



Universidade Federal de Uberlândia

Faculdade de Matemática

Dissertação

**MONOTONICIDADE DOS ZEROS DOS
POLINÔMIOS ORTOGONAIS CLÁSSICOS:
TEOREMAS DE MARKOV E STIELTJES**

por

Angélica Lourenço Oliveira

Mestrado em Matemática - Uberlândia - MG

Orientador: Prof. Dr. Fernando Rodrigo Rafaeli

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2017

ANGÉLICA LOURENÇO OLIVEIRA

Monotonicidade dos Zeros dos Polinômios Ortogonais Clássicos: Teoremas de Markov e Stieltjes

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.

Linha de Pesquisa: Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Rodrigo Rafaeli.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

O48m Oliveira, Angelica Lourenço, 1993-
2017 Monotonicidade dos zeros dos polinômios ortogonais clássicos :
teoremas de Markov e Stieltjes / Angelica Lourenço Oliveira. - 2017.
76 f. : il.

Orientador: Fernando Rodrigo Rafaeli.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Inclui bibliografia.

1. Matemática - Teses. 2. Polinômios ortogonais - Teses. 3. Funções
ortogonais - Teses. 4. Stieltjes, Integrais de - Teses. I. Rafaeli, Fernando
Rodrigo. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-
Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO(A): Angélica Lourenço Oliveira.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11512MAT012.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Matemática Aplicada.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Monotonicidade dos Zeros dos Polinômios Ortogonais Clássicos: Teoremas de Markov e Stieltjes.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Fernando Rodrigo Rafaeli.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 20 de fevereiro de 2017, às 10h30min, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME

ASSINATURA

Prof. Dr. Fernando Rodrigo Rafaeli
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Fernando R. Rafaeli

Profa. Dra. Vanessa Avansini Botta Pirani
UNESP - Universidade Estadual Paulista

Vanessa Botta Pirani

Prof(a). Dra. Marisa de Souza Costa
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Marisa S. Costa

Uberlândia-MG, 20 de fevereiro de 2017.

*Aos meus pais Daniel e Célia,
às minhas irmãs Michelle
e Danielle e em especial,
a você, meu melhor amigo e
esposo Reginaldo.*

ARADECIMENTOS

Primeiramente, agradeço a Deus, pois se cheguei até aqui foi pela Sua permissão.

Aos meus pais Daniel e Célia por fazerem de mim o que sou hoje.

A toda minha família, em especial às minhas irmãs Michelle e Danielle.

Aos meus colegas do mestrado que de alguma forma me ajudaram. Em particular aos meus amigos Edmilson e Magna.

Aos meus professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Faculdade de Matemática FAMAT/UFU que foram peças fundamentais nessa jornada.

Ao Professor Doutor Fernando Rodrigo Rafaeli por aceitar me orientar e me proporcionar uma riquíssima orientação. Obrigada pelos conselhos que foram fundamentais. Agradeço a paciência e compreensão.

Aos meus professores da Graduação na FACIP/UFU, por fazer de mim a discente que sou. Obrigada pelos ensinamentos acadêmicos e dos conhecimentos que vou levar para vida toda. Em especial, à minha ex-tutora do PET, ex-orientadora de TCC, mas que sempre será uma eterna mãe, Doutora Tânia Maria Machado de Carvalho.

Às doutoras Marisa de Souza Costa (UFU-Uberlândia) e Vanessa Avansini Botta Pirani (UNESP-Presidente Prudente) por aceitarem o convite de fazerem parte da banca examinadora.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

E o que dizer de você Reginaldo? Meu AMOR! Obrigada por tudo! Pelo seu carinho, seus sentimentos sempre sinceros e lindos. Obrigada pela grande paciência que sempre teve comigo. Obrigada, por me compreender nos momentos mais difíceis, por me dar seu ombro amigo e por me fazer muito feliz. Obrigada por ser meu amigo, meu eterno namorado e eterno marido. Obrigada por existir em minha vida.

OLIVEIRA, A. L. *Monotonicidade dos Zeros dos Polinômios Ortogonais Clássicos: Teoremas de Markov e Stieltjes*. 2017. 76 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Neste trabalho estudamos as equações do tipo hipergeométricas, em particular, as equações com soluções polinomiais. Mostramos que tais polinômios podem ser representados de forma explícita pela Fórmula de Rodrigues. Obtemos uma caracterização destes polinômios que são ortogonais, a saber, os Polinômios de Jacobi, Laguerre e Hermite. Utilizamos os teoremas clássicos de Markov e de Stieltjes para estudarmos a monotonicidade dos zeros dos polinômios de ortogonais clássicos, em particular os polinômios de Jacobi, Laguerre e Gegenbauer.

Palavras-chave: Polinômios Ortogonais, Monotonicidade, Limitantes, Markov, Stieltjes.

OLIVEIRA, A. L. *Monotonicity of Zeros of Classical Orthogonal Polynomials: Markov's and Stieltjes's Theorems* . 2017. 76 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

In this research we study the hypergeometric equations, in particular, the equations with polynomial solutions. We show that such polynomials can be represented explicitly by the Rodrigues's formula. We obtain a characterization of these polynomials that are orthogonal, namely, the Polynomials of Jacobi, Laguerre and Hermite. We use the classical theorems of Markov and of Stieltjes to study the monotonicity of the zeros of classical orthogonal polynomials, in particular the Jacobi, Laguerre, and Gegenbauer polynomials.

Keywords: Orthogonal Polynomials, Monotonicity, Limitants, Markov, Stieltjes.

LISTA DE FIGURAS

3.1	Polinômios de Jacobi $P_4^{(\alpha,3)}$, para $\alpha = 3, 5, 7, 9$	58
3.2	Gráfico dos zeros $x_{4,j}(\alpha, 2)$, $j = 1, \dots, 4$, dos Polinômios de Jacobi $P_4^{(\alpha,2)}$. . .	58
3.3	Polinômios de Jacobi $P_4^{(2,\beta)}$, com $\beta = 3, 5, 7, 9$	59
3.4	Gráfico dos zeros $x_{4,j}(2, \beta)$, $j = 1, \dots, 4$, dos Polinômios de Jacobi $P_4^{(2,\beta)}$. . .	59
3.5	Polinômios de Gegenbauer $P_4^{(\lambda)}$, com $\lambda = \frac{7}{2}, \frac{13}{2}, \frac{19}{2}, \frac{25}{2}$	61
3.6	Gráfico dos zeros $x_{6,j}(\lambda)$, $j = 1, 2, 3$, dos Polinômios de Gegenbauer $P_6^{(\lambda)}$. . .	61
3.7	Polinômios de Laguerre $L_4^{(\alpha)}$, com $\alpha = 8, 9, 10, 11$	63
3.8	Gráfico dos zeros $l_{4,j}(\alpha)$, $j = 1, \dots, 4$, dos Polinômios de Laguerre $L_4^{(\alpha)}$. . .	63
3.9	Gráfico dos zeros $z_{n,j} = \frac{1}{2}(1 - x_{n,j})(\beta + 1)$, $j = 1, \dots, 4$	67
3.10	Gráfico dos limitantes inferiores dos zeros $x_{4,j}(2, \beta)$ dos Polinômios $P_4^{(2,\beta)}$. . .	67
3.11	Gráfico dos zeros $z_{6,j} = (\lambda + 1/2)^{\frac{1}{2}}x_{6,j}$, para $j = 1, 2, 3$	70
3.12	Gráfico dos limitantes superiores dos zeros $x_{6,j}(\lambda)$, dos Polinômios $P_6^{(\lambda)}$. . .	70
3.13	Gráfico dos zeros $z_{4,j} = \frac{l_{4,j}(\alpha) - \alpha}{\sqrt{2\alpha}}$, para $j = 1, \dots, 4$	72
3.14	Gráfico dos limitantes inferiores dos zeros $l_{4,j}(\alpha)$, dos Polinômios $L_4^{(\alpha)}$. . .	72

SUMÁRIO

Resumo	xi
Abstract	xii
Lista de Figuras	xiii
Introdução	1
1 Polinômios Ortogonais	3
1.1 Equações do Tipo Hipergeométrica	3
1.2 Polinômios do Tipo Hipergeométrico e Suas Derivadas	5
1.2.1 A Fórmula de Rodrigues	6
1.3 A Propriedade de Ortogonalidade	13
1.4 Polinômios Ortogonais Clássicos	18
1.4.1 Caracterização dos Polinômio de Jacobi	18
1.4.2 Caracterização dos Polinômio de Laguerre	20
1.4.3 Caracterização dos Polinômio de Hermite	22
1.4.4 Casos particulares dos Polinômios de Jacobi	22
1.5 Propriedades Gerais dos Polinômios Ortogonais	24
1.5.1 Relação de Recorrência de Três Termos - RRTT	27
1.5.2 Identidade de Christoffel-Darboux	28
2 Monotonicidade dos Zeros: Teoremas de Markov e Stieltjes	33
2.1 Teorema Clássico de Markov	33
2.1.1 Primeira prova do Teorema de Markov	34
2.1.2 Segunda prova do Teorema de Markov	38
2.2 Teorema de Markov para Intervalos Simétricos	40
2.3 Teorema Clássico de Stieltjes	44
2.4 Teorema de Stieltjes para Intervalos Simétricos	47

3	Aplicações aos Polinômios Ortogonais Clássicos	55
3.1	Monotonicidade dos Zeros	55
3.1.1	Polinômios de Jacobi	56
3.1.2	Polinômios de Gegenbauer	59
3.1.3	Polinômios de Laguerre	62
3.2	Limitantes dos Zeros	64
3.2.1	Polinômios de Jacobi	64
3.2.2	Polinômios de Gegenbauer	66
3.2.3	Polinômios de Laguerre	70
4	Considerações Finais	73
	Bibliografia	73
	Anexos	77
	I Prova Original do Teorema de Markov	77
	II Prova Original do Teorema de Stieltjes	85

INTRODUÇÃO

Acredita-se que os primeiros resultados a respeito da monotonicidade dos zeros dos polinômios ortogonais foram apresentados em 1886 por Markov. Um pouco mais tarde, em 1887, Stieltjes abordou sobre este assunto tomando linhas diferentes das utilizadas por Markov. Anos mais tarde, em [20], Szegő utiliza esta teoria para o estudo da localização e da distância entre os zeros dos polinômios ortogonais. Hoje em dia, um pouco mais estabelecida, a teoria da monotonicidade dos zeros dos polinômios ortogonais tem sido muito utilizada por pesquisadores na área de Ciências Aplicadas.

Neste trabalho utilizaremos os resultados de Markov e Stieltjes para falarmos sobre a monotonicidade dos zeros de uma classe especial dos polinômios ortogonais, os polinômios ortogonais clássicos.

Os polinômios ortogonais clássicos, a saber, os polinômios de Jacobi, Laguerre e Hermite, formam uma classe de funções especiais. Ao mesmo tempo, a teoria destes polinômios admite amplas generalizações. Pela Fórmula de Rodrigues para os polinômios de Jacobi, Laguerre e Hermite, podemos chegar a uma representação integral para outras funções especiais de física e matemática. Por exemplo, funções hipergeométricas e funções de Bessel. Por outro lado, um esquema de construção para a teoria destes polinômios pode ser naturalmente generalizado aos polinômios ortogonais clássicos de uma variável discreta.

No Capítulo 1 deste trabalho, estudaremos as equações diferenciais de segunda ordem da forma

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0,$$

onde $\sigma(x)$ e $\tau(x)$ são polinômios e λ é uma constante. Mostraremos que sob certas condições nos coeficientes da equação diferencial acima, conseguimos encontrar soluções particulares específicas que são polinômios. Tais soluções polinomiais são obtidas de forma explícita através da Fórmula de Rodrigues.

Além disso, também no Capítulo 1, daremos uma breve descrição de forma coerente de alguns fatos básicos da teoria clássica dos polinômios ortogonais.

No segundo capítulo deste trabalho faremos um estudo sobre a monotonicidade dos zeros dos polinômios ortogonais clássicos. Este estudo se baseia nos trabalhos

clássicos de Markov [12] e Stieltjes [18], publicados nos anos 1886 e 1887, respectivamente.

Por fim, no Capítulo 3, aplicaremos os resultados de Markov e Stieltjes para obter novas relações de monotonicidade entre os zeros dos polinômios ortogonais clássicos. Como consequência desse estudo obteremos algumas desigualdades envolvendo tais zeros.

No último capítulo deste trabalho, abordaremos sobre algumas aplicações clássicas da teoria de monotonicidade dos zeros dos polinômios ortogonais clássicos.

Angélica Lourenço Oliveira
Uberlândia-MG, 20 de fevereiro de 2017.

CAPÍTULO 1

POLINÔMIOS ORTOGONAIS

Neste capítulo iremos estudar as equações do tipo hipergeométricas, em particular, as equações com soluções polinomiais. Mostraremos que tais polinômios podem ser representados de forma explícita pela Fórmula de Rodrigues e obteremos também uma caracterização destes polinômios que são ortogonais, a saber, os Polinômios de Jacobi, Laguerre e Hermite.

Por fim, estudaremos algumas propriedades importantes dos polinômios ortogonais utilizando sua ortogonalidade.

A principal referência utilizada neste capítulo foi [17]. As demais referências aqui utilizadas foram [1, 7, 14, 15, 19, 20].

1.1 Equações do Tipo Hipergeométrica

Normalmente quando se estuda alguns problemas de matemática aplicada e física teórica, nos deparamos com equações da seguinte forma

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0, \quad (1.1)$$

onde $\sigma(x)$ e $\tau(x)$ são polinômios de grau no máximo dois e um, respectivamente, e λ uma constante.

A Equação (1.1) é denominada equação do tipo hipergeométrica. As soluções de uma equação do tipo hipergeométrica são chamadas de funções do tipo hipergeométrica.

Uma propriedade importante das equações do tipo hipergeométrica é a que segue.

Proposição 1.1.1. *Todas as derivadas das funções do tipo hipergeométrica são também funções do tipo hipergeométricas.*

Em outras palavras, se $y(x)$ é solução da equação (1.1), então $v_n(x) = y^{(n)}(x)$ é solução da equação

$$\sigma(x)v_n'' + \tau_n(x)v_n' + \mu_n v_n = 0, \quad (1.2)$$

onde $\tau_n(x)$ é um polinômio de grau no máximo um e μ_n uma constante dados por

$$\tau_n(x) = n\sigma'(x) + \tau(x), \quad (1.3)$$

$$\mu_n = \lambda + n\tau' + \frac{n(n-1)}{2}\sigma''. \quad (1.4)$$

Demonstração. Provemos por indução. Primeiramente para $n = 1$, ou seja, derivando (1.1) e chamando $y'(x) = v_1(x)$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= [\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y]' \\ &= \sigma(x)y''' + \sigma'(x)y'' + \tau(x)y'' + \tau'(x)y' + \lambda y' \\ &= \sigma(x)y''' + (\sigma'(x) + \tau(x))y'' + (\tau'(x) + \lambda)y' \\ &= \sigma(x)y''' + \tau_1(x)y'' + \mu_1 y' \\ &= \sigma(x)v_1''' + \tau_1(x)v_1'' + \mu_1 v_1', \end{aligned}$$

concluindo assim que,

$$\sigma(x)v_1'' + \tau_1(x)v_1' + \mu_1 v_1 = 0, \quad (1.5)$$

onde $\tau_1 = \sigma' + \tau$ é um polinômio de grau no máximo um e $\mu_1 = \tau' + \lambda$ é uma constante.

Logo (1.5) é um equação do tipo hipergeométrica.

Para provarmos o caso geral, vamos derivar (1.1) n vezes para obter uma equação do tipo hipergeométrica para $v_n(x) = y^{(n)}(x) = v_{n-1}'(x)$.

Suponha que a equação (1.2) vale para $n - 1$, isto é,

$$\sigma(x)v_{n-1}'' + \tau_{n-1}(x)v_{n-1}' + \mu_{n-1}v_{n-1} = 0, \quad (1.6)$$

onde $\tau_{n-1}(x)$ é um polinômio de grau no máximo um e μ_{n-1} uma constante, dados por

$$\begin{aligned} \tau_{n-1}(x) &= (n-1)\sigma'(x) + \tau(x) \\ \mu_{n-1} &= \lambda + (n-1)\tau' + \frac{(n-1)(n-2)}{2}\sigma''. \end{aligned}$$

Derivando (1.6) temos

$$\begin{aligned} 0 &= [\sigma(x)v_{n-1}'' + \tau_{n-1}(x)v_{n-1}' + \mu_{n-1}v_{n-1}]' \\ &= \sigma(x)v_{n-1}''' + \sigma'(x)v_{n-1}'' + \tau_{n-1}'(x)v_{n-1}' + \tau_{n-1}(x)v_{n-1}'' + \mu_{n-1}v_{n-1}' \\ &= \sigma(x)v_{n-1}''' + [\sigma'(x) + \tau_{n-1}(x)]v_{n-1}'' + [\tau_{n-1}'(x) + \mu_{n-1}]v_{n-1}' \\ &= \sigma(x)v_n'' + [\sigma'(x) + (n-1)\sigma'(x) + \tau(x)]v_n' \\ &\quad + [\tau_{n-1}'(x) + \lambda + (n-1)\tau'(x) + 2^{-1}(n-1)(n-2)\sigma'']v_n \\ &= \sigma(x)v_n'' + [n\sigma'(x) + \tau(x)]v_n' + [\lambda + n\tau' + 2^{-1}n(n-1)\sigma'']v_n \\ &= \sigma(x)v_n'' + \tau_n(x)v_n' + \mu_n v_n. \end{aligned}$$

Desta forma, o resultado fica provado. □

Outro fato importante é que a recíproca do resultado anterior também é verdadeira.

Proposição 1.1.2. *Toda solução de (1.2), com $\mu_k \neq 0$, $k = 1, \dots, n-1$, pode ser representada da forma $v_n(x) = y^{(n)}(x)$, onde $y(x)$ é uma solução de (1.1).*

Demonstração. Mostraremos primeiramente para $n = 1$. Seja $v_1(x)$ uma solução de (1.5). Se a função $v_1(x)$ for a derivada de uma solução da Eq. (1.1) então, de acordo com esta equação, as funções $y(x)$ e $v_1(x)$ podem ser escritas da seguinte forma:

$$y(x) = -\frac{1}{\lambda}[\sigma(x)v_1'(x) - \tau(x)v_1(x)].$$

Mostremos que a função $y(x)$ definida acima realmente satisfaz (1.1) e que sua derivada é $v_1(x)$. Temos que

$$\begin{aligned} \lambda y'(x) &= -[\sigma(x)v_1'(x) + \tau(x)v_1(x)]' \\ &= -[\sigma(x)v_1''(x) + \sigma'(x)v_1'(x) + \tau(x)v_1'(x) + \tau'(x)v_1(x)] \\ &= -[\sigma(x)v_1''(x) + (\sigma'(x) + \tau(x))v_1'(x) + \tau'(x)v_1(x)] \\ &= -[\sigma(x)v_1''(x) + \tau_1(x)v_1'(x) + \tau'(x)v_1(x)]. \end{aligned}$$

Por outro lado, como $v_1(x)$ é solução de (1.5) então

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma(x)v_1''(x) + \tau_1(x)v_1'(x) + \mu_1 v_1(x) \\ &= \sigma(x)v_1''(x) + \tau_1(x)v_1'(x) + (\lambda + \tau')v_1(x) \\ &= \sigma(x)v_1''(x) + \tau_1(x)v_1'(x) + \tau'v_1(x) + \lambda v_1(x), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\lambda v_1(x) = -[\sigma(x)v_1''(x) + \tau_1(x)v_1'(x) + \tau'v_1(x)].$$

Logo, $\lambda v_1(x) = \lambda y'(x)$ e, portanto, $v_1(x) = y'(x)$. Substituindo $v_1(x) = y'(x)$ na expressão original de $y'(x)$ obtemos (1.1) para $y(x)$.

Suponha agora que vale para $n-1$, isto é, que $v_{n-1}(x) = y^{(n-1)}(x)$ com $y(x)$ e $v_{n-1}(x)$ soluções de (1.1) e (1.2), respectivamente. Como vale para o caso $n = 1$, isto é, para suas derivadas, temos que $v_n(x) = v_{n-1}'(x) = (y^{(n-1)}(x))' = y^{(n)}(x)$. Disto segue o resultado. □

1.2 Polinômios do Tipo Hipergeométrico e Suas Derivadas

De forma geral é difícil encontrar uma solução particular de forma explícita de uma Equação Diferencial. Nesta seção, mostraremos que as equações diferenciais de segunda ordem definidas em (1.1), possuem soluções polinomiais e estas soluções são dadas de forma explícita pela Fórmula de Rodrigues.

1.2.1 A Fórmula de Rodrigues

Devido as propriedades das soluções das equações do tipo hipergeométrica descritas anteriormente, podemos obter uma família de soluções particulares para a equação (1.1) tomando valores específicos para a constante λ . De fato, tomando $\mu_n = 0$, ou seja

$$\lambda = -n\tau' - \frac{n(n-1)}{2}\sigma'',$$

a equação (1.2) se reduz a

$$\sigma(x)v_n'' + \tau_n(x)v_n' = 0$$

e, portanto, tem uma solução particular dada por $v_n(x) = k$, onde k é uma constante.

Uma vez que $v_n(x) = y^{(n)}(x)$, isso significa que a equação (1.1) tem uma solução particular da forma $y(x) = y_n(x)$, que é um polinômio de grau n .

Definição 1.2.1. *Os polinômios de grau n que são soluções da equação do tipo hipergeométrica são denominados polinômios do tipo hipergeométrico.*

O polinômio $y_n(x)$ definido acima é a solução mais simples de (1.1).

Uma questão importante é encontrar os polinômios do tipo hipergeométrico explicitamente. Para esse fim, multiplicamos a equação (1.1) por uma função $\rho(x)$, como segue

$$\begin{aligned} 0 &= \rho(x)(\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y) \\ &= \rho(x)\sigma(x)y'' + \rho(x)\tau(x)y' + \lambda\rho(x)y. \end{aligned}$$

Se for satisfeito $(\sigma(x)\rho(x))' = (\tau(x)\rho(x))$, então reduzimos a equação acima para a seguinte forma auto-adjunta

$$(\sigma(x)\rho(x)y')' + \lambda\rho(x)y = 0. \quad (1.7)$$

Analogamente, se multiplicarmos a equação (1.2) por uma função $\rho_n(x)$ temos

$$\begin{aligned} 0 &= \rho_n(x)(\sigma(x)v_n'' + \tau_n(x)v_n' + \mu_n v_n) \\ &= \rho_n(x)\sigma(x)v_n'' + \rho_n(x)\tau_n(x)v_n' + \mu_n\rho_n(x)v_n. \end{aligned}$$

Se $(\sigma(x)\rho_n(x))' = (\tau_n(x)\rho_n(x))$, chegamos à forma auto-adjunta

$$(\sigma(x)\rho_n(x)v_n')' + \mu_n\rho_n(x)v_n = 0. \quad (1.8)$$

Em (1.7) e (1.8) consideramos que $\rho(x)$ satisfaz a equação

$$(\sigma(x)\rho(x))' = \tau(x)\rho(x) \quad (1.9)$$

e $\rho_n(x)$ satisfaz a equação

$$(\sigma(x)\rho_n(x))' = \tau_n(x)\rho_n(x). \quad (1.10)$$

Estas duas últimas equações são conhecidas como *Equações de Pearson*.

Agora, usando (1.3), podemos facilmente estabelecer uma relação entre $\rho_n(x)$ e $\rho_0(x) \equiv \rho(x)$. Temos que

$$\begin{aligned}\tau_n(x)\rho_n(x) &= (\sigma(x)\rho_n(x))' \\ &= \sigma'(x)\rho_n(x) + \sigma(x)\rho_n'(x).\end{aligned}$$

Como $(\sigma(x)\rho(x))' = \tau(x)\rho(x)$, então

$$\begin{aligned}\sigma'(x) + \sigma(x)\frac{\rho_n'(x)}{\rho_n(x)} &= \tau_n(x) \\ &= \tau(x) + n\sigma'(x) \\ &= \frac{(\sigma(x)\rho(x))'}{\rho(x)} + n\sigma'(x).\end{aligned}$$

Disso segue que

$$\begin{aligned}\frac{\rho_n'(x)}{\rho_n(x)} &= \frac{(\sigma(x)\rho(x))'}{\sigma(x)\rho(x)} + (n-1)\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} \\ &= \frac{\sigma(x)\rho(x)' + \sigma'(x)\rho(x)}{\sigma(x)\rho(x)} + (n-1)\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} \\ &= \frac{\rho(x)'}{\rho(x)} + \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} + n\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} - \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} \\ &= \frac{\rho(x)'}{\rho(x)} + n\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}\end{aligned}$$

e portanto,

$$\frac{\rho_n'(x)}{\rho_n(x)} = \frac{\rho(x)'}{\rho(x)} + n\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}.$$

Integrando esta equação, temos

$$\begin{aligned}\int \frac{\rho_n'(x)}{\rho_n(x)} dx &= \int \left(\frac{\rho(x)'}{\rho(x)} + n\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} \right) dx \\ &= \int \frac{\rho(x)'}{\rho(x)} dx + n \int \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)} dx.\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\ln \rho_n(x) &= \ln \rho(x) + n \ln \sigma(x) \\ &= \ln \rho(x) + \ln \sigma^n(x) \\ &= \ln \rho(x)\sigma^n(x)\end{aligned}$$

o que implica que

$$\rho_n(x) = \rho(x)\sigma^n(x). \quad (1.11)$$

Fazendo $\sigma(x)\rho_n(x) = \rho_{n+1}(x)$ e $v'_n(x) = v_{n+1}(x)$ podemos reescrever (1.8) sob a forma de relação de recorrência

$$\begin{aligned}\rho_n(x)v_n(x) &= -\frac{1}{\mu_n}[\sigma(x)\rho_n(x)v'_n(x)]' \\ &= -\frac{1}{\mu_n}[\rho_{n+1}(x)v_{n+1}(x)]'\end{aligned}\tag{1.12}$$

e, consequentemente¹,

$$\begin{aligned}\rho(x)y(x) &\equiv \rho_0(x)y(x) \\ &= -\frac{1}{\mu_0}[\rho_1(x)v_1(x)]' \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \cdot -\frac{1}{\mu_1}[\rho_2(x)v_2(x)]'' \\ &\vdots \\ &= (-1)^n \frac{1}{\mu_0} \dots \frac{1}{\mu_{n-1}}[\rho_n(x)v_n(x)]^{(n)} \\ &= \frac{1}{A_n}[\rho_n(x)v_n(x)]^{(n)},\end{aligned}$$

onde

$$A_n = (-1)^n \prod_{k=0}^{n-1} \mu_k, \quad A_0 = 1,\tag{1.13}$$

com μ_k e λ dados anteriormente.

A proposição a seguir fornece uma fórmula explícita para os polinômios do tipo hipergeométrico, conhecida como Fórmula de Rodrigues.

Proposição 1.2.1. (Fórmula de Rodrigues) *Se $y_n(x)$ for uma função polinomial de grau exatamente n e solução da Equação (1.1), então $y_n(x)$ é dado explicitamente por*

$$y_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)}[\sigma^n(x)\rho(x)]^{(n)},\tag{1.14}$$

onde $B_n = \frac{y_n^{(n)}(x)}{A_n}$ é uma constante normalizadora.

Demonstração. Como $y_n(x) = y(x)$ tem grau n , então $v_n(x) = y_n^{(n)}(x)$ é uma função

¹Usualmente, na teoria dos polinômios ortogonais, utilizamos a notação $\frac{d^n f}{dx^n}$ para denotarmos a derivada n -ésima de uma função f . Nesta seção utilizaremos a notação $f^{(n)}$ para denotar esta derivada.

constante. Logo, utilizando (1.11), obtemos

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{A_n \rho(x)} [\rho_n(x) v_n(x)]^{(n)} \\
&= \frac{1}{A_n \rho(x)} [\sigma^n(x) \rho(x) y_n^{(n)}(x)]^{(n)} \\
&= \frac{y_n^{(n)}(x)}{A_n \rho(x)} [\sigma^n(x) \rho(x)]^{(n)} \\
&= \frac{y_n^{(n)}(x)}{A_n} \frac{1}{\rho(x)} [\sigma^n(x) \rho(x)]^{(n)} \\
&= \frac{B_n}{\rho(x)} [\sigma^n(x) \rho(x)]^{(n)}.
\end{aligned}$$

□

Chamamos a relação (1.14) de Fórmula de Rodrigues.

Assim, as soluções polinomiais de (1.1) são definidas unicamente pela Fórmula de Rodrigues a menos de uma constante arbitrária. Estas soluções são obtidas quando $\mu_n = 0$, ou seja,

$$\lambda = \lambda_n = -n\tau' - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma'', \quad n = 0, 1, \dots \quad (1.15)$$

Denotando as derivadas $y_n^{(m)}(x) = v_m(x)$, que são polinômios de grau $n - m$, e estas satisfazendo

$$\sigma(x)v_m'' + \tau_m(x)v_m' + \mu_m v_m = 0, \quad (1.16)$$

temos que $y_n^{(m)}(x)$ são polinômios do tipo hipergeométrico. A Fórmula de Rodrigues para $y_n^{(m)}(x)$ pode ser obtida de forma semelhante à (1.14).

