UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

BEATRIZ APARECIDA SILVA ALVES

# A ÁLGEBRA NA PERSPECTIVA HISTÓRICO-CULTURAL: UMA PROPOSTA DE ENSINO PARA O TRABALHO COM EQUAÇÕES DE 1º GRAU

UBERLÂNDIA - MG
2016

BEATRIZ APARECIDA SILVA ALVES

# A ÁLGEBRA NA PERSPECTIVA HISTÓRICO-CULTURAL: UMA PROPOSTA DE ENSINO PARA O TRABALHO COM EQUAÇÕES DE 1º GRAU

Dissertação apresentada à Banca Examinadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.
Área de concentração: Ensino de Matemática.
Orientadora**:** Profª. Drª. Fabiana Fiorezi de Marco.

UBERLÂNDIA - MG
2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

A474a
2016

Alves, Beatriz Aparecida Silva, 1988-
A álgebra na perspectiva histórico-cultural: uma proposta de ensino para o trabalho com equações de 1º grau / Beatriz Aparecida Silva Alves. - 2016.
160 f. : il.

Orientadora: Fabiana Fiorezi de Marco.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

Inclui bibliografia.

1. Ciência - Estudo e ensino 2. Matemática (Ensino fundamental) Estudo e ensino - Teses. 3. Álgebra - Estudo e ensino - Teses. I. Marco, Fabiana Fiorezi de. II. Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

CDU: 50:37

**A ÁLGEBRA NA PERSPECTIVA HISTÓRICO-CULTURAL: UMA PROPOSTA DE ENSINO PARA O TRABALHO COM EQUAÇÕES DE 1º GRAU**

Dissertação aprovada para a obtenção do título de Mestre no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, pela banca examinadora formada por:

Uberlândia, 02 de setembro de 2016.

________________________________________

Profª. Drª. Fabiana Fiorezi de Marco (Orientadora)

________________________________________

Profª. Drª. Anemari Roesler Luersen Vieira Lopes

________________________________________

Profª. Drª. Maria Teresa Menezes Freitas

*À minha mãe Maria Helena,*

*Aos meus avós Severino (in memoriam) e Beatriz,*

*Ao meu esposo Elcio Jr. e*

*À minha irmã Tábata,*

*pelo amor e apoio incondicional*

*em todas as etapas de minha vida,*

*dedico esse trabalho.*

## AGRADECIMENTOS

A Deus e Nossa Senhora Aparecida, fontes de infinita Sabedoria, por me darem força e amparo, direcionarem meus caminhos e sempre me protegerem.

À minha querida e estimada orientadora Prof.ª Dr.ª Fabiana Fiorezi de Marco, por toda sua paciência, carinho e educação, pela confiança a mim depositada, por ter me proporcionado conhecer os estudos da Teoria Histórico-Cultural, encontrando assim embasamento à minha prática docente, correspondendo minhas expectativas ao ingressar no Programa de Mestrado, pelos ensinamentos valiosos e esclarecedores, por me receber mesmo aos finais de semana em sua residência, por ler e reler essa dissertação sempre com olhar cuidadoso fornecendo as contribuições essenciais que em muito enriqueceram esse texto, por me acalmar perante minhas inseguranças, entender meus momentos de afastamento, me dar a oportunidade de compartilhar momentos pessoais que aconteceram ao longo da pesquisa. Com toda certeza, sem sua parceria, preocupação e cuidados essa pesquisa não aconteceria de forma tão prazerosa e enriquecedora, por me proporcionar colocar-me em atividade e inúmeras aprendizagens pessoais e profissionais.

À Prof.ª Dr.ª Anemari Roesler Luersen Vieira Lopes meus sinceros agradecimentos pela leitura cuidadosa, contribuições e sugestões no exame de qualificação estreitando ainda mais minha escrita à Teoria Histórico-Cultural, pelo respeito e empenho dedicados a minha pesquisa.

À Prof.ª Dr.ª Maria Teresa Menezes Freitas por sempre acreditar nas minhas potencialidades desde a Graduação, enaltecer minha escrita, pelas valiosas contribuições no exame de qualificação em sua leitura sempre atenta e pelos conselhos e puxões de orelhas nas disciplinas em que a tive como docente.

À Lóren, minha amiga e grande companheira de caminhada ao longo dessa jornada, por me ouvir nas horas de conflito, pelas mensagens, e-mails e conversas em que dividimos nossas ansiedades e receios, que muito me fortaleceram.

À Carolina, pelas contribuições e oportunidades de discutir algumas interrogações inerentes à construção do meu conhecimento e por prontamente me ajudar sempre que a procurei.

À Escola Municipal Freitas Azevedo por me possibilitar o desenvolvimento dessa pesquisa, contribuindo sempre que necessário.

Aos meus amados alunos, protagonistas dessa pesquisa, por terem aceito embarcar nessa pesquisa, expondo suas considerações e dúvidas, sempre com comprometimento, empenho, competência e sinceridade e muito terem me ensinado.

À minha mãe, Maria Helena, minhas palavras faltam para lhe agradecer pelos ensinamentos que fizeram de mim uma pessoa mais forte e determinada, por sempre acreditar e rezar por mim, me oferecer um afago nas horas mais difíceis, estar ao meu lado incondicionalmente encorajando-me sempre nos caminhos de minha escolha.

À minha querida vovó, Beatriz, por todo amor, pela atenção e cuidados dedicados e, ao meu amado vovô, Severino, por ter me dado a honra de conviver belos e inesquecíveis momentos ao seu lado e que, mesmo do Céu, ainda cuida de mim, eternas saudades!

À minha irmã, Tábata, por aguentar todos os meus momentos de chatices, reclamações e inseguranças e por fazer destes momentos mais leves e divertidos e, também, ao meu cunhado, Alex, por sua preocupação e torcida com o andamento da pesquisa.

Ao meu esposo, Elcio Jr., pelo amor e companheirismo incondicional, pelo apoio aos meus sonhos, compreensão nos meus momentos de isolamento durante essa pesquisa, pelas madrugadas em claro para me fazer companhia enquanto escrevia, por me ouvir divagar sobre a teoria, mesmo que nem sempre compreendesse o que estava falando, pelos chocolates para aliviar meu humor, ou falta dele! Enfim, por sempre ter fé em mim e pela eterna parceira nas minhas realizações pessoais.

A todos os Professores e Colegas do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Uberlândia pelas inúmeras discussões e crescimento profissional.

A todos, meus sinceros e emocionados agradecimentos...

*[...] espaço de formação do professor, e talvez o principal, é a escola onde este profissional atua. Sendo espaço do fazer, é nele que se deverá colocar como sujeito de seu conhecimento e produtor de situações de ensino que levem a uma melhor aprendizagem. Isso implica em tomar consciência de que no ensino existe a busca constante de condições ótimas de aprendizagem tal como acontece em qualquer atividade humana. É este estatuto que pode qualificar este profissional como educador matemático e pode colocá-lo em sintonia não só com as necessidades que a sociedade lhes impõe, mas principalmente pode antever estas necessidades e planejar ações que possam ser cada vez mais condizentes com as aspirações humanas por melhores condições de vida. O profissional da Educação Matemática é, para nós, aquele que toma o conhecimento matemático como um projeto humano e procura todos os meios de fazer com que os seus educandos adquiram este conhecimento por meio de situações de ensino onde quer que a Matemática possa estar (MOURA, 2000, pp. 17-18).*

# RESUMO

Na presente pesquisa, de caráter qualitativo, apresentamos nossa preocupação com a formação do pensamento algébrico e do conceito de equações de 1° grau sob a perspectiva da atividade orientadora de ensino (MOURA, 1992; 2000; 2001). O estudo foi realizado com 27 estudantes do 7° ano do ensino fundamental de uma escola municipal da cidade de Uberlândia/MG, com faixa etária entre 12 a 15 anos. Os princípios norteadores dessas atividades versam sob os nexos conceituais da álgebra: fluência, campo de variação e variável (SOUSA, 2004), que podem ser apreendidos à luz da Teoria Histórico-Cultural (VIGOTSKI, 1989; 1991; LEONTIEV, 1978; 1983) e dos princípios de Davidov (1982; 1987) acerca da construção do conhecimento teórico. Realizamos um estudo histórico do surgimento da álgebra (BAUMGART, 1992; EVES, 2002, entre outros) por acreditarmos que os nexos conceituais se fazem presentes ao longo da construção histórica do conceito, um breve olhar sobre livros didáticos presentes na escola onde a pesquisa aconteceu e um levantamento de pesquisas já realizadas sobre a temática, a fim de verificar se estes nexos se encontram em destaque. Diante desses encaminhamentos, estabelecemos a seguinte questão de pesquisa: *quais implicações pedagógicas para o processo de formação do pensamento algébrico e do conceito de equação de 1º grau para os estudantes do ensino fundamental as atividades de ensino, desenvolvidas na perspectiva da Atividade Orientadora de Ensino, podem propiciar?* Na busca por respondê-la, traçamos como objetivo analisar possíveis implicações pedagógicas para a formação do pensamento algébrico e a aprendizagem do conceito de equação de 1° grau para estudantes do 7° ano do ensino fundamental por meio da atividade de ensino. Para efeito de análise, categorizamos os dados em episódios e cenas (MOURA, 2004) discutindo os movimentos possibilitados pelas situações desencadeadoras de aprendizagem, assim como as ações e reflexões dos estudantes perante as situações propostas. Por meio das análises realizadas, parece-nos que houve a formação do pensamento algébrico pelos estudantes e que estes se apropriaram do conceito de equação de 1° grau, assim como notamos indícios de que os nexos conceituais algébricos são de extrema relevância para a aprendizagem da álgebra, em um movimento no qual os estudantes compreenderam as justificativas de suas ações mediante as necessidades que as motivaram, permitindo aos estudantes atribuírem nova qualidade ao processo de apreensão dos conceitos algébricos, no qual houve a predominância do saber pensar ao invés do saber fazer, possibilitando percebermos indícios de desenvolvimento do conhecimento teórico, em um ambiente de respeito às ideias apresentadas pelo outro e construção coletiva dos significados algébricos. Esperamos que este trabalho contribua com a área de Educação Matemática, especialmente com o ensino de equação por meio de situações desencadeadoras de aprendizagem que propiciem a formação do conhecimento teórico.

**Palavras-Chave:** Pensamento Algébrico; Equações de 1° grau; Atividade Orientadora de Ensino; Nexos Conceituais; Teoria Histórico-Cultural.

**ABSTRACT**

In this qualitative research, we present our concern with the formation of algebraic thinking and the concept of first degree equations from the perspective of teaching guiding activity (MOURA, 1992; 2000; 2001). The study was conducted with 27 students in the 7th grade of elementary school from a public school of the city of Uberlândia/MG (Brazil), aged between 12 and 15 years old. The guiding principles of these activities regard the concept of algebra links: fluency, variation field and variable (SOUSA, 2004), which can be grasped in the light of Historical-Cultural Theory (VIGOTSKI, 1989; 1991; LEONTIEV, 1978; 1983) and the principles of Davidov (1982, 1987) about the construction of theoretical knowledge. We conducted a historical study of the emergence of algebra (BAUMGART, 1992; EVES, 2002, among others) because we believe that the conceptual connections are present along the historical construction of the concept, a brief analysis of textbooks present in the school where the research took place and a survey of previous studies in order to verify if these links are highlighted. Given this, we established the following research question: *What pedagogical implications for the process of formation of algebraic thinking and the concept of first degree equation for elementary school students the teaching activity, developed in the perspective of the Teaching Guiding Activity, can provide?* Seeking to answer this question, we aimed at analyzing possible pedagogical implications for the formation of algebraic thinking and learning the concept of first degree equation for students in the 7th grade of elementary school through the teaching activity. For analytical purposes, we categorized the data in episodes and scenes (MOURA, 2004) discussing the movements made possible by triggering learning situations, as well as the actions and thoughts of students towards the proposed situations. Through the performed analyses, it seems that there was the formation of algebraic thinking by students and they have appropriated the concept of first degree equation, as we also noted evidence that the algebraic conceptual links are extremely relevant to learning algebra, in a movement in which the students comprehended the reasons for their actions upon the needs that motivated them, allowing students to allocate new quality to the process of apprehension of the algebraic concepts, in which knowing how to think prevailed instead of knowing how to do, enabling us to perceive evidence of a development of the theoretical knowledge, in an environment of respect to the ideas presented by the other and collective construction of algebraic meaning. We hope this work will contribute to the field of Mathematics Education, especially with the teaching of equation through triggering learning situations that encourage the formation of theoretical knowledge.



**Keywords:** Algebraic Thinking; First degree equations; Teaching Guiding Activity; Conceptual links; Historical-Cultural Theory.

**LISTA DE FIGURAS**

## LISTA DE QUADROS

## LISTA DE SIGLAS

| | |
|---|---|
| a.C - | Antes de Cristo |
| AOE - | Atividade Orientadora de Ensino |
| CEP - | Comitê de Ética e Pesquisa |
| d.C. - | Depois de Cristo |
| PCN - | Parâmetros Curriculares Nacionais |
| PIBID - | Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência |
| PNLD - | Programa Nacional do Livro Didático |
| SARESP - | Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo |
| SDA - | Situações Desencadeadoras de Aprendizagem |
| SHC - | Síntese Histórica do Conceito |
| SSC - | Síntese da Solução Coletiva |
| TCLE - | Termo de Consentimento Livre Esclarecimento |
| THC - | Teoria Histórico-Cultural |
| UFU - | Universidade Federal de Uberlândia |
| ZDP - | Zona de Desenvolvimento Proximal |

## SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

Peço licença ao leitor para escrever na primeira pessoa do singular grande parte dessa introdução, pois penso que os parágrafos que seguem me permitem esse movimento, uma vez que contarei os caminhos que percorri até chegar a esse momento.

Sempre fui considerada uma 'ótima estudante' por meus professores nas séries iniciais do ensino fundamental (1ª à 4ª série ou, desde 2007, 1º ao 5º ano). Essa qualidade devia-se ao fato das notas acima da média que compunham meu boletim e a forma como me comportava nas aulas: uma estudante que permanecia sempre em silêncio e realizava todas as atividades propostas, das quais hoje entendo apenas como meros exercícios de cunho mnemônico, que visavam nos preparar para as avaliações e não a apreensão do conceito.

Entretanto, essa postura começou a mudar quando ingressei no ensino fundamental II (5ª à 8ª série ou, 6° ao 9° ano). Nesse momento já não conseguia compreender o significado daquelas "continhas" que a professora estava fazendo no quadro e questões como "o que é o *x*?" e "onde vou usar isso na minha vida?" muito me inquietavam e em nada me esclareciam o que estava estudando. Mas como questionar não era a melhor opção, resolvia me calar e apenas executar.

Essa inquietude me acompanhou por toda a vida escolar na educação básica. Por vezes, quando me propunha a questionar os professores de matemática do porquê de estarmos estudando determinados conteúdos, da sua real necessidade, não ouvia nenhuma resposta.

De repente, me vi concluindo o ensino médio, às vésperas do encerramento das inscrições do processo seletivo para ingresso na Universidade Federal de Uberlândia (UFU), com o Edital em mãos, sem saber qual opção de curso colocar. Foi então que decidi optar pelo curso de Matemática, afinal, poderia encontrar algumas respostas às minhas inquietações.

Meses depois, fui aprovada... Era hora de começar uma nova fase, acreditava que seria bem-sucedida no curso, afinal de contas eu havia concluído o ensino médio sempre com rendimento entre 97 e 99% na disciplina de Matemática, não havendo motivos para preocupações.

Já no primeiro semestre, as decepções vieram. Percebi que os algoritmos que havia decorado e que me ajudaram a ser uma excelente estudante no ensino básico em nada contribuíam em minha caminhada acadêmica. Era isso: eu sabia operar números, resolver equações, mas não tinha a mínima ideia dos seus significados e definições, sendo necessária muita dedicação para "correr atrás do prejuízo".

Por meio dos diálogos realizados nas disciplinas pedagógicas (Informática e Ensino, Psicologia da Educação, Estágios, Metodologia de Ensino, Oficinas, entre outras), começava a formar a ideia de que ao professor cabe “compartilhar significados” (MOURA, 2000). Nesse momento percebi que gostaria de atuar como docente para desmistificar a ideia de um ensino imutável, descolado do percurso histórico e da produção de significados.

Atuei como bolsista do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência[1] (PIBID), o qual me proporcionou a participação em minicursos e oficinas realizados dentro da Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia agregando conhecimentos docentes para a constituição de minha futura prática pedagógica.

Finalmente, conclui a graduação e me vi inserida no corpo docente de uma escola pública estadual. Muitas inseguranças permeavam meus pensamentos: “qual a melhor forma de ensinar determinado conteúdo para que os estudantes de fato aprendam e não apenas decorem?”, “como fazer para que os estudantes se interessem pelas minhas aulas?”. Inquietações como essas me acompanhavam constantemente e a busca às devidas respostas me levaram a ingressar no Programa de Pós-graduação do Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, onde minha atividade (LEONTIEV, 1978) passou a ser a de investigar questões como as mencionadas anteriormente.

Concomitante ao ingresso no Mestrado houve a distribuição das turmas na escola onde ministro aulas desde o ano de 2012 e me tornei responsável pelos sétimos anos. Mais uma vez, me vi preocupada com a forma que trabalharia os conteúdos, principalmente, as equações de 1° grau, tão utilizadas ao longo dos ensinos fundamental e médio, e objeto de conflito entre os estudantes, como pude vivenciar até então no decorrer de minha vivência.

Juntamente com minha orientadora do Programa de Pós-Graduação, decidimos[2] que nosso objeto de estudo versaria, então, sobre a formação do pensamento algébrico e do conceito de equações de 1° grau. A nossa intenção era trabalhar com os nexos conceituais da álgebra (SOUSA, 2004) corroborando para que o estudante se aproprie desse conceito e não seja apenas um usuário que opere com letras sem atribuir nenhum tipo de significado.

Em relação ao ensino de álgebra não é diferente, pois conforme nos diz Scarlassari (2007, p. 3)

---

[1] O PIBID é programa financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) que busca antecipar o vínculo entre os licenciandos e as salas de aula da rede pública, apoiando a formação dos futuros professores.

[2] A partir desse momento, volto a utilizar a 1ª pessoa do plural.

> a álgebra ainda é considerada um assunto difícil de ser trabalhado em sala de aula porque envolve muitos "conceitos novos" para os alunos do Ensino Fundamental, como no caso do "tal x", como eles mesmos dizem, ou seja, do conceito de variável, de incógnita; e na ideia de movimento, fundamental para a compreensão do conceito de variável, que nem sempre é explorado devido ao fato de os professores não estarem preparados para trabalhar o mesmo em sala de aula, pois não tiveram contato com ele em sua formação acadêmica. Além disso, na sua formalização, a álgebra requer uma linguagem específica, simbólica e rigorosa.

Pensar a complexidade do objeto principal do professor, o ensino, e, no caso desse estudo, a formação do pensamento algébrico e do conceito de equações de 1° grau, além de uma metodologia que o ajude a organizar este ensino visando à produção de novos conhecimentos não é simples. Nas palavras de Moura (2000, p. 4)

> o processo de produção do conhecimento matemático tem assim um duplo movimento: por um lado é gerado como necessidade de resolver problema e de outro, serve de instrumento para produzir novos significados que servirão, mais adiante, como novas ferramentas para novos problemas gerados na dinâmica da vida humana em interação com a natureza física e simbólica.

Esta afirmação sugere pensar no docente como promotor de um ensino com objetivos e ações intencionalmente definidas para solucionar problemas gerados na dinâmica da vida e cuja prática possui uma intencionalidade a ser alcançada: a apropriação de conhecimento matemático pelos estudantes.

O anseio em atribuir nova qualidade à nossa prática pedagógica e o movimento vivido em sala de aula, direcionou-nos à preocupação que se tornou uma necessidade para nós: a de promover a apropriação de conhecimento algébrico por parte dos estudantes. Nas palavras de Araújo:

> Se não se introduzir a álgebra de maneira significativa, conectando os novos conhecimentos aos conhecimentos prévios que os alunos já possuem, se aos objetos algébricos não se associar nenhum sentido, se a aprendizagem da álgebra for centrada na manipulação de expressões simbólicas a partir de regras que se referem a objetos abstratos, muito cedo os alunos encontrarão dificuldades nos cálculos algébricos e passarão a apresentar uma atitude negativa em relação à aprendizagem matemática, que para muitos fica desprovida de significação (ARAÚJO, 2008, p. 6).

Entendemos que se faz interessante que o professor desenvolva sua prática com a intencionalidade de que o estudante desenvolva sentidos próprios dos conceitos que, pelas ações mobilizadoras do professor coincida com os significados dos conceitos algébricos ao invés de recebê-los como regras a serem memorizadas. São inúmeras as contribuições da álgebra na formação das funções psicológicas mais desenvolvidas do ser humano que, conforme nos diz Vigotski (1987),

> [...] pelo aprendizado da álgebra, a criança passa a compreender as operações aritméticas como casos particulares de operações algébricas. Isso dá à criança uma visão mais livre, mais abstrata e generalizada de suas operações com quantidades concretas. Assim como a álgebra livra o pensamento da criança da prisão das relações numéricas concretas e o eleva ao nível mais abstrato[3] (VYGOTSKY, 1987, p. 180, tradução nossa).

De posse destas reflexões elaboramos a seguinte questão de pesquisa: *quais implicações pedagógicas para o processo de formação do pensamento algébrico e do conceito de equação de 1º grau para os estudantes do ensino fundamental as atividades de ensino, desenvolvidas na perspectiva da Atividade Orientadora de Ensino, podem propiciar?*

Como objetivo principal dessa pesquisa, procuramos analisar possíveis implicações pedagógicas para a formação do pensamento algébrico e a aprendizagem do conceito de equação de 1º grau para estudantes do 7º ano do ensino fundamental por meio de atividades de ensino, desenvolvidas na perspectiva da Atividade Orientadora de Ensino.

Nossas ações desenvolvidas para atingir os objetivos foram:

- organizar uma unidade didática que permita cumprir com o objetivo da formação conceitual do pensamento algébrico e de equações de 1° grau;
- investigar as ações dos estudantes frente às atividades de ensino, investigando se as mesmas tornar-se-ão atividades de aprendizagem;
- investigar se a atividade de ensino pode influenciar no saber pensar e saber fazer do estudante.

As atividades de ensino foram propostas para 112 estudantes do 7° ano do ensino fundamental, com faixa etária entre 12 e 15 anos, nas turmas em que a pesquisadora atuava também como professora. Entretanto, somente uma turma com 27 estudantes foi selecionada para análise neste estudo devido ao atendimento aos critérios estabelecidos, que serão expostos no capítulo 4.

Para efeito de elaboração do relatório da pesquisa desenvolvida, o organizamos da seguinte forma:

No capítulo 1 abordamos o conceito de atividade, atividade de ensino, atividade de aprendizagem e a importância da formação do conhecimento teórico buscando elucidar elementos que possam nos auxiliar a compreender o processo de apropriação do conhecimento na atividade de aprendizagem. Para tanto, dialogamos com autores como

---

[3] Tradução livre que faço de "[...] by learning algebra, the child comes to understand arithmetic operations as particular instantiations of algebraic operations. This gives the child a freer, more abstract and generalized view of his operations with concrete quantities. Just as algebra frees the child's thought from the grasp of concrete numerical relations and raises it to level of more abstract thought".

Vigotski (1989; 1991), Leontiev (1978; 1983), Davidov (1982; 1987) e Moura (1992; 2000; 2001).

No capítulo 2, discutimos o surgimento da álgebra nas civilizações babilônicas, egípcias, gregas, hindus, árabes e europeias, além do movimento histórico de formação das equações de 1° grau, à luz das ideias de Baumgart (1992); Boyer (1996); Eves (2002); Garbi (2009); Lanner de Moura e Sousa (2005) e Lima, Takazaki e Moisés (1998).

No capítulo 3, há a discussão de como a álgebra tem sido apresentada no ensino fundamental mediante as concepções dos autores como Fiorentini, Miorim e Miguel (1993); Usiskin (1995); Lins e Gimenez (1997); Sousa (2004); Sousa, Panossian e Cedro (2014); as indicações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998); o enfoque adotado por alguns livros didáticos e algumas pesquisas já realizadas.

No capítulo 4, apresentamos a questão, os objetivos, a metodologia e os protagonistas da pesquisa. Apresentamos as atividades de ensino (a unidade didática, que compõem o produto educacional deste estudo) propostas aos estudantes e fazemos uma breve apresentação sobre os eixos de análises que nortearam nossas reflexões.

No capítulo 5, trazemos nosso olhar para as análises das implicações pedagógicas da vivência e exploração de atividades de ensino, buscando dialogar com os autores que respaldam nosso estudo. Para tanto, utilizamos a ideia de episódios e cenas (MOURA, 2004). O Eixo 1, *situações desencadeadoras de aprendizagem*, apresenta, no Episódio 1, a história virtual do conceito que contribuiu para os estudantes terem contato com o número desconhecido e flexível e, no Episódio 2, dois jogos como situações desencadeadoras que contribuíram para o movimento de apreensão do conceito pelos estudantes. No Eixo 2, *ações e reflexões coletivas*, apresentamos, no Episódio 1, o movimento de formação do pensamento algébrico e, no Episódio 2, o movimento de apreensão do conceito de equação de 1° grau desenvolvido pelos estudantes.

Por fim, apresentamos algumas considerações acerca de nosso estudo, da vivência promovida pelo movimento de pesquisa, retomamos nossa questão de investigação a fim de verificarmos se a mesma fora respondida e se esta nos é satisfatória. Assim como, resgatamos nossas inquietudes e objetivos do início de nossa pesquisa, ao voltarmos nosso olhar para tais questões, buscamos refletir sobre as mesmas.

Almejamos, assim, que nossa pesquisa seja inspiração para práticas pedagógicas que objetivem colocar o estudante em movimento, como protagonista da apropriação dos conhecimentos produzidos historicamente, onde o professor se coloque em atividade de ensino, o estudante em atividade de aprendizagem, abarcando, assim, a atividade orientadora de ensino como potencializadora para a formação do conhecimento teórico matemático.

# 1. TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL: UMA APROXIMAÇÃO

> *A matemática, na perspectiva que colocamos, está participando tanto do desenvolvimento do sujeito, ao dotá-lo de conteúdo, como também da sua formação, já que lhe proporciona a capacidade de lidar com informações de modo que possa solucionar adequadamente os problemas que lhe são colocados tanto cotidianamente como aqueles que deverá resolver, de modo mais sistemático, na sua vida profissional (MOURA; LANNER DE MOURA, 1998, p. 10).*

Neste capítulo apresentamos os referenciais teóricos que embasam nosso estudo. Inicialmente, apresentamos os aportes teóricos da Teoria Histórico-Cultural (THC), com seu representante Lev Semenovitch Vigotski (1989; 1991), pois, assim como proposto em sua teoria, acreditamos no potencial das interações entre os sujeitos como mediação para o desenvolvimento e a aprendizagem. Em seguida, apresentamos os pressupostos teóricos da Teoria da Atividade embasando-nos em Alexei Nikolaievich Leontiev (1978; 1983), onde é destacado que um sujeito estará em atividade quando mover-se por uma necessidade responsável pelo desenvolvimento de suas funções superiores. Refinando nosso olhar para o ensino, caminhamos com Moura (1992; 2000; 2001), compreendendo seus estudos sobre a Atividade Orientadora de Ensino (AOE) e, à luz dessa teoria, temos o movimento de organização do ensino, no qual, tanto professor quanto estudantes estão em atividade – o professor a partir da necessidade de ensinar e o estudante da necessidade aprender. Por fim, finalizamos com Vasily Vasilovich Davidov (1982; 1987), acerca da construção do conhecimento teórico.

## 1.1 Compreendendo as ideias de Vigotski

Lev Semenovitch Vigotski[4] foi um cientista bielo-russo, do qual referenciamos alguns pontos de seus estudos na Rússia, pós Revolução de 1917, no que diz respeito à Teoria Histórico-Cultural (THC).

---

[4] Ao longo de nossa produção textual adotaremos a grafia dos nomes dos autores russos usados no alfabeto ocidental (Vigotski, Davidov), porém nas citações e referências respeitaremos a grafia conforme a obra original do autor consultada. Prestes (2010) esclarece-nos que "toda essa confusão não pode ser somente explicada pelas regras de transliteração de nomes russos, escritos em alfabeto cirílico, mas vale uma ponderação: o idioma russo possui três tipos de **i** com grafia, sonoridade e funções diferentes. O sobrenome de Vigotski se escreve com esses três tipos de **i** (ВЫГОТСКИЙ). Alguns tradutores tentaram, com a grafia diferente, representando um tipo de **i** do russo com o **y** e o outro com **i**, conservar a diferença existente entre os tipos de **i** russos, pelo menos de dois. No português, temos um único som tanto para o **i** como para o **y**, portanto, para o leitor brasileiro tanto faz se é **i**

De acordo com Goulart (2010, p. 168), nessa época "os soviéticos começaram a rever as bases de todo seu conhecimento, procurando construir um sistema que fosse coerente com sua opção política, isto é, um corpo de conhecimentos fundamentado no marxismo". Diante disso, fazia-se necessário uma teoria psicológica colaborativa ao governo, bem como produções científicas voltadas para a educação e medicina. Vigotski busca, nesse contexto, compreender os processos mentais humanos.

Correlacionava às ideias de Marx, "na medida em que se preocupou em um fundamento ao pensamento e à ação, opondo-se assim a qualquer dogmatismo. Daí a ênfase nas origens sociais da linguagem e do pensamento" (VERÍSSIMO, 1996, p. 132), procurando, assim, as origens do comportamento existentes nas relações sociais que os indivíduos mantêm com o mundo exterior. Assim, Vigotski percebeu no materialismo histórico dialético de Marx, uma fonte importante para as suas elaborações teóricas.

Vigotski (1989) considera dois tipos de conceitos: espontâneos (adquiridos fora do contexto escolar) e científicos (sistematização de ideias inter-relacionadas). Podemos pensar nos conceitos espontâneos (cotidianos) como os conhecimentos prévios que o estudante já possui, que o ajudam a interpretar algo melhor, estes evoluem na medida em que há aprendizagem, podendo ser generalizados, partindo do concreto para o abstrato. Já os conceitos científicos instigam o estudante, dizem respeito às relações das palavras com outras palavras, sua sistematização, partindo do abstrato para o concreto. Assim, Vigotski (1989) apresenta a ideia de que a educação promove o desenvolvimento cognitivo, onde o desenvolvimento dos conceitos espontâneos e científicos está em constante consonância.

> Poder-se-ia dizer que o desenvolvimento dos conceitos espontâneos da criança é ascendente, enquanto o desenvolvimento dos seus conceitos científicos é descendente, para um nível mais elementar e concreto. [...] Ao forçar sua lenta trajetória para cima, um conceito cotidiano abre o caminho para um conceito científico e o seu desenvolvimento descendente. Cria uma série de estruturas necessárias para a evolução dos aspectos mais primitivos e elementares de um conceito, que lhe dão corpo e vitalidade. Os conceitos científicos, por sua vez, fornecem estruturas para o desenvolvimento ascendente dos conceitos espontâneos da criança em relação à consciência e ao uso deliberado. Os conceitos científicos desenvolvem-se para baixo por meio dos conceitos espontâneos; os conceitos espontâneos desenvolvem-se para cima por meio dos conceitos científicos (VYGOTSKY, 1989, pp. 93-94).

Na formação dos conceitos espontâneos, Vigotski destaca a ocorrência de três estágios. No primeiro deles, Pensamento Sincrético, "o significado das palavras representa

---

ou **y**, a pronúncia é a mesma" (PRESTES, 2010, p. 91). Mediante esse esclarecimento, adotaremos os nomes dos autores grafados com **i.**

para a criança um conglomerado vago e sincrético de objetos isolados, vinculados a alguma imagem mutável em sua mente" (NÚÑEZ, 2009, p. 34). Sendo assim, a criança forma seus primeiros agrupamentos ao acaso, não existindo uma organização prévia das palavras por algum critério.

No segundo estágio, Pensamento por Complexos, "apresentam-se estágios de associações nos quais as palavras perdem sua função denotativa de objetos isolados e passam a ganhar um sentido de generalização, agrupando objetos e fenômenos por suas semelhanças, contrastes ou contiguidade no espaço" (NÚÑEZ, 2009, p. 34). Entretanto, os critérios para a organização ainda não são estabelecidos pelo pensamento lógico, mas pela experiência imediata.

No último estágio, Pensamento Conceitual, temos como resultado processos intelectuais mais elaborados, pois "mediante a análise, os objetos e representações se decompõem em traços e elementos diferenciáveis. Desse modo, pode-se examinar independentemente os atributos comuns e essenciais dos objetos, abstraindo-os dos demais" (VYGOTSKY, 1989, p. 37). Entendemos que, nesse estágio, o conceito é impossível sem a palavra e somente existe pensamento conceitual mediante o pensamento verbal. Nas palavras de Vigotski (1989, p. 68), "um conceito só aparece quando os traços abstraídos são sintetizados novamente, e a síntese abstrata daí resultante torna-se o principal instrumento do pensamento. A palavra desempenha um papel decisivo nesse processo". Os conceitos científicos são apoiados na palavra; o sujeito foca sua atenção no próprio ato de pensar, pois estes permitem a formação da consciência, o domínio do pensamento, em oposição aos conceitos cotidianos, para os quais o enfoque é dado no objeto. O indivíduo atribuirá significado a uma palavra que define um conceito científico, se este se encontra apoiado em outros conceitos aos quais foram atribuídas palavras com significado para o indivíduo.

Com relação ao desenvolvimento do estudante, Vigotski (1989) propõe que este deva acontecer de forma a se considerar a capacidade potencial de aprendizagem, respeitando o nível de desenvolvimento que ele se encontra. Podendo estar no Nível de Desenvolvimento Real (ou efetivo), onde estão compreendidas as funções mentais já estabelecidas na criança, àquilo que ela é capaz de fazer sozinha, ou no Nível de Desenvolvimento Potencial, onde são compreendidas as tarefas realizadas mediante a ajuda de outras pessoas. Entre esses dois níveis situa-se a Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), ou Zona de Desenvolvimento Imediato. Nas palavras de Vigotski (1989, p. 97), a ZDP é:

> a distância entre o nível de desenvolvimento real, que se costuma determinar através da solução independente de problemas, e o nível de desenvolvimento potencial, determinado através da solução de problemas sob a orientação de um adulto ou em colaboração com companheiros mais capazes.

Prestes (2010) denomina a ZDP como Zona de Desenvolvimento Iminente. Para a autora, tanto a palavra *proximal* quanto a palavra *imediato* não transmitem a relevância desse conceito, que caminha concomitante à relação existente entre desenvolvimento e instrução e à ação colaborativa de outra pessoa. "Quando se usa *zona de desenvolvimento proximal* ou *imediato* não se está atentando para a importância da instrução como uma atividade que pode ou não possibilitar o desenvolvimento" (PRESTES, 2010, p. 168). De acordo com a autora, Vigotski não se refere à instrução como garantia de desenvolvimento, a instrução, ao ser realizada mediante uma ação colaborativa, cria possibilidades para o desenvolvimento. Assim, a autora defende que o termo mais correto seja Zona de Desenvolvimento Iminente, pois

> sua característica essencial é a das possibilidades de desenvolvimento, mais do que do imediatismo e da obrigatoriedade de ocorrência, pois se a criança não tiver a possibilidade de contar com a colaboração de outra pessoa em determinados períodos de sua vida, poderá não amadurecer certas funções intelectuais e, mesmo tendo essa pessoa, isso não garante, por si só, o seu amadurecimento (PRESTES, 2010, p. 173).

Ainda nas palavras de Vigotski:

> Pesquisas permitiram aos pedólogos pensar que, no mínimo, deve-se verificar o duplo nível do desenvolvimento infantil, ou seja: primeiramente, o nível de desenvolvimento atual da criança, isto é, o que, hoje, já está amadurecido e, em segundo lugar, a zona de seu desenvolvimento iminente, ou seja, os processos que, no curso do desenvolvimento das mesmas funções, ainda não estão amadurecidos, mas já se encontram a caminho, já começam a brotar; amanhã, trarão frutos; amanhã, passarão para o nível de desenvolvimento atual (VIGOTSKI, 2004, p. 485 apud PRESTES, 2010, p. 173).

Concordamos com a defesa de Prestes (2010), por entendermos que apenas a instrução de um adulto ou alguém mais amadurecido que a criança não será a garantia do desenvolvimento intelectual. Entendemos que essa instrução se faz de grande importância, para estimular a criança, sendo necessária a ela a presença do outro ao longo do seu caminhar, buscando estimular seu desenvolvimento.

Sendo assim, a aprendizagem como atividade transformadora utiliza-se de ferramentas mediadoras (instrumentos e signos) para agir sobre o objeto.

> A invenção e o uso dos signos como meios auxiliares para solucionar um dado problema psicológico (lembrar, comparar coisas, relatar, escolher, etc.) é análoga à

> invenção e uso dos instrumentos, só que agora no campo psicológico. O signo age como instrumento de atividade psicológica de maneira análoga ao papel de um instrumento no trabalho (VYGOTSKY, 1991, p. 39).

Como vimos na citação anterior, Vigotski considera os instrumentos e os signos como os principais elementos mediadores da atividade:

> A função do instrumento é servir como condutor da influência humana sobre o objeto da atividade; ele é orientado externamente; deve necessariamente levar a mudanças nos objetos. Constitui um meio pelo qual a atividade humana externa é dirigida para o controle e domínio da natureza. O signo, por outro lado, não modifica em nada o objeto da operação psicológica. Constitui um meio da atividade interna dirigido para o controle do próprio indivíduo; o signo é orientado internamente (VYGOTSKY, 1991, p. 41).

A linguagem assume o papel na comunicação entre os indivíduos e por meio dela se podem estabelecer os significados. Concordamos com as ideias de Vigotski (1991) quando alega que

> a capacitação especificamente humana para a linguagem habilita as crianças a providenciarem instrumentos auxiliares na solução de tarefas difíceis, a superar a ação impulsiva, a planejar uma solução para um problema antes de sua execução e a controlar seu próprio comportamento. Signos e palavras constituem para a criança, primeiro e acima de tudo, um meio de contato social com outras pessoas. As funções cognitivas e comunicativas da linguagem tornam-se, então, a base de uma forma nova e superior de atividade nas crianças distinguindo-as dos animais (VYGOTSKY, 1991, p. 24).

Pensando nas relações entre pensamento e linguagem, Vigotski (1991) analisa o significado de palavra, distinguindo-o entre o significado propriamente dito e o sentido. O significado propriamente dito diz respeito ao sistema de relações objetivas que se formou no processo de desenvolvimento das palavras, compartilhado por todas as pessoas que a utilizam. O sentido, por sua vez, se refere ao significado da palavra atribuído por cada indivíduo, onde se fazem presentes as relações que dizem respeito ao contexto e uso da palavra.

Assim, a palavra atua como mediadora, constituindo as relações e generalizações construídas pelo indivíduo no social em um determinado período histórico, podendo ser entendida como um signo, inicialmente como papel na formação do conceito e, posteriormente, atua como o seu símbolo.

A teoria vigotskiana permite reconhecer o indivíduo como um ser social, implicando assim, que a aprendizagem escolar permita o desenvolvimento do estudante enquanto indivíduo. Seguimos agora apresentando a Teoria da Atividade, à luz das ideias de Leontiev.

## 1.2 Uma aproximação às ideias de Leontiev

Alexei Nikolaievich Leontiev foi um psicólogo russo que em 1924 graduou-se em Ciências Sociais e, posteriormente, trabalhou com Vigotski. Sua obra nos fala do conceito de atividade, introduzido por Marx, em um sentido materialista. Em suas palavras, "a atividade em sua forma inicial e principal é a atividade prática sensitiva mediante a qual as pessoas entram em contato prático com os objetos do mundo que as circundam, experimentam sua resistência, influem sobre eles, subordinando-se à suas propriedades objetivas[5]" (1983, p. 15, tradução nossa).

Segundo Marco (2009, p. 27), Leontiev "aborda atividade como uma unidade de formação na qual as necessidades emocionais e materiais dirigem a ação do sujeito". Para o próprio Leontiev (1978, p. 68), atividade é definida como "os processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo, como um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objetivo que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo".

Uma situação pode ser caracterizada como atividade mediante os seguintes elementos: objeto, motivo, operação/ação e objetivo, sendo que o objeto e o motivo devem sempre coincidir dentro de uma atividade, "o objeto da atividade é seu motivo real[6]" (LEONTIEV, 1983, p. 83). Esse motivo pode tanto ser externo como ideal, percebidos ambos como existentes somente na imaginação, na ideia. O conceito da atividade está necessariamente relacionado ao conceito de motivo, a atividade somente existe mediante o objetivo, pois "podemos dizer que um sujeito se encontra em atividade quando o objetivo de sua ação coincide com o motivo de sua atividade, e esta deverá satisfazer uma necessidade do indivíduo e do grupo em sua relação com o mundo, procurando atingir um objetivo" (MARCO, 2009, p. 28).

Sobre a ação, Leontiev (1983, p. 83), a define como

> o processo que se subordina à representação daquele resultado que haverá de ser alcançado, quer dizer, o processo subordinado a um objetivo consciente. Do mesmo modo que o conceito de motivo se relaciona com o conceito de atividade, assim também o conceito de objetivo se relaciona com o conceito de ação[7].

---

[5] Tradução livre que faço de "la actividad en su forma inicial y principal es la actividad práctica sensitiva mediante las cuales personas entran en contacto práctico con los objetos del mundo circundante, experimentan en sí su resistencia, influyen sobre ellos, subordinando se a sus propiedades objetivas".

[6] Tradução livre que faço de "el objeto de la actividad es su motivo real".

[7] Tradução livre que faço de "al proceso que se subordina a la representación de aquel resultado que habrá de ser alcanzado, es decir, el proceso subordinado a un objetivo consciente. Del mismo modo que el concepto de motivo se relaciona con el concepto de actividad, así también el concepto de objetivo se relaciona con el concepto de acción".

A ação orienta-se para um objetivo, "está relacionada aos objetivos conscientes para os quais ela se dirige, a operação está relacionada com as condições da ação, isto é, as operações constituem as formas de realização de uma ação" (MARCO, 2009, p. 28).

Para acompanharmos estas ideias, recorremos ao clássico exemplo sobre atividade: a caçada primitiva coletiva.

> A caçada coletiva é a atividade, a caça o seu **objeto**, e a fome da presa é o seu **motivo**. Quando os batedores fazem barulho para assustar o veado, o bater das suas mãos é uma **operação**, e o bater como um todo é uma **ação** dentro da atividade da caça, motivada pela fome a ser satisfeita pela realização da atividade. Essa ação de fazer barulho tem como objetivo assustar o veado. No entanto, o objetivo contradiz o objeto e o motivo da atividade, que é apanhar o animal e distribuir e consumir a comida. A ação dos batedores é parte da atividade na base do seu saber consciente de que eles assustam o veado para que ele possa ser apanhado. Isto implica que a **consciência** humana tem um aspecto representacional mediador e mobilizador. A ação dos batedores só é possível na condição de representar a ligação entre o objetivo da sua ação e o motivo da atividade cooperativa. Eles precisam ser capazes de representar relações entre objetos, mesmo sendo irrelevantes para as suas necessidades reais, ou então eles continuarão simplesmente por si próprios e dessa forma muitas vezes falhando na obtenção do objeto. As suas consciências específicas e particulares são constituídas através do seu conteúdo, o qual tem como elementos os significados. Através dos **significados** eles são capazes de representar a relação entre o motivo e o objetivo da ação; desta forma eles implicam-se na atividade; faz sentido para os batedores. Uma atividade distingue-se de outra principalmente pelo seu objeto e motivo. Isto pode ser a chave para nos apercebermos do desenvolvimento da atividade da seguinte forma. Se, por exemplo, um batedor descobrir que é divertido bater, se ele começa a bater pelo seu belo prazer, ele está motivado pelo bater; o bater é um objeto apropriado; ele produz uma nova atividade a partir de uma antiga ação. Uma ação pode, portanto, desenvolver-se numa atividade pela aquisição de um motivo, e a nova atividade pode ela própria subdividir-se num conjunto de ações. Por outro lado, uma atividade pode tornar-se uma ação se o seu motivo se desvanece, e pode integrar-se noutra atividade. Da mesma forma, uma ação pode evoluir para uma operação, capaz de cumprir várias ações (LEONTIEV, 1983, p. 76).

Leontiev (1978) corrobora com as ideias sobre pensamento e linguagem de Vigotski. O conhecimento humano é gerado pela atividade intelectual, donde é chamado de pensamento o "processo de reflexo consciente da realidade, nas suas propriedades, ligações e relações objectivas, incluindo mesmo os objetos inacessíveis à percepção sensível imediata" (LEONTIEV, 1978, p. 84). Para exemplificar, (LEONTIEV, 1978) cita o fato de mesmo não enxergando os raios ultravioletas, reconhecemos sua existência e propriedades. O pensamento humano surge pelo fato de sermos capazes de ações independentes orientadas com determinada intencionalidade para um fim podendo esta "posteriormente tornar-se actividade independente, capaz de se transformar numa actividade totalmente interna, isto é, mental" (LEONTIEV, 1978, p. 84).

