e portanto f deve ser contínua (quando vista como representante da classe de funções em $L^2([a,b])$.)*

Abaixo encontra-se um teorema necessário na demonstração do Teorema de Mercer. Tome $X = [a,b]$ e veja [15, p. 160] para mais informações.

Teorema 2.2.6 (Dini) *Sejam X um espaço topológico compacto e $\{f_n\}$ uma sequência de funções reais contínuas definidas em X. Se $\{f_n\}$ é monótona e pontualmente convergente para uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$, então a convergência é uniforme.*

Demonstração. Suponha sem perda de generalidade que a sequência seja decrescente. Cada função $f_n - f$ é contínua e a sequência $\{f_n - f\}$ é decrescente. Como X é compacto, o Teorema de Bolzano-Weierstrass [15, p. 25] justifica a existência de $x_n \in X$ tal que

$$M_n := f_n(x_n) - f(x_n) = \max_{x \in X}\{f_n(x) - f(x)\}.$$

Claramente, $\{M_n\}$ é uma sequência decrescente de termos não negativos. Logo, converge para algum $C \geq 0$ [15, p. 30]. Veja que $C = 0$. De fato, da compacidade de X novamente passando para uma subsequência, se necessário, pode-se assumir que $\{x_n\}$ converge para algum $x_0 \in X$. Como

$$M_l = f_l(x_l) - f(x_l) \leq f_m(x_l) - f(x_l), \quad l \geq m,$$

fazendo $l \to \infty$ e usando a continuidade das funções envolvidas, é possível deduzir que $C \leq f_m(x_0) - f(x_0)$. Fazendo agora $m \to \infty$, obtém-se $C \leq 0$. Finalmente, fixado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $M_n < \varepsilon$, quando $n \geq N$. Portanto,

$$0 \leq f_n(x) - f(x) \leq f_n(x_n) - f(x_n) = M_n < \varepsilon, \quad x \in X.$$

Segue que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{para } x \in X, \quad n \geq N,$$

ou seja, f_n converge uniformemente para f. ■

O teorema abaixo foi originalmente demonstrado em 1909 para o intervalo $[0,1]$ e ao longo do tempo foi-se estendendo para outros conjuntos, devido à sua aplicabilidade. Veja [9, p. xiii] para saber mais a respeito.

Teorema 2.2.7 (Mercer) *Seja k contínuo em $[a,b] \times [a,b]$. Suponha que para todo $f \in L^2([a,b])$*

$$\int_a^b \int_a^b k(x,y) f(y) \overline{f(x)} d(y) d(x) \geq 0.$$

Existe um sistema básico de autovetores $\{\xi_n\}$ e autovalores $\{\lambda_n\}$ do operador integral K com núcleo k e ainda, com $\lambda_n \xi_n$ contínua e

$$k(x,y) = \sum_j \lambda_j \xi_j(x) \overline{\xi_j(y)}, \quad x, y, \in [a,b],$$

converge uniforme e absolutamente.

Demonstração. Seja K o operador integral com núcleo k. Segue da hipótese que K é compacto, positivo e $\lambda_j = \lambda_j \|\xi_j\| = \langle \lambda_j \xi_j, \xi_j \rangle = \langle K\xi_j, \xi_j \rangle \geq 0$. Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz segue

$$\sum_{j=l}^{n} |\lambda_j \xi_j(x)\overline{\xi_j(y)}| \leq \left(\sum_{j=l}^{n} \lambda_j |\xi_j(x)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=l}^{n} \lambda_j |\xi_j(y)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.2}$$

Primeiramente será demonstrado que para todo x,

$$\sum_{j} \lambda_j |\xi_j(x)|^2 \leq \max_{y \in [a,b]} k(y,y). \tag{2.3}$$

Seja $k_j(x,y) = k(x,y) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \xi_j(x)\overline{\xi_j(y)}$. Como cada ξ_j é um autovetor de K segue do Lema 2.2.4 que ξ_j é contínuo o que implica que k_j é contínuo. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\langle K_n(f), f \rangle &= \int_a^b \int_a^b \left[k(x,y) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \xi_j(x)\overline{\xi_j(y)} \right] f(y) d(y) \overline{f(x)} d(x) \\
&= \int_a^b \left[K(f)(x) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle f, \xi_j \rangle \xi_j \right] \overline{f(x)} d(x) \\
&= \int_a^b \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j \langle f, \xi_j \rangle \xi_j(x) \overline{f(x)} d(x) \\
&= \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j |\langle f, \xi_j \rangle|^2 \geq 0, \quad f \in L^2(X, \sigma).
\end{aligned}$$

Segue do Lema 2.2.3 que, para cada x

$$0 \leq k_n(x,x) = k(x,x) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |\xi_j(x)|^2. \tag{2.4}$$

Em particular, $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j |\xi_j(x)|^2 \leq k(x,x)$. Como n é arbitrário, segue o resultado. Para cada x fixado e $\varepsilon > 0$ a Equação (2.2) implica na existência de um N tal que para cada $n > l > N$

$$\sum_{j=l}^{n} \lambda_j |\xi_j(x)\xi_j(y)| \leq \varepsilon\, C; \quad y \in [a,b] \text{ onde } C^2 = \max_{t \in [a,b]} k(t,t).$$

Assim a série $\sum_j \lambda_j \xi_j(x)\overline{\xi(y)}$ é uniforme e absolutamente convergente quando x ou y são fixados. Suponha que a série convirja para um $\tilde{k}(x,y)$. O próximo passo é demonstrar que a convergência uniforme vale para todo x e y. Para $f \in L^2([a,b])$ e x fixado, a convergência uniforme de séries em y e a continuidade de cada $\overline{\xi_j}$ implica que $\tilde{k}(x,y)$ é contínuo como função de y e

$$\int_a^b [k(x,y) - \tilde{k}(x,y)] f(y) d(y) = (Kf)(x) - \sum_j \lambda_j \langle f, \xi_j \rangle \xi_j(x) = 0 \text{ quase sempre}. \tag{2.5}$$

Se $f \in Ker(K) = Im\ K^{\perp}$, então como $\xi_j = K\xi_j/\lambda_j \in Im\ K$, tem-se $Kf = 0$ e $\langle f, \xi_j \rangle = 0$. Portanto, o lado direito da Equação (2.5) é zero. Deste modo, para cada x, $k(x,\cdot) - \tilde{k}(x,\cdot)$ é ortogonal a $L^2([a,b])$. Assim, $\tilde{k}(x,y) = k(x,y)$ para cada x e quase todo y. Mas então $\tilde{k}(x,y) = k(x,y)$ para todo x e y já que $k(x,\cdot)$ e $\tilde{k}(x,\cdot)$ são contínuos.

Resta mostrar que

$$k(x,y) = \tilde{k}(x,y) = \sum_j \lambda_j \xi_j(x)\overline{\xi_j(y)}, \quad x, y \in [a,b].$$

Em particular, que

$$k(x,x) = \sum_j \lambda_j |\xi_j(x)|^2, \quad x \in [a,b].$$

As somas parciais da Inequação 2.4 formam uma sequência crescente de funções contínuas que convergem pontualmente para a função contínua $k(x,x)$. O Teorema de Dini garante que esta série converge uniformemente para $k(x,x)$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe um N tal que, para $n > l > N$,

$$\sum_{j=l}^{n} \lambda_j |\xi_j(x)|^2 \leq \varepsilon^2, \quad \forall\ x \in [a,b].$$

Esta observação junto com as equações 2.2 e 2.3 implicam que para todo $n > l > N$ e todo $(x,y) \in [a,b] \times [a,b]$,

$$\sum_{j=l}^{n} \lambda_j |\xi_j(x)\overline{\xi_j(y)}| \leq \varepsilon\ C.$$

Portanto $\sum_j \lambda_j \xi_j(x)\overline{\xi_j(y)}$ converge absoluta e uniformemente em $[a,b] \times [a,b]$. ∎

Se só existirem como hipóteses $k \in L^2([a,b] \times [a,b])$ e $\overline{k(x,y)} = k(y,x)$ quase sempre, então a série pode divergir enquanto que $\sum_j \lambda_j^2 \leq \infty$, de acordo com [12, p. 278, 1.2]. Tome $[a,b] = [-\pi, \pi]$ e $k(x,y) = \sum_j 1/j \cos(jx)\cos(jy)$. Tem-se que o núcleo k está em $L^2([a,b] \times [a,b])$ e é PD. A série diverge em zero mas $\sum_j \lambda_j^2 < \infty$.

Podemos finalmente apresentar um caso de operador nuclear e calcular seu traço.

Teorema 2.2.8 *Seja k contínuo em $[a,b] \times [a,b]$. Suponha que para todo $f \in L^2([a,b])$*

$$\int_a^b \int_a^b k(x,y) f(x) \overline{f(x)} d(y) d(x) \geq 0.$$

Se K é operador integral com núcleo k e $\{\lambda_j\}$ é um sistema de autovalores de K, então $K \in B_1(L^2([a,b]))$ e

$$tr(K) = \sum_j \lambda_j = \int_a^b k(x,x) d(x) = \|K\|_1.$$

Demonstração. Seja $\{\xi_j\}$ um sistema de autovetores de K correspondente a $\{\lambda_j\}$. Pelo Teorema de Mercer a série $k(x,x) = \sum_j \lambda_j |\xi_j(x)|^2$ converge uniformemente em $[a,b]$. Portanto, pelo Teorema da Convergência Monótona [14, p. 31]

$$\int_a^b k(x,x)d(x) = \sum_j \lambda_j \|\xi_j\|_{L^2}^2 = \sum_j \lambda_j.$$

E o resultado está demonstrado. ∎

A importância em estudar o Teorema de Mercer pode ser justificada pela caracterização de núcleos positivos definidos que ele fornece. Na seção a seguir, o estudo sobre o traço baseado em tal teorema será realizado num contexto mais geral.

2.3 Teoria de Mercer para conjuntos lebesgue mensuráveis

Nesta seção será considerado um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue mensurável cuja interseção com toda bola de $\mathbb{R}^n$ tem medida positiva, com medida de Lebesgue σ. No seguinte trecho serão apresentados resultados conectados ao Teorema de Mercer da maneira mais geral possível. Note que a hipótese sobre X não será utilizada em todos os resultados e que muitos deles se aplicam em contextos mais gerais de X, como em [7, 9, 16]. Para consultar a referência desta seção veja [7].

Lema 2.3.1 *Se $k \in L^2(X \times X, \sigma \times \sigma)$ é hermitiano e $f \in L^2(X, \sigma)$, então*

$$\int_X \int_X k(x,y) f(x)\overline{f(y)} d\sigma(x) d\sigma(y) = \int_X \int_X \mathfrak{Re}\ k(x,y) f(x)\overline{f(y)} d\sigma(x) d\sigma(y).$$

Demonstração. Seja $g : X \times X \to \mathbb{K}$ tal que $g(x,y) := f(x)\overline{f(y)}$, $f \in L^2(X,\sigma)$. Não é difícil ver que $g \in L^2(X \times X, \sigma \times \sigma)$. De fato, pelo Teorema de Fubini - Tonelli [13, p. 67]

$$\begin{aligned}
\left(\int_{X\times X} |g(x,y)|^2 d\sigma(x) d\sigma(y)\right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_X \int_X |f(x)\overline{f(y)}|^2 d\sigma(x) d\sigma(y)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_X |\overline{f(x)}|^2 \left[\int_X |f(y)|^2\, d\sigma(y)\right] d\sigma(x)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \int_X |f(x)|^2 d\sigma(x) \\
&= \|f\|_{L^2}^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Hölder [14, p. 56] segue que

$$(x,y) \in X \times X \to k(x,y) f(x)\overline{f(y)} \in L^1(X \times X, \sigma \times \sigma)$$

enquanto que

$$\int_X \int_X k(x,y) f(x)\overline{f(y)} d\sigma(x) d\sigma(y) = \int_X \overline{f(x)} \left(\int_X k(y,x) f(y) d\sigma(y)\right) d\sigma(x).$$

Observe que $x \in X \to k(x,y)f(x)$ pertence a $L^1(X)$, assim como o operador dado por $x \in X \to \int_X k(x,y)f(x)d\sigma(x)$, (veja o exercício 51 em [13, p. 69]). O Teorema de Fibini-Tonelli [13, p. 67] é aplicável, assim

$$\overline{\int_X \int_X k(x,y)f(x)\overline{f(y)}d\sigma(x)d\sigma(y)} = \int_X \overline{f(x)} \left(\int_X k(y,x)f(y)d\sigma(y) \right) d\sigma(x).$$

Então não é difícil ver que $\int_X \int_X k(x,y)f(x)\overline{f(y)}d\sigma(x)d\sigma(y)$ é um número real e que

$$\int_X \int_X \mathfrak{Im}\ k(x,y)f(x)\overline{f(y)}d\sigma(x)d\sigma(y) = 0.$$

Sendo assim,

$$\int_X \int_X k(x,y)f(x)\overline{f(y)}d\sigma(x)d\sigma(y) = \int_X \int_X \mathfrak{Re}\ k(x,y)f(x)\overline{f(y)}d\sigma(x)d\sigma(y),$$

e o resultado está demonstrado. ■

Observação 2.3.2 *A partir de agora o conjunto Δ_X denota o conjunto diagonal $X \times X$, ou seja, $\Delta_X = \{(x,x) : x \in X\}$.*

O lema abaixo contém duas das propriedades básicas de um núcleo $L^2(X,\sigma)$-positivo definido. Note que na seção anterior bastava que os núcleos fossem contínuos e hermitianos quase sempre para que a discussão sobre o Teorema de Mercer fosse possível de ser realizada. Abaixo será apresentado um resultado que associa núcleos L^2PD a núcleos hermitianos quase sempre, remetendo assim, esta seção à anterior. É possível ainda notar a semelhança deste lema com o Teorema 2.1.7.

Lema 2.3.3 *Seja $k \in L^2(X,\sigma)$-positivo definido. As seguintes afirmações valem*

1. *k é hermitiano quase sempre;*
2. *Se k é contínuo em Δ_X, então k é não negativo neste conjunto.*

Demonstração.

1. Como $k \in L^2(X,\sigma)$PD, então $\langle K(f), f\rangle \geq 0$, o que implica que K é autoadjunto, pela Proposição 1.2.2. Então $k(x,y) = \overline{k(y,x)}$ quase sempre, por argumento semelhante ao Exemplo 1.2.15.

