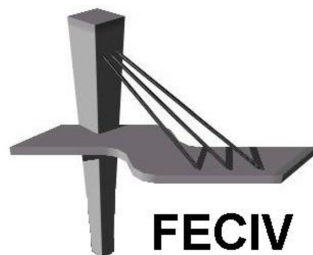


**Dissertação DE MESTRADO**

**MODELOS PARA ANÁLISE DA FORÇA  
CRÍTICA DE FLAMBAGEM EM ARCOS  
CIRCULARES**

**THIAGO DAMASCENO SILVA**

**UBERLÂNDIA, 25 de Agosto de 2016**



**FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL**  
**Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**  
**FACULDADE DE ENGENHARIA CIVIL**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**



**Thiago Damasceno Silva**

## **MODELOS PARA ANÁLISE DA FORÇA CRÍTICA DE FLAMBAGEM EM ARCOS CIRCULARES**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia Civil da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **Mestre em Engenharia Civil**.

**Orientador: Prof. Dr. Francisco Antonio Romero Gesualdo**

Uberlândia, 25 de agosto de 2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

---

S586m      Silva, Thiago Damasceno, 1992-  
2016      Modelos para análise da força crítica de flambagem em arcos  
            circulares / Thiago Damasceno Silva. - 2016.  
            112 f. : il.

Orientador: Francisco Antonio Romero Gesualdo.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.  
Inclui bibliografia.

1. Engenharia civil - Teses. 2. Arcos de concreto - Teses. 3.  
Flambagem (Mecânica) - Teses. 4. Estabilidade estrutural - Teses. I.  
Gesualdo, Francisco Antonio Romero. II. Universidade Federal de  
Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. III.  
Título.

---

CDU: 624



## ATA DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO ACADÊMICO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL - PPGE

**ATA Nº:** 164/2016

**CANDIDATO:** Thiago Damasceno Silva

**Nº. Matrícula:** 11422ECV012

**ORIENTADOR:** Prof. Dr. Francisco Antonio Romero Gesualdo

**TÍTULO:** "Modelos para análise da força crítica de flambagem em arcos circulares".

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO:** Estruturas e Construção Civil

**LINHA DE PESQUISA:** Estruturas

**PROJETO DE PESQUISA:** Sistemas Estruturais Em Madeira Para Aplicações Na Construção Civil

**DATA DA DEFESA:** 25 de agosto de 2016

**LOCAL:** Sala de Projeções, bloco 1Y. **HORÁRIO INÍCIO/TÉRMINO:** 14:10h / 16:20h

Reuniu-se na **Sala de Projeções Prof. Celso Franco de Gouvêa, bloco 1Y - Campus Santa Mônica** da Universidade Federal de Uberlândia, a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do PPGE, assim composta: Professores Doutores: **Rodrigo Gustavo Delalibera – FECIV/UFU; Moacir Kripka – FEAR/UPF e Francisco Antonio Romero Gesualdo** orientador do candidato. Ressalta-se que todos os membros da banca e o aluno participaram in loco.

Iniciando os trabalhos o presidente da mesa **Prof. Dr. Francisco Antonio Romero Gesualdo** apresentou a Comissão Examinadora e concedeu ao discente a palavra para a exposição do trabalho. A seguir, o senhor presidente concedeu a palavra aos examinadores, que passaram a arguir o candidato. Ultimada a arguição, a Banca, em sessão secreta, atribuiu os conceitos finais. Em face do resultado obtido, a Banca Examinadora considerou o candidato APROVADO. Esta defesa de Dissertação de Mestrado Acadêmico é parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre. O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, a legislação pertinente e a regulamentação interna da UFU. Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos e foi lavrada a presente ata que após lida e aprovada foi assinada pela Banca Examinadora.

Professor Orientador: **Prof. Dr. Francisco Antonio Romero Gesualdo – FECIV/UFU**

Membro externo: **Prof. Dr. Moacir Kripka – FEAR/UPF**

Membro interno: **Prof. Dr. Rodrigo Gustavo Delalibera – FECIV/UFU**

Uberlândia, 25 de agosto de 2016.

*À minha mãe Margareth e ao meu irmão  
Écio, dedico este trabalho. Pessoas  
magníficas que em minha vida são como  
pontes sobre águas turbulentas, essenciais  
para travessias bem-sucedidas.*

# AGRADECIMENTOS

---

À minha mãe Margareth e ao meu irmão Écio, por contribuírem efetivamente para minha formação como pessoa e apoiarem a continuidade de meu desenvolvimento. Além de todo amor, dedicação e compreensão que proporcionam em minha vida.

Ao professor orientador Dr. Francisco Antonio Romero Gesualdo, pelo apoio, disposição e confiança, que foram fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. E também pelos sábios ensinamentos, importantes para minha formação.

Aos professores Dr. Moacir Kripka e Dr. Rodrigo Gustavo Delalibera, pelas valiosas contribuições compartilhadas durante a defesa, e também pelos outros conselhos importantes sugeridos.

Aos professores Dr. Arquimedes Diógenes Ciloni e Dra. Maria Cristina Vidigal de Lima, pelas valiosas contribuições oferecidas durante a etapa de qualificação, além das palavras únicas de inspiração.

Ao amigo e professor Anderson Osvaldo Ribeiro, por todo apoio e incentivo na continuação de meus estudos que compartilha desde os meus tempos de graduação.

Aos amigos Henrique Machado Francklin e Victor Ramos Padilha, pela amizade, convivência agradável e apoio durante o curso. Aos demais amigos e colegas de mestrado, pelo apoio e companheirismo.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PPGEC) da Faculdade de Engenharia Civil (FECIV) da Universidade Federal de Uberlândia, que tive a oportunidade de convivência e aprendizado, pelos ensinamentos e aconselhamentos. Aos demais funcionários da FECIV, pela cordialidade no atendimento e disposição para auxiliar continuamente.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES), pelo auxílio financeiro com a concessão de bolsa de estudos.

Silva, T. D. **Modelos para análise da força crítica de flambagem em arcos circulares.** Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Federal de Uberlândia, 2016. 112p.

## RESUMO

---

Neste trabalho foram abordadas formulações para análise da estabilidade estrutural de arcos simétricos, com forma circular, por meio da determinação da força referente ao primeiro modo de flambagem (força crítica). Quatro condições de carregamento foram propostas para análise: força uniformemente distribuída na direção radial, força verticalmente concentrada no meio do vão, força uniformemente distribuída ao longo do vão e força concentrada na direção radial. Três modelos para análise foram desenvolvidos a partir das formulações, sendo um modelo teórico obtido pela resolução da equação diferencial de deslocamento radial, um modelo matricial de análise por autovalor a partir do Método das Forças Elásticas, e um modelo aproximado usando o Método dos Resíduos Ponderados e o Método de Galerkin. O modelo teórico foi desenvolvido para análise de arcos triarticulados, biarticulados e biengastados, enquanto os demais modelos foram voltados à análise de arcos biarticulados. Para comparação dos resultados foram atribuídos valores para o ângulo de abertura do arco e relação flecha/vão a fim de caracterizar coeficientes de flambagem, e realizada simulação numérica em programa computacional baseado no Método dos Elementos Finitos. Foi constatado que os modelos propostos forneceram resultados similares para a análise de arcos biarticulados, e que a relação flecha/vão próxima de 0,3 possibilita valores elevados para os coeficientes de flambagem segundo as condições de carregamento avaliadas, possibilitando ao arco maior eficiência quanto à estabilidade. Também foi desenvolvido um programa computacional destinado à determinação da força crítica de flambagem em arcos circulares.

**Palavras-chave:** Arco. Flambagem. Estabilidade estrutural. Coeficientes de flambagem.

Silva, T. D. **Models for circular arches critical buckling load analysis**. Msc Dissertation, College of Civil Engineering, Federal University of Uberlândia, 2016. 112p.

## ABSTRACT

---

This research presents formulations for structural stability analysis of symmetrical arches with circular shape by determining the load related to the first buckling mode (critical load). Four loading conditions were suggested for analysis: uniform distributed load in the radial direction, concentrated load vertically in the middle of the span, uniform distributed load in the span direction and radial concentrated load. Three models were formulated for analysis, being a theoretical model obtained from the differential radial displacement equation resolution, a matrix model with eigenvalue analysis obtained from the Elastic Loads Method, and an approximate model using the Weighted Residual Method and the Galerkin Method. The theoretical model was developed for three-hinged, two-hinged, and hingeless arch analysis, while the others models were developed for two-hinged arch analysis only. To compare the results were assigned values for the arch's opening angle in order to characterize buckling coefficients, and performed numerical simulation with Finite Element Analysis software. The proposed models provide similar results for the analysis of two-hinged arches, and the rise-to-span ratio almost 0.3 allows high values for buckling coefficients evaluated according to the loading conditions, allowing the arch to be more stability efficiently. It also has developed a software, which enables the critical buckling load calculation of circular arches.

**Keywords:** Arches. Buckling. Structural Stability. Buckling coefficients.



# SÍMBOLOS, ABREVIATURAS E SIGLAS

---

## SÍMBOLOS

$L$	Vão entre apoios
$f$	Altura máxima do arco (flecha)
$R$	Raio
$\alpha$	Ângulo de abertura correspondente a um semiarco
$\theta$	Variável angular
$\varphi$	Variável angular relacionada ao ponto de aplicação da força concentrada
$P$	Força concentrada
$P_{cr}$	Força concentrada crítica
$q$	Força distribuída
$q_{cr}$	Força distribuída crítica
$w$	Deslocamento na direção radial
$\gamma$	Coeficiente de flambagem em relação ao raio do arco
$K$	Coeficiente de flambagem em relação ao vão do arco
$H$	Componente horizontal da reação de apoio do arco (empuxo)
$V$	Componente vertical da reação de apoio do arco
$N$	Esforço normal
$N_{cr}$	Esforço normal crítico
$Q$	Esforço de força cortante
$M$	Momento fletor
$B_w$	Matriz das forças elásticas
$L_m$	Matriz da influência dos momentos
$J$	Matriz identidade
$\lambda$	Autovalor

$\lambda_{m\acute{a}x}$	Autovalor máximo
$\phi$	Função base
$\eta$	Coefficiente de Poisson

## ABREVIATURAS

<i>BIE</i>	Arco biengastado
<i>BIA</i>	Arco biarticulado
<i>TRI</i>	Arco triarticulado

## SIGLAS

<i>EDO</i>	Equação Diferencial Ordinária
<i>MEF</i>	Método dos Elementos Finitos
<i>MFE</i>	Método das Forças Elásticas
<i>MRP</i>	Método dos Resíduos Ponderados
<i>PTV</i>	Princípio dos Trabalhos Virtuais

# SUMÁRIO

---

1	INTRODUÇÃO.....	10
1.1	Considerações preliminares .....	10
1.2	Objetivos.....	12
1.3	Metodologia.....	13
1.4	Relevância do tema e justificativas .....	13
1.5	Estrutura do trabalho .....	14
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	16
2.1	Instabilidade estrutural por flambagem .....	16
2.2	Flexão de barras curvas com eixo circular .....	17
3	FORMULAÇÃO DO MODELO TEÓRICO .....	21
3.1	Introdução .....	21
3.2	Força uniformemente distribuída na direção radial .....	21
3.2.1	Arco biarticulado .....	21
3.2.2	Arco biengastado .....	24
3.2.3	Arco triarticulado.....	26
3.2.4	Coefficientes de flambagem .....	28
3.3	Força verticalmente concentrada no meio do vão .....	30
3.3.1	Arco biarticulado .....	30
3.3.2	Arco biengastado .....	32
3.3.3	Arco triarticulado.....	33
3.3.4	Coefficientes de flambagem .....	35
3.4	Força uniformemente distribuída ao longo do vão .....	36
3.4.1	Arco biarticulado .....	37
3.4.2	Arco biengastado .....	38
3.4.3	Arco triarticulado.....	39
3.4.4	Coefficientes de flambagem .....	41
3.5	Força concentrada na direção radial .....	42
3.5.1	Arco biarticulado .....	43
3.5.2	Arco biengastado .....	44
3.5.3	Arco triarticulado.....	47
3.5.4	Coefficientes de flambagem .....	48
3.6	Programa computacional .....	52
4	FORMULAÇÃO DO MODELO MATRICIAL .....	59
4.1	Introdução .....	59
4.2	Modelo matricial para análise de arco circular biarticulado.....	59
4.2.1	Força uniformemente distribuída na direção radial .....	63
4.2.2	Força verticalmente concentrada no meio do vão .....	64
4.2.3	Força uniformemente distribuída ao longo do vão .....	64
4.2.4	Força concentrada na direção radial .....	65

5	FORMULAÇÃO DO MODELO APROXIMADO .....	68
5.1	Introdução .....	68
5.2	Modelo aproximado para análise de arco circular biarticulado .....	68
5.2.1	Força uniformemente distribuída na direção radial .....	70
5.2.2	Força verticalmente concentrada no meio do vão .....	71
5.2.3	Força uniformemente distribuída ao longo do vão .....	72
5.2.4	Força concentrada na direção radial .....	72
6	SIMULAÇÃO NUMÉRICA .....	75
6.1	Introdução .....	75
6.2	Geração do modelo estrutural .....	75
6.3	Coefficientes de flambagem .....	78
6.3.1	Força uniformemente distribuída na direção radial .....	78
6.3.2	Força verticalmente concentrada no meio do vão .....	80
6.3.3	Força uniformemente distribuída ao longo do vão .....	81
6.3.4	Força concentrada na direção radial .....	82
6.4	Curvas do primeiro modo de flambagem .....	85
7	DISCUSSÃO .....	86
7.1	Introdução .....	86
7.2	Discussão sobre os modelos formulados para o arco biarticulado .....	86
7.3	Discussão sobre o modelo teórico e a simulação numérica .....	87
7.3.1	Força uniformemente distribuída na direção radial .....	87
7.3.2	Força verticalmente concentrada no meio do vão .....	88
7.3.3	Força uniformemente distribuída ao longo do vão .....	90
7.3.4	Força concentrada na direção radial .....	92
7.4	Discussão sobre solicitações desfavoráveis .....	95
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	97
8.1	Comentários gerais .....	97
8.2	Sugestões para trabalhos futuros .....	99
9	REFERÊNCIAS .....	100
	APÊNDICE A: PARÂMETROS GEOMÉTRICOS .....	102
	APÊNDICE B: MÉTODO DAS FORÇAS .....	104
	APÊNDICE C: MÉTODO DAS FORÇAS ELÁSTICAS .....	107

# CAPÍTULO 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 Considerações preliminares

Arcos são elementos estruturais caracterizados por barras curvas submetidas predominantemente a esforços de compressão. Esses elementos permitem notoriamente aliar eficiência mecânica com a beleza arquitetônica.

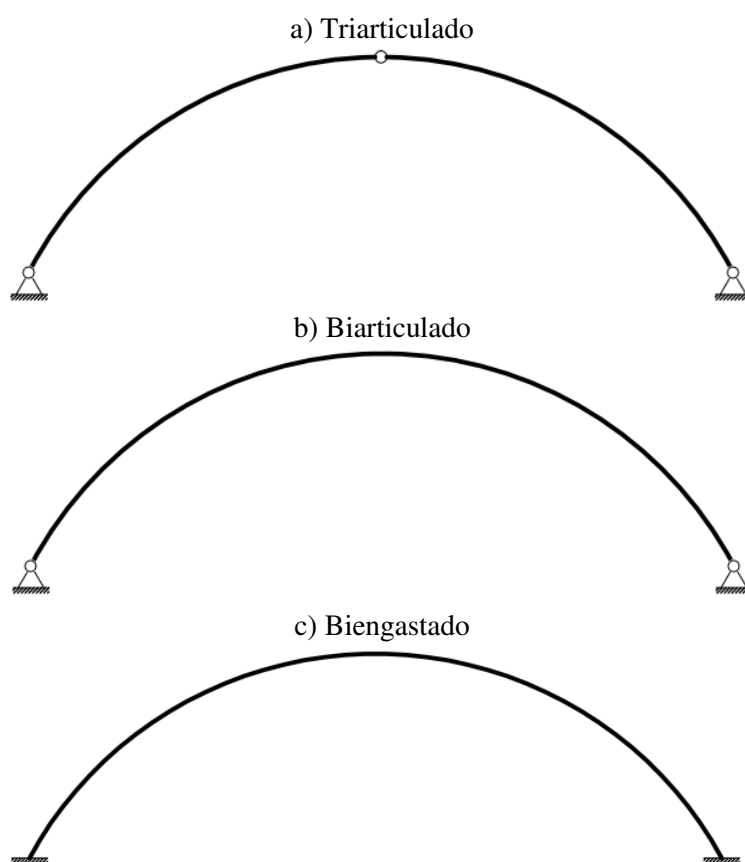
O uso de arcos nas construções civis tem ocorrido desde a Antiguidade, sendo suas principais aplicações encontradas em pontes, coberturas e galpões. Os primeiros arcos foram construídos em pedra, alguns existentes até hoje, como os que foram utilizados para suportar aquedutos romanos. Esses arcos, embora tenham apresentado elevada durabilidade, foram construídos para vencer pequenos vãos, uma vez que os materiais rochosos geralmente possuem baixa resistência à tração e o aumento do vão pode ocasionar maior nível de flexão na estrutura. Atualmente os arcos são construídos em madeira, aço, concreto, polímeros reforçados, ou em composições que envolvem esses materiais, podendo vencer vãos com centenas de metros.

Os arcos geralmente são executados para simular formas geométricas conhecidas, como curvas circulares, parabólicas, elípticas e catenárias. Preliminarmente, são concebidos para coincidir com a forma da linha de pressões da estrutura, quando é sujeito à ação exclusiva de esforços normais. Nesse caso, os esforços de força cortante e flexão são nulos em todas as seções do arco. Porém, a coincidência entre a geometria do arco e a linha de pressões não é aplicável em diversas situações por afetar significativamente sua construção e

estética, devido às variações dos tipos de ações que geralmente atuam na estrutura, como peso próprio, sobrecarga, vento, e, principalmente, cargas móveis no caso de pontes.

A configuração das condições de contorno é outro aspecto que possui relevância no comportamento dos arcos, incluindo a quantidade de articulações presentes no sistema. Na Figura 1.1 são indicados três dos principais sistemas de apoio de arcos, sendo apresentados os sistemas triarticulado, biarticulado e biengastado. Apenas o sistema triarticulado é isostático, os demais são hiperestáticos.

Figura 1.1 – Arcos com diferentes formas de apoio



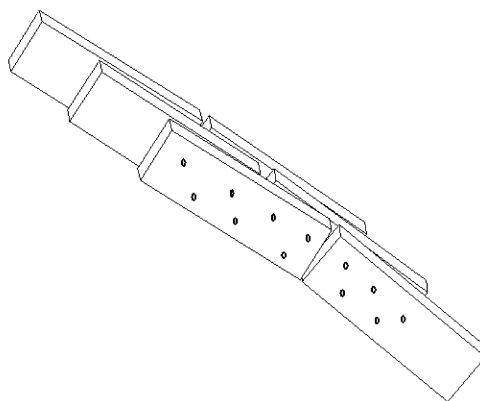
Fonte: Autor

Quando um arco biarticulado ou triarticulado é submetido à ação de forças verticais uniformemente distribuídas ao longo do vão, a forma parabólica do eixo do arco garante que somente forças axiais de compressão apareçam na seção transversal. Dessa maneira, a curvatura parabólica tem importância direta na resistência do arco, que pode ser aplicada em arcos de pontes e coberturas com bastante eficiência. Já arcos com eixo em forma

circular apresentam maior eficiência estrutural quando submetidos a pressões radiais, como mostrado por Litewka e Rakowski (1998). A forma circular também facilita a etapa construtiva, pois o raio é constante ao longo da estrutura.

Na impossibilidade de curvatura, devido às propriedades geométricas ou de rigidez das peças, a estrutura interna do arco pode ser executada por meio de lamelas interligadas por conectores, segundo Gesualdo e Riskowski (1999). Esse sistema é aplicável principalmente na construção de arcos de madeira, podendo apresentar alta eficiência de acordo com a disposição dos conectores e das camadas de lamelas, sendo parte do sistema representado na Figura 1.2.

Figura 1.2 – Arco formado por lamelas verticais



Fonte: Adaptado de Gesualdo e Riskowski (1999)

As estruturas em arco estão sujeitas a efeitos de perda de estabilidade por flambagem, devido aos esforços preponderantes de compressão atuantes na seção transversal. Assim, a análise da estabilidade estrutural é um importante critério a verificar no projeto dessas estruturas, principalmente quando há a presença de elementos esbeltos no sistema. Nesse contexto, este trabalho apresenta um estudo relacionado à instabilidade de arcos circulares por flambagem.

## 1.2 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é indicar modelos para análise da estabilidade estrutural de arcos por meio da determinação da força crítica de flambagem, avaliando a eficácia das formulações e dos resultados alcançados.

Além disso, é proposto o desenvolvimento de um programa computacional que possibilite a determinação de parâmetros relacionados à flambagem de arcos circulares, e que tenha uma interface simples e de fácil acesso.

### **1.3 Metodologia**

É proposta a análise de arcos com forma circular sujeitos a quatro condições de solicitação: força uniformemente distribuída na direção radial, força verticalmente concentrada no meio do vão, força uniformemente distribuída ao longo do vão e força concentrada na direção radial. A análise da força crítica de flambagem é feita em função de coeficientes de flambagem, que são propriedades adimensionais relacionadas à geometria do arco e proporcionais às forças críticas.

Três modelos de análise são formulados: um modelo teórico obtido pela resolução da equação diferencial de deslocamento radial, referente a arcos circulares biarticulados, biengastados e triarticulados; um modelo matricial de análise por autovalor elaborado a partir do Método das Forças Elásticas para análise de arcos biarticulados; e um modelo aproximado desenvolvido conforme a aplicação do Método dos Resíduos Ponderados e o Método de Galerkin, voltado também à análise de arcos biarticulados. O programa computacional MATLAB® é utilizado para auxiliar os cálculos desenvolvidos nesse contexto.

Adicionalmente, é apresentada simulação numérica no programa computacional ANSYS® para comparação dos resultados obtidos a partir do modelo teórico.

### **1.4 Relevância do tema e justificativas**

A análise de estabilidade é uma das etapas fundamentais da análise estrutural, que por sua vez é um dos procedimentos envolvidos no projeto de estruturas. Na análise de estabilidade elástica de uma estrutura estática, é verificado o maior nível de solicitação possível para que sua condição inicial de equilíbrio não seja modificada abruptamente. Essa modificação abrupta do equilíbrio é chamada de instabilidade ou perda de estabilidade, cuja ocorrência pode provocar grandes deformações na estrutura e conduzi-la à ruína.



A teoria da estabilidade elástica de arcos é abordada em livros sobre estabilidade estrutural, sendo possível citar notoriamente nesse contexto Timoshenko e Gere (1961), Bazant e Cedolin (1991), e Sismites e Hodges (2006). Diversos conceitos envolvidos na análise estrutural de arcos são indicados por Karnovsky (2012), inclusive princípios de estabilidade elástica. Porém, em muitos trabalhos somente é apresentada a análise de arcos circulares sujeitos à ação de força uniformemente distribuída na direção radial, e outras condições de carregamento não são avaliadas.

Em âmbito nacional, é possível afirmar que há escassez de trabalhos voltados ao estudo da estabilidade estrutural de arcos. As teses de doutorado de André (1984) e Júnior (1989) são exemplos dos poucos trabalhos nacionais desenvolvidos a partir desse tema.

Apesar das publicações citadas, é perceptível a necessidade de novas abordagens sobre o tema, principalmente devido à análise de arcos sujeitos a condições de carregamento que geralmente são pouco exploradas na literatura. Outro fator refere-se à importância que a análise da estabilidade de estruturas representa no contexto da engenharia em termos de segurança, pois o colapso de estruturas devido à instabilidade pode ocasionar danos materiais elevados e vítimas fatais.

## **1.5 Estrutura do trabalho**

A partir do capítulo introdutório, o trabalho é constituído por sete capítulos e quatro apêndices.

No Capítulo 2 são abordados conceitos fundamentais para análise de flambagem em arcos circulares, a definição da equação diferencial da linha elástica para barras curvas e considerações sobre modos de flambagem.

No Capítulo 3 é apresentada a formulação das forças críticas de flambagem a partir da resolução da equação diferencial da linha elástica para arcos circulares biarticulados, biengastados e triarticulados, sendo esse modelo de análise estabelecido como modelo teórico. Também são indicadas informações a respeito do programa computacional desenvolvido e baseado nesse modelo de análise.

No Capítulo 4 é apresentada a formulação das forças críticas de flambagem em arcos circulares biarticulados a partir de conceitos matriciais baseados no Método das Forças Elásticas e no Método de Smirnov. Esse modelo de análise é denominado modelo matricial.

No Capítulo 5 é apresentada a formulação das forças críticas de flambagem em arcos circulares biarticulados a partir do Método dos Resíduos Ponderados e Método de Galerkin. Esse modelo de análise é denominado modelo aproximado.

No Capítulo 6 são indicadas simulações numéricas para determinação da força crítica de flambagem em arcos circulares biarticulados, biengastados e triarticulados no programa computacional ANSYS.

No Capítulo 7 são discutidos os resultados alcançados e demais considerações sobre o conteúdo.

No Capítulo 8 são abordadas as conclusões do estudo e recomendações para trabalhos futuros.

No Apêndice A são verificados parâmetros geométricos relacionados à forma circular dos arcos.

No Apêndice B são abordados tópicos sobre o Método das Forças e sua aplicação em arcos hiperestáticos.

No Apêndice C são indicados fundamentos e aplicações do Método das Forças Elásticas.

# CAPÍTULO 2

## REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 Instabilidade estrutural por flambagem

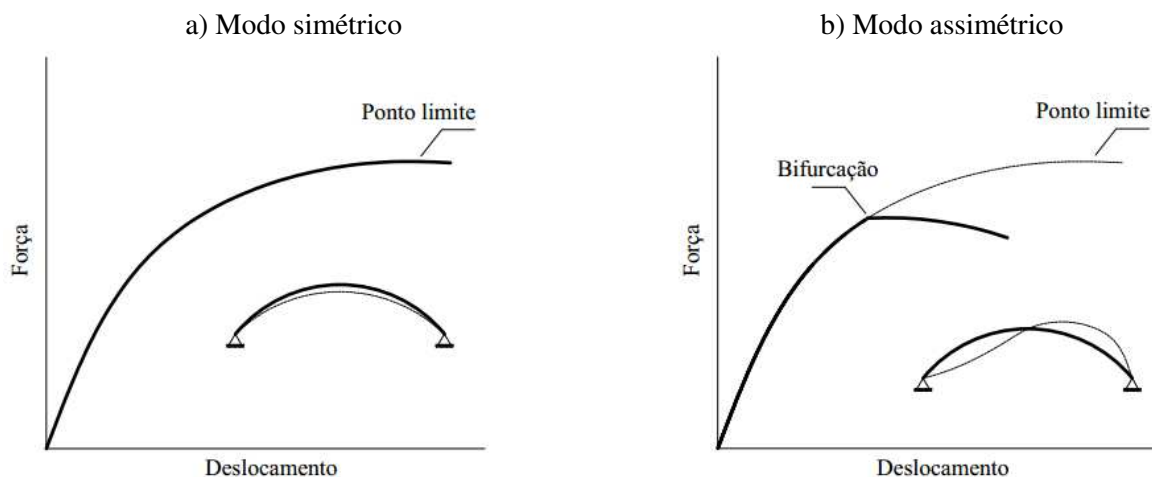
A instabilidade estrutural por flambagem é um fenômeno preocupante que deve ser evitado no projeto de estruturas, uma vez que pode ocorrer ainda durante o regime elástico do material. Nos arcos, a instabilidade ocorre por flambagem dentro ou fora do plano da estrutura. A flambagem dentro do plano é associada à combinação entre esforços de compressão e flexão, enquanto a flambagem fora do plano é caracterizada pela combinação entre esforços de compressão, flexão e torção (ZIEMIAN, 2010). A flambagem fora do plano pode ser evitada ao aplicar sistemas adequados para travamento, anulando possíveis torções do arco.

A configuração da deformação referente à flambagem no próprio plano dos arcos pode ocorrer de modo simétrico ou assimétrico com curvas espelhadas, conforme ilustrado na Figura 2.1. A configuração resultante depende do tipo de solicitação suportada pelo arco e suas condições de contorno.

