

RAFAEL ROMÃO DA SILVA MELO

**MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS
TURBULENTOS COM EFEITOS TÉRMICOS,
UTILIZANDO A METODOLOGIA DA FRONTEIRA IMERSA
E MALHA ADAPTATIVA**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
2017**

RAFAEL ROMÃO DA SILVA MELO

**MODELAGEM E SIMULAÇÃO DE ESCOAMENTOS
TURBULENTOS COM EFEITOS TÉRMICOS,
UTILIZANDO A METODOLOGIA DA FRONTEIRA IMERSA
E MALHA ADAPTATIVA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **DOUTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de concentração: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos.

Orientador: Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto

Uberlândia - MG
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

M528m Melo, Rafael Romão da Silva, 1988-
2017 Modelagem e simulação de escoamentos turbulentos com efeitos

térmicos, utilizando a metodologia da fronteira imersa e malha adaptativa / Rafael Romão da Silva Melo. - 2017.

193 f. : il.

Orientador: Aristeu da Silveira Neto.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa
de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.

Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Mecânica dos fluidos - Teses. 3.
Escoamento turbulento - Teses. I. Silveira Neto, Aristeu da, 1955- II.
Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica. III. Título.

"Pra que somar se a gente pode dividir?"

Vinicius de Moraes

À minha família

AGRADECIMENTOS

A Deus e à Nossa Senhora pelas bênçãos e sabedoria que me permitiu finalizar este trabalho;

À minha família que tanto amo, meu porto seguro, que sempre estão ao meu lado;

Ao meu orientador Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto pela amizade, orientação e ensinamento;

Aos meus Amigos, sem os quais seria difícil seguir em frente, estando ao meu lado ou mesmo distantes;

À minha namorada pelo apoio incondicional;

Aos meus Amigos e Colegas do MFLAB, que de uma forma ou de outra me contribuíram com este trabalho;

À Universidade Federal de Uberlândia e ao Programa de Pós-Graduação em de Engenharia Mecânica pela oportunidade de realizar esta tese;

À Capes, FAPEMIG, CNPq e PETROBRAS pelo apoio financeiro.

MELO, R. R. S., **Modelagem e Simulação de Escoamentos Turbulentos com Efeitos Térmicos, Utilizando a Metodologia da Fronteira imersa e Malha Adaptativa** 2017. 193 f. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

RESUMO

Na presente tese apresentam-se a modelagem e simulações de escoamentos turbulentos com presença de geometrias não-cartesianas, utilizando o método da fronteira imersa para modelar os corpos imersos e malhas cartesianas bloco-estruturadas para o domínio de fluido. Também foram modelados os efeitos térmicos através da equação de transporte para a energia térmica e fronteira imersa térmica com condições de primeira, segunda e terceira espécies. Para isto primeiramente foram discretizadas e implementadas as equações da continuidade e de Navier-Stokes, através das formulações conservativa e não conservativa, nas formas totalmente implícita e semi-implícita. Foram implementados e utilizados modelos de turbulência buscando uma melhor modelagem em malha adaptativa. Nesse contexto, foram discretizados e implementados dois modelos da classe RANS, o modelo de Spalart-Allmaras e o modelo $k-\omega$ de Wilcox, e para modelos sub-malha foram implementados os modelos de Smagorinsky, com ou sem função de amortecimento de Van Driest, e o modelo dinâmico de Germano, utilizando também a técnica da filtragem explícita. Para a modelagem de geometrias não-cartesianas, foi utilizada a metodologia da fronteira imersa, tanto para a fluido-dinâmica, quanto para a parte térmica. Foram modelados os efeitos térmicos tanto na fluido-dinâmica quanto na fronteira imersa térmica, sendo que foram implementadas as condições de primeira, segunda e terceira espécies. Todo o desenvolvimento foi realizado no código AMR3DP, desenvolvido no Laboratório de Mecânica dos Fluidos da Universidade Federal de Uberlândia em parceria com a PETROBRAS. Foram apresentados resultados de verificação e validação de todo o desenvolvimento realizado no contexto da presente tese.

Palavras Chave: modelagem da turbulência, malha adaptativa, metodologia da fronteira imersa, equação da energia.

MELO, R. R. S., **Modeling and Simulation of Turbulent Flows with Thermal Effects, Using the Immersed Boundary Method and Adaptive Mesh** 2017. 193 f. Doctor Thesis, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

ABSTRACT

In the present thesis we present the modeling and simulations of turbulent flows around non-cartesian geometries, using the immersed boundary method to model immersed bodies, and block-structured cartesian meshes for the fluid domain. Thermal effects were also modeled through the transport equation for thermal energy and thermal immersed boundary conditions with first, second and third type. First, the continuity and Navier-Stokes equations were discretized and implemented through conservative and non-conservative formulations, in the totally implicit and semi-implicit forms. Turbulence models were implemented and used to better model in adaptive mesh. In this context, two models of the RANS class, the Spalart-Allmaras model and the Wilcox $k-\omega$ model were discretized and implemented, and for Subgrid-Scale Modeling were implemented the Smagorinsky model, with or without the Van Driest damping function, and Germano's dynamic model, also using the explicit filtering technique. For the modeling of non-Cartesian geometries, the immersed boundary methodology was used for the fluid-dynamic and the thermal effects. The thermal effects were modeled in the flow and in the immersed geometry, so the first, second and third types of boundary conditions were implemented. All the development was performed in the AMR3DP code, developed in the Fluid Mechanics Laboratory of the Federal University of Uberlândia, in partnership with PETROBRAS. Results of verification and validation of all the development carried out in the context of the present thesis were presented.

Keywords: turbulence modeling, adaptive mesh, immersed boundary method, energy equation.

Lista de Figuras

1.1	Figura esquemática mostrando uma estrutura turbilhonar em duas dimensões.	2
1.2	Diferentes tipos de malhas para composição de uma geometria.	5
2.1	Refinamento adaptativo aplicado nas regiões de interesse (BERGER; COLELLA, 1989).	21
2.2	Tensão cisalhante para ambas as malhas comparadas com DNS (MITRAN, 2001). .	22
2.3	Jato plano e malha adaptativa (PANTANO et al., 2005).	22
2.4	Malha adaptada em um escoamento sobre um cilindro de seção quadrada (HAY; VISONNEAU, 2005).	23
2.5	Estruturas formadas em uma camada de mistura temporal tridimensional e os blocos de refinamento (LEONARD et al., 2006).	23
2.6	Escoamento sobre uma aza e malha adaptativa (CAPIZZANO, 2010).	24
2.7	Escoamento sobre uma esfera e malha adaptativa em um plano central (VANELLA et al., 2010).	24
2.8	Tensões de cisalhamento e malha adaptada ao escoamento (ULLMANN et al., 2013).	25
2.9	Campo de viscosidade em um jato turbulento reativo (MURALIDARAN; MENON, 2014).	25
2.10	Campo de vorticidade no escoamento sobre um cilindro e malha adaptativa (VANELLA et al., 2014).	26
2.11	Campo de vorticidade em torno do carro simplificado e malha adaptativa (ANTE-PARA et al., 2014).	26

2.12 Escoamento em torno de um cilindro de seção quadrada: malha e domínio de processos (ANTEPARA et al., 2015)	27
2.13 Escoamento sobre um perfil aerodinâmico com ângulo de ataque $\alpha = 8,64^\circ$ e blocos de refinamento em torno do perfil e em regiões de maior vorticidade (JOST; ZHANG, 2016)	27
2.14 Iso-valores de temperatura em um escoamento (OULD-ROUSS et al., 2010)	28
3.1 Esquema respresentativo das malhas euleriana e lagrangiana.	34
4.1 Volume de controle elementar utilizada para a discretização das equações de transporte (VEDOVOTO, 2011)	60
4.2 Volume finito uniforme e representação das distâncias para interpolar um escalar qualquer na face.	61
4.3 Malha cartesiana refinada localmente em pontos próximos a uma curva genérica. .	62
4.4 Esquemas de interpolação para criar os volumes fantasmas entre níveis.	63
4.5 Preenchimento dos volumes fantasmas entre blocos com o mesmo nível de malha.	63
4.6 Operação de prolongamento (VILLAR, 2007)	65
4.7 Operação de restrição (VILLAR, 2007)	66
4.8 Esquema ilustrativo mostrando os níveis virtuais e níveis físicos.	67
5.1 Malha uniforme com 16^3 volumes divididos em quatro processos.	73
5.2 Soluções para as variáveis resolvidas na malha uniforme 16^3	74
5.3 Malha composta utilizada na verificação.	75
5.4 Soluções para as variáveis resolvidas na malha não uniforme.	76
5.5 Solução manufaturada para a variável T	78
5.6 Cavidade tridimensional com tampa deslizante.	79
5.7 Magnitude da velocidade no plano $z = 0,5$ m para as duas diferentes malhas, para os diferentes número de Reynolds.	81

5.8 Iso valores da magnitude da velocidade para diferentes número de Reynolds	83
5.9 Perfis de velocidade na direção x em função de y para diferentes números de Reynolds. \square Ku et al. (1987); \circ Deshpande e Milton (1998); \times Prasad e Koseff (1989); --- Presente, resolução base 16^3 ; — Presente, resolução base 32^3	84
5.10 Perfis de velocidade na direção y em função de x para diferentes números de Reynolds. \square Ku et al. (1987); \circ Deshpande e Milton (1998); \times Prasad e Koseff (1989); --- Presente, resolução base 16^3 ; — Presente, resolução base 32^3	85
5.11 Cavidade térmica	87
5.12 Malha euleriana no plano central normal à z e cavidade formada por elementos lagrangianos com resolução $1/64$	88
5.13 Iso-valores de temperatura para número de Rayleigh $Ra = 10^3$	89
5.14 Iso-valores de temperatura para número de Rayleigh $Ra = 10^3$, utilizando fronteira imersa com duas zonas de forçagem.	89
5.15 Iso-valores de temperatura para número de Rayleigh $Ra = 10^3$	90
5.16 Iso-valores de temperatura no plano central para diferentes número de Rayleigh. . .	91
5.17 Perfis de temperatura próximo a parede para diferentes números de Rayleigh e diferentes resoluções, comparados com a literatura (MAYNE et al., 2000; WAN et al., 2001).	92
5.18 Perfis de velocidade para diferentes número de Rayleigh e diferentes resoluções, comparados com literatura (PADILLA et al., 2012).	93
5.19 Malhas euleriana e lagrangiana utilizadas para validação da condição de terceira espécie.	95
5.20 Perfis de temperatura ao longo da direção r comparados com a solução analítica . .	96
6.1 Iso valor do critério $Q = 1,0$ para diferentes modelos de turbulência.	100
6.2 Campos de viscosidade efetiva no plano central em $z = 0,5$ m para diferentes modelos de turbulência.	101
6.3 Comparação da viscosidade efetiva na linha central em $y = 0,5$ m e $z = 0,5$ m. . .	102

6.4	Perfis de velocidade u em função de y para os diferentes modelos comparados com o experimento de Prasad e Koseff (1989).	103
6.5	Perfis de velocidade v em função de x para os diferentes modelos comparados com o experimento de Prasad e Koseff (1989).	104
6.6	Perfis RMS de u em função de y para os diferentes modelos comparados com o experimento de Prasad e Koseff (1989).	105
6.7	Perfis RMS de v em função de x para os diferentes modelos comparados com o experimento de Prasad e Koseff (1989).	106
6.8	Esquema do túnel de vento (JOVIC; DRIVER, 1994).	107
6.9	Esquema representativo do domínio do degrau.	108
6.10	Malhas lagrangianas utilizadas para modelar o degrau descendente.	109
6.11	Malhas eulerianas iniciais no plano central em $z = 2h$	110
6.12	Velocidade na direção x no plano central $z = 2h$ utilizando o modelo de Spalart-Allmaras para as diferentes configurações de malha.	111
6.13	Perfis de velocidade na direção x em função de y/h em diversas seções no plano central $z = 2h$, comparados com Jovic e Driver (1994).	111
6.14	Determinação do ponto de recolamento para os dois casos teste.	112
6.15	Campos de magnitude de velocidade no plano central em $z/h = 2,0$ para diferentes modelos de turbulência.	114
6.16	Iso valores de vorticidade para diferentes modelos de turbulência.	116
6.17	Campos de viscosidade no plano central em $z/h = 2,0$ para diferentes modelos de turbulência.	117
6.18	Iso valor do critério $Q = 3,2$ para o caso com modelo dinâmico e filtragem explícita.	118
6.19	Disposição das sondas para captura dos resultados.	119
6.20	Perfis de velocidade média na direção x em função de y/h em diversas seções no plano central $z = 2h$, comparados com Jovic e Driver (1994).	120

6.21	Perfis do RMS da velocidade na direção x em função de y/h em diversas seções no plano central $z = 2h$, comparados com Jovic e Driver (1994)	121
6.22	Determinação do comprimento de recolamento através dos perfis médios de velocidade média próximos a parede inferior.	121
7.1	Aparato experimental (MISUMI et al., 2003)	124
7.2	Malha inicial euleriana apresentada no plano central em z e malha lagrangiana.	124
7.2	Iso valor do critério Q para diferentes número de Rayleigh.	127
7.3	Blocos de refinamento referentes a malha mais fina e planos com malha euleriana, referente aos dois níveis mais finos, para $Ra = 1,50 \cdot 10^{10}$	128
7.4	Iso valores de temperatura para diferentes número de Rayleigh.	129
7.5	Comparação do escoamento com imagem de Misumi et al. (2003), para $Ra = 1,50 \cdot 10^{10}$	129
7.6	Sondas numéricas posicionadas ao redor do cilindro.	130
7.7	Condição inicial para temperatura.	131
7.8	Campos de temperatura no plano central em $z = 2h$	132
7.9	Iso valor do critério Q colorido com a magnitude da velocidade e iso-valores de temperatura.	133
7.10	Iso valores de temperatura e planos transversais com representação da malha próximo ao chão inferior.	133
7.11	Campos de vorticidade e temperatura.	134
7.12	Perfis de temperatura adimensionalizada em função de y/h em diversas seções no plano central $z = 2h$	135
7.13	Perfis RMS da temperatura adimensionalizada em função de y/h em diversas seções no plano central $z = 2h$	135
A.1	Visão bidimensional de um volume euleriano genérico.	151

B.1	Independência de malha para o perfil de velocidade u em função de y no plano central.	159
B.2	Independência de malha para o perfil de velocidade v em função de x no plano central.	160
B.3	Independência de malha para o perfil de RMS de u em função de y no plano central.	160
B.4	Independência de malha para o perfil de RMS de v em função de x no plano central.	161

Lista de Tabelas

5.1	Norma L_2 para velocidades e pressão utilizando malha uniforme e formulação conservativa	74
5.2	Norma L_2 para velocidades e pressão utilizando malha uniforme e formulação não conservativa	75
5.3	Norma L_2 para velocidades e pressão utilizando malha composta e formulação conservativa	76
5.4	Norma L_2 para velocidades e pressão utilizando malha composta e formulação não conservativa	76
5.5	Norma L_2 para o escalar genérico utilizando malha uniforme.	78
5.6	Norma L_2 para o escalar genérico utilizando malha composta.	78
5.7	Nusselt médio na parede quente para diferentes valores de Rayleigh comparados com dados da literatura (MAYNE et al., 2000; WAN et al., 2001; PADILLA et al., 2012).	93
5.8	Norma L_2 calculado na fronteira imersa.	94
6.1	Comprimento de recolamento dos casos testes comparados com dados experimentais.	112
6.2	Definição dos casos analisados.	112
6.3	Comprimento de recolamento comparados com dados experimentais.	122
7.1	Número de Nusselt médio para diferentes número de Rayleigh comparado com a literatura.	130

Lista de Símbolos

SIMBOLOS GREGOS

α	- difusividade térmica, coeficiente do modelo k- ω ;
α_0	- coeficiente da discretização temporal no tempo $t - \Delta t$;
α_1	- coeficiente da discretização temporal t ;
α_2	- coeficiente da discretização temporal $t + \Delta t$;
α_t	- difusividade turbulenta;
β	- coeficiente do modelo k- ω ;
β^*	- coeficiente do modelo k- ω ;
Δt	- passo de tempo;
ΔV	- volume lagrangiano;
Δx	- comprimento da malha na direção x;
Δy	- comprimento da malha na direção y;
Δz	- comprimento da malha na direção z;
ξ	- termo fonte de reação química;
φ	- escalar passivo genérico;
κ	- coeficiente do modelo SA;
μ	- viscosidade dinâmica do fluido;
ν	- viscosidade cinemática do fluido;
\tilde{v}	- Variável auxiliar de viscosidade;
θ_0	- coeficiente da discretização espacial no tempo $t - \Delta t$;
θ_1	- coeficiente da discretização espacial no tempo t ;
θ_2	- coeficiente da discretização espacial no tempo $t + \Delta t$;
ρ	- massa específica do fluido;
σ	- coeficiente do modelo SA;
σ	- coeficiente do modelo k- ω ;
σ^*	- coeficiente do modelo k- ω ;
τ_{ij}	- tensor de Reynolds;
χ	- razão de viscosidade;
ω	- coeficiente de difusão, dissipação específica, vorticidade;

SIMBOLOS LATINOS

C_{b1}	- coeficiente do modelo SA;
C_{b2}	- coeficiente do modelo SA;
C_P	- calor específico;
C_s	- constante de Smagorinsky;
C_{v1}	- coeficiente do modelo SA;
C_{w1}	- coeficiente do modelo SA;
C_{w2}	- coeficiente do modelo SA;
C_{w3}	- coeficiente do modelo SA;
d	- distância a parede;
d^+	- distância relativa;
D_{ij}	- função distribuição;
e	- erro do multigrid;
f_i	- termo fonte de força euleriano;
f_{TT}	- termo fonte na equação da energia;
f_{v1}	- função de amortecimento 1 do modelo SA;
f_{v2}	- função de amortecimento 2 do modelo SA;
f_w	- função aplicado ao termo de destruição no modelo SA;
\vec{F}	- força no ponto lagrangiano;
\vec{F}_t	- termo força térmica no ponto lagrangiano;
g	- gravidade, variável auxiliar no modelo SA;
h	- comprimento característicos do volume euleriano;
h_c	- coeficiente de convecção;
k	- coeficiente de condutividade térmica, energia cinética turbulenta;
L_{ij}	- tensor de Leonard;
M_{ij}	- tensor de Germano;
N_{gl}	- número de graus de liberdade;
p	- pressão;
P	- pressão no ponto lagrangiano;
Pr_t	- número de Prandtl turbulento;
Q	- critério Q ;
Q_j	- escalar de fluxo;
r	- variável auxiliar no modelo SA;
R	- resíduo do multigrid;
Re	- número de Reynolds;
RHS_i	- termo do lado direito da equação do momentum no ponto lagrangiano;
S	- termo fonte genérico;
$ S_{ij} $	- norma do tensor taxa de deformação;
t	- tempo físico;
T	- temperatura;
\bar{T}	- temperatura filtrada;

T_L^*	- temperatura auxiliar para multi-forçagem direta;
u	- velocidade na direção x ;
u_i	- componente da velocidade na direção i ;
\bar{u}	- velocidade média;
u'	- velocidade filtrada;
U_i	- velocidade no ponto lagrangiano;
U^*	- Velocidade auxiliar para multi-forçagem direta;
v	- velocidade na direção y ;
V_xPro	- velocidade tangencial em x na Fl;
V_yPro	- velocidade tangencial em y na Fl;
V_zPro	- velocidade tangencial em z na Fl;
x_i	- coordenada da direção i ;
w	- velocidade na direção z ;

SIGLAS

CFD	- Computational Fluid Dynamics;
DES	- Detached-Eddy Simulation;
DNS	- Direct Numerical Simulation;
FI	- Fronteira imersa;
LES	- Large-Eddy Simulation;
$RANS$	- Reynolds Average Navier-Stokes;
$URANS$	- Unsteady Reynolds Average Navier-Stokes;

OPERADORES

Δ	- variação;
∂	- derivada parcial;
∇	- operador divergente;
\int	- integral;
Σ	- somatório;
\prod	- produtório.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Modelagem da turbulência	2
1.2 Turbulência e regiões parietais	3
1.3 Malha cartesiana bloco-estruturada	5
1.4 Objetivos	5
1.5 Metodologia	7
1.6 Estrutura da presente tese	8
2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	11
2.1 Modelagem da turbulência	11
2.1.1 Metodologia RANS ou URANS	12
2.1.2 Metodologia LES	14
2.1.3 Metodologia Híbrida RANS/LES	16
2.2 Metodologia da Fronteira Imersa	17
2.3 Malha adaptativa	20
2.4 Escoamentos turbulentos com troca de energia térmica	28
3 MODELAGEM MATEMÁTICA	31
3.1 Formulação diferencial para a fluido dinâmica	31
3.2 Formulação diferencial para a equação da energia	32

3.3	Formulação para a fronteira imersa dinâmica	33
3.4	Formulação para a fronteira imersa térmica	35
3.5	Formulação para a turbulência	37
3.5.1	Equações médias de Reynolds	38
3.5.2	Equações de Navier-Stokes filtradas	40
3.5.3	Modelagem da turbulência utilizando médias de Reynolds	41
3.5.3.1	Modelo de Spalart-Allmaras	43
3.5.3.2	Modelo $k - \omega$	45
3.5.4	Modelagem sub-malha da turbulência	46
3.5.4.1	Modelo sub-malha de Smagorinsky	48
3.5.4.2	Modelagem dinâmica sub-malha	50
3.5.4.3	Modelagem sub-malha utilizando filtragem explícita	51
4	MODELAGEM NUMÉRICA	57
4.1	Acoplamento pressão-velocidade	57
4.2	Discretização das equações de Navier-Stokes	59
4.3	Malha bloco estruturada	62
4.4	O Método Multigrid	63
4.5	Sondas numéricas	67
5	VERIFICAÇÃO E VALIDAÇÃO	71
5.1	Verificação para o balanço da quantidade de movimento linear	72
5.2	Verificação da equação da energia	77
5.3	Validação da implementação das equações para quantidade de movimento linear: cavidade com tampa deslizante	79
5.4	Validação para fronteira imersa: cavidade cúbica com diferença de temperatura	86

5.5 Validação para terceira espécie: cilindro sólido em meio fluido	94
6 VALIDAÇÃO DOS MODELOS DE TURBULÊNCIA	97
6.1 Cavidade com tampa deslizante	97
6.2 Degrau descendente	107
7 ESCOAMENTOS TURBULENTOS COM TRANSFERÊNCIA TÉRMICA	123
7.1 Cilindro aquecido	123
7.2 Degrau descendente	130
8 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	137
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	141
A.1 Implementação dos coeficientes para solução das velocidades:	151
A.2 Implementação dos coeficientes para da equação elíptica:	155
A.3 Implementação do passo corretor:	156
B.1 Independência de malha para cavidade com tampa deslizante em regime turbulento	159

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

Na maioria das aplicações em engenharia tem-se a necessidade de resolver algum tipo de escoamento, podendo o fluido estar no estado líquido ou gasoso, como, por exemplo, escoamentos sobre uma aeronave, sistemas de bombeamento ou de troca térmica, sistema de arrefecimento de um automóvel, entre diversas outras aplicações. Para grande parte destas aplicações, as equações de Navier-Stokes podem ser utilizadas, considerando que o fluido possui viscosidade, variando linearmente com a tensão no fluido Newtoniano .

Com a exceção de alguns casos, a maioria das aplicações, e até mesmo em fenômenos da natureza, envolvem escoamentos ocorrem de uma forma específica, no regime turbulento. Na mecânica dos fluidos, turbulência é um termo usado para descrever escoamentos que possuem flutuações no campo de velocidade, que são dependentes do tempo e da posição no espaço. Quanto mais intensa é a turbulência, maiores serão as flutuações da velocidade no espaço e no tempo, implicando em uma maior quantidade de estruturas turbilhonares.

A turbulência é caracterizada por sua multiplicidade de escalas, sendo que quanto mais turbulento o escoamento, maior é a quantidade de escalas a serem calculadas. A Figura (1.1) apresenta uma figura esquemática em duas dimensões de uma estrutura turbilhonar, sendo possível observar que uma grande escala possui em sua composição várias estruturas de pequenas escalas. Assim sendo, as pequenas escalas possuem maiores frequências comparado com as grandes escalas, que são caracterizadas por baixas frequências.

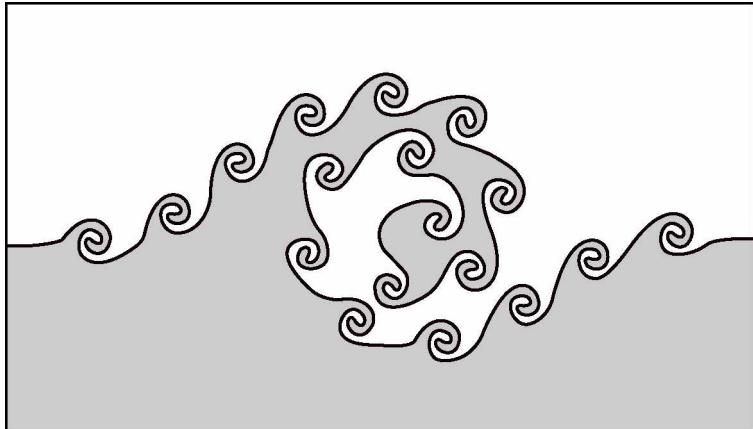


Figura 1.1: Figura esquemática mostrando uma estrutura turbilhonar em duas dimensões.

1.1 Modelagem da turbulência

As equações de Navier-Stokes são suficientes para resolver qualquer tipo de escoamento, inclusive escoamentos turbulentos. Contudo, na prática estas equações são utilizadas somente para calcular escoamentos simples, laminares e para escoamentos turbulentos a baixos valores do número de Reynolds. Isto ocorre primeiramente porque é possível encontrar a solução analítica destas equações apenas para casos muito simplificados, pois quando são consideradas duas ou três dimensões, e ainda problemas transitórios, as não linearidades destas equações dificultam encontrar a solução analiticamente.

Isso se deve ao fato que ao resolver tais equações numericamente através de DNS, ou simulação numérica direta, necessita-se de uma malha muito refinada, de tal forma que esta malha permita simular, ou representar, todas as escalas da turbulência, inclusive as menores que estão presentes em maior frequência. Dependendo do caso a solução se torna inviável devido a necessidade de um grande recurso computacional, tanto em memória quanto em processamento. Faz-se necessário então encontrar uma forma alternativa, a partir das equações de Navier-Stokes.

Nos últimos anos, a forma que pesquisadores e estudiosos encontraram para resolver este problema foi através da modelagem da turbulência. Boussinesq, ainda em 1877, propôs uma outra grandeza característica para o escoamento, a viscosidade turbulenta. Esta é utilizada na representação da tensão existente na turbulência através de um modelo similar ao modelo para a tensão viscosa molecular.

Os primeiros modelos criados foram modelos algébricos bem simples, baseados em

dados empíricos. Estes são modelos muito limitados, podendo ser utilizados em casos similares aqueles em que os experimentos foram feitos, significando que quanto mais estes modelos são extrapolados para casos diferentes, maiores serão os erros.

Com o avanço das técnicas numéricas para solução de equações diferenciais e do incremento no hardware, foi possível colocar em prática o conceito de média temporal das equações de Navier-Stokes, conceito proposto por Boussinesq-Reynolds em 1895. Denominadas equações de Navies-Stokes médias, do inglês *Reynolds-averaged Navier–Stokes equations*, ou simplesmente RANS. São equações que modelam o escoamento turbulento médio. Foram desenvolvidos vários modelos da classe RANS ao longo dos anos.

Cada um dos modelos da classe RANS utilizam equações diferenciais as quais calculam diretamente ou indiretamente a viscosidade turbulenta. Uma característica comum destes modelos é que as equações de transporte são calibradas empiricamente, sendo necessário então fazer um estudo, buscando o melhor modelo para uma determinada aplicação. Modelos do tipo RANS não são tão limitados quanto modelos algébricos, porém também não são aplicáveis em qualquer caso. Por exemplo, um modelo RANS que funciona bem em uma camada de mistura entre duas correntes pode não funcionar muito bem em problemas que envolvem camada limite formada em uma superfície sólida.

Conforme os recursos computacionais foram aumentando e evoluindo, uma nova classe de modelagem se tornou mais aplicável, a Simulação das Grandes escalas, do inglês *Large Edge Simulation*, ou LES. Este tipo de modelagem divide os espectros em duas partes, as grandes escalas, as quais são calculadas, e as pequenas escalas, cujas interações não lineares com a banda das grandes escalas são modeladas. A banda de pequenas escalas possuem comprimentos característicos menores que o comprimento da malha. Este tipo de modelagem requer uma malha mais refinada comparado com modelos da classe RANS, porém possui a vantagem de ser aplicado a qualquer situação física, além de representar o comportamento do escoamento ao longo do espaço e também do tempo, diferente de modelos RANS que só representam a média temporal dos escoamentos turbulentos.

1.2 Turbulência e regiões parietais

Quando existe interação entre fluido e uma parede, o que ocorre na maioria das aplicações em engenharia, a complexidade da solução aumenta, uma vez que o não deslizamento

imposto pela parede interfere diretamente na troca de informações entre a turbulência e o escoamento médio. Assim sendo, existem duas diferentes formas de resolver numericamente escoamentos turbulentos sobre geometrias, sejam estas simples ou complexas: utilizando malha que se adapta à geometria, ou utilizando campos de força adicionados a equação do momentum, representando uma geometria de maneira indireta, denominado Método da Fronteira Imersa (SILVA et al., 2003).

O primeiro método, utilizando uma malha que se adapta ao corpo, é bastante acurado por possibilitar aplicar a condição de contorno diretamente nos pontos desejados. Porém a criação da malha para este tipo de método gera uma malha não estruturada, e ainda requer um elevado custo computacional. A Figura (1.2.a) apresenta este tipo de malha adaptado em uma geometria genérica.

Uma alternativa é utilizar a técnica cut-cell, "célula cortada", onde é utilizada uma malha cartesiana em todo o domínio, e as células por onde passa a geometria são divididas em parte fluido e parte sólido, formando poliedros. Possuem a vantagem de poder impor diretamente a condição de contorno na fronteira, e também facilidade para trabalhar com adaptatividade em torno de uma geometria. Contudo necessita-se de algoritmos complexos para criar cada poliedro, por existir vários casos particulares de formas geométricas, principalmente para casos tridimensionais. E ainda, caso algum poliedro possua um tamanho muito pequeno pode ocorrer divergência numérica, ou então uma convergência lenta ao resolver algum sistema linear. Um exemplo desta malha é apresentado na Fig. (1.2.b).

O segundo método apresenta a vantagem de poder utilizar uma malha cartesiana para todo o domínio de fluido, e uma malha formada por pontos, modelando a geometria imersa. São necessários algoritmos que calculem um campo de força adicional no domínio de fluido, ou domínio euleriano, nos volumes próximos a malha da geometria, ou domínio lagrangiano, representando assim a fronteira. Esta metodologia facilita a simulação do escoamento sobre geometrias muito complexas e moveis, sendo então a forma escolhida para representar um corpo imerso na presente tese. A Figura (1.2.c) apresenta as duas malhas utilizadas nesta metodologia.

Tão importante quanto o tipo de malha utilizada é o refinamento da mesma. Dentre os diversos métodos de refinamento que existem, um que se destaca é o refinamento utilizando malha cartesiana bloco-estruturada.

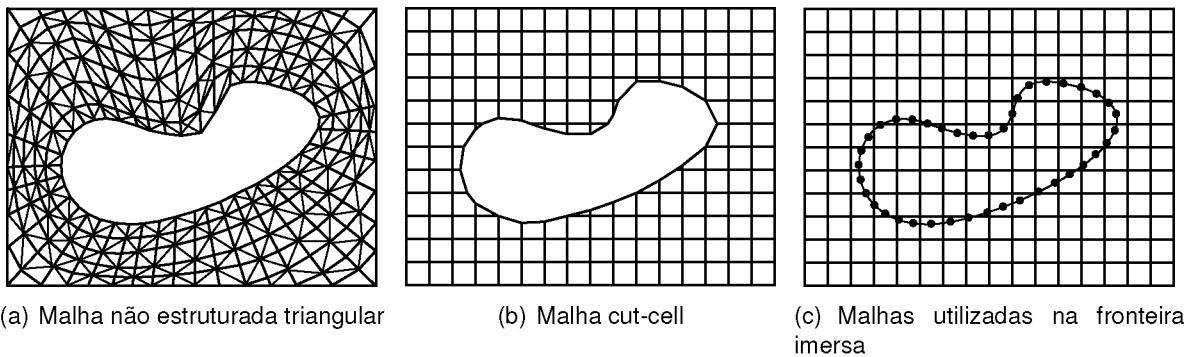


Figura 1.2: Diferentes tipos de malhas para composição de uma geometria.

1.3 Malha cartesiana bloco-estruturada

Mesmo com a modelagem da turbulência, quanto maior o refinamento da malha, melhor será a solução. É possível utilizar uma malha refinada no domínio inteiro, porém a solução se torna inviável computacionalmente, dependendo do tamanho do domínio. Uma alternativa para reduzir o custo computacional é utilizar malha cartesiana bloco-estruturada, as quais utilizam uma sequência de malhas devidamente aninhadas, refinando em regiões específicas. Assim, este refinamento é dado pela união de malhas retangulares orientadas com espaçamentos sequencialmente menores (VILLAR, 2007).

Existem diversas vantagens ao se escolher malha cartesiana para refinamento local, entre elas seria a maior facilidade para discretização das equações diferenciais para a solução numérica. Ainda, criar blocos de malhas cartesianas mais finas em determinada região é trivial, quando comparado com os métodos de refinamento com malha não-estruturada, economizando tempo e esforço computacional para criação desta malha. Outra vantagem seria a facilidade de aplicar um refinamento em regiões necessárias, como por exemplo perto de paredes, ou ainda sobre estruturas turbilhonares, facilitando também a interpolação de dados de uma malha antiga para uma nova quando acontece a adaptatividade.

1.4 Objetivos

O primeiro objetivo colocado na presente tese é resolver escoamentos turbulentos utilizando modelagem da turbulência em domínios com presença de geometrias complexas, utilizando o método da fronteira imersa para modelar os corpos imersos, e malhas cartesianas bloco-estruturadas para o domínio de fluido. Além da parte fluido dinâmica, objetiva-se também

resolver numericamente a equação da energia, também utilizando malhas bloco-estruturadas, incluindo ainda a fronteira imersa térmica com condição de contorno de primeira, segunda e terceira espécie.

Outra questão muito importante é a modelagem submalha no contexto de malha composta. A modelagem submalha requer um comprimento característico que é calculado com o tamanho das células de discretização. Como se trata de malha adaptativa com diferentes níveis de refinamento, ocorre que a viscosidade turbulenta apresenta descontinuidades na malha composta. Este é outro ponto a ser tratado na presente tese.

Assim, os objetivos específicos são:

- Revisão bibliográfica e estudo visando estabelecer o estado da arte sobre (i) fluido dinâmica computacional, (ii) modelos de turbulência, abrangendo modelagem RANS, leis de parede, LES e DES, (iii) metodologias de fronteira imersa;
- Utilização do código AMR3DP, com o qual são resolvidas as equações de Navier-Stokes na forma tridimensional transitória utilizando malha multi bloco com adaptação e refinamento local;
- Discretização e implementação das equações de Navier-Stokes na forma conservativa e não conservativa no código AMR3DP, utilizando uma formulação totalmente implícita e semi-implícita;
- Solução das velocidades e correção da pressão utilizando o método multigrid-multinível geométrico, em paralelo.
- Implementação de modelos de turbulência no código AMR3DP;
- Paralelização dos modelos de turbulência;
- Solução da equação da energia no código AMR3DP utilizando multi níveis e paralelismo através da adaptação de uma sub-rotina desenvolvida para a versão atual do código;
- Implementação de um modelo de fronteira imersa no código AMR3DP que funcione bem em escoamentos turbulentos. Implementação da fronteira imersa térmica para condições de contorno térmicas de primeira, segunda e terceira espécie;

- Verificação e validação das implementações realizadas, incluindo a parte fluido dinâmica, a parte térmica e a fronteira imersa dinâmica e térmica. Validação dos modelos de turbulência implementados;
- Simulação de escoamentos turbulentos inertes com transferência de energia térmica, utilizando as implementações das equações de Navier-Stokes, equação da energia térmica, modelos de turbulência e fronteira imersa fluido-dinâmica e térmica;

Em resumo, a presente tese tem caráter multiproblemas e multimétodos: modelagem da turbulência, fronteira imersa dinâmica e térmica e refinamento adaptativo de malha.

1.5 Metodologia

Para contemplar os objetivos estabelecidos foram discretizadas e implementadas as equações de Navier-Stokes, na forma conservativa e não conservativa, no código AMR3DP, código desenvolvido no MFlab, o qual utiliza malha adaptativa bloco-estruturada. Foi utilizado o método da projeção proposto por Choi e Moin (1994), e o método de solução totalmente implícita apresentado no trabalho de Vedovoto (2011) para a solução do transporte da quantidade de movimento linear. Para a discretização foi utilizada a técnica dos volumes finitos. Foi criado um sistema linear para cada uma das três componentes de velocidade, os quais foram implementados e resolvidos de maneira iterativa através do método multigrid-multinível. Esta implementação foi feita considerando malha com adaptatividade dinâmica ao longo do tempo e a solução em paralelo. Na ferramenta AMR3DP já existia uma solução para a equação de Navier-Stokes baseado na proposta de Ascher et al. (1995). Contudo esta solução é aplicada a escoamentos bifásicos, utilizando uma variável auxiliar no tratamento do termo difusivo, o que não funcionou bem na solução de escoamentos utilizando modelos de turbulência. Assim, foi necessário esta nova implementação na ferramenta.

Referente a solução da parte térmica, foi adaptada uma sub-rotina implementada anteriormente na versão atual do código AMR3DP, sub-rotina esta que resolve o transporte de um escalar qualquer, discretizada na forma conservativa, sendo que para a aplicação da presente tese esta equação foi simplificada para solução da energia. Após a adaptação foram discretizados e implementados outros esquemas advectivos. No que tange a fronteira imersa térmica, foram implementadas as condições de primeira espécie (imposição de temperatura) baseado no

trabalho de Wang et al. (2009), de segunda espécie (imposição de fluxo) e terceira espécie (balanço entre condução e convecção) baseado no trabalho de Kinoshita (2015).

Para a modelagem da turbulência foram discretizados e implementados modelos da classe sub-malha para LES, sendo o modelo de Smagorinsky (1963) e o modelo Dinâmico de Germano et al. (1991) e modificado por Lilly (1992). Buscando uma solução para suavizar a viscosidade turbulenta na transição entre níveis na malha adaptativa foi utilizada a técnica da filtragem explícita, apresentada em (BOSE et al., 2010). Outra alternativa na busca de modelar a turbulência, com independência do comprimento da malha, é a implementação de modelos da classe RANS e DES. Foram então implementados e discretizados os modelos de Spalart-Allmaras (SPALART; ALLMARAS, 1992) e o modelo $k - \omega$, de Wilcox (2008). Através de um código com malha adaptativa é possível utilizar um refinamento local fixo, e também utilizar uma malha que se adapta dinamicamente ao escoamento, se tornando mais refinada em pontos de interesse no tempo e espaço. Isso é muito interessante ao se trabalhar com escoamentos turbulentos, pois as estruturas turbulentas, onde as tensões cisalhantes e flutuações de velocidade são expressivas, são transportadas pelo espaço ao longo do tempo, exigindo assim um refinamento que se locomove junto às estruturas.

Para a validação dos modelos de turbulência faz-se necessário o cálculo de estatísticas ao longo do tempo, por exemplo, a média do escoamento e o RMS, do inglês *Root Mean Square*, que representa a flutuação da velocidade em torno da média. Este cálculo não é tão viável quando a malha se modifica ao longo do tempo. Para contornar este problema foram implementadas, no contexto da presente tese, sondas numéricas que captam a informação através de interpolação, independente do nível de refinamento da malha, a qualquer instante de tempo, e então é feita a estatística.

1.6 Estrutura da presente tese

A presente tese está estruturada da seguinte forma:

- Capítulo 1: Introdução, onde é apresentado breve texto descrevendo os temas abordados e os objetivos, bem como uma introdução sobre as metodologias utilizadas;
- Capítulo 2: Revisão bibliográfica, sendo apresentada a revisão da literatura acerca dos principais tópicos necessários para o desenvolvimento do presente trabalho;

- Capítulo 3: Modelagem matemática, capítulo este onde será detalhada toda modelagem matemática implementada e/ou utilizada no presente trabalho, contemplando as formulações para a equação do momentum, equação da energia, fronteira imersa fluido-dinâmica e térmica e turbulência.
- Capítulo 4: Modelagem numérica, sendo apresentada a modelagem numérica utilizada na presente tese. Será também apresentado o algoritmo e equacionamento para a implementação das sondas numéricas em malha adaptativa.
- Capítulo 5: Verificação e validação, onde serão apresentadas a verificação e a validação das implementações das equações de transporte para a quantidade de movimento linear e para a energia térmica. Será apresentada ainda a validação para a metodologia da fronteira imersa fluido-dinâmica e térmica.
- Capítulo 6: Validação dos modelos de turbulência, onde serão apresentados resultados para a validação dos modelos implementados no código AMR3DP.
- Capítulo 7: Simulação de escoamentos turbulentos com troca de energia térmica, capítulo onde serão apresentados resultados finais da presente tese, onde serão acopladas a equação do momentum os modelos de turbulência, equação de transporte para a energia térmica e fronteira imersa.
- Capítulo 8: Conclusões e perspectivas, onde são apresentadas as conclusões do presente trabalho e as perspectivas para continuação dos desenvolvimentos.

No final ainda serão apresentadas as referências bibliográficas utilizadas e também os anexos da presente tese.

No próximo capítulo será apresentada a revisão bibliográfica realizada para o desenvolvimento do trabalho.

CAPÍTULO II

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Nesse capítulo será apresentada a revisão da literatura a respeito dos temas abordados na presente tese. A revisão será subdividida em quatro seções, sendo que a primeira será sobre modelagem da turbulência. Na segunda seção será abordada a metodologia da fronteira imersa, onde serão abordados trabalhos sobre a metodologia em si e a utilização desta em escoamentos turbulentos. A terceira seção será sobre escoamentos em malha adaptativa, com enfoque em escoamentos turbulentos. E a quarta e última seção será sobre escoamentos turbulentos com troca de energia térmica.

2.1 Modelagem da turbulência

Os modelos de fechamento para turbulência que possuem dependência do conceito de viscosidade turbulenta se dividem em duas classes, a primeira baseada no conceito de média temporal das equações de Navier-Stokes, conhecidos como modelos da classe RANS ou URANS, onde a viscosidade turbulenta é determinada diretamente ou indiretamente a partir de zero, uma ou duas equações de transporte. Esses tipos de modelos determinam o escoamento turbulento médio.

A segunda classe de modelagem se baseia na ideia da divisão do espectro de energia em duas partes, as grandes escalas, as quais são calculadas, e as pequenas escalas, cujas interações não lineares com a banda das grandes escalas são modeladas. Esta classe de modelos é conhecida como Simulação das Grandes Escalas, ou LES.

2.1.1 Metodologia RANS ou URANS

O primeiro modelo da classe RANS a zero equações foi o Modelo de comprimento de mistura de Prandtl (PRANDTL, 1925), onde a viscosidade turbulenta é calculada através de uma velocidade característica e de um comprimento característico. Para escoamentos simples, como por exemplo esteiras, jatos ou ainda camada de mistura, é considerado que o cisalhamento transversal ao escoamento é predominante. Este comprimento característico é calculado empiricamente com base no tipo de escoamento, por exemplo, para uma camada de mistura este comprimento adimensionalizado com a espessura da camada cisalhante local vale 0,07, e para um jato plano esta constante adimensionalizada vale 0,09. Alguns autores, como Nikuradse (1933), propuseram maneiras mais genéricas para determinação mais precisa deste comprimento característico, no caso deste autor para dutos ou canais.

Na linha de modelos a zero equações Cebeci e Smith (1974) propuseram um modelo algébrico para o cálculo da viscosidade turbulenta em uma camada limite turbulenta. Neste modelo a camada limite é dividida em duas camadas, a camada interna próxima a parede, e a camada externa. Os autores propuseram um conjunto de duas equações para a viscosidade turbulenta, uma para cada camada. Contudo este modelo requer um conhecimento das condições nas bordas da camada limite. Baldwin e Lomax (1974) também propuseram um modelo a duas camadas para determinação da viscosidade turbulenta em uma camada limite, porém com uma grande melhoria que é a não necessidade do conhecimento das condições nas bordas da camada limite. Alguns autores modificaram o modelo de Baldwin-Lomax para ser utilizado em jatos ou esteiras (BUNING et al., 1999).

Nos modelos a uma equação de transporte busca-se o cálculo de uma das grandezas características da turbulência, utilizadas para o cálculo da viscosidade turbulenta. O primeiro modelo RANS a uma equação foi proposto por Prandtl (1945), onde a viscosidade turbulenta é calculada a partir da energia cinética turbulenta, a qual é resolvida a partir de uma equação de transporte. Este é um modelo muito limitado por se necessitar de um comprimento de mistura, que não é conhecido a priori e não é resolvido por outra equação de transporte, e que é de difícil determinação em escoamentos complexos.

Baldwin e Barth (1990) propuseram um novo modelo a uma equação, onde a variável transportada é o número de Reynolds turbulento, utilizado para o cálculo da viscosidade turbulenta. O modelo de Baldwin-Barth apresenta uma melhoria na solução quando comparado ao

modelo de Prandtl, porém ainda apresenta dificuldades em descrever a camada limite. Neste modelo, juntamente com a variável transportada, são determinados empiricamente uma série de constantes e de relações auxiliares, o que o torna mais robusto quando comparado com o modelo de Prandtl de 1945.

Ainda sobre os modelos a uma equação, Spalart e Allmaras (1992) propuseram um modelo a uma equação utilizada para solução do transporte da viscosidade turbulenta, que é suavizada próximo a paredes através de uma função de amortecimento. Este é um modelo mais robusto por não se ter a necessidade de calcular o comprimento de escala relacionado à espessura da camada cisalhante local. O modelo de Spalart-Allmaras foi projetado para aplicações aerodinâmicas, aplicado a problemas envolvendo escoamento externo sobre fronteiras sólidas, gerando bons resultados para escoamentos com gradiente adverso de pressão.

Os modelos de turbulência baseados em duas equações de transporte serviram como a base de muitas pesquisas e desenvolvimentos nas duas últimas décadas (SILVEIRA-NETO, 2002). Os modelos desta classe são, em tese, suficientes para calcular diferentes tipos de escoamentos sem a necessidade de se conhecer a estrutura do mesmo *à priori*. Isto não é inteiramente verdade pelo fato de ser necessário calibrar as constantes do modelo com base no tipo de escoamento.

O primeiro modelo a duas equações foi o modelo $k-\varepsilon$ apresentado por Kolmogorov (1942), onde é resolvida uma equação de transporte para energia cinética turbulenta e outra para a dissipação turbulenta. Desta maneira o modelo pode modelar os efeitos temporais do escoamento, como por exemplo, a convecção e difusão de energia turbulenta. O modelo de $k-\varepsilon$ modela bem escoamentos do tipo camada de cisalhamento livre com gradientes de pressão relativamente pequenos. Da mesma forma, para escoamentos internos ou externos, o modelo fornece bons resultados somente nos casos em que os gradientes de pressão média são pequenos. Assim esse modelo não é recomendado para aplicações com grande gradiente de pressão adverso. Yakhot et al. (1992) apresentaram uma mudança no modelo $k-\varepsilon$ original, propondo o modelo $k-\varepsilon$ RNG. Neste modelo uma das constantes do modelo original é substituída por uma função de proporcionalidade à taxa de deformação média, o que traz mais robustez ao modelo. Shih et al. (1995) também propuseram uma melhora no modelo $k-\varepsilon$ original, através do modelo $k-\varepsilon$ Realizável. Este modelo contém uma nova formulação para a viscosidade turbulenta e uma nova equação de transporte para a taxa de dissipação turbulenta. O modelo $k-\varepsilon$ Realizável for-

nece um desempenho superior para escoamentos envolvendo rotação, camada limite sob forte gradiente adverso de pressão, separação e recirculação, jatos planos e redondos, demonstrando assim uma capacidade superior para capturar o fluxo médio das estruturas complexas.

Outra linha de modelo a duas equações são os modelos do tipo $k-\omega$. O primeiro modelo foi apresentado por Wilcox (1988), onde existe uma equação de transporte para a energia cinética turbulenta e uma equação para a taxa específica de dissipaçāo. Este modelo apresenta bom desempenho em escoamentos do tipo camada limite com gradiente adverso ou favorável de pressão, funcionando bem em regiões próximas a superfícies sólidas. Wilcox (2008) apresenta uma melhoria no modelo original, onde as constantes são substituídas por funções de proporcionalidade, que são determinadas a partir do escoamento ao longo do tempo, tornando o modelo mais robusto, aumentando assim a capacidade de solução do modelo.

Na prática, os modelos $k-\varepsilon$ são geralmente mais precisos em escoamentos do tipo cisalhamento e são bem comportados em regiões longe de paredes. Os modelos $k-\omega$ são mais precisos e mais estáveis numericamente em regiões próximas a parede. Reconhecendo que cada modelo tem suas vantagens e desvantagens, e que as formas das equações são semelhantes, Menter (1994) sugeriu um modelo combinado, o $k-\omega$ SST, sendo que este é um modelo $k-\omega$ perto da parede e transiciona para um modelo $k-\varepsilon$ para regiões longe da parede através de funções de ponderação. Este modelo foi proposto para simulação de escoamentos aerodinâmicos com gradiente adverso de pressão e separação da camada limite, utilizando para isto as maiores vantagens dos dois modelos. Menter et al. (2003) apresentaram melhorias ao modelo SST original.

2.1.2 Metodologia LES

Na busca de uma forma de modelar a turbulência de forma a obter uma solução realística ao longo do tempo e do espaço, não somente o escoamento médio, Smagorinsky (1963) propôs o primeiro modelo da classe LES, o qual se baseia na hipótese de equilíbrio para o qual a energia injetada nas estruturas turbinhôares é igual a energia transformada nas escalas de Kolmogorov. Em outras palavras, a energia é transferida das grandes para as pequenas escalas a uma taxa constante (faixa inercial do espectro de energia). Neste modelo a viscosidade turbulenta é dependente de um comprimento característico, o qual está em função de uma constante definida a priori, em função do comprimento do filtro, que geralmente é o tamanho característico da malha, e em função da norma do tensor taxa de deformação. Nesta formulação, em regiões

próximas as paredes, o modelo superestima a viscosidade turbulenta, sendo que para minimizar isto funções de amortecimento devem ser utilizadas, como por exemplo, a função proposta por VanDriest (1956). Com relação ao tamanho do filtro, se banda tender a zero o resultado do modelo tende ao comportamento de DNS. No caso contrário, se banda de filtro tender a um valor muito alto, a resposta filtrada deve tender ao valor médio.

Outro modelo da classe LES desenvolvido foi o modelo de Função Estrutura de Velocidade, proposto por Métais e Lesieur (1992), onde o cálculo da viscosidade turbulenta passa pelo cálculo de diferenças de velocidades. Neste modelo também está presente uma constante determinada a priori, tornando o modelo limitado a escoamentos turbulentos completamente desenvolvidos. Este modelo não é adequado à simulação de escoamentos em transição e escoamentos nas proximidades de paredes.

Novas propostas de modelos baseados no modelo clássico de Smagorinsky têm sido feitas, dentre as quais se destaca a chamada modelagem dinâmica, proposto por Germano et al. (1991), e melhorado por Lilly (1992). O modelo Dinâmico sub-malha, ou também conhecido na comunidade como modelo Smagorinsky Dinâmico, apresenta a grande vantagem da ausência de um coeficiente ad-hoc de proporcionalidade, que é substituído por uma função de proporcionalidade variável no tempo e no espaço. O modelo se baseia na aplicação de dois filtros com tamanhos diferentes, sendo que primeiro filtro utiliza as dimensões da malha para calcular o comprimento característico. Já o segundo filtro utiliza um múltiplo das dimensões da malha para calcular o comprimento característico, sendo denominado filtro teste. Utilizando as informações contidas nas menores escalas calculadas presentes na região entre os dois filtros, pode-se modelar a transferência de energia entre as escalas resolvidas e não resolvidas. Com função de proporcionalidade calculada dinamicamente ao longo do tempo, a viscosidade turbulenta deve se anular nas regiões de escoamentos laminares e proximidades de paredes, implicando em um melhor comportamento assintótico e em uma maior robustez para modelagem de escoamentos complexos.

Outro modelo da classe LES foi proposto, sugerido por Nicoud e Ducros (1999), denominado WALE. Neste modelo, diferente do modelo clássico de Smagorinsky que considera apenas a taxa de deformação da estrutura turbulenta, o modelo WALE leva em consideração tanto a tensão quanto as taxas de rotação. Além disso, o modelo WALE recupera automaticamente a escala de viscosidade turbulenta próximo a parede, sendo uma boa opção de modelo para escoamentos

parietais.

Com um novo método de solução, Kim e Menon (1997) propuseram um modelo LES, o modelo da energia cinética sub-malha dinâmico, onde a viscosidade turbulenta é calculada a partir da energia cinética sub-malha, que é resolvida por uma equação de transporte similar a modelagem RANS, diferenciando que neste modelo é transportada uma informação sub-malha. Todas as informações da equação de transporte são calculadas dinamicamente, acarretando em uma maior robustez para o modelo.

2.1.3 Metodologia Híbrida RANS/LES

Com a finalidade de unir as qualidades das metodologias RANS e LES, reduzindo-se a média junto às paredes e a simulação das grandes escalas nas regiões de separação ou escoamento cisalhante livre, surgem os denominados modelos híbridos. Estes modelos já começam a ser difundidos no meio acadêmico e industrial, sendo uma nova alternativa para a modelagem da turbulência.

O primeiro modelo híbrido foi o modelo DES, do inglês *Detached-Eddy Simulation*, proposto por Spalart et al. (1997). Este modelo consiste em uma modificação do modelo de Spalart e Allmaras (1992) no termo referente à distância parietal, dando um caráter híbrido ao modelo. A metodologia DES tem sido a forma de modelar hibridamente com maior difusão entre pesquisadores e indústria, com ampla aplicação na aeronáutica.

Outro modelo híbrido foi proposto por Camelli e Löhner (2002), o modelo Baldwin-Lomax-Smagorinsky ou BLS. Esta modelagem híbrida utiliza o clássico modelo de Baldwin-Lomax para as regiões parietais e o modelo de Smagorinsky para as demais localidades do escoamento. Este modelo tem apresentado bons resultados, contudo existe a desvantagem da necessidade de um ponto de divisão entre as duas modelagens, o que deixa o modelo suscetível ao erro do usuário ao definir uma distância incorreta.

Outra modelagem híbrida promissora foi proposta por Menter e Egorov (2005), o modelo SAS, do inglês *Scale-Adaptive Simulation*. A formulação deste modelo consiste em duas equações, sendo que uma equação de transporte possui com um termo de destruição que dinamicamente decide pela utilização de URANS ou LES, conforme a característica do escoamento. Esta forma de hibridação não necessita da variável distância a parede, ou ponto de divisão entre as modelagens, o que resulta em um modelo mais robusto e genérico para obtenção da solução.

Visando uma melhor modelagem da turbulência incluindo regiões com escoamentos parietais, foram implementados no contexto da presente tese os modelos de Spalart-Allmaras e $k-\omega$ de wilcox da classe RANS, e os modelos de Smagorinsky com função de amortecimento de Van Driest e o modelo Dinâmico de Germano da classe LES.

2.2 Metodologia da Fronteira Imersa

Na solução numérica de problemas envolvendo interação entre fluido e geometria sólida são mais utilizados: os métodos onde a condição de contorno do tipo não deslizamento é imposta nas paredes, e o chamado método da fronteira imersa, onde a condição de contorno não é imposta diretamente. Nos primeiros é criada apenas uma malha, sendo que esta se adapta a geometria imersa, sendo possível com facilidade aplicar a condição de contorno na superfície. Porém estas metodologias apresentam a desvantagem no que se refere à difícil adaptação da malha em geometrias complexas, o que torna a malha também muito complexa, aumentando assim o sistema de equações do problema.

No método da fronteira imersa são criadas duas malhas independentes, uma malha lagrangiana a qual é utilizada para representar a fronteira e uma malha euleriana para as equações de transporte. O acoplamento da malha lagrangiana ao campo euleriano se dá através de um termo fonte de força interfacial, gerado sobre os pontos lagrangianos e distribuído para os volumes eulerianos próximos a fronteira (SILVA et al., 2003).

