

MAGNA PAULINA DE SOUZA FERREIRA

Equação da Onda com Fronteira Fuzzy para Vibrações Mecânicas



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2017

MAGNA PAULINA DE SOUZA FERREIRA

Equação da Onda com Fronteira Fuzzy para Vibrações Mecânicas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.

Linha de Pesquisa: Equações Diferenciais e Análise Numérica.

Orientadora: Profa. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice.

UBERLÂNDIA - MG
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

F383e
2017 Ferreira, Magna Paulina de Souza, 1992
Equação da onda com fronteira Fuzzy para vibrações mecânicas /
Magna Paulina de Souza Ferreira. - 2017.
85 f. : il.

Orientadora: Rosana Sueli da Motta Jafelice.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Inclui bibliografia.

1. Matemática - Teses. 2. Oscilação - Teses. 3. Sistemas difusos -
Teses. 4. Mecânica ondulatória - Teses. I. Jafelice, Rosana Sueli da
Motta. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-
Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNA: Magna Paulina de Souza Ferreira.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11512MAT009.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Equações Diferenciais e Análise Numérica.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Equação da Onda com Fronteira Fuzzy para Vibrações Mecânicas.

ORIENTADORA: Profa. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice.

NOME

ASSINATURA

Profa. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Dr. João Frederico da Costa Azevedo Meyer
UNICAMP - Universidade Federal de Campinas

Prof. Dr. Cesar Guilherme de Almeida
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Uberlândia-MG, 23 de Março de 2017.

Agradecimentos

Agradeço:

Em primeiro lugar a Deus por me permitir essa oportunidade, vencendo qualquer medo e obstáculo pelo caminho.

A minha avó Ana, que já não se encontra entre nós, mas sempre me apoiou em todos os momentos que esteve presente, a minha mãe Lillian, pois sempre me deu forças e confiança para poder conseguir atingir minhas metas.

Aos meus primos Jordão, Vasconcelos e Fabiane, que são também meus irmãos, por terem me acolhido em toda essa jornada, e também pela força, confiança e compreensão.

Ao meu namorado, Danilo, pelo apoio que tem me dado todo esse tempo, pelo seu amor e por sempre me acalmar nas horas de desespero.

Sem dúvida alguma, agradeço de todo coração aos professores que me acompanharam em toda minha caminhada, desde a graduação até a finalização de meu mestrado.

Às minhas amigas incondicionais Iasmim, Liliane, Larissa, Lillian Carla, Mirelle e Mirielle que mesmo estando distantes sempre mantemos contato, nos preocupando de verdade umas com as outras, pois a distância não importa quando temos verdadeiras amizades.

À toda minha família, a todos os meus tios, tias e primos por sempre estarem do meu lado quando preciso e sempre acreditar em mim.

A minha orientadora Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice, por sua dedicação e comprometimento, pela paciência, por estar sempre à disposição quando preciso de ajuda e por seus conhecimentos transmitidos durante este período de mestrado.

Aos professores Dra. Ana Maria Amarillo Bertone, Dr. Cesar Guilherme de Almeida e Dr. Marcos Antônio da Câmara pelos conhecimentos compartilhados durante os Seminários de Matemática Aplicada.

Ao professor Dr. Leonardo Sanches que me ajudou muito em todo desenvolvimento deste trabalho, que o considero meu coorientador.

Aos meus amigos do mestrado que fizeram parte da minha vida durante essa etapa, e que foram sem dúvidas muito importante pra mim: Alexandre, Angélica, Edmilson, Guilherme, José Elias, José Lucas, Joab, José Henrique, Wagner, Suelen, Kely, Ana Maria, Jennifer, Karina, Davison e Rafaela, que se tornaram uma família.

Agradeço em especial ao meu amigo Edmilson, que me ajudou muito com as dificuldades de programação, sempre me escutando e me aconselhando. À minha amiga Jennifer por ter me ajudado também e tirado todas as minhas dúvidas ao longo da dissertação. Ao meu amigo José Lucas por ter sempre me ajudado nas disciplinas e sempre que precisei esteve à disposição para me ensinar as matérias.

À CAPES pela bolsa de mestrado concedida.

Agradeço de coração a todos os que dia-a-dia me apoiam e me dão forças para alcançar os meus objetivos. Muito Obrigada!!!.

FERREIRA, M. P. S. *Equação da Onda com Fronteira Fuzzy para Vibrações Mecânicas*. 2017. 85 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

O estudo das vibrações mecânicas tem sido uma área de interesse de vários pesquisadores das ciências exatas. O primeiro tipo de vibração estudado foi no modelo clássico do sistema massa-mola, que é conhecido como sistema de oscilação harmônica. A contribuição neste modelo vem no sentido de considerarmos uma mola específica de um veículo, com a constante de elasticidade da mola obtida através de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy. Outros tipos de vibrações mecânicas são estudados através da equação da onda. Inicialmente, modelamos a posição de um cabo suspenso com uma das extremidades conectada por uma mola, em que consideramos a constante elástica obtida através de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy. Realizamos também o estudo da vibração de uma viga conectada em duas extremidades por massa, molas e amortecedores, que pode ser aplicado como um modelo de um chassi de um veículo. A constante da mola é estudada de forma similar aos casos anteriores. Posteriormente, estudamos a equação do movimento de uma membrana, utilizando o método de elementos finitos bidimensionais. As análises dos modelos estudados, através da teoria dos conjuntos fuzzy possibilitaram a obtenção de diferentes soluções das equações, considerando o tempo de uso da mola.

Palavras-chave: Vibrações Mecânicas; Sistema Baseado em Regras Fuzzy; Equações Diferenciais; Método de Elementos Finitos ; Método de Diferenças Finitas; Condição de Fronteira de Robin.

FERREIRA, M. P. S. *Vibrações Mecânicas com Fronteira Fuzzy para Equação da Onda*. 2017. 85 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

The study of mechanical vibrations has been an important area for many researchers of the exact sciences. The first type of vibration studied was the classical model of the mass-spring system, which is known as a harmonic oscillation system. The contribution of this model comes from considering a specific spring of a vehicle, with a constant spring elasticity, obtained through a Fuzzy Rule-Based System. Other types of mechanical vibrations are studied with the wave equation. Initially, we model the position of a suspended cable with one end connected by a spring, in which we consider the elastic constant obtained through a Fuzzy Rule-Based System. We also study the vibration of a beam connected at two ends by mass, springs and dampers, which can be applied as a model of a vehicle chassis. The spring constant is studied in a similar way to the previous cases. Sequentially, we studied the motions equation of a membrane using the two-dimensional finite element method. The analysis of the models studied through the fuzzy set theory allowed us to obtain different solutions of the equations considering the spring's time of use.

Keywords: Mechanical Vibrations; Fuzzy Rule-Based System; Differential Equations; Finite Element Method; Finite Difference Method; Robin Boundary Condition.

Lista de Figuras

1.1	Função de pertinência de pessoas de meia idade [13].	6
1.2	Função de pertinência dos conjuntos fuzzy A e B [13].	7
1.3	Função de pertinência da união dos conjuntos fuzzy A e B [13].	7
1.4	Função de pertinência da intersecção dos conjuntos fuzzy A e B [13].	7
1.5	Funções de pertinência dos conjuntos fuzzy A e seu complementar A' [13].	7
1.6	Variáveis Linguísticas [7].	8
1.7	Sistemas Baseado em Regras Fuzzy [8].	8
1.8	Método de Mamdani [7].	9
2.1	Sistema massa-mola [25].	16
2.2	Aproximação numérica da equação (2.31).	17
2.3	Funções de pert. da classificação da mola quanto aos quilômetros rodados.	18
2.4	Funções de pert. da quantidade de espiras.	18
2.5	Funções de pertinência da constante da mola.	19
2.6	Aproximação numérica da solução da equação (2.29).	20
2.7	Erro Absoluto entre os k do SBRF e $k = 750 \times 10^6$ N/m.	20
2.8	Aproximação numérica da solução da equação (2.29).	20
2.9	Erro Absoluto entre os k do SBRF e $k = 1.6607 \times 10^6$ N/m.	20
2.10	Aproximação numérica da solução da equação (2.29).	20
2.11	Erro Absoluto entre os k do SBRF e $k = 1.1825$ N/m.	20
3.1	Corda Vibratória [18].	23
3.2	Corda com restrição elástica [18].	25
3.3	Cabo suspenso estudado.	27
3.4	Funções de pertinência da variável de saída k	28
3.5	Solução numérica da equação (3.13) para os k do SBRF.	29
3.6	Diferenças das soluções obtidas.	29
3.7	Solução numérica da equação (3.13) para os k do SBRF.	29
3.8	Diferença entre as soluções obtidas.	29
3.9	Solução numérica da equação (3.13) para os k do SBRF.	29
3.10	Diferenças entre as soluções obtidas.	29
3.11	Propagação das ondas.	30
3.12	Estabilidade do método.	30
3.13	Uma viga em flexão [18].	31
3.14	Viga ligada a molas, amortecedores e massas [18].	33
3.15	Modelo de viga [3].	36
3.16	Solução numérica da equação (3.28) para $k = 1.6607 \times 10^6$ N/m.	37
3.17	Propagação das ondas na viga.	38
3.18	Estabilidade do método.	38
3.19	Solução numérica da equação (3.28) para os k do SBRF.	39
3.20	Erro Absoluto entre os k do SBRF e $k = 3.8750 \times 10^6$ N/m.	39

3.21	Solução numérica da equação (3.28) para os k do SBRF.	40
3.22	Erro Absoluto entre os k do SBRF e $k = 1.6607 \times 10^6$ N/m.	40
3.23	Solução numérica da equação (3.28) para os k do SBRF.	40
3.24	Erro Absoluto entre os k do SBRF e $k = 1.1825 \times 10^6$ N/m.	40
4.1	Partição P_h	46
4.2	Soluções numéricas da equação (4.13).	51
4.3	Representação geométrica da função φ_j	54
5.1	Membrana sob tensão uniforme [18].	58
5.2	Domínio Ω discretizado.	60
5.3	Membrana na condição inicial.	63
5.4	Aproximação numérica da solução da equação (5.8) para a primeira iteração. . .	63
5.5	Aproximação numérica da equação (5.8).	63
5.6	Valor de cada iteração no nó 1571.	63
A.1	Triângulo “padrão” \hat{K}	67
B.1	Transformação do triângulo “padrão” no triângulo “real”.	70

Lista de Tabelas

1.1	<i>Alunos e graus de estudo.</i>	6
2.1	Valores da constante elástica da mola k para 3 espiras.	19
2.2	Valores da constante elástica da mola k para 7 espiras.	19
2.3	Valores das contantes elásticas da mola para 15 espiras.	19
3.1	Valores das contantes k elásticas da mola.	28

Lista de Símbolos

\mathbb{R}	Conjunto dos números reais.
\mathcal{U}	Conjunto universo.
$\{0, 1\}$	Conjunto contendo os elementos 0 e 1.
\mathcal{X}_A	Função característica do conjunto A .
μ_F	Função de pertinência do conjunto fuzzy F .
$[0, 1]$	Intervalo fechado com extremos 0 e 1.
$\mu_{A \cup B}$	Função de pertinência da união de conjuntos fuzzy A e B .
$\mu_{A \cap B}$	Função de pertinência da interseção de conjuntos fuzzy A e B .
$\mu_{A'}$	Função de pertinência do complemento do conjunto fuzzy A .
$\max \mu_A$	Máximo da função de pertinência do conjunto fuzzy A .
$\min \mu_A$	Mínimo da função de pertinência do conjunto fuzzy A .
$[A]^\alpha$	α – nível do conjunto fuzzy A .
$[A]^0$	Nível zero do conjunto fuzzy A .
$\text{supp}(A)$	Suporte do conjunto fuzzy A .
$\overline{\text{supp}(A)}$	Fecho do suporte do conjunto fuzzy A .
u'	Derivada da função u com relação a variável x .
$\partial\Omega$	Fronteira do conjunto Ω .
Δ	Laplaciano.
∇	Gradiente.
$L^p(\Omega)$	Espaço das funções mensuráveis p somáveis em Ω .
$\text{div } (u)$	Divergente do vetor u .

Sumário

Resumo	vi
Abstract	vii
Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	ix
Lista de Símbolos	xi
Introdução	1
1 Teoria dos Conjuntos Fuzzy	4
1.1 Alguns Conceitos da Teoria de Conjuntos Fuzzy	5
1.1.1 Representação de Conjuntos Fuzzy	5
1.1.2 Operações Padrões entre Conjuntos Fuzzy	6
1.2 Variáveis Linguísticas Fuzzy	7
1.3 Sistemas Baseado em Regras Fuzzy	7
1.3.1 Processador de Entrada (Fuzzificação)	8
1.3.2 Base de Regras	8
1.3.3 Máquina de Inferência Fuzzy	9
1.3.4 Processador de Saída (Defuzzificação)	9
2 Métodos Numéricos para Resolução de EDO	11
2.1 Método de Diferenças Finitas	11
2.1.1 Derivadas de Ordens Superiores	14
2.2 Modelo Clássico para o Sistema Massa-Mola	15
2.3 Modelo Fuzzy para o Sistema Massa-Mola	17
2.4 Algumas Considerações	21
3 Soluções Numéricas de Equações Diferenciais Parciais com SBRF	22
3.1 Vibração Transversal de uma Corda ou Cabo	23
3.1.1 Equação de Movimento	23
3.1.2 Condições Iniciais e de Contorno da Equação do Movimento	25
3.1.3 Discretização da Equação do Movimento	26
3.2 Posição de um Cabo Suspenso com Parâmetro Fuzzy	26
3.3 Vibrações Laterais de Vigas	31
3.3.1 Equação de Movimento	31
3.3.2 Condições iniciais	32
3.3.3 Condições de Contorno	32
3.3.4 Discretização da Equação do Movimento	33
3.4 Modelo Determinístico para Vibrações de Vigas	36

3.4.1	Modelo Fuzzy para Vibrações de Vigas	38
3.5	Algumas Considerações	40
4	Método dos Elementos Finitos Unidimensional e Bidimensional	42
4.1	Formulação Fraca do Problema Unidimensional	42
4.1.1	Método de Galerkin para o Caso Unidimensional	45
4.1.2	Exemplo Unidimensional	48
4.2	Formulação Fraca do Problema Bidimensional	52
4.2.1	Método de Galerkin para o Caso Bidimensional	53
4.2.2	Construção das Funções	54
5	Membrana Vibrante	58
5.1	Equação de Movimento	58
5.1.1	Condições Iniciais e Condições de Contorno	59
5.2	Membrana Vibrante: Um Caso Particular	59
5.2.1	Discretização da Equação do Movimento	60
5.2.2	Resultados Numéricos	62
5.3	Algumas Considerações	63
6	Conclusões e Trabalhos Futuros	64
	Referências Bibliográficas	65
	Apêndice	67
A	Matrizes de Rigidez	67
	Apêndice	70
B	Transformação do Triângulo	70

Introdução

Neste trabalho, estudamos alguns tipos de vibrações mecânicas através da equação da onda com fronteira fuzzy. O interesse pela vibração foi descoberto com o surgimento dos primeiros instrumentos musicais, provavelmente apitos ou tambores. Desde então, os pesquisadores têm se dedicado ao estudo de fenômenos das vibrações. O filósofo e matemático grego Pitágoras é considerado o primeiro a investigar sons musicais com base científica [18]. Pitágoras realizou experimentos com uma corda vibratória utilizando um instrumento simples denominado monócórdio. Afirma Rão Singiresu (2008) que a maioria das atividades humanas envolve vibrações de uma forma ou de outra. Por exemplo, ouvimos porque nossos tímpanos vibram, e vemos porque as ondas de luz sofrem vibrações. Os primeiros estudiosos no campo das vibrações concentraram seus esforços no entendimento dos fenômenos naturais e no desenvolvimento de teorias matemáticas para descrever a vibração de sistemas físicos. Qualquer movimento que se repita após um intervalo de tempo é considerado *vibração* ou *oscilação*. A teoria de vibração trata do estudo de movimentos oscilatórios de corpos e as forças associadas a estes. Em geral, um sistema vibratório incluiu um meio para armazenar energia potencial (mola ou elasticidade), um meio para armazenar energia cinética (massa ou inércia) e um meio de perda gradual de energia (amortecedor). A vibração de um sistema envolve a transferência alternada de sua energia potencial para energia cinética e de energia cinética para energia potencial. Se o sistema for amortecido, certa quantidade de energia é dissipada em cada ciclo de vibração e deve ser substituída por uma força externa, se for preciso manter um regime permanente de vibração [18].

As vibrações podem ser classificadas de várias maneiras, sendo as mais importantes *vibrações livres* e *vibrações forçadas*. A *vibração livre* acontece se um sistema após uma perturbação inicial, continuar a vibrar por conta própria, nenhuma força externa age sobre o sistema. A *vibração forçada* acontece se um sistema estiver sujeito a uma força externa (muitas vezes uma força repetitiva). Se a energia não for perdida ou dissipada por atrito ou outra resistência durante a oscilação, a vibração é conhecida como *vibração não amortecida*. Porém, se a energia for perdida por uma dessas influências, então é denominada *vibração amortecida*. Um sistema vibratório é um sistema dinâmico no qual as excitações (entradas) e as respostas (saídas) são dependentes do tempo. Em geral, as respostas de um sistema vibratório depende das condições iniciais, bem como das excitações externas. Sendo assim, a análise de um sistema vibratório depende da modelagem matemática, obtenção de equações governantes, solução das equações e interpretação dos resultados [18].

A modelagem e o controle de vibrações de estruturas flexíveis tem sido alvo de estudos por vários pesquisadores, devido à grande exigência de desempenho de sistemas estruturais. Segundo Yan e Yam (2002) é preciso que os sistemas dinâmicos estruturais tenham um bom comportamento dinâmico para garantir a estabilidade do sistema e precisão de movimento. A resposta dinâmica de uma estrutura às excitações harmônicas depende essencialmente das propriedades como, rigidez, massa e amortecimento que influenciam a frequência natural e o modo de vibrar. Essas propriedades resultam por sua vez da geometria, materiais e condições de vinculação ao meio externo [21].

Rão Singiresu (2008) deduz a equação de movimento para uma corda ou cabo. Dentre as

condições iniciais e de contorno citadas em [18], para uma corda restringida elasticamente em sua extremidade $x = l$, temos a seguinte condição de contorno:

$$P(x) \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = -ku(x, t) \Big|_{x=l}, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

onde $u(x, t)$ corresponde ao deslocamento, k é a constante da mola e $P(x)$ corresponde à tensão aplicada na corda. Deduz-se também a equação de movimento para uma viga, temos a seguinte condição de contorno para uma viga ligada a massas, molas e amortecedores em suas extremidades:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = a \left[kw + c \frac{\partial w}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right]. \quad (2)$$

em que $w(x, t)$ corresponde ao deslocamento vertical, $a = -1$ para a extremidade esquerda e $a = +1$ para extremidade direita da viga, m corresponde à massa conectada às extremidades, E é o módulo de Young, I é o momento de inércia e k é a constante elástica da mola. Essas condições são também conhecidas como fronteira de Robin.

Andrade (2009) afirma que a viga é um dos elementos fundamentais de uma estrutura de engenharia, podendo-se modelar matematicamente diversos sistemas, como por exemplo uma semi-asa de avião. Entre os mais conhecidos modelos de vigas estão os de Euler-Bernoulli, Vlashov e Timoshenko. Timoshenko (1953) afirma que as teorias para vigas começaram a ser estudadas a partir de século XVII. Em meados do século XVIII, Bernoulli e, principalmente, Euler apresentaram trabalhos que podem ser considerados como limiar da teoria de vigas com material elástico. No entanto, as teorias não tinham tanto rigor nas conceituações quanto se verifica atualmente. A análise de vibração de vigas tem sido objeto de estudo por diversos autores devido à sua importância na engenharia mecânica [2].

A análise do comportamento dinâmico de uma viga de Euler-Bernoulli escalonada com apoios elasticamente variáveis é apresentada em Vaz (2016). A autora realiza um estudo baseado no modelo de viga de Euler-Bernoulli para determinar as frequências naturais e os modos de vibrar de vigas escalonadas com variações de sessões transversais e variações das constantes de rigidez dos apoios elásticos. Posteriormente, realiza-se ensaios experimentais com vigas de alumínio para validar o modelo numérico.

Almeida e Lima (2010) apresentam um estudo do comportamento dinâmico de uma viga de Euler-Bernoulli com apoios amortecidos e rigidez variável, concluindo que, conforme se varia a elasticidade dos apoios, os valores das frequências naturais mudam, ficando diferentes das frequências com condição de apoios clássicos. E, em relação ao acréscimo do amortecimento, percebe-se que as frequências naturais amortecidas diminuem, causando uma atenuação na amplitude do movimento do sistema.

As vibrações mecânicas são sem dúvida o principal foco a ser estudado neste trabalho. Diferentemente dos demais trabalhos realizados, nesta dissertação o objetivo é modelar a constante k da mola, como sendo a variável de saída de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy.

A teoria dos conjuntos fuzzy foi apresentada em 1964 por Lotfi A. Zadeh [24], quando trabalhava com problemas de classificações de conjuntos que não possuíam fronteiras bem definidas. O termo *fuzzy* significa nebuloso, difuso, e se refere ao fato de em muitos casos não conhecermos completamente o sistema que estamos analisando. Afirma Ortega (2001) que a lógica fuzzy é pouco conhecida pela grande maioria dos físicos e são relativamente poucos os trabalhos em física utilizando essa teoria. A motivação para os estudos desse tipo surge do fato que as medidas físicas estão sujeitas a erros e que muitas vezes esses erros não são controláveis. A influência crescente da lógica fuzzy nas áreas de física e engenharias nucleares tornam-se evidentes ao se consultar uma biblioteca virtual onde constam os registro de algumas centenas de artigos que utilizam a lógica fuzzy [17].

O primeiro objetivo deste trabalho consiste em analisar um sistema massa-mola considerando a constante k como um parâmetro fuzzy. Modelamos o problema através de um Sistema

Baseado em Regras Fuzzy onde as variáveis de entrada são a classificação da mola, quanto a seu tempo de uso, e a quantidade de espiras; a variável de saída é a constante elástica k . O segundo objetivo é estudar a equação da onda para três casos: no primeiro caso analisamos a posição de um cabo restrito elasticamente em uma de suas extremidades por uma mola, como na equação (1), considerando a constante da mola k obtida por um Sistema Baseado em Regras Fuzzy; no segundo caso analisamos as vibrações do modelo de uma viga ligada a massas, amortecedores e molas em suas extremidades como na equação (2), simulando o chassi de um carro. Consideramos também a constante k da mola obtida por um Sistema Baseado em Regras Fuzzy. Por fim, no terceiro caso realizamos um estudo com respeito à vibração de uma membrana em uma região irregular, discretizando a equação no espaço através do método de elementos finitos bidimensionais; e no tempo utilizamos o método de diferenças finitas centrado.

A organização do presente trabalho é a seguinte:

No capítulo 1, apresentamos conceitos principais da teoria de conjuntos fuzzy.

No capítulo 2, apresentamos o método de diferenças finitas para derivadas de primeira ordem, segunda ordem e de ordem superior. Também, apresentamos o exemplo do sistema massa-mola que é resolvido através do método de diferenças finitas e teoria dos conjuntos fuzzy.

No capítulo 3, apresentamos a dedução da equação de movimento para uma corda ou cabo e, também para uma viga. Em seguida, resolvemos numericamente ambas as equações através do método de diferenças finitas. Aplicamos a teoria de conjuntos fuzzy para modelar a constante k da mola.

No capítulo 4, apresentamos a teoria de elementos finitos unidimensionais e bidimensionais, assim como as matrizes de rigidez do caso bidimensional.

No capítulo 5, apresentamos a dedução do movimento de uma membrana e sua solução numérica obtida através do método dos elementos finitos bidimensional e do método de diferenças finitas centrado para o tempo.

Enfim, no capítulo 6 apresentamos as conclusões do trabalho.

Magna Paulina de Souza Ferreira
Uberlândia-MG, 23 de Março de 2017.

Capítulo 1

Teoria dos Conjuntos Fuzzy

A teoria dos conjuntos fuzzy foi apresentada por Lotfi A. Zadeh, em meados dos anos 60, com a intenção de dar um tratamento matemático a certos termos linguísticos subjetivos como “aproximadamente”, “em torno de” [13]. Essa teoria enfrentou forte resistência por parte da comunidade científica no seu início, principalmente por parte dos estatísticos norte americanos. Entretanto, muitos pesquisadores acreditavam que os novos conceitos poderiam oferecer várias possibilidades, assim trabalhos começaram a ser desenvolvidos no mundo inteiro, principalmente no Japão, onde os conjuntos fuzzy encontraram raízes para se desenvolver rapidamente [17].

Baseando-se nas ideias de Barros e Bassanezi (2010) podemos afirmar que a Teoria dos Conjuntos Fuzzy, recente do ponto de vista de historiografia, vem se desenvolvendo e ganhando espaço e, cada vez mais, está sendo usada como ferramenta para a formulação de modelos nos vários campos da ciência. O tratamento fuzzy de variáveis linguísticas ganhou um considerável espaço na matemática, particularmente quando não dispomos de dados suficientes para uma estatística ou então quando a situação não comporta medições e dependemos da informação de especialistas. Neste sentido, modelos provenientes da Teoria dos Conjuntos Fuzzy, têm sido usado em Biomatemática para fazer diagnósticos médicos e em muitas outras aplicações [5].

Para descrever certos fenômenos relacionados às variáveis linguísticas, temos utilizado graus que representam qualidades ou verdades parciais ou ainda padrões do melhor. Esse é o caso, por exemplo, dos conceitos de alto, fumante, infeccioso e outros. É precisamente neste tipo de incerteza que a Lógica Fuzzy tem dado suas principais contribuições. Usando uma linguagem conjuntista poderíamos nos referir, respectivamente, aos conjuntos das pessoas altas, fumantes ou infecciosas. Esses são exemplos típicos de conjuntos cujas fronteiras podem ser consideradas incertas, isto é, definidas por meio de propriedades subjetivas ou atributos imprecisos [13].