Segundo Xanthakos (2010), arcos simétricos submetidos a solicitações também simétricas de pequena magnitude apresentam, inicialmente, perfil simétrico de deformação. O arco eventualmente se torna instável de modo simétrico quando há a possibilidade da curva força-deslocamento alcançar o ponto limite (Figura 2.1a), cuja tangente se torna horizontal. Apesar disso, o arco pode se tornar instável de forma assimétrica caso haja a ocorrência de bifurcação na curva força-deslocamento, não alcançando dessa forma o ponto limite. A

força crítica de flambagem é, portanto, referente à força associada ao ponto de bifurcação (flambagem assimétrica) ou ao ponto limite (flambagem simétrica).

Figura 2.1 – Instabilidade estrutural no próprio plano de arcos



Fonte: Adaptado de Xanthakos (2010)

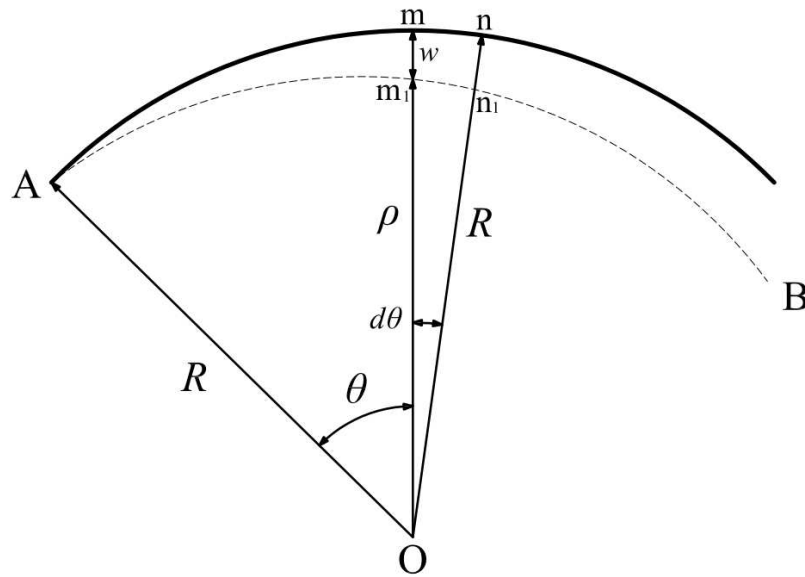
Os conceitos referentes à flambagem de arcos são desenvolvidos a partir da teoria de flexão de barras curvas, que define a equação diferencial dos deslocamentos nessas estruturas. Com a resolução dessa equação diferencial é possível obter a força crítica de flambagem.

## 2.2 Flexão de barras curvas com eixo circular

Os procedimentos para caracterização de flexão de uma barra curva com eixo circular são indicados por Timoshenko e Gere (1961), e são citados nessa seção. Outros autores, como Bazant e Cedolin (1991), Simitses e Hodges (2006) e Karnovsky (2012), também demonstram procedimentos similares.

Supõe-se que uma barra curva simétrica com eixo circular, compreendida entre o trecho *AB* na Figura 2.2, é levemente flexionada em seu próprio plano. Assume-se que a espessura da barra é pequena quando comparada a seu raio inicial, que é denominado por  $R$  ao longo de qualquer ponto da barra. O raio de curvatura após o deslocamento da estrutura é definido por  $\rho$  e o ângulo de abertura até a linha central é representado, nesse caso, por  $\theta$ .

Figura 2.2 – Barra curva levemente flexionada



Fonte: Adaptado de Timoshenko e Gere (1961)

A relação entre a magnitude do momento fletor atuante, a rigidez flexional e a variação na curvatura da barra é expressa na Equação 2.1.

$$\left( \frac{1}{\rho} - \frac{1}{R} \right) = -\frac{M}{E \cdot I} \quad \text{Equação 2.1}$$

Um elemento compreendido entre os pontos  $m$  e  $n$  na Figura 2.2 possui comprimento inicial indicado na Equação 2.2 e curvatura inicial representada na Equação 2.3.

$$ds = R \cdot \theta \quad \text{Equação 2.2}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{R} \quad \text{Equação 2.3}$$

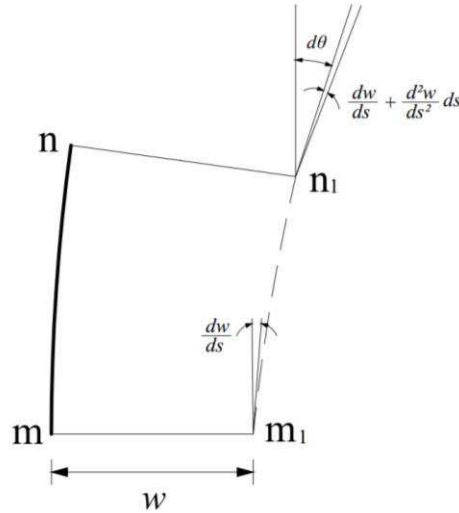
Uma vez que a barra é fletida, há a ocorrência de deslocamentos radiais e tangenciais. Os deslocamentos na direção tangencial são desconsiderados por terem intensidade muito pequena para a configuração levemente deformada. O sinal positivo será aplicado aos deslocamentos radiais quando estes forem direcionados ao centro de curvatura.

A curvatura após a flexão da barra é definida na Equação 2.4, de forma análoga à Equação 2.3.

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta + \Delta d\theta}{ds + \Delta ds} \quad \text{Equação 2.4}$$

Sendo que  $ds + \Delta ds$  representa o comprimento do elemento  $m_1n_1$ , e  $d\theta + \Delta d\theta$  é a curvatura entre ambos os pontos. Os elementos  $mn$  e  $m_1n_1$  são melhor representados na Figura 2.3.

Figura 2.3 – Elementos  $mn$  e  $m_1n_1$



Fonte: Adaptado de Timoshenko e Gere (1961)

O ângulo  $dw/ds$  é abrangido entre a reta perpendicular ao raio e a tangente traçada com relação ao ponto  $m_1$  (Figura 2.3). O pequeno ângulo  $\Delta d\theta$ , referente à  $n_1$ , é indicado na Equação 2.5.

$$\Delta d\theta = \frac{dw}{ds} + \frac{d^2w}{ds^2} \cdot ds \quad \text{Equação 2.5}$$

Uma vez que  $dw/ds$  é considerado muito pequeno para a leve variação no comprimento dos elementos, o ângulo  $\Delta d\theta$  pode ser novamente exposto na Equação 2.6.

$$\Delta d\theta = \frac{d^2w}{ds^2} \cdot ds \quad \text{Equação 2.6}$$

O comprimento do elemento  $m_1n_1$  é identificado geometricamente com base nas Figuras 2.2 e 2.3 (Equação 2.7).

$$ds_{m1n1} = ds + \Delta ds = (R - w) \cdot d\theta \quad \text{Equação 2.7}$$

A variação de comprimento  $\Delta ds$  é apresentada na Equação 2.8, desenvolvida a partir da Equação 2.3 e da Equação 2.7.

$$\Delta ds = -w \cdot d\theta$$

$$\Delta ds = -\frac{w \cdot ds}{R} \quad \text{Equação 2.8}$$

A Equação 2.9 é alcançada ao substituir  $\Delta d\theta$  (Equação 2.6) e  $\Delta ds$  (Equação 2.8) na expressão da curvatura após a flexão da barra (Equação 2.4).

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta + \frac{d^2 w}{ds^2} \cdot ds}{ds \cdot \left(1 - \frac{w}{R}\right)} \quad \text{Equação 2.9}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} \cdot \left(1 + \frac{w}{R}\right) + \frac{d^2 w}{ds^2}$$

A Equação 2.10 é determinada a partir da substituição da Equação 2.9 na expressão que relaciona a variação da curvatura com o momento atuante (Equação 2.1), sendo o deslocamento representado em função da variável de comprimento ou da variável angular.

$$\frac{d^2 w}{ds^2} + \frac{w}{R^2} = -\frac{M}{E \cdot I} \quad \text{Equação 2.10}$$

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = -\frac{M \cdot R^2}{E \cdot I}$$

Segundo Timoshenko e Gere (1961), a Equação 2.10 é considerada a equação diferencial da elástica de barras curvas fletidas com eixo circular. É importante verificar que quando  $R$  tende ao infinito, a elevação do arco tende a zero e a Equação 2.10 recai na equação diferencial da elástica para barras prismáticas.

# CAPÍTULO 3

## FORMULAÇÃO DO MODELO TEÓRICO

### 3.1 Introdução

Nos arcos circulares a força crítica de flambagem pode ser obtida conforme a resolução da equação diferencial da elástica de barras curvas fletidas com eixo circular, em que a magnitude da força é isolada.

Dessa forma, nessa seção são obtidas as forças críticas de flambagem em arcos circulares submetidos à força uniformemente distribuída na direção radial e à força verticalmente concentrada no meio do vão. São analisados arcos biarticulados, biengastados e triarticulados. As propriedades do material e da geometria da seção transversal são consideradas constantes. As componentes das reações nas extremidades dos arcos hiperestáticos (biarticulados e biengastados) foram determinadas a partir do Método das Forças, que é abordado na Apêndice B.

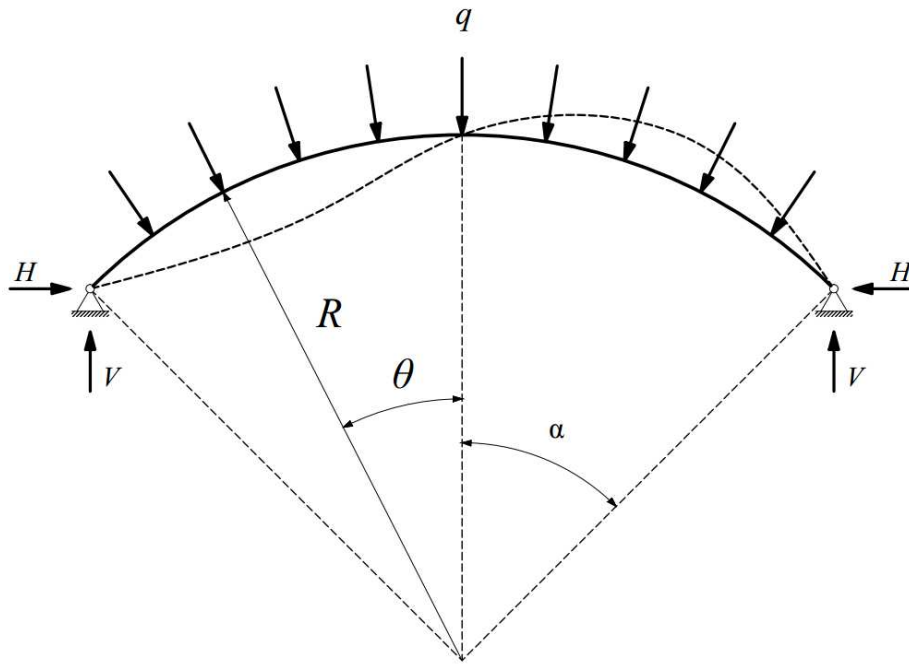
### 3.2 Força uniformemente distribuída na direção radial

#### 3.2.1 Arco biarticulado

Considerado um arco circular e simétrico com extremidades articuladas, submetido à força uniformemente distribuída na direção radial, o provável primeiro modo de flambagem é de natureza assimétrica conforme ilustrado na Figura 3.1 pela linha tracejada. Nessa hipótese é considerado que há inflexão da curva no ponto médio, referente ao ponto mais alto do arco (coroa).



Figura 3.1 – Flambagem de arco circular biarticulado submetido à força uniformemente distribuída na direção radial



Fonte: Autor

A geometria inicial do arco é funicular à força distribuída, logo o arco é internamente solicitado por compressão pura. O descolamento radial  $w$  em direção ao centro é indicado na Equação 3.1, considerando o momento originado a partir do esforço axial de compressão e o próprio deslocamento radial após a solicitação da estrutura (Equação 3.2).

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = -\frac{N \cdot w \cdot R^2}{E \cdot I} \quad \text{Equação 3.1}$$

$$M = N \cdot w \quad \text{Equação 3.2}$$

A variável  $N$  refere-se ao esforço axial de compressão atuante no arco e é representado na Equação 3.3. Neste caso, o esforço axial é constante ao longo de todo o arco.

$$N = q \cdot R \quad \text{Equação 3.3}$$

Para simplificação, a notação apresentada na Equação 3.4 é adotada para uma constante  $k$ .

$$k^2 = 1 + \frac{N \cdot R^2}{E \cdot I}$$

$$k^2 = 1 + \frac{q \cdot R^3}{E \cdot I}$$
Equação 3.4

É possível obter a Equação 3.5 ao substituir a constante  $k$  (Equação 3.4) na Equação 3.1.

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + k^2 \cdot w = 0$$
Equação 3.5

A Equação 3.6 é considerada a solução geral do deslocamento na direção radial, obtida por meio da resolução da Equação Diferencial Ordinária (EDO) apresentada na Equação 3.5.

$$w = A \cdot \text{sen}(k \cdot \theta) + B \cdot \cos(k \cdot \theta)$$
Equação 3.6

Devido às articulações, o deslocamento radial é nulo em ambas as extremidades ( $w = 0$ ). Na extremidade esquerda, tem-se que  $\theta = 0$  e, conseqüentemente,  $B = 0$ . Na extremidade direita, o ângulo é representado por  $\theta = \alpha$  e deve satisfazer a condição  $w = 0$ . Se  $A = 0$ , a solução é dita trivial, logo é desconsiderada. Se  $A$  não é um número nulo, então o seno deve ser igual à zero para atender a condição (Equação 3.7). O menor valor atribuído a  $k$  é indicado na Equação 3.8, para que o seno do ângulo e, portanto, o deslocamento radial sejam nulos nas extremidades e na metade do arco.

$$\text{sen}(\alpha \cdot k) = 0$$
Equação 3.7

$$k = \frac{\pi}{\alpha}$$
Equação 3.8

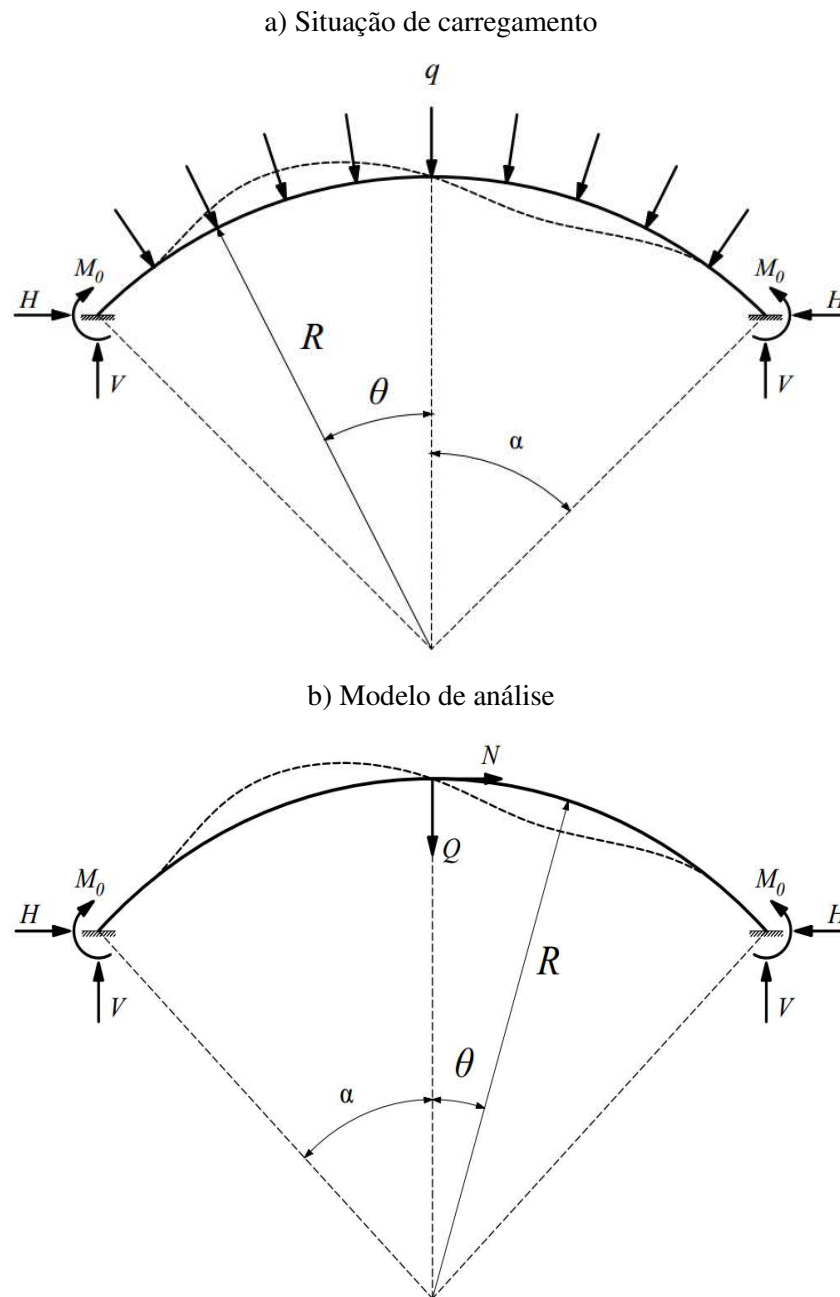
A obtenção da Equação 3.9 ocorre com a substituição da constante  $k$  na Equação 3.8 pelo que foi atribuído na Equação 3.4, e também pelo isolamento da força distribuída. Tal força, que passa a ser denominada por  $q_{cr}$ , é considerada a força crítica de flambagem.

$$q_{cr} = \frac{E \cdot I}{R^3} \cdot \left( \frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right)$$
Equação 3.9

### 3.2.2 Arco biengastado

Se as extremidades fossem engastadas, o procedimento para determinação da força crítica de flambagem é adotado a partir do esquema considerado na Figura 3.2. As variáveis  $N$  e  $Q$  representam os esforços axiais e de cisalhamento, respectivamente.

Figura 3.2 – Flambagem de arco circular biengastado submetido à força uniformemente distribuída na direção radial



Fonte: Autor

A expressão geral do momento fletor é definida na Equação 3.10, considerando a análise a partir da metade do arco.

$$M = N \cdot w - Q \cdot R \cdot \text{sen}(\theta) \quad \text{Equação 3.10}$$

A equação diferencial da curva de deflexão para esse caso é definida na Equação 3.11.

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w = - \left( \frac{N \cdot w \cdot R^2 - Q \cdot R^3 \cdot \text{sen}(\theta)}{E \cdot I} \right) \quad \text{Equação 3.11}$$

A Equação 3.11 é simplificada usando a notação  $k$  indicada na Equação 3.4, resultando na Equação 3.12.

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + k^2 \cdot w = \frac{Q \cdot R^3 \cdot \text{sen}(\theta)}{E \cdot I} \quad \text{Equação 3.12}$$

A solução geral da EDO (Equação 3.12) é expressa na Equação 3.13.

$$w = A \cdot \text{sen}(k \cdot \theta) + B \cdot \cos(k \cdot \theta) + \frac{Q \cdot R^3 \cdot \text{sen}(\theta)}{(k^2 - 1) \cdot E \cdot I} \quad \text{Equação 3.13}$$

As condições de contorno do sistema são indicadas na Equação 3.14.

$$\begin{aligned} w &= 0 & \text{para } \theta &= 0 \\ w &= \frac{dw}{d\theta} = 0 & \text{para } \theta &= \alpha \end{aligned} \quad \text{Equação 3.14}$$

Conforme a primeira condição verificada na Equação 3.14, tem-se  $B = 0$ . As demais substituições são reveladas na Equação 3.15.

$$A \cdot \text{sen}(k \cdot \alpha) + \frac{Q \cdot R^3 \cdot \text{sen}(\alpha)}{(k^2 - 1) \cdot E \cdot I} = 0 \quad \text{Equação 3.15}$$

$$A \cdot k \cdot \cos(k \cdot \alpha) + \frac{Q \cdot R^3 \cdot \cos(\alpha)}{(k^2 - 1) \cdot E \cdot I} = 0$$

A Equação 3.16 é obtida a partir da Equação 3.15 ao isolar uma expressão na outra. Pode-se notar que não é necessário conhecer o esforço de cisalhamento para a resolução do sistema de equações.

$$k \cdot \tan(\alpha) \cdot \cot(k \cdot \alpha) = 1 \quad \text{Equação 3.16}$$

Valores para  $k$  podem ser obtidos conforme seja atribuída a magnitude do ângulo de abertura. Na Tabela 3.1 são indicados alguns valores para  $k$  de acordo com esse critério.

Tabela 3.1 – Valores de  $k$  conforme  $\alpha$

$\alpha$	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$k$	17,183	8,621	5,782	4,375	3,542	3,0

Fonte: Adaptado de Karnovsky (2012)

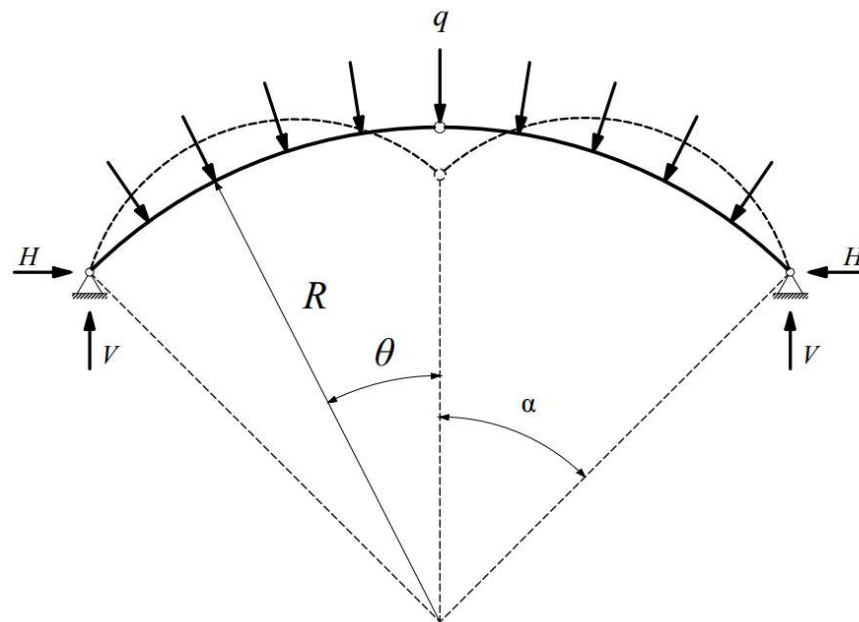
No arco biengastado submetido à força uniformemente distribuída na direção radial o esforço normal atuante é o mesmo (Equação 3.3). Dessa forma, a Equação 3.17 é obtida ao substituir o valor de  $k$  na Equação 3.4 e isolar a força distribuída, agora também denominada por  $q_{cr}$  e que se refere ao menor valor crítico para a ocorrência de flambagem.

$$q_{cr} = \frac{E \cdot I}{R^3} \cdot (k^2 - 1) \quad \text{Equação 3.17}$$

### 3.2.3 Arco triarticulado

No caso do arco triarticulado submetido à força uniformemente distribuída na direção radial (Figura 3.3), ao contrário dos arcos biarticulados e biengastados, o primeiro modo predominante de flambagem é considerado simétrico (KARNOVSKY, 2012).

Figura 3.3 – Flambagem de arco circular triarticulado submetido à força uniformemente distribuída na direção radial



Fonte: Autor

A força crítica de flambagem, no caso do arco triarticulado, é indicada na Equação 3.18.

$$q_{cr} = \frac{E \cdot I}{R^3} \cdot \left[ \left( \frac{2\eta}{\alpha} \right)^2 - 1 \right] \quad \text{Equação 3.18}$$

A variável  $\eta$  pode ser obtida numericamente pela relação indicada na Equação 3.19, em função do ângulo de abertura.

$$\frac{\tan(\eta) - \eta}{\eta^3} = 4 \cdot \frac{(\tan(\alpha) - \alpha)}{\alpha^3} \quad \text{Equação 3.19}$$

Valores para  $\eta$  são identificados na Tabela 3.2 de acordo com alguns intervalos atribuídos ao ângulo de abertura.

Tabela 3.2 – Valores de  $\eta$  conforme  $\alpha$

$\alpha$	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$\eta$	1,369	1,387	1,417	1,458	1,510	1,571

Fonte: Adaptado de Karnovsky (2012)

### 3.2.4 Coeficientes de flambagem

As Equações 3.9, 3.17 e 3.18 podem ser simplificadas, sendo os termos indicados entre parênteses substituídos pelo coeficiente de flambagem  $\gamma_1$  (Equação 3.20). Coeficientes de flambagem também são descritos como forças críticas adimensionais.

$$q_{cr} = \gamma_1 \cdot \frac{E \cdot I}{R^3} \quad \text{Equação 3.20}$$

A força crítica de flambagem em função de outro coeficiente de flambagem ( $K_1$ ) é indicada na Equação 3.21. O coeficiente de flambagem  $K_1$  é considerado mais adequado para padronizar a análise da força crítica de acordo com o ângulo de abertura ou a relação flecha/vão do arco, uma vez que a variação do coeficiente corresponde fielmente à variação da força. Ambos os coeficientes são parâmetros adimensionais.

$$q_{cr} = K_1 \cdot \frac{E \cdot I}{L^3} \quad \text{Equação 3.21}$$

O coeficiente  $K_1$  pode ser obtido a partir do coeficiente  $\gamma_1$  (Equação 3.22), considerando a equivalência do raio pelo vão na Equação 3.20.

$$K_1 = 8 \cdot \gamma_1 \cdot (\text{sen}(\alpha))^3 \quad \text{Equação 3.22}$$

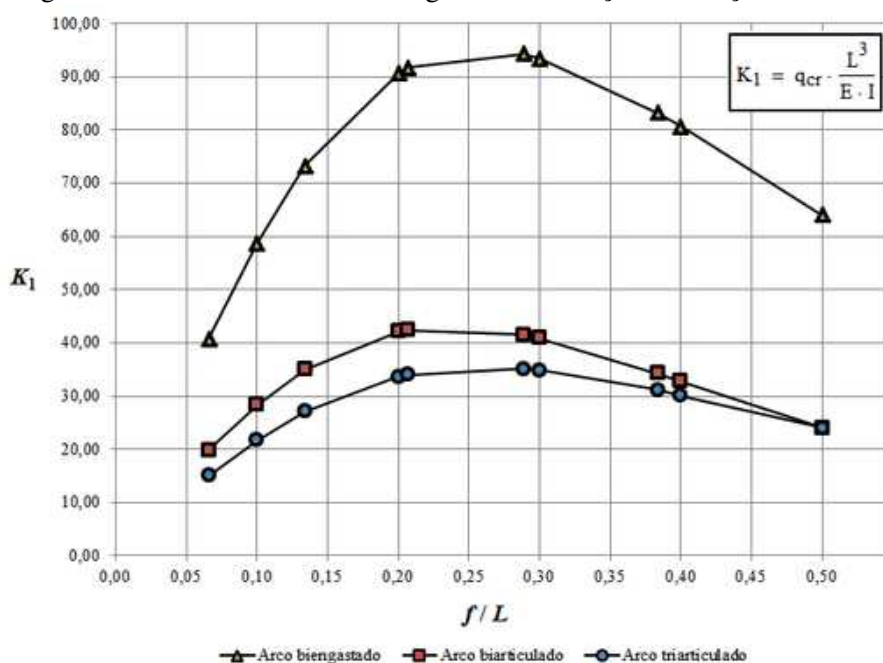
Na Tabela 3.3 são verificados diversos valores para os parâmetros  $\gamma_1$  e  $K_1$  em função do ângulo de abertura  $\alpha$  e da relação flecha/vão, agrupados entre as condições de contorno analisadas. Os valores foram atribuídos de maneira que a variação do ângulo de abertura total não superasse 30°, e 0,1 no caso da relação flecha/vão. As abreviações BIE, BIA e TRI são utilizadas para indicar os arcos biengastados, biarticulados e triarticulados, respectivamente. É observado que quanto maior a quantidade de articulações no sistema, menor é o coeficiente  $K_1$  e, conseqüentemente, a força crítica de flambagem para um mesmo ângulo de abertura.

