JOSÉ LUCAS PEREIRA LUIZ

A PROPRIEDADE DE SCHUR EM ESPAÇOS DE BANACH

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2017

JOSÉ LUCAS PEREIRA LUIZ

A PROPRIEDADE DE SCHUR EM ESPAÇOS DE BANACH

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Análise Funcional.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

UBERLÂNDIA - MG
2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CPI)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

L953p
2017

Luiz, José Lucas Pereira, 1992 -
A propriedade de Schur em espaços de Banach / José Lucas Pereira Luiz. - 2017.
99 f.: il.

Orientador: Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Inclui bibliografia.

1. Matemática - Teses. 2. Banach, Espaços de - Teses. 3. Análise funcional - Teses. I. Botelho, Geraldo Márcio de Azevedo. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO: José Lucas Pereira Luiz

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11512MAT008.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Análise Funcional.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: A Propriedade de Schur em Espaços de Banach.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 16 de Fevereiro de 2017, às 10h, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME	**ASSINATURA**
Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho UFU - Universidade Federal de Uberlândia (orientador)	
Prof. Dra. Elisa Regina dos Santos UFU - Universidade Federal de Uberlândia	Elisa Regina dos Santos.
Prof. Dra. Ximena Mujica Serdio UFPR - Universidade Federal do Paraná	Ximena Mujica

Uberlândia-MG, 16 de Fevereiro de 2017.

Dedicatória

Dedico a minha família e a todos que torcem por mim.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelas bênçãos alcançadas e pela força de seguir em frente.

Ao meu orientador, Geraldo Botelho, por ter aceitado me orientar durante meu mestrado e por todo o apoio, paciência e atenção fornecidos durante o desenvolvimento deste trabalho.

Aos meus pais José Dias e Maria Elza, minhas irmãs Claudinha e Neia, meu sobrinho Davi Lucas, minhas avós Alexandrina e Domingas e minha namorada Thaís, por serem meu porto seguro, minha inspiração e minha motivação. Por não me deixarem esquecer de onde venho e quem eu sou. E por estarem presentes em todos os momentos de minha vida.

A Thaís, pelo amor, paciência, companheirismo e apoio durante esses anos de mestrado.

Aos meus amigos do mestrado, que tornaram a trajetória até aqui menos penosa: Guilherme, Wagner, Alexandre, Suélen e Magna. Saibam que jamais me esquecerei de vocês, e que fazem parte de páginas importantes em minha vida.

Ao Davidson, pelos inúmeros apoios fornecidos desde que nos conhecemos e pelas boas conversas, em especial aquelas sobre Análise Funcional.

A Kamila, pelo imenso apoio durante os momentos iniciais na cidade de Uberlândia. Sou muito grato por tudo.

A Capes, pelo apoio financeiro durante os dois anos de mestrado.

Ao programa de Mestrado em Matemática da UFU, pela oportunidade de cursar esse curso. Aos professores Dr. Cícero, Dr. José Claudinei, Dra. Francielle, Dr. Fernando, Dr. Vinícius e Dr. Geraldo, pelos ensinamentos durante o curso. E aos coordenadores Dr. Guilherme e Dr. Mário, por serem sempre prestativos com minhas solicitações.

Aos professores Dra. Ximena, Dra. Elisa e Dr. Vinícius por aceitarem o convite para compor a banca deste trabalho e pelas correções e sugestões dadas, com o intuito de melhorá-lo.

LUIZ, J. L. P. *A propriedade de Schur em espaços de Banach*. 2017. - 81p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

O principal objetivo desta dissertação é fazer um estudo detalhado da propriedade de Schur em espaços de Banach. Iniciamos este trabalho com alguns resultados de Análise Funcional e Topologia Geral que serão úteis no desenvolvimento da dissertação. No segundo capítulo apresentamos vários resultados relacionados com a propriedade de Schur, com ênfase em caracterizações da propriedade de Schur em espaços de Banach e em espaços duais. Alguns primeiros exemplos de espaços de Banach que gozam, ou não, da propriedade de Schur e relações desta propriedade com outras propriedades clássicas dos espaços de Banach também são apresentados. No terceiro capítulo apresentamos as construções de vários outros espaços notáveis com a propriedade de Schur.

Palavras-chave: espaços de Banach, propriedade de Schur, espaços de Schur, propriedade de Dunford-Pettis.

LUIZ, J. L. P. *The Schur property in Banach spaces.* 2017. - 81p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

The main purpose of this dissertation is to perform a thorough study of the Schur property in Banach spaces. We start with some basic results on Functional Analysis and General Topology that shall be useful throughout the work. In the second chapter we present several results related to the Schur property, mainly concerning characterizations of the Schur property in Banach spaces and in dual spaces. A few examples of Banach spaces with and without the Schur property and relationships of this property with some other classical properties in Banach space theory are also presented. In the third chapter we present the construction of several other outstanding spaces with the Schur property.

Keywords: Banach spaces, Schur property, Schur spaces, Dunford-Pettis property.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, \ldots\}$	
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais	
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos	
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$	
$\|\cdot\|$ ou $\|\cdot\|_E$	norma em um espaço normado E	
$(E, \|\cdot\|)$	espaço normado E com a norma $\|\cdot\|$	
$\lvert\cdot\rvert$	módulo	
$B(0, \varepsilon)$	bola aberta de centro zero e raio $\varepsilon > 0$	
$\mathcal{L}(E; F)$	espaço dos operadores lineares contínuos de E em F	pág. 3
T^{-1}	operador inverso	
e_n	n-ésimo vetor unitário canônico $(0, \ldots, 0, \overset{(n)}{1}, 0, \ldots)$	
B_E	bola unitária fechada do espaço normado E	pág. 3
S_E	esfera unitária do espaço normado E	pág. 3
$E \overset{1}{=} F$	os espaços normados E e F são isomorfos isometricamente	pág. 3
$E \hookrightarrow F$	o espaço normado F contém uma cópia do espaço normado E	pág. 3
$E \overset{1}{\hookrightarrow} F$	o espaço normado F contém uma cópia isométrica do espaço normado E	pág. 3
$E \not\hookrightarrow F$	o espaço normado F não contém uma cópia do espaço normado E	
$E \overset{1}{\not\hookrightarrow} F$	o espaço de Banach F não contém cópia isométrica do espaço de Banach E	
E'	dual topológico de um espaço normado E	pág. 4

E''	bidual topológico de um espaço normado E	pág. 4
T'	operador adjunto	pág. 4
J_E	mergulho canônico do espaço normado E em seu bidual E''	pág. 4
$x_n \longrightarrow x$	a sequência $(x_n)_n$ converge para x	pág. 4
$x_n \not\longrightarrow x$	a sequência $(x_n)_n$ não converge para x	
c_0	espaço das sequências de escalares que convergem para zero	pág. 6
ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$	espaço das sequências de escalares absolutamente p-somáveis	pág. 6
ℓ_∞	espaço das sequências de escalares limitadas	pág. 6
$[A]$	espaço vetorial gerado pelo subconjunto A de um espaço vetorial E	pág. 6
$\sigma(E, E')$	topologia fraca no espaço normado E	pág. 7
$x_n \xrightarrow{w} x$	a sequência $(x_n)_n$ converge fracamente para x	pág. 7
$x_n \overset{w}{\not\longrightarrow} x$	a sequência $(x_n)_n$ não converge fracamente para x	
$\sigma(E', E)$	topologia fraca-estrela no espaço E'	pág. 9
$\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$	a sequência $(\varphi_n)_n$ converge fraca-estrela para φ	pág. 9
$\Gamma(A)$	envoltória absolutamente convexa do conjunto A	pág. 13
$\mathcal{K}(E; F)$	espaço dos operadores compactos de E em F	pág. 14
$C(K)$	espaço das funções contínuas definidas em um espaço topológico compacto Hausdorff K e tomando valores em $\mathbb{K}$	pág. 14
(X, Σ, μ)	espaço de medida	
$L_p(X, \Sigma, \mu)$	espaço das (classes de) funções mensuráveis $f \colon X \longrightarrow \mathbb{K}$ tais que $\displaystyle\int_X \lvert f\rvert^p d\mu < \infty$	pág. 14
$L_\infty(X, \Sigma, \mu)$	espaço das (classes de) funções mensuráveis limitadas μ-quase sempre	pág. 15
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	produto interno	
E/M	espaço quociente de um espaço vetorial E pelo seu subespaço M	pág. 17
$N^\perp$	anulador do subconjunto N de um espaço normado E	pág. 17
$\ker(T)$	kernel (núcleo) do operador $T \colon E \longrightarrow F$, isto é, $\{x \in E;\ T(x) = 0\}$	
$E \overset{f.r}{\hookrightarrow} F$	E é finitamente representável em F	pág. 33

$\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$	espaço das sequências $(x_j)_j$ tais que $x_j \in E_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\sum_{j=1}^{\infty} \\|x_j\\|_{E_j} < \infty$	pág. 44
$\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_\infty$	espaço das sequências $(x_j)_j$ tais que $x_j \in E_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\sup_{j\in\mathbb{N}} \\|x_j\\|_{E_j} < \infty$	pág. 44
$\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_0$	espaço das sequências $(x_j)_j$ tais que $x_j \in E_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\\|x_j\\|_{E_j} \longrightarrow 0$	pág. 44
$\ell_p(\Gamma)$	espaço das famílias $(x_i)_{i\in\Gamma}$ tais que $x_i \in \mathbb{K}$ para todo $i \in \Gamma$, $x_i \neq 0$ para uma quantidade enumerável de indíces i e $\sum_{i\in\Gamma} \vert x_i\vert^p < \infty$, onde Γ é um conjunto não-vazio	pág. 50
$\ell_\infty(\Gamma)$	espaço das famílias $(x_i)_{i\in\Gamma}$ tais que $x_i \in \mathbb{K}$ e $\sup_{i\in\Gamma} \vert x_i\vert < \infty$, onde Γ é um conjunto não-vazio	pág. 52
$c_0(\Gamma)$	espaço das famílias $(x_i)_{i\in\Gamma} \in \ell_\infty(\Gamma)$ tais que o conjunto $\{i \in \Gamma : \ \vert x_i\vert \geq \varepsilon\}$ é finito para todo $\varepsilon > 0$	pág. 52
$\mathcal{L}_{w^*-w}(E'; F)$	espaço dos operadores lineares w^*-w-contínuos	pág. 56
$E_1 \times \cdots \times E_n$	produto cartesiano dos espaços vetoriais (ou normados) $E_1, \ldots, E_n$	pág. 59
$L(E_1, \ldots, E_n; F)$	espaço vetorial das aplicações n-lineares definidas em $E_1 \times \cdots \times E_n$ e tomando valores em F	pág. 59
$L(^nE; F)$	espaço vetorial das aplicações n-lineares definidas em $\overbrace{E \times \cdots \times E}^{n\ parcelas}$ e tomando valores em F	pág. 59
$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$	espaço das aplicações n-lineares contínuas definidas em $E_1 \times \cdots \times E_n$ e tomando valores em F	pág. 60
$\mathcal{L}(^nE; F)$	espaço das aplicações n-lineares contínuas definidas em $\overbrace{E \times \cdots \times E}^{n\ parcelas}$ e tomando valores em F	pág. 60
$x \otimes y$	produto tensorial entre os vetores x e y	pág. 61
E^*	dual algébrico de um espaço vetorial E	pág. 61
$E \otimes F$	produto tensorial entre os espaços vetoriais (ou normados) E e F	pág. 62
$E \otimes_\epsilon F$	produto tensorial entre os espaços normados E e F munido com a norma injetiva ϵ	pág. 63
$E\widehat{\otimes}_\epsilon F$	produto tensorial injetivo entre os espaços normados E e F	pág. 63
$\mathcal{B}_I(E \times F)$	espaço das aplicações bilineares integrais definidas em $E \times F$	pág. 65

$E \otimes_\pi F$	produto tensorial entre os espaços normados E e F com as norma projetiva π	pág. 66
$E\widehat{\otimes}_\pi F$	produto tensorial projetivo entre os espaços normados E e F	pág. 66
$H(G)$	espaço das funções analíticas definidas em um conjunto aberto $G \subset \mathbb{C}^n$	pág. 68
$H_v(G)$	espaço das funções $f \in H(G)$ tais que $\sup\limits_{z \in G} v(z)\lvert f(z)\rvert < \infty$, onde $v\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função limitada, contínua e estritamente positiva	pág. 68
$H_{v_0}(G)$	espaço das funções $f \in H_v(G)$ tais que para todo $\varepsilon > 0$ existe um subconjunto compacto K de G tal que $v(z)\lvert f(z)\rvert < \varepsilon$ para todo $z \notin K$	pág. 68
JH	espaço de Hagler	pág. 69
$\mathcal{L}_\infty[E]$	espaço de Bourgain-Pisier associado ao espaço E	pág. 71
$\prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$	produto cartesiano generalizado da sequência de espaços de medidas $(X_i)_i$	pág. 73
$\prod\limits_{i=1}^{\infty} \Sigma_i$	medida produto no espaço $\prod\limits_{i=1}^{\infty} X_i$	pág. 73
KW	espaço com a propridade de Schur e de Daugavet	pág. 74
$L^1(G)$	álgebra de grupo de um grupo localmente compacto G	pág. 77
$P(G)$	conjunto das funções contínuas definidas positivas $\phi\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$, onde G é um grupo localmente compacto	pág. 77
$B(G)$	álgebra de Fourier Stieltjes do grupo localmente compacto G	pág. 77

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Análise Funcional, conforme visto no prefácio do livro [6], pode ser definida como o estudo dos espaços vetoriais normados, em especial os espaços de Banach, e dos operadores lineares contínuos entre eles. Com um pouco de liberdade pode se dizer que a Análise Funcional é uma Álgebra Linear em dimensão infinita.

Quando trabalhamos com espaços normados de dimensão infinita, resultados que são conhecidos em dimensão finita podem deixar de ser válidos. Um exemplo clássico disso é que a bola unitária fechada de qualquer espaço normado de dimensão finita é compacta na topologia da norma, enquanto que em dimensão infinita isso nunca ocorre (veja [6, Teorema 1.5.4]). Um segundo exemplo é que, em espaços normados de dimensão finita, a convergência fraca de sequências é equivalente à convergência em norma (veja Exemplo 2.1.2), enquanto que em espaços de dimensão infinita convergência fraca de sequências nem sempre implica na convergência em norma. Um exemplo clássico deste fato é a sequência de vetores unitários canônicos $(e_n)_n$ no espaço das sequências de escalares convergentes para zero c_0, esta sequência converge fracamente para zero mas não converge para zero em norma (veja Exemplo 1.3.6).

Em 1921 o matemático Issai Schur [46] demonstrou que, no espaço das sequências de escalares absolutamente somáveis ℓ_1, a convergência fraca de sequências implica na convergência em norma. Assim, o espaço ℓ_1 foi o primeiro espaço de Banach de dimensão infinita onde tal implicação foi observada. Considerando que esse fato confere propriedades muito especiais ao espaço ℓ_1, passou-se a questionar a validade desse fato (convergência fraca de sequências implicar em convergência em norma) em outros espaços de Banach. Quando ficou estabelecido que existem outros espaços de dimensão infinita onde tal implicação é válida, passou-se a dizer que um espaço de Banach E possui a *propriedade de Schur*, ou que E é um *espaço de Schur*, se em E a convergência fraca de sequências implica na convergência em norma.

A ideia central desta dissertação é fazer um estudo da propriedade de Schur em espaços de Banach e obter como produto final um material que apresente os principais resultados e exemplos sobre tal propriedade. A principal motivação, além da relevância da propriedade de Schur na teoria dos espaços de Banach, é não conhecermos nenhum material que apresente, na mesma referência, os principais resultados e exemplos sobre a propriedade de Schur. Um outro ingrediente importante é a visão geral dos matemáticos de que a propriedade de Schur é extremamente rara, sendo ℓ_1 o único exemplo conhecido por muitos. Nesta dissertação mostraremos que sim, a propriedade de Schur é rara, mas mostraremos também que existem muitos outros espaços importantes que são de Schur. Nosso recado é o seguinte: a propriedade de Schur é extremamente rara entre os espaços clássicos, mas não tão rara assim em geral. Tendo isso em mente a dissertação está estruturada em três capítulos da seguinte maneira:

No primeiro capítulo apresentamos alguns resultados da Análise Funcional e da Topologia Geral que serão utilizados no decorrer da dissertação. A maior parte dos resultados estão enunciados e com as demonstrações devidamente referenciadas, porém em determinados casos as demonstrações serão apresentadas por entendermos que tais demonstrações são importantes para uma melhor compreensão da dissertação e da propriedade de Schur.

No segundo capítulo apresentamos alguns exemplos de espaços de Banach que possuem, ou não, a propriedade de Schur e alguns resultados sobre tal propriedade, como por exemplo, esta propriedade:

- É preservada por isomorfismos (veja Proposição 2.2.1).
- É passada para subespaços fechados (veja Proposição 2.1.4).
- É uma propriedade de três espaços (veja Proposição 2.2.14).
- Não é passada para o dual nem para o predual em geral (veja Observação 2.2.7 e Observação 2.2.5, respectivamente).
- Não é passada para espaços quociente em geral (veja Exemplo 2.2.8), etc.

Relacionamos a propriedade de Schur com outras propriedades definidas em espaços de Banach, como por exemplo:

- A propriedade de Dunford-Pettis (veja Proposição 2.3.22 e itens *a* e *b* do Teorema 2.4.5).
- Reflexidade (veja Proposição 2.3.1 e Proposição 2.3.7).
- Super-propriedades (veja Proposição 2.3.17), etc.

Ainda no Capítulo 2 apresentamos várias caracterizações para que um espaço de Banach tenha a propriedade de Schur (veja Teorema 2.1.8), e caracterizações para o caso especial em que o espaço de Banach em questão é um espaço dual (veja Teorema 2.4.5).

No terceiro capítulo apresentamos mais alguns exemplos de espaços de Banach que gozam, ou não, da propriedade de Schur. Esse capítulo vem para completar nossos exemplos de espaços de Schur, que até o fim do segundo capítulo ainda serão bastante escassos. Dentre os exemplos apresentados trabalharemos com espaços de operadores, espaços de aplicações multilineares, produtos tensoriais topológicos e alguns espaços de Banach criados para responder algumas questões que estavam em aberto, como é o caso por exemplo dos espaços de Bourgain-Pisier e do espaço construído por Kadets e Werner [32] em 2003 para responder à seguinte pergunta: Existe um espaço de Banach que goza simultaneamente das propriedades de Schur e de Daugavet? (veja Teorema 3.9.11).

Por fim, apresentamos no Apêndice A uma tabela que traz todos os espaços de Banach estudados no decorrer da dissertação separados entre os que possuem a propriedade de Schur e aqueles que não possuem tal propriedade.

José Lucas Pereira Luiz
Uberlândia-MG, 16 de fevereiro de 2017.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

O objetivo deste capítulo é apresentar algumas definições e resultados da Análise Funcional e da Topologia Geral que serão usados no decorrer da dissertação. Grande parte dos resultados são bastante conhecidos dentro de suas respectivas áreas e suas demonstrações são facilmente encontradas na literatura, então apresentaremos apenas as referências nas quais as demonstrações podem ser encontradas.

Apresentaremos, principalmende na seção de topologias fraca e fraca-estrela, algumas demonstrações e exemplos que julgamos interessantes para um melhor desenvolvimento da dissertação.

Entenderemos um *espaço vetorial normado* E, ou simplesmente um *espaço normado* E, sempre sobre o corpo de escalares $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K}$ denota indistintamente o corpo dos números reais $\mathbb{R}$ ou o corpo dos números complexos $\mathbb{C}$. Uma *norma* em um espaço normado E será denotada por $\|\cdot\|$, quando julgarmos necessário escreveremos $\|\cdot\|_E$ para indicar que a norma está definida no espaço E.

Denotaremos o *espaço vetorial dos operadores lineares contínuos* $T\colon E \longrightarrow F$ entre os espaços normados E e F por $\mathcal{L}(E;F)$. Nesse espaço consideramos a norma usual

$$\|T\| := \sup_{x\in S_E} \|T(x)\| = \sup_{x\in B_E} \|T(x)\|$$

onde $S_E := \{x \in E : \|x\| = 1\}$ é a *esfera unitária* de E e $B_E := \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ é a *bola unitária fechada* de E. $\mathcal{L}(E;F)$ é um espaço de Banach sempre que F for um espaço de Banach.

Os operadores lineares contínuos bijetores que possuem inversa contínua representam uma classe especial de operadores e são chamados de *isomorfismos*. Quando existir um isomorfismo $T\colon E \longrightarrow F$ entre espaços normados E e F diremos que E e F são *isomorfos*. Se o isomorfismo T for uma isometria, isto é, $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in E$, diremos que T é um *isomorfismo isométrico*, e neste caso dizemos que E e F são *isomorfos isometricamente* e usamos a notação $E \overset{1}{=} F$.

Usaremos a notação $E \hookrightarrow F$ ($E \overset{1}{\hookrightarrow} F$) para indicar que E é isomorfo (isometricamente) a um subespaço de F, e neste caso dizemos que F possui uma *cópia* (*isométrica*) de E.

Quando todo subespaço fechado de F de dimensão infinita possuir uma cópia de E diremos que F é *hereditariamente* E.

O *dual topológico* de E será denotado por E' e o *bidual topológico* por E''. Um espaço de Banach F é dito *dual* se existe um espaço de Banach E tal que $F \overset{1}{=} E'$. O *mergulho canônico* de E em E'' será denotado por J_E, lembramos que $J_E \colon E \longrightarrow E''$ é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem. Quando J_E é sobrejetor dizemos que o espaço E é *reflexivo*. Lembramos ainda que todo subespaço fechado de um espaço reflexivo é reflexivo.

O *operador adjunto* de um operador linear contínuo T entre espaços normados E e F será denotado por T'. Lembramos que $T' \in \mathcal{L}(F'; E')$ e é dado por $T'(\varphi)(x) := \varphi(T(x))$ para todos $x \in E$ e $\varphi \in F'$. Além disso, $\|T'\| = \|T\|$ e T' é um isomorfismo (isométrico) sempre que T for um isomorfismo (isométrico).

Denotaremos sequências em um espaço normado E por $(x_n)_n$. Na maior parte do texto usaremos a notação $x_n \longrightarrow x$ para indicar que a sequência $(x_n)_n$ converge para x no espaço normado E, porém em alguns momentos será necessário utilizar a notação $x_n \overset{n}{\longrightarrow} x$ para que fique claro que a sequência $(x_n)_n$ converge para x em E quando o índice n tende para ∞.

Todos os resultados enunciados acima podem ser encontrados em [6]. Para leitores não habituados com definições e resultados básicos de Análise Funcional e Topologia Geral, indicamos os livros [6] e [52], respectivamente.

1.1 Resultados Gerais

Teorema 1.1.1 *Um espaço normado E tem dimensão finita se, e somente se, a bola unitária fechada B_E é compacta na topologia da norma.*

Demonstração. [6, Teorema 1.5.4]. ■

Teorema 1.1.2 (Teorema de Hahn-Banach) *Seja F um subespaço de um espaço normado E e seja $\varphi \colon F \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então existe um funcional linear contínuo $\widetilde{\varphi} \colon E \longrightarrow \mathbb{K}$ cuja restrição a F coincide com φ e $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.*

Demonstração. [6, Corolário 3.1.3]. ■

Seguiremos a tendência de chamar algumas consequências do Teorema de Hahn-Banach pelo nome do teorema.

Teorema 1.1.3 (Teorema de Hahn-Banach) *Seja E um espaço normado. Para todo $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$, existe um funcional linear $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\|$.*

Demonstração. [6, Corolário 3.1.4]. ■

Teorema 1.1.4 (Teorema de Hahn-Banach) *Sejam E um espaço normado, $E \neq \{0\}$, e $x \in E$. Então*

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in B_{E'}\}.$$

Demonstração. [6, Corolário 3.1.5]. ■

Seja B um subconjunto de um espaço topológico X. Dizemos que B é *denso* em X se $\overline{B} = X$.

Definição 1.1.5 Seja E um espaço normado. Dizemos que $\widetilde{E}$ é um *completamento* de E se as três condições abaixo são verificadas:

(a) $\widetilde{E}$ é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_{\widetilde{E}}$.

(b) Existe um isomorfismo isométrico $T\colon E \longrightarrow T(E) \subseteq \widetilde{E}$.

(c) $T(E)$ é denso em $\widetilde{E}$.

É fato conhecido que todo espaço normado possui um completamento, que é único a menos de isomorfismos isométricos (veja [22, Fact 3.2]).

Apresentamos a seguir um resultado sobre a convergência de sequência em espaços topológicos que será uma ferramenta muito útil em demonstrações futuras.

Proposição 1.1.6 *Sejam X um espaço topológico e $(x_n)_n$ uma sequência em X tal que toda subsequência de $(x_n)_n$ tem uma subsequência que converge para um mesmo $x \in X$. Então $x_n \longrightarrow x$.*

Demonstração. Suponha que $x_n \not\longrightarrow x$. Então existe uma vizinhança V de x tal que para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $N \geq n_0$ tal que $x_N \notin V$.

$$\begin{aligned}
&\text{Para } n_0 = 1, \quad \text{existe } N_1 \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_{N_1} \notin V,\\
&\text{Para } n_0 = N_1 + 1, \quad \text{existe } N_2 > N_1 \text{ tal que } x_{N_2} \notin V,\\
&\text{Para } n_0 = N_2 + 1, \quad \text{existe } N_3 > N_2 \text{ tal que } x_{N_3} \notin V,\\
&\qquad\qquad \vdots
\end{aligned}$$

Portanto existe uma subsequência $(x_{N_j})_j$ de $(x_n)_n$ tal que $x_{N_j} \notin V$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Por hipótese, existe uma subsequência $(x_{N_{j_k}})_k$ de $(x_{N_j})_j$ tal que $x_{N_{j_k}} \longrightarrow x$. Ou seja, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $x_{N_{j_k}} \in V$ para todo $k \geq k_0$. Absurdo, portanto $x_n \longrightarrow x$. ■

Teorema 1.1.7 *Todo subconjunto fechado de um espaço topológico compacto é compacto.*

Demonstração. [52, Theorem 17.5]. ■

Definição 1.1.8 Seja X um espaço topológico:

- X é *localmente compacto* se para cada $x \in X$ existir uma vizinhança aberta U de x tal que $\overline{U}$ é compacto.

- Se X é localmente compacto Hausdorff, então a σ-álgebra gerada pelos conjuntos abertos de X é chamada de *σ-álgebra de Borel*. Uma medida definida na σ-álgebra de Borel é chamada *medida de Borel*, e os elementos dessa σ-álgebra são chamados de *borelianos*.

- Se X é localmente compacto Hausdorff, então uma medida de Borel μ em X é dita *regular* se as seguintes condições são verificadas para todo boreliano A em X:

  (a) $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : \ U \text{ é subconjunto aberto de } X \text{ e } U \supset A\}$,

  (b) $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : \ K \text{ é subconjunto compacto de } X \text{ e } K \subset A\}$.

1.2 Espaços ℓ_p, ℓ_∞ e c_0

Nesta seção apresentamos resultados relacionados a alguns espaços de sequências clássicos da Análise Funcional. Considerando as sequências formadas por escalares pertencentes a $\mathbb{K}$, denotamos por:

- c_0: o espaço das sequências que convergem para zero.
- ℓ_p: o espaço das sequências absolutamente p-somáveis, onde $1 \leq p < \infty$.
- ℓ_∞: o espaço das sequências limitadas.

O espaço ℓ_∞ é de Banach com a norma dada por $\|(x_n)_n\| := \sup\{|x_n| : \ n \in \mathbb{N}\}$, para todo $(x_n)_n \in \ell_\infty$. O espaço c_0 é um subespaço fechado de ℓ_∞, e consequentemente é Banach com a norma do sup. Os espaços ℓ_p, para $1 \leq p < \infty$, são de Banach com a norma dada por $\|(x_n)_n\| := \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ para toda $(x_n)_n \in \ell_p$ (veja [6, págs 14 e 15]).

Proposição 1.2.1 *Sejam $1 \leq p < \infty$ e $1 < p' < \infty$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Então a correspondência (também chamada de relação de dualidade)*

$$b = (b_j)_j \in \ell_{p'} \longmapsto \varphi_b \in (\ell_p)'; \quad \varphi_b((a_j)_j) := \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j \ \ \textit{para toda sequência} \ \ (a_j)_j \in \ell_p,$$

estabelece um isomorfismo isométrico entre $\ell_{p'}$ e $(\ell_p)'$. No caso em que $p = 1$ tomamos $p' = \infty$.

Demonstração. [6, Proposição 4.2.1]. ■

Proposição 1.2.2 *Os espaços ℓ_1 e $(c_0)'$ são isomorfos isometricamente por meio da relação de dualidade*

$$b = (b_j)_j \in \ell_1 \longmapsto \varphi_b \in (c_0)'; \quad \varphi_b((a_j)_j) := \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j \ \ \textit{para toda sequência} \ \ (a_j)_j \in c_0.$$

Demonstração. [6, Proposição 4.2.3]. ■

Seja A um subconjunto do espaço vetorial E. O subespaço de E formado por todas as combinações lineares finitas de elementos de A, com coeficientes em $\mathbb{K}$, será denotado por $[A]$ e chamado de *subespaço gerado por A* (alguns textos chamam $[A]$ de envoltória linear de A).

Um espaço normado E que contém um subconjunto enumerável e denso em E é dito *separável*. É um fato conhecido que E é separável se, e somente se, existe um subconjunto enumerável A de E tal que $[A]$ é denso em E (veja [6, Lema 1.6.3]).

Proposição 1.2.3 *Os espaços c_0 e ℓ_p, $1 \leq p < \infty$, são separáveis.*

Demonstração. [6, Exemplo 1.6.4]. ∎

Proposição 1.2.4 *O espaço ℓ_∞ não é separável.*

Demonstração. [6, Exemplo 1.6.5]. ∎

Proposição 1.2.5 *Todo espaço normado separável é isomorfo isometricamente a um subespaço de ℓ_∞.*

Demonstração. [6, Proposição 3.3.3]. ∎

1.3 Topologias fraca e fraca-estrela

Além da topologia da norma, presente em todo espaço normado, todo espaço normado pode ser dotado de uma outra topologia como definido a seguir.

Definição 1.3.1 A *topologia fraca* de um espaço normado E, denotada por $\sigma(E, E')$, é a topologia gerada, no sentido de [6, Definição 6.1.2], pelos funcionais lineares contínuos $\varphi \in E'$.

Quando uma sequência $(x_n)_n$ convergir para $x \in E$ na topologia fraca de E, denotaremos este fato por $x_n \xrightarrow{w} x$ e diremos que $(x_n)_n$ *converge fracamente* para x. Quando um subconjunto $K \subset E$ for compacto com relação à topologia fraca de E, diremos que K é *fracamente compacto* em E. De forma análoga, a partir de agora sempre que utilizarmos as palavras *fraco* e *fracamente* estaremos nos referindo à topologia fraca do espaço normado com o qual estivermos trabalhando.

Teorema 1.3.2 *Seja E um espaço normado. Então as topologias da norma e fraca coincidem se, e somente se, E tem dimensão finita.*

Demonstração. [6, Proposição 6.2.6]. ∎

Proposição 1.3.3 *Seja E um espaço normado. Se $x_n \xrightarrow{w} x$ em E, então a sequência $(\|x_n\|)_n$ é limitada.*

Demonstração. [6, Proposição 6.2.5 (a)]. ∎

Proposição 1.3.4 *Seja E um espaço normado. Então:*

(a) Funcionais lineares contínuos são fracamente contínuos, isto é, para todo $\varphi \in E'$, $\varphi\colon (E, \sigma(E, E')) \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínuo.

(b) Para cada $x_0 \in E$, os conjuntos da forma

$$V_{J,\varepsilon} := \{x \in E : \ |\varphi_i(x) - \varphi_i(x_0)| < \varepsilon \text{ para todo } i \in J\}$$

onde J é um conjunto finito, $\varphi_i \in E'$ para todo $i \in J$ e $\varepsilon > 0$, formam uma base de vizinhanças abertas de x_0 para a topologia fraca.

(c) Seja $(x_n)_n$ uma sequência em E. Então $x_n \xrightarrow{w} x$ se, e somente se, $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ para todo $\varphi \in E'$.

(d) A topologia fraca $\sigma(E, E')$ é de Hausdorff.

Demonstração. [6, Proposição 6.2.2]. ■

Segue facilmente do item *(c)* da proposição acima que se $x_n \xrightarrow{w} x$ então toda subsequência de $(x_n)_n$ converge fracamente para x. A partir de agora usaremos muito a caracterização apresentada no item *(c)* da proposição acima para trabalhar com a convergência fraca de sequências em um espaço normado.

Proposição 1.3.5 *Em um espaço normado E, se $x_n \longrightarrow x$ então $x_n \xrightarrow{w} x$.*

Demonstração. Se $x_n \longrightarrow x$ então pela continuidade de $\varphi \in E'$ segue que $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ para todo $\varphi \in E'$, portanto pelo item *(c)* da proposição acima segue que $x_n \xrightarrow{w} x$. ■

A recíproca dessa proposição nem sempre é verdadeira. Um exemplo clássico disso é a sequência de vetores unitários canônicos $(e_n)_n$ em c_0, como mostramos a seguir.

Exemplo 1.3.6 Consideremos em c_0 a sequência $(e_n)_n$ formada pelos vetores unitários canônicos dos espaços de sequências escalares, isto é, $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots)$, onde 1 aparece na n-ésima coordenada. Dado $\varphi \in (c_0)'$, pela dualidade $(c_0)' \stackrel{1}{=} \ell_1$ existe $(a_j)_j \in \ell_1$ tal que

$$\varphi((b_j)_j) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j \text{ para toda sequência } (b_j)_j \in c_0.$$

Tomando o n-ésimo vetor unitário canônico $e_n \in c_0$ observamos que $\varphi(e_n) = a_n$, e fazendo $n \longrightarrow \infty$ temos $a_n \longrightarrow 0$, pois a sequência $(a_j)_j \in \ell_1$. Com isso $\varphi(e_n) \longrightarrow 0$ para todo $\varphi \in (c_0)'$, e portanto $e_n \xrightarrow{w} 0$. Por outro lado temos $\|e_n\| = 1 \longrightarrow 1 \neq 0$, ou seja, $e_n \not\longrightarrow 0$.

