

FRANCO BARBI

**EXPERIMENTAÇÃO NUMÉRICA DE BOLHAS EM
ASCENSÃO**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA
2016

FRANCO BARBI

**EXPERIMENTAÇÃO NUMÉRICA DE BOLHAS EM
ASCENSÃO**

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **DOCTOR EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de concentração: Mecânica dos Fluidos.

Orientador: Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto

Uberlândia - MG

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

B236e Barbi, Franco, 1986-
2016 Experimentação numérica de bolhas em ascensão / Franco Barbi. -
2016.
215 f. : il.

Orientador: Aristeu da Silveira Neto.
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa
de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Escoamentos - Simulação por
computador - Teses. 3. Bolhas (Física) - Teses. I. Silveira Neto, Aristeu
da, 1955- II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-
Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 621

"O começo de todas as ciências é o espanto de as coisas serem o que são."

Aristóteles

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto pela orientação, paciência e oportunidade de trabalhar com um tema tão rico;

À Dra. Millena Matins Villar pela ajuda no desenvolvimento da tese;

Aos amigos e colegas do Laboratório de Mecânica dos Fluidos - MFLAB pelos apoios, ensinamentos e pelos momentos de descontração;

À minha família e à minha namorada pelo incentivo diário;

À Universidade Federal de Uberlândia e à Faculdade de Engenharia Mecânica pela oportunidade;

À CNPQ, CAPES, FAPEMIG e PETROBRAS pelo apoio.

BARBI, F., **Experimentação Numérica de Bolhas Ascendentes** 2016. 168 f. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

RESUMO

Em estudos de escoamentos do tipo colunas de bolhas o uso de ferramentas computacionais desempenham um importante papel por permitir que, através de experimentos virtuais, a comunidade científica agregue mais conhecimento sobre as forças que atuam nesse tipo de escoamento. Considerando a confiabilidade dos resultados, torna-se possível o aperfeiçoamento de modelos constitutivos de forças fluidodinâmicas como de arrasto, sustentação e massa virtual. O código AMR3D trabalha com malhas de refinamento localizado bloco-estruturadas que se adaptam dinamicamente às características de um dado escoamento. Utiliza-se um método de projeção para o acoplamento pressão-velocidade e o método do Volume de Fluido (VOF) para a representação das fases e interfaces do escoamento bifásico. As equações do balanço da quantidade de movimento linear são discretizadas no tempo por um esquema semi-implícito de segunda ordem (IMEX). A presente tese contribuiu com o código com a implementação de um novo critério de refinamento que captura as estruturas turbilhonares do escoamento e com um algoritmo para identificação de bolhas para que seja possível a realização de operações sobre uma mesma bolha em meio à uma população. O código é verificado e validado com problemas da literatura. Resultados de simulações de bolhas ascendentes isoladas em meio quiescente são apresentados e comparados com o diagrama de Grace indicando boa concordância. Análises de forças de resistência fluidodinâmicas atuantes nas bolhas foram apresentadas e coeficientes de arrasto, sustentação e massa virtual calculados. Através de comparações com correlações da literatura, foi possível observar concordância dos resultados. Simulações da interação entre duas bolhas de volumes conhecidos são realizadas e comparações são realizadas com resultados da literatura. Em um dos casos, o algoritmo de identificação é verificado ao rastrear consistentemente os volumes e centroides das bolhas. Simulações com população de bolhas foram apresentadas e, através do algoritmo de identificação, estima-se a força de resistência fluidodinâmica total que age em uma bolha em meio

à população. Conclui-se que, com base nos resultados, que o código AMR3D, com as implementações realizadas neste trabalho, possui potencial para a investigação de escoamentos borbulhantes.

Palavras Chave: VOF, SAMR, Dinâmica de bolhas, Coluna de Bolhas.

BARBI, F., **Numerical Experimentation of Ascending Bubbles** 2016. 168 f. Doctor Thesis, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

ABSTRACT

In bubble dynamics studies computational tools plays an important role as it allows, through virtual experimentations, the increase of knowledge about forces that act in this kind of flow. Considering results reliability, it is common to observe constitutive force models improvement, as in drag, lift and virtual mass correlations. The AMR3D code, developed in the Fluid Mechanics Laboratory - MFlab, uses locally block-structured meshes that dynamically adapts itself to characteristics of a given flow. A projection method is used for the pressure-velocity coupling, and the Volume of Fluid - VOF method for the phases representation, including interface dynamics. The equations of linear momentum balance are discretized with a second order semi-implicit scheme (IMEX). The present thesis contributes to the code with the implementation of a new refinement criteria that captures the main structures of the flow, and an identification algorithm that allows users to perform operations on a single bubble between a swarm of bubbles. The present code is verified and validated against well known literature problems. Results of isolated ascending bubbles in a quiescent media are presented and compared with Grace's diagram, showing good agreement. Fluid-dynamic forces are computed and analyzed, as well as fluid-dynamics forces coefficients for drag, lift and virtual mass, showing good agreement with literature. Simulations of a pair of bubbles interacting were presented and comparisons were realized against results of literature, showing good proximity. In one of the cases, the bubble identification algorithm was tested as it calculates bubbles known volumes and centroid positions consistently. Bubble swarm simulations were presented, and the identification algorithm were also applied to track a bubble as it ascend though the domain to expose the fluid-dynamics forces acting on it. With the presented results, one can conclude that the AMR3D code has a potential for investigative approaches in bubbly flows.

Keywords: VOF, SAMR, Bubble dynamics, Bubble column.

Lista de Figuras

1.1	Escoamento em uma coluna de bolhas (WARSITO <i>et al.</i> , 1999).	2
1.2	Hierarquia de modelos de simulação de colunas de bolhas. Fonte: Lau <i>et al.</i> (2011).	3
2.1	Diferenças entre abordagens euleriana-euleriana e euleriana-lagrangiana. Fonte: Rusche (2002).	11
2.2	Resultados da simulação E-E com as diferentes correlações para o arrasto. Fonte:Deen, Annaland e Kuipers (2004)	14
2.3	Flutuações de velocidade vertical e horizontal com as diferentes correlações. Fonte:Deen, Annaland e Kuipers (2004)	15
2.4	Perfis de velocidade média em diferentes alturas da coluna. Respectivamente, $h=0,15m$ e $h=0,25m$. Fonte:Lau <i>et al.</i> (2011)	16
2.5	Desvio padrão das velocidades em diferentes alturas da coluna. Respectivamente, $h=0,15m$ e $h=0,25m$. Fonte:Lau <i>et al.</i> (2011)	16
2.6	Diagrama de Grace (1973)	22
2.7	Influência de contaminantes no escoamento da interface de uma bolha em ascensão. Em sistemas puros, a condição de cisalhamento livre é estabelecida na interface, enquanto que para sistemas contaminados, a condição aproxima-se da condição de não deslizeamento. Fonte: Dijkhuizen <i>et al.</i> (2010)	23
2.8	Velocidades terminais de bolhas de ar isoladas em água. Fonte:Tomiyaama <i>et al.</i> (2002)	25

2.9	Resultados numéricos para diferentes formatos iniciais de bolhas. Na figura, $E = \frac{dz}{\sqrt{dx dy}}$ e $E_x = \frac{dx}{dy}$, onde d refere-se ao diâmetro da bolha medido nas direções indicadas pelos índices x , y e z	27
2.10	Coeficientes de arrasto multiplicados pelo número de Reynolds terminal para bolhas ($Eu > 0,95$) comparados com correlações de Tomiyama <i>et al.</i> (1998) e Mei, Lawrence e Klausner (1994). Os símbolos se referem às diferentes propriedades para a fase contínua. Variando-se os fluidos de I - VIII, varia-se gradualmente os valores de viscosidade na faixa de 153 mPa.s - $0,899 \text{ mPa.s}$; densidade 1228 kg/m^3 - 998 kg/m^3 ; tensão superficial $65 \frac{\text{N}}{\text{m}} 10^{-3}$ - $72 \frac{\text{N}}{\text{m}} 10^{-3}$	28
2.11	Comparação entre resultados numéricos (DIJKHUIZEN <i>et al.</i> , 2010), experimentais (DUINEVELD, 1995; VELDHUIS, 2007) e a correlação de Tomiyama <i>et al.</i> (1998)	28
2.12	População de bolhas dispostas em um domínio periódico para a investigação do arrasto em bolhas considerando interações entre bolhas vizinhas. Fonte: (ROGHAIR <i>et al.</i> , 2011)	29
2.13	Desenho esquemático do aparato experimental utilizado no trabalho de Tomiyama <i>et al.</i> (2002).	32
2.14	Trajetórias de ascensão medidas, usando bolhas ascendentes de diferentes tamanhos. Fonte: Tomiyama <i>et al.</i> (2002).	32
2.15	Modelo de “esteira congelada”, proposto no trabalho de Simcik, Puncochar e Ruzicka (2014).	36
2.16	Comparação entre valores obtidos nos trabalhos de Simcik, Puncochar e Ruzicka (2014) e Kendoush (2003).	36
2.17	Resultados da simulação bidimensional múltiplas bolhas “pequenas” de Krishna e Baten (2001).	41
2.18	Resultados da simulação bidimensional da interação entre duas bolhas <i>spherical cap</i> . Retirado do trabalho de Krishna e Baten (2001).	41
2.19	Resultados da simulação bidimensional de um regime de ascensão heterogêneo simplificado. Fonte: Krishna e Baten (2001).	42

2.20	Comparação entre resultados para população de bolhas esféricas (esquerda) e elipsoidais (direita) em um domínio periódico tridimensional. Resultados de Bunner e Tryggvason (2003).	46
3.1	Desenho esquemático do campo de ϕ que define as fases do escoamento.	49
4.1	Volume de controle na interface entre as fases.	52
4.2	Balço de forças atuantes em uma bolha ascendente sob influência de um perfil cisalhante linear em regime estacionário. Na figura, \vec{F}_D é a força de arrasto, \vec{F}_t a força transversal ou de sustentação, \vec{F}_E força de empuxo, \vec{F}_P a força peso, \vec{g} a aceleração da gravidade e \vec{U}_{rel} é a velocidade relativa entre as fases.	59
5.1	Exemplos de aninhamentos de blocos de malha. Apenas a primeira figura atende as regras de aninhamento.	67
5.2	Técnicas de reconstrução de interface - (a) Interface exata, (b) SLIC, (c) Hirt-Nichols, (d) PLIC	73
5.3	Advecção lagrangiana da interface. Fonte: Wang <i>et al.</i> (2008)	75
5.4	Estêncil para o cálculo da função altura. (Fonte: Lopez, J., Hernandez, J., Gomez, P. e Faura, F. (2004))	78
5.5	Discretização de $\nabla\phi_{ij}$ em planos k . Fonte: Lam (2009)	78
5.6	Células utilizadas para o cálculo de $\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n}$. Adaptado de Lam (2009)	80
5.7	Esquematisação da estrutura usada na fila de células.	82
5.8	Esquematisação da estrutura usada na fila de blocos.	82
5.9	Figura ilustrativa da malha composta sobre a bolha. Em destaque, a primeira célula identificada (ID Ref), e as primeiras células vizinhas identificadas. O círculo verde simboliza a marcação do bloco visitado.	84
5.10	Figura ilustrativa da sequência de busca no primeiro bloco, no momento em que uma célula fantasma/irmã é identificada e o próximo bloco de refinamento que da sequenciamento à busca é adicionado na fila de blocos.	84
5.11	Sequenciamento da busca entre os blocos do nível mais fino. A busca no nível termina quando a fila de blocos terminar.	85

5.12	Sequencia de busca no nível sequencialmente mais grosseiro.	86
6.1	Malha com dois níveis físicos de refinamento utilizada para a verificação numérica.	90
6.2	Decaimento da Norma L_2 com o refinamento de malha.	91
6.3	Domínio utilizado para o teste da bolha estática.	92
6.4	Comparações entre os saltos de pressão através da interface de uma bolha esférica.	93
6.5	Números de Capilaridades em função do tempo.	94
6.6	Teste de malha para o caso da onda capilar para $h_0 = 0,01$	96
6.7	Evolução temporal das amplitudes relativas para diferentes valores de h_0 . . .	96
7.1	Exemplo de domínio computacional utilizado nas simulações.	98
7.2	Reprodução do diagrama de Grace (1973).	101
7.3	Evolução temporal do caso com adimensionais: $Mo = 8,3e - 3$; $Eo = 32,2$; $Re = 53,2$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$. Malha $8 \times 8 \times 24L6$, com 32 volumes ao longo do diâmetro esférico inicial. Formato final de disco (<i>oblate ellipsoidal</i>).	101
7.4	Evolução temporal do caso com adimensionais: $Mo = 266$; $Eo = 243$; $Re = 7,6$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$. Malha $8 \times 8 \times 24L6$, com 32 volumes ao longo do diâmetro esférico inicial. Formato final de <i>cap</i> elipsoidal (<i>oblate ellipsoidal cap</i>).	102
7.5	Evolução temporal do caso com adimensionais: $Mo = 43,1$; $Eo = 339$; $Re = 17,06$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$. Malha $8 \times 8 \times 24L6$, com 32 volumes ao longo do diâmetro esférico inicial. Formato final de bolha com saia estável (<i>skirted smooth</i>)	102
7.6	Evolução temporal do caso com adimensionais: $Mo = 43,1$; $Eo = 641$; $Re = 31,47$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$. Malha $8 \times 8 \times 24L6$, com 32 volumes ao longo do diâmetro esférico inicial. Formato final de bolha com saia instável (<i>skirted wavy</i>).	103

7.7	Evolução temporal do caso: <i>skirted wavy</i> com o Front Tracking (PIVELLO, 2012). Adimensionais: $Mo = 43,1$; $Eo = 641$; $Re = 31,47$	104
7.8	Malha que cobre a interface durante a ruptura da saia. Resultado obtido com o VOF	104
7.9	Sequência temporal da ruptura de interface obtida com o VOF	104
7.10	Evolução temporal de um caso instável. Adimensionais: $Mo = 8,2e - 4$; $Eo = 237$; $Re = 259$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$. Malha $8 \times 8 \times 24L6$, com 32 volumes ao longo do diâmetro esférico inicial. Formato final instável.	105
7.11	Evolução temporal do caso com adimensionais: $Mo = 10^{-5}$; $Eo = 5$; $Re = 17,06$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$. Malha $8 \times 8 \times 24L6$, com 32 volumes ao longo do diâmetro esférico inicial. Formato final de bolha elipsoidal	105
7.12	Bolha ascendente em regime de <i>woobling</i> com contornos de magnitude da vorticidade destacando uma esteira em formato varicoso. Adimensionais: $Eo = 3,63$, $Mo = 2,5.10^{-11}$, $Re \approx 1350$, $\lambda_\rho = 1000$ e $\lambda_\mu = 54,2$	106
7.13	Bolha ascendente em regime de <i>woobling</i> com contornos de magnitude da vorticidade destacando estruturas formadas de grampos de cabelo durante movimentação "zig-zag". Adimensionais: $Eo = 3,63$, $Mo = 2,5.10^{-11}$, $Re \approx 1350$, $\lambda_\rho = 1000$ e $\lambda_\mu = 54,2$	107
7.14	Teste de malha para um caso de bolha esférica. Adimensionais: $Eo = 1,0$, $Mo = 10^{-5}$, $\lambda_\rho = 816,32$, $\lambda_\mu = 58,3$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 16d_d$	109
7.15	Teste de malha para um caso de bolha em regime de ascensão <i>woobling</i> . Adimensionais: $Eo = 3,63$; $Mo = 2,5.10^{-11}$ e $Re \approx 1400$, $\lambda_\rho = 816,32$, $\lambda_\mu = 58,3$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 80d_d$	109
7.16	Teste de malha para um caso de bolha esférica. Adimensionais: $Eo = 1,0$, $Mo = 10^{-5}$, $\lambda_\rho = 816,32$, $\lambda_\mu = 58,3$. Malha: $16 \times 16 \times 32L4$	110
7.17	Teste de influência de domínio para um caso de bolha em regime de ascensão <i>woobling</i> . Adimensionais: $Eo = 3,63$; $Mo = 2,5.10^{-11}$ e $Re \approx 1400$, $\lambda_\rho = 816,32$, $\lambda_\mu = 58,3$. Malha: $16 \times 16 \times 64L3$	111

7.18	Teste de influência da razão de massas específicas para um caso de bolha esférica. Adimensionais: $Eo = 1.0$, $Mo = 10^{-5}$, $\lambda_\mu = 58,3$. Malha: $16 \times 16 \times 32L4$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 16d_d$	112
7.19	Teste de influência da razão de massas específicas para um caso de bolha em regime de <i>woobling</i> . Adimensionais: $Eo = 5.0$, $Mo = 10^{-11}$, $\lambda_\rho = 816,32$, $\lambda_\mu = 58,3$. Malha: $16 \times 16 \times 128L4$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 64d_d$	113
7.20	Evolução do número de Reynolds em simulações com diferentes valores de ξ . Adimensionais: $Eo = 1.0$, $Mo = 10^{-5}$, $\lambda_\rho = 816,32$, $\lambda_\mu = 58,3$. Malha: $16 \times 16 \times 32L4$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 16d_d$	114
7.21	Comparação entre refinamentos localizados para diferentes valores de ξ . Vistas em cortes que passam no centro do domínio e distribuição da magnitude dos campos de vorticidade. Adimensionais: $Eo = 1.0$, $Mo = 10^{-5}$, $\lambda_\rho = 816,32$, $\lambda_\mu = 58,3$. Malha: $16 \times 16 \times 32L4$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 16d_d$	114
7.22	Evolução dos números de Reynolds em simulações com diferentes valores de ξ para um caso de bolha em regime de <i>woobling</i> . Adimensionais: $Eo = 5.0$, $Mo = 10^{-11}$, $\lambda_\rho = 816,32$, $\lambda_\mu = 58,3$. Malha: $16 \times 16 \times 128L4$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 64d_d$	115
7.23	Blocos de refinamento para um caso de bolha em <i>woobling</i> com $\xi = 0,01$. Adimensionais: $Eo = 5.0$, $Mo = 10^{-11}$, $\lambda_\rho = 816,32$, $\lambda_\mu = 58,3$. Malha: $16 \times 16 \times 128L4$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 64d_d$	116
7.24	Blocos de refinamento para um caso de bolha em <i>woobling</i> com $\xi = 0,04$. Adimensionais: $Eo = 5.0$, $Mo = 10^{-11}$, $\lambda_\rho = 816,32$, $\lambda_\mu = 58,3$. Malha: $16 \times 16 \times 128L4$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 64d_d$	117
7.25	Blocos de refinamento para um caso de bolha em <i>woobling</i> com $\xi = 0,08$. Adimensionais: $Eo = 5.0$, $Mo = 10^{-11}$, $\lambda_\rho = 816,32$, $\lambda_\mu = 58,3$. Malha: $16 \times 16 \times 128L4$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 64d_d$	118
7.26	Malha computacional e magnitude de vorticidade em um corte passando pelo centro do domínio. Adimensionais: $Eo = 1,0$, $Mo = 10^{-5}$, $Re \approx 14$, $\lambda_\rho = 816,32$, $\lambda_\mu = 58,3$. Malha: $16 \times 16 \times 32L5$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 16d_d$	122

- 7.27 Evolução dos números de Reynolds calculados com a velocidade de ascensão da bolha. Adimensionais: $Eo = 1,0$, $Mo = 10^{-5}$, $\lambda_\rho = 816,32$, $\lambda_\mu = 58,3$.
Malha: $16 \times 16 \times 32L5$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 16d_d$ 122
- 7.28 Evolução da força total de resistência fluidodinâmica e força resultante entre as forças de empuxo e peso. Adimensionais: $Eo = 1,0$, $Mo = 10^{-5}$, $Re \approx 14$, $\lambda_\rho = 816,32$, $\lambda_\mu = 58,3$. Malha: $16 \times 16 \times 32L4$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 16d_d$. 123
- 7.29 Evolução da taxa de variação da quantidade de movimento contida na bolha. Adimensionais: $Eo = 1,0$, $Mo = 10^{-5}$, $Re \approx 14$, $\lambda_\rho = 816,32$, $\lambda_\mu = 58,3$.
Malha: $16 \times 16 \times 32L4$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 16d_d$ 123
- 7.30 Malha computacional e magnitude de vorticidade em um corte passando pelo centro do domínio. Adimensionais: $Mo = 8,2e - 3$; $Eo = 32,2$; $Re \approx 53$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Malha: $16 \times 16 \times 48L5$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$. . . 125
- 7.31 Evolução dos números de Reynolds calculado com a velocidade média da bolha. Adimensionais: $Mo = 8,2e - 3$; $Eo = 32,2$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Malha: $16 \times 16 \times 48L5$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$ 125
- 7.32 Evolução da força total de resistência fluidodinâmica e força resultante entre as forças de empuxo e peso. Adimensionais: $Mo = 8,2e - 3$; $Eo = 32,2$; $Re \approx 53$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Malha: $16 \times 16 \times 48L5$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$. 126
- 7.33 Evolução da taxa de variação da quantidade de movimento contida na bolha. Adimensionais: $Mo = 8,2e - 3$; $Eo = 32,2$; $Re \approx 53$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$.
Malha: $16 \times 16 \times 48L5$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$ 127
- 7.34 Malha computacional e magnitude de vorticidade em um corte passando pelo centro do domínio. Adimensionais: $Mo = 266$; $Eo = 243$; $Re \approx 7,6$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Malha: $16 \times 16 \times 48L5$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$ 127
- 7.35 Evolução dos números de Reynolds calculados com a velocidade média da bolha e a velocidade do centróide. Adimensionais: $Mo = 266$; $Eo = 243$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Malha: $16 \times 16 \times 48L5$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$. . . 128
- 7.36 Evolução da força total de resistência fluidodinâmica e força resultante entre as forças de empuxo e peso. Adimensionais: $Mo = 266$; $Eo = 243$; $Re \approx 7,6$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Malha: $16 \times 16 \times 48L5$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$. . . 129

7.37	Evolução da taxa de variação da quantidade de movimento contida na bolha. Adimensionais: $Mo = 266$; $Eo = 243$; $Re \approx 7,6$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Malha: $16 \times 16 \times 48L5$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$	129
7.38	Malha computacional e magnitude de vorticidade em um corte passando pelo centro do domínio. Adimensionais: $Eo = 339$, $Mo = 43,1$; $Re \approx 17$; $\lambda_\rho =$ 100 ; $\lambda_\mu = 100$. Malha: $16 \times 16 \times 48L5$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$	130
7.39	Evolução dos números de Reynolds calculado com a velocidade média de acen- são da bolha. Adimensionais: $Eo = 339$, $Mo = 43,1$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Malha: $16 \times 16 \times 48L5$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$	130
7.40	Evolução da força total de resistência fluidodinâmica e força resultante entre as forças de empuxo e peso. Adimensionais: $Eo = 339$, $Mo = 43,1$; $Re \approx 17$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Malha: $16 \times 16 \times 48L5$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$. . .	131
7.41	Evolução da taxa de variação da quantidade de movimento contida na bolha. Adimensionais: $Eo = 339$, $Mo = 43,1$; $Re \approx 17$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Malha: $16 \times 16 \times 48L5$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$	132
7.42	Isosuperfícies de magnitude de vorticidade destacando as estruturas turbilho- nares formadas pela ascensão de uma bolha em <i>woobling</i> - Parte 1. Adimen- sionais: $Eo = 3,63$, $Mo = 2,5 \cdot 10^{-11}$, $Re \approx 1350$, $\lambda_\rho = 1000$ e $\lambda_\mu = 54,2$. . .	133
7.43	Isosuperfícies de magnitude de vorticidade destacando as estruturas turbilho- nares formadas pela ascensão de uma bolha em <i>woobling</i> - Parte 2. Adimen- sionais: $Eo = 3,63$, $Mo = 2,5 \cdot 10^{-11}$, $Re \approx 1350$, $\lambda_\rho = 1000$ e $\lambda_\mu = 54,2$. . .	134
7.44	Evolução do número de Reynolds para um caso <i>woobling</i> . Adimensionais: $Eo = 3,63$, $Mo = 2,5 \cdot 10^{-11}$, $Re \approx 1350$, $\lambda_\rho = 1000$ e $\lambda_\mu = 54,2$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 80d_d$	135
7.45	Blocos de refinamento adaptados às estruturas do escoamento gerado pela acensão da bolha <i>woobling</i> . Adimensionais: $Eo = 3,63$, $Mo = 2,5 \cdot 10^{-11}$, $Re \approx 1350$, $\lambda_\rho = 1000$ e $\lambda_\mu = 54,2$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 80d_d$	136
7.46	Evolução da força total de resistência fluidodinâmica e força resultante entre as forças de empuxo e peso para um caso <i>woobling</i> . Adimensionais: $Eo = 3,63$, $Mo = 2,5 \cdot 10^{-11}$, $Re \approx 1350$, $\lambda_\rho = 1000$ e $\lambda_\mu = 54,2$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 80d_d$.	137

7.47	Taxa de variação da quantidade de movimento linear para um caso <i>woobling</i> . Adimensionais: $Eo = 3,63$, $Mo = 2,5 \cdot 10^{-11}$, $Re \approx 1350$, $\lambda_\rho = 1000$ e $\lambda_\mu = 54,2$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 80d_d$	137
7.48	Magnitudes das projeções da força F_T nas direções do deslocamento da bolha (F_{D*}) e transversal ao deslocamento da mesma (F_{I*}) para um caso <i>woobling</i> . Adimensionais: $Eo = 3,63$, $Mo = 2,5 \cdot 10^{-11}$, $Re \approx 1350$, $\lambda_\rho = 1000$ e $\lambda_\mu = 54,2$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 80d_d$	138
7.49	Comparação dos valores de coeficientes de arrasto obtidos com o código AMR3D e as partes dependentes do número de Reynolds das correlações de Tomiyama <i>et al.</i> (1998) e Dijkhuizen <i>et al.</i> (2010).	143
7.50	Comparação dos valores de coeficientes de arrasto obtidos com o código AMR3D e as partes dependentes do número de Eötvös das correlações de Tomiyama <i>et al.</i> (1998) e Dijkhuizen <i>et al.</i> (2010).	144
7.51	Desenho esquemático mostrando a configuração das condições de simulações utilizadas para os cálculos das forças e coeficientes de sustentação.	145
7.52	Posições dos centroides das bolhas ascendentes sob influência de um perfil de cisalhamento com constante $C_{cis} = 3,0$	146
7.53	Isosuperfícies de magnitude da vorticidade de bolhas ascendentes sob influência de um perfil de cisalhamento com constante $C_{cis} = 3,0$	147
7.54	Evolução do número de Reynolds para uma bolha ascendente sob efeito de um campo de cisalhamento linear. Resultado obtido com malha $32 \times 32 \times 128L4$. Adimensionais: $Eo = 1,0$; $Mo = 10^{-5}$; $\lambda_\rho = 816,32$ e $\lambda_\mu = 58,3$	147
7.55	Evolução da força de resistência fluidodinâmica F_D que age na direção do deslocamento da bolha ascendente sob efeito de um campo de cisalhamento linear. Resultado obtido com malha $32 \times 32 \times 128L4$. Adimensionais: $Eo = 2,4$; $Mo = 10^{-5}$; $\lambda_\rho = 816,32$ e $\lambda_\mu = 58,3$	148
7.56	Evolução do número de Reynolds para uma bolha ascendente sob efeito de um campo de cisalhamento linear. Resultado obtido com malha $32 \times 32 \times 128L4$. Adimensionais: $Eo = 2,4$; $Mo = 10^{-5}$; $\lambda_\rho = 816,32$ e $\lambda_\mu = 58,3$	149

7.57	Evolução do número de Reynolds para uma bolha ascendente sob efeito de um campo de cisalhamento linear. Resultado obtido com malha $32 \times 32 \times 128L3$. Adimensionais: $Eo = 6,0$; $Mo = 10^{-5}$; $\lambda_\rho = 816,32$ e $\lambda_\mu = 58,3$	149
7.58	Evolução da força de resistência fluidodinâmica F_D que age na direção do deslocamento da bolha ascendente de uma bolha ascendente sob efeito de um campo de cisalhamento linear. Resultado obtido com malha $32 \times 32 \times 128L3$. Adimensionais: $Eo = 6,0$; $Mo = 10^{-5}$; $\lambda_\rho = 816,32$ e $\lambda_\mu = 58,3$	150
7.59	Evolução do número de Reynolds para uma bolha ascendente sob efeito de um campo de cisalhamento linear. Resultado obtido com malha $32 \times 32 \times 128L3$. Adimensionais: $Eo = 6,0$; $Mo = 10^{-5}$; $\lambda_\rho = 816,32$ e $\lambda_\mu = 58,3$	150
7.60	Acelerações calculadas para cálculos de coeficientes de massa virtual para casos com diferentes razões de propriedades.	152
7.61	Resultados comparados no trabalho de Annaland, Deen e Kuipers (2005) para o caso de bolhas alinhadas.	154
7.62	Domínio de cálculo para a simulação de duas bolhas alinhadas.	155
7.63	Resultado da interação entre duas bolhas ascendentes alinhadas verticalmente. Reprodução da simulação feita por Annaland, Deen e Kuipers (2005).	156
7.64	Comparação entre o resultado obtido com o código AMR3D (direita) e o resultado apresentado por Annaland, Deen e Kuipers (2005) (esquerda) no instante de tempo $t = 0,05s$. Figura referente ao caso das bolhas alinhadas. .	157
7.65	Comparação entre o resultado obtido com o código AMR3D (direita) e o resultado apresentado por Annaland, Deen e Kuipers (2005) (esquerda) no instante de tempo $t = 0,10s$. Figura referente ao caso das bolhas alinhadas. .	157
7.66	Resultados comparados no trabalho de Annaland, Deen e Kuipers (2005) para o caso de bolhas desalinhadas.	158
7.67	Resultado da interação entre duas bolhas ascendentes desalinhadas. Reprodução da simulação feita por Annaland, Deen e Kuipers (2005).	159
7.68	Comparação entre o resultado obtido com o código AMR3D (direita) e o resultado apresentado por Annaland, Deen e Kuipers (2005) (esquerda) no instante de tempo $t = 0,10s$. Figura referente ao caso das bolhas desalinhadas.	160

7.69	Comparação entre o resultado obtido com o código AMR3D (direita) e o resultado apresentado por Annaland, Deen e Kuipers (2005) (esquerda) no instante de tempo $t = 0,15s$. Figura referente ao caso das bolhas desalinhadas.	160
7.70	Posições dos centroides das bolhas.	161
7.71	Volumes calculados para cada bolha.	162
7.72	Desvio entre volumes calculados e valores teóricos.	162
7.73	Injeção de bolhas através de um orifício de fluxo constante.	163
7.74	Ilustração da forma com que as bolhas são injetadas no domínio forçando a ruptura das mesmas. A escala de cores está associada a velocidade w para uma análise qualitativa.	164
7.75	Domínio e malha computacional o instante inicial para simulação de população de bolhas.	165
7.76	Malha composta formada no caso de população de bolhas para $r_{or} = 0,005m$, $V_{inj} = 1.0m/s$ e $F_{inj} = \frac{1}{5P_{inj}}$	166
7.77	Bolhas formadas no caso para população de bolhas com $r_{or} = 0,005m$, $V_{inj} = 1.0m/s$ e $F_{inj} = \frac{1}{5P_{inj}}$	167
7.78	Bolhas formadas no caso para população de bolhas com $r_{or} = 0,01m$, $V_{inj} = 1.4m/s$ e $F_{inj} = \frac{1}{8P_{inj}}$	168
7.79	Malha composta formada no caso de população de bolhas para $r_{or} = 0,01m$, $V_{inj} = 1.4m/s$ e $F_{inj} = \frac{1}{8P_{inj}}$	169
7.80	Evolução da força de resistência fluidodinâmica total de uma bolha ascendente em meio à população.	170
7.81	Volume da bolha rastreada com o algoritmo de identificação no caso de população de bolhas.	170
7.82	Bolha rastreada com o algoritmo de identificação no caso de população de bolhas.	171

Lista de Tabelas

2.1	Expressões e fechamentos utilizados por Deen <i>et al.</i> (2004)	13
6.1	Comparações da norma L_2 (Eq. 6.6) com resultados da literatura, para malha $\lambda/64$	95
7.1	Condições de contorno	99
7.2	Comparações de formatos de bolhas e Reynolds terminais entre os resultados obtidos por Bhaga e Weber (1981), Hua e Lou (2007), Pivello (2012) e os resultados obtidos com o VOF. Fonte: Adaptado de Pivello (2012)	119
7.3	Comparações entre os coeficientes de arrasto calculado C_D com correlações da literatura. Tabela referente ao caso de bolha esférica, com adimensionais: $Eo = 1, 0$, $Mo = 10^{-5}$, $Re \approx 14$, $\lambda_\rho = 816, 32$, $\lambda_\mu = 58, 3$	124
7.4	Comparações entre os coeficientes de arrasto calculado C_D com correlações da literatura. Tabela referente ao caso de bolha com formato terminal de disco (<i>oblate ellipsoidal</i>), com adimensionais: $Mo = 8, 2e - 3$; $Eo = 32, 2$; $Re \approx 53$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$	126
7.5	Comparações entre os coeficientes de arrasto calculado C_D com correlações da literatura. Tabela referente ao caso de bolha com formato terminal <i>oblate ellipsoidal cap</i> , com adimensionais: $Mo = 266$; $Eo = 243$; $Re \approx 7, 6$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$	128
7.6	Comparações entre os coeficientes de arrasto calculado C_D com correlações da literatura. Tabela referente ao caso de bolha com formato terminal <i>skirted smooth</i> , com adimensionais: $Eo = 339$, $Mo = 43, 1$; $Re \approx 17$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$	131

7.7	Comparações entre os coeficientes de arrasto calculado C_D com correlações da literatura. Cálculo realizado através da Eq. 4.20. Tabela referente ao caso de bolha em regime <i>woobling</i> , com adimensionais: $Eo = 3,63$, $Mo = 2,5 \cdot 10^{-11}$, $Re \approx 1350$, $\lambda_\rho = 1000$ e $\lambda_\mu = 54,2$	138
7.8	Comparações entre os coeficientes de arrasto calculado C_D com correlações da literatura. Cálculo realizado com a média temporal da componente da força $\ F_T\ $ na direção de deslocamento da bolha. Tabela referente ao caso de bolha em regime <i>woobling</i> , com adimensionais: $Eo = 3,63$, $Mo = 2,5 \cdot 10^{-11}$, $Re \approx 1350$, $\lambda_\rho = 1000$ e $\lambda_\mu = 54,2$	138
7.9	Comparações de valores de coeficientes de arrasto calculados no presente trabalho com valores obtidos com as correlações de Tomiyama <i>et al.</i> (1998) (Eq. 7.7) e Dijkhuizen <i>et al.</i> (2010) (Eq. 7.8). Adimensionais: $Mo = 3 \cdot 10^{-11}$; $\lambda_\rho = 100$ e $\lambda_\mu = 58,3$	140
7.10	Comparações de valores de coeficientes de arrasto calculados no presente trabalho com valores obtidos com as correlações de Tomiyama <i>et al.</i> (1998) (Eq. 7.7) e Dijkhuizen <i>et al.</i> (2010) (Eq. 7.8). Adimensionais: $Mo = 10^{-5}$; $\lambda_\rho = 816,32$ e $\lambda_\mu = 58,3$	141
7.11	Comparações de valores de coeficientes de arrasto calculados no presente trabalho com valores obtidos com as correlações de Tomiyama <i>et al.</i> (1998) (Eq. 7.7) e Dijkhuizen <i>et al.</i> (2010) (Eq. 7.8). Casos mais refinados, com $d_b/32$	141
7.12	Comparação entre os coeficientes de sustentação calculados no presente trabalho e valores obtidos através da correlação de Tomiyama <i>et al.</i> (2002).	151
7.13	Resultados de coeficientes de massa virtual para diferentes níveis de refinamento ($\lambda_\rho = 100$).	152
7.14	Resultados de coeficientes de massa virtual para diferentes razões de propriedades ($d_d/(20\Delta x) = 1$).	152
7.15	Resultados de coeficientes de massa virtual utilizando curvatura exata, malha $d_d/(20\Delta x)$, $\lambda_\rho = 100$	153
7.16	Propriedades dos fluidos utilizados na presente simulação de multiplas bolhas ascendentes.	165

Lista de Símbolos

\vec{a}_{rel}	-	Aceleração relativa de uma partícula de fluido
$d\vec{A}$	-	Diferencial de área de uma superfície de controle
d_d	-	Diâmetro da bolha esférica (fase dispersa)
\mathbf{f}_σ	-	Termo fonte de força interfacial
\mathbf{p}	-	Campo de pressão
\vec{r}	-	Vetor posição da partícula de fluido referente ao eixo não-inercial
t	-	Tempo
t^*	-	Tempo adimensional
\mathbf{u}	-	Campo de velocidades
u	-	Componente do campo de velocidades alinhada ao eixo x
v	-	Componente do campo de velocidades alinhada ao eixo y
w	-	Componente do campo de velocidades alinhada ao eixo z
x, y, z	-	Componentes do eixo de referência inercial
X, Y, Z	-	Componentes do eixo de referência não-inercial
A_p	-	Área de projeção do corpo
Ca	-	Número de Capilaridade
C_D	-	Coeficiente de arrasto
C_l	-	Coeficiente de sustentação
C_{MV}	-	Coeficiente de massa virtual
Eo	-	Número de Eotvos
\vec{F}_{EP}	-	Resultante da soma entre as forças de empuxo e peso
\vec{F}_D	-	Força de arrasto
\vec{F}_{MV}	-	Força de massa virtual
\vec{F}_{SC}	-	Força externa atuante em uma superfície de controle
\vec{F}_T	-	Força de resistência fluidodinâmica total
\vec{F}_t	-	Força transversal ou de sustentação

Ma	-	Número de Mach
Mo	-	Número de Morton
\mathbf{n}	-	Campo de vetores normais à interface
\vec{R}	-	Vetor posição do sistema de eixo referencial não-inercial
Re	-	Número de Reynolds
\vec{S}	-	Vetor posição da partícula de fluido referente ao eixo inercial
\vec{U}_c	-	Velocidade da fase contínua
\vec{U}_d	-	Velocidade da fase dispersa
\vec{U}_{rel}	-	Velocidade relativa entre as fases
\vec{V}_{abs}	-	Velocidade absoluta vista por um observador inercial
α	-	Constante utilizada na explicação do método de discretização temporal
ι	-	Menor distância entre o plano que corta uma célula computacional e a origem da célula (reconstrução da interface)
Γ	-	Interface entre os fluidos
ϵ	-	Desvio relativo à uma referência
θ	-	Angulo entre o vetor da velocidade relativa entre as fases e a direção gravitacional
κ	-	Curvatura da interface
λ_ρ	-	Razão entre massas específicas
λ_μ	-	Razão entre viscosidades absolutas
μ	-	Viscosidade absoluta
μ_c	-	Viscosidade absoluta da fase contínua
μ_d	-	Viscosidade absoluta da fase dispersa
ξ	-	Constante do critério de refinamento
ρ	-	Massa específica
ρ_c	-	Massa específica da fase contínua
ρ_d	-	Massa específica da fase dispersa
σ	-	Constante de tensão superficial
ϕ	-	Função coloração
ψ	-	Fração de vazio
$\vec{\Omega}$	-	Vetor rotação do eixo de referência não-inercial
ϑ	-	Volume
ϑ_c	-	Volume da fase contínua
ϑ_d	-	Volume da fase dispersa

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Experimentos virtuais e escoamentos em colunas de bolhas	1
1.2	Objetivos	5
1.3	Organização da tese	6
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	9
2.1	Hierarquia de modelos	9
2.2	Trabalhos com refinamento adaptativo bloco-estruturado (SAMR) em escoamentos interfaciais	17
2.3	Modelagem de forças interfaciais	19
2.3.1	Modelagem do arrasto em bolhas	20
2.3.2	Modelagem da sustentação em bolhas	30
2.3.3	Modelagem de forças de massa virtual	33
2.4	Técnicas de experimentação material em colunas de bolhas	36
2.5	Trabalhos de simulação de múltiplas bolhas	38
3	MODELO MATEMÁTICO DIFERENCIAL	47
3.1	Balanco de massa	47
3.2	Balanco da quantidade de movimento linear	48
3.3	Representação da interface	49
4	MODELAGEM MATEMÁTICA PARA FORÇAS DE ARRASTO, TRANS- VERSAIS E DE MASSA VIRTUAL	51
4.1	Análise Integral de Forças em Bolhas	52

4.1.1	Ascensão em regime permanente	56
4.1.2	Ascensão em regime transiente	57
4.2	Coeficiente de Arrasto	58
4.3	Coeficiente de Sustentação	59
4.4	Coeficiente de massa virtual	60
5	MODELAGEM NUMÉRICA	65
5.1	Solução de escoamentos incompressíveis: método dos passos fracionados . . .	65
5.2	Discretização espacial	66
5.3	Discretização temporal	68
5.4	Tratamento dos termos advectivos	71
5.5	Volume of Fluid (VOF)	71
5.5.1	Reconstrução e advecção da interface	72
5.5.2	Cálculo da força interfacial	76
5.5.3	Calculo da curvatura através da Função Altura	77
5.5.4	Calculo da curvatura através do método de Shirani, Ashgriz e Mostaghimi (2005)	78
5.6	Algoritmo de identificação de bolhas a partir de um campo escalar em ambiente paralelo	80
6	VERIFICAÇÃO E VALIDAÇÃO NUMÉRICO-COMPUTACIONAL	89
6.1	Teste de convergência de malhas	89
6.2	Teste de correntes espúrias	91
6.3	Teste da onda capilar	94
7	RESULTADOS	97
7.1	Considerações gerais	97
7.2	Simulações com base no Diagrama de Grace (1973)	100
7.3	Testes de sensibilidade	108
7.3.1	Influência do refinamento de malhas	108
7.3.2	Influência do tamanho do domínio	110

7.3.3	Influência da razão das massas específicas	111
7.3.4	Influência da variação da constante de refinamento ξ	113
7.4	Formatos finais e comparações com resultados da literatura	115
7.5	Cálculos de forças de resistência fluidodinâmicas e coeficientes de arrasto . .	119
7.5.1	Caso $Eo = 1,0$; $Mo = 10^{-5}$ - Bolha esférica	121
7.5.2	Caso $Eo = 32,2$; $Mo = 8,2 \cdot 10^{-3}$ - Bolha em formato de disco (<i>oblate ellipsoidal</i>)	124
7.5.3	Caso $Eo = 243$; $Mo = 266$ - Bolha em formato <i>oblate ellipsoidal cap</i> .	127
7.5.4	Caso $Eo = 339$; $Mo = 43,1$ - Bolha em formato <i>skirted smooth</i>	129
7.5.5	Caso em regime de ascensão <i>woobling</i>	132
7.5.6	Resumo dos coeficientes de arrasto calculados e comparações com correlações da literatura	139
7.6	Cálculos de coeficientes de forças transversais	142
7.7	Cálculo de coeficientes de massa virtual	151
7.8	Simulações de múltiplas bolhas	153
7.8.1	Interação entre duas bolhas	153
7.8.2	Simulações com populações de bolhas	162
8	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	173
8.1	Conclusões	173
8.2	Perspectiva de trabalhos futuros	176

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

1.1 Experimentos virtuais e escoamentos em colunas de bolhas

Os recursos computacionais disponíveis nos dias de hoje permitem que a engenharia recorra à experimentação numérica através do uso de modelos matemáticos, a cada dia, mais completos e métodos numéricos mais robustos. A representação de um fenômeno físico de forma consistente ajuda pesquisadores a estudar e compreender problemas industriais e acadêmicos de maneira cada vez mais detalhada. Problemas envolvendo escoamentos multifásicos estão amplamente presentes na indústria e resultados numéricos podem fornecer informações confiáveis de difícil obtenção quando o problema é estudado em experimentação material.

Escoamentos multifásicos são utilizados em diversos processos industriais e seu entendimento é de suma importância em tempos de economia energética e alta competitividade mercadológica. Problemas envolvendo injeção de combustíveis, produção de combustíveis sintéticos, processamento de hidrocarbonetos, ciclos de refrigeração, cavitação, são apenas alguns dos diversos exemplos ilustrativos que contém escoamentos com mais de uma fase. Em muitos casos, apenas duas fases compõem o escoamento. Exemplos podem ser vistos em escoamentos que envolvem mudança de fases, como no escoamento de fluido refrigerante de sistemas de refrigeração. Na extração do petróleo quase sempre há uma associação do fluido com o gás natural nos reservatórios. Por fim, em processos de mistura ou reações químicas

cas entre fases realizadas em escoamentos do tipo coluna de bolhas, motivação principal do presente trabalho.

Uma coluna de bolhas tem como principal característica promover elevada área de contato entre diferentes fases e são utilizadas em diversas aplicações industriais pelas qualidades que oferecem a um processo que necessita de intensa mistura e transferência térmica e de massa. A utilização de colunas de bolhas torna-se ainda mais atrativa por se tratar de um aparato simples sem partes móveis, de baixo custo operacional e de manutenção. Sua forma mais difundida é constituída de um recipiente contendo um fluido em fase líquida, muitas vezes com a presença de partículas sólidas em suspensão, onde um gás é injetado na base do recipiente através de componentes como tubos simples, tubos de jatos, meios porosos, entre outros. Utilizada em processos químicos, bioquímicos, petroquímicos e metalúrgicos, uma coluna de bolhas pode trabalhar com diferentes fases com fluidos de difícil manuseio, a altas temperaturas e pressões, o que dificulta a otimização do processo por meio de bancadas de experimentação material. A Fig. 1.1 ilustra o escoamento em uma coluna de bolhas.



Figura 1.1: Escoamento em uma coluna de bolhas (WARSITO *et al.*, 1999).

Devido à alta complexidade dos diversos tipos de escoamentos bifásicos, regimes de operação e multiplicidade de escalas, não existe nos dias de hoje uma formulação generalizada para esse tipo de escoamento e sim diferentes tipos de modelagens, onde cada uma se adequa melhor a um tipo de problema. Podemos separar os modelos quanto ao seu nível de

detalhamento na representação de escoamentos borbulhantes. A Fig. 1.2 apresenta três tipos de modelagens, sendo elas: Euleriana-euleriana, euleriana-lagrangiana e uma abordagem muitas vezes referenciada pela literatura como Simulação Numérica Direta.

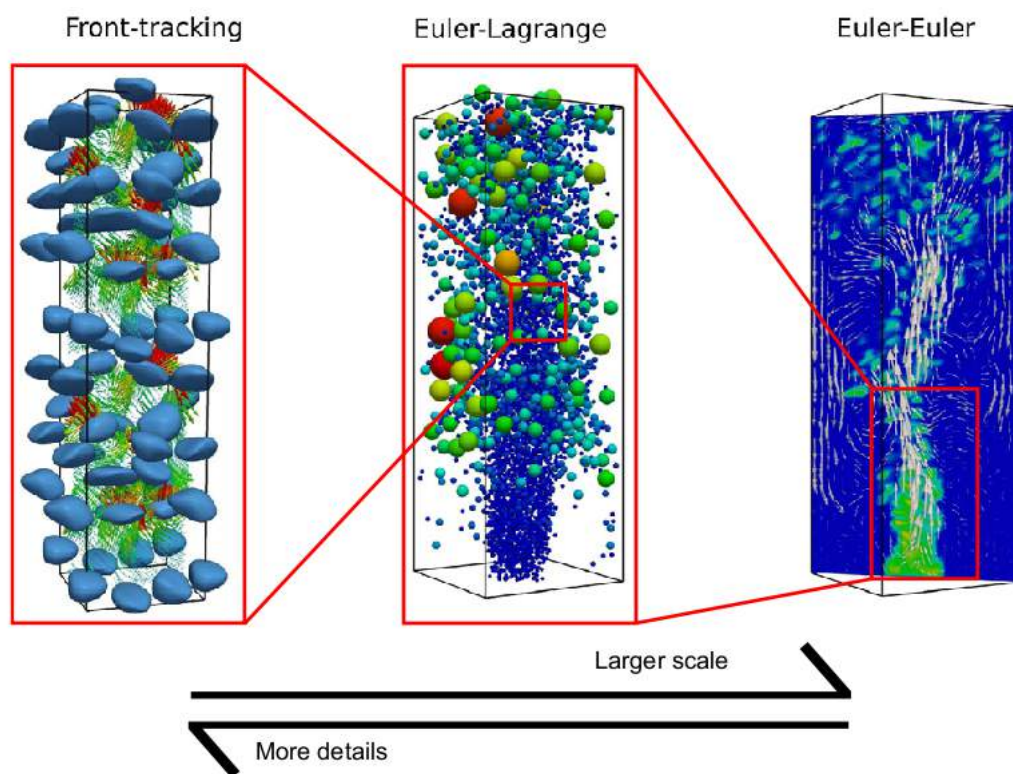


Figura 1.2: Hierarquia de modelos de simulação de colunas de bolhas. Fonte: Lau *et al.* (2011).

A formulação do tipo euleriana-euleriana, conhecida também como formulação à dois fluidos, consiste na representação do escoamento bifásico como fluidos contínuos interpenetrantes, ou seja, ocupando o mesmo espaço, formando uma mistura entre as fases. O modelo deve descrever como a mistura interage com ela mesma, e isso é realizado considerando-se as tensões fluidodinâmicas de cada fase, e como ocorre a transferência de quantidade de movimento entre as fases. Entre esses tipos de abordagens, a formulação euleriana-euleriana é a mais utilizada em problemas de escala industrial, sendo a menos detalhada das abordagens.

Em uma abordagem de detalhamento intermediário, modelos do tipo euleriana-lagrangiana tratam a fase contínua do ponto de vista euleriano, enquanto a fase dispersa é tratada como partículas lagrangianas. Utilizando equações do movimento apropriadas, calcula-se o movimento das partículas discretas, podendo essas interagir ou não com o esco-

amento euleriano.

Como as modelagens do tipo euleriana-euleriana e euleriana-lagrangiana não resolvem a dinâmica da interface entre as fases, a troca de quantidade de movimento entre as mesmas deve ser modelada e fornecida aos modelos como fechamento das equações. Esses modelos são propostos através de experimentações, sejam elas materiais ou numéricas.

A abordagem mais detalhada utilizada em escoamentos bifásicos é comumente referida como Simulação Numérica Direta. No presente texto é utilizada a nomenclatura Simulação Numérica Detalhada, uma vez que Simulação Numérica Direta só é possível para baixos valores de números de Reynolds. Nela, a dinâmica da interface faz parte da solução do escoamento, e conseqüentemente, a transferência de quantidade de movimento entre as fases. Destacam-se modelos do tipo *Front Tracking* e *Front Capturing*.

Modelagem do tipo *Front Tracking* consiste basicamente em resolver a fase contínua com uma abordagem euleriana, enquanto interfaces entre as fases são acompanhadas explicitamente com a advecção de pontos lagrangianos. Unverdi e Tryggvason (1992a) e Tryggvason *et al.* (2001) apresentaram uma forma de representar escoamentos bifásicos através de malhas lagrangianas, não estruturadas, imersas em um domínio euleriano. No método, utilizam-se polinômios de alta ordem para garantir uma precisa representação de forças interfaciais, enquanto a interface fina é representada através de uma distribuição suave de força para os volumes adjacentes. A representação de fenômenos como a quebra e ruptura de bolhas é feita de forma controlada a partir de modelos representativos para os fenômenos.

A representação da interface pela abordagem tipo *Front Capturing* é feita em âmbito puramente euleriano, onde uma função é responsável por representar implicitamente a interface. Seu movimento é gerado pela advecção dessa função, e as forças interfaciais são levadas em conta basicamente pelo método *Continuum Surface Force* (CSF), apresentado por Brackbill, J. U., Kothe, D. B. e Zemach, C. (1992). Entre as técnicas dessa classe, destacam-se a de *Volume of Fluid* (VOF) (HIRT; NICHOLS, 1981), *Marker Density Function* (MDF) (KANAI; MIYATA, 1995) e o método *Level Set* (OSHER; SETHIAN, 1988) (SUSSMAN; SMERKA; OSHER, 1994).

Considerando um sistema bifásico (líquido/gás) representado por uma malha cartesiana, o método VOF utiliza uma função coloração (ϕ) que assume valor 1 para os volumes

que contém somente gás (fase dispersa), e o valor 0 para os volumes da fase líquida (fase contínua). A interface é representada por valores entre 0 e 1, formando um gradiente da função ϕ e o movimento da interface é realizado com a advecção da função coloração a partir do campo de velocidades. Quando se utiliza VOF, mudanças topológicas como quebra e coalescência de bolhas acontecem automaticamente em um efeito puramente numérico que, quando há refinamento de malha suficiente, representa consistentemente a física interfacial.

No presente trabalho, é utilizado o método VOF aliado a uma estratégia de refinamento adaptativo de malhas bloco-estruturadas para a simulação e experimentação de escoamentos borbulhantes, no escopo do desenvolvimento de modelos representativos de forças presentes na troca de quantidade de movimento entre duas fases em escoamentos de bolhas ascendentes. Os métodos estão implementados em um código desenvolvido pelo Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade de São Paulo (USP) e o Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFlab) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU), em parceria com a PETROBRAS. A presente tese é parte do Projeto: Desenvolvimentos Matemáticos e Numéricos em Escoamentos Bifásicos Tipo Coluna de Bolhas Aplicados a Processos de Refino - Convênio: Termo de Cooperação N. 0050.0071368.11.9 N. Contratual: 4600344971. Mais informações sobre os desenvolvimentos realizados no projeto podem ser encontradas em Silveira-Neto *et al.* (2016).

1.2 Objetivos

Escoamentos bifásicos borbulhantes envolvem diversos fenômenos físicos complexos, o que dificulta a construção de modelos representativos. Neste cenário, ferramentas numéricas assumem um papel importante ao aumentar as possibilidades de experimentação e, conseqüentemente, contribuir para o melhor entendimento desses escoamentos. O objetivo do presente trabalho é a realização de experimentação numérica de escoamentos de bolhas ascendentes, também visando apresentar os desenvolvimentos necessários e os cuidados tomados na geração dos resultados com o código AMR3D. O escopo das experimentações pode ser representado pelos seguintes itens:

- Verificação e validação do presente método de experimentação numérica;

- Análise de formatos finais e regimes de ascensão resultantes de bolhas isoladas com base no diagrama de Grace (1973);
- Análise de forças fluidodinâmicas atuantes em bolhas isoladas ascendentes;
- Quantificação de coeficientes fluidodinâmicos de bolhas isoladas em ascensão e comparação com correlações da literatura;
- Simulação de múltiplas bolhas com o código AMR3D.

O objetivo do presente trabalho também engloba as implementações necessárias para o melhoramento do código em práticas de experimentações numéricas. Entre as contribuições para o desenvolvimento do código estão um novo critério de refinamento que objetiva detalhar as estruturas do escoamento baseado no critério de refinamento proposto por Fuster *et al.* (2009). O novo critério facilita a distribuição dos campos de magnitude de vorticidade entre os níveis de refinamento por envolver o espaçamento do nível de refinamento. Antes dessa implementação, a distribuição da magnitude de vorticidade entre os níveis dependia de valores determinados pelo usuário do código, o que requeria experiência do usuário. Outra contribuição foi a implementação de um algoritmo de identificação de bolhas para a realização de operações (cálculo da posição dos centroides, cálculo de forças, avaliação de volume, etc.) em casos de múltiplas bolhas e a realização de operações como a conversão de bolhas descritas no domínio euleriano para partículas lagrangianas. O algoritmo opera em ambiente paralelo e malhas adaptativas bloco-estruturadas, o que aumenta sua aplicabilidade em problemas de interesse.

1.3 Organização da tese

A presente tese é separada em capítulos conforme descrito à seguir. No Capítulo 3 é apresentado o modelo matemático diferencial que descreve um escoamento bifásico; no Capítulo 4 os modelos matemáticos para cálculos de forças e coeficientes fluidodinâmicos e no Capítulo 5 os métodos numéricos utilizados são descritos. No Capítulo 6 será apresentada uma verificação dos cálculos e validações do presente método com clássicos problemas da literatura. No Capítulo 7 serão apresentados os resultados desenvolvidos na presente tese

com análises e comparações com dados da literatura e no Capítulo 8 são apresentadas as conclusões do presente trabalho e a perspectiva de trabalhos futuros.

CAPÍTULO II

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

O tema desta tese possui uma base literária extensa e rica. Assim sendo, a consulta e revisão sobre o tema permitem aos leitores uma melhor perspectiva do assunto em meio ao cenário científico. A revisão bibliográfica foi realizada com base nos principais trabalhos da área, no escopo de experimentações virtuais.

2.1 Hierarquia de modelos

Colunas de bolhas são utilizadas em diversos processos industriais e os interesses associados ao uso desse tipo de escoamento variam. Escoamentos borbulhantes promovem turbulência, transferência térmica e de massa. Para que as características sejam aproveitadas da melhor forma possível, um dimensionamento adequado das colunas deve ser realizado. Essa não é uma tarefa fácil, já que na grande maioria dos casos o escoamento presente em uma coluna de bolhas contém diversas escalas de tempo e espaço. Além da multiplicidade de escalas, é comum o uso de fluidos a altas temperaturas e pressões, ou de características químicas prejudiciais à saúde humana. Além disso, a obtenção de informações do escoamento físico pode ser inviável devido à alta sensibilidade à perturbações externas. Ao longo dos anos, muitos modelos teóricos foram desenvolvidos para a representação de escoamentos de bolhas em ascensão. A evolução desses modelos, aliada à evolução de recursos computacionais e métodos numéricos, possibilita que pesquisadores da área utilizem da experimentação

numérica para a investigação do escoamento, com confiabilidade.

Na modelagem de escoamentos bifásicos do tipo colunas de bolhas existem diferentes tipos de abordagens, com diferentes níveis de detalhamento. A Fig. 1.2 esquematiza a hierarquia de modelos. Intuitivamente, sabe-se que a representação mais detalhada do fenômeno é mais cara do ponto de vista computacional, o que torna a prática de simulações menos detalhadas mais viáveis para aplicações de escala industrial. O problema está em obter relações empíricas para o fechamento do modelo, já que estas tornam-se necessárias para a reprodução dos efeitos produzidos por escalas não resolvidas.

Na modelagem euleriana-euleriana (E-E), ou a dois fluidos, as duas fases são descritas como dois líquidos interpenetrantes onde as equações de balanço de massa e de quantidade de movimento linear são tratadas com o uso da hipótese do contínuo e as interações entre as fases dispersas são levadas em conta por um termo de transferência de quantidade de movimento linear entre as fases. Dessa forma, para um dado volume, as propriedades do fluido que o volume representa é uma média entre as propriedades das fases dispersas. O uso de formulação euleriana-euleriana permite a simulação de diversos padrões de escoamento formados pela ação da ascensão das bolhas sem resolver as menores escalas do escoamento. Assim sendo, os efeitos de transferência de quantidade de movimento linear entre as fases devem ser levados em conta através de modelos constitutivos que usualmente dependem de coeficientes determinados experimentalmente.

Em uma abordagem de detalhamento intermediário, formulações do tipo euleriana-lagrangiana (E-L) tratam a fase contínua do ponto de vista euleriano, enquanto a fase dispersa é tratada como partículas lagrangianas. Utilizando-se equações do movimento apropriadas, calcula-se o movimento das partículas discretas. Como o escoamento ao redor das bolhas/partículas não é resolvido, modelos para as forças de interação entre as fases devem ser utilizadas, de modo similar à abordagem E-E. A Fig. 2.1 compara os dois tipos de abordagem.

No nível mais refinado da hierarquia encontram-se métodos que resolvem o escoamento bifásico através das equações do balanço da quantidade de movimento, onde a topologia da interface é considerada como parte da solução. Esta família de métodos demanda mais recursos computacionais, pois requerem a solução de uma grande faixa de escalas espaciais e

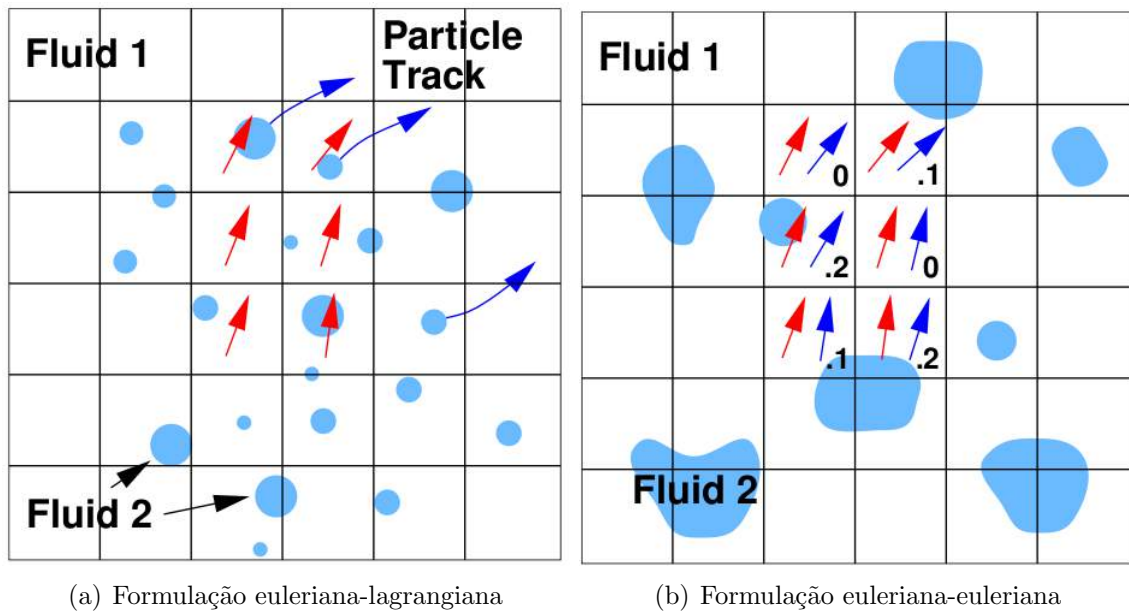


Figura 2.1: Diferenças entre abordagens euleriana-euleriana e euleriana-lagrangiana. Fonte: Rusche (2002).

temporais. No entanto, informações do escoamentos são obtidas como em nenhum dos outros métodos. Os resultados são os campos de propriedades discretas. Com pós-processamento, ou até em tempo de processo, é possível realizar uma análise minuciosa do escoamento, sem intrusão. No entanto, existem dificuldades a serem superadas na utilização desses métodos em problemas a altos números de Reynolds, ou quando se precisa representar efeitos de quebra ou coalescência.

O método *Front-Tracking* baseia-se em uma formulação a um fluido, na qual um único conjunto de equações de Navier-Stokes é utilizado para simular o escoamento das duas fases. A interface entre estas fases é representada por uma malha não estruturada, topologicamente desacoplada da malha empregada na resolução das equações de Navier-Stokes. A presença da interface é modelada através de um termo forçante, introduzido no lado direito das equações de Navier-Stokes. A força, que surge devido à tensão interfacial, é calculada na malha lagrangiana e depois transferida para a malha euleriana através de um processo de espalhamento. Por outro lado, a movimentação da interface é feita interpolando-se o campo de velocidade calculado na malha euleriana para os vértices da malha lagrangiana. A posição da interface também é utilizada para calcular a distribuição dos campos das propriedades físicas, tais como viscosidade e massa específica. Isto é feito utilizando-se uma

função indicadora, que gera um campo escalar identificando a região da malha euleriana na qual a interface está localizada.

A representação da interface pela abordagem tipo *Front Capturing* é feita em âmbito puramente euleriano, onde uma função é responsável por representar implicitamente a interface. Seu movimento é gerado pela advecção dessa função, e as forças interfaciais são levadas em conta basicamente pelo método *Continuum Surface Force* (CSF), apresentado por Brackbill, J. U., Kothe, D. B. e Zemach, C. (1992). Entre as técnicas dessa classe, destacam-se a *Volume of Fluid* (VOF) (HIRT; NICHOLS, 1981), *Marker Density Function* (MDF) (KANAI; MIYATA, 1995) e o método *Level Set* (OSHER; SETHIAN, 1988) (SUSSMAN; SMEREKA; OSHER, 1994).

Considerando um sistema bifásico (líquido/gás) representado por uma malha cartesiana, o método VOF utiliza uma função ϕ que assume valor 0 para os volumes que contém somente gás, e o valor 1 para os volumes da fase líquida. A interface é representada por valores entre 0 e 1, formando um gradiente da função VOF. O movimento da interface é feito pela advecção da função VOF. Efeitos de difusão numérica devem ser minimizados, já que o conhecimento da posição exata da interface afeta diretamente na acurácia do método. Esse problema é contornado a partir de técnicas de reconstrução de interface, que não é uma tarefa fácil em escoamentos tridimensionais. Quando se utiliza VOF, mudanças topológicas como quebra e coalescência de bolhas acontecem de forma implícita, e a função ϕ não requer nenhum ajuste dinâmico de variáveis, ao contrário de metodologias *Front Tracking*.

Em um trabalho de Deen *et al.* (2004), os diferentes métodos são analisados quanto as suas aplicabilidades. Os autores simulam bolhas em ascensão com os diferentes modelos, sendo eles o VOF, *Front Tracking*, modelo de partículas discretas (E-L) e um modelo a dois fluidos (E-E). Bolhas isoladas foram simuladas com o VOF e *Front Tracking*, e o autor conclui que ambos os métodos se adequam bem a este tipo de análise. Seus resultados concordaram bem com as previsões do diagrama de Grace (GRACE, 1973) (CLIFT; GRACE; WEBER, 1978), tanto no formato quanto em termos de números de Reynolds terminais. Um outro tipo de análise foi realizado, mas apenas com o método de *Front Tracking*. Três bolhas em ascensão foram analisadas com o intuito de se observar as interações entre elas e suas respectivas esteiras. Os autores concluem a melhor adequação do *Front Tracking* para este

tipo de análise, pois o método VOF não consegue representar a interface de duas bolhas em um mesmo elemento numérico sem que haja coalescência, ou seja, se não houver malha suficiente a consistência física da coalescência é comprometida. Para o FT, as bolhas são descritas por malhas lagrangianas e a coalescência só ocorrerá por meio de modelos adicionais para a descrição do fenômeno.

Através da formulação E-L, simulações de uma população de bolhas em uma coluna foram realizadas com diferentes modelos de coalescência (CHESTERS, 1994; LEE; ERICKSON; GLASGOW, 1987) e um modelo de ruptura (LUO; SVENDSEN, 1996). Para cada partícula de massa específica ρ_d , volume ϑ_d e velocidade \vec{V}_d , uma equação (Eq.2.1) do movimento baseada na Segunda Lei de Newton é utilizada, levando em conta forças de empuxo e peso (EP), arrasto (D), sustentação (L) e massa virtual (MV). A Tabela 2.1 apresenta as expressões utilizadas para as forças. Na Eq. 2.1 e na Tab. 2.1, os índices c e d referem-se, respectivamente, às fases contínua e dispersa. Essa nomenclatura é utilizada em todo trabalho e, como o tema principal desse é bolhas ascendentes, a fase dispersa representa a bolha ou as bolhas.

$$\rho_d \vartheta_d \frac{d\vec{V}_d}{dt} = \vec{F}_{EP} + \vec{F}_D + \vec{F}_L + \vec{F}_{MV} \quad (2.1)$$

Tabela 2.1: Expressões e fechamentos utilizados por Deen *et al.* (2004)

Força interfacial	Expressões	Fechamento
Peso-empuxo	$\vec{F}_{EP} = (\rho_c - \rho_d) g \vartheta_d$	-
Arrasto	$\vec{F}_D = \frac{3}{4} \frac{C_D}{d_d} \vartheta_d \rho_c \vec{V}_c - \vec{V}_d (\vec{V}_c - \vec{V}_d)$	$C_D = \frac{2}{3} Eo^{\frac{1}{2}}$
Sustentação	$\vec{F}_L = C_L V_b \rho_c (\vec{V}_c - \vec{V}_d) \times (\nabla \times \vec{V}_c)$	$C_L = 0,5$
Massa virtual	$\vec{F}_{MV} = -\rho_c \vartheta_d C_{MV} \left(\frac{D\vec{V}_d}{Dt} - \frac{D\vec{V}_c}{Dt} \right)$	$C_{VM} = 0,5$

Resultados numéricos foram comparados em termos do diâmetro médio das bolhas em função da altura da coluna com resultados experimentais obtidos com técnicas PIV. O

autor comenta que as super-estimativas dos diâmetros médios podem ser explicadas pelo modelo de ruptura, que foi gerado em campos cisalhantes mais fortes, o que levou à sub-estimação das rupturas nas simulações.

Os resultados de Deen, Annaland e Kuipers (2004) para o modelo a dois fluidos (E-E) ilustram a importância de se modelar corretamente o arrasto nas bolhas. Foram gerados resultados para dois diferentes modelos, sendo um deles o modelo apresentado na Tabela 2.1, e um outro modelo mais antigo (SCHILLER; NAUMAN, 1933). Diferentes tamanhos de bolhas foram utilizados nessas correlações. Na correlação da Tabela 2.1, foi utilizado um diâmetro representativo de 4 mm (mais próximo do diâmetro médio obtido experimentalmente), enquanto para o modelo mais antigo o diâmetro de 2 mm é utilizado. A Fig. 2.2 mostra os diferentes escoamentos gerados pelas diferentes correlações. Nota-se que a utilização de uma correlação adequada afeta toda a fluido-dinâmica do escoamento. Isso também é ilustrado na Fig. 2.3.

