

THIAGO AUGUSTO MACHADO GUIMARÃES

**CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DO COMPORTAMENTO
DINÂMICO E AEROELÁSTICO DE LAMINADOS
COMPÓSITOS DE RIGIDEZ VARIÁVEL**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2016

THIAGO AUGUSTO MACHADO GUIMARÃES

**CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DO COMPORTAMENTO
DINÂMICO E AEROELÁSTICO DE LAMINADOS
COMPÓSITOS DE RIGIDEZ VARIÁVEL**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **DOCTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de concentração: Mecânica dos Sólidos e Vibrações.

Orientador: Prof. Dr. Domingos Alves Rade

Co-orientador: Prof. Dr. Carlos E. S. Cesnik

Uberlândia - MG

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

-
- G963c
2016 Guimarães, Thiago Augusto Machado, 1985
 Contribuição ao estudo do comportamento dinâmico e aeroelástico
 de laminados compósitos de rigidez variável / Thiago Augusto Machado
 Guimarães. - 2016.
 114 f. : il.
- Orientador: Domingos Alves Rade.
 Coorientador: Carlos Eduardo Stolf Cesnik.
 Tese (doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa
 de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
 Inclui bibliografia.
1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Aeroelasticidade - Teses. 3.
 Otimização estrutural - Teses. 4. Fibras de carbono - Teses. I. Rade,
 Domingos Alves. II. Cesnik, Carlos Eduardo Stolf. III. Universidade
 Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia
 Mecânica. IV. Título.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha esposa Sâmila, meu filho Lucas, minha mãe Ilma (in memorian), minhas irmãs Thayse e Thayla e meus pais ‘adotivos’ Cleide e Aluísio.

AGRADECIMENTOS

À minha esposa, Sâmila, que sempre sonhou, sofreu e lutou comigo. Obrigado pelo carinho, amizade e por se dedicar em me fazer feliz.

Ao meu amado filho Lucas, alegria da família, presente de Deus pra minha vida.

Ao meu professor, orientador e amigo, Domingos, por me ensinar no quadro com giz, mas sobretudo com postura, ética e visão científica.

Ao meu coorientador, Carlos Cesnik, por ser sempre tão assertivo, estar perto mesmo estando distante e pelo exemplo de profissionalismo.

À Universidade Federal de Uberlândia e à Faculdade de Engenharia Mecânica pela oportunidade de realizar este Curso, juntamente com todo corpo docente, em especial ao amigo Leonardo Sanches que sempre dedicou seu talento de ensinar, comigo; e à parceira Núbia que com alegria trabalhou duramente da revisão deste manuscrito e por ser um exemplo pra mim de empenho e perfeccionismo.

Aos amigos da Embraer que foram minha família em São José dos Campos, em especial ao meu amigo Saullo, fiel companheiro de pesquisa e basquete, que sempre foi meu grande incentivador. E também ao meu amigo Dayvis, que sempre esteve presente e continua sendo um grande parceiro.

Aos membros da banca, pelo tempo dispendido na avaliação e pelas contribuições ao trabalho.

À minha família, em especial à minha mãe, que por vezes abdicou de si mesma para que eu e minhas irmãs pudéssemos crescer. Ela sempre será mais do que especial.

E agradeço a Deus, por se lembrar de mim.

GUIMARÃES, T. A. M., **Contribuição ao Estudo do Comportamento Dinâmico e Aeroelástico de Laminados de Rigidez Variável**. 2016. 134 f. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

RESUMO

O trabalho de pesquisa realizado trata do comportamento dinâmico e aeroelástico em compósitos laminados de rigidez variável (LCRV). Em virtude dos avanços das técnicas de manufatura de laminados, este tema tem ganhado notoriedade internacional e sua importância se justifica pelo crescente número de trabalhos na área. Neste contexto, foram analisados dois tipos distintos de LCRV: o primeiro diz respeito a laminados fabricados com espaçamento variável entre as fibras paralelas; e o segundo trata de laminados fabricados com deposição das fibras por caminhos curvilíneos, termo em inglês *tow steering*. Com objetivo de explorar as características dos LCRV, foi desenvolvido um modelo aeroelástico baseado no método dos modos admitidos (Rayleigh-Ritz), utilizando as hipóteses da teoria clássica de laminação (TCL), e foi utilizado o modelo aerodinâmico baseado na teoria das faixas quase estacionária para as análises em escoamentos subsônicos, e na teoria dos pistões, para escoamentos supersônicos nas análises de *flutter* de painel. Assim, foi investigada a influência do efeito de diferentes funções de distribuição do volume de fibras no comportamento aeroelástico e nas três primeiras frequências naturais, constatando-se uma significativa influência nos resultados, justificando um tratamento adequado para modelagem microestrutural dos laminados com espaçamento variável. Por outro lado, com objetivo de analisar o efeito de incertezas no processo de fabricação nos LCRV fabricados com a tecnologia de *tow steering*, foi desenvolvida uma estratégia de identificação de incertezas e sua propagação no modelo numérico, além da otimização para obtenção de um projeto robusto. Constatou-se que a melhor configuração obtida pela otimização determinística apresentou grande dispersão quando perturbado o ângulo de definição da trajetória das fibras, diferentemente da configuração selecionada de maneira robusta, que apresentou resultados menos sensíveis a perturbações nos ângulos de deposição das fibras. Foi investigada também a viabilidade da utilização de LCRV do ponto de vista dinâmico, visando aumentar a frequência natural fundamental, e com aplicação em *flutter* de painel. Em ambas as aplicações foi otimizada a trajetória da deposição das fibras, com base nos polinômios interpoladores de Lagrange, sendo encontrados ganhos razoáveis quando comparados com os laminados de material composto tradicionais de rigidez constante (LCRC). Adicionalmente, foi verificado que os resultados obtidos para o LCRC e o LCRV analisados experimentalmente corroboraram os resultados obtidos numericamente no que diz respeito às frequências naturais e aos modos de vibrar.

Palavras Chave: Laminados de material composto de rigidez variável, Aeroelasticidade, Análise dinâmica, Tow steering, Deposição variável de fibras, Flutter, Incertezas, Compósitos, Otimização

GUIMARÃES, T. A. M., **Dynamic and Aeroelastic Study Contributions in the Behavior of Variable Stiffness Composite Laminates.** 2016. 134 f. Phd Thesis, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

ABSTRACT

The developed research work is related to the dynamic and aeroelastic behaviors of variable stiffness composite laminate plates (VSCL). Due to the advances in the manufacturing techniques, this research theme has been gaining international relevance and its importance is justified by the increasing number of research works in this area. In this context, two different types of VSCL are analyzed: the first regards variable fiber spacing laminates, and the second is manufactured using curvilinear paths (tow steering). In order to explore the VSCL characteristics, it was developed an aeroelastic model based on the assumed modes approach (Rayleigh-Ritz), using the hypotheses of “classical lamination theory” (CLT). Moreover, it was used the aerodynamic model based on the quasi-steady strip theory in the subsonic analyses, and the piston theory, for supersonic flows used in the evaluation of panel flutter. It was investigated the influence of different fiber volume distribution on the aeroelastic behavior and on the first three natural frequencies; it has been found that those influences are significant, which justifies the adequate treatment for the micro -structural model of VSCL. Also, to cope with uncertainties during manufacturing of steered composite laminates, it was developed a strategy for identification of those uncertainties and their propagation through the numerical model; also, an optimization procedure was proposed to achieve robust designs. It was noticed that the response of the optimal configuration obtained from deterministic optimization presented a large dispersion when the tow steering angles were perturbed, in contrast with the selected configuration obtained from robust optimization, in which the results were much less sensible to perturbations in the tow steering angles. Also, it was investigated the viability to use LCRV from the dynamic standpoint, aiming at increasing the fundamental frequency, and with application in flutter panel. For both applications, the fiber placement trajectory was optimized based on Lagrange polynomials. Reasonable gains were found with respect to constant stiffness composite laminates (CSCL). Additionally, it was verified that the obtained experimental results for VSCL and CSCL corroborate the counterparts obtained from numerical simulations regarding natural frequencies and mode shapes.

Keywords: Variable stiffness composite laminate, Fiber spacing, Tow steering, Aeroelasticity, Dynamic analysis, Flutter

Lista de Figuras

1.1	X29: Aeronave não convencional experimental. Fonte: <i>www.nasa.gov</i>	2
1.2	Diagrama dos Três Anéis. Fonte: (STRGANAC; MOOK, 1990).	3
1.3	Aumento do uso de materiais compostos na aviação comercial da fabricante Airbus. Fonte: Trilaksono <i>et al.</i> (2014).	5
1.4	Processo de construção do laminado. Cortesia: IPT - Laboratório de Estruturas Leves.	7
1.5	Exemplos de diferentes tipos de laminados de rigidez variável. Baseado em Ribeiro <i>et al.</i> (2014).	7
1.6	Máquina de deposição automática de fibras. Fonte: Laboratório de Estruturas Leves do Instituto de Pesquisas Tecnológicas - LEL/IPT.	8
1.7	Desenho esquemático do cabeçote da máquina de deposição automática de fibras. Fonte: Evans (2001).	9
1.8	Representação do efeito do raio de curvatura na deposição das fibras.	10
1.9	Definição da estratégia de deposição dos feixes: a) deposição por trajetos paralelos; b) deposição com trajetória deslocada.	11
2.1	Representação do sistema de coordenadas adotado para a lamina.	22
2.2	Seção transversal do laminado composto por camadas de diferentes espessuras.	24
2.3	Representação física do acoplamento de flexo-torção. Adaptado de Shirk <i>et al.</i> (1986).	28
2.4	Estruturas manufaturadas com novas tecnologias de empilhamento: <i>tow steering</i> (esquerda), adição funcional de material (centro) e reforçadores curvos (direita). Fonte (STANFORD <i>et al.</i> , 2014).	29

2.5	Representação da fibra utilizando variação linear do ângulo, baseado em Gürdal <i>et al.</i> (2008).	31
2.6	Representação da trajetória de deposição das fibras para primeira camada.	31
2.7	Representação de dois tipos de laminados: (a) com rigidez variável $[0^\circ -45^\circ 45^\circ 90^\circ] <10^\circ, 50^\circ >$; (b): convencional $[0^\circ 45^\circ -45^\circ 90^\circ]$	32
2.8	Orientação não linear da trajetória da fibra obtida utilizando pontos de controle e interpolação por polinômios ortogonais.	33
2.9	Esboço de um laminado com deposição com espaçamento entre as fibras variável.	34
2.10	Representação aerofólio simétrico sujeito a movimentos oscilatórios.	36
2.11	Representação do modelo de placa utilizado para demonstrar as variáveis utilizadas na teoria das tiras.	38
2.12	Representação das instabilidades dos tipos <i>flutter</i> e divergência.	44
2.13	Ilustração da coalescência dos modos na análise de <i>flutter</i> de painel	46
3.1	Modelo teórico simplificado de asa com espaçamento variável.	48
3.2	Efeito no volume das fibras em função do termo n (não linear).	49
3.3	Efeito no volume das fibras em função do volume de fibras extremidade da asa.	49
3.4	Geometria e dimensões da placa.	50
3.5	Modelo de elementos finitos construído em Nastran [®]	51
3.6	Comparação dos modos de vibrar entre o modelo Ritz e o modelo de elementos finitos.	52
3.7	Correlação modal entre o modelo de Ritz e o modelo elementos finitos.	52
3.8	Análise de estabilidade aeroelástica para a configuração base.	53
3.9	Avaliação aeroelástica em função do volume de fibras na ponta da asa.	54
3.10	Avaliação aeroelástica em função do volume de fibras na ponta da asa.	54
3.11	Efeito do volume de fibras na extremidade da placa sobre as frequências naturais da placa.	55
4.1	Descrição e geometria do modelo analisado.	59
4.2	MAC - Correlação modal entre o modelo proposto e o FEM para CA e CB.	61

4.3	Ângulo de definição da trajetória - a) Modelo de Ritz b) FEM.	61
4.4	Detalhamento das otimizações realizadas.	62
4.5	Trajetórias otimizadas para O3, O4 e O5.	65
4.6	Avaliação do comportamento aeroelástico - comparação dos resultados de <i>flutter</i>	65
4.7	Avaliação do comportamento dinâmico - comparação dos modos e frequências naturais.	66
4.8	Análise aeroelástica com cargas de membrana - comparação das regiões estáveis.	67
4.9	Comparação das fronteiras de Pareto relativa às configurações com e sem restrições.	68
4.10	Comparação do envelope de estabilidade aeroelástico e flambagem entre a configuração base e a configuração otimizada com restrição de manufatura.	68
4.11	Comparação temporal do comportamento aeroelástico entre O1 e O3 na condição limítrofe de <i>flutter</i> para O3.	69
4.12	Comparação temporal do comportamento aeroelástico entre O1 e O4 na condição limítrofe de <i>flutter</i> para O4.	69
4.13	Comparação temporal do comportamento aeroelástico entre O1 e O5 na condição limítrofe de <i>flutter</i> para O5.	70
4.14	Comparação da amplitude de ciclo limite de oscilação entre as configurações O1, O3, O4 e O5.	70
4.15	Verificação do efeito dos esforços de membrana na amplitude do CLO de O3.	71
4.16	Verificação do efeito dos esforços de membrana nas órbitas de O3.	71
5.1	Descrição da geometria da placa e das condições de contorno analisadas.	75
5.2	Representação do espaço de projeto das diferentes otimizações propostas.	77
5.3	Representação da trajetória ótima para a máxima frequência fundamental.	79
5.4	Comparação entre a configuração base e a configuração ótima O3 para a condição da placa livre.	80
5.5	Comparação entre a configuração base e a configuração ótima O3 para a condição da placa simplesmente apoiada.	80

5.6	Comparação entre a configuração base e a configuração ótima O3 para a condição da placa engastada.	80
5.7	Bancada experimental utilizada para obtenção das frequências naturais e dos modos de vibrar.	82
5.8	FRF experimental obtida no LCRC.	82
5.9	Comparação da FRF obtida experimentalmente entre o LCRC e o LCRV. . .	83
5.10	Comparação da FRF obtida experimentalmente entre o LCRC e o LCRV na frequência fundamental.	83
5.11	Comparação modal entre os resultados experimentais e do modelo de Ritz para o LCRV.	84
5.12	Comparação modal entre os resultados experimentais e do modelo de Ritz para o LCRC.	85
6.1	Ilustração do método de análise de sensibilidade baseado na variância. Baseado em Loucks (2006).	90
6.2	Função Densidade de Probabilidade do ângulo de <i>tow steering</i>	91
6.3	Exemplo de representação da PDF para amostras de MC e PCE de terceira ordem para diferentes tamanhos de amostras.	93
6.4	Exemplo de representação CDF para amostras de MC e PCE de terceira ordem para diferentes tamanhos de amostras.	94
6.5	Análise aeroelástica para as configurações básicas C1 e C2.	96
6.6	Análise de sensibilidade para uma pequena variação nas variáveis de entrada. . .	97
6.7	Resultados de sensibilidade considerando grande variação nas propriedades dos materiais.	98
6.8	Otimização aeroelástica robusta.	98
6.9	Variação do comportamento aeroelástico devida à perturbação aleatória no ângulo de controle da trajetória na configuração determinística CA.	99
6.10	Variação do comportamento aeroelástico devida à perturbação aleatória no ângulo de controle da trajetória na configuração determinística CB.	100

6.11 Comparação entre as configurações otimizadas de maneira determinística e robusta para a configuração C1 em termos da função FDP.	100
6.12 Comparação entre as configurações otimizadas de maneira determinística e robusta para a configuração C2 em termos da função FDP.	101

Lista de Tabelas

3.1	Propriedades da fibra e da resina.	50
3.2	Convergência do modelo proposto com o modelo de elementos finitos em função das frequências naturais em Hz.	51
3.3	Propriedades homogeneizadas da lâmina unidirecional de grafite-epóxi.	53
4.1	Propriedades do material e dimensões da placa.	59
4.2	Convergência dos valores de frequência natural (Hz) para configuração convencional LCRC.	60
4.3	Convergência dos valores de frequência natural (Hz) para configuração convencional LCRV.	60
4.4	Opções de lay-up e variáveis de projeto.	63
4.5	Resultados da Otimização.	64
5.1	Propriedades do material e geometria do laminado.	76
5.2	Comparação das frequências naturais, para diferentes condições de contorno, relativa ao LCRC (CA).	76
5.3	Comparação das frequências naturais, para diferentes condições de contorno, relativa ao LCRV (CB).	76
5.4	Opções de interpolação de trajetória e variáveis de projeto para o LCRV de <i>lay-up</i> base $[0^\circ/45^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$	78
5.5	Comparação entre as configurações otimizadas e a configuração CB na condição FFFF.	78
5.6	Comparação entre as configurações otimizadas e a configuração CB na condição SSSS.	78

5.7	Comparação entre as configurações otimizadas e a configuração CB na condição CCCC.	79
5.8	Propriedades do material e geometria do laminado.	81
5.9	Comparação dos resultados obtidos com o modelo proposto com os resultados experimentais para o LCRV e o LCRC.	84
6.1	Propriedades do material e dimensões do laminado.	95
6.2	Comparação com as configurações básicas dos resultados obtidos com a otimização.	96
6.3	Comparação dos resultados obtidos pela otimização determinística e robusta.	99

Lista de Símbolos

a	- distância do eixo de referência e o eixo elástico
b	- semi-corda
c	- corda
e	- distância entre o eixo elástico e o eixo aerodinâmico
u, v	- deslocamentos no plano da placa
w	- deslocamento transversal da placa
\mathbf{A}	- matriz de rigidez de membrana
\mathbf{B}	- matriz de rigidez de acoplamento
$C(k)$	- função de Theodorsen
\mathbf{C}_{aero}	- matriz de amortecimento aerodinâmica
\mathbf{D}	- matriz de rigidez à flexão/torção
E_1	- módulo de elasticidade na direção da fibra
E_2	- módulo de elasticidade na direção transversal à fibra
G_{12}	- módulo de elasticidade em cisalhamento
I_i	- invariantes dos materiais
k	- frequência reduzida
\mathbf{K}	- matriz de rigidez do laminado
\mathbf{K}_{aero}	- matriz de rigidez aerodinâmica
L	- sustentação
L_e	- polinômios de Legendre
M	- momento
\mathbf{M}	- matriz de massa do laminado
$M_{\dot{\theta}}$	- termo não estacionário em arfagem
\mathbf{q}	- coordenadas generalizadas
\mathbf{Q}	- matriz de rigidez da lâmina
\mathbf{R}	- matriz de transformação das constantes de engenharia
$S_{m,n}$	- funções admissíveis utilizadas no método de Ritz
\mathbf{T}	- matriz de transformação de coordenadas da lâmina para o sistema global
T_i	- ângulo(s) de definição da trajetória
U	- energia de deformação
$V_i^{A,B,D}$	- parâmetros de laminação
V_f	- fração volumétrica
V_∞	- velocidade do escoamento do ar
W	- trabalho realizado

α	- autovalor de flambagem
β_n	- autovalores complexos provenientes da análise de aeroelasticidade
ΔP	- pressão aerodinâmica da teoria de ‘pistão’
ϵ	- vetor de deformações extensionais no plano da lâmina
κ	- vetor de curvatura
θ	- ângulo da camada no laminado
λ	- parâmetro aerodinâmico para análise em <i>flutter</i> de painel [Kg/ms^2]
μ_{12}	- coeficiente de poisson na direção 12
ρ	- densidade do material
ρ_∞	- densidade do ar
Υ	- energia cinética
ω_n	- frequência natural
ζ_n	- amortecimentos modal
<i>FEM</i>	- <i>finite element model</i>
<i>LCRC</i>	- laminado de material composto com rigidez constante
<i>LCRV</i>	- laminado de material composto com rigidez variável
<i>TCL</i>	- teoria clássica de laminados

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	ix
LISTA DE TABELAS	xiii
LISTA DE SÍMBOLOS	xv
1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Aeroelasticidade	3
1.2 Visão geral sobre materiais compósitos	4
1.2.1 Laminados de rigidez variável	6
1.2.2 Tecnologia de Deposição Automática de Fibras (AFP)	7
1.2.3 Características da manufatura	9
1.3 Propagação de incertezas e análise de sensibilidade	11
1.4 Métodos de otimização	12
1.5 Motivação e objetivos	13
1.6 Organização da tese	14
2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	16
2.1 Revisão Bibliográfica	16
2.1.1 Laminados de material composto com espaçamento variável	16
2.1.2 Métodos de incertezas aplicados a sistemas aeroelásticos	17
2.1.3 Flutter de painéis	19
2.1.4 Comportamento dinâmico vibracional de laminados de rigidez variável	20
2.2 Teoria Clássica da Laminação	21
2.3 <i>Aeroelastic Tailoring</i>	28

2.4	Laminados de rigidez variável	30
2.4.1	Modelagem de laminados fabricados pelo processo <i>tow steering</i>	30
2.4.2	Modelagem de laminados fabricados com espaçamento de fibras variável	33
2.5	Teoria das faixas modificada com adição do termo não estacionário	36
2.6	Escoamento supersônico sobre placas - Teoria de Pistão	38
2.7	Modelo estrutural baseado no método de Rayleigh-Ritz	39
2.8	Modelo dinâmico e modelo aeroelástico	41
2.8.1	Modelo simplificado aeroelástico	42
2.8.2	Modelo para flutter de painel e análise dinâmica	44
3	AEROELASTICIDADE DE LAMINADOS FABRICADOS COM DEPOSIÇÃO DE FIBRAS COM ESPAÇAMENTO VARIÁVEL	47
3.1	Modelo teórico	48
3.2	Modelo numérico	50
3.3	Validação com o modelo de elementos finitos	50
3.4	Simulações numéricas	53
3.5	Conclusões	55
4	FLUTTER DE PAINÉIS LAMINADOS DE RIGIDEZ VARIÁVEL FABRICADOS COM <i>TOW STEERING</i>	57
4.1	Modelo teórico	57
4.2	Descrição do modelo	59
4.3	Verificação do modelo proposto	59
4.4	Procedimento de otimização	61
4.5	Restrições de manufatura	63
4.6	Análises e resultados	64
4.6.1	Otimização sob restrições de manufatura	66
4.6.2	Respostas temporais não lineares	68
4.7	Conclusões	71
5	ANÁLISE NUMÉRICA E EXPERIMENTAL DO COMPORTAMENTO	

DINÂMICO DE LAMINADOS DE RIGIDEZ VARIÁVEL FABRICADOS COM <i>TOW STEERING</i>	73
5.1 Modelo teórico	74
5.2 Descrição do modelo e verificação	75
5.3 Procedimento de otimização	76
5.4 Análises e resultados	77
5.5 Análise experimental	81
5.6 Conclusões	84
6 OTIMIZAÇÃO ROBUSTA DO COMPORTAMENTO AEROELÁSTICO DE LAMINADOS DE MATERIAL COMPOSTO COM RIGIDEZ VA- RIÁVEL	87
6.1 Modelo teórico	88
6.2 Projeto aeroelástico com incertezas	88
6.2.1 Identificação de incertezas	89
6.2.2 Modelagem de incertezas	90
6.2.3 Propagação de incertezas	91
6.2.4 Problema de otimização	93
6.2.5 Otimização robusta	94
6.3 Simulação numérica	95
6.4 Configuração base	95
6.5 Otimização determinística	96
6.6 Otimização robusta	97
6.7 Comparação dos resultados	98
6.8 Conclusões	101
7 CONCLUSÕES, PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES E PERSPECTIVAS	103
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	105

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

*“Hope deferred makes the heart sick,
but a longing fulfilled is a tree of life.” Pv 13:12*

O uso de compósitos não tem se restringido a aplicações em setores específicos. Certamente, a indústria aeroespacial é responsável por uma parcela considerável de sua utilização. Trata-se de materiais com comprovados benefícios estruturais, como elevada razão resistência/peso, comportamento favorável à fadiga, bem como versatilidade para diversas aplicações.

Constata-se, em projetos de aeronaves da atualidade, a tendência pela concepção de asas com maiores alongamentos, tornando-as cada vez mais leves e flexíveis. Em contrapartida, os efeitos aeroelásticos são amplificados, requisitando a busca contínua e crescente por soluções tecnológicas inovadoras e de aprimoramento, para materiais e processos de fabricação.

A utilização de materiais compostos em estruturas aeronáuticas visando obter benefícios aeroelásticos não é recente. Trabalhos relevantes foram produzidos na década de 1980, incentivados, essencialmente, pela NASA (*National Aeronautics and Space Administration*) que financiou diversas pesquisas, com destaque para o desenvolvimento da aeronave experimental X-29 (Fig. 1.1), conhecida como uma das aeronaves mais não convencionais

da história da aviação.



Figura 1.1 – X29: Aeronave não convencional experimental. Fonte: www.nasa.gov.

A arrojada configuração de asas e empenagens do X-29 confere-lhe elevada manobrabilidade, desempenho eficaz em voo supersônico, além de contribuir para a sua leveza. Além disso, o enflechamento negativo permite operações com elevados ângulos de ataque, e evita o estol, pois impede que o fluxo de ar reverso descole nas superfícies de controle.

O projeto da aeronave X-29 possibilitou a investigação e validação experimentais de importantes tecnologias e conceitos, tais como o uso de *flaperon* em velocidades supersônicas, eficiência de controle para elevados ângulos de ataque e controle da aeronave sob condições de extrema instabilidade. Entretanto, o arrasto total aerodinâmico não foi obtido de acordo com as estimativas iniciais, o que decorreu, principalmente, por razões de ordem estrutural. A falta de rigidez torcional restauradora, em virtude do enflechamento negativo, ocasionava problemas de divergência aeroelástica.

A solução encontrada pelos projetistas fundamenta-se na utilização das propriedades acopladas de flexão e torção em laminados de material composto, controladas pela sequência de empilhamento (*lay-up*) dos componentes principais da asa. Esta abordagem de projeto é denominada *aeroelastic tailoring*, cuja definição, segundo Shirk *et al.* (1986) é: “adição de rigidez direcional no projeto estrutural da aeronave para controle das deformações aeroelásticas, estáticas e dinâmicas, de tal maneira a afetar o desempenho aerodinâmico e estrutural da aeronave de forma benéfica”.

Recentemente, o aprimoramento de técnicas de manufatura tem viabilizado o de-

envolvimento de processos eficientes para a deposição das fibras em material composto, com o objetivo de melhorar o laminado em nível estrutural. Neste contexto, destaca-se o processo conhecido por *tow steering*, que permite o controle da trajetória de deposição das fibras curvilíneas, resultando nos denominados *laminados de material composto com rigidez variável* (LCRV).

1.1 Aeroelasticidade

Segundo Fung (1994), a aeroelasticidade é definida como: “o campo de estudo relacionado com a interação entre uma estrutura elástica deformável e as forças aerodinâmicas atuantes sobre o corpo imerso em um escoamento”.

A natureza multidisciplinar da aeroelasticidade, destacada por Yates (1971), é ilustrada através do Diagrama dos Três Anéis (Fig. 1.2), que mostra a interação entre as diferentes áreas de estudo. O diagrama de Yates evidencia, de maneira simples, que a aeroelasticidade envolve inter-relações entre forças aerodinâmicas, inerciais e elásticas. Trata-se de um problema acoplado no qual as cargas aerodinâmicas provocam deformações na estrutura, acarretando alterações nas forças aerodinâmicas resultantes.

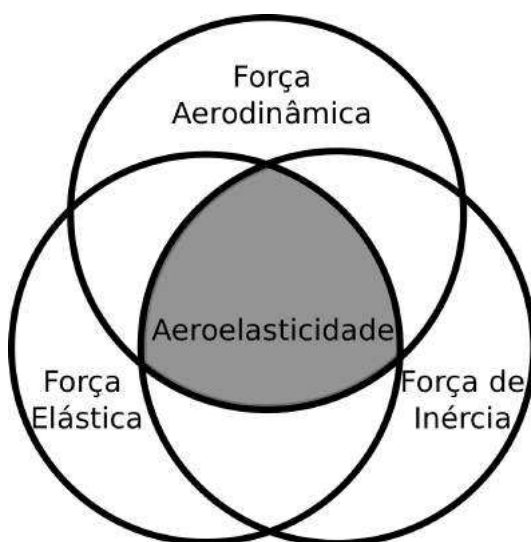


Figura 1.2 – Diagrama dos Três Anéis. Fonte: (STRGANAC; MOOK, 1990).

O problema central da aeroelasticidade estática é o efeito da deformação elástica na distribuição de sustentação em superfícies sustentadoras como asas e empenagens (FUNG, 1994). Para baixas velocidades este efeito é pequeno, mas em condições aerodinâmicas se-

veras, pode causar danos desde a perda de aeronavegabilidade até falhas catastróficas. No entanto, a rigidez elástica independe da condição aerodinâmica, mas o momento aerodinâmico é proporcional ao quadrado da velocidade de voo. Logo, existe uma velocidade crítica tal que a rigidez elástica é apenas suficiente para suportar a asa, e qualquer condição infinitesimal adicional produz um elevado ângulo de ataque em torção. Essa condição crítica é denominada divergência, e a asa é denominada torcionalmente divergente.

A divergência aeroelástica é uma condição de instabilidade em que pequenas deformações oriundas de efeitos de torção podem acarretar significativos carregamentos aerodinâmicos, inclusive, em regimes não lineares.

No caso da aeroelasticidade dinâmica, consideram-se os efeitos provenientes de variações significativas com o tempo. Assim sendo, acelerações e velocidades não são desprezíveis, de modo que componentes de inércia interagem com os componentes elásticos e aerodinâmicos (BISPLINGHOFF *et al.*, 1996).

O fenômeno aeroelástico denominado *flutter* é, indiscutivelmente, o mais importante (GARRICK; REED, 1981) e o mais difícil de prever. Trata-se de um fenômeno de vibração autoexcitada que extrai energia do escoamento e a converte em oscilações na estrutura, gerando, em muitos casos, falhas catastróficas (WRIGHT; COOPER, 2008). É de suma importância a determinação da velocidade de *flutter* em projetos aeronáuticos, correspondendo à condição limítrofe para início da instabilidade. No âmbito aeronáutico, o *flutter* pode ocorrer em diferentes componentes estruturais (asa, empenagem, fuselagem), sendo tipicamente verificado o acoplamento de modos de torção e flexão na asa, torção de asa e superfície de controle, asa-motor, estabilizador horizontal e vertical, dentre outros.

1.2 Visão geral sobre materiais compósitos

O crescente emprego de materiais compostos na indústria aeronáutica é comprovado pelo desenvolvimento recente das aeronaves Boeing B787 e Airbus A350, nas quais 50% do peso consiste dos mesmos. Na Figura 1.3 visualiza-se a evolução do uso de materiais compostos ao longos dos últimos anos pela fabricante Airbus. Incentivado principalmente pelos investimentos da Boeing, Airbus e mais recentemente pela Bombardier, o setor aeroespacial tem

investido em inovações tecnológicas visando à redução de custos e aumento de eficiência em processos de fabricação de materiais compostos.

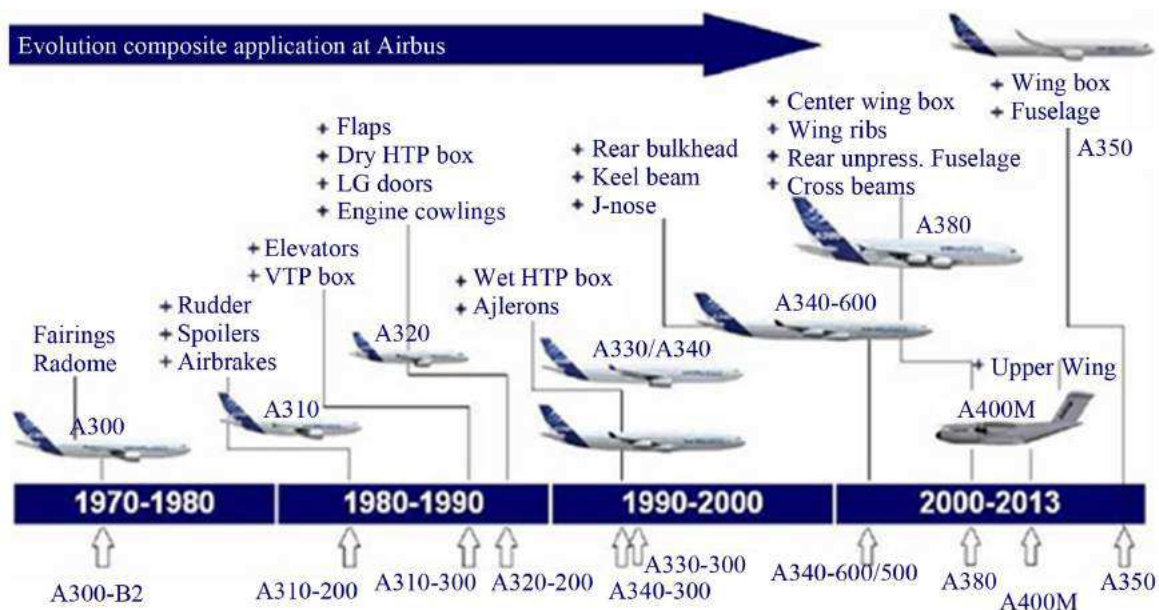


Figura 1.3 – Aumento do uso de materiais compostos na aviação comercial da fabricante Airbus. Fonte: Trilaksono *et al.* (2014).

Os materiais compostos de plástico reforçado com fibras (do inglês, *fiber reinforced plastic* - FRP), assumiram papel de destaque por combinarem excelentes propriedades mecânicas das lâminas, com a matriz responsável pelo suporte das fibras. Os filamentos geralmente são agrupados em forma de feixes revolidos, tiras unidimensionais ou na forma de tecidos bidimensionais. Diferentes materiais são empregados nas fibras, tais como, vidro, carbono e aramida. No entanto, em grande parte das aplicações aeronáuticas o carbono é o mais utilizado devido às suas propriedades mecânicas.

Normalmente, são utilizados dois tipos de matriz em materiais compostos: termoplástica e termorrígida. No primeiro tipo, a epoxi é constituída de dois componentes, resina e endurecedor, que geralmente são líquidos à temperatura ambiente e, quando curados, apresentam propriedades combinadas. Existem algumas técnicas que facilitam e automatizam a impregnação, como o processo de infusão da resina ou de transferência através do molde, sendo a resina sugada ou empurrada através do laminado. A principal característica do processo de cura dos termorrígidos é a irreversibilidade. Em contrapartida, os termoplásticos, usualmente são sólidos em temperatura ambiente e quando submetidos ao aquecimento, fundem-se e facilitam o processo de conformação e impregnação do laminado. Adicional-

mente, desenvolveram-se os materiais denominados pré-impregnados que são embebidos de resina na condição natural e a ativação é feita pelo processo de cura, geralmente em autoclave.

Diferentes técnicas de manufatura são utilizadas em estruturas de materiais compostos; na indústria aeroespacial se destacam dois tipos principais: a deposição automática de fitas (do inglês, *automatic tape laying* - *ATL*) e a deposição automática de feixes de fibras (do inglês, *automatic fiber placement* - *AFP*), principalmente devido à maior confiabilidade e automatização do processo. Do ponto de vista da automatização, os processos são semelhantes e executados por máquinas, e a principal diferença está na forma de deposição: enquanto no processo ATL depositam-se tiras de largura constante, no AFP são depositados feixes de fibras de forma controlada.

1.2.1 Laminados de rigidez variável

Enquanto foram desenvolvidas diversas técnicas para projetos de laminados de rigidez constante (LCRC), métodos modernos possibilitam o desenvolvimento de laminados não convencionais e também aplicação em estruturas complexas. O advento de máquinas que realizam a deposição de fibras de forma automática tornou possível a manufatura de laminados com fibras curvas, mais fácil, controlada e eficiente. Esses laminados podem ser utilizados em diversas aplicações de projeto, pois a otimização da trajetória das fibras podem aumentar a carga crítica de flambagem, diminuir concentrações de tensão, mudar as características dinâmicas e o também aprimorar o comportamento aeroelástico.

É mostrado na Figura 1.4 o processo de fabricação do LCRV construído com fibras curvas, desde a deposição das primeiras fibras, destacando a primeira camada, bolsa de vácuo, e por fim o laminado curado.

No entanto, laminados com rigidez variável podem ser compreendidos em um contexto muito mais amplo, conforme mostrado na Figura 1.5, onde são enfatizados: laminados fabricados com fração de fibras variáveis ao longo do laminado (a), laminados fabricados com fibras curvas (b), laminados com adição de fibras somente em regiões específicas (c), e laminados fabricados com reforçadores conectados (d).