Tabela 3.3 – Coeficientes de flambagem determinados a partir do modelo teórico para arcos circulares submetidos à força uniformemente distribuída na direção radial

$2\alpha$ graus	$f/L$	$\gamma_1$			$K_1$		
		BIE	BIA	TRI	BIE	BIA	TRI
30,00	0,0658	294,26	143,00	108,38	40,81	19,83	15,03
45,24	0,1000	129,21	62,32	47,64	58,81	28,37	21,68
60,00	0,1340	73,32	35,00	27,07	73,32	35,00	27,07
87,21	0,2000	34,55	16,04	12,81	90,67	42,10	33,61
90,00	0,2071	32,43	15,00	12,02	91,73	42,43	34,00
120,00	0,2887	18,14	8,00	6,75	94,26	41,57	35,09
123,86	0,3000	17,01	7,45	6,34	93,50	40,93	34,86
150,00	0,3837	11,55	4,76	4,32	83,24	34,32	31,17
154,64	0,4000	10,86	4,42	4,06	80,67	32,83	30,14
180,00	0,5000	8,00	3,00	3,00	64,00	24,00	24,00

Fonte: Autor

Os valores indicados na Tabela 3.3 para o coeficiente de flambagem  $K_1$  também são representados no gráfico da Figura 3.4, em que é traçada sua curva de variação em função da relação flecha/vão para cada classe de arco. É importante notar que se fossem ilustrados os valores de  $\gamma_1$ , a variação das curvas indicadas no gráfico seria decrescente e não corresponderia à variação proporcional da força crítica de flambagem conforme o ângulo de abertura ou a relação flecha/vão do arco.

Figura 3.4 – Coeficiente de flambagem  $K_1$  em função da relação flecha/vão

Fonte: Autor



### 3.3 Força verticalmente concentrada no meio do vão

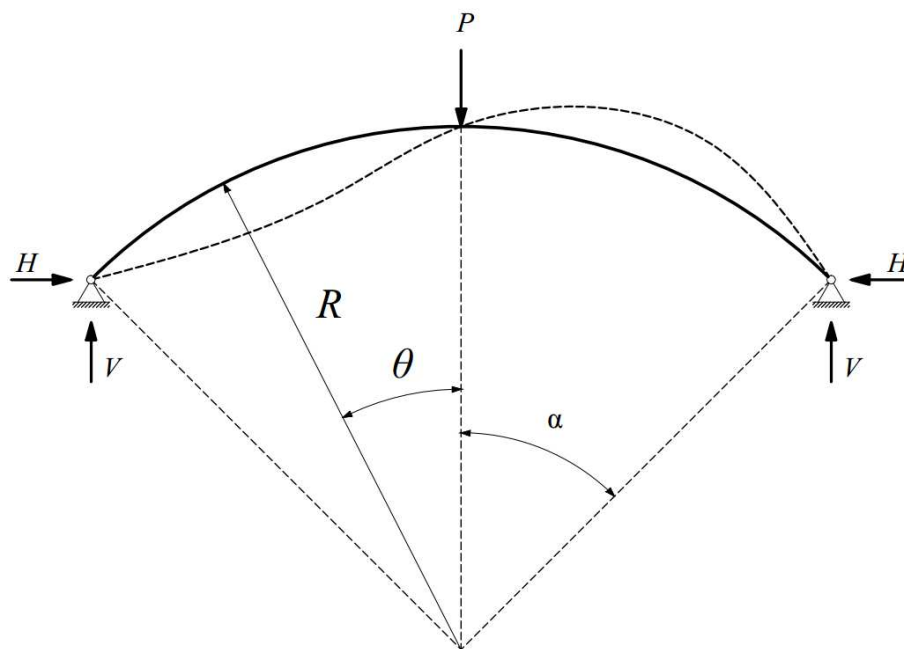
No caso de arcos circulares solicitados por força verticalmente concentrada no meio do vão, o processo para determinação da força crítica de flambagem é similar ao que foi fundamentado na situação de carregamento anteriormente indicada.

Ao contrário do caso anterior, porém, a ação da força concentrada provocará momento fletor de primeira ordem nas seções do arco. Para análise da estabilidade elástica, no entanto, é adotada a hipótese de que esses momentos de primeira ordem são desconsiderados na resolução da equação diferencial do deslocamento radial, uma vez que sua influência pode ser pequena na determinação da força crítica (XU et al., 2014).

#### 3.3.1 Arco biarticulado

Para o arco biarticulado submetido à força verticalmente concentrada no meio do vão (Figura 3.5), a equação do deslocamento radial é a mesma que a indicada na Equação 3.6. O momento fletor atuante também pode ser definido como  $M = N \cdot w$ .

Figura 3.5 – Flambagem de arco circular biarticulado submetido à força concentrada no meio do vão



Fonte: Autor

O esforço normal crítico que atua no arco é indicado na Equação 3.23. Essa equação pode ser obtida a partir da Equação 3.4 e da Equação 3.8, após a resolução da EDO verificada na Equação 3.5.

$$N_{cr} = \frac{E \cdot I}{R^2} \cdot \left( \frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) \quad \text{Equação 3.23}$$

O esforço normal crítico ocorre nas extremidades do arco biarticulado submetido à força concentrada verticalmente no meio do vão e é indicado na Equação 3.24.

$$N = V \cdot \text{sen}(\alpha) + H \cdot \cos(\alpha) \quad \text{Equação 3.24}$$

As reações de apoio são iguais nas duas extremidades devido à simetria da estrutura e do carregamento atuante. As componentes nas direções vertical e horizontal da reação em uma das extremidades do arco são verificadas na Equação 3.25, obtidas a partir do Método das Forças.

$$V = \frac{P}{2}$$

$$H = P \cdot \frac{\left( 2 \cdot \cos(\alpha) - 3 \cdot \cos(\alpha)^2 - \alpha \cdot \text{sen}(2 \cdot \alpha) + 1 \right)}{4 \cdot \alpha - 3 \cdot \text{sen}(2 \cdot \alpha) + 2 \cdot \alpha \cdot \cos(2 \cdot \alpha)} \quad \text{Equação 3.25}$$

Por meio dos parâmetros indicados nessas equações, a força concentrada  $P$  pode ser isolada em função das propriedades físicas e geométricas do arco na Equação 3.23, resultando na Equação 3.26. Essa força passa a ser denominada por  $P_{cr}$  e corresponde ao primeiro modo de flambagem do arco.

$$P_{cr} = \frac{E \cdot I}{R^2} \cdot \left[ \frac{\left( \frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right)}{\frac{\text{sen}(\alpha)}{2} + \frac{\cos(\alpha) \cdot \left( 2 \cdot \cos(\alpha) - 3 \cdot \cos(\alpha)^2 - \alpha \cdot \text{sen}(2 \cdot \alpha) + 1 \right)}{4 \cdot \alpha - 3 \cdot \text{sen}(2 \cdot \alpha) + 2 \cdot \alpha \cdot \cos(2 \cdot \alpha)}} \right] \quad \text{Equação 3.26}$$

### 3.3.2 Arco biengastado

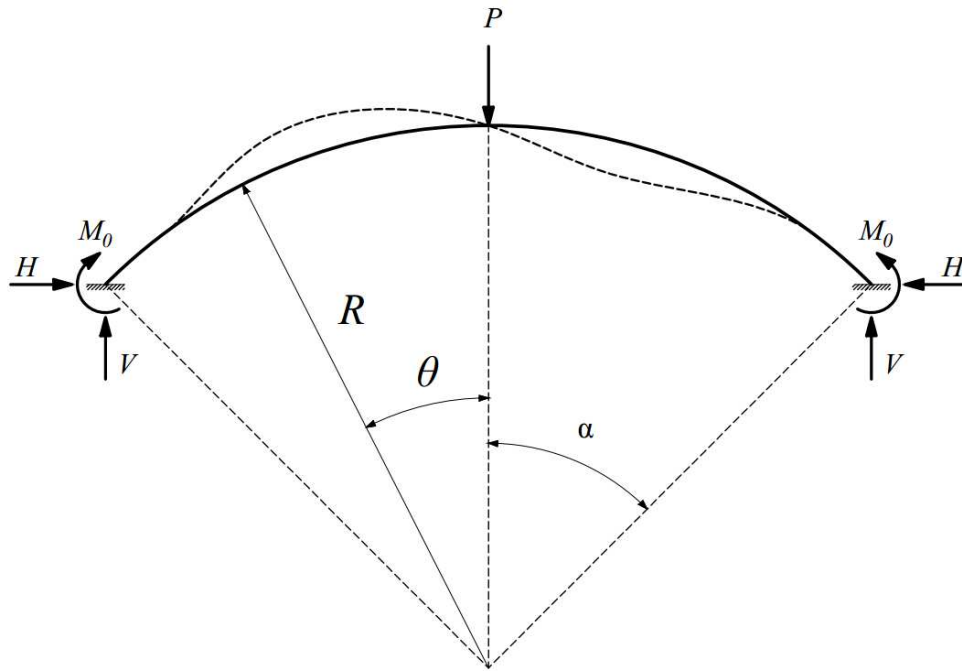
Se as extremidades do arco fossem engastadas (Figura 3.6), nesse caso as componentes da reação nas direções vertical e horizontal são verificadas na Equação 3.27, bem como o momento de engaste. Esses parâmetros também são obtidos com a aplicação do Método das Forças.

$$V = \frac{P}{2}$$

$$H = P \cdot \frac{(\cos(\alpha) - 1) \cdot (\alpha - 2 \cdot \sin(\alpha) + \alpha \cdot \cos(\alpha))}{4 \cdot \cos(\alpha)^2 + 2 \cdot \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - 4} \quad \text{Equação 3.27}$$

$$M_0 = P \cdot \frac{a_i + b_i}{c_i}$$

Figura 3.6 – Flambagem de arco circular biengastado submetido à força concentrada no meio do vão



Fonte: Autor

Para efeito de simplificação, as constantes  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$  são indicadas na Equação 3.28, respectivamente.

$$\begin{aligned}
 a_i &= -2R \left( \cos(\alpha) - \cos(\alpha)^2 - \cos(\alpha)^3 + \cos(\alpha)^4 + \alpha^2 \cdot \cos(\alpha)^3 - \alpha \cdot \sin(\alpha) \right) \\
 b_i &= 2R \left( -\alpha^2 + \alpha^3 \cdot \sin(\alpha) + 2 \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - \alpha \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)^2 \right) \\
 c_i &= 2 \cdot \sin(2 \cdot \alpha) - 5 \cdot \alpha - \sin(4 \cdot \alpha) + \alpha \cdot \cos(2 \cdot \alpha)^2 + 4 \cdot \alpha^3 + 4 \cdot \alpha \cdot \cos(2 \cdot \alpha)
 \end{aligned} \quad \text{Equação 3.28}$$

No arco biengastado sujeito a esse carregamento, o esforço normal crítico também ocorre nas extremidades e é definido igualmente pela Equação 3.24. O esforço normal crítico é indicado na Equação 3.29, a partir da Equação 3.4.

$$N_{cr} = \frac{E \cdot I}{R^2} \cdot (k^2 - 1) \quad \text{Equação 3.29}$$

A variável  $k$  é obtida de acordo com a resolução numérica da Equação 3.16, como indicado na seção anterior.

A força concentrada  $P$  pode ser isolada em função das propriedades físicas e geométricas do arco biengastado pela substituição do esforço normal na Equação 3.29, resultando na Equação 3.30.

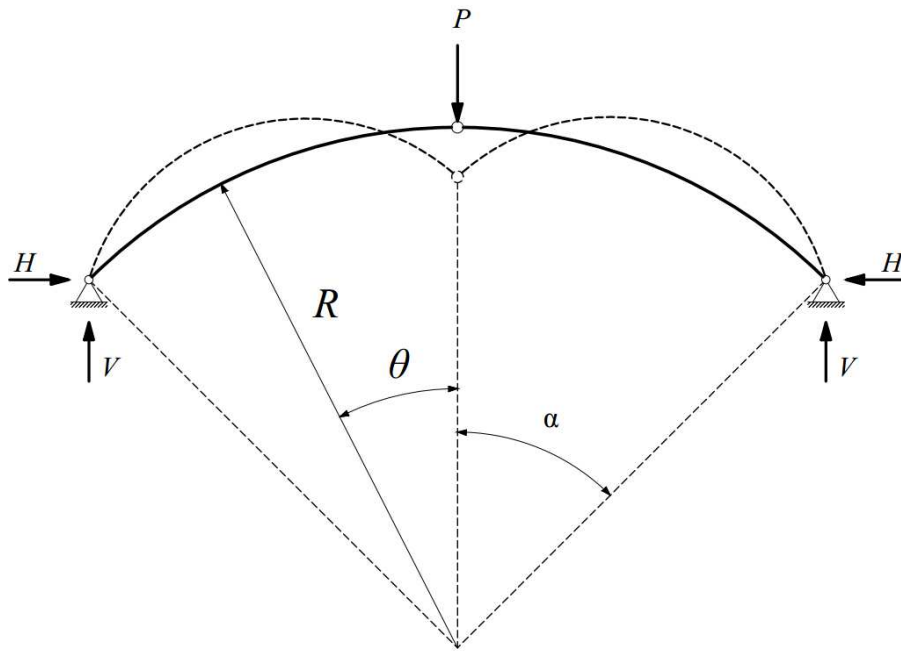
$$P_{cr} = \frac{E \cdot I}{R^2} \cdot \left[ \frac{(k^2 - 1)}{\frac{\sin(\alpha)}{2} + \frac{(\cos(\alpha)^2 - \cos(\alpha)) \cdot (\alpha - 2 \cdot \sin(\alpha) + \alpha \cdot \cos(\alpha))}{4 \cdot \cos(\alpha) + 2 \cdot \alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) - 4}} \right] \quad \text{Equação 3.30}$$

### 3.3.3 Arco triarticulado

No caso do arco triarticulado (Figura 3.7), as componentes da reação nas direções vertical e horizontal são verificadas na Equação 3.31.

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{P}{2} \\
 H &= P \cdot \frac{\sin(\alpha)}{2 - 2\cos(\alpha)}
 \end{aligned} \quad \text{Equação 3.31}$$

Figura 3.7 – Flambagem de arco circular triarticulado submetido à força concentrada no meio do vão



Fonte: Autor

O esforço normal nas extremidades também é definido pela Equação 3.24 no caso do arco triarticulado. O esforço normal crítico é indicado na Equação 3.32, a partir da Equação 3.4, substituindo a variável  $k$  pelo mesmo que foi admitido na Equação 3.18.

$$N_{cr} = \frac{E \cdot I}{R^2} \cdot \left[ \left( \frac{2\eta}{\alpha} \right)^2 - 1 \right] \quad \text{Equação 3.32}$$

A variável  $\eta$  é obtida de acordo com a resolução numérica da Equação 3.19, como verificado na seção anterior.

A força concentrada  $P$  pode ser isolada em função das propriedades físicas e geométricas do arco triarticulado (Equação 3.33), pela substituição do esforço normal na Equação 3.32.

$$P_{cr} = \frac{E \cdot I}{R^2} \cdot \left[ \frac{\left( \frac{4\eta^2}{\alpha^2} - 1 \right)}{\frac{\sin(\alpha)}{2} + \frac{\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)}{2 - 2\cos(\alpha)}} \right] \quad \text{Equação 3.33}$$

### 3.3.4 Coeficientes de flambagem

Em geral, as mesmas considerações indicadas para o coeficiente de flambagem no caso do arco submetido à força uniformemente distribuída na direção radial também são válidas.

As Equações 3.26, 3.30 e 3.33 podem ser simplificadas, sendo os termos indicados entre parênteses substituídos por  $\gamma_2$  (Equação 3.34).

$$P_{cr} = \gamma_2 \cdot \frac{E \cdot I}{R^2} \quad \text{Equação 3.34}$$

A força crítica em função de outro coeficiente de flambagem  $K_2$  é indicada na Equação 3.35.

$$P_{cr} = K_2 \cdot \frac{E \cdot I}{L^2} \quad \text{Equação 3.35}$$

O coeficiente  $K_2$  pode ser obtido a partir do coeficiente  $\gamma_2$  (Equação 3.36), considerando a equivalência do raio pelo vão na Equação 3.34.

$$K_2 = 4 \cdot \gamma_2 \cdot (\text{sen}(\alpha))^2 \quad \text{Equação 3.36}$$

Valores referentes ao coeficiente de flambagem  $K_2$  são observados na Tabela 3.4 para as condições de contorno analisadas, determinados a partir da atribuição de valores para o ângulo de abertura  $\alpha$  e a relação flecha/vão.

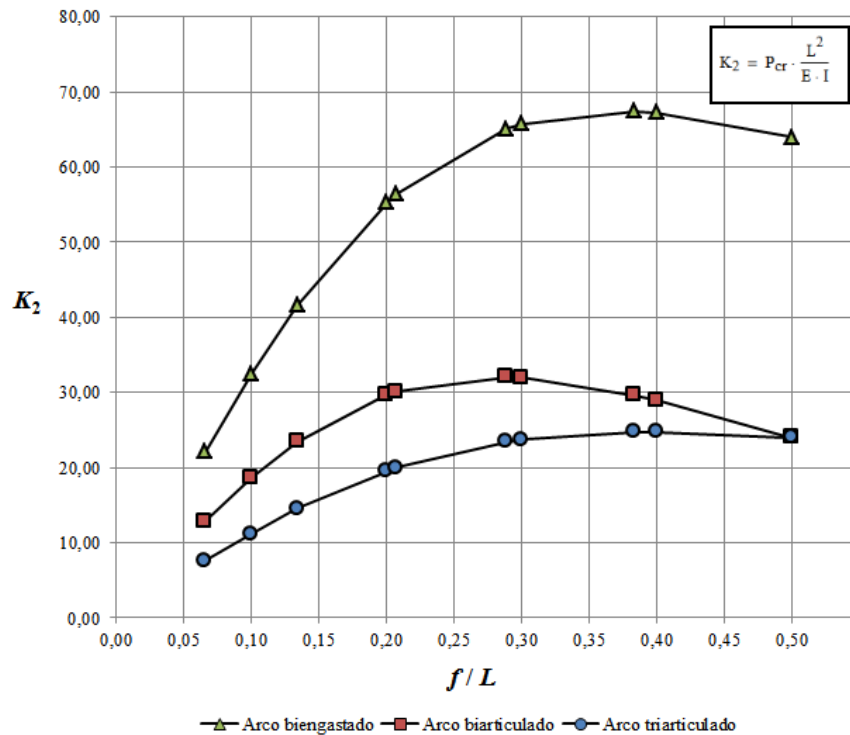
Tabela 3.4 – Coeficientes de flambagem determinados a partir do modelo teórico para arcos circulares submetidos à força concentrada verticalmente no meio do vão

$2\alpha$ graus	$f/L$	$\gamma_2$			$K_2$		
		BIE	BIA	TRI	BIE	BIA	TRI
30,00	0,0658	82,50	47,91	28,54	22,11	12,84	7,65
45,24	0,1000	54,91	31,48	18,84	32,49	18,63	11,15
60,00	0,1340	41,61	23,43	14,51	41,61	23,43	14,51
87,21	0,2000	29,04	15,59	10,25	55,25	29,66	19,50
90,00	0,2071	28,20	15,05	9,96	56,40	30,10	19,92
120,00	0,2887	21,71	10,69	7,80	65,13	32,07	23,40
123,86	0,3000	21,12	10,27	7,61	65,77	31,98	23,70
150,00	0,3837	18,07	7,94	6,63	67,44	29,63	24,74
154,64	0,4000	17,67	7,60	6,49	67,27	28,94	24,71
180,00	0,5000	16,00	6,00	6,00	64,00	24,00	24,00

Fonte: Autor

De forma análoga, os valores indicados na Tabela 3.4 para o coeficiente  $K_2$  também são representados no gráfico da Figura 3.8, cuja variação é dada em função da relação flecha/vão.

Figura 3.8 – Coeficiente de flambagem  $K_2$  em função da relação flecha/vão



Fonte: Autor

### 3.4 Força uniformemente distribuída ao longo do vão

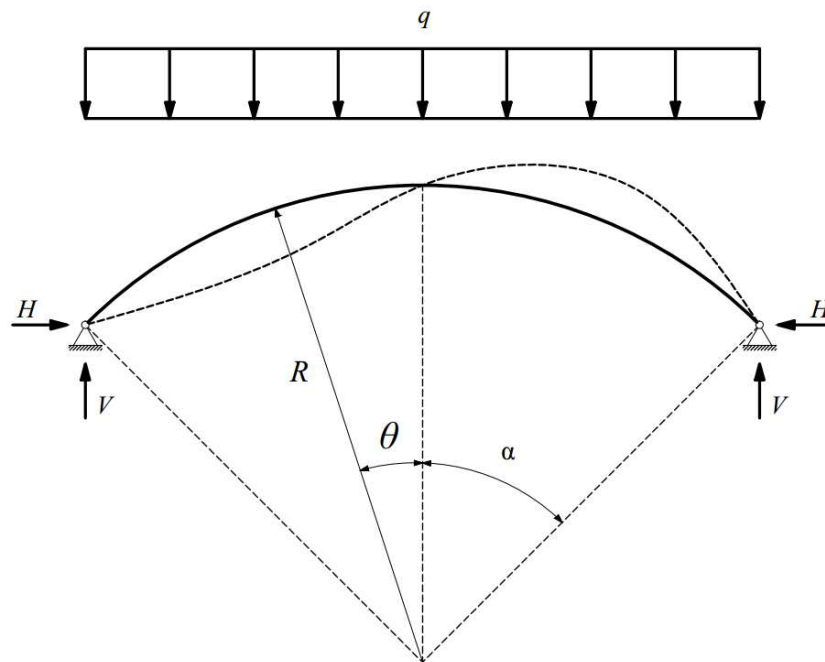
No caso de arcos circulares submetidos à ação de força uniformemente distribuída ao longo do vão, o processo para determinação da força crítica de flambagem também é similar ao que foi descrito anteriormente.

Assim como no caso anterior, a força distribuída provocará momento fletor nas seções do arco. Neste caso, também é adotada a hipótese em que esses momentos de primeira ordem são desconsiderados na resolução da equação diferencial do deslocamento radial.

### 3.4.1 Arco biarticulado

Para o arco biarticulado submetido à força uniformemente distribuída ao longo do vão (Figura 3.9), a equação diferencial do deslocamento radial é a mesma que a apresentada na Equação 3.5.

Figura 3.9 – Flambagem de arco circular biarticulado submetido à força uniformemente distribuída ao longo do vão



Fonte: Autor

O esforço normal crítico que atua no arco equivale ao mesmo indicado na Equação 3.23. Nesse caso, o esforço normal crítico ocorre nas extremidades do arco biarticulado, sendo também indicado na Equação 3.24.

As reações de apoio são iguais nas duas extremidades devido à simetria da estrutura e do carregamento atuante. As componentes nas direções vertical e horizontal das reações são indicadas na Equação 3.37.

$$V = q \cdot R \cdot \sin(\alpha)$$

$$H = q \cdot R \cdot \frac{6 \cdot \alpha \cdot \cos(\alpha)^3 - 7 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)^2 - 3 \cdot \alpha \cdot \cos(\alpha) + 4 \cdot \sin(\alpha)}{12 \cdot \alpha \cdot \cos(\alpha)^2 - 18 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + 6 \cdot \alpha} \quad \text{Equação 3.37}$$



Por meio dos parâmetros indicados nessas equações, a força distribuída  $q$  pode ser isolada em função das propriedades físicas e geométricas do arco na Equação 3.23. A Equação 3.38 é obtida, e a força denominada por  $q_{cr}$  corresponde ao primeiro modo de flambagem do arco.

$$q_{cr} = \frac{E \cdot I}{R^3} \cdot \left[ \frac{\left( \frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right)}{\frac{\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha) \cdot \frac{6\alpha \cdot \cos(\alpha)^3 - 7\sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)^2 - 3\alpha \cdot \cos(\alpha) + 4\sin(\alpha)}{12 \cdot \alpha \cdot \cos(\alpha)^2 - 18 \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + 6 \cdot \alpha}} \right] \quad \text{Equação 3.38}$$

### 3.4.2 Arco biengastado

Se as extremidades do arco fossem engastadas (Figura 3.10), nesse caso as componentes da reação nas direções vertical e horizontal são verificadas na Equação 3.39, assim como o momento de engaste.

$$V = q \cdot R \cdot \sin(\alpha)$$

$$H = q \cdot R \cdot \frac{3 \cdot \cos(\alpha)^3 + 2 \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)^2 - 3 \cdot \cos(\alpha) + \alpha \cdot \sin(\alpha)}{12 \cdot \cos(\alpha)^2 + 6 \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + 6 \cdot \alpha^2 - 12} \quad \text{Equação 3.39}$$

$$M_0 = q \cdot R^2 \cdot \frac{a_i + b_i}{c_i}$$

As constantes  $a_i$ ,  $b_i$  e  $c_i$  são indicadas na Equação 3.40 para efeito de simplificação.

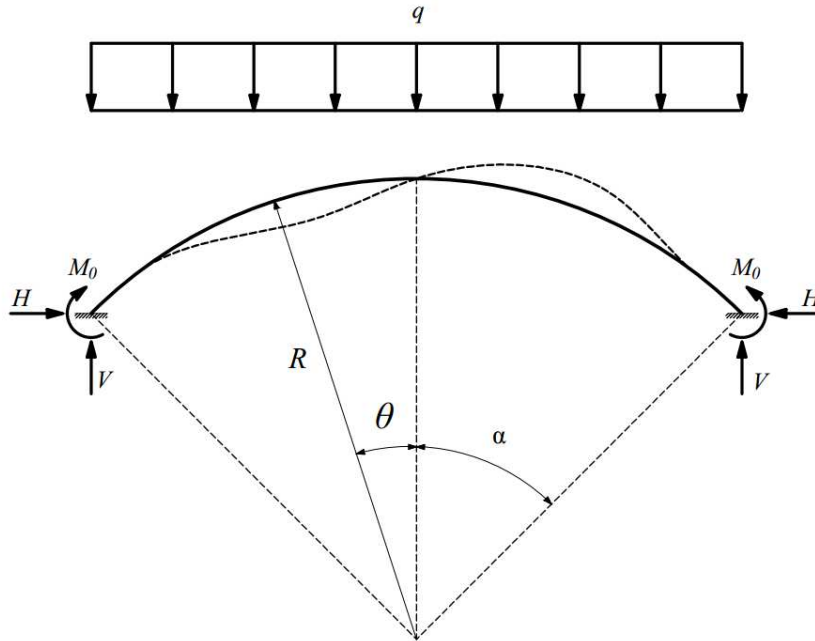
$$a_i = 12\alpha^2 \cdot \cos(2\alpha) - 16\cos(2 \cdot \alpha) + 5\cos(2\alpha)^2$$

$$b_i = -14\alpha \cdot \sin(2\alpha) + \alpha \sin(4\alpha) + 11$$

Equação 3.40

$$c_i = 24 \cdot (2\cos(2\alpha) + 2\alpha^2 + \alpha \cdot \sin(2\alpha) - 2)$$

Figura 3.10 – Flambagem de arco circular biengastado submetido à força uniformemente distribuída ao longo do vão



Fonte: Autor

No arco biengastado sujeito a esse carregamento, o esforço normal crítico também ocorre nas extremidades e é definido igualmente pela Equação 3.24. O esforço normal crítico é indicado na Equação 3.29, a partir da Equação 3.4. A variável  $k$  é obtida de acordo com a resolução numérica da Equação 3.16, como indicado anteriormente.