Assim, uma das maiores vantagens desta metodologia é que ambas as malhas coexistem de forma independente da geometria do corpo imerso, logo é possível simular o escoamento sobre um corpo com qualquer geometria, utilizando malhas cartesianas retangulares globais para representar o domínio euleriano. Para este método existem fortes expectativas com relação ao tempo computacional, ao uso de memória e a uma maior facilidade para se gerar malhas, quando comparados aos métodos tradicionais (SILVA et al., 2003). Com a utilização de duas malhas independentes, surge a necessidade de algoritmos para comunicação entre as malhas, que são compostas de interpolações, distribuições e cálculo de força.

O primeiro trabalho envolvendo fronteira imersa foi desenvolvido por Peskin (1972), com o objetivo de resolver as equações de Navier-Stokes em escoamentos nos quais ocorre a interação entre o fluido e estruturas complexas deformáveis. A motivação para o desenvolvimento desta nova metodologia foi realizar o estudo do escoamento de sangue em válvulas cardíacas e

coração humano, com a finalidade de desenvolver válvulas e corações artificiais.

Mohd-Yusof (1997) propôs um modelo em que para determinar a força em cada ponto da fronteira, de forma que o cálculo da força lagrangiana fosse realizado com base na equação da quantidade de movimento linear do fluido na fronteira, sem o emprego de constantes que necessitem de ajuste, como nos trabalhos anteriores. Este método foi chamado de método da forçagem direta. Uma alternativa para o cálculo do termo fonte foi desenvolvido por Silva et al. (2003), onde propuseram o Modelo Físico Virtual (MFV), o qual é baseado no balanço de quantidade de movimento linear sobre o fluido próximo a fronteira imersa, permitindo de forma virtual a modelagem da condição de não deslizamento sobre a fronteira. Campergher (2005) apresenta uma extensão para problemas tridimensionais para a metodologia de fronteira imersa desenvolvida por Silva et al. (2003).

Wang et al. (2008) propuseram a utilização da imposição direta das forças proposto por Mohd-Yusof (1997) de maneira iterativa, denominando multi-direct-forcing. Nesta metodologia interpolam-se as propriedades do fluido nos pontos lagrangianos, calcula-se a força nestes pontos, e esta força é distribuída nos pontos eulerianos. Wang et al. (2009), propuseram um modelo no qual juntamente com a fronteira imersa as equações que modelam transferência térmica através de um esquema de fonte direta térmica. Neste, o campo de temperatura satisfaz a condição de contorno de temperatura imposta através do multi-direct-forcing, um esquema de imposição térmica direta, de forma iterativa. Ao lidar com paredes móveis, métodos de fronteira imersa que utilizam direct-forcing podem estar propensos a oscilações numéricas, porque o ponto nodal onde a força é aplicada pode mudar espacialmente ao longo do tempo. Ao notar que as oscilações são causadas por esta mudanças dos pontos onde são feitas as forçagens diretas, Luo et al. (2012) propuseram uma nova formulação que permite uma suave transição na descrição numérica nesses pontos. Esta nova formulação preserva a precisão espacial da formulação da fronteira imersa original e pode suprimir efetivamente as oscilações no valor da força.

Alguns trabalhos foram propostos em busca de métodos mais robustos, como em Ji et al. (2012), onde os autores apresentam um novo método iterativo para o método de fronteira imersa, onde a força do corpo atualizada é incorporada nas iterações da pressão. Este método também introduz uma melhoria na função distribuição de força da fronteira, que transfere a força do corpo a partir dos pontos discretos para a malha cartesiana as vizinhanças do corpo. Shu et al. (2007) mostram um novo método de fronteira imersa com correção de velocidade por lattice-

Boltzmann, o qual é apresentado e validado simulando o escoamento em torno de um cilindro circular bi-dimensional. Dorício (2009), desenvolveu um método de Fronteira Imersa para o estudo de escoamentos compressíveis, sendo que o escoamento foi modelado pelas equações de Euler bidimensionais, cuja finalidade era o estudo de aero-elasticidade computacional em uma seção típica de aerofólio bidimensional com movimentos torsional e vertical prescrito. Nesta linha Lai et al. (2008) propuseram um método de fronteira imersa para a simulação de interfaces bidimensionais de fluidos com surfactante insolúvel. As equações são escritas em uma formulação usual para a fronteira imersa, onde o contato do domínio euleriano com a interface lagrangiana é modelado através de uma função delta de Dirac.

Com relação a métodos de fronteira imersa utilizados em escoamentos turbulentos Tessicini et al. (2002) utilizaram o método da forçagem direta proposto por Mohd-Yusof (1997), e modelaram a turbulência utilizando simulação das grandes escalas com o modelo dinâmico de Germano et al. (1991), e propuseram a utilização de uma lei de parede acoplada a fronteira imersa. Cristallo e Verzicco (2006) propuseram uma extensão do modelo de Tessicini et al. (2002), utilizando uma lei de parede que é calculado em apenas um volume externo a geometria, sendo que utilizam o modelo de Smagorinsky (1963) e fronteira imersa em movimento. Balaras (2006) apresenta um modelo para formulação de escoamentos utilizando LES e a metodologia de fronteira imersa com imposição direta da condição de contorno, aplicada a fronteiras móveis. Posa et al. (2011) apresentam simulações de escoamentos turbulentos em uma turbo-máquina com alta velocidade de rotação, sendo que não utilizam lei de parede, modelam a turbulência com os modelos de Smagorinsky (1963) e função estrutura de velocidade, e aplicam o método de forçagem proposto por Mohd-Yusof (1997). Ji et al. (2012) apresentaram uma metodologia que utiliza um ponto auxiliar a fronteira imersa na direção normal positiva da geometria, de tal forma a impor neste ponto o valor da velocidade calculada a partir de uma lei de parede, utilizando o modelo de Smagorinsky (1963) para modelagem da turbulência, e o método de Wang et al. (2008) para a fronteira imersa. Nguyen e Wells (2015) apresentaram o acoplamento entre a simulação de grandes escalas e o método de fronteira imersa para estudar o mecanismo de desenvolvimento de modelos para sedimentação em escoamentos turbulentos. Nesta linha Kang et al. (2015) apresentam um estudo utilizando o método da forçagem direta juntamente com uma formulação de escoamento bifásico para simular o choque de ondas com cilindros imersos a escoamentos com Reynolds moderado. Chang et al. (2014) apresentam simulações de escoamentos laminares e turbulentos sobre montanhas periódicas, utilizando a metodologia da fronteira imersa, sendo

utilizada simulação das grandes escalas sem leis de parede, considerando uma variação linear da velocidade sobre a geometria. Cecere e Giacomazzi (2014) propuseram um novo método de fronteira imersa, denominado método do volume imerso, para simulação de escoamentos turbulentos utilizando LES para escoamentos compressíveis. E ainda, Rapaka e Sarkar (2016) apresentaram um método que acopla fronteira imersa com forçagem direta e simulação das grandes escalas, com o objetivo de simular escoamentos estratificados sobre geometrias complexas.

Alguns trabalhos foram publicados apresentando a utilização da metodologia da fronteira imersa e modelagem da turbulência utilizando as médias de Reynolds, como por exemplo Capizzano (2010) propôs a utilização de uma lei de parede, onde é imposto o valor da velocidade nos volumes eulerianos externos a fronteira, sendo utilizada modelagem RANS, com o modelo $k-\omega$ modificado. Roman et al. (2009) propuseram um modelo para lei de parede para simulação das grandes escalas juntamente com fronteira imersa, sendo que este modelo é baseado na reconstrução do campo de velocidade nos volumes próximos a fronteira, combinando com a modelagem baseada nas médias de Reynolds. Tay et al. (2015) apresentaram simulação de escoamentos turbulentos utilizando o método de fronteira imersa de Wang et al. (2008) e o modelo de Spalart e Allmaras (1992), e a aplicação foi escoamento sobre corpos esbeltos.

Buscando a modelagem de geometrias complexas num contexto de modelagem da turbulência, foi utilizado na presente tese o método da multi-forçagem-direta de Wang et al. (2008), devido ao fato da possibilidade de poder usar malha cartesiana para o domínio de fluido, acarretando numa maior facilidade tanto da solução das equações do balanço da quantidade de movimento linear, quanto na implementação e solução de modelos de turbulência. E ainda, com esta forma de modelar a fronteira imersa é possível modificar a geometria sem a necessidade de mudança no algoritmo de acoplamento entre as malhas, sendo necessário apenas o mapeamento dos pontos no domínio euleriano.

2.3 Malha adaptativa

A utilização de malhas com refinamento adaptativo pode gerar grande economia computacional, quando se obtém funções para o refinamento que permitam que se aplique o refinamento somente nas regiões de interesse, e quando estas regiões são pequenas em comparação com a dimensão total do domínio. Em se tratando de escoamentos turbulentos a utilização de malhas adaptativas gera esta economia, uma vez que o refinamento é aplicado em regiões de

atividade turbulenta, onde existe a presença de estruturas turbilhônicas ou grandes gradientes de velocidade, e a utilização de malhas grosseiras nas demais regiões não interferem negativamente na solução, uma vez que ali não existem grandes gradientes de velocidade, e a malha com menos resolução é capaz de capturar os fenômenos físicos locais. Nesta seção será apresentada uma revisão de trabalhos que utilizam refinamento adaptativo, com enfoque principal em escoamentos turbulentos.

O primeiro trabalho envolvendo malha adaptativa foi publicado por Berger e Colella (1989). O objetivo do trabalho é o desenvolvimento de uma estratégia de refinamento de malha adaptativa e automática para resolução de equações de balanço hiperbólicas em duas dimensões. O objetivo dos autores foi criar um algoritmo eficiente que levasse em consideração a presença de descontinuidades na solução e ao efeito sobre elas de descontinuidades na malha. Outro objetivo foi buscar uma forma de organizar o algoritmo para minimizar a sobrecarga de memória e CPU. A Figura (2.1) apresenta parte do escoamento onde existe a descontinuidade da solução e os blocos de refinamento sobre estas regiões. O algoritmo apresentado por Berger e Colella (1989) foi aperfeiçoado por diversos autores, como encontrado em Bell et al. (1994), Berger e LeVeque (1998), Baeza e Mulet (2006), George e LeVeque (2006)

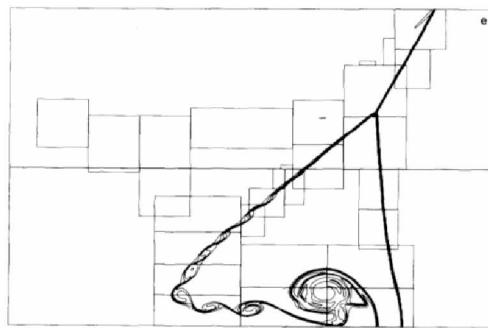


Figura 2.1: Refinamento adaptativo aplicado nas regiões de interesse (BERGER; COLELLA, 1989).

Mitran (2001) apresenta e testa uma série de abordagens para o problema do uso de refinamento adaptativo em simulação das grandes escalas. Incluiu nestas abordagens a utilização de malhas não estruturadas e estruturadas, e vários tratamentos para os termos advectivos. O autor utiliza diversos critérios de refinamento, sendo eles o erro obtido na solução dos sistemas lineares, a enstrofia e o produto escalar entre a velocidade local e a vorticidade. São apresentados resultados do escoamento em um canal rotativo, e os resultados obtidos com ambos os tipos de malha foram similares, como visto na Fig. (2.2).

Pantano et al. (2005) apresentaram um método de alta ordem WENO, essencialmente

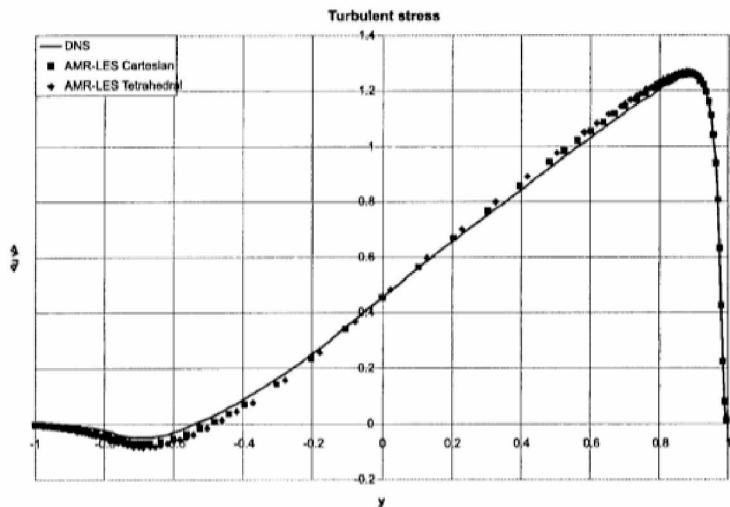


Figura 2.2: Tensão cisalhante para ambas as malhas comparadas com DNS (MITRAN, 2001).

não oscilatório, para a simulação de grandes escalas para escoamentos compressíveis com esquemas de baixa dissipação numérica e malha adaptativa estruturada. Um esquema centrado explícito é usado em regiões de grande intensidade turbulenta, enquanto que um esquema WENO é empregado para capturar choques. Foram realizados vários testes, e a Fig. (2.5) é um exemplo, onde é apresentado um plano jato turbulento, juntamente com a malha adaptativa.

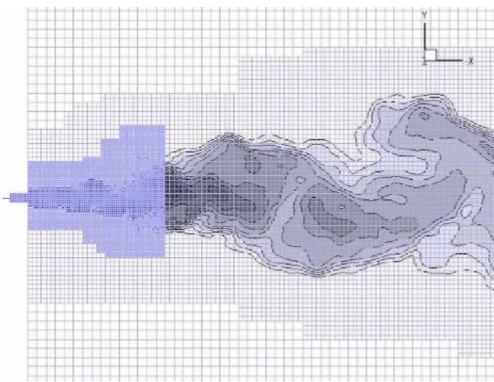


Figura 2.3: Jato plano e malha adaptativa (PANTANO et al., 2005).

Hay e Visonneau (2005) desenvolveram uma estratégia de refinamento adaptativo da malha controlado por uma estimativa do erro para as equações de Navier-Stokes. Esta estimativa de erro é baseada em uma equação para o erro de discretização com um termo fonte aproximado pelo uso de um operador de discretização de alta ordem. Estes utilizaram também modelagem URANS, e o modelo escolhido foi o de Spalart-Allmaras. Todo o procedimento é aplicado em uma simulação de escoamento em torno de um cilindro de seção quadrada com a injeção de uma perturbação próximo a entrada, como mostrado na Fig. (2.4). A eficiência do método, avaliada em termos de tempo de processamento e número de células, apresenta ganhos em comparação

com cálculos em uma malha simples.

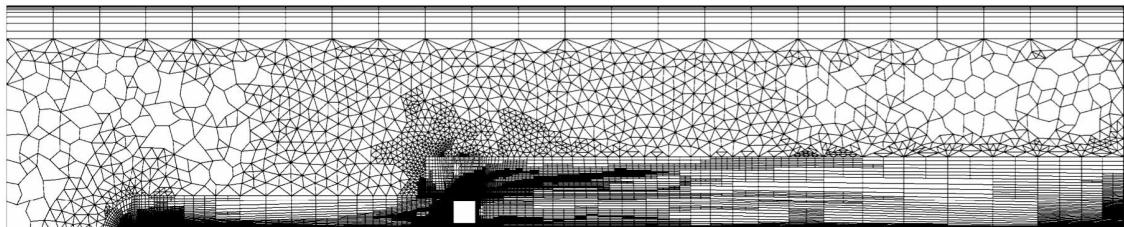


Figura 2.4: Malha adaptada em um escoamento sobre um cilindro de seção quadrada (HAY; VISONNEAU, 2005).

Leonard et al. (2006) apresentaram o acoplamento entre um método de refinamento adaptativo e simulação das grandes escalas. Neste trabalho os autores utilizam um algoritmo multigrid em uma malha cartesiana multi-bloco, o qual é usado para redefinir a malha em regiões específicas a partir do erro numérico na solução das velocidades. Este algoritmo é então aplicado à simulação de uma camada de mistura temporal turbulenta tridimensional. A Figura (2.5) apresenta as estruturas formadas em uma camada de mistura temporal em um tempo adimensional $t^* = 70$, sendo apresentado também os blocos de refinamento em torno das estruturas formadas.

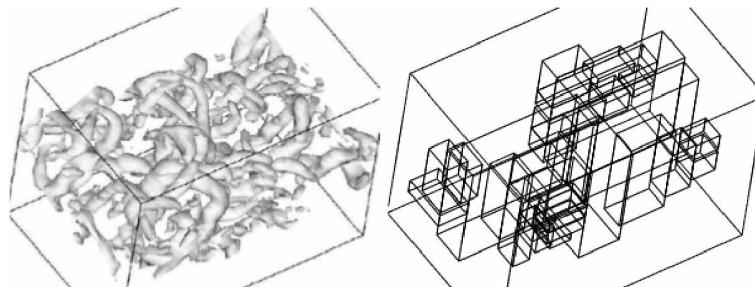


Figura 2.5: Estruturas formadas em uma camada de mistura temporal tridimensional e os blocos de refinamento (LEONARD et al., 2006).

Capizzano (2010) apresenta uma metodologia de adaptatividade de malha, associada a metodologia da fronteira imersa e modelagem da turbulência. A imposição da condição de contorno para a fronteira é diretamente no volume euleriano, desta forma a malha se adapta ao máximo de tal forma a modelar a geometria com maior resolução. O autor utilizou modelagem URANS, e o modelo de turbulência utilizado foi o $k-\omega$ modificado. A Figura (2.6) apresenta o coeficiente de pressão sobre uma asa de avião, juntamente com um plano mostrando a malha adaptativa.

Vanella et al. (2010) desenvolvem uma estratégia de malha com refinamento adaptativo, para então ser aplicada em problemas de interação fluido-estrutura em escoamentos com regime laminar ou turbulento. Para escoamentos em transição ou turbulentos os autores utilizaram a si-

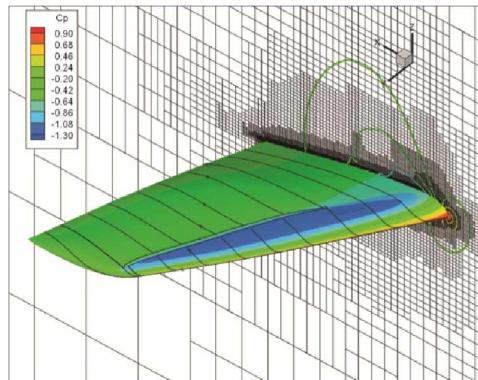


Figura 2.6: Escoamento sobre uma aza e malha adaptativa (CAPIZZANO, 2010).

mulação das grandes escalas, e para modelar a geometria foi utilizado a metodologia da fronteira imersa, com aplicação indireta da condição de contorno a partir de um termo fonte. A Figura (2.7) mostra o escoamento turbulento em torno de uma esfera, juntamente com a malha adaptativa.

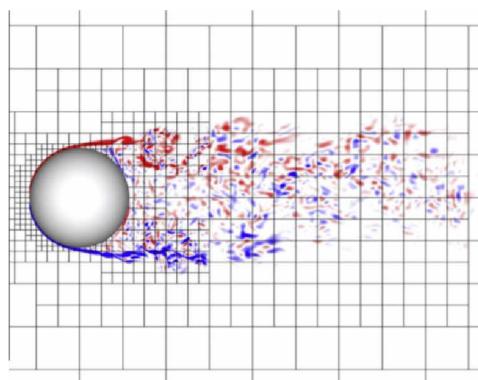


Figura 2.7: Escoamento sobre uma esfera e malha adaptativa em um plano central (VANELLA et al., 2010).

Huang e Russell (2011) apresentam um novo método de adaptatividade, denominado Método da Malha Móvel, onde é criada uma malha estruturada, não necessariamente cartesiana, e esta malha se locomove de tal forma a otimizar a solução, comprimindo e tornando mais refinada a região de interesse. Ullmann et al. (2013) aplicaram essa técnica em um escoamento em que utiliza a simulação das grandes escalas, sendo que a malha se adapta ao longo do tempo e os critérios de refinamento utilizados são a energia cinética turbulenta e as tensões de cisalhamento, como apresentado na Fig. (2.8), onde a malha se adapta nas regiões de maior cisalhamento em um escoamento sobre montanhas periódicas. A utilização desta técnica traz diversas vantagens, como por exemplo, algoritmos para solução de sistemas lineares mais simples, assim como técnicas mais triviais para criação da nova malha, e ainda uma quantidade fixa de memória e tempo de processamento por passo de tempo. Porém, possui uma grande desvantagem caso seja grande a quantidade de espaço que necessite de refinamento e a malha utilizada

não tem uma resolução necessária.

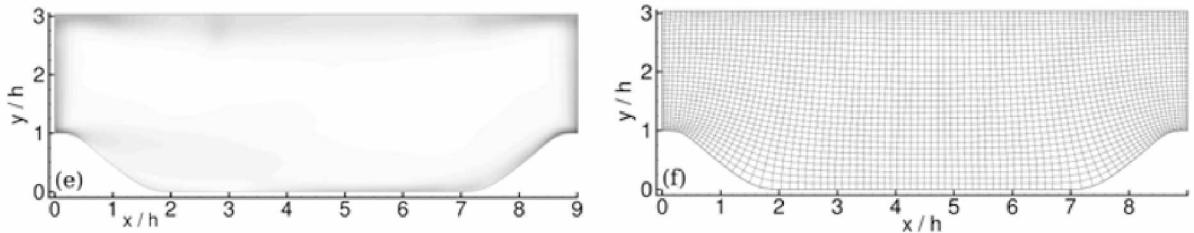


Figura 2.8: Tensões de cisalhamento e malha adaptada ao escoamento (ULLMANN et al., 2013).

Muralidaran e Menon (2014) apresentam a simulação das grandes escalas de um jato reativo a alto valor do número de Reynolds, sendo que este jato é lançado em um escoamento cruzado. A adaptatividade da malha é aplicada nas regiões com presença de estruturas turbulhôniares e de chama. Os autores apresentam mais detalhes sobre a cinética química. A Figura (2.9) apresenta o campo de viscosidade turbulenta em dois planos distintos, onde é possível observar a característica do escoamento de um jato cruzado, além das estruturas que se formam em torno deste. Observa-se também os blocos de refinamento em torno do jato, e o salto de viscosidade turbulenta que ocorre ao se passar de um nível mais fino para o mais grosso, uma vez que a viscosidade turbulenta é calculada proporcionalmente ao tamanho da malha local.

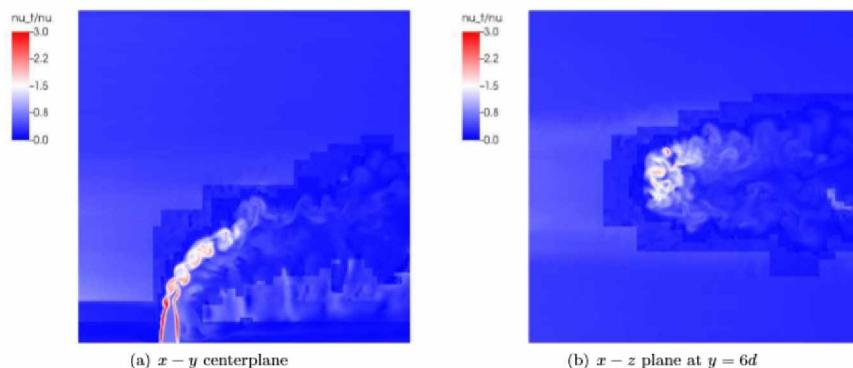


Figura 2.9: Campo de viscosidade em um jato turbulento reativo (MURALIDARAN; MENON, 2014).

Vanella et al. (2014) desenvolveram um acoplamento entre a forçagem direta para modelagem da fronteira imersa e malha cartesiana com refinamento adaptativo. A estratégia utilizada para aplicar o refinamento acontece em regiões próximas a fronteira imersa e em regiões com grande gradiente de velocidade. A Figura (2.10) apresenta o escoamento em torno de um cilindro, juntamente com a malha cartesiana adaptativa.

Antepara et al. (2014) apresentam a simulação do escoamento em torno do *Ahmed car* utilizando malha com refinamento adaptativo e simulação das grandes escalas para modelagem

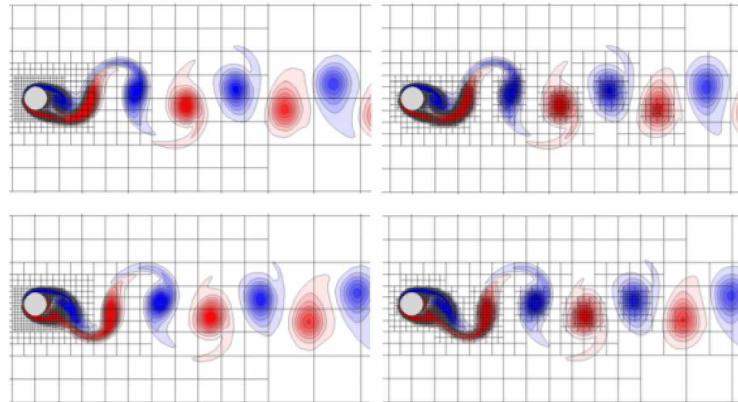


Figura 2.10: Campo de vorticidade no escoamento sobre um cilindro e malha adaptativa (VANNELLA et al., 2014).

da turbulência. Foi utilizada uma técnica da fronteira imersa onde a malha se refina em torno da geometria do carro, e a imposição da condição de contorno é feita de maneira direta no volume euleriano, dispensando a utilização de termos fontes para comunicação entre as malhas. A Figura (2.11) mostra, em dois planos de visão, a vorticidade em torno do carro simplificado e a malha adaptada nas regiões de grande vorticidade, que seria em torno da geometria e na região das estruturas turbinhonianas.

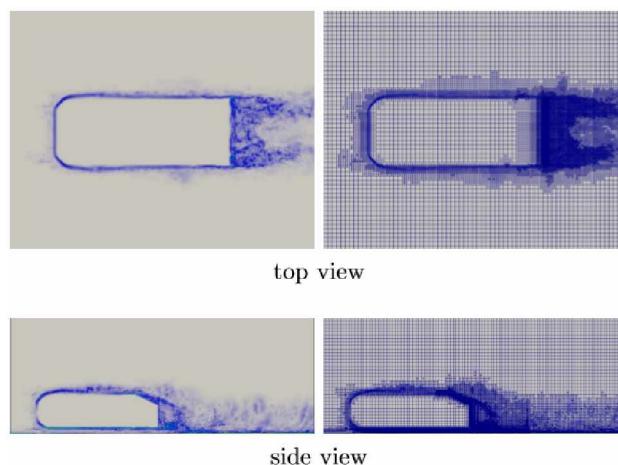


Figura 2.11: Campo de vorticidade em torno do carro simplificado e malha adaptativa (ANTEPARA et al., 2014).

Antepara et al. (2015) apresentam uma solução para simulação das grandes escalas em malha adaptativa utilizando processamento paralelo. É realizada uma discretização utilizando a técnica dos volumes finitos. O critério de refinamento utilizado baseia-se em propriedades físicas, advindo da decomposição variacional multi-escala (VMS). Toda solução foi realizada considerando processamento paralelo. A robustez e a precisão da metodologia proposta são apresentadas na simulação numérica de escoamento turbulento em torno de um cilindro quadrado

com $Re = 22.000$ e ao redor de dois cilindros quadrados lado a lado em $Re = 21.000$. A Figura (2.12) apresenta a malha do escoamento em torno do cilindro quadrado e o mapa das regiões atribuídas a cada processo em duas dimensões, sendo possível notar que qualitativamente ouve uma distribuição de carga entre processos.

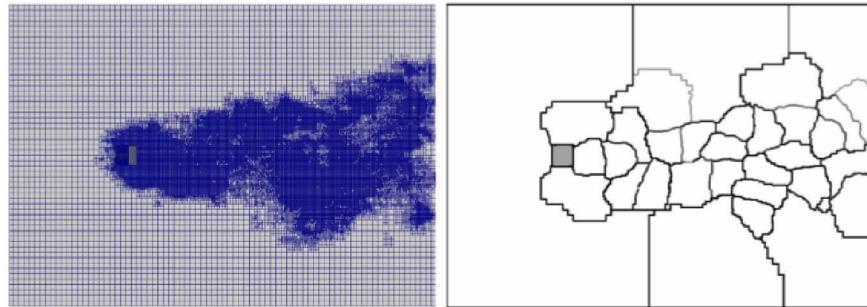


Figura 2.12: Escoamento em torno de um cilindro de seção quadrada: malha e domínio de processos (ANTEPARA et al., 2015).

Jost e Zhang (2016) apresentam o acoplamento da modelagem da turbulência utilizando LES com malha com refinamento adaptativo e a metodologia da fronteira imersa utilizando a técnica de imposição direta da condição de contorno. A solução do domínio de fluido é feita através do multigrid e o paralelismo é feito através de MPI. São feitas diversas aplicações para validação, como por exemplo, escoamento sobre cilindro, escoamento interno em sistema com diversos cilindros, e escoamentos sobre perfis aerodinâmicos, como apresentado na Fig. (2.13)

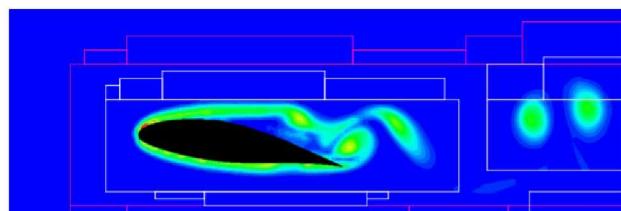


Figura 2.13: Escoamento sobre um perfil aerodinâmico com ângulo de ataque $\alpha = 8,64^\circ$ e blocos de refinamento em torno do perfil e em regiões de maior vorticidade (JOST; ZHANG, 2016).

Uma vez definida o tipo de malha euleriana como sendo cartesiana, o que facilitara a modelagem da fronteira imersa e a modelagem da turbulência, a estratégia de refinamento local adotada na presente tese foi malha cartesiana bloco-estruturada, uma vez que os algoritmos de solução das equações do momentum, modelagem de fronteira imersa e modelagem da turbulência permanecem os mesmos, diferenciando que para a malha composta é necessário algoritmos para comunicação entre as malhas, o que já existe implementado na ferramenta AMR3DP.

2.4 Escoamentos turbulentos com troca de energia térmica

Nesta seção serão apresentados trabalhos referentes a simulação de escoamentos turbulentos com troca de energia térmica.

Abe et al. (2004) apresentaram um estudo referente a transferência térmica turbulenta através da simulação numérica direta, em um escoamento em um canal com o objetivo de investigar as características das flutuações do escoamento e da energia térmica nas superfícies. Os números de Reynolds baseados na velocidade de fricção e a metade do canal foram de 180, 395, 640 e 1020, e o número de Prandtl molecular foi de 0,025 e 0,71. Os resultados foram validados com resultados da literatura, e os autores concluíram que o efeito das grandes escalas se estende até mesmo nas flutuações de fluxo de calor na superfície, e aumenta com o aumento do número de Reynolds.

Ould-Rouiss et al. (2010) apresentaram a simulação do escoamento turbulento completamente desenvolvido com transferência térmica, onde a quantidade de quantidade de movimento linear advém do escoamento interno imposto e da rotação dos tubos, sendo imposto fluxo de calor constante nas paredes. Foi utilizada simulação numérica direta e simulação das grandes escalas para diversas taxas de rotação para número de Reynolds igual a 5500. Para validar as simulações foram comparados os resultados com dados da literatura. Foi observado que com o aumento da rotação, as flutuações de temperatura diminuíram perto da parede e aumentou na parte central. A rotação do tubo induz a redução do fluxo de calor turbulento e aumenta na região azimutal, principalmente perto da parede. A Figura (2.14) apresenta os iso-valores de temperatura para um dos casos simulados.

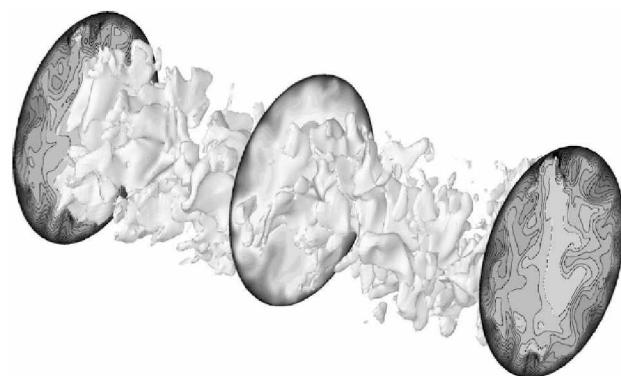


Figura 2.14: Iso-valores de temperatura em um escoamento (OULD-ROUSS et al., 2010).

Nesta linha Zhu et al. (2010) apresentaram a simulação das grandes escalas para mo-

delagem da turbulência com transferência de energia térmica em um duto de seção quadrada, para número de Reynolds variando de 10^4 até 10^6 . No modelo sub-malha proposto assume-se que as tensões sub-malha e fluxo térmico são, respectivamente, proporcionais ao incremento temporal da taxa de tensão filtrada e gradiente de temperatura, e o coeficiente de proporcionalidade foi determinado pela calibração do fator de fricção. A temperatura foi uma variável passiva, uma vez que os efeitos de peso-empuxo foram negligenciados. Resultados mostram que os resultados ficaram mais próximos do experimento quando comparados com dados DNS de referências.

Rivas et al. (2011) apresentaram a simulação numérica para resolver o problema da convecção turbulenta em um duto de seção quadrada com temperatura não uniforme nas paredes. Foram assumidas algumas condições para o escoamento, como condição de turbulência completamente desenvolvida e fluido incompressível. As simulações foram realizadas utilizando dois modelos de turbulência da classe RANS diferentes na solução da equação do momentum, o modelo $k-\varepsilon$ e o modelo das tensões de Reynolds (RSM), os quais foram utilizados para determinar as intensidades turbulentas, bem como os perfis de velocidade e flutuações na direção axial. Foram utilizados dois modelos na solução da equação da energia, o primeiro foi baseado na hipótese de um número de Prandtl turbulento constante, e outro denominado Hipótese do gradiente de difusão generalizado, onde a transferência de energia térmica depende das tensões viscosas. Os resultados foram validados comparando-os com dados experimentais e numéricos publicados na literatura, sendo comparados o número de Nusselt e o fator de fricção.

Ma et al. (2013) apresentaram a simulação de escoamentos com transferência térmica utilizando o modelagem LES utilizando o modelo de Smagorinsky, e o problema físico foi o escoamento em um duto quadrado com instabilidade a partir da convecção natural. O número de Reynolds foi de 400, Prandtl de 0,7 e diferentes número de Grashof variando de 10^5 até 10^7 . A influência do termo peso-empuxo no escoamento médio e a transferência de energia térmica, intensidade turbulenta e tensões de Reynolds é analisada. Os resultados mostram que a velocidade diminui enquanto a viscosidade sub-malha, intensidade turbulenta e transferência térmica aumenta com o aumento do número de Grashof. A intensidade turbulenta diminui consideravelmente nas regiões próximas a parede, e aumenta consideravelmente nas outras regiões com o aumento de Grashof. A distribuição da tensão de Reynolds é influenciada principalmente pela força de empuxo térmica. E ainda os autores concluíram que a taxa de produção da turbulência e força peso-empuxo aumenta com o aumento do número de Grashof.

Lessani e Nakhaei (2013) estudaram a influencia de partículas sólidas na taxa de transferência de energia térmica em um canal com escoamento turbulento não isotérmico utilizando simulação das grandes escalas. Uma abordagem Euleriana-Lagrangiana é adotada, e o efeito das partículas na equação do momentum e equação da energia é contabilizado. Os resultados mostram que com uma carga de partículas com massa constante a taxa de transferência de calor aumenta proporcionalmente com a energia específica das partículas. Porém, para uma taxa específica de energia na partícula, dependendo do seu valor, a taxa de transferência de calor pode diminuir, aumentar ou permanecer inalterada com o aumento de carga mássica. O número de Nusselt total é contabilizado considerando as contribuições da turbulência e das partículas, e a relação entre o número de Nusselt com a temperatura e velocidade do fluido, assim como a transferência de energia térmica entre fluido e partícula é examinado em detalhes. E ainda os perfis de velocidade e flutuações são comparados com dados disponíveis na literatura para validação.

Ojofeitimi e Hattori (2017) estudaram um estudo para avaliação da capacidade preditiva do escoamento em paredes utilizando simulação das grandes escalas e transferência de energia térmica em convecção natural, formando uma camada limite turbulenta ao longo de uma placa plana vertical posicionada no ar. O maior valor de Rayleigh simulado foi de $3 \cdot 10^{11}$, o que resultou em turbulência totalmente desenvolvida. Na simulação das grandes escalas foi utilizado o modelo dinâmico de Germano. A modelagem da turbulência capturou as mudanças rápidas nos espectros de flutuações de temperatura e velocidades devido ao atraso da transição com o aumento da velocidade da corrente livre.

Na presente tese, a modelagem do efeito térmico na turbulência foi baseado na hipótese do número de Prandtl turbulento constante, sendo modelada com eficiência a difusividade turbulenta através do conceito da viscosidade turbulenta, que será calculada através dos modelos de fechamento implementados.

No capítulo seguinte será apresentada a modelagem matemática utilizada na presente tese.

CAPÍTULO III

MODELAGEM MATEMÁTICA

Neste capítulo será apresentada a modelagem matemática utilizada e implementada na presente tese, incluindo as equações de transporte para a quantidade de movimento linear, equação de transporte da energia térmica, equações para a modelagem da fronteira imersa fluidodinâmica e térmica, e ainda as equações para a modelagem da turbulência.

3.1 Formulação diferencial para a fluido dinâmica

Para a modelagem do escoamento são discretizadas e implementadas as equações de Navier-Stokes, nas formas conservativa e não-conservativa. O modelo deve obedecer ao balanço de massa, apresentado abaixo usando notação indicial, para escoamentos compressíveis e incompressíveis:

$$\frac{\partial (\rho u_i)}{\partial x_i} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0, \quad (3.2)$$

em que ∂ é o operador diferencial, ρ é a massa específica do fluido, u_i é a componente i do vetor velocidade, t é o tempo e x_i é a componente espacial na direção i .

O modelo ainda incorpora uma equação para o balanço de quantidade de movimento linear para cada componente de velocidade, apresentadas abaixo na forma indicial, nas duas

formas, conservativa:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + f_i, \quad (3.3)$$

e não conservativa:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + f_i, \quad (3.4)$$

onde p é a pressão, μ é a viscosidade dinâmica do fluido e f_i é a componente i do termo fonte, onde no método da fronteira imersa é o vetor campo de força euleriano, através do qual uma geometria complexa pode ser representada.

3.2 Formulação diferencial para a equação da energia

Para a modelagem do balanço da energia térmica foi realizada a adaptação de uma sub-rotina implementada anteriormente (OLIVEIRA, 2015) para a versão atual e paralela do código AMR3DP. Nesta sub-rotina é discretizada e implementada a equação de transporte de um escalar passivo φ genérico, na forma conservativa:

$$\frac{\partial(\rho \varphi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j \varphi)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\omega \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \right] + \xi_\varphi + S_\varphi, \quad (3.5)$$

onde φ é o escalar genérico transportado, ω é o coeficiente de difusividade, ξ_φ é o termo de reação química e S_φ é o termo fonte.

Como a aplicação desejada no presente trabalho para esta equação é a solução para o campo de energia térmica, a equação de transporte de um escalar passivo é simplificada para a equação da energia térmica, onde a variável resolvida é a temperatura:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(u_j T)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\alpha \left(\frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \right] + f_{TT}, \quad (3.6)$$

sendo T é a temperatura, α é a difusividade térmica e f_{TT} é o termo fonte o qual representará a fronteira imersa com propriedades térmicas variáveis em meio ao fluido.

3.3 Formulação para a fronteira imersa dinâmica

A metodologia da fronteira imersa utiliza uma malha independente para definir o corpo em meio fluido. Uma das principais vantagens é poder simular escoamentos sobre geometrias complexas utilizando malha cartesiana para o domínio de fluido, ou domínio euleriano. No presente trabalho é utilizada a multi forçagem direta, proposta por Wang et al. (2008).

O termo de força f_i da equação da quantidade de movimento linear é o responsável por definir a interface imersa. Para calcular esta força foi utilizada uma função distribuição:

$$f_i(\vec{x}) = \sum_K \vec{F}(\vec{x}_K) D_{ij}(\vec{x} - \vec{x}_K) \Delta V(\vec{x}_K), \quad (3.7)$$

sendo \vec{x} a coordenada do volume euleriano, \vec{x}_K a coordenada do elemento lagrangiano, $\Delta V(\vec{x}_K)$ o volume do elemento lagrangiano e D_{ij} representa uma função de interpolação / distribuição. Foi adotada uma função gaussiana, a qual possui a seguinte forma:

$$D_{ij}(\vec{x}_K) = \frac{g[(x_K - x_i)/\Delta] g[(y_K - y_j)/\Delta] g[(z_K - z_i)/\Delta]}{\Delta^3}, \quad (3.8)$$

$$g(r) = \begin{cases} g_1(r), & \|r\| < 1 \\ \frac{1}{2} - g_1(2 - \|r\|), & 1 < \|r\| < 2 \\ 0, & \|r\| > 2 \end{cases}, \quad (3.9)$$

$$g_1(r) = \frac{3 - 2\|r\| + \sqrt{1 + 4\|r\| - 4\|r\|^2}}{8}, \quad (3.10)$$

sendo Δ o tamanho característico da malha euleriana. Esta função mostra que quanto mais distantes estão os volumes eulerianos do ponto lagrangiano, menor é o valor da força distribuída naqueles pontos. Uma propriedade importante desta função é que ao integrá-la em todo domínio se obtém o valor unitário, significando que o processo de distribuição é conservativo (OLIVEIRA, 2006).

Na Figura (3.1) é apresentado um esquema representativo das malhas eulerianas e lagrangianas. A construção das malhas lagrangianas utilizadas na presente tese seguiu a idéia proposta por Uhlmann (2005). O valor da profundidade do volume lagrangiano é considerado como sendo o valor característico da malha do domínio euleriano. Então, a malha é construída de tal forma que o volume lagrangiano seja igual ao volume euleriano, sendo que a área do elemento

lagrangiano pode ser de qualquer formato, como por exemplo assumir um formato triangular, como na imagem, quadrada ou ainda pentagonal.

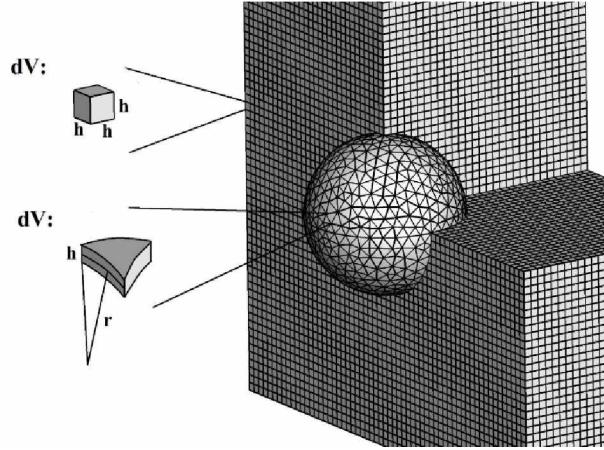


Figura 3.1: Esquema representativo das malhas euleriana e lagrangiana.

Por fim $\vec{F}(\vec{x}_K)$ representa a força no ponto lagrangiano, a qual é distribuída no domínio euleriano, delimitando assim a fronteira. Assim como em todo o domínio de cálculo a equação da quantidade de movimento linear é válida em cada ponto lagrangiano, respeitando assim a hipótese do contínuo, uma vez que estes pontos estão presentes no domínio euleriano. Assim, reescrevendo a Eq. (3.4) para cada ponto lagrangiano, considerando fluido incompressível e isolando a força obtemos:

$$F_i(\vec{X}, t) = \rho \frac{\partial U_i}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial P}{\partial X_i} - \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \right), \quad (3.11)$$

sendo que as variáveis maiúsculas representam o domínio lagrangiano.

Partindo desta equação e discretizando o termo temporal em um esquema de segunda ordem obtém-se:

$$F_i(\vec{X}, t) = \frac{\alpha_2 U_i^{t+\Delta t} - \alpha_1 U_i^t + \alpha_0 U_i^{t-\Delta t}}{\Delta t} + RHS_i^t, \quad (3.12)$$

onde $RHS_i^t = U_j \frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X_i} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\mu \left(\frac{\partial U_i}{\partial X_j} + \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) \right)$ e α_2 , α_1 e α_0 são os coeficientes da discretização temporal.

Para realizar este método escolhido soma-se e subtrai-se um parâmetro auxiliar U^* no termo temporal:

$$F_i(\vec{X}, t) = \frac{\alpha_2 U_i^{t+\Delta t} - \alpha_1 U_i^t + \alpha_0 U_i^{t-\Delta t} - U_i^* + U_i^*}{\Delta t} + RHS_i^t. \quad (3.13)$$

O passo seguinte é utilizar o princípio da superposição e resolver a equação anterior

em duas partes:

$$\frac{U_i^* - \alpha_1 U_i^t + \alpha_0 U_i^{t-\Delta t}}{\Delta t} + RHS_i^t = 0, \quad (3.14)$$

$$F_i(\vec{X}, t) = \frac{\alpha_2 U_i^{t+\Delta t} - U_i^*}{\Delta t}, \quad (3.15)$$

sendo que $U_i^{t+\Delta t}$ representa a velocidade desejada para a fronteira. Se for uma fronteira estacionária o seu valor é nulo. Se for uma fronteira em movimento o seu valor é igual a velocidade da fronteira. Para o cálculo de U_i^* utilizamos a Eq. (3.16):

$$U_i^* = \sum_{\Omega} u_i^* D_h(x_i - x_K) h^3, \quad (3.16)$$

onde D_h é representada por uma função interpolação/distribuição com propriedades de uma função gaussiana, u^* é a velocidade na face do volume euleriano e h^3 é o volume lagrangiano, considerando um volume euleriano uniforme.

Resumindo, na multi-forçagem direta calcula-se a velocidade no ponto lagrangiano, posteriormente calcula-se a força no ponto lagrangiano, e por fim esta força é distribuída no domínio euleriano. Este procedimento é realizado de maneira iterativa, e o critério de parada é a convergência para um valor de resíduo mínimo desejado, para todos os passos de tempo.

3.4 Formulação para a fronteira imersa térmica

Na presente tese foi implementada a metodologia da fronteira imersa térmica, contemplando os três tipos de condição de contorno: primeira espécie, onde é imposto diretamente o valor da temperatura, que pode ser constante ou uma função do tempo e espaço; segunda espécie, onde matematicamente é imposto um fluxo térmico, que pode ter um valor constante, ou função do tempo e espaço, e no caso de fluxo nulo modela-se uma condição adiabática; e terceira espécie, onde é feito um balanço sobre a fronteira entre condução de um meio sólido e a convecção em um meio fluido.

Para a solução da fronteira imersa térmica foi utilizada a mesma ideia utilizada na fronteira imersa para a fluido dinâmica, apresentada anteriormente. A diferença é que ao invés de partir da equação do momentum, parte-se da equação da energia. O termo de forçagem f_{TT} da equação da energia é o responsável por definir a interface térmica imersa. Para calcular esta forçagem utilizamos também uma função distribuição:

$$f_{TT}(\vec{x}) = \sum_K F_T(\vec{x}_K) D_{ij}(\vec{x} - \vec{x}_K) \Delta V(\vec{x}_K), \quad (3.17)$$

sendo $\Delta V(\vec{x}_K)$ o volume do elemento lagrangiano e D_{ij} representa uma função de interpolação / distribuição, apresentada anteriormente na Eq. (3.8) e $F_T(\vec{x}_K)$ representa a forçagem no ponto lagrangiano, a qual é distribuída no campo euleriano, representando assim a fronteira térmica.

Para a parte térmica também foi utilizada a multi-forçagem direta. Para condição de primeira espécie, ou seja, imposição direta da temperatura na fronteira imersa, a forçagem no ponto lagrangiano é calculada de maneira similar a parte dinâmica, primeiro calculando a temperatura no ponto lagrangiano através da equação de interpolação:

$$T_L^* = \sum_{\Omega} T^* D_h(x_i - x_K) h^3. \quad (3.18)$$

Em seguida é calculada a forçagem no ponto lagrangiano, através da equação:

$$F_T(\vec{X}, t) = \rho C_p \frac{\alpha_2 T^{t+\Delta t} - T_L^*}{\Delta t}, \quad (3.19)$$

sendo $T^{t+\Delta t}$ a temperatura que desejamos aplicar na fronteira.

Essa forçagem é distribuída através da Eq. (3.17). Esse processo é feito iterativamente até a convergência da solução.

Para a imposição da condição de contorno de segunda espécie, ou seja, imposição de fluxo na fronteira, utiliza-se o mesmo algoritmo, porém a única diferença será no cálculo da forçagem no ponto lagrangiano. Na presente tese foi utilizada uma das metodologias propostas por Kinoshita (2015), e o cálculo da forçagem é feita utilizando a seguinte equação:

$$F_T(\vec{X}, t) = \left(q_n'' - \left(-k \frac{\partial T^*}{\partial n} \right) \right), \quad (3.20)$$

sendo q_n'' é o fluxo imposto na fronteira, na direção normal a mesma, k é a condutividade térmica do fluido, e $\frac{\partial T^*}{\partial n}$ é a derivada da temperatura na direção normal a fronteira. O cálculo desta derivada é feita através da seguinte equação:

$$\frac{\partial T^*}{\partial n} = \frac{\partial T^*}{\partial x} n_x + \frac{\partial T^*}{\partial y} n_y \frac{\partial T^*}{\partial z} n_z, \quad (3.21)$$

onde a derivada de T^* em relações a cada uma das três direções é interpolada do domínio euleriano, e $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ é o vetor unitário normal a fronteira.

Por fim para impor a condição de contorno de terceira espécie, ou seja, balanço entre condução e convecção na superfície, calcula-se a forçagem $F_T(\vec{X}, t)$ no ponto lagrangiano também de uma maneira diferente. Para isto é feito um balanço igualando a condução de um lado da fronteira à convecção do outro (KINOSHITA, 2015), em cada ponto lagrangiano:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n}(\vec{x}, t) = (T(\vec{x}, t) - T_\infty) h_c, \quad (3.22)$$

onde h_c é o coeficiente de convecção, o qual deve ser previamente conhecido, k é a condutividade térmica, e T_∞ é a temperatura em um ponto distante a fronteira imersa.

Em seguida são adicionados e subtraídos dois temos auxiliares T^* e $k \frac{\partial T^*}{\partial n}$ a Eq. (3.22). Após manipulações matemáticas utilizando as Eqs. (3.19), (3.20) e (3.22), obtém-se uma equação para a forçagem no ponto lagrangiano:

$$F_T(\vec{X}, t) = T_\infty h_c - \left(T^*(\vec{X}, t) h_c + k \frac{\partial T^*}{\partial n}(\vec{X}, t) \right). \quad (3.23)$$

Na seção seguinte será apresentada a formulação para a turbulência.

3.5 Formulação para a turbulência

Uma das características mais importantes de um escoamento turbulento é a multiplicidade de escalas que o caracteriza (SILVEIRA-NETO, 2002). Esta multiplicidade representa o número de graus de liberdade de um escoamento turbulento, o qual a pode ser estimado a partir do número de Reynolds, por meio da Eq. (3.24):

$$Ngl = \text{Re}^{9/4}. \quad (3.24)$$

Percebe-se com esta equação que quanto maior o número de Reynolds maior será o número de graus de liberdade do escoamento.

A chamada Simulação Numérica Direta, do inglês *Direct Numerical Simulation*, ou *DNS*,

seria aquela que permitiria resolver todos os graus de liberdade ou todo o espectro de energia associado ao escoamento. Para a maioria das aplicações não é possível utilizar a DNS, ou seja, resolver diretamente todos os graus de liberdade que caracterizam os escoamentos turbulentos, devido ao elevado custo de processamento e memória computacional, uma vez que DNS exige uma malha extremamente refinada.

Buscando uma maneira de resolver escoamentos turbulentos sem a necessidade de calcular todas as escalas, surgiu no meio científico a ideia de separação ou decomposição das escalas da turbulência. O processo de decomposição das escalas deu origem a dois grupos de equações para a turbulência (SILVEIRA-NETO, 2002):

- Equações médias de Bousinesq-Reynolds (REYNOLDS, 1884), para as quais as escalas da turbulência são separadas nas escalas relativas ao comportamento médio e nas escalas relativas às flutuações em relação a esta média;
- Equações de Navier-Stokes filtradas (SMAGORINSKY, 1963), para as quais as escalas da turbulência são separadas em dois grupos, ou seja, o grupo das grandes escalas e o grupo das pequenas escalas ou escalas sub-malha.

3.5.1 Equações médias de Reynolds

Nas equações médias de Reynolds separa-se uma informação genérica $f(\vec{x}, t)$ na sua parte média de conjunto $\bar{f}(\vec{x}, t)$, e na sua parte flutuante $f'(\vec{x}, t)$:

$$f(\vec{x}, t) = \bar{f}(\vec{x}, t) + f'(\vec{x}, t). \quad (3.25)$$

Partindo da equação da conservação da massa, Eq. (3.2), aplicando o operador média sobre esta equação e utilizando a propriedade comutativa entre o operador média e o operador derivada parcial, tem-se a conservação da massa para as médias das componentes da velocidade:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0. \quad (3.26)$$

Subtraindo-se a Eq. (3.2) da Eq. (3.26), obtém-se uma equação conservação da massa

para as flutuações das componentes da velocidade:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0. \quad (3.27)$$

Da mesma forma, partindo-se da equação de balanço da quantidade de movimento linear, Eq. (3.4), aplicando-se o operador média sobre esta equação e utilizando-se de propriedades matemáticas, tem-se a Eq. (3.28).

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (3.28)$$

Observa-se que esta equação não pode ser resolvida como está, uma vez que no termo não linear aparece a média do produto de duas variáveis desconhecidas. É feita então a decomposição de escalas, usando a Eq. (3.25), onde a função $f(\vec{x}, t)$ é a velocidade $u_i(\vec{x}, t)$:

$$u_l = \bar{u}_l + u'_l. \quad (3.29)$$

Substituindo a Eq. (3.29) na Eq. (3.28) tem-se

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j + \bar{u}'_i \bar{u}'_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (3.30)$$

Uma consequência desse processo de decomposição de escalas, e da transformação das equações originais em equações médias, é o aparecimento de um tensor adicional $\tau_{ij} = \bar{u}'_i \bar{u}'_j$, o tensor de Reynolds.

Transpondo o tensor de Reynolds para o segundo membro da equação e agrupando-o com o tensor viscoso chega-se a equação média de Bousinesq-Reynolds:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \bar{u}'_i \bar{u}'_j \right]. \quad (3.31)$$

Com estas novas incógnitas, faz-se necessário modelar este tensor.

3.5.2 Equações de Navier-Stokes filtradas

Nas equações de Navier-Stokes filtradas separa-se uma informação genérica $f(\vec{x}, t)$ na sua parte filtrada $\bar{f}(\vec{x}, t)$ e na sua parte flutuante $f'(\vec{x}, t)$:

$$f(\vec{x}, t) = \bar{f}(\vec{x}, t) + f'(\vec{x}, t). \quad (3.32)$$

A parte filtrada $\bar{f}(\vec{x}, t)$ é dada por

$$\bar{f}(\vec{x}, t) = \int_D f(\vec{x}', t) G(\vec{x} - \vec{x}') d\vec{x}'. \quad (3.33)$$

sendo a função filtro definida de diversas maneiras, onde a mais comum é a função filtro por volume:

$$G(\vec{x} - \vec{x}') = \begin{cases} 1/\Delta & |\vec{x}| \geq \Delta/2 \\ 0 & |\vec{x}| < \Delta/2 \end{cases}. \quad (3.34)$$

em que Δ é o tamanho característico do filtro, o qual caracteriza a frequência de corte da filtragem.