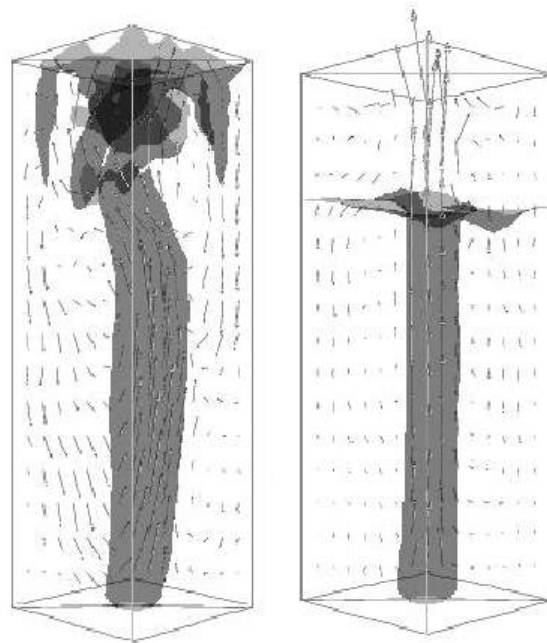


Figura 2.2: Resultados da simulação E-E com as diferentes correlações para o arrasto. Fonte: Deen, Annaland e Kuipers (2004)

Em um trabalho recente de Lau *et al.* (2011), um modelo do tipo E-L é utilizado para a validação de uma correlação para o arrasto que leva em conta a fração volumétrica de gás local, desenvolvida no trabalho de Roghair *et al.* (2011). O modelo descritivo do

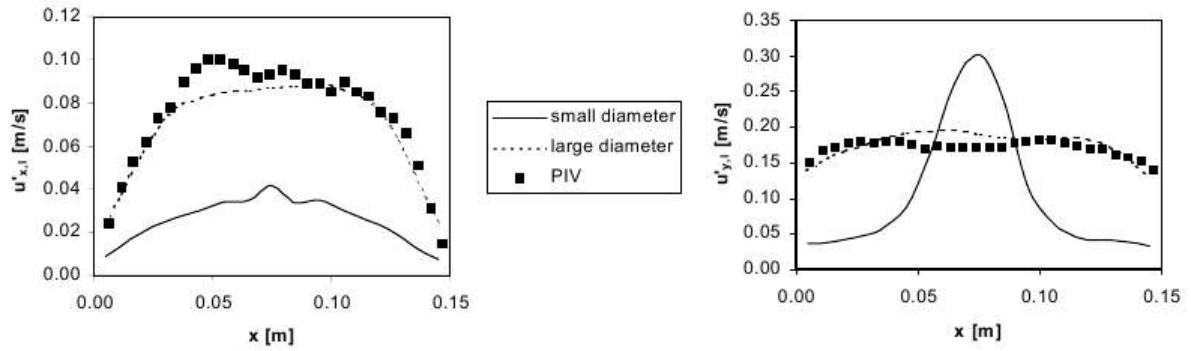


Figura 2.3: Flutuações de velocidade vertical e horizontal com as diferentes correlações. Fonte: Deen, Annaland e Kuipers (2004)

movimento da bolha leva em conta forças de gravidade, pressão, arrasto, sustentação, massa virtual e interação com as paredes, como apresentado na Eq.2.2.

$$\rho_d \vartheta_d \frac{d\vec{V}_d}{dt} = \vec{F}_G + \vec{F}_P + \vec{F}_D + \vec{F}_L + \vec{F}_{VM} + \vec{F}_W \quad (2.2)$$

Perfis de velocidades são utilizados na comparação dos resultados obtidos com simulações que modelam o arrasto com uma correlação obtida para bolhas isoladas (DIJKHUIZEN *et al.*, 2010) sem considerar a fração volumétrica local, e a correlação proposta por Roghair *et al.* (2011), que leva em conta a fração de gás local. As Figs.2.4 e 2.5 mostram as comparações para os valores médios e os desvios padrões das velocidades, tomadas em pontos da seção transversal da coluna em diferentes alturas. As comparações levaram os autores a concluir uma melhor predição dos perfis com a utilização do modelo proposto por Roghair *et al.* (2011). Os autores destacam a defasagem dos resultados em regiões próximas às paredes. Eles atribuem isso ao tipo de modelagem utilizado para as forças de sustentação. A sustentação é responsável pela distribuição da população de bolhas na seção de uma coluna de bolhas, e a consideração da fração de gás local no seu modelo ainda não existe (ROGHAIR *et al.*, 2011).

Em outro trabalho recente, Zhang, Bai e Wang (2012) utiliza uma formulação E-E para estudar a contribuição de forças de arrasto, sustentação e massa virtual nos resultados, através de comparações com resultados experimentais, por distribuições de fração volumé-

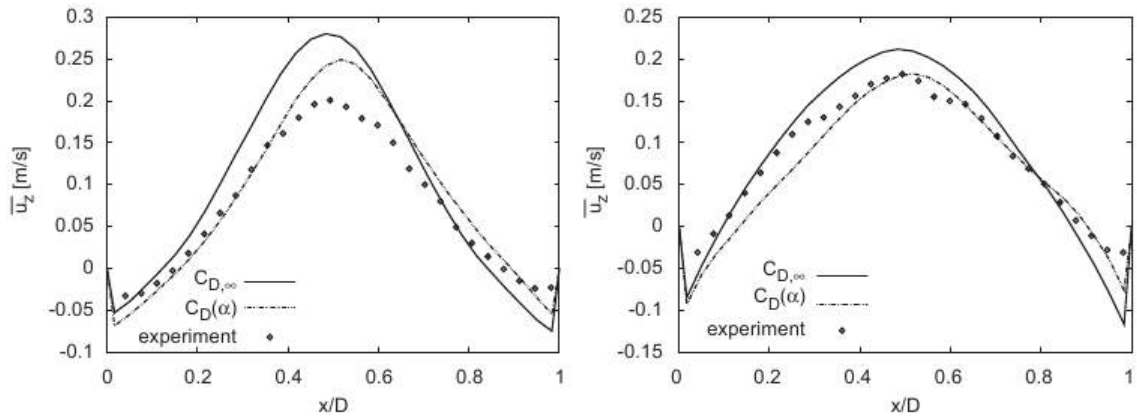


Figura 2.4: Perfis de velocidade média em diferentes alturas da coluna. Respectivamente, $h=0,15\text{m}$ e $h=0,25\text{m}$. Fonte: Lau *et al.* (2011)

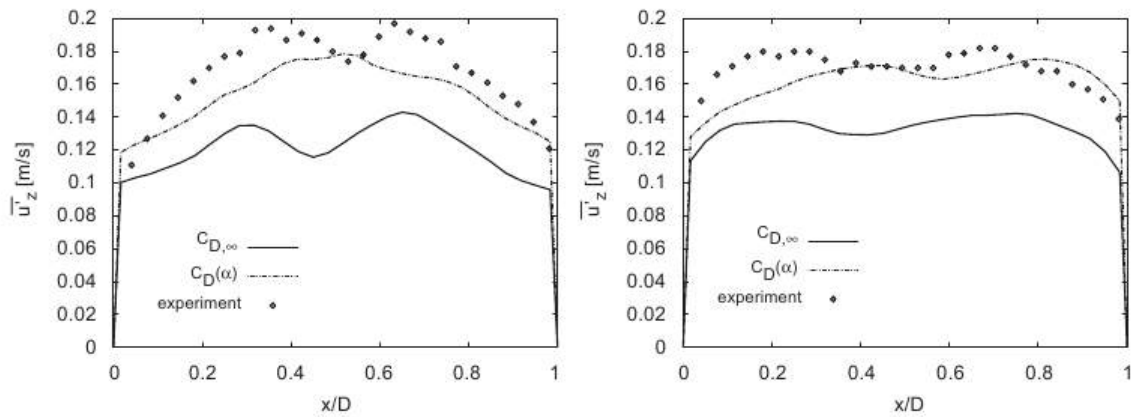


Figura 2.5: Desvio padrão das velocidades em diferentes alturas da coluna. Respectivamente, $h=0,15\text{m}$ e $h=0,25\text{m}$. Fonte: Lau *et al.* (2011)

trica de gás. Os autores mostram que, para os casos simulados, a contribuição da sustentação é mínima. As maiores forças observadas foram as de arrasto e de massa virtual. Embora a contribuição da massa virtual tenha sido menor que a do arrasto, ela se mostrou significativa em regiões próximas à região de liberação das bolhas, onde a aceleração das mesmas são as maiores do campo. Foram comparados resultados obtidos com e sem a consideração das forças de sustentação e massa virtual. Concluiu-se que a consideração dessas forças levam à resultados mais próximos ao da experimentação material.

2.2 Trabalhos com refinamento adaptativo bloco-estruturado (SAMR) em escoamentos interfaciais

A estratégia de refinamento SAMR - *Structured Adaptive Mesh Refinement* permite que se resolva com grande acurácia problemas que requerem refinamento localizado, com custos computacionais relativamente baixos. Uma grande vantagem dessa abordagem é que uma discretização originalmente definida em uma malha cartesiana uniforme pode ser facilmente reutilizada (ALVAREZ, 2013). A malha consiste em blocos de malha uniforme aninhados de acordo com uma hierarquia de níveis de refinamento. Mais detalhes sobre a malha são apresentados no capítulo 5.

Em sua tese de doutorado, Milne (1995) apresenta o emprego de malhas do tipo SAMR em escoamentos bifásicos, onde a interface foi representada pelo método Level Set (SUSSMAN; SMEREKA; OSHER, 1994). Seu trabalho foi pioneiro ao aliar o Método Level Set com malhas adaptativas e discute sobre as dificuldades de se resolver equações parabólicas nesse tipo de malha. O método foi testado em uma série de casos e se mostrou eficiente e acurado. Sussman *et al.* (1999) apresenta um trabalho onde se utiliza malhas SAMR e o método Level Set (SUSSMAN; SMEREKA; OSHER, 1994) para representação interfacial. Simulações foram realizadas em duas e três dimensões em bolhas ascendentes em diversos regimes, inclusive aqueles que resultam em rupturas e coalescências de interfaces. Os resultados foram validados com dados da literatura.

O trabalho de Villar (2007) utiliza malhas blocos-estruturadas bi-dimensionais (SAMR - *Structured Adaptive Mesh Refinement*) para a simulação de escoamentos monofásicos e bifásicos. A autora usou um método de representação de interface híbrido *Front-Tracking/Front-Capturing*, e seus resultados concordaram com resultados da literatura, possibilitando uma análise detalhada de diversos regimes de ascensão de bolhas isoladas. Entre suas principais conclusões estão a robustez do método quanto ao movimento e deformação da fase dispersa, assim como baixas restrições de passos temporais, possibilitadas pelo uso de um método de discretização temporal semi-implícito de segunda ordem proposto em Ascher, Ruuth e Wetton (1997).

Em uma abordagem tridimensional, Nós (2007) apresenta uma estratégia com-

putacional adaptativa para a simulação de escoamentos bifásicos descritos por modelos de campos de fase, onde foram simuladas gotas esféricas sob efeito de escoamento cisalhante e instabilidades de Kelvin-Helmholtz. Seus resultados foram compatíveis com a literatura. Baixas restrições nos passos de tempo foram atribuídas ao uso de uma discretização temporal semi-implícita, de segunda ordem, como descrito em Ascher, Ruuth e Wetton (1997). Técnicas *Multigrid-Multinível* lineares foram empregadas para a solução dos sistemas de equações algébricas com boa eficiência numérica.

A tese de doutorado de Pivello (2012) apresenta um método de *Front Tracking* tri-dimensional aliado à estratégia de refinamento adaptativo por malhas bloco-estruturadas. Seus resultados mostraram boa concordância em termos de velocidades terminais e formatos finais com resultados de outros trabalhos, incluindo o clássico trabalho experimental de Bhaga e Weber (1981). Entre os resultados, bolhas ascendentes à baixos e moderados números de Reynolds foram simuladas com refinamento local em regiões de interface e de alta vorticidade, evidenciando a potencial capacidade de se utilizar um método Front-Tracking com refinamento adaptativo. Casos de bolhas elipsoidais em regime pulsante, também bastante referenciados como *woobling*, também foram simulados, e seus resultados identificaram dois regimes de ascensão distintos, e que o formato das bolhas oscilavam. Em um dos casos, a bolha ascendeu descrevendo uma trajetória retilínea, onde a bolha variou seu formato de uma forma aproximadamente axissimétrica ao eixo de ascensão, e toróides foram liberados em modo varicoso. O outro caso de *woobling* resultou em uma trajetória de “zig-zag”, e posteriormente descrevendo uma trajetória espiral, com formato de bolha aproximadamente fixo.

Os desenvolvimentos apresentados no trabalho de Pivello (2012) foram implementados no código desenvolvido originalmente por Nós (2007). No entanto, apenas versões de cálculos sequenciados eram disponíveis até então. O trabalho de Lima (2012) estende a aplicabilidade do código à problemas de escoamentos monofásicos paralelizados com técnicas de memória distribuída com as bibliotecas MPI - *Message Passing Interface*. Seus resultados foram validados com dados da literatura com o problema da cavidade tridimensional com tampa deslisante, e os resultados se mostraram coerentes.

Os trabalhos de Villar (2007), Nós (2007) e Pivello (2012) empregam técnicas

Multigrid-Multinível para a solução dos sistemas de equações lineares. A topologia da malha e a forma como os blocos se aninham favorecem o uso desse tipo de técnica, que envolve operações geométricas na malha e dispensa uma representação matricial do domínio discretizado. No entanto, a dificuldade de se trabalhar com altas razões de propriedades foram evidenciadas. Apesar de se utilizar um método Multigrid-Multinível para a solução dos sistemas lineares com alta taxa de convergência, os códigos (2D e 3D) ficam limitados à esse método enquanto não houver uma representação matricial global dos sistemas de equações. Inovando nesse sentido, o trabalho de Alvarez (2013) propõe uma estratégia de construção de uma matriz global para malhas SAMR bi-dimensionais no escopo de escoamentos incompressíveis bifásicos. Essa é uma contribuição de grande valia, uma vez que permite o uso de bibliotecas externas, como o PETSc (BALAY *et al.*, 1997), e estende as possibilidades de uso de diferentes algoritmos de solução de sistemas lineares. Além disso, permite estudos minuciosos sobre as características matemáticas dos sistemas lineares gerados.

2.3 Modelagem de forças interfaciais

Nesta seção são discutidas as modelagens de diferentes forças atuantes em bolhas em ascensão. Na literatura encontram-se diversos trabalhos que salientam a importância de se representar o arrasto em bolhas adequadamente. Os efeitos do arrasto são mais evidentes nos cálculos de velocidade de ascensão das bolhas, e um maior número de trabalhos relacionados ao cálculo do arrasto podem ser encontrados na literatura.

As forças de sustentação, ou transversais, são desprezadas em muitos trabalhos de simulação de colunas de bolhas que requerem modelos de fechamento, mas sabe-se de investigações passadas que essas forças influenciam diretamente na estabilidade e distribuição de bolhas na seção transversal da coluna. Uma seção sobre a modelagem da sustentação em bolhas apresenta resumidamente o que é encontrado na literatura sobre esse tipo de força, no escopo de experimentações virtuais.

Forças de massa virtual são forças adicionais causadas pelo deslocamento de fluido ao redor de um corpo acelerado. Seus efeitos são mais pronunciados em escoamentos com altas acelerações e grandes diferenças entre as massas específicas de um escoamento bifásico.

Em muitos casos, a consideração dos efeitos de massa virtual são de suma importância para a correta descrição do movimento de partículas em regime transiente.

Existem também forças de Basset, Faxén, Magnus e forças devido deformação, expansão e contração de bolhas (DREW; LAHEY, 1979). A literatura carece de informações sobre essas forças. Porém, ao que tudo indica, as magnitudes das mesmas faz com que sejam desconsideradas em uma análise de troca de quantidade de movimento entre duas fases, como é feito na maioria dos trabalhos.

2.3.1 Modelagem do arrasto em bolhas

O modelo de Stokes para o coeficiente de arrasto de uma esfera rígida (Eq.2.3) é uma das primeiras tentativas de se correlacionar o coeficiente de arrasto em bolhas. Para bolhas à baixos números de Reynolds ($Re \ll 1$), a Eq. 2.3 fornece valores que foram confirmados experimentalmente, embora houvessem divergências. Mais tarde, estudos mostram que a presença de contaminantes nos fluidos de um sistema bifásico contaminam a interface e mudam sua dinâmica durante a ascensão de uma bolha, fazendo com que a mesma se comporte como uma interface rígida, em que a condição de não deslizeamento é válida. Então, para bolhas esféricas a baixos números de Reynolds em meio contínuo contaminado, a Eq. 2.3 é bastante adequada. Uma nova correlação foi proposta (Eq.2.4) introduzindo uma correção que se aplica a elevados números de Reynolds. Mais tarde, Hadamart (1911) propõem uma correlação (Eq.2.5) para o arrasto em esferas com superfícies móveis (condição de cisalhamento livre na interface) igual à dois terços da correlação de Stokes, para $Re \ll 1$. Levich (1949) estima o coeficiente de arrasto de esferas na condição de cisalhamento livre na interface para altos números de Reynolds, sem as influências de descolamentos e esteiras, apresentado pela Eq. 2.6. Moore (1965) aprimora a correlação de Levich (1949) considerando os efeitos de camada limite e esteira.

$$C_D = \frac{24}{Re} \tag{2.3}$$

$$C_D = \frac{24}{Re} (1 + 0,15Re^{0,687}) \quad (2.4)$$

$$C_D = \frac{16}{Re} \quad (2.5)$$

$$C_D = \frac{48}{Re} \left(1 - \frac{2,21}{\sqrt{Re}} \right) \quad (2.6)$$

Os trabalhos de Grace (1973) e Bhaga e Weber (1981) contribuíram muito para a ciência de bolhas ascendentes através de experimentações materiais, nas quais foram analisadas minuciosamente os diversos regimes de ascensão, formatos finais, esteiras e velocidades terminais de bolhas isoladas. A grande quantidade de informação deu origem ao diagrama de Grace, apresentado na Fig. 2.6. Nota-se que o diagrama resume as predições de formatos e números de Reynolds (Re) terminais em função dos adimensionais Eötvös (Eu) e Morton (Mo), sendo esses os adimensionais que mais influenciam a determinação destas características de ascensão. Observa-se que a velocidade característica do número de Reynolds se apresenta na forma de uma velocidade relativa entre as fases do escoamento, sendo essa uma maneira mais consistente de representação do adimensional que relaciona os efeitos advectivos e difusivos do escoamento. O número de Eötvös quantifica a razão entre a força de empuxo e forças resultantes da tensão interfacial entre os fluidos, enquanto que o número de Morton caracteriza o par de fluidos, relacionando suas propriedades físicas.

Diversos trabalhos que investigam o arrasto em bolhas evidenciam que o grau de impureza do fluido (contínuo) em uma coluna de bolhas tem grande influência na força de arrasto. A Fig. 2.7 esquematiza o efeito causado por impurezas na superfície de uma bolha. O acúmulo de partículas diminui o movimento da interface, inibindo o movimento de fluido dentro da bolha e aumentando o arrasto das mesmas. Portanto, o grau de contaminação dos fluidos determina a condição de deslizamento da interface. Esse fato compromete muitos

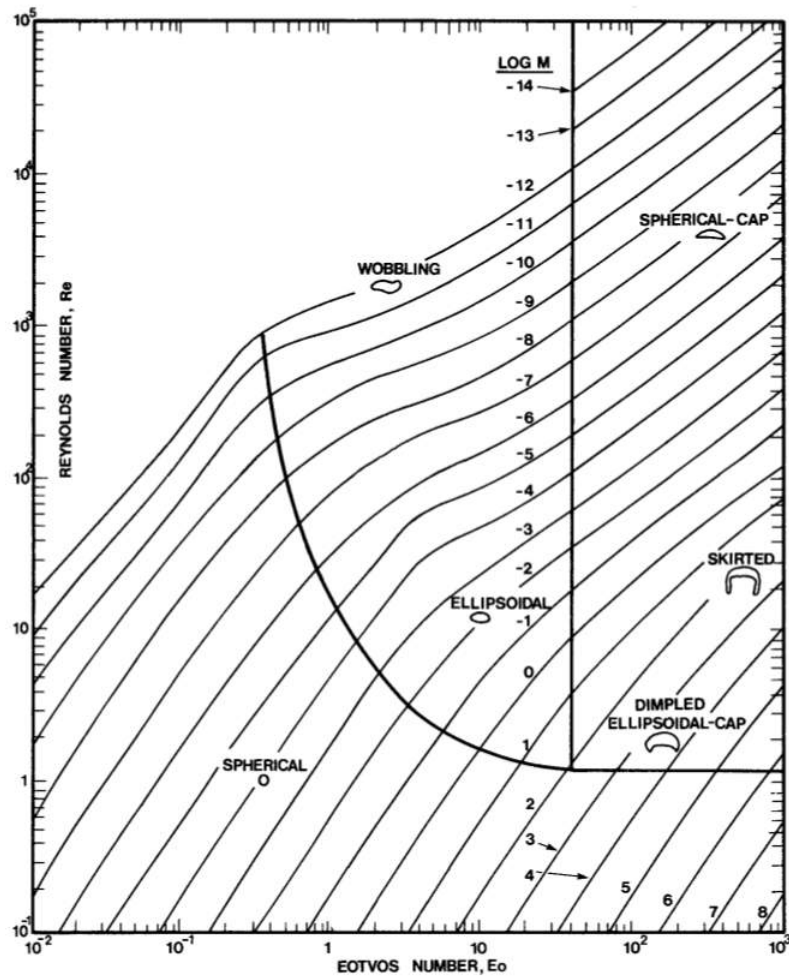


Figura 2.6: Diagrama de Grace (1973)

resultados registrados na literatura, pela dificuldade de se determinar com exatidão a pureza dos fluidos utilizados.

Um dos trabalhos mais referenciados sobre modelagem do arrasto é o trabalho de Tomiyama *et al.* (1998). O autor discute sobre os efeitos de contaminantes presentes em sistemas bifásicos do tipo ar-água, e propõe correlações para o arrasto de bolhas em sistemas puros, contaminados e levemente contaminados. A dedução começa com base em correlações para o arrasto em bolhas esféricas, na tentativa de se obter uma só expressão (para cada grau de contaminação) que correlacionasse o coeficiente de arrasto em bolhas esféricas em uma grande faixa de números de Reynolds. Uma análise dimensional de Clift, Grace e Weber (1978) mostra que o Reynolds terminal de uma bolha em ascensão pode ser escrito em função dos números de Morton e Eötvös. Considera-se o balanço da força entre empuxo e arrasto, atuante na direção de ascensão de uma bolha:

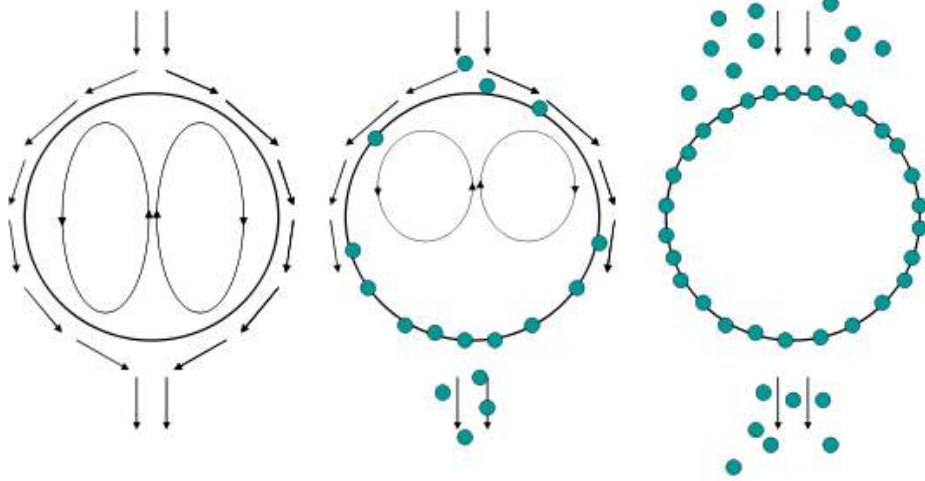


Figura 2.7: Influência de contaminantes no escoamento da interface de uma bolha em ascensão. Em sistemas puros, a condição de cisalhamento livre é estabelecida na interface, enquanto que para sistemas contaminados, a condição aproxima-se da condição de não deslismo. Fonte: Dijkhuizen *et al.* (2010)

$$C_D \frac{1}{2} \rho_c \|\vec{U}_{rel}\|^2 \frac{\pi d_d^2}{4} = (\rho_c - \rho_d) g \frac{\pi d_d^3}{6} \quad (2.7)$$

Isolando a velocidade relativa terminal $\|\vec{U}_{rel}\|$ da Eq. 2.7 e multiplicando ambos os lados da equação por $(\rho_c d_d / \mu_c)^2$ chega-se à Eq. 2.8.

$$Re^2 = \frac{4}{3C_D} \sqrt{\frac{Eo^3}{Mo}} \quad (2.8)$$

Através de correlações de $Re = f(Eo, Mo)$ obtidos por Clift, Grace e Weber (1978) e outras correlações para o coeficiente de arrasto propostas por Ishii e Chawla (1979), conclui-se que para bolhas não esféricas os efeitos dominantes são de empuxo e tensão superficial. Dessa forma, Tomiyama *et al.* (1998) apresenta equações que correlacionam o coeficiente de arrasto em função do número de Eötvös (Eo). A experiência dos autores mostra que para os casos de bolhas não esféricas não se notam grandes influências da presença de contaminantes e os coeficientes de arrasto tendem a um valor constante com o aumento de Reynolds. As correlações para fluidos puros, levemente contaminados e contaminados são apresentadas pelas Eqs. 2.9, 2.10 e 2.11.

$$C_D = \max \left\{ \min \left[\frac{16}{Re} (1 + 0,15 Re^{0,687}), \frac{48}{Re} \right], \frac{8}{3} \frac{Eo}{Eo + 4} \right\} \quad (2.9)$$

$$C_D = \max \left\{ \min \left[\frac{24}{Re} (1 + 0,15 Re^{0,687}), \frac{72}{Re} \right], \frac{8}{3} \frac{Eo}{Eo + 4} \right\} \quad (2.10)$$

$$C_D = \max \left[\frac{24}{Re} (1 + 0,15 Re^{0,687}), \frac{8}{3} \frac{Eo}{Eo + 4} \right] \quad (2.11)$$

Alguns anos mais tarde, Tomiyama *et al.* (2002) apresenta um estudo experimental e uma análise teórica detalhada de bolhas ascendentes elipsoidais. Considerando um sistema ar-água, esse regime pode ser observado em bolhas entre 1,3 e 6 *mm*, e caracteriza-se por bolhas com trajetórias não retilíneas e oscilações em seu formato. Os experimentos de Tomiyama *et al.* (2002) consistiram em liberar bolhas de ar em um tanque com água através de injetores de diferentes tamanhos, com diferentes graus de perturbações iniciais impostas às bolhas. Dessa maneira, foi possível observar uma correlação entre a intensidade de perturbação inicial e o regime de ascensão resultante. Em geral, para pequenas perturbações iniciais, as bolhas desenvolviam uma trajetória de "zig-zag" em um mesmo plano e, eventualmente, a trajetória passava a ser helicoidal. Já para as bolhas sob forte ação de perturbações iniciais, o regime helicoidal se pronunciava diretamente. Em nenhum dos casos observados a trajetória helicoidal precedeu a movimentação de "zig-zag". Um ponto observado no trabalho é a grande variação nos resultados de medições de velocidades terminais, que ainda não eram bem explicadas por argumentos bem conhecidos pelo autor, como a presença de impurezas no fluido de fase contínua. Seus resultados permitiram importantes conclusões:

- a causa primária das variações de medidas de velocidades terminais são as perturbações e deformações das bolhas ao serem liberadas;
- pequenas perturbações iniciais produzem bolhas com menores velocidades terminais e

maiores razões de aspecto, enquanto que para grandes perturbações foram observadas maiores velocidades terminais e menores razões de aspecto;

- menores perturbações promovem ascensões em "zig-zag", e o aumento das perturbações aceleram a mudança de comportamento para trajetória de ascensão helicoidal;
- a velocidade terminal tem forte correlação com a razão de aspecto média das bolhas;
- o efeito dos contaminantes amortece as oscilações de formato das bolhas. Isso faz com que uma bolha contaminada se comporte como uma bolha em água pura, liberada com baixas perturbações iniciais e formato esférico.

A Fig. 2.8 mostra as velocidades terminais em função do diâmetro equivalente esférico de bolhas de ar em água, onde é possível observar a variação das medições de velocidades terminais para o regime estudado

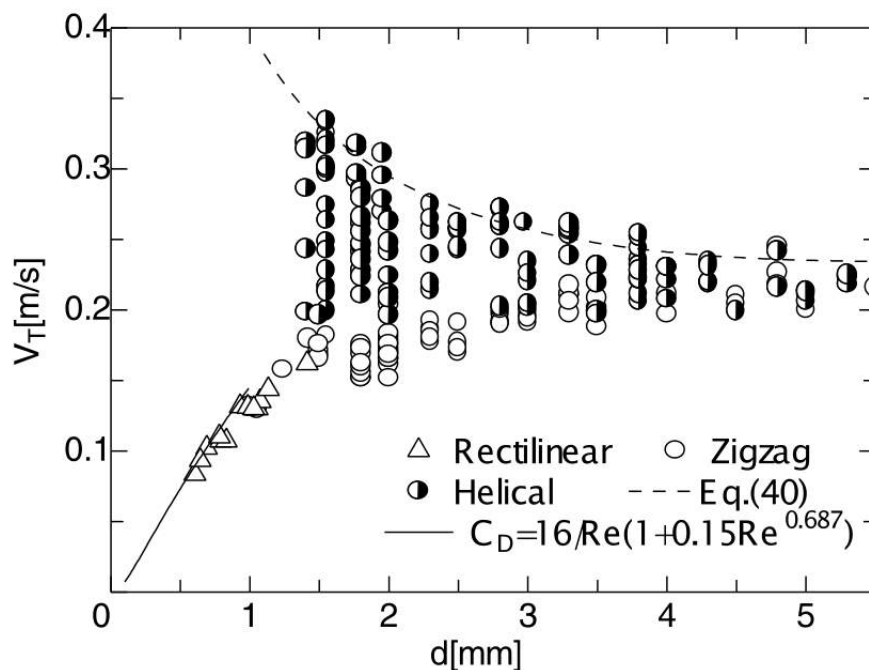


Figura 2.8: Velocidades terminais de bolhas de ar isoladas em água. Fonte: Tomiyama *et al.* (2002)

Ainda do trabalho de Tomiyama *et al.* (2002), foi proposto um modelo teórico para a predição da velocidade terminal em bolhas elipsoidais oscilantes, aplicável à vários tipos de bolhas elipsoidais em altos números de Reynolds. O modelo foi desenvolvido a

partir da condição de salto de quantidade de movimento através da interface e teoria de escoamentos potenciais. Suas medições foram compatíveis com os resultados fornecidos pelo modelo teórico.

Utilizando o método *Front Tracking*, Dijkhuizen *et al.* (2010) investigam o coeficiente de arrasto em bolhas isoladas. Os valores são estimados e comparados com correlações de Tomiyama *et al.* (1998) e Mei, Lawrence e Klausner (1994). Dos resultados numéricos, estima-se o coeficiente de arrasto através do balanço de forças apresentado na Eq. 2.7, que leva a seguinte expressão:

$$C_D = \frac{4d_d(\rho_c - \rho_d)g}{3\rho_c\|\vec{U}_{rel}\|^2} \quad (2.12)$$

Valores médios de $\|\vec{U}_{rel}\|$ devem ser considerados em casos onde a velocidade de ascensão é oscilante.

Em testes de malha preliminares, os resultados mostraram independência de malha para casos onde a bolha sofre poucas deformações. Já para casos onde notaram-se grandes deformações, apenas os resultados mais refinados (diâmetro de 20 volumes eulerianos) forneceram coeficientes de arrasto que se aproximassem da correlação de Tomiyama *et al.* (1998). Outro teste realizado foi a investigação da influência do formato inicial da bolha no coeficiente de arrasto. Após testar três diferentes formatos, os autores concluíram que o formato inicial não tem grandes influências na estimativa do coeficiente de arrasto, já que a partir de um tempo de ascensão as bolhas atingiram regimes idênticos, e a influência do transiente inicial é minimizada com a média temporal. A Fig. 2.9 mostra as influências dos diferentes formatos iniciais nas estimativas de coeficientes de arrasto e razões de aspectos (E).

Mantendo as propriedades físicas da fase dispersa (propriedades do ar), resultados para o coeficiente de arrasto são obtidos para diferentes propriedades da fase contínua. A Fig. 2.10 mostra os resultados obtidos comparando-os com as correlações de Tomiyama *et al.* (1998) e Mei, Lawrence e Klausner (1994). Fica evidente que os resultados numéricos se aproximam da correlação de Mei, Lawrence e Klausner (1994). Observando os resultados, os autores propõem um procedimento para a determinação numérica do coeficiente de arrasto,

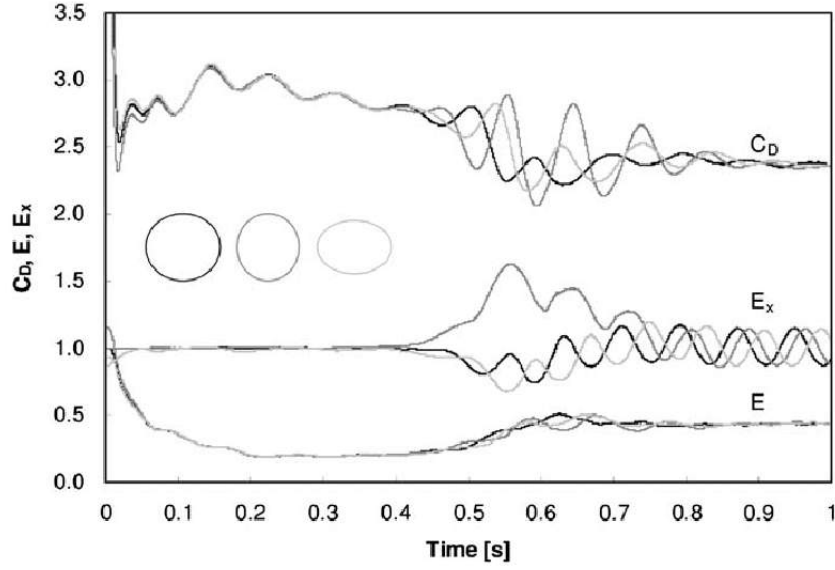


Figura 2.9: Resultados numéricos para diferentes formatos iniciais de bolhas. Na figura, $E = \frac{dz}{\sqrt{d_x d_y}}$ e $E_x = \frac{dx}{dy}$, onde d refere-se ao diâmetro da bolha medido nas direções indicadas pelos índices x , y e z .

indicado pela Eq. 2.13. Isso é explicado pela transição suave dos coeficientes de arrasto quando as correlações passam da parte dependente de Reynolds para a parte dependente de Eötvös, que é confirmada por resultados experimentais de Duineveld (1995) e Veldhuis (2007).

$$C_D = \sqrt{C_D(Re)^2 + C_D(Eo)^2} \quad (2.13)$$

A Fig. 2.11 mostra as comparações dos resultados para coeficientes de arrasto obtidos pelas simulações de Dijkhuizen *et al.* (2010) com resultados experimentais e com correlações empíricas de Tomiyama *et al.* (1998). O par de fluidos consiste em ar e água purificada. Ajustando uma curva para os valores obtidos nas simulações, os autores propõem uma nova correlação (Eq. 2.14) para o coeficiente de arrasto de bolhas deformadas, em sistemas puros.

$$C_D(Eo) = \frac{4Eo}{Eo + 9,5} \quad (2.14)$$

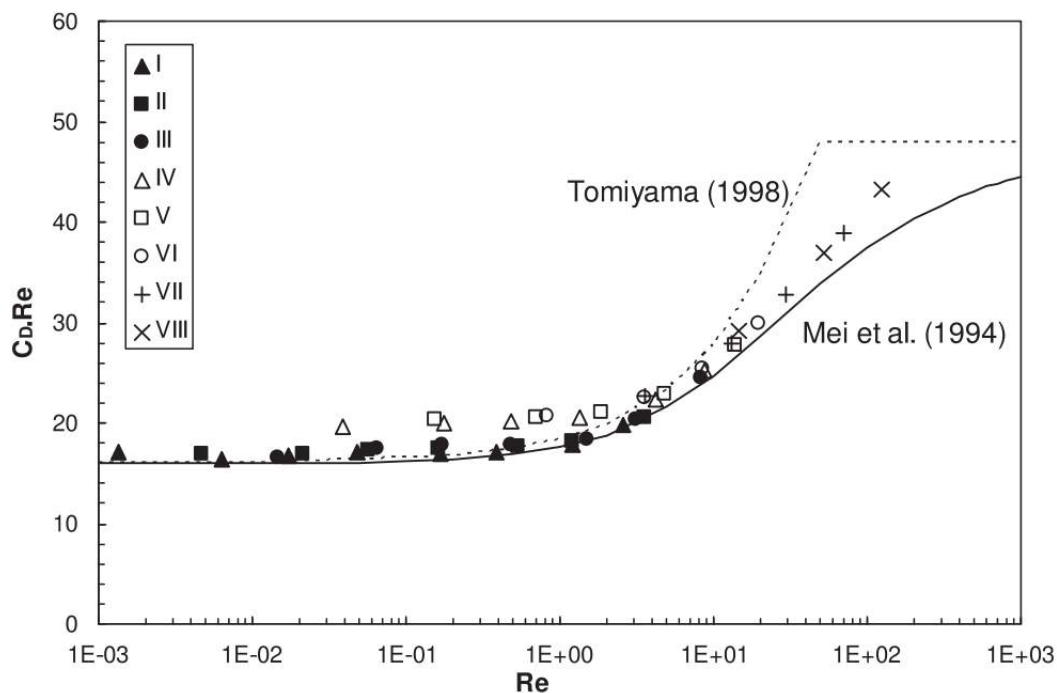


Figura 2.10: Coeficientes de arrasto multiplicados pelo número de Reynolds terminal para bolhas ($Eu > 0,95$) comparados com correlações de Tomiyama *et al.* (1998) e Mei, Lawrence e Klausner (1994). Os símbolos se referem às diferentes propriedades para a fase contínua. Variando-se os fluidos de I - VIII, varia-se gradualmente os valores de viscosidade na faixa de 153 mPa.s - $0,899 \text{ mPa.s}$; densidade 1228 kg/m^3 - 998 kg/m^3 ; tensão superficial $65 \frac{\text{N}}{\text{m}} 10^{-3}$ - $72 \frac{\text{N}}{\text{m}} 10^{-3}$

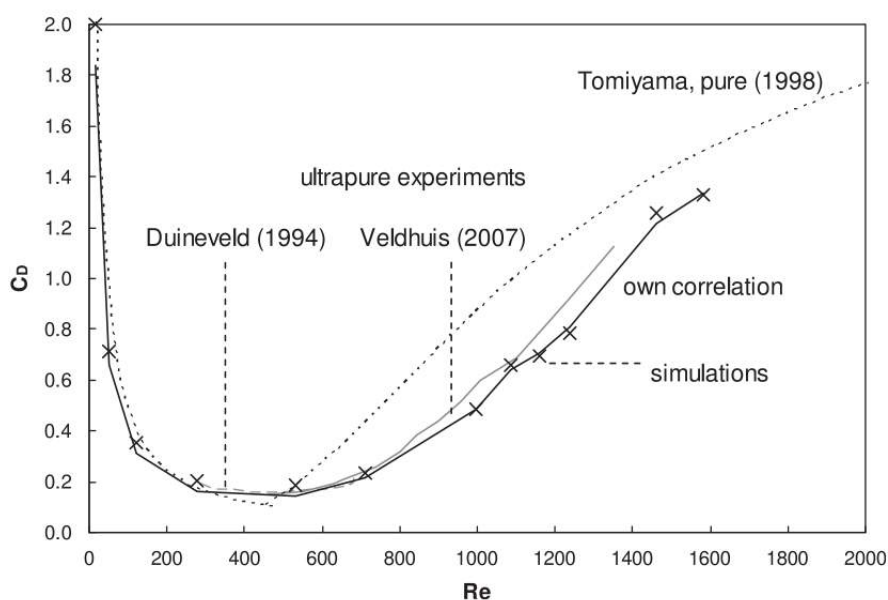


Figura 2.11: Comparação entre resultados numéricos (DIJKHUIZEN *et al.*, 2010), experimentais (DUINEVELD, 1995; VELDHUIS, 2007) e a correlação de Tomiyama *et al.* (1998)

A investigação do arrasto em bolhas isoladas possibilitou a formação de correlações amplamente utilizadas na modelagem de colunas de bolhas. Sabe-se que em situações reais as interações entre bolhas em uma população influenciam no formato, trajetória e forças interfaciais de bolhas. Nesse sentido, trabalhos que incluem os efeitos de fração volumétrica das fases na vizinhança na estimativa dos coeficientes de arrasto atuando em bolhas. Roghair *et al.* (2011) apresenta um trabalho onde é utilizada a experimentação numérica para uma investigação desse tipo. Na determinação do coeficiente de arrasto, o autor insere um parâmetro α no termo de empuxo, que quantifica a fração de gás presente na vizinhança das bolhas. O autor utiliza um método de *Front Tracking* para simular uma população de bolhas em um domínio periódico, como ilustrado na Fig. 2.12.

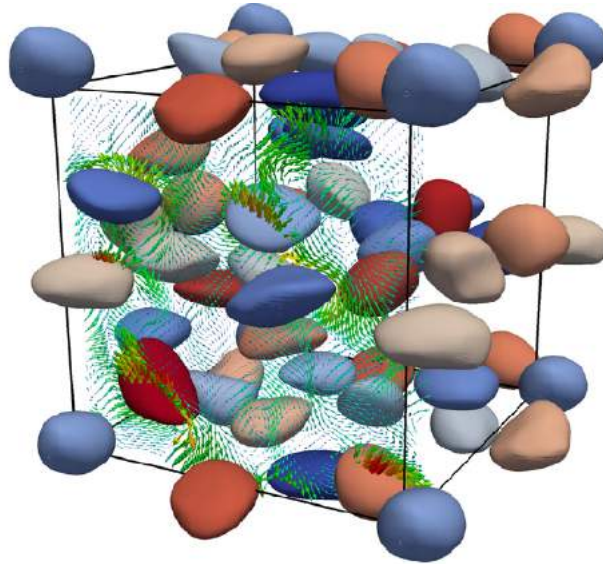


Figura 2.12: População de bolhas dispostas em um domínio periódico para a investigação do arrasto em bolhas considerando interações entre bolhas vizinhas. Fonte: (ROGHAIR *et al.*, 2011)

A correlação proposta é baseada em uma correção utilizada por Rusche e Issa (2000), onde é inserida uma função de correção $f(\alpha, \dots)$, que relaciona o coeficiente de arrasto para uma bolha em meio a uma população e uma bolha isolada. A Eq. 2.15 ilustra esta correção.

$$\frac{C_{D,swarm}}{C_{D,\infty}} = f(\alpha, \dots) \quad (2.15)$$

Após realizadas diversas simulações para diferentes números de Eötvös e fração de gás (α), é feito um ajuste por mínimos quadrados, que leva a nova correlação proposta (Eq. 2.16). Esta correlação foi testada em um trabalho de Lau *et al.* (2011).

$$\frac{C_D}{C_{D,\infty}(1-\alpha)} = 1 + \left(\frac{18}{Eo}\right)\alpha \quad (2.16)$$

2.3.2 Modelagem da sustentação em bolhas

Por muito tempo, pouco se sabia sobre os efeitos de forças de sustentação em partículas. Observações feitas por Segré e Silberberg (1961) em um experimento onde esferas suspensas, em meio a um escoamento de Poiseuille, se deslocavam em posições afastadas de aproximadamente 0,5 a 0,7 do raio do tubo em relação a sua linha de centro. Esse experimento demonstrou a existência inequívoca de forças laterais (ou de sustentação) em partículas esféricas (RUSCHE, 2002). Desde então, muitos trabalhos investigativos sobre forças laterais em partículas foram feitos (GOLDSMITH; MASON, 1967) (COX; G., 1971) (TSUJI; MORIKAWA; SHINOMI, 1984).

Existem diferentes tipos de experimentos para quantificar forças de sustentação em partículas. Experimentos de levitação, ou sustentação, consistem em posicionar a partícula estudada em uma posição de equilíbrio em meio a um escoamento com um perfil cisalhante. Determina-se a força lateral em função da posição de equilíbrio e outras forças conhecidas, como arrasto, empuxo e massa virtual. Utilizando-se técnicas de PIV (*Particle Image Velocimetry*), pode-se realizar experimentos rastreando-se as partículas em meio a um escoamento com perfil cisalhante pré-definido. O uso de perfis cisalhantes é bastante comum em investigações de forças laterais em partículas ou bolhas. Essa condição é encontrada em diversos trabalhos. Cabe mencionar que tais experimentos limitam-se a situações de baixos números de Reynolds, pelas complexidades fluidodinâmicas geradas a altos Reynolds.

Em sua tese de doutorado, Rusche (2002) apresenta uma extensa revisão sobre a modelagem do arrasto e sustentação em bolhas. No trabalho, constam diferentes fatores de influência na sustentação. Como já comentado, o cisalhamento no fluido ao redor da bolha/partícula é um deles. Basicamente, vórtices assimétricos são gerados pela passagem

do perfil cisalhante. Surge então uma força lateral no sentido do lado de maior vorticidade. Dependendo das forças, bolhas podem assumir diversos formatos durante a ascensão. Um formato assimétrico desvia fluido para uma direção lateral, gerando uma força de sustentação resultante. Os efeitos de esteira também podem ser bastante pronunciados, e geralmente agem conjuntamente com os efeitos previamente comentados. Esteiras assimétricas geram forças laterais em bolhas. Evidentemente, esteiras de outras bolhas também influenciam nas forças laterais que agem em uma bolha próxima.

O uso de perfis cisalhantes lineares para quantificação de forças de sustentação em bolhas por meio de simulações computacionais é apresentado no trabalho de Tomiyama (1998). Resultados de bolhas ascendentes a baixos números de Reynolds sob o efeito de diferentes perfis cisalhantes registraram migrações laterais das bolhas ascendentes, sendo esses resultados compatíveis com resultados experimentais de KARIYASAKI (1987). Alguns anos depois, Tomiyama *et al.* (2002) investiga experimentalmente a ascensão de bolhas de ar em água/glicerol sob a ação de um perfil de velocidades cisalhante. Para isso, foi construído um aparato como ilustrado pela Fig. 2.13, feito de acrílico, com 0,9 m de altura, 0,45 m de largura e 0,152 m de profundidade. Uma esteira é montada junto ao tanque, como mostra a Fig. 2.13. Assim, quando mantida a uma velocidade constante, a superfície da esteira promove um cisalhamento no fluido conhecido, que é usado como parâmetro de cálculo do coeficiente de sustentação. A seção onde os testes são realizados tem uma largura de 0,03 m e 0,015 m de profundidade com a superfície da esteira. Seus resultados, assim como o de outros autores, identificaram uma inversão no sentido de deslocamento das bolhas a medida que o diâmetro das bolhas aumentavam. Em geral, para bolhas esféricas (pequenas) observou-se um deslocamento lateral na direção da parede de acrílico, enquanto que bolhas maiores se deslocaram no sentido de maior velocidade, indicando uma inversão do sinal da forças transversais atuantes. A Fig. 2.14 apresenta alguns resultados do trabalho onde é possível ver as diferentes trajetórias assumidas pelas bolhas de diferentes tamanhos. Nota-se a variação constante do comportamento com um aumento constante do tamanho das bolhas.

Através de uma equação que representa o movimento de uma bolha, Tomiyama *et al.* (2002) derivam uma correlação para o coeficiente de sustentação que se ajusta às trajetórias medidas. Essa correlação foi escrita em função do número de Reynolds e de um

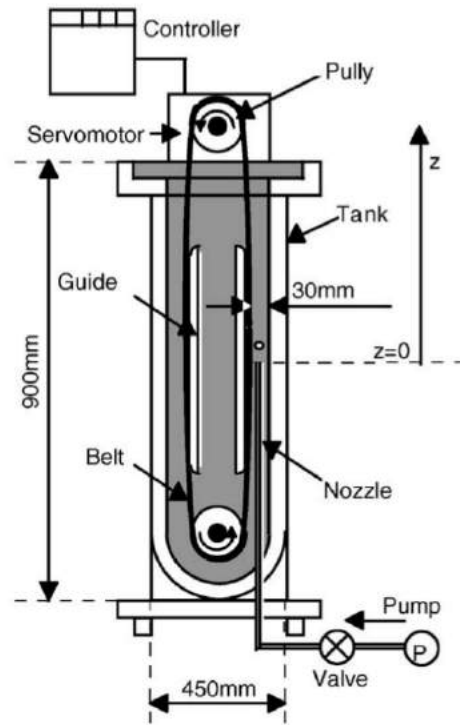


Figura 2.13: Desenho esquemático do aparato experimental utilizado no trabalho de Tomiyama *et al.* (2002).

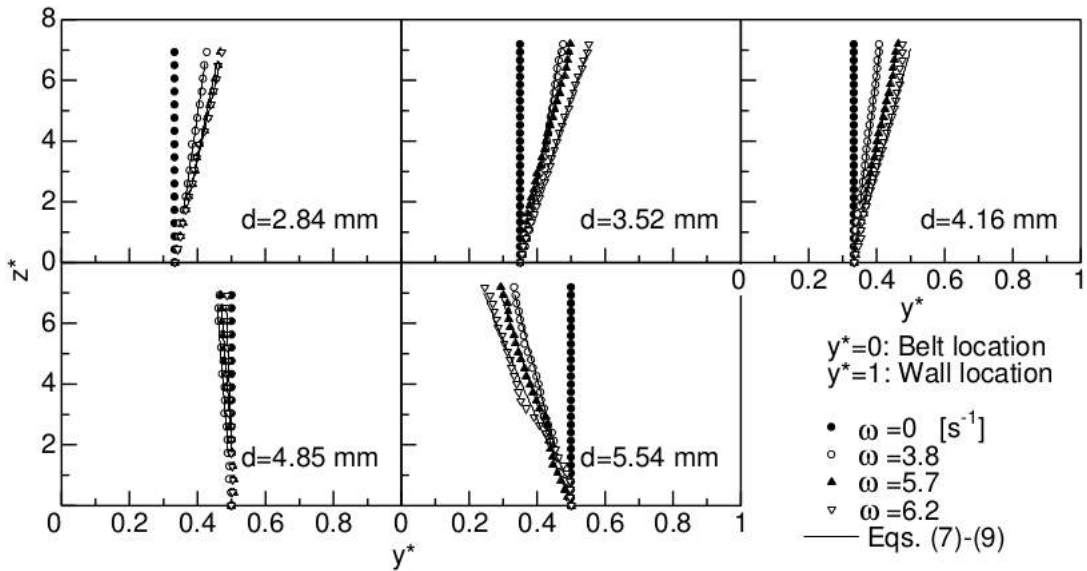


Figura 2.14: Trajetórias de ascensão medidas, usando bolhas ascendentes de diferentes tamanhos. Fonte: Tomiyama *et al.* (2002).

número de Eötvös modificado, onde se utiliza a maior dimensão horizontal em bolhas com deformações pronunciadas. A correlação é apresentada na Eq. 2.17.

$$C_t = \begin{cases} \min [0, 288 \tanh (0, 121 Re), f (Eo_d)], & \text{para } Eo_d < 4 \\ f (Eo_d), & \text{para } 4 \leq Eo_d \leq 10, 7 \\ f (Eo_d) = 0, 00105 Eo_d^2 - 0, 0159 Eo_d^2 - 0, 0204 Eo_d + 0, 474 & \end{cases} \quad (2.17)$$

O trabalho de Dijkhuizen, Annaland e Kuipers (2010) utiliza um modelo numérico (*Front Tracking*) e um aparato experimental para a investigação da sustentação em bolhas. Comparações de seus resultados numéricos com correlações já existentes levaram o autor a recomendar uma correlação completa para a sustentação em bolhas esféricas em sistemas puros, baseada na correlação de Legendre e Magnaudet (1998), que é apresentada pela Eq. 2.18.

$$C_t = \min \left[\sqrt{\left(\frac{6J (Re, Sr)}{\pi \sqrt{ReSr}} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \frac{Re + 16}{Re + 29} \right)^2}, 0, 5 - 0, 11 Eo_H + 0, 002 Eo_H^2 \right] \quad (2.18)$$

O experimento material foi utilizado para investigação dos mesmos efeitos em sistemas contaminados. Os resultados levaram o autor a conclusão de que, para aquela faixa de Sr e Re , os contaminantes influenciam bastante nas forças laterais, o que levou a grandes discrepâncias em relação aos valores previstos pela simulação numérica e uma clássica correlação de Tomiyama *et al.* (2002). Os autores sugerem maior atenção na determinação da pureza do sistema, seguido de investigações em diferentes níveis de contaminação.

2.3.3 Modelagem de forças de massa virtual

Em uma revisão sobre forças inerciais e de massa acrescentada (ou virtual), Brennen (1982) apresenta uma detalhada explicação do fenômeno. Em uma formulação mais geral, os efeitos de massa virtual devem ser representados na forma tensorial e, apenas em situações bastante simplificadas (corpos esféricos, escoamentos potenciais), o efeito de massa virtual pode ser escrito de forma exata em função de um coeficiente escalar e a aceleração

linear de um corpo em movimento.

Os primeiros avanços na determinação do efeito de massa virtual em bolhas isoladas foram feitos em situações simplificadas de escoamentos potenciais em baixas velocidades nos trabalhos de Lamb (1932), Prandtl (1952) e Milne-Thomson (1968).

Drew e Lahey (1979) apresenta uma maneira de se calcular a força de massa virtual em função de um campo de aceleração relativo entre as fases, escrito de forma objetiva. Para isso, os autores consideram que a força de massa virtual pode ser expressa em função de um escalar (coeficiente) e a aceleração entre os fluidos. A expressão apresentada no trabalho permite que a clássica expressão para a força de massa virtual seja recuperada para bolhas esféricas ascendentes em meio quiescente, onde a força pode ser escrita como função da aceleração da bolha. Em simulações com modelos à dois fluidos (Euler-Euler), Lahey *et al.* (1980) registram um significativo aumento de eficiência numérica na solução dos sistemas lineares gerados ao considerar os efeitos de massa virtual, embora a física do problema não tenha sido significativamente afetada.

O trabalho de Simcik, Ruzicka e Drahoš (2008) apresenta cálculos de coeficientes de massa virtual para bolha esféricas e elipsoidais com a ajuda de CFD. O método de cálculo consiste em liberar uma bolha do repouso, e estimar a aceleração inicial da bolha. Como nos instantes iniciais a velocidade relativa entre as fases é praticamente nula, considera-se a atuação de apenas uma força inercial (na direção da aceleração da gravidade) proporcional à aceleração relativa entre as fases, tida como força de massa virtual. O tempo de medição é realizado em uma escala de tempo baixa o suficiente para se desprezar a condição de escorregamento na interface da bolha, permitindo os autores recuperarem o resultado clássico de $C_{MV} = 0,5$ para uma esfera rígida. A Eq. 2.19 mostra o equacionamento do balanço de forças na bolha esférica. Entre as forças, apenas as forças gravitacionais F_{EP} e a força de massa virtual F_{MV} . Podemos escrever ainda as Eqs. 2.20 e 2.21 em função dos parâmetros físicos ρ_d (densidade da bolha), ρ_c (densidade do líquido) e em função da aceleração inicial da bolha \vec{a} , que é estimada a partir de uma regressão linear feita pelo método dos mínimos quadrados, com os valores de velocidade em função do tempo. As simulações de Simcik, Ruzicka e Drahoš (2008) permitiram a recuperação do valor clássico de $C_{MV} = 0,5$, como esperado.

$$m_d \|\vec{a}\| = \|\vec{F}_{EP}\| - \|\vec{F}_{MV}\| \quad (2.19)$$

$$(\rho_d + C_{MV} \rho_c) \vartheta \|\vec{a}\| = \|\vec{g}\| (\rho_c - \rho_d) \vartheta \quad (2.20)$$

$$C_{MV} = \frac{g(\rho_c - \rho_d)}{\rho_c \|\vec{a}\|} + \frac{\rho_d}{\rho_c} \quad (2.21)$$

O trabalho de Simcik, Puncochar e Ruzicka (2014) apresenta um modelo aproximado para o cálculo do coeficiente de massa virtual em bolhas do tipo *spherical cap*. O modelo proposto pelos autores envolve um procedimento geométrico para se determinar o volume uma "esteira congelada", como mostra a Fig. 2.15. O coeficiente de massa virtual é obtido com uma comparação entre o volume real da bolha e o volume da bolha somado ao volume da "esteira congelada". O valor do coeficiente é determinado através da relação entre os volumes e um valor de referência, sendo esse $C_{MV} = 0,5$, atribuído à corpos esféricos. Os valores estimados com o modelo foram comparados com valores obtidos por Kendoush (2003), e são apresentados na Fig. 2.16. No ano seguinte, Ruzicka, Simcik e Puncochar (2015) apresentam um trabalho que explica melhor o fato de seus resultados em Simcik, Puncochar e Ruzicka (2014) serem tão similares aos resultados de Kendoush (2003). Entre suas conclusões, é destacada a possibilidade de simplificar o tipo de análise de Kendoush (2003) e chegar a uma forma análoga à proposta pelo modelo da "esteira congelada", sugerindo que essa é uma forma simplificada para o cálculo da massa adicionada em bolhas do tipo *spherical cap*.

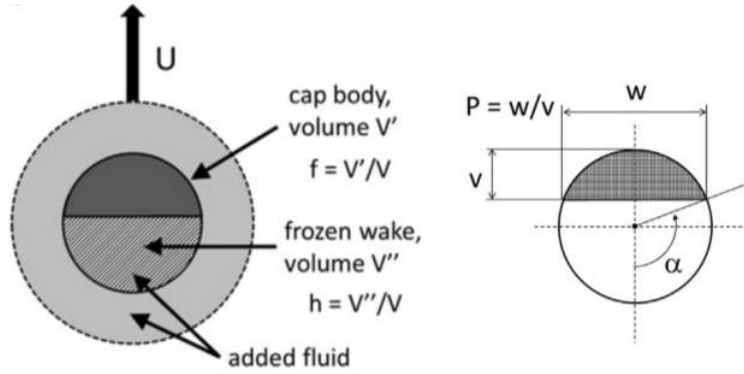


Figura 2.15: Modelo de “esteira congelada”, proposto no trabalho de Simcik, Puncochar e Ruzicka (2014).

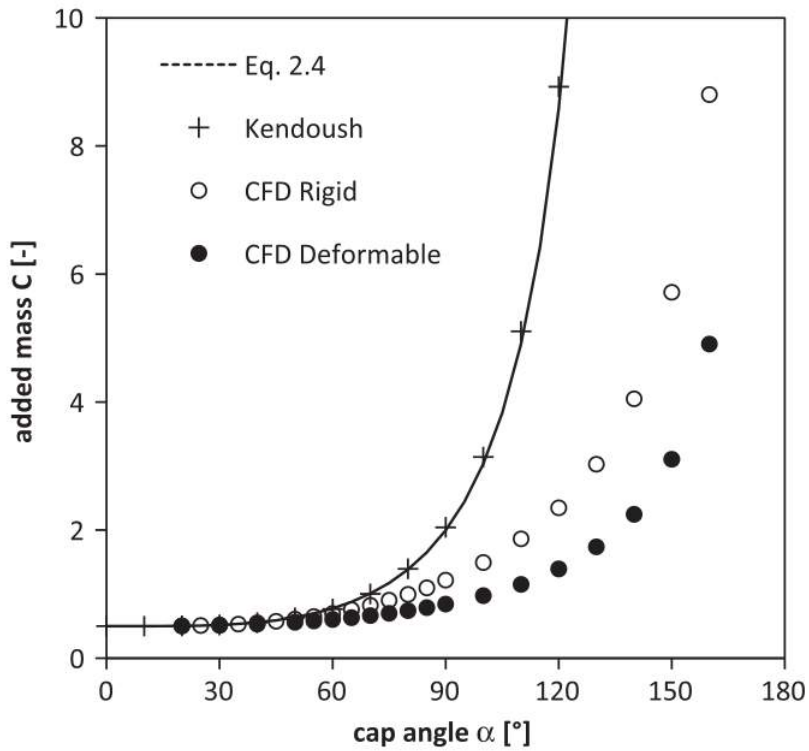


Figura 2.16: Comparação entre valores obtidos nos trabalhos de Simcik, Puncochar e Ruzicka (2014) e Kendoush (2003).

2.4 Técnicas de experimentação material em colunas de bolhas

Yang X. (2006) apresenta uma extensa revisão sobre as técnicas utilizadas no estudo de bolhas em ascensão e as interações entre as fases líquida-sólida-gasosa. Em relação às técnicas experimentais, normalmente se emprega visualizações diretas através de câmeras de alta resolução e frequência, ou se utiliza técnicas de medições. As análises das imagens obtidas através de visualizações diretas permitem a quantificação do comportamento dinâmico

mico das bolhas, quanto ao seu formato, esteira, tamanho e velocidade de ascensão. O maior limitante dessa técnica é a obtenção de informações da dinâmica tridimensional das bolhas. No entanto, métodos de medição intrusivos e não intrusivos foram desenvolvidos para a investigação dos efeitos tridimensionais.

Técnicas de medições intrusivas utilizam diversos tipos de sondas, como sondas de impedância, de fibra ótica, de ultrassom, endoscopia e anemometria de fio quente. Diversos autores utilizaram sondas de impedância para determinar a fração de volume (CHEN *et al.*, 1998) (ZENIT; KOCH; SANGANI, 2001a), tamanho (TANG; FAN, 1989) e velocidade (HILLS; DARTON, 1976) (MATSUURA; FAN, 1984) em colunas de bolhas. Esse tipo de técnica requer boa condutividade do líquido, e em alguns casos a adição de sais torna-se necessária (BOYER; DUQUENNE; WILD, 2002). Sensores de fibra ótica foram utilizados na caracterização de colunas de bolhas (FRIJLINK, 1987) (CHABOT; LASA, 1993) (XUE *et al.*, 2003). Essa técnica parte do princípio que a luz passa pelo meio líquido e é refletida pelas bolhas, o que torna a técnica inadequada em casos onde não há grande refração entre os fluidos. Também é necessária uma precisa calibração do sensor com uma câmera digital para que a medição do tamanho e velocidade da bolha possa ser feita. Este tipo de sensor é bem adequado para a medição das propriedades de uma coluna de bolhas a altas pressões e temperaturas. Stolojanu e Prakash (1997) obteve a fração volumétrica de bolhas usando sensores ultrassônicos. Al-Masry, Ali e Aqueel (2005) estudaram a frequência e os tamanhos de bolhas através de análise estatística de sinais acústicos. Wang e Ching (2001) utilizaram anemometria de fio quente na medição das velocidades das bolhas em meio líquido com partículas. Foi constatada a fragilidade do anemômetro para altas concentrações de partículas solidas, e que para uma medição adequada, o campo de temperatura deve ser uniforme ao longo do fio. O uso de técnicas intrusiva permite a medição pontual das propriedades, mas por se tratar de sistemas altamente instáveis, a perturbação causada no sistema distorce o real comportamento do escoamento. A diminuição da interferência pela redução do tamanho acaba comprometendo a resistência dos sensores.

Técnicas não intrusivas de medição oferecem a grande conveniência de não interferir no escoamento. Com essas técnicas é possível obter informações em planos, como a trajetória das bolhas e o campo de velocidades do escoamento. Inclui nessa classe equi-

pamentos como transdutores de pressão, Particle Image Velocimetry (PIV), raio-X, raio- γ , Positron Emission Tomography (PET), Radioactive Particle Tracking (RPT), Nuclear Magnetic Resonance Imaging (NMR). Com transdutores de pressão é possível caracterizar o escoamento em colunas de bolhas ao medir a queda de pressão e através de tratamentos estatísticos. O transdutor, posicionado na parede do aparato que contém o líquido, detecta a física do escoamento através das flutuações de pressão (DRAHOS *et al.*, 1991) (DRAHOS; BRADKA; PUNCOCHAR, 1992) (JOHNSSON *et al.*, 2005) (KLUYTMANS *et al.*, 2001) (BRIENS; ELLIS, 2005) (CHILEKAR *et al.*, 2005). Visualização direta é útil para a medição de propriedades em sistemas onde há baixa captura de gás (JIANG *et al.*, 1995) (LUO *et al.*, 1998) (YANG *et al.*, 2000). Na construção de um aparato transparente adequado, é possível utilizar esta técnica para experimentações à alta temperatura e pressão. A técnica do raio-X é amplamente utilizada para se medir propriedades geométricas das bolhas de maneira precisa, incluindo o crescimento e a quebra das mesmas. A técnica pode ser aliada à tomografia computacional, que gerou vários trabalhos da área (KUMAR; DUDUKOVIC; TOSELAND, 1997) (SEEGER *et al.*, 2003). Esse tipo de medição proporciona grande resolução espacial, mas baixa resolução temporal. O uso de raios- γ permitiu a medição do tamanho, frequência e coalescência de bolhas em ascensão (SEVILLE; MORGAN; CLIFT, 1986) (KUMAR; MOSLEMIAN; DUDUKOVIC, 1995) (VEERA; JOSHI, 2000) (JIN *et al.*, 2005). Devido ao elevado tempo de varredura, o uso de técnicas de raio- γ não permite uma boa análise da dinâmica das bolhas, sendo mais utilizada para o estudo das propriedades médias no tempo. Técnicas de laser, como o PIV são muito utilizadas na área, tanto para análises bidimensionais como tridimensionais (CHEN; FAN, 1992) (REESE; CHEN; FAN, 1995) (REESE; JIANG; FAN, 1996) (LEE; LUO; FAN, 1999). Para as técnicas a laser, é crucial que o laser penetre no líquido, o que limita o uso dessas técnicas a casos onde há pouco gás em meio ao líquido.

2.5 Trabalhos de simulação de múltiplas bolhas

O estudo de escoamentos borbulhantes é motivado pela presença dos mesmos em diversos fenômenos naturais e processos industriais. Esses escoamentos costumam ser com-

postos por um número elevado de bolhas (ou partículas) que interagem entre si e com uma fase contínua de forma transiente, em uma diversidade de escalas espaciais e temporais.

Como em escoamentos turbulentos, busca-se representar o escoamento médio através de equações filtradas que são alimentadas por modelos adicionais de fechamento. Em escoamentos bifásicos, o mais comum é a modelagem à dois fluidos (ou Euler-Euler), que constitui de uma equação para cada fase do escoamento. Quando comparados à escoamentos turbulentos, escoamentos bifásicos mostram-se mais difíceis quando se trata da obtenção de informações médias, pois além da presença das tensões de Reynolds, existem diversas interfaces em movimento que dão origem a termos adicionais que regem a forma com que as fases trocam quantidade de movimento (ESMAEELI; TRYGGVASON, 1998). Neste escopo, o termo simulação numérica direta é usualmente empregado quando se resolvem as equações completas do balanço da quantidade de movimento e a dinâmica da interface entre as fases.

Um revisão literária do assunto mostra que o escoamento de população de bolhas ascendentes, até uma certa magnitude de fração de vazio, pode ser entendido como um escoamento promovido por partículas sob a ação gravitacional. Dessa forma, muita informação pôde ser extrapolada para escoamentos borbulhantes a partir de investigações de escoamentos particulados, especialmente aqueles em que partículas sólidas dispersas decantam em um meio fluido quiescente. Mizukami, Parthasarathy e Faeth (1992) investiga o escoamento turbulento induzidos por partículas de vidro esféricas dispersas de forma homogênea em um meio contínuo, sendo este ar ou água. Seus resultados mostraram uma correlação entre intensidade turbulenta e um fator de dissipação, para os parâmetros físicos do experimento. Foram registradas comparações entre o escoamento turbulento induzido por partículas e a turbulência homogênea. Entre as semelhanças, foi constatada que a função densidade de probabilidade das flutuações de velocidade se aproxima da função Gaussiana. As diferenças foram marcadas por um aumento de anisotropia do escoamento turbulento induzidos por partículas, e um decaimento logarítmico de energia cinética turbulenta de -1,1.

A literatura científica apresenta diversas formas de se representar escoamentos de bolhas ascendentes. Dependendo das características do problema estudado, é comum encontrar trabalhos com simplificações do tipo escoamento potencial, irrotacional e escoamento de

Stokes. Quando as bolhas/partículas são de uma escala consideravelmente menor que qualquer estrutura do escoamento, as mesmas podem ser representadas por partículas pontuais. Um exemplo pode ser visto no trabalho de Wang e Maxey (1993), que apresenta simulações de partículas pontuais sólidas sujeitas a lei do arrasto de Stokes, em um escoamento turbulento isotrópico. No trabalho, a velocidade média das partículas é calculada com um acoplamento de uma via, em que não há influência da partícula no escoamento. Truesdell e Elghobashi (1994) apresentam simulações numéricas de partículas pontuais com acoplamento de duas vias em um escoamento turbulento isotrópico em decaimento. Foi possível verificar a influência da presença das partículas no decaimento da turbulência. É interessante observar que, como não se resolve a dinâmica da interface com modelagens de partículas pontuais, é necessária a adição de modelos de fechamento para a representação de forças do escoamento que agem nas partículas. Os autores citados chamaram seus cálculos de simulação numérica direta, embora os métodos utilizados não se enquadrem na definição aceita pela comunidade científica.

Em um trabalho direcionado para o uso de CFD para o dimensionamento de colunas de bolhas, Krishna e Baten (2001) utilizam o método VOF e as equações de Navier-Stokes completas para simular a dinâmica de bolhas isoladas em ascensão, e as interações de múltiplas bolhas em situações simplificadas. Muitas informações foram obtidas a partir das simulações bidimensionais de bolhas em diversos regimes de ascensão, e resultados foram comparados com resultados obtidos em uma bancada experimental que reproduz bolhas ascendentes bidimensionais. Simulações de múltiplas bolhas foram realizadas para casos de bolhas relativamente pequenas e bolhas do formato *spherical cap*. As simulações das bolhas menores deram uma ideia da interação entre elas, e que existe uma diminuição da velocidade de ascensão quando comparada à velocidade de ascensão da mesma bolha isolada em um meio fluido quiescente. A Fig. 2.17 mostra o resultado obtido para as bolhas menores. É possível observar que as bolhas bidimensionais evitam a esteira da bolha imediatamente acima, fazendo um movimento alternado para os lados.

A interação de duas bolhas no formato *spherical cap* em ascensão foram analisadas, e foi possível verificar uma aceleração que é promovida pela esteira da bolha acima. A Fig. 2.18 apresenta instantes sequenciais da simulação. Foi calculado um fator de aceleração

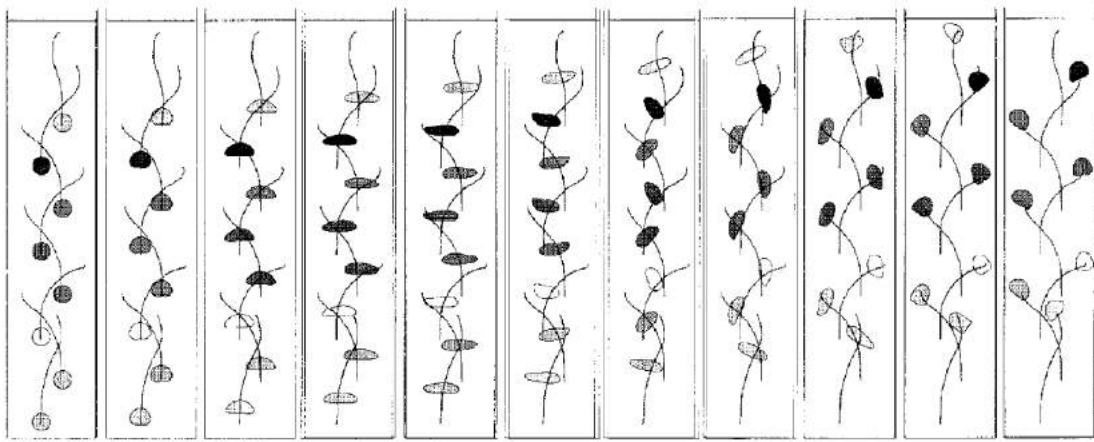


Figura 2.17: Resultados da simulação bidimensional múltiplas bolhas "pequenas" de Krishna e Baten (2001).

das bolhas, e a informação foi usada para prever a velocidade de população de bolhas em regime de ascensão heterogêneo. Para isso, o regime heterogêneo foi modelado de forma simplificada em função da velocidade de entrada do gás na coluna, como ilustrado pela Fig. 2.19. O modelo simplificado considera o regime composto por bolhas "grandes" e "pequenas", que são tratadas de formas diferentes.