2. Suponha que k seja contínuo em Δ_X. Do item 1. sabe-se que $k(x,x)$ é real quase sempre com $x \in X$, enquanto a continuidade em Δ_X implica que $k(x,x)$ é real para todo $x \in X$. Supondo por absurdo que exista um $x_0 \in X$ tal que $k(x_0,x_0) < 0$, pode-se tomar uma vizinhança V_0 de x, de modo que $\mathfrak{Re}\ k(x,y) < 0$ quando $(x,y) \in V_0 \times V_0 \cap X \times X$. Mais ainda, pode-se selecionar V_0 de modo que $0 < \sigma(V_0 \cap X) < \infty$. Aplicando o Lema 2.3.1 para a função característica $\chi_{V_0 \cap X}$ de $V_0 \cap X$ segue que

$$\begin{aligned} \langle K(V_0 \cap X), \chi_{V_0\cap X}\rangle &= \int_{V_0\cap X}\int_{V_0\cap X} k(x,y)\chi_{V_0\cap X}(x)\overline{\chi_{V_0\cap X}(y)}d\sigma(x)d\sigma(y) \\ &= \int_{V_0\cap X}\int_{V_0\cap X} \mathfrak{Re}\ k(x,y)d\sigma(x)d\sigma(y) < 0, \end{aligned}$$

o que contradiz a hipótese de k ser L^2-positivo definido.

Portanto k assume valores não negativos em Δ_X.■

A partir de agora será apresentado um resumo das propriedades espectrais de operadores compacto e autoadjuntos em $L^2(X, \sigma)$.

Teorema 2.3.4 *Seja $\{\xi_j\}$ uma sequência ortonormal em $L^2(X, \sigma)$. Suponha que exista uma sequência $\{\lambda_j\}$ de números não negativos tais que $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle f, \xi_j \rangle \xi_j$ é somável em $L^2(X, \sigma)$ para cada $f \in L^2(X, \sigma)$. A fórmula*

$$T(f) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle f, \xi_j \rangle \xi_j, \quad f \in L^2(X, \sigma)$$

define um elemento T de $B(L^2(X, \sigma))$ para o qual as afirmações valem

1. *ξ_j é um autovetor de T com autovalor λ_j;*
2. *$\langle T(f), f \rangle \geq 0$, $f \in L^2(X, \sigma)$, ou seja, T é positivo;*
3. *Se $T = K$ para algum núcleo $k \in L^2(X \times X, \sigma \times \sigma)$, então k é $L^2(X, \sigma)$-positivo definido.*

Demonstração.

1. Basta notar que $T(\xi_n) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle \xi_n, \xi_j \rangle \xi_j = \lambda_n \xi_n$.
2. Para a segunda é suficiente notar que

$$\langle T(f), f \rangle = \lim_{n \to \infty} \left\langle \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle f, \xi_j \rangle \xi_j, f \right\rangle = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |\langle f, \xi_j \rangle|^2 \geq 0, \quad f \in L^2(X, \sigma).$$

3. Pelo item anterior, $\langle T(f), f \rangle \geq 0$ e então a representação do produto interno dadas pelas integrais duplas também é maior que zero e assim $k \in L^2(X, \sigma)$PD.

Pelo Princípio da Limitação Uniforme [13, 163], $T \in B(L^2(X, \sigma))$. ■

O operador integral K gerado pelo núcleo k tem a seguinte propriedade quando a medida de Lebesgue de X é finita: se k é contínuo e limitado, a imagem de K é um conjunto de funções contínuas, por um argumento similar ao usado na Observação 2.3.8. Em particular, as autofunções de K correspondentes a autovalores não nulos são contínuas, como visto em 2.3.11. Esta propriedade desejável não é sempre garantida quando a medida de X é infinita.

Teorema 2.3.5 *Seja $\{\xi_j\}$ uma sequência de funções contínuas de $L^2(X, \sigma)$. Suponha que exista uma sequência não negativa $\{\lambda_j\}$ tal que $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle f, \xi_j \rangle \xi_j$ é somável em $L^2(X, \sigma)$ para todo $f \in L^2(X, \sigma)$ e considere o operador*

$$T(f) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle f, \xi_j \rangle \xi_j, \quad f \in L^2(X, \sigma).$$

Se $T = K$ para algum núcleo em $L^2(X \times X, \sigma \times \sigma)$, então

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |\xi_j(x)|^2 \leq k(x,x), \quad x \in X.$$

Demonstração. Suponha que $T = K$ para algum núcleo em $L^2(X \times X, \sigma \times \sigma)$. Repetindo o processo para deduzir o item 2. do teorema anterior, conclui-se que para todo n fixo

$$\begin{aligned} \int_X \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j \langle f, \xi_j \rangle \xi_j(x) \overline{f(x)} d\sigma(x) &= \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j \langle f, \xi_j \rangle \int_X \xi_j(x) \overline{f(x)} d\sigma(x) \\ &= \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j \langle f, \xi_j \rangle \langle \xi_j, f \rangle \\ &= \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j |\langle f, \xi_j \rangle|^2, \ f \in L^2(X, \sigma). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Se k é contínuo em Δ_X e cada ξ também é contínuo, o núcleo k_n dado por

$$k_n(x,y) := k(x,y) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \xi_j(x) \overline{\xi_j(y)}, \quad x, y \in X, \tag{2.7}$$

é contínuo em Δ_X e ainda pertence a $L^2(X \times X, \sigma \times \sigma)$ pois $k \in L^2(X \times X, \sigma \times \sigma)$ e cada $\xi \in L^2(X, \sigma)$. Usando a Equação (2.7), as definições de operador integral e de produto interno tem-se que o operador integral K_n ainda satisfaz

$$\begin{aligned} \langle K_n(f), f \rangle &= \int_X \int_X \left(k(x,y) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \xi_j(x) \overline{\xi_j(y)} \right) f(y) d\sigma(y) \overline{f(x)} d\sigma(x) \\ &= \int_X \left(K(f)(x) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \langle f, \xi_j \rangle \xi_j \right) \overline{f(x)} d\sigma(x) \\ &= \int_X \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j \langle f, \xi_j \rangle \xi_j(x) \overline{f(x)} d\sigma(x) \\ &= \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j |\langle f, \xi_j \rangle|^2 \geq 0, \quad f \in L^2(X, \sigma), \end{aligned}$$

ou seja, k_n é $L^2(X, \sigma)$PD. Como k_n é contínuo em Δ_X então $k_n(x,x) \geq 0, \ x \in X$. Portanto,

$$0 \leq k_n(x,x) := k(x,x) - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \xi_j(x) \overline{\xi_j(x)},$$

o que implica que

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j |\xi_j(x)|^2 \leq k(x,x), \forall x \in X.$$

Como $\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\lambda_j|\xi_j(x)|^2 = \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j|\xi_j(x)|^2$ e o limite preserva desigualdades, segue o resultado. ■

Tendo em mente o Teorema de Mercer (para o contexto atual), o próximo resultado será apresentado com o intuito de contribuir na demonstração de tal teorema.

Teorema 2.3.6 *Sob as mesmas hipóteses do teorema anterior, seja $T = K$ para algum $k \in L^2(X \times X, \sigma \times \sigma)$ que é contínuo em Δ_X. Então $\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\xi_j(x)\overline{\xi_j(y)}$ é absoluta e uniformemente convergente em compactos de X com respeito a uma variável, quando a outra é fixada. A imagem de T contém somente funções contínuas.*

Demonstração. Seja $x \in X$ fixado e Y um subconjunto compacto de X. Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz [14, p. 57] pode-se dizer que

$$\left|\sum_{j=l}^{n}\lambda_j\xi_j(x)\overline{\xi_j(y)}\right|^2 \leq \sum_{j=l}^{n}\lambda_j|\xi_j(x)|^2\sum_{j=l}^{n}\lambda_j|\xi_j(y)|^2.$$

Com mais razão ainda

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=l}^{n}\lambda_j\xi_j(x)\overline{\xi_j(y)}\right|^2 &\leq \sum_{j=l}^{n}\lambda_j|\xi_j(x)|^2\sum_{j=1}^{n}\lambda_j|\xi_j(y)|^2\\
&\leq k(y,y)\sum_{j=l}^{n}\lambda_j|\xi_j(x)|^2\\
&\leq \sup_{\zeta\in Y}k(\zeta,\zeta)\sum_{j=l}^{n}\lambda_j|\xi_j(x)|^2, \quad y \in Y, \quad n \geq l \geq 1.
\end{aligned}$$

Como $\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j|\xi_j(x)|^2 \leq k(x,x)$ é convergente pelo teorema anterior, o Critério da Convergência de Cauchy [15, p. 42] garante que a série $\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\xi_j(x)\overline{\xi_j(y)}$ converge uniforme e absolutamente em Y. Analogamente se y é fixado então a mesma série converge absoluta e uniformemente em Y. Para mostrar que a imagem de T contém somente funções contínuas, fixe $f \in L^2(X,\sigma)$ e $x \in X$. Considere uma sequência $\{x_j\} \in X$ convergente para x e tome o conjunto conveniente $L = \{x\} \cup \{x_j,\ n = 1, 2, \ldots\}$. Da Desigualdade de Cauchy-Schwarz segue que

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=l}^{n}\lambda_j\langle f,\xi_j\rangle\xi_j(y)\right|^2 &\leq \sum_{j=l}^{n}\lambda_j|\langle f,\xi_j\rangle|^2\sum_{j=l}^{n}\lambda_j|\xi_j(y)|^2\\
&\leq \|T\|\sup_{\zeta\in L}k(\zeta,\zeta)\sum_{j=l}^{n}|\langle f,\xi_j\rangle|^2, \quad y \in Y, \quad n \geq l \geq 1.
\end{aligned}$$

Pela Desigualdade de Bessel segue que $\sum_{j=1}^{\infty}|\langle f,\xi_j\rangle|^2 \leq \|f\|_{L^2}^2$. Logo, a série converge uniformemente em L pelo Critério da Convergência de Cauchy. Como a estimativa acima não depende de ζ então a série converge uniformemente em L. Isto garante a continuidade das funções em L. A continuidade de $T(f)$ segue. ■

Teorema 2.3.7 *Sob as hipóteses dos teoremas anteriores, seja $T = K$ para algum $k \in L^2(X \times X, \sigma \times \sigma)$ contínuo. Então a série $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \xi_j(x)\overline{\xi_j(y)}$ converge absoluta e uniformemente em conjuntos compactos de $X \times X$.*

Demonstração. Olhando os teoremas anteriores não é difícil ver que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j \xi_j(x)|^2 \leq \|T\| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |\xi_j(x)|^2 \leq \|T\| k(x,x), \quad x \in X.$$

e que $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \xi_j(x)\overline{\xi_j(y)}$ é L^2-convergente para um $k_x \in L^2(X, \sigma)$, para cada $x \in X$. Da Identidade de Parseval $\lambda_j \xi_j(x) = \langle k_x, \xi_j \rangle$ e não é difícil ver que que

$$\int_X k_x(y) f(y) d\sigma(y) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle f, \xi_j \rangle \xi_j(x), \quad x \in X.$$

Observe que a hipótese garantia $T(f)(x) = K(f)(x)$ quase sempre, pois se tratava da igualdade no sentido de $L^2(X, \sigma)$. Como o segundo lado da igualdade é $K(f)$ com o núcleo k, tem-se

$$\int_X [k(x,y) - k_x(y)] f(y) d\sigma(y) = 0, \quad f \in L^2(X, \sigma), \quad x \in X \text{ quase sempre}, \tag{2.8}$$

isto é,

$$\langle k_x - k(x, \cdot), \overline{f} \rangle = 0, \quad f \in L^2(X, \sigma),$$

o que implica que $0 = k_x - k(x, \cdot)$ e $k_x = k(x, \cdot)$ para quase todo $x \in X$. Pela continuidade e pelas hipóteses sobre X, a última igualdade segue para todo $x \in X$. Este processo é análogo com respeito as variáveis x e y. Conclui-se que

$$k(x,x) = k_x = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |\xi_j(x)|^2, \quad x \in X.$$

Do Teorema de Dini a série acima converge uniformemente em conjuntos compactos de X. Como

$$\left| \sum_{j=l}^{n} \lambda_j \xi_j(x) \overline{\xi_j(y)} \right|^2 \leq \sum_{j=l}^{n} \lambda_j |\xi_j(x)|^2 \sum_{j=l}^{n} \lambda_j |\xi_j(y)|^2,$$

o Critério da Convergência de Cauchy garante que $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \xi_j(x)\overline{\xi_j(y)}$ converge uniformemente em conjuntos compactos de $X \times X$. ∎

Observações 2.3.8

1. *Cabe aqui notar que se a interseção de X com qualquer bola aberta de $\mathbb{R}^n$ tivesse medida nula, a integral 2.8 poderia ser zero ao mesmo passo que $k_x \neq k(x, \cdot)$.*

2. *Se X é compacto, a continuidade de k garante que $K(f)$ é contínuo. De fato, seja $x_j \to a \in X$. Como k é contínuo em $X \times X$ segue que é uniformemente contínuo em $X \times X$. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|k(x,y) - k(z,w)| < \varepsilon$, quando $|(x,y) - (z,w)| < \delta$ e $(z,w) \in X \times X$. Pela desigualdade de Hölder tem-se que, quando $|x_j - a| < \delta$,*

$$\begin{aligned} |K(f)(x_j) - K(f)(a)| &= \left| \int_X [k(x_j,y) - k(a,y)] f(y) d\sigma(y) \right| \\ &\leq \|f\|_{L^2} \left(\int_X |k(x_j,y) - k(a,y)|^2 d\sigma(y) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|f\|_{L^2} \left(\int_X \varepsilon^2 d\sigma(y) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f\| \sigma(X) \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, $K(f)(x_j) \to K(f)(a)$ e $K(f)$ é contínua. Como funções contínuas são Lebesgue integráveis, k e $K(f)$ também o são, assim como ξ_j e $k(x,x)$. Por conseguinte, valem as condições dos três últimos teoremas.

Um contexto em que todos os resultados listados acima valem mesmo quando X é um conjunto ilimitado ou com medida infinita, será descrito abaixo.