Partindo da equação da conservação da massa, Eq. (3.2), aplicando o operador filtro sobre esta equação e utilizando a propriedade comutativa entre este operador e o operador derivada parcial, tem-se o balanço da massa para as componentes da velocidade filtradas:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0. \quad (3.35)$$

Subtraindo-se a Eq. (3.2) da Eq. (3.35), obtém-se uma equação conservação da massa para as flutuações das componentes da velocidade:

$$\frac{\partial u'}{\partial x_i} = 0. \quad (3.36)$$

Da mesma forma, partindo da equação da quantidade de movimento linear, Eq. (3.4), e aplicando-se o operador filtro sobre esta equação e utilizando-se de propriedades matemáticas, tem-se a Eq. (3.37)

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (3.37)$$

De forma análoga a Eq. (3.28), observa-se que esta equação não pode ser resolvida como está, uma vez que no termo não linear aparece o produto filtrado e não o produto das variáveis filtradas como precisaria ser. Define-se então o tensor global sub-malha da turbulência:

$$\tau_{ij} = \bar{u}_i \bar{u}_j - \bar{u}_i \bar{u}_j. \quad (3.38)$$

Substituindo-se a Eq. (3.38) na Eq. (3.37), tem-se

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \tau_{ij} \right]. \quad (3.39)$$

Analogamente às equações médias de Reynolds, o tensor τ_{ij} deve ser modelado para as equações de Navier-Stokes filtradas. Isto é feito através da utilização de modelos de fechamento da turbulência.

3.5.3 Modelagem da turbulência utilizando médias de Reynolds

Para a maioria dos casos, a elevado número de Reynolds, a simulação numérica direta não é adequada para resolver o escoamento, uma vez que o espectro de energia associado se torna mais largo, ou seja, maior a quantidade de pequenas escalas em grande frequência que devem ser calculadas. Assim como apresentado nas subseções anteriores, uma solução é a decomposição de escalas e a dedução de equações médias ou filtradas. Isto leva ao famoso problema de fechamento da turbulência, o qual estabelece uma relação entre as tensões de Reynolds e o campo filtrado de velocidade:

$$\bar{u}'_i \bar{u}'_j = f(\bar{u}_i, \bar{u}_j). \quad (3.40)$$

Boussinesq (1877) propôs o conceito de viscosidade turbulenta para o tensor de Reynolds para o fechamento das equações, estabelecendo uma analogia com o modelo de Stokes para as tensões viscosas moleculares. O seguinte modelo foi proposto para o fechamento para o tensor de Reynolds:

$$-\overline{u'_i u'_j} = v_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \quad (3.41)$$

sendo

$$k = \frac{1}{2} \left(\overline{u'_i u'_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \right), \quad (3.42)$$

a energia cinética turbulenta, outra variável que faz parte do modelo de fechamento proposto por Boussinesq. Contudo, como ela depende apenas do traço do tensor de Reynolds, ela tem uma natureza semelhante à pressão e pode ser incorporada ao gradiente de pressão (SILVEIRANETO, 2002). Partindo da equação média de Reynolds, Eq. (3.31), e substituindo-se o modelo de Boussinesq nesta equação tem-se o fechamento através da hipótese de viscosidade turbulenta:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[v \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + v_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right]. \quad (3.43)$$

O divergente do último termo da equação, que envolve a energia cinética turbulenta, resulta no gradiente da energia cinética turbulenta com δ_{ij} , o que permite incorporar este termo ao termo de pressão, gerando uma pressão modificada na equação modelada:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + v_t) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (3.44)$$

Para a equação média da energia com difusividade turbulenta, aplica-se a média, surgiendo um escalar adicional Q_j :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_j \bar{T})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\alpha \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) + Q_j \right] \quad (3.45)$$

onde:

$$Q_j = \overline{u_j T} - \bar{u}_j \bar{T}. \quad (3.46)$$

Q_j pode ser modelado através de um modelo de gradiente-difusão (FOX, 2003):

$$Q_j = -\alpha_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}, \quad (3.47)$$

onde \bar{T} é o campo de temperatura resolvido, e α_t é o coeficiente de difusão turbulento, sendo calculado através da equação:

$$\alpha_t = \frac{v_t}{Pr_t}, \quad (3.48)$$

onde Pr_t é o número de Prandtl turbulento, variável que controla a magnitude da difusão turbulenta média.

Assim, a equação de energia média se torna:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_j \bar{T})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\alpha + \frac{v_t}{Pr_t} \right) \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) \right] \quad (3.49)$$

Nota-se que as equações médias do momentum e da energia estão fechadas, possuindo o mesmo número de equação e de incógnitas, excetuando-se a pressão. O último problema para a solução completa desta equação é o cálculo da viscosidade turbulenta.

Na presente tese foram discretizados e implementados no código AMR3DP dois modelos para solução das equações médias de Reynolds. O primeiro foi o modelo de Spalart-Allmaras, que utiliza uma equação de transporte, e o segundo foi o modelo $k-\omega$ de Wilcox com duas equações, os quais serão apresentados a seguir.

3.5.3.1 *Modelo de Spalart-Allmaras*

O modelo de Spalart-Allmaras (SPALART; ALLMARAS, 1992) foi desenvolvido com base em correlações empíricas de diversos tipos de escoamento. A viscosidade turbulenta v_t é calculada a partir da variável auxiliar \tilde{v} e amortecida pela função f_{v1} junto as paredes:

$$v_t = \tilde{v} f_{v1}, \quad (3.50)$$

sendo

$$f_{v1} = \frac{\chi^3}{\chi^3 + C_{v1}^3}, \quad (3.51)$$

e

$$\chi = \frac{\tilde{v}}{v}. \quad (3.52)$$

A variável auxiliar \tilde{v} é calculada a partir de uma equação de transporte:

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \tilde{v}}{\partial x_j} = C_{b1} \tilde{S} \tilde{v} + \frac{1}{\sigma} \{ \nabla \cdot [(\mathbf{v} + \tilde{\mathbf{v}}) \nabla \tilde{v}] + C_{b2} |\nabla \mathbf{v}|^2 \} - C_{w1} f_w \left(\frac{\tilde{v}}{d} \right)^2, \quad (3.53)$$

sendo que os termos da equação representam, respectivamente, a variação temporal, a advecção, a transferência do escoamento médio para a turbulência, a difusão molecular e turbulenta, a dissipação e destruição de viscosidade turbulenta.

A taxa de deformação também possui amortecimento próximo as paredes, através da função f_{v2} :

$$\tilde{S} \equiv S + \frac{\tilde{v}}{\kappa^2 d^2} f_{v2}, \quad (3.54)$$

sendo

$$f_{v2} = 1 - \frac{\chi}{1 + \chi f_{v1}}, \quad (3.55)$$

onde d é a distância até a parede mais próxima, e S é a norma do tensor taxa de deformação:

$$S = \sqrt{2\Omega_{ij}\Omega_{ij}}, \quad (3.56)$$

onde Ω_{ij} é a parte anti-simétrica do gradiente de velocidades:

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} (\partial u_i / \partial x_j - \partial u_j / \partial x_i). \quad (3.57)$$

A função f_w presente no termo de destruição é definida como unitária na região logarítmica da camada limite, sendo definida como:

$$f_w = g \left[\frac{1 + C_{w3}^6}{g^6 + C_{w3}^6} \right]^{1/6}, \quad (3.58)$$

onde

$$g = r + C_{w2} (r^6 - r), \quad (3.59)$$

e

$$r \equiv \frac{\tilde{v}}{\tilde{S} \kappa^2 d^2}. \quad (3.60)$$

As demais constantes do modelo são:

$$\begin{aligned}
 \sigma &= 2/3, \\
 C_{b1} &= 0,1355, \\
 C_{b2} &= 0,622, \\
 \kappa &= 0,41, \\
 C_{w1} &= C_{b1}/\kappa^2 + (1+C_{b2})/\sigma, \\
 C_{w2} &= 0,3, \\
 C_{w3} &= 2, \\
 C_{v1} &= 7,1,
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

sendo que estas constantes foram determinadas empiricamente.

A seguir será apresentado o modelo $k-\omega$ de Wilcox.

3.5.3.2 Modelo $k - \omega$

O modelo $k-\omega$ proposto por Wilcox (1988) é um modelo a duas equações, onde são utilizadas duas equações de transporte, a partir da hipótese de que todos os termos a serem modelados obedecem à uma equação de difusão, uma para a energia cinética turbulenta e outra para a taxa de dissipação específica.

A viscosidade turbulenta ν_t é calculada a partir da razão da energia cinética turbulenta pela dissipação específica:

$$\nu_t = \frac{k}{\omega}. \tag{3.62}$$

A equação de transporte para a energia cinética turbulenta é dada por:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \beta^* k \omega + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(v + \sigma^* \nu_T) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right], \tag{3.63}$$

onde os termos da equação representam, respectivamente, a variação temporal, a advecção, a produção, a destruição e a difusão molecular e turbulenta da energia cinética turbulenta.

Já a equação de transporte para a taxa de dissipação específica é dada por:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \bar{u}_j \frac{\partial \omega}{\partial x_j} = \alpha \frac{\omega}{k} \tau_{ij} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} - \beta \omega^2 + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \sigma \nu_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right], \quad (3.64)$$

com os termos, respectivamente, da variação temporal, advecção, produção, destruição e difusão molecular e turbulenta da dissipação específica.

O tensor τ_{ij} é definido por:

$$\tau_{ij} = \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.65)$$

e,

$$\varepsilon = \beta^* \omega k. \quad (3.66)$$

E as demais constantes para o fechamento do modelo:

$$\alpha = \frac{5}{9}; \quad \beta = \frac{3}{40}, \quad \beta^* = \frac{9}{100}, \quad \sigma = \frac{1}{2}, \quad \sigma^* = \frac{1}{2}, \quad (3.67)$$

sendo que estas constantes foram determinadas empiricamente.

3.5.4 Modelagem sub-malha da turbulência

Para o fechamento das equações filtradas, a hipótese de Boussinesq (1877) também é utilizada, estabelecendo uma analogia com o modelo de Stokes para as tensões viscosas moleculares. Os componentes do tensor de Reynolds sub-malha em função da taxa de deformação gerada pelo campo de velocidade filtrado e da energia cinética turbulenta é dado por:

$$\tau_{ij} = -\nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} k \delta_{ij}, \quad (3.68)$$

Partindo da equação de Navier-Stokes filtrada, Eq. (3.39), e aplicando a hipótese de Boussinesq:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} k \delta_{ij} \right]. \quad (3.69)$$

Incorporando o termo em que existe a energia cinética turbulenta k à pressão, como feito na modelagem para os modelos URANS, obtém-se uma equação de transporte para as velocidades filtradas com a pressão modificada:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_i \bar{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (3.70)$$

Para a modelagem sub-malha da equação da energia com difusividade turbulenta, aplica-se a filtragem na equação da energia, surgindo um escalar adicional Q_j :

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_j \bar{T})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\alpha \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) + Q_j \right], \quad (3.71)$$

onde:

$$Q_j = \bar{u}_j \bar{T} - \bar{u}_j \bar{T}, \quad (3.72)$$

sendo que Q_j pode ser modelado através de um modelo de gradiente-difusão sub-malha (FOX, 2003):

$$Q_j = -\alpha_t \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j}, \quad (3.73)$$

onde \bar{T} é o campo de temperatura resolvido, e α_t é o coeficiente de difusão submalha turbulento, sendo calculado através da equação:

$$\alpha_t = \frac{2 (C_s \Delta)^2}{Pr_t} |\tilde{S}| = \frac{\nu_t}{Pr_t}, \quad (3.74)$$

onde Pr_t é o número de Prandtl turbulento, variável que controla a magnitude da difusão turbulenta sub-malha.

Assim, a equação de energia filtrada se torna:

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{u}_j \bar{T})}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\alpha + \frac{\nu_t}{Pr_t} \right) \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} \right) \right] \quad (3.75)$$

A viscosidade cinemática turbulenta ν_t é modelada para fechar as equações para velocidade e energia térmica filtradas com o mesmo número de variáveis e incógnitas. São diversas

as formas para se modelar esta viscosidade. Neste trabalho serão utilizadas duas modelagens bastante difundidas: o clássico modelo sub-malha de Smagorinsky, e o modelo sub-malha dinâmico de Germano, sendo que o modelo de Smagorinsky já estava implementado no código AMR3DP, e o modelo dinâmico foi discretizado e implementado no presente trabalho.

3.5.4.1 *Modelo sub-malha de Smagorinsky*

A modelagem de Smagorinsky é baseada na hipótese de equilíbrio para o qual a energia injetada nas estruturas turbilhonares é igual a energia transformada nas escalas de Kolmogorov. A viscosidade turbulenta pode ser expressa em função do tensor taxa de deformação $\overline{S_{ij}}$, da escala de comprimento l e de uma constante C_s , conhecida como constante de Smagorinsky:

$$v_t = (C_s \Delta)^2 |S_{ij}|. \quad (3.76)$$

O norma do tensor taxa de deformação $|S_{ij}|$ é dado por:

$$|S_{ij}| = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right), \quad (3.77)$$

e a escala de comprimento é calculada em função da malha de discretização:

$$\Delta = \sqrt[3]{\Delta x \Delta y \Delta z}. \quad (3.78)$$

Para escoamentos com turbulência homogênea e isotrópica, a constante de Smagorinsky foi determinada analiticamente por Lilly (1992), e o valor encontrado foi $C_s = 0,18$. Porém na prática esta constante pode ser calibrada para valores entre 0,05 e 0,30, uma vez que dependendo do comportamento do escoamento turbulento esta constante deve ser alterada. Um tratamento especial deve ser dado em posições próximas a parede, regiões onde os efeitos viscosos sobre a turbulência é maior, e a turbulência se torna menos homogênea e isotrópica. Como consequência a constante de Smagorinsky deve ser menor. Uma forma de resolver este problema é a utilização de uma função que amortece o valor da viscosidade em regiões de parede.

VanDriest (1956) apresenta uma função de amortecimento, a qual é aplicada a cons-

tante de Smagorinsky. Esta função é dada por

$$C_s = C_{so} \left(1 - e^{(d^+/A^+)}\right)^2. \quad (3.79)$$

onde d é a distância do volume euleriano analisado até a parede mais próxima, $d^+ = du_\tau/v$ representa a distância relativa, $u_\tau = \sqrt{\tau_w/\rho}$ é a velocidade de cisalhamento, τ_w é a tensão de cisalhamento na parede, $A^+ = 25$ é uma constante determinada por Ferziger e Peric (1996) e C_{so} é a constante de Smagorinsky, geralmente limitada em $0.05 \leq C_{so} \leq 0.3$.

Um tratamento especial deve ser realizado para amortecer a viscosidade nas regiões próximas às paredes tipo fronteira imersa. As variáveis são calculadas da seguinte forma: d é a distância do centro do volume euleriano ao centro do volume lagrangiano mais próximo, e a tensão τ_w é calculada a partir do vetor velocidades (u, v, w) do volume euleriano onde o centro do volume lagrangiano está contido, sendo esse volume lagrangiano o mais próximo do volume euleriano analisado.

Neste cálculo de τ_w é necessário projetar o vetor velocidade (u, v, w) na direção tangencial da fronteira imersa. Pela álgebra linear pode-se dizer que o vetor projetado na direção tangencial a fronteira $(v_{xPro}, v_{yPro}, v_{zPro})$ é dado por:

$$\begin{bmatrix} v_{xPro} \\ v_{yPro} \\ v_{zPro} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} ii_x \\ ii_y \\ ii_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ii_x & ii_y & ii_z \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}, \quad (3.80)$$

onde (ii_x, ii_y, ii_z) é o vetor normal do volume lagrangiano.

E finalmente τ_w é calculado pela Eq. (3.81).

$$\tau_w = \mu \frac{\sqrt{v_{xPro}^2 + v_{yPro}^2 + v_{zPro}^2}}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}}, \quad (3.81)$$

sendo $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ as dimensões do volume euleriano onde o centro do volume lagrangiano está contido.

Um novo modelo foi proposto, onde a constante de Smagorinsky é calculada automaticamente, dependendo da posição e característica do escoamento, caracterizando o modelo sub-malha dinâmica de Germano. O que era uma constante passa a ser uma função de propor-

cionalidade.

3.5.4.2 Modelagem dinâmica sub-malha

Germano et al. (1991) propuseram um novo modelo sub-malha baseado na proposta de Smagorinsky, onde a equação do momentum é filtrada duas vezes, permitindo que a função de proporcionalidade do modelo se ajuste automaticamente.

O primeiro filtro utiliza as dimensões da malha para calcular o seu comprimento característico, como no modelo de Smagorinsky. O segundo filtro utiliza múltiplos das dimensões da malha para determinar o comprimento característico desse último filtro.

Partindo da equação filtrada com base no comprimento Δ da malha, Eq. (3.37), utilizando o tensor global de Germano ($\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j$), obtendo-se a Eq. (3.39).

Continuando com a formulação aplica-se uma segunda filtragem na Eq. (3.39), com comprimento característicos $\hat{\Delta} > \Delta$, sendo este novo comprimento múltiplo de Δ , geralmente $\hat{\Delta} = 2\Delta$. Definindo um tensor para teste $T_{ij} = \overline{\hat{u}_i \hat{u}_j} - \hat{\bar{u}}_i \hat{\bar{u}}_j$, obtém-se:

$$\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\hat{u}_i \hat{u}_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} \right) - T_{ij} \right]. \quad (3.82)$$

Subtraindo a Eq. (3.82) da Eq. (3.37) filtrada com o comprimento característicos $\hat{\Delta}$, chega-se a um tensor de Leonard global, ou a identidade de Germano:

$$L_{ij} = T_{ij} - \hat{\tau}_{ij}. \quad (3.83)$$

Conhecido o tensor de Leonard global, a função para determinar o coeficiente dinâmico possui a seguinte forma:

$$c(\vec{x}, t) = -\frac{1}{2} \frac{L_{ij} M_{ij}}{M_{ij} M_{ij}}, \quad (3.84)$$

em que o tensor M_{ij} é definido por:

$$M_{ij} = \hat{\Delta}^2 \left| \hat{\bar{S}} \right| \hat{\bar{S}}_{ij} - \bar{\Delta}^2 \left| \bar{S} \right| \bar{S}_{ij}. \quad (3.85)$$

O cálculo do coeficiente dinâmico depende de grandezas já calculadas e de um duplo processo de filtragem. Este coeficiente sendo calculado desta maneira permite que a turbulência seja modelada de maneira eficiente de acordo com a característica do escoamento, como por exemplo, em regiões de esteira, ou então em regiões parietais, situações de escoamento totalmente diferentes.

3.5.4.3 Modelagem sub-malha utilizando filtragem explícita

Os modelos de turbulência sub-malha apresentados anteriormente e implementados no código AMR3DP dependem do comprimento da malha. Como a malha utilizada é multi-bloco, a qual será detalhada no capítulo seguinte de modelagem numérica, e dependendo da configuração do escoamento, pode ocorrer um aumento grande da viscosidade turbulenta ao se passar da malha fina para a malha mais grossa, devido justamente ao aumento do comprimento característico utilizado no cálculo da viscosidade turbulenta. Buscando a independência da malha no cálculo deste comprimento característico foi estudada e implementada no código a técnica da filtragem explícita, apresentada em Bose et al. (2010).

A filtragem explícita consiste em aplicar um filtro nas equações de Navier-Stokes filtradas pela malha. A primeira filtragem já é feita pela malha, como já apresentado na sub-seção 3.5.2. Em seguida é aplicado um segundo filtro, denominado filtro explícito, \tilde{G} , o qual é aplicado apenas nos termos não lineares, $\bar{u}_i \bar{u}_j$ e o tensor τ_{ij} :

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\widetilde{\bar{u}_i \bar{u}_j})}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \widetilde{\tau_{ij}} \right]. \quad (3.86)$$

Segundo (BOSE et al., 2010) o filtro explícito deve ser uma ordem inferior ao esquema advectivo utilizado na solução numérica. O código AMR3DP utiliza esquemas de segunda ordem, então o filtro implementado e utilizado para a filtragem foi o filtro chapéu, o qual é de primeira ordem. Os autores ainda afirmam que o filtro é aplicado apenas nos termos não lineares pelo fato da possibilidade de, a partir destes termos, ocorrer oscilações numéricas, e que a perda de resolução do escoamento é menor do que filtrando a equação inteira.

Para o modelo de Smagorinsky, aplicando-se o filtro explícito no tensor de Reynolds e considerando a hipótese de Boussinesq, tem-se:

$$\widetilde{\tau}_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \widetilde{\tau}_{kk} = -2 \left(C_s \widetilde{\Delta} \right)^2 \widetilde{|S|} \widetilde{S}_{ij}. \quad (3.87)$$

Então a viscosidade turbulenta agora é calculada utilizando o comprimento do filtro explícito $\widetilde{\Delta}$:

$$\nu_t = \left(C_s \widetilde{\Delta} \right)^2 \widetilde{|S_{ij}|}. \quad (3.88)$$

O comprimento do filtro é escolhido a priori, por exemplo, este comprimento pode ser duas vezes o comprimento da malha, ou seja, $\widetilde{\Delta} = 2\Delta$. E para finalizar a modelagem e o \widetilde{S}_{ij} também é filtrado explicitamente.

Para utilização do filtro explícito no modelo dinâmico de Germano é necessária a aplicação da dupla filtragem como é feito no modelo tradicional, acrescido da aplicação do filtro explícito.

Para dedução do modelo, parte-se do tensor de Reynolds em função das velocidades:

$$\tau_{ij} = \overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j. \quad (3.89)$$

Depois aplica-se o filtro explícito \widetilde{G} neste tensor:

$$\widetilde{\tau}_{ij} = \widetilde{\overline{u_i u_j}} - \widetilde{\bar{u}_i \bar{u}_j}. \quad (3.90)$$

Aplica-se também este mesmo filtro explícito nas equações de Navier-Stokes filtradas, Eq. (3.39):

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\widetilde{\bar{u}_i \bar{u}_j})}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \widetilde{\tau}_{ij} \right]. \quad (3.91)$$

Após a aplicação do filtro explícito no tensor de Reynolds e na equações de Navier-Stokes filtradas, aplica-se um segundo filtro \widehat{G} , denominado filtro teste, sobre a Eq. (3.90):

$$\widehat{\widetilde{\tau}}_{ij} = \widehat{\widetilde{\overline{u_i u_j}}} - \widehat{\widetilde{\bar{u}_i \bar{u}_j}}. \quad (3.92)$$

E também sobre a Eq. (3.91):

$$\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j})}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \widehat{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \widehat{u}_j}{\partial x_i} \right) - \widehat{\bar{\tau}_{ij}} \right]. \quad (3.93)$$

Até o presente ponto temos as equações Navier-Stokes filtradas pela malha, em seguida filtrada explicitamente e depois filtrada com o filtro teste \widehat{G} . O tensor de Reynolds gerado no processo de filtragem pela malha também foi filtrado explicitamente e filtrado com o filtro teste \widehat{G} .

Para a continuidade da formulação, aplica-se o mesmo filtro teste \widehat{G} sobre tensor de Reynolds (Eq. (3.89)):

$$\widehat{\tau_{ij}} = \widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j}. \quad (3.94)$$

Aplica-se também \widehat{G} nas equações de Navier-Stokes filtradas implicitamente pela malha (Eq. (3.39)):

$$\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j})}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \widehat{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \widehat{u}_j}{\partial x_i} \right) - \widehat{\bar{\tau}_{ij}} \right]. \quad (3.95)$$

Define-se o tensor $\widehat{\bar{T}_{ij}}$:

$$\widehat{\bar{T}_{ij}} = \widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \widehat{\bar{\bar{u}_i \bar{u}_j}}, \quad (3.96)$$

Isolando $\widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j}$ da Eq. (3.96), e substituindo-a na Eq. (3.94), tem-se

$$\widehat{\bar{\tau}_{ij}} = \widehat{\bar{T}_{ij}} + \widehat{\bar{\bar{u}_i \bar{u}_j}} - \widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j}, \quad (3.97)$$

Substituindo o tensor $\widehat{\bar{\tau}_{ij}}$ da Eq. (3.97) na Eq. (3.95), tem-se:

$$\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\widehat{\bar{\bar{u}_i \bar{u}_j}})}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \widehat{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \widehat{u}_j}{\partial x_i} \right) - \widehat{\bar{T}_{ij}} \right]. \quad (3.98)$$

Após as deduções apresentadas acima, subtrai-se a Eq. (3.98) de (3.93), obtendo:

$$\widehat{\widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j}} - \widehat{\bar{u}_i \bar{u}_j} = \widehat{\bar{T}_{ij}} - \widehat{\bar{\tau}_{ij}} = \widetilde{L}_{ij}, \quad (3.99)$$

onde \widetilde{L}_{ij} é o tensor de Leonard filtrado explicitamente.

A parte anisotrópica do tensor de Reynolds global sub-malha pode ser modelada com a hipótese de Boussinesq:

$$\tau_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \tau_{kk} = -2C(x, t) \bar{\Delta}^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij}. \quad (3.100)$$

Aplicando o filtro explícito \widehat{G} e o filtro teste \widehat{G} neste tensor, tem-se:

$$\widehat{\widehat{\tau_{ij}}} - \frac{\delta_{ij}}{3} \widehat{\widehat{\tau_{kk}}} = -2C(x, t) \widehat{\bar{\Delta}^2} \widehat{|\bar{S}|} \widehat{\bar{S}_{ij}}. \quad (3.101)$$

De maneira análoga, considerando a hipótese de Boussinesq e aplicando os filtros no tensor T_{ij} , tem-se:

$$\widehat{\widehat{T_{ij}}} - \frac{\delta_{ij}}{3} \widehat{\widehat{T_{kk}}} = -2C(x, t) \widehat{\bar{\Delta}^2} \widehat{|\bar{S}|} \widehat{\bar{S}_{ij}}. \quad (3.102)$$

Substituindo as Eqs. (3.101) e (3.102) na Eq. (3.99) obtém-se:

$$\widetilde{L}_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \widetilde{L}_{kk} = 2C(x, t) \widetilde{M}_{ij}, \quad (3.103)$$

onde:

$$\widetilde{M}_{ij} = -\widehat{\bar{\Delta}^2} \widehat{|\bar{S}|} \widehat{\bar{S}_{ij}} + \widehat{\bar{\Delta}^2} \widehat{|\bar{S}|} \widehat{\bar{S}_{ij}}. \quad (3.104)$$

Definindo uma equação para o quadrado do erro, a partir da Eq. (3.104), tem-se:

$$Q = \left(\widetilde{L}_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \widetilde{L}_{kk} - 2C(x, t) \widetilde{M}_{ij} \right)^2. \quad (3.105)$$

Derivando esta equação do erro em função da constante C , e igualando a zero, de modo

a encontrar o ponto de mínimo desta função de erro, obtém-se:

$$C(x, t) = \frac{1}{2} \frac{\widetilde{L}_{ij} \widetilde{M}_{ij}}{\widetilde{M}_{ij} \widetilde{M}_{ij}}. \quad (3.106)$$

Então a viscosidade turbulenta agora é calculada através da seguinte equação:

$$\nu_t = \left(C(x, t) \widetilde{\Delta} \right)^2 \widetilde{|S_{ij}|}, \quad (3.107)$$

onde a viscosidade turbulenta está em função do comprimento do filtro explícito, como no modelo de Smagorinsky, e em função ainda da constante $C(x, t)$, que é calculada dinamicamente de acordo com o escoamento, e varia ao longo do tempo e do espaço.

No código AMR3DP o comprimento do filtro utilizado foi baseado no tamanho da malha no nível mais fino, de tal forma que a filtragem seja realizada utilizando o comprimento da região de maior intensidade turbulenta, uma vez que o principal critério de refinamento da malha em escoamentos turbulentos é a vorticidade. Com isto pretende-se modelar o menor número possível de escalas, e calcular o máximo possível das maiores escalas.

A utilização de um comprimento único, em todos os níveis, para o cálculo da viscosidade turbulenta, resulta em uma maior uniformidade da viscosidade no contato entre níveis, criando assim campos de viscosidades mais coerentes e evita possíveis oscilações numéricas devidas à mudança abrupta de viscosidade turbulenta.

No capítulo seguinte serão apresentadas as modelagens numérica utilizadas e implementadas para a presente tese.

CAPÍTULO IV

MODELAGEM NUMÉRICA

Neste capítulo será apresentada a modelagem numérica utilizada e implementada na presente tese, bem como o algoritmo e o equacionamento para a implementação das sondas numéricas em malha adaptativa.

4.1 Acoplamento pressão-velocidade

A maior dificuldade na solução destas equações é o acoplamento pressão-velocidade, sendo que a velocidade depende da pressão e a pressão depende da velocidade. No presente trabalho é utilizado o método do Passo Fracionado, proposto por Chorin (1968). Este método é composto de dois passos: um preditor, onde a velocidade é estimada, e um corretor, onde a velocidade é corrigida a partir da flutuação da pressão.

No passo preditor pode-se estimar a velocidade explicitamente, com base na solução do tempo precedente, ou implicitamente, criando um sistema linear para cada componente do vetor velocidade. No presente trabalho foi implementada a formulação implícita, nas formas conservativa e não conservativa. Partindo da equação de transporte de quantidade de movimento linear e discretizando o termo temporal com uma aproximação de segunda ordem, tem-se:

$$\frac{\alpha_2 \rho u_i^{t+\Delta t} + \alpha_1 \rho u_i^t + \alpha_0 \rho u_i^{t-\Delta t}}{\Delta t} + \frac{\partial (\rho u_i^{t+\Delta t} u_j^{t+\Delta t})}{\partial x_j} = - \frac{\partial p^{t+\Delta t}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial u_i^{t+\Delta t}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^{t+\Delta t}}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (4.1)$$

A velocidade é estimada a partir da equação:

$$\frac{\alpha_2 \rho \tilde{u}_i^{t+\Delta t} + \alpha_1 \rho u_i^t + \alpha_0 \rho u_i^{t-\Delta t}}{\Delta t} + \frac{\partial (\rho \tilde{u}_i^{t+\Delta t} \tilde{u}_j^{t+\Delta t})}{\partial x_j} = -\frac{\partial p^t}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \tilde{u}_i^{t+\Delta t}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j^{t+\Delta t}}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (4.2)$$

Nota-se que as velocidades dos termos advectivo e difusivo estão no tempo atual ($t + \Delta t$), menos a pressão que está no tempo passado. Logo a velocidade estimada é calculada implicitamente utilizando um sistema linear.

A etapa seguinte no método do passo fracionado é subtrair a Eq. (4.2) da Eq. (4.1), resultando em:

$$\frac{\alpha_2 \rho (u_i^{t+\Delta t} - \tilde{u}_i^{t+\Delta t})}{\Delta t} = -\frac{\partial (p^{t+\Delta t} - p^t)}{\partial x_i}. \quad (4.3)$$

Defini-se:

$$p' = p^{t+\Delta t} - p^t, \quad (4.4)$$

onde p' é a flutuação, ou variação, da pressão no tempo atual. Substituindo a Eq. (4.4) na Eq. (4.3) e aplicando o operador divergente em ambos os lados da equação resultante, tem-se:

$$\frac{\alpha_2}{\Delta t} \left(\frac{\partial u_i^{t+\Delta t}}{\partial x_i} - \frac{\partial \tilde{u}_i^{t+\Delta t}}{\partial x_i} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} \right). \quad (4.5)$$

Pela lei da conservação da massa para massa específica constante, o termo $\frac{\partial u_i^{t+\Delta t}}{\partial x_i}$ é nulo, assim a Eq. (4.5) se reduz a:

$$\frac{\alpha_2}{\Delta t} \left(\frac{\partial \tilde{u}_i^{t+\Delta t}}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i} \right). \quad (4.6)$$

Logo conhecida a velocidade estimada, a correção da pressão é calculada utilizando a Eq. (4.6) resolvendo-se um sistema linear.

O passo seguinte no método do passo fracionado é o passo corretor, onde a pressão é corrigida através da Eq. (4.7):

$$p^{t+\Delta t} = p^t + p'. \quad (4.7)$$

Partindo da Eq. (4.3) chega-se a Eq. (4.8) para a correção da velocidade:

$$u_i^{t+\Delta t} = \tilde{u}_i^{t+\Delta t} - \frac{\Delta t}{\alpha_2 \rho} \frac{\partial p'}{\partial x_i}. \quad (4.8)$$

4.2 Discretização das equações de Navier-Stokes

Nas simulações das grandes escalas, o tamanho do passo de tempo pode ser muito pequeno quando é necessário capturar as pequenas escalas do escoamento. Deste modo, a forma de integração temporal deve ser escolhida com cautela. Esquemas explícitos apresentam problemas de estabilidade numérica quando utiliza-se valores de CFL (Courant Friedrich Lewy) maiores do que a unidade. Visando restringir o tamanho do passo de tempo necessário para manter a estabilidade numérica, o seguinte critério foi utilizado nas simulações deste trabalho:

$$\Delta t = CFL \left(\frac{1}{\Delta t_{adv}} + \frac{1}{\Delta t_{dif}} \right)^{-1}, \quad (4.9)$$

onde o CFL pode ser assumido entre 0 e 1, e Δt_{adv} e Δt_{dif} são, respectivamente, o tamanho máximo permitido do passo de tempo advectivo e difusivo, definidos por:

$$\Delta t_{adv} = \left(\frac{\Delta x}{|u|_{\max}} + \frac{\Delta y}{|v|_{\max}} + \frac{\Delta z}{|w|_{\max}} \right), \quad (4.10)$$

$$\Delta t_{dif} = \left(\frac{\Delta x^2}{\nu} + \frac{\Delta y^2}{\nu} + \frac{\Delta z^2}{\nu} \right), \quad (4.11)$$

onde Δx , Δy e Δz denotam, respectivamente, o tamanho das células de discretização nas direções x , y e z no nível mais fino, $|u|_{\max}$, $|v|_{\max}$ e $|w|_{\max}$ são o máximo valor absoluto da velocidade nas três direções coordenadas, e $\nu = \mu/\rho$ representa a viscosidade cinemática.

A utilização de um esquema explícito para os termos advectivos e difusivos, resulta em um tamanho de passo de tempo da ordem $O(\Delta x^2)$, principalmente pelo termo difusivo (FERZI-GER; PERIC, 1996). Esta limitação numérica não ocorre quando se utiliza discretização implícita ou semi-implícita. Apesar de possuir uma implementação mais complicada, estas duas metodologias apresentam uma estabilidade mais elevada. Com o tratamento implícito do termo difusivo, a restrição temporal de ordem $O(\Delta x^2)$ se torna $O(\Delta x)$ (VILLAR, 2007).

Como dito anteriormente foram implementados no código AMR3DP esquemas de integração temporal implícitos. Além disto, as equações foram implementadas para utilizar passo de tempo variável, de tal maneira que toda equação diferencial possa ser temporalmente integrada utilizando esquemas implícitos de segunda ordem, como apresentado no trabalho de Vedovoto

(2011):

$$\frac{1}{\Delta t_{n+1}} \sum_{j=0}^2 \alpha_{j,n+1} U^{n+j} = \sum_{j=0}^2 \theta_{j,n+1} (\zeta(U^{n+j}) + \varepsilon(U^{n+j})). \quad (4.12)$$

onde $\zeta(U^{n+j})$ e $\varepsilon(U^{n+j})$ representam as contribuições difusivas e advectivas, respectivamente, sendo $n+1$ o tempo atual. Os valores de $\alpha_{j,n+1}$ e $\theta_{j,n+1}$ são definidos por:

$$\begin{aligned} \alpha_{0,n+1} &= \frac{(2\gamma-1)\omega_{n+1}^2}{1+\omega_{n+1}}, \\ \alpha_{1,n+1} &= (1-2\gamma)\omega_{n+1} - 1, \\ \alpha_{2,n+1} &= \frac{1+2\gamma\omega_{n+1}}{1+\omega_{n+1}}, \\ \theta_{0,n+1} &= \frac{c}{2}, \\ \theta_{1,n+1} &= 1 - \gamma - \left(1 + \frac{1}{\omega_{n+1}}\right) \frac{c}{2}, \\ \theta_{2,n+1} &= \gamma + \frac{c}{2\omega_{n+1}}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

sendo $\omega_{n+1} = \Delta t_{n+1}/\Delta t_n$ a razão entre dois passos de tempo consecutivo.

O que difere das formas de integrar no tempo são os valores para as constantes γ e c . Alguns exemplos clássicos: Crank-Nicolson Adams-Bashfort ($\gamma = 0,5$ e $c = 0,0$), Adams-Bashfort Modificado ($\gamma = 0,5$ e $c = 0,125$), Crank-Nicolson Leap Frog ($\gamma = 0,0$ e $c = 1,0$) e SBDF ($\gamma = 1,0$ e $c = 0,0$).

Para ilustrar a discretização espacial de uma derivada é considerado um volume de controle tridimensional, com comprimentos $\Delta x \times \Delta y \times \Delta z$, mostrado na Fig. (4.1). As letras em maiúsculo (P, E, W, N, S, T e B) representam, respectivamente, o centro dos volumes de controle analisado, leste, oeste, norte, sul, topo e fundo, e as letras em minúsculo (e, w, n, s, t e b) representam, respectivamente, as faces leste, oeste, norte, sul, topo e fundo relativas ao ponto de referência P .

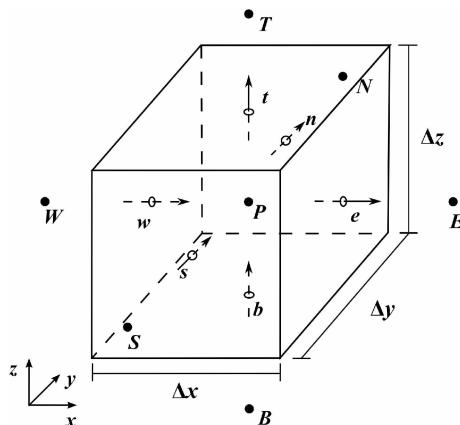


Figura 4.1: Volume de controle elementar utilizada para a discretização das equações de transporte (VEDOVOTO, 2011).

O termo advectivo da Eq. (4.1) no tempo $t + \Delta t$, direção x e para $i = 1$ e $j = 1$, pode ser aproximado, usando o método dos volumes finitos:

$$\frac{\partial (\rho u^{t+\Delta t} u^{t+\Delta t})}{\partial x} = [(\rho uu)_e - (\rho uu)_w] \Delta y \Delta z. \quad (4.14)$$

O termo difusivo da Eq. (4.1) no tempo $t + \Delta t$, direção x e para $i = 1$ e $j = 1$, também pode ser aproximado, usando o método dos volumes finitos:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] = 2 \left[\left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right)_e - \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right)_w \right] \Delta y \Delta z = \\ 2 \left[\mu_e \left(\frac{u_E - u_P}{\Delta x} \right) - \mu_e \left(\frac{u_P - u_W}{\Delta x} \right) \right] \Delta y \Delta z. \quad (4.15)$$

As Equações (4.16) e (4.17) apresentam, respectivamente, o termo temporal e o termo de pressão, também na direção x em $i = 1$:

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} = \frac{\alpha_2(\rho u)^{t+\Delta t} + \alpha_1(\rho u)^t + \alpha_0(\rho u)^{t-\Delta t}}{\Delta t}, \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_P - p_W}{\Delta x}. \quad (4.17)$$

Observa-se que tanto no termo advectivo, quanto no termo difusivo, é necessário obter informações na face do volume. A estrutura adotada no código AMR3DP utiliza malha bloco estruturada, bastando então realizar a média entre a informação no volume analisado e o volume vizinho. Assim, para determinar o valor de qualquer propriedade escalar θ em uma face e , a seguinte equação é utilizada:

$$\theta_e = \frac{\theta_E + \theta_P}{2}, \quad (4.18)$$

sendo Δx o comprimento da malha na direção x , tanto do ponto P , quanto do ponto E , como pode ser visto na Fig. (4.2).

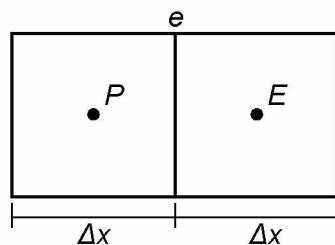


Figura 4.2: Volume finito uniforme e representação das distâncias para interpolar um escalar qualquer na face.

No apêndice A apresentam-se em detalhes a discretização e criação dos coeficientes para solução das velocidades no passo preditor, também dos coeficientes para solução da flutuação da pressão, e também o passo corretor.

4.3 Malha bloco estruturada

No código AMR3DP é utilizada malha bloco estruturada com refinamento local, permitindo a solução das equações de Navier-Stokes através de uma hierarquia de malhas cartesianas, devidamente agrupadas. A malha de um nível mais fino é alinhada com o nível grosseiro superior, e este refinamento é criado em regiões onde é necessária uma maior acurácia numérica, como por exemplo, em regiões de instabilidades no escoamento, em regiões de grande intensidade turbulenta, próximo a paredes, na interface entre dois fluidos, em regiões com partículas, entre outras situações. A Figura (4.3) apresenta um exemplo deste refinamento local adaptativo, onde o refinamento é criado em torno uma curva genérica.

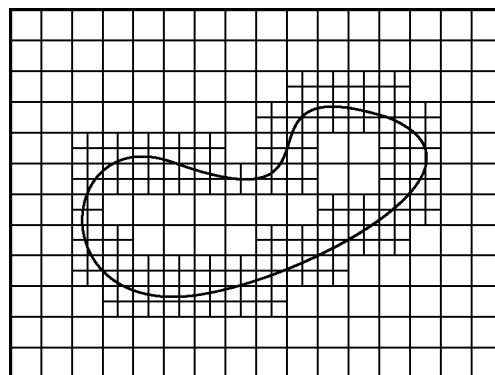


Figura 4.3: Malha cartesiana refinada localmente em pontos próximos a uma curva genérica.

Um tratamento especial é dado em regiões onde existe o contato entre um nível mais fino com um nível mais grosso. Neste caso são criados volumes fantasmas para ambos os níveis, e a informação destes volumes são provenientes da interpolação dos volumes vizinhos. Na Figura (4.4.a) é mostrado o esquema para a criação de dois volumes fantasmas para o volume do nível fino i, j em destaque, sendo que a informação é interpolada a partir dos volumes vizinhos. Já a Figura (4.4.b) apresenta o esquema para a criação do volume fantasma para o volume do nível grosso i, j em destaque, mostrando que é feita a interpolação a partir dos quatro volumes do nível mais fino que sobrepõe o espaço em que está contido este volume fantasma.

Pode acontecer de existir dois blocos com o mesmo nível de malha lado a lado, como mostrado na Fig. (4.5). Neste caso, basta transferir a informação do volume vizinho para a célula

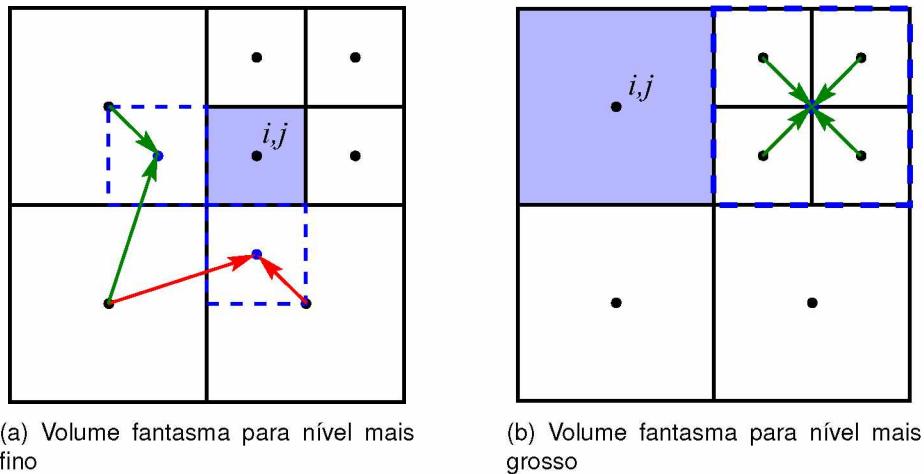


Figura 4.4: Esquemas de interpolação para criar os volumes fantasmas entre níveis.

fantasma do outro, esquema este também apresentado nesta figura.

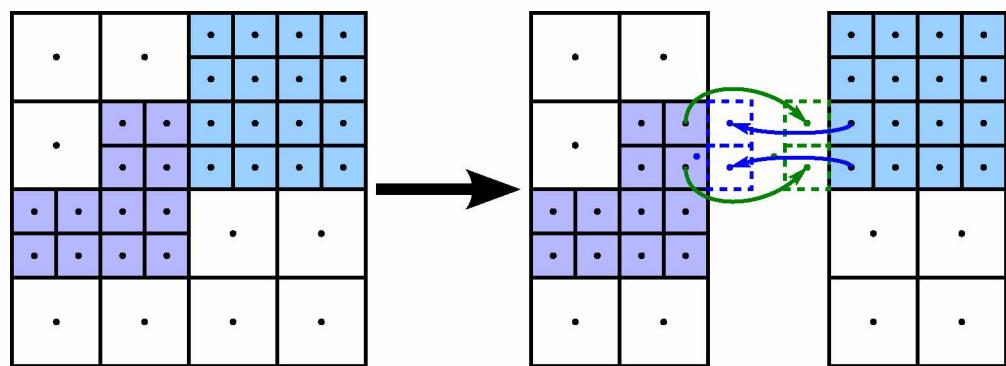


Figura 4.5: Preenchimento dos volumes fantasmas entre blocos com o mesmo nível de malha.

Por fim, o último caso onde é necessário preencher os volumes fantasmas é nas fronteiras físicas do domínio, onde a condição de contorno é imposta diretamente. Com isto é possível então resolver as equações de transporte. No código AMR3DP é possível escolher entre condições de contorno do tipo Dirichlet, Neumann ou advectivas (ORLANSKY, 1976).

4.4 O Método Multigrid

Para resolver os sistemas lineares provenientes da discretização, o método que foi implementado no código AMR3DP é o Multigrid, tanto para solução das velocidades, quanto para a solução da correção da pressão. O método Multigrid é um algoritmo iterativo para solução de sistemas lineares usando hierarquia de malhas.

O método Multigrid é dividido em duas idéias (TROTENBERG; SCHULLER, 2001). A primeira é baseada na suavização do erro de métodos iterativos clássicos para a solução de

sistemas lineares, como por exemplo o método de Gauss Siedel. A segunda afirma que o erro suavizado em uma malha em certo nível pode ser aproximado em uma malha mais grosseira. É preferível utilizar o multigrid não apenas com uma malha mais grossa, mas sim com uma sequência de malhas, para que as componentes do erro de longos comprimentos de onda possam ser suavizadas com eficiência.

Para a solução dos sistemas lineares para resolver cada uma das componentes da velocidade, assim como para a correção da pressão, foi implementado o multigrid utilizando a formulação *Correction Storage*, ou CS, onde os resíduos são transferidos de uma malha para outra. Para resolver um vetor ϕ qualquer, pode-se utilizar a seguinte equação:

$$A\phi = B, \quad (4.19)$$

onde a A é a matriz dos coeficientes e B é o vetor dos termos fontes.

Pode-se definir uma solução aproximada para ϕ , $\bar{\phi}$, e o erro entre as soluções exata e aproximada é dado por:

$$e = \phi - \bar{\phi}. \quad (4.20)$$

Isolando ϕ e substituindo a Eq. (4.20) em (4.19), obtém-se:

$$A(e + \bar{\phi}) = B. \quad (4.21)$$

A solução exata para o erro e é tão inacessível quanto a solução de ϕ , porém o erro pode ser estimado, determinando um resíduo R :

$$R = B - A\bar{\phi}, \quad (4.22)$$

Num processo iterativo é preciso minimizar o valor de R , significando que uma solução satisfatória foi encontrada. Rearranjando a Eq. (4.22) obtém-se:

$$A\bar{\phi} = B - R. \quad (4.23)$$

Subtraindo a Eq. (4.23) da Eq. (4.19) tem-se:

$$A(\phi - \bar{\phi}) = R. \quad (4.24)$$

E combinando as Eqs. (4.20) e (4.24), obtemos a seguinte equação:

$$Ae = R. \quad (4.25)$$

A Equação (4.25) é denominada equação residual. A principal finalidade de usar esta equação é poder encontrar a solução para uma malha mais fina, e a aplicação desta solução em malhas mais grosseiras irá aumentar a convergência por meio de correções da solução. Ao se chegar ao nível mais grosso recomenda-se que a Eq. (4.25) seja resolvida exatamente ou ao menos um grande número de iterações.

Ao longo do método os valores do erro e e do resíduo R são transportados de uma malha para outra. Quando a informação é passada de uma malha grossa para uma malha fina o processo é denominado prolongamento, como mostrado na Fig. (4.6). E quando a transferência da variável é feita de uma malha fina para uma malha grossa o processo é denominado restrição, apresentado na Fig. (4.7).

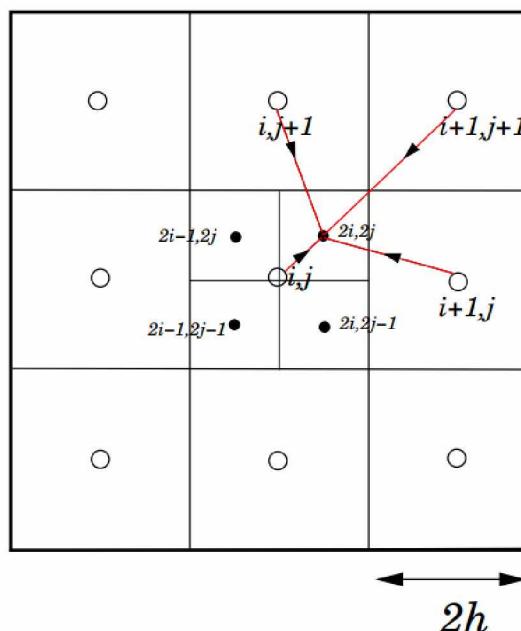


Figura 4.6: Operação de prolongamento (VILLAR, 2007)

Então o algoritmo do multigrid se resume a:

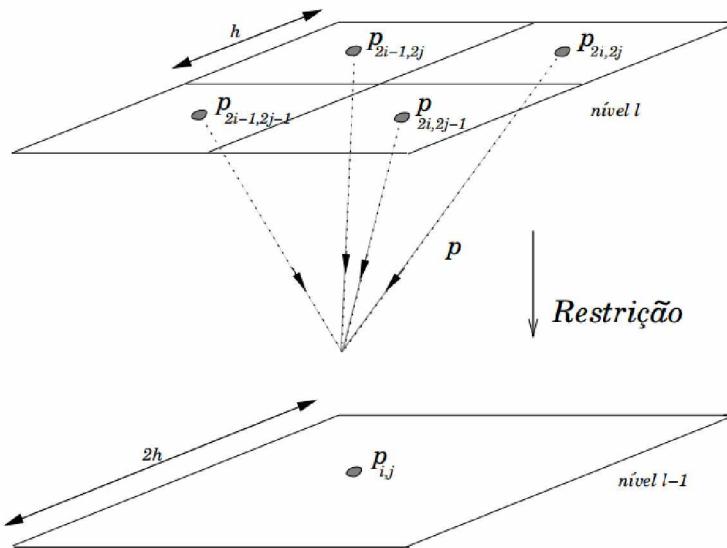


Figura 4.7: Operação de restrição (VILLAR, 2007)

- 1 - relaxar n vezes a equação $A\bar{\phi} = B$ no nível mais fino, partindo de um valor inicial $\bar{\phi}_0$ e obtendo uma estimativa $\bar{\phi}_n$, estimativa esta usada para avaliação do resíduo R ;
- 2 - calcular o resíduo $R = B - A\bar{\phi}$;
- 3 - restringir o resíduo R para uma malha mais grosseira (nível abaixo), através de funções interpoladoras, determinando o resíduo nestes níveis;
- 4 - relaxar algumas vezes a equação residual $Ae = R$, obtendo o valor do erro e para os níveis mais grosseiros;
- 5 - transferir os valores do erro e para as malhas mais finas, através de funções interpoladoras;
- 6 - corrigir a aproximação da malha fina através da Eq. $\bar{\phi} = \bar{\phi} + e$. O processo é feito iterativamente até a convergência da solução $\bar{\phi}$.

O código AMR3DP utiliza um refinamento local, então o método Multigrid é denominado Método Multigrid-Multinível, onde existem dois grupos de malhas, que podem ser denominados níveis virtuais e níveis físicos. Os níveis virtuais formam a malha base, e são divididos em uma quantidade N_{virt} para aplicar o ciclo do método multigrid. Os níveis físicos formam os blocos de refinamento local, e também podem ser divididos em N_{fis} níveis, sendo que o método multigrid percorre os níveis físicos também. A Figura (4.8) ilustra esquematicamente os níveis físicos e virtuais.

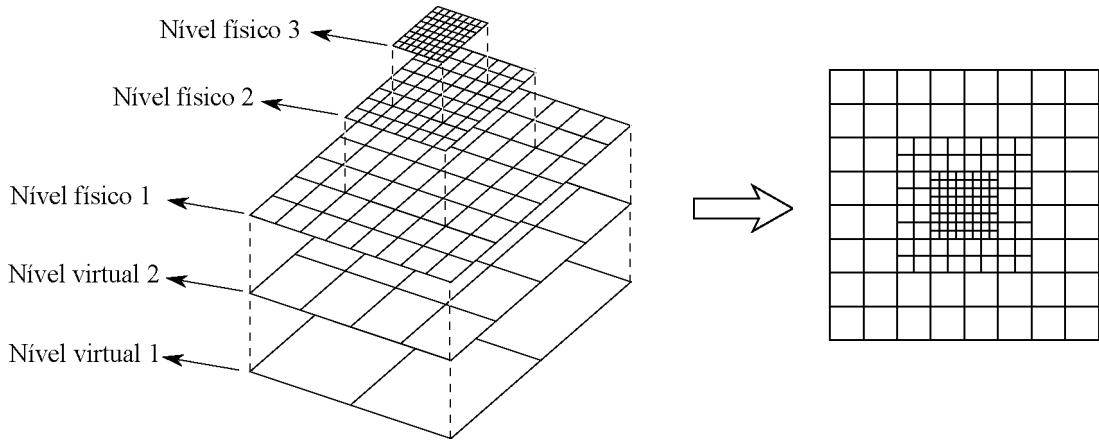


Figura 4.8: Esquema ilustrativo mostrando os níveis virtuais e níveis físicos.

Conhecidos os níveis físicos e virtuais de uma determinada malha em um dado tempo físico, aplica-se então o método multigrid, como é utilizado em uma malha uniforme.

4.5 Sondas numéricas

Nesta última seção deste capítulo será apresentado o algoritmo utilizado para implementação das sondas numéricas no código AMR3D. Este algoritmo segue as seguintes etapas:

1. Definição dos pontos:

A primeira etapa na criação das sondas é definir a quantidade de sondas e a posição espacial de cada uma delas. Para isso foi criado um arquivo de entrada, escrito em ASCII para facilitar a interface entre usuário e código, onde é inserida a quantidade de sondas, e em seguida um ID para cada uma delas e a posição espacial (x, y, z). A seguir é apresentado um exemplo de arquivo de entrada, onde são definidas 5 sondas, com posições y e z constantes, e diferentes posições para x , dispostas de maneira equidistantes:

1	5
2	1 0.0 0.5 0.5
3	2 0.2 0.5 0.5
4	3 0.4 0.5 0.5
5	4 0.6 0.5 0.5
6	5 0.8 0.5 0.5

2. Leitura dos pontos:

O passo seguinte é a leitura destes pontos no código AMR3D, sendo que na leitura é necessário considerar o paralelismo da ferramenta. Desta maneira o algoritmo percorre todos os processos, de número N_{proc} , e verifica quais sondas serão alocadas a quais processos. Isto é feito a partir da coordenada da sonda, a qual é comparada com as coordenadas espaciais do domínio em cada processo. Para isto percorrem-se todos os processos, e em cada processo faz-se a leitura do arquivo de entrada das sondas, e para cada sonda verifica-se se a posição da mesma em cada direção está dentro das posições delimitadas pela região que é resolvida naquele processo. Se sim são armazenadas as informações da sonda naquele processo, se não, não é feito o armazenamento dos dados. A seguir segue o algoritmo simplificado da leitura:

```

1 Para ii = 1 ate numeroProcessadores
2   Se( ii == processoAtual)
3     abrir( "arquivoSondas.dat" )
4     numeroDeSondaNoProcesso = 0
5     Para i = 1 ate numeroSondas
6       leitura: idd ,xSonda ,ySonda ,zSonda
7       Se( xSonda >= xIniProcesso e xSonda < xFinProcesso )
8         Se( ySonda >= yIniProcesso e ySonda < yFinProcesso )
9           Se( zSonda >= zIniProcesso e zSonda < zFinProcesso )
10          numSondaNoProcesso = numSondaNoProcesso + 1
11          vetorSondasId( numSondaNoProcesso ) = idd
12          vetorSondasPosX( numSondaNoProcesso ) = xSonda
13          vetorSondasPosY( numSondaNoProcesso ) = ySonda
14          vetorSondasPosZ( numSondaNoProcesso ) = zSonda
15        fim
16      fim
17    fim
18  fim
19 fim
20 fim

```

3. Mapeamento das sondas na malha:

Conhecendo quais pontos estão e quais processos é necessário mapear estes pontos na malha euleriana. Para isto é feita uma varredura em todos os níveis de refinamento da malha em cada processo, partindo do nível mais grosso l_{bot} até o nível mais fino l_{top} . Dentro de cada nível l percorre todas as sondas numéricas alocadas naquele processo, e para cada sonda percorre-se todos os blocos estruturados do nível l , e então é feita a comparação da coordenada da sonda com as coordenadas do bloco analisado. Caso a sonda pertença ao bloco atual encerra-se a busca, se não a busca é continuada. A seguir segue o algoritmo simplificado do mapeamento das sondas, sendo que este algoritmo é executado por todos os processadores:

```

1 Para l = lbot ate ltop
2   Para i = ate numSondaNoProcesso
3     xSonda = vetorSondasPosX(i)
4     ySonda = vetorSondasPosY(i)
5     zSonda = vetorSondasPosZ(i)
6     Para j = 1 ate numeroBlocosNoNivelL
7       Se(xSonda >= xIniBloco e xSonda < xFinBloco)
8         Se(ySonda >= yIniBloco e ySonda < yFinBloco)
9           Se(zSonda >= zIniBloco e zSonda < zFinBloco)
10             indiceSonda(i) → indiceBlocoAtual
11             fimBusca
12           fim
13         fim
14       fim
15     fim
16   fim
17 fim

```

4. Interpolação dos dados:

A etapa final do algoritmo consiste em interpolar os dados da malha euleriana para o ponto da sonda, já devidamente localizado a nível de processo, nível da malha e bloco-estruturado. Para isto é utilizada uma função de interpolação, como por exemplo a função apresentada para interpolar as variáveis para os pontos da fronteira imersa, expressa na Eq. (3.8).