A linguagem é, por esse autor, abordada como produto da coletividade, da ação humana, isto é, a partir de uma necessidade do homem.

> A linguagem não desempenha apenas o papel meio de comunicação entre os homens, ela é também um meio, uma forma da consciência e do pensamento humanos, não destacado ainda da produção material. Torna-se a forma e o suporte da generalização consciente da realidade. Por isso, quando, posteriormente, a palavra e a linguagem se separam da actividade prática imediata, as significações verbais são abstraídas do objecto real e só podem, portanto, existir como facto de consciência, isto é, como pensamento (LEONTIEV, 1978, p. 87).

As significações atribuídas na atividade a um dado objeto ou fenômeno, são descobertas “num sistema de ligações, de interações e de relações objetivas” (LEONTIEV, 1978, p. 94), sendo estas refletidas e fixadas na linguagem. Sendo assim, a significação torna-se a forma pela qual o homem irá assimilar a experiência humana generalizada e refletida. Nas palavras de Leontiev (1978, p. 95), “a significação mediatiza o reflexo do mundo pelo homem na medida em que ele tem consciência deste, isto é, na medida em que o seu reflexo do mundo se apoia na experiência da prática social e a integra”. A significação trata de um reflexo da realidade que nos cerca, independentemente da nossa relação individual com tal realidade e buscamos, por meio da significação, a apropriação dos objetos, fenômenos da realidade humana, como nos afirma Leontiev (1978, p. 96) que nos diz que

> a significação é o reflexo da realidade independente da relação individual ou pessoal do homem a esta. O homem encontra um sistema de significações pronto, elaborado historicamente, e apropria-se dele tal como se apropria de um instrumento, esse precursor material da significação. O fato propriamente psicológico, o fato da minha vida, é que eu me aproprie ou não de uma dada significação, em que grau eu a assimilo e também o que ela se torna para mim, para minha personalidade; este último elemento depende do sentido subjetivo e pessoal que esta significação tenha para mim.

Para apropriar-se dos objetos ou dos fenômenos, produtos do desenvolvimento histórico, Leontiev (1978, p. 268) propõe a aquisição de instrumentos, “produto da cultura material que leva em si, da maneira mais evidente e mais material, os traços característicos da criação humana”. O instrumento torna-se então um objeto social, onde são incorporadas operações de trabalho historicamente elaboradas, o que nos leva a inferir que o instrumento é o meio que permite ao homem transformar o objeto da atividade.

Dando continuidade ao conceito de atividade e tendo em vista a necessidade de pensarmos em instrumentos para a organização de nosso trabalho docente, apresentamos a seguir o olhar de Moura (1992; 2000; 2001), acerca na atividade no contexto escolar.

## 1.3 Atividade orientadora de ensino: caminhando para a compreensão

Os estudos de Moura (1992; 2000; 2001) nos remetem à necessidade da organização do ensino de forma intencional, uma vez que compreendemos a escola "como lugar social privilegiado para a apropriação de conhecimentos produzidos historicamente" (MOURA et al., 2010, p. 89).

Moura (2000, p. 24) alega que a atividade "é regida por uma necessidade que permite o estabelecimento de metas bem definidas" onde o estabelecimento dos objetivos determinará estratégias para que se consiga cumprir tais metas, podendo-se lançar mão de diferentes ações e instrumentos. Incorporando ao conceito de atividade, volta seu olhar para o ensino e defende que a atividade de ensino tem como objetivo "organizar uma sequência de conteúdos escolares que permitem cumprir com determinado objetivo educacional" (MOURA, 2000, p. 22). Mais ainda, define atividade orientadora de ensino (AOE), como

> aquela que se estrutura de modo a permitir que sujeitos interajam, mediados por um conteúdo, negociando significados, com o objetivo de solucionar coletivamente uma situação-problema. É atividade orientadora porque define elementos essenciais da ação educativa e respeita a dinâmica das interações que nem sempre chegam a resultados esperados pelo professor. Este estabelece os objetivos, define as ações e elege os instrumentos auxiliares de ensino, porém não detém todo o processo, justamente porque aceita que os sujeitos em interação partilhem significados que se modificam diante do objeto de conhecimento em discussão (MOURA, 2002, p. 155).

Sintetizando os componentes centrais da AOE, na figura 1, temos:

**Figura 1: AOE: relação entre atividade de ensino e atividade de aprendizagem**


Fonte: Moraes, 2008, p. 116

Assim, entendemos que a AOE é concebida como uma unidade formadora, entre as atividades de ensino e as de aprendizagem.

> A Atividade Orientadora de Ensino tem uma necessidade: ensinar; tem ações: define o modo ou procedimentos de como colocar os conhecimentos em jogo no espaço educativo; elege instrumentos auxiliares no ensino: os recursos metodológicos adequados a cada objetivo e ação (livro, giz, computador, ábaco, etc.). E, por fim, os processos de análise e síntese, ao longo da atividade, são momentos de avaliação permanente para quem ensina e aprende (MOURA, 2001, p. 155).

O professor, ao se colocar em atividade de ensino, continua apropriando-se de conhecimentos teóricos, organizando suas ações, pois “a atividade de ensino quase sempre está associada à ideia de busca do professor por um modo de fazer com que o estudante aprenda um determinado conteúdo escolar” (MOURA, 2000, p. 23), fomentando a atividade de aprendizagem, atividade essa, que pode permitir a apropriação dos conhecimentos teóricos. Assim:

> Os elementos característicos da AOE (necessidades, motivos, ações, operações) permitem que ela seja elemento de mediação entre a atividade de ensino e a atividade de aprendizagem. Logo, a atividade de ensino e a atividade de aprendizagem só podem ser separadas para fins de explicação didática, entretanto, o motivo de ambas deve coincidir para que sejam concretizadas. [...] Não há sentido na atividade de ensino se ela não se concretiza na atividade de aprendizagem, por sua vez, não existe a atividade de aprendizagem intencional se ela não se dá de forma consciente e organizada por meio da atividade de ensino (MOURA et al., 2010, p. 100).

A AOE, em seu aspecto metodológico, desenvolve-se a partir de três momentos: a síntese histórica do conceito, o problema desencadeador de aprendizagem e a síntese da solução coletiva (PERLIN, 2014). Acreditamos que, ao passar por tais momentos, possibilita-se a criação de significados por parte dos sujeitos envolvidos, pois tal criação "parece estar estritamente ligada ao fato de o sujeito ter um motivo, estabelecer um conjunto de ações para realizar o que se propõe e avaliar os seus atos para inferir sobre a validade dos mesmos diante dos êxitos alcançados" (MOURA; LANNER DE MOURA, 1998, p. 12).

A Síntese Histórica do Conceito (SHC) perpassa pelo momento onde o professor apropria-se da gênese do conceito matemático elaborado ao longo da história da humanidade. Nesse sentido, recorremos a Kopnin (1978) que afirma que

> o estudo da história do desenvolvimento do objeto cria, por sua vez, as premissas indispensáveis para a compreensão mais profunda de sua essência, razão porque, enriquecidos da história do objeto, devemos retomar mais uma vez a definição de sua essência, corrigir, completar e desenvolver os conceitos que o expressam. Deste modo, a teoria do objeto fornece a chave do estudo de sua história, ao passo que o estudo da história enriquece a teoria, corrigindo-a, completando-a e desenvolvendo-a (KOPNIN, 1978, p. 186).

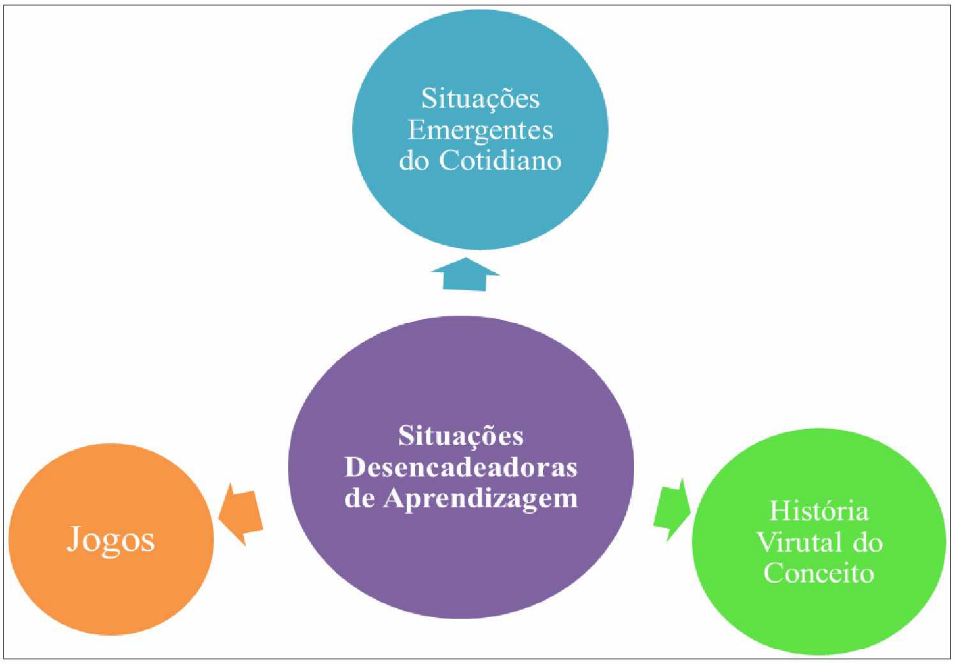
As situações desencadeadoras de aprendizagem (SDA) são caracterizadas como o momento onde o estudante é convidado a resolver um problema desencadeador de aprendizagem. Elas permitem ao professor proporcionar ao estudante a necessidade de apropriação do conceito, "de modo que suas ações sejam realizadas em busca da solução de um problema que o mobilize para a atividade de aprendizagem – a apropriação dos conhecimentos" (MOURA et al., 2010, p. 101).

Mediante o movimento das SDA, contemplando a gênese do conceito, salientamos que essas devem buscar "explicitar a necessidade que levou a humanidade à construção do referido conceito, como foram aparecendo os problemas e as necessidades humanas em determinada atividade e como os homens foram elaborando as soluções ou síntese no seu movimento lógico-histórico" (MOURA et al., 2010, p. 104). O estudante, a partir de suas interações coletivas, pode potencializar a apreensão do conceito ou a atribuição de nova qualidade para o seu conhecimento. Nas palavras de Moura et al. (2010, p. 103):

> Na Atividade Orientadora de Ensino as necessidades, motivos, objetivos, ações e operações do professor e dos estudantes se mobilizam inicialmente por meio da situação desencadeadora de aprendizagem. Esta é organizada pelo professor a partir dos seus objetivos de ensino que, como dissemos, se traduzem em conteúdos a serem apropriados pelos estudantes no espaço de aprendizagem. As ações do professor serão organizadas inicialmente visando colocar em movimento a construção da solução da situação desencadeadora de aprendizagem. Essas ações, por sua vez, ao serem desencadeadas, considerarão as condições objetivas para o desenvolvimento da atividade: as condições materiais que permitem a escolha dos recursos metodológicos, os sujeitos cognoscentes, a complexidade do conteúdo em estudo e o contexto cultural que emoldura os sujeitos e permite as interações sócio--afetivas no desenvolvimento das ações que visam o objetivo da atividade – a apropriação de certo conteúdo e do modo geral de ação de aprendizagem.

Moura e Lanner de Moura (1998) trazem os jogos, as situações emergentes do cotidiano e a história virtual do conceito como possíveis recursos metodológicos para as SDA, conforme sistematizado na figura 2:

**Figura 2: Recursos Metodológicos de uma SDA**




Fonte: Sistematização da Pesquisadora

Acreditamos que não será apenas pela utilização do jogo como recurso metodológico que podemos garantir a apropriação do conhecimento. O jogo para se constituir em atividade de aprendizagem “deve cumprir o papel de auxiliar no ensino do conteúdo, propiciar a aquisição de habilidades, permitir o desenvolvimento operatório do sujeito” (MOURA, 1992, p. 47).

Moura (1992) salienta ainda a importância do cuidado do professor em relação ao jogo, onde sua intenção deva ser a do jogo auxiliar no processo de apreensão do conceito matemático, colocando o estudante frente a “uma situação-problema semelhante à vivenciada pelo homem ao lidar com conceitos matemáticos” (MOURA; LANNER DE MOURA, 1998, p. 12).

Moura (1992) classifica os jogos em dois blocos: o jogo desencadeador de aprendizagem e o jogo de aplicação.

> Quem vai diferenciar estes dois tipos de jogo não é o brinquedo, não é o jogo, e sim a forma como ele será utilizado em sala de aula. Para ser mais preciso: é a postura do professor, a dinâmica criada e o objetivo estabelecido para determinado jogo que vão colocá-los numa ou noutra classificação (MOURA, 1992, p. 49).

Ao jogo podemos, ainda, relacionar a resolução de problemas (MOURA, 1992), gerando assim uma necessidade para o estudante na busca da solução ao problema apresentado, constituindo-se, dessa forma, em atividade. A resolução de problemas apresenta duas fases, sendo a primeira referente à possibilidade de se ensinar um conteúdo novo, isto é, “pela estratégia de resolução de problemas podemos mostrar ao estudante como o conhecimento é construído” (MOURA, 1992, p. 48); a segunda, refere-se à possibilidade de desenvolver habilidades para encontrar a solução de problemas análogos.

Por situações emergentes do cotidiano, Moura e Lanner de Moura (1998) compreendem as situações que podem ser trazidas pelos próprios estudantes para a sala de aula, mediante suas experiências pessoais. Com isso, o professor pode, intencionalmente, expor o estudante um ambiente dotado de situações onde se gera a necessidade de buscar soluções. “A problematização de situações emergentes do cotidiano possibilita à prática educativa a oportunidade de colocar a criança diante da necessidade de vivenciar a solução de problemas significativos para ela” (MOURA; LANNER DE MOURA, 1998, p. 14).

A história virtual do conceito é definida por Moura et al. (2010) como uma história que coloca o estudante diante de uma situação semelhante àquela vivida por nossos antepassados historicamente, podendo ser

> compreendida como uma narrativa que proporciona ao estudante envolver-se na solução de um problema como se fosse parte de um coletivo que busca solucioná-lo, tendo como fim a satisfação de uma determinada necessidade, à semelhança do que

> pode ter acontecido em certo momento histórico da humanidade. [...] o significado de virtual é encontrado ao se apresentar um problema na situação desencadeadora de aprendizagem que possua todas as condições essenciais do conceito vivenciado historicamente pela humanidade (MOURA et al., 2010, p. 105).

Moura e Lanner de Moura (1998) nos esclarecem que o objetivo principal da história virtual do conceito é situar o estudante historicamente, possibilitando a ele refletir sobre a conduta dos seus antepassados na formação dos conhecimentos tão comumente utilizados pela sua geração, buscando, assim, que o estudante faça parte do processo de produção do conhecimento da humanidade. A história virtual do conceito constitui-se de

> uma proposta metodológica que busca responder eficientemente por esta formação em que se incorpora o valor do conhecimento como elemento propulsor de busca de novos conhecimentos e que procura colocar em prática o pressuposto educacional de que é necessário, fazer com que a criança perceba o valor do conhecimento produzido na humanidade como elemento de sua formação de cidadania (MOURA; LANNER DE MOURA, 1998, p. 14).

Difere-se, assim, da ação de contar a história da matemática, por colocar os estudantes em uma situação-problema semelhante à vivida pela humanidade em algum momento de nossa história. Seguindo regras para resolvê-la, os estudantes estarão no movimento de expor seus conhecimentos individuais, em busca de uma solução coletiva, satisfazendo as exigências da situação-problema.

Assim, acreditamos que a SDA, na perspectiva da AOE é entendida como uma situação planejada e organizada pelo professor. Encontramos aproximação desta compreensão com a atividade computacional de ensino definida por Marco (2009, p. 40), onde exista

> a intencionalidade de propor para o aluno atividades de aprendizagem de modo que este tenha um motivo que mobilize suas ações para aprender. Tais atividades podem desencadear um novo conhecimento para o aluno, pois elas geram neste uma necessidade que, a partir dos conhecimentos já elaborados e assimilados, poderão proporcionar-lhe um conhecimento diferente do inicial. O aluno poderá, ainda, desenvolver significados próprios para o conceito envolvido, que o levem a melhor apreender o mundo em que vive e adquirir novos instrumentos para intervir em seu meio cultural.

Mediante o exposto, inferimos que a AOE pode potencializar nova qualidade à atividade de aprendizagem desenvolvida pelo estudante, na qual este poderá encontrar um motivo, gerado pela necessidade apresentada pelo professor em sua atividade de ensino, para apreender um conceito.

Por meio da AOE o professor interage com os estudantes e, juntos, corroboram para a Síntese da Solução Coletiva (SSC), sendo esse momento caracterizado como coletivo obtendo-se uma solução a partir do compartilhamento das ações.

Na próxima seção faremos uma breve discussão acerca de nossa compreensão do que Davidov (1982; 1987) define como conhecimento teórico.

## 1.4 Conhecimento teórico: as ideias de Davidov

Vasily Vasilovich Davidov, de origem russa, doutor em psicologia, se dedicou às pesquisas relativas ao enfoque histórico-cultural na psicologia e na didática. Davidov também esteve preocupado em estudar sobre o desenvolvimento do sujeito no ambiente escolar.

Mediante nossos estudos, notamos a importância da apropriação do conhecimento teórico, uma vez que este pode proporcionar a compreensão de novos significados. Foi possível perceber também o cuidado necessário em organizar a forma de como desenvolver no ambiente escolar os conhecimentos teóricos.

Ao organizar o ensino, o professor lança mão dos conceitos que acredita serem relevantes aos estudantes ou à realidade em que se encontram. Para que ocorra de fato a apreensão desse conhecimento, se faz interessante que compreendamos a forma como é assimilado o conteúdo escolar e o tipo de pensamento que é formado pelo estudante. Davidov (1982) aponta-nos a necessidade de pensarmos três formas principais do pensamento: generalização, abstração e conceito.

A generalização pode ser entendida como o movimento que mostra as características comuns de uma dada situação, objeto ou fenômeno, em relação ao seu todo, pois

> no caso da generalização, por um lado, tem lugar a busca e a designação com uma palavra de determinado atributo *invariante* entre a diversidade de objetos e seus atributos; e por outro lado, a identificação dos objetos da diversidade dada com a ajuda da característica invariante escolhida[8] (DAVYDOV, 1982, p. 13).

---

[8] Tradução livre que faço de “En el caso de la generalización, por una parte, tiene lugar la búsqueda y el nombramiento mediante la palabra de un cierto *invariante* entre la diversidad de objetos y sus atributos; y por otra, la identificación de los objetos de la diversidad dada con ayuda del invariante escogido”.

Assim, “com base em um grande número de fatos adequadamente selecionados, nasce a ideia abstrata, generalizadora, de um dos atributos que estão associados ao conceito[9]” (DAVÝDOV, 1982, p. 15).

Por meio da generalização, temos a ideia de abstração:

> separar como geral uma certa qualidade implica desgarrá-la de outras qualidades, o que permite ao [aluno] transformar a qualidade geral em um objeto independente e singular de seus atos subsequentes (o atributo geral se designa com algum signo: vocábulo, desenho gráfico, etc.). O conhecimento do geral, sendo resultado da comparação e de sua fixação por meio de um signo, constitui sempre algo *abstrato*, não concreto, *imaginável*[10] (DAVÝDOV, 1982, p. 17).

A abstração pode ser compreendida como a separação do geral e sua confrontação com o particular, pois, ao separar mentalmente os atributos comuns e formar grupos com objetos, o estudante estará abstraindo as características do objeto das suas relações com qualquer outro.

Davidov (1987) se refere a situações onde os professores consideram que os conceitos podem se formar, por meio da generalização e abstração, quando, por exemplo, solicitam aos estudantes observarem objetos e, a partir de tais observações, exporem seus resultados. Assim, a constituição da generalização se dará por meio da intuição e da percepção, algo criticado pelo autor, pois o conhecimento desenvolvido

> tem um caráter classificador, catalisador e assegura a orientação da pessoa no sistema de conhecimentos já acumulados sobre as particularidades e os traços externos de objetos e fenômenos isolados da natureza e da sociedade. Tal orientação é indispensável para fazeres cotidianos, durante o cumprimento de ações laborais rotineiras; porém é absolutamente insuficiente para assimilar o espírito autêntico da ciência contemporânea e os princípios de uma relação criativa, ativa e de profundo conteúdo em face a realidade[11] (DAVÍDOV, 1987, p. 144).

Portanto, tal conhecimento possui apenas o caráter empírico, não possibilitando de fato a apreensão de um conceito, pois, em determinado estágio, não serão possíveis serem

---

[9] Tradução livre que faço de “Sobre la base de un gran número de hechos adecuadamente seleccionados nasce la idea abstracta, generalizadora, de uno de los atributos que los asocian”.

[10] Tradução livre que faço de “Separar como general una cierta cualidad implica desgajarla de otras cualidades, lo que permite al niño transformar la cualidad general en objeto independiente y singular de sus actos subsiguientes (el atributo general se designa con algún *signo*: vocablo, diseño gráfico, etc.). El conocimiento de lo general, siendo resultado del hecho comparativo y de su fijación en el signo, constituye siempre algo *abstracto, inconcreto, imaginable*”.

[11] Tradução livre que faço de “tiene un carácter clasificador, cataloguizador y asegura la orientación de la persona en el sistema de conocimientos ya acumulados sobre la particularidades y rasgos externos de objetos y fenómenos aislados de la naturaleza y la sociedad. Tal orientación es indispensable para quehaceres cotidianos, durante el cumplimiento de acciones laborales rutinarias; pero es absolutamente insuficiente para asimilar el espíritu auténtico de la ciencia contemporánea y los principios de una relación creativa, activa y de profundo contenido hacia la realidad”.

observadas determinadas características dos objetos ou fenômenos, fazendo-se necessário desenvolvermos o conhecimento teórico para a apreensão de conceitos. Estamos entendendo conceito por "toda generalidade abstrata expressa em palavras[12]" conforme exposto por Davidov (1982, p. 297).

Apresentamos no quadro da página seguinte (Quadro 1), um paralelo entre conhecimento empírico e conhecimento teórico:

**Quadro 1: Comparação entre o conhecimento empírico e o conhecimento teórico**

| Conhecimento Empírico | Conhecimento Teórico |
|---|---|
| Elaborado quando se compara os objetos às suas representações, valorizando as propriedades comuns dos objetos. | Análise de papel e da função de uma certa relação entre as coisas no interior de um sistema. |
| A comparação entre os objetos e suas representações torna possível a generalização formal das propriedades dos objetos, a qual, por sua vez, permite situar objetos específicos no interior de uma dada classe formal, independentemente da existência de relações entre esses objetos, ou da ausência de tais ligações. | Procura-se saber qual tipo de relação entre classes; caracteriza, a um tempo, um representante de uma classe e um objeto em particular. |
| Baseia-se na observação, refletindo apenas as propriedades exteriores dos objetos e apoiando-se inteiramente nas representações concretas. | Oriundo da transformação dos objetos, refletindo as relações entre as suas propriedades e suas ligações internas. Supera as representações sensoriais. |
| A propriedade formal comum, construída a partir da comparação entre os objetos, é análoga às propriedades específicas dos objetos. | Determina a ligação entre uma relação geral com as suas manifestações concretas, ou seja, é o elo entre o geral e o particular. |
| É concretizado por meio de exemplos relativos a uma certa classe formal. | A concretização exige a transformação do saber em uma teoria desenvolvida por meio de uma dedução, e uma exemplificação das manifestações concretas do sistema, a partir de uma base fundamental. |
| É uma palavra, um termo, que serve para fixar os resultados. | É expresso, a princípio, por diferentes modos de atividade intelectual e, em segundo momento, por diferentes sistemas semióticos. |

Fonte: Adaptado de Rubtsov, 1996, pp. 130-131

Acreditamos na importância do conhecimento teórico por este fornecer condições para a apropriação dos conhecimentos historicamente construídos, sendo este parte da atividade de aprendizagem.

[12] Tradução livre que faço de "[...] toda generalidad abstracta expresada en palabras".

Notamos ainda, pelo quadro, que a generalização e a abstração, concebidos no conhecimento empírico, permitem diferenciar, classificar com outros termos os objetos e fenômenos, não abarcando a possibilidade da formação de novos conhecimentos. Conforme nos fala Davidov (1982, p. 93), "o esquema empírico de generalização e formação do conceito não fornece meios para romper precisamente as peculiaridades do próprio objeto substancial, o nexo interno de todos os seus aspectos[13]".

Acerca do conhecimento científico (conhecimento teórico) e os nexos internos, Davidov (1982, p. 105), fala-nos que

> o conhecimento científico não é a simples continuação, aprofundamento e expansão da experiência diária de homens. Requer que se elaborem meios especiais de abstração, análise única e generalização que permite definir os nexos internos das coisas, suas essências; requer maneiras peculiares de "idealização" dos objetos de conhecimento[14].

Assim, entendemos que os nexos internos, permitem a aquisição do conhecimento por estes mobilizarem o cognitivo do sujeito, não considerando apenas sua percepção ou intuição acerca da história que o constituiu.

Por fim, podemos inferir que os nexos internos possibilitam "a revelação do caráter geral de uma relação e por consequência o seu aspecto de generalidade[15]" (DAVÝDOV, 1982, p. 353).

Buscamos nesse capítulo apresentar nossos estudos acerca da formação do conhecimento teórico, mediante uma organização do ensino que coloque o professor em atividade de ensino e o estudante em atividade de aprendizagem, ambos em um ambiente de colaboração, buscando a apreensão dos conceitos. Para tanto, entendemos que a necessidade de apropriação do conhecimento gera a atividade, caminhando para a formação do conhecimento teórico.

Consideramos que as situações desencadeadoras de aprendizagem que foram propostas aos estudantes neste estudo se situam na Zona de Desenvolvimento Iminente, proposta por Vigotski (PRESTES, 2010), uma vez que elas se configuram em problemas a

---

[13] Tradução livre que faço de "el esquema empírico de generalización y formación del concepto no aporta medios para desgajar precisamente las peculiaridades substanciales del propio objeto, el nexo interno de todos sus aspectos".

[14] Tradução livre que faço de "El conocimiento científico no es la simple continuación, profundización y ampliación de la experiencia cotidiana de los hombres. Requiere que se elaboren medios especiales de abstracción, de singular análisis y generalización que permita fijar los nexos internos de las cosas, sus esencias; requiere vías peculiares de "idealización" de los objetos del conocimiento".

[15] Tradução livre que faço de "[...] una cierta relación peculiar viene a revelar su carácter general y se eleva hasta el nivel de generalidad".

serem resolvidos de forma coletiva e com a mediação da professora pesquisadora, visando que os estudantes se apropriem de um novo conhecimento.

No próximo capítulo apresentamos um estudo do caminho histórico em que se constituiu a álgebra, nas diferentes civilizações com seus principais precursores.

# 2. O CAMINHO HISTÓRICO DA ÁLGEBRA

> *Pela sua atividade, os homens não fazem, senão, adaptar-se à natureza. Eles modificam-na em função do desenvolvimento das suas necessidades. Criam os objetos que devem satisfazer as suas necessidades e igualmente os meios de produção desses objetos, dos instrumentos às máquinas mais complexas (LEONTIEV, 1978, p. 265).*

No capítulo anterior, apresentamos as ideias de alguns estudiosos que estiveram à frente da Teoria Histórico-Cultural, enfatizando a produção do conhecimento por meio da coletividade, os elementos necessários para que se instituam as atividades de ensino e de aprendizagem e, por fim, os caminhos para que o conhecimento empírico torne-se conhecimento teórico.

Buscamos, neste capítulo, ampliar nossa compreensão acerca dos conceitos algébricos, o que nos levou à recorrer à sua construção histórica: o movimento do surgimento da álgebra e suas fundamentações. Para tanto, nos reportamos às ideias de Baumgart (1992); Boyer (1996); Eves (2002); Garbi (2009); Lanner de Moura e Sousa (2005); Lima, Takazaki e Moisés (1998).

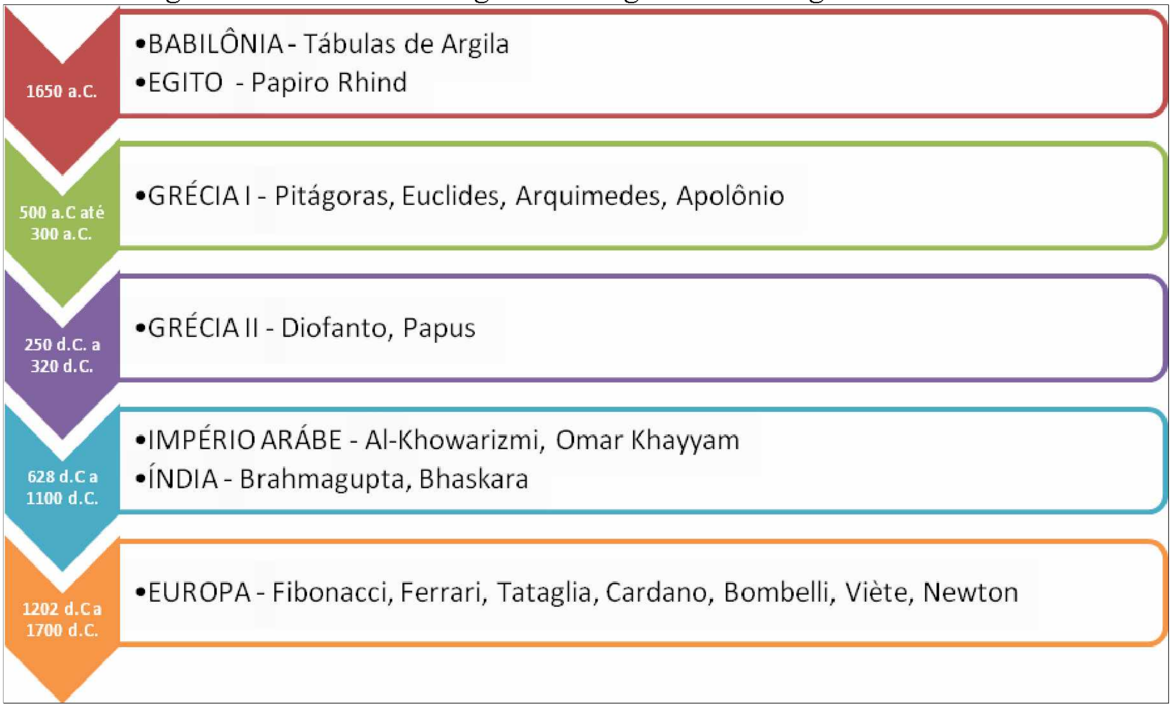
A inserção deste capítulo se deve pela necessidade de compreender, por meio da história da matemática, o movimento lógico histórico que deu origem aos conceitos algébricos, objeto de nosso estudo. Entendemos, ainda, que compreender esse movimento nos permitirá elaborar atividades de ensino que possam direcionar os estudantes à apropriação do conhecimento teórico.

## 2.1 O movimento de surgimento da álgebra

Segundo Baumgart (1992) a álgebra divide-se em duas fases: a Álgebra antiga (elementar) cujo estudo se refere às equações e métodos de resolvê-las e a Álgebra moderna (abstrata) que estuda as estruturas matemáticas – grupos, anéis e corpos. Nessa pesquisa, por estarmos interessadas no processo de formação do pensamento algébrico e do conceito de equação de 1° grau, nos atentaremos ao percurso histórico da Álgebra elementar. Assim, nesta sessão, dialogaremos com os autores Baumgart (1992); Boyer (1996); Eves (2002); Garbi (2009); Lanner de Moura e Sousa (2005); Lima, Takazaki e Moisés (1998) acerca do processo de construção desse movimento.

A linha do tempo (Figura 3) a seguir apresenta o fluxo de surgimento da álgebra nas diferentes civilizações estudadas:

**Figura 3: Linha Cronológica do surgimento da álgebra**




Fonte: Sistematização da pesquisadora

Eves (2002) nos relata que Nesselmann (1842, p. 206) caracterizou três estágios no movimento da álgebra. O primeiro deles, a *álgebra retórica*, "em que os argumentos da resolução de um problema são escritos em prosa pura, sem abreviações ou símbolos específicos", pertence a um período anterior a Diofanto, cerca de 250 d.C. Neste estágio da álgebra, "há o uso de descrições em linguagem comum para resolver tipos particulares de problemas e para suprimir a falta de símbolos ou sinais especiais para representar incógnitas" (LANNER DE MOURA; SOUSA, 2005, p. 14); o segundo estágio refere-se à *álgebra sincopada*, no período entre 250 d.C. e 1600 d.C., "em que se adotam abreviações para algumas das quantidades e operações que se repetem mais frequentemente" (EVES, 2002, p. 206) e, por fim, o último estágio, chamado de *álgebra simbólica*, "em que as resoluções se expressam numa espécie de taquigrafia matemática formada de símbolos que aparentemente nada têm a ver com os entes que representam" (EVES, 2002, p. 206), tendo seu início depois de Viète 1600 d.C. até os dias atuais. De acordo com Eves (2002) os estudos na Europa Ocidental permaneceram na álgebra retórica até o século XV, havendo de fato a imposição da álgebra simbólica na metade do século XVII. Compete aqui chamarmos a atenção de que até hoje não temos de fato uma uniformidade no uso de símbolos, por exemplo, “em alguns países europeus ‘+’ significa ‘menos’” (BAUMGART, 1992, p. 3).

Entre os babilônios, Eves (2002) destaca que a aritmética, próximo ao ano 2000 a.C., desenvolvera-se para uma álgebra retórica, seja pela resolução de equações quadráticas, ou até mesmo de equações cúbicas e biquadradas. Segundo Garbi (2009) os babilônios realizaram diversas descobertas matemáticas, tais como resolver equações de 1° e 2° graus, calcular áreas e volumes de certas figuras geométricas, das quais “não mais se faziam de maneira puramente intuitiva e contavam com o apoio de algum raciocínio dedutivo não formalizado, que desconhecemos” (GARBI, 2009, p. 11).

Tomemos um exemplo da álgebra praticada pelos babilônios:

> É um exemplo típico dos problemas encontrados em escrita cuneiforme[16], em tábulas de argila que remontam ao tempo do rei Hammurabi (1700 a.C.). A explanação, naturalmente, é feita em português; e usa-se a notação decimal indo--arábica em vez da notação sexagesimal cuneiforme.
> Comprimento, largura. Multipliquei comprimento por largura, obtendo assim a área: 252. Somei comprimento e largura: 32. Pede-se comprimento e largura.
> [Dado] 32 soma;
> 252 área.
> [Resposta] 18 comprimento, 14 largura.
> Segue-se do método: Tome metade de 32 [que é 16].
> 16 x16 = 256.
> 256 – 252 = 4
> A raiz quadrada de 4 é 2.
> 16 + 2 = 18 comprimento.
> 16 – 2 = 14 largura.
> [Prova] Multipliquei 18 comprimento por 14 largura.
> 18 x 14 = 252 área. (BAUMGART, 1992, pp. 4-5).

Garbi (2009) nos relata que os babilônios e egípcios não utilizavam da simbologia que hoje se faz tão corriqueira, apenas os números eram representados por símbolos, “os desenvolvimentos eram, em sua quase totalidade, expressos por palavras, uma forma de expressão que hoje é conhecida por ‘**álgebra retórica**’” (GARBI, 2009, p. 12).

A álgebra surgiu no Egito quase ao mesmo tempo em que na Babilônia, “mas faltava à álgebra egípcia os métodos sofisticados da álgebra babilônia” (BAUMGART, 1992, p. 6). Os problemas dos Papiros de Moscou e de Rhind datam de cerca de 1850 a.C. e 1650 a.C., em que, para resolver as equações lineares, esses povos usavam um “método de resolução consistindo em uma estimativa inicial seguida de uma correção final – um método ao qual os

[16] Escrita feita com o auxílio de objetos em formato de cunha.

europeus posteriormente deram o nome um tanto abstruso de 'regra da falsa posição'" (BAUMGART, 1992, p. 6).

Os egípcios utilizavam a palavra *ahá* para representar quantidades desconhecidas, "que significa monte, montão, foi criada pelos egípcios, para representar quantidades, sem, necessariamente, recorrer ao numeral" (LANNER DE MOURA; SOUSA, 2005, p. 15). A partir desta palavra, os povos egípcios pensaram sobre a incógnita.

> A criação egípcia marca o ponto de partida do desenvolvimento da linguagem matemática. Com ela, o pensamento matemático começa a desenvolver uma linguagem própria, diferente da linguagem usual das palavras. É, portanto, com a matemática egípcia, que a linguagem matemática começa a se separar da linguagem usual. Trata-se da linguagem matemática através de palavras, que apesar de ser um pequeno passo, quase despercebido por ainda usar palavras, foi importante no sentido de criar um vocabulário próprio – a língua da matemática. A linguagem Matemática através de Palavras é o primeiro passo da criação da linguagem especificamente matemática para o qual são escolhidas as palavras que mais direta e claramente expressam movimentos matemáticos (LIMA; MOISÉS, 2000, pp. 27-28).

Segundo Lanner de Moura e Sousa (2005) com o uso da álgebra retórica, o homem buscou representar, por meio de palavras, quantidades desconhecidas, sendo essa a primeira tentativa de representação, "Aqui, a função da palavra é equivalente à função do zero na aritmética, por assegurar que ali falta algo. A palavra representa a *casa* ou o valor desconhecido" (LANNER DE MOURA; SOUSA, 2005, p. 16).

A álgebra geométrica elaborada pelos gregos foi "formulada pelos pitagóricos (540 a.C.) e por Euclides (300 a.C.)" (BAUMGART, 1992, p. 6), em um momento em que esses povos acreditavam que a geometria encontrava-se descolada da aritmética, as verdades eram representadas a partir das formas, "os segmentos de reta são os elementos primários da álgebra geométrica. A partir deles foram se definindo todas as operações do cálculo: adição, subtração, multiplicação e divisão" (LANNER DE MOURA; SOUSA, 2005, p. 18). Temos que:

> A soma era representada como adição de segmentos. A diferença como eliminação de parte do segmento igual ao segmento subtraendo. A multiplicação conduzia à construção de representação bidimensional. O produto de **a** por **b** representava um retângulo com lados **a** e **b**. O produto de três segmentos formava paralelepípedo e não se podia considerar o produto maior de fatores. A divisão só podia ser efetuada quando o dividendo era maior do que a dimensão do divisor. Representava-se a divisão a partir do conceito de área (LANNER DE MOURA; SOUSA, 2005, p. 18).

De acordo com Boyer (1996), no período conhecido como Segunda Idade de Alexandria (250 a 350 d.C.) encontramos o maior algebrista grego, Diofanto de Alexandria, e seu destaque deve-se por ser o primeiro a apresentar uma álgebra sincopada.

Eves (2002) considera Diofanto como o maior responsável pelo desenvolvimento da álgebra, afirmando que "pode ter sido ele o primeiro a dar os primeiros passos rumo a uma notação algébrica" (EVES, 2002, pp. 208-209). Em sua obra intitulada *Arithmetica,* Diofanto dedica-se a resolução de 130 problemas que levam a equações de 1° e 2° graus, apresentando abreviações para incógnitas.

> Nossa palavra "aritmética" provém da palavra grega *arithmetike* que se compõe de *arithmos* ("número") e *techne* ("ciência"). Heath assinalou bastante convicentemente que o símbolo usado por Diofanto para a incógnita provavelmente derivava por fusão das duas primeiras letras gregas da palavra *arithmos*, a saber α e ρ. Com o tempo esse símbolo veio a se parecer com o sigma final grego ς (EVES, 2002, p. 209).

Outro destaque a álgebra de Diofanto deve-se ao fato de que, enquanto a álgebra babilônica se "ocupava principalmente com soluções *aproximadas* de equações *determinadas* de até 3° grau, a *Arithmetica* de Diofanto dedicava-se à resolução exata de equações tanto *determinadas* quanto *indeterminadas*" (BOYER, 1996, p. 122), as ditas equações diofantinas, que são estudadas em cursos do Ensino Superior.

Ao nos dirigirmos para as civilizações hindus e árabes, recorremos a Hogben (1970), para nos auxiliar a entender a história das origens da álgebra entre esses povos que, segundo esse autor, possui três vertentes:

> A necessidade de criar regras de calcular mais simples ou algoritmos (a aritmética, no século XIII, era assim chamada, por ter como principal divulgador o algebrista árabe Al- Khowarizmi);
> A solução de problemas de caráter prático, que envolvessem o uso de números, isto é, a solução de equações;
> O estudo das séries, que revelou novas descobertas sobre as propriedades dos números naturais, levando ao início do desenvolvimento da chamada álgebra abstrata (HOGBEN, 1970, p. 64).

De acordo com Baumgart (1992) os mais importantes algebristas hindus foram Brahmagupta (628 d.C.) e Bhaskara (1150). Seus trabalhos buscavam achar todas as soluções inteiras possíveis para as equações indeterminadas, superando o trabalho de Diofanto, que almejava uma solução possível para as equações indeterminadas.

Eves (2002) revela que os hindus buscaram sincopar sua álgebra e para a adição usavam a justaposição, para a subtração colocavam um ponto sobre o subtraendo, a multiplicação escreviam como *bha* “primeira sílaba da palavra *bhavita*, ‘produto’” (EVES, 2002, p. 256) depois dos fatores, para a divisão, colocavam o divisor debaixo do dividendo e a raiz quadrada escreviam *ka* “da palavra *karana*, ‘irracional’” (EVES, 2002, p. 256) antes da quantidade.

Brahmagupta denota a incógnita por yā (de yāvattāvat, ‘tanto quanto’). Os inteiros conhecidos eram antecedidos de rū (de rūpa, ‘número puro’). De forma sincopada, no estilo de Brahmagupta, $5xy + \sqrt{35} - 12$, seria escrito da seguinte maneira:

**Figura 4: Álgebra sincopada de Brahmagupta para a expressão $5xy + \sqrt{35} - 12$**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *ya* | *ka* | 5 | *bha* | *k(a)* 35 | *ru* | $\dot{12}$ |
| *x* | *y* | 5 | produto | irracional 35 | número “puro” | – 12 |

Fonte: Baumgart, 1992, p. 10

Nosso olhar agora se volta para o período arábico e, centrando nos estudos de al-Khowarizmi, deparamo-nos com a palavra álgebra, que “surge como uma variante latina da palavra árabe al-jabr (às vezes transliterada *al-jebr*), usada no título do livro, *Hisab al-jabr w'al-muqabalah*, escrito em Bagdá por volta do ano 825” (BAUMGART, 1992, p. 1). Uma tradução completa do título do livro é “ciência da restauração (ou reunião) e redução, mas matematicamente seria melhor ciência da transposição e cancelamento” (BAUMGART, 1992, p. 1). Neste livro, al-Khowarizmi sistematiza equações de 1° e 2° graus reduzindo-as a seis tipos básicos:

1. Quadrado igual à raiz;
2. Quadrado igual ao número;
3. Raiz igual a número;
4. Quadrado e raiz são iguais a número;
5. Quadrado e número são iguais a raiz;
6. Raiz e número são iguais a quadrado.

Boyer (1996, p. 157) considera que, devido aos seis casos apresentados, que “esgotam as possibilidades quanto a equações lineares e quadráticas que têm uma raiz positiva”, al-Khowarizmi mereça o título de “pai da álgebra”, uma vez que, “sua exposição era tão sistemática que seus leitores não devem ter tido dificuldade para aprender suas soluções” (BOYER, 1996, p. 157). Completa ainda que a obra está mais próxima da álgebra elementar de hoje que as obras de Diofanto e Brahmagupta, pois “o livro não se ocupa de problemas difíceis de análise indeterminada mas contém uma exposição direta e elementar da resolução de equações, especialmente de 2° grau” (BOYER, 1996, p. 156).

Lanner de Moura e Sousa (2005) fazem referência à pré-álgebra, como o período anterior a invenção da palavra álgebra englobando as álgebras retórica, sincopada e geométrica que acabamos de apresentar.

Em relação à álgebra simbólica, o sinal de igualdade apareceu pela primeira vez, em 1557, na obra de Robert Recorde, justificando o uso de um par de segmentos de reta paralelos como o símbolo de igualdade, “imaginando que nada pudesse ser mais igual que um par de retas gêmeas de mesmo comprimento” (LIMA; TAKAZAKI; MOISÉS, 1998, p. 12).

O matemático francês François Viète, introduziu o uso de vogais para representar incógnitas e consoantes para representar constantes, “antes de Viète era comum se usarem letras ou símbolos diferentes para as várias potências de uma quantidade. Viète usava a mesma letra, adequadamente qualificada [...] *A*, *A quadratum, A cubum*” (EVES, 2002, p. 309). Viète usava os símbolos “+” e “–” contudo, não possuía um símbolo para representar a igualdade, por exemplo: $5BA^2 - 2CA + A^3 = D$, para Viète escrevia-se “*B*5 in *A*quad – *C* plano 2 in *A* + *A*cubaequatur*D* solido. [...] usava o símbolo de = entre duas quantidades não para indicar igualdade, mas sim a diferença entre elas” (EVES, 2002, p. 310).