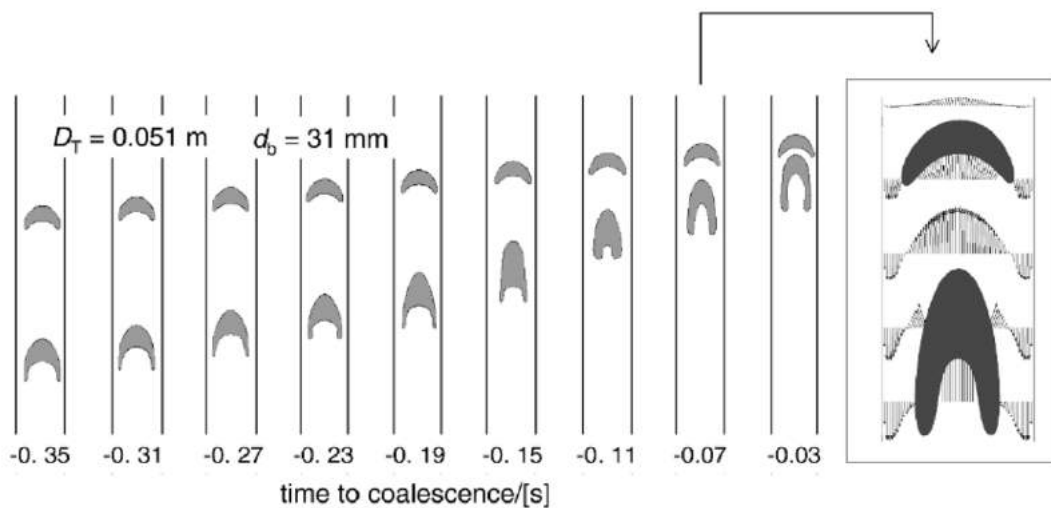


Figura 2.18: Resultados da simulação bidimensional da interação entre duas bolhas *spherical cap*. Retirado do trabalho de Krishna e Baten (2001).

Os resultados das interações entre bolhas foram usados para o melhoramento de um modelo de simulação do escoamento médio borbulhante com uma formulação à dois fluidos.

Em muitos trabalhos, a investigação teórica do escoamento de uma população

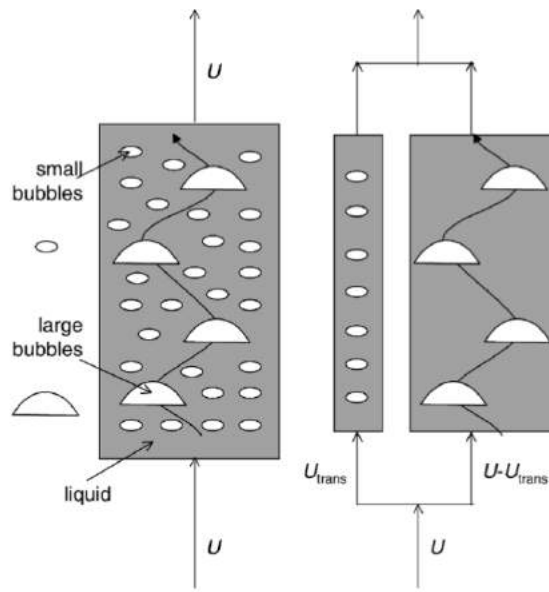


Figura 2.19: Resultados da simulação bidimensional de um regime de ascensão heterogêneo simplificado. Fonte: Krishna e Baten (2001).

de partículas (bolhas ou partículas sólidas) foi realizada através de um modelo conhecido como *cell model* (modelo celular), onde uma ou mais bolhas/partículas são dispostas em um domínio periódico para representar uma população de partículas dispersas com uma fração de vazio bem definida. Hasimoto (1959) utiliza o modelo celular para calcular o arrasto em uma população de bolhas em ascensão em regime de Stokes. Sangani e Acrivos (1982) e Sangani e Acrivos (1983) utilizam um método modificado de Hasimoto (1959) para calcular o arrasto em uma população de bolhas em um modelo celular em diferentes arranjos e valores de fração de vazio, ainda em regime de Stokes, e desenvolvem correlações para o arrasto em função da fração de vazio em uma população de bolhas esféricas.

O trabalho de Esmaceli e Tryggvason (1996) apresentou resultados de simulações numéricas diretas de população de bolhas em domínios periódicos bidimensionais a números de Reynolds de aproximadamente 2. Os autores resolveram as equações de Navier-Stokes completas com o método *Front Tracking* de Unverdi e Tryggvason (1992b) para o cálculo da força interfacial e representação das bolhas deformáveis. Estruturas do escoamento foram analisadas com a presença de até 324 bolhas, onde foi verificada a formação de estruturas consideravelmente maiores que o tamanho das bolhas e um aumento gradativo de energia das menores estruturas do escoamento, como acontece em simulações que buscam representar

escoamentos turbulentos desenvolvidos em duas dimensões. Este fenômeno foi considerado o principal fator que evita o aparecimento de um padrão de escoamento estatisticamente permanente que independe do tamanho do domínio de cálculo.

Para números de Reynolds elevados ($Re \gg 1$), Sangani e Didwania (1993) simula o escoamento potencial de bolhas a baixos números de Weber. Os resultados mostraram a natureza instável do escoamento e a formação de conjuntos de bolhas dispostas em planos transversais à direção gravitacional. Smereka (1993) também estuda o escoamento potencial de bolhas esféricas ascendentes em um domínio periódico e o mesmo comportamento registrado por Sangani e Didwania (1993) foi observado, onde bolhas esféricas se aglomeram em planos perpendiculares à direção da gravidade. No entanto, esse comportamento só foi observado quando as velocidades das bolhas são inicialmente idênticas, mesmo para disposições aleatórias no espaço. Para diferentes velocidades iniciais, os conjuntos de bolhas esféricas não se aglomeraram em planos. Entre as considerações finais, Smereka (1993) ressalta que, quando considerados em longo prazo os efeitos da gravidade e viscosidade, o escoamento borbulhante tende à formação de aglomerados em planos transversais à direção da gravidade. A pesquisa experimental de Zenit, Koch e Sangani (2001b) investigou o escoamento de população de bolhas esféricas com número de Reynolds de $O(100)$ no intuito de testar a aplicabilidade das simulações com modelos de escoamentos potenciais, mas foi constatada a sua inaplicabilidade, mesmo que o experimento tenha sido cuidadosamente construído para operar nos regimes em que acreditava-se no funcionamento dos modelos (TRYGGVASON; SCARDOVELLI; ZALESKI, 2011).

Esmaeeli e Tryggvason (1998) apresentam simulações numéricas diretas de populações de bolhas em domínios periódicos, bidimensionais e tridimensionais, para números de Reynolds na ordem de $O(1)$. Em sequência, o trabalho de Esmaeeli e Tryggvason (1999) investiga o escoamento de múltiplas bolhas em domínio periódico para números de Reynolds na faixa de 20-30. Muitas informações puderam ser geradas através de simulações de sistemas bidimensionais, e foram registrados resultados em regimes estatisticamente permanentes em meio à fortes interações entre bolhas por mecanismos de *drafting, kissing and thumbing*, fenômeno registrado no trabalho de Fortes, Joseph e Lundgren (1987). O tamanho do domínio periódico mostrou-se bastante influente no regime de Stokes. Velocidades de ascensão

foram comparadas para diferentes números de bolhas no domínio periódico. Quando apenas uma bolha é disposta no domínio, tem-se uma configuração regular de bolhas no espaço periódico. Os resultados mostraram que, para números de Reynolds moderados, há um aumento na velocidade de ascensão de bolhas em disposições irregulares (múltiplas bolhas no domínio periódico) quando comparada a velocidade calculada em disposições regulares (1 bolha no domínio). Um comportamento inverso foi registrado para os casos em regime de Stokes, em que houve um aumento da velocidade de ascensão quando as bolhas foram dispostas de forma irregular. Os autores sugerem que o efeito contrário é devido a geração de um campo de vorticidades mais intenso por parte do movimento instável das bolhas ascendentes à números de Reynolds moderados (20-30).

As simulações tridimensionais dos trabalhos de Esmaeeli e Tryggvason (1998) e Esmaeeli e Tryggvason (1999) foram limitadas à 8 bolhas pela capacidade computacional envolvida. No entanto, foi possível verificar similaridades entre os escoamentos bidimensionais e tridimensionais, principalmente nas interações entre bolhas do tipo *drafting*, *kissing and thumbling* e na forma com que o arranjo espacial inicial regular de bolhas é afetado por instabilidades do escoamento. O aumento do número de Reynolds nos modelos tridimensionais mostraram uma tendência de formação de aglomerados de bolhas em planos transversais à direção gravitacional, como previsto pelos modelos de escoamento potencial nos trabalhos de Sangani e Didwania (1993) e Smereka (1993). Essa tendência não foi observada nas simulações bidimensionais.

Com uma versão paralela do método usado nos trabalhos de Esmaeeli e Tryggvason (1998) e Esmaeeli e Tryggvason (1999), Bunner e Tryggvason (2002a) e Bunner e Tryggvason (2002b) simulam até 216 bolhas tridimensionais aproximadamente esféricas em domínio cúbico periódico, com frações de vazio de 2% à 24% e números de Reynolds variando entre 12 e 30. Os autores concluíram que o tamanho do domínio pouco influencia na estimativa de velocidade média de ascensão, e podem ser obtidas com simulações de somente 12 bolhas para as frações de vazio testadas. Também foi observada uma diminuição da velocidade média de ascensão com o aumento da fração de vazio. As interações entre as bolhas foram similares às interações do tipo *drafting*, *kissing and thumbling* e foi observada uma tendência de alinhamento horizontal das bolhas, como previsto pela teoria dos escoamentos potenciais.

Foi constatado que o uso de arranjos regulares de bolhas, ou seja, apenas uma bolha em um domínio periódico, resultam em boas estimativas de velocidades médias para altas frações de vazio. Medições das flutuações das componentes de velocidade média das bolhas e o tensor de Reynolds da fase contínua foram obtidos para diferentes números de bolhas em uma célula periódica, e constatou-se que o número de bolhas dentro da célula periódica tem grande influência nessas quantidades, e ficou registrado a impossibilidade de se determinar valores limites mesmo com a simulação de 216 bolhas em uma célula. A análise das flutuações de velocidades evidenciou a natureza anisotrópica do escoamento, que diminuiu com o aumento da fração de vazio, e foi calculada um decaimento logarítmico de $-3,6$ no espectro de energia cinética. O valor obtido foi da mesma ordem dos $-8/3$ obtidos no experimento de Lance e Bataille (1991).

Em um estudo sequencial, Bunner e Tryggvason (2003) simula uma população de bolhas elipsoidais para verificar o efeito de um maior nível de deformações das bolhas no comportamento do escoamento borbulhante. Foram simuladas 27 bolhas em um domínio periódico, à números de Reynolds de aproximadamente 23, e foi possível observar uma tendência das bolhas se alinharem verticalmente. Os efeitos de esteira das bolhas elipsoidais foram dominantes nas interações entre bolhas, que se aceleram ao entrar em uma região de esteira até encostarem na bolha (que promove a região da esteira). Ainda encostadas, as bolhas rotacionam juntas e separam-se quando se alinham na direção horizontal. A Fig. 2.20 compara a disposição de bolhas esféricas (à esquerda) e elipsoidais (à direita) para um mesmo instante de tempo, e observa-se a formação de uma coluna central de bolhas ascendentes para o caso das bolhas elipsoidais. Os autores atribuíram este efeito à ação das forças de sustentação promovidas pelo campo de vorticidade das esteiras, que atraem as bolhas para a região central do escoamento. As flutuações de velocidade também foram analisadas, e foi verificado maiores flutuações de velocidade no escoamento de população de bolhas elipsoidais, quando comparadas às flutuações do escoamento de bolhas esféricas.

Esmaeeli e Tryggvason (2005) investiga o escoamento de população de bolhas esféricas e elipsoidais para números de Reynolds na $O(100)$. Ao contrário do que foi observado no trabalho de Bunner e Tryggvason (2003), os resultados para bolhas elipsoidais não mostraram a formação grupos de bolhas alinhadas no centro do domínio, e as bolhas ficaram

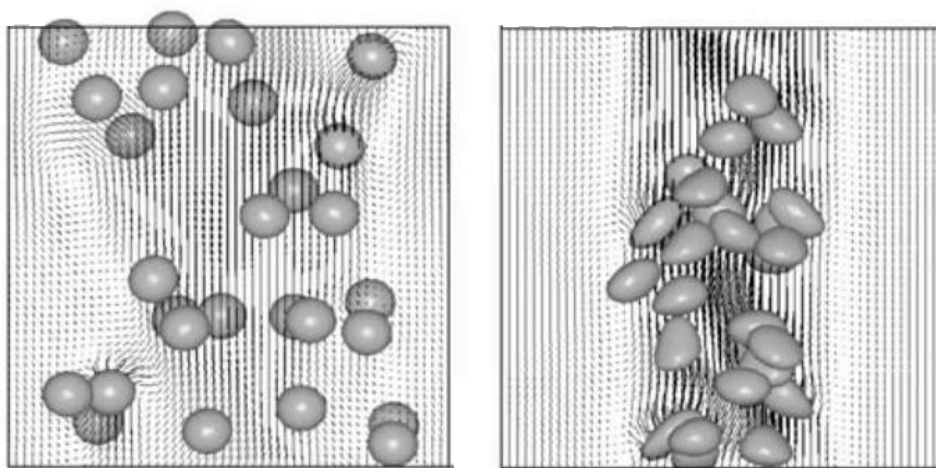


Figura 2.20: Comparação entre resultados para população de bolhas esféricas (esquerda) e elipsoidais (direita) em um domínio periódico tridimensional. Resultados de Bunner e Tryggvason (2003).

dispostas de forma aproximadamente uniforme no espaço. As bolhas esféricas demonstraram um comportamento já evidenciado em outros trabalhos com a formação de grupos alinhados horizontalmente.

CAPÍTULO III

MODELO MATEMÁTICO DIFERENCIAL

Neste Capítulo, é apresentado o modelo matemático diferencial utilizado para a simulação de escoamentos bifásicos de bolhas ascendentes na geração dos resultados da presente tese.

3.1 Balanço de massa

Para a simulação dos escoamentos no presente trabalho consideram-se duas fases com propriedades físicas constantes separadas por uma interface. Como temos campos de massas específicas variáveis no tempo e espaço, a equação diferencial para o balanço de massa pode ser escrita como na Eq. 3.1, onde $\mathbf{u} = (u, v, w)$.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (3.1)$$

Como o número de Mach $Ma \ll 1$ é possível que as fases sejam tratadas como escoamentos incompressíveis, e a Eq. 3.2 deve ser satisfeita para cada uma delas. Do ponto de vista numérico, essa é uma aproximação válida mesmo considerando que existe variação de massa específica através da interface, uma vez que o espaço é discretizado em uma malha computacional onde a massa específica é considerada constante em cada célula.

Assim, é viável o uso de algoritmos de solução de escoamentos incompressíveis e métodos numéricos de representação e advecção das interfaces para que os campos de propriedades sejam atualizados de forma a satisfazer a Eq. 3.1, que representa consistentemente a física de um escoamento de massa específica variável sendo advectado por um campo de velocidades.

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}) = 0 \quad (3.2)$$

3.2 Balanço da quantidade de movimento linear

O balanço da quantidade de movimento linear em escoamentos bifásicos resulta nas equações de Navier-Stokes com propriedades físicas variáveis, apresentadas pelas Eqs. 3.3. Nas equações, $\rho(\phi)$ é o campo de massa específica, $\mu(\phi)$ o campo de viscosidade dinâmica, ϕ é um escalar transportado pelo campo de velocidades, p a pressão, g a aceleração da gravidade e f_σ uma força de campo que aparece devido aos efeitos da tensão interfacial:

$$\rho(\phi)[\mathbf{u}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}] = \nabla \cdot [\mu(\phi)(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^\dagger)] - \nabla\mathbf{p} + \rho(\phi)\mathbf{g} + \mathbf{f}_\sigma. \quad (3.3)$$

O escalar ϕ define as fases do escoamento através do campo de massa específica e viscosidade, que são determinados via Eqs. 3.4 e 3.5. Para o método VOF utilizado no presente trabalho, o escalar ϕ representa a fração volumétrica de fase dispersa contida em uma célula computacional.

$$\rho(\phi) = \rho_c + (\rho_d - \rho_c)\phi(\mathbf{X}, t) \quad (3.4)$$

$$\mu(\phi) = \mu_c + (\mu_d - \mu_c)\phi(\mathbf{X}, t) \quad (3.5)$$

3.3 Representação da interface

Considerando um par de fluidos separados por uma interface fechada Γ , como na Fig. 3.1, define-se um campo escalar ϕ que assume valor 1 para o fluido cercado pela interface fechada, denominado fase dispersa, e valor 0 para o fluido externo, denominado fase contínua. Através da interface, ϕ varia suavemente entre valores 0 e 1. O campo de vetores unitários normais à interface (\mathbf{n}) e a curvatura (κ) da mesma podem ser calculados, respectivamente, pelas Eqs. 3.6 e 3.7, como demonstrado em Tryggvason, Scardovelli e Zaleski (2011).

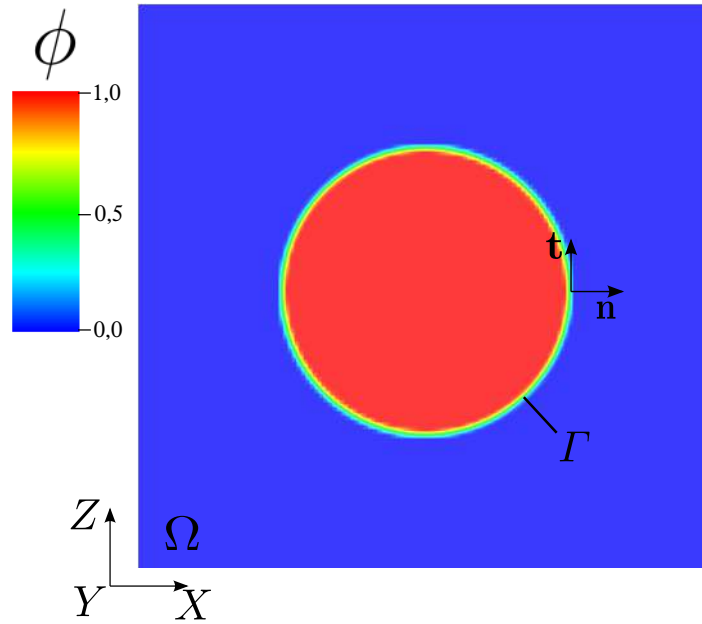


Figura 3.1: Desenho esquemático do campo de ϕ que define as fases do escoamento.

$$\mathbf{n} = -\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} \quad (3.6)$$

$$\kappa = -\nabla \cdot \mathbf{n} \quad (3.7)$$

Quando dois fluidos imiscíveis estão em um mesmo escoamento, forças resultantes do balanço entre forças de coesão molecular em moléculas situadas próximas à interface geram efeitos de tensão interfacial. A força é modelada proporcional à uma curvatura $\kappa[1/m^2]$ e

à tensão interfacial entre o par de fluidos $\sigma[N/m]$, considerada constante neste trabalho. A Eq. 3.8 modela a força interfacial que age na interface, onde \mathbf{n} é o vetor normal unitário local que, por convenção, sempre aponta para fora da superfície fechada.

$$f_{\sigma} = \sigma \kappa \mathbf{n} \tag{3.8}$$

CAPÍTULO IV

MODELAGEM MATEMÁTICA PARA FORÇAS DE ARRASTO, TRANSVERSAIS E DE MASSA VIRTUAL

Neste Capítulo, é apresentado as formas de cálculo para forças de arrasto, forças transversais (ou de sustentação) e forças de massa virtual atuantes em bolhas ascendentes. Serão apresentados um método integral baseado no Teorema do Transporte de Reynolds, que permite o cálculo das forças totais que agem na interface de uma bolha e as maneiras usuais encontradas na literatura para o cálculo dessas forças.

Devido à multiplicidade de escalas presentes em um problema do tipo coluna de bolhas, modelos representativos em escala completa devem basear em coeficientes empíricos para o fechamento da troca de quantidade de movimento entre as fases. Usualmente, os detalhes do escoamento não são de interesse primário. Flutuações ou detalhes do escoamento devem ser resolvidos apenas na extensão em que afetam o escoamento médio (DREW, 1982). A filosofia empregada baseia-se na viabilidade do uso de informações vindas de médias.

Em Drew (1982), há uma extensa discussão sobre as filosofias envolvidas para proposição de equações constitutivas para a representação das interações entre fases de um escoamento bifásico. Assume-se que as forças devem ser escritas em função de campos conhecidos e que esses campos devem obedecer o princípio da objetividade ou invariância euclidiana. Isso implica que as equações desenvolvidas sejam invariantes ao se mudar o sistema de referência. Maiores detalhes sobre o processo geral de construção de equações constitutivas podem ser vistos no trabalho de Drew e Lahey (1979).

4.1 Análise Integral de Forças em Bolhas

Supondo uma bolha isolada em meio quiescente, considera-se um volume de controle em que seus limites coincidem com a interface entre os fluidos, como ilustrado pela Fig. 4.1. Para uma formulação matemática mais completa, considera-se dois referenciais: um sistema inercial (X, Y, Z) e um não inercial (x, y, z) posicionado no centroide da bolha.

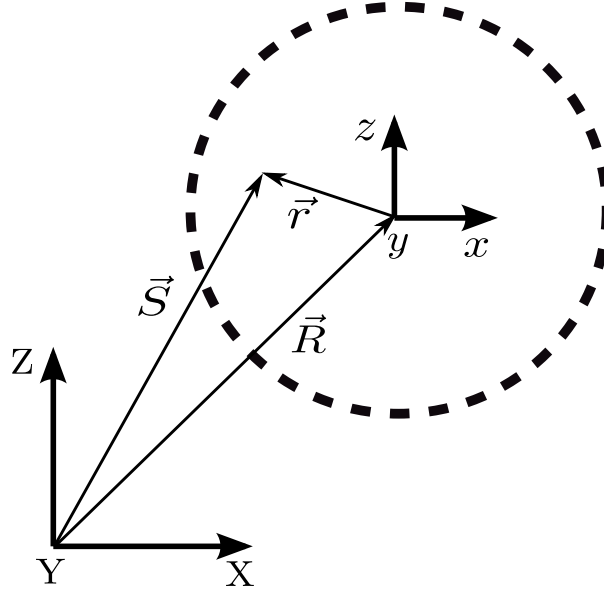


Figura 4.1: Volume de controle na interface entre as fases.

Em sua forma geral, o Teorema do Transporte de Reynolds pode ser representado pela Eq. 4.1.

$$\vec{F}_{ext} - \int_{vc} \rho \vec{a}_{rel} d\vartheta = \frac{d}{dt} \int_{vc} \rho \vec{V} d\vartheta + \int_{sc} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot d\vec{A}) \quad (4.1)$$

$$\vec{a}_{rel} = \frac{\partial^2 \vec{R}}{\partial t^2} + \frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} \times \vec{r} + 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) \quad (4.2)$$

Na Eq. 4.1, \vec{F}_{ext} representa as forças externas que atuam sobre o sistema que coincide com o volume de controle, \vec{a}_{rel} é a aceleração relativa das partículas de fluido contidas no volume de controle, ϑ o volume do volume de controle, \vec{V} é o campo de vetores velocidades visto pelo observador não inercial e $d\vec{A}$ é um vetor unitário normal o qual, por convenção,

aponta para fora da superfície de controle. O termo de aceleração relativa contabiliza efeitos de acelerações de translação e angular do referencial não inercial, aceleração de Coriolis e aceleração centrípeta, como apresentado na Eq. 4.2. O primeiro termo do lado direito da Eq. 4.1 é uma taxa de variação da quantidade de movimento linear total contida no volume de controle e o segundo termo é o fluxo líquido de quantidade de movimento linear que é transportado pelo campo de velocidades através da superfície de controle. Como os fluidos são imiscíveis, não existe transferência de quantidade de movimento através da superfície de controle. Assim:

$$\vec{V} \cdot d\vec{A} = 0, \quad (4.3)$$

$$F_{ext} - \int_{vc} \rho \vec{a}_{rel} d\vartheta = \frac{d}{dt} \int_{vc} \rho \vec{V} d\vartheta. \quad (4.4)$$

Considera-se que o eixo de referência inercial situa-se próximo ao domínio de cálculo e com velocidade nula em relação ao mesmo. Essa consideração implica em simplificações em relação aos efeitos de rotação e translação da Terra e, por consequência é considerado com velocidade absoluta nula. O mesmo raciocínio pode ser aplicado à solução das equações de Navier-Stokes que acontece em relação à um observador fixo ao domínio de cálculo e, para se obter os efeitos de rotação do planeta, termos fontes devem ser inseridos nas equações (aceleração de Newton, aceleração de Coriolis, aceleração centrípeta e aceleração angular). Porém, esses efeitos são desprezíveis para a análise do presente problema. Mais informações podem ser obtidas em Silveira-Neto (2016).

No presente trabalho, opta-se por utilizar as equações modificadas e assumir simplificações adicionais. No segundo termo do lado esquerdo da Eq. 4.4, comuta-se os operadores da derivada temporal e integração espacial, e o termo resultante pode ser juntado ao primeiro termo do lado direito dessa mesma equação, o que resulta:

$$F_{ext} = \frac{d}{dt} \int_{vc} \rho \left[\vec{V} + \frac{\partial \vec{R}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \right] d\vartheta. \quad (4.5)$$

Aplicando o operador derivada temporal na soma dos vetores \vec{R} , \vec{r} e \vec{S} , obtém-se a Eq. 4.6. Substituindo a Eq. 4.6 na Eq. 4.5, é possível escrever a Eq. 4.7, que é a equação utilizada para os cálculos de forças fluidodinâmicas deste trabalho. A simplificação assumida vem da retirada do operador derivada temporal de dentro da integral de volume (segundo termo do lado esquerdo da Eq. 4.4), que resultaria em uma integral de superfície adicional, em conformidade com o Teorema de Leibnitz (CIMBALA; ÇENGEL, 2008). No presente trabalho, essa integral é considerada nula. No entanto, a equação resultante fica próxima de uma aplicação direta da Segunda Lei de Newton para um sistema visto por um observador inercial. Considerando que a massa específica ρ não varia dentro do nosso sistema (já que não há passagem de massa através da fronteira), retira-se ρ de dentro da integral e a Eq. 4.8 é substituída na Eq. 4.7, resultando na Eq. 4.9 que corresponde exatamente à Segunda Lei de Newton em termos da aceleração média do fluido interno ao sistema. Na Eq. 4.9, $\overline{\vec{V}_{abs}}$ corresponde à velocidade absoluta, vista pelo observados inercial.

$$\frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \vec{V} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (4.6)$$

$$\vec{F}_{ext} = \frac{d}{dt} \int_{vc} \rho \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} d\vartheta \quad (4.7)$$

$$\int_{vc} \frac{\partial \vec{S}}{\partial t} d\vartheta = \overline{\frac{\partial \vec{S}}{\partial t}} \vartheta \quad (4.8)$$

$$\vec{F}_{ext} = \rho \vartheta \overline{\frac{\partial \vec{S}}{\partial t}} = \rho \vartheta_d \overline{\vec{V}_{abs}} \quad (4.9)$$

Essa é uma forma conveniente quando se tem as soluções dos campos de velocidades e massas específicas referentes à um observador inercial. Na Eq. 4.9, \vec{F}_{ext} representa a resultante da soma das forças externas que agem sobre a superfície de controle, definida pela própria interface entre os fluidos. A velocidade média $\overline{\frac{\partial \vec{S}}{\partial t}}$ é referente ao sistema inercial e corresponde ao campo de velocidades obtidos diretamente pela solução das equações do balanço da quantidade de movimento linear e a conservação da massa.

Forças gravitacionais dependem apenas das massas específicas, volume disperso e aceleração da gravidade. Possuem direção gravitacional e sentido constantes. A diferença entre a força de empuxo e o peso (F_{EP}) causado pelo volume de líquido deslocado é escrito na Eq. 4.10, onde ϑ é o volume da bolha, g a aceleração da gravidade, ρ_c e ρ_d as massas específicas das fases, respectivamente, contínua e dispersa. Nota-se a dependência entre as massas específicas das fases e, quando se trata de bolhas, o sentido da resultante força gravitacional sempre é contrário ao sentido da aceleração da gravidade. No presente trabalho, a aceleração da gravidade é sempre considerada na direção de z , com sentido contrário ao sentido crescente do eixo.

$$\vec{F}_{EP} = \vec{g}(\rho_c - \rho_d) \vartheta, \quad (4.10)$$

Sabendo que $\overline{\frac{\partial \vec{S}}{\partial t}} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$, é possível escrever as componentes da força de resistência fluidodinâmica total F_T convenientemente decomposta nas direções x, y, z :

$$F_x = \rho_d \vartheta \bar{u}, \quad (4.11)$$

$$F_y = \rho_d \vartheta \bar{v}, \quad (4.12)$$

$$F_z = \rho_d \vartheta \bar{w} - \|F_{EP}\|, \quad (4.13)$$

$$\vec{F}_T = (F_x, F_y, F_z). \quad (4.14)$$

Com os campos determinados através de soluções das equações de Navier-Stokes e da conservação da massa, a quantificação da força total que age em uma bolha ascendente é direta, já que os campos resultantes se referem à um observador inercial. A força representada pelas Eqs. 4.11 - 4.14 pode ser vista como uma soma de conhecidas forças fluidodinâmicas, como a de arrasto, sustentação (ou transversais), massa virtual, Basset, entre outras. Na verdade, essas forças tentam modelar a soma dos efeitos causados pelo movimento relativo entre as fases e seus efeitos, e muitas discussões ainda existem em torno dos efeitos associados à elas. No presente trabalho, essa força é referida como \vec{F}_T , pois representa uma força de resistência total ao escoamento.

4.1.1 *Ascensão em regime permanente*

O caso mais simples é aquele onde a bolha isolada atinge um regime permanente de ascensão em uma trajetória retilínea. Nessa situação, a taxa de variação temporal da integral volumétrica é nula, e o estado de equilíbrio entre as forças gravitacionais (diferença entre força de empuxo e força peso \vec{F}_{EP}) e a força de resistência fluidodinâmica total \vec{F}_T se estabelece, permitindo a escrita da Eq. 4.15. Em regime permanente, a força de resistência fluidodinâmica total é igual à conhecida força de arrasto \vec{F}_D .

$$\vec{F}_T = \vec{F}_D = \vec{F}_{EP} = \vec{g}(\rho_c - \rho_d)\vartheta_d \quad (4.15)$$

Observando a equação acima é possível concluir que a força de resistência ao escoamento que age em uma bolha, para uma velocidade de ascensão constante em meio quiescente, não depende do formato assumido pela bolha, e sim do volume da mesma (ϑ_d). A força \vec{F}_D calculada pela Eq. 4.15 é apresentada como ponto de partida para o cálculo de coeficiente de arrasto em diversos trabalhos, como em Tomiyama *et al.* (1998), Dijkhuizen *et al.* (2010) e Roghair *et al.* (2011).

4.1.2 Ascensão em regime transiente

Em uma situação simples em que a trajetória é retilínea, a força de resistência ao escoamento pode ser representada pela Eq. 4.16. Percebe-se que o termo que representa a taxa de variação de quantidade de movimento é considerado na equação. Esse é um termo que contabiliza a inércia da bolha, e sua magnitude é ordens de grandeza menores que as contribuições das forças gravitacionais.

$$\vec{F}_T = \rho_d \vartheta_d \frac{d\vec{V}_{abs}}{dt} - \vec{F}_{EP} \quad (4.16)$$

Na Eq. 4.16, \vec{F}_T não é chamada de força de arrasto, pois existem nela contribuições das chamadas forças de massa virtual, ou massa adicionada. Tais forças representam os efeitos inerciais causados pela aceleração do fluido ao redor da bolha, pelo deslocamento acelerado da mesma. No entanto, quando se atinge um regime permanente, ou estatisticamente permanente, a média temporal $\langle \vec{F}_T \rangle$ representa a clássica força de arrasto, ou seja:

$$\langle \vec{F}_T \rangle = \vec{F}_D \quad (4.17)$$

4.2 Coeficiente de Arrasto

A modelagem da força de arrasto começou em estudos de Isaac Newton, que constatou que a força de arrasto é proporcional ao quadrado da velocidade terminal de uma partícula em queda livre (RUSCHE, 2002). A Equação 4.18 define o coeficiente de arrasto, parâmetro adimensional extensamente utilizado na dinâmica dos fluidos. Esse coeficiente relaciona a força de arrasto e a pressão dinâmica atuante em um corpo imerso em um escoamento.

$$C_D = \frac{\|\vec{F}_D\|}{\frac{1}{2}A_p\rho_c\|\vec{U}\|^2} \quad (4.18)$$

onde U corresponde a uma velocidade característica do problema. Quando se trata de um escoamento borbulhante, onde existe uma velocidade relativa entre fases distintas, é mais consistente a representação da força de arrasto como função do Coeficiente de arrasto e da norma da velocidade relativa entre as fases, aqui representado por $\vec{U}_{rel} = \|\vec{U}_d - \vec{U}_c\|$. Assim, a Eq. 4.19 deve ser reescrita na forma:

$$C_D = \frac{\|\vec{F}_D\|}{\frac{1}{2}A_p\rho_c\|\vec{U}_{rel}\|^2} \quad (4.19)$$

O cálculo do coeficiente de arrasto é muitas vezes deduzido a partir do equilíbrio entre as forças gravitacionais (empuxo e peso) e a força de arrasto, essa sempre associada à uma velocidade relativa terminal. Então, a equação toma a forma da Eq. 4.15, e para os casos onde não se atinge uma velocidade terminal relativa estacionária, uma velocidade média temporal é calculada para a determinação do coeficiente. Substituindo as variáveis dos termos gravitacionais, chega-se à bem difundida equação para o cálculo do coeficiente de arrasto:

$$C_D = \frac{4d_d(\rho_c - \rho_d)\|\vec{g}\|}{3\rho_c\langle\|\vec{U}_{rel}\|\rangle^2}, \quad (4.20)$$

em que $\langle \rangle$ representam uma média temporal realizada quando não se obtém velocidades terminais, e sim velocidades estatisticamente permanentes.

4.3 Coeficiente de Sustentação

Para uma bolha esférica em um sistema puro, Auton (1987) mostra que a força de sustentação (transversal) \vec{F}_t de uma bolha em um escoamento instável é proporcional à vorticidade da fase contínua local ($\nabla \times \vec{U}_c$) e a velocidade relativa entre as fases (\vec{U}_{rel}). A força de sustentação é então representada em função de um coeficiente de sustentação C_l , como mostra a Eq. 4.21.

$$F_t = C_l \rho_c \vartheta \|\vec{U}_{rel} \times (\nabla \times \vec{U}_c)\| \quad (4.21)$$

Por se tratar de uma força transversal, sua direção é perpendicular à força de arrasto, como indica o esquema da Fig. 4.2.

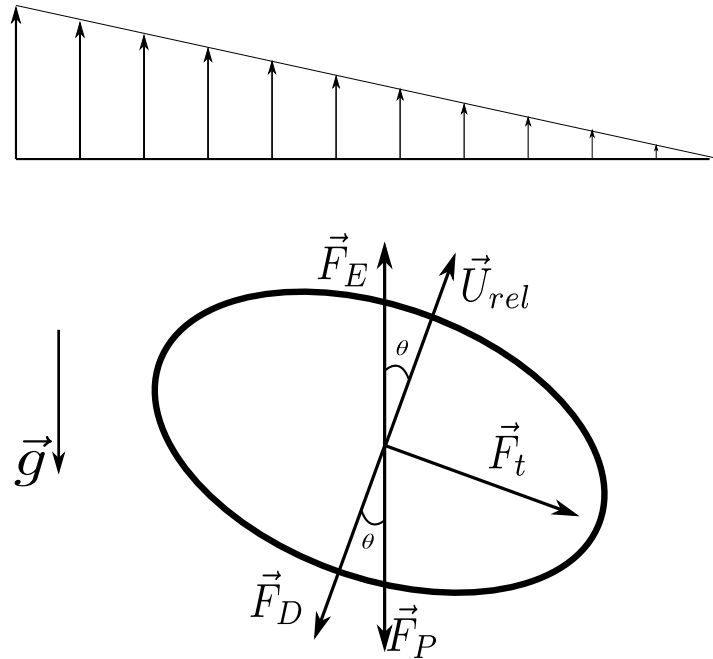


Figura 4.2: Balanço de forças atuantes em uma bolha ascendente sob influência de um perfil cisalhante linear em regime estacionário. Na figura, \vec{F}_D é a força de arrasto, \vec{F}_t a força transversal ou de sustentação, \vec{F}_E força de empuxo, \vec{F}_P a força peso, \vec{g} a aceleração da gravidade e \vec{U}_{rel} é a velocidade relativa entre as fases.

O ângulo θ é utilizado para a decomposição das componentes de força na direção perpendicular à velocidade relativa entre as fases \vec{U}_{rel} . Considerando uma situação de estacionária, onde as forças de arrasto, sustentação e gravitacionais se equilibram, podemos calcular o coeficiente de sustentação C_l através de um balanço de força na direção da componente perpendicular da velocidade relativa entre as fases \vec{U}_{rel} , apresentado na Eq. 4.22. Substituindo a Eq. 4.21 na Eq. 4.22, obtém-se a Eq. 4.23 para o cálculo do coeficiente de sustentação C_l .

$$\|\vec{F}_t\| = \|\vec{F}_{EP}\|\text{sen}(\theta) \quad (4.22)$$

$$C_l = \frac{(\rho_c - \rho_d) \|\vec{g}\|}{\rho_c \|\vec{U}_{rel} \times (\nabla \times \vec{U}_c)\|} \text{sen}(\theta) \quad (4.23)$$

4.4 Coeficiente de massa virtual

Na mecânica dos fluidos, a força de massa virtual, ou massa adicionada, é uma força fluidodinâmica que resiste ao movimento de um corpo em aceleração. Usualmente essa força é modelada como uma massa adicionada ao corpo, uma vez que pode ser escrita em função da aceleração do mesmo.

Talvez a visão mais simples do fenômeno de massa adicionada é que ele determina o trabalho necessário para mudar a energia cinética associada ao movimento do fluido (BRENNEN, 1982). Considerando um corpo esférico em movimento retilíneo acelerado em meio fluido, podemos escrever a energia cinética do fluido como:

$$T = \frac{\rho_c}{2} \int (u^2 + v^2 + w^2) d\vartheta_c \quad (4.24)$$

onde ϑ_c representa o volume ocupado pela fase contínua. Uma outra forma de se escrever a energia cinética T pode ser feita adicionando um invariante I , que é função da velocidade

do corpo U_d e velocidade do fluido $\mathbf{u} = (u, v, w)$.

$$T = \rho_c \frac{I}{2} U_d^2 \quad (4.25)$$

$$I = \int \frac{(u^2 + v^2 + w^2)}{U_d^2} d\vartheta_c \quad (4.26)$$

Sabe-se que I é apenas um invariante em escoamentos potenciais ou de Stokes, e que em escoamentos a Reynolds moderados I pode variar no tempo.

A força de massa virtual é obtida através da consideração de que todo o trabalho realizado pelo corpo em movimento sob o fluido é igual a variação temporal da energia cinética do mesmo. Então, iguala-se a potência $F_{mv}U_d$ com a variação temporal de T , e temos:

$$F_{MV} = -1 \frac{1}{U_d} \frac{dT}{dt} = -\rho_c I \frac{dU_d}{dt}. \quad (4.27)$$

É possível notar, na Eq. 4.27, que a força de massa virtual pode ser escrita como uma função da aceleração do corpo. Considerando que a inercia do corpo é igual à sua massa vezes aceleração, a força de massa virtual usualmente é escrita como uma massa adicionada, de forma a alterar a inércia do corpo acelerado. Então, a Eq. 4.28 pode ser escrita:

$$F_{MV} = -C_{MV} \rho_c \vartheta_d \frac{dU_d}{dt}. \quad (4.28)$$

Em sua forma geral, o coeficiente de massa virtual é um tensor de segunda ordem 6x6, como na Eq. 4.29. A representação tensorial se justifica pelas forças de massa virtual, em uma dada direção, induzidas por acelerações em outras direções (de translação ou rotação). As Eqs. 4.30 e 4.31 apresentam duas linhas da matriz (primeira e quarta) de coeficientes

já multiplicada pelo vetor aceleração A_i e o vetor com as massas e momentos de inércia. Nas equações, H representa os momentos de inércia já multiplicados com os respectivos componentes de massa virtual.

$$F_{MV_i} = -C_{ij}M_iA_i, \text{ i}=1,2,3 \quad (4.29)$$

$$F_{MV_x} = \left(\rho V C_{xx} \frac{dU}{dt} + \rho V C_{xy} \frac{dV}{dt} + \rho V C_{xz} \frac{dW}{dt} + H_{x\omega_x} \frac{d\omega_x}{dt} + H_{x\omega_y} \frac{d\omega_y}{dt} + H_{x\omega_z} \frac{d\omega_z}{dt} \right) \quad (4.30)$$

$$F_{MV_{\omega_x}} = \left(\rho V C_{\omega_x x} \frac{dU}{dt} + \rho V C_{\omega_x y} \frac{dV}{dt} + \rho V C_{\omega_x z} \frac{dW}{dt} + H_{\omega_x \omega_x} \frac{d\omega_x}{dt} + H_{\omega_x \omega_y} \frac{d\omega_y}{dt} + H_{\omega_x \omega_z} \frac{d\omega_z}{dt} \right) \quad (4.31)$$

Uma forma simples de se calcular o coeficiente de massa virtual em uma bolha através de experimentos virtuais é através da estimativa da aceleração inicial imposta à bolha quando liberada do repouso. Nos instantes iniciais, a velocidade relativa entre as fases pode ser desprezada e, da conseqüentemente, a força de arrasto também é desprezada. Então, as forças peso, empuxo e de massa virtual são consideradas como únicas atuantes, permitindo a escrita das Eqs. 4.32, 4.33 e 4.34.

$$m_d \|\vec{a}\| = \|\vec{F}_{EP}\| - \|\vec{F}_{MV}\| \quad (4.32)$$

$$(\rho_d + C_{MV}\rho_c)\vartheta_d \|\vec{a}\| = \|\vec{g}\|(\rho_c - \rho_d)\vartheta_d \quad (4.33)$$

$$C_{MV} = \frac{\|\vec{g}\|(\rho_c - \rho_d)}{\rho_c \|\vec{a}\|} + \frac{\rho_d}{\rho_c} \quad (4.34)$$

Resultados obtidos para uma bolha esférica permitiu que trabalhos, como em Drew e Lahey (1979) e Simcik, Ruzicka e Drahoš (2008), obtenham o conhecido valor $C_{MV} = 0,5$ válido para esferas rígidas. Isso é consistente, uma vez que nos instantes iniciais as velocidades são baixas, e a condição de escorregamento pode ser desprezada.

CAPÍTULO V

MODELAGEM NUMÉRICA

O modelo numérico utilizado na presente tese está implementado no código AMR3D, desenvolvido em uma parceria do Instituto de Matemática e Estatística (IME) da Universidade de São Paulo (USP) e o Laboratório de Mecânica dos Fluidos (MFlab) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU). Nesse, empregam-se o método de diferenças finitas para a discretização do modelo diferencial, malhas do tipo SAMR - *Structured Adaptive Mesh Refinement* para refinamento dinâmico localizado e técnicas Multigrid-Multinível para resolver os sistemas lineares. Atualmente, o código opera em ambientes paralelos e disponibiliza uma variedade de modelos numéricos/matemáticos. Informações detalhadas sobre o desenvolvimento do código AMR3D e os métodos implementados podem ser encontrados em relatórios técnicos Silveira-Neto *et al.* (2009) ,Silveira-Neto *et al.* (2010a) ,Silveira-Neto *et al.* (2010b) ,Silveira-Neto *et al.* (2011) e Silveira-Neto *et al.* (2011, Relatório parcial N.6). Neste Capítulo são descritos, de forma sucinta, apenas os modelos numéricos presentes no código que foram utilizados para a geração dos resultados da presente tese.

5.1 Solução de escoamentos incompressíveis: método dos passos fracionados

Os escoamentos incompressíveis são resolvidos através de um método de projeção. O método consiste em estimar um campo de velocidades \mathbf{u}^* desprezando as condições de incompressibilidade, calcular a correção de pressão q através de uma equação de Poisson,

corrigir os campos de velocidades e pressão, e verificar a conservação da massa. A equação de Poisson resolvida é obtida a partir da equação do movimento e a equação da conservação da massa. Os passos do algoritmo de projeção são descritos nos itens que seguem:

- Calcular os campos de velocidades sem a condição de incompressibilidade:

$$\frac{\rho}{\Delta t} (\alpha_2 \mathbf{u}^* + \alpha_1 \mathbf{u}^n + \alpha_0 \mathbf{u}^{n-1}) = -\nabla p^n + \beta_1 f^n + \beta_0 f^{n-1} + \mathbf{T} - \nabla p^{n+1} + \rho^{n+1} g + f \quad (5.1)$$

- Calcular o campo de correção de pressão q :

$$\nabla \cdot \left[\frac{1}{\rho^{n+1}} \nabla q^{n+1} \right] = \frac{\alpha_2}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^* \quad (5.2)$$

- Corrigir campos de velocidades e pressão:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^* - \frac{\Delta t \nabla q^{n+1}}{\alpha_2 \rho^{n+1}} \quad (5.3)$$

$$p^{n+1} = p^n + q^{n+1} \quad (5.4)$$

- Verificar conservação da massa:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0 \quad (5.5)$$

5.2 Discretização espacial

No código AMR3D utiliza-se a estratégia de refinamento adaptativo por blocos proposta por Berger e Oliger (1984). Nessa estratégia, a malha euleriana é formada por blocos em uma sequência de níveis de refinamento, sendo que dois níveis sequenciais obedecem

sempre a uma razão de refinamento constante, fixada como 2 no presente trabalho. Cada nível é formado pela união de um ou mais blocos com o mesmo espaçamento de malha, onde o nível base (*lbot*) é o nível de menor refinamento, e cobre todo o domínio de cálculo. Os blocos de malha de diferentes níveis devem ser aninhados em sequência até o nível mais fino (*ltop*) seguindo algumas regras:

- Cantos de um bloco de um nível devem coincidir com os cantos das células de um nível imediatamente mais grosseiro;
- Deve haver ao menos uma célula de um nível n separando células de níveis $n - 1$ e $n + 1$.

A Fig. 5.1 exemplifica a malha com os blocos de refinamento.

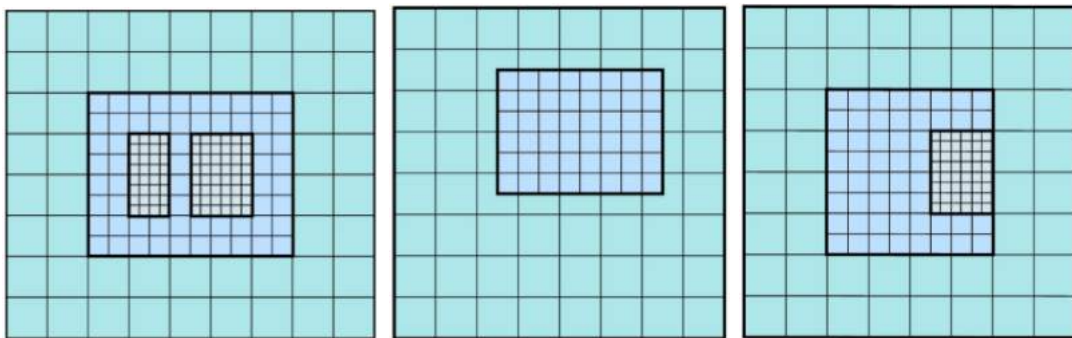


Figura 5.1: Exemplos de aninhamentos de blocos de malha. Apenas a primeira figura atende as regras de aninhamento.

Uma camada de células fantasmas cobrem os blocos de refinamento, servindo de comunicação entre os blocos de mesmo nível, ou de nível sequencialmente mais grosso. O uso de células fantasmas também simplifica a discretização das equações governantes por evitar o uso de estêncil adaptado para células de canto. Os valores das células fantasmas podem ser atribuídos de diferentes formas, sendo elas:

- Através da injeção de valores de células pertencentes a outros blocos no mesmo nível de refinamento e que ocupam o mesmo espaço;
- Através da aplicação de condição de contornos;
- Através de interpolações trilineares que envolvem valores de células do respectivo bloco e células de um nível sequencialmente mais grosso.

A formação dos blocos de refinamento deve ocorrer de acordo com um interesse de refinamento. No presente trabalho, o refinamento adaptativo mantém a interface sempre no nível mais fino. Para representar de forma satisfatória o escoamento, os blocos de refinamento também são adaptados ao escoamento através do campo de vorticidade. Para isso, utiliza-se uma estratégia baseada na estratégia proposta por Fuster *et al.* (2009). Isso é feito avaliando-se a Eq. 5.6 em cada célula computacional, e células em que a expressão lógica é verdadeira são marcadas para o refinamento local. Na equação, $\|\omega\|$ corresponde à norma da vorticidade, Δ ao espaçamento da malha e $\|\mathbf{u}_{max}\|$ a máxima norma do campo de velocidades. Esse critério de refinamento consiste em uma das contribuições do presente trabalho ao código AMR3D. Na Eq. 5.6, ξ é uma constante que é analisada quanto a sua influência na construção da malha em um dos resultados apresentados a seguir. No trabalho de Fuster *et al.* (2009), o valor sugerido para a constante é $\xi = 10^{-2}$. Nota-se que apenas o valor de ξ deve ser determinado para que se tenha uma formação de malha que destaque as características das estruturas vorticais do escoamento. Antes da implementação desse critério, a prática comum dos usuários do código AMR3D consistia em manualmente definir quais valores de vorticidade deveriam ser cobertos para cada nível de refinamento, enquanto com o novo critério essa definição acontece de forma direta.

$$\frac{\|\omega\| \Delta}{\|\mathbf{u}_{max}\|} > \xi \quad (5.6)$$

5.3 Discretização temporal

As equações de Navier-Stokes são discretizadas no tempo por um método semi-implícito de segunda ordem proposto por Ascher, Ruuth e Wetton (1997). O método se baseia em uma estratégia de discretização semi-implícita para equações predominantemente difusivas. Considerando a Eq. 5.7, podemos reescrevê-la na forma da Eq. 5.8 e 5.9, sendo α uma constante.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{u}) \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial \alpha \mathbf{u}}{\partial t} = \nabla^2 \mathbf{u} + f(\mathbf{u}) \quad (5.8)$$

$$f(\mathbf{u}) = \nabla \cdot (\mu \nabla \mathbf{u}) 2 - \alpha \nabla^2 \mathbf{u} \quad (5.9)$$

A estratégia consiste em resolver o primeiro termo do lado direito da Eq. 5.7 de forma implícita, e o segundo termo explicitamente. Aplicando a estratégia nas equações de Navier-Stokes, $f(\mathbf{u})$ passa a conter os termos difusivos, advectivos e forçantes. Através de uma parametrização das equações do movimento, o método engloba diferentes métodos. As Eqs. 5.10 - 5.12 exibem as equações do movimento escritas como proposto pelo método de Ascher, Ruuth e Wetton (1997).

$$\frac{\rho}{\Delta t} (\alpha_2 \mathbf{u}^{n+1} + \alpha_1 \mathbf{u}^n + \alpha_0 \mathbf{u}^{n-1}) = -\nabla p^{n+1} + \beta_1 f^n + \beta_0 f^{n-1} + \mathbf{T} - \nabla p^{n+1} + \rho^{n+1} g + f \quad (5.10)$$

$$f = -\lambda \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \cdot [\mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)] - \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (5.11)$$

$$\mathbf{T} = \lambda [\theta_2 \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1} + \theta_1 \nabla^2 \mathbf{u}^n + \theta_0 \nabla^2 \mathbf{u}^{n-1}] \quad (5.12)$$

Nas Eqs. 5.11 e 5.12, $\lambda = C\mu$, e no presente trabalho, $C = 2$. As constantes α_0 , α_1 , α_2 , b_0 , b_1 , θ_0 , θ_1 e θ_2 são determinadas pelas Eqs. 5.13 -5.20.

$$\alpha_0 = \frac{\Delta t_1 - \Delta t_0 - 2\gamma\Delta t_1}{\Delta t_0} \quad (5.13)$$

$$\alpha_2 = \frac{\Delta t_0 - 2\gamma\Delta t_1}{\Delta t_0 + \Delta t_1} \quad (5.14)$$

$$\alpha_1 = -\alpha_0 - \alpha_2 \quad (5.15)$$

$$b_0 = -\gamma \frac{\Delta t_1}{\Delta t_0} \quad (5.16)$$

$$b_1 = \frac{\Delta t_0 + \gamma\Delta t_1}{\Delta t_0} \quad (5.17)$$

$$\theta_0 = \frac{c}{2} \quad (5.18)$$

$$\theta_1 = -c \frac{\Delta t_0}{2\Delta t_1} + 1 - \frac{c}{2} - \gamma \quad (5.19)$$

$$\theta_2 = \gamma + c \frac{\Delta t_0}{2\Delta t_1} \quad (5.20)$$

onde $\Delta t_0 = t^n - t^{n-1}$, $\Delta t_1 = t^{n+1} - t^n$ e as constantes c e γ definem os métodos:

- $(\gamma, c) = (1, 0)$ define o método SBDF - *Semi Backward Differencing Formula*;
- $(\gamma, c) = (1/2, 1/8)$ define o método CNLF - *Cranck Nicholson Leap Frog*;
- $(\gamma, c) = (1/2, 0)$ define o método CNAB - *Cranck Nicholson Adams Bashforth*;
- $(\gamma, c) = (0, 1)$ define o método MCNAB - *Modified Cranck Nicholson Adams Bashforth*.

Os sistemas de equações resultantes das discretizações são considerados devidamente solucionados quando os resíduos das equações atingirem valores abaixo de $0,5\Delta_{ltop}^2$; onde Δ_{ltop} é o espaçamento de malha do nível mais fino (ltop). Os passos de tempo são calculados com base em restrições associadas aos termos advectivos, difusivos e por uma condição de capilaridade. As Eqs. 5.21 - 5.24 apresentam essas restrições, e o cálculo do passo de tempo. Constantes são utilizadas para controlar as restrições e devem ser ajustadas entre 0 e 1 para que se obtenha estabilidade numérica nos diferentes casos simulados.

$$\Delta t_{adv} = C_{adv} \left(\frac{|u|_{max}}{\Delta x} + \frac{|v|_{max}}{\Delta y} + \frac{|w|_{max}}{\Delta z} \right)^{-1} \quad (5.21)$$

$$\Delta t_{dif} = C_{dif} \min \left(\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta y}{2}, \frac{\Delta z}{2} \right) \quad (5.22)$$

$$\Delta t_{cap} = C_{cap} \left[\frac{(\rho_c + \rho_d)}{2} \frac{\Delta x^3}{2\pi\sigma} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.23)$$

$$\Delta t = \min (\Delta t_{adv}, \Delta t_{dif}, \Delta t_{cap}) \quad (5.24)$$

5.4 Tratamento dos termos advectivos

Os termos advectivos das equações de Navier-Stokes foram tratados com um esquema baseado no apresentado em Lai e Peskin (2000), enquanto que os termos difusivos são aproximados pelo conhecido esquema de diferenças centradas (DC). O método de Lai e Peskin (2000) consiste em avanços no tempo em dois passos: um primeiro passo preliminar, em que o esquema de Euler, de primeira ordem, juntamente com os termos não-lineares aproximados por um esquema *Upwind* são utilizados para avançar metade do passo de tempo principal; e um segundo passo, que completa o passo de tempo com um esquema temporal de segunda ordem e tratamento dos termos advectivos com Diferenças Centradas escritas de forma simétrica (*Skew-Symmetric*). No AMR3D, os esquemas *Upwind* e Diferenças Centradas *Skew-Symmetric* são alternados à cada passo de tempo. Os resultados obtidos com essa prática mostraram-se bastante satisfatórios e com eficiência numérica, já que para o esquema é apenas necessário uma camada de células fantasmas ao redor de cada bloco de refinamento.

5.5 Volume of Fluid (VOF)

O método VOF (HIRT; NICHOLS, 1981) é um dos mais antigos métodos utilizados na representação de escoamentos com a presença de interface entre diferentes fluidos. Suas primeiras aplicações foram feitas em simulações de escoamentos com superfície livre, e nos

dias de hoje, a literatura disponível na comunidade científica apresenta diversos tipos de aplicações do método, como em escoamentos de bolhas, gotas e outros tipos de interfaces entre fluidos.

Entre as características marcantes do método VOF, como acurácia e conservação da massa, a simplicidade do método o destaca por facilitar sua implementação e paralelização. Conhecida como *color function*, a função ϕ (que é um escalar) é responsável por definir em que posições do domínio se encontra os diferentes tipos de fluido e a(s) interface(s) que o(s) separa(m). Considerando um sistema bifásico gás/líquido descrito em uma malha cartesiana, a função ϕ assume valor unitário para os volumes que contém a fase líquida, e zero para o volumes da fase gasosa. A interface entre as fases é descrita através de volumes que armazenam valores intermediários da função ϕ , representando uma fração volumétrica de certa fase contida no volume em questão. A função ϕ é advectada a partir do campo de velocidades do escoamento através da Eq. 5.25.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \phi = 0 \quad (5.25)$$

5.5.1 Reconstrução e advecção da interface

A primeira tentativa de se realizar a advecção da função ϕ em maiores dimensões foi proposta por Noh W. F. e Woodward (1976). Denominado SLIC - *Simple Line Interface Calculation*, o método advecta a interface separando o processo, onde a advecção é realizada separadamente para cada direção, e linhas paralelas aos eixos coordenados são posicionadas considerando a fração volumétrica do volume que contém a interface. Hirt e Nichols (1981) propuseram um método de reconstrução de interface um pouco diferente, onde a interface é representada por um único seguimento de reta paralelo a um dos eixos coordenados, sendo que a decisão de qual eixo a linha é paralela dependerá do vetor normal a interface, calculado a partir de avaliações da função ϕ na vizinhança. A linha é construída então paralela ao eixo onde o vetor normal está mais proximamente alinhado. Apesar da aparente melhora de representação da interface, Rudman, M. (1997) observa em seu trabalho que o método de Hirt e Nichols (1981) não apresenta melhorias significativas de precisão. O mais precisos dos

métodos é o chamado PLIC - *Piecewise Linear Interface Calculation* (YOUNGS, 1982), onde um segmento de reta em um volume interfacial pode ser representado independentemente da direção dos eixos coordenados. A direção de cada segmento de reta é determinado partir do cálculo do vetor normal à interface, que é estimado a partir de valores da função ϕ de volumes adjacentes. A Fig. (5.2) ajuda no melhor entendimento dos métodos de reconstrução de interface, considerando um domínio bidimensional.

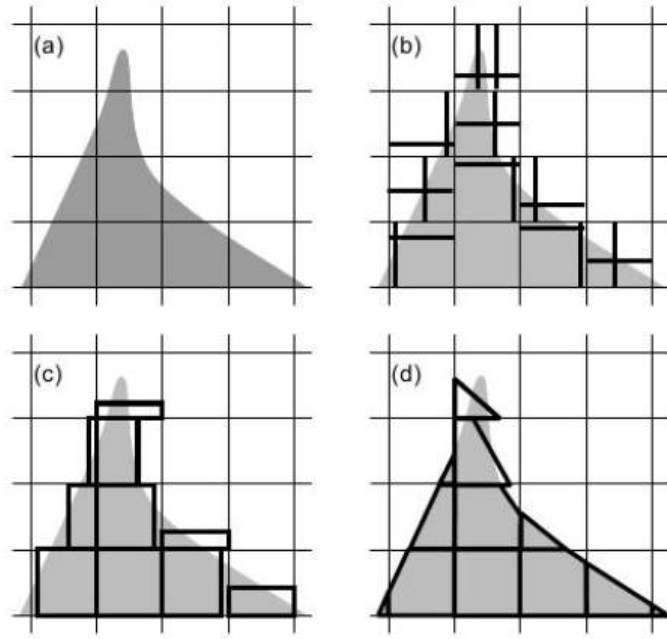


Figura 5.2: Técnicas de reconstrução de interface - (a) Interface exata, (b) SLIC, (c) Hirt-Nichols, (d) PLIC

No método de Youngs (1982), o cálculo do vetor normal à superfície é determinado como mostra a Eq. (5.26).

$$n_{i,j}^x = \frac{1}{\Delta x} (\phi_{i+1,j+1} + 2\phi_{i+1,j} + \phi_{i+1,j-1} - \phi_{i-1,j+1} - 2\phi_{i-1,j} - \phi_{i-1,j-1}), \quad (5.26)$$

$$n_{i,j}^y = \quad (5.27)$$

$$phirac1\Delta y (\phi_{i+1,j+1} + 2\phi_{i,j+1} + \phi_{i-1,j+1} - \phi_{i+1,j-1} - 2\phi_{i,j-1} - \phi_{i-1,j-1}).$$

Os exemplos anteriores referentes à reconstrução de interface utilizam um domínio bidimensional. Quando o problema se estende ao domínio tridimensional, a interface passa

a ser representada por um plano. Gueyffier *et al.* (1999) apresenta um método onde o plano que descreve a interface em cada volume que a contém da forma:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = n_x x + n_y y + n_z z = \iota, \quad (5.28)$$

onde ι corresponde a menor distância do plano à origem do volume. Após definir a normal através de avaliações da função ϕ nos volumes adjacentes, é necessário resolver um problema inverso para a determinação de ι . Em um domínio tridimensional, utiliza-se a Eq. (5.29) na determinação de ι , onde essa equação calcula a fração volumétrica (função C) em função do valor de ι por relações geométricas.

$$Volume = \frac{1}{6n_1 n_2 n_3} \left[\iota^3 - \sum_{i=1}^3 F_3(\iota - n_i \Delta x_i) + \sum_{i=1}^3 F_3(\iota - \iota_{\max} + n_i \Delta x_i) \right], \quad (5.29)$$

onde, $\iota_{\max} = \sum_{i=1}^3 n_i \Delta x_i$, n_i corresponde a n_x , n_y , n_z e x_i é x , y e z , com $i = 1, 2, 3$, respectivamente. $F_n(s)$ é definido como,

$$F_3(\iota - n_i \Delta x_i) = \begin{cases} (\iota - n_i \Delta x_i)^3 & \text{se } (\iota - n_i \Delta x_i) > 0 \\ 0 & \text{se } (\iota - n_i \Delta x_i) \leq 0. \end{cases} \quad (5.30)$$

Após reconstruída, a interface deve ser advectada através do campo de velocidades local. Existem diversas formas de se advectar a interface, podendo eles ser processos puramente geométricos, ou por cálculo de fluxos de cada fase.

Geralmente, a advecção da interface é realizada de forma separada, ou seja, a advecção é a soma de advecções unidimensionais realizadas em cada direção do escoamento. Esquemas como o *out-of-cell* utiliza interpolações lineares para advectar, em cada direção, os pontos finais dos segmentos que definem a interface. Após realizada a advecção, a interface deve ser reconstruída antes que a advecção continue na próxima direção. Esquemas como o *onto-cell* calculam as áreas que são advectadas para cada célula. Ambos os esquemas carecem

de conservação de massa e volume, e devem ser combinados para uma boa conservação. Gueyffier *et al.* (1999) apresenta em seu trabalho uma forma de advecção da interface baseada em operações geométricas, em um esquema de primeira ordem.

Wang *et al.* (2008) apresenta uma versão de segunda ordem do método de advecção proposto por Gueyffier *et al.* (1999). A Fig. (5.3) ajuda na descrição do esquema.

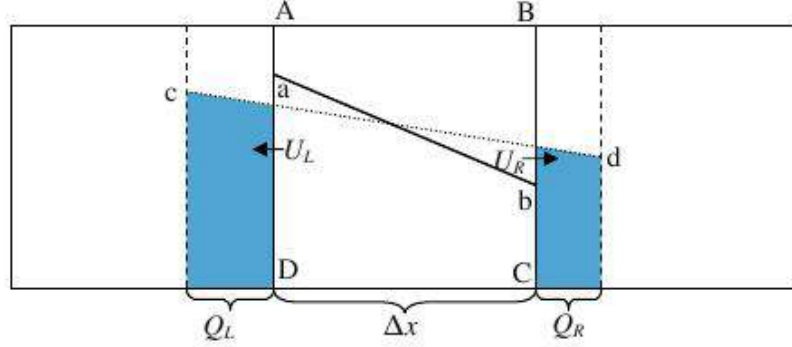


Figura 5.3: Advecção lagrangiana da interface. Fonte: Wang *et al.* (2008)

Observando a Fig. (5.3), a velocidade representativa do volume central $ABCD$ é estimada por uma interpolação linear da forma:

$$u(x) = \frac{U_R - U_L}{\Delta x}x + U_L = Ax + B, \quad (5.31)$$

Após definida a velocidade do volume, adveceta-se a interface em uma direção. Através de um método de Runge-Kutta de segunda ordem, pode-se escrever a posição da coordenada original da interface em função da nova coordenada (após advecetada em uma direção), através da Eq. (5.32).

$$x^{(n)} = \frac{x^{(*)} - (\frac{1}{2}AB\Delta t^2 + B\Delta t)}{1 + A\Delta t + \frac{1}{2}A^2\Delta t^2}. \quad (5.32)$$

Substituindo essa expressão na equação que descreve o plano, é possível obter a equação do novo plano após a advecção em uma direção. O processo é repetido para as outras direções até que se tenha a equação do plano no passo de tempo $n + 1$. O índice $(*)$

está sendo usado para representar as operações realizadas em cada direção, sendo que após feitas as advecções em todas as direções, iguala-se $* = n + 1$, representando a nova equação do novo plano na Eq. 5.33.

$$n_x^{(*)}x^{(*)} + n_y^{(*)}y^{(*)} + n_z^{(*)}z^{(*)} = \iota^{(*)}. \quad (5.33)$$

5.5.2 Cálculo da força interfacial

O cálculo da força interfacial entre diferentes fluidos separados por uma interface é de grande importância para a correta representação desses escoamentos. Em metodologias *Front Capturing*, a forma mais difundida de cálculo de força interfacial foi a proposta por Brackbill, J. U., Kothe, D. B. e Zemach, C. (1992), o CSF - *Continuum Surface Force*. Nesse método, a força interfacial é calculada a partir da curvatura k , da tensão superficial σ e do divergente da função C , como apresenta a Eq. (5.34).

$$\mathbf{f}_\sigma = \sigma \kappa \nabla C. \quad (5.34)$$

Brackbill destaca em seu trabalho que o uso da Eq. (5.34) no cálculo da força interfacial, com elevadas razões de massa específica, pode levar a correntes espúrias, ou correntes parasíticas, que são erros no campo de velocidades causados por avaliações de forças interfaciais imprecisas. Então, Brackbill, J. U., Kothe, D. B. e Zemach, C. (1992) recomenda o uso de um fator de correção baseado na massa específica. Assim, a Eq. (5.35) é reescrita na forma:

$$\mathbf{f}_\sigma = \sigma \kappa \mathbf{n} \frac{|\nabla C|}{[C]} \frac{\rho}{[\rho]}, \quad (5.35)$$

onde ρ é o valor local da massa específica obtida por $\rho = \rho_2 + C(\rho_1 - \rho_2)$, $[\rho]$ é a diferença da massa específica entre os dois fluidos ($[\rho] = \rho_2 - \rho_1$) e $[C]$ é a diferença da fração volumétrica

entre os dois fluidos, ou seja, $[C] = 1$.

Em problemas tridimensionais, o cálculo da curvatura da interface não é fácil. Quando esse cálculo não é feito adequadamente, um campo de velocidades não físico aparece na interface e compromete os resultados da simulação. No método VOF, como a função ϕ é discreta e não, o uso de derivadas espaciais não leva a uma boa avaliação da curvatura.

5.5.3 Cálculo da curvatura através da Função Altura

Recentemente, avanços foram alcançados ao se utilizar a função altura para calcular a curvatura da interface. Essa é uma técnica geométrica em que a curvatura é calculada a partir da função ϕ da VOF, e vem sendo bastante utilizada devido à sua simplicidade e por proporcionar segunda ordem de precisão. Nesta técnica, uma função altura é construída integrando-se a função VOF na direção de maior componente do vetor normal à interface, e a curvatura é avaliada a partir de derivadas dessa função altura.

Considere uma célula interfacial (i, j, k) , onde $0 < C < 1$ e contendo a maior componente da normal na direção z , ($|n_z| > |n_x|$) e ($|n_z| > |n_y|$), usando um estêncil 3×3 (Fig. 5.4), a função altura é dada por:

$$H_{r,s} = \sum_{t=-t_{down}}^{t=t_{up}} C_{i+r,j+s,k+t} \Delta z_{k+t}, \quad \text{para } r = -1, 0, 1 \text{ e } s = -1, 0, 1, \quad (5.36)$$

onde, t_{up} e t_{down} podem ser fixos ou adaptativamente ajustados de 0 a n , Δz é a altura da célula.

A curvatura para a célula interfacial (i, j, k) é então determinada por:

$$\kappa = \frac{H_{xx} + H_{yy} + H_{xx}H_y^2 + H_{yy}H_x^2 - 2H_{xy}H_xH_y}{(1 + H_x^2 + H_y^2)^{3/2}}. \quad (5.37)$$

As derivadas parciais de H são geralmente discretizadas usando diferenças finitas de segunda ordem. A avaliação da curvatura da interface torna-se inadequada quando a curvatura se aproxima do espaçamento da malha. Nesses casos, é preciso utilizar outros

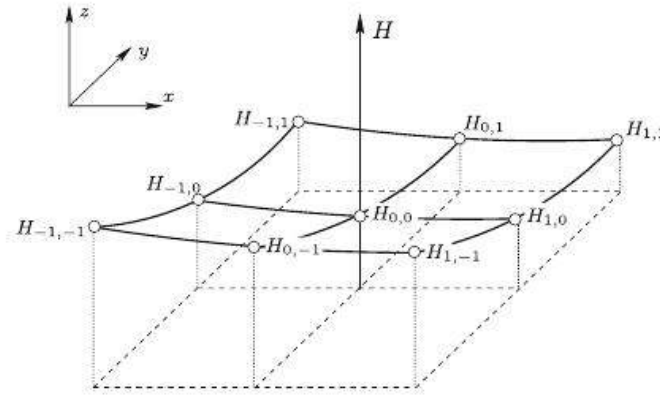


Figura 5.4: Estêncil para o cálculo da função altura. (Fonte: Lopez, J., Hernandez, J., Gomez, P. e Faura, F. (2004))

tipos de técnicas. No presente trabalho, utiliza-se a discretização proposta por Shirani, Ashgriz e Mostaghimi (2005), e estendida à três dimensões Lam (2009).

5.5.4 Cálculo da curvatura através do método de Shirani, Ashgriz e Mostaghimi (2005)

A curvatura da interface pode ser calculada através do divergente dos vetores normais, ou seja, $\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n}$. O método proposto por Shirani, Ashgriz e Mostaghimi (2005) calcula os vetores normais à superfície através de uma estimativa média do vetor gradiente função coloração, pois $\mathbf{n} = \frac{\nabla \phi}{\|\nabla \phi\|}$. Considerando um cubo tridimensional com 27 células, o vetor gradiente da função coloração é calculado através das expressões que envolvem células de mesmo plano. Sabendo que $\nabla \phi = (\nabla \phi_i, \nabla \phi_j, \nabla \phi_k)$, o cálculo de $\nabla \phi_i$ é demonstrado nas Eqs. 5.38 - 5.39.