No capítulo seguinte serão apresentados resultados para verificação e validação das equações e métodos implementados no código AMR3DP.

CAPÍTULO V

VERIFICAÇÃO E VALIDAÇÃO

Serão apresentadas neste capítulo a verificação e a validação das implementações das equações para a quantidade de movimento, assim como para a equação da energia. E ainda neste capítulo é apresentada a validação da metodologia da fronteira imersa, tanto para a fronteira fluido dinâmica, quanto para a fronteira térmica, esta última contemplando os três tipos de condição de contorno implementadas, sendo de primeira, segunda ou terceira espécie.

A verificação da implementação numérico-computacional, para a solução de uma determinada equação diferencial consiste em escolher uma função analítica, e a partir desta função resolver numericamente a equação implementada. Para isto as condições inicial e de contorno são calculadas a partir da função sintetizada. Esta função pode variar no espaço e no tempo. Assim sendo as soluções numéricas e analíticas são comparadas em todo o espaço do domínio discretizado ao longo do tempo, e o erro é contabilizado. Espera-se que com o refinamento da malha esse erro diminua, uma vez que teoricamente se o comprimento da malha tender a zero, a solução numérica tende à solução analítica. O quanto o erro cai com o refinamento da malha é ditado pelo esquema de discretização utilizado, sendo que quanto maior a ordem do esquema de discretização, maior a diminuição do erro. Esta taxa de decaimento do erro é analisada para verificar se a discretização e a implementação de determinada equação estão corretas.

Uma vez feita a verificação, o próximo passo é a validação. A validação é a comparação da solução numérica de um determinado problema com resultados experimentais, ou com resultados numéricos de outros autores ou obtidos em outras ferramentas. Esta etapa mostra se

a implementação permite resolver numericamente o que acontece fisicamente, como por exemplo o escoamento interno em um duto, ou ainda escoamento externo sobre um bloco. Algumas variáveis são importantes para a melhora ou não dos resultados, como por exemplo o grau de refinamento da malha, ou o tamanho do passo de tempo.

5.1 Verificação para o balanço da quantidade de movimento linear

Para realizar a verificação das equações de Navier-Stokes foram escolhidas funções analíticas para as três componentes de velocidade, u , v e w , para pressão p e para as propriedades físicas do fluido, ou seja, a massa específica ρ e a viscosidade μ . Todas estas variáveis são funções do espaço e do tempo, podendo assim verificar a discretização espacial e temporal e as implementações.

As Equações (5.1), (5.2) e (5.3) representam, respectivamente, a solução exata para as componentes de velocidade nas direções x , y e z . A Eq. (5.4) representa a solução exata para a pressão, e as Eqs. (5.5) e (5.6) a solução para a massa específica e para a viscosidade, respectivamente.

$$u_{ex} = (\sin(w_1\pi x + w_2\pi y + w_3\pi z + w_4t))^2, \quad (5.1)$$

$$v_{ex} = -(\cos(w_1\pi x + w_2\pi y + w_3\pi z + w_4t))^2, \quad (5.2)$$

$$w_{ex} = w_1 \left(\cos(w_1\pi x + w_2\pi y + w_3\pi z + w_4t)^2 \right) / w_3 + w_2 \left(\cos(w_1\pi x + w_2\pi y + w_3\pi z + w_4t)^2 \right) / w_3, \quad (5.3)$$

$$P_{ex} = \cos(w_1\pi x + w_2\pi y + w_3\pi z + w_4t), \quad (5.4)$$

$$\rho_{ex} = c_{\rho 1} + c_{\rho 2} (\sin(w_1\pi x + w_2\pi y + w_3\pi z + w_4t))^2, \quad (5.5)$$

$$\mu_{ex} = c_{\mu 1} + c_{\mu 2} (\cos(w_1\pi x + w_2\pi y + w_3\pi z + w_4t))^2. \quad (5.6)$$

As constantes escolhidas para as soluções exatas foram $w_1 = w_2 = w_3 = 2$, $w_4 = 1$, $c_{\rho 1} = 1$, $c_{\rho 2} = 0,1$, $c_{\mu 1} = 0,1$ e $c_{\mu 2} = 0,02$.

Estas soluções sintetizadas escolhidas não satisfazem as equações de Navier-Stokes. Então para fins de verificação são calculados termos fontes adicionais para cada uma das componentes de velocidade, através da seguinte equação, na forma indicial, para a formulação con-

servativa (Eq. 5.7):

$$f_i = \frac{\partial (\rho_{ex} u_{ex_i})}{\partial t} + \frac{\partial (\rho_{ex} u_{ex_j} u_{ex_i})}{\partial x_j} + \frac{\partial p_{ex}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_{ex} \left(\frac{\partial u_{ex_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{ex_j}}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu_{ex} \frac{\partial u_{ex_k}}{\partial x_k} \delta_{ij} \right), \quad (5.7)$$

e não conservativa, Eq. (5.8):

$$f_i = \rho_{ex} \frac{\partial u_{ex_i}}{\partial t} + \rho_{ex} u_{ex_j} \frac{\partial u_{ex_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial p_{ex}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_{ex} \left(\frac{\partial u_{ex_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{ex_j}}{\partial x_i} \right) \right), \quad (5.8)$$

onde i varia de 1 a 3, correspondendo as três componentes. Com estes termos adicionais as soluções propostas satisfazem as equações de Navier-Stokes.

A verificação foi realizada em duas etapas, a primeira utilizando malha uniforme, e a segunda utilizando malha composta com blocos de refinamento localizados. Em cada uma das etapas foi feita a verificação para a formulação conservativa e formulação não conservativa. Para verificação foi definido um esquema de discretização temporal de segunda ordem para o tempo, SBDF, e de segunda ordem para o espaço, CDS.

Primeiramente, para a malha uniforme, foi definido um domínio cúbico de 1x1x1. Foram testados cinco níveis de refinamento, partindo de uma malha com 8^3 volumes, passando pelas malhas com 16^3 , 32^3 e 64^3 volumes, até uma malha mais fina com 128^3 volumes. A Figura (5.1) apresenta um exemplo da malha utilizada, com 16^3 volumes. Foram realizados os testes participando o domínio em quatro processadores, como mostrado na figura com diferentes cores para cada processo.

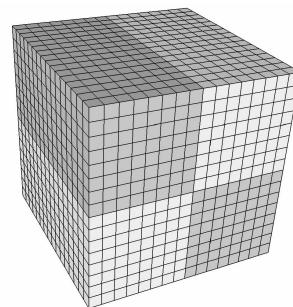


Figura 5.1: Malha uniforme com 16^3 volumes divididos em quatro processos.

A solução para cada componente de velocidade e pressão é apresentada na Fig. (5.2). Nesta figura é apresentado o resultado no plano central em $z = 0,5$ para a malha com nível de refinamento 16^3 . Nota-se a característica senoidal das soluções, o que é esperado uma vez que

a solução analítica para cada uma das variáveis está em função de senos e cossenos.

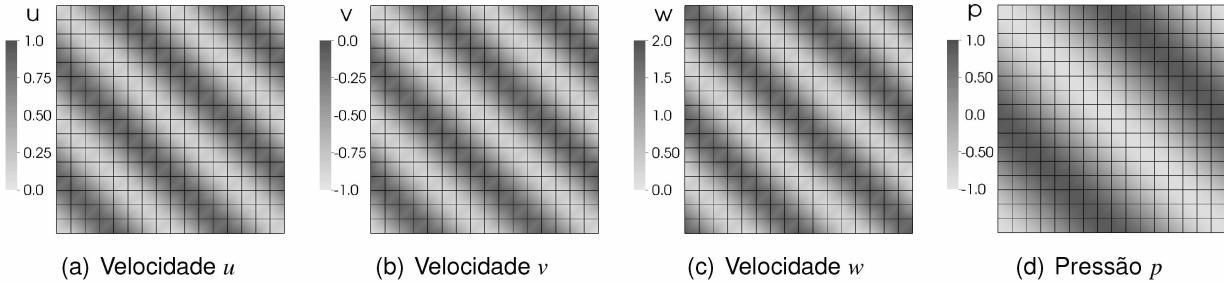


Figura 5.2: Soluções para as variáveis resolvidas na malha uniforme 16^3 .

O cálculo do erro entre a solução analítica e numérica pode ser realizado de diferentes maneiras. Neste trabalho foi utilizada a norma L_2 , dada pela Eq. (5.9):

$$L_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{Nz} \sum_{j=1}^{Ny} \sum_{i=1}^{Nx} \|sol_{exati,j,k} - sol_{numi,j,k}\|^2 \Delta x \Delta y \Delta z}, \quad (5.9)$$

onde Δx , Δy e Δz representam o comprimento do volume nas direções x , y e z , respectivamente, sol_{ex} é a solução exata e sol_{num} é a solução numérica.

A Tabela (5.1) apresenta a norma L_2 e a taxa de queda do erro, para as três componentes do vetor velocidade e pressão, para os cinco níveis de refinamento, utilizando a formulação conservativa. Como foi utilizada uma aproximação de segunda ordem para a derivada temporal, e diferenças centradas de segunda ordem para as derivadas espaciais, esperava-se uma queda do erro de segunda ordem ao dobrar o refinamento da malha, ou seja, ao duplicar a malha em cada direção espacial o erro deve cair quatro vezes para as componentes de velocidade, o que foi obtido conforme apresentado na tabela. A pressão foi derivada utilizando uma aproximação de primeira ordem, então o erro deveria cair aproximadamente duas vezes, o que também foi observado.

Tabela 5.1: Norma L_2 para velocidades e pressão utilizando malha uniforme e formulação conservativa

Base	$L_2 u$	$r_e u$	$L_2 v$	$r_e v$	$L_2 w$	$r_e w$	$L_2 P$	$r_e P$
8^3	8,7777E-02	**	8,3428E-02	**	1,6440E-01	**	1,3405E-01	**
16^3	2,0595E-02	4,26	1,9759E-02	4,22	3,8817E-02	4,24	5,0649E-02	2,65
32^3	5,0699E-03	4,06	4,8691E-03	4,06	9,5552E-03	4,06	1,7810E-02	2,84
64^3	1,2643E-03	4,01	1,2115E-03	4,02	2,3739E-03	4,03	5,5579E-03	3,20
128^3	3,1526E-04	4,01	3,0215E-04	4,01	5,8865E-04	4,03	1,6269E-03	3,42

A Tabela (5.2) apresenta a norma L_2 utilizando malha uniforme e a formulação não

conservativa. Nota-se que ocorre uma pequena variação no valor da norma, quando comparada com a forma conservativa, para cada uma das variáveis em cada uma das malhas, como era esperado, uma vez que o fluxo (ρu_j) no termo advectivo é avaliado de maneira diferente. Contudo o valor esperado para a queda do erro, tanto para as velocidades quanto para a pressão, foi atingido.

Tabela 5.2: Norma L_2 para velocidades e pressão utilizando malha uniforme e formulação não conservativa

Base	$L_2 u$	$r_e u$	$L_2 v$	$r_e v$	$L_2 w$	$r_e w$	$L_2 P$	$r_e P$
8^3	8,7879E-02	**	8,5253E-02	**	1,6641E-01	**	1,4112E-01	**
16^3	2,0455E-02	4,30	1,9995E-02	4,26	3,8960E-02	4,27	5,2704E-02	2,68
32^3	5,0331E-03	4,06	4,8976E-03	4,08	9,5649E-03	4,07	1,8174E-02	2,90
64^3	1,2557E-03	4,01	1,2076E-03	4,06	2,3681E-03	4,04	5,6396E-03	3,22
128^3	3,1345E-04	4,01	2,9564E-04	4,08	5,8322E-04	4,06	1,6444E-03	3,43

Verificadas as equações para a quantidade de movimento linear em uma malha uniforme, é necessário verificar as mesmas para uma malha composta multinível. A Figura (5.3) apresenta um exemplo da malha multinível utilizada, onde o nível base (malha mais grosseira) possuí 16^3 volumes. A mesma possui dois níveis físicos, e o nível base (nível mais grosso) variou de 8^3 até 128^3 . Foi utilizado processamento paralelo, onde a região de cada processador foi especificada com uma cor diferente como visto na figura. A escolha dos blocos foi feita de tal maneira que houvesse todos os contatos possíveis entre níveis e domínios de outros processos, inclusive condições de contorno com diferentes níveis de refinamento.

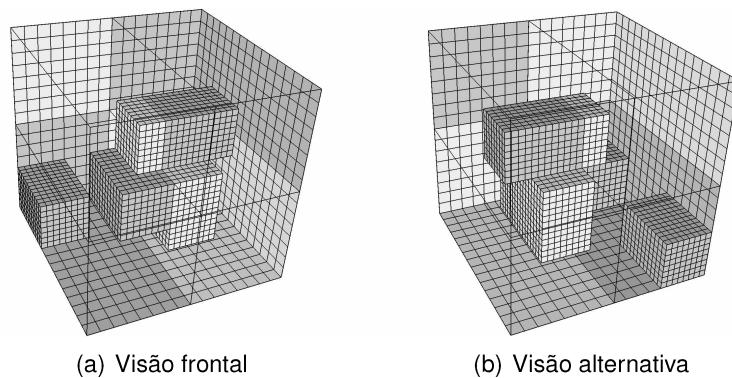


Figura 5.3: Malha composta utilizada na verificação.

A solução para cada componente de velocidade e pressão para a malha composta é apresentado na Fig. (5.4). Nesta figura é apresentada o resultado no plano central em $z = 0,5$ para a malha com nível base com refinamento 16^3 . Nota-se a característica senoidal das soluções, como foi observado para a malha uniforme, com diferença que na malha composta a resolução

na malha mais fina é melhor. Observa-se ainda a continuidade de cada uma das soluções ao passar de um nível de refinamento para outro.

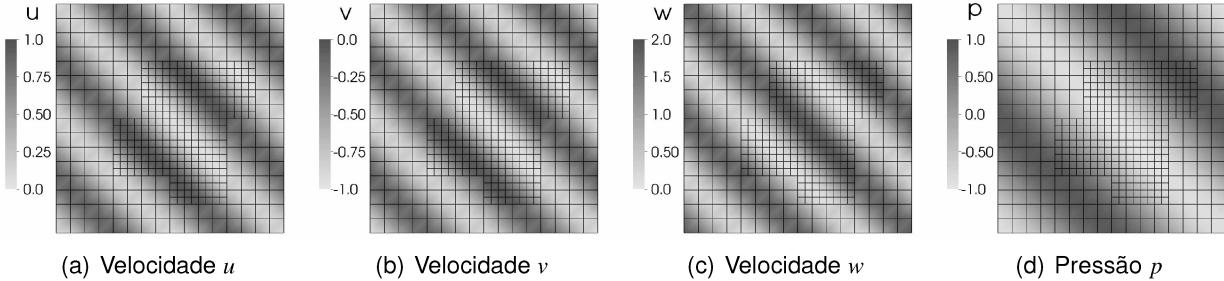


Figura 5.4: Soluções para as variáveis resolvidas na malha não uniforme.

A Tabela (5.3) apresenta a norma L_2 e a taxa de queda do erro, para as três componentes do vetor velocidade e pressão, em todos níveis de refinamento, utilizando a malha multi-nível e formulação conservativa. Observa-se que foi obtida a convergência esperada, tanto para as velocidades quanto para a pressão, sendo queda do erro em quatro vezes ao duplicar o refinamento da malha em cada direção, e queda de aproximadamente duas vezes para a pressão.

Tabela 5.3: Norma L_2 para velocidades e pressão utilizando malha composta e formulação conservativa

Base	$L_2 u$	$r_e u$	$L_2 v$	$r_e v$	$L_2 w$	$r_e w$	$L_2 P$	$r_e P$
8^3	8,3565E-02	**	8,0274E-02	**	1,5168E-01	**	1,6799E-01	**
16^3	1,9288E-02	4,33	1,8577E-02	4,32	3,5323E-02	4,29	5,7025E-02	2,95
32^3	4,7369E-03	4,07	4,5715E-03	4,06	8,6959E-03	4,06	1,9390E-02	2,94
64^3	1,1781E-03	4,02	1,1367E-03	4,02	2,1575E-03	4,03	6,0990E-03	3,18
128^3	2,9267E-04	4,03	2,8195E-04	4,03	5,3248E-04	4,05	1,8363E-03	3,32

Por fim, a Tabela (5.4) apresenta a norma L_2 e a taxa de queda do erro utilizando a malha composta e formulação não conservativa. A taxa da queda do erro também foi como esperado, para todas as variáveis resolvidas. Assim como na malha uniforme, existe uma pequena diferença no erro ao se comparar com a formulação conservativa. Isto ocorre devido a forma diferente de tratar o termo advectivo, como já explicado no capítulo de formulação matemática.

Tabela 5.4: Norma L_2 para velocidades e pressão utilizando malha composta e formulação não conservativa

Base	$L_2 u$	$r_e u$	$L_2 v$	$r_e v$	$L_2 w$	$r_e w$	$L_2 P$	$r_e P$
8^3	8,3578E-02	**	8,1861E-02	**	1,5366E-01	**	1,7370E-01	**
16^3	1,9148E-02	4,36	1,8785E-02	4,36	3,5484E-02	4,33	5,8574E-02	2,97
32^3	4,7040E-03	4,07	4,6075E-03	4,08	8,7227E-03	4,07	1,9680E-02	2,98
64^3	1,1707E-03	4,02	1,1411E-03	4,04	2,1609E-03	4,04	6,1609E-03	3,19
128^3	2,9092E-04	4,02	2,8086E-04	4,06	5,3182E-04	4,06	1,8517E-03	3,33

Na seção seguinte será apresentada a verificação da equação de transporte de um escalar genérico, simplificado na presente tese para a equação da energia.

5.2 Verificação da equação da energia

Para a verificação da equação da energia foram utilizadas funções analíticas sintetizadas para todas as variáveis, as quais variam no espaço e no tempo. As Equações (5.1), (5.2) e (5.3) já apresentadas anteriormente representam, respectivamente, a solução exata para as componentes de velocidade nas direções x , y e z , e a Eq. (5.5) a solução para a massa específica.

Para as variáveis da equação de transporte de um escalar genérico, Eq. (3.5), que foi simplificada no presente trabalho para a equação da energia, foram utilizadas as soluções manufaturadas apresentadas abaixo, onde as Eqs. (5.10), (5.11) e (5.12) são as soluções exatas para a temperatura T , a difusividade térmica α e o termo fonte f_{TT} , respectivamente.

$$T_{ex} = \sin(2\pi(x + y + z) + w_4 t) \quad (5.10)$$

$$\alpha_{ex} = 2 + e^{-x-y-z} + w_4 t, \quad (5.11)$$

$$f_{TTex} = \sin(xyz) + 3w_4 t, \quad (5.12)$$

onde $w_4 = 1$.

A primeira verificação foi realizada em uma malha uniforme, já apresentada na Fig. (5.1). Foram feitas simulações em serial e em paralelo, utilizando quatro processadores, partindo de uma malha com 8^3 volumes, passando pelas malhas com 16^3 , 32^3 e 64^3 volumes, até uma malha mais fina com 128^3 volumes. Em seguida foi realizada a verificação utilizando uma malha composta, já apresentada na Fig. (5.3). Também foi utilizado processamento paralelo, onde a região de cada processador foi especificada com uma cor diferente, e o nível base variou de 8^3 até 128^3 volumes.

Na Figura (5.5) é apresentado o resultado para a variável transportada φ , simplificada para T , no plano central em $z = 0,5$ para a malha uniforme, nível de refinamento 16^3 , e para a malha composta, nível de refinamento da malha base de 16^3 , ambos com processamento paralelo. Nota-se a característica senoidal das soluções, o que é esperado uma vez que a solução analítica para cada uma das variáveis está em função de senos e cossenos. Como observado na

seção de validação da equação de transporte para a quantidade de movimento, a resolução da variável é maior no nível mais fino.

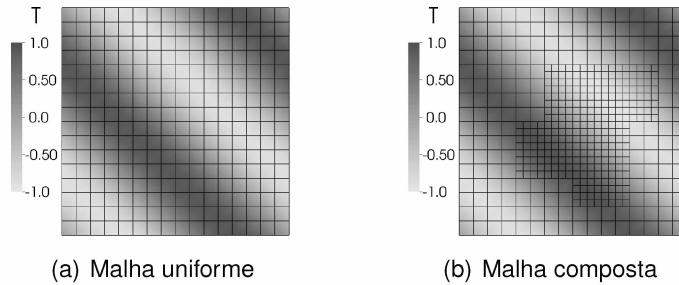


Figura 5.5: Solução manufaturada para a variável T .

Na Tabela (5.5) apresentam-se a norma L_2 , e a taxa de queda do erro, para o escalar transportado, em serial e paralelo. Foi obtida uma taxa de queda do erro de segunda ordem, o que era esperado por se utilizar uma aproximação de segunda ordem para a derivada temporal, e diferenças centradas de segunda ordem para as derivadas espaciais. Além disso, nota-se que os resultados para serial e paralelo estão iguais, indicando o correto funcionamento do paralelismo.

Tabela 5.5: Norma L_2 para o escalar genérico utilizando malha uniforme.

Base	$L_2 T$ SERIAL	r_e	$L_2 T$ PARALELO	r_e
8^3	6.08226091243E-003	**	6.08226091239E-003	**
16^3	1.52264130144E-003	3.9945461263	1.52264130144E-003	3.9945461263
32^3	3.82210626871E-004	3.9837754222	3.82210626871E-004	3.9837754222
64^3	9.56864358641E-005	3.9944076025	9.56864358641E-005	3.9944076025
128^3	2.39305998823E-005	3.9984971683	2.39305998823E-005	3.9984971683

Assim como para a malha uniforme, foi obtida uma taxa de convergência do erro de segunda ordem para a malha composta, como esperado ao utilizar os esquemas de segunda ordem para o tempo e para o espaço. A norma L_2 e a queda do erro são apresentadas na Tab. (5.6).

Tabela 5.6: Norma L_2 para o escalar genérico utilizando malha composta.

Base	$L_2 T$ PARALELO	r_e
8^3	6.191644770817750E-003	**
16^3	1.526227430685837E-003	4.0568297007
32^3	3.812618683704390E-004	4.0030948734
64^3	9.528564369092692E-005	4.0012519578
128^3	2.381440284612368E-005	4.0011771157

Uma vez realizada a verificação, e sendo observada uma correta taxa de convergência para as equações de transporte para a quantidade de movimento linear e para um escalar gené-

rico, será apresentada na seção seguinte a validação da equação da quantidade de movimento linear.

5.3 Validação da implementação das equações para quantidade de movimento linear: cavidade com tampa deslizante

Para validação da discretização e implementação das equações para a quantidade de movimento será simulado o problema clássico da cavidade com tampa deslizante. A Figura (5.6) apresenta um esquema físico desta cavidade na forma tridimensional, a qual possui dimensões de $1m \times 1m \times 1m$, e uma parede deslizante com velocidade constante $u = 1m/s$, na direção positiva de x , na parede em $y = 1m$. Todas as demais paredes permanecem paradas, ou seja, apresenta velocidade nula em qualquer direção.

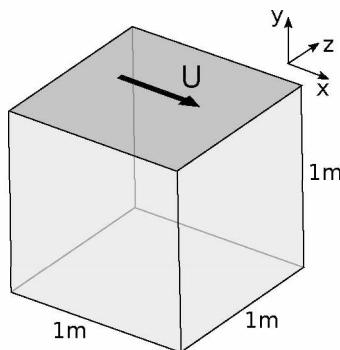


Figura 5.6: Cavidade tridimensional com tampa deslizante.

Para este problema da cavidade foi utilizado no código AMR3DP condição de contorno do tipo Dirichlet para o vetor velocidade em todas as paredes, e Neumann para pressão. A condição inicial no interior do domínio foi velocidades nas três direções nulas, assim como a pressão igual a 0,0. Nesta validação foi utilizada a formulação não-conservativa, e o tempo de simulação total foi de 200 segundos físicos.

As propriedades do fluido foram escolhidas de tal maneira que fosse utilizado o número de Reynolds desejado. Foram realizadas simulações para quatro diferentes número de Reynolds: $Re = 100$, $Re = 400$, $Re = 1000$ e $Re = 3200$. O regime do escoamento é laminar para estes valores escolhidos, assim as equações serão validadas desconsiderando efeitos da turbulência. No capítulo seguinte será apresentada a validação das equações utilizando a modelagem da turbulência.

Para cada uma das simulações foram testadas duas malhas diferentes, sendo a primeira uma malha base com nível base de 16^3 volumes, e 3 níveis físicos, e a segunda uma

malha base com nível base de 32^3 volumes, e 3 níveis físicos. Todas as simulações foram realizadas utilizando adaptatividade dinâmica ao longo do tempo. Todas simulações foram realizadas utilizando processamento paralelo, e o domínio foi dividido em oito processos. O critério de refinamento escolhido foi a vorticidade, através de um critério implementado no código AMR3DP por Barbi (2016), onde é calculado um adimensional utilizando a vorticidade e velocidade, através da seguinte equação:

$$\frac{\|\omega\|\Delta}{\mathbf{u}_{max}} \geq \zeta, \quad (5.13)$$

onde ω é a magnitude da vorticidade, Δ é o comprimento da malha, \mathbf{u}_{max} é a magnitude da velocidade e ζ é uma constante, onde quanto maior o seu valor mais sensível ao refinamento é a região. Para todas as simulações da presente tese foi utilizado $\zeta = 0,08$.

A Figura (5.7) apresenta o valor da magnitude da velocidade no plano central, em $z = 0,5$ m, para os diferentes número de Reynolds e para as duas malhas com diferentes níveis base. E ainda cada figura apresenta o iso contorno da magnitude, também no plano central, para 10 diferentes valores, variando de $V_{mag} = 0$ até $V_{mag} = 1$ m/s. Observa-se que para todos os regimes de escoamento simulados a velocidade é maior na tampa deslizante, uma vez que a condição de não deslizamento entre a parede móvel e o fluido faz com que o mesmo seja advectado para o sentido positivo de x . Este fluido que é advectado choca-se na parede estacionária na posição em $x = 1$ m, e tem sua direção alterada, assim a quantidade de movimento linear acontece na direção negativa de y , como esperado fisicamente. Na sequência o fluido atinge o fundo da cavidade, em $y = 0$ m, e devido as paredes estacionárias o escoamento retorna para a direção positiva de y , até atingir novamente a tampa deslizante. Esta dinâmica cria uma grande recirculação na cavidade, e nota-se que quanto maior o valor do número de Reynolds, maior e mais evidente é esta recirculação. Esta recirculação induz a formação de recirculações secundárias nos cantos da cavidade, próximos a $y = 0$ m, nas posições próximas a $x = 0$ m e $x = 1$ m. Com relação a malha, que ocorre dinamicamente ao longo do tempo, se adapta nas regiões de grande vorticidade, que seria próximo a tampa deslizante, e ao longo do grande vórtice primário, sendo que independente da malha base, o refinamento é maior quanto maior o valor do número de Reynolds. E ainda, observa-se que os iso-contornos para os dois níveis de refinamento da malha base muito se assemelham, exceto para o caso com $Re = 3200$, onde é observada uma ligeira diferença entre os iso-contornos. Será ainda apresentada a análise quantitativa para cada caso.

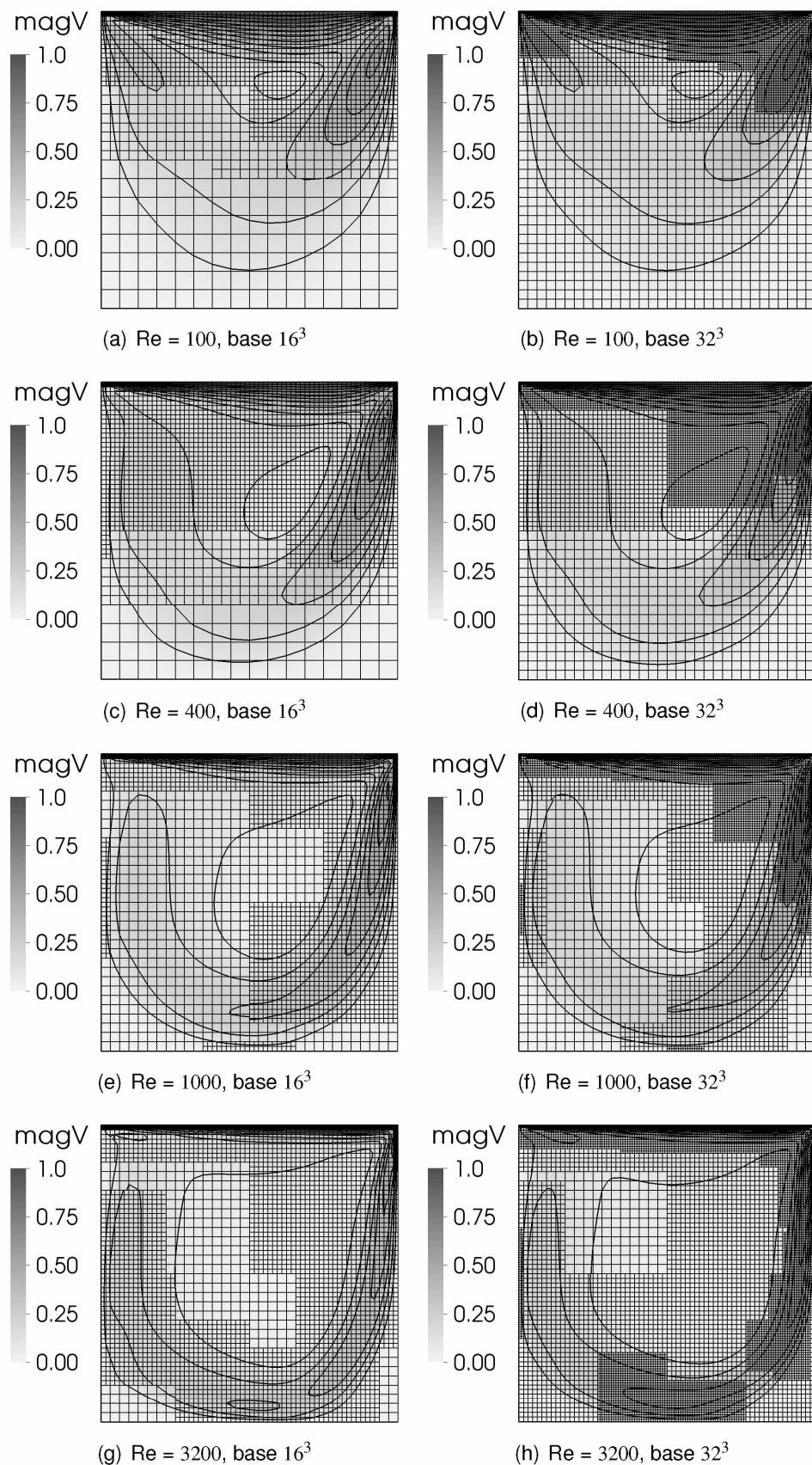


Figura 5.7: Magnitude da velocidade no plano $z = 0,5$ m para as duas diferentes malhas, para os diferentes número de Reynolds.

A Figura (5.8) apresenta os iso-valores da magnitude da vorticidade em escala logarítmica em três dimensões, para os diferentes número de Reynolds e para as duas malhas com diferentes nível base. Nesta figura também são apresentados os blocos de malha correspondentes a malha mais fina, para cada caso simulado. Observa-se que de fato os blocos de refinamento são aplicados nas regiões de maior vorticidade, como esperado. Além disso, nota-se também que conforme o número de Reynolds aumenta, aumenta-se também a vorticidade em torno do vórtice primário. Com relação ao aumento da resolução da malha base, o refinamento aplicado no domínio para qualquer valor de Reynolds é menor na malha com nível base mais fino, devido a menor região ocupada pelos blocos de refinamento. Isso ocorre porque o valor da vorticidade é duplicado quando a resolução da malha é dobrada em cada direção. Nota-se que para a malha com nível base 32^3 a vorticidade máxima é aproximadamente 120 rad/s, enquanto que para a malha mais grossa com nível base 16^3 a vorticidade máxima é aproximadamente 60 rad/s. Este aumento da vorticidade com o aumento de resolução da malha faz com que o refinamento seja aplicado em uma região menor.

Feita a análise qualitativa dos resultados, é necessário realizar uma análise quantitativa dos mesmos. Para isto serão comparados os perfis de velocidade na direção x e y com dados apresentados na literatura, no plano central em $z = 0,5$ m. Serão comparados o perfil de velocidade u em função de y em $x = 0,5$ m, e o perfil de velocidade v em função de x em $y = 0,5$ m. Para os casos com número de Reynolds $Re = 100$ e $Re = 400$ os resultados serão comparados com dados apresentados por Ku et al. (1987), onde os autores resolvem as equações para quantidade de movimento utilizando o método pseudo-spectral de Fourier, um método de alta ordem, e a malha utilizada foi de 25^3 pontos. Já os resultados para os casos $Re = 1000$ e $Re = 3200$ serão comparados com resultados presentados por Deshpande e Milton (1998), onde os autores resolvem as equações utilizando o método das diferenças finitas de segunda ordem, e uma malha com resolução de 84^3 volumes. E ainda o caso para $Re = 3200$ é comparado também com dados experimentais apresentados por Prasad e Koseff (1989).

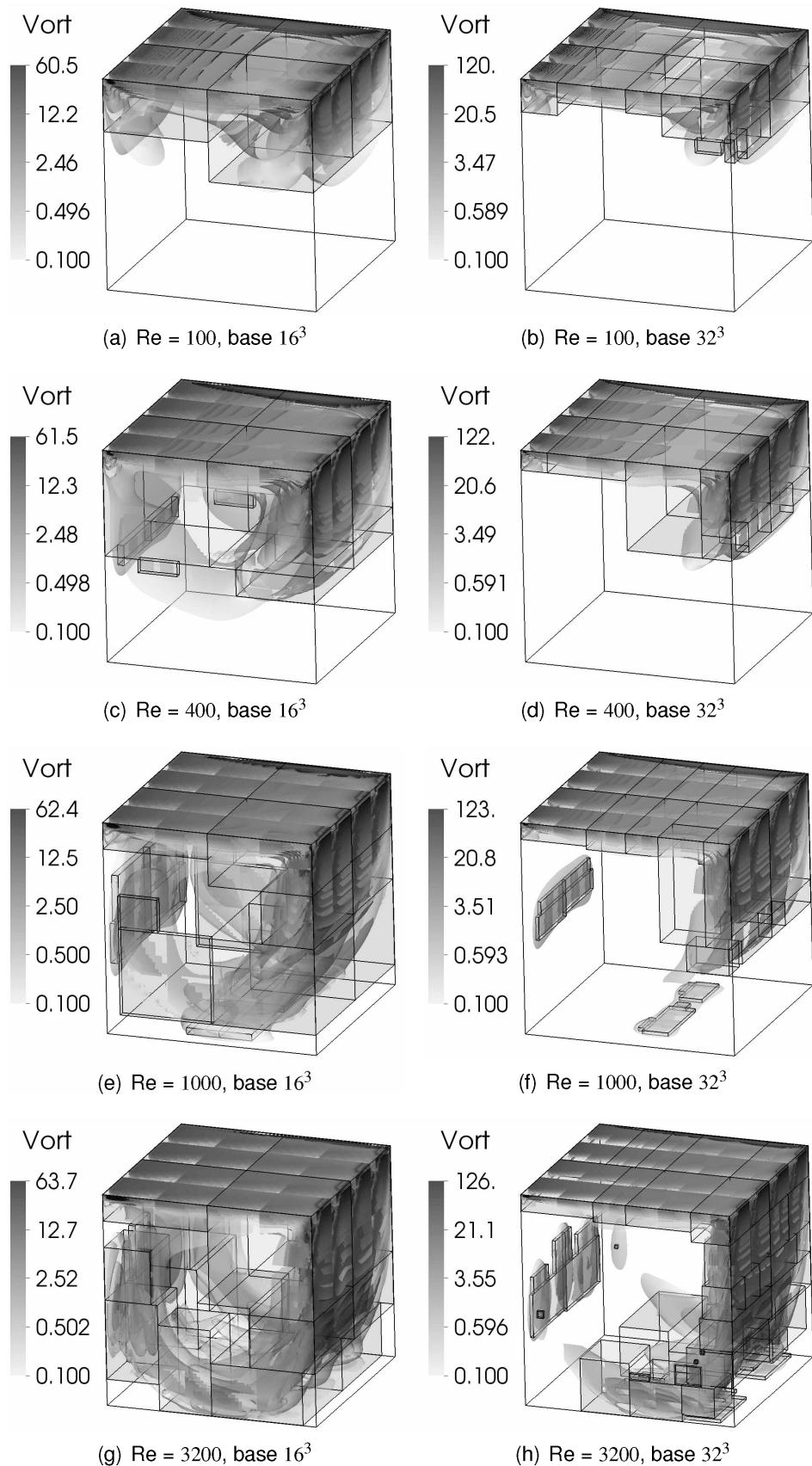


Figura 5.8: Iso valores da magnitude da velocidade para diferentes número de Reynolds

A Figura (5.9) mostra os perfis de velocidade u na direção x em função de y , no plano central $z = 0,5$ m, para os diferentes números de Reynolds. As condições de contorno são respeitadas para todos os casos, sendo velocidade nula em $y = 0,0$ m, e $u = 1,0$ m/s em $y = 1,0$ m, e próximo a tampa deslizante o escoamento segue no sentido positivo, enquanto próximo ao fundo no sentido negativo, como observado anteriormente nos resultados qualitativos. Observa-se que quanto maior o valor do número de Reynolds, maiores os gradientes de velocidade próximo as paredes, evidenciando mais a camada limite formada, neste caso camada limite laminar. Ao analisar os resultados encontrados observa-se que os mesmos estão em concordância com os extraídos da literatura, tanto com resultados numéricos, quanto com resultados experimentais para o caso $Re = 3200$. E comparando os resultados obtidos para cada uma das resoluções de malha utilizadas, base 16^3 e 32^3 , nota-se que os mesmos estão coincidentes, exceto para o caso $Re = 3200$, onde os dados obtidos com a malha mais fina estão mais próximos dos dados apresentados na literatura quando observado as regiões de maior gradiente de velocidade.

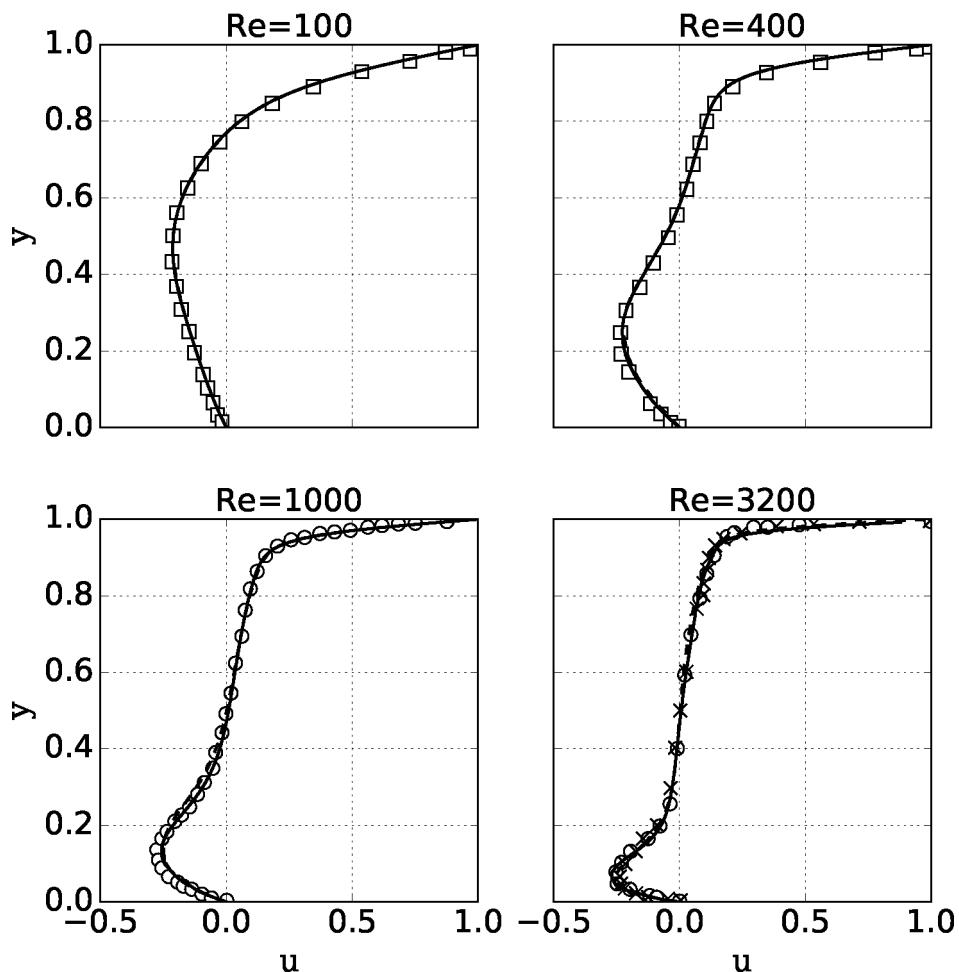


Figura 5.9: Perfis de velocidade na direção x em função de y para diferentes números de Reynolds. \square Ku et al. (1987); \circ Deshpande e Milton (1998); \times Prasad e Koseff (1989); $---$ Presente, resolução base 16^3 ; $-$ Presente, resolução base 32^3 .

A Figura (5.10) apresenta os perfis de velocidade v na direção y em função de x , no plano central $z = 0,5$ m, para os diferentes número de Reynolds. As condições de contorno são respeitadas para todos os casos, sendo velocidade nula em $x = 0,0$ e em $x = 1,0$ m. Próximo a $x = 0,0$ m o escoamento é ascendente, e próximo a $x = 1,0$ m é descendente, como também observado nos resultados qualitativos. Como para a velocidade u , quanto maior o número de Reynolds, mais evidente é a camada limite formada próxima as paredes. Os perfis de velocidade v também estão em concordância com os extraídos da literatura, tanto para resultados numéricos, quanto para experimentais no caso para $Re = 3200$. E por fim, como observado para u , comparando os resultados obtidos para cada uma das resoluções de malha simulado, base 16^3 e 32^3 , nota-se que os mesmos estão coincidentes, exceto para o caso $Re = 3200$, onde os dados obtidos com a malha mais fina estão mais próximos dos dados apresentados na literatura, principalmente quando comparado com os resultados experimentais (PRASAD; KOSEFF, 1989).

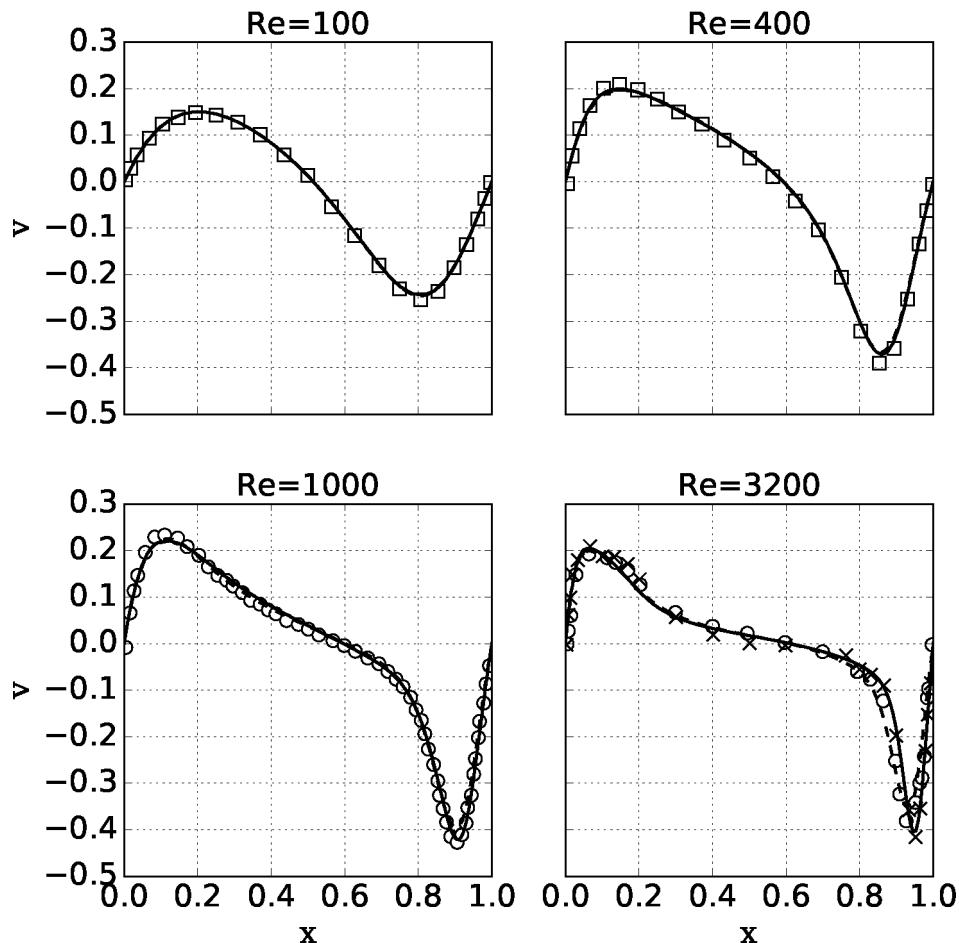


Figura 5.10: Perfis de velocidade na direção y em função de x para diferentes números de Reynolds. \square Ku et al. (1987); \circ Deshpande e Milton (1998); \times Prasad e Koseff (1989); $---$ Presente, resolução base 16^3 ; $-$ Presente, resolução base 32^3 .

Vale ressaltar que apesar do maior refinamento ser aplicado em apenas algumas regiões, o mesmo foi o suficiente para encontrar resultados em concordância com os apresentados pela literatura, gerando assim uma economia de memória e de tempo de processamento. Uma vez validadas as equações de transporte para a quantidade de movimento, com adaptatividade dinâmica da malha ao longo do tempo, na seção seguinte será apresentada a validação da metodologia da fronteira imersa fluido-dinâmica e térmica.

5.4 Validação para fronteira imersa: cavidade cúbica com diferença de temperatura

Para validação da metodologia da fronteira imersa implementada no código AMR3DP, tanto a fronteira fluido dinâmica utilizada para modelar geometrias rígidas em meio a escoamento, quanto a fronteira térmica utilizada para modelar efeitos térmicos com troca de energia entre um sólido e o fluido, foi resolvido o problema da cavidade térmica cúbica com um gradiente de temperatura imposto. Esta simulação será útil também para realizar a validação da implementação da equação de transporte para um escalar genérico, simplificada neste trabalho para a equação da energia, Eq. (3.6).

Para modelar o efeito da temperatura na equação da quantidade de movimento linear foi utilizada e implementada a Hipótese de Boussinesq, onde um termo fonte a mais, o termo de peso-empuxo, é guardado na equação da quantidade de movimento linear na direção em que existe gravidade. Nesta aproximação a massa específica somente varia com a temperatura e é adicionado um termo extra na equação do balanço de quantidade de movimento linear na direção da gravidade, referente a força peso-empuxo, dado pela Eq. (5.14):

$$E_{pe} = \rho g \beta (T - T_{REF}), \quad (5.14)$$

onde E_{pe} é a força peso-empuxo, g é a aceleração da gravidade, β é uma constante, T é a temperatura do fluido do volume analisado e T_{REF} é a temperatura de referência do problema.

O problema da cavidade térmica é apresentado na Fig. (5.11), onde são ilustradas as paredes com gradiente de temperatura e a direção da gravidade.

A cavidade foi modelada com fronteira imersa, sendo utilizada uma malha triangular e foram definidos triângulos de tal forma que o volume atribuído para o ponto lagrangiano (área do triângulo multiplicado por uma altura) seja igual ao volume euleriano onde a cavidade está

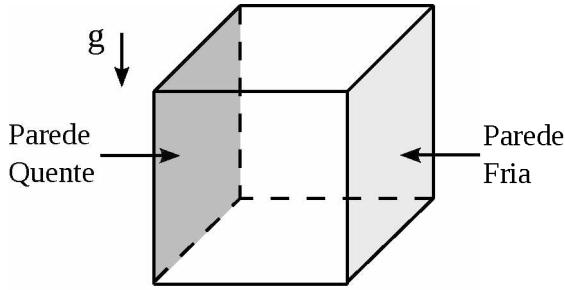


Figura 5.11: Cavidade térmica

imersa. Assim é importante que a fronteira imersa esteja inserida na malha euleriana sempre com o mesmo nível, neste caso na malha com o nível mais fino. A profundidade escolhida para o volume lagrangiano foi mesmo delta da malha euleriana, como ilustrado na Fig. (5.12). A dimensão da cavidade é de $1m^3$.

A Figura (5.12) apresenta a malha euleriana utilizada neste problema, mostrando o plano central. O domínio escolhido para a simulação foi de 4 metros cúbicos. Foram definidos blocos de malha com maior refinamento próximos a fronteira imersa. Ao se distanciar da região de interesse, ou seja, da fronteira imersa, a malha euleriana é engrossada gradativamente, até atingir o contorno do domínio, onde foi aplicada a condição de contorno ambiente $T_A = 25^{\circ}C$. Esta figura também mostra a malha lagrangiana imersa na região de maior refinamento, através de coloração semi-transparente. Foram feitos testes com dois refinamentos diferentes, o primeiro com resolução de $1/64$ próximo a parede da fronteira imersa, e o segundo sendo o dobro de refinamento, com resolução de $1/128$.

A simulação transcorreu por um tempo total de 150 segundos, sendo aplicada temperatura constante na parede quente $T_H = 30^{\circ}C$, e na parede fria $T_C = 25^{\circ}C$, temperatura está igual a temperatura de referência. Para as demais quatro paredes é aplicado condição adiabática. As propriedades do fluido foram escolhidas de tal forma a serem obtidos valores desejados dos números de Rayleigh e Prandtl. As equações para o cálculo dos números de Rayleigh e Prandtl são, respectivamente:

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\alpha v}, \quad (5.15)$$

$$Pr = \frac{v}{\alpha}, \quad (5.16)$$

onde g é a gravidade, β é o coeficiente de expansão térmica, ΔT é a diferença de temperatura entre a parede quente e a parede fria, L é o comprimento característico da cavidade retangular,

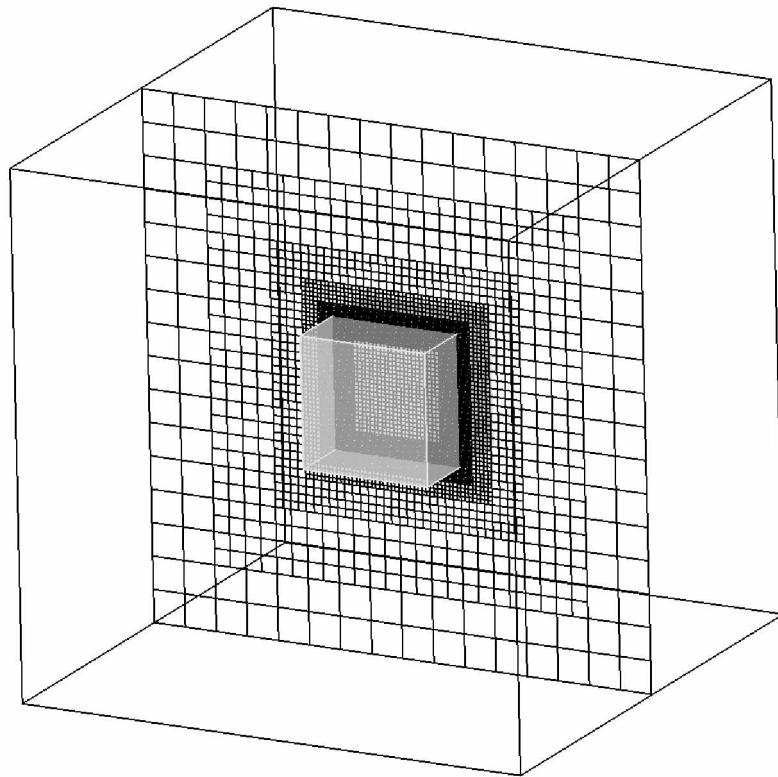


Figura 5.12: Malha euleriana no plano central normal à z e cavidade formada por elementos lagrangianos com resolução 1/64

α é o coeficiente de difusão térmica e ν é a viscosidade cinemática do fluido.

Foram realizadas simulações para número de Rayleigh iguais a $Ra = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ e 10^7 , e o número de Prandtl igual a $Pr = 0,71$. A força gravitacional foi imposta somente no interior da cavidade, região de interesse, e foi utilizado processamento paralelo, sendo que o domínio foi dividido em quatro processos. Foi utilizado a discretização semi-implícito e formulação não conservativa, e o esquema SBDF.

A Figura (5.13) apresenta o campo de temperatura juntamente com as linhas de iso contornos de temperatura constante no plano central, em $z = 2$ m, para o caso com $Ra = 10^3$ e resolução da malha de 1/64. O valor da temperatura foi adimensionalizado entre 0 e 1. Nota-se que o fluido próximo a parede quente ascende, devida a força de peso-empuxo que passa a atuar no escoamento em função do aumento da temperatura devido a injeção de energia térmica proveniente da parede quente. Próximo a parede fria, também devido a força de peso-empuxo que transporta o fluido com menor energia no sentido da gravidade, o fluido desce, como esperado. Os iso valores de temperatura estão normais as paredes isoladas, como esperado, uma vez que o fluxo nulo implica em uma derivada nula da temperatura ao longo da normal à parede.

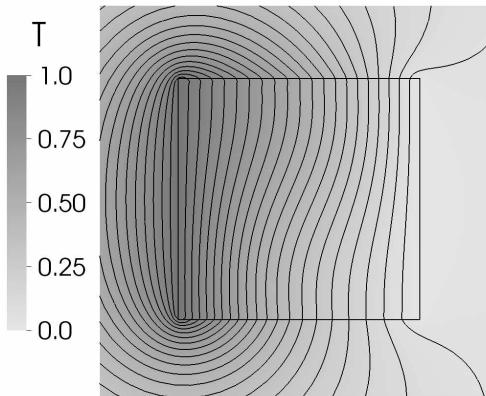


Figura 5.13: Iso-valores de temperatura para número de Rayleigh $Ra = 10^3$

Contudo a figura anterior (Fig. (5.13)) mostra que os contornos de temperatura na parede isolada próximo a parede quente (canto superior esquerdo) apresenta uma pequena oscilação, estando levemente deslocada da direção normal. Isto corre porque é uma região de junção de dois tipos de condição de contorno diferentes, primeira e segunda espécie. Buscando contornar este problema foi utilizada uma segunda fronteira imersa, tendo assim uma segunda zona de forçagem, buscando impor melhor a condição de contorno. Esta segunda cavidade foi criada como a primeira, a uma distância igual ao comprimento do volume euleriano, em todas as paredes, em torno da primeira cavidade. Nota-se pela Fig. (5.14) que esta estratégia não foi bem sucedida, uma vez que os iso contornos de temperatura não estão mais normais as paredes isoladas, ou seja, a condição de segunda espécie não está sendo aplicado de maneira correta. Apesar desta segunda zona de forçagem priorar a aplicação da condição de contorno de segunda espécie, a utilização dessa fronteira extra apresentou uma melhora na aplicação da condição de primeira espécie, o que pode ser observado nas proximidades das paredes quentes e frias.