Definição 2.3.9 *Um núcleo $k : X \times X \to \mathbb{C}$ é suave quando as três condições a seguir valem:*

1. *k é contínuo;*
2. *para cada $x \in X$, a função $y \in X \to k(x,y)$ pertence a $L^2(X, \sigma)$;*
3. *A função $x \in X \to k(x, \cdot)$ pertence a $C(X, L^2(X, \sigma))$.*

Teorema 2.3.10 (Mercer 2) *Se k é $L^2(X,\sigma)PD$ e suave, então existe uma sequência $\{\xi_j\}$ ortonormal em $L^2(X,\sigma)$ e uma sequência não crescente $\{\lambda_j\}$ de números reais que satisfazem as condições:*

1. *ξ_j é contínuo quando $\lambda_j > 0$;*
2. *$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \xi_j(x) \overline{\xi_j(y)}$ é uniformemente convergente para $k(x,y)$ em todo subconjunto compacto de $X \times X$;*
3. *$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle f, \xi_j \rangle \xi_j$ é L^2-convergente para $K(f)$. A convergência é uniforme e absoluta em conjuntos compactos de $X \times X$. Em particular, $K(f) \in C(X)$.*

Demonstração. Se k em $L^2(X,\sigma)$PD é suave, o operador integral K é compacto e autoadjunto. De fato, como k é hermitiano quase sempre e contínuo por hipótese k é hermitiano sempre, logo K é autoadjunto. Como K é do tipo Hilbert-Schmidt, é compacto. Assim o Teorema Espectral pode ser aplicado. Em particular, $L^2(X,\sigma)$ contém um conjunto ortonormal $\{\xi_j\}$ de autofunções de K, com $\{\lambda_j\}$ uma sequência não-crescente não negativa de autovalores correspondentes. Deste modo, se $f \in L^2(X,\sigma)$ então $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \langle f, \xi_j \rangle \xi_j$ é L^2-convergente para $K(f)$. Além disso, como

$$K(f)(x) = \langle f, \overline{k(x,\cdot)} \rangle, \quad x \in X, \quad f \in L^2(X,\sigma),$$

tem-se que

$$K(f)(x) = \int_X k(x,y)f(y)d\sigma(y) = \int_X f(y)k_x(y)d\sigma(y) = H_f \circ \overline{k_x}, \quad \text{no qual } H_f(\xi) = \langle f, \xi \rangle.$$

Então $K(f)$ é uma composição de funções contínuas, logo é contínua. Pelo que acaba de ser visto, ξ é contínua quando $\lambda_j > 0$. Aplicando o teorema anterior tem-se que $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \xi_j(x) \overline{\xi_j(y)}$ é uniformemente convergente para $k(x,y)$ em conjuntos compactos de $X \times X$. ■

Um resultado muito útil neste trabalho usará o teorema seguinte.

Teorema 2.3.11 *Seja k contínuo e $L^2(X,\sigma)PD$. Se $x \in X \to k(x,x)$ é integrável, então k é suave.*

Demonstração. Pela continuidade do núcleo fixe $x_0 \in X$. Se $y \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|(x_0,y) - (\zeta,\omega)| < \delta$ implica que

$$|k(x_0,y) - k(\zeta,\omega)| < \varepsilon, \quad \zeta,\omega \in X.$$

Desse modo, $k(\zeta,\omega)$ é limitado quando $\zeta,\omega \in (B(x_0,r) \cup B(y,r)) \cap X := X_y$. Não é difícil ver que a restrição de k para $X_y \times X_y$ satisfaz as hipóteses do teorema anterior. Usando a representação da série provida pelo item 1. do teorema anterior e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, pode-se deduzir que

$$\begin{aligned}
|k(x_0,y)|^2 &= \left| \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (K_{|X_y \times X_y}) \xi_j(x_0) \overline{\xi_j(y)} \right|^2 \\
&\leq \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (K_{|X_y \times X_y}) |\xi_j(x_0)|^2 \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (K_{|X_y \times X_y}) |\xi_j(y)|^2 \\
&= k(x_0,x_0)k(y,y).
\end{aligned}$$

Entretanto, se $y \in X \to k(y,y)$ é integrável, basta integrar a desigualdade acima para concluir que $y \in X \to k(x_0,y) \in L^2(X,\sigma)$. Logo o item 2. da definição segue. Para mostrar a continuidade de $x \in X \to k(x,\cdot) \in L^2(X,\sigma)$ em x_0, seja $\{x_j\}$ em X convergente para x_0. Como k é contínuo, a sequência $\{k(x_j,y)\}$ converge para $k(x_0,y)$ para cada $y \in X$ fixado. Usando a última desigualdade segue que,

$$\begin{aligned}
|k(x_j,y) - k(x_0,y)|^2 &\leq |k(x_j,y)|^2 + 2|k(x_j,y)||k(x_0,y)| + |k(x_0,y)|^2 \\
&\leq k(y,y)\left(k(x_j,x_j) + k(x_0,x_0) + 2\sqrt{k(x_j,x_j)k(x_0,x_0)} \right) \\
&\leq 4 \sup_{m \in \mathbb{Z}_+} \{k(x_m,x_m)\} k(y,y), \quad y \in X.
\end{aligned}$$

Do Teorema da Convergência Dominada [14, p. 44] segue que

$$\lim_{j\to\infty}\int_X |k(x_j, y) - k(x_0, y)|^2 d\sigma(x) = 0,$$

ou seja, $x_j \to x_0$ implica que $k_{x_j} \to k_{x_0}$. Portanto k é suave. ■

Muito do que foi apresentado aqui possui versões para espaços mais gerais, tais como espaços métricos e topológicos de Hausdorff localmente compactos, como pode ser observado em [8] e [16]. Pode-se notar ainda, que os argumentos de [16] são muito parecidos aos apresentados aqui, que por sua vez, diferem em [17] apenas em uma passagem, porque os conjuntos no caso, não possuem métrica. Já em [8] a teoria de espaços de reprodução apresenta um contexto bem mais amplo.

Aqui, o foco foi atribuído a $X = [a, b]$ e $X \subset \mathbb{R}^n$ pelo interesse na aplicação dada no capítulo seguinte. O caso geral não contribui para o contexto do Capítulo 4.

CAPÍTULO 3

NUCLEARIDADE DE OPERADORES INTEGRAIS

Este capítulo será inteiramente dedicado ao estudo dos operadores nucleares em um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue mensurável como descrito na seção 2.3. Estudos sobre nuclearidade foram desenvolvidos em artigos como [5, 6, 16, 18] acerca de diferentes contextos, com diferentes finalidades. O último resultado do capítulo anterior estabelece uma conexão entre nuclearidade e a fórmula para calcular o traço da seguinte maneira.

Teorema 3.0.1 *Seja k contínuo e $L^2(X,\sigma)PD$. Se $x \in X \to k(x,x)$ é integrável então $K \in \mathcal{B}_1(L^2(X,\sigma))$ e*

$$tr(K) = \int_X k(x,x)d\sigma(x).$$

Demonstração. O Teorema 2.3.11 implica que k é suave e pelo Teorema de Mercer tem-se que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j |\xi_j(x)|^2 = k(x,x)$$

, o que implica que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j \int_X |\xi_j(x)|^2 d\sigma(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j = \int_X k(x,x)d\sigma(x).$$

Como $\lambda_j = s_j(K),\ j = 1, 2, \ldots$, segue que

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j(K) = \int_X k(x,x)d\sigma(x) < \infty.$$

Portanto K é nuclear. As igualdades

$$tr(K) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle K(\xi_j), \xi_j \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(K) = \int_X k(x,x)d\sigma(x),$$

justificam a última afirmação do teorema. ■

3.1 Núcleos aproximantes

No caso em que o Teorema de Mercer não pode ser aplicado sobre o núcleo k, a abordagem da nuclearidade feita através do teorema anterior não procede, sendo necessário fazê-la de outro modo.

Nesta seção será introduzida uma família de operadores aproximados através de um parâmetro $t \in (0, \infty)$. Os operadores serão construímos via integração da função característica normalizada de conjuntos que diminuem de tamanho quando $t \to 0^+$, o que vai prover um método construtivo e consistente para aproximar um operador $T \in B_1(L^2(X, \sigma))$ na norma traço. Serão demonstradas as principais propriedades desses operadores e também propriedades relacionadas a continuidade deles e positividade.

Definição 3.1.1 *Diz-se que o conjunto $E_t \subset \mathbb{R}^n, t > 0$ se comprime para zero quando existem $x \in \mathbb{R}^n$ e $\delta_t, \varepsilon_t > 0$ tais que*

$$B(x, \delta_t) \subset E_t \subset B(x, \varepsilon_t), \quad 0 < \delta_t < \varepsilon_t \to 0, \quad t \to 0.$$

Os relatos desta seção estão relacionados à família de núcleos

$$\{D_t : t \in (0, +\infty)\}, \text{ onde } D_t(x, y) := \sigma(B(x, t))^{-1} \chi_{B(x,t)}(y), \quad x, y \in X.$$

O primeiro resultado é uma versão do Teorema da Diferenciação de Lebesgue (veja [13, p. 98]) relacionada ao operador integral $\mathcal{D}_t$ com núcleo D_t.

Definição 3.1.2 *Uma função mensurável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ é localmente integrável com respeito a medida de Lebesgue se $\int_X |f(x)| d\sigma(x) < \infty$, para todo conjunto mensurável limitado $X \subset \mathbb{R}^n$.*

Teorema 3.1.3 (Diferenciação de Lebesgue) *Suponha que f seja localmente integrá--vel. Para quase todo x, tem-se*

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{\sigma(E_t)} \int_{E_t} |f(y) - f(x)| d\sigma(y) = 0$$

e,

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{\sigma(E_t)} \int_{E_t} f(y) d\sigma(y) = f(x),$$

para cada família $\{E_t\}$ que se comprime para zero.

Para ver detalhes do teorema acima veja [13, p. 98].

Teorema 3.1.4 *Se $f \in L^2(X, \sigma)$, então $\lim_{t \to 0^+} \mathcal{D}_t(f)(x) = f(x), \; x \in X,$ quase sempre.*

Demonstração. Não é difícil ver que

$$f(x) = \frac{f(x)}{\sigma(B(x,t))} \sigma(B(x,t)) = \frac{f(x)}{\sigma(B(x,t))} \int_X \chi_{B(x,t)}(y) d\sigma(y) = \int_X \frac{\chi_{B(x,t)}(y)}{\sigma(B(x,t))} f(x) d\sigma(y).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_t(f)(x) - f(x) &= \int_X \frac{\chi_{B(x,t)}(y)}{\sigma(B(x,t))} f(y)\boldsymbol{d\sigma}(y) - \int_X \frac{\chi_{B(x,t)}(y)}{\sigma(B(x,t))} f(x)\boldsymbol{d\sigma}(y)\\ &= \frac{1}{\sigma(B(x,t))}\int_{B(x,t)} [f(y)-f(x)]\boldsymbol{d\sigma}(y), \quad x \in X.\end{aligned}$$

Segue o resultado pelo Teorema da Diferenciação de Lebesgue. ■

Em geral, para usar os operadores $\mathcal{D}_t$ convenientemente é necessário garantir propriedades básicas como limitação. Para isto, recorre-se à função maximal de Hardy-Littlewood dada por

$$H(f)(x) = \sup_{t>0}\left\{\sigma(B(x,t))^{-1}\int_{B(x,t)} |f(y)|\boldsymbol{d\sigma}(y)\right\}.$$

A definição faz sentido para qualquer função f integrável em $B(x,t)$. Usando o Teorema da Diferenciação de Lebesgue segue que

$$|f(x)| \leq H(f)(x), \quad f \in L^2(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\sigma}), \quad x \in X \text{ quase sempre.}$$

Ainda,

$$|\mathcal{D}_t(f)(x)| \leq H(f)(x), \quad f \in L^2(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\sigma}), \quad x \in X.$$

De fato,

$$\begin{aligned}|\mathcal{D}_t(f)(x)| &= \left|\frac{1}{\sigma(B(x,t))}\int_{B(x,t)} f(y)\boldsymbol{d\sigma}(y)\right|\\ &\leq \frac{1}{\sigma(B(x,t))}\int_{B(x,t)} |f(y)|\boldsymbol{d\sigma}(y)\\ &\leq \sup_{s>0}\frac{1}{\sigma(B(x,s))}\int_{B(x,s)} |f(y)|\boldsymbol{d\sigma}(y).\end{aligned}$$

Lema 3.1.5 *Se $f \in L^2(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\sigma})$, então $H(f) \in L^2(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\sigma})$ e $\|H(f)\|_2 \leq C\|f\|_2$, onde C é uma constante dependendo somente da medida de Lebesgue.*

Veja [13, p. 96] para a demonstração.

Teorema 3.1.6 *Os operadores $\mathcal{D}_t : L^2(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\sigma}) \to L^2(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\sigma})$ são elementos autoadjuntos de $B(L^2(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\sigma}))$.*

Demonstração. Fixe $t > 0$. A limitação de $\mathcal{D}_t$ segue do fato de $\|\mathcal{D}_t(f)\|_2 \leq C\|f\|_2$ com $f \in L^2(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\sigma})$, para alguma constante C dependendo apenas da medida de Lebesgue. Para finalizar observe que

$$\chi_{B(x,t)}(y) = \chi_{B(x,t)}(x), \quad \forall\, x, y \in X.$$

Se $f \in L^2(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\sigma})$ então $(x,y) \in X \times X \to \overline{f(x)}D_t(x,y)f(y)$ é integrável. O Teorema de Fubini-Tonelli [13, p. 67] implica que

$$\langle \mathcal{D}_t(f), f\rangle = \int_X \mathcal{D}_t(f)(y)\overline{f(x)}\boldsymbol{d\sigma}(x)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sigma(B(x,t))}\int_X\int_X \chi_{B(x,t)}(y)f(y)d\sigma(y)\overline{f(x)}d\sigma(x)\\
&= \frac{1}{\sigma(B(x,t))}\int_X\overline{\int_X f(x)\chi_{B(x,t)}(y)d\sigma(x)}f(y)d\sigma(y)\\
&= \int_X f(x)\overline{\mathcal{D}_t}(f)(y)d\sigma(y)\\
&= \langle f, \mathcal{D}_t(f)\rangle.
\end{aligned}
$$

Como $L^2(X,\sigma)$ é um espaço vetorial complexo segue da Proposição 1.2.2 que $\mathcal{D}_t$ é autoadjunto. ■

O resultado seguinte será usado para aproximar K por K^t posteriormente.