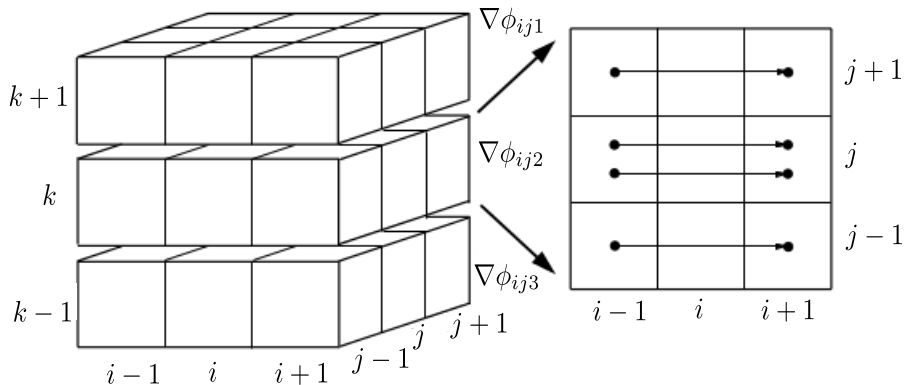


Figura 5.5: Discretização de $\nabla \phi_{ij}$ em planos k . Fonte: Lam (2009)

$$\begin{aligned}
\nabla\phi_{ij1} &= \{\phi(i+1, j-1, k-1) - \phi(i-1, j-1, k-1) + 2[\phi(i+1, j, k-1) \\
&\quad - \phi(i-1, j, k-1)] + \phi(i+1, j+1, k-1) - \phi(i-1, j+1, k-1)\}/\Delta x \\
\nabla\phi_{ij2} &= \{\phi(i+1, j-1, k) - \phi(i-1, j-1, k) + 2[\phi(i+1, j, k) \\
&\quad - \phi(i-1, j, k)] + \phi(i+1, j+1, k) - \phi(i-1, j+1, k)\}/\Delta x \\
\nabla\phi_{ij3} &= \{\phi(i+1, j-1, k+1) - \phi(i-1, j-1, k+1) + 2[\phi(i+1, j, k+1) \\
&\quad - \phi(i-1, j, k+1)] + \phi(i+1, j+1, k+1) - \phi(i-1, j+1, k+1)\}/\Delta x
\end{aligned} \tag{5.38}$$

O valor de $\nabla\phi_{ij}$ é determinado com a soma dos valores determinados pelas Eqs. 5.38. O mesmo é feito para $\nabla\phi_{ik}$ e $\nabla\phi_{jk}$. Então, $\nabla\phi = (\nabla\phi_i, \nabla\phi_j, \nabla\phi_k)$ é determinado por:

$$\begin{aligned}
\nabla\phi_i &= \nabla\phi_{ij} + \nabla\phi_{ik} \\
\nabla\phi_j &= \nabla\phi_{jk} + \nabla\phi_{ij} \\
\nabla\phi_k &= \nabla\phi_{jk} + \nabla\phi_{ik}
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Sabendo que a curvatura local $\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n}$, aproxima-se o divergente através de médias calculadas nos pontos indicados pela Fig. 5.6. Os vértices destacados são os vértices do cubo cinza de 27 células, que compõem o centro do total de 125 células envolvidas no cálculo. A média para cada vértice é realizada com as 8 células que o contém, e a curvatura é calculada pelas Eqs. 5.40 e 5.41. Maiores detalhes do método podem ser encontrados em Shirani, Ashgriz e Mostaghimi (2005) e Lam (2009).

$$\kappa = \frac{\partial}{\partial x}n_x + \frac{\partial}{\partial y}n_y + \frac{\partial}{\partial z}n_z \tag{5.40}$$

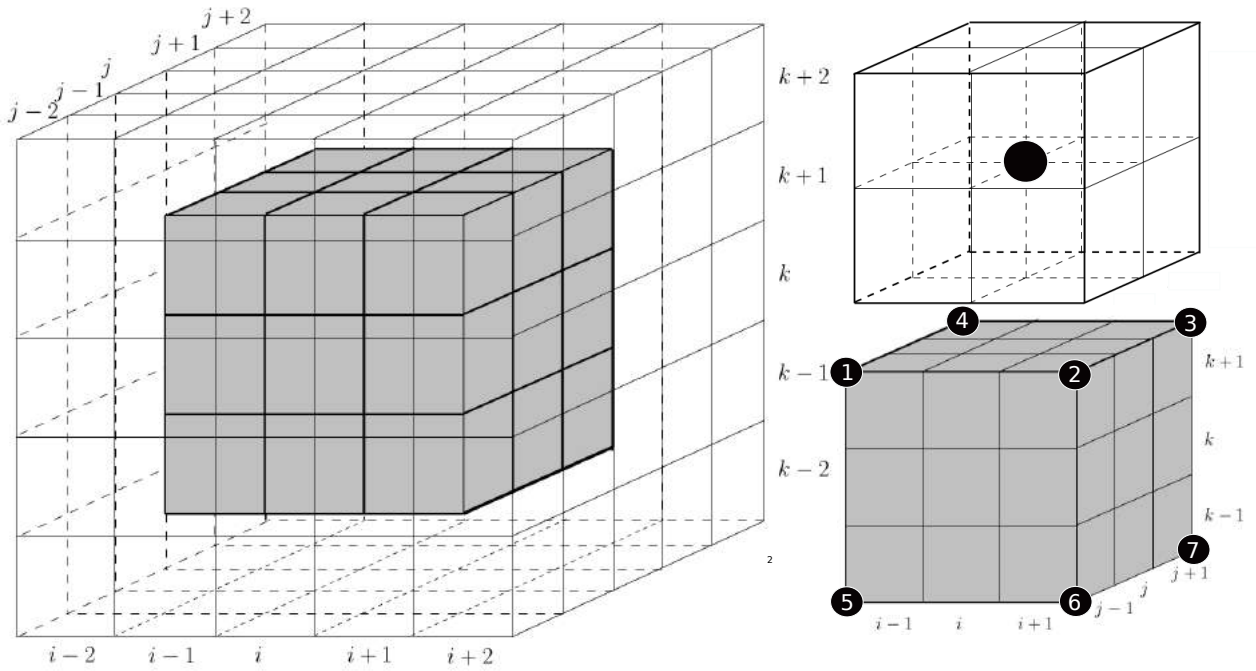


Figura 5.6: Células utilizadas para o cálculo de $\kappa = \nabla \cdot \mathbf{n}$. Adaptado de Lam (2009)

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x} n_x &= n_{x2} + n_{x3} + n_{x6} + n_{x7} - n_{x1} - n_{x4} - n_{x5} - n_{x8} \\
 \frac{\partial}{\partial y} n_y &= n_{y1} + n_{y2} + n_{y5} + n_{y6} - n_{y3} - n_{y4} - n_{y7} - n_{y8} \\
 \frac{\partial}{\partial z} n_z &= n_{z1} + n_{z2} + n_{z3} + n_{z4} - n_{z5} - n_{z6} - n_{z7} - n_{z8}
 \end{aligned} \tag{5.41}$$

5.6 Algoritmo de identificação de bolhas a partir de um campo escalar em ambiente paralelo

O uso de ferramentas computacionais para a investigação de escoamentos bifásicos borbulhantes geralmente evolve a simulação de configurações simplificadas de sistemas físicos representativos do fenômeno real em escala completa. Muitas informações já foram obtidas a partir de simulações de bolhas isoladas e extrapoladas às situações de múltiplas bolhas. No entanto, é inevitável a investigação de escoamento gerado por múltiplas bolhas e como essas bolhas interagem entre si. Os trabalhos de Annaland, Deen e Kuipers (2005), Annaland *et al.* (2006), Chakraborty, Biswas e Ghoshdastidar (2013), Krishna e Baten (2001) apresentam simulações numéricas de até 5 bolhas em ascensão simultânea. Os autores conseguiram,

através de resultados numéricos, extrair informações e até construir modelos de troca de quantidade de movimento entre bolhas ascendentes para alimentar modelos à dois fluidos (Euler-Euler).

O código AMR3D é uma poderosa ferramenta para a simulação de escoamentos bifásicos. Os métodos Front Tracking (TRYGGVASON *et al.*, 2001) e VOF (HIRT; NICHOLS, 1981) estão implementados para a representação de uma interface entre fluidos imiscíveis através do cálculo de forças interfaciais que são inseridas nos termos fonte das equações do movimento na região da interface. O método Front Tracking trabalha com a representação da interface através de uma superfície formada por elementos triangulares que são armazenados em uma estrutura de dados que permite o acesso direto de uma específica interface, ou uma específica bolha. Assim, é possível obter diretamente propriedades de interesse como a posição do centroide e velocidade de ascensão da bolha. No caso do VOF, quando mais de uma bolha é simulada, não é possível acessar diretamente uma bolha específica para realizar operações que permitam levantar informações de interesse, como posição do centroide e velocidade de ascensão. Isso acontece porque o método representa as fases do escoamento por um campo escalar que corresponde à fração volumétrica de uma fase de referência, e todas as operações que fazem parte do método são feitas a partir de informações locais, sendo desnecessário o uso de uma estrutura de dados para o acesso das informações. Para que seja possível um acesso direto de uma bolha específica, é necessário o uso de um algoritmo de identificação e mapeamento dessas bolhas. Para isso, foi desenvolvido um algoritmo de identificação, o qual foi implementado no código AMR3D.

A motivação do desenvolvimento do presente algoritmo vai além da apresentada no parágrafo anterior. O acesso de uma determinada porção de fluido da mesma fase também é necessária quando se almeja a aplicação de operações específicas em, por exemplo, uma bolha (ou gota). Operações como a transformação de uma gota/bolha em uma partícula lagrangiana em simulações pode ser de interesse, como feito nos trabalhos de Fuster *et al.* (2009), Tomar *et al.* (2010) e Herrmann (2010). No código AMR3D, só é possível se disponível um algoritmo capaz de identificar as células que compõem o objeto de interesse. Uma outra possível operação é feita com base no conhecimento de que o escoamento em ambas as fases são influenciados pelo gradiente da pressão. Assim, é possível subtrair o salto de pressão das

bolhas (considerando uma população) como é feito no trabalho de Jan (1994), e obter maior eficiência computacional para a solução do campo de pressão.

O algoritmo desenvolvido e implementado tem como base o conceito de busca em largura da teoria dos grafos. Para isso, estruturas de dados foram criadas para a construção de filas de células e blocos de refinamento. A fila de células armazena os índices ijk de células já identificadas como pertencentes à bolha e dita a ordem de acesso para a continuidade do processo de identificação. A fila de blocos armazena os índices ijk da primeira célula a ser acessada em um bloco, formando uma fila de blocos para dar sequência à identificação. Para evitar onerosidade nos cálculos, opta-se pelo armazenamento de um ponteiro associado a cada ID, que indica na lista o bloco que contém a célula com o ID armazenado. A posição do ponteiro é facilmente obtida através de um mapa euleriano que é construído previamente e utilizado em outras partes do código, como em interpolações de células *ghosts*. As Figs. 5.7 e 5.8 ilustram as estruturas criadas para a formação das filas. Observa-se ponteiros que marcam o começo (C) e o final (F) das filas.

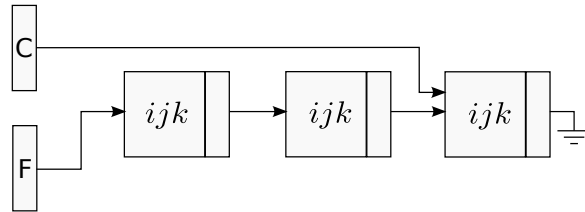


Figura 5.7: Esquematisação da estrutura usada na fila de células.

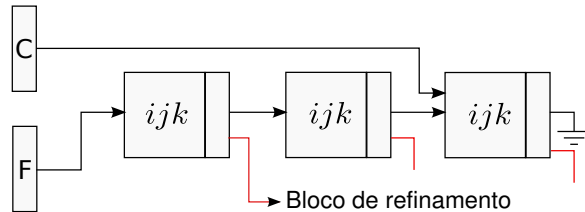


Figura 5.8: Esquematisação da estrutura usada na fila de blocos.

A identificação de uma bolha é feita a partir da identificação de um corpo conexo. A partir de uma coordenada conhecida no começo da simulação, como por exemplo o centroide da bolha, calcula-se o ID da célula que contém a coordenada do centroide, e a partir desta célula se inicia o algoritmo de busca. Como o AMR3D trabalha com malhas

bloco-estruturadas, cada célula computacional (em um dado nível e pertencente à um bloco de refinamento) possui o mesmo número de vizinhos de simples acesso. Assim, o algoritmo consiste em perguntar a todas as células vizinhas se as mesmas são células de interesse, neste caso, se são células pertencentes à uma bolha. As células vizinhas que são identificadas como pertencentes à bolha são adicionadas nas filas de células, que determina a próxima célula a ter suas células vizinhas perguntadas. No entanto, malhas bloco-estruturadas possuem diferentes níveis de refinamento, onde cada nível é formado pela união de todos os blocos de refinamento de um mesmo nível. Portanto, foi definido que a busca começará em células do nível mais fino e o uso de uma fila de blocos de refinamento se fez necessária. A seguir, o algoritmo é descrito passo a passo com a ajuda de ilustrações.

1. A partir de uma posição conhecida previamente (usualmente o centroide), determina-se o ID da primeira célula pertencente à bolha. Determinado o ID, busca-se bloco à bloco do nível mais fino à qual pertence o ID da célula. Caso não encontrar, a posição inicial é recalculada com base em um passo proporcional ao espaçamento do nível, em uma direção pré definida. O processo se repete até que uma célula da bolha no nível mais fino é encontrada.
2. Após encontrada, a célula é adicionada à fila de células, e seu índice é guardado como índice de acesso à bolha para o início do processo de identificação no próximo passo de tempo. Nesse momento a fila de células é acessada, e a primeira célula identificada é acessada novamente para saber quais de seus vizinhos também pertencem à bolha. A medida em que as células vão sendo identificadas, seus IDs vão sendo armazenados na fila de células e a identificação prossegue seguindo a ordem da fila. A Fig. 5.9 ilustra a primeira célula identificada em uma malha composta, e as primeiras células vizinhas a serem identificadas e adicionadas à fila de células;
3. Quando uma célula *ghost* é acessada, e a mesma pertence à bolha, verifica-se no mapa euleriano se esta é uma célula irmã (célula de mesmo nível pertencente à outro bloco). Se for célula irmã, o ID da mesma é adicionada à fila de blocos, junto com um ponteiro que aponta para o bloco que a contém na estrutura de dados. A busca no bloco terminará quando a fila de células acabar. A Fig. 5.10 mostra o momento em que a

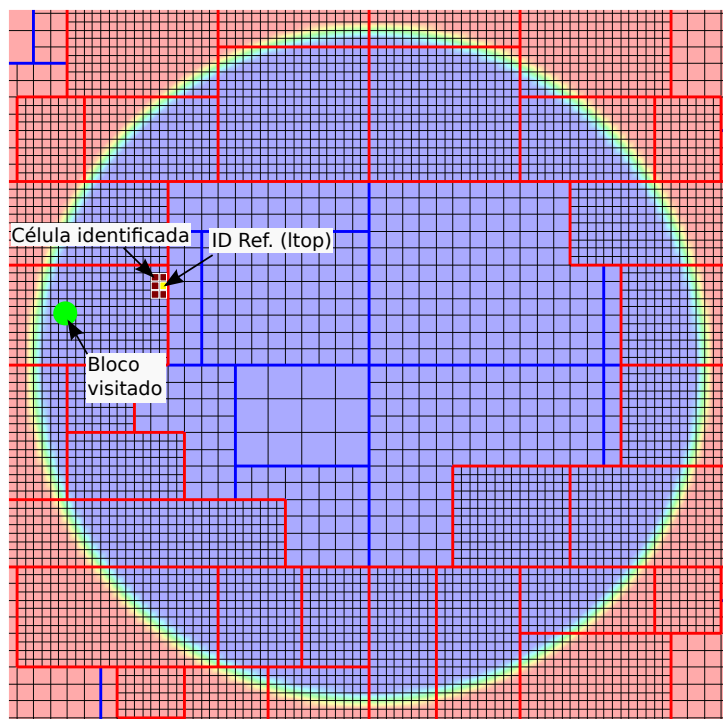


Figura 5.9: Figura ilustrativa da malha composta sobre a bolha. Em destaque, a primeira célula identificada (ID Ref), e as primeiras células vizinhas identificadas. O círculo verde simboliza a marcação do bloco visitado.

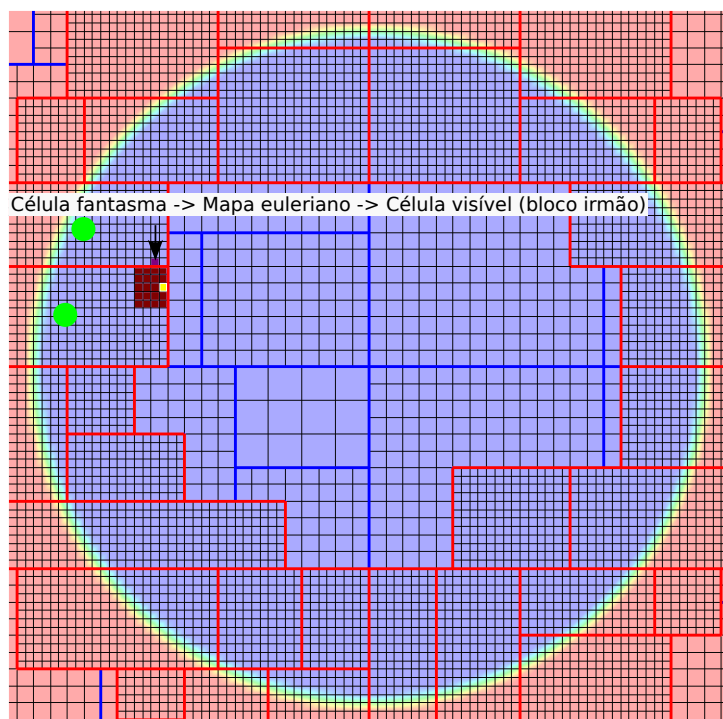


Figura 5.10: Figura ilustrativa da sequencia de busca no primeiro bloco, no momento em que uma célula fantasma/irmã é identificada e o próximo bloco de refinamento que da sequenciamento à busca é adicionado na fila de blocos.

primeira célula fantasma/irmã é acessada;

4. A busca continua no próximo bloco da fila de blocos, e o item anterior se repete até que a fila de células e de blocos terminem. O término das filas de blocos indica que a busca terminou para o respectivo nível. A Fig. 5.11 ilustra o sequenciamento da busca entre os blocos do nível mais fino;
5. A partir da posição inicial conhecida e identificada, calcula-se o ID da célula em um nível imediatamente mais grosseiro, e a busca no nível prossegue como descrito nos itens anteriores. A Fig. 5.12 mostra a sequencia da busca no nível imediatamente mais grosseiro;

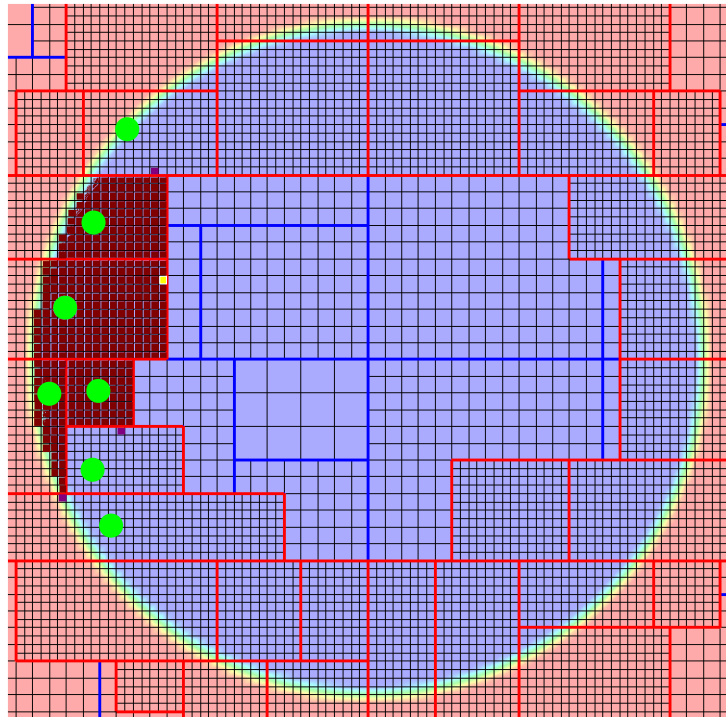


Figura 5.11: Sequenciamento da busca entre os blocos do nível mais fino. A busca no nível termina quando a fila de blocos terminar.

6. Quando a busca é concluída no nível base, a identificação da bolha nos diversos níveis está completa.

Fica evidente a necessidade de se obter tal algoritmo em ambiente paralelo, uma vez que os problemas com múltiplas bolhas podem requerer demasiada capacidade computacional.

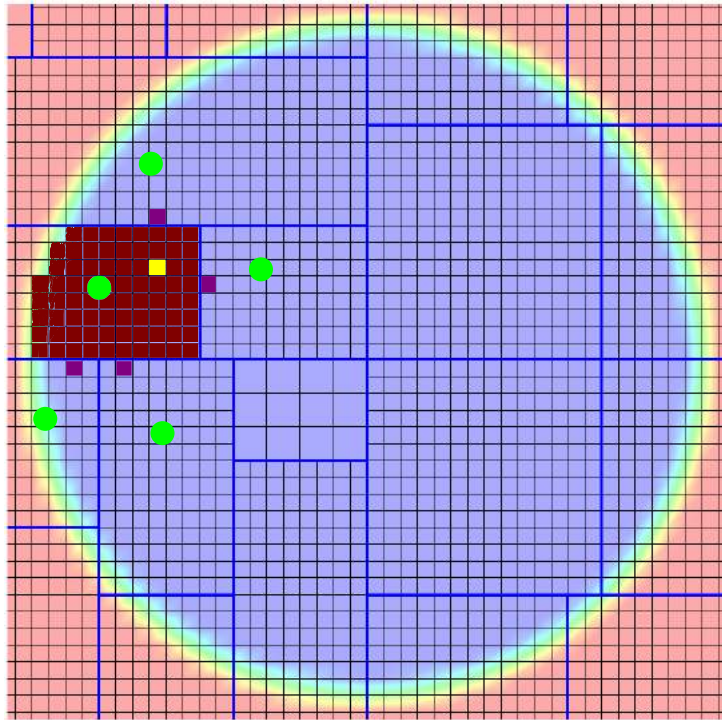


Figura 5.12: Sequencia de busca no nível sequencialmente mais grosseiro.

O objetivo do algoritmo é possibilitar que operações possam ser realizadas em uma única bolha, em um sistema com múltiplas bolhas representadas por frações volumétricas. Isso significa atribuir um número de identificação para cada bolha a se realizar operações, ou obter informações. Em ambiente paralelo, a estratégia proposta consiste em identificar uma porção de volume conexo por vez, e comunicar entre processos somente quando esta porção se encontra entre os mesmos e, através do armazenamento de um índice de uma célula de acesso associado a um ID, é possível recuperar a posição da mesma porção de volume ao longo da simulação.

Partindo-se de uma célula de acesso, a identificação de, por exemplo, uma bolha, acontece por se perguntar às células vizinhas qual o valor de sua função coloração. Para fase dispersa, a função coloração assume o valor 1. Então, as células vizinhas iguais à 1 são inseridas em uma fila, por onde a busca em largura é continuada até que as filas acabem. Se durante a busca alguma célula fantasma entre processos for acessada, a mesma é enviada para o processo vizinho que a contém. Quando isso ocorre, a resposta do processo vizinho pode ser duas, dependendo das seguintes situações:

- Célula comunicada não foi marcada: Significa que o processo de busca não marcou

esta célula como pertencente à bolha, e o processo de identificação pode continuar a partir desta célula no processo vizinho. Quando isso acontece, uma mensagem de reconhecimento é enviada ao processo pai (que enviou a célula). Quando a busca no processo termina, outra mensagem é enviada ao processo pai avisando que o processo deixa de ser seu filho;

- Célula comunicada já marcada: Neste caso, a célula comunicada já foi marcada pelo processo de identificação. Uma mensagem de aviso é enviada ao processo remetente para avisar que não um filho.

Durante a identificação da bolha, forma-se uma árvore (ligações de pais e filhos) de processos ativos no processo de identificação. Essa estratégia foi baseada no algoritmo de Dijkstra Scholten de detecção de término. O algoritmo pode ser descrito na seguinte situação ilustrativa retirada do livro Distributed Algorithms de Fokkink (2013):

Exemplo: Considera-se um problema em três processos p , q e r

- No início, p envia mensagens básicas para q e r , e armazena $cc_p = 2$. Após o recebimento dessas mensagens, q e r se tornam ativos, e se juntam à árvore, como filhos de p ;
- q envia mensagem básica para r , e armazena $cc_q = 1$. Após o recebimento da mensagem, r envia de volta um reconhecimento, que faz com que o processo q diminua o valor de cc_q para 0;
- p se torna passivo. (Já que $cc_p = 2$, permanece na árvore);
- r se torna passivo. Já que $cc_r = 0$, uma mensagem de reconhecimento é enviada para seu processo pai, p , o que ocasiona a diminuição de cc_p para 1 no processo p ;
- q envia uma mensagem básica para r , e guarda $cc_q = 1$;
- q se torna passivo. Já que $cc_q = 1$, permanece na árvore;
- Note que os três processos agora estão passivos, mas ainda existe uma mensagem indo de q para r . Com o recebimento dessa mensagem, r se torna ativo novamente e entra na árvore como filho de q ;

- r se torna passivo. Como $cc_r = 0$, ele envia uma mensagem de reconhecimento ao seu pai, q , que faz com que q diminua cc_q para 0;
- Como q está passivo e $cc_q = 0$, ele manda uma mensagem de reconhecimento ao seu pai, p , e faz com que p diminua cc_p para 0;
- Como p agora é passivo e $cc_p = 0$, o processo anuncia o término.

Quando todos os processos se tornam passivos e todas as mensagens básicas forem reconhecidas, claramente a árvore eventualmente desaparece, e o processo mestre (que inicia o algoritmo) anuncia o término.

CAPÍTULO VI

VERIFICAÇÃO E VALIDAÇÃO NUMÉRICO-COMPUTACIONAL

O desenvolvimento do código AMR3D teve início com a tese de Nós (2007), e vem sendo desenvolvido até os dias de hoje no Laboratório de Mecânica dos Fluidos Computacional - MFlab, da Universidade Federal de Uberlândia. Para certificar que o código utilizado neste trabalho esteja resolvendo corretamente as equações discretizadas, testes de convergência de malhas são apresentados e confirmam segunda ordem de convergência. Para a validação do modelo bifásico são apresentados conhecidos testes da literatura, como o de correntes espúrias, comparações de saltos de pressão com a solução analítica de Yang-Laplace e resultados de uma interface plana oscilante com conhecida solução analítica.

6.1 Teste de convergência de malhas

O Método das Soluções Manufaturadas (ROY, 2005) consiste em calcular termos fontes para as equações a partir de uma solução proposta, sendo essa puramente matemática. Os termos fontes são adicionados ao lado direito das equações no sistema linear, e agem como termos forçantes da solução. Ao resolver os sistemas gerados, o código deve recuperar a solução proposta, porém contendo erros das discretizações dos modelos utilizados.

A solução proposta para os campos de velocidades e pressão u , v , w e p são apresentados nas Eqs. 6.1. A malha utilizada contém dois níveis físicos, sendo os blocos dispostos como indicado pela Fig. 6.1.

$$\begin{aligned}
u &= \sin^2(2\pi x + 2\pi y + 2\pi z + w_4 t) \\
v &= -\cos^2(2\pi x + 2\pi y + 2\pi z + w_4 t) \\
w &= \frac{w_1}{w_3} \cos^2(w_1 \pi x + w_2 \pi y + w_3 \pi z + w_4 t) + \frac{w_2}{w_3} \cos^2(w_1 \pi x + w_2 \pi y + w_3 \pi z + w_4 t) \\
p &= \cos(w_1 \pi x + w_2 \pi y + w_3 \pi z + w_4 t) \\
\rho &= 1.0 + 0.1 \sin^2(w_1 \pi x + w_2 \pi y + w_3 \pi z + w_4 t) \\
\mu &= 1.0 + 0.2 \cos^2(w_1 \pi x + w_2 \pi y + w_3 \pi z + w_4 t)
\end{aligned} \tag{6.1}$$

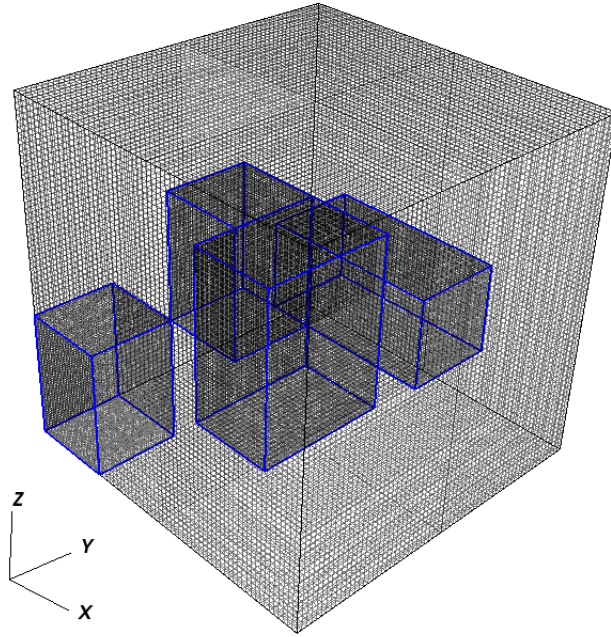


Figura 6.1: Malha com dois níveis físicos de refinamento utilizada para a verificação numérica.

Os resultados para as normas L_2 em diferentes malhas são mostrados na Fig. 6.2. No eixo das abcissas, as malhas utilizadas são: Malha 1 - $8x8x8L2$, Malha 2 - $16x16x16L2$, Malha 3 - $32x32x32L2$, Malha 4 - $64x64x64L2$ e Malha 5 - $128x128x128L2$. Observa-se que o decaimento registrado para as variáveis u , v e w aproximam da ordem de referência $O(2)$, como esperado pela discretização espacial e temporal de segunda ordem utilizadas.

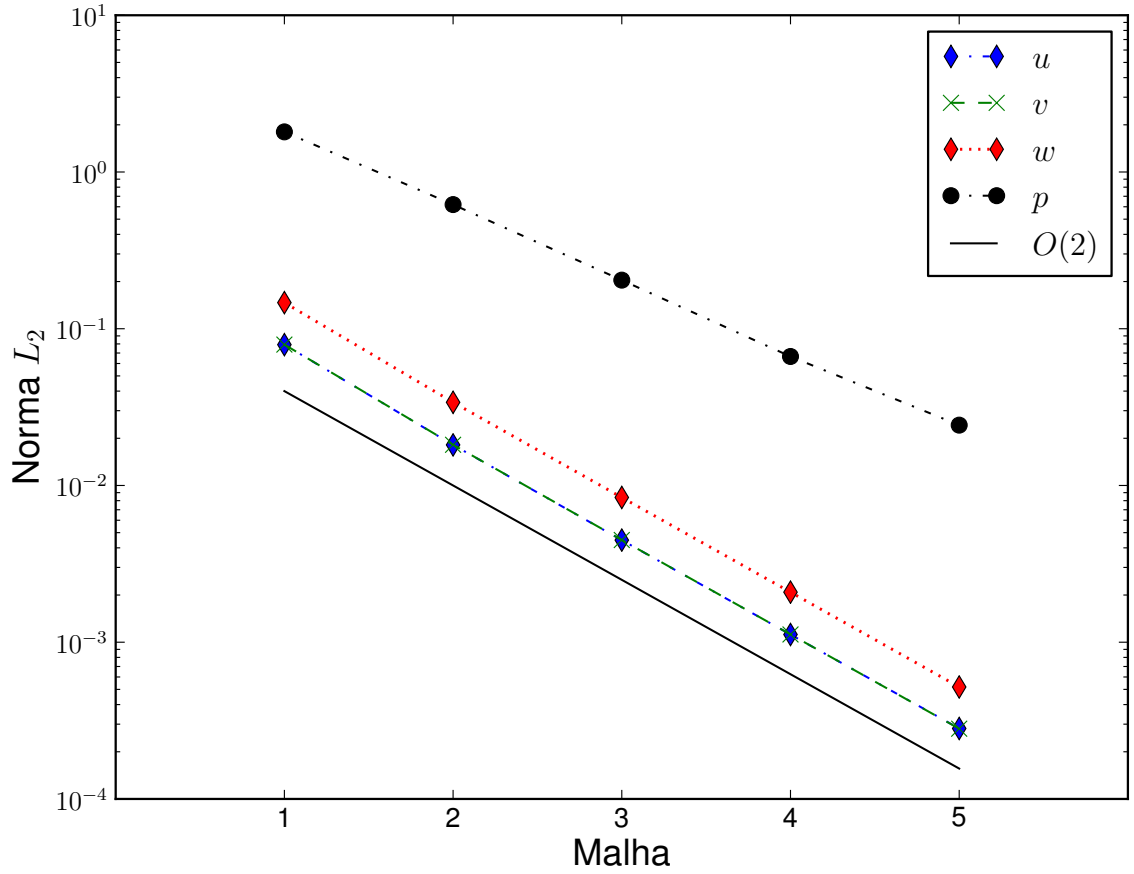


Figura 6.2: Decaimento da Norma L_2 com o refinamento de malha.

6.2 Teste de correntes espúrias

Para validar o modelo bifásico, uma bolha esférica é simulada sem a presença da aceleração da gravidade, em meio quiescente. Em uma situação ideal, os campos de velocidade permanecem nulos e as forças de tensão interfacial se equilibram com o salto de pressão, como indicado pela Eq. 6.2.

$$\Delta p_{exato} = \sigma \kappa_{exato} \quad (6.2)$$

Substituindo a curvatura exata κ_{exato} pela curvatura exata de uma esfera de raio R ($2/R$), obtemos a conhecida solução de Young-Laplace para o salto de pressão através de uma interface com tensão superficial σ , apresentada na Eq. 6.3.

$$\Delta p_{exato} = \frac{2\sigma}{R} \quad (6.3)$$

A malha utilizada foi de 32x32x32L3 em um domínio cúbico, como apresentado pela Fig. 6.3. A bolha é inicializada no centro com $R = 0,25$. O refinamento cobre toda a bolha, e a resolução da malha garante 32 volumes através de seu diâmetro. Condições de livre escorregamento foram impostas em todas as faces. Os adimensionais que caracterizam o problema de uma bolha (ou gota) estacionária são: Número de Laplace $La = \rho_c d \sigma / \mu_c^2$, razão de massas específicas $\lambda_\rho = \rho_c / \rho_d$ e razão de viscosidades $\lambda_\mu = \mu_c / \mu_d$ (TRYGGVASON; SCARDOVELLI; ZALESKI, 2011). Os valores atribuídos aos adimensionais correspondem à uma bolha de ar em água, com diâmetro $d = 1,3mm$.

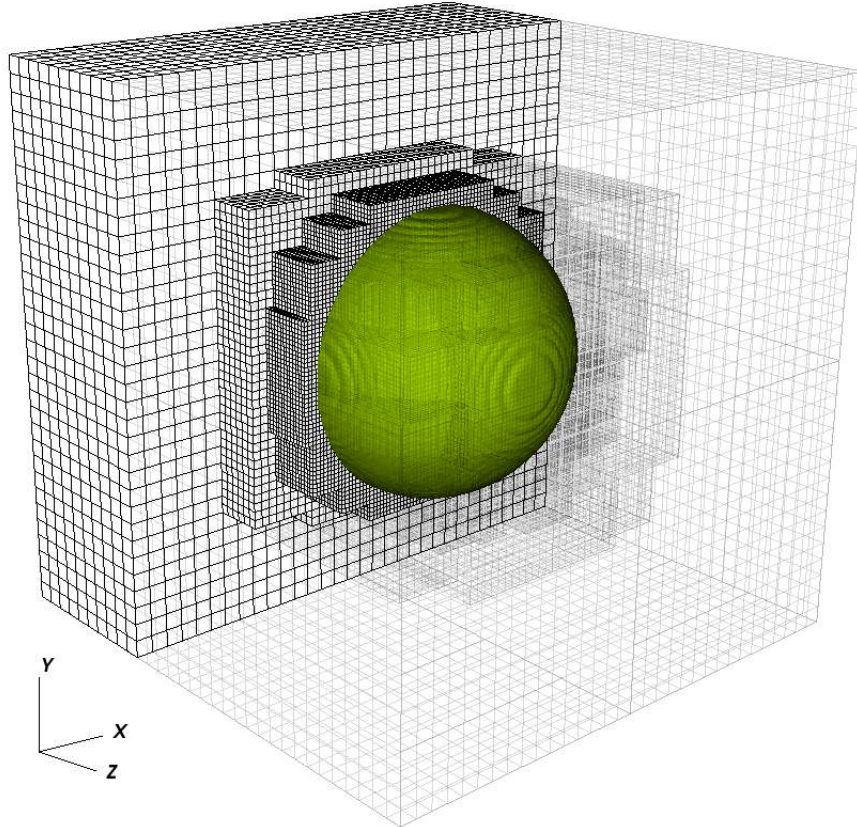


Figura 6.3: Domínio utilizado para o teste da bolha estática.

A Fig. 6.4 apresenta as comparações entre os perfis obtidos com os métodos de cálculo de curvatura descritos nas seções 5.5.3 e 5.5.4, com a curvatura exata. É possível

observar perfis praticamente idênticos. Para este caso, o salto previsto pela Eq. 6.3 é igual à 32 N/m^2 . Calculando-se um Δp , relativo à simulação, com a diferença entre a pressão média da fase dispersa e a pressão média da fase contínua, obtém-se um desvio $\epsilon_{num} = 0,0004197[\text{N/m}]$ após um passo no tempo, o que é considerado satisfatório no presente trabalho. As correntes espúrias são quantificadas através da Eq. 6.4, em que Ca é o número de capilaridade, calculado em função das propriedades da fase contínua e uma velocidade máxima U_{max} . A Fig. 6.5 mostra a evolução dos Números de Capilaridades calculados com o máximo das componentes de velocidade u , v e w . Os valores oscilam na ordem $O(-3)$, como já foi observado no resultado apresentado por Tryggvason, Scardovelli e Zaleski (2011) ao utilizar o VOF com o modelo de força interfacial *Continuum Surface Force* e o método da função altura para o cálculo da curvatura.

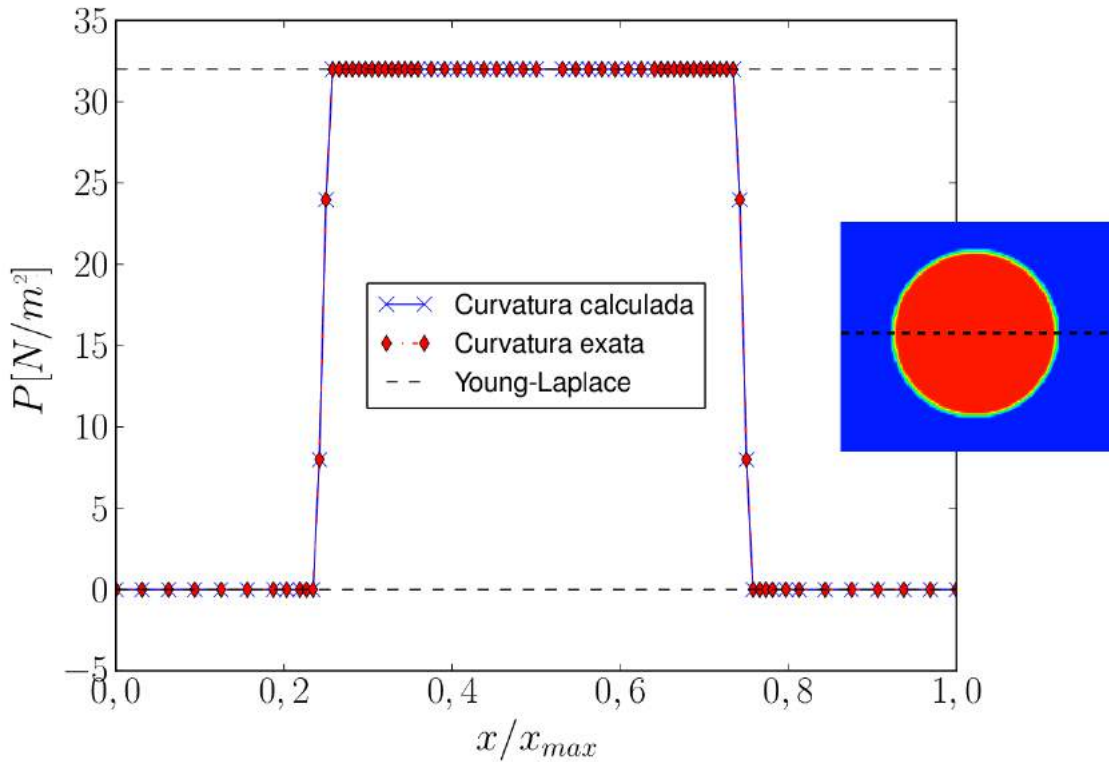


Figura 6.4: Comparações entre os saltos de pressão através da interface de uma bolha esférica.

$$Ca = \frac{\rho_c d U_{max}}{\mu_c^2} \quad (6.4)$$

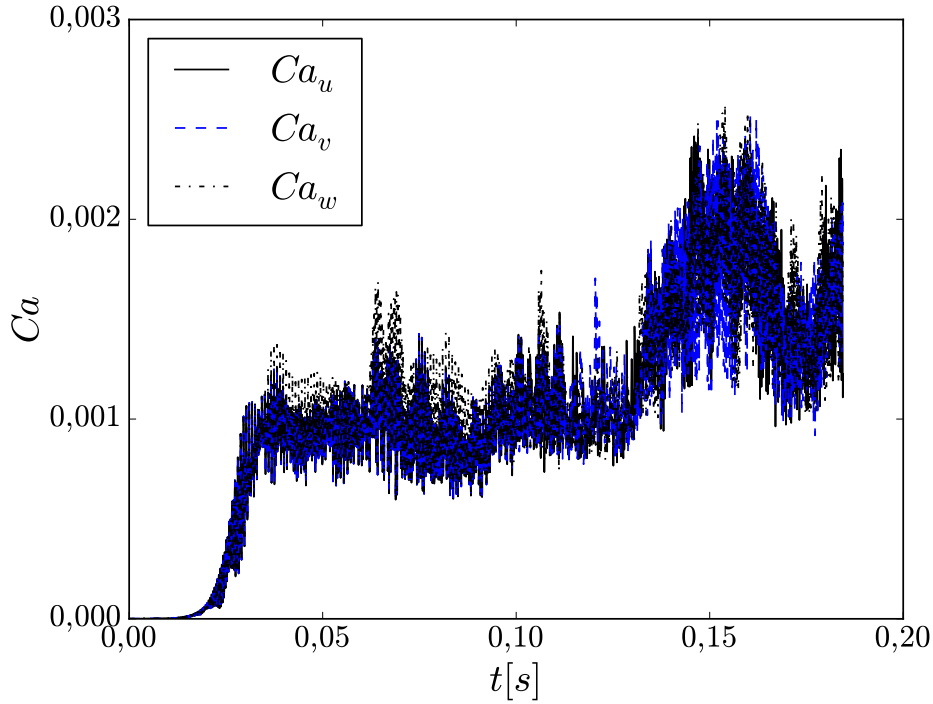


Figura 6.5: Números de Capilaridades em função do tempo.

6.3 Teste da onda capilar

O teste da onda capilar consiste em perturbar uma interface plana com uma onda senoidal de amplitude conhecida. Partindo-se da condição inicial de velocidades nulas, a interface oscilante tem sua amplitude amortecida por efeitos viscosos. Para pequenas amplitudes, a solução analítica de Prosperetti (1981) é exata e serve como referência para validações. A teoria de Prosperetti (1981) é válida para domínios infinitos e, para se obter uma boa concordância entre os resultados, é necessário que os limites do domínio sejam suficientemente distantes da interface (POPINET, 2009). Com base nos resultados de Popinet (2009), o domínio utilizado tem dimensões $x, y = (\lambda, 3\lambda)$, onde λ é o comprimento de onda da perturbação inicial, e na direção z foram mantidos quatro volumes. Neste teste foi utilizada malha uniforme. As razões de propriedades (massa específica e viscosidade) são unitárias, e o número de Laplace característico $La = 3000$. Na condição inicial, a interface plana tem a forma de uma onda senoidal de amplitude relativa $h_0 = a_0/\lambda$. A frequência de oscilação ω_0 é definida pela Eq. 6.5, onde $k = 2\pi/\lambda$ é o número de onda.

$$\omega_0^2 = \frac{\sigma k^3}{2\rho} \quad (6.5)$$

Os desvios entre as soluções numéricas e analíticas são calculados pela Eq. 6.6, onde $h = a/\lambda$ refere-se à amplitude de oscilação relativa da interface medida no centro da mesma.

$$L_2 = \frac{1}{\lambda} \sqrt{\frac{\omega_0}{25} \int_{t=0}^{25/\omega_0} (h - h_{exato})^2} \quad (6.6)$$

Na Fig. 6.6 compara-se soluções obtidas com diferentes refinamentos de malha, indicados em função do número de células contidas ao longo do comprimento de onda λ . Os resultados são mostrados em termos da distância da interface em relação à posição de equilíbrio da mesma e mostram que elas oscilam com amplitudes cada vez menores, amortecidas pelos efeitos viscosos do fluido. Nota-se que, para a malha $\lambda/64$, o resultado numérico se aproxima da solução analítica de Prosperetti (1981). A Tab. 6.1 mostra as comparações da norma L_2 calculada com a Eq. 6.6 com resultados da literatura, retirados de Tryggvason, Scardovelli e Zaleski (2011). A Fig. 6.7 mostra resultados para diferentes amplitudes relativas iniciais h_0 , utilizando malha $\lambda/64$, onde também é possível verificar concordância com os resultados analíticos.

Tabela 6.1: Comparações da norma L_2 (Eq. 6.6) com resultados da literatura, para malha $\lambda/64$.

	Norma L_2
Presente tese	$1,72 \cdot 10^{-3}$
Gueyffier <i>et al.</i> (1999) (VOF/CSS)	$7,0 \cdot 10^{-3}$
Gerlach <i>et al.</i> (2006) (VOF/CSFK8)	$4,56 \cdot 10^{-2}$
Gerlach <i>et al.</i> (2006) (PROST)	$1,8 \cdot 10^{-3}$
Popinet e Zaleski (1999) (PCMM)	$1,0 \cdot 10^{-2}$
Popinet (2009) (VOF/HF)	$1,5 \cdot 10^{-3}$

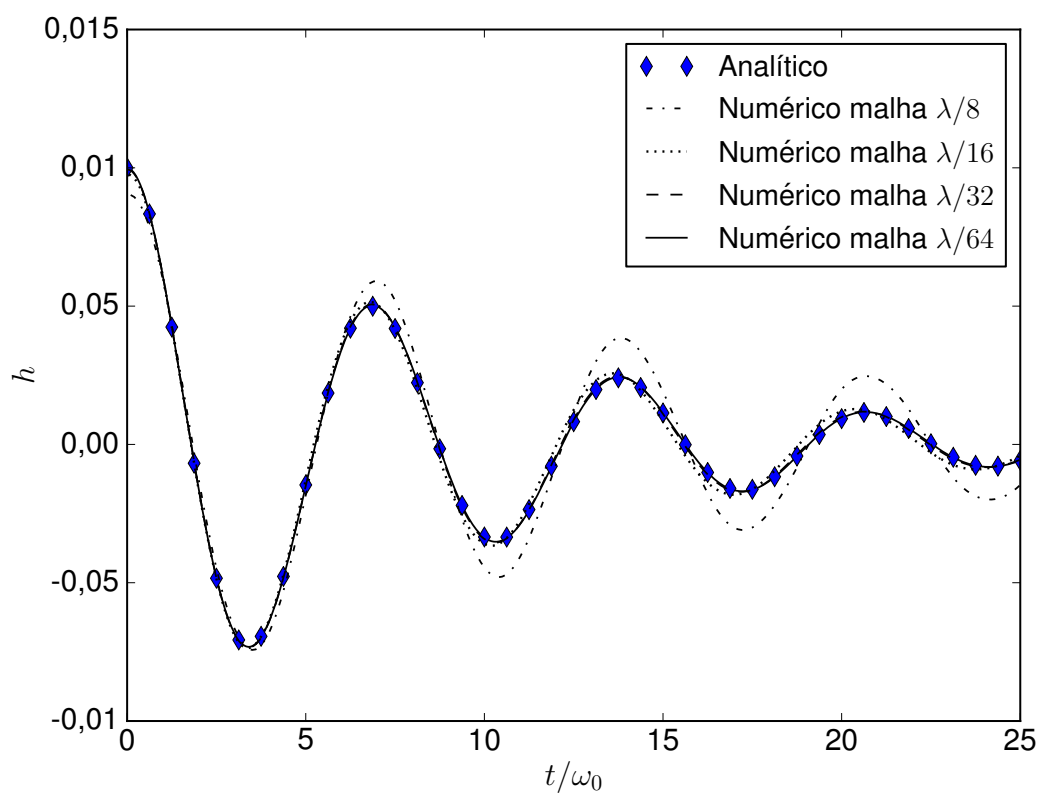


Figura 6.6: Teste de malha para o caso da onda capilar para $h_0 = 0,01$.

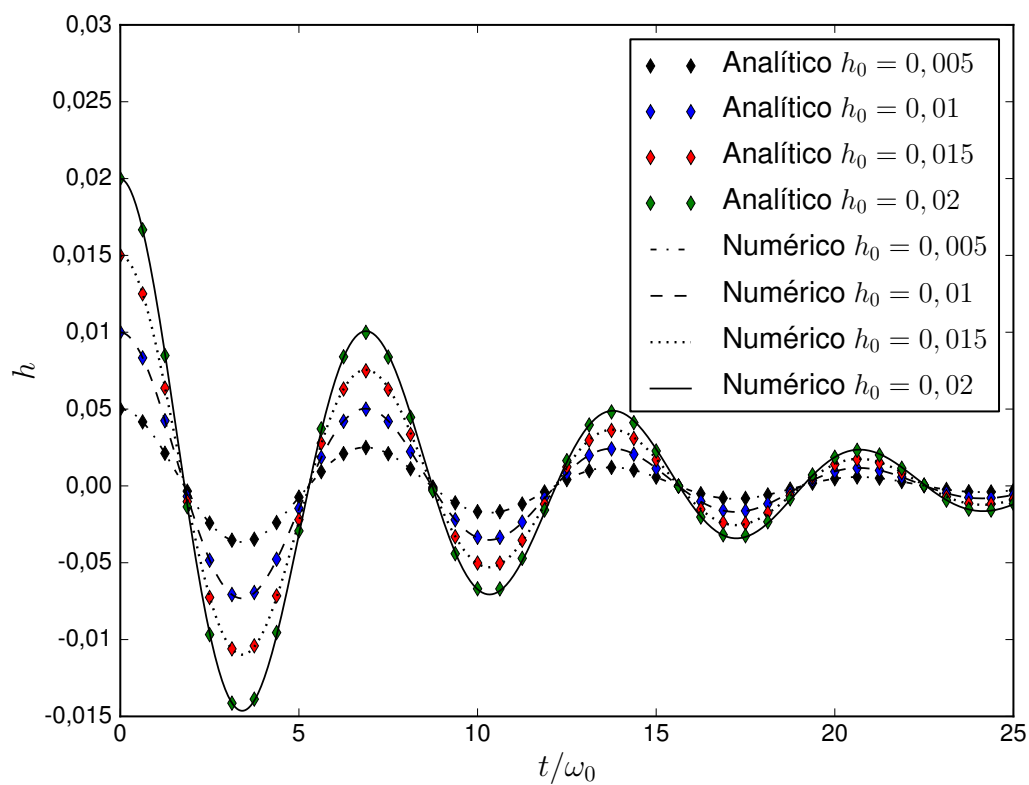


Figura 6.7: Evolução temporal das amplitudes relativas para diferentes valores de h_0 .

CAPÍTULO VII

RESULTADOS

Este capítulo é dedicado à apresentação dos resultados referentes a bolhas isoladas ascendentes em meio quiescente. Primeiramente, resultados de testes de sensibilidade definirão as configurações dos domínios e parâmetros utilizados para a geração dos resultados para análises de forças e coeficientes fluidodinâmicos. Resultados obtidos são comparados com dados da literatura para velocidades terminais e formatos finais, e cálculos de forças e coeficientes fluidodinâmicos são apresentados.

7.1 Considerações gerais

As bolhas isoladas são inicializadas em formato esférico com diâmetro d_d , e são posicionadas no centro da seção transversal do domínio. O tamanho dos domínios são referenciados em função do diâmetro da bolha. A Fig. 7.1 exemplifica o tipo de domínio com blocos de refinamento na condição inicial, em um domínio $8d_d \times 8d_d \times 16d_d$, com uma malha $64 \times 64 \times 128L3$. Condições de livre escorregamento são empregadas para as velocidades das faces laterais e do fundo, enquanto na face topo utiliza-se condição de Neumann homogênea. As condições de contorno são apresentadas na Tab. 7.1. Inicializa-se as bolhas em uma distância de $4d_d$ da face inferior ($z-$), o que é suficiente para evitar a influência das proximidades do contorno, como indicado nos resultados de Pivello (2012).

O trabalho de Grace (1973) contribuiu bastante com a comunidade científica ao

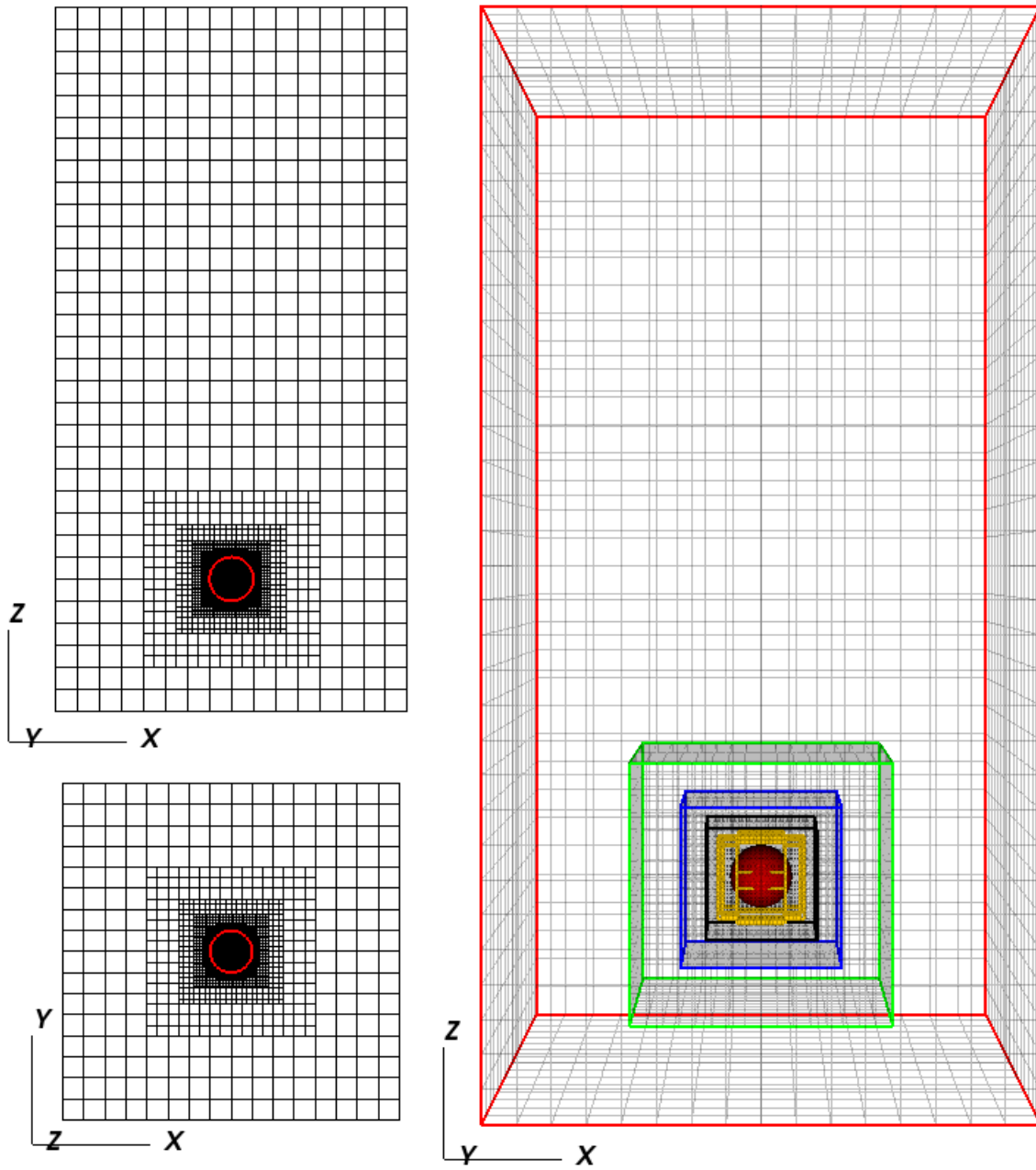


Figura 7.1: Exemplo de domínio computacional utilizado nas simulações.

construir um diagrama que relaciona os adimensionais Eötvös Eo , Morton Mo e Reynolds Re com os regimes de ascensão resultantes e formatos finais de bolhas isoladas em meio quiescente. No presente trabalho, utiliza-se esses adimensionais e as razões de propriedades (massa específica e viscosidade absoluta) para caracterizar os casos de bolhas isoladas estudados. As definições dos adimensionais são apresentadas nas Eqs. 7.1 - 7.5. Quando se trabalha com múltiplas bolhas, um outro número adimensional se faz necessário para uma completa caracterização dos casos. A fração de vazio ψ quantifica a porcentagem de fase

Tabela 7.1: Condições de contorno

	u	v	w	p
$x-$	$u = 0$	$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$
$x+$	$u = 0$	$\frac{\partial v}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$	$\frac{\partial p}{\partial x} = 0$
$y-$	$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$	$v = 0$	$\frac{\partial w}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$
$y+$	$\frac{\partial u}{\partial y} = 0$	$v = 0$	$\frac{\partial w}{\partial y} = 0$	$\frac{\partial p}{\partial y} = 0$
$z-$	$\frac{\partial u}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial v}{\partial z} = 0$	$w = 0$	$\frac{\partial p}{\partial z} = 0$
$z+$	$\frac{\partial u}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial v}{\partial z} = 0$	$\frac{\partial w}{\partial z} = 0$	$p = 0$

dispersa presente em um dado volume, e é usualmente empregada em modelos de coeficientes fluidodinâmicos que levam em conta a influência de múltiplas bolhas.

$$Re = \frac{\rho_c \|\vec{U}_{rel}\| d_d}{\mu_c} \quad (7.1)$$

$$Eo = \frac{g (\rho_c - \rho_d) d_d^2}{\sigma} \quad (7.2)$$

$$Mo = \frac{g (\rho_c - \rho_d) \mu_c^4}{\rho_c^2 \sigma^3} \quad (7.3)$$

$$\lambda_\rho = \frac{\rho_c}{\rho_d} \quad (7.4)$$

$$\lambda_\mu = \frac{\mu_c}{\mu_d} \quad (7.5)$$

A velocidade \vec{U}_{rel} calculada para os casos de bolhas isoladas em meio quiescente é considerada, no presente trabalho, como a própria velocidade de ascensão da bolha. A mesma pode ser avaliada de duas formas diferentes: através da velocidade média da fase dispersa e através da velocidade do centroide da bolha. Nas simulações praticadas neste trabalho não houveram diferenças significativas entre as formas de cálculo e, assim sendo, as velocidades médias da fase dispersa são utilizadas pela conveniência de não necessitarem de cálculos de derivadas temporais.

7.2 Simulações com base no Diagrama de Grace (1973)

A Fig. 7.2 mostra o diagrama de Grace (1973) novamente para acompanhar esta seção. Os resultados desta seção são apresentados de forma qualitativa, identificando as características de ascensão, os formatos assumidos pelas bolhas e informações referentes ao presente método numérico frente aos casos simulados.

Observa-se que o diagrama é dividido em três regiões: uma região de alto números de Eötvös delimitada por aproximadamente $30 < Eo < 1000$, $10^{-14} < Mo < 10^1$ e $1 < Re < 10^4$ (à direita do diagrama); uma região de números de Eötvös intermediários delimitada pelos valores aproximados $0,5 < Eo < 30$, $10^{-14} < Mo < 10^1$ e $1 < Re < 10^4$ (centro do diagrama); e uma região inferior que engloba todo espectro de Números de Eötvös, Reynolds e Morton, caracterizada por bolhas essencialmente esféricas.

Na região de alto número de Eötvös, os efeitos gravitacionais são predominantes sob os efeitos de tensão superficial e grandes deformações são observadas. Entre os formatos finais, encontra-se formatos de disco, formatos de *caps* elipsoidais e esféricos, e bolhas com saias, podendo essas serem estáveis ou instáveis. As Figs. 7.3, 7.4 e 7.5 mostram as evoluções dos formatos das bolhas partindo da condição inicial esférica. Os formatos finais são classificados de acordo com as nomenclaturas definidas no trabalho de Bhaga e Weber (1981), que são bastante difundidas em trabalhos da área. Para a simulação desses casos utilizam-se constantes de restrição ao passo de tempo, cuja expressão é apresentada nas Eqs. 5.21 - 5.24, de $C_{dif} = 0,5$; $C_{adv} = 0,3$ e $C_{cap} = 0,5$. Com esses valores, os passos de tempo adimensional (Eq. 7.10) variaram na ordem de 10^{-5} .

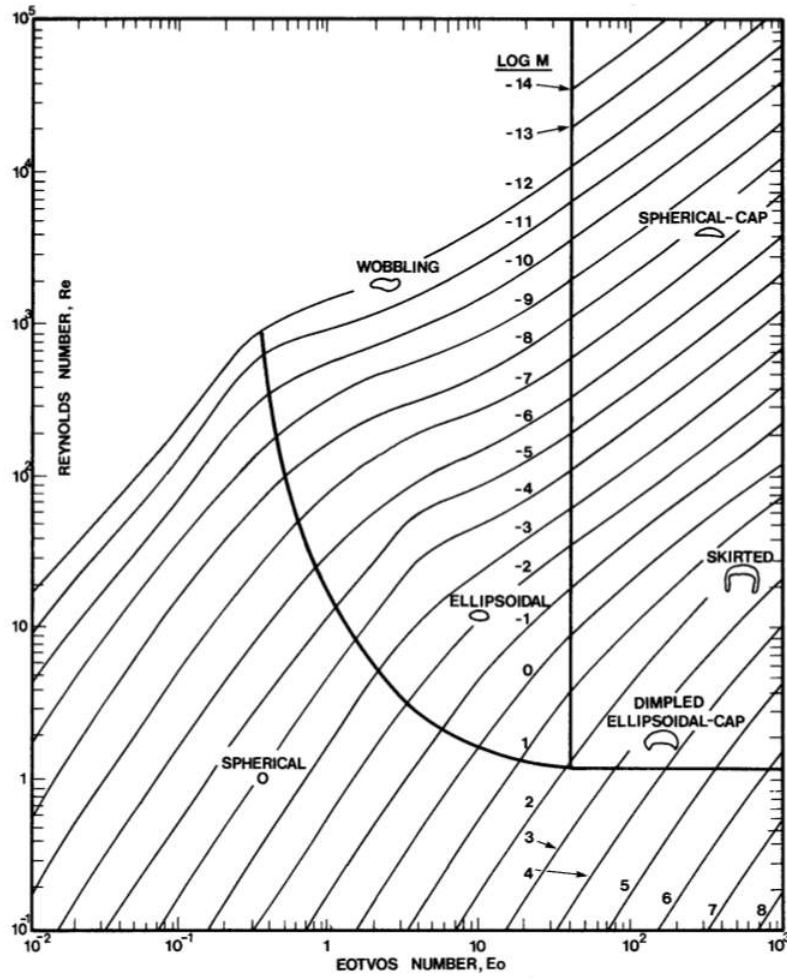


Figura 7.2: Reprodução do diagrama de Grace (1973).

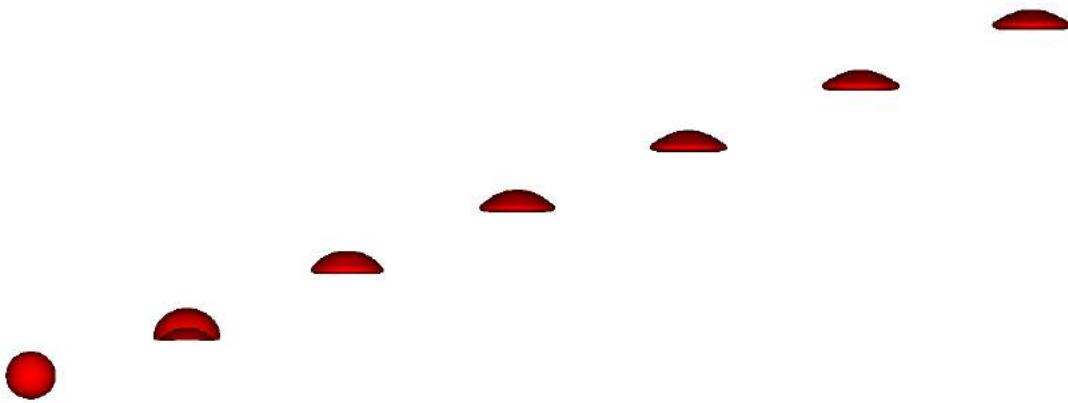


Figura 7.3: Evolução temporal do caso com adimensionais: $Mo = 8,3e - 3$; $Eo = 32,2$; $Re = 53,2$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$. Malha $8 \times 8 \times 24L6$, com 32 volumes ao longo do diâmetro esférico inicial. Formato final de disco (*oblate ellipsoidal*).

Um caso classificado por Bhaga e Weber (1981) como *skirted wavy*, em que a bolha desenvolve uma saia com instabilidades, foi simulado com o presente método. Até o

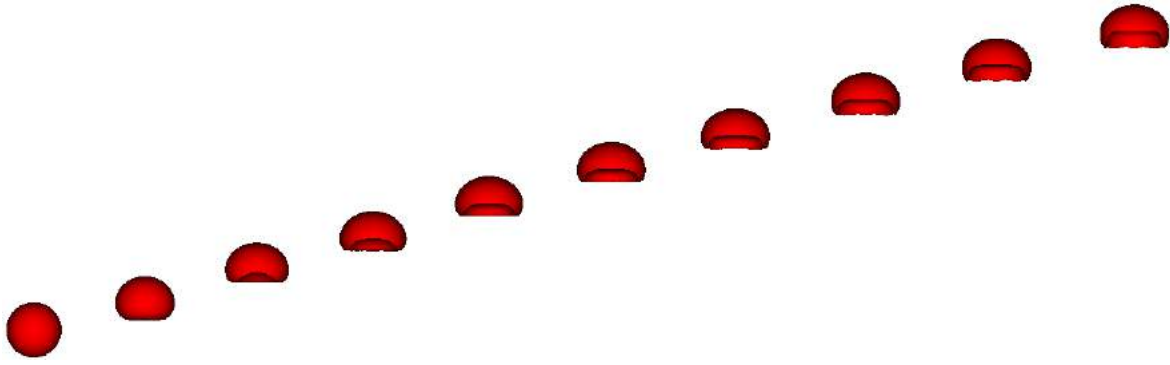


Figura 7.4: Evolução temporal do caso com adimensionais: $Mo = 266$; $Eo = 243$; $Re = 7,6$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$. Malha $8 \times 8 \times 24L6$, com 32 volumes ao longo do diâmetro esférico inicial. Formato final de *cap* elipsoidal (*oblate ellipsoidal cap*).

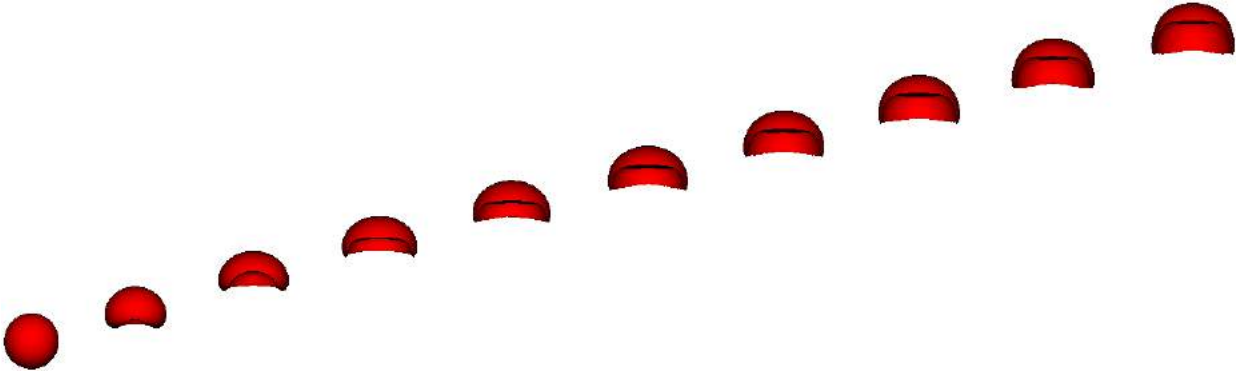


Figura 7.5: Evolução temporal do caso com adimensionais: $Mo = 43,1$; $Eo = 339$; $Re = 17,06$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$. Malha $8 \times 8 \times 24L6$, com 32 volumes ao longo do diâmetro esférico inicial. Formato final de bolha com saia estável (*skirted smooth*).

desenvolvimento da saia da bolha, as simulações foram realizadas com $C_{dif} = 0,5$; $C_{adv} = 0,3$ e $C_{cap} = 0,5$; estabilizando os cálculos com passos de tempo adimensionais na ordem $O(10^{-5})$. No entanto, com o desenvolvimento da saia, o caso apresentou dificuldades de convergência, o que motivou o uso de constantes cada vez menores de restrição temporal. Por fim, os cálculos apenas se estabilizaram com a adoção de uma função de suavização da interface, mostrada na Eq. 7.6, retirada de Tryggvason, Scardovelli e Zaleski (2011). Nesta função, S representa a função coloração suavizada e ϕ refere-se ao campo de função coloração antes da suavização.

$$S_{i,j,k} = \frac{1}{2}\phi_{i,j,k} + \frac{1}{12}(\phi_{i-1,j,k} + \phi_{i+1,j,k} + \phi_{i,j-1,k} + \phi_{i,j+1,k} + \phi_{i,j,k-1} + \phi_{i,j,k+1}) \quad (7.6)$$

O resultado obtido com o VOF para este caso também foi simulado com o método Front Tracking em Pivello (2012) e, utilizando o mesmo refinamento, resultou na ruptura da saia formada a jusante da bolha. A Fig. 7.8 apresenta a malha computacional durante os primeiros instantes de rompimento da saia. Sabe-se que simulações com o método VOF não conseguem lidar com duas interfaces em um mesmo volume, o que não acontece com Front Tracking. Enquanto quebras ou coalescências não físicas ocorrem nestas situações com o VOF, o método *Front Tracking* necessita de modelos de ruptura adicionais, caso contrário, mantém-se a conectividade entre os pontos da malha lagrangiana. Assim, percebemos nos resultados uma das mais marcantes diferenças entre os métodos VOF e Front Tracking. O formato registrado por Bhaga, para este caso, mostra uma longa saia desenvolvida a jusante da bolha. O autor aponta o início de ondulações na saia, causadas por instabilidades da mesma. Em seu trabalho, um estudo sobre a instabilidade de saias é realizado, e a constatação de eventuais rupturas da saia fica registrada. No caso do resultado com VOF, fica clara a maior influência da malha, como pode ser visto na Fig. 7.8. Cabe lembrar que efeitos de instabilidades fluidodinâmicas podem ocorrer em casos similares. As Figs. 7.6 e 7.7 mostram o avanço temporal desse caso obtidos com, respectivamente, VOF e Front Tracking de Pivello (2012). Nota-se que os resultados se assemelham até o momento da ruptura. A Fig. 7.9 mostra a sequência de ruptura da interface.