Proposição 1.3.7 *Sejam E, F espaços de Banach. Um operador linear $T\colon E \longrightarrow F$ é contínuo se, e somente se, $T\colon (E, \sigma(E, E')) \longrightarrow (F, (\sigma(F, F'))$ é contínuo.*

Demonstração. [6, Proposição 6.2.9]. ■

Usaremos a notação w-w-contínuo para indicar que um operador $T\colon E \longrightarrow F$ é contínuo nas topologias fracas de E e F respectivamente.

Proposição 1.3.8 *Um espaço de Banach E é reflexivo se, e somente se, toda sequência limitada em E tem uma subsequência fracamente convergente.*

Demonstração. [1, Corollary 1.6.4]. ■

Teorema 1.3.9 (Teorema de Eberlein-Smulian) *Seja K um subconjunto de um espaço de Banach E. Então K é fracamente compacto se, e somente se, toda sequência $(x_n)_n$ em K possui uma subsequência fracamente convergente para algum $x \in K$.*

Demonstração. [1, Theorem 1.6.3]. ■

Um subconjunto A de um espaço normado E é dito *convexo* se $(1-\lambda)x+\lambda y \in A$ para todos $x, y \in A$ e $0 \leq \lambda \leq 1$.

Teorema 1.3.10 *O fecho e o fecho fraco de um subconjunto convexo de um espaço normado coincidem.*

Demonstração. [39, Theorem 2.5.16]. ■

No dual topológico E' de um espaço normado E, além da topologia da norma e da topologia fraca, podemos definir uma terceira topologia como apresentada a seguir.

Definição 1.3.11 Seja E um espaço normado. A *topologia fraca-estrela* em E', denotada por $\sigma(E', E)$, é a topologia gerada, no sentido de [6, Definição 6.1.2], pelas funções pertencentes ao conjunto $J_E(E) = \{J_E(x) : x \in E\}$, isto é, pelas funções $\varphi \in E' \longmapsto J_E(x)(\varphi) := \varphi(x) \in \mathbb{K}$, onde $x \in E$.

Quando uma sequência $(\varphi_n)_n$ em E' convergir para $\varphi \in E'$ na topologia fraca-estrela escreveremos $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$. A notação w^*-w^*-contínuo será usada para indicar que um operador $T\colon E' \longrightarrow F'$ é contínuo nas topologias fraca-estrela de E' e F' respectivamente, e as notações w-w^*-contínuo e w^*-w-contínuo seguem o mesmo padrão.

Proposição 1.3.12 *Seja E um espaço normado.*

(a) Seja $(\varphi_n)_n$ uma sequência em E'. Então $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$ se, e somente se, $\varphi_n(x) \longrightarrow \varphi(x)$ para todo $x \in E$.

(b) A topologia fraca-estrela é de Hausdorff.

(c) Se $\varphi_n \xrightarrow{w} \varphi$ em E', então $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$.

Demonstração. [6, Proposição 6.3.2, Proposição 6.3.3]. ■

Segue facilmente do item *(a)* da proposição acima que se $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$ em E', então toda subsequência de $(\varphi_n)_n$ converge para φ na topologia fraca-estrela. A partir de agora usaremos bastante o item *(a)* para demonstrar a convergência fraca-estrela de sequências. O item *(a)* também pode ser usado para caracterizar convergência fraca-estrela de redes definidas no espaço E' (veja [6, Proposição 6.1.3(e)]).

Proposição 1.3.13 *Sejam E um espaço normado e $\varphi\colon (E', \sigma(E', E)) \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então existe $x \in E$ tal que $\varphi = J_E(x)$. Em outras palavras, $(E', \sigma(E', E))' = J_E(E)$.*

Demonstração. [6, Proposição 6.3.6]. ■

Definição 1.3.14 Uma sequência $(x_n)_n$ em um espaço de Banach E é *fracamente de Cauchy* se para todo $\varphi \in E'$ a sequência $(\varphi(x_n))_n$ for de Cauchy (ou, equivalentemente, convergente) em $\mathbb{K}$.

É fácil ver que toda sequência fracamente convergente é fracamente de Cauchy, porém a recíproca nem sempre é verdadeira, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 1.3.15 Considere a sequência $(y^n)_n$ em c_0 dada por $y^n = (y^n_j)_j = e_1 + \cdots + e_n$, onde e_n é o n-ésimo vetor unitário canônico de c_0. Dado $\varphi \in (c_0)'$, pela dualidade $\ell_1 \overset{1}{=} (c_0)'$, existe $(a_j)_j$ em ℓ_1 tal que

$$\varphi(y^n) = \sum_{j=1}^{\infty} y^n_j a_j = \sum_{j=1}^{n} a_j \longrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} a_j. \tag{1.1}$$

Assim $(\varphi(y^n))_n$ é convergente, e portanto é de Cauchy para todo $\varphi \in (c_0)'$. Com isso concluímos que $(y^n)_n$ é fracamente de Cauchy em c_0.

Como $c_0 \subset \ell_\infty$, temos $(y^n)_n \subset \ell_\infty$. Mostraremos agora que $y^n \overset{w^*}{\longrightarrow} y = (1, 1, \ldots)$ em ℓ_∞. Pela dualidade $(\ell_1)' \overset{1}{=} \ell_\infty$ basta provar que para toda sequência $(x_j)_j \in \ell_1$ tem-se $y^n((x_j)_j) \longrightarrow y((x_j)_j)$. Isso de fato ocorre, pois

$$y^n((x_j)_j) = \sum_{j=1}^{\infty} y^n_j x_j = \sum_{j=1}^{n} x_j \longrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} x_j = y((x_j)_j). \tag{1.2}$$

Disso segue que $y^n \overset{w^*}{\longrightarrow} y = (1, 1, \ldots)$ em ℓ_∞.

Agora suponha que $(y^n)_n$ seja fracamente convergente em c_0. Então existe $z \in c_0$ tal que $y^n \overset{w}{\longrightarrow} z$ em c_0. Como c_0 é um subespaço de ℓ_∞, se $\psi \in (\ell_\infty)'$ então $\psi_{|c_o} \in (c_0)'$ e daí

$$\psi(y^n) = \psi_{|c_0}(y^n) \longrightarrow \psi_{|c_0}(z) = \psi(z).$$

Logo $\psi(y^n) \longrightarrow \psi(z)$ para todo $\psi \in (\ell_\infty)'$, ou seja, $y^n \overset{w}{\longrightarrow} z$ em ℓ_∞, e consequentemente $y^n \overset{w^*}{\longrightarrow} z$ em ℓ_∞. Como a topologia fraca-estrela é de Hausdorff, concluímos que $y = z$, mas isso gera um absurdo pois $y = (1, 1, \ldots) \notin c_0$. Logo $(y^n)_n$ não converge fracamente em c_0.

Proposição 1.3.16 *Uma sequência $(x_n)_n$ no espaço de Banach E é fracamente de Cauchy se, e somente se, para toda vizinhança U de zero na topologia fraca existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(x_n - x_m) \in U$ para todos $m, n \geq n_0$.*

Demonstração. Seja U uma vizinhança fraca de zero em E. Então existe um aberto básico V na topologia fraca tal que $0 \in V \subset U$. Tome $\varepsilon > 0$ e $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k \in E'$ tais que

$$V := \{x \in E : \ |\varphi_j(x)| < \varepsilon, \quad j = 1, \ldots, k\} = \bigcap_{j=1}^{k} \varphi_j^{-1}(B(0, \varepsilon)).$$

Como $(\varphi_j(x_n))_n$ é uma sequência de Cauchy para $1 \leq j \leq k$, então para cada j existe $n_j \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\varphi_j(x_n - x_m)| = |\varphi_j(x_n) - \varphi_j(x_m)| < \varepsilon \text{ para todos } m, n \geq n_j.$$

Assim, $(x_n - x_m) \in \varphi_j^{-1}(B(0,\varepsilon))$ para todos $m, n \geq n_j$. Tomando $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$ temos

$$(x_n - x_m) \in \varphi_j^{-1}(B(0,\varepsilon)) \text{ para todos } m, n \geq n_0 \text{ e } j = 1, \ldots, k.$$

Com isso

$$(x_n - x_m) \in \bigcap_{j=1}^{k} \varphi_j^{-1}(B(0,\varepsilon)) = V \subset U \text{ para todos } m, n \geq n_0.$$

Portanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(x_n - x_m) \in U$ para todos $m, n \geq n_0$.

Reciprocamente, dado $\varphi \in E'$, provaremos que $(\varphi(x_n))_n$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$. Dado $\varepsilon > 0$ e a bola aberta $B(0,\varepsilon)$ em $\mathbb{K}$, como φ é fracamente contínua sabemos que $\varphi^{-1}(B(0,\varepsilon))$ é fracamente aberto em E e $0 \in \varphi^{-1}(B(0,\varepsilon))$. Logo $\varphi^{-1}(B(0,\varepsilon))$ é uma vizinhança fraca de zero em E. Por hipótese existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$(x_n - x_m) \in \varphi^{-1}(B(0,\varepsilon)) \text{ para todos } m, n \geq n_0.$$

Assim,

$$|\varphi(x_n) - \varphi(x_m)| = |\varphi(x_n - x_m)| < \varepsilon \text{ para todos } m, n \geq n_0.$$

Logo $(\varphi(x_n))_n$ é de Cauchy e, portanto, $(x_n)_n$ é fracamente de Cauchy. ■

A caracterização apresentada a seguir foi encontrada em [47] e será muito útil em demonstrações futuras.

Proposição 1.3.17 *Sejam E um espaço de Banach e $(x_n)_n$ uma sequência em E. Então $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy (fracamente de Cauchy) se, e somente se, para cada par de sequências estritamente crescentes $(m_k)_k$, $(n_k)_k$ em $\mathbb{N}$, a sequência $(x_{m_k} - x_{n_k})_k$ converge para zero em E (fracamente em E).*

Demonstração. Suponha que $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy (fracamente de Cauchy) e seja U uma vizinhança de zero (na topologia fraca) em E. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(x_m - x_n) \in U$ para todos $m, n \geq n_0$. Tome $k_0 \in \mathbb{N}$ de modo que $m_{k_0}, n_{k_0} \geq n_0$, então $(x_{m_k} - x_{n_k}) \in U$ para todo $k \geq k_0$. Portanto $x_{m_k} - x_{n_k} \longrightarrow 0$ ($x_{m_k} - x_{n_k} \xrightarrow{w} 0$).

Reciprocamente, suponha que a sequência $(x_n)_n$ não seja de Cauchy (fracamente de Cauchy) em E. Neste caso existe uma vizinhança U de zero (na topologia fraca) em E tal que para cada $n_0 \in \mathbb{N}$ existem $m, n > n_0$ de modo que $(x_m - x_n) \notin U$. Assim

$$\begin{aligned}
&\text{para } n_0 = 1, \text{ existem } m_1, n_1 > 1 \text{ tais que } (x_{m_1} - x_{n_1}) \notin U,\\
&\text{para } n_0 = \max\{m_1, n_1\}, \text{ existem } m_2, n_2 > n_0 \text{ tais que } (x_{m_2} - x_{n_2}) \notin U,\\
&\text{para } n_0 = \max\{m_2, n_2\}, \text{ existem } m_3, n_3 > n_0 \text{ tais que } (x_{m_3} - x_{n_3}) \notin U,\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}$$

Com isso obtemos duas sequências $(m_k)_k$ e $(n_k)_k$ estritamente crescente de números naturais tais que $(x_{m_k} - x_{n_k}) \notin U$ para todo $k \in \mathbb{N}$, ou seja, $x_{m_k} - x_{n_k} \not\longrightarrow 0$ ($x_{m_k} - x_{n_k} \overset{w}{\not\longrightarrow} 0$), contradizendo assim a hipótese. Portanto $(x_n)_n$ é de Cauchy (fracamente de Cauchy). ■

Proposição 1.3.18 *Toda sequência de Cauchy em um espaço de Banach é fracamente de Cauchy.*

Demonstração. Se $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy no espaço de Banach E, então $(x_n)_n$ converge para algum $x \in E$. Pela continuidade dos funcionais em E' segue que $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ para todo $\varphi \in E'$. Assim, como $(\varphi(x_n))_n$ é convergente em $\mathbb{K}$, para todo $\varphi \in E'$, segue que $(x_n)_n$ é fracamente de Cauchy. ■

Observação 1.3.19 A recíproca da proposição acima nem sempre é verdadeira. Como exemplo disso basta tomarmos novamente a sequência de vetores unitários canônicos $(e_n)_n$ em c_0. Verificamos no Exemplo 1.3.6 que $(e_n)_n$ é fracamente convergente em c_0, e daí $(e_n)_n$ é fracamente de Cauchy. Porém $\|e_n - e_m\| = 1$ para todos $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m \neq n$, donde segue que $(e_n)_n$ não é de Cauchy em c_0.

Proposição 1.3.20 *Sejam E e F espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(E; F)$. Se $(x_n)_n$ é uma sequência fracamente de Cauchy em E, então $(T(x_n))_n$ é fracamente de Cauchy.*

Demonstração. Seja $\varphi \in F'$. Então $\varphi \circ T \colon E \longrightarrow \mathbb{K}$ é linear e contínuo, logo $\varphi \circ T \in E'$. Por $(x_n)_n$ ser fracamente de Cauchy, segue que $((\varphi \circ T)(x_n))_n$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$. Portanto $(\varphi(T(x_n)))_n$ é de Cauchy em $\mathbb{K}$ para todo $\varphi \in F'$, ou seja, $(T(x_n))_n$ é fracamente de Cauchy em F. ■

Definição 1.3.21 Seja E um espaço de Banach.

(a) Uma sequência $(x_n)_n$ em E é chamada *base de Schauder de E* se cada $x \in E$ tem uma representação única sob a forma $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, onde $a_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

(b) Uma sequência $(x_n)_n$ em E é chamada de *sequência básica* se é base de Schauder de $\overline{[\{x_n : n \in \mathbb{N}\}]}$.

(c) Dizemos que a base de Schauder $(x_n)_n$ em E é *equivalente* à base de Schauder $(y_n)_n$ do espaço de Banach F se, para qualquer sequência de escalares $(a_n)_n$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ é convergente em E se, e somente se, a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n$ é convergente em F.

Teorema 1.3.22 *Duas bases de Schauder (ou sequências básicas) $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ são equivalentes se, e somente se, existe um isomorfismo $T \colon \overline{[\{x_n : n \in \mathbb{N}\}]} \longrightarrow \overline{[\{y_n : n \in \mathbb{N}\}]}$ tal que $T(x_n) = y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. [1, Theorem 1.3.2]. ■

Teorema 1.3.23 (Teorema ℓ_1 de Rosenthal) *Seja $(x_n)_n$ uma sequência limitada em um espaço de Banach de dimensão infinita. Uma, e apenas uma, das possibilidades abaixo ocorre:*

(a) $(x_n)_n$ tem uma subsequência fracamente de Cauchy,

(b) $(x_n)_n$ tem uma subsequência básica equivalente à base canônica de ℓ_1.

Demonstração. [1, Theorem 10.2.1]. ■

Definição 1.3.24 Sejam E um espaço normado e A um subconjunto de E. Definimos a *envoltória absolutamente convexa* de A por:

$$\Gamma(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{K}, x_i \in A \text{ para cada } i \text{ e } \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq 1 \right\}.$$

A *envoltória absolutamente convexa fechada* de A, denotada por $\overline{\Gamma}(A)$, é o fecho de $\Gamma(A)$.

Teorema 1.3.25 (Teorema de Krein-Smulian) *Seja E um espaço de Banach. Se A é um subconjunto fracamente compacto de E então $\overline{\Gamma}(A)$ é fracamente compacta em E.*

Demonstração. [43, Teorema 4.5.10]. ■

Existe uma versão do Teorema de Krein-Smulian para a envoltória convexa fechada de um subconjunto fracamente compacto. Ambos os resultados são conhecidos como Teorema de Krein-Smulian (veja [39, The Krein-Smulian Weak Compactness Theorem 2.8.14]).

Teorema 1.3.26 (Teorema de Josefson-Nissenzweig) *Todo espaço de Banach dual de dimensão infinita admite uma sequência $(\varphi_n)_n$ tal que $\varphi_n \xrightarrow{w^*} 0$ e $\|\varphi_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. [19, Chapter XII]. ■

1.4 Operadores lineares contínuos entre espaços normados

Proposição 1.4.1 *Sejam E e F espaços normados. Então $\|T(x)\| \leqslant \|T\| \cdot \|x\|$ para todos $T \in \mathcal{L}(E; F)$ e $x \in E$.*

Demonstração. [6, Proposição 2.1.4]. ■

Proposição 1.4.2 *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $(T_n)_n$ uma sequência em $\mathcal{L}(E; F)$ tal que $(T_n(x))_n$ é convergente em F para todo $x \in E$. Se definirmos*

$$T \colon E \longrightarrow F; \quad x \longmapsto \lim_{n\to\infty} T_n(x) \quad \text{para todo } x \in E,$$

então T é um operador linear contínuo.

Demonstração. [6, Corolário 2.3.3]. ■

Definição 1.4.3 Um operador linear T entre espaços de Banach E e F é *compacto* se $\overline{T(B_E)}$ é compacto em F.

Proposição 1.4.4 *Todo operador compacto é contínuo.*

Demonstração. [6, Proposição 7.2.2(a)]. ■

Os operadores compactos de E em F, formam um subespaço de $\mathcal{L}(E;F)$. Denotaremos esse subespaço por $\mathcal{K}(E;F)$.

Proposição 1.4.5 *Sejam E e F espaços de Banach e $T\colon E \longrightarrow F$ um operador linear. Então T é compacto se, e somente se, para toda sequência limitada $(x_n)_n$ em E, a sequência $(T(x_n))_n$ tem subsequência convergente em F.*

Demonstração. [6, Proposição 7.2.3]. ■

Teorema 1.4.6 (Teorema de Schauder) *Sejam E e F espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(E;F)$. Então T é compacto se, e somente se, T' é compacto.*

Demonstração. [15, Schauder's Theorem 3.4]. ■

Definição 1.4.7 Um operador linear T entre espaços de Banach E e F é *fracamente compacto* se $\overline{T(B_E)}$ é fracamente compacto em F.

Proposição 1.4.8 *Todo operador fracamente compacto é contínuo.*

Demonstração. [39, Proposition 3.5.3]. ■

Proposição 1.4.9 *Sejam E e F espaços de Banach. Se E ou F é reflexivo, então todo operador $T \in \mathcal{L}(E;F)$ é fracamente compacto.*

Demonstração. [15, Proposition 5.2(a)]. ■

Teorema 1.4.10 (Teorema de Gantmacher) *Sejam E e F espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(E;F)$. Então T é fracamente compacto se, e somente se, T' é fracamente compacto.*

Demonstração. [22, Theorem 11.28]. ■

1.5 Espaços $L_p(X,\Sigma,\mu)$, $L_\infty(X,\Sigma,\mu)$ e $C(K)$

Nesta seção apresentaremos resultados sobre alguns espaços de funções clássicos da Análise Funcional e também apresentaremos alguns resultados sobre espaços de Hilbert. Denotamos por:

- $C(K)$: o espaço das funções contínuas definidas em um espaço topológico compacto Hausdorff K;
- $L_p(X,\Sigma,\mu)$ para $1 \leq p < \infty$: o espaço das (classes de) funções mensuráveis $f\colon X \longrightarrow \mathbb{K}$ tais que $\int_X |f|^p d\mu < \infty$, onde $\int_X$ é a integral de Lebesgue sobre o espaço de medida (X,Σ,μ). Na notação $L_p[0,1]$ estaremos considerando o espaço $[0,1]$ com a medida e σ-álgebra de Lebesgue;

- $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$: o espaço das (classes de) funções mensuráveis limitadas μ-quase sempre. Na notação $L_\infty[0,1]$ estaremos considerando o espaço $[0,1]$ com a medida e σ-álgebra de Lebesgue.

O espaço $C(K)$ é de Banach com a norma dada por

$$\|f\| := \sup\{|f(x)| : \ x \in K\}.$$

O espaço $L_p(X, \Sigma, \mu)$ é de Banach com a norma dada por

$$\|f\| := \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}},$$

e o espaço $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$ é de Banach com a norma dada por

$$\|f\| := \inf\{S_f(N) : \ N \in \Sigma \text{ e } \mu(N) = 0\},$$

onde $S_f(N) := \sup\{|f(x)| : \ x \notin N\}$, para todo conjunto $N \in \Sigma$ de medida nula (veja [6, Teorema 1.2.3, Teorema 1.3.2] e [22, pág 3]).

Definição 1.5.1 Seja E um espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Um conjunto $S \subset E$ é dito *ortonormal* se para todos $x, \ y \in S$,

$$\langle x, y \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq y, \\ 1, & \text{se } x = y. \end{cases}$$

Teorema 1.5.2 (Desigualdade de Bessel) *Seja $S = \{x_i : i \in I\}$ um sistema ortonormal no espaço de Hilbert H. Então, para todo $x \in H$ o conjunto $J = \{i \in I : \langle x, x_i \rangle \neq 0\}$ é finito ou enumerável e*

$$\sum_{i \in J} |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Demonstração. [6, Lema 5.3.5 e Teorema 5.3.6(b)]. ∎

Proposição 1.5.3 *Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida e $f, \ g \in L_2(X, \Sigma, \mu)$. Então a expressão*

$$\langle f, g \rangle := \int_X f\overline{g} d\mu$$

define um produto interno em $L_2(X, \Sigma, \mu)$.

Demonstração. [6, Exemplo 5.1.1]. ∎

Definição 1.5.4 Um espaço de Banach F é *injetivo* se, sempre que G for um subespaço fechado de um espaço de Banach E, qualquer operador $T \in \mathcal{L}(G; F)$ tiver uma extensão $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(E; F)$ com $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

Teorema 1.5.5 $L_\infty[0,1]$ *é um espaço injetivo.*

Demonstração. [18, Theorem 4.14]. ■

Definição 1.5.6 Chamamos de *função sinal* a função $sgn\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$sgn(t) := \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0, \\ 0, & \text{se } t = 0, \\ -1, & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Definição 1.5.7 Para cada $n \in \mathbb{N}$ a n-ésima *função de Rademacher* é dada por

$$r_n(t) = sgn(sen(2^n \pi t)) \text{ para todo } t \in [0,1].$$

Teorema 1.5.8 (Desigualdade de Khinchin) *Para todo $0 < p < \infty$ existem constantes positivas A_p e B_p tais que independentemente da sequência escalar $(a_n)_n$ em ℓ_2 temos:*

$$A_p \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n(t) \right|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \leq B_p \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. [18, Khinchin Inequality 1.10]. ■

Observação 1.5.9 Alguns resultados sobre as funções de Rademacher.

(a) Em $L_\infty[0,1]$ as funções de Rademacher são equivalentes à base canônica de ℓ_1 (veja [1, Remark 6.2.4(a)]).

(b) Em $L_2[0,1]$ as funções de Rademancher formam um sistema ortonormal (veja [1, Remark 6.2.4(b)]).

Teorema 1.5.10 (Teorema de Banach-Mazur) *Seja E um espaço normado separável. Então E é isomorfo isometricamente a um subespaço de $C[0,1]$.*

Demonstração. [6, Teorema 6.5.5]. ■

Teorema 1.5.11 *O espaço $L_\infty[0,1]$ é isomorfo a ℓ_∞.*

Demonstração. [1, Theorem 4.3.10]. ■

Proposição 1.5.12 *Para qualquer espaço topológico Hausdorff infinito e compacto K, o espaço $C(K)$ contém uma cópia isométrica de c_0.*

Demonstração. [1, Proposition 4.3.11]. ■

Proposição 1.5.13 *O espaço $C(K)'$ é isomorfo isometricamente a ℓ_1 para todo espaço métrico compacto enumerável K.*

Demonstração. [1, Remark 4.5.3]. ■

Proposição 1.5.14 *Para $1 < p < \infty$, os espaços ℓ_p e $L_p(X, \Sigma, \mu)$ são reflexivos.*

Demonstração. [6, Proposição 4.3.12]. ■

1.6 Espaço Quociente

Definição 1.6.1 Seja M um subespaço de um espaço vetorial E. Definimos o *espaço quociente de E por M* da seguinte forma

$$E/M := \{x + M : \ x \in E\}.$$

E/M é um espaço vetorial com as operações

$$\begin{aligned}
&(x + M) + (y + M) = (x + y) + M, \text{ para todos } x, y \in E, \\
&\alpha(x + M) = (\alpha x) + M, \text{ para todos } \alpha \in \mathbb{K} \text{ e } x \in M,
\end{aligned}$$

onde o zero de E/M é $0 + M$.

Teorema 1.6.2 *Se E é um espaço normado e M é um subespaço fechado de E, então a expressão*

$$\|x + M\| := \inf\{\|x - v\| : v \in M\}$$

define uma norma em E/M, chamada norma quociente.

Demonstração. [39, Theorem 1.7.4]. ■

Proposição 1.6.3 *Se M é um subespaço fechado de um espaço normado separável E, então E/M é separável.*

Demonstração. [39, Proposition 1.12.9(e)]. ■

Teorema 1.6.4 *Se M é um subespaço fechado de um espaço de Banach E, então E/M é um espaço de Banach com a norma quociente.*

Demonstração. [39, Theorem 1.7.7]. ■

Definição 1.6.5 Sejam E um espaço normado e N um subconjunto de E. Definimos

$$N^\perp := \{\varphi \in E' : \varphi(x) = 0 \text{ para todo } x \in N\}.$$

$N^\perp$ é um subespaço fechado de E' e é chamado *anulador de N em E'* (veja [39, Proposition 1.10.15(a)]).

Proposição 1.6.6 *Seja M um subespaço fechado de um espaço de Banach E. Então M' é isomorfo isometricamente a $E'/M^\perp$.*

Demonstração. [22, Proposition 2.7]. ■

Teorema 1.6.7 *Para todo espaço de Banach separável E, existe um subespaço fechado M de ℓ_1 tal que E é isomorfo a ℓ_1/M.*

Demonstração. [39, Theorem 1.12.14]. ■

Proposição 1.6.8 *Seja M um subespaço fechado do espaço normado E. Então o operador quociente, dado por*

$$\pi \colon E \longrightarrow E/M \ ; \ \pi(x) := x + M,$$

é linear, contínuo e sobrejetor.

Demonstração. [39, Proposition 1.7.12]. ■

CAPÍTULO 2

A PROPRIEDADE DE SCHUR

Em 1921, o matemático Issai Schur demonstrou, em [46], que no espaço ℓ_1 a convergência fraca de sequências implica na convergência em norma, assim ℓ_1 foi o primeiro espaço em que tal implicação foi observada. O fato é que esta implicação também vale em outros espaços de Banach, e por isso passou-se a dizer que um espaço de Banach E possui a *propriedade de Schur*, ou que E é um *espaço de Schur*, se em E a convergência fraca de sequências implica na convergência em norma.

Este capítulo é dedicado ao estudo de algumas caracterizações e resultados relacionados à propriedade de Schur e à apresentação de alguns exemplos de espaços de Banach que possuem, ou não, a propriedade de Schur.

2.1 Caracterizações da propriedade de Schur

Assim como ocorre com outras propriedades em matemática, em vez de testar a definição da propriedade de Schur, às vezes é mais fácil verificar a validade, ou não, de uma condição que é equivalente a essa definição. Daí a importância de se conhecer propriedades que são equivalentes à propriedade de Schur. Nesta seção apresentamos algumas caracterizações da propriedade de Schur que são ferramentas bastante úteis em algumas demonstrações envolvendo tais espaços.

Definição 2.1.1 Um espaço de Banach E tem a *propriedade de Schur* (ou *E é um espaço de Schur*) se todas as sequências fracamente convergentes em E são convergentes em norma. Isto é, E é um espaço de Schur se, para toda sequência $(x_n)_n \subset E$, tivermos

$$x_n \xrightarrow{w} x \Rightarrow x_n \longrightarrow x.$$

Exemplo 2.1.2 Todo espaço de Banach de dimensão finita é um espaço de Schur. De fato, pelo Teorema 1.3.2 as topologias fraca e da norma coincidem nos espaços de dimensão finita. Assim, toda sequência fracamente convergente é convergente. Portanto todo espaço de dimensão finita é um espaço de Schur.

Exemplo 2.1.3 Do Exemplo 1.3.6 segue que $(e_n)_n$ converge fracamente para zero em c_0, mas não converge em norma. Com isso concluímos que c_0 não é um espaço de Schur.

Proposição 2.1.4 *Se E é um espaço de Schur, então todo subespaço fechado de E possui a propriedade de Schur.*

Demonstração. Sejam F um subespaço fechado de E e $(x_n)_n \subset F$ uma sequência fracamente convergente para x em F. Para todo $\varphi \in E'$ é verdade que $\varphi_{|_F} \in F'$, assim

$$\varphi(x_n) = \varphi_{|_F}(x_n) \longrightarrow \varphi_{|_F}(x) = \varphi(x).$$

Ou seja, $x_n \xrightarrow{w} x$ em E e como E é um espaço de Schur segue que $x_n \longrightarrow x$ em E. Assim,

$$\|x_n - x\|_F = \|x_n - x\|_E \longrightarrow 0,$$

ou seja, $x_n \longrightarrow x$ em F. Logo F possui a propriedade de Schur. ■

Desse modo, para mostrarmos que um espaço de Banach não é de Schur basta encontrarmos um subespaço fechado dele que não seja Schur.

Exemplo 2.1.5 c_0 é um subespaço fechado de ℓ_∞, e acabamos de ver que c_0 não é um espaço de Schur, então ℓ_∞ não é um espaço de Schur.

A seguinte importante classe de operadores está intimamente relacionada à propriedade de Schur:

Definição 2.1.6 Sejam E e F espaços normados. Um operador $T \in \mathcal{L}(E; F)$ é *completamente contínuo* se $(T(x_n))_n$ converge para $T(x)$ em F sempre que $(x_n)_n$ convergir fracamente para x em E.

É imediato que um espaço de Banach E possui a propriedade de Schur se, e somente se, o operador identidade $id\colon E \longrightarrow E$ é completamente contínuo.

Observação 2.1.7 Todo subconjunto compacto de um espaço de Banach é fracamente compacto. De fato, suponha que K seja um subconjunto compacto de um espaço de Banach E e seja $(x_n)_n$ uma sequência em K. Então existem $x \in K$ e uma subsequência $(x_{n_j})_j$ tais que $x_{n_j} \longrightarrow x$. Como convergência em norma implica em convergência fraca temos $x_{n_j} \xrightarrow{w} x$, e pelo Teorema de Eberlein-Smulian concluímos que K é fracamente compacto.

A recíproca desse resultado nem sempre é verdadeira. De fato, sejam E um espaço reflexivo de dimensão infinita e $(x_n)_n$ uma sequência qualquer em B_E. Como E é reflexivo e $(x_n)_n$ é limitada, pelo Teorema 1.3.8 sabemos que $(x_n)_n$ tem uma subsequência $(x_{n_j})_j$ fracamente convergente para algum $x \in E$. Então x pertence ao fecho fraco de B_E, que coincide com seu fecho na topologia da norma pois B_E é convexa. Mas B_E é fechada em norma, donde segue que $x \in B_E$. Pelo Teorema de Eberlein-Smulian concluímos que B_E é fracamente compacta. Por outro lado, como E tem dimensão infinita segue que B_E não é compacta.

No teorema a seguir apresentamos algumas caracterizações da propriedade de Schur e veremos, dentre outros resultados, que a recíproca da observação acima é verdadeira se, e somente se, estivermos em um espaço de Schur.

Teorema 2.1.8 *As seguintes afirmações acerca de um espaço de Banach E são equivalentes.*

(a) E é um espaço de Schur.

(b) Toda sequência fracamente nula em E converge para zero.

(c) Todo subconjunto fracamente compacto de E é compacto.

(d) Toda sequência fracamente de Cauchy em E é de Cauchy.

(e) Toda sequência fracamente de Cauchy em E é convergente.

(f) Para qualquer espaço de Banach F, todo operador linear contínuo de E em F ou de F em E é completamente contínuo.

(g) Todos os subespaços separáveis fechados de E são de Schur.

(h) Para toda sequência $(x_n)_n$ em E com $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se $x_n \overset{w}{\not\longrightarrow} 0$.

Mencionamos que conhecemos as caracterizações (c) e (g) no artigo [50] de B. Tanbay. A caracterização (h) foi inspirada na dissertação [31] e as caracterizações (d) e (e) foram inspiradas na dissertação [48].

Demonstração. Apresentamos as demonstrações das equivalências da seguinte maneira:

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & (c) & (g) & & \\
 & & & \Updownarrow & \not\Updownarrow & & \\
(e) & \Leftrightarrow & (d) & \Leftrightarrow (a) & \Leftrightarrow & (b). & \\
 & & & \Updownarrow & & \Updownarrow & \\
 & & & (f) & & (h) &
\end{array}
$$

(a) $\Leftrightarrow$ (b) Sejam E um espaço de Schur e $(x_n)_n$ uma sequência em E. Segue imediatamente da definição da propriedade de Schur que se $x_n \overset{w}{\longrightarrow} 0$ então $x_n \longrightarrow 0$.