1.1 Alguns Conceitos da Teoria de Conjuntos Fuzzy

Definição 1.1. *Seja \mathcal{U} um conjunto não vazio e A um subconjunto clássico de \mathcal{U} . A aplicação,*

$$\mathcal{X}_A : \mathcal{U} \longrightarrow \{0, 1\},$$

tal que

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A, \end{cases}$$

é chamada de função característica de A [5].

Definição 1.2. *Um subconjunto fuzzy F do universo \mathcal{U} é definido por uma função de pertinência μ que a cada elemento x de \mathcal{U} , associa um número $\mu(x)$, entre zero e um, chamado de grau de pertinência de x à F . Assim, o conjunto fuzzy F é sinônimo da função de pertinência,*

$$\mu_F : \mathcal{U} \longrightarrow [0, 1].$$

Os valores $\mu_F(x) = 1$ e $\mu_F(x) = 0$ indicam, respectivamente, a pertinência plena e a não pertinência do elemento x a F .

Definição 1.3. *Seja A um conjunto fuzzy e $\alpha \in (0, 1]$. Definimos como α -nível de A o conjunto*

$$A^\alpha = \{x \in \mathcal{U} : \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

Definição 1.4. *O Suporte de um conjunto fuzzy A que tem grau de pertinência diferente de zero em A , denotado por $\text{supp}(A)$, é definido como:*

$$\text{supp}(A) = \{x \in \mathcal{U} : \mu_A(x) > 0\}.$$

Definição 1.5. *O nível zero de um conjunto fuzzy A é o fecho do suporte de A , isto é,*

$$[A]^0 = \overline{\text{supp}(A)}.$$

1.1.1 Representação de Conjuntos Fuzzy

As representações das funções que definem os elementos de um conjunto fuzzy facilitam a visualização deste conjunto, e podem ser feitas na forma tabular (ou de lista), graficamente e na forma analítica.

Para conjuntos finitos, as funções podem ser representadas por tabelas. A tabela representando um conjunto fuzzy lista todos os elementos do conjunto com seus respectivos graus de pertinência [13]. No exemplo a seguir temos uma ilustração desse caso.

Exemplo 1.1. *Seja A o conjunto de alunos estudiosos de uma sala de aula em uma faculdade, e sejam eles: Fernando, Carlos, Márcia e André. Este conjunto A é um subconjunto do conjunto universo X com todos os alunos da faculdade. Nem todos os alunos do conjunto A estudam diligentemente, logo alguns têm um grau de mais estudioso, e outros tem grau de pertinência de menos estudiosos, variando entre os valores 0 e 1. Para os alunos citados tem-se a representação na Tabela 1.1.*

A representação gráfica dos conjuntos fuzzy é a mais usada na literatura por ter uma interpretação mais intuitiva. No caso de uma representação em duas dimensões, o eixo vertical representa o grau de pertinência no intervalo $[0, 1]$, e o eixo horizontal, o universo.

Alunos	Grau de estudo
Carlos	0.3
Márcia	0.7
Fernando	0.8
André	0.9

Tabela 1.1: Alunos e graus de estudo.

Exemplo 1.2. O conjunto fuzzy de pessoas de “meia idade” no universo $\mathcal{U} = [0, 90]$, poderia ser representado pela função $\mu_M(x)$ ilustrada na Figura 1.1.

Neste exemplo, a curva tem a forma de sino, crescendo da esquerda para a direita até uma certa idade, e depois decrescendo com a idade. Que a curva deva ter esta forma acreditamos que é consenso. As controvérsias talvez apareçam a respeito da idade onde há mudança do crescimento da curva.

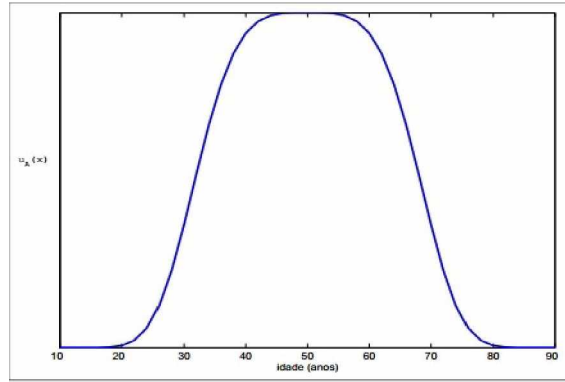


Figura 1.1: Função de pertinência de pessoas de meia idade [13].

1.1.2 Operações Padrões entre Conjuntos Fuzzy

Sejam A e B subconjuntos clássicos de \mathcal{U} representados pelas funções características \mathcal{X}_A e \mathcal{X}_B , respectivamente. Os conjuntos

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in \mathcal{U} : x \in A \text{ ou } x \in B\}, \\ A \cap B &= \{x \in \mathcal{U} : x \in A \text{ e } x \in B\}, \\ A' &= \{x \in \mathcal{U} : x \notin A\}, \end{aligned}$$

têm, respectivamente, as funções características, $\forall x \in \mathcal{U}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{A \cup B}(x) &= \max\{\mathcal{X}_A(x), \mathcal{X}_B(x)\}, \\ \mathcal{X}_{A \cap B}(x) &= \min\{\mathcal{X}_A(x), \mathcal{X}_B(x)\}, \\ \mathcal{X}_{A'}(x) &= 1 - \mathcal{X}_A(x). \end{aligned}$$

Definição 1.6. Sejam A e B conjuntos fuzzy (Figura 1.2). As funções de pertinência que representam os conjuntos fuzzy união (Figura 1.3), intersecção (Figura 1.4) e complementar (Figura 1.5) de conjuntos fuzzy $\forall x \in \mathcal{U}$, são dadas por,

$$\begin{aligned} \mu_{A \cup B}(x) &= \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \\ \mu_{A \cap B}(x) &= \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \\ \mu_{A'}(x) &= 1 - \mu_A(x), \end{aligned}$$

respectivamente.

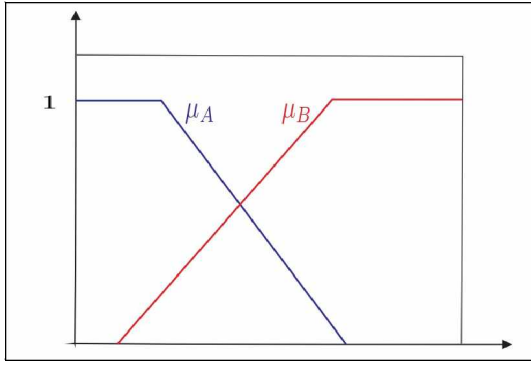


Figura 1.2: Função de pertinência dos conjuntos fuzzy A e B [13].

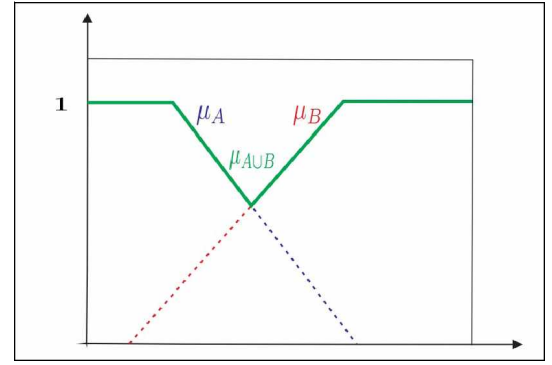


Figura 1.3: Função de pertinência da união dos conjuntos fuzzy A e B [13].

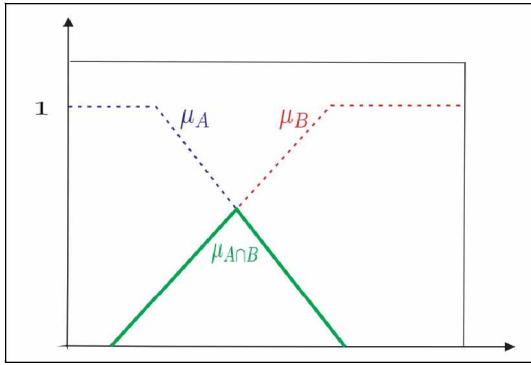


Figura 1.4: Função de pertinência da interseção dos conjuntos fuzzy A e B [13].

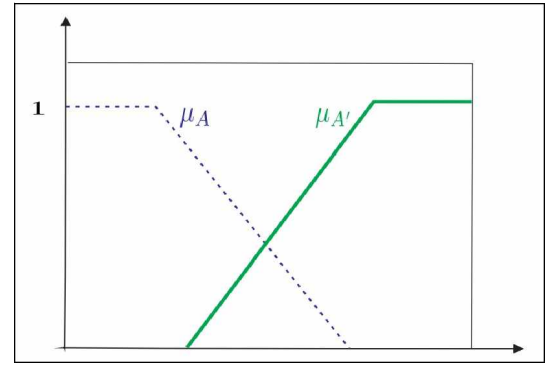


Figura 1.5: Funções de pertinência dos conjuntos fuzzy A e seu complementar A' [13].

1.2 Variáveis Linguísticas Fuzzy

Uma variável linguística cujo valor é expresso qualitativamente (que fornece um conceito a variável) e quantitativamente por uma função de pertinência, como indica a Figura 1.6.

1.3 Sistemas Baseado em Regras Fuzzy

Sistemas Baseados em Regras Fuzzy (SBRF) contêm quatro componentes: um processador de entrada, onde é realizada a fuzzificação dos dados de entrada, uma coleção de regras fuzzy, denotada por base de regras, uma máquina de inferência fuzzy, e um processador de saída. Esses componentes estão conectados conforme indicado na Figura 1.7, supondo $x \in \mathbb{R}^N$ e $y \in \mathbb{R}^n$.

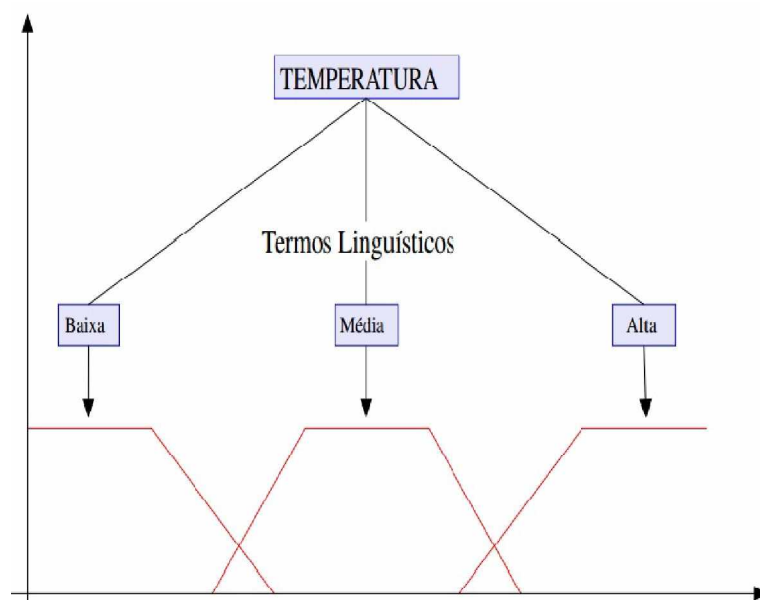


Figura 1.6: Variáveis Linguísticas [7].

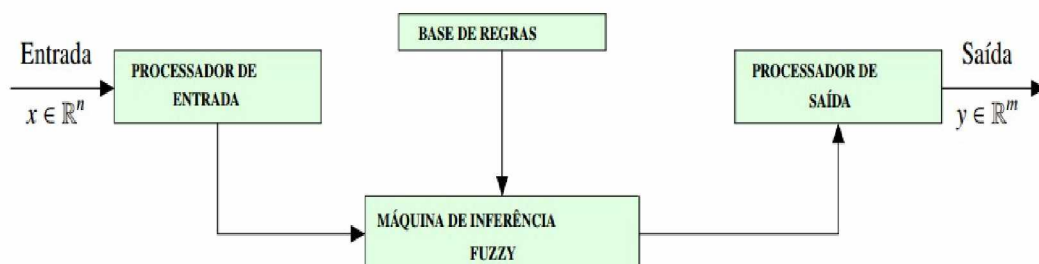


Figura 1.7: Sistemas Baseado em Regras Fuzzy [8].

1.3.1 Processador de Entrada (Fuzzificação)

Neste componente as entradas do sistema são traduzidas em conjuntos fuzzy em seus respectivos domínios. A atuação de um especialista na área do fenômeno a ser modelado é de fundamental importância para colocar na construção das funções de pertinência para a descrição das entradas.

1.3.2 Base de Regras

Este componente, juntamente com a máquina de inferência, pode ser considerado o núcleo dos Sistemas Baseados em Regras Fuzzy. Ele é composto por uma coleção de proposições fuzzy na forma Se... então.... Cada uma dessas proposições pode, por exemplo, ser descrita linguisticamente de acordo com o conhecimento de um especialista. A base de regras descreve relações entre as variáveis linguísticas para serem utilizadas na máquina de inferência fuzzy, que descreveremos no próximo item.

1.3.3 Máquina de Inferência Fuzzy

É neste componente que cada proposição fuzzy é traduzida matematicamente por meio das técnicas de raciocínio aproximado. Os operadores matemáticos serão selecionados para definir a relação fuzzy que modela a base de regras. Assim, a máquina de inferência fuzzy é de fundamental importância para o sucesso do sistema fuzzy, já que fornece a saída a partir de cada entrada fuzzy e da relação definida pela base de regras.

Apresentamos a seguir, um método de inferência fuzzy: Método de Mamdani.

Método de Mamdani

Uma regra ‘se’ (antecedente) ‘então’ (consequente) é definida pelo produto cartesiano fuzzy dos conjuntos fuzzy que compõe o antecedente e o consequente da regra. O método de Mamdani agrega as regras através do operador lógico “ou”, que é modelado pelo operador máximo, em cada regra e através do operador lógico “e”, que é modelado pelo operador mínimo. Veja as regras a seguir:

Regra 1: Se (x é A_1 e y é B_1) então (z é C_1);

Regra 2: Se (x é A_2 e y é B_2) então (z é C_2).

A Figura 1.8 ilustra como uma saída real z de um sistema de inferência do tipo Mamdani é gerada a partir das entradas x e y reais e a regra de composição max-min. A saída $z \in \mathbb{R}$ é obtida pela defuzzificação do conjunto fuzzy de saída $C = C'_1 \cup C'_2$

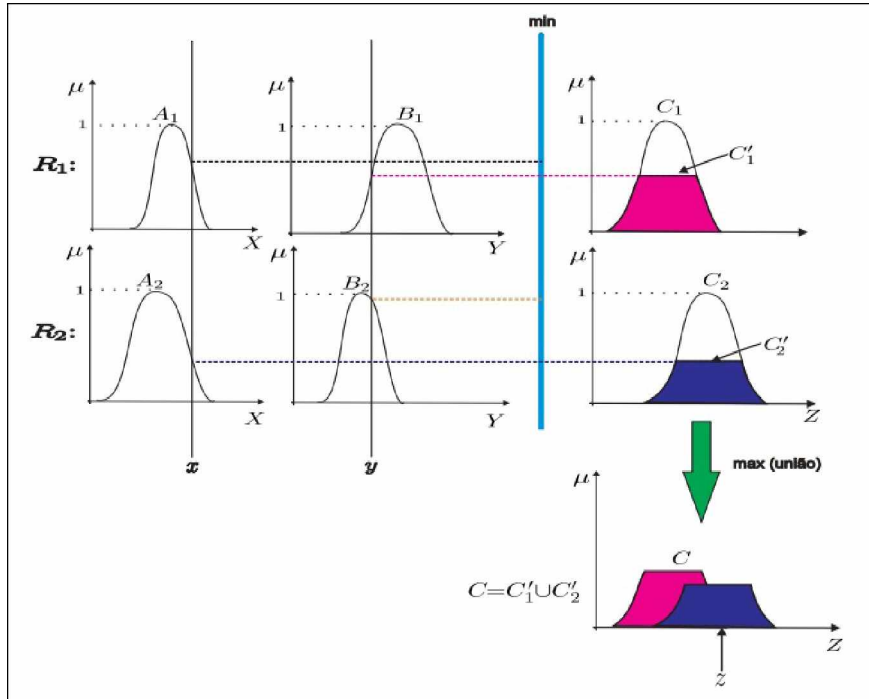


Figura 1.8: Método de Mamdani [7].

1.3.4 Processador de Saída (Defuzzificação)

Na teoria dos conjuntos fuzzy pode-se dizer que a defuzzificação é um processo de se representar um número real por um conjunto fuzzy. Em sistemas fuzzy, em geral a saída é um

conjunto fuzzy. Assim, devemos escolher um método para defuzzificar a saída e obter um número real que a represente.

Definimos, a seguir, o método mais comum de defuzzificação.

Centro de Gravidade

Este método de defuzzificação é semelhante à média ponderada para distribuição de dados em que a diferença é que os pesos são os valores $C(z_i)$ que indicam o grau de compatibilidade do valor z_i com o conceito modelado pelo conjunto fuzzy C .

Para um domínio discreto tem-se

$$G(C) = \frac{\sum_{i=0}^n z_i C(z_i)}{\sum_{i=0}^n C(z_i)}.$$

Para um domínio contínuo, tem-se

$$G(C) = \frac{\int_R z C(z) dz}{\int_R C(z)},$$

onde R é a região de integração.

No próximo capítulo, apresentamos o Método de Diferenças Finitas e um exemplo que utiliza um SBRF.

Capítulo 2

Métodos Numéricos para Resolução de EDO

A teoria das equações diferenciais é objeto de intensa atividade de pesquisa pois apresenta aspectos puramente matemáticos e uma multiplicidade de aplicações, além de apresentar diversas ramificações [11]. Neste capítulo abordamos especificamente as Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), que são equações que apresentam apenas derivadas em relação a uma variável, e utilizamos um SBRF para resolução do problema massa-mola. Algumas EDO podem ser resolvidas aplicando-se métodos analíticos, de modo que a solução exata é encontrada, caso não seja possível encontrarmos a solução analítica utilizamos métodos numéricos para buscarmos uma aproximação da solução.

2.1 Método de Diferenças Finitas

Em geral, os problemas que envolvem equações diferenciais mais complexas necessitam de uma variedade de ferramentas para a sua resolução. Além das soluções analíticas, diversos métodos numéricos podem ser utilizados para a solução de uma equação diferencial. Os principais métodos numéricos utilizados para resolução dessas equações são: método de diferenças finitas, método dos elementos finitos, método dos elementos de contorno e método dos volumes finitos [15].

A ideia básica dos métodos numéricos é o processo de discretização, que reduz o problema contínuo, com um número infinito de variáveis, em um problema discreto com um número finito de variáveis, podendo ser resolvido computacionalmente. A base dos Métodos de Diferenças Finitas (MDF) é o cálculo das aproximações das derivadas através da expansão em série de Taylor de uma dada função [11].

A seguir, são apresentados três tipos de aproximações para derivada de primeira e de segunda ordem.

Diferença Progressiva

Calculando a fórmula de Taylor de uma função u a uma distância h de ponto x_n qualquer, temos:

$$u(x_n + h) = u(x_n) + hu'(x_n) + \frac{h^2}{2!}u''(x_n) + \frac{h^3}{3!}u'''(x_n) + \dots \quad (2.1)$$

Após isolarmos a primeira derivada, podemos escrever

$$u'(x_n) \approx \frac{u(x_n + h) - u(x_n)}{h} + \frac{h}{2}u''(\xi_{x_{n+1}}). \quad (2.2)$$

onde $\xi_{x_{n+1}} \in (x_n, x_{n+1})$. Como o resto é igual $\frac{h}{2}u''(\xi_{x_{n+1}})$ e a potência de h é igual a 1, dizemos que o método é de ordem 1 [6]. Assim, de forma simplificada temos

$$u'_n \approx \frac{u_{n+1} - u_n}{h}. \quad (2.3)$$

Diferença Atrasada

Da mesma forma, utilizando a expansão em série de Taylor para determinar $u(x_n - h)$, obtemos

$$u'(x_n) \approx \frac{u(x_n) - u(x_n - h)}{h} + \frac{h}{2}u''(\xi_{x_{n-1}}). \quad (2.4)$$

onde $u''(\xi_{x_{n-1}}) \in (x_{n-1}, x_n)$. Como o resto é igual $\frac{h}{2}u''(\xi_{x_{n-1}})$ e a potência de h é igual 1, dizemos que o método é de ordem 1 [6]. Assim de forma simplificada, temos

$$u'_n \approx \frac{u_n - u_{n-1}}{h}. \quad (2.5)$$

Diferença Centrada

A diferença centrada é obtida fazendo a expansão em serie de Taylor nos pontos $u(x_n - h)$ e $u(x_n + h)$, assim a expressão

$$u'(x_n) \approx \frac{u(x_n + h) - u(x_n - h)}{2h} - \frac{h^2}{12}[u'''(\xi_{x_{n+1}} + u\xi_{x_{n-1}})]. \quad (2.6)$$

Como o resto é igual a $\frac{h^2}{12}[u'''(\xi_{x_{n+1}} + \xi_{x_{n-1}})]$ e a potência de h é 2, dizemos que o método é de ordem 2 [6]. De forma simplificada, temos

$$u'_n \approx \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h}. \quad (2.7)$$

A seguir, apresentamos aproximações para derivada de segunda ordem $u''(x_n)$.

Diferença Progessiva

Pela expansão em série de Taylor temos:

$$u(x_n + h) \approx u(x_n) + hu'(x_n) + \frac{h^2}{2!}u''(x_n) + \dots$$

Isolando a segunda derivada podemos escrever

$$u''(x_n) \approx 2 \left(\frac{u(x_n + h) - u(x_n) - hu'(x_n)}{h^2} \right). \quad (2.8)$$

Assim, de forma simplificada temos:

$$u''_n \approx 2 \left(\frac{u_{n+1} - u_n - hu'_n}{h^2} \right). \quad (2.9)$$

Diferença Atrasada

Pela expansão em série de Taylor temos:

$$u(x_n - h) \approx u(x_n) - hu'(x_n) + \frac{h^2}{2!}u''(x_n) + \dots$$

Isolando a segunda derivada podemos escrever

$$u''(x_n) \approx 2 \left(\frac{u(x_n - h) - u(x_n) + hu'(x_n)}{h^2} \right). \quad (2.10)$$

Assim, de forma simplificada temos:

$$u''(x_n) \approx 2 \left(\frac{u_{n-1} - u_n + hu'_n}{h^2} \right). \quad (2.11)$$

Diferença Centrada

Do método da série de Taylor temos:

$$u''_n \approx 2 \left(\frac{u_{n+1} - u_n - hu'_n}{h^2} \right), \quad (2.12)$$

$$u''(x_n) \approx 2 \left(\frac{u_{n-1} - u_n + hu'_n}{h^2} \right). \quad (2.13)$$

Somando a equação (2.12) com a equação (2.13) obtemos:

$$u''_n \approx \frac{u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}}{h^2}. \quad (2.14)$$

Observe que a ordem do erro para o método de diferenças finitas progressivas e atrasadas de u'' é 1, e para o método de diferença centrada de u'' é 2 [6].

A seguir, apresentamos o método de diferenças finitas de primeira e segunda ordem para o tempo.

Método de Diferenças Finitas para o Tempo

Representamos a derivada de primeira ordem e segunda ordem no tempo, utilizando a diferença finita avançada e diferença finita centrada, respectivamente.

$$\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} \approx \frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\Delta t}. \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial t^2} \approx \frac{u_i^{j+1} - 2u_i^j + u_i^{j-1}}{\Delta t^2}. \quad (2.16)$$

em que $u_i^j = u(x_i, t_j)$, i representa o índice da variável x e j o índice da variável no tempo.

2.1.1 Derivadas de Ordens Superiores

Para aproximações de ordens superiores podemos utilizar o procedimento anterior. Por conveniência, definimos a primeira diferença avançada $u_{i+1} - u_i$ como $\Delta_x u_i$ e a primeira diferença atrasada $u_i - u_{i-1}$ como $\nabla_x u_i$ [9]. Em geral, a diferença de primeira ordem para frente e para trás podem ser expressas como:

$$\Delta_x^n u_i = \Delta_x^{n-1}(\Delta_x u_i) \text{ e } \nabla_x^n u_i = \nabla_x^{n-1}(\nabla_x u_i).$$

Vários operadores de diferença central podem ser definidos de forma semelhante. Alguns operadores típicos são:

$$\varsigma_x^* u_i = u_{i+1} - u_{i-1} = \Delta_x u_i + \nabla_x u_i, \quad (2.17)$$

$$\varsigma_x u_i = u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}}. \quad (2.18)$$

Usando os operadores, definimos as aproximações das derivadas de ordens superiores, avançadas e atrasadas, que podem ser expressas como:

$$\frac{\partial^n u_i}{\partial x^n} = \frac{\Delta_x^n u_i}{(\Delta x)^n} + O(\Delta x) \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial^n u_i}{\partial x^n} = \frac{\nabla_x^n u_i}{(\Delta x)^n} + O(\Delta x). \quad (2.20)$$

Assim, temos a seguinte aproximação para derivada segunda avançada:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = \frac{1}{(\Delta x)^2} [u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i] + O(\Delta x) \quad (2.21)$$

Analogamente, temos a aproximação para derivada segunda atrasada:

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} = \frac{1}{(\Delta x)^2} [u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}] + O(\Delta x) \quad (2.22)$$

A seguir, apresentamos os cálculos para obtenção da terceira derivada atrasada:

$$\frac{\partial^3 u_i}{\partial x^3} = \frac{1}{(\Delta x)^3} \nabla_x^3 u_i + O(\Delta x). \quad (2.23)$$

Calculando $\nabla_x^3 u_i$, temos:

$$\begin{aligned} \nabla_x^3 u_i &= \nabla_x^2 (u_i - u_{i-1}) = \nabla_x (\nabla_x u_i - \nabla_x u_{i-1}) \\ &= \nabla_x (u_i - u_{i-1} - u_{i-1} + u_{i-2}) = \nabla_x (u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}) \\ &= u_i - u_{i-1} - 2u_{i-1} + 2u_{i-2} + u_{i-2} - u_{i-3} \\ &= u_i - 3u_{i-1} + 3u_{i-2} - u_{i-3}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial^3 u_i}{\partial x^3} = \frac{1}{(\Delta x)^3} [u_i - 3u_{i-1} + 3u_{i-2} - u_{i-3}]. \quad (2.24)$$

Seguindo o mesmo raciocínio, obtemos a aproximação para terceira derivada adiantada:

$$\begin{aligned} \Delta_x^3 u_i &= \Delta_x^2 (u_{i+1} - u_i) = \Delta_x (\Delta_x u_{i+1} - \Delta_x u_i) \\ &= \Delta_x (u_{i+2} - u_{i+1} - u_{i+1} + u_i) = \Delta_x (u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i) \\ &= u_{i+3} - u_{i+2} - 2u_{i+2} + 2u_{i+1} + u_{i+1} + u_i \\ &= u_{i+3} - 3u_{i+2} + 3u_{i+1} + u_i. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial^3 u_i}{\partial x^3} = \frac{1}{(\Delta x)^3} [u_{i+3} - 3u_{i+2} + 3u_{i+1} - u_i]. \quad (2.25)$$

De forma análoga à anterior, temos a aproximação para a quarta derivada:

$$\frac{\partial^4 u_i}{\partial x^4} = \frac{1}{(\Delta x)^4} \Delta_x^4 u_i + O(\Delta x). \quad (2.26)$$

Calculando $\Delta_x^4 u_i$, temos:

$$\begin{aligned} \Delta_x^4 u_i &= \Delta_x^3 \left(u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}} \right) = \Delta_x^2 (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \\ &= \Delta_x \left[u_{i+\frac{3}{2}} - u_{i+\frac{1}{2}} - 2 \left(u_{i+\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{1}{2}} \right) + u_{i-\frac{1}{2}} - u_{i-\frac{3}{2}} \right] \\ &= u_{i+2} - u_{i+1} - (u_{i+1} - u_i) - 2[(u_{i+1} - u_i) - (u_i - u_{i-1})] + u_{i+1} - u_{i-1} - (u_{i-1} - u_{i-2}) \\ &= u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - u_{i-1} + u_{i-2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial^4 u_i}{\partial x^4} = \frac{1}{(\Delta x)^4} [u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - u_{i-1} + u_{i-2}]. \quad (2.27)$$

Esses métodos têm como objetivo discretizar equações diferenciais ordinárias e também parciais. O método de diferenças finitas centradas é utilizado para discretizar a segunda derivada, a fim de resolver o problema a seguir.