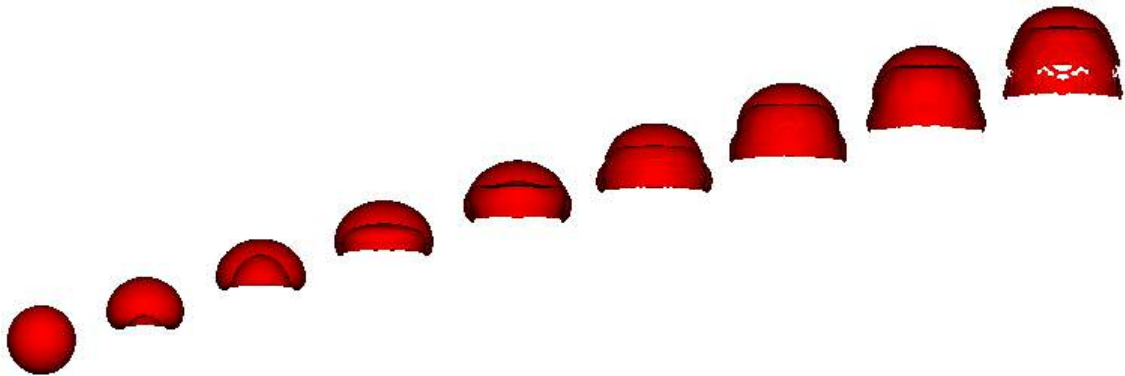


Figura 7.6: Evolução temporal do caso com adimensionais: $Mo = 43,1$; $Eo = 641$; $Re = 31,47$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$. Malha $8 \times 8 \times 24L6$, com 32 volumes ao longo do diâmetro esférico inicial. Formato final de bolha com saia instável (*skirted wavy*).

A Fig. 7.10 mostra a configuração de um caso registrado como instável por Hua e Lou (2007) e Pivello (2012). Quando esse caso é simulado com presente método, ocorre uma

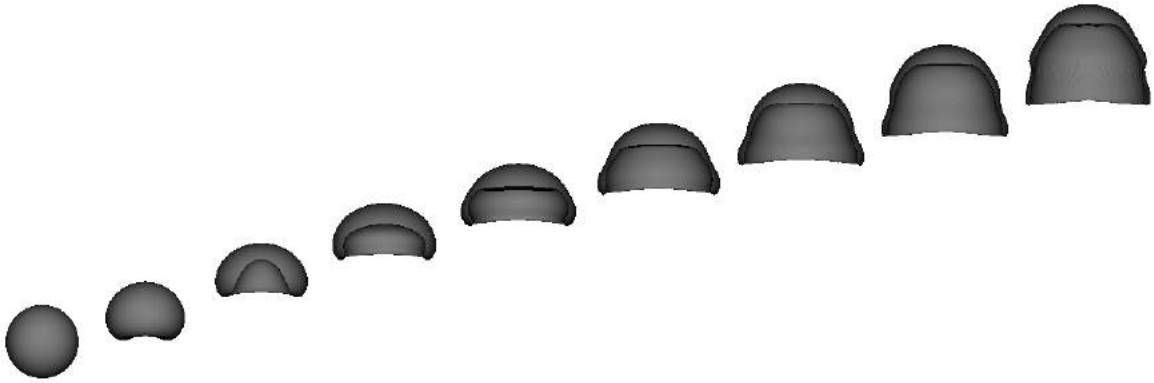


Figura 7.7: Evolução temporal do caso: *skirted wavy* com o Front Tracking (PIVELLO, 2012). Adimensionais: $Mo = 43,1$; $Eo = 641$; $Re = 31,47$

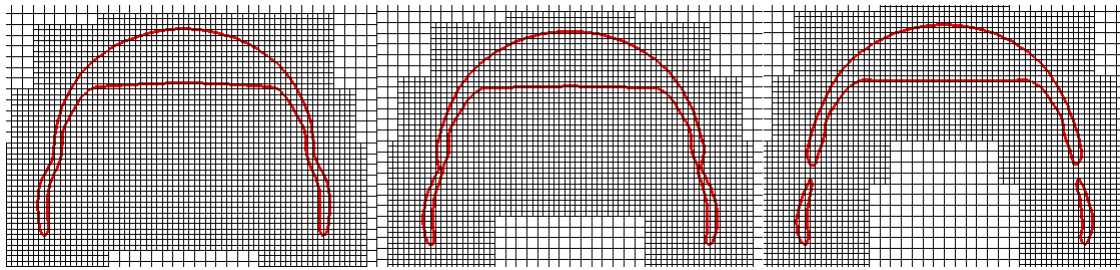


Figura 7.8: Malha que cobre a interface durante a ruptura da saia. Resultado obtido com o VOF



Figura 7.9: Sequência temporal da ruptura de interface obtida com o VOF

ruptura da bolha. Maiores investigações devem ser realizadas para se determinar a física correta do caso.

A região central do diagrama da Fig. 2.6 engloba diversos regimes de ascensão. Para esses números de Eötvös, os efeitos de tensão superficial e gravitacionais têm influências equiparáveis. Em geral, para menores valores de Reynolds, as bolhas assumem formatos elipsoidais estacionários em trajetórias de ascensão retilíneas. Com o aumento do número de Reynolds, as bolhas ascendem com formatos elipsoidais oscilantes e diferentes trajetórias de

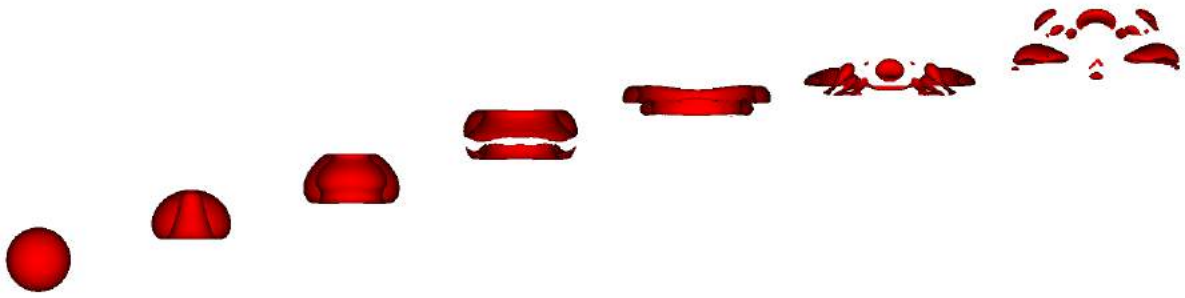


Figura 7.10: Evolução temporal de um caso instável. Adimensionais: $Mo = 8,2e - 4$; $Eo = 237$; $Re = 259$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$. Malha $8 \times 8 \times 24L6$, com 32 volumes ao longo do diâmetro esférico inicial. Formato final instável.

ascensão podem ser vistos. Esse regime é usualmente referido na literatura como *woobling*. Como discutido na seção de Revisão Bibliográfica 2.3.1, esse regime caracteriza-se por fortes dependências da condição inicial e perturbações do sistema. Acredita-se que esse é o motivo de haver na literatura muitas divergências em relação à esses casos, tanto para as velocidades terminais de ascensão quanto para as trajetórias descritas pelas bolhas deste tipo. O trabalho de Tomiyama *et al.* (2002) apresenta uma extensa discussão dos fatores que podem influenciar os regimes de ascensão observados. Os autores destacam a influencia de impurezas nos fluidos nos regimes de ascensão.

A Fig. 7.11 apresenta a evolução dos formatos de uma simulação onde a bolha assume um formato elipsoidal estacionário. Para este caso utiliza-se constantes $C_{dif} = 0,5$; $C_{adv} = 0,2$ e $C_{cap} = 0,4$; o que resulta em passos de tempo adimensionais na ordem de 10^{-5} .

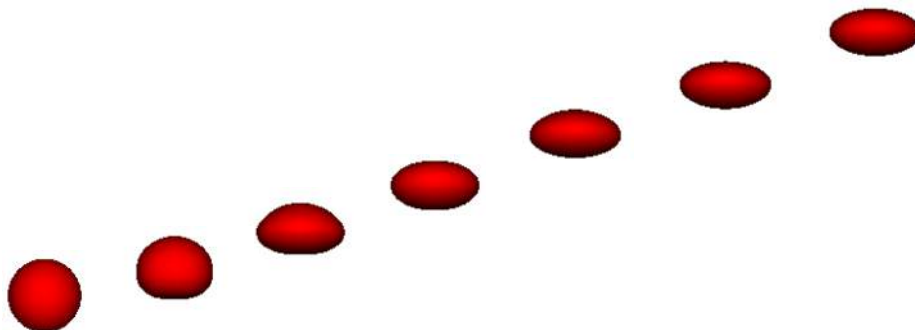


Figura 7.11: Evolução temporal do caso com adimensionais: $Mo = 10^{-5}$; $Eo = 5$; $Re = 17,06$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$. Malha $8 \times 8 \times 24L6$, com 32 volumes ao longo do diâmetro esférico inicial. Formato final de bolha elipsoidal

Ao aumentar o número de Reynolds, os resultados mostraram um caso de bolha

woobling, como previsto pelo diagrama de Grace (1973). Casos de bolhas ascendentes neste regime foram simulados com constantes $C_{dif} = 0,3$; $C_{adv} = 0,1$ e $C_{cap} = 0,4$; sendo que os passos de tempo foram bastante restritivos, variando entre as ordens (tempo adimensional) $O(10^{-6})$ e $O(10^{-8})$. Além das restrições ao passo de tempo, o número de ciclos do Multigrid-Multinível chegaram a ser maiores que 50 por passo de tempo, o que tornou as simulações onerosas, mesmo em ambiente paralelo. A Fig. 7.12 mostra a bolha em ascensão com contornos de isovorticidade para efeitos de visualização da esteira formada. Observa-se que, nos instantes iniciais, a bolha pulsa mantendo sua forma axissimétrica dando origem a uma esteira em modo varicoso. Com efeitos de perturbações numéricas, o movimento da bolha perde sua simetria, iniciando um trajeto alternado. O trajeto alternado em muitos trabalhos é referenciado como movimento de *zig-zag*. Através da Fig. 7.13 é possível verificar a formação de estruturas do tipo grampos de cabelo em posições alternadas em relação ao posicionamento da bolha, seguindo o movimento alternado da mesma.

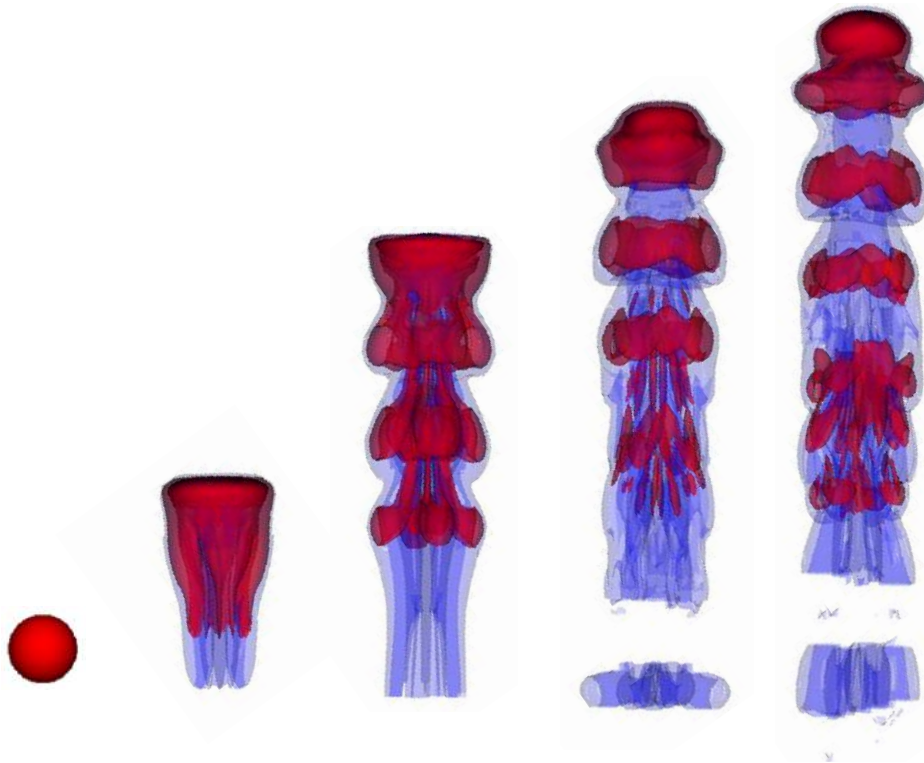


Figura 7.12: Bolha ascendente em regime de *woobling* com contornos de magnitude da vorticidade destacando uma esteira em formato varicoso. Adimensionais: $Eo = 3,63$, $Mo = 2,5 \cdot 10^{-11}$, $Re \approx 1350$, $\lambda_\rho = 1000$ e $\lambda_\mu = 54,2$.

Por fim, a região de bolhas esféricas produzem mudanças de formato praticamente

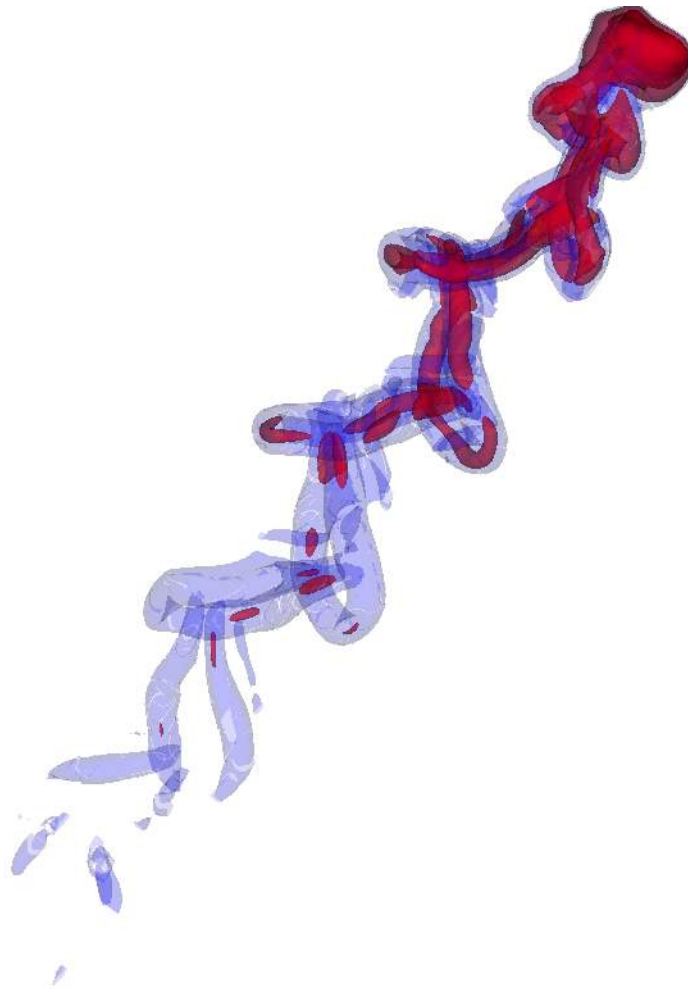


Figura 7.13: Bolha ascendente em regime de *woobling* com contornos de magnitude da vorticidade destacando estruturas formadas de grampos de cabelo durante movimentação "zig-zag". Adimensionais: $Eo = 3,63$, $Mo = 2,5 \cdot 10^{-11}$, $Re \approx 1350$, $\lambda_\rho = 1000$ e $\lambda_\mu = 54,2$.

imperceptíveis, já que a condição inicial já corresponde ao formato final esperado. Devido à esse fato, não são apresentados os formatos obtidos para as bolhas esféricas. Em geral, os casos de bolhas esféricas requerem baixos passos de tempo e caracterizam-se por ser bastante instáveis do ponto de vista numérico. Para esses casos, os efeitos de tensão superficial são mais influentes quando comparados aos efeitos gravitacionais e os erros de avaliação de valores de massas específicas nas células computacionais aumentam as correntes espúrias presentes nas simulações, muitas vezes desintegrando a interface, ou ocasionando divergência numérica. Os resultados de bolhas esféricas obtidos são mais detalhados nas seções de cálculos de forças e coeficientes fluidodinâmicos.

7.3 Testes de sensibilidade

Esta seção é dedicada a quantificação e comparação das influências do tamanho do domínio, refinamento de malhas, razão de massas específicas λ_ρ e a influência da constante ξ (vide Eq. 5.6) que define regiões com vorticidade a serem refinadas. Foram escolhidos dois casos para serem analisados: um de bolha ascendente esférica e um de bolha ascendente em regime *woobling*. Para o caso de bolha esférica, os adimensionais que caracterizam o sistema bifásico, de acordo com o diagrama de Grace (1973), são: $Eu = 1,0$; $Mo = 10^{-5}$ e $Re \approx 14$. No caso de bolha em regime de *woobling*: $Eu = 3,63$; $Mo = 2,5 \cdot 10^{-11}$ e $Re \approx 1400$. Para estes testes, utilizam-se constantes $C_{dif} = 0,5$; $C_{adv} = 0,2$ e $C_{cap} = 0,4$.

7.3.1 Influência do refinamento de malhas

A Fig. 7.14 mostra a influência da malha computacional utilizada em termos da evolução temporal do número de Reynolds para o caso da bolha esférica. As malhas $16 \times 16 \times 32L3$, $16 \times 16 \times 32L4$ e $16 \times 16 \times 32L5$ garantem, respectivamente, 8, 16 e 32 volumes através do diâmetro esférico da bolha. A variação do número de Reynolds terminal é de 4,1% e 0,15% quando se refina de $16 \times 16 \times 32L3$ à $16 \times 16 \times 32L4$ e de $16 \times 16 \times 32L4$ à $16 \times 16 \times 32L5$ respectivamente.

A Fig. 7.15 apresenta as evoluções dos números de Reynolds, para o caso de *woobling*, obtidas com as mesmas resoluções de malhas do caso apresentado na figura anterior. Observa-se que existe uma grande influência do refinamento de malha utilizado para esse caso. Para a malha mais refinada ($8 \times 8 \times 80L6$), oscilações de maiores amplitudes são registradas, além de uma evidência de mudança no regime de ascensão com uma repentina diminuição das amplitudes de oscilação. Para a malha intermediária ($8 \times 8 \times 80L5$) também registram-se oscilações da bolha durante a ascensão, porém de menor amplitude quando comparada ao caso de maior refinamento. Os resultados obtidos com a malha mais grosseira ($8 \times 8 \times 80L4$) não registraram oscilações na evolução do número de Reynolds. Isso é explicado principalmente pela falta de volumes necessários para a representação das curvaturas locais e, conseqüentemente, não é possível a representação das deformações esperadas para a bolha. O número de Reynolds médio calculado para cada malha deste caso registra uma variação

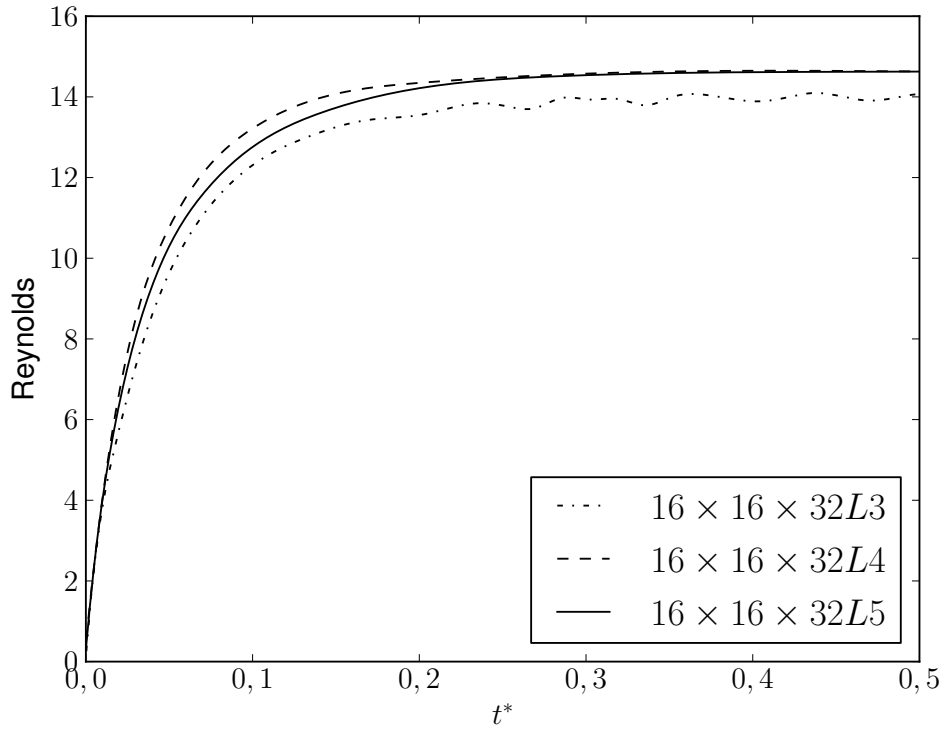


Figura 7.14: Teste de malha para um caso de bolha esférica. Adimensionais: $Eo = 1,0$, $Mo = 10^{-5}$, $\lambda_\rho = 816,32$, $\lambda_\mu = 58,3$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 16d_d$

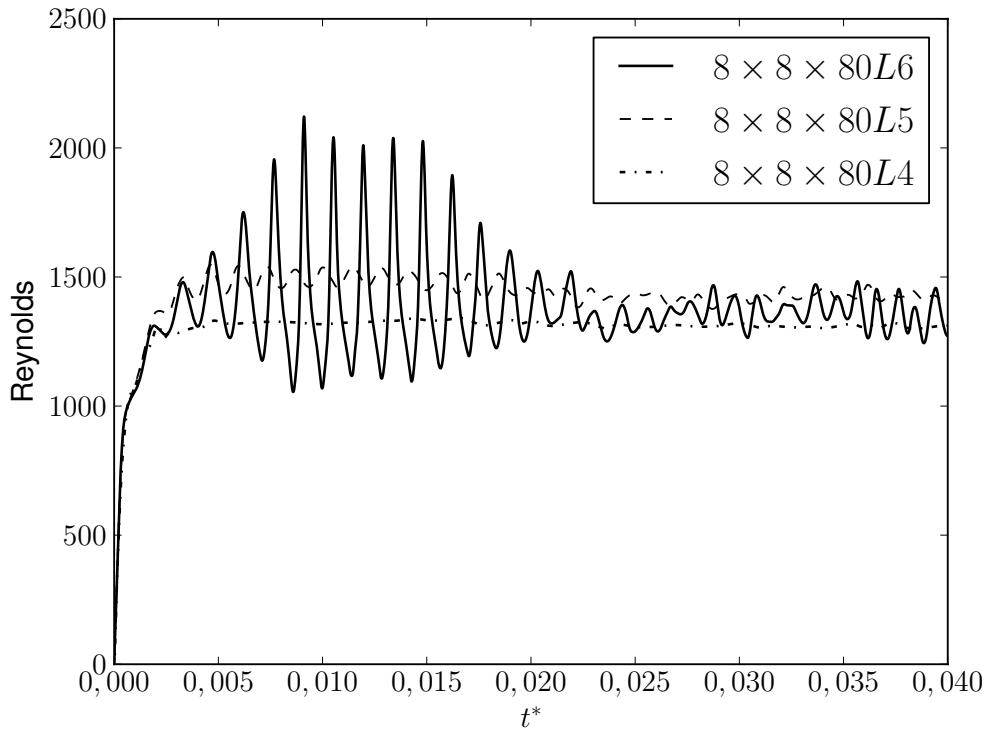


Figura 7.15: Teste de malha para um caso de bolha em regime de ascensão *woobling*. Adimensionais: $Eo = 3,63$; $Mo = 2,5 \cdot 10^{-11}$ e $Re \approx 1400$, $\lambda_\rho = 816,32$, $\lambda_\mu = 58,3$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 80d_d$

de 5,2% e 8,6%, respectivamente, ao refinar a malha de $8 \times 8 \times 80L4$ à $8 \times 8 \times 80L5$ e de $8 \times 8 \times 80L5$ à $8 \times 8 \times 80L6$.

7.3.2 Influência do tamanho do domínio

A Fig. 7.16 mostra a influência do tamanho do domínio na evolução do número de Reynolds para o caso de bolha esférica com adimensionais $Eo = 1,0$, $Mo = 10^{-5}$ e $Re \approx 14$. Nota-se que um domínio com seção transversal quadrada de aresta $8d_d$ já é suficiente para minimizar os efeitos do contorno, como também verificado no trabalho de Pivello (2012). Para este caso, registra-se uma variação de 3% com o aumento da aresta de $4d_d$ para $6d_d$, 0,9% de $6d_d$ para $8d_d$ e 0,4% de $8d_d$ para $10d_d$.

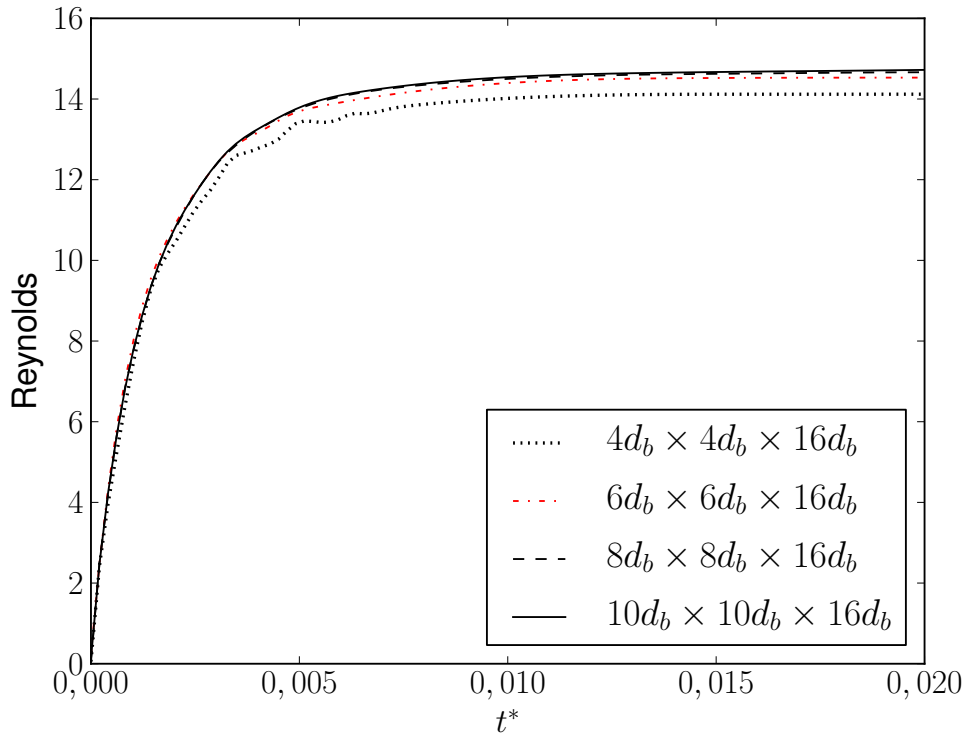


Figura 7.16: Teste de malha para um caso de bolha esférica. Adimensionais: $Eo = 1,0$, $Mo = 10^{-5}$, $\lambda_\rho = 816,32$, $\lambda_\mu = 58,3$. Malha: $16 \times 16 \times 32L4$

As influências das proximidades do domínio no caso de *woobling* foram testadas com uma malha $8 \times 8 \times 80L5$. A Fig. 7.17 mostra os resultados obtidos. Com exceção do resultado obtido com domínio $4d_d \times 4d_d \times 80d_d$, os valores obtidos ficaram bastante próximos, registrando uma variação do número de Reynolds médio de 2,8%, 0,9% e 0,1%, respectivamente, quando se aumenta as arestas de $4d_d$ para $6d_d$, de $6d_d$ para $8d_d$ e de $8d_d$

para $10d_d$.

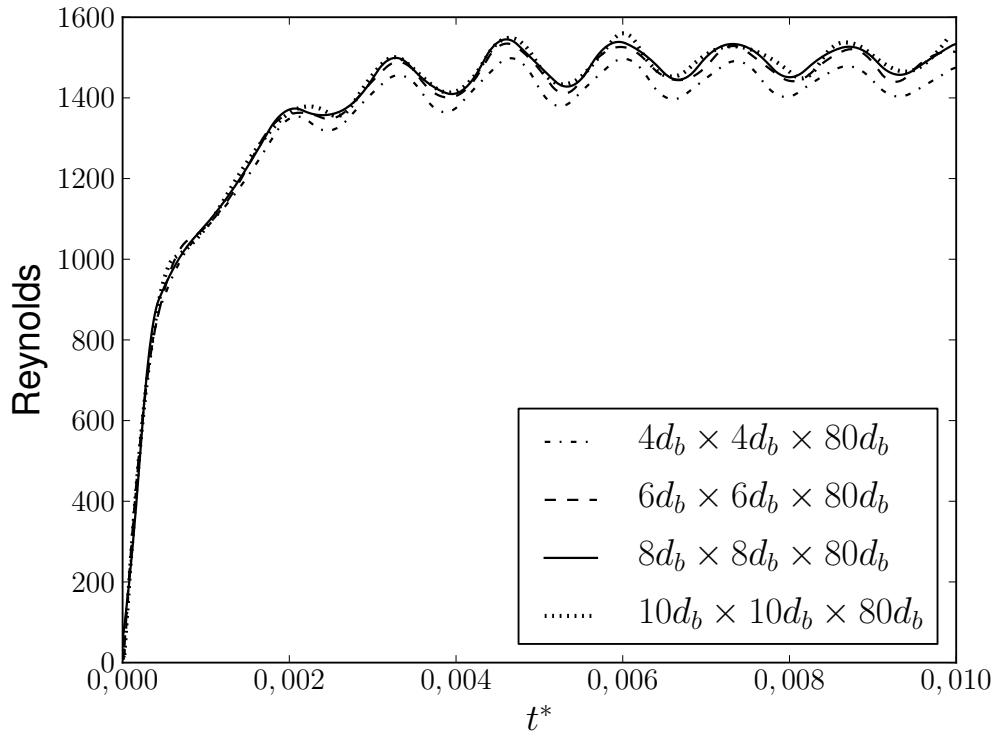


Figura 7.17: Teste de influência de domínio para um caso de bolha em regime de ascensão *woobling*. Adimensionais: $Eo = 3,63$; $Mo = 2,5 \cdot 10^{-11}$ e $Re \approx 1400$, $\lambda_\rho = 816,32$, $\lambda_\mu = 58,3$. Malha: $16 \times 16 \times 64L3$

Com bases nesses resultados, utiliza-se seções transversais de arestas iguais à $8d_d$ para os demais casos da tese.

7.3.3 Influência da razão das massas específicas

Variando-se a razão de massa específica λ_ρ , pouca influência nos valores de Reynolds terminais são registradas nos casos simulados. Porém, existem variações significativas no comportamento transiente de ascensão das bolhas. Isso é esperado, uma vez que a razão de massa específica está ligada à diferença entre a força peso e o empuxo que age na bolha, que é diretamente proporcional às acelerações da mesma. A Fig. 7.18 apresenta as variações registradas para um caso de bolha esférica com adimensionais $Eo = 1,0$, $Mo = 10^{-5}$ e $Re \approx 14$. Observa-se que as bolhas atingem o regime estacionário com valores de números de Reynolds terminais bastante próximos com as diferentes razões de massas específicas, registrando 0,5% de aumento no número de Reynolds terminal para o aumento da razão de

$\lambda_\rho = 8,1632$ à $\lambda_\rho = 81,632$. Com o aumento da razão de $\lambda_\rho = 81,632$ para $\lambda_\rho = 816,32$, registra-se apenas um aumento de 0,07% no número de Reynolds terminal. Já no período transiente inicial, as maiores razões de massas específicas registraram maiores acelerações iniciais, como esperado.

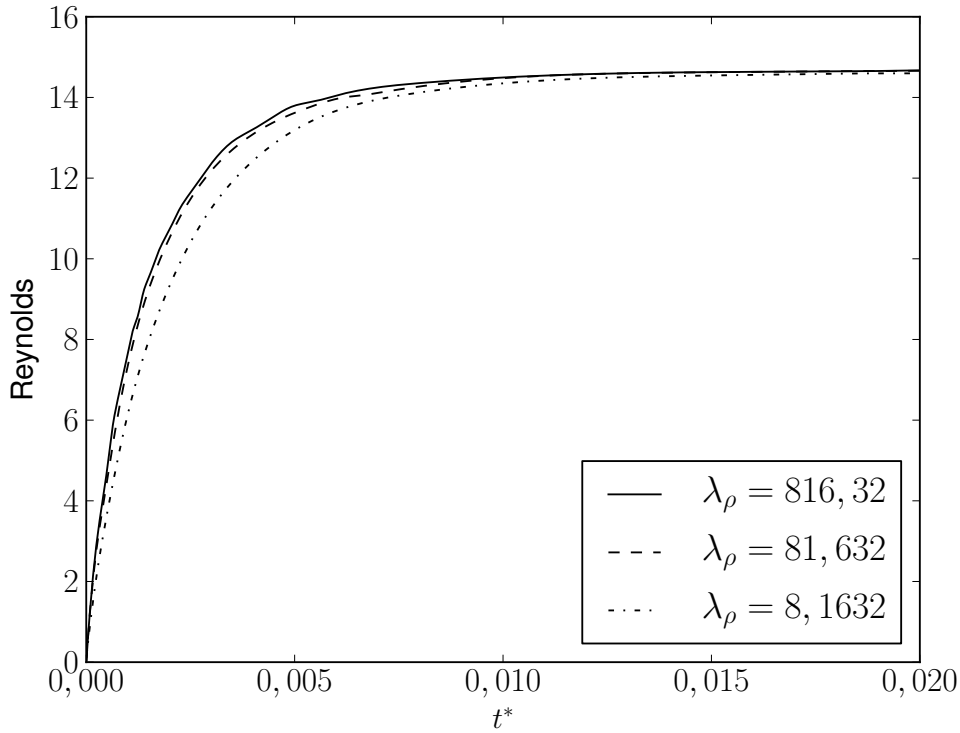


Figura 7.18: Teste de influência da razão de massas específicas para um caso de bolha esférica. Adimensionais: $Eu = 1,0$, $Mo = 10^{-5}$, $\lambda_\mu = 58,3$. Malha: $16 \times 16 \times 32L_d$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 16d_d$.

Para um caso de bolha ascendente em regime de *woobling*, realiza-se um teste que compara as evoluções dos números de Reynolds para razões de massas específicas $\lambda_\rho = 10$, $\lambda_\rho = 100$ e $\lambda_\rho = 1000$. A Fig. 7.19 apresenta os resultados. Para a menor razão, as oscilações registradas são de amplitudes consideravelmente menores que os resultados com razões de 100 e 1000. Embora os resultados não mostrem grandes variações de amplitude para as maiores razões, nota-se que a frequência de oscilação aumenta para o caso de maior razão (1000). Isso é consistente com o fato de que maiores razões significam maiores forças de empuxo em relação à força peso, o que acarreta em maiores acelerações. No entanto, é possível observar através da Fig. 7.19 que o número de Reynolds médio não varia significativamente, registrando uma variação de 1,5% e 0,4% para, respectivamente, aumentos de $\lambda_\rho = 10$ para

$\lambda_\rho = 10$ e de $\lambda_\rho = 100$ para $\lambda_\rho = 1000$.

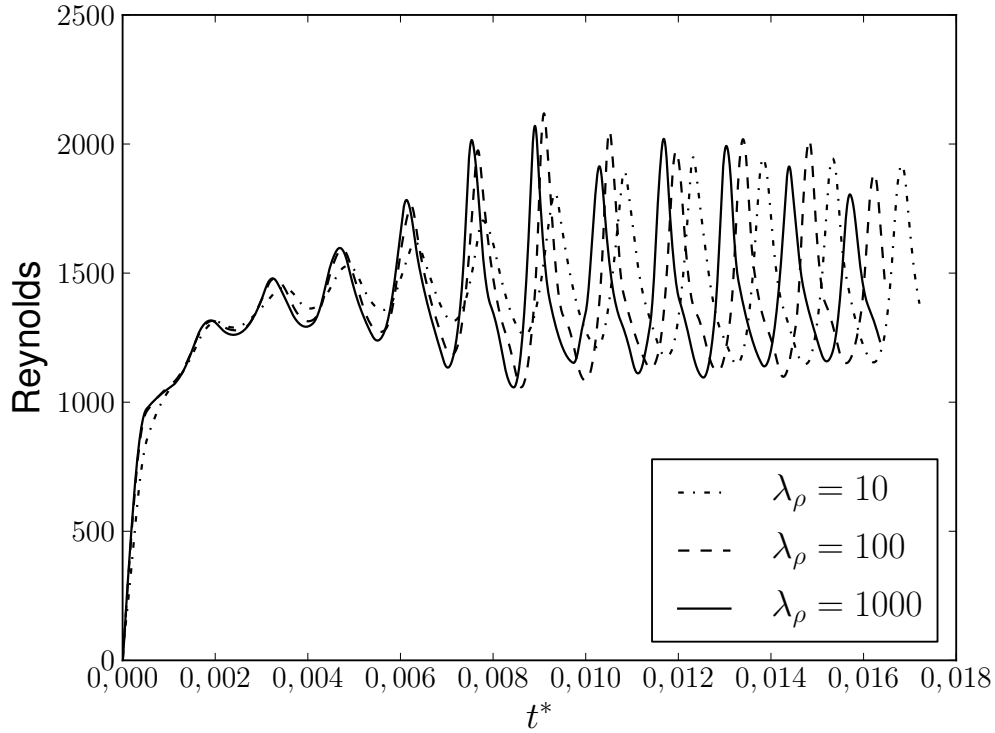


Figura 7.19: Teste de influência da razão de massas específicas para um caso de bolha em regime de *woobling*. Adimensionais: $Eo = 5.0$, $Mo = 10^{-11}$, $\lambda_\rho = 816,32$, $\lambda_\mu = 58,3$. Malha: $16 \times 16 \times 128L4$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 64d_d$.

7.3.4 Influência da variação da constante de refinamento ξ

Para um caso de bolha esférica, a variação da constante de refinamento ξ pouco influenciou na medição da evolução do número de Reynolds, apesar de haver significativas diferenças em relação à malha construída. Mesmo com uma variação em ordens de grandezas, os valores de Reynolds permanecem praticamente os mesmos (variações menores que 0,1%), como mostra a Fig. 7.20. A Fig. 7.21 apresenta a malha formada através de um corte passando pelo centro do domínio, onde é possível observar a diferença entre os tamanhos das regiões de refinamento obtidas com os diferentes valores de ξ .

Em casos de bolhas ascendentes em regime de *woobling*, as diferenças registradas com as variações dos valores de ξ são mais perceptíveis. A Fig. 7.22 mostra as evoluções dos números de Reynolds obtidas para casos com valores $\xi = 0,01$; $\xi = 0,04$ e $\xi = 0,08$. Nota-se que os números de Reynolds calculados possuem uma amplitude de oscilação leve-

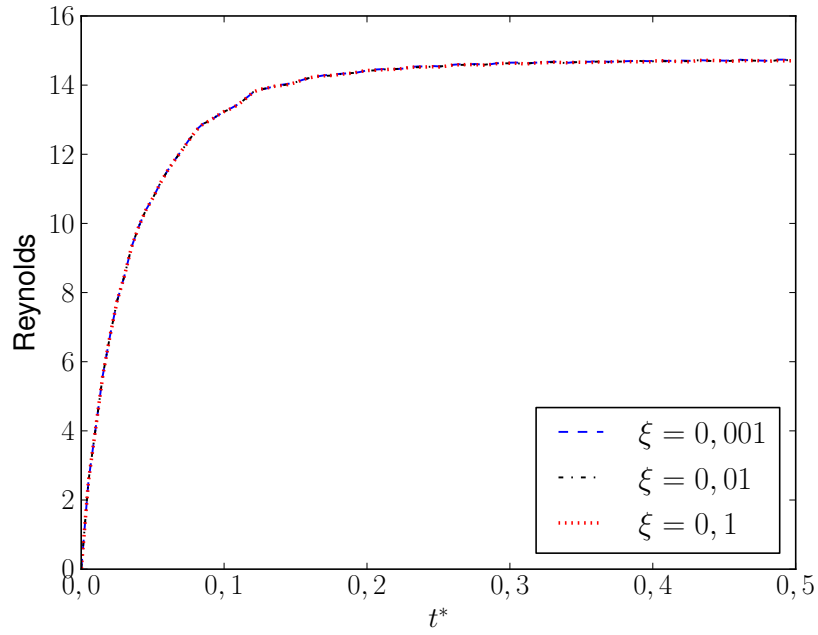


Figura 7.20: Evolução do número de Reynolds em simulações com diferentes valores de ξ . Adimensionais: $Eo = 1.0$, $Mo = 10^{-5}$, $\lambda_\rho = 816,32$, $\lambda_\mu = 58,3$. Malha: $16 \times 16 \times 32L4$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 16d_d$.

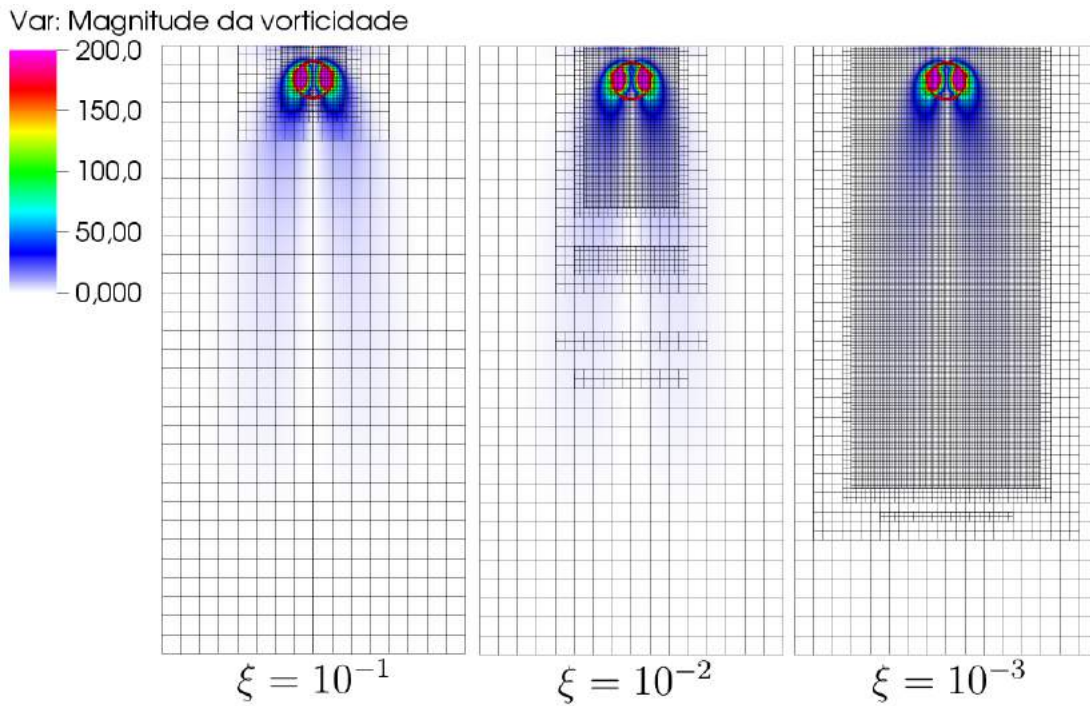


Figura 7.21: Comparação entre refinamentos localizados para diferentes valores de ξ . Vistas em cortes que passam no centro do domínio e distribuição da magnitude dos campos de vorticidade. Adimensionais: $Eo = 1.0$, $Mo = 10^{-5}$, $\lambda_\rho = 816,32$, $\lambda_\mu = 58,3$. Malha: $16 \times 16 \times 32L4$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 16d_d$.

mente menor para o caso de $\xi = 0,01$, com variações de 0,33% e 0,35%, respectivamente, com os aumentos sequenciais dos valores de ξ . Isso pode ser explicado pelas melhores representações das estruturas das esteiras em casos com menores valores de ξ , que aumentam as influências das esteiras na movimentação das bolhas. As Figs. 7.23, 7.24 e 7.25 mostram, respectivamente, os blocos de refinamento formados nos escoamentos, no mesmo instante de tempo, com constantes $\xi = 0,01$; $\xi = 0,04$ e $\xi = 0,08$. Observa-se que as estruturas são mais bem representadas nos menores valores de ξ . Para $\xi = 0,08$; as estruturas da esteira são difundidas pela falta de malha.

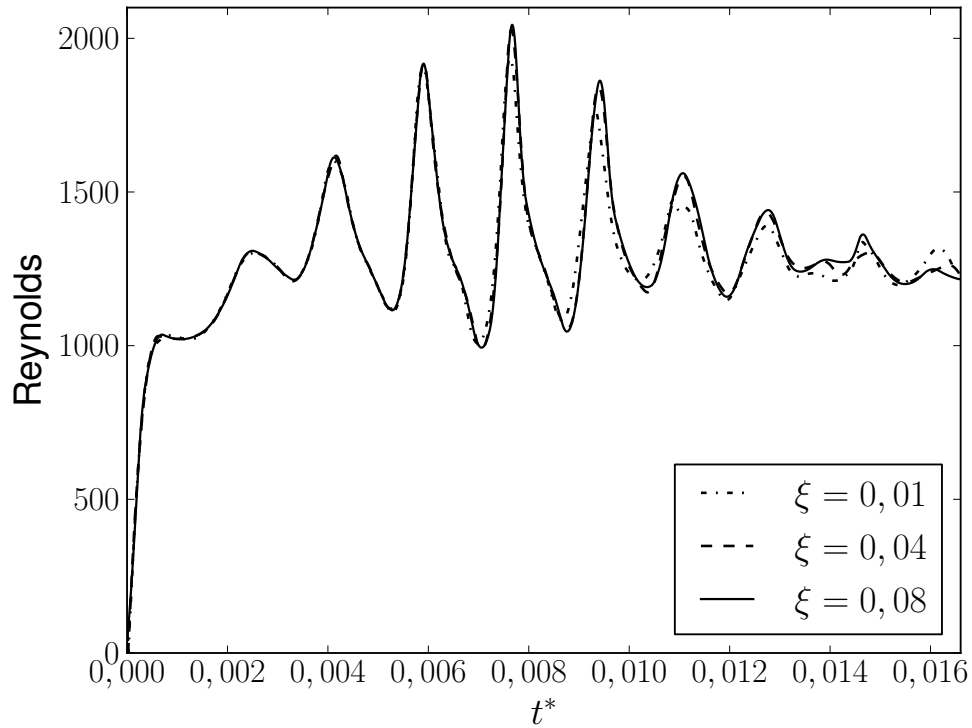


Figura 7.22: Evolução dos números de Reynolds em simulações com diferentes valores de ξ para um caso de bolha em regime de *woobling*. Adimensionais: $Eo = 5.0$, $Mo = 10^{-11}$, $\lambda_\rho = 816,32$, $\lambda_\mu = 58,3$. Malha: $16 \times 16 \times 128L4$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 64d_d$.

7.4 Formatos finais e comparações com resultados da literatura

Os resultados apresentados nesta seção foram gerados com domínios $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$ e malhas $8 \times 8 \times 24L6$, o que garante 32 volumes do nível mais fino através dos diâmetros iniciais das bolhas esféricas. Como visto nos testes de sensibilidade e em diversos trabalhos, como em Pivello (2012), Dijkhuizen *et al.* (2010) e Tomiyama *et al.* (1998), essa

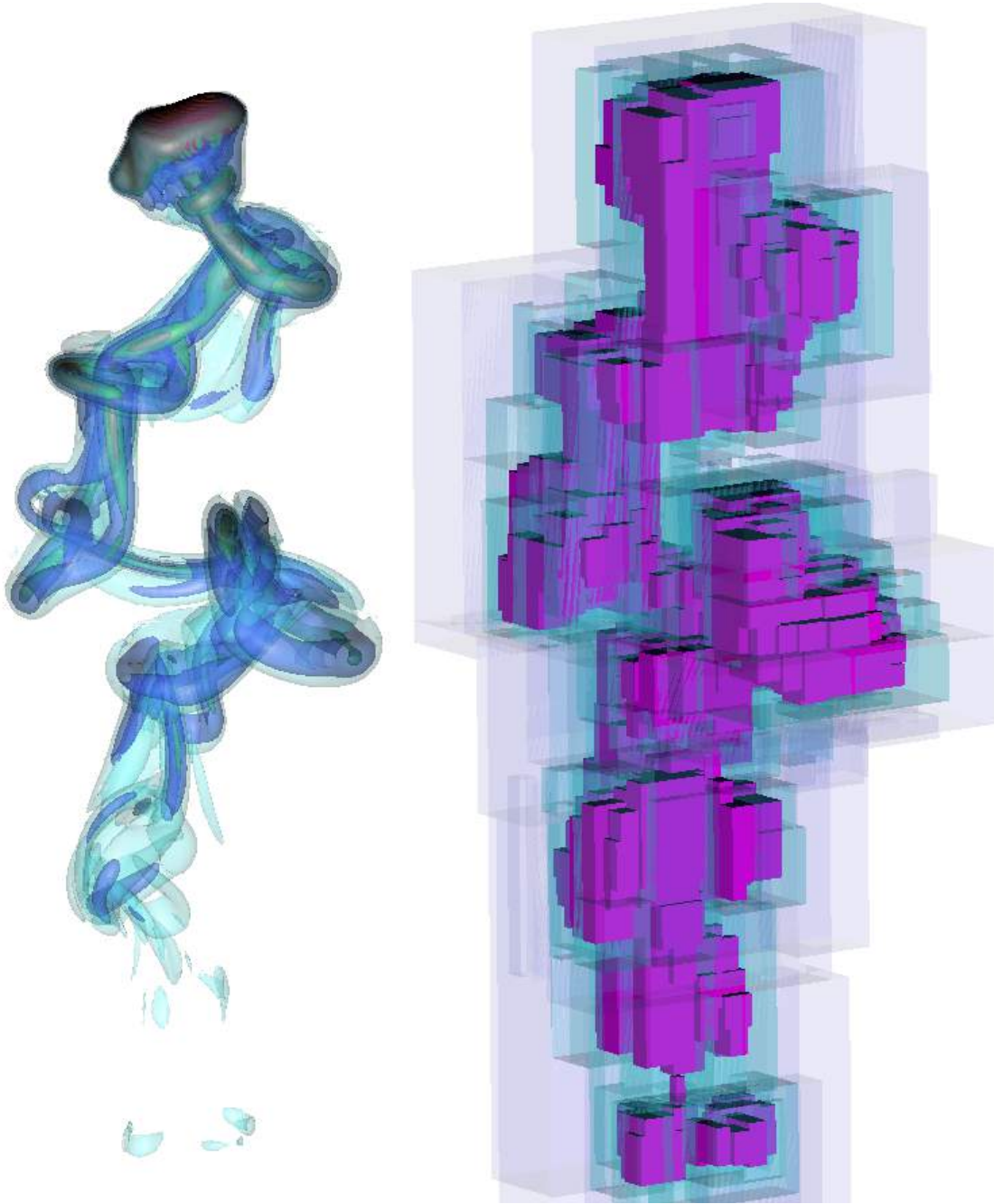


Figura 7.23: Blocos de refinamento para um caso de bolha em *wobbling* com $\xi = 0,01$. Adimensionais: $Eo = 5.0$, $Mo = 10^{-11}$, $\lambda_\rho = 816,32$, $\lambda_\mu = 58,3$. Malha: $16 \times 16 \times 128L4$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 64d_d$.

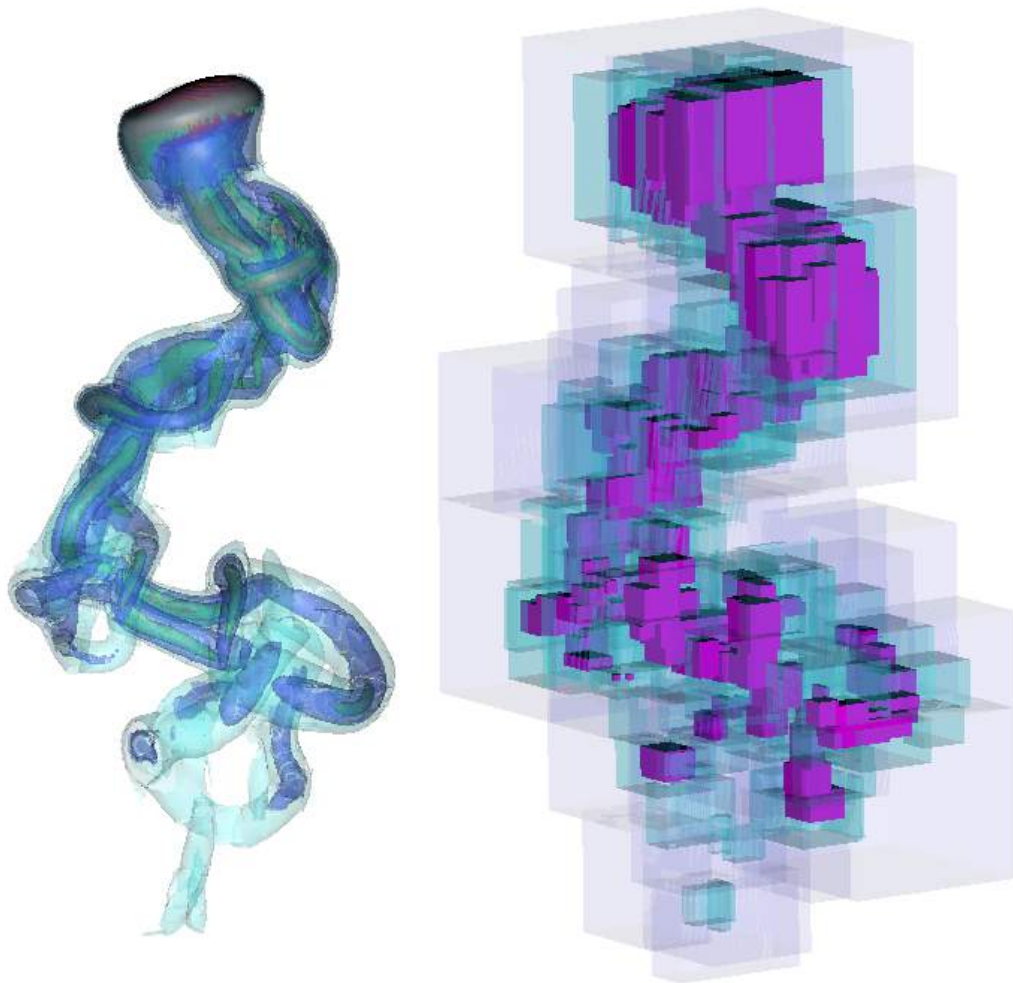


Figura 7.24: Blocos de refinamento para um caso de bolha em *woobling* com $\xi = 0,04$. Adimensionais: $Eo = 5.0$, $Mo = 10^{-11}$, $\lambda_\rho = 816,32$, $\lambda_\mu = 58,3$. Malha: $16 \times 16 \times 128L4$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 64d_d$.

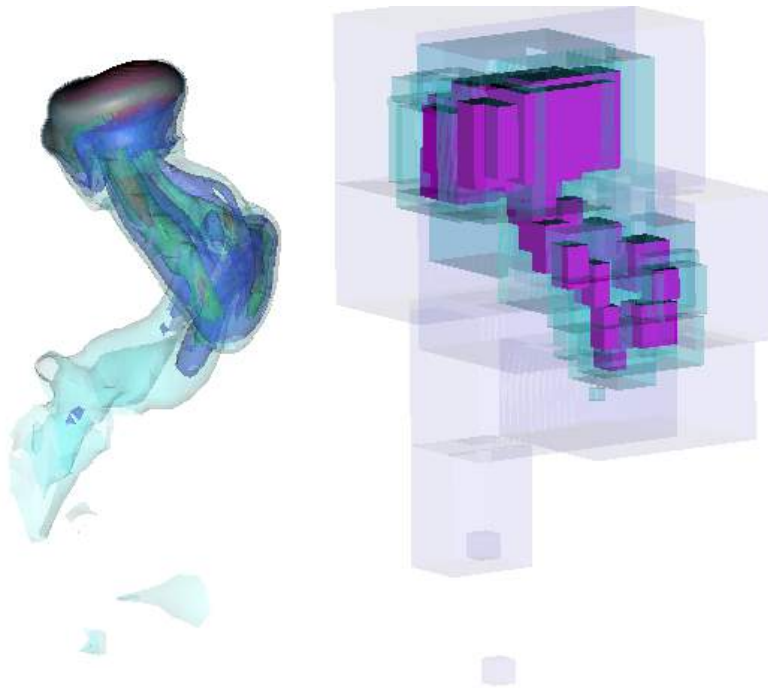






















Figura 7.25: Blocos de refinamento para um caso de bolha em *woobling* com $\xi = 0,08$. Adimensionais: $Eo = 5.0$, $Mo = 10^{-11}$, $\lambda_\rho = 816,32$, $\lambda_\mu = 58,3$. Malha: $16 \times 16 \times 128L4$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 64d_d$.

é uma alta resolução de malha. A Tab. 7.2 mostra as comparações entre os formatos finais e números de Reynolds terminais (calculados com as velocidades dos centroides das bolhas) obtidos com VOF no presente trabalho, resultados numéricos de Hua e Lou (2007) e Pivello (2012), nos quais foram utilizados o método Front Tracking e os resultados experimentais de Bhaga e Weber (1981). Calcula-se um desvio percentual ε do número de Reynolds terminal em relação ao trabalho experimental de Bhaga e Weber (1981). Qualitativamente, os formatos finais registrados com as simulações desta tese se aproximam dos resultados da literatura, apresentados na Tab. 7.2. Os desvios quantificados se aproximaram bastante dos desvios calculados com os resultados de Pivello (2012), com exceção do primeiro caso, onde o formato final esférico é visto. Nota-se que o desvio calculado em Pivello (2012) também é relativamente maior que os calculados nos outros casos. O mesmo caso de bolha esférica foi simulado no trabalho de Stene (2010), onde foi registrado um desvio de 21%.

Tabela 7.2: Comparações de formatos de bolhas e Reynolds terminais entre os resultados obtidos por Bhaga e Weber (1981), Hua e Lou (2007), Pivello (2012) e os resultados obtidos com o VOF. Fonte: Adaptado de Pivello (2012)

Bhaga		Hua		Pivello		AMR3D/VOF	
Eo=17,7 Mo=711 Re=0,232			Re=0,211 $\varepsilon = 9,05\%$		Re=0,212 $\varepsilon = 8,62\%$		Re= 0,191 $\varepsilon = 17,8\%$
Eo=32,2 Mo=8,2e-3 Re=55,3			Re=52,96 $\varepsilon = 4,23\%$		Re=53,2 $\varepsilon = 3,80\%$		Re=53,07 $\varepsilon = 4,0\%$
Eo=243 Mo=266 Re=7,77			Re=8,40 $\varepsilon = 8,07\%$		Re=7,61 $\varepsilon = 2,06\%$		Re=7,64 $\varepsilon = 1,67\%$
Eo=339 Mo=43,1 Re=18,30			Re=17,91 $\varepsilon = 2,13\%$		Re=17,06 $\varepsilon = 6,78\%$		Re=17,18 $\varepsilon = 6,12\%$
Eo=641 Mo=43,1 Re=30,3			Re=28,54 $\varepsilon = 1,22\%$		Re=31,47 $\varepsilon = 5,81\%$		Re=28,8 $\varepsilon = 4,95\%$

7.5 Cálculos de forças de resistência fluidodinâmicas e coeficientes de arrasto

Esta seção é dedicada à apresentação dos cálculos das forças fluidodinâmicas com a formulação apresentada na seção 4 e os coeficientes fluidodinâmicos são determinados e

comparados com valores obtidos por correlações da literatura. As correlações escolhidas para as comparações dos valores de coeficientes de arrasto foram retiradas dos trabalhos de Tomiyama *et al.* (1998) e Dijkhuizen *et al.* (2010), cujas expressões são apresentadas, respectivamente, nas Eqs. 7.7 e 7.8. Os desvios percentuais ε são calculados em relação aos valores da literatura. Ao lado dos desvios percentuais, em parenteses, são apresentados os desvios entre os valores, calculados como a subtração dos valores obtidos na presente tese e os valores obtidos com as correlações da literatura.

$$C_D = \max \left\{ \min \left[\frac{16}{Re} (1 + 0,15 Re^{0,687}), \frac{48}{Re} \right], \frac{8}{3} \frac{E_o}{E_o + 4} \right\} \quad (7.7)$$

$$\begin{cases} C_D = \sqrt{C_D(Re)^2 + C_D(Eo)^2} \\ C_D(Re) = \frac{16}{Re} \left(1 + \frac{2}{1 + \frac{16}{Re} + \frac{3,315}{\sqrt{Re}}} \right) \\ C_D(Eo) = \frac{4Eo}{Eo + 9,5} \end{cases} \quad (7.8)$$

Os casos são apresentados em seções que indicam apenas os formatos finais, ou regimes finais (no caso de *woobling*, e os adimensionais Eo e Mo , uma vez que o número de Reynolds é calculado a partir da velocidade terminal de ascensão, obtida através dos resultados das simulações. Os cálculos de coeficientes de arrasto também são comparados com correlações da literatura retiradas dos trabalhos de Tomiyama *et al.* (1998) e Dijkhuizen *et al.* (2010).

Nos gráficos apresentados, o eixo das ordenadas representa os valores de forças fluidodinâmicas adimensionais, como escrito pela Eq. 7.9, onde utiliza-se a velocidade média (espacial) terminal da bolha $\|\overline{\vec{U}_d}\|$. No eixo das abcissas, o tempo adimensional é adotado, e seu cálculo é realizado como indicado pela Eq. 7.10.

$$\|\vec{F}^*\| = \frac{\|\vec{F}\|}{\frac{1}{2}\rho_c A_d \|\vec{U}_{rel}\|^2} \quad (7.9)$$

$$t^* = \frac{t\mu_c}{\rho_c d_b^2} \quad (7.10)$$

Para os casos em que as bolhas não atingem um regime permanente, como um regime de *woobling*, realiza-se uma média temporal das velocidades médias instantâneas das bolhas para o cálculo das forças adimensionais e coeficientes fluidodinâmicos. Essa média é realizada em intervalos de tempo onde se pode considerar um regime estatisticamente permanente, que depende bastante do regime de ascensão resultante. Então, a Eq. 7.11 é utilizada para o cálculo das forças, onde $\langle \rangle$ representa uma média temporal.

$$\|\vec{F}^*\| = \frac{\|\vec{F}\|}{\frac{1}{2}\rho_c A_d \langle \|\vec{U}_{rel}\| \rangle^2} \quad (7.11)$$

7.5.1 Caso $Eo = 1,0$; $Mo = 10^{-5}$ - Bolha esférica

O formato final assumido pela bolha, a esteira gerada e a malha computacional construída pelo presente método podem ser vistos na Fig. 7.26. A Fig. 7.27 mostra a evolução do número de Reynolds calculado a partir da velocidade de ascensão média da bolha.

As Figs. 7.28 e 7.29 apresentam, respectivamente, as forças calculadas e a taxa de variação de quantidade de movimento da bolha. Nota-se que a força total de resistência fluidodinâmica possui um comportamento transiente inicial, onde a mesma se aproxima de um valor constante igual ao valor da diferença entre força de empuxo e força peso (F_{EP}). Em um comportamento similar, a taxa de variação da quantidade de movimento contida na bolha possui um transiente inicial, e tende ao valor nulo à medida que o movimento da bolha atinge uma velocidade terminal em regime estacionário.

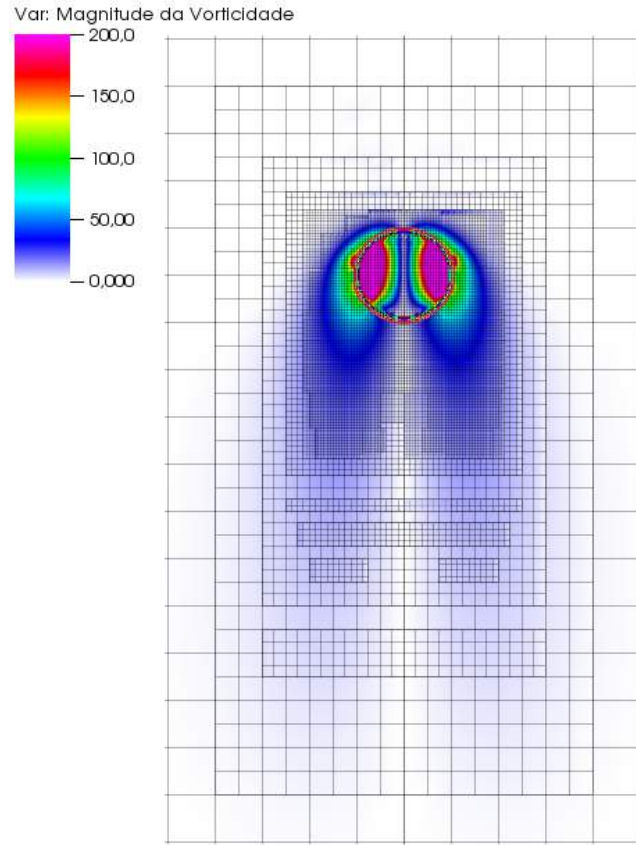


Figura 7.26: Malha computacional e magnitude de vorticidade em um corte passando pelo centro do domínio. Adimensionais: $Eo = 1,0$, $Mo = 10^{-5}$, $Re \approx 14$, $\lambda_\rho = 816,32$, $\lambda_\mu = 58,3$. Malha: $16 \times 16 \times 32L5$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 16d_d$.

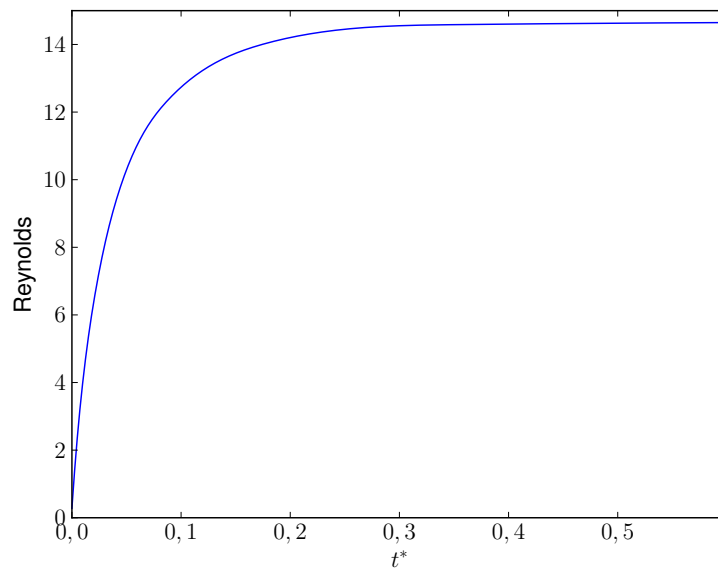


Figura 7.27: Evolução dos números de Reynolds calculados com a velocidade de ascensão da bolha. Adimensionais: $Eo = 1,0$, $Mo = 10^{-5}$, $\lambda_\rho = 816,32$, $\lambda_\mu = 58,3$. Malha: $16 \times 16 \times 32L5$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 16d_d$.

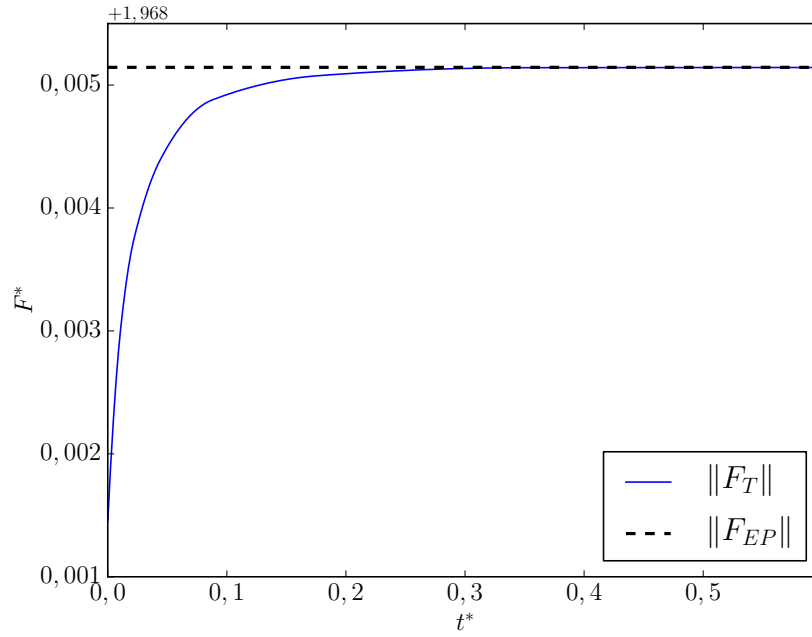


Figura 7.28: Evolução da força total de resistência fluidodinâmica e força resultante entre as forças de empuxo e peso. Adimensionais: $Eo = 1,0$, $Mo = 10^{-5}$, $Re \approx 14$, $\lambda_\rho = 816,32$, $\lambda_\mu = 58,3$. Malha: $16 \times 16 \times 32L4$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 16d_d$.

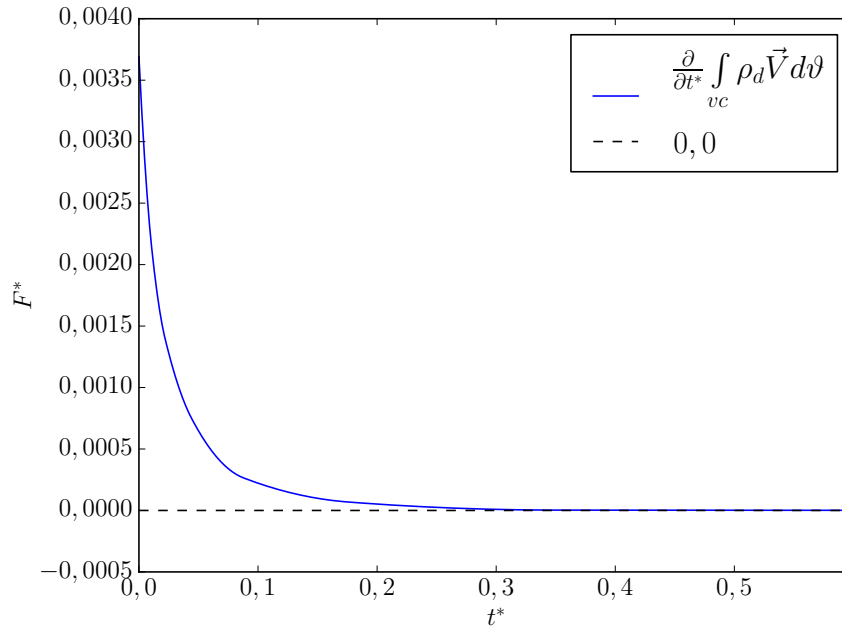


Figura 7.29: Evolução da taxa de variação da quantidade de movimento contida na bolha. Adimensionais: $Eo = 1,0$, $Mo = 10^{-5}$, $Re \approx 14$, $\lambda_\rho = 816,32$, $\lambda_\mu = 58,3$. Malha: $16 \times 16 \times 32L4$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 16d_d$.