A força concentrada  $q$  pode ser isolada em função das propriedades físicas e geométricas do arco biengastado pela substituição do esforço normal na Equação 3.29, resultando na Equação 3.41.

$$q_{cr} = \frac{E \cdot I}{R^3} \cdot \left[ \frac{(k^2 - 1)}{\frac{\sin(\alpha)^2 + \frac{3 \cos(\alpha)^4 + 2\alpha \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha)^3 - 3 \cos(\alpha)^2 + \alpha \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{12 \cdot \cos(\alpha)^2 + 6 \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha) \cdot \cos(\alpha) + 6 \cdot \alpha^2 - 12}} \right] \quad \text{Equação 3.41}$$

### 3.4.3 Arco triarticulado

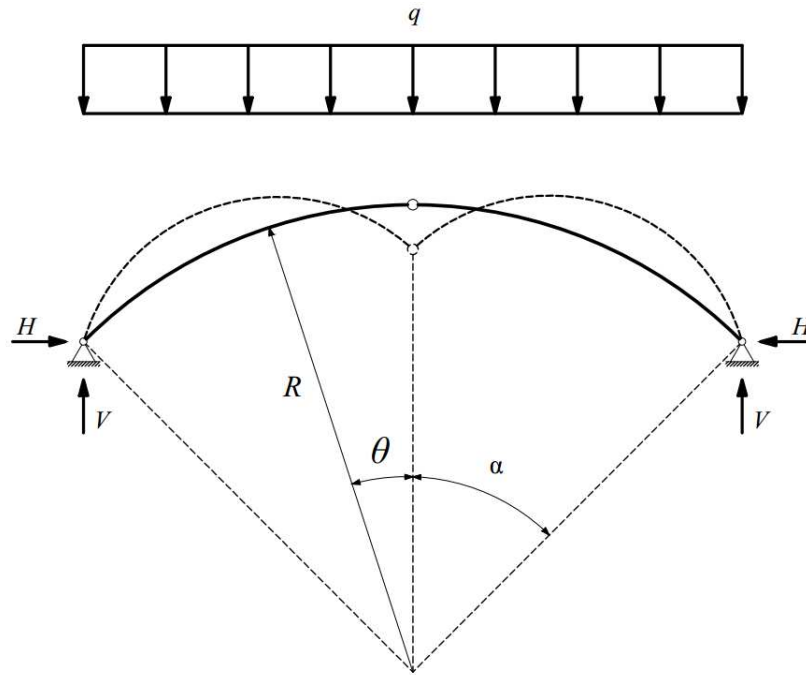
No caso do arco triarticulado (Figura 3.11), as componentes nas direções vertical e horizontal da reação em uma das extremidades são verificadas na Equação 3.42.

$$V = q \cdot R \cdot \text{sen}(\alpha)$$

$$H = q \cdot R \cdot \frac{\cos(\alpha) + 1}{2}$$

Equação 3.42

Figura 3.11 – Flambagem de arco circular triarticulado submetido à força uniformemente distribuída ao longo do vão



Fonte: Autor

O esforço normal nas extremidades do arco triarticulado também foi definido na Equação 3.24, e a resolução do esforço normal crítico indicada na Equação 3.32. Valores para a variável  $\eta$  são obtidos de acordo com a resolução numérica da Equação 3.19, como verificado anteriormente.

A força concentrada  $P$  pode ser isolada em função das propriedades físicas e geométricas do arco triarticulado a partir da substituição do esforço normal na Equação 3.32, resultando na Equação 3.43.

$$q_{cr} = \frac{E \cdot I}{R^3} \cdot \left[ \frac{\left( \frac{4\eta^2}{\alpha^2} - 1 \right)}{\text{sen}(\alpha)^2 + \frac{\cos(\alpha)^2 + \cos(\alpha)}{2}} \right]$$

Equação 3.43

### 3.4.4 Coeficientes de flambagem

Em geral, as mesmas considerações indicadas para o coeficiente de flambagem nos casos anteriores são válidas.

As Equações 3.38, 3.41 e 3.43 podem ser simplificadas, sendo os termos indicados entre parênteses substituídos por  $\gamma_3$  (Equação 3.44).

$$q_{cr} = \gamma_3 \cdot \frac{E \cdot I}{R^3} \quad \text{Equação 3.44}$$

A força crítica em função de outro coeficiente de flambagem  $K_3$  é indicada na Equação 3.45.

$$q_{cr} = K_3 \cdot \frac{E \cdot I}{R^3} \quad \text{Equação 3.45}$$

O coeficiente  $K_3$  pode ser obtido a partir do coeficiente  $\gamma_3$  (Equação 3.46), considerando a equivalência do raio pelo vão na Equação 3.44.

$$K_3 = 8 \cdot \gamma_3 \cdot (\text{sen}(\alpha))^3 \quad \text{Equação 3.46}$$

Valores referentes ao coeficiente de flambagem  $K_3$  são observados na Tabela 3.5 para as condições de contorno analisadas, determinados a partir da atribuição de valores para o ângulo de abertura  $\alpha$  e a relação flecha/vão.

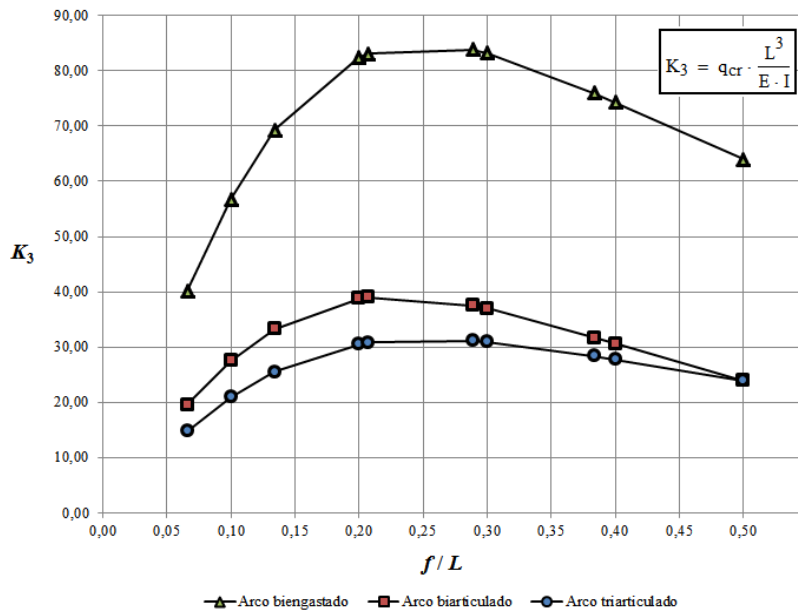
Tabela 3.5 – Coeficientes de flambagem determinados a partir do modelo teórico para arcos circulares submetidos à força uniformemente distribuída ao longo do vão

$2\alpha$ graus	$f/L$	$\gamma_3$			$K_3$		
		BIE	BIA	TRI	BIE	BIA	TRI
30,00	0,0658	289,90	141,10	106,70	40,21	19,57	14,80
45,24	0,1000	124,80	60,48	46,03	56,81	27,53	20,95
60,00	0,1340	69,30	33,33	25,57	69,30	33,33	25,57
87,21	0,2000	31,41	14,78	11,65	82,43	38,79	30,57
90,00	0,2071	29,39	13,78	10,89	83,13	38,98	30,80
120,00	0,2887	16,13	7,23	6,00	83,81	37,56	31,18
123,86	0,3000	15,13	6,73	5,64	83,15	36,99	31,00
150,00	0,3837	10,54	4,40	3,94	75,99	31,72	28,41
154,64	0,4000	10,00	4,12	3,74	74,29	30,61	27,78
180,00	0,5000	8,00	3,00	3,00	64,00	24,00	24,00

Fonte: Autor

De forma análoga, os valores indicados na Tabela 3.5 para o coeficiente  $K_3$  também são representados no gráfico da Figura 3.12, cuja variação é dada em função da relação flecha/vão.

Figura 3.12 – Coeficiente de flambagem  $K_3$  em função da relação flecha/vão



Fonte: Autor

### 3.5 Força concentrada na direção radial

No caso de arcos circulares submetidos à ação de força concentrada agindo na direção radial em uma posição cuja referência é o centro de curvatura, o processo para determinação da força crítica de flambagem também é similar ao que foi descrito anteriormente para os demais casos.

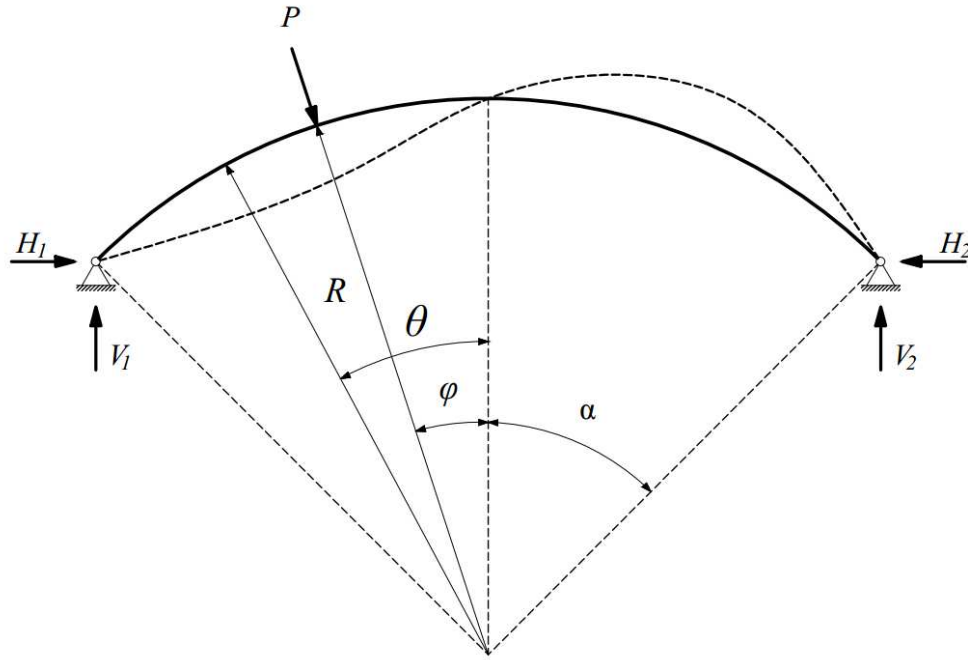
Assim como nas duas situações anteriores, a ação do carregamento provocará momento fletor nas seções do arco. Neste caso, também é adotada a hipótese em que esses momentos de primeira ordem são desconsiderados na resolução da equação diferencial do deslocamento radial.

É necessário observar que quando o ângulo que define o ponto de aplicação da força é nulo ( $\varphi = 0$ ), tem-se como condição de carregamento a força verticalmente concentrada no meio do vão, já abordada anteriormente.

### 3.5.1 Arco biarticulado

Para o arco biarticulado submetido à força concentrada na direção radial (Figura 3.13), a equação de deslocamento radial é a mesma que a apresentada na Equação 3.5.

Figura 3.13 – Flambagem de arco circular biarticulado submetido à força concentrada na direção radial



Fonte: Autor

O esforço normal crítico que atua no arco equivale ao mesmo indicado na Equação 3.23. Nesse caso, o esforço normal crítico ocorre na extremidade do arco biarticulado mais próxima ao ponto de aplicação da força concentrada, sendo indicado na Equação 3.47. As componentes das reações com índice 1 ( $V_1$  e  $H_1$ ) são referentes ao apoio mais próximo do ponto de aplicação da força concentrada, enquanto as demais reações com índice 2 ( $V_2$  e  $H_2$ ) são decorrentes do outro apoio.

$$N_1 = V_1 \cdot \sin(\alpha) + H_1 \cdot \cos(\alpha) \quad \text{Equação 3.47}$$

As componentes nas direções vertical e horizontal das reações na extremidade mais próxima ao ponto de aplicação da força são verificadas na Equação 3.48.

$$V_1 = P \cdot \frac{\text{sen}(\alpha + \varphi)}{2 \cdot \text{sen}(\alpha)}$$

Equação 3.48

$$H_1 = P \cdot \frac{(A_i + B_i)}{C_i}$$

Os parâmetros  $A_i$ ,  $B_i$  e  $C_i$  são indicados na Equação 3.49, sendo os dois primeiros influenciados pelo ângulo que define o ponto de aplicação da força concentrada, enquanto no último os termos são constantes.

$$A_i = 4\text{sen}(2\alpha) - 3\text{sen}(3\alpha + \varphi) - \text{sen}(\alpha - \varphi) + 2\text{sen}(\alpha + \varphi) + 2\alpha \cdot \cos(\alpha + \varphi)$$

$$B_i = 2\varphi \cdot \cos(\alpha + \varphi) - 4\alpha \cdot \cos(\alpha - \varphi) + 2\alpha \cdot \cos(3\alpha + \varphi) - 2\varphi \cdot \cos(\alpha - \varphi) \quad \text{Equação 3.49}$$

$$C_i = 8 \cdot \left( 3\cos(\alpha)^3 - 3\cos(\alpha) + \alpha \cdot \text{sen}(\alpha) + 2\alpha \cdot \text{sen}(\alpha) \cdot \cos(\alpha)^2 \right)$$

Por meio dos parâmetros indicados nessas equações, a força concentrada  $P$  pode ser isolada em função das propriedades físicas e geométricas do arco na Equação 3.23. A Equação 3.50 é obtida, e a força passa a ser denominada por  $P_{cr}$ , correspondendo ao primeiro modo de flambagem do arco.

$$P_{cr} = \frac{E \cdot I}{R^2} \cdot \left[ \frac{\left( \frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right)}{\frac{\text{sen}(\alpha + \varphi)}{2} + \frac{(A_i + B_i) \cdot \cos(\alpha)}{C_i}} \right] \quad \text{Equação 3.50}$$

### 3.5.2 Arco biengastado

Se as extremidades do arco fossem engastadas (Figura 3.14), nesse caso as componentes da reação nas direções vertical e horizontal são verificadas na Equação 3.51, assim como o momento de engaste.

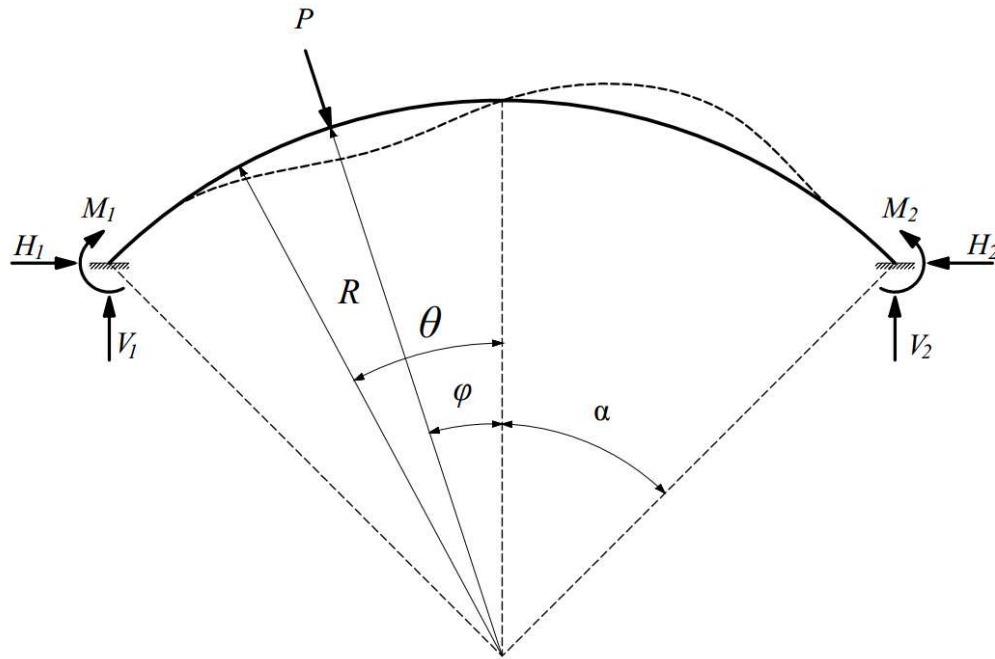
$$V_1 = 8 \cdot P \cdot \frac{A_i + B_i + C_i + D_i + E_i}{F_i + G_i}$$

Equação 3.51

$$H_1 = -P \cdot \frac{X_1 + Y_1 + Z_1}{O_1}$$

$$M_1 = P \cdot R \cdot \frac{a_i + b_i + c_i + d_i + e_i + f_i}{g_i + h_i}$$

Figura 3.14 – Flambagem de arco circular biengastado submetido à força concentrada na direção radial



Fonte: Autor

Os parâmetros relacionados à componente vertical  $V_1$  são indicados na Equação 3.52.

$$\begin{aligned} A_1 &= 2 \cdot \cos(\alpha)^5 \cdot \cos(\varphi) - 4 \cdot \cos(\alpha)^3 \cdot \cos(\varphi) + 2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\varphi) + 2 \cdot \cos(\alpha)^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\varphi) \\ B_1 &= -2 \cdot \cos(\alpha)^4 \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\varphi) - 2 \cdot \alpha \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\alpha) - 2 \cdot \varphi \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\alpha) - \alpha \cdot \cos(\alpha)^3 \cdot \sin(\varphi) \\ C_1 &= \alpha^3 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\alpha) + \alpha \cdot \cos(\alpha)^5 \cdot \sin(\varphi) - \alpha \cdot \varphi \cdot \cos(\alpha)^3 \cdot \cos(\varphi) + \alpha^2 \cdot \varphi \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\alpha) \\ D_1 &= \alpha \cdot \cos(\alpha)^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\alpha) + \alpha \cdot \cos(\alpha)^4 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\alpha) + 2 \cdot \varphi \cdot \cos(\alpha)^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\alpha) \\ E_1 &= \alpha \cdot \varphi \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\varphi) - \alpha^2 \cdot \cos(\alpha)^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\varphi) \\ F_1 &= 2 \cdot \cos(5\alpha) - 6 \cdot \cos(3\alpha) + 4 \cdot \cos(\alpha) - 26 \alpha \cdot \sin(\alpha) \\ G_1 &= 7 \cdot \alpha \cdot \sin(3\alpha) + \alpha \cdot \sin(5\alpha) + 16 \alpha^3 \cdot \sin(\alpha) \end{aligned} \quad \text{Equação 3.52}$$

Os parâmetros relacionados à componente horizontal  $H_1$  são indicados na Equação 3.53.



$$\begin{aligned}
X_1 &= 2 \cdot \cos(\alpha)^2 - 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\varphi) - 2 \cdot \cos(\alpha)^3 \cdot \cos(\varphi) + 2 \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\varphi) \\
Y_1 &= 2 \cdot \cos(\alpha)^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\varphi) + \alpha \cdot \cos(\alpha) \cdot \sin(\varphi) + \alpha \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\alpha) - \alpha \cdot \cos(\alpha)^3 \cdot \sin(\varphi) \\
Z_1 &= \alpha^2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\varphi) - \alpha \cdot \cos(\alpha)^2 \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\alpha) + \alpha \cdot \varphi \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\varphi) - 2 \\
O_1 &= 2 \cdot \left( 2 \cdot \cos(\alpha)^2 \cdot \sin(\alpha) - 2 \cdot \sin(\alpha) + \alpha \cdot \cos(\alpha) - \alpha \cdot \cos(\alpha)^3 + \alpha^2 \cdot \sin(\alpha) \right)
\end{aligned}
\tag{Equação 3.53}$$

Os parâmetros relacionados ao momento  $M_1$  são indicados na Equação 3.54.

$$\begin{aligned}
a_1 &= \cos(4\alpha) - \cos(3\alpha - \varphi) + \cos(\alpha + \varphi) + \cos(\alpha - \varphi) - \cos(3\alpha + \varphi) \\
b_1 &= 2 \cdot \alpha^2 \cdot \cos(\alpha - \varphi) + 2 \cdot \alpha^2 \cdot \cos(3\alpha + \varphi) + \alpha \cdot \sin(3\alpha - \varphi) + 8 \cdot \alpha^3 \cdot \sin(\alpha - \varphi) \\
c_1 &= \varphi \cdot \sin(3\alpha - \varphi) - 3 \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha + \varphi) - 7 \cdot \varphi \cdot \sin(\alpha + \varphi) + 4 \cdot \alpha^2 \cdot \cos(\alpha + \varphi) - 8 \cdot \alpha^2 \\
d_1 &= -7 \cdot \alpha \cdot \sin(\alpha - \varphi) - 3 \cdot \alpha \cdot \sin(3\alpha + \varphi) - 5 \cdot \varphi \cdot \sin(\alpha - \varphi) + 3 \cdot \varphi \cdot \sin(3\alpha + \varphi) \\
e_1 &= 8 \cdot \alpha \cdot \sin(2\alpha) + 6 \cdot \alpha \cdot \varphi \cdot \cos(\alpha - \varphi) - 2 \cdot \alpha \cdot \varphi \cdot \cos(3\alpha + \varphi) + 8 \cdot \alpha^2 \cdot \varphi \cdot \sin(\alpha - \varphi) \\
f_1 &= -4 \cdot \alpha \cdot \varphi \cdot \cos(\alpha + \varphi) - 1 \\
g_1 &= 4 \cdot (2 \cdot \sin(2\alpha) - 5 \cdot \alpha - \sin(4\alpha)) \\
h_1 &= 4 \cdot \left( \alpha \cdot \cos(2\alpha)^2 + 4 \cdot \alpha^3 + 4 \cdot \alpha \cdot \cos(2\alpha) \right)
\end{aligned}
\tag{Equação 3.54}$$

Para o arco biengastado sujeito a esse carregamento, o esforço normal crítico ocorre na extremidade oposta ao ponto de aplicação da força concentrada, uma vez que é menor em magnitude ( $N_2 < N_1$ ), sendo definido na Equação 3.55.

$$N_2 = V_2 \cdot \sin(\alpha) + H_2 \cdot \cos(\alpha) \tag{Equação 3.55}$$

Nessa outra extremidade, as componentes das reações de apoio podem ser determinadas com a aplicação das equações de equilíbrio em função das demais reações computadas. As componentes, nesse caso, são definidas na Equação 3.56.

$$\begin{aligned}
V_2 &= P \cdot \cos(\varphi) - V_1 \\
H_2 &= P \cdot \sin(\varphi) + H_1 \\
M_2 &= -P \cdot R \cdot \sin(\alpha + \varphi) + V_1 \cdot 2R \cdot \sin(\alpha) - M_1
\end{aligned}
\tag{Equação 3.56}$$

A resolução do esforço normal crítico relativo ao primeiro modo de flambagem do arco biengastado foi indicado na Equação 3.29, a partir da Equação 3.4. A obtenção da variável  $k$  ocorre com a resolução numérica da Equação 3.16, como indicado anteriormente.

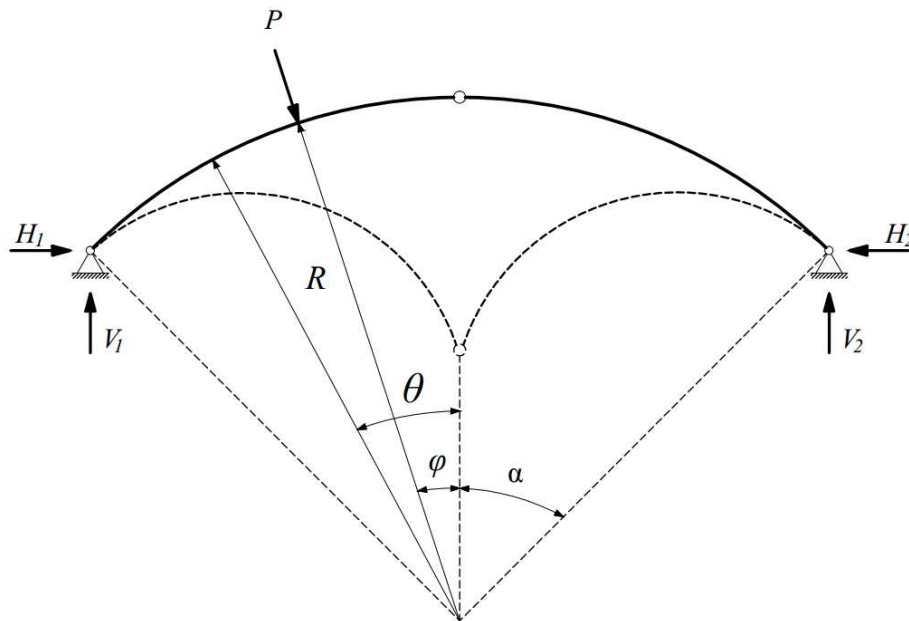
A força concentrada  $P$  pode ser isolada em função das propriedades físicas e geométricas do arco biengastado pela substituição do esforço normal na Equação 3.29. A Equação 3.57 é obtida, e a força passa a ser denominada por  $P_{cr}$ , correspondendo ao primeiro modo de flambagem do arco.

$$P_{cr} = \frac{E \cdot I}{R^2} \left[ \frac{(k^2 - 1)}{8 \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{A_i + B_i + C_i + D_i + E_i}{F_i + G_i} - \cos(\alpha) \cdot \frac{X_i + Y_i + Z_i}{O_i}} \right] \quad \text{Equação 3.57}$$

### 3.5.3 Arco triarticulado

No caso do arco triarticulado (Figura 3.15), as componentes nas direções vertical e horizontal da reação mais próxima ao ponto de aplicação da força concentrada são verificadas na Equação 3.58.

Figura 3.15 – Flambagem de arco circular triarticulado submetido à força concentrada na direção radial



Fonte: Autor

$$V_1 = P \cdot \frac{\text{sen}(\alpha + \varphi)}{2 \cdot \text{sen}(\alpha)}$$

Equação 3.58

$$H_1 = -P \cdot \frac{\text{sen}(\alpha + \varphi) - 2 \cdot \text{sen}(\varphi)}{2 \cdot \cos(\alpha) - 2}$$

Assim como no caso do arco biarticulado, o esforço normal crítico ocorre na extremidade mais próxima ao ponto de aplicação da força concentrada, que foi definido na Equação 3.47. A resolução do esforço normal crítico relativo ao primeiro modo de flambagem do arco triarticulado foi indicada na Equação 3.32. Valores para a variável  $\eta$  são obtidos de acordo com a resolução numérica da Equação 3.19, como verificado anteriormente.

A força concentrada  $P$  pode ser isolada em função das propriedades físicas e geométricas do arco triarticulado (Equação 3.59), a partir da substituição do esforço normal na Equação 3.32.

$$P_{cr} = \frac{E \cdot I}{R^2} \cdot \left[ \frac{\left( \frac{4\eta^2}{\alpha^2} - 1 \right)}{\frac{\text{sen}(\alpha + \varphi)}{2} - \frac{\cos(\alpha) \cdot (\text{sen}(\alpha + \varphi) - 2 \cdot \text{sen}(\varphi))}{2 \cdot \cos(\alpha) - 2}} \right] \quad \text{Equação 3.59}$$

#### 3.5.4 Coeficientes de flambagem

Em geral, as mesmas considerações indicadas para o coeficiente de flambagem nos demais casos são válidas.

As Equações 3.50, 3.55 e 3.57 podem ser simplificadas, sendo os termos indicados entre parênteses substituídos por  $\gamma_4$  (Equação 3.60).

$$P_{cr} = \gamma_4 \cdot \frac{E \cdot I}{R^2} \quad \text{Equação 3.60}$$

A força crítica em função de outro coeficiente de flambagem  $K_4$  é indicada na Equação 3.61.

$$P_{cr} = K_4 \cdot \frac{E \cdot I}{R^2} \quad \text{Equação 3.61}$$

O coeficiente  $K_2$  pode ser obtido a partir do coeficiente  $\gamma_4$  (Equação 3.62), considerando a equivalência do raio pelo vão na Equação 3.60.

$$K_4 = 4 \cdot \gamma_4 \cdot (\text{sen}(\alpha))^2 \quad \text{Equação 3.62}$$

Para determinação de coeficientes de flambagem nesse caso, é necessário definir valores para o ângulo  $\varphi$  que define o ponto de aplicação da força, além de dados para o ângulo de abertura  $\alpha$  ou relação flecha/vão. Para efeito de comparação, serão adotados três valores, em função do ângulo de abertura, para o ângulo que define a posição da força concentrada: um terço, um meio e dois terços do ângulo de abertura.

Dessa forma, atribuindo o ângulo referente ao ponto de aplicação como um terço do ângulo de abertura ( $\varphi = \alpha / 3$ ), é possível obter valores referentes ao coeficiente de flambagem  $K_4$  na Tabela 3.6, conforme a variação do ângulo de abertura e a relação flecha/vão.