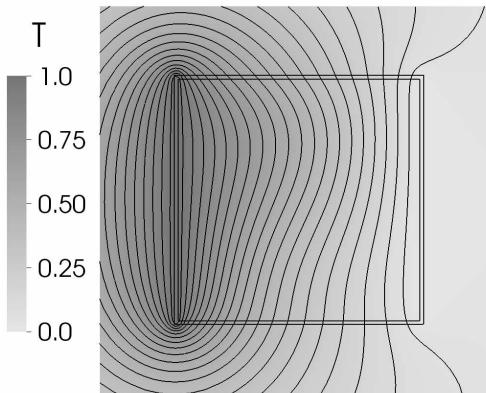


Figura 5.14: Iso-valores de temperatura para número de Rayleigh $Ra = 10^3$, utilizando fronteira imersa com duas zonas de forçagem.

Como visto a utilização de uma segunda zona de forçagem, a uma distância da fronteira

igual ao comprimento do volume euleriano, contribuiu para uma melhor imposição das condições de contorno de primeira espécie. Porém, para a de segunda espécie apresentou uma piora nos resultados. Um segundo teste foi feito utilizando uma segunda zona de forçagem diferente para as paredes com condição de segunda espécie, a uma distância de dois volumes eulerianos da primeira fronteira. Os resultados apresentaram uma boa melhora, e são apresentados na Fig. (5.15). Os iso-contornos de temperatura se mantiveram normais nas paredes isoladas até em pontos próximo a junção dos dois tipos de condição de contorno, nos quatro cantos da cavidade. Além disso, a aplicação da condição de primeira espécie nas paredes laterais foi mais eficiente do que utilizando apenas uma zona de forçagem.

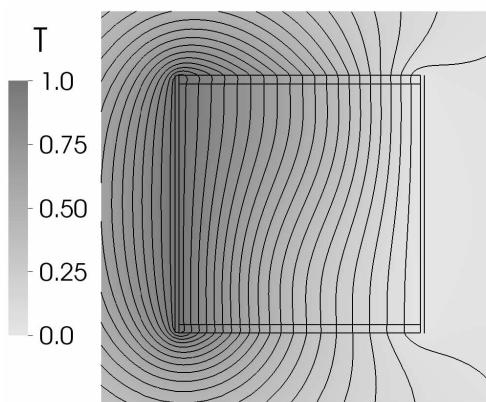


Figura 5.15: Iso-valores de temperatura para número de Rayleigh $Ra = 10^3$

Uma vez definido um tipo de malha ideal utilizando duas zonas de forçagem, foram realizadas as simulações para todos os casos para os diferentes número de Rayleigh, cada caso utilizando os dois tipos de resolução de malha.

A Figura (5.16) apresenta os campos e iso-superfícies de temperatura para números de Rayleigh de $Ra = 10^4$, $Ra = 10^5$ e $Ra = 10^6$, visualizadas no plano central normal a direção z . São apresentados resultados para as malhas com resolução de 1/64 e 1/128, comparados com dados da literatura apresentados por Wan et al. (2001). Estes autores apresentaram a solução para o escoamento neste problema da cavidade com diferenças de temperatura nas paredes utilizando uma técnica de aproximação de convolução singular discreta (DSC) de alta acurácia. Nota-se que os resultados encontrados no presente trabalho estão em boa concordância qualitativa com a referência, mesmo como aumento do número de Rayleigh. Contudo, quando observados os resultados, principalmente para o caso com $Ra = 10^6$, observa-se que ocorre uma melhora na característica dos iso contornos de temperatura quando aumenta-se a resolução para 1/128 nas paredes da cavidade.

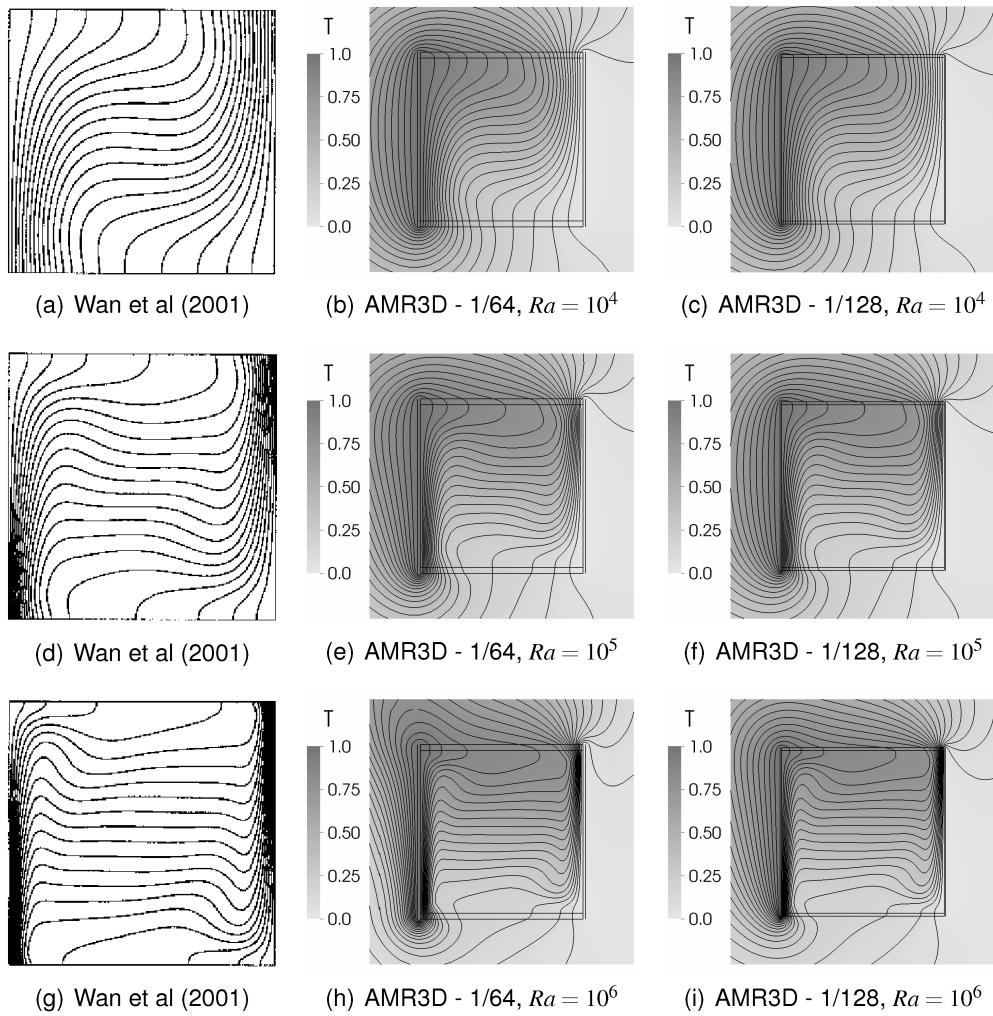


Figura 5.16: Iso-valores de temperatura no plano central para diferentes número de Rayleigh.

Nesta mesma figura (Fig. 5.16) é importante notar que a maior dinâmica do escoamento, ou seja, maiores convecções ocorrem na região interna a cavidade, região onde a gravidade é aplicada. na região externa observa-se pelos perfil da temperatura que predomina a condução e pequena convecção, proveniente apenas do escoamento complementar criado pela metodologia da fronteira imersa.

Para verificar a melhora dos resultados com o aumento da resolução da malha é necessário fazer uma análise quantitativa. Serão comparados os perfis de temperatura com os resultados apresentados por Wan et al. (2001), e ainda comparados com os apresentados por Mayne et al. (2000), onde os autores resolvem as equações de Navier-Stokes acopladas com a equação da energia utilizando o método de elementos finitos de Galerkin, em uma malha triangular não-estruturada com adaptatividade ao longo do tempo. A Figura (5.17) apresenta os valores dos perfis de temperatura em função de x próximo a parede, no plano central em $z = 2,0$ m, e

no plano $y = 2,0$ m, para valores do número de Rayleigh variando de 10^3 até 10^7 . Nota-se que com a resolução de $1/64$, ao se aumentar o número de Rayleigh ocorre uma pequena divergência entre os dados obtidos com os dados da literatura. E com o refinamento da malha para a maior resolução, ocorre uma aproximação dos dados obtidos com as referências, indicando que para manter uma boa qualidade dos resultados ao se aumentar o número de Rayleigh, é necessário um refinamento maior da malha.

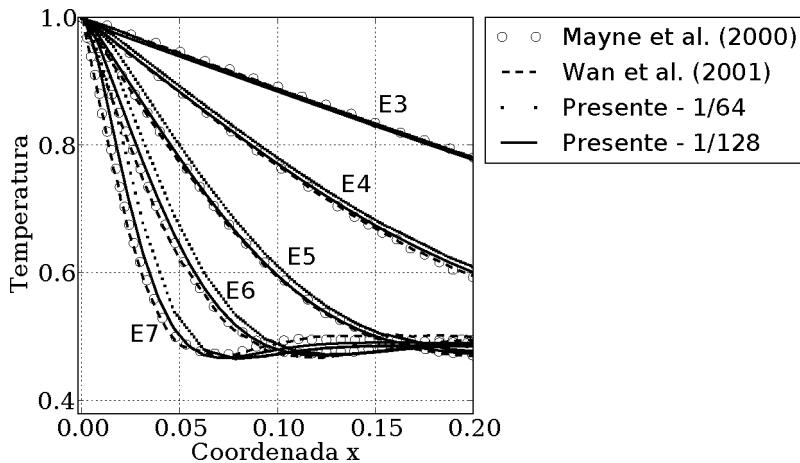


Figura 5.17: Perfis de temperatura próximo a parede para diferentes números de Rayleigh e diferentes resoluções, comparados com a literatura (MAYNE et al., 2000; WAN et al., 2001).

A Figura (5.18) apresenta uma análise quantitativa das velocidades obtidas. A figura mostra os perfis de velocidade u em função de y no plano central em $z = 2,0$ m e $x = 2,0$ m, e v em função de x no plano central em $z = 2,0$ m e $y = 2,0$ m, para os casos com o número de Rayleigh variando de 10^3 até 10^6 . Os resultados para as duas resoluções de malha são comparados com dados apresentados por Padilla et al. (2012), onde os autores solucionam as equações de transporte para a quantidade de movimento e para a energia utilizando o método dos volumes finitos, com uma aproximação de segunda ordem. Nota-se que os resultados estão em boa concordância com os dados observados nesta referência, sendo que com o aumento da resolução da malha para $1/128$ houve uma aproximação melhor dos resultados obtidos.

A Tabela (5.7) mostra o Nusselt médio na parede quente comparados com dados da literatura (MAYNE et al., 2000; WAN et al., 2001; PADILLA et al., 2012). Nota-se que para os números de Rayleigh de 10^3 e 10^4 os resultados se aproximam com os dados das referências para ambas resoluções de malha. Porém a partir de $Ra = 10^4$ os resultados utilizando a malha com resolução menor se distanciam das referências, ficando abaixo do valor esperado. Ao se aumentar o refinamento da malha para $1/128$, os resultados encontrados ficam mais próximo dos extraídos da literatura, indicando que a transferência térmica entre a parede modelada com a

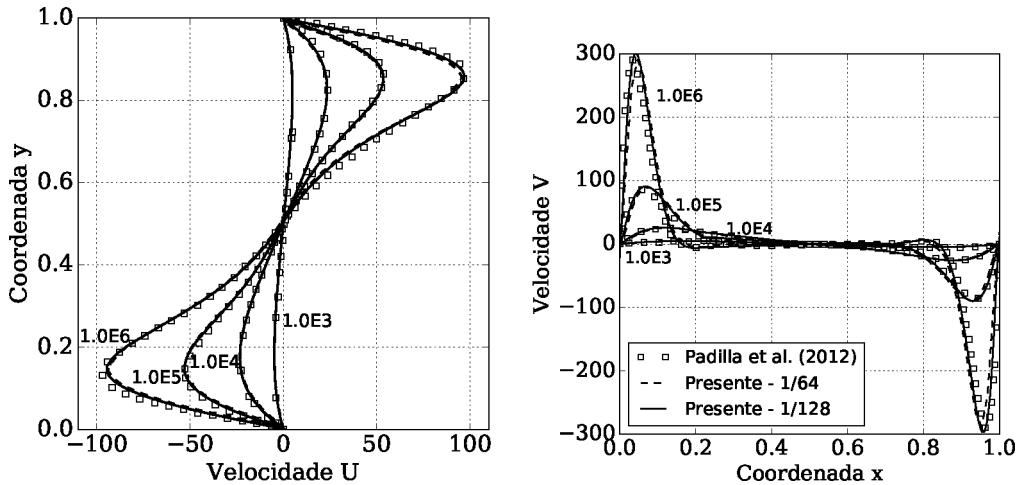


Figura 5.18: Perfis de velocidade para diferentes número de Rayleigh e diferentes resoluções, comparados com literatura (PADILLA et al., 2012).

fronteira imersa e o fluido está sendo mais bem modelada com o refinamento da malha.

Tabela 5.7: Nusselt médio na parede quente para diferentes valores de Rayleigh comparados com dados da literatura (MAYNE et al., 2000; WAN et al., 2001; PADILLA et al., 2012).

	$\mathbf{Ra = 10^3}$	$\mathbf{Ra = 10^4}$	$\mathbf{Ra = 10^5}$	$\mathbf{Ra = 10^6}$	$\mathbf{Ra = 10^7}$
Mayne et al. (2000)	1,115	2,259	4,483	8,881	16,387
Wan et al. (2001)	1,073	2,155	4,352	8,632	16,656
Padilla et al. (2012)	1,072	2,068	4,427	8,865	17,578
Presente - Resolução 1/64	1,133	2,017	4,127	7,719	11,513
Presente - Resolução 1/128	1,171	2,073	4,282	8,456	15,247

A Tabela (5.8) apresenta o erro, através da norma L_2 , da variável imposta pela fronteira imersa, para a primeira espécie (valores de temperatura impostos nas paredes quente e fria), e para segunda espécie (fluxo nulo nas demais quatro paredes). Nota-se que para cada um dos valores de Rayleigh a norma para condição de primeira espécie é menor que a de segunda espécie, uma vez que o valor imposto é conhecido (valor constante), diferente de quando é imposto um fluxo, uma vez que neste caso a derivada da variável é necessária e calculada a cada passo de tempo. E nesta tabela é ainda possível observar que com o refinamento da malha ocorre a queda do erro, como esperado, tanto para condição de primeira espécie quanto para a de segunda espécie.

Tabela 5.8: Norma L_2 calculado na fronteira imersa.

	Norma L_2			
	Resolução 1/64		Resolução 1/128	
Ra	Primeira Espécie	Segunda Espécie	Primeira Espécie	Segunda Espécie
10^3	0.5902337125E-03	0.1497260908E-01	0.2659955871E-03	0.8301423646E-02
10^4	0.3042786313E-03	0.1507488612E-01	0.1361419219E-03	0.8710683130E-02
10^5	0.1964978473E-03	0.1717984662E-01	0.8915416834E-04	0.9641471739E-02
10^6	0.1274052164E-03	0.2347785851E-01	0.6297826821E-04	0.1223958016E-01
10^7	0.7528652709E-04	0.4202096798E-01	0.3926511119E-04	0.1930346678E-01

Uma vez validada a metodologia da fronteira imersa fluido dinâmica e térmica, contemplando as condições de primeira e segunda espécie, na seção seguinte será apresentada a validação da condição de terceira espécie para a fronteira imersa térmica.

5.5 Validação para terceira espécie: cilindro sólido em meio fluido

Nesta última seção deste capítulo será apresentada a validação para a condição de contorno de terceira espécie para a fronteira imersa térmica. O caso escolhido consiste em um cilindro sólido em meio fluido, onde a parte interna do mesmo é somente um meio sólido, ocorrendo apenas condução, e a parte externa é fluido, onde já é conhecido o coeficiente de convecção h_c . Sendo assim, o cilindro é modelado com fronteira imersa, e em cada ponto lagrangiano é feito o balanço na superfície entre condução e convecção.

Para validação da condição foi realizada a simulação sem advecção explícita, ou seja, existe somente os efeitos de condução. Desta maneira é possível determinar uma solução analítica para o problema, e assim fazer a comparação do resultado numérico obtido para validar os mesmos. Foi simulado um tempo total de 100 segundos, sendo a temperatura de referência $T_\infty = 300K$, coeficiente de convecção $h_c = 1W/m^2K$, capacidade térmica do fluido $C_p = 1J/kgK$, massa específica $\rho = 1kg/m^3$ e condutividade térmica $k = 1W/mK$. Para fornecer energia térmica ao cilindro é necessário impor um termo fonte na equação da energia nos volumes internos a fronteira, e o fluxo térmico imposto por unidade de volume foi $q''' = 0,5W/m^3$.

A Figura (5.19) apresenta as malhas euleriana e lagrangiana utilizadas para validação da condição de contorno avaliada. Foram feitos testes com dois níveis de refinamento, o primeiro caso com 25 volumes eulerianos ao longo do diâmetro D do cilindro, e o segundo caso mais refinado, com 50 volumes eulerianos. Esta figura apresenta apenas a malha com resolução $D/25$, e são apresentados também os planos com o termo fonte responsável pelo aquecimento do

cilindro. O tamanho total do domínio euleriano é de $15D$ na direção x , $15D$ na direção y e $10D$ na direção z .

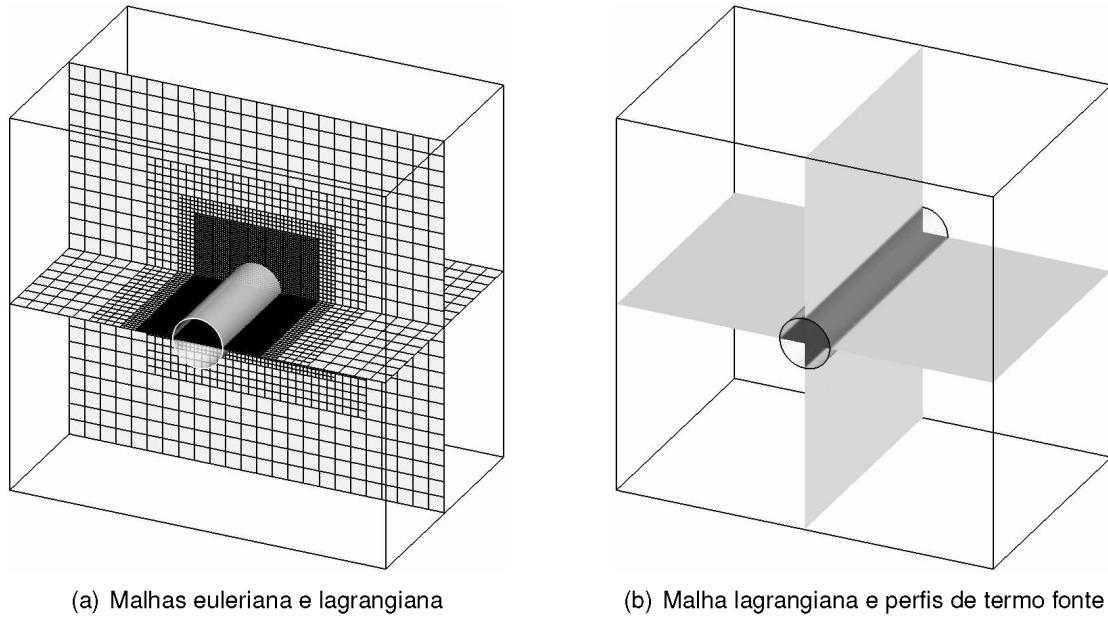


Figura 5.19: Malhas euleriana e lagrangiana utilizadas para validação da condição de terceira espécie.

Para comparar os resultados obtidos foi solucionada analiticamente a equação da energia, sendo mantidos apenas os termos para difusão como dito anteriormente. Sendo R o raio do cilindro, e r o raio até o ponto de interesse, chega-se na seguinte equação para a temperatura em função de r :

$$T(r) = T_\infty + \frac{q'''R^2}{4k} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) + \frac{q'''R}{2h_c} \quad (5.17)$$

A Figura (5.20) apresenta um comparativo entre as soluções obtidas com a analítica. O primeiro caso simulado foi com a malha de resolução $D/25$, e foi aplicada condição de contorno de Dirichlet na equação da energia nas condições de contorno do domínio distantes ao cilindro. No segundo caso foi mantida a mesma malha numérica e foram alteradas as condições de contorno de Dirichlet para condição de Neumann, impondo térmico fluxo nulo. É possível notar uma melhora significativa ao alterar a condição para Neumann, uma vez que esta condição representa melhor fisicamente um cilindro em meio infinito. Um último caso foi simulado utilizando-se então a malha de maior refinamento, de resolução $D/50$, sendo mantida a condição de contorno de Neumann. Nota-se que também ouve uma melhora no resultado com este refinamento de malha.

Neste capítulo foram apresentadas a verificação e validação das implementações das

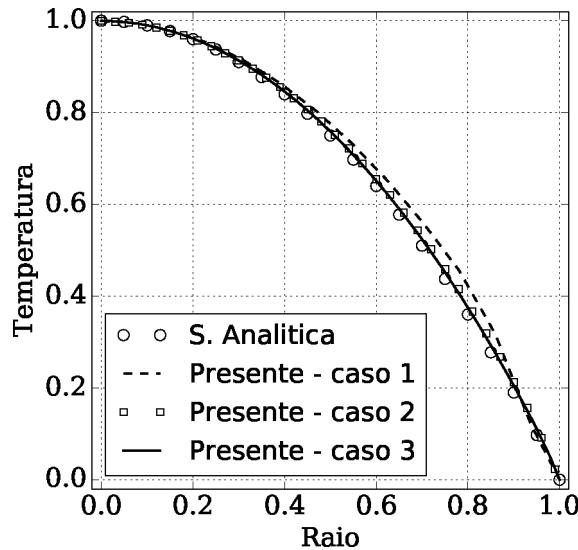


Figura 5.20: Perfis de temperatura ao longo da direção r comparados com a solução analítica

equações para a quantidade de movimento, assim como para a equação da energia. E ainda foi apresentada a validação da metodologia da fronteira imersa, tanto para a fronteira fluido dinâmica, quanto para a fronteira térmica, esta última contemplando os 3 tipos de condição de contorno implementadas, sendo de primeira, segunda ou terceira espécie. Realizadas a verificação e validação das equações e implementações feitas no código AMR3DP, será apresentado no capítulo seguinte a validação dos modelos de turbulências estudados e implementados no presente código.

CAPÍTULO VI

VALIDAÇÃO DOS MODELOS DE TURBULÊNCIA

Será apresentada neste capítulo a validação da implementação dos modelos de turbulência no código AMR3DP. Serão validados os modelos da classe URANS a uma equação, o modelo de Spalart-Allmaras, e a duas equações, o modelo $k-\omega$ de Wilcox. Será apresentada também a validação dos modelos da classe LES, o modelo de Smagorinsky, Smagorinsky com função de amortecimento de Van Driest, e o modelo Dinâmico de Germano, todos estes da classe LES utilizando a modelagem tradicional com filtragem implícita e com filtragem explícita. A validação dos modelos será realizada resolvendo o problema da cavidade com tampa deslizante em regime turbulento e o escoamento sobre um degrau descendente.

6.1 Cavidade com tampa deslizante

Para validação da discretização e implementação dos modelos de turbulência no código AMR3DP foi simulado o problema clássico da cavidade com tampa deslizante, em regime turbulento. A Figura (5.6) apresentada no capítulo anterior mostra o modelo físico desta cavidade na forma tridimensional, a qual possui dimensões de $1m \times 1m \times 1m$, e uma parede deslizante com velocidade constante $u = 1m/s$, na direção positiva de x , na parede em $y = 1m$. Todas as demais paredes permanecem paradas, ou seja, apresentam velocidade nula em qualquer direção.

Como no caso laminar, para a validação das equações para a quantidade de movimento, apresentada no capítulo anterior, foram utilizadas condição de contorno do tipo Dirichlet para o vetor velocidade em todas as paredes, e Neumann para pressão. A condição inicial no

interior do domínio foi velocidades nulas nas três direções, assim como a pressão igual a 0,0. O tempo total de simulação foi de 300 segundos físicos, e a estatística foi realizada a partir do tempo de 100 segundos.

As propriedades do fluido foram escolhidas de tal maneira que fosse utilizado o número de Reynolds desejado, sendo realizadas simulações para número de Reynolds $Re = 10000$. A literatura mostra que escoamentos em uma cavidade com tampa deslizante com número de Reynolds superior a 3200 já entra em transição, e quanto maior o número de Reynolds mais turbulento é o regime do escoamento. Assim sendo para o valor de Reynolds escolhido, o escoamento será turbulento, possibilitando assim a validação dos modelos.

Para cada uma das simulações foram testadas duas malhas diferentes, sendo a primeira uma malha base com nível base de 16^3 volumes, e 3 níveis físicos, a segunda uma malha base com nível base de 32^3 volumes, e 3 níveis físicos, por fim a terceira com uma malha base com nível base de 64^3 volumes, e 2 níveis físicos. Nas simulações utilizando filtragem explícita foi utilizado um comprimento de filtro no tamanho do comprimento da malha do nível mais fino. Todas simulações foram realizadas utilizando adaptatividade dinâmica ao longo do tempo e com processamento paralelo, e o domínio foi dividido em 8 processos. O critério de refinamento escolhido foi a vorticidade.

Serão apresentados resultados utilizando modelos da classe URANS Spalart-Allmaras e o modelo $k-\omega$ de Wilcox, e também utilizando modelos da classe LES, o modelo de Smagorinsky, Smagorinsky com função de amortecimento de Van Driest, e o modelo Dinâmico de Germano, estes utilizando a modelagem tradicional e a filtragem explícita. Para o modelo de Smagorinsky foram realizados testes para dois valores de constante, $C_s = 0,1$ e $C_s = 0,18$, valores geralmente adotados na literatura.

A Figura (6.1) apresenta a característica do escoamento através das iso superfícies do critério $Q = 1,0$, para cada um dos modelos. Esta variável é útil para analisar escoamentos turbulentos, e é definido como a norma euclidiana nos pontos em que a norma do tensor vorticidade é maior que a norma do tensor deformação (JEONG; HUSSAIN, 1995), através da equação:

$$Q = \frac{1}{2} \left(\left| \frac{1}{2} (\nabla u - \nabla u^T) \right|^2 - \left| \frac{1}{2} (\nabla u + \nabla u^T) \right|^2 \right), \quad (6.1)$$

Através dos valores positivos de Q é possível identificar estruturas rotativas coerentes

presentes em escoamentos turbulentos. Os resultados apresentados nesta figura são para o caso utilizando malha base de 32^3 volumes, e 3 níveis físicos. Nota-se uma grande semelhança na característica do escoamento para todas as oito modelagens, começando pela grande estrutura formada próxima a parede deslizante, em $y = 1,0$ m. Esta estrutura se inicia em $x = 0,0$ e se prolonga até $x = 1,0$, e tem característica de camada limite que se forma na parede em movimento, e apresenta instabilidades na direção do eixo z , devidas a natureza turbulenta do escoamento. Para cada um dos casos observa-se também a formação de uma grande estrutura rotativa no interior da cavidade, e esta estrutura principal induz a formação de estruturas secundárias próximo às paredes estacionárias, como por exemplo observado nos cantos da parede inferior, ou então na parede lateral no plano em $x = 0,0$ m. Nesta figura mostra-se também os blocos de refinamentos referentes a malha mais fina, mostrando que grande parte destas estruturas apresentadas se encontram na região de maior refinamento.

A Figura (6.2) apresenta a razão da viscosidade efetiva, $\nu + \nu_t$, pela viscosidade molecular ν , no plano central em $z = 0,5$ m, para cada uma das formas em que a turbulência foi modelada, para a malha base 16^3 e 3 níveis físicos. Estes campos são extraídos dos resultados em um tempo de aproximadamente 100 segundos. Para os modelos de Spalart-Allmaras e $k-\omega$ de Wilcox a viscosidade é maior no interior da cavidade, sendo que o valor máximo para o modelo SA é quase três vezes maior que para o modelo $k-\omega$. Nota-se que a viscosidade advém de uma equação de transporte, e para ambos os modelos é respeitada a condição de contorno necessária para a parede nestes modelos, $\mu_t = 0$, assim sendo a razão entre a viscosidade efetiva e a molecular é igual a unidade nos contornos, tanto na tampa deslizante quanto nas paredes estacionárias. E ainda, para estes dois modelos da classe URANS, observa-se que a viscosidade no contato entre níveis se mantém contínua, sem apresentar nenhuma oscilação numérica. Utilizando o modelo clássico de Smagorinsky, figuras de (c) até (f) nota-se um valor de viscosidade maior próximo a tampa deslizante, região esta a qual possuí o maior cisalhamento. Observa-se também que a viscosidade é grande na região cisalhante ao longo do vórtice principal. Comparando o valor do coeficiente nota-se que o valor da viscosidade é maior para o caso em que $C_s = 0,18$, o que é esperado uma vez que a viscosidade turbulenta é diretamente proporcional a esta constante. Já o modelo dinâmico, apresentado nas figuras (g) e (h), a viscosidade não é expressiva em regiões de cisalhamento como no modelo de Smagorinsky, e sim nas regiões de formação das estruturas, como observado no canto superior direito, em aproximadamente $(x,y) = (1,1)$. E ainda, para os modelos da classe LES, tanto o modelo de Smagorinsky quanto o modelo dinâmico, observa-se

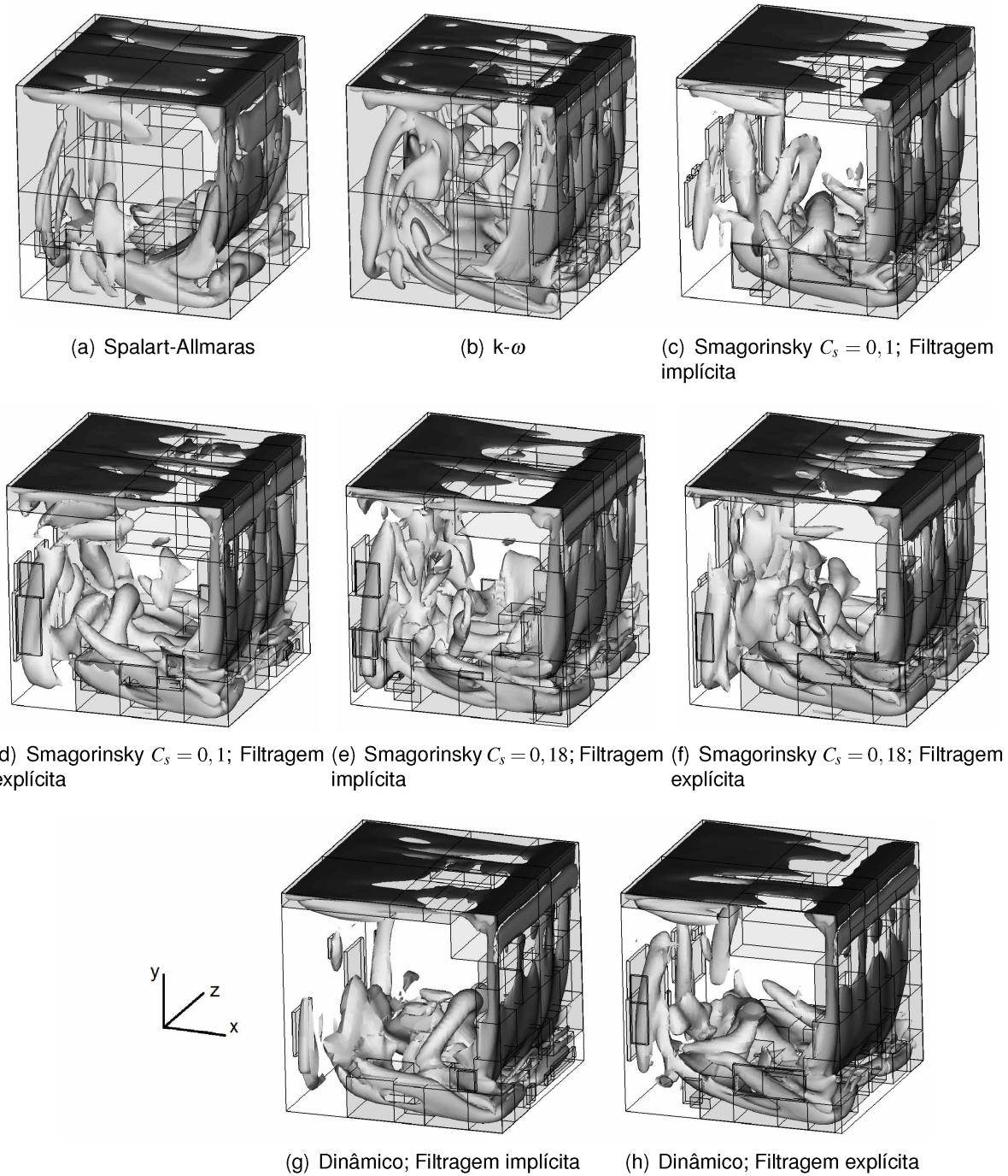


Figura 6.1: Iso valor do critério $Q = 1,0$ para diferentes modelos de turbulência.

que na filtragem implícita em regiões de maior turbulência, evidenciada pelo aumento da viscosidade efetiva, ocorre uma descontinuidade da viscosidade, aumentando significativamente ao passar de um nível mais fino para um nível mais grosso. Esse salto na magnitude da viscosidade não é desejado, uma vez que pode gerar oscilações e até divergências numéricas, e também causar fenômenos físicos que não existiriam na realidade. Já utilizando a filtragem explícita esta descontinuidade não existe mais, os campos de viscosidade são contínuos e consistentes fisicamente.

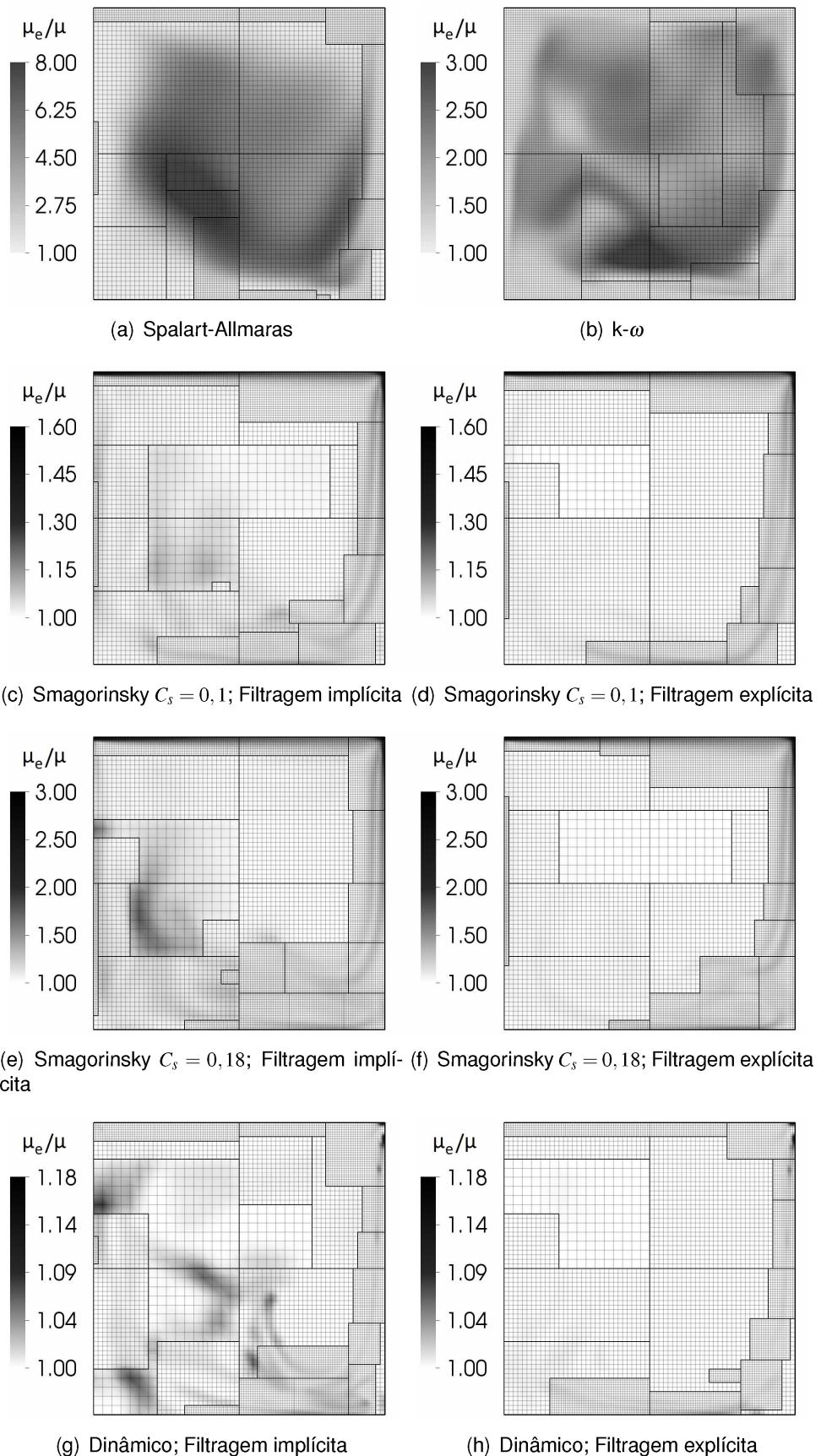


Figura 6.2: Campos de viscosidade efetiva no plano central em $z = 0,5$ m para diferentes modelos de turbulência.

Para visualizar melhor a comparação entre a viscosidade entre níveis, utilizando filtragem implícita ou explícita, é apresentado na Fig. (6.3) o perfil de viscosidade efetiva no plano central em $y = 0,5$ m e $z = 0,5$ m. São apresentadas as curvas para o modelo de Smagorinsky, para constante $C_s = 0,1$ e $C_s = 0,18$. Nota-se que a viscosidade para todos os modelos é alta na parede, e que ao se utilizar a filtragem implícita criam-se picos de elevada viscosidade turbulenta entre níveis no interior do domínio. Já com a filtragem explícita, a transição entre níveis é suave e contínua.

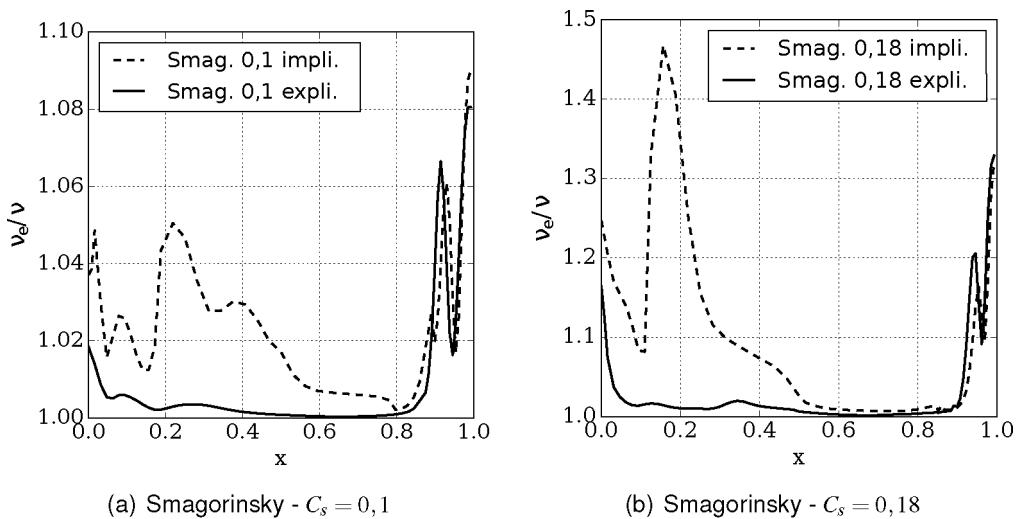


Figura 6.3: Comparação da viscosidade efetiva na linha central em $y = 0,5$ m e $z = 0,5$ m.

A seguir serão apresentados os dados quantitativos referentes a todas as simulações. Os resultados são comparados com dados experimentais apresentados por Prasad e Koseff (1989). Para isto serão comparados os perfis de velocidade e RMS na direção x e y , no plano central em $z = 0,5$ m. Serão comparados o perfil de velocidade u e RMS em x em função de y em $x = 0,5$ m, e o perfil de velocidade v e RMS em y em função de x em $y = 0,5$ m. Para o cálculo das médias e flutuações nestas posições foram utilizadas as sondas numéricas implementadas no código AMR3DP. Primeiramente foi feito o teste de independência de malha, e os resultados são apresentados no Apêndice B, sendo mostrados a independência de malha para velocidade u (Fig. (B.1)), RMS de u (Fig. (B.3)), velocidade v (Fig. (B.2)) e RMS de v (Fig. (B.4)). Em cada figura, o caso 1 se refere a malha base com 16^3 volumes e 3 níveis de refinamento, o caso 2 a malha base com 32^3 volumes e 3 níveis de refinamento, e o caso 3 a malha base com 64^3 volumes e 2 níveis de refinamento. Observa-se que para cada resultado, e cada um dos modelos, houve uma convergência dos resultados, e ocorreu também uma aproximação do resultado obtidos com os dados experimentais.

Na Figura (6.4) é apresentado o perfil de velocidade na direção x em função de y para os diferentes modelos. Inicialmente, analisando a primeira figura onde são mostrados os perfis obtidos com os modelos RANS, observa-se uma boa concordância dos resultados com o perfil experimental, captando bem o ponto de mínimo, onde existe o maior gradiente. Observa-se também que em aproximadamente $y = 0,2$ m o perfil obtido pelo modelo de Spalart-Allmaras se aproximou mais dos pontos experimentais. Já para os modelos da classe LES, observa-se que não ouve uma diferença nesses perfis médios entre a filtragem implícita e a explícita, e também é possível observar que os perfis para os modelos de Smagorinsky com constante $C_s = 0,1$ e o modelo Dinâmico se aproximaram mais dos resultados experimentais, quando comparados com o modelo de Smagorinsky com constante $C_s = 0,18$.

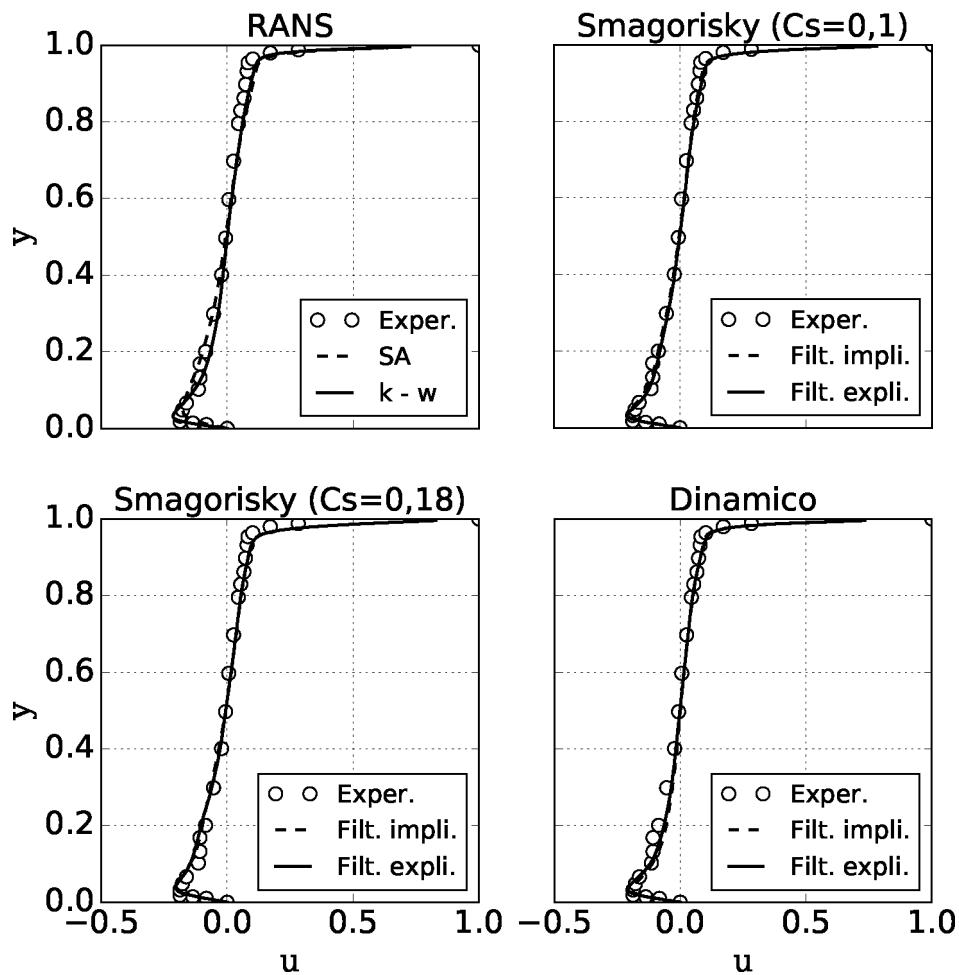


Figura 6.4: Perfis de velocidade u em função de y para os diferentes modelos comparados com o experimento de Prasad e Koseff (1989).

Na Figura (6.5) é apresentado o perfil de velocidade na direção y em função de x para os diferentes modelos. Comparando os dois modelos URANS implementados e utilizados, nota-se que em parte do perfil, em x variando de 0,4 e 0,8 m, o modelo SA se aproxima mais dos

dados experimentais, enquanto que nas outras regiões, como por exemplo na região de mínimo valor próximo a parede em $x = 1,0$ m, o resultado obtido com o modelo $k-\omega$ se aproxima mais da referência. Analisando os resultados dos modelos LES, os perfis obtidos com Smagorinsky com $C_s = 0,1$ se aproximam mais do experimento, seguido pelos obtidos pelo modelo dinâmico, e por último, distanciando mais da referência, os perfis obtidos pelo modelo de Smagorinsky com $C_s = 0,18$. Já para estes perfis de velocidade v , nota-se que utilizando a filtragem explícita, os resultados se aproximam ligeiramente mais do perfil experimental.

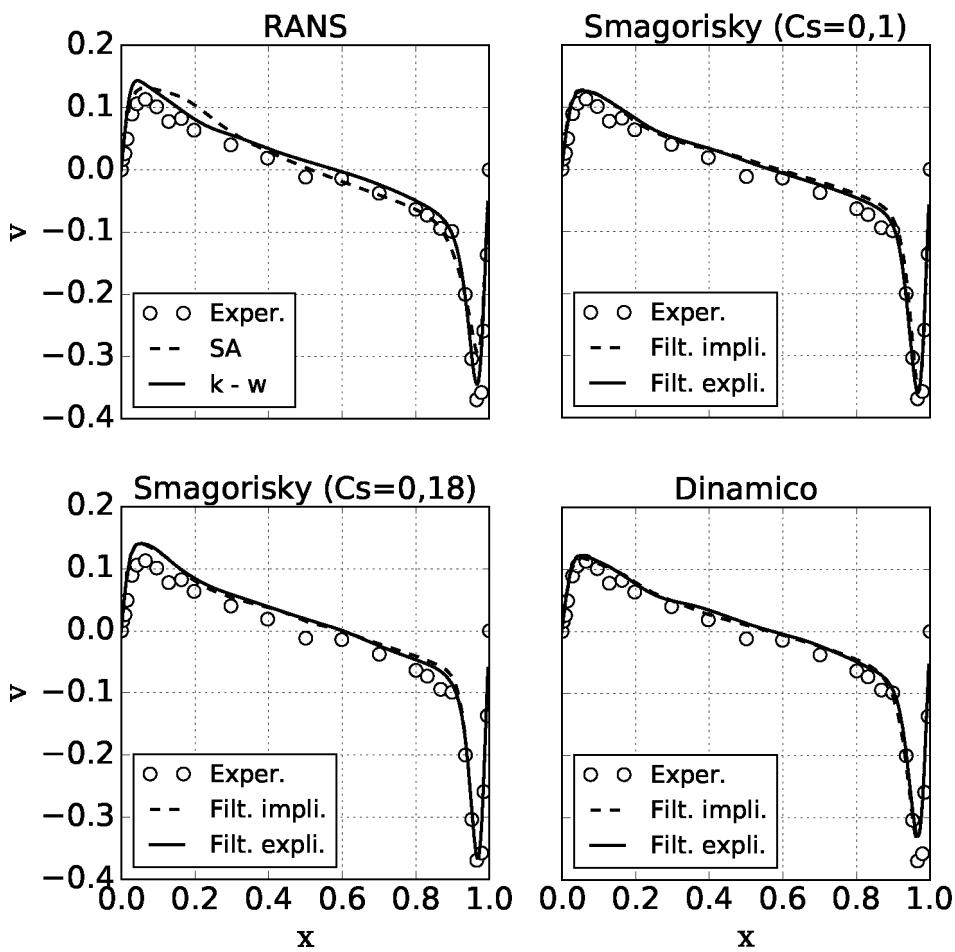


Figura 6.5: Perfis de velocidade v em função de x para os diferentes modelos comparados com o experimento de Prasad e Koseff (1989).

Na Figura (6.6) é apresentado o perfil RMS para a velocidade na direção x em função de y para os diferentes modelos. Observa-se que os perfis de flutuação utilizando a modelagem URANS muito se distanciam dos dados experimentais, uma vez que a modelagem RANS busca a média dos campos de velocidade, e as flutuações tentam a ser nulas. Neste caso da cavidade em regime turbulento esta média não foi atingida, devida a grande complexidade do escoamento que ocorre em um domínio totalmente fechado, com a presença de seis paredes que induz a formação

de estruturas devido à condição de não deslizamento. Estas estruturas complexas se formam ao longo do tempo nas seis paredes e interagem umas com as outras, e o regime permanente logo não é atingido. Já para os modelos da classe LES, onde as grandes escalas são calculadas e as pequenas escalas são modeladas ao longo do espaço e do tempo, os perfis de flutuação se aproxima mais dos dados experimentais, e ainda, com a utilização da filtragem explícita os resultados ficaram mais próximos dos dados da referência.

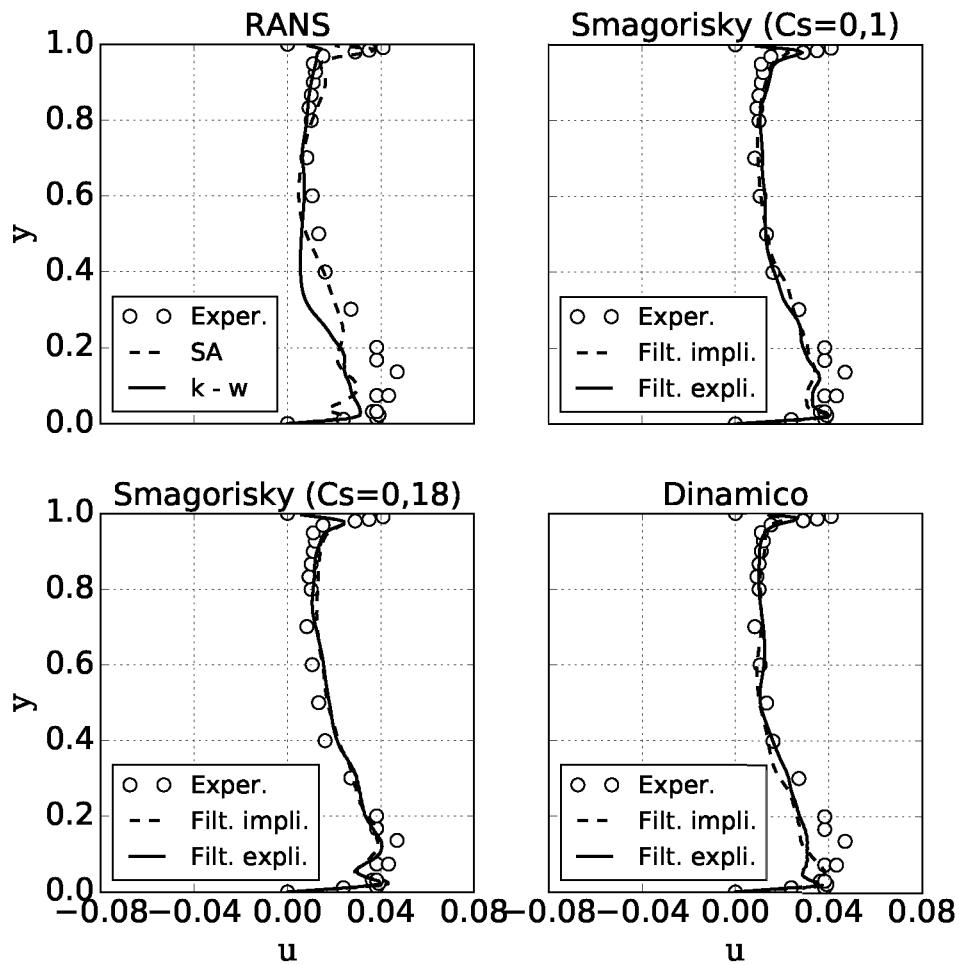


Figura 6.6: Perfis RMS de u em função de y para os diferentes modelos comparados com o experimento de Prasad e Koseff (1989).

Por fim, na Fig. (6.7) é mostrado o perfil de RMS para a velocidade na direção y em função de x para os diferentes modelos. Como observado para a flutuação da velocidade na direção x , nota-se que a flutuação da velocidade em y também fica distante dos dados experimentais utilizando os modelos RANS, uma vez que o modelo busca a média do escoamento, porém não o atinge para este problema. Para os modelos da classe LES esta flutuação se aproximam mais do experimento, e como observado para a direção x , a flutuação na direção y utilizando a filtragem explícita se aproximou mais da referência quando comparados com a filtragem implícita

tradicional. Observa-se ainda que o modelo de Smagorinsky com $C_s = 0,1$ apresentou o melhor resultado, em seguida utilizando o modelo dinâmico, e por ultimo Smagorinsky com $C_s = 0,18$.

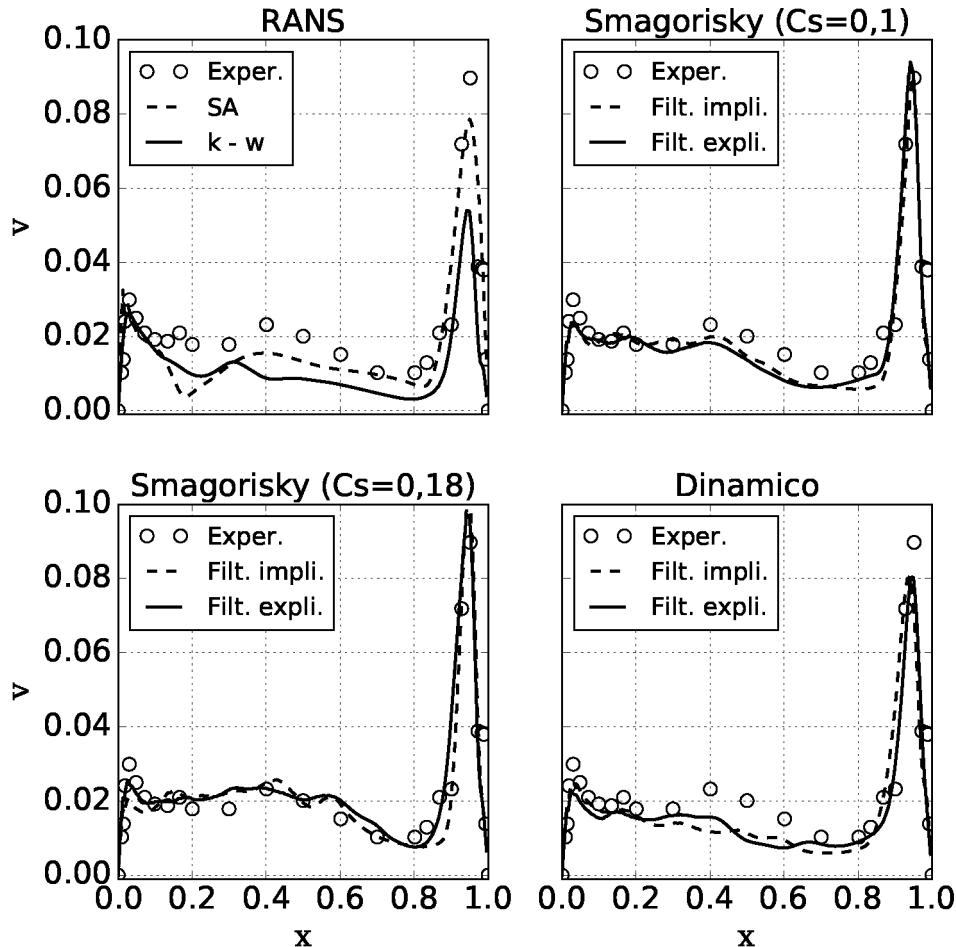


Figura 6.7: Perfis RMS de v em função de x para os diferentes modelos comparados com o experimento de Prasad e Koseff (1989).