De (1.12) temos que

$$\begin{aligned}
\rho_m(x)v_m(x) &= \frac{-1}{\mu_m} [\rho_{m+1}(x)v_{m+1}(x)]' \\
&= \frac{-1}{\mu_m} \cdot \frac{-1}{\mu_{m+1}} [\rho_{m+2}(x)v_{m+2}(x)]'' \\
&\vdots \\
&= \frac{-1}{\mu_m} \cdot \frac{-1}{\mu_{m+1}} \dots \frac{-1}{\mu_{n-1}} [\rho_n(x)v_n(x)]^{(n-m)} \\
&= \frac{(-1)^m}{(-1)^n} \frac{\mu_0 \dots \mu_{m-1}}{\mu_0 \dots \mu_{n-1}} \cdot \frac{1}{\mu_m \dots \mu_{n-1}} [\rho_n(x)v_n(x)]^{(n-m)} \\
&= \frac{A_m}{A_n} [\rho_n(x)v_n(x)]^{(n-m)}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
v_m(x) &= \frac{A_m}{\rho_m A_n} [\rho_n(x) v_n(x)]^{(n-m)} \\
&= \frac{A_m}{\rho(x) \sigma^m(x) A_n} [\rho(x) \sigma^n(x) y_n^{(n)}(x)]^{(n-m)} \\
&= \frac{A_m}{\rho(x) \sigma^m(x)} \frac{y_n^{(n)}(x)}{A_n} [\rho(x) \sigma^n(x)]^{(n-m)} \\
&= \frac{A_m B_n}{\rho(x) \sigma^m(x)} [\rho(x) \sigma^n(x)]^{(n-m)}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$y_n^{(m)}(x) = \frac{A_m B_n}{\sigma^m(x) \rho(x)} [\sigma^n(x) \rho(x)]^{(n-m)}, \quad (1.17)$$

onde

$$A_m = (-1)^m \prod_{k=0}^{m-1} \mu_k, \quad A_0 = 1.$$

Observe que,

$$\begin{aligned}
\mu_k &= \lambda + k\tau' + \frac{1}{2}k(k-1)\sigma'' = \lambda_n + k\tau' + \frac{1}{2}k(k-1)\sigma'' \\
&= -n\tau' - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma'' + k\tau' + \frac{1}{2}k(k-1)\sigma'' \\
&= -(n-k)\tau' + \frac{1}{2}(n(n-1) - k(k-1))\sigma'' \\
&= -(n-k)\tau' + \frac{1}{2}(n^2 - n - k^2 + k)\sigma'' \\
&= -(n-k)\tau' - \frac{1}{2}(n-k)(n+k-1)\sigma'' \\
&= -(n-k)\left[\tau' + \frac{1}{2}(n+k-1)\sigma''\right].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
A_m &= (-1)^m \prod_{k=0}^{m-1} \mu_k = (-1)^m \prod_{k=0}^{m-1} \left[-(n-k)\left[\tau' + \frac{1}{2}(n+k-1)\sigma''\right] \right] \\
&= (-1)^{2m} \prod_{k=0}^{m-1} (n-k)\left[\tau' + \frac{1}{2}(n+k-1)\sigma''\right] \\
&= \prod_{k=0}^{m-1} (n-k)\left[\tau' + \frac{1}{2}(n+k-1)\sigma''\right] \\
&= n(n-1)\dots(n-(m-1)) \prod_{k=0}^{m-1} \left[\tau' + \frac{1}{2}(n+k-1)\sigma''\right] \\
&= \frac{n!}{(n-m)!} \prod_{k=0}^{m-1} \left[\tau' + \frac{1}{2}(n+k-1)\sigma''\right].
\end{aligned}$$

Assim, como esperado, a equação (1.17) de $y_n^{(m)}(x)$ pode ser obtida através da Fórmula de Rodrigues, a menos de um fator normalizador, se trocarmos n por $n - m$ e $\rho(x)$ por $\rho_m(x) = \rho(x)\sigma^m(x)$.

Agora veremos algumas consequências da Fórmula de Rodrigues. Fazendo $m = 1$ em (1.17), e como

$$A_1 = \frac{n!}{(n-1)!} \left[\tau' + \frac{1}{2}(n-1)\sigma'' \right] = n\tau' + \frac{n}{2}(n-1)\sigma'' = -\lambda_n,$$

então

$$\begin{aligned} y'_n(x) &= \frac{A_1 B_n}{\sigma(x)\rho(x)} [\sigma^n(x)\rho(x)]^{(n-1)} \\ &= \frac{-\lambda_n B_n}{\sigma(x)\rho(x)} [\sigma^{n-1}(x)\sigma(x)\rho(x)]^{(n-1)} \\ &= \frac{-\lambda_n B_n}{\rho_1(x)} [\sigma^{n-1}(x)\rho_1(x)]^{(n-1)} \\ &= -\lambda_n \frac{B_n}{\bar{B}_{n-1}} \frac{\bar{B}_{n-1}}{\rho_1(x)} [\sigma^{n-1}(x)\rho_1(x)]^{(n-1)} \\ &= -\lambda_n \frac{B_n}{\bar{B}_{n-1}} \bar{y}_{n-1}. \end{aligned}$$

Neste caso, \bar{y}_n é um polinômio que surge através da substituição de $\rho(x)$ por $\rho_1(x)$ na expressão para $y_n(x)$. E mais, \bar{B}_n é uma constante normalizadora da Fórmula de Rodrigues para \bar{y}_n .

Utilizando a Fórmula de Rodrigues, podemos expressar as derivadas $y'_n(x)$ em termos do próprio $y_n(x)$. De fato, temos que $\sigma^{n+1}(x)\rho(x) = \sigma(x)\sigma^n(x)\rho(x) = \sigma(x)\rho_n(x)$ e de (1.10), $(\sigma(x)\rho_n(x))' = \tau_n(x)\rho_n(x)$, e, portanto, utilizando a regra de Leibniz² para derivadas temos

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &= \frac{B_{n+1}}{\rho(x)} [\sigma^{n+1}(x)\rho(x)]^{(n+1)} \\ &= \frac{B_{n+1}}{\rho(x)} [(\sigma(x)\rho_n(x))']^{(n)} = \frac{B_{n+1}}{\rho(x)} [\tau_n(x)\rho_n(x)]^{(n)} \\ &= \frac{B_{n+1}}{\rho(x)} [n\tau'_n(x)\rho_n^{(n-1)}(x) + \tau_n(x)\rho_n^{(n)}(x)] \\ &= \frac{B_{n+1}}{\rho(x)} [n\tau'_n(x)(\sigma^n(x)\rho(x))^{(n-1)} + \tau_n(x)(\sigma^n(x)\rho(x))^{(n)}]. \end{aligned}$$

De (1.14) e (1.17) temos

$$(\sigma^n(x)\rho(x))^{(n)} = \frac{y_n(x)\rho(x)}{B_n}$$

²Regra de Leibniz: $(f.g)^{(n)} = \sum_{j=0}^n C_n^j f^{(j)}.g^{(n-j)}$, fazendo $f = \tau_n(x)$ e $g = \rho_n(x)$ encontramos facilmente a derivada n -ésima de $\tau_n(x)\rho_n(x)$, onde C_n^j é o coeficiente binomial.

e

$$(\sigma^n(x)\rho(x))^{(n-1)} = \frac{y'_n(x)\rho(x)\sigma(x)}{A_1B_n} = \frac{y'_n(x)\rho(x)\sigma(x)}{A_1B_n}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} y_{n+1}(x) &= \frac{B_{n+1}}{\rho(x)} \left[n\tau'_n(x) \frac{y'_n(x)\rho(x)\sigma(x)}{A_1B_n} + \tau_n(x) \frac{y_n(x)\rho(x)}{B_n} \right] \\ &= \frac{B_{n+1}}{B_n} \left[n\tau'_n(x) \frac{y'_n(x)\sigma(x)}{A_1} + \tau_n(x)y_n(x) \right] \\ &= \frac{B_{n+1}}{B_n} \left[\frac{n}{-\lambda_n} \tau'_n(x)y'_n(x)\sigma(x) + \tau_n(x)y_n(x) \right]. \end{aligned}$$

E, portanto,

$$\frac{y_{n+1}(x)B_n}{B_{n+1}} = \tau_n(x)y_n(x) - \frac{n}{\lambda_n} \tau'_n(x)y'_n(x)\sigma(x).$$

Dai, fazendo as manipulações necessárias concluimos que

$$y'_n(x) = \frac{\lambda_n}{\sigma(x)n\tau'_n(x)} \left[\tau_n(x)y_n(x) - \frac{y_{n+1}(x)B_n}{B_{n+1}} \right].$$

Em certos problemas, é importante conhecer os coeficientes dos polinômios do tipo hipergeométrico. Considerando

$$y_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots, \quad (1.18)$$

podemos determinar o valor a_n e de b_n tomando $m = n - 1$ em (1.17).

De fato, por (1.18)

$$y_n^{(n-1)}(x) = n!a_n x + (n-1)!b_n,$$

e, por outro lado, de (1.17), temos

$$\begin{aligned} y_n^{(n-1)} &= \frac{A_{n-1}B_n(\sigma^n(x)\rho(x))'}{\sigma^{n-1}(x)\rho(x)} \\ &= \frac{A_{n-1}B_n\tau_{n-1}(x)\rho_{n-1}(x)}{\rho_{n-1}(x)} \\ &= A_{n-1}B_n\tau_{n-1}(x). \end{aligned}$$

Logo,

$$n!a_n x + (n-1)!b_n = A_{n-1}B_n\tau_{n-1}(x). \quad (1.19)$$

Derivando a igualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{B_n \tau'_{n-1}}{n!} A_{n-1} \\
 &= \frac{B_n \tau'_{n-1}}{n!} \cdot n! \prod_{k=0}^{n-2} \left[\tau' + \frac{1}{2}(n+k-1)\sigma'' \right] \\
 &= B_n \tau'_{n-1} \cdot \prod_{k=0}^{n-2} \left[\tau' + \frac{1}{2}(n+k-1)\sigma'' \right] \\
 &= B_n \prod_{k=0}^{n-1} \left[\tau' + \frac{1}{2}(n+k-1)\sigma'' \right],
 \end{aligned}$$

e, fazendo $x = 0$ em (1.19), temos que

$$b_n = \frac{A_{n-1} B_n \tau_{n-1}(0)}{(n-1)!}.$$

Disso concluímos que

$$a_n = B_n \prod_{k=0}^{n-1} \left[\tau' + \frac{1}{2}(n+k-1)\sigma'' \right], \quad a_0 = B_0,$$

e

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{A_{n-1} B_n \tau_{n-1}(0)}{(n-1)!} \frac{n!}{A_{n-1} B_n \tau'_{n-1}} = \frac{n \tau_{n-1}(0)}{\tau'_{n-1}}. \quad (1.20)$$

1.3 A Propriedade de Ortogonalidade

Nesta seção, mostraremos que as soluções polinomiais da Equação(1.1) satisfazem uma propriedade de ortogonalidade.

Teorema 1.3.1. *Suponha que $\sigma(x)\rho(x)x^k = 0$, para todo $k \geq 0$ e $x = a, x = b$. Então as soluções polinomiais de (1.1) formam uma sequência de polinômios ortogonais $y_n(x)$, em relação a função peso $\rho(x)$, onde $\rho(x)$ satisfaz a equação (1.9). Além disso, sua ortogonalidade é definida por*

$$\int_a^b y_m(x) y_n(x) \rho(x) dx = \delta_{mn} d_n^2,$$

onde d_n denota a norma do polinômio $y_n(x)$.

Demonstração. Para $n, m \in \mathbb{N}^*$, sejam $y_n(x)$ e $y_m(x)$ polinômios do tipo hipergeométricos. As equações de $y_n(x)$ e $y_m(x)$ na forma auto-adjunta são dadas por

$$\begin{aligned}
 (\sigma(x)\rho(x)y'_n(x))' + \lambda_n \rho(x)y_n(x) &= 0 \\
 (\sigma(x)\rho(x)y'_m(x))' + \lambda_m \rho(x)y_m(x) &= 0.
 \end{aligned}$$

Se multiplicarmos a primeira equação por y_m e a segunda por y_n e subtrairmos a segunda equação da primeira temos

$$0 = y_m(x)(\sigma(x)\rho(x)y'_n(x))' + y_m(x)y_n(x)\lambda_n\rho(x) + \\ - y_n(x)(\sigma(x)\rho(x)y'_m(x))' - y_m(x)y_n(x)\lambda_m\rho(x).$$

Então,

$$y_m(x)(\sigma(x)\rho(x)y'_n(x))' - y_n(x)(\sigma(x)\rho(x)y'_m(x))' = y_m(x)y_n(x)\rho(x)[\lambda_m - \lambda_n].$$

Integrando o resultado em (a, b) em relação a x , temos que

$$\begin{aligned} \int_a^b \{y_m(x)(\sigma(x)\rho(x)y'_n(x))' - y_n(x)(\sigma(x)\rho(x)y'_m(x))'\} dx &= \\ &= \int_a^b \{y_m(x)[(\sigma(x)\rho(x))'y'_n(x) + \sigma(x)\rho(x)y''_n(x)] + \\ &\quad - y_n(x)[(\sigma(x)\rho(x))'y'_m(x) + \sigma(x)\rho(x)y''_m(x)]\} dx \\ &= \int_a^b \{(\sigma(x)\rho(x))'y'_m(x)y'_n(x) + \sigma(x)\rho(x)y_m(x)y''_n(x) + \\ &\quad - (\sigma(x)\rho(x))'y'_n(x)y'_m(x) + \sigma(x)\rho(x)y_n(x)y''_m(x)\} dx \\ &= \int_a^b \{(\sigma(x)\rho(x))'[y'_n(x)y_m(x) - y_n(x)y'_m(x)] + \\ &\quad + \sigma(x)\rho(x)[y''_n(x)y_m(x) - y_n(x)y''_m(x)]\} dx \\ &= \int_a^b \{(\sigma(x)\rho(x))'[y'_n(x)y_m(x) - y_n(x)y'_m(x)] \\ &\quad + \sigma(x)\rho(x)[y''_n(x)y_m(x) + y'_n(x)y'_m(x) + \\ &\quad - y'_n(x)y'_m(x) - y_n(x)y''_m(x)]\} dx \\ &= \int_a^b \{(\sigma(x)\rho(x))'[y'_n(x)y_m(x) - y_n(x)y'_m(x)] + \\ &\quad + \sigma(x)\rho(x)[y'_n(x)y_m(x) - y_n(x)y'_m(x)]'\} dx \\ &= \int_a^b \left[(\sigma(x)\rho(x))[y'_n(x)y_m(x) - y_n(x)y'_m(x)] \right]' dx \\ &= \int_a^b \left[\sigma(x)\rho(x)W[y_m(x), y_n(x)] \right]'. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_a^b y_m(x)(\sigma(x)\rho(x)y'_n(x))' - y_n(x)(\sigma(x)\rho(x)y'_m(x))' dx = \int_a^b \left[\sigma(x)\rho(x)W[y_m, y_n] \right]' dx,$$

onde $W[u, v] = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix}$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
[\lambda_m - \lambda_n] \int_a^b y_m(x) y_n(x) \rho(x) dx &= \int_a^b y_m(x) y_n(x) \rho(x) [\lambda_m - \lambda_n] dx \\
&= \int_a^b \{y_m(x)(\sigma(x)\rho(x)y_n'(x))' - y_n(x)(\sigma(x)\rho(x)y_m'(x))'\} dx \\
&= \int_a^b \left[\sigma(x)\rho(x)W[y_m(x), y_n(x)] \right]' dx,
\end{aligned}$$

isto é,

$$[\lambda_m - \lambda_n] \int_a^b y_m(x) y_n(x) \rho(x) dx = \sigma(x)\rho(x)W[y_m(x), y_n(x)]_a^b.$$

Se $\rho(x)$ satisfaz a propriedade

$$\sigma(x)\rho(x)x^k = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.21)$$

para $x = a$ e $x = b$, então $\sigma(x)\rho(x)W[y_m(x), y_n(x)]_a^b = 0$, pois $W[y_m(x), y_n(x)]_a^b$ é uma função polinomial de x . Daí,

$$[\lambda_m - \lambda_n] \int_a^b y_m(x) y_n(x) \rho(x) dx = 0.$$

Logo, se $\lambda_m \neq \lambda_n$, então

$$\int_a^b y_m(x) y_n(x) \rho(x) dx = 0. \quad (1.22)$$

Podemos substituir a condição $\lambda_m \neq \lambda_n$ por $m \neq n$, se tivermos

$$\tau' + \frac{1}{2}(n + m - 1)\sigma'' \neq 0. \quad (1.23)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\lambda_m &= \lambda_n && \Leftrightarrow \\
n\tau' + \frac{1}{2}n(n-1)\sigma'' &= m\tau' + \frac{1}{2}m(m-1)\sigma'' && \Leftrightarrow \\
n\tau' + \frac{1}{2}n(n-1)\sigma'' - m\tau' - \frac{1}{2}m(m-1)\sigma'' &= 0 && \Leftrightarrow \\
(n-m)\tau' + \frac{1}{2}(n(n-1) - m(m-1))\sigma'' &= 0 && \Leftrightarrow \\
(n-m)\tau' + \frac{1}{2}(n-m)(n+m-1)\sigma'' &= 0 && \Leftrightarrow \\
(n-m)(\tau' + \frac{1}{2}(n+m-1)\sigma'') &= 0,
\end{aligned}$$

isto é, $\lambda_m \neq \lambda_n$ é equivalente a dizer que $n \neq m$ se $\tau' + \frac{1}{2}(n + m - 1)\sigma'' \neq 0$.

No caso em que $m = n$, desde que $\rho(x) > 0$ em (a, b) , temos

$$\int_a^b y_n^2(x) \rho(x) dx = d_n^2,$$

o que conclui a demonstração do teorema. \square

Uma forma de cumprir as condições de (1.21), para valores finitos de a e b , é suficiente exigir que a função $\rho(x)$ satisfaça a seguinte condição de fronteira

$$\sigma(a)\rho(a) = 0 \quad \sigma(b)\rho(b) = 0.$$

Porém, se tivermos a um valor finito e $b = \infty$ então podemos substituir as condições de (1.21) pelas condições

$$\sigma(a)\rho(a) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} x^k \sigma(x) \rho(x) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

De forma análoga, quando $a = -\infty$ e b for um valor finito, as condições (1.21) podem ser substituídas pelas condições .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^k \sigma(x) \rho(x) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{e} \quad \sigma(b)\rho(b) = 0.$$

Os polinômios do tipo hipergeométrico $y_n(x)$, aos quais a função $\rho(x)$ satisfaz a condição (1.21), são conhecidos como Polinômios Ortogonais Clássicos. Usualmente, são também exigidas as condições adicionais $\rho(x) > 0$ e $\sigma(x) > 0$, para x no intervalo (a, b) .

De forma análoga à demonstração anterior, utilizando as propriedades das derivadas dos polinômios do tipo hipergeométricos, podemos concluir o seguinte.

Teorema 1.3.2. *Todas as derivadas dos polinômios ortogonais clássicos $y_n^{(k)}(x)$ são polinômios ortogonais clássicos com relação a função peso $\rho_k(x) = \sigma^k(x)\rho(x)$ no intervalo (a, b) , e sua ortogonalidade é dada por*

$$\int_a^b y_m^{(k)}(x) y_n^{(k)}(x) \rho_k(x) dx = \delta_{mn} d_{kn}^2, \quad (1.24)$$

onde d_{kn} é a norma do polinômio $y_n^{(k)}(x)$.

A norma quadrada d_{kn}^2 do polinômio $y_n^{(k)}(x)$ pode ser expressa em termos da norma quadrada $d_n^2 = d_{0n}^2$ do polinômio $y_n(x)$. Para isso, basta utilizar (1.8) para encontrar a forma auto-adjunta para $y_n^{(k)}(x)$. De fato, para a derivada k -ésima de $y_n(x)$, podemos concluir que

$$(\rho_{k+1}(x) y_n^{(k+1)}(x))' + \mu_k \rho_k(x) y_n^{(k)}(x) = 0. \quad (1.25)$$

Multiplicando a equação acima por $y_n^{(k)}(x)$ e integrando em (a, b) , temos

$$\int_a^b (\rho_{k+1}(x) y_n^{(k+1)}(x))' y_n^{(k)}(x) dx + \mu_k \int_a^b \rho_k(x) y_n^{(k)}(x) y_n^{(k)}(x) dx = 0.$$

Utilizando a integração por partes, temos

$$\begin{aligned} \int_a^b (\rho_{k+1}(x) y_n^{(k+1)}(x))' y_n^{(k)}(x) dx &= \rho_{k+1}(x) y_n^{(k+1)}(x) y_n^{(k)}(x) \Big|_a^b + \\ &\quad - \int_a^b (y_n^{(k+1)}(x))^2 \rho_{k+1}(x) dx. \end{aligned}$$

Logo,

$$\rho_{k+1}(x)y_n^{(k+1)}(x)y_n^{(k)}(x)|_a^b - \int_a^b (y_n^{(k+1)}(x))^2 \rho_{k+1}(x)dx + \mu_k \int_a^b (y_n^{(k)}(x))^2 \rho_k(x)dx = 0$$

Devido a condição (1.21), temos que $\rho_{k+1}(x)y_n^{(k+1)}(x)y_n^{(k)}(x)|_a^b = 0$, e, portanto,

$$\int_a^b (y_n^{(k+1)}(x))^2 \rho_{k+1}(x)dx = \mu_k \int_a^b (y_n^{(k)}(x))^2 \rho_k(x)dx,$$

isto é,

$$d_{kn}^2 = \frac{d_{k+1,n}^2}{\mu_k}.$$

Utilizando a relação de recorrência acima, temos que

$$d_{mn}^2 = \frac{d_{m+1,n}^2}{\mu_m} = \frac{d_{m+2,n}^2}{\mu_m \mu_{m+1}} = \dots = \frac{d_{n-1,n}^2}{\mu_m \dots \mu_{n-2}} = \frac{d_{nn}^2}{\mu_m \dots \mu_{n-1}},$$

ou seja,

$$d_{mn}^2 = \frac{d_{nn}^2}{\prod_{k=m}^{n-1} \mu_k}. \quad (1.26)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} d_{nn}^2 &= \int_a^b (y_n^{(n)}(x))^2 \rho_n(x)dx \\ &= \int_a^b (y_n^{(n)}(x))^2 \sigma^n(x) \rho(x)dx \\ &= \int_a^b (a_n n!)^2 \sigma^n(x) \rho(x)dx \\ &= (a_n n!)^2 \int_a^b \sigma^n(x) \rho(x)dx. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Desta forma, o cálculo de d_{mn}^2 , $m = 0, 1, \dots, n-1$, pode ser simplificado e redu-

zido ao cálculo da integral $\int_a^b \sigma^n(x)\rho(x)dx$, pois

$$\begin{aligned}
d_n^2 = d_{0n}^2 &= \frac{d_{nn}^2}{\prod_{k=0}^{n-1} \mu_k} \\
&= \frac{\left(y_n^{(n)}(x)\right)^2}{\prod_{k=0}^{n-1} \mu_k} \int_a^b \sigma^n(x)\rho(x)dx \\
&= (-1)^n \frac{\left(y_n^{(n)}(x)\right)^2}{A_n} \int_a^b \sigma^n(x)\rho(x)dx \\
&= (-1)^n A_n \frac{\left(y_n^{(n)}(x)\right)^2}{A_n^2} \int_a^b \sigma^n(x)\rho(x)dx \\
&= (-1)^n A_n B_n^2 \int_a^b \sigma^n(x)\rho(x)dx. \tag{1.28}
\end{aligned}$$

Daí, obtemos o valor para d_n^2 dado por

$$d_n^2 = (-1)^n A_n B_n^2 \int_a^b \sigma^n(x)\rho(x)dx.$$

E finalmente,

$$d_{mn}^2 = \frac{(a_n n!)^2}{(-1)^n A_n B_n^2} d_n^2.$$

1.4 Polinômios Ortogonais Clássicos

Nesta seção iremos dar uma caracterização dos polinômios ortogonais clássicos. Mostraremos que utilizando as características dadas dos coeficientes da equação (1.1), podemos estabelecer uma representação dos polinômios ortogonais clássicos de Jacobi, Laguerre e Hermite.

Primeiramente, note que fazendo $n = 1$ na Fórmula de Rodrigues (1.14) e utilizando a equação de Pearson, obtemos

$$y_1(x) = \frac{B_1}{\rho(x)} [\sigma(x)\rho(x)]' = \frac{B_1}{\rho(x)} [\tau(x)\rho(x)] = B_1 \tau(x).$$

Portanto, $\tau(x)$ é um polinômio de grau exatamente um, ou seja, $\tau(x) = Ax + B$, $A \neq 0$. Logo, temos três opções para $\sigma(x)$. Veremos estes três casos a seguir.

1.4.1 Caracterização dos Polinômio de Jacobi

Consideremos $\sigma(x)$ um polinômio de grau exatamente 2. Podemos supor $\sigma(x) = (x-a)(b-x)$, com $x \in (a, b)$. Fazendo a mudança de variável $x = (a+b)/2 + t(b-a)/2$,

podemos reescrever $\sigma(t) = 1 - t^2$ no intervalo $(-1, 1)$. Como $(\sigma(x)\rho(x))' = \tau(x)\rho(x)$ então

$$\frac{(\sigma(x)\rho(x))'}{\sigma(x)\rho(x)} = \frac{\tau(x)\rho(x)}{\sigma(x)\rho(x)} = \frac{\tau(x)}{\sigma(x)}.$$

Integrando a igualdade anterior, temos que

$$\ln \sigma(x)\rho(x) = \int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx,$$

com $\tau(x) = Ax + B$ e $\sigma(x) = 1 - x^2$, $x \in (-1, 1)$. Daí,

$$\begin{aligned} \ln \sigma(x)\rho(x) &= \int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx = \int \frac{Ax + B}{1 - x^2} dx \\ &= \int \frac{Ax + B}{(1 - x)(1 + x)} dx = \int \frac{B - A}{2(1 + x)} + \frac{A + B}{2(1 - x)} dx \\ &= \frac{B - A}{2} \int \frac{1}{1 + x} dx + \frac{A + B}{2} \int \frac{1}{1 - x} dx \\ &= \frac{B - A}{2} \ln(1 + x) - \frac{A + B}{2} \ln(1 - x) \\ &= \ln(1 + x)^{\frac{B-A}{2}} + \ln(1 - x)^{-\frac{A+B}{2}}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\ln \sigma(x)\rho(x) = \ln \sigma(x) + \ln \rho(x) = \ln(1 - x^2) + \ln \rho(x).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \ln \rho(x) &= \ln \sigma(x)\rho(x) - \ln(1 - x^2) \\ &= \ln(1 + x)^{\frac{B-A}{2}} + \ln(1 - x)^{-\frac{A+B}{2}} - \ln(1 - x^2) \\ &= \ln(1 + x)^{\frac{B-A}{2}} + \ln(1 - x)^{-\frac{A+B}{2}} - \ln(1 - x) - \ln(1 + x) \\ &= \ln(1 + x)^{\frac{B-A}{2}} + \ln(1 + x)^{-1} + \ln(1 - x)^{-\frac{A+B}{2}} + \ln(1 - x)^{-1} \\ &= \ln(1 + x)^{\frac{B-A}{2}-1} + \ln(1 - x)^{-\frac{A+B}{2}-1} \\ &= \ln(1 + x)^{\frac{B-A}{2}-1} (1 - x)^{-\frac{A+B}{2}-1}, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\rho(x) = (1 + x)^{\frac{B-A-2}{2}} (1 - x)^{-\frac{A+B+2}{2}}.$$

Fazendo

$$\beta = \frac{B - A - 2}{2} \quad \text{e} \quad \alpha = -\frac{A + B + 2}{2},$$

concluimos que

$$A = -(\alpha + \beta + 2) \quad \text{e} \quad B = \beta - \alpha.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= 1 - x^2 \\ \tau(x) &= -(\alpha + \beta + 2)x + \beta - \alpha \\ \rho(x) &= (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta; \quad \beta, \alpha > -1, \quad x \in (-1, 1).\end{aligned}\tag{1.29}$$

Note que $\sigma(-1)\rho(-1) = 0$ e $\sigma(1)\rho(1) = 0$. Logo, a condição de fronteira (1.21) e a relação de ortogonalidade estabelecidas em (1.22) e em (1.24), para o polinômio de Jacobi e suas derivadas, são satisfeitas em $(-1, 1)$ quando $\beta > -1$ e $\alpha > -1$, pois $\lim_{x \rightarrow -1, 1} \sigma(x)\rho(x) = (1 - x)^{\alpha+1}(1 + x)^{\beta+1} = 0$, se $\alpha + 1 > 0$ e $\beta + 1 > 0$.

Neste caso, o polinômio correspondente $y_n(x)$ com $B_n = (-1)^n/2^n n!$ é chamado de *Polinômio de Jacobi*³ e é denotado por $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$.

Dáí, pela Fórmula de Rodrigues,

$$\begin{aligned}y_n(x) &= P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} [\sigma^n(x)\rho(x)]^{(n)} \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{[(1 - x^2)^n(1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta]^{(n)}}{(1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta} \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{[(1 - x)^{\alpha+n}(1 + x)^{\beta+n}]^{(n)}}{(1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta}.\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}P_n^{(\alpha, \beta)}(-x) &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{[(1 + x)^{\alpha+n}(1 - x)^{\beta+n}]^{(n)}}{(1 + x)^\alpha(1 - x)^\beta} \\ &= \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{[(1 - x)^{\beta+n}(1 + x)^{\alpha+n}]^{(n)}}{(1 - x)^\beta(1 + x)^\alpha} \\ &= (-1)^n P_n^{(\beta, \alpha)}(x).\end{aligned}$$

1.4.2 Caracterização dos Polinômio de Laguerre

Consideremos $\sigma(x)$ um polinômio de grau exatamente 1. Podemos supor $\sigma(x) = x - a$, com $x \in [a, +\infty)$. Fazendo a mudança de variável $x = a - At$ podemos reescrever⁴ $\sigma(t) = t$ no intervalo $(0, +\infty)$ com $A = -1$. Isto é, $\sigma(x) = x$ e $\tau(x) =$

³A constante B_n neste caso foi escolhida como $(-1)^n/2^n n!$, mas em geral, elas podem ser escolhidas arbitrariamente.