2.2 Modelo Clássico para o Sistema Massa-Mola

No estudo de mecânica, as forças de amortecimento que atuam sobre um corpo são consideradas proporcionais a velocidade instantânea. Vamos supor que essa força é dada por um múltiplo constante de $\frac{dx}{dt}$ [25]. Na existência de forças externas agindo sobre o sistema, Figura 2.1, segue da segunda lei de Newton que :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \beta \frac{dx}{dt} + f(t) \quad (2.28)$$

em que x representa o deslocamento vertical da mola, β é positivo sendo chamado constante de amortecimento, agindo no sentido contrário ao movimento. A constante elástica da mola k , está agindo no sentido oposto ao deslocamento e $f(t)$ é uma força externa conhecida, dependente do tempo.

Dividindo-se a equação (2.28) por m obtemos a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = F(t) \quad (2.29)$$

em que $2\lambda = \frac{\beta}{m}$ indica o nível de amortecimento, $\omega^2 = \frac{k}{m}$ é o quadrado da frequência de oscilação, sendo m a massa e $F(t) = \frac{f(t)}{m} = \text{sen}(t)$ a força externa que atua no sistema.

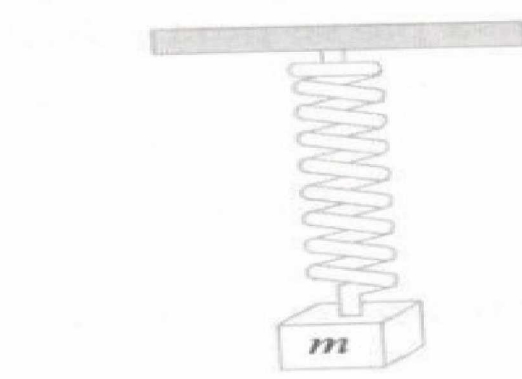


Figura 2.1: Sistema massa-mola [25].

Resolução Numérica

A equação (2.29) tem solução analítica, porém com o intuito de aprender métodos numéricos, utilizamos o método das diferenças finitas centradas para obter uma solução aproximada para a equação (2.29). Assim, obtemos:

$$\left(\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^2} \right) + 2\lambda \left(\frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{h^2} \right) + \omega^2 x_i = \text{sen}(t_i) \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.30)$$

Para

- n=1:

$$x_2 = \frac{1}{1 + h\lambda} [x_1(2 - h^2\omega^2) + x_0(h\lambda - 1) + h^2\text{sen}(t_i)]$$

- n=2

$$x_3 = \frac{1}{1 + h\lambda} [x_2(2 - h^2\omega^2) + x_1(h\lambda - 1) + h^2\text{sen}(t_i)]$$

- n=3

$$x_4 = \frac{1}{1 + h\lambda} [x_3(2 - h^2\omega^2) + x_2(h\lambda - 1) + h^2\text{sen}(t_i)]$$

⋮

Generalizando temos que:

$$x_{n+1} = \frac{1}{1 + h\lambda} [x_n(2 - h^2\omega^2) + x_{n-1}(h\lambda - 1) + h^2\text{sen}(t_i)] \quad (2.31)$$

Para obter a solução da equação (2.31) consideramos $x_0 = x(0) = 1$ e $x'_0 = x'(0) = 2$. Substituindo $i = 0$ na equação (2.30) obtemos:

$$\frac{x_1 - 2x_0 + x_{-1}}{h^2} + 2\lambda \left(\frac{x_1 - x_{-1}}{2h} \right) + \omega^2 x_0 = \text{sen}(t_0).$$

Como $x'(0) \simeq \frac{x_1 - x_{-1}}{2h} = 2$, então $x_{-1} = x_1 - 4h$, assim,

$$2x_1 - 2x_0 - 4h + 4\lambda h^2 + h^2\omega^2 x_0 = h^2\text{sen}(t_0)$$

e logo obtemos:

$$x_1 = \frac{1}{2} [(2 - h^2\omega^2)x_0 + 4(h - \lambda h^2) + h^2\text{sen}(t_0)].$$

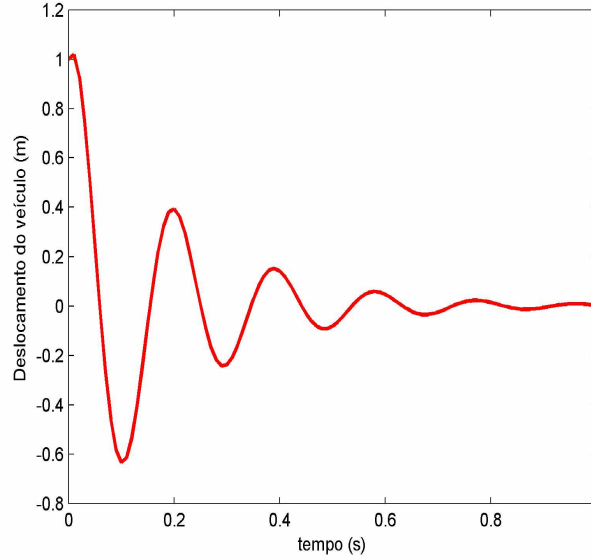


Figura 2.2: Aproximação numérica da equação (2.31).

Através da equação (2.29) modelamos o deslocamento vertical de um veículo para os valores de $h = 0.001m$, $\lambda = 5$, $m = 1180kg$ e $k = 1.2917 \times 10^6$ Newtons por metro. Através do software Matlab encontramos a solução numérica da equação, Figura 2.2.

Na próxima seção apresentamos equação (2.29) com k obtido através de um SBRF.

2.3 Modelo Fuzzy para o Sistema Massa-Mola

Consideramos a equação (2.29) com a constante elástica da mola $k = k(c, q)$ obtida através de um SBRF, neste caso, consideramos que a mola seja de um veículo, em que c é a classificação da mola quanto aos quilômetros rodados, e q é a quantidade de espiras [10].

As variáveis de entrada são:

- Classificação da mola quanto aos quilômetros rodados (c): domínio das funções de pertinência $[0, 80]$, os termos linguísticos são nova, seminova e velha. Sendo que o nível zero de cada função de pertinência correspondente aos termos linguísticos (nova, seminova, velha) são $[0, 29.5]$, $[27.6, 59.4]$, $[57.4, 80]$, respectivamente. As funções de pertinência são trapezoidais, como é mostrado na Figura 2.3;
- Quantidade de espiras (q): domínio das funções de pertinência $[3, 15]$, os termos linguísticos são pequena, média e grande. Sendo que o nível zero de cada função de pertinência correspondente aos termos linguísticos (pequena, média, grande) são $[3, 6.2]$, $[5.9, 11.6]$, $[11.3, 15]$, respectivamente. As funções de pertinência são trapezoidais, como é mostrado na Figura 2.4.

A variável linguística de saída é k :

- k constante elástica da mola: domínio das funções de pertinência $[0.775 \times 10^6, 3.8750 \times 10^6]$, medida em Newtons por metros (N/m). Os termos linguísticos são muito pequena, pequena, média, média alta e grande. Sendo que o nível zero de cada função de pertinência correspondente aos termos linguísticos (muito pequena, pequena, média, média alta, grande) são $[5.7 \times 10^5, 7.7 \times 10^5]$, $[7.4 \times 10^5, 1.1 \times 10^6]$, $[1.06 \times 10^6, 1.7 \times 10^6]$, $[1.6 \times 10^6, 2.9 \times 10^6]$, $[2.7 \times 10^6, 3.8 \times 10^6]$, respectivamente. As funções de pertinência são trapezoidais como é mostrado na Figura 2.5.

Neste exemplo temos nove regras fuzzy. Apresentamos alguns exemplos:

- Se a mola é nova e a quantidade de espiras é pequena, então k é grande;
- Se a mola é velha e a quantidade de espiras é grande, então k é muito pequena;
- Se a mola é seminova e a quantidade de espiras é média, então k é medio alto.

As funções de pertinência das variáveis linguísticas e a base de regras foram elaboradas com a ajuda de um especialista na área¹. O nível zero de cada função de pertinência da variável de saída k é calculado utilizando a expressão

$$k = \frac{G \times d^4}{8 \times D^3 \times N_a},$$

na qual G descreve a propriedade do material da mola, d corresponde ao diâmetro das espiras, D é o diâmetro da mola e N_a equivale a quantidade de espiras [19].

A fim de se obter uma divisão do nível zero das funções de pertinência da variável de saída k , calculamos os valores de k exatos com valores $d = 17 \times 10^{-3}m$ e $D = 17 \times 10^{-2}m$ para a mola específica de um veículo. Assim, realizamos uma manipulação nos mesmos, levando em consideração a classificação dos termos linguísticos em nova, semi nova e velha, em cada caso.

As Figuras 2.3, 2.4 e 2.5 representam as funções de pertinência das variáveis de entrada e de saída do SBRF, respectivamente.

O método de inferência fuzzy utilizado é o método de Mamdani e o método de defuzzificação é o centro de gravidade.

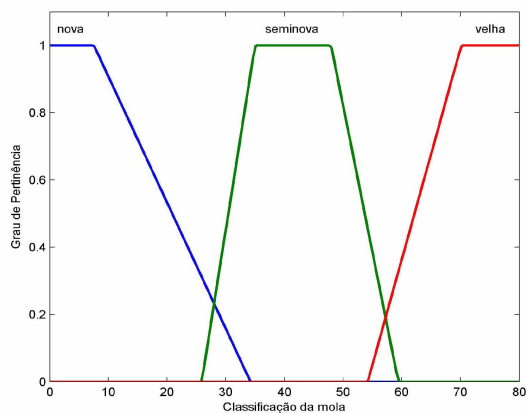


Figura 2.3: Funções de pert. da classificação da mola quanto aos quilômetros rodados.

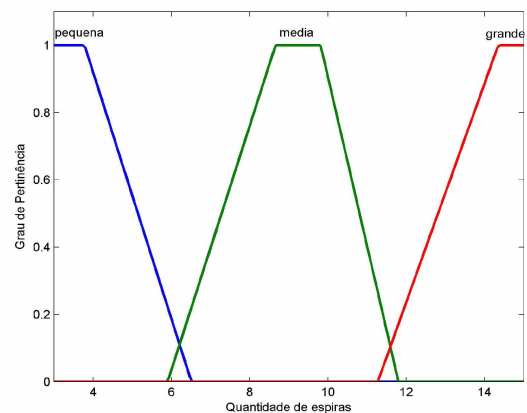


Figura 2.4: Funções de pert. da quantidade de espiras.

¹Comunicação pessoal do professor Dr. Leonardo Sanches, em 2 de agosto de 2016, em uma conversa presencial.

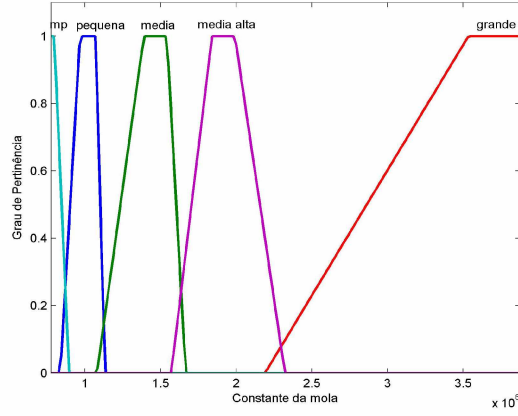


Figura 2.5: Funções de pertinência da constante da mola.

Utilizamos o software Matlab e encontramos a aproximação numérica da equação (2.31), para os valores de $h = 0.001m$, $\lambda = 5$, $m = 1180kg$. Obtivemos os diferentes deslocamentos verticais da mola de um veículo, levando em consideração as diferentes categorias da mola. Na Figura 2.6 são representados os diferentes deslocamentos da mola para os valores de k obtidos através do SBRF e $k = 3.8750 \times 10^6$ N/m para quantidade de 3 espiras, Tabela 2.1. Na Figura 2.7 são representados o erro absoluto entre o módulo da diferença dos k obtidos pelo SBRF e $k = 3.8750 \times 10^6$ N/m [11]. Na Figura 2.8 são representados os diferentes deslocamentos da mola com os valores de k obtidos através do SBRF e $k = 1.6607 \times 10^6$ N/m para 7 espiras, Tabela 2.2. Na Figura 2.9 são representados o erro absoluto entre o módulo da diferença dos k obtidos pelo SBRF e o $k = 1.6607 \times 10^6$ N/m. Na Figura 2.10 são representados os diferentes deslocamentos da mola com os valores de k obtidos através do SBRF e $k = 1.1825 \times 10^6$ N/m para 15 espiras, Tabela 2.3. Para uma mola com a quantidade maior de espiras, temos que a constante elástica k será pequena, sendo assim, para calcular o erro absoluto entre o módulo da diferença dos k obtidos pelo SBRF e o k determinístico, usamos o valor de $k = 1.1825 \times 10^6$ N/m que é um valor intermediário entre os valores para os k com uma quantidade maior de espiras. Na Figura 2.11 são representados o erro absoluto entre o módulo da diferença dos k obtidos pelo SBRF e $k = 1.1825 \times 10^6$ N/m.

Classificação da mola em km rodados	20	50	80
valor de k em N/m	$3.39 \times 10^6 N/m$	$2.28 \times 10^6 N/m$	$1.41 \times 10^6 N/m$

Tabela 2.1: Valores da constante elástica da mola k para 3 espiras.

Classificação da mola em km rodados	20	50	80
valor de k em N/m	$1.42 \times 10^6 N/m$	$9.39 \times 10^5 N/m$	$6.5 \times 10^5 N/m$

Tabela 2.2: Valores da constante elástica da mola k para 7 espiras.

Classificação da mola em km rodados	20	50	80
valor de k em N/m	$1.23 \times 10^5 N/m$	$9.47 \times 10^5 N/m$	$6.58 \times 10^5 N/m$

Tabela 2.3: Valores das constantes elásticas da mola para 15 espiras.

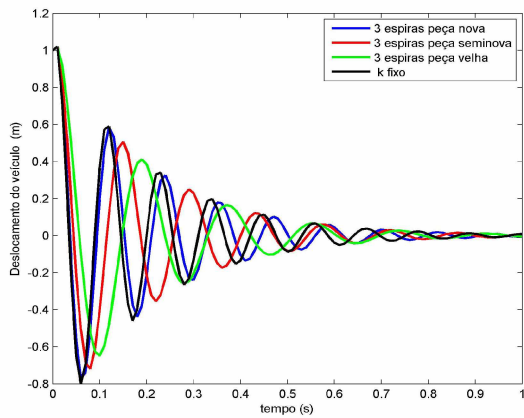


Figura 2.6: Aproximação numérica da solução da equação (2.29).

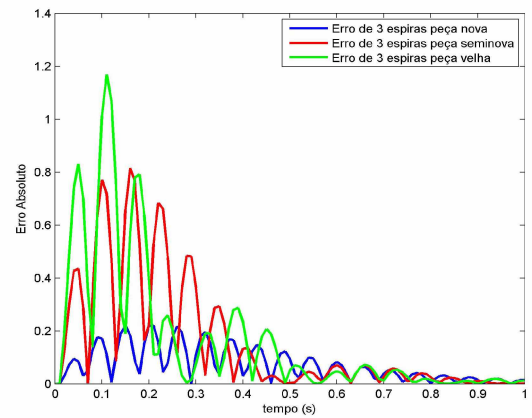


Figura 2.7: Erro Absoluto entre os k do SBRF e $k = 750 \times 10^6$ N/m.

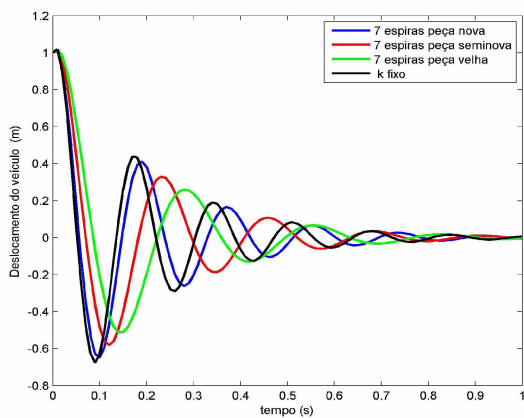


Figura 2.8: Aproximação numérica da solução da equação (2.29).

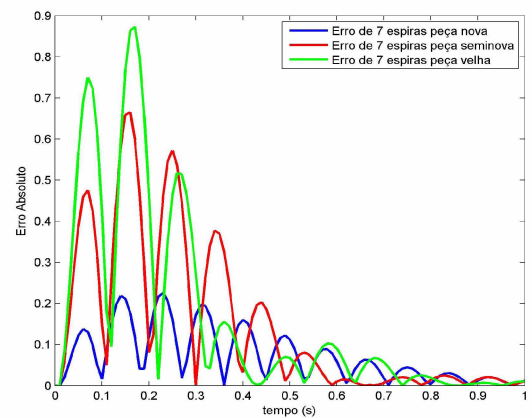


Figura 2.9: Erro Absoluto entre os k do SBRF e $k = 1.6607 \times 10^6$ N/m.

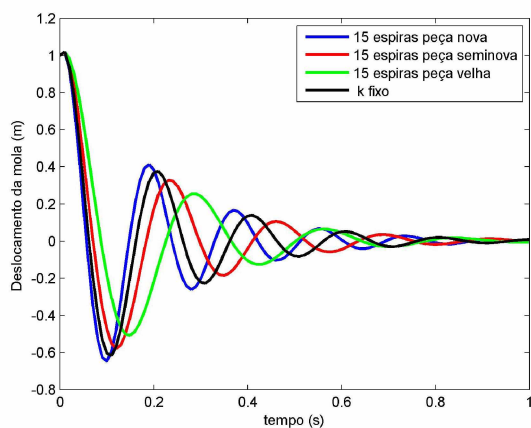


Figura 2.10: Aproximação numérica da solução da equação (2.29).

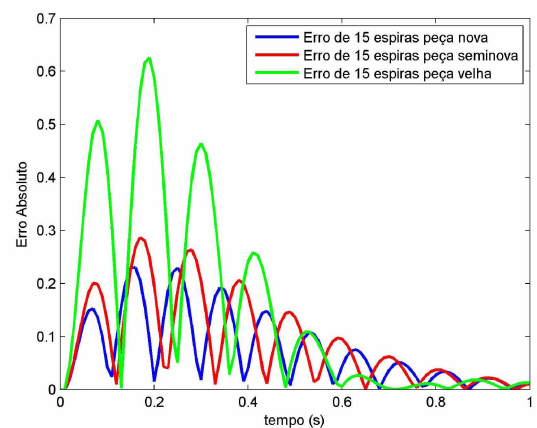


Figura 2.11: Erro Absoluto entre os k do SBRF e $k = 1.1825$ N/m.

2.4 Algumas Considerações

O estudo dessa constante k depende de sua classificação quanto aos quilômetros rodados e da quantidade de espiras, podemos notar que a quantidade de espiras tem uma influência relevante na obtenção dos k em cada caso. Nos gráficos das Figuras 2.6, 2.8 e 2.10 observamos que os quilômetros rodados influenciam no comportamento da mola, inclusive as Figuras 2.7, 2.9 e 2.11 mostram que o erro absoluto quando calculamos k fixo em relação a uma mola nova são menores. Notamos também que a amplitude de oscilação varia e a frequência de oscilação também varia.

Notamos através dos gráficos apresentados que a classificação de uma mola é um fator de relevância no sistema, pois tem a função de absorver os impactos que o carro sofre, além de ser responsável em manter a altura correta do veículo. É a constante k da mola que determina a relação entre a carga aplicada e a deformação da mola, influenciando nas condições de conforto e estabilidade do veículo [19].

No próximo capítulo, apresentamos o estudo de dois modelos de equações diferenciais parciais determinando o parâmetro da fronteira através de um SBRF.

Capítulo 3

Soluções Numéricas de Equações Diferenciais Parciais com SBRF

Vários fenômenos que ocorrem em Ótica, Eletricidade, Ondulatória, Magnetismo, Mecânica, Flúídos, Biologia e outros, podem ser modelados através de uma equação diferencial parcial (EDP). Uma EDO possui derivadas em função de apenas uma variável enquanto que uma EDP possui derivadas parciais em relação a mais de uma variável.

As equações diferenciais descrevem fenômenos cujos comportamentos dependem das interpretações feitas para cada objeto, tais como, velocidade, força, aceleração, fluxo, corrente elétrica, taxa de variação, temperatura, propagação de ondas e outros [11].

Uma EDP de segunda ordem possui a seguinte forma geral:

$$au_{xx} + 2bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu = g$$

onde a, b, c, d, f e g são constantes ou funções conhecidas das variáveis x e y , as funções a, b e c são tais que:

$$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0.$$

Note que, $u(x, y)$ representa a função procurada.

Se os coeficientes a, b e c forem constantes, convencionou-se uma classificação para equações diferenciais parciais lineares de segunda ordem. Dizemos que a equação é

- Elíptica, se $b^2 - ac < 0$;
- Parabólica, se $b^2 - ac = 0$;
- Hiperbólica, se $b^2 - ac > 0$.

A seguir, estudamos o problema de um cabo suspenso utilizando a equação da onda, a qual é classificada como equação hiperbólica.

3.1 Vibração Transversal de uma Corda ou Cabo

Nessa seção estudamos as ondas, que são quaisquer perturbações que se propagam no espaço ou em qualquer outro meio. As ondas são classificadas em relação à natureza, direção e energia de propagação.

Quanto à direção de propagação, as ondas são classificadas como:

- Unidimensionais: que se propagam em apenas uma direção, como as ondas em cordas e molas esticadas;
- Bidimensionais: são aquelas que se propagam por uma superfície, como a água em um lago quando se joga uma pedra;
- Tridimensionais: são capazes de se propagar em todas as dimensões, como a luz e o som.

A seguir apresentamos a dedução da equação da onda apresentada em [18] e em [4].

3.1.1 Equação de Movimento

Considere uma corda ou cabo elástico firmemente esticado, de comprimento l , sujeito a uma força transversal $f(x, t)$ por unidade de comprimento. O deslocamento transversal da corda $w(x, t)$, em que x é a posição e t o tempo, é dado apenas na direção z , como mostra a Figura 3.1. Suponhamos também que a corda tenha densidade linear, massa por unidade de comprimento uniforme, dado por $\mu = \frac{dm}{dx}$ e que esteja esticada com uma tensão constante P . A massa do pequeno segmento de corda de comprimento dx destacado na Figura 3.1 é

$$dm = \mu dx. \quad (3.1)$$

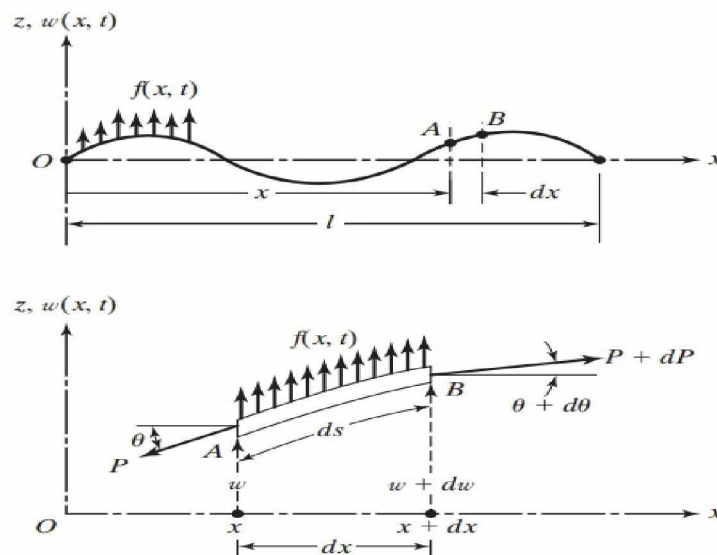


Figura 3.1: Corda Vibratória [18].