Lanner de Moura e Sousa (2005, p. 21) completam, ainda, que pensar a álgebra a partir de Viète significa “pensar a álgebra a partir da propriedade do número, que contém as coisas e a numeralidade do número, o número em geral”. As autoras trazem ainda que a lógica de Diofanto é numérica, enquanto que a lógica de Viète é de espécies, isto é, Viète nos permite um formalismo simbólico, permitindo que a álgebra seja usada por outras áreas do conhecimento como uma ferramenta.

> Foi o simbolismo pensado por Viète que possibilitou a escrita de expressões de equações e suas propriedades, a partir de fórmulas gerais. Os objetos das operações matemáticas passaram a ser não problemas numéricos e sim as próprias expressões algébricas. A característica do cálculo elaborado por ele é a arte. Tal característica permitiria a realização das descobertas matemáticas. Os símbolos elaborados sofreram modificações pelos matemáticos contemporâneos. (LANNER DE MOURA; SOUSA, 2005, p. 22).

No quadro a seguir (Quadro 2) podemos acompanhar a progressão das notações simbólicas.

**Quadro 2: Notações da álgebra simbólica**

| MATEMÁTICO | ANO | NOTAÇÃO | NOTAÇÃO ATUAL |
|---|---|---|---|
| Diofanto | 250 d.C. | $x^3$ 2 $x$8 – $x^2$ 5 1·4 = 44. | $2x^3 + 8x - (5x^2 + 4) = 44$ |
| Brahmagupta | 628 | ya v(a) 3 ya 10. | $3x^2 + 10x$ |
| Pacioli | 1494 | Trouame .I. n°.chegiōto al suōq̄drat° facia .12. | $x + x^2 = 12$ |
| Vander Hoecke | 1514 | 4Se. – 51Pri. – 30N ditisghelijc 45. | $4x^2 - 51x - 30 = 45$ |
| Ghaligai | 1521 | I □ e 32C° –320 numeri. | $x^2 + 32x = 320$ |
| Rudolff | 1525 | Sit I $\mathcal{y}$aequatus12 $\mathcal{H}$- 36 | $x^2 = 12x - 36$ |
| Cardano | 1545 | Cubusp̄ 6 rebus aequalis 20. | $x^3 + 6x = 20$ |
| Stifel | 1553 | 2$\mathcal{H}$A + 2 $\mathcal{y}$ aequata. 4335 | $2xA + 2x^2 = 4{,}335$ |
| Recorde | 1557 | 14. *H* +.15. • = 71. • | $14x + 15 = 71$ |
| Buteo | 1559 | I ◊ P 6ρ P 9 [ I ◊ P 3ρ P 24. | $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 3x + 24$ |
| Bombelli | 1572 | $\bar{1}$. p.$\bar{8}$. Eguale á 20. | $x^6 + 8x^3 = 20$ |
| Stevin | 1585 | 3② + 4 egalesà 2① + 4 | $3x^2 + 4 = 2x + 4$ |
| Viète | 1591 | I QC – 15QQ +85C - 225Q +274N aequatur 120. | $-15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x = 120$ |
| Harriot | 1631 | aaa – 3 bba == + 2ccc. | $x^3 - 3b^2x = 2c^3$ |
| Descartes | 1637 | yy∝ cy - *bcx*y +ay – ac. | |
| Wallis | 1693 | $x^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$ | |

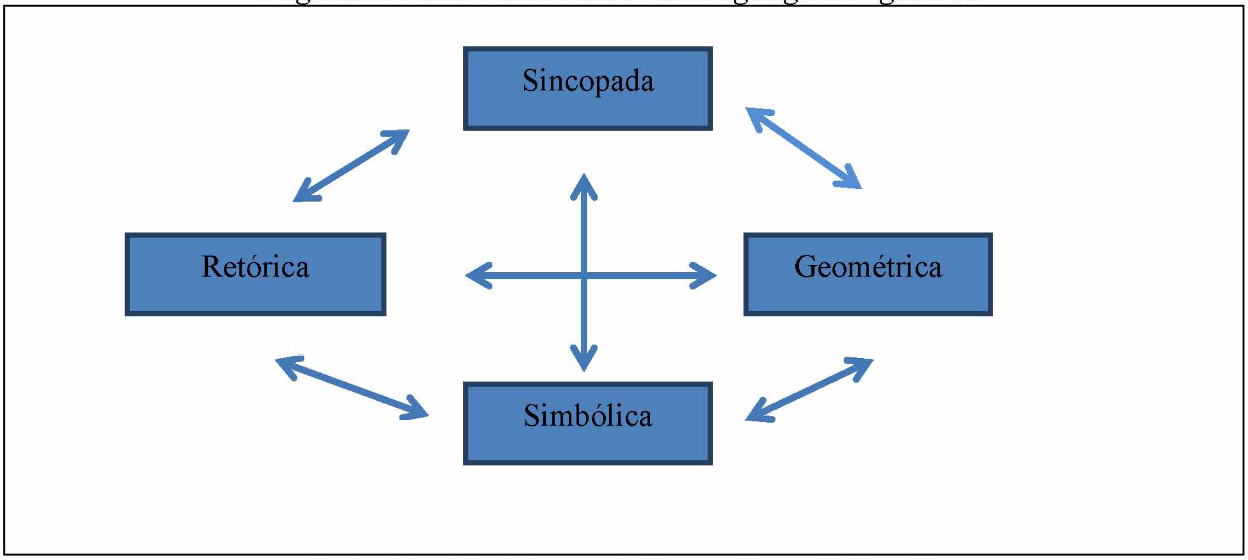
Fonte: Baumgart, 1992, p. 32

Viète proporcionou uma generalização da aritmética, na qual as letras representavam um número ainda desconhecido. Porém, o uso da letra alfabética, para designar a incógnita (número desconhecido) "liberou definitivamente a álgebra da escravidão do verbo" (LANNER DE MOURA; SOUSA, 2005, p. 23), uma vez que, ao se utilizar a notação literal, excluía-se a ambiguidade das interpretações das línguas humanas adotadas nas diferentes civilizações; o simbolismo algébrico torna possível uma linguagem única para todos os povos, sem espaço para equívocos de interpretações.

A álgebra de Viète representou uma mudança conceitual no período do Renascimento, permitindo elaborar fórmulas, contudo, diante do novo contexto econômico, político e social da época, houve necessidade de uma álgebra mais elaborada, a álgebra abstrata e "os objetos utilizados podem ser quaisquer (matrizes, vetores, tensores etc.) sobre os quais se definem certas operações que verificam umas determinadas propriedades, construindo-se a álgebra a partir de axiomas previamente definidos" (SOCAS et al., 1996, p. 40).

A seguir, apresentamos uma síntese do desenvolvimento das linguagens algébricas abordadas nesse estudo:

**Figura 5: Desenvolvimento da Linguagem Algébrica**




Fonte: Adaptado de Lanner de Moura e Sousa, 2005, p. 26

Diante do exposto, percebemos que os diferentes povos, buscaram criar e consolidar "regras simples e consistentes que regem a utilização dos números abstratos e os símbolos taquigráficos representativos dos verbos e das operações matemáticas" (HOGBEN, 1970, p. 319), as equações.

Na próxima sessão, apresentamos uma definição para o conceito de equações, o método da falsa posição dos egípcios e o método geométrico grego para resolver equações de 1° grau.

## 2.2 O movimento das equações

Nesta pesquisa, compreendemos o conceito de equação à luz das palavras de Lima, Takazaki e Moisés (1998, p. 13), "equação matemática é a sentença matemática referente a um problema algébrico particular[17], isto é, é toda sentença matemática que contém variáveis e é expressa por um sinal de igualdade".

Garbi (2009) define equações algébricas como aquelas em que a incógnita aparece apenas submetida às chamadas operações algébricas: soma, subtração, multiplicação, divisão, potenciação inteira e radiciação. Para o autor, são exemplos de equações algébricas:

[17] Um problema algébrico refere-se a toda situação que envolve a necessidade de se escrever uma sentença matemática utilizando variáveis. O problema algébrico particular é "todo o problema algébrico que se refere à determinação do valor numérico da variável numa situação particular dentro do movimento de variação" (LIMA; TAKAZAKI; MOISÉS, 1998, p. 4).

- $x + 4 = 13$;
- $ax^2 + bx + c = 0$;
- $my^5 - \sqrt{3}y = 4$;

Uma equação algébrica poderá assumir a qualidade de Equação Polinomial, quando estiver sob a forma canônica, isto é, $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0$ ($n$ inteiro e positivo), o maior expoente da incógnita é denominado o grau da equação. Por exemplo, para a equação $5x^5 + 3x^3 + 2 = 0$, o grau é 5. Contudo, nessa pesquisa, nosso objeto de estudo versa sobre equações algébricas lineares com uma variável, o que nos leva a recorrer a Cedro (2004, p. 74) que as define como

> aquelas nas quais as variáveis (as incógnitas) são monômios de primeiro grau. Uma definição mais formal seria a seguinte: toda equação que possa ser expressa pela forma $a_1x_1 = b$, em que $x_1$ é a incógnita e $a_1$ é um número, será chamada de equação linear com uma variável.

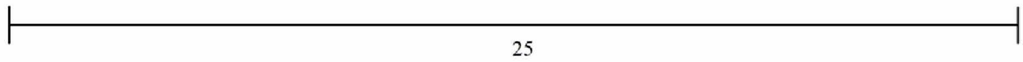
Como exemplo para a definição acima podemos citar: $7x - 3 = 4$ e, $6x_1 = 9$.

Buscando indícios de resolução de equações lineares ao longo do percurso histórico, encontramos que os primeiros registros foram encontrados cerca de 2000 a 1700 a.C. em tábulas de argila babilônicas e no papiro de Rhind, para tanto os egípcios utilizaram a ideia de Número Falso, ou método da Falsa Posição. Acompanhemos um exemplo, conforme proposto por Lima, Takazaki e Moisés (1998, p. 16):

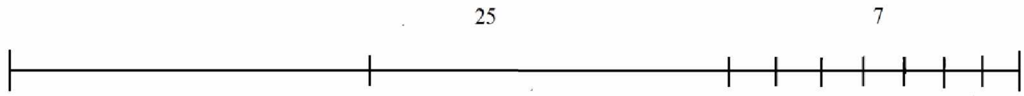
> Um montão e sua metade juntos somam 9. Qual é a quantidade?
> 1º Passo: Inicialmente eles passavam a sentença para a linguagem matemática.
> - Um número acrescido de sua metade é igual a 9.
> - Campo de variação: Reais.
>
> 2º Passo: Depois eles atribuíam ao número desconhecido, à incógnita, um valor específico, particular, provavelmente falso, que nos daria um momento particular diferente do que procuramos, isto é um resultado também falso. Esse resultado era comparado com o resultado que se pretende e, usando-se proporções chega-se à resposta correta.
> Por exemplo, atribuíam a incógnita o "valor falso" 20, e faziam os cálculos:
> - um número: 20
> - sua metade: <u>10</u> +
> - soma: 30
>
> A partir disto, usavam uma proporção para determinar o valor verdadeiro
>
> | | | |
> |---|---|---|
> | valor falso | 20 | um número (valor verdadeiro) |
> | resultado falso | 30 | 9 |
>
> Resolvendo essa proporção:
> $$\frac{20}{30} = \frac{\text{um número}}{9}$$
> $$\text{um número} = \frac{20.9}{30}$$
> $$\text{um número} = 6$$
> Assim a resposta é 6.

Já para os gregos, no período de 500 a 200 a.C., a álgebra era geométrica, "devido à sua dificuldade lógica com números irracionais e mesmo fracionários e suas dificuldades práticas com os numerais gregos" (BAUMGART,1992, p. 68). Então eles recorriam a construções geométricas, conforme já expusemos. Vejamos um exemplo, apresentado por Lima, Takazaki e Moisés (1998, pp. 18-19): O dobro de um número acrescido de 7 é igual a 25.

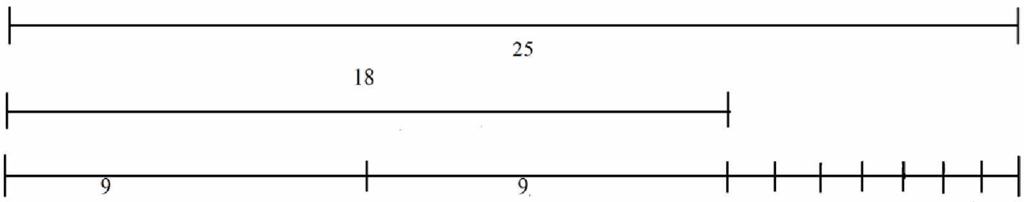
Inicialmente traçava-se uma medida igual ao resultado da equação:




Escrevia-se a sentença matemática dada:




Então, efetuavam-se os cálculos: 25 – 7 = 18 e, 18 ÷ 2 = 9




Assim, o número é 9.

Diante de todo o exposto, buscamos apresentar alguns movimentos que constituíram a álgebra simbólica da forma como a conhecemos hoje, bem como, alguns métodos para resolvermos equações algébricas lineares, ou as equações de 1° grau.

Ao considerarmos o ensino desta na educação básica, notamos a importância deste movimento se fazer presente na construção do conhecimento teórico dos estudantes, pois, ao longo do processo de formação da linguagem algébrica simbólica, a álgebra contém o movimento da vida a partir dos movimentos presentes nos problemas da vida das diversas civilizações, um movimento não linear, pautado na mutabilidade e fluência do pensar humano "presente nos estágios denominados de retórico, sincopado e geométrico - que leva ao pensamento flexível da realidade, elaborado pelas várias civilizações, nos diversos momentos históricos" (LANNER DE MOURA; SOUSA, 2005, p. 12).

No capítulo a seguir, apresentaremos uma discussão sobre a álgebra no ensino, dialogando com autores sobre algumas vertentes no que tange às concepções da educação algébrica, assim como buscamos estabelecer uma breve reflexão acerca do ensino de álgebra mediante as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais e algumas obras de Livros Didáticos.

# 3. ÁLGEBRA NO ENSINO FUNDAMENTAL

> *A álgebra é isso, é a extensão do limite corpóreo do homem na direção do movimento incessante do Universo (LIMA; TAKAZAKI; MOISÉS, 1998, p. 1).*

Nos capítulos anteriores, discutimos aspectos da Teoria Histórico-Cultural e a História da Álgebra. Nesse capítulo, abarcamos diferentes aspectos sobre o estudo da álgebra. Apresentamos, inicialmente, algumas concepções sobre a álgebra como propuseram Fiorentini, Miorim e Miguel (1993); Usiskin (1995); Lins e Gimenez (1997); Sousa (2004) e Sousa; Panossian e Cedro (2014). Posteriormente, nosso olhar volta-se para as discussões propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), a produção de pesquisas de Mestrado e Doutorado, durante o período de 2010 a 2014, e, por fim, o enfoque abordado em algumas obras de livros didáticos presentes na escola onde a proposta aconteceu.

## 3.1 Algumas concepções sobre a álgebra: o olhar para a literatura

Segundo Moura (2001) a natureza do conhecimento que o professor pretende ensinar indica uma perspectiva para se relacionar com os estudantes, um direcionamento para organizar o espaço de aprendizagem e o direcionamento para escolha dos instrumentos que possibilitarão uma melhor apreensão do conteúdo por parte dos estudantes.

Desta forma, assim como Moura (2001, p. 148), entendemos por conteúdos matemáticos “aqueles que permaneceram como patrimônio cultural, porque de algum modo, contribuem para a solução de problemas ainda relevantes para o convívio social”, adquirindo assim objetivo social aliado à história da humanidade para resolver problemas.

Vemo-nos, então, diante da necessidade de compreender melhor como o conteúdo matemático de álgebra fora produzido historicamente e as concepções existentes, a fim de melhor dimensioná-lo no contexto escolar, pois

> aprofundar-se no conteúdo é definir uma maneira de ver como este se relaciona com outros conhecimentos e como ele faz parte do conjunto de saberes relevantes para o convívio social. É também definidor de como tratá-lo em sala de aula, pois o professor, ao conhecer os processos históricos de construção dos conteúdos, os redimensiona no currículo escolar (MOURA, 2001, p. 149).

De posse de tal necessidade, visitando a literatura, encontramos Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) que apontam quatro concepções[18] sobre a álgebra:

- Processológica: conjunto de procedimentos específicos, técnicas algorítmicas ou procedimentos iterativos, para abarcar certos tipos de problemas, que são resolvidos pelo seguimento de uma sequência padronizada de passos; o pensamento algébrico não possui uma forma específica de linguagem para ser expresso.
- Linguístico-estilística: linguagem construída com o objetivo de expressar concisamente procedimentos específicos. Enfatiza a forma de expressão do pensamento algébrico em detrimento da forma como esse pensamento se manifesta, gerando uma distinção entre forma de pensamento e forma de expressão desse pensamento, o que nos leva a necessidade de uma linguagem adequada àquela forma específica do pensamento.

> [...] é necessário também que esse pensamento adquira consciência de que, para poder avançar, é preciso, de algum modo, estabelecer uma ruptura com aquilo que se revelou um obstáculo a esse desenvolvimento. Identifica, então, o obstáculo com a linguagem natural e a condição de ruptura com a possibilidade de criação de uma "nova linguagem", isto é, de uma linguagem adequada àquela forma específica de pensamento (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 82).

- Linguístico-sintático-semântica: linguagem específica e concisa; condição necessária à existência de um pensamento algébrico autônomo e não apenas consciência da necessidade de existir uma linguagem específica a essa forma de pensamento, mas faz-se necessária a consciência de que para essa linguagem, adquire dimensão operatória e sintática e revela seu poder transformacional e instrumental, necessitando atingir o estágio de uma linguagem puramente simbólica. Essa concepção revela em nível semântico, uma leve e fundamental distinção

> entre o uso da letra para representar genericamente quantidades discretas e contínuas, determinadas e particulares, e o uso de letras para representar genericamente quantidades genéricas, que essa linguagem revela sua dimensão operatória ou sintática, isto é, sua capacidade de efetuar e expressar transformações algébricas estritamente simbólicas (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 83).

[18] Conforme discutido por Figueiredo (2007, p. 40), compreendemos o termo concepções como "marcos organizadores implícitos de conceitos, com natureza essencialmente cognitiva". Assim, utilizamos esse termo em detrimento do termo crença, por acreditarmos que o segundo refere-se a uma forma primitiva do saber, não possuindo suporte empírico que a valide. Notamos ainda que diferentes autores fazem uso de sinônimos ao termo concepções, tal como dimensões apresentada nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998).

- Linguístico-postulacional: imprime aos signos um grau de abstração e generalidade ainda não vistos, estendendo o domínio da álgebra a todos os campos da Matemática.

Atrelando tais concepções ao ensino, esses autores apontam seus olhares para a Educação Algébrica e elencam algumas concepções:

- Concepção linguístico-pragmática: acredita que a aquisição das técnicas, mesmo que memorizadas, seriam necessárias e suficientes para que o estudante adquirisse a capacidade de resolver problemas. Os autores constatam que essa concepção predominou ao longo de todo o século XIX e primeira metade do século XX e a vinculam à concepção Linguístico-semântico-sintática da Matemática.
- Concepção fundamentalista-estrutural: decorrente do movimento da Matemática Moderna, se baseia na visão linguístico-postulacional. Considera que a introdução de propriedades estruturais das operações algébricas capacitaria o estudante a identificar e aplicar essas estruturas nos diferentes contextos subjacentes.
- Concepção fundamentalista-análoga: vincula-se também à visão linguístico-sintático-semântica, porém busca promover uma síntese das duas concepções apresentadas acima, recuperando o valor instrumental da álgebra, assim como manter o caráter fundamentalista, o papel pedagógico da Álgebra é considerado como instrumento para resolver problemas. Acredita que a álgebra geométrica seja didaticamente mais interessante que uma álgebra estritamente lógico-simbólica, por fornecer visibilidade a algumas identidades algébricas.

Percebemos que as três concepções consideram *a priori* uma álgebra simbólica, já consolidada e, com isso, "em todos os casos o ensino e aprendizagem da álgebra reduz-se ao transformismo algébrico" (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 85), sendo assim, reduz-se o pensamento algébrico à linguagem algébrica, um ensino puramente manipulativo.

Os autores apontam então, a necessidade de repensar a relação existente entre o pensamento algébrico e a linguagem:

> Acreditamos subsistir entre pensamento algébrico e linguagem não uma relação de subordinação, mas uma relação de natureza dialética, o que nos obriga, para melhor entendê-los, a colocar a questão de quais seriam os elementos caracterizadores de um tipo de pensamento que poderia ser qualificado de algébrico (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 85).

Assim, passam a apresentar situações que corroboraram com elementos que caracterizam o pensamento algébrico. São eles: "percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativas de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação-problema e a presença do processo de generalização" (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 87). Tais elementos levam os autores à conclusão, de que não existe uma única maneira que leve a formação do pensamento algébrico, este pode se expressar por meio das linguagens natural, aritmética, geométrica ou pela "criação de uma linguagem específica para esse fim, isto é, através de uma linguagem algébrica, de natureza estritamente simbólica" (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 88).

Buscando a relação dialética entre o pensamento algébrico e a linguagem, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) propõem uma quarta concepção para a Educação Algébrica, onde o seu início perpasse pela exploração de situações-problema nas quais se façam presentes os elementos caracterizadores do pensamento algébrico, citados anteriormente. Além disso, indicam três etapas a serem consideradas no decorrer das situações-problema, não sendo esta uma sequência imutável no que diz respeito a sua ordem de acontecimento. Na primeira etapa, objetiva-se o trabalho com as expressões simbólicas, por meio da análise de situações concretas, os autores exemplificam. Na segunda, percorre-se o caminho inverso: a partir da expressão algébrica, busca-se tentar atribuir significações que a ela comporte. Por fim, na terceira etapa, enfatiza-se o transformismo, ou seja, o modo como uma expressão algébrica, transforma-se em outra equivalente, além da discussão acerca dos procedimentos que validam essas transformações.

Figueiredo (2007) apresenta-nos um quadro síntese (Quadro 3), sobre as concepções frutos dos estudos de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993; 2005), complementando nossa discussão:

**Quadro 3: Concepções da Educação Algébrica segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993; 2005)**

| Obras e universos de estudo | Concepções de Educação Algébrica | Predominâncias no ensino | Ênfases quanto à relação entre linguagem e pensamento algébricos |
|---|---|---|---|
| Fiorentini, Miorim e Miguel (1993): documentos, pesquisas e obras sobre o desenvolvimento histórico da Álgebra e de seu ensino no Brasil. | 1. Linguístico-pragmática | Estudo das expressões algébricas, seguido do uso de equações para resolução de problemas, com aquisição mecânica desses procedimentos pelos alunos. Predomínio do transformismo algébrico nas tarefas para alunos. | Na linguagem, em detrimento do pensamento algébrico. |
| | 2. Fundamentalista-estrutural | Estudo de tópicos "fundamentadores" precedendo o estudo de expressões algébricas, valores numéricos, fatoração e outros, seguidos do estudo de novos conteúdos algébricos (como funções do 1º e 2º graus etc.). Predomínio das propriedades estruturais como justificativa para o transformismo algébrico nas tarefas para alunos. | |
| | 3. Fundamentalista-analógica | Síntese das anteriores, utilizando recursos visuais (materiais concretos) por se acreditar que certas identidades algébricas seriam didaticamente superiores a qualquer forma de abordagem lógico-simbólica. Predomínio de tarefas que utilizam recursos analógicos geométricos e materiais concretos, como balanças e gangorras, para justificar o transformismo algébrico. | |
| Fiorentini, Miorim e Miguel (2005): pesquisas próprias sobre o ensino da Álgebra | 4. [Sem designação pelos autores] | Atividades abertas com tarefas exploratórias investigativas. Tarefas investigativas que permitam desenvolver o pensamento algébrico. | Na dialética entre linguagem e pensamento algébricos. |

Fonte: Figueiredo, 2007, p. 49

Logo, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993; 2005) em seus estudos, descrevem as concepções de Educação Algébrica, ao longo da história e propõem uma nova concepção que destaca o uso de situações-problema a fim de estabelecer a relação entre pensamento algébrico e linguagem, onde o pensamento algébrico toma corpo concomitante ao desenvolvimento de uma linguagem apropriada para expressá-lo.

Usiskin (1995) afirma que a Álgebra da educação básica, diz respeito a compreensão do significado das "letras" e das operações relacionadas a elas. Em suas palavras,

> as finalidades do ensino de álgebra, as concepções que tenhamos dessa matéria e a utilização de variáveis estão intrinsecamente relacionadas. As finalidades da álgebra são determinadas por, ou relacionam-se com concepções diferentes da álgebra que correspondem à diferente importância relativa dada aos diversos usos das variáveis (USISKIN, 1995, p. 13).

Assim, o autor alega que existem diferentes concepções sobre a ideia de variável. Na década de 1950, as variáveis eram vistas como um número mutável, posteriormente, como um número literal que pode assumir dois ou mais valores perante uma situação. Contudo, entende-se que "as variáveis comportam muitas definições, conotações e símbolos. Tentar enquadrar a ideia de variável numa única concepção implica uma super simplificação que, por sua vez, distorce os objetos da álgebra" (USISKIN, 1995, p. 12).

À luz das ideias de Usiskin (1995), temos quatro concepções para o uso das variáveis:

- Concepção 1 (álgebra como aritmética generalizada): as variáveis são pensadas como generalizadoras de modelos, por exemplo, o produto de qualquer número por zero, é zero, para todo n, $n \cdot 0 = 0$. Nessa concepção o estudante traduz e generaliza situações por meio da representação de sentenças dos padrões numéricos observados.
- Concepção 2 (álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas): permite resolver problemas como, a soma de um número com oito, resulta em 10, qual é esse número? Nessa concepção as variáveis são ou incógnitas ou constantes e o estudante busca simplificar ou resolver a situação na qual se encontra. Temos a manipulação do simbolismo algébrico para simplificar expressões visando resolver equações.
- Concepção 3 (álgebra como estudo das relações de grandeza): a variável é tratada como um argumento, ou seja, representa os valores do domínio de uma função, ou como um parâmetro, representando um número no qual dependem outros números. Nesse contexto, aparecem as ideias de variável independente e variável dependente.
- Concepção 4 (álgebra como estudo das estruturas): a álgebra do ensino superior, referindo-se a estruturas como anéis, grupos, corpos e espaços vetoriais. Nesse

caso, a variável torna-se um objeto arbitrário de uma estrutura estabelecida por certas variáveis.

O autor destaca a importância de cada uma das quatro concepções alegando que:

> já não cabe classificar a álgebra apenas como aritmética generalizada, pois ela é muito mais que isso. A álgebra continua sendo um veículo de resolução de problemas, mas também é mais do que isso. Ela fornece meios para se desenvolverem e se analisarem relações. E é a chave para a caracterização e a compreensão das estruturas matemáticas (USISKIN, 1995, p. 21).

Usiskin (1995), diferentemente de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), não nos fala em pensamento algébrico, mas ele nos leva a refletir sobre quais pontos devemos enfatizar na educação básica e nos mostra as relevâncias desse processo contínuo, demonstrando as diferentes possibilidades do uso das letras.

Lins e Gimenez (1997, p. 137) entendem a álgebra como "um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significados em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade". Assim, a atividade algébrica pode ser entendida como o processo de produção de significados para a álgebra, na qual não é possível caracterizar uma atividade algébrica sem considerar duas partes: descrever quando a atividade acontece e descobrir se há processos cognitivos e peculiares a essa atividade.

Notamos que, para esses autores, a álgebra encontra-se fundamentada na aritmética, uma vez que eles estabelecem a relação entre o ensino da álgebra pautado no estudo dos números e suas operações, igualdades e desigualdades, destacando a importância de se trabalhar cada vez mais cedo o ensino da aritmética concomitantemente ao ensino da álgebra, para que ambas se desenvolvam juntas, uma implicada na outra. Para eles, "pensar algebricamente é produzir significado para situações em termos de números e operações aritméticas (e igualdades e desigualdades) e, com base nisso, transformar as expressões obtidas, produzindo significados" (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 150). Acerca da produção de significados na álgebra, os autores descrevem que o pensamento algébrico possui três características fundamentais:

> 1. produzir significados apenas em relação a números e operações aritméticas (chamamos a isso *aritmeticismo*);
> 2. considerar números e operações apenas segundo suas propriedades, e não "modelando" números em outros objetos, por exemplo, objetos "físicos" ou geométricos (chamamos a isso *internalismo*); e,
> 3. operar sobre números não conhecidos como se fosse conhecidos (chamamos a isso *analiticidade*) (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 151).

Lins e Gimenez (1997) destacam, ainda, algumas concepções para a educação algébrica:

- Concepção Letrista: cálculo feito com letras.
- Concepção Letrista Facilitadora: álgebra faz uso de situações concretas e materiais manipulativos. Embora se façam interessantes, os autores acreditam ser insuficiente, uma vez, que apesar dos estudantes considerarem como útil o material manipulativo, muitas vezes, não estabelecem as relações necessárias entre o que fora realizado com o material e o que é transposto para o formalismo matemático.
- Concepção "Concreta": para se ensinar álgebra lança-se mão de propostas de investigação de uma situação real, "a Educação Algébrica se dá na medida em que a produção de conhecimento algébrico serve ao propósito de iluminar ou organizar uma situação, como ferramenta e não como objeto primário do estudo" (LINS; GIMENEZ, 1997, p. 109).
- Concepção de álgebra como conhecimento para esclarecer e organizar um problema ou situação.

De acordo com essas concepções, Lins e Gimenez (1997) apontam que a educação algébrica no Brasil prevalece ainda sob a concepção letrista e letrista facilitadora, sendo vista como "propósito de iluminar ou organizar uma situação, como uma ferramenta e não como objeto primário de estudo" (LINS; GIMENEZ, p. 109).

Em outra perspectiva, Sousa (2004) considera os nexos conceituais da álgebra (fluência, variável, campo de variação) como elementos necessários para uma melhor compreensão dos conceitos algébricos e, possivelmente, das equações. A autora, à luz dos nexos internos de Davidov (1982), infere que

> os nexos conceituais que fundamentam os conceitos contêm a lógica, a história, as abstrações, as formalizações do pensar humano no processo de constituir-se humano pelo conhecimento.
> Definimos nexo conceitual como o elo de ligação entre as formas de pensar o conceito, que não coincidem, necessariamente, com as diferentes linguagens do conceito (SOUSA, 2004, pp. 61-62).

Logo, os nexos conceituais se apresentam no movimento do pensamento, tanto do professor, quanto do estudante. Os nexos internos do conceito (DAVÝDOV, 1982) mobilizam mais o movimento do estudante, enquanto que os nexos externos "não deixam de ser uma linguagem de comunicação do conceito apresentada em seu estado formal, mas que não necessariamente denotam sua história. Dá pouca mobilidade ao sujeito para elaborar o conceito" (SOUSA, 2004, p. 62).

Assim, nos atentamos aos nexos conceituais (fluência, campo de variação e variável) na elaboração de nossa proposta, uma vez que estes consideram o movimento do surgimento da álgebra e possibilitam que o estudante se aproprie do pensamento algébrico e do conceito de equações de 1° grau. Nas palavras de Sousa, Panossian e Cedro (2014, p. 121):

> Esses conceitos, aos quais estamos denominando de nexos conceituais da álgebra, constituem o substancial, o movimento do pensamento algébrico, tendo em vista a busca da verdade relativizada. Fundamentam as diversas álgebras, elaboradas estruturalmente pelos matemáticos das diversas civilizações, de tempos em tempos, no intuito de descrever, de formalizar os diversos movimentos presentes no mundo no qual estamos inseridos.

Ao direcionarmos nosso olhar à fluência dos fenômenos e objetos presentes em nossa realidade, possibilitamo-nos compreender as inúmeras relações e constantes transformações desta realidade.

> O mundo está em permanente evolução; todas as coisas, a todo momento, se transformam, tudo *flue*, tudo *devém*. Isto, que é a afirmação fundamental do filósofo *Heráclito* de Efeso foi, posteriormente, reconhecido por grandes pensadores e pode ser verificado por qualquer de nós, seja qual for aquele objecto em que fixemos a nossa atenção. Pois não é verdade que tudo está sujeito a uma mesma lei de nascimento, vida e morte, que, por sua vez, vai originar outros nascimentos? (CARAÇA, 1951, p. 110).

Esse primeiro nexo conceitual parece evidenciar o movimento da vida, a mutabilidade da álgebra, mostrar aos estudantes os caminhos percorridos para se chegar à configuração que temos hoje, se relacionando com os nexos conceituais campo de variação e variável.

Sobre o Campo de variação, Panossian (2014) remete à criação de diversos campos numéricos, ou campo de variação, como uma necessidade das diferentes civilizações, possibilitando a garantia de fluência do movimento de controle de quantidades, pois

> consideramos que a qualidade desses campos numéricos se alterava em um movimento de evolução, no sentido em que sua essência não se modificava, mas se modificavam outras qualidades. É o que acontece, por exemplo, com a necessidade da criação de números que podem ser representados na forma de razão, os quais avançam de forma gradativa modificando a qualidade do número. Ou ainda com a organização de um campo de números inteiros, em que a quantidade negativa adquire significado (PANOSSIAN, 2014, p. 91).

Notamos, assim, que o campo de variação define dentro de um conjunto numérico, as possibilidades de valores que a variável poderá assumir. Devemos ter em mente que esse campo estará associado ao tipo de problema a ser estudado e depende "diretamente do movimento da realidade tratada. Não há uma resposta pronta e absoluta, embora boa parte dos movimentos da realidade pareça ocorrer no campo dos números reais" (SOUSA, 2004, p. 158).

Em relação à variável e diante das ideias de Caraça (1951) podemos inferir que a variável é a fluência e representa o movimento do pensamento.

> Pelo seu caráter essencial – síntese do *ser* e *não ser* – ela sai fora daquele quadro de ideias que quer ver na realidade uma *permanência* e irrompe ligada à corrente de pensamento que, expressa ou tacitamente, vê na *fluência* a primeira de suas características (CARAÇA, 1951, p. 127).

Entendemos que a constituição da variável leva em consideração as dimensões numéricas e geométricas, "o seu lógico-histórico mostra que estes se originaram das abstrações feitas pelos homens a partir da elaboração dos conceitos formais de número e de aspectos da geometria" (SOUSA, 2004, p. 82).

Conforme traz Caraça (1951, p. 128), "variável é o que for determinado pelo conjunto numérico que ela representa – a sua substância, o seu domínio", assim a variável estará dentro do movimento limitado por um campo de variação. Mais adiante, Caraça (1951) define variável da seguinte forma: "Seja (E) um conjunto qualquer de números, conjunto finito ou infinito, e convencionamos representar qualquer dos seus elementos por um símbolo, por ex.: *x. A este símbolo, representativo de qualquer dos elementos do conjunto (E), chamamos de variável"* (CARAÇA, 1951, p. 127).

Lima, Takazaki e Moisés (1998) esclarecem que o problema algébrico geral, caracteriza o movimento geral de variação quantitativa, "nele a variável é entendida como campo de variação" (LIMA; TAKAZAKI; MOISÉS, 1998, p. 4). Já o problema algébrico particular buscará na variável um valor definido, dentro do campo de variação, que satisfaça uma determinada situação, "a variável deve assumir um valor determinado do campo de variação. Esse valor é a resposta à necessidade imediata e particularizada do problema algébrico" (LIMA; TAKAZAKI; MOISÉS, 1998, p. 4) e, nesse caso, estamos nos referindo a variável na qualidade de incógnita, ou termo desconhecido, devendo este pertencer ao campo de variação da variável, pois caso contrário, o problema não terá solução.

A variável passa a adquirir qualidade por meio da fluência, um movimento limitado pelo campo de variação, que "constitui uma linguagem para os movimentos quantitativos gerais – as equações – que, por sua vez, representam uma peculiaridade e, portanto, constituem uma linguagem particular, específica, um estado de movimentos de controle de quantidades" (CEDRO, 2004, p. 82).

Nesta mesma perspectiva, encontramos Caraça (1951) que destaca o conceito de variável como fundamento principal para toda a álgebra fundamental e, consequentemente, para sequências, equações e funções. Para o bloco *sequências* temos a variável relacionada à fluência e à padrão; para *equações*, temos a relação entre grandezas e, para *funções*, temos a variável relacionada à interdependência e fluência.

Diante do exposto, nesta pesquisa estamos interessadas na perspectiva apresentada por Souza (2004) acerca dos nexos conceituais, por acreditarmos que, diante da intencionalidade de apresentar situações desencadeadoras de aprendizagem que abarquem os nexos fluência, variável e campo de variação, os estudantes poderão colocar-se em atividade e, assim, apropriar-se do conceito de equações de 1° grau. Essa opção decorre pelo fato de entendermos que as outras perspectivas, presentes na literatura e aqui apresentadas, não consideram o movimento histórico de formação do conceito algébrico, direcionando apenas o estudante a ser um usuário da álgebra, realizando operações sem sentido e sem a apreensão do conceito.

Na próxima seção apresentamos como os Parâmetros Curriculares Nacionais orientam o ensino da álgebra na educação básica.

## 3.2 Parâmetros curriculares nacionais e a álgebra

O olhar para os Parâmetros Curriculares Nacionais se justifica por ser esse o documento oficial atual, de âmbito nacional, que orienta a organização curricular no país e está presente em grande parte das escolas, em especial, na escola onde a proposta foi desenvolvida, uma vez que se trata de uma instituição de âmbito municipal.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) sugerem que o estudo da álgebra pode encaminhar a um ambiente potencialmente significativo para que o estudante desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, "além de lhe possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas" (BRASIL, 1998, p. 115). No entanto, faz-se necessário pensarmos nesse ambiente mediante a compreensão acerca do seu papel no currículo.

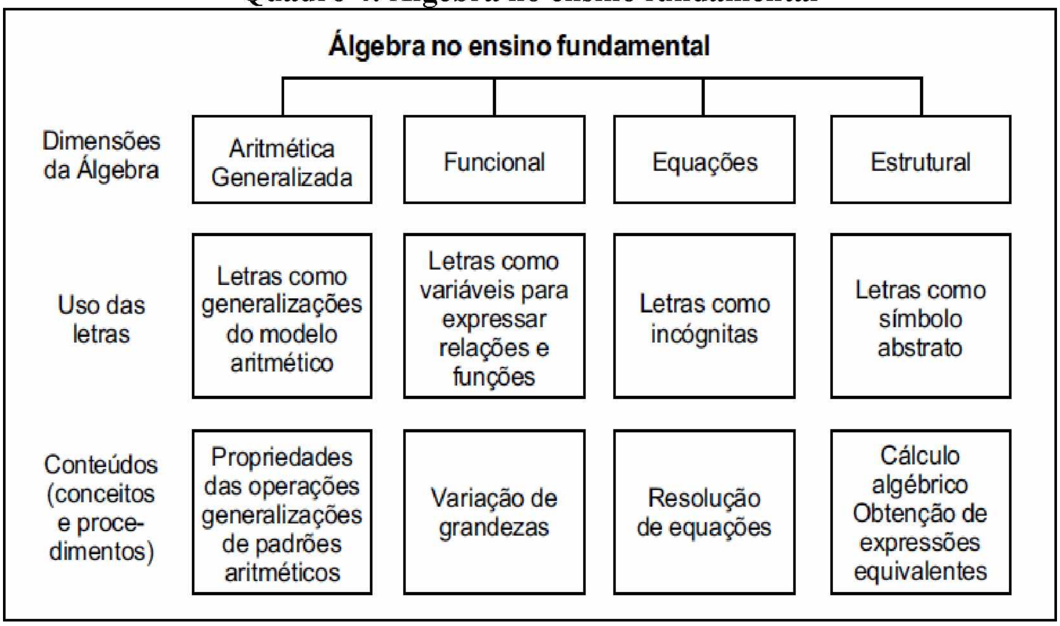
De acordo com o referido documento, os professores elencam quantidades exorbitantes de exercícios mecânicos no desejo de promover a apreensão desse assunto.

> Isso faz com que os professores procurem aumentar ainda mais o tempo dedicado a este assunto, propondo em suas aulas, na maioria das vezes, apenas a repetição mecânica de mais exercícios. Essa solução, além de ser ineficiente, provoca grave prejuízo no trabalho com outros temas da Matemática, também fundamentais, como os conteúdos referentes à Geometria (BRASIL, 1998, p. 116).

Uma opção para o ensino de álgebra, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), constitui-se em propor situações que direcionem o estudante à observação de regularidades introduzindo o pensamento algébrico, contrapondo numerosas listas de exercícios com foco apenas na manipulação de expressões e equações, comumente mecânicas (BRASIL, 1998).

O quadro a seguir, descreve as dimensões que os PCN (BRASIL, 1998) aborda sobre a álgebra escolar:

**Quadro 4: Álgebra no ensino fundamental**




Fonte: Brasil, 1998, p. 116

Notamos, no quadro 4, que a álgebra, segundo o PCN, assume quatro dimensões:

- Aritmética Generalizada: temos nessa dimensão as letras como forma de generalização, transição da aritmética para álgebra, assim como, a abordagem das propriedades das operações justificando as generalizações apresentadas (a citar, o uso de letras para generalizar operações com potências);

- Funcional: nesse momento as letras assumem o papel de variáveis, interagindo com situações que envolvam relações e funções, o professor busca então trabalhar a variação de grandezas;
- Equações: as letras serão entendidas como incógnitas e busca-se resolver equações (isto é, descobrir valores desconhecidos);
- Estrutural: na qual as letras são tidas como símbolo abstrato, objetivando-se o cálculo algébrico e obtenção de expressões equivalentes, por exemplo, cálculo de produtos notáveis, fatoração de polinômios, entre outros.

Segundo os PCN (1998) seria interessante que as quatro dimensões fossem trabalhadas de forma articulada ao longo de todo o ensino fundamental. “Iniciar o estudo da sintaxe que o estudante está construindo com as letras poderá completar a noção da álgebra como uma linguagem com regras específicas para o manuseio das expressões, ou seja, o cálculo algébrico” (BRASIL, 1998, p. 188), podendo com essa abordagem, promover a percepção da transformação de uma expressão algébrica em outra equivalente, mais simples, um caminho que pode facilitar a busca pela solução de um problema.

Buscamos neste estudo, trabalhar com as dimensões aritmética generalizada e equações, apresentadas pelos PCN por entendermos que as dimensões funcional e estrutural não se adequam aos sujeitos dessa pesquisa, estudantes do 7°ano do ensino fundamental, pois essas dimensões serão fruto do estudo desses estudantes nos anos finais do ensino fundamental e durante o ensino médio. Entendemos que, ao propor as dimensões aritmética generalizada e equações, podemos apreender nova qualidade ao ensino, na busca de um movimento que considere os caminhos para a construção de um conceito e não apenas repetição mecânica de exercícios.

Na próxima sessão, com o intuito de conhecermos a produção acadêmica existente, apresentamos um mapeamento das dissertações e teses[19] produzidas na região Sudeste[20] de 2010 a 2014, com foco no nosso objeto de estudo, equações de 1° grau.

---

[19] As pesquisas foram retiradas no banco da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações. <http://bdtd.ibict.br/>. Acesso em: 11 maio 2015.

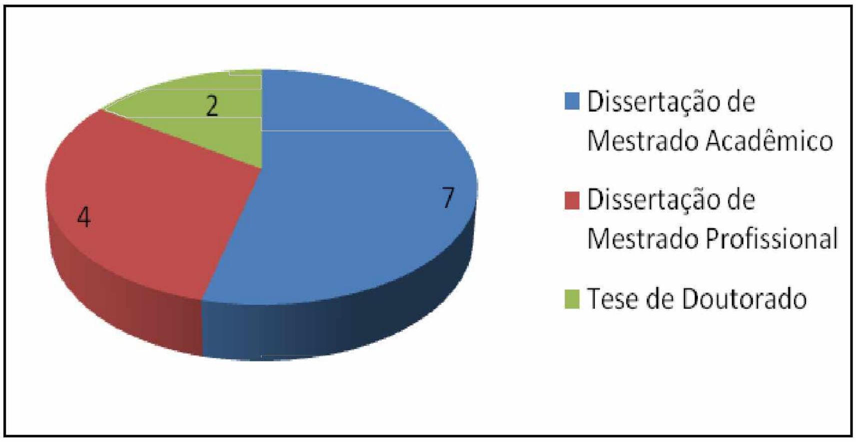
[20] Inicialmente tínhamos o interesse em mapear as pesquisas realizadas no Brasil no período de 2010-2014. Porém, o banco de Teses e Dissertações da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) encontrava-se em manutenção no momento de nossa pesquisa, o que nos levou a optar por refinar nosso mapeamento à Região Sudeste, por esta pesquisa se encontrar inserida nesta região.
Estabelecemos o período de 2010 a 2014, por 2010 ser o ano em que iniciamos nossa prática docente e 2014 o ano em que a proposta foi desenvolvida com os estudantes.