⁴No caso geral para $\tau(x) = Ax + B$, obteríamos, quando $\sigma(x) = x - a$, $\rho(x) = x^{B-1}e^{Ax}$, logo a condição de fronteira (1.21) e a relação de ortogonalidade estabelecidas em (1.22) e em (1.24), para o polinômio de Laguerre e suas derivadas, são satisfeitas em $[a, \infty)$ quando $\alpha > -1$, pois $\lim_{x \rightarrow \infty} \sigma(x)\rho(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1+\alpha}e^{Ax} = 0$ se $\alpha + 1 > 0$ e $A < 0$.

$-x + B$ com $x \in (0, +\infty)$. Daí,

$$\begin{aligned}
 \ln \sigma(x)\rho(x) &= \int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx = \int \frac{B-x}{x} dx \\
 &= \int \frac{B}{x} - 1 dx = B \int \frac{1}{x} dx - \int 1 dx \\
 &= B \cdot \ln x - x = \ln x^B - \ln e^x \\
 &= \ln x^B + \ln e^{-x} = \ln(x^B e^{-x}),
 \end{aligned}$$

Logo, $\ln(x\rho(x)) = \ln(x^B e^{-x})$ e, portanto,

$$\rho(x) = x^{B-1} e^{-x}.$$

Fazendo $\alpha = B - 1$ temos que $B = \alpha + 1$, assim

$$\begin{aligned}
 \sigma(x) &= x \\
 \tau(x) &= \alpha + 1 - x \\
 \rho(x) &= x^\alpha e^{-x}, \quad \alpha > -1, \quad x \in (0, +\infty).
 \end{aligned} \tag{1.30}$$

Note também que $\sigma(0)\rho(0) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} \sigma(x)\rho(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1+\alpha} e^{-x} = 0$. Logo, a condição de fronteira (1.21) e a relação de ortogonalidade estabelecidas em (1.22) e em (1.24), para o polinômio de Laguerre e suas derivadas, são satisfeitas em $(0, \infty)$ se $\alpha > -1$.

Neste caso, o polinômio correspondente $y_n(x)$ com $B_n = 1/n!$ é chamado de *Polinômio de Laguerre* e é denotado por $L_n^{(\alpha)}(x)$.

Daí, pela Fórmula de Rodrigues temos

$$\begin{aligned}
 y_n(x) = L_n^{(\alpha)}(x) &= \frac{B_n}{\rho(x)} [\sigma^n(x)\rho(x)]^{(n)} \\
 &= \frac{1}{n!} \frac{1}{x^\alpha e^{-x}} [x^n x^\alpha e^{-x}]^{(n)} \\
 &= \frac{1}{n! x^\alpha e^{-x}} [x^{n+\alpha} e^{-x}]^{(n)}.
 \end{aligned}$$

1.4.3 Caracterização dos Polinômio de Hermite

Consideremos $\sigma(x)$ um polinômio de grau exatamente 0. Podemos então supor⁵ $\sigma(x) = 1$ e $\tau(x) = -2x$. Assim,

$$\begin{aligned} \ln \sigma(x)\rho(x) &= \int \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} dx \\ &= \int -2x dx = -x^2 \\ &= \ln e^{-x^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sigma(x) &= 1 \\ \rho(x) &= e^{-x^2} \\ \tau(x) &= -2x, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{1.31}$$

Observe também que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sigma(x)\rho(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-x^2} = 0$.

Neste caso, o polinômio correspondente $y_n(x)$ com $B_n = (-1)^n$ é chamado de *Polinômio de Hermite* e é denotado por $H_n(x)$.

Daí, pela Fórmula de Rodrigues, temos

$$\begin{aligned} y_n(x) = H_n(x) &= \frac{B_n}{\rho(x)} [\sigma^n(x)\rho(x)]^{(n)} \\ &= \frac{(-1)^n}{e^{-x^2}} [1 \cdot e^{-x^2}]^{(n)} \\ &= (-1)^n e^{x^2} [e^{-x^2}]^{(n)}. \end{aligned}$$

1.4.4 Casos particulares dos Polinômios de Jacobi

Existem alguns casos especiais para os polinômios de Jacobi, quando tomamos valores específicos para α e β , que veremos a seguir.

Polinômios de Legendre

Os polinômios de Legendre são um caso particular dos polinômios de Jacobi quando tomamos $\alpha = \beta = 0$. Denotamos estes polinômios por $P_n(x)$. Logo, pela

⁵No caso geral para $\tau(x) = Ax + B$, obteríamos, quando $\sigma(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$, $\rho(x) = \frac{1}{a} e^{\frac{Ax^2}{2a} + \frac{Bx}{a}}$, logo a condição de fronteira (1.21) e a relação de ortogonalidade estabelecidas em (1.22) e em (1.24), para o polinômio de Hermite e suas derivadas, serão satisfeitas em $(-\infty, \infty)$ para $B = 0$ e $a = 1$, pois $\lim_{x \rightarrow \infty} \sigma(x)\rho(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{\frac{Ax^2}{2a} + \frac{Bx}{a}} = 0$ se, quando $a > 0$ então $A < 0$ e $B \in \mathbb{R}$ e quando $a < 0$ então será satisfeito se $A > 0$ e $B \in \mathbb{R}$.

Fórmula de Rodrigues, concluímos que eles são da forma

$$\begin{aligned}
 P_n(x) &= \frac{(-1)^n [(1-x)^n(1+x)^n]^{(n)}}{2^n n! (1-x)^0(1+x)^0} \\
 &= \frac{(-1)^n [(1-x)^n(1+x)^n]^{(n)}}{2^n n!} \\
 &= \frac{(-1)^n [((1-x)(1+x))^n]^{(n)}}{2^n n!} \\
 &= \frac{(-1)^n [(1-x^2)^n]^{(n)}}{2^n n!}.
 \end{aligned}$$

Polinômios de Chebyshev de Primeira e Segunda Espécies

Os polinômios de Chebyshev de Primeira e Segunda Espécie são um caso particular dos polinômios de Jacobi. Estes polinômios são dados, respectivamente, por

$$T_n(x) = \cos(n\varphi), \quad U_n(x) = \frac{T'_{n+1}(x)}{n+1} = \frac{\sin((n+1)\varphi)}{\sin(\varphi)},$$

quando tomado $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ e $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, onde $\varphi = \arccos(x)$. Eles também podem ser expressos da seguinte forma

$$T_n(x) = \frac{n!}{\left(\frac{1}{2}\right)_n} P_n^{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x) \quad U_n(x) = \frac{(n+1)!}{\left(\frac{3}{2}\right)_n} P_n^{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(x),$$

onde $(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$, onde $\Gamma(x)$ a Função-Gama.

Polinômios de Gegenbauer

Os polinômios de Gegenbauer, também conhecidos como polinômios ultraesféricos, são um caso particular dos polinômios de Jacobi quando tomamos os coeficientes da forma $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$, com $\lambda > \frac{1}{2}$. Denotamos estes polinômios por $P_n^{(\lambda)}(x)$. Logo, pela Fórmula de Rodrigues concluímos que eles são da forma

$$\begin{aligned}
 P_n^{(\lambda)}(x) &= P_n^{(\lambda-\frac{1}{2}, \lambda-\frac{1}{2})} = \frac{(-1)^n [(1-x)^{\lambda-\frac{1}{2}+n}(1+x)^{\lambda-\frac{1}{2}+n}]^{(n)}}{2^n n! (1-x)^{\lambda-\frac{1}{2}}(1+x)^{\lambda-\frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{(-1)^n [(1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}+n}]^{(n)}}{2^n n! (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}}.
 \end{aligned}$$

Outra forma de expressarmos os polinômios de Gegenbauer é a seguinte

$$P_n^{(\lambda)}(x) = \frac{(2\lambda)_n}{(\lambda + \frac{1}{2})_n} P_n^{(\alpha, \alpha)}(x),$$

onde $(a)_n = a(a+1)\dots(a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}$.

1.5 Propriedades Gerais dos Polinômios Ortogonais

Podemos utilizar a ortogonalidade dos polinômios de Jacobi, Laguerre e Hermite para estabelecermos algumas propriedades sobre estes polinômios.

A seguir, veremos algumas propriedades gerais dos polinômios $p_n(x)$ que são ortogonais no intervalo (a, b) , com relação a função peso $\rho(x)$. Como os polinômios ortogonais $p_k(x)$, $k = 0, 1, \dots, n$, formam uma base para o espaço de polinômios de grau até n , então todo polinômio de grau n pode ser representado como uma combinação linear dos polinômios $p_k(x)$, ou seja,

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{kn} p_k(x). \quad (1.32)$$

Para determinar os coeficientes c_{kn} vamos proceder da seguinte forma. Multiplicando a equação (1.32) pela função $p_j(x)\rho(x)$ e integrando sobre (a, b) temos

$$\begin{aligned} \int_a^b q_n(x) p_j(x) \rho(x) dx &= \int_a^b \sum_{k=0}^n c_{kn} p_k(x) p_j(x) \rho(x) dx \\ &= \sum_{k=0}^n c_{kn} \int_a^b p_k(x) p_j(x) \rho(x) dx. \end{aligned}$$

Utilizando a propriedade de ortogonalidade

$$\int_a^b p_m(x) p_n(x) \rho(x) dx = 0, \quad m \neq n, \quad (1.33)$$

temos que

$$\int_a^b p_k(x) p_j(x) \rho(x) dx = 0,$$

se $k \neq j$.

Logo,

$$\int_a^b q_n(x) p_j(x) \rho(x) dx = c_{jn} \int_a^b p_j^2(x) \rho(x) dx.$$

Concluindo assim que

$$c_{kn} = \frac{1}{d_k^2} \int_a^b q_n(x) p_k(x) \rho(x) dx, \quad (1.34)$$

onde

$$d_k^2 = \int_a^b p_k^2(x) \rho(x) dx.$$

Para facilitar o cálculo da ortogonalidade de um polinômio, podemos utilizar uma relação equivalente à (1.33).

Proposição 1.5.1. *A relação de ortogonalidade (1.33) é equivalente a seguinte relação*

$$\int_a^b x^m(x)p_n(x)\rho(x)dx = 0, \quad m < n. \quad (1.35)$$

Demonstração. De fato, suponha que a relação (1.33) seja verdadeira, isto é, que $\int_a^b p_m(x)p_n(x)\rho(x)dx = 0$ se $m \neq n$. De (1.32) temos que

$$x_m(x) = \sum_{k=0}^m c_{km}p_k(x).$$

Se $m < n$, temos

$$\begin{aligned} \int_a^b x^m(x)p_n(x)\rho(x)dx &= \int_a^b \sum_{k=0}^m c_{km}p_k(x)p_n(x)\rho(x)dx \\ &= \sum_{k=0}^m c_{km} \int_a^b p_k(x)p_n(x)\rho(x)dx = 0, \end{aligned}$$

pois, $k \neq n$, já que $k \leq m < n$.

De forma análoga, se a relação (1.35) for verdadeira, ou seja, que a integral $\int_a^b x^m(x)p_n(x)\rho(x)dx = 0$, se $m < n$. Então, como $p_m = a_mx^m + \dots + a_0$ temos que

$$\begin{aligned} \int_a^b p_m(x)p_n(x)\rho(x)dx &= \int_a^b \sum_{k=0}^m a_kx^k p_n(x)\rho(x)dx \\ &= \sum_{k=0}^m a_k \int_a^b x^k p_n(x)\rho(x)dx = 0, \end{aligned}$$

pois, $k < n$.

Segue da relação (1.35) que $p_n(x)$ é ortogonal a todo polinômio cujo grau é menor que n . \square

Proposição 1.5.2. *O intervalo (a, b) e a função peso $\rho(x)$ determinam os polinômios $p_n(x)$ que satisfazem a propriedade de ortogonalidade, a menos de um fator normalizador.*

Demonstração. Suponha que existam dois polinômios $p_n(x)$ e $\tilde{p}_n(x)$, de mesmo grau satisfazendo (1.35). De (1.32) temos que

$$\tilde{p}_n(x) = \sum_{j=0}^n c_{jn}p_j(x).$$

Da relação (1.34) temos que

$$\begin{aligned}
c_{kn} &= \frac{1}{d_k^2} \int_a^b \tilde{p}_n(x) p_k(x) \rho(x) dx \\
&= \frac{1}{d_k^2} \int_a^b \sum_{j=0}^n c_{jn} p_j(x) p_k(x) \rho(x) dx \\
&= \frac{1}{d_k^2} \sum_{j=0}^n c_{jn} \int_a^b p_j(x) p_k(x) \rho(x) dx.
\end{aligned}$$

Logo, utilizando a propriedade (1.35), podemos concluir que $c_{kn} = 0$, se $k < n$, e, portanto,

$$\tilde{p}_n(x) = c_{nn} p_n(x),$$

ou seja, $p_n(x)$ e $\tilde{p}_n(x)$ são proporcionais. \square

Existem casos em que os polinômios $p_n(x)$ são ortogonais com relação uma função peso $\rho(x)$ par em um intervalo simétrico da forma $(-a, a)$. Neste caso, os polinômios $p_n(x)$ e $p_n(-x)$ satisfazem a mesma relação de ortogonalidade. E mais, $p_n(-x) = (-1)^n p_n(x)$, isto é, $p_n(x)$ é simétrico no intervalo $(-a, a)$. Logo, se x_k é raiz de $p_n(x)$ então $-x_k$ também será e, conseqüentemente, se n for ímpar então temos que $x_{\frac{n+1}{2}} = 0$.

Em outras palavras, temos que $p_{2k}(x) = s_k(x^2)$ e $p_{2k+1}(x) = x t_k(x^2)$, onde $s_k(x)$ e $t_k(x)$ são polinômios de grau k em x . Daí, para $m \neq n$, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-a}^a p_{2n}(x) p_{2m}(x) \rho(x) dx \\
&= \int_{-a}^a s_n(x^2) s_m(x^2) \rho(x) dx \\
&= 2 \int_0^a s_n(x^2) s_m(x^2) \rho(x) dx.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $x^2 = \xi$, temos $x = \sqrt{\xi}$ e $dx = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} d\xi$. Quando $x = a$, $\xi = a^2$ e quando $x = 0$, $\xi = 0$. Portanto,

$$\int_0^{a^2} s_n(\xi) s_m(\xi) \frac{\rho(\sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi}} d\xi = 0.$$

Desta forma, segue que os polinômios $s_n(x) = p_{2n}(\sqrt{x})$ são ortogonais com relação a função peso $\rho_1(x) = \frac{\rho(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ em $(0, a^2)$. De forma análoga, para os polinômios $t_n(x) = \frac{p_{2n+1}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ e $m \neq n$, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-a}^a p_{2n+1}(x) p_{2m+1}(x) \rho(x) dx \\
&= \int_{-a}^a x t_m(x^2) x t_n(x^2) \rho(x) dx \\
&= 2 \int_0^a x^2 t_m(x^2) t_n(x^2) \rho(x) dx.
\end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $x^2 = \xi$, temos $x = \sqrt{\xi}$ e $dx = \frac{1}{2\sqrt{\xi}}d\xi$. Quando $x = a$, então $\xi = a^2$ e quando $x = 0$, então $\xi = 0$. Segue que,

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \int_0^a x^2 t_m(x^2) t_n(x^2) \rho(x) dx \\ &= 2 \int_0^{a^2} \xi t_m(\xi) t_n(\xi) \rho(\sqrt{\xi}) \frac{1}{2\sqrt{\xi}} d\xi \\ &= \int_0^{a^2} \frac{\xi}{\sqrt{\xi}} t_m(\xi) t_n(\xi) \rho(\sqrt{\xi}) d\xi \\ &= \int_0^{a^2} \sqrt{\xi} t_m(\xi) t_n(\xi) \rho(\sqrt{\xi}) d\xi. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^{a^2} t_n(\xi) t_m(\xi) \sqrt{\xi} \rho(\sqrt{\xi}) d\xi = 0,$$

ou seja, os polinômios $t_n(x) = \frac{p_{2n+1}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$ são ortogonais com relação a função peso $\rho_2(x) = \sqrt{x}\rho(\sqrt{x})$ em $(0, a^2)$.

1.5.1 Relação de Recorrência de Três Termos - RRTT

Outro fato importante em relação aos polinômios ortogonais é o seguinte:

Proposição 1.5.3. *Os polinômios ortogonais satisfazem uma relação de recorrência de três termos*

$$\begin{aligned} p_{-1}(x) &= 0, \quad p_0(x) = 1, \\ xp_n(x) &= \alpha_n p_{n+1}(x) + \beta_n p_n(x) + \gamma_n p_{n-1}(x), \end{aligned} \quad (1.36)$$

onde α_n , β_n e γ_n são constantes.

Demonstração. Temos que $xp_n(x)$ é um polinômio de grau $n+1$, logo podemos escrever

$$xp_n(x) = \sum_{k=0}^{n+1} c_{kn} p_k(x), \quad (1.37)$$

com

$$c_{kn} = \frac{1}{d_k^2} \int_a^b xp_n(x) p_k(x) \rho(x) dx. \quad (1.38)$$

Pela propriedade de ortogonalidade para $p_n(x)$, os coeficientes c_{kn} são não nulos quando $k+1 \geq n$, já que $xp_k(x)$ tem grau $k+1$. Assim, temos que $c_{kn} \neq 0$, se $k \geq n-1$, isto é, quando $k = n-1$, $k = n$ e $k = n+1$. Logo,

$$xp_n(x) = c_{n-1,n} p_{n-1}(x) + c_{nn} p_n(x) + c_{n+1,n} p_{n+1}(x).$$

Fazendo, na equação acima, $c_{n+1,n} = \alpha_n$, $c_{nn} = \beta_n$ e $c_{n-1,n} = \gamma_n$, obtemos o resultado. \square

Podemos expressar os coeficientes α_n , β_n e γ_n em termos da norma quadrada d_k^2 e dos coeficientes a_n e b_n de $p_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. De fato, de (1.38) temos

$$c_{kn} d_k^2 = \int_a^b x p_n(x) p_k(x) \rho(x) dx = \int_a^b x p_k(x) p_n(x) \rho(x) dx = c_{nk} d_n^2.$$

Temos também que $\alpha_{n-1} = c_{n,n-1}$ e $\gamma_n = c_{n-1,n}$. Assim, tomando $k = n - 1$, obtemos

$$c_{n-1,n} d_{n-1}^2 = c_{n,n-1} d_n^2,$$

fazendo as substituições necessárias concluimos que

$$\gamma_n = \frac{\alpha_{n-1} d_n^2}{d_{n-1}^2}.$$

Vamos agora comparar os coeficientes do lado direito e esquerdo de (1.37). Temos que $p_n(x) = a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots$. Logo,

$$x p_n(x) = a_n x^{n+1} + b_n x^n + \dots$$

Por outro lado, se $p_{n+1}(x) = a_{n+1} x^{n+1} + b_{n+1} x^n + \dots$, então

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} c_{kn} p_k(x) &= c_{n+1,n} p_{n+1}(x) + c_{nn} p_n(x) + \dots + c_{0n} p_0(x) \\ &= \alpha_n p_{n+1}(x) + \beta_n p_n(x) + \dots + c_{0n} p_0(x) \\ &= \alpha_n (a_{n+1} x^{n+1} + b_{n+1} x^n + \dots) + \beta_n (a_n x^n + b_n x^{n-1} + \dots) + \dots + c_{0n} a_0 \\ &= \alpha_n a_{n+1} x^{n+1} + \alpha_n b_{n+1} x^n + \dots + \beta_n a_n x^n + \beta_n b_n x^{n-1} + \dots \\ &= \alpha_n a_{n+1} x^{n+1} + (\alpha_n b_{n+1} + \beta_n a_n) x^n + \dots \end{aligned}$$

Pela igualdade de polinômios concluimos que

$$\begin{aligned} \alpha_n a_{n+1} &= a_n \\ \alpha_n b_{n+1} + \beta_n a_n &= b_n. \end{aligned}$$

Em resumo, concluimos que

$$\alpha_n = \frac{a_n}{a_{n+1}} \quad \beta_n = \frac{b_n}{a_n} - \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} \quad \gamma_n = \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{d_n^2}{d_{n-1}^2}. \quad (1.39)$$

1.5.2 Identidade de Christoffel-Darboux

Outro resultado importante a respeito dos polinômios $p_n(x)$ é a fórmula de Christoffel-Darboux.

Teorema 1.5.4. (Identidade de Christoffel-Darboux) *Dada uma sequência de polinômios ortogonais $\{p_n(x)\}$, então*

$$\sum_{k=0}^n \frac{p_k(x)p_k(y)}{d_k^2} = \frac{1}{d_n^2} \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_{n+1}(y)p_n(x)}{x - y}.$$

Demonstração. Da relação (1.36) temos que

$$p_{n+1}(x) = \frac{x - \beta_n}{\alpha_n} p_n(x) - \frac{\gamma_n}{\alpha_n} p_{n-1}(x).$$

Multiplicando esta equação pelo polinômio $p_n(y)$ temos que

$$p_{n+1}(x)p_n(y) = \frac{x - \beta_n}{\alpha_n} p_n(x)p_n(y) - \frac{\gamma_n}{\alpha_n} p_n(y)p_{n-1}(x). \quad (1.40)$$

De forma análoga temos

$$p_{n+1}(y)p_n(x) = \frac{y - \beta_n}{\alpha_n} p_n(y)p_n(x) - \frac{\gamma_n}{\alpha_n} p_n(x)p_{n-1}(y). \quad (1.41)$$

Subtraindo a equação (1.41) da equação (1.40) chegamos que

$$p_{n+1}(x)p_n(y) - p_{n+1}(y)p_n(x) = \frac{1}{\alpha_n} (x - y)p_n(x)p_n(y) + \frac{\gamma_n}{\alpha_n} (p_n(x)p_{n-1}(y) - p_n(y)p_{n-1}(x)).$$

Mas substituindo, na equação anterior, a igualdade

$$\begin{aligned} p_n(x)p_{n-1}(y) - p_n(y)p_{n-1}(x) &= \frac{1}{\alpha_{n-1}} (x - y)p_{n-1}(x)p_{n-1}(y) \\ &\quad + \frac{\gamma_{n-1}}{\alpha_{n-1}} (p_{n-1}(x)p_{n-2}(y) - p_{n-1}(y)p_{n-2}(x)), \end{aligned}$$

obtemos,

$$\begin{aligned} p_{n+1}(x)p_n(y) - p_{n+1}(y)p_n(x) &= \frac{1}{\alpha_n} (x - y)p_n(x)p_n(y) + \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \frac{1}{\alpha_{n-1}} (x - y)p_{n-1}(x)p_{n-1}(y) \\ &\quad + \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \frac{\gamma_{n-1}}{\alpha_{n-1}} (p_{n-1}(x)p_{n-2}(y) - p_{n-1}(y)p_{n-2}(x)). \end{aligned}$$

Seguindo este mesmo raciocínio temos,

$$\begin{aligned}
p_{n+1}(x)p_n(y) - p_{n+1}(y)p_n(x) &= \frac{1}{\alpha_n}(x-y)p_n(x)p_n(y) + \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \frac{1}{\alpha_{n-1}}(x-y)p_{n-1}(x)p_{n-1}(y) + \\
&+ \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \frac{\gamma_{n-1}}{\alpha_{n-1}}(p_{n-1}(x)p_{n-2}(y) - p_{n-1}(y)p_{n-2}(x)) \\
&= \frac{1}{\alpha_n}(x-y)p_n(x)p_n(y) + \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \frac{1}{\alpha_{n-1}}(x-y)p_{n-1}(x)p_{n-1}(y) + \\
&+ \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \frac{\gamma_{n-1}}{\alpha_{n-1}} \left[\frac{1}{\alpha_{n-2}}(x-y)p_{n-2}(x)p_{n-2}(y) + \right. \\
&\left. + \frac{\gamma_{n-2}}{\alpha_{n-2}}(p_{n-2}(x)p_{n-3}(y) - p_{n-2}(y)p_{n-3}(x)) \right] \\
&= \frac{1}{\alpha_n}(x-y)p_n(x)p_n(y) + \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \frac{1}{\alpha_{n-1}}(x-y)p_{n-1}(x)p_{n-1}(y) + \\
&+ \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \frac{\gamma_{n-1}}{\alpha_{n-1}} \frac{1}{\alpha_{n-2}}(x-y)p_{n-2}(x)p_{n-2}(y) + \\
&+ \frac{\gamma_n}{\alpha_n} \frac{\gamma_{n-1}}{\alpha_{n-1}} \frac{\gamma_{n-2}}{\alpha_{n-2}}(p_{n-2}(x)p_{n-3}(y) - p_{n-2}(y)p_{n-3}(x)) \\
&= \dots \\
&= \frac{1}{\alpha_n}(x-y)p_n(x)p_n(y) + \frac{1}{\alpha_n} \frac{\gamma_n}{\alpha_{n-1}}(x-y)p_{n-1}(x)p_{n-1}(y) + \\
&+ \dots + \frac{1}{\alpha_n} \frac{\gamma_n}{\alpha_{n-1}} \dots \frac{\gamma_2}{\alpha_1}(x-y)p_1(x)p_1(y) + \\
&+ \frac{1}{\alpha_n} \frac{\gamma_n}{\alpha_{n-1}} \frac{\gamma_{n-1}}{\alpha_{n-2}} \dots \frac{\gamma_2}{\alpha_1} \gamma_1(p_1(x)p_0(y) - p_1(y)p_0(x)).
\end{aligned}$$

Utilizando as igualdades (1.32) para α_n e γ_n , temos que

$$\begin{aligned}
p_{n+1}(x)p_n(y) - p_{n+1}(y)p_n(x) &= \frac{1}{\alpha_n} \left[(x-y)p_n(x)p_n(y) + \frac{\gamma_n}{\alpha_{n-1}}(x-y)p_{n-1}(x)p_{n-1}(y) + \right. \\
&+ \dots + \frac{\gamma_n}{\alpha_{n-1}} \frac{\gamma_{n-1}}{\alpha_{n-2}} \dots \frac{\gamma_2}{\alpha_1}(x-y)p_1(x)p_1(y) + \\
&\left. + \frac{\gamma_n}{\alpha_{n-1}} \frac{\gamma_{n-1}}{\alpha_{n-2}} \dots \frac{\gamma_2}{\alpha_1} \gamma_1(p_1(x)p_0(y) - p_1(y)p_0(x)) \right] \\
&= \frac{1}{\alpha_n} \left[\frac{d_n^2}{d_n^2}(x-y)p_n(x)p_n(y) + \frac{d_n^2}{d_{n-1}^2}(x-y)p_{n-1}(x)p_{n-1}(y) + \right. \\
&+ \dots + \frac{d_n^2}{d_1^2}(x-y)p_1(x)p_1(y) + \frac{d_n^2}{d_0^2}(x-y)p_0(x)p_0(y) \left. \right] \\
&= \frac{d_n^2}{\alpha_n}(x-y) \sum_{k=0}^n \frac{p_k(x)p_k(y)}{d_k^2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$p_{n+1}(x)p_n(y) - p_{n+1}(y)p_n(x) = \frac{d_n^2}{\alpha_n}(x-y) \sum_{k=0}^n \frac{p_k(x)p_k(y)}{d_k^2},$$

e, portanto,

$$\sum_{k=0}^n \frac{p_k(x)p_k(y)}{d_k^2} = \frac{1}{d_n^2} \frac{a_n}{a_{n+1}} \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_{n+1}(y)p_n(x)}{x - y}. \quad (1.42)$$

□

Uma propriedade importante em relação aos zeros dos polinômios ortogonais é a seguinte.

Proposição 1.5.5. *Seja $p_n(x)$ uma sequência de polinômios ortogonais com relação a função peso $\rho(x)$ no intervalo (a, b) . Então, os zeros de cada polinômio ortogonal são reais, distintos e estão no intervalo (a, b) .*

Demonstração. Primeiramente, vamos separar os zeros do polinômio $p_n(x)$. Sejam z_1, \dots, z_j os zeros que não pertencem ao intervalo (a, b) e x_1, \dots, x_{n-j} os zeros restantes que estão em (a, b) .

Temos que $p_n(x)/(x - z_1)\dots(x - z_j) = a_n(x - x_1)\dots(x - x_{n-j})$ é um polinômio de grau $n - j$. Temos também que todos os seus zeros estão em (a, b) . Suponha por absurdo que $j \neq 0$, isto é, $j > 0$. Então pela propriedade de ortogonalidade

$$\int_a^b p_n(x) \frac{p_n(x)}{(x - z_1)\dots(x - z_j)} \rho(x) = 0.$$

Absurdo! Pois, esta integral não pode se anular, já que $p_n^2(x)/(x - z_1)\dots(x - z_j)$ não muda de sinal em (a, b) . Logo $j = 0$, e, portanto, todos os zeros, x_1, \dots, x_n de $p_n(x)$ estão no intervalo (a, b) , e, portanto, são reais.

Mostremos que x_1, \dots, x_n são todos simples, isto é, cada um tem multiplicidade um. Seja x_k uma raiz de $p_n(x)$, suponha, por absurdo, que x_k tenha multiplicidade maior do que 1.

Então $p_n(x)/(x - x_k)^2$ é um polinômio de grau $n - 2$ e portanto, pela propriedade de ortogonalidade

$$\int_a^b p_n(x) \frac{p_n(x)}{(x - x_k)^2} \rho(x) = 0.$$

Absurdo! Pois, observe que esta integral não pode se anular, já que o polinômio $p_n^2(x)/(x - x_k)^2$ é sempre positivo em (a, b) . Logo, todos os zeros de $p_n(x)$ são simples.

□

CAPÍTULO 2

MONOTONICIDADE DOS ZEROS: TEOREMAS DE MARKOV E STIELTJES

Neste capítulo vamos falar sobre a monotonicidade dos zeros dos polinômios de ortogonais clássicos, utilizando dois teoremas clássicos bastante úteis, introduzidos por Markov e Stieltjes.