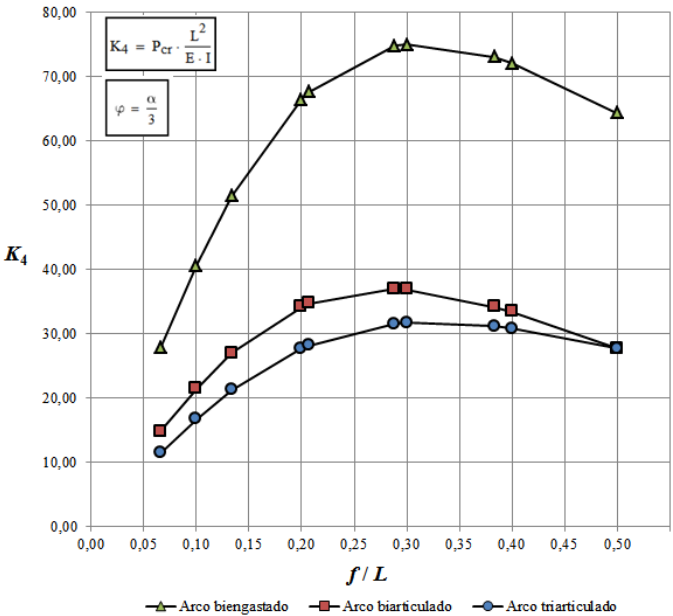
Tabela 3.6 – Coeficientes de flambagem determinados a partir do modelo teórico para arcos circulares submetidos à força concentrada na direção radial adotando  $\varphi = (\alpha / 3)$

$2\alpha$ graus	$f/L$	$\gamma_4$			$K_4$		
		BIE	BIA	TRI	BIE	BIA	TRI
30,00	0,0658	103,75	55,15	42,55	27,80	14,78	11,40
45,24	0,1000	68,55	36,23	28,18	40,56	21,44	16,68
60,00	0,1340	51,42	26,98	21,20	51,42	26,98	21,20
87,21	0,2000	34,91	17,97	14,55	66,43	34,19	27,68
90,00	0,2071	33,79	17,34	14,08	67,59	34,68	28,17
120,00	0,2887	24,93	12,32	10,49	74,79	36,96	31,48
123,86	0,3000	24,07	11,84	10,17	74,95	36,87	31,68
150,00	0,3837	19,58	9,15	8,36	73,06	34,15	31,19
154,64	0,4000	18,94	8,77	8,08	72,10	33,39	30,77
180,00	0,5000	16,09	6,93	6,93	64,36	27,72	27,72

Fonte: Autor

Os valores indicados na Tabela 3.6 para o coeficiente  $K_4$  em que  $\varphi = (\alpha / 3)$  também são representados no gráfico da Figura 3.16, cuja variação é dada em função da relação flecha/vão.

Figura 3.16 – Coeficiente de flambagem  $K_4$  em função da relação flecha/vão para  $\varphi = (\alpha / 3)$



Fonte: Autor

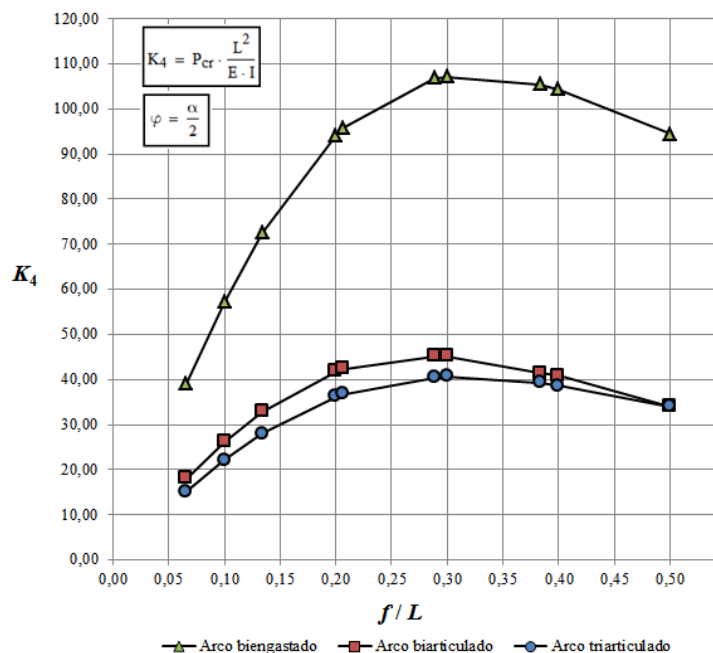
De forma análoga, adotando o ângulo referente ao ponto de aplicação como um meio do ângulo de abertura ( $\varphi = \alpha / 2$ ), valores referentes ao coeficiente de flambagem  $K_4$  são indicados na Tabela 3.7, conforme a variação do ângulo de abertura e a relação flecha/vão.

Tabela 3.7 – Coeficientes de flambagem determinados a partir do modelo teórico para arcos circulares submetidos à força concentrada na direção radial adotando  $\varphi = (\alpha / 2)$

$2\alpha$ graus	$f/L$	$\gamma_4$			$K_4$		
		BIE	BIA	TRI	BIE	BIA	TRI
30,00	0,0658	145,86	67,29	56,61	39,08	18,03	15,17
45,24	0,1000	96,50	44,21	37,39	57,10	26,16	22,12
60,00	0,1340	72,51	32,93	28,02	72,51	32,93	28,02
87,21	0,2000	49,45	21,95	19,03	94,09	41,76	36,21
90,00	0,2071	47,89	21,18	18,40	95,78	42,36	36,80
120,00	0,2887	35,60	15,07	13,49	106,80	45,21	40,47
123,86	0,3000	34,41	14,49	13,05	107,17	45,13	40,63
150,00	0,3837	28,27	11,07	10,52	105,50	41,31	39,24
154,64	0,4000	27,40	10,74	10,13	104,33	40,89	38,57
180,00	0,5000	23,60	8,50	8,50	94,42	34,00	34,00

Fonte: Autor

Os valores indicados na Tabela 3.7 para o coeficiente  $K_4$  em que  $\varphi = (\alpha / 2)$  também são representados no gráfico da Figura 3.17, cuja variação é dada em função da relação flecha/vão.

Figura 3.17 – Coeficiente de flambagem  $K_4$  em função da relação flecha/vão para  $\varphi = (\alpha / 2)$ 

Fonte: Autor

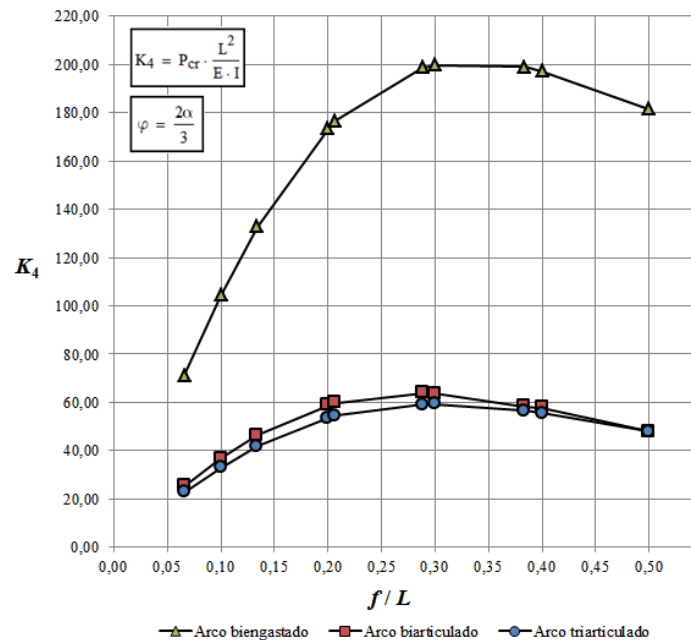
Atribuindo o ângulo referente ao ponto de aplicação como um meio do ângulo de abertura ( $\varphi = 2\alpha / 3$ ), valores referentes ao coeficiente de flambagem  $K_4$  são indicados na Tabela 3.8, conforme a variação do ângulo de abertura e a relação flecha/vão.

Tabela 3.8 – Coeficientes de flambagem determinados a partir do modelo teórico para arcos circulares submetidos à força concentrada na direção radial adotando  $\varphi = (2\alpha / 3)$ 

$2\alpha$ graus	$f/L$	$\gamma_4$			$K_4$		
		BIE	BIA	TRI	BIE	BIA	TRI
30,00	0,0658	266,16	94,74	84,78	71,32	25,39	22,72
45,24	0,1000	176,34	62,27	55,88	104,35	36,85	33,07
60,00	0,1340	132,79	46,39	41,76	132,79	46,39	41,76
87,21	0,2000	91,07	30,95	28,16	173,28	58,89	53,58
90,00	0,2071	88,26	29,88	27,21	176,52	59,76	54,41
120,00	0,2887	66,24	21,28	19,72	198,72	63,84	59,16
123,86	0,3000	64,12	20,46	19,04	199,69	63,72	59,29
150,00	0,3837	53,31	15,65	15,15	198,95	58,41	56,52
154,64	0,4000	51,80	15,18	14,56	197,22	57,79	55,42
180,00	0,5000	45,36	12,00	12,00	181,43	48,00	48,02

Fonte: Autor

De forma análoga, os valores indicados na Tabela 3.8 para o coeficiente  $K_4$  em que  $\varphi = (2\alpha / 3)$  também são representados no gráfico da Figura 3.18, cuja variação é dada em função da relação flecha/vão.

Figura 3.18 – Coeficiente de flambagem  $K_4$  em função da relação flecha/vão para  $\varphi = (2\alpha / 3)$ 

Fonte: Autor

Nota-se que quanto menor o ângulo que define a posição da força concentrada, menor é o coeficiente de flambagem e, por consequência, a força crítica. Dessa forma, a posição mais desfavorável para a força concentrada na direção radial ocorre no meio do vão, recaindo no caso da força verticalmente concentrada no meio do vão.

### 3.6 Programa computacional

Como objetivo específico deste trabalho, foi proposto o desenvolvimento de um programa computacional para a determinação da força crítica de flambagem em arcos circulares. As equações empregadas no programa computacional foram baseadas no modelo teórico.

O desenvolvimento do programa computacional ocorreu no ambiente de desenvolvimento integrado (IDE) Visual Studio® 2015, com aplicação da linguagem de programação orientada a objetos C#. O programa computacional foi nomeado como INSTARC, a partir da junção entre as palavras “instabilidade” e “arco”.

O programa computacional INSTARC é executável em sistemas operacionais Windows, e permite a análise de parâmetros relacionados ao primeiro modo de flambagem em arcos simétricos e com forma circular.

As condições de carregamento estudadas foram propostas para constituir inicialmente os tipos de solicitação disponíveis para análise dos arcos no programa:

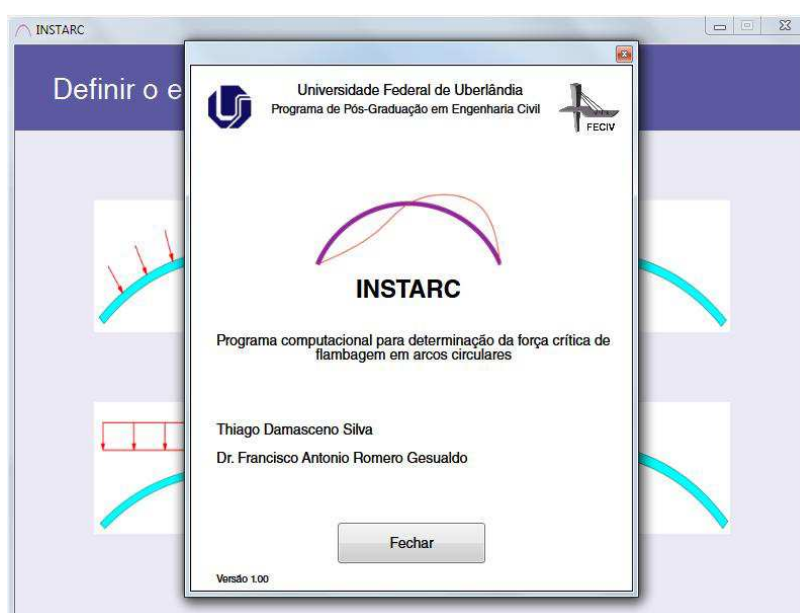
- Força uniformemente distribuída na direção radial;
- Força verticalmente concentrada no meio do vão;
- Força uniformemente distribuída ao longo do vão;
- Força concentrada na direção radial;

Quanto às condições de contorno do arco, no programa computacional é possível defini-lo como:

- Arco biarticulado;
- Arco biengastado;
- Arco triarticulado.

A execução inicial do programa é verificada na Figura 3.19. Na janela em destaque o usuário é introduzido ao programa computacional e são fornecidas informações básicas sobre ele.

Figura 3.19 – Janela inicial do programa INSTARC

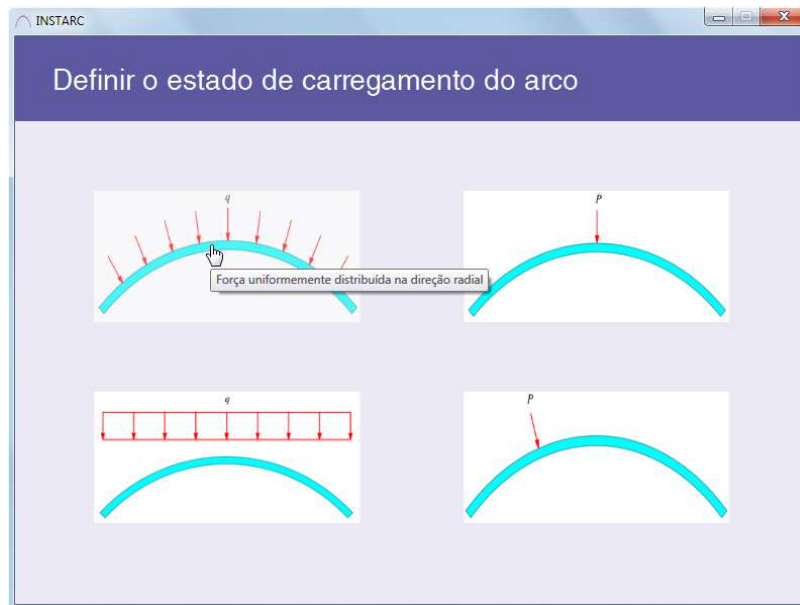


Fonte: Autor



Uma vez finalizada a janela inicial, são verificadas as condições de carregamento (Figura 3.20). É necessário definir uma dessas condições para continuidade do processo de análise. Descrições são informadas quando o cursor é sobreposto nas figuras.

Figura 3.20 – Definição da condição de carregamento



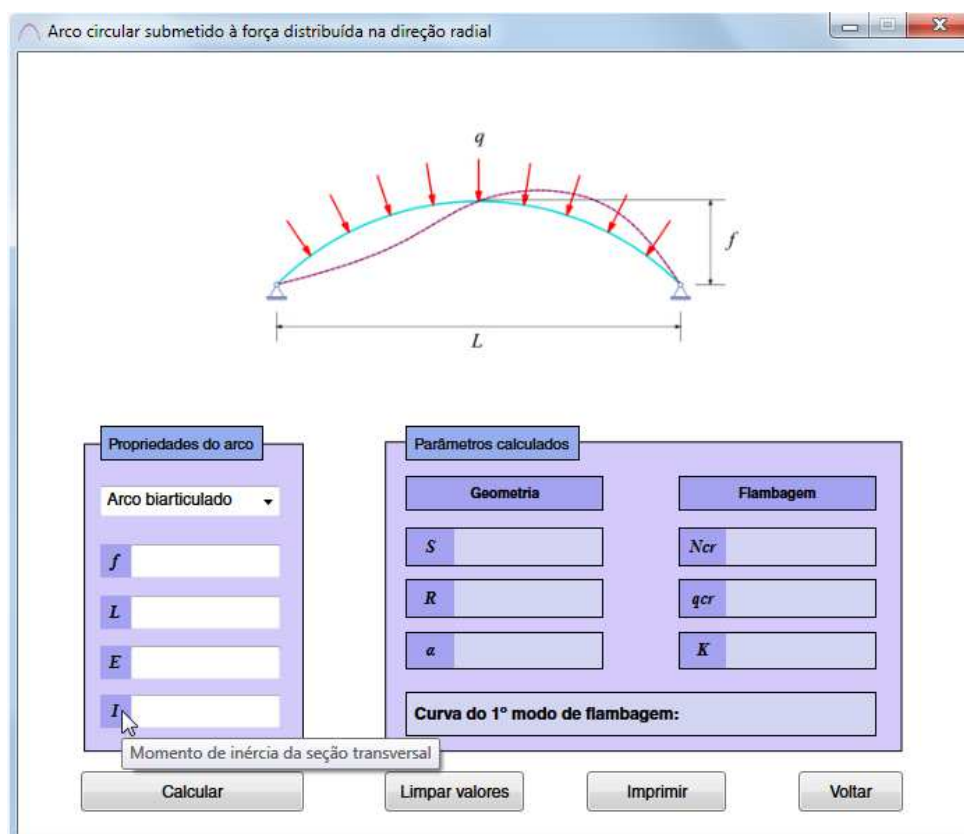
Fonte: Autor

Em seguida, uma a janela de simulação da estrutura é iniciada, sendo que no caso da Figura 3.21 foi escolhida a força uniformemente distribuída ao longo do vão como condição de carregamento. Nessa janela, deve-se selecionar o tipo de arco (biarticulado, biengastado ou triarticulado), sendo que, como padrão, o arco biarticulado é inicialmente selecionado. Além disso, é necessário definir valores para as propriedades básicas do arco nos formulários à esquerda. Descrições também são informadas quando o cursor é sobreposto nas legendas, formulários e botões.

As propriedades básicas do arco, que são necessárias como dados de entrada, são:

- Altura máxima (flecha), definida por  $f$ .
- Vão entre apoios, definido por  $L$ .
- Módulo de elasticidade longitudinal, definido por  $E$ .
- Momento de inércia da seção transversal, definido por  $I$ .
- No caso da solicitação por força concentrada na direção radial, é necessário quantificar o ângulo que define o ponto de aplicação da força, definido por  $\theta$ .

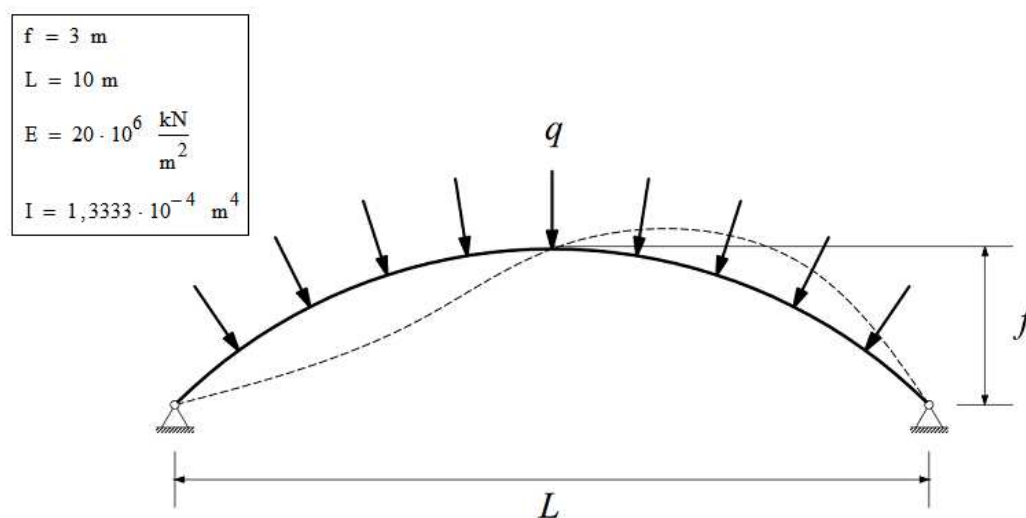
Figura 3.21 – Janela de simulação da estrutura



Fonte: Autor

Definidas as condições de contorno e as propriedades do arco, é possível determinar as propriedades indicadas na parte direita da janela de simulação quando o botão *Calcular* é pressionado. Como exemplo para simulação é proposto o arco verificado na Figura 3.22.

Figura 3.22 – Exemplo de arco proposto para simulação



Fonte: Autor

A determinação dos parâmetros é indicada na Figura 3.23 após o preenchimento dos formulários e a execução do botão *Calcular*. Os parâmetros calculados são relativos à geometria e ao primeiro modo de flambagem do arco. É importante observar que o programa computacional permite, no preenchimento dos formulários, a utilização da notação “e” ou “E” como equivalência à multiplicação por potência de base 10.

Figura 3.23 – Cálculo dos parâmetros relativos ao arco proposto para simulação

Arco circular submetido à força distribuída na direção radial

Diagrama do arco:  $q$ ,  $f$ ,  $L$

**Propriedades do arco**

Arco biarticulado

$f$  3

$L$  10

$E$  20e6

$I$  1,3333e-4

**Parâmetros calculados**

Geometria		Flambagem	
$S$	12,25	$N_{cr}$	618,54
$R$	5,67	$q_{cr}$	109,15
$\alpha$	61,93	$K$	40,93

Curva do 1º modo de flambagem: assimétrica

Calcular

Limpar valores

Imprimir

Voltar

Calcular o arco

Fonte: Autor

Os parâmetros relacionados à geometria do arco são propriedades importantes para o projeto e execução da estrutura, sendo definidos no programa computacional por:

- Comprimento axial total, definido por  $S$ .
- Raio, definido por  $R$ .
- Ângulo de abertura correspondente à metade do arco, definido por  $\alpha$ .

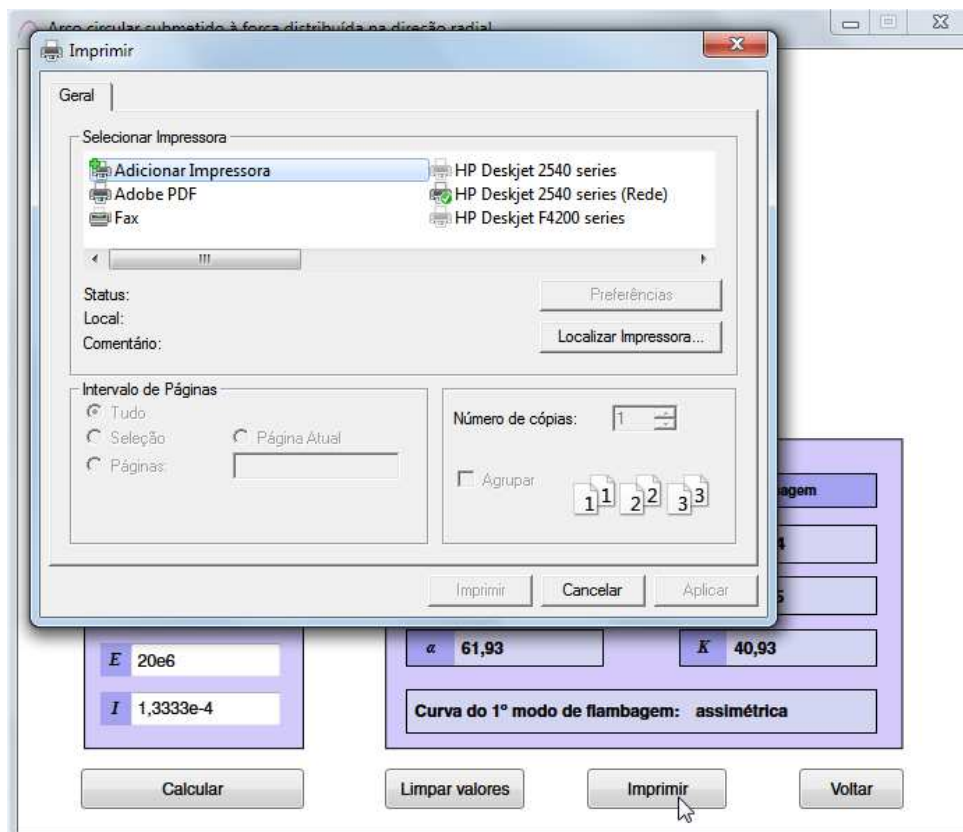
Já os parâmetros calculados e relacionados ao primeiro modo de flambagem do arco são fundamentais para os processos de análise e dimensionamento da estrutura, sendo indicados no programa computacional por:

- Esforço normal crítico, definida por  $N_{cr}$ .
- Força crítica, definida por  $q_{cr}$  no caso de forças distribuídas, ou por  $P_{cr}$  no caso de forças concentradas.
- Coeficiente de flambagem, definido por  $K$ .

Além desses parâmetros, é descrita a curva referente ao primeiro modo de flambagem, que pode ter forma simétrica ou assimétrica conforme o arco analisado.

Como possibilidade de exportação dos parâmetros e figuras, é possível imprimir a janela de simulação da estrutura clicando no botão *Imprimir*, como indicado na Figura 3.24. Também pode-se salvar a imagem nos formatos XPS ou PDF a partir desse procedimento.

Figura 3.24 – Procedimento para impressão da janela de simulação da estrutura



Fonte: Autor

A execução do botão *Limpar valores* permite apagar todos os valores inseridos ou calculados na janela. A execução do botão *Voltar* fecha a janela atual e a janela de seleção da condição de carregamento é novamente iniciada.

As janelas de simulação do arco seguem o padrão indicado para todas as condições de carregamento disponíveis, sendo as equações utilizadas para determinação dos parâmetros relativos ao primeiro modo de flambagem do arco correspondentes ao tipo de solicitação, obviamente.

Outro detalhe importante está relacionado às unidades das propriedades inseridas nos formulários, uma vez que os parâmetros são calculados a partir delas e não há conversões. Dessa forma, o usuário deve se atentar às unidades escolhidas para os dados de entrada, que serão as mesmas nos dados de saída e não serão indicadas na tela. Por exemplo, se no módulo de elasticidade longitudinal foi escolhida a unidade  $\text{kN/m}^2$  e as demais propriedades definidas em função da unidade metro, a força crítica resultante será calculada com intensidade em kN no caso de solicitação por força concentrada, ou kN/m no caso de força distribuída.

# CAPÍTULO 4

## FORMULAÇÃO DO MODELO MATRICIAL

### 4.1 Introdução

O modelo matricial adotado é baseado na formulação do método de Smirnov, indicado por Karnovsky (2012). Segundo esse autor, o método indicado permite determinar numericamente de forma precisa as possíveis forças críticas de flambagem nos arcos, considerando a estrutura como uma série de segmentos curvos, sendo que cada segmento corresponde a uma respectiva porção do arco e está submetido a uma força unitária agindo na direção radial. Esse modelo também é baseado no Método das Forças Elásticas (MFE), uma técnica geralmente empregada na determinação de deslocamentos em elementos estruturais ao considerar que a configuração deformada de uma estrutura equivale ao diagrama de momento fletor de uma estrutura fictícia. Mais detalhes sobre o MFE são verificados no Apêndice C.

O modelo matricial é desenvolvido especificamente para a análise da força crítica de flambagem em arcos circulares biarticulados sujeitos às condições de carregamento estudadas.

### 4.2 Modelo matricial para análise de arco circular biarticulado

No caso dos arcos biarticulados com forma circular, o procedimento adotado consiste em dividir a estrutura em um número específico de elementos ( $n$ ) e estabelecer duas matrizes, sendo uma relacionada às forças elásticas e a outra referente à influência de momentos

produzidos por forças unitárias. O produto dessas duas matrizes é então relacionado à força crítica por meio da análise de autovalor.