As componentes vertical e horizontal da força resultante atuando sobre esse segmento de corda são:

$$F_x = P \cos(\theta + d\theta) - P \cos\theta \quad (3.2)$$

$$F_z = P \sin(\theta + d\theta) - P \sin\theta. \quad (3.3)$$

Estamos supondo que a corda não exerce movimento na direção x , e esta se move apenas na direção z . Isto implica que a força resultante na direção x é nula, ou seja $F_x = 0$. Substituindo essa informação em (3.2) temos:

$$\cos(\theta + d\theta) = \cos\theta. \quad (3.4)$$

A força resultante na direção z : F_z é obtida pela segunda lei de Newton, da seguinte forma:

$$F_z = (\mu dx) a_z = (\mu dx) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \quad (3.5)$$

em que expressamos a aceleração em termos de uma derivada parcial a_z porque z é a função de duas variáveis, x e t . Substituindo (3.5) em (3.3) temos:

$$P \sin(\theta + d\theta) - P \sin\theta = (\mu dx) \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \quad (3.6)$$

ou

$$\sin(\theta + d\theta) - \sin\theta = dx \frac{\mu}{P} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \quad (3.7)$$

Vamos dividir a equação (3.7) em ambos os lados por $\cos\theta$. Note que pela equação (3.4) temos que: $\cos\theta = \cos(\theta + d\theta)$. Portanto, podemos dividir (3.7) por $\cos\theta$ ou por $\cos(\theta + d\theta)$. Assim, temos:

$$\frac{\sin(\theta + d\theta)}{\cos(\theta + d\theta)} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{dx}{\cos\theta} \frac{\mu}{P} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \quad (3.8)$$

Esta equação implica que,

$$\tan(\theta + d\theta) - \tan\theta = \frac{dx}{\cos\theta} \frac{\mu}{P} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \quad (3.9)$$

Lembrando que o coeficiente angular da reta tangente a uma dada função em um dado ponto do seu domínio é igual à derivada da função neste ponto, então podemos escrever a novamente a equação (3.9), como:

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x + dx, t) - \frac{\partial z}{\partial x}(x, t) = \frac{dx}{\cos\theta} \frac{\mu}{P} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \quad (3.10)$$

Dividindo a expressão (3.10) por dx temos do lado esquerdo, a expressão:

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial x}(x + dx, t) - \frac{\partial z}{\partial x}(x, t)}{dx}. \quad (3.11)$$

Aplicando em (3.11) limite para $dx \rightarrow 0$, esta expressão torna-se a derivada parcial de $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, que é a derivada parcial $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)$. Logo, a equação (3.10) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(x, t) = \frac{1}{\cos\theta} \frac{\mu}{P} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}(x, t). \quad (3.12)$$

Vamos supor que os deslocamentos da corda são pequenos, esta informação implica que os ângulos associados a esses deslocamentos são pequenos, isto é $\theta \approx 0$. Assim, $\cos\theta \approx 1$ e como

estamos considerando o deslocamento $w(x, t)$ no eixo z a equação (3.12) pode ser escrita da seguinte forma:

$$c^2 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t). \quad (3.13)$$

em que,

$$c = \sqrt{\frac{P}{\mu}}. \quad (3.14)$$

A equação (3.13) é conhecida como *equação da onda unidimensional*.

3.1.2 Condições Iniciais e de Contorno da Equação do Movimento

Vamos considerar o caso particular de vibração livre, sendo assim, precisamos especificar duas condições de contorno e duas condições iniciais para determinar a solução $w(x, t)$. Se a corda tiver deflexão $w_0(x)$ e velocidade $w_0^*(x)$ conhecidas no tempo $t = 0$, as condições iniciais são especificadas como:

$$w(x, t = 0) = w_0(x) \text{ e}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, t = 0) = w_0^*(x), \text{ para } x \in [0, l].$$

Se a corda for fixa em uma extremidade, digamos, $x = 0$, o deslocamento w deve ser sempre zero e portanto, a condição de contorno é

$$w(x = 0, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (3.15)$$

Se a extremidade $x = l$ for restrita elasticamente, como mostrada na Figura 3.2, a condição de contorno torna-se

$$P(x) \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = -k w(x, t) \Big|_{x=l} \quad t \geq 0, \quad (3.16)$$

onde k é a constante elástica da mola.

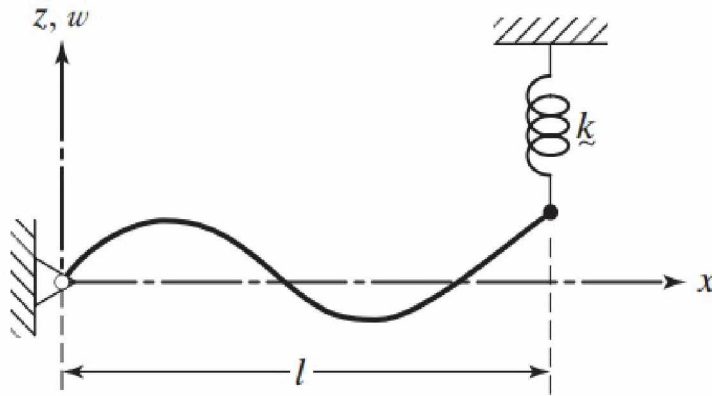


Figura 3.2: Corda com restrição elástica [18].

Na próxima seção, apresentamos a discretização da equação (3.13).

3.1.3 Discretização da Equação do Movimento

Para obter a solução numérica da equação (3.13) através do método de diferenças finitas, consideramos o intervalo de $[0, l]$ e o dividimos em $n - 1$ partes iguais, da seguinte forma: $[x_i, x_{i+1}]$ para $i = 1, \dots, n - 1$, sendo $x_1 = 0$ e $x_n = l$.

Substituindo as derivadas que aparecem em (3.13) pelas aproximações (2.14) e (2.16) para segunda derivada em x e segunda derivada no tempo, obtemos:

$$\frac{w_i^{j+1} - 2w_i^j + w_i^{j-1}}{\Delta t^2} = c^2 \left(\frac{w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j}{\Delta x^2} \right).$$

Como nosso objetivo é encontrar as incógnitas no próximo tempo, devemos isolar w_i^{j+1} :

$$w_i^{j+1} - 2w_i^j + w_i^{j-1} = \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} (w_{i+1}^j - 2w_i^j + w_{i-1}^j).$$

seja $\lambda = \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2}$, então:

$$w_i^{j+1} = \lambda w_{i+1}^j + (2 - 2\lambda)w_i^j + \lambda w_{i-1}^j - w_i^{j-1}. \quad (3.17)$$

Obtemos o seguinte sistema matricial:

$$\begin{bmatrix} w_1^{j+1} \\ w_2^{j+1} \\ w_3^{j+1} \\ w_4^{j+1} \\ \vdots \\ w_{n-2}^{j+1} \\ w_{n-1}^{j+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \lambda & 2-2\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2-2\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 2-2\lambda & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2-2\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 2-2\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1^j \\ w_2^j \\ w_3^j \\ w_4^j \\ \vdots \\ w_{n-2}^j \\ w_{n-1}^j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} w_1^{j-1} - \lambda w_0^j \\ w_2^{j-1} \\ w_3^{j-1} \\ w_4^{j-1} \\ \vdots \\ w_{n-2}^{j-1} \\ w_{n-1}^{j-1} - \lambda w_n^j \end{bmatrix}$$

A condição de contorno (3.16) é válida apenas para o ponto $i = n$, substituindo as derivadas que aparecem em (3.16) por diferenças finitas, temos:

$$P(x) \left(\frac{w_i - w_{i-1}}{2\Delta x} \right) = -kw_i$$

logo,

$$w_i = \left(\frac{P(x)w_{i-1}}{P(x) + 2k\Delta x} \right). \quad (3.18)$$

Um dos interesses deste capítulo é apresentar um exemplo de um cabo suspenso ligado a uma mola em sua extremidade, a fim de observar sua posição ao longo do tempo. Na próxima seção apresentamos a equação da catenária, que é a posição inicial do cabo suspenso.

3.2 Posição de um Cabo Suspenso com Parâmetro Fuzzy

Consideremos um cabo suspenso que é conectado a uma mola em uma de suas extremidades. A posição inicial do cabo é dada pela equação da catenária:

$$f(x) = \frac{1}{p}(\cosh(px) - 1) + 5.8 \quad (3.19)$$

em que p é uma constante.

No problema discutido nesta seção consideramos um cabo fixo em uma extremidade com altura igual a 5.8, ou seja $f(0) = 5.8$, $t \geq 0$. Também, consideramos a outra extremidade conectada a uma mola em $x = 7.5$, em que $f(7.5) = 6.21$ [22]. Sendo assim, modelamos a constante k da mola do cabo com a utilização de um SBRF. A expressão da catenária nos dá a posição inicial do cabo e a equação (3.13) fornece o deslocamento do cabo em função do tempo. Para determinar a posição do cabo ao longo do tempo com a influência da mola, somamos o deslocamento do cabo com a posição inicial. A Figura 3.3 ilustra o cabo em questão.

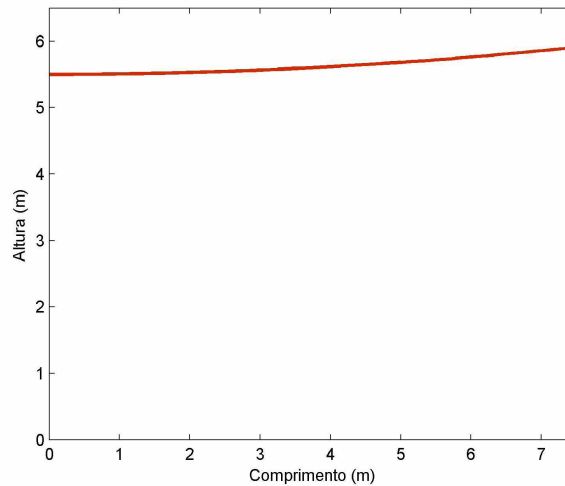


Figura 3.3: Cabo suspenso estudado.

Utilizamos um SBRF para determinar a constante elástica da mola. As variáveis de entrada do SBRF são:

- Classificação da mola medida em meses de uso (c): domínio das funções de pertinência $[0, 80]$ e os termos linguísticos são nova, seminova e velha.
- Quantidade de espiras (q): domínio das funções de pertinência $[3, 15]$ e os termos linguísticos são pequena, média e grande.

As funções de pertinências e a base de regras para as variáveis de entrada são as mesmas apresentadas na seção 2.2 do capítulo 2.

A variável de saída do SBRF é a constante k :

- Constante elástica da mola k : domínio das funções de pertinência $[1 \times 10^3, 6 \times 10^3]$, medida em Newtons por metro (N/m). Os termos linguísticos são muito pequena, pequena, média, média alta e grande. Sendo que o nível zero de cada função de pertinência correspondente aos termos linguísticos (muito pequena, pequena, média, média alta, grande) são $[1 \times 10^3, 1.7 \times 10^3]$, $[1.6 \times 10^3, 2.6 \times 10^3]$, $[2.4 \times 10^3, 3.6 \times 10^3]$, $[3.4 \times 10^3, 5.2 \times 10^3]$, $[5.05 \times 10^3, 6 \times 10^3]$, respectivamente. As funções de pertinência são trapezoidais como é mostrado na Figura 3.4.

O nível zero de cada função de pertinência da variável de saída k é determinado empiricamente com testes computacionais, para valores coerentes de k segundo o especialista da área, neste caso não temos um valor de k exato. As funções de pertinência são trapezoidais como é mostrado na Figura 3.4.

O método de inferência fuzzy utilizado é o método de Mamdani e o método de defuzzificação é o centro de gravidade.

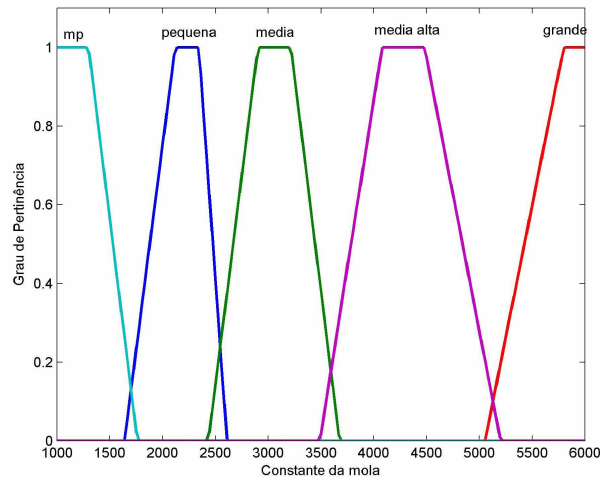


Figura 3.4: Funções de pertinência da variável de saída k .

Utilizamos o software Matlab para obtermos a solução numérica da equação (3.13). Os valores dos parâmetros da equação (3.13) e das condições de fronteira (3.16) foram calculados de acordo com a aplicação analisada e com a ajuda do especialista na área, sendo assim temos $P = 1000$, $\Delta t = 0.001s$, $\Delta x = 0.01m$ e $c = 2$. Como estamos analisando a equação do movimento livre, então como condição inicial na primeira iteração no tempo colocamos um impulso no ponto $n - 1$, da seguinte forma: $w_{n-1}^1 = 5 \times \Delta t$, sendo nos demais pontos iguais a zero.

Os gráficos das figuras a seguir foram obtidos após 2000 iterações no tempo, sendo assim, as figuras representam a posição da última iteração no tempo em cada caso. Na Figura 3.5 é representada a posição do cabo com os valores de k obtidos através do SBRF para quantidade de 3 espiras, Tabela 3.1. Na Figura 3.6 é representada a diferença em módulo obtida entre cada solução em cada instante t . Na Figura 3.7 é representada a posição do cabo com os valores de k obtidos através do SBRF para quantidade de 7 espiras, Tabela 3.1. Na Figura 3.8 é representada a diferença entre soluções como no caso anterior. Na Figura 3.9 é representada a posição do cabo com os valores de k obtidos através do SBRF para quantidade de 15 espiras, Tabela 3.1. Na Figura 3.10 é representada a diferença entre as soluções como no caso anterior.

Classificação da mola (meses de uso)	20	50	80
valor de k para 3 espiras	5.63×10^3	4.32×10^3	3.08×10^3
valor de valor de k para 7 espiras	4.33×10^3	3.13×10^3	2.15×10^3
valor de k para 15 espiras	3.03×10^3	2.16×10^3	1.27×10^3

Tabela 3.1: Valores das contantes k elásticas da mola.

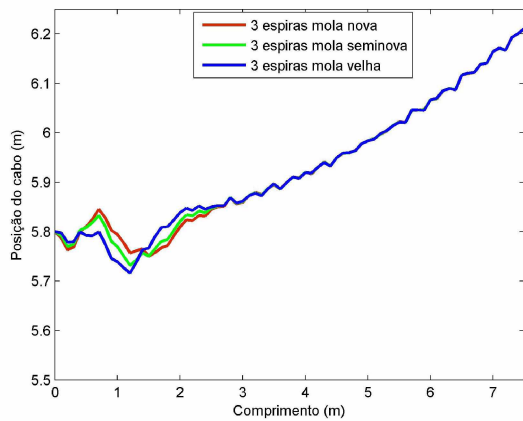


Figura 3.5: Solução numérica da equação (3.13) para os k do SBRF.

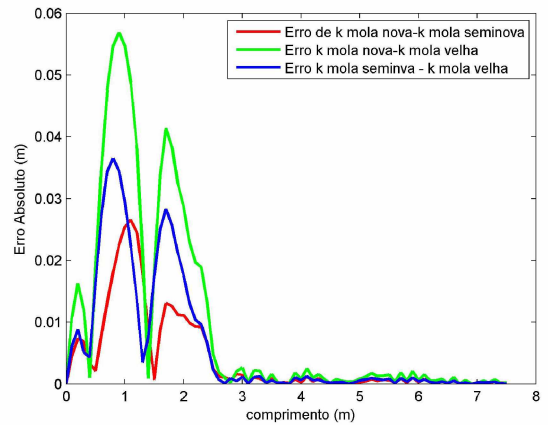


Figura 3.6: Diferenças das soluções obtidas.

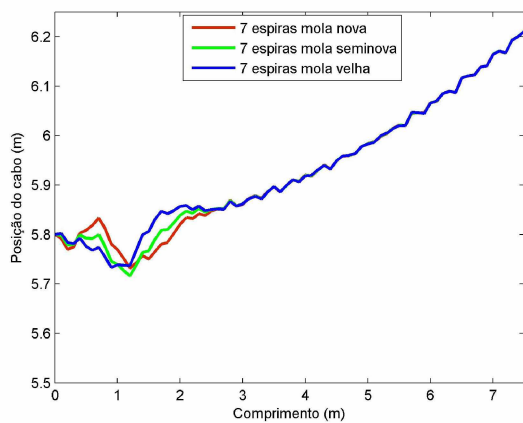


Figura 3.7: Solução numérica da equação (3.13) para os k do SBRF.

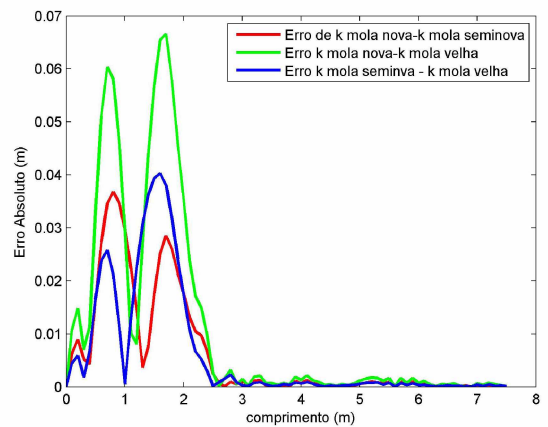


Figura 3.8: Diferença entre as soluções obtidas.

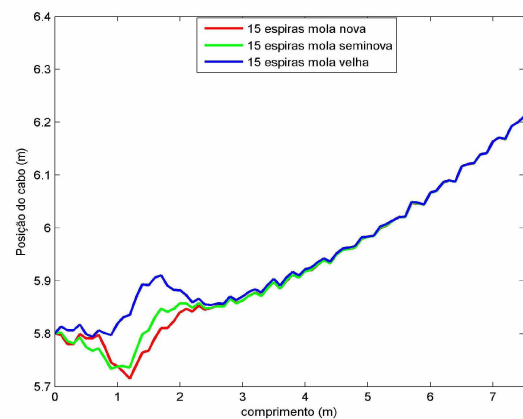


Figura 3.9: Solução numérica da equação (3.13) para os k do SBRF.

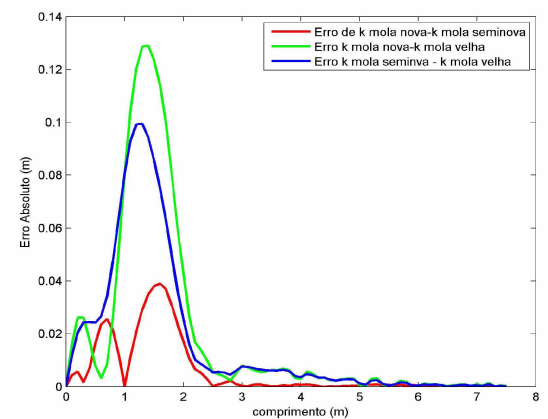


Figura 3.10: Diferenças entre as soluções obtidas.

Como podemos observar, nos gráficos das Figuras 3.5, 3.7 e 3.9 a velocidade de propagação da onda na corda com uma mola considerada nova, é mais rápida. Podemos observar esse fato através da Figura 3.11, na qual representa a propagação das ondas no cabo ao longo do tempo, para $k = 1.27 \times 10^3$ N/m, equivalente a uma mola com 3 espiras e 80 meses de uso.

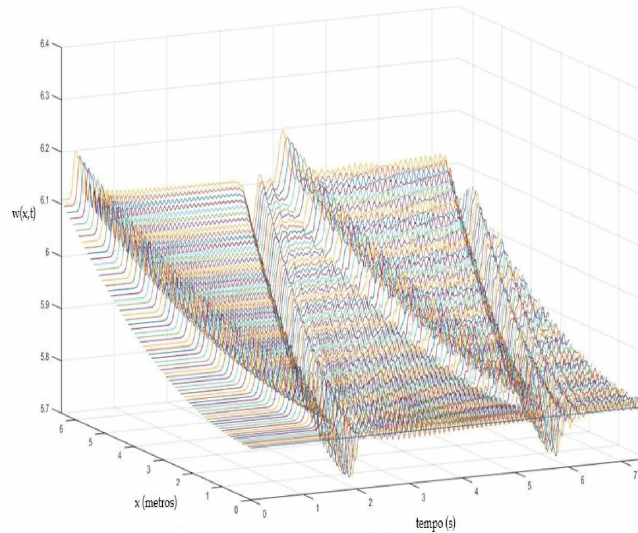


Figura 3.11: Propagação das ondas.

Para verificar a estabilidade do método utilizado, apresentamos na Figura 3.12 o gráfico da posição do cabo com 10^5 iterações no tempo para o valor de $k = 4000$. Notamos que as oscilações estão diminuindo, indicando que a resolução numérica foi realizada corretamente.

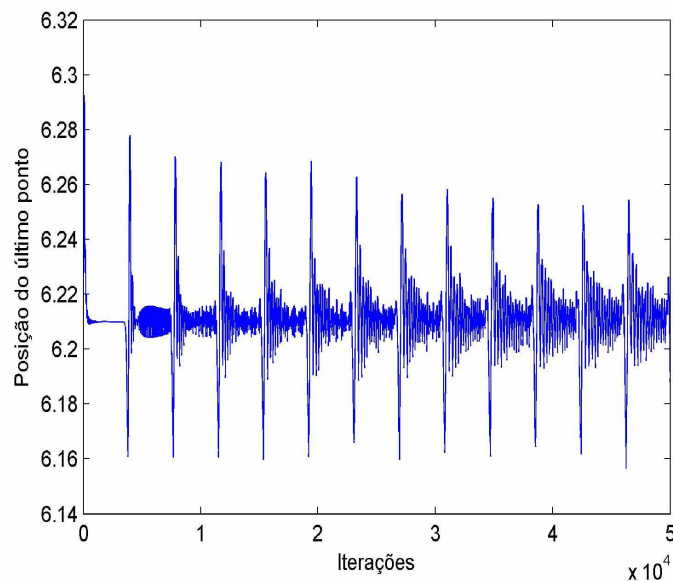


Figura 3.12: Estabilidade do método.

A seguir, apresentamos a equação de movimento para vibração de vigas.

3.3 Vibrações Laterais de Vigas

Um dos elementos mais importantes na engenharia civil são as vigas, elemento sujeito a cargas transversais. As vigas podem ser utilizadas em conjunto com pilares e lajes, para transferir os esforços verticais recebidos para o pilar [16].

3.3.1 Equação de Movimento

Considere o diagrama de corpo livre de um elemento de uma viga, que é mostrado na Figura 3.13, onde $M(x, t)$ é o momento fletor, $V(x, t)$ é a força de cisalhamento e $f(x, t)$ é a força externa por unidade de comprimento da viga.

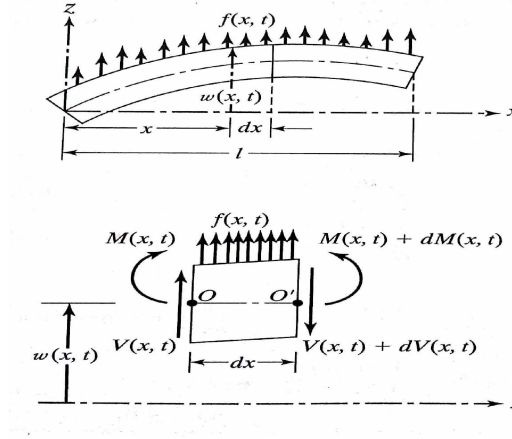


Figura 3.13: Uma viga em flexão [18].

Visto que a força de inércia que age sobre o elemento da viga é:

$$\rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t),$$

a equação de movimento da força na direção z é dada por:

$$-(V + dV) + f(x, t)dx + V = \rho A(x) dx \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t), \quad (3.20)$$

em que ρ é a densidade da massa e $A(x)$ é a área da seção transversal da viga. A equação de movimento do equilíbrio do momento em relação ao eixo y que passa pelo ponto O apresentado na Figura 3.13 é dada por:

$$(M + dM) - (V + dV)dx + f(x, y)dx \frac{dx}{2} - M = 0. \quad (3.21)$$

Escrevendo $dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx$ e $dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx$ e desconsiderando os termos que envolvem potências ao quadrado de dx , as equações (3.20) e (3.21) podem ser escritas como:

$$-\frac{\partial V}{\partial x}(x, t) + f(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial M}{\partial x}(x, t) - V(x, t) = 0. \quad (3.23)$$

Utilizando a relação da mecânica dos materiais $V = \frac{\partial M}{\partial x}$ da equação (3.23), a equação (3.22) torna-se:

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t). \quad (3.24)$$

Rão Singiresu (2008) afirma que a relação entre o momento fletor e a deflexão de vigas pode ser expressa como:

$$M(x, t) = EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t), \quad (3.25)$$

em que E é o módulo de Young e $I(x)$ é o momento de inércia da área da secção transversal da viga em relação ao eixo y . Inserindo a equação (3.25) na (3.24), obtemos a equação de movimento para a vibração lateral forçada de uma viga não uniforme:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, t) \right] + \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t). \quad (3.26)$$

Para uma viga material de seção uniforme, a equação (3.26) reduz-se a:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = f(x, t). \quad (3.27)$$

Para vibração livre, $f(x, t) = 0$ e, portanto, a equação de movimento torna-se:

$$c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x, t) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x, t) = 0, \quad (3.28)$$

em que:

$$c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}. \quad (3.29)$$

3.3.2 Condições iniciais

Devido ao fato da equação de movimento envolver uma derivada de segunda ordem em relação ao tempo e uma derivada de quarta ordem em relação a x , são necessárias duas condições iniciais e quatro condições de contorno para determinar uma solução única para $w(x, t)$. Os valores de deslocamento lateral e velocidade são especificados como $w_0(x)$ e $w_0^*(x)$ em $t = 0$, de modo que as condições iniciais são:

$$w(x, t = 0) = u_0(x) \text{ e}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(x, t = 0) = u_0^*(x).$$

3.3.3 Condições de Contorno

Consideramos a condição de contorno para uma viga ligada a molas, amortecedores e massas nas suas extremidades. Para esse caso, temos as seguintes condições:

- *Extremidade ligada à mola, amortecedor e massa:* Quando a extremidade de uma viga sofre deslocamento transversal w e uma inclinação $\frac{\partial w}{\partial x}$ com velocidade $\frac{\partial w}{\partial t}$ e aceleração $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, as forças elástica da mola, do amortecedor e de inércia são proporcionais a w , $\frac{\partial w}{\partial t}$ e $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, respectivamente. Essas forças são equilibradas pela força de cisalhamento na extremidade da viga. Assim,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = a \left[kw + c \frac{\partial w}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right], \quad (3.30)$$

em que $a = -1$ para à extremidade à esquerda e $a = +1$ para à extremidade à direita da viga, m é a massa das extremidades e k é a constante da mola. Devido aos esforços anteriormente mencionados não solicitar momentos fletores nas extremidades da viga, pode se afirmar que:

$$EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (3.31)$$

A Figura 3.14 representa uma viga ligada a molas, amortecedores e massas nas extremidades. Neste estudo consideramos $m = m_1 = m_2$, $c = c_1 = c_2$ e $k = k_1 = k_2$.