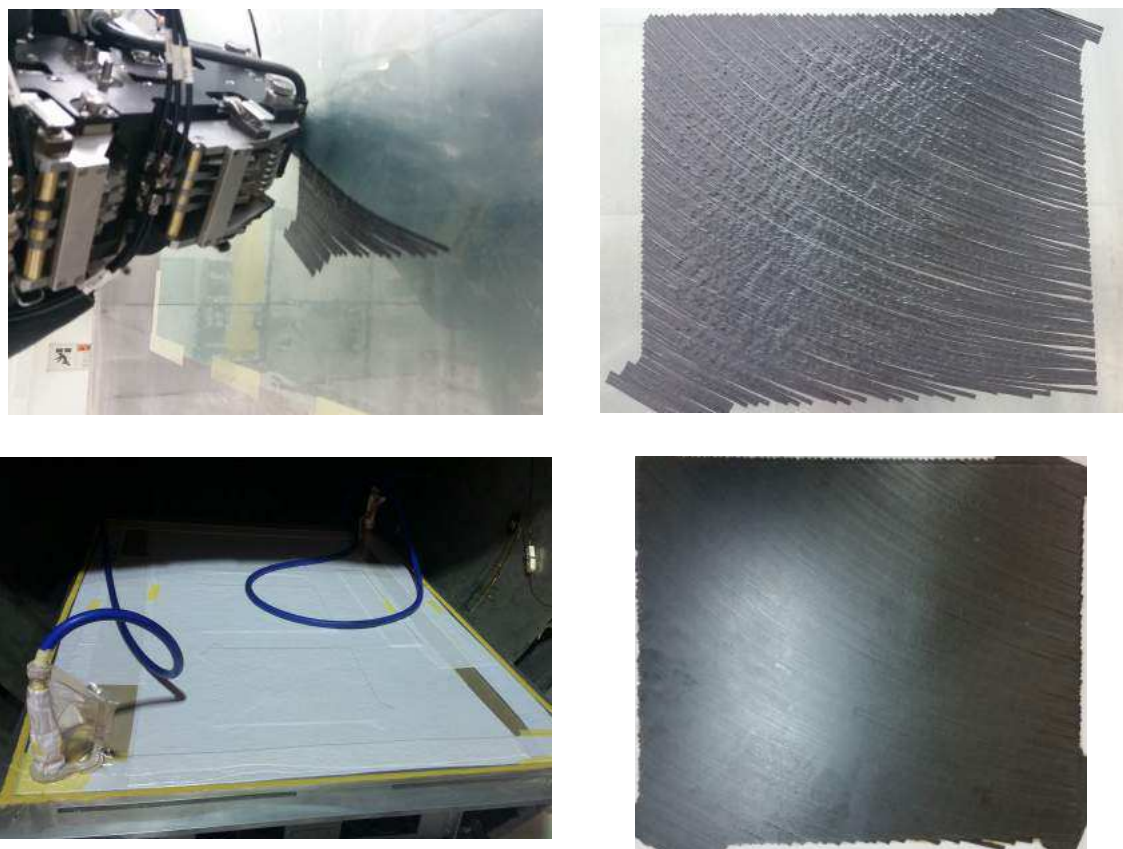


Figura 1.4 – Processo de construção do laminado. Cortesia: IPT - Laboratório de Estruturas Leves.

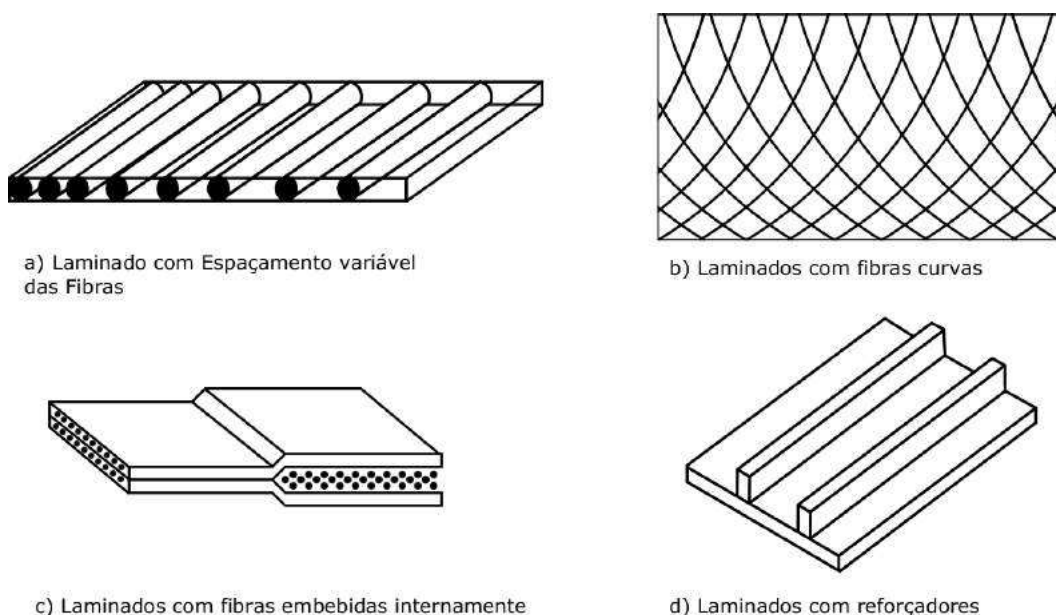


Figura 1.5 – Exemplos de diferentes tipos de laminados de rigidez variável. Baseado em Ribeiro *et al.* (2014).

1.2.2 Tecnologia de Deposição Automática de Fibras (AFP)

Dentre as técnicas desenvolvidas para a fabricação de materiais compostos, a AFP é a única que possibilita o controle individual da deposição das fibras e reinício do corte automático

das mesmas. As máquinas surgiram nos anos 1980 e estão em contínuo aperfeiçoamento, com incentivo crescente da indústria.

Na máquina de última geração apresentada na Figura 1.6, um braço de robô de seis eixos controla até 32 feixes (*tows*) durante a deposição na superfície do molde da peça fabricada, com possibilidade de variação da largura do feixe de fibras depositado (de 3,2mm a 25,4mm). A deposição das fibras é realizada por um cabeçote, geralmente semelhante



Figura 1.6 – Máquina de deposição automática de fibras. Fonte: Laboratório de Estruturas Leves do Instituto de Pesquisas Tecnológicas - LEL/IPT.

ao desenho esquemático da Fig. 1.7. Os feixes de fibras são armazenados em uma região climatizada da máquina, sendo o material pré-impregnado enrolado em bobinas e conduzido até a superfície de deposição por polias direcionadoras e roletes tensores. Além disso, cada feixe pode ser cortado e reiniciado individualmente pelo mecanismo de corte. A unidade de aquecimento é colocada no cabeçote e, antes da deposição do feixe, parte da resina se funde para possibilitar sua adequada aderência com o madril, assegurando a qualidade de deposição pelo rolete compactador.

Destaca-se que a qualidade do laminado, especificamente no caso de LCRV fabricado com fibras curvas, está diretamente relacionada com o controle da velocidade de aplicação, o raio mínimo de deposição e a qualidade do mandril, fatores a serem controlados durante o processo de fabricação.

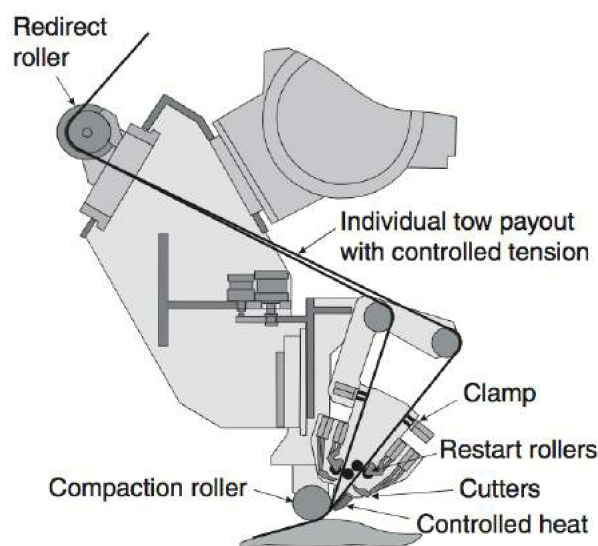


Figura 1.7 – Desenho esquemático do cabeçote da máquina de deposição automática de fibras. Fonte: Evans (2001).

1.2.3 Características da manufatura

É imprescindível levar em consideração as características intrínsecas do processo de manufatura em todo projeto que envolva o uso de material composto. No caso específico dos laminados de rigidez variável fabricados com a técnica *tow steering* através da AFP, a qualidade do laminado está essencialmente relacionada com o raio de curvatura utilizado na deposição e os efeitos induzidos por vazios e sobreposições do laminado. Vale ressaltar também os defeitos induzidos pela cura, que causam empenamentos e resultam em tensões residuais no laminado.

A deposição das fibras em geometrias complexas ou por trajetórias curvilíneas resulta em raios de curvatura que devem ser rigorosamente avaliados. Em virtude da trajetória de deposição do feixe das fibras, algumas destas se deformam no plano durante a deposição para se manter na trajetória definida, consequentemente, o raio interno é menor que o externo, gerando tração nas fibras na região externa e compressão na região interna (Figura 1.8).

Dependendo do raio de curvatura, pode ocorrer flambagem local da fibra, produzindo ondulações fora do plano, comprometendo a integridade do laminado após a cura. Portanto, é razoável inferir que um raio mínimo de curvatura deva ser determinado para que nenhuma fibra disposta na região comprimida flambe. Este parâmetro de projeto está

relacionado com a velocidade de deposição da fibra, a força de compactação, a largura do feixe e o material da fibra.

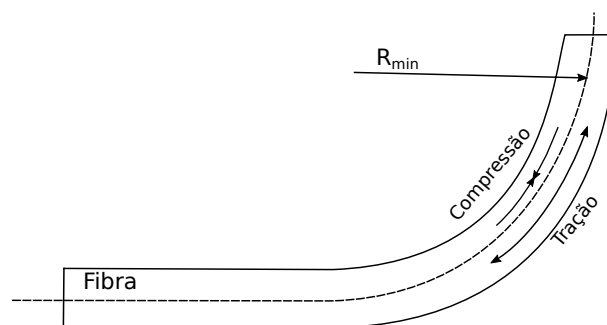


Figura 1.8 – Representação do efeito do raio de curvatura na deposição das fibras.

Adicionalmente, em trajetórias complexas, que não são definidas unicamente pela largura, é importante considerar o surgimento de vazios e sobreposições que influenciam significativamente a qualidade do laminado final.

Duas abordagens diferentes são utilizadas no processo de deposição, sendo definidas pela trajetória, que pode ser feita de forma paralela ou deslocada (Figura 1.9). Na paralela (Figura 1.9a), os feixes são depositados sem que ocorram vazios e sobreposições nas bordas. Esta é a mais utilizada por ser a opção padrão na maioria das máquinas de deposição e também pela facilidade de programação. Todavia, este tipo de trajetória reflete no ângulo de referência padrão no molde, provocando o surgimento de vazios na região interior da curvatura, por desalinhamentos praticamente inevitáveis.

Já no método de deposição por trajetória deslocada, a fibra é transladada e rotacionada em relação à referência, de modo que o ângulo da fibra obedeça à trajetória definida ao longo de todo o laminado. Os defeitos surgem quando o deslocamento da trajetória é realizado sobre um eixo fixo, conforme mostrado na Fig. 1.9.

Independentemente da estratégia adotada, haverá defeitos induzidos pela fabricação e, para garantir a integridade estrutural do laminado, é necessário que haja um severo controle nos processos, de modo a minimizar dimensões dos defeitos e evitar suas concentrações.

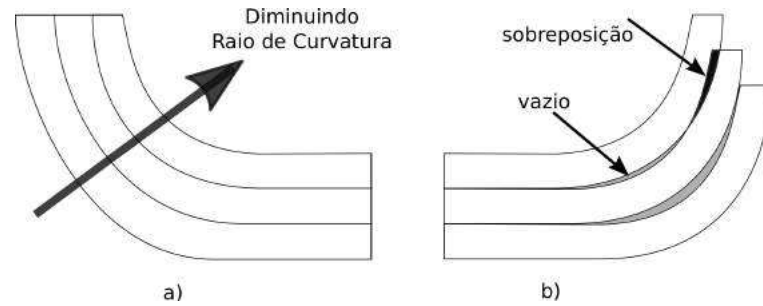


Figura 1.9 – Definição da estratégia de deposição dos feixes: a) deposição por trajetos paralelos; b) deposição com trajetória deslocada.

1.3 Propagação de incertezas e análise de sensibilidade

A análise probabilística em engenharia leva em consideração o conjunto de incertezas existentes em modelos físicos e estuda o impacto dessas discrepâncias na resposta de diversos tipos de sistemas (SUDRET; KIUREGHIAN, 2000). Este campo de estudo busca mesclar o entendimento físico do sistema mecânico combinado com matemática aplicada, por exemplo, teoria probabilística e estatística.

Uma análise de incertezas típica pode ser estruturada nas seguintes etapas (BOOPATHY *et al.*, 2015):

1. **Definição do Modelo:** Define-se o modelo ou sequência de modelos e a análise associada (falha, resistência, dinâmica, aeroelasticidade...) para avaliação do projeto e as características requeridas. Basicamente, avalia-se através da identificação das entradas, avaliando as saídas de cada modelo, possibilitando a realização de análises determinísticas.
2. **Quantificação de Fontes de Incertezas:** Neste passo, definem-se as variáveis sujeitas a incertezas (muitas vezes não conhecidas), as quais podem ser modeladas em um contexto probabilístico, resultando em parâmetros de entrada aleatórios. Em outros casos, as incertezas são modeladas como processos aleatórios nos quais a variação de incertezas é feita em um domínio espacial.
3. **Propagação das Incertezas:** As incertezas são introduzidas no modelo através das entradas, ou de seus parâmetros, resultando em uma resposta aleatória apropriada com respeito ao tipo de análise especificada no passo inicial. Neste caso, vários métodos

existentes podem realizar esta tarefa.

Os métodos de propagação de incertezas geram as informações sobre o impacto da aleatoriedade dos parâmetros incertos na resposta aleatória. Muitas vezes o ranqueamento do impacto das variáveis de entrada na resposta é realizado por meio de *análise de sensibilidade* (BOOPATHY *et al.*, 2015).

No contexto da presente tese, a propagação de incertezas é associada à influência de parâmetros físicos e geométricos sobre as características aeroelásticas e dinâmicas de materiais compostos de rigidez variável. São analisadas por meio de otimizações determinísticas e robustas as influências na resposta do sistema a perturbações nas variáveis incertas.

1.4 Métodos de otimização

Os métodos computacionais de otimização geralmente são utilizados para encontrar os melhores valores das variáveis de projeto com máxima eficiência e menor tempo computacional. As aplicações científicas são diversas e crescentes.

Muitos métodos foram desenvolvidos e dependendo do tipo do problema associado deve-se escolher a técnica apropriada. A escolha do método deve ser feita considerando as características no que diz respeito principalmente com relação ao modelo matemático que o representa (VANDERPLAATS, 1984).

De acordo com a classificação do problema de otimização, geralmente opta-se por métodos determinísticos, cuja abordagem é baseada em cálculos de derivadas ou aproximações, cujo princípio do método tem como base a obtenção do vetor gradiente. No entanto, estes métodos geralmente possuem aplicação limitada a soluções contínuas, com ponto de mínimo ou máximo único e problemas convexos.

Por outro lado, os métodos denominados estocásticos buscam soluções ótimas utilizando cálculos probabilísticos e podem fornecer o resultado ótimo em diferentes problemas que podem ser não lineares, descontínuos, com vários pontos de máximo ou mínimo, e não diferenciáveis. É comum a combinação de algoritmos evolutivos que a partir de princípios de evolução natural buscam soluções baseadas no resultado de aptidão dos indivíduos analisados, da mutação e do cruzamento. Contudo, utilizou-se nos problemas de otimização neste

trabalho o algoritmo evolutivo denominado Evolução Diferencial, desenvolvido por Storn e Price (1997).

1.5 Motivação e objetivos

A utilização de novas técnicas de manufatura para aprimoramento dos laminados em aplicações aeroelásticas cresceu em notoriedade na literatura internacional, mas até o presente momento poucos trabalhos científicos foram produzidos, fato que pode ser comprovado em publicações recentes (Stodieck *et al.* (2013), Stanford *et al.* (2014), Stodieck *et al.* (2014)). Outro ponto que comprova a importância estratégica da tecnologia associada é o financiamento de projetos de pesquisa pela *National Aeronautics and Space Administration* (NASA) nos Estados Unidos da América, que emitiu o documento de oportunidades de pesquisa em aeronáutica de 2015 (ROA, 2015) que incentiva o fomento de técnicas de manufatura, novos materiais e técnicas avançadas de projeto para suportar a necessidade dos desenvolvimentos atuais e futuros de aeronaves civis. Os principais objetivos almejados no desenvolvimento da tese de doutorado são:

1. Levantamento científico do estado da arte em aeroelasticidade utilizando materiais compostos, com foco nos laminados de rigidez variável, incluindo: *tow steering* e *variable fiber spacing*.
2. Desenvolvimento e validação de um modelo aeroelástico numérico, baseado no método de Ritz para resolução aeroelástica de placas de rigidez variável para diferentes regimes aerodinâmicos, ou seja, tanto para escoamento subsônico quanto supersônico.
3. Investigação das condições de incertezas inerentes aos laminados fabricados com deposição automática de fibras em trajetórias curvilíneas, com posterior propagação nos modelos aeroelásticos, buscando soluções robustas de projeto.
4. Formulação e resolução de problemas de otimização determinística, robusta e multi-objetivo para maximização dos ganhos obtidos com a utilização de laminados com rigidez variável comparados com laminados convencionais.

5. Verificação analítica e experimental das características dinâmicas em laminados de rigidez variável, utilizando ferramentas apropriadas para identificação das frequências naturais e dos modos de vibrar.

1.6 Organização da tese

Esta tese foi estruturada como descrito a seguir:

- Capítulo II: é realizada uma revisão bibliográfica a respeito dos principais temas discutidos na tese: análise aeroelástica e dinâmica de laminados fabricados com espaçamento variável na deposição das fibras; métodos de incertezas em sistemas aeroelásticos; análise de laminados de material composto aplicados a *flutter* de painel; e análise do comportamento dinâmico vibracional dos LCRV. Também são discutidos os aspectos teóricos dos tópicos tratados na tese, iniciando com a descrição da teoria clássica de laminação formulada em função dos parâmetros de laminação e dos termos invariantes. Detalha-se a formulação do modelo de placas utilizando o método de Ritz aplicado aos LCRV, seguido da definição dos modelos aerodinâmicos estudados em vista da avaliação dos sistemas aeroelásticos. É detalhado o modelo aerodinâmico subsônico baseado na teoria das faixas com termo não estacionário no termo de arfagem e também um modelo aerodinâmico supersônico baseado no escoamento potencial, conhecido na literatura como *teoria dos pistões*. São discutidos os aspectos dinâmicos vibratórios e aeroelásticos dos LCRV.
- Capítulo III: é investigada a análise aeroelástica em LCRV fabricados com espaçamento variável na deposição das fibras. Considera-se um modelo de uma asa real (engastada-livre) com particularidade de possuir a corda rígida apropriada ao modelo aerodinâmico proposto. Diferentes funções de distribuição dos espaçamentos da fibra e matriz são verificadas na resposta dinâmica e aeroelástica.
- Capítulo IV: apresenta a análise e otimização de laminados fabricados com a deposição das fibras seguindo uma trajetória curvilínea aplicados a *flutter de painel*. O modelo estrutural de placa baseado na teoria clássica de laminação é combinado com o modelo

aerodinâmico supersônico conhecido como teoria dos pistões para análise aeroelástica. Polinômios interpoladores de Lagrange de diferentes ordens são utilizados para otimizar a trajetória a fim de contabilizar os benefícios da utilização de laminados de rigidez variável fabricados com *tow steering* em *flutter* de painel. São discutidos alguns aspectos não lineares e a presença de esforços de membrana que levam a uma resposta combinada de flambagem e *flutter*.

- Capítulo V: é composto da análise teórica e experimental do comportamento dinâmico de placas com rigidez variável. São comparados laminados fabricados com diferentes raios de curvatura e laminados convencionais (sem deposição por caminhos curvilíneos). São apresentados os resultados da análise modal utilizando o software ME'Scope® adquiridos com o sistema Pulse®. Destaca-se que foram consideradas diferentes condições de contorno e com ordens distintas no polinômio de Lagrange, com o objetivo de maximizar a frequência fundamental.
- Capítulo VI: é proposta uma metodologia de otimização robusta com objetivo de aumentar a margem de estabilidade aeroelástica na presença de incertezas nos laminados de rigidez variável. A análise aeroelástica avalia os resultados de *flutter* e divergência obtidos a partir da combinação do modelo estrutural baseado na abordagem de modos assumidos de Ritz e o modelo aerodinâmico subsônico. É realizada uma análise de sensibilidade para determinação dos parâmetros sensíveis, em seguida, propagam-se as incertezas no modelo aeroelástico; e por fim são realizadas otimizações robustas em duas diferentes configurações. Os resultados são comparados com base na média dos valores relativos à margem de estabilidade aeroelástica e à variância.

CAPÍTULO II

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

*“No great discovery was ever made
without a bold guess.” Isaac Newton*

Neste capítulo são sumarizados os principais aspectos teóricos dos temas abordados no desenvolvimento deste trabalho. Inicialmente, é apresentada a revisão bibliográfica, em seguida são descritos os tópicos relativos à teoria clássica de laminação expressos em função dos parâmetros de laminação e dos invariantes. Posteriormente, é apresentada uma descrição do tema *aeroelastic tailoring*, bem como os aspectos teóricos relativos aos laminados de rigidez variável. São discutidos os modelos aerodinâmicos, a construção do modelo estrutural baseado no método de Ritz e finaliza-se com o tópico que aborda as particularidades das análises aeroelásticas do modelo simplificado de asa e de *flutter* de painel.

2.1 Revisão Bibliográfica

2.1.1 Laminados de material composto com espaçamento variável

Vários trabalhos foram desenvolvidos baseados em formulações tradicionais de laminados de material composto, em que as propriedades mecânicas são consideradas constantes em todas as regiões do laminado, assumidas, simplificadamente, com seus valores médios. No entanto, poucos trabalhos são encontrados na literatura em que a quantidade de fibra e resina muda ao longo dos laminados.

A partir da investigação bibliográfica realizada, constatou-se que Leissa e Martin (1990) foram os primeiros a considerar espaçamento variável das fibras. Os autores estudaram o comportamento vibracional e a resposta à flambagem de laminados retangulares fabricados com material composto, cujas fibras foram espaçadas de forma não uniforme com orientações paralelas. Seus estudos se limitaram a laminados com apenas uma camada, com propriedades macroscopicamente ortotrópicas e não uniformes.

Kuo e Shiau (2009) estudaram laminados com espaçamento variável utilizando um modelo de elementos finitos, baseado na dependência espacial do laminado para propagação das propriedades não homogêneas do material. Os autores encontraram algumas distribuições no espaçamento de fibras que melhoraram o comportamento em flambagem e alteraram as frequências naturais.

Houmat (2012) investigou o efeito não linear geométrico em placas com espaçamento variável de fibras, considerando deposição das fibras preponderantemente na região central, em detrimento das regiões próximas às bordas. Foram analisados diferentes materiais como fibra de vidro, boro e grafite em diferentes condições de contorno, tendo sido verificado o efeito do enrijecimento.

Shiau e Lee (1993) desenvolveram um modelo de elementos finitos de alta ordem para analisar o efeito do espaçamento variável de fibras em laminados com furos sujeitos a carregamentos de membrana, e concluíram que a redução do volume de fibras nas regiões próximas às bordas do furo diminui a concentração de tensão nessas regiões.

Kuo (2016) estudou a influência aerotermoelástica em laminados do tipo *angle ply* com espaçamento variável. As análises indicaram que o controle do volume de fibras pode provocar o aumento da carga de flambagem, e também ao aumento da frequência natural e da fronteira de *flutter* de painel.

2.1.2 Métodos de incertezas aplicados a sistemas aeroelásticos

Alguns trabalhos reportados na literatura tratam de forma estocástica o comportamento aeroelástico de estruturas aeronáuticas. Entretanto, no contexto de incertezas associadas aos LCRV fabricados com *tow steering* não foram encontradas publicações que tratassem desta abordagem.

Pettit (2004) reúne resultados relativos à quantificação de incertezas em aplicações aeroelásticas para diferentes aplicações, por exemplo, análise experimental de *flutter* e otimização do comportamento aeroelástico com restrições, com ênfase à elucidação de condições físicas do problema, visando a novas abordagens e métodos de projeto. Este trabalho não se restringiu a abordagens acadêmicas; todavia trata também de aspectos relativos à certificação de produtos aeronáuticos.

Lindsley *et al.* (2002) apresentam desenvolvimentos e validação de estratégias para investigação do impacto de incertezas em sistemas aeroelásticos multidisciplinares na resposta não linear de painéis sujeitos a escoamentos supersônicos. Basicamente, o modelo aeroelástico combina as hipóteses de Von Kàrman no que diz respeito ao comportamento não linear da placa, com o escoamento supersônico modelado pela teoria do ‘pistão’. Foram consideradas incertezas no módulo de elasticidade do material, nas condições de contorno e no escoamento aerodinâmico.

Khodaparast *et al.* (2010) investigam o efeito de incertezas em nível do material na resposta linear do problema de *flutter*. Os autores identificaram os parâmetros mais influentes sobre o comportamento aeroelástico, depois foram testados os métodos de intervalo, *fuzzy* e método probabilístico. Os resultados mostram que a variabilidade da massa e dos parâmetros de rigidez proporcionam um efeito significativo na fronteira de *flutter*; já o amortecimento estrutural acarreta um aumento pequeno e insignificante da fronteira de flutter.

Kuttenkeuler e Ringertz (1998) apresentam estudo sobre o comportamento aeroelástico de estruturas de material composto na presença de incertezas no material e nas propriedades mecânicas, tanto do ponto de vista experimental quanto numérico. A análise de *flutter* fundamenta-se em um modelo de elementos finitos (FEM) e o modelo aerodinâmico baseia-se no método *doublet-lattice* para o cálculo do esforços aerodinâmicos não estacionários. Os autores concluem que é possível encontrar uma configuração de projeto robusta mas é necessário cuidado na formulação no modelo numérico.

Scarth *et al.* (2015a) propõem um modelo gaussiano para simular o comportamento aeroelástico de uma asa de material composto com incertezas nos ângulos do *lay-up*. Os autores realizaram uma otimização robusta e comparam os resultados com os obtidos utilizando o modelo completo baseado nas funções de densidade de probabilidade (FDP).

2.1.3 *Flutter de painéis*

Flutter de painel é um fenômeno aeroelástico dinâmico causado essencialmente pela interação entre as forças de inércia, elástica e aerodinâmica (Fig. 1.2) geradas por um escoamento supersônico. Para o desenvolvimento de um projeto seguro é imprescindível a determinação das condições de operação críticas no que diz respeito ao *Mach* e pressão dinâmica. Os trabalhos mais clássicos foram desenvolvidos visando ao entendimento das instabilidades aeroelásticas ocorridas nos foguetes V-2 buscando diferentes abordagens tanto no desenvolvimento estrutural quanto na modelagem aerodinâmica (DOWELL, 1966).

Dowell (1970) apresenta uma revisão a respeito de *flutter* da painel, introduzindo os primeiros modelos matemáticos com correlações experimentais. Yang e Sung (1977) propuseram em seu estudo um modelo de raio duplo para um modelo de elementos finitos do tipo casca em modelos de materiais compostos. Xue e Mei (1993) desenvolveram um modelo de elementos finitos incorporando efeitos não lineares para análise de *flutter* de painel de laminados de material composto considerando o modelo de von Kàrman para deformações moderadas no domínio do tempo. Shore *et al.* (1991) avaliaram também os efeitos não lineares para diferentes configurações no que diz respeito ao alongamento, ângulos de laminação e quantidade de camadas.

Em projetos de painéis aeronáuticos e aeroespaciais é comum a utilização de estruturas reforçadoras que aprimoram o comportamento em condições de instabilidade estática (*buckling*) e aeroelástica (*flutter*). Neste aspecto, foram propostos alguns modelos de elementos finitos com diferentes enfoques. Holopainen (1995) desenvolveu um modelo para efetuar análise de vibrações em placas reforçadas. Os autores reportaram problemas recorrentes devido a distorções na malha. Lee *et al.* (1999) apresentaram um modelo de elementos finitos baseado na primeira ordem de cisalhamento para avaliar *flutter* em um laminado de material composto com reforçadores. Foi verificado que os modelos unidimensionais dos reforçadores puderam representar com alta fidelidade o comportamento dinâmico estrutural.

Além disso, vários autores ainda utilizaram modelos de elementos finitos (LIAO; SUN, 1993; OH; KIM, 2009; SINGHA; GANAPATHI, 2005; LI; SONG, 2013; XIA; NI, 2011), mas poucos estudos que aplicam modelos semi analíticos para análise de *flutter* em placas e cascas

(ZHAO; CAO, 2013; KOUCHAKZADEH *et al.*, 2010).

Adicionalmente, com a pesquisa bibliográfica realizada, registram-se algumas pesquisas desenvolvidas para aprimoramento e controle de flutter de painel utilizando: atuadores piezoelétricos (ZHOU *et al.*, 1995), base do reforçador como elemento estrutural (CASTRO *et al.*, 2016) e materiais eletro-reológicos (HASHEMINEJAD; MOTAALEGHI, 2015).

2.1.4 Comportamento dinâmico vibracional de laminados de rigidez variável

Estruturas aeronáuticas, em que materiais compostos são amplamente utilizados, estão sujeitas a carregamentos dinâmicos que podem agir excitando os modos estruturais. Em tais condições, o projeto deve ser feito evitando que a frequência fundamental esteja na faixa de frequências de excitação críticas, para se evitarem instabilidades.

O trabalho de Abdalla *et al.* (2007) buscou aumentar a frequência fundamental em LCRV utilizando parâmetros de laminação. Os autores utilizaram um método de otimização estrutural denominado ‘aproximação recíproca generalizada’ e encontraram regiões convexas para a solução do problema. Kameyama e Fukunaga (2007) otimizaram uma placa laminada com condição de contorno engastada-livre, modelada utilizando parâmetros de laminação, para aplicações aeroelásticas com restrições de divergência e *flutter*. Os autores, porém, não evoluíram com o projeto para obter a configuração do *lay-up*.

Blom *et al.* (2008) desenvolveram um trabalho que buscava maximizar a frequência fundamental de placas cônicas fabricadas com a deposição de fibras automáticas por diferentes trajetórias. Os autores aplicaram restrições de manufatura assumidas em concordância com o processo e compararam os ganhos obtidos pela utilização dos LCRV nas estruturas cônicas comparados com os LCRC. Já os autores Haddadpour e Zamani (2012) adicionaram na análise do problema aeroelástico de uma asa modelada em forma de viga, considerando restrição do ângulo de curvatura para deposição das fibras no LCRV e utilizando somente variações lineares na orientação das fibras.

Akhavan e Ribeiro (2011) estudaram as frequências naturais e os modos de vibrar de LCRV fabricadas com fibras curvas. Os autores desenvolveram um modelo de elementos finitos, baseado na teoria de cisalhamento de terceira ordem, e demonstraram mapas das frequências naturais considerando restrições de manufatura em função do ângulo de controle

da trajetória.

Ribeiro *et al.* (2014) revisaram os trabalhos a respeito dos LCRV, focando principalmente em flambagem, falhas e no comportamento dinâmico dos laminados com fibras curvilíneas. Foi realizada também a análise dinâmica, com determinação das frequências naturais dos LCRV utilizando teoria de deformação de terceira ordem implementada via elementos finitos. Os autores sugeriram também áreas de pesquisa para serem exploradas em LCRV.

A pesquisa realizada por Akbarzadeh *et al.* (2016) procurou encontrar a melhor trajetória para deposição de fibras nos LCRV, aplicados a painéis sanduíches e revestimentos, combinados com camadas magnetostrictoras para controle de vibrações. Foi comparada a resposta do deslocamento fora do plano devida à vibração para configurações fabricadas com vazios e sobreposição de fibras. Além disso, o trabalho mostrou que as camadas magnetostrictoras apresentaram um alto ganho no controle de vibração da placa.

2.2 Teoria Clássica da Laminação

A teoria sumarizada nesta seção pode ser encontrada com maior detalhamento, em Jones (1998).

A aplicação da teoria clássica de laminação é geralmente limitada a laminados de pequena espessura, em virtude das condições conhecidas como hipóteses de Kirchhoff (LOVE, 1888) adotadas. Desta forma, a relação tensão-deformação na direção principal da camada de laminado, representada na Fig. 2.1 pode ser escrita como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (2.1)$$

sendo ‘1’ a direção da fibra e ‘2’ a direção normal à fibra no plano do laminado. Assumindo estado plano de tensão ($\sigma_3 = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$), os elementos da matriz \mathbf{Q} , denominados termos

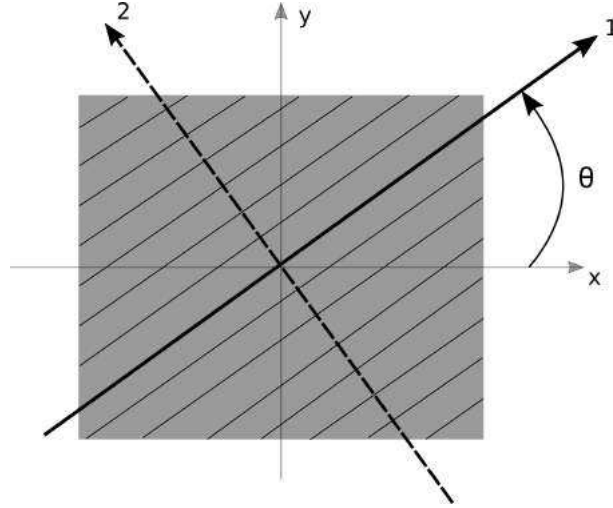


Figura 2.1 – Representação do sistema de coordenadas adotado para a lamina.

de rigidez reduzida, são escritos da seguinte forma:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad (2.2)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad (2.3)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad (2.4)$$

$$Q_{66} = G_{12}, \quad (2.5)$$

$$\frac{E_1}{\nu_{12}} = \frac{E_2}{\nu_{21}}. \quad (2.6)$$

A transformação do sistema de coordenadas local da lâmina (1,2) para o sistema global do laminado (x,y) é feita a partir do ângulo θ que define a sua orientação no laminado, conforme a matriz de transformação \mathbf{T} , expressa pela Equação 2.7. Com o auxílio dessa matriz, é possível converter valores de tensão e deformação do sistema local para o global.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix}, \quad (2.7)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (2.8)$$

Faz-se necessária uma transformação adicional do tensor de deformação, para que a deformação referente ao cisalhamento seja escrita como a deformação angular de engenharia γ_{12} , o que é feito com o auxílio da matriz \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{R} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (2.10)$$

Combinando a Equação 2.1 com as Equações 2.7 e 2.10, obtém-se a relação tensão deformação para um sistema de coordenadas global:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{R} \mathbf{T} \mathbf{R}^{-1} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (2.11)$$

em que se destaca a matriz de rigidez da lâmina rotacionada em relação ao sistema global do laminado:

$$\tilde{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q} \mathbf{R} \mathbf{T} \mathbf{R}^{-1}. \quad (2.12)$$

A rigidez do laminado é constituída pela contribuição de múltiplas camadas. Por este motivo, é necessário explicitar as condições assumidas pela teoria clássica de laminação. Considera-se que cada camada seja perfeitamente colada nas camadas adjacentes, por um filme adesivo de espessura infinitesimal. Supõe-se que cada camada possua a mesma deformação de cisalhamento no plano variando linearmente ao longo da espessura sob efeitos de flexão. As deformações do laminado são equacionadas em função da coordenada normal à

sua superfície (z) conforme a expressão:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (2.13)$$

em que o índice 0 representa o plano médio do laminado e κ a curvatura.

Um exemplo de laminado com k camadas de espessuras diferentes é ilustrado na Fig. 2.2.

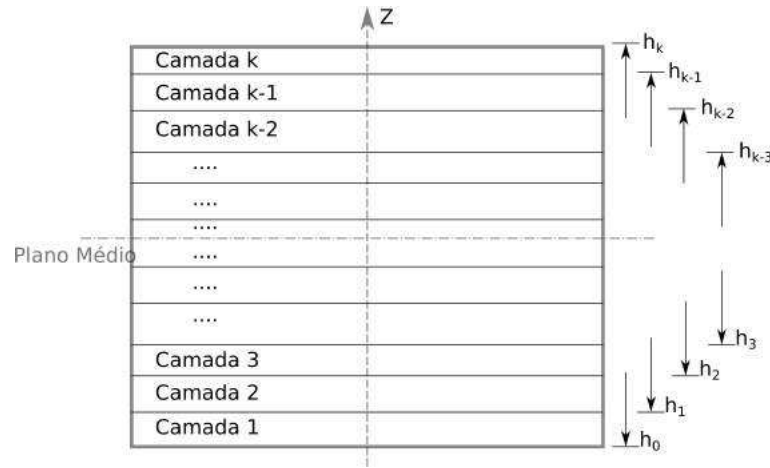


Figura 2.2 – Seção transversal do laminado composto por camadas de diferentes espessuras.