Reciprocamente, suponha que E seja um espaço de Banach onde toda sequência fracamente nula converge para zero. Seja $(x_n)_n \subset E$ uma sequência fracamente convergente para $x \in E$. Então $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ para todo $\varphi \in E'$. Da definição de convergência no corpo $\mathbb{K}$ e da linearidade de φ segue que $\varphi(x_n - x) \longrightarrow 0$ para todo $\varphi \in E'$, ou seja, $x_n - x \overset{w}{\longrightarrow} 0$. Pela hipótese sobre o espaço E segue que $x_n - x \longrightarrow 0$ e portanto $x_n \longrightarrow x$. Logo E é um espaço de Schur.

(a) $\Leftrightarrow$ (c) Sejam E um espaço de Schur e K um subconjunto fracamente compacto de E. Dada uma sequência $(x_n)_n$ em K, pelo Teorema de Eberlein-Smulian $(x_n)_n$ possui uma subsequência $(x_{n_j})_j$ que converge fracamente para algum $x \in K$. Como E é Schur temos $x_{n_j} \longrightarrow x$, e portanto K é compacto.

Reciprocamente, sejam $(x_n)_n$ uma sequência em E e $x \in E$ tais que $x_n \xrightarrow{w} x$. Para toda subsequência $(x_{n_j})_j$ de $(x_n)_n$ temos $x_{n_j} \xrightarrow{w} x$. Vejamos que, pelo Teorema de Eberlein-Smulian, o subconjunto $A := \{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots\} \cup \{x\}$ é fracamente compacto: de fato, para toda sequência $(z_n)_n \subset A$, ou o conjunto $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ é finito ou então $(z_n)_n$ possui uma subsequência que também é subsequência de $(x_{n_j})_j$, e em ambos os casos $(z_n)_n$ possuirá subsequência fracamente convergente para algum $z \in A$. Isso prova que A é fracamente compacto. Segue por hipótese que A é compacto, e daí, como $(x_{n_j})_j \subset A$, existe uma subsequência $(x_{n_{j_k}})_k$ de $(x_{n_j})_j$ tal que $x_{n_{j_k}} \longrightarrow y$ para algum $y \in A$. Temos então $x_{n_{j_k}} \xrightarrow{w} y$ e $x_{n_{j_k}} \xrightarrow{w} x$, e como a topologia fraca é de Hausdorff segue que $y = x$. Assim, toda subsequência $(x_{n_j})_j$ de $(x_n)_n$ possui uma subsequência $(x_{n_{j_k}})_k$ que converge para x, e da Proposição 1.1.6 concluímos que $x_n \longrightarrow x$, provando que E é um espaço de Schur.

(a) $\Leftrightarrow$ (d) Sejam E um espaço de Schur, $(x_n)_n$ uma sequência fracamente de Cauchy em E e $(m_k)_k$, $(n_k)_k$ duas sequências estritamente crescentes de números naturais. Considere as subsequências $(x_{m_k})_k$ e $(x_{n_k})_k$ de $(x_n)_n$. Da Proposição 1.3.17 temos $x_{m_k} - x_{n_k} \xrightarrow{w} 0$, e como E é de Schur resulta que $x_{m_k} - x_{n_k} \longrightarrow 0$. Decorre da Proposição 1.3.17 que a sequência $(x_n)_n$ é de Cauchy.

Reciprocamente, seja E um espaço de Banach no qual toda sequência fracamente de Cauchy é de Cauchy. Se $(x_n)_n$ é uma sequência fracamente convergente para $x \in E$, então $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ para todo $\varphi \in E'$, e com isso $(\varphi(x_n))_n$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{K}$ para todo $\varphi \in E'$. Logo $(x_n)_n$ é uma sequência fracamente de Cauchy em E, e por hipótese $(x_n)_n$ é uma sequência de Cauchy em E. Como E é um espaço de Banach decorre que $(x_n)_n$ converge para algum $y \in E$, e portanto $x_n \xrightarrow{w} y$. Como a topologia fraca é de Hausdorff segue que $y = x$, e com isso concluímos que $x_n \longrightarrow x$. Portanto E é Schur.

(d) $\Leftrightarrow$ (e) Óbvio.

(a) $\Leftrightarrow$ (f) Sejam $(x_n)_n$ uma sequência fracamente convergente para x em E e $T \in \mathcal{L}(E;F)$. Da propriedade de Schur em E segue que $x_n \longrightarrow x$, e pela continuidade de T segue que $T(x_n) \longrightarrow T(x)$. Logo todo operador linear contínuo de E em F é completamente contínuo.

Agora considere $(x_n)_n \subset F$ tal que $x_n \xrightarrow{w} x$ em F e $S \in \mathcal{L}(F;E)$. Como S é contínuo, segue da Proposição 1.3.7 que S é w-w-contínuo, e daí $S(x_n) \xrightarrow{w} S(x)$ em E. Sendo E de Schur segue que $S(x_n) \longrightarrow S(x)$. Logo todo operador linear contínuo de F em E é completamente contínuo.

Para mostrar a implicação inversa basta considerar o operador identidade $id \in \mathcal{L}(E;E)$.

(a) $\Leftrightarrow$ (g) Se E possui a propriedade de Schur, então pela Proposição 2.1.4 todo subespaço fechado de E possui a propriedade de Schur, em particular os subespaços separáveis fechados de E são de Schur.

Reciprocamente, suponha que E não seja de Schur. Então existe uma sequência $(x_n)_n \subset E$ fracamente convergente para $x \in E$ que não converge para x em norma. Considere o conjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$, e o subespaço $[A] \subset E$ gerado por A. Por [6, Lema 1.6.3] sabemos que o espaço $\overline{[A]}$ é separável, e é evidente que $A \subset \overline{[A]}$. Considere a sequência $(x_n)_n$ em $\overline{[A]}$ e note que $x_n \not\longrightarrow x$ em $\overline{[A]}$ pois

$$\|x_n - x\|_{\overline{[A]}} = \|x_n - x\|_E \not\longrightarrow 0.$$

O Teorema de Hahn-Banach garante que para todo funcional $\varphi \in \left(\overline{[A]}\right)'$ existe $\widetilde{\varphi} \in E'$ tal que $\widetilde{\varphi}|_{\overline{[A]}} = \varphi$. Como $x_n \xrightarrow{w} x$ em E,

$$\varphi(x_n) = \widetilde{\varphi}(x_n) \longrightarrow \widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x),$$

ou seja, $x_n \xrightarrow{w} x$ em $\overline{[A]}$. Logo $\overline{[A]}$ é um subespaço separável fechado de E que não é Schur, contradizendo assim a hipótese. Portanto E é Schur.

(b) $\Leftrightarrow$ (h) Suponha que exista $(x_n)_n$ em E tal que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x_n \xrightarrow{w} 0$. Por (b) resulta que $x_n \longrightarrow 0$, e daí $\|x_n\| \longrightarrow 0$, gerando assim um absurdo. Logo, para toda seqência $(x_n)_n$ em E tal que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ é verdade que $x_n \overset{w}{\not\longrightarrow} 0$.

Reciprocamente, suponha que exista uma sequência $(y_n)_n$ em E tal que $y_n \xrightarrow{w} 0$ mas $y_n \not\longrightarrow 0$. Podemos supor que $y_n \neq 0$ para todo n pois, caso isso não aconteça, a sequência formada pelos elementos não nulos da sequência original satisfaz essas mesmas duas condições. Neste caso existem $\varepsilon > 0$ e uma subsequência $(y_{n_j})_j$ de $(y_n)_n$ tais que $\|y_{n_j}\| \geq \varepsilon$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Considere a sequência $(x_j)_j$ onde $x_j = \dfrac{y_{n_j}}{\|y_{n_j}\|}$. É evidente que $\|x_j\| = 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Para todo $\varphi \in E'$, como $\varphi(y_{n_j}) \longrightarrow 0$,

$$|\varphi(x_j)| = \left|\varphi\left(\frac{y_{n_j}}{\|y_{n_j}\|}\right)\right| = \frac{|\varphi(y_{n_j})|}{\|y_{n_j}\|} \leq \frac{|\varphi(y_{n_j})|}{\varepsilon} \longrightarrow 0.$$

Logo $\varphi(x_j) \longrightarrow 0$ para todo $\varphi \in E'$, ou seja, $x_j \xrightarrow{w} 0$, contradizendo a hipótese. Assim, toda sequência fracamente nula em E converge para zero em norma. ■

Apresentaremos agora uma demonstração de que o espaço ℓ_1 possui a propriedade de Schur. Usaremos a caracterização (b) do teorema acima.

Proposição 2.1.9 *O espaço ℓ_1 possui a propriedade de Schur.*

Demonstração. Seja $(z^n)_n$ uma sequência fracamente nula em ℓ_1 e suponhamos que $(z^n)_n$ não convirja para zero em norma. Como

$$z^n \not\longrightarrow 0 \Leftrightarrow \exists\ \varepsilon > 0 \text{ tal que } \forall n \in \mathbb{N},\ \exists\ N > n \text{ tal que } \|z^N\| \geq \varepsilon,$$

então existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $N > n$ tal que $\|z^N\| \geq 5\varepsilon$. Assim,

$$\begin{aligned}
&\text{para } n = 1, \text{ existe } N_1 > 1 \text{ tal que, } \|z^{N_1}\| \geq 5\varepsilon,\\
&\text{para } n = N_1, \text{ existe } N_2 > N_1 \text{ tal que, } \|z^{N_2}\| \geq 5\varepsilon,\\
&\text{para } n = N_2, \text{ existe } N_3 > N_2 \text{ tal que, } \|z^{N_3}\| \geq 5\varepsilon.\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Dessa forma obtemos um conjunto de índices $N_1 < N_2 < N_3 < \cdots$ e uma subsequência $(z^{N_i})_i$ de $(z^n)_n$ de modo que $\|z^{N_i}\| \geq 5\varepsilon$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Para simplificar a notação escreveremos $(z^{N_i})_i = (x^n)_n$. Assim, existem $\varepsilon > 0$ e uma subsequência $(x^n)_n$ de $(z^n)_n$ de modo que $\|x^n\| \geq 5\varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ escrevamos $x^n = (x_j^n)_j$. Como a subsequência $(x^n)_n$ converge fracamente para zero, pela dualidade $(\ell_1)' \stackrel{1}{=} \ell_\infty$ temos

$$\begin{aligned} x^n \xrightarrow{w} 0 &\Rightarrow \varphi(x^n) \longrightarrow \varphi(0) = 0 \;\text{ para todo } \varphi \in (\ell_1)' \\ &\Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j^n \xrightarrow{n} 0 \text{ para toda sequência } (b_j)_j \text{ em } \ell_\infty \\ &\Rightarrow \lim_{n\longrightarrow\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j^n = 0 \text{ para toda sequência } (b_j)_j \text{ em } \ell_\infty. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Como os vetores unitários canônicos e_i pertencem a ℓ_∞, segue de (2.1) que $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} x_i^n = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Reescrevendo os vetores canônicos unitários como e_j, temos então

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} x_j^n = 0 \text{ para todo } j \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Defina indutivamente duas sequências estritamente crescentes $(m_k)_k$ e $(n_k)_k$ formadas por números naturais da seguinte maneira: $m_0 = n_0 = 1$ e para $k \geqslant 1$,

$$n_k \text{ é o menor natural maior que } n_{k-1} \text{ satisfazendo } \sum_{j=1}^{m_{k-1}} |x_j^{n_k}| < \varepsilon, \tag{2.3}$$

$$m_k \text{ é o menor natural maior que } m_{k-1} \text{ satisfazendo } \sum_{j=m_k}^{\infty} |x_j^{n_k}| < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Observe que a existência da sequência $(n_k)_k$ como definida acima é assegurada por (2.2), pois como $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} x_j^n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então é possível encontrar $n_k \in \mathbb{N}$ de modo que a soma finita dos primeiros m_{k-1} termos da sequência $(x_j^{n_k})_j$ seja menor que ε. Observe também que a existência da sequência $(m_k)_k$ é assegurada pelo fato da sequência $(x_j^n)_j$ pertencer a ℓ_1 para todo $n \in \mathbb{N}$, assim a série $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |x_j^{n_k}|$ é convergente e com isso é possível obter $m_k \in \mathbb{N}$ de modo que $\sum\limits_{j=m_k}^{\infty} |x_j^{n_k}| < \varepsilon$. Definimos uma sequência $(b_j)_j$ pertencente a ℓ_∞ da seguinte maneira: Para $m_{k-1} < j \leq m_k$,

$$b_j = \begin{cases} 0 & \text{, se } x_j^{n_k} = 0, \\ \dfrac{x_j^{n_k}}{|x_j^{n_k}|} & \text{, se } x_j^{n_k} \neq 0. \end{cases}$$

Observe que $|b_j| \leq 1$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Vejamos que, quando $m_{k-1} < j \leq m_k$, temos

$$|x_j^{n_k}| - b_j x_j^{n_k} = 0.$$

De fato, se $x_j^{n_k} = 0$ a igualdade é óbvia. Se $x_j^{n_k} \neq 0$ obtemos

$$|x_j^{n_k}| - b_j x_j^{n_k} = |x_j^{n_k}| - \frac{\overline{x_j^{n_k}}}{|x_j^{n_k}|} x_j^{n_k} = \frac{|x_j^{n_k}|^2 - |x_j^{n_k}|^2}{|x_j^{n_k}|} = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
5\varepsilon - \left|\sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j^{n_k}\right| &\leq \left|\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{n_k}|\right| - \left|\sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j^{n_k}\right| \leq \left|\sum_{j=1}^{\infty} |x_j^{n_k}| - b_j x_j^{n_k}\right| \\
&= \left|\sum_{j=1}^{m_{k-1}} |x_j^{n_k}| - b_j x_j^{n_k} + \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} |x_j^{n_k}| - b_j x_j^{n_k} + \sum_{j=m_k+1}^{\infty} |x_j^{n_k}| - b_j x_j^{n_k}\right| \\
&= \left|\sum_{j=1}^{m_{k-1}} |x_j^{n_k}| - b_j x_j^{n_k} + \sum_{j=m_k+1}^{\infty} |x_j^{n_k}| - b_j x_j^{n_k}\right| \\
&\leq \left|\sum_{j=1}^{m_{k-1}} |x_j^{n_k}| + |b_j x_j^{n_k}| + \sum_{j=m_k+1}^{\infty} |x_j^{n_k}| + |b_j x_j^{n_k}|\right| \\
&= \sum_{j=1}^{m_{k-1}} |x_j^{n_k}| + \sum_{j=1}^{m_{k-1}} |b_j||x_j^{n_k}| + \sum_{j=m_k+1}^{\infty} |x_j^{n_k}| + \sum_{j=m_k+1}^{\infty} |b_j||x_j^{n_k}| \\
&< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 4\varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, $\left|\sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j^{n_k}\right| > \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Fazendo $k \longrightarrow \infty$ essa desigualdade entra em contradição com (2.1). A contradição surgiu por supormos que a sequência $(z^n)_n$ não converge para zero em norma. Com isso concluímos que toda sequência fracamente nula em ℓ_1 converge para zero em norma, e portando ℓ_1 tem a propriedade de Schur. ■

2.2 Resultados sobre a propriedade de Schur e exemplos

Na seção anterior vimos que a propriedade de Schur é passada para subespaços fechados. Nesta seção nos propomos a estudar alguns outros resultados da propriedade de Schur, como por exemplo: se ela é passada para espaço quociente, preservada por isomorfismos, passada para dual ou bidual topológico, etc. Faremos ainda um estudo da propriedade de Schur nos espaços de funções $L_p(X, \Sigma, \mu)$, $L_\infty(X, \Sigma, \mu)$, $C(K)$, nos espaços de sequências ℓ_p, ℓ_∞, c_0 e em alguns espaços duais, para ver quais são Schur e quais não são.

Proposição 2.2.1 *A propriedade de Schur é preservada por isomorfismos.*

Demonstração. Sejam E um espaço de Schur, F um espaço de Banach, $T\colon E \longrightarrow F$ um isomorfismo e $(y_n)_n$ uma sequência fracamente nula em F. Como $T^{-1}\colon F \longrightarrow E$ é contínuo, segue pela Proposição 1.3.7 que T^{-1} é w-w-contínuo, assim

$$y_n \xrightarrow{w} 0 \Rightarrow T^{-1}(y_n) \xrightarrow{w} 0.$$

Como E é um espaço de Schur segue que $T^{-1}(y_n) \longrightarrow 0$ e por T ser contínuo obtemos que

$$y_n = T(T^{-1}(y_n)) \longrightarrow 0.$$

Portanto F é um espaço de Schur. ■

Exemplo 2.2.2 O espaço $(c_0)'$ é um espaço de Schur. De fato, pela Proposição 1.2.2 sabemos que ℓ_1 é isomorfo isometricamente a $(c_0)'$. Então pela proposição acima $(c_0)'$ é um espaço de Schur.

Exemplo 2.2.3 O espaço $C(K)'$ é Schur para todo espaço métrico compacto enumerável K. De fato, pela Proposição 1.5.13, $C(K)'$ é isomorfo a ℓ_1 para todo espaço métrico compacto enumerável K, logo segue da proposição acima que $C(K)'$ é Schur.

Exemplo 2.2.4 O espaço $L_\infty[0,1]$ não é de Schur. De fato, pelo Teorema 1.5.11, $L_\infty[0,1]$ é isomorfo a ℓ_∞, e como ℓ_∞ não é de Schur segue que $L_\infty[0,1]$ não é de Schur.

Observação 2.2.5 (E' Schur $\not\Rightarrow$ E Schur) Se E é um espaço de Banach cujo dual E' possui a propriedade de Schur, não podemos garantir que o espaço E também possui a propriedade de Schur. O espaço $E = c_0$ é um exemplo desse fato.

Exemplo 2.2.6 $(\ell_1)'$ não possui a propriedade de Schur. De fato, pelo Teorema 1.2.1 sabemos que $(\ell_1)'$ é isomorfo isometricamente a ℓ_∞, e como ℓ_∞ não é de Schur concluímos que $(\ell_1)'$ também não é um espaço de Schur.

Observação 2.2.7 (E Schur $\not\Rightarrow$ E' Schur) Se um espaço de Banach E possui a propriedade de Schur, não podemos garantir que seu dual E' também possui a propriedade de Schur. O espaço $E = \ell_1$ é um exemplo desse fato.

Exemplo 2.2.8 A propriedade de Schur não é passada para espaços quocientes em geral. De fato, como c_0 é separável então, pelo Teorema 1.6.7 existe um subespaço fechado M de ℓ_1 tal que c_0 é isomorfo a ℓ_1/M. Como c_0 não é de Schur, então ℓ_1/M não é de Schur, mas já vimos que ℓ_1 é um espaço de Schur.

Proposição 2.2.9 *Sejam E e F espaços de Banach. Se F é um espaço de Schur e possui uma cópia de E, então E é de Schur.*

Demonstração. Como F possui uma cópia de E, existe um isomorfismo

$$T\colon E \longrightarrow T(E) \subset F.$$

O fato de E ser Banach nos garante que $T(E)$ é um subespaço fechado de F, e como F é de Schur segue que $T(E)$ é um espaço de Schur. Concluímos então que, por ser isomorfo a $T(E)$, E é um espaço de Schur. ■

Observação 2.2.10 Pela proposição acima, para mostrarmos que um espaço de Banach não é de Schur, basta mostrarmos que ele possui cópia de um espaço que não é de Schur.

Exemplo 2.2.11 O espaço $C(K)$ não é de Schur para qualquer espaço topológico Hausdorff infinito e compacto K. De fato, pela Proposição 1.5.12 temos $c_0 \hookrightarrow C(K)$ para qualquer espaço topológico Hausdorff infinito e compacto K. Como c_0 não é de Schur, segue da observação acima que $C(K)$ não é de Schur. Em particular, o espaço $C[0,1]$ não é de Schur.

Corolário 2.2.12 (E'' Schur $\Rightarrow E$ Schur) *Seja E um espaço de Banach tal que seu bidual E'' possui a propriedade de Schur. Então E possui a propriedade de Schur.*

Demonstração. Note que o mergulho canônico $J_E \colon E \longrightarrow E''$ é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem, assim $E \overset{1}{\hookrightarrow} E''$. Portanto E tem a propriedade de Schur sempre que E'' for um espaço de Schur. ■

Veremos a seguir que a propriedade de Schur satisfaz uma condição muito relevante na teoria dos espaços de Banach.

Definição 2.2.13 Seja F um subespaço fechado de um espaço de Banach E. Dizemos que uma propriedade $\mathcal{P}$ é uma *propriedade de três espaços* se E tem a propriedade $\mathcal{P}$ sempre que F e E/F tiverem a propriedade $\mathcal{P}$.

Separabilidade e reflexidade são exemplos de propriedade de três espaços (veja [22, pág 26 e pág 97]). Por outro lado a propriedade de Dunford-Pettis, que definiremos em breve, não é uma propriedade de três espaços como demonstrado por Castillo e González em [13]. Mostraremos no próximo resultado que a propriedade de Schur é uma propriedade de três espaços. A demonstração que apresentaremos é uma adaptação, sem a terminologia de homologia, da demonstração que aparece em [12, Proposition 6].

Proposição 2.2.14 *Seja F um subespaço fechado de um espaço de Banach E. Se F e E/F possuem a propriedade de Schur, então E possui a propriedade de Schur, ou seja, a propriedade de Schur é uma propriedade de três espaços.*

Demonstração. Sejam $(x_n)_n$ uma sequência fracamente nula em E e $(x_{n_j})_j$ uma subsequência de $(x_n)_n$. Então $x_{n_j} \xrightarrow{w} 0$. Considere o operador quociente $\pi \colon E \longrightarrow E/F$ da Proposição 1.6.8. Como π é contínuo, segue que π é w-w-contínuo, dessa forma $\pi(x_{n_j}) \xrightarrow{w} 0 + F$ em E/F. Como E/F é um espaço de Schur, temos $\pi(x_{n_j}) \longrightarrow 0 + F$ em E/F, ou seja,

$$\text{para todo } m \in \mathbb{N} \text{ existe } N_m \in \mathbb{N} \text{ tal que } \|x_{n_j} + F\| < \frac{1}{m} \text{ para todo } j \geq N_m.$$

Com isso,

$$\text{para todo } m \in \mathbb{N} \text{ existe } N_m \in \mathbb{N} \text{ tal que } \inf\{\|x_{n_j} - y\| : y \in F\} < \frac{1}{m} \text{ para todo } j \geq N_m.$$

Assim,

$$
\begin{array}{l}
\text{para } m=1, \quad \exists\, N_1 \in \mathbb{N} \ \text{ tal que para } \ j=N_1 \ \exists\, y_{N_1} \in F \ \text{ tal que } \ \|x_{n_{N_1}} - y_{N_1}\| < 1,\\
\text{para } m=2, \quad \exists\, N_2 > N_1 \ \text{ tal que para } \ j=N_2 \ \exists\, y_{N_2} \in F \ \text{ tal que } \ \|x_{n_{N_2}} - y_{N_2}\| < \dfrac{1}{2},\\
\text{para } m=3, \quad \exists\, N_3 > N_2 \ \text{ tal que para } \ j=N_3 \ \exists\, y_{N_3} \in F \ \text{ tal que } \ \|x_{n_{N_3}} - y_{N_3}\| < \dfrac{1}{3}.\\
\qquad\qquad \vdots
\end{array}
$$

Dessa forma construímos uma sequência $(y_{N_m})_m$ em F e uma subsequência $(x_{n_{N_m}})_m$ de $(x_{n_j})_j$ tais que $\|x_{n_{N_m}} - y_{N_m}\| < \dfrac{1}{m}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Segue que $x_{n_{N_m}} - y_{N_m} \longrightarrow 0$ em E. Pelo Teorema de Hahn-Banach (Teorema 1.1.2), para todo $\varphi \in F'$ existe $\widetilde{\varphi} \in E'$ tal que $\widetilde{\varphi}_{|F} = \varphi$. Com isso,

$$
\begin{aligned}
& x_{n_{N_m}} - y_{N_m} \longrightarrow 0 \text{ em } E \Rightarrow \ x_{n_{N_m}} - y_{N_m} \xrightarrow{w} 0 \ \text{ em } E\\
& \Rightarrow \ \widetilde{\varphi}(x_{n_{N_m}}) - \varphi(y_{N_m}) = \ \widetilde{\varphi}(x_{n_{N_m}}) - \widetilde{\varphi}(y_{N_m}) = \ \widetilde{\varphi}(x_{n_{N_m}} - y_{N_m}) \longrightarrow 0.
\end{aligned}
$$

Como $\widetilde{\varphi}(x_{n_{N_m}}) \longrightarrow 0$, concluímos que $\varphi(y_{N_m}) \longrightarrow 0$, e com isso $y_{N_m} \xrightarrow{w} 0$ em F. Como F é um espaço de Schur, temos $y_{N_m} \longrightarrow 0$ em F. Além disso, já que

$$
\|x_{n_{N_m}}\|_E - \|y_{N_m}\|_F = \|x_{n_{N_m}}\|_E - \|y_{N_m}\|_E \leq \|x_{n_{N_m}} - y_{N_m}\|_E \longrightarrow 0
$$

e $\|y_{N_m}\|_E = \|y_{N_m}\|_F \longrightarrow 0$, concluímos que $\|x_{n_{N_m}}\|_E \longrightarrow 0$, e portanto $x_{n_{N_m}} \longrightarrow 0$ em E. Pelo Lema 1.1.6 concluímos que $x_n \longrightarrow 0$ em E, e portanto E possui a propriedade de Schur. ■

Note que não respondemos a seguinte pergunta: E Schur $\Rightarrow E''$ Schur? Deixaremos para apresentar um exemplo que responde negativamente essa questão mais à frente (veja 2.4.6), após apresentarmos outros resultados sobre a propriedade de Schur.

2.3 Relação da propriedade de Schur com outras propriedades

A propriedade de Schur não é uma propriedade isolada na teoria dos espaços de Banach, pelo contrário, ela possui relação com outras propriedades definidas nesses espaços e algumas dessas relações são muito importantes, como por exemplo a relação com a propriedade de Dunford-Pettis. Nosso objetivo nesta seção é apresentar algumas dessas relações.

Começaremos com algumas relações entre a propriedade de Schur e a reflexividade.

Proposição 2.3.1 *Um espaço reflexivo possui a propriedade de Schur se, e somente se, tem dimensão finita.*

Demonstração. Sejam E um espaço reflexivo com a propriedade de Schur e $(x_n)_n$ uma sequência em B_E. Pela Proposição 1.3.8 sabemos que a sequência $(x_n)_n \subset B_E$ possui uma subsequência $(x_{n_j})_j$ fracamente convergente para algum x em E. Então x pertence ao fecho fraco de B_E, que coincide com seu fecho na topologia da norma pois B_E é convexa. Mas B_E é fechada em norma, donde segue que $x \in B_E$. Da propriedade de Schur de E segue que $x_{n_j} \longrightarrow x \in B_E$. Isso prova que B_E é compacta em norma, e portanto E tem dimensão finita.

Reciprocamente, já vimos que todo espaço de Banach de dimensão finita possui a propriedade de Schur, além disso todo espaço de dimensão finita é reflexivo (veja [6, Exemplo 4.3.6(a)]). ■

Exemplo 2.3.2 Pela Proposição 1.5.14 sabemos que os espaços ℓ_p e $L_p(X, \Sigma, \mu)$ são reflexivos, para $1 < p < \infty$. Então ℓ_p e os espaços $L_p(X, \Sigma, \mu)$ de dimensão infinita não possuem a propriedade de Schur.

Definição 2.3.3 Diz-se que um espaço de Banach E é *fracamente sequencialmente completo* se toda sequência fracamente de Cauchy em E for fracamente convergente.

Proposição 2.3.4 *Todo espaço de Schur é fracamente sequencialmente completo.*

Demonstração. Sejam E um espaço de Schur e $(x_n)_n$ uma sequência fracamente de Cauchy em E. Pelo item *(e)* do Teorema 2.1.8 sabemos que $(x_n)_n$ converge para algum x em E, consequentemente $(x_n)_n$ converge fracamente para x em E; e portanto E é fracamente sequencialmente completo. ■

A recíproca dessa proposição nem sempre é verdadeira. Para ver isso usaremos o seguinte resultado.

Proposição 2.3.5 *Todo espaço reflexivo é fracamente sequencialmente completo.*

Demonstração. Sejam E um espaço reflexivo e $(x_n)_n$ uma sequência fracamente de Cauchy em E. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina o operador

$$T_n \colon E' \longrightarrow \mathbb{K}; \;\; T_n(\varphi) := J_E(x_n)(\varphi) = \varphi(x_n) \;\text{ para todo } \varphi \in E',$$

onde $J_E \colon E \longrightarrow E''$ é o mergulho canônico de E em E''. Segue imediatamente da definição que $T_n \in E''$ para todo $n \in \mathbb{N}$. A sequência $(T_n(\varphi))_n$ é convergente para todo $\varphi \in E'$, pois $(T_n(\varphi))_n = (\varphi(x_n))_n$ que por hipótese é de Cauchy em $\mathbb{K}$ para todo $\varphi \in E'$, logo convergente. Pela Proposição 1.4.2 o operador

$$T \colon E' \longrightarrow \mathbb{K} \; ; \; T(\varphi) = \lim_{n\to\infty} T_n(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n),$$

pertence a E''. Como E é reflexivo, existe $x \in E$ tal que $T = J_E(x)$. Assim, para todo $\varphi \in E'$ temos

$$\varphi(x_n) = T_n(\varphi) \longrightarrow T(\varphi) = J_E(x)(\varphi) = \varphi(x),$$

ou seja, $x_n \xrightarrow{w} x$. Portanto E é fracamente sequencialmente completo. ■

Exemplo 2.3.6 Tomando E reflexivo de dimensão infinita obtemos um espaço fracamente sequencialmente completo que não é de Schur.

Vimos que se um espaço de Banach E de dimensão infinita é reflexivo, então E não é um espaço de Schur. A relação da propriedade de Schur com espaços reflexivos vai um pouco mais além, na realidade se um espaço de Banach E possuir uma cópia de um espaço reflexivo de dimensão infinita então podemos garantir que E não será um espaço de Schur.

Proposição 2.3.7 *Todo espaço de Banach que possui cópia de um espaço reflexivo de dimensão infinita não possui a propriedade de Schur.*

Demonstração. A demonstração segue imediatamente da Observação 2.2.10 e da Proposição 2.3.1. ■

Sabendo que ℓ_1 possui a propriedade de Schur, é natural questionar se $L_1[0,1]$ também possui a propriedade de Schur, mostraremos agora que a resposta para esta questão é negativa.

Proposição 2.3.8 *O espaço $L_1[0,1]$ não é de Schur.*

Demonstração. Dada uma sequência $a=(a_j)_j \in \ell_2$, pela Desigualdade de Khinchin (Teorema 1.5.8) para $p=1$, existem constantes positivas A_1, B_1 tais que

$$A_1\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \int_0^1\left|\sum_{j=1}^{\infty}a_jr_j(t)\right|dt \leq B_1\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.5}$$

onde, para cada $j\in\mathbb{N}$, r_j é a j-ésima função de Rademacher. Como $\left(\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}<\infty$ então a função

$$f_a\colon[0,1]\longrightarrow\mathbb{K};\quad f_a(t):=\sum_{j=1}^{\infty}a_jr_j(t),$$

pertence a $L_1[0,1]$. Defina o operador $T\colon\ell_2\longrightarrow L_1[0,1]$ dado por $T(a):=f_a$ para toda sequência $a=(a_j)_j\in\ell_2$. Sejam $\lambda\in\mathbb{K}$, $a=(a_j)_j, b=(b_j)_j\in\ell_2$ e $t\in[0,1]$, então

$$\begin{aligned}T(\lambda a+b)(t)=f_{\lambda a+b}(t)&=\sum_{j=1}^{\infty}(\lambda a_j+b_j)r_j(t)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda a_jr_j(t)+\sum_{j=1}^{\infty}b_jr_j(t)\\&=\lambda\sum_{j=1}^{\infty}a_jr_j(t)+\sum_{j=1}^{\infty}b_jr_j(t)=\lambda f_a(t)+f_b(t)=(\lambda T(a)+T(b))(t),\end{aligned}$$

provando que T é linear. Da segunda desigualdade de (2.5) temos

$$\|T(a)\|_{L_1[0,1]}=\|f_a\|_{L_1[0,1]}\leq B_1\|a\|_{l_2},$$

provando que T é contínuo. Dado $a\in ker(T)$, pela primeira desigualdade de (2.5) temos

$$a\in ker(T)\Rightarrow T(a)=0\Rightarrow\|f_a\|_{L_1[0,1]}=\|T(a)\|_{L_1[0,1]}=0$$

$$\Rightarrow 0 \leq A_1 \|a\|_{\ell_2} \leq \|f_a\|_{L_1[0,1]} = 0 \Rightarrow \|a\|_{\ell_2} = 0$$
$$\Rightarrow a = 0,$$

provando que T é injetor. Podemos então considerar o operador linear inverso

$$T^{-1}\colon T(\ell_2) \subset L_1[0,1] \longrightarrow \ell_2.$$

Note que T^{-1} é contínuo, pois usando novamente a primeira desigualdade de (2.5) temos

$$\|T^{-1}(T(a))\|_{\ell_2} = \|a\|_{\ell_2} \leq \frac{1}{A_1}\|T(a)\|_{L_1[0,1]} \text{ para toda sequência } a \in \ell_2.$$

Com isso o operador T é um isomorfismo sobre sua imagem, e disso segue que $\ell_2 \hookrightarrow L_1[0,1]$. Como ℓ_2 não é de Schur por ser um espaço reflexivo de dimensão infinita, segue que $L_1[0,1]$ não é um espaço de Schur. ■

Vimos que o espaço ℓ_1 foi o primeiro espaço de Banach onde se observou que a convergência fraca implica na convergência em norma. Além dessa relação histórica do espaço ℓ_1 com a propriedade de Schur, vejamos um resultado que diz que todo espaço de Schur de dimensão infinita possui uma cópia de ℓ_1, fortalecendo ainda mais a relação entre ℓ_1 e a propriedade de Schur.