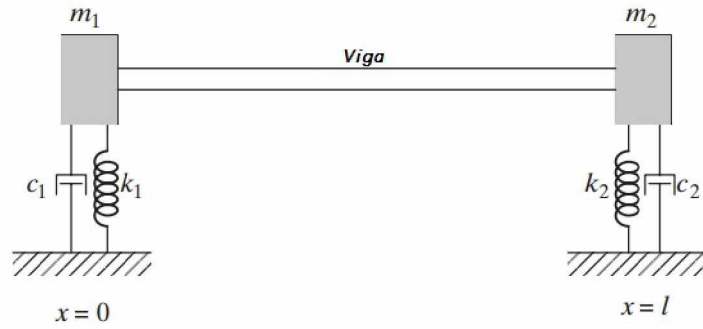


Figura 3.14: Viga ligada a molas, amortecedores e massas [18].

Na próxima seção, apresentamos a discretização da equação (3.28).

3.3.4 Discretização da Equação do Movimento

Para obter a solução numérica da equação (3.28) através do método de diferenças finitas, consideramos o intervalo de $[0, l]$ e o dividimos em $n - 1$ partes iguais, da seguinte forma: $[x_i, x_{i+1}]$ para $i = 1, \dots, n - 1$, sendo $x_1 = 0$ e $x_n = l$.

A discretização realizada na equação (3.28) é válida apenas para os pontos $i = 3$ a $i = n - 2$, ou seja, para os pontos internos da malha. Sendo assim, a discretização para os demais pontos serão realizadas utilizando outros procedimentos.

Como o foco do trabalho é resolver a equação (3.28) numericamente, então substituímos as derivadas que aparecem em (3.28) pelas aproximações (2.27) e (2.16), temos:

$$\frac{w_i^{j+1} - 2w_i^j + w_i^{j-1}}{\Delta t^2} = -c^2 \left(\frac{w_{i+2}^j + w_{i-2}^j + 6w_i^j - 4w_{i+1}^j - 4w_{i-1}^j}{\Delta x^4} \right).$$

Como o nosso objetivo é encontrar as incógnitas no próximo passo no tempo, então devemos isolar w_i^{j+1} :

$$w_i^{j+1} - 2w_i^j + w_i^{j-1} = \frac{-c^2 \Delta t^2}{\Delta x^4} (w_{i+2}^j + w_{i-2}^j + 6w_i^j - 4w_{i+1}^j - 4w_{i-1}^j),$$

seja $\lambda = \frac{-c^2 \Delta t^2}{\Delta x^4}$, então:

$$w_i^{j+1} = \lambda w_{i+2}^j + \lambda w_{i-2}^j + (6\lambda + 2)w_i^j - 4\lambda w_{i+1}^j - 4\lambda w_{i-1}^j - w_i^{j-1}. \quad (3.32)$$

OBS: O método explícito é instável para determinados valores de λ . Para garantir a sua estabilidade e resultados aceitáveis deve-se usar $\lambda < 1$ [11].

Assim, obtemos o seguinte sistema matricial:

$$W^{n+1} = AW^n - W$$

em que $A = \begin{bmatrix} \lambda & -4\lambda & 6\lambda+2 & -4\lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & -4\lambda & 6\lambda+2 & -4\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -4\lambda & 6\lambda+2 & -4\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & -4\lambda & 6\lambda+2 & -4\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & -4\lambda & 6\lambda+2 & -4\lambda \end{bmatrix}$

$$W^{n+1} = \begin{bmatrix} w_3^{j+1} \\ w_4^{j+1} \\ w_5^{j+1} \\ \vdots \\ w_{n-4}^{j+1} \\ w_{n-3}^{j+1} \end{bmatrix} \quad W^n = \begin{bmatrix} w_3^j \\ w_4^j \\ w_5^j \\ \vdots \\ w_{n-3}^j \\ w_{n-2}^j \end{bmatrix} \quad \text{e } W = \begin{bmatrix} w_3^{j-1} \\ w_4^{j-1} \\ w_4^{j-1} \\ \vdots \\ w_{n-4}^{j-1} \\ w_{n-3}^{j-1} \end{bmatrix}$$

Para os pontos da fronteira $i = 1$ e $i = n$ utilizamos a condição de contorno (3.30). Substituindo as derivadas que aparecem em (3.30) pelas aproximações (2.25), (2.15) e (2.16), obtemos para $i = 1$:

$$\frac{3w_{i+1}^j - w_i^j - 3w_{i+2}^j + w_{i+3}^j}{\Delta x^3} = \left[akw_i^j + ac \left(\frac{w_i^{j+1} - w_i^j}{\Delta t} \right) + am \left(\frac{w_i^{j+1} - 2w_i^j + w_i^{j-1}}{\Delta t^2} \right) \right] \frac{1}{EI}.$$

Como nosso interesse é encontrar o valor das incógnitas no próximo passo no tempo, devemos isolar w_i^{j+1} , da seguinte forma:

$$3w_{i+1}^j - w_i^j - 3w_{i+2}^j + w_{i+3}^j = \frac{\Delta x^3}{\Delta t^2 EI} [akw_i^j \Delta t^2 + acw_i^{j+1} \Delta t - acw_i^j \Delta t + amw_i^{j+1} - 2amw_i^j + amw_i^{j-1}].$$

tomando $\alpha = \frac{\Delta x^3}{\Delta t^2 EI}$ e fazendo algumas manipulações, obtemos:

$$\alpha acw_i^{j+1} \Delta t + \alpha amw_i^{j+1} = 3w_{i+1}^j - w_i^j - 3w_{i+2}^j + w_{i+3}^j - \alpha akw_i^j \Delta t^2 + \alpha acw_i^j \Delta t + 2\alpha amw_i^j - \alpha amw_i^{j-1}.$$

Colocando os termos que dependem do tempo w_i^{j+1} em evidência e agrupando os termos que dependem do tempo w_i^j e do tempo w_i^{j-1} , podemos escrever:

$$w_i^{j+1} (\alpha ac \Delta t + \alpha am) = w_i^j (-\alpha ak \Delta t^2 + \alpha ac \Delta t + 2\alpha am - 1) + 3w_{i+1}^j - 3w_{i+2}^j + w_{i+3}^j - \alpha amw_i^{j-1}.$$

Assim:

$$w_i^{j+1} = \frac{w_i^j (-\alpha ak \Delta t^2 + \alpha ac \Delta t + 2\alpha am - 1) + 3w_{i+1}^j - 3w_{i+2}^j + w_{i+3}^j - \alpha amw_i^{j-1}}{\alpha ac \Delta t + \alpha am}. \quad (3.33)$$

A expressão (3.33) é uma aproximação válida apenas para o primeiro ponto. Portanto:

- Para $i = 1$, temos a seguinte aproximação:

$$w_1^{j+1} = \frac{w_1^j (-\alpha ak \Delta t^2 + \alpha ac \Delta t + 2\alpha am - 1) + 3w_2^j - 3w_3^j + w_4^j - \alpha am w_1^{j-1}}{\alpha ac \Delta t + \alpha am}. \quad (3.34)$$

Para obter a aproximação para o último ponto será realizado o mesmo procedimento, utilizando as aproximações (2.23), (2.15) e (2.16), logo:

$$\frac{3w_{i-2}^j + w_i^j - 3w_{i-1}^j + w_{i-3}^j}{\Delta x^3} = \left[akw_i^j + ac \left(\frac{w^{j+1} - w_i^j}{\Delta t} \right) + am \left(\frac{w_i^{j+1} - 2w_i^j + w_i^{j-1}}{\Delta t^2} \right) \right] \frac{1}{EI}.$$

tomando $\alpha = \frac{\Delta x^3}{\Delta t^2 EI}$ e fazendo novamente algumas manipulações, temos:

$$\alpha ac w_i^{j+1} \Delta t + \alpha am w_i^{j+1} = 3w_{i-2}^j + w_i^j - 3w_{i-1}^j - w_{i-3}^j - \alpha ak w_i^j \Delta t^2 + \alpha ac w_i^j \Delta t + 2\alpha am w_i^j - \alpha am w_i^{j-1}.$$

Como nosso foco é encontrar o valor das incógnitas no próximo passo no tempo, devemos isolar w_i^{j+1} :

$$w_i^{j+1} (\alpha ac \Delta t + \alpha am) = w_i^j (-\alpha ak \Delta t^2 + \alpha ac \Delta t + 2\alpha am + 1) + 3w_{i-2}^j - 3w_{i-1}^j - w_{i-3}^j - \alpha am w_i^{j-1}.$$

Assim,

$$w_i^{j+1} = \frac{w_i^j (-\alpha ak \Delta t^2 + \alpha ac \Delta t + 2\alpha am + 1) + 3w_{i-2}^j - 3w_{i-1}^j - w_{i-3}^j - \alpha am w_i^{j-1}}{\alpha ac \Delta t + \alpha am}. \quad (3.35)$$

A expressão (3.35) é uma aproximação válida apenas para o ponto $i = n$. Assim:

- Para $i = n$, temos a seguinte aproximação:

$$w_n^{j+1} = \frac{w_n^j (-\alpha ak \Delta t^2 + \alpha ac \Delta t + 2\alpha am + 1) + 3w_{n-2}^j - 3w_{n-1}^j - w_{n-3}^j - \alpha am w_n^{j-1}}{\alpha ac \Delta t + \alpha am}. \quad (3.36)$$

As aproximações para o ponto $i = 2$ e $i = n - 1$ foram obtidas utilizando a condição de contorno (3.31) combinada com a discretização para os pontos $i = 1$, $i = 3$, $i = n$ e $i = n - 2$, respectivamente.

Substituindo a derivada por aproximações (2.21) em (3.31), temos:

$$\frac{w_{i+2}^j - 2w_{i+1}^j + w_i^j}{\Delta x^2} = 0.$$

Isolando w_{i+2}^j e tomando $i = 1$, temos:

$$w_2^{j+1} = \frac{1}{2}w_1^{j+1} + \frac{1}{2}w_3^{j+1}. \quad (3.37)$$

Da equação (3.32) sabemos que:

$$w_3^{j+1} = \lambda w_5^j + \lambda w_1^j + (6\lambda + 2)w_3^j - 4\lambda w_4^j - 4\lambda w_2^j - w_3^{j-1}. \quad (3.38)$$

Assim, tomando $q = -\alpha ak \Delta t^2 + \alpha ac \Delta t + 2\alpha am - 1$ e $y = \alpha ac \Delta t + \alpha am$ na equação (3.34) e substituindo (3.38) e (3.34) em (3.37) temos:

- Para $i = 2$ a seguinte aproximação:

$$\begin{aligned}
w_2^{j+1} &= \left(\frac{q}{2y} + \frac{\lambda}{2} \right) w_1^j + \left(\frac{3}{2y} - 2\lambda \right) w_2^j + \left(\frac{-3}{2y} + \frac{(6\lambda + 2)}{2} \right) w_3^j + \left(\frac{1}{2y} - 2\lambda \right) w_4^j \\
&+ \frac{\lambda}{2} w_5^j - \frac{\alpha am}{2} w_1^{j-1} \frac{w_3^{j-1}}{2}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

De forma similar, substituindo a derivada pela aproximação (2.22) em (3.31) temos:

$$\frac{w_i^j - 2w_{i-1}^j + w_{i-2}^j}{\Delta x^2} = 0$$

Isolando w_{n-1}^{j+1} e substituindo $i = n$, temos:

$$w_{n-1}^{j+1} = \frac{1}{2} w_n^{j+1} + \frac{1}{2} w_{n-2}^{j+1}. \tag{3.40}$$

Da equação (3.32), sabemos que:

$$w_{n-2}^{j+1} = \lambda w_n^j + \lambda w_{n-4}^j + (6\lambda + 2) w_{n-2}^j - 4\lambda w_{n-1}^j - 4\lambda w_{n-3}^j - w_{n-2}^{j-1}. \tag{3.41}$$

Assim, tomando $s = -\alpha ak \Delta t^2 + \alpha ac \Delta t + 2\alpha am + 1$ e $y = \alpha ac \Delta t + \alpha am$ na equação (3.36), e substituindo (3.41) e (3.36) em (3.40), temos:

- Para $i = n - 1$ a seguinte aproximação:

$$\begin{aligned}
w_{n-1}^{j+1} &= \left(\frac{s}{2y} + \frac{\lambda}{2} \right) w_n^j + \left(\frac{3}{2y} - 2\lambda \right) w_{n-1}^j + \left(\frac{3}{2y} + \frac{(6\lambda + 2)}{2} \right) w_{n-2}^j + \left(\frac{-1}{2y} - 2\lambda \right) w_{n-3}^j \\
&+ \frac{\lambda}{2} w_{n-4}^j - \frac{\alpha am}{2y} w_n^{j-1} - \frac{w_n^{j-1} - 2}{2}.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

Apresentamos a seguir, a solução numérica determinística da equação (3.28), utilizando a discretização realizada.

3.4 Modelo Determinístico para Vibrações de Vigas

Consideramos o modelo de viga neste caso como sendo o chassi de um carro, como é mostrado na Figura 3.15.

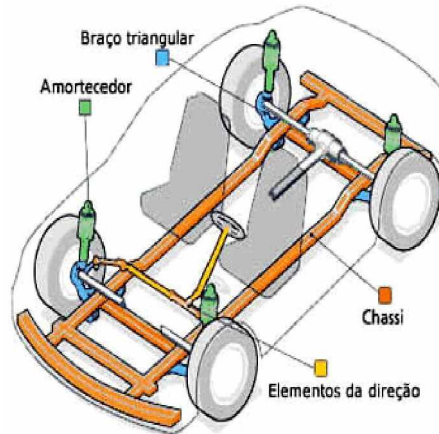


Figura 3.15: Modelo de viga [3].

O chassi é a estrutura que sustenta a máquina e é composto, geralmente, de duas vigas de aço que ficam ao longo de todo o veículo. Tais vigas são chamadas longarinas e são unidas por vigas transversais, chamadas travessas, que se apoiam sobre os eixos dianteiros e traseiros das rodas [3]. Utilizamos o software Matlab para obtermos a solução numérica da equação (3.28) através das discretizações da seção anterior. Os valores dos parâmetros são $c = 3.14$, $k = 1.6607 \times 10^6$ N/m determinísticos para quantidade de sete espiras, $\Delta t = 1 \times 10^{-6}$, $\Delta x = 0.01m$, $EI = 2800N/m^2$ e $m = m_1 = m_2 = 590kg$. Tais valores foram calculados de acordo com a aplicação analisada e com a ajuda do especialista na área. Como estamos analisando o movimento livre, colocamos como condição inicial na primeira iteração um impulso para o ponto $\left(\frac{n+1}{2}\right)$, da seguinte forma: $w_{\frac{n+1}{2}}^1 = 4 \times \Delta t$, sendo nos demais pontos iguais a zero.

A Figura 3.16 representa o deslocamento da viga após 200 iterações no tempo, a Figura 3.17 representa a propagação das ondas na viga ao longo do tempo, para $k = 1.2917 \times 10^6$ N/m determinístico para a quantidade 9 espiras. $k = 1.2917 \times 10^6$ N/m.

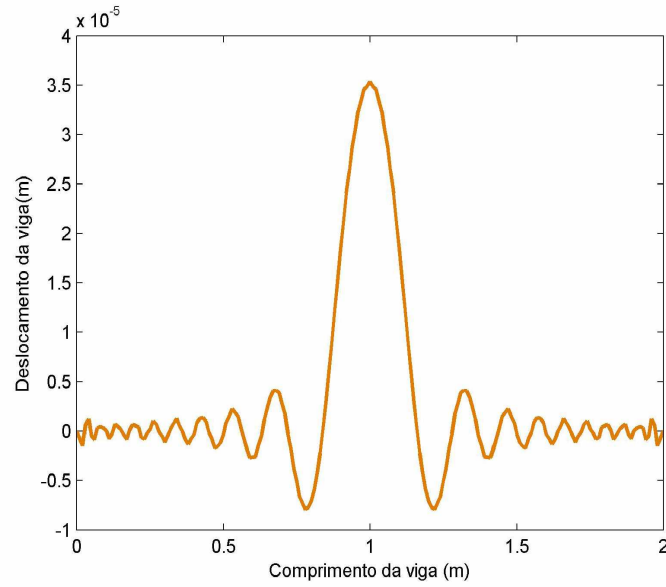


Figura 3.16: Solução numérica da equação (3.28) para $k = 1.6607 \times 10^6$ N/m.

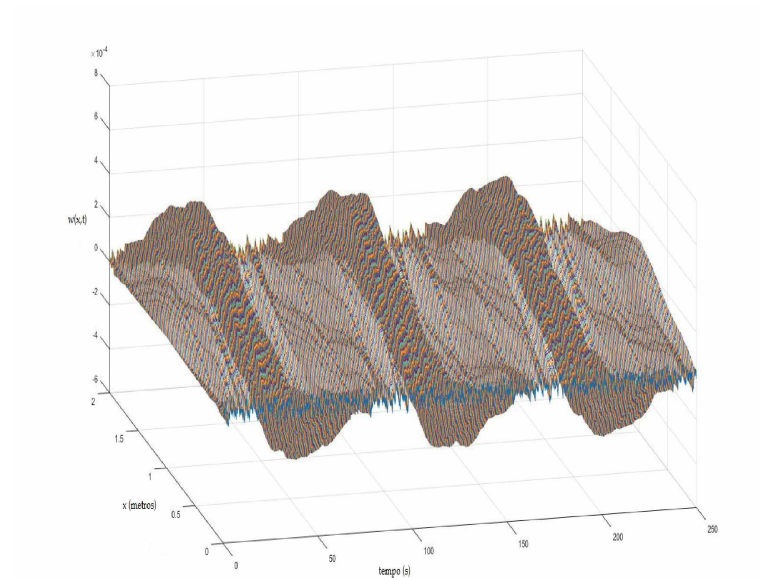


Figura 3.17: Propagação das ondas na viga.

Para verificar a estabilidade do método utilizado para a discretização do problema, apresentamos o deslocamento da viga com 10^5 iterações no tempo para o último ponto ($x = n$), Figura 3.18. Observe que as oscilações não divergem no tempo.

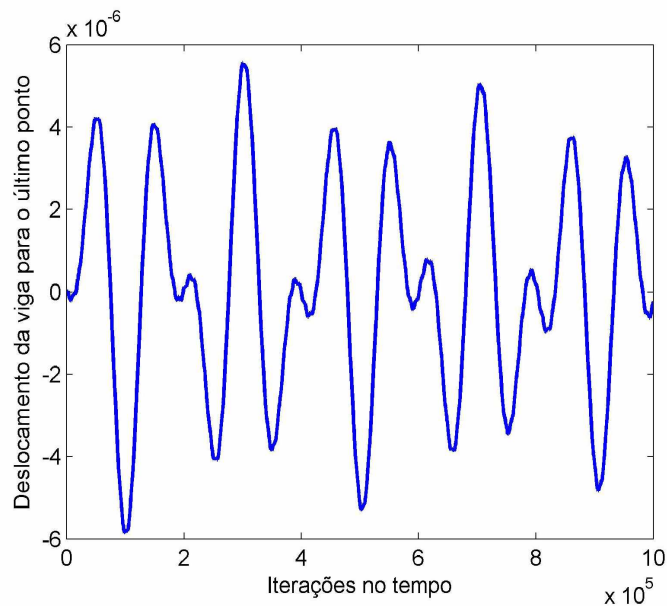


Figura 3.18: Estabilidade do método.

Apresentamos na próxima seção, um modelo fuzzy para a vibrações de vigas.

3.4.1 Modelo Fuzzy para Vibrações de Vigas

Através da condição de contorno (3.31), modelamos a constante elástica k da mola de um veículo, considerando também o modelo de viga como sendo o chassi de um carro.

As variáveis de entrada do SBRF são:

- Classificação da mola medida em quilômetros rodados, (c): domínio das funções de pertinência $[0, 80]$, os termos linguísticos são nova, seminova e velha.

- Quantidade de espiras (q): domínio das funções de pertinência $[3, 15]$, os termos linguísticos são pequena, média e grande.

A variável de saída do SBRF é a constante k :

- Constante elástica da mola k : domínio das funções de pertinência $[0.775 \times 10^6, 3.8750 \times 10^6]$, medida em Newtons por metros. Os termos linguísticos são muito pequena, pequena, média, média alta e grande.

As funções de pertinências e a base de regras para as variáveis de entrada e de saída são as mesmas apresentadas na seção 2.2 do capítulo 2.

Utilizamos o software Matlab para obtermos a solução numérica da equação (3.28), os valores dos parâmetros são os mesmos apresentados na seção 3.4.

Os valores determinísticos dos k e valores dos k obtidos através do SBRF são os mesmos da tabela do capítulo 2. Na Figura 3.19 são representados os deslocamentos da viga com os valores de k obtidos através do SBRF e $k = 3.8750 \times 10^6$ N/m para quantidade de 3 espiras, Tabela 2.1. Na Figura 3.20 são representados o erro absoluto entre os valores de k obtidos pelo SBRF e o $k = 3.8750 \times 10^6$ N/m. Na Figura 3.21 são representados os deslocamentos da viga com os valores de k obtidos através do SBRF e $k = 1.6607 \times 10^6$ N/m para 7 espiras, Tabela 2.2. Na Figura 3.22 são representados o erro absoluto entre os k obtidos pelo SBRF e $k = 1.6607 \times 10^6$ N/m. Na Figura 3.23 são representados os diferentes deslocamentos da viga com os valores de k obtidos através do SBRF, e $k = 1.1825 \times 10^6$ N/m para a quantidade de 15 espiras, Tabela 2.3. Na Figura 3.24 são representados o erro absoluto entre os k obtidos através do SBRF e o $k = 1.1825 \times 10^6$ N/m.

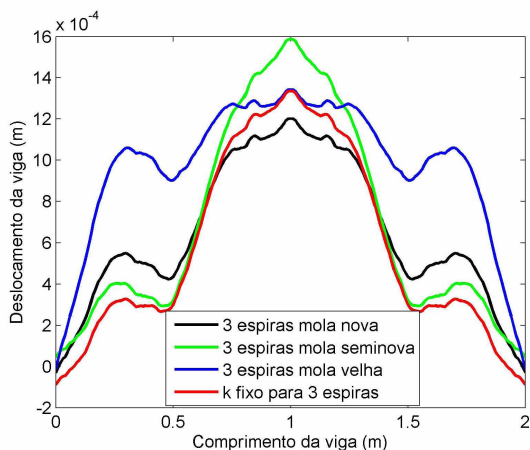


Figura 3.19: Solução numérica da equação (3.28) para os k do SBRF.

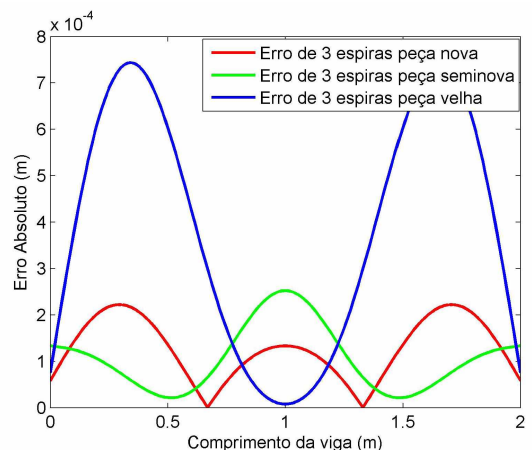


Figura 3.20: Erro Absoluto entre os k do SBRF e $k = 3.8750 \times 10^6$ N/m.

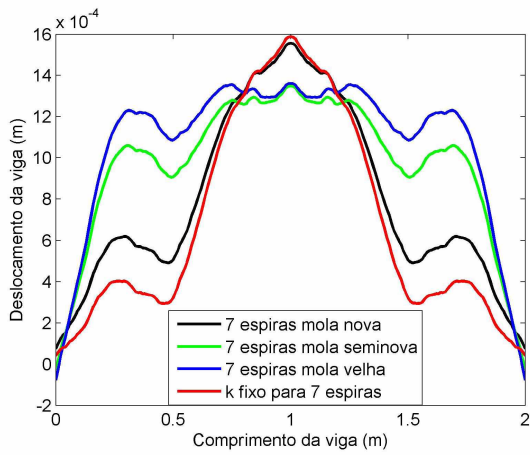


Figura 3.21: Solução numérica da equação (3.28) para os k do SBRF.

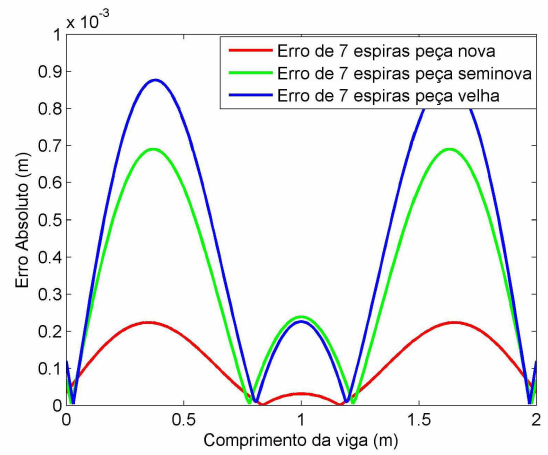


Figura 3.22: Erro Absoluto entre os k do SBRF e $k = 1.6607 \times 10^6$ N/m.