Teorema 3.1.7 *Se $f \in L^2(X,\sigma)$ então* $\lim_{t\to 0^+}\|\mathcal{D}_t(f)-f\|_2 = 0$.

Demonstração. Pelas equações $|f(x)| \le H(f)(x)$ e $|\mathcal{D}_t(f)(x)| \le H(f)(x)$ não é difícil ver que

$$|\mathcal{D}_t(f)(x) - f(x)|^2 \le (|\mathcal{D}_t(f)(x)| + |f(x)|)^2 = (2H(f)(x))^2.$$

Pelo Teorema 3.1.4 temos que $\mathcal{D}_t(f)(x) - f(x) \to 0$ e pela desigualdade acima ficam garantidas as hipóteses do Teorema da Convergência Dominada [14, p. 44]. Portanto,

$$\int_X |\mathcal{D}_t(f)(x) - f(x)|^2 d\sigma(x) \to 0,$$

e o resultado segue. ■

O próximo resultado nos permite provar um outro, o Teorema 3.2.3, que contribui diretamente para a demonstração do principal teorema do capítulo.

Teorema 3.1.8 *Se $T \in B_1(L^2(X,\sigma))$ então* $\lim_{t\to 0^+}\|\mathcal{D}_t T\mathcal{D}_t - T\|_1 = 0$.

Demonstração. Pelo Teorema 3.1.7 e pelo Teorema 3.1.6 tem-se satisfeitas as hipóteses da Proposição 1.5.14. Assim segue o resultado. ■

A seguir, dado um núcleo k, serão usados os operadores $\mathcal{D}_t$ para definir um núcleo auxiliar k^t.

$$k^t(u,v) := \int_X\int_X D_t(u,x)k(x,y)D_t(v,y)d\sigma(x)d\sigma(y), \quad u,v \in X.$$

Teorema 3.1.9 *Se $k \in L^2(X\times X, \sigma\times\sigma)$ então $k^t \in L^2(X\times X,\sigma\times\sigma)$, $t>0$.*

Demonstração. Seja k como no enunciado. Pelo Teorema da Mudança de Variável [19, p. 385] $\sigma(B(x,t)) = t^m(B(x,1))$. Esta afirmação e uma aplicação do Teorema de Fubini [14, p. 119] implicam que

$$
\begin{aligned}
|k^t(u,v)| &\le \frac{1}{\sigma(B(u,t))\sigma(B(v,t))}\int_{B(v,t)}\int_{B(u,t)} |k(x,y)|d\sigma(x)d\sigma(y)\\
&\le \frac{2^{2m}\sigma B((u,v),1)}{\sigma(B(u,1))\sigma(B(v,1))\sigma(B((u,v),2t))}\int_{B((u,v),2t)} |k|d(\sigma\times\sigma).
\end{aligned}
$$

Aplicando o Lema 3.1.5, o teorema está demonstrado. ■

Teorema 3.1.10 *Se $k \in L^2(X \times \boldsymbol{X}, \sigma \times \sigma)$ e $t > 0$ então k^t é limitado e contínuo.*

Demonstração. Com $t > 0$,

$$\lim_{u \to u_0} \chi_{B(u,v)}(x) = \chi_{B(u_0,t)}(x) \text{ quase sempre.}$$

Então

$$\lim_{(u,v) \to (u_0,v_0)} D_t(u,x)k(x,y)D_t(v,y) = D_t(u_0,x)k(x,y)D_t(v_0,y) \text{ quase sempre.}$$

Por outro lado,

$$|D_t(u,x)k(x,y)D_t(v,y)| \leq \frac{1}{\sigma(B(u,t))^2}|k(x,y)|.$$

O Teorema da Convergência Dominada [14, p. 44] implica que cada k^t é contínuo. Como

$$|k^t(u,v)| = \frac{1}{\sigma(B(u,t))^2}\left|\int_X \int_X k(x,y)\chi_{B(u,t)}(x)\chi_{B(v,t)}(y)d\sigma(x)d\sigma(y)\right| \leq \frac{\|k\|_2}{\sigma(B(u,t))},$$

a limitação segue. ■

Teorema 3.1.11 *Se $k \in L^2(X \times \boldsymbol{X}, \sigma \times \sigma)$ e $t > 0$ então $\mathcal{D}_t K \mathcal{D}_t$ e K^t coincidem.*

Demonstração. Se f é contínua e limitada, contendo o suporte compacto [13, p. 132] X_f e Y_f é um conjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ contendo todas as bolas $B(x,t), x \in X_f$ então

$$\begin{aligned}
(\mathcal{D}_t K \mathcal{D}_t)(f)(\xi) &= \mathcal{D}_t(K\mathcal{D}_t)(f)(\xi) \\
&= \int_X D_t(\xi, x)(K\mathcal{D}_t)(f)(x)d\sigma(x) \\
&= \int_X \int_X D_t(\xi, x)k(x,y)D_t(f)(y)d\sigma(y)d\sigma(x) \\
&= \int_{B(\xi,t)} \int_{Y_f} \int_{X_f} D_t(\xi, x)k(x,y)D_t(y,z)(f)(z)d\sigma(z)d\sigma(y)d\sigma(x).
\end{aligned}$$

Como as funções $(x,y,z) \in B(\xi,t) \times Y_f \times X_f \to |D_t(\xi,x)D_t(y,z)|^2$ e $(x,y,z) \in B(\xi,t) \times Y_f \times X_f \to |k(x,y)f(z)|^2$ são integráveis, pode-se aplicar o Teorema de Fubini e obter

$$(\mathcal{D}_t K \mathcal{D}_t)(f)(\xi) = \int_X k^t(\xi, z)f(z)d\sigma(z) = k^t(f)(\xi).$$

O resultado segue, pois os conjuntos dessas funções de suporte compacto e contínuas é denso em $L^2(\boldsymbol{X}, \sigma)$ [13, p.245]. ■

Teorema 3.1.12 *Se $k \in L^2(\boldsymbol{X}, \sigma)PD$ então $k^t \in L^2(\boldsymbol{X}, \sigma)PD$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.1.9 cada k^t é um elemento de $L^2(X \times \boldsymbol{X}, \sigma \times \sigma)$ enquanto $\|\mathcal{D}_t(f)\|_2 \leq C\|f\|_2$ com $f \in L^2(\boldsymbol{X}, \sigma)$, implica que $L^2(\boldsymbol{X}, \sigma)$ é um subespaço invariante do operador $\mathcal{D}_t$, assim $\mathcal{D}_t : L^2(\boldsymbol{X}, \sigma) \to L^2(\boldsymbol{X}, \sigma)$ e logo a composição abaixo faz sentido. Tendo em mente que $\mathcal{D}_t$ é autoadjunto segue que

$$\langle \mathcal{D}_t K \mathcal{D}_t(f), f \rangle = \langle K\mathcal{D}_t(f), \mathcal{D}_t(f) \rangle \geq 0, \quad f \in L^2(\boldsymbol{X}, \sigma),\ t > 0,$$

e a demonstração está completa. ■

Teorema 3.1.13 *Se k é hermitiano, então k^t também é hermitiano. Se k é hermitiano e $k \in L^2(X \times \boldsymbol{X}, \sigma \times \sigma)$ então cada k^t é autoadjunto.*

Demonstração. Se k é hermitiano então

$$k^t(u, v) = \int_X \int_X D_t(u, x)k(x, y)D_t(v, y)\boldsymbol{d}\sigma(x)\boldsymbol{d}\sigma(y)$$

é real por um argumento similar ao usado no Teorema 2.3.1. Se k é hermitiano então k^t é hermitiano e pelo Teorema 3.1.12 e pela Proposição 1.2.2, K^t é autoadjunto. ■

3.2 Nuclearidade de operadores integrais

Nesta seção serão apresentadas condições para que um operador integral positivo seja nuclear, usando a positividade definida sobre o núcleo k.

Teorema 3.2.1 *Se $k \in L^2(\boldsymbol{X}, \sigma)PD$. Se $\sigma(X) < \infty$ então $K^t \in B_1(L^2(\boldsymbol{X}, \sigma))$ e*

$$tr(K^t) = \int_X k^t(x, x)\boldsymbol{d}\sigma(x) < \infty.$$

Demonstração. Como $k \in L^2(X \times \boldsymbol{X}, \sigma \times \sigma)$, pelo Teorema 3.1.10 k^t é contínuo e limitado, assim, k^t é limitado em Δ_X. Finalmente, se $\sigma(X) < \infty$, a limitação de k^t em Δ_X implica a integrabilidade de $x \in X \to k^t(x, x)$. Como k é $L^2(\boldsymbol{X}, \sigma)$PD, k^t é $L^2(\boldsymbol{X}, \sigma)$PD, então pelo Teorema 3.0.1 $K^t \in B_1(L^2(\boldsymbol{X}, \sigma))$ e $tr(K^t) = \int_X k^t(x, x)\boldsymbol{d}\sigma(x) < \infty$. ■

Quando $\sigma(X)$ não é finito pode-se contornar isso com o seguinte resultado.

Teorema 3.2.2 *Seja $k \in L^2(\boldsymbol{X}, \sigma)PD$. Se*

$$\limsup_{t \to 0^+} \int_X k^t(x, x)\boldsymbol{d}\sigma(x) < +\infty,$$

então $K \in B_1(L^2(\boldsymbol{X}, \sigma))$.

Demonstração. Pelo Teorema 3.1.10 k^t é limitado e contínuo e pelo Teorema 3.1.12 k^t é $L^2(\boldsymbol{X}, \sigma)$PD. Se

$$\limsup_{t \to 0^+} \int_X k^t(x, x)\boldsymbol{d}\sigma(x) < +\infty,$$

pode-se encontrar $\delta > 0$ tal que $x \in X \to k^t(x,x)$ é integrável desde que $0 < t < \delta$. Desta maneira, por 3.0.1 $K^t \in B_1(L^2(X,\sigma))$ e

$$tr(K^t) = \int_X k^t(x,x)d\sigma(x), \quad 0 < t < \delta.$$

Assim, segue que

$$\limsup_{t\to 0^+} \int_X k^t(x,x)d\sigma(x) = \limsup_{t\to 0^+} tr(K^t) < +\infty.$$

Esta informação será usada para concluir que $\sum_{j=1}^{\infty} s_j(K) < +\infty$ usando a hipótese dada pelo teorema. Como $\{s_j(K^t)\} \subset (0,\infty)$ não é difícil ver pelo Teorema 3.0.1 que

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(K^t) \leq tr(K^t), \quad j = 1, 2, \ldots. \tag{3.1}$$

O Corolário 1.5.10 implica que

$$|s_j(K^t) - s_j(K)| \leq \|K^t - K\|, \quad j = 1, 2 \ldots.$$

Pelos Teoremas 3.1.6 e 3.1.7 tem-se que as hipóteses do Teorema 1.2.12 estão satisfeitas. Note que se pode pensar $t \to 0^+$ como $t_n \to 0^+$ para $n \to \infty$ e então

$$\lim_{t\to 0^+} s_j(K^t) = s_j(K), \quad j = 1, 2 \ldots. \tag{3.2}$$

Combinando as equações 3.1 e 3.2 obtém-se que

$$\sum_{j=1}^{n} s_j(K) = \limsup_{t\to 0^+} \left\{ \sum_{j=1}^{n} s_j(K^t) \right\} \leq \limsup_{t\to 0^+} \{tr(K^t)\}, \quad j = 1, 2 \ldots.$$

Então não é difícil ver que $K \in B_1(L^2(X,\sigma))$. ■

Teorema 3.2.3 *Seja $k \in L^2(X \times X, \sigma \times \sigma)$. Se $K \in B_1(L^2(X,\sigma))$ então existe uma constante C tal que*

$$tr(K^t) \leq C \ tr(K), \quad t \in (0,\infty).$$

Ainda,

$$\lim_{t\to 0^+} tr(K^t) = tr(K). \tag{3.3}$$

Demonstração. Suponha que $K \in B_1(L^2(X,\sigma))$. Como $\mathcal{D}_t \in B(L^2(X,\sigma))$, $t \in (0,\infty)$, pelo Teorema 3.1.6 e pelo Corolário 1.5.8 implica que

$$s_j(K^t) \leq \|\mathcal{D}_t\| s_j(K) \|\mathcal{D}_t\|.$$

Pela definição do traço de K^t, como ele é autoadjunto, compacto e positivo seus autovalores e valores singulares coincidem e, em particular,

$$tr(K^t) = \sum_{j=1}^{\infty} s_j(K^t) \leq \|D_t\|^2 \sum_{j=1}^{\infty} s_j(K), \quad t \in (0,\infty).$$

Lembrando que a constante que aparece no Lema 3.1.5 não depende de t, tem-se a desigualdade

$$tr(K^t) \leq C\ tr(K), \quad t \in (0, \infty).$$

A linearidade do traço e a Equação (1.3) implicam que

$$|tr(K^t - K)| = |tr(K^t) - tr(K)| \leq \|K^t - K\|_1.$$

Pelo Teorema 3.1.11 e pelo Teorema 3.1.8 temos que

$$|tr(K^t) - tr(K)| = |tr(\mathcal{D}_t K \mathcal{D}_t) - tr(K)| \leq \|K^t - K\|_1 = \|\mathcal{D}_t K \mathcal{D}_t - K\|_1 \to 0,$$

quando $t \to 0^+$. ■

A fim de demonstrar o próximo teorema, será enunciado mais um resultado auxiliar.