## 3.3 Um olhar para as pesquisas existentes

Ao decidirmos verificar a produção acadêmica existente, inicialmente, definimos como critério pesquisas onde se fizessem presentes os termos: álgebra, equação de 1° grau, pensamento algébrico, em seus títulos e/ou resumos. Apresentado o resultado da busca, fizemos a leitura dos resumos a fim de refinar nossa seleção para pesquisas que voltassem seus olhares para o ensino fundamental, coincidindo assim como a nossa realidade.

Tal seleção nos possibilitou elaborar um gráfico conforme podemos visualizar na figura 6. Foram analisados 13 (treze) resumos, sendo 2 (duas) teses e 11 (onze) dissertações. Dessas dissertações, 4 (quatro) relativas ao Mestrado Profissional e 7 (sete) relacionadas ao Mestrado Acadêmico.

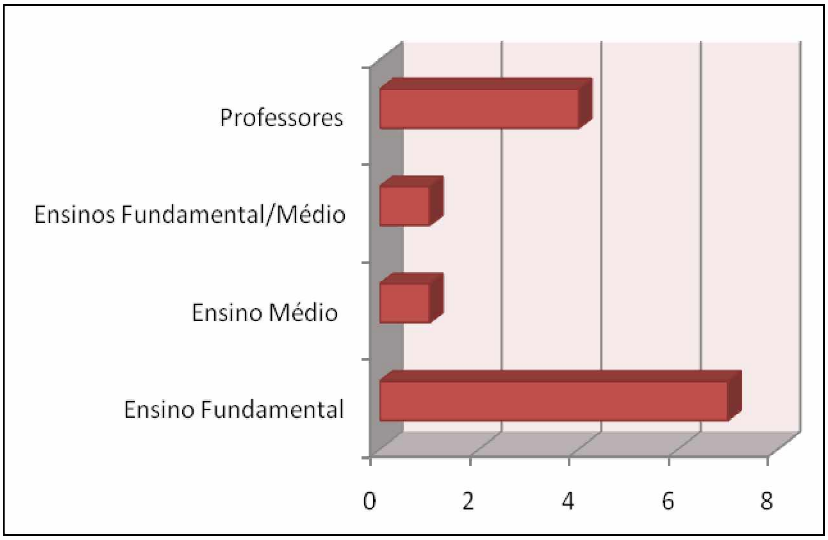
**Figura 6: Classificação das Pesquisas quanto ao Grau de Titulação**




Fonte: Dados da Pesquisadora

Pelas análises percebemos que o ensino fundamental foi o nível de ensino mais contemplado com 7 (sete) pesquisas, 1 (uma) abordou estudos com estudantes do ensino médio, 1 (uma) conduziu seu olhar para estudantes dos Ensinos Fundamental e Médio e 4 (quatro) pesquisas focaram no desenvolvimento de experimentos de estudo com professores, sendo que dessas quatro, duas preocuparam-se com a formação dos futuros professores de matemática e as outras duas dizem respeito a prática docente, como apresentado na figura 7.

**Figura 7: Classificação das Pesquisas quanto aos Sujeitos**




Fonte: Dados da Pesquisadora

Na tentativa de organizar o material analisado, organizamos um quadro (Quadro 5) com as informações das referidas pesquisas.

**Quadro 5: Dados das Pesquisas**

| Título | Autor | Ano | Instituição | Dissertação/Tese |
|---|---|---|---|---|
| Metodologia da resolução de problemas no planejamento de atividades para a transição da Aritmética para a Álgebra | Danilo Eudes Pimentel<br>Orientadora: Yuriko Yamamoto Baldin | 2010 | Universidade Federal de São Carlos - UFSCar | Dissertação |
| Iniciação a práticas de letramento algébrico em aulas exploratório-investigativas | Fernando Luís Pereira Fernandes<br>Orientador: Dario Fiorentini | 2011 | Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP | Dissertação |
| Um estudo exploratório das relações funcionais e suas representações no terceiro ciclo do ensino fundamental | Edson Eduardo Castro<br>Orientadora: Barbara Lutaif Bianchini | 2011 | Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP | Dissertação – Mestrado Profissional |
| | | | | Continua |

Continuação

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Álgebra e a formação docente: o que dizem os futuros professores de matemática | Flávio de Souza Pires<br>Orientadora: Maria do Carmo de Sousa | 2012 | Universidade Federal de São Carlos - UFSCar | Dissertação |
| Obstáculos à aprendizagem de conceitos algébricos no ensino fundamental: uma aproximação entre os Obstáculos Epistemológicos e a Teoria dos Campos Conceituais | Luzia Maya Kikuchi<br>Orientador: Elio Carlos Ricardo | 2012 | Universidade de São Paulo – USP | Dissertação |
| As concepções da álgebra articuladas aos conteúdos de matemática no ensino fundamental | Jailma Ferreira Guimarães<br>Orientadora: Ana Lucia Manrique | 2013 | Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC/SP | Dissertação |
| Introdução ao estudo da álgebra no ensino fundamental | Patricia Aparecida Pinheiro<br>Orientadora: Grazielle Feliciani Barbosa | 2013 | Universidade Federal de São Carlos - UFSCar | Dissertação – Mestrado Profissional |
| O jogo pedagógico enquanto atividade orientadora de ensino na iniciação algébrica de estudantes de 6ª série | Regiane de Oliveira Gaspar<br>Orientador: Maria do Carmo de Sousa | 2013 | Universidade Federal de São Carlos - UFSCar | Dissertação |
| Conhecimento matemático específico para o ensino na educação básica: a álgebra na escola e na formação do professor | Maria Cristina Costa Ferreira<br>Orientadora: Maria Manuela Martins Soares David | 2014 | Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG | Tese |

Continua

| | | | | Conclusão |
|---|---|---|---|---|
| Consequências das Orientações Técnicas de Matemática, realizadas pelos PCNP, na atuação dos professores e na aprendizagem dos estudantes | Sara Margarida Santos<br>Orientador: Geraldo Pompeu Junior | 2014 | Universidade Federal de São Carlos – UFSCar | Dissertação |
| O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para constituição do objeto de ensino da álgebra | Maria Lúcia Panossian<br>Orientador: Manoel Oriosvaldo de Moura | 2014 | Universidade de São Paulo – USP | Tese |
| Resolução de problemas da pré-álgebra e a álgebra para fundamental II do ensino básico com auxílio do modelo de barras | Jonas Marques dos Santos Queiroz<br>Orientador: Yuriko Yamamoto Baldin | 2014 | Universidade Federal de São Carlos – UFSCar | Dissertação – Mestrado Profissional |
| Um estudo sobre métodos algébricos de resolução de equações algébricas com proposta de atividades para o ensino básico | Valmir Roberto Moretti<br>Orientadora: Maria Sueli Marconi Roversi | 2014 | Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP | Dissertação – Mestrado Profissional |

Fonte: Sistematização da Pesquisadora

Após a leitura dos resumos, no que se refere aos objetivos das pesquisas analisadas, sintetizamos que as pesquisas pretendiam:

- Estudar os métodos algébricos para a resolução de equações;
- Investigar os obstáculos à aprendizagem de álgebra no ensino fundamental com o intuito de ajudar na compreensão das dificuldades envolvidas no aprendizado desse tópico;
- Analisar e avaliar se as Orientações Técnicas de Matemática, realizadas pelo Professor Coordenador do Núcleo Pedagógico, têm auxiliado ou não na melhoria da

atuação dos professores em sala de aula, de suas formações profissionais, bem como as consequências para o processo de aprendizagem dos estudantes;

- Identificar elementos de saber, específicos do professor de matemática, que foram efetivamente mobilizados ou que seriam potencialmente mobilizáveis na prática concreta de sala de aula de álgebra;
- Identificar, analisar e discutir aspectos (também denominados como características) do pensamento algébrico – ora chamado de letramento algébrico – manifestados pelos estudantes do ensino fundamental;
- Investigar indícios de pensamento algébrico e de possíveis erros cometidos pelos estudantes;
- Investigar as relações entre o movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos e o objeto de ensino da álgebra.
- Introdução ao pensamento e linguagem da Álgebra;
- Analisar a produção escrita de professores e estudantes do ensino médio, verificando os modos de resolução que estes utilizaram para resolver as questões de Álgebra.

Para atingir tais objetivos, os pesquisadores lançaram mão da análise de livros didáticos, elaboração de sequências didáticas, resolução de problemas, jogos pedagógicos, aplicação de provas elaboradas pelas instituições governamentais para a educação básica (por exemplo, Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo – SARESP) e, por fim, exposição de breve relato da história dos processos resolutivos de equações, questionários sobre a formação docente concomitante à questões acerca do ensino de álgebra.

Após a leitura dos resumos das pesquisas aqui apresentadas, acreditamos que se faz possível uma aproximação dessas às concepções de Usiskin (1995), abordadas na primeira seção desse capítulo, com exceção da quarta concepção (álgebra como estudo das estruturas), conforme se verifica no quadro 6.

**Quadro 6: Concepções de Usiskin (1995) abordadas nas pesquisas analisadas**

| CONCEPÇÃO | RECORTES – DISSERTAÇÃO/TESE |
|---|---|
| Álgebra como aritmética generalizada | "A utilização da argumentação e da demonstração para justificar a extensão de resultados obtidos nos processos de generalização na álgebra" (FERREIRA, 2014).<br>"Existem diversas abordagens possíveis para a iniciação ao estudo da Álgebra, tais como: generalização de padrões, modelagem" (CASTRO, 2011). |
| Álgebra como um estudo de procedimentos para resolver certos tipos de problemas | "Os alunos preferem usar a linguagem retórica para resolver situações-problema que envolvem equações" (GASPAR, 2013).<br>"Deste modo foram planejadas e executadas 6 (seis) atividades utilizando a metodologia de Resolução de Problemas" (QUEIROZ, 2014).<br>"Foram planejadas e aplicadas atividades sob forma de resolução de problemas para detectar estas dificuldades e auxiliar na introdução ao raciocínio algébrico" (PIMENTEL, 2010). |
| Álgebra como estudo das relações de grandeza | "Desenvolver sequências de atividades, articulando os quatro blocos de conteúdos de matemática apresentados pelos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental - PCNEF com as concepções da álgebra propostas por Usiskin como estudo das relações entre grandezas" (GUIMARÃES, 2013). |

Fonte: Sistematização da pesquisadora

Com relação à indicação dos PCN (1998), encontramos nas pesquisas analisadas a presença da aritmética generalizada onde "temos nessa dimensão as letras como forma de generalização, transição da aritmética para álgebra" (BRASIL, 1998, p. 116) e a dimensão que se fez mais presente foi a das Equações, em que "as letras serão entendidas como incógnitas, e busca-se resolver equações" (BRASIL, 1998, p. 116).

Acreditamos que nossa pesquisa, diferentemente da grande maioria das pesquisas aqui apresentadas, visa o desenvolvimento do pensamento algébrico por meio da organização do ensino com foco na formulação e resolução de equações de 1° grau. Nosso estudo pode possibilitar ao estudante uma maior exploração das diferentes concepções da álgebra, considerando os nexos conceituais já apresentados, fundamentados nos estudos de Sousa (2004). Ressaltamos que estes nexos se fizeram presentes em apenas uma das pesquisas aqui apresentadas, a de Panossian (2014).

## 3.4 Álgebra e a abordagem nos livros didáticos

Diante das orientações apresentadas pelos PCN (1998), passamos a olhar a abordagem do tema Álgebra em alguns livros didáticos presentes na escola onde a proposta inerente à pesquisa foi desenvolvida.

Como no ano de 2013, se destinou a escolha do livro didático a ser adotado pelas Escolas Públicas para os anos de 2014, 2015, 2016, o Ministério da Educação, em conjunto com a Secretaria de Educação Básica e o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação, elaboraram o Guia de Livros Didáticos – PNLD 2014[21]. Neste guia são apresentadas resenhas de dez coleções de livros de Matemática do 6° ao 9° anos e uma avaliação das características de cada obra.

> As resenhas aqui reunidas procuram retratar, o mais fielmente possível, a estrutura dos livros e o sumário dos seus conteúdos. Além disso, expressam uma avaliação de cada obra, feita por educadores que estão envolvidos com o ensino do 6° ao 9° ano. Nessa avaliação, foram tomados como base os critérios publicados pelo Ministério da Educação, no Edital do PNLD 2014 (BRASIL, 2013, p. 8).

Dentre os critérios que podem fazer com que o livro didático seja excluído da lista de opções para as escolas, no que tange à componente curricular Matemática, no Guia de Livros Didáticos – PNLD 2014, podemos destacar: dar atenção apenas ao trabalho mecânico com procedimentos em detrimento da exploração dos conceitos matemáticos e de sua utilidade para resolver problemas; deixar de propiciar o desenvolvimento, pelo estudante, de competências cognitivas básicas, como: observação, compreensão, argumentação, organização, análise, síntese, comunicação de ideias matemáticas, memorização; supervalorização do trabalho individual. Notamos, assim, o cuidado desse Guia em atentar-se às orientações anteriormente apresentadas nos PCN (1998), assim como percebemos que se espera que os livros didáticos possam promover o ensino sob uma perspectiva que propicie o desenvolvimento da criticidade, coletividade, investigação em detrimento de um ensino puramente mecânico.

Selecionamos, dentre as dez coleções apresentadas pelo Guia, aquelas que foram encaminhadas à escola[22] na qual a proposta se desenvolveu, limitando-nos nosso olhar a obra

---

[21] <http://www.fnde.gov.br/programas/livro-didatico/guias-do-pnld/item/4661-guia-pnld-2014>. Acesso em: 23 mar. 2015.

[22] Em Uberlândia, os livros inicialmente são encaminhados ao Centro Municipal de Estudos e Projetos Educacionais Julieta Diniz, um centro de estudos oficializado pela Secretaria Municipal de Educação que visa executar atividades de formação dos professores municipais, onde são analisados se estas obras estão em acordo

para os 7$^{os}$ anos. Este critério de seleção nos levou a quatro obras das quais elaboramos o quadro 7:

**Quadro 7: Livros Didáticos analisados**

| Título | Autor (es) | Editora | Ano de Publicação |
|---|---|---|---|
| *Vontade de Saber Matemática* | Joamir Souza, Patrícia Moreno Pataro | FTD | 2012 |
| *Projeto Teláris: Matemática* | Luiz Roberto Dante | Ática | 2013 |
| *Praticando Matemática* | Álvaro Andrini, Maria José Vasconcellos | Editora do Brasil | 2012 |
| *Projeto Araribá Matemática* | Fábio Martins de Leonardo et al. | Moderna | 2012 |

Fonte: Sistematização da pesquisadora

Como referencial para nosso estudo, atentamo-nos às seguintes questões:

- Como se dá a abordagem do conteúdo de equações?
- Existe a presença de um contexto histórico? Como?
- Como o estudante é levado a construir o conceito de equação?
- Há associação da aritmética com a álgebra (nexos conceituais)?
- Com relação aos exercícios propostos, quais são as características mais presentes?

Apresentamos a seguir uma síntese (Quadro 8), por nós elaborada, de cada obra, considerando também a descrição presente no Guia PNLD 2014 e os estágios no movimento da Álgebra – álgebra retórica, sincopada e simbólica, caracterizada por Nesselmann (EVES, 2002).

com o Plano Nacional do Livro Didático e, *a posteriori*, são encaminhadas às escolas municipais para apreciação dos professores.

**Quadro 8: Um olhar para os livros didáticos referentes ao ensino de Equações**

| **Título**<br>**Autor (es)** | **Estrutura Organizacional do Conteúdo** | **Abordagem do Conteúdo** | **Procedimentos** | **Nexos conceituais** |
|---|---|---|---|---|
| **Vontade de Saber Matemática**<br><br>Joamir Souza, Patrícia Moreno Pataro | Expressões algébricas.<br>Fórmulas.<br>Equação, incógnita e solução ou raiz.<br>Resolvendo equações pelos princípios aditivo e multiplicativo. | Apresentação de um problema chamado de Táxi, onde, posteriormente o autor, traz um equacionamento do mesmo.<br>Pequeno trecho de uma situação de compra e venda para introduzir expressões algébricas e cálculo do valor numérico.<br>Passagem da álgebra retórica para álgebra simbólica, com inexistência da álgebra sincopada.<br>Apresentação de fórmulas, tais como, cálculo da altura de uma pessoa, custos de produções, índice de massa corporal.<br>Definição de Equação.<br>Uso de resolução de problemas e emprego das balanças como metodologia. | Exercícios para cálculo de valor numérico, ora são apresentadas situações para passagem da linguagem retórica para simbólica, ora apenas são apresentadas as expressões algébricas para serem calculados os valores numéricos.<br>Resolução de Problemas: álgebra retórica para álgebra simbólica e, resolução de equações.<br>Exercícios assim como os problemas direcionam a aplicação e sistematização de procedimentos ou propriedades anteriormente apresentadas. | Ausência do nexo fluência.<br>Referência apenas ao nexo variável, com inexistência do nexo campo de variação. |
| **Projeto Teláris:** | Letras em lugares de números.<br>Expressões algébricas.<br>Equação, incógnita e solução ou raiz.<br>Equação de 1° grau com uma | Apresentação de dois problemas que nortearão o estudo das equações, chamados de Ponto de Partida, que seguindo o autor, irão preparar o estudante para as descobertas ao decorrer do capítulo. | Exercícios para cálculo de valor numérico, ora são apresentadas situações para passagem da linguagem retórica para simbólica, ora apenas são apresentadas as expressões algébricas para serem | Ausência do nexo fluência.<br>Referência apenas ao nexo variável, com inexistência do nexo campo de variação. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **Matemática**<br><br>Luiz Roberto Dante | incógnita.<br><br>Uma aplicação de equação: geratriz de uma dízima periódica.<br><br>Equações com duas incógnitas.<br><br>Inequações.<br><br>Revendo equações, inequações e sistemas. | Relação entre aritmética e álgebra.<br><br>Pequeno trecho histórico para introduzir expressões algébricas.<br><br>Passagem da álgebra retórica para álgebra simbólica, com inexistência da álgebra sincopada.<br><br>Resolução de equações via cálculo mental.<br><br>Uso de resolução de problemas e emprego das balanças como metodologia.<br><br>Em um segundo capítulo, relaciona álgebra à geometria, para resolver sistema de equações. | calculados os valores numéricos.<br><br>Resolução de equações via cálculo mental.<br><br>Resolução de Problemas: álgebra retórica para álgebra simbólica e, resolução de equações e inequações.<br><br>Exercícios assim como os problemas direcionam a aplicação e sistematização de procedimentos ou propriedades anteriormente apresentadas. | |
| **Praticando Matemática**<br><br>Álvaro Andrini, Maria José Vasconcellos | Letras e padrões.<br><br>Equações.<br><br>Algumas operações com letras.<br><br>Balanças em equilíbrio e eqações.<br><br>Mais problemas e equações. | Breve introdução acerca da passagem da álgebra retórica para simbólica. Ausência da álgebra sincopada.<br><br>Narrativa breve a história da Álgebra, citando Diofante e Al-Khowarizmi.<br><br>Uso de resolução de problemas e emprego das balanças como metodologia. | Exercícios mecânicos, visando apenas a execução de cálculos.<br><br>Resolução de equações via cálculo mental.<br><br>Resolução de Problemas: álgebra retórica para álgebra simbólica e, resolução de equações e inequações.<br><br>Exercícios assim como os problemas direcionam a aplicação e sistematização de procedimentos ou propriedades anteriormente apresentadas. | Ausência do nexo fluência.<br><br>Referência a variável, mas inexistência do nexo campo de variação. |
| | | | | Continua |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | | Conclusão |
| **Projeto Araribá Matemática**<br><br>Fábio Martins de Leonardo et al. | Expressões algébricas.<br>Calculando com letras.<br>Igualdade.<br>Equações – raiz ou solução de uma equação.<br>Resolver um problema por meio de uma equação.<br>Equações equivalentes.<br>Equações de 1° grau com uma incógnita.<br>Situações-problema resolvidos por equação.<br>Equação de 1° grau com duas incógnitas.<br>Sistema de equações de 1° grau com duas incógnitas.<br>Inequações de 1° grau com uma incógnita. | O capítulo tem início com algumas situações que direcionam à ideia de expressão algébrica.<br>Apresenta alguns recortes da história da Álgebra, referenciando Ahmes, Diofanto, al-Khowarizmi e François Viète.<br>Passagem da álgebra retórica, para álgebra simbólica. Ausência da álgebra sincopada.<br>Uso de resolução de problemas e emprego das balanças como metodologia.<br>Após serem apresentadas poucas situações envolvendo a escrita de expressões algébricas, passa-se rapidamente para a resolução de equações e de sistemas. | Exercícios para cálculo de valor numérico de forma mecânica.<br>Resolução de Problemas: álgebra retórica para álgebra simbólica e, resolução de equações e inequações.<br>Exercícios assim como os problemas direcionam a aplicação e sistematização de procedimentos ou propriedades anteriormente apresentadas. | Ausência do nexo fluência.<br>Referência aos nexos variável e campo de variação.<br>Apresentam a resolução de uma equação e em seguida analisam a validade da raiz para o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números inteiros. Após isso os autores apresentam um exercício, seguindo a mesma ideia do exemplo. |

Fonte: Sistematização da Pesquisadora

Pelo quadro apresentado, podemos verificar que em todas as obras analisadas há a ausência da álgebra sincopada (EVES, 2002; LANNER DE MOURA; SOUSA, 2005), sendo que todas as obras citadas evidenciam apenas a passagem dos textos em linguagem discursiva para a linguagem matemática.

Em apenas um livro didático – Projeto Araribá Matemática – identifica-se a abordagem de diferentes momentos históricos da álgebra e, nos demais livros, justifica-se esse estudo em situações cotidianas, vivenciadas pelos estudantes. É possível inferir que não se estimula a apreensão do conceito de equação, mas sim sua resolução via procedimentos determinados algoritmicamente. Assim como, é possível identificar que não existe uma preocupação com o aspecto relativo à pré-álgebra (LANNER DE MOURA; SOUSA, 2005), as expressões algébricas e equações são apresentadas de forma explícita e direta, não motivando a necessidade desse estudo, a formação e estruturação do pensamento algébrico como uma intencionalidade.

Por meio dessa análise, podemos inferir que há a necessidade de uma organização do ensino de álgebra, que promova a estruturação do pensamento algébrico, fomentando o ensino de equações e que coloque o sujeito em movimento de apropriação do conhecimento, onde esse esteja em atividade.

Buscamos nesse capítulo elencar diferentes concepções sobre o ensino de álgebra, presentes em documentos oficiais, pesquisas acadêmicas e livros didáticos. Concluímos reiterando nossa escolha pela organização do ensino que abarque os nexos conceituais da álgebra (fluência, variável e campo de variação) discutidos por Sousa (2004), uma vez que acreditamos que esses nexos consideram o movimento histórico da formação do pensamento algébrico e do conceito de equações de 1° grau, permitindo que os estudantes se apropriem desse conhecimento.

No próximo capítulo, vamos categorizar nossa pesquisa, os princípios éticos que adotamos e apresentaremos o espaço onde a proposta aconteceu, seus protagonistas e as atividades de ensino que foram desenvolvidas.

# 4. CONHECENDO A PROPOSTA E SEUS PROTAGONISTAS

> *O método materialista histórico-dialético caracteriza-se pelo movimento do pensamento através da materialidade histórica da vida dos homens em sociedade, isto é, trata-se de descobrir (pelo movimento do pensamento) as leis fundamentais que definem a forma organizativa dos homens em sociedade através da história (PIRES, 1997, p. 83).*

Nos capítulos anteriores discutimos os aspectos teóricos de nosso estudo. Apresentamos a Teoria Histórico-Cultural, fizemos um resgate histórico dos caminhos da álgebra ao longo das diferentes civilizações e estabelecemos um panorama da álgebra no ensino, abarcando diferentes concepções da educação algébrica, as pesquisas já realizadas com esse tema, as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais e uma breve análise de livros didáticos presentes na escola onde a proposta aconteceu.

Nesse capítulo apresentamos nossa metodologia de pesquisa caracterizando-a sob a abordagem qualitativa (BOGDAN; BIKLEN, 1994), discorremos sobre o materialismo histórico dialético, retomamos nossa questão de pesquisa e nossos objetivos, apresentamos os princípios éticos adotados nesse estudo (BOGDAN; BIKLEN, 1994; FIORENTINI; LORENZATO, 2006), os instrumentos que tivemos em mãos para a observação do fenômeno em movimento, bem como os critérios estabelecidos para conseguirmos definir nossos protagonistas, nosso isolado (CARAÇA, 1951), as atividades de ensino propostas aos estudantes (SOUSA, 2004; SCALASSARI, 2007) e, por fim, nosso caminho para análise do material obtido.

## 4.1 Caracterização da pesquisa

A partir de nossa atuação como professora da rede pública de ensino, vivenciamos situações em que os estudantes demonstravam dificuldades em definir equações de 1° grau. Na maioria das vezes, quando os indagávamos sobre esse assunto, se restringiam a descrever "procedimentos para se resolver uma equação", dizer que "toda equação tem o *x*", ou "se estiver mais vai passar menos e vice-versa, mas não sei porquê", não conseguindo compreender e definir equações de 1° grau.

O ingresso no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, juntamente com essa inquietude nos levou a pensar em uma pesquisa que trouxesse a possibilidade da formação conceitual do tema equações de 1° grau para estudantes do 7° ano do ensino fundamental, por meio de atividades de ensino em que, à medida que a proposta fosse vivenciada pelos estudantes, adquirisse o caráter de atividades de aprendizagem conforme discutimos no Capítulo 1.

Mediante as reflexões apresentadas até o momento, elaboramos a seguinte questão de pesquisa: *quais implicações pedagógicas para o processo de formação do pensamento algébrico e do conceito de equação de 1º grau para os estudantes do ensino fundamental as atividades de ensino, desenvolvidas na perspectiva da Atividade Orientadora de Ensino, podem propiciar?*

Como objetivo principal dessa pesquisa, procuramos analisar possíveis implicações pedagógicas para a formação do pensamento algébrico e a aprendizagem do conceito de equação de 1° grau para estudantes do 7° ano do ensino fundamental por meio de atividades de ensino a partir dos pressupostos da atividade orientadora de ensino. E, como ações desenvolvidas para atingir os objetivos, procuramos:

- organizar uma unidade didática que permita cumprir com o objetivo da formação conceitual do pensamento algébrico e de equações de 1° grau;
- investigar as ações dos estudantes frente às atividades de ensino, investigando se as mesmas tornar-se-ão atividades de aprendizagem;
- investigar se atividades de ensino podem influenciar no saber pensar e saber fazer do estudante.

O desenvolvimento da proposta de ensino aconteceu no âmbito de uma escola pública municipal da cidade de Uberlândia/MG, com 27 estudantes do 7° ano do ensino fundamental, com faixa etária entre 12 e 15 anos, no ano de 2014.

Ao tomarmos a sala de aula como nosso campo de investigação, como um “ambiente natural” da formação do conhecimento teórico de estudantes, acreditamos nos aproximar das características de uma pesquisa de enfoque qualitativo. Segundo Bogdan e Biklen (1994, p. 16):

> As questões a investigar não se estabelecem mediante a operacionalização de variáveis, sendo, outrossim, formuladas com o objectivo de investigar os fenómenos em toda a sua complexidade e em contexto natural. Ainda que os indivíduos que fazem investigação qualitativa possam vir a seleccionar questões específicas à medida que recolhem os dados, a abordagem à investigação não é feita com o objectivo de responder a questões prévias ou de testar hipóteses. Privilegiam, essencialmente, a compreensão dos comportamentos a partir da perspectiva dos sujeitos da investigação. As causas exteriores são consideradas de importância

> secundária. Recolhem normalmente os dados em função de um contacto aprofundado com os indivíduos, nos seus contextos ecológicos naturais.

Para estes autores, a investigação qualitativa apresenta cinco características a serem observadas, sobre as quais passamos a discorrer relacionando-as à nossa pesquisa.

As atividades por nós realizadas durante a pesquisa foram organizadas e aconteceram na escola, observando-se o movimento realizado pelos estudantes, bem como suas ações. Essa é a primeira característica apontada pelos autores Bogdan e Biklen (1994, p. 47), pois "a investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal".

No decorrer da escrita dessa dissertação, procuramos apresentar uma escrita que relate e analise a realidade dos estudantes frente a seu movimento de apropriação do conhecimento, contemplando, assim, a segunda característica de uma pesquisa qualitativa: "a investigação qualitativa é descritiva" (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 48).

A terceira característica, "os investigadores qualitativos interessam-se mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos" (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 49), remete-nos ao cuidado tomado por nós durante o planejamento das atividades de ensino, em que buscamos investigar como ocorre o processo de estruturação e formação do pensamento algébrico, culminando no conceito de equações de 1° grau. Esta característica indica o interesse no movimento de apropriação do conhecimento dos estudantes.

Em momento algum de nossa pesquisa estávamos com conclusões previamente definidas ou buscávamos comprovar alguma resposta já pré-estabelecida. À medida que as atividades foram propostas e desenvolvidas e os dados adquirindo forma, pudemos inferir algumas conclusões. Este fato nos aproxima da quarta característica de uma investigação qualitativa que, nas palavras de Bogdan e Biklen (1994, p. 50), "os investigadores qualitativos tendem a analisar os seus dados de forma indutiva".

A última característica "o significado é de importância vital na abordagem qualitativa" (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 50), é atendida nas análises dos dados observados, ao buscarmos sentido as ações dos sujeitos de nossa pesquisa.

Outra característica da relevância da pesquisa em sala de aula é destacada por Moura (2000), que a considera o "lugar privilegiado para a observação dos alunos nos seus processos de aquisição de conhecimentos e onde as interações tanto podem servir para resolver problemas dados como para gerarem novos pela troca simbólica em jogo" (MOURA, 2000, pp. 14-15).

Diante do exposto, passamos a uma breve apresentação sobre o método materialista histórico dialético, balizador dessa investigação.

## 4.2 O Materialismo Histórico Dialético

Entendemos que essa pesquisa nos permitiu perceber a construção dos conceitos algébricos pelos estudantes, frente às atividades que lhes foram propostas, tendo sempre o olhar voltado para suas ações e movimentos. Essa premissa nos remete a Leontiev (1978), que afirma que

> [...] devemos estudar como se formam as relações vitais do homem em tais ou tais condições sociais históricas e que estrutura particular engendra dadas relações. Devemos em seguida estudar como a estrutura da consciência do homem se transforma com a estrutura da sua atividade (LEONTIEV, 1978, p. 92).

Ao pensarmos no caminho metodológico para direcionar nossa pesquisa, sentimos a necessidade de acompanharmos os processos pelos quais nossos sujeitos perpassaram e não somente o produto final de suas ações. Este fato nos direcionou a buscar no materialismo de Marx e no método de Vigotski um caminho para organizarmos nossa pesquisa.

Agregar ao nosso estudo o materialismo histórico dialético se justifica por termos um direcionamento para investigar as mais simples manifestações dos sujeitos da pesquisa e, ao nos debruçarmos sobre estas, elaborando abstrações, poderemos compreender o movimento de apropriação de conhecimento dos estudantes envolvidos neste estudo.

Na literatura, encontramos que a dialética de Marx busca a superação da dicotomia sujeito-objeto, contudo um olhar focado na história nos revela que a dialética surgiu antes de Marx.

> Em suas primeiras versões, a dialética foi entendida, ainda na Grécia antiga, como a arte do diálogo, a arte de conversar. Sócrates emprega este conceito para desenvolver sua filosofia. Platão utiliza, abundantemente, a dialética em seus diálogos. A verdade é atingida pela relação de diálogo que pressupõe minimamente duas instâncias, mas até aqui o diálogo acontece sob um princípio de identidade, entre os iguais. Entretanto, tal posicionamento foi precedido por uma visão distinta encontrada principalmente em Heráclito, filósofo grego que viveu de 530 a 428 a.C. (PIRES, 1997, p. 84).

Conforme registra Pires (1997), Heráclito defende que a conversa existe somente mediante o conflito entre os divergentes. Portanto, a lógica dialética compreende a realidade como contraditória e em constante transformação. Mas foi com o filósofo alemão Hegel que a dialética retomou seu lugar como preocupação filosófica. Hegel constituiu a dialética como método, desenvolvendo o "princípio da contraditoriedade afirmando que uma coisa é e não é ao mesmo tempo e sob o mesmo aspecto. Esta é a oposição radical ao dualismo dicotômico sujeito-objeto e ao princípio da identidade" (PIRES, 1997, p. 85).

Contudo, foi Karl Marx, filósofo alemão, economista, jornalista e militante político quem superou as concepções de Hegel acerca da dialética e forneceu a ela um caráter materialista e histórico, em sua busca por um caminho que fundamentasse o conhecimento para interpretar a realidade que vivia.

> Para o pensamento marxista, importa descobrir as leis dos fenômenos cuja investigação se ocupa; o que importa é captar, detalhadamente, as articulações dos problemas em estudo, analisar as evoluções, rastrear as conexões sobre os fenômenos que os envolvem. Isto, para este pensador, só foi possível a partir da reinterpretação do pensamento dialético de Hegel. A separação sujeito-objeto, promovida pela lógica formal, não satisfazia a estes pensadores que, na busca da superação desta separação, partiram de observações acerca do movimento e da contraditoriedade do mundo, dos homens e de suas relações (PIRES, 1997, pp. 85-86).

Marx forneceu o caráter *material* ao método, no que diz respeito à organização dos homens na sociedade para a produção e reprodução da vida e o caráter *histórico* ao olhar como os homens vêm se organizando por meio de sua história.

Para Vigotski (2001) estudar algo historicamente é sinônimo de estudar em movimento, momento esse de suma importância ao método, pois

> quando numa investigação se abarca o processo de desenvolvimento de algum fenômeno em todas as suas fases e mudanças, desde que surge até que desapareça, isso implica manifestar sua natureza, conhecer sua essência, já que somente em movimento demonstra o corpo que existe. Assim, pois, a investigação histórica da conduta não é algo que complementa ou ajuda o estudo teórico, mas consiste seu fundamento (VYGOTSKY, 2001, pp. 67-68).

De acordo com Pires (1997) o princípio da contradição, na lógica de Marx, nos remete a pensar uma realidade onde seja possível aceitar a contradição, caminhar junto a ela e apreender o que dela seja fundamental. Assim, partimos do empírico e, por meio das abstrações, chegamos ao concreto que, nas palavras de Pires (1997),

> movimentar o pensamento significa refletir sobre a realidade partindo do empírico (a realidade dada, o real aparente, o objeto assim como ele se apresenta à primeira vista) e, por meio de abstrações (elaborações do pensamento, reflexões, teoria), chegar ao concreto: compreensão mais elaborada do que há de essencial no objeto, objeto síntese de múltiplas determinações, concreto pensado. Assim, a diferença entre o empírico (real aparente) e o concreto (real pensado) são as abstrações

> (reflexões) do pensamento que tornam mais completa a realidade observada (PIRES, 1997, p. 87).

O materialismo histórico dialético de Marx influenciou o desenvolvimento do método de investigação da psicologia histórico-cultural de Vigotski. Cole e Scribner (1998) apresenta três princípios no método de investigação que o diferencia dos métodos utilizados em outras abordagens teóricas: 1) análise de processos, em substituição à análise de objetos; 2) explicação do fenômeno em substituição à descrição do mesmo; 3) investigação do "comportamento fossilizado".

O primeiro desses princípios, *analisar processos, e não objetos* considera o estudo da dinâmica dos principais pontos constituintes da história dos processos que estão envolvidos na investigação, assim "a tarefa básica da pesquisa se torna uma reconstrução de cada estágio no desenvolvimento do processo: deve-se fazer com que o processo retorne aos seus estágios iniciais" (COLE; SCRIBNER, 1998, p. 64).

O segundo princípio, *explicação versus descrição* considera as manifestações exteriores, mas busca compreender as ligações reais entre os estímulos externos com as respostas internas, "necessariamente, a análise objetiva inclui uma explicação científica tanto das manifestações externas quanto do processo em estudo" (COLE; SCRIBNER, 1998, p. 66), isto é, subordina as manifestações externas à descoberta de sua origem real.

O último princípio, *investigação do "comportamento fossilizado"* remete à busca da gênese, o levantamento da história de determinado comportamento, uma vez que alguns comportamentos já estão tão mecanizados que perderam sua origem, sua aparência externa nada nos diz sobre sua natureza interna. Nas palavras de Vigotski (2001, pp. 67-68)

> quando, numa pesquisa, apropriamo-nos do processo de desenvolvimento de algum fenômeno em todas as suas fases e mudanças, desde que surge até que desaparece, isto implica em desvelar sua natureza, conhecer sua essência, já que só em movimento demonstra o corpo que existe. Assim, pois, a pesquisa histórica da conduta não é algo que complementa ou ajuda o estudo teórico, mas que constitui seu fundamento.

Assim, em nosso estudo, buscamos estudar o movimento realizado pelos estudantes, nos remetendo às suas ações e reflexos, buscando as justificativas para o conhecimento teórico por eles produzido.

Na seção seguinte dissertamos sobre as questões éticas que embasaram nosso estudo.

## 4.3 Discorrendo um pouco sobre questões éticas

Ao pensarmos em uma pesquisa de abordagem qualitativa, recorremos a Bogdan e Biklen (1994, p. 77) e apresentamos os princípios éticos que nortearam nosso estudo:

1. As identidades dos sujeitos foram protegidas: lançamos mão do uso de pseudônimos para nos referirmos aos sujeitos, a fim de que não lhes causemos "qualquer tipo de transtorno ou prejuízo";
2. Os sujeitos foram informados quanto aos objetivos da investigação e seu consentimento[23] obtido, sendo também informados que seriam realizadas gravações de áudio e vídeo, onde não direcionamos à face dos mesmos, pois "os investigadores não devem mentir aos sujeitos nem registrar conversas ou imagens com gravadores escondidos";
3. Comprometemo-nos em apresentar nessa pesquisa, os resultados da investigação, prevalecendo os movimentos reais de constituição desse estudo, uma vez que "a característica mais importante de um investigador deve ser sua devoção e fidelidade aos dados que obtém".

Em relação aos procedimentos éticos na pesquisa em Educação Matemática, buscamos contemplar alguns princípios e cuidados sugeridos por Fiorentini e Lorenzato (2006) e que coadunam com aqueles apresentados por Bogdan e Biklen (1994): consentimento dos envolvidos; preservação da identidade e da integridade dos envolvidos; mínima interferência do pesquisador no ambiente; e cuidados na divulgação dos dados.

Orientadas por tais princípios nos comprometemos com os nossos protagonistas, buscamos respeitar sua identidade, suas ações e seu caminhar durante a realização das atividades de ensino, além de nos comprometermos em apresentar nesse estudo os rumos que de fato foram assumidos em seu decorrer, sendo assim, cumprimos com os procedimentos solicitados pelo Comitê de Ética e Pesquisa da Universidade Federal de Uberlândia (CEP/UFU), obtendo a aprovação deste órgão para darmos prosseguimento ao nosso estudo.

Apresentamos na próxima seção os instrumentos utilizados para a realização de nossa pesquisa.

## 4.4 Instrumentos de construção dos materiais analisados

[23] O Termo de Consentimento Livre Esclarecimento (TCLE) encontra-se nos anexos.

Como instrumentos de produção e construção do material analisado nesta pesquisa, tivemos:

a) registro, individual e em grupo, das atividades desenvolvidas pelos estudantes;

b) registros no diário de campo da professora pesquisadora;

c) áudio das discussões ocorridas entre os protagonistas durante o caminhar e a produção das atividades;

d) registro visual (fotos) das ações dos estudantes no decorrer das atividades.

Discutimos com os estudantes que seus registros não tinham como objetivo o relato do que ocorria em sala de aula, mas que nosso intuito visava que nos contassem suas reflexões, anseios, inquietações, seus sentimentos com as atividades que estavam sendo desenvolvidas.

Enquanto a professora pesquisadora interagia com a classe, procurava também acompanhar o movimento natural dos estudantes, suas dúvidas e anseios. As interações entre os estudantes foram registradas no diário de campo da professora pesquisadora, objetivando não ser prejudicada pela ausência de lembranças ou detalhes dos fatos ocorridos.

Os registros audiovisuais e escritos permitiram o olhar acurado, o distanciamento da professora para então tornar-se apenas pesquisadora, visando a busca de aspectos relevantes a esta pesquisa, uma vez que, enquanto inseridas no movimento de sala de aula, muitas são as inquietudes dos estudantes no decorrer do processo e, ao passo que fez-se necessária a atenção aos mesmos, poderíamos deixar escapar detalhes importantes. Assim, os registros audiovisuais permitiram a retomada desse processo com o foco nas ações e discussões dos estudantes.

É chegado o momento de apresentarmos os protagonistas de nosso estudo.

## 4.5 Conhecendo os protagonistas da pesquisa

A professora pesquisadora encontra-se no cargo de Professora Efetiva em uma escola municipal da cidade de Uberlândia/MG, desde o final do ano de 2012. Essa escola situa-se na zona rural[24] da cidade. Sua comunidade é composta por famílias que ali residem buscando um local para constituírem seus lares onde, por serem afastados do perímetro urbano, os lotes podem ser adquiridos por um valor monetário mais acessível. As famílias, em sua maioria,

---

[24] A denominação de zona rural deve-se pelo fato da escola contemplar estudantes que residem em chácaras, não há nesse setor loteamento, assim como os moradores ainda não foram comtemplados com a infraestrutura presente nos bairros urbanos.

são formadas por produtores rurais, mas que produzem apenas para o próprio consumo, muitos dos pais são chefes de família que antes do amanhecer do dia deixam suas casas rumo à "cidade", como eles mesmos se referem, para mais um dia de trabalho e retornam apenas ao anoitecer para seus lares.

A escola é a única do bairro. No turno da manhã funcionam quatro turmas do ensino fundamental I (5° ano) e dezesseis turmas do ensino fundamental II (6° ao 9° anos); no turno da tarde, vinte turmas do ensino fundamental I (1° ao 4° anos) e, no noturno, quatro turmas da Educação de Jovens e Adultos do 6° ao 9° anos. Além das turmas regulares, existe, nos três turnos, uma pequena sala onde se desenvolve o atendimento especializado a estudantes que possuem algum tipo de deficiência física ou psicológica.

A realidade da escola é constituída por uma alta rotatividade dos estudantes. Infelizmente uma característica das famílias é o alto índice de separação entre os cônjuges ou a tomada de guarda das crianças, feita por avós ou outros parentes que a justiça julga estarem mais aptos a educar do que os próprios pais, assim, muitos estudantes são transferidos no decorrer do ano letivo, interferindo em seu sucesso escolar.

No ano de 2014, a professora pesquisadora encontrava-se responsável por ministrar aulas de matemática para os estudantes do 7° ano do ensino fundamental, sendo assim, a proposta foi desenvolvida com quatro turmas compostas em média por 30 estudantes. Contudo, devido o alto número de protagonistas, fez-se necessário, utilizarmos o conceito de *isolado*, proposto por Caraça (1951), para que pudéssemos refinar o número de sujeitos de nossa pesquisa. Na perspectiva de Caraça (1951), o isolado se explica pela "impossibilidade de abraçar, num único golpe, a totalidade do Universo [realidade observada], o observador recorta, destaca, dessa totalidade, um conjunto de seres e fatos, abstraindo de todos os outros que com eles estão relacionados" (CARAÇA, 1951, p. 105). Refletimos muito até que conseguíssemos chegar ao nosso isolado, que apresentaremos a seguir.

Como a proposta aconteceu no segundo semestre de 2014, devido a algumas festividades realizadas na escola e recessos escolares, o número de aulas em uma das turmas acabou sendo reduzido bruscamente, o que alterou o fluxo da proposta, impossibilitando que a mesma pudesse ocorrer de forma integral, isto é, algumas atividades não puderam ser realizadas.

Em outra turma se fizeram presentes dois conflitos: o alto número de rotatividade de estudantes e a baixa frequência. Iniciamos o ano letivo com 35 estudantes matriculados e findamos com apenas 25 estudantes, sendo que cinco destes ingressam em meados do mês de novembro, ou seja, a proposta já estava em andamento. Além disso, alguns estudantes da turma moravam em chácaras afastadas da escola, em locais onde, quando chovia, não se fazia possível que o ônibus escolar transitasse. Assim, infelizmente, os estudantes não conseguiam comparecer as aulas, sendo necessário que frequentassem a escola no contra turno para reporem a carga horária, feita com outra professora, específica para esta finalidade. Mais uma vez, vemos a impossibilidade de esses serem sujeitos de nossa pesquisa, devido à falta de fluência da proposta, já que alguns estudantes não acompanharam seu início e outros participaram de algumas poucas atividades, não vivenciando a proposta como um todo.