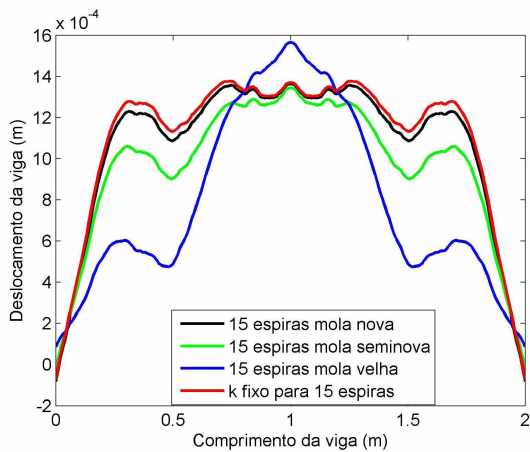


Figura 3.23: Solução numérica da equação (3.28) para os k do SBRF.

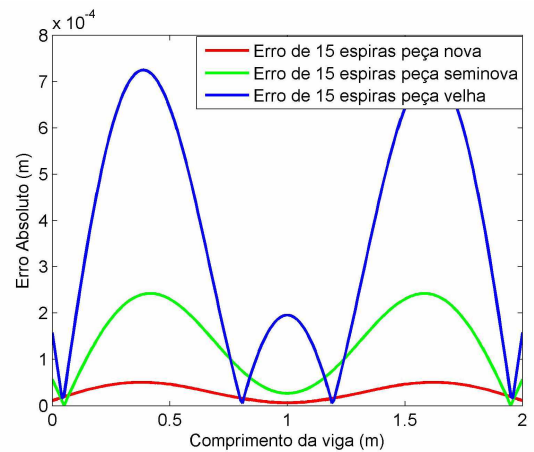


Figura 3.24: Erro Absoluto entre os k do SBRF e $k = 1.1825 \times 10^6$ N/m.

Observamos os diferentes deslocamentos da viga, com a influência da classificação da mola agindo no sistema, visto que estamos considerando 2×10^6 iterações em cada caso.

3.5 Algumas Considerações

Neste capítulo apresentamos duas aplicações de problemas práticos, sendo a primeira de um cabo suspenso utilizado em redes elétricas, e o segundo de uma viga simulando o chassi de um veículo. Modelamos a constante k de uma mola para os dois casos, levando em consideração em ambos os casos a classificação da mola através de um SBRF.

No problema do cabo suspenso percebemos que o erro absoluto entre o gráfico com uma mola nova e o gráfico com uma mola velha é maior. Notamos também que a rigidez da mola altera a velocidade de propagação da onda na corda. Para a mola nova (rigidez maior) a onda foi refletida na extremidade esquerda do cabo, e está se deslocando para a extremidade direita. Ao analisar o comportamento da onda para mola velha, observa-se que a mesma ainda não atingiu a extremidade esquerda do cabo.

No caso da viga simulando o chassi de um veículo, comparamos o deslocamento da viga para k determinístico e para os k do SBRF. Notamos que para o maior valor de k , com uma mola nova de 3 espiras, Figura 3.19 o deslocamento da viga apresenta frequências diferentes em relação ao deslocamento com uma mola seminova ou velha, Figuras 3.21 e 3.23. Observamos que

a quantidade de espiras influencia fortemente no deslocamento da viga e no seu comportamento. Notamos também que em todos os casos, quando temos uma mola velha, devido ao fato da perda de sua rigidez, a viga apresenta uma dificuldade maior em completar seu deslocamento, influenciando diretamente no deslocamento do veículo.

A fórmula analítica que nos dá o valor exato da constante elástica de uma mola não leva em consideração o tempo de uso da mesma. Utilizar a teoria de conjuntos fuzzy nessa aplicação é uma vantagem, pois a classificação de uma mola é uma questão nem sempre levada em consideração.

No próximo capítulo estudamos o método dos elementos finitos unidimensional e bidimensional, a fim de trabalhar com problemas dinâmicos regidos pela equação da onda em estruturas planas que envolvem malhas irregulares.

Capítulo 4

Método dos Elementos Finitos Unidimensional e Bidimensional

O Método de Elementos Finitos (MEF) é conhecido por ser aplicável em domínios mais elaborados, ou seja, domínios irregulares. A ideia do MEF é discretizar o domínio, representando-o, ainda que de forma aproximada, por uma região com um número finito de elementos, e resolver, no lugar do problema original, o problema que lhe é associado, que chamamos de formulação fraca. Este capítulo é baseado em Johnson (2012) e em Borges (2016).

4.1 Formulação Fraca do Problema Unidimensional

Considere o problema de Dirichlet homogêneo unidimensional:

$$\begin{cases} -u'' = f(x), & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

no qual $u'' = \frac{d^2u}{dx^2}$ e f é uma função contínua qualquer. Ao invés de resolver (4.1), o MEF propõe a solução de um problema equivalente, chamado de formulação fraca do original. Assim, encontraremos a solução u da equação (4.1) que denotamos por (S) que é também a solução do problema de minimização (M) e do problema variacional (PV) , relacionados à formulação fraca que será definida a seguir.

Enunciaremos algumas definições e afirmações da teoria geral.

Definição 4.1. Se V é um espaço vetorial, então dizemos que $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **forma linear** em V , se verificar:

$$L(\beta v + \theta w) = \beta L(v) + \theta L(w) \text{ para todo } \beta, \theta \in \mathbb{R}, v, w \in V.$$

A forma bilinear será denotada como $a(\cdot, \cdot)$. Ainda mais, dizemos que uma função $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **forma bilinear**, definida em V se verificar:

$$a(u, \beta v + \theta w) = \beta a(u, v) + \theta a(u, w), \text{ para todo } \beta, \theta \in \mathbb{R}, v, w \in V$$

e

$$a(\beta u + \theta v, w) = \beta a(u, w) + \theta a(v, w), \text{ para todo } \beta, \theta \in \mathbb{R}, v, w \in V.$$

A forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ definida em V é dita **simétrica** se:

$$a(v, w) = a(w, v), \text{ para todo } v, w \in V.$$

A forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ definida em V diz-se ser *definida positiva* sobre V se verificar que

$$a(v, v) > 0, \text{ para todo } v \in V, v \neq 0.$$

Quando em um espaço vetorial se define uma forma bilinear simétrica e definida positiva, então o espaço é dito **espaço vetorial normado**, com a norma $\|\cdot\|_a$ induzida por a :

$$\|v\|_a = (a(v, v))^{\frac{1}{2}}, \text{ para todo } v \in V.$$

Denotamos a forma bilinear, simétrica e definida positiva como (\cdot, \cdot) , chamado de **produto interno** definido em V , com a correspondente norma induzida $\|\cdot\|$. O espaço vetorial é também um espaço normado com norma induzida.

Observação 4.1. *temos que:*

$$(v, w) = \int_0^1 v(x)w(x) dx$$

é um produto interno no espaço vetorial \mathbb{F} , das funções contínuas e limitadas em $[0, 1]$.

Definição 4.2. *Definimos o subespaço vetorial de \mathbb{F} :*

$V = \{v : v \in C[0, 1], v' \text{ (derivada de } v) \text{ é uma função contínua por partes e limitada em } [0, 1], v(0) = v(1)\}$

Definição 4.3. *Definimos o funcional $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ dado por:*

$$F(v) = \frac{1}{2}(v', v') - \int_0^1 f v dx.$$

Consideramos os seguintes problemas:

- Problema de Minimização (M): encontrar $u \in V$ tal que $F(u) \leq F(v)$ para todo $v \in V$;
- Problema Variacional (PV): encontrar $u \in V$ tal que $(u', v') = \int_0^1 f v dx$ para todo $v \in V$.

O (PV) é obtido multiplicando (4.1) por uma função qualquer de V e integrando em $[0, 1]$, ou seja:

$$-\int_0^1 \frac{d^2 u}{dx^2} v dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx. \quad (4.2)$$

Resolvendo o primeiro membro da igualdade (4.2), usando integração por partes, temos que:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)v(x) dx &= -\int_0^1 \frac{d^2 u}{dx^2} v dx \\ &= -\left(\left[v(x) \frac{du(x)}{dx} \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx \right) \\ &= -\left(v(1) \frac{du(1)}{dx} - v(0) \frac{du(0)}{dx} - \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx \right) \\ &= \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx. \end{aligned}$$

Assim temos que:

$$\int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx, \forall v \in V. \quad (4.3)$$

A equação (4.3) juntamente com a condição de Dirichlet homogênea é a formulação fraca do problema.

Teorema 4.1. $(S) \Leftrightarrow (PV) \Leftrightarrow (M)$, isto é, a solução da equação diferencial é equivalente à solução da formulação variacional e são equivalentes à solução do problema de minimização.

Demonstração. $(S) \Rightarrow (PV)$.

Seja u solução de (D) , ou seja: $-u'' = f$.

Considere $v \in V$, multiplicando (D) por v e integrando, obtemos:

$$-\int_0^1 u''v = \int_0^1 fv.$$

Utilizando a técnica de integração por partes, obtemos:

$$-u'v|_0^1 + \int_0^1 u'v' = \int_0^1 fv.$$

Portanto:

$$(u', v')_V = \int_0^1 fv \, dx, \text{ para todo } v \in V.$$

$(PV) \Rightarrow (S)$. De fato, se $u \in V$ é solução do (PV) então

$$(u', v') = \int_0^1 fv \, dx, \text{ para todo } v \in V. \quad (4.4)$$

Supondo que:

$$u \in C^2(I) = \{ \text{funções duas vezes continuamente diferenciáveis} \}, \quad (4.5)$$

de (4.4), obtemos:

$$0 = \int_0^1 u'v' - \int_0^1 fv = u'v|_0^1 - \int_0^1 u''v - \int_0^1 fv,$$

de onde $\int_0^1 (u'' + f)v = 0$, para todo $v \in V$, concluindo que $u'' + f = 0 \Rightarrow -u'' = f$.

$(PV) \Rightarrow (M)$.

Seja $u \in V$ solução de (PV) . Assim, $(u', v') = \int_0^1 fv \, dx$, para todo $v \in V$.

Seja $v \in V$ qualquer e $w = v - u$, ou seja $w \in V$ e $v = u + w$. Então:

$$\begin{aligned} F(v) &= F(u + w) \\ &= \frac{1}{2} \|(u + w)'\|^2 - \int_0^1 f(u + w) \, dx \\ &= \frac{1}{2} (u' + w', u' + w') - \int_0^1 fu \, dx - \int_0^1 fw \, dx \\ &= \frac{1}{2} \|u'\|^2 - \int_0^1 fu \, dx + (u', w') - \int_0^1 fw \, dx + \frac{1}{2} \|w'\|^2 \\ &= F(u) + \frac{1}{2} \|w'\|^2 \geq F(u), \forall w. \end{aligned} \quad (4.6)$$

pois u é solução de (PV) , ou seja, $(u', w') - \int_0^1 fw \, dx = 0$.

$$(M) \Rightarrow (PV).$$

Seja $u \in V$ solução de (M) , assim:

$$F(u) \leq F(v), \text{ para todo } v \in V. \quad (4.7)$$

Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{aligned} g(\varepsilon) &= F(u + \varepsilon v) \\ &= \frac{1}{2} \|u' + \varepsilon v'\|^2 - \int_0^1 f(u + \varepsilon v) dx \\ &= \frac{1}{2} \|u'\|^2 + \varepsilon(u', v') + \frac{\varepsilon^2}{2} \|v'\|^2 - \varepsilon \int_0^1 f v dx - \int_0^1 f u dx. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Por (4.7) e (4.8), segue que $g(0) = F(u) \leq g(\varepsilon)$, $\forall \varepsilon$. Portanto g possui mínimo em $\varepsilon = 0$. Assim:

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(\varepsilon) - g(0)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (u', v') + \frac{\varepsilon}{2} \|v'\|^2 - \int_0^1 f v dx \\ &= (u', v') - \int_0^1 f v dx. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Segue que $g'(0) = 0 = (u', v') - \int_0^1 f v dx$ para todo v em V , isto é, $(u', v') = \int_0^1 f v dx$, para todo $v \in V$. Portanto, u é solução de (PV) .

Note que se $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ com $\dim(V) = \infty$, definimos a Derivada de Gateaux de F como sendo:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(u + \varepsilon v) - F(u)}{\varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial v}(u).$$

Assim, se existir $u \in V$, $F(u) \leq F(v)$, para todo $v \in V$, e $\frac{\partial F}{\partial v}(u)$, para todo v , então $\frac{\partial F}{\partial v}(u) = 0$. \square

4.1.1 Método de Galerkin para o Caso Unidimensional

Definição 4.4. Considere o espaço vetorial V_h de dimensão finita, subespaço de V , definido da seguinte forma:

Seja $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_M < x_{M+1} = 1$ uma partição do intervalo $(0,1)$, $I_j = (x_{j-1}, x_j)$ e $h_j = x_j - x_{j-1}$ e $h = \max h_j$, então :

$$V_h = \{v | v \text{ é contínua em } [0,1] \text{ e } v(0) = v(1) = 0, v|_{I_j} \text{ é linear para todo } j\}. \quad (4.10)$$

Suponha que u seja solução de (PV) em V . Então temos que $(u', v') = \int_0^1 f v dx$, para todo $v \in V$. Assim, dado $v_h \in V_h$ temos que:

$$(u', v'_h) = \int_0^1 f v_h dx.$$

Observação 4.2. Quando usamos o espaço vetorial V_h definido em (4.10), o problema variacional $(PV)_h$ é conhecido como Método de Galerkin. Da mesma maneira $(M)_h$, problema de minimização em V_h é conhecido como Método de Ritz.

Pelos mesmos argumentos, temos $(PV)_h \Leftrightarrow (M)_h$, o que identifica o Método de Ritz-Galerkin.

Ao discretizarmos o espaço V , o aproximamos pelo espaço V_h . Se $v \in V_h$ temos que, v é uma função linear em cada intervalo da partição P_h , assim as funções φ , definidas por:

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{h_j}; & \text{se } x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{x_{j+1} - x}{h_{j+1}}; & \text{se } x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0; & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (4.11)$$

formam uma base para V_h .

A Figura 4.1 ilustra as funções φ de uma partição P_h .

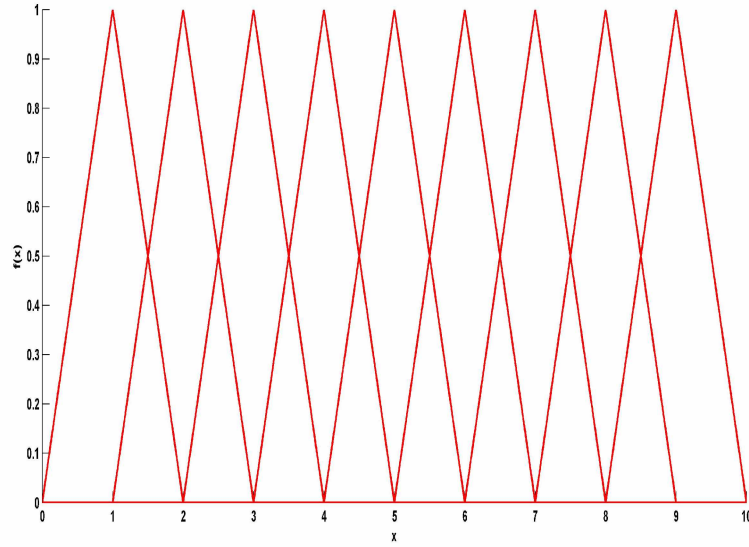


Figura 4.1: Partição P_h .

Observação 4.3. O conjunto $\{\varphi_j\}_{j=1}^M$ é uma base de V_h . Dado $v \in V_h$ tem-se que existe uma única representação do vetor v da forma:

$$v(x) = \sum_{i=1}^M \eta_i \varphi_i(x), \quad \forall x \in [0, 1],$$

onde $\eta_i = v(x_i)$. Assim, $\dim(V_h) = M$. Ao escolher um v qualquer de V_h , isto corresponde a escolher $v = \varphi_j$ com $j = 1, 2, \dots, M$ e vale:

$$(u'_h, \varphi'_j) = \int_0^1 f \varphi_j dx, \quad \forall j = 1, \dots, M.$$

Suponha que

$$u_h = \sum_{i=1}^M \xi_i \varphi_i(x), \quad \xi_i = u_h(x_i),$$

então:

$$\left(\sum_{i=1}^M \xi_i \varphi'_i(x), \varphi'_j(x) \right) = \int_0^1 f \varphi_j dx, \quad \forall j.$$

Portanto obtemos o seguinte sistema linear de equações:

$$\begin{pmatrix} (\varphi'_1, \varphi'_1) & (\varphi'_2, \varphi'_1) & \cdots & (\varphi'_M, \varphi'_1) \\ (\varphi'_1, \varphi'_2) & (\varphi'_2, \varphi'_2) & \cdots & (\varphi'_M, \varphi'_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi'_1, \varphi'_M) & (\varphi'_2, \varphi'_M) & \cdots & (\varphi'_M, \varphi'_M) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 f \varphi_1 dx \\ \int_0^1 f \varphi_2 dx \\ \vdots \\ \int_0^1 f \varphi_M dx \end{pmatrix}$$

Definindo $a_{ij} = (\varphi'_j, \varphi'_i) = (\varphi'_i, \varphi'_j) = a_{ji}$, obtemos a matriz quadrada $M \times M$, $A = (a_{ij})$, chamada de rigidez. O vetor $b_j = \int_0^1 f \varphi_j dx$ é chamado de vetor de carga. Pela definição de produto interno, obtemos a matriz de rigidez da seguinte maneira:

$$A = \begin{bmatrix} \int_0^1 \frac{d\varphi_1}{dx} \frac{d\varphi_1}{dx} dx & \int_0^1 \frac{d\varphi_2}{dx} \frac{d\varphi_1}{dx} dx & \cdots & \int_0^1 \frac{d\varphi_M}{dx} \frac{d\varphi_1}{dx} dx \\ \int_0^1 \frac{d\varphi_1}{dx} \frac{d\varphi_2}{dx} dx & \int_0^1 \frac{d\varphi_2}{dx} \frac{d\varphi_2}{dx} dx & \cdots & \int_0^1 \frac{d\varphi_M}{dx} \frac{d\varphi_2}{dx} dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \frac{d\varphi_1}{dx} \frac{d\varphi_M}{dx} dx & \int_0^1 \frac{d\varphi_2}{dx} \frac{d\varphi_M}{dx} dx & \cdots & \int_0^1 \frac{d\varphi_M}{dx} \frac{d\varphi_M}{dx} dx \end{bmatrix}.$$

O sistema linear resultante é:

$$A\xi = b. \quad (4.12)$$

Proposição 4.1. *A matriz A possui as seguintes propriedades:*

P1) é simétrica;

P2) é tridiagonal;

P3) é positiva definida, isto é, $w^t A w > 0$, $\forall w$ não nulo em \mathbb{R}^M .

Demonstração. P1) é consequência da comutatividade do produto das funções:

$$a_{ij} = \int_0^1 \frac{d\varphi_j}{dx} \frac{d\varphi_i}{dx} dx = \int_0^1 \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} dx = a_{ji}.$$

P2) Calculando os elementos a_{ij} mostramos que a matriz A é tridiagonal. Assim, utilizamos as derivadas das funções φ_j definidas em (4.11).

$$\varphi'_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_i}; & \text{se } x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{-1}{h_{i+1}}; & \text{se } x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0; & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim se $i = j$ temos:

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \int_0^1 \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_i}{dx} dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_i}{dx} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_i}{dx} dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h_i} \frac{1}{h_i} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{-1}{h_{i+1}} \frac{-1}{h_{i+1}} dx \\ &= \frac{1}{h_i^2} (x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{h_{i+1}^2} (x_{i+1} - x_i) \\ &= \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}. \end{aligned}$$

Se $i \neq j$, que acontece quando $j = i - 1$ ou $j = i + 1$, temos:

$$\begin{aligned}
 a_{i,i-1} &= a_{i-1,i} \\
 &= \int_0^1 \frac{d\varphi_{i-1}}{dx} \frac{d\varphi_i}{dx} dx \\
 &= \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} \frac{d\varphi_{i-1}}{dx} \frac{d\varphi_i}{dx} dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{d\varphi_{i-1}}{dx} \frac{d\varphi_i}{dx} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\varphi_{i-1}}{dx} \frac{d\varphi_i}{dx} dx \\
 &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{d\varphi_{i-1}}{dx} \frac{d\varphi_i}{dx} dx \\
 &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{-1}{h_i} \frac{1}{h_i} dx \\
 &= -\frac{(x_i - x_{i-1})}{h_i^2} = -\frac{1}{h_i}.
 \end{aligned}$$

Finalmente, se $i \neq j$ por mais de uma unidade, temos que $a_{i,j} = 0$. Concluimos assim que apenas os termos das formas, $a_{i,i}$, $a_{i,i+1}$ e $a_{i,i-1}$ são não nulos. Logo, a matriz de rigidez A é tridiagonal.

P3) Dado $w \in V_h$, temos que:

$$\begin{aligned}
 w^t A w &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M w_j \left(\int_0^1 \frac{d\varphi_j}{dx} \frac{d\varphi_i}{dx} dx \right) w_i \\
 &= \int_0^1 \left[\left(\sum_{j=1}^M w_j \frac{d\varphi_j}{dx} \right) \left(\sum_{i=1}^M w_i \frac{d\varphi_i}{dx} \right) \right] dx \\
 &= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^M w_j \frac{d\varphi_j}{dx} \right)^2 dx \geq 0.
 \end{aligned}$$

A última desigualdade só será uma igualdade para o caso onde o vetor w seja nulo. Como w é um vetor qualquer, isso ocorreria somente se tivéssemos

$$\varphi'_i = 0, \text{ para todo } i \text{ e em todo } [0,1].$$

Como por hipótese, φ_i é contínua e cumpre a condição de fronteira de Dirichlet, implica que as funções da base são identicamente nulas, o que é um absurdo. Logo, $w^t A w$ é estritamente positivo. O que demonstra a proposição. \square

Observação 4.4. Como consequência do fato de A ser positiva definida, temos que o sistema (4.12) sempre admite uma única solução. Além disso, note que os coeficientes ξ_j , juntamente com as funções da base, determinam a aproximação u_h de u .

Observação 4.5. Se $h_j = h = \frac{1}{M+1}$, então

$$A = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Logo, o MEF nos dá um sistema de equações com matriz de rigidez esparsa, simétrica e positiva definida.

4.1.2 Exemplo Unidimensional

Considere a equação:

$$\begin{cases} -\frac{d^2 u}{dx^2} = \cos(x) & \text{em } [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Para resolver a equação (4.13) utilizamos o MEF e o MDF comparando com a solução analítica. Considerando o mesmo espaçamento h nas discretizações da equação e resolvendo primeiramente pelo MEF, através do sistema matricial (4.12), calculamos a matriz A e o vetor b .

Na demonstração da Proposição (4.1) mostramos que a matriz A é tridiagonal e seus elementos $a_{i,j}$ são da forma:

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} = \frac{2}{h}. \\ a_{i-1,i} &= a_{i,i-1} = -\frac{1}{h}. \end{aligned}$$

Logo:

$$\varphi_j = \begin{cases} \frac{2}{h} & \text{se } i = j \\ \frac{-1}{h} & \text{se } i = j - 1 \text{ ou } j = i - 1 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

o termo geral do vetor b é dado por:

$$\begin{aligned} b_j &= \int_0^1 \cos(x) \varphi_j(x) dx \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \cos(x) \frac{x - x_{j-1}}{h} dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \cos(x) \frac{x_{j+1} - x}{h} dx. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \cos(x) \frac{x - x_{j-1}}{h} dx &= \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \cos(x) (x - x_{j-1}) dx \\ &= \frac{1}{h} \left[(x - x_{j-1}) \sin(x) \Big|_{x=x_{j-1}}^{x=x_j} - \int_{x_{j-1}}^{x_j} \cos(x) dx \right] \\ &= \frac{1}{h} \left((x_j - x_{j-1}) \sin(x_j) - (x_{j-1} - x_{j-1}) \sin(x_{j-1}) \right. \\ &\quad \left. + \cos(x_j) - \cos(x_{j-1}) \right) \\ &= \frac{1}{h} (h \sin(x_j) + \cos(x_j) - \cos(x_{j-1})), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \cos(x) \frac{x_{j+1} - x}{h} dx &= \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \cos(x) (x_{j+1} - x) dx \\ &= \frac{1}{h} \left[(x_{j+1} - x) \sin(x) \Big|_{x=x_j}^{x=x_{j+1}} + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \sin(x) dx \right] \\ &= \frac{1}{h} \left((x_{j+1} - x_{j+1}) \sin(x_{j+1}) - (x_{j+1} - x_j) \sin(x_j) \right. \\ &\quad \left. - \cos(x_{j+1}) + \cos(x_j) \right) \\ &= \frac{1}{h} (-h \sin(x_j) + \cos(x_j) - \cos(x_{j+1})). \end{aligned}$$

Temos que:

$$\begin{aligned} b_j &= \frac{1}{h} (h \sin(x_j) + \cos(x_j) - \cos(x_{j-1})) + \frac{1}{h} (-h \sin(x_j) - \cos(x_{j+1}) + \cos(x_j)) \\ &= -\frac{\cos(x_{j-1})}{h} + \frac{2\cos(x_j)}{h} - \frac{\cos(x_{j+1})}{h}. \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{h} & \frac{-1}{h} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{-1}{h} & \frac{2}{h} & \frac{-1}{h} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{h} & \frac{2}{h} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{h} & \frac{-1}{h} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{-1}{h} & \frac{2}{h} \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \\ \xi_n \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$b = \begin{bmatrix} \frac{1}{h}(-\cos(x_0) + 2\cos(x_1) - \cos(x_2)) \\ \frac{1}{h}(-\cos(x_1) + 2\cos(x_2) - \cos(x_3)) \\ \frac{1}{h}(-\cos(x_2) + 2\cos(x_3) - \cos(x_4)) \\ \vdots \\ \frac{1}{h}(-\cos(x_{n-2}) + 2\cos(x_{n-1}) - \cos(x_n)) \\ \frac{1}{h}(-\cos(x_{n-1}) + 2\cos(x_n) - \cos(x_{n+1})) \end{bmatrix}.$$

Portanto, basta resolver o sistema a seguir:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos(x_0) + 2\cos(x_1) - \cos(x_2) \\ -\cos(x_1) + 2\cos(x_2) - \cos(x_3) \\ -\cos(x_2) + 2\cos(x_3) - \cos(x_4) \\ \vdots \\ -\cos(x_{n-2}) + 2\cos(x_{n-1}) - \cos(x_n) \\ -\cos(x_{n-1}) + 2\cos(x_n) - \cos(x_{n+1}) \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

E assim obtemos a aproximação da solução de (4.13) através do MEF.