Combinando as Equações 2.11 e 2.13 chega-se à equação que representa a relação tensão-deformação de cada camada em função de sua coordenada (z), definida a partir do plano médio do laminado, ao longo da espessura do laminado:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \tilde{\mathbf{Q}}_{(k)} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \tilde{\mathbf{Q}}_{(k)} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (2.14)$$

Integrando as tensões ao longo da espessura obtêm-se as tensões e os esforços internos aplicados ao laminado. Considerando a descontinuidade da distribuição das tensões ao longo da espessura do laminado, a determinação dos esforços é realizada por integração

discretizada, por camada, resultando nas seguintes expressões:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz, \quad (2.15)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} z \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz. \quad (2.16)$$

Combinando as Equações 2.14, 2.15 e 2.16, e realizando integrações simples encontram-se as relações:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \tilde{\mathbf{Q}}_{(k)} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} (h_k - h_{k-1}) + \tilde{\mathbf{Q}}_{(k)} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) \right\}, \quad (2.17)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \left\{ \tilde{\mathbf{Q}}_{(k)} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) + \tilde{\mathbf{Q}}_{(k)} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \frac{1}{3} (h_k^3 - h_{k-1}^3) \right\}, \quad (2.18)$$

convenientemente reescritas como:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{A} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \mathbf{B} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (2.19)$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{B} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \mathbf{D} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (2.20)$$

As matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} e \mathbf{D} explicitadas na Equação 2.21, representam respectivamente a matriz de rigidez de membrana, de acoplamento, e a matriz de rigidez à flexão/torção,

sendo a matriz de acoplamento \mathbf{B} inexistente para laminados simétricos.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ & A_{22} & A_{26} & & B_{22} & B_{26} \\ sim. & & A_{66} & sim. & & B_{66} \\ \hline B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ & B_{22} & B_{26} & & D_{22} & D_{26} \\ sim. & & B_{66} & sim. & & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

A Equação 2.21 permite a visualização de todos os possíveis acoplamentos. Supondo laminados simétricos ($\mathbf{B}=0$), no que diz respeito à matriz de membrana \mathbf{A} , os termos A_{16} e A_{26} representam o acoplamento entre as deformações normais no plano e distorções de cisalhamento, que na prática significa que, quando aplicado um carregamento normal no plano, o laminado simultaneamente irá se deformar extensionalmente e por cisalhamento. Estes termos, porém, são condicionados a laminados não balanceados, ou seja, quando se tem no laminado uma camada orientada sob o ângulo $+\theta$, mas não se tem outra sob o ângulo $-\theta$.

No tocante à matriz \mathbf{D} , considerações similares podem ser feitas. No entanto, os termos D_{16} e D_{26} representam o acoplamento entre a flexão e a torção, o que significa que quando aplicado um carregamento puramente de flexão, o laminado irá torcer. Do ponto de vista aeroelástico, estes termos são especialmente controlados para fins de aumento da margem de estabilidade e serão especialmente tratados na seção referente a *aeroelastic tailoring*.

Uma possibilidade de se obter a matriz de rigidez do laminado em função da sequência de empilhamento é utilizar parâmetros de laminação (*lamination parameters*) que foram propostos inicialmente por Tsai (1980) e representam a contribuição da sequência de

empilhamento integrada ao longo do laminado da seguinte forma:

$$(V_{1A}, V_{2A}, V_{3A}, V_{4A}) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} (\cos(2\theta), \sin(2\theta), \cos(4\theta), \sin(4\theta)) dz, \quad (2.22)$$

$$(V_{1B}, V_{2B}, V_{3B}, V_{4B}) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} z (\cos(2\theta), \sin(2\theta), \cos(4\theta), \sin(4\theta)) dz, \quad (2.23)$$

$$(V_{1D}, V_{2D}, V_{3D}, V_{4D}) = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 (\cos(2\theta), \sin(2\theta), \cos(4\theta), \sin(4\theta)) dz, \quad (2.24)$$

e as propriedades dos materiais, representadas pelas matrizes invariantes Γ_i , constituídas pelos invariantes do material I_i que, equacionados a partir da matriz reduzida de rigidez, são:

$$I_1 = (3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66})/8, \quad (2.25)$$

$$I_2 = (Q_{11} - Q_{22})/2, \quad (2.26)$$

$$I_3 = (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66})/8, \quad (2.27)$$

$$I_4 = (Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66})/8, \quad (2.28)$$

$$I_5 = (3Q_{11} + 3Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66})/8. \quad (2.29)$$

As matrizes invariantes são definidas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}_0 &= \begin{bmatrix} I_1 & I_4 & 0 \\ I_4 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}_1 = \begin{bmatrix} I_2 & 0 & 0 \\ 0 & -I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_2/2 \\ 0 & 0 & I_2/2 \\ I_2 & I_2 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{\Gamma}_3 &= \begin{bmatrix} I_3 & -I_3 & 0 \\ -I_3 & I_3 & 0 \\ 0 & 0 & -I_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Gamma}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I_3 \\ 0 & 0 & -I_3 \\ I_3 & -I_3 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Portanto, a matriz **A**, **B** e **D** também podem ser assim obtidas em função dos

Invariantes:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= h(\Gamma_0 + \Gamma_1 V_{1A} + \Gamma_2 V_{2A} + \Gamma_3 V_{3A} + \Gamma_4 V_{4A}), \\
 \mathbf{B} &= \frac{h^2}{4}(\Gamma_1 V_{1B} + \Gamma_2 V_{2B} + \Gamma_3 V_{3B} + \Gamma_4 V_{4B}), \\
 \mathbf{D} &= \frac{h^3}{12}(\Gamma_0 + \Gamma_1 V_{1D} + \Gamma_2 V_{2D} + \Gamma_3 V_{3D} + \Gamma_4 V_{4D}).
 \end{aligned} \tag{2.31}$$

2.3 Aeroelastic Tailoring

Shirk *et al.* (1986) ilustram, utilizando modelos teóricos simples, a influência da sequência de empilhamento em um laminado de material composto em relação à divergência, à redistribuição do carregamento na asa, e à eficiência de controle para aeronaves com enflechamento positivo e negativo. Os autores constataam que o controle aeroelástico através dos coeficientes de acoplamento de flexo-torção é favorável para o enrijecimento da asa com enflechamento negativo, necessário para contenção do fenômeno de divergência. É também apresentada uma perspectiva histórica dos projetos que fomentaram os desenvolvimentos e a fundamentação teórica interveniente. Os trabalhos iniciais se baseavam, em sua grande maioria, em modelos de asa do tipo viga, considerando o acoplamento aeroelástico para controle da sequência de empilhamento do laminado.

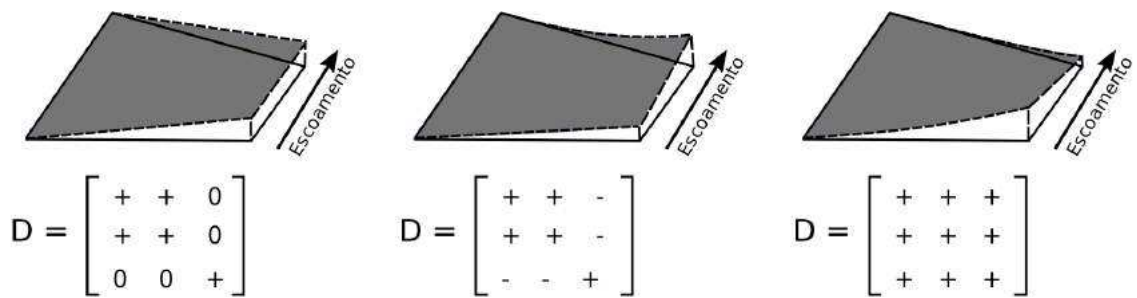


Figura 2.3 – Representação física do acoplamento de flexo-torção. Adaptado de Shirk *et al.* (1986).

Simplificando, pode-se entender *aeroelastic tailoring* também como uma forma de se realizar controle aeroelástico passivo. De maneira genérica, o controle da sequência de empilhamento de uma estrutura em material composto garante acoplamento principalmente dos termos de flexo-torção (Figura 2.3) causando tanto o efeito de levantamento do bordo de ataque *wash in* quanto o abaixamento do bordo de ataque *wash out*. O efeito de abaixamento

do bordo de ataque é caracterizado por um alívio de carga aerodinâmica, principalmente, visando ao controle das superfícies no bordo de ataque da asa e controle da divergência estática. Analisando os termos de acoplamento, sendo estes positivos, haverá uma melhor controlabilidade das superfícies no bordo de fuga, com melhor eficiência de sustentação e um melhor cenário para o *flutter*. Os benefícios aeroelásticos adquiridos vêm em conjunto com um cenário oposto do comportamento mecânico estrutural. Entretanto, necessita-se de uma solução de compromisso, pois quanto maior o efeito de flexo-torção, maior será também a espessura final do laminado (STANFORD *et al.*, 2014).

Na maioria dos artigos pesquisados, verifica-se a simplificação da estrutura da asa, tratada como viga ou placa fina. Entretanto, Stanford *et al.* (2014) conceberam uma estrutura-caixão completa para a modelagem da asa, considerando um modelo de geometria de asa desenvolvida pela NASA, para validação de seus estudos de CFD. Seu modelo estrutural contempla revestimento, reforçadores, nervuras e longarinas modeladas, cada elemento estrutural com um dado empilhamento, a fim de explorar o controle passivo de fenômenos aeroelásticos com monitoramento da sequência de deposição das fibras. O estudo focou em métodos de controle da sequência de empilhamento empregando avanços obtidos a partir de técnicas recentes de fabricação (Figura 2.4), principalmente a técnica de manufatura aditiva, aplicada a nervuras/longarinas/reforçadores curvilíneos e deposição de fibras controladas em trajetórias curvilíneas.

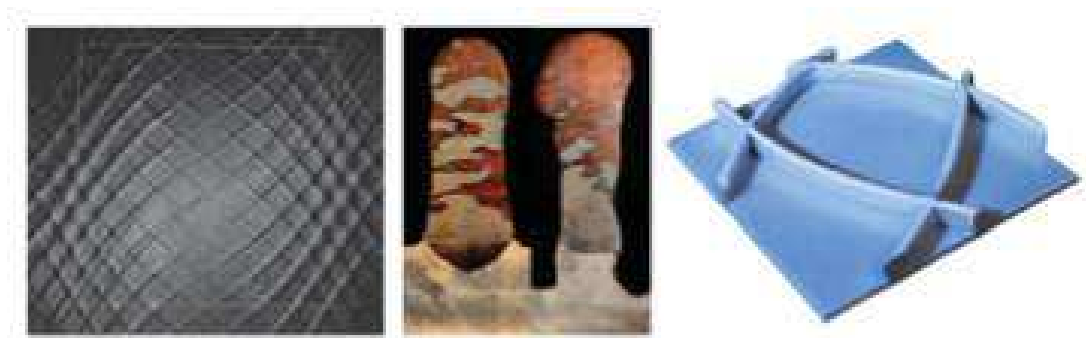


Figura 2.4 – Estruturas manufaturadas com novas tecnologias de empilhamento: *tow steering* (esquerda), adição funcional de material (centro) e reforçadores curvos (direita). Fonte (STANFORD *et al.*, 2014).

2.4 Laminados de rigidez variável

Tradicionalmente, os laminados são constituídos de várias lâminas, com a orientação da fibra constante em uma camada (Figura 2.1), empilhadas seguindo uma ordem estabelecida em busca do melhor desempenho para cada aplicação de interesse. Desta forma, as propriedades de rigidez do laminado são independentes da posição espacial, sendo estes referidos no contexto deste trabalho como laminados de rigidez constante (LRC). Em contrapartida, laminados com rigidez variável são aqueles que possuem propriedades dependentes da localização espacial, o que significa que as propriedades variam de ponto a ponto do laminado.

A variação de rigidez pode ser obtida de diferentes formas. Por exemplo, de forma contínua, com a deposição automática das fibras em trajetórias curvilíneas (processo denominado *tow steering*); ou adicionando no laminado microfibras de carbono (*functionally graded materials* - *FGM*) ou ainda, fazendo a deposição das fibras considerando um espaçamento variável sobre o laminado (*variable fiber spacing*).

Neste trabalho são investigados os laminados fabricados com a técnica *tow steering* e com deposição das fibras com espaçamento variável.

2.4.1 Modelagem de laminados fabricados pelo processo *tow steering*

Por conveniência, na construção da matriz de rigidez do laminado, normalmente, não se define a trajetória para a deposição das fibras e sim o ângulo θ conhecido com *steering angle*. De acordo com Tatting e Guerdal (2002) a expressão que generaliza o ângulo da fibra $\theta(x')$ ao longo de um eixo arbitrário x' usando uma variação linear é da forma:

$$\theta(x') = \phi + (T_1 - T_0) \frac{|x'|}{d} + T_0, \quad (2.32)$$

sendo T_1 e T_0 os ângulos da fibra no começo e no fim de um comprimento característico d . A orientação x' com respeito ao eixo global x é definida pelo ângulo ϕ . Estes parâmetros podem ser visualizados na Fig. 2.5. Pode-se representar o laminado segundo a notação proposta por OLMEDO e GURDAL (1993) determinada por $\phi < T_0, T_1 >$.

É conveniente representar o ângulo da fibra em função da sequência de empilha-

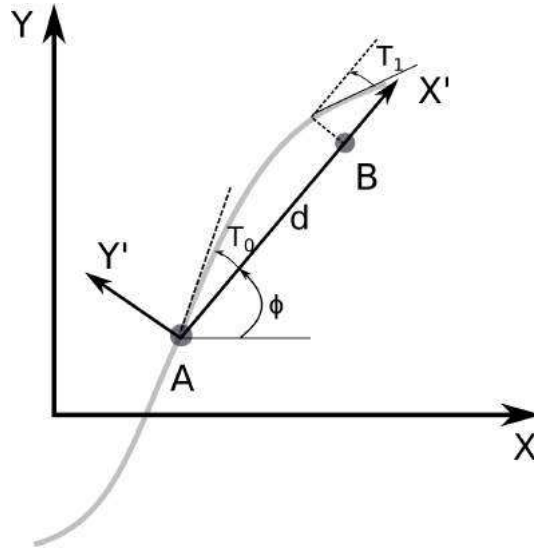


Figura 2.5 – Representação da fibra utilizando variação linear do ângulo, baseado em Gürdal *et al.* (2008).

mento convencional $\phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]$ e a distância d pode ser considerada como o comprimento a ou a largura b (Fig. 2.5) do laminado. Portanto, a expressão para o ângulo da fibra se torna:

$$\theta_i(x) = \phi_i + (T_1 - T_0) \frac{|x|}{a} + T_0. \quad (2.33)$$

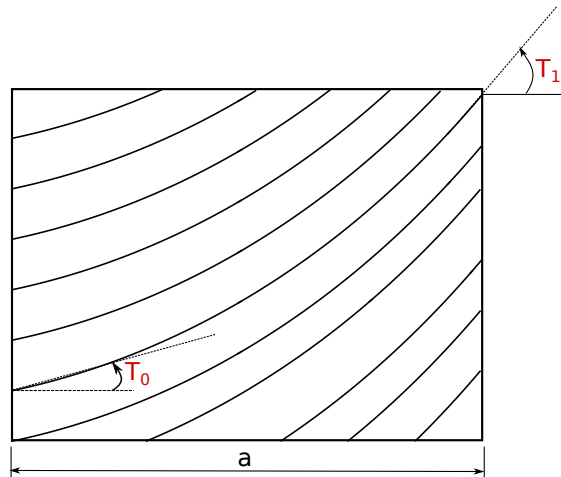


Figura 2.6 – Representação da trajetória de deposição das fibras para primeira camada.

Consequentemente, a trajetória é obtida integrando $dy/dx = \tan(\theta)$ ao longo de x , conforme mostrado na Fig. 2.5. Semelhantemente ao realizado na Figura 2.6 pode-se comparar um laminado convencional de rigidez constante $[0^\circ \ 45^\circ \ -45^\circ \ 90^\circ]$ e um laminado de rigidez variável $[0^\circ \ -45^\circ \ 45^\circ \ 90^\circ] <10^\circ, 50^\circ>$ com relação à trajetória de deposição da fibra

na Fig. 2.7.

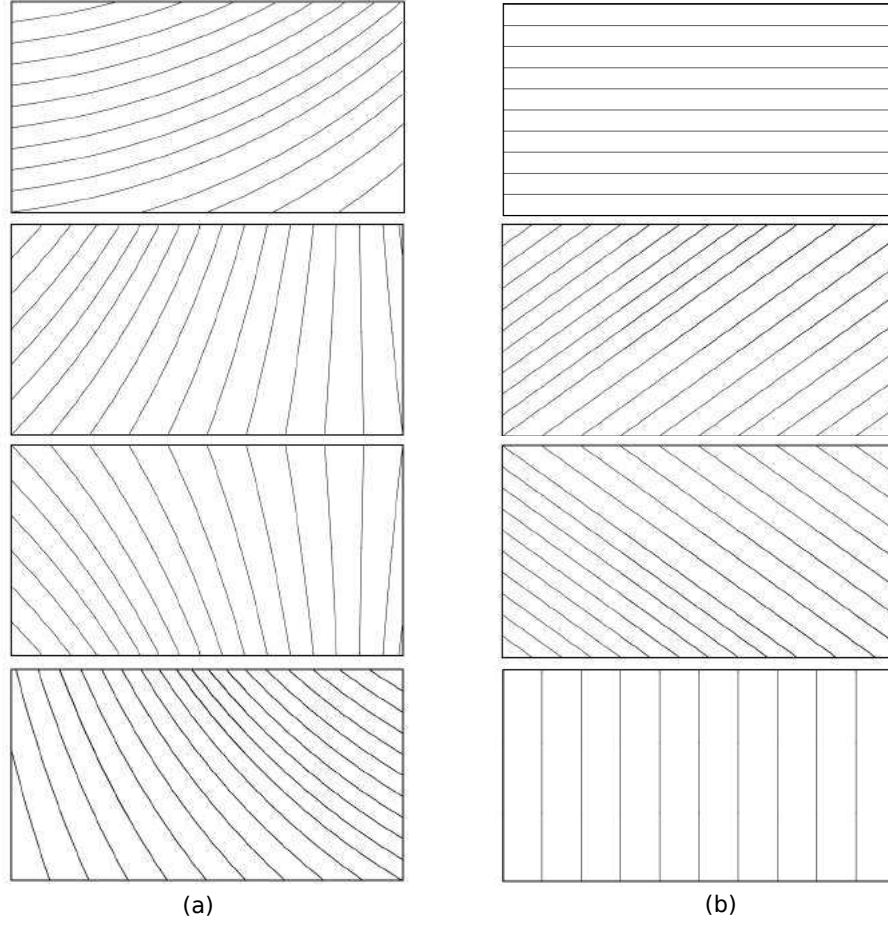


Figura 2.7 – Representação de dois tipos de laminados: (a) com rigidez variável $[0^\circ -45^\circ 45^\circ 90^\circ]$; (b): convencional $[0^\circ 45^\circ -45^\circ 90^\circ]$.

Evidentemente, quanto mais complexa for a trajetória, maior será a quantidade de variáveis de controle. Neste contexto, duas estratégias para o equacionamento do ângulo da fibra foram encontradas na literatura. Alhajahmad *et al.* (2008) utilizam polinômios de Lobatto para definição do ângulo de controle da trajetória ao longo da superfície. Neste caso, o ângulo é definido em função das coordenadas normalizadas ($\zeta = x/a, \eta = y/b$) como:

$$\theta_i(\zeta, \eta) = \phi_i + \sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=0}^{n-1} T_{ij} L_i(\zeta) L_j(\eta), \quad (2.34)$$

onde m e n são os números das funções base; L_i e L_j são polinômios de Lobato e T_{ij} são as variáveis de controle definidas ao longo da superfície do laminado, conforme mostrado na Fig. 2.8. Mais recentemente Wu *et al.* (2012) propuseram a utilização de polinômios de Legendre para interpolação dos ângulos da fibra, de maneira semelhante ao desenvolvido por

Alhajahmad *et al.* (2008).

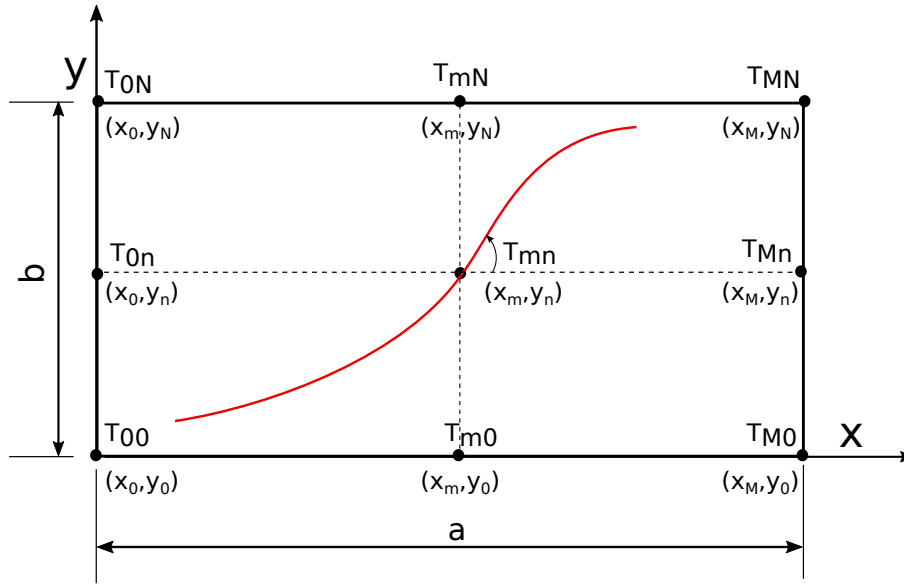


Figura 2.8 – Orientação não linear da trajetória da fibra obtida utilizando pontos de controle e interpolação por polinômios ortogonais.

2.4.2 Modelagem de laminados fabricados com espaçamento de fibras variável

Constata-se que na maioria dos trabalhos encontrados na literatura as propriedades mecânicas dos materiais são tratadas sem a consideração de variações de espaçamento entre as fibras. Por outro lado, é necessário um controle rigoroso do espaçamento na deposição das fibras, no processo de manufatura, pois são recorrentes os defeitos com regiões ricas em resina ou com sobreposição de fibras.

Na Figura 2.9 é ilustrada uma situação em que as fibras não são uniformemente espaçadas, estando estas mais distanciadas entre si na região central. Diferentes abordagens podem ser propostas para definir o espaçamento entre as fibras dependendo do objetivo de concepção do projeto estrutural. Neste trabalho são investigadas algumas funções para distribuição das fibras, contemplando situações diferenciadas de espaçamentos nas bordas e no centro do laminado.

Em um laminado formado por N camadas compostas por feixes de lâminas ortotrópicas coladas, adota-se uma expressão para a variação do espaçamento entre a deposição das fibras dependente da posição ao longo do laminado $V_f(\zeta, \eta)$. Consequentemente, as propriedades do material composto se tornam dependentes da posição no laminado e é proposta

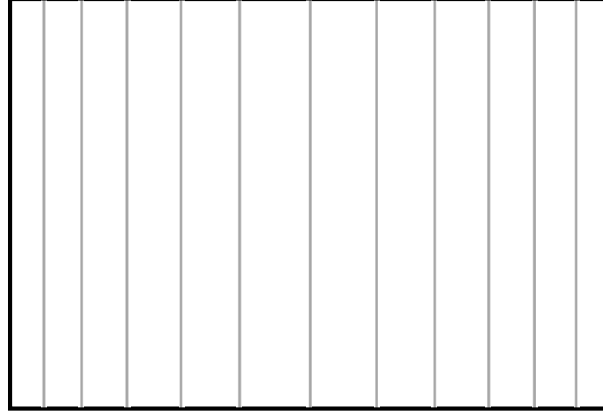


Figura 2.9 – Esboço de um laminado com deposição com espaçamento entre as fibras variável.

a avaliação destas propriedades utilizando a *regra da mistura* expressa de forma genérica como (AGARWAL *et al.*, 2006):

$$E_1(\zeta, \eta) = E_f V_f(\zeta, \eta) + E_m(1 - V_f(\zeta, \eta)), \quad (2.35)$$

$$E_2(\zeta, \eta) = \frac{E_f E_m}{E_f(1 - V_f(\zeta, \eta)) + E_m V_f(\zeta, \eta)}, \quad (2.36)$$

$$\nu_{12}(\zeta, \eta) = \nu_f V_f(\zeta, \eta) + \nu_m(1 - V_f(\zeta, \eta)), \quad (2.37)$$

$$G_{12}(\zeta, \eta) = \frac{G_f G_m}{G_f(1 - V_f(\zeta, \eta)) + G_m V_f(\zeta, \eta)}, \quad (2.38)$$

$$\nu_{21}(\zeta, \eta) = \frac{\frac{E_f E_m}{E_f(1 - V_f(\zeta, \eta)) + E_m V_f(\zeta, \eta)}}{E_f V_f(\zeta, \eta) + E_m(1 - V_f(\zeta, \eta))} \nu_f V_f(\zeta, \eta) + \nu_m(1 - V_f(\zeta, \eta)), \quad (2.39)$$

$$\rho(\zeta, \eta) = \rho_f V_f(\zeta, \eta) + \rho_m(1 - V_f(\zeta, \eta)). \quad (2.40)$$

e as Equações 2.2 a 2.6 são reescritas da seguinte forma:

$$Q_{11}(\zeta, \eta) = \frac{E_f V_f(\zeta, \eta) + E_m(1 - V_f(\zeta, \eta))}{1 - \nu_f V_f(\zeta, \eta) + \nu_m(1 - V_f(\zeta, \eta))\nu_{21}(\zeta, \eta)}, \quad (2.41)$$

$$Q_{22}(\zeta, \eta) = \frac{\frac{E_f E_m}{E_f(1 - V_f(\zeta, \eta)) + E_m V_f(\zeta, \eta)}}{\nu_f V_f(\zeta, \eta) + \nu_m(1 - V_f(\zeta, \eta))\nu_{21}(\zeta, \eta)}, \quad (2.42)$$

$$Q_{12}(\zeta, \eta) = \frac{\nu_f V_f(\zeta, \eta) + \nu_m(1 - V_f(\zeta, \eta))\frac{E_f E_m}{E_f(1 - V_f(\zeta, \eta)) + E_m V_f(\zeta, \eta)}}{1 - \nu_f V_f(\zeta, \eta) + \nu_m(1 - V_f(\zeta, \eta))\nu_{21}(\zeta, \eta)}, \quad (2.43)$$

$$Q_{66}(\zeta, \eta) = \frac{G_f G_m}{G_f(1 - V_f(\zeta, \eta)) + G_m V_f(\zeta, \eta)}. \quad (2.44)$$

Consequentemente, os termos denominados *invariantes* se tornam variáveis espa-

cialmente e são reescritos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 I_1(\zeta, \eta) = & \left(3 \frac{E_f V_f(\zeta, \eta) + E_m(1 - V_f(\zeta, \eta))}{1 - \nu_f V_f(\zeta, \eta) + \nu_m(1 - V_f(\zeta, \eta))\nu_{21}(\zeta, \eta)} + \right. \\
 & 3 \frac{\frac{E_f E_m}{E_f(1 - V_f(\zeta, \eta)) + E_m V_f(\zeta, \eta)}}{\nu_f V_f(\zeta, \eta) + \nu_m(1 - V_f(\zeta, \eta))\nu_{21}(\zeta, \eta)} + \\
 & 2 \frac{\nu_f V_f(\zeta, \eta) + \nu_m(1 - V_f(\zeta, \eta)) \frac{E_f E_m}{E_f(1 - V_f(\zeta, \eta)) + E_m V_f(\zeta, \eta)}}{1 - \nu_f V_f(\zeta, \eta) + \nu_m(1 - V_f(\zeta, \eta))\nu_{21}(\zeta, \eta)} + \\
 & \left. 4 \frac{G_f G_m}{G_f(1 - V_f(\zeta, \eta)) + G_m V_f(\zeta, \eta)} \right) / 8,
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}
 I_2(\zeta, \eta) = & \left(\frac{E_f V_f(\zeta, \eta) + E_m(1 - V_f(\zeta, \eta))}{1 - \nu_f V_f(\zeta, \eta) + \nu_m(1 - V_f(\zeta, \eta))\nu_{21}(\zeta, \eta)} + \right. \\
 & \left. - \frac{\frac{E_f E_m}{E_f(1 - V_f(\zeta, \eta)) + E_m V_f(\zeta, \eta)}}{\nu_f V_f(\zeta, \eta) + \nu_m(1 - V_f(\zeta, \eta))\nu_{21}(\zeta, \eta)} \right) / 2,
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned}
 I_3(\zeta, \eta) = & \left(\frac{E_f V_f(\zeta, \eta) + E_m(1 - V_f(\zeta, \eta))}{1 - \nu_f V_f(\zeta, \eta) + \nu_m(1 - V_f(\zeta, \eta))\nu_{21}(\zeta, \eta)} + \right. \\
 & \frac{\frac{E_f E_m}{E_f(1 - V_f(\zeta, \eta)) + E_m V_f(\zeta, \eta)}}{\nu_f V_f(\zeta, \eta) + \nu_m(1 - V_f(\zeta, \eta))\nu_{21}(\zeta, \eta)} + \\
 & - 2 \frac{\nu_f V_f(\zeta, \eta) + \nu_m(1 - V_f(\zeta, \eta)) \frac{E_f E_m}{E_f(1 - V_f(\zeta, \eta)) + E_m V_f(\zeta, \eta)}}{1 - \nu_f V_f(\zeta, \eta) + \nu_m(1 - V_f(\zeta, \eta))\nu_{21}(\zeta, \eta)} + \\
 & \left. - 4 \frac{G_f G_m}{G_f(1 - V_f(\zeta, \eta)) + G_m V_f(\zeta, \eta)} \right) / 8,
 \end{aligned} \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned}
 I_4(\zeta, \eta) = & \left(\frac{E_f V_f(\zeta, \eta) + E_m(1 - V_f(\zeta, \eta))}{1 - \nu_f V_f(\zeta, \eta) + \nu_m(1 - V_f(\zeta, \eta))\nu_{21}(\zeta, \eta)} + \right. \\
 & \frac{\frac{E_f E_m}{E_f(1 - V_f(\zeta, \eta)) + E_m V_f(\zeta, \eta)}}{\nu_f V_f(\zeta, \eta) + \nu_m(1 - V_f(\zeta, \eta))\nu_{21}(\zeta, \eta)} + \\
 & 6 \frac{\nu_f V_f(\zeta, \eta) + \nu_m(1 - V_f(\zeta, \eta)) \frac{E_f E_m}{E_f(1 - V_f(\zeta, \eta)) + E_m V_f(\zeta, \eta)}}{1 - \nu_f V_f(\zeta, \eta) + \nu_m(1 - V_f(\zeta, \eta))\nu_{21}(\zeta, \eta)} + \\
 & \left. - 4 \frac{G_f G_m}{G_f(1 - V_f(\zeta, \eta)) + G_m V_f(\zeta, \eta)} \right) / 8,
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

$$\begin{aligned}
 I_5(\zeta, \eta) = & \left(3 \frac{E_f V_f(\zeta, \eta) + E_m(1 - V_f(\zeta, \eta))}{1 - \nu_f V_f(\zeta, \eta) + \nu_m(1 - V_f(\zeta, \eta))\nu_{21}(\zeta, \eta)} + \right. \\
 & 3 \frac{\frac{E_f E_m}{E_f(1 - V_f(\zeta, \eta)) + E_m V_f(\zeta, \eta)}}{\nu_f V_f(\zeta, \eta) + \nu_m(1 - V_f(\zeta, \eta))\nu_{21}(\zeta, \eta)} + \\
 & - 2 \frac{\nu_f V_f(\zeta, \eta) + \nu_m(1 - V_f(\zeta, \eta)) \frac{E_f E_m}{E_f(1 - V_f(\zeta, \eta)) + E_m V_f(\zeta, \eta)}}{1 - \nu_f V_f(\zeta, \eta) + \nu_m(1 - V_f(\zeta, \eta))\nu_{21}(\zeta, \eta)} + \\
 & \left. + 4 \frac{G_f G_m}{G_f(1 - V_f(\zeta, \eta)) + G_m V_f(\zeta, \eta)} \right) / 8.
 \end{aligned} \tag{2.49}$$

2.5 Teoria das faixas modificada com adição do termo não estacionário

Segundo Fung (1994) e Bisplinghoff *et al.* (1996), na representação clássica de um aerofólio simétrico, imerso em um escoamento oscilatório, podem ser definidos a sustentação (L) e o momento (M) no eixo elástico, ambos por unidade de comprimento, como:

$$L = \pi \rho_{\infty} b^2 [\ddot{z} + V\dot{\theta} - ba\ddot{\theta}] + 2\pi \rho_{\infty} V b C(k) \left[\dot{z} + V\theta + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\theta} \right], \quad (2.50)$$

$$M = \pi \rho_{\infty} b^2 \left[ba\ddot{z} - Vb \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\theta} - b^2 \left(\frac{1}{8} + a^2 \right) \ddot{\theta} \right] + 2\pi \rho_{\infty} b^2 \left(\frac{1}{2} + a \right) C(k) \left[\dot{z} + V\theta + b \left(\frac{1}{2} - a \right) \dot{\theta} \right]. \quad (2.51)$$

onde $C(k)$ representa a função de Theodorsen, dependente da frequência reduzida ($k = \frac{\omega b}{V}$), V a velocidade do escoamento e ρ_{∞} a densidade do ar. As variáveis geométricas podem ser melhor compreendidas com o auxílio da Fig. 2.10, onde a representa a distância entre o plano médio do perfil e o eixo elástico, b representa a semi-corda, c a corda e e a distância entre o eixo elástico e aerodinâmico normalizada pela corda.

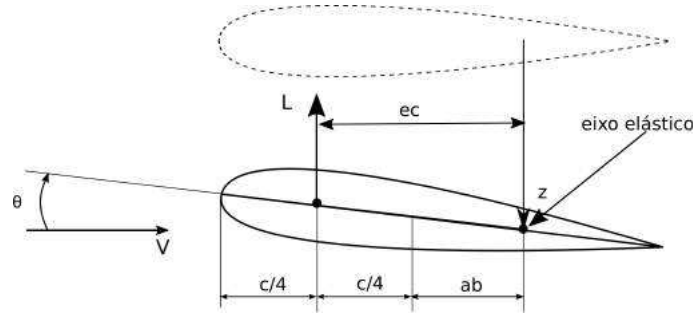


Figura 2.10 – Representação aerofólio simétrico sujeito a movimentos oscilatórios.

Escrevendo na forma complexa, expandindo a função de Theodorsen $C(k)$ e reescrevendo as Equações 2.50 e 2.51 na forma de derivadas oscilatórias, encontram-se:

$$L = \rho_{\infty} V^2 b \left[(L_z + ikL_{\dot{z}}) \frac{z_0}{b} + (L_{\theta} + ikL_{\dot{\theta}}) \theta_0 \right] e^{i\omega t}, \quad (2.52)$$

$$M = \rho_{\infty} V^2 b^2 \left[(M_z + ikM_{\dot{z}}) \frac{z_0}{b} + (M_{\theta} + ikM_{\dot{\theta}}) \theta_0 \right] e^{i\omega t}, \quad (2.53)$$

sendo $L_z, M_z, \dots, L_{\dot{z}}$ denominados derivadas oscilatórias aerodinâmicas.

Simplificando as expressões a partir da consideração do escoamento quase-estacionário,

os valores das derivadas aerodinâmicas podem ser definidos como:

$$\begin{aligned} L_z &= 0, & L_{\dot{z}} &= 2\pi, & L_\theta &= 2\pi, & kL_{\dot{\theta}} &= 0, & M_z &= 0, \\ M_{\dot{z}} &= 2\pi \left(a + \frac{1}{2} \right), & M_\theta &= 2\pi \left(a + \frac{1}{2} \right), & kM_{\dot{\theta}} &= 0. \end{aligned} \quad (2.54)$$

Hancock (1995) mostra que este conceito de derivadas quase-estacionárias não se aplica ao termo $\dot{\theta}$, e propõe a utilização de um único termo não-estacionário constante dado por $M_{\dot{\theta}} = -1, 2$, que representa o amortecimento em arfagem normalizado pela taxa de arfagem, constatando uma ótima correlação entre este valor com os obtidos experimentalmente, com a vantagem adicional de não ser dependente da frequência reduzida.

Dessa forma, combinando as forças aerodinâmicas quase-estacionárias com a teoria das faixas (YATES, 1971), a sustentação incremental e os momentos ao longo da faixa são definidas por:

$$dL = \frac{1}{2} \rho_\infty V^2 c a_w \left(\frac{\dot{w}}{V} + \theta \right) dy, \quad (2.55)$$

$$dM = \frac{1}{2} \rho_\infty V^2 c^2 \left[e a_w \left(\frac{\dot{w}}{V} + \theta \right) + M_{\dot{\theta}} \left(\frac{\dot{\theta} c}{4V} \right) \right] dy, \quad (2.56)$$

sendo o termo a_w o coeficiente angular efetivo da curva de sustentação, definido em função da posição ao longo da envergadura, conforme proposto por Yates (1971), para levar em conta o efeito de ponta de asa, expresso por:

$$a_w = a_1 \left[1 - \left(\frac{x}{s} \right)^3 \right], \quad (2.57)$$

que depende do coeficiente angular do perfil a_1 e do termo de excentricidade e , definido em função do eixo de referência da placa ($c/2$), mostrado na Fig. 2.11, e do eixo aerodinâmico ($c/4$), por:

$$e = \frac{y_{ref} - y_{ac}}{c} = 0,25, \quad (2.58)$$

sendo y_{ref} a posição do eixo de referência e y_{ac} a posição ao longo da corda relativa ao centro aerodinâmico.