Em uma análise geral todos os modelos captaram bem a média do escoamento para este problema da cavidade a elevado número de Reynolds, e para obter o valor da flutuação numericamente é necessário utilizar algum modelo da classe LES. E ainda, tanto através dos campos instantâneos de viscosidade, quanto para os dados quantitativos de média e flutuação de velocidade, foi observado que com a utilização da filtragem explícita foram obtidos melhores resultados.

A seguir será apresentada a validação dos modelos de turbulências implementados no código AMR3DP para um segundo problema, o escoamento em um degrau descendente.

6.2 Degrau descendente

Nesta seção serão apresentados os resultados de validação para um segundo problema, o escoamento sobre um degrau descendente. Este caso é largamente difundido como teste para a validação de resultados de códigos em desenvolvimento. Geometricamente é um problema simples, porém o escoamento gerado, principalmente à elevados número de Reynolds, é muito complexo. Neste problema estão presentes escoamento parietal, descolamento, recolamento e interação entre essas regiões e as estruturas turbinhônicas formadas.

As configurações para a simulação numérica foram baseados no experimento de Jovic e Driver (1994), que através de ensaios em túnel de vento e velocimetria por *laser Doppler* caracterizaram o escoamento. O valor do número de Reynolds, baseado na altura do degrau h , é de $Re_h = 5000$. Assim como os dados para configurar o código no pré-processamento, os resultados serão comparados com dados extraídos desta referência.

A Figura (6.8) apresenta o esquema do túnel de vento utilizado no experimento. Primeiramente o ar atravessa painéis do tipo colmeia e tela, com a finalidade de estabilizar a corrente, transformando estruturas turbinhônicas que poderia influenciar no regime do escoamento. Em seguida o ar passa pela seção de desenvolvimento, onde as condições de entrada são bem controladas e a intensidade da turbulência não passa de 1% na corrente livre. Apesar de bem controlada, a condição de entrada é uma camada limite turbulenta. Assim, um fio de diâmetro $0,1667h$ foi utilizado para forçar a transição da camada limite, que chega às proximidades do degrau com uma espessura de $1,15h$. Após a seção de desenvolvimento o ar atinge a seção de teste, a qual possui expansão simétrica, e a distância entre a parede superior e inferior na região do degrau é de $10h$.

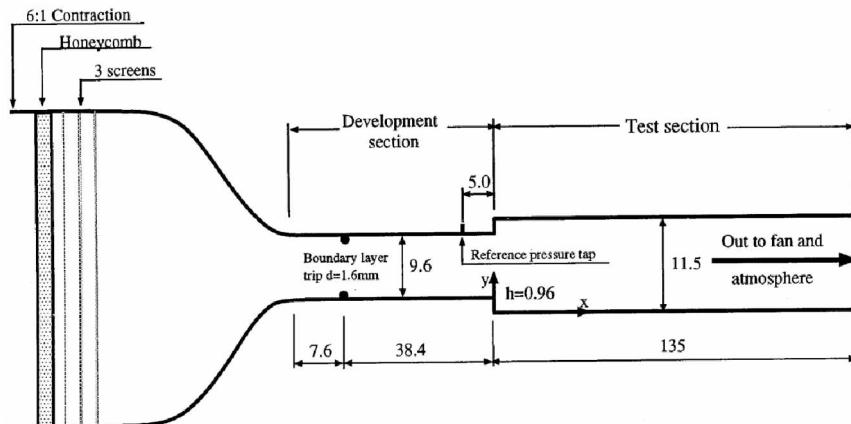


Figura 6.8: Esquema do túnel de vento (JOVIC; DRIVER, 1994).

Os resultados experimentais apresentados pelos autores mostram que na região onde os dados foram amostrados o escoamento do degrau superior não interfere no escoamento do degrau inferior. Desta forma, o domínio escolhido para realizar as experimentações numéricas na presente tese foi apenas um dos degraus. A Figura (6.9) apresenta o esquema do domínio utilizado para simulação numérica, e os dados geométricos escolhidos foram: $h = 0,5$ m, $L = 16$ m, $H = 3$ m, $W = 2$ m e $X_i = 1,5$ m. A dimensão de L foi assim escolhida para possuir comprimento da ordem de $30h$, evitando assim que ocorram efeitos elípticos da condição de contorno imposta na saída do domínio (SILVEIRA-NETO et al., 1993). Já X_i foi definida em $3h$, uma vez que são fornecidos dados experimentais suficientes para se modelar as condições de contorno na entrada. A altura H foi definida como $6h$, dimensão próxima linha de simetria da expansão, facilitando com isso a imposição das condições de contorno na parede superior. E por fim W foi baseado em trabalhos de outros autores (SILVEIRA-NETO et al., 1993; SPODE et al., 2005), os quais apontam que uma profundidade mínima de $4h$ é o suficiente para captar os efeitos tridimensionais.

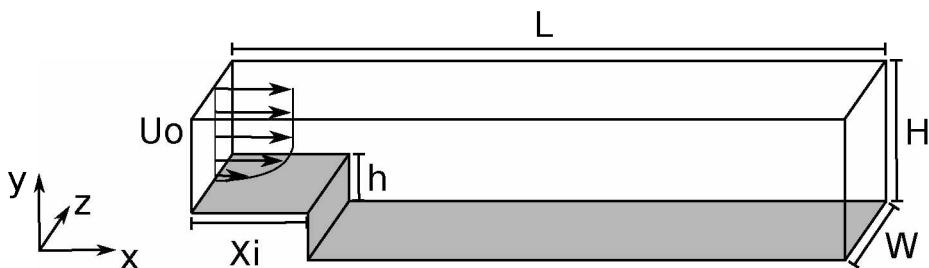


Figura 6.9: Esquema representativo do domínio do degrau.

As condições de contorno são velocidade imposta na entrada em $x = 0$, sendo imposto o perfil médio da camada limite formada na direção do escoamento, perfil de velocidade este extraído do experimento. Na saída foi imposta condição de contorno advectiva, para que as estruturas criadas ao longo do domínio saiam sem interferir no escoamento. Na direção z foi escolhida periodicidade para modelar os efeitos tridimensionais, sem efeito de paredes laterais. Na condição de contorno superior foi definida condição de fluxo nulo na face, sendo o componente da velocidade na direção y nula, e derivada nula para as velocidades u e w em função de y . Por fim, condição de não deslizamento na parede inferior e no degrau, sendo que este foi modelado utilizando fronteira imersa.

As propriedades do fluido foram definidas de tal maneira que o número de Reynolds fosse $Re_h = 5000$, o mesmo do experimento. Para modelar a viscosidade turbulenta foram realizadas simulações utilizando os seguintes modelos: modelo de Spalart-Allmaras para modelagem

URANS; modelos de Smagorinsky com constante $C_s = 0, 1$, modelo de Smagorinsky com função de amortecimento de Van Driest com $C_s = 0, 1$ e modelo dinâmico de Germano, para modelagem LES, sendo utilizada a filtragem implícita pela malha e a filtragem explícita para cada caso de simulação das grandes escalas. O passo de tempo foi calculado dinamicamente ao longo das simulações, e o CFL utilizado foi de 0,2.

Uma etapa importante para realização desta simulação é definir a melhor maneira de criar a geometria do degrau utilizando a fronteira imersa. Foram escolhidas duas formas distintas de modelar o degrau, sendo a primeira forma apresentada na Fig. (6.10.a), onde foram modelados com fronteira imersa as paredes superior e lateral do degrau, e a parede inferior do domínio. A segunda forma é mostrada na Fig. (6.10.b), sendo modeladas apenas as paredes superior e lateral do degrau. Para o primeiro caso foi necessário expandir o domínio na direção y para domínio complementar, que é necessário para impor a condição de contorno utilizando o método da fronteira imersa, sendo expandido então em $2h$ na direção negativa de y , abaixo do degrau e parede inferior modelada. Para o caso 2 esta expansão não foi necessária, uma vez que o domínio dentro do degrau já é o suficiente para ser a região complementar. O modelo de turbulência utilizado para definir a melhor malha lagrangiana foi o modelo de Spalart-Allmaras.

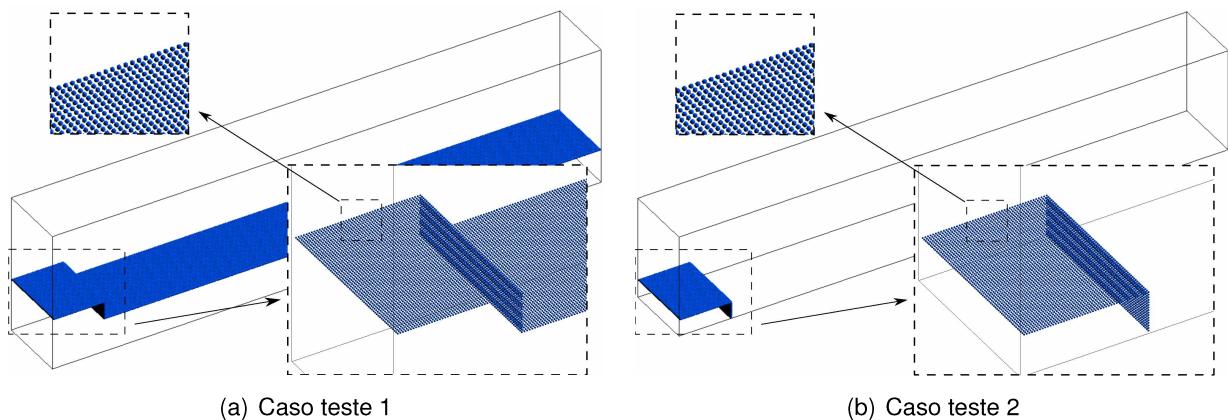
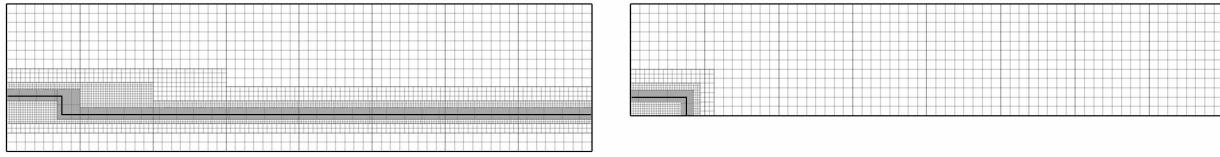


Figura 6.10: Malhas lagrangianas utilizadas para modelar o degrau descendente.

A malha euleriana inicial utilizada para o caso 1 é composta de malha base com 64 volumes na direção x , 16 volumes na direção y e 8 volumes na direção z , e foram utilizados 4 níveis de refinamento. Para o caso 2 foi utilizada a mesma malha, exceto que a malha base na direção y foi de 12 volumes. Assim sendo, a resolução na malha mais fina é de 16 volumes ao longo da altura do degrau. A Figura (6.11) apresenta a malha inicial no plano central em $z = 2h$ para os dois casos, e para ambos o refinamento inicial foi escolhidos nas regiões ocupadas pela fronteira imersa. Ao longo da simulação esta malha se adapta dinamicamente ao escoamento, e

os critérios utilizados para aplicar este refinamento foram a vorticidade e a presença da fronteira imersa. Foi utilizado processamento paralelo, e foram utilizados 8 processadores particionando a direção x em 8 partes, direção esta de maior comprimento.



(a) Caso teste 1

(b) Caso teste 2

Figura 6.11: Malhas eulerianas iniciais no plano central em $z = 2h$

A seguir serão apresentados os resultados dos experimentos numéricos. Na Figura (6.12) é apresentado o campo de velocidade na direção x , no plano central $z = 2h$ para as duas configurações de malhas escolhidas para teste. É apresentada ainda uma visualização aproximada do campo na região logo após o degrau, juntamente com as linhas de corrente. Observando o campo de velocidade em todo o domínio, nota-se que o escoamento em muito se assemelha nos dois casos, aparecendo a camada limite sobre o degrau desde a condição de contorno até o ponto de descolamento, ponto este formado na aresta entre a superfície superior e parede lateral do degrau. Logo após o ponto de descolamento ocorre a formação de uma grande recirculação a jusante do degrau, e para o caso teste 2 essa recirculação primária induz a formação de uma segunda recirculação no canto inferior esquerdo, entre esta primeira bolha e a parede lateral do degrau, o que não é observado no caso teste 1, um indício que a configuração 2 para a fronteira imersa representa melhor esse problema. Para os dois casos existe o escoamento complementar, onde para o primeiro caso é toda região interna do degrau e abaixo da parede inferior do domínio modelado com a fronteira, e para o segundo caso é apenas a região interna do degrau. Pode-se observar ainda que a adaptatividade dinâmica da malha aplicou o nível mais fino nas regiões próximas a fronteira imersa e também em regiões de forte cisalhamento, que seria principalmente na região de contato entre a recirculação principal e o escoamento livre.

Uma análise quantitativa é necessária para comprovar se de fato a configuração teste 2 é a melhor para modelar o problema. A Figura (6.13) apresenta os perfis de velocidade na direção x em função de y/h no plano central $z = 2h$, comparados com os dados experimentais. São comparados perfis em $x/h = 4, 6, 10, 15$ e 19 , sendo que o ponto inicial $x/h = 0$ é justamente o ponto de descolamento. Nota-se que os resultados seguem a tendência do experimento, contudo para o caso teste 1 os perfis estão subestimados, o que é observado para os perfis $x/h \geq 6$,

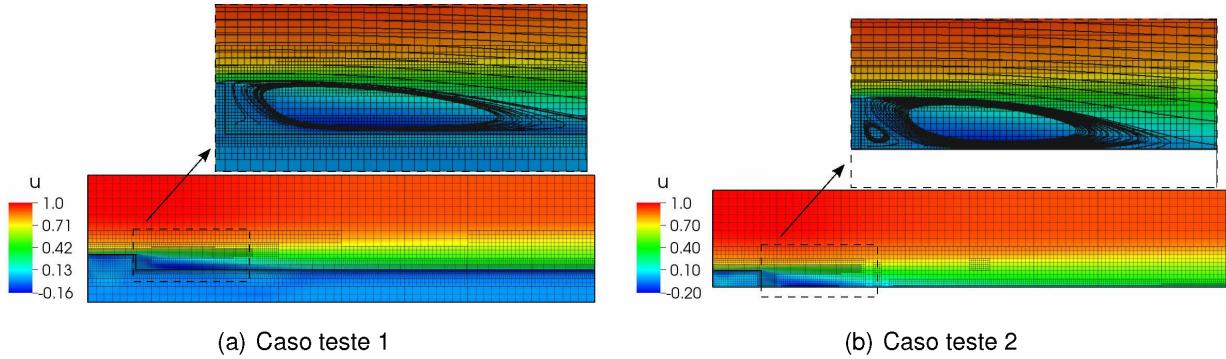


Figura 6.12: Velocidade na direção x no plano central $z = 2h$ utilizando o modelo de Spalart-Allmaras para as diferentes configurações de malha.

ficando mais distantes do experimento.

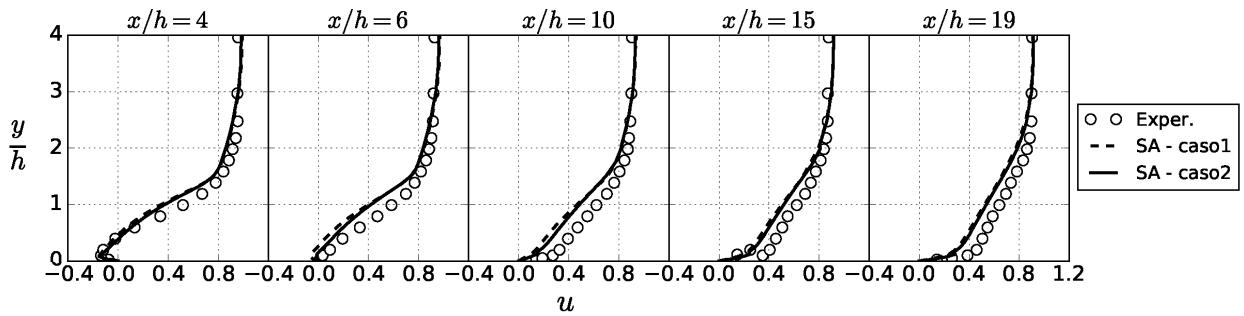


Figura 6.13: Perfis de velocidade na direção x em função de y/h em diversas seções no plano central $z = 2h$, comparados com Jovic e Driver (1994).

A Figura (6.14) apresenta o cálculo da bolha de recirculação para os dois casos. Este cálculo é feito a partir do perfil de velocidade média extraído próximo a parede inferior, a partir do degrau até o ponto em $x/h = 20$, no plano central em z . Observa-se a presença da bolha secundária próximo ao degrau para os dois casos, a partir da velocidade positiva do escoamento. Após esta pequena região, nota-se uma grande bolha de recirculação primária através da velocidade negativa, sendo que para o primeiro caso o comprimento da bolha se estende até aproximadamente $x/h = 7$, e para o segundo caso até $x/h = 6$. No fim da bolha de recirculação ocorre o ponto de recolamento do escoamento, e o mesmo segue positivo para ambos os casos.

Na Tabela (6.1) é apresentado o comprimento de recolamento para ambos os casos, juntamente com o comprimento obtido no experimento de Jovic e Driver (1994). O valor experimental deste comprimento foi $x/h = 6,0$, com um desvio padrão de 0,15. A tabela mostra também o desvio relativo entre o valor obtido em cada caso e o valor do experimento, e o valor do comprimento de recolamento do segundo caso está mais próximo do comprimento experimental, com diferença relativa de 4,05%, enquanto que para o primeiro caso a diferença é maior, 21,79%.

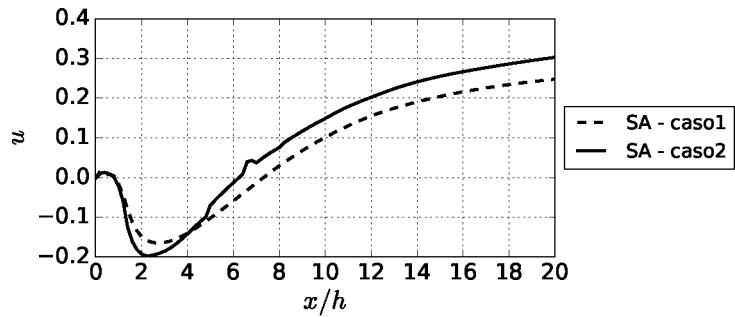


Figura 6.14: Determinação do ponto de recolamento para os dois casos teste.

Tabela 6.1: Comprimento de recolamento dos casos testes comparados com dados experimentais.

	Comprimento de recolamento [x/h]	Desvio relativo
Jovic e Driver (1994)	$6,00 \pm 0,15$	-
Caso teste 1	7,31	21,79%
Caso teste 2	6,24	4,05%

Analizando os resultados qualitativos e quantitativos, evidencia-se segunda configuração para modelar a fronteira imersa é mais adequada para este problema, além de gerar uma economia computacional, uma vez que o domínio de cálculo euleriano é menor e a quantidade de pontos lagrangianos é reduzida.

Uma vez definida a malha lagrangiana que será utilizada, foram realizadas as simulações utilizando os outros modelos. A Tabela (6.2) apresenta os casos que foram simulados, sendo mostrados os modelos utilizados, classe do modelo, e o tipo de filtragem para os modelos LES. Como já mencionado, o termo filtragem implícita se refere à modelagem tradicional, onde as pequenas escalas são modeladas através do filtro feito pela própria malha, e a filtragem explícita as pequenas escalas são eliminadas utilizando um filtro definido explicitamente.

Tabela 6.2: Definição dos casos analisados.

	Modelo	Classe	Filtragem
Caso 1	Spalart-Allmaras	URANS	-
Caso 2	Smagorinsky	LES	Implícita
Caso 3	Smagorinsky	LES	Explícita
Caso 4	Smagorinsky com Van Driest	LES	Implícita
Caso 5	Smagorinsky com Van Driest	LES	Explícita
Caso 6	Dinâmico de Germano	LES	Implícita
Caso 7	Dinâmico de Germano	LES	Explícita

A seguir serão apresentados os dados topológicos do escoamento. Na Figura (6.15) são apresentados os campos da magnitude da velocidade no plano central em $z = 2h$, para os diferentes modelos de turbulência utilizados. Para todos os casos o escoamento é semelhante

próximo à entrada do domínio, sendo formada a camada limite sobre o degrau. Após o ponto de descolamento os resultados para o modelo URANS em muito se diferem dos apresentados nos modelos LES. Para o modelo de Spalart-Allmaras não existem flutuações no campo de velocidade, sendo formada uma grande recirculação primária atrás do degrau, seguida do ponto de recolamento, e deste ponto até a saída do domínio continua-se da mesma maneira sem a formação de estruturas, tendo o aspecto de um campo médio, como esperado por se tratar de um modelo URANS.

Para a metodologia LES percebe-se a característica transitória do escoamento, com expressivas flutuações no campo de velocidade, e ainda a formação de estruturas características de uma camada cisalhante turbulenta após o descolamento da camada limite sobre o degrau, estruturas estas que incidem na parede inferior do domínio, deixando indefinido o ponto de recolamento. Instantaneamente o escoamento para as diferentes formas de se modelar utilizando a simulação das grandes escalas em muito se assemelham, sendo necessário realizar uma análise quantitativa e estatística, que será apresentada mais adiante.

Ainda observando a figura anterior, Fig. (6.15), é possível notar-se que o refinamento adaptativo acompanha regiões com maiores cisalhamentos, ou seja, regiões que apresentam maiores vorticidades relativas a todo o domínio. No modelo SA o refinamento é aplicado próximo ao degrau, modelado com a fronteira imersa, e na região cisalhante a jusante do degrau, região logo após o ponto de descolamento. Além disso, a malha de nível mais fino é aplicada também em quase toda a parede inferior do domínio. Já para os modelos LES, Smagorinsky, Smagorinsky com Van Driest e Dinâmico, com filtragens implícita e explícita, o maior refinamento além de ser aplicado nas regiões do degrau, a jusante do degrau e parede inferior, é aplicado também na região interna do domínio onde existem grandes gradientes no campo de velocidade, evidenciando a presença das estruturas turbinhóreas.

Para visualizar melhor as estruturas do escoamento, são apresentadas na Fig. (6.16) algumas iso-superfícies do campo de vorticidade. Para cada um dos modelos é mostrado o valor da vorticidade em torno do eixo z , para $vort_z = -1$, e vorticidade em torno de x , nos valores positivo $vort_x = 1$ e negativo $vort_x = -1$. Para o modelo de Spalart-Allmaras observa-se valores de vorticidade na direção z na parede superior do degrau, em grande parte da parede inferior distante do degrau, e na região de recirculação formada atrás do degrau. Além disto, é possível notar que não existe vorticidade em torno de x , direção do escoamento, evidenciando que não

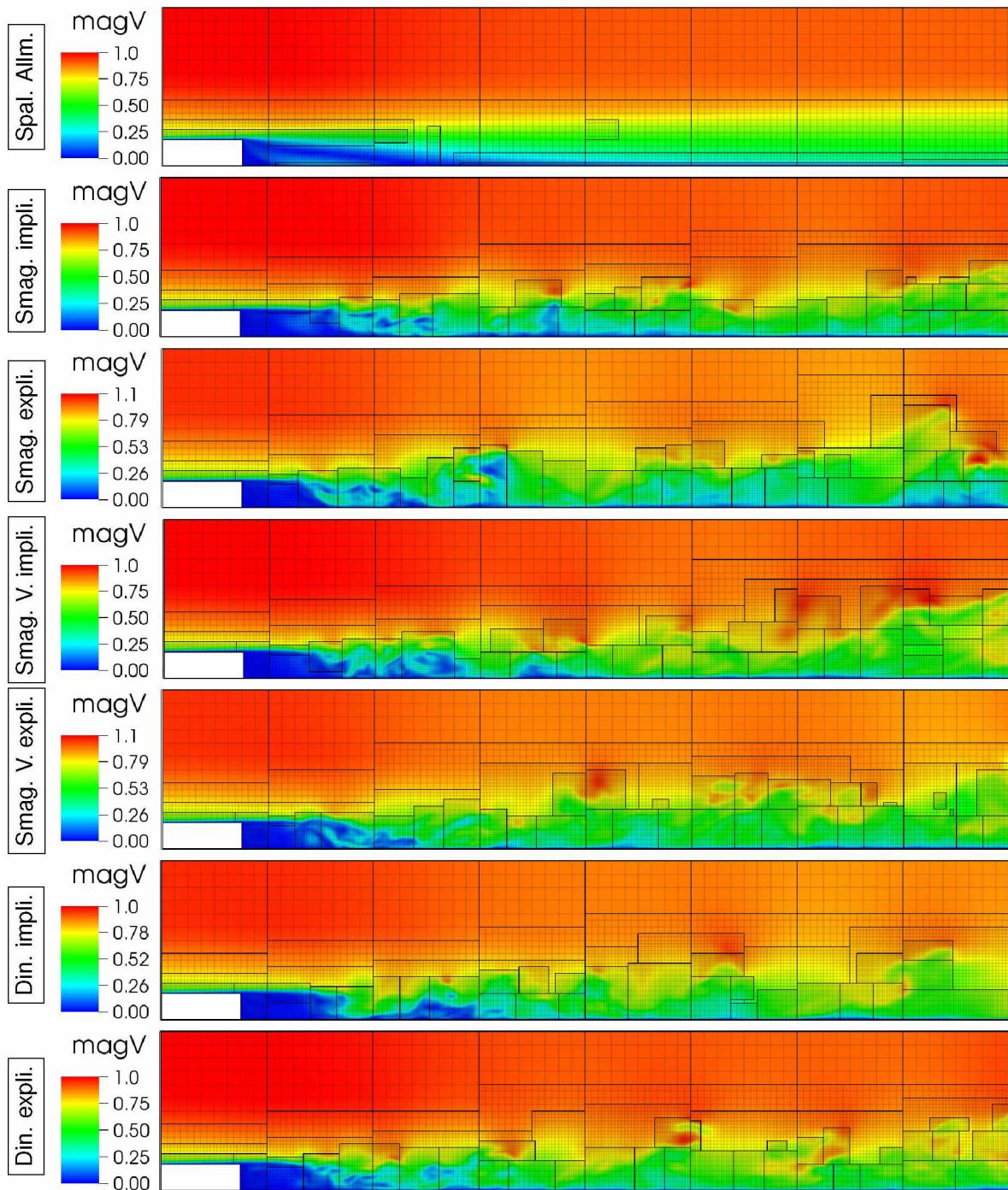


Figura 6.15: Campos de magnitude de velocidade no plano central em $z/h = 2,0$ para diferentes modelos de turbulência.

existem flutuações do escoamento nas direções transversais, assim, as vorticidades também caracterizam o escoamento médio obtido com o modelo.

Para os modelos sub-malha, assim como no modelo URANS, existe um valor de vorticidade expressivo na região da parede sobre o degrau devido a camada limite, bem como logo após o ponto de descolamento, entre o escoamento livre e a região de recirculação instável. Contudo, diferentemente do que acontece no modelo SA, esse forte cisalhamento após o ponto de descola-

mento faz surgir estruturas do tipo Kelvin-Helmholtz, estruturas instáveis rotativas, neste caso em torno do eixo z . A partir destas primeiras estruturas, ou estruturas primárias, aliado com a constante injeção de energia cinética a partir da entrada, ocorre a formação de estruturas secundárias longitudinais induzidas pelas primeiras, estruturas estas rotativas e contra-rotativas, evidenciadas pela vorticidade em torno da direção do escoamento, o eixo x . Com o desenvolvimento do escoamento ao longo da direção x estas estruturas interagem entre si, formando estruturas rotativas alongadas e deformadas, do tipo grampo de cabelo. Quanto mais se desenvolve o escoamento, mais complexo este se torna, tendendo cada vez mais a um regime de turbulência totalmente desenvolvida.

Na Figura (6.17) apresentam-se os campos de viscosidade efetiva no plano central, em $z/h = 2$. Comparando o valor da viscosidade entre os modelos nota-se que para o modelo de Spalart-Allmaras o valor é maior que os outros modelos, por exemplo, a viscosidade máxima é cerca de 30 vezes maior que a máxima para o modelo de Smagorinsky. Esta grande viscosidade a jusante do degrau amortece todas as estruturas que ali se formam, o que leva o escoamento para a média. Como a viscosidade é calculada a partir de uma equação de transporte no modelo SA, nota-se que na transição entre os níveis de refinamento não existe nenhuma descontinuidade, significando que a modelagem da turbulência entre níveis foi eficiente neste caso.

Já nos modelos sub-malha o campo de viscosidade efetiva contribui para evidenciar as estruturas turbilhônicas presentes em todo o domínio, acompanhados pelo refinamento da malha. A viscosidade obtida com o modelo de Smagorinsky em muito se assemelha com a situação utilizando Smagorinsky com função de Van Driest, exceto nas regiões perto do degrau e da parede inferior, onde a viscosidade é amortecida perto de paredes, inclusive em paredes modeladas com fronteira imersa. No modelo dinâmico observa-se o valor de viscosidade somente em algumas regiões, e isso acontece pelo fato da função de proporcionalidade ser calculada dinamicamente ao longo do tempo e do espaço. E comparando a filtragem implícita pela malha e a filtragem utilizando o filtro explícito observa-se que a variação de viscosidade entre níveis é suave ao se utilizar o filtro explícito, diferentemente do que ocorre com o filtro implícito, sendo que nesse ocorre uma grande descontinuidade ao se passar do nível mais fino para o nível mais grosso, surgindo assim regiões com picos de viscosidade que não representam uma estrutura, o que pode levar a fenômenos físicos que não existem e possíveis oscilações numéricas.

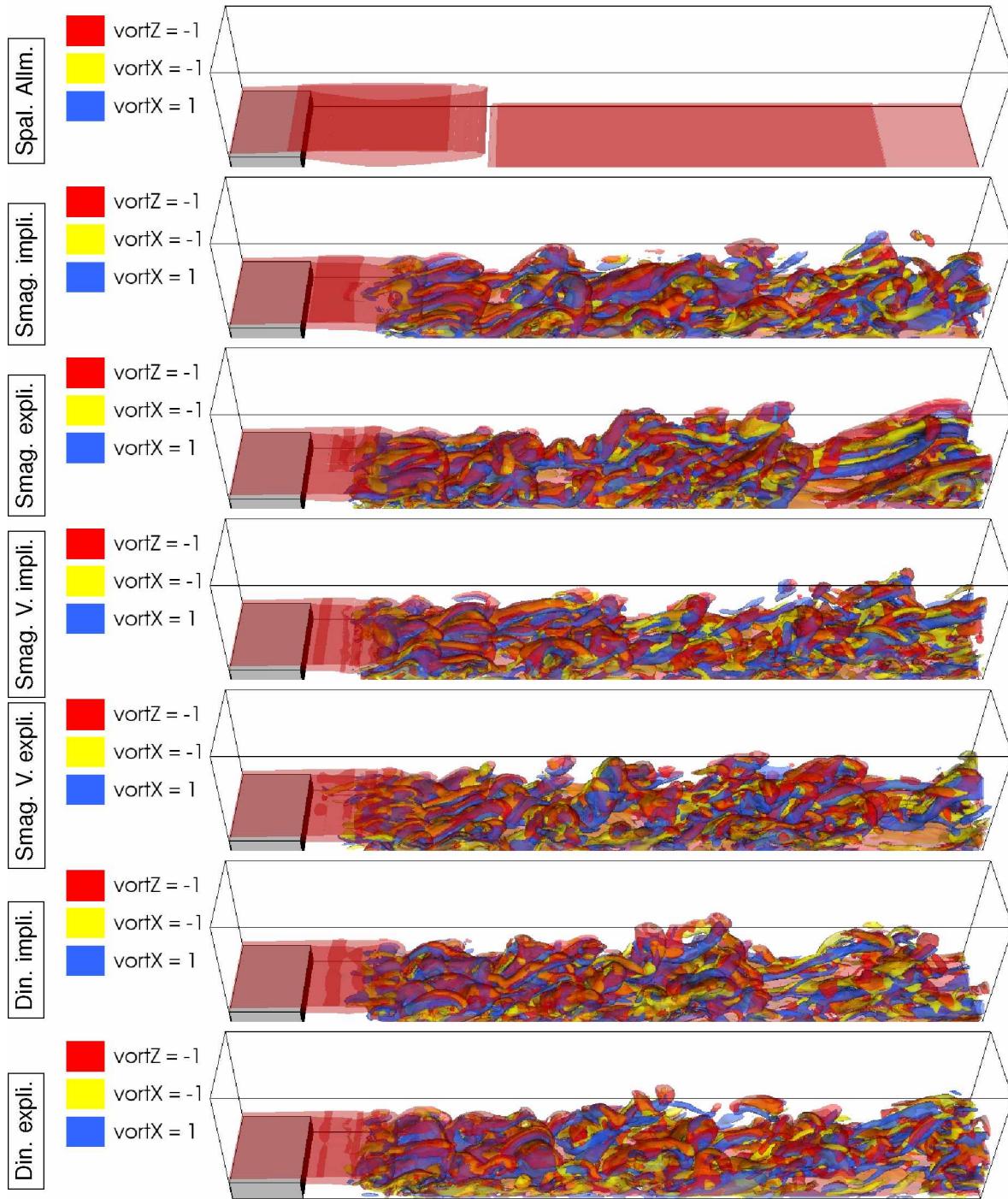


Figura 6.16: Iso valores de vorticidade para diferentes modelos de turbulência.

A Figura (6.18) apresenta o iso-valor do critério $Q = 3,2$ para o caso LES utilizando o modelo dinâmico de Germano e a filtragem explícita, e o iso-valor é colorido com a magnitude da velocidade para facilitar a visualização das estruturas. Nota-se diversas etapas da transição a turbulência. Primeiramente ocorre a formação de oscilações rotativas transversais ao escoamento sobre o degrau, devida a camada limite que se forma nesta região. Em seguida, no ponto de descolamento ocorre a formação de uma rápida camada cisalhante, que rapidamente se transformam em instabilidades do tipo Kelvin-Helmholtz. Devida a sua rotação estas estruturas induzem

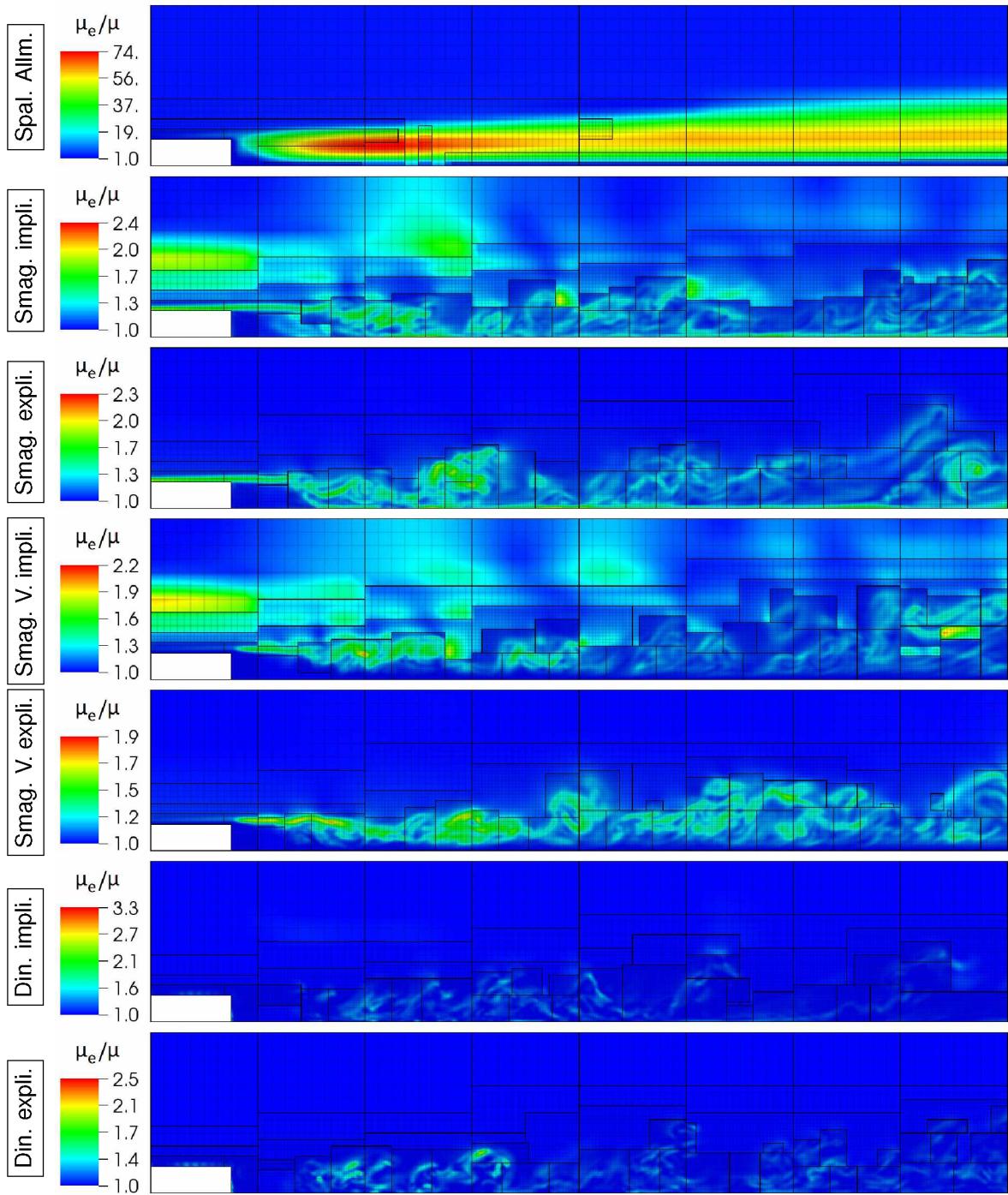


Figura 6.17: Campos de viscosidade no plano central em $z/h = 2,0$ para diferentes modelos de turbulência.

a formação de estruturas longitudinais. Nesta imagem nota-se ainda que não existe um ponto fixo de recolamento do escoamento, mas sim uma região em que as estruturas colidem com a parede inferior. Ao se distanciar do degrau a interação entre as estruturas aumentam a complexidade do escoamento, ocorrendo uma intensa interação entre as estruturas e a parede, criando diversas estruturas longitudinais, além da formação de muitas estruturas do tipo de grampo de cabelo. Estas estruturas podem interagir entre si, como destacado na imagem, ou ainda com

o emaranhado de estruturas formadas, podendo atingir um estado de turbulência desenvolvida. Nesta figura são destacados também os blocos de refinamento referente à malha de nível mais fino. Nota-se que o refinamento é aplicado de fato na região do degrau descendente e ao longo de todo o escoamento, nas regiões onde as estruturas estão presentes.

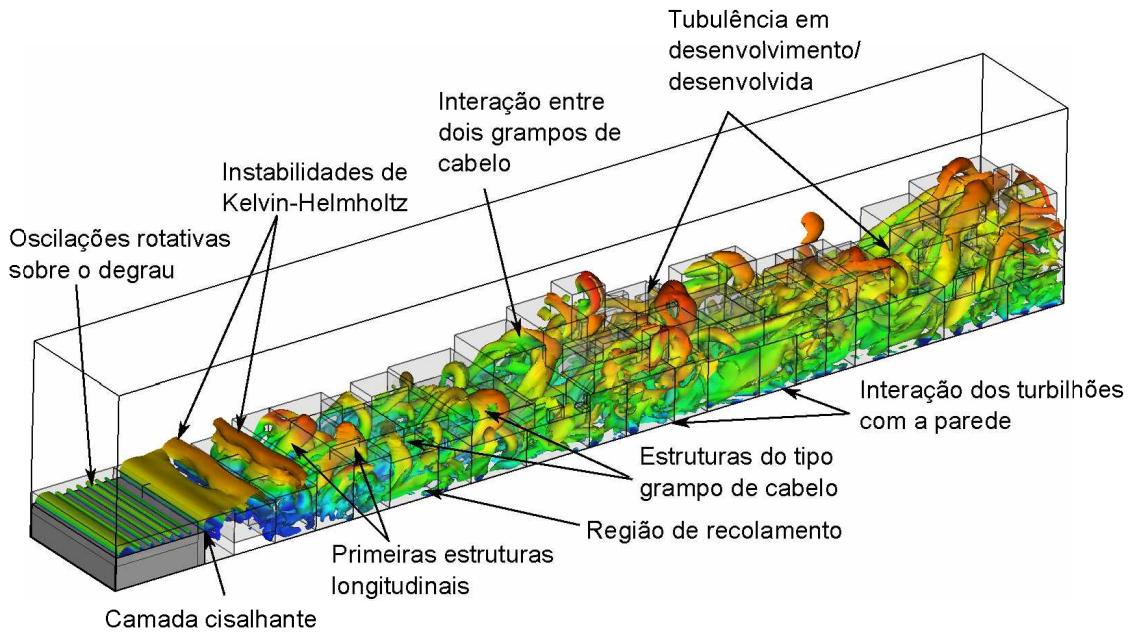


Figura 6.18: Iso valor do critério $Q = 3,2$ para o caso com modelo dinâmico e filtragem explícita.

A seguir serão apresentados os resultados quantitativos. Para fazer o tratamento estatístico do dados foi necessária a utilização das sondas numéricas, implementadas no código ao longo do desenvolvimento desta tese, uma vez que a malha euleriana se modifica com o decorrer da simulação. A Figura (6.19) apresenta a disposição das sondas para captura dos resultados, sendo que foram posicionadas sondas nas seções $x/h = 4, x/h = 6, x/h = 10, x/h = 15$ e $x/h = 19$, no plano central em z , e y/h variando de 0 até 2, com 120 sondas equidistantes em cada seção. Além disto, foram posicionadas 320 sondas, também equidistantes, próximo a parede inferior, no plano central em z , com x/h variando de 0 até 20, com a finalidade de calcular a distância média do recolamento.

Na Figura (6.20) são apresentados os perfis de velocidade média u em função de y/h no plano central $z = 2h$, comparadas com os dados experimentais de Jovic e Driver (1994), para as diferentes seções de x/h . Para cada um dos casos observa-se uma parcela negativa do campo de velocidade, próximo a parede inferior, na seção $x/h = 4$, como ocorre no experimento, sendo este um indicativo da presença da zona de recirculação que ocorre atrás do degrau. Já na seção em $x/h = 6$ nota-se que o valor esta próximo de zero, sem gradientes expressivos na direção y ,

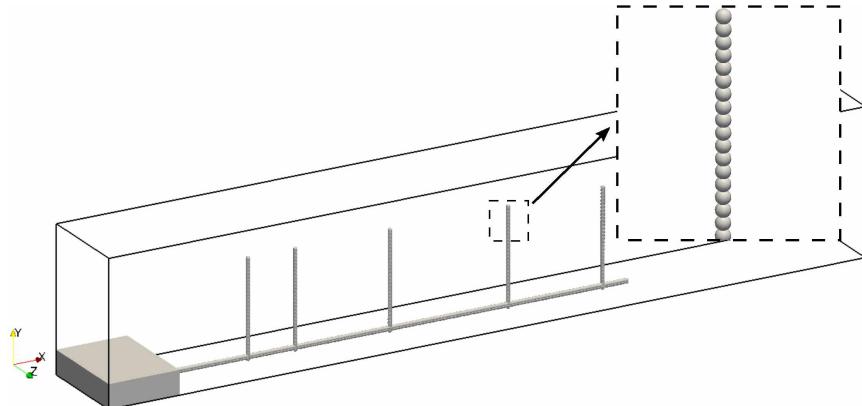


Figura 6.19: Disposição das sondas para captura dos resultados.

indicando que o ponto de recolamento está nesta seção. Da seção $x/h = 10$ em diante ocorre a formação da camada limite média, como esperado que ocorresse após o ponto de recolamento da corrente livre. De uma maneira geral os resultados estão próximo dos obtidos no experimento, inclusive na região muito próxima a parede inferior, região esta de difícil modelagem. As médias dos resultados obtidos com os modelos LES estão mais próximas da referência quando comparados com os perfis obtidos com o modelo de Spalart-Allmaras. Para as modelagens LES não foi observada diferença significativa na média da velocidade em x ao se utilizar filtragem implícita ou filtragem explícita.

Na Figura (6.21) apresentam-se a flutuação da velocidade u em função de y para as diversas seções em x para os distintos modelos. Nota-se que para o modelo SA não existe flutuação da velocidade em nenhuma das seções, confirmando assim que o escoamento estabilizou em uma média permanente. Já na simulação das grandes escalas nota-se a grande flutuação que acontece próximo a parede inferior em cada uma das seções, e isso ocorre devido a presença das estruturas que se formam a partir do degrau, condizendo com o que acontece fisicamente no experimento. Esta flutuação é bastante intensa na região de recirculação, em $x/h = 4$. Esta instabilidade se intensifica mais próximo a seção em $x/h = 6$. Em seguida a flutuação vai diminuindo ao longo de x , diminuindo sua intensidade nas regiões de $y/h = 0$ até 2, e aumentando a partir de $y/h = 2$, indicando que as estruturas estão sendo lançadas da região próxima a parede para o interior do domínio. Para a flutuação os resultados com o modelo dinâmico se aproximaram mais do experimento, e para este caso a filtragem explícita está mais condizente com a literatura.

Na Figura (6.22) são apresentados os perfis médios de velocidade na direção x para os diferentes modelos, perfis estes utilizados para determinação do comprimento de recolamento médio. Observa-se que para todos os modelos o escoamento recola na parede inferior na posição

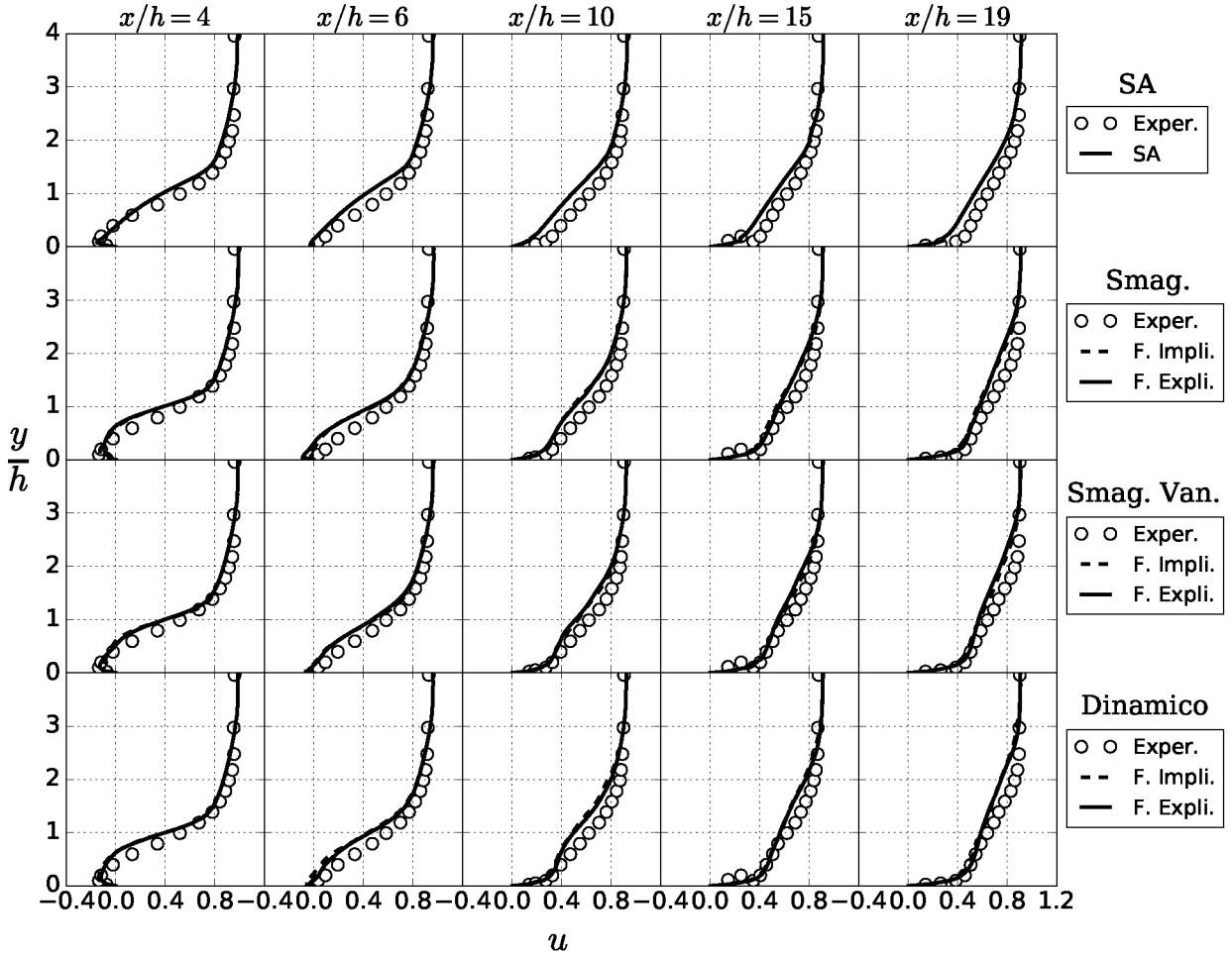


Figura 6.20: Perfis de velocidade média na direção x em função de y/h em diversas seções no plano central $z = 2h$, comparados com Jovic e Driver (1994).

próxima a $x/h = 6$, como no experimento de Jovic e Driver (1994). A característica da curva é similar para todos os modelos LES, e o modelo de Spalart-Allmaras da classe URANS apresenta um comportamento um pouco diferente, sendo que o ponto de velocidade mínima para este está em aproximadamente $x/h = 2$, enquanto para os modelos de simulação das grandes escalas este mínimo se encontra em aproximadamente $x/h = 4,5$.

A Tabela (6.3) apresenta os valores dos comprimentos de recolamento para os diferentes modelos, comparados com o experimento da referência, juntamente com o erro relativo percentual entre o valor obtido e o valor experimental. O valor obtido com o modelo de Spalart-Allmaras está em boa concordância com o valor experimental, apresentando um erro relativo de 4,05%. Analisando os modelos da classe LES nota-se que os valores obtidos com o modelo de Smagorinsky, para ambas as filtragens, apresentam um erro maior que os demais modelos. O motivo deste maior erro é o fato de que o modelo de Smagorinsky puro é muito difusivo junto a parede, e o valor da viscosidade efetiva é maior que os demais, principalmente em regiões próximas

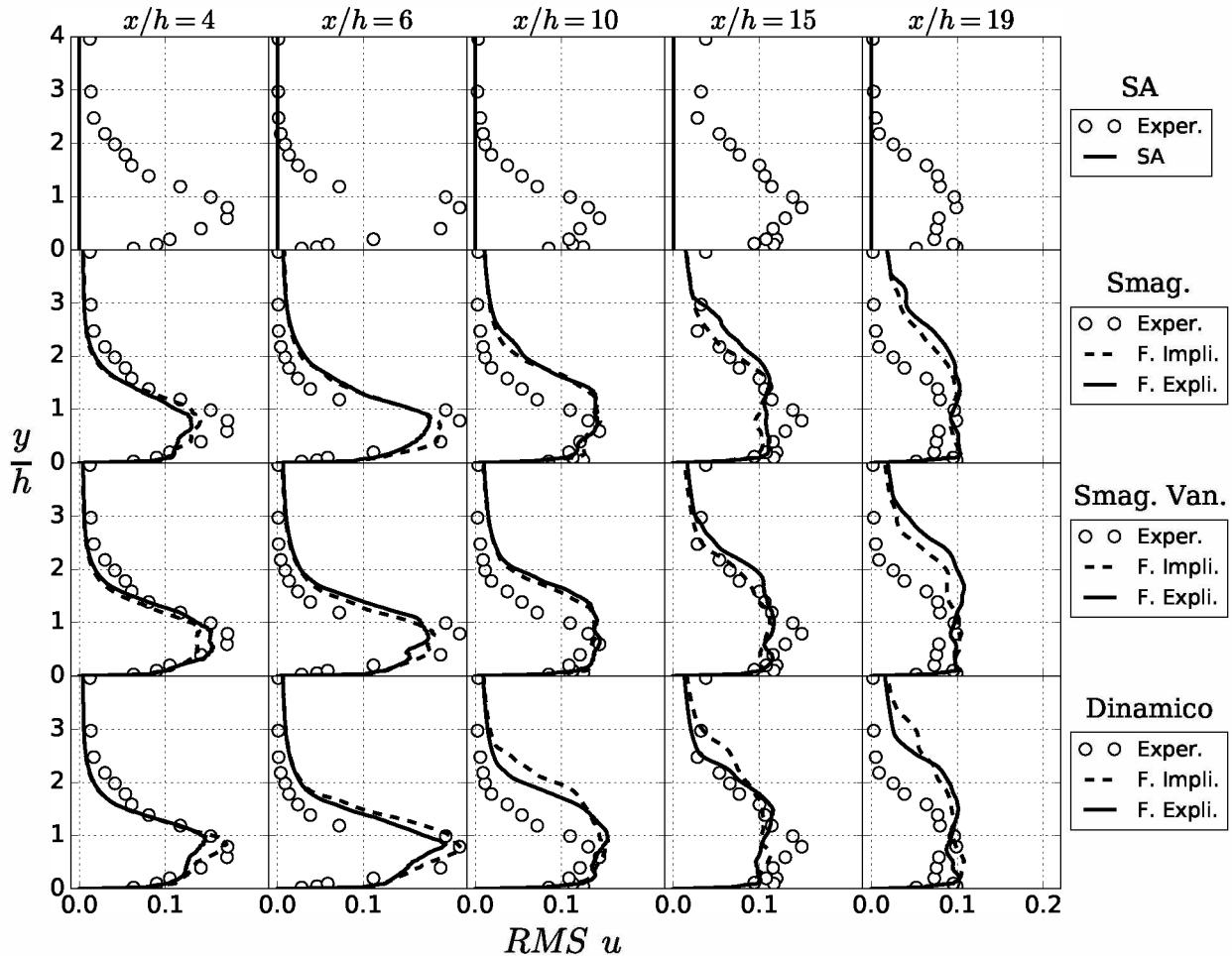


Figura 6.21: Perfis do RMS da velocidade na direção x em função de y/h em diversas seções no plano central $z = 2h$, comparados com Jovic e Driver (1994).

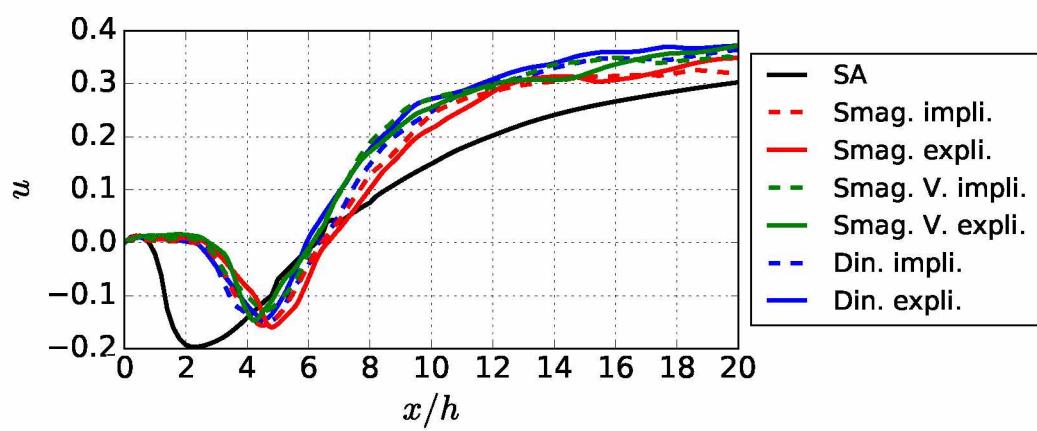


Figura 6.22: Determinação do comprimento de recolamento através dos perfis médios de velocidade média próximos a parede inferior.

as paredes, atrasando o ponto de recolamento. Já utilizando a função de amortecimento de Van Driest, ou utilizando o modelo dinâmico de Germano o ponto de recolamento se aproxima bem do experimento, e para este caso com a filtragem explícita este erro ficou ainda mais reduzido.