Lema 3.2.4 *Para cada inteiro positivo j, defina $A_j := (-j, j)^n \cap X$ e considere o operador $P_j : L^2(\boldsymbol{X}, \sigma) \to L^2(\boldsymbol{X}, \sigma)$ dado pela fórmula $P_j(f) := f\chi_{A_j}$ para cada $f \in L^2(\boldsymbol{X}, \sigma)$. Se $T \in B_1(L^2(\boldsymbol{X}, \sigma))$ então $P_j T P_j \in B_1(L^2(\boldsymbol{X}, \sigma))$ e*

$$\lim_{j \to \infty} tr(P_j T P_j) = tr(T).$$

Demonstração. Não é difícil ver que cada P_j é uma projeção ortogonal pois $P_j^2 = P_j$ e $P_j = P_j^*$, ainda $\|P_j\| = 1$. Como $\{P_j\}$ é uma sequência convergente ponto a ponto para a função identidade e é limitada e pode-se usar o Corolário 1.5.8 que implica que $P_j T P_j \in B_1(L^2(\boldsymbol{X}, \sigma))$ para $j = 1, 2, \ldots$. De fato

$$s_j(P_j T P_j) \leq \|P_j\|^2 s_j(T) = s_j(T),$$

o que implica que

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j(P_j T P_j) \leq \sum_{j=1}^{\infty} s_j(T) < \infty.$$

A Proposição 1.5.14 garante que

$$\lim_{j \to \infty} \|P_j T P_j - T\|_1 = \lim_{j \to \infty} \|P_j T P_j^* - T\|_1 = 0.$$

A desigualdade $|tr(P_j T P_j) - tr(T)| \leq \|P_j T P_j - T\|_1$ implica que $|tr(P_j T P_j)| \leq \|T\|_1$ e então

$$\lim_{j \to \infty} tr(P_j T P_j) = tr(T).$$

Portanto, o limite do enunciado segue. ■

Finalmente, um teorema que associa a nuclearidade do operador K com o núcleo aproximante k^t.

Teorema 3.2.5 *Seja $k \in L^2(\boldsymbol{X}, \sigma)PD$. Se $K \in B_1(L^2(\boldsymbol{X}, \sigma))$ então*

$$\lim_{t \to 0^+} \int_X k^t(x, x) d\sigma(x)$$

existe e é finito.

Demonstração. Para cada j, considere o operador integral Q_j^t definido por

$$Q_j^t(f)(x) = \int_{A_j} k^t(x,y)f(y)d\sigma(y), \quad x \in A_j, \quad f \in L^2(A_j).$$

Como k^t é limitado e contínuo, a restrição a $A_j \times A_j$ é contínua. Se $f \in L^2(A_j)$, escreva $\tilde{f}$ para denotar a extensão de f a X que por definição é zero fora de A_j, da mesma forma $f\chi_A$ é a restrição de $f \in L^2(X,\sigma)$ a A_j. Então para todo $f \in L^2(X,\sigma)$ tem-se

$$\int_{A_j} Q_j^t(f)(x)\overline{f(x)}d\sigma(x) = \int_X \int_X k^t(x,y)\tilde{f}(y)\chi_{A_j}(y)\overline{\tilde{f}(x)}\chi_{A_j}(x)d\sigma(y)d\sigma(x).$$

Assim, como a segunda parte da igualdade é positiva (pois k^t é L^2 positivo definido), tem-se a L^2-positividade definida de Q_j^t em $L^2(A_j)$. Como $\Delta_{A_j} \subset \Delta_X$, a limitação de k^t em Δ_{A_j} segue da limitação de k^t em Δ_X, que por sua vez, segue da demonstração do Teorema 3.2.1. Como $\sigma(A_j) < \infty$ e cada k^t é contínuo, a integrabilidade de $x \in A_j \to k(x,x)$ é clara. Pelo Teorema 3.0.1, cada Q_j^t é nuclear e

$$tr(Q_j^t) = \int_{A_j} k^t(x,x)d\sigma(x).$$

Se V_j é subespaço fechado de $L^2(X,\sigma)$ formado pelas funções que são zero fora do conjunto A_j e $R_j^t : V_j \to V_j$ é um operador dado pela fórmula

$$R_j^t(f)(x) = \chi_{A_j}(x)\int_X k^t(x,y)\chi_{A_j}(y)f(y)d\sigma(y), \quad x \in X, \quad f \in V_j.$$

Não é difícil ver que Q_j^t e R_j^t possuem os mesmos autovalores. Lembrando da notação no Lema 3.2.4 e observando que

$$(P_jK^tP_j)(f)(x) = \int_X k^t(x,y)\chi_{A_j \times A_j}(x,y)f(y)d\sigma(y), \quad x \in X, \quad f \in L^2(X,\sigma),$$

conclui-se que R_j^t e $P_jK^tP_j$ têm os mesmos autovalores. Portanto,

$$tr(P_jK^tP_j) = tr(R_j^t) = tr(Q_j^t) = \int_{A_j} k^t(x,x)d\sigma(x). \tag{3.4}$$

Novamente, pelo Lema 3.2.4 e pelo Teorema da Convergência Monótona [14, p. 31] conclui-se que

$$\lim_{j\to\infty} \int_{A_j} k^t(x,x)d\sigma(x) = \int_X k^t(x,x)d\sigma(x) = tr(K^t).$$

Das equações 3.3 e 3.4 tem-se o resultado. ■

Pode-se resumir os resultados da seção no seguinte teorema, com um dos mais importantes do capítulo.

Teorema 3.2.6 *Seja $k \in L^2(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\sigma})PD$. Então $K \in B_1(L^2(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\sigma}))$ se, e somente se,*

$$\limsup_{t\to 0^+} \int_X k^t(x,x)d\boldsymbol{\sigma}(x) < \infty.$$

É conhecido um núcleo $k \in L^2(X \times \boldsymbol{X}, \sigma \times \sigma)$ contínuo tal que o operador integral correspondente não é nuclear, um exemplo é operador Volterra que não é autoadjunto 1.5.4. O corolário abaixo estabelece condições para que o operador integral K seja nuclear.

Corolário 3.2.7 *Seja $k \in L^2(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\sigma})PD$. Se $k \in L^\infty(X \times \boldsymbol{X}, \sigma \times \sigma)$ e $\boldsymbol{\sigma}(X) < \infty$ então $K \in B_1(L^2(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\sigma}))$ e*

$$tr(K) \leq \|k\|_{L^\infty}\boldsymbol{\sigma}(X).$$

Demonstração. É suficiente observar a desigualdade abaixo

$$|k^t(u,v)| \leq \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}(B(u,t))\boldsymbol{\sigma}(B(v,t))}\int_{B(u,t)}\int_{B(v,t)} |k(x,y)|d\boldsymbol{\sigma}(x)d\boldsymbol{\sigma}(y) \leq \|k\|_{L^\infty}, \ u,v \in X,$$

e usar o teorema anterior. ■

CAPÍTULO 4

NUCLEARIDADE DE OPERADORES: UM CONTEXTO UM POUCO MAIS GERAL

Nesta parte final do trabalho será tratada a nuclearidade de operadores integrais positivos quando X é um conjunto com medida σ-finita, não necessariamente em $\mathbb{R}^n$. Os resultados deste capítulo foram baseados nos artigos [5] e [10]. O método utilizado aqui difere um pouco daquele apresentado no capítulo anterior pois o processo de aproximação usado nas demonstrações não faz uso do Teorema de Mercer. A diferença fundamental é que no Capítulo 3 usamos o Teorema 1.5.14 e aqui usamos o 1.5.15. Isso contribui para um contexto mais geral, estendendo resultados de [7, 10, 18].

Os resultados deste capítulo e suas demonstrações são parecidos com os do capítulo anterior, logo é necessário um teorema semelhante ao Teorema da Diferenciação de Lebesgue. Para tanto, deve-se impor condições sobre o conjunto X e introduzir o conceito de martingais.

4.1 Filtros e martingais

Seja X um conjunto não vazio munido de uma σ-álgebra $\mathcal{A}$. Um filtro F é uma família crescente de sub-σ-álgebras de $\mathcal{A}$, indexada em $\mathbb{N}$. Para as particularidades desse trabalho faz-se necessário colocar mais condições sobre o filtro, como segue. Veja [5] para mais detalhes.

Definição 4.1.1 *Um filtro de Lusin $F = (F_n)_{n=1}^{\infty}$ do espaço $(X, \mathcal{A})$ é um filtro para o qual existe uma sequência crescente $\mathcal{P}_n^F, n = 1, 2, \ldots$, de partições contáveis de X por conjuntos de $\mathcal{A}$ onde cada F_n é a σ-álgebra gerada por $\mathcal{P}_n^F$, para cada $n = 1, 2, \ldots$, tal que $\mathcal{A}$ é a união (crescente) de F_n. Caso o filtro satisfaça as duas condições abaixo, diz-se que é estrito:*

1. *para cada $x, y \in X$, com $x \neq y$, existem $n \in \mathbb{N}$ e $U, V \in \mathcal{P}_n^F$ com $U \neq V$ tais que $x \in U$ e $y \in V$;*

2. *cada sequência decrescente de* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n^F$ *tem interseção não vazia.*

Para o interesse deste trabalho um tipo mais fraco de filtro que o de Lusin pode ser usado, por isso, será apresentada a definição seguinte.

Definição 4.1.2 *Seja* $(X, \mathcal{A}, \sigma)$ *um espaço de medida* σ*-finito. Um* σ*-filtro de Lusin* $F = (F_n)_{n=1}^{\infty}$ *é um filtro tal que existe um conjunto* X_0 *com medida* σ*-total e uma sequência crescente* $\mathcal{P}_n^F, n = 1, 2, \ldots$, *de partições contáveis de* X_0, *onde cada* F_n *é a* σ*-álgebra gerada por* $\mathcal{P}_n^F$ *e tais que* $\mathcal{A} \cap X_0$ *é a união crescente de* F_n. *Exigindo ainda que, para cada* $x \in X_0$, *exista* $U_n(x) \in P_n^F$, *com* $x \in U_n(x)$ *e* $0 < \sigma(U_n(x)) < \infty$. *Caso o* σ*-filtro satisfaça as duas condições abaixo, diz-se que é* σ*-estrito:*

1. *para cada* $x, y \in X_0$, *com* $x \neq y$, *existem* $n \in \mathbb{N}$ *e* $U, V \in \mathcal{P}_n^F$ *com* $U \neq V$ *tais que* $x \in U$ *e* $y \in V$;

2. *cada sequência decrescente de* $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}_n^F$ *tem interseção não vazia.*

Observação 4.1.3 *Para que fique um pouco mais claro para o leitor, considere* $X = \mathbb{R}$ *e* $\mathcal{A}$ *a* σ*-álgebra de Lebesgue e uma partição* $\mathcal{P}_1$ *dada por intervalos, de comprimento finito maior que um, e na partição* $\mathcal{P}_2$ *onde os intervalos de* $\mathcal{P}_1$ *estão divididos ao meio. Uma partição* $\mathcal{P}_3$ *pode ser considerada da mesma maneira a partir de* $\mathcal{P}_2$ *e assim, sucessivamente. Essa sequência de partições* $\mathcal{P}_n$ *é crescente e contável. A sigma-álgebra gerada por cada elemento da partição é um elemento do filtro. Note que esse filtro é de Lusin e que apenas não é imediato que satisfaça as condições para ser estrito. Note que é também* σ*-filtro de Lusin.*

A existência dos σ-filtros de Lusin será garantida pela proposição adiante, mais ainda, será garantida a existência de σ-filtros de Lusin estritos.

O conceito de filtro de Lusin está relacionado com o de espaços de Lusin, como pode-se ver em [5]. Inclusive tais espaços têm importância na garantia da existência dos filtros.

Definição 4.1.4 *Um espaço de Lusin é a imagem contínua injetiva de um espaço de Polish que, por sua vez, é um espaço topológico de Hausdorff cuja topologia é metrizável e completa. Já um espaço de Suslin é a imagem de um espaço de Polish por uma função contínua. Desta forma, todo espaço de Lusin é um espaço de Suslin.*

Observação 4.1.5 *Todo subconjunto fechado de* $\mathbb{R}^n$ *é espaço de Suslin e a medida de Lebesgue é o completamento da medida de Borel usual.*

Proposição 4.1.6 *Toda medida* σ*- finita de Borel em um espaço de Suslin possui um* σ*-filtro de Lusin estrito.*

Veja a demonstração em [5, p. 422].

Seja $(X, \mathcal{A}, \sigma)$ um espaço de medida σ-finito onde o produto $X \times X$ esteja munido da medida produto $\sigma \times \sigma$. Pode-se construir um σ-filtro de Lusin a partir de um filtro de Lusin F. Pela divisão de X em conjuntos de medida σ-finita, pode-se supor que as partições $(\mathcal{P}_n^F)$ associadas a F consistem em conjuntos de medida finita.

Seja $\mathcal{N}$ o conjunto de todos $x \in X$ tais que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma(U_n(x)) = 0$ e seja $X_0 = X \setminus \mathcal{N}$. Então $\sigma(U_m(x)) = 0$ para todo $m > n$, porque todo $\mathcal{P}_m^F$ é um refinamento de $\mathcal{P}_n^F$, se $m > n$. Além disso $\mathcal{N}$ tem medida nula, porque

$$\mathcal{N} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \cup \{U \in \mathcal{P}_n^F : \sigma(U) = 0\}.$$

Consequentemente, $(F_n \cap X_0)_{n=1}^{\infty}$ é um σ-filtro de Lusin associado ao conjunto X_0.

A questão da existência de filtros se encerra com o resultado que segue [5].

Proposição 4.1.7 *Os seguintes resultados são equivalentes para um espaço de medida* $(X, \mathcal{A}, \sigma)$.

1. *O espaço mensurável* $(X, \mathcal{A})$ *possui um σ-filtro de Lusin;*
2. $L^p(X, \mathcal{A}, \sigma)$ *é separável para todo* $0 \leq p < \infty$;
3. *A álgebra da medida* $[\mathcal{A}]_\sigma$ *de* $(X, \mathcal{A}, \sigma)$ *é separável;*
4. *A σ-algebra $\mathcal{A}$ possui uma sub-σ-algebra gerada contável $\mathcal{A}_0$ tal que $[\mathcal{A}]_\sigma$ e $[\mathcal{A}_0]_\sigma$ são idênticas.*

Observação 4.1.8 *A proposição anterior é importante porque fornece um contexto onde a caracterização de operadores do tipo Hilbert-Schmidt por meio de operadores integrais, dada no Teorema 1.3.4, pode ser usada.*

Definição 4.1.9 *Seja* (F_n) *um σ-filtro de Lusin. O operador expectativa condicional* $P_n : f \to \mathbb{E}(f|F_n)$ *é dado por*

$$\begin{aligned} P_n(f)(x) = \mathbb{E}(f|F_n)(x) &= \frac{\chi_{U_n(x)}}{\sigma(U_n(x))} \int_{U_n(x)} f d\sigma, \quad \textit{quase sempre} && (4.1) \\ &= \sum_{U \in \mathcal{P}_n^F} \frac{\chi_U(x)}{\sigma(U)} \int_U f d\sigma, \quad f \in L^2(X, \sigma), && (4.2) \end{aligned}$$

onde $U_n(x)$ *é o único elemento da partição* $\mathcal{P}_n^F$ *que contém* $x \in X$.