A matriz das forças elásticas é representada na Equação 4.1, sendo quadrada e simétrica de ordem  $(n - 1)$ . Apesar da denominação, os elementos dessa matriz representam as propriedades físicas e geométricas do arco.

$$B_w = \frac{S_0}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \beta_{n(n-1)} & \beta_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{Equação 4.1}$$

Quando a divisão do arco é feita por segmentos de mesmo comprimento ( $S_n = S_{n+1} = S_0$ ), os parâmetros  $\beta$  são definidos nas expressões da Equação 4.2 para uma aproximação quadrática.

$$\begin{aligned} \beta_{n(n-1)} &= \frac{3}{4} \cdot \rho_n - \frac{1}{4} \cdot \rho_{n+1} \\ \beta_{nn} &= \frac{5}{2} \cdot (\rho_n + \rho_{n+1}) \\ \beta_{n(n+1)} &= -\frac{1}{4} \cdot \rho_n + \frac{3}{4} \cdot \rho_{n+1} \end{aligned} \quad \text{Equação 4.2}$$

E o parâmetro  $\rho$  é identificado na Equação 4.3.

$$\rho_n = \frac{S_n \cdot I_0}{I_n \cdot S_0} = \frac{I_0}{I_n} \quad \text{Equação 4.3}$$

Se o momento de inércia é constante ao longo do arco, o parâmetro  $\rho$  assume valor unitário e a matriz das forças elásticas (Equação 4.1) resulta na matriz da Equação 4.4.

$$B_w = \frac{S_0}{6 \cdot E \cdot I} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0,5 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0,5 & 5 & 0,5 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0,5 & 5 & 0,5 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0,5 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{Equação 4.4}$$

A matriz de influência dos momentos é definida na Equação 4.5, sendo também quadrada e simétrica de ordem  $(n - 1)$ .

$$L_m = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & m_{32} & m_{33} & m_{34} & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & m_{n(n-1)} & m_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{Equação 4.5}$$

Os coeficientes  $m$  da matriz verificada na Equação 4.5 são obtidos a partir das expressões identificadas na Equação 4.6, conforme a análise do momento fletor ao considerar a ação de forças unitárias agindo na direção radial em cada nó interno (Figura 4.1). Quanto maior a divisão da estrutura, maior é a quantidade de nós internos e de forças unitárias atuantes. Visando a simplificação do processo, a análise é feita para um semiarco devido à simetria da estrutura, como observado no esquema da Figura 4.1.

$$m_{ik} = R \cdot \frac{\text{sen}(i \cdot \beta) \cdot \text{sen}(\alpha - k \cdot \beta)}{\text{sen}(\alpha)} \quad \text{para} \quad (i < k)$$

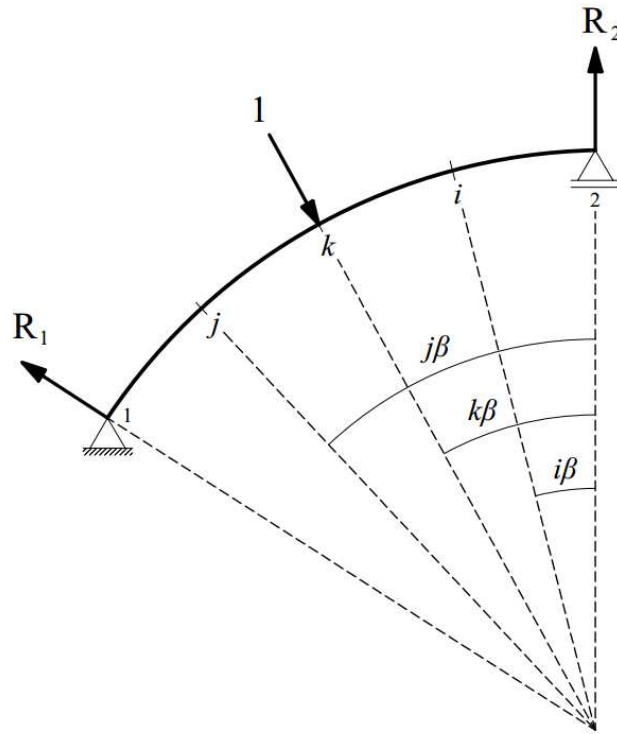
$$m_{kk} = R \cdot \frac{\text{sen}(k \cdot \beta) \cdot \text{sen}(\alpha - k \cdot \beta)}{\text{sen}(\alpha)} \quad \text{Equação 4.6}$$

$$m_{jk} = R \cdot \frac{\text{sen}(j \cdot \beta) \cdot \text{sen}(\alpha - j \cdot \beta)}{\text{sen}(\alpha)} \quad \text{para} \quad (j > k)$$

Na Equação 4.6, os coeficientes  $m$  com duplo índice  $k$  correspondem à diagonal da matriz indicada na Equação 4.5, enquanto os coeficientes com índice  $i$  e  $j$  correspondem às demais posições não nulas. Devido à simetria da matriz, os coeficientes com índice  $i$  e  $j$  são necessariamente iguais.



Figura 4.1 – Esquema de análise do semiarco



Fonte: Adaptado de Karnovsky (2012)

A expressão que define a estabilidade do sistema é indicada Equação 4.7, em que  $\lambda$  representa autovalores e  $J$  é uma matriz identidade de ordem  $(n - 1)$ .

$$\det(C - \lambda \cdot J) = 0 \quad \text{Equação 4.7}$$

A matriz  $C$  é estabelecida a partir do produto matricial entre a matriz das forças elásticas (Equação 4.1) e a matriz da influência dos momentos (Equação 4.5), sendo indicada na Equação 4.8.

$$C = L_m \times B_w \quad \text{Equação 4.8}$$

O maior autovalor  $\lambda$  obtido no sistema de equações é relacionado com o menor valor possível para o esforço normal crítico atuante no arco, que equivale ao primeiro modo de flambagem (Equação 4.9).

$$N_{cr} = \frac{1}{\lambda_{\max}} \quad \text{Equação 4.9}$$

Conforme as equações citadas para o modelo matricial, e de acordo com a quantidade escolhida de segmentos para compor o semiarco, os coeficientes de flambagem são

determinados a partir dos esforços normais atuantes nas situações de carregamento indicadas. Dessa forma, no procedimento matricial, apenas a equação que define o esforço normal crítico é modificada para cada situação de carregamento atuante no arco.

Em geral, para cada caso de solicitação, a força crítica é determinada por meio do procedimento matricial com a substituição do esforço normal na Equação 4.9, assumindo a divisão do semiarco em 10 segmentos e valores para as demais propriedades do arco.

#### 4.2.1 Força uniformemente distribuída na direção radial

Para o arco biarticulado submetido à força uniformemente distribuída na direção radial, o esforço normal foi indicado na Equação 3.3.

Conforme a determinação da força crítica de flambagem, é possível determinar um dos coeficientes na Equação 4.10. Para determinação do outro coeficiente de flambagem é utilizada a equivalência indicada na Equação 3.22.

$$\gamma_1 = \frac{q_{cr} \cdot R^3}{E \cdot I} \quad \text{Equação 4.10}$$

Atribuindo a variação conhecida para o ângulo de abertura e a relação flecha/vão, os coeficientes de flambagem são calculados e indicados na Tabela 4.1. Os valores adotados para o módulo de elasticidade e o momento de inércia não interferem na determinação dos coeficientes de flambagem. Os valores verificados na Tabela 4.1 são muito próximos aos que foram obtidos a partir do modelo teórico na Tabela 3.3.

Tabela 4.1 – Coeficientes de flambagem determinados a partir do modelo matricial para arcos circulares biarticulados submetidos à força uniformemente distribuída na direção radial

$2\alpha$ graus	$f/L$	$\gamma_1$	$K_1$
30,00	0,0658	143,00	19,83
45,24	0,1000	62,33	28,37
60,00	0,1340	35,01	35,01
87,21	0,2000	16,04	42,10
90,00	0,2071	15,01	42,45
120,00	0,2887	8,01	41,62
123,86	0,3000	7,45	40,95
150,00	0,3837	4,77	34,39
154,64	0,4000	4,43	32,91
180,00	0,5000	3,01	24,08

Fonte: Autor

#### 4.2.2 Força verticalmente concentrada no meio do vão

Para o arco biarticulado submetido à força verticalmente concentrada no meio do vão, o esforço normal foi indicado na Equação 3.24.

Conforme a força crítica de flambagem é possível determinar um dos coeficientes na Equação 4.11. Para determinação do outro coeficiente de flambagem é utilizada a equivalência indicada na Equação 3.36.

$$\gamma_2 = \frac{P_{cr} \cdot R^2}{E \cdot I} \quad \text{Equação 4.11}$$

Atribuindo a variação conhecida para o ângulo de abertura e a relação flecha/vão, os coeficientes de flambagem são calculados e indicados na Tabela 4.2. Novamente, os valores verificados na Tabela 4.2 são muito próximos aos que foram obtidos a partir do modelo teórico (Tabela 3.4).

Tabela 4.2 – Coeficientes de flambagem determinados a partir do modelo matricial para arcos circulares biarticulados submetidos à força concentrada verticalmente no meio do vão

$2\alpha$ graus	$f/L$	$\gamma_2$	$K_2$
30,00	0,0658	47,91	12,84
45,24	0,1000	31,48	18,63
60,00	0,1340	23,44	23,44
87,21	0,2000	15,60	29,68
90,00	0,2071	15,05	30,10
120,00	0,2887	10,70	32,10
123,86	0,3000	10,27	31,98
150,00	0,3837	7,95	29,67
154,64	0,4000	7,61	28,97
180,00	0,5000	6,01	24,04

Fonte: Autor

#### 4.2.3 Força uniformemente distribuída ao longo do vão

Para o arco biarticulado submetido à força uniformemente distribuída ao longo do vão, o esforço normal também foi indicado na Equação 3.4.

Conforme a determinação da força crítica de flambagem, é possível determinar um dos coeficientes na Equação 4.12. Para determinação do outro coeficiente de flambagem é utilizada a equivalência indicada na Equação 3.46.

$$\gamma_3 = q_{cr} \cdot \frac{R^3}{E \cdot I} \quad \text{Equação 4.12}$$

Atribuindo a variação conhecida para o ângulo de abertura e a relação flecha/vão, os coeficientes de flambagem são calculados e indicados na Tabela 4.3. Outra vez, os valores verificados na Tabela 4.3 são muito próximos aos que foram obtidos a partir do modelo teórico (Tabela 3.5).

Tabela 4.3 – Coeficientes de flambagem determinados a partir do modelo matricial para arcos circulares biarticulados submetidos à força uniformemente distribuída ao longo do vão

$2\alpha$ graus	$f/L$	$\gamma_3$	$K_3$
30,00	0,0658	141,13	19,57
45,24	0,1000	60,49	27,53
60,00	0,1340	33,33	33,33
87,21	0,2000	14,79	38,82
90,00	0,2071	13,79	39,00
120,00	0,2887	7,23	37,57
123,86	0,3000	6,74	37,04
150,00	0,3837	4,41	31,80
154,64	0,4000	4,13	30,68
180,00	0,5000	3,01	24,08

Fonte: Autor

#### 4.2.4 Força concentrada na direção radial

Para o arco biarticulado submetido à força concentrada na direção radial, o esforço normal foi indicado na Equação 3.47.

Conforme a força crítica de flambagem é possível determinar um dos coeficientes na Equação 4.13. Para determinação do outro coeficiente de flambagem é utilizada a equivalência indicada na Equação 3.62.

$$\gamma_4 = P_{cr} \cdot \frac{R^2}{E \cdot I} \quad \text{Equação 4.13}$$

Os coeficientes de flambagem são calculados atribuindo a variação conhecida para o ângulo de abertura e a relação flecha/vão, e para o ângulo que define o ponto de aplicação da força concentrada. Na Tabela 4.4 são verificados os coeficientes de flambagem para quando ângulo relacionado à força concentrada equivale a um terço do ângulo de abertura ( $\varphi = \alpha / 3$ ).

Tabela 4.4 – Coeficientes de flambagem determinados a partir do modelo matricial para arcos circulares biarticulados submetidos à força concentrada na direção radial adotando  $\varphi = (\alpha / 3)$

$2\alpha$ graus	$f / L$	$\gamma_4$	$K_4$
30,00	0,0658	55,15	14,78
45,24	0,1000	36,23	21,44
60,00	0,1340	26,98	26,98
87,21	0,2000	17,98	34,21
90,00	0,2071	17,35	34,70
120,00	0,2887	12,33	36,99
123,86	0,3000	11,85	36,90
150,00	0,3837	9,17	34,22
154,64	0,4000	8,78	33,43
180,00	0,5000	6,94	27,76

Fonte: Autor

Na Tabela 4.5 são indicados os coeficientes de flambagem para quando ângulo relacionado à força concentrada equivale a um meio do ângulo de abertura ( $\varphi = \alpha / 2$ ).

Tabela 4.5 – Coeficientes de flambagem determinados a partir do modelo matricial para arcos circulares submetidos à força concentrada verticalmente no meio do vão adotando  $\varphi = (\alpha / 2)$

$2\alpha$ graus	$f / L$	$\gamma_4$	$K_4$
30,00	0,0658	67,29	18,03
45,24	0,1000	44,22	26,17
60,00	0,1340	32,94	32,94
87,21	0,2000	21,96	41,78
90,00	0,2071	21,19	42,38
120,00	0,2887	15,08	45,24
123,86	0,3000	14,50	45,16
150,00	0,3837	11,23	41,91
154,64	0,4000	10,75	40,93
180,00	0,5000	8,50	34,00

Fonte: Autor

Na

Tabela 4.6 são verificados os coeficientes de flambagem para quando ângulo relacionado à força concentrada equivale a dois terços do ângulo de abertura ( $\varphi = 2\alpha / 3$ ).

Tabela 4.6 – Coeficientes de flambagem determinados a partir do modelo matricial para arcos circulares biarticulados submetidos à força concentrada na direção radial adotando  $\varphi = (2\alpha / 3)$

$2\alpha$ graus	$f/L$	$\gamma_4$	$K_4$
30,00	0,0658	94,74	25,39
45,24	0,1000	62,27	36,85
60,00	0,1340	46,40	46,40
87,21	0,2000	30,97	58,93
90,00	0,2071	29,89	59,78
120,00	0,2887	21,29	63,87
123,86	0,3000	20,48	63,78
150,00	0,3837	15,87	59,23
154,64	0,4000	15,20	57,87
180,00	0,5000	12,02	48,08

Fonte: Autor

Novamente, os valores verificados nas Tabelas 4.4, 4.5 e 4.6 são muito próximos aos que foram obtidos a partir do modelo teórico (Tabelas 3.6, 3.7 e 3.8).

# CAPÍTULO 5

## FORMULAÇÃO DO MODELO APROXIMADO

### 5.1 Introdução

O último modelo proposto para análise é baseado no Método dos Resíduos Ponderados (MRP) e no Método de Galerkin, e será citado como modelo aproximado. O MRP e o Método de Galerkin são utilizados na resolução de equações diferenciais, sendo também geralmente aplicados no Método dos Elementos Finitos (ZIENKIEWICZ, 2000).

O modelo aproximado também é desenvolvido especificamente para a análise da força crítica de flambagem em arcos circulares biarticulados sujeitos às condições de carregamento estudadas.

### 5.2 Modelo aproximado para análise de arco circular biarticulado

Embora a premissa básica do MRP seja aproximar soluções para as equações diferenciais relacionadas a um problema físico respeitando suas condições, os resultados alcançados podem ser bastante precisos. Dessa forma, pode-se aplicar a Equação 5.1 para obter aproximadamente a solução da equação diferencial do deslocamento radial em arcos.

$$w = c_i \cdot \phi_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad \text{Equação 5.1}$$

A Equação 5.1 é uma função de aproximação, onde os coeficientes  $c$  são constantes inicialmente desconhecidas e os parâmetros  $\phi$  são funções base. Essas funções base são

atribuídas de forma a abranger as condições iniciais e de contorno do sistema, sendo geralmente funções lineares, polinomiais ou trigonométricas.

Como apresentado no Capítulo 2, a Equação 5.2 deve ser nula.

$$\frac{d^2 w}{d\theta} + w + \frac{M \cdot R^2}{E \cdot I} = 0 \quad \text{Equação 5.2}$$

Porém, como uma solução aproximada é adotada, a Equação 5.2 conterá erros (resíduos) e, portanto, não será nula (MOAVENI, 1999). Essa expressão é reescrita na Equação 5.3, sendo conhecida como função residual.

$$F = \frac{d^2 w}{d\theta} + w + \frac{M \cdot R^2}{E \cdot I} \quad \text{Equação 5.3}$$

Uma vez estabelecida a função residual, é necessário adotar um procedimento para anular os resíduos, sendo escolhido o Método de Galerkin. Segundo Moaveni (1999), no Método de Galerkin o erro é ortogonal às funções base, como indicado na Equação 5.4.

$$\int_a^b \phi_i \cdot F \, dx = 0 \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad \text{Equação 5.4}$$

Para análise dos arcos, assume-se que a expressão indicada na Equação 5.4 pode ser reescrita na Equação 5.5, considerando que a integral abrange todo o domínio do arco e ocorre em função da variável angular.

$$\int_0^{2 \cdot \alpha} \phi_i \cdot F \cdot R \, d\theta = 0 \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad \text{Equação 5.5}$$

A força crítica pode ser obtida isolando o carregamento na Equação 5.5. Nota-se que os coeficientes de flambagem podem ser obtidos a partir da força crítica de acordo com o mesmo procedimento indicado anteriormente.



No caso dos arcos biarticulados com forma circular, a Equação 5.6 é adotada como a função de aproximação do deslocamento na direção radial. Há apenas uma constante indeterminada e uma função base.

$$w = c_1 \cdot \phi_1 \quad \text{Equação 5.6}$$

A função base adotada é trigonométrica e indicada na Equação 5.7.

$$\phi_1 = \text{sen}\left(\frac{\pi \cdot \theta}{\alpha}\right) \quad \text{Equação 5.7}$$

A função residual referente ao arco biarticulado é apresentada na Equação 5.8, por meio da substituição do momento fletor (Equação 3.2) na Equação 5.3.

$$F = \frac{d^2 w}{d\theta} + w \cdot \left(1 + \frac{N \cdot R^2}{E \cdot I}\right) \quad \text{Equação 5.8}$$

Conforme as equações citadas para o modelo aproximado, e de acordo com a função de aproximação escolhida, os coeficientes de flambagem são determinados a partir dos esforços normais atuantes nas situações de carregamento analisadas.

### 5.2.1 Força uniformemente distribuída na direção radial

Para o arco biarticulado submetido à força uniformemente distribuída na direção radial, o esforço normal foi indicado na Equação 3.3. Conforme a função base adotada (Equação 5.7), a força crítica pode ser isolada na Equação 5.8 de acordo com a substituição do esforço normal pelo que foi considerado e atribuindo valores para as demais propriedades do arco. Uma vez obtida a força crítica, o coeficiente de flambagem é alcançado conforme a Equação 4.10 e a equivalência indicada na Equação 3.22.

Adotando a variação conhecida para o ângulo de abertura e a relação flecha/vão, os coeficientes de flambagem são calculados e indicados na Tabela 5.1. Os valores determinados são exatamente iguais aos que foram alcançados a partir do modelo teórico. (Tabela 3.3).

Tabela 5.1 – Coeficientes de flambagem determinados a partir do modelo aproximado para arcos circulares biarticulados submetidos à força uniformemente distribuída na direção radial

$2\alpha$ graus	$f/L$	$\gamma_1$	$K_1$
30,00	0,0658	143,00	19,83
45,24	0,1000	62,32	28,37
60,00	0,1340	35,00	35,00
87,21	0,2000	16,04	42,10
90,00	0,2071	15,00	42,43
120,00	0,2887	8,00	41,57
123,86	0,3000	7,45	40,93
150,00	0,3837	4,76	34,32
154,64	0,4000	4,42	32,83
180,00	0,5000	3,00	24,00

Fonte: Autor

### 5.2.2 Força verticalmente concentrada no meio do vão

Para o arco biarticulado submetido à força verticalmente concentrada no meio do vão, o esforço normal foi indicado na Equação 3.24. De acordo com a função base atribuída (Equação 5.7), a força crítica é isolada na Equação 5.8 conforme a substituição do esforço normal pelo que foi considerado e definindo valores para as demais propriedades do arco. Uma vez obtida a força crítica, o coeficiente de flambagem é alcançado conforme a Equação 4.11 e a equivalência indicada na Equação 3.36.

Adotando a variação conhecida para o ângulo de abertura e a relação flecha/vão, os coeficientes de flambagem são calculados e indicados na Tabela 5.2. Os valores determinados são exatamente iguais aos que foram alcançados a partir do modelo teórico (Tabela 3.4).

Tabela 5.2 – Coeficientes de flambagem determinados a partir do modelo aproximado para arcos circulares biarticulados submetidos à força concentrada verticalmente no meio do vão

$2\alpha$ graus	$f/L$	$\gamma_2$	$K_2$
30,00	0,0658	47,91	12,84
45,24	0,1000	31,48	18,63
60,00	0,1340	23,43	23,43
87,21	0,2000	15,59	29,66
90,00	0,2071	15,05	30,10
120,00	0,2887	10,69	32,07
123,86	0,3000	10,27	31,98
150,00	0,3837	7,94	29,63
154,64	0,4000	7,60	28,94
180,00	0,5000	6,00	24,00

Fonte: Autor

### 5.2.3 Força uniformemente distribuída ao longo do vão

Para o arco biarticulado submetido à força verticalmente concentrada no meio do vão, o esforço normal foi indicado na Equação 3.24. Conforme a função base adotada (Equação 5.7), a força crítica pode ser isolada na Equação 5.8 de acordo com a substituição do esforço normal pelo que foi considerado e atribuindo valores para as demais propriedades do arco. Uma vez obtida a força crítica, o coeficiente de flambagem é alcançado conforme a Equação 4.12 e a equivalência indicada na Equação 3.44.

Adotando a variação conhecida para o ângulo de abertura e a relação flecha/vão, os coeficientes de flambagem são calculados e indicados na Tabela 5.3. Os valores determinados são próximos aos que foram alcançados a partir do modelo teórico (Tabela 3.5).

Tabela 5.3 – Coeficientes de flambagem determinados a partir do modelo aproximado para arcos circulares biarticulados submetidos à força uniformemente distribuída ao longo do vão

$2\alpha$ graus	$f/L$	$\gamma_3$	$K_3$
30,00	0,0658	141,13	19,57
45,24	0,1000	60,48	27,53
60,00	0,1340	33,34	33,34
87,21	0,2000	14,77	38,76
90,00	0,2071	13,78	38,98
120,00	0,2887	7,23	37,57
123,86	0,3000	6,73	36,99
150,00	0,3837	4,40	31,72
154,64	0,4000	4,12	30,61
180,00	0,5000	3,00	24,00

Fonte: Autor

### 5.2.4 Força concentrada na direção radial

Para o arco biarticulado submetido à força concentrada na direção radial, o esforço normal foi indicado na Equação 3.47. De acordo com a função base atribuída (Equação 5.7), a força crítica é isolada na Equação 5.8 conforme a substituição do esforço normal pelo que foi considerado e definindo valores para as demais propriedades do arco. Uma vez obtida a força crítica, o coeficiente de flambagem é alcançado conforme a Equação 4.13 e a equivalência indicada na Equação 3.62.

Os coeficientes de flambagem são calculados atribuindo a variação conhecida para o ângulo de abertura e a relação flecha/vão, e para o ângulo que define o ponto de aplicação da força concentrada. Na Tabela 5.4 são verificados os coeficientes de flambagem para quando ângulo relacionado à força concentrada equivale a um terço do ângulo de abertura ( $\varphi = \alpha / 3$ ).

Tabela 5.4 – Coeficientes de flambagem determinados a partir do modelo aproximado para arcos circulares biarticulados submetidos à força concentrada na direção radial adotando  $\varphi = (\alpha / 3)$

$2\alpha$ graus	$f / L$	$\gamma_4$	$K_4$
30,00	0,0658	55,13	14,77
45,24	0,1000	36,23	21,44
60,00	0,1340	26,98	26,98
87,21	0,2000	17,96	34,17
90,00	0,2071	17,34	34,68
120,00	0,2887	12,32	36,96
123,86	0,3000	11,84	36,87
150,00	0,3837	9,16	34,19
154,64	0,4000	8,77	33,39
180,00	0,5000	6,93	27,72

Fonte: Autor

Na Tabela 5.5 são indicados os coeficientes de flambagem para quando ângulo relacionado à força concentrada equivale a um meio do ângulo de abertura ( $\varphi = \alpha / 2$ ).

Tabela 5.5 – Coeficientes de flambagem determinados a partir do modelo aproximado para arcos circulares submetidos à força concentrada verticalmente no meio do vão adotando  $\varphi = (\alpha / 2)$

$2\alpha$ graus	$f / L$	$\gamma_4$	$K_4$
30,00	0,0658	67,26	18,02
45,24	0,1000	44,21	26,16
60,00	0,1340	32,94	32,94
87,21	0,2000	21,95	41,76
90,00	0,2071	21,18	42,36
120,00	0,2887	15,07	45,21
123,86	0,3000	14,48	45,10
150,00	0,3837	11,22	41,87
154,64	0,4000	10,74	40,89
180,00	0,5000	8,49	33,96

Fonte: Autor

Na Tabela 5.6 são verificados os coeficientes de flambagem para quando ângulo relacionado à força concentrada equivale a dois terços do ângulo de abertura ( $\varphi = 2\alpha / 3$ ).

Tabela 5.6 – Coeficientes de flambagem determinados a partir do modelo aproximado para arcos circulares biarticulados submetidos à força concentrada na direção radial adotando  $\varphi = (2\alpha / 3)$

$2\alpha$ graus	$f / L$	$\gamma_4$	$K_4$
30,00	0,0658	94,70	25,37
45,24	0,1000	62,27	36,85
60,00	0,1340	46,40	46,40
87,21	0,2000	30,95	58,89
90,00	0,2071	29,88	59,76
120,00	0,2887	21,28	63,84
123,86	0,3000	20,46	63,72
150,00	0,3837	15,85	59,15
154,64	0,4000	15,18	57,79
180,00	0,5000	12,00	48,00

Fonte: Autor

Os valores verificados nas Tabelas 5.4, 5.5 e 5.6 são muito próximos aos que foram obtidos a partir do modelo teórico (Tabelas 3.6, 3.7 e 3.8).

# CAPÍTULO 6

## SIMULAÇÃO NUMÉRICA

### 6.1 Introdução

A simulação numérica é adotada como um referencial externo na comparação dos resultados referentes aos coeficientes de flambagem determinados a partir dos modelos propostos.

Para realização das simulações numéricas foi utilizado o programa computacional ANSYS. Neste programa são aplicadas formulações pelo Método dos Elementos Finitos para a análise estrutural. Quanto à análise de estabilidade, há duas opções disponíveis no sistema: análise linear por autovalor e análise não-linear. No âmbito deste estudo foi aplicada a análise linear por autovalor.

### 6.2 Geração do modelo estrutural

Inicialmente foi gerada a geometria dos arcos no próprio programa, cujas propriedades foram atribuídas conforme os valores para o ângulo de abertura e a relação flecha/vão utilizados nas análises e indicados em seções anteriores. Algumas constantes listadas na Tabela 6.1, referentes à geometria e ao material, foram propostas para possibilitar a simulação numérica da estrutura. Os valores determinados para a força crítica a partir da simulação são obtidos em função das unidades adotadas para essas constantes. Os coeficientes de flambagem foram determinados de acordo com os valores calculados para

as forças críticas, sendo as equações verificadas já descritas anteriormente usadas para essa conversão.

Tabela 6.1 – Constantes atribuídas para simulação numérica

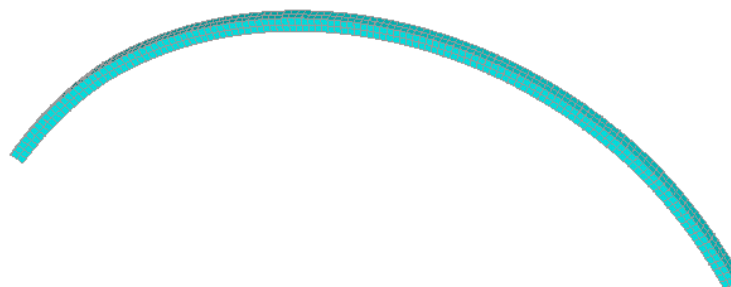
Propriedade	Símbolo	Valor	Unidade
Vão	$L$	10	m
Módulo de elasticidade longitudinal	$E$	$2,00 \cdot 10^7$	kN/m <sup>2</sup>
Área da seção transversal	$A$	0,04	m <sup>2</sup>
Momento de inércia da seção	$I$	$1,33 \cdot 10^{-4}$	m <sup>4</sup>
Coefficiente de Poisson	$\eta$	0,3	-

Fonte: Autor

Para constituir os arcos foi escolhido o elemento de barra tridimensional BEAM188, que possui dois nós extremos e seis graus de liberdade por nó, sendo três relacionados à translação e três à rotação nas direções axiais. De acordo com ANSYS (2014), o elemento BEAM188 é baseado na hipótese de viga de Timoshenko e inclui o efeito de deformação por cisalhamento, sendo apropriado para análise de barras esbeltas ou moderadamente esbeltas. Por consequência da natureza tridimensional do elemento de barra, as análises numéricas foram tridimensionais, embora análises bidimensionais fossem suficientes para determinar os valores críticos das forças aplicadas uma vez que não há ações fora do plano da estrutura.

Os elementos de barra foram divididos com comprimento equivalente a 1% do vão total, e as condições de contorno foram simuladas adequadamente conforme as restrições dos graus de liberdade necessárias para cada sistema. Os arcos foram restringidos no eixo fora do plano da estrutura para anular a possível influência de flambagem por torção. A projeção oblíqua de um dos arcos é indicada na Figura 6.1, que também ilustra a distribuição da malha.