Utilizando o MDF para aproximar a derivada segunda da equação (4.13), dada por:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2},$$

e substituindo na equação (4.13) temos:

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = \cos(x_i) \Rightarrow -u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1} = h^2 \cos(x_i).$$

Para $i = 1, 2, \dots, n-1$, temos:

$$\begin{aligned} -u_2 + 2u_1 - u_0 &= h^2 \cos(x_1) \\ -u_3 + 2u_2 - u_1 &= h^2 \cos(x_2) \\ &\vdots \\ -u_n + 2u_{n-1} - u_{n-2} &= h^2 \cos(x_{n-1}) \end{aligned}$$

Assim obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 \cos(x_1) \\ h^2 \cos(x_2) \\ h^2 \cos(x_3) \\ \vdots \\ h^2 \cos(x_{n-1}) \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Resolvemos o sistema (4.15) e determinamos a aproximação da solução pelo MDF. Para finalizar resolvemos a equação (4.13) analiticamente:

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} = \cos(x).$$

Integrando duas vezes obtemos:

$$u(x) = \int \int -\frac{d^2 u}{dx^2} dx dx = \int \int -\cos(x) dx dx = \int (-\sin(x) + c_1) dx = \cos(x) + c_1 x + c_2.$$

Como $u(0) = u(1) = 0$, temos: $u(x) = \cos(x) + (1 - \cos(1))x - 1$.

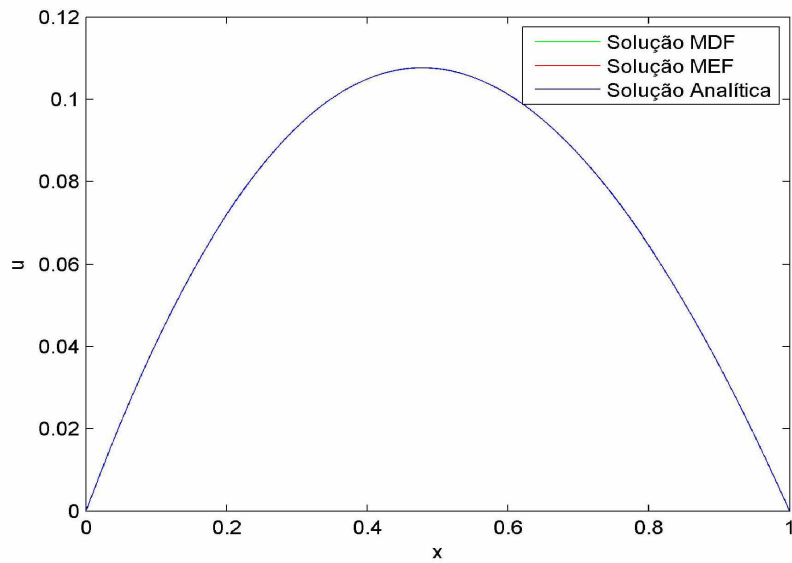


Figura 4.2: Soluções numéricas da equação (4.13).

O erro é calculado através da fórmula:

$$\max | \text{solução analítica} - \text{aproximação da solução} |. \quad (4.16)$$

Então obtemos:

$$e_1 = 8.970981624223384 \cdot 10^{-09} \text{ e } e_2 = 4.579669976578771 \cdot 10^{-14},$$

sendo e_1 o erro entre a solução analítica e a aproximação obtida utilizando o MDF e e_2 o erro entre a solução analítica e a aproximação obtida utilizando o MEF. Observamos que o MEF possui um erro menor, neste caso concluímos então que o MEF aproxima melhor a solução da equação (4.13) nas condições indicadas..

4.2 Formulação Fraca do Problema Bidimensional

Considere $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto e limitado e uma função f real contínua por partes e limitada em Ω .

Apresentamos a formulação fraca da equação de Poisson com fronteira de Dirichlet homogênea:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, y) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.17)$$

Definimos o espaço de funções como:

$$V := \left\{ v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} v \text{ é uma função contínua em } \Omega, \frac{\partial v}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial v}{\partial y} \\ \text{são contínuas por partes em } \Omega \text{ e } v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{array} \right\}.$$

Vamos multiplicar a equação (4.17) por uma função qualquer de V e integrar sobre Ω , ou seja

$$\int_{\Omega} -\Delta u \cdot v = \int_{\Omega} f(x, y) \cdot v, \quad \forall v \in V,$$

para resolver a integral do lado esquerdo precisamos do seguinte Teorema:.

Teorema 4.2 (Teorema do Divergente:). *Dado um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de fronteira suave e $A = (F_1, F_2)$ um campo definido em Ω . Então*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} (A) \, dxdy = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) \, dxdy = \int_{\partial\Omega} (F_1, F_2) \cdot (\eta_1, \eta_2) \, ds = \int_{\partial\Omega} A \cdot \eta \, ds,$$

onde $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ é o vetor unitário normal externo a $\partial\Omega$.

Para obtermos as hipóteses do Teorema 4.2 considere os campos $F_1 = (v \frac{\partial u}{\partial x}, 0)$ e $F_2 = (0, v \frac{\partial u}{\partial y})$, onde $u, v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, temos que

$$\operatorname{div} (F_1) = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \operatorname{div} (F_2) = \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (4.18)$$

e aplicando o Teorema (4.2), obtemos

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} (F_1) \, dxdy = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x} \eta_1, \quad (4.19)$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} (F_2) \, dxdy = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial y} \eta_2. \quad (4.20)$$

Somando (4.19) e (4.20), obtemos:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} (F_1) + \operatorname{div} (F_2) \, dxdy = \int_{\partial\Omega} v \left(\frac{\partial u}{\partial x} \eta_1 + \frac{\partial u}{\partial y} \eta_2 \right).$$

Como $\operatorname{div} (F_1) + \operatorname{div} (F_2) = \nabla v \cdot \nabla u + v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$, temos

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u + \underbrace{\int_{\Omega} v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)}_{\Delta u} = \int_{\partial\Omega} \underbrace{v \left(\frac{\partial u}{\partial x} \eta_1 + \frac{\partial u}{\partial y} \eta_2 \right)}_{\nabla u \cdot \eta},$$

em que

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u + \int_{\Omega} v \Delta u = \int_{\partial\Omega} v \underbrace{\nabla u \cdot \eta}_{\frac{\partial u}{\partial \eta}}. \quad (4.21)$$

A expressão (4.21) é conhecida como a *Fórmula de Green*.

Mostremos que se u é solução da equação de Poisson (4.17), então u é solução do seguinte problema variacional:

(PV) Encontrar $u \in V$ tal que

$$a(u, v) = \int_{\Omega} f v \, dx dy \quad \forall v \in V, \quad (4.22)$$

onde

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy.$$

A equação (4.22) juntamente com a condição de Dirichlet homogênea formam a formulação fraca de (4.17).

4.2.1 Método de Galerkin para o Caso Bidimensional

Construímos um subespaço de dimensão finita $V_h \subset V$.

Para facilitar, assumimos que Ω é um polígono e como consequência $\partial\Omega$ é uma curva poligonal. Faremos uma triangulação de Ω , subdividindo-o no conjunto T_h , onde

$$T_h = \{K_1, \dots, K_m\}, \quad K_i \text{ são triângulos não sobrepostos.}$$

$$\Omega = \bigcup_{K \in T_h} K = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_m,$$

tal que o vértice de um triângulo não encontra o lado de outro triângulo.

Definição 4.5. Definimos o número $h = \max_{K \in T_h} \text{diam}(K)$, onde $\text{diam}(K)$ é o diâmetro de um conjunto, ou seja; diâmetro de K é a maior distância euclidiana entre os pontos de K .

Definimos V_h da seguinte forma:

$$V_h = \{v : v \text{ é contínua em } \Omega, v|_K \text{ é linear para cada } K \in T_h, v = 0 \text{ em } \partial\Omega\}.$$

Observação 4.6. O espaço V_h consiste de todas as funções contínuas que são lineares em cada triângulo K e assumem o valor zero na fronteira $\partial\Omega$ de Ω .

Considerando o conjunto N dos vértices dos triângulos do conjunto T_h , cujos elementos denominamos N_i , definimos a função linear de V_h por

$$\varphi_j(N_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, M. \end{cases}$$

A Figura 4.3 ilustra a função φ_j , a seguir apresentamos a expressão dessa função.

Como no caso unidimensional, vamos considerar $v \in V_h$

$$v(x) = \sum_{j=1}^M \eta_j \varphi_j(x), \quad \eta_j = v(N_j), \quad \text{para } x \in \Omega \cup \partial\Omega.$$

Podemos apresentar o MEF para (4.17) a partir da formulação variacional (PV) restrita ao subespaço V_h , como segue:

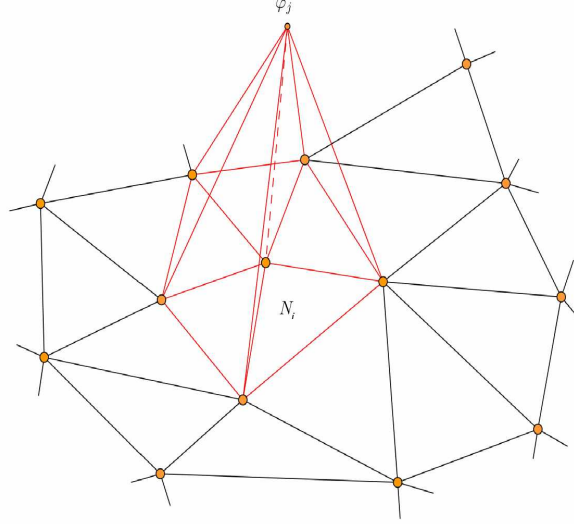


Figura 4.3: Representação geométrica da função φ_j .

(PV_h) encontrar $u_h \in V_h$ tal que

$$a(u_h, v) = \int_{\Omega} f v \, dxdy, \text{ para todo } v \in V_h.$$

Como resultado desta formulação, obtemos o seguinte sistema linear:

$$A\xi = b, \tag{4.23}$$

onde $A = (a_{ij})$, $a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$, $\xi = (\xi_i) = u_h(N_i)$, $b = (b_i) = \int_{\Omega} f \varphi_i \, dxdy$. Como no caso unidimensional, podemos mostrar que A é simétrica, positiva definida e assim não singular para que o sistema $A\xi = b$ admita uma única solução.

4.2.2 Construção das Funções

Considerando a função linear V_h subespaço vetorial de V citada anteriormente, apresentamos a obtenção das funções φ_j da base do espaço V_h . Vamos supor que o domínio Ω foi dividido em m triângulos, M , sendo os triângulos interiores \tilde{M} (que as arestas não estão na fronteira de Ω_h). Lembrando que Ω_h é a aproximação de Ω através de uma poligonal com seu interior.

A seguir, consideramos alguns conceitos que serão importantes.

1. Denotamos enumeração dos elementos a uma bijeção que associa a cada elemento a um número natural de 1 a m .

Notação: k_i é o i -ésimo elemento da malha.

2. Denotamos de enumeração global dos vértices interiores a uma bijeção que associa a cada vértice interior a um número natural de 1 a \tilde{M} .

Notação: p_i é um o vértice interior i da malha.

3. Denotamos enumeração global dos vértices uma bijeção que associa cada vértice da malha a um número natural de 1 a M , respeitando a enumeração dos vértices interiores. Essa enumeração adota a enumeração da definição 2 e atribui números entre $\tilde{M} + 1$ e M aos vértices da fronteira de Ω_h .

4. Denotamos enumeração local dos vértices a uma bijeção que:

- i) associa cada vértice de um elemento T_k um número do conjunto $\{1, 2, 3\}$;
- ii) percorre o elemento em sentido anti-horário, isto é, definido o vértice 1 do elemento k_i no sentido anti-horário a partir de 1. O vértice $s \in \{1, 2, 3\}$ de k_i tem coordenadas $(x_s^{k_i}, y_s^{k_i})$.

Portanto, o gráfico de φ_j no elemento $K_i = \begin{cases} \text{plano} & \neq 0 \\ 0 & \end{cases} \begin{cases} \text{se } K_i \text{ tem o vértice } p_i \\ \text{caso contrário.} \end{cases}$

As funções φ_j formam uma base B de V_h . As únicas funções de B que assumem valores diferente de zero em um dado elemento são aquelas associadas aos seus vértices (φ_j e p_j são associados). Em cada elemento pode existir no máximo três funções associadas.

Precisamos ainda determinar $\varphi_j(x, y)$ em um ponto interior do elemento. Analisamos o que ocorre se $(x, y) \in K_i$ e o triângulo K_i for associado à uma função φ_j .

Como cada elemento tem a enumeração dos vértices: $(x_1^{K_i}, y_1^{K_i})$, $(x_2^{K_i}, y_2^{K_i})$ e $(x_3^{K_i}, y_3^{K_i})$. Vamos supor que $\varphi_j(x, y) \in B$ é associada ao vértice 1 de K_i .

Logo $\varphi_j(x_1, y_1) = 1$ e $\varphi_j(x_2, y_2) = \varphi_j(x_3, y_3) = 0$, se $(x, y) \in K_i$, então $(x, y, \varphi_j(x, y))$ está no plano determinado pelos pontos: $[x_1, y_1, \varphi_j(x_1, y_1)]$, $[x_2, y_2, \varphi_j(x_2, y_2)]$ e $[x_3, y_3, \varphi_j(x_3, y_3)]$, isto é, $(x_1, y_1, 1)$, $(x_2, y_2, 0)$ e $(x_3, y_3, 0)$.

Para que o gráfico de $\varphi_j(x, y)$ esteja nesse plano, os três vetores que ligam $(x, y, \varphi_j(x, y))$ a cada um dos vértices devem ser coplanares, portanto, o produto misto deve ser 0.

Encontrando os vetores, temos:

$$\begin{aligned} (x, y, \varphi_j) - (x_1, y_1, 1) &= (x - x_1, y - y_1, \varphi_j - 1); \\ (x, y, \varphi_j) - (x_2, y_2, 0) &= (x - x_2, y - y_2, \varphi_j); \\ (x, y, \varphi_j) - (x_3, y_3, 0) &= (x - x_3, y - y_3, \varphi_j). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & \varphi_j - 1 \\ x - x_2 & y - y_2 & \varphi_j \\ x - x_3 & y - y_3 & \varphi_j \end{vmatrix} = 0.$$

Obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= (x - x_1)(y - y_2)\varphi_j + (x - x_2)(y - y_3)(\varphi_j - 1) + (x - x_3)(y - y_1)\varphi_j - \\ &\quad - [(x - x_3)(y - y_2)(\varphi_j - 1) + (x - x_2)(y - y_1)\varphi_j + (x - x_1)(y - y_3)\varphi_j] \\ &= \varphi_j[(x - x_1)(y - y_2) + (x - x_2)(y - y_3) + (x - x_3)(y - y_1) - (x - x_3)(y - y_2) - (x - x_2)(y - y_1) - (x - x_1)(y - y_3)] + \\ &\quad + [-(x - x_2)(y - y_3) + (x - x_3)(y - y_2)]. \end{aligned}$$

Assim, isolando φ_j podemos escrever:

$$\varphi_j(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 \\ x - x_3 & y - y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 \\ x - x_3 & y - y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x - x_3 & y - y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x - x_2 & y - y_2 \end{vmatrix}}. \quad (4.24)$$

Usando as propriedades de determinantes podemos obter a função φ_j de uma maneira mais

sutil. Por exemplo, no numerador, temos:

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 \\ x - x_3 & y - y_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 \\ x & y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} x & y \\ x & y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x & y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.
 \end{aligned} \tag{4.25}$$

De maneira análoga, nos outros determinantes de (4.24), obtemos:

$$\varphi_j(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2^{K_i} & y_2^{K_i} \\ 1 & x_3^{K_i} & y_3^{K_i} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1^{K_i} & y_1^{K_i} \\ 1 & x_2^{K_i} & y_2^{K_i} \\ 1 & x_3^{K_i} & y_3^{K_i} \end{vmatrix}}, \tag{4.26}$$

Temos de um resultado da Geometria Analítica que o determinante do denominador de (4.26) é o dobro da área do triângulo de vértices $(x_1^{K_i}, y_1^{K_i})$, $(x_2^{K_i}, y_2^{K_i})$ e $(x_3^{K_i}, y_3^{K_i})$, ou seja, é o dobro da área A_{K_i} do elemento K_i . Assim, reescrevemos (4.26) como:

$$\varphi_j(x, y) = \frac{1}{2A_{K_i}} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2^{K_i} & y_2^{K_i} \\ 1 & x_3^{K_i} & y_3^{K_i} \end{vmatrix}.$$

Considerando a função $\varphi_j(x, y)$ associada ao vértice 2 do elemento K_i basta trocar os vértices como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned}
 \text{vértice2} &\rightarrow \text{vértice1}; \\
 \text{vértice3} &\rightarrow \text{vértice2}; \\
 \text{vértice1} &\rightarrow \text{vértice3}.
 \end{aligned}$$

Isso resultaria em:

$$\varphi_j(x, y) = \frac{1}{2A_{K_i}} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_3^{K_i} & y_3^{K_i} \\ 1 & x_1^{K_i} & y_1^{K_i} \end{vmatrix}.$$

E assim obtemos uma expressão geral para as funções φ_j de B :

$$\varphi_j(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2A_{K_i}} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2^{K_i} & y_2^{K_i} \\ 1 & x_3^{K_i} & y_3^{K_i} \end{vmatrix} & \text{se } (x, y) \in K_i \text{ e } \varphi_j \text{ associada ao vértice 1 de } K_i \\ \frac{1}{2A_{K_i}} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_3^{K_i} & y_3^{K_i} \\ 1 & x_1^{K_i} & y_1^{K_i} \end{vmatrix} & \text{se } (x, y) \in K_i \text{ e } \varphi_j \text{ associada ao vértice 2 de } K_i \\ \frac{1}{2A_{K_i}} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1^{K_i} & y_1^{K_i} \\ 1 & x_2^{K_i} & y_2^{K_i} \end{vmatrix} & \text{se } (x, y) \in K_i \text{ e } \varphi_j \text{ associada ao vértice 3 de } K_i \\ 0 & \text{se } (x, y) \in K_i \text{ mas } \varphi_j \text{ não for associada a } K_i. \end{cases} \quad (4.27)$$

No próximo capítulo apresentamos a dedução da equação de movimento de uma membrana, a fim de obter sua solução numérica utilizando as ferramentas definidas neste capítulo.

Capítulo 5

Membrana Vibrante

Uma membrana é uma placa que está sujeita a uma tensão, na qual a resistência à flexão é desprezível. Por isso, a relação existente entre uma membrana e uma placa é a mesma que existe entre uma corda e uma viga. O couro de um tambor é exemplo de uma membrana [18].

5.1 Equação de Movimento

Considere uma membrana que está envolvida por uma curva plana S no plano xy , conforme mostra a Figura 5.1. Denotamos por $f(x, y, t)$ a carga de pressão que age na direção z e por P a intensidade da tensão em um ponto que é igual ao produto da tensão da tração e da espessura da membrana. A magnitude de P normalmente é constante em toda a membrana, como em um couro de tambor. Se for considerado uma área elementar com lados de tamanhos dx e dy , forças de magnitude $P dx$ e $P dy$ agem sobre os lados paralelos aos eixos y e x , respectivamente. As forças resultantes que agem ao longo da direção z devido às forças citadas anteriormente são:

$$\left(P \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy \right) \text{ e } \left(P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy \right).$$

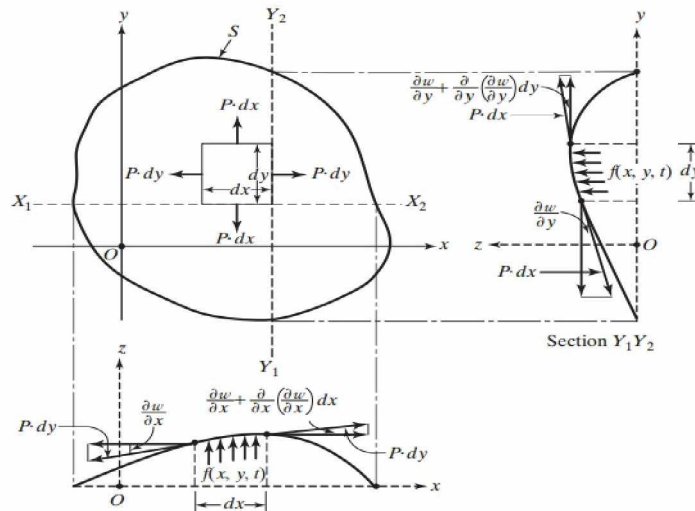


Figura 5.1: Membrana sob tensão uniforme [18].

A força devida à pressão ao longo da direção z é $f(x, y, t) dx dy$ e a força de inércia é:

$$\rho(x, y) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dx dy$$

em que $\rho(x, y)$ é a massa por unidade de área. A equação de movimento para a vibração transversal forçada da membrana pode ser obtida por:

$$P \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + f = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \quad (5.1)$$

Se a força externa $f(x, y, t) = 0$, então a equação (5.1) da equação de vibração livre é dada por

$$c^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (5.2)$$

em que:

$$c = \sqrt{\frac{P}{\rho}}. \quad (5.3)$$

As equações (5.1) e (5.2) podem ser expressas como:

$$P \Delta w = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (5.4)$$

e

$$c^2 \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (5.5)$$

em que

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ é o operador Laplaciano [18].}$$

5.1.1 Condições Iniciais e Condições de Contorno

A equação de movimento (5.2) envolve derivadas parciais de segunda ordem em relação a t, x e y , especificamos duas condições iniciais e quatro condições de contorno para determinar uma solução única do problema. Normalmente, o deslocamento e a velocidade da membrana em $t = 0$ são especificadas como $w_0(x, y)$ e $w_0^*(x, y)$. Assim, as condições iniciais são dadas por

$$\begin{aligned} w(x, y, t = 0) &= w_0(x, y), \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, y, t = 0) &= w_0^*(x, y). \end{aligned} \quad (5.6)$$

As condições de contorno para uma membrana fixa em todo ponto (x_1, y_1) sobre um segmento do contorno, são dadas por

$$w(x_1, y_1, t) = 0, \quad t \geq 0. \quad (5.7)$$

5.2 Membrana Vibrante: Um Caso Particular

Aplicamos a teoria de elementos finitos bidimensionais para obter a solução numérica da equação (5.5).

A equação que descreve o problema tratado é dada por:

$$\begin{cases} c^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; & (x, y) \in \Omega, t \in (0, T]; \\ w(x, y) = 0; & (x, y) \in \partial\Omega; \\ f(x, y) = 0; & (x, y) \in \Omega. \end{cases} \quad (5.8)$$

em que f corresponde à força externa que age no sistema e $w(x, t)$ corresponde ao deslocamento no tempo. Consideramos a condição inicial da seguinte forma:

$$w_0(x, y, t = 0) = 0, \forall (x, y) \in \Omega, \quad (5.9)$$

e,

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \begin{cases} 0 & \text{se } (x, y) \neq (x_i, y_i) \\ d & \text{se } (x, y) = (x_i, y_i) \end{cases} \quad (5.10)$$

para algum $i = \{1, \dots, 3762\}$ e $d \in \mathbb{R}$. A Figura 5.2 representa o domínio Ω discretizado com 1771 triângulos e 3762 nós, utilizamos o software livre GMSH [12] para gerar a malha. Nesta malha, determinamos a solução numérica da equação (5.5).

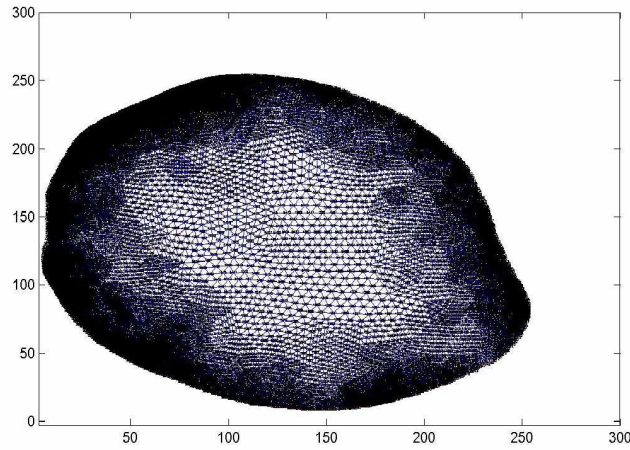


Figura 5.2: Domínio Ω discretizado.

Apresentamos a seguir, a discretização da equação (5.5).

5.2.1 Discretização da Equação do Movimento

Aplicamos o método de Galerkin para obter a discretização do domínio através da formulação fraca; para a derivada no tempo utilizamos o método de diferenças finitas centradas. A seguir, mostramos a obtenção da formulação fraca e a discretização do problema.

Seja a equação (5.8) que é dada na forma:

$$c^2 \Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (5.11)$$

Considere também o espaço $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, espaço das funções em $L^2(\Omega)$ cujas derivadas de primeira ordem, no sentido fraco, também pertencem a $L^2(\Omega)$

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial x_k} \in L^2(\Omega), k = 1, 2, \dots\}.$$

Multiplicando a equação (5.11) por $v \in H^1(\Omega)$, obtemos:

$$c^2(\Delta w)v = \frac{\partial w^2}{\partial t^2}v, \forall v \in H^1(\Omega),$$

e integrando sobre Ω , obtemos:

$$c^2 \int_{\Omega} (\Delta w) v \, dx dy = \int_{\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} v \, dx dy, \forall v \in H^1(\Omega). \quad (5.12)$$

Usando o Teorema de Green temos que:

$$c^2 \int_{\Omega} (\Delta w) v \, dx dy = -c^2 \int_{\Omega} (\nabla w \cdot \nabla v) dx dy + c^2 \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial w}{\partial \eta} ds, \quad (5.13)$$

sendo η o vetor unitário normal externo a $\partial\Omega$. Observe que $\int_{\partial\Omega} v \frac{\partial w}{\partial \eta} ds = 0$ pois $w = 0$ na fronteira. Assim, reescrevendo a equação (5.12) utilizando as notações de produto interno obtemos:

$$-c^2 (\nabla w, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, v \right)_{L^2(\Omega)}, \forall v \in H^1(\Omega). \quad (5.14)$$

Para simplificar a notação, consideramos $(w, v)_{L^2(\Omega)} = (w, v)$. A equação (5.14) é a formulação fraca do problema (5.8). Usamos o método de Galerkin para a discretização e consideramos um subespaço V_h de dimensão finita de $H^1(\Omega)$.