A Tab. 7.3 mostra os coeficientes de arrasto calculados e as comparações com as correlações da literatura. As correlações escolhidas para comparação foram a de Tomiyama *et al.* (1998) e Dijkhuizen *et al.* (2010). Para este caso, nota-se que os resultados gerados na presente tese se aproximam bem das correlações de Dijkhuizen *et al.* (2010) e de Tomiyama *et al.* (1998).

Tabela 7.3: Comparações entre os coeficientes de arrasto calculado C_D com correlações da literatura. Tabela referente ao caso de bolha esférica, com adimensionais: $Eo = 1,0$, $Mo = 10^{-5}$, $Re \approx 14$, $\lambda_p = 816,32$, $\lambda_\mu = 58,3$

C_D AMR3D	1,973
C_D Tomiyama <i>et al.</i> (1998)	2,131
ϵ Tomiyama <i>et al.</i> (1998)	7,412% (-0,158)
C_D Dijkhuizen <i>et al.</i> (2010)	1,873
ϵ Dijkhuizen <i>et al.</i> (2010)	5,355% (+0,100)

7.5.2 Caso $Eo = 32,2$; $Mo = 8,2 \cdot 10^{-3}$ - Bolha em formato de disco (*oblate ellipsoidal*)

O caso apresentado nesta seção situa-se em uma região do diagrama de Grace (1973) que está na transição entre as regiões de bolhas elipsoidais (região de *woobling*) e bolhas de altos números de Eötvös. Durante a ascensão, a bolha sofre uma grande deformação até que o formato de disco, ou bolha elipsoidal achatada (*oblate ellipsoidal*), se estabelece durante um regime estacionário de ascensão. A Fig. 7.30 mostra a malha computacional resultante, o campo da magnitude da vorticidade e o formato final da bolha através de um corte que passa no centro do domínio.

A Fig. 7.31 apresenta a evolução do número de Reynolds calculado com a velocidade média da bolha em ascensão. Após um transiente inicial, o número de Reynolds se estabiliza no regime estacionário. Nota-se que há um pico no valor do número de Reynolds logo após a aceleração inicial. Isso acontece devido ao tempo que a bolha leva para atingir seu formato final, que permite a mesma atingir velocidades de ascensão maiores que a velocidade terminal. No momento em que a bolha encontra em seu número de Reynolds máximo, ela ainda deforma e aumenta sua área projetada A_p , o que é responsável pela posterior desaceleração.

As forças $\|F_T\|$ e $\|F_{EP}\|$ são apresentadas na Fig. 7.32 onde é possível ver que, por um instante, a força total de resistência fluidodinâmica $\|F_T\|$ ultrapassa a diferença

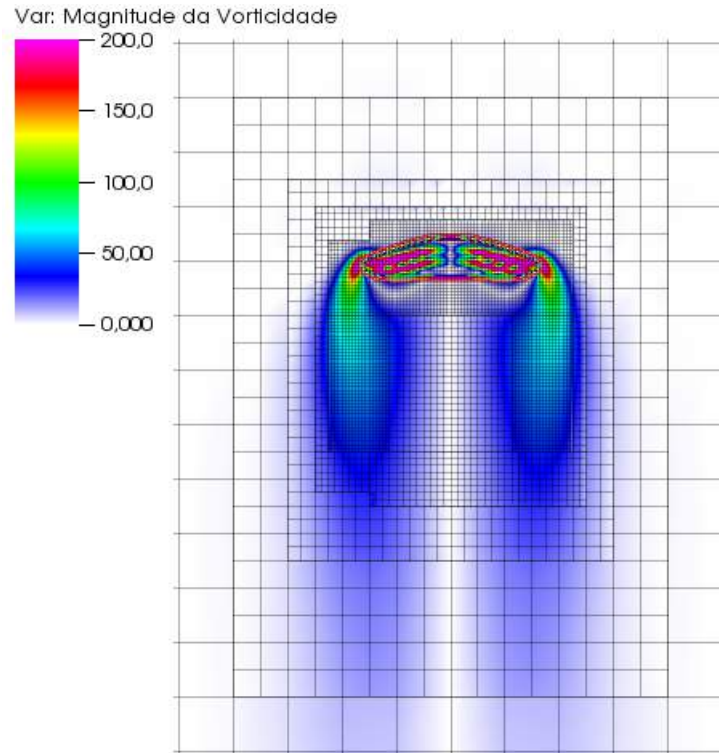


Figura 7.30: Malha computacional e magnitude de vorticidade em um corte passando pelo centro do domínio. Adimensionais: $Mo = 8,2e - 3$; $Eo = 32,2$; $Re \approx 53$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Malha: $16 \times 16 \times 48L5$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$.

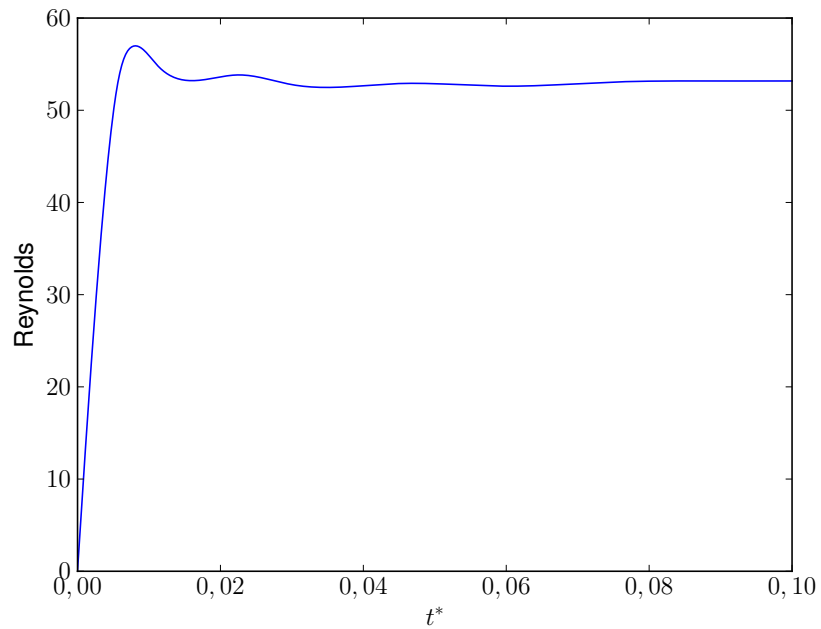


Figura 7.31: Evolução dos números de Reynolds calculado com a velocidade média da bolha. Adimensionais: $Mo = 8,2e - 3$; $Eo = 32,2$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Malha: $16 \times 16 \times 48L5$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$.

entre forças de empuxo e peso $\|F_{EP}\|$, para posteriormente se igualarem em um regime estacionário. Esse comportamento se reflete na taxa de variação da quantidade de movimento linear contida na bolha, como apresentado pela Fig. 7.33. Os valores negativos da taxa de variação da quantidade de movimento linear significam uma perda da mesma, provavelmente causada pelo aumento da seção transversal da bolha com a deformação, que leva à uma desaceleração da mesma.

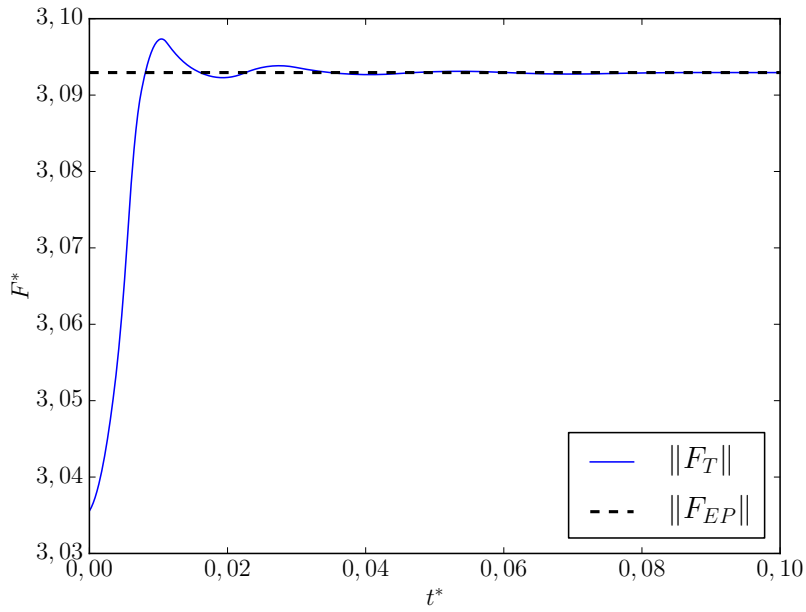


Figura 7.32: Evolução da força total de resistência fluidodinâmica e força resultante entre as forças de empuxo e peso. Adimensionais: $Mo = 8,2e - 3$; $Eo = 32,2$; $Re \approx 53$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Malha: $16 \times 16 \times 48L5$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$.

A Tab. 7.4 apresenta os valores de coeficientes de arrasto e comparações com correlações da literatura. Observa-se grande desvio em relação ao valor obtido pela correlação de Tomiyama *et al.* (1998), ao contrário do que é visto em relação aos valores obtidos com a correlação de Dijkhuizen *et al.* (2010).

Tabela 7.4: Comparações entre os coeficientes de arrasto calculado C_D com correlações da literatura. Tabela referente ao caso de bolha com formato terminal de disco (*oblate ellipsoidal*), com adimensionais: $Mo = 8,2e - 3$; $Eo = 32,2$; $Re \approx 53$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$.

C_D AMR3D	3,093
C_D Tomiyama <i>et al.</i> (1998)	2,371
ϵ Tomiyama <i>et al.</i> (1998)	30,470% (+0,722)
C_D Dijkhuizen <i>et al.</i> (2010)	3,151
ϵ Dijkhuizen <i>et al.</i> (2010)	1,857% (-0,058)

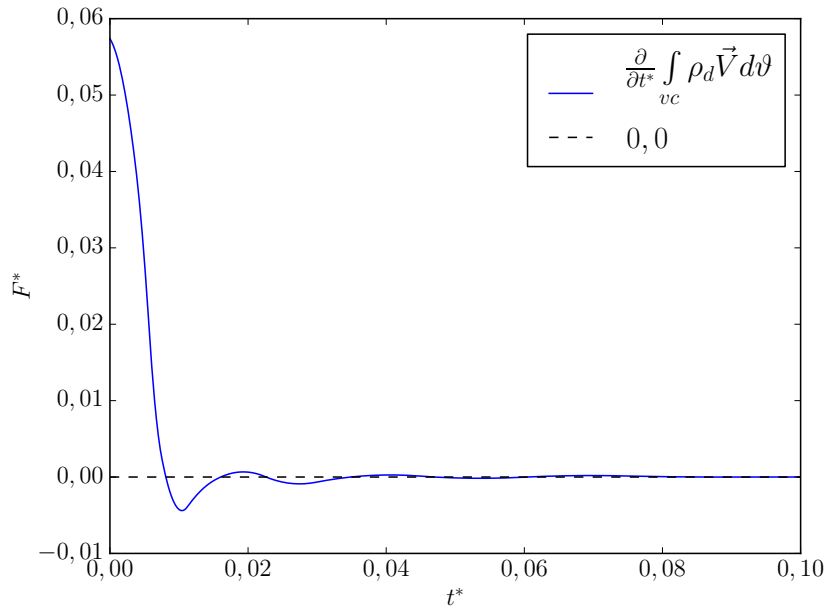


Figura 7.33: Evolução da taxa de variação da quantidade de movimento contida na bolha. Adimensionais: $Mo = 8,2e - 3$; $Eo = 32,2$; $Re \approx 53$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Malha: $16 \times 16 \times 48L5$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$.

7.5.3 Caso $Eo = 243$; $Mo = 266$ - Bolha em formato oblate ellipsoidal cap

O caso apresentado situa-se na região de altos números de Eötvös do diagrama de Grace (1973). A Fig. 7.34 apresenta o formato, a malha e a esteira na condição estacionária de ascensão resultante. A evolução do número de Reynolds é mostrada na Fig. 7.35.

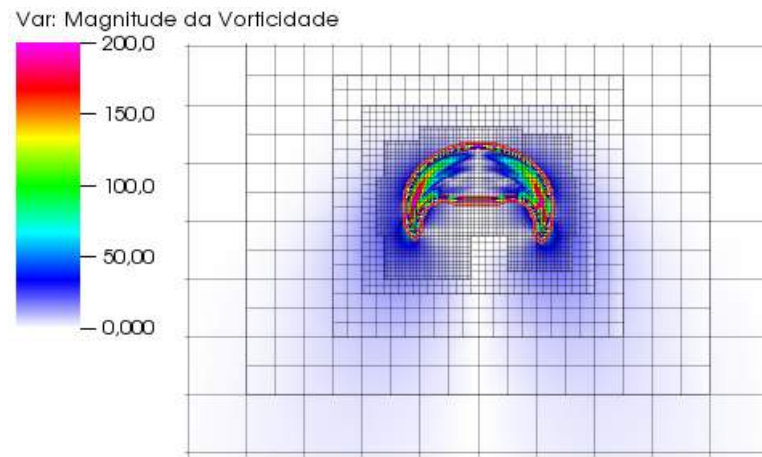


Figura 7.34: Malha computacional e magnitude de vorticidade em um corte passando pelo centro do domínio. Adimensionais: $Mo = 266$; $Eo = 243$; $Re \approx 7,6$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Malha: $16 \times 16 \times 48L5$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$.

Para este caso também é possível observar um instante em que a força total de

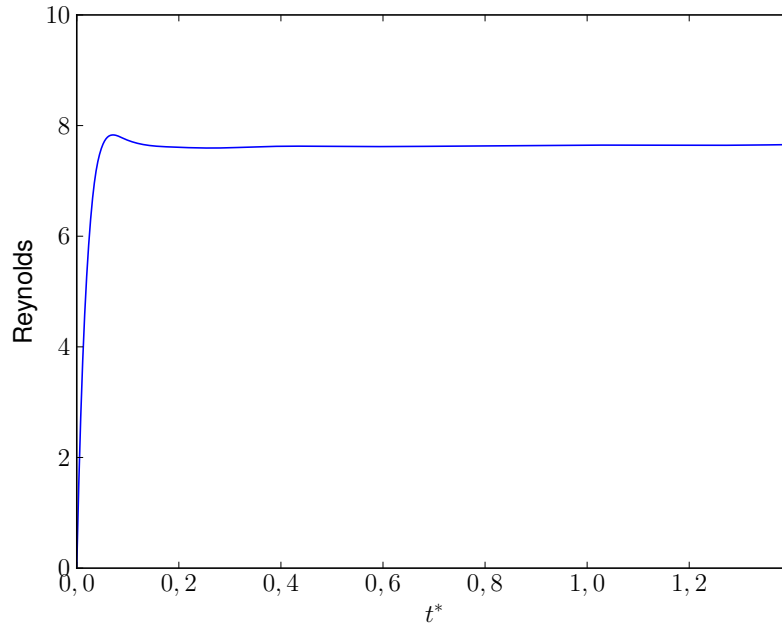


Figura 7.35: Evolução dos números de Reynolds calculados com a velocidade média da bolha e a velocidade do centróide. Adimensionais: $Mo = 266$; $Eo = 243$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Malha: $16 \times 16 \times 48L5$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$.

resistência fluidodinâmica $\|F_T\|$ ultrapassa a diferença entre forças de empuxo e peso $\|F_{EP}\|$, antes de se igualarem em regime permanente, como mostrado na Fig. 7.36. Também, esse comportamento reflete na taxa de variação da quantidade de movimento linear da bolha. No entanto, é possível perceber que a magnitude dos valores atingidos para este caso é menor quando comparada à magnitude do valor negativo atingido pelo caso anterior (formato de disco).

A Tab. 7.5 mostra os valores de C_D calculados a partir das simulações. Novamente nota-se uma maior proximidade entre os valores calculados no presente trabalho e os valores da correlação de Dijkhuizen *et al.* (2010). Já quando comparados com os valores obtidos pela correlação de Tomiyama *et al.* (1998), os desvios registrados estão acima dos 50%.

Tabela 7.5: Comparações entre os coeficientes de arrasto calculado C_D com correlações da literatura. Tabela referente ao caso de bolha com formato terminal *oblate ellipsoidal cap*, com adimensionais: $Mo = 266$; $Eo = 243$; $Re \approx 7,6$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$.

C_D AMR3D	5,289
C_D Tomiyama <i>et al.</i> (1998)	3,361
ϵ Tomiyama <i>et al.</i> (1998)	57,353% (+1,927)
C_D Dijkhuizen <i>et al.</i> (2010)	4,922
ϵ Dijkhuizen <i>et al.</i> (2010)	7,127% (+0,367)

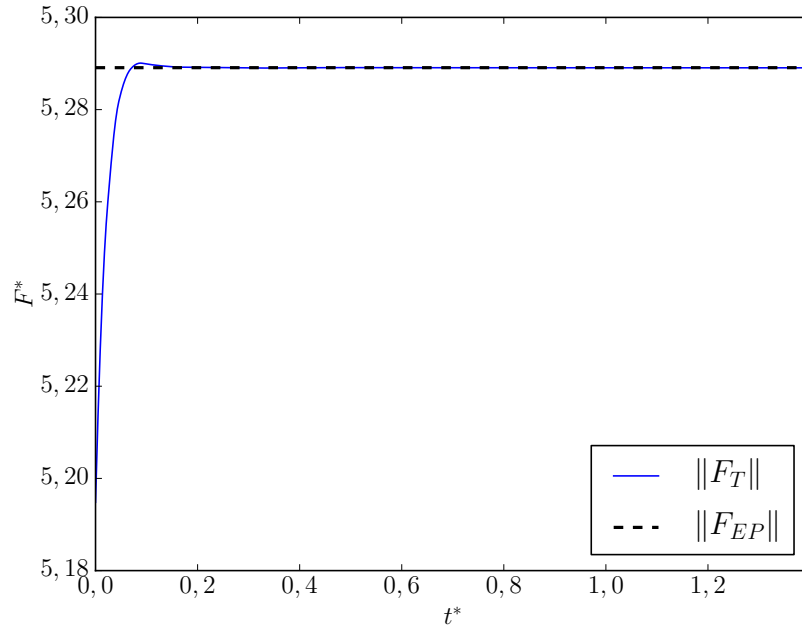


Figura 7.36: Evolução da força total de resistência fluidodinâmica e força resultante entre as forças de empuxo e peso. Adimensionais: $Mo = 266$; $Eo = 243$; $Re \approx 7,6$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Malha: $16 \times 16 \times 48L5$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$.

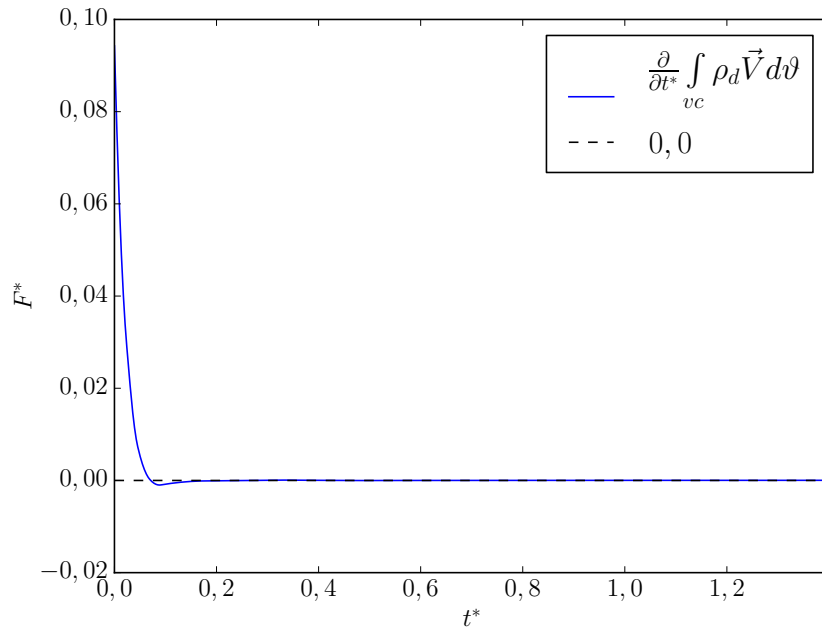


Figura 7.37: Evolução da taxa de variação da quantidade de movimento contida na bolha. Adimensionais: $Mo = 266$; $Eo = 243$; $Re \approx 7,6$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Malha: $16 \times 16 \times 48L5$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$.

7.5.4 Caso $Eo = 339$; $Mo = 43,1$ - Bolha em formato skirted smooth

Este caso também caracteriza-se por adimensionais que o fazem situar na região dos altos números de Eötvös do diagrama de Grace (1973). A Fig. 7.38 mostra a malha

gerada, o formato final e a magnitude da vorticidade no estado estacionário de ascensão resultante. A Fig. 7.39 mostra a evolução do número de Reynolds.

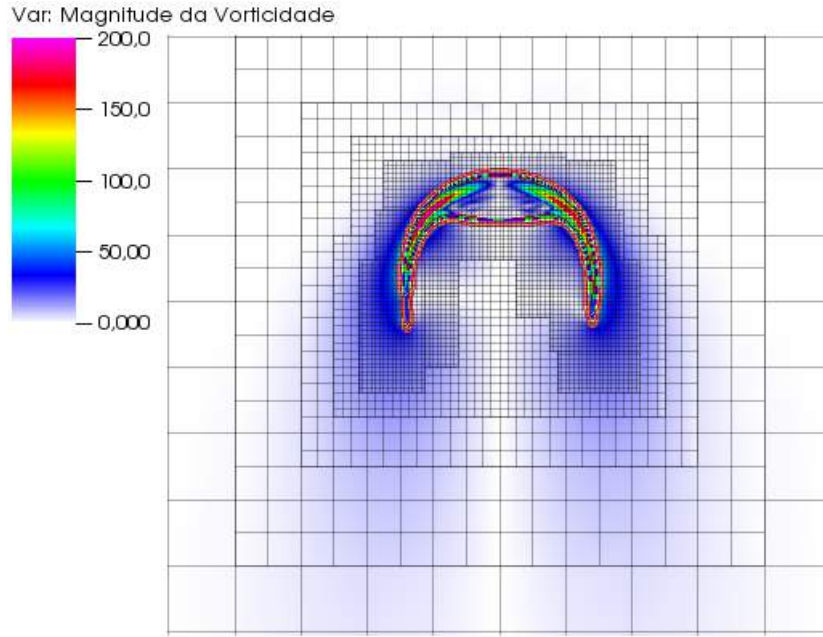


Figura 7.38: Malha computacional e magnitude de vorticidade em um corte passando pelo centro do domínio. Adimensionais: $Eo = 339$, $Mo = 43,1$; $Re \approx 17$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Malha: $16 \times 16 \times 48L5$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$.

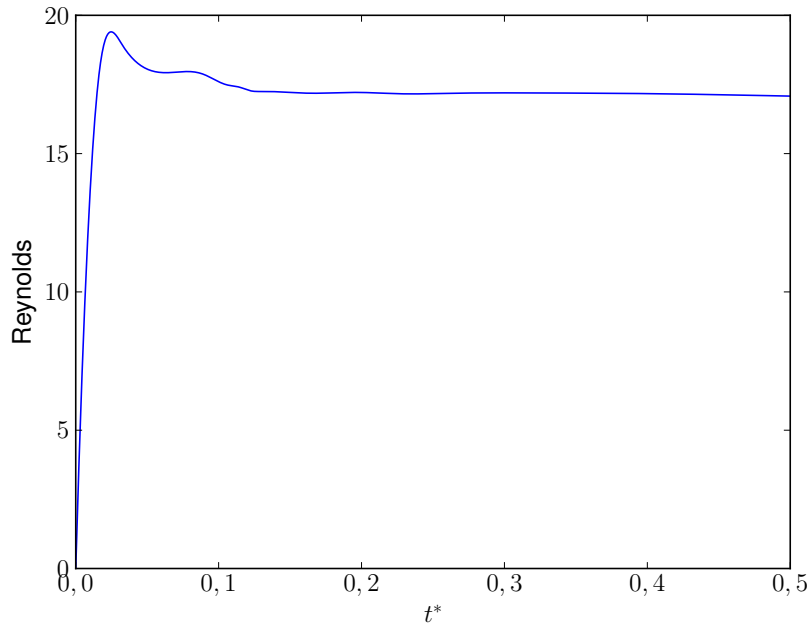


Figura 7.39: Evolução dos números de Reynolds calculado com a velocidade média de ascensão da bolha. Adimensionais: $Eo = 339$, $Mo = 43,1$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Malha: $16 \times 16 \times 48L5$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$.

As Figs. 7.40 e 7.41 apresentam, respectivamente, as forças adimensionais e a

taxa de variação da quantidade de movimento linear calculadas para este caso. A Tab. 7.6 apresenta os valores de coeficientes de arrasto obtidas e as comparações com valores da literatura. Novamente, maiores desvios em relação ao valor calculado pela correlação de Tomiyama *et al.* (1998) são registrados, enquanto os valores melhor se aproximam da correlação de Dijkhuizen *et al.* (2010).

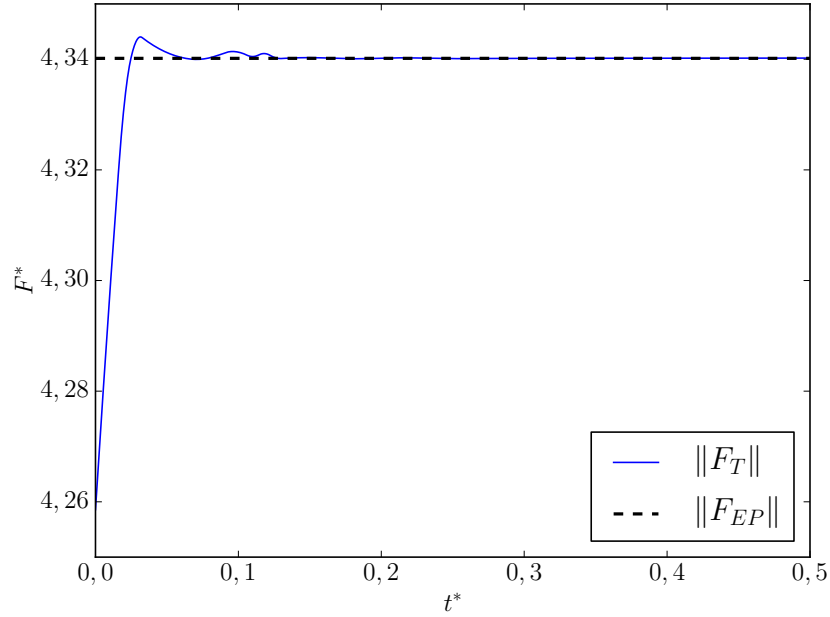


Figura 7.40: Evolução da força total de resistência fluidodinâmica e força resultante entre as forças de empuxo e peso. Adimensionais: $Eo = 339$, $Mo = 43,1$; $Re \approx 17$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Malha: $16 \times 16 \times 48L5$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$.

Tabela 7.6: Comparações entre os coeficientes de arrasto calculado C_D com correlações da literatura. Tabela referente ao caso de bolha com formato terminal *skirted smooth*, com adimensionais: $Eo = 339$, $Mo = 43,1$; $Re \approx 17$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$.

C_D AMR3D	4,340
C_D Tomiyama <i>et al.</i> (1998)	2,635
ϵ Tomiyama <i>et al.</i> (1998)	64,668% (+1,705)
C_D Dijkhuizen <i>et al.</i> (2010)	4,213
ϵ Dijkhuizen <i>et al.</i> (2010)	2,997% (+0,127)

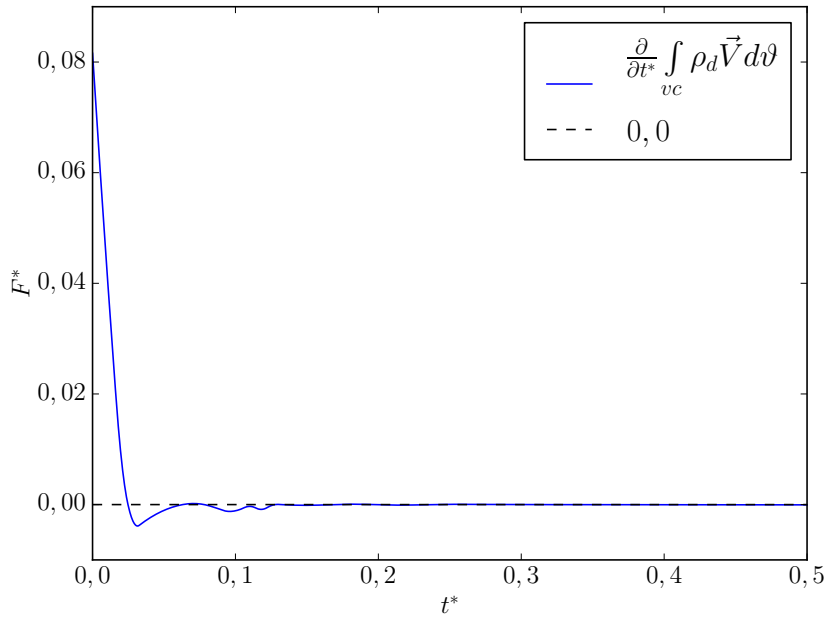


Figura 7.41: Evolução da taxa de variação da quantidade de movimento contida na bolha. Adimensionais: $Eo = 339$, $Mo = 43,1$; $Re \approx 17$; $\lambda_\rho = 100$; $\lambda_\mu = 100$. Malha: $16 \times 16 \times 48L5$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 24d_d$.

7.5.5 Caso em regime de ascensão *woobling*

Esta seção é dedicada aos procedimentos de análise de forças e cálculos de coeficientes fluidodinâmicos em casos de bolhas que assumem regimes de ascensão instáveis, conhecidos pela literatura da área como *woobling*. Para esses casos são determinadas as forças que agem contrariamente ao movimento da bolha e as forças transversais presentes. Os domínios utilizados são alongados para que as bolhas desenvolvam os regimes de ascensão de acordo com as instabilidades associadas à cada caso.

Existem divergências na literatura quanto às medições de coeficientes fluidodinâmicos de bolhas nesse regimes de ascensão e uma discussão rica sobre o tema pode ser vista no trabalho de Tomiyama *et al.* (2002).

O primeiro caso a ser apresentado possui adimensionais: $Eo = 3,63$, $Mo = 2,5 \cdot 10^{-11}$, $Re \approx 1350$, $\lambda_\rho = 1000$ e $\lambda_\mu = 54,2$. O domínio utilizado tem dimensões $8d_d \times 8d_d \times 80d_d$, com uma malha $8 \times 8 \times 80L6$, o que garante 32 volumes através do diâmetro esférico inicial da bolha. Para este caso, é adotado uma constante de refinamento $\xi = 0,01$.

As Figs. 7.42 e 7.43 apresentam isosuperfícies de vorticidade, onde é possível

verificar um regime de pulsação axissimétrico (em relação à um eixo alinhado com a direção gravitacional) que dá origem à uma esteira em modo varicoso, seguido de um movimento lateral alternado, referido em alguns trabalhos como "zig-zag", caracterizado pela liberação de estruturas alternadas do tipo grampos de cabelo. Esse comportamento também é evidente na evolução temporal do número de Reynolds, como mostra a Fig. 7.44. Na figura, é possível verificar os modos de ascensão através das características de oscilação, onde oscilações de grande amplitude marcam o regime de pulsação em modo varicoso, seguido de oscilações de menor amplitude que marcam o movimento alternado adquirido pela bolha. A Fig. 7.45 mostra os blocos de refinamento localizado adaptados à esteira gerada pela ascensão da bolha.

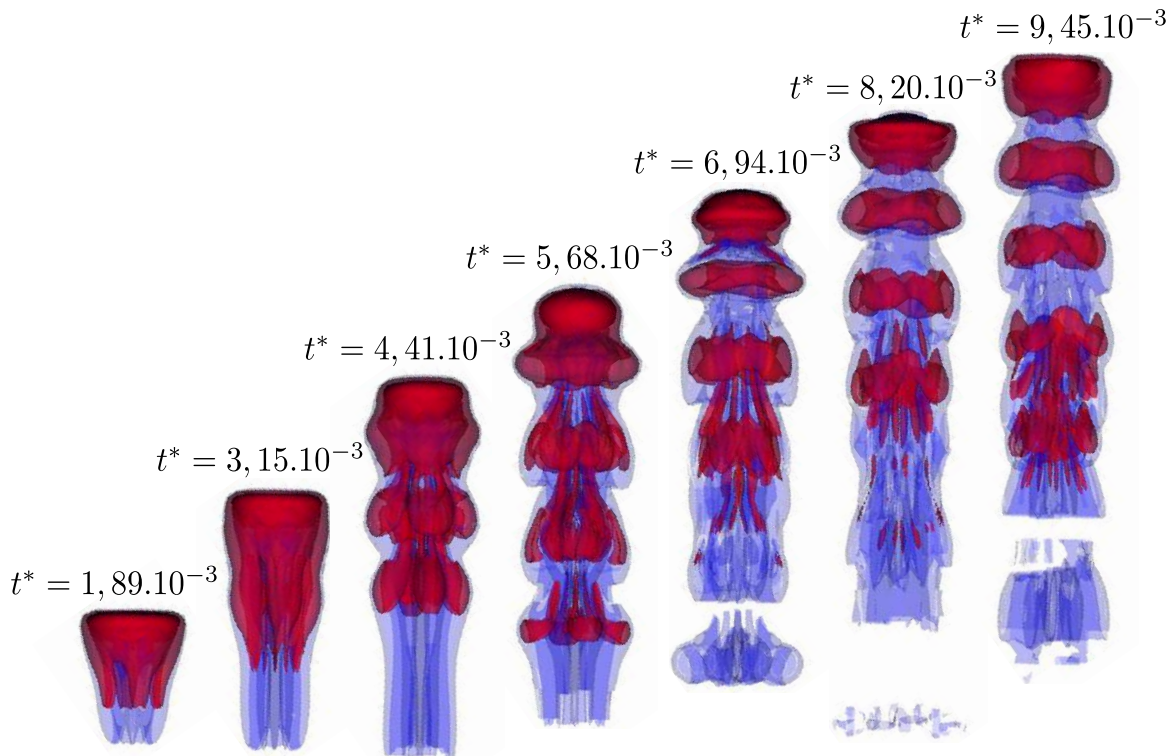


Figura 7.42: Isosuperfícies de magnitude de vorticidade destacando as estruturas turbilhonares formadas pela ascensão de uma bolha em *woobling* - Parte 1. Adimensionais: $Eo = 3,63$, $Mo = 2,5 \cdot 10^{-11}$, $Re \approx 1350$, $\lambda_\rho = 1000$ e $\lambda_\mu = 54,2$.

O módulo da força total de resistência fluidodinâmica (F_T) é apresentado na Fig. 7.46. É possível observar que os valores dessa força variam em torno de um valor médio igual à diferença entre a força de empuxo e força peso, F_{EP} . Se observarmos a Eq. 4.20, que é a equação usualmente utilizada para o cálculo de coeficientes de arrasto, a força de arrasto é considerada igual à diferença entre as forças empuxo/peso.

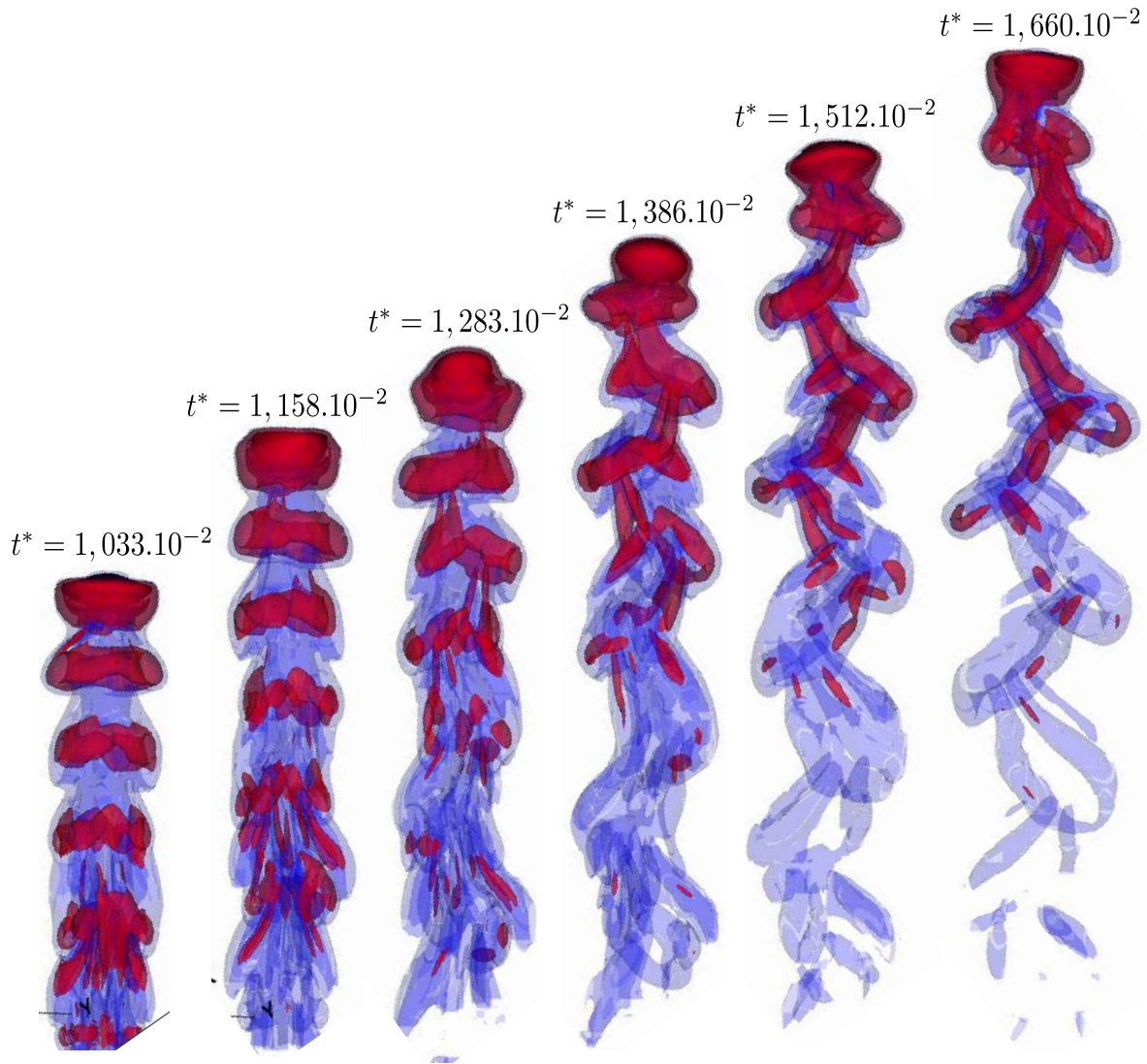


Figura 7.43: Isosuperfícies de magnitude de vorticidade destacando as estruturas turbilhonares formadas pela ascensão de uma bolha em *woobling* - Parte 2. Adimensionais: $Eo = 3,63$, $Mo = 2,5 \cdot 10^{-11}$, $Re \approx 1350$, $\lambda_\rho = 1000$ e $\lambda_\mu = 54,2$.

Como se trata de um caso onde não se atinge um regime estacionário de ascensão, a bolha acendente está sempre sujeita à acelerações. Isso é refletido na taxa de variação da quantidade de movimento linear da mesma, como mostrada pela Fig. 7.47. Observa-se que o gráfico mostra fortes oscilações no intervalo de tempo (aproximado) $0 < t^* < 0,02$, intervalo inicial onde a bolha pulsa e forma uma esteira em modo varicoso. Após esse período, as oscilações diminuem suas amplitudes e seus valores, mas não assumem o valor nulo, como foi observado em casos onde se obtém um regime permanente de ascensão. Nesse caso, a magnitude da taxa de variação da quantidade de movimento linear da bolha é três ordens de grandeza abaixo das forças fluidodinâmicas atuantes na bolha.

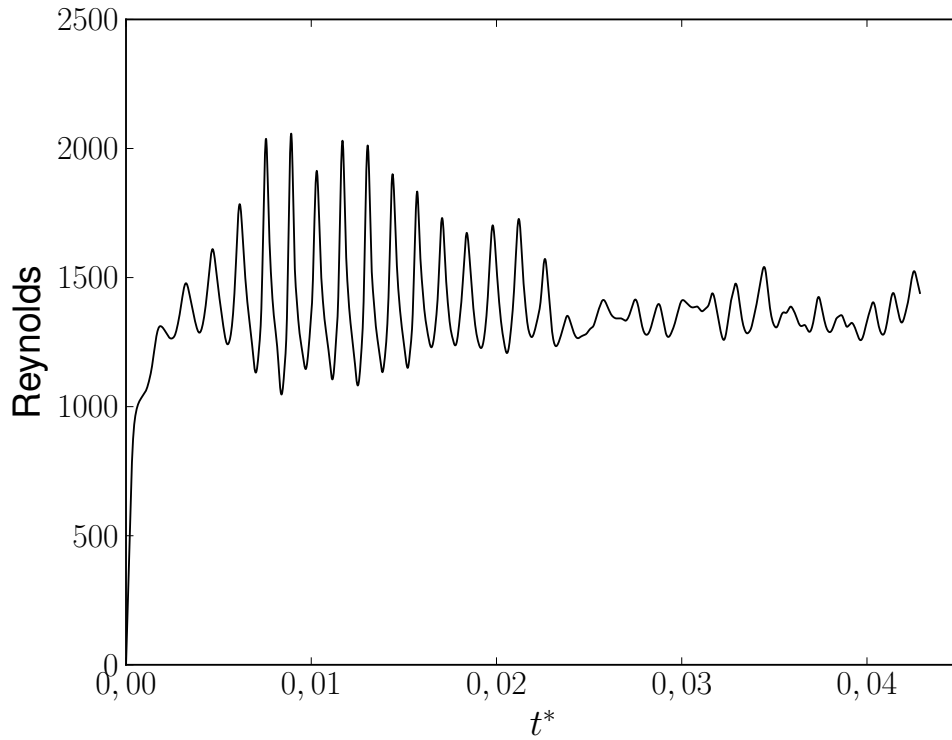


Figura 7.44: Evolução do número de Reynolds para um caso *woobling*. Adimensionais: $Eo = 3,63$, $Mo = 2,5 \cdot 10^{-11}$, $Re \approx 1350$, $\lambda_p = 1000$ e $\lambda_\mu = 54,2$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 80d_d$.

A Fig. 7.48 mostra as forças de resistência fluidodinâmica, respectivamente, na direção do deslocamento da bolha (F_{D*}) e na direção transversal ao deslocamento da mesma (F_{l*}). Utiliza-se * nos subíndices das forças pois essas incluem as forças de massa virtual, já que existem acelerações da bolha. Porém, essas forças representam, de forma majoritária, respectivamente, as forças de arrasto (F_D) e forças de sustentação (F_l). Observa-se que durante o regime de pulsação axissimétrica, as amplitudes das oscilações na direção de ascensão são substancialmente maiores que as amplitudes das oscilações transversais. Com a mudança no modo de ascensão, as amplitudes das oscilações transversais tornam-se mais significativas, chegando à mesma ordem de grandeza das amplitudes na direção do deslocamento da bolha. Assim, é determinado um coeficiente de arrasto (desprezando os efeitos de massa virtual) com a média da força F_{D*} . A Tab. 7.7 mostra os valores de coeficientes de arrasto calculados através da Eq. 4.20 e comparações com valores obtidos com correlações da literatura. A Tab. 7.8 apresenta os cálculos realizados com a componente de força na direção do deslocamento da bolha. É possível notar que essa forma de cálculo resulta em um menor valor de coeficiente de arrasto, e um desvio um pouco maior em relação aos valores

obtidos com as correlações da literatura.

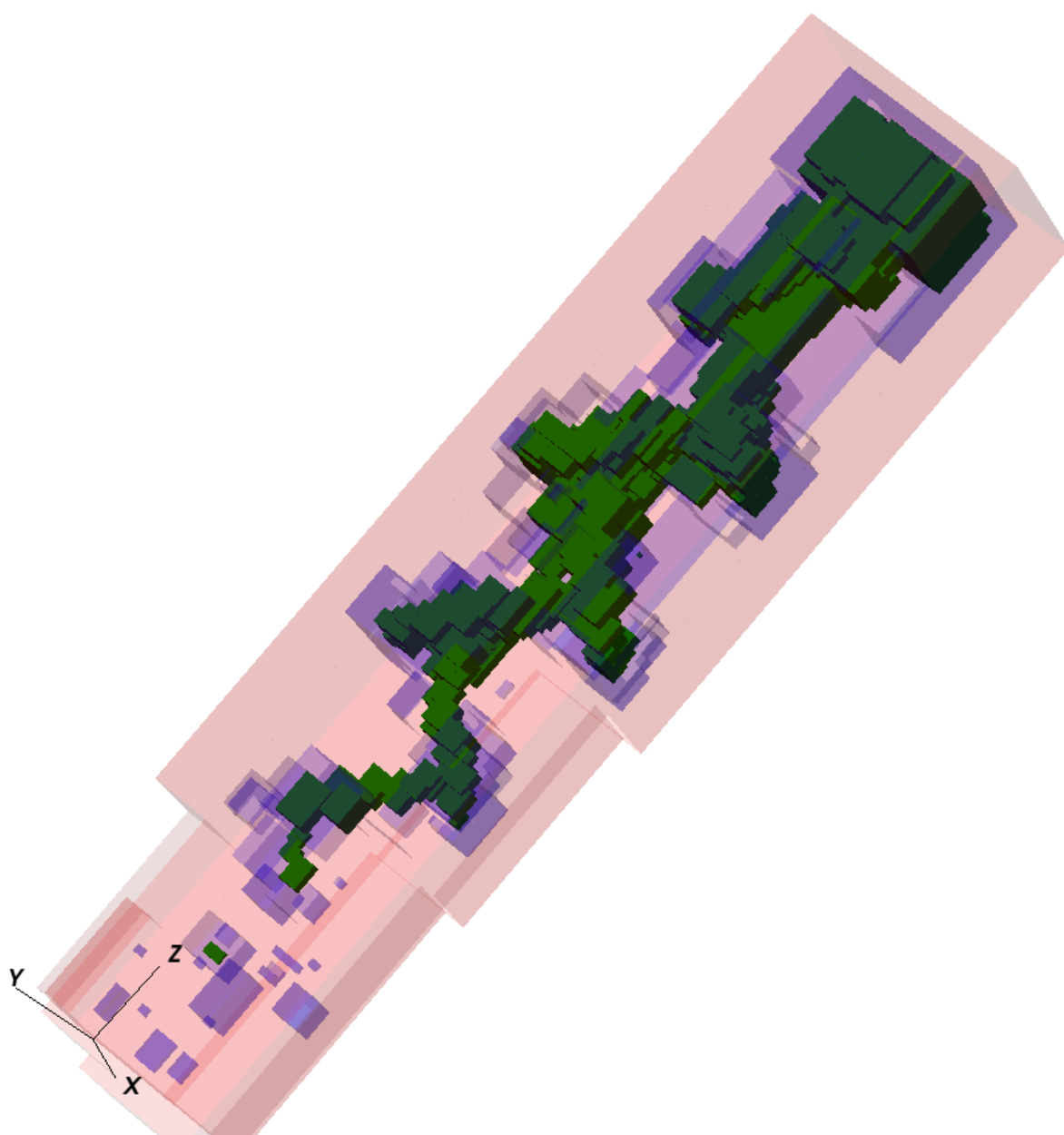


Figura 7.45: Blocos de refinamento adaptados às estruturas do escoamento gerado pela acensão da bolha *woobling*. Adimensionais: $Eo = 3,63$, $Mo = 2,5 \cdot 10^{-11}$, $Re \approx 1350$, $\lambda_\rho = 1000$ e $\lambda_\mu = 54,2$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 80d_d$.

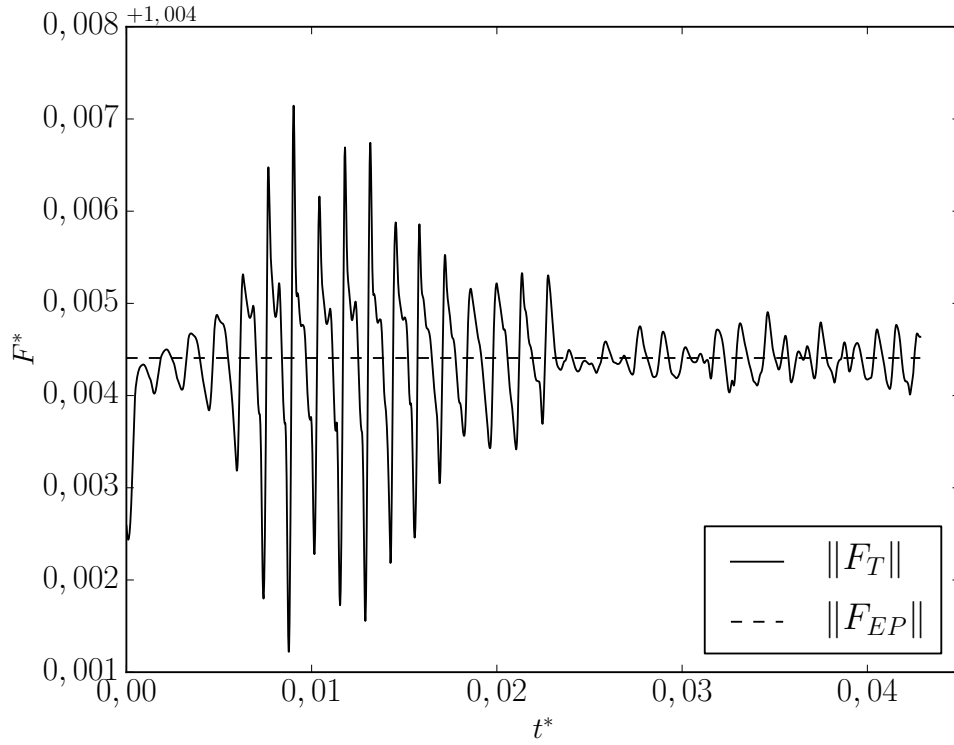


Figura 7.46: Evolução da força total de resistência fluidodinâmica e força resultante entre as forças de empuxo e peso para um caso *woobling*. Adimensionais: $Eo = 3,63$, $Mo = 2,5 \cdot 10^{-11}$, $Re \approx 1350$, $\lambda_\rho = 1000$ e $\lambda_\mu = 54,2$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 80d_d$.

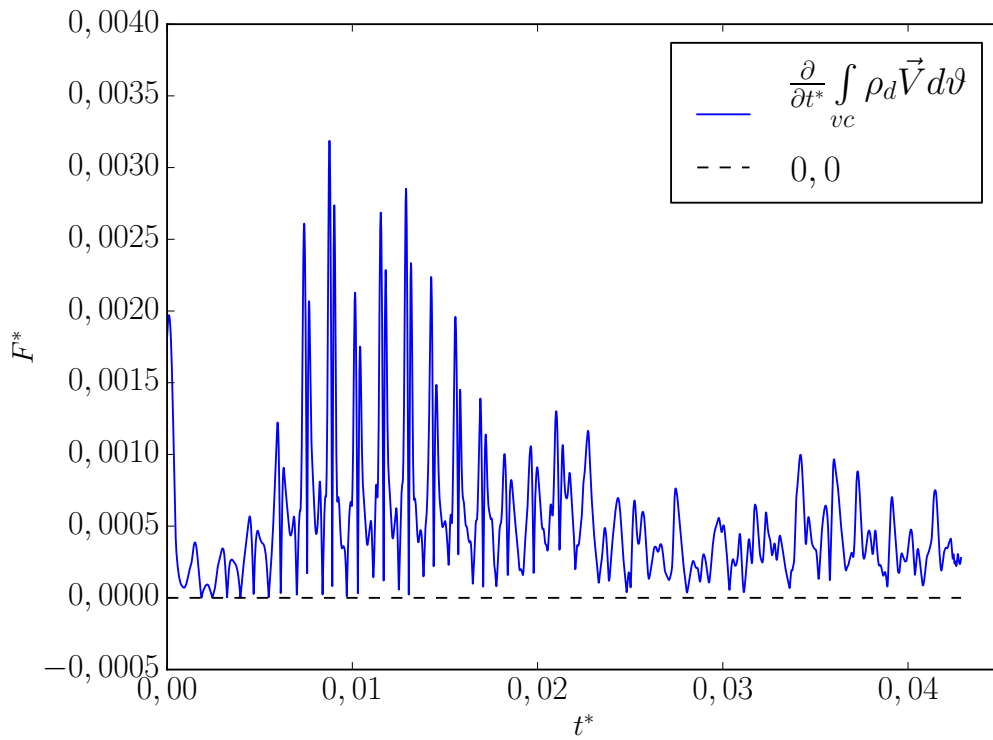


Figura 7.47: Taxa de variação da quantidade de movimento linear para um caso *woobling*. Adimensionais: $Eo = 3,63$, $Mo = 2,5 \cdot 10^{-11}$, $Re \approx 1350$, $\lambda_\rho = 1000$ e $\lambda_\mu = 54,2$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 80d_d$.

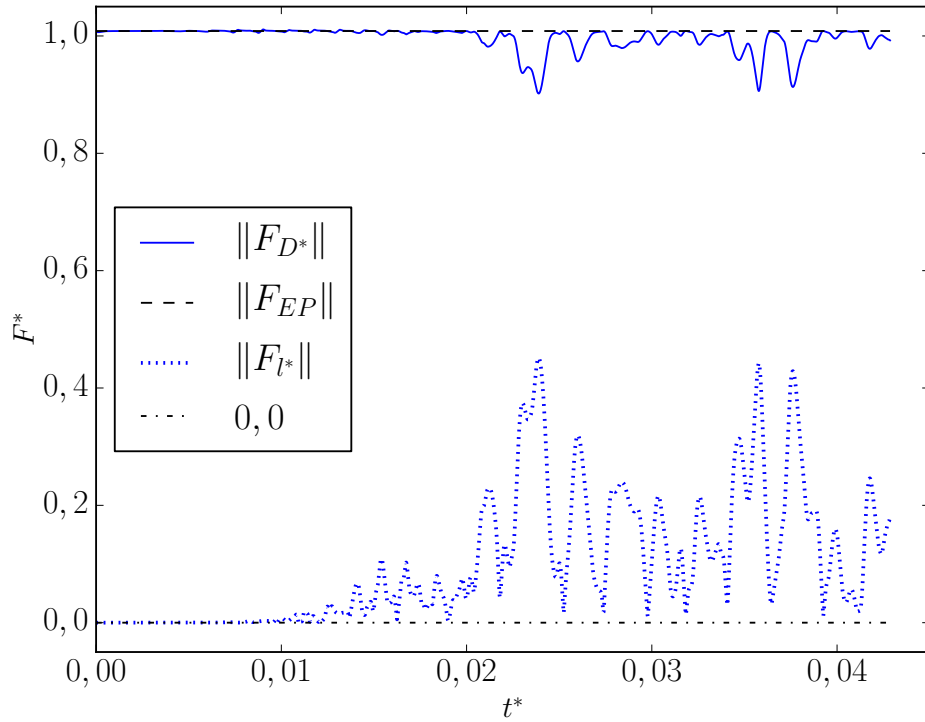


Figura 7.48: Magnitudes das projeções da força F_T nas direções do deslocamento da bolha (F_{D*}) e transversal ao deslocamento da mesma (F_{l*}) para um caso *woobling*. Adimensionais: $Eo = 3,63$, $Mo = 2,5 \cdot 10^{-11}$, $Re \approx 1350$, $\lambda_\rho = 1000$ e $\lambda_\mu = 54,2$. Domínio: $8d_d \times 8d_d \times 80d_d$.

Tabela 7.7: Comparações entre os coeficientes de arrasto calculado C_D com correlações da literatura. Cálculo realizado através da Eq. 4.20. Tabela referente ao caso de bolha em regime *woobling*, com adimensionais: $Eo = 3,63$, $Mo = 2,5 \cdot 10^{-11}$, $Re \approx 1350$, $\lambda_\rho = 1000$ e $\lambda_\mu = 54,2$.

C_D AMR3D	1,008
C_D Tomiyama <i>et al.</i> (1998)	1,268
ϵ Tomiyama <i>et al.</i> (1998)	20,516% (-0,260)
C_D Dijkhuizen <i>et al.</i> (2010)	1,106
ϵ Dijkhuizen <i>et al.</i> (2010)	8,856% (-0,098)

Tabela 7.8: Comparações entre os coeficientes de arrasto calculado C_D com correlações da literatura. Cálculo realizado com a média temporal da componente da força $\|F_T\|$ na direção de deslocamento da bolha. Tabela referente ao caso de bolha em regime *woobling*, com adimensionais: $Eo = 3,63$, $Mo = 2,5 \cdot 10^{-11}$, $Re \approx 1350$, $\lambda_\rho = 1000$ e $\lambda_\mu = 54,2$.

C_D AMR3D	0,983
C_D Tomiyama <i>et al.</i> (1998)	1,268
ϵ Tomiyama <i>et al.</i> (1998)	22,511% (-0,285)
C_D Dijkhuizen <i>et al.</i> (2010)	1,106
ϵ Dijkhuizen <i>et al.</i> (2010)	11,143% (-0,123)

7.5.6 *Resumo dos coeficientes de arrasto calculados e comparações com correlações da literatura*

Foram gerados resultados adicionais para cálculos de coeficientes de arrasto com o código AMR3D para uma melhor comparação com as correlações da literatura, e para que fosse possível observar as tendências dos valores perante as correlações. Os resultados apresentados nas tabelas seguintes foram gerados com resolução de malha que garantem 16 volumes ao longo do diâmetro inicial das bolhas esféricas ($d_b/16$), em domínios com seções transversais quadradas com arestas $8d_d$. A escolha da resolução da malha, para esses casos, foi feita devido à maior estabilidade numérica das simulações com essa resolução. Os casos podem ser separados em dois grupos de diferentes números de Morton: um com $Mo = 3 \cdot 10^{-11}$, valor aproximado para o par ar/água; e outro com $Mo = 10^{-5}$. Os casos com números de Morton $Mo = 3 \cdot 10^{-11}$ foram simulados com as razões de propriedades $\lambda_p = 100$ e $\lambda_\mu = 58,3$, novamente por questões de estabilidade numérica. Para os casos com números de Morton $Mo = 10^{-5}$ utilizou-se $\lambda_p = 816,32$ e $\lambda_\mu = 58,3$.

A Tab. 7.9 mostra os valores de coeficientes de arrasto calculados para os casos com números de Morton $Mo = 10^{-11}$. Na tabela, é apresentado o desvio percentual ε calculado em relação aos valores das correlações, enquanto que ao lado do valor percentual, em parenteses, é apresentado a diferença entre o valor obtido na presente tese e o valor da literatura. Observa-se que os valores de coeficientes de arrasto para os casos com os menores números de Eötvös (0,1 e 0,2) são os que apresentam os maiores desvios em relação aos valores obtidos com as correlações. Com baixos números de Eötvös os efeitos de tensão superficial são predominantes e os erros provenientes das simplificações do presente modelo tornam as simulações instáveis e com altas correntes espúrias, comprometendo os resultados. A medida que os números de Eötvös aumentam, os desvios em relação às correlações diminuem e, em geral, se obtém menores desvios em relação à correlação de Dijkhuizen *et al.* (2010). É importante destacar que existe uma não-linearidade nos cálculos apresentados, uma vez que o número de Reynolds depende da velocidade de ascensão terminal das bolhas, e são obtidas através dos resultados das simulações. Uma vez que esse número de Reynolds é utilizado para o cálculo dos coeficientes a partir das correlações, os erros de avaliação dos mesmos são

Tabela 7.9: Comparações de valores de coeficientes de arrasto calculados no presente trabalho com valores obtidos com as correlações de Tomiyama *et al.* (1998) (Eq. 7.7) e Dijkhuizen *et al.* (2010) (Eq. 7.8). Adimensionais: $Mo = 3 \cdot 10^{-11}$; $\lambda_\rho = 100$ e $\lambda_\mu = 58,3$.

Eötvös	C_D AMR3D	Eq. 7.7	ε (%)	Eq. 7.8	ε (%)
0,1	1,16	0,59	97 (-0,43)	0,45	158 (-0,29)
0,2	0,31	0,18	70 (+0,13)	0,18	74 (+0,13)
0,3	0,22	0,19	17 (+0,03)	0,16	38 (+0,06)
0,4	0,23	0,24	5 (-0,01)	0,18	26 (+0,05)
0,5	0,25	0,30	14 (-0,05)	0,21	19 (+0,04)
0,6	0,27	0,35	22 (-0,08)	0,25	10 (+0,02)
0,7	0,30	0,40	26 (-0,10)	0,28	5 (+0,02)
0,8	0,33	0,44	26 (-0,11)	0,32	4 (+0,01)
0,9	0,35	0,49	28 (-0,14)	0,35	0 (+0,00)
2,0	0,61	0,89	32 (-0,28)	0,70	13 (-0,09)
3,0	0,75	1,14	35 (-0,39)	0,96	22 (-0,21)
4,0	0,93	1,33	30 (-0,40)	1,19	21 (-0,26)
5,0	1,14	1,48	23 (-0,34)	1,38	17 (-0,24)
6,0	1,24	1,60	22 (-0,36)	1,55	20 (-0,31)
7,0	1,41	1,70	17 (-0,29)	1,70	17 (-0,29)
8,0	1,51	1,78	15 (-0,27)	1,83	18 (-0,32)
9,0	1,54	1,85	16 (-0,31)	1,95	21 (-0,41)
10,0	1,55	1,90	19 (-0,35)	2,05	24 (-0,50)

propagados para a avaliação dos valores pelas correlações.

Menores desvios podem ser observados nos resultados obtidos com números de Morton $Mo = 10^{-5}$, através da Tab.7.10. Para esses casos, os maiores desvios também ocorre nos menores números de Eötvös, já que se tratam de cálculos mais difíceis. Ao contrário do observado na Tab. 7.9, os valores se aproximam melhor da correlação de Tomiyama *et al.* (1998).

Os resultados dos cálculos de coeficientes de arrasto com as malhas mais refinadas garantem 32 volumes através do diâmetro inicial esférico da bolha ($d_b/32$). A Tab. 7.11 reúne os valores e as comparações com as correlações selecionadas da literatura. Nota-se que, entre os valores, estão inclusos aqueles apresentados nas seções anteriores. Assim como visto nos resultados da Tab. 7.9, os menores desvios são aqueles relativos aos valores de coeficientes de arrasto da correlação de Dijkhuizen *et al.* (2010).

As Eqs. 7.7 e 7.8 são formadas por duas partes: uma dependente do número de Reynolds e outra dependente do número de Eötvös. Para enriquecer a comparação dos resultados, apresenta-se nas Figs. 7.49 e 7.50, respectivamente, os valores comparados com

Tabela 7.10: Comparações de valores de coeficientes de arrasto calculados no presente trabalho com valores obtidos com as correlações de Tomiyama *et al.* (1998) (Eq. 7.7) e Dijkhuizen *et al.* (2010) (Eq. 7.8). Adimensionais: $Mo = 10^{-5}$; $\lambda_\rho = 816,32$ e $\lambda_\mu = 58,3$.

Eötvös	C_D AMR3D	Eq. 7.7	ε (%)	Eq. 7.8	ε (%)
0,2	24,03	15,01	60 (+9,02)	14,30	68 (+9.73)
0,3	9,99	7,85	27 (+2,14)	7,41	35 (+2.58)
0,4	5,35	5,09	5 (+0,26)	4,75	11 (+0.60)
0,6	3,23	3,32	3 (-0,09)	3,03	7 (+0.20)
0,8	2,42	2,56	6 (-0,14)	2,29	6 (+0.13)
0,9	2,15	2,31	7 (-0,16)	2,05	5 (+0.10)
3,0	1,21	1,14	6 (+0,07)	1,23	2 (-0.02)
4,0	1,27	1,33	5 (-0,06)	1,36	6 (-0.09)
5,0	1,33	1,48	10 (-0,15)	1,50	11 (-0.17)
6,0	1,41	1,60	12 (-0,19)	1,64	14 (-0.23)
7,0	1,49	1,70	12 (-0,21)	1,77	16 (-0.28)
9,0	1,68	1,85	9 (-0,17)	2,00	16 (-0.32)
10,0	1,71	1,90	10 (-0,19)	2,09	18 (-0.38)
11,0	1,81	1,96	7 (-0,15)	2,18	17 (-0.37)
12,0	1,89	2,00	6 (-0,11)	2,27	17 (-0.38)
13,0	1,84	2,04	10 (-0,20)	2,34	21 (-0.50)
14,0	1,91	2,07	8 (-0,16)	2,41	21 (-0.50)
15,0	2,37	2,11	12 (+0,26)	2,48	5 (-0.11)

Tabela 7.11: Comparações de valores de coeficientes de arrasto calculados no presente trabalho com valores obtidos com as correlações de Tomiyama *et al.* (1998) (Eq. 7.7) e Dijkhuizen *et al.* (2010) (Eq. 7.8). Casos mais refinados, com $d_b/32$.

Eötvös	Morton	C_D AMR3D	Eq. 7.7	ε (%)	Eq. 7.8	ε (%)
0,31	10^{-11}	0,472	0,192	145,9 (+0.280)	0,166	183,8 (+0,306)
1,00	10^{-5}	1,973	2,131	7,4 (-0.158)	1,873	5,3 (+0,100)
3,63	$2,5 \cdot 10^{-11}$	1,008	1,268	20,5 (-0.260)	1,106	8,9 (-0,098)
5,00	$3,0 \cdot 10^{-11}$	1,357	1,481	8,4 (-0.124)	1,379	1,6 (-0,022)
7,00	$3,0 \cdot 10^{-11}$	1,772	1,696	4,5 (+0.076)	1,697	4,4 (+0,075)
15,00	10^{-5}	2,365	2,105	12,3 (+0.260)	2,476	4,5 (-0,111)
17,70	711	100,201	86,484	15,9 (+13.717)	84,327	18,8 (+15,874)
32,20	$8,2 \cdot 10^{-3}$	3,093	2,371	30,5 (+0.722)	3,151	1,9 (-0,058)
243,00	266	5,289	3,361	57,3 (+1.928)	4,922	7,1 (+0,367)
339,00	43,1	4,340	2,635	64,7 (+1.705)	4,213	2,9 (+0,127)
641,00	43,1	4,616	2,650	74,2 (+1.966)	4,083	13,0 (+0,533)

as funções de Reynolds e de Eötvös. É importante destacar que o trabalho de Dijkhuizen *et al.* (2010) constrói a correlação sugerindo o uso da correlação de Mei, Lawrence e Klausner (1994) para a parte dependente de Eötvös e essa é usada na Fig. 7.49. O trabalho de Tomiyama *et al.* (1998) apresenta correlações válidas para sistemas puros, contaminados e levemente contaminado e essas são incluídas no gráfico da Fig. 7.49.

Comparando as Figs. 7.49 e 7.50, observa-se que, em geral, quando um valor não se aproxima das curvas de um dos gráficos acaba por se aproximar das curvas do outro. Para os mais grosseiros ($d_b/16$), os números de Morton são fixos, e a variação dos números de Eötvös consequentemente levam a variações diretamente (aproximadamente) proporcionais dos números de Reynolds. Para os casos de $Mo = 3 \cdot 10^{-11}$, fica evidente que os três menores números de Reynolds e Eötvös se aproximam mais das correlações em função do número de Reynolds, e o restante dos casos seguem uma tendência mais próxima à curva referente à correlação de Dijkhuizen *et al.* (2010). O mesmo acontece com os seis casos de menores números de Reynolds e Eötvös com $Mo = 10^{-5}$, apenas diferenciando por se aproximarem mais da correlação de Tomiyama *et al.* (1998). Nota-se que isso ocorre em uma região do espectro de Eötvös que as curvas se cruzam.

Os casos mais refinados ($d_b/32$) apresentaram três dos resultados mais próximos das curvas dependentes do número de Reynolds, enquanto o restante concordam bem com a parte dependente do número de Eötvös retirada da correlação de Dijkhuizen *et al.* (2010). Diferentemente da correlação de Tomiyama *et al.* (1998), a correlação de Dijkhuizen *et al.* (2010) utiliza contribuições dos valores obtidos pela função de Reynolds e Eötvös para o cálculo do coeficiente de arrasto. Ao observar a Fig. 7.50, fica claro que a contribuição da função de Reynolds aumenta os desvios dos coeficientes calculados no presente trabalho em relação aos valores obtidos pela correlação que é apenas função do número de Reynolds, proposta no trabalho de Dijkhuizen *et al.* (2010).

7.6 Cálculos de coeficientes de forças transversais

Com base nos experimentos para cálculos de coeficientes de forças transversais apresentado no trabalho de Tomiyama *et al.* (2002), realiza-se simulações de bolhas isoladas

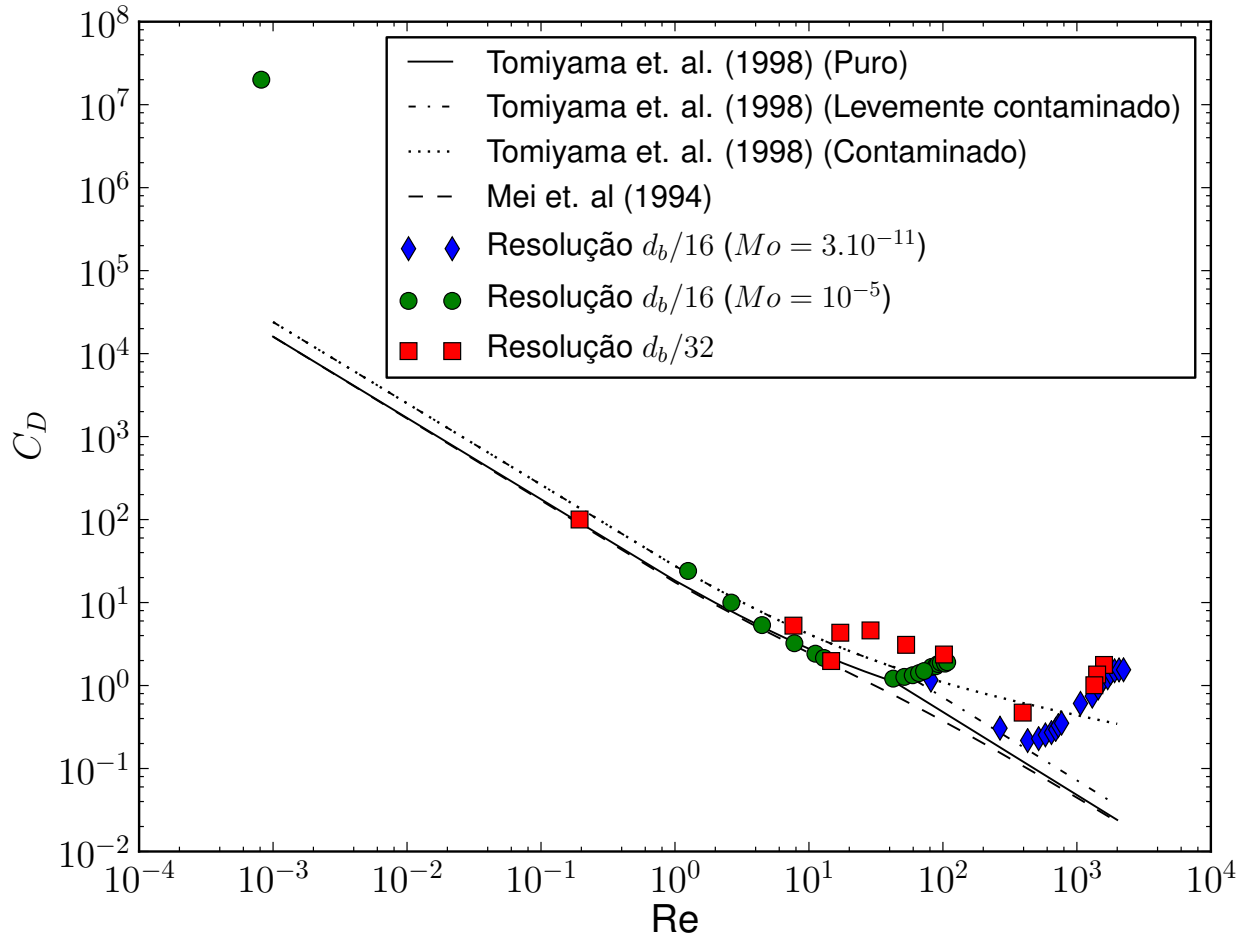


Figura 7.49: Comparação dos valores de coeficientes de arrasto obtidos com o código AMR3D e as partes dependentes do número de Reynolds das correlações de Tomiyama *et al.* (1998) e Dijkhuizen *et al.* (2010).

ascendentes sob a ação de um perfil cisalhante constante, como ilustrado pela Fig. 7.51. Para isso, utilizou-se a Eq. 7.12 para a inicialização das velocidades no instante inicial e para a determinação dos valores de velocidades nos contornos do domínio computacional. Na Eq. 7.12, $C_{cis} = \nabla \times V_c$ corresponde à constante de cisalhamento imposta ao fluido que é utilizada para os cálculos dos coeficientes de forças transversais, ou de sustentação.