Suponha que k é uma função Borel mensurável definida em $X \times X$ que é integrável em $U \times V$ para todo U, V pertencente a partição $(\mathcal{P}_1^F)$, e também para toda partição $\mathcal{P}_n^F$ subsequente. Para cada $n = 1, 2, \ldots$, o operador expectativa condicional pode ser representado (quase sempre em 4.3) por

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(k|F_n \times F_n)(x, y) &= \frac{1}{\sigma(U_n(x))\sigma(U_n(y))} \int_{U_n(x)} \int_{U_n(y)} k(s,t) d\sigma(s) d\sigma(t) && (4.3) \\ &= \sum_{U, V \in \mathcal{P}_n^F} \frac{\chi_U(x)\chi_V(y)}{\sigma(U)\sigma(V)} \int_{U \times V} k d(\sigma \times \sigma). && (4.4) \end{aligned}$$

Denota-se essa expectativa condicional como $k_n = \mathbb{E}(k|F_n \times F_n)$.

Os resultados desta parte da seção podem ser encontrados em [10].

Definição 4.1.10 *Sejam $(X, \mathcal{A}, \sigma)$ um espaço de medida e $F = (F_n)_{n=1}^{\infty}$ um filtro de modo que a medida é σ-finita em cada F_n. A sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funções complexas em X é um martingal se f_n é F_n-mensurável e*

$$\mathbb{E}(f_n|F_j) = f_j, \quad j < n.$$

Em particular, é interessante usar os martingais gerados por uma única função $\mathcal{A}$-mensurável f, com $f_n = \mathbb{E}(f|F_n)$. A função maximal de tal martingal é dada por

$$H_F(f)(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|f||F_n)(x), \quad x \in X.$$

Para assuntos como construção de filtros em espaços primeiro enumeráveis e martingais relacionadas veja [18]. Para a demonstração dos teoremas abaixo veja [10]. Um deles garante a limitação do operador maximal de martingais, analogamente ao operador maximal de Hardy-Littlewood.

Teorema 4.1.11 *Nas condições acima, o operador maximal H_F é limitado em $L^p(X, \sigma)$ para $1 < p \leq \infty$.*

Fato que é usado para concluir que

$$\|H_F(f)\|_2 \leq C\|f\|_2, \quad \forall\, f \in L^2(X, \sigma). \tag{4.5}$$

Já um teorema análogo ao da Diferenciação de Lebesgue segue.

Teorema 4.1.12 (Convergência de Martingais) *Para cada função $f \in L^p(X, \sigma)$, com $1 \leq p \leq \infty$, a sequência $\mathbb{E}(f|F_n) = P_n$ converge para f quase sempre.*

4.2 Nuclearidade de operadores integrais positivos

Nessa seção será apresentado o principal resultado do capítulo, mas para isso são necessários alguns resultados auxiliares, que o leitor pode comparar com os do Capítulo 3. Se fizer isso vai notar as semelhanças e as diferenças no processo de aproximação usado em cada caso. Em particular, o resultado a seguir é uma adaptação do Teorema 3.1.7 para o contexto atual.

Nesta seção será suposto que $(X, \mathcal{A}, \sigma)$ está relacionado a um σ-filtro de Lusin.

Teorema 4.2.1 *Se $f \in L^2(X, \sigma)$ então $\lim_{n\to\infty} \|P_n(f) - f\|_2 = 0$, ou seja, P_n converge para o operador Id na topologia forte de operadores.*

Demonstração. Pelas equações $|f(x)| \leq H(f)(x)$ e $|P_n(f)(x)| \leq H(f)(x)$ não é difícil ver (como no Teorema 3.1.7) que $|P_n(f)(x) - f(x)|^2 \leq (2H(f)(x))^2$. Uma vez que $|P_n(f)(x) - f(x)| \to 0$ quase sempre pelo teorema 4.1.12, tem-se que

$$\|P_n(f) - f\|_2 \to 0,$$

pelo Teorema da Convergência Dominada. ■

Observação 4.2.2 *Por uma aplicação direta do Teorema da Convergência de Martingais, se k pertence a $L^p(X \times X, \sigma \times \sigma)$, então k_n converge quase sempre para k. Para qualquer função Lebesgue mensurável $f : X \times X \to \mathbb{C}$, seja*

$$H_{F^2}(f)(x,y) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}(|f|\,|F_n \times F_n)(x,y), \quad x,y \in X.$$

Se f é $(\sigma\times\sigma)$-integrável nos conjuntos $U \times V$ pertencentes as partições associadas a F, então $H_{F^2}(f)$ é a função maximal associada ao martingal $(\mathbb{E}(|f|\,|F_n \times F_n))$.

Além da propriedade de aproximação dada pelo resultado anterior, o operador P_n tem outras importantes, dadas pelos três lemas seguintes.

Lema 4.2.3 *O operador P_n é uma projeção ortogonal de $L^2(X,\sigma)$ sobre W_n, onde W_n é o conjunto gerado por $\left\{\frac{\chi_U}{\sqrt{\sigma(U)}}, U \in \mathcal{P}_n\right\}$.*

Demonstração. Basta mostrar que $P_n^2 = P_n = P_n^*$ (veja [11, p. 147]), o que de fato ocorre, pois da Expressão (4.2),

$$P_n(\alpha\chi_U) = \alpha\chi_U, \quad U \in \mathcal{P}_n^F, \quad \alpha \in \mathbb{C},$$

e que $\left\{\frac{\chi_U}{\sqrt{\sigma(U)}}, U \in \mathcal{P}_n\right\}$ é uma base ortonormal para W_n. Ainda, escolhendo uma enumeração como $\mathcal{P}_n = \{U_{nj}\}$ e denotando $\xi_j = \frac{\chi_{U_{nj}}}{\sqrt{\sigma(U_{nj})}}$ tem-se que

$$P_n(f) = \sum_j \langle f, \xi_j\rangle \xi_j, \quad f \in L^2(X,\sigma), \tag{4.6}$$

e segue que P_n é positivo e autoadjunto. ■

Lema 4.2.4 *A função definida por*

$$e_n(x,y) = \sum_{U\in\mathcal{P}_n^F} \frac{\chi_U(x)\chi_U(y)}{\sigma(U)}, \quad x,y \in X.$$

é um núcleo positivo definido para o operador P_n.

Demonstração. De fato, tendo em mente a Expressão (4.1)

$$\begin{aligned}
\int_X e_n(x,y) f(y) d\sigma(y) &= \int_X \sum_{U\in\mathcal{P}_n^F} \frac{\chi_U(x)\chi_U(y)}{\sigma(U)} f(y) d\sigma(y) \\
&= \int_U \sum_{U\in\mathcal{P}_n^F} \frac{\chi_U(x)\chi_U(y)}{\sigma(U)} f\chi_U(y) d\sigma(y) \\
&= \int_X \frac{\chi_{U_n(x)U_n(y)} f(y) d\sigma(y)}{\sigma(U_n(x))}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{U_n(x)} f(y)d\sigma(y)\frac{1}{\sigma(U_n(x))} \\
&= P_n(f)(x), \quad x \in X_0.
\end{aligned}
$$

Pode-se perceber que o núcleo e_n é positivo definido por meio do exemplo 2.1.4 e propriedades 2.1.6. ■

No que segue o operador integral $K : L^2(\boldsymbol{X}, \sigma) \to L^2(\boldsymbol{X}, \sigma)$ é limitado.

Lema 4.2.5 *Nas condições dos lemas anteriores, vale a igualdade*

$$(P_nKP_n)(f) = K_n(f), \quad f \in L^2(\boldsymbol{X}, \sigma),$$

ou seja, esses dois operadores coincidem, onde o núcleo k_n é dado pela Expressão (4.4).

Demonstração. Tomando $\xi_i = \frac{\chi_{U_{n_i}}}{\sqrt{\sigma(U_{n_i})}}$ e aplicando o Teorema de Fubini-Tonelli [13, p. 67], para cada $n = 1, 2, \ldots$, na Expressão (4.2) tem-se que

$$
\begin{aligned}
(P_nKP_n)(f)(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, \xi_i \rangle P_n(K)(\xi_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, \xi_i \rangle \sum_{j=1}^{\infty} \langle K(\xi_i), \xi_j \rangle \xi_j \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\sigma(U_{ni})}} \int_{U_{ni}} f d\sigma \sum_{j=1}^{\infty} \int_{U_{nj}} \frac{K(\xi_i)}{\sqrt{\sigma(U_{ni})}} d\sigma \xi_j \\
&= \sum_{i,j}^{\infty} \frac{1}{\sigma(U_{ni})} \int_{U_{ni}} f d\sigma \int_{U_{nj}} \int_{U_{ni}} K d\sigma \times \sigma \frac{\chi_{U_{nj}}}{\sigma(U_{nj})} \\
&= \sum_{U,V \in \mathcal{P}_n^F} \frac{\chi_V(x)}{\sigma(U)\sigma(V)} \int_V \int_U k(x_2, x_1) d\sigma(x_1) d\sigma(x_2) \int_U f d\sigma \\
&= (K_n f)(x),
\end{aligned}
$$

para todo $f \in L^2(\boldsymbol{X}, \sigma)$ e $x \in X_0$. A troca das integrais é válida porque k é integrável em conjuntos $U \times V$ com $U, V \in \mathcal{P}_n^F$, garantida pela hipótese de que F é um σ-filtro de Lusin. Consequentemente $K_n = P_nKP_n$ é um operador linear limitado em $L^2(\boldsymbol{X}, \sigma)$ com norma limitada pela norma do operador K. ■

O resultado seguinte pode ser visto como uma versão mais fraca do Teorema 1.2.12. Como a compacidade do operador não faz parte da hipótese, a conclusão sobre a convergência aqui é apenas pontual.

Proposição 4.2.6 *Se $f \in L^2(\boldsymbol{X}, \sigma)$, então $K_n(f)$ converge para $K(f)$, para toda $f \in L^2(\boldsymbol{X}, \sigma)$.*

Demonstração. Como $P_n(f)$ converge para f em $L^2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\sigma})$ para toda $f \in L^2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\sigma})$ e $\|P_n\| \leq 1$, segue que

$$\begin{aligned} \|P_n K P_n(f) - K(f)\| &= \|P_n K P_n(f) - P_n K(f) + P_n K(f) - K(f)\| \\ &\leq \|P_n\| \|K P_n(f) - K(f)\| + \|P_n K(f) - K(f)\| \\ &\leq \|P_n\| \|K\| \|P_n(f) - f\| + \|P_n(K(f)) - K(f)\|. \end{aligned}$$

Logo $P_n K P_n(f) \to K(f)$ e pelo teorema anterior a demonstração segue. ■

Tendo em mente a Expressão (4.6), pode-se escrever a projeção ortogonal $P_{n,m} : L^2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\sigma}) \to L^2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\sigma})$ como

$$P_{n,m}(f) = \sum_{j=1}^{m} \langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\xi}_j \rangle \boldsymbol{\xi}_j, \quad f \in L^2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\sigma}). \tag{4.7}$$

Desta forma, usando a Desigualdade de Bessel tem-se que

$$\|P_n(f) - P_{n,m}(f)\|_2^2 = \sum_{j>m} |\langle \boldsymbol{f}, \boldsymbol{\xi}_j \rangle|^2 \to 0, \quad f \in L^2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\sigma}), \tag{4.8}$$

o que garante que $P_{n,m}$ converge para P_n na topologia forte de operadores.

Pode-se também usar a seguinte notação:

$$K_{n,m}(x, y) = \sum_{U, V \in \mathcal{P}^F_{n,m}} \frac{\chi_U(x) \chi_V(y)}{\sigma(U) \sigma(V)} \int_{U \times V} k d(\sigma \times \sigma), \tag{4.9}$$

de acordo com a Expressão (4.4), onde $P^F_{n,m} = \{U_{n1}, U_{n2}, \ldots U_{nm}\}$.

Pode-se agora enunciar o primeiro resultado auxiliar sobre nuclearidade de operadores.

Lema 4.2.7 *O operador $P_{n,m} K P_{n,m}$ é nuclear e vale a igualdade*

$$\|P_{n,m} K P_{n,m}\|_1 = tr(P_{n,m} K P_{n,m}) = \int_X k_{n,m}(x, x) \boldsymbol{d\sigma}(x) < \infty.$$

Demonstração. Cada operador $P_{n,m} K P_{n,m}$ tem posto finito (pela Expressão (4.7) e é positivo, pois

$$\langle P_{n,m} K P_{n,m}(f), (f) \rangle = \langle K P_{n,m}(f), P_{n,m}(f) \rangle \geq 0,$$

para $k = 1, 2, \ldots$ e $f \in L^2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\sigma})$. Sendo assim,

$$\|P_{n,m} K P_{n,m}\|_1 = tr(P_{n,m} K P_{n,m}) = \sum \langle K P_{n,m} u, P_{n,m} u \rangle, \quad u \in B,$$

para alguma base ortonormal B de $L^2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\sigma})$. Pode-se tomar uma base ortonormal da forma

$$\left\{ \frac{\chi_{U_{n_j}}}{\sqrt{\sigma(U_{n_j})}} \right\} \bigcup B_1.$$

Assim,

$$\begin{aligned} tr(P_{n,m}KP_{n,m}) &= \sum_{j=1}^{m}\langle K(\xi_j),\xi_j\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{m}\int_X\left(\int_{U_{nj}}\frac{k(u,v)d\sigma(v)}{\sqrt{\sigma(U_{nj})}}\frac{\chi_{U_{nj}}(u)}{\sqrt{\sigma(U_{nj})}}\right)d\sigma(u) \\ &= \sum_{U\in\mathcal{P}^F_{n,m}}\frac{1}{\sigma(U)}\int_{U\times U}k(u,v)d\sigma(u)d\sigma(v) \\ &= \int_X k_{n,m}(x,x)d\sigma(x). \end{aligned}$$

E a demonstração está completa. ■

Observação 4.2.8 *Cabe notar que a introdução do núcleo $\tilde{k}$ é necessária porque a diagonal $\Delta_X = \{(x,x) : x \in X\}$ pode ter medida nula para o produto $\sigma\times\sigma$. Então, talvez não seja possível restringir um núcleo a essa diagonal. De fato, se $0 \le k_1 \le k_2$ $(\sigma\times\sigma)$-quase sempre, então*

$$\mathbb{E}(k_1|F_n\times F_n)(x,y) \le \mathbb{E}(k_2|F_n\times F_n)(x,y), \quad n = 1,2\ldots,\forall\ (x,y)\in N^c\times N^c.$$

Em particular,

$$\mathbb{E}(k_1|F_n\times F_n)(x,x) \le \mathbb{E}(k_2|F_n\times F_n)(x,x), \quad n = 1,2\ldots,\forall\ x\in N^c,$$

é válida quase sempre. Entretanto, aplicando o Teorema 4.1.12 na primeira expressão, não é possível garantir que a segunda desigualdade seja preservada ou faça sentido após a aplicação do limite.