Proposição 2.3.9 *Todo espaço de Schur de dimensão infinita possui uma cópia de ℓ_1.*

Demonstração. Sejam E um espaço de Schur de dimensão infinita e $(x_n)_n$ uma sequência limitada em E. Pelo Teorema ℓ_1 de Rosenthal (Teorema 1.3.23), ou $(x_n)_n$ possui uma subsequência fracamente de Cauchy ou possui uma subsequência básica equivalente à base canônica de ℓ_1.

Suponhamos que todas as sequências limitadas $(x_n)_n$ em E tenham subsequência $(x_{n_j})_j$ fracamente de Cauchy. Como E é um espaço de Schur, pela Proposição 2.3.4 sabemos que E é fracamente sequencialmente completo, e com isso cada subsequência $(x_{n_j})_j$ converge fracamente para algum $x \in E$. Pela Proposição 1.3.8 segue que o espaço E é reflexivo. Isso gera um absurdo, pois não existem espaços de dimensão infinita que sejam reflexivos e de Schur simultaneamente (Proposição 2.3.1).

Dessa contradição concluímos que existe ao menos uma sequência limitada $(x_n)_n$ em E que possui uma subsequência básica $(x_{n_j})_j$ equivalente à base canônica de ℓ_1. Assim, existe um isomorfismo $T\colon \ell_1 \longrightarrow \overline{[\{x_{n_j} : j \in \mathbb{N}\}]} \subset E$, o que nos permite concluir que $\ell_1 \hookrightarrow E$. ■

A recíproca dessa proposição nem sempre é verdadeira, isto é, um espaço de dimensão infinita conter uma cópia de ℓ_1 não implica que ele possui a propriedade de Schur. A seguir apresentamos um exemplo deste fato.

Exemplo 2.3.10 Como ℓ_1 é separável, pela Proposição 1.2.5 temos $\ell_1 \hookrightarrow \ell_\infty$. Assim ℓ_∞ possui cópia de ℓ_1, porém ℓ_∞ não é um espaço de Schur.

Na realidade podemos ir um pouco além. Observe que se um espaço de Banach E possui a propriedade de Schur, então todo subespaço fechado de E também possui a propriedade de Schur, e consequentemente todo subespaço fechado de E de dimensão infinita possui cópia de ℓ_1, ou seja, E é hereditariamente ℓ_1. Contudo, veremos a seguir que se E é um espaço de Banach hereditariamente ℓ_1, ainda assim não podemos garantir que E possui a propriedade de Schur.

A existência de espaços de Banach hereditariamente ℓ_1 sem a propriedade de Schur foi demonstrada primeiramente por Bourgain em [8], referência essa a qual não tivemos acesso. A seguir apresentaremos a construção de um espaço de Banach hereditariamente ℓ_1 que não possui a propriedade de Schur, criado por Parviz Azimi e James Neil Hagler em [3].

O espaço de Azimi-Hagler

Entederemos um *bloco* $F \subset \mathbb{N}$ como um conjunto (finito ou infinito) de números naturais de modo que se $m, n \in F$ com $m \leq n$, então todo natural maior ou igual que m e menor ou igual que n pertence a F.

Uma sequência (finita ou infinita) de blocos $F_1, F_2, \ldots, F_i, \ldots$ onde cada F_i é um bloco finito, é dita *admissível* se

$$\max F_i < \min F_{i+1} \text{ para todo } \; i \in \mathbb{N}.$$

Segue imediatamente da definição que se F_i e F_j são blocos distintos de uma sequência admissível, então $F_i \cap F_j = \emptyset$. Para um bloco F e uma sequência de escalares reais $x = (x_j)_j$ tal que $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ converge, definimos

$$F^*(x) = \sum_{j \in F} x_j.$$

Não é difícil verificar que o conjunto das sequências reais $x = (x_j)_j$ tais que $\sum_{j=1}^{\infty} x_j$ converge forma um espaço vetorial e que F^* é um funcional linear sobre esse espaço para todo bloco F. Considere uma sequência $\alpha = (\alpha_i)_i$ de números reais positivos satisfazendo as seguintes condições:

(I) $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_{i+1} \leq \alpha_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

(II) $\lim_{i \to \infty} \alpha_i = 0$.

(III) $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i = \infty$.

Um exemplo de sequência satisfazendo essas três condições é a sequência $\left(\frac{1}{n}\right)_n$.

Uma sequência $x = (x_j)_j$ é dita *finitamente não-nula* se o conjunto $\{j \in \mathbb{N} : \; x_j \neq 0\}$ é finito. Não é difícil observar que o conjunto das sequências finitamente não-nulas forma um espaço vetorial, o qual denotaremos por c_{00}. Chamamos a atenção do leitor para o fato de que ainda não temos uma norma definida no espaço c_{00}, norma esta que será providenciada agora. Fixada uma sequência $\alpha = (\alpha_i)_i$ satisfazendo as condições (I), (II) e (III) acima, para cada sequência $x \in c_{00}$ definimos:

$$\|x\|_\alpha := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |F_i^*(x)| : \ n \in \mathbb{N} \text{ e } F_1, \ldots, F_n \text{ é uma sequência admissível} \right\}.$$

Proposição 2.3.11 *$\|\cdot\|_\alpha$ como definida acima é uma norma em c_{00}.*

Demonstração. Iniciamos mostrando que $\|x\|_\alpha \in \mathbb{R}$ para toda $x = (x_j)_j \in c_{00}$. De fato, para quaisquer $x \in c_{00}$, $n \in \mathbb{N}$ e sequência admissível $F_1, \ldots, F_n$,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i |F_i^*(x)| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left| \sum_{j \in F_i} x_j \right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \in F_i} \alpha_i |x_j| \overset{(*)}{\leq} \sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha_j |x_j| \overset{(**)}{<} \infty,$$

onde $(*)$ segue do fato de $F_i \cap F_j = \emptyset$ para todos $i \neq j$ em $\mathbb{N}$, e $(**)$ segue do fato do conjunto $\{j \in \mathbb{N} : \ x_j \neq 0\}$ ser finito. Assim, o conjunto

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i |F_i^*(x)| : \ n \in \mathbb{N} \text{ e } F_1, \ldots, F_n \text{ é uma sequência admissível} \right\}$$

é limitado superiormente por $\displaystyle\sum_{j \in \mathbb{N}} \alpha_j |x_j|$, e portanto $\|x\|_\alpha \in \mathbb{R}$.

A desigualdade triangular $\|x + y\|_\alpha \leq \|x\|_\alpha + \|y\|_\alpha$ para $x, y \in c_{00}$, e a igualdade $\|\lambda x\|_\alpha = |\lambda| \cdot \|x\|_\alpha$ para $\lambda \in \mathbb{R}$ e $x \in c_{00}$, seguem facilmente do fato de F_i^* ser um funcional linear para todo $i \in \mathbb{N}$ e das propriedades aritméticas do supremo. Além disso, $\|0\|_\alpha = 0$ segue diretamente da linearidade de F_i^* para todo $i \in \mathbb{N}$.

Só nos resta mostrar que se $\|x\|_\alpha = 0$ então $x = (0, 0, \ldots)$. Para isso basta notar que $F_i = \{i\}$, para $i \in \mathbb{N}$, é um bloco e que a sequência unitária F_i é admissível. Assim, se $\|x\|_\alpha = 0$ então $\alpha_i |x_i| = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, e como $\alpha_i \neq 0$ concluímos que $x_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, ou seja, $x = (0, 0, \ldots)$. Com isso, concluímos que $\|\cdot\|_\alpha$ é uma norma em c_{00}.
■

Definição 2.3.12 Para cada $\alpha = (\alpha_j)_j \subset \mathbb{N}$ satisfazendo as condições (I), (II) e (III), definimos o espaço de *Azimi-Hagler* E_α como o completamento de c_{00} com a norma $\|\cdot\|_\alpha$ definida acima.

Apresentamos agora o resultado principal do artigo [3]. Não apresentaremos a demonstração desse resultado pois ela é bastante construtiva, e nosso objetivo apresentando esse espaço é simplesmente pontuar a existência de espaços de Banach hereditariamente ℓ_1 que não têm a propriedade de Schur.

Teorema 2.3.13 [3, Teorema 1] *Seja E_α um espaço de Azimi-Hagler como definido acima. Então*

(a) E_α é hereditariamente ℓ_1.

(b) E_α não possui a propriedade de Schur.

Passos da demonstração:

(a) A demonstração do item *(a)* é totalmente construtiva, em cada subespaço de dimensão infinita de E_α os autores constroem uma sequência que é equivalente à base canônica de ℓ_1.

(b) Para provar o item *(b)* do teorema os autores mostram que a sequência $(e_j)_j$ dos vetores canônicos dos espaços de sequências é uma sequência fracamente de Cauchy que não converge fracamente para nenhum $x \in E_\alpha$. Então $(e_j)_j$ não converge em norma em E_α, e portanto pelo item *(e)* do Teorema 2.1.8 segue que E_α não possui a propriedade de Schur.

Além desses resultados os autores ainda demonstram que E_α é um espaço dual.

Super-propriedades

Veremos agora que a propriedade de Schur não é o que se chama de uma super-propriedade, conceito central na Geometria dos Espaços de Banach.

Definição 2.3.14 Sejam E e F espaços de Banach. Dizemos que E é *finitamente representável em* F se para todo subespaço E_0 de E de dimensão finita e todo $\varepsilon > 0$ existirem um subespaço F_0 de F e um isomorfismo $T\colon E_0 \longrightarrow F_0$ tal que

$$\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \leq (1+\varepsilon).$$

Quando E é finitamente representável em F denotamos por $E \overset{f.r}{\hookrightarrow} F$.

Exemplo 2.3.15 Exemplos de espaços finitamente representáveis:

(I) $\ell_2 \overset{f.r}{\hookrightarrow} F$ para todo espaço de Banach F de dimensão infinita. Este teorema é conhecido como *Teorema de Dvoretzky* e sua demonstração pode ser encontrada em [18, Dvoretzky's Theorem 19.1].

(II) $E \overset{f.r}{\hookrightarrow} c_0$ para todo espaço de Banach E (veja [22, Theorem 9.14(ii)]).

Definição 2.3.16 Diz-se que uma propriedade $\mathcal{P}$ definida em espaços de Banach é uma *super-propriedade* se toda vez que um espaço de Banach F tem $\mathcal{P}$, então todo espaço de Banach finitamente representável em F também tem $\mathcal{P}$.

Proposição 2.3.17 *A propriedade de Schur não é uma super-propriedade.*

Demonstração. Pelo Teorema de Dvoretzky (Exemplo 2.3.15) sabemos que $\ell_2 \overset{f.r}{\hookrightarrow} \ell_1$. Suponha que a propriedade de Schur seja uma super-propriedade. Como ℓ_1 possui a propriedade de Schur, segue que ℓ_2 também possuirá a propriedade de Schur, porém já vimos que isso não é verdade. Portanto a propriedade de Schur não é uma super-propriedade. ■

O leitor pode achar a demonstração que acabamos de apresentar muito simples pelo fato de ser curta, porém chamamos a atenção para o fato de termos utilizado nessa demonstração um teorema muito forte que é o Teorema de Dvoretzky. Apesar de termos apresentado esse teorema como um exemplo de espaço finitamente representável, ele é um resultado muito profundo na teoria dos espaços de Banach.

Definição 2.3.18 Seja $\mathcal{P}$ uma propriedade em espaços de Banach. Dizemos que um espaço de Banach E tem a propriedade *super-*$\mathcal{P}$ se todo espaço de Banach finitamente representável em E tiver a propriedade $\mathcal{P}$.

Proposição 2.3.19 *Um espaço de Banach E tem a propriedade super-Schur se, e somente se, E tem dimensão finita.*

Demonstração. Seja E um espaço de Banach com a propriedade super-Schur. Suponha que E tenha dimensão infinita. Pelo Teorema de Dvoretsky (Exemplo 2.3.15), $\ell_2 \overset{f.r}{\hookrightarrow} E$ e com isso ℓ_2 possui a propriedade de Schur, o que já sabemos que não ocorre. Então E tem dimensão finita.

Reciprocamente, se E tem dimensão finita, então $F \overset{f.r}{\hookrightarrow} E$ implica que F também tem dimensão finita, e portanto possui a propriedade de Schur. ■

A reflexividade também não é uma super-propriedade, pois c_0 não é reflexivo e é finitamente representável em um espaço reflexivo (veja [22, pág 294]). Acabamos de ver acima que não há interesse em estudar a propriedade super-Schur, por outro lado a super-reflexividade é uma propriedade bastante estudada, por exemplo, parte do Capítulo 9 de [22] é dedicada ao estudo dessa propriedade.

A propriedade de Dunford-Pettis

A partir de agora veremos a relação da propriedade de Schur com a propriedade de Dunford-Pettis. Esta propriedade é muito estudada em espaços de Banach e existe uma grande quantidade de materiais que a abordam, como por exemplo as referências [13, 17, 30, 31, 49].

Em 1940 os matemáticos N. Dunford e B. J. Pettis mostraram, em [21], que todo operador linear fracamente compacto definido em $L_1(X, \Sigma, \mu)$ e com valores num espaço de Banach arbitrário leva sequências fracamente convergentes em sequências convergentes. Em 1953, Grothendieck [28] isolou e estudou essa propriedade e atribuiu a ela o nome de *Propriedade de Dunford-Pettis*. Existem muitas caracterizações para a propriedade de Dunford-Pettis, escolhemos uma definição equivalente à citada acima que se ajusta mais facilmente a algumas demonstrações que faremos.

Definição 2.3.20 Um espaço de Banach E tem a *propriedade de Dunford-Pettis* se para toda sequência $(x_n)_n$ fracamente nula em E e toda sequência $(\varphi_n)_n$ fracamente nula em E' tivermos $\varphi_n(x_n) \longrightarrow 0$.

Exemplo 2.3.21 $C(K)$ tem a propriedade de Dunford-Pettis para todo espaço topológico compacto Hausdorff K (veja [22, Theorem 11.36]).

Proposição 2.3.22 *Todo espaço de Schur possui a propriedade de Dunford-Pettis.*

Demonstração. Sejam E um espaço de Schur e $(x_n)_n$ uma sequência fracamente nula em E. Então $x_n \longrightarrow 0$. Assim, se $(\varphi_n)_n$ é uma sequência fracamente nula em E' então, pela Proposição 1.3.3, $(\|\varphi_n\|)_n$ é limitada, isto é, existe $C > 0$ tal que $\|\varphi_n\| \leq C$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$|\varphi_n(x_n)| \leq \|\varphi_n\| \cdot \|x_n\| \leq C\|x_n\| \longrightarrow 0.$$

Logo $\varphi_n(x_n) \longrightarrow 0$ e, com isso, E possui a propriedade de Dunford-Pettis. ■

A recíproca dessa proposição nem sempre é verdadeira. Antes de darmos um exemplo desse fato precisamos da seguinte proposição que pode ser encontrada em [30].

Proposição 2.3.23 *Seja E um espaço de Banach. Se E' possui a propriedade de Dunford-Pettis, então E possui a propriedade de Dunford-Pettis.*

Demonstração. Sejam $(x_n)_n$ e $(\varphi_n)_n$ sequências fracamente nulas em E e E', respectivamente, e $J_E\colon E \longrightarrow E''$ o mergulho canônico de E em E''. Como J_E é contínuo então J_E é w-w-contínuo. Segue daí que $J_E(x_n) \xrightarrow{w} 0$, e pelo fato de E' possuir a propriedade de Dunford-Pettis segue que $J_E(x_n)(\varphi_n) \longrightarrow 0$, ou seja, $\varphi_n(x_n) \longrightarrow 0$. Portanto E possui a propriedade de Dunford-Pettis. ■

Exemplo 2.3.24 Vimos que $(c_0)'$ é um espaço de Schur, logo $(c_0)'$ possui a propriedade de Dunford-pettis pela Proposição 2.3.22. E pela Proposição 2.3.23 segue que c_0 também possui a propriedade de Dunford-Pettis. Como o espaço c_0 não é de Schur, encontramos um exemplo de um espaço $E = c_0$ com a propriedade de Dunford-Pettis que não possui a propriedade de Schur.

Observação 2.3.25 A propriedade de Dunford-Pettis não é passada para todos os subespaços fechados como acontece com a propriedade de Schur. Por exemplo, o espaço $L_1[0,1]$ possui a propriedade de Dunford-Pettis, porém possui um subespaço fechado $\overline{[\{r_n : n \in \mathbb{N}\}]}$ que não possui tal propriedade, onde r_n denota a n-ésima função de Rademacher (veja [31, Teorema 3.1.10 e Corolário 3.1.12]). Uma propriedade interessante do espaço c_0 é que além de possuir a propriedade de Dunford-Pettis, todos os seus subespaços fechados também possuem a propriedade de Dunford-Pettis, como demonstrado por Diestel em [17, pág 25].

2.4 A propriedade de Schur em espaços de Banach duais

No Teorema 2.1.8 apresentamos algumas caracterizações da propriedade de Schur em um espaço de Banach E. Nesta seção veremos algumas caracterizações da propriedade de Schur para um espaço de Banach dual E' e iniciamos a seção apresentando uma proposição que evidencia a importância de saber quando um espaço de Banach dual goza, ou não, da propriedade de Schur. Para isso relembremos a seguinte definição:

Definição 2.4.1 Sejam E e F espaços de Banach. Um operador linear $T\colon E \longrightarrow F$ é w^*-w^*-*sequencialmente-contínuo* se para toda sequência $(x_n)_n \subset E$ tal que $x_n \overset{w^*}{\longrightarrow} x$ tivermos $T(x_n) \overset{w^*}{\longrightarrow} T(x)$ em F.

É conhecido (veja [6, Lema 6.4.1]) que, para todo espaço de Banach E, o mergulho canônico

$$J_E\colon (E, \sigma(E, E')) \longrightarrow J_E(E) \subset (E'', \sigma(E'', E'))$$

é um homeomorfismo, isto é, J_E é w-w^*-contínuo, bijetor e seu inverso $(J_E)^{-1}$ é w^*-w-contínuo. Quando trabalhamos com espaços duais E' podemos considerar o mergulho canônico

$$J_{E'}\colon (E', \sigma(E', E)) \longrightarrow J_{E'}(E') \subset (E''', \sigma(E''', E''))$$

e nos perguntar se $J_{E'}$ é um homeomorfismo, isto é, se $J_{E'}$ é w^*-w^*-contínuo, bijetor e seu inverso $(J_{E'})^{-1}$ é w^*-w^*-contínuo. Veremos na proposição abaixo que se E' for um espaço de Schur de dimensão infinita, então $J_{E'}$ não será nem mesmo w^*-w^*-sequencialmente-contínuo, o que é pedir bem menos do que ser um homeomorfismo nas condições acima. Mencionamos que esse resultado não foi encontrado por nós na literatura.

Proposição 2.4.2 *Se E' é um espaço de Schur de dimensão infinita, então $J_{E'}\colon E' \longrightarrow E'''$ não é w^*-w^*-sequencialmente-contínuo.*

Demonstração. Pelo Teorema de Josefson-Nissenzweig, existe uma sequência $(\varphi_n)_n$ em E' tal que $\varphi_n \overset{w^*}{\longrightarrow} 0$ e $\|\varphi_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, em particular $\varphi_n \not\longrightarrow 0$. Suponha que $J_{E'}$ seja w^*-w^*-sequencialmente-contínuo. Então

$$J_{E'}(\varphi_n) \overset{w^*}{\longrightarrow} J_{E'}(0) = 0.$$

Por [6, Lema 6.4.1], a função

$$J_{E'}\colon (E', \sigma(E', E'')) \longrightarrow J_{E'}(E') \subset (E''', \sigma(E''', E''))$$

é um homeomorfismo, isto é, $J_{E'}$ é w-w^*-contínua, bijetora e sua inversa $(J_{E'})^{-1}$ é w^*-w-contínua, logo

$$\varphi_n = (J_{E'})^{-1}(J_{E'}(\varphi_n)) \overset{w}{\longrightarrow} (J_{E'})^{-1}(0) = 0$$

em E'. Como E' é um espaço de Schur, então $\varphi_n \longrightarrow 0$, gerando assim um absurdo. Portanto $J_{E'}$ não é w^*-w^*-sequencialmente-contínuo. ■

As duas caracterizações da propriedade de Dunford-Pettis que apresentaremos a seguir podem ser encontradas em [17] e [30], elas serão úteis na demonstração do teorema principal dessa seção.

Proposição 2.4.3 *Seja E um espaço de Banach. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) E possui a propriedade de Dunford-Pettis.

(b) Para toda sequência $(x_n)_n$ fracamente de Cauchy em E e toda sequência $(\varphi_n)_n$ fracamente nula em E', tem-se $\varphi(x_n) \longrightarrow 0$.

(c) *Para toda sequência $(x_n)_n$ fracamente nula em E e toda sequência $(\varphi_n)_n$ fracamente de Cauchy em E', tem-se $\varphi(x_n) \longrightarrow 0$.*

Demonstração. Demonstraremos a equivalência $(a) \Leftrightarrow (b)$. A demonstração de $(a) \Leftrightarrow (c)$ é análoga (veja [17, Theorem 1]).

$(a) \Rightarrow (b)$ Sejam $(x_n)_n$ uma sequência fracamente de Cauchy em E e $(\varphi_n)_n$ uma sequência fracamente nula em E'. Suponha que $\varphi_n(x_n) \not\longrightarrow 0$. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $N > n_0$ de modo que $|\varphi_N(x_N)| \geq \varepsilon$. Assim

$$\begin{aligned}
&\text{para } n_0 = 1, \text{ existe } N_1 > 1 \text{ tal que } |\varphi_{N_1}(x_{N_1})| \geq \varepsilon,\\
&\text{para } n_0 = N_1, \text{ existe } N_2 > N_1 \text{ tal que } |\varphi_{N_2}(x_{N_2})| \geq \varepsilon,\\
&\text{para } n_0 = N_2, \text{ existe } N_3 > N_2 \text{ tal que } |\varphi_{N_3}(x_{N_3})| \geq \varepsilon.\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}$$

Logo existem $\varepsilon > 0$ e uma subsequência $(\varphi_{N_k}(x_{N_k}))_k$ de $(\varphi_n(x_n))_n$ tais que $|\varphi_{N_k}(x_{N_k})| \geq \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $\varphi_n \xrightarrow{w} 0$, temos $\varphi_{N_k} \xrightarrow{w} 0$, ou seja, $\psi(\varphi_{N_k}) \longrightarrow 0$ para todo $\psi \in E''$. Em particular, $J_E(x)(\varphi_{N_k}) \longrightarrow 0$ para todo $x \in E$, onde J_E é o mergulho canônico de E em E''. Assim, $\varphi_{N_k}(x) \longrightarrow 0$ para todo $x \in E$. Considerando a sequência $(x_n)_n$ tomada acima temos

$$\begin{aligned}
&\text{para } x = x_1, \text{ existe } k_1 > 0 \text{ tal que } |\varphi_{N_{k_1}}(x_1)| < \frac{\varepsilon}{2},\\
&\text{para } x = x_2, \text{ existe } k_2 > k_1 \text{ tal que } |\varphi_{N_{k_2}}(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2},\\
&\text{para } x = x_3, \text{ existe } k_3 > k_2 \text{ tal que } |\varphi_{N_{k_3}}(x_3)| < \frac{\varepsilon}{2}.\\
&\qquad\vdots
\end{aligned}$$

Assim, existe uma subsequência $(\varphi_{N_{k_j}})_j$ de $(\varphi_{N_k})_k$ tal que $|\varphi_{N_{k_j}}(x_j)| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $(x_n)_n$ é fracamente de Cauchy, pela Proposição 1.3.17 temos

$$x_{N_{k_j}} - x_j \xrightarrow{w} 0.$$

Por hipótese E tem a propriedade de Dunford-Pettis, então

$$\varphi_{N_{k_j}}(x_{N_{k_j}} - x_j) \longrightarrow 0,$$

ou seja, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\varphi_{N_{k_j}}(x_{N_{k_j}} - x_j)| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ para todo } j \geq j_0.$$

Desta forma,

$$\begin{aligned}
\varepsilon &\leq |\varphi_{N_{k_j}}(x_{N_{k_j}})| = |\varphi_{N_{k_j}}(x_{N_{k_j}} - x_j + x_j)| = |\varphi_{N_{k_j}}(x_{N_{k_j}} - x_j) + \varphi_{N_{k_j}}(x_j)|\\
&\leq |\varphi_{N_{k_j}}(x_{N_{k_j}} - x_j)| + |\varphi_{N_{k_j}}(x_j)| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{3\varepsilon}{4} \text{ para todo } j \geq j_0.
\end{aligned}$$

Isso gera um absurdo, portanto $\varphi_n(x_n) \longrightarrow 0$.

$(b) \Rightarrow (a)$ Sejam $(x_n)_n$ e $(\varphi_n)_n$ sequências fracamente nulas em E e E' respectivamente. Assim, $(x_n)_n$ é fracamente de Cauchy e por hipótese $\varphi_n(x_n) \longrightarrow 0$. Logo E tem a propriedade de Dunford-Pettis. ■

Lema 2.4.4 *Sejam E um espaço de Banach e $(x_n)_n$ uma sequência em E tal que $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x_n \stackrel{w}{\longrightarrow} 0$. Então o operador linear*

$$T\colon \ell_1 \longrightarrow E; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n,$$

é fracamente compacto.

Demonstração. Considere o conjunto $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Note que para toda sequência $(z_n)_n \subset A$, ou o conjunto $\{z_n : n \in \mathbb{N}\}$ é finito ou então $(z_n)_n$ possui uma subsequência que também é subsequência de $(x_n)_n$. Pelo Teorema de Eberlein-Smulian (Teorema 1.3.9) concluímos que A é fracamente compacto. Dado $\alpha = (\alpha_n)_n \in B_{\ell_1}$, tem-se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| = \|\alpha\| \leq 1$. Defina $y_k = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} \alpha_n x_n$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como

$$\sum_{n=1}^{k} |\alpha_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \leq 1 \text{ para todo } k \in \mathbb{N},$$

então $y_k \in \Gamma(A)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\begin{aligned} \|y_k - T(\alpha)\| &= \left\| \sum_{n=1}^{k} \alpha_n x_n - T\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n\right) \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{k} \alpha_n x_n - \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n \right\| \\ &= \left\| \sum_{n=k+1}^{\infty} \alpha_n x_n \right\| \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} |\alpha_n| \cdot \|x_n\| = \sum_{n=k+1}^{\infty} |\alpha_n| \stackrel{k}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Logo $y_k \longrightarrow T(\alpha)$, provando que $T(\alpha) \in \overline{\Gamma}(A)$. Portanto $T(B_{\ell_1}) \subset \overline{\Gamma}(A)$. Assim, $\overline{T(B_{\ell_1})} \subset \overline{\Gamma}(A)$, e como A é fracamente compacto então, pelo Teorema de Krein-Smulian (Teorema 1.3.25), $\overline{\Gamma}(A)$ também é fracamente compacto. Como $T(B_{\ell_1})$ é convexo, seu fecho e seu fecho fraco coincidem, e portanto $\overline{T(B_{\ell_1})}$ é fracamente compacto, e consequentemente T é fracamente compacto. ■

O próximo teorema é o resultado principal dessa seção e nos fornece caracterizações para que o dual topológico de um espaço de Banach E tenha a propriedade de Schur. O item *(b)* desse teorema foi encontrado em [30] e o item *(c)* foi inspirado em [26, Proposição 2.15].

Teorema 2.4.5 *Seja E um espaço de Banach. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) E' é um espaço de Schur.

(b) *E tem a propriedade de Dunford-Pettis e $\ell_1 \not\hookrightarrow E$.*

(c) *Todo operador fracamente compacto $T\colon E \longrightarrow F$ é compacto, para qualquer espaço de Banach F.*

(d) *Todo operador fracamente compacto $T\colon E \longrightarrow c_0$ é compacto.*

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) Como E' tem a propriedade de Schur, segue que E' tem a propriedade de Dunford-Pettis, e pela Proposição 2.3.23 concluímos que E tem a propriedade de Dunford-Pettis. Então só nos resta mostrar que $\ell_1 \not\hookrightarrow E$. Para isso, suponha que $\ell_1 \hookrightarrow E$. Neste caso existe um isomorfismo $T_1\colon \ell_1 \longrightarrow E$ sobre sua imagem. Definindo $u_n = T_1(e_n)$, onde e_n é o n-ésimo vetor unitário canônico de ℓ_1, temos que a sequência $(u_n)_n \subset E$ é equivalente à base canônica de ℓ_1, em particular $(u_n)_n$ é limitada. Considere a sequência $(r_n)_n$ das funções da Rademacher. Pelo item (a) da Observação 1.5.9, $(r_n)_n \subset L_\infty[0,1]$ é equivalente à base canônica de ℓ_1, então $(u_n)_n$ em E e $(r_n)_n$ em $L_\infty[0,1]$ são equivalentes. Assim, existe um isomorfismo sobre sua imagem

$$S_1\colon \overline{[\{u_n : n \in \mathbb{N}\}]} \longrightarrow L_\infty[0,1]; \quad \sum_{n=1}^{\infty} t_n u_n \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} t_n r_n.$$

Pelo Teorema 1.5.5, S_1 admite uma extensão linear contínua $S\colon E \longrightarrow L_\infty[0,1]$. Pelo item (b) da Observação 1.5.9, as funções de Rademancher $(r_n)_n \subset L_2[0,1]$ formam um sistema ortonormal. Assim, para cada $f \in L_\infty[0,1] \subset L_2[0,1]$ temos, pela Desigualdade de Bessel (Teorema 1.5.2), que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, r_n\rangle|^2 \leq \|f\|_{L_2}^2 \leq \|f\|_{L_\infty}^2 < \infty, \tag{2.6}$$

onde $\langle \cdot,\cdot\rangle$ é o produto interno em $L_2[0,1]$. Como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^1 f\overline{r_n}dm \right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, r_n\rangle|^2 < \infty,$$

concluímos que

$$\left(\int_0^1 f r_n dm \right)_n \in \ell_2 \text{ para toda } f \in L_\infty[0,1].$$

Com isso, podemos definir um operador

$$R\colon\ L_\infty[0,1] \longrightarrow \ell_2\ ;\ R(f) := \left(\int_0^1 f r_n dm \right)_n.$$

É fácil ver que R é linear, e de (2.6) segue que $\|R(f)\|_{\ell_2} \leq \|f\|_{L_\infty}$ para toda $f \in L_\infty[0,1]$, garantindo a continuidade de R. Observe ainda que $R(r_j) = (\langle r_j, r_n\rangle)_n = e_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Como ℓ_2 é reflexivo, segue da Proposição 1.4.9 que o operador $T := R \circ S\colon E \longrightarrow \ell_2$ é fracamente compacto, e ainda,

$$T(u_n) = (R \circ S)(u_n) = R(S(u_n)) = R(r_n) = e_n \ \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Como $T\colon E \longrightarrow \ell_2$ é fracamente compacto então, pelo Teorema de Gantmacher (Teorema 1.4.10), o operador adjunto $T'\colon \ell_2 \longrightarrow E'$ é fracamente compacto, ou seja $\overline{T'(B_{\ell_2})} \subset E'$ é fracamente compacto. Como E' é Schur, $\overline{T'(B_{\ell_2})}$ é compacto. Portanto T' é compacto e do Teorema de Schauder (Teorema 1.4.6) segue que T é compacto.

Daí, como a sequência $(u_n)_n$ é limitada e T é compacto então, pelo Teorema 1.4.5, a sequência $(T(u_n))_n = (e_n)_n \subset \ell_2$ possui uma subsequência convergente, o que sabemos não ocorrer. Com isso, chegamos em um absurdo e portanto $\ell_1 \not\hookrightarrow E$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Suponha que E' não possua a propriedade de Schur. Então existe uma sequência $(\varphi_n)_n$ em E' fracamente nula que não converge para zero em norma. Logo, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $N > n_0$ de modo que $\|\varphi_N\| \geq \varepsilon$. Assim,

$$\begin{aligned} &\text{para } n_0 = 1 \text{ existe } N_1 > 1 \ \text{ tal que } \ \|\varphi_{N_1}\| \geq \varepsilon,\\ &\text{para } n_0 = N_1 \text{ existe } N_2 > N_1 \ \text{ tal que } \ \|\varphi_{N_2}\| \geq \varepsilon,\\ &\text{para } n_0 = N_2 \text{ existe } N_3 > N_2 \ \text{ tal que } \ \|\varphi_{N_3}\| \geq \varepsilon.\\ &\qquad\qquad\vdots \end{aligned}$$

Com isso, obtemos uma subsequência $(\varphi_{N_k})_k$ de $(\varphi_n)_n$ de maneira que $\|\varphi_{N_k}\| \geq \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. De $\sup\{|\varphi_{N_k}(x)| : x \in B_E\} = \|\varphi_{N_k}\| \geq \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que

$$\begin{aligned} &\text{para } k = 1 \text{ existe } x_1 \in B_E \ \text{ tal que } \ |\varphi_{N_1}(x_1)| \geq \frac{\varepsilon}{2},\\ &\text{para } k = 2 \text{ existe } x_2 \in B_E \ \text{ tal que } \ |\varphi_{N_2}(x_2)| \geq \frac{\varepsilon}{2},\\ &\text{para } k = 3 \text{ existe } x_3 \in B_E \ \text{ tal que } \ |\varphi_{N_3}(x_3)| \geq \frac{\varepsilon}{2}.\\ &\qquad\qquad\vdots \end{aligned}$$

Assim obtemos uma sequência $(x_k)_k$ em E limitada de modo que $\|\varphi_{N_k}(x_k)\| \geq \dfrac{\varepsilon}{2}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $(x_k)_k$ é limitada em E e $\ell_1 \not\hookrightarrow E$, pelo Teorema ℓ_1 de Rosenthal (Teorema 1.3.23) $(x_k)_k$ possui uma subsequência $(x_{k_j})_j$ fracamente de Cauchy. Assim, como $\varphi_{N_{k_j}} \xrightarrow{w} 0$ e E possui a propriedade de Dunford-Pettis, segue que $\varphi_{N_{k_j}}(x_{k_j}) \longrightarrow 0$. Isso é um absurdo, pois $\|\varphi_{N_k}(x_k)\| \geq \dfrac{\varepsilon}{2}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo $\varphi_n \longrightarrow 0$ e portanto E' possui a propriedade de Schur.