As principais referências utilizadas neste capítulo foram [12] e [18] que se encontram nos Anexos I e II, respectivamente. As demais referências aqui utilizadas foram [4, 7, 10, 11, 19, 20].

2.1 Teorema Clássico de Markov

Nesta seção vamos considerar os polinômios

$$p_n(x, t) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n,$$

ortogonais com relação a função peso $\rho(x, t)$. Note que, neste caso, os coeficientes $a_i = a_i(t)$, $i = 0, 1, \dots, n$, são funções de uma variável t , com $t \in (t_1, t_2)$.

O teorema introduzido por Markov em [12], a respeito da monotonicidade dos zeros dos polinômios, é feito utilizando propriedades da função peso $\rho(x, t)$, definida para $x \in (a, b)$ e $t \in (t_1, t_2)$. Como $p_n(x, t)$ é o n -ésimo polinômio ortogonal em relação a função peso $\rho(x, t)$, então temos que,

$$\int_a^b q_m(x, t)p_n(x, t)\rho(x, t)dx = 0, \quad m < n, \quad (2.1)$$

para todo polinômio $q_m(x, t)$ de grau no máximo m .

Denote por x_1, \dots, x_n os zeros de p_n , que por sua vez são todos reais, distintos e pertencem ao intervalo (a, b) , de acordo com a Proposição 1.5.5.

O seguinte teorema nos indica uma forma de estudarmos a monotonicidade dos zeros dos polinômios ortogonais. Daremos duas demonstrações deste teorema.

Teorema 2.1.1. (Teorema de Markov) *Suponha que $\rho(x, t)$ tenha derivadas parciais de primeira ordem, em relação a t , contínuas para todo $x \in (a, b)$ e $t \in (t_1, t_2)$. Se, para $t_1 < t < t_2$ a função*

$$\frac{1}{\rho(x, t)} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t}$$

cresce (resp. decresce) quando x cresce em (a, b) , então os zeros $x_1(t), \dots, x_n(t)$, de p_n crescem (resp. decrescem) quando t cresce em (t_1, t_2) .

2.1.1 Primeira prova do Teorema de Markov

Esta é a prova original dada por Markov, com mais alguns detalhes e utilizando notações modernas. A prova original feita por Markov [12] encontra-se no Anexo I, deste trabalho. A prova baseia-se no Teorema da Função Implícita (ver em [11], Cap. 4), aplicado à seguinte transformação $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $f_k(y_1, \dots, y_n, t) = p_n(y_k, t)$, $1 \leq k \leq n$.

Sejam x_1, \dots, x_n os zeros de $p_n(x, t_0)$. Como

$$f_k(x_1, \dots, x_n, t_0) = p_n(x_k, t_0) = 0, \quad 1 \leq k \leq n, \quad (2.2)$$

então se

$$\det \left[\frac{\partial f_k}{\partial y_j}(x_1, \dots, x_n, t_0) \right]_{k,j=1,\dots,n} \neq 0,$$

podemos obter $y_i = x_i(t)$ satisfazendo $f_k(x_1, \dots, x_n, t) = 0$ unicamente, para t numa vizinhança I de t_0 . Cada $y_i = x_i(t)$ é uma função de classe C^1 , com $x_i(t_0) = x_i$, e sua derivada pode ser calculada por

$$\frac{dy_i}{dt} = -\frac{\Delta_i}{\Delta_0}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

onde

$$\Delta_0 = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)} = \det \left[\frac{\partial f_k}{\partial y_j}(x_1(t), \dots, x_n(t), t) \right]_{k,j=1,\dots,n}$$

e

$$\Delta_i = \frac{\partial(f_1, \dots, f_i, \dots, f_n)}{\partial(y_1, \dots, t, \dots, y_n)}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Para encontrar os valores dos determinantes Δ_0 e Δ_i 's, precisamos determinar os valores das derivadas parciais $\partial f_k / \partial y_j$, $j = 1, \dots, n$, e $\partial f_k / \partial t$.

Segue então da definição de f_k que

$$\frac{\partial f_k}{\partial y_j}(y_1, \dots, y_n, t) = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ \frac{\partial p_n}{\partial x}(y_k, t), & j = k. \end{cases}$$

Portanto,

$$\Delta_0 = \prod_{k=1}^n \frac{\partial f_k}{\partial y_k}(y_1, \dots, y_n, t),$$

o qual é diferente de zero em uma vizinhança do ponto (x_1, \dots, x_n, t_0) , e

$$\Delta_i = \frac{\partial f_i}{\partial t}(y_1, \dots, y_n, t) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{\partial f_k}{\partial y_k}(y_1, \dots, y_n, t).$$

Assim, para encontrar as derivadas parciais $\partial f_k / \partial y_k$, consideremos o polinômio

$$q(x) = \left\{ \frac{\partial p_n}{\partial x}(x_k(t), t)(x - x_k(t)) - p_n(x, t) \right\} \frac{1}{(x - x_k(t))^2}$$

de grau $n - 2$.

Daí, pela relação de ortogonalidade, obtemos

$$\int_a^b \frac{\frac{\partial p_n}{\partial x}(x_k(t), t)(x - x_k(t)) - p_n(x, t)}{(x - x_k(t))^2} p_n(x, t) \rho(x, t) dx = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_k}{\partial y_k}(y_1, \dots, y_n, t) &= \frac{\partial p_n}{\partial x}(x_k(t), t) \\ &= \left\{ \int_a^b \frac{|\mathcal{T}_n(x, t)|^p}{(x - x_k(t))^2} \rho(x, t) dx \right\} \times \left\{ \int_a^b \frac{p_n(x, t)}{x - x_k(t)} \rho(x, t) dx \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Observe que a expressão na última chave é diferente de zero.

Derivando a formula (2.1) em relação a t , obtemos

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{\partial q_m(x, t)}{\partial t} p_n(x, t) \rho(x, t) dx + \int_a^b q_m(x, t) \frac{\partial p_n(x, t)}{\partial t} \rho(x, t) dx + \\ + \int_a^b q_m(x, t) p_n(x, t) \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dx = 0. \end{aligned}$$

Note que $\frac{\partial q_m(x, t)}{\partial t}$ é um polinômio de grau $m - 1$ que é menor que n , portanto, pela propriedade de ortogonalidade, temos que

$$\int_a^b \frac{\partial q_m(x, t)}{\partial t} p_n(x, t) \rho(x, t) dx = 0.$$

Logo,

$$\int_a^b q_m(x, t) \frac{\partial p_n(x, t)}{\partial t} \rho(x, t) dx + \int_a^b q_m(x, t) p_n(x, t) \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dx = 0. \quad (2.4)$$

Tome

$$q_m(x) = \frac{p_n(x, t)}{x - x_i},$$

onde $x_i = x_i(t)$ é um zero de $p_n(x)$, com $i = 1, \dots, n$. Substituindo $q_m(x)$ em (2.4), segue que

$$\int_a^b \frac{p_n(x, t)}{x - x_i} \frac{\partial p_n(x, t)}{\partial t} \rho(x, t) dx + \int_a^b \frac{p_n^2(x, t)}{x - x_i} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dx = 0. \quad (2.5)$$

Agora, tome

$$q_m(x) = \left(\frac{\partial p_n(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial p_n(x_i, t)}{\partial t} \right) \frac{1}{x - x_i} = \left(a'_1(x - x_i) + \dots + a'_n(x^n - x_i^n) \right) \frac{1}{x - x_i},$$

no qual é um polinômio de grau $n - 1$. Desta forma a equação (2.1) se torna

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b q_m(x, t) p_n(x, t) \rho(x, t) dx \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial p_n(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial p_n(x_i, t)}{\partial t} \right) \frac{p_n(x, t)}{x - x_i} \rho(x, t) dx \\ &= \int_a^b \frac{p_n(x, t)}{x - x_i} \frac{\partial p_n(x, t)}{\partial t} \rho(x, t) dx - \int_a^b \frac{p_n(x, t)}{x - x_i} \frac{\partial p_n(x_i, t)}{\partial t} dx. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Subtraindo (2.6) de (2.5) obtém-se

$$\frac{\partial p_n(x_i, t)}{\partial t} \int_a^b \frac{p_n(x, t)}{x - x_i} \rho(x, t) dx + \int_a^b \frac{p_n^2(x, t)}{x - x_i} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dx = 0.$$

Segue que

$$\frac{\partial p_n(x_i, t)}{\partial t} = - \frac{\int_a^b \frac{p_n^2(x, t)}{x - x_i} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dx}{\int_a^b \frac{p_n(x, t)}{x - x_i} \rho(x, t) dx}. \quad (2.7)$$

Agora,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial p_n(x_i, t)}{\partial x} \int_a^b \frac{p_n(x, t)}{x - x_i} \rho(x, t) dx - \int_a^b \frac{p_n^2(x, t)}{(x - x_i)^2} \rho(x, t) dx = \\ &\int_a^b \left(\frac{\partial p_n(x_i, t)}{\partial x} \frac{1}{x - x_i} - \frac{p_n(x, t)}{(x - x_i)^2} \right) p_n(x, t) \rho(x, t) dx = 0 \end{aligned}$$

A última expressão se anula, pois $\left(\frac{\partial p_n(x_i, t)}{\partial x} \frac{1}{x - x_i} - \frac{p_n(x, t)}{(x - x_i)^2} \right)$ é um polinômio de grau $n - 2$, visto que x_i é um zero de $\frac{\partial p_n(x_i, t)}{\partial x} (x - x_i) - p_n(x, t)$, com

multiplicidade 2. Assim, obtém-se

$$\frac{\partial p_n(x_i, t)}{\partial x} = \frac{\int_a^b \frac{p_n^2(x, t)}{(x - x_i)^2} \rho(x, t) dx}{\int_a^b \frac{p_n(x, t)}{x - x_i} \rho(x, t) dx}. \quad (2.8)$$

Pelo Teorema da Função Implícita temos que

$$\frac{dx_i}{dt} = - \frac{\frac{\partial p_n(x_i, t)}{\partial t}}{\frac{\partial p_n(x_i, t)}{\partial x_i}}. \quad (2.9)$$

Substituindo (2.7) e (2.8) em (2.9) obtém-se

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\int_a^b \frac{p_n^2(x, t)}{x - x_i} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dx}{\int_a^b \frac{p_n^2(x, t)}{(x - x_i)^2} \rho(x, t) dx}, \quad 1 \leq i \leq n. \quad (2.10)$$

Tem-se também que

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{p_n^2(x, t)}{x - x_i} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dx &= \int_a^b \frac{p_n^2(x, t)}{x - x_i} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dx - \frac{\partial \rho(x_i, t)}{\partial t} \int_a^b \frac{p_n^2(x, t)}{x - x_i} \frac{\rho(x, t)}{\rho(x_i, t)} dx \\ &= \int_a^b \frac{p_n^2(x, t)}{x - x_i} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dx - \frac{p_n^2(x, t)}{x - x_i} \frac{\partial \rho(x_i, t)}{\partial t} \frac{\rho(x, t)}{\rho(x_i, t)} dx \\ &= \int_a^b \frac{p_n^2(x, t)}{x - x_i} \left(\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial \rho(x_i, t)}{\partial t} \frac{\rho(x, t)}{\rho(x_i, t)} \right) dx. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Assim, substituindo (2.11) em (2.10) segue que

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{\int_a^b \frac{p_n^2(x, t)}{x - x_i} \left(\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial \rho(x_i, t)}{\partial t} \frac{\rho(x, t)}{\rho(x_i, t)} \right) dx}{\int_a^b \frac{p_n^2(x, t)}{(x - x_i)^2} \rho(x, t) dx} \\ &= \frac{\int_a^b \frac{p_n^2(x, t)}{x - x_i} \left(\frac{1}{\rho(x, t)} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{\rho(x_i, t)} \frac{\partial \rho(x_i, t)}{\partial t} \right) \rho(x, t) dx}{\int_a^b \frac{p_n^2(x, t)}{(x - x_i)^2} \rho(x, t) dx}. \end{aligned}$$

Note que o sinal de $\frac{dx_i}{dt}$ depende apenas do numerador do lado direito, pois a integral do denominador é sempre positiva.

Analiseemos a seguinte expressão

$$\int_a^b p_n^2(x, t) \frac{1}{x - x_i} \left(\frac{1}{\rho(x, t)} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{\rho(x_i, t)} \frac{\partial \rho(x_i, t)}{\partial t} \right) \rho(x, t) dx.$$

Como $p_n^2(x, t)$ é sempre positivo, então o sinal da integral acima é verificado através da função

$$\frac{1}{x - x_i} \left(\frac{1}{\rho(x, t)} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{\rho(x_i, t)} \frac{\partial \rho(x_i, t)}{\partial t} \right).$$

Note que esta função é positiva (resp. negativa) se

$$\frac{1}{\rho(x, t)} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t}$$

for uma função crescente (resp. decrescente) de x .

De fato, sem perda de generalidade, suponha que $\frac{1}{\rho(x, t)} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t}$ seja uma função crescente de x e $x < x_i$. Daí, temos que

$$\frac{1}{\rho(x, t)} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} < \frac{1}{\rho(x_i, t)} \frac{\partial \rho(x_i, t)}{\partial t}.$$

Como $x - x_i < 0$, então

$$\frac{1}{x - x_i} \left(\frac{1}{\rho(x, t)} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{\rho(x_i, t)} \frac{\partial \rho(x_i, t)}{\partial t} \right) > 0.$$

Isso implica que o numerador analisado é positivo e, portanto $\frac{dx_i}{dt}$ é positivo. Logo os zeros $x_i(t)$ são funções crescentes de t .

De forma análoga prova-se que o numerador é negativo quando $\frac{1}{\rho(x, t)} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t}$ é uma função decrescente de x e, portanto, $\frac{dx_i}{dt}$ é negativo. Logo os zeros são decrescentes.

2.1.2 Segunda prova do Teorema de Markov

A demonstração do Teorema 2.1.1 a seguir, foi fornecida por Szegő em [20] e baseia-se na Fórmula de Quadratura de Gauss.

A Quadratura de Gauss

$$\int_a^b q(x) \rho(x, t) dx = \sum_{j=1}^n \lambda_j(t) q(x_j) \quad (2.12)$$

é válida para todo polinômio q de grau até $2n - 1$, onde

$$\lambda_j(t) = \int_a^b \frac{p_n^2(x, t)}{(p_n'(x_j, t)(x - x_j))^2} \rho(x, t) dx > 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

são chamados de pesos ou números de Christofel¹. Os números de Christofel $\lambda_j = \lambda_j(t)$ são funções de t com derivadas contínuas.

Derivando (2.12) em relação a t , obtemos²

$$\begin{aligned} \int_a^b q(x) \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dx &= \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j(t) q(x_j) \right)' \\ &= \sum_{j=1}^n (\lambda_j(t) q(x_j))' \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j'(t) q(x_j) + \sum_{j=1}^n \lambda_j(t) \frac{\partial q(x_j)}{\partial t} x_j'(t). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Agora, fazendo a substituição

$$q(x) = \frac{p_n^2(x, t)}{x - x_i},$$

para $j \neq i$, temos que³ $q'(x_j) = 0$ e $q'(x_i) = (p_n'(x_i, t))^2$, então

$$\begin{aligned} \int_a^b q(x) \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dx &= \int_a^b \frac{p_n^2(x, t)}{x - x_i} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dx \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j(t) \frac{\partial q(x_j)}{\partial t} x_j'(t) \\ &= \lambda_i(t) (p_n'(x_i, t))^2 x_i'(t), \end{aligned}$$

e, portanto,

¹Seja $p_n(x) = \prod_{j=1}^n (x - x_j)$, então $\frac{p_n(x)}{x - x_i} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)$ e $p_n'(x_i) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j)$. Considerando o polinômio $q(x) = \frac{p_n^2(x)}{(x - x_i)^2}$ de grau $2n - 2$, temos $q(x_j) = 0$, $j = 1, \dots, n, j \neq i$. Pela fórmula de quadratura de Gaus para o polinômio $q(x)$ temos $\int \frac{p_n^2(x)}{(x - x_i)^2} \rho(x, t) dx = \sum_{j=1}^n \lambda_j(t) \frac{p_n^2(x_j)}{(x_j - x_i)^2} = \lambda_i(t) (p_n'(x_i))^2$. Logo, $\lambda_i(t) = \int p_n^2(x) / (p_n'(x_i)(x - x_i))^2 \rho(x, t) dx > 0$.

²Neste caso, assume-se que $\int_a^b x^j \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dx$, $j = 0, 1, \dots, 2n - 1$, converge uniformemente para todo t em todo subintervalo compacto de (t_1, t_2) , sendo então possível derivar o lado esquerdo de (2.12) termo a termo.

³Como $q(x) = \frac{p_n^2(x, t)}{x - x_i} = p_n(x, t) \frac{p_n(x, t)}{x - x_i} = p_n(x, t) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x - x_j)$, então derivando $q(x)$ temos que $q'(x) = p_n'(x, t) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x - x_j) + p_n(x, t) \sum_{k=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i, k}}^n (x - x_j)$, logo $q'(x_i) = p_n'(x_i, t) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (x_i - x_j) = (p_n'(x_i, t))^2$.

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\int_a^b \frac{p_n^2(x, t)}{x - x_i} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dx}{\lambda_i(t)(p'_n(x, t))^2}. \quad (2.14)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{p_n^2(x, t)}{x - x_i} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dx &= \int_a^b \frac{p_n^2(x, t)}{x - x_i} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} \frac{\rho(x, t)}{\rho(x, t)} dx - \int_a^b \frac{p_n^2(x, t)}{x - x_i} \frac{\partial \rho(x_i, t)}{\partial t} \frac{\rho(x, t)}{\rho(x_i, t)} dx \\ &= \int_a^b \frac{p_n^2(x, t)}{x - x_i} \frac{\rho(x, t)}{\rho(x, t)} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{\rho(x_i, t)} \frac{p_n^2(x, t)}{x - x_i} \frac{\partial \rho(x_i, t)}{\partial t} \rho(x, t) dx \\ &= \int_a^b \frac{p_n^2(x, t)}{x - x_i} \left(\frac{1}{\rho(x, t)} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{\rho(x_i, t)} \frac{\partial \rho(x_i, t)}{\partial t} \right) \rho(x, t) dx, \end{aligned}$$

O estudo da função

$$\frac{1}{x - x_i} \left(\frac{1}{\rho(x, t)} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{\rho(x_i, t)} \frac{\partial \rho(x_i, t)}{\partial t} \right) \rho(x, t) dx$$

é o mesmo feito na demonstração do teorema anterior.

Logo $\frac{dx_i}{dt}$ é positiva (resp. negativa) se,

$$\frac{1}{\rho(x, t)} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t}$$

for uma função crescente (resp. decrescente) de x , já que $\lambda_i(t) > 0$. Disto segue o resultado.

2.2 Teorema de Markov para Intervalos Simétricos

O teorema seguinte é um caso particular do Teorema de Markov, considerando que a função peso $\rho(x, t)$ é par e definida num intervalo simétrico $(-a, a)$.

Teorema 2.2.1. *Suponha que $\rho(x, t)$ seja uma função par de x , definida num intervalo simétrico $(-a, a)$, que tenha derivada de primeira ordem, com relação a $t \in (t_1, t_2)$, contínua para todo $x \in (-a, a)$. Se, para $t \in (t_1, t_2)$, a função*

$$\frac{1}{\rho(x, t)} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t}$$

cresce (resp. decresce) quando x cresce, para $x \in (0, a)$, então os zeros positivos $x_i = x_i(t)$, $i = 1, \dots, \frac{n}{2}$, de $p_n(x)$, dados em ordem decrescentes, crescem (resp. decrescem) quando t cresce em (t_1, t_2) .

Demonstração. Como $\rho(x, t)$ é uma função par em $(-a, a)$, então podemos escrever $p_{2m}(x) = s_m(x^2, t)$ e $p_{2m+1}(x) = x r_m(x^2, t)$, onde s_m e r_m são polinômios de grau m em x^2 , com zeros $y_{n,1}(t), \dots, y_{n,m}(t)$ e $z_{n,1}(t), \dots, z_{n,m}(t)$, respectivamente.

Observe que para $m \neq n$ temos

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a p_{2n}(x, t) p_{2m}(x, t) \rho(x, t) dx &= \int_{-a}^a s_n(x^2, t) s_m(x^2, t) \rho(x, t) dx \\ &= 2 \int_0^a s_n(x^2, t) s_m(x^2, t) \rho(x, t) dx \\ &= \int_0^{a^2} s_n(y, t) s_m(y, t) \frac{\rho(\sqrt{y})}{\sqrt{y}} dy \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a p_{2n+1}(x, t) p_{2m+1}(x, t) \rho(x, t) dx &= \int_{-a}^a x r_m(x^2, t) x r_n(x^2, t) \rho(x, t) dx \\ &= 2 \int_0^a r_m(x^2, t) r_n(x^2, t) x^2 \rho(x, t) dx \\ &= 2 \int_0^a r_m(z, t) r_n(z, t) \sqrt{z} \rho(\sqrt{z}, t) dz. \end{aligned}$$

Desde que p_n seja uma sequência de polinômios ortogonais com relação à função peso $\rho(x, t)$, então s_m e r_m também são sequências de polinômios ortogonais com relação a função peso $\rho_1(x, t) = \rho(\sqrt{x}, t)/x$ e $\rho_2(x, t) = \sqrt{x} \rho(\sqrt{x}, t)$, respectivamente, no intervalo $(0, a^2)$, para cada $t \in (t_1, t_2)$.

Observe que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_1(x, t)} \frac{\partial \rho_1(x, t)}{\partial t} &= \frac{x}{\rho(\sqrt{x}, t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho(\sqrt{x}, t)}{x} \right) \\ &= \frac{1}{\rho(\sqrt{x}, t)} \frac{\partial \rho(\sqrt{x}, t)}{\partial t} \\ &= g \circ h(x, t), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_2(x, t)} \frac{\partial \rho_2(x, t)}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{x} \rho(\sqrt{x}, t)} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{x} \rho(\sqrt{x}, t) \right) \\ &= \frac{1}{\rho(\sqrt{x}, t)} \frac{\partial \rho(\sqrt{x}, t)}{\partial t} \\ &= g \circ h(x, t), \end{aligned}$$

onde $g(x, t) = \frac{1}{\rho(x, t)} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t}$ e $h(x, t) = (\sqrt{x}, t)$.

Observe que para cada t a função $h(x, t)$ é crescente com relação a variável $x \in (0, a)$. Daí, se para cada t , a função $g(x, t)$ for uma função crescente (resp. decrescente) de x , então

$$\frac{1}{\rho_1(x, t)} \frac{\partial \rho_1(x, t)}{\partial t} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\rho_2(x, t)} \frac{\partial \rho_2(x, t)}{\partial t}$$

serão funções crescente (resp. decrescente) de $x \in (0, a^2)$.

Logo, pelo teorema de Markov, os zeros de s_m e r_m são funções crescentes (resp. decrescentes) de t .

Para concluir a demonstração, observe que $x_{2m, m+i} = \sqrt{y_{m, i}}$ são os zeros positivos de p_{2m} e $x_{2m+1, m+i+1} = \sqrt{z_{m, i}}$ são os zeros positivos de p_{2m+1} , com $i = 1, \dots, n$. Desta forma, temos que os zeros positivos de p_n são funções crescentes (resp. decrescentes) de t quando $g(x, t)$ for uma função crescentes (resp. decrescentes) de x . \square

No Teorema de Markov podemos considerar as extremidades do intervalo de ortogonalidade como funções do parâmetro t , isto é, $a = a(t)$ e $b = b(t)$.

Teorema 2.2.2. *Suponha que $\rho(x, t)$ tem primeira derivada com relação a t contínua para todo $x \in (a, b)$ e $t \in (t_1, t_2)$. Além disso, suponha que $a = a(t)$ e $b = b(t)$ são funções de t com derivadas de primeira ordem contínuas. Se $a = a(t)$ e $b = b(t)$ crescem (resp. decrescem) enquanto t cresce e*

$$\frac{1}{\rho(x, t)} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t}$$

for uma função crescente (resp. decrescente) de x em (a, b) , então os zeros $x_j = x_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, de p_n são funções crescentes (resp. decrescentes) de t .

Demonstração. A prova deste teorema é feita utilizando o mesmo raciocínio da prova do teorema anterior. Da quadratura de Gauss podemos escrever

$$\int_{a(t)}^{b(t)} q(x) \rho(x, t) dx = \sum_{j=1}^n \lambda_j(t) q(x_j), \quad (2.15)$$

onde q é um polinômio de grau até $2n - 1$ e $\lambda_j(t)$, $j = 1, \dots, n$, são os números de Christofel. Pela regra de Leibniz, sobre a derivação sob o sinal da integral, derivando a integral anterior temos que⁴

$$\begin{aligned} \int_{a(t)}^{b(t)} q(x) \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dx + q(b(t)) \rho(b(t), t) b'(t) - q(a(t)) \rho(a(t), t) a'(t) \\ = \sum_{j=1}^n \lambda_j'(t) q(x_j(t)) + \lambda_j(t) q'(x_j(t)) \frac{dx_j}{dt} \end{aligned}$$

⁴Neste caso, também assume-se que $\int_a^b x^j \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dx$, $j = 0, 1, \dots, 2n - 1$, converge uniformemente para todo t em todo subintervalo compacto de (t_1, t_2) , sendo então possível derivar o lado esquerdo de (2.15) termo a termo e também poder utilizar a regra de Leibniz mencionada.

Fazendo $q(x) = \frac{p_n^2(x, t)}{x - x_i(t)}$, temos que

$$\begin{aligned} \lambda_i(t)(p'_n(x_i(t), t))^2 \frac{dx_i}{dt} &= \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{p_n^2(x, t)}{x - x_i(t)} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} dx \\ &\quad + \frac{p_n^2(b(t), t)}{b(t) - x_i(t)} \rho(b(t), t) b'(t) - \frac{p_n^2(a(t), t)}{a(t) - x_i(t)} \rho(a(t), t) a'(t) \\ &= \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{p_n^2(x, t)}{x - x_i} \left(\frac{1}{\rho(x, t)} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{\rho(x_i, t)} \frac{\partial \rho(x_i, t)}{\partial t} \right) \rho(x, t) dx \\ &\quad + \frac{p_n^2(b(t), t)}{b(t) - x_i(t)} \rho(b(t), t) b'(t) - \frac{p_n^2(a(t), t)}{a(t) - x_i(t)} \rho(a(t), t) a'(t), \end{aligned}$$

logo,

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= \frac{1}{\lambda_i(t)(p'_n(x_i(t), t))^2} \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{p_n^2(x, t)}{x - x_i} \left(\frac{1}{\rho(x, t)} \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} - \frac{1}{\rho(x_i, t)} \frac{\partial \rho(x_i, t)}{\partial t} \right) \rho(x, t) dx \\ &\quad + \frac{\rho(b(t), t) b'(t)}{\lambda_i(t)(p'_n(x_i(t), t))^2} \frac{p_n^2(b(t), t)}{b(t) - x_i(t)} - \frac{\rho(a(t), t) a'(t)}{\lambda_i(t)(p'_n(x_i(t), t))^2} \frac{p_n^2(a(t), t)}{a(t) - x_i(t)}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

O estudo do sinal da integral é feita de forma análoga ao estudo feito na demonstração anterior, já os demais termos somados serão positivos (resp. negativos) se $a'(t)$ e $b'(t)$ forem ambos positivos (resp. negativos).

□

No Teorema (2.2.2) a hipótese que a função peso depende do parâmetro t pode ser retirada, isto é, pode ser substituída pela hipótese de que a função peso dependa apenas de x , ou seja, $\rho = \rho(x)$.

Corolário 2.2.3. *Suponha que $\rho(x)$ seja uma função peso definida no intervalo (a, b) . Além disso, suponha que $a = a(t)$ e $b = b(t)$ são funções de t com derivadas de primeira ordem contínuas. Se $a = a(t)$ e $b = b(t)$ crescem (resp. decrescem) enquanto t cresce então os zeros $x_i = x_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, de p_n são funções crescentes (resp. decrescentes) de $t \in (t_1, t_2)$.*

Demonstração. Note que se $\rho(x)$ não depender de t , então a equação (2.16) se reduz a

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\rho(b(t)) b'(t)}{\lambda_i(t)(p'_n(x_i(t), t))^2} \frac{p_n^2(b(t), t)}{b(t) - x_i(t)} + \frac{\rho(a(t)) a'(t)}{\lambda_i(t)(p'_n(x_i(t), t))^2} \frac{p_n^2(a(t), t)}{x_i(t) - a(t)}.$$

□

2.3 Teorema Clássico de Stieltjes

Primeiramente, estudaremos algumas propriedades da seguinte equação diferencial de segunda ordem

$$y''(x) + P(x)y'(x) + Q(x)y(x) = 0, \quad (2.17)$$

onde P e Q são funções cujas singularidades não coincidem com os zeros de y .

Suponha que $y(x)$ seja um polinômio mônico de grau n , isto é,

$$y(x) = x^n + \dots + a_1x + a_0,$$

e x_1, \dots, x_n os zeros deste polinômio. Então podemos escrever

$$y(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n) = \prod_{k=1}^n (x - x_k).$$

Observe que podemos reescrever

$$y(x) = (x - x_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (x - x_k) = (x - x_j) y_j(x),$$

onde $y_j(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (x - x_k)$.