Percebe-se que a modelagem sub-malha dinâmica com filtragem explícita apresentou resultado com um erro menor que a incerteza experimental.

Tabela 6.3: Comprimento de recolamento comparados com dados experimentais.

	Comprimento de recolamento [x/h]	Erro relativo
Jovic e Driver (1994)	$6,00 \pm 0,15$	-
Spalart-Allmaras	6,24	4,05%
Smagorinsky implícito	6,43	7,18%
Smagorinsky explícito	6,61	10,24%
Smag. com Van Driest implícito	6,15	2,51%
Smag. com Van Driest explícito	6,12	1,99%
Dinâmico implícito	6,34	5,67%
Dinâmico explícito	5,93	1.14%

No capítulo seguinte serão apresentados resultados referentes à simulação de escoamentos turbulentos com troca de energia térmica.

CAPÍTULO VII

ESCOAMENTOS TURBULENTOS COM TRANSFERÊNCIA TÉRMICA

Neste último capítulo de resultados será apresentada a simulação de escoamentos turbulentos com transferência térmica. Para a modelagem da turbulência foi utilizado o modelo dinâmico de Germano, o qual gerou os melhores resultados na validação dos modelos de turbulência apresentados no capítulo anterior. As aplicações escolhidas foram escoamento turbulento em convecção natural em torno de um cilindro aquecido para a validação, e em seguida escoamento turbulento sobre um degrau descendente, com a finalidade de fazer uma aplicação de escoamento complexo com transferência térmica.

7.1 Cilindro aquecido

Nesta última seção serão apresentados resultados referentes a simulação do escoamento em torno de um cilindro aquecido. Os dados para a realização da experimentação numérica foi baseado no experimento material de Misumi et al. (2003). Um esquema do aparato experimental é apresentado na Fig. (7.1), e o experimento foi realizado com ar. O cilindro é anorado por dois fios isolados, e preso em um domínio com todas as paredes isoladas. Para aquecer o cilindro utiliza-se corrente elétrica, o que gera um fluxo térmico constante do cilindro para o ar.

Na Figura (7.2) é apresentado o domínio utilizado para o experimento numérico. A largura, altura e profundidade do domínio são, respectivamente, $L = 6D$, $H = 6D$ e $W = 3D$. A malha euleriana é composta de 24x24x12 volumes, e 5 níveis de refinamento, o que proporciona uma resolução de 64 volumes eulerianos ao longo do diâmetro do cilindro. É apresentada também

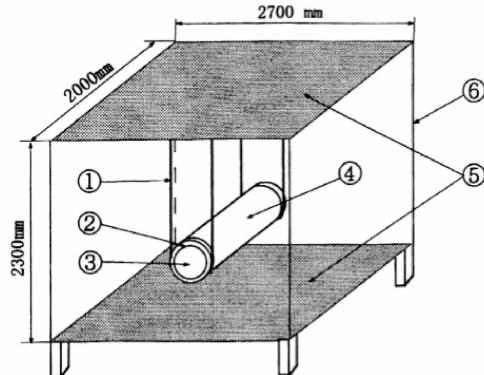


Figura 7.1: Aparato experimental (MISUMI et al., 2003).

a malha lagrangiana, a qual é utilizada para modelar o cilindro para aplicação do método da fronteira imersa, juntamente com o plano central em z da malha euleriana inicial, onde é aplicado um refinamento inicial em torno do cilindro. A malha lagrangiana foi construída de tal forma que o volume euleriano seja igual ao volume lagrangiano, considerando que a profundidade deste último é igual ao comprimento da malha euleriana. Foi utilizado processamento paralelo, com um total de 32 processadores.

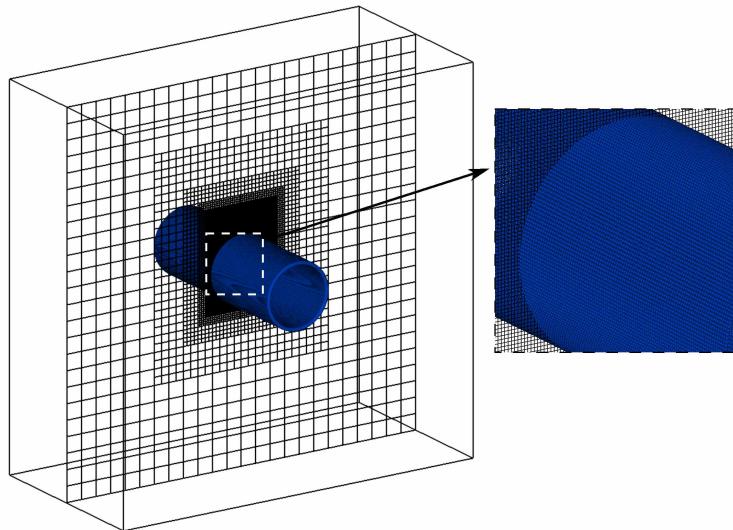
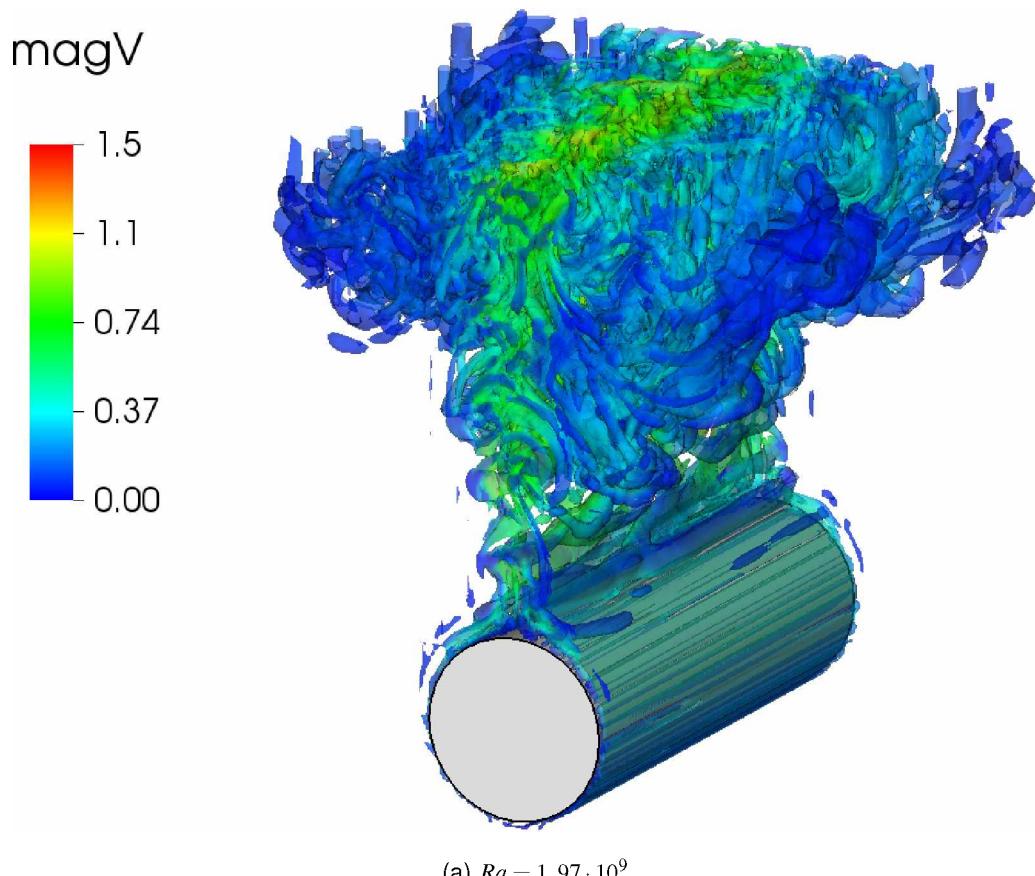


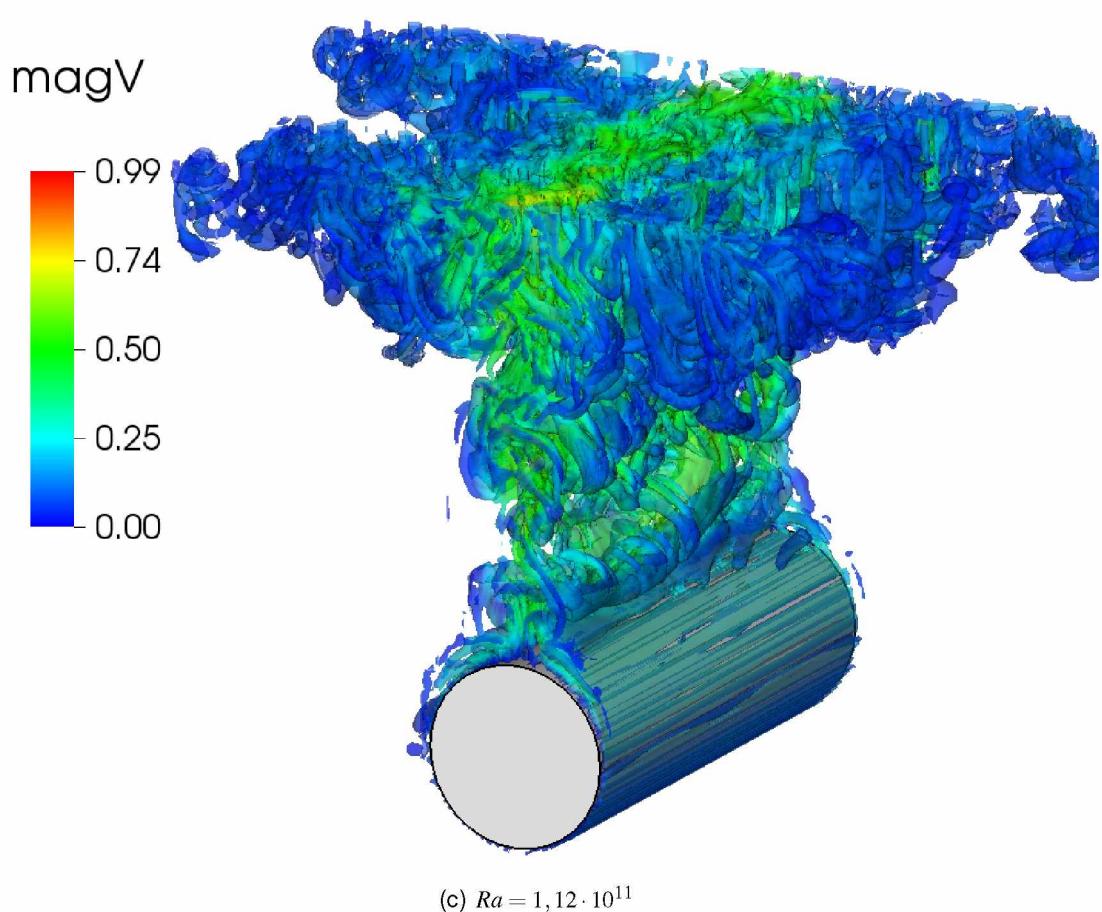
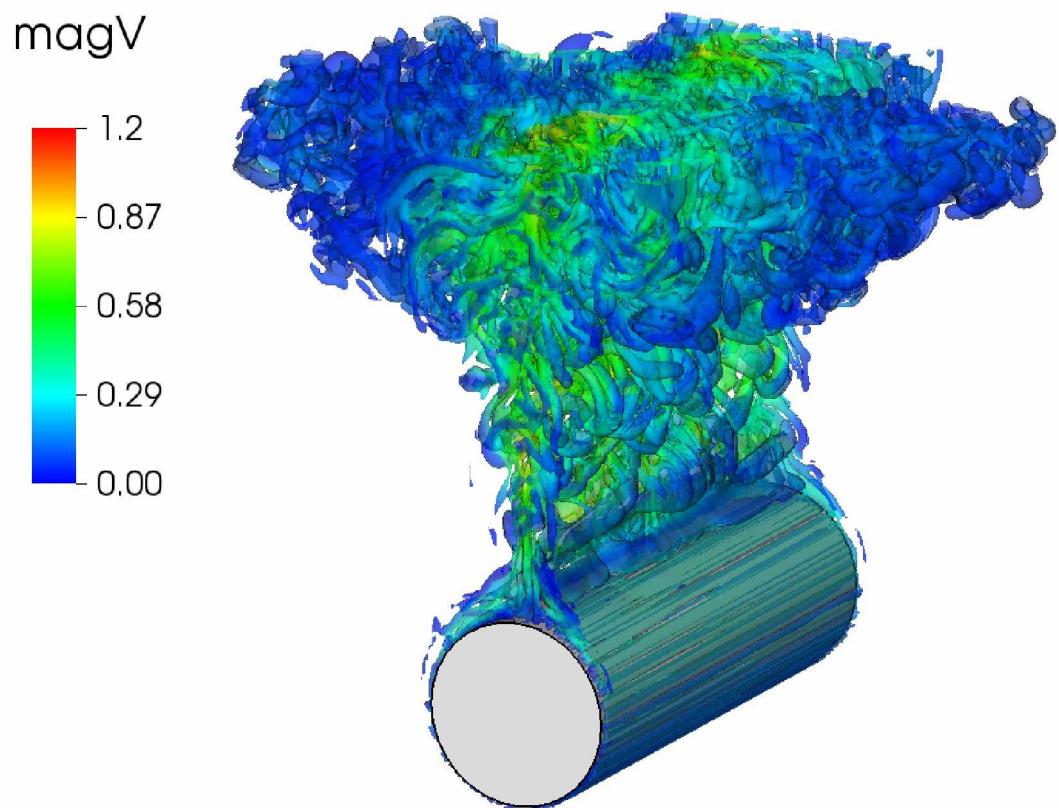
Figura 7.2: Malha inicial euleriana apresentada no plano central em z e malha lagrangiana.

As condições de contorno utilizadas foram condição advectiva na saída superior, derivada para velocidade nula nas paredes laterais e inferior, velocidade nula nas duas paredes que ancoram o cilindro, e fluxo térmico constante no cilindro, sendo então imposta condição de segunda espécie na fronteira imersa. As propriedades do fluido e o valor do fluxo térmico injetado no cilindro foram escolhidos de tal maneira a simular os seguintes números de Rayleigh: $Ra = 1,97 \cdot 10^9$, $Ra = 1,50 \cdot 10^{10}$, $Ra = 1,12 \cdot 10^{11}$ e $Ra = 5,56 \cdot 10^{11}$. Para modelar a turbulência foi

utilizado o modelo dinâmico de Germano com filtragem explícita.

Na Figura (7.2) é apresentada a iso superfícies de critério $Q = 1$, coloridas com a magnitude da velocidade. A topologia do escoamento para todos os casos é muito similar, sendo que o cilindro injeta energia térmica no fluido em torno da geometria em todas as posições, e devido à força de empuxo-peso o escoamento é lançado na direção oposta a gravidade. É possível notar que ocorre a formação das primeiras estruturas nas paredes do cilindro, surgindo da parte inferior, e são transportadas para a parte superior. Estas estruturas são energizadas a partir do escoamento ascendente. Com mais energia cinética o escoamento se torna mais não linear, e logo após o desprendimento das estruturas e o cilindro, as mesmas interagem entre si, gerando ondas instáveis. Conforme o escoamento ascende, intensifica-se a transição a turbulência, uma vez que a fonte de energia cinética não é interrompida. Isso é evidenciado pela formação de estruturas do tipo filamentos que interagem entre si, e assim o escoamento tende a um regime de turbulência desenvolvida. Para todos os casos a magnitude da velocidade é maior acima do cilindro, indicando que a quantidade maior de movimento ocorre nesta região.





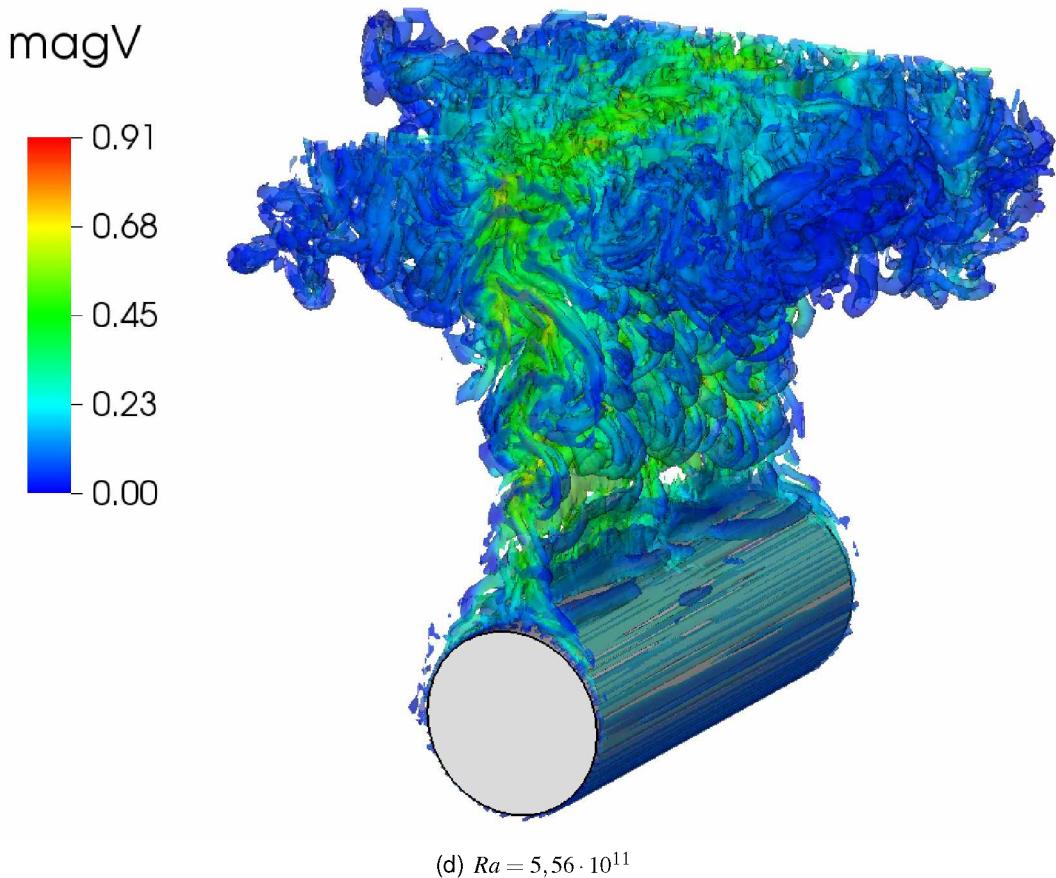


Figura 7.2: Iso valor do critério Q para diferentes número de Rayleigh.

A Figura (7.3) apresenta os blocos de maior refinamento e planos apresentando os dois níveis mais finos, para o caso com $Ra = 1,50 \cdot 10^{10}$. Observa-se que o refinamento realmente é aplicado em regiões de interesse, as quais seriam próximo a fronteira imersa utilizada para modelar o cilindro, e a região superior ao cilindro, onde existe a presença das estruturas turbinhônicas. O refinamento foi aplicado de maneira eficiente, e se for comparado a região com refinamento máximo com a região total do domínio de simulação, observa-se a grande economia de memória e tempo de processamento, uma vez que é possível utilizar uma malha grosseira nas regiões onde a força de empuxo não gera expressiva quantidade de movimento.

Na Figura (7.4) são apresentados iso-valores do campo de temperatura para os diferentes números de Rayleigh. Observa-se que em torno do cilindro o fluido é aquecido, e no ponto de descolamento ocorre a formação da pluma térmica, indicando que ocorre transferência térmica do cilindro para o meio através das estruturas turbinhônicas. Nota-se que para todos os casos a pluma se encontra em um estado instável, indicando um estado de transição e até mesmo turbulência desenvolvida em algumas regiões. Aumentando o número de Rayleigh os iso-valores menores diminuem, e as flutuações ficam mais instáveis, como esperado, uma vez que maior o

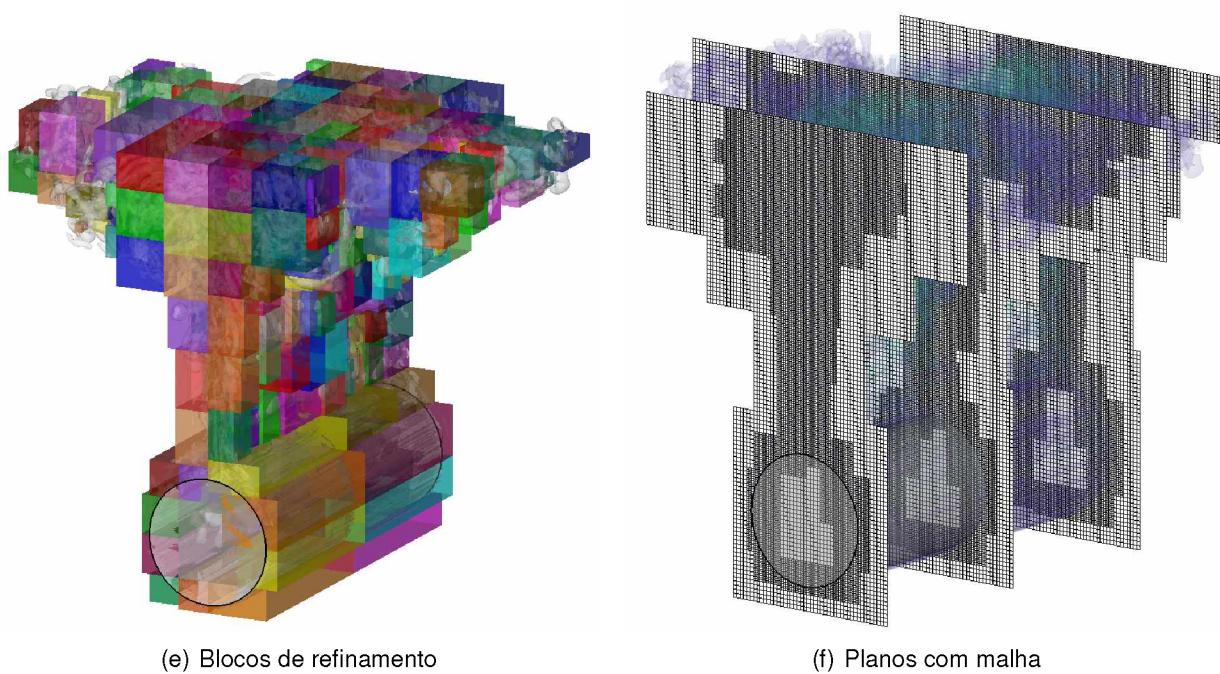


Figura 7.3: Blocos de refinamento referentes a malha mais fina e planos com malha euleriana, referente aos dois níveis mais finos, para $Ra = 1,50 \cdot 10^{10}$.

número de Rayleigh mais turbulento é o escoamento

A Figura (7.5) apresenta uma comparação qualitativa do escoamento com o experimento de Misumi et al. (2003), para $Ra = 1,50 \cdot 10^{10}$. Observa-se uma grande similaridade do escoamento, inclusive nos pontos de separação axial, efeito que ocorre em escoamentos com convecção natural a elevado número de Rayleigh. Nota-se também a semelhança na espessura da pluma térmica próximo ao cilindro.

A seguir serão apresentados os resultados quantitativos. Para quantificar os resultados foi determinado o número de Nusselt, principal variável em problemas de escoamentos com transferência térmica. Como se trata de escoamentos em transição / turbulentos foi necessário utilizar as sondas numéricas. Foram utilizadas 1856 sondas que foram dispostas de maneira equidistante em torno do cilindro, como mostrado na Fig. (7.6).

A Tabela (7.1) apresenta a comparação do Nusselt médio com dados da literatura: com uma correlação apresentada em Morgan (1975), e com o experimento de Misumi et al. (2003), para os diferentes número de Rayleigh. Nesta tabela são apresentadas também as diferenças dos resultados encontrados no presente trabalho com estas duas referências. Comparando os dados obtidos com a primeira referência observa-se uma diferença menor que 10% para os primeiros casos, e uma diferença de 20% para o último caso, indicando que quanto maior o número

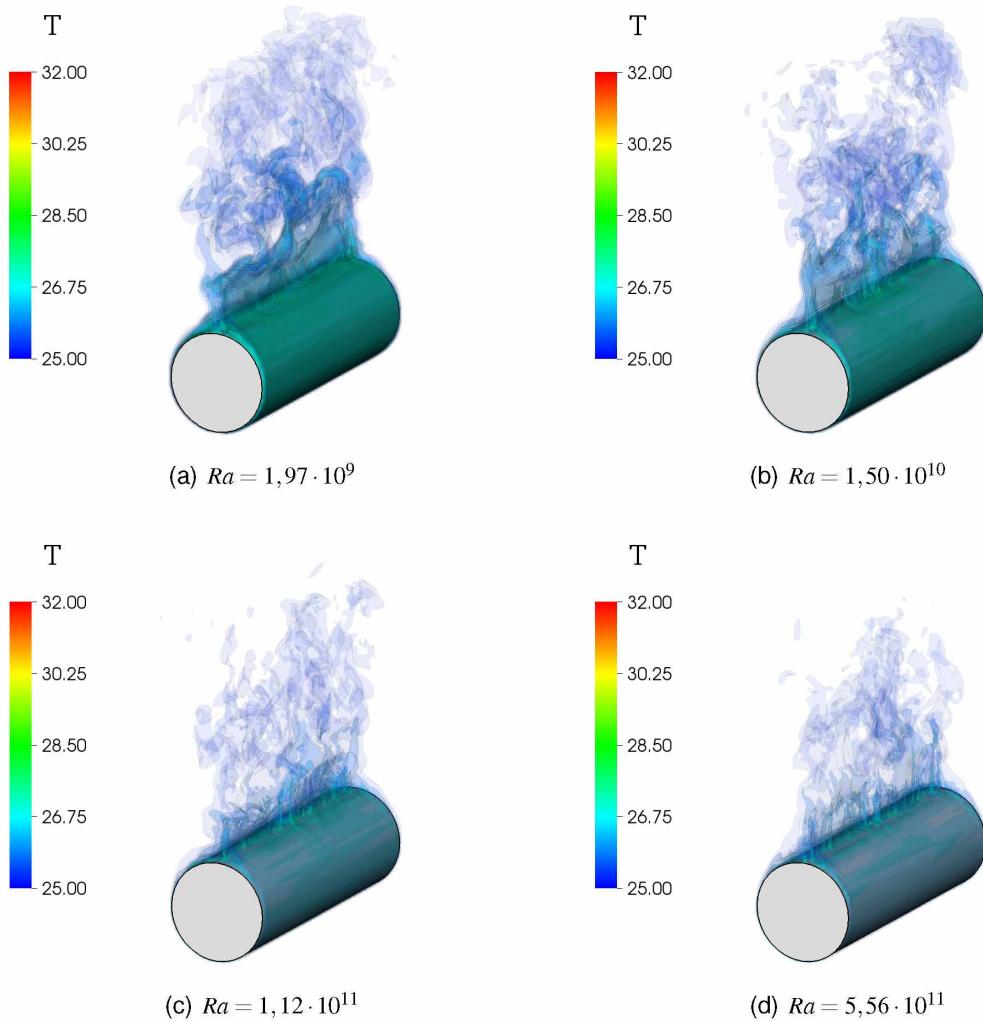


Figura 7.4: Iso valores de temperatura para diferentes número de Rayleigh.

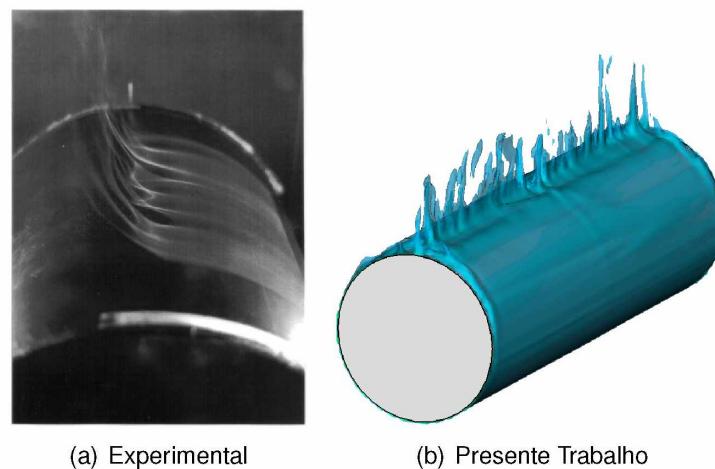


Figura 7.5: Comparação do escoamento com imagem de Misumi et al. (2003), para $Ra = 1,50 \cdot 10^{10}$.

de Rayleigh, maior deve ser o refinamento da malha para captar melhor os fenômenos físicos envolvidos. Já comparando com o experimento da segunda referência, observa-se que os resul-

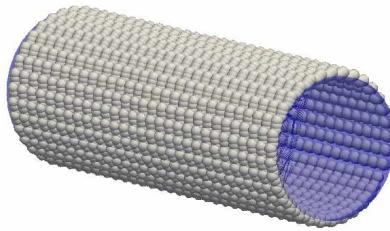


Figura 7.6: Sondas numéricas posicionadas ao redor do cilindro.

tados estão sempre acima do obtido experimentalmente, chegando a uma diferença máxima de quase 30% para o segundo caso, e contrariando a este, uma diferença baixa para o último caso, com valor relativo de 1,78%.

Tabela 7.1: Número de Nusselt médio para diferentes número de Rayleigh comparado com a literatura.

Rayleigh	$Ra = 1,97 \cdot 10^9$	$Ra = 1,50 \cdot 10^{10}$	$Ra = 1,12 \cdot 10^{11}$	$Ra = 5,56 \cdot 10^{11}$
Morgan (1975) (Ref. 1)	44,24	73,49	121,49	181,34
Misumi et al. (2003) (Ref. 2)	35,80	55,74	94,01	142,59
Presente	40,01	71,76	115,34	145,13
Valor relativo (Ref. 1)	9,56%	2,36%	5,06%	19,97%
Valor relativo (Ref. 2)	11,76%	28,74%	22,69%	1,78%

Apesar das diferenças relativamente elevadas em alguns casos, os resultados estão de acordo com literatura, uma vez que a modelagem da turbulência com troca de energia térmica é muito sensível a qualquer variável, principalmente para número de Rayleigh elevado, como por exemplo, imposição indireta da condição de contorno térmica, malha com refinamento adaptativo, tipo de modelo de turbulência, entre outros. Como no experimento numérico, a experimentação física deste problema também é muito sensível, como por exemplo, a forma de injetar energia com eletricidade pode não gerar um fluxo térmico constante, ruídos externos podem alterar o resultado, instrumentos de medição podem não captar certos fenômenos físicos, entre outros. Assim encontrar uma diferença relativa próxima a 10 ou 15% é satisfatório.

Na seção seguinte serão apresentados resultados referente a simulação do escoamento em um degrau descendente com efeitos térmicos.

7.2 Degrau descendente

Nesta seção serão apresentados os resultados referentes a simulação sobre o degrau descendente com transferência térmica. As configurações para a fluido-dinâmica, assim como malhas euleriana e lagrangiana, foram as mesmas utilizadas no capítulo passado, onde foi feita

a validação dos modelos de turbulência comparados com os dados experimentais de Jovic e Driver (1994). Para a parte térmica foi utilizada condição inicial para temperatura de 25°C , assim como a condição de entrada. Na direção z foi utilizada periodicidade, assim como para a fluidodinâmica. Na parede superior do domínio e na saída foi utilizada derivada nula para temperatura. Na parede inferior na parte do domínio complementar, e na fronteira imersa a qual modela o degrau foi utilizada temperatura constante igual a 30°C , como apresentado na Fig. (7.7), sendo estas a fonte térmica para este caso.

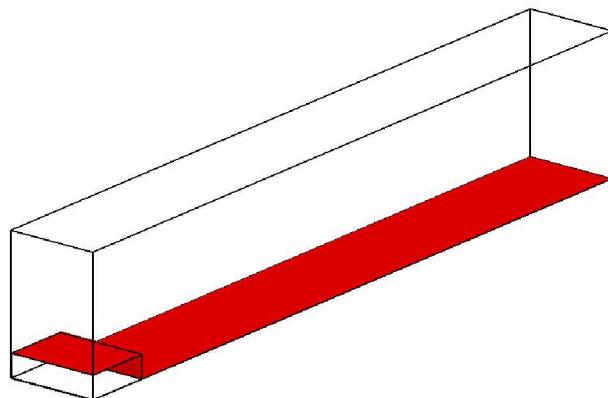


Figura 7.7: Condição inicial para temperatura.

Foi utilizada a mesma malha usada na validação, a qual possui uma resolução de 16 volumes eulerianos ao longo da altura do degrau. Foi utilizada adaptatividade dinâmica e o critério para refinamento foi baseado na magnitude da vorticidade. Foi utilizado o modelo dinâmico de Germano, com filtragem implícita pela malha e filtragem explícita. O número de Reynolds utilizado também foi $Re = 5000$.

Na Figura (7.8) é apresentado o campo de temperatura no plano central em $z = 2h$, juntamente com a malha euleriana adaptativa. Nota-se uma semelhança qualitativa no campo térmico para ambas as modelagens, sendo que o fluido é aquecido próximo ao degrau modelado com a fronteira imersa e próximo a parede inferior. Existe uma concentração de fluido aquecido na região de recirculação a jusante do degrau, uma vez que uma partícula de fluido que fica presa nesta região recebe mais energia térmica cada vez que passa próximo a umas das paredes aquecidas. Nota-se ainda o transporte térmico do chão para o interior ao longo do domínio, transporte este realizado pelas estruturas turbilhônicas.

Na Figura (7.9) é apresentada uma visão tridimensional das estruturas coerentes visualizadas com o critério Q e coloridas com a magnitude de velocidade, e iso-valores de temperatura, para ambas as modelagens. Nesta imagem é possível ver com mais clareza a parcela de fluido

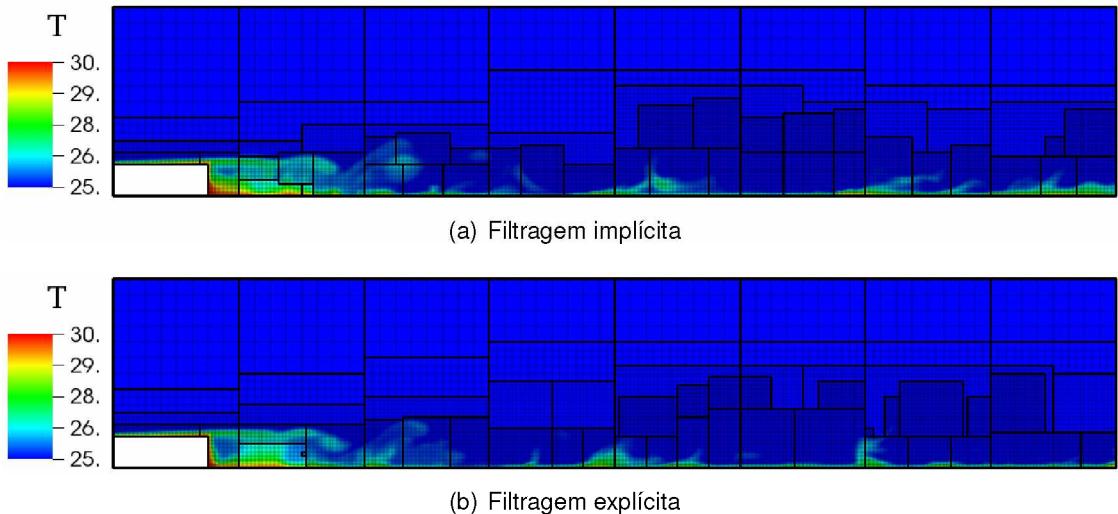
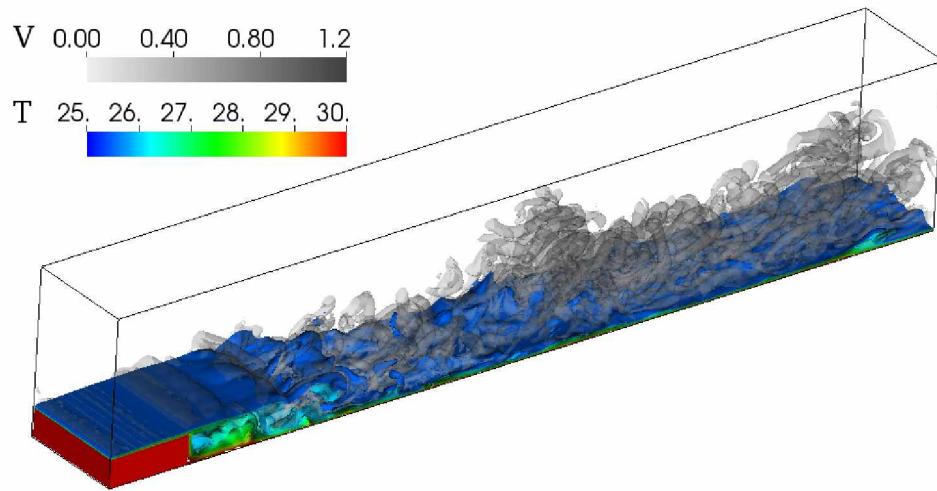


Figura 7.8: Campos de temperatura no plano central em $z = 2h$.

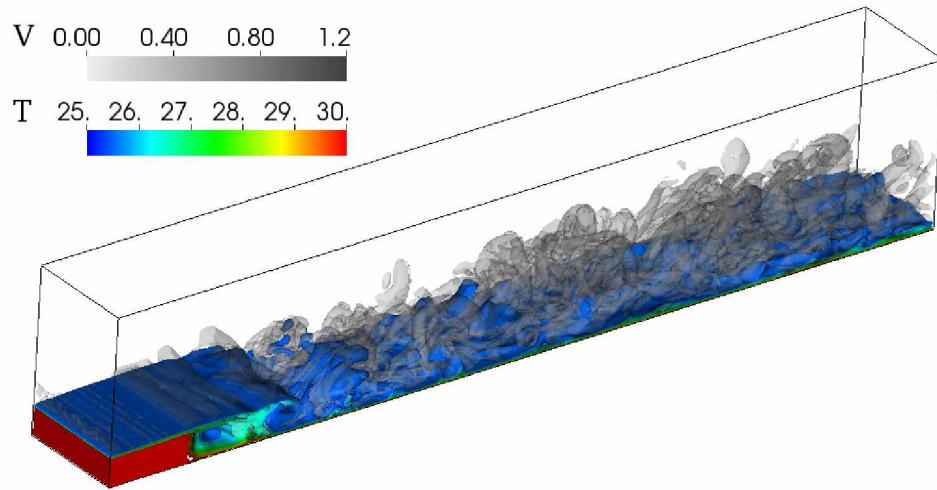
aquecida dentro da região de recirculação. Nota-se ainda a formação de uma camada limite térmica sobre o degrau, bem como a transferência térmica da parede superior do degrau para o interior através da região de cisalhamento logo após o ponto de descolamento. Observa-se nesta região que a parcela aquecida é transportada pelas estruturas turbulentas. É ainda possível observar a parcela de fluido que é aquecido no inferior do domínio que é bombeado pelo escoamento complexo que se forma após o ponto de recolamento, principalmente em regiões com maiores aglomerados de estruturas coerentes.

Na Figura (7.10) são apresentados novamente os iso valores de temperatura, para o caso com filtragem explícita, juntamente com cortes transversais, onde são apresentadas metades dos planos com a malha. Os planos A, B, C, D e E estão posicionados nos pontos $x/h = 4$, $x/h = 6$, $x/h = 10$, $x/h = 15$ e $x/h = 19$, respectivamente. Nota-se que as regiões com gradientes de temperatura estão sempre no interior das regiões refinadas pela vorticidade, indicando que a transferência térmica ocorre na região de maior resolução. Uma opção para o critério de refinamento poderia ser o gradiente de temperatura, o que geraria uma economia de malha. Porém se esta estratégia fosse utilizada a solução poderia modelar menos a realidade, uma vez que a fluido-dinâmica seria afetada pela não formação das estruturas turbinholares, devida a baixa resolução da malha em regiões que necessitaria de refinamento.

Para visualizar melhor este mecanismo de transferência térmica, na Fig. (7.11) são apresentados os campos de vorticidade e temperatura extraídos dos planos definidos na figura anterior. No plano A observa-se uma região com grande vorticidade próximo a metade deste plano de visualização, proveniente das estruturas longitudinais formadas a partir das Kelvin-Helmholtzs,



(a) Filtragem implícita



(b) Filtragem explícita

Figura 7.9: Iso valor do critério Q colorido com a magnitude da velocidade e iso-valores de temperatura.

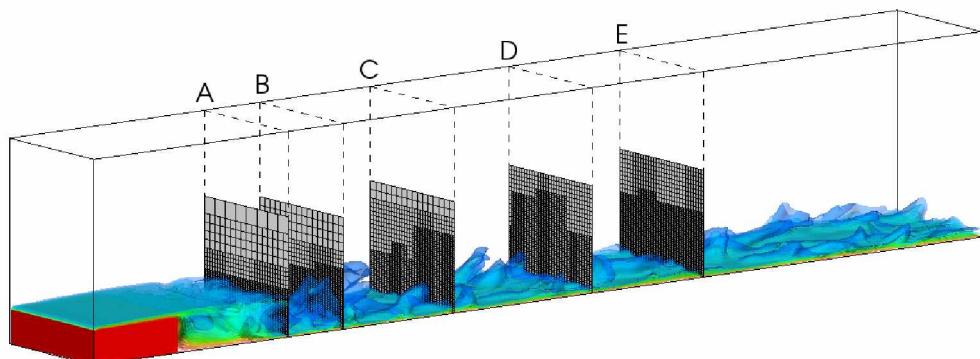


Figura 7.10: Iso valores de temperatura e planos transversais com representação da malha próximo ao chão inferior.

sendo que nesta região observa-se a parcela de fluido aquecido, o qual é proveniente do transporte a partir da parte aquecida no degrau. No plano B observa-se com clareza três pares de

turbilhões rotativos e contra-rotativos, e que a energia térmica nesta região central se difundiu. Nos planos C, D e E as estruturas são mais complexas devido à transição a turbulência, e ainda é possível notar que praticamente não existe fluido aquecido no interior do domínio. Uma característica que é possível observar em todos os planos é a formação de estruturas na parede inferior, quais são formadas a partir de outras que estão em posições superiores, no interior do domínio. Estas estruturas próximas ao chão transportam o fluido aquecido que se forma a partir da fonte de energia térmica.

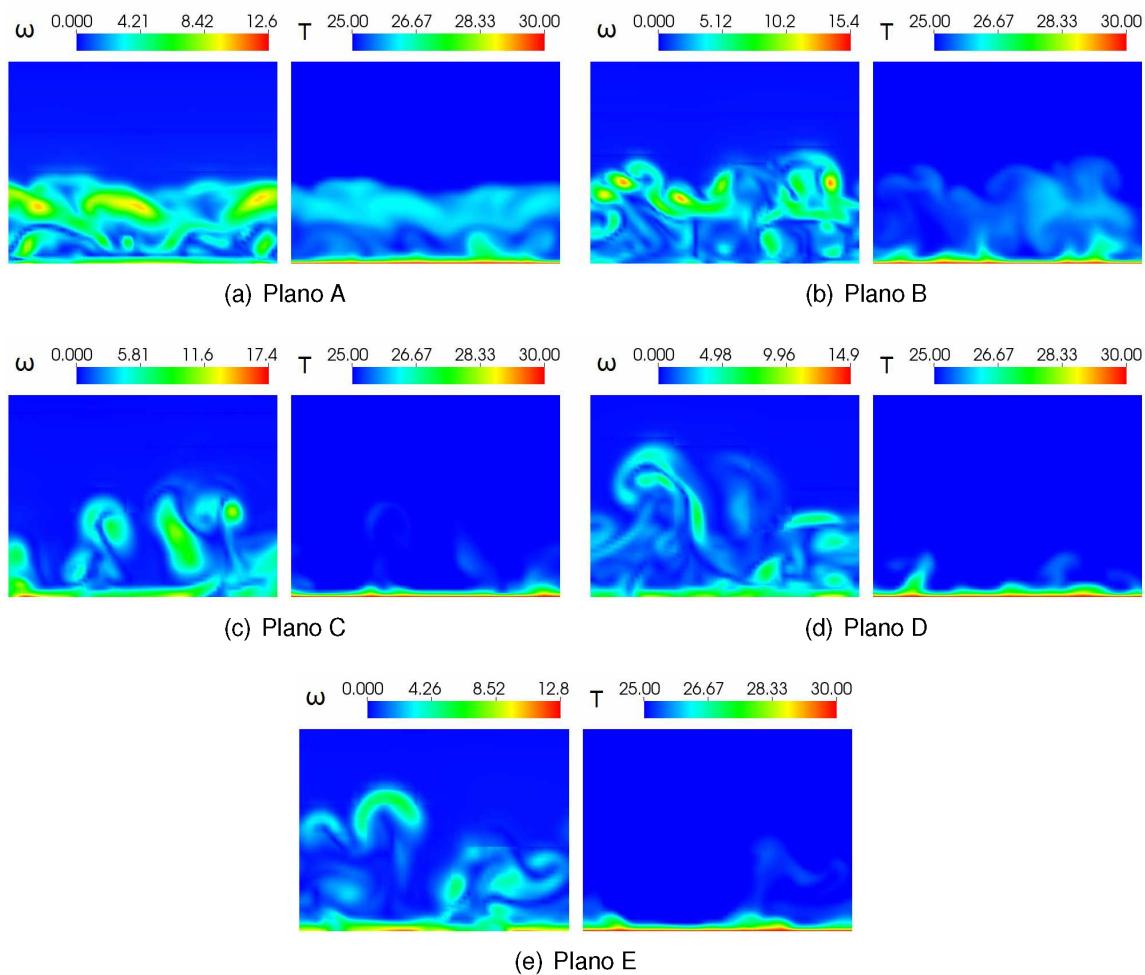


Figura 7.11: Campos de vorticidade e temperatura.

Na Figura (7.12) é apresentado o perfil de temperatura adimensionalizada médio no plano central $z = 2h$, nas diversas seções em x . Nota-se a semelhança da média quando se compara o modelo dinâmico com filtragens implícita e explícita. Nas seções $x/h = 4$ e $x/h = 6$ observa-se que existe um aumento da temperatura devido ao fluido aquecido que permanece na bolha de recirculação, sendo maior próximo ao degrau, em $x/h = 4$. Analisando os perfis nas demais seções, em $x = h = 10, 15$ e 19 observa-se a formação de uma camada limite térmica,

sem a interferência do fluido aquecido presente na região de recirculação, uma vez que o ponto de recolamento está em aproximadamente $x/h = 6$, como visto no capítulo passado. Em todas as seções a temperatura é máxima próximo a parede inferior, região de injeção de energia térmica.

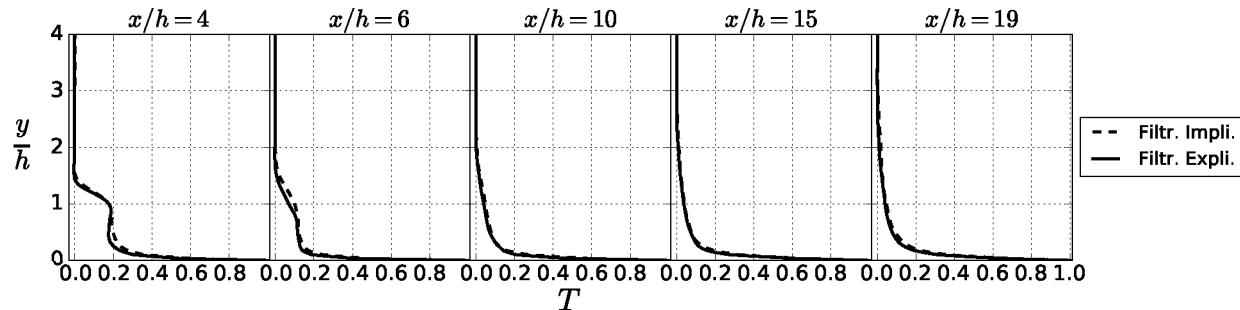


Figura 7.12: Perfis de temperatura adimensionalizada em função de y/h em diversas seções no plano central $z = 2h$.

Por fim, na Fig. (7.13) é apresentado o perfis de flutuação da temperatura adimensionalizada nas diversas seções em x , no plano central em $z = 2h$. Na seção $x/h = 4$ observa-se uma grande flutuação da temperatura próximo ao chão, e um ponto de máximo local próximo a $y/h = 1$, altura do degrau. Isto ocorre pelo fato de ocorrer grande injeção de energia térmica pela parede inferior e pelo escoamento aquecido na camada cisalhante após o ponto de descolamento, e as oscilações ocorrem por causa do forte gradiente nos campos de velocidade, o que acarreta em grandes gradientes no termo advectivo da equação da energia, resultando em maiores flutuações. Já na seção $x/h = 6$ essa flutuação próximo a altura do degrau é mais suave, uma vez que os efeitos de difusão passa a agir no escoamento e na energia térmica. Nas demais seções não existem fortes gradientes, exceto próximo a parede inferior, e esta flutuação diminui como aumentar da posição y/h , indicando que o transporte de energia vai diminuindo quando se afasta da fonte térmica da parede inferior.

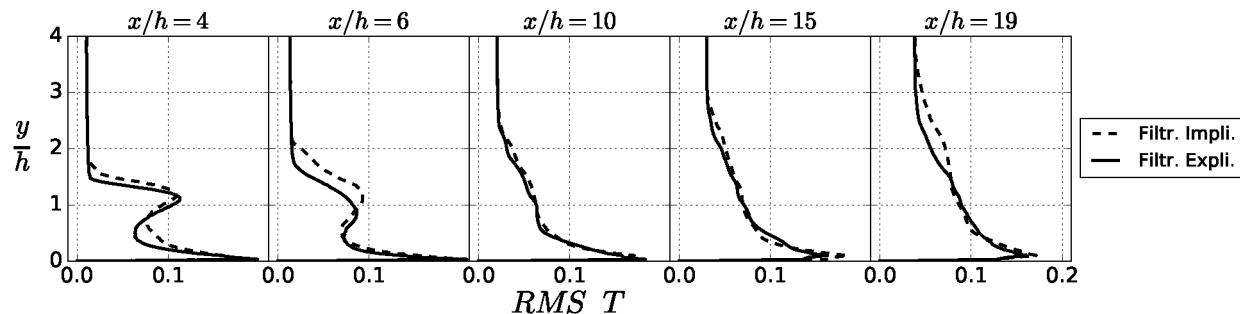


Figura 7.13: Perfis RMS da temperatura adimensionalizada em função de y/h em diversas seções no plano central $z = 2h$.

No capítulo seguinte serão apresentadas as conclusões e perspectivas.

CAPÍTULO VIII

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Na presente tese apresentaram-se a modelagem e simulações de escoamentos turbulentos com presença de geometrias não-cartesianas, utilizando o método da fronteira imersa para modelar os corpos imersos, e malhas cartesianas bloco-estruturadas para o domínio de fluido. Também foram modelados os efeitos térmicos, através da equação de transporte para a energia térmica e fronteira imersa térmica com condições de primeira, segunda e terceira espécie.

Para isto primeiramente foram discretizadas e implementadas as equações da continuidade e de Navier-Stokes, através de formulações conservativa e não conservativa, ambas com o sistema linear para solução das velocidades resolvidos na forma totalmente implícita, onde os termos advectivo e difusivo são implicitados, e na forma semi-implícita, onde somente o termo difusivo é implicitado.

Para escoamentos a elevados número de Reynolds foram utilizados modelos de turbulência, com um enfoque maior na modelagem em malha cartesiana adaptativa. Neste contexto foram discretizados e implementados dois modelos da classe URANS, o modelo de Spalart-Allmaras e o modelo $k-\omega$ de Wilcox. Os dois modelos funcionaram bem em malha adaptativa, uma vez que a viscosidade turbulenta é calculada indiretamente através de uma equação de transporte, criando assim campos contínuos de viscosidade, inclusive no contato entre níveis de refinamento. Os resultados médios foram satisfatório quando comparados com resultados das referências, sendo que no problema da cavidade com tampa deslizante o modelo $k-\omega$ apresentou melhores resultados. Para a flutuação das velocidades os modelos se distanciaram dos experi-

mentos, como esperado uma vez que o escoamento tende a média.

Para modelos sub-malha foram implementados os modelos de Smagorinsky, com ou sem função de amortecimento de Van Driest, e o modelo dinâmico de Germano. As simulações numéricas mostraram que no contato entre níveis existem picos de viscosidade, uma vez que a viscosidade turbulenta é diretamente proporcional ao comprimento da malha. Para contornar este problema foi proposta nesta tese a utilização da filtragem explícita, onde a equação do momentum filtrada recebe uma filtragem adicional, e a viscosidade turbulenta é calculada a partir deste filtro. Foi discretizado e implementado o processo da filtragem explícita para o modelo de Smagorinsky e para o modelo dinâmico de Germano.

Para o caso turbulento da cavidade com tampa deslizante, o modelo de Smagorinsky com constante $C_s = 0,1$ apresentou os melhores resultado quando comparados com o experimento, diferentemente do caso com $C_s = 0,18$, onde os resultados distanciaram da literatura devido à difusividade superestimada pelo maior valor da constante. Para este mesmo problema observou-se que o modelo dinâmico apresentou resultados um pouco inferiores quando comparado com o Smagorinsky clássico com $C_s = 0,1$. Porém, em tese o modelo dinâmico é mais robusto, devido ao fato da existência da função de proporcionalidade que é definida de acordo com o escoamento, enquanto que para encontrar a constante $C_s = 0,1$ foi necessário várias simulações preliminares para calibração. Já para o caso do degrau descendente, o modelo de Smagorinsky puro apresentou o pior resultado devido a sua alta difusividade. Já adicionando uma função de amortecimento, observou-se uma melhora nos resultados. Resultados próximos a referência foram obtidos também utilizando o modelo Dinâmico de Germano.

Os resultados mostraram que qualitativamente a modelagem da turbulência utilizando a filtragem explícita suaviza a viscosidade no contato entre uma malha fina com uma malha mais grossa, evitando gradientes de viscosidade que pode levar a resultados inconsistentes, ou até mesmo a oscilações ou divergências numéricas. Além disso, ao analisar os resultados quantitativos nota-se que utilizando a filtragem explícita os resultados se aproximam mais da literatura. Uma grande melhora foi observado ao utilizar a filtragem explícita juntamente com o modelo de Smagorinsky, porém notou-se pouca diferença nos resultados ao se utilizar a filtragem explícita juntamente com o modelo dinâmico.

Nesta tese objetivou-se também a modelagem dos efeitos térmicos em escoamentos turbulentos. Para isto foi adaptada uma sub-rotina implementada anteriormente na versão atual

do código AMR3DP. Com esta sub-rotina resolvem-se o transporte de um escalar passivo genérico, sendo que na presente tese foi simplificada para a equação da energia, onde a variável transportada foi a temperatura. Resultados de verificação e validação foram apresentados, e os resultados foram satisfatórios quando comparado com resultados da literatura.

Para modelagem de geometrias inseridas em meio fluido foi utilizada a metodologia da fronteira imersa, tanto para a fluido dinâmica, quanto para a parte térmica. Foi utilizado o método da multi forçagem direta, onde a condição de contorno é imposta indiretamente, através de um termo fonte de força que é distribuído dos pontos da fronteira para o domínio de fluido. Para a fluido-dinâmica foi utilizada a condição de primeira espécie, onde são impostas as velocidades sobre a fronteira, e para parte térmica foi implementada a condição de primeira espécie, onde é imposta a temperatura, segunda espécie, onde é imposto o fluxo térmico, e terceira espécie, onde é feito um balanço entre condução e convecção sobre a fronteira imersa. Os resultados encontrados estão em concordância quando comparados com a literatura, nos casos de imposição de primeira e segunda espécies, e com a solução analítica, no caso da terceira espécie.