(a) $\Rightarrow$ (c) Seja $T\colon E \longrightarrow F$ fracamente compacto. Pelo Teorema de Gantmacher (Teorema 1.4.10), seu operador adjunto T' também é fracamente compacto, ou seja, $\overline{T'(B_{F'})} \subset E'$ é fracamente compacto. Como E' é um espaço de Schur, pelo item (c) do Teorema 2.1.8 obtemos que $\overline{T'(B_{F'})}$ é compacto. Logo T' é compacto, e pelo Teorema de Schauder (Teorema 1.4.6) segue que T é compacto.

(c) $\Rightarrow$ (d) Imediato.

(d) $\Rightarrow$ (a) Suponha que E' não seja de Schur. Então existe uma sequência $(\varphi_n)_n$ em E' tal que $\|\varphi_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\varphi_n \xrightarrow{w} 0$. Defina o operador

$$T\colon E \longrightarrow c_0 \ ; \ T(x) := (\varphi_n(x))_n.$$

Note que, como $\varphi_n \xrightarrow{w} 0$, então $\psi(\varphi_n) \longrightarrow 0$ para todo $\psi \in E''$, em particular $J_E(x)(\varphi_n) \longrightarrow 0$ para todo $x \in E$, onde J_E é o mergulho canônico de E em E''. Assim $\varphi_n(x) \longrightarrow 0$ para todo $x \in E$. Com isso $T(x) = (\varphi_n(x))_n \in c_0$ para todo $x \in E$, logo T está bem definido.

É fácil ver que T é linear. Ainda,

$$\|T(x)\| = \|(\varphi_n(x))_n\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\varphi_n(x)| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|\varphi_n\| \cdot \|x\| = \|x\|$$

para todo $x \in E$, ou seja, T é contínuo. Pelo Lema 2.4.4, o operador adjunto $T' \colon \ell_1 \longrightarrow E'$ é fracamente compacto então, pelo Teorema de Gantmacher (Teorema 1.4.10), T é fracamente compacto e, por hipótese, T é compacto. Note que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{x\in S_E} |\varphi_n(x)| = \|\varphi_n\| = 1.$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in S_E$ tal que $||\varphi_n(x_n)| - 1| < \dfrac{1}{n}$, ou seja, existe uma sequência $(x_n)_n \subset S_E$ tal que $|\varphi_n(x_n)| \longrightarrow 1$. Como T é compacto e $(x_n)_n$ é limitada, existe uma subsequência $(x_{n_j})_j$ de $(x_n)_n$ tal que $(T(x_{n_j}))_j$ converge para algum $y = (y_k)_k$ em c_0. Porém,

$$\|T(x_{n_j}) - y\| = \sup_{k\in\mathbb{N}} |\varphi_k(x_{n_j}) - y_k| \geq |\varphi_{n_j}(x_{n_j}) - y_{n_j}| \geq |\varphi_{n_j}(x_{n_j})| - |y_{n_j}| \longrightarrow 1$$

o que mostra ser impossível que $(T(x_{n_j}))_j$ convirja para y em c_0. Essa contradição nos garante que E' é de Schur. $\blacksquare$

Vejamos algumas consequências das caracterizações que acabamos de provar. Começamos com um exemplo que responde negativamente à seguinte pergunta: E Schur $\Rightarrow E''$ Schur?

Exemplo 2.4.6 Considere o espaço $(\ell_\infty)'$. Como já vimos, $\ell_1 \hookrightarrow \ell_\infty$, então pelo item *(b)* do teorema acima segue que $(\ell_\infty)'$ não possui a propriedade de Schur. Pela dualidade $(\ell_1)'' \overset{1}{=} (\ell_\infty)'$, concluímos que $(\ell_1)''$ não possui a propriedade de Schur, ou seja, obtemos um espaço de Schur $E = \ell_1$ tal que $E'' = (\ell_1)''$ não possui a propriedade de Schur.

Proposição 2.4.7 *Seja E um espaço de Banach. Se E e E' possuem a propriedade de Schur, então E tem dimensão finita.*

Demonstração. Suponha que E tenha dimensão infinita. Como E possui a propriedade de Schur segue que $\ell_1 \hookrightarrow E$. Por outro lado, como E' possui a propriedade de Schur segue que E possui a propriedade de Dunford-Pettis e $\ell_1 \not\hookrightarrow E$, gerando assim um absurdo. Logo E possui dimensão finita. $\blacksquare$

Observação 2.4.8 A proposição acima pode ser vista como uma usina de exemplos, pois a cada vez que provamos que um espaço de Banach E de dimensão infinita tem a propriedade de Schur, concluímos imediatamente que seu dual E' não é de Schur, e também se provarmos que E' é de Schur, então temos automaticamente que E não é de Schur.

Teorema 2.4.9 *Seja E um espaço de Banach. Se E possui a propriedade de Dunford-Pettis e é isomorfo a um subespaço de F', onde F é um espaço de Banach que não contém cópia de ℓ_1, então E é de Schur.*

Demonstração. Suponha que E não seja de Schur. Então existe uma sequência $(x_n)_n$ em E fracamente nula que não converge para zero em norma. Como $E \hookrightarrow F'$, existe um isomorfismo sobre sua imagem $T_1 \colon E \longrightarrow F'$. Chamemos $\varphi_n = T_1(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim a sequência $(\varphi_n)_n \subset F'$ não converge para zero. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ existe $N > n_0$ tal que $\|\varphi_N\| \geq \varepsilon$. Assim, para

$$\begin{aligned} &n_0 = 1 \text{ existe } N_1 > 1 \ \text{ tal que } \ \|\varphi_{N_1}\| \geq \varepsilon, \\ &n_0 = N_1 \text{ existe } N_2 > N_1 \ \text{ tal que } \ \|\varphi_{N_2}\| \geq \varepsilon, \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

Com isso obtemos uma subsequência $(\varphi_{N_k})_k$ de $(\varphi_n)_n$ tal que $\|\varphi_{N_k}\| \geq \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Ainda, como $\sup\limits_{y \in S_F} |\varphi_{N_k}(y)| = \|\varphi_{N_k}\| \geq \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que, para

$$\begin{aligned} &k = 1 \text{ existe } y_1 \in S_F \ \text{ tal que } \ |\varphi_{N_1}(y_1)| \geq \frac{\varepsilon}{2}, \\ &k = 2 \text{ existe } y_2 \in S_F \ \text{ tal que } \ |\varphi_{N_2}(y_2)| \geq \frac{\varepsilon}{2}, \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

Com isso obtemos uma sequência $(y_k)_k$ em S_F tal que $|\varphi_{N_k}(y_k)| \geq \dfrac{\varepsilon}{2}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como $\ell_1 \not\hookrightarrow F$ e $(y_k)_k$ é limitada, pelo Teorema ℓ_1 de Rosenthal (Teorema 1.3.23) $(y_k)_k$ possui uma subsequência fracamente de Cauchy, digamos $(y_{k_j})_j$. Defina o operador

$$T := T_1' \circ J_F \colon F \longrightarrow E'; \ \ T(y)(x) = T_1(x)(y) \text{ para todos } y \in F \text{ e } x \in E,$$

onde T_1' é o operador adjunto de T_1 e J_F é o mergulho canônico de F em F''. Assim, T é linear e contínuo e, pela Proposição 1.3.20, a sequência $(T(y_{k_j}))_j$ é fracamente de Cauchy em E'. Como E possui a propriedade de Dunford-Pettis e $x_{N_{k_j}} \xrightarrow{w} 0$, segue que $(T(y_{k_j}))(x_{N_{k_j}}) \longrightarrow 0$. Com isso $\varphi_{N_{k_j}}(y_{k_j}) \longrightarrow 0$, gerando assim uma contradição. Portanto E é de Schur. ■

Operadores Compactos

Sejam E e F espaços de Banach. O Teorema 1.4.4 nos mostra que os operadores compactos de E em F formam um subespaço $\mathcal{K}(E;F)$ de $\mathcal{L}(E;F)$. Mas quando todo operador linear contínuo é compacto? Ou seja, quando vale a igualdade $\mathcal{L}(E;F) = \mathcal{K}(E;F)$? Um primeiro resultado nessa linha é um teorema clássico que foi demonstrado por Pitt em 1930 (veja [1, Theorem 2.1.4 (Pitt's Theorem)]):

Teorema 2.4.10 (Teorema de Pitt) *Suponha $1 \leq p < r < \infty$. Se E é um subespaço fechado de ℓ_r então $\mathcal{L}(E;\ell_p) = \mathcal{K}(E;\ell_p)$.*

Trabalhando com a propriedade de Schur, obtemos uma outra situação onde tal igualdade é válida.

Proposição 2.4.11 *Sejam E e F espaços de Banach. Se E' e F são espaços de Schur, então todo operador linear contínuo de E em F é compacto, isto é, $\mathcal{L}(E;F) = \mathcal{K}(E;F)$.*

Demonstração. Sejam $T \in \mathcal{L}(E;F)$ e $(x_n)_n$ uma sequência limitada em E. Como E' é Schur, pelo Teorema 2.4.5 sabemos que $\ell_1 \not\hookrightarrow E$; e daí segue pelo Teorema ℓ_1 de Rosenthal (Teorema 1.3.23) que $(x_n)_n$ possui subsequência $(x_{n_j})_j$ fracamente de Cauchy. Pela Proposição 1.3.20 sabemos que $(T(x_{n_j}))_j$ é uma sequência fracamente de Cauchy em F, e como F é de Schur segue que $(T(x_{n_j}))_j$ é convergente. Pelo Teorema 1.4.5 decorre que o operador T é compacto, ou seja, $T \in \mathcal{K}(E;F)$. Portanto $\mathcal{L}(E;F) = \mathcal{K}(E;F)$. ■

CAPÍTULO 3

ESPAÇOS DE SCHUR E NÃO-SCHUR

Até o momento vimos alguns exemplos de espaços de Schur, como por exemplo ℓ_1, os espaços de Banach de dimensão finita e todos os espaços isomorfos a ℓ_1; e também alguns exemplos de espaços que não são de Schur (por exemplo, espaços reflexivos de dimensão infinita). Muitas pessoas pensam, com certa razão, que a propriedade de Schur é restritiva a ponto de ℓ_1 ser, em essência, o único espaço de Schur de dimensão infinita. O objetivo deste capítulo é mostrar que a realidade está bem longe disso. Apresentaremos vários outros exemplos de espaços de Schur de dimensão infinita e, ao longo do caminho, também muitos exemplos de espaços que não são de Schur.

3.1 ℓ_1-soma

Nesta seção mostraremos que a propriedade de Schur é preservada pela soma direta com a norma $\|\cdot\|_1$, que definiremos logo a seguir. Esse resultado nos fornece uma grande quantidade de exemplos de espaços de Schur pois, dada uma sequência de espaços de Schur, a soma direta desses espaços com a norma $\|\cdot\|_1$ sempre será um espaço de Schur.

Definição 3.1.1 Dada uma sequência de espaços de Banach $(E_j)_j$, definimos:

(a) $$\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1 := \left\{(x_j)_j : x_j \in E_j \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \|(x_j)_j\|_1 := \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_{E_j} < \infty\right\}.$$

(b) $$\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_\infty := \left\{(x_j)_j : x_j \in E_j \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \|(x_j)_j\|_\infty := \sup_{j\in\mathbb{N}} \|x_j\|_{E_j} < \infty\right\}.$$

(c) $$\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_0 := \left\{(x_j)_j \in \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_\infty : \|x_j\|_{E_j} \longrightarrow 0\right\}.$$

Nesses três espaços consideramos as operações usuais de espaços de sequências, isto é:

$$(x_j)_j + (y_j)_j = (x_j + y_j)_j \ , \ \lambda(x_j)_j = (\lambda x_j)_j.$$

Proposição 3.1.2 *Seja $(E_j)_j$ uma sequência de espaços de Banach. Então $\|\cdot\|_1$ define uma norma em $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$ e $\|\cdot\|_\infty$ define uma norma em $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_\infty$ e em $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_0$. Mais ainda, $\left(\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1, \|\cdot\|_1\right)$, $\left(\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_\infty, \|\cdot\|_\infty\right)$ e $\left(\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_0, \|\cdot\|_\infty\right)$ são espaços de Banach.*

Demonstração. [53, pág 43]. ■

Proposição 3.1.3 *Seja $(E_j)_j$ uma sequência de espaços de Banach. Então $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_0'$ é isomorfo isometricamente a $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j'\right)_1$ e $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1'$ é isomorfo isometricamente a $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j'\right)_\infty$. Em ambos os casos a relação de dualidade é dada por*

$$(\varphi_j)_j \mapsto (\varphi_j)_j\left((x_j)_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x_j).$$

Demonstração. [53, pág 44]. ■

Lema 3.1.4 *Seja $(E_j)_j$ uma sequência de espaços de Banach. Então cada E_j é isomorfo isometricamente a um subespaço fechado de $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$.*

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{N}$ defina o operador

$$T\colon E_k \longrightarrow \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1 \quad ; \quad T(x) = (z_j)_j \ \text{ para todo } x \in E_k,$$

onde $z_j = 0$ para todo $j \neq k$ e $z_k = x$. Não é difícil ver que T é linear, donde segue que $T(E_k)$ é subespaço de $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$. Vejamos que T é uma isometria: de fato, para todo $x \in E_k$,

$$\|T(x)\|_1 = \|(z_j)_j\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \|z_j\|_{E_j} = \|z_k\|_{E_k} = \|x\|_{E_k}.$$

Ainda, como E_k é Banach então $T(E_k)$ é Banach, e consequentemente $T(E_k)$ é um subespaço fechado de $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$. Portanto E_k é isomorfo isometricamente ao subespaço fechado $T(E_k)$ de $\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. ■

Teorema 3.1.5 *Sejam $(E_j)_j$ uma sequência de espaços de Banach e $E := \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$. Então o espaço de Banach E é um espaço de Schur se, e somente se, cada E_j é um espaço de Schur.*

Demonstração. Pelo Lema 3.1.4 sabemos que cada E_j é isomorfo isometricamente a um subespaço fechado de E, em particular $E_j \hookrightarrow E$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Se E for um espaço de Schur, pela Proposição 2.2.9 segue que cada E_j é um espaço de Schur.

Reciprocamente, suponha que cada E_j seja de Schur e seja $(a^n)_n$ uma sequência em E tal que $a^n \xrightarrow{w} 0$, onde cada a^n é da forma $a^n = (a_k^n)_k$ com $\|a^n\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \|a_k^n\|_{E_k}$. Suponha que $a^n \not\longrightarrow 0$ em E. Neste caso existem $\varepsilon > 0$ e uma subsequência $(x^n)_n$ de $(a^n)_n$ tais que $\|x^n\|_1 \geq 5\varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Observe que cada x^n é da forma $x^n = (x_k^n)_k$ e $x^n \xrightarrow{w} 0$. Pela Proposição 3.1.3, $E' \stackrel{1}{=} \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j'\right)_\infty$ e cada $\psi \in E'$ é da forma $\psi = (\psi_k)_k$ com $\psi_k \in E_k'$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Pela relação de dualidade, dados $\psi \in E'$ e $(y_k)_k \in E$ temos $\psi((y_k)_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k(y_k)$.

Para cada $\varphi_k \in E_k'$ fixado defina $\varphi\colon E \longrightarrow \mathbb{K}$ por $\varphi((y_j)_j) = \varphi_k(y_k)$ para todo $(y_j)_j \in E$. A linearidade de φ segue imediatamente da linearidade de φ_k e dado $(y_j)_j \in E$ temos

$$
\begin{aligned}
|\varphi((y_j)_j)| = |\varphi_k(y_k)| &\leq \|\varphi_k\|_{E_k'} \cdot \|y_k\|_{E_K} \\
&\leq \|\varphi_k\|_{E_k'} \sum_{j=1}^{\infty} \|y_j\|_{E_j} = \|\varphi_k\|_{E_k'} \cdot \|(y_j)_j\|_1.
\end{aligned}
$$

Logo φ é contínua e portanto $\varphi \in E'$. Assim, como $x^n \xrightarrow{w} 0$ temos

$$\varphi_k(x_k^n) = \varphi(x^n) \longrightarrow 0.$$

Ou seja,

$$x^n \xrightarrow{w} 0 \text{ em } E \Rightarrow x_k^n \xrightarrow{n} 0 \text{ fracamente em } E_k \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Com isso $x_k^n \xrightarrow{n} 0$ fracamente e, como E_k é um espaço de Schur, segue que $x_k^n \xrightarrow{n} 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Defina indutivamente duas sequências estritamente crescentes de números naturais $(N_i)_i$ e $(n_i)_i$ satisfazendo:

(I) $\displaystyle\sum_{k=1}^{N_i} \|x_k^{n_i}\|_{E_k} \leq \varepsilon.$

(II) $\displaystyle\sum_{k=N_{i+1}+1}^{\infty} \|x_k^{n_i}\|_{E_k} \leq \varepsilon.$

Note que a existência de $(N_i)_i$ segue do fato de $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^n\|_{E_k} < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e a existência de $(n_i)_i$ segue do fato de $\|x_k^n\|_{E_k} \xrightarrow{n} 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Para cada $i \in \mathbb{N}$ temos,

$$\begin{aligned}
5\varepsilon \leq \|x^{n_i}\|_1 &= \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k^{n_i}\|_{E_k} \\
&= \sum_{k=1}^{N_i} \|x_k^{n_i}\|_{E_k} + \sum_{k=N_i+1}^{N_{i+1}} \|x_k^{n_i}\|_{E_k} + \sum_{k=N_{i+1}+1}^{\infty} \|x_k^{n_i}\|_{E_k} \\
&\overset{(*)}{\leq} 2\varepsilon + \sum_{k=N_i+1}^{N_{i+1}} \|x_k^{n_i}\|_{E_k},
\end{aligned}$$

onde a desigualdade $(*)$ segue das condições (I) e (II) sobre as sequências $(N_i)_i$ e $(n_i)_i$. Com isso,

$$\text{(III)} \quad \sum_{k=N_i+1}^{N_{i+1}} \|x_k^{n_i}\|_{E_k} \geq 3\varepsilon.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach (Teorema 1.1.3), temos:

- Para $N_1 \leq k \leq N_2$, existe $\phi_k \in E_k'$ tal que $\|\phi_k\|_{E_k'} = 1$ e $\phi_k(x_k^{n_1}) = \|x_k^{n_1}\|_{E_k}$.
- Para $N_2 < k \leq N_3$, existe $\phi_k \in E_k'$ tal que $\|\phi_k\|_{E_k'} = 1$ e $\phi_k(x_k^{n_2}) = \|x_k^{n_2}\|_{E_k}$.

$\vdots$

Usando sucessivamente esse mesmo raciocínio difinimos com essas ϕ_k's uma sequência $\phi = (\phi_k)_k$ em E'. A linearidade de ϕ segue da linearidade de ϕ_k para todo $k \in \mathbb{N}$ e a continuidade segue de $\|\phi\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} \|\phi_k\|_{E_k'} = 1$. Assim $\phi \in E'$ e, para cada $i \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
|\phi(x^{n_i})| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(x_k^{n_i})\right| &= \left|\sum_{k=1}^{N_i} \phi_k(x_k^{n_i}) + \sum_{k=N_i+1}^{N_{i+1}} \phi_k(x_k^{n_i}) + \sum_{k=N_{i+1}+1}^{\infty} \phi_k(x_k^{n_i})\right| \\
&= \left|\sum_{k=N_i+1}^{N_{i+1}} \|x_k^{n_i}\|_{E_k} - \left(-\sum_{k=1}^{N_i} \phi_k(x_k^{n_i})\right) - \left(-\sum_{k=N_{i+1}+1}^{\infty} \phi_k(x_k^{n_i})\right)\right| \\
&\geq \sum_{k=N_i+1}^{N_{i+1}} \|x_k^{n_i}\|_{E_k} - \left|\sum_{k=1}^{N_i} \phi_k(x_k^{n_i})\right| - \left|\sum_{k=N_{i+1}+1}^{\infty} \phi_k(x_k^{n_i})\right|. \qquad (IV)
\end{aligned}$$

Observe ainda que,

$$\left|\sum_{k=1}^{N_i} \phi_k(x_k^{n_i})\right| \leq \sum_{k=1}^{N_i} \|\phi_k\|_{E_k'} \cdot \|x_k^{n_i}\|_{E_k} = \sum_{k=1}^{N_i} \|x_k^{n_i}\|_{E_k} \overset{(**)}{\leq} \varepsilon,$$

onde a desigualdade $(**)$ segue da condição (I) sobre as sequências $(N_i)_i$ e $(n_i)_i$. De forma análoga, segue da condição (II) sobre as sequências $(N_i)_i$ e $(n_i)_i$ que

$$\left|\sum_{k=N_{i+1}+1}^{\infty} \phi_k(x_k^{n_i})\right| \leq \varepsilon.$$

Assim, de (III), (IV) e das observações acima segue que

$$|\phi(x^{n_i})| \geq 3\varepsilon - \varepsilon - \varepsilon = \varepsilon \text{ para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Logo $\phi(x^{n_i}) \not\longrightarrow 0$, ou seja, $x^{n_i} \overset{w}{\not\longrightarrow} 0$. Isso contradiz o fato de $a^n \overset{w}{\longrightarrow} 0$. Portanto $a^n \longrightarrow 0$ e daí concluímos que E é um espaço de Schur. ■

Corolário 3.1.6 *Seja $(E_j)_j$ uma sequência de espaços de Banach. Se E'_j é de Schur para todo $j \in \mathbb{N}$, então o dual de $E = \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_0$ é de Schur.*

Demonstração. Sabemos que $E' \overset{1}{=} \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E'_j\right)_1$. Como cada E'_j é de Schur, então E' é de Schur pelo teorema acima. ■

Observação 3.1.7 Observe que os passos seguidos na demonstração do Teorema 3.1.5 se assemelham muito à demonstração de que ℓ_1 é um espaço de Schur, apresentada no Teorema 2.1.9. Se tomarmos uma sequência de espaços de Banach $(E_j)_j$, onde $E_j = \mathbb{K}$ para todo $j \in \mathbb{N}$, podemos considerar o espaço $\ell_1 = \left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1$. Como $\mathbb{K}$ possui a propriedade de Schur por ter dimensão finita, então segue que ℓ_1 é um espaço de Schur. Ou seja, podemos obter que ℓ_1 é um espaço de Schur como um corolário do Teorema 3.1.5.

Apresentaremos agora um exemplo de espaço de Schur, chamado espaço de Stegall, que é uma aplicação direta do Teorema 3.1.5.

3.1.1 O espaço de Stegall

O *espaço de Stegall* é o primeiro exemplo conhecido de um espaço de Banach com a propriedade de Dunford-Pettis cujo dual não possui a propriedade de Dunford-Pettis. Esse espaço foi concebido por Stegall [49] em 1972.

Definição 3.1.8 O espaço de Stegall é definido por $E := \left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \ell_2^n\right)_1$ onde, para cada $n \in \mathbb{N}$, ℓ_2^n representa o espaço vetorial $\mathbb{K}^n$ com a norma euclidiana.

Note que para cada $n \in \mathbb{N}$ o espaço ℓ_2^n possui a propriedade de Schur, pois tem dimensão finita, com isso temos a seguinte consequência do Teorema 3.1.5:

Corolário 3.1.9 *O espaço de Stegall é um espaço de Schur.*

3.1.2 O espaço de Tandori $\widetilde{\ell_1}$

Os *espaços de Tandori* foram introduzidos por Tandori [51], em 1954, para descrever os duais de uma classe de espaços conhecidos como *espaços de Cesàro.* Nesse exemplo consideraremos espaços de Banach formados por sequências de números reais e definiremos os espaços de Tandori associados a esses espaços.

Definição 3.1.10 Um espaço de Banach real E, cujos elementos são sequências de números reais, é dito *ideal* se satisfaz a chamada *propriedade ideal*, a saber: se $(x_n)_n$ e $(y_n)_n$ são sequências de números reais tais que $|x_n| \leq |y_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $(y_n)_n \in E$, então $(x_n)_n \in E$.

Exemplos de espaços de Banach ideais são os espaços ℓ_p para $1 \leq p \leq \infty$ e o espaço c_0, formados por sequências reais. Em contrapartida, o espaço das sequências reais convergentes, denotado por c, é um exemplo de espaço de Banach que não é ideal. De fato, basta tomar as sequências $(x_n)_n = (-1, 1, -1, 1, \ldots)$ e $(y_n)_n = (2, 2, 2, 2, \ldots)$. É evidente que $|x_n| \leq |y_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $(y_n)_n \in c$, porém $(x_n)_n \notin c$.

Definição 3.1.11 (a) Seja $x = (x_n)_n$ uma sequência de números reais limitada. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos:

$$\widetilde{x_n} := \sup\{|x_k| : k \in \mathbb{N} \text{ e } k \geq n\}.$$

(b) Seja E é um espaço de Banach ideal. Definimos o *espaço de Tandori associado a E* por:

$$\widetilde{E} := \{x = (x_n)_n : \ \widetilde{x} = (\widetilde{x_n})_n \in E\} \ \text{ com a norma } \ \|x\|_{\widetilde{E}} = \|\widetilde{x}\|_E.$$

Em [51] está provado que $\widetilde{E}$ é um espaço de Banach. E em [2, Corollary 3] está provado o seguinte resultado:

Proposição 3.1.12 *O espaço $\widetilde{\ell_1}$ é isomorfo ao espaço $\left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} \ell_\infty^{2^n}\right)_1$, onde para cada $n \in \mathbb{N}$ o espaço $\ell_\infty^{2^n}$ representa o espaço vetorial $\mathbb{R}^{2^n}$ com a norma do máximo.*

Teorema 3.1.13 *O espaço de Tandori $\widetilde{\ell_1}$ possui a propriedade de Schur.*

Demonstração. Como $\ell_\infty^{2^n}$ tem dimensão finita para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, então cada $\ell_\infty^{2^n}$ é um espaço de Schur; e portanto, pelo Teorema 3.1.5, $\left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} \ell_\infty^{2^n}\right)_1$ é um espaço de Schur. Como $\widetilde{\ell_1}$ é isomorfo ao espaço $\left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} \ell_\infty^{2^n}\right)_1$, concluímos que $\widetilde{\ell_1}$ é de Schur. ■

Observação 3.1.14 O espaço $\left(\widetilde{\ell_1}\right)'$ não possui a propriedade de Schur. De fato, é fácil verificar que $\{e_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto linearmente independente de $\widetilde{\ell_1}$. Portanto $\widetilde{\ell_1}$ é um espaço de Schur de dimensão infinita, e pela Proposição 2.4.7 seu dual não é um espaço de Schur.

De acordo com [2, pág 10], os espaços $\widetilde{\ell_1}$ e ℓ_1 não são isomorfos. Como $\widetilde{\ell_1}$ é um espaço de Schur de dimensão infinita, pela Proposição 2.3.9 segue que ℓ_1 é isomorfo a um subespaço fechado de $\widetilde{\ell_1}$.

3.2 O espaço $\ell_1(\Gamma)$

Em breve veremos o papel desempenhado na teoria dos espaços de Banach pelos espaços que vamos definir agora.

Definição 3.2.1 Sejam Γ um conjunto não-vazio e $1 \leq p < \infty$.

- O espaço $\ell_p(\Gamma)$ é definido como:

$$\ell_p(\Gamma) := \Big\{(x_i)_{i\in\Gamma} : x_i \in \mathbb{K} \text{ para todo } i \in \Gamma, x_i \neq 0 \text{ apenas para uma quantidade enumerável de indíces } i \text{ e } \sum_{i\in\Gamma} |x_i|^p < \infty\Big\}.$$

- Dado $(x_i)_{i\in\Gamma} \in \ell_p(\Gamma)$, o *suporte* de $(x_i)_{i\in\Gamma}$ é definido por:

$$supp((x_i)_{i\in\Gamma}) := \{i \in \Gamma : x_i \neq 0\}.$$

$\ell_p(\Gamma)$ é espaço vetorial com as operações coordenada-a-coordenada, e é um espaço de Banach com a norma $\|(x_i)_{i\in\Gamma}\|_p := \left(\sum_{i\in\Gamma} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ para qualquer conjunto Γ (veja [22, pág 7]). Listamos a seguir alguns resultados conhecidos sobre os espaços $\ell_p(\Gamma)$. Os itens (a) e (b) podem ser encontrados como exercício em [22, pág 23], e o item (c) segue facilmente de [44, Corollary 1.10.4].

(a) Se Γ é um conjunto finito, então $\ell_p(\Gamma)$ tem dimensão finita.

(b) Se Γ é um conjunto infinito enumerável, então $\ell_p(\Gamma)$ é isomorfo isometricamente a ℓ_p.

(c) Se Γ é um conjunto não-enumerável, então $\ell_p(\Gamma)$ não é separável; em particular $\ell_p(\Gamma)$ não é isomorfo a ℓ_p.

Teorema 3.2.2 *O espaço $\ell_1(\Gamma)$ possui a propriedade de Schur para qualquer conjunto Γ.*

Demonstração. Se Γ for finito, então $\ell_1(\Gamma)$ tem dimensão finita e portanto será um espaço de Schur. Se Γ for infinito enumerável, então $\ell_1(\Gamma)$ será isomorfo isometricamente a ℓ_1 e portanto será um espaço de Schur. Só nos resta verificar o caso em que Γ é não-enumerável.

Sejam $(x^k)_k$ uma sequência em $\ell_1(\Gamma)$, onde $x^k = (x_i^k)_{i\in\Gamma}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, e $x = (x_i)_{i\in\Gamma} \in \ell_1(\Gamma)$, tais que $x^k \xrightarrow{w} x$ em $\ell_1(\Gamma)$. Como $supp(x)$ e $supp(x^k)$ são conjuntos enumeráveis, para cada $k \in \mathbb{N}$, então o conjunto

$$\Gamma' := \left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} supp(x^k)\right) \bigcup supp(x)$$

é enumerável, e consequentemente o espaço $\ell_1(\Gamma')$ é de Schur. Considere o operador

$$T\colon \ell_1(\Gamma') \longrightarrow \ell_1(\Gamma) \ ; \ (\widetilde{y_i})_{i\in\Gamma'} \longmapsto (y_i)_{i\in\Gamma},$$

onde $y_i = \widetilde{y_i}$ para todo $i \in \Gamma'$ e $y_i = 0$ para todo $i \in (\Gamma - \Gamma')$. É imediato que T está bem definido e é linear. Para todo $(\widetilde{y_i})_{i\in\Gamma'} \in \ell_1(\Gamma')$,

$$\|T((\widetilde{y_i})_{i\in\Gamma'})\|_1 = \|(y_i)_{i\in\Gamma}\|_1 = \sum_{i\in\Gamma}|y_i| = \sum_{i\in\Gamma'}|\widetilde{y_i}| = \|(\widetilde{y_i})_{i\in\Gamma'}\|_1,$$

o que prova que T é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem. Segue que $T(\ell_1(\Gamma'))$ é um espaço de Schur. Ainda, como $supp(x) \subset \Gamma'$, podemos definir $\widetilde{x} = (\widetilde{x_i})_{i\in\Gamma'} \in \ell_1(\Gamma')$ da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \widetilde{x_i} = x_i \text{ se } i \in supp(x), \\ \widetilde{x_i} = 0 \text{ se } i \in (\Gamma' - supp(x)). \end{cases}$$

Assim, $T(\widetilde{x}) = x$, e com isso $x \in T(\ell_1(\Gamma'))$. De maneira análoga concluímos que $(x^k)_k \subset T(\ell_1(\Gamma'))$. Dado $\varphi \in (T(\ell_1(\Gamma')))'$, pelo Teorema de Hahn-Banach (Teorema 1.1.2) existe $\widetilde{\varphi} \in (\ell_1(\Gamma))'$ tal que $\widetilde{\varphi}|_{T(\ell_1(\Gamma'))} = \varphi$. Dessa forma,

$$\varphi(x^k) = \widetilde{\varphi}(x^k) \longrightarrow \widetilde{\varphi}(x) = \varphi(x),$$

pois $x^k \xrightarrow{w} x$ em $\ell_1(\Gamma)$. Daí concluímos que $x^k \xrightarrow{w} x$ em $T(\ell_1(\Gamma'))$. Como o espaço $T(\ell_1(\Gamma'))$ é de Schur, segue que $x^k \longrightarrow x$ em $T(\ell_1(\Gamma'))$, e portanto

$$\|x^k - x\|_{\ell_1(\Gamma)} = \|x^k - x\|_{T(\ell_1(\Gamma'))} \longrightarrow 0.$$

Isso prova que $x^k \longrightarrow x$ em $\ell_1(\Gamma)$, donde concluímos que $\ell_1(\Gamma)$ é de Schur. ■

Observação 3.2.3 Tomando um conjunto Γ não-enumerável, $\ell_1(\Gamma)$ é um exemplo de espaço de Schur não-separável.

Vejamos agora a importância dos espaços $\ell_1(\Gamma)$, e portanto de uma classe de espaços de Schur, na teoria dos espaços de Banach.

Definição 3.2.4 Diz-se que um espaço de Banach E possui a propriedade de *lifting* se, para todos espaços de Banach F e G, todo operador $T \in \mathcal{L}(E;F)$ e todo operador sobrejetor $S \in \mathcal{L}(G;F)$, existir um operador $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(E;G)$ tal que $T = S \circ \widetilde{T}$, ou seja, tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "\widetilde{T}"'] & F \\ & G \arrow[u, "S"'] \end{tikzcd}$$

seja comutativo.