Daí, temos que $y'(x) = y_j(x) + (x - x_j)y_j'(x)$ e $y''(x) = 2y_j'(x) + (x - x_j)y_j''(x)$. Desta forma, fazendo $x = x_j$ temos

$$\begin{aligned} y'(x_j) &= y_j(x_j) \\ y''(x_j) &= 2y_j'(x_j). \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{y''(x_j)}{2y_j'(x_j)} = \frac{y_j'(x_j)}{y_j(x_j)}.$$

Substituindo $x = x_j$ em (2.17) temos

$$0 = y''(x_j) + P(x_j)y'(x_j) + Q(x_j)y(x_j) = y''(x_j) + P(x_j)y'(x_j),$$

logo $y''(x_j) = -P(x_j)y'(x_j)$ e portanto

$$-\frac{1}{2}P(x_j) = \frac{y''(x_j)}{2y_j'(x_j)} = \frac{y_j'(x_j)}{y_j(x_j)}.$$

Por outro lado, $y_j(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n (x - x_k)$.

Logo

$$y'_j(x) = \prod_{\substack{k=2 \\ k \neq j}}^n (x - x_k) + \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq 2 \\ k \neq j}}^n (x - x_k) + \dots + \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n-1} (x - x_k).$$

Segue que

$$\frac{y'(x_j)}{y_j(x_j)} = \frac{1}{x - x_1} + \frac{1}{x - x_2} + \dots + \frac{1}{x - x_n} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{x - x_k}.$$

Portanto,

$$-\frac{1}{2}P(x_j) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{x_j - x_k}. \quad (2.18)$$

Teorema 2.3.1. (Teorema de Stieltjes) *Seja $y(x, t)$ uma solução polinomial da seguinte equação diferencial*

$$y'' + P(x, t)y' + Q(x, t)y = 0.$$

Suponha que $P(x, t)$ seja uma função decrescente de x para cada t . Suponha também que $P(x, t)$ seja uma função diferenciável e decrescente (resp. crescente) de t para cada x . Então os zeros de $y(x, t)$ decrescem (resp. crescem) quando t cresce.

Demonstração. (Prova de Stieltjes) Note que não há nenhuma hipótese imposta sobre Q . Supondo que P e Q definidos em (2.17) dependem de t , então podemos considerar

$$y''(x) + P(x, t)y'(x) + Q(x, t)y(x) = 0, \quad (2.19)$$

onde $y = y(x, t)$ e sejam $x_k = x_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$ os zeros de y .

De (2.18) podemos escrever

$$-\frac{1}{2}P(x_j, t) = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{x_j(t) - x_k(t)} \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.20)$$

Derivando a equação anterior com relação t temos

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial P(x_j, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial P(x_j, t)}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} + \frac{\partial P(x_j, t)}{\partial t} \frac{dt}{dt} \right) = -\frac{1}{2} P_1(x_j, t) \frac{dx_j}{dt} - \frac{1}{2} P_2(x_j, t),$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{x_j - x_k} = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{(x_j - x_k)^2} \left(\frac{dx_j}{dt} - \frac{dx_k}{dt} \right).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}P_2(x_j, t) &= -\frac{1}{2}P_1(x_j, t)\frac{dx_j}{dt} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{(x_j - x_k)^2} \left(\frac{dx_j}{dt} - \frac{dx_k}{dt} \right) \\
&= -\frac{1}{2}P_1(x_j, t)\frac{dx_j}{dt} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{(x_j - x_k)^2} \frac{dx_j}{dt} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{(x_j - x_k)^2} \frac{dx_k}{dt} \\
&= \left(-\frac{1}{2}P_1(x_j, t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{(x_j - x_k)^2} \right) \frac{dx_j}{dt} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n -\frac{1}{(x_j - x_k)^2} \frac{dx_k}{dt}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}P_2(x_j, t) = \sum_{k=1}^n a_{jk} \frac{dx_k}{dt}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.21)$$

onde

$$a_{jj} = -\frac{1}{2}P_1(x_j, t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{(x_j - x_k)^2} > 0,$$

pois $P(x, t)$ é função decrescente de x para cada t e, para $k \neq j$

$$a_{jk} = a_{kj} = -\frac{1}{(x_j - x_k)^2} < 0.$$

Considere a matriz A cujas entradas são $\{a_{jk}\}$, isto é, $A = [a_{jk}]$. Temos que os elementos da diagonal principal de A são todos positivos e os elementos fora dela são todos negativos. Defina o seguinte sistema

$$AX = B, \quad (2.22)$$

onde $X = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} & \dots & \frac{dx_n}{dt} \end{bmatrix}^T$ e $B = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} P_2(x_1, t) & \dots & P_2(x_n, t) \end{bmatrix}^T$.

Observe que A é definida positiva⁵, logo A^{-1} existe. Daí, do sistema acima, temos que

$$X = A^{-1}B, \quad (2.23)$$

onde $A^{-1} = [u_{jk}]$.

Queremos mostrar que

⁵A é estritamente diagonalmente dominante, isto é, $|a_{jj}| > \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |a_{jk}|$, $j = 1, \dots, n$. De fato,

$$|a_{jj}| = a_{jj} = -\frac{1}{2}P_1(x_j, t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{1}{(x_j - x_k)^2} = -\frac{1}{2}P_1(x_j, t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |a_{jk}| > \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n |a_{jk}|, \quad j = 1, \dots, n.$$

$$\text{se } \frac{\partial P(x_j, t)}{\partial t} = P_2(x_j, t) < 0, \text{ então } \frac{dx_j}{dt} < 0$$

e

$$\text{se } \frac{\partial P(x_j, t)}{\partial t} = P_2(x_j, t) > 0, \text{ então } \frac{dx_j}{dt} > 0.$$

Do sistema (2.23) temos que

$$\frac{dx_j}{dt} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n u_{jk} P_2(x_k, t), \quad j = 1, \dots, n.$$

Assim, basta mostrar que A^{-1} tem apenas elementos positivos.

Em [20], na seção 6.22, Szegő mostra que esta matriz A pode ser decomposta na forma $A = E - L$, onde E é uma matriz cujos elementos são não-negativos e $LL^T = I$. E mais, Szegő mostra também que sua inversa pode ser escrita da seguinte forma:

$$A^{-1} = E + L + L^2 + L^3 + \dots,$$

onde os coeficientes de $E + L$ são todos elementos positivos. Ou seja, neste caso temos que A^{-1} de fato possui apenas elementos positivos. Disso segue o resultado. \square

2.4 Teorema de Stieltjes para Intervalos Simétricos

O seguinte teorema é um caso particular do teorema anterior, considerando que $y(x, t)$ esteja definido num intervalo simétrico $(-a, a)$.

Teorema 2.4.1. *Seja $y(x, t)$ uma solução polinomial da equação (2.19). Suponha que $y(x, t)$ seja par no intervalo simétrico $(-a, a)$ e que $P(x, t)$ seja uma função decrescente de x para cada t . Suponha também que $P(x, t)$ seja uma função diferenciável e decrescente (resp. crescente) de t para cada x . Então os zeros positivos de $y(x, t)$ decrescem (resp. crescem) quando t cresce.*

Demonstração. Sejam x_1, \dots, x_n as raízes do polinômio p_n no intervalo simétrico $(-a, a)$. Vamos dividir a demonstração em dois casos, quando n é um número par e quando n é um número ímpar.

Primeiramente, suponha que n seja par, isto é, $n = 2m$. Neste caso, temos $x_k = -x_{2m-k+1}$, para $k = 1, \dots, 2m$. Observe que $P(x, t)$ satisfaz as condições do teorema anterior. Daí, de (2.21), para $1 \leq j \leq m$, temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} P_2(x_j, t) &= \sum_{k=1}^n a_{jk} \frac{dx_k}{dt} = \sum_{k=1}^{2m} a_{jk} \frac{dx_k}{dt} \\ &= a_{j1} \frac{dx_1}{dt} + \dots + a_{jm} \frac{dx_m}{dt} + a_{j,m+1} \frac{dx_{m+1}}{dt} + \dots + a_{j,2m} \frac{dx_{2m}}{dt}, \end{aligned}$$

onde

$$a_{jj} = -\frac{1}{2}P_1(x_j, t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{2m} \frac{1}{(x_j - x_k)^2},$$

$$a_{jk} = a_{kj} = -\frac{1}{(x_j - x_k)^2}, \quad k \neq j.$$

Como $x_1 = -x_{2m}, \dots, x_m = -x_{m+1}$, temos

$$\frac{dx_{2m}}{dt} = -\frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_{m+1}}{dt} = -\frac{dx_m}{dt},$$

e, portanto, para $1 \leq j \leq m$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}P_2(x_j, t) &= \sum_{k=1}^{2m} a_{jk} \frac{dx_k}{dt} = \sum_{k=1}^m a_{jk} \frac{dx_k}{dt} + \sum_{k=m+1}^{2m} a_{jk} \frac{dx_k}{dt} \\ &= \sum_{k=1}^m a_{jk} \frac{dx_k}{dt} + \sum_{k=1}^m a_{j, 2m-k+1} \frac{dx_{2m-k+1}}{dt} \\ &= \sum_{k=1}^m a_{jk} \frac{dx_k}{dt} - \sum_{k=1}^m a_{j, 2m-k+1} \frac{dx_k}{dt} \\ &= \sum_{k=1}^m (a_{jk} - a_{j, 2m-k+1}) \frac{dx_k}{dt}. \end{aligned}$$

Defina

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{j1} &= a_{j1} - a_{j, 2m} = -\frac{1}{(x_j - x_1)^2} + \frac{1}{(x_j - x_{2m})^2} = -\frac{1}{(x_j - x_1)^2} + \frac{1}{(x_j + x_1)^2}, \\ \tilde{a}_{j2} &= a_{j2} - a_{j, 2m-1} = -\frac{1}{(x_j - x_2)^2} + \frac{1}{(x_j - x_{2m-1})^2} = -\frac{1}{(x_j - x_2)^2} + \frac{1}{(x_j + x_2)^2}, \\ &\vdots, \\ \tilde{a}_{jj} &= a_{jj} - a_{j, 2m-j+1} = -\frac{1}{2}P_1(x_j, t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{2m} \frac{1}{(x_j - x_k)^2} + \frac{1}{(x_j - x_{2m-j+1})^2}, \\ &\vdots \\ \tilde{a}_{jm} &= a_{jm} - a_{j, m+1} = -\frac{1}{(x_j - x_m)^2} + \frac{1}{(x_j - x_{m+1})^2} = -\frac{1}{(x_j - x_m)^2} + \frac{1}{(x_j + x_m)^2}. \end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{jj} &= -\frac{1}{2}P_1(x_j, t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{2m} \frac{1}{(x_j - x_k)^2} + \frac{1}{(x_j - x_{2m-j+1})^2} \\
&= -\frac{1}{2}P_1(x_j, t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{1}{(x_j - x_k)^2} + \sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{(x_j - x_k)^2} + \frac{1}{(x_j - x_{2m-j+1})^2} \\
&= -\frac{1}{2}P_1(x_j, t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{1}{(x_j - x_k)^2} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{(x_j + x_k)^2} + \frac{1}{(x_j + x_j)^2} \\
&= -\frac{1}{2}P_1(x_j, t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{1}{(x_j - x_k)^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{1}{(x_j + x_k)^2} + \frac{1}{(x_j + x_j)^2} + \frac{1}{(x_j + x_j)^2} \\
&= -\frac{1}{2}P_1(x_j, t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{1}{(x_j - x_k)^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{1}{(x_j + x_k)^2} + \frac{1}{2x_j^2} \\
&= -\frac{1}{2}P_1(x_j, t) + R_j + S_j + \frac{1}{2x_j^2},
\end{aligned}$$

onde

$$R_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{1}{(x_j - x_k)^2} \quad S_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{1}{(x_j + x_k)^2}.$$

Daí,

$$\frac{1}{2}P_2(x_j, t) = \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{jk} \frac{dx_k}{dt}, \quad 1 \leq j \leq m,$$

onde

$$\tilde{a}_{jk} = \frac{1}{(x_j + x_k)^2} - \frac{1}{(x_j - x_k)^2}, \quad k \neq j$$

e

$$\tilde{a}_{jj} = -\frac{1}{2}P_1(x_j, t) + R_j + S_j + \frac{1}{2x_j^2}.$$

Agora, de (2.21), para $m+1 \leq j \leq 2m$, temos também que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}P_2(x_j, t) &= \sum_{k=1}^{2m} a_{jk} \frac{dx_k}{dt} = \sum_{k=1}^m a_{jk} \frac{dx_k}{dt} + \sum_{k=m+1}^{2m} a_{jk} \frac{dx_k}{dt} \\
&= \sum_{k=1}^m a_{jk} \frac{dx_k}{dt} + \sum_{k=1}^m a_{j, 2m-k+1} \frac{dx_{2m-k+1}}{dt} \\
&= \sum_{k=1}^m a_{jk} \frac{dx_k}{dt} - \sum_{k=1}^m a_{j, 2m-k+1} \frac{dx_k}{dt} \\
&= \sum_{k=1}^m (a_{jk} - a_{j, 2m-k+1}) \frac{dx_k}{dt}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{2}P_2(x_j, t) = \sum_{k=1}^m (a_{jk} - a_{j, 2m-k+1}) \frac{dx_k}{dt}, \quad 1 \leq j \leq m,$$

e

$$\frac{1}{2}P_2(x_j, t) = \sum_{k=1}^m (a_{jk} - a_{j, 2m-k+1}) \frac{dx_k}{dt}, \quad m+1 \leq j \leq 2m.$$

Como

$$\tilde{a}_{jk} = a_{jk} - a_{j, 2m-k+1}, \quad 1 \leq j \leq m,$$

então, fazendo o mesmo para $m+1 \leq j \leq 2m$, temos que

$$\tilde{a}_{jk} = a_{jk} - a_{j, 2m-k+1}, \quad m+1 \leq j \leq 2m.$$

Mas observe que, para $1 \leq j \leq m$,

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{2m+1-j, k} &= a_{2m+1-j, k} - a_{2m+1-j, 2m-k+1} \\
&= -\frac{1}{(x_{2m+1-j} - x_k)^2} + \frac{1}{(x_{2m+1-j} - x_{2m+1-k})^2} \\
&= -\frac{1}{(-x_j - x_k)^2} + \frac{1}{(-x_j + x_k)^2} \\
&= -\frac{1}{(x_j + x_k)^2} + \frac{1}{(x_j - x_k)^2} \\
&= -\tilde{a}_{jk}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{a}_{jk} = -\tilde{a}_{2m-j+1, k}$, com $1 \leq j \leq m$. Por outro lado, observe que

$$P_2(x_j, t) = P_2(-x_{2m-j+1}, t) = -P_2(x_{2m-j+1}, t), \quad 1 \leq j \leq m,$$

pois P_2 é linear. Desta forma,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}P_2(x_{m+1}, t) &= \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{m+1,k} \frac{dx_k}{dt} \Leftrightarrow \frac{1}{2}P_2(-x_m, t) = \sum_{k=1}^m -\tilde{a}_{mk} \frac{dx_k}{dt} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}P_2(x_m, t) = \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{mk} \frac{dx_k}{dt}, \\
&\vdots \\
\frac{1}{2}P_2(x_{2m}, t) &= \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{2m,k} \frac{dx_k}{dt} \Leftrightarrow \frac{1}{2}P_2(-x_1, t) = \sum_{k=1}^m -\tilde{a}_{1k} \frac{dx_k}{dt} \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{2}P_2(x_1, t) = \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{1k} \frac{dx_k}{dt}.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{1}{2}P_2(x_j, t) = \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{jk} \frac{dx_k}{dt} \Leftrightarrow \frac{1}{2}P_2(x_{2m-j+1}, t) = \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{2m-j+1,k} \frac{dx_k}{dt}, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Logo, o sistema de $2m$ equações se reduz a um sistema de m equações, já que as m primeiras equações são equivalentes às m últimas, quando estamos trabalhando com um intervalo simétrico.

Assim, para $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$, obtemos o seguinte sistema

$$X = \tilde{A}^{-1}B,$$

onde $X = \left[\frac{dx_1}{dt} \quad \dots \quad \frac{dx_m}{dt} \right]^T$ e $B = \frac{1}{2} \left[P_2(x_1, t) \quad \dots \quad P_2(x_m, t) \right]^T$.

Aplicando o mesmo resultado utilizado no teorema anterior, temos que a matriz \tilde{A}^{-1} tem apenas elementos positivos.

Vejamos agora o caso em que temos um número ímpar de raízes x_1, \dots, x_n , ou seja, quando $n = 2m + 1$, no intervalo simétrico $(-a, a)$. Neste caso, obviamente $x_{m+1} = 0$, e as demais raízes satisfazem $x_j = -x_{2m+2-j}$. Daí, para $1 \leq j \leq m$,

temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}P_2(x_j, t) &= \sum_{k=1}^m a_{jk} \frac{dx_k}{dt} + a_{j,m+1} \frac{dx_{m+1}}{dt} + \sum_{k=m+2}^{2m+1} a_{j,k} \frac{dx_k}{dt} \\
&= \sum_{k=1}^m a_{jk} \frac{dx_k}{dt} + \sum_{k=m+2}^{2m+1} a_{j,k} \frac{dx_k}{dt} \\
&= \sum_{k=1}^m a_{jk} \frac{dx_k}{dt} + \sum_{k=1}^m a_{j,2m+2-k} \frac{dx_{2m+2-k}}{dt} \\
&= \sum_{k=1}^m a_{jk} \frac{dx_k}{dt} - \sum_{k=1}^m a_{j,2m+2-k} \frac{dx_k}{dt} \\
&= \sum_{k=1}^m (a_{jk} - a_{j,2m+2-k}) \frac{dx_k}{dt} \\
&= (a_{j1} - a_{j,2m+1}) \frac{dx_1}{dt} + \dots + (a_{jj} - a_{j,2m-j+2}) \frac{dx_j}{dt} + \dots + (a_{jm} - a_{j,m+2}) \frac{dx_m}{dt}.
\end{aligned}$$

Assim, de forma análoga ao caso anterior, podemos definir $\tilde{a}_{jk} = a_{jk} - a_{j,2m-k+2}$, com $1 \leq j \leq m$.

Observe também que

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_{jj} &= -\frac{1}{2}P_1(x_j, t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{2m+1} \frac{1}{(x_j - x_k)^2} + \frac{1}{(x_j - x_{2m-j+2})^2} \\
&= -\frac{1}{2}P_1(x_j, t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{1}{(x_j - x_k)^2} + \frac{1}{x_j^2} + \sum_{k=m+2}^{2m+1} \frac{1}{(x_j - x_k)^2} + \frac{1}{(x_j - x_{2m-j+2})^2} \\
&= -\frac{1}{2}P_1(x_j, t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{1}{(x_j - x_k)^2} + \sum_{k=1}^m \frac{1}{(x_j + x_k)^2} + \frac{1}{x_j^2} + \frac{1}{(x_j + x_j)^2} \\
&= -\frac{1}{2}P_1(x_j, t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{1}{(x_j - x_k)^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{1}{(x_j + x_k)^2} + \frac{1}{(x_j + x_j)^2} + \frac{1}{x_j^2} + \frac{1}{(x_j + x_j)^2} \\
&= -\frac{1}{2}P_1(x_j, t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{1}{(x_j - x_k)^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{1}{(x_j + x_k)^2} + \frac{3}{2x_j^2} \\
&= -\frac{1}{2}P_1(x_j, t) + R_j + S_j + \frac{3}{2x_j^2},
\end{aligned}$$

onde

$$R_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{1}{(x_j - x_k)^2} \quad S_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \frac{1}{(x_j + x_k)^2}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}P_2(x_j, t) = \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{jk} \frac{dx_k}{dt},$$

com

$$\tilde{a}_{jk} = \frac{1}{(x_j + x_k)^2} - \frac{1}{(x_j - x_k)^2}, \quad k \neq j$$

e

$$\tilde{a}_{jj} = -\frac{1}{2}P_1(x_j, t) + R_j + S_j + \frac{3}{2x_j^2}.$$

Consequentemente, utilizando o mesmo raciocínio anterior, para $m+2 \leq j \leq 2m$, de (2.21) temos que

$$\frac{1}{2}P_2(x_j, t) = \sum_{k=1}^m (a_{jk} - a_{j,2m+2-k}) \frac{dx_k}{dt}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}P_2(x_j, t) &= \sum_{k=1}^m (a_{jk} - a_{j,2m-k+2}) \frac{dx_k}{dt}, \quad 1 \leq j \leq m \\ \frac{1}{2}P_2(x_j, t) &= \sum_{k=1}^m (a_{jk} - a_{j,2m-k+2}) \frac{dx_k}{dt}, \quad m+2 \leq j \leq 2m. \end{aligned}$$

Assim, podemos definir,

$$\tilde{a}_{jk} = a_{jk} - a_{j,2m-k+2}, \quad 1 \leq j \leq m$$

$$\tilde{a}_{jk} = a_{jk} - a_{j,2m-k+2}, \quad m+2 \leq j \leq 2m$$

Pode-se mostrar de forma análoga ao caso anterior, que $\tilde{a}_{jk} = -\tilde{a}_{j,2m-k+2}$, com $1 \leq k \leq m$. Por outro lado, observe também que

$$P_2(x_j, t) = -P_2(x_{2m-j+2}, t), \quad 1 \leq j \leq m,$$

e, portanto, concluímos que

$$\frac{1}{2}P_2(x_j, t) = \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{jk} \frac{dx_k}{dt} \Leftrightarrow \frac{1}{2}P_2(x_{2m-j+2}, t) = \sum_{k=1}^m \tilde{a}_{2m-j+2,k} \frac{dx_k}{dt}, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Logo, o sistema de $2m+1$ equações se reduz a um sistema de m equações, pois as m primeiras equações são equivalentes às m últimas. Neste caso, temos o seguinte sistema, com $\tilde{A} = [\tilde{a}_{ij}]$,

$$X = \tilde{A}^{-1}B,$$

onde $X = \left[\frac{dx_1}{dt} \quad \dots \quad \frac{dx_m}{dt} \right]^T$ e $B = \frac{1}{2} \left[P_2(x_1, t) \quad \dots \quad P_2(x_m, t) \right]^T$.

Novamente, aplicando o mesmo resultado utilizado no teorema anterior, temos que a matriz \hat{A}^{-1} tem apenas elementos positivos.

Logo, $x'_j(t) < 0$ e $x'_j(t) > 0$ se, respectivamente, para $1 \leq j \leq m$, tivermos $P_2(x_j, t) < 0$ e $P_2(x_j, t) > 0$. Disto segue o resultado. \square

Isto é, para analisar a monotonicidade das raízes x_1, \dots, x_n , dadas em ordem decrescente, no intervalo simétrico $(-a, a)$, devemos utilizar o teorema anterior separadamente nas m primeiras raízes no intervalo $(-a, 0)$ e nas m últimas raízes no intervalo $(0, a)$.

CAPÍTULO 3

APLICAÇÕES AOS POLINÔMIOS ORTOGONAIS CLÁSSICOS

Neste capítulo, faremos um estudo sobre a monotonicidade dos zeros dos polinômios ortogonais clássicos, em particular os polinômios de Jacobi, Laguerre e Gegenbauer. Para isso, utilizaremos os teoremas clássicos de Markov e Stieltjes, introduzidos no capítulo anterior.

Por fim, utilizaremos alguns limites estabelecidos em [9] e [20], que fazem relações entre os polinômios ortogonais clássicos de Jacobi, Gegenbauer, Laguerre e Hermite, para então encontrarmos os limitantes dos zeros dos polinômios de Jacobi, Gegenbauer e Laguerre.

Outras referências também utilizadas neste capítulo foram [2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 14, 16, 17, 19].

3.1 Monotonicidade dos Zeros

Para aplicar os Teoremas de Markov e Stieltjes nos polinômios ortogonais clássicos, devemos considerar estes polinômios como sendo soluções da equação diferencial de segunda ordem (2.19) e ortogonais com relação as suas funções pesos, caracterizadas no Capítulo 1.

Observe que para aplicarmos o Teorema de Stieltjes nos polinômios ortogonais clássicos, a equação diferencial de segunda ordem definida em (1.1) deve ser reescrita na seguinte forma

$$y''(x) + \frac{\tau(x)}{\sigma(x)}y'(x) + \frac{\lambda_n}{\sigma(x)}y(x) = 0,$$

com $\lambda_n = -n\tau' - \frac{1}{2}n(n-1)\sigma''$, isto é, as funções $P(x, t)$ e $Q(x, t)$ definidas no Teorema de Stieltjes, podem ser consideradas como sendo

$$P(x, t) = \frac{\tau(x)}{\sigma(x)} \quad \text{e} \quad Q(x, t) = \frac{\lambda_n}{\sigma(x)}.$$

Como já observado, temos que não existe nenhuma hipótese imposta sobre a função $Q(x, t)$. Desta forma, podemos continuar com as aplicações dos teoremas clássicos nos polinômios ortogonais clássicos.

3.1.1 Polinômios de Jacobi

Relembrando que os polinômios de Jacobi são ortogonais no intervalo $(-1, 1)$ com relação a função peso $\rho(x, \alpha, \beta) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ com $\beta, \alpha > -1$, e são soluções da seguinte equação diferencial

$$y''(x) + \frac{-(\alpha + \beta + 2)x + \beta - \alpha}{1 - x^2}y'(x) + \frac{n(\beta + \alpha + n + 1)}{1 - x^2}y(x) = 0.$$

Assim, neste caso

$$\begin{aligned} P(x, \alpha, \beta) &= \frac{\beta - \alpha - (\beta + \alpha + 2)x}{1 - x^2} \\ &= \frac{\beta - \alpha - \beta x - \alpha x - 2x}{(1-x)(1+x)} \\ &= \frac{\beta(1-x) - \alpha(1+x) + (1-x) - (1+x)}{(1-x)(1+x)} \\ &= \frac{(\beta+1)(1-x) - (\alpha+1)(1+x)}{(1-x)(1+x)} \\ &= \frac{\beta+1}{1+x} - \frac{\alpha+1}{1-x} \\ &= \frac{\beta+1}{1+x} + \frac{\alpha+1}{x-1}. \end{aligned}$$

Denote por $x_{n,1}(\alpha, \beta), \dots, x_{n,n}(\alpha, \beta)$ os zeros de $P_n^{\alpha, \beta}(x)$ organizados em ordem decrescente.

Aplicando Markov

Primeiramente, iremos verificar se são satisfeitas as hipóteses do Teorema de Markov. Observe que $\rho(x, \alpha, \beta) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ possui derivadas parciais com relação a α e β , pois $x \in (-1, 1)$ e $\alpha, \beta > -1$ e estas são contínuas. De fato, considerando β fixo e derivando $\rho(x, \alpha, \beta)$ com relação a α temos que

$$\frac{\partial \rho(x, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left((1-x)^\alpha(1+x)^\beta \right) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta \ln(1-x),$$

que é contínua para todo $\alpha > -1$.

Agora, considerando α fixo e derivando $\rho(x, \alpha, \beta)$ com relação a β temos

$$\frac{\partial \rho(x, \alpha, \beta)}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left((1-x)^\alpha(1+x)^\beta \right) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta \ln(1+x),$$

que também é contínua para todo $\beta > -1$.

Analisemos agora as funções abaixo para podermos aplicar o Teorema de Markov nos polinômios de Jacobi,

$$\frac{1}{\rho(x, \alpha, \beta)} \frac{\partial \rho(x, \alpha, \beta)}{\partial \alpha}, \quad \frac{1}{\rho(x, \alpha, \beta)} \frac{\partial \rho(x, \alpha, \beta)}{\partial \beta}.$$

Temos que

$$\frac{1}{\rho(x, \alpha, \beta)} \frac{\partial \rho(x, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \frac{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta \ln(1-x)}{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta} = \ln(1-x).$$

Note que $\ln(1-x)$ é uma função decrescente de x . De fato, como $x \in (-1, 1)$, então

$$\frac{\partial \ln(1-x)}{\partial x} = \frac{-1}{1-x} < 0.$$

Logo, pelo Teorema de Markov, concluímos que $x_{n,j}(\alpha, \beta)$, $j = 1, \dots, n$, são funções decrescentes de α , para $\alpha > -1$.

Por outro lado,

$$\frac{1}{\rho(x, \alpha, \beta)} \frac{\partial \rho(x, \alpha, \beta)}{\partial \beta} = \frac{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta \ln(1+x)}{(1-x)^\alpha (1+x)^\beta} = \ln(1+x)$$

e $\ln(1+x)$ é uma função crescente de x . De fato, como $x \in (-1, 1)$, então

$$\frac{\partial \ln(1+x)}{\partial x} = \frac{1}{1+x} > 0.$$

Logo, pelo Teorema de Markov, concluímos que $x_{n,j}(\alpha, \beta)$, $j = 1, \dots, n$, são funções crescentes de β , para $\beta > -1$.

Aplicando Stieltjes

Para verificar a monotonicidade dos zeros do polinômios de Jacobi, utilizando o Teorema de Stieltjes, considere a função

$$P(x, \alpha, \beta) = \frac{\beta + 1}{1 + x} + \frac{\alpha + 1}{x - 1}.$$

Temos que $P(x, \alpha, \beta)$ é uma função decrescente de x , pois,

$$\frac{\partial P(x, \alpha, \beta)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\beta + 1}{1 + x} + \frac{\alpha + 1}{x - 1} \right) = -\frac{\beta + 1}{(1 + x)^2} - \frac{\alpha + 1}{(x - 1)^2} < 0,$$

pois $\alpha + 1 > 0$ e $\beta + 1 > 0$. Note que $P(x, \alpha, \beta)$ é uma função diferenciável e decrescente de α . De fato, como $x - 1 < 0$, então

$$\frac{\partial P(x, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\beta + 1}{1 + x} + \frac{\alpha + 1}{x - 1} \right) = \frac{1}{x - 1} < 0.$$

Por outro lado, $P(x, \alpha, \beta)$ é uma função diferenciável e crescente de β . De fato,

$$\frac{\partial P(x, \alpha, \beta)}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\beta + 1}{1 + x} + \frac{\alpha + 1}{x - 1} \right) = \frac{1}{x + 1} > 0,$$

pois, $x + 1 > 0$. Logo, pelo Teorema de Stieltjes concluímos que os zeros dos polinômios de Jacobi $x_{n,j}(\alpha, \beta)$, $j = 1, \dots, n$, são funções decrescente de α e funções crescentes de β , para $\alpha, \beta > -1$.