Figura 6.1 – Modelo de um arco circular no programa computacional ANSYS (projeção ortogonal)



Fonte: Autor

As forças foram aplicadas com intensidade unitária, pois o valor crítico na análise por autovalor é obtido em função da magnitude da força inicialmente admitida.

A força uniformemente distribuída na direção radial foi aplicada conforme o comando de pressão linear em barras.

A força verticalmente concentrada no meio do vão foi aplicada ao nó correspondente ao ponto mais alto do arco (coroa).

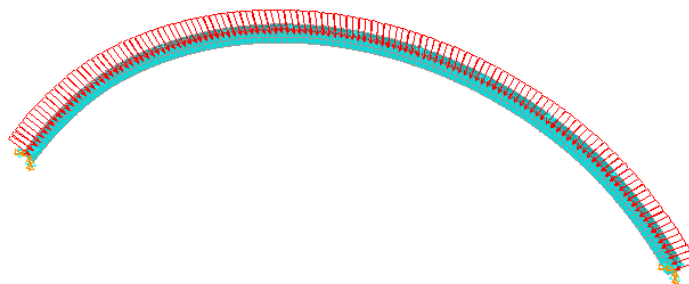
Para simulação da força uniformemente distribuída ao longo do vão, foram aplicadas forças verticais concentradas em nós distanciados por uma unidade de comprimento na direção horizontal. No caso, como foi usado o metro, os nós foram distanciados a cada 1 m nessa direção.

A força concentrada na direção radial foi simulada considerando uma componente agindo na vertical e uma na horizontal, com a decomposição sendo realizada conforme o ângulo relacionado ao ponto de aplicação da força, que também define o nó em que as componentes são associadas.

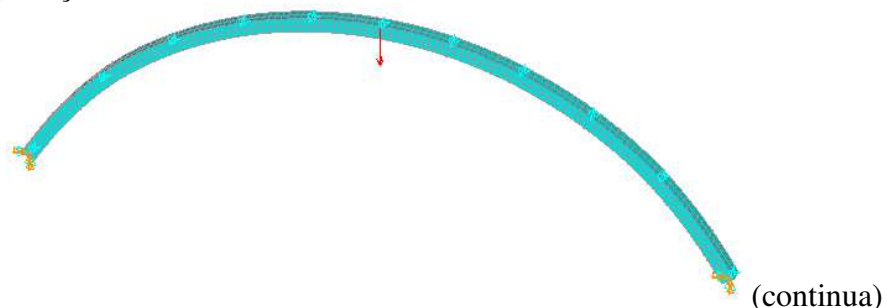
A representação das forças atuantes é verificada na Figura 6.2.

Figura 6.2 – Modelos de arcos circulares sujeitos às condições de carregamento no programa computacional ANSYS (projeção ortogonal)

a) Força uniformemente distribuída na direção radial



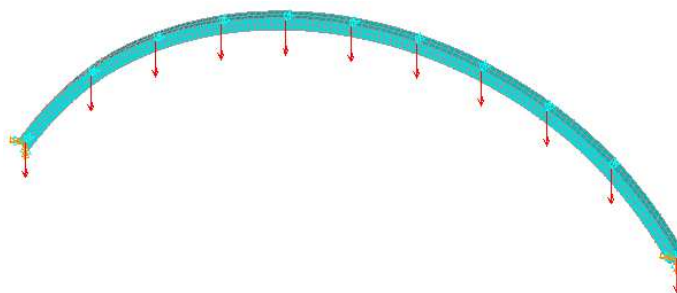
b) Força verticalmente concentrada no meio do vão



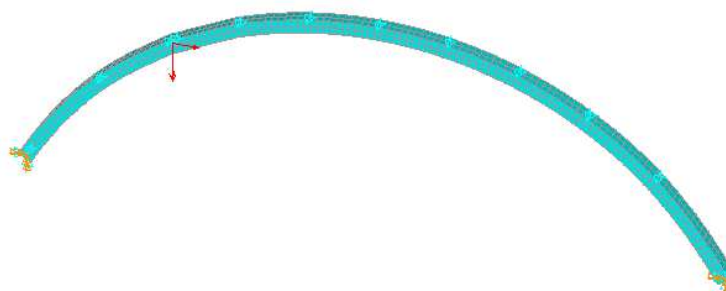


(continuação)

c) Força uniformemente distribuída ao longo do vão



d) Força concentrada na direção radial



Fonte: Autor

Análises estáticas foram efetuadas antes da análise de estabilidade, uma vez que esse procedimento é requerido pelo programa computacional ANSYS, e ativado o comando para conduzir as tensões prévias para análise de estabilidade (/PSTRES).

### 6.3 Coeficientes de flambagem

Conforme o cálculo das forças críticas com auxílio do programa computacional ANSYS, os coeficientes de flambagem são determinados a partir do tipo de solicitação e das propriedades atribuídas aos arcos, incluindo as constantes indicadas na Tabela 6.1.

#### 6.3.1 Força uniformemente distribuída na direção radial

No caso dos arcos submetidos à força uniformemente distribuída na direção radial, as forças críticas e os respectivos coeficientes de flambagem definidos a partir da simulação numérica pelo programa computacional ANSYS são indicados na Tabela 6.2, de acordo

com a variação do ângulo de abertura e da relação flecha/vão, e para cada condição de contorno estudada.

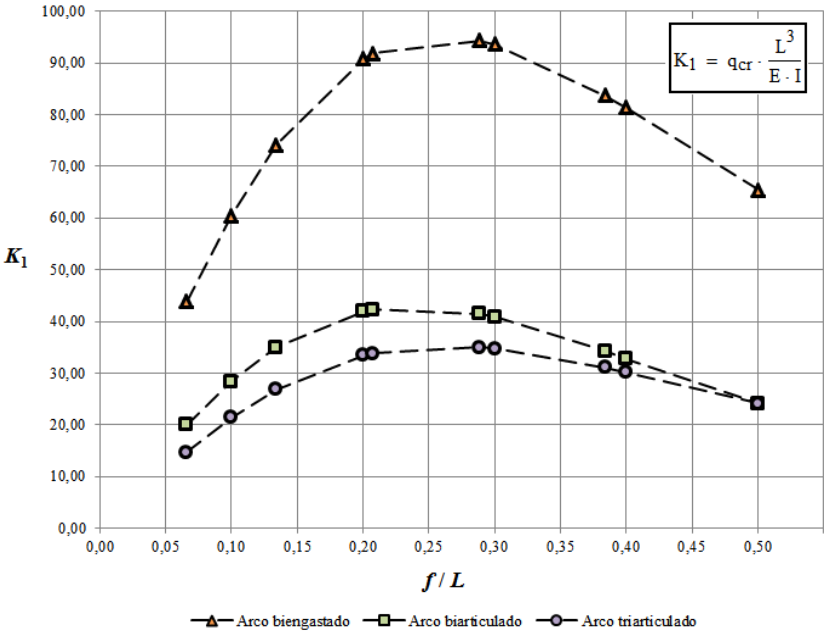
Os coeficientes de flambagem  $K_1$  indicados na Tabela 6.2 também são representados no gráfico da Figura 6.3, em que são traçadas curvas de variação em função da relação flecha/vão para cada condição de contorno dos arcos.

Tabela 6.2 – Coeficientes de flambagem de arcos circulares submetidos à força uniformemente distribuída na direção radial a partir de simulação numérica

$2\alpha$ graus	$f/L$	$L$ m	$f$ m	$R$ m	$q_{cr}$ kN/m			$\gamma_1$			$K_1$		
					BIE	BIA	TRI	BIE	BIA	TRI	BIE	BIA	TRI
30,00	0,0658	10	0,6583	19,3185	117,01	53,43	39,36	316,36	144,45	106,42	43,88	20,03	14,76
45,24	0,1000		1,0000	12,9999	161,14	75,83	57,30	132,76	62,48	47,21	60,43	28,44	21,49
60,00	0,1340		1,3397	10,0000	197,82	93,33	71,76	74,18	35,00	26,91	74,18	35,00	26,91
87,21	0,2000		2,0000	7,2500	242,24	112,06	89,27	34,62	16,01	12,76	90,84	42,02	33,48
90,00	0,2071		2,0711	7,0711	244,90	112,93	90,34	32,47	14,97	11,98	91,84	42,35	33,88
120,00	0,2887		2,8868	5,7735	251,40	110,61	93,39	18,14	7,98	6,74	94,28	41,48	35,02
123,86	0,3000		3,0000	5,6667	249,50	108,93	92,72	17,02	7,43	6,33	93,56	40,85	34,77
150,00	0,3837		3,8366	5,1764	223,37	91,38	83,02	11,62	4,75	4,32	83,76	34,27	31,13
154,64	0,4000		4,0000	5,1250	216,79	87,46	80,53	10,94	4,41	4,07	81,30	32,80	30,20
180,00	0,5000		5,0000	5,0000	174,50	64,42	64,50	8,18	3,02	3,02	65,44	24,16	24,19

Fonte: Autor

Figura 6.3 – Coeficiente de flambagem  $K_1$  em função da relação flecha/vão obtidos por simulação numérica



Fonte: Autor

6.3.2 Força verticalmente concentrada no meio do vão

No caso dos arcos submetidos à força verticalmente concentrada no meio do vão, as forças críticas e os respectivos coeficientes de flambagem definidos a partir da simulação numérica pelo programa computacional ANSYS são indicados na Tabela 6.3, de acordo com a variação do ângulo de abertura e da relação flecha/vão, e para cada condição de contorno estudada.

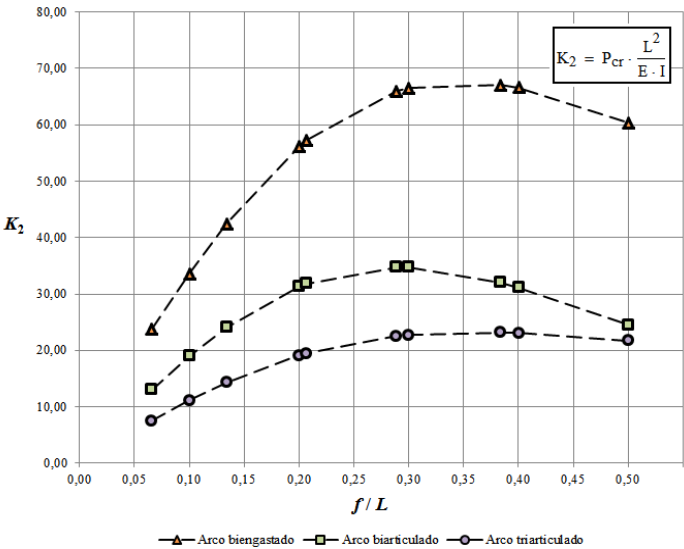
Tabela 6.3 – Coeficientes de flambagem de arcos circulares submetidos à força verticalmente concentrada no meio do vão a partir de simulação numérica

2α graus	f / L	L m	f m	R m	P <sub>cr</sub> kN			γ <sub>2</sub>			K <sub>2</sub>		
					BIE	BIA	TRI	BIE	BIA	TRI	BIE	BIA	TRI
30,00	0,0658	10	0,6583	19,3185	635,90	348,59	200,01	89,00	48,79	27,99	23,85	13,07	7,50
45,24	0,1000		1,0000	12,9999	895,31	506,42	296,71	56,74	32,09	18,80	33,57	18,99	11,13
60,00	0,1340		1,3397	10,0000	1132,60	643,10	381,52	42,47	24,12	14,31	42,47	24,12	14,31
87,21	0,2000		2,0000	7,2500	1497,00	834,56	508,66	29,51	16,45	10,03	56,14	31,30	19,07
90,00	0,2071		2,0711	7,0711	1527,60	848,82	519,24	28,64	15,92	9,74	57,29	31,83	19,47
120,00	0,2887		2,8868	5,7735	1758,20	926,40	600,30	21,98	11,58	7,50	65,93	34,74	22,51
123,86	0,3000		3,0000	5,6667	1773,80	925,66	606,23	21,36	11,15	7,30	66,52	34,71	22,73
150,00	0,3837		3,8366	5,1764	1788,90	854,58	619,12	17,98	8,59	6,22	67,08	32,05	23,22
154,64	0,4000		4,0000	5,1250	1774,80	830,62	616,55	17,48	8,18	6,07	66,56	31,15	23,12
180,00	0,5000		5,0000	5,0000	1608,30	655,24	579,09	15,08	6,14	5,43	60,31	24,57	21,72

Fonte: Autor

Os coeficientes de flambagem  $K_2$  indicados na Tabela 6.3 também são representados no gráfico da Figura 6.4, em função da relação flecha/vão.

Figura 6.4 – Coeficientes de flambagem  $K_2$  em função da relação flecha/vão obtidos por simulação numérica



Fonte: Autor

### 6.3.3 Força uniformemente distribuída ao longo do vão

No caso dos arcos submetidos à força uniformemente distribuída ao longo do vão, as forças críticas e os respectivos coeficientes de flambagem definidos a partir da simulação numérica pelo programa computacional ANSYS são indicados na Tabela 6.4, de acordo com a variação do ângulo de abertura e da relação flecha/vão, e para cada condição de contorno estudada.

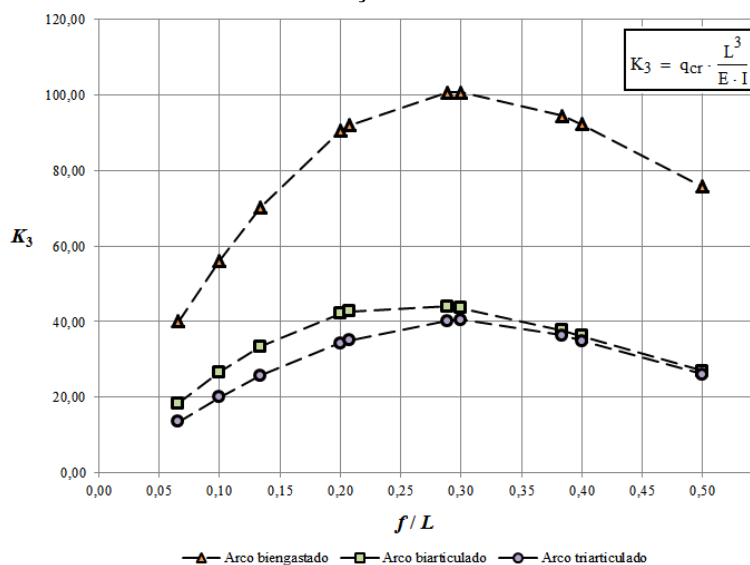
Tabela 6.4 – Coeficientes de flambagem de arcos circulares submetidos à força uniformemente distribuída ao longo do vão a partir de simulação numérica

$2\alpha$ graus	$f/L$	$L$ m	$f$ m	$q_{cr}$ kN/m			$\gamma_3$			$K_3$		
				BIE	BIA	TRI	BIE	BIA	TRI	BIE	BIA	TRI
30,00	0,0658	10	0,6583	106,79	49,14	36,00	288,74	132,86	97,33	40,05	18,43	13,50
45,24	0,1000		1,0000	149,47	70,91	53,42	123,14	58,42	44,01	56,05	26,59	20,03
60,00	0,1340		1,3397	187,41	89,12	68,70	70,28	33,42	25,76	70,28	33,42	25,76
87,21	0,2000		2,0000	241,27	112,21	91,44	34,48	16,04	13,07	90,48	42,08	34,29
90,00	0,2071		2,0711	245,32	113,65	93,29	32,53	15,07	12,37	92,00	42,62	34,98
120,00	0,2887		2,8868	268,40	117,43	107,15	19,37	8,47	7,73	100,65	44,04	40,18
123,86	0,3000		3,0000	268,48	116,36	108,05	18,32	7,94	7,37	100,68	43,64	40,52
150,00	0,3837		3,8366	251,72	100,58	96,97	13,09	5,23	5,04	94,40	37,72	36,36
154,64	0,4000		4,0000	245,95	96,64	93,12	12,42	4,88	4,70	92,23	36,24	34,92
180,00	0,5000		5,0000	202,01	71,57	69,28	9,47	3,35	3,25	75,75	26,84	25,98

Fonte: Autor

Os coeficientes de flambagem  $K_3$  indicados na Tabela 6.4 também são representados no gráfico da Figura 6.5, em função da relação flecha/vão.

Figura 6.5 – Coeficientes de flambagem  $K_3$  em função da relação flecha/vão obtidos por simulação numérica



Fonte: Autor

### 6.3.4 Força concentrada na direção radial

No caso dos arcos submetidos à força concentrada na direção radial, as forças críticas e os respectivos coeficientes de flambagem definidos a partir da simulação numérica pelo programa computacional ANSYS são indicados na Tabela 6.5, considerando o ângulo relacionado ao ponto de aplicação da força concentrada equivalente a um terço do ângulo de abertura ( $\varphi = \alpha / 3$ ).

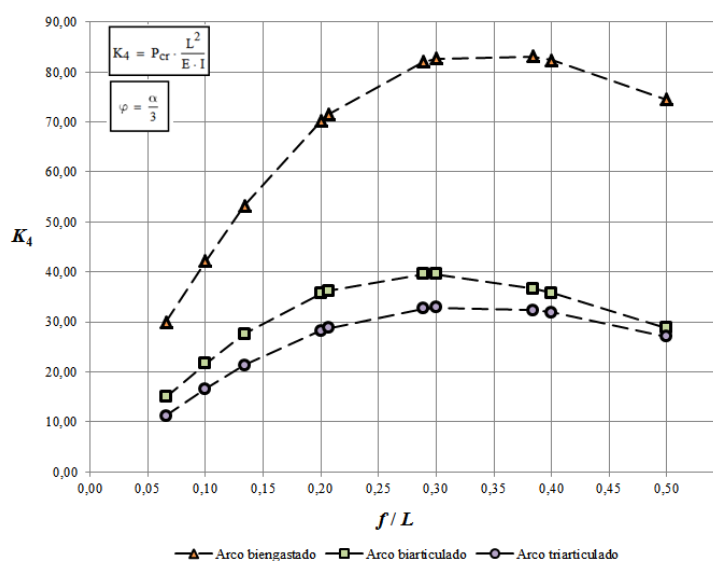
Tabela 6.5 – Coeficientes de flambagem de arcos circulares submetidos à força verticalmente concentrada no meio do vão a partir de simulação numérica para  $\varphi = (\alpha / 3)$

$2\alpha$ graus	$f/L$	$L$ m	$f$ m	$P_{cr}$ kN			$\gamma_4$			$K_4$		
				BIE	BIA	TRI	BIE	BIA	TRI	BIE	BIA	TRI
30,00	0,0658	10	0,6583	799,29	398,52	299,45	111,86	55,77	41,91	29,97	14,94	11,23
45,24	0,1000		1,0000	1124,61	578,77	443,74	71,27	36,68	28,12	42,17	21,70	16,64
60,00	0,1340		1,3397	1420,89	734,26	569,30	53,28	27,53	21,35	53,28	27,53	21,35
87,21	0,2000		2,0000	1871,25	950,84	753,00	36,88	18,74	14,84	70,17	35,66	28,24
90,00	0,2071		2,0711	1908,60	966,87	767,79	35,79	18,13	14,40	71,57	36,26	28,79
120,00	0,2887		2,8868	2185,84	1054,20	871,40	27,32	13,18	10,89	81,97	39,53	32,68
123,86	0,3000		3,0000	2203,78	1053,54	876,91	26,54	12,69	10,56	82,64	39,51	32,88
150,00	0,3837		3,8366	2215,33	978,29	862,06	22,26	9,83	8,66	83,07	36,69	32,33
154,64	0,4000		4,0000	2194,59	952,91	849,33	21,62	9,39	8,37	82,30	35,73	31,85
180,00	0,5000		5,0000	1984,57	766,70	721,37	18,61	7,19	6,76	74,42	28,75	27,05

Fonte: Autor

Os coeficientes de flambagem  $K_4$  indicados na Tabela 6.5, para  $\varphi = (\alpha / 3)$ , também são representados no gráfico da Figura 6.6, em função da relação flecha/vão.

Figura 6.6 – Coeficientes de flambagem  $K_4$  em função da relação flecha/vão para  $\varphi = (\alpha / 3)$  obtidos por simulação numérica



Fonte: Autor

Considerando o ângulo relacionado ao ponto de aplicação da força concentrada equivalente a um terço do ângulo de abertura ( $\varphi = \alpha / 2$ ), nesse caso as forças críticas e os coeficientes de flambagem determinados a partir da simulação numérica pelo programa computacional ANSYS são indicados na Tabela 6.6.

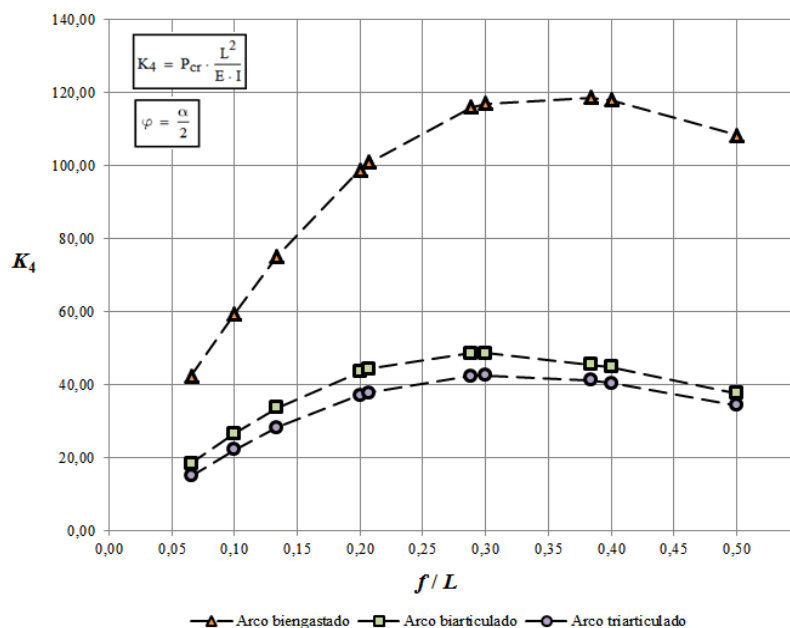
Tabela 6.6 – Coeficientes de flambagem de arcos circulares submetidos à força verticalmente concentrada no meio do vão a partir de simulação numérica para  $\varphi = (\alpha / 2)$

$2\alpha$ graus	$f/L$	$L$ m	$f$ m	$P_{cr}$ kN			$\gamma_4$			$K_4$		
				BIE	BIA	TRI	BIE	BIA	TRI	BIE	BIA	TRI
30,00	0,0658	10	0,6583	1127,75	488,24	398,64	157,83	68,33	55,79	42,29	18,31	14,95
45,24	0,1000		1,0000	1585,70	708,36	589,50	100,49	44,89	37,36	59,46	26,56	22,11
60,00	0,1340		1,3397	2002,20	897,88	754,10	75,08	33,67	28,28	75,08	33,67	28,28
87,21	0,2000		2,0000	2636,00	1161,60	989,35	51,96	22,90	19,50	98,85	43,56	37,10
90,00	0,2071		2,0711	2688,90	1181,26	1007,72	50,42	22,15	18,89	100,83	44,30	37,79
120,00	0,2887		2,8868	3092,20	1294,50	1127,42	38,65	16,18	14,09	115,96	48,54	42,28
123,86	0,3000		3,0000	3120,92	1295,48	1132,05	37,58	15,60	13,63	117,03	48,58	42,45
150,00	0,3837		3,8366	3164,50	1213,38	1096,28	31,80	12,19	11,02	118,67	45,50	41,11
154,64	0,4000		4,0000	3144,50	1194,67	1077,68	30,97	11,77	10,61	117,92	44,80	40,41
180,00	0,5000		5,0000	2889,90	999,80	915,36	27,09	9,37	8,58	108,37	37,49	34,33

Fonte: Autor

Os coeficientes de flambagem  $K_4$  indicados na Tabela 6.6, para  $\varphi = (\alpha / 2)$ , também são representados no gráfico da Figura 6.7, em função da relação flecha/vão.

Figura 6.7 – Coeficientes de flambagem  $K_4$  em função da relação flecha/vão para  $\varphi = (\alpha / 2)$  obtidos por simulação numérica



Fonte: Autor

No caso dos arcos submetidos à força concentrada na direção radial, as forças críticas e os respectivos coeficientes de flambagem definidos a partir da simulação numérica pelo programa computacional ANSYS são indicados na Tabela 6.7, considerando o ângulo relacionado ao ponto de aplicação da força concentrada equivalente a um terço do ângulo de abertura ( $\varphi = 2\alpha / 3$ ).

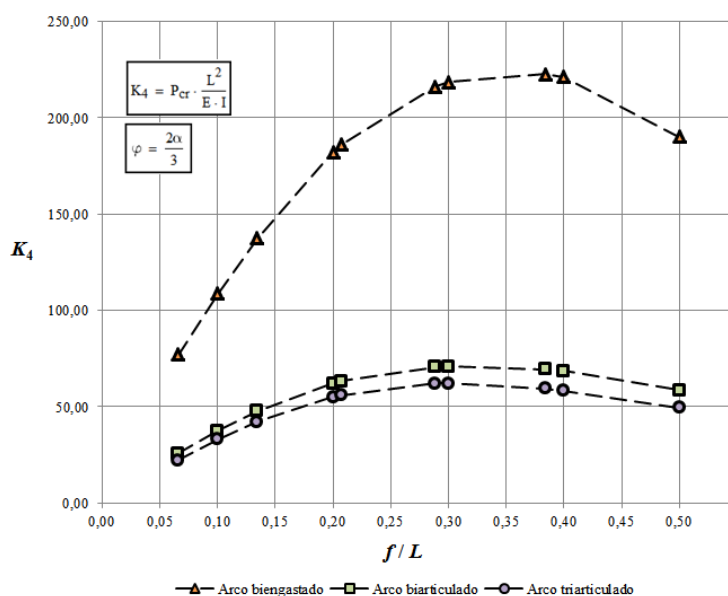
Tabela 6.7 – Coeficientes de flambagem de arcos circulares submetidos à força verticalmente concentrada no meio do vão a partir de simulação numérica para  $\varphi = (2\alpha / 3)$

$2\alpha$ graus	$f/L$	$L$ m	$f$ m	$P_{cr}$ kN			$\gamma_4$			$K_4$		
				BIE	BIA	TRI	BIE	BIA	TRI	BIE	BIA	TRI
30,00	0,0658	10	0,6583	2055,37	687,92	596,93	287,65	96,28	83,54	77,08	25,80	22,38
45,24	0,1000		1,0000	2895,08	999,61	881,38	183,47	63,35	55,86	108,57	37,49	33,05
60,00	0,1340		1,3397	3664,37	1269,80	1125,02	137,41	47,62	42,19	137,41	47,62	42,19
87,21	0,2000		2,0000	4858,37	1655,51	1467,04	95,76	32,63	28,92	182,19	62,08	55,01
90,00	0,2071		2,0711	4960,30	1685,47	1493,09	93,01	31,60	28,00	186,01	63,21	55,99
120,00	0,2887		2,8868	5767,27	1881,45	1652,67	72,09	23,52	20,66	216,27	70,55	61,98
123,86	0,3000		3,0000	5828,28	1889,70	1656,71	70,18	22,76	19,95	218,56	70,86	62,13
150,00	0,3837		3,8366	5937,01	1850,90	1585,69	59,66	18,60	15,93	222,64	69,41	59,46
154,64	0,4000		4,0000	5901,33	1826,07	1555,91	58,13	17,99	15,33	221,30	68,48	58,35
180,00	0,5000		5,0000	5071,50	1559,69	1319,08	47,55	14,62	12,37	190,18	58,49	49,47

Fonte: Autor

Os coeficientes de flambagem  $K_4$  indicados na Tabela 6.7, para  $\varphi = (2\alpha / 3)$ , também são representados no gráfico da Figura 6.8, em função da relação flecha/vão.