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \\ w = C_{cis} (x_{mx} - x) \end{cases} \quad (7.12)$$

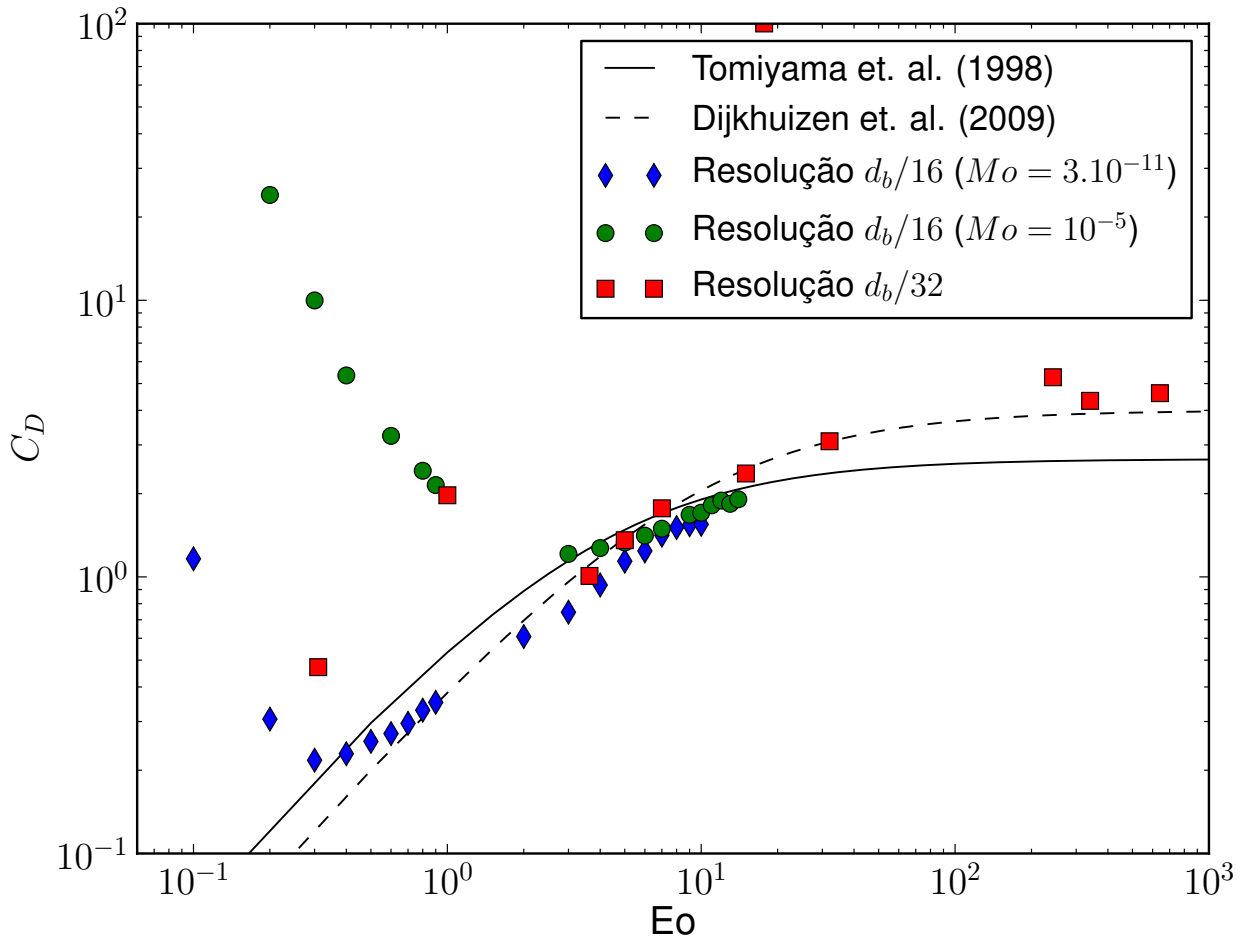


Figura 7.50: Comparação dos valores de coeficientes de arrasto obtidos com o código AMR3D e as partes dependentes do número de Eötvös das correlações de Tomiyama *et al.* (1998) e Dijkhuizen *et al.* (2010).

Sabe-se que uma bolha ascendente sob influência de um perfil cisalhante gera uma esteira assimétrica, e o campo de pressão resultante ao seu redor é responsável por promover uma força transversal sob a mesma, ocasionando assim uma migração lateral da bolha. Para que o efeito seja capturado, utiliza-se refinamento adaptativo na interface entre os fluidos e através do critério apresentado na Eq. 5.6, em que a malha se adapta às características do escoamento quantificados pela magnitude da vorticidade. Como os resultados desta seção envolvem um perfil cisalhante constante na corrente livre, o valor da vorticidade calculada no perfil cisalhante é "compensado" no cálculo do campo de magnitude de vorticidade realizado para a marcação dos pontos para refinamento localizado. Assim, as regiões do escoamento onde o perfil cisalhante é modificado pela passagem da bolha é marcado para o refinamento dos blocos de malha, captando de forma mais adequada as características da esteira gerada

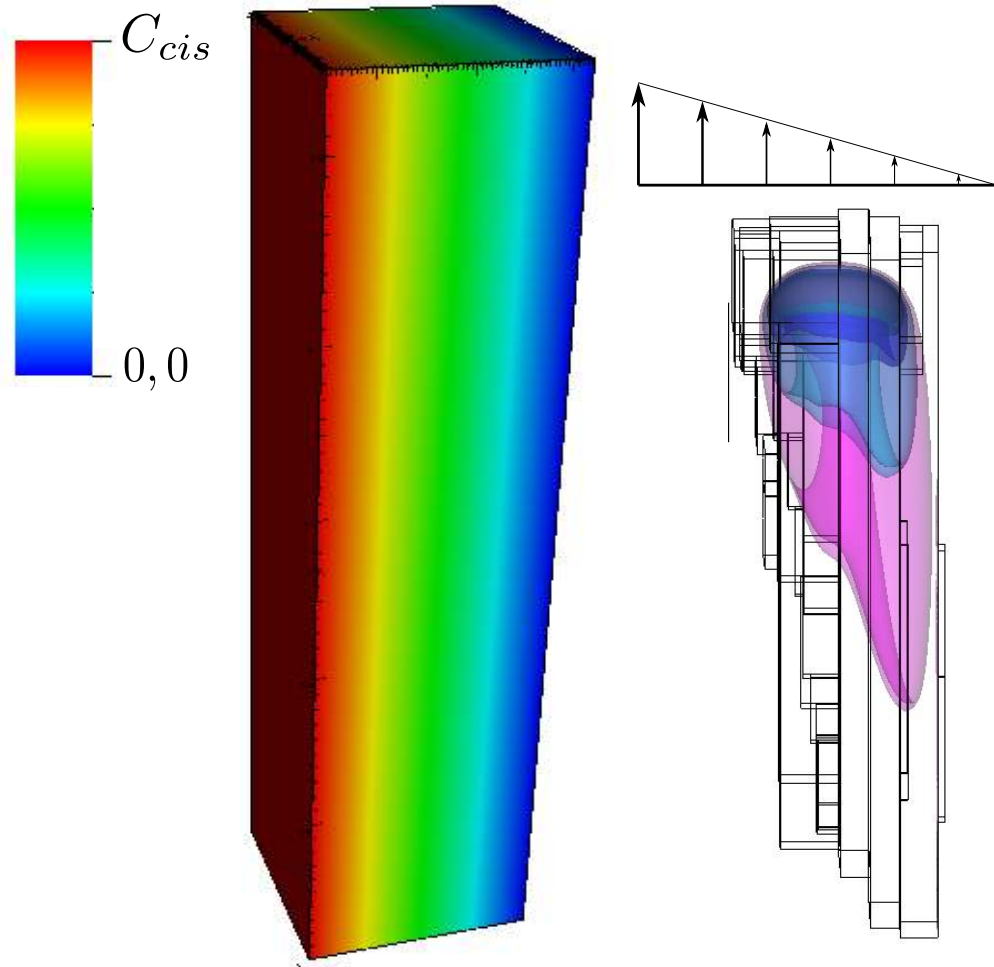


Figura 7.51: Desenho esquemático mostrando a configuração das condições de simulações utilizadas para os cálculos das forças e coeficientes de sustentação.

pela bolha sem que ocorra um refinamento que cobre todo domínio computacional.

Os casos para medição dos coeficientes de sustentação foram simulados em um domínio $8d_d \times 8d_d \times 32d_d$, com malhas $32 \times 32 \times 128L3$ e $32 \times 32 \times 128L4$, que garantem, respectivamente, 16 e 32 volumes através do diâmetro inicial esférico das bolhas. O número de Morton foi fixado no valor de $Mo = 10^{-5}$, e o número de Eötvös assumiu os valores 1, 2,4; 4, 5 e 6. As razões de propriedades foram fixadas com os valores do par ar e água, sendo $\lambda_\rho = 816,32$ e $\lambda_\mu = 58,3$. Foram obtidos resultados para constantes de cisalhamento $C_{cis} = 3,0$ e $C_{cis} = 6,0$.

Ao observar o aumento gradativo do diâmetro das bolhas (aumento do número

de Eötvös) ascendentes sob efeito de um perfil cisalhante, o fenômeno de inversão da força transversal se manifesta e inverte o sentido de migração lateral das bolhas. Na correlação de Tomiyama *et al.* (2002), os coeficientes de sustentação assumem valores negativos quando essa inversão ocorre. Como as simulações do presente trabalho são baseadas nos experimentos desses autores, os valores dos coeficientes calculados também são negativos, por convenção, quando as bolhas se deslocarem na direção de maior velocidades do perfil cisalhante. A Fig. 7.52 apresenta as posições x^* e z^* de deslocamento dos centroides das bolhas de diversos números de Eötvös sob efeito de um mesmo perfil cisalhante, com $C_{cis} = 3,0$. Nas figuras, as variáveis são adimensionalizadas com os valores máximos das coordenadas x e z que limitam o domínio de cálculo. A Fig. 7.53 mostra iso-superfícies de magnitude da vorticidade que destacam as esteiras formadas em diferentes casos simulados, onde é possível verificar maiores estruturas formadas para os casos de maiores números de Eötvös. Observa-se também as maiores deformações das bolhas nos casos de maiores números de Eötvös.

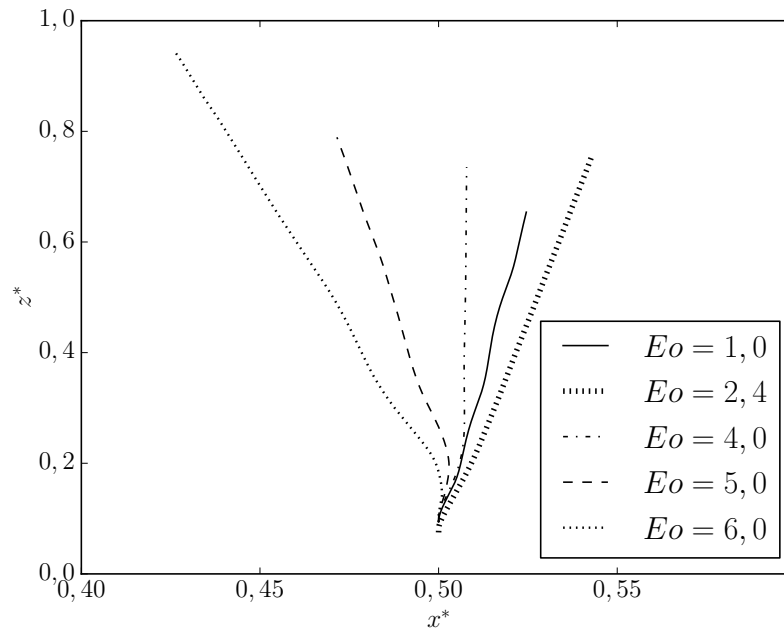


Figura 7.52: Posições dos centroides das bolhas ascendentes sob influência de um perfil de cisalhamento com constante $C_{cis} = 3,0$.

A Fig. 7.54 mostra a evolução do número de Reynolds do caso com $Eo = 2,4$ onde é possível verificar que a bolha atinge um regime estacionário de ascensão. Para esse número de Eötvös, foram obtidos resultados com $C_{cis} = 3,0$ e $C_{cis} = 6,0$. Como observado na figura, as evoluções dos números de Reynolds assumem praticamente os mesmos valores.

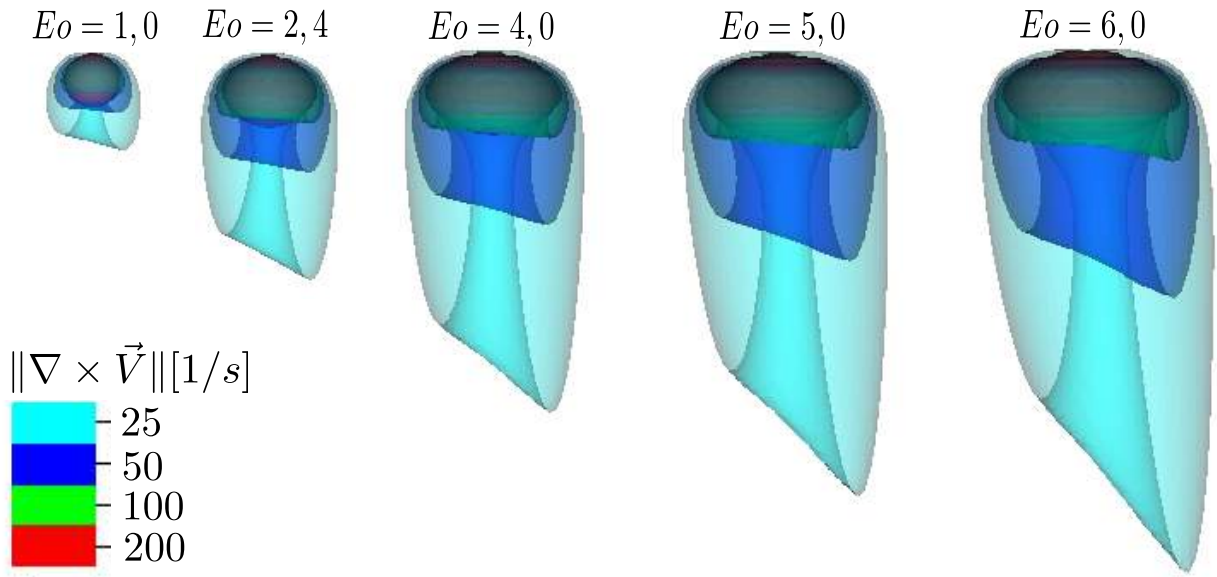


Figura 7.53: Isosuperfícies de magnitude da vorticidade de bolhas ascendentes sob influência de um perfil de cisalhamento com constante $C_{cis} = 3,0$.

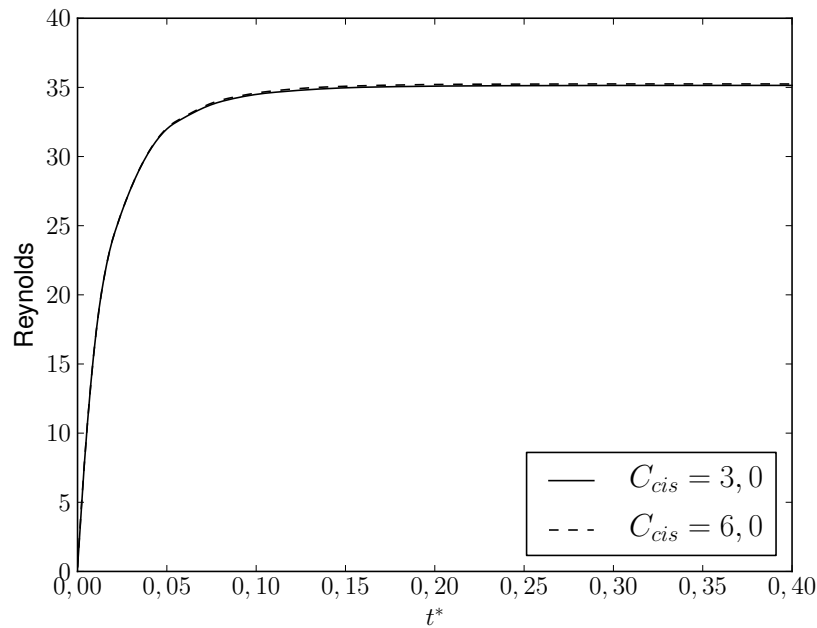


Figura 7.54: Evolução do número de Reynolds para uma bolha ascendente sob efeito de um campo de cisalhamento linear. Resultado obtido com malha $32 \times 32 \times 128L4$. Adimensionais: $Eo = 1,0$; $Mo = 10^{-5}$; $\lambda_\rho = 816,32$ e $\lambda_\mu = 58,3$.

As Figs. 7.55 e 7.56 apresentam as quantificações das componentes da força total de resistência fluidodinâmica F_T , sendo essas, respectivamente, F_D e F_t . É possível observar que a força transversal ao deslocamento da bolha (F_t) atinge uma magnitude constante no regime estacionário de ascensão. As forças apresentadas nas figuras são adimensionalizadas

como indicado na Eq. 7.9 e, por isso, apresentam * nos sub-índices. Igualmente observado por Tomiyama *et al.* (2002), os presentes resultados registram maiores forças transversais para maiores valores de C_{cis} .

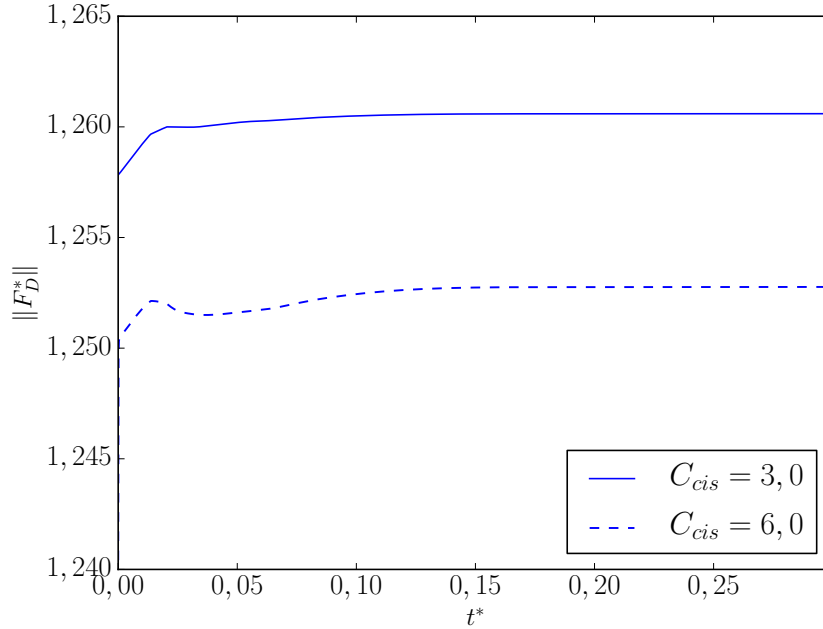


Figura 7.55: Evolução da força de resistência fluidodinâmica F_D que age na direção do deslocamento da bolha ascendente sob efeito de um campo de cisalhamento linear. Resultado obtido com malha $32 \times 32 \times 128L4$. Adimensionais: $Eo = 2,4$; $Mo = 10^{-5}$; $\lambda_\rho = 816,32$ e $\lambda_\mu = 58,3$.

O caso de $Eo = 6,0$ também foi simulado com valores de $C_{cis} = 3,0$ e $C_{cis} = 6,0$ para se observar o comportamento da variação da constante de cisalhamento na situação em que a migração lateral da bolha acontece no sentido das maiores velocidades do perfil cisalhante, resultando em coeficientes de sustentação negativos. A Fig. 7.57 mostra as evoluções dos números de Reynolds onde é possível verificar que neste caso, assim como o caso apresentado na Fig. 7.54, os valores praticamente não variam com a variação da constante de cisalhamento C_{cis} . Os módulos das componentes F_D e F_t também são apresentados para esses casos, respectivamente, nas Figs. 7.58 e 7.59. Para a componente na direção do deslocamento da bolha, os maiores valores são registrados para o maior valor de C_{cis} , ao contrário do que foi registrado para o caso de $Eo = 2,4$. No entanto, para a componente transversal F_t , o comportamento se mantém o mesmo observado no caso de $Eo = 2,4$; com um aumento do módulo da componente com o aumento da constante de cisalhamento.

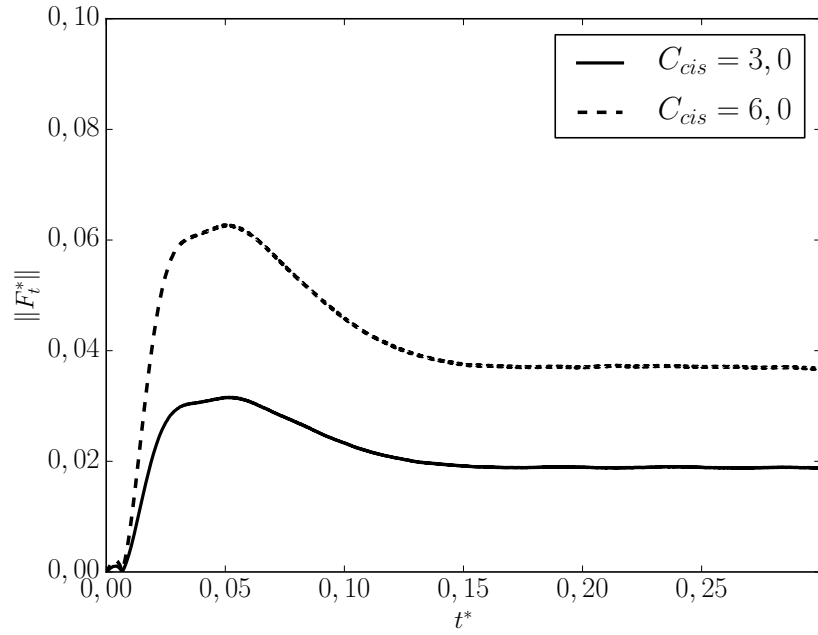


Figura 7.56: Evolução do número de Reynolds para uma bolha ascendente sob efeito de um campo de cisalhamento linear. Resultado obtido com malha $32 \times 32 \times 128L4$. Adimensionais: $Eo = 2,4$; $Mo = 10^{-5}$; $\lambda_\rho = 816,32$ e $\lambda_\mu = 58,3$.

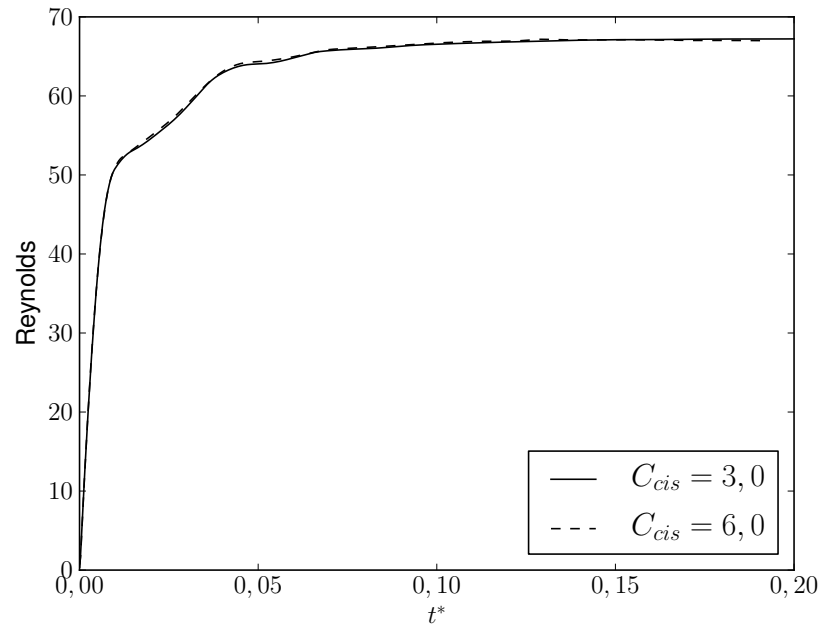


Figura 7.57: Evolução do número de Reynolds para uma bolha ascendente sob efeito de um campo de cisalhamento linear. Resultado obtido com malha $32 \times 32 \times 128L3$. Adimensionais: $Eo = 6,0$; $Mo = 10^{-5}$; $\lambda_\rho = 816,32$ e $\lambda_\mu = 58,3$.

A Tab. 7.12 compara os valores de coeficientes de sustentação calculados com as simulações do presente trabalho e valores obtidos com a correlação de Tomiyama *et al.* (2002). Para isso, é necessário o cálculo de um número de Eötvös modificado Eo_T , em que

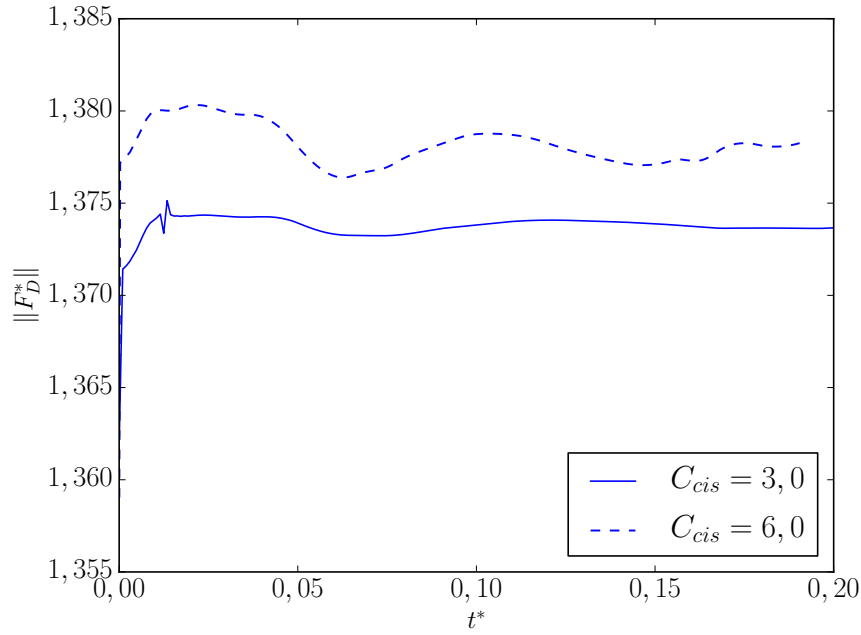


Figura 7.58: Evolução da força de resistência fluidodinâmica F_D que age na direção do deslocamento da bolha ascendente de uma bolha ascendente sob efeito de um campo de cisalhamento linear. Resultado obtido com malha $32 \times 32 \times 128L3$. Adimensionais: $Eo = 6,0$; $Mo = 10^{-5}$; $\lambda_\rho = 816,32$ e $\lambda_\mu = 58,3$.

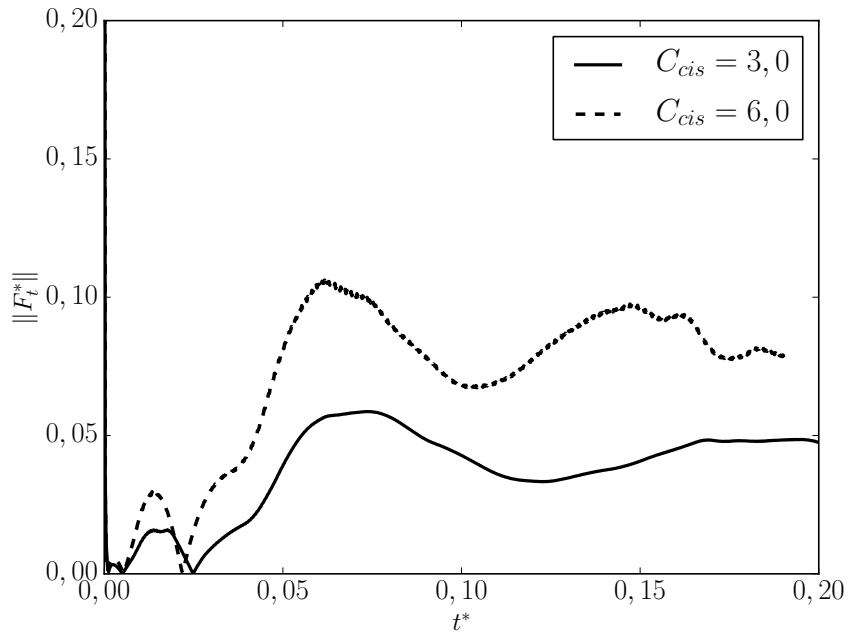


Figura 7.59: Evolução do número de Reynolds para uma bolha ascendente sob efeito de um campo de cisalhamento linear. Resultado obtido com malha $32 \times 32 \times 128L3$. Adimensionais: $Eo = 6,0$; $Mo = 10^{-5}$; $\lambda_\rho = 816,32$ e $\lambda_\mu = 58,3$.

o diâmetro equivalente esférico da bolha é substituído pela maior dimensão adquirida pela bolha deformada, em seu estado estacionário. Os valores apresentam grandes desvios para

Tabela 7.12: Comparação entre os coeficientes de sustentação calculados no presente trabalho e valores obtidos através da correlação de Tomiyama *et al.* (2002).

EO	EO_T	C_l AMR3D	C_l Tomiyama <i>et al.</i> (2002)	ε (%)
1,0	1,01	0,301	0,271	11,14 (+0,030)
2,4	2,86	0,274	0,287	4,70 (-0,013)
4,0	5,66	0,0036	0,0391	90,77 (-0,0355)
5,0	7,59	-0,235	-0,138	70,04 (-0,097)
6,0	9,78	-0,473	-0,264	79,19 (-0,209)

números de Eötvös iguais à 4 ($EO_T = 5,66$), 5 ($EO_T = 7,59$) e 6 ($EO_T = 9,78$). Para os números de Eötvös mais baixos ($EO_T = 1,01$ e $EO_T = 2,86$) os desvios são consideravelmente menores.

7.7 Cálculo de coeficientes de massa virtual

O método utilizado por Simcik, Ruzicka e Drahoš (2008) foi utilizado para calcular o coeficiente de massa virtual de uma bolha esférica liberada do repouso. Espera-se que o valor seja próximo do valor clássico de $C_{mv} = 0,5$. Os casos foram todos simulados em domínios $8d_d \times 8d_d \times 16d_d$. O passo de tempo foi de $10^{-6}s$, e os 10 primeiros passos no tempo foram utilizados para se realizar a regressão linear e determinar o valor das acelerações iniciais. As malhas utilizadas foram compostas por três níveis de refinamento, garantindo que ao longo do diâmetro da bolha esférica mantenha as relações $d_d/(10\Delta x) = 1$, $d_d/(20\Delta x) = 1$ e $d_d/(40\Delta x) = 1$. A razão de propriedades (λ_ρ , λ_μ) também variaram em 10, 100 e 1000. A Fig. 7.60 mostra os resultados obtidos para casos com diferentes razões de propriedades. Observa-se que, como esperado, as acelerações iniciais são maiores para as maiores razões de propriedades.

As Tabs. 7.13 7.14 7.15 mostram os resultados obtidos. Em geral, observa-se uma boa aproximação dos valores ao valor esperado de 0,5. O resultado do teste de malha mostrou que para os maiores números de EO , menor a sensibilidade ao refino de malha. O mesmo acontece no teste de razão de propriedades, onde os maiores EO variaram menos com a razão de propriedades. Curiosamente, os casos com razão de propriedades 1000 foram os que registraram valores mais próximos ao 0,5. A Tab. 7.15 mostra os valores obtidos utilizando valores exatos de curvatura da bolha esféricas, e nenhuma diferença significativa

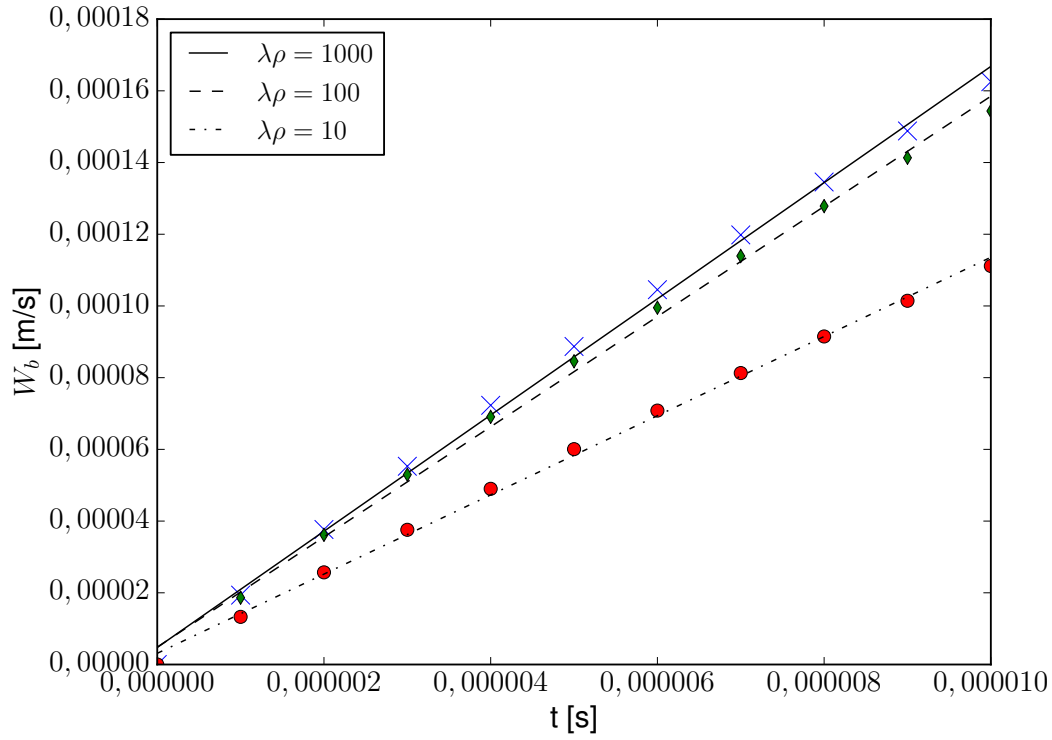


Figura 7.60: Acelerações calculadas para cálculos de coeficientes de massa virtual para casos com diferentes razões de propriedades.

foi notada.

	$Eu = 1$ $Mo = 10^{-2}$	$Eu = 1$ $Mo = 10^{-4}$	$Eu = 10$ $Mo = 10$	$Eu = 100$ $Mo = 10^4$	$Eu = 100$ $Mo = 10$
$d_d/(10\Delta x) = 1$	0,5343	0,5238	0,5277	0,5238	0,5193
$d_d/(20\Delta x) = 1$	0,5230	0,5124	0,5164	0,5124	0,5077
$d_d/(40\Delta x) = 1$	0,5195	0,5091	0,5131	0,5092	0,5044

Tabela 7.13: Resultados de coeficientes de massa virtual para diferentes níveis de refinamento ($\lambda\rho = 100$).

	$Eu = 1$ $Mo = 10^{-2}$	$Eu = 1$ $Mo = 10^{-4}$	$Eu = 10$ $Mo = 10$	$Eu = 100$ $Mo = 10^4$	$Eu = 100$ $Mo = 10$
$\lambda\rho = 10$	0,5432	0,5270	0,5333	0,5189	0,5191
$\lambda\rho = 100$	0,5230	0,5124	0,5164	0,5124	0,5077
$\lambda\rho = 1000$	0,5185	0,5095	0,5128	0,5095	0,5057

Tabela 7.14: Resultados de coeficientes de massa virtual para diferentes razões de propriedades ($d_d/(20\Delta x) = 1$).

$Eu = 1$	$Eu = 1$	$Eu = 10$	$Eu = 100$	$Eu = 100$
$Mo = 10^{-2}$	$Mo = 10^{-4}$	$Mo = 10$	$Mo = 10^4$	$Mo = 10$
0,5230	0,5124	0,5164	0,5124	0,5077

Tabela 7.15: Resultados de coeficientes de massa virtual utilizando curvatura exata, malha $d_d/(20\Delta x)$, $\lambda\rho = 100$

7.8 Simulações de múltiplas bolhas

Esta seção apresentará os resultados de múltiplas bolhas com o código AMR3D e aplicações do algoritmo de identificação de bolhas desenvolvido no presente trabalho, apresentado no capítulo 5. Primeiramente, casos de duas bolhas ascendentes são apresentados com comparações qualitativas e a primeira aplicação do algoritmo de identificação é realizada com resultados satisfatórios. Em seção posterior, resultados de uma população de bolhas injetadas no domínio é apresentada e, através de outra aplicação do algoritmo de identificação, estima-se a força de resistência fluidodinâmica total em uma bolha ascendente em meio à população.

7.8.1 Interação entre duas bolhas

Annaland, Deen e Kuipers (2005) simularam, com o método Volume of Fluid (VOF), a interação entre duas bolhas e compararam qualitativamente seus resultados com resultados experimentais. Os adimensionais que caracterizam as bolhas são: $Eu = 16$; $Mo = 0,0002$; $Re \approx 70$. A Fig. 7.61 mostra os resultados de Annaland, Deen e Kuipers (2005) e comparados com fotografias apresentadas no trabalho de Brereton e Korotney (1991). Na simulação, as bolhas são liberadas do repouso em formato esférico. O movimento de ascensão é marcado por uma aceleração da bolha situada abaixo, que entra na região da esteira da bolha de cima. Durante o movimento acelerado, os diferentes formatos entre as bolhas evidenciam as diferentes forças que atuam nas bolhas neste intervalo. Quando as interfaces das bolhas ficam a uma distância menor que uma célula computacional, as interfaces se juntam em um processo similar à coalescência. Esta é uma característica dos métodos de captura de interface que pode ser indesejada em casos de interações entre bolhas, por não representar a física apropriada dos processos de coalescência ou ruptura da interface. No entanto, em casos como os estudados no presente trabalho, a coalescência é certa e ocorre

de forma satisfatória.

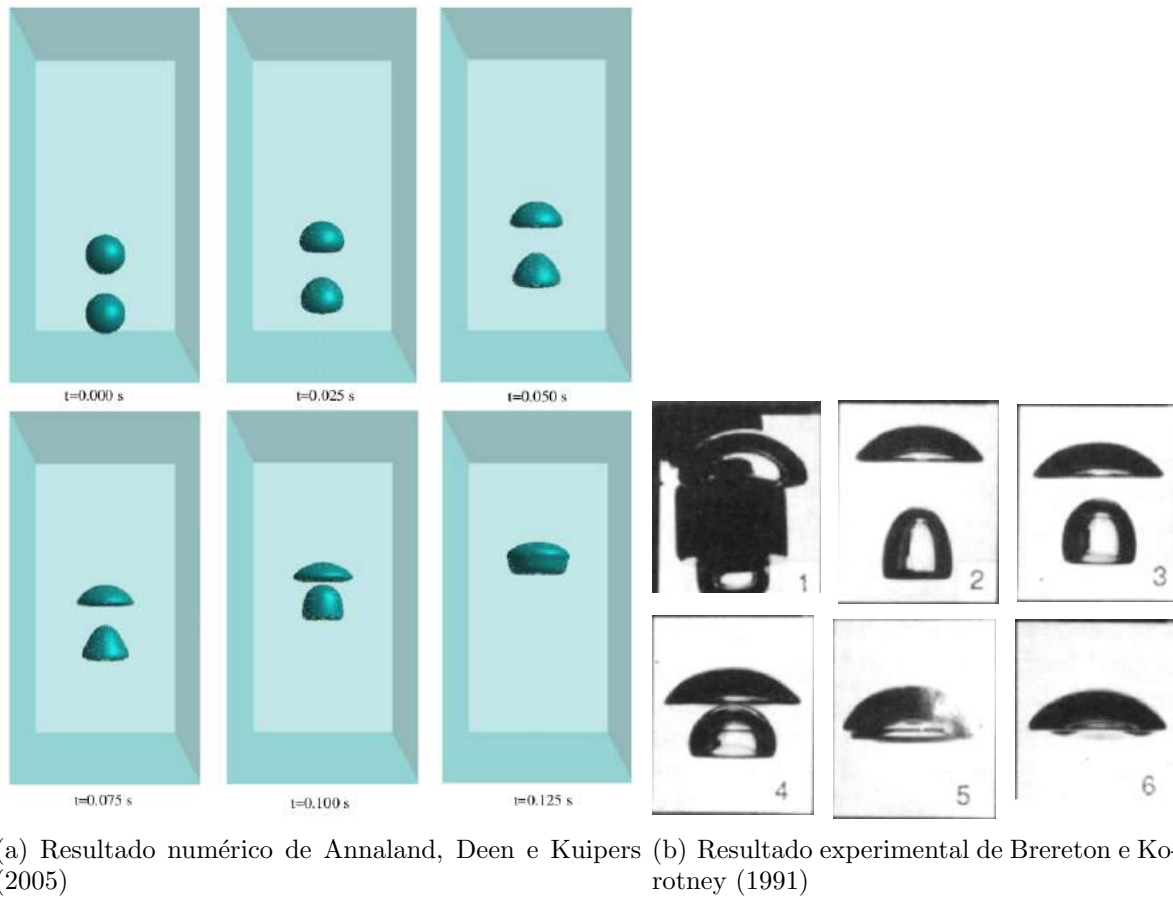


Figura 7.61: Resultados comparados no trabalho de Annaland, Deen e Kuipers (2005) para o caso de bolhas alinhadas.

O caso foi simulado com o código AMR3D, em uma malha $20 \times 20 \times 40L3$, que garante o mesmo nível de refinamento do caso apresentado no trabalho de Annaland, Deen e Kuipers (2005). As condições de contorno utilizadas para as velocidades foram de *free-slip* nas faces laterais e inferior, e condição de Neumann homogênea na face superior. A Fig. 7.62 mostra o domínio de cálculo com os níveis de refinamento cobrindo as interfaces das bolhas. As bolhas são inicializadas no formato esférico. Como critério de refinamento foi utilizado o gradiente de massa específica (para a captura da interface entre os fluidos) o critério que garante a permanência de regiões de alta vorticidade nos níveis mais finos. Para integração temporal foi utilizado o esquema SBDF, com um passo de tempo fixo de $10^{-4}s$. A Fig. 7.63 mostram os resultados obtidos com o AMR3D. Qualitativamente, os resultados são bastante parecidos com os resultados divulgados por Annaland, Deen e Kuipers (2005) e citeonlinebrereton1991. A figura exhibe os blocos de refinamento adaptativo cobrindo a

interface e a região de vorticidade gerada pelo movimento das bolhas. Foram selecionados dois instantes de tempo para uma comparação qualitativa direta entre os resultados. A Fig. 7.64 mostra o posicionamento das bolhas após um tempo físico de 0,05 segundos, e não é possível ver diferenças significativas. A Fig. 7.65 compara as bolhas no instante $t = 0,1s$, onde é possível verificar maiores diferenças entre os formatos das bolhas. Essa diferença é atribuída às diferentes formas de cálculos de curvaturas utilizadas na geração dos resultados. No presente trabalho, utiliza-se a função altura de segunda ordem, enquanto que no trabalho de Annaland, Deen e Kuipers (2005) a curvatura foi obtida a partir do divergente dos vetores normais aos elementos de área que compõem a superfície das bolhas.

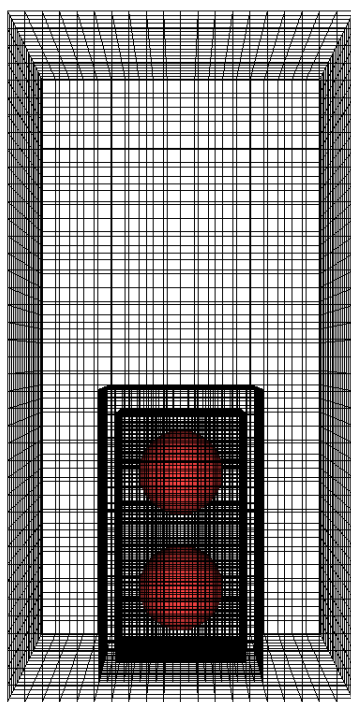


Figura 7.62: Domínio de cálculo para a simulação de duas bolhas alinhadas.

Em um caso pouco diferente, as bolhas são inicializadas com um deslocamento de 1,5 vezes o diâmetro na direção transversal à direção da gravidade e são referidas neste trabalho como desalinhadas. Os resultados foram comparados da mesma forma em que os resultados anteriores foram comparados. A Fig. 7.66 mostra os resultados numéricos de Annaland, Deen e Kuipers (2005) e as fotografias do trabalho de Brereton e Korotney (1991). Neste caso, a bolha que entra na região de esteira é atraída pelo campo de vorticidade gerado pela bolha acima. O deslocamento e deformação da bolha inferior dá uma ideia das forças que

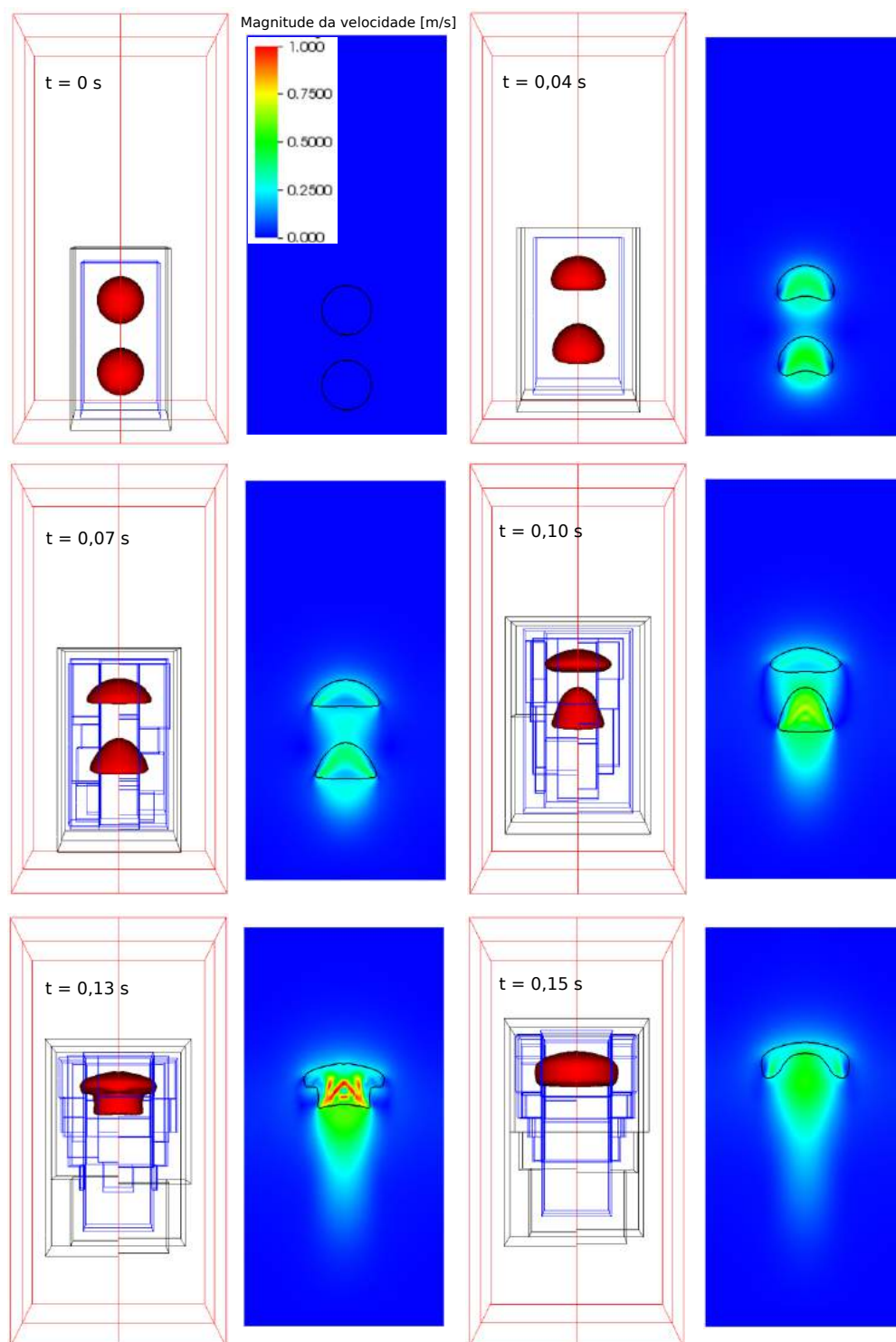


Figura 7.63: Resultado da interação entre duas bolhas ascendentes alinhadas verticalmente. Reprodução da simulação feita por Annaland, Deen e Kuipers (2005).

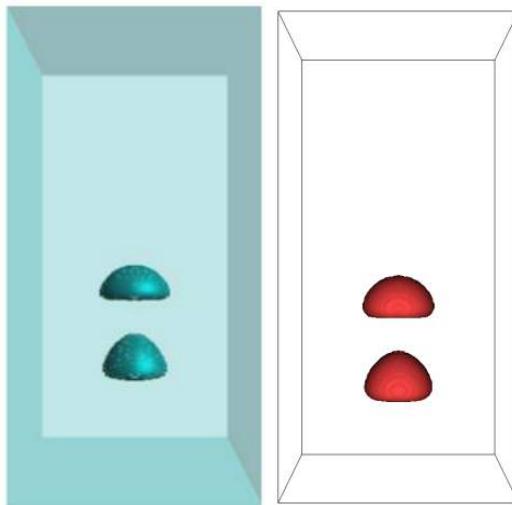


Figura 7.64: Comparação entre o resultado obtido com o código AMR3D (direita) e o resultado apresentado por Annaland, Deen e Kuipers (2005) (esquerda) no instante de tempo $t = 0,05s$. Figura referente ao caso das bolhas alinhadas.

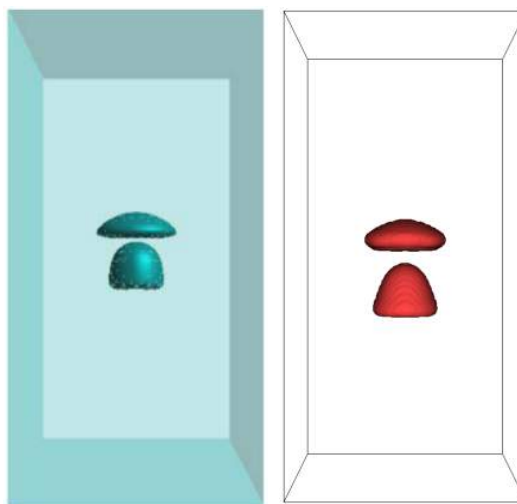
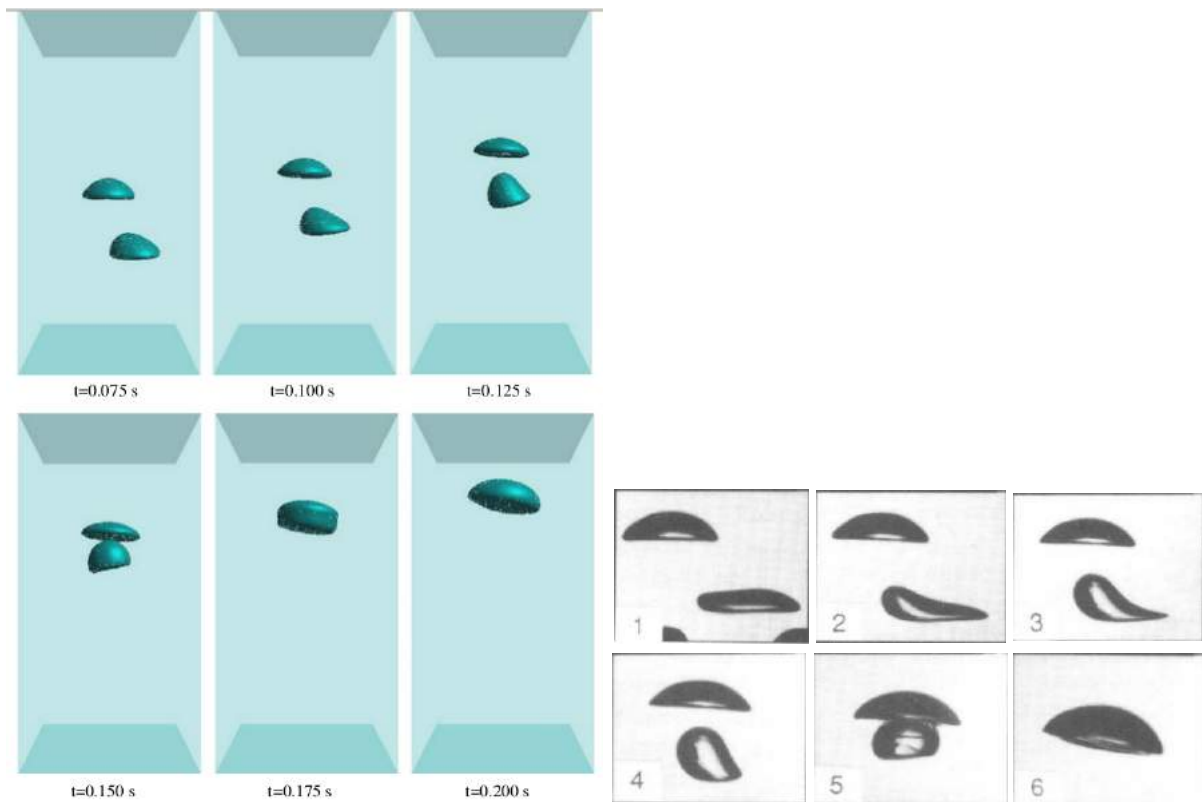


Figura 7.65: Comparação entre o resultado obtido com o código AMR3D (direita) e o resultado apresentado por Annaland, Deen e Kuipers (2005) (esquerda) no instante de tempo $t = 0,10s$. Figura referente ao caso das bolhas alinhadas.

atuam na bolha sob influência da esteira. Além de uma aceleração na direção da gravidade, forçando as bolhas a se aproximarem e coalescerem, a bolha se desloca na direção transversal à gravidade devido a uma componente de força transversal, também conhecida como força de sustentação. A Fig. 7.67 mostram os resultados obtidos com o AMR3D. É possível observar a construção dos níveis de refinamento de acordo com o escoamento gerado. As Figs. 7.68 e 7.69 faz uma comparação entre os resultados do presente trabalho e os resultados divulgados por Annaland, Deen e Kuipers (2005) em dois instantes de tempo diferentes. Em comparação com o caso das bolhas alinhadas, os resultados do caso das bolhas desalinhadas apresentam maiores diferenças nos formatos de posicionamentos das bolhas. Além da diferença entre os métodos de cálculo de curvatura, esse é um caso em que a bolha sofre deformações mais irregulares que podem destacar ainda mais as diferenças entre os métodos.



(a) Resultado numérico de Annaland, Deen e Kuipers (2005)

(b) Resultado experimental de Brereton e Korotney (1991)

Figura 7.66: Resultados comparados no trabalho de Annaland, Deen e Kuipers (2005) para o caso de bolhas desalinhadas.

Com o intuito de se investigar a influência da adaptatividade da malha, o mesmo caso foi simulado com apenas dois níveis, e com apenas o nível base. O mesmo nível de

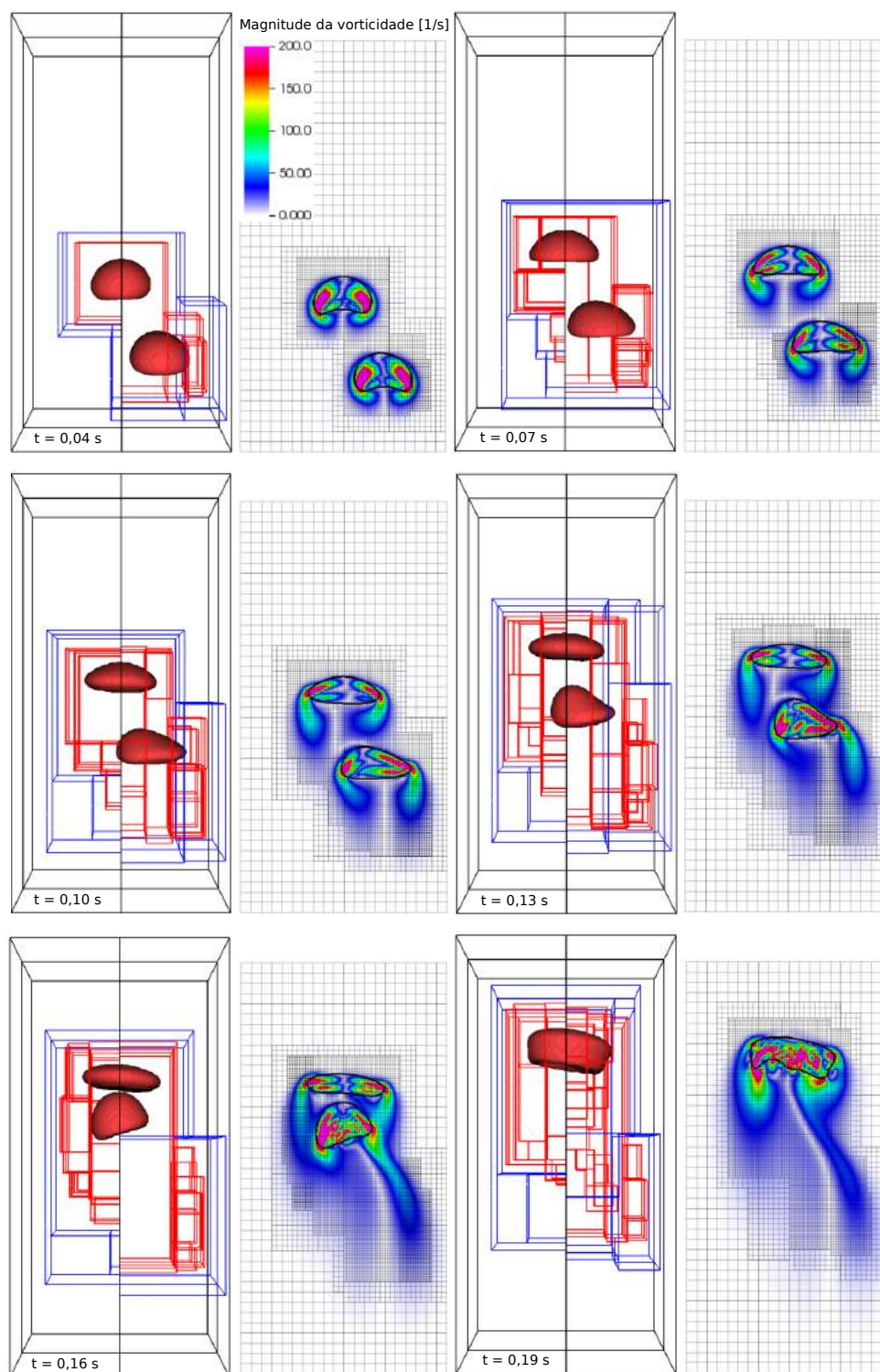


Figura 7.67: Resultado da interação entre duas bolhas ascendentes desalinhadas. Reprodução da simulação feita por Annaland, Deen e Kuipers (2005).

refinamento em relação às bolhas foi mantido, em que o diâmetro da bolha esférica inicial se iguala a vinte vezes o espaçamento da malha no nível mais refinado. Os resultados não apresentaram diferenças significativas em relação à movimentação e interação das bolhas.

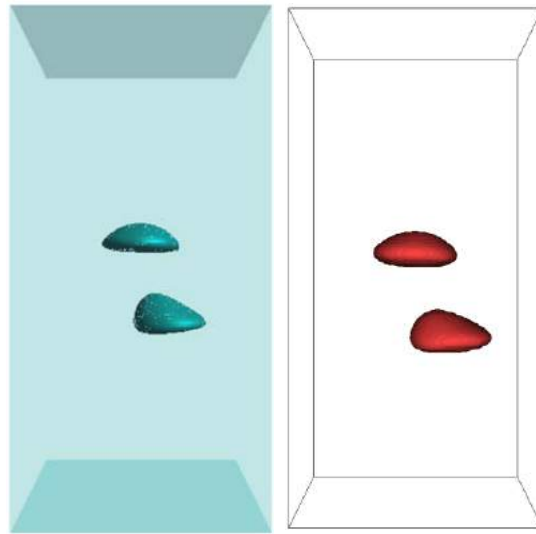


Figura 7.68: Comparação entre o resultado obtido com o código AMR3D (direita) e o resultado apresentado por Annaland, Deen e Kuipers (2005) (esquerda) no instante de tempo $t = 0, 10s$. Figura referente ao caso das bolhas desalinhadas.

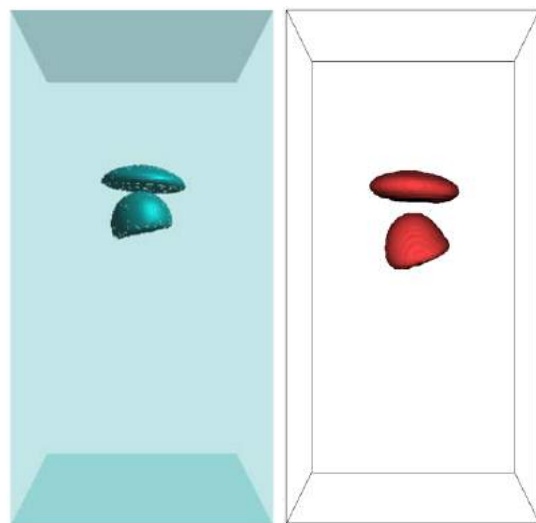


Figura 7.69: Comparação entre o resultado obtido com o código AMR3D (direita) e o resultado apresentado por Annaland, Deen e Kuipers (2005) (esquerda) no instante de tempo $t = 0, 15s$. Figura referente ao caso das bolhas desalinhadas.

No entanto, o tempo computacional do caso em que se utilizou três níveis de refinamento foi significativamente menor, realizando 2700 passos no tempo em 7 horas e 30 minutos, enquanto que com dois níveis de refinamento o tempo foi de 19 horas e 15 minutos. Com apenas um nível de refinamento, o tempo foi de aproximadamente 9 dias. Assim, evidencia-se que o cálculo com 3 níveis de refinamento é da ordem de 30 vezes mais econômico que o cálculo com malha uniforme, mantendo a mesma qualidade dos resultados.

Utilizando o algoritmo proposto na presente tese, e descrito no Capítulo 5, calcula-se os volumes das bolhas ascendentes e as posições dos centroides de ambas. O algoritmo foi testado ao simular, em 16 processos, duas bolhas de diferentes volumes do repouso, caso apresentado na Fig. 7.67. Denomina-se Bolha 1 a de volume igual à $6,97 \cdot 10^{-7} [m^3]$, inicialmente posicionada à esquerda/acima da Bolha 2, de volume igual à $5,23 \cdot 10^{-7} [m^3]$. As Figs. 7.70 e 7.71 mostram, respectivamente, as posições x e z dos centroides das bolhas e os volumes calculados para cada bolha. É possível verificar a influência da esteira da bolha superior, que ocasiona o deslocamento lateral da bolha inferior em um movimento acelerado. No momento da coalescência, as linhas de posicionamento dos centroides se juntam, e apenas uma bolha passa a ser rastreada. A evidência da coalescência também pode ser vista na evolução dos volumes rastreados, que subitamente aumenta no momento da coalescência, e vai à zero a medida que a bolha sai do domínio de cálculo. Os resultados estão satisfatórios, uma vez que os volumes calculados diferem dos volumes teóricos na ordem de $10^{-11} [m^3]$, e as posições dos centroides estão consistentes com os resultados.

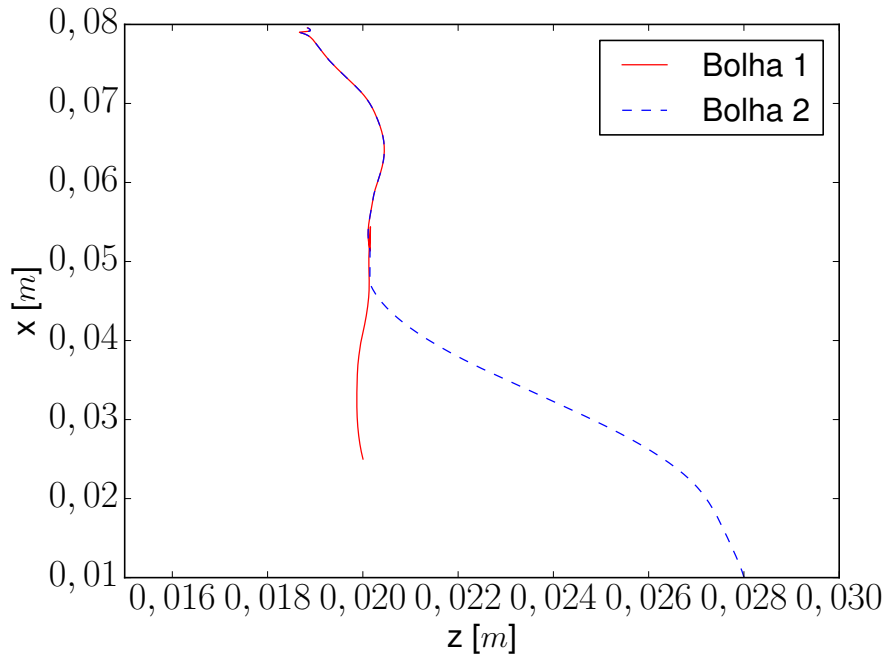


Figura 7.70: Posições dos centroides das bolhas.

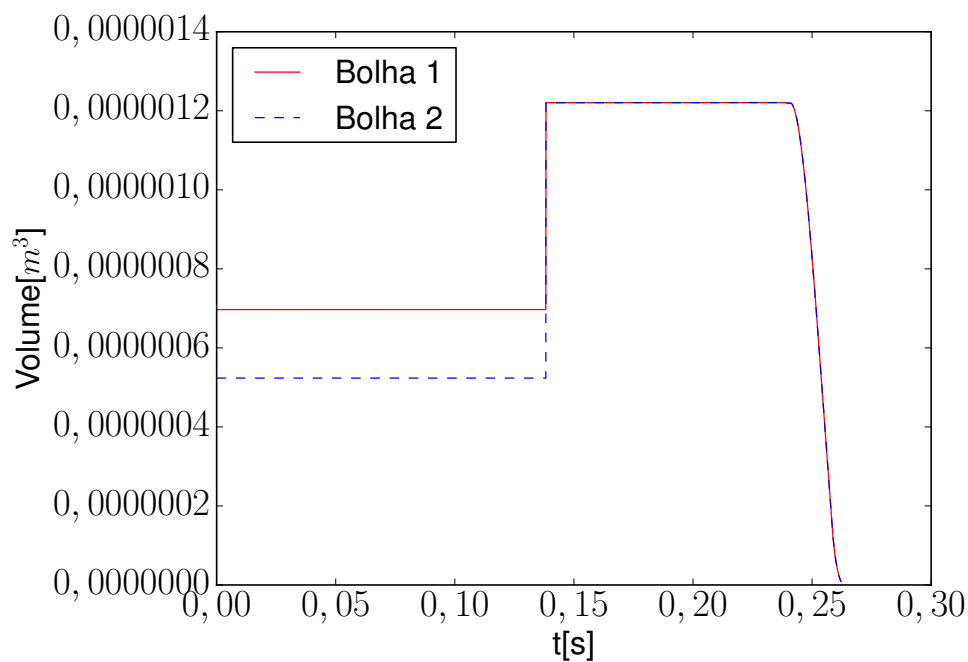


Figura 7.71: Volumes calculados para cada bolha.

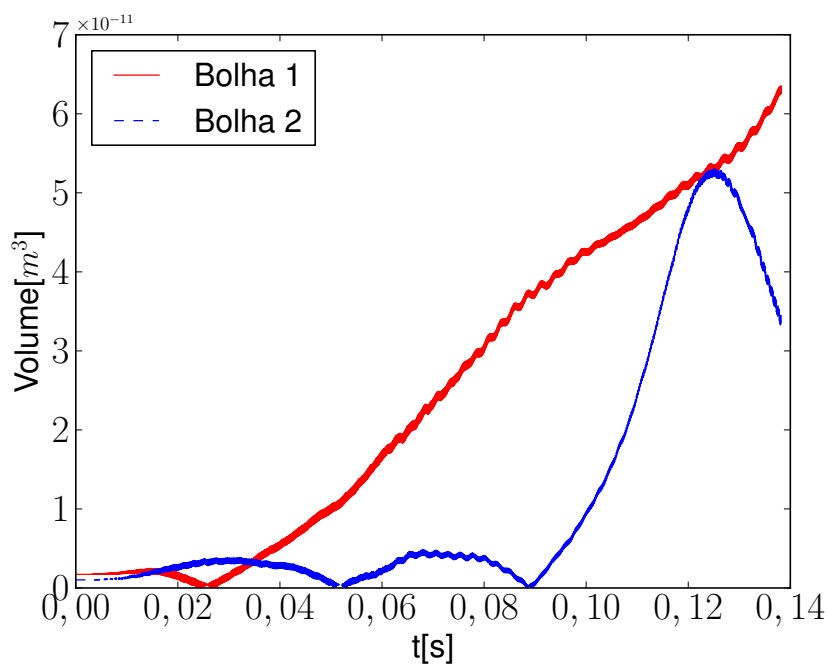


Figura 7.72: Desvio entre volumes calculados e valores teóricos.