Ilustração Gráfica

As Figuras (3.1) e (3.2) ilustram a monotonicidade de $x_{4,j}(\alpha, 3)$, $j = 1, \dots, 4$ com relação a α , para os valores de $\alpha = 2, 3, 4, 5$ e $\beta = 2$, respectivamente. Já as Figuras (3.3) e (3.4) ilustram a monotonicidade de $x_{4,j}(2, \beta)$, $j = 1, \dots, 4$ com relação a β , para os valores de $\beta = 3, 5, 7, 9$ e $\alpha = 2$, respectivamente.

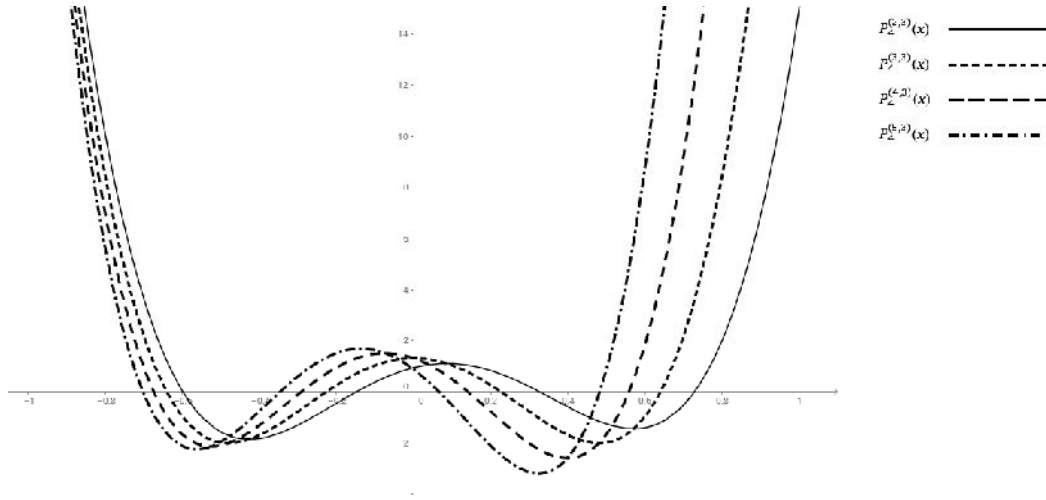


Figura 3.1: Polinômios de Jacobi $P_4^{(\alpha, 3)}$, para $\alpha = 3, 5, 7, 9$.

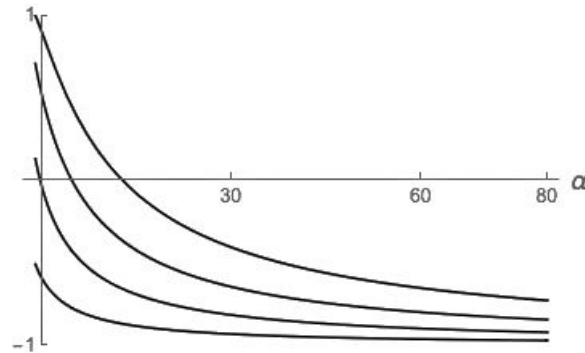


Figura 3.2: Gráfico dos zeros $x_{4,j}(\alpha, 2)$, $j = 1, \dots, 4$, dos Polinômios de Jacobi $P_4^{(\alpha, 2)}$.

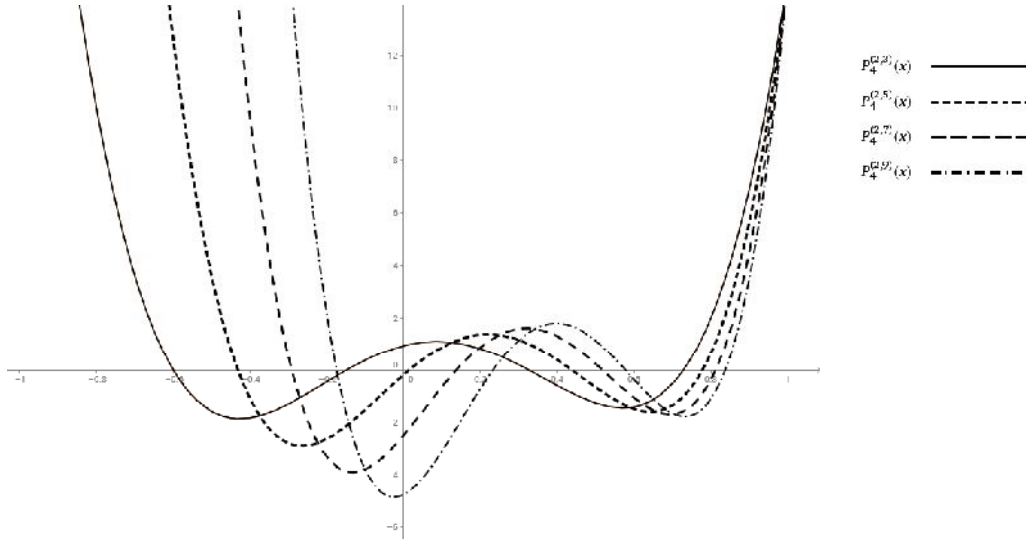


Figura 3.3: Polinômios de Jacobi $P_4^{(2,\beta)}$, com $\beta = 3, 5, 7, 9$.

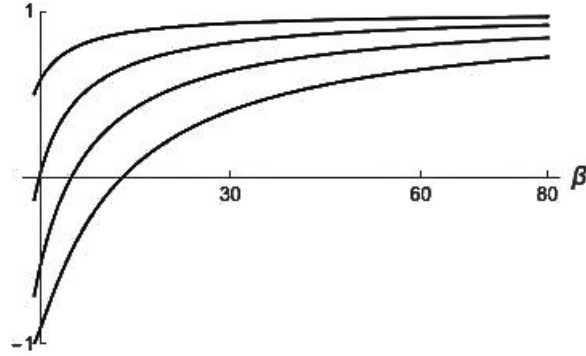


Figura 3.4: Gráfico dos zeros $x_{4,j}(2, \beta)$, $j = 1, \dots, 4$, dos Polinômios de Jacobi $P_4^{(2,\beta)}$.

3.1.2 Polinômios de Gegenbauer

Relembrando que os polinômios de Gegenbauer ou Ultraesféricos $P_n^\lambda(x)$ são um caso particular dos polinômios de Jacobi, quando tomado $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$. Logo, estes polinômios são ortogonais em $(-1, 1)$, com relação a função peso $\rho(x, \lambda) = (1 - x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}$, com $\lambda > -\frac{1}{2}$ e são soluções da equação diferencial

$$y''(x) + \frac{(2\lambda + 1)x}{x^2 - 1}y'(x) + \frac{n(2\lambda + n)}{1 - x^2}y(x) = 0.$$

Logo, neste caso, temos

$$\begin{aligned}\rho(x, \lambda) &= (1 - x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} \\ P(x, \lambda) &= \frac{(2\lambda + 1)x}{x^2 - 1}.\end{aligned}$$

Para verificar se é possível aplicar o Teorema de Markov e de Stieltjes nos polinômios de Gegenbauer, veremos se as funções acima satisfazem as hipóteses destes

teoremas. Observe que a função $\rho(x, \lambda) = (1 - x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}$ é diferenciável com relação a λ e que

$$\frac{\partial \rho(x, \lambda)}{\partial \lambda} = (1 - x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} \ln(1 - x^2),$$

logo possui derivada contínua para todo $\lambda > -\frac{1}{2}$.

Observe que neste caso a função

$$\frac{1}{\rho(x, \lambda)} \frac{\partial \rho(x, \lambda)}{\partial \lambda} = \ln(1 - x^2)$$

não é monótona no intervalo $(-1, 1)$. Pois,

$$\frac{\partial \ln(1 - x^2)}{\partial x} = \frac{-2x}{1 - x^2} = \begin{cases} < 0, & x \in (0, 1) \\ > 0, & x \in (-1, 0). \end{cases} \quad (3.1)$$

Além disso, observe que $P(x, \lambda)$ é decrescente de x . De fato,

$$\frac{\partial P(x, \lambda)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{(2\lambda + 1)x}{x^2 - 1} \right) = -\frac{(2\lambda + 1)(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} < 0,$$

já que $2\lambda + 1 > 0$. Porém, para satisfazer as hipóteses do teorema de Stieltjes, $P(x, \lambda)$ deveria ser monótona em todo intervalo $(-1, 1)$ com relação a λ . Porém,

$$\frac{\partial P(x, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\frac{2\lambda + 1}{2(1 + x)} + \frac{2\lambda + 1}{2(x - 1)} \right) = \frac{1}{1 + x} + \frac{1}{x - 1}$$

mas,

$$\frac{1}{1 + x} + \frac{1}{x - 1} = \begin{cases} < 0, & x \in (0, 1) \\ > 0, & x \in (-1, 0). \end{cases} \quad (3.2)$$

Desta forma, os Teoremas de Markov e de Stieltjes não podem ser diretamente aplicados nos polinômios de Gegenbauer.

Por outro lado, de (3.1) observe que a função

$$\frac{1}{\rho(x, \lambda)} \frac{\partial \rho(x, \lambda)}{\partial \lambda}$$

é monótona com relação a x , se analisada separadamente nos intervalos $(-1, 0)$ e $(0, 1)$. E mais, se também analisada separadamente nos intervalos $(-1, 0)$ e $(0, 1)$, temos de (3.2) que $P(x, \lambda)$ é monótona nos intervalos $(-1, 0)$ e $(0, 1)$ com relação a λ .

Logo, utilizando os Teoremas 2.2.1 e 2.4.1, para verificar a monotonicidade dos zeros dos polinômios de Gegenbauer, concluímos que os zeros destes polinômios são crescentes no intervalo $(-1, 0)$ e decrescentes no intervalo $(0, 1)$.

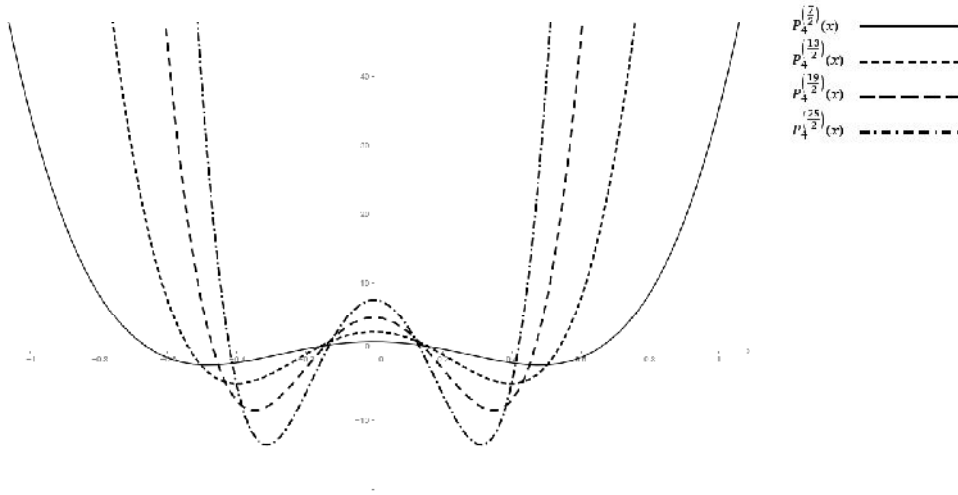


Figura 3.5: Polinômios de Gegenbauer $P_4^{(\lambda)}$, com $\lambda = \frac{7}{2}, \frac{13}{2}, \frac{19}{2}, \frac{25}{2}$.

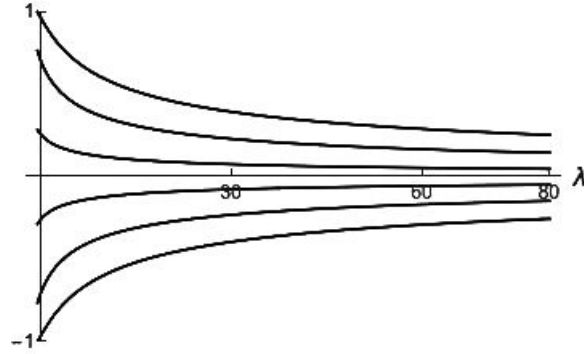


Figura 3.6: Gráfico dos zeros $x_{6,j}(\lambda)$, $j = 1, 2, 3$, dos Polinômios de Gegenbauer $P_6^{(\lambda)}$.

Ilustração Gráfica

A Figura (3.5) ilustra a monotonicidade dos zeros dos polinômios de Gegenbauer $P_4^{(\lambda)}$, para $\lambda = \frac{1}{2}, \frac{7}{2}, \frac{13}{2}, \frac{19}{2}$. Já a Figura (3.6) ilustra a monotonicidade dos zeros dos polinômios de Gegenbauer $P_6^{(\lambda)}$.

Em resumo, para os polinômios de Jacobi e casos particulares, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.1.1. *Sejam $x_1(t), \dots, x_n(t)$ os zeros do polinômios de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}$ em ordem decrescente. Então*

$$\frac{\partial x_i}{\partial \alpha} < 0, \quad \frac{\partial x_i}{\partial \beta} > 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

No caso Ultraesférico, $\alpha = \beta$ temos

$$\frac{\partial x_i}{\partial \alpha} < 0 \quad i = 1, \dots, \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

3.1.3 Polinômios de Laguerre

Afim de aplicar os teoremas de Markov e Stieltjes nos polinômios de Laguerre, relembre que estes polinômios são ortogonais no intervalo $(0, +\infty)$, com relação a função peso $\rho(x, \alpha) = x^\alpha e^{-x}$, com $\alpha > -1$. Além disso, estes polinômios são soluções da equação

$$y''(x) + \frac{\alpha + 1 - x}{x} y'(x) + \frac{n}{x} y(x) = 0.$$

Assim, neste caso,

$$\begin{aligned} \rho(x, \alpha) &= x^\alpha e^{-x} \\ P(x, \alpha) &= \frac{\alpha + 1}{x} + 1. \end{aligned}$$

Denote por $l_{n,1}(\alpha), \dots, l_{n,n}(\alpha)$ os zeros de $L_n^{(\alpha)}(x)$ organizados em ordem decrescente.

Aplicando Markov

Iremos primeiramente aplicar o Teorema de Markov nos polinômios de Laguerre. Para isso, observe que $\rho(x, \alpha) = x^\alpha e^{-x}$ possui derivadas parciais com relação a α , pois $x \in (0, +\infty)$ e $\alpha > -1$ e esta derivada é contínua. De fato, derivando $\rho(x, \alpha)$ com relação a α temos que

$$\frac{\partial \rho(x, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial x^\alpha e^{-x}}{\partial \alpha} = x^\alpha e^{-x} \ln x,$$

que é uma função contínua para todo $\alpha > -1$.

Note que a função abaixo é uma função crescente de x em $(0, \infty)$,

$$\frac{1}{\rho(x, \alpha)} \frac{\partial \rho(x, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{x^\alpha e^{-x} \ln x}{x^\alpha e^{-x}} = \ln x.$$

De fato,

$$\frac{\partial \ln x}{\partial x} = \frac{1}{x} > 0,$$

pois $x \in (0, \infty)$. Pelo Teorema de Markov concluímos que os zeros dos polinômios de Laguerre $l_{n,j}(\alpha)$, com $j = 1, \dots, n$, são funções crescentes de α , para $\alpha > -1$.

Aplicando Stieltjes

Agora, aplicaremos o Teorema de Stieltjes nos polinômios de Laguerre. Note que $P(x, \alpha)$ é uma função decrescente de x , pois

$$\frac{\partial P(x, \alpha)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\alpha + 1}{x} - 1 \right) = -\frac{\alpha + 1}{x^2} < 0,$$

já que $\alpha + 1 > 0$.

Derivando $P(x, \alpha)$ com relação a α temos que

$$\frac{\partial P(x, \alpha)}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\alpha + 1}{x} - 1 \right) = \frac{1}{x} > 0.$$

Logo, pelo teorema de Stieltjes, concluímos que os zeros dos polinômios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$, $l_{n,j}(\alpha)$, $j = 1, \dots, n$, são funções crescentes de α .

Ilustração Gráfica

As figuras abaixo ilustram a monotonicidade dos zeros $l_{4,j}(\alpha)$, $j = 1, \dots, 4$, dos polinômios de Laguerre com relação a α . A Figura (3.7) mostra os polinômios $L_4^{(\alpha)}$ para os valores $\alpha = 8, 9, 10, 11$, e também ilustra a monotonicidade dos zeros destes polinômios. Já na Figura (3.8) temos o gráfico dos zeros dos polinômios de Laguerre $L_4^{(\alpha)}$ em função de α .

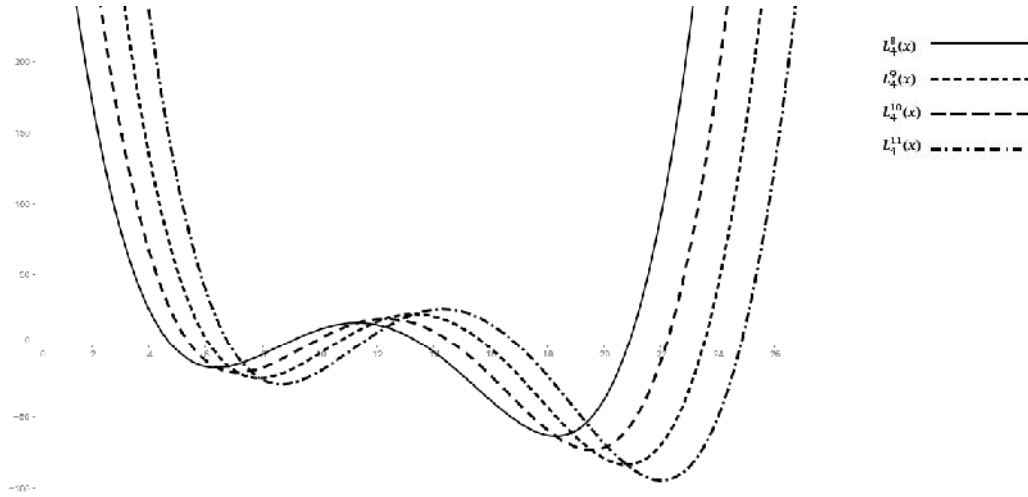


Figura 3.7: Polinômios de Laguerre $L_4^{(\alpha)}$, com $\alpha = 8, 9, 10, 11$.

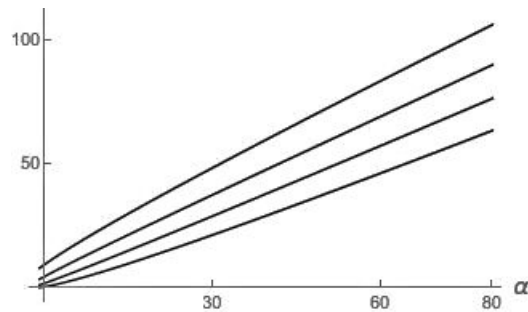


Figura 3.8: Gráfico dos zeros $l_{4,j}(\alpha)$, $j = 1, \dots, 4$, dos Polinômios de Laguerre $L_4^{(\alpha)}$.

3.2 Limitantes dos Zeros

Nesta seção veremos algumas relações entre os polinômios ortogonais clássicos. Tais relações podem ser encontradas, com mais detalhes, em [20], na Seção 5.3 e também em [9], em fórmulas da Seção 2.8.

3.2.1 Polinômios de Jacobi

Jacobi-Laguerre

Considere o seguinte limite, que é uma relação entre os polinômios de Jacobi e Laguerre

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} P_n^{(\alpha, \beta)} \left(1 - \frac{2x}{\beta} \right) = L_n^{(\alpha)}(x).$$

Temos que os zeros $x_{n,j}$ dos polinômios de Jacobi são funções contínuas dos coeficientes α e β e os zeros $l_{n,j}$ dos polinômios Laguerre são funções contínuas de α .

Além disso, sabemos que $x_{n,j}(\alpha, \beta)$ é decrescente com relação a α e $l_{n,j}(\alpha)$ é crescente com relação a α . Logo, fazendo a mudança de variável $x = 1 - 2z/\beta$ podemos estabelecer o seguinte limite, que relaciona os zeros dos polinômios de Jacobi e Laguerre,

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \beta(1 - x_{n,j}(\alpha, \beta)) = 2l_{n,n-j+1}(\alpha), j = 1, \dots, n.$$

Seja c uma constante que pode depender de n e α , mas que não depende de β . Desta forma, também vale o seguinte limite

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} P_n^{(\alpha, \beta)} \left(1 - \frac{2x}{\beta + c} \right) = L_n^{(\alpha)}(x).$$

E conseqüentemente, definindo $f = f_n(\alpha, \beta) = \beta + c$, temos que

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} (\beta + c)(1 - x_{n,j}(\alpha, \beta)) = 2l_{n,n-j+1}(\alpha), j = 1, \dots, n.$$

Nosso objetivo aqui é encontrar a constante c , de tal forma que todos os valores $f_n(\alpha, \beta)(1 - x_{n,j}(\alpha, \beta))$ sejam funções monótonas, crescentes ou decrescentes, de β .

Para isso, considere os polinômios de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$. Utilizando a mudança de variável $x = 1 - 2z/f$ temos que os zeros de $P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(1 - 2z/f)$ são da forma

$$z_{n,j}(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}(1 - x_{n,j}(\alpha, \beta))f_n(\alpha, \beta), \quad j = 1, \dots, n.$$

Como os polinômios $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ são ortogonais em $(-1, 1)$ com relação a função peso $\rho(x; \alpha, \beta) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, então $P_n^{(\alpha, \beta)}(1 - 2z/f)$ é ortogonal em $(0, f)$ com

relação à função peso¹ $\rho(z; \alpha, \beta) = z^\alpha (f - z)^\beta$, para $\alpha, \beta > -1$ e estes satisfazem a seguinte equação diferencial, com $Y(z) = y(1 - 2z/f) = P_n^{(\alpha, \beta)}(1 - 2z/f)$,

$$Y''(z) + \left(\frac{\alpha + 1}{z} - \frac{\beta + 1}{f - z} \right) Y'(z) + \frac{4n(\beta + \alpha + n + 1)}{f^2 - (f - 2z)^2} Y(z) = 0,$$

já que $y'(1 - 2z/f) = -f/2 Y'(z)$ e $y''(1 - 2z/f) = (f/2)^2 Y''(z)$.

Afim de aplicar o Teorema 2.2.2, para $z \in (0, f)$ com relação ao parâmetro β , temos que calcular as seguintes derivadas

$$\frac{\partial f}{\partial \beta} = 1 > 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho(z; \alpha, \beta)} \frac{\partial \rho(z; \alpha, \beta)}{\partial \beta} \right] &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{z^\alpha (f - z)^\beta} \frac{\partial z^\alpha (f - z)^\beta}{\partial \beta} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{z^\alpha (f - z)^\beta} z^\alpha (f - z)^\beta \left(\frac{\beta}{f - z} + \ln(f - z) \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\beta}{f - z} + \ln(f - z) \right] \\ &= \frac{z - f + \beta}{(f - z)^2} > 0. \end{aligned}$$

A desigualdade é verdadeira se, e somente se, $c \leq 0$. De fato,

$$\begin{aligned} z - f + \beta &= z - (\beta + c) + \beta \\ &= z - \beta - c + \beta \\ &= z - c > 0 \end{aligned}$$

se, e só se $c \leq 0$, pois $z \in (0, f)$.

Desta forma, pelo Teorema 2.2.2 concluímos que para $c \leq 0$, os valores abaixo,

$$z_{n,j}(\alpha, \beta) = (1 - x_{n,j}(\alpha, \beta))(\beta + c)/2$$

são funções crescente de β e convergem para $l_{n,n-j+1}(\alpha)$ quando β tende ao infinito.

Afim de aplicar o Teorema 2.3.1, temos que calcular a seguinte derivada

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left[P \left(\frac{f - 2z}{f}, \alpha, \beta \right) \right] &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\alpha + 1}{z} - \frac{\beta + 1}{f - z} \right) \\ &= -\frac{\beta + 1}{(f - z)^2} - \frac{\alpha + 1}{z^2} < 0. \end{aligned}$$

¹Observe que neste caso a função peso seria da forma $\rho(z; \alpha, \beta) = \left(\frac{2}{f}\right)^\alpha z^\alpha (f - z)^\beta$. Porém a constante $\left(\frac{2}{f}\right)^\alpha$ não interfere na propriedade de ortogonalidade nem na monotonicidade da função peso.

E mais,

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\alpha + 1}{z} - \frac{\beta + 1}{f - z} \right) = \frac{z - f + (\beta + 1) \frac{\partial f}{\partial \beta}}{(f - z)^2} = \frac{z - f + \beta + 1}{(f - z)^2}.$$

Temos que $\frac{\partial P}{\partial \beta} \geq 0$ se, e somente se, $c \leq 1$. De fato, a desigualdade é verdadeira se, e somente se, $z - f + \beta + 1 = z - \beta - c + \beta + 1 = z - c + 1 \geq 0$ e isto ocorre se, e somente se, $c \leq 1$.

Sendo assim, de acordo com o Teorema 2.3.1, para valores de $c \leq 1$, as quantidades $(\beta + c)(1 - x_{n,j}(\alpha, \beta))/2$ são funções crescentes de β e convergem para $l_{n,n-j+1}(\alpha)$, $j = 1, \dots, n$ para valores muito grande de β .

Tomando $c = 1$, obtemos

$$(\beta + 1)(1 - x_{n,j}(\alpha, \beta)) \leq 2l_{n,n-j+1}(\alpha), k = 1, \dots, n$$

ou equivalentemente,

$$1 - \frac{2}{\beta + 1} l_{n,n-j+1}(\alpha) \leq x_{n,j}(\alpha, \beta), j = 1, \dots, n.$$

O lado esquerdo da inequação acima são limites inferiores para os zeros dos polinômios de Jacobi e eles são próximos para valores muito grandes de β .

Desta forma, para cumprir nosso objetivo voltamos à seguinte questão: Qual seria o melhor valor para c ? Em [4] é provado que este valor é dado por

$$c = n + \frac{\alpha + 1}{2} + \frac{1 - \alpha^2}{2(2n + \alpha + 1)}.$$

Ilustração Gráfica

A Figura (3.9) ilustra o comportamento dos zeros $z_{n,j} = \frac{1}{2}(\beta + 1)(1 - x_{n,j})$, com $j = 1, \dots, 4$, em linha contínua, com relação ao parâmetro β tomando $c = 1$. Observe que cada zero $z_{4,j}(2, \beta)$, $j = 1, \dots, 4$, é uma função crescente de β e tende às raízes $l_{4,j}$, $j = 1, \dots, 4$, em linha pontilhada, quando $\beta \rightarrow \infty$.

A Figura (3.10) mostra os limites inferiores, em linha pontilhada, dos zeros $x_{n,j}(\alpha, \beta)$, $j = 1, \dots, 4$, dos polinômios de Jacobi $P_4^{(\alpha, \beta)}(x)$, com relação ao parâmetro β , tomando $\alpha = 2$.

3.2.2 Polinômios de Gegenbauer

Gegenbauer-Hermite

O próximo resultado é motivado pela fórmula assintótica a seguir, que relaciona os polinômios de Gegenbauer $P_n^{(\lambda)}(x)$ e Hermite $H_n(x)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{-\frac{n}{2}} P_n^{(\lambda)}(\lambda^{\frac{1}{2}} x) = \frac{H_n(x)}{n!}.$$

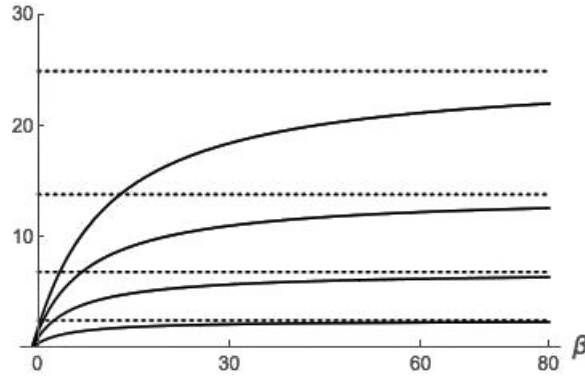


Figura 3.9: Gráfico dos zeros $z_{n,j} = \frac{1}{2}(1 - x_{n,j})(\beta + 1)$, $j = 1, \dots, 4$.

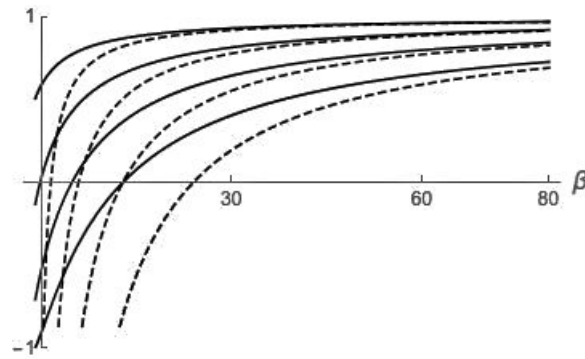


Figura 3.10: Gráfico dos limitantes inferiores dos zeros $x_{4,j}(2, \beta)$ dos Polinômios $P_4^{(2,\beta)}$.