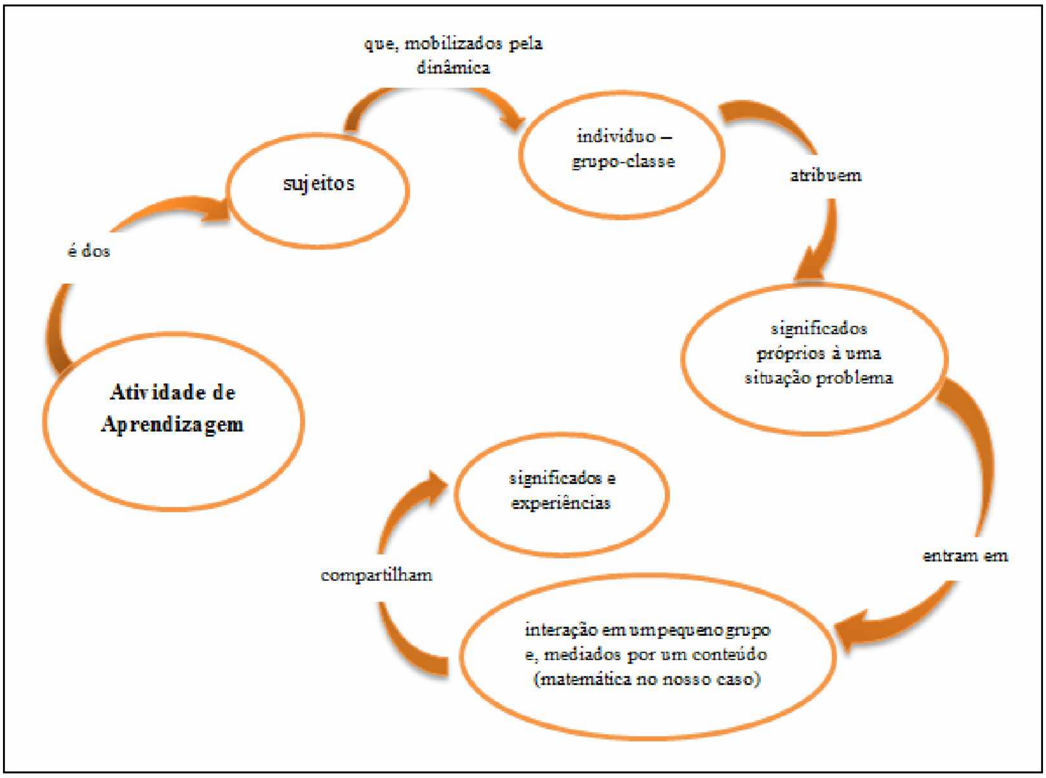
Na terceira turma, tínhamos também problemas com a frequência dos estudantes, advindos de dois motivos: o primeiro, como descrito no parágrafo anterior, os estudantes nem sempre conseguiam chegar à escola devido às chuvas da época e, o segundo, em uma turma de 30 estudantes composta por doze repetentes, onde dois deles repetiam o 7° ano pela segunda vez. Esses doze estudantes se encontravam fora da faixa etária (entre 14 e 16 anos) e manifestavam o desejo de serem transferidos para o noturno, pois assim poderiam ingressar na turma de Jovens e Adultos. Contudo, não havia vagas naquele ano no noturno, então, os mesmos, por seguidas semanas, não frequentavam as aulas, mantinham o hábito de assistir de duas a seis aulas por mês apenas para garantirem a matrícula para o ano seguinte. Mais uma vez, esse não poderia ser nosso isolado.

Esses fatores auxiliaram-nos a eleger os critérios de seleção dos sujeitos da pesquisa: frequência constante nas aulas; ter apresentado suas reflexões nos registros escritos e socialização na turma; ter vivenciado as atividades propostas, ou seja, ter participado da maior parte do movimento da proposta de atividades de ensino.

Assim, nosso isolado ficou determinado por uma turma do 7° ano composta por 27 estudantes com faixa etária de 12 a 15 anos, regularmente frequentes de uma escola municipal da cidade de Uberlândia.

Lançamos mão da dinâmica, indivíduo-grupo-classe (LANNER DE MOURA et al., 2003) objetivando o compartilhamento de sentimentos, experiências, significados e conhecimentos em que, num primeiro momento, o indivíduo está no movimento do pensar individual sobre a situação-problema a qual está inserido e atribuir significados próprios a ela; posteriormente, em pequenos grupos, poderá discutir suas ideias a fim de elaborar uma síntese coletiva que represente este grupo e, por fim, termos a discussão grupo-classe para encontrar uma possível solução ou a mais adequada – e que ocorre mediada pelo professor. Adaptando o esquema de Marco (2009), podemos representar essa dinâmica no seguinte mapa conceitual:

**Figura 8: Movimento entre estudantes ao vivenciar uma atividade de ensino**




Fonte: Adaptado de Marco, 2009, p. 35

Pelo que tratamos no Capítulo 1, dos fundamentos da Teoria da Atividade, vemos que os sujeitos em coletividade e sob as ações desencadeadas pela professora pesquisadora podem colocar-se em atividade construindo significados e apreendendo os conceitos, foco da intencionalidade da professora pesquisadora.

Para a realização das atividades de ensino propostas, a composição de integrantes em duplas, trios, quartetos ou equipes, em diferentes momentos, ficaram assim determinadas[25]:

[25] As configurações apresentadas para duplas, trios e quartetos se deram mediante as afinidades existentes entres os integrantes. Apenas para a composição das equipes, os estudantes estabeleceram como critério sua localização da sala de aula, isto é, uniram carteiras próximas umas das outras. Reiteramos mais uma vez, que os nomes fictícios, preservando assim, a identidade dos estudantes.

**Quadro 9: Descrição da Composição dos Grupos**

| Discriminação | Nomes dos Integrantes |
|---|---|
| **Duplas**<br>**(como a classe era composta de 27 estudantes, houve necessidade da composição de um trio)** | Ana Clara e Nayra;<br>Ana Paula e Vanessa;<br>Bruna e Érica;<br>Carlos, Fabiana e Pedro Henrique;<br>Davi e Rafael;<br>Fernanda e Pamela;<br>Gabriela e Lilian;<br>Jéssica e Regislaine;<br>Junior e Thaís;<br>Layla e Marina;<br>Leandro e Matheus;<br>Marcos Paulo e Natanael;<br>Otávio e Rian. |
| **Trios** | Ana Clara, Regislaine e Rian;<br>Ana Paula, Thaís e Vanessa;<br>Bruna, Otávio e Pamela;<br>Carlos, Junior e Pedro Henrique;<br>Davi, Fabiana e Rafael;<br>Érika, Fernanda e Natanael;<br>Gabriela, Jéssica e Layla;<br>Leandro, Marina e Nayra;<br>Lilian, Marcos Paulo e Matheus. |
| **Quartetos**<br>**(como a classe era composta de 27 estudantes, houve a necessidade da composição de um trio)** | Ana Clara, Layla, Marina e Nayra;<br>Ana Paula, Davi, Junior e Thaís;<br>Bruna, Leandro e Matheus;<br>Carlos, Fabiana, Pedro Henrique e Rafael;<br>Érika, Jéssica, Otávio e Regislaine;<br>Fernanda, Marcos Paulo, Natanael e Pamela;<br>Gabriela, Lilian, Rian e Vanessa. |
| **Equipes**<br>**(como neste dia, havia faltado a estudante Lilian, ambas as equipes foram compostas por 13 integrantes)** | I: Ana Clara, Carlos, Fabiana, Junior, Layla, Marina, Marcos Paulo, Natanael, Nayra, Pamela, Pedro Henrique, Thaís, Vanessa.<br><br>II: Ana Paula, Bruna, Davi, Érika, Fernanda, Gabriela, Jéssica, Leandro, Matheus, Otávio, Rafael, Regislaine, Rian. |

Fonte: Sistematização da pesquisadora

Trazemos, na próxima seção, as atividades de ensino que foram propostas aos estudantes.

## 4.6 As atividades de ensino propostas: alguns desdobramentos

As atividades de ensino[26] que se seguem foram organizadas pela professora pesquisadora ou adaptadas de outras pesquisas já realizadas e serão apresentadas com seus objetivos, duração para seu desenvolvimento, nexos conceituais, na ordem cronológica em que foram propostas aos estudantes nesta pesquisa. Tínhamos como objetivos nessas atividades gerar a necessidade em nossos estudantes para que essas se constituíssem em atividade de aprendizagem, compondo a atividade de ensino (MOURA, 2000). Assim, buscamos, nas situações desencadeadoras de aprendizagem, discutidas no Capítulo 1, gerar nos estudantes a necessidade de resolver um problema de modo a colocá-los numa situação semelhante à vivenciada historicamente.

A proposta foi desenvolvida no período de outubro de 2014 a dezembro de 2014, seguindo o seguinte cronograma:

**Quadro 10: Cronograma de execução das atividades**

| Atividade | Duração | Objetivo | Data |
|---|---|---|---|
| Movimentos Numéricos | 1 hora/aula | Desenvolver a ideia de movimento. | 05/10/2014 |
| Banco Imobiliário | 3 horas/aula | Perceber a dificuldade do registro retórico. | 08/10/2014<br>09/10/2014<br>12/10/2014 |
| O Problema do Arquiteto Amon Toado | 2 horas/aula | Entender que nem sempre temos uma única solução para um problema. Apresentar a necessidade dos egípcios em numeralizar o desconhecido. | 15/10/2014<br>16/10/2014 |
| Quiz | 2 horas/aula | Discutir a concepção dos estudantes de que o número só existe na forma numeral, visível, fixo e imutável. Definir um intervalo numérico para determinada situação. | 19/10/2014<br>22/10/2014 |
| Pensando na Variável | 2 horas/aula | Introduzir o uso da variável, podendo ser expressa em inúmeras representações. | 23/10/014<br>26/10/2014 |

[26] As atividades propostas estão destacadas em caixas de texto para que o leitor tenha maior compreensão das mesmas.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Jogo de Varetas | 6 horas/aula | Representar a contagem de pontos do jogo de varetas por meio de uma expressão algébrica. | 29/10/2014<br>30/10/2014<br>02/11/2014<br>05/11/2014<br>06/11/2014<br>09/11/2014 |
| Enigma | 2 horas/aula | Apresentar equações de forma explícita e buscar soluções por meio de tentativas. | 12/11/2014<br>13/11/2014 |
| Número Falso | 3 horas/aula | Equacionar problemas e buscar resolver equações pelo método do número falso. | 16/11/2014<br>19/11/2014<br>20/11/2014 |
| Método do Retorno | 4 horas/aula | Equacionar problemas e resolver as equações pelo método do retorno. | 23/11/2014<br>26/11/2014<br>27/11/2014<br>30/11/2014 |
| Triminó das Equações | 6 horas/aula | Equacionar problemas e resolver as equações. | 03/12/2014<br>04/12/2014<br>07/12/2014<br>10/12/2014<br>11/12/2014<br>14/12/2014 |

Fonte: Sistematização da Pesquisadora

**Atividade 1: Movimentos Numéricos**[27]

Duração: 1 hora/aula (50 minutos)

Objetivos: Desenvolver a ideia de movimento e o nexo conceitual: fluência.

Desenvolvimento: Os estudantes pensarão individualmente e, posteriormente serão convidados a formarem duplas para socializarem suas considerações.

Responda as questões abaixo:

a) Quantas pessoas estão em sua casa agora?

b) Você é o(a) mesmo(a) de um ano atrás? De um mês atrás? De uma semana atrás? Por quê?

c) O mundo é o mesmo enquanto falamos a palavra "mundo"? Por quê?

d) A escola permanece a mesma depois que você vai embora para a sua casa? Por quê?

e) Olho uma pedra; fecho os olhos e vejo novamente a pedra. É a mesma? Por quê?

f) "O fogo vive a morte do ar e o ar vive a morte do fogo; a água vive a morte da terra e a terra vive a morte da água".

g) "Tu não podes descer duas vezes ao mesmo rio, porque novas águas correm sobre ti".

h) "As coisas, ao mesmo tempo, são e não são elas próprias; nós mesmos somos e não somos".

[27] Atividade Adaptada de Sousa (2004).

Nesta atividade, acreditávamos que, inicialmente, os estudantes tenderiam a afirmar exatamente um valor, imaginando o que acontecia em sua casa, por exemplo, não considerando a possibilidade de imprevistos. Bem como, acreditávamos que eles tenderiam a respostas exatas, numericamente fechadas. Contudo, esperávamos que após a mediação da professora pesquisadora, essa ideia imutável e inflexível poderia ser modificada.

**Atividade 2: Banco Imobiliário**[28]

Duração: 3 horas/aula (50 minutos cada)

Objetivos: Conduzir os estudantes a perceberem a dificuldade do registro apenas com palavras, devido à intensidade dos movimentos quantitativos. Nexo conceitual: Fluência.

Desenvolvimento: Cada grupo, composto por quatro integrantes, receberá o seguinte roteiro:

Siga as orientações do jogo:

- Forme grupos de 4 integrantes. Cada jogador escolhe um marcador (vermelho, azul, amarelo, verde).
- Joguem o dado e, em ordem decrescente (maior número para menor número) será definida a ordem de jogada.
- Um dos jogadores deverá atuar como Banco, pagando e recebendo, inclusive as suas compras. Cada jogador deve receber 3 notas de R$ 5,00, 4 notas de R$10,00, 5 notas de R$ 50,00 e 5 notas de R$ 100,00.
- Os jogadores lançam o dado e andam o número de casas sorteado.
- O jogador poderá comprar a cidade em que parar pagando ao Banco o valor estipulado no tabuleiro e pegar o Certificado de Propriedade Correspondente.
- Quando o jogador parar em uma cidade que já foi comprada deverá pagar ao proprietário o aluguel indicado no Certificado.
- Toda vez que um jogador passar pela linha de largada receberá do Banco R$100,00.
- Quando parar em uma cidade que já é sua o jogador poderá colocar uma casa, pagando ao Banco o valor indicado ao lado da foto no Certificado. Feito isso, o aluguel a ser cobrado sobe para o valor indicado na parte inferior do Certificado.
- Quando um jogador já tiver 2 casas e parar novamente sobre esta cidade poderá devolvê-las ao banco e colocar um hotel no seu lugar, pagando ao Banco o valor estipulado. Feito isto o aluguel a ser cobrado sobe para o valor indicado na parte inferior do Certificado.
- No caso das Companhias (CIA), o jogador que parar sobre elas terá de pagar ao proprietário o valor correspondente ao número tirado no dado vezes 50. Não é permitido ao proprietário colocar casas ou hotéis nas companhias.

[28] Elaborada e Organizada pela Professora Pesquisadora.

- Quando um jogador não tiver dinheiro para pagar um aluguel deverá hipotecar uma ou mais cidades ao Banco recebendo o valor de "Hipoteca" estipulado na parte inferior do Certificado. Quando puder o jogador poderá devolver o valor ao Banco, recuperar a cidade e voltar a receber os aluguéis.
- Qualquer jogador que parar sobre uma cidade hipotecada poderá comprá-la.
- **Fim do Jogo**: o jogador que não tiver mais dinheiro, nem cidades para hipotecar estará fora do jogo. A partida terá no máximo 3 voltas, assim, quando um jogador completar as três voltas, todas as cidades devem ser vendidas ao Banco pelo valor de sua hipoteca. Aquele que acumular mais dinheiro será o vencedor.

1. Registre todos os movimentos que você fizer, mas cuidado: ainda não é permitido o uso de qualquer símbolo matemático, você pode usar apenas palavras.
2. Quais conhecimentos matemáticos você mobilizou para jogar?
3. Que problemas essa forma de registrar os movimentos traz?
4. Como se pode resolver esse problema?
5. Agora, tente fazer esses registros, usando símbolos matemáticos.
6. O que você achou dessa forma de registrar usando símbolos e números?

**Figura 9: Jogo Banco Imobiliário**[29]

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Acreditávamos que inicialmente, os estudantes sentiriam dificuldades em fazer os registros sem o uso de símbolos ou abreviações e, assim, caminhariam à necessidade de atribuir abreviações ou utilizar a simbologia matemática da qual têm conhecimento, por

[29] Fabricante do Jogo Banco Imobiliário: PMBI Artigos Didáticos LTDA.

exemplo, para perdas de dinheiro, atribuir o sinal negativo "–" e para ganhos o sinal positivo "+".

**Atividade 3: O Problema do Arquiteto Amon Toado**[30]

Duração: 2 horas/aula (50 minutos cada)

Objetivos: Entender que nem sempre temos uma única solução, dependemos das condições para estabelecer possíveis resultados. Apresentar a necessidade dos egípcios em numeralizar o desconhecido. Nexo conceitual: Variável Letra.

Desenvolvimento: Os grupos (constituídos por quatro estudantes) deverão se reunir para tentar solucionar o problema do arquiteto.

Estamos há quatro mil anos atrás. Os escravos estão trabalhando, carregando pedras para a construção da pirâmide do faraó. Na tenda do arquiteto Amon Toado, encarregado geral da obra, chega o chefe do depósito de pedras:

- Mandou-me chamar, senhor?
- Sim, mandei, Tuc Anon. Preciso saber quantas pedras temos no depósito para levantar a coluna mestra da pirâmide.
- Temos 60, senhor.
- Quantas pedras os escravos já colocaram até hoje?
- 12, senhor.
- Tudo bem, Tuc Anon, pode ir embora.
- Com sua permissão, senhor.

Amon Toado virou-se para os seus papiros e pensou:

- "Pois é, colocamos já 12 pedras na coluna mestra. Temos, no depósito, 60 pedras que podem ser usadas nessa coluna. Acontece que o faraó ainda não se decidiu qual a altura de sua pirâmide. Dessa forma não posso indicar quantas pedras no total terá a coluna mestra. Porém eu preciso deixar escrito aqui no projeto a altura da pirâmide para que os encarregados da obra fiquem com os dados registrados e não se confundam. Esse é o meu problema: como vou escrever a altura da coluna, considerando as 12 pedras já colocadas, as 60 pedras do depósito que podem ser usadas todas ou não, e a altura que eu ainda desconheço? Como escrever isso de forma matemática, quer dizer, da forma mais simples possível e utilizando a linguagem das quantidades, isto é, a linguagem numérica?"

Pois é, pessoal, temos aí o problema do arquiteto das pirâmides:

***Como escrever, utilizando a linguagem numérica, uma frase onde apareça um número desconhecido?***

Após a leitura do texto,

[30] Atividade extraída de Sousa (2004, p. 198).

1. Cada estudante pensará sozinho, buscando a sua solução pessoal, registrando suas considerações;
2. Em grupos de três estudantes, deverão discutir, analisando a resposta de cada um, criando assim, a resposta do grupo;
3. Cada grupo apresentará sua solução que será discutida pela classe, permitindo a formação de uma resposta geral.
4. Porque os egípcios precisaram criar a linguagem dos números desconhecidos?
5. Porque foi escolhida uma palavra e não um numeral (ou outro símbolo qualquer) para escrever o número desconhecido?

Pensávamos que inicialmente os estudantes ficariam confusos, uma vez que estavam habituados a responder os problemas com uma resposta numérica exata. Entendíamos que mais uma vez as ações mobilizadoras da professora seriam importantes a fim de esclarecer as dúvidas que poderiam surgir.

**Atividade 4: Quiz**

Duração: 2 horas/aula (50 minutos cada)

Objetivo: Discutir a concepção que se tem de que o número só existe a partir da contagem, na forma de numeral, visível, fixo, imutável. Isto é, se o número for desconhecido, não contado, ele não existe. Definir um intervalo numérico para determinada situação. Nexo Conceitual: Campo de Variação.

Desenvolvimento: Será proposto um "quiz"[31] aos estudantes. A classe será dividida em duas equipes, a professora pesquisadora fará as perguntas e os estudantes terão um tempo para pensar e apresentar a resposta.

Indique os limites máximo e mínimo e o número que responde a situação numérica, se possível:

a) A idade de José daqui sete anos.

b) A idade de Pedro há 12 anos atrás.

c) O dobro do dinheiro que trago no meu bolso.

d) A altura de Maria.

Pergunta: Quais dificuldades vocês encontraram para responder essas perguntas?

[31] Nome dado a um jogo, onde os jogadores, nesse caso em grupos, tentam responder corretamente as questões que são feitas. O grupo vencedor será o que atingir maior pontuação. As atividades 4 e 5 foram adaptadas de Scalassari (2007).

Os livros didáticos normalmente abordam o nexo campo de variação, como conjunto--universo de uma equação. Das análises que realizamos no Capítulo 3, percebemos que apenas uma das obras (Projeto Araribá) se refere ao nexo campo de variação, sendo este tratado em um exemplo e um exercício, onde o campo de variação já vem de forma explícita, apenas para que os estudantes verifiquem a possibilidade da raiz pertencer ou não ao mesmo.

Na atividade que apresentamos esperávamos que os estudantes analisassem quais eram as possibilidades para o campo de variação de cada sentença. Retornamos com as ideias de movimento, número desconhecido e, além disso, esperávamos que os estudantes definissem o intervalo de um conjunto numérico, no qual esse número desconhecido deveria pertencer ao contexto dado.

**<u>Atividade 5: Pensando na variável</u>**

Duração: 2 horas/aula (50 minutos cada)

Objetivo: Introduzir o uso da variável, compreender que esta pode ser expressa de inúmeras representações. Nexo conceitual: Variável Numeral.

Desenvolvimento: Inicialmente, o estudante pensará sozinho, posteriormente, formará duplas para dialogarem e decidirem por um único desenho e, por fim, a classe deverá escolher um único desenho.

> Temos o seguinte problema: "Vamos nos imaginar em pleno Renascimento. Vamos nos dividir em grupos de matemáticos que trabalhavam no comércio da época. O comerciante de móveis e tapetes para o qual trabalham os matemáticos, explicou-lhes que quer aumentar o seu estoque de mercadorias em cinco unidades para todos os tipos. Assim, cadeiras, mesas, armários, tapetes, independente da quantidade inicial de cada, devem ser aumentadas em cinco unidades. Os grupos de matemáticos têm, assim, um problema: *Como escrever numericamente o pedido do comerciante*"?
>
> Usando a criatividade desenhe uma variável que seja mais próxima possível do numeral, para escrever a sentença do comerciante. Após cada grupo criar a sua variável-numeral, apresentar para a sala. Inicialmente você pensará sozinho. Posteriormente, reúna-se com seu grupo e juntos encontrem um desenho no qual o grupo julga ser o mais adequado. A classe deverá escolher o que melhor expresse a numeralização da variável.

Esperávamos, com essa atividade, que os estudantes criassem uma variável mais próxima possível do numeral, reconstruindo a ideia dos egípcios quando introduziram o *ahá*, conforme apresentamos no Capítulo 2.

**Atividade 6: Jogo de Varetas**[32]

Duração: 6 horas/aula (50 minutos cada)

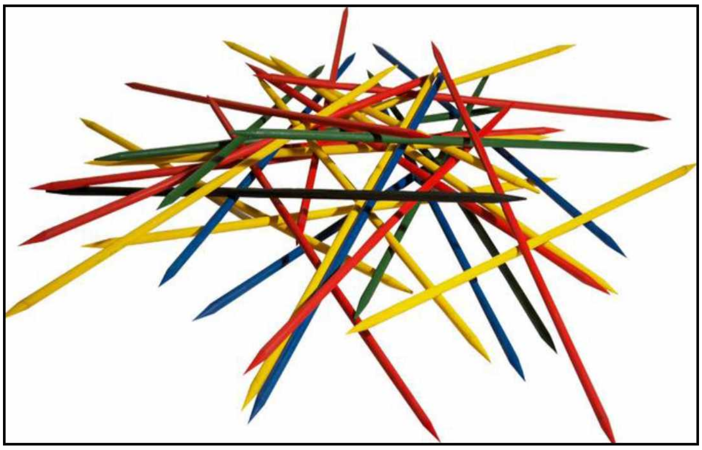
Objetivo: Representar a contagem de pontos do jogo de varetas por meio de uma expressão algébrica, percorrendo as linguagens retórica, sincopada e simbólica. Nexo Conceitual: Fluência, Campo de Variação e Variável.

Desenvolvimento: Cada grupo, composto por três integrantes, receberá o seguinte roteiro:

1. Pegue o jogo de varetas e escolha os parceiros (três integrantes) para jogá-lo. Leia as regras antes de começar a jogar. Jogue e registre os pontos e o número de varetas em cada jogada.
2. Após terem verificado quem ganhou, escreva na lousa, como seu trio registrou os pontos e o número de varetas durante as jogadas.
3. Discuta com o trio qual das formas que estão na lousa é a mais rápida e mais prática para marcar os pontos.
4. Vamos chamar de *Expressão algébrica* do cálculo dos pontos e do número de varetas do jogo, a expressão matemática mais simples que permite representar o cálculo de todos os pontos possíveis do jogo e o número de varetas de cada jogada. Qual é a *expressão algébrica* para o jogo de varetas?
5. Jogue novamente utilizando essa expressão algébrica para representar suas jogadas. O trio anota o resultado, expressando o número de varetas e de pontos de cada um dos seus jogadores, num placar geral para que verifiquemos o campeão da classe.
6. Escreva, na forma mais simples, uma expressão que representa o total de pontos do jogo de varetas, segundo as regras oficiais. Faça o cálculo, a partir dessa expressão.
7. De que maneira você poderia arranjar a expressão do item 6 de modo a fazer os cálculos mais rapidamente?
8. Quais propriedades das operações vocês empregaram para responder o item 7?
9. Escreva uma *expressão algébrica* para representar a seguinte regra do jogo: "some todos os pontos e subtraia o total de varetas azuis".
10. Discuta com seu trio outra regra. Represente-a por meio de uma *expressão algébrica* e troque com a de outro trio, procurando interpretá-la com um exemplo numérico.
11. Considere a *expressão algébrica* T, para representar o total de pontos em cada jogada, T: 50pt + 20az + 15am + 10vm + 5vd, onde **pt, az, am, vm** e **vd** representam, respectivamente, o número de vareta preta, azul, amarela, vermelha e verde. Qual é o papel das letras pt, az, am, vm, vd na expressão T?
12. O conjunto de valores que cada *variável* pode assumir é chamado de *Conjunto Universo* da variável. Escreva o *Conjunto Universo* para cada uma das variáveis da expressão T da questão 11.

[32] Atividade adaptada de uma proposta da Oficina Pedagógica de Matemática (OPM) da FE/USP. A OPM é um projeto que envolve a participação de professores que ensinam matemática na educação básica e tem como objetivo principal a elaboração, execução e avaliação de oficinas pedagógicas, centradas em atividades orientadoras de ensino, sendo coordenada pelo Prof. Dr. Manoel Oriosvaldo de Moura.

**Figura 10: Jogo Pega Varetas**[33]



Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Nessa atividade, esperávamos que inicialmente para o registro da pontuação, os estudantes trabalhariam com a linguagem algébrica retórica e sincopada. Posteriormente, ao escreverem a expressão algébrica, trabalhariam com a linguagem algébrica simbólica. Nos demais itens, buscávamos a construção da variável e, ao final da atividade, buscávamos trabalhar o campo de variação.

**Atividade 7: Enigma**[34]

Duração: 2 horas/aula (50 minutos cada)

Objetivos: Apresentar equações de forma explícita e buscar sua solução por meio de tentativas.

Desenvolvimento: Cada estudante receberá uma folha e fará sua atividade, individualmente. Após este momento, há discussão pelo grupo e, posteriormente, a socialização feita pelo grupo-classe.

Descubra o valor da cor que está faltando em cada situação:

| COR | VALOR |
|---|---|
| Azul | 50 |
| Preta | ? |
| Vermelha | 10 |

| Seq. de Cores | Equação | Resposta |
|---|---|---|
| Vermelha e Azul | ? + 5 = 55 | |
| Preta e Vermelha | 15 + ? = 25 | |
| Vermelha e Preta | ? + 15 = 35 | |

[33] Fabricante do Jogo Pega Varetas: Xalingo.
[34] Atividade adaptada de Cedro (2004).

| COR | VALOR |
|---|---|
| Azul | 50 |
| Preta | ? |
| Vermelha | 10 |

| Seq. de Cores | Equação | Resposta |
|---|---|---|
| Azul e Preta | 50 – ? = 45 | |
| Preta e Vermelha | ? + 10 = 30 | |
| Azul, Vermelha e Preta | 50 + 10 + ? = 75 | |

| COR | VALOR |
|---|---|
| Amarela | ? |
| Preta | 50 |
| Verde | 20 |

| Seq. de Cores | Equação | Resposta |
|---|---|---|
| Preta e Amarela | 50 – ? = 35 | |
| Amarela e Verde | ? + 20 = 30 | |
| Amarela e Preta | ? + 50 = 55 | |

| COR | VALOR |
|---|---|
| Azul | ? |
| Verde | 10 |
| Vermelha | 5 |

| Seq. de Cores | Equação | Resposta |
|---|---|---|
| Azul, Azul e Verde | ? + ? + 10 = 50 | |
| Verde, Vermelha e Azul | 10 – 5 + ? = 20 | |
| Verde, Azul e Vermelha | 10 + ? + 5 = 65 | |

| COR | VALOR |
|---|---|
| Amarela | 15 |
| Verde | ? |
| Preta | 20 |

| Seq. de Cores | Equação | Resposta |
|---|---|---|
| Amarela, Verde e Preta | 15 + 20 + ? = 45 | |
| Preta, Verde e Amarela | 20 + ? – 15 = 10 | |
| Verde, Preta, Amarela e Amarela | 0 = ? – 20 – 15 – 15 | |

Esperávamos que os estudantes descobrissem o valor da cor pelo método de tentativa e erro para as equações apresentadas.

**Resolvendo Equações**

Nessa etapa, incialmente foi realizada uma aula dialogada[35] onde formalizamos a definição de equações de 1° grau. Posteriormente, propusemos as seguintes atividades:

**Atividade 8: Número Falso[36]**

Duração: 3 horas/aula (50 minutos cada)

Objetivos: Equacionar problemas e buscar resolver as equações pelo método do número falso, apresentado no Capítulo 2.

Desenvolvimento: O estudante receberá os seguintes problemas:

---

[35] Detalhes dessa aula serão apresentados no Capítulo 5.

[36] Atividade adaptada de Lima; Takazaki e Moisés (1998).

1 – Um montão e sua metade juntas somam 9. Qual é a quantidade?

2 – Um montão acrescido de sua metade somam 16. Qual é a quantidade?

3 – Um montão adicionado ao seu dobro resultam em 21. Qual é a quantidade?

Inicialmente você pensará individualmente. Em um segundo momento, em grupo, irá se realizar uma discussão a fim de escolher a melhor forma de solucionar o problema. Cada grupo irá expor à sala sua resolução, que determinará o melhor caminho (aquele mais direto).

Acreditávamos que essa atividade permitiria aos estudantes conhecerem o método da falsa posição, onde são trabalhadas as ideias de proporcionalidade, conforme discutido no Capítulo 2. Esperávamos que esta situação permitisse aos estudantes acesso a uma parte da história da álgebra, conhecendo uma maneira de resolver equações.

**Atividade 9: Método do Retorno**[37]

Duração: 4 horas/aula (50 minutos cada)

Objetivos: Equacionar problemas e resolver equações pelo método do retorno, apresentado no Capítulo 2.

Desenvolvimento: Inicialmente, a atividade deverá ser pensada individualmente, em seguida os estudantes formarão trios para socializarem suas considerações e, posteriormente, teremos a discussão com a classe.

No primeiro momento, você pensará individualmente e, posteriormente, seguirão as discussões em grupo, finalizando com a discussão feita pela sala.

1 – Ana ganhou uma caixa com bombons de sua mãe. Sua tia deu-lhe mais 12 bombons. Ana contou os bombons e, descobriu que possui 25 unidades, quantos bombons Ana tinha na caixa?

2 – Mariana comprou um caderno e uma lapiseira, gastando ao todo 60 reais. O caderno custou 24 reais. Quanto custou a lapiseira?

3 – Um número menos 37 é igual a 15. Qual é esse número?

4 – A idade de Helena aumentada de 17 anos é igual a 56. Qual é a idade de Helena?

5 – Rodrigo e Leonardo são irmãos gêmeos. A soma de suas idades é 46 anos. Qual é a idade de cada um?

6 – O dobro da quantia que Jair possui e mais R$18,00 corresponde a R$ 66,00. Quanto Jair possui?

7 – O triplo da altura de Flávio e mais 15 cm é igual a 441 cm. Qual a altura de Flávio?

8 – Em um estacionamento, cobram-se R$ 7,00 pela primeira hora e R$ 1,50 a cada hora excedente. Se um cliente pagou R$ 16,00, quanto tempo seu carro permaneceu nesse estacionamento?

[37] Elaborada e organizada pela Professora Pesquisadora.

9 – Caio comprou três telas de arte por R$1320,00. Pela tela A pagou o dobro do que pagou pela tela B e, pela tela C pagou o triplo do que pagou pela B. Quanto custou cada tela?
10 – Uma mesa plástica custa o triplo de uma cadeira plástica. Duas dessas mesas e oito dessas cadeiras custam R$ 226,80. Qual é o preço de uma cadeira? E, de uma mesa?

Com essa atividade, esperávamos poder construir juntamente com os estudantes o processo de resolução de uma equação, em que eles pudessem compreender as etapas do mesmo por meio da mediação da professora pesquisadora e das interações com o grupo e a classe. Não resumimos, assim, a um processo de memorização de técnicas e como as equações são construídas a partir dos problemas desencadeadores, acreditamos que estas têm um significado para os estudantes, não se tratando apenas manipulação de letras e números sem qualquer relevância.

Após as discussões realizadas pela classe, os estudantes ainda sentiam a necessidade de equacionar mais problemas e resolvê-los. Diante dessa necessidade, a professora pesquisadora, no seu movimento de atividade de ensino, elaborou o jogo triminó das equações.

**Atividade 10: Triminó das Equações**[38]

Duração: 6 horas/aula (50 minutos cada)

Objetivos: Equacionar problemas e resolver equações pelo método do retorno, apresentado no Capítulo 2.

Desenvolvimento: Cada dupla de estudantes deverá receber um jogo.

Forme dupla com outro colega. Juntos vocês pensarão nas respostas dos problemas. Mas lembrem-se: vocês deverão equacionar os problemas e resolver as equações nas folhas que receberam.

O jogo Triminó era composto por 16 peças, contendo problemas e soluções. Para realizar as jogadas, os estudantes deveriam equacionar e resolver um problema e encontrar uma peça com a respectiva resposta. Todas as peças do jogo estavam disponíveis na mesa, assim os estudantes as escolhiam aleatoriamente, resolviam os problemas e, depois, encaixavam os problemas com suas respectivas respostas.

As peças do triminó continham os seguintes problemas:

[38] Jogo onde as peças são compostas por triângulos equiláteros (triângulos que possuem os três lados com medidas congruentes) onde se coloca a peça adjacente que será a resposta ao problema. Atividade Elaborada e organizada pela Professora Pesquisadora.

Ao entrar numa loja, Marcos Paulo encontrou uma promoção: "Compre um skate e leve grátis uma bola de futebol, que custa R$50,00". Sabe-se que o triplo do preço do skate com o preço da bola dá um valor de R$ 650,00. Quanto Marcos Paulo pagará no skate?

A idade de Layla é o quíntuplo da idade de Ana Clara, e a soma das idades das duas é 78 anos. Qual é a idade de Layla?

Com o quádruplo do dinheiro que possui, Vanessa conseguiria comprar um notebook que custa R$ 774,00 e sobrariam R$ 48,00. Quanto Vanessa possui?

Em uma eleição para a escolha do representante do grêmio estudantil, votaram 942 estudantes. Leandro teve 7 votos a mais que Matheus, e Natanael teve 5 votos a mais que Matheus. Quantos votos teve o estudante vencedor?

Regislaine descobriu que em um sétimo ano há 40 estudantes onde o número de meninas é igual a 3/5 do número de meninos. Quantas são meninas?

Pamela e Pedro Henrique querem repartir 162 balas de modo que Pamela receba 10 balas a mais que Pedro Henrique. Quantas balas Pamela receberá?

O peso de Jéssica é 5/7 do peso de Érika. Juntas, pesam 105 quilos. Quanto pesa Érika?

Thaís tem uma fita de 247 metros e quer dividi-la em duas partes, de modo que uma tenha 37 metros a mais que a outra. Quanto mede a parte maior da fita de Thaís?

Lilian e Bruna vão dividir 156 miçangas para fazerem pulseiras. Lilian deve ficar com o dobro do número de miçangas que Bruna vai receber. Quantas miçangas Lilian receberá?

Nayra comprou dois cremosinhos e um bolinho, por R$3,25. Um bolinho custa R$0,55 a mais que um cremosinho. Qual é o preço de um cremosinho?

A avó de Otávio deu a ele uma quantia em dinheiro. Com a metade desse valor, Otávio compararia uma bicicleta por R$ 393,26 e ainda sobrariam R$ 31,15. Quanto Otávio ganhou ?

A professora Beatriz disse: Peguei a diferença entre a terça parte da idade que tinha quando casei com o número dois e obtive seis como resultado. Quantos anos tinha quando casei?

A quinta parte do número de Gibis de Ana Paula é igual a 16. Quantos gibis Ana Paula tem?

Na sala de Marina, a quarta parte dos estudantes vieram de outros bairros da cidade e 27 sempre moraram no bairro Morada Nova. Qual o número de estudantes que vieram de outros bairros?

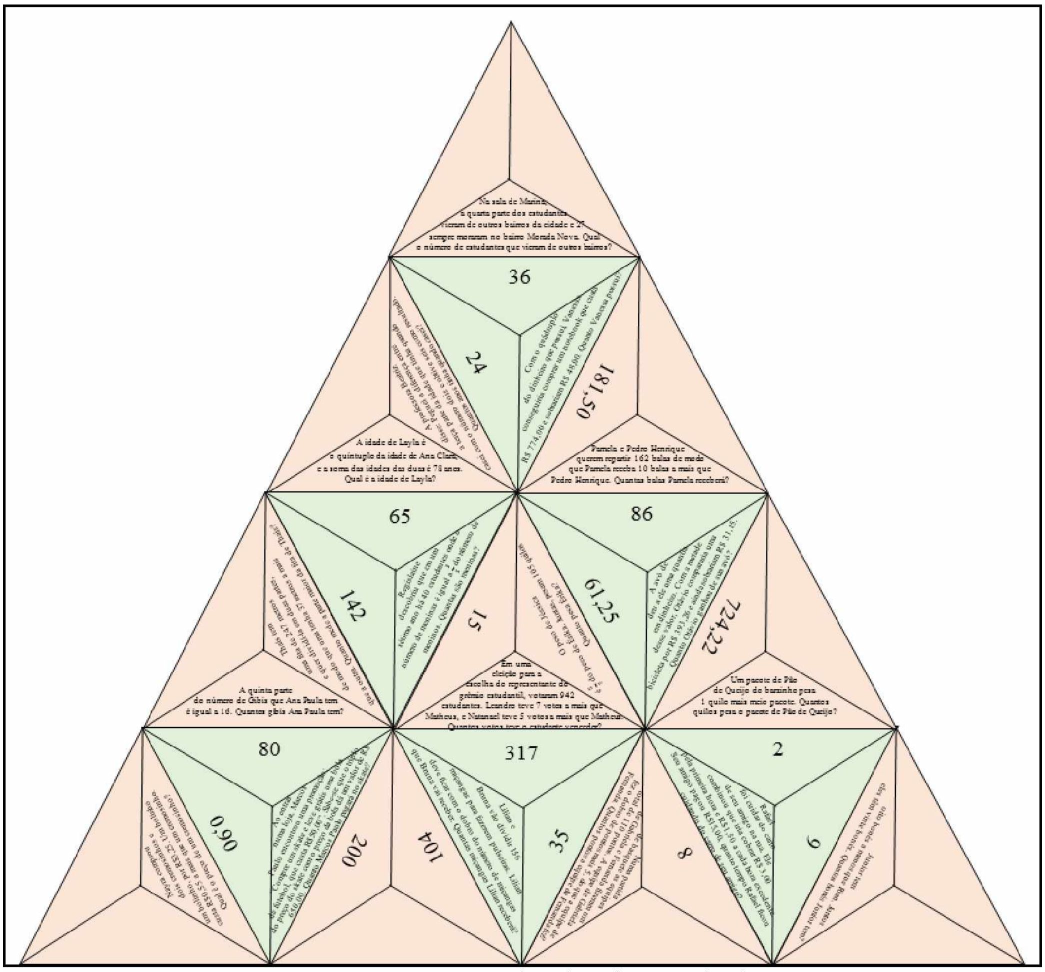
Um pacote de Pão de Queijo do barzinho pesa 1 quilo mais meio pacote. Quantos quilos pesa o pacote de Pão de Queijo?

Numa partida de basquete as equipes de Gabriela e Fernanda fizeram um total de 110 pontos. A equipe de Gabriela fez o dobro de pontos mais 5, que a equipe de Fernanda. Quantos pontos a equipe de Fernanda fez?

Junior tem oito bonés a menos que Rian. Juntos eles têm vinte bonés. Quantos bonés Junior têm?

Rafael foi cuidar do carro de seu amigo na rua. Ele combinou que iria cobrar R$ 3,00 pela primeira hora e R$1,50 a cada hora excedente. Seu amigo pagou R$15,00, quanto tempo Rafael ficou cuidando do carro de seu amigo?

**Figura 11: Jogo Triminó das Equações**




Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Como a atividade foi decorrente de uma necessidade sentida pelos estudantes para atender ao pedido, ao elaborarmos o jogo buscamos colocar o nome de nossos protagonistas assim como procuramos inserir nos problemas situações vividas pelos estudantes em seu cotidiano.

Salientamos que esses nomes são fictícios, pois assumimos a responsabilidade de preservar a identidade de nossos protagonistas.

A seguir, apresentamos o caminho percorrido para as análises do material produzido durante a realização das atividades.

## 4.7 Eixos de análise

Para analisarmos o material produzido no desenvolvimento da unidade didática proposta, como aporte metodológico usamos a ideia de episódios (MOURA, 2004), que propõe a escolha de alguns momentos que explicitem ações reveladoras do processo de formação dos sujeitos participantes. Nas palavras do autor,

> Os episódios poderão ser frases escritas ou faladas, gestos e ações que constituem cenas que podem revelar interdependência entre os elementos de uma ação formadora. Assim, os episódios não são definidos a partir de um conjunto de ações lineares. Pode ser uma afirmação de um participante de uma atividade não tendo impacto imediato sobre os outros sujeitos da coletividade. Esse impacto poderá estar revelado em um outro momento em que o sujeito foi solicitado a utilizar-se de algum conhecimento para participar de uma ação no coletivo (MOURA, 2004, p. 276).

A fim de organizar e apresentar o material produzido estabelecemos dois eixos de análise: situações desencadeadoras de aprendizagem e ações e reflexões coletivas.

No primeiro eixo de análise, situações desencadeadoras de aprendizagem, buscamos analisar os movimentos gerados por tais situações e investigar em que medida a forma como estruturamos as situações desencadeadoras contribuíram para que os estudantes se colocassem em atividade.

No segundo eixo referimo-nos às ações e reflexões coletivas desenvolvidas pelos estudantes, pois acreditamos no desenvolvimento do pensamento do sujeito por meio das interações coletivas (VYGOTSKY, 1989) permitindo-lhes compartilhar conhecimentos e modificar suas ações. Por meio deste eixo, buscamos analisar se nossa organização do ensino possibilitou aos estudantes colocarem-se em atividade de aprendizagem, em um ambiente de atividade coletiva, assim como buscamos analisar se os estudantes compreenderam o objeto de sua aprendizagem (pensamento algébrico e o conceito de equações de 1° grau).

Nesse capítulo apresentamos o movimento que percorremos para delinearmos nossos eixos de análise, respaldadas nos princípios éticos que elencamos, nos possibilitando direcionar nossa investigação para os indícios de apropriação do conhecimento teórico dos protagonistas de nossa pesquisa.

No próximo capítulo apresentamos as análises do material produzido em nosso estudo, na busca de compreendermos como as atividades de ensino que propusemos podem auxiliar na compreensão e estruturação do pensamento algébrico e do conceito de equações de 1° grau.

# 5. EM BUSCA DE INDÍCIOS DE APROPRIAÇÃO DOS NEXOS CONCEITUAIS ALGÉBRICOS[39]

> *Pode-se inferir que o desenvolvimento psíquico da criança não é necessariamente desencadeado quando ela é formalmente ensinada ou fica estanque quando não é ensinada por um indivíduo em particular, mas quando passa a participar de uma atividade coletiva que lhe traz novas necessidades e exige dela novos modos de ação. É a sua inserção nessa atividade que abre a possibilidade de ocorrer um ensino realmente significativo (SFORNI, 2004, p. 95).*

Nos capítulos anteriores discutimos os aspectos teóricos de nossa pesquisa, o movimento histórico algébrico, a álgebra no ensino fundamental e apresentamos nossa metodologia de pesquisa.