O lema a seguir pode ser relacionado com versões do Teorema de Mercer apresentadas no capítulo anterior, entretanto, é bem mais fraco. Pode ser visto também como um refinamento do teorema 1.3.4.

Lema 4.2.9 *Se $T : L^2(X,\sigma)\to L^2(X,\sigma)$ é um operador do tipo Hilbert-Schmidt. Então, T é um operador integral com núcleo*

$$k(x,y) = \sum_j s_j\eta_j(x)\overline{\xi_j(y)}, \quad x,y\in X \quad \text{quase sempre,} \tag{4.10}$$

onde $\{\xi_j\}$ e $\{\eta_j\}$ são conjuntos ortonormais e s_j são os valores singulares de T.

Demonstração. Sejam $\{\xi_j\}$ e $\{\eta_j\}$ conjuntos ortonormais e s_j os valores singulares de T, conforme o teorema 1.5.5. Usando argumentos semelhantes aos da demonstração do Teorema 1.3.4 tem-se que $\{\eta_j\otimes\overline{\xi_j}\}$ é ortonormal em $L^2(X\times X,\sigma\otimes\sigma)$. Desta forma, cálculos diretos mostram que

$$k = \sum_j s_j\eta_j\otimes\overline{\xi_j}$$

está em $L^2(X \times \boldsymbol{X}, \sigma \otimes \sigma)$, pois

$$\|k\|^2 = \sum s_j^2 < \infty,$$

e é núcleo de T. ■

Note que argumentos usados na dedução da Desigualdade (4.12) são baseados no artigo [10]. Veja também o teorema 2.4 desse mesmo artigo.

Lema 4.2.10 *Seja $K : L^2(\boldsymbol{X}, \sigma) \to L^2(\boldsymbol{X}, \sigma)$ um operador integral positivo com núcleo k e seja F um σ-filtro de Lusin para o qual $\mathbb{E}(|k||F_n \times F_n)$ tem valores finitos, para cada $n = 1, 2, \ldots$. Se K é nuclear, então*

$$\int_X H_{F^2}(k)(x, x) d\sigma(x) < +\infty.$$

Demonstração. Tendo em mente o Lema 4.2.9, seja

$$g(x, y) = \sum_j s_j |\eta_j(x)||\xi_j(y)|, \quad x, y \in X, \tag{4.11}$$

segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz [14, p. 57] que

$$|k(x, y)|^2 \leq |g(x, y)|^2 \leq \sum_j s_j |\eta_j(x)|^2 \sum_l s_l |\xi_l(y)|^2, \quad x, y \in X, \quad \text{quase sempre.}$$

Logo,

$$\int_{X \times X} |G|^2 \sigma \times \sigma \leq \left(\sum s_j\right)^2 < +\infty,$$

e segue que g está em $L^2(X \times \boldsymbol{X}, \sigma \otimes \sigma)$. Ainda, considerando a Expressão (4.4), tem-se que

$$\mathbb{E}(|k|\,|F_n \times F_n) \leq \mathbb{E}(g|F_n \times F_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Com isso, tem-se que

$$H_{F^2}(k) \leq H_{F^2}(g).$$

Como

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g|F_n \times F_n)(x, y) &= \sum_{U, V \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{\sigma(U \times V)} \int_{U \times V} g \, d\sigma \times \sigma \chi_{U \times V}(x, y) \\
&= \sum_{U, V \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{\sigma(U)\sigma(V)} \int_U \int_V \sum_j s_j |\eta_j(x)||\xi_j(y)| d\sigma \times \sigma(x, y) \chi_{U \times V}(x, y) \\
&= \sum_j s_j \sum_{U \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{\sigma(U)} \int_U |\eta_j| d\sigma \chi_U(x) \sum_{U \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{\sigma(V)} \int_V |\xi_j| d\sigma \chi_V(y) \\
&= \sum_j s_j \mathbb{E}(|\xi_j||F_n)(y) \mathbb{E}(|\eta_j||F_n)(x), \quad x, y \in X,
\end{aligned}$$

tem-se que

$$H_{F^2}(k)(x,y) \leq \sum_j s_j H_{F^2}(\boldsymbol{\xi}_j)(y) H_{F^2}(\boldsymbol{\eta}_j)(x), \quad x,y \in X. \tag{4.12}$$

Em particular, usando a Desigualdade (4.5) e Cauchy-Schwarz, tem-se que

$$\begin{aligned}
\int_X H_{F^2}(k)(x,x)d\boldsymbol{\sigma}(x) &\leq \int_X \sum_j s_j H_{F^2}(\boldsymbol{\xi}_j)(x) H_{F^2}(\boldsymbol{\eta}_j)(x) d\boldsymbol{\sigma}(x) \\
&\leq \sum_j s_j \|H_{F^2}(\boldsymbol{\xi}_j)\| \, \|H_{F^2}(\boldsymbol{\eta}_j)\| \\
&= C^2 \sum_j s_j \\
&= C^2 tr(K).
\end{aligned}$$

E a demonstração termina. ■

Será enunciado agora o principal resultado do trabalho.

Teorema 4.2.11 *Seja $K : L^2(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\sigma}) \to L^2(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\sigma})$ um operador integral positivo com núcleo k e seja F um σ-filtro de Lusin para o qual $\mathbb{E}(|k||F_n \times F_n)$ tem valores finitos, para cada $n = 1,2,\ldots$. O operador K é nuclear se, e somente se,*

$$\int_X H_{F^2}(k)(x,x)d\boldsymbol{\sigma}(x) < +\infty.$$

Se K é nuclear, então

$$tr(K) = \int_X \tilde{k}(x,x)d\boldsymbol{\sigma}(x), \tag{4.13}$$

onde

$$\tilde{k} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(k|F_n \times F_n).$$

Demonstração. Suponha primeiro que

$$\int_X H_{F^2}(k)(x,x)d\boldsymbol{\sigma}(x) < +\infty.$$

A Expressão (4.8) nos diz que $P_{n,m}$ converge para P_n na topologia de forte de $B(L^2(\boldsymbol{X},\boldsymbol{\sigma}))$. A representação

$$\begin{aligned}
k_{n,m}(x,x) &= \sum_{U\in\mathcal{P}^F_{n,m}} \frac{\chi_U(x)}{\sigma(U)^2} \int_U \int_U k(u,v)d\boldsymbol{\sigma}(u)d\boldsymbol{\sigma}(v) \\
&= \sum_{U\in\mathcal{P}^F_{n,m}} \frac{\chi_U(x)}{\sigma(U)^2} \int_X \int_X k(u,v)\chi_U(v)d\boldsymbol{\sigma}(v)\overline{\chi_U(u)}d\boldsymbol{\sigma}(u) \\
&= \sum_{U\in\mathcal{P}^F_{n,m}} \frac{\chi_U(x)}{\sigma(U)^2} \langle K\chi_U, \chi_U\rangle,
\end{aligned}$$

implica que $0 \leq k_{n,m}(x,x) \leq k_n(x,x) \leq H_{F^2}(k)(x,x)$ para todo $x \in X$. Pelo Lema 4.2.7 tem-se a desigualdade

$$tr(P_{n,m}KP_{n,m}) \leq \int_X H_{F^2}(k)(x,x)d\sigma(x)$$

vale para $n, m = 1, 2, \ldots$.

Tendo em mente a Proposição 4.1.7, pode-se aplicar a Expressão (4.8) e usar o Teorema 1.5.15 para concluir que cada operador K_n é nuclear e que

$$tr(K_n) \leq \int_X H_{F^2}(k)(x,x)d\sigma(x).$$

Ainda, $tr(K_n)$ é igual a norma traço $\|K_n\|_1$ de K_n, porque cada operador K_n é positivo.

Para terminar, pela Proposição 4.2.6 pode-se concluir que K_n converge para K na topologia forte de operadores. Outra aplicação do Teorema 1.5.15 implica que K é nuclear e que

$$\|K\|_1 = tr(K) \leq \int_X H_{F^2}(k)(x,x)d\sigma(x).$$

Por outro lado, sabendo que K é nuclear e usando os argumentos da parte anterior dessa demonstração, junto com a Proposição 1.5.14, chega-se a Expressão (4.13), pois $tr(K_{n,m}) = \int_X k_{n,m}(x,x)d\sigma(x)$ o que implica que

$$\int_X k_n(x,x)d\sigma(x) = tr(K_n) = \int_X E_n(k|F_n \times F_n)(x,x)d\sigma(x).$$

E a demonstração da primeira parte segue. Para a segunda parte veja o Lema 4.2.10. ■

4.3 Caso geral de nuclearidade de operadores integrais

Nesta parte do trabalho serão demonstrados resultados semelhantes aos já apresentados na seção 3.2 do capítulo anterior, mas sem a hipótese da positividade L^2-definida sobre o núcleo. Tais resultados podem ser encontrados em [7], no caso em que X é um conjunto particular de $\mathbb{R}^n$. Serão utilizadas conjuntamente as duas técnicas usadas no trabalho, tanto a do Capítulo 3 quanto a desse. Entretanto, as demonstrações usam mais a notação do capítulo anterior e basta repetir alguns argumentos para tratar da versão desse capítulo.

Será apresentado, inicialmente, um resultado bem conhecido que permite escrever um núcleo que não é positivo definido como combinação de núcleos que o são.

Lema 4.3.1 *Se $k \in L^2(X \times X, \sigma \times \sigma)$ então existem núcleos $L^2(X,\sigma)PD$ k_1, k_2, k_3, k_4 e escalares complexos $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ tais que*

$$k = \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2 + \alpha_3 k_3 + \alpha_4 k_4.$$

Demonstração. Sejam os núcleos J_1 e J_2 pertencentes a $L^2(X \times X, \sigma \times \sigma)$ dados por

$$J_1(x,y) = k(x,y) + \overline{k(y,x)} \text{ e } J_2(x,y) = i(k(x,y) + \overline{k(y,x)}); \quad x, y \in X.$$

Ambos são hermitianos e $2k = J_1 + iJ_2$. Aplicando o Teorema Espectral 1.4.5 para o operador $\mathcal{J}_1$, podemos encontrar uma base ortonormal $\{\xi_j\}$ de $L^2(X,\sigma)$ e uma sequência $\{\lambda_j(\mathcal{J}_1)\} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\mathcal{J}_1(\xi_j) = \lambda_j \xi_j, \quad j = 1, 2 \ldots.$$

Como $\{\xi_j \otimes \overline{\xi_l}\}$ é uma base ortonormal de $L^2(X \times X, \sigma \times \sigma)$ pode-se escrever, pela Identidade de Parseval,

$$J_1(x,y) = \sum_{l,j=1}^{\infty} \langle J_1, \xi_j \otimes \overline{\xi_l} \rangle \xi_j(x) \overline{\xi_l(y)} \text{ quase sempre}, \quad x, y \in X,$$

com convergência em $L^2(X \times X, \sigma \times \sigma)$. Aplicando o Teorema de Fubini [14, p. 119] é possível deduzir que

$$\begin{aligned}
\langle J_1, \xi_j \otimes \overline{\xi_l} \rangle &= \int_X \int_X J_1(x,y) \overline{\xi_j(x)} \xi_l(y) d\sigma(x) d\sigma(y) \\
&= \int_X \left(\int_X J_1(x,y) \xi_l(y) d\sigma(y) \right) \overline{\xi_j(x)} d\sigma(x) \\
&= \int_X \lambda_l(\mathcal{J}_1)(\xi_l)(x) \overline{\xi_j(x)} d\sigma(x) \\
&= \lambda_l(\mathcal{J}_1) \delta_{lj}.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$J_1(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j(\mathcal{J}_1) \xi_j(x) \overline{\xi_j(y)} \text{ quase sempre}, \quad x, y \in X.$$

O mesmo vale para J_2.

Agora, separe as somas J_1 e J_2 em duas, $k_1, -k_2$ e $k_3, -k_4$ respectivamente, de modo que a primeira conta com os autovalores não negativos e a segunda com os autovalores negativos. Não é difícil ver que k_1, k_2, k_3, k_4 são $L^2(X,\sigma)$PD, uma vez que seus autovalores são positivos. De fato, sendo $k_i(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^i \xi_j(x) \overline{\xi_j(y)}$ elemento de $L^2(X \times X, \sigma \times \sigma)$, pela Igualdade de Parseval

$$\sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j^i)^2 = \|k_i\|_{L^2} < \infty,$$

e portanto $\alpha_j \to 0$. Segue que o operador integral K_i é compacto, do tipo Hilbert-Schmidt, onde

$$K_i(f) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j^i \langle f, \xi_j \rangle \xi_j, \quad f \in L^2(X,\sigma).$$

Seja $B = \{\xi_j\} \cup A$ base ortonormal de L^2. Se $f \in L^2(X,\sigma)$ então, pela Identidade de Parseval,

$$f = \sum \langle f, \xi_j \rangle \xi_j + u, \quad u \perp \xi_j, \forall\, j.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\langle K_i(f), f\rangle &= \left\langle \sum \alpha_j^i \langle f, \xi_j\rangle \xi_j, \sum \langle f, \xi_j\rangle \xi_j \right\rangle\\ &= \sum_j \alpha_j^i \langle f, \xi_j\rangle \overline{\langle f, \xi_j\rangle} \langle \xi_j, \xi_j\rangle\\ &= \sum_j \alpha_j^i |\langle f, \xi_j\rangle| \geq 0.\end{aligned}$$

E satisfazem as condições do enunciado do teorema. ■

Este lema tem aplicação imediata no resultado que segue. Note que $\partial(X)$ é usado para denotar a fronteira do conjunto X e que serão tratadas nesta demonstração semelhanças deste capítulo com o Capítulo 3.