Sejam $h_{n,k}$, $k = 1, \dots, n$, os zeros de $H_n(x)$ organizados em ordem decrescente. Então, fazendo a mudança de variável $x = \lambda^{\frac{1}{2}}z$ e de forma análoga ao caso anterior, temos o seguinte limite que relaciona os zeros dos polinômios de Gegenbauer e Hermite

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^{\frac{1}{2}} x_{n,k}(\lambda) = h_{n,k}.$$

Seja c uma constante que pode depender de n , mas que não depende de λ e defina $f = f_n(\lambda) = (\lambda + c)^{\frac{1}{2}}$. Logo, também vale o seguinte limite

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} (\lambda + c)^{\frac{1}{2}} x_{n,k}(\lambda) = h_{n,k}.$$

Neste caso, queremos encontrar um valor para c de tal modo que todos os valores $(\lambda + c)^{\frac{1}{2}} x_{n,k}(\lambda)$, $k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}$, sejam funções monótonas, crescentes ou decrescentes, de λ .

Para isso, considere os polinômios de Gegenbauer $P_n^{(\lambda)}(x)$. Utilizando a mudança de variável $x = z/f$ temos que os zeros de $P_n^{(\lambda)}(x) = P_n^{(\lambda)}(z/f)$ são da forma

$$z_{n,k}(\lambda) = x_{n,k}(\lambda) f_n(\lambda), \quad k = 1, \dots, n.$$

Como os polinômios $P_n^{(\lambda)}(x)$ são ortogonais em $(-1, 1)$, com relação a função peso $\rho(x; \alpha, \beta) = (1 - x^2)^{\alpha - \frac{1}{2}}$, então $P_n^{(\lambda)}(z/f)$ é ortogonal em $(-f, f)$ com relação

à função peso² $\rho(z; \lambda) = (f^2 - z^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}$, para $\lambda > -\frac{1}{2}$ e estes satisfazem a seguinte equação diferencial, com $Y(z) = y(z/f) = P_n^{(\lambda)}(x)$,

$$Y''(z) + z \frac{2\lambda + 1}{z^2 - f^2} Y'(z) + \frac{n(n + 2\lambda)}{f^2 - z^2} Y(z) = 0,$$

já que $y'(f/z) = fY'(z)$ e $y''(f/z) = f^2Y''(z)$.

Afim de aplicar o Teorema 2.2.2, para $z \in (-f, f)$ com relação ao parâmetro λ , temos que calcular as seguintes derivadas

$$\frac{\partial f}{\partial \lambda} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda + c}} > 0,$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho(z; \lambda)} \frac{\partial \rho(z; \lambda)}{\partial \lambda} \right] &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{(f^2 - z^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}} \frac{\partial (f^2 - z^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}}{\partial \lambda} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{(z^2 - f^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}}{(f^2 - z^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}} \left(\frac{\lambda - \frac{1}{2}}{f^2 - z^2} + \ln(f^2 - z^2) \right) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\lambda - \frac{1}{2}}{f^2 - z^2} + \ln(f^2 - z^2) \right] \\ &= 2z \frac{z^2 - f^2 + \lambda - \frac{1}{2}}{(f^2 - z^2)^2} \geq 0. \end{aligned}$$

A desigualdade é verdadeira se, e somente se, $c \leq -\frac{1}{2}$. De fato, temos que a desigualdade é válida se $z^2 - \lambda - c + \lambda - \frac{1}{2} \geq 0$, ou seja, se $-\lambda - c \geq 0$, isto é, se, e somente se, $c \leq -\lambda \leq -\frac{1}{2}$.

Daí, para $c \leq -\frac{1}{2}$, aplicando os Teoremas 2.2.1 e 2.2.2 temos que os valores $(\lambda - \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} x_{n,k}(\lambda)$, $k = 1, 2, \dots, \left[\frac{n}{2}\right]$ são funções crescentes de λ e convergem para $h_{n,k}$ quando λ tende a infinito.

Afim de aplicar o Teorema 2.3.1, temos que calcular a seguinte derivada

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left[P \left(\frac{z}{f}, \lambda \right) \right] &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{z(2\lambda + 1)}{z^2 - f^2} \right] \\ &= \frac{(2\lambda + 1)(z^2 - f^2) - 2z^2(2\lambda + 1)}{(z^2 - f^2)^2} \\ &= \frac{(2\lambda + 1)(z^2 - f^2 - 2z^2)}{(z^2 - f^2)^2} \\ &= -\frac{(2\lambda + 1)(z^2 + f^2)}{(z^2 - f^2)^2} \leq 0. \end{aligned}$$

²Observe que neste caso a função peso seria da forma $\rho(z; \lambda) = \left(\frac{f^2 - z^2}{f^2} \right)^{\lambda - \frac{1}{2}}$. Porém a constante $f^{1-2\lambda}$ não interfere na propriedade de ortogonalidade nem na monotonicidade da função peso.

E mais,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \lambda} \left(z \frac{2\lambda + 1}{z^2 - f^2} \right) &= z \frac{2(z^2 - f^2) + 2(2\lambda + 1)f \frac{\partial f}{\partial \lambda}}{(z^2 - f^2)^2} \\
&= z \frac{2(z^2 - f^2) + 2(2\lambda + 1)}{(z^2 - f^2)^2} \\
&= 2z \frac{z^2 - f^2 + 2\lambda + 1}{(z^2 - f^2)^2} \\
&= 2z \frac{z^2 - \lambda - c + 2\lambda + 1}{(z^2 - f^2)^2} \\
&= 2z \frac{z^2 - c + \lambda + 1}{(z^2 - f^2)^2}.
\end{aligned}$$

Temos que $\frac{\partial P}{\partial \lambda} \geq 0$ se, e somente se, $c \leq 1/2$. De fato, a desigualdade é verdadeira se, e somente se, $z^2 - c + \lambda + 1 = z^2 - c + 1/2 + \lambda + 1/2 \geq -c + 1/2$, e $-c + 1/2 \leq 0$ se, e somente se, $c \leq 1/2$.

Logo, para $c \leq \frac{1}{2}$, temos que as quantidades $(\lambda + c)^{\frac{1}{2}} x_{n,k}(\lambda)$ são funções crescentes de λ e convergem para $h_{n,k}$, quando λ tende ao infinito.

Desta forma, tomando $c = \frac{1}{2}$, temos que

$$\left(\lambda + \frac{1}{2} \right)^{\frac{1}{2}} x_{n,k}(\lambda) \leq h_{n,k}, k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2},$$

ou, equivalentemente,

$$x_{n,k}(\lambda) \leq \left(\lambda + \frac{1}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} h_{n,k}, k = 1, 2, \dots, \frac{n}{2}.$$

O lado direito da inequação acima são limites superiores para os zeros positivos dos polinômios de Gegenbauer e eles estão bem próximos para grandes valores de λ .

Desta forma, para cumprir nosso objetivo, podemos questionar sobre qual o melhor valor c tomar. Em [4] os autores provaram que o melhor valor de c é dado por

$$c = \frac{2n^2 + 1}{4n + 2}.$$

Ilustração Gráfica

A Figura (3.11) ilustra o comportamento dos zeros $z_{6,j}(\lambda)(\lambda + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} x_{6,j}$, com $j = 1, 2, 3$, em linha contínua, com relação ao parâmetro λ tomando $c = 1/2$. Observe que cada zero $z_{6,j}(\lambda)$, $j = 1, 2, 3$, é uma função crescente de λ e tende às raízes $h_{6,j}$, $j = 1, 2, 3$, em linha pontilhada, quando $\lambda \rightarrow \infty$.

A Figura (3.12) mostra os limites superiores $(\lambda + \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} h_{6,j}$, $j = 1, 2, 3$, em linha pontilhada, dos zeros positivos $x_{6,j}(\lambda)$, $j = 1, 2, 3$, em linha contínua, dos polinômios de Gegenbauer $P_6^{(\lambda)}(x)$.

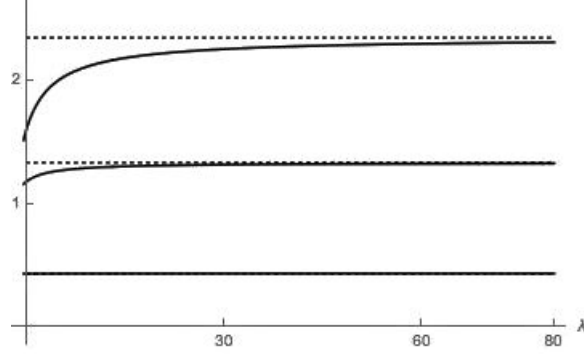


Figura 3.11: Gráfico dos zeros $z_{6,j} = (\lambda + 1/2)^{1/2} x_{6,j}$, para $j = 1, 2, 3$.

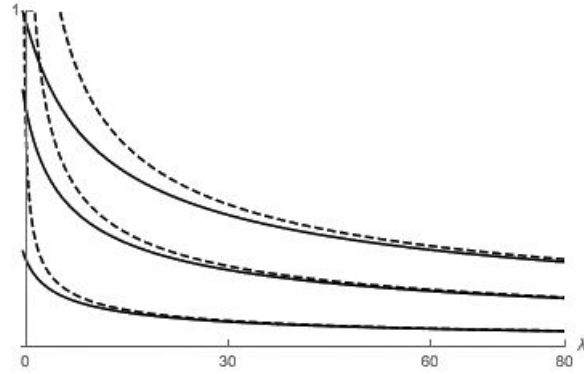


Figura 3.12: Gráfico dos limitantes superiores dos zeros $x_{6,j}(\lambda)$, dos Polinômios $P_6^{(\lambda)}$.

3.2.3 Polinômios de Laguerre

Laguerre-Hermite

De forma análoga aos casos anteriores, vamos encontrar limitantes para os zeros dos polinômios de Laguerre. Para isso, utilizaremos a seguinte relação entre os polinômios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$ e Hermite $H_n(x)$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\alpha} \right)^{\frac{n}{2}} L_n^{(\alpha)} \left(\alpha + \sqrt{2\alpha} x \right) = \frac{(-1)^n}{n!} H_n(x)$$

Sejam $h_{n,k}$, $k = 1, \dots, n$, os zeros de $H_n(x)$ organizados em ordem decrescente. Então, fazendo a mudança de variável $x = \alpha + \sqrt{2\alpha} z$, temos o seguinte limite que relaciona os zeros dos polinômios de Laguerre e Hermite

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{l_{n,j}(\alpha) - \alpha}{\sqrt{2\alpha}} = h_{n,j}.$$

Sejam c e d constantes que podem depender de n , mas que não dependem de α e defina também $f = f_n(\alpha) = \alpha + c$ e $g = g_n(\alpha) = \sqrt{\alpha + d}$. Logo, também vale o seguinte limite

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{l_{n,j}(\alpha) - \alpha - c}{\sqrt{\alpha + d}} = \sqrt{2} h_{n,j}$$

Para obter os limitantes para os zeros dos polinômios de Laguerre precisamos encontrar os melhores valores de c e d para que as quantidades $(l_{n,j}(\alpha) - \alpha - c)/\sqrt{\alpha + d}$ sejam funções monótonas, crescentes ou decrescentes, de α . A partir destes valores, poderemos saber qual é o ínfimo ou o supremo destes zeros.

Para isso, considere os polinômios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$. Fazendo a mudança de variável $x = \sqrt{\alpha + d}z + \alpha + c$, temos que os zeros de $L_n^{(\alpha)}(x) = L_n^{(\alpha)}(\sqrt{\alpha + d}z + \alpha + c)$ são da forma

$$z_{n,k} = \frac{l_{n,k}(\alpha) - \alpha - c}{\sqrt{\alpha + d}}, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Como os polinômios de Laguerre $L_n^{(\alpha)}(x)$ são ortogonais em $(0, +\infty)$, com relação a função peso $\rho(x, \alpha) = x^\alpha e^{-x}$, com $\alpha > -1$, então $L_n^{(\alpha)}(\sqrt{\alpha + d}z + \alpha + c)$ são ortogonais em $((-\alpha - c)(\alpha + d)^{-1}, \infty)$, para $\alpha > -1$, com relação a função peso $\rho(z; \alpha) = (\alpha + c + \sqrt{\alpha + d}z)^\alpha e^{-(\alpha + c + \sqrt{\alpha + d}z)}$. Além disso, estes polinômios satisfazem a seguinte equação diferencial, com $Y(z) = y(\alpha + c + \sqrt{\alpha + d}z) = L_n^{(\alpha)}(x)$,

$$Y''(z) + \sqrt{\alpha + d} \left(\frac{\alpha + 1}{\alpha + c + \sqrt{\alpha + d}z} - 1 \right) Y'(z) + \frac{n(\alpha + d)}{\alpha + c + \sqrt{\alpha + d}z} Y(z) = 0,$$

já que temos $y'(\alpha + c + \sqrt{\alpha + d}z) = (\sqrt{\alpha + d})^{-\frac{1}{2}} Y'(z)$ e $y''(\alpha + c + \sqrt{\alpha + d}z) = (\alpha + d)^{-1} Y''(z)$.

Afim de aplicar o Teorema 2.2.2, para $z \in ((-\alpha - c)(\alpha + d)^{-1}, \infty)$ com relação ao parâmetro α , temos que calcular as seguintes derivadas

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{-\alpha - c}{\sqrt{\alpha + d}} \right) = -\frac{\sqrt{\alpha + d} - \frac{\alpha + c}{2\sqrt{\alpha + d}}}{\alpha + d} = -\frac{\alpha + 2d - c}{2\sqrt{(\alpha + d)^3}} \quad (3.3)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{\rho(z; \alpha)} \frac{\partial \rho(z; \alpha)}{\partial \alpha} \right] &= \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{e^{(\alpha + c + \sqrt{\alpha + d}z)}}{(\alpha + c + \sqrt{\alpha + d}z)^\alpha} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{(\alpha + c + \sqrt{\alpha + d}z)^\alpha}{e^{(\alpha + c + \sqrt{\alpha + d}z)}} \right] \\ &= \frac{c(\alpha + 2d - c) + 2\sqrt{\alpha + d}(d - c)z - (\alpha + d)z^2}{2\sqrt{\alpha + d}(\alpha + c + \sqrt{\alpha + d}z)^2}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Tomando³ $c = d = 0$ nas duas equações anteriores, temos que as mesmas se tornam negativas para todo $\alpha > 0$. De fato, para $c = d = 0$, $c(\alpha + 2d - c) + 2\sqrt{\alpha + d}(d - c)z - (\alpha + d)z^2 < 0$ se, e somente se, $-\alpha z^2 < 0$, ou seja, quando $\alpha > 0$.

Daí, para $c = d = 0$, aplicando o Teorema 2.2.2 temos que os seguintes valores $(l_{n,k}(\alpha) - \alpha)\alpha^{-\frac{1}{2}}$, com $1 \leq k \leq n$, são funções decrescentes de α , para $\alpha > 0$, e convergem para $\sqrt{2}h_{n,k}$ quando α tende ao infinito.

³Em [2] é provado que c e d são menores ou igual a 1. Mostra-se também que os melhores valores de c e d são os maiores possíveis, isto é, $c = d = 1$. Neste caso, tomamos $c = d = 0$ para simplificar os cálculos.

Ilustração Gráfica

A Figura (3.13) ilustra o comportamento dos zeros $z_{4,j}$, $j = 1, \dots, 4$, em linha contínua, com relação ao parâmetro α tomando $c = d = 0$. Observe que cada zero $z_{4,j}(\alpha)$, $j = 1, \dots, 4$, é uma função decrescente de α e tende às raízes $h_{4,j}$, $j = 1, \dots, 4$, em linha pontilhada, quando $\alpha \rightarrow \infty$.

A Figura (3.14) mostra os limites inferiores $\alpha + \sqrt{2\alpha}h_{n,j}$, $j = 1, \dots, 4$, dos zeros $l_{4,j}(\alpha)$, $j = 1, \dots, 4$, dos polinômios de Laguerre $L_4^{(\alpha)}(x)$.

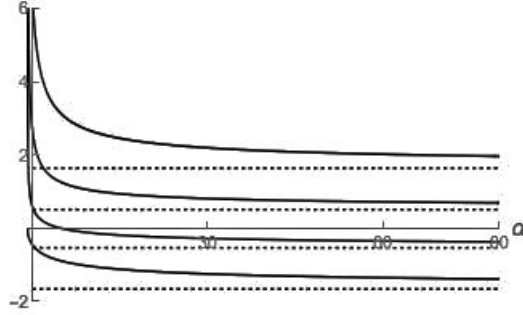


Figura 3.13: Gráfico dos zeros $z_{4,j} = \frac{l_{4,j}(\alpha) - \alpha}{\sqrt{2\alpha}}$, para $j = 1, \dots, 4$.

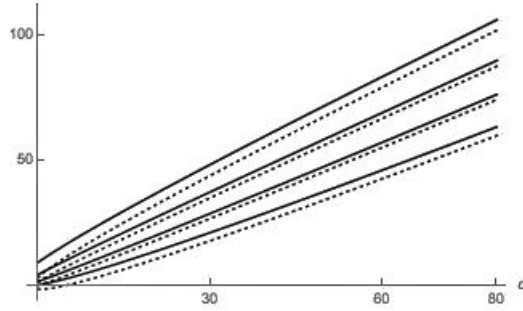


Figura 3.14: Gráfico dos limitantes inferiores dos zeros $l_{4,j}(\alpha)$, dos Polinômios $L_4^{(\alpha)}$.

Outros resultados importantes

Em 1995 Infantis e Siafarikas [8] mostraram que os zeros $(l_{n,1}(\alpha))(n-1)^{-1}$ decrescem juntamente com α , para $\alpha > -1$. No ano de 2003 Natalini e Palumbo [16] provaram que os zeros $(l_{n,k}(\alpha))(2n + \alpha + 1)^{-1}$ são funções crescentes de α no intervalo infinito $(-1, \infty)$. Além disso, eles estabeleceram dois resultados adicionais sobre a monotonicidade de funções da forma $l_{n,k}(\alpha)/\alpha^{-p}$, sendo p um valor fixo pertencente ao intervalo $[2, 2n+1]$. Em 2009 os autores de [5] mostraram que os valores $(l_{n,k}(\alpha) - 2n - \alpha + 1)(2(n + \alpha - 1))^{-\frac{1}{2}}$ são funções crescentes de α para $\alpha \geq (n-1)^{-1}$. E mais, quando $k = 1$, a função $(l_{n,1}(\alpha) - 2n - \alpha + 1)(2(n + \alpha - 1))^{-\frac{1}{2}}$ cresce para cada $\alpha \in (-1, \infty)$.

CAPÍTULO 4

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em virtude dos assuntos abordados nesta dissertação, podemos concluir que os Teoremas de Markov e de Stieltjes são ferramentas muito importantes para a análise da monotonicidade dos zeros dos polinômios ortogonais. O estudo da monotonicidade de zeros de polinômios ortogonais é muito utilizada em aplicações tanto na Matemática como em outras Ciências Aplicadas.

Um exemplo clássico da aplicação desta teoria foi introduzido por Stieltjes em [18] e por Szegő em [19], que trata de uma aplicação em eletrostática. Os problemas em eletrostática inspiraram Stieltjes ao estudo da monotonicidade dos zeros dos polinômios ortogonais clássicos. O problema por ele estudado é o que mostraremos a seguir.

Dadas n cargas unitárias livres, localizadas no intervalo $(-1, 1)$. Pelas propriedades da física, se todas as cargas forem positivas, então elas se repelem. Considere também que nos pontos -1 e 1 estejam fixadas duas cargas com forças dadas, respectivamente, por $(\alpha + 1)/2$ e $(\beta + 1)/2$, com $\alpha > -1$ e $\beta > -1$.

Em [18], Stieltjes prova que a energia do campo eletrostático, gerada por estas n cargas, atinge um mínimo local. Este mínimo local é atingido quando as mesmas estão localizadas em n pontos fixos, a saber, os pontos $x_{n,k}(\alpha, \beta)$, com $k = 1, \dots, n$, que são os zeros dos polinômios de Jacobi, ortogonais em $(-1, 1)$, com relação a função peso $\rho(x) = (1 - x)^\alpha(1 + x)^\beta$, $\beta, \alpha > -1$ e $x \in (-1, 1)$. Szegő prova em [19] que a energia do campo eletrostático tem um mínimo global e que este mínimo é único.

Devido a eletrostática, as n cargas unitárias se movem quando variamos os valores de α e β . Isto vem do fato de que os zeros $x_{n,k}$ dos polinômios de Jacobi são funções monótonas de seus coeficientes α e β , como vimos anteriormente neste trabalho. Neste caso, os zeros dos polinômios de Jacobi de grau n são os pontos de equilíbrio estável da energia do campo eletrostático dado.

Estas e outras aplicações podem ser encontradas nas referências que apresentaremos a seguir. Tais referências poderão servir de base para aqueles que pretendem seguir estudos sobre os polinômios ortogonais, com uma abordagem através das equações do tipo hipergeométricas.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Álvarez-Nodarse, R., Monografías del Seminario Matemático "GARCÍA DE GALDEANO", 26. Polinomios Hipergeométricos Clásicos y q-polinomios. **Prensas Universitarias e Zaragoza - Carátula de la versión impresa de 2003**, Zaragoza. Ed. Servicio de Publicaciones Universidad de Zaragoza, 2003.
- [2] Bender, C., Monotonicidade de zeros de polinômios ortogonais clássicos. 81p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) Universidade Estadual Paulista - Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente - SP. 20 de junho de 2013.
- [3] Castillo, K., Costa, M. S., Rafaeli, F. R.,_____ Artigo em preparação.
- [4] Dimitrov, D.K. and Rafaeli, F.R., Monotonicity of zeros of Jacobi polynomials. IBILCE, Universidade Estadual Paulista. **Journal of Approximation Theory**, v. 149, p. 15-19. 2007.
- [5] Dimitrov, D.K. and Rafaeli, F.R., Monotonicity of zeros of Laguerre polynomials. 9th OPSFA Conference. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, v. 233, p. 699-702. 2009.
- [6] Ferraz, V. G. P., Zeros de Polinômios Ortogonais de Variável Discreta. 154p. Tese (Doutorado em Matemática Aplicada) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, UNICAMP. Campinas-SP, 15 de março de 2012.
- [7] Guidorizzi, H. L., Um curso de cálculo. vol. 1. **Ed. LTC**, São Paulo, SP, 2001.
- [8] Infantis, E. K. and Siafarikas, P. D., Differential inequalities and monotonicity property of the zeros of associated Laguerre and Hermite polynomials, p. 79-91. **Annalen Numerical Mathematical** 2, 1995.
- [9] KoeKoek, R. and René, F. S., The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue. Delft University of Technology and Faculty

of Information Technology and Systems Report. no. 98-17. **Department of Technical Mathematics and Informatics**, 1998.

- [10] Lima, E. L., Análise Real. 11 ed. **Coleção Matemática Universitária**, v.1. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, Rio de Janeiro -RJ, 2012.
- [11] Lima, E. L., Análise Real. 6 ed. **Coleção Matemática Universitária**, v. 2. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, Rio de Janeiro - RJ, 2010.
- [12] Markov, A., Sur les racines de certaines équations (second note), p. 177-182. **Mathematische Annalen** 27, 1886.
- [13] Martins, A. S., Interpretação eletrostática e zeros de polinômios. 78p. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada) Universidade Estadual Paulista - Faculdade de Ciências e Tecnologia, Presidente Prudente - SP. 25 de fevereiro de 2005.
- [14] Muldoon, M.E., Properties of zeros of orthogonal polynomials and related functions, p.167-186. **Journal of Computational and Applied Mathematics** 48, York University, North York, Ont., Canada, 1993.
- [15] Nascimento, M. C., Algebra Linear. Universidade Estadual Paulista - UNESP, Bauru - SP, 2013.
- [16] Natalini, P. and Palumbo B., Some monotonicity results on the zeros of the generalized Laguerre polynomials, **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 153, p. 79-91. 2003.
- [17] Nikiforov, A. F., Suslov, S. K. and Uvarov V. B., Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable. Classical Orthogonal Polynomials p. 2-17. **Springer Series in Computational Physics**, Berlin. Ed. Springer Berlin Heidelberg, 1991.
- [18] Stieltjes. T. J., Sur les racines de l'équation $X_n = 0$, p.385-400. **Acta Math** 9, 1887.
- [19] Szegő, G., Inequalities for the zeros of Legendre polynomials and related functions. **Trans. American Mathematical Society**, 39, 1936.
- [20] Szegő, G., Orthogonal Polynomials p. 115. International Standard Book Number. **Trans. American Mathematical Society**, Colloquium publications v. 23, Providence, Rhode Island, 1939.

ANEXOS

Anexo I - Prova Original do Teorema de Markov

Incluimos a seguir o artigo de Markov de 1885, intitulado *Sur les racines de certaines équations*, que contém a prova original do Teorema de Markov. Tal artigo encontra-se no Journal of Computational and Applied Mathematics volume 27, do ano de 1886, entre as páginas 177 e 182.

Sur les racines de certaines équations.

(Seconde note.)

Par

ANDRÉ MARKOFF à St. Pétersbourg.

Soit $V(y, \xi)$ une fonction de deux variables y et ξ .

Nous allons considérer la fonction

$$(1) \quad \varphi_n(y, \xi) = p_0 y^n + p_1 y^{n-1} + \dots + p_{n-1} y + p_n,$$

où les coefficients

$$p_0, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n$$

sont des fonctions d'une seule variable ξ , qu'on détermine par la condition:

$$(2) \quad \int_a^b \varphi_n(y, \xi) V(y, \xi) \omega(y) dy = 0$$

pour chaque fonction entière $\omega(y)$ du degré $n - 1$.

Tous les nombres de nos calculs nous supposerons réels.

Outre cela nous supposons, que $V(y, \xi)$ reste constamment positive pour toutes les valeurs considérées de ξ à condition que $a < y < b$.

Alors, comme on sait*), à chaque valeur de ξ correspondent n différentes valeurs de z

$$z = x_1, x_2, \dots, x_n,$$

satisfaisantes à l'équation

$$(3) \quad \varphi_n(z, \xi) = 0,$$

et tous ces nombres x_1, x_2, \dots, x_n se contiennent entre a et b . Pour les définir mieux on peut supposer

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n < b.$$

Le but de cette note consiste dans la démonstration de quelques propositions sur les changements des x_i correspondants aux changements de ξ .

*) Heine, Handbuch der Kugelfunctionen. Zweite Auflage p. 286—297.

Théorème.

Si, pour $a < y < b$, l'on a constamment

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{V} \cdot \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) > 0$$

tous les nombres x_i croissent, lorsque ξ augmente.

Démonstration.

Différentiant la formule (2) par rapport à ξ , on a

$$\int_a^b \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi} V \omega dy + \int_a^b \varphi_n \frac{\partial V}{\partial \xi} \omega dy = 0.$$

Posons maintenant dans la dernière formule

$$\omega = \frac{\varphi_n(y, \xi)}{y - x_i}$$

et dans la formule (2)

$$\omega = \frac{\frac{\partial \varphi_n(y, \xi)}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_n(x_i, \xi)}{\partial \xi}}{y - x_i}.$$

De cette manière nous trouvons

$$\int_a^b \frac{\partial \varphi_n(y, \xi)}{\partial \xi} \cdot \frac{\varphi_n(y, \xi)}{y - x_i} V dy + \int_a^b \frac{\varphi_n(y, \xi) \cdot \varphi_n(y, \xi)}{y - x_i} \cdot \frac{\partial V}{\partial \xi} dy = 0$$

et

$$\int_a^b \left(\frac{\partial \varphi_n(y, \xi)}{\partial \xi} - \frac{\partial \varphi_n(x_i, \xi)}{\partial \xi} \right) \frac{\varphi_n(y, \xi)}{y - x_i} V dy = 0,$$

d'où il suit

$$(4) \quad \frac{\partial \varphi_n(x_i, \xi)}{\partial \xi} \int_a^b \frac{\varphi_n(y, \xi)}{y - x_i} V dy = - \int_a^b \frac{\varphi(y, \xi) \cdot \varphi_n(y, \xi)}{y - x_i} \cdot \frac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi} dy.$$

Enfin ayant égard aux égalités

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varphi_n(x_i, \xi)}{\partial x_i} \int_a^b \frac{\varphi_n(y, \xi)}{y - x_i} V(y, \xi) dy - \int_a^b \frac{\varphi_n(y, \xi) \cdot \varphi_n(y, \xi)}{(y - x_i)^2} V(y, \xi) dy \\ &= \int_a^b \varphi_n(y, \xi) \cdot \frac{\frac{\partial \varphi_n(x_i, \xi)}{\partial x_i} (y - x_i) - \varphi_n(y, \xi)}{(y - x_i)^2} V(y, \xi) dy = 0 \end{aligned}$$

et

$$V(x_i, \xi) \int_a^b \frac{\varphi_n(y, \xi) \varphi_n(y, \xi)}{y - x_i} \frac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi} dy$$

$$= \int_a^b \left(V(x_i, \xi) \frac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi} - V(y, \xi) \frac{\partial V(x_i, \xi)}{\partial \xi} \right) \frac{[\varphi_n(y, \xi)]^2 dy}{y - x_i}$$

il est facile de transformer la formule (4) en ce qui suit

$$(5) \quad \frac{dx_i}{d\xi} = - \frac{\frac{\partial \varphi_n(x_i, \xi)}{\partial \xi}}{\frac{\partial \varphi_n(x_i, \xi)}{\partial x_i}}$$

$$\frac{\int_a^b \varphi_n(y, \xi) \varphi_n(y, \xi) \cdot \frac{V(x_i, \xi) \frac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi} - \frac{\partial V(x_i, \xi)}{\partial \xi} V(y, \xi)}{y - x_i} dy}{V(x_i, \xi) \int_a^b \left(\frac{\varphi_n(y, \xi)}{y - x_i} \right)^2 V(y, \xi) dy}$$

D'autre part d'après la condition, dite plus haut, l'expression

$$\frac{1}{V} \cdot \frac{\partial V}{\partial \xi}$$

doit croître ou décroître en même temps que y augmente ou diminue, et il s'en suit que les différences

$$\frac{1}{V(y, \xi)} \cdot \frac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi} - \frac{1}{V(x_i, \xi)} \frac{\partial V(x_i, \xi)}{\partial \xi} = \frac{V(x_i, \xi) \frac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi} - \frac{\partial V(x_i, \xi)}{\partial \xi} V(y, \xi)}{V(y, \xi) \cdot V(x_i, \xi)}$$

et

$$y - x_i$$

doivent être de même signe.