Substituindo as Equações 2.57 e 2.58 na Eq. 2.56, obtém-se a equação final para

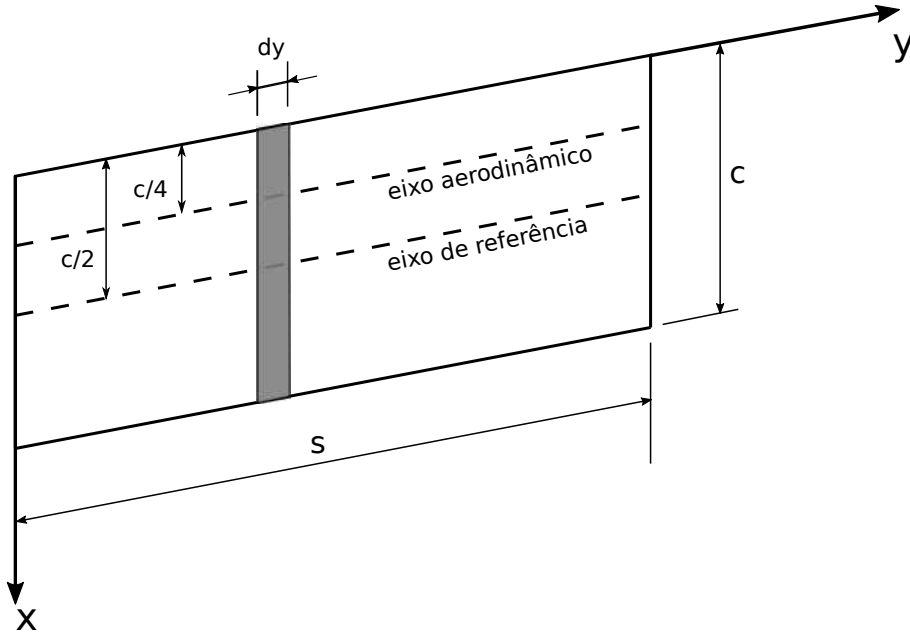


Figura 2.11 – Representação do modelo de placa utilizado para demonstrar as variáveis utilizadas na teoria das tiras.

os incrementos da sustentação e do momento:

$$dL = \rho_{\infty} V^2 c \pi \left[1 - \left(\frac{x}{s} \right)^3 \right] \left(\frac{\dot{w}}{V} + \theta \right) dx, \quad (2.59)$$

$$dM = \frac{\pi}{4} \rho_{\infty} V^2 c^2 \left[\left(1 - \left(\frac{x}{s} \right)^3 \right) \left(\frac{\dot{w}}{V} + \theta \right) + M_{\dot{\theta}} \left(\frac{\dot{\theta} c}{4V} \right) \right] dx. \quad (2.60)$$

2.6 Escoamento supersônico sobre placas - Teoria de Pistão

Na faixa de números de Mach contida no intervalo entre $\sqrt{2}$ e 5, utiliza-se a teoria do pistão linear que é desenvolvida baseada nas suposições de escoamento potencial, para obtenção do carregamento aerodinâmico na placa, de acordo com a seguinte expressão:

$$\Delta P = \frac{\rho_{\infty} V^2}{M_a} \left[\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{V} \frac{\partial w}{\partial t} \right] \quad (2.61)$$

sendo M_a o número de Mach, w o deslocamento transversal e V a velocidade do escoamento.

A denominação Teoria dos Pistão se justifica pela analogia com o movimento de um pistão em um tubo, para o qual o cálculo da velocidade total do pistão conta com uma parcela relativa à convecção ($V \partial w / \partial x$) e outra correspondente à velocidade direta ($\partial w / \partial t$).

Frequentemente, para a avaliação do comportamento aeroelástico sujeito a escoamento

mentos supersônicos nesta faixa de valores de Mach, utiliza-se da aproximação de Ackeret, que negligencia o termo relativo à velocidade ($\partial w / \partial t$), simplificando assim a avaliação da evolução das frequências naturais em função de parâmetros aerodinâmicos.

É conveniente que seja introduzido o termo:

$$\lambda = \frac{\rho V^2}{M_a}, \quad \left[\frac{Kg}{ms^2} \right] \quad (2.62)$$

que permite escrever a Eq. 2.61 com a aproximação de Ackeret da seguinte maneira:

$$\Delta P = \lambda \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (2.63)$$

No entanto, para análises não lineares e valores fora dos intervalos propostos, recomenda-se a utilização da forma expandida da teoria do pistão, conhecida como teoria do pistão de terceira ordem (AMABILI; PELLICANO, 2001):

$$\begin{aligned} \Delta P = \frac{-p_\infty}{M_a} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{V} \frac{\partial w}{\partial t} \right) + \frac{(1-\gamma)M_a}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{V} \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + \right. \\ \left. \frac{(1+\gamma)M_a^2}{12} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1}{V} \frac{\partial w}{\partial t} \right)^3 \right]. \end{aligned} \quad (2.64)$$

2.7 Modelo estrutural baseado no método de Rayleigh-Ritz

O método de Rayleigh-Ritz, também conhecido como o método dos Modos Admitidos (do inglês, Assumed Modes Method), é utilizado para encontrar uma solução aproximada das equações dinâmicas da placa, com os deslocamentos definidos a partir da soma de funções admissíveis (RITZ, 1909). Diferentes funções podem ser utilizadas como funções admissíveis desde que satisfaçam as condições de contorno geométricas e sejam linearmente independentes, por exemplo, polinômios simples:

$$S_{m,n} = \left(\frac{x}{s} \right)^m \left(\frac{y}{c} - 0.5 \right)^n, \quad (2.65)$$

funções trigonométricas:

$$S_{m,n} = \sin\left(m\frac{x}{a}\right) \sin\left(n\frac{y}{b}\right), \quad (2.66)$$

e polinômios ortogonais, como os polinômios de Legendre:

$$\begin{aligned} S_{m,n} &= L_m L_n, \\ L_0 &= 1, \quad L_1 = x, \quad L_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ L_x &= \sum_{j=0}^J (-1)^j \frac{(2i-2j)!}{2^i j! (i-j)! (i-2j)!} x^{i-2j}, \\ J &= \frac{i}{2} \quad (i = 0, 2, 4, \dots), \quad \frac{i-1}{2} \quad (i = 1, 3, 5, \dots). \end{aligned} \quad (2.67)$$

De forma genérica, os deslocamentos podem assim formulados:

$$u, v, w_0(x, y, t) = \sum_{m_0}^{m_{max}} \sum_{n_0}^n p_{mn}^{u,v,w}(t) S_{m,n}(x, y). \quad (2.68)$$

Adotando a teoria de von-Kàrman, admitindo pequenas deformações, e rotações geométricas de moderadas a altas, os termos de deformação podem ser expressos por:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0(x,y,t)}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_0(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0(x,y,t)}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0(x,y,t)}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_0(x,y,t)}{\partial y^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0(x,y,t)}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0(x,y,t)}{\partial x} + \frac{\partial v_0(x,y,t)}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w_0(x,y,t)}{\partial y \partial x} + \frac{\partial w_0(x,y,t)}{\partial x} \frac{\partial w_0(x,y,t)}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad (2.69)$$

sendo os termos lineares de membrana ($\boldsymbol{\epsilon}^L$), lineares fora do plano ($\boldsymbol{\kappa}$) e não-lineares ($\boldsymbol{\epsilon}^{NL}$) expressos, respectivamente, por:

$$\boldsymbol{\epsilon}_L = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^L \\ \epsilon_y^L \\ \gamma_{xy}^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0(x,y,t)}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0(x,y,t)}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0(x,y,t)}{\partial x} + \frac{\partial v_0(x,y,t)}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad (2.70)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0(x,y,t)}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0(x,y,t)}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0(x,y,t)}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}, \quad (2.71)$$

$$\boldsymbol{\epsilon}_{NL} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^{NL} \\ \epsilon_y^{NL} \\ \gamma_{xy}^{NL} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0(x,y,t)}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0(x,y,t)}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w_0(x,y,t)}{\partial x} \frac{\partial w_0(x,y,t)}{\partial y} \end{Bmatrix}. \quad (2.72)$$

Desta forma, a Equação 2.21 é reescrita como:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\epsilon}_L + \boldsymbol{\epsilon}_{NL} \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix}. \quad (2.73)$$

A forma geral da energia de deformação para um corpo elástico é definida por Langhaar (1962) como:

$$U = \frac{1}{2} \int \int \int (\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz}) dx dy dz, \quad (2.74)$$

sendo reduzida para o modelo de placa fina com não linearidade geométrica a:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \boldsymbol{\epsilon}_L^T \mathbf{A} \boldsymbol{\epsilon}_L dx dy + \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \boldsymbol{\kappa}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\kappa} dx dy + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \boldsymbol{\epsilon}_L^T \mathbf{A} \boldsymbol{\epsilon}_{NL} dx dy + \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \boldsymbol{\epsilon}_{NL}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\epsilon}_L dx dy + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \boldsymbol{\epsilon}_{NL}^T \mathbf{A} \boldsymbol{\epsilon}_{NL} dx dy \\ &= U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5. \end{aligned} \quad (2.75)$$

A parcela relativa à energia cinética baseada na teoria de *Kirchhoff*, que é apropriada para placas finas, é representada de forma geral por:

$$\Upsilon = \frac{1}{2} \int \int \int \rho_0 (\dot{u}^2 + \dot{v}^2 + \dot{w}^2) dx dy dz, \quad (2.76)$$

onde \dot{u} , \dot{v} e \dot{w} representam as velocidades no plano médio da superfície segundo as direções x , y e z respectivamente e ρ_0 é a densidade do material.

2.8 Modelo dinâmico e modelo aeroelástico

Convém distinguir, neste momento, os dois modelos utilizados durante o desenvolvimento deste trabalho: o modelo destinado à análise aeroelástica utilizando o modelo aerodinâmico

baseado na teoria das faixas com termo quase-estacionário, denominado, modelo simplificado aeroelástico; e o modelo utilizado para análise dinâmica e para avaliação de *flutter* de painel, denominado, modelo para *flutter* de painel e análise dinâmica.

2.8.1 Modelo simplificado aeroelástico

O primeiro representa um modelo simplificado de asa, engastado na raiz e livre na extremidade (Fig. 3.4). Para esta configuração foram considerados apenas os termos lineares de deslocamento, a condição de corda rígida e somente deslocamentos fora do plano. Com essas simplificações, o deslocamento transversal fica assim equacionado:

$$w_0(x, y, t) = \sum_{m=m_0}^{m_{max}} \sum_{n=0}^1 q_{mn}^w(t) S_{mn}(x, y), \quad (2.77)$$

e quando aplicados aos termos de deformações lineares fora do plano (κ) definidos conforme Eq. 2.71, a equação de Energia de Deformação assume a seguinte forma:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^s \int_0^c \{ \kappa^L \}^T [D(x, y)] \{ \kappa^L \} dx dy. \quad (2.78)$$

De igual modo, assumindo que a energia associada aos deslocamentos no plano possa ser negligenciada, a energia cinética se torna:

$$\Upsilon = \frac{1}{2} \int \int \int \rho_0 \dot{w}^2 dx dy dz. \quad (2.79)$$

Aplicando a Equação de Lagrange (LAGRANGE, 1788):

$$-\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \mathbf{Q}, \quad (2.80)$$

sendo $L = \Upsilon - U$ o operador Lagrangiano e \mathbf{q} relativo às coordenadas generalizadas e \mathbf{Q} representa o vetor de forças generalizadas. Dessa maneira, a Equação 2.80 resulta em um sistema de equações diferenciais da forma:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{0}, \quad (2.81)$$

onde \mathbf{M} representa matriz de massa, \mathbf{K} a rigidez estrutural.

Para a realização da análise aeroelástica, adiciona-se a parcela do trabalho virtual realizado pelo carregamento aerodinâmico:

$$\delta W = \int_0^s (-dL\delta w + dM\delta\theta) dx, \quad (2.82)$$

sendo a parcela de sustentação e momento, calculada conforme a Eq. 2.60. Como os esforços aerodinâmicos são calculados no laminado no eixo de referencia (plano médio), a rotação em arfagem e o deslocamento transversal são dados por:

$$\theta = \frac{1}{c} \sum_{m=2}^{m_{max}} q_{mn_0} \left(\frac{x}{s}\right)^m, \quad (2.83)$$

$$w = \sum_{m=2}^{m_{max}} q_{mn_0} \left(\frac{x}{s}\right)^m. \quad (2.84)$$

Assim, pode-se aplicar novamente a Equação de Lagrange, com o termo relativo ao trabalho virtual das forças aerodinâmica e avaliar o comportamento aeroelástico, obtêm-se a equação do movimento do sistema aeroelástico, dada por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \rho V \mathbf{C}_{aero} \dot{\mathbf{q}} + (\rho V^2 \mathbf{K}_{aero} + \mathbf{K}) \mathbf{q} = 0, \quad (2.85)$$

ou escrita na forma de espaços de estado:

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{q}} \\ \ddot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}(\rho V^2 \mathbf{K}_{aero} + \mathbf{K}) & -\rho V \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C}_{aero} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q} \\ \dot{\mathbf{q}} \end{Bmatrix}, \quad (2.86)$$

sendo \mathbf{C}_{aero} e \mathbf{K}_{aero} as parcelas de amortecimento e rigidez relativas ao escoamento aerodinâmico, respectivamente.

À medida que a velocidade V do escoamento é aumentada, realiza-se a análise aeroelástica por inspeção dos autovalores complexos associados com a Eq. 2.86, expressos por:

$$\beta_n = -\zeta_n \omega_n \pm j \omega_n \sqrt{1 - \zeta_n^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.87)$$

onde ω_n e ζ_n são as frequências naturais não amortecidas e os fatores de amortecimento,

respectivamente.

Dessa forma, dois tipos distintos de instabilidade aeroelástica podem ser analisadas provenientes da solução da Eq. 2.86. O primeiro tipo é o caso de instabilidade estática, denominada divergência, que ocorre quando o sistema está em condição não oscilante ($\omega_n = 0$) e o amortecimento modal se torna negativo ($\zeta_n < 0$). O segundo tipo diz respeito ao *flutter*, que ocorre quando o sistema dinâmico é oscilante ($\omega_n > 0$), mas o amortecimento modal se torna negativo ($\zeta_n < 0$).

A Figura 2.12 mostra uma solução típica da evolução das frequências naturais e dos fatores de amortecimento de um sistema aeroelástico contemplando três diferentes modos de vibrar. Como pode ser notado, neste caso, a divergência ocorre em uma velocidade de escoamento abaixo da velocidade de *flutter*.

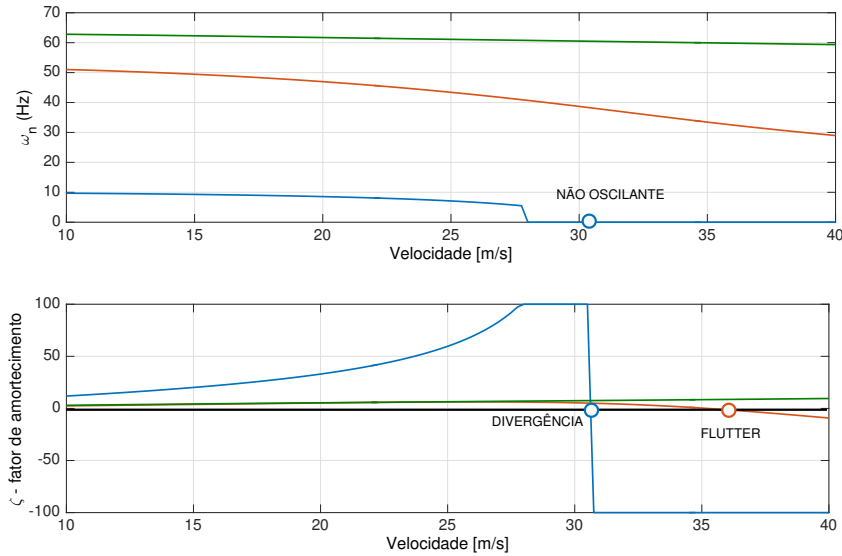


Figura 2.12 – Representação das instabilidades dos tipos *flutter* e divergência.

2.8.2 Modelo para *flutter* de painel e análise dinâmica

Neste caso, o modelo geométrico consiste em um placa retangular, considerada com diferentes condições de contorno para a análise dinâmica, na condição simplesmente apoiada para análise de *flutter* de painel.

Devido às diferentes naturezas das análises realizadas utilizando este modelo, principalmente nos Capítulos V e VI, os detalhes referentes às simplificações adotadas, bem como

as funções de forma escolhidas e particularidades da análise não linear serão apresentadas.

A energia potencial da placa é definida na sua forma completa, conforme apresentado na Eq. 2.75; a energia cinética é considerada na sua forma expandida (Eq. 2.76), e a equação do trabalho virtual produzido devido ao escoamento aerodinâmico é expresso segundo a Eq. 2.64.

A avaliação do comportamento dinâmico linear é bem semelhante ao apresentado acima e será discutido com mais detalhes no Capítulo VI. Com relação à análise aeroelástica linear, foram desconsiderados os termos não lineares da energia de deformação presentes na Eq. 2.75, juntamente com os deslocamentos de membrana, e além disso utilizou-se a aproximação de Ackeret (Eq. 2.63) para o escoamento aerodinâmico.

Dessa forma, a equação do movimento para a análise aeroelástica é dada por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + (\lambda\mathbf{K}_{aero} + \mathbf{K})\mathbf{q}_w = 0, \quad (2.88)$$

em que semelhante ao modelo descrito anteriormente, a matriz \mathbf{K}_{aero} também representa parcela de rigidez aerodinâmica acrescentada. E o problema de autovalor associado à Eq. 2.88 é:

$$(\lambda\mathbf{K}_{aero} + \mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M})\mathbf{q}_w = 0. \quad (2.89)$$

Cuja solução resulta na Fig. 2.13 que é usualmente utilizado para visualização da condição de *flutter*, que por sua vez, é determinada por inspeção dos autovalores, aumentando incrementalmente a variável λ .

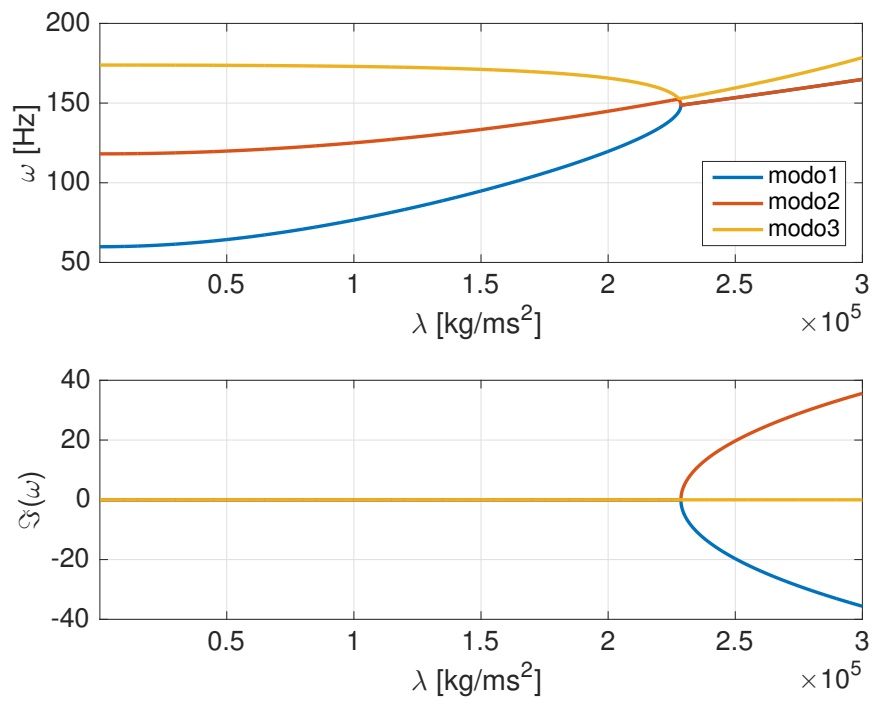


Figura 2.13 – Ilustração da coalescência dos modos na análise de *flutter* de painel

CAPÍTULO III

AEROELASTICIDADE DE LAMINADOS FABRICADOS COM DEPOSIÇÃO DE FIBRAS COM ESPAÇAMENTO VARIÁVEL

*“Pure mathematics is, in its way,
the poetry of logical ideas.” Albert Einstein*

Neste capítulo, o comportamento aeroelástico é avaliado em laminados de materiais compostos com rigidez variável (LCRV) fabricados com espaçamento variável na deposição das fibras. Em cada camada, a deposição no laminado retangular segue uma função pré definida que varia da raiz (borda engastada da placa) para a ponta (borda livre) com respeito à coordenada adimensional definida na direção da envergadura.

O modelo estrutural é desenvolvido com base no método de Ritz. Em virtude da aplicação considerada, os efeitos relativos ao cisalhamento ao longo da espessura são desprezados e o modelo adotado é baseado na teoria clássica de laminação (TCL). O modelo aerodinâmico proposto segue às suposições do método baseado na teoria das faixas com o termo não estacionário em arfagem, conforme detalhado no Capítulo II.

A verificação do modelo foi realizada comparando o modelo proposto com a resposta do modelo de elementos finitos (FEM) desenvolvido no software Nastran®. Em virtude da variação espacial das propriedades dos elementos, foi necessária a adaptação de um procedimento de geração da malha de elementos finitos de forma automática.

Diferentes configurações de espaçamento foram analisadas para a verificação do

efeito no comportamento aeroelástico, tanto na condição de *flutter* como na de divergência. Adicionalmente, realizou-se a avaliação da influência nas frequências naturais nos LCRV fabricados com deposição variável de fibras.

3.1 Modelo teórico

Para representar um modelo simplificado de asa, foi adotada uma placa retangular engastada em um bordo e livre nos demais, e com as seguintes dimensões: corda c , envergadura s e espessura h , como ilustrado na Fig. 3.1. O espaçamento das fibras é modelado em função do volume de fibras (V_f) , tendo um valor especificado na raiz $(V_f)_{root}$ e outro na ponta $(V_f)_{tip}$.

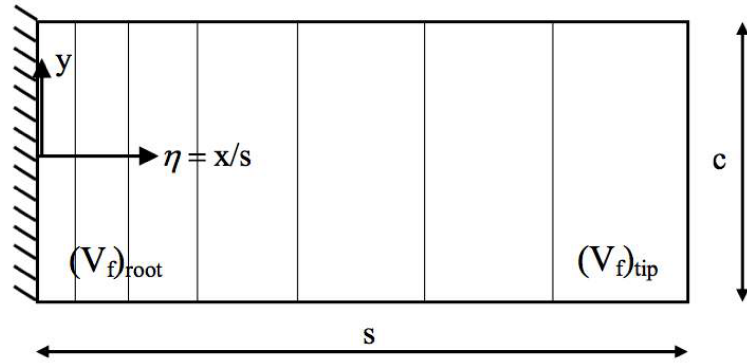


Figura 3.1 – Modelo teórico simplificado de asa com espaçamento variável.

A placa é constituída por N camadas ortotrópicas, dispostas de forma uniforme na direção da corda e não-uniforme na direção da envergadura. A definição da distribuição do volume de fibras é feita em função da coordenada adimensional $\eta = x/s$ como:

$$V_f(\eta) = [(V_f)_{root} - (V_f)_{tip}] (1 - \eta^2)^n - (V_f)_{tip}, \quad (3.1)$$

em que o valor do expoente n possibilita uma distribuição do espaçamento das fibras não linear. Este efeito pode ser melhor compreendido avaliando a Fig. 3.2, onde se variou n de 1 a 4, considerando $(V_f)_{root} = 0,8$ e $(V_f)_{tip} = 0,5$.

É possível afirmar que quanto maior o valor de n , menor será o volume de fibras total no laminado; logo, espera-se um deterioramento das propriedades mecânicas, e consequentemente, um comprometimento do comportamento aeroelástico.

Outro aspecto a ser levado em consideração é o efeito da variação do volume de

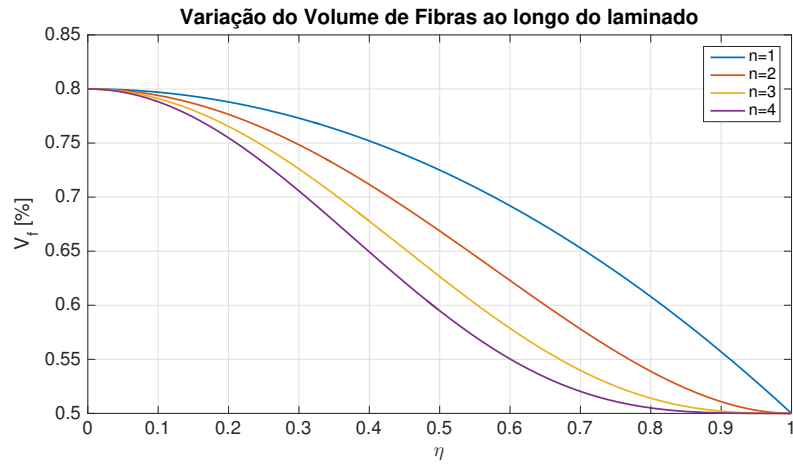


Figura 3.2 – Efeito no volume das fibras em função do termo n (não linear).

fibras na extremidade livre em relação ao volume total de fibras no laminado. Através da Figura 3.3, avalia-se esta influência considerando constantes os parâmetros $n = 2$ e $(V_f)_{root} = 0,8$.

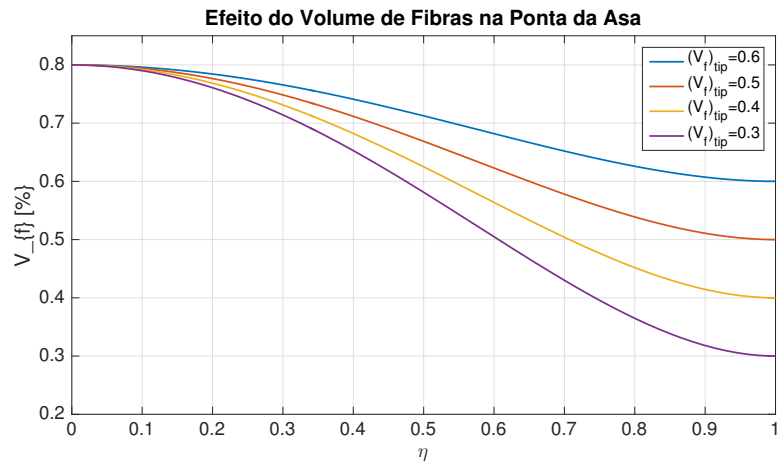


Figura 3.3 – Efeito no volume das fibras em função do volume de fibras extremidade da asa.

O modelo aeroelástico foi concebido combinando o modelo estrutural baseado no método de Ritz com o modelo aerodinâmico quase estacionário apresentado no Capítulo II. É assumido um modelo de placa engastada-livre (*cantilever*) representando uma asa com a particularidade de apresentar a corda rígida e o deslocamento transversal da placa pode ser representado por:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=m_0}^{m_{max}} \sum_{n=n_0}^{n_{max}} q_{mn}(t) \left(\frac{x}{s}\right)^m \left(\frac{y}{c} - 0.5\right)^n, \quad (3.2)$$

sendo os limites inferiores da série $m_0 = 2$ e $n_0 = 0$ definidos de modo a satisfazer as

condições de contorno geométricas. E os limites superiores $m_{max} = M$ e $n_{max} = 1$ definidos de acordo com o teste de convergência realizado comparando o modelo com o FEM e pela condição de corda rígida, respectivamente.

O modelo dinâmico foi construído utilizando o procedimento exposto no Capítulo II, resultando na equação do movimento escrito na forma de espaços de estados.

3.2 Modelo numérico

O modelo numérico é constituído por uma placa de material composto laminada com seis camadas, previamente estudada em (HOLLOWELL; DUGUNDJI, 1984), que idealiza uma asa sem enflechamento, com corda de 76,2 mm e semi-envergadura de 305 mm (Fig. 3.4). O empilhamento é feito com camadas unidirecionais de grafite/epóxi de espessura 0,134 mm, cujas propriedades são descritas na Tab. 3.1.

Tabela 3.1 – Propriedades da fibra e da resina.

Matriz		Fibra	
E_m	5,35 [GPa]	E_f	232 [GPa]
G_m	1,975 [GPa]	G_f	24 [GPa]
μ_m	0,354	μ_f	0,279
ρ_m	1150 [kg/m ³]	ρ_f	2457 [kg/m ³]

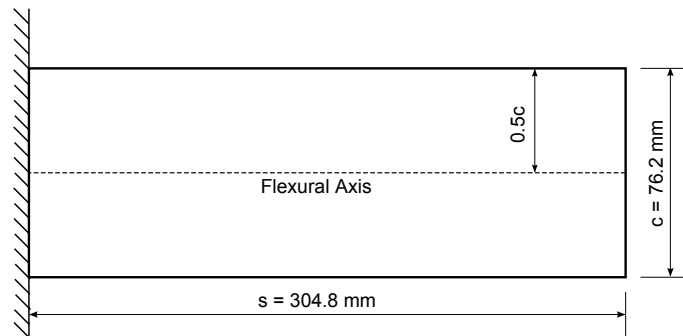


Figura 3.4 – Geometria e dimensões da placa.

3.3 Validação com o modelo de elementos finitos

Para validação e determinação do número de termos necessários da série indicada na Eq. 3.2 usados para aproximar o deslocamento transversal da placa, desenvolveu-se um modelo de

elementos finitos no programa comercial Nastran[®]. A malha retangular foi discretizada com 48 elementos ao longo da envergadura e 12 elementos ao longo da corda (Fig. 3.5). Elementos reforçadores sem massa foram adicionados com espaçamentos iguais, para garantir a condição de corda rígida e evitar a torção nesta direção. A comparação modal foi realizada com base nos cinco primeiros modos naturais.

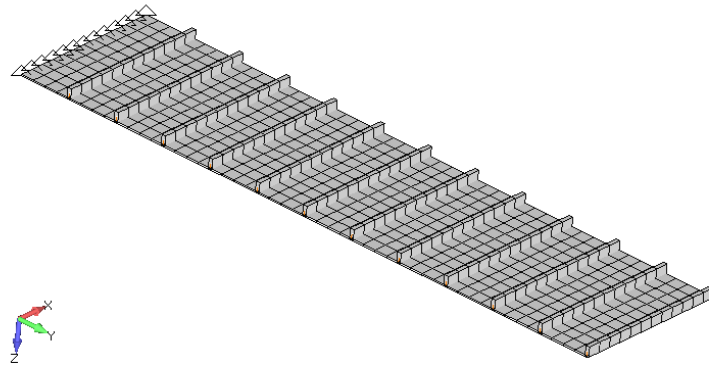


Figura 3.5 – Modelo de elementos finitos construído em Nastran[®].

A geometria escolhida para se realizar a validação do modelo segue as dimensões mostradas na Fig. 3.4, cuja sequência de empilhamento é dada por $[-45^\circ \ 45^\circ \ 45^\circ]_s$ e os seguintes valores para controle da deposição das fibras $(V_f)_{root} = 0,8$, $(V_f)_{tip} = 0,5$, $n=1$.

A convergência do modelo de Ritz, diretamente ligado ao valor de m_{max} , é mostrada na Tab. 3.2. Verificou-se que $m_{max} = 8$ foi suficiente para a convergência dos valores relativos à frequência natural com um erro máximo de 3%. A diferença é considerada aceitável. Além disso, para os três primeiros modos, a diferença máxima apresentada nos valores de frequência foi no máximo 1Hz, aceitável para análises aeroelásticas.

Tabela 3.2 – Convergência do modelo proposto com o modelo de elementos finitos em função das frequências naturais em Hz.

FEM	n_{max}			
	5	6	7	8
7,41Hz	7,64 (3,1%)	7,63 (2,9%)	7,62 (2,9%)	7,62 (2,9%)
43,05Hz	44,61 (3,6%)	44,32 (2,9%)	44,29 (2,9%)	44,29 (2,9%)
87,53Hz	89,16 (1,9%)	88,32 (0,9%)	88,10 (0,7%)	87,99 (0,5%)
117,36Hz	124,84 (6,4%)	123,84 (5,5%)	121,07 (3,2%)	120,99 (3,1%)
228,3Hz	255,82 (12,1%)	251,46 (10,1%)	248,31 (8,8%)	236,05 (3,4%)

As formas modais obtidas pelos dois modelos podem ser visualizadas na Fig. 3.6 e a avaliação da correlação entre as formas modais, através do MAC (do inglês, Modal Assurance Criterion) é realizada na Fig. 3.7, onde é possível verificar a ótima correlação entre os dois conjuntos de formas modais.

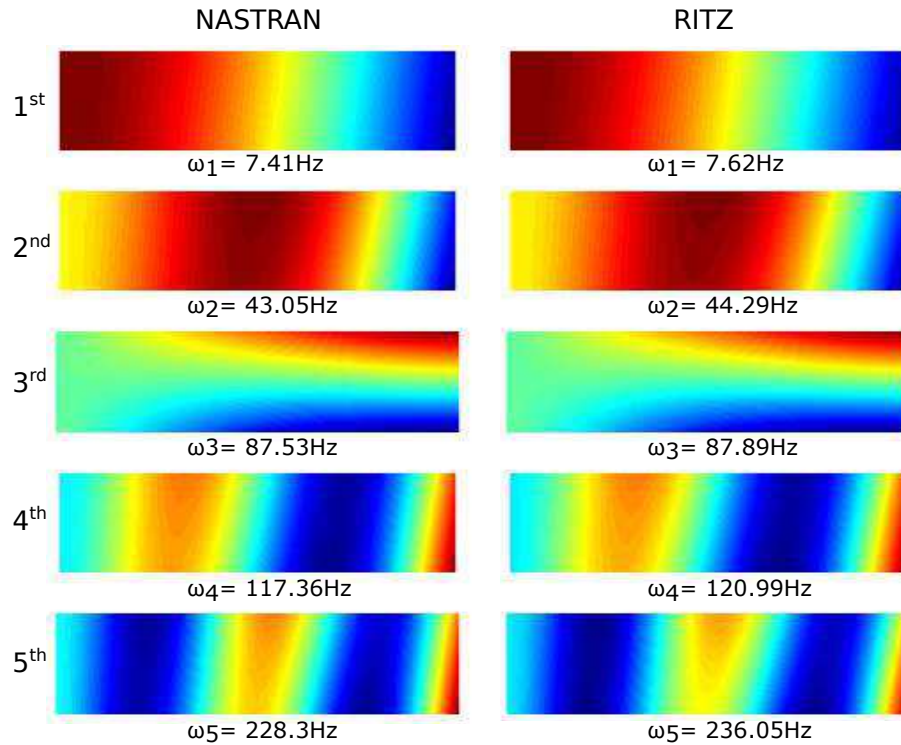


Figura 3.6 – Comparação dos modos de vibrar entre o modelo Ritz e o modelo de elementos finitos.

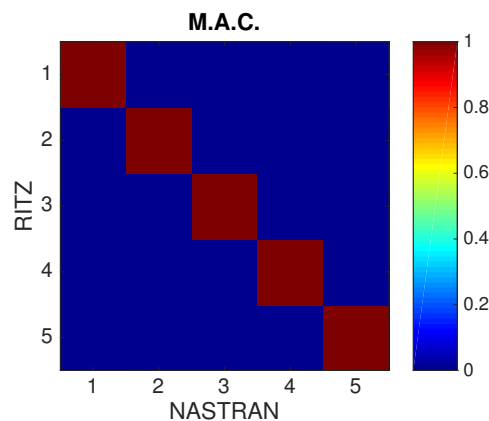


Figura 3.7 – Correlação modal entre o modelo de Ritz e o modelo elementos finitos.

3.4 Simulações numéricas

Antes de avaliar o efeito da deposição variável de fibras, analisou-se uma configuração com as propriedades do laminado constante, denominada ‘baseline’, cuja sequência de empilhamento segue a ordem $[0 \ 45 \ -45]_s$ e cujas propriedades mecânicas homogenizadas são descritas na Tab. 3.3.

Tabela 3.3 – Propriedades homogeneizadas da lâmina unidirecional de grafite-epóxi.

Propriedades Mecânicas	
E_1	98 [GPa]
E_2	7,9 [GPa]
G_{12}	5,6 [GPa]
μ_{12}	0,28
$\rho, \text{densidade}$	1520 [kg/m ³]
$t, \text{espessura da camada}$	0,134 [mm]

A fronteira de estabilidade aeroelástica foi calculada avançando a velocidade do escoamento de 10,0 m/s até 90 m/s, e identificando a velocidade na qual o sistema se torna instável, seguindo o procedimento descrito no Capítulo II onde foi demonstrada a diferença entre a divergência e o *flutter*. O comportamento aeroelástico do laminado base é mostrado na Fig. 3.8, e será utilizado na comparação com os LCRV durante as análises de laminados com deposição variável de fibras. Dessa forma, o valor base avaliado para a velocidade de *flutter* foi de 31,5 m/s e 57,75 m/s para a divergência.

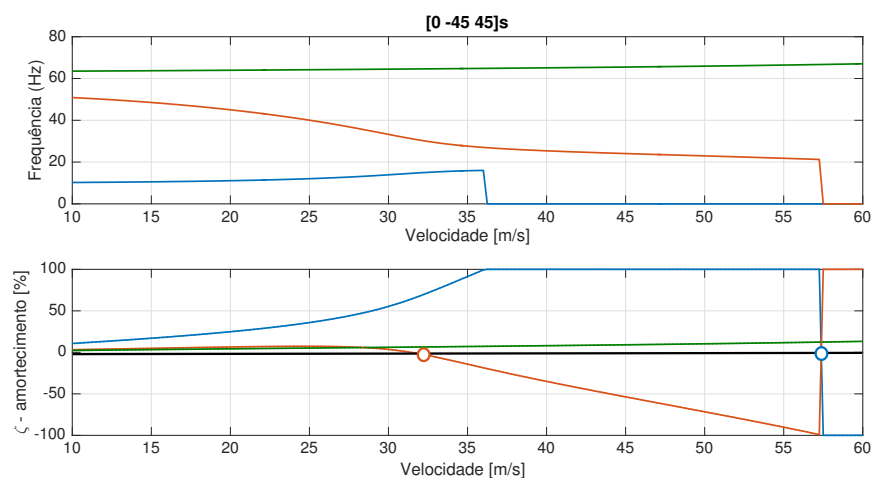


Figura 3.8 – Análise de estabilidade aeroelástica para a configuração base.