Teorema 4.3.2 *Seja $k \in L^2(X \times X, \sigma \times \sigma)$ e considere a decomposição dada pelo lema anterior. Se $K_j \in B_1(L^2(X \times X, \sigma \times \sigma))$, $j = 1, 2, 3, 4$, então $K \in B_1(L^2(X, \sigma))$ e*

$$tr(K) = \int_X \tilde{k}(x, x) d\sigma(x).$$

Ainda, se X é como no Capítulo 3, k é contínuo, $\sigma(X) < \infty$ e $\sigma(\partial(X)) = 0$, então

$$tr(K) = \int_X k(x, x) d\sigma(x).$$

Demonstração. Como $B_1(L^2(X, \sigma))$ é um espaço vetorial e k_j, $j = 1, 2, 3, 4 \in B_1(L^2(X, \sigma))$ sua combinação linear também está em $B_1(L^2(X, \sigma))$.

Para um t fixado, decomponha k^t de acordo com o Lema 4.3.1, $k^t = \alpha_1 k_1^t + \cdots + \alpha_4 k_4^t$. Aplicando argumentos do Teorema 3.2.3 ou Teorema 4.2.7, se for o caso, segue que

$$\lim_{t\to\infty} tr(K_j^t) = tr(K_j), \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Logo, é possível escrever

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} tr(K^t) &= \lim_{t\to\infty} tr(K_1^t + \cdots + K_4^t) = \lim_{t\to\infty} tr(K_1^t) + \cdots + \lim_{t\to\infty} tr(K_4^t)\\ &= tr(K_1) + \cdots + tr(K_4) = tr(K_1 + \cdots + K_4) = tr(K).\end{aligned}$$

Como $k_j \in L^2(X \times X, \sigma \times \sigma)$, $j = 1, 2, 3, 4$, se $\sigma(X) < \infty$ então pelo Teorema 3.2.1

$$tr(K_j^t) = \int_X k_j^t(x, x) d\sigma(x), \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Assim,

$$tr(K^t) = \sum_{j=1}^{4} \alpha_j \int_X k_j^t(x, x) d\sigma(x) = \int_X k^t(x, x) d\sigma(x).$$

Se $X \subset \mathbb{R}^n$ e k é contínuo, pelo Teorema da Diferenciação de Lebesgue [13, p. 98]

$$\lim_{t\to 0^+} k^t(x,y) = k(x,y), \quad x,y \in X^o.$$

Como a fronteira de X, denotada por $\partial(X)$ tem medida nula, por hipótese, segue que

$$\lim_{t\to 0^+} k^t(x,x) = k(x,x), \quad x,y \in X, \text{ quase sempre.}$$

A demonstração do Teorema 3.1.9 implica que

$$|k^t(x,y)| \leq H(k)(x,y), \quad x,y \in X.$$

Do Lema 4.2.10, tem-se que $\int_X Hk(x,x)d\sigma(x) \leq +\infty$. Usando o Teorema da Convergência Dominada [14, p. 44] para garantir que $\lim_{t\to 0^+} tr(K^t) = \int_X k(x,x)d\sigma(x)$, como $\lim_{t\to 0^+} tr(K)^t = tr(K)$, segue que

$$tr(K) = \int_X k(x,x)d\sigma(x),$$

e está demonstrada a última afirmação do teorema. ■

O corolário seguinte é muito útil em aplicações, como se pode ver em [20].

Corolário 4.3.3 *Seja $k \in L^2(X \times X, \sigma \times \sigma)$ hermitiano. Se $K \in B_1(L^2(X,\sigma))$ então*

$$tr(K) = \int_X \tilde{k}(x,x)d\sigma(x)$$

Ainda, se $X \subset \mathbb{R}^n$ no contexto do Capítulo 3, k é contínuo, $\sigma(X) < \infty$ e $\sigma(\partial(X)) = 0$ então

$$tr(K) = \int_X k(x,x)d\sigma(x).$$

Demonstração. Note que, como k é hermitiano, k_3, k_4 definidos no Lema 4.3.1 são nulos, uma vez os autovalores de k são reais, como pode-se notar pela demonstração do lema citado. Sendo então $k = \alpha_1 k_1 + \alpha_2 k_2$

$$\begin{aligned} K(\xi)(x) &= \int_X k(x,y)f(y)d\sigma(y) \\ &= \int_X [\alpha_1 k_1(x,y) + \alpha_2 k_2(x,y)]f(y)d\sigma(y) \\ &= K_1(\xi)(x) + K_2(\xi)(x), \quad \xi \in L^2(X,\sigma), \end{aligned} \tag{4.14}$$

como $K_1, K_2 \in B_1(L^2(X,\sigma))$. O resultado segue pelo teorema anterior. ■

Lema 4.3.4 *Seja $k \in L^2(X \times X, \sigma \times \sigma)$. Se $K \in B_1(L^2(X,\sigma))$ e $\sigma(X) < \infty$ então*

$$tr(K) = \int_X \tilde{k}(x,x)d\sigma(x).$$

Ainda, se X é como no Capítulo 3, se k é contínuo e $\sigma(\partial(X)) = 0$ então a equação acima pode ser melhorada para

$$tr(K) = \int_X k(x,x)d\sigma(x).$$

Demonstração. Suponha que $X \subset \mathbb{R}^n$, $K \in B_1(L^2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\sigma}))$ e $\boldsymbol{\sigma}(X) < \infty$. Lembrando do Teorema 3.1.10 que k^t é limitado e contínuo e usando 1.5.8 não é difícil ver que cada $K_j^t \in B_1(L^2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\sigma}))$. Decompondo k^t de acordo com o Lema 4.3.1 e aplicando o Teorema 3.2.1 é possível ver que

$$tr(K^t) = \int_X k^t(x,x)d\boldsymbol{\sigma}(x), \quad t > 0.$$

Usando que $\mathcal{D}_t$ é autoadjunto, a continuidade e a limitação de k^t tem-se que

$$tr(K) = \lim_{t \to 0^+} tr(K^t) = \lim_{t \to 0^+} \int_X k^t(x,x)d\boldsymbol{\sigma}(x).$$

Para demonstrar a última afirmação do teorema basta seguir o mesmo que foi feito no Teorema 4.3.2. Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é como no Capítulo 3, o argumento usa o Lema 4.2.7.$\blacksquare$

Será inserido agora um teorema que resume todos os resultados do trabalho.

Teorema 4.3.5 *Seja $k \in L^2(X \times \boldsymbol{X}, \sigma \times \sigma)$. Se $K \in B_1(L^2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\sigma}))$ então*

$$tr(K) = \lim_{j \to \infty} \left(\int_{A_j} \tilde{k}(x,x)d\boldsymbol{\sigma}(x) \right),$$

em que $A_j = (-j,j)^n \cap X$ ou subconjunto de X tal que $\boldsymbol{\sigma}(A_j) < \infty$ e $\bigcup_j A_j = X$. Ainda, se $K \in L^\infty(X)$ e $\boldsymbol{\sigma}(X) < \infty$ então

$$|tr(K)| \leq \boldsymbol{\sigma}(X)\|k\|_{L^\infty}. \tag{4.15}$$

Se $X \subset \mathbb{R}^n$, k é contínuo e $\boldsymbol{\sigma}(\partial(X)) = 0$, então

$$tr(K) = \lim_{j \to \infty} \int_{A_j} k(x,x)d\boldsymbol{\sigma}(x).$$

Em particular, se $x \in X \to K(x,x)$ e é um elemento de $L^1(X)$, então

$$tr(K) = \int_X k(x,x)d\boldsymbol{\sigma}(x).$$

Demonstração. Suponha $K \in B_1(L^2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\sigma}))$. Dos argumentos do Lema 3.2.4 ou da Proposição 4.2.6 e da Proposição 1.5.14 segue que

$$P_jKP_j \in B_1(L^2(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\sigma})), \quad j = 1, 2 \cdots,$$

e que $\lim_{j \to \infty} tr(P_jKP_j) = tr(K)$. Como $\boldsymbol{\sigma}(A_j) < \infty$, pelo lema anterior

$$tr(K) = \lim_{j \to 0^+} tr(P_jKP_j) = \lim_{j \to 0^+} \left(\lim_{t \to 0^+} tr((P_jKP_j)^t) \right).$$

Por outro lado, o operador P_jKP_j tem núcleo $k_{\chi_{A_j \times A_j}}$ a segunda igualdade do lema garante que

$$tr(P_jKP_j) = \lim_{t \to 0^+} \int_X [k(x,x)\chi_{A_j \times A_j}(x,x)]^t d\boldsymbol{\sigma}(x) = \lim_{t \to 0^+} \int_{A_j} k^t(x,x)d\boldsymbol{\sigma}(x). \tag{4.16}$$

Portanto,

$$tr(K) = \lim_{j\to\infty}\left(\lim_{t\to 0^+}\int_{A_j} k^t(x,x)\boldsymbol{d\sigma}(x)\right).$$

A Desigualdade (4.15) segue do lema anterior e da desigualdade abaixo

$$\begin{aligned}
|k^t(u,v)| &= \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}(B(0,t))^2}\left|\int_X\int_X k(x,y)\chi_{B(u,t)}(x)\chi_{B(u,t)}(y)\boldsymbol{d\sigma}(x)\boldsymbol{d\sigma}(y)\right| \\
&\leq \frac{\|k\|_{L^\infty}}{\boldsymbol{\sigma}(B(0,t))^2}\int_X\int_X \chi_{B(u,t)}(x)\chi_{B(u,t)}(y)\boldsymbol{d\sigma}(x)\boldsymbol{d\sigma}(y) \\
&\leq \|k\|_{L^\infty}.
\end{aligned}$$

Note agora que

$$|tr(P_jKP_j)| \leq \lim_{t\to 0^+}\int_{A_j}\|k\|_\infty \boldsymbol{d\sigma}(x) = \boldsymbol{\sigma}(X)\|k\|_\infty.$$

Para demonstrar o que falta é suficiente usar a Expressão (4.16) junto com o Teorema da Diferenciação de Lebesgue, lembrando de alguns argumentos usados na demonstração de 4.3.2.

Se $x \in X \to k(x,x)$ pertence a $L^1(X)$, então pelo Teorema da Convergência Dominada [14, p. 44]

$$tr(K) = \lim_{j\to\infty}\left(\lim_{t\to 0^+}\int_{A_j} k^t(x,x)\boldsymbol{d\sigma}(x)\right) = \lim_{j\to\infty}\int_{A_j} k(x,x)\boldsymbol{d\sigma}(x) = \int_X k(x,x)\boldsymbol{d\sigma}(x).$$

Isto conclui a demonstração. ■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] LITVINOV, G.L. Nuclear operator. *Encyclopedia of Mathematics*. Disponível em: <https://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=Nuclear_operator>. Acesso em: 12 jan. 2017.

[2] GOHBERG, I.; GOLDBERG, S.; KRUPNIK, N. *Traces and determinants of linear operators*. Birkhäuser, 2012.

[3] WHEELER, J. A. On the mathematical description of light nuclei by the method of resonating group structure. *Physical Review*, v. 52, n. 11, p. 1107, 1937.

[4] MINH, H.Q. Infinite-dimensional Log-Determinant divergences between positive definite trace class operators. *Linear Algebra and its Applications*, 2016.

[5] JEFFERIES, B. Traceability of positive integral operators. *Integral Equations and Operator Theory*, v. 3, n. 84, p. 419-428, 2016.

[6] JORGENSEN, P., PEDERSEN S., TIAN F. ***Extensions of Positive Definite Functions***. Springer, 2016.

[7] FERREIRA, J. C., MENEGATTO, V. A., OLIVEIRA, C. P. On the nuclearity of integral operators. *Positivity*, v. 13, n. 3, p. 519-541, 2009.

[8] FERREIRA, J. C.; MENEGATTO, V. A. Positive definiteness, reproducing kernel Hilbert spaces and beyound. *Ann. Funct. Anal*, v. 4, n. 1, p. 64-88, 2013.

[9] FERREIRA, J. C. *Decaimento dos autovalores de operadores integrais gerados por **núcleos positivos definidos***. 2008. Dissertação de mestrado. Universidade de São Paulo.

[10] BRISLAWN, C. Traceable integral kernels on countably generated measure spaces. ***Pacific Journal of Mathematics***, v. 150, n. 2, p. 229-240, 1991.

[11] OLIVEIRA, C. R. ***Introdução à Análise Funcional***. 2. ed. IMPA, 2005.

[12] GOHBERG, I.; GOLDBERG S.; KAASHOEK, M. A. *Basic Classes of Linear Operators*. Basel: Birkhäuser, 2003.

[13] FOLLAND, G. B. *Real analysis: Modern techniques and their applications*. 2. ed. John Wiley & Sons, 1999.

[14] BARTLE, R. G. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley & Sons, 1966.

[15] LIMA, E. L. ***Análise Real: funções de uma variável***. 11. ed. v. 1. IMPA, 2011.

[16] CASTRO, M. H., MENEGATTO, V. A., PERON A. Integral operators generated by Mercer-like kernels on topological spaces. *Coloquium Mathematicum*. 2012. p. 125-138.

[17] FERREIRA, J. C.; MENEGATTO, V. A. Eigenvalues of integral operators defined by smooth positive definite kernels. *Integral Equations and Operator Theory*, v. 64, n. 1, p. 61-81, 2009.

[18] CASTRO, M. H., MENEGATTO, V. A., PERON A. Traceability of positive integral operators in the absence of a metric. *Banach Journal of Mathematical Analysis*, v. 6, n. 2, p. 98-112, 2012.

[19] LIMA, E. L. ***Curso de Análise***. 11. ed. v. 2. IMPA, 2011.

[20] UĞURLU, E., BAIRAMOV, E. The Spectral Analysis of a Nuclear Resolvent Operator Associated with a Second Order Dissipative Differential Operator. *Computational Methods and Function Theory*, p. 1-17, 2016.

ÍNDICE REMISSIVO