Foram feitas aplicações de escoamento em convecção natural em um cilindro, a elevados número de Rayleigh, utilizando a modelagem sub-malha de Germano com filtragem explícita, efeitos térmicos também modelados utilizando modelo sub-malha, fronteira imersa fluido-dinâmica e térmica com imposição de fluxo térmico para modelar o cilindro aquecido, e malha com refinamento adaptativo. Os resultados ficaram de acordo com literatura, mas vale ressaltar que a modelagem da turbulência com troca de energia térmica é muito sensível a qualquer variável, principalmente para número de Rayleigh elevado, como por exemplo, imposição indireta da condição de contorno térmica, malha com refinamento adaptativo, tipo de modelo de turbulência, entre outros. Como no experimento numérico, a experimentação física deste problema também é muito sensível. Por exemplo, a forma de injetar energia com eletricidade pode não gerar um fluxo térmico constante, ruídos externos podem alterar o resultado, instrumentos de medição podem não captar certos fenômenos físicos, entre outros. Assim encontrar uma diferença relativa próxima a 10 ou 15%, como foi obtido na maioria dos casos, é satisfatório.

Para todo o desenvolvimento realizado no contexto da presente tese levou em consideração a adaptatividade da malha e o paralelismo, de tal forma a promover simulações com mais rapidez.

As contribuições científicas da presente tese são as modelagens de soluções multi-

físicas através de multi-métodos: modelagem da turbulência, fronteira imersa dinâmica e térmica e refinamento adaptativo de malha. Todas as modelagens e implementações permitiram buscar métodos para resolver problemas de engenharias complexos de maneiras eficientes. Isto é alcançado ao se utilizar malha cartesiana e seus algoritmos mais simples, quando comparados com malha não-estruturada; malha com refinamento adaptativo, onde é permitido um refinamento para captar fenômenos físicos locais; modelagem da turbulência, onde são resolvidos de maneira eficiente escoamentos a elevados número de Reynolds sem a necessidade de uma malha extremamente fina para simulação numérica direta; modelagem de geometrias complexas através de um método simples e eficiente, que permite a utilização de malhas cartesianas para modelagem do escoamento.

A presente tese também promoveu contribuições tecnológicas, através da implementação das soluções no código AMR3DP, ferramenta está desenvolvida com o apoio da PETRO-BRAS, a qual já está sendo utilizada para a solução de problemas industriais.

Como perspectivas será dada continuidade ao estudo da turbulência com a utilização de outros modelos de fechamento, como por exemplo modelagem híbrida através dos modelos DES e SAS. Será estudadas também outras formas de filtragem, com o intuito de modelar cada vez melhor a turbulência utilizando malha cartesiana adaptativa. Também será dada continuidade a modelagem de geometrias complexas através de outros métodos de fronteira imersa, buscando sempre a maneira mais eficiente de impor a condição de contorno, como por exemplo a utilização da metodologia do Ghost-Cell. Então será aprofundado os estudos relativos à fenomenologia da interação entre turbulência, camada limite e parede, englobando a metodologia da fronteira imersa e malha bloco estruturada.

Referências Bibliográficas

- ABE, H.; KAWAMURA, H.; MATSUO, Y. Surface heat-flux fluctuations in a turbulent channel flow up to $Re_t=1020$ with $Pr=0.025$ and 0.71 . *International Journal of Heat and Fluid Flow*, v. 25, n. 3, p. 404 – 419, 2004.
- ANTEPARA, O.; BORRELL, R.; LEHMKUHL, O.; RODRIGUEZ, I.; OLIVA, A. Parallel adaptive mesh refinement of turbulent flow around simplified car model using an immersed boundary method. *11th World Congress on Computational Mechanics*, 2014.
- ANTEPARA, O.; LEHMKUHL, O.; BORRELL, R.; CHIVA, J.; OLIVA, A. Parallel adaptive mesh refinement for large-eddy simulations of turbulent flows. *Computers and Fluids*, v. 110, p. 48 – 61, 2015.
- ASCHER, U. M.; RUUTH, S. J.; WETTON, B. T. R. Implicit-explicit methods for time-dependent partial differential equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics, v. 32, n. 3, p. 797–823, 1995.
- BAEZA, A.; MULET, P. Adaptive mesh refinement techniques for high-order shock capturing schemes for multi-dimensional hydrodynamic simulations. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, v. 52, n. 4, p. 455–471, 2006.
- BALARAS, J. Y. E. An embedded boundary formulation for large eddy simulation of turbulent flows interacting with moving boundaries. *Journal of Comp. Physics*, v. 215, n. 1, p. 12–40, 2006.
- BALDWIN, B.; BARTH, T. A One-Equation Turbulence Transport Model for High Reynolds Number Wall-Bounded Flows. [S.I.], 1990.
- BALDWIN, B. S.; LOMAX, H. Thin layer approximation and algebraic model for separated turbulent flows. *AIAA Paper*, 1974.

BARBI, F. *Experimentação numérica de bolhas em ascensão*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2016.

BELL, J.; BERGER, M.; SALTZMAN, J.; WELCOME, M. Three-dimensional adaptive mesh refinement for hyperbolic conservation laws. *J. Sci. Comput.*, v. 15, n. 1, p. 127–138, 1994.

BERGER, M.; COLELLA, P. Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics. *Journal of Computational Physics*, v. 82, n. 1, p. 64 – 84, 1989.

BERGER, M. J.; LEVEQUE, R. J. Adaptive mesh refinement using wave-propagation algorithms for hyperbolic systems. *Journal of Numerical Analysis*, v. 35, n. 6, p. 2298–2316, 1998.

BOSE, S. T.; MOIN, P.; YOU, D. Grid-independent large-eddy simulation using explicit filtering. *Physics of Fluids*, v. 22, p. 745–762, 2010.

BUNING, P. G.; JESPERSON, D. C.; PULLIAM, T. H.; KLOPFER, G. H.; CHAN, W. C.; SLOTNIK, J. P.; KRIST, S. E.; RENZE, K. J. *OVERFLOW User's Manual*. [S.I.]: Version 1.81, 1999.

CAMELLI, F.; LÖHNER, R. Combining the baldwin lomax and smagorinsky turbulence models to calculate flows with separation regions. In: *40th AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*. [S.I.: s.n.], 2002. p. 426.

CAMPERGHER, R. *Análise Numérica do Processo de Transferência de Calor sobre Corpos Vibrantes, Aplicação do Método de Fronteira Imersa com Modelo Físico Virtual*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2005.

CAPIZZANO, F. Turbulent wall model for immersed boundary methods. *AIAA Journal*, v. 49, 2010.

CEBEKI, T.; SMITH, A. M. O. Analysis of turbulent boundary layers. *Academic Press*, 1974.

CECERE, D.; GIACOMAZZI, E. An immersed volume method for large eddy simulation of compressible flows using a staggered-grid approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 280, p. 1 – 27, 2014.

CHANG, P.-H.; LIAO, C.-C.; HSU, H.-W.; LIU, S.-H.; LIN, C.-A. Simulations of laminar and turbulent flows over periodic hills with immersed boundary method. *Computers and Fluids*, v. 92, p. 233 – 243, 2014.

- CHOI, H.; MOIN, P. Effects of the computational time step on numerical solutions of turbulent flow. *Journal of Computational Physics*, v. 113, n. 1, p. 1 – 4, 1994.
- CHORIN, A. J. Numerical solution of the navier-stokes equations. *Mathematics of Computation*, v. 22, p. 745–762, 1968.
- CRISTALLO, A.; VERZICCO, R. Combined immersed boundary/large-eddy-simulation of incompressible three dimensional complex flows. *Flow Turbulence Combust*, v. 77, 2006.
- DESHPANDE, M.; MILTON, S. Kolmogorov scales in a driven cavity flow. *Fluid Dynamics Research*, v. 22, n. 6, p. 359 – 381, 1998.
- DORÍCIO, J. L. *Estudo da Aplicabilidade do Método de Fronteira Imersa no Cálculo das Derivadas Aerodinâmicas não Estacionárias para Análise de Flutter com as Equações de Euler para Fluxo Compressível*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 2009.
- FERZIGER, J.; PERIC, M. Computational methods for fluid dynamics. *Springer*, 1996.
- GEORGE, D.; LEVEQUE, R. Finite volume methods and adaptive refinement for global tsunami propagation and local inundation. *Sci. Tsunami Hazards*, v. 24, n. 5, p. 319–328, 2006.
- GERMANO, M.; PIOMELLI, U.; MOIN, P.; CABOT, W. H. A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, n. 3, p. 1760 – 1765, 1991.
- HAY, A.; VISONNEAU, M. Adaptive mesh strategy applied to turbulent flows. *Comptes Rendus Mécanique*, v. 333, n. 1, p. 103 – 110, 2005.
- HUANG, W.; RUSSELL, R. D. *Adaptive Moving Mesh Methods*. [S.l.]: Springer-Verlag New York, 2011.
- JEONG, J.; HUSSAIN, F. On the identification of a vortex. Cambridge University Press, Cambridge, UK, v. 285, p. 69–94, 1995.
- JI, C.; MUNJIZA, A.; WILLIAMS, J. A novel iterative direct-forcing immersed boundary method and its finite volume applications. *Journal of Computational Physics*, v. 231, n. 4, p. 1797 – 1821, 2012.
- JOST, A. M. D.; ZHANG, J. Incompressible flow solver with ghost-cell immersed boundary method and adaptive mesh refinement. *AIAA Fluid Dynamics Conference*, 2016.

JOVIC, S.; DRIVER, D. *Backward-Facing Step Measurements at Low Reynolds Number, Reh=5000*. [S.I.], 1994.

KANG, A.; LIN, P.; LEE, Y. J.; ZHU, B. Numerical simulation of wave interaction with vertical circular cylinders of different submergences using immersed boundary method. *Computers and Fluids*, v. 106, p. 41 – 53, 2015.

KIM, W. W.; MENON, S. *Application of the localized dynamic subgrid-scale model to turbulent wall-bounded flows*. [S.I.], 1997.

KINOSHITA, D. *Desenvolvimento e implementação da metodologia combinada Fronteira Imersa Térmica e Pseudoespectral de Fourier*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2015.

KOLMOGOROV, A. N. Equations of turbulent motion in an incompressible fluid. *Izv. Akad. Nauk*, 1942.

KU, H. C.; HIRSH, R. S.; TAYLOR, T. D. A pseudospectral method for solution of the three-dimensional incompressible navier-stokes equations. *Journal of Computational Physics*, v. 70, n. 2, p. 439 – 462, 1987.

LAI, M.-C.; TSENG, Y.-H.; HUANG, H. An immersed boundary method for interfacial flows with insoluble surfactant. *Journal of Computational Physics*, v. 227, n. 15, p. 7279 – 7293, 2008.

LEONARD, S.; TERRACOL, M.; SAGAUT, P. Awavelet based adaptive mesh refinement criterion for large eddy simulation. *Journal of Turbulence*, v. 7, n. 64, 2006.

LESSANI, B.; NAKHAEI, M. Large-eddy simulation of particle-laden turbulent flow with heat transfer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 67, p. 974 – 983, 2013.

LILLY, D. A proposed modification of the germano subgrid-scale closure method. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, v. 4, p. 633, 1992.

LUO, H.; DAI, H.; SOUSA, P. J. F. de; YIN, B. On the numerical oscillation of the direct-forcing immersed-boundary method for moving boundaries. *Computers and Fluids*, v. 56, p. 61 – 76, 2012.

MA, L.-D.; LI, Z.-Y.; TAO, W.-Q. Large eddy simulation of turbulent flow and heat transfer in a square duct with unstable natural convection on the cross section. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 66, p. 46 – 63, 2013.

- MAYNE, A.; USMANI, A. S.; CRAPPER, M. h-adaptive finite element solution of high rayleigh number thermally driven cavity problem. *Int. J. Numer. Meth. Heat Fluid Flow*, v. 10, n. 3, p. 598–615, 2000.
- MENTER, F.; EGOROV, Y. A scale adaptive simulation model using two-equation models. In: *43rd AIAA aerospace sciences meeting and exhibit*. [S.I.: s.n.], 2005. p. 1095.
- MENTER, F. R. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*, v. 32, n. 8, p. 1598–1605, 1994.
- MENTER, F. R.; KUNTZ, M.; LANGTRY, R. Ten years of industrial experience with the sst turbulence model. *Turbulence, Heat and Mass Transfer*, v. 4, p. 625–632, 2003.
- MÉTAIS, O.; LESIEUR, M. Spectral large-eddy simulation of isotropic and stably stratified turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 239, p. 157–194, 1992.
- MISUMI, T.; SUZUKI, K.; KITAMURA, K. Fluid flow and heat transfer of natural convection around large horizontal cylinders: Experiments with air. *Heat Transfer-Asian Research*, v. 32, n. 4, p. 293–305, 2003.
- MITRAN, S. M. *A comparison of the adaptative mesh approachers for large eddy simulation*. Box 352420, Seattle, WA, 98195-2420, USA, 2001.
- MOHD-YUSOF, J. *Combined immersed boundaries/Bsplines methods for simulations of flows in complex geometries*. [S.I.], 1997.
- MORGAN, V. T. *Advances in Heat Transfer*. [S.I.]: Academic Press, 1975.
- MURALIDARAN, B.; MENON, S. Large eddy simulation of turbulent reacting jet in cross-flow with adaptive mesh refinement. *AIAA*, 2014.
- NGUYEN, Y.; WELLS, J. Modeling bedform development under turbulent flows using large-eddy-simulation and immersed-boundary-method. *Computers and Fluids*, v. 111, p. 105 – 113, 2015.
- NICOUD, F.; DUCROS, F. Subgrid-scale stress modelling based on the square of the velocity gradient tensor. *Flow, turbulence and Combustion*, Springer, v. 62, n. 3, p. 183–200, 1999.
- NIKURADSE, J. *Stromungsgesetze in rauhen Rohren*. [S.I.], 1933.

OJOFEITIMI, A.; HATTORI, Y. Wall-resolved large eddy simulation of turbulent mixed-convection heat transfer along a heated vertical flat plate. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 109, p. 428 – 439, 2017.

OLIVEIRA, A. G. *Resolução numérica de equações de advecção-difusão empregando malhas adaptativas*. Dissertação (Mestrado) — Universidade de São Paulo, 2015.

OLIVEIRA, J. E. S. *Modelagem matemática para otimização dinâmica de corpos imersos em escoamentos turbulêntos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2006.

ORLANSKY, I. A simple boundary condition for unbounded hyperbolic flows. *Journal of Computational Physics*, v. 21, p. 251–269, 1976.

OULD-ROUSS, M.; DRIES, A.; MAZOUZ, A. Numerical predictions of turbulent heat transfer for air flow in rotating pipe. *International Journal of Heat and Fluid Flow*, v. 31, n. 4, p. 507 – 517, 2010.

PADILLA, E. L. M.; LOURENCO, M. A. S.; SILVEIRA-NETO, A. Natural convection inside cubical cavities: numerical solutions with two boundary conditions. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2012.

PANTANO, C.; DEITERDING, R.; HILL, D. J.; PULLIN, D. I. A low-numerical dissipation patch-based adaptive mesh refinement method for large eddy simulation of compressible flows. *Journal of Computational Physics*, 2005.

PESKIN, C. S. Flow patterns around heart valves: A numerical method. *Journal of Computational Physics*, 1972.

POSA, A.; LIPPOLIS, A.; VERZICCO, R.; BALARAS, E. Large-eddy simulations in mixed-flow pumps using an immersed-boundary method. *Computers and Fluids*, v. 47, n. 1, p. 33 – 43, 2011.

PRANDTL, L. Bericht über untersuchungen zur ausgebildeten turbulenz. *Angew Math.*, v. 5, p. 136 – 139, 1925.

PRANDTL, L. On a new representation of fully developed turbulence. *Jet Propulsion Lab. Pub.*, 1945.

PRASAD, A. K.; KOSEFF, J. R. Reynolds number and end-wall effects on a lid-driven cavity flow. *Physics Fluids*, v. 1, p. 208 – 219, 1989.

RAPAKA, N. R.; SARKAR, S. An immersed boundary method for direct and large eddy simulation of stratified flows in complex geometry. *Journal of Computational Physics*, v. 322, p. 511 – 534, 2016.

REYNOLDS, O. On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. *Philos. Trans. R. Soc.*, p. 123–161, 1884.

RIVAS, G.; GARCIA, E.; ASSATO, M. Forced turbulent heat convection in a square duct with non-uniform wall temperature. *International Communications in Heat and Mass Transfer*, v. 38, n. 7, p. 844 – 851, 2011.

ROMAN, F.; ARMENIO, V.; FROHLICH, J. A simple wall-layer model for large eddy simulation with immersed boundary method. *Physics of Fluids*, v. 21, n. 10, p. 101701, 2009.

SHIH, T. H.; LIOU, W.; SHABBIR, A.; YANG, Z.; ZHU, J. A new - eddy-viscosity model for high reynolds number turbulent flows - model development and validation. *Computers Fluids*, v. 24, n. 3, p. 227–238, 1995.

SHU, C.; LIU, N.; CHEW, Y. A novel immersed boundary velocity correction lattice boltzmann method and its application to simulate flow past a circular cylinder. *Journal of Computational Physics*, v. 226, n. 2, p. 1607 – 1622, 2007. ISSN 0021-9991.

SILVA, A. L. F. L. E.; SILVEIRA-NETO, A.; DAMASCENO, J. Numerical simulation of two-dimensional flows over a circular cylinder using the immersed boundary method. *Journal of Computational Physics*, v. 189, n. 2, p. 351 – 370, 2003.

SILVEIRA-NETO, A. *A turbulência nos fluidos aplicada*. [S.I.]: Apostila da Disciplina Mecânica dos Fluidos do Programa de Pós-Graduação da Universidade Federal de Uberlândia, 2002.

SILVEIRA-NETO, A.; METAIS, O.; LESIEUR, M. A numerical investigation of the coherent vortices in turbulence behind a backward-facing step. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 256, p. 1–25, 1993.

SMAGORINSKY, J. General circulation experiments with the primitive equations, i. the basic experiment. *Monthly Weather Review*, p. 99–164, 1963.

SPALART, P.; JOU, W.; STRELETS, M.; ALLMARAS, S. Comments on the feasibility of les for wings, and on a hybrid rans/les approach. *Advances in DNS/LES*, Greyden Press, Columbus, OH, v. 1, p. 4–8, 1997.

SPALART, P. R.; ALLMARAS, S. R. A one-equation turbulence model for aerodynamic flows. *AIAA Paper*, 1992.

SPODE, C.; CAMPREGHER, R.; SILVEIRA-NETO, A. Parallel simulation of turbulent flow in a backward-facing ste. *18 International Congress of Mechanical Engineering*, 2005.

TAY, W.; DENG, S.; OUDHEUSDEN, B. van; BIJL, H. Validation of immersed boundary method for the numerical simulation of flapping wing flight. *Computers and Fluids*, v. 115, p. 226 – 242, 2015.

TESSICINI, .; IACCARINO, G.; FATICA, M.; WANG, M.; VERZICCO, R. Wall modeling for large-eddy simulation using an immersed boundary methods. *CTR*, 2002.

TROTTERBERG, C. W. O. U.; SCHULLER, A. *Multigrid*. [S.I.]: San Diego, CA, USA: Academic Press, 2001.

UHLMANN, M. An immersed boundary method with direct forcing for the simulation of particulate flows. *Journal of Computational Physics*, v. 209, n. 2, p. 448 – 476, 2005.

ULLMANN, S.; LÖBIG, S.; LANG, J. Adaptive large eddy simulation and reduced-order modeling. In: _____. *Flow and Combustion in Advanced Gas Turbine Combustors*. Dordrecht: [s.n.], 2013. p. 349–378.

VANDRIEST, E. R. On turbulent flow near a wall. *Journal of the Aeronautical Sciences*, v. 23, n. 11, p. 1007 – 1011, 1956.

VANELLA, M.; POSA, A.; BALARAS, E. Adaptive mesh refinement for immersed boundary methods. *J. Fluids Eng.*, v. 136, n. 4, 2014.

VANELLA, M.; RABENOLD, P.; BALARAS, E. A direct-forcing embedded-boundary method with adaptive mesh refinement for fluid-structure interaction problems. *Journal of Computational Physics*, v. 229, n. 18, p. 6427 – 6449, 2010.

VEDOVOTO, J. M. *Mathematical and Numerical Modeling of Turbulent Reactive Flows using a Hybrid LES / PDF Methodology*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2011.

VILLAR, M. M. *Análise numérica detalhada de escoamentos multifásicos bidimensionais*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2007.

- WAN, D. C.; PATNAIK, B. S. V.; WEI, G. W. A new benchmark quality solution for the buoyancy-driven cavity by discrete singular convolution. *Numerical Heat Transfer Part B: Fundamentals*, v. 40, n. 3, p. 199–228, 2001.
- WANG, Z.; FAN, J.; LUO, K. Combined multi direct forcing immersed boundary method for simulating flows with moving particles. *International Journal of Multiphase Flow*, 2008.
- WANG, Z.; FAN, J.; LUO, K.; CEN, K. Immersed boundary method for the simulation of flows with heat transfer. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2009.
- WILCOX, D. C. Re-assessment of the scale-determining equation for advanced turbulence models. *AIAA*, v. 26, n. 11, p. 1299 – 1310, 1988.
- WILCOX, D. C. Formulation of the k-w turbulence model revisited. *AIAA*, v. 46, n. 11, p. 2823 – 2838, 2008.
- YAKHOT, V.; ORSZAG, S. A.; THANGAM, S.; GATSKI, T. B.; SPEZIALE, C. G. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique. *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics*, v. 4, n. 7, p. 1510–1520, 1992.
- ZHU, Z.; YANG, H.; CHEN, T. Numerical study of turbulent heat and fluid flow in a straight square duct at higher reynolds numbers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 53, n. 1-, p. 356 – 364, 2010.

Apêndice A

A.1 Implementação dos coeficientes para solução das velocidades:

Será apresentada a montagem dos coeficientes para solução numérica da velocidade. No código foi implementado para todas as direções, mas neste relatório serão apresentados os coeficientes para a direção x , para a forma conservativa. Para as demais componentes é feito de maneira análoga.

A Fig. A.1 apresenta uma visão bidimensional de um volume euleriano qualquer.

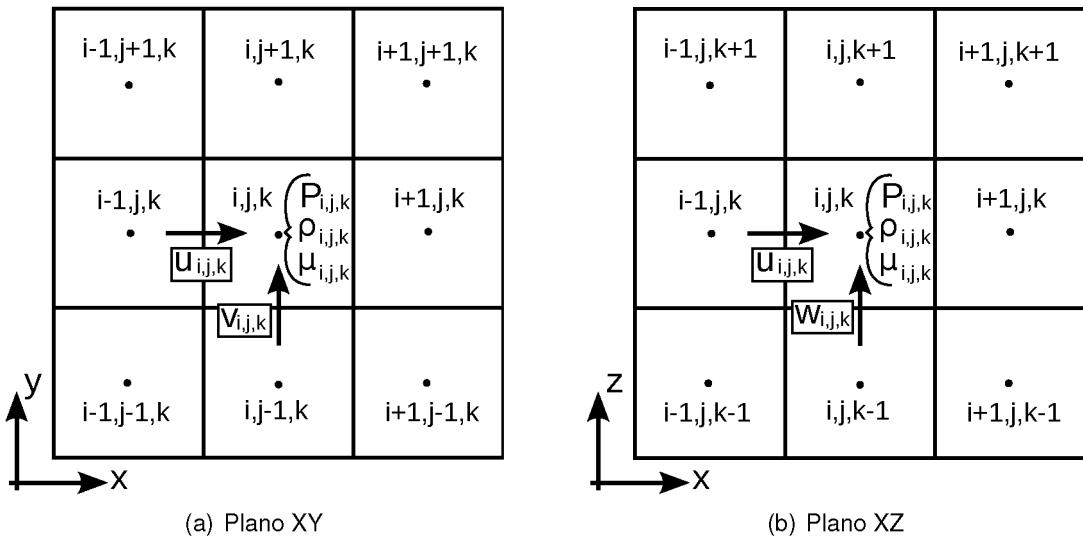


Figura A.1: Visão bidimensional de um volume euleriano genérico.

A equação de Navier-Stokes (Eq. 3.3) expandida na direção x é dada por:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vu)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho wu)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \\
 \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \nabla \cdot \vec{V} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) + f_x
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Foram utilizadas algumas variáveis auxiliares:

$$\rho_w = 0,5 (\rho_{i+1,j,k} + \rho_{i,j,k})$$

$$\rho_n = 0,25 (\rho_{i,j,k} + \rho_{i-1,j,k} + \rho_{i-1,j+1,k} + \rho_{i,j+1,k})$$

$$\rho_s = 0,25 (\rho_{i,j,k} + \rho_{i-1,j,k} + \rho_{i-1,j-1,k} + \rho_{i,j-1,k})$$

$$\rho_f = 0,25 (\rho_{i,j,k} + \rho_{i-1,j,k} + \rho_{i-1,j,k+1} + \rho_{i,j,k+1})$$

$$\rho_b = 0,25 (\rho_{i,j,k} + \rho_{i-1,j,k} + \rho_{i-1,j,k-1} + \rho_{i,j,k-1})$$

$$\mu_n = 0,25 (\mu_{i,j,k} + \mu_{i-1,j,k} + \mu_{i-1,j+1,k} + \mu_{i,j+1,k})$$

$$\mu_s = 0,25 (\mu_{i,j,k} + \mu_{i-1,j,k} + \mu_{i-1,j-1,k} + \mu_{i,j-1,k})$$

$$\mu_f = 0,25 (\mu_{i,j,k} + \mu_{i-1,j,k} + \mu_{i-1,j,k+1} + \mu_{i,j,k+1})$$

$$\mu_b = 0,25 (\mu_{i,j,k} + \mu_{i-1,j,k} + \mu_{i-1,j,k-1} + \mu_{i,j,k-1})$$

Aplicando a Eq. A.1 a integração temporal de segunda ordem, como apresentado na modelagem numérica, tem-se:

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_2 \rho_w^{t+\Delta t} u_{i,j,k}^{t+\Delta t} + \alpha_1 \rho_w^t u_{i,j,k}^t + \alpha_0 \rho_w^{t-\Delta t} u_{i,j,k}^{t-\Delta t}}{\Delta t} + \\ & \theta_2 \left(\frac{\partial (\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho vu)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho wu)}{\partial z} \right)^{t+\Delta t} = - \frac{\partial p^t}{\partial x} + \\ & \theta_2 \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) \right)^{t+\Delta t} + \\ & \theta_1 g^t + \theta_0 g^{t-\Delta t} + f_x^t \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

onde

$$g = \frac{\partial}{\partial x} \left(2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right) - \\ \left(\frac{\partial (\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho vu)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho wu)}{\partial z} \right)$$

Aplicando a técnica dos volumes finitos na Eq. A.2, utilizando diferenças centradas obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha_2 \rho_w^{t+\Delta t} u_{i,j,k}^{t+\Delta t} + \alpha_1 \rho_w^t u_{i,j,k}^t + \alpha_0 \rho_w^{t-\Delta t} u_{i,j,k}^{t-\Delta t}}{\Delta t} + \\
& \theta_2 \left(\begin{array}{l} \left(\rho_{i,j,k}^{t+\Delta t} \left(\frac{u_{i+1,j,k}^t + u_{i,j,k}^t}{2} \right) \left(\frac{u_{i+1,j,k}^{t+\Delta t} + u_{i,j,k}^{t+\Delta t}}{2} \right) - \right) \Delta y \Delta z + \\ \left(\rho_{i-1,j,k}^{t+\Delta t} \left(\frac{u_{i,j,k}^t + u_{i-1,j,k}^t}{2} \right) \left(\frac{u_{i,j,k}^{t+\Delta t} + u_{i-1,j,k}^{t+\Delta t}}{2} \right) - \right) \Delta y \Delta z + \\ \left(\rho_n^{t+\Delta t} \left(\frac{v_{i,j+1,k}^t + v_{i-1,j+1,k}^t}{2} \right) \left(\frac{v_{i,j+1,k}^{t+\Delta t} + v_{i-1,j+1,k}^{t+\Delta t}}{2} \right) - \right) \Delta x \Delta z + \\ \left(\rho_s^{t+\Delta t} \left(\frac{v_{i,j,k}^t + v_{i-1,j,k}^t}{2} \right) \left(\frac{v_{i,j,k}^{t+\Delta t} + v_{i-1,j,k}^{t+\Delta t}}{2} \right) - \right) \Delta x \Delta z + \\ \left(\rho_f^{t+\Delta t} \left(\frac{w_{i,j,k+1}^t + w_{i-1,j,k+1}^t}{2} \right) \left(\frac{w_{i,j,k+1}^{t+\Delta t} + w_{i-1,j,k+1}^{t+\Delta t}}{2} \right) - \right) \Delta x \Delta y + \\ \left(\rho_b^{t+\Delta t} \left(\frac{w_{i,j,k}^t + w_{i-1,j,k}^t}{2} \right) \left(\frac{w_{i,j,k}^{t+\Delta t} + w_{i-1,j,k}^{t+\Delta t}}{2} \right) - \right) \Delta x \Delta y \end{array} \right) = \\
& \theta_2 \left(\begin{array}{l} 2 \left(\mu_{i,j,k}^t \frac{u_{i+1,j,k}^{t+\Delta t} - u_{i,j,k}^{t+\Delta t}}{\Delta x} - \mu_{i-1,j,k}^t \frac{u_{i,j,k}^{t+\Delta t} - u_{i-1,j,k}^{t+\Delta t}}{\Delta x} \right) \Delta y \Delta z + \\ - \frac{2}{3} \left(\mu_{i,j,k}^t \left(\frac{u_{i+1,j,k}^{t+\Delta t} - u_{i,j,k}^{t+\Delta t}}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1,k}^{t+\Delta t} - v_{i,j,k}^{t+\Delta t}}{\Delta y} + \frac{w_{i,j,k+1}^{t+\Delta t} - w_{i,j,k}^{t+\Delta t}}{\Delta z} \right) - \right. \\ \left. \mu_{i-1,j,k}^t \left(\frac{u_{i,j,k}^{t+\Delta t} - u_{i-1,j,k}^{t+\Delta t}}{\Delta x} + \frac{v_{i-1,j+1,k}^{t+\Delta t} - v_{i-1,j,k}^{t+\Delta t}}{\Delta y} + \frac{w_{i-1,j,k+1}^{t+\Delta t} - w_{i-1,j,k}^{t+\Delta t}}{\Delta z} \right) \right) \Delta y \Delta z + \\ \left(\mu_n^{t+\Delta t} \left(\frac{u_{i,j+1,k}^{t+\Delta t} - u_{i,j,k}^{t+\Delta t}}{\Delta y} + \frac{v_{i,j+1,k}^{t+\Delta t} - v_{i-1,j+1,k}^{t+\Delta t}}{\Delta x} \right) - \right) \Delta x \Delta z + \\ \left(\mu_s^{t+\Delta t} \left(\frac{u_{i,j,k}^{t+\Delta t} - u_{i,j-1,k}^{t+\Delta t}}{\Delta y} + \frac{v_{i,j,k}^{t+\Delta t} - v_{i-1,j,k}^{t+\Delta t}}{\Delta x} \right) - \right) \Delta x \Delta z + \\ \left(\mu_f^{t+\Delta t} \left(\frac{u_{i,j,k+1}^{t+\Delta t} - u_{i,j,k}^{t+\Delta t}}{\Delta z} + \frac{w_{i,j,k+1}^{t+\Delta t} - w_{i-1,j,k+1}^{t+\Delta t}}{\Delta x} \right) - \right) \Delta x \Delta y + \\ \left(\mu_b^{t+\Delta t} \left(\frac{u_{i,j,k}^{t+\Delta t} - u_{i,j,k-1}^{t+\Delta t}}{\Delta z} + \frac{w_{i,j,k}^{t+\Delta t} - w_{i-1,j,k}^{t+\Delta t}}{\Delta x} \right) - \right) \Delta x \Delta y \end{array} \right) + \\
& - (p_{i,j,k}^t - p_{i-1,j,k}^t) \Delta y \Delta z + f_x^t \Delta x \Delta y \Delta z + \theta_1 g^t + \theta_0 g^{t-\Delta t}
\end{aligned}$$

sendo que os termos advectivos e difusivos das variáveis g^t e $g^{t-\Delta t}$ são discretizados da mesma forma que a equação anterior, com diferença que as variáveis estarão no tempo t e $t - \Delta t$, respectivamente.

A partir desta última equação é possível criar as matrizes do sistema linear, de tal forma que a equação fique da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& A_{Ei,j,k} u_{i+1,j,k}^{t+\Delta t} + A_{Wi,j,k} u_{i-1,j,k}^{t+\Delta t} + A_{Ni,j,k} u_{i,j+1,k}^{t+\Delta t} + A_{Si,j,k} u_{i,j-1,k}^{t+\Delta t} + \\
& A_{Fi,j,k} u_{i,j,k+1}^{t+\Delta t} + A_{Bi,j,k} u_{i,j,k-1}^{t+\Delta t} + A_{Pi,j,k} u_{i,j,k}^{t+\Delta t} = B_{i,j,k}
\end{aligned} \tag{A.3}$$

Finalmente os coeficientes são:

$$\begin{aligned}
A_{Ei,j,k} &= \frac{1}{2} \theta_2 \rho_{i,j,k}^{t+\Delta t} \left(\frac{u_{i+1,j,k}^t + u_{i,j,k}^t}{2} \right) \Delta y \Delta z - \theta_2 2 \mu_{i,j,k}^{t+\Delta t} \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} + \theta_2 \frac{2}{3} \mu_{i,j,k}^{t+\Delta t} \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} \\
A_{Wi,j,k} &= -\frac{1}{2} \theta_2 \rho_{i-1,j,k}^{t+\Delta t} \left(\frac{u_{i,j,k}^t + u_{i-1,j,k}^t}{2} \right) \Delta y \Delta z - \theta_2 2 \mu_{i-1,j,k}^{t+\Delta t} \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} + \theta_2 \frac{2}{3} \mu_{i-1,j,k}^{t+\Delta t} \frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} \\
A_{Ni,j,k} &= \frac{1}{2} \theta_2 \rho_n^{t+\Delta t} \left(\frac{v_{i,j+1,k}^t + v_{i-1,j+1,k}^t}{2} \right) \Delta x \Delta z - \theta_2 \mu_n^{t+\Delta t} \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y} \\
A_{Si,j,k} &= -\frac{1}{2} \theta_2 \rho_s^{t+\Delta t} \left(\frac{v_{i,j,k}^t + v_{i-1,j,k}^t}{2} \right) \Delta x \Delta z - \theta_2 \mu_s^{t+\Delta t} \frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y} \\
A_{Fi,j,k} &= \frac{1}{2} \theta_2 \rho_f^{t+\Delta t} \left(\frac{w_{i,j,k+1}^t + w_{i-1,j,k+1}^t}{2} \right) \Delta x \Delta y - \theta_2 \mu_f^{t+\Delta t} \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta z} \\
A_{Bi,j,k} &= -\frac{1}{2} \theta_2 \rho_b^{t+\Delta t} \left(\frac{w_{i,j,k}^t + w_{i-1,j,k}^t}{2} \right) \Delta x \Delta y - \theta_2 \mu_b^{t+\Delta t} \frac{\Delta x \Delta y}{\Delta z} \\
A_{Pi,j,k} &= \frac{\alpha_2}{\Delta t} \left(\frac{\rho_{i,j,k}^{t+\Delta t} + \rho_{i-1,j,k}^{t+\Delta t}}{2} \right) + \\
&\quad \frac{1}{2} \theta_2 \rho_{i,j,k}^{t+\Delta t} \left(\frac{u_{i+1,j,k}^t + u_{i,j,k}^t}{2} \right) \Delta y \Delta z + \left(-\frac{1}{2} \theta_2 \rho_{i-1,j,k}^{t+\Delta t} \left(\frac{u_{i,j,k}^t + u_{i-1,j,k}^t}{2} \right) \Delta y \Delta z \right) + \\
&\quad \frac{1}{2} \theta_2 \rho_n^{t+\Delta t} \left(\frac{v_{i,j+1,k}^t + v_{i-1,j+1,k}^t}{2} \right) \Delta x \Delta z + \left(-\frac{1}{2} \theta_2 \rho_s^{t+\Delta t} \left(\frac{v_{i,j,k}^t + v_{i-1,j,k}^t}{2} \right) \Delta x \Delta z \right) + \\
&\quad \frac{1}{2} \theta_2 \rho_f^{t+\Delta t} \left(\frac{w_{i,j,k+1}^t + w_{i-1,j,k+1}^t}{2} \right) \Delta x \Delta y + \left(-\frac{1}{2} \theta_2 \rho_b^{t+\Delta t} \left(\frac{w_{i,j,k}^t + w_{i-1,j,k}^t}{2} \right) \Delta x \Delta y \right) + \\
&\quad \theta_2 2 \mu_{i,j,k}^{t+\Delta t} \left(\frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} \right) + \theta_2 2 \mu_{i-1,j,k}^{t+\Delta t} \left(\frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} \right) \\
&\quad - \theta_2 \frac{2}{3} \mu_{i,j,k}^{t+\Delta t} \left(\frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} \right) - \theta_2 \frac{2}{3} \mu_{i-1,j,k}^{t+\Delta t} \left(\frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} \right) + \\
&\quad \theta_2 \mu_n^{t+\Delta t} \left(\frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y} \right) + \theta_2 \mu_s^{t+\Delta t} \left(\frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y} \right) + \\
&\quad \theta_2 \mu_f^{t+\Delta t} \left(\frac{\Delta x \Delta y}{\Delta z} \right) + \theta_2 \mu_b^{t+\Delta t} \left(\frac{\Delta x \Delta y}{\Delta z} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{i,j,k} = & -\frac{\alpha_1}{\Delta t} \left(\frac{\rho_{i,j,k}^t + \rho_{i-1,j,k}^t}{2} \right) u_{i,j,k}^t - \frac{\alpha_1}{\Delta t} \left(\frac{\rho_{i,j,k}^{t-\Delta t} + \rho_{i-1,j,k}^{t-\Delta t}}{2} \right) \\
& - \theta_2 \frac{2}{3} \mu_{i,j,k}^{t+\Delta t} \left(\frac{v_{i,j+1,k}^{t+\Delta t} - v_{i,j,k}^{t+\Delta t}}{\Delta y} + \frac{w_{i,j,k+1}^{t+\Delta t} - w_{i,j,k}^{t+\Delta t}}{\Delta z} \right) \Delta y \Delta z \\
& + \theta_2 \frac{2}{3} \mu_{i-1,j,k}^{t+\Delta t} \left(\frac{v_{i-1,j+1,k}^{t+\Delta t} - v_{i-1,j,k}^{t+\Delta t}}{\Delta y} + \frac{w_{i-1,j,k+1}^{t+\Delta t} - w_{i-1,j,k}^{t+\Delta t}}{\Delta z} \right) \Delta y \Delta z \\
& + \theta_2 \mu_n^{t+\Delta t} \left(\frac{v_{i,j+1,k}^{t+\Delta t} - v_{i-1,j+1,k}^{t+\Delta t}}{\Delta x} \right) \Delta x \Delta z - \theta_2 \mu_s^{t+\Delta t} \left(\frac{v_{i,j,k}^{t+\Delta t} - v_{i-1,j,k}^{t+\Delta t}}{\Delta x} \right) \Delta x \Delta z \\
& + \theta_2 \mu_f^{t+\Delta t} \left(\frac{w_{i,j,k+1}^{t+\Delta t} - w_{i-1,j,k+1}^{t+\Delta t}}{\Delta x} \right) \Delta x \Delta y - \theta_2 \mu_b^{t+\Delta t} \left(\frac{w_{i,j,k}^{t+\Delta t} - w_{i-1,j,k}^{t+\Delta t}}{\Delta x} \right) \Delta x \Delta y \\
& - (p_{i,j,k}^t - p_{i-1,j,k}^t) \Delta y \Delta z + f_x^t \Delta x \Delta y \Delta z + \theta_1 g^t + \theta_0 g^{t-\Delta t}
\end{aligned}$$

Conhecidos os coeficientes basta então utiliza-los no solver, neste caso o multigrid apresentado anteriormente.

A.2 Implementação dos coeficientes para da equação elíptica:

Partindo da equação de Poisso, Eq. 4.6, expandindo seu tensor, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial z} \right) = \frac{\alpha_2}{\Delta t} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{w}}{\partial z} \right) \quad (\text{A.4})$$

Aplicando a técnica dos volumes finitos na equação anterior obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{1}{0,5 (\rho_{i+1,j,k}^{t+\Delta t} + \rho_{i,j,k}^{t+\Delta t})} \frac{p'_{i+1,j,k} - p'_{i,j,k}}{\Delta x} - \frac{1}{0,5 (\rho_{i,j,k}^{t+\Delta t} + \rho_{i-1,j,k}^{t+\Delta t})} \frac{p'_{i,j,k} - p'_{i-1,j,k}}{\Delta x} \right) \Delta y \Delta z + \\
& \left(\frac{1}{0,5 (\rho_{i,j+1,k}^{t+\Delta t} + \rho_{i,j,k}^{t+\Delta t})} \frac{p'_{i,j+1,k} - p'_{i,j,k}}{\Delta y} - \frac{1}{0,5 (\rho_{i,j,k}^{t+\Delta t} + \rho_{i,j-1,k}^{t+\Delta t})} \frac{p'_{i,j,k} - p'_{i,j-1,k}}{\Delta y} \right) \Delta x \Delta z + \\
& \left(\frac{1}{0,5 (\rho_{i,j,k+1}^{t+\Delta t} + \rho_{i,j,k}^{t+\Delta t})} \frac{p'_{i,j,k+1} - p'_{i,j,k}}{\Delta z} - \frac{1}{0,5 (\rho_{i,j,k}^{t+\Delta t} + \rho_{i,j-1,k}^{t+\Delta t})} \frac{p'_{i,j,k} - p'_{i,j-1,k}}{\Delta z} \right) \Delta x \Delta y = \\
& \frac{\alpha_2}{\Delta t} \left((\tilde{u}_{i+1,j,k}^{t+\Delta t} - \tilde{u}_{i,j,k}^{t+\Delta t}) \Delta y \Delta z + (\tilde{v}_{i,j+1,k}^{t+\Delta t} - \tilde{v}_{i,j,k}^{t+\Delta t}) \Delta x \Delta z + (\tilde{w}_{i,j,k+1}^{t+\Delta t} - \tilde{w}_{i,j,k}^{t+\Delta t}) \Delta x \Delta y \right) \quad (\text{A.5})
\end{aligned}$$

Partindo desta equação é possível criar as matrizes para solução da pressão, para uma

equação da seguinte forma:

$$A_{Ei,j,k}p_{i+1,j,k}^{t+\Delta t} + A_{Wi,j,k}p_{i-1,j,k}^{t+\Delta t} + A_{Ni,j,k}p_{i,j+1,k}^{t+\Delta t} + A_{Si,j,k}p_{i,j-1,k}^{t+\Delta t} + A_{Fi,j,k}p_{i,j,k+1}^{t+\Delta t} + A_{Bi,j,k}p_{i,j,k-1}^{t+\Delta t} + A_{Pi,j,k}p_{i,j,k}^{t+\Delta t} = B_{i,j,k} \quad (\text{A.6})$$

Sendo os coeficientes:

$$\begin{aligned} A_{Ei,j,k} &= \frac{1}{0,5(\rho_{i+1,j,k}^{t+\Delta t} + \rho_{i,j,k}^{t+\Delta t})} \left(\frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} \right) \\ A_{Wi,j,k} &= \frac{1}{0,5(\rho_{i,j,k}^{t+\Delta t} + \rho_{i-1,j,k}^{t+\Delta t})} \left(\frac{\Delta y \Delta z}{\Delta x} \right) \\ A_{Ni,j,k} &= \frac{1}{0,5(\rho_{i,j+1,k}^{t+\Delta t} + \rho_{i,j,k}^{t+\Delta t})} \left(\frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y} \right) \\ A_{Si,j,k} &= \frac{1}{0,5(\rho_{i,j,k}^{t+\Delta t} + \rho_{i,j-1,k}^{t+\Delta t})} \left(\frac{\Delta x \Delta z}{\Delta y} \right) \\ A_{Fi,j,k} &= \frac{1}{0,5(\rho_{i,j,k+1}^{t+\Delta t} + \rho_{i,j,k}^{t+\Delta t})} \left(\frac{\Delta x \Delta y}{\Delta z} \right) \\ A_{Bi,j,k} &= \frac{1}{0,5(\rho_{i,j,k}^{t+\Delta t} + \rho_{i,j,k-1}^{t+\Delta t})} \left(\frac{\Delta x \Delta y}{\Delta z} \right) \\ A_{Pi,j,k} &= - (A_{Ei,j,k} + A_{Wi,j,k} + A_{Ni,j,k} + A_{Si,j,k} + A_{Fi,j,k} + A_{Bi,j,k}) \\ B_{i,j,k} \frac{\alpha_2}{\Delta t} & \left((\tilde{u}_{i+1,j,k}^{t+\Delta t} - \tilde{u}_{i,j,k}^{t+\Delta t}) \Delta y \Delta z + (\tilde{v}_{i,j+1,k}^{t+\Delta t} - \tilde{v}_{i,j,k}^{t+\Delta t}) \Delta x \Delta z + (\tilde{w}_{i,j,k+1}^{t+\Delta t} - \tilde{w}_{i,j,k}^{t+\Delta t}) \Delta x \Delta y \right) \end{aligned}$$

A.3 Implementação do passo corretor:

Conhecida as velocidades estimadas e a flutuação da pressão, basta aplicar a correção nas variáveis para obter as mesmas no tempo atual, partindo das Eqs. 4.3 e 4.4. Para correção da pressão utiliza-se a seguinte equação:

$$p_{i,j,k}^{t+\Delta t} = p_{i,j,k}^t + p'_{i,j,k}. \quad (\text{A.7})$$

E para correção da velocidade aplica-se a técnica dos volumes finitos na Eq. 4.3 , encontrando a velocidade no tempo atual para as três direções, x , y e z , respectivamente:

$$u_{i,j,k}^{t+\Delta t} = \tilde{u}_{i,j,k}^{t+\Delta t} - \frac{\Delta t}{\alpha_2 \rho_{i,j,k}} \left(\frac{p'_{i,j,k} - p'_{i-1,j,k}}{\Delta x} \right), \quad (\text{A.8})$$

$$v_{i,j,k}^{t+\Delta t} = \tilde{v}_{i,j,k}^{t+\Delta t} - \frac{\Delta t}{\alpha_2 \rho_{i,j,k}} \left(\frac{p'_{i,j,k} - p'_{i,j-1,k}}{\Delta y} \right), \quad (\text{A.9})$$

$$w_{i,j,k}^{t+\Delta t} = \tilde{w}_{i,j,k}^{t+\Delta t} - \frac{\Delta t}{\alpha_2 \rho_{i,j,k}} \left(\frac{p'_{i,j,k} - p'_{i,j,k-1}}{\Delta z} \right). \quad (\text{A.10})$$

Apêndice B

B.1 Independência de malha para cavidade com tampa deslizante em regime turbulento

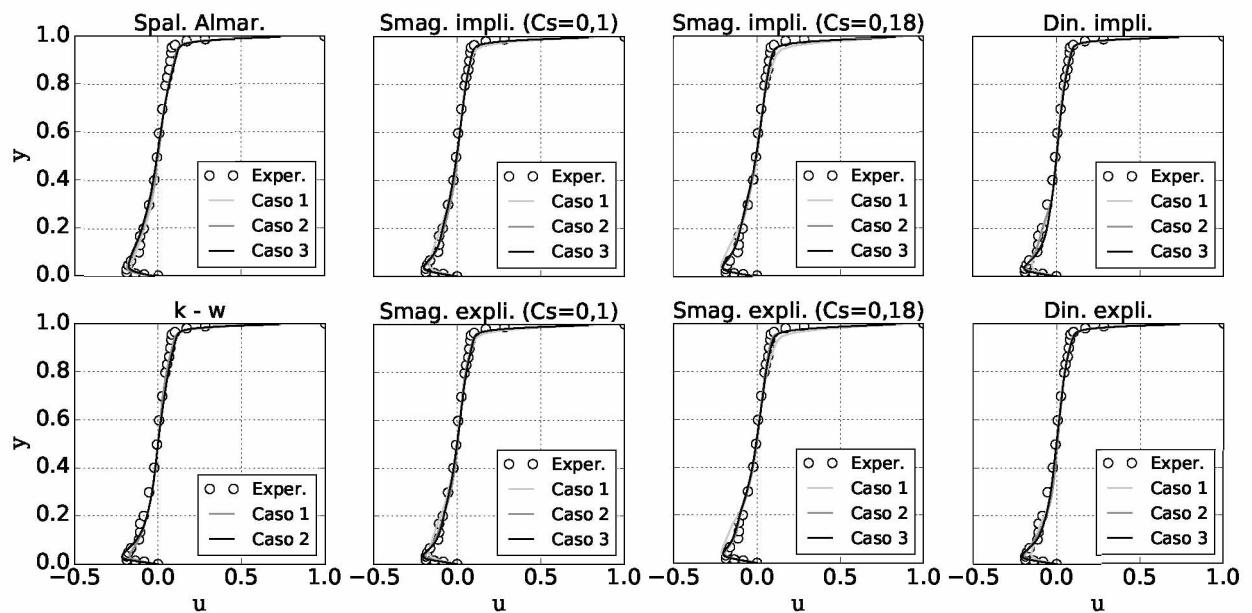


Figura B.1: Independência de malha para o perfil de velocidade u em função de y no plano central.

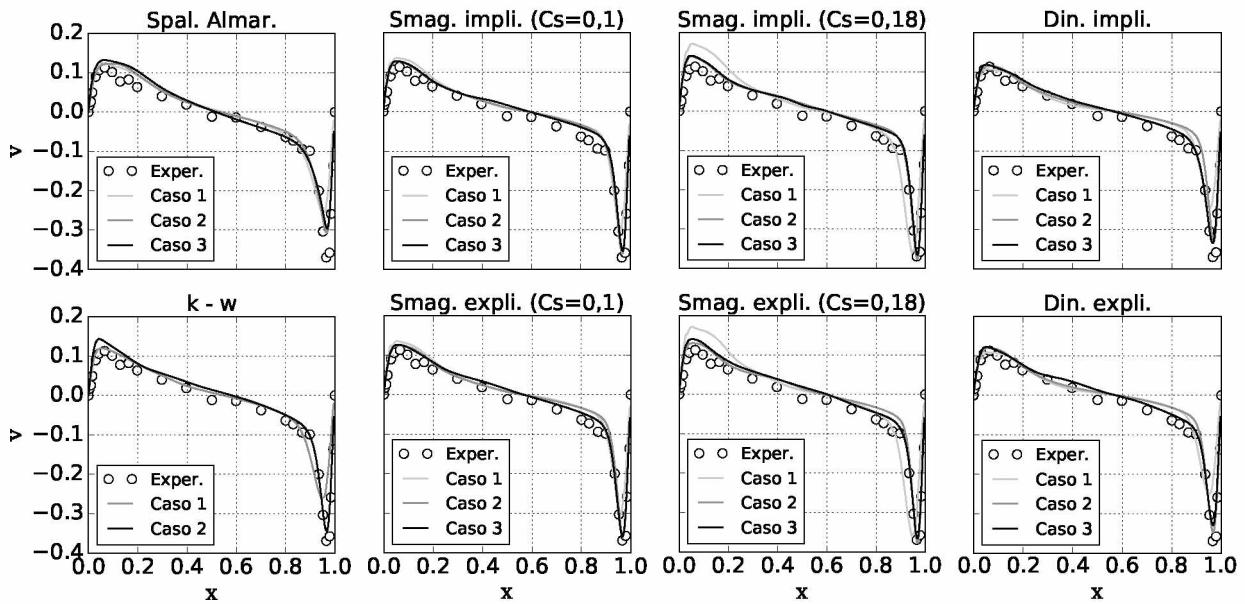


Figura B.2: Independência de malha para o perfil de velocidade v em função de x no plano central.

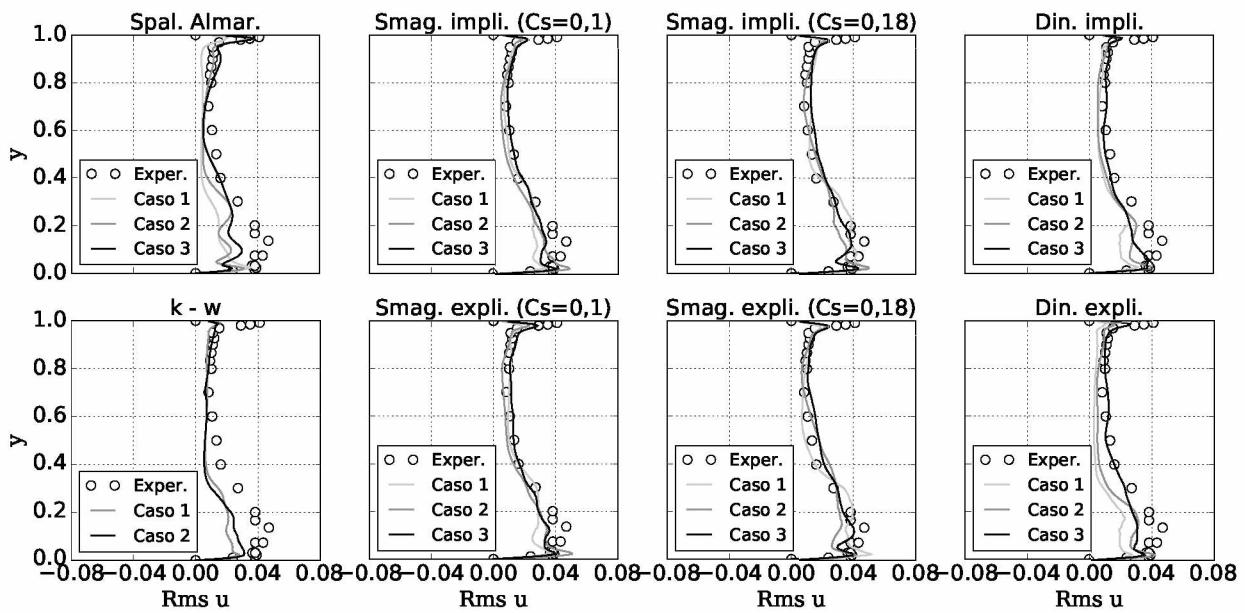


Figura B.3: Independência de malha para o perfil de RMS de u em função de y no plano central.

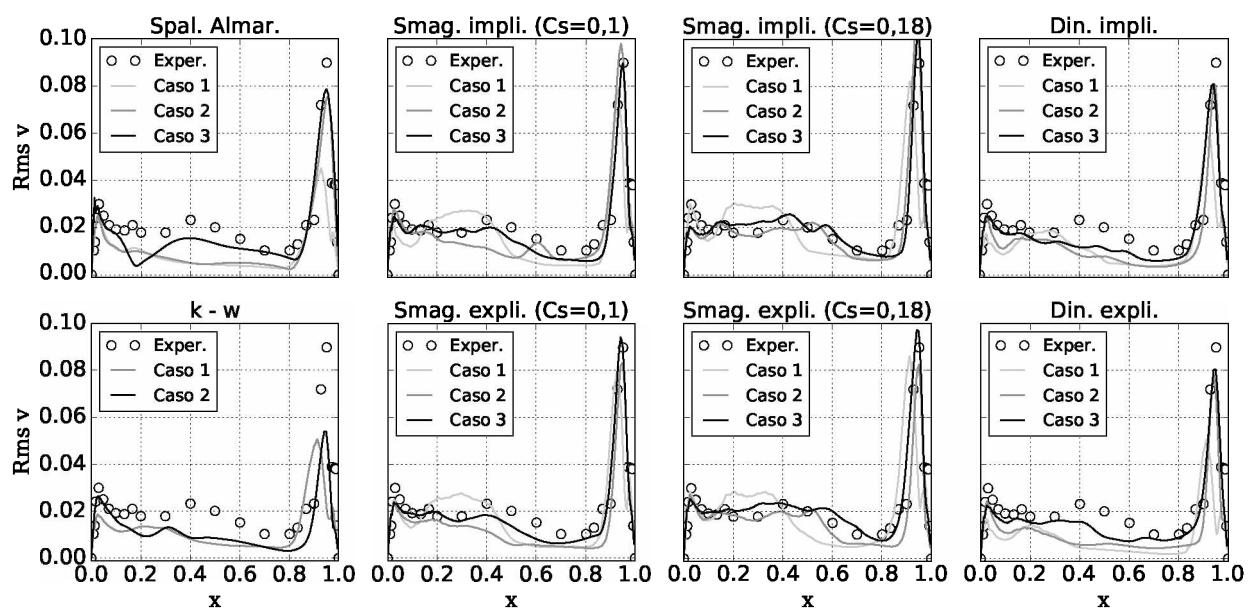


Figura B.4: Independência de malha para o perfil de RMS de v em função de x no plano central.