Com relação às análises aeroelásticas variando o espaçamento na deposição das

fibras, foram analisados, inicialmente, distintos valores de $n=1,2,3$, com variação do volume de fibras na ponta do laminado no intervalo $[0.01 \leq (V_f)_{tip} \leq 0.6]$ mantendo o volume de fibra na raiz constante. Duas configurações distintas foram analisadas, tendo sido fixado o valor de $(V_f)_{root} = 0,6$ para a configuração CA, e $(V_f)_{root} = 0,7$ para a CB.

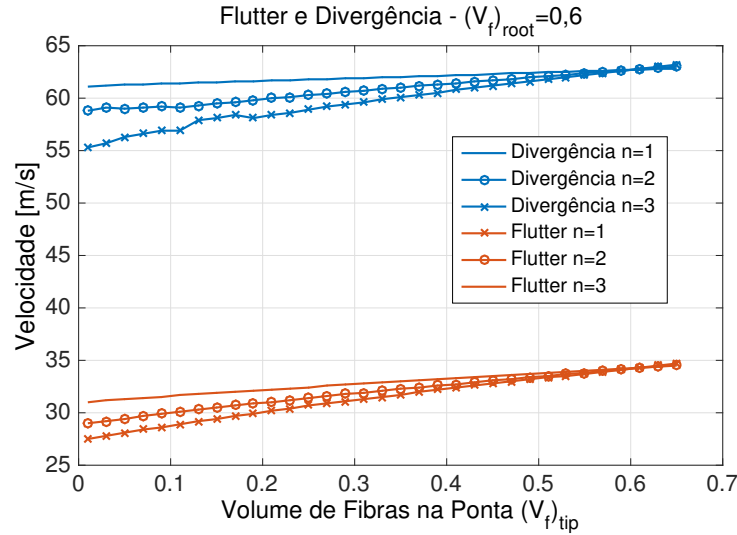


Figura 3.9 – Avaliação aeroelástica em função do volume de fibras na ponta da asa.

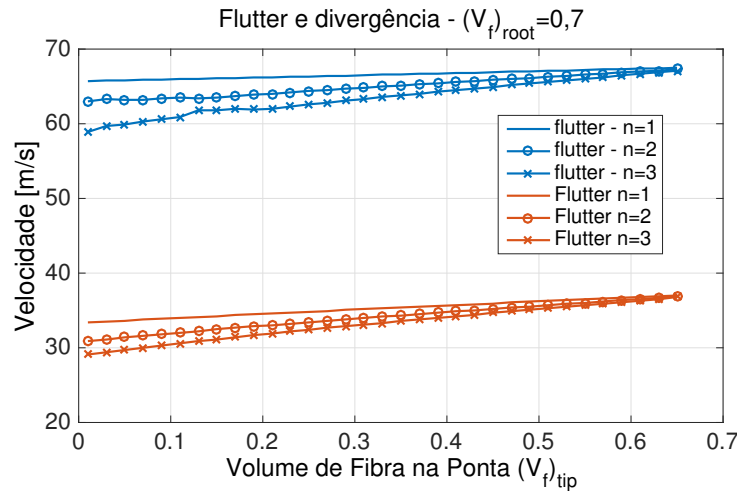


Figura 3.10 – Avaliação aeroelástica em função do volume de fibras na ponta da asa.

Constata-se que, em relação à configuração base, nas configurações com espaçamento variável analisadas (Figuras 3.9 e 3.10), a velocidade de flutter varia de -4,5% a +16,3%, com resultados similares para a condição de divergência.

Além disso, o termo de controle do volume de fibras não linear tem uma relação

inversa no comportamento aeroelástico, ou seja, quanto maior é a sua magnitude, menores são as velocidade de *flutter* e divergência, independentemente da fração de fibra na raiz. Outro aspecto observado é o benefício aeroelástico obtido para laminados com maior volume de fibras, para os quais verificou-se claramente o aumento da margem de estabilidade.

O efeito da variação do volume de fibras na extremidade da placa, mantendo fixo o volume de fibras na raiz igual $(V_f)_{root} = 70\%$ e $n = 3$, sobre os valores das três primeiras frequências naturais é apresentado na Fig. 3.11. É interessante perceber nesta figura que, embora ocorra uma diminuição da rigidez e da quantidade de fibras, somente a primeira frequência natural diminui, diferentemente da segunda e terceira frequências que aumentam de valor.

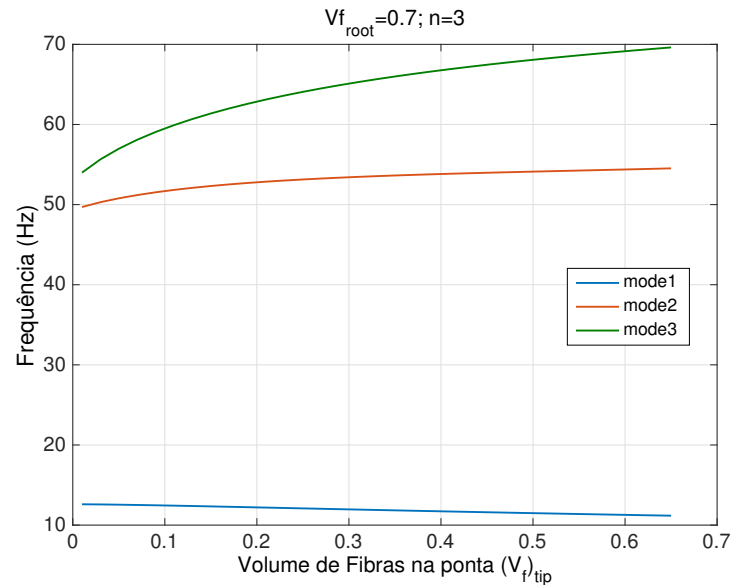


Figura 3.11 – Efeito do volume de fibras na extremidade da placa sobre as frequências naturais da placa.

3.5 Conclusões

Neste capítulo, o comportamento aeroelástico de LCRV fabricados com diferentes espaçamento na deposição das fibras foi analisado. Os efeitos de diferentes volumes e distribuições não lineares das fibras ao longo do laminado foram explorados utilizando o modelo semi-analítico, baseado em modos assumidos (Método de Ritz) desenvolvido e validado, em termos das frequências naturais e dos modos de vibrar utilizando o modelo de elementos finitos no

programa computacional Nastran[®].

Os resultados mostraram uma relação direta entre a melhoria da margem aeroelástica e o aumento do volume de fibra. Por outro lado, com relação às frequências naturais, os resultados não são totalmente intuitivos, uma vez que na configuração estudada ocorreu a diminuição da primeira frequência natural e o aumento da segunda e terceira frequências naturais diminuindo o volume de fibras no laminado.

CAPÍTULO IV

FLUTTER DE PAINÉIS LAMINADOS DE RIGIDEZ VARIÁVEL FABRICADOS COM *TOW STEERING*

*“Somewhere, something incredible is
waiting to be known.” Carl Sagan*

Este capítulo analisa o comportamento aeroelástico de painéis de laminados de material composto com rigidez variável (LCRV) fabricados com a técnica *tow steering*. Um modelo estrutural simples baseado no método de Ritz combinado com a teoria supersônica conhecida como teoria dos ‘pistões’ é utilizado para estudar o comportamento aeroelástico. O controle de trajetória foi realizado utilizando polinômios com interpoladores de Lagrange de diferentes ordens. Utilizou-se o algoritmo de evolução diferencial (DE) para as otimizações aeroelásticas de simples objetivo e também para as otimizações multiobjetivo que envolveram restrições de fabricação. As fronteiras de instabilidade aeroelástica para laminados convencionais (LCRC) e para LCRV foram numericamente comparadas. Também foram realizadas análises aeroelásticas combinadas com esforços de membrana.

4.1 Modelo teórico

De acordo com o que foi desenvolvido nos capítulos anteriores, o modelo estrutural foi baseado na teoria clássica de laminação (TCL) e também nas hipóteses relativas à relação tensão-deformação de von Kàrman.

As matrizes de rigidez do laminado simétrico \mathbf{A}, \mathbf{D} no caso dos LCRV são dependentes espacialmente do ângulo de trajetória (*tow steering angle*) que é calculado por polinômios interpoladores de Lagrange, semelhantemente ao proposto por Wu *et al.* (2012):

$$\theta(x, y) = \Phi_i + \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} T_{mn} \cdot \prod_{m \neq i} \frac{x - x_i}{x_m - x_i} \cdot \prod_{n \neq j} \frac{y - y_j}{y_n - y_j}, \quad (4.1)$$

onde Φ_i é o ângulo base do *lay-up* no laminado e T_{mn} representam os ângulos de controle ao longo do laminado nos pontos de referência (M,N), como representado na Fig. 2.8.

Os deslocamentos são expressos a partir do método de Ritz e para um laminado simplesmente apoiado nos quatro bordos, foram utilizadas funções de forma senoidais, conforme apresentado no Capítulo 2. E análise aeroelástica foi realizada conforme descrito na Seção 2.7.2.

A inclusão dos carregamentos no plano foi feita desprezando-se o efeito de cargas prescritas, de modo que a formulação do trabalho realizado por estes carregamentos é dado por:

$$W = -\frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b \left[N_{xx} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_{yy} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] dx dy, \quad (4.2)$$

que resulta na matriz de rigidez geométrica (\mathbf{K}_G). Dessa forma, o sistema de equações para flambagem é, de acordo com Loughlan (1994):

$$(\mathbf{K} - \Lambda \mathbf{K}_G) \mathbf{q}_w = 0, \quad (4.3)$$

sendo (\mathbf{K}) é a matriz constitutiva de rigidez a flexão e torção. O menor autovalor extraído da solução é a carga crítica de flambagem ($\Lambda_{buck} = \min(\Lambda)$).

A formulação aeroelástica completa que inclui os esforços decorrentes do comportamento de membrana comumente tratados na literatura em virtude dos efeitos térmicos, são considerados aqui na forma de cargas compressivas somente na direção x (N_{xx}) e são expressas convenientemente em função da carga de flambagem.

$$\alpha = \frac{N_{xx}}{(N_{xx})_{buck}}, \quad (4.4)$$

e para o caso em que $\Lambda = \alpha = 1$ ($Nyy = 0$ e $Nxy = 0$), tem-se $(Nxx)_{buck}$ igual a Nxx .

Consequentemente a solução aeroelástica combinada com esforços de membrana é expressa por:

$$(\lambda \mathbf{K}_{aero} + \alpha \mathbf{K}_G + \mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{q}_w = 0. \quad (4.5)$$

4.2 Descrição do modelo

O modelo adotado neste trabalho é constituído por oito camadas de material composto de espessura 0,19 mm, cujas propriedades estão dispostas na Tab. 4.1. A geometria da placa analisada é retangular com comprimento de 400 mm e largura de 300 mm, sendo simplesmente apoiada nas quatro bordas, como representado na Fig. 4.1.



Figura 4.1 – Descrição e geometria do modelo analisado.

Tabela 4.1 – Propriedades do material e dimensões da placa.

Propriedade	Valor	Propriedade	Valor
E_1	129500 MPa	comprimento, a	400 mm
E_2	9370 MPa	largura, b	300 mm
G_{12}	5240 MPa	densidade, ρ_0	1500 kg/m ³
μ_{12}	0,38		

4.3 Verificação do modelo proposto

Para a verificação do modelo desenvolvido foram considerados dois tipos de compostos, denominados por CA e CB, sendo o primeiro um laminado composto de rigidez convencional (LCRC) cuja sequência de empilhamento é dada por $[0^\circ/45^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$; e o segundo, um laminado composto de rigidez variável (LCRV), com lay-up semelhante à da CA, porém, com trajetória de deposição das fibras definida de acordo com a Eq. 4.1 e conforme apresentado na Fig. 4.3.

Tabela 4.2 – Convergência dos valores de frequência natural (Hz) para configuração convencional LCRC.

		ω_{n1} (Hz)	ω_{n2} (Hz)	ω_{n3} (Hz)	ω_{n4} (Hz)	ω_{n5} (Hz)	ω_{n6} (Hz)
	Nastran	63,88	152,47	166,97	248,68	309,94	333,02
R.R.	$m_{max}=n_{max}=3$	64,64 (1,18)	154,26 (1,17)	169,10 (1,27)	254,81 (2,46)	315,60 (1,82)	337,37 (1,30)
	$m_{max}=n_{max}=4$	64,53 (1,01)	154,20 (1,13)	168,93 (1,17)	254,63 (2,39)	313,88 (1,27)	336,64 (1,08)
	$m_{max}=n_{max}=5$	64,52 (1,00)	154,06 (1,04)	168,88 (1,14)	254,20 (2,21)	313,80 (1,24)	336,62 (1,08)
	$m_{max}=n_{max}=6$	64,48 (0,93)	154,05 (1,03)	168,81 (1,10)	254,16 (2,20)	313,62 (1,18)	336,51 (1,04)
	$m_{max}=n_{max}=7$	64,48 (0,93)	153,99 (0,99)	168,79 (1,09)	254,00 (2,13)	313,59 (1,17)	336,50 (1,04)
	$m_{max}=n_{max}=8$	64,45 (0,89)	153,98 (0,99)	168,76 (1,07)	253,98 (2,13)	313,52 (1,15)	336,45 (1,03)
	$m_{max}=n_{max}=9$	64,45 (0,89)	153,95 (0,97)	168,75 (1,06)	253,90 (2,09)	313,50 (1,14)	336,45 (1,03)
	$m_{max}=n_{max}=10$	64,45 (0,86)	153,95 (0,97)	168,75 (1,04)	253,90 (2,09)	313,50 (1,13)	336,45 (1,01)

* Os valores indicados entre parenteses indicam a diferença relativa entre os modelos.

Tabela 4.3 – Convergência dos valores de frequência natural (Hz) para configuração convencional LCRV.

		ω_{n1} (Hz)	ω_{n2} (Hz)	ω_{n3} (Hz)	ω_{n4} (Hz)	ω_{n5} (Hz)	ω_{n6} (Hz)
	Nastran	65,38	151,55	170,43	248,68	319,74	330,67
R.R.	$m_{max}=n_{max}=3$	66,03 (0,99)	153,29 (1,15)	172,80 (1,39)	252,79 (1,65)	326,56 (2,13)	337,03 (1,92)
	$m_{max}=n_{max}=4$	66,00 (0,95)	153,03 (0,98)	172,49 (1,21)	252,26 (1,44)	324,34 (1,44)	335,19 (1,37)
	$m_{max}=n_{max}=5$	66,00 (0,95)	153,01 (0,96)	172,47 (1,20)	252,11 (1,38)	323,34 (1,13)	334,79 (1,25)
	$m_{max}=n_{max}=6$	65,97 (0,90)	152,98 (0,94)	172,43 (1,17)	252,08 (1,37)	323,31 (1,12)	334,69 (1,22)
	$m_{max}=n_{max}=7$	65,97 (0,90)	152,95 (0,92)	172,41 (1,16)	251,96 (1,32)	323,30 (1,11)	334,68 (1,21)
	$m_{max}=n_{max}=8$	65,96 (0,89)	152,94 (0,92)	172,39 (1,15)	251,94 (1,31)	323,25 (1,10)	334,64 (1,20)
	$m_{max}=n_{max}=9$	65,96 (0,89)	152,92 (0,90)	172,38 (1,14)	251,87 (1,28)	323,24 (1,09)	334,64 (1,20)
	$m_{max}=n_{max}=10$	65,95 (0,87)	152,91 (0,90)	172,37 (1,14)	251,86 (1,28)	323,21 (1,09)	334,62 (1,19)

* Os valores indicados entre parenteses indicam a diferença relativa entre os modelos.

A comparação realizada em termos das frequências naturais nas Tab. 4.2 e 4.3 mostram que seis modos assumidos em cada direção (x e y) foram suficientes para garantir a convergência do modelo com um erro aceitável nas análises a serem desenvolvidas. É mos-

trada também na Figura 4.2 a comparação das formas modais através do MAC, verificando uma excelente correlação entre as formas modais para CA e CB. Além disso, para a configuração CB, percebe-se na Fig. 4.3 a diferença entre a definição de trajetória no modelo de Rayleigh-Ritz (RR) desenvolvido e o modelo de elementos finitos.

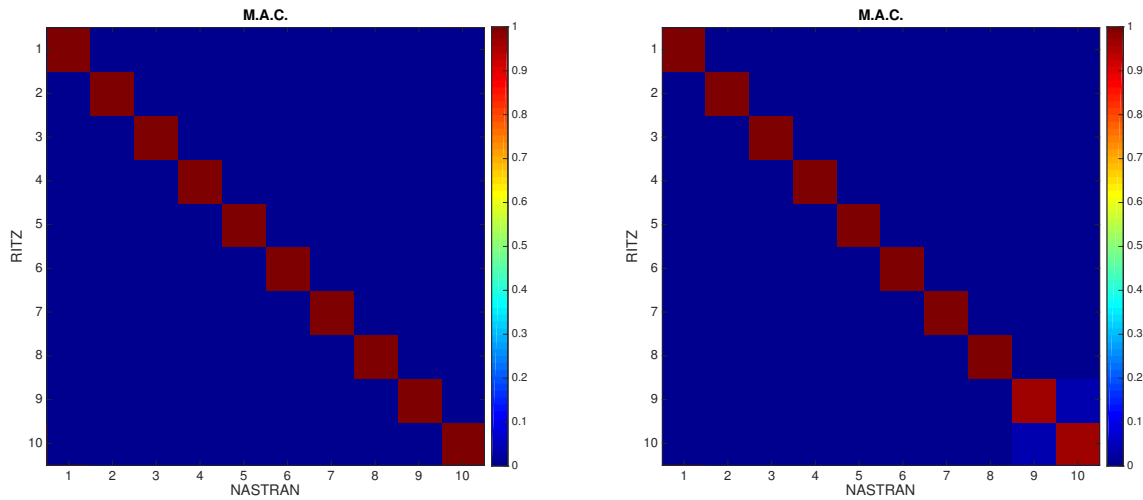


Figura 4.2 – MAC - Correlação modal entre o modelo proposto e o FEM para CA e CB.

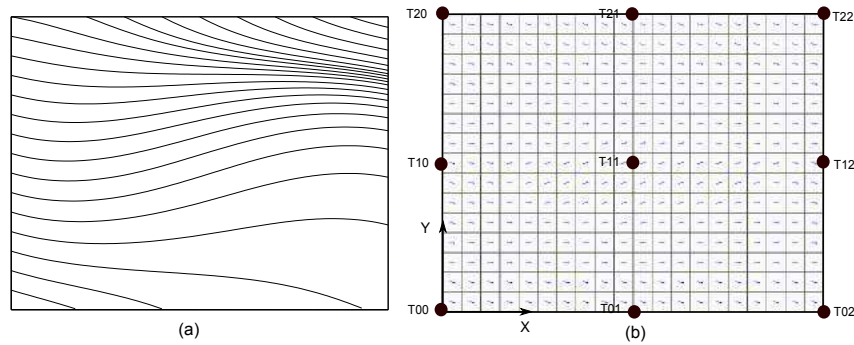


Figura 4.3 – Ângulo de definição da trajetória - a) Modelo de Ritz b) FEM.

4.4 Procedimento de otimização

Foi utilizado o algoritmo de evolução diferencial (DE) para determinar a máxima condição aerodinâmica (λ) de *flutter* de LCRC e LCRV. Adequaram-se em todas as rodadas efetuadas o número de gerações e o tamanho da população e ao menos cinco testes foram efetuados em cada configuração. Cinco diferentes otimizações são discutidas, conforme apresentado na Fig. 4.4.

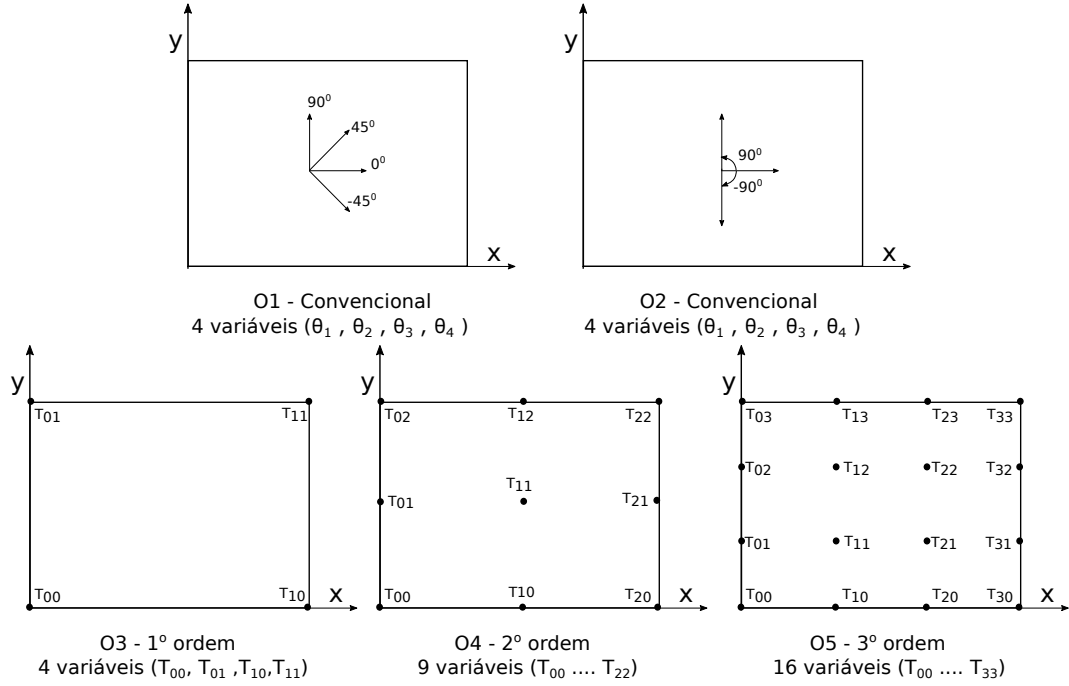


Figura 4.4 – Detalhamento das otimizações realizadas.

A primeira otimização O1, utilizada como referência para avaliação dos ganhos nas demais, foi realizada em um LCRC considerando como variáveis os ângulos bases do *lay-up* discretos e convencionais do conjunto $[0^\circ \pm 45^\circ 90^\circ]$. A segunda otimização O2, também foi realizada em LCRC, mas os ângulos foram considerados contínuos e puderam variar entre -90° to $+90^\circ$. Já a terceira análise O3, correspondeu ao primeiro LCRV otimizado e a trajetória foi definida por polinômios de Lagrange de primeira ordem em ambas direções. De igual forma foi realizada a quarta otimização O4 em um LCRV, e para a quinta otimização O5, a trajetória foi definida por polinômios de segunda e de terceira ordens.

A Tab. 5.4 resume e descreve cada otimização realizada, e as variáveis de projeto com as respectivas restrições. No entanto, o problema de otimização pode ser definido como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximizar: } \lambda_{flutter}; \\ \text{Variáveis de projeto: Conforme segunda coluna da Tabela 5.4;} \\ \text{Sujeito: As restrições da quarta coluna da Tab. 5.4.} \end{array} \right.$$

A sequência de empilhamento otimizada em O1 foi utilizada como a base para as configurações O3, O4 e O5.

Tabela 4.4 – Opções de lay-up e variáveis de projeto.

Configuração	Variáveis de Projeto	Tipo de Variáveis	Domínio
O1	$[\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4]$	discreta	$[\pm 45^\circ \ 0^\circ \ 90^\circ]_i$
O2	$[\theta_1 \ \theta_2 \ \theta_3 \ \theta_4]$	contínua	$[-90^\circ \ 90^\circ]_i$
O3	$\begin{bmatrix} T_{01} & T_{11} \\ T_{00} & T_{10} \end{bmatrix}$	contínua	$[-90^\circ \ 90^\circ]_i$
O4	$\begin{bmatrix} T_{02} & T_{12} & T_{22} \\ T_{01} & T_{11} & T_{21} \\ T_{00} & T_{10} & T_{20} \end{bmatrix}$	contínua	$[-90^\circ \ 90^\circ]_i$
O5	$\begin{bmatrix} T_{03} & T_{13} & T_{23} & T_{33} \\ T_{02} & T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{01} & T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{00} & T_{10} & T_{20} & T_{30} \end{bmatrix}$	contínua	$[-90^\circ \ 90^\circ]_i$

4.5 Restrições de manufatura

Considerando a estratégia de deposição das fibras com raio constante, conforme proposto por Fayazbakhsh *et al.* (2013), foi incluída no ciclo de otimização a restrição do raio mínimo de curvatura. Dessa forma, a trajetória de deposição das fibras é formulada diferentemente ao exposto no Capítulo II, mas utilizando os mesmos parâmetros (T_0 e T_1), de modo que o ângulo de controle da deposição fica expresso por:

$$\sin(\theta(x)) = \sin T_0 + (\sin T_1 - \sin T_0) \frac{x}{a}. \quad (4.6)$$

Assim, o raio de curvatura é definido por:

$$r = \frac{a}{(\sin T_1 - \sin T_0)}. \quad (4.7)$$

Este parâmetro é o mais importante no controle da qualidade do LCRV manufaturado, pois está diretamente relacionado aos defeitos de manufatura, por exemplo: flambagem local da fibra e deformações fora do plano indesejadas (*wrinkle*, *crimping*), que reduzem a resistência mecânica do laminado curado. Para uma largura típica de lâminas (3,17 mm) o mínimo raio de curvatura é 635 mm.

A trajetória de deposição segundo esta abordagem é determinada integrando $dy/dx =$

$\tan \theta(x)$, que resulta em:

$$y(x) = \int \tan(\theta(x)) dx = \frac{a \sqrt{1 - \left(\text{sen}(T_0) - \frac{x(\text{sen}(T_0) - \text{sen}(T_1))}{a} \right)^2}}{\text{sen}(T_0) - \text{sen}(T_1)}. \quad (4.8)$$

4.6 Análises e resultados

Esta seção apresenta os resultados encontrados para as cinco diferentes otimizações realizadas. Em todas as análises, a geometria e as propriedades mecânicas do material seguem os valores definidos na Tab. 4.1.

Os resultados foram organizados na Tab. 4.5 resumindo todas as configurações. Na Figura 4.5 é mostrada a trajetória otimizada para os LCRV O3, O4 e O5.

Tabela 4.5 – Resultados da Otimização.

Configuração	Valores Ótimos	<i>Flutter</i> [λ]	Ganhos*
O1	$[0^\circ \ 0^\circ \ 0^\circ \ 45^\circ]_s$	223500	—
O2	$[-24, 24^\circ \ 31, 79^\circ \ 31, 67^\circ \ 24, 95^\circ]_s$	233500	4,47%
O3	$\begin{bmatrix} 64, 98^\circ & -64, 56^\circ \\ -15, 23^\circ & 11, 34^\circ \end{bmatrix}$	229000	2,46%
O4	$\begin{bmatrix} -77, 57^\circ & -26, 31^\circ & -83, 35^\circ \\ 50, 71^\circ & 7, 88^\circ & 53, 40^\circ \\ -74, 33^\circ & -34, 21^\circ & -63, 44^\circ \end{bmatrix}$	249000	11,41%
O5	$\begin{bmatrix} 39, 95^\circ & -75, 60^\circ & -69, 75^\circ & -14, 01^\circ \\ -32, 67^\circ & -10, 82^\circ & 8, 23^\circ & 30, 14^\circ \\ -49, 58^\circ & 11, 18^\circ & -11, 42^\circ & 55, 71^\circ \\ -15, 15^\circ & -55, 95^\circ & 60, 09^\circ & 1, 65^\circ \end{bmatrix}$	269500	20,50%

* Ganhos na condição de flutter com respeito a configuração O1.

Verifica-se, claramente, que à medida que a ordem do polinômio interpolador aumenta (Fig. 4.5), mais complexa se torna a trajetória, o que justifica a inclusão de restrições de manufatura.

Considerando o resultado da otimização de O1 como configuração base, é possível verificar os ganhos relativos às demais configurações. Verifica-se que para a configuração O4, fazendo a interpolação de segundo grau, o ganho encontrado foi considerável (11%). Aumentando o grau da interpolação para três (O5) foram encontrados os melhores resultados correspondendo a um aumento de 20,50% na condição de *flutter*.

A coalescência das frequências para cada configuração é mostrada na Fig. 4.6, na

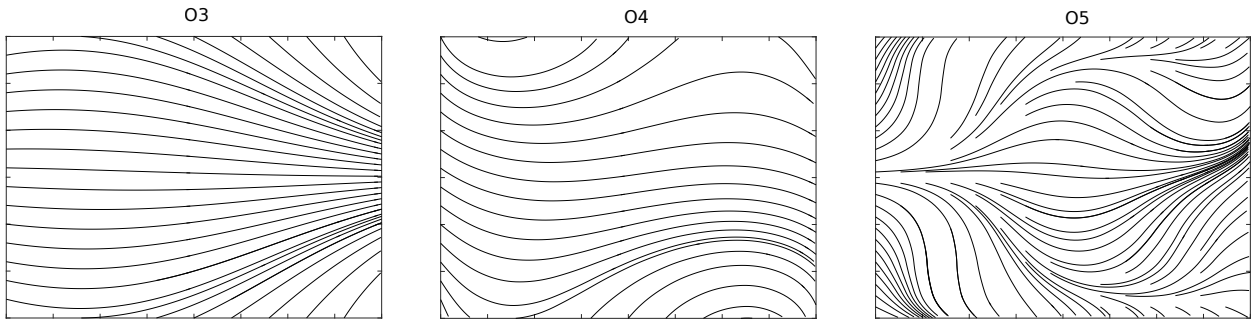


Figura 4.5 – Trajetórias otimizadas para O3, O4 e O5.

qual se percebe como a velocidade de *flutter* aumenta, com o resultado da otimização dos ângulos das trajetórias de deposição das fibras.

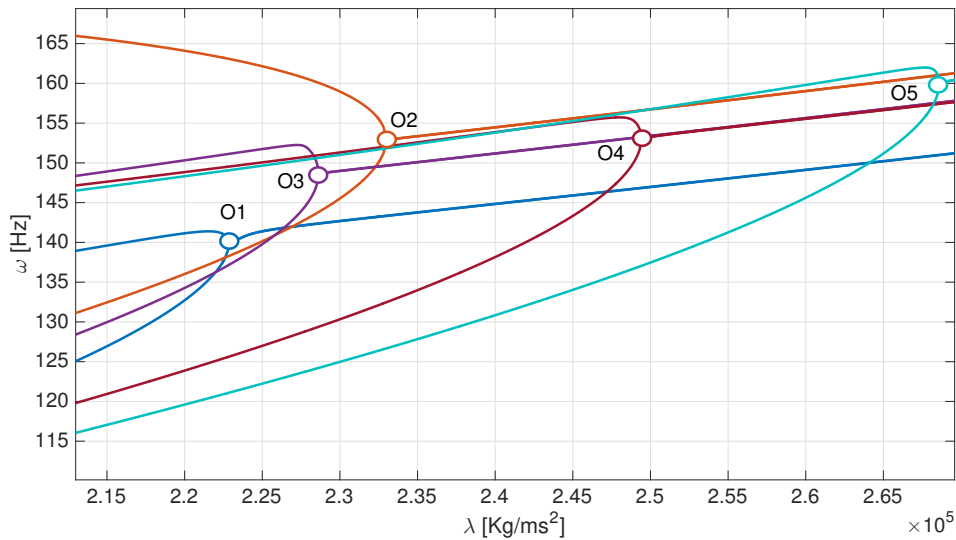


Figura 4.6 – Avaliação do comportamento aeroelástico - comparação dos resultados de *flutter*.

Na Figura 4.7 o efeito do controle da trajetória nos LCRV otimizados no comportamento dinâmico do laminado é comparado. Evidentemente, as frequências naturais são alteradas e de igual maneira os modos de vibrar são modificados. O principal efeito está relacionado ao modo 3, que tem a sua frequência natural aumentada para o valor máximo na otimização O5, conferindo uma separação maior entre as frequências naturais do modo 1 e do modo 3, melhorando desta forma a resposta aeroelástica.

Foi analisada, a partir dos resultados obtidos da otimização, a solução combinada que considera as cargas de membrana em conjunto com a solução aeroelástica, conforme mostrado na Fig. 4.8. O resultado ótimo dos LCRV (O3, O4 e O5) apresentou cargas

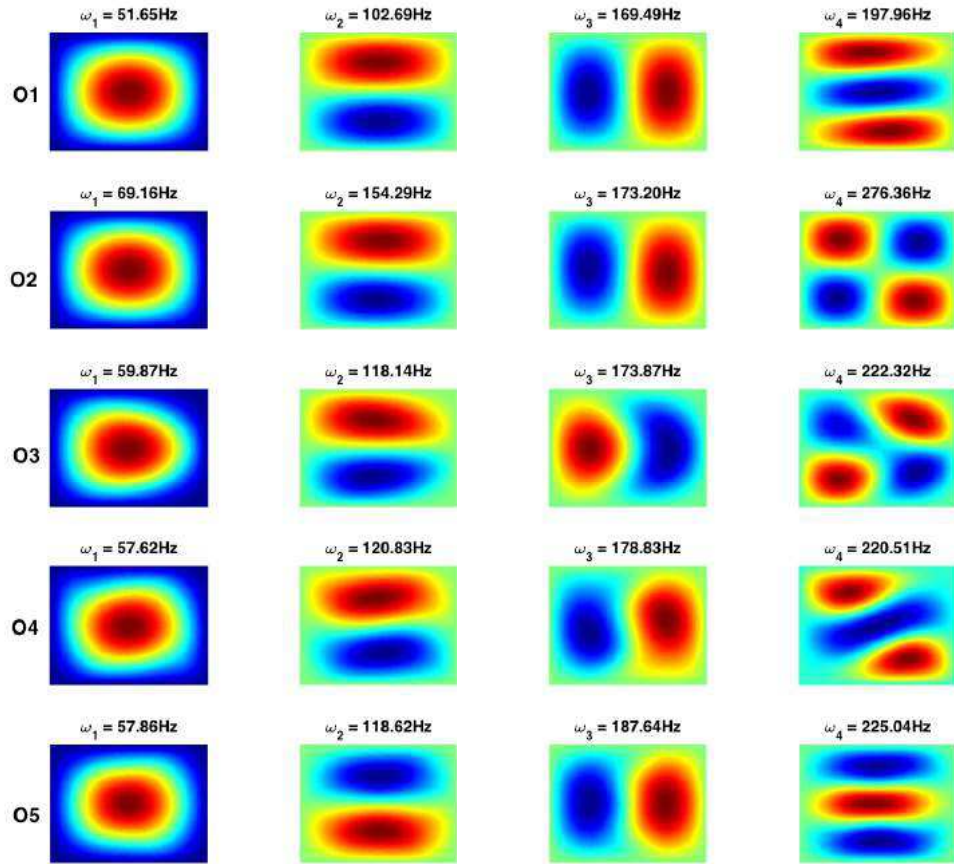


Figura 4.7 – Avaliação do comportamento dinâmico - comparação dos modos e frequências naturais.

críticas de flambagem bem semelhantes, diferentemente de O2 que apresentou um melhor comportamento. Os resultados são apresentados na forma de fronteiras de instabilidade (Fig. 4.8), que definem as regiões correspondentes às condições do laminado: se o comportamento é estável, se ocorre flambagem ou, ainda, se está em condição de oscilação em ciclo limite.

4.6.1 Otimização sob restrições de manufatura

Em virtude da complexidade das trajetórias encontradas, foi realizada uma otimização com restrição de manufatura considerando o *lay up* da configuração base otimizada em O1. Consideraram-se apenas duas variáveis de controle do ângulo de trajetória (T_0 e T_1) de acordo com a Eq. 4.6.

No entanto, comparando somente o comportamento aeroelástico, o ganho não é

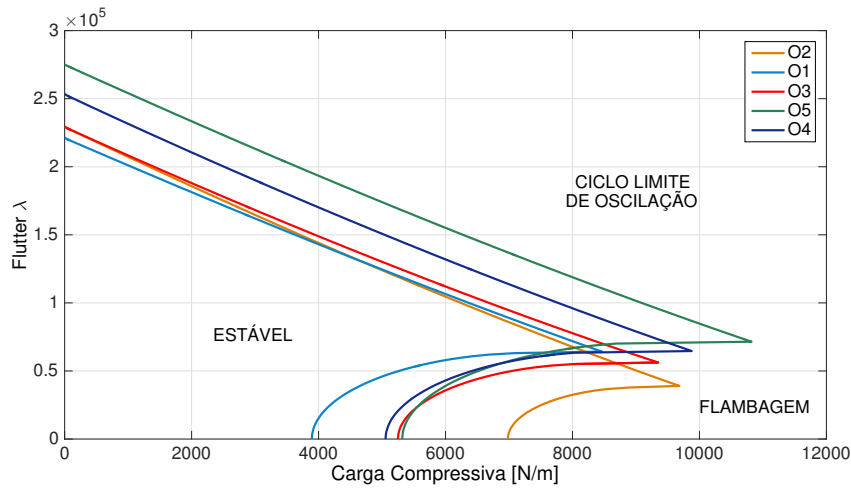


Figura 4.8 – Análise aeroelástica com cargas de membrana - comparação das regiões estáveis.

perceptível. Desta forma, optou-se por realizar uma otimização multiobjetivo considerando seis diferentes variáveis contemplando os ângulos de controle de trajetória e da sequência de empilhamento ($\mathbf{p}=[T_0 \ T_1 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \]$), sendo realizada da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximizar : } \mathcal{J}_1(p_i) = \text{vel. de flutter } (p_i), \quad \text{e} \quad \mathcal{J}_2(p_i) = \text{Carga de Flambagem } (p_i); \\ \text{Sujeito: } (p_i)_{\min} \leq (\mathbf{p})_i \leq (p_i)_{\max}; \\ \text{Sujeito: raio de curvatura } (r) \leq 635mm \end{array} \right.$$

A principal restrição de manufatura é com relação ao raio mínimo de curvatura. A influência da restrição de manufatura é avaliada na Fig. 4.9 onde a curva em azul representa a fronteira de Pareto para a configuração com restrição e a curva em laranja representa a fronteira sem a restrição; também é enfatizada a configuração selecionada na curva de Pareto com restrição de manufatura denominada (OM).