Par conséquent le rapport

$$\frac{V(x_i, \xi) \frac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi} - \frac{\partial V(x_i, \xi)}{\partial \xi} V(y, \xi)}{y - x_i}$$

est un nombre positif.

Donc les deux intégrales de la formule (5) sont positifs et par conséquent $\frac{dx_i}{d\xi}$ est aussi positif; en d'autres termes, x_i et ξ croissent ou décroissent simultanément.

Application.

Posons

$$a = -1, \quad b = +1, \quad V(y, \xi) = \frac{(1+y)^{\alpha\xi}}{(1-y)^{\beta\xi}} f(y).$$

Alors

$$\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial \xi} = \alpha \log(1+y) - \beta \log(1-y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{V} \cdot \frac{\partial V}{\partial \xi} \right) = \frac{\alpha}{1+y} + \frac{\beta}{1-y}.$$

Par conséquent toutes les conditions du théorème précédent seront satisfaites, si l'on a

$$\alpha > 0, \beta > 0, f(y) > 0 \quad \text{pour} \quad -1 < y < +1.$$

Arrêtons nous sur le cas, où

$$\alpha = \beta = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f(y) = 1,$$

et considérons les fonctions

$$\varphi_n(y, -1), \quad \varphi_n(y, 0), \quad \varphi_n(y, 1).$$

Dans ce cas on peut poser

$$\varphi_n(y, -1) = \frac{\sin \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) \arccos y \right\}}{\sqrt{1-y}},$$

$$\varphi_n(y, 0) = \frac{d^n (y^2 - 1)^n}{dy^n},$$

$$\varphi_n(y, +1) = \frac{\cos \left\{ \left(n + \frac{1}{2} \right) \arccos y \right\}}{\sqrt{1+y}}$$

et par suite les racines de l'équation $\varphi_n(y, -1) = 0$ en ordre ascendant seront

$$\cos \frac{2n\pi}{2n+1}, \cos \frac{2(n-2)\pi}{2n+1}, \dots, \cos \frac{4\pi}{2n+1}, \cos \frac{2\pi}{2n+1}$$

et les racines de l'équation $\varphi_n(y, +1) = 0$ aussi en ordre ascendant seront

$$\cos \frac{(2n-1)\pi}{2n+1}, \cos \frac{(2n-3)\pi}{2n+1}, \dots, \cos \frac{3\pi}{2n+1}, \cos \frac{\pi}{2n+1}.$$

Ayant cela, d'après le théorème précédent il est facile de conclure que les racines de l'équation connue

$$\frac{d^n (y^2 - 1)^n}{dy^n} = 0$$

se trouvent, une à une, dans les intervalles suivants

$$\left(\cos \frac{2n\pi}{2n+1}, \cos \frac{(2n-1)\pi}{2n+1} \right), \left(\cos \frac{(2n-2)\pi}{2n+1}, \cos \frac{(2n-3)\pi}{2n+1} \right), \dots$$

$$\dots, \left(\cos \frac{2\pi}{2n+1}, \cos \frac{\pi}{2n+1} \right).$$

Théorème.

Soit

$$\frac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left[\frac{(y-e) V(y, \xi)}{\frac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi}} \right] < 0,$$

e étant un nombre compris entre a et b.

Alors $(x_i - e)^2$ augmente, lorsque ξ croît.

Démonstration.

Il est facile de transformer la formule (5) en ce qui suit

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d(x_i - e)^2}{d\xi} V(x_i, \xi) \cdot \int_a^b \left(\frac{\varphi_n(y, \xi)}{y - x_i} \right)^2 V(y, \xi) dy \\ &= \int_a^b \varphi_n(y, \xi) \cdot \varphi_n(y, \xi) \frac{(x_i - e) V(x_i, \xi) \frac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi} - (y - e) V(y, \xi) \frac{\partial V(x_i, \xi)}{\partial \xi}}{y - x_i} dy \\ &+ \frac{\partial V(x_i, \xi)}{\partial \xi} \int_a^b \varphi_n(y, \xi) \varphi_n(y, \xi) V(y, \xi) dy \end{aligned}$$

et de cette formule notre proposition découle immédiatement.

Application.

Posons

$$a = -1, \quad b = +1, \quad e = 0, \quad V(y, \xi) = (1 - y^2)^{-\xi}.$$

Dans ce cas les conditions du théorème précédent sont satisfaites, car

$$\left. \begin{aligned} & \frac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi} = -(1 - y^2)^{-\xi} \log(1 - y^2) > 0 \\ \text{et} \\ & \frac{\partial}{\partial y} \cdot \left[\frac{y \cdot V(y, \xi)}{\frac{\partial V(y, \xi)}{\partial \xi}} \right] = - \frac{\log(1 - y^2) + \frac{2y^2}{1 - y^2}}{\{\log(1 - y^2)\}^2} < 0 \end{aligned} \right\} \text{pour } -1 < y < +1.$$

Considérant maintenant les fonctions

$$\varphi_n\left(y, \frac{1}{2}\right), \quad \varphi_n(y, 0), \quad \varphi_n\left(y, -\frac{1}{2}\right),$$

qui en vertu de nos positions deviennent

$$\cos(n \arccos y), \quad \frac{d^n(y^2 - 1)^n}{dy^n}, \quad \frac{\sin((n+1) \arccos y)}{\sqrt{1 - y^2}},$$

nous pouvons conclure, que les racines de l'équation

$$\frac{d^n (y^2 - 1)^n}{dy^n} = 0$$

sont comprises, une à une, dans les intervalles suivants

$$\left(\cos \frac{\pi}{2n}, \cos \frac{\pi}{n+1}\right), \left(\cos \frac{3\pi}{2n}, \cos \frac{2\pi}{n+1}\right), \left(\cos \frac{5\pi}{2n}, \cos \frac{3\pi}{n+1}\right), \dots$$

$$\dots, \left(\cos \frac{(2n-1)\pi}{2n}, \cos \frac{n\pi}{n+1}\right).$$

Ces intervalles sont plus étroits que les précédents.

St. Pétersbourg, le 17. novembre 1885.

Anexo II - Prova Original do Teorema de Stieltjes

Incluimos a seguir o artigo *Sur les racines de l'equation $X_n = 0$* que contém a prova original do Teorema de Stieltjes. Tal artigo encontra-se na revista *Acta Mathematica* volume 9, do ano de 1887, entre as páginas 385 e 400.

SUR LES RACINES DE L'ÉQUATION $X_n = 0$

PAR

T. J. STIELTJES

à TOULOUSE.

1. Nous aurons à invoquer dans la suite une proposition d'algèbre que nous allons établir tout d'abord.

Soit

$$X = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ik} x_i x_k$$

une forme quadratique *positive* des variables x_1, x_2, \dots, x_m .

On sait que les coefficients a_{ii} sont positifs. Nous ajoutons maintenant la condition que les autres coefficients a_{ik} soient tous négatifs ou nuls.

Considérons les m équations linéaires

$$(I) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial X}{\partial x_i} = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{im} x_m = \xi_i. \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

Nous supposons que les quantités ξ_i sont toutes positives ou nulles. Dans ces conditions on peut énoncer la proposition suivante: »*Aucune des valeurs de x_1, x_2, \dots, x_m tirées des équations (I) ne peut être négative, et si les quantités ξ_i sont toutes positives alors x_1, x_2, \dots, x_m le sont aussi.*»

Dans la démonstration suivante nous ferons abstraction du cas trivial

$$\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_m = 0$$

dans lequel on a aussi

$$x_1 = x_2 = \dots = x_m = 0.$$

On a

$$\sum_{i=1}^m \xi_i x_i = \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ik} x_i x_k$$

et il est clair par là qu'au moins un des x_i doit être positif car le second membre est positif.

Mais supposons que

x_1, x_2, \dots, x_n soient négatifs ou nuls, et

$x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_m$ positifs.

Dans la relation

$$(2) \quad \sum_1^n \xi_i x_i = \sum_1^n \sum_1^n a_{ik} x_i x_k + \sum_{n+1}^m x_i (a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n)$$

le premier membre est nul ou négatif. Au contraire dans le second membre la première partie

$$\sum_1^n \sum_1^n a_{ik} x_i x_k$$

est nulle ou positive, et il en est de même de la seconde partie

$$\sum_{n+1}^m x_i (a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \dots + a_{in} x_n).$$

Par conséquent les deux membres de la relation (2) sont nécessairement nuls tous les deux, ce qui exige:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

La première partie de notre proposition se trouve établie par là. Pour démontrer aussi la seconde partie nous observons qu'en supposant

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$$

$$x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_m \text{ positifs}$$

les n premiers équations (1) montrent qu'on a

$$(3) \quad a_{ik} = 0$$

dès que l'un (et seulement un) des indices i, k surpasse n . Et ensuite il est clair qu'on doit avoir

$$\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0.$$

Cette dernière conséquence démontre la seconde partie de notre proposition.

Les équations (3) font voir que dans le cas exceptionnel que nous considérons on a

$$X = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i x_k + \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m a_{ik} x_i x_k$$

en sorte que X se décompose directement dans la somme de deux formes quadratiques positives des variables x_1, x_2, \dots, x_n et x_{n+1}, \dots, x_m . Le cas $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ se présente alors dès qu'on prend $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_n = 0$.

D'après ce qui précède il est clair que lorsque X ne se décompose pas directement dans la somme de deux ou d'un plus grand nombre de formes quadratiques d'un nombre de variables moindre que m , alors x_1, x_2, \dots, x_m sont tous positifs, même dans le cas que quelques-uns des ξ_i sont nuls.

Corollaire. Soit D le déterminant de X et désignons par D_{ik} les mineurs de D en sorte qu'on a

$$Dx_i = \xi_1 D_{1i} + \xi_2 D_{2i} + \dots + \xi_m D_{mi}$$

alors aucun des mineurs D_{ik} ne peut être négatif. Et si le cas exceptionnel examiné plus haut ne se présente pas, tous les D_{ik} sont positifs.

2. Supposons que sur l'axe des abscisses OX on ait dans les points A et B dont les abscisses sont -1 et $+1$ deux points matériels fixes, la masse du premier en A étant α , celle du second en B , β ($\alpha > 0, \beta > 0$).

Imaginons encore n points matériels de masse égale à 1, qui peuvent glisser librement sur l'axe et placés entre A et B . Supposons enfin que deux points matériels se repoussent en raison directe de leurs masses et en raison inverse de leur distance. Dans ces conditions il y a une position unique d'équilibre pour les n points placés entre A et B , et si l'on désigne leurs abscisses dans la position d'équilibre par

$$(4) \quad x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_n$$

x_1, x_2, \dots, x_n sont les racines d'une équation

$$\varphi(x) = 0$$

$\varphi(x)$ étant un polynôme du degré n défini par l'équation différentielle

$$(5) \quad (1 - x^2)\varphi''(x) + 2[\alpha - \beta - (\alpha + \beta)x]\varphi'(x) + C\varphi(x) = 0.$$

C est une constante dont la valeur est

$$n(n + 2\alpha + 2\beta - 1)$$

comme on le trouve en cherchant le coefficient de x^n dans le premier membre de (5).

C'est là un cas particulier d'un théorème démontré dans ce journal, t. 6, p. 321 et suiv.

3. Les racines x_1, \dots, x_n dépendent de α et β et l'on peut les considérer comme fonctions des variables α et β qui doivent rester toujours positives.

Lorsque α et β varient d'une manière continue, x_i varie aussi d'une manière continue et comme deux racines ne deviennent jamais égales, leur ordre de grandeur fixé par les inégalités (4) ne sera jamais changé.

Nous allons démontrer les inégalités

$$(6) \quad \frac{\partial x_i}{\partial \alpha} > 0,$$

$$(7) \quad \frac{\partial x_i}{\partial \beta} < 0.$$

En effet, les quantités x_1, \dots, x_n dépendent de α et de β par les relations

$$\frac{\alpha}{x_i + 1} + \frac{\beta}{x_i - 1} + \frac{1}{x_i - x_1} + \dots + \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_i - x_{i+1}} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{x_i - x_n} = 0, \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

En prenant les dérivées par rapport à α on obtient pour les $\frac{\partial x_i}{\partial \alpha}$ le système linéaire suivant:

$$(8) \quad a_{i1} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha} + a_{i2} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha} + \dots + a_{in} \frac{\partial x_n}{\partial \alpha} = -\frac{1}{x_i + 1} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

où

$$a_{ii} = \frac{\alpha}{(x_i + 1)^2} + \frac{\beta}{(x_i - 1)^2} + \frac{1}{(x_i - x_1)^2} + \dots + \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} + \frac{1}{(x_i - x_{i+1})^2} + \dots$$

$$\dots + \frac{1}{(x_i - x_n)^2}$$

$$a_{ik} = a_{ki} = -\frac{1}{(x_i - x_k)^2}.$$

Ce système rentre évidemment dans le type des équations (1) car la forme quadratique

$$\sum_1^n \sum_1^n a_{ik} X_i X_k = \sum_1^n \left(\frac{\alpha}{(x_i + 1)^2} + \frac{\beta}{(x_i - 1)^2} \right) X_i^2 + \sum \sum \frac{1}{(x_i - x_k)^2} (X_i - X_k)^2$$

est positive, et $x_i + 1$ est aussi positif.

Les valeurs de $\frac{\partial x_1}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial x_2}{\partial \alpha}$, ..., $\frac{\partial x_n}{\partial \alpha}$ sont donc toutes positives.

On trouve de la même manière

$$a_{i1} \frac{\partial x_1}{\partial \beta} + a_{i2} \frac{\partial x_2}{\partial \beta} + \dots + a_{in} \frac{\partial x_n}{\partial \beta} = -\frac{1}{x_i - 1}. \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

Ici les seconds membres sont tous négatifs, et il en est donc de même des valeurs des $\frac{\partial x_i}{\partial \beta}$.

4. Considérons le cas particulier $\alpha = \beta$, en sorte que x_i est fonction de la seule variable α . Il est clair d'abord qu'on aura

$$x_1 + x_n = x_2 + x_{n-1} = x_3 + x_{n-2} = \dots = 0.$$

Ainsi en supposant $n = 2m$ ou $n = 2m + 1$ il suffira de considérer les racines positives

$$x_1, x_2, \dots, x_m.$$

Nous allons démontrer qu'on a toujours

$$(9) \quad \frac{dx_i}{d\alpha} < 0. \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

En effet supposons d'abord $n = 2m$, on aura

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\alpha}{x_i + 1} + \frac{\alpha}{x_i - 1} + \frac{1}{2x_i} + \frac{1}{x_i - x_1} + \dots + \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_i - x_{i+1}} + \dots + \frac{1}{x_i - x_m} \\ & + \frac{1}{x_i + x_1} + \dots + \frac{1}{x_i + x_{i-1}} + \frac{1}{x_i + x_{i+1}} + \dots + \frac{1}{x_i + x_m} = 0 \end{aligned} \right. \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

d'où l'on déduit

$$(11) \quad a_{i1} \frac{dx_1}{d\alpha} + a_{i2} \frac{dx_2}{d\alpha} + \dots + a_{im} \frac{dx_m}{d\alpha} = -\frac{2x_i}{1 - x_i^2} \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

et posant

$$a_{ii} = \frac{a}{(x_i + 1)^2} + \frac{a}{(x_i - 1)^2} + \frac{1}{2x_i^2} + P_i + Q_i$$

$$a_{ik} = a_{ki} = \frac{1}{(x_i + x_k)^2} - \frac{1}{(x_i - x_k)^2}$$

$$P_i = \frac{1}{(x_i - x_1)^2} + \dots + \frac{1}{(x_i - x_{i-1})^2} + \frac{1}{(x_i - x_{i+1})^2} + \dots + \frac{1}{(x_i - x_m)^2}$$

$$Q_i = \frac{1}{(x_i + x_1)^2} + \dots + \frac{1}{(x_i + x_{i-1})^2} + \frac{1}{(x_i + x_{i+1})^2} + \dots + \frac{1}{(x_i + x_m)^2}.$$

Le système (11) rentre encore dans le type des équations (1) car a_{ik} est négatif et la forme quadratique

$$\begin{aligned} \sum_1^m \sum_1^m a_{ik} X_i X_k &= \sum_1^m \left(\frac{a}{(x_i + 1)^2} + \frac{a}{(x_i - 1)^2} + \frac{1}{2x_i^2} + 2Q_i \right) X_i^2 \\ &+ \sum \sum \left(\frac{1}{(x_i - x_k)^2} - \frac{1}{(x_i + x_k)^2} \right) (X_i - X_k)^2 \end{aligned}$$

est positive. Mais les seconds membres dans le système (11) sont tous négatifs et l'on a par conséquent

$$\frac{dx_i}{da} < 0.$$

Dans le cas $n = 2m + 1$ on aura $x_{m+1} = 0$, et

$$(12) \quad \begin{cases} \frac{a}{x_i + 1} + \frac{a}{x_i - 1} + \frac{3}{2x_i} + \frac{1}{x_i - x_1} + \dots + \frac{1}{x_i - x_{i-1}} + \frac{1}{x_i - x_{i+1}} + \dots + \frac{1}{x_i - x_m} \\ \quad + \frac{1}{x_i + x_1} + \dots + \frac{1}{x_i + x_{i-1}} + \frac{1}{x_i + x_{i+1}} + \dots + \frac{1}{x_i + x_m} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, m) \end{cases}$$

La seule différence avec les relations (10) consiste, comme on le voit, dans le terme $\frac{3}{2x_i}$ qui est venu remplacer le terme $\frac{1}{2x_i}$. Ce terme

$$\frac{3}{2x_i} = \frac{1}{2x_i} + \frac{1}{x_i}$$

provient de l'action des deux points matériels dont les abscisses sont $-x_i$ et 0.

On trouve les équations linéaires suivantes pour les $\frac{dx_i}{da}$

$$a_n \frac{dx_1}{da} + \dots + a_m \frac{dx_m}{da} = - \frac{2x_i}{1-x_i^2}$$

$$a_{ii} = \frac{a}{(x_i+1)^2} + \frac{a}{(x_i-1)^2} + \frac{3}{2x_i^2} + P_i + Q_i \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

$$a_{ik} = a_{ki} = \frac{1}{(x_i+x_k)^2} - \frac{1}{(x_i-x_k)^2}$$

et l'on en conclut les inégalités (9) comme tout à l'heure.

5. La démonstration des propositions exprimées par les inégalités (6), (7), (9) que nous venons de développer, nous semble la plus simple si l'on n'a en vue que ces inégalités elles-mêmes. Mais nous avons retrouvé ces inégalités encore comme conséquences d'une proposition d'un caractère plus général, à l'occasion d'études sur la quadrature mécanique de GAUSS.

6. Nous allons développer maintenant quelques conséquences qui découlent presque immédiatement de ces inégalités (6), (7) et (9).

Supposons d'abord

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{1}{2}$$

l'équation (5) devient

$$(1-x^2)\varphi''(x) - 2x\varphi'(x) + n(n+1)\varphi(x) = 0$$

ainsi x_i est une racine de l'équation obtenue en égalant à zéro le polynôme X_n de LEGENDRE.

Preons ensuite

$$\alpha = \frac{3}{4}, \quad \beta = \frac{1}{4}$$

On a

$$(1-x^2)\varphi''(x) + (1-2x)\varphi'(x) + n(n+1)\varphi(x) = 0$$

ou si l'on pose

$$x = \cos \varphi,$$

$$\cos \frac{1}{2} \varphi \varphi'(x) = y,$$

$$\frac{d^2 y}{d\varphi^2} + \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 y = 0,$$

donc

$$\varphi(x) = \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi}{\cos \frac{1}{2}\varphi}$$

et par conséquent

$$x_i = \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n+1}.$$

Dans le cas

$$\alpha = \frac{1}{4}, \quad \beta = \frac{3}{4}$$

on trouve de la même manière

$$x = \cos \varphi,$$

$$\varphi(x) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\varphi}{\sin \frac{1}{2}\varphi},$$

$$x_i = \cos \frac{2i\pi}{2n+1}.$$

Mais d'après les inégalités (6), (7) il est clair que la valeur de x_i qui correspond à $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$ doit être plus petite que la valeur de x_i pour $\alpha = \frac{3}{4}$, $\beta = \frac{1}{4}$ et plus grande que la valeur de x_i pour $\alpha = \frac{1}{4}$, $\beta = \frac{3}{4}$.

Ainsi on a la limitation suivante pour la racine x_i de l'équation $X_n = 0$

$$(A) \quad \cos \frac{2i\pi}{2n+1} < x_i < \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n+1}.$$

Cette proposition est due à M. BRUNS qui l'a obtenue dans le tome 90 du Journal de BORCHARDT, pag. 327.

7. Nous pouvons obtenir des limites plus étroites à l'aide de l'inégalité (9).

Prenons en effet

$$\alpha = \frac{1}{4}, \quad \beta = \frac{1}{4}.$$

on trouvera

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi, \\ \varphi(x) &= \cos n\varphi, \\ x_i &= \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n} \end{aligned}$$

et en second lieu

$$\alpha = \frac{3}{4}, \quad \beta = \frac{3}{4},$$

on trouve

$$\begin{aligned} x &= \cos \varphi, \\ \varphi(x) &= \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin \varphi}, \\ x_i &= \cos \frac{i\pi}{n+1}. \end{aligned}$$

D'après les inégalités (9) on en conclut la limitation suivante d'une racine positive de l'équation $X_n = 0$:

$$(B) \quad \cos \frac{i\pi}{n+1} < x_i < \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n}.$$

Pour une racine négative on aurait évidemment

$$\cos \frac{i\pi}{n+1} > x_i > \cos \frac{(2i-1)\pi}{2n}.$$

Soit $n = 10$, on a d'après (A)

	limites
x_1	$\begin{cases} 0,98883 \\ 0,95557 \end{cases} \quad 0,03326$
x_2	$\begin{cases} 0,90097 \\ 0,82624 \end{cases} \quad 0,07473$
x_3	$\begin{cases} 0,73305 \\ 0,62349 \end{cases} \quad 0,10956$
x_4	$\begin{cases} 0,50000 \\ 0,36534 \end{cases} \quad 0,13466$
x_5	$\begin{cases} 0,22252 \\ 0,07473 \end{cases} \quad 0,14779$

et d'après (B)

$$\begin{array}{l} \text{limites} \\ x_1 \left\{ \begin{array}{l} 0,98769 \\ 0,95949 \end{array} \right. \quad 0,02820 \\ x_2 \left\{ \begin{array}{l} 0,89101 \\ 0,84125 \end{array} \right. \quad 0,04976 \\ x_3 \left\{ \begin{array}{l} 0,70711 \\ 0,65486 \end{array} \right. \quad 0,05225 \\ x_4 \left\{ \begin{array}{l} 0,45399 \\ 0,41542 \end{array} \right. \quad 0,03857 \\ x_5 \left\{ \begin{array}{l} 0,15643 \\ 0,14231 \end{array} \right. \quad 0,01412. \end{array}$$

8. La proposition d'algèbre démontrée dans le N° 1, ou plutôt le corollaire que nous en avons déduit, se trouve lié étroitement à une question qui se présente dans le problème de la distribution d'électricité sur un système de conducteurs.

Soient A_1, A_2, \dots, A_m les conducteurs, e_1, e_2, \dots, e_m leurs charges respectives et V_1, V_2, \dots, V_m les potentiels correspondants.

On a

$$(\alpha) \quad V_i = p_{i1}e_1 + p_{i2}e_2 + \dots + p_{im}e_m \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

et réciproquement

$$(\beta) \quad e_i = q_{i1}V_1 + q_{i2}V_2 + \dots + q_{im}V_m \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

(V. MAXWELL, *Traité d'électricité et de magnétisme*, § 87.)

La forme quadratique

$$\sum \sum q_{ik} x_i x_k$$

est positive. Le coefficient positif q_{ii} est la capacité du conducteur A_i , tandis que q_{ik} est un coefficient d'électricité induit et négatif.

Le système (β) rentre donc dans le type des équations (1), et d'après notre corollaire les coefficients du système (α) sont donc tous positifs, ce qui est bien connu et ce qu'on établit directement à l'aide de la théorie du potentiel.

Mais le système (β) n'a pas la même généralité que le système (1) car on a entre les coefficients q_{ik} les relations

$$q_{i1} + q_{i2} + \dots + q_{im} \geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

tandis que dans le système (1) on n'a pas nécessairement les relations correspondantes entre les a_{ik} .

Mais aussi dans le système (α) les p_{ik} ne sont pas seulement positifs, la théorie du potentiel montre qu'on a en outre

$$p_{ii} \geq p_{ik}.$$

D'après cela il est fort probable que si l'on assujettit dans le système

$$(1) \quad a_{i1}x_1 + \dots + a_{im}x_m = \xi_i \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

les coefficients a_{ik} à ces conditions additionnelles:

$$s_i = a_{i1} + a_{i2} + \dots + a_{im} \geq 0,$$

il en résultera pour les D_{ik} la conséquence

$$D_{ii} \geq D_{ik}.$$

C'est ce que nous allons prouver en effet.

9. Supposons d'abord

$$s_i > 0 \quad (i=1, 2, \dots, m)$$

alors on a

$$D_{ii} > D_{ik} \quad (i \neq k)$$

Il suffira évidemment de faire voir que $D_{11} > D_{12}$. A cause de

$$Dx_1 = \xi_1 D_{11} + \xi_2 D_{21} + \dots + \xi_m D_{m1}$$

cela revient à montrer que pour

$$\xi_1 = +1, \quad \xi_2 = -1, \quad \xi_i = 0 \quad (i > 2)$$

la valeur de x_1 tirée du système (1) est positive. Or on a:

$$\sum_1^m \xi_i = 0 = \sum_1^m s_i x_i,$$

$$\sum_1^m x_i \xi_i = x_1 - x_2 = \sum_1^m \sum_1^m a_{ik} x_i x_k$$

d'où l'on conclut d'abord que les x_i ne peuvent pas être tous nuls ou négatifs, ou bien tous nuls ou positifs et ensuite

$$x_1 > x_2.$$

Donc si x_1 était nul ou négatif, x_2 serait négatif. Supposons donc que

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \quad (m > n \geq 2)$$

soient nuls ou négatifs, et

$$x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_m$$

positifs.

On devrait avoir

$$\sum_{n+1}^m \xi_i x_i = 0 = \sum_1^n x_i (a_{n+1,i} x_{n+1} + \dots + a_{mi} x_m) + \sum_{n+1}^m \sum_{n+1}^m a_{ik} x_i x_k$$

ce qui est impossible car le second membre est positif. On a donc nécessairement $x_1 > 0$ ou

$$D_{11} > D_{12}.$$

C. Q. F. D.

Il est clair maintenant que dans le cas

$$s_i \geq 0$$

on doit avoir nécessairement

$$D_{ii} \geq D_{ik}$$

car un changement infiniment petit des a_{ik} suffit pour rentrer dans le cas $s_i > 0$.

10. Cherchons encore les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'on ait

$$D_{11} = D_{12}.$$

D'après ce qui précède il est clair qu'au moins un des s_i doit être nul mais cela ne suffit pas.

En prenant comme tout-à-l'heure

$$\xi_1 = +1, \quad \xi_2 = -1, \quad \xi_i = 0 \quad (i > 2)$$

se décomposent en plusieurs groupes. Soit

$$x_2, x_3, \dots, x_n$$

le groupe dans lequel se trouve x_2 .

Le système (1') se décompose en deux systèmes relatifs aux deux groupes de variables

$$x_2, x_3, \dots, x_n,$$

$$x_{n+1}, \dots, x_m$$

et on voit qu'on aura:

$$x_2 < 0, \quad x_3 < 0, \quad \dots, \quad x_n < 0,$$

$$x_{n+1} = x_{n+2} = \dots = x_m = 0.$$

La relation

$$0 = s_2 x_2 + \dots + s_m x_m$$

permet donc de conclure:

$$(b) \quad s_2 = 0, \quad s_3 = 0, \quad \dots, \quad s_n = 0.$$

Réciproquement, si les conditions (b) sont vérifiées et qu'en outre on a identiquement:

$$\sum_1^m \sum_2^m a_{ik} x_i x_k = \sum_2^n \sum_2^n a_{ik} x_i x_k + \sum_{n+1}^m \sum_{n+1}^m a_{ik} x_i x_k$$

alors le système des valeurs de x_2, x_3, \dots, x_m tirées des équations (1'), joint à la valeur $x_1 = 0$, satisfait au système (1) et l'on a par conséquent $D_{11} = D_{12}$. Pour le montrer il suffit évidemment de vérifier la première des équations (1), ou bien l'équation obtenue en prenant la somme des équations (1). Or cette dernière

$$s_1 x_1 + s_2 x_2 + \dots + s_m x_m = 0$$

se trouve vérifiée évidemment.

Nous avons supposé ici $n < m$, pour $n = m$ on rentre dans le premier cas; et l'on a le résultat suivant.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que

$$D_{11} = D_{12}$$

Note.

Après avoir terminé la rédaction de cet article, je viens de prendre connaissance d'une note *Sur les racines de certaines équations* par M. A. MARKOFF, (*Mathematische Annalen*, T. 27, p. 177). L'auteur y déduit d'abord la limitation des racines de l'équation $X_n = 0$ déjà obtenue par M. BRUNS, et ensuite il obtient aussi et pour la première fois, la limitation plus étroite (B).

La démonstration que j'ai donnée est différente de celle de M. MARKOFF, mais une seconde démonstration à laquelle j'ai fait allusion seulement dans le N° 5, ne diffère pas au fond de celle de cet auteur.

Toulouse, Janvier 1887.