Seja a base $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M\}$ desse subespaço, temos que a solução no subespaço V_h pode ser escrita como combinação linear das funções de B .

$$w_h(x, y, t) = \sum_{j=1}^N w_j(t) \varphi_j(x, y).$$

Substituindo w_h na formulação fraca (5.14), e tomando $v \in V_h$, temos:

$$-c^2 (\nabla w_h, \nabla v) = \left(\frac{\partial^2 w_h}{\partial t^2}, v \right), \forall v \in V_h,$$

ou seja,

$$-c^2 \left(\sum_{j=1}^N w_j \nabla \varphi_j, \nabla v \right) = \left(\sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 w_j}{\partial t^2} \varphi_j, v \right), \forall v \in V_h. \quad (5.15)$$

Observe que as funções $w_j(t)$ não dependem de (x, y) , assim podemos tirá-las do produto interno, logo:

$$-c^2 \sum_{j=1}^N w_j (\nabla \varphi_j, \nabla v) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 w_j}{\partial t^2} (\varphi_j, v), \forall v \in V_h. \quad (5.16)$$

Como a equação (5.16) é válida para todo $v \in V_h$, é equivalente tomar v como as funções φ_i da base B de V_h . Portanto:

$$-c^2 \sum_{j=1}^N w_j (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) = \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 w_j}{\partial t^2} (\varphi_j, \varphi_i), \forall \varphi_i \in B. \quad (5.17)$$

Utilizamos o método de diferenças finitas centradas para apresentar uma aproximação da derivada de w no tempo, que aparece na equação (5.17). Considerando a seguinte aproximação:

$$\frac{\partial^2 w_j(x_j, t_n)}{\partial t^2} \simeq \frac{w_j^{n+1} - 2w_j^n + w_j^{n-1}}{\Delta t^2},$$

substituindo na equação (5.17) obtemos:

$$-c^2 \sum_{j=1}^N w_j (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) = \sum_{j=1}^N \frac{w_j^{n+1} - 2w_j^n + w_j^{n-1}}{\Delta t^2} (\varphi_j, \varphi_i), \forall \varphi_i \in B. \quad (5.18)$$

Multiplicando (5.18) por Δt^2 , obtemos:

$$-\Delta t^2 c^2 \sum_{j=1}^N w_j (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) = \sum_{j=1}^N (w_j^{n+1} - 2w_j^n + w_j^{n-1}) (\varphi_j, \varphi_i), \forall \varphi_i \in B. \quad (5.19)$$

Separando o primeiro membro da equação (5.19) as expressões que estão no tempo t_{n+1} e no segundo membro as equações que estão no tempo t_n e t_{n-1} , obtemos:

$$\sum_{j=1}^N w_j^{n+1} (\varphi_j, \varphi_i) = - \sum_{j=1}^N w_j^n ((c^2 \Delta t^2 (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) - 2(\varphi_j, \varphi_i)) - \sum_{j=1}^N w_j^{n-1} (\varphi_j, \varphi_i). \quad (5.20)$$

Definindo:

$$\begin{aligned} X &= (\varphi_j, \varphi_i); \\ Y &= (c^2 \Delta t^2 (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i); \\ W^{n+1} &= \begin{pmatrix} w_1^{n+1} \\ \vdots \\ w_N^{n+1} \end{pmatrix}; \\ W^n &= \begin{pmatrix} w_1^n \\ \vdots \\ w_N^n \end{pmatrix}; \\ W^{n-1} &= \begin{pmatrix} w_1^{n-1} \\ \vdots \\ w_N^{n-1} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

obtemos o seguinte sistema:

$$XW^{n+1} = -YW^n - XW^{n-1}. \quad (5.21)$$

Definidas as matrizes, determinamos a solução numérica de (5.8) utilizando o sistema (5.21). Observe que as matrizes X , Y dependem dos produtos internos referentes às funções φ_i da base B de V_h . Tais produtos internos são apresentados no Apêndice A, considerando essas funções em um elemento padrão. Depois utilizamos a transformação apresentada no Apêndice B, para obtermos o sistema no elemento real. Utilizando o software Matlab encontramos o deslocamento da membrana em cada ponto da malha ao longo do tempo.

5.2.2 Resultados Numéricos

Para os valores de $c = 3.14$, $\Delta t = 0.08s$ e $d = 0.1$, obtemos a solução numérica da equação (5.5) em que d corresponde ao nó 1571, que é um dos nós centrais da malha em um ponto (x, y) . A condição inicial é dada por:

$$w_0(x, y) = 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega$$

A Figura 5.3 apresenta a membrana considerada no início do processo. A Figura 5.4 representa a membrana na primeira iteração no tempo, pois pela equação (5.10) temos que $w^1(x, y) = d \times \Delta t$ para o ponto (x, y) correspondente ao nó 1571.

Após 2000 iterações no tempo, obtemos a aproximação numérica da equação (5.8). A Figura 5.5 representa a aproximação numérica da equação (5.8). A Figura (5.6) representa o valor de cada iteração para o nó 1571.

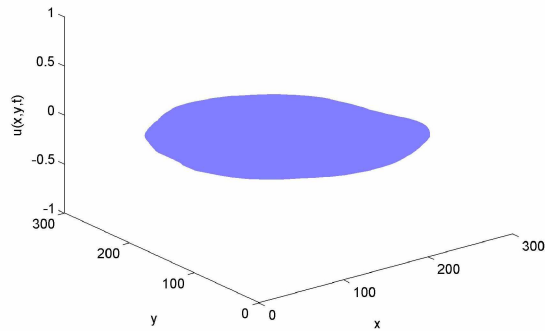


Figura 5.3: Membrana na condição inicial.

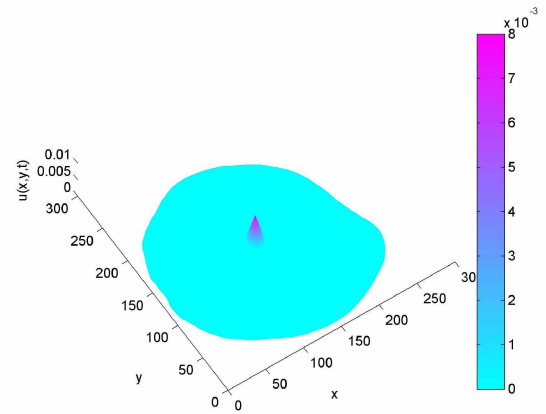


Figura 5.4: Aproximação numérica da solução da equação (5.8) para a primeira iteração.

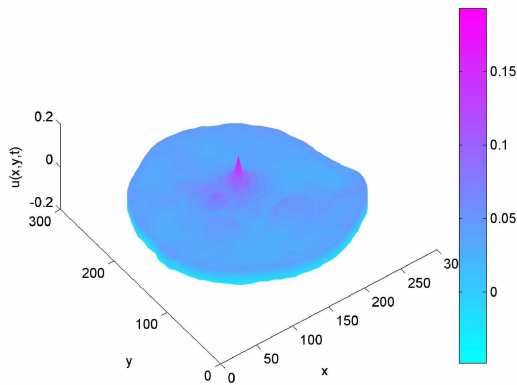


Figura 5.5: Aproximação numérica da equação (5.8).

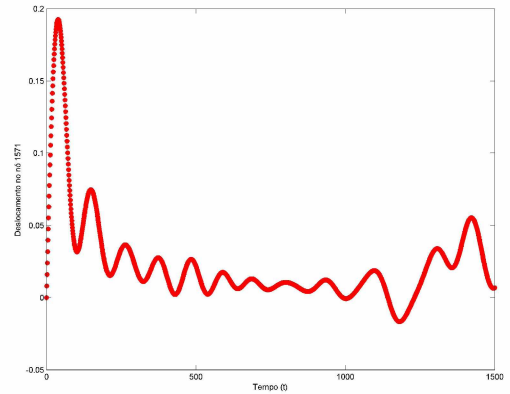


Figura 5.6: Valor de cada iteração no nó 1571.

5.3 Algumas Considerações

Diferentemente dos outros capítulos, abordamos aqui uma aproximação numérica para a equação da membrana, que é um problema bidimensional. Observe no gráfico da Figura 5.5 que, para 1500 iterações no tempo, os deslocamentos se espalham em toda membrana. Note que na Figura 5.6, nas primeiras iterações, o valor do deslocamento para o nó 1571 aumenta e depois diminui. Inclusive, próximo à iteração 1500, as ondas chegaram à fronteira e retornaram, elevando o valor do deslocamento neste nó.

Para finalizar, apresentamos a seguir as conclusões do trabalho.

Capítulo 6

Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste trabalho estudamos uma variável importante, que é o tempo de uso de uma mola para os modelos analisados, através da teoria de conjuntos fuzzy. Primeiramente resolvemos uma EDO de segunda ordem, que modela o sistema massa-mola, utilizando o método de diferenças finitas. Modelamos a constante k da mola de um veículo através de um SBRF, levando em consideração sua classificação em termos de tempo de uso. Foram comparados os valores do deslocamento da mola do veículo para um k determinístico e para valores de k obtidos pelo SBRF; demonstrando a importância do tempo de uso de uma mola, nem sempre considerado na literatura.

Realizamos no capítulo 3 o estudo de algumas EDP, classificadas como equação da onda, inclusive com derivadas de ordens superiores. Modelamos nos dois casos analisados a constante elástica k da mola, para o problema do cabo suspenso e para a viga considerada como chassi de um veículo. Nos dois casos, observamos a relevância do tempo de uso de uma mola atuando nos modelos. A fórmula analítica para se calcular a constante elástica de uma mola, não leva em consideração o tempo de uso da mesma, essa influência deve ser considerada. Os problemas tratados nesta dissertação nos fornecem a possibilidade de obter várias soluções para o modelo, levando em consideração se a mola é nova, seminova ou velha. Inclusive, no caso da viga conectada a molas, massas e amortecedores em suas extremidades, podemos observar que o tempo de uso de uma mola pode levar a diferentes deslocamentos do veículo. Podendo ter amplitude de vibrações maiores ou menores.

Abordamos no capítulo 4 o método numérico dos elementos finitos, que pode ser utilizado de forma eficiente em fronteiras que não são regulares. O estudo desse método foi de grande relevância, pois através dele, modelamos, no capítulo 5, a equação de uma membrana vibrante em uma fronteira não regular.

Como trabalhos futuros, podemos considerar a condição de fronteira de Robin para a equação da membrana (5.5). A constante k da condição de fronteira de Robin pode ser obtida através de um SBRF, dependendo das variáveis de entrada convenientes. Outro trabalho que pode ser realizado é obter a velocidade da onda $c = \sqrt{\frac{P}{\rho}}$, que depende da tensão (P) e da massa por unidade de área ou de comprimento (ρ), através de um SBRF do modelo estudado.

Referências Bibliográficas

- [1] ALMEIDA, A. C.; JUNIOR, J. J. L. *Apoios Amortecidos e Rigidez Variável*. Nono Simpósio de Mecânica Computacional - MG, 2010.
- [2] ANDRADE, V. S. *Análise Dinâmica de uma Viga Engastada Excitada por uma Fonte Não Ideal*. 2009. 128 f. Tese (Doutorado em Engenharia)-Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 2009.
- [3] André Ceberus, Chassi. Disponível em:<<https://andreceberus.com/2012/05/22/o-que-e-um-chassi/>>. Acesso em 20 de janeiro de 2017.
- [4] Antônio Roque, A Equação da Onda em uma Dimensão. Disponível em:<<http://sisne.org/Disciplinas/Grad/Fisica2FisMed/aula16.pdf>>. Acesso em 12 de março de 2016.
- [5] BARROS, L. C.; BASSANEZI R. C. *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*. Grupo de Biomatemática, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, UNICAMP/IMECC, 3ª ed., 2015.
- [6] BORGES, J .C. H. *Algumas Abordagens da Equações Diferenciais Parciais utilizando a Teoria de Conjuntos Fuzzy*. 2014. 81 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática)-Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia. 2014.
- [7] BORGES, J. C. H. *Estudo da Concentração da Poluição do ar com Parâmetro Fuzzy em Uberlândia*. 2016. 109 f. Dissertação(Mestrado em Matemática)-Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia. 2016.
- [8] CABRERA, N. V. *Aplicação da Extensão e Zadeh para Conjuntos Fuzzy Tipo 2 Intervalar*. 2014. 86. f. Dissertação(Mestrado em Matemática)-Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia. 2014.
- [9] CHIANG, S. T.; HOFMAN, A. K. *Computational Fluid Dynamics*. EESbooks, 2000.
- [10] FERREIRA, M. P. S.; JAFELICE, R. S. M.; SANCHES, L. *Estudo de Dinâmica Vertical da Suspensão de um Veículo com Parâmetro Fuzzy*. X Encontro Mineiro de Equações Diferenciais Parciais, Universidade Federal de Uberlândia, 2016.
- [11] FORTUNA, A. O. *Técnicas Computacionais para Dinâmicas dos Fluidos*. 1. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2000.
- [12] Gmsh: a three finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. <http://geuz.org/gmsh/>. Acesso: 28 de janeiro, 2015.
- [13] JAFELICE, R. M.; BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. *Usando a Teoria dos Conjuntos Fuzzy na Modelagem de Fenômenos Biológicos*. II Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy, Natal-RN, 2012.

- [14] JOHNSON, C. *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*. Courier Corporation, 2012.
- [15] MELLO, J. M. *Aplicação do Método das Diferenças Finitas Explícito Na Solução Da Equação do Calor Para o Caso Transiente e Unidimensional*. 2011. 46 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Curso de Ciência e Tecnologia), Universidade Federal Rural do Semi-Árido. 2011.
- [16] OLIVEIRA, E. P. *Estudo da Incerteza do Escoamento de Rios através das Equações de Saint Venant*. 2017. 96 f. Dissertação(Mestrado em Matemática)-Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia. 2016.
- [17] ORTEGA, N. R. S. *Aplicação da Teoria de Conjuntos Fuzzy a Problemas da Biomedicina*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo-Instituto de Física, 2001.
- [18] SINGIRESU. R. *Vibrações Mecânicas*. 4. ed. São Paulo: Pearson Education Brasil, 2008.
- [19] Tecnologia. Disponível em: < <http://www.hoesch.com.br/index.php/tecnologia-constante/br/constante-elastica>>. Acesso em 02 de agosto de 2016.
- [20] TIMOSHENKO, S. *History of Strength of Materials: With a Brief Account of the History of Theory of Elasticity and Theory of Structures*. New York: McGraw-Hill, 1953.
- [21] VAZ, J. C. *Análise do Comportamento Dinâmico de uma Viga de Euler-Bernoulli Escolada com Apoios Elasticamente Variáveis*. 2008. 113 f. Dissertação(Mestrado em Engenharia Mecânica)-Instituto de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá. 2016.
- [22] VIEIRA, F. B. P; RODRIGUES, L. B; AGUSTINI. E. *O Problema do Cabo Suspenso*. Revista Científica Eletrônica da Faculdade de Matemática-FAMAT. Uberlândia, v. 5, p. 225-232, setembro, 2005.
- [23] YAN, Y. J.; YAM, L. H. *A Synthetic Analysis on Design of Optimum Control For an Optimized Intelligent Structure*. Journal of Sound and Vibration, v.4, n. 249, p.775-784, 2002.
- [24] ZADEH, L. *Fuzzy sets. Information and Control*. Vol. 8, p. 338-353, 1965.
- [25] ZILL, D .G.; CULLEN, M. R. *Equações Diferenciais*. 3. ed. São Paulo: Pearson Education Brasil, 2009.

Apêndice A

Matrizes de Rigidez

Apresentamos o cálculo das matrizes, no elemento “padrão” do sistema linear, obtido ao encontrarmos a formulação fraca dos problemas estudados. Para o cálculo dessas matrizes, precisamos obter as funções φ da base B no elemento “padrão”(Figura A.1).

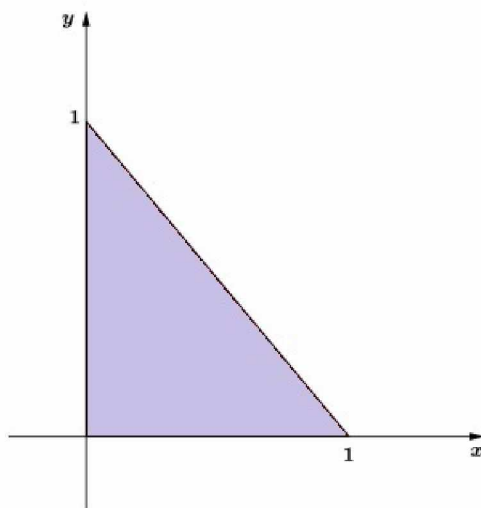


Figura A.1: Triângulo “padrão” \hat{K} .

Assim, utilizando (4.27), temos:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, y) &= \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2A} [1 - x - y]. \\ \varphi_2(x, y) &= \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2A} x. \\ \varphi_3(x, y) &= \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2A} y.\end{aligned}$$

em que A é a área do triângulo “padrão”.

Como podemos ver a área do triângulo “padrão” é $\frac{1}{2}$, temos que:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, y) &= 1 - x - y; \\ \varphi_2(x, y) &= x; \\ \varphi_3(x, y) &= y.\end{aligned}\tag{A.1}$$

Podemos então calcular as matrizes de rigidez:

- Matriz (G) do produto interno entre os gradientes das funções base $G = (a_{i,j})$ onde $a_{i,j} = (\nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j)$

$$\begin{aligned}a_{1,1} &= (\nabla \varphi_1, \nabla \varphi_1) \\ &= \int_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_1 \, dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-y} \langle (-1, -1), (-1, -1) \rangle \, dxdy = 1; \\ a_{1,2} = a_{2,1} &= (\nabla \varphi_1, \nabla \varphi_2) \\ &= \int_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_2 \, dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-y} \langle (-1, -1), (1, 0) \rangle \, dxdy = \frac{-1}{2}; \\ a_{2,2} &= (\nabla \varphi_2, \nabla \varphi_2) \\ &= \int_{\Omega} \nabla \varphi_2 \cdot \nabla \varphi_2 \, dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-y} \langle (1, 0), (1, 0) \rangle \, dxdy = \frac{1}{2}; \\ a_{1,3} = a_{3,1} &= (\nabla \varphi_1, \nabla \varphi_3) \\ &= \int_{\Omega} \nabla \varphi_1 \cdot \nabla \varphi_3 \, dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-y} \langle (-1, -1), (0, 1) \rangle \, dxdy = \frac{-1}{2}; \\ a_{2,3} = a_{3,2} &= (\nabla \varphi_2, \nabla \varphi_3) \\ &= \int_{\Omega} \nabla \varphi_2 \cdot \nabla \varphi_3 \, dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-y} \langle (1, 0), (0, 1) \rangle \, dxdy = 0; \\ a_{3,3} &= (\nabla \varphi_3, \nabla \varphi_3) \\ &= \int_{\Omega} \nabla \varphi_3 \cdot \nabla \varphi_3 \, dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-y} \langle (0, 1), (0, 1) \rangle \, dxdy = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Logo, obtemos:

$$G = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\tag{A.2}$$

- Matriz (S_1) do produto interno entre as funções base $S_1 = (c_{i,j})$ onde $c_{i,j} = (\varphi_i, \varphi_j)$.

$$\begin{aligned}
c_{1,1} &= (\varphi_1, \varphi_1) = \int_{\Omega} \varphi_1 \cdot \varphi_1 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} (1-x-y) \cdot (1-x-y) \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} 1 - 2x - 2y + 2xy + x^2 + y^2 \, dxdy = \frac{1}{12}; \\
c_{1,2} &= (\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\Omega} \varphi_1 \cdot \varphi_2 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} (1-x-y) \cdot (x) \, dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-y} x - x^2 - yx \, dxdy = \frac{1}{24}; \\
c_{1,3} &= (\varphi_1, \varphi_3) = \int_{\Omega} \varphi_1 \cdot \varphi_3 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} (1-x-y) \cdot (y) \, dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-y} y - y^2 - yx \, dxdy = \frac{1}{24}; \\
c_{2,1} &= (\varphi_2, \varphi_1) = \int_{\Omega} \varphi_2 \cdot \varphi_1 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} (x) \cdot (1-x-y) \, dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-y} x - x^2 - yx \, dxdy = \frac{1}{24}; \\
c_{2,2} &= (\varphi_2, \varphi_2) = \int_{\Omega} \varphi_2 \cdot \varphi_2 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} x \cdot x \, dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-y} x^2 \, dxdy = \frac{1}{12}; \\
c_{2,3} &= (\varphi_2, \varphi_3) = \int_{\Omega} \varphi_2 \cdot \varphi_3 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} x \cdot y \, dxdy = \frac{1}{24}; \\
c_{3,1} &= (\varphi_3, \varphi_1) = \int_{\Omega} \varphi_3 \cdot \varphi_1 \, dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-y} (1-x-y) \cdot (y) \, dxdy = \frac{1}{24}; \\
c_{3,2} &= (\varphi_3, \varphi_2) = \int_{\Omega} \varphi_3 \cdot \varphi_2 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} y \cdot x \, dxdy = \frac{1}{24}; \\
c_{3,3} &= (\varphi_3, \varphi_3) = \int_{\Omega} \varphi_3 \cdot \varphi_3 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} y \cdot y \, dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-y} y^2 \, dxdy = \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Logo, obtemos:

$$S_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.3})$$

Apêndice B

Transformação do Triângulo

Na continuação, apresentamos a transformação utilizada para passarmos do elemento “padrão” para o “real”.

Para facilitar os cálculos das matrizes do sistema podemos efetuar os cálculos em um elemento “padrão” que denotaremos por \hat{K} e depois utilizamos a transformação apresentada a seguir para passarmos para o elemento “real” que denotaremos por K_e .

Sejam $\varphi_1(\xi, \eta) = \xi$, $\varphi_2(\xi, \eta) = \eta$ e $\varphi_3(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$ as funções da base B . Queremos uma transformação $Y_e : \hat{K} \rightarrow K_e$, onde temos as correspondências:

$$\begin{aligned}(1, 0) &\longrightarrow (x_1, y_1); \\ (0, 1) &\longrightarrow (x_2, y_2); \\ (0, 0) &\longrightarrow (x_3, y_3).\end{aligned}$$

Como mostra a Figura B.1.

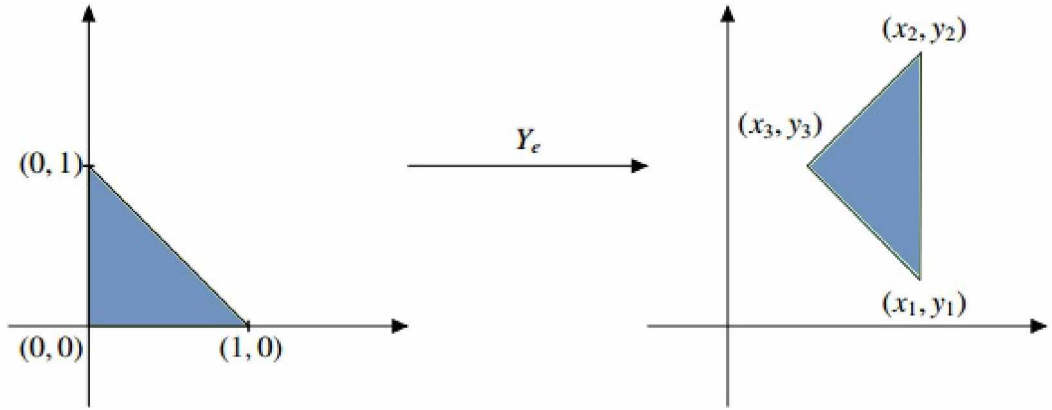


Figura B.1: Transformação do triângulo “padrão” no triângulo “real”.

Temos que:

$$Y_e(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

ou seja:

$$\begin{aligned}x(\xi, \eta) &= x_3 + (x_1 - x_3)\xi + (x_2 - x_3)\eta; \\ y(\xi, \eta) &= y_3 + (y_1 - y_3)\xi + (y_2 - y_3)\eta.\end{aligned}$$

Com isso o Jacobiano de Y_e é dado por:

$$JY_e = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{pmatrix}.$$

Sabemos que $\varphi_i(\xi, \eta) = \varphi_i(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$, então:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Substituindo as derivadas temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} (x_1 - x_3) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} (y_1 - y_3); \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} (x_2 - x_3) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} (y_2 - y_3). \end{aligned}$$

Escrevendo na forma matricial, temos:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Logo obtemos:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} = ((JY_e)^t)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \end{pmatrix},$$

e portanto $Y = ((JY_e)^t)^{-1}$.

Assim temos a seguinte transformação:

Sendo $B = \{\varphi_1^K, \varphi_2^K, \varphi_3^K\}$ a base das funções no elemento “padrão” e $\hat{B} = \{\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \hat{\varphi}_3\}$ a base das funções no elemento “real”, temos:

$$\begin{aligned} \int_K \nabla \varphi_i^K \cdot \nabla \varphi_j^K &= \int_{\hat{K}} (((JY_e)^t)^{-1} \nabla \hat{\varphi}_i) \cdot (((JY_e)^t)^{-1} \nabla \hat{\varphi}_j) \det(JY_e) \\ &= 2\text{área}(K) \int_{\hat{K}} (((JY_e)^t)^{-1} \nabla \hat{\varphi}_i) \cdot (((JY_e)^t)^{-1} \nabla \hat{\varphi}_j). \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

A equação (B.2) é utilizada no programa computacional desenvolvido neste trabalho.