7.8.2 Simulações com populações de bolhas

Embora a experimentação de bolhas isoladas tenha contribuído muito para o desenvolvimento de modelos para a troca de quantidade de movimento entre as fases, é imprescindível incorporar os efeitos das interações entre bolhas nos modelos representativos.

Em geral, as forças de interações entre as fases são modeladas em função de coeficientes empíricos e campos conhecidos (objetivos). Como por exemplo a força de arrasto, que é função da velocidade relativa entre as fases, do coeficiente de arrasto e de um diâmetro de referência.

Nas primeiras simulações realizadas, a inserção de bolhas no domínio foi feita através de um orifício de diâmetro fixo, onde as bolhas crescem conforme massa de gás é injetada em fluxo constante. Com o aumento da força de empuxo e o deslocamento da bolha, a seção circular da interface diminui em um fenômeno conhecido como estrangulamento e, em seguida, há uma ruptura da interface que termina o processo de injeção da bolha no domínio. A Fig. 7.73 mostra os resultados descritos. Foi possível notar, com o desenvolver das simulações, que a estabilidade dos cálculos é bastante comprometida ao simular esses efeitos, fazendo com que fossem necessários passos de tempos relativamente baixos para o avanço das simulações. Testes de diferentes formas de injeção foram realizados, e os melhores resultados foram obtidos com a injeção através de um orifício de tamanho fixo e fluxo de massa intermitente. Dessa forma, foi necessário definir um período de injeção $P_{inj} = \frac{r_{or}}{V_{inj}}$, onde r_{or} é o raio do orifício de alimentação e V_{inj} a velocidade média imposta no orifício. Também foi necessário definir uma frequência de injeção das bolhas F_{inj} . A Fig. 7.74 exemplifica o processo mostrando a interface e um corte com uma escala de cores associada à componente de velocidade w , com a mesma direção da aceleração da gravidade. Foi possível inserir diversas bolhas no domínio sem a restrição no passo de tempo.

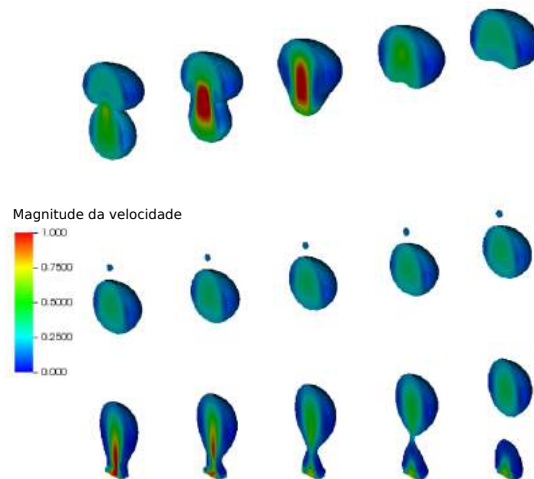


Figura 7.73: Injeção de bolhas através de um orifício de fluxo constante.

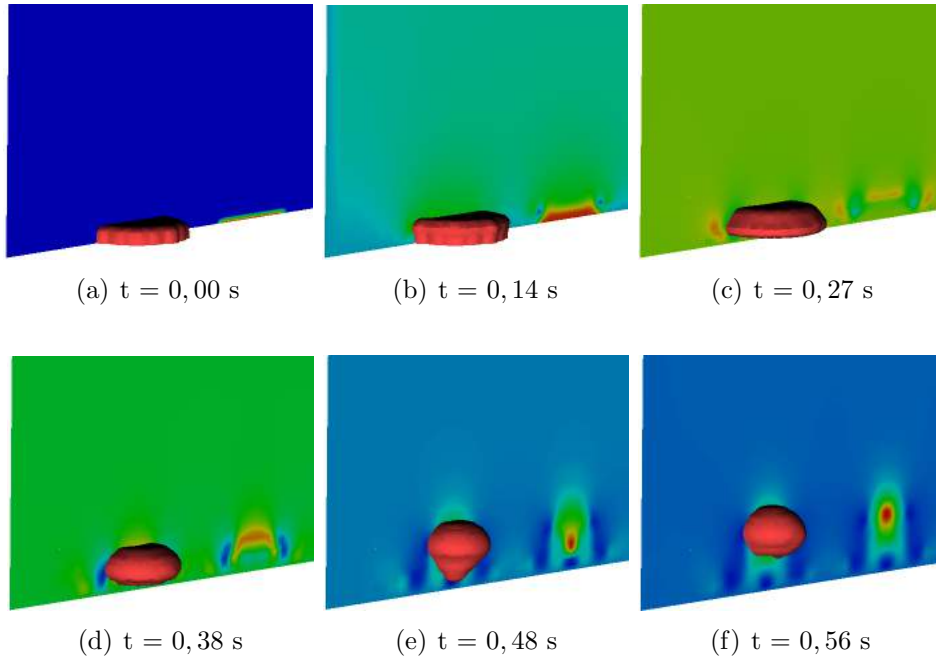


Figura 7.74: Ilustração da forma com que as bolhas são injetadas no domínio forçando a ruptura das mesmas. A escala de cores está associada a velocidade w para uma análise qualitativa.

Os casos de múltiplas bolhas simulados contém um total de 9 regiões do contorno (na face inferior do domínio) por onde as bolhas são "injetadas" no domínio. Assim, a região de injeção é coberta por blocos de refinamentos que permaneceram fixos durante a simulação, como mostrado pela Fig. 7.75. Foram utilizadas malhas $32 \times 32 \times 64L3$ em dois diferentes casos, cada um com um tamanho de bolha. As condições de contorno das velocidades foram de Dirichlet homogênea nas faces laterais e nas partes da face inferior por onde massa não é injetada, e condição de Neumann homogênea para a face superior (saída). As propriedades físicas dos fluidos utilizados nas simulações de múltiplas bolhas são apresentadas na Tab. 7.16. No caso das menores bolhas, orifícios com $r_{or} = 0,005m$, $V_{inj} = 1.0m/s$ e $F_{inj} = \frac{1}{5P_{inj}}$, formando bolhas de $0,003m$ de diâmetro. A Fig. 7.77 mostra instantes da simulação. Nota-se que ocorre coalescência numérica entre bolhas que estão aproximadamente na metade do domínio. A malha computacional é ilustrada pela Fig. 7.76, e é possível notar os blocos de refinamento em todo o domínio. Esse caso exemplifica bem uma das dificuldades encontradas ao se simular injetando as bolhas através do contorno: a definição de uma frequência de injeção e uma velocidade de injeção que permita uma distribuição de bolhas específica. No presente trabalho, buscou-se uma configuração que minimizasse as coalescências, pois

considera-se a malha utilizada muito grosseira para representar efeitos de coalescência de forma adequada.

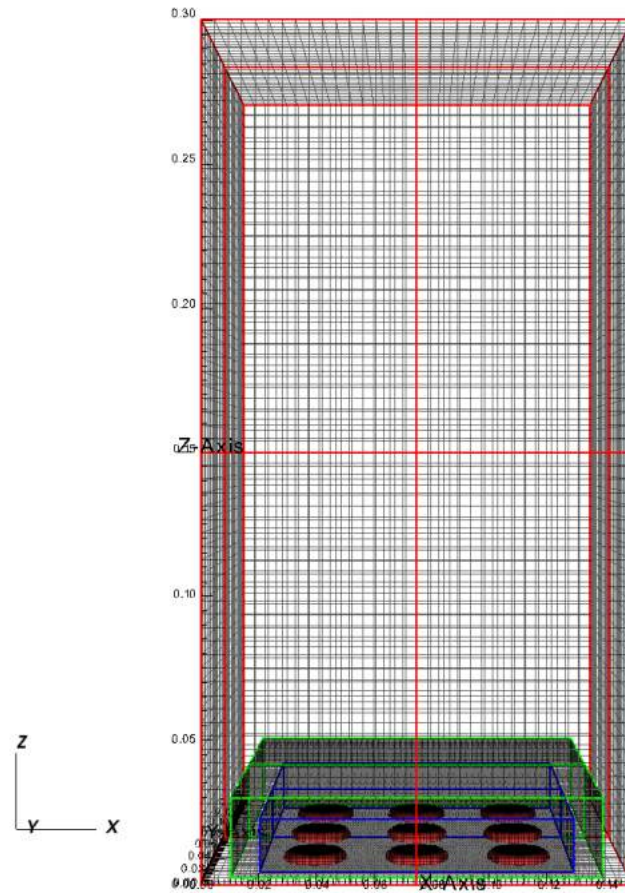


Figura 7.75: Domínio e malha computacional o instante inicial para simulação de população de bolhas.

Tabela 7.16: Propriedades dos fluidos utilizados na presente simulação de multiplas bolhas ascendentes.

Propriedades	Valores
Viscosidade da fase contínua	$1,0 \cdot 10^{-3} [Pa.s]$
Viscosidade da fase dispersa	$1,72 \cdot 10^{-5} [Pa.s]$
Densidade da fase contínua	$100,0 [kg/m^3]$
Densidade da fase dispersa	$1,25 [kg/m^3]$
Tensão superficial	$7,0 \cdot 10^{-2} [N/m]$
Aceleração da gravidade	$9,81 [m/s^2]$

Para o caso das bolhas maiores, utilizam-se os valores $r_{or} = 0,01m$, $V_{inj} = 1.4m/s$ e $F_{inj} = \frac{1}{8P_{inj}}$, e os resultados formaram bolhas com um diâmetro equivalente esférico de $0,011m$ de diâmetro (sem considerar as coalescências). Os adimensionais resultantes do caso foram $Eo = 1,67$; $Re \approx 520$; $Mo = 2,82 \cdot 10^{-10}$; $\lambda_{rho} = 80,0$ e $\lambda_{\mu} = 58,13$. O total de bolhas



Figura 7.76: Malha composta formada no caso de população de bolhas para $r_{or} = 0,005m$, $V_{inj} = 1.0m/s$ e $F_{inj} = \frac{1}{5P_{inj}}$.

ascendentes no domínio preenchido permanece em torno de 80 bolhas, e a fração de vazio estimada para o caso é de 7%. A Fig. 7.78 mostra instantes da simulação e a Fig. 7.79 mostra os níveis de refinamento em um corte central. Nota-se que os blocos de refinamento do nível mais fino cobrem grande parte do domínio de cálculo, o que acaba por diminuir os benefícios da adaptatividade de malha. Em casos com maiores frações de vazio, o uso de adaptatividade de malha torna-se desnecessário, uma vez que todo o domínio pode ser região de interesse para refinamento.

O caso apresentado na Fig. 7.78 é utilizado para estimativas de forças fluidodinâmicas que atuam em uma única bolha ascendente no meio do domínio. Para isso, o algoritmo de identificação proposto nesta tese foi aplicado para que fosse possível a obtenção das posições do centroide e velocidade média da bolha durante sua ascensão através do domínio. A Fig. 7.80 apresenta a magnitude da força de resistência fluidodinâmica total F_T que atua nesta bolha em meio à população. Notam-se fortes oscilações com uma frequência bem de-

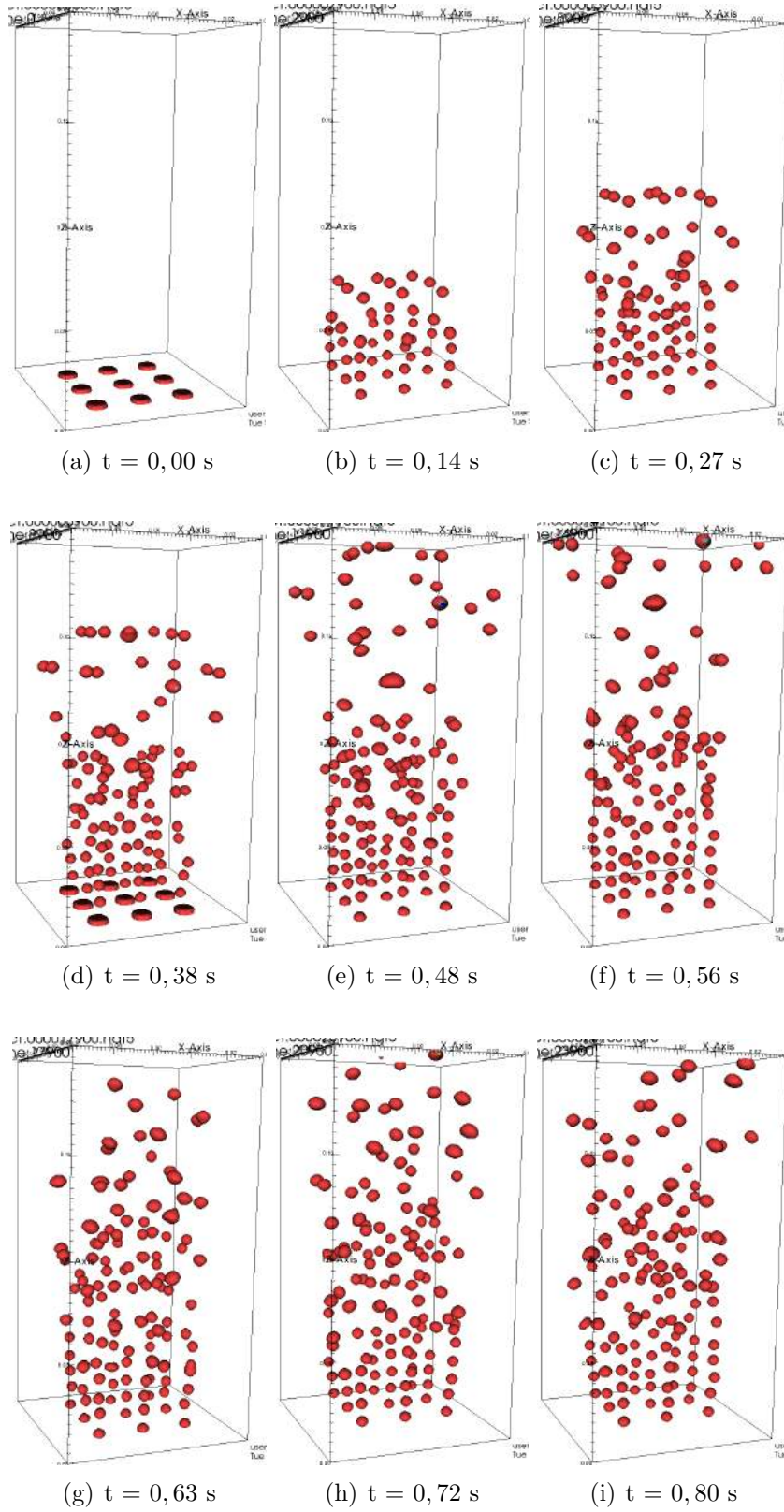


Figura 7.77: Bolhas formadas no caso para população de bolhas com $r_{or} = 0,005m$, $V_{inj} = 1.0m/s$ e $F_{inj} = \frac{1}{5P_{inj}}$.

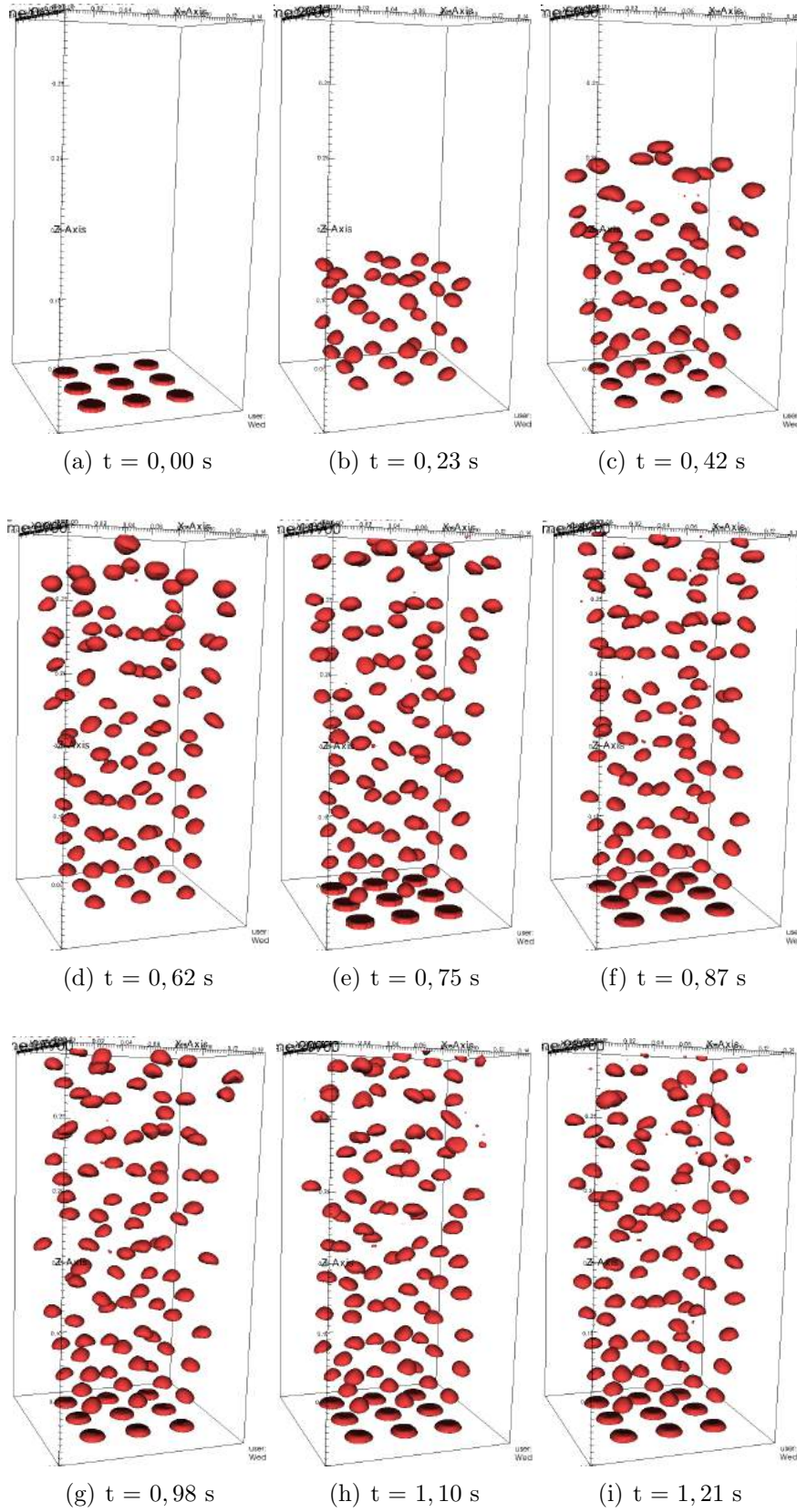


Figura 7.78: Bolhas formadas no caso para população de bolhas com $r_{or} = 0,01m$, $V_{inj} = 1.4m/s$ e $F_{inj} = \frac{1}{8P_{inj}}$.

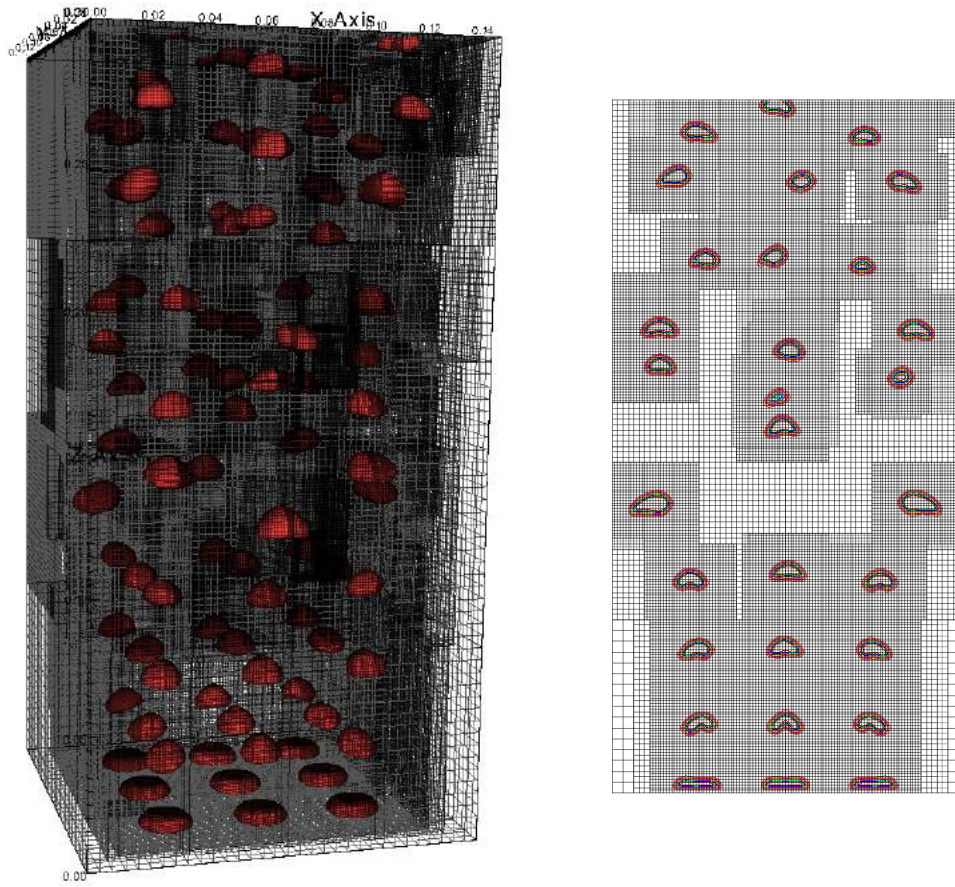


Figura 7.79: Malha composta formada no caso de população de bolhas para $r_{or} = 0,01m$, $V_{inj} = 1.4m/s$ e $F_{inj} = \frac{1}{8P_{inj}}$.

finida que corresponde exatamente a frequência de injeção das bolhas no domínio. Por se tratar de um escoamento incompressível, a influência da velocidade de injeção do contorno se estende por todo domínio. A Fig. 7.71 apresenta os volumes calculados para a bolha identificada durante sua ascensão, onde é possível observar que a mesma coalesce com uma bolha ascendente posicionada imediatamente abaixo no instante de tempo aproximadamente igual à 8 [s]. A ascensão da bolha é ilustrada na Fig. 7.82, onde é possível ver o momento em que ocorre a coalescência.

A bolha rastreada com o algoritmo de identificação foi utilizada para uma estimativa do coeficiente de arrasto da população durante sua ascensão através do domínio. Para isso, utiliza-se a Eq. 7.13 para o cálculo do coeficiente, como feito no trabalho de Roghair *et al.* (2011). Na equação, $C_{D,pop}$ corresponde ao coeficiente de arrasto considerando os efeitos da fração de vazio. Nota-se que essa é uma equação bastante parecida com a Eq. 4.20

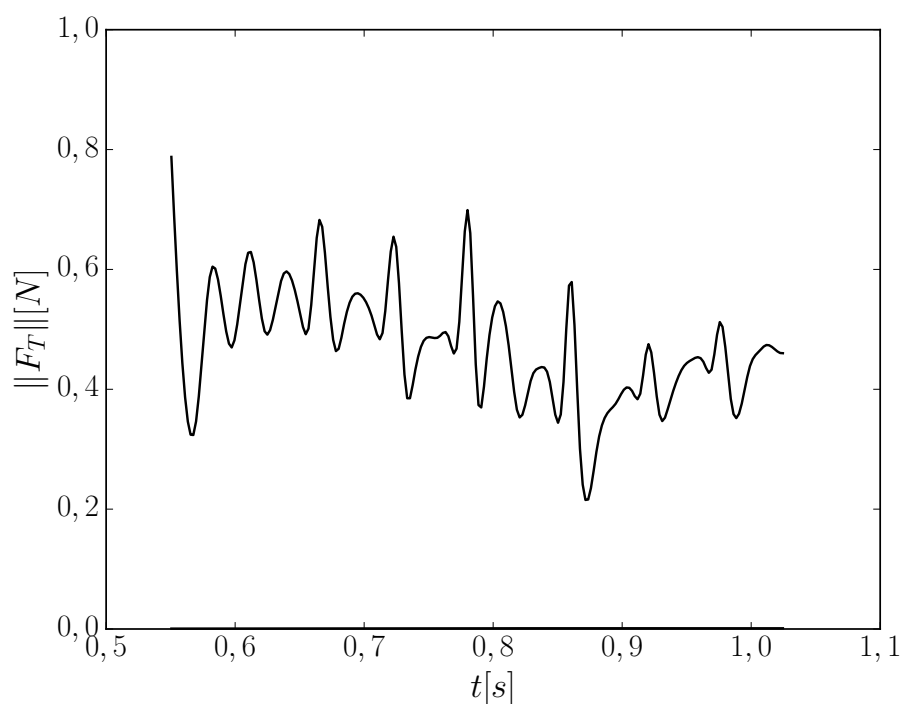


Figura 7.80: Evolução da força de resistência fluidodinâmica total de uma bolha ascendente em meio à população.

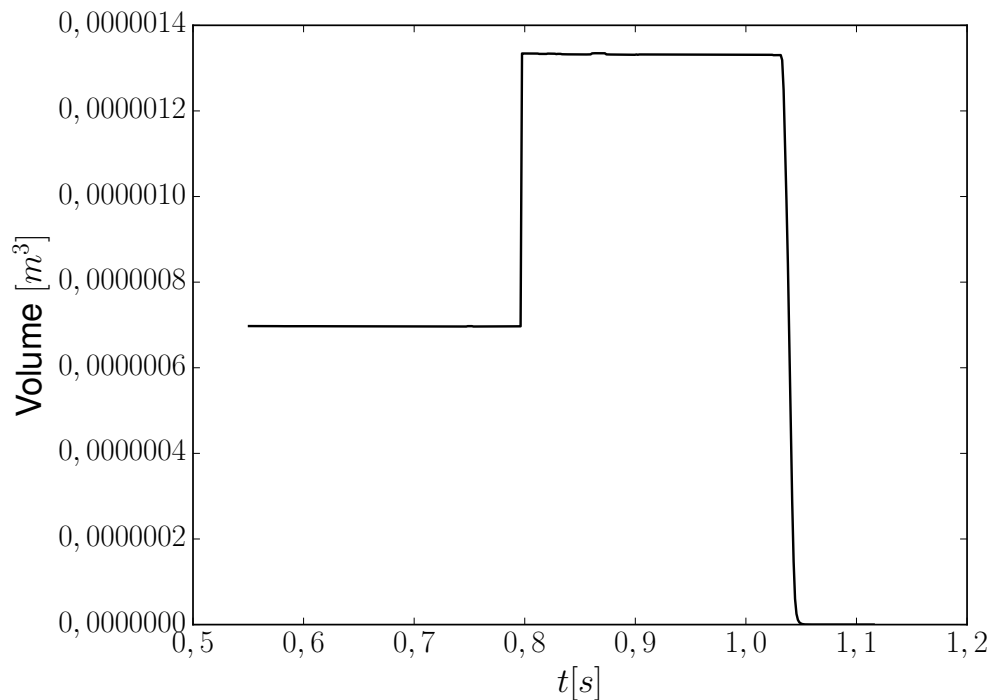


Figura 7.81: Volume da bolha rastreada com o algoritmo de identificação no caso de população de bolhas.

utilizada para casos de bolhas isoladas, mas com um termo de correção que inclui a fração de vazio ψ . A avaliação da velocidade da fase contínua para o cálculo da velocidade relativa

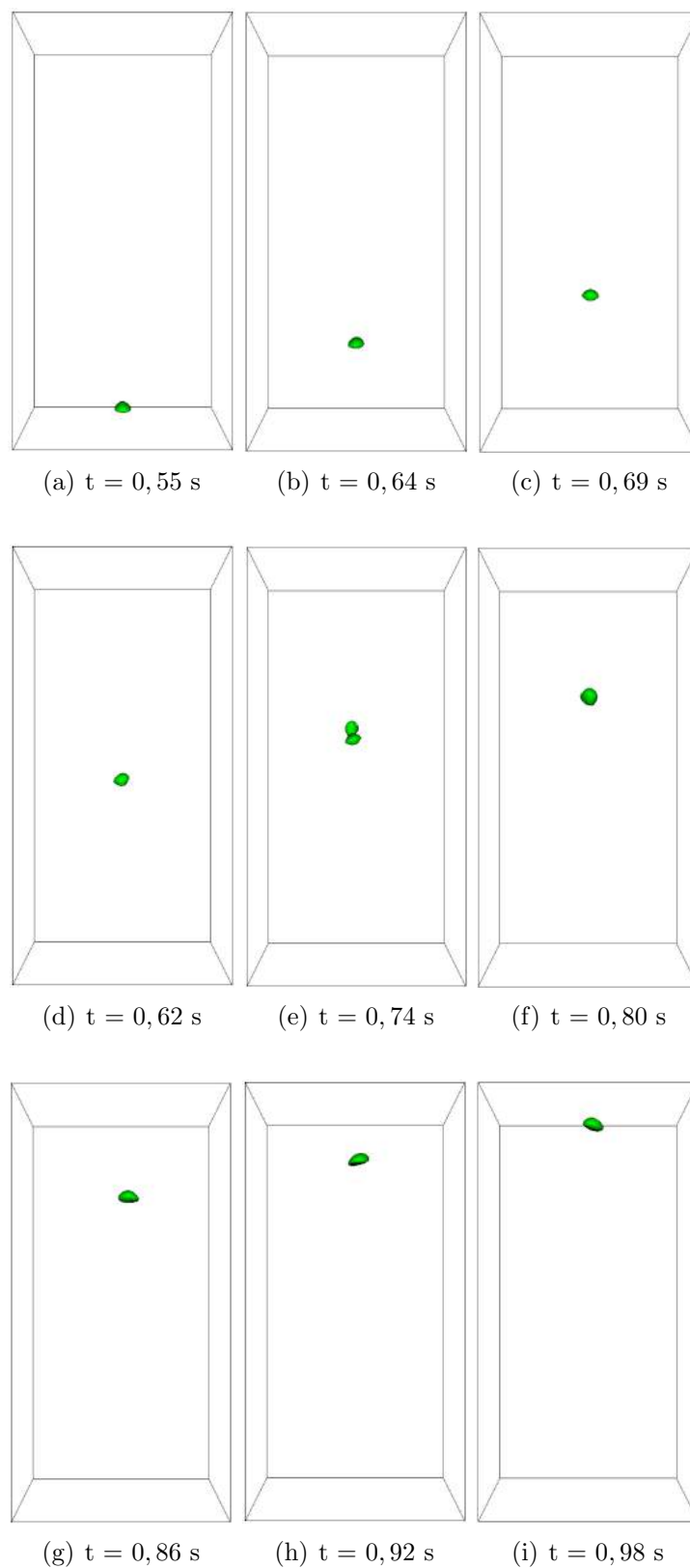


Figura 7.82: Bolha rastreada com o algoritmo de identificação no caso de população de bolhas.

U_{rel} é feita considerando uma região cúbica de aresta igual a $2d_d$, posicionada de forma que os centroides do cubo e da bolha coincidam em todos os passos de tempo utilizados para o cálculo. Apesar de haver uma coalescência da bolha rastreada, o diâmetro utilizado para os cálculos foi considerado como o diâmetro inicial da bolha recém injetada no domínio. O coeficiente de arrasto estimado com o presente resultado foi igual à 0,58. Utilizando a correlação proposta no trabalho de Rusche e Issa (2000), apresentada na Eq. 7.14, juntamente com a correlação para bolhas isoladas de Dijkhuizen *et al.* (2010), é possível estimar um desvio de 24,5%, sendo o valor calculado pela correlação igual à 0,77. Considera-se que o desvio calculado é bastante satisfatório, uma vez que a simulação apresentada é consideravelmente grosseira, condições de parede são utilizadas nas faces laterais e a condição de contorno que realiza a injeção das bolhas influenciam as forças atuantes nas mesmas.

$$C_D = (1 - \psi) \frac{4d_d (\rho_c - \rho_d) g}{3\rho_c \langle U_{rel} \rangle^2}, \quad (7.13)$$

$$\frac{C_{D,pop}}{C_D(1 - \psi)} = \exp(3,64\psi) + \psi^{0,864} \quad (7.14)$$

CAPÍTULO VIII

CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

8.1 Conclusões

Nesta tese, foram apresentados desenvolvimentos e resultados de simulações no escopo de experimentação virtual de escoamentos bifásicos de bolhas ascendentes. O código computacional utilizado para a realização dos experimentos foi o AMR3D, que contempla com uma estratégia de refinamento adaptativo bloco-estruturado (SAMR), método do Volume de Fluido (VOF - *Volume of Fluid* de Hirt e Nichols (1981)) para representação da interface e fases do escoamento e um método de projeção para o acoplamento pressão-velocidade. Nesse código utiliza-se uma discretização espacial de segunda ordem para os termos difusivos, e disponibiliza-se diversas opções de avaliações dos termos advectivos. Para a discretização temporal, utiliza-se um esquema semi-implícito de segunda ordem proposto por Ascher, Ruuth e Wetton (1997). As principais contribuições desse trabalho foram: a proposição e implementação de um algoritmo de identificação de bolhas a partir de um campo escalar que define as fases, como a função coloração do método VOF, um novo critério de refinamento e o uso de VOF em processamento paralelo com malha adaptativa bloco-estruturada (SAMR) em escoamentos de coluna de bolhas. O algoritmo foi desenvolvido para se aplicar em ambientes de cálculos paralelos com memória distribuída e com a presença de malhas compostas do tipo SAMR. Sua disponibilidade permite aos usuários do código realizarem operações em uma bolha em meio à uma população de bolhas, como determinação de forças atuantes,

posicionamento do centroide e até a conversão de bolhas descritas no domínio Euleriano para o domínio Lagrangiano. O novo critério de refinamento localizado foi implementado com o objetivo de buscar uma representação adequada das estruturas do escoamento. O critério foi baseado no trabalho de Fuster *et al.* (2009), e representa um melhoramento aos usuários do código por diminuir o emprego de constantes de ajustes, sendo que apenas uma se faz necessária (ξ).

O presente modelo numérico foi verificado com o método de soluções manufaturadas, e o teste de malha apresentado indica uma taxa de convergência de ordem 2, como esperado. O método também foi verificado através da simulação de um problema com solução analítica, em que uma onda capilar oscilante é amortecida pelos efeitos viscosos do escoamento gerado. Comparando-se as amplitudes de oscilação, foi possível verificar a capacidade de representação consistente da interface. Outro teste de verificação realizado quantificou as correntes espúrias produzidas pelo presente método, que mostraram-se coerentes com resultados da literatura.

Simulações foram realizadas com base no diagrama de Grace (1973), e os regimes de ascensão foram discutidos qualitativamente com base nos adimensionais Re , Eo e Mo . Em geral, os resultados concordaram com as previsões do diagrama. Testes de sensibilidades foram apresentados, onde as influências da malha, tamanho de domínio, razões de massas específicas e constante ξ do critério de refinamento foram demonstradas em um caso de bolha ascendente esférica e outra em regime de *woobling*. Assim, foi possível justificar as configurações (domínio, malha, ξ , razões de massas específicas) dos casos simulados na presente tese. Para os casos simulados com malhas mais refinadas na presente tese, que garantem 32 volumes através do diâmetro inicial das bolhas esféricas, foram quantificadas as evoluções dos números de Reynolds durante a ascensão, as forças de resistência fluidodinâmicas totais e as taxas de variação da quantidade de movimento linear totais contidas nas bolhas e apresentadas as análises dos comportamentos observados.

Coefficientes de arrasto, sustentação e massa virtual foram calculados para comparações com correlações da literatura. Os coeficientes de arrasto calculados registram, em geral, valores mais próximos a correlação de Dijkhuizen *et al.* (2010). Como se trata de uma correlação mais nova e mais aperfeiçoada em relação à correlação de Tomiyama *et al.* (1998),

considera-se satisfatória a melhor aproximação dos presentes resultados com a correlação de Dijkhuizen *et al.* (2010). Os resultados com números de Eötvös mais baixos ($Eo < 0,3$) apresentaram valores com os maiores desvios em relação as correlações experimentais. Isso é atribuído à dificuldade de se simular esses casos com o presente método. Esses são casos em que as forças interfaciais são dominantes, que acabam por amplificar as correntes espúrias e a dificuldade do método em simular com altas razões de massas específicas. Os coeficientes de sustentação foram calculados com base em um experimento onde as bolhas ascendem sob influência de um perfil cisalhante linear. Resultados foram comparados com a correlação de Tomiyama *et al.* (2002), e pode-se observar que os casos com menores números de Eötvös apresentaram os menores desvios. Mesmo com valores consideravelmente diferentes dos obtidos com as correlações, os sentidos de migrações previstos foram consistentes com os obtidos no presente trabalho. Além disso, foi possível obter casos onde se evidenciou a inversão da força transversal com o aumento do diâmetro inicial das bolhas. No entanto serão necessárias investigações para o esclarecimento dos desvios ocorridos nos casos de números de Eötvös mais elevados. Os cálculos realizados para os coeficientes de massa virtual resultaram em valores próximos ao valor clássico de 0,5 de um corpo esférico, principalmente nos casos de maiores números de Eötvös. O experimento realizado consiste em calcular a aceleração inicial de uma bolha esférica liberada do repouso em um meio quiescente, e os resultados foram analisados quanto a influência do refinamento de malha, razões de massas específicas, adimensionais Eo e Mo , e a influência do uso do valor exato da curvatura do corpo esférico. Para os casos de menores números de Eötvös os testes de malha e de razão de massas específicas se mostraram mais influente nos resultados, enquanto que o uso da curvatura exata praticamente não influenciou nos resultados gerados (com exceção do caso com $Eo = 100$ e $Mo = 10$).

Casos de múltiplas bolhas também foram apresentados. Os primeiros casos consistem em duas bolhas liberadas que interagem entre si. Os movimentos resultantes foram comparados com resultados da literatura, onde foi possível observar boa concordância. O algoritmo de identificação de bolhas proposto na presente tese foi testado com o caso descrito, e os valores de volumes calculados apresentaram erros na ordem de erro de máquina quando comparados com valores teóricos, validando, assim, o presente método de identificação.

Dois casos de populações de bolhas ascendentes foram apresentados na última seção de resultados. Utilizou-se o algoritmo de identificação para o rastreamento de uma bolha em meio à população, a qual foi utilizada para uma estimativa de forças fluidodinâmicas atuantes. O caso foi simulado em um domínio não periódico, em que as bolhas eram injetadas no domínio de cálculo por condições de contorno que definem a frequência de injeção. Mesmo resultando em consideráveis influências do contorno nas forças calculadas e condições de paredes nas faces laterais do domínio, foi possível estimar um coeficiente de arrasto para a bolha rastreada com um desvio de 24,5% em relação à correlação de Rusche e Issa (2000), o que é considerado satisfatório para as condições das simulações.

Considerando os resultados apresentados na presente tese, conclui-se que os métodos utilizados neste trabalho, presentes no código AMR3D, estão aptos à serem utilizados em experimentos virtuais investigativos de bolhas ascendentes, isoladas ou em população.

No entanto, melhoramentos ao código são requeridos para se aumentar a eficiência dos cálculos numéricos, principalmente para casos onde a tensão interfacial é dominante.

8.2 Perspectiva de trabalhos futuros

As perspectivas do presente trabalho visa o melhoramento da prática de experimentações virtuais com o código AMR3D e podem ser resumidas nos seguintes itens:

- Realizar a implementação de uma representação matricial do domínio discretizado para o uso de bibliotecas externas para a solução dos sistemas lineares resultantes. Os primeiros avanços podem ser encontrados em Silveira-Neto *et al.* (2016);
- Implementação de condições de contorno periódicas em ambiente paralelo visando o melhoramento de resultados de populações de bolhas;
- Propor novas correlações de coeficientes para forças fluidodinâmicas;
- Estudos adicionais para o melhoramento do modelo bifásico visando os casos onde a tensão interfacial é predominante ($Eu \ll 1$);
- Aplicar o algoritmo de identificação em problemas de conversão Euler-Lagrange.

Referências Bibliográficas

- AL-MASRY, W.; ALI, E.; AQUEEL, Y. Determination of bubble characteristics in bubble columns using statistical analysis of acoustic sound measurements. *Chemical Engineering Research and Design*, v. 83, p. 1196–1207, 2005.
- ALVAREZ, C. M. R. *Simulação computacional adaptativa de escoamentos bifásicos visco-elásticos*. Tese (Doutorado) — Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2013.
- SINT ANNALAND, M. van; DEEN, N.; KUIPERS, J. Numerical simulation of gas bubbles behaviour using a three-dimensional volume of fluid method. *Chemical Engineering Science*, Elsevier, v. 60, n. 11, p. 2999–3011, 2005.
- SINT ANNALAND, M. van; DIJKHUIZEN, W.; DEEN, N.; KUIPERS, J. Numerical simulation of behavior of gas bubbles using a 3-d front-tracking method. *AIChE Journal*, Wiley Online Library, v. 52, n. 1, p. 99–110, 2006.
- ASCHER, U. M.; RUUTH, S. J.; WETTON, B. T. Implicit–explicit methods for time–dependent pde’s. *SIAM J. Numer. Anal.*, v. 32, p. 797–823, 1997.
- AUTON, T. R. The lift on a spherical body in a rotational flow. *J. Fluid Mech.*, v. 183, p. 199–218, 1987.
- BALAY, S.; GROPP, W. D.; MCINNES, L. C.; SMITH, B. F. Efficient management of parallelism in object oriented numerical software libraries. In: ARGE, E.; BRUASET, A. M.; LANGTANGEN, H. P. (Ed.). *Modern Software Tools in Scientific Computing*. [S.l.]: Birkhäuser Press, 1997. p. 163–202.
- BERGER, M. J.; OLIGER, J. Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, v. 53, n. 3, p. 484–512, 1984.
- BHAGA, D.; WEBER, M. E. Bubbles in viscous liquids: shapes, wakes and velocities. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 105, p. 61–85, 1981.
- BOYER, C.; DUQUENNE, A. M.; WILD, G. Measuring techniques in gas-liquid and gas-liquid-solid reactors. *Chemical Engineering Science*, v. 57, p. 3185–3215, 2002.
- Brackbill, J. U., Kothe, D. B. e Zemach, C. A continuum method for modeling surface tension. *J. Computational Physics*, v. 100, p. 335–354, 1992.
- BRENNEN, C. A review of added mass and fluid inertial forces. Department of the Navy, 1982.
- BRERETON, G.; KOROTNEY, D. Coaxial and oblique coalescence of two rising bubbles. *Dynamics of bubbles and vortices near a free surface, AMD*, v. 119, 1991.

BRIENS, L. A.; ELLIS, N. Hydrodynamics of three-phase fluidized bed systems examined by statistical, fractal, chaos and wavelets analysis methods. *Chemical Engineering Science*, v. 60, p. 6094–6106, 2005.

BUNNER, B.; TRYGGVASON, G. Dynamics of homogeneous bubbly flows Part 1. Rise velocity and microstructure of the bubbles. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 466, p. 17–52, 2002.

BUNNER, B.; TRYGGVASON, G. Dynamics of homogeneous bubbly flows part 2. velocity fluctuations. *Journal of Fluid Mechanics*, Cambridge Univ Press, v. 466, p. 53–84, 2002.

BUNNER, B.; TRYGGVASON, G. Effect of bubble deformation on the properties of bubbly flows. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 495, p. 77–118, 2003.

CHABOT, J.; LASA, H. I. de. Gas holdups and bubble characteristics in a bubble column operated at high temperature. *Industrial and Engineering Chemistry Research*, v. 32, p. 2595–2601, 1993.

CHAKRABORTY, I.; BISWAS, G.; GHOSHDASTIDAR, P. A coupled level-set and volume-of-fluid method for the buoyant rise of gas bubbles in liquids. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Elsevier, v. 58, n. 1, p. 240–259, 2013.

CHEN, R. C.; FAN, L. S. Particle image velocimetry for characterizing the flow structures in three-dimensional gas-liquid-solid fluidized beds. *Chemical Engineering Science*, v. 47, p. 3615–3622, 1992.

CHEN, Z.; ZHENG, C.; FENG, Y.; HOFFMANN, H. Local bubble behavior in three-phase fluidized beds. *Canadian Journal of Chemical Engineering*, v. 76, p. 315–318, 1998.

CHESTERS, A. K. The modelling of coalescence processes in fluid-liquid dispersions: a review of current understanding. *J. Comput. Phys.*, v. 114, p. 146–159, 1994.

CHILEKAR, V.; WARNIER, M.; SCHAAF, J. van der; KUSTER, B.; SCHOUTEN, J.; OMMEN, J. van. Bubble size estimation in slurry bubble columns from pressure fluctuations. *A.I.Ch.E.*, v. 51, p. 1924–1937, 2005.

CIMBALA, J. M.; ÇENGEL, Y. A. *Essentials of fluid mechanics: fundamentals and applications*. [S.l.]: McGraw-Hill Higher Education, 2008.

CLIFT, R.; GRACE, J. R.; WEBER, M. E. *Bubbles, Drops and Particles*. New York: Academic Press, 1978.

COX, R. G.; G., M. S. Suspended particles in fluid flow through tubes. *Ann. Rev. Fluid. Mech.*, v. 3, p. 291–316, 1971.

DEEN, N.; SINT ANNALAND, M. van; KUIPERS, J. Multi-scale modeling of dispersed gas-liquid two-phase flow. *Chemical Engineering Science*, v. 59, n. 8, p. 1853 – 1861, 2004. ISSN 0009-2509. <ce:title>Complex Systems and Multi-scale Methodology</ce:title>. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0009250904000971>>.

Deen, N. G.; Hengel, E. I. van den; Sint Annaland, M. van; Kuipers, J. A. Multi-scale modeling of dispersed gas-liquid two-phase flows. In: *5th International Conference on Multiphase Flow, ICMF*. Yokohama: [s.n.], 2004. No K07. Disponível em: <<http://doc.utwente.nl/49616/>>.

DIJKHUIZEN, W.; SINT ANNALAND, M. van; KUIPERS, J. Numerical and experimental investigation of the lift force on single bubbles. *Chemical Engineering Science*, v. 65, n. 3, p. 1274 – 1287, 2010. ISSN 0009-2509. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0009250909007015>>.

DIJKHUIZEN, W.; ROGHAI, I.; ANNALAND, M. V. S.; KUIPERS, J. Dns of gas bubbles behaviour using an improved 3d front tracking model - drag force on isolated bubbles and comparison with experiments. *Chemical Engineering Science*, v. 65, n. 4, p. 1415 – 1426, 2010. ISSN 0009-2509. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0009250909007362>>.

DRAHOS, J.; BRADKA, F.; PUNCOCHAR, M. Fractal behavior of pressure fluctuations in a bubble column. *Chemical Engineering Science*, v. 47, p. 4069–4075, 1992.

DRAHOS, J.; ZAHRAĐNIK, J.; PUNCOCHAR, M.; FIALOVA, M.; BRADKA, F. Effect of operating conditions on the characteristics of pressure fluctuations in a bubble column. *Chemical Engineering and Processing*, v. 29, p. 107–115, 1991.

DREW, D. A. *Mathematical modeling of two-phase flow*. [S.l.], 1982.

DREW, D. A.; LAHEY, R. T. Application of general constitutive principles to the derivation of multidimensional two-phase flow equations. *International Journal of Multiphase Flow*, Elsevier, v. 5, n. 4, p. 243–264, 1979.

DUINEVELD, P. C. The rise velocity and shape of bubbles in pure water at high reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 292, p. 325–332, 1995.

ESMAEELI, A.; TRYGGVASON, G. An inverse energy cascade in two-dimensional low Reynolds number bubbly flows. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 314, p. 315–330, 1996.

ESMAEELI, A.; TRYGGVASON, G. Direct numerical simulations of bubbly flows. Part 1. Low Reynolds number arrays. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 377, p. 313–345, 1998. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1017/S0022112098003176>>.

ESMAEELI, A.; TRYGGVASON, G. Direct numerical simulations of bubbly flows. Part 2. Moderate Reynolds number arrays. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 385, p. 325–358, 1999.

ESMAEELI, A.; TRYGGVASON, G. A direct numerical simulation study of the buoyant rise of bubbles at $O(100)$ Reynolds number. *Physics of Fluids*, AIP, v. 17, n. 9, p. 093303, 2005.

FOKKINK, W. *Distributed Algorithms: An Intuitive Approach*. [S.l.]: MIT Press, 2013.

FORTES, A. F.; JOSEPH, D. D.; LUNDGREN, T. S. Nonlinear mechanics of fluidization of beds of spherical particles. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 177, p. 467–483, 4 1987. ISSN 1469-7645. Disponível em: <[http://journals.cambridge.org/article_S0022112087001046](http://journals.cambridge.org/article/_S0022112087001046)>.

FRIJLINK, J. *Physical aspects of gassed suspension reactors*. Tese (Doutorado) — Delft University of Technology, 1987.

FUSTER, D.; BAGUÉ, A.; BOECK, T.; MOYNE, L. L.; LEBOISSETIER, A.; POPINET, S.; RAY, P.; SCARDOVELLI, R.; ZALESKI, S. Simulation of primary atomization with an octree adaptive mesh refinement and {VOF} method. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 35, n. 6, p. 550 – 565, 2009. ISSN 0301-9322. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0301932209000305>>.

- GERLACH, D.; TOMAR, G.; BISWAS, G.; DURST, F. Comparison of volume-of-fluid methods for surface tension-dominant two-phase flows. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, Elsevier, v. 49, n. 3, p. 740–754, 2006.
- GOLDSMITH, A. J.; MASON, S. G. *The Microrheology of Dispersions*. London: Academic Press, 1967. 82-250 p. (Rheology Theory and Applications, v. 26).
- GRACE, J. Shapes and velocities of bubbles rising in infinite liquids. *Trans IChemE.*, v. 51, p. 116–120, 1973.
- GUEYFFIER, D.; LI, J.; NADIM, A.; SCARDOVELLI, S.; ZALESKI, S. Volume of fluid interface tracking with smoothed surface stress methods for three-dimensional flows. *J. Comput. Phys.*, v. 152, p. 423–456, 1999.
- HADAMART, J. Movement permanent lent d'une sphere liquide et visqueuse dans un liquide visqueux. *Comptes Rendus*, v. 152, p. 1735, 1911.
- HASIMOTO, H. On the periodic fundamental solutions of the Stokes equations and their application to viscous flow past a cubic array of spheres. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 5, p. 317–328, 1959. Disponível em: <<http://adsabs.harvard.edu/abs/1959JFM.....5..317H>>.
- HERRMANN, M. A parallel eulerian interface tracking/lagrangian point particle multi-scale coupling procedure. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 229, n. 3, p. 745–759, 2010.
- HILLS, J. H.; DARTON, R. C. The rising velocity of a large bubble in a bubble swarm. *Transactions of the Institution of Chemical Engineers*, v. 54, p. 258–264, 1976.
- HIRT, C. W.; NICHOLS, B. D. Volume of Fluid (VOF) method for the dynamics of free boundaries. *J. Comput. Phys.*, v. 39, p. 201–225, 1981.
- HUA, J.; LOU, J. Numerical simulation of bubble rising in viscous liquid. *Journal of Computational Physics*, v. 222, p. 769–795, 2007.
- ISHII, M.; CHAWLA, T. C. Local drag laws in dispersed two-phase flow. *ANL*, v. 79, p. 105, 1979.
- JAN, Y.-J. *Computational studies of bubble dynamics*. Tese (Doutorado), 1994.
- JIANG, P.; LIN, T. J.; LUO, X.; FAN, L. S. Visualization of high pressure (21mpa) bubble column: bubble characteristics. *Chemical Engineering Research and Design*, v. 73, p. 269–274, 1995.
- JIN, H.; YANG, S.; GUO, Z.; HE, G.; TONG, Z. The axial distribution holdups in a industrial-scale bubble column with evaluated pressure using gamma-ray attenuation approach. *Chemical Engineering Journal*, v. 115, p. 45–50, 2005.
- JOHNSSON, F.; ZIJERVELD, R. C.; SCHOUTEN, J. C.; BLEEK, C. M. Van den; LECKNER, B. The axial distribution holdups in a industrial-scale bubble column with evaluated pressure using gamma-ray attenuation approach. *Chemical Engineering Journal*, v. 115, p. 45–50, 2005.
- KANAI, A.; MIYATA, H. Numerical simulation of bubbles in a boundary layer by marker-density-function. 1995.

KARIYASAKI, A. Behaviour of a gas bubble in a liquid flow with a linear velocity profile: Series b: Fluid engineering, heat transfer, combustion, power, thermophysical properties. *JSME international journal: bulletin of the JSME*, v. 30, n. 269, p. 1855, 1987.

KENDOUSH, A. A. The virtual mass of a spherical-cap bubble. *Physics of Fluids (1994-present)*, AIP Publishing, v. 15, n. 9, p. 2782–2785, 2003.

KLUYTMANS, J. H. J.; WACHEM, B. G. M. van; KUSTER, B. F. M.; SCHOUTEN, J. C. Gas holdup in a slurry bubble column: influence of electrolyte and carbon particles. *Industrial and Chemistry Research*, v. 40, p. 5326–5333, 2001.

KRISHNA, R.; BATEN, J. M. V. Scaling up bubble column reactors with the aid of {CFD}. *Chemical Engineering Research and Design*, v. 79, n. 3, p. 283–309, 2001. ISSN 0263-8762. Particle Technology. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263876201720485>>.

KUMAR, S. B.; DUDUKOVIC, M. P.; TOSELAND, B. A. Measurement techniques for local and global fluid dynamic quantities in two and three phase systems. *Non-Invasive Monitoring of Multiphase Flows*, p. 1–45, 1997.

KUMAR, S. B.; MOSLEMIAN, D.; DUDUKOVIC, M. P. A gamma-ray tomographic scanner for imaging voidage distribution in two-phase flow systems. *Flow Measurement and Instrumentation*, v. 6, p. 61–73, 1995.

LAHEY, R.; CHENG, L.; DREW, D.; FLAHERTY, J. The effect of virtual mass on the numerical stability of accelerating two-phase flows. *International Journal of Multiphase Flow*, Elsevier, v. 6, n. 4, p. 281–294, 1980.

LAI, M.-C.; PESKIN, C. S. An immersed boundary method with formal second-order accuracy and reduced numerical viscosity. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 160, n. 2, p. 705–719, 2000.

LAM, K. *A Numerical Surface Tension Model for Two-Phase Flow Simulations*. Tese (Doutorado) — Master Thesis in Applied Mathematics, 2009.

LAMB, H. *Hydrodynamics*. [S.l.]: Cambridge university press, 1932.

LANCE, M.; BATAILLE, J. Turbulence in the liquid phase of a uniform bubbly air-water flow. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 222, p. 95–118, jan. 1991.

LAU, Y.; ROGHAIR, I.; DEEN, N.; SINT ANNALAND, M. van; KUIPERS, J. Numerical investigation of the drag closure for bubbles in bubble swarms. *Chemical Engineering Science*, v. 66, n. 14, p. 3309 – 3316, 2011. ISSN 0009-2509. <ce:title>10th International Conference on GasâLiquid and GasâLiquidâSolid Reactor Engineering</ce:title>. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S000925091100073X>>.

LEE, C. H.; ERICKSON, L. E.; GLASGOW, L. A. Bubble breakup and coalescence in turbulent gas-liquid dispersion. *Chemical Engineering Communications*, v. 59, p. 65–84, 1987.

LEE, D. J.; LUO, X.; FAN, L. S. Gas disengagement technique in a slurry bubble column operated in the coalesced bubble regime. *Chemical Engineering Science*, v. 54, p. 2227–2236, 1999.

LEGENDRE, D.; MAGNAUDET, J. The lift on a spherical bubble in a viscous linear shear flow. *J. Fluid Mech.*, v. 368, p. 81–126, 1998.

LEVICH, V. G. Bubble motion at high reynolds numbers. *Zh. Eksp. Teoret. Fiz.*, v. 19, p. 18–24, 1949.

LIMA, R. S. d. *Desenvolvimento e implementação de malhas adaptativas bloco-estruturadas para computação paralela em mecânica dos fluidos*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, 2012.

Lopez, J., Hernandez, J., Gomez, P. e Faura, F. A volume of fluid method based on multidimensional advection and spline interface reconstruction. *J. Comput. Phys.*, v. 195, p. 718–742, 2004.

LUO, H.; SVENDSEN, H. F. Theoretical model for drop and bubble breakup in turbulent dispersions. *AIChE Journal*, v. 42, p. 1225–1233, 1996.

LUO, X.; YANG, G. Q.; LEE, D. J.; FAN, L. S. Single bubble formation in high pressure liquid-solid suspensions. *Powder Technology*, v. 100, 1998.

MATSUURA, A.; FAN, L. S. Distribution of bubble properties in a gas-liquid-solid fluidized bed. *A. I. Ch. E.*, v. 30, p. 894–903, 1984.

MEI, R.; LAWRENCE, C. J.; KLAUSNER, J. F. A note on the history force on a spherical bubble at finite reynolds number. *Phys. Fluids*, v. 6, p. 418–420, 1994.

MILNE, R. B. *An adaptive level set method*. [S.l.], 1995.

MILNE-THOMSON, L. M. *Theoretical hydrodynamics*. [S.l.]: Courier Corporation, 1968.

MIZUKAMI, M.; PARTHASARATHY, R.; FAETH, G. Particle-generated turbulence in homogeneous dilute dispersed flows. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 18, n. 3, p. 397 – 412, 1992. ISSN 0301-9322. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/030193229290024B>>.

MOORE, D. W. The velocity of rise of distorted gas bubbles in a liquid of small viscosity. *J. Fluid Mechanics*, v. 23, p. 749–766, 1965.

NOH W. F. E WOODWARD, P. Simple line interface method. *Lecture Notes in Physics*, v. 24, p. 330–340, 1976.

NÓS, R. L. *Simulações de escoamentos tridimensionais bifásicos empregando métodos adaptativos e modelos de campo de fase*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, 2007.

OSHER, S.; SETHIAN, J. A. Fronts propagation with curvature-dependent speed: algorithms based on hamilton-jacobi formulations. *J. Comput. Phys.*, v. 79, p. 12–49, 1988.

PIVELLO, M. R. *A Fully Adaptive Front-Tracking Method for the Simulation of 3D Two-phase flows*. 131 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, 2012.

POPINET, S. An accurate adaptive solver for surface-tension-driven interfacial flows. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 228, n. 16, p. 5838–5866, 2009.

POPINET, S.; ZALESKI, S. A front-tracking algorithm for accurate representation of surface tension. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Wiley Online Library, v. 30, n. 6, p. 775–793, 1999.

PRANDTL, L. *Essentials of fluid dynamics*. [S.l.]: Blackie, 1952.

PROSPERETTI, A. Motion of two superposed viscous fluids. *Physics of Fluids (1958-1988)*, AIP Publishing, v. 24, n. 7, p. 1217–1223, 1981.

REESE, J.; CHEN, R. C.; FAN, L. S. Three-dimensional particle image velocimetry for use in three-phase fluidization systems. *Experiments in fluids*, v. 19, p. 367–378, 1995.

REESE, J.; JIANG, P.; FAN, L. S. Bubble characteristics in three-phase systems used for pulp and paper processing. *Chemical Engineering Science*, v. 51, p. 2501–2510, 1996.

ROGHAIR, I.; LAU, Y.; DEEN, N.; SLAGTER, H.; BALTUSSEN, M.; ANNALAND, M. V. S.; KUIPERS, J. On the drag force of bubbles in bubble swarms at intermediate and high reynolds numbers. *Chemical Engineering Science*, v. 66, n. 14, p. 3204 – 3211, 2011. ISSN 0009-2509. 10th International Conference on GasâLiquid and GasâLiquidâSolid Reactor Engineering. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0009250911001175>>.

ROY, C. J. Review of code and solution verification procedures for computational simulation. *Journal of Computational Physics*, v. 205, n. 1, p. 131 – 156, 2005. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0021999104004619>>.

Rudman, M. Volume-tracking methods for interfacial flow calculations. *Int. Jour. Numer. Methods Fluids*, v. 24, p. 671–691, 1997.

RUSCHE, H. *Computational Fluid Dynamics of Dispersed Two-Phase Flows at High Phase Fractions*. Tese (Doutorado) — University of London, England, 2002.

RUSCHE, H.; ISSA, R. The effect of voidage on the drag force on particles, droplets and bubbles in dispersed two-phase flow. In: CITESEER. *Japanese European Two-Phase Flow Meeting, Tshkuba, Japan*. [S.l.], 2000.

RUZICKA, M. C.; SIMCIK, M.; PUNCOCHAR, M. How to estimate added mass of a spherical cap body: Two approaches. *Chemical Engineering Science*, Elsevier, v. 134, p. 308–311, 2015.

SANGANI, A.; ACRIVOS, A. Slow flow through a periodic array of spheres. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 8, n. 4, p. 343 – 360, 1982. ISSN 0301-9322. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0301932282900477>>.

SANGANI, A.; ACRIVOS, A. Creeping flow through cubic arrays of spherical bubbles. *International Journal of Multiphase Flow*, v. 9, n. 2, p. 181 – 185, 1983. ISSN 0301-9322. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0301932283900526>>.

SANGANI, A. S.; DIDWANIA, A. K. Dynamic simulations of flows of bubbly liquids at large reynolds numbers. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 250, p. 307–337, 5 1993. ISSN 1469-7645. Disponível em: <<http://journals.cambridge.org/article/S0022112093001478>>.

SCHILLER, L.; NAUMAN, A. A drag coefficient correlation. *VDI Zeitschrift*, v. 77, p. 318–320, 1933.

SEEGER, A.; KERTZCHER, U.; AFFELD, K.; WELLNHOFER, E. Measurement of the local velocity of the solid phase and the local solid hold-up in a three-phase flow by x-ray based particle tracking velocimetry (xptv). *Chemical Engineering Science*, v. 58, p. 1721–1729, 2003.

SEGRÉ, G.; SILBERBERG, A. Radial particle displacement in poiseuille flow of suspensions. *Nature*, v. 189, p. 209–210, 1961.

SEVILLE, J. P. K.; MORGAN, J. E. P.; CLIFT, R. Tomographic determination of the voidage structure of gas fluidized beds in the jet region. *Fluidized V. Engineering Foundation, New York*, p. 87, 1986.

SHIRANI, E.; ASHGRIZ, N.; MOSTAGHIMI, J. Interface pressure calculation based on conservation of momentum for front capturing methods. *Journal of Computational Physics*, Elsevier, v. 203, n. 1, p. 154–175, 2005.

SILVEIRA-NETO, A. *Apostila do Curso de Turbulência nos Fluidos*. Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia - MG: [s.n.], 2016.

SILVEIRA-NETO, A.; PIVELLO, M. R.; SILVA, R. A. P.; KINOSHITA, D.; BARBI, F.; VILLELA, M. F. S.; MARIANO, F. P.; MOREIRA, L. Q. *Projeto: Desenvolvimentos Matemáticos e Numéricos em Escoamentos Bifásicos Tipo Coluna de Bolhas Aplicados a Processos de Refino*. [S.l.], 2016.

SILVEIRA-NETO, A.; ROMA, A. M.; PIVELLO, M. R.; VILLAR, M. M.; SENE, R. *Projeto: Desenvolvimento de Modelagem Matemática e Simulação Numérica para a Análise de Escoamentos Bifásicos Anulares*. [S.l.], 2010.

SILVEIRA-NETO, A.; ROMA, A. M.; PIVELLO, M. R.; VILLAR, M. M.; SENE, R.; LISITA, R.; MACIEL, V. *Projeto: Desenvolvimento de Modelagem Matemática e Simulação Numérica para a Análise de Escoamentos Bifásicos Anulares*. [S.l.], 2010.

SILVEIRA-NETO, A.; ROMA, A. M.; PIVELLO, M. R.; VILLAR, M. M.; SENE, R.; LISITA, R. *Projeto: Desenvolvimento de Modelagem Matemática e Simulação Numérica para a Análise de Escoamentos Bifásicos Anulares*. [S.l.], 2011.

SILVEIRA-NETO, A.; ROMA, A. M.; PIVELLO, M. R.; VILLAR, M. M.; SENE, R.; LISITA, R. *Projeto: Desenvolvimento de Modelagem Matemática e Simulação Numérica para a Análise de Escoamentos Bifásicos Anulares*. [S.l.], 2011, Relatório parcial N.6.

SILVEIRA-NETO, A.; ROMA, A. M.; SILVA, A. L. F. Lima e; PIVELLO, M. R.; VILLAR, M. M. *Projeto: Desenvolvimento de Modelagem Matemática e Simulação Numérica para a Análise de Escoamentos Bifásicos Anulares*. [S.l.], 2009.

SIMCIK, M.; PUNCOCHAR, M.; RUZICKA, M. C. Added mass of a spherical cap body. *Chemical Engineering Science*, Elsevier, v. 118, p. 1–8, 2014.

SIMCIK, M.; RUZICKA, M.; DRAHOŠ, J. Computing the added mass of dispersed particles. *Chemical Engineering Science*, Elsevier, v. 63, n. 18, p. 4580–4595, 2008.

SMEREKA, P. On the motion of bubbles in a periodic box. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 254, p. 79–112, 9 1993. ISSN 1469-7645. Disponível em: <http://journals.cambridge.org/article/_S0022112093002046>.

STENE, J. F. *Numerical Simulation of Interfacial and Multiphase Flows using the Front Tracking Method*. Tese (Doutorado) — National University of Singapore, 2010.

STOLOJANU, V.; PRAKASH, A. Hydrodynamic measurements in a slurry bubble column using ultrasonic techniques. *Chemical Engineering Science*, v. 52, p. 4225–4230, 1997.

SUSSMAN, M.; ALMGREN, A. S.; BELL, J. B.; COLELLA, P.; HOWELL, L. H.; WELCOME, M. L. An adaptive level set approach for incompressible two-phase flows. *Journal of Computational Physics*, v. 148, n. 1, p. 81 – 124, 1999. ISSN 0021-9991. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002199919896106X>>.

SUSSMAN, M.; SMEREKA, P.; OSHER, S. A level set approach for computing solutions in incompressible two-phase flow. *J. Comput. Phys.*, v. 114, p. 146–159, 1994.

TANG, W. T.; FAN, L. S. Hydrodynamics of a three-phase fluidized bed containing low-density particles. *A.I.Ch.E.*, v. 35, p. 335–364, 1989.

TOMAR, G.; FUSTER, D.; ZALESKI, S.; POPINET, S. Multiscale simulations of primary atomization. *Computers & Fluids*, Elsevier, v. 39, n. 10, p. 1864–1874, 2010.

TOMIYAMA, A. Struggle with computational bubble dynamics. *Multiphase Science and Technology*, v. 10, n. 4, p. 369–405, 1998.

TOMIYAMA, A.; CELATA, G.; HOSOKAWA, S.; YOSHIDA, S. Terminal velocity of single bubbles in surface tension force dominant regime. *International Journal of Multiphase Flow*, Elsevier, v. 28, n. 9, p. 1497–1519, 2002.

TOMIYAMA, A.; KATAOKA, I.; ZUN, I.; SAKAGUCHI, T. Drag coefficients of single bubble under normal and micro gravity conditions. *JSME Int. J. Ser. B.*, v. 41, p. 472–479, 1998.

TOMIYAMA, A.; TAMAI, H.; ZUN, I.; HOSOKAWA, S. Transverse migration of single bubbles in simple shear flows. *Chemical Engineering Science*, v. 57, n. 11, p. 1849 – 1858, 2002. ISSN 0009-2509. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0009250902000854>>.

TRUESDELL, G. C.; ELGHOBASHI, S. On the two-way interaction between homogeneous turbulence and dispersed solid particles. II. particle dispersion. *Physics of Fluids*, v. 6, n. 3, p. 1405–1407, 1994.

TRYGGVASON, G.; BUNNER, B.; ESMAEELI, A.; JURIC, D.; AL-RAWAHI, N.; TAUBER, W.; HAN, J.; NAS, S.; JAN, Y. J. A front-tracking method for the computations of multiphase flow. *Journal of Computational Physics*, v. 169, p. 708–759, 2001.

TRYGGVASON, G.; SCARDOVELLI, R.; ZALESKI, S. *Direct Numerical Simulations of Gas-Liquid Multiphase Flows*. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2011.

TSUJI, Y.; MORIKAWA, Y.; SHINOMI, H. Ldv measurements of air-solid two phase flow in a vertical pipe. *J. Fluid Mech.*, v. 139, p. 417–434, 1984.

UNVERDI, S. A.; TRYGGVASON, G. A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows. *Journal of Computational Physics*, v. 100, p. 25–37, 1992.

UNVERDI, S. O.; TRYGGVASON, G. A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows. *Journal of Computational Physics*, v. 100, n. 1, p. 25–37, 1992.

VEERA, U. P.; JOSHI, J. B. Measurement of gas hold-up profiles in bubble column by gamma ray tomography. *Chemical Engineering research and Design*, v. 78, p. 425–434, 2000.

VELDHUIS, C. *Leonardos paradox: path and shape instabilities of particles and bubbles*. Tese (Doutorado) — University of Twente, The Netherlands, 2007.

VILLAR, M. M. *Análise Numérica Detalhada de Escoamentos Multifásicos Bidimensionais*. 277 p. Tese (Doutorado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2007.

WANG, G.; CHING, C. Y. Measurement of multiple gas-bubble velocities in gas-liquid flows using hot-film anemometry. *Experiments in Fluids*, v. 31, p. 428–439, 2001.

WANG, L.-P.; MAXEY, M. R. Settling velocity and concentration distribution of heavy particles in homogeneous isotropic turbulence. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 256, p. 27–68, 11 1993. ISSN 1469-7645.

WANG, Z.; YANG, J.; KOO, B.; STERN, F. A coupled level set and volume-of-fluid method for sharp interface simulation of plunging breaking waves. *International Journal of Multiphase Flow*, 2008.

WARSITO; OHKAWA, M.; KAWATA, N.; UCHIDA, S. Cross-sectional distributions of gas and solid holdups in slurry bubble column investigated by ultrasonic computed tomography. *Chemical Engineering Science*, v. 54, n. 21, p. 4711 – 4728, 1999.

XUE, J.; AL-DAHMAN, M.; DUDUKOVIC, M. P.; MUDDE, R. F. Bubble dynamics measurements using four-point optical probe. *Canadian Journal of Chemical Engineering*, v. 81, p. 375–381, 2003.

YANG, G. Q.; LUO, X.; LAU, R.; FAN, L. S. Bubble formation in high-pressure liquid-solid suspensions with plenum pressure fluctuations. *A.I.Ch.E.*, v. 46, p. 2162–2174, 2000.

YANG X., J. A. J. L. J. Z. X. e. C. V. An adaptive coupled level-set/volume-of-fluid interface capturing method for unstructured triangular grids. *J. Comput. Phys.*, v. 217, p. 364–394, 2006.

YOUNGS, D. L. Time-dependent multi-material flow with large fluid distortion. *Numerical methods for fluid dynamics*, Academic Press, New York, v. 24, n. 2, p. 273–285, 1982.

ZENIT, R.; KOCH, D. L.; SANGANI, A. S. Measurements of the average properties of a suspension of bubbles rising in a vertical channel. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 429, p. 307–342, 2001.

ZENIT, R.; KOCH, D. L.; SANGANI, A. S. Measurements of the average properties of a suspension of bubbles rising in a vertical channel. *Journal of Fluid Mechanics*, v. 429, p. 307–342, 2001.

ZHANG, Y.; BAI, Y.; WANG, H. Cfd analysis of inter-phase forces in a bubble stirred vessel. *Chemical Engineering Research and Design*, n. 0, p. –, 2012. ISSN 0263-8762. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0263876212002687>>.