Figura 6.8 – Coeficientes de flambagem  $K_4$  em função da relação flecha/vão para  $\varphi = (2\alpha / 3)$  obtidos por simulação numérica

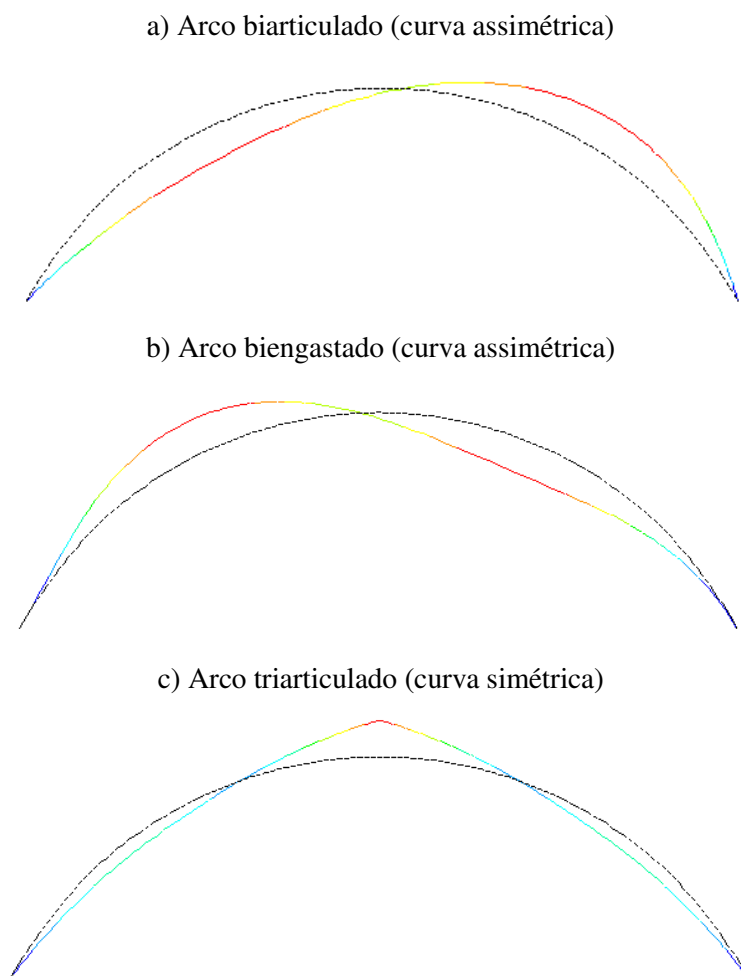


Fonte: Autor

#### 6.4 Curvas do primeiro modo de flambagem

As curvas relativas ao primeiro modo de flambagem dos arcos, traçadas pelo programa computacional ANSYS, seguiram os padrões indicados na Figura 6.9. Independente das condições de carregamento e do ângulo de abertura ou relação flecha/vão, esses padrões foram constantes para as condições de contorno indicadas.

Figura 6.9 – Curvas relativas ao primeiro modo de flambagem dos arcos simulados no programa computacional ANSYS



Fonte: Autor

As curvas do primeiro modo de flambagem dos arcos possuem praticamente as mesmas formas que foram indicadas esquematicamente no Capítulo 3, segundo os conceitos teóricos. A curva referente ao arco triarticulado foi traçada pelo programa computacional de forma oposta ao que foi indicado nos esquemas, porém, isso foi um procedimento gráfico associado à relatividade da configuração do modo e não influenciou no processo de determinação da força crítica.



# CAPÍTULO 7

## DISCUSSÃO

### 7.1 Introdução

Nessa seção os resultados obtidos são comparados e analisados. As propriedades avaliadas são os coeficientes de flambagem referentes às condições de carregamento e às condições de contorno dos arcos.

Os coeficientes de flambagem obtidos para o arco biarticulado conforme os três modelos propostos são discutidos inicialmente. Posteriormente, os coeficientes determinados partir do modelo teórico para arcos triarticulados, biarticulados e biengastados são relacionados aos obtidos por simulação numérica.

### 7.2 Discussão sobre os modelos formulados para o arco biarticulado

Em geral, não houve diferenças significativas nos coeficientes de flambagem determinados para o arco biarticulado a partir dos três modelos de análise que foram propostos: modelo teórico, modelo matricial e modelo aproximado.

Para todas as condições de carregamento, as diferenças notadas nos coeficientes de flambagem foram mínimas. Os três modelos são bastante influenciados pela expressão que define o esforço normal no arco biarticulado, logo é justificável a proximidade dos resultados.

Isso demonstra que, para o caso do arco biarticulado submetido às condições de carregamento indicadas, o modelo matricial e o aproximado estão em conformidade com o modelo teórico.

### 7.3 Discussão sobre o modelo teórico e a simulação numérica

Na comparação entre os coeficientes determinados com o modelo teórico e os obtidos a partir da simulação numérica houve diferenças substanciais. Dessa forma, a diferença percentual entre ambos é avaliada em relação ao modelo teórico.

As discussões são indicadas conforme o tipo de solicitação atuante nos arcos analisados a partir do modelo teórico e por simulação numérica. É importante destacar que para todos os casos os coeficientes de flambagem associados ao arco biengastado são superiores aos demais, enquanto os inferiores são relacionados ao arco triarticulado. Outra consideração válida para a maioria dos casos está associada à relação flecha/vão próxima de 0,3, que geralmente possibilita valores superiores ao coeficiente de flambagem.

#### 7.3.1 Força uniformemente distribuída na direção radial

Com relação aos arcos submetidos à força uniformemente distribuída na direção radial, os coeficientes de flambagem determinados a partir do modelo teórico são comparados aos que foram obtidos por simulação numérica no programa computacional ANSYS. A variação da diferença percentual é indicada na Tabela 7.1.

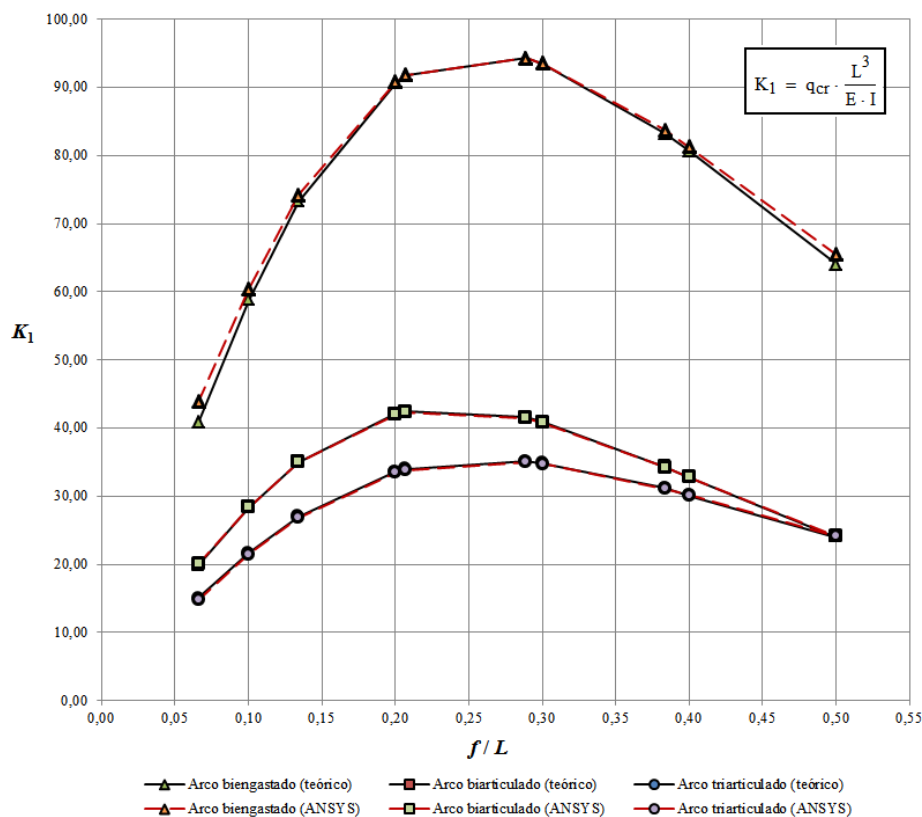
Tabela 7.1 – Comparação dos coeficientes de flambagem  $K_1$  a partir do modelo teórico e simulação numérica

2α graus	f / L	K <sub>1</sub>						Diferença percentual %		
		Modelo teórico			Simulação numérica					
		BIE	BIA	TRI	BIE	BIA	TRI	BIE	BIA	TRI
30,00	0,0658	40,81	19,83	15,03	43,88	20,03	14,76	-7,51	-1,01	1,81
45,24	0,1000	58,81	28,37	21,68	60,43	28,44	21,49	-2,74	-0,24	0,91
60,00	0,1340	73,32	35,00	27,07	74,18	35,00	26,91	-1,17	0,01	0,58
87,21	0,2000	90,67	42,10	33,61	90,84	42,02	33,48	-0,19	0,18	0,41
90,00	0,2071	91,73	42,43	34,00	91,84	42,35	33,88	-0,12	0,18	0,36
120,00	0,2887	94,26	41,57	35,09	94,28	41,48	35,02	-0,01	0,22	0,21
123,86	0,3000	93,50	40,93	34,86	93,56	40,85	34,77	-0,07	0,21	0,25
150,00	0,3837	83,24	34,32	31,17	83,76	34,27	31,13	-0,63	0,15	0,11
154,64	0,4000	80,67	32,83	30,14	81,30	32,80	30,20	-0,78	0,10	-0,19
180,00	0,5000	64,00	24,00	24,00	65,44	24,16	24,19	-2,25	-0,66	-0,78

Fonte: Autor

Os valores indicados na Tabela 7.1 para o coeficiente de flambagem  $K_1$  também são representados no gráfico da Figura 7.1.

Figura 7.1 – Comparação entre os coeficientes de flambagem  $K_1$  obtidos a partir do modelo teórico e simulação numérica



Fonte: Autor

Nota-se que houve pequena variação entre os resultados obtidos para  $K_1$  conforme os dois procedimentos, com exceção da diferença máxima de 7,51% para o arco biengastado de menor relação flecha/vão. Essas pequenas variações eram esperadas, uma vez que não existe momento fletor de primeira ordem no arco e o esforço normal é constante em toda a estrutura.

### 7.3.2 Força verticalmente concentrada no meio do vão

Em relação aos arcos submetidos à força verticalmente concentrada no meio do vão, os coeficientes de flambagem determinados com a aplicação do modelo teórico também são comparados aos que foram obtidos a partir da simulação numérica no programa computacional ANSYS. A variação da diferença percentual é expressa na Tabela 7.2.

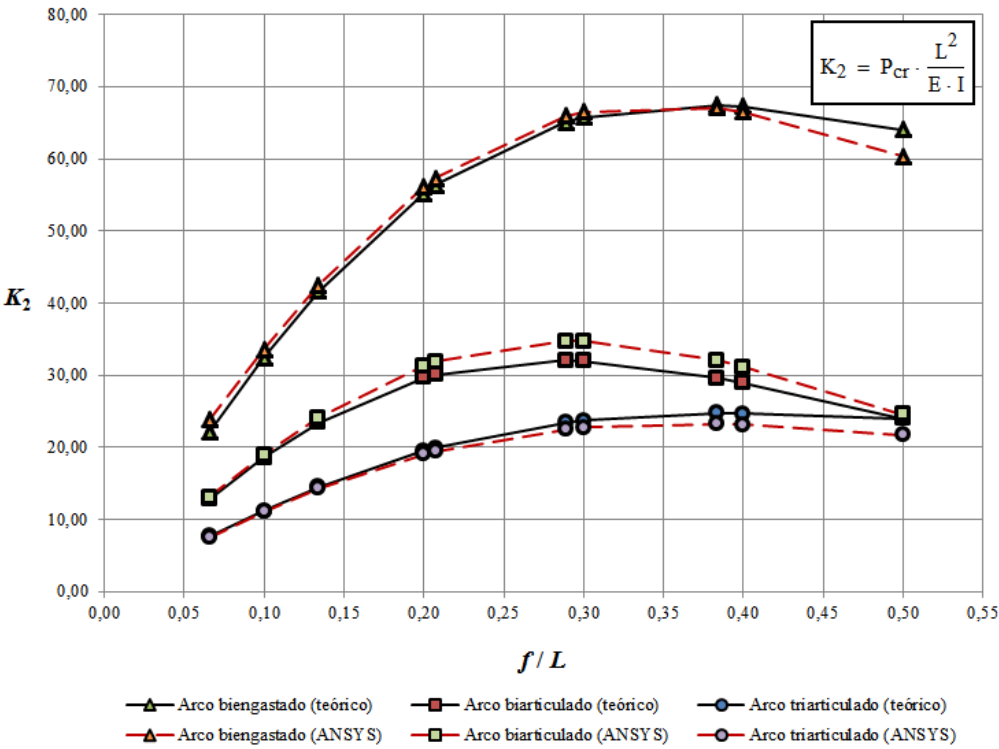
Tabela 7.2 – Comparação dos coeficientes de flambagem  $K_2$  a partir do modelo teórico e simulação numérica

2α graus	f / L	K <sub>2</sub>						Diferença percentual %		
		Modelo teórico			Simulação numérica					
		BIE	BIA	TRI	BIE	BIA	TRI	BIE	BIA	TRI
30,00	0,0658	22,11	12,84	7,65	23,85	13,07	7,50	-7,87	-1,83	1,92
45,24	0,1000	32,49	18,63	11,15	33,57	18,99	11,13	-3,33	-1,95	0,19
60,00	0,1340	41,61	23,43	14,51	42,47	24,12	14,31	-2,07	-2,93	1,40
87,21	0,2000	55,25	29,66	19,50	56,14	31,30	19,07	-1,60	-5,51	2,19
90,00	0,2071	56,40	30,10	19,92	57,29	31,83	19,47	-1,57	-5,75	2,25
120,00	0,2887	65,13	32,07	23,40	65,93	34,74	22,51	-1,23	-8,33	3,80
123,86	0,3000	65,77	31,98	23,70	66,52	34,71	22,73	-1,13	-8,53	4,08
150,00	0,3837	67,44	29,63	24,74	67,08	32,05	23,22	0,53	-8,15	6,17
154,64	0,4000	67,27	28,94	24,71	66,56	31,15	23,12	1,07	-7,65	6,43
180,00	0,5000	64,00	24,00	24,00	60,31	24,57	21,72	5,76	-2,38	9,52

Fonte: Autor

Os valores indicados na Tabela 7.2 para o coeficiente de flambagem  $K_2$  também são representados no gráfico da Figura 7.2.

Figura 7.2 – Comparação entre os coeficientes de flambagem  $K_2$  obtidos a partir do modelo teórico e simulação numérica



Fonte: Autor

A variação de  $K_2$  foi maior em vários intervalos, sendo a diferença máxima de 9,52% para o arco triarticulado. Por outro lado, em outros intervalos a variação foi pequena, mais notavelmente no caso do arco biengastado.

As variações foram maiores, nesse caso, pois no modelo teórico os momentos de primeira ordem foram desprezados na análise, enquanto na simulação numérica eles são considerados na análise por autovalor. Além disso, é importante notar que para esse tipo de solicitação o esforço normal varia ao longo do arco. No modelo teórico foi considerado que o esforço normal crítico ocorre nas extremidades do arco, enquanto na simulação numérica é considerada a variação do esforço normal ao longo da estrutura, influenciando a determinação da força crítica.

### 7.3.3 Força uniformemente distribuída ao longo do vão

Com relação aos arcos submetidos à força uniformemente distribuída ao longo do vão, os coeficientes de flambagem determinados a partir do modelo teórico são comparados aos que foram obtidos por simulação numérica no programa computacional ANSYS. A variação da diferença percentual é indicada na Tabela 7.3.

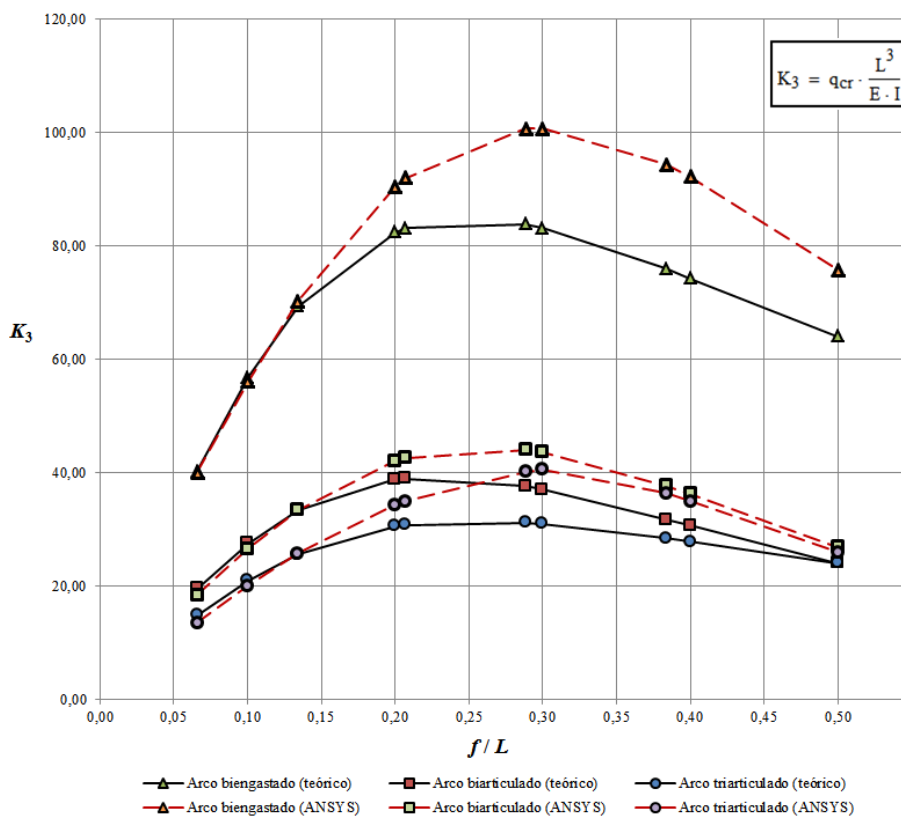
Tabela 7.3 – Comparação dos coeficientes de flambagem  $K_3$  a partir do modelo teórico e simulação numérica

2 $\alpha$ graus	$f / L$	$K_3$						Diferença percentual %		
		Modelo teórico			Simulação numérica					
		BIE	BIA	TRI	BIE	BIA	TRI	BIE	BIA	TRI
30,00	0,0658	40,21	19,57	14,80	40,05	18,43	13,50	0,40	5,84	8,78
45,24	0,1000	56,81	27,53	20,95	56,05	26,59	20,03	1,33	3,40	4,38
60,00	0,1340	69,30	33,33	25,57	70,28	33,42	25,76	-1,41	-0,27	-0,75
87,21	0,2000	82,43	38,79	30,57	90,48	42,08	34,29	-9,76	-8,48	-12,15
90,00	0,2071	83,13	38,98	30,80	92,00	42,62	34,98	-10,67	-9,35	-13,57
120,00	0,2887	83,81	37,56	31,18	100,65	44,04	40,18	-20,09	-17,25	-28,89
123,86	0,3000	83,15	36,99	31,00	100,68	43,64	40,52	-21,08	-17,97	-30,72
150,00	0,3837	75,99	31,72	28,41	94,40	37,72	36,36	-24,22	-18,89	-28,01
154,64	0,4000	74,29	30,61	27,78	92,23	36,24	34,92	-24,15	-18,41	-25,69
180,00	0,5000	64,00	24,00	24,00	75,75	26,84	25,98	-18,36	-11,83	-8,25

Fonte: Autor

Os valores indicados na Tabela 7.3 para o coeficiente de flambagem  $K_3$  também são representados no gráfico da Figura 7.3.

Figura 7.3 – Comparação entre os coeficientes de flambagem  $K_3$  obtidos a partir do modelo teórico e simulação numérica



Fonte: Autor

A variação de  $K_3$  foi muito maior em vários intervalos, sendo a diferença máxima de 30,72%. As diferenças foram maiores para os arcos biengastados e triarticulados, uma vez que as diferenças relacionadas ao arco biarticulado ficaram abaixo de 20%.

Nesse caso, além de haver a ocorrência de momentos fletores de primeira ordem e do esforço normal variar ao longo da estrutura, o procedimento adotado para a simulação numérica também pode ter afetado os resultados. A distribuição da força vertical ao longo do vão foi realizada com a aplicação de forças concentradas agindo nessa direção, e espaçadas a cada unidade de comprimento, logo não é considerada a variação do carregamento na continuidade da estrutura.

Apesar das diferenças ocorridas, os valores obtidos para os coeficientes de flambagem determinados a partir do modelo teórico foram geralmente menores que os alcançados pela simulação numérica, indicando que a força crítica ocorre num intervalo menor. Por isso, quando adotados, são favoráveis à segurança da estrutura.

### 7.3.4 Força concentrada na direção radial

Em relação aos arcos submetidos à força concentrada na direção radial, inicialmente são indicadas as diferenças percentuais obtidas para os coeficientes de flambagem conforme os três valores admitidos para representar a variação do ângulo  $\varphi$ , e em seguida são discutidos os resultados.

Considerando o ângulo que define o ponto de aplicação da força como um terço do ângulo de abertura do arco ( $\varphi = \alpha / 3$ ), a variação da diferença percentual é expressa na Tabela 7.4.

Tabela 7.4 – Comparação dos coeficientes de flambagem  $K_4$  a partir do modelo teórico e simulação numérica considerando  $\varphi = (\alpha / 3)$

2 $\alpha$ graus	$f / L$	$K_4$						Diferença percentual %		
		Modelo teórico			Simulação numérica					
		BIE	BIA	TRI	BIE	BIA	TRI	BIE	BIA	TRI
30,00	0,0658	27,80	14,78	11,40	29,97	14,94	11,23	-7,82	-1,13	1,51
45,24	0,1000	40,56	21,44	16,68	42,17	21,70	16,64	-3,97	-1,24	0,22
60,00	0,1340	51,42	26,98	21,20	53,28	27,53	21,35	-3,61	-2,06	-0,69
87,21	0,2000	66,43	34,19	27,68	70,17	35,66	28,24	-5,63	-4,29	-2,03
90,00	0,2071	67,59	34,68	28,17	71,57	36,26	28,79	-5,90	-4,55	-2,22
120,00	0,2887	74,79	36,96	31,48	81,97	39,53	32,68	-9,60	-6,96	-3,79
123,86	0,3000	74,95	36,87	31,68	82,64	39,51	32,88	-10,26	-7,14	-3,80
150,00	0,3837	73,06	34,15	31,19	83,07	36,69	32,33	-13,71	-7,43	-3,65
154,64	0,4000	72,10	33,39	30,77	82,30	35,73	31,85	-14,14	-7,02	-3,50
180,00	0,5000	64,36	27,72	27,72	74,42	28,75	27,05	-15,63	-3,72	2,42

Fonte: Autor

Adotando o ângulo que define o ponto de aplicação da força como um meio do ângulo de abertura do arco ( $\varphi = \alpha / 2$ ), a variação da diferença percentual é indicada na Tabela 7.5.

Tabela 7.5 – Comparação dos coeficientes de flambagem  $K_4$  a partir do modelo teórico e simulação numérica considerando  $\varphi = (\alpha / 2)$

2 $\alpha$ graus	$f / L$	$K_4$						Diferença percentual %		
		Modelo teórico			Simulação numérica					
		BIE	BIA	TRI	BIE	BIA	TRI	BIE	BIA	TRI
30,00	0,0658	39,08	18,03	15,17	42,29	18,31	14,95	-8,20	-1,55	1,44
45,24	0,1000	57,10	26,16	22,12	59,46	26,56	22,11	-4,14	-1,54	0,08
60,00	0,1340	72,51	32,93	28,02	75,08	33,67	28,28	-3,55	-2,25	-0,93
87,21	0,2000	94,09	41,76	36,21	98,85	43,56	37,10	-5,06	-4,30	-2,47
90,00	0,2071	95,78	42,36	36,80	100,83	44,30	37,79	-5,27	-4,57	-2,69
120,00	0,2887	106,80	45,21	40,47	115,96	48,54	42,28	-8,57	-7,37	-4,47
123,86	0,3000	107,17	45,13	40,63	117,03	48,58	42,45	-9,20	-7,65	-4,49
150,00	0,3837	105,50	41,31	39,24	118,67	45,50	41,11	-12,48	-10,14	-4,76
154,64	0,4000	104,33	40,89	38,57	117,92	44,80	40,41	-13,03	-9,56	-4,77
180,00	0,5000	94,42	34,00	34,00	108,37	37,49	34,33	-14,78	-10,27	-0,96

Fonte: Autor

Considerando o ângulo que define o ponto de aplicação da força como dois terços do ângulo de abertura do arco ( $\varphi = 2\alpha / 3$ ), a diferença percentual é observada na Tabela 7.6.

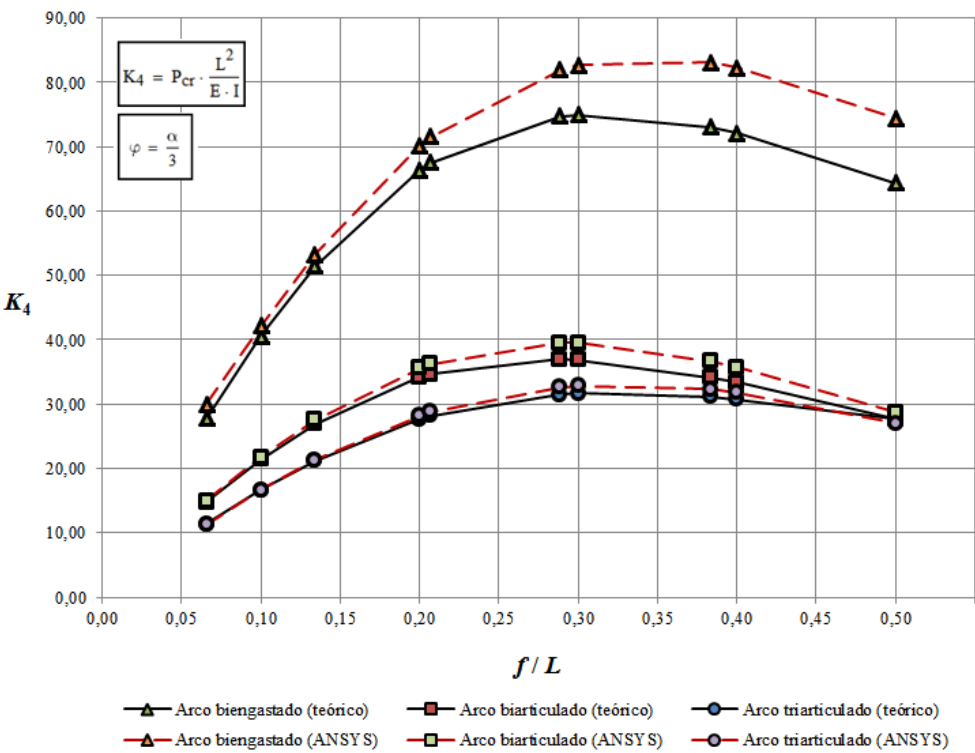
Tabela 7.6 – Comparação dos coeficientes de flambagem  $K_4$  a partir do modelo teórico e simulação numérica considerando  $\varphi = (2\alpha / 3)$

2α graus	f / L	K <sub>4</sub>						Diferença percentual %		
		Modelo teórico			Simulação numérica					
		BIE	BIA	TRI	BIE	BIA	TRI	BIE	BIA	TRI
30,00	0,0658	71,32	25,39	22,72	77,08	25,80	22,38	-8,08	-1,62	1,46
45,24	0,1000	104,35	36,85	33,07	108,57	37,49	33,05	-4,04	-1,73	0,04
60,00	0,1340	132,79	46,39	41,76	137,41	47,62	42,19	-3,48	-2,65	-1,03
87,21	0,2000	173,28	58,89	53,58	182,19	62,08	55,01	-5,14	-5,43	-2,68
90,00	0,2071	176,52	59,76	54,41	186,01	63,21	55,99	-5,37	-5,76	-2,90
120,00	0,2887	198,72	63,84	59,16	216,27	70,55	61,98	-8,83	-10,52	-4,76
123,86	0,3000	199,69	63,72	59,29	218,56	70,86	62,13	-9,45	-11,21	-4,78
150,00	0,3837	198,95	58,41	56,52	222,64	69,41	59,46	-11,91	-18,84	-5,20
154,64	0,4000	197,22	57,79	55,42	221,30	68,48	58,35	-12,21	-18,48	-5,28
180,00	0,5000	181,43	48,00	48,02	190,18	58,49	49,47	-4,82	-21,85	-3,02

Fonte: Autor

Os valores indicados na Tabela 7.4 