Neste capítulo buscamos, por meio dos eixos de análise, o diálogo entre a teoria e a prática que vivenciamos em sala de aula. Organizamos nosso material em dois eixos de análises: *situações desencadeadoras de aprendizagem* e *ações e reflexões coletivas*, onde cada eixo é composto por episódios e cenas (MOURA, 2004) formadas por diferentes trechos recortados do desenvolvimento da proposta desenvolvida em uma turma do 7° ano do ensino fundamental, conforme apresentamos no quadro a seguir:

**Quadro 11: Eixos de Análise**

| Eixos de Análise | Episódios | Cenas |
|---|---|---|
| **Situações Desencadeadoras de Aprendizagem** | História Virtual do Conceito | O Arquiteto Amon Toado |
| | Jogos | Banco Imobiliário |
| | | Quiz |
| **Ações e Reflexões Coletivas** | Apropriação dos Nexos Conceituais | Fluência |
| | | Variável |
| | | Campo de Variação |
| | Formação do Conceito de Equação de 1° Grau | Equacionamento de Problemas |
| | | Estratégias de Resolução |

Fonte: Sistematização da Pesquisadora

[39] Reiteramos que por nexos conceituais da álgebra (fluência, variável, campo de variação) compreendemos como elementos necessários para uma melhor compreensão dos conceitos algébricos e, possivelmente, das equações (SOUSA, 2004).

Ressaltamos que, para efeito de produção desse relatório de pesquisa, as análises aqui apresentadas ora centram-se em um dos grupos envolvidos ora em outro grupo, pois se optou por apresentar todo o movimento percorrido pelos estudantes Ana Paula, Carlos, Davi, Fabiana, Junior, Pedro Henrique, Rafael, Thaís e Vanessa, uma vez que esses estiveram frequentes em todas as aulas onde a proposta aconteceu e se mostraram envolvidos em todas as atividades. Com isso, não deixamos de atentar para os movimentos vivenciados pelos grupos, uma vez que a interação entre eles e as ações mobilizadoras da professora se fizeram presentes a todo o momento e em todos os grupos.

## 5.1 Eixo 1: Situações desencadeadoras de aprendizagem (SDA)

Conforme discutimos no Capítulo 1, as SDA (MOURA et al., 2010) visam gerar a necessidade de apropriação do conhecimento no estudante, em um movimento onde ele busque resolver problemas que o coloquem em atividade de aprendizagem.

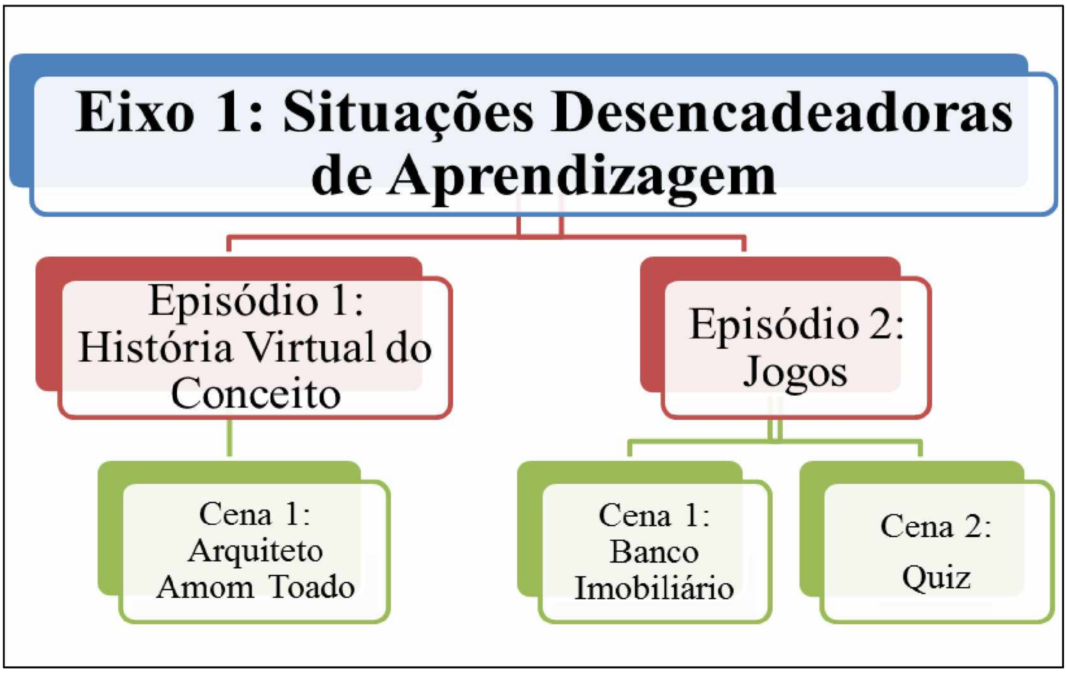
Assim, buscamos nessa seção, educar nosso olhar para as SDA buscando analisar os movimentos por elas gerados, investigando se a forma como as estruturamos pôde contribuir para que os estudantes se colocassem em atividade de aprendizagem. Para tanto, os episódios que compõem este eixo são: 1) História virtual do conceito e, 2) Jogo.

O primeiro episódio remete-nos a entender como a história virtual do conceito (MOURA; LANNER DE MOURA, 1998) retratada na Cena 1, a atividade do Arquiteto Amom Toado, permitiu desencadear a aprendizagem do conceito de variação, um dos nexos conceituais da álgebra.

O segundo episódio tem nosso olhar voltado para dois jogos (MOURA; LANNER DE MOURA, 1998) que utilizamos em nossa proposta e os direcionamentos que eles possibilitaram para que encaminhássemos a formação do pensamento algébrico. Na Cena 1, evidenciamos o potencial do jogo *Banco Imobiliário* para a socialização de ideias sobre as linguagens algébricas retórica, sincopada e simbólica (EVES, 2002). E, na Cena 2, trazemos o jogo *Quiz,* que permitiu desencadear um diálogo sobre a ideia que os estudantes possuem do número apenas como fixo, imutável, buscando, assim, definir um intervalo numérico para determinada situação, o campo de variação, outro nexo conceitual da álgebra.

Sintetizamos na figura abaixo a forma como organizamos nosso processo de análise para o Eixo 1:

**Figura 12: Organização da análise para o Eixo 1**




Fonte: Sistematização da pesquisadora

5.1.1. Episódio 1: História Virtual do Conceito

Neste episódio, buscamos identificar como o uso de uma situação problema semelhante a uma vivida pelas antigas civilizações, pode conduzir o estudante a refletir sobre o nexo conceitual campo de variação, considerando a necessidade da civilização egípcia em numeralizar o desconhecido e controlar os movimentos.

*Cena 1: Arquiteto Amom Toado*

Em grupos, compostos por quatro integrantes, os estudantes receberam uma folha com o seguinte problema (na página seguinte):

**Figura 13: Atividade do Arquiteto Amon Toado**

Estamos há quatro mil anos atrás. Os escravos estão trabalhando, carregando pedras para a construção da pirâmide do faraó. Na tenda do arquiteto Amon Toado, encarregado geral da obra, chega o chefe do depósito de pedras:

- Mandou-me chamar, senhor?
- Sim, mandei, Tuc Anon. Preciso saber quantas pedras temos no depósito para levantar a coluna mestra da pirâmide.
- Temos 60, senhor.
- Quantas pedras os escravos já colocaram até hoje?
- 12, senhor.
- Tudo bem, Tuc Anon, pode ir embora.
- Com sua permissão, senhor.

Amon Toado virou-se para os seus papiros e pensou:

- "Pois é, colocamos já 12 pedras na coluna mestra. Temos, no depósito, 60 pedras que podem ser usadas nessa coluna. Acontece que o faraó ainda não se decidiu qual a altura de sua pirâmide. Dessa forma não posso indicar quantas pedras no total terá a coluna mestra. Porém eu preciso deixar escrito aqui no projeto a altura da pirâmide para que os encarregados da obra fiquem com os dados registrados e não se confundam. Esse é o meu problema: como vou escrever a altura da coluna, considerando as 12 pedras já colocadas, as 60 pedras do depósito que podem ser usadas todas ou não, e a altura que eu ainda desconheço? Como escrever isso de forma matemática, quer dizer, da forma mais simples possível e utilizando a linguagem das quantidades, isto é, a linguagem numérica?"

Pois é, pessoal, temos aí o problema do arquiteto das pirâmides:

***Como escrever, utilizando a linguagem numérica, uma frase onde apareça um número desconhecido?***

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Esperávamos que pensassem em como escrever a altura da coluna, considerando as 12 pedras já colocadas, as 60 pedras do depósito que podem ser usadas todas ou não, e a altura que ainda era desconhecida, usando a linguagem numérica.

A seguir, apresentamos o diálogo de um dos quartetos (Carlos, Fabiana, Pedro Henrique e Rafael), mas que também se fez presente concomitantemente nos demais, na tentativa de responder à pergunta.

> **Carlos**: Gente, olha só, são 12 pedras que eles já colocaram. Ainda tem 60 pedras, então a altura é 60.
> **Pedro Henrique**: Não! A altura vai ser 72, porque já tem 12 mais as 60 vai ficar 72 pedras.
> **Rafael**: Mas se eles forem embora e não colocarem mais nenhuma. Pode num pode?
> **Fabiana**: Eu acho que pode. Mas não tinha pirâmide muito baixinha no Egito não, nos filmes é tudo alto, eu acho que eles vão colocar mais...

**Rafael**: Oh! Professora, não sabemos fazer isso não, porque vai poder ter muitas respostas, pode parar no 12 ou ir colocando mais pedras até eles cansarem, ou usar as 60 que estão no depósito ainda. Sei não....

Mediante esse trecho podemos inferir que os estudantes sentiram a necessidade de um conhecimento que ainda não possuíam, isto é, não conseguiram utilizar uma linguagem que os permitisse representar essa resposta desconhecida assim como aconteceu com a civilização egípcia. Pelo diálogo apresentado podemos considerar que a história virtual do conceito os permitiu entrar em movimento de atividade de aprendizagem, ou seja, percebemos que a história virtual proposta desencadeou a necessidade de resolução do problema apresentado.

De fato, podemos acreditar que esta situação desencadeou os estudantes ao movimento de estar em atividade, pois conseguimos caracterizar os seguintes elementos propostos por Leontiev (1983): a *necessidade* dos estudantes se caracterizava por descobrir a altura da coluna da pirâmide; o *motivo* dessa atividade tomou corpo quando os estudantes buscavam uma forma de escrever a altura da coluna da pirâmide; o *objeto* se constituía em representar um número desconhecido a partir da altura máxima e a altura mínima da coluna da pirâmide; a *ação* dos estudantes abarcava o levantamento de hipóteses para valores das alturas máximas e mínimas da coluna da pirâmide e, por fim, a *operação* desenvolvida por eles, constituiu-se no diálogo sobre as possibilidades da altura da coluna da pirâmide.

Diante deste indício, coadunamos com as palavras de Davidov (1999, p. 2), que nos indica que "as necessidades e os motivos educacionais direcionam as crianças para a obtenção por eles de conhecimentos como resultados da transformação do material dado".

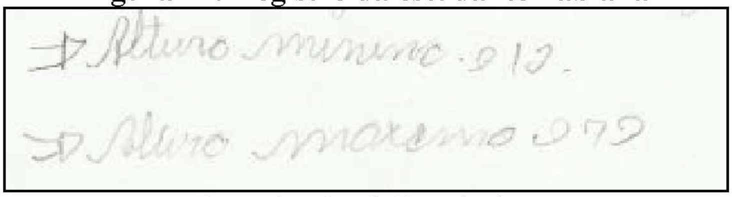
Nos momentos em que fora solicitado nosso auxílio, procuramos não interromper o diálogo que ocorria entre os estudantes, ou mesmo, fornecer a solução para o problema, mas sim, buscamos fomentar a discussão:

**Professora**: Meninos, vamos pensar um pouquinho... A altura da pirâmide está definida?
**Pedro Henrique**: Não, professora. Porque pode parar nas 12 pedras ou, ir colocando mais, parar quando eles quiserem ou até usar as 60 pedras.
**Carlos**: Isso professora, num vai ter um número certo, porque vai depender da boa vontade do faraó!
**Professora**: Estão todos de comum acordo com isso? De que não teremos um número "fechadinho"?
**Fabiana**: Estamos sim, professora. O problema é como vamos escrever isso???

**Professora**: Pensem em uma forma de escrever o que discutimos, se concordamos todos que não será um número exato, fica mais fácil, podemos escrever uma frase, com nossa discussão, o que acham?
**Rafael**: Professora.... É isso mesmo!!! Olha só, podemos colocar as possibilidades, da altura mínima e da altura máxima, porque escrever todas dá muito trabalho! Tem 12 pedras na coluna já, 60 pedras no depósito que podem ser usadas ou não, então a altura máxima que a pirâmide poderá ter é 72 e a altura mínima que a pirâmide poderá ter é 12, porque o faraó pode mandar parar e não colocar mais nada!
**Fabiana**: Pode ser assim então, professora? Como não sabemos a altura exata da pirâmide, colocamos a altura mínima e a altura máxima.

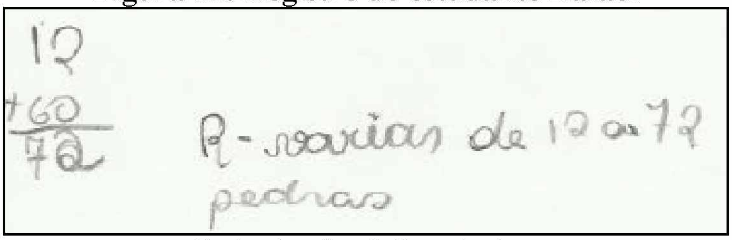
Após nosso diálogo, os estudantes Fabiana e Rafael, formularam o seguinte registro:

**Figura 14: Registro da estudante Fabiana**




Fonte: Arquivo da Pesquisadora

**Figura 15: Registro do estudante Rafael**




Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Por meio do diálogo acima, notamos que a problemática apresentada aos estudantes, fomentou um ambiente de exploração de ideias, socialização das mesmas para a formulação de uma resposta ao problema da história virtual apresentada, nos remetendo a Davidov (1999):

> Nesta transformação do objeto está forçosamente latente o elemento criativo, o caráter educativo-atuante constituidor da aprendizagem daqueles conhecimentos, que se referem ao objeto da experimentação. Lá onde o mestre cria sistematicamente na sala de aula as condições que exijam dos alunos a obtenção de conhecimentos sobre o objeto por meio da experimentação com este, é onde

> as crianças deparam com as tarefas que exigem delas a realização da atividade de estudo[40] (DAVIDOV, 1999, p. 2).

Percebemos a tendência dos estudantes em apresentar como reposta um número, uma resposta fechada, não se atentando que a altura da pirâmide é indefinida e que, na verdade, o problema buscava escrever uma frase usando o número desconhecido, uma representação para esse número, não objetivando estabelecer uma resposta numérica ao mesmo. Contudo, fez-se necessária a presença da professora pesquisadora para que os estudantes pudessem aceitar a ideia de que a altura da pirâmide poderia variar entre 12 e 72 pedras e que a resposta ao problema poderia ser dada na forma de 12 pedras $\leq$ altura $\leq$ 72 pedras, ou seja, uma quantidade que varia entre 12 e 72 pedras.

Assim, vemos a importância de situações desencadeadoras no ambiente escolar que corroborem para o envolvimento dos estudantes para a aprendizagem, descaracterizando um ensino sem intencionalidade ou participação dos estudantes.

Notamos ainda que a atividade proposta desencadeou ações de reflexão nos estudantes, permitiu o conflito de ideias em busca da tomada de uma solução feita em comum acordo pelo grupo.

Percebemos que a atividade permitiu que os estudantes se colocassem na posição de protagonistas, buscando apenas o respaldo e a sistematização com a professora, não recebendo a resposta correta e pronta. Puderam discutir e conjecturar diferentes caminhos até a tomada de decisão.

Por meio dessa história virtual do conceito, os estudantes puderam pensar sobre o movimento da vida, as relações de interdependência, se situar historicamente e refletir sobre a conduta dos antepassados na formação dos conhecimentos:

> **Professora**: Então é isso, vocês conseguiram escrever a frase, considerando o movimento que poderá acontecer. Os egípcios passaram por esse problema, precisavam representar quantidades desconhecidas, assim como vocês fizeram com a altura da pirâmide. Sabem como eles faziam? Eles utilizavam a palavra *ahá* para representar essas quantidades desconhecidas. Para eles *ahá*, significava monte, montão.

---

[40] Nesse estudo estamos compreendendo o termo atividade de estudo (Davidov, 1999) como equivalente ao termo atividade de aprendizagem, uma vez que, coadunamos com Moura et al. (2010, p. 87) onde "em se tratando da definição dos termos (estudo e aprendizagem), é importante salientar que, em alguns textos, sobretudo de tradução da língua russa para a língua inglesa, o termo *atividade de aprendizagem* é equivalente ao de *atividade de estudo*".

Podemos considerar que mediante essa SDA os estudantes estiveram em atividade onde o objetivo principal constituiu-se em estar frente a uma situação que lhes fizeram "refletir sobre o papel das gerações passadas na criação de saberes que hoje usufruem comodamente" (MOURA; LANNER DE MOURA, 1998, p. 13). Notamos, ainda, que apresentar essa atividade aguçou nos estudantes a curiosidade sobre os povos egípcios e sua matemática. Sobre isso, Davidov (1988) fala-nos que,

> embora o pensamento das crianças tenha alguns traços em comum com o pensamento dos cientistas, artistas, filósofos da moral e teóricos do direito, os dois não são idênticos. As crianças em idade escolar não criam conceitos, imagens, valores e normas de moralidade social, mas apropriam-se deles no processo da atividade de aprendizagem. Mas, ao realizar esta atividade, as crianças executam ações mentais semelhantes às ações pelas quais estes produtos da cultura espiritual foram historicamente construídos. Em sua atividade de aprendizagem, as crianças reproduzem o processo real pelo qual os indivíduos vêm criando conceitos, imagens, valores e normas (DAVYDOV, 1988, pp. 21-22).

Ao final dessa atividade, muitos estudantes comentavam que mediante o problema do Arquiteto Amom Toado, nunca mais esqueceriam os povos egípcios e suas criações na matemática, mais ainda, se sentiram mobilizados a buscar resposta para a situação como é possível notar na fala de Rafael:

> **Rafael**: Professora, eu só prestei atenção hoje na aula, porque fiquei curioso, achei que o problema ia ser fácil de resolver e depois vi que não era a resposta que tinha pensado. Esse povo aí, me deixou de cabeça quente!

Nessa fala do estudante Rafael, percebemos o reconhecimento às origens do pensamento algébrico, aos caminhos percorridos e consideramos que

> A história virtual do conceito é uma proposta metodológica que busca responder eficientemente por esta formação em que se incorpora o valor do conhecimento como elemento propulsor de busca de novos conhecimentos e que procura colocar em prática o pressuposto educacional de que é necessário, fazer com que a criança perceba o valor do conhecimento produzido pela humanidade, como elemento de sua formação de cidadania (MOURA; LANNER DE MOURA, 1998, p. 14).

Ao utilizar essa SDA como instrumento de ensino, conseguimos que os estudantes se interessassem pela história dos egípcios e, conforme expressado pelo estudante Rafael, podemos inferir que se apenas apresentássemos um problema, sem nos remeter à história, não teríamos despertado nos estudantes o interesse em encontrar uma solução.

Na sequência, apresentamos a análise do Episódio 2, buscando atribuir qualidade à utilização de jogos, em nossa proposta, como desencadeador para a transposição da linguagem retórica para sincopada e, posteriormente, para a simbólica. O jogo serviu, também, como desencadeador para a apropriação do nexo conceitual campo de variação.

5.1.2. Episódio 2: Jogos

Nesse episódio, nosso olhar esteve voltado para elencar indícios das contribuições dos jogos mediante a perspectiva de SDA, evidenciando sua potencialidade para a reflexão dos estudantes quanto ao movimento de registrar quantidades, os caminhos que podem ser percorridos a fim de se chegar à escrita simbólica. Outro indício que foi observado foi a possibilidade de um diálogo sobre número na perspectiva de campo de variação, analisando-o de acordo com o contexto que se encontrava inserido.

*Cena 1: Banco Imobiliário*

Os estudantes foram dispostos em grupos compostos por quatro integrantes. Cada grupo recebeu o jogo Banco Imobiliário e fichas (Figura 16) para que registrassem suas movimentações no decorrer do jogo. Entretanto, foram orientados a não realizar a escrita de forma abreviada, linguagem algébrica sincopada (EVES, 2002) ou utilizar símbolos matemáticos, linguagem algébrica simbólica (EVES, 2002), pois os valores gastos para adquirir imóveis, pagar aluguéis deveriam ser anotados por meio da escrita na linguagem discursiva, ou seja, retórica, a fim de que sentissem a necessidade da escrita simbólica.

**Figura 16: Jogo Banco Imobiliário**

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

**Figura 17: Ficha para registro dos movimentos no jogo Banco Imobiliário**

DIÁRIO de: ________________________________________

(Nome do Estudante)

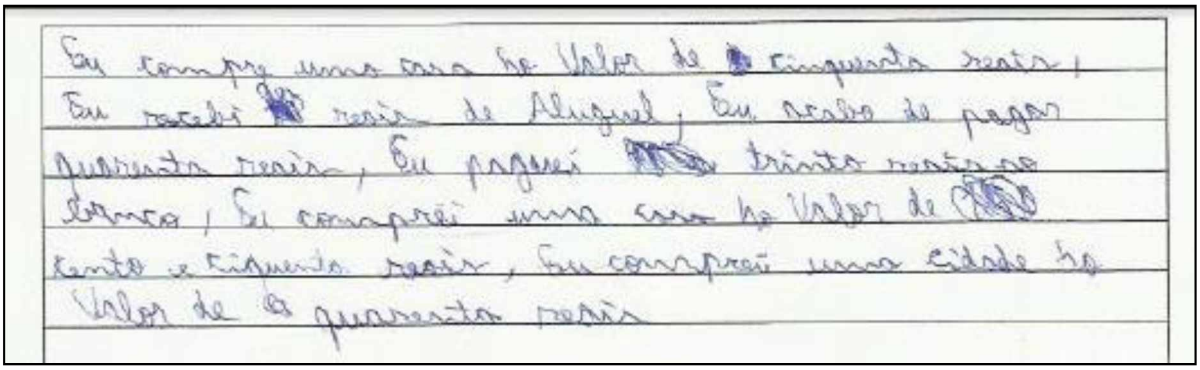
Registre todos os movimentos quantitativos que você fizer, mas cuidado: ainda não é permitido o uso de qualquer símbolo matemático. Você pode usar apenas palavras.

| |
|---|
| |
| |
| |
| |
| |
| |
| |
| |
| |
| |

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Seguindo nossas orientações, sempre que realizavam algum movimento no jogo, o registravam na linguagem retórica, conforme podemos observar o registro do estudante Junior:

**Figura 18: Registro do estudante Junior**[41]


Eu compre uma casa no Valor de cinquenta reais,
Eu recebi reais de Aluguel, Eu acabo de pagar
quarenta reais, Eu paguei trinta reais no
banco, Eu comprei uma casa no Valor de
cento e cinquenta reais, Eu comprei uma cidade no
Valor de quarenta reais

Fonte: Arquivos da Pesquisadora

[41] Transcrição do registro de Junior: Eu comprei uma casa no valor de cinquenta reais; Eu recebi dez reais de aluguel; Eu acabo de pagar quarenta reais de aluguel; Eu paguei trinta reais ao banco; Eu comprei uma casa no valor de cento e cinquenta reais; Eu comprei uma cidade no valor de quarenta reais.

Pelo registro de Junior, notamos a dificuldade sentida em não fazer uso da linguagem algébrica sincopada ou da linguagem algébrica simbólica sendo, por vezes, necessário rasurar os registros, reescrevendo-os. Essa dificuldade também foi encontrada por outros estudantes como notamos na fala a seguir:

> **Ana Paula**: Nossa professora, já estou cansada! Toda hora que eu vou escrever, uso os números e só pode ser com palavras, tá ficando tudo rabiscado meu diário, imagina até o final do jogo, vai dar muito trabalho isso!

Essa situação de desconforto para realizar o registro, gerada pelas instruções oferecidas no início da atividade, revela o potencial do jogo como SDA, pois direcionou os estudantes a necessitarem e pensarem uma forma mais prática para resolverem o problema de controle das quantidades. Sobre esse aspecto, podemos recorrer à Moura (1992), quando se refere à compreensão do signo numérico por crianças alega que

> Algumas formas de levar as crianças à compreensão do signo numérico podem ser, por exemplo, contando-lhes uma história, fazendo-as viver uma situação na qual seja necessário o controle de quantidades ou ainda sugerindo-lhes um jogo em que se deve marcar a quantidade de pontos a ser comunicada à classe vizinha através de um símbolo criado pelos jogadores. Isto deve ser feito de forma que vá ficando claro o sentido da representação, o caráter histórico-social do signo e como se pode melhorar os processos de comunicações humanas (MOURA, 1992, p. 52).

Ressaltamos, porém, que nesse momento da proposta, buscávamos apenas desencadear nos estudantes a necessidade de melhoria na comunicação humana, conforme apontado na citação acima, fato esse que nos levou a abordar a construção histórica dos signos algébricos em momentos posteriores.

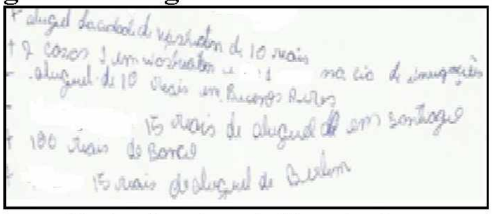
Após alguns movimentos de jogo, os estudantes foram indagados de como poderiam realizar os registros de forma mais rápida e eficiente. Como respostas, recebemos:

> **Professora**: Já que vocês estão cansados e reclamando tanto da forma como estão registrando os movimentos, me digam então como podemos fazer isso de uma forma mais tranquila?
> **Thaís**: Simples demais, ao invés de escrever cento e oitenta e cinco, posso apenas colocar os números 1, 8 e 5.
> **Davi**: Professora, por exemplo, se eu paguei um aluguel, então eu perdi dinheiro, se perdi posso colocar o sinal de '-'!
> **Ana Paula**: Ou então, se eu tiver recebendo o aluguel vou ganhar dinheiro, então eu posso registar com o sinal de '+'!
> **Professora**: Ok, então! Agora está liberado, a partir de agora vocês já podem registar os movimentos usando os símbolos e os algarismos.

**Davi: Demorou né professora! Se já existem formas mais simples pra quê ficar dando essa trabalheira pra nós?!**

A seguir apresentamos o registro do estudante Davi utilizando-se das linguagens sincopada e simbólica:

**Figura 19: Registro do estudante Davi**[42]



Fonte: Arquivos da Pesquisadora

Comparamos esse momento vivido pelos estudantes à consideração de Moura (1992) ao referir-se às crianças em idade pré-escolar, quando se veem frente a necessidade de significar quantidades de objetos:

> É o aparecimento de situações que envolvem o controle de muitas quantidades que certamente lhe imprimirá a necessidade de uma comunicação mais permanente, encaminhando-a para a busca de algo que lhe permita representar simbolicamente as quantidades com que lida. Este parece ser o caminho da construção do signo numérico: a busca de um símbolo que lhe permita lembrar das quantidades em comunicações não-imediatas (MOURA, 1992, p. 52).

Mediante o registro de Davi e as falas dos estudantes Ana Paula, Davi, Junior e Thaís, apresentados anteriormente, é possível notarmos o potencial dessa SDA, pois essa situação se constituiu em atividade para os estudantes ao gerar a necessidade de buscarem uma escrita simbólica, agilizando as jogadas. Outro aspecto a ser destacado sobre essa SDA é o fato de que, a partir de suas experiências, os estudantes buscaram alternativas para simplificar suas escritas e aproveitaram da simbologia dos sinais "–" e "+", estudada no conteúdo de números inteiros relacionadas à perdas e ganhos, para atribuir o mesmo significado agora no contexto do jogo Banco Imobiliário. Assim,

[42] Transcrição do Registro do estudante Davi: + aluguel da cidade de Washington de 10 reais.
+ 2 casas, 1 em Washington e 1 na Cia de Navegação.
- aluguel de 10 reais em Buenos Aires
- 15 reais de aluguel em Santiago
+ 100 reais de Banco
+ 15 reais de aluguel em Berlim

> Os conhecimentos prévios dos alunos são aproveitados na medida em que é na interação, estabelecida a partir da proposta de solução comum do problema, que cada criança irá lançar mão do que sabe para propor a sua forma de melhor resolver o problema coletivo (MOURA; LANNER DE MOURA, 1998, p. 14).

Por fim, podemos considerar que essa SDA permitiu aos estudantes sentirem a necessidade de uma escrita simbólica, compreendendo sua função e necessidade para os registros de muitos movimentos quantitativos.

Inferimos que os sentidos que os estudantes atribuíram coincidiram com o significado social da escrita simbólica, os estudantes não mais consideram os registros apenas como uma prática utilitarista ou como uma linguagem que sempre existiu, mas como uma linguagem que fora sofrendo modificações conforme as necessidades humanas foram sendo vivenciadas.

Na Cena 2, dialogamos sobre como o jogo *Quiz* foi desencadeador para o processo de apreensão do nexo conceitual Campo de Variação, por meio dos diálogos realizados entre os grupos no decorrer do jogo.

*Cena 2: Quiz*

Inicialmente, convidamos os estudantes a se dividirem em duas equipes. Por iniciativa própria agruparam-se considerando suas localizações naquele momento na sala de aula, ou seja, unindo fileiras próximas umas as outras. Cada equipe ficou composta por 13 estudantes, já que uma estudante havia faltado nesse dia.

Explicamos que seriam apresentadas algumas situações-problema que deveriam discutir entre si a fim de chegar a uma resposta comum à equipe. Essa, posteriormente, seria exposta à classe por meio de diálogos e todos deveriam optar pela resposta que melhor conseguisse solucionar o problema enunciado. Dessa forma, a equipe que apresentasse a melhor resposta ao problema proposto seria a campeã da rodada.

**Figura 20: Questões do Jogo Quiz**

Indique os limites máximo e mínimo e o número que responde a situação numérica, se possível:

a) A idade de José daqui sete anos.

b) A idade de Pedro há 12 anos atrás.

c) O dobro do dinheiro que trago no meu bolso.

d) A altura de Maria.

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

> **Professora**: Meninos e meninas, faremos o seguinte, eu vou enunciar uma situação, vocês vão pensar em uma solução, registrar no papel e em seguida expor para a classe. Depois cada equipe irá analisar a resposta da outra e vamos ver se chegamos à equipe campeã da sala. Ok? Para as situações que vou falar indiquem os limites máximo e mínimo e o número que responde a situação numérica, sempre que for possível.
> Primeira situação para pensarem: A idade de José daqui sete anos. Pensem em José como uma pessoa qualquer.

Os estudantes ficaram confusos com esse questionamento e começaram a conjecturar. Na Equipe I tivemos o seguinte diálogo:

> **Carlos**: Então, o José daqui sete anos vai ter 19 anos.
> **Pedro Henrique**: Mas porque Carlos?
> **Carlos**: Ué, eu tenho 12 anos daqui sete anos, vou ter 19, se a professora está fazendo essa pergunta aqui é porque o José deve ter nossa idade.
> **Pedro Henrique**: Entendi.... Mas eu tenho 11 anos ainda, daqui sete anos vou ter 18. Então não vai dar certo.
> **Carlos**: Mas Pedro Henrique, pensa um pouco, a gente está no sétimo ano, no final do ano, nossa idade vai ser 12, então daqui sete anos vai todo mundo estar com 19 anos.
> **Vanessa**: Oh esperto, e os repetentes, eles tem mais que 12 anos. Eu acho que não é isso não.
> **Carlos**: Eu sei que tem os repetentes, mas vamos olhar pela maioria de nós e pronto.
> **Vanessa**: Eu acho que não é isso não, a professora falou em limite máximo e limite mínimo, então eu acho que vai ter uma idade mínima e uma idade máxima que o José pode ter, então nesse caso ai, ele pode ter 18 anos no mínimo e 19 no máximo.

Após a fala de Vanessa, os estudantes da Equipe I concordaram e combinaram que essa seria a resposta. Ao solicitarmos que a equipe expusesse para a classe suas considerações, Vanessa foi questionada por Davi:

> **Davi**: Mas Vanessa, o José pode ser qualquer pessoa, então ele pode ter acabado de nascer, aí sua idade mínima vai ser sete anos.
> **Vanessa**: Eu acho que não Davi, porque se a situação é aqui na sala nós só pensamos no caso das nossas idades.
> **Davi**: Mas você lembra que a professora falou que pode ser qualquer pessoa, então pode ser alguém que acabou de nascer.
> **Carlos**: É verdade, pode mesmo. A gente não tinha pensado nisso. Mas se for assim então, pode ser alguém bem velhinho mesmo, aí a idade máxima, não vai ser 19 mais, pode ser 107 anos, se pensar em uma pessoa com 100 anos agora, porque eu não conheço ninguém com mais de 100 anos...

Esse trecho nos revela o quanto o problema proposto pode desencadear hipóteses nos diálogos dos estudantes. Inicialmente, a Equipe I tinha em mente um campo de variação bem limitado e, apenas após o conflito de ideias entre as equipes, puderam expandir seus intervalos e reformular sua solução. Notamos assim, a importância do momento de apresentação das soluções de ambas equipes, pois

> a atividade de ensino de matemática coloca o sujeito diante de situações desafiadoras que o farão organizar um conjunto de conhecimento que possui, com o propósito de solucionar o conflito causado pela necessidade de resolver o problema para o qual não dispõe, de forma imediata de conhecimentos já prontos para solucionar (MOURA; LANNER DE MOURA, 1998, p. 12).

A fala final do estudante Carlos nos revela esse novo ponto de partida que fora estabelecido, pois, ao acompanhar o diálogo entre os outros estudantes, pôde reformular a resposta de sua equipe para o limite máximo da idade de José. Por fim, a classe concluiu que o limite mínimo seria de 7 anos, por considerarem uma pessoa que acabou de nascer, e o limite máximo de 107 anos, pensando em uma pessoa com idade de 100 anos.

A segunda situação proposta foi “A altura de Maria”. Para esse caso, a Equipe I realizou o seguinte diálogo:

> **Pedro Henrique**: Vamos pensar nas possibilidades então, a Maria pode ter no mínimo quanto de altura?
> **Thaís**: Minha irmãzinha nasceu mês passado, ela tinha uns 45 centímetros.
> **Carlos**: E a pessoa mais alta que o conheço mede uns 2 metros.
> **Pedro Henrique**: Então fechou, a altura mínima vai ser 45 centímetros e a máxima vai ser 2 metros.
> **Vanessa**: Lá vai eu de novo, os jogadores de basquete medem mais de 2 metros, eu acho que podia colocar, a máxima de 3 metros.
> **Pedro Henrique**: Então, vamos colocar tudo em metros, a altura mínima vai ser 0,45 metros e altura máxima vai ser 3,00 metros.

Podemos inferir que após o diálogo entre as equipes buscando solucionar a situação 1, a equipe I atribuiu nova qualidade à solução das situações que se seguiram, buscando, desta vez, expandir sua resposta a limites mínimos e máximos e considerando um campo de variação mais amplo. Acerca dessa nova qualidade Moura e Lanner de Moura (1998) alegam que

> A atividade, por colocar os sujeitos em ação, em que a solução do problema envolve negociação, forçará a troca de conhecimentos através da partilha de saberes necessários para se chegar a um consenso sobre o ganhador e o perdedor. É essa

> busca de consenso que colocará em movimento o conjunto de saberes individuais e valores culturais que serão partilhados. Isso levará o próprio grupo a um novo nível de compreensão da realidade e a um conjunto de valores que agora são coletivos e, por isso, são novos pontos de partida para novas buscas de solução em situações de ensino em que a classe estará envolvida como um todo (MOURA; LANNER DE MOURA, 1998, p. 13).

As equipes I e II chegaram à conclusão de que a altura mínima poderia ser 0,45 metros e a máxima 3,00 metros. No entanto, indagamos a classe da seguinte forma:

> **Professora**: Seria válido um intervalo com números racionais? Em caso afirmativo, isso poderá sempre acontecer?
> **Davi**: Professora eu acho que vale pra altura sim, porque a maioria das pessoas não tem altura com número natural, medem 1,65; 2,10. No caso do dinheiro também poderá ser um número racional, porque existem os centavos.
> **Fabiana**: É, mas nem sempre vai valer porque, por exemplo, se a professora perguntasse sobre quantidade de pessoas aqui na sala, aí tinha que ser números naturais.
> **Professora**: Isso mesmo, estamos então falando sobre o campo de variação dessas situações, onde para cada situação, deveremos analisar qual é o mais adequado, pois para alguns casos, não poderemos, por exemplo, trabalhar com números racionais negativos, um exemplo, por favor!
> **Pedro Henrique**: Na altura da Maria, professora, não vale falar em altura negativa de uma pessoa.
> **Fabiana**: Professora, então nesse caso, o campo de variação será os números racionais positivos?
> **Professora**: O que vocês acham?
> **Equipe I e Equipe II**: Sim.
> **Professora**: Isso!!!!

Por meio desse diálogo, notamos que o problema apresentado no jogo se constituiu como desencadeador (MOURA, 1992) para a discussão sobre o nexo conceitual campo de variação. Iniciamos discutindo sobre intervalos com limites mínimos e máximos e, direcionamos para o diálogo sobre campo de variação, um conhecimento novo e mais aprimorado para os estudantes. Contudo, esse movimento se deu mediante reflexões e conflitos, o que nos leva a inferir que o jogo, de fato, cumpriu seu papel de desencadeador da aprendizagem, pois

> o jogo para ensinar matemática deve cumprir o papel de auxiliar no ensino do conteúdo, propiciar a aquisição de habilidades, permitir o desenvolvimento operatório do sujeito e, mais, estar perfeitamente localizado no processo que leva a criança do conhecimento primeiro ao conhecimento elaborado (MOURA, 1992, p. 47).

Entendemos então que o jogo *Quiz* foi uma situação desencadeadora que proporcionou aos estudantes se colocarem em atividade e reorganizarem seus conhecimentos sobre qual campo de variação a se considerar em cada situação, observando suas especificidades e, não mais olharem um problema em busca de uma solução pronta e absoluta.

No próximo Eixo discutimos as ações e reflexões dos estudantes frente às situações desencadeadoras de aprendizagem e buscamos apresentar os indícios de apropriação dos nexos conceituais fluência, campo de variação e variável corroborando para a formação do pensamento algébrico e, por último, analisamos se as ações e reflexões coletivas encaminharam-se para a formação do conceito de equações de 1° grau.

## 5.2 Eixo 2: Ações e reflexões coletivas

Buscamos, nessa seção, voltar nosso olhar para as ações e reflexões dos estudantes, apresentando os movimentos desenvolvidos por eles para a formação do pensamento algébrico e do conceito de equação de 1° grau. Para tanto, os episódios que compõem este eixo são: 1) Apropriação dos Nexos Conceituais e, 2) Formação do Conceito de Equação de 1° Grau.

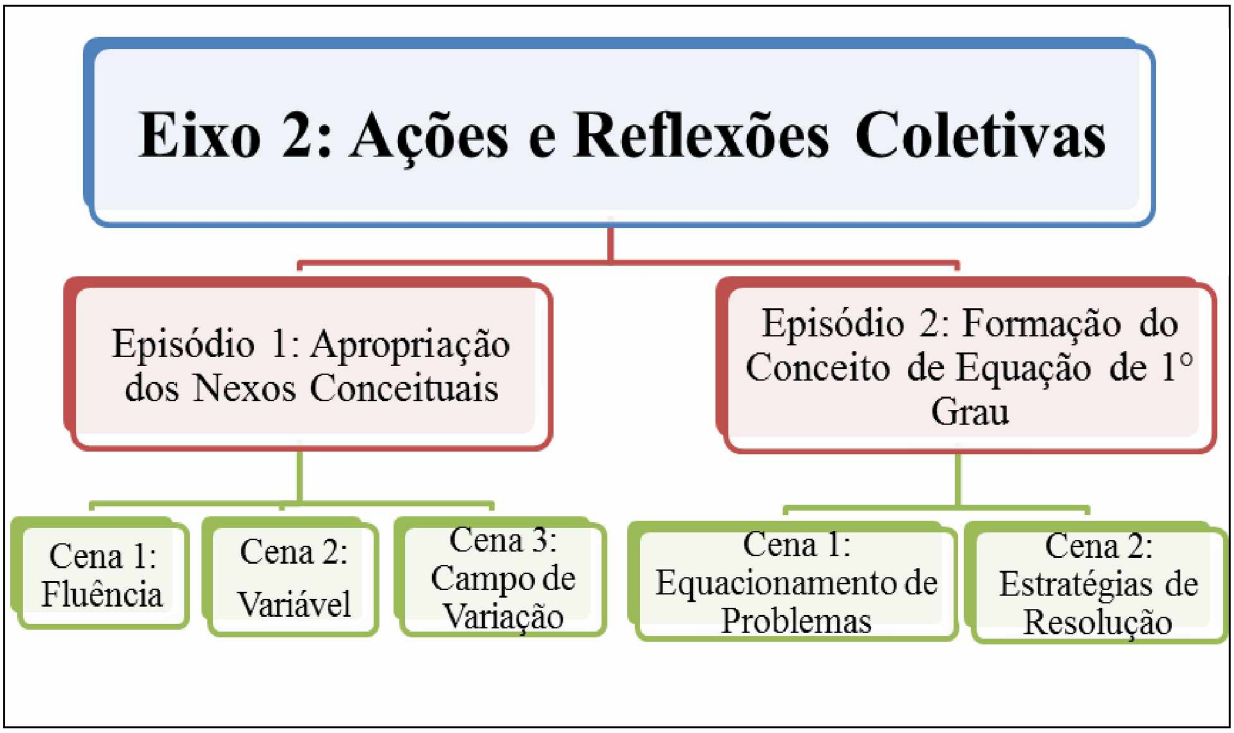
Conforme discutimos no capítulo 2, acreditamos que, ao se apropriar dos nexos conceituais da álgebra: fluência, campo de variação e variável (SOUSA, 2004), o estudante melhor se encaminha para a formação do pensamento algébrico.

Assim, no Episódio 1 desse eixo, buscamos analisar se as ações e reflexões dos estudantes frente às situações desencadeadoras de aprendizagem Movimentos Numéricos e jogo Pega Varetas corroboraram para apropriação dos nexos conceituais e, consequentemente, para a formação do pensamento algébrico.

No Episódio 2, discutimos o equacionamento de problemas que recaem em equações de 1° grau e o diálogo para a resolução dessas equações, por meio das SDA Enigma, Método do Retorno e Triminó, compreendendo se os estudantes estiveram em atividade de aprendizagem e se ocorreu a apropriação do conceito de equação de 1° grau.

Sintetizamos na figura abaixo nossa organização para o processo de análise do Eixo 2:

**Figura 21: Organização da análise para o Eixo 2**




Fonte: Sistematização da pesquisadora

5.2.1. Episódio 1: Apropriação dos Nexos Conceituais

Nesse episódio, vamos analisar como as ações e reflexões dos estudantes por meio de recortes das SDA Movimentos Numéricos e jogo Pega Varetas culminaram na apropriação dos nexos conceituais da álgebra, encaminhando para a formação do pensamento algébrico.

*Cena 1: Nexo Conceitual: Fluência*

Como já mencionado no capítulo 4, os estudantes foram convidados a refletir sobre as seguintes questões, inicialmente sozinhos e, posteriormente, foram convidados a formarem duplas a fim de socializarem suas considerações:

a) Quantas pessoas estão em sua casa agora?
b) Você é o(a) mesmo(a) de um ano atrás? De um mês atrás? De uma semana atrás? Por quê?
c) O mundo é o mesmo enquanto falamos a palavra "mundo"? Por quê?
d) A escola permanece a mesma depois que você vai embora para a sua casa? Por quê?
e) Olho uma pedra; fecho os olhos e vejo novamente a pedra. É a mesma? Por quê?
f) "O fogo vive a morte do ar e o ar vive a morte do fogo; a água vive a morte da terra e a terra vive a morte da água".

g) "Tu não podes descer duas vezes ao mesmo rio, porque novas águas correm sobre ti".
h) "As coisas, ao mesmo tempo, são e não são elas próprias; nós mesmos somos e não somos".

Inicialmente, eles se mostraram confusos, como é possível percebermos no diálogo a seguir, da dupla Davi e Rafael:

> **Davi**: Professora pra quê vai servir isso?
> **Rafael**: Ué, não tem nada de matemática aqui não, professora!
> **Professora**: Será Rafael? Vocês não vivem me dizendo que matemática está em tudo que fazemos? Gostaria que deixassem de lado esse pensamento que vocês têm da matemática ser apenas operações e que tentassem falar pra mim, o que entendem dessas frases. Não precisam escrever, vamos conversar. O que quer dizer a frase "Tu não podes descer duas vezes ao mesmo rio, porque novas águas correm sobre ti"?
> **Davi**: Vamos lá então. Como o rio tem a correnteza, ele nunca é o mesmo. Apesar de a gente olhar e achar que está vendo a mesma água, não é, porque ela segue a correnteza e outra água vem, por isso nunca estamos no mesmo rio! É essa viagem aí, não é?!
> **Rafael**: É que nem a água da torneira professora. Quando abre sai uma água, mas não vai voltar a mesma, porque ela vai passar por outras tubulações, vai fazer tratamento, vai ser diferente!
> **Professora**: Isso mesmo! Estão vendo, vocês estão descrevendo para a classe movimentos da vida. Nós estamos inseridos nesse movimento?
> **Rafael**: Estamos sim professora, porque nós também mudamos. Cada ano que passa eu sou diferente. Tô melhorando eu acho!!! (risos)

Nas falas dos estudantes percebemos que eles entendem que existe um movimento que rege todas essas transformações. Conforme Caraça (1951, p. 110), "o Mundo está em permanente evolução; todas as coisas, a todo momento, se transformam" e a esse movimento o autor o denomina Fluência.