Na Figura 4.10 são comparadas as configurações OM e O1 ficando evidentes os ganhos em termos do envelope de instabilidade aeroelástico e de flambagem. Percebe-se que a velocidade de *flutter* na condição sem esforço de membrana praticamente não muda se comparada com o LCRC (O1); porém o envelope estável é consideravelmente maior para OM. Além disso, verifica-se que na configuração sem carregamento aerodinâmico, a condição de flambagem é pelo menos duas vezes maior que na configuração base.

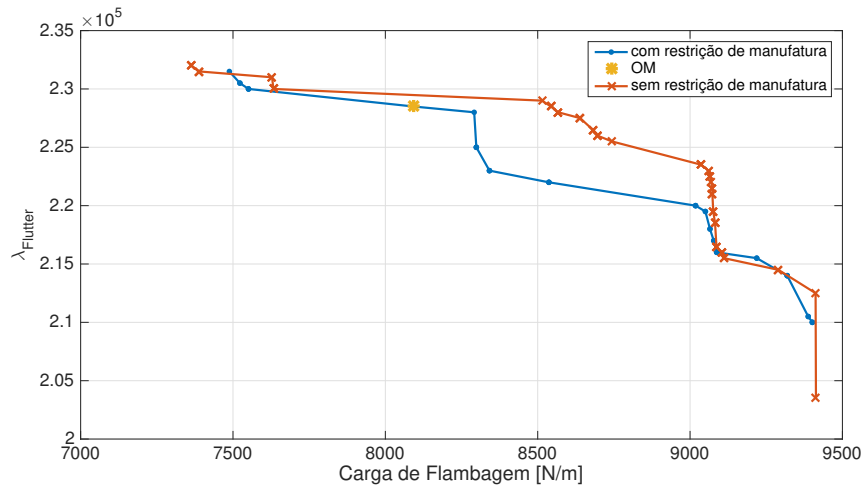


Figura 4.9 – Comparação das fronteiras de Pareto relativa às configurações com e sem restrições.

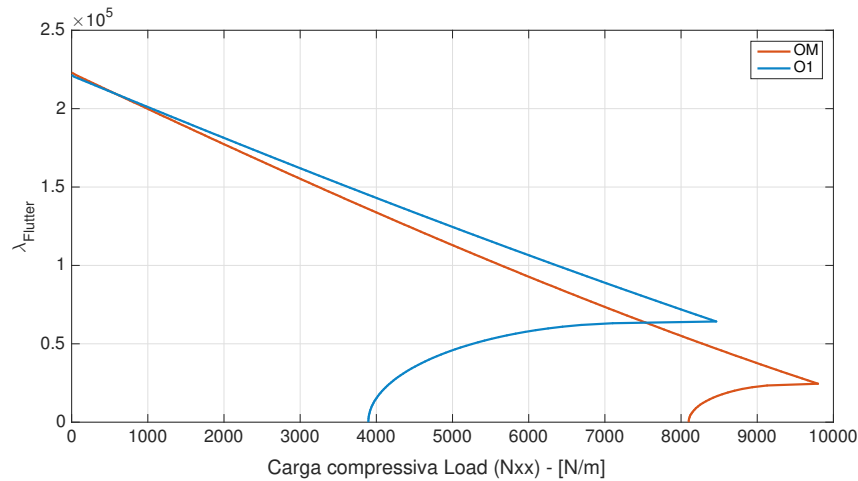


Figura 4.10 – Comparação do envelope de estabilidade aeroelástico e flambagem entre a configuração base e a configuração otimizada com restrição de manufatura.

4.6.2 Respostas temporais não lineares

As respostas temporais não lineares, em se tratando da não linearidade geométrica do material, em diversas condições aerodinâmicas para a mesma condição inicial são mostradas nas Figuras 4.11, 4.12 e 4.13. Na Fig. 4.11 compara-se O3 com O1 na condição limítrofe de flutter para O3, sendo evidente que, neste caso, o LCRV apresenta uma resposta amortecida com amplitude de oscilação decrescente no tempo, enquanto a configuração base entra em uma condição de oscilação com amplitude constante, denominada ciclo limite que é amplificada na medida em que o parâmetro aerodinâmico λ aumenta. Cabe ressaltar que na realização destas análises todos os termos lineares e não lineares foram levados em consideração e as

únicas simplificações adotadas foram relativas ao modelo aerodinâmico e ao amortecimento estrutural.

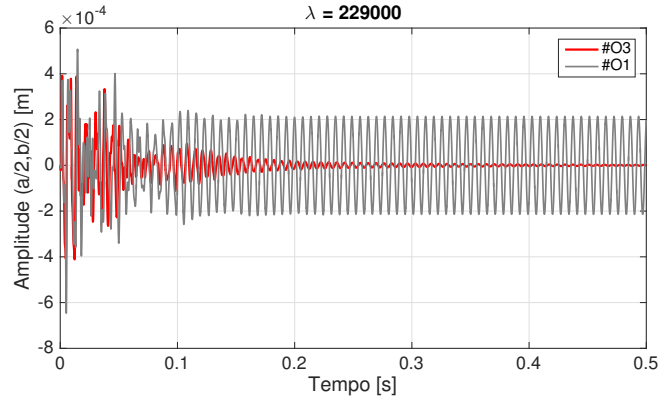


Figura 4.11 – Comparação temporal do comportamento aeroelástico entre O1 e O3 na condição limítrofe de *flutter* para O3.

Similarmente, na Figura 4.12 são comparadas as configurações O4 e O1 na condição próxima de *flutter* de O4. Adicionalmente, percebe-se que, como o parâmetro aerodinâmico aumentou com relação à Fig. 4.11, a amplitude de ciclo limite também sofreu acréscimo.

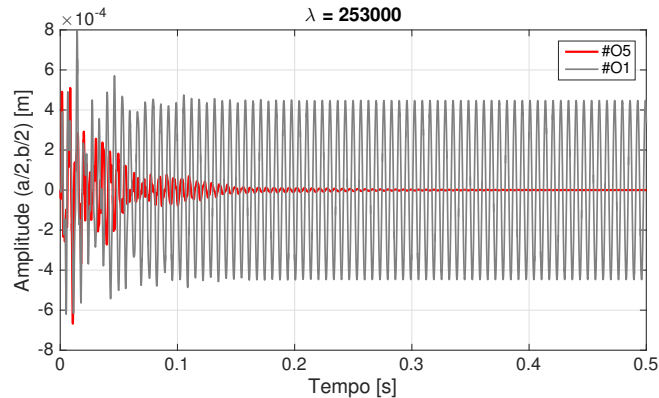


Figura 4.12 – Comparação temporal do comportamento aeroelástico entre O1 e O4 na condição limítrofe de *flutter* para O4.

Na Figura 4.13 observa-se que aumentando do parâmetro aerodinâmico um pouco mais próximo da região de instabilidade da configuração O5, novamente a amplitude de ciclo limite da configuração aumentou para O1; entretanto com relação a O5, esta permanece dinamicamente estável.

Dada a relação da configuração O1 com relação a amplitude e ao escoamento aerodinâmico, foram comparados os LCRV otimizados (O3, O4 e O5) e a configuração base com relação a amplitude do ciclo limite de oscilação (CLO), visando demonstrar o efeito de

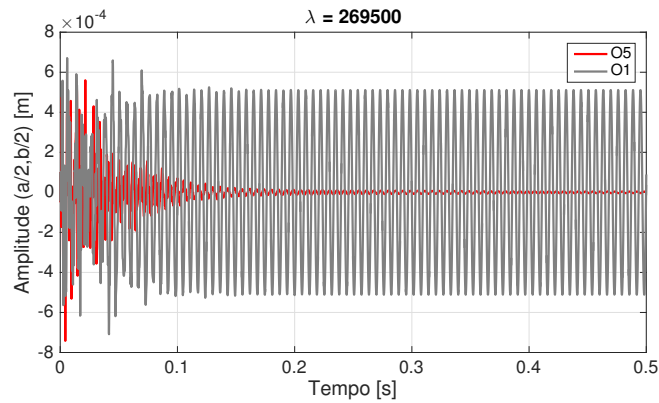


Figura 4.13 – Comparação temporal do comportamento aeroelástico entre O1 e O5 na condição limítrofe de *flutter* para O5.

bifurcação na amplitude na Fig. 4.14.

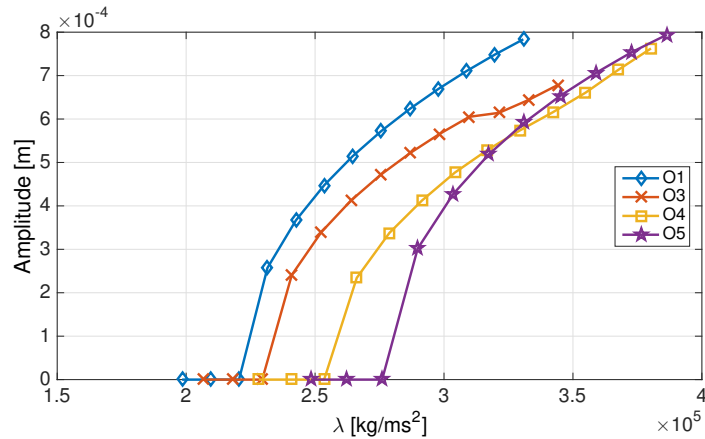


Figura 4.14 – Comparação da amplitude de ciclo limite de oscilação entre as configurações O1, O3, O4 e O5.

Analizou-se ainda o efeito das cargas de membrana na amplitude dos ciclos limites de oscilação, conforme mostrado na Fig. 4.15 para a configuração O3. Percebe-se que à medida que se aumenta a carga de membrana, a condição de ciclo limite inicia-se em uma condição aerodinâmica menor. Além disso, constatou-se para um valor acima do crítico de esforço de membrana (o dobro do valor na condição de flambagem livre do efeito aerodinâmico), o comportamento de bifurcação é diferenciado, inclusive apresentando alguns pontos adicionais de equilíbrio.

Semelhantemente, as órbitas obtidas para diferentes condições aerodinâmicas e de esforços de membrana, apresentadas na Fig. 4.16 foram comparadas, e percebeu-se um efeito bastante similar ao apresentado na Fig. 4.15, com relação à amplitude. Além disso, verifica-se principalmente na condição onde a carga compressiva é mais acentuada ($\beta/\beta_{flamb} = 2$) as

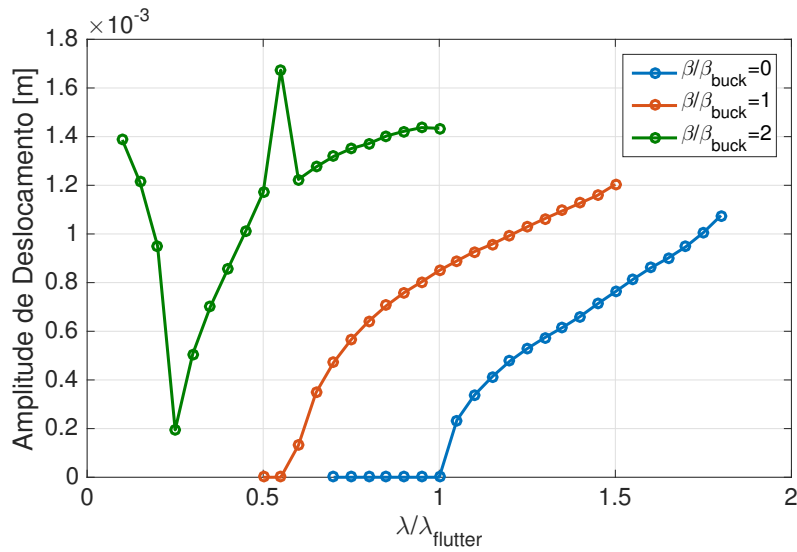


Figura 4.15 – Verificação do efeito dos esforços de membrana na amplitude do CLO de O3.

órbitas não são perfeitamente elípticas evidenciando uma região próxima da instabilidade.

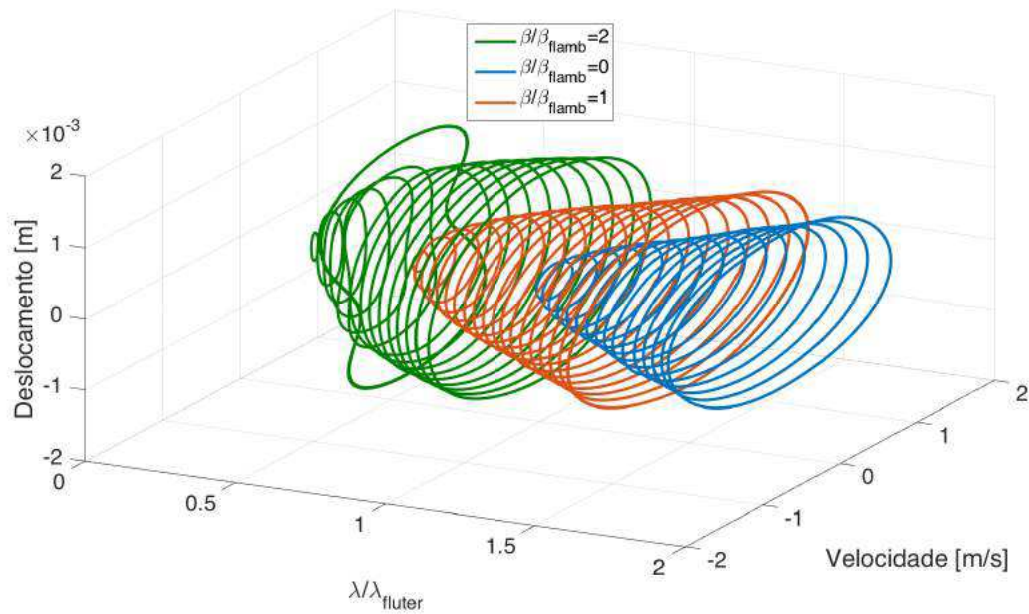


Figura 4.16 – Verificação do efeito dos esforços de membrana nas órbitas de O3.

4.7 Conclusões

Uma investigação numérica de LCRV aplicados ao estudo de *flutter* de painel foi realizada. Primeiramente, os LCRC e LCRV foram otimizados, utilizando os ângulos do *lay-up* para os LCRC e os ângulos de controle de trajetória dos polinômios interpoladores de Lagrange para os LCRV. Logo após, otimizou-se também um LCRV com trajetória definida por raios

de curvatura constantes e com restrição de manufatura de mínimo raio através de uma otimização multiobjetivo considerando efeitos aeroelásticos e esforços no plano. Em ambas abordagens pode-se verificar os ganhos relativos ao LCRV fabricados com a técnica *tow steering*.

A formulação linear e não linear de LCRV fabricados com deposição de fibras por trajetórias curvas com adição do efeito dos esforços de membrana foi desenvolvida para avaliação do comportamento aeroelástico de *flutter* de painel. Adicionalmente, utilizou-se um algoritmo baseado em evolução diferencial para realizar as otimizações de objetivo simples (maximizar a condição aerodinâmica de *flutter*) e de múltiplos objetivos (flambagem e condição aeroelástica de *flutter*), com e sem restrições de manufatura (raio mínimo de curvatura e deposição por trajetórias de raio constante).

As soluções ótimas encontradas evidenciam os benefícios com enfoque ao comportamento aeroelástico dos LCRV; à medida que a ordem do polinômio interpolador aumenta a trajetória se torna mais complexa e com isso aumenta o desafio tecnológico relacionado à manufatura. Com isso, buscou-se também otimizar os LCRV com restrição de manufatura exequíveis tendo tal configuração sido investigada através de uma otimização multiobjetivo combinada em termos aeroelásticos e de flambagem sendo possível aumentar o envelope de estabilidade do laminado.

Por fim, a análise das configurações otimizadas considerando não linearidade geométrica estrutural foi também realizada, o que permitiu verificar o efeito da bifurcação e das órbitas nas diferentes configurações, com e sem o efeito dos esforços de membrana. Contudo notou-se que a amplitude de oscilação em ciclo limite dos LCRC e dos LCRV na condição de *flutter* são semelhantes, mas em condições aerodinâmicas diferentes.

CAPÍTULO V

ANÁLISE NUMÉRICA E EXPERIMENTAL DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE LAMINADOS DE RIGIDEZ VARIÁVEL FABRICADOS COM *TOW STEERING*

“Push on and faith will catch up with you.”

Jean le Rond d’Alembert

Neste capítulo, o comportamento dinâmico (analítico e experimental) é avaliado nos LCRV fabricados com *tow steering*. Inicialmente, foi realizada uma otimização com o objetivo de aumentar a primeira frequência natural, denominada aqui por frequência fundamental. O controle da trajetória de deposição das fibras foi feito utilizando polinômios interpoladores de Lagrange, semelhantemente ao abordado no Capítulo IV. Resultados interessantes foram encontrados relacionados com o grau do polinômio interpolador e também com as condições de contorno do laminado.

O laminado foi modelado de acordo com a teoria clássica de laminação, e foram utilizados polinômios de Legendre como base para o método de Rayleigh-Ritz, sendo realizadas pequenas modificações para levar em consideração diferentes condições de contorno. Este modelo foi comparado e validado com o modelo de elementos finitos utilizando o software Nastran[®] para três condições de apoio: com todos os bordos livres, simplesmente apoiados e engastados.

O comportamento dinâmico experimental também foi avaliado comparando-se um

LCRC e um LCRV fabricados pelo processo de *tow steering*, adotando a estratégia de deposição com raio de curvatura constante. Neste caso, os resultados experimentais corroboraram com os ganhos verificados nas simulações analíticas.

5.1 Modelo teórico

Semelhantemente ao apresentado no Capítulo V, o modelo estrutural foi baseado na teoria clássica de laminação (TCL), mas no que diz respeito às hipóteses relativas à relação tensão-deformação de Von-Kàrman foram desconsiderados os termos não lineares.

A deposição das fibras é definida pelo ângulo de deposição, que é calculado por polinômios interpoladores de Lagrange:

$$\theta(x, y) = \Phi_i + \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} T_{mn} \cdot \prod_{m \neq i} \frac{x - x_i}{x_m - x_i} \cdot \prod_{n \neq j} \frac{y - y_j}{y_n - y_j}, \quad (5.1)$$

onde Φ_i é o ângulo base do *lay-up* no laminado e T_{mn} representam os ângulos de controle ao longo do laminado nos pontos de referência (M, N) , como mostrado na Fig. 2.8. Consequentemente, para um laminado simétrico, as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{D} dos LCRV são dependentes espacialmente do ângulo de controle da trajetória (*tow steering angle*).

Os deslocamentos são escritos baseados no método de Ritz e a solução completa para o deslocamento transversal do laminado em diferentes condições de contorno é definida utilizando polinômios de Legendre (Capítulo II), escritos de forma normalizada (ζ and η) como:

$$\zeta = x/a; \quad \eta = y/b. \quad (5.2)$$

Dessa maneira, o deslocamento transversal do laminado para diferentes condições de contorno pode ser definido como:

$$w_0(\zeta, \eta, t) = (\zeta^2 - \zeta)^c (\eta^2 - \eta)^c \sum_{m_0}^{m_{max}} \sum_{n_0}^n q_{mn}(t) L_m(\zeta) L_n(\eta), \quad (5.3)$$

onde c define as condições de contorno, que neste caso específico é a mesma para todos os lados do laminado, sendo $c=0,1,2$ relativos à condição livre, simplesmente apoiada e engastada, respectivamente.

Resultando na equação do movimento para o laminado, na condição livre de excitação, dada por:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0, \quad (5.4)$$

onde \mathbf{M} é a matriz de massa do laminado e \mathbf{K} a rigidez estrutural.

Logo, a solução de autovalores da equação seguinte representa as frequências naturais do sistema:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{q}_w = 0, \quad (5.5)$$

sendo considerada como a frequência fundamental, o menor valor de autovalor encontrado.

5.2 Descrição do modelo e verificação

A seguir, são apresentadas as propriedades e dimensões do laminado. Logo após, o modelo numérico desenvolvido com base no método de Ritz é comparado com o modelo realizado via método dos elementos finitos com o programa computacional Nastran®.

Foi considerado um laminado retangular com três condições de contorno distintas: com os bordos totalmente livres (FFFF), simplesmente apoiados (SSSS) e engastados (CCCC). Entretanto, para todas as condições, as dimensões da placa foram mantidas, conforme apresentado na Fig. 5.1 e na Tab. 5.1, onde também estão descritas as propriedades do material.

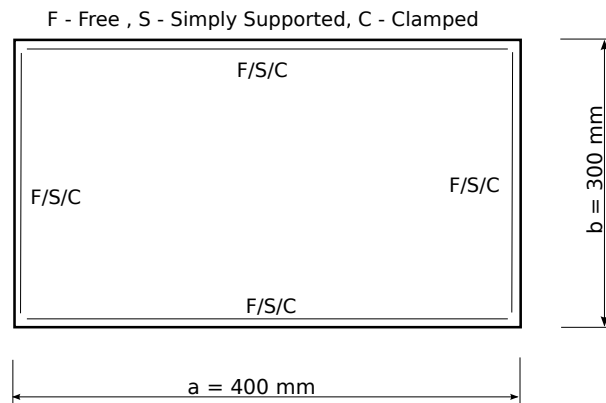


Figura 5.1 – Descrição da geometria da placa e das condições de contorno analisadas.

O modelo desenvolvido é comparado com relação à frequência natural para um LCRC (CA) e um LCRV (CB) para as três condições de contorno diferentes propostas. Em

Tabela 5.1 – Propriedades do material e geometria do laminado.

Propriedade	Valor	Propriedade	Valor
E_1	129500 MPa	comprimento, a	400 mm
E_2	9370 MPa	largura, b	300 mm
G_{12}	5240 MPa	densidade, ρ_0	1500 kg/m ³
μ_{12}	0,38	espessura da camada, t	0,19 mm

ambas configurações, a sequência de empilhamento do laminado base se manteve a mesma, definida por $[0^\circ/45^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$, a diferença em CB está no fato da trajetória ser definida de forma não linear utilizando polinômios interpoladores de Lagrange, conforme Eq. 5.1.

Tabela 5.2 – Comparação das frequências naturais, para diferentes condições de contorno, relativa ao LCRC (CA).

FFFF			SSSS			CCCC		
Ritz [Hz]	Nastran [Hz]	erro %	Ritz [Hz]	Nastran [Hz]	erro %	Ritz [Hz]	Nastran [Hz]	erro %
41,65	41,31	0,83	64,36	63,88	0,75	117,89	116,82	0,92
63,77	62,96	1,28	153,82	152,47	0,88	230,42	227,77	1,17
81,23	80,54	0,85	168,59	166,97	0,97	250,19	247,07	1,26
103,54	101,76	1,75	253,56	248,68	1,96	349,30	340,78	2,50
118,75	116,76	1,70	313,31	309,94	1,09	407,58	412,92	1,29
192,67	188,13	2,41	336,30	333,02	0,98	418,56	444,20	5,77

Tabela 5.3 – Comparação das frequências naturais, para diferentes condições de contorno, relativa ao LCRV (CB).

FFFF			SSSS			CCCC		
Ritz [Hz]	Nastran [Hz]	erro %	Ritz [Hz]	Nastran [Hz]	erro %	Ritz [Hz]	Nastran [Hz]	erro %
41,53	41,19	0,82	65,90	65,38	0,80	118,16	116,94	1,04
64,65	63,86	1,24	152,82	151,55	0,84	227,87	225,18	1,19
82,46	81,65	0,99	172,28	170,43	1,09	253,84	250,14	1,48
105,47	103,81	1,61	251,61	248,68	1,18	342,66	334,51	2,44
118,60	116,51	1,80	323,15	319,74	1,07	432,24	425,86	1,50
196,31	191,42	2,55	334,67	330,67	1,21	446,60	439,84	1,54

Constata-se que os resultados mostrados para ambas configurações, nas Tabelas 5.2 e 5.3, convergiram com oito modos em cada direção. É possível perceber comparando com os resultados obtidos com o FEM que os modelos são equivalentes com um erro aceitável.

5.3 Procedimento de otimização

Foi utilizado um algoritmo de evolução diferencial (DE) para realizar as otimizações propostas, com o objetivo de maximizar a frequência fundamental nos LCRV utilizados em

diferentes condições de contorno. As otimizações distintas foram realizadas de acordo com os parâmetros apresentados na Fig. 5.2 e Tab. 5.4. Neste contexto, todas as variáveis foram consideradas contínuas e pertencentes ao intervalo de ângulos entre -90° e 90° . O problema de otimização fica, portanto, formulado segundo:

Maximizar: $\omega_1(p_i)$;

Variáveis de Projeto (p): Segunda coluna da Tabela 5.4 ;

Sujeito: $(p_i)_{min} \leq (\mathbf{p})_i \leq (p_i)_{max}$.

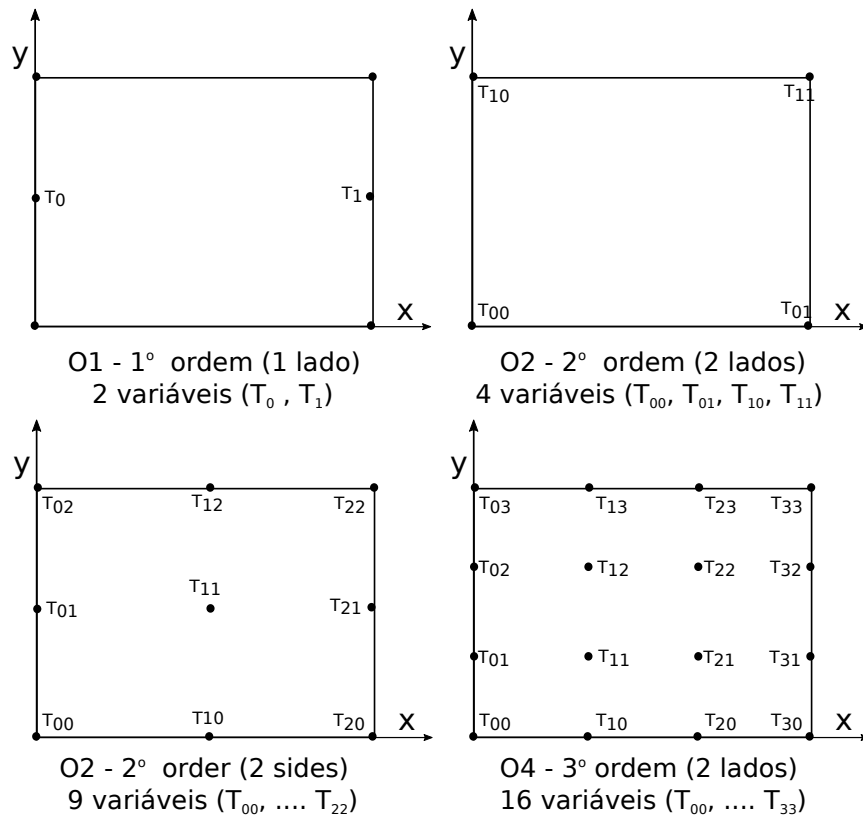


Figura 5.2 – Representação do espaço de projeto das diferentes otimizações propostas.

5.4 Análises e resultados

Os resultados foram organizados nas Tabelas 5.5, 5.6 e 5.7, com relação às três condições de apoio em todo o contorno: livre (FFFF), simplesmente apoiada (SSSS) e engastada (CCCC) respectivamente. A configuração base utilizada para comparação foi o laminado LCRC (CA) definido anteriormente para validação do modelo com o FEM, cujas frequências fundamentais

Tabela 5.4 – Opções de interpolação de trajetória e variáveis de projeto para o LCRV de *lay-up* base $[0^\circ/45^\circ/-45^\circ/90^\circ]_s$.

Configuração	Variável de Projeto	Tipo de Variável	Condição de Contorno
O1	$[T_0 \ T_1]$	contínua	$[-90^0 \ 90^0]_i$
O2	$\begin{bmatrix} T_{01} & T_{11} \\ T_{00} & T_{10} \end{bmatrix}$	contínua	$[-90^0 \ 90^0]_i$
O3	$\begin{bmatrix} T_{02} & T_{12} & T_{22} \\ T_{01} & T_{11} & T_{21} \\ T_{00} & T_{10} & T_{20} \end{bmatrix}$	contínua	$[-90^0 \ 90^0]_i$
O4	$\begin{bmatrix} T_{03} & T_{13} & T_{23} & T_{33} \\ T_{02} & T_{12} & T_{22} & T_{32} \\ T_{01} & T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{00} & T_{10} & T_{20} & T_{30} \end{bmatrix}$	contínua	$[-90^0 \ 90^0]_i$

são 41,65 Hz, 64,36 Hz e 117,89 Hz, respectivamente.

Tabela 5.5 – Comparação entre as configurações otimizadas e a configuração CB na condição FFFF.

	FFFF		
	Conf. Base [Hz]	Ótimo [Hz]	Ganho %
O1	41,65	45,15	8,40
O2		47,24	13,42
O3		47,49	14,02
O4		48,60	16,69

Tabela 5.6 – Comparação entre as configurações otimizadas e a configuração CB na condição SSSS.

	SSSS		
	Conf. Base [Hz]	Ótimo [Hz]	Ganho %
O1	64,36	78,53	22,02
O2		79,50	23,52
O3		82,26	27,81
O4		82,59	28,33

Conforme esperado, existe uma relação direta entre a complexidade da trajetória das fibras (polinômios de ordem maiores) e o aumento da frequência natural. Comparando os ganhos obtidos com relação às condições de contorno, um menor ganho foi encontrado para a condição livre (**16,7%**), aumentando na condição simplesmente apoiada (**28,3%**) e o melhor resultado foi encontrado na condição engastada (**36,0%**). O efeito da condição de contorno pode ser relacionado com a avaliação da energia potencial (Eq. 2.74), que significa que a restrição aumenta o valor da energia potencial e consequentemente os valores

Tabela 5.7 – Comparação entre as configurações otimizadas e a configuração CB na condição CCCC.

	CCCC		
	Conf. Base	Ótimo	Ganho
	[Hz]	[Hz]	%
O1	117,89	153,64	30,32
O2		154,03	30,66
O3		160,06	35,77
O4		160,20	35,89

das frequências naturais. Na realidade, os LCRV possibilitam a busca por novos espaços de projeto, aumentando a avaliação da energia potencial resultando em frequências fundamentais maiores; além disso os resultados mostraram que quanto mais restringido o laminado, maiores foram os ganhos encontrados.

Na Figura 5.3 é possível verificar as trajetórias ótimas encontradas para cada camada nas diferentes condições de contorno, sendo possível realizar a comparação também de trajetória entre os LCRV e o LCRC.

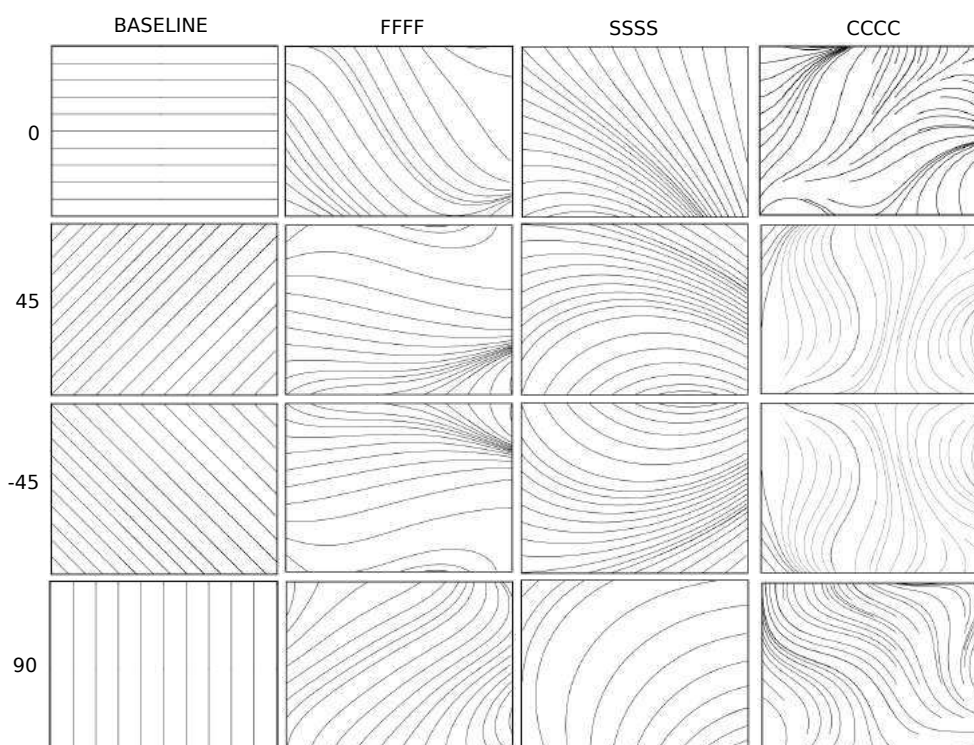


Figura 5.3 – Representação da trajetória ótima para a máxima frequência fundamental.

Por outro lado, as Figuras 5.4 a 5.6 apresentam a comparação entre a configuração base e as configurações ótimas da condição O3 no domínio da frequência para cada condição de contorno, onde é possível perceber claramente o aumento da frequência fundamental nos

LCRV.

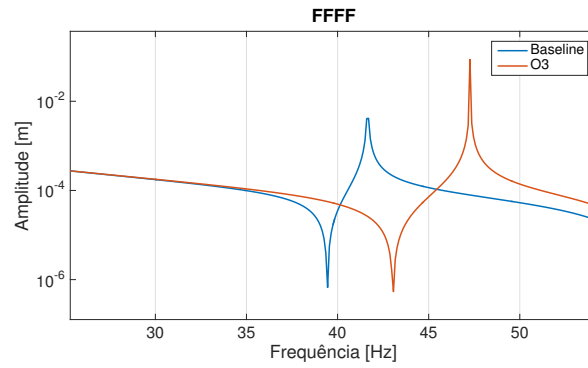


Figura 5.4 – Comparação entre a configuração base e a configuração ótima O3 para a condição da placa livre.

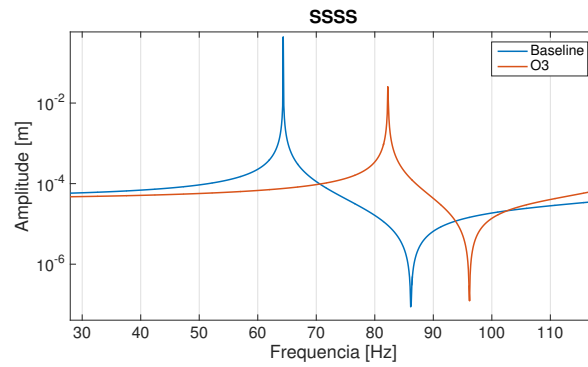


Figura 5.5 – Comparação entre a configuração base e a configuração ótima O3 para a condição da placa simplesmente apoiada.

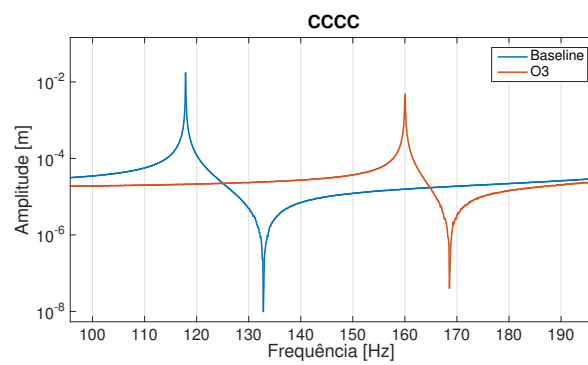


Figura 5.6 – Comparação entre a configuração base e a configuração ótima O3 para a condição da placa engastada.

5.5 Análise experimental

As placas foram fabricados no IPT/LEL, especificamente na unidade de São José dos Campos, e o material utilizado na fabricação das placas é o IM735/UD194, de elevada resistência e extensivamente utilizado em estruturas aeroespaciais. As propriedades do material foram definidas como especificado pelo fabricante e estão detalhadas na Tab. 5.8, entretanto considerando as incertezas inerentes ao processo fabricação e defeitos induzidos na forma de *gaps* ou *overlaps*, o módulo de elasticidade transversal E_2 e o módulo de elasticidade ao cisalhamento G_{12} foram ligeiramente modificados para melhor ajuste com as medidas experimentais.

Tabela 5.8 – Propriedades do material e geometria do laminado.

Propriedade	Valor	Propriedade	Valor
E_1	160 GPa	comprimento, a	320 mm
E_2	—	largura, b	270 mm
G_{12}	5,6 GPa	densidade, ρ_0	1620 kg/m ³
μ_{12}	0,31	espessura, t	0,18 mm

A condição livre foi examinada colocando a placa na vertical suspensa por pontos de ancoragem; a excitação foi introduzida na forma de um ruído branco com frequência randômica no intervalo de 0-400 Hz através de um *shaker* eletromagnético com uma haste em alumínio conforme mostra a Fig. 5.7. Esta haste, em conjunto com uma célula de carga (fabricante - Bruel & Kjaer) conecta o *shaker* com a placa aplicando uma carga de excitação perpendicular à placa.