Os espaços com a propriedade de lifting têm muitas aplicações, por exemplo no estudo de ideais de operadores sobrejetivos (veja [23, 42]). A importância dos espaços $\ell_1(\Gamma)$ reside no

Teorema 3.2.5 [36, pág 108] Um espaço de Banach E tem a propriedade de lifting se, e somente se, existe um conjunto Γ tal que E é isomorfo a $\ell_1(\Gamma)$.

O corolário a seguir é imediato utilizando os teoremas 3.2.5 e 3.2.2 juntamente com o fato da propriedade de Schur ser preservada por isomorfismos.

Corolário 3.2.6 *Se um espaço de Banach E possui a propriedade de lifting, então E é um espaço de Schur.*

Terminaremos esta seção concluindo que o pré-dual e o dual de $\ell_1(\Gamma)$ não têm a propriedade de Schur.

Definição 3.2.7 Seja Γ um conjunto não-vazio. Definimos os espaços:

- $\ell_\infty(\Gamma) := \{(x_i)_{i\in\Gamma} : \ x_i \in \mathbb{K} \text{ para todo } i \in \Gamma \text{ e } \sup\limits_{i\in\Gamma} |x_i| < \infty\}$.
- $c_0(\Gamma) := \{(x_i)_{i\in\Gamma} \in \ell_\infty(\Gamma) : \ \text{o conjunto } \{i \in \Gamma : \ |x_i| \geq \varepsilon\} \text{ é finito para todo } \varepsilon > 0\}$.

Os espaços $\ell_\infty(\Gamma)$ e $c_0(\Gamma)$ são Banach munidos com a norma do supremo (veja [22, pág.7]). De acordo com [22, pág 45] sabemos que $(c_0(\Gamma))' \stackrel{1}{=} \ell_1(\Gamma)$, e de acordo com [27, Theorem 243G(b)] sabemos que $(\ell_1(\Gamma))' \stackrel{1}{=} \ell_\infty(\Gamma)$. Dessas dualidades juntamente com a Proposição 2.4.7 segue a seguinte proposição.

Proposição 3.2.8 *Se Γ é um conjunto infinito, então $\ell_\infty(\Gamma)$ e $c_0(\Gamma)$ não são espaços de Schur.*

Demonstração. Sendo Γ um conjunto infinito, $\ell_1(\Gamma)$ é um espaço de Schur de dimensão infinita, desse modo seu dual e seu pré-dual não possuem a propriedade de Schur. Como a propriedade de Schur é preservada por isomorfismos, concluímos que $\ell_\infty(\Gamma)$ e $c_0(\Gamma)$ não possuem a propriedade de Schur. ■

3.3 O espaço $C(K)'$

Vimos no Exemplo 2.2.3 que se K for um espaço métrico compacto enumerável, então $C(K)'$ será um espaço de Schur. Nesta seção apresentamos algumas outras condições para que o espaço $C(K)'$ tenha a propriedade de Schur. Começamos com alguns resultados e definições necessárias.

Definição 3.3.1 Seja K um espaço topológico compacto Hausdorff.

(a) Um subconjunto não-vazio A de K é *perfeito* se A é fechado e não contém nenhum ponto isolado.

(b) K é *disperso* se não contém subconjunto perfeito.

Teorema 3.3.2 [33, Theorem 2] *Seja K um espaço topológico compacto Hausdorff. Então K tem um subconjunto perfeito se, e somente se, existe uma função sobrejetora contínua de K em $[0, 1]$.*

Definição 3.3.3 Um espaço de Banach E é de *Asplund* se o dual de todo subespaço separável de E é separável.

São exemplos de espaços de Asplund: espaços reflexivos, espaços com duais separáveis, subespaços de $C(K)$ com K compacto Hausdorff disperso. Para mais exemplos e várias caracterizações dos espaços de Asplund, veja [55].

Teorema 3.3.4 *Seja K um espaço topológico compacto Hausdorff. As seguintes afirmações são equivalentes.*

(a) K é disperso.

(b) $C(K)$ é Asplund.

(c) $C(K)$ não contém cópia de ℓ_1.

(d) $C(K)$ não contém cópia isométrica de $C[0,1]$.

(e) $C(K)'$ é um espaço de Schur.

Demonstração. $(a) \Leftrightarrow (b)$ Esse resultado é o [22, Theorem 12.29].

$(a) \Rightarrow (e)$ Sendo K um compacto disperso, $C(K)'$ é isomorfo isometricamente a $\ell_1(\Gamma)$ para algum conjunto Γ (veja [22, Theorem 12.28]). Assim, pelo Teorema 3.2.2 e o fato da propriedade de Schur ser preservada por isomorfismos, concluímos que $C(K)'$ é um espaço de Schur.

$(e) \Rightarrow (c)$ Como $C(K)'$ é um espaço de Schur, segue do item *(b)* do Teorema 2.4.5 que $C(K)$ não possui cópia de ℓ_1.

$(c) \Rightarrow (d)$ Como ℓ_1 é separável, segue do Teorema de Banach-Mazur (Teorema 1.5.10) que existe um isomorfismo entre ℓ_1 e um subespaço de $C[0,1]$, digamos

$$S\colon \ell_1 \longrightarrow S(\ell_1) \subset C[0,1].$$

Suponha que $C(K)$ contenha uma cópia isométrica de $C[0,1]$, ou seja, suponha que exista um isomorfismo isométrico entre $C[0,1]$ e um subespaço de $C(K)$, digamos

$$T\colon C[0,1] \longrightarrow T(C[0,1]) \subset C(K).$$

Assim, o operador

$$T \circ S\colon \ell_1 \longrightarrow C(K)$$

é um isomorfismo sobre um subespaço de $C(K)$, contradizendo a hipótese de que $C(K)$ não contém cópia de ℓ_1. Portanto $C[0,1] \overset{1}{\not\hookrightarrow} C(K)$.

$(d) \Rightarrow (a)$ Suponha que K não seja disperso, isto é, suponha que K possua um subconjunto perfeito. Então, pelo Teorema 3.3.2, existe uma função sobrejetora contínua

$$s\colon K \longrightarrow [0,1].$$

Defina o operador
$$T\colon C[0,1] \longrightarrow C(K)\ ;\ T(f) := f\circ s.$$
Como s e f são contínuas, então $T(f) = f\circ s$ é contínua para toda $f \in C[0,1]$, assim $T(f) \in C(K)$ para toda $f \in C[0,1]$; e portando T está bem definido. Dados $f, g \in C[0,1]$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in K$, temos

$$(T(\lambda f + g))(x) = (\lambda f + g)(s(x)) = \lambda f(s(x)) + g(s(x)) = (\lambda T(f))(x) + (T(g))(x).$$

Com isso $T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$, provando que T é linear. Para toda $f \in C[0,1]$,

$$\|T(f)\| = \sup_{x\in K} |(T(f))(x)| = \sup_{x\in K} |f(s(x))| \overset{(*)}{=} \sup_{y\in[0,1]} |f(y)| = \|f\|,$$

onde a igualdade $(*)$ é garantida pela sobrejetividade de s. Assim, T é um isomorfismo isométrico sobre um subespaço de $C(K)$, contradizendo a hipótese de que $C[0,1] \overset{1}{\not\hookrightarrow} C(K)$. Portanto K é disperso. ∎

Observe que todo espaço métrico compacto enumerável é um espaço topológico compacto Hausdorff disperso. Com isso, o Exemplo 2.2.3 segue como corolário do teorema apresentado acima.

3.4 Espaços de operadores

O objetivo desta seção é caracterizar quando o espaço $\mathcal{L}(E;F)$ dos operadores de E em F é de Schur, e também dar exemplos de quando isso ocorre. Analisaremos também a propriedade de Schur em um determinado subespaço de $\mathcal{L}(E';F)$. Como sempre, todos os espaços envolvidos são não triviais, isto é, diferentes de $\{0\}$.

Lema 3.4.1 *Sejam E e F espaços de Banach. O espaço $\mathcal{L}(E;F)$ contém cópias isométricas de E' e de F.*

Demonstração. Primeiramente mostraremos que $E' \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{L}(E;F)$. Tome $y \in F$ tal que $\|y\| = 1$ e defina o operador

$$T\colon E' \longrightarrow \mathcal{L}(E;F)\ ;\ T(\varphi)(x) := \varphi(x)y \ \text{ para todos } \varphi \in E' \text{ e } x \in E.$$

Não é difícil ver que $T(\varphi)$ é linear para todo $\varphi \in E'$. Para todo $x \in E$,

$$\|T(\varphi)(x)\| = \|\varphi(x)y\| = |\varphi(x)|\cdot\|y\| \le \|\varphi\|\cdot\|x\|\cdot\|y\| = \|\varphi\|\cdot\|x\|.$$

Logo $T(\varphi)$ é contínuo para todo $\varphi \in E'$ e com isso T está bem definido. A linearidade de T é imediata. E para todo $\varphi \in E'$,

$$\begin{aligned}\|T(\varphi)\| &= \sup_{x\in S_E} \|T(\varphi)(x)\| = \sup_{x\in S_E} \|\varphi(x)y\| \\ &= \sup_{x\in S_E} |\varphi(x)|\cdot\|y\| = \sup_{x\in S_E} |\varphi(x)| = \|\varphi\|.\end{aligned}$$

Logo T é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem, e com isso $E' \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{L}(E;F)$.

Agora mostraremos que $F \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{L}(E;F)$. Tome $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e defina o operador

$$S\colon F \longrightarrow \mathcal{L}(E;F)\ ;\ S(y)(x) := \varphi(x)y \ \text{ para todos } y \in F \text{ e } x \in E.$$

Não é difícil ver que $S(y)$ é linear para todo $y \in F$. Para todo $x \in E$,

$$\|S(y)(x)\| = \|\varphi(x)y\| = |\varphi(x)| \cdot \|y\| \leq \|\varphi\| \cdot \|x\| \cdot \|y\| = \|y\| \cdot \|x\|.$$

Logo $S(y)$ é contínuo para todo $y \in F$, e com isso S está bem definido. Novamente a linearidade de S é imediata. Para todo $y \in F$,

$$\begin{aligned}\|S(y)\| &= \sup_{x \in S_E} \|S(y)(x)\| = \sup_{x \in S_E} \|\varphi(x)y\| = \sup_{x \in S_E} |\varphi(x)| \cdot \|y\| \\ &= \|y\| \sup_{x \in S_E} |\varphi(x)| = \|y\| \cdot \|\varphi\| = \|y\|.\end{aligned}$$

Isso prova que S é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem, e com isso $F \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{L}(E;F)$.
■

Teorema 3.4.2 *Sejam E e F espaços de Banach. O espaço $\mathcal{L}(E;F)$ é de Schur se, e somente se, E' e F são espaços de Schur.*

Demonstração. Se $\mathcal{L}(E;F)$ é um espaço de Schur, então, pela Proposição 2.2.9 juntamente com o lema acima, segue que E' e F são espaços de Schur.

Reciprocamente, suponha que E' e F são espaços de Schur. Seja $(u_n)_n$ uma sequência em $\mathcal{L}(E;F)$ tal que $\|u_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que $(u_n)_n$ possui uma subsequência que não é fracamente nula. Como

$$\sup_{x \in S_E} \|u_n(x)\| = 1, \ \text{ para todo } \ n \in \mathbb{N},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in S_E$ tal que $\|u_n(x_n)\| \geq \frac{1}{2}$. Assim, existe $(x_n)_n \subset S_E$ tal que $\|u_n(x_n)\| \geq \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como F é de Schur e $(u_n(x_n))_n$ não converge para zero, segue que $(u_n(x_n))_n$ não é fracamente nula, e portanto existe $\psi \in F'$ tal que $\psi(u_n(x_n)) \not\longrightarrow 0$ em $\mathbb{K}$. Existem então $\varepsilon > 0$ e uma subsequência $(u_{n_k}(x_{n_k}))_k$ de $(u_n(x_n))_n$ tais que $|\psi(u_{n_k}(x_{n_k}))| \geq \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\varepsilon \leq |\psi(u_{n_k}(x_{n_k}))| = |u'_{n_k}(\psi)(x_{n_k})| \leq \|u'_{n_k}(\psi)\| \cdot \|x_{n_k}\| = \|u'_{n_k}(\psi)\|$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo $u'_{n_k}(\psi) \not\longrightarrow 0$ em E', onde u'_{n_k} é o operador adjunto de u_{n_k} para cada $k \in \mathbb{N}$. Como E' é de Schur e $(u'_{n_k}(\psi))_k$ não converge para zero em E', então $(u'_{n_k}(\psi))_k$ não é fracamente nula, ou seja, existe $\phi \in E''$ tal que $\phi(u'_{n_k}(\psi)) \not\longrightarrow 0$ em $\mathbb{K}$. Agora, para aquele $\psi \in F'$ e para este $\phi \in E''$, defina o funcional

$$T\colon \mathcal{L}(E;F) \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ T(u) := \phi(u'(\psi)).$$

Note que T está bem definido, pois cada operador linear contínuo possui um único adjunto. Da igualdade $(\lambda u + v)' = \lambda u' + v'$ para todos $u, v \in \mathcal{L}(E;F)$ e todo $\lambda \in \mathbb{K}$ segue a linearidade de T. Para todo $u \in \mathcal{L}(E;F)$,

$$|T(u)| = |\phi(u'(\psi))| \leq \|\phi\| \cdot \|u'\| \cdot \|\psi\| = \|\phi\| \cdot \|\psi\| \cdot \|u\|,$$

provando que T é contínuo, e portanto $T \in (\mathcal{L}(E;F))'$. Assim, T é um funcional linear contínuo em $\mathcal{L}(E;F)$ tal que

$$T(u_{n_k}) = \phi(u'_{n_k}(\psi)) \not\longrightarrow 0.$$

Isso prova que $u_{n_k} \overset{w}{\not\longrightarrow} 0$, o que nos permite concluir que $u_n \overset{w}{\not\longrightarrow} 0$. Pelo item *(h)* do Teorema 2.1.8 segue que $\mathcal{L}(E;F)$ é um espaço de Schur. ■

Em [20], Dilworth e Kutzarova apresentam um esboço da demonstração ("Sketch of Proof") de que o espaço $\mathcal{L}(c_0;\ell_1)$ possui a propriedade de Schur. Esse resultado segue como corolário do teorema acima, bastando lembrar que $(c_0)' \overset{1}{=} \ell_1$ é de Schur.

Corolário 3.4.3 *O espaço $\mathcal{L}(c_0;\ell_1)$ é de Schur.*

Dados espaços de Banach E e F, denotamos o conjunto dos operadores lineares w^*-w-contínuos definidos em E' e tomando valores em F por $\mathcal{L}_{w^*-w}(E';F)$.

Lema 3.4.4 *Se $T \in \mathcal{L}_{w^*-w}(E';F)$ e $\psi \in F'$, então $T'(\psi) \in J_E(E)$.*

Demonstração. Sejam $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede em E' e $\varphi \in E'$ tais que $\varphi_\lambda \overset{w^*}{\longrightarrow} \varphi$. Como T é w^*-w-contínuo, temos $T(\varphi_\lambda) \overset{w}{\longrightarrow} T(\varphi)$ em F, e portanto

$$T'(\psi)(\varphi_\lambda) = \psi(T(\varphi_\lambda)) \longrightarrow \psi(T(\varphi)) = T'(\psi)(\varphi).$$

Isso prova que $T'(\psi)$ é w^*-contínuo. Pela Proposição 1.3.13 existe $x \in E$ tal que $J_E(x) = T'(\psi)$, ou seja, $T'(\psi) \in J_E(E)$. ■

Proposição 3.4.5 *$\mathcal{L}_{w^*-w}(E';F)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(E';F)$, e portanto um espaço de Banach.*

Demonstração. Vejamos que $\mathcal{L}_{w^*-w}(E';F)$ é um subconjunto de $\mathcal{L}(E';F)$. Para isso sejam $T \in \mathcal{L}_{w^*-w}(E';F)$, $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede em E' e $\varphi \in E'$ tais que $\varphi_\lambda \overset{w}{\longrightarrow} \varphi$. Então $\varphi_\lambda \overset{w^*}{\longrightarrow} \varphi$ e, como T é w^*-w-contínuo, segue que $T(\varphi_\lambda) \overset{w}{\longrightarrow} T(\varphi)$; provando que T é w-w-contínuo. Pela Proposição 1.3.7 concluímos que T é contínuo, e consequentemente $T \in \mathcal{L}(E';F)$.

Verifiquemos agora que $\mathcal{L}_{w^*-w}(E';F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E';F)$. Para isso sejam T e $S \in \mathcal{L}_{w^*-w}(E';F)$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede em E' e $\varphi \in E'$ tais que $\varphi_\lambda \overset{w^*}{\longrightarrow} \varphi$. Temos $T(\varphi_\lambda) \overset{w}{\longrightarrow} T(\varphi)$, e $S(\varphi_\lambda) \overset{w}{\longrightarrow} S(\varphi)$ em F e com isso,

$$(T + \alpha S)(\varphi_\lambda) = T(\varphi_\lambda) + \alpha S(\varphi_\lambda) \overset{w}{\longrightarrow} T(\varphi) + \alpha S(\varphi) = (T + \alpha S)(\varphi).$$

Logo $(T + \alpha S) \in \mathcal{L}_{w^*-w}(E';F)$.

Seja agora $(T_n)_n$ uma sequência em $\mathcal{L}_{w^*-w}(E';F)$ que converge para algum $T \in \mathcal{L}(E';F)$. Pelo Lema 3.4.4 sabemos que $T_n'(\psi) \in J_E(E)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $\psi \in F'$. Por outro lado,

$$T_n \longrightarrow T \Rightarrow \|T_n' - T'\| = \|(T_n - T)'\| = \|T_n - T\| \longrightarrow 0 \Rightarrow T_n' \longrightarrow T' \in \mathcal{L}(F';E'')$$
$$\Rightarrow T_n'(\psi) \longrightarrow T'(\psi) \text{ em } E'' \text{ para todo } \psi \in F'.$$

Como E é um espaço de Banach e J_E é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem, $J_E(E)$ é um espaço de Banach, e portanto fechado em E'', donde segue que $T'(\psi) \in J_E(E)$. Dada uma rede $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ em E' tal que $\varphi_\lambda \xrightarrow{w^*} \varphi \in E'$, temos $T'(\psi)(\varphi_\lambda) \longrightarrow T'(\psi)(\varphi)$ para todo $\psi \in F'$, ou seja, $\psi(T(\varphi_\lambda)) \longrightarrow \psi(T(\varphi))$ para todo $\psi \in F'$. Segue então que $T(\varphi_\lambda) \xrightarrow{w} T(\varphi)$. Logo T é w^*-w-contínuo, isto é, $T \in \mathcal{L}_{w^*-w}(E';F)$ e portanto $\mathcal{L}_{w^*-w}(E';F)$ é subespaço fechado de $\mathcal{L}(E';F)$. Consequentemente $\mathcal{L}_{w^*-w}(E';F)$ é um espaço de Banach. ■

Lema 3.4.6 *Sejam E e F espaços de Banach. Então $\mathcal{L}_{w^*-w}(E';F)$ contém cópias isométricas de E e de F.*

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que $E \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{L}_{w^*-w}(E';F)$. Para isso tome $y \in F$ tal que $\|y\| = 1$ e defina o operador

$$T\colon E \longrightarrow \mathcal{L}_{w^*-w}(E';F) \; ; \; T(x)(\varphi) := \varphi(x)y \;\text{ para todos }\; x \in E \text{ e } \varphi \in E'.$$

É fácil ver que $T(x)$ é linear para todo $x \in E$. Sejam $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede em E', $\varphi \in E'$ tais que $\varphi_\lambda \xrightarrow{w^*} \varphi$ e $x \in E$. Então $\varphi_\lambda(x) \longrightarrow \varphi(x)$, e daí

$$\|\varphi_\lambda(x)y - \varphi(x)y\| = |\varphi_\lambda(x) - \varphi(x)| \cdot \|y\| \longrightarrow 0.$$

Ou seja, $\varphi_\lambda(x)y \longrightarrow \varphi(x)y$, e consequentemente $\varphi_\lambda(x)y \xrightarrow{w} \varphi(x)y$. Portanto, para todo $x \in E$ temos $T(x)(\varphi_\lambda) \xrightarrow{w} T(x)(\varphi)$, provando que $T(x) \in \mathcal{L}_{w^*-w}(E';F)$ para todo $x \in E$, concluindo assim que T está bem definido. Mais uma vez a linearidade de T é imediata. Para todo $x \in E$,

$$\|T(x)\| = \sup_{\varphi\in B_{E'}} \|T(x)(\varphi)\| = \sup_{\varphi\in B_{E'}} \|\varphi(x)y\|$$
$$= \sup_{\varphi\in B_{E'}} |\varphi(x)| \cdot \|y\| = \sup_{\varphi\in B_{E'}} |\varphi(x)| \overset{(*)}{=} \|x\|,$$

onde a igualdade $(*)$ é garantida pelo Teorema de Hahn-Banach (Teorema 1.1.4). Logo T é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem, ou seja, $E \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{L}_{w^*-w}(E';F)$.

Agora mostraremos que $F \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{L}_{w^*-w}(E';F)$. Tome $x \in E$ tal que $\|x\| = 1$ e defina o operador

$$S\colon F \longrightarrow \mathcal{L}_{w^*-w}(E';F) \; ; \; S(y)(\varphi) := \varphi(x)y \;\text{ para todos } y \in F \text{ e } \varphi \in E'.$$

Não é difícil ver que $S(y)$ é linear para todo $y \in F$. Sejam $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede em E' e $\varphi \in E'$ tais que $\varphi_\lambda \xrightarrow{w^*} \varphi$. Então $\varphi_\lambda(x) \longrightarrow \varphi(x)$, e daí $\varphi_\lambda(x)y \longrightarrow \varphi(x)y$ para todo

$y \in F$. Com isso temos $\varphi_\lambda(x)y \xrightarrow{w} \varphi(x)y$, e portanto $S(y)(\varphi_\lambda) \xrightarrow{w} S(y)(\varphi)$ para todo $y \in F$. Concluímos que $S(y) \in \mathcal{L}_{w^*-w}(E'; F)$ para todo $y \in F$, e portanto S está bem definido. Novamente omitimos os detalhes da linearidade de S. Para todo $y \in F$,

$$\begin{aligned}\|S(y)\| &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|S(y)(\varphi)\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|\varphi(x)(y)\| \\ &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)| \cdot \|y\| = \|y\| \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)| \\ &\overset{(*)}{=} \|y\| \cdot \|x\| = \|y\|,\end{aligned}$$

onde, novamente, a igualdade $(*)$ é garantida pelo Teorema de Hahn-Banach (Teorema 1.1.4). Logo S é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem, ou seja, $F \overset{1}{\hookrightarrow} \mathcal{L}_{w^*-w}(E'; F)$. ■

Teorema 3.4.7 *Sejam E e F espaços de Banach. O espaço $\mathcal{L}_{w^*-w}(E'; F)$ é de Schur se, e somente se, E e F são espaços de Schur.*

Demonstração. Supondo que $\mathcal{L}_{w^*-w}(E'; F)$ seja um espaço de Schur, pela Proposição 2.2.9 juntamente com o lema acima concluímos que E e F são espaços de Schur.

Reciprocamente, suponha que E e F sejam de Schur. Seja $(u_n)_n$ uma sequência em $\mathcal{L}_{w^*-w}(E'; F)$ tal que $\|u_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar que $(u_n)_n$ possui uma subsequência que não é fracamente nula. Como

$$\sup_{\varphi \in S_{E'}} \|u_n(\varphi)\| = 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\varphi_n \in S_{E'}$ tal que $\|u_n(\varphi_n)\| \geq \frac{1}{2}$. Ou seja, existe uma sequência $(\varphi_n)_n \subset S_{E'}$ tal que $\|u_n(\varphi_n)\| \geq \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como F é um espaço de Schur, $(u_n(\varphi_n))_n \subset F$ e $u_n(\varphi_n) \not\longrightarrow 0$, segue que $u_n(\varphi_n) \overset{w}{\not\longrightarrow} 0$. Assim existe um funcional linear contínuo ψ em F' tal que $\psi(u_n(\varphi_n)) \not\longrightarrow 0$, ou seja, existem $\varepsilon > 0$ e uma subsequência $(u_{n_k}(\varphi_{n_k}))_k$ de $(u_n(\varphi_n))_n$ tais que $|\psi(u_{n_k}(\varphi_{n_k}))| \geq \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\varepsilon \leq |\psi(u_{n_k}(\varphi_{n_k}))| = |u'_{n_k}(\psi)(\varphi_{n_k})| \leq \|u'_{n_k}(\psi)\| \cdot \|(\varphi_{n_k})\| = \|u'_{n_k}(\psi)\|$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, logo $u'_{n_k}(\psi) \not\longrightarrow 0$ em E'', onde u'_{n_k} é o operador adjunto de u_{n_k} para cada $k \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 3.4.4, $u'_{n_k}(\psi) \in J_E(E)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, logo para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $x_k \in E$ tal que $J_E(x_k) = u'_{n_k}(\psi)$. Temos

$$u'_{n_k}(\psi) \not\longrightarrow 0 \Rightarrow J_E(x_k) \not\longrightarrow 0 \Rightarrow \|x_k\| = \|J_E(x_k)\| \not\longrightarrow 0,$$

e daí $x_k \not\longrightarrow 0$ em E. Como E é um espaço de Schur, segue que $x_k \overset{w}{\not\longrightarrow} 0$ em E, ou seja, existe $\phi \in E'$ tal que $\phi(x_k) \not\longrightarrow 0$. Agora, para aquele $\psi \in F'$ e para este $\phi \in E'$ defina o operador

$$T\colon \mathcal{L}_{w^*-w}(E'; F) \longrightarrow \mathbb{K} \; ; \; T(u) := \psi(u(\phi)) \text{ para todo } u \in \mathcal{L}_{w^*-w}(E'; F).$$

Da mesma forma que já fizemos várias vezes antes, concluímos que $T \in (\mathcal{L}_{w^*-w}(E';F))'$. Existe então um funcional linear contínuo $T \in (\mathcal{L}_{w^*-w}(E';F))'$ tal que

$$T(u_{n_k}) = \psi(u_{n_k}(\phi)) = u'_{n_k}(\psi)(\phi) = J_E(x_k)(\phi) = \phi(x_k) \not\longrightarrow 0.$$

Portanto $(u_{n_k})_k$ é uma subsequência de $(u_n)_n$ que não é fracamente nula, logo $u_n \overset{w}{\not\longrightarrow} 0$ e pelo item *(h)* do Teorema 2.1.8 concluímos que $\mathcal{L}_{w^*-w}(E';F)$ é um espaço de Schur. ■

O teorema acima será útil na Seção 3.6.1.

3.5 O espaço das aplicações multilineares

Nesta seção generalizaremos o resultado visto no Teorema 3.4.2 para espaços de aplicações multilineares contínuas. As definições e resultados apresentados a seguir podem ser encontrados em [14].

Consideremos $n \in \mathbb{N}$ e espaços vetoriais $E_1, E_2, \ldots, E_n$ e F sobre o corpo de escalares $\mathbb{K}$. O produto cartesiano $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ é um espaço vetorial, sobre $\mathbb{K}$, com as operações usuais dadas por:

$$\begin{aligned}(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) &:= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),\\ \alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) &:= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n),\end{aligned}$$

onde $\alpha \in \mathbb{K}$, e $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ pertencem a $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.

Definição 3.5.1 Uma aplicação $A\colon E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ é *n-linear* (ou *multilinear*) se ela for linear com respeito a cada variável quando as outras $n-1$ variáveis são mantidas fixas.

O conjunto das aplicações n-lineares de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ em F forma um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações usuais dadas por:

$$\begin{aligned}(A + B)(x_1, x_2, \ldots, x_n) &:= A(x_1, x_2, \ldots, x_n) + B(x_1, x_2, \ldots, x_n),\\ (\alpha A)(x_1, x_2, \ldots, x_n) &:= \alpha(A(x_1, x_2, \ldots, x_n)),\end{aligned}$$

onde $A, B\colon E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ são aplicações n-lineares e $\alpha \in \mathbb{K}$.

Denotamos o espaço das aplicações n-lineares de $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ em F por $L(E_1, E_2, \ldots, E_n; F)$. Quando $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$ denotaremos esse espaço por $L(^nE; F)$.

Quando os espaços vetoriais $E_1, E_2, \ldots, E_n$ e F são normados e o espaço $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ é munido com a topologia produto, gerada pelas normas em cada E_l com $1 \leq l \leq n$, podemos considerar aplicações n-lineares contínuas.

Proposição 3.5.2 *Sejam $E_1, E_2, \ldots, E_n$ e F espaços normados. Uma aplicação n-linear $A\colon E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ é contínua se, e somente se, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|A(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_F \leq C\|x_1\|_{E_1} \cdot \|x_2\|_{E_2} \cdots \|x_n\|_{E_n}$$

para todo $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$.

Dessa proposição segue que

$$\|A\| := \sup \left\{ \frac{\|A(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_F}{\|x_1\|_{E_1} \cdot \|x_2\|_{E_2} \cdots \|x_n\|_{E_n}} : x_l \neq 0,\ 1 \leq l \leq n \right\}$$

é um número real para toda aplicação n-linear contínua $A\colon E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$. O conjunto das aplicações n-lineares contínuas $A\colon E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ forma um espaço normado com a norma definida acima. Denotaremos este espaço normado por $\mathcal{L}(E_1, E_2, \ldots, E_n; F)$. Quando $E_1 = E_2 = \cdots = E_n = E$ denotaremos esse espaço por $\mathcal{L}(^nE; F)$. Se F for um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E_1, E_2, \ldots, E_n; F)$ com a norma definida acima será Banach (veja [14, pág 95 e pág 133]).

Teorema 3.5.3 *Sejam $E_1, E_2, \ldots, E_n$ e F espaços normados. Então $\mathcal{L}(E_1, E_2, \ldots, E_n; F)$ é isomorfo isometricamente a $\mathcal{L}(E_j; \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_{j-1}, E_{j+1}, \ldots, E_n; F))$ para qualquer $1 \leq j \leq n$.*

Demonstração. [14, Theorem 2.11-5]. ■

Teorema 3.5.4 *Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços de Banach. O espaço $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é de Schur se, e somente se, $E_1', \ldots, E_n'$ e F são espaços de Schur.*

Demonstração. Suponhamos que o espaço $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ seja de Schur. Pelo Teorema 3.5.3 segue que $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F) \stackrel{1}{=} \mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2, \ldots, E_n; F))$, donde concluímos que $\mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2, \ldots, E_n; F))$ é um espaço de Schur.

- Como $\mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2, \ldots, E_n; F))$ é um espaço de Schur, pelo Teorema 3.4.2 segue que E_1' e $\mathcal{L}(E_2, \ldots, E_n; F) \stackrel{1}{=} \mathcal{L}(E_2; \mathcal{L}(E_3, \ldots, E_n; F))$ são espaços de Schur.
- Como $\mathcal{L}(E_2; \mathcal{L}(E_3, \ldots, E_n; F))$ é um espaço de Schur, pelo Teorema 3.4.2 segue que E_2' e $\mathcal{L}(E_3, \ldots, E_n; F) \stackrel{1}{=} \mathcal{L}(E_3; \mathcal{L}(E_4, \ldots, E_n; F))$ são espaços de Schur.
- Como $\mathcal{L}(E_3; \mathcal{L}(E_4, \ldots, E_n; F))$ é um espaço de Schur, pelo Teorema 3.4.2 segue que E_3' e $\mathcal{L}(E_4, \ldots, E_n; F) \stackrel{1}{=} \mathcal{L}(E_4; \mathcal{L}(E_5, \ldots, E_n; F))$ são espaços de Schur.
  $\vdots$
- Como $\mathcal{L}(E_n; F)$ é um espaço de Schur, pelo Teorema 3.4.2 segue que E_n' e F são espaços de Schur.

Portanto $E_1', \ldots, E_n'$ e F são espaços de Schur.

Reciprocamente, suponhamos que $E_1', \ldots, E_n'$ e F sejam espaços de Schur.

- Como E_n' e F são espaços de Schur, pelo Teorema 3.4.2 segue que $\mathcal{L}(E_n; F)$ é um espaço de Schur.
- Como E_{n-1}' e $\mathcal{L}(E_n; F)$ são espaços de Schur, pelo Teorema 3.4.2 segue que o espaço $\mathcal{L}(E_{n-1}; \mathcal{L}(E_n; F)) \stackrel{1}{=} \mathcal{L}(E_{n-1}, E_n; F)$ é de Schur.

- Como E'_{n-2} e $\mathcal{L}(E_{n-1}, E_n; F)$ são espaços de Schur, pelo Teorema 3.4.2 segue que $\mathcal{L}(E_{n-2}; \mathcal{L}(E_{n-1}, E_n; F)) \overset{1}{=} \mathcal{L}(E_{n-2}, E_{n-1}, E_n; F)$ é um espaço de Schur.
  $\vdots$
- Como E'_1 e $\mathcal{L}(E_2, E_3, \ldots, E_n; F)$ são espaços de Schur, pelo Teorema 3.4.2 segue que $\mathcal{L}(E_1; \mathcal{L}(E_2, E_3, \ldots, E_n; F)) \overset{1}{=} \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é um espaço de Schur.