Contudo, os estudantes ainda não conseguiam relacionar o porquê de estarmos discutindo essas questões em uma aula de matemática.

> **Davi**: Tudo bem professora, acho que todo mundo entendeu aonde a senhora quer chegar, as coisas mudam, não são as mesmas de acordo com o tempo, vai modificando... Mas pra quê isso? Qual a relação com a matemática?
> **Professora**: Eu gostaria que vocês tentassem estabelecer essa relação, ao invés de eu ter que falar!
> Silêncio por alguns minutos...
> **Rafael**: Professora, pensei o seguinte, em uma das questões a senhora perguntou quantas pessoas estão na minha casa agora? Se eu entendi

> direito, não dá pra responder com um número certo porque, por exemplo, minha mãe era pra estar lá, mas ela pode ter ido na vizinha, ela sempre vai lá fofocar (risos), então pode mudar esse valor, é isso que estou pensando agora, então não existe um número certo, pode mudar.

Parece-nos que o estudante passou a compreender que mesmo os números – que normalmente parecem ser estáticos e imutáveis – podem se movimentar, assim, parece-nos que ao compreender o movimento dos números, o estudante caminhou para a compreensão de da matemática como um movimento de vida e, atribuir nova qualidade às questões apresentadas, lembrando-nos Caraça (1951, p. 117), quando alega que

> [...] arrastado na fluência de todas as coisas, ele transforma-se – cada um dos seus componentes devém a todo o instante uma coisa nova. Alterando-se constantemente os elementos constitutivos, alteram-se as suas relações, isto é, as suas qualidades.

Logo, o estudante que em momentos anteriores havia apresentado uma resposta exata, três pessoas, retoma o problema e transforma a qualidade de seu entendimento, considerando o movimento da vida de sua mãe, concluindo não ser possível uma resposta certeira para esse problema.

Após a discussão, o estudante Davi concluiu dizendo que:

> **Davi**: Professora, eu entendi agora também. É isso, nem sempre vai ter uma resposta de imediato, porque vai depender do movimento, algumas coisas na vida, se transformam, mudam então a matemática também é assim, vai mudando.

De posse dessa fala de Davi, a classe demonstrou aprovação à sua conclusão, o que nos possibilitou entender que os estudantes se apropriaram do nexo fluência, pois parece-nos terem compreendido o movimento da vida, a fluência do pensamento humano, “pois não é verdade que tudo está sujeito a uma mesma lei de nascimento, vida e morte, que, por sua vez, vai originar outros nascimentos?” (CARAÇA, 1951, p. 110).

Uma vez apropriado o nexo conceitual da álgebra, fluência, na Cena 2 voltamos nosso olhar ao movimento dos estudantes à apreensão do conceito de variável, por acreditarmos que a variável remete a esse movimento de fluência, de transformação do pensar humano.

*Cena 2: Nexo Conceitual: Variável*

A fim de discutirmos o nexo conceitual variável, acreditamos antes ser necessário, apresentarmos como nossos estudantes se apropriaram da linguagem algébrica, uma vez que entendemos esse movimento como necessário para a apropriação do conceito de variável. Sendo assim, vamos nos reportar as suas ações e reflexões no jogo Pega Varetas.

Os estudantes foram convidados a formarem trios e cada trio recebeu o jogo Pega Varetas.

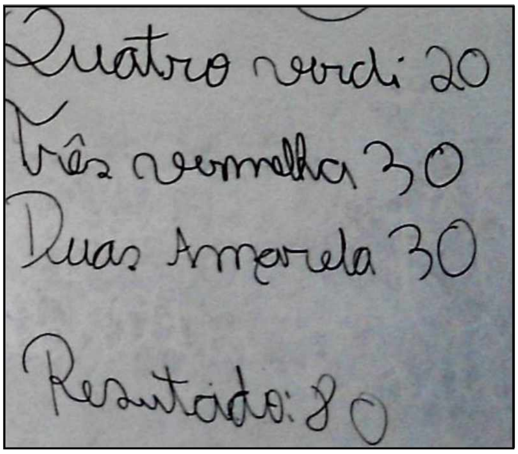
Pedimos a cada estudante que registrasse seus pontos e o número de varetas de cada rodada, que dialogassem nos trios e, juntos, fizessem o registro da forma que melhor lhes conviesse. Posteriormente, os trios foram convidados a escreverem na lousa, a forma como haviam feito tal registro.

Acompanhemos a discussão do trio Ana Paula, Thaís e Vanessa e como as estudantes foram mudando suas concepções sobre a forma de registrar.

> **Ana Paula**: Como você está fazendo Vanessa?
> **Vanessa**: Ué, eu escrevo por extenso o número do tanto de varetas que tenho, escrevo o nome da cor e depois os pontos que dá. E você?
> **Ana Paula**: Eu estou colocando assim também, mas estou com preguiça de ficar escrevendo toda hora, aí coloquei só o número, mas queria fazer de outro jeito. E, você Thaís, está fazendo como?
> **Thaís**: Então, eu não estou colocando assim não, eu estou abreviando tudo, acho que fica mais rápido e fácil.

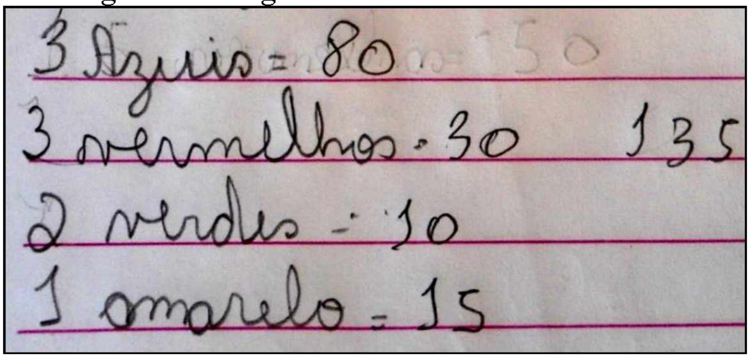
As estudantes Vanessa, Ana Paula e Thaís, optaram pelas seguintes formas de registar:

**Figura 22: Registro da Estudante Vanessa**



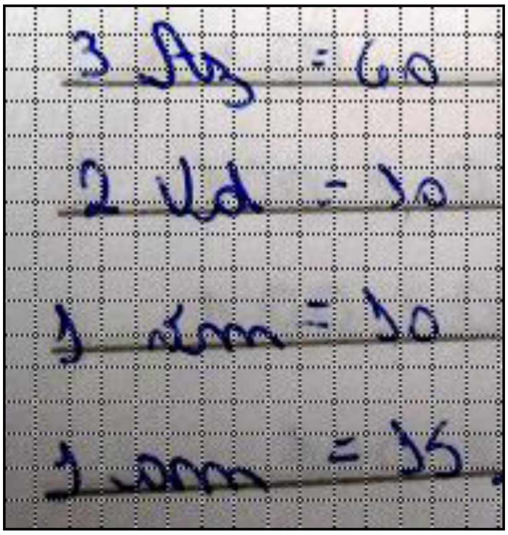

Fonte: Arquivo da Pesquisadora

**Figura 23: Registro da Estudante Ana Paula**




Fonte: Arquivos da Pesquisadora

**Figura 24: Registros da Estudante Thaís**




Fonte: Arquivo da pesquisadora

Vemos que cada estudante buscou uma forma de registrar, dando sentido pessoal ao seu movimento no jogo. Leontiev (1978, p. 95), acerca da significação, nos fala que essa "mediatiza o reflexo do mundo pelo homem na medida em que ele tem consciência deste, isto é, na medida em que o seu reflexo do mundo se apoia na experiência da prática social e a integra".

Podemos entender, então, que o registro das estudantes reflete suas experiências sociais, uma vez que, por exemplo, em conversas informais no decorrer do ano letivo, a estudante Vanessa nos relatou que, durante os anos iniciais do ensino fundamental, sua professora tinha uma prática extremamente formal e não admitia que os estudantes lançassem mão da linguagem sincopada ou simbólica, assim a estudante não se sentia à vontade para fazê-lo nessa atividade. Para tanto, ao escrever a quantidade de varetas obtidas e sua respectiva cor, a estudante realizou seu registro mediante a linguagem retórica (EVES, 2002) e apenas para a pontuação se sentiu à vontade para registrar por meio da linguagem simbólica (EVES, 2002), uma vez que essa representa o total de pontos, fazia sentido para a estudante o registro simbólico apenas nesse momento.

Pela discussão do trio, percebemos que as diferentes formas de registro do jogo surgidas parecem ter proporcionado a negociação das opiniões entre os membros, com o objetivo de buscar a melhor alternativa que resolvesse o problema do registro. As formas retórica e sincopada, estabelecida pelas estudantes Vanessa e Ana Paula para registrar os pontos e o número de varetas de cada rodada desencadearam a percepção de novas formas de registros, abarcando outro tipo de linguagem, a simbólica, utilizada por Thaís.

A necessidade de escrever de modo rápido as varetas obtidas no jogo e sua pontuação gerou a utilização de uma linguagem matemática que algumas pareciam desconhecer, a linguagem simbólica, como podemos acompanhar pelo diálogo a seguir:

> **Vanessa**: Professora eu não sabia que podia escrever assim não, só usando um pedaço da palavra, é bem mais rápido e fácil, mas eu achei que estava errado.
> **Professora**: Por que errado Vanessa?
> **Vanessa**: Ué, porque não é uma forma que já tivesse visto, mas dessa forma dá pra entender direitinho e é mais fácil.

Podemos considerar que esse isolado nos possibilitou verificar que os estudantes compreenderam o uso da linguagem algébrica simbólica em um movimento, não lhes sendo imposta uma forma de escrita, com um formalismo sem nenhum sentido a eles. Ao contrário, por meio do diálogo, elas optaram pela melhor forma de registrar e puderam compreender o significado da linguagem apresentada, ou seja, essa atividade de ensino possibilitou a assimilação de uma nova significação para as estudantes, por meio do sentido que lhe foi atribuído. Coadunamos com Leontiev (1978, p. 96) ao referir-se ao fato de que

> o homem encontra um sistema de significações pronto, elaborado historicamente, e apropria-se dele tal como se apropria do instrumento, esse precursor material da significação. O fato propriamente psicológico, o fato da minha vida, é que eu me aproprie ou não, que eu assimile ou não uma dada significação, em que grau eu a assimilo e também o que ela se torna para mim, para a minha personalidade; este último elemento depende do sentido subjetivo e pessoal que esta significação tenha para mim.

Prosseguindo com o roteiro que haviam recebido, os estudantes foram convidados a escrever uma expressão algébrica, para o cálculo dos pontos e do número de varetas do jogo, a expressão matemática mais simples que permitisse representar o cálculo de todos os pontos possíveis do jogo e o número de varetas de cada jogada:

4. Vamos chamar de *Expressão algébrica* do cálculo dos pontos e do número de varetas do jogo, a expressão matemática mais simples que permite representar o cálculo de todos os pontos possíveis do jogo e o número de varetas de cada jogada. Qual é a *expressão algébrica* para o jogo de varetas?

Essa proposta desencadeou o seguinte diálogo entre a professora e o trio Davi, Fabiana e Rafael:

> **Professora**: Pessoal, vamos supor que eu consiga pegar varetas de todas as cores, como nós faríamos para determinar minha pontuação?
> **Davi**: Professora é só multiplicar a quantidade de varetas por quanto ela vale e depois somar tudo.
> **Fabiana**: Isso mesmo, por exemplo, se a senhora pegar 1 preta, 1 amarela, 1 azul, 1 vermelha e 2 verdes, vai ser, 50 vezes 1, 15 vezes 1, 20 vezes 1, 10 vezes 1, 5 vezes 2, e depois somar os resultados.
> **Davi**: É isso mesmo, como a senhora não falou quantas varetas de cada cor pegou, é só colocar o número de varetas e fazer a multiplicação.
> **Rafael**: Professora, eu fiquei pensando aqui, se a senhora, por exemplo, não tivesse pegado vareta preta, ia ser zero, né?
> **Davi**: Ia Rafael.
> **Professora**: Muito bem, mas agora que vocês já encontraram o caminho para o exemplo que a Fabiana nos deu, eu gostaria que vocês pensassem no seguinte: e, se nosso problema fosse somente como eu tinha falado, um tanto de varetas de cada cor, imaginem que nós não podemos ficar colocando cada hora um valor. Como poderíamos reescrever essa expressão que vocês colocaram pra mim?
> **Rafael**: Então, é só ficar trocando pelo número de varetas que cada pessoa tem e quanto não tiver nada coloca zero.
> **Fabiana**: Mas Rafael, a professora quer saber como vai escrever a expressão se não souber o tanto.
> **Davi**: Professora, não pode colocar a palavra desconhecido, ou um ponto de interrogação? Porque não sabe o tanto. Ou então fazer um desenho, igual aquela vez, das cadeiras[43]?

Na fala do estudante Davi, ao sugerir a utilização de uma palavra, do ponto de interrogação ou de um desenho, vemos surgir o movimento histórico da variável, defendido por Sousa (2004). No diálogo descrito vemos que o estudante busca caminhos para a representação, não direcionando-se automaticamente para a variável letra e percorre diferentes

[43] Davi se refere a atividade 5 – Pensando na Variável, apresentada no capítulo 4, em que propusemos aos estudantes, a criação da variável Letra.

representações (variável palavra, numeral, letra, desenho). Segundo Sousa (2004, p. 154), "entendemos que a gênese substancial da álgebra está no desenvolvimento histórico do conceito de variável, o qual contém em seus fundamentos a palavra, sincopação, a figura e a letra".

Sendo assim, consideramos que esse movimento remete à apropriação do conceito de variável, uma vez que o estudante está compreendendo a quantidade de varetas como um número mutável.

Contudo, notamos a dificuldade dos estudantes em formalizar o pensamento falado; o estudante Davi parece compreender a necessidade de representação onde seja possível quantificar um número desconhecido, mas faltam-lhe recursos para tanto. Acerca desse momento de iniciação da linguagem algébrica escrita, Vigotski (2001) nos esclarece que

> [...] a álgebra é mais difícil do que a aritmética para a criança. A linguagem escrita é a álgebra da escrita. Entretanto, da mesma forma que a apreensão da álgebra não repete o estudo da aritmética, mas representa um plano novo e superior de desenvolvimento do pensamento matemático abstrato, que reconstrói e projeta para o nível superior o pensamento aritmético anteriormente constituído, de igual maneira a álgebra da escrita ou linguagem escrita introduz a criança no plano abstrato mais elevado da linguagem, reconstruindo assim, o sistema psicológico da linguagem falada anteriormente constituído (VIGOTSKI, 2001, p. 314).

Ou seja, os estudantes se viram em uma situação onde deveriam expressar seu conhecimento a partir do geral, em que a aritmética não lhes fornecia condições para resolver o problema proposto. Assim, acreditamos ter gerado, nesses estudantes, a necessidade do conhecimento algébrico, quando ainda não tinham clareza na representação desse número desconhecido e variável.

Acompanhemos mais um trecho do diálogo:

> **Professora**: Davi, se nós colocarmos um único desenho ou mesmo o ponto de interrogação em cada lugar, o que ele estaria dizendo pra nós?
> **Davi**: Um tanto de varetas que a pessoa pegou que nós não sabemos quanto é!
> **Rafael**: Mas aí, não pode Davi, porque senão vai ficar parecendo que foi tudo igual, tudo o mesmo tanto, e pode ser tanto diferentes.
> **Professora**: Isso mesmo Rafael, para esse caso, se nós usarmos sempre o mesmo símbolo, seja um desenho ou o ponto de interrogação, isso iria representar que são sempre os mesmos valores.
> **Fabiana** (interrompendo a fala da Professora): E a quantidade de varetas varia né professora, mas não pode ser mais do que tem pra cada cor?
> **Professora**: Pode variar né Fabiana, vai depender da sorte e da eficiência na pessoa no jogo!

Esse trecho nos apresenta maiores indícios da formação do conceito de variável, uma vez que os estudantes relacionam, ainda que de forma implícita, a variável ao campo de variação, em suas falas mencionam estes conceitos, ao relatarem que a quantidade de varetas pode variar, mas que não poderá ser superior a quantidade de cada cor de varetas presentes no jogo. Conforme as palavras de Scarlassari (2007), podemos acreditar que os estudantes encaminhavam-se para a formação do pensamento algébrico.

> Quando nos referimos ao pensamento algébrico, relacionamos a este, além da operacionalidade, as ideias de movimento quantitativo, regularidade, variabilidade, dependência, intervalo numérico e outros. Esses são os nexos da aritmética que compõe a totalidade do pensamento algébrico que devem ser trabalhados em sala de aula por meio de atividades que instiguem o pensamento dos alunos, que possibilitem que eles desenvolvam tais conceitos. Sem o desenvolvimento destes conceitos e suas relações, o aprendizado de álgebra se torna fragmentado, como se fosse apenas aplicações de técnicas, sem a compreensão de que a álgebra é um instrumento muito útil para a resolução de problemas e uma ferramenta que pode facilitar o estudo de outras áreas além da Matemática (SCARLASSARI, 2007, p. 40).

Sousa, Panossian e Cedro (2014, p. 122), também já nos alertavam acerca desse encaminhamento dos estudantes, isto é, esses autores afirmam que "a variável é a fluência, o próprio movimento, o fluxo do pensamento. [...] Só há sentido em mencionar a palavra variável, a partir do momento em que se considere o campo numérico. Ela não tem existência por si só, enquanto ser em si". Logo, os estudantes se direcionavam à relação de dependência entre a variável e o campo de variação. Salientamos que o nexo conceitual campo de variação foi retomado posteriormente, nessa mesma atividade, visando um movimento maior para sua apreensão, o qual apresentaremos na Cena 3.

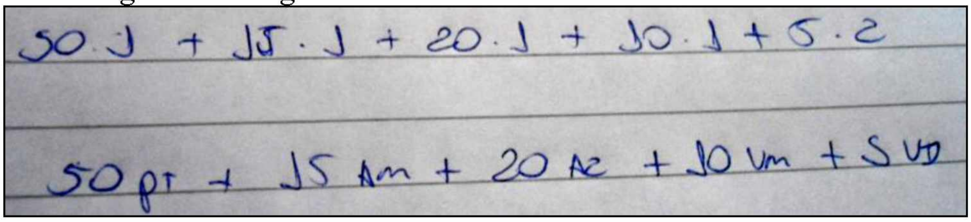
Encaminhamos, então, o diálogo a fim de formalizar o conceito de variável:

> **Professora**: Então pensem um pouquinho, como podemos escrever aquela expressão de vocês, sem ter que saber qual o valor exato que foi pego de varetas e, pensando que ele pode variar, ou seja, pode ser qualquer valor, desde que não ultrapasse a quantidade máxima de cada cor de varetas?
> Silêncio por alguns minutos...
> **Fabiana**: Já sei!!! Vamos escrever igual a Thaís fez aquela hora, pra vareta preta *pt*, pra vareta amarela *am*, pra azul *az*, pra vermelha *vm*, e pra verde *vd*. Porque assim, dá pra saber o que o *pt*, *am*, *az*, *vm* e *vd* representam e, depois é só trocar pela quantidade de varetas que a pessoa pegou.
> **Professora**: Vocês concordam?
> **Classe**: Simmmmmm!!!
> **Professora**: Ok, então! Como vai ficar a expressão então?
> **Davi e Fabiana**: 50pt + 15am + 20az + 10vm + 5vd.

**Professora**: Perfeito!!!

O registro escrito dos estudantes Davi e Fabiana, se deu conforme apresentamos na figura 25:

**Figura 25: Registro dos Estudantes Davi e Fabiana**




Fonte: Arquivos da Pesquisadora

Por meio do diálogo estabelecido entre estudantes e professora e da expressão algébrica apresentada por eles, podemos inferir que conseguiram generalizar o modo de representar a pontuação do jogo Pega Varetas, considerando os pontos e a quantidade de varetas obtidas, o que nos leva a entender que, para eles, houve a formação do conceito de variável, pois

> [...] a generalização de um conceito leva à localização de dado conceito em um determinado sistema de relações de generalidade, que são os vínculos fundamentais mais importantes e mais naturais do conceito. Assim, generalização significa ao mesmo tempo tomada de consciência e sistematização de conceitos (VIGOTSKI, 2001, p. 292).

Conforme apresentamos acima, os estudantes sentiram a necessidade de limitar os possíveis valores para as variáveis, ou seja, não poderiam exceder ao número máximo de varetas de cada cor presente no jogo. Esse fato nos levou a direcionar nossas atividades de ensino para a apropriação do nexo conceitual campo de variação, conforme a apresentamos na Cena 3.

*Cena 3: Nexo Conceitual: Campo de Variação*

A partir da expressão algébrica 50pt + 15am + 20az + 10vm + 5vd apresentada por Davi e Fabiana, propusemos as seguintes questões para que os trios discutissem:

11. Considere a *expressão algébrica* T, para representar o total de pontos em cada jogada, T: 50pt + 20az + 15am + 10vm + 5vd, onde **pt, az, am, vm** e **vd** representam, respectivamente, o número de vareta preta, azul, amarela, vermelha e verde. Qual é o papel das letras pt, az, am, vm, vd na expressão T?

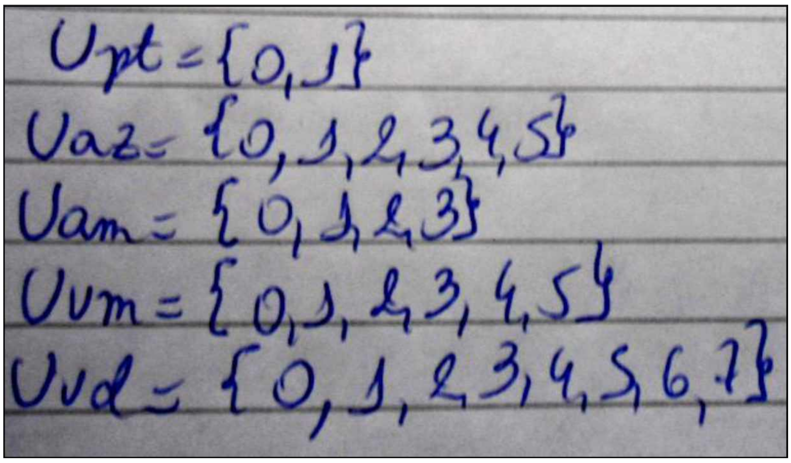
12. O conjunto de valores que cada *variável* pode assumir é chamado de *Conjunto Universo* da variável. Escreva o *Conjunto Universo* para cada uma das variáveis da expressão T da questão 11.

Vejamos o desenrolar dessa discussão pelo trio Carlos, Junior e Pedro Henrique:

**Pedro Henrique**: Então, pela expressão o *pt* é o número de varetas pretas, *az* é a quantidade de varetas azuis, *am* a quantidade de varetas amarelas, *vm* a quantidade de varetas vermelhas e *vd* é quantidade de varetas verdes.
**Pedro Henrique**: Tá bom então, ela quer saber o papel das letras?
**Carlos**: Isso. A gente não sabe quanto vale, porque cada pessoa pode pegar um número diferente de varetas.
**Junior**: Gente é só pensar assim, o papel é isso que o Carlos falou, contar pra gente quantas varetas de cada cor, a pessoa pegou. Então, como pode ter diferentes quantidades pra cada um, usa a letra pra indicar que pode ser qualquer valor e depois troca na cor. Como a gente fez com a expressão que a gente escreveu.
**Pedro Henrique**: Beleza, então, o *pt* só pode ser igual a 1, porque só tem 1 vareta preta.
**Carlos**: Concordo.
**Junior**: Mas a pessoa pode não pegar nenhuma vareta preta, então acho que o *pt*, pode valer 0 ou 1.
**Pedro Henrique**: É verdade. Eu na terceira rodada do jogo, não peguei nenhuma vareta azul e nem preta, então tem hora que a letra vale zero mesmo, porque pode acontecer de não pegar daquela cor.
**Junior**: Isso mesmo Pedro Henrique, eu pensei isso, porque teve uma rodada que não peguei nenhuma, a mesa mexeu na hora e perdi a vez!
**Carlos**: Então o *pt* vai de 0 a 1. O *az* vai de 0 a 5, *am* de 0 a 3, *vm* 0 a 5 e *vd* de 0 a 7.
**Pedro Henrique e Junior**: Isso. Professora terminamos.
**Professora**: Meninos só vamos melhorar um pouquinho. Foi pedido o conjunto de valores, vamos tentar escrever isso um pouquinho melhor. Como se escrevem os valores de um conjunto?
**Pedro Henrique, Junior e Carlos**: Vixi, professora!
**Carlos**: Tem que colocar todos os valores de cada letra professora, tipo assim, para a letra *vm* = 0, 1, 2, 3, 4, 5?
**Professora**: Isso Carlos, mas quando falamos em conjuntos numéricos, colocamos seus elementos dentro de chaves, lembram?
**Carlos**: Eu não lembrava não, mas tudo bem.... (risos)
**Professora**: E vamos usar uma notação especial, no exemplo que você deu Carlos, coloquem também $U_{vm}$, isso é, Conjunto Universo de varetas vermelhas.
**Carlos**: Ok!

Após nosso diálogo os estudantes formalizaram o seguinte registro:

**Figura 26: Registro do Trio Carlos, Junior e Pedro Henrique**




Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Pelo trecho anterior, vemos o quanto a proposta fomentou a apropriação do nexo conceitual campo de variação, uma vez que nos parece ter ocorrido que esse trio conseguiu apreender que para cada conjunto teremos uma possibilidade de valores a serem atribuídos, assim o trio se mostrou

> capaz de concretizar a relação geneticamente inicial e universal do objeto em estudo em um sistema de conhecimentos particulares sobre ele, os quais devem manter-se em uma só unidade, que possa garantir transições mentais do universal ao particular e vice-versa (DAVÍDOV, 1987, p. 106).

Conforme discutido por Sousa, Panossian e Cedro (2014, p. 122), entendemos que, em nossa pesquisa, os estudantes também vivenciaram que “a essência da variável, necessariamente, está relacionada ou associada a um determinado campo de variação”.

Pelo caminho percorrido nas cenas 1, 2 e 3 deste episódio podemos inferir que os estudantes, em suas ações individuais e coletivas, se apropriaram dos nexos conceituais da álgebra (fluência, variável e campo de variação) e, parece-nos que essa apropriação conduziu os estudantes à formação do pensamento algébrico, já que

> [...] as relações intrapsíquicas (atividade individual) constituem-se com base nas relações interpsíquicas (atividade coletiva). É nesse movimento do social ao individual que se dá a apropriação de conceitos e significações, ou seja, que se dá a apropriação da experiência social da humanidade (MOURA et al., 2010, p. 83).

Por meio do diálogo entre os grupos e com a classe toda, os estudantes puderam conflitar suas conjecturas, avaliar os caminhos escolhidos por cada grupo permitindo o compartilhamento de conhecimentos e exigindo novas qualidades às suas ações. Assim, os estudantes “têm de estudar essa conexão do geral com o particular e o singular, ou seja, operar com o conceito. A assimilação do material de estudo envolvida pelo conceito dado se efetuará no processo de transição do geral ao singular" (DAVÝDOV, 1982, pp. 408-409).

Enfim, por tudo que discutimos, entendemos que os estudantes conseguiram se apropriar dos nexos conceituais da álgebra, uma vez que puderam contemplar o movimento dos fenômenos algébricos e constituir uma generalização essencial, estruturando o conhecimento teórico acerca da álgebra por meio do estabelecimento das relações de dependência, fluência, variável e campo de variação.

A partir da formação do pensamento algébrico, podemos agora, direcionar nosso olhar para a apropriação do conceito de equação de 1° grau. No Episódio 2, analisamos as ações e reflexões dos estudantes, interessadas agora em verificar se os sujeitos estavam em atividade de aprendizagem e se esta fomentou a apreensão do conhecimento do conceito abordado.

### 5.2.2. Episódio 2: Formação do Conceito de Equação de 1° Grau

Nesse episódio, nosso olhar direcionou-se a analisar se as ações e reflexões dos estudantes frente às SDA Enigma, Método do Retorno e jogo Triminó corroboraram para a formação do conceito e resolução de equações de 1° grau.

Como mencionado anteriormente, nesse episódio trazemos para análise as cenas intituladas de *Equacionamento de Problemas* e *Estratégias de Resolução*.

*Cena 1: Equacionamento de Problemas*

Nesse momento, como apontado no capítulo 4, nosso objetivo era proporcionar um primeiro contato com a representação das equações. Assim, após o jogo Pega Varetas, os estudantes receberam uma folha sulfite com o desafio: Descubra o valor da cor que está faltando em cada situação.

| COR | VALOR |
|---|---|
| Azul | 5 |
| Preta | 15 |
| Vermelha | ? |

| Seq. de Cores | Equação | Resposta |
|---|---|---|
| Vermelha e Azul | ? + 5 = 55 | |
| Preta e Vermelha | 15 + ? = 25 | |
| Vermelha e Preta | ? + 15 = 35 | |

| COR | VALOR |
|---|---|
| Azul | 50 |
| Preta | ? |
| Vermelha | 10 |

| Seq. de Cores | Equação | Resposta |
|---|---|---|
| Azul e Preta | 50 – ? = 45 | |
| Preta e Vermelha | ? + 10 = 30 | |
| Azul, Vermelha e Preta | 50 + 10 + ? = 75 | |

| COR | VALOR |
|---|---|
| Amarela | ? |
| Preta | 50 |
| Verde | 20 |

| Seq. de Cores | Equação | Resposta |
|---|---|---|
| Preta e Amarela | 50 – ? = 35 | |
| Amarela e Verde | ? + 20 = 30 | |
| Amarela e Preta | ? + 50 = 55 | |

| COR | VALOR |
|---|---|
| Azul | ? |
| Verde | 10 |
| Vermelha | 5 |

| Seq. de Cores | Equação | Resposta |
|---|---|---|
| Azul, Azul e Verde | ? + ? + 10 = 50 | |
| Verde, Vermelha e Azul | 10 – 5 + ? = 20 | |
| Verde, Azul e Vermelha | 10 + ? + 5 = 65 | |

| COR | VALOR |
|---|---|
| Amarela | 15 |
| Verde | ? |
| Preta | 20 |

| Seq. de Cores | Equação | Resposta |
|---|---|---|
| Amarela, Verde e Preta | 15 + 20 + ? = 45 | |
| Preta, Verde e Amarela | 20 + ? – 15 = 10 | |
| Verde, Preta, Amarela e Amarela | 0 = ? – 20 – 15 – 15 | |

A fim de incentivar os estudantes apresentamos a proposta com a seguinte fala:

**Professora**: Meninos e meninas, nós temos agora o seguinte problema: vocês receberam uma folha com alguns pequenos desafios, nos quais terão que descobrir o valor de cada cor que está faltando, ele está representado pelo ponto de interrogação, mas atenção, em cada situação a cor terá um valor diferente, e este não é igual ao valor da cor no jogo Pega Varetas, os valores foram alterados, para dar mais emoção ao Enigma, ok? Vamos ver quem consegue resolver esse desafio!
**Classe**: Ok, professora!
**Thaís**: Professora está fácil demais, nem é desafio nada! É só ver o quanto falta pra dar o número depois do sinal de igual. Não tem segredo, estou fazendo rapidinho!

Os estudantes resolveram o desafio de forma intuitiva, substituindo valores por meio da estratégia tentativa e erro, até encontrarem a solução de cada equação. De posse de nosso objetivo, que era proporcionar um primeiro contato com a representação das equações, a situação proposta possibilitou que fomentássemos o diálogo sobre o conceito de equação, conforme apresentamos em seguida.

> **Professora**: Pessoal, no jogo Pega Varetas as expressões que vocês trabalharam eram...
> **Davi**: Expressões Algébricas, professora.
> **Professora**: Isso mesmo Davi, 50pt + 15am + 20az + 10vm + 5vd, representa a expressão algébrica dos pontos e do número de varetas obtidas no jogo. No desafio que vocês resolveram, trabalhamos com algo do tipo 50 – ? = 45, certo? Qual a diferença entre essa e a expressão do jogo?
> **Carlos**: Ué, a de ontem tem uma única resposta e a expressão do jogo, pode ser qualquer resposta, depende do tanto de varetas que cada um pegar, a letra lá podia variar e aqui eu acho que tem que ser um valor só!
> **Professora**: Ótimo Carlos é isso mesmo. Então se eu disser pra vocês que essas de ontem são chamadas de equações, como vocês explicariam para alguém que chegasse aqui agora o que significa uma equação?
> **Carlos**: Equação é uma expressão matemática, mas que tem uma resposta certa, não pode ser qualquer número.
> **Professora**: Ok. Mas vamos tentar melhorar um pouquinho. No lugar do ponto de interrogação, o mais comum são aparecerem letras, como nós fizemos para representar a quantidade de varetas, essas letras são chamadas de termo desconhecido ou incógnita, e representam o valor que poderá ser assumido para que se chegue no resultado, como o Carlos disse. Assim, escolham uma letra.
> **Davi**: d, por causa do meu nome é claro!
> **Professora**: Tudo bem! Agora Davi, reescreva a equação que eu falei como exemplo, trocando o ponto de interrogação pela letra d.
> **Davi**: 50 – d = 45. Professora, então eu acho que entendi, equação vai ser uma expressão com letras, representando o número desconhecido e o sinal de igual. É isso?
> **Professora**: Vocês concordam com ele, ou alguém tem uma opinião diferente?
> **Classe**: É isso mesmo....
> **Professora**: Bingo Davi!!! (risos) Ficaremos com essa definição dada por vocês então, gostaria de completar apenas dizendo que os termos que aparecem antes da igualdade são chamados de primeiro membro da equação e, após a igualdade de segundo membro da equação e, como aqui a incógnita apresenta expoente um, dizemos que essa é uma equação de 1° grau.

Os estudantes, por meio do diálogo com seus pares e a professora definiram matematicamente os elementos de uma equação. Coletivamente, complementavam as ideias que surgiam, como por exemplo, quando o estudante Davi, a partir da fala de Carlos, externaliza sua compreensão do conceito. O diálogo estabelecido nos leva a entender que

> [...] o aprendizado desperta vários processos internos de desenvolvimento, que são capazes de operar somente quando a criança interage com outras pessoas em seu ambiente e quando em cooperação com seus companheiros. Uma vez internalizados, esses processos tornam-se parte das aquisições do desenvolvimento independente da criança (VYGOTSKY, 1989, p. 101).

Uma vez que os estudantes conseguiram formular sua própria definição para equação de 1° grau, almejávamos que os mesmos conseguissem equacionar problemas, fazendo uso da linguagem simbólica.

Para tanto, apresentávamos à classe alguns problemas e lançávamos como desafio que eles criassem uma equação para o problema enunciado. Os estudantes eram convidados a pensarem sozinhos inicialmente, em seguida, poderiam discutir com seus pares e, após alguns minutos, socializar para a classe a equação formulada pelo pequeno grupo. Alguns estudantes formavam duplas, outros trios ou quartetos, sendo que tais formações ocorreriam por afinidade entre os mesmos, sem qualquer interferência da professora.

> **Professora**: Tenho agora um desafio a vocês. Gostaria que escrevessem uma equação para o seguinte problema: Ana ganhou uma caixa com bombons de sua mãe. Sua tia deu-lhe mais 12 bombons. Ana contou os bombons e descobriu que possui 25 unidades. Quantos bombons Ana tinha na caixa?

Um trio foi formado pelos estudantes Carlos, Junior e Pedro Henrique, estabeleceu o seguinte diálogo:

> **Carlos**: Nós queremos descobrir a quantidade de bombons.
> **Pedro Henrique**: Eu acho que, então, esse tanto que a gente não sabe, coloca a letra, então vamos colocar p de Pedro.
> **Carlos**: Então tá. Vai ser p para o tanto de bombons, isso é o começo do problema, aí ela ganhou 12 e ficou com 25. Como a gente vai escrever uma equação?
> **Carlos**: Se ela ganhou então aumenta, vai ser o sinal de mais. Então fica p + 12.
> **Junior**: Tá, 25 é o total, a equação tem que ter o igual, como 25 é o resultado, acho que ele fica depois do igual então.
> **Carlos**: Ué então fica, p + 12 = 25.

Pelo diálogo do trio, vemos que o registro da equação, parece estabelecer um elo de significação estabelecido pelos estudantes do conceito de equação como uma sentença matemática, que contém variáveis e é expressa por um sinal de igualdade (LIMA;

TAKAZAKI; MOISÉS, 1998). Esse fato nos leva a recorrer à Vigotski (2001, p. 236) que entende o processo de formação de conceitos como uma síntese complexa, no qual, "o momento central de toda essa operação é o uso funcional da palavra como meio de orientação arbitrária da atenção, da abstração, da discriminação de atributos particulares e de sua síntese e simbolização com o auxílio do signo".

Além disso, ao observar e interagir com o objeto de estudo, a incógnita, podemos inferir que esses estudantes o transformaram, se apropriaram e passaram a se reconhecer no mesmo, como por exemplo, na fala de Pedro Henrique: "**Eu acho que, então, esse tanto que a gente não sabe, coloca a letra, então vamos colocar p de Pedro**".

A fim de verificarmos se de fato, ouve a atribuição de significados culminando na apropriação do conceito de equação, indagamos os estudantes:

> **Professora**: Tenho uma pergunta para vocês: existiria outra forma de escrevermos essa equação, nos referindo ao mesmo problema?
> Silêncio por alguns instantes...
> **Junior:** Tem sim, professora! Podia ser: 25 – p = 12. Porque se diminuir do total de bombons, que é 25, o que ela tinha no início, que a gente não sabe, vai ter que dar o tanto de bombons que a tia deu pra ela.
> **Carlos:** É isso mesmo. Também concordo.
> **Pedro Henrique**: Mas não vale colocar p – 25?
> **Junior**: Não Pedro Henrique, porque 25 é o total de tudo e o tanto que ela tinha no começo é menos de 25, então o 25 vem primeiro, senão ia dá uma resposta negativa e não pode porque é o tanto de bombons, não faz sentido falar que ela tinha bombons negativos, porque é dela, ela tem!
> **Pedro Henrique**: Entendi, é isso mesmo. Eu não tinha pensado isso não, mas é isso mesmo.

Por meio das diferentes significações apresentadas pelos estudantes parece-nos que temos mais um indício da apropriação do conceito de equação de 1° grau, pois,

> tal ou tal conteúdo, significado na palavra, fixa-se na linguagem. Mas para que um fenômeno possa ser significado e refletir-se na linguagem, deve ser destacado, tornar-se fato de consciência, o que, como vimos, se faz inicialmente na atividade prática dos homens, na produção (LEONTIEV, 1978, p. 86).

Mais ainda, "a linguagem não desempenha apenas o papel de meio de comunicação entre os homens, ela é também um meio, uma forma de consciência e do pensamento humanos" (LEONTIEV, 1978, p. 87).

Ao entendermos que houve a apropriação do conceito de equação de 1° grau pelos estudantes, podemos inferir que eles estavam em atividade (LEONTIEV, 1978) durante a realização das situações propostas pela professora, onde elencamos na sequência os elementos que categorizam a atividade dos estudantes segundo as ideias de Leontiev (1983):

**Figura 27: Elementos que categorizam estudantes em atividade conforme Leontiev (1983)**


Fonte: Sistematização da Pesquisadora

Compete aqui enfatizarmos o fato de que, em diversos momentos, os estudantes trouxeram para o diálogo os nexos conceituais da álgebra (SOUSA, 2004) que foram discutidos em situações anteriores. Quando o estudante Carlos alega que na expressão registrada para o jogo Pega Varetas, "**pode ser qualquer resposta, depende do tanto de varetas que cada um pegar, a letra lá podia variar**" e completa dizendo que para a equação "**tem que ser um valor só**", entendemos que o estudante remete-se à ideia de variável para o jogo das varetas e de incógnita para a equação, compreendendo assim a fluência da variável de acordo com o movimento que a mesma quantifica.

Quando o estudante Junior infere que a quantidade de bombons não poderia ser negativa, "**senão ia dá uma resposta negativa e não pode porque é o tanto de bombons, não faz sentido falar que ela tinha bombons negativos, porque é dela, ela tem**", o mesmo remete-se ao nexo campo de variação, ao compreender o conjunto solução que se faz pertinente a essa equação.

Embora os estudantes demonstrassem apropriação do conceito e tivessem equacionado o problema proposto, ainda não haviam encontrado a solução para a questão de Ana. Acerca das estratégias de resolução das equações formuladas pelos estudantes, as apresentamos na Cena 2, onde trazemos as discussões dos estudantes em busca de uma estratégia para a resolução de equações de 1° grau.

*Cena 2: Estratégias de Resolução*

De posse da equação que o trio Carlos, Junior e Pedro Henrique havia formulado (p + 12 = 25), nos dirigimos à lousa e, instigamos a classe acerca da resolução dessa equação:

> **Professora**: Ok classe, vocês em duplas escreveram uma equação para o problema de Ana e conforme discutimos juntos, vamos ficar com a equação formulada pelo trio Carlos, Junior e Pedro Henrique, agora como podemos descobrir quantos bombons ela tinha?
> **Carlos**: Professora, eu sei que a Ana tinha 13 bombons. Mas eu fiz a conta de cabeça, não usei a equação pra resolver não.
> **Professora:** Beleza! Vamos começar por aí, sem problemas. Como você chegou nesse resultado Carlos?
> **Carlos:** Então, eu fiz assim, com os 12 bombons que a tia deu pra ela, mais os que ela já tinha, ficam 25 bombons, então 25 menos 12 dá 13. E se eu somar 12 mais 13 dá os 25, então sei que minha conta está certa.
> **Professora:** Alguém discorda do Carlos ou pensou diferente?
> **Rafael:** Professora, eu fiz a mesma conta, mas comecei pensando diferente do Carlos. Fiz assim, pensei que a gente precisa de um número que quando somar com 12 vai dar 25, ai eu fiz o 25 menos 12, e deu 13.
> **Professora:** Mas Rafael e Carlos, porque vocês fizeram 25 subtraindo 12? Os dois falaram em um número que somado ao 12 resultaria em 25 e, no entanto, fizeram uma subtração ao invés de uma adição?
> **Rafael:** Eu pensei no problema de traz pra frente, como eu não sei o número de bombons do começo e ela ganhou bombom pra dá 25, então se tirar os bombons que a tia deu dá o tanto que tinha no começo. Tipo a prova real, professora, que a gente fazia no 4° e 5° ano.
> **Carlos:** É professora, pensa o contrário, que dá certo!!!!
> **Professora:** Muito bem meninos, agora se nós tivéssemos que resolver a equação, achar essa resposta por meio dela, como poderíamos usar esse caminho que vocês encontraram para resolver a equação, que o trio do Pedro Henrique havia formulado p + 12 = 25?
> **Fabiana:** Professora, eu entendi o que os meninos falaram, então o 12 não tinha que está antes do igual e sim depois pra ficar, p = 25 – 12, ai fazia a continha que eles falaram e ia achar p = 13.
> **Professora:** Ok, Fabiana, eu acho que concordo com você, que deveríamos ter 25 menos 12, mas combinamos que a equação seria p + 12 = 25, ele

não pode simplesmente desaparecer do primeiro membro da igualdade e aparecer do outro lado da igualdade subtraindo do 25. Eu acho que vamos ter que pensar uma forma de justificarmos isso. Como podemos fazer classe?

**Rafael:** Professora só se fizer assim, põe o 12 dos dois lados, aí 12 menos 12 é zero, e aparece o 25 menos 12, depois do igual, aí vai ficar, p = 25 – 12, como a gente queria, como a conta que eu e o Carlos fizemos.

**Professora:** Mas meninos e meninas, vocês concordam que eu posso fazer isso? Por que eu posso colocar o 12 subtraindo nos dois lados da igualdade? Como posso justificar esse passo?

Silêncio por alguns minutos...

**Fabiana:** Professora, é o que o Rafael falou aquela hora, o caminho inverso, então tem que aparecer o 25 diminuindo 12, e ele tem que sumir de antes do igual, o único jeito da conta dá zero pra ele sumir é tirar o mesmo tanto que tem, então tem que ser 12 dos dois lados.

**Professora:** Complementando a Fabiana, um pouquinho, como estamos subtraindo o 12 dos dois lados da igualdade, não estamos alterando a igualdade, uma vez, que interferimos em ambos os lados, não a modificamos, certo?