A placa foi discretizada em uma malha de 7 pontos no comprimento e 6 pontos na largura, onde foram obtidas as leituras de aceleração por um acelerômetro piezoelétrico de baixo peso. Nos pontos medidos foram obtidas as funções em resposta na Frequência (FRF) possibilitando correlacionar, para cada ponto, a força aplicada e a aceleração medida, conforme mostra a Figura Fig. 5.8.

Utilizando as informações obtidas das FRFs foram obtidas as frequências naturais, os amortecimentos modais e os modos de vibrar do laminado, utilizando o software comercial ME'scope desenvolvido pela Bruel & Kjaer.

A Figura 5.9 compara os resultados em frequência obtidos experimentalmente do

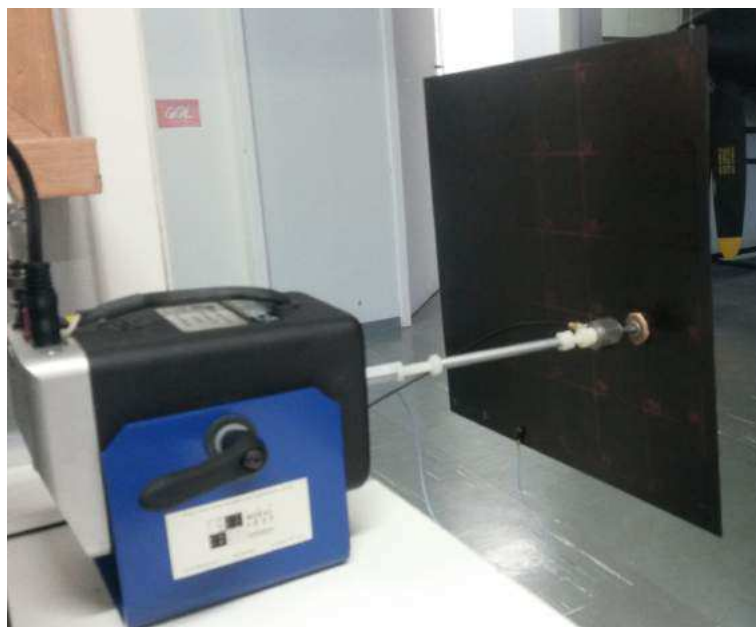


Figura 5.7 – Bancada experimental utilizada para obtenção das frequências naturais e dos modos de vibrar.

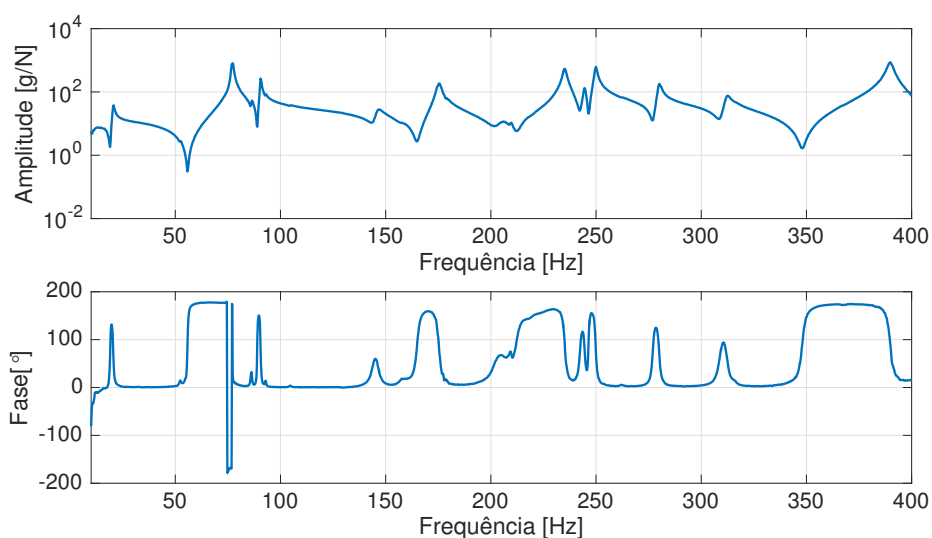


Figura 5.8 – FRF experimental obtida no LCRC.

LCRV e LCRC, cujo *lay up* básico é $[0\ 90\ 90]_s$. Na Figura 5.10 é detalhada a diferença na frequência fundamental, onde é evidenciado um aumento de 35% no valor da mesma utilizando o LCRV fabricado com raio de deposição das fibras constante de valor 605 mm, revelando de forma experimental, que os LCRV podem ser projetados para melhoramento dinâmico.

Compararam-se frequências naturais de até 200 Hz, obtidas experimentalmente com os resultados do modelo semianalítico apresentado na Tabela 5.9 para o LCRC e o LCRV

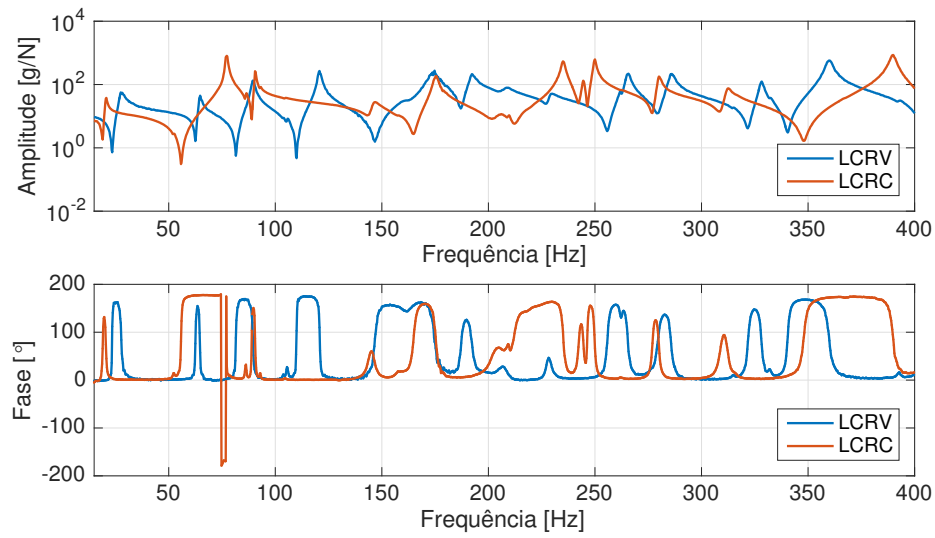


Figura 5.9 – Comparação da FRF obtida experimentalmente entre o LCRC e o LCRV.

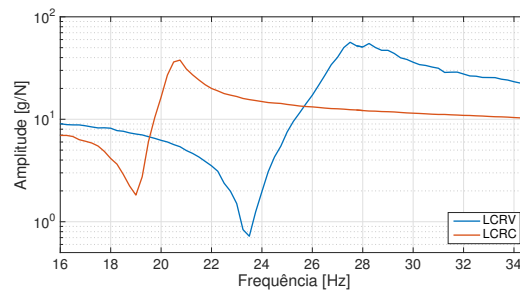


Figura 5.10 – Comparação da FRF obtida experimentalmente entre o LCRC e o LCRV na frequência fundamental.

ensaiados. Percebe-se que a máxima diferença encontrada para o LCRV foi de 4,43%, e de 6,10% para o LCRC. Esses erros podem ser justificados pela presença de defeitos induzidos pelo processo de manufatura e também pela influência do posicionamento do excitador, conforme pode ser verificado nas Figuras 5.11 e 5.12.

Tabela 5.9 – Comparação dos resultados obtidos com o modelo proposto com os resultados experimentais para o LCRV e o LCRC.

LCRV - <i>STEERED</i>			LCRC [0 0 90] _s .		
Ritz [Hz]	Exp.	Diferença [%]	Ritz [Hz]	Exp [Hz]	Diferença [%]
27,89	27,50	1,42	20,23	20,28	0,25
64,73	64,75	0,03	77,62	77,48	0,18
88,55	89,50	1,06	88,18	90,04	2,07
100,18	103,50	3,21	128,38	128,00	0,30
126,10	120,75	4,43	134,3	143,03	6,10
178,14	174,00	2,38	174,42	174,80	0,22
192,54	192,50	0,02			

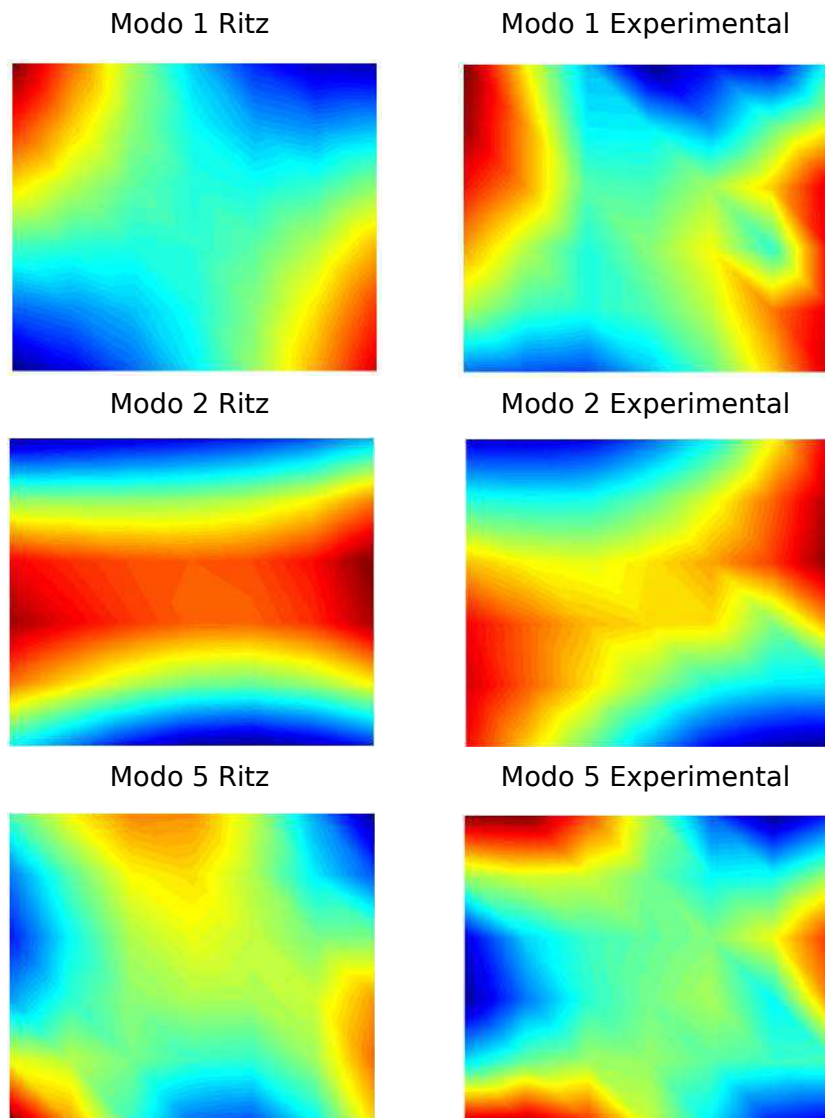


Figura 5.11 – Comparação modal entre os resultados experimentais e do modelo de Ritz para o LCRV.

5.6 Conclusões

Neste capítulo foi investigado de maneira analítica e experimental o comportamento dinâmico vibracional de LCRV e LCRC. Inicialmente desenvolveu-se o modelo semianalítico baseado no

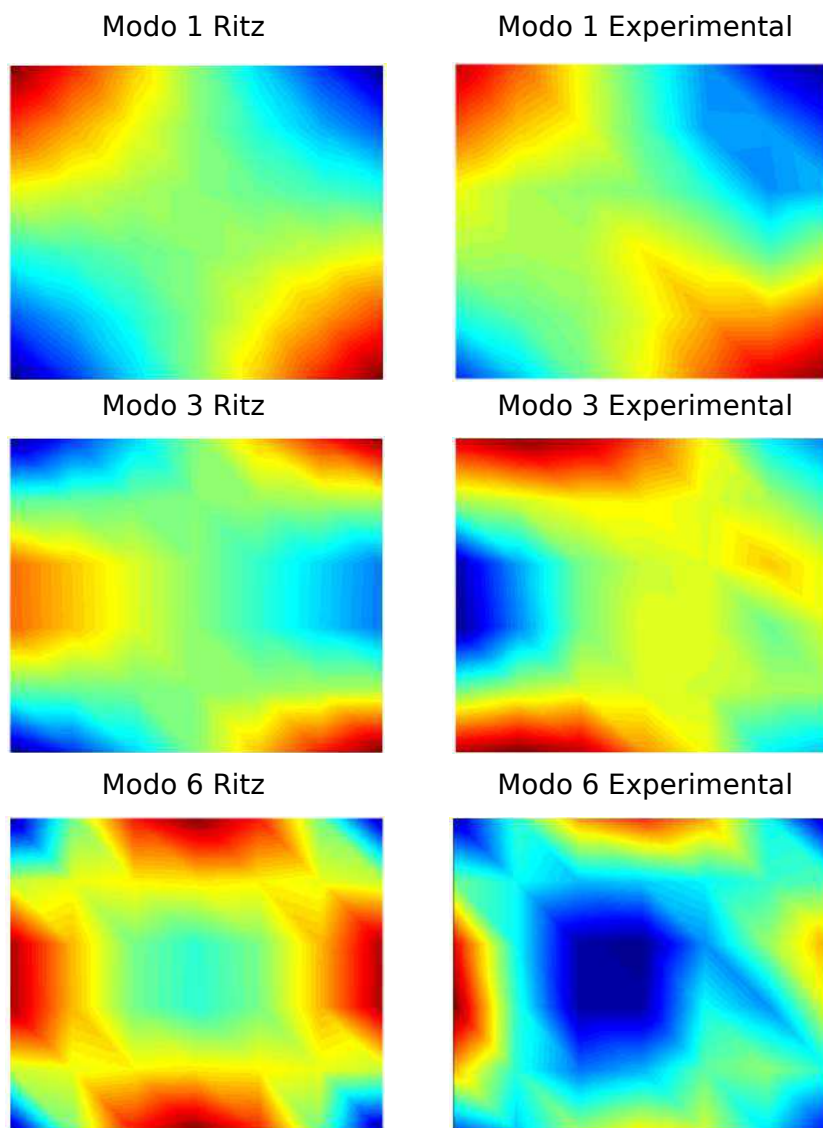


Figura 5.12 – Comparação modal entre os resultados experimentais e do modelo de Ritz para o LCRC.

método de Ritz utilizando funções de forma escritas por polinômios de Legendre modificados para incorporação de diferentes condições de contorno. Logo após, procedeu-se à verificação deste modelo desenvolvido, comparando com um modelo de elementos finitos, implementado no software Nastran®.

Foi realizado um processo de otimização com o objetivo de aumentar a frequência fundamental a partir do controle dos ângulos de definição da trajetória de deposição das fibras que foram definidos considerando polinômios interpoladores de Lagrange para o laminado na condição livre, simplesmente apoiada e engastada. Para cada condição de contorno foram realizadas quatro diferentes otimizações aumentando o grau do polinômio interpolador.

Semelhantemente ao encontrado no Capítulo V, os resultados da otimização mos-

traram que à medida que o grau do polinômio interpolador aumentava, melhores resultados eram encontrados. Em contrapartida, as trajetórias tornavam-se mais complexas. Verificou-se que quanto maior a restrição na condição de contorno, melhores resultados eram obtidos, ou seja, o ganho no aumento da frequência fundamental foi maior na placa engastada, depois para a placa simplesmente apoiada e por fim na placa livre.

Por fim, os resultados experimentais corroboraram com os obtidos numericamente, comprovando o aumento da frequência natural utilizando fibras curvilíneas. Adicionalmente, tanto para um LCRV quanto para um LCRC as frequências naturais foram comparadas com as numéricas e o erro máximo encontrado foi inferior a 7% para a frequência natural. Além disso, a comparação modal dos laminados evidenciou a qualidade dos resultados obtidos com a ressalva de alguns pontos de aquisição que evidenciaram alguma inconsistência devido ao posicionamento do excitador.

CAPÍTULO VI

OTIMIZAÇÃO ROBUSTA DO COMPORTAMENTO AEROELÁSTICO DE LAMINADOS DE MATERIAL COMPOSTO COM RIGIDEZ VARIÁVEL

“Tell me and I forget. Teach me and I remember.

Involve me and I learn.” Benjamin Franklin

Este capítulo analisa o comportamento aeroelástico de laminados de material composto com rigidez variável (LCRV) fabricados com a técnica *tow steering* na presença de incertezas provenientes das propriedades mecânicas do material composto e de defeitos inerentes ao processo de fabricação.

A modelagem aeroelástica segue a abordagem apresentada no Capítulo II com o modelo estrutural baseado nas suposições da teoria clássica de laminação (TCL). São considerados polinômios de Legendre para as funções de forma que descrevem o deslocamento fora do plano, e o modelo aerodinâmico segue as características da teoria das faixas em regime quase estacionário.

Semelhantemente à escolha feita por Hollowell e Dugundji (1984), Stanford *et al.* (2014) e Stodieck *et al.* (2013), são considerados laminados com condição de contorno engastada-livre, para simular um modelo simplificado de asa e avaliar seu comportamento aeroelástico. Contudo, neste capítulo propõem-se a identificação dos parâmetros mais sensíveis, a propagação de incertezas no modelo estrutural aeroelástico em um LCRV e a otimização robusta considerando condições incertas.

As técnicas de amostragem combinam o método de Monte Carlo com hipercubo latino nas análises determinística e robusta. A identificação das propriedades incertas é realizada através da análise de sensibilidade sendo essas incorporadas no modelo numérico, com o devido tratamento matemático para a realização da otimização robusta. Posteriormente, com o tratamento matemático adequado, são incluídas incertezas no modelo numérico para realização da otimização robusta. Por fim, utilizando o método conhecido como caos polinomial quantificam-se os resultados com incertezas e realiza-se a otimização robusta.

6.1 Modelo teórico

O modelo estrutural segue a abordagem detalhada no Capítulo II relativa à modelagem de LCRV fabricados com *tow steering*. No modelo dinâmico, é utilizada a abordagem clássica de Rayleigh-Ritz para equacionar o deslocamento transversal da placa, expresso em coordenadas adimensionais ζ ($\zeta = x/s$) e η ($\eta = y/c - 0.5$), e utilizando polinômios de Legendre (Le), é definido por:

$$w(x, y, t) = \sum_{m=m_0}^{m_{max}} \sum_{n=n_0}^{n_{max}} q_{mn}(t) Le_m(\zeta) Le_n(\eta). \quad (6.1)$$

Os limites inferiores da série $m_0 = 2$ e $n_0 = 0$ foram definidos de modo a satisfazer as condições de contorno geométricas. Já os limites superiores $m_{max} = 8$ e $n_{max} = 1$ foram definidos a partir de Stodieck *et al.* (2013), e pela condição de rigidez na direção da corda, respectivamente.

O modelo aeroelástico foi construído utilizando a Equação de Lagrange (LAGRANGE, 1788) separando as instabilidades aeroelásticas obtidas através da solução do problema de auto valor associado, entre divergência e *flutter*, conforme o exposto no Capítulo II.

6.2 Projeto aeroelástico com incertezas

O projeto é estruturado em três estágios principais: identificação, modelagem e otimização (BOOPATHY *et al.*, 2015).

A identificação é realizada através da análise de sensibilidade nos parâmetros principais, sendo possível definir as variáveis de interesse, que são modeladas apropriadamente de acordo com suas características. O segundo passo consiste na propagação das incertezas

no modelo numérico verificando o impacto na resposta do sistema. Por fim, realiza-se a otimização robusta com presença de incertezas, associando uma função objetivo apropriada dada as restrições nas variáveis de entrada.

6.2.1 Identificação de incertezas

A identificação dos parâmetros de maior influência no modelo estocástico foi feita a partir da análise numérica de sensibilidade, na qual foi possível ranquear a influência de cada parâmetro.

Sendo $y = f(\mathbf{x})$ a função que representa o modelo numérico, na qual y é a função de saída e $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ são as variáveis de entrada cada uma delas sendo associada a uma função de densidade de probabilidade, o método baseado na variância é utilizado para avaliar a influência de cada parâmetro na variância total (CANNAVÓ, 2012) quantificando a importância de cada parâmetro (\mathbf{x}_i) na variância de saída $\sigma^2\{y\}$ usando o cálculo de sensibilidade de primeira ordem (*first order sensibility index*, S_i):

$$S_i = \frac{\sigma^2\{E[y|\mathbf{x}_i]\}}{\sigma^2\{y\}}. \quad (6.2)$$

Foi utilizado o programa computacional GSAT - *Global Sensitivity Analysis Toolbox* (CANNAVÓ, 2012), implementado em Matlab[®] para a análise de sensibilidade, sendo o índice de sensibilidade obtido pelo teste da Amplitude de Sensibilidade de Fourier (FAST) proposto por (CUKIER *et al.*, 1973). Este procedimento considera a análise de decomposição da variância e expressa cada índice de sensibilidade por uma série de Fourier levando em consideração apenas valores não nulos.

O cálculo da relevância de cada variável é feito de acordo com o índice de sensibilidade encontrado. Esta análise direcionará os próximos passos, principalmente a definição de quais serão as variáveis de entradas sujeitas a incertezas. Uma representação esquemática deste processo pode ser visto na Fig. 6.1.

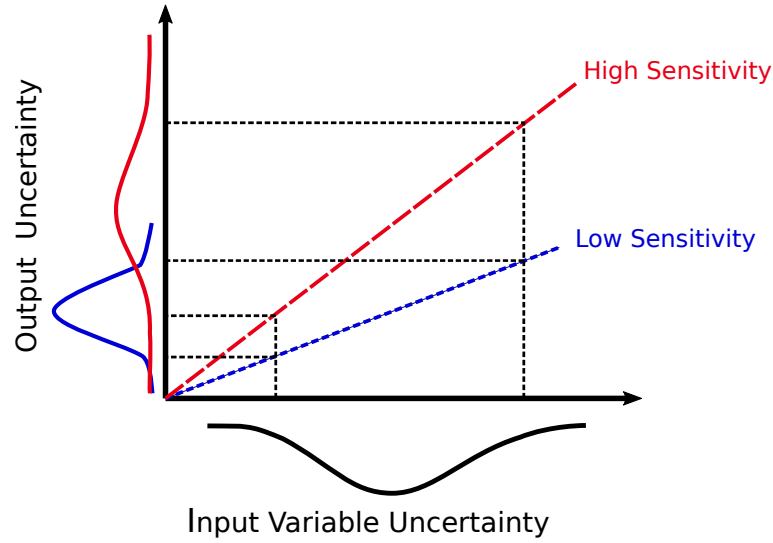


Figura 6.1 – Ilustração do método de análise de sensibilidade baseado na variância. Baseado em Loucks (2006).

6.2.2 Modelagem de incertezas

Para cada variável aleatória de entrada, obtida da análise de sensibilidade, é estabelecido um intervalo de valores, com definição de um valor médio e da função de distribuição de probabilidade, como mostrado na Fig. 6.2. Estas variáveis são inerentes ao processo e não podem ser totalmente eliminadas. Por exemplo, no caso de LCRV fabricados com *tow steering*, durante a deposição das fibras, o ângulo de controle da trajetória pode apresentar discrepâncias, podendo ser expresso através de um valor médio adicionado a um desvio padrão para descrever a função de distribuição. Por outro lado, devido às dificuldades na manufatura, o laminado pode apresentar defeitos que alteram significativamente as propriedades mecânicas locais no laminado, que podem ser tratadas de forma simplificada considerando incertezas nas propriedades mecânicas das fibras.

A representação de uma variável aleatória pode ser completamente definida por sua função de distribuição acumulada $CDF_X(x)$ expressa como:

$$CDF_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \quad (6.3)$$

onde, \mathbb{P} representa a probabilidade de um evento.

Considerando uma variável aleatória contínua, a função densidade probabilidade

(PDF) é:

$$PDF_X(x) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \mathbb{P}(x \leq X \leq x + h)/h, \quad (6.4)$$

e a média desta variável, neste caso, é equivalente à da função Esperança obtida por:

$$\mu_X \equiv E[X] = \int_{\mathcal{D}\mathcal{X}} x \cdot PDF_X(x) dx. \quad (6.5)$$

A função densidade probabilidade pode ser modelada de diferentes maneiras, por exemplo, seguindo uma distribuição log-normal, exponencial, ou estimada através da sua média e desvio padrão de uma amostra (CURSI; SAMPAIO, 2015).

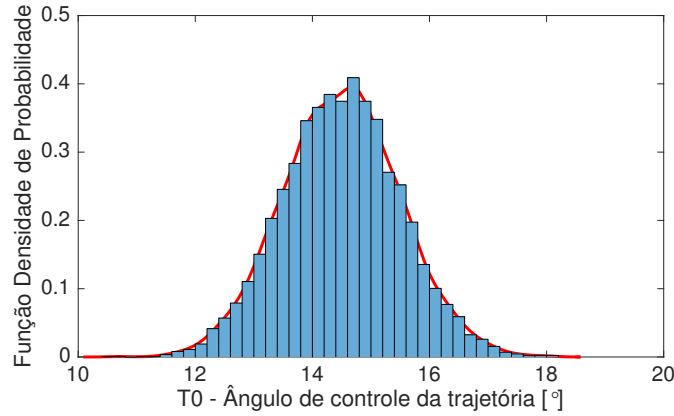


Figura 6.2 – Função Densidade de Probabilidade do ângulo de *tow steering*.

6.2.3 Propagação de incertezas

Após a identificação das fontes de incertezas, o próximo passo consiste na propagação através da relação de entrada e saída no modelo numérico.

A maneira mais simples de avaliar a propagação de incertezas é por meio da simulação de Monte Carlo, em que uma vez definidas condições estatísticas das variáveis (PDF), os resultados de saída são avaliados para um número finito de amostras $\alpha^{(j)}$ com a estimativa da média (μ_f) e da variância dos resultados de saída (σ_f^2). Sua abordagem é não intrusiva e pode ser utilizada para obtenção de qualquer saída. Mas, em muitos casos, a avaliação da função exata é computacionalmente onerosa e inviável. Além disso, a principal desvantagem deste método está relacionada à amostragem, pois grandes áreas do domínio amostral podem ser deixadas de fora, enquanto outros métodos possuem um

melhor comportamento (BOOPATHY *et al.*, 2015). Para solucionar esta dificuldade, métodos aproximados podem ser utilizados para avaliação da resposta do modelo numérico em função do valor médio e da variância.

Neste trabalho, utilizou-se o método denominado Expansão por Caos Polinomial (PCE), baseado em polinômios ortogonais de Hermite, escolhido devido à consideração de distribuição gaussiana para as variáveis aleatórias. Desta forma, os resultados de saída admitem a representação do caos da seguinte forma (SCARTH *et al.*, 2015b):

$$f(\mathbf{x}) = u_0 \mathbf{H}_0 + \sum_{i_1=1}^M u_{i_1} \mathbf{H}_1(\mathbf{x}_{i_1}) + \sum_{i_1=1}^M \sum_{i_2=1}^{i_1} u_{i_1 i_2} \mathbf{H}_2(\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{i_2}) + \sum_{i_1=1}^M \sum_{i_2=1}^{i_2} \sum_{i_3=1}^{i_2} u_{i_1 i_2 i_3} \mathbf{H}_3(\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{i_2}, \mathbf{x}_{i_3}) + \dots, \quad (6.6)$$

sendo $u_{i_1} \dots u_{i_p}$ os coeficientes determinísticos, \mathbf{x}_{ij} as variáveis aleatórias gaussianas e a base formada por polinômios de Hermite de ordem p :

$$\mathbf{H}_p[\mathbf{x}_{i_1} \dots \mathbf{x}_{i_j}] = (-1)^n \frac{\partial^n e^{-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{x}}}{\partial \mathbf{x}_{i_1}, \dots, \mathbf{x}_{i_j}}. \quad (6.7)$$

Normalizando, convenientemente, as variáveis aleatórias ζ_{ij} , pela média μ_X e pelo desvio padrão σ_X , estas são expressas por:

$$\zeta_{ij} = \frac{x_{ij} - \mu_x}{\sigma_x}. \quad (6.8)$$

A Equação 6.7 é reescrita como:

$$\mathbf{H}_p[\boldsymbol{\zeta}_{i_1} \dots \boldsymbol{\zeta}_{i_j}] = (-1)^n \frac{\partial^n e^{-\frac{1}{2} \boldsymbol{\zeta}^T \boldsymbol{\zeta}}}{\partial \boldsymbol{\zeta}_{i_1}, \dots, \boldsymbol{\zeta}_{i_j}}, \quad (6.9)$$

e, adicionalmente, fazendo β_i igual a $a_{i1} \dots, a_{ip}$ e $\Psi_i(\zeta_i)$ igual a $\mathbf{H}_p[\boldsymbol{\zeta}_{i_1} \dots \boldsymbol{\zeta}_{i_j}]$ a Eq. 6.6 pode ser reescrita como:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^p \beta_i \Psi_i(\boldsymbol{\zeta}). \quad (6.10)$$

Dessa forma, se forem considerados dois parâmetros aleatórios distintos, a expan-

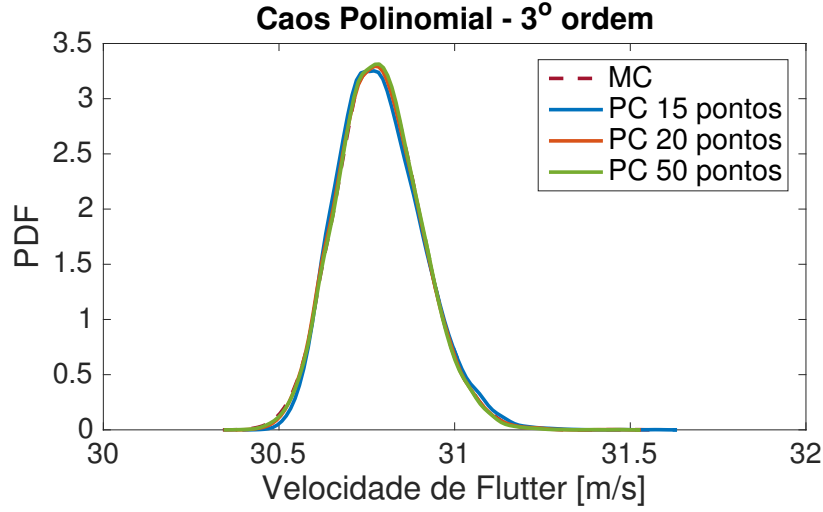


Figura 6.3 – Exemplo de representação da PDF para amostras de MC e PCE de terceira ordem para diferentes tamanhos de amostras.

são do caos polinomial de segunda ordem (PCE - ordem 2) é expressa por:

$$f(\mathbf{x}) = \beta_0 + \beta_1\zeta_1 + \beta_2\zeta_2 + \beta_3(\zeta_1^2 - 1) + \beta_4\zeta_1\zeta_2 + \beta_5(\zeta_2^2 - 1). \quad (6.11)$$

Semelhantemente, a expansão em terceira ordem (PCE - ordem 3) é:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = & \beta_0 + \beta_1\zeta_1 + \beta_2\zeta_2 + \beta_3(\zeta_1^2 - 1) + \beta_4\zeta_1\zeta_2 + \beta_5(\zeta_2^2 - 1) + \\ & \beta_6(\zeta_1^3 - 3\zeta_1) + \beta_7(\zeta_1^2\zeta_2 - \zeta_2) + \beta_8(\zeta_2^2\zeta_1 - \zeta_1) + \beta_9(\zeta_2^3 - 3\zeta_2). \end{aligned} \quad (6.12)$$

A convergência é facilmente avaliada através da Função Densidade Probabilidade (Fig. 6.3) e também pela Função Densidade Acumulada (Fig. 6.4) considerando diferentes ordens para o polinômio e para o número de amostras.

6.2.4 Problema de otimização

A otimização determinística considerada nesta tese é definida por uma otimização (maximização) restrita de uma função objetivo (\mathbf{J}) que representa a condição de instabilidade aeroelástica (menor valor entre as velocidades de *flutter* e de divergência). As variáveis de projeto (\mathbf{p}) são definidas inicialmente através da análise de sensibilidade, e a restrição é dada pelas fronteiras físicas e de manufatura. Logo, o problema de otimização pode ser definido

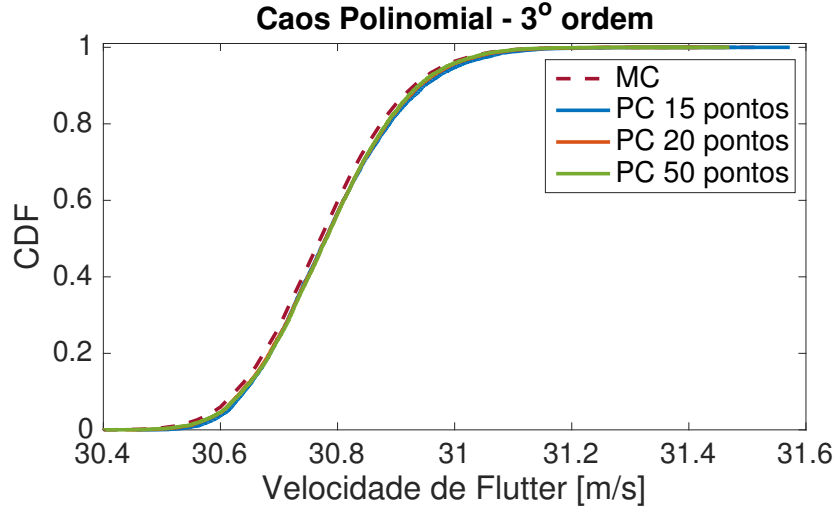


Figura 6.4 – Exemplo de representação CDF para amostras de MC e PCE de terceira ordem para diferentes tamanhos de amostras.

como:

$$\text{Maximizar: } \mathbf{J}(\mathbf{q}) = \text{margem aeroelástica}(\mathbf{p});$$

$$\text{Sujeito: } (p_i)_{\min} \leq (\mathbf{p})_i \leq (p_i)_{\max}.$$

Se toda variável puder ser precisamente determinada, todas as funções dependentes delas são determinísticas. No entanto, considerando incertezas nos parâmetros de projeto, a otimização não pode ser tratada seguindo uma abordagem determinística.

6.2.5 Otimização robusta

Deb e Gupta (2006) definem otimização robusta como a busca por minimizar uma função objetivo $f(x)$, cuja solução $x \in S$, onde S é o domínio de soluções possíveis, é obtida quando o resultado desejado apresentar sensibilidade a perturbações ao redor dos valores determinísticos das variáveis de entrada.

A solução robusta do problema é definida pela função objetivo robusta (\mathcal{J}) posta na forma de uma otimização multiobjetivo utilizando um algoritmo de evolução diferencial. A construção das fronteiras de Pareto para as soluções ótimas não dominantes é feita avaliando a média dos valores efetivos ($\mathcal{J}_1 = \mu_f$) (BRANKE, 1998; TSUTSUI; GHOSH, 1997; JIN; SENDHOFF, 2003) e da variância ($\mathcal{J}_2 = \sigma_f$). Portanto, a otimização multiobjetivo robusta

assume a seguinte forma:

$$\text{Maximizar} : \mathcal{J}_1(\mathbf{q}, \mu_f) = \mu(\text{Min}[\text{flutter}(\mathbf{p}), \text{divergência}(\mathbf{p})]);$$

$$\mathcal{J}_2(\mathbf{p}, \sigma_f) = \sigma(\text{Min}[\text{flutter}(\mathbf{p}), \text{divergência}(\mathbf{p})]);$$

$$\text{Sujeito: } (p_i)_{\min} \leq (\mathbf{p})_i \leq (p_i)_{\max}.$$

6.3 Simulação numérica

O modelo analisado é constituído por uma placa laminada de material composto, fabricado pelo processo de *tow steering*, idealizando uma asa retangular, previamente estudada por Hollowell e Dugundji (1984), com envergadura (s) de 305 mm, e corda (c), 76,2 mm, semelhante ao modelo utilizado no Capítulo III e esboçado na Fig. 3.4. A placa é composta por seis camadas unidireccionais de grafite/epóxi, e as propriedades mecânicas são mostrados na Tab. 6.1.

O laminado é simétrico, e todas camadas possuem os mesmo ângulos de controle da trajetória, alterando somente o *lay-up* básico, conforme Capítulo II. Dessa forma, a otimização realizada considera apenas duas variáveis de projeto: o ângulo de entrada no laminado (T_0) e o de saída (T_1), definidos pela Eq. 2.33.

Tabela 6.1 – Propriedades do material e dimensões do laminado.

Propriedade	Valor	Propriedade	Valor
E_1	98000 MPa	envergadura, s	304,8 mm
E_2	7900 MPa	corda, c	76,2 mm
G_{12}	5600 MPa	densidade, ρ_0	1520 kg/m ³
μ_{12}	0,28	espessura da camada, t	0,134 mm

6.4 Configuração base

Duas configurações simétricas com sequências de empilhamento distintas (LCRC) foram analisadas e consideradas como configurações base. A primeira, denominada C1, possui o seguinte *lay-up* $[0 -45 45]_s$; por outro lado, na configuração (C2), a sequência de empilhamento é dada por $[-45 45 45]_s$.

Em ambas configurações foram realizadas as análises aeroelásticas, com respectiva

avaliação da evolução das frequências naturais e do amortecimento modal associado, conforme mostrado na Fig. 6.5. Neste caso, percebe-se que o *flutter* ocorre em 31,0 m/s e 40,0 m/s para C1 e C2, respectivamente.