Portanto $\mathcal{L}(E_1, \cdots, E_n; F)$ é um espaço de Schur. ■

Segue imediatamente do teorema acima que $\mathcal{L}({}^nE; F)$ é um espaço de Schur para qualquer $n \in \mathbb{N}$ se, e somente se, E' e F são espaços de Schur. Em [4], Bombal e Villanueva demonstram que o espaço $\mathcal{L}({}^nC(K); \mathbb{K})$ é um espaço de Schur se, e somente se, K é um espaço topológico compacto Hausdorff disperso. Esse resultado segue como corolário do teorema acima e do Teorema 3.3.4:

Corolário 3.5.5 *Seja K um espaço topológico compacto Hausdorff. O espaço $\mathcal{L}({}^nC(K); \mathbb{K})$ é de Schur para qualquer $n \in \mathbb{N}$ se, e somente se, K é disperso.*

3.6 O produto tensorial

Nesta seção abordaremos resultados sobre a propriedade de Schur em produtos tensoriais de espaços de Banach. Trabalharemos com o produto tensorial apenas entre dois espaços vetoriais e definiremos tensores como funcionais lineares sobre o espaço das aplicações bilineares. A referência principal para a construção desta seção foi o livro [45].

Chamamos a atenção do leitor para o fato de que neste primeiro momento estaremos trabalhando com espaços vetoriais sem definir neles nenhuma norma. Apresentamos a seguir duas notações que serão utilizadas e que ainda não foram introduzidas.

- Dado um espaço vetorial E, a notação E^* representa o espaço vetorial dos funcionais lineares definidos em E e tomando valores em $\mathbb{K}$.
- Sejam E e F espaços vetoriais. Diremos que $T\colon E \longrightarrow F$ é um *isomorfismo algébrico* se T for linear e bijetor.

Definição 3.6.1 Sejam E e F espaços vetoriais, $x \in E$ e $y \in F$. O *produto tensorial* de x por y é definido da seguinte forma:

$$x \otimes y\colon L(E, F; \mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K} \ ; \ (x \otimes y)(A) := A(x, y) \ \text{ para toda } \ A \in L(E, F; \mathbb{K}).$$

É imediato que $x \otimes y$ é linear, ou seja, $x \otimes y \in L(E, F; \mathbb{K})^*$.

Observação 3.6.2 As propriedades a seguir seguem facilmente da definição:

(I) $x \otimes (y + z) = x \otimes y + x \otimes z$ e $(x + w) \otimes y = x \otimes y + w \otimes y$ para todos $x, w \in E$ e $y, z \in F$.

(II) $(\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y) = \lambda(x \otimes y)$ para todos $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E$ e $y \in F$.

Definição 3.6.3 Definimos o *produto tensorial* dos espaços vetoriais E e F por:

$$E \otimes F := [\{x \otimes y : x \in E \text{ e } y \in F\}].$$

Por definição, o produto tensorial $E \otimes F$ é um subespaço vetorial de $L(E, F; \mathbb{K})^*$. Seus elementos são chamados *tensores* e têm a seguinte forma:

$$u := \sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i,$$

onde $k \in \mathbb{N}$, $x_i \in E$ e $y_i \in F$ para todo $1 \leq i \leq k$. Essa representação dos tensores não é única em geral: as igualdades

$$(\lambda x) \otimes y = x \otimes (\lambda y) = \lambda(x \otimes y),$$

para $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E$ e $y \in F$, já nos permitem verificar que não há unicidade da representação.

A proposição a seguir segue facilmente da Observação 3.6.2.

Proposição 3.6.4 *Sejam E e F espaços vetoriais. A aplicação*

$$\sigma \colon E \times F \longrightarrow E \otimes F; \quad \sigma((x, y)) := x \otimes y,$$

é bilinear.

O teorema a seguir nos permite linearizar aplicações bilineares, e é um dos resultados fundamentais do estudo de produtos tensoriais.

Teorema 3.6.5 *Sejam E, F e G espaços vetoriais. Para toda aplicação bilinear $A \in L(E, F; G)$ existe um único operador linear $A_L \colon E \otimes F \longrightarrow G$ tal que $A_L(x \otimes y) = A(x, y)$ para todos $x \in E$ e $y \in F$. Ou seja, o diagrama*

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\sigma"'] & G \\ E \otimes F \arrow[ur, "A_L"'] & \end{tikzcd}$$

é comutativo. Mais ainda, a correspondência $A \longrightarrow A_L$ é um isomorfismo algébrico entre os espaços vetoriais $L(E, F; G)$ e $L(E \otimes F; G)$.

Demonstração. [45, Proposition, 1.4]. ■

O operador A_L é chamado de *linearização* da aplicação bilinear A.

Como o produto tensorial $E \otimes F$ dos espaços de Banach E e F é um espaço vetorial, surge o interesse natural de tentar definir uma norma nesse espaço. Existem diferentes formas de normar o produto tensorial, apresentaremos aqui duas dessas formas e veremos alguns resultados da propriedade de Schur nos espaços de Banach obtidos a partir de tais normas. A primeira norma apresentada será a norma injetiva.

3.6.1 O produto tensorial injetivo

Definição 3.6.6 Sejam E e F espaços de Banach.

- A *norma injetiva* em $E \otimes F$ é definida da seguinte maneira:

$$\epsilon(u) := \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) y_i \right\| : \ \varphi \in B_{E'} \right\}$$

onde $\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ é uma representação qualquer do tensor u em $E \otimes F$. Denotamos por $E \otimes_\epsilon F$ o espaço vetorial $E \otimes F$ com a norma injetiva.

- O *produto tensorial injetivo* é o completamento do espaço $E \otimes_\epsilon F$ e é denotado por $E \widehat{\otimes}_\epsilon F$.

Lema 3.6.7 *O espaço $E \otimes_\epsilon F$ é isomorfo isometricamente a um subespaço de $\mathcal{L}_{w^*-w}(E'; F)$.*

Demonstração. Defina a aplicação

$A \colon E \times F \longrightarrow \mathcal{L}_{w^*-w}(E'; F)$; $A(x, y)(\varphi) := \varphi(x)y$ para todos $(x, y) \in E \times F$ e $\varphi \in E'$.

Vejamos que A está bem definida: Como a linearidade de $A(x, y)$ para todo $(x, y) \in E \times F$, é facilmente observada, só nos resta mostrar que $A(x, y)$ é w^*-w-contínuo para todo $(x, y) \in E \times F$. Para isso sejam $(\varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma rede em E' e $\varphi \in E'$ tais que $\varphi_\lambda \xrightarrow{w^*} \varphi$. Então $\varphi_\lambda(x) \longrightarrow \varphi(x)$ para todo $x \in E$. Daí basta notarmos que para todo $x \in E$ e todo $y \in F$,

$$\|\varphi_\lambda(x)y - \varphi(x)y\| = |\varphi_\lambda(x) - \varphi(x)| \cdot \|y\| \longrightarrow 0,$$

ou seja, $\varphi_\lambda(x)y \longrightarrow \varphi(x)y$ em F. Disso segue que $\varphi_\lambda(x)y \xrightarrow{w} \varphi(x)y$ em F, e portanto $A(x, y)$ é w^*-w-contínua para todo $(x, y) \in E \times F$.

Vejamos agora que A é uma aplicação bilinear: para todos $x, z \in E, y \in F$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $\varphi \in E'$,

$$A(\lambda x + z, y)(\varphi) = \varphi(\lambda x + z)y = \lambda\varphi(x)y + \varphi(z)y = \lambda A(x, y)(\varphi) + A(z, y)(\varphi),$$

provando que $A(\lambda x+z, y) = \lambda A(x, y)+A(z, y)$, ou seja, A é linear na primeira coordenada. De maneira análoga mostra-se que A é linear na segunda coordenada. Sendo A bilinear, pelo Teorema 3.6.5 existe um único operador linear $A_L \colon E \otimes F \longrightarrow \mathcal{L}_{w^*-w}(E'; F)$ tal que $A_L(x \otimes y) = A(x, y)$ para todo $x \otimes y \in E \otimes F$. Mostraremos em seguida que, considerando a norma injetiva no produto tensorial, o operador A_L é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem, isto é, o operador

$$A_L \colon E \otimes_\epsilon F \longrightarrow \mathcal{L}_{w^*-w}(E'; F)$$

é um isomorfismo isométrico sobre a imagem. Para isso note que, para todo tensor $u = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i$ em $E \otimes F$ e todo funcional $\varphi \in E'$,

$$A_L(u)(\varphi) = A_L\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i\right)(\varphi) = \left(\sum_{i=1}^{n} A_L(x_i \otimes y_i)\right)(\varphi)$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} A(x_i, y_i) \right) (\varphi) = \sum_{i=1}^{n} A(x_i, y_i)(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) y_i,$$

donde segue que

$$\|A_L(u)\| = \sup\{\|A_L(u)(\varphi)\| : \varphi \in B_{E'}\} = \sup \left\{ \left\| \sum_{i=1}^{n} \varphi(x_i) y_i \right\| : \varphi \in B_{E'} \right\} = \epsilon(u).$$

Com isso concluímos que A_L é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem, e portanto $E \otimes_\epsilon F$ é isomorfo isometricamente a um subespaço de $\mathcal{L}_{w^*-w}(E'; F)$. ■

Nosso objetivo é mostrar que o espaço $E \widehat{\otimes}_\epsilon F$ é isomorfo isometricamente a um subespaço de $\mathcal{L}_{w^*-w}(E'; F)$. Para isso, além do lema acima, precisaremos do seguinte resultado da teoria linear dos espaços de Banach.

Teorema 3.6.8 *Sejam E e F espaços de Banach, G subespaço denso de E e $T \colon G \longrightarrow F$ um operador linear contínuo. Então existe um único operador linear contínuo $\widetilde{T} \colon E \longrightarrow F$ tal que $\widetilde{T}(x) = T(x)$ para todo $x \in G$ e $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$. Mais ainda, se T for um isomorfismo (isométrico) então $\widetilde{T}$ também será um isomorfismo (isométrico).*

Demonstração. Segue do fato dos operadores lineares contínuos entre espaços normados serem uniformemente contínuos e do resultado análogo para funções uniformemente contínuas de um espaço métrico a valores em um espaço métrico completo. Para os detalhes veja [37, Lema 3.32]. ■

Teorema 3.6.9 *O espaço de Banach $E \widehat{\otimes}_\epsilon F$ é isomorfo isometricamente a um subespaço de $\mathcal{L}_{w^*-w}(E'; F)$.*

Demonstração. Pelo Lema 3.6.7 sabemos que existe um operador $T \colon E \otimes_\epsilon F \longrightarrow \mathcal{L}_{w^*-w}(E'; F)$ que é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem. Como os espaços $E \widehat{\otimes}_\epsilon F$ e $\mathcal{L}_{w^*-w}(E'; F)$ são de Banach e $E \otimes_\epsilon F$ é um subespaço denso de $E \widehat{\otimes}_\epsilon F$ (todo espaço normado é denso em seu completamento), pelo Teorema 3.6.8 existe um isomorfismo isométrico sobre sua imagem $\widetilde{T} \colon E \widehat{\otimes}_\epsilon F \longrightarrow \mathcal{L}_{w^*-w}(E'; F)$. Com isso concluímos a demonstração. ■

Teorema 3.6.10 *Se E e F são espaços de Schur, então o produto tensorial injetivo $E \widehat{\otimes}_\epsilon F$ é um espaço de Schur.*

Demonstração. Vimos no Teorema 3.4.7 que se E e F são espaços de Schur, então o espaço $\mathcal{L}_{w^*-w}(E'; F)$ é de Schur. Como $E \widehat{\otimes}_\epsilon F$ é isomorfo isometricamente a um subespaço de $\mathcal{L}_{w^*-w}(E'; F)$, segue da Proposição 2.2.9 que $E \widehat{\otimes}_\epsilon F$ é um espaço de Schur. ■

3.6.2 O dual do produto tensorial injetivo

O dual topológico do espaço $E\widehat{\otimes}_\epsilon F$ pode ser totalmente descrito através das aplicações bilineares integrais da seguinte forma:

Teorema 3.6.11 *Sejam E e F espaços de Banach e $A\colon E\times F \longrightarrow \mathbb{K}$ uma aplicação bilinear. Então sua linearização A_L é um funcional linear contínuo em $E\widehat{\otimes}_\epsilon F$ se, e somente se, existe uma medida de Borel regular μ no espaço compacto $B_{E'}\times B_{F'}$ tal que*

$$A(x,y)=\int_{B_{E'}\times B_{F'}}\varphi(x)\psi(y)d\mu(\varphi,\psi) \tag{3.1}$$

para todos $x\in E$, $y\in F$.

Demonstração. [45, Proposition 3.14]. ∎

Seja (X,Σ,μ) um espaço de medida. Uma *partição* de X é uma coleção finita de conjuntos mensuráveis, disjuntos 2 a 2, tal que a união desses conjuntos mensuráveis seja igual a X. Ainda, a *norma de variação* da medida μ é definida por:

$$\|\mu\| := \sup\left\{\sum_{i=1}^{n}|\mu(M_i)|;\ \{M_1,\cdots,M_n\} \text{ é uma partição de } X\right\}.$$

Definição 3.6.12 Sejam E e F espaços de Banach e $A\colon E\times F\longrightarrow\mathbb{K}$ uma aplicação bilinear. A é uma *aplicação bilinear integral* se sua linearização A_L for um funcional linear contínuo em $E\widehat{\otimes}_\epsilon F$. A *norma integral* de A é definida por:

$$\|A\|_I := \inf\{\|\mu\| : \mu \text{ é uma medida de Borel regular que satisfaz } 3.1\},$$

onde $\|\mu\|$ é a norma de variação de μ.

Proposição 3.6.13 *O espaço das aplicações bilineares integrais $A\colon E\times F\longrightarrow\mathbb{K}$ com a norma integral $\|\cdot\|_I$ é um espaço de Banach, denotado por $\mathcal{B}_I(E\times F)$. Mais ainda,*

$$(E\widehat{\otimes}_\epsilon F)' \overset{1}{=} \mathcal{B}_I(E\times F).$$

Demonstração. [45, pág 59]. ∎

Proposição 3.6.14 *Se E e F são espaços de Banach, então $E\widehat{\otimes}_\epsilon F$ possui cópias isométricas de E e de F.*

Demonstração. Primeiramente mostraremos que $E \overset{1}{\hookrightarrow} E\widehat{\otimes}_\epsilon F$. Tome $y\in F$ tal que $\|y\|=1$ e defina o operador

$$T\colon E\longrightarrow E\widehat{\otimes}_\epsilon F;\ \ T(x):=x\otimes y \ \text{ para todo } x\in E.$$

A linearidade de T segue facilmente dos itens (I) e (II) da Observação 3.6.2. Além disso, dado $x\in E$ temos

$$\epsilon(T(x))=\epsilon(x\otimes y)=\sup\{\|\varphi(x)y\| :\ \varphi\in B_{E'}\}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup\{|\varphi(x)| \cdot \|y\| : \ \varphi \in B_{E'}\} \\
&= \|y\| \sup\{|\varphi(x)| : \ \varphi \in B_{E'}\} \overset{(*)}{=} \|y\| \cdot \|x\| = \|x\|,
\end{aligned}
$$

onde a igualdade $(*)$ é garantida pelo Teorema de Hahn-Banach (Teorema 1.1.4). Logo T é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem e portanto $E \overset{1}{\hookrightarrow} E\widehat{\otimes}_\epsilon F$.

Para mostrar que $F \overset{1}{\hookrightarrow} E\widehat{\otimes}_\epsilon F$, tome $x \in E$ tal que $\|x\| = 1$ e defina o operador

$$
S\colon F \longrightarrow E\widehat{\otimes}_\epsilon F; \quad S(y) := x \otimes y \ \text{ para todo } y \in F.
$$

Pelo mesmo raciocínio usado em T obtemos que S é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem, concluindo assim a demonstração. ■

Teorema 3.6.15 *Sejam E e F espaços de Schur. Se E ou F tem dimensão infinita, então os espaços $(E\widehat{\otimes}_\epsilon F)'$ e $\mathcal{B}_I(E \times F)$ não são de Schur.*

Demonstração. Como E ou F tem dimensão infinita, da Proposição 3.6.14 segue que o espaço $E\widehat{\otimes}_\epsilon F$ também tem dimensão infinita. Mas $E\widehat{\otimes}_\epsilon F$ é um espaço de Schur pelo Teorema 3.6.10, daí segue pela Proposição 2.4.7 que $(E\widehat{\otimes}_\epsilon F)'$ não é de Schur. O caso do espaço das aplicações bilineares integrais decorre agora da Proposição 3.6.13 juntamente com o fato da propriedade de Schur ser preservada por isomorfismos. ■

3.6.3 O produto tensorial projetivo

O objetivo desta seção é enunciar um problema célebre envolvendo a propriedade de Schur.

A segunda forma que veremos de normar o produto tensorial de dois espaços normados é a chamada norma projetiva.

Definição 3.6.16 Sejam E e F espaços de Banach. A *norma projetiva* em $E \otimes F$ é definida da seguinte forma:

$$
\pi(u) := \inf \left\{ \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|_E \cdot \|y_i\|_F : \ u = \sum_{i=1}^{k} x_i \otimes y_i \right\},
$$

para todo tensor $u \in E \otimes F$. Observe que o ínfimo é tomado sobre todas as representações do tensor.

A norma projetiva é uma norma no espaço produto tensorial e denotamos o espaço produto tensorial com essa norma por $E \otimes_\pi F$ (veja [45, Proposition 2.1]). O espaço $E \otimes_\pi F$ é de Banach se, e somente se, os espaços E e F têm dimensão finita (veja [45, pág 17]).

Definição 3.6.17 Sejam E e F espaços de Banach. O *produto tensorial projetivo* é definido como sendo o completamento do espaço $E \otimes_\pi F$, e é denotado por $E\widehat{\otimes}_\pi F$.

Proposição 3.6.18 *Sejam E e F espaços de Banach. A aplicação bilinear*

$$
\sigma\colon E \times F \longrightarrow E\widehat{\otimes}_\pi F \ , \ \sigma((x,y)) := x \otimes y,
$$

é contínua.

Demonstração. Para todo $(x, y) \in E \times F$,

$$\pi(\sigma((x, y))) = \pi(x \otimes y) \leq \|x\|_E \cdot \|y\|_F,$$

provando que σ é contínua. ∎

Teorema 3.6.19 *Sejam E, F e G espaços de Banach. Para toda aplicação bilinear contínua $A \in \mathcal{L}(E, F; G)$ existe um único operador linear contínuo $A_L : E\widehat{\otimes}_\pi F \longrightarrow G$ tal que $A_L(x \otimes y) = A(x, y)$ para todos $x \in E$ e $y \in F$. Ou seja, o diagrama*

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[r, "A"] \arrow[d, "\sigma"'] & G \\ E\widehat{\otimes}_\pi F \arrow[ur, "A_L"'] & \end{tikzcd}$$

é comutativo. Mais ainda, a correspondência $A \longrightarrow A_L$ é um isomorfismo isométrico entre $\mathcal{L}(E, F; G)$ e $\mathcal{L}(E\widehat{\otimes}_\pi F; G)$.

Demonstração. [45, Theorem 2.9]. ∎

Proposição 3.6.20 *Sejam E e F espaços de Banach. Se E' e F' têm a propriedade de Schur, então $(E\widehat{\otimes}_\pi F)'$ é um espaço de Schur.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.5.4 temos que $\mathcal{L}(E, F; \mathbb{K})$ é um espaço de Schur. Como a propriedade de Schur é preservada por isomorfismos e

$$\mathcal{L}(E, F; \mathbb{K}) \stackrel{1}{=} \mathcal{L}(E\widehat{\otimes}_\pi F; \mathbb{K}) = (E\widehat{\otimes}_\pi F)',$$

então $(E\widehat{\otimes}_\pi F)'$ é um espaço de Schur. ∎

Diferentemente do que vimos no espaço produto tensorial injetivo, quando trabalhamos com a norma projetiva não sabemos se podemos garantir que $E\widehat{\otimes}_\pi F$ é um espaço de Schur sempre que E e F forem espaços de Schur. Mais ainda, não temos em mãos um exemplo de espaços de Schur E e F tais que $E\widehat{\otimes}_\pi F$ não seja Schur.

Questão em aberto: Se E e F são espaços de Schur, então o produto tensorial projetivo $E\widehat{\otimes}_\pi F$ também é um espaço de Schur?

Em [7], Botelho e Rueda fazem uma pesquisa sobre a propriedade de Schur no produto tensorial projetivo e encontram indícios que levam a crer que a resposta para tal pergunta seja negativa, porém a questão ainda está em aberto.

3.7 Os espaços ponderados do tipo H^∞

Esta seção se baseia nos artigos [40] de Miralles e [5] de Bonet e Wolf.

Definição 3.7.1 Sejam $n \in \mathbb{N}$ e G um subconjunto aberto não-vazio de $\mathbb{C}^n$.

(a) Uma função $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ é *analítica* se para cada bola centrada em $z_0 \in G$ e contida em G, $B(z_0, r) \subset G$ onde $r > 0$, existe uma série de potências $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$, cuja soma é $f(z)$ para cada $z \in B(z_0, r)$, onde $c_k \in \mathbb{C}$ e $z \in G$.

Denotamos o espaço vetorial das funções analíticas em G por $H(G)$.

(b) Seja $v\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^+$ uma função limitada, contínua e estritamente positiva, chamada *função peso*. Definimos:

- $H_v(G) := \{f \in H(G):\ \|f\|_\infty := \sup\limits_{z \in G} v(z)|f(z)| < \infty\}$.
- $H_{v_0}(G) := \{f \in H_v(G):$ para todo $\varepsilon > 0$ existe um subconjunto compacto K de G tal que $v(z)|f(z)| < \varepsilon$ para todo $z \notin K\}$.

Tanto $H_v(G)$ quanto $H_{v_0}(G)$ munidos com a norma $\|\cdot\|_\infty$ são espaços de Banach, e são chamados de *espaços ponderados do tipo* H^∞ (veja [40] e [5]). Nosso objetivo é mostrar que $(H_{v_0}(G))'$ é um espaço de Schur.

Teorema 3.7.2 *Seja G um subconjunto aberto de $\mathbb{C}^n$, e seja v uma função peso definida em G. Então o espaço $H_{v_0}(G)$ é isomorfo a um subespaço fechado de c_0.*

Demonstração. [5, Theorem 1]. ■

Lema 3.7.3 *c_0 não possui cópia de ℓ_1.*

Demonstração. Suponha que exista um isomorfismo $T\colon \ell_1 \longrightarrow T(\ell_1) \subset c_0$. Neste caso $(T(\ell_1))^\perp$ é um subespaço fechado de $(c_0)'$, e como $(c_0)'$ é separável segue da Proposição 1.6.3 que $(c_0)'/T(\ell_1)^\perp$ é separável. Pela Proposição 1.6.6, $(T(\ell_1))'$ é isomorfo isometricamente a $(c_0)'/T(\ell_1)^\perp$, donde segue que $(T(\ell_1))'$ é separável. Como o operador adjunto

$$T'\colon (T(\ell_1))' \longrightarrow (\ell_1)' \stackrel{1}{=} \ell_\infty$$

é um isomorfismo, então ℓ_∞ deveria ser separável, o que sabemos não ocorrer. Portanto $\ell_1 \not\hookrightarrow c_0$. ■

Teorema 3.7.4 *Seja G um subconjunto aberto de $\mathbb{C}^n$ e v uma função peso definida em G. Então $(H_{v_0}(G))'$ é um espaço de Schur.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.7.2, $H_{v_0}(G)$ é isomorfo a um subespaço fechado de c_0, digamos M. Pela Observação 2.3.25, M tem a propriedade de Dunford-Pettis, então $H_{v_0}(G)$ tem a propriedade de Dunford-Pettis e, pelo Teorema 2.4.5, só nos resta mostrar que $\ell_1 \not\hookrightarrow H_{v_0}(G)$. Suponha que $\ell_1 \hookrightarrow H_{v_0}(G)$. Neste caso existe um isomorfismo

$$T\colon \ell_1 \longrightarrow T(\ell_1) \subset H_{v_0}(G).$$

Como $H_{v_0}(G)$ é isomorfo a um subespaço fechado de c_0, existe um isomorfismo

$$S\colon H_{v_0}(G) \longrightarrow S(H_{v_0}(G)) \subset c_0.$$

Então a restrição de S a $T(\ell_1)$:

$$\widetilde{S} := S_{|_{T(\ell_1)}} \colon T(\ell_1) \longrightarrow S(T(\ell_1)) \subset c_0$$

também é um isomorfismo. Logo

$$\widetilde{S} \circ T \colon \ell_1 \longrightarrow S(T(\ell_1)) \subset c_0,$$

é também um isomorfismo, provando que $\ell_1 \hookrightarrow c_0$, o que contraria o Lema 3.7.3. Portanto $\ell_1 \not\hookrightarrow H_{v_0}(G)$ e, pelo Teorema 2.4.5, concluímos que $(H_{v_0}(G))'$ é um espaço de Schur. ■

3.8 O espaço de Hagler JH

O espaço de Hagler JH foi construído em 1977 por James Hagler [29]. Trata-se de um espaço separável com dual não separável tal que $\ell_1 \not\hookrightarrow JH$ e tal que toda sequência normalizada fracamente nula em JH tem uma subsequência equivalente à base canônica de c_0. Além disso, JH' possui a propriedade de Schur.

Para a construção do espaço JH consideremos o conjunto $V = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \{0,1\}^n$. Se $\varphi \in V$ é tal que $\varphi \in \{0,1\}^n$, então dizemos que $|\varphi| = n$ e denotaremos $\varphi = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Desse modo, podemos enxergar o conjunto V da seguinte forma:

$$V = \{(0), (1), (0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (0,0,0), (0,0,1), \ldots\}.$$

Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ com $m \geq n$ e $\psi = (\delta_1, \ldots, \delta_m) \in V$. Dizemos que $\psi \geq \varphi$ se $\delta_i = \varepsilon_i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Se $\psi \geq \varphi$ e $|\psi| > |\varphi|$, então escreveremos $\psi > \varphi$.

Definição 3.8.1 Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ com $m \geq n$. Dizemos que um subconjunto $S \subset V$ é um *n-m-segmento* se:

(I) Para cada $k \in \mathbb{N}$ com $n \leq k \leq m$ existe um único $\varphi \in S$ com $|\varphi| = k$.

(II) Se $\varphi, \psi \in S$ e $|\psi| > |\varphi|$, então $\psi > \varphi$.

Um subconjunto $S \subset V$ é um *segmento* se ele for um n-m-segmento para alguma escolha de $n, m \in \mathbb{N}$.

Dado um conjunto X qualquer, uma função $f \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ é *finitamente não-nula* se o conjunto $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ é finito. É fácil ver que o conjunto das funções finitamente não-nulas definidas em um conjunto X e tomando valores em $\mathbb{R}$ é um espaço vetorial com as operações usuais de funções.

Seja $f \colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função finitamente não-nula. Para todo segmento S define-se:

$$S^*(f) := \sum_{\varphi \in S} f(\varphi).$$

Não é difícil mostrar que S^* é um funcional linear para todo segmento $S \subset V$ fixado.

Definição 3.8.2 Sejam $r \in \mathbb{N}$ e $S_1, \ldots, S_r$ segmentos em V. Dizemos que $\{S_1, \ldots, S_r\}$ é um *conjunto de segmentos admissíveis* se:

(I) Existem $m, n \in \mathbb{N}$ com $n \leq m$ tais que cada S_i é um n-m-segmento para $i = 1, \ldots, r$.

(II) $S_i \cap S_j = \emptyset$ para todos $i \neq j$, com $i, j = 1, \ldots, r$.

Proposição 3.8.3 *Seja $f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função finitamente não-nula. A expressão*

$$\|f\| := \sup\left\{\sum_{i=1}^{r} |S_i^*(f)| : \ r \in \mathbb{N} \text{ e } \{S_1, \ldots, S_r\} \text{ é conjunto de segmentos admissíveis}\right\}$$

define uma norma no espaço vetorial das funções finitamente não-nulas definidas em V e tomando valores em $\mathbb{R}$.

Demonstração. Para todo $r \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{r} |S_i^*(f)| = \sum_{i=1}^{r}\left|\sum_{\varphi \in S_i} f(\varphi)\right| \leq \sum_{i=1}^{r}\sum_{\varphi \in S_i} |f(\varphi)| \overset{(*)}{\leq} \sum_{\varphi \in V} |f(\varphi)| < \infty,$$

onde a desigualdade $(*)$ segue do fato de que $S_i \cap S_j = \emptyset$ para todos $i \neq j$ em todo conjunto de segmentos admissíveis $\{S_1, \ldots, S_r : r \in \mathbb{N}\}$. Isso prova que o conjunto

$$\left\{\sum_{i=1}^{r} |S_i^*(f)| : \ r \in \mathbb{N} \text{ e } S_1, \ldots, S_r \text{ é um conjunto de segmentos admissíveis}\right\}$$

é limitado superiormente por $\sum\limits_{\varphi \in V} |f(\varphi)|$, e portanto possui supremo. Isso nos garante que $\|f\| \in \mathbb{R}$ para toda $f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ finitamente não-nula. O conjunto unitário $\{\varphi\}$ é um segmento para todo $\varphi \in V$. Mais ainda, o conjunto unitário $\{\{\varphi\}\}$ é um conjunto de segmentos admissíveis para todo $\varphi \in V$. Então,

$$\begin{aligned} \|f\| = 0 &\Rightarrow |\{\varphi\}^*(f)| = 0 \text{ para todo } \varphi \in V \\ &\Rightarrow |f(\varphi)| = 0 \text{ para todo } \varphi \in V \\ &\Rightarrow f(\varphi) = 0 \text{ para todo } \varphi \in V \\ &\Rightarrow f = 0. \end{aligned}$$

Os demais axiomas de norma são facilmente verificados, concluindo assim que $\|\cdot\|$ é uma norma. ■

Definição 3.8.4 O *espaço de Hagler JH* é o completamento do espaço das funções finitamente não-nulas $f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ com a norma $\|\cdot\|$ definida na proposição acima.

Precisamos do seguinte resultado para provar que o dual do espaço de Hagler é de Schur.

Proposição 3.8.5 [29, Lemma 14] *Seja $(g_n)_n$ uma sequência em JH' com $\|g_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Se $g_n \xrightarrow{w^*} 0$, então $(g_n)_n$ tem uma subsequência equivalente à base canônica de ℓ_1.*

Teorema 3.8.6 *JH' possui a propriedade de Schur.*

Demonstração. Seja $(g_n)_n$ uma sequência em JH' com $\|g_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Suponha que $g_n \xrightarrow{w} 0$. Neste caso, pela Proposição 1.3.12 decorre que $g_n \xrightarrow{w^*} 0$ e, pela Proposição 3.8.5, $(g_n)_n$ possui uma subsequência $(g_{n_j})_j$ equivalente à base canônica de ℓ_1. Com isso, existe um isomorfismo

$$T\colon \overline{[\{g_{n_j} : j \in \mathbb{N}\}]} \longrightarrow \ell_1; \quad T(g_{n_j}) = e_j \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Da continuidade de T segue, pela Proposição 1.3.7, que T é w-w-contínuo, e consequentemente

$$e_j = T(g_{n_j}) \xrightarrow{w} 0 \text{ em } \ell_1.$$

Como ℓ_1 é de Schur, teríamos $e_j \longrightarrow 0$ em ℓ_1, o que obviamente não é verdade. Logo $g_n \overset{w}{\not\longrightarrow} 0$, e pelo item *(h)* do Teorema 2.1.8 concluímos que JH' possui a propriedade de Schur. ■

3.9 Outros espaços de Schur

Encontramos na literatura vários outros espaços de Banach com a propriedade de Schur. Por falta de tempo, e também pela alta sofisticação das construções desses espaços e das demonstrações de que eles gozam da propriedade de Schur, não foi possível incluir esses espaços com todos os detalhes nesta dissertação. Contudo, acreditamos que seja válido apresentar tais espaços, mesmo sem os detalhes das demonstrações, por serem exemplos que contribuem para a compreensão do papel desempenhado pela propriedade de Schur dentro da teoria dos espaços de Banach. Selecionamos quatro exemplos e apresentaremos esses resultados nas subseções a seguir.

3.9.1 O espaço de Bourgain-Pisier

Em [9], Jean Bourgain e Gilles Pisier provam que todo espaço de Banach separável E é isomorfo isometricamente a um subespaço $\widetilde{E}$ de um $\mathcal{L}_\infty^\lambda$-espaço separável $\mathcal{L}_\infty^\lambda[E]$, de modo que o espaço quociente $\mathcal{L}_\infty^\lambda[E]/\widetilde{E}$ possui a propriedade de Schur e a propriedade de Radon-Nikodym (para a definição da propriedade de Radon-Nikyodym veja, por exemplo, [1, pág 118]). O espaço $\mathcal{L}_\infty^\lambda[E]$ é conhecido como *espaço de Bourgain-Pisier* associado ao espaço separável E, e foi construido com intuito de responder algumas questões que estavam abertas, como por exemplo:

(I) Tomando $E = \ell_2$, os autores obtêm um $\mathcal{L}_\infty^\lambda$-espaço com a propriedade de Radon-Nikodym tal que o produto tensorial projetivo $\mathcal{L}_\infty^\lambda[\ell_2]\widehat{\otimes}_\pi\mathcal{L}_\infty^\lambda[\ell_2]$ contém cópia de c_0, e consequentemente não possui a propriedade de Radon-Nikodym.

(II) Tomando $E = L_1[0,1]$, os autores obtêm um $\mathcal{L}_\infty^\lambda$-espaço que não possui a propriedade de Radon-Nikodym e mesmo assim não contém cópia de c_0.

Definição 3.9.1 Seja $\lambda \geq 1$. Um espaço de Banach E é um *$\mathcal{L}_\infty^\lambda$-espaço* se para todo subespaço F de E, de dimensão finita, existir um subespaço G de E, de dimensão finita, contendo F para o qual existe um isomorfismo $T\colon G \longrightarrow \ell_\infty^{dim(G)}$ com $\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \leq \lambda$. Quando existir um $\lambda \geq 1$ tal que E seja um $\mathcal{L}_\infty^\lambda$-espaço escreveremos apenas que E é um *$\mathcal{L}_\infty$-espaço.*

Exemplo 3.9.2 Para todo espaço topológico compacto Hausdorff K, $C(K)$ é um $\mathcal{L}_\infty^\lambda$-espaço para todo $\lambda > 1$ (veja [45, pág 51]).