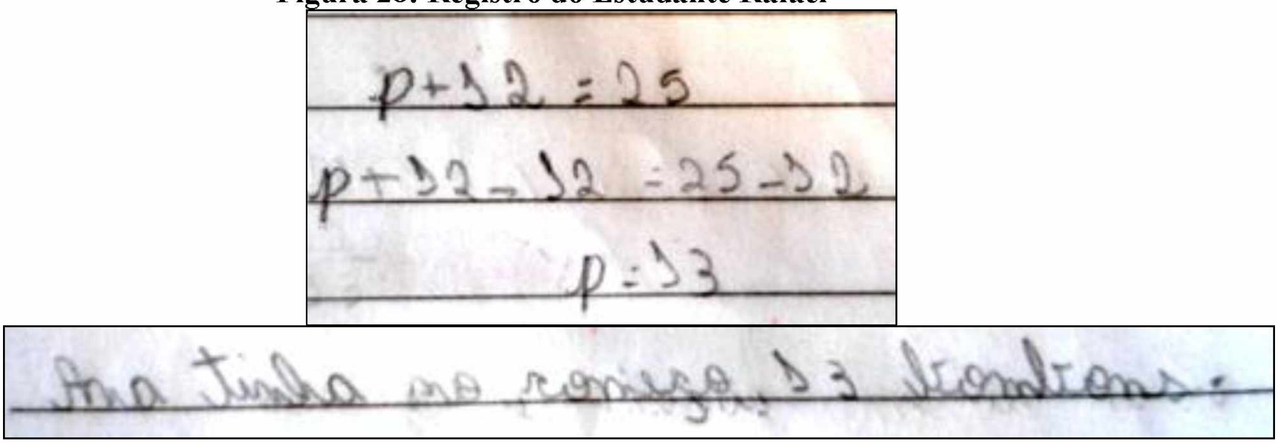
**Carlos:** Certo, porque aí ele sumiu de um lado e apareceu onde a gente queria, e a senhora não muda nada, se somar o doze agora dos dois lados, volta para o que tinha antes.

**Professora:** Ótimo Carlos, é isso mesmo. Então Ana tinha 13 bombons, certo?

**Classe:** Simmmm....

Na figura 28 apresentamos a estratégia de resolução do estudante Rafael:

**Figura 28: Registro do Estudante Rafael**




Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Os estudantes, mobilizados pelo desejo em descobrir a quantidade de bombons que Ana possuía, buscaram suas próprias estratégias para resolver o problema. Coletivamente conseguiram complementar as ideias que surgiram e justificar a estratégia utilizada. Elucidamos esse processo à luz das ideias de Moura et al. (2010) quando alegam que

> [...] os sujeitos, mobilizados a partir do movimento de desenvolvimento da situação desencadeadora, interagem com os outros segundo as suas potencialidades e visam chegar a outro nível de compreensão do conceito em movimento. Além disso, o modo de ir se aproximando do conceito também vai dotando o sujeito de uma qualidade nova, ao ter que resolver problemas, pois, além de ter apreendido um conteúdo novo, também adquiriu um modo de se apropriar de conteúdos de um modo geral (MOURA et al., 2010, p. 103).

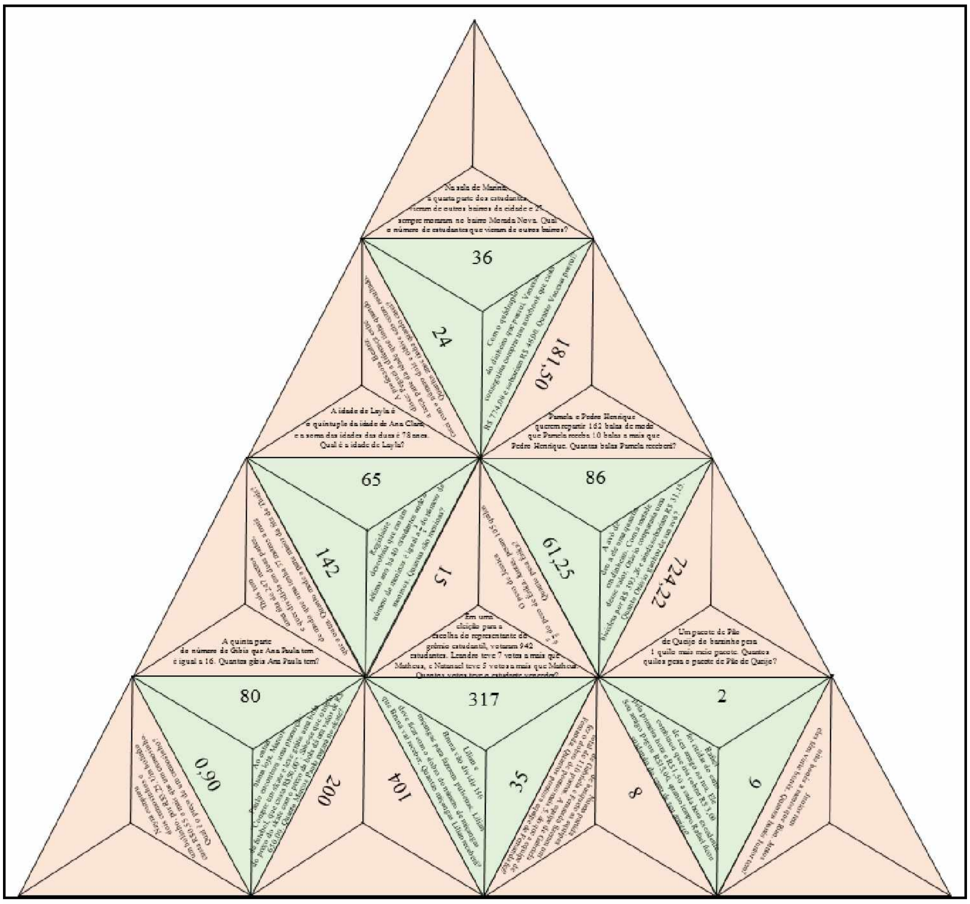
À medida que se inseriam nesse movimento e buscavam nova qualidade para a resolução da equação, os estudantes se aproximavam do método de resolução que fora desenvolvido por Bhaskara, conforme nos traz Lima, Takazaki e Moisés (1998):

> De grande importância é o que ele mesmo [Bhaskara] chamou de "Método do Retorno" para resolução de equações. Método que consistia em começar a resolver as equações pelo fim. Para se chegar ao número procurado invertia-se todas as operações matemáticas que o problema prescrevia, um verdadeiro retorno sobre o enunciado. Este método encerra o princípio fundamental da álgebra em seu sentido mais puro: – 'al-jabr e wal-mugabala' – restauração e redução (LIMA; TAKAZAKI; MOISÉS, 1998, p. 22).

Com o intuito de obtermos novos elementos que constatassem nossas afirmações propusemos o jogo Triminó. Para essa proposta, os estudantes agruparam-se em duplas, determinadas por eles mesmos, seguindo o critério de afinidade.

O jogo Triminó, figura 29, era composto por 16 peças, contendo problemas e soluções. Para realizar as jogadas, os estudantes deveriam equacionar e resolver um problema e, encontrar uma peça com a respectiva resposta, conforme apresentamos na página seguinte:

**Figura 29: Jogo Triminó**




Fonte: Arquivo da Pesquisadora

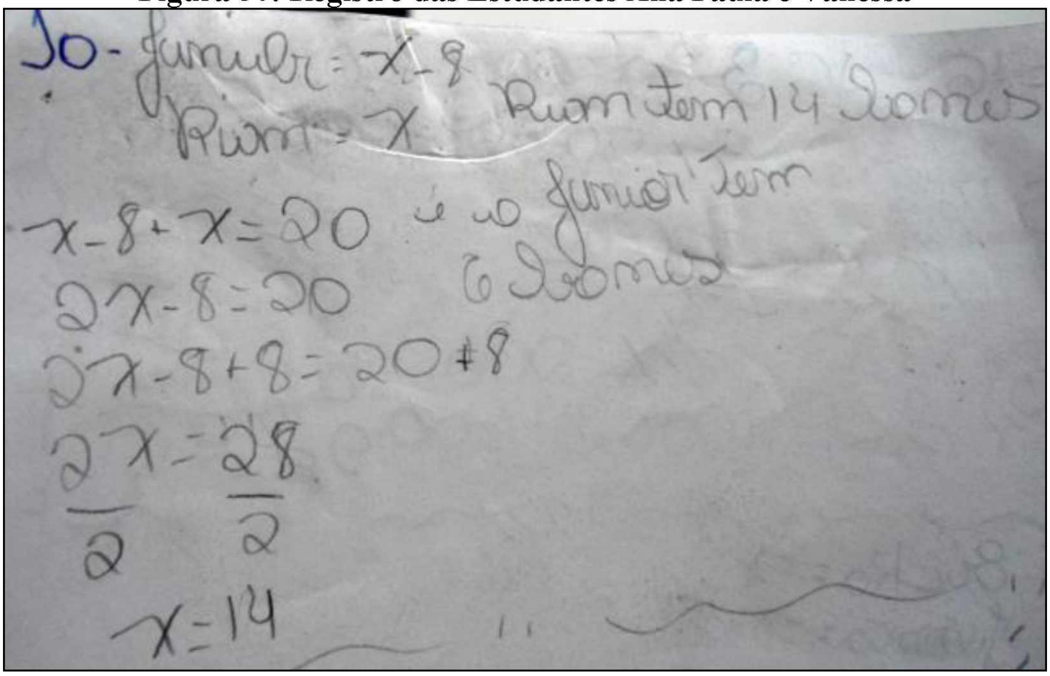
Todas as peças do jogo estavam disponíveis na mesa, assim os estudantes as escolhiam aleatoriamente, resolviam os problemas e, depois, encaixavam os problemas com suas respectivas respostas. Na sequência, apresentamos o diálogo de uma dessas resoluções, da dupla Ana Paula e Vanessa.

> **Ana Paula:** Vamos fazer esse aqui agora olha, Junior tem oito bonés a menos que Rian. Juntos eles têm 20 bonés. Quantos bonés Junior têm? Vamos montar a equação primeiro. Como a gente não sabe quanto de boné cada um tem então vamos colocar *x*. O Junior vai ser *x* e o Rian vai ser *x – 8*, porque ele tem oito bonés a menos.
> **Vanessa:** Ana Paula, porque você está usando x, eu sei que pode ser qualquer letra mais porque x?
> **Ana Paula:** Então eu estava conversando com meu irmão do nono ano e, descobri que se usa mais o x, então estou colocando x.
> **Vanessa:** Tá bom Ana Paula, mas lê de novo o problema, tem uma coisa errada na sua equação, é o Rian que tem mais bonés, então o tanto de bonés dele é *x*. E, como o Junior tem oito a menos, vai ser *x – 8*.
> **Ana Paula**: Verdade, é isso mesmo! Então o tanto do Junior mais o tanto do Rian, é igual a 20. Vai ficar então x – 8 + x = 20. Certo?

**Vanessa**: Certo. Aí pode juntar os *x* num pode?
**Ana Paula**: Eu acho que pode. Professora... Aqui pode juntar os *x*, não pode? Porque eles são termos semelhantes, tudo letra *x*.
**Professora**: Isso Ana Paula, esses termos são semelhantes porque apresentam a mesma parte literal.
**Ana Paula**: Isso, x + x é 2x, então fica 2x – 8 = 20, aí agora a equação vai estar resolvida quando a gente encontrar o valor de x, o tanto de boné do Rian, então tem que tirar o 8 e o 2.
**Vanessa**: Essa eu sei, para tirar o 8, usa a operação inversa da subtração que é a adição, então vai somar 8 dos dois lados. Aí fica 2x – 8 + 8 = 20 + 8, que vai dá 2x = 28.
**Ana Paula**: Certo, aí pra tirar o 2, ele está multiplicando porque eram dois x lembra, então o inverso da multiplicação é a divisão, então vai dividir por 2, dos dois lados, aí fica, x = 14.
**Vanessa**: Então o Rian tem 14 bonés e o Junior vai ter 14 menos 8, vai ser 6 bonés. Está certo professora?
**Professora**: Eu quem faço essa pergunta, como podemos saber se está certo?
**Vanessa**: Uai é só tirar a prova. Se o Rian tem 14 bonés e o Junior 6, 14 mais 6 é 20 e, 6 mais 8 dá 14, então está certo.

Ao passo que dialogavam as estudantes Ana Paula e Vanessa realizavam o registro de suas ideias, conforme podemos verificar na figura a seguir:

**Figura 30: Registro das Estudantes Ana Paula e Vanessa**




Fonte: Arquivo da Pesquisadora

Pela análise do diálogo parece-nos que o desejo de jogar mobilizou as estudantes para que demonstrassem a compreensão que elaboraram sobre o conceito de equação de 1° grau e sua resolução, envolvendo-os no processo de formar-se, ao desenvolver a atividade proposta.

Esse fato nos remete as ideias de Leontiev (1978), ao alegar que

> as aquisições do desenvolvimento histórico das aptidões humanas não são simplesmente dadas aos homens nos fenômenos objetivos da cultura material e espiritual que os encarnam, mas são aí apenas postas. Para se apropriar destes resultados, para fazer deles as suas aptidões, "os órgãos da sua individualidade", a criança, o ser humano, deve entrar em relação com os fenômenos do mundo circundante através de outros homens, isto é, num processo de comunicação com eles. Assim, a criança aprende a atividade adequada. Pela sua função, este processo é, portanto, um processo de educação (LEONTIEV, 1978, p. 272).

Podemos inferir que ao relatarem sua estratégia de resolução da equação, as estudantes demonstraram ter se apropriado do Método do Retorno, como estratégia de resolução de equações de 1° grau, uma vez que, por meio do coletivo, apropriaram-se de conceitos produzidos historicamente, além de atribuir nova qualidade a sua linguagem, ao fazerem uso de expressões como termos semelhantes e operações inversas, demonstrando consciência sobre o movimento que estão desencadeando.

Por tudo que foi exposto nesse capítulo, nossos dados nos direcionam a acreditar que os estudantes se apropriaram do conceito de equação de 1° grau e da resolução das mesmas, atribuindo sentido a esse movimento, a partir de uma nova qualidade dada a linguagem algébrica e que compreenderam o significado no número desconhecido em uma equação.

As análises realizadas permitiram compreender que, ao propormos situações desencadeadoras que oferecem aos estudantes a possibilidade de criar, dialogar e apreender conceitos matemáticos por meio de uma necessidade, eles conseguem atribuir significado e apropriar-se de conceitos matemáticos historicamente produzidos.

Os diálogos que apresentamos ao longo dessa análise nos remetem a pensar na postura do professor como mobilizador no ambiente escolar, buscando instigar seus estudantes, não apresentando respostas conclusivas as suas indagações, mas sim promovendo questionamentos que desencadeiam soluções às perguntas de seus discentes.

Por fim, destacamos a importância do desenvolvimento das relações sociais na escola, por acreditarmos que nossos estudantes apenas se envolveram com nossa proposta, por estarem inseridos em um ambiente de respeito às ideias apresentadas, não se sentindo intimidados ou constrangidos ao dialogarem com outros colegas ou com a professora pesquisadora. Conforme apresentamos nos diálogos, entendemos que a abordagem dos estudantes à professora se dava muitas vezes apenas para esclarecer dúvidas ou confirmar suas conjecturas, buscando assim apoio e sustentação as suas ideias.

No próximo capítulo, direcionamos nosso olhar às considerações acerca de nossa pesquisa, o movimento de formação do pensamento algébrico e do conceito de equações de 1° grau produzidos pelos estudantes, elucidando alguns de nossos olhares a fim de compreendermos se nossas inquietudes iniciais foram ou não esclarecidas.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

*Uma palavra desprovida de pensamento é uma coisa morta, e um pensamento não expresso por palavras permanece uma sombra. A relação entre eles não é, no entanto, algo já formado e constante; surge ao longo do desenvolvimento e também se modifica (VYGOTSKY, 1989, p. 131).*

As inquietudes e necessidades direcionadas ao objeto dessa pesquisa, a formação do pensamento algébrico e do conceito de equações de 1° grau por discentes do 7° ano do ensino fundamental, estiveram relacionadas à nossa formação como estudante da educação básica e à nossa preocupação durante nossa prática docente.

Buscamos, ao contrário do que nos fora oferecido enquanto estudante, um ensino que ofertasse aos sujeitos de nosso estudo a formação de significados matemáticos na perspectiva da Teoria Histórico-Cultural.

Partimos dessa teoria por entendermos a importância do sujeito perceber como o conceito se constituiu historicamente, de forma que tenha algum significado e sentido para ele, tornando possível a apropriação de conceitos.

Sentimos, assim, a necessidade de leituras referentes às ideias de Vigotski (1989; 1991; 2001), Leontiev (1978; 1983), Davidov (1982; 1987; 1988; 1999) e Moura (1992; 2000; 2001), a fim de inserirmo-nos em um ambiente que possibilitasse a apropriação de uma teoria no ambiente acadêmico correlacionando-a à nossa prática na escola de educação básica.

Ao nos vermos como docente da educação básica, para estudantes do 7° ano do ensino fundamental, vislumbramos uma oportunidade de colocar em prática um ensino que buscasse desencadear a necessidade de apropriação do conhecimento matemático teórico nestes estudantes.

Durante o desenvolvimento de nossa proposta, lançamos mão da escolha de um isolado (CARAÇA, 1951) para nossa pesquisa e o consideramos como um conjunto de dados que evidenciam interação, significação conceitual, além de possibilitar-nos encontrar "ações reveladoras do processo de formação dos sujeitos participantes" (MOURA, 2004, p. 272).

É importante destacarmos que, ao refinarmos nosso isolado, buscamos educar nosso olhar à um grupo específico de estudantes (duplas, trios, quartetos ou equipes nos quais os estudantes Ana Paula, Carlos, Davi, Fabiana, Junior, Pedro Henrique, Rafael, Thaís e Vanessa, faziam parte), pois entendemos que assim seria possível levantarmos melhores inferências de que os mesmos conseguiram atingir a formação do pensamento algébrico e se apropriaram do conceito de equação de 1° grau. Dessa forma, conseguimos acompanhar reflexões pessoais, negociações entre o grupo, podendo melhor justificar os diálogos apresentados e, se não houvesse esse refinamento, poderíamos emitir afirmações sem embasamento de quais diálogos levaram a tais considerações. Salientamos que, apesar de nosso olhar ter se dirigido, para efeito de elaboração deste relatório, a um grupo específico, os demais estudantes da classe colaboram igualmente nos diálogos e interagiram com as propostas apresentadas.

Ao delinearmos um olhar retrospectivo ao nosso estudo, deparamo-nos com um movimento de escrita e reescrita com relação à questão norteadora que motivou nossa pesquisa, donde formulamos ao final: *quais implicações pedagógicas para o processo de formação do pensamento algébrico e do conceito de equação de 1º grau para os estudantes do ensino fundamental as atividades de ensino, desenvolvidas na perspectiva da Atividade Orientadora de Ensino, podem propiciar?* A partir dela sentimos a necessidade de organizarmos o ensino com situações desencadeadoras de aprendizagem buscando, assim, que os sujeitos dessa pesquisa se colocassem em atividade (LEONTIEV, 2001).

Neste movimento de pesquisa, nos vimos em atividade de ensino (MOURA, 2000) ao passo que buscamos organizar uma unidade didática que permitisse cumprir o objetivo educacional da formação do pensamento algébrico e a apropriação do conhecimento teórico do conceito de equações de 1° grau por parte dos estudantes envolvidos. Compreendemos por pensamento o processo de reflexo consciente da realidade nas suas propriedades, ligações e relações objetivas (LEONTIEV, 1978) e o conhecimento sendo gerado pela atividade intelectual humana. Assim, depreendemos educação como o processo de apreensão de uma cultura produzida historicamente, onde, por meio dela, os sujeitos não sentem a necessidade de reinventar o mundo, mas permite conhecer os movimentos de desenvolvimento da humanidade e superá-los apreendendo novas qualidades aos conceitos já produzidos por civilizações anteriores.

No momento em que nos colocávamos em atividade de ensino, nosso objetivo admitia a qualidade de ensinar, nosso motivo se consolidava na busca da organização do ensino, nossas ações delineavam-se na busca em definir quais os procedimentos que poderiam colaborar para a apropriação do conhecimento teórico pelos estudantes e nossas operações versavam sobre a utilização de quais recursos metodológicos poderiam corroborar para o ensino, ou seja, a elaboração/adaptação das situações que desencadeariam nos sujeitos a necessidade do apreender determinado conceito, fruto de nosso desejo enquanto docente.

Os estudantes estiveram em atividade de aprendizagem em que, mobilizados a partir do movimento gerado pelas situações desencadeadoras propostas, interagiram uns com os outros segundo as potencialidades de cada um e, por meio desse movimento das interações sociais, conseguiram atingir um novo nível de compreensão do conceito, atribuindo nova qualidade ao processo de apreensão desse, no qual houve a predominância do saber pensar ao invés do saber fazer e do conhecimento teórico sobrepondo-se ao conhecimento empírico, em um ambiente de respeito as ideias apresentadas pelo outro e constante negociação de significados.

Ao vivenciarem a situação desencadeadora do jogo Pega Varetas, os estudantes manifestavam um tipo de necessidade, de motivo inicial: registrar os pontos e o número da quantidade de varetas de cada rodada, de forma mais simples e rápida. Mais tarde, ao vivenciarem o momento da escrita de uma expressão algébrica para o cálculo dos pontos e do número de varetas do jogo, sua necessidade, seu motivo, consistia em compreender o que é uma expressão algébrica, quais são seus elementos, o que é uma variável e tentar escrever a expressão algébrica solicitada. Vimos, no decorrer dessa atividade, que ela se dirigia à satisfação de uma necessidade, as primitivas necessidades modificam-se e convertem-se em novas necessidades, que não são menos importantes, mas sim apenas dependem do momento em que o sujeito se encontra e qual o motivo que o impulsiona.

Notamos que os estudantes envolvidos em nosso estudo atribuíram nova qualidade às aulas de matemática, a partir do momento em que sentiram a necessidade em compartilhar ideias, negociar coletivamente significados, fomentando um aprendizado coletivo, onde o estudante não foi silenciado, mas sim, o protagonista de todas as aulas vivenciadas.

Compreendemos todo esse movimento nosso em atividade de ensino e dos estudantes em atividade de aprendizagem, como o movimento gerado dentro da atividade orientadora de ensino (MOURA et al., 2010), no sentido em que foi construída na inter-relação entre a professora pesquisadora e os estudantes, relacionada à nossa reflexão durante todo o processo, no qual sempre sentíamos a necessidade de reorganizar nossas ações por meio de uma contínua avaliação pautada nas ações e operações dos estudantes no decorrer da proposta.

Consideramos que nossas ações mobilizadoras foram aspectos que contribuíram para o caminhar da proposta, fomentando os diálogos dos estudantes, a organização dos caminhos por eles apresentados e a estruturação dos conceitos.

Respondendo a nossa questão de pesquisa, *quais implicações pedagógicas para o processo de formação do pensamento algébrico e do conceito de equação de 1º grau para os* *estudantes do ensino fundamental as atividades de ensino, desenvolvidas na perspectiva da Atividade Orientadora de Ensino, podem propiciar?*, a experiência de participar desta proposta para os estudantes, sujeito desta pesquisa, trouxe algumas implicações pedagógicas:

- os estudantes tornaram-se participantes ativos no processo de aprendizagem, tendo controle e responsabilidade sobre o mesmo, uma vez que os diálogos eram motivados mediante as necessidades apresentadas pelos estudantes;
- o planejamento das ações e os diálogos entre os estudantes ou para com a professora pesquisadora foram motivados por suas reflexões mediante o movimento da atividade de aprendizagem na qual estavam inseridos;
- a relação estudantes e situação desencadeadora fortaleceu-se e facilitou-se pelo fato dos estudantes atribuírem sentidos e significados ao problema que tentavam solucionar, assim como pelas relações sociais que se desenvolviam;
- o reconhecimento de que a construção coletiva das soluções dos problemas propostos foi de grande importância, uma vez que passaram a valorizar a fala do outro, buscaram complementar ou afirmar os diálogos apresentados pelos estudantes ou conflitar ideias a fim de melhor elucidar o problema proposto;
- a necessidade e o motivo para aprender eram considerados na atividade, uma vez que já não mais se perguntavam para que estudar determinado conteúdo.

Diante do exposto, cumprimos com o objetivo principal dessa pesquisa de analisar possíveis implicações pedagógicas para a formação do pensamento algébrico e a aprendizagem do conceito de equação de 1° grau para estudantes do 7° ano do ensino fundamental por meio da atividade de ensino.

Compreendemos que, ao buscar esse objetivo, conseguimos organizar uma unidade didática que permitiu: i) cumprir com o objetivo da formação conceitual do pensamento algébrico e de equações de 1° grau; ii) investigar as ações dos estudantes frente às atividades de ensino, concluindo que as mesmas tornaram-se atividades de aprendizagem e, por último, iii) concluímos que a atividade orientadora de ensino possibilitou o saber pensar e saber fazer dos estudantes.

As análises dos dados e a retomada dos estudos teóricos permitiram captar a potencialidade das atividades de ensino propostas e conseguimos por diversos momentos: i) considerar a historicidade do movimento humano (Arquiteto Amon Toado, o Método do Retorno, elaborado por Bhaskara); ii) os movimentos presentes no contexto social dos estudantes (Movimentos Numéricos, situações proposta para o Equacionamento); iii) as diferentes linguagens da álgebra (retórica, sincopada e simbólica) (EVES, 2002), nos jogos Banco Imobiliário, Pega Varetas, nos problemas a serem equacionados, dentre outros. Fizemos, também, menção aos outros tipos de linguagem encontradas no movimento histórico da álgebra (palavras e figuras) (SOUSA, 2004) e, ao construirmos com os estudantes o conceito de equação de 1° grau e as possíveis estratégias de resolução das mesmas, buscamos não conduzir a apresentação do conceito, mas à sua formação, caminhando assim para a aquisição do conhecimento teórico.

Por meio de nossos estudos teóricos e o desenvolvimento da proposta em conjunto com os estudantes, sujeitos de nossa pesquisa, elaboramos dois eixos de análises: *situações desencadeadoras de aprendizagem* e *ações e reflexões coletivas*.

Ao olharmos para ao Eixo 1, *situações desencadeadoras de aprendizagem*, buscamos enfatizar o aspecto potencializador para a aprendizagem que as situações desencadeadoras possuem e a necessidade que geraram nos sujeitos. O episódio 1 versou sobre a História Virtual do Conceito, onde, na cena 1, trouxemos o problema do Arquiteto Amon Toado, no qual foi apresentado um problema desencadeador com resgate histórico de como a civilização egípcia criou sua variável palavra (SOUSA, 2004). Essa atividade gerou nos estudantes a necessidade de descobrir a altura da coluna da pirâmide, uma situação nova para eles, haja visto o fato de em suas vidas escolares apenas terem sido apresentados problemas matemáticos com respostas fixas e imutáveis, contrariamente a essa situação desencadeadora, que permitiu aos estudantes o contato com o número desconhecido e flexível.

No episódio 2, Jogos, trouxemos na cena 1 o jogo Banco Imobiliário, no qual conseguimos gerar nos estudantes a necessidade do uso da linguagem simbólica (EVES, 2002), como forma de registrar os movimentos do jogo de maneira mais rápida, uma vez que, inicialmente, restringimos que realizassem os registros por meio da linguagem retórica (EVES, 2002) e, apenas após sua inquietação, perceberam a necessidade da linguagem simbólica. Já na cena 2, *Quiz*, trouxemos algumas situações-problema, abarcando a ideia do campo de variação, no qual conseguimos discutir com os estudantes os limites máximos e mínimos para solucionar as situações propostas.

Para o Eixo 2, *ações e reflexões coletivas*, as análises dos dados e a retomada dos estudos teóricos permitiram captar a potencialidade dos nexos conceituais da álgebra, fluência, variável e campo de variação (SOUSA, 2004) para a formação do pensamento algébrico e apreensão do conceito de equações de 1° grau.

No episódio 1, apresentamos como esses nexos foram apreendidos pelos estudantes e os diálogos que corroboraram para tanto, levando-nos a entender que a formação do pensamento algébrico só foi possível por considerarmos os nexos conceituais da álgebra, uma vez que, ao abordamos o nexo fluência, na cena 1, os estudantes puderam perceber o fluxo dos movimentos da vida, o movimento do pensamento humano. O nexo variável, abordado na cena 2, permitiu aos estudantes atribuírem significados aos símbolos utilizados, vivenciarem a fluência desse conceito ao longo do jogo Pega Varetas e formalizarem sua escrita por meio da linguagem algébrica, culminando na cena 3, onde o nexo campo de variação foi abordado, atribuindo os possíveis valores para as variáveis trabalhadas na cena 2.

Assim, os nexos conceituais da álgebra permitiram trabalhar os atributos internos e externos do conceito (DAVIDOV, 1987) pelos quais os estudantes compreenderam a necessidade do conhecimento algébrico, o movimento de desenvolvimento das linguagens que permitem expressá-lo, assim como a garantia do movimento de fluência no controle de quantidades, garantido pelo campo de variação.

No episódio 2, a vivência das situações desencadeadoras sobre o desenvolvimento do conceito das equações de 1° grau, cena 1, corroborou para que os estudantes, por meio dos seus próprios entendimentos e conjecturas, formulassem o pensar matemático explicitando suas significações acerca da transcrição dos problemas apresentados na linguagem retórica para a linguagem simbólica, compreendendo os elementos que constituem uma equação.

Na cena 2, os estudantes apropriaram-se das estratégias de resolução das equações de 1° grau, estabelecendo os princípios das operações inversas, termos semelhantes, para então determinar o valor desconhecido. Ressaltamos ainda que, durante esse processo, os estudantes passaram a se reconhecer com o objeto de estudo, quando, por exemplo, atribuíam à incógnita a letra inicial de seus nomes.

A natureza das atividades propostas, baseadas na Atividade Orientadora de Ensino, associada à postura participativa dos estudantes, propiciou a ruptura do pensamento mecânico, da maneira de olhar para uma determinada proposta buscando um número que a solucione. Ao contrário, os estudantes despertaram para uma matemática conceitual, compreendendo as justificativas de suas ações mediante as necessidades que as motivaram.

Acreditamos que nossa unidade didática, o produto educacional gerado nessa pesquisa, não possui como fundamento ser um modelo de atividades de ensino (MOURA, 2004) acerca do conhecimento algébrico para estudantes do 7° ano, uma vez que são muitas as variáveis envolvidas nesse movimento do ambiente escolar. Esta pesquisa não contribui oferecendo modelos a serem seguidos com garantia de sucessos, pois no decorrer da proposta em sala de aula muitas foram as (re)organizações necessárias visando atender as necessidades e inquietudes dos estudantes.

Caminhando para o encerramento de nossas considerações, gostaríamos de salientar que todos os resultados que apresentamos somente foram possíveis devido à dedicação de nossos sujeitos, a responsabilidade que sempre apresentaram quanto a assiduidade nas aulas, o envolvimento com a proposta, o desprendimento com relação a apresentarem seus questionamentos expondo-se ao restante da classe, engajando-se no movimento por nós proposto.

Por fim, ao refletirmos sobre todo esse processo que vivenciamos, deparamo-nos com uma forma diferente de olhar para o ensino: se fez notável o vínculo gerado entre a teoria estudada e as atividades propostas e, hoje, nos vemos com a necessidade de refletir sobre nossa prática docente, organizando o ensino de modo a gerar no estudante a necessidade de apreender o conceito, priorizando assim a apropriação do conhecimento em detrimento de cálculos sem quaisquer significações.

Desejamos que essa pesquisa contribua à área de Educação Matemática, uma vez que entendemos a importância de que se reflita sobre o ensino e aprendizagem da matemática, e acreditamos que, por meio das situações desencadeadoras de aprendizagem o estudante possa se apropriar da formação do conhecimento teórico.

# REFERÊNCIAS

ANDRINI, A; VASCONCELOS, M. J. **Praticando Matemática**. 3ª ed. Editora: Editora do Brasil, 2012.

ARAUJO, E. A. Ensino de álgebra e formação de professores. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.10, n.2, pp.331-246, 2008.

BAUMGART, J. K. **Tópicos de história da matemática para uso em sala de aula**: álgebra. Trad. Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em Educação**. Porto, Portugal: Porto Editora, 1994.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. Trad. Elza S. Gomide. São Paulo: Edgar Blucher, 1996.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC / SEF, 1998.

_______. **Guia de livros didáticos**: PNLD 2014: Matemática. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2013.

CARAÇA. B. J. **Conceitos fundamentais da matemática**. 1 ed. Lisboa: Gradiva, 1951.

CEDRO, W. L. **O espaço de aprendizagem e a atividade de ensino:** O Clube de Matemática. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo. 2004.

COLE, M.; SCRIBNER, S. Introdução. In: COLE, M. et al. (Orgs.). **A formação social da mente**. Tradução de José Cipolla Neto, Luís Silveira Menna Barreto, Solange Castro Afeche. 6 ed. São Paulo: Martins Fontes, 1998.

DANTE, L. R. **Projeto Teláris** – Matemática. São Paulo: Ática, 2013.

DAVIDOV, V. V. **O que é atividade de estudo**. Revista Escola inicial, n. 07, ano 1999. Tradução do russo (para uso em sala de aula) de Emerlinda Prestes.

DAVÍDOV, V. V. Análisis de los principios didácticos de la escuela tradicional y posibles principios de enseñanza en el futuro próximo. In: SHUARE, M. (Org.). **La Psicologia evolutiva y pedagógica em la URSS:** antologia. Moscou: Progreso, 1987.

DAVYDOV, V. V. **Problemas do ensino desenvolvimental**: A Experiência da Pesquisa Teórica e Experimental na Psicologia, Revista Soviet Education, August/VOL XXX, n. 8,1988. Tradução de José Carlos Libâneo e Raquel A. M. da Madeira Freitas.

DAVÝDOV, V.V. **Tipos de generalización en la enseñanza**. Havana: Pueblo y Educación, 1982.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Campinas: Editora da UNICAMP, 2002.

FIGUEIREDO, A. **Saberes e Concepções de Educação Algébrica em um Curso de Licenciatura em Matemática.** Tese (Doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2007.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M. A.; MIGUEL, A. Contribuição para um repensar... a Educação Algébrica Elementar. **Pro-Posições**. Faculdade de Educação da Unicamp, v. 4, n. 1[10], p.79-91, mar. 1993.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática**: percursos teóricos e metodológicos. Campinas: Autores Associados, 2006.

GARBI, G. G. **O romance das equações algébricas**: a história da álgebra. São Paulo: Makron Books, 2009.

GOULART, I. B. **Psicologia da Educação**: Fundamentos Teóricos e Aplicações à Prática Pedagógica. 16 ed. Rio de Janeiro: Vozes, 2010.

HOGBEN, L. **Maravilhas da Matemática**: influência e função da Matemática nos conhecimentos humanos. Porto Alegre: Editora Globo, 1970.

KOPNIN, P. V. **A dialética como lógica e teoria do conhecimento**. Rio de Janeiro, RJ: Civilização Brasileira, 1978. Coleção Perspectivas do homem. V. 123.

LANNER DE MOURA, A. R. et al. Movimento conceitual: atividade de ensino e de pesquisa In: EBRAPEM - ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓSGRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 7., Rio Claro. **Anais**... 2003.

LANNER DE MOURA. A. R.; SOUSA, M.C. O lógico-histórico da álgebra não simbólica: dois olhares diferentes. **Zetetiké** — Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas, SP, v. 13, n.24, p.11-45, 2005.

LEONARDO, F. M et al. Projeto Araribá Matemática. 3.ed. São Paulo: Moderna, 2012.

LEONTIEV, A. N. **O desenvolvimento do psiquismo.** São Paulo: Editora Moraes Ltda, 1978.

_______. **Actividad, consciência, personalidad.** 2. ed. Habana: Pueblo y Educación, 1983.

LIBÂNEO, J. C. A didática e a aprendizagem do pensar e do aprender: a Teoria Histórico--cultural da Atividade e a contribuição de Vasili Davydov. **Revista Brasileira de Educação**, n. 27, p.5-24, set./ out./ nov./ dez., 2004.

LIMA, L.; MOISÉS, R. P. **A variável**: escrevendo o movimento. A linguagem Algébrica 1. São Paulo/SP, CEVEC/CIARTE, 2000.

LIMA, L.; TAKAZAKI, M.; MÓISES, R. P. **Equações**: o movimento se particulariza. São Paulo: CEVEC-CIARTE, 1998.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

LÜDKE M; ANDRÉ M.E.D.A. **Pesquisa em educação:** abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MARCO, F. F. **Atividades computacionais de ensino na formação inicial do professor de matemática**. Tese (Doutorado em Educação: Educação Matemática) — Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009.

_______. Atividade orientadora de ensino de matemática na formação inicial de professores. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.15, n.2, p.317-336, 2013.

MORAES, S. P. G. de. **Aplicação do processo de ensino e aprendizagem em matemática**: contribuições da teoria histórico-cultural. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

MORETTI, V. D. **Professores de matemática em Atividade de ensino**. Uma perspectiva histórico-cultural para a formação docente. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação – USP, São Paulo, 2007.

MOURA, M. O. O Jogo e a Construção do Conhecimento Matemático. Série **Ideias**. n.10, São Paulo: FDE, 1992.

_______. **O educador matemático na coletividade de formação**: uma experiência com a escola pública. Tese (Livre Docência) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo. 2000.

_______. A Atividade de Ensino como ação formadora. In: CASTRO, A. D. de; CARVALHO, A. M. P. de (Orgs.). **Ensinar a ensinar:** didática para a escola fundamental e média. São Paulo: Pioneira Thompson Learning, p.143-162, 2001.

_______. A atividade de ensino como ação formadora. In: CASTRO, A. D.; CARVALHO, A. M. P. de (Org.). **Ensinar a ensinar***:* didática para a escola fundamental e média. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002.

_______. Pesquisa colaborativa: um foco na ação formadora. In: BARBOSA, R. L. L. (Org.) **Trajetórias e perspectivas da formação de educadores**. São Paulo: Editora UNESP, 2004, p.257-284.

MOURA, M. O; LANNER DE MOURA, A. R. **Escola:** um espaço cultural. Matemática na Educação Infantil: conhecer, (re)criar – um modo de lidar com as dimensões do mundo. São Paulo/ Diadema: Secel, 1998.

MOURA, M. O; et al. A atividade Orientadora de Ensino como Unidade entre Ensino e Aprendizagem. In: MOURA, M. O. (Org.). **A atividade pedagógica na teoria Histórico-Cultural.** Brasília: Líber livro, 2010. p.81-110.

NÚÑEZ, I. B. **Vygotsky, Leontiev e Galperin**: formação de conceitos e princípios didáticos. Brasília: Liber Livro, 2009.

PANOSSIAN, M. L. **O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para constituição do objeto de ensino da álgebra**. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

PERLIN, P. **A formação do professor dos anos iniciais do ensino fundamental no movimento de organização do ensino de frações**: uma contribuição da atividade orientadora de ensino. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2014.

PIRES, M. F. C. O materialismo histórico-dialético e a Educação. **Interface** – Comunicação, Saúde, Educação, v.1, n.1, 1997.

PRESTES, Z. R. **Quando não é quase a mesma coisa**: Análise de traduções de Lev Semionovitch Vigorski no Brasil Repercussões no campo educacional. Tese (Doutorado) – Universidade de Brasília, Brasília, 2010.

RUBTSOV, V. Atividade coletiva e aquisição de conceitos teóricos de física por escolares. In: GARNIER, C.; BEDNARZ, N.; ULANOVSKAYA, I.. (Org.). **Após Vygotsky e Piaget:** perspectiva social e construtivista. Escolas russa e ocidental. Trad. Eunice Gruman. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

SCARLASSARI, N. **Um estudo de dificuldades ao aprender álgebra em situações diferenciadas de ensino em alunos da 6ª série do ensino fundamental** – Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, UNICAMP, São Paulo, 2007.

SFORNI, M. S. F. **Aprendizagem conceitual e organização de ensino:** Contribuição da teoria da atividade. Araraquara – SP: JM Editora, 2004.

SOCAS, M.M. et al. **Iniciacion al álgebra**. Coleção Matematicas: cultura y aprendizaje, Editorial Sintesis, 1996.

SOUZA, J. R.; PATARO, P. R. M. **Vontade de saber matemática**. 2 ed. Editora: FTD, 2012.

SOUSA, M. C. **O ENSINO DE ÁLGEBRA NUMA PERSPECTIVA LÓGICO--HISTÓRICA**: um estudo das elaborações correlatas de professores do Ensino Fundamental. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Faculdade de Educação. UNICAMP, Campinas, 2004.

SOUSA, M. C.; PANOSSIAN, M. L.; CEDRO, W. L. **Do movimento lógico e histórico à organização do ensino**: o percurso dos conceitos algébricos. 1. ed. Campinas: Mercado de Letras, 2014.

USISKIN, Z. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis. In: COXFORD, A. F.; SHULTE, A. P. (Orgs.). **As idéias da álgebra**. São Paulo: Atual, 1995.

VERÍSSIMO, M. R. A. M. O materialismo histórico e dialético nas abordagens de Vygotsky e Wallon acerca do pensamento e da linguagem. **Educação e Filosofia** – v. 10, n.19, p.129 - 143, 1996.

VIGOTSKI, L. S. **A construção do pensamento e da linguagem.** . São Paulo: Martins Fontes, 2001.

VYGOTSKY, L. S. **The collected works of L. S. Vygotsky, vol.1, Problems of general psychology including Thinking and speech**. RIEBER, R.; CARTON, A. (Org.). trad. N. Nimick. New York: Plenim Press, 1987.

_______. **Pensamento e Linguagem**. 3.ed. São Paulo: Martins Fontes, 1989.

_______. **A formação social da mente**: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores. 4.ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.

_______. **Obras Escogidas III** – Problemas del desarrollo de la psique. 2 ed. Madrid: Visor Dis., S.A., 2001.

# ANEXOS

## A: Termo de consentimento livre e esclarecido

Prezado(a) senhor(a), o(a) menor, pelo qual o(a) senhor(a) é responsável, está sendo convidado(a) para participar da pesquisa intitulada **"O ENSINO DE ÁLGEBRA NA PERSPECTIVA DA TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL: UMA PROPOSTA PARA O TRABALHO COM EQUAÇÕES DE 1º GRAU"**, sob a responsabilidade dos pesquisadores **Fabiana Fiorezi de Marco e Beatriz Aparecida Silva Alves**. Nesta pesquisa nós estamos buscando **aprimorar o ensino de equações do primeiro grau para estudantes do 7º ano do ensino fundamental.** O Termo de Consentimento Livre e Esclarecido será obtido pela pesquisadora **Beatriz Aparecida Silva Alves, a pesquisa iniciará durante as aulas de matemática, realizadas na Escola Municipal Freitas Azevedo, no ano letivo de 2014, que atua como professora responsável pelos menores que participarão do estudo.**
Na participação do(a) menor, ele(a) **participará das atividades propostas em sala de aula, sendo que estas serão filmadas – preservando sua identidade – além dos registros por escrito realizados durante a atividade**. **Após a transcrição das gravações para a pesquisa as mesmas serão desgravadas**. Em nenhum momento o(a) menor será identificado(a). Os resultados da pesquisa serão publicados e ainda assim a sua identidade será preservada. O(A) menor não terá nenhum gasto e ganho financeiro por participar na pesquisa. O único risco, da participação do(a) menor na pesquisa, **se faz com relação à identificação dos participantes**. **Porém a equipe se compromete a preservar as identificações dos participantes. Em caso de filmagens, estas serão direcionadas apenas para mãos e ações dos participantes, não registrando os rostos. Para áudios e registros escritos serão utilizados pseudônimos.** Os benefícios serão **contribuição para a área de Educação Matemática em álgebra para o ensino fundamental, e, os participantes poderão aprender sobre a história da álgebra e, suas aplicações para a sociedade.** O(A) menor é livre para deixar de participar da pesquisa a qualquer momento sem nenhum prejuízo ou coação. O(A) menor cuja participação não seja autorizada não sofrerá qualquer prejuízo nas suas atividades escolares.
Uma via original deste Termo de Consentimento Livre e Esclarecido ficará com o(a) senhor(a), responsável legal pelo(a) menor.
Qualquer dúvida a respeito da pesquisa, o(a) senhor(a), responsável legal pelo(a) menor, poderá entrar em contato com: **Beatriz Aparecida Silva Alves – Escola Municipal Freitas Azevedo – (34) 3224-9527.** Poderá também entrar em contato com o Comitê de Ética na Pesquisa com Seres-Humanos – Universidade Federal de Uberlândia: Av. João Naves de Ávila, nº 2121, bloco A, sala 224, Campus Santa Mônica – Uberlândia –MG, CEP: 38408-100; fone: 34-32394131.

Uberlândia, ____ de ____________de 20____

______________________________________________________________

Assinatura dos pesquisadores

Eu, responsável legal pelo(a) menor ________________________________________ consinto na sua participação no projeto citado acima, caso ele(a) deseje, após ter sido devidamente esclarecido.

______________________________________________________________

Responsável pelo(a) menor participante da pesquisa