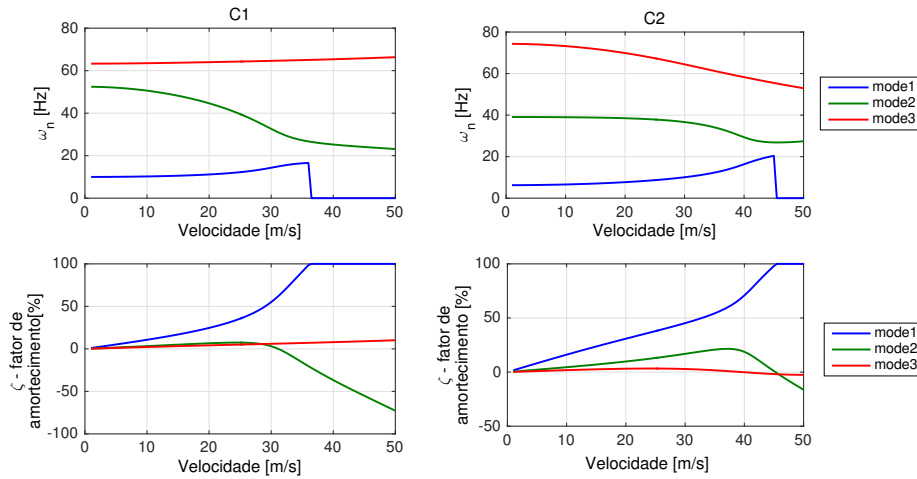


Figura 6.5 – Análise aeroelástica para as configurações básicas C1 e C2.

6.5 Otimização determinística

A otimização determinística é realizada com o objetivo de determinar os ângulos ótimos que definem as trajetórias de deposição da fibra que maximizam a margem aeroelástica que correspondem ao menor valor entre a velocidade de flutter e divergência. Para isto, utilizou-se um algoritmo baseado na evolução diferencial, sendo a população ajustada com pelo menos vinte indivíduos e vinte gerações.

Os resultados encontrados estão dispostos na Tab. 6.2 que permite comparar as configurações bases com as configurações otimizadas dos LCRV fabricados com *tow steering*. Percebe-se que a otimização proporciona um aumento de 31% na velocidade de flutter para C1 e 10% for C2.

Tabela 6.2 – Comparação com as configurações básicas dos resultados obtidos com a otimização.

LCRC	Vel. <i>flutter</i>	LCRV T0/T1	Vel. Flutter	Aumento
$[0 -45 45]_s$	31 m/s	-13,84°/ 62,83°	41 m/s	31%
$[-45 45 45]_s$	40 m/s	-12,0°/ 13,69°	43,4 m/s	9%

6.6 Otimização robusta

Antes de se proceder à otimização robusta, foram selecionadas as variáveis aleatórias de entrada, a partir do cálculo de sensibilidade. Para a primeira análise de sensibilidade, foram consideradas pequenas variações ($\sigma = 1^\circ$ nos ângulos da trajetória e 2% nos valores nominais das propriedades do material) nos parâmetros ($T0$, $T1$, E_1 , E_2 , μ_{12} , G_{12} and ρ), resultando na resposta expressa pela Fig. 6.6.

Nesta primeira abordagem, fica evidente que os principais parâmetros sensíveis são os ângulos de controle de trajetória, ficando as propriedades do material em segundo plano, para o caso específico do laminado estudado e os intervalos considerados.

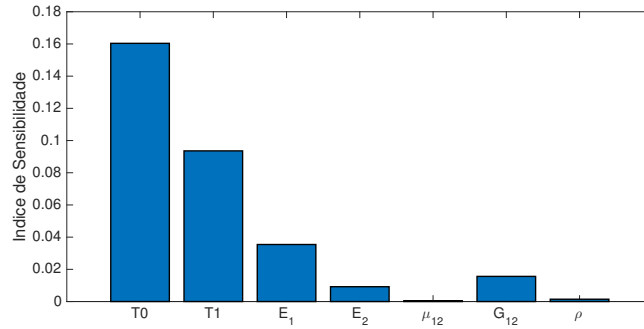


Figura 6.6 – Análise de sensibilidade para uma pequena variação nas variáveis de entrada.

Tendo em vista que o fator manufatura pode produzir defeitos ao laminado durante o processo de deposição, essencialmente vazios e sobreposições, decidiu-se por aumentar a variabilidade dos parâmetros relativos às propriedades no material na ordem de $\pm 5\%$, o que resultou em uma maior sensibilidade, principalmente no módulo de elasticidade na direção principal (E_1) em relação à primeira análise, conforme mostrado na Fig. 6.7.

Mesmo que os resultados da segunda análise de sensibilidade mostrem uma grande influência de E_1 , decidiu-se por adotar somente os ângulos de definição de trajetória como variáveis incertas, devido à falta de informação neste estágio no que diz respeito à quantidade e posição dos defeitos, visto que estes estão naturalmente relacionados aos ângulos de *tow steering*. Desta forma, para realizar a otimização robusta, foi considerada a geometria do laminado especificada na Tab. 6.1, composta por seis lâminas simétricas, com o objetivo de determinar uma configuração robusta dos ângulos de *tow steering* para análise aeroelástica.

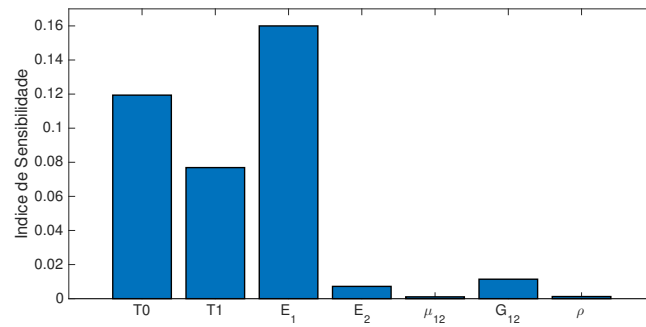


Figura 6.7 – Resultados de sensibilidade considerando grande variação nas propriedades dos materiais.

O procedimento de otimização combina um algoritmo de evolução diferencial com um procedimento de amostragem pelo método de Hipercubo Latino, com a escolha de um número apropriado de indivíduos e gerações, para cada análise realizada.

Diferentemente das configurações anteriores, onde foram realizadas otimizações com objetivo único de aumentar a velocidade de instabilidade aeroelástica, a otimização robusta proposta considera simultaneamente a média e o desvio padrão do envelope aeroelástico em duas funções objetivo distintas, de modo que a solução é extraída da fronteira de Pareto obtida da otimização, conforme mostrado na Fig. 6.8.

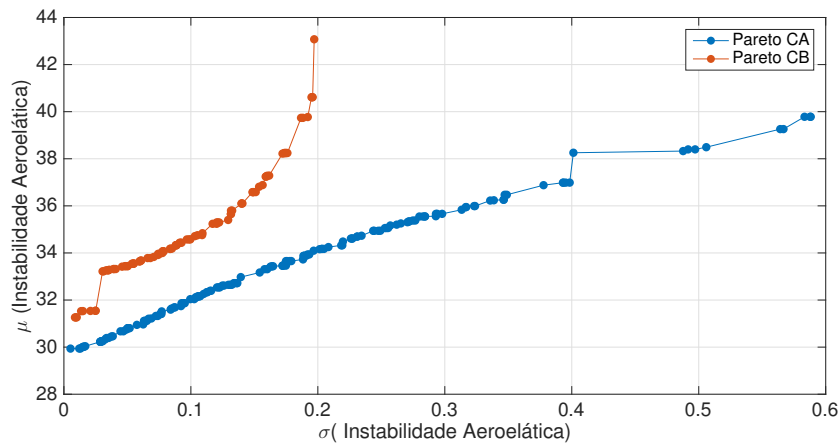


Figura 6.8 – Otimização aeroelástica robusta.

6.7 Comparação dos resultados

Foram realizadas otimizações determinísticas e robustas para duas configurações distintas de LCRV fabricados em trajetórias curvilíneas, sendo os resultados organizados e dispostos

na Tab. 6.3. Além disso, como exposto nas Figuras 6.9 e 6.10 verificou-se o efeito da perturbação dos ângulos de *tow steering* no comportamento aeroelástico evidenciado na variação das frequências naturais e no amortecimento para as configurações otimizadas de forma determinística.

Tabela 6.3 – Comparação dos resultados obtidos pela otimização determinística e robusta.

	Determinística (C1)	Determinística (C2)	Robusta (C1)	Robusta (C2)
$T0/T1^\circ$	-13,84/62,83	-12,0 / 13,69	-33,52 / 73,11	-25,75/ 26,95
\mathcal{J}_1	38,89 m/s	43,22 m/s	36,46 m/s	40,61 m/s
\mathcal{J}_2	3,3165	0,3005	0,3488	0,1950

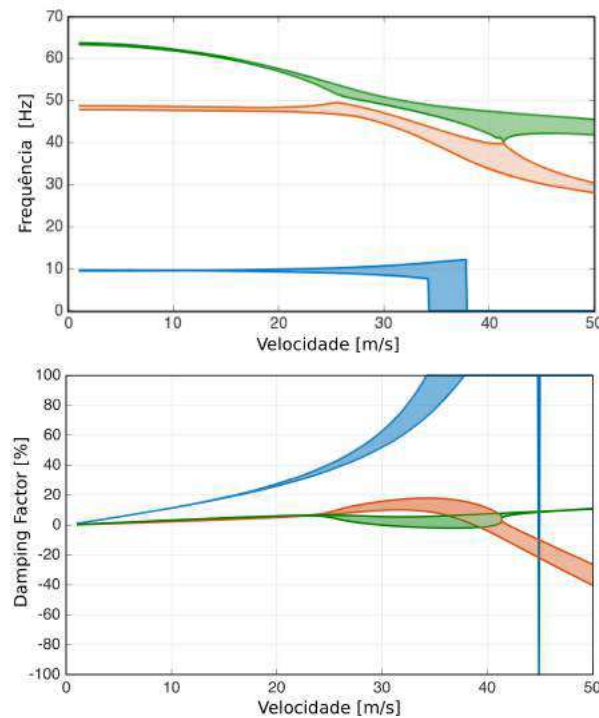


Figura 6.9 – Variação do comportamento aeroelástico devida à perturbação aleatória no ângulo de controle da trajetória na configuração determinística CA.

As configurações otimizadas também foram analisadas por comparação das Funções Densidade de Probabilidade, como mostrado nas Figuras 6.11 e 6.12, em que está evidenciada a diferença no comportamento aeroelástico de (C1) quando são perturbados os ângulos de controle de trajetória na configuração otimizada de forma determinística. Percebe-se, ainda, uma mudança no mecanismo de *flutter* de um modo para o outro, decorrente desta perturbação. Não obstante, os resultados encontrados para C2 demonstram que

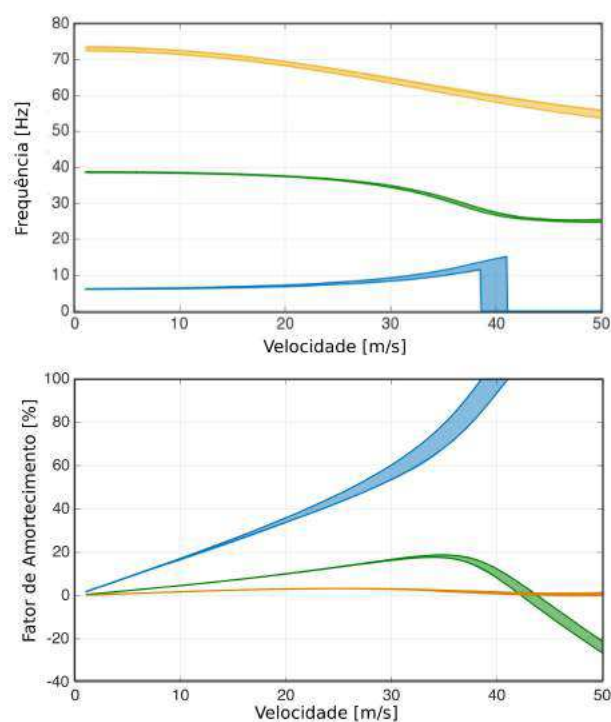


Figura 6.10 – Variação do comportamento aeroelástico devida à perturbação aleatória no ângulo de controle da trajetória na configuração determinística CB.

esta configuração é menos sensível se comparada com C1, apresentando menor sensibilidade, ainda para pequenas perturbações.

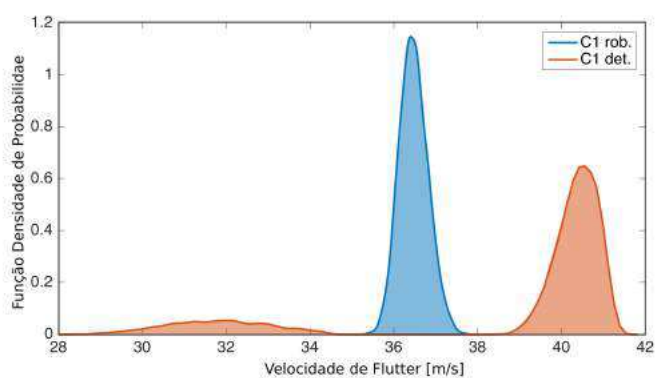


Figura 6.11 – Comparação entre as configurações otimizadas de maneira determinística e robusta para a configuração C1 em termos da função FDP.

Por fim, embora a configuração robusta apresente menor margem de estabilidade aeroelástica do que a comparada com a configuração determinística, conforme esperado, o LCRV otimizado ainda apresenta ganhos com relação à configuração convencional base (LCRC) em termos de robustez.

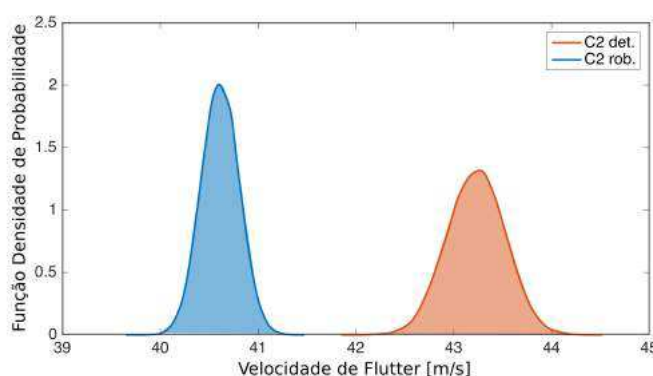


Figura 6.12 – Comparação entre as configurações otimizadas de maneira determinística e robusta para a configuração C2 em termos da função FDP.

6.8 Conclusões

O comportamento aeroelástico de LCRV fabricados com deposição das fibras por caminhos curvos foi analisado e otimizado neste capítulo. Devido à complexidade do processo de fabricação foi considerada nas simulações numéricas a inclusão de incertezas. Primeiramente foram obtidos os principais parâmetros de incerteza no projeto pela análise de sensibilidade, ficando evidenciado que os ângulos de controle de trajetória exercem maior influência que as propriedades mecânicas médias do material.

Dois *lay-ups* diferentes foram analisados, e posteriormente otimizados com relação aos ângulos de controle da trajetória de deposição de fibras na forma determinística e robusta. Em ambas otimizações foram evidenciados os ganhos obtidos com LCRV. No entanto, quando perturbado o ângulo de controle da trajetória no laminado otimizado de forma determinística, percebeu-se uma grande dispersão na instabilidade aeroelástica, diferentemente do que foi percebido na configuração robusta.

As soluções robustas foram retiradas da fronteira de Pareto que forneceu um conjunto de soluções possíveis que aliavam pequena dispersão em torno das melhores médias encontradas. Neste contexto, devido à sua eficiência computacional utilizou-se o método de Caos Polinomial para avaliação da função objetivo.

Por fim, é importante enfatizar a importância de se avaliar a influência de incertezas nos LCRV bem como o ganho obtido com os procedimentos de projeto que minimizam esta influência sobre o comportamento dinâmico, estrutural e aeroelástico, haja vista que

as limitações do processo de manufatura estão intimamente ligadas às restrições e defeitos induzidos, refletindo na confiabilidade estrutural.

CAPÍTULO VII

CONCLUSÕES, PRINCIPAIS CONTRIBUIÇÕES E PERSPECTIVAS

Neste trabalho foram realizados estudos dinâmicos e aeroelásticos em laminados de material composto de rigidez variável (LCRV), investigando laminados fabricados com espaçamento variável de fibras e laminados fabricados pelo processo de *tow steering* incluindo incertezas no ângulo de deposição do material. Ao longo do desenvolvimento do trabalho buscou-se evidenciar os benefícios que podem ser proporcionados por configurações de rigidez variável em relação aos compósitos tradicionais em que as fibras são dispostas unidirecionalmente em cada camada. Buscou-se, ainda, maximizar estes benefícios empregando procedimentos de otimização numérica.

Seguindo uma tendência observada atualmente em diversos ramos da mecânica estrutural, o estudo incluiu propostas de avaliação da influência de incertezas incidindo nos parâmetros físicos e geométricos sobre o comportamento dinâmico e aeroelástico de placas de LCRV, enfatizando, especialmente, as incertezas induzidas por processos de manufatura. Estas incertezas foram consideradas em um processo de otimização robusta, visando à melhoria do comportamento aeroelástico e, ao mesmo tempo, uma minimização da influência de parâmetros incertos sobre este comportamento.

Com relação à análise aeroelástica de laminados fabricados com volume de fibra variável (Capítulo III), diferentemente da maioria dos trabalhos a respeito de aeroelasticidade de materiais compostos em que as propriedades do material são homogeneizadas e consideradas constantes ao longo do laminado, considerou-se que essas propriedades variam de

acordo com o volume de fibras ao longo do laminado, resultando em uma grande variação de resultados no que diz respeito à velocidade de *flutter* e divergência. Além disso, os resultados mostraram uma relação direta entre a ampliação da margem de estabilidade aeroelástica e o aumento do volume de fibra. Entretanto, o mesmo não ocorreu com as frequências naturais. Neste contexto, não foram encontrados trabalhos anteriores reportados na literatura, o que leva a crer que estes resultados são originais.

Dada a complexidade do processo de fabricação dos LCRV por deposição curvilínea das fibras, analisou-se numericamente o sistema aeroelástico com incertezas nos ângulos de controle da trajetória. A otimização robusta obtida a partir da fronteira de Pareto, para um pequeno desvio em torno das melhores médias, permitiu o desenvolvimento de um projeto de LCRV com benefícios no comportamento aeroelástico e, ao mesmo tempo, robusto a incertezas nos ângulos de deposição de fibras. Do ponto de vista computacional, o método denominado Caos Polinomial mostrou-se especialmente interessante, pois diminuiu consideravelmente o tempo computacional. Os resultados foram bastante satisfatórios e reforçam a importância da avaliação aeroelástica dos LCRV com variáveis incertas, devido às limitações e defeitos induzidos pela manufatura em situações práticas.

Outra contribuição importante do trabalho é o estudo de *flutter* de painéis em LCRV fabricados com a técnica *tow steering*, considerando diferentes trajetórias de deposição de fibras. A utilização de polinômios interpoladores de Lagrange para definição destas trajetórias mostrou-se eficiente e permitiu comprovar a possibilidade de aumento da margem de *flutter*; no entanto, quanto maior a ordem do polinômio, mais complexas se tornaram as trajetórias, o que levanta questões referentes a restrições de manufatura. Este fato levou a se considerarem laminados menos otimizados, porém menos sujeitos a restrições de manufatura, nos quais as fibras são dispostas em trajetórias mais simples, de raio constante.

No tocante a estes laminados, foi encontrada uma configuração com ganhos relativos ao LCRC, através da otimização multiobjetivo, considerando esforços de membrana no plano e os efeitos aeroelásticos. Todos os resultados obtidos evidenciaram os benefícios dos LCRV, mesmo quando se limitou a otimização, visando à obtenção de trajetórias exequíveis, possibilitando aumento do envelope de estabilidade do laminado.

Os resultados provenientes das simulações temporais, considerando não linearidade

estrutural geométrica, evidenciaram o efeito de bifurcação na amplitude de deslocamento, correspondendo ao passo inicial em direção aos próximos trabalhos envolvendo não linearidades presentes em LCRV, nos casos em que se preveem maiores amplitudes de movimento.

Por fim, uma contribuição considerada importante foi a confrontação entre resultados numéricos e experimentais das características dinâmicas de placas fabricadas pelo processo *tow steering* com fibras dispostas em trajetórias de raio constante. Otimizações realizadas com o objetivo de aumentar a frequência fundamental mostraram que os ganhos dependem substancialmente das condições de contorno. Os resultados numéricos foram corroborados satisfatoriamente pelos obtidos através da análise numérica experimental, apresentando boa correlação entre as frequências naturais e algumas formas modais.

Ao final do desenvolvimento deste trabalho de tese, a partir das investigações realizadas e dos resultados obtidos, propõem-se, para sua continuidade, as seguintes sugestões:

- Inclusão de processos aleatórios para representação da dispersão dos ângulos de controle de trajetória em LCRV fabricados com a técnica *tow steering* e, conseqüentemente, propagação no modelo numérico para análise aeroelástica.
- Prosseguimento das análises não lineares, tanto para o modelo aeroelástico quanto para o modelo dinâmico, utilizando métodos apropriados, como o método das múltiplas escalas e o método das perturbações.
- Extensão das análises experimentais, considerando diferentes raios de curvatura, diferentes condições de contorno, com posterior ajuste de modelo utilizando métodos estocásticos.
- Aprimoramento da detecção e modelagem de defeitos de fabricação nos LCRV fabricados com *tow steering*, principalmente vazios e sobreposições.
- Verificação de laminados não simétricos ($\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$).
- Previsão de falha em painéis fabricados com *tow steering*.
- Utilizando a regra da mistura, verificar a resistência dos painéis fabricados com *tow steering*.

Referências Bibliográficas

ABDALLA, M. M.; SETOODEH, S.; GÜRDAL, Z. Design of variable stiffness composite panels for maximum fundamental frequency using lamination parameters. **Composite Structures**, v. 81, n. 2, p. 283–291, 11 2007.

AGARWAL, B.; BROUTMAN, L.; CHANDRASHEKHARA, K. **Analysis and Performance of Fiber Composites**. [S.l.]: Wiley, 2006.

AKBARZADEH, A. H.; NIK, M. A.; PASINI, D. Vibration responses and suppression of variable stiffness laminates with optimally steered fibers and magnetostrictive layers. **Composites Part B: Engineering**, v. 91, p. 315–326, 4 2016.

AKHAVAN, H.; RIBEIRO, P. Natural modes of vibration of variable stiffness composite laminates with curvilinear fibers. **Composite Structures**, v. 93, n. 11, p. 3040 – 3047, 2011. ISSN 0263-8223.

ALHAJAHMAD, A.; ABDALLA, M. M.; GÜRDAL, Z. Design tailoring for pressure pillowling using tow-placed steered fibers. **Journal of Aircraft**, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 45, n. 2, p. 630–640, 2016/10/20 2008.

AMABILI, M.; PELLICANO, F. Multimode approach to nonlinear supersonic flutter of imperfect circular cylindrical shells. **Journal of Applied Mechanics**, ASME, v. 69, n. 2, p. 117–129, out. 2001. ISSN 0021-8936.

BISPLINGHOFF, R.; ASHLEY, H.; HALFMAN, R. **Aeroelasticity**. [S.l.]: Dower Publications, 1996.

BLOM, A. W.; SETOODEH, S.; HOL, J. M. A. M.; GÜRDAL, Z. Design of variable-stiffness conical shells for maximum fundamental eigenfrequency. **Computers & Structures**, v. 86, n. 9, p. 870–878, 5 2008.

BOOPATHY, K.; RUMPFKEIL, M. P.; KOLONAY, R. M. Robust optimization of a wing under structural and material uncertainties. In: **17th AIAA Non-Deterministic Approaches Conference**. [S.l.]: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2015.

BRANKE, J. Creating robust solutions by means of evolutionary algorithms. In: EIBEN, A.; BÄCK, T.; SCHOENAUER, M.; SCHWEFEL, H.-P. (Ed.). **Parallel Problem Solving from Nature — PPSN V**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 1998, (Lecture Notes in Computer Science, v. 1498). p. 119–128. ISBN 978-3-540-65078-2.

CANNAVÓ, F. Sensitivity analysis for volcanic source modeling quality assessment and model selection. **Computers & Geosciences**, v. 44, p. 52–59, 7 2012.

CASTRO, S. G. P.; GUIMARÃES, T. A. M.; RADE, D. A.; DONADON, M. V. Flutter of stiffened composite panels considering the stiffener's base as a structural element. **Composite Structures**, v. 140, p. 36–43, 4 2016.

CUKIER, R. I.; FORTUIN, C. M.; SHULER, K. E.; PETSCHKE, A. G.; SCHAIBLY, J. H. Study of the sensitivity of coupled reaction systems to uncertainties in rate coefficients. **The Journal of Chemical Physics**, v. 59, p. 3873–3878, 1973.

CURSI, E. S. de; SAMPAIO, R. **Uncertainty Quantification and Stochastic Modeling with Matlab**. [S.l.]: Elsevier, 2015. 177 - 225 p. ISBN 978-1-78548-005-8.

DEB, K.; GUPTA, H. Introducing robustness in multi-objective optimization. **Evolutionary Computation**, MIT Press, v. 14, n. 4, p. 463–494, 2006.

DOWELL, E. Nonlinear oscillations of a fluttering plate. **AIAA Journal**, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 4, n. 7, p. 1267–1275, jul. 1966. ISSN 0001-1452.

DOWELL, E. Panel flutter - a review of the aeroelastic stability of plates and shells. **AIAA Journal**, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 8, n. 3, p. 385–399, mar. 1970. ISSN 0001-1452.

EVANS, D. O. **Fiber Placement**. [S.l.]: Miracle and S. Donaldson, 2001.

FAYAZBAKHS, K.; NIK, M. A.; PASINI, D.; LESSARD, L. Defect layer method to capture effect of gaps and overlaps in variable stiffness laminates made by automated fiber placement. **Composite Structures**, v. 97, p. 245–251, 3 2013.

FUNG, Y. **An Introduction to the Theory of Aeroelasticity**. [S.l.]: Dover, 1994.

GARRICK, I.; REED, W. Historical development of aircraft flutter. **Journal of Aircraft**, Vol. 18, n. No. 11, p. pp. 897–912, 1981.

GÜRDAL, Z.; TATTING, B.; WU, C. Variable stiffness composite panels: Effects of stiffness variation on the in-plane and buckling response. **Composites Part A: Applied Science and Manufacturing**, v. 39, n. 5, p. 911 – 922, 2008. ISSN 1359-835X.

HADDADPOUR, H.; ZAMANI, Z. Curvilinear fiber optimization tools for aeroelastic design of composite wings. **Journal of Fluids and Structures**, v. 33, p. 180–190, 8 2012.

HANCOCK. **An Introduction to the Flight Dynamics of Rigid Aeroplanes**. [S.l.]: Horwood, 1995. (Ellis Horwood series in mechanical engineering). ISBN 9780133194432.

HASHEMINEJAD, S. M.; MOTAALEGHI, M. A. Aeroelastic analysis and active flutter suppression of an electro-rheological sandwich cylindrical panel under yawed supersonic flow. **Aerospace Science and Technology**, v. 42, p. 118–127, 2015/5// 2015.

HOLLOWELL, S. J.; DUGUNDJI, J. Aeroelastic flutter and divergence of stiffness coupled, graphite/epoxy cantilevered plates. **Journal of Aircraft**, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 21, n. 1, p. 69–76, 2015/11/07 1984.

HOLOPAINEN, T. Finite element free vibration analysis of eccentrically stiffened plates. **Computers & Structures**, v. 56, n. 6, p. 993 – 1007, 1995. ISSN 0045-7949.

HOUMAT, A. Nonlinear free vibration of a composite rectangular specially-orthotropic plate with variable fiber spacing. **Composite Structures**, v. 94, n. 10, p. 3029 – 3036, 2012. ISSN 0263-8223.

JIN, Y.; SENDHOFF, B. Trade-off between performance and robustness: An evolutionary multiobjective approach. In: **Evolutionary Multi-Criterion Optimization**. [S.l.]: Springer Berlin Heidelberg, 2003, (Lecture Notes in Computer Science, v. 2632). p. 237–251. ISBN 978-3-540-01869-8.

JONES, R. **Mechanics of composite materials**. [S.l.]: CRC, 1998.

KAMEYAMA, M.; FUKUNAGA, H. Optimum design of composite plate wings for aeroelastic characteristics using lamination parameters. **Computers & Structures**, v. 85, n. 3–4, p. 213–224, 2007.

KHODAPARAST, H. H.; MOTTERSHEAD, J. E.; BADCOCK, K. J. Propagation of structural uncertainty to linear aeroelastic stability. **Computers & Structures**, v. 88, n. 3–4, p. 223 – 236, 2010. ISSN 0045-7949.

KOUCHAKZADEH, M. A.; RASEKH, M.; HADDADPOUR, H. Panel flutter analysis of general laminated composite plates. **Composite Structures**, v. 92, n. 12, p. 2906–2915, 11 2010.

KUO, S.-Y. Flutter of thermally buckled angle-ply laminates with variable fiber spacing. **Composites Part B: Engineering**, v. 95, p. 240 – 251, 2016. ISSN 1359-8368.

KUO, S. Y.; SHIAU, L. C. Buckling and vibration of composite laminated plates with variable fiber spacing. **Composite Structures**, v. 90, n. 2, p. 196 – 200, 2009. ISSN 0263-8223.

KUTTENKEULER, J.; RINGERTZ, U. Aeroelastic tailoring considering uncertainties in material properties. **Structural optimization**, v. 15, n. 3, p. 157–162, 1998. ISSN 1615-1488.

LAGRANGE, J. L. **Mecanique Analytique**. [S.l.]: Cambridge University Press, 1788.

LANGHAAR. **Energy methods in applied mechanics**. [S.l.]: New York: Wiley, 1962.

LEE, I.; LEE, D.-M.; OH, I.-K. Supersonic flutter analysis of stiffened laminated plates subject to thermal load. **Journal of Sound and Vibration**, v. 224, n. 1, p. 49 – 67, 1999. ISSN 0022-460X.

LEISSA, A.; MARTIN, A. Vibration and buckling of rectangular composite plates with variable fiber spacing. **Composite Structures**, v. 14, n. 4, p. 339 – 357, 1990. ISSN 0263-8223.

LI, F.-M.; SONG, Z.-G. Flutter and thermal buckling control for composite laminated panels in supersonic flow. **Journal of Sound and Vibration**, v. 332, n. 22, p. 5678–5695, 2013.

LIAO, C.-L.; SUN, Y.-W. Flutter analysis of stiffened laminated composite plates and shells in supersonic flow. **AIAA Journal**, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 31, n. 10, p. 1897–1905, 1993.

LINDSLEY, N.; BERAN, P.; PETTIT, C. Effects of uncertainty on nonlinear plate aeroelastic response. In: **43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference**. [S.l.]: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2002.

LOUCKS, D. P. **Water Resources Systems Planning and Management**. [S.l.]: United Nations Educational, 2006.

LOUGHLAN, J. The buckling performance of composite stiffened panel structures subjected to combined in-plane compression and shear loading. **Composite Structures**, v. 29, n. 2, p. 197 – 212, 1994. ISSN 0263-8223.

LOVE, A. E. H. The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, The Royal Society, v. 179, p. 491–546, 1888. ISSN 0264-3820.

OH, I.-K.; KIM, D.-H. Vibration characteristics and supersonic flutter of cylindrical composite panels with large thermoelastic deflections. **Composite Structures**, v. 90, n. 2, p. 208–216, 9 2009.

OLMEDO, R.; GURDAL, Z. Buckling response of lamintes with spatially varying fiber orientations. In: **34th Structures, Structural Dynamics and Materials Conference**. [S.l.]: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1993.

PETTIT, C. L. Uncertainty quantification in aeroelasticity: Recent results and research challenges. **Journal of Aircraft**, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 41, n. 5, p. 1217–1229, 2016/11/09 2004.

RIBEIRO, P.; AKHAVAN, H.; TETER, A.; WARMIŃSKI, J. A review on the mechanical behaviour of curvilinear fibre composite laminated panels. **Journal of Composite Materials**, v. 48, n. 22, p. 2761–2777, 2014.

RITZ, W. Über eine neue methode zur lösung gewisser variationsprobleme der mathematischen physik. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, v. 135, p. 1–61, 1909.

SCARTH, C.; SARTOR, P.; COOPER, J. E.; WEAVER, P.; SILVA, G. Robust aeroelastic design of a composite wing-box. In: **17th AIAA Non-Deterministic Approaches Conference**. [S.l.]: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2015.

SCARTH, C.; SARTOR, P.; COOPER, J. E.; WEAVER, P.; SILVA, G. Robust aeroelastic design of a composite wing-box. In: **AIAA SciTech**. [S.l.]: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2015.

SHIAU, L.-C.; LEE, G. C. Stress concentration around holes in composite laminates with variable fiber spacing. **Composite Structures**, v. 24, n. 2, p. 107 – 115, 1993. ISSN 0263-8223.

SHIRK, M. H.; HERTZ, T. J.; WEISSHAAR, T. A. Aeroelastic tailoring - theory, practice, and promise. **Journal of Aircraft**, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 23, n. 1, p. 6–18, jan. 1986. ISSN 0021-8669.

SHORE, C. P.; MEI, C.; GRAY, C. E. Finite element method for large-amplitude two-dimensional panel flutter at hypersonic speeds. **AIAA Journal**, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 29, n. 2, p. 290–298, fev. 1991. ISSN 0001-1452.

SINGHA, M. K.; GANAPATHI, M. A parametric study on supersonic flutter behavior of laminated composite skew flat panels. **Composite Structures**, v. 69, n. 1, p. 55–63, 6 2005.

STANFORD, B. K.; JUTTE, C. V.; WU, K. C. Aeroelastic benefits of tow steering for composite plates. **Composite Structures**, v. 118, p. 416–422, dez. 2014. ISSN 0263-8223.

STODIECK, O.; COOPER, J. E.; WEAVER, P.; KEALY, P. Optimisation of tow-steered composite wing laminates for aeroelastic tailoring. In: **AIAA SciTech**. [S.l.]: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2014. p. –.

STODIECK, O.; COOPER, J. E.; WEAVER, P. M.; KEALY, P. Improved aeroelastic tailoring using tow-steered composites. **Composite Structures**, v. 106, p. 703–715, 2013. ISSN 0263-8223.

STORN, R.; PRICE, K. Differential evolution –a simple and efficient heuristic for global optimization over continuous spaces. **Journal of Global Optimization**, v. 11, n. 4, p. 341–359, 1997.

STRGANAC, T. W.; MOOK, D. T. Numerical model of unsteady subsonic aeroelastic behavior. **AIAA Journal**, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 28, n. 5, p. 903–909, 2016/11/18 1990.

SUDRET, B.; KIUREGHIAN, A. D. **Stochastic finite element methods and reliability: a state-of-the-art report**. [S.l.]: Department of Civil and Environmental Engineering, University of California, 2000.

TATTING, B. F.; GUERDAL, Z. **Design and manufacture of elastically tailored tow placed plates**. [S.l.], 2002.

TRILAKSONO, A.; WATANABE, N.; KONDO, A.; HOSHI, H.; IWAHORI, Y. Automatic damage detection and monitoring of a stitch laminate system using a fiber bragg grating strain sensor. **Open Journal of Composite Materials**, Vol.04No.01, p. 14, 2014.

TSAI, H. **Introduction to composite materials**. [S.l.]: Lancaster: Technomic, 1980.

TSUTSUI, S.; GHOSH, A. Genetic algorithms with a robust solution searching scheme. **Evolutionary Computation, IEEE Transactions on**, v. 1, n. 3, p. 201–208, Sep 1997. ISSN 1089-778X.

VANDERPLAATS, G. . . **Numerical optimization techniques for engineering design: with applications**. [S.l.]: McGraw-Hill Ryerson, Limited, 1984.

WRIGHT, J. R.; COOPER, J. E. **Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads**. [S.l.]: Wiley, 2008.

WU, Z.; WEAVER, P. M.; RAJU, G.; KIM, B. C. Buckling analysis and optimisation of variable angle tow composite plates. **Thin-Walled Structures**, v. 60, p. 163–172, 11 2012.

XIA, W.; NI, Q. Parametric study on supersonic flutter of angle-ply laminated plates using shear deformable finite element method. **Acta Mechanica Sinica**, v. 27, n. 5, p. 749, 2011.

XUE, D. Y.; MEI, C. Finite element nonlinear panel flutter with arbitrary temperatures in supersonic flow. **AIAA Journal**, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 31, n. 1, p. 154–162, jan. 1993. ISSN 0001-1452.

YANG, T. Y.; SUNG, S. H. Finite-element panel flutter in three-dimensional supersonic unsteady potential flow. **AIAA Journal**, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 15, n. 12, p. 1677–1683, dez. 1977. ISSN 0001-1452.

YATES, E. C. **Flutter and Unsteady-Lift Theory**. [S.l.], 1971.

ZHAO, H.; CAO, D. A study on the aero-elastic flutter of stiffened laminated composite panel in the supersonic flow. **Journal of Sound and Vibration**, v. 332, n. 19, p. 4668–4679, 9 2013.

ZHOU, R. C.; LAI, Z.; XUE, D. Y.; HUANG, J.-K.; MEI, C. Suppression of nonlinear panel flutter with piezoelectric actuators using finite element method. **AIAA Journal**, American Institute of Aeronautics and Astronautics, v. 33, n. 6, p. 1098–1105, 2016/09/16 1995.