Teorema 3.9.3 [9, Theorem 2.1] *Sejam $\lambda > 1$ e E um espaço de Banach separável. Então existe um $\mathcal{L}_\infty^\lambda$-espaço separável, denotado por $\mathcal{L}_\infty^\lambda[E]$, que contém uma cópia isométrica de E, digamos $\widetilde{E}$, e tal que o espaço quociente $\mathcal{L}_\infty^\lambda[E]/\widetilde{E}$ possui a propriedade de Schur.*

O teorema acima é o resultado principal apresentado em [9] e é demonstrado apenas para espaços de Banach separáveis. Em [38], J. López-Abad estende esse resultado para espaços de Banach de dimensão infinita em geral:

Teorema 3.9.4 [38, Theorem 3.1] *Todo espaço de Banach E de dimensão infinita é isomorfo isometricamente a um subespaço $\widetilde{E}$ de um $\mathcal{L}_\infty$-espaço, denotado por $\mathcal{L}_\infty[E]$, tal que o espaço quociente $\mathcal{L}_\infty[E]/\widetilde{E}$ possui a propriedade de Schur.*

Usando o resultado provado por J. López-Abad juntamente com o fato da propriedade de Schur ser uma propriedade de três espaços (Proposição 2.2.14) e ser preservada por isomorfismos, obtemos o seguinte corolário:

Corolário 3.9.5 *Seja E um espaço de Schur de dimensão infinita. Então $\mathcal{L}_\infty[E]$ possui a propriedade de Schur.*

3.9.2 O espaço KW com as propriedades de Schur e de Daugavet

Em 1963, Daugavet [16] demonstrou que todo operador compacto $T\colon C[0,1] \longrightarrow C[0,1]$ satisfaz a equação

$$\|id + T\| = 1 + \|T\|.$$

Essa equação é chamada de *equação de Daugavet* e motivou a definição a seguir.

Definição 3.9.6 Um espaço de Banach E tem a *propriedade de Daugavet* se todo operador compacto $T\colon E \longrightarrow E$ satisfaz a equação de Daugavet.

No artigo [32], Kadets e Werner apresentam um espaço de Banach que possui a propriedade de Schur e de Daugavet e encerram a dúvida sobre a existência, ou não, de um espaço de Banach que gozasse dessas duas propriedades simultaneamente. O espaço apresentado por Kadets e Werner faz parte de uma classe de espaços de Banach criados por Bourgain e Rosenthal em [10]. Antes de definir o espaço apresentado em [32], precisamos de alguns resultados sobre o produto cartesiano infinito enumerável de espaços de medida.

Definição 3.9.7 Seja $((X_i, \Sigma_i))_i$ uma sequência de espaços mensuráveis e considere o produto cartesiano generalizado

$$\prod_{i=1}^{\infty} X_i := \{(x_i)_i : \ x_i \in X_i \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\}.$$

No caso em que $X_i = X$ para todo i, escreve-se $X^{\mathbb{N}}$. Denotamos a σ-álgebra em $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ gerada por todos os subconjuntos da forma

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_i \times X_{i+1} \times X_{i+2} \times \cdots,$$

onde $A_j \in \Sigma_j$ para todo $j = 1, \ldots, i$, e todo $i \in \mathbb{N}$, por $\prod_{i=1}^{\infty} \Sigma_i$, e a chamaremos de *$\sigma$-álgebra produto*. A existência da medida produto de um número enumerável de medidas de probabilidade é dada pelo:

Teorema 3.9.8 [41, Theorem 2, pág 51] *Seja $((X_i, \Sigma_i, P_i))_i$ uma sequência de espaços de probabilidade. Existe exatamente uma medida de probabilidade P em $\prod_{i=1}^{\infty} \Sigma_i$ tal que*

$$P(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_i \times X_{i+1} \times X_{i+2} \times \cdots) = P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_i), \tag{3.2}$$

para todo $A_j \in \Sigma_j$, $j = 1, \ldots, i$, e todo $i \in \mathbb{N}$.

Como o intervalo $[0,1]$ com a σ-álgebra e medida de Lebesgue é um espaço de probabilidade, então pelo teorema acima existe uma única medida de probabilidade P na σ-álgebra produto do espaço

$$X := [0,1]^{\mathbb{N}} = \{(x_i)_i : \ x_i \in [0,1] \text{ para todo } i \in \mathbb{N}\}$$

satisfazendo (3.2). Denotaremos esse espaço de probabilidade por (X, Σ, P) e ele será o espaço de probabilidade que consideraremos durante toda a construção apresentada a seguir.

Definição 3.9.9 Dizemos que um subespaço G de $L_1(X, \Sigma, P)$ *depende apenas de um número finito de coordenadas* se existe um natural r tal que para toda $f \in G$, $f(x) = f(y)$ para todo $x = (x_i)_i$ e $y = (y_i)_i$ em X com $x_i = y_i$ para todos $i = 1, \ldots, r$.

Proposição 3.9.10 [32, Lemma, 2.4] *Seja G um subespaço de $L_1(X, \Sigma, P)$ de dimensão finita dependendo apenas de um número finito de coordenadas. Sejam $\{g_k : k = 1, \ldots, m\}$ um subconjunto de S_G e $\varepsilon > 0$. Então existe um subespaço F de $L_1(X, \Sigma, P)$ de dimensão finita, dependendo apenas de um número finito de coordenadas e contendo G, e existem um inteiro n e um subconjunto $\{f_{k,j} : k = 1, \ldots, m \text{ e } j = 1, \ldots, n\}$ de S_F tais que:*

(a) $\|g + f_{k,j}\|_{L_1} \geq 2 - \varepsilon$ *para toda $g \in S_G$ e todos $k = 1, \ldots, m$ e $j = 1, \ldots, n$.*

(b) $\left\| g_k - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f_{k,j} \right\|_{L_1} \leq \varepsilon$ *para todo $k = 1, \ldots, m$.*

(c) Para toda $f \in B_F$ existe $g \in B_G$ com $d(f,g) \leq \varepsilon$, onde d é a métrica

$$d(f,g) := \inf\{\delta > 0 : \ P\{t : \ |f(t) - g(t)| \geq \delta\} \leq \delta\}$$

em $L_1(X, \Sigma, P)$.

Construção do espaço KW: Iniciamos a construção do espaço KW considerando o subespaço E_1 de $L_1(X, \Sigma, P)$ como o espaço gerado pela função constante igual a 1 e fixando uma sequência decrescente $(\varepsilon_N)_N$ de números reais positivos satisfazendo a condição:

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} \varepsilon_j < \varepsilon_N \text{ para todo } N \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Note que existe sequência satisfazendo (3.3), tome por exemplo a sequência $\left(\frac{1}{3^N}\right)_N$. Dividiremos o processo em etapas.

ETAPA 1: Aplique a Proposição 3.9.10 para a seguinte escolha: $G = E_1$, $m = 1$, $g_1 = 1$, $\varepsilon = \varepsilon_1$, para obter um subespaço $E_2 \supset E_1$ de dimensão finita dependendo apenas de um número finito de coordenadas, $m_1 \in \mathbb{N}$ e $\{f_1, \ldots, f_{m_1}\} \subset S_{E_2}$ satisfazendo as condições *(a)*, *(b)* e *(c)*.

ETAPA 2: Aplique a Proposição 3.9.10 para a seguinte escolha: $G = E_2$, $m = m_1$, $\{g_k : k = 1, \ldots, m\} = \{f_1, \ldots, f_{m_1}\}$ e $\varepsilon = \varepsilon_2$, para obter um subespaço $E_3 \supset E_2$ de dimensão finita dependendo apenas de um número finito de coordenadas, $m_2 \in \mathbb{N}$ e $\{f_{k,j} : k = 1, \ldots, m_1 \text{ e } j = 1, \ldots, m_2\} \subset S_{E_3}$ satisfazendo as condições *(a)*, *(b)* e *(c)*.

ETAPA 3: Aplique a Proposição 3.9.10 para a seguinte escolha: $G = E_3$, $m = m_1 m_2$, $\{g_k : k = 1, \ldots, m\} = \{f_{k,j} : k = 1, \ldots, m_1 \text{ e } j = 1, \ldots, m_2\}$, $\varepsilon = \varepsilon_3$, para obter um subespaço $E_4 \supset E_3$ de dimensão finita dependendo apenas de um número finito de coordenadas, $m_3 \in \mathbb{N}$ e $\{\widetilde{f}_{k,j} : k = 1, \ldots, m_1 m_2 \text{ e } j = 1, \ldots, m_3\} \subset S_{E_4}$ satisfazendo as condições *(a)*, *(b)* e *(c)*.

Note que o processo pode seguir indutivamente, pois a cada aplicação da Proposição 3.9.10 obtemos subespaços, números inteiros e subconjuntos satisfazendo as condições exigidas nas hipóteses da própria Proposição 3.9.10, o que permite a re-aplicação ao final de cada aplicação. Assim obtemos uma sequência $(E_n)_n$ de espaços de Banach tal que

$$E_1 \subset E_2 \subset E_3 \subset \cdots \subset E_n \subset \cdots.$$

Com isso, $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ é um subespaço vetorial de $L_1(X, \Sigma, P)$ e definimos o espaço de Kadets-Werner como sendo o fecho deste subespaço em $L_1(X, \Sigma, P)$, isto é,

$$KW := \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}.$$

Teorema 3.9.11 [32, Theorem 2.5] *O espaço de Banach KW possui a propriedade de Schur e a propriedade de Daugavet.*

Para seguir precisamos da seguinte propriedade bem conhecida pelos especialistas na propriedade de Daugavet:

Proposição 3.9.12 *Todo espaço de Banach com a propriedade de Daugavet tem dimensão infinita.*

Demonstração. Seja E um espaço de Banach com a propriedade de Daugavet. Suponha que E tenha dimensão finita. Neste caso a bola unitária fechada B_E é compacta. Portanto o operador identidade $id\colon E \longrightarrow E$ é compacto, e consequentemente o operador $-id\colon E \longrightarrow E$ também é compacto. Porém,

$$\|id - id\| = 0 < 1 + \| - id\|,$$

ou seja, o operador compacto $-id\colon E \longrightarrow E$ não satisfaz a equação de Daugavet, gerando assim um absurdo. Portanto E tem dimensão infinita. ■

Corolário 3.9.13 *O dual KW' do espaço de Kadets-Werner não possui a propriedade de Schur.*

Demonstração. Pela Teorema 3.9.11 e pela proposição acima, o espaço KW tem dimensão infinita. Como KW possui a propriedade de Schur, pela Proposição 2.4.7 segue que seu dual KW' não possui a propriedade de Schur. ■

Assim como a propriedade de Schur, a propriedade de Daugavet é preservada pela ℓ_1-soma (veja [54, Theorem 1]). Desse modo, usando esse fato juntamente com o Teorema 3.1.5 temos o seguinte corolário:

Corolário 3.9.14 *O espaço $\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} KW\right)_1$ possui a propriedade de Schur e a propriedade de Daugavet.*

3.9.3 Álgebras de Banach

Nesta subseção apresentaremos dois exemplos notáveis de álgebras de Banach que possuem a propriedade de Schur. Como veremos na definição a seguir, uma álgebra de Banach é um espaço de Banach E com uma estrutura algébrica adicional gerada a partir de uma operação, definida em E, chamada de multiplicação ou produto. Assim, todos os resultados que vimos até o momento para a propriedade de Schur em espaços de Banach serão válidos em álgebras de Banach, e a estrutura adicional presente nesses novos espaços nos fornecerá mais resultados e exemplos de espaços de Schur.

Definição 3.9.15 Um espaço vetorial E sobre $\mathbb{K}$ é uma *álgebra* se E possui uma operação

$$E \times E \longrightarrow E \ ; \ (a, b) \longmapsto a \cdot b,$$

conhecida como multiplicação (ou produto), que satisfaz os seguintes axiomas para todos $a, b, c \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$:

(i) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.

(ii) $\lambda(a \cdot b) = (\lambda a) \cdot b = a \cdot (\lambda b)$.

(iii) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

Se, além das condições acima, for verdade que $a \cdot b = b \cdot a$ para todos $a, b \in E$, diz-se que a álgebra E é *comutativa*.

Exemplo 3.9.16 Sejam E um espaço vetorial e $L(E, E)$ o espaço dos operadores lineares de E em E. O espaço vetorial $L(E, E)$ é uma álgebra não-comutativa quando consideramos o produto como a composição de operadores lineares, isto é,

$$S \cdot T = S \circ T \text{ para todos } S, T \in L(E, E).$$

Definição 3.9.17 Seja E uma álgebra. Uma *norma de álgebra* é uma aplicação

$$\| \cdot \| : E \longrightarrow \mathbb{R}^+; \quad a \longmapsto \|a\|$$

tal que:

(i) $(E, \| \cdot \|)$ é um espaço normado;

(ii) $\|a \cdot b\| \leq \|a\| \cdot \|b\|$ para todos $a, b \in E$ ($\| \cdot \|$ é dita *submultiplicativa*).

Uma *álgebra de Banach* é uma álgebra completa com relação à sua norma de álgebra.

Exemplo 3.9.18

(I) O espaço $C(K)$ das funções contínuas $f : K \longrightarrow \mathbb{C}$ definidas em um espaço topológico compacto Hausdorff K, com a norma de álgebra dada pela norma usual (do sup) e o produto definido ponto-a-ponto, isto é,

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x) \text{ para todas } f, g \in C(K) \text{ e todo } x \in K,$$

é uma álgebra de Banach comutativa.

(II) Para qualquer espaço de Banach complexo E, o espaço $\mathcal{L}(E; E)$ equipado com a norma de álgebra dada pela norma usual (do sup) e com a composição de operadores sendo o produto, isto é,

$$S \cdot T = S \circ T \text{ para todos } S, T \in \mathcal{L}(E; E),$$

é uma álgebra de Banach.

No artigo [35], Anthony Lau e Ali Ülger apresentam alguns resultados sobre a propriedade de Schur em algumas álgebras de Banach. Enunciaremos um desses resultados a seguir.

Definição 3.9.19

- Um *grupo topológico* G é um grupo G munido de uma topologia de Hausdorff tal que as aplicações

$$G \longrightarrow G; \quad x \longmapsto x^{-1} \text{ e } G \times G \longrightarrow G; \quad (x, y) \longmapsto x \cdot y,$$

são contínuas.

- Se G for um espaço topológico localmente compacto então, dizemos que G é um *grupo topológico localmente compacto*.

- Seja G um grupo topológico. Uma *medida de Haar à esquerda* em G é uma medida de Borel regular μ em G tal que $\mu(gA) = \mu(A)$ para todo subconjunto mensurável A de G, onde $gA := \{g \cdot a : \ a \in A\}$ para todo $g \in G$.

Teorema 3.9.20 *Todo grupo topológico localmente compacto possui uma medida de Haar à esquerda.*

Demonstração. [25, Theorem 11.8]. ■

Exemplo 3.9.21 $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ com a operação de adição e a topologia usual são exemplos de grupos topológicos.

Definição 3.9.22 Seja G um grupo topológico localmente compacto com a medida de Haar à esquerda m. A *álgebra de grupo* $L^1(G)$ é definida como a álgebra de Banach formada por todas as funções $\varphi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ m-integráveis, com a norma de álgebra dada por:

$$\|\varphi\| := \int_G |\varphi(t)|dm(t) \ \text{ para toda } \ \varphi \in L^1(G),$$

e equipada com o seguinte produto, chamado de produto de convolução:

$$(\varphi * \psi)(t) := \int_G \varphi(s)\psi(s^{-1}t)dm(s) \ \text{ para todos } \varphi, \psi \in L^1(G) \text{ e } t \in G.$$

Seja $C(G)$ o espaço das funções contínuas definidas no grupo topológico localmente compacto G e tomando valores em $\mathbb{C}$. Vamos denotar por $P(G)$ o subconjunto de $C(G)$ formado por todas as funções definidas positivas em G, isto é, a coleção de todas as funções $\phi : G \longrightarrow \mathbb{C}$ contínuas tais que para quaisquer $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ e quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in G$, tem-se

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \overline{\lambda_i} \lambda_j \phi(a_i^{-1} \cdot a_j) \geq 0.$$

Definição 3.9.23 O subespaço de $C(G)$ gerado pelas funções de $P(G)$ será denotado por $B(G)$, isto é, $B(G) = [P(G)] \subset C(G)$, que com a multiplicação ponto-a-ponto

$$(f \cdot g)(t) := f(t)g(t) \ \text{ para todas } \ f, g \in B(G) \text{ e } t \in G,$$

e com a norma de álgebra

$$\|f\| := \sup \left\{ \left| \int_G \varphi(t)f(t)dt \right| : \ \varphi \in L^1(G) \text{ e } \|\varphi\| \leq 1 \right\},$$

torna-se uma álgebra de Banach comutativa (veja [24, Proposition 2.16]), chamada *álgebra de Fourier Stieltjes de G*.

Teorema 3.9.24 [35, Theorem 4.5] *Seja G um grupo topológico localmente compacto. A álgebra de Banach $B(G)$ tem a propriedade de Schur se, e somente se, G é compacto.*

Um segundo resultado sobre a propriedade de Schur em álgebras de Banach é encontrado em [11], onde Scott Brown apresenta condições suficientes para que o dual de uma álgebra de Banach comutativa de operadores compactos $T\colon H \longrightarrow H$ em um espaço de Hilbert H, denotada por $\mathcal{F}$, tenha a propriedade de Schur.

Teorema 3.9.25 [11, Theorem 1.1] *Seja $\mathcal{F}$ uma álgebra de Banach comutativa de operadores compactos $T\colon H \longrightarrow H$ em um espaço de Hilbert H que satisfaz as condições:*

(i) O conjunto $\{T(x) : \ x \in H \text{ e } T \in \mathcal{F}\}$ é denso em H.

(ii) O conjunto $\{T'(x) : \ x \in H' \text{e } T \in \mathcal{F}\}$ é denso em H'.

Então o dual de $\mathcal{F}$ é um espaço de Schur.

3.9.4 A propriedade de Schur em espaços vetoriais topológicos

Ao longo da dissertação, definimos e trabalhamos com a propriedade de Schur apenas em espaços de Banach. Entretanto, essa propriedade também pode ser definida em espaços vetoriais topológicos. A seguir citamos dois trabalhos onde os autores trabalham com a propriedade de Schur em tais espaços.

Em [7], Botelho e Rueda fazem um estudo da propriedade de Schur em produtos tensoriais projetivos e injetivos de espaços localmente convexos e, dentre outros resultados, generalizam os resultados que vimos nos Teoremas 3.4.7, 3.6.10 e 3.4.2 para alguns espaços localmente convexos específicos (veja [7, Proposition 4.1 e Proposition 4.3], respectivamente).

Em [34], Lascarides trabalha com alguns espaços vetoriais topológicos formados por sequências e, dentre outros resultados, apresenta condições para que um desses espaços, denotado no artigo por $c_0(p)$, tenha a propriedade de Schur (veja [34, Theorem 15]).

APÊNDICE A

TABELAS COM ESPAÇOS DE SCHUR E NÃO-SCHUR

Um interesse de quem estuda a propriedade de Schur é saber quais espaços de Banach possuem, e quais espaços não possuem tal propriedade. Tendo isso em mente, apresentamos nas duas tabelas a seguir um resumo de todos os espaços de Banach que estudamos nessa dissertação quanto à propriedade de Schur. Na primeira tabela apresentamos os espaços que gozam da propriedade de Schur e na segunda tabela apresentamos os espaços que não gozam da propriedade de Schur.

Espaços de Schur	Referências
ℓ_1 e $(c_0)'$.	Proposição 2.1.9 e Exemplo 2.2.2.
Espaços de Banach de dimensão finita.	Exemplo 2.1.2.
$C(K)'$, para todo espaço métrico compacto enumerável K.	Exemplo 2.2.3.
$C(K)'$, para todo espaço topológico compacto Hausdorff disperso K.	Teorema 3.3.4.
$\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} E_j\right)_1 := \left\{(x_j)_j : x_j \in E_j \text{ e } \\|(x_j)_j\\|_1 = \sum_{j=1}^{\infty} \\|x_j\\|_{E_j} < \infty\right\}$ quando E_j é de Schur para todo $j \in \mathbb{N}$.	Teorema 3.1.5.
O espaço de Stegall, dado por $\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \ell_2^n\right)_1$, onde ℓ_2^n representa o espaço $\mathbb{K}^n$ com a norma euclidiana para todo $n \in \mathbb{N}$.	Corolário 3.1.9.
O espaço de Tandori $\widetilde{\ell_1}$.	Teorema 3.1.13.

O espaço $\ell_1(\Gamma)$ para qualquer conjunto não-vazio Γ, onde $\ell_1(\Gamma) := \{(x_i)_{i\in\Gamma} : x_i \in \mathbb{K} \text{ para todo } i \in \Gamma, x_i \neq 0 \text{ para uma quantidade enumerável de indíces } i, \text{ e } \sum_{i\in\Gamma} \|x_i\|^p < \infty\}$.	Teorema 3.2.2.
O espaço $\mathcal{L}_{w^*-w}(E';F)$, formado pelos operadores lineares w^*-w-contínuos entre os espaços de Banach E' e F, onde E e F possuem a propriedade de Schur.	Teorema 3.4.7.
O espaço dos operadores lineares contínuos definidos em um espaço de Banach E cujo dual E' é de Schur, e tomando valores em um espaço de Schur F, $\mathcal{L}(E;F)$.	Teorema 3.4.2.
O espaço $\mathcal{L}(c_0;\ell_1)$.	Corolário 3.4.3.
O dual $(H_{v_0}(G))'$ do espaço $H_{v_0}(G)$, para qualquer subconjunto aberto $G \subset \mathbb{C}^n$. $H_{v_0}(G)$ é o espaço das funções analíticas $f\colon G \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $\\|f\\|_\infty := \sup_{z\in G} v(z)\|f(z)\| < \infty$ e para todo $\varepsilon > 0$ existe um subconjunto compacto K de G tal que $v(z)\|f(z)\| < \varepsilon$ para todo $z \notin K$, onde $v\colon G \longrightarrow \mathbb{R}^+$ é uma função peso.	Teorema 3.7.4.
O espaço de Bourgain-Pisier $\mathcal{L}_\infty[E]$ associado ao espaço de Schur de dimensão infinita E.	Corolário 3.9.5.
O espaço quociente $\mathcal{L}_\infty[E]/\widetilde{E}$ para todo espaço de Banach E.	Teoremas 3.9.3 e 3.9.4.
O produto tensorial injetivo $E\widehat{\otimes}_\epsilon F$ entre espaços de Schur E e F.	Teorema 3.6.10.
O espaço KW de Kadets-Werner, que tem as propriedades de Schur e de Daugavet.	Teorema 3.9.11.
O espaço $\left(\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} KW\right)_1$.	Corolário 3.9.14.
A álgebra de Fourier-Stieltjes $B(G)$ de um grupo topológico compacto G.	Teorema 3.9.24.
Os duais de determinadas álgebras de Banach comutativas $\mathcal{F}$ de operadores compactos $T\colon H \longrightarrow H$ em um espaço de Hilbert H.	Teorema 3.9.25.
O dual do espaço de Hagler, JH'.	Teorema 3.8.6.

O dual $(E\widehat{\otimes}_\pi F)'$ do produto tensorial projetivo $E\widehat{\otimes}_\pi F$, para todos espaços de Banach E e F tais que E' e F' são espaços de Schur.	Proposição 3.6.20.

Tabela A.1: Tabela com os espaços de Schur.

Espaços Não-Schur	Referências
ℓ_p e $L_p(X, \Sigma, \mu)$, para $1 < p < \infty$.	Exemplo 2.3.2.
c_0.	Exemplo 2.1.3.
$C(K)$, para todo espaço topológico compacto Hausdorff infinito K.	Exemplo 2.2.11.
Os espaços reflexivos de dimensão infinita.	Proposição 2.3.1.
$L_1[0,1]$.	Proposição 2.3.8.
$C[0,1]$.	Exemplo 2.2.11.
ℓ_∞.	Exemplo 2.1.5.
$(\ell_\infty)'$.	Exemplo 2.4.6.
Os espaços $\ell_\infty(\Gamma)$ e $c_0(\Gamma)$ para qualquer conjunto infinito Γ, onde $\ell_\infty(\Gamma) := \{(x_i)_{i\in\Gamma} : x_i \in \mathbb{K}$ para todo $i \in \Gamma$ e $\sup\limits_{i\in\Gamma} \lvert x_i\rvert < \infty\}$ e $c_0(\Gamma) := \{(x_i)_{i\in\Gamma} \in \ell_\infty(\Gamma) :$ o conjunto $\{i \in \Gamma : \lvert x_i\rvert \geq \varepsilon\}$ é finito para todo $\varepsilon > 0\}$.	Proposição 3.2.8.
$L_\infty[0,1]$.	Exemplo 2.2.4.
O espaço de Azimi-Hagler.	Teorema 2.3.13.
O dual KW' do espaço de Kadets-Werner.	Corolário 3.9.13.
O espaço das aplicações bilineares integrais $\mathcal{B}_I(E \times F)$ e o espaço $(E\widehat{\otimes}_\epsilon F)'$, para todos E e F Schur com E ou F de dimensão infinita.	Teorema 3.6.15.
O dual do espaço de Tandori, $\left(\widetilde{\ell_1}\right)'$.	Observação 3.1.14.

Tabela A.2: Tabela com os espaços Não-Schur.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Albiac F. e Kalton N. J., *Topics in Banach Space Theory*, Springer, 2006.

[2] Astashkin, S. V.; Lesnik, K. e Maligranda, L., *Isomorphic structure of Cesàro and Tandori spaces*. preprint disponível em arXiv:1512.03336, dez. 2015.

[3] Azimi, P. e Hagler J. N., *Examples of hereditarily ℓ_1 Banach spaces failing the Schur property*. Pacific J. Math. v. 122 (1986), 287-297.

[4] Bombal, F. e Villanueva, I., *Regular multilinear operators on $C(K)$ spaces*. Bull. Austral. Math. Soc., v. 60 (1999), n. 1, 11-20.

[5] Bonet, J. e Wolf, E., *A note on weighted Banach spaces of holomorphic functions*. Arch. Math. v. 81 (2003) 650-654.

[6] Botelho, G.; Pellegrino, D. e Teixeira, E., *Fundamentos de Análise Funcional*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[7] Botelho, G. e Rueda, P., *The Schur property on projective and injective tensor products*. Proc. Amer. Math. Soc., v. 137 (2009) n. 1, 219-225.

[8] Bourgain, J., *ℓ_1 subspaces of Banach spaces*. Lecture notes, Free University of Brussels.

[9] Bourgain, J. e Pisier, G., *A construction of $\mathcal{L}_\infty$-spaces and related Banach spaces*. Bol. Soc. Brasil. Mat., v. 14 (1983), n. 3, 109-123.

[10] Bourgain, J. e Rosenthal, H. P., *Martingales valued in certain subspaces of L_1*. Israel J. Math., v. 37 (1980), n. 1-2, 54-75.

[11] Brown, S. W., *Weak sequential convergence in the dual of an algebra of compact operators*. J. Operator Theory, v. 33 (1995), n. 1, 33-42.

[12] Castillo, J. M. F. e Simoes, M. A., *On p-summable sequences in locally convex spaces*. Extracta Math., v. 18 (2003), n. 2, 209-222.

[13] Castillo, J. M. F. e González, M., *The Dunford-Pettis property is not a three-space property.* Israel J. Math., v. 81 (1993), n. 3, 297-299.

[14] Ciarlet, P. G., *Linear and Nonlinear Functional Analysis with Applications.* Siam, 2013.

[15] Conway, J. B., *A Course in Functional Analysis.* Graduate Texts in Mathematics. 2 ed., Springer, 1990.

[16] Daugavet, I. K., *A property of completely continuous operators in the space C.* Uspekhi Mat. Nauk, v. 18 (1963), n. 5, 157-158 (texto em russo).

[17] Diestel, J., *A survey of results related to the Dunford-Pettis property.* Contemp. Math., 2, Amer. Math. Soc., 1980, 15-60.

[18] Diestel, J., *Sequences and Series in Banach Spaces*, Springer-Verlag, New York, 1984.

[19] Diestel, J.; Jarchow H. e Tonge A., *Absolutely Summing Operators*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[20] Dilworth, S. J. e Kutzarova, D., *Kadec-Klee properties for $\mathcal{L}(\ell_p, \ell_q)$.* Lecture Notes in Pure and Appl. Math., v. 172, New York, 1995, 71-83.

[21] Dunford, N. e Pettis, B. J., *Linear operations on summable functions.* Trans. Amer. Math. Soc., v. 47 (1940), 323-392.

[22] Fabian, M.; Habala, P.; Hájek, P.; Santalucía, V. M.; Pelant, J. e Zizler, V., *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry.* Canadian Mathematical Society, Springer, 2001.

[23] Defant, A. e Floret, K., *Tensor Norms and Operator Ideals.* North-Holland Mathematics Studies, 176. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1993.

[24] Eymard, P., *L'algèbre de Fourier d'un groupe localement compact.* Bull. Soc. Math. France, v. 92 (1964) 181-236 (texto em francês).

[25] Folland, G. B., *Real Analysis: Modern Techniques and their Applications.* Pure and Applied Mathematics, John Wiley & Sons, 2 ed., 1999.

[26] França, W. V., *O Espaço dos Operadores Compactos.* Dissertação de mestrado-UFRJ, Rio de Janeiro, jun. 2008.

[27] Fremlin, D. H., *Measure Theory-Broad Foundations.* Torres Fremlin, Colchester, v. 2, jan. 2010.

[28] Grothendieck, A., *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces de type $C(K)$.* Canadian J. Math., v. 5 (1953), 129-173 (texto em francês).

[29] Hagler, J., *A counterexample to several questions about Banach spaces.* Studia Math., v. 60 (1977), n. 3, 289-308.

[30] Hissadomi, A. J., *Propriedade de Dunford-Pettis Polinomial e Espaços Polinomialmente de Schur*. Dissertação de mestrado-USP, São Paulo, mar. 1998.

[31] Junior , C. M. S., *A Propriedade de Dunford-Pettis*. Dissertação de Mestrado-UFRJ, Rio de Janeiro, nov. 2009.

[32] Kadets, V. e Werner, D., *A Banach space with the Schur and the Daugavet property*. Proc. Amer. Math. Soc., v. 132 (2003), n. 6, 1765-1773.

[33] Lacey, H . E., *The Isometric Theory of Classical Banach Spaces*. Springer-verlag, New York, 1974.

[34] Lascarides, C. G., *A study of certain sequence spaces of Maddox and a generalization of a theorem of Iyer*. Pacific J. Math., v. 38 (1971), n. 2, 487-500.

[35] Lau, A. T. M. e Ülger, A., *Some geometric properties on the Fourier and Fourier Stieltjes algebras of locally compact groups, arens reguralìty and related problems.* Trans. Amer. Math. Soc., v. 337 (1993), n. 1, 321-359.

[36] Lindenstrauss, J. e Tzafriri, L., *Classical Banach Spaces I and II*. Springer-verlag, New York, 1996 (Reprint of the 1977, 1979 ed.).

[37] Lopes, W. A., *O Teorema de Stone-Weierstrass e Aplicações*. Dissertação de mestrado-UFU, Uberlândia, fev. 2009.

[38] López-Abad, J., *A Bourgain-Pisier construction for general Banach spaces*. J. Funct. Anal. v. 265 (2013), n. 7, 1423-1441.

[39] Megginson, R. R., *An Introduction to Banach Space Theory*. Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1998.

[40] Miralles, A., *Schur spaces and weighted spaces of type H^∞*. Quaest. Math. v. 35 (2012), n. 4, 463-470.

[41] Nachbin, L., *A Profile of Probability*. Editora da UNICAMP, 1987.

[42] Pietsch, A., *Operator Ideals*. North-Holland Mathematical Library, 20. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1980.

[43] Polac, L. G., *O Adjunto de um Polinômio Homogêneo Contínuo entre Espaços de Banach*. Dissertação de Mestrado-UFU, Uberlândia, jul. 2013.

[44] Rolewicz, S., *Functional Analysis and Control Theory*, Springer, 1987.

[45] Ryan, A. R., *Introduction to Tensor Products of Banach Spaces*. Springer Monographs in Mathematics, Springer-verlag, Londres, 2002.

[46] Schur, J., *Uber lineare transformationen in der unendlichen reihen*. J. Reine Angew. Math. v. 151 (1921), 79-111 (texto em alemão).

[47] Severiano, O. R. R., *Propriedades dos Três Espaços na Teoria dos Espaços de Banach*. Dissertação de Mestrado- UNICAMP, Campinas, fev. 2015.

[48] Silva, R. J. L., *Geometria dos Espaços de Banach $\ell_p(\ell_q)$ e $c_0(\ell_r)$*. Dissertação de mestrado-USP, São Paulo, ago. 2013.

[49] Stegall, C., *Duals of certain spaces with the Dunford Pettis property*. Notices AMS 19, 1972.

[50] Tanbay, B., *Direct sums and the Schur property*. Tr. J. of Mathematics. v. 22 (1998), 349-354.

[51] Tandori, K., *Uber einen speziellen Banachschen Raun*. Publ. Math. Debrecen, 3 (1954), 263-268 (1955) (texto em alemão).

[52] Willard, S., *General Topology*. Dover, New York, 2004.

[53] Wojtaszczyk, P., *Banach Spaces for Analysts*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Cambridge, 1991.

[54] Wojtaszczyk, P., *Some remarks on the Daugavet equation*. Proc. Amer. Math. Soc., v. 115 (1992), n. 4, 1047-1052.

[55] Yost, D., *Asplund spaces for beginners*. Acta Univ. Carolin. Math. Phys., v. 34 (1993), n. 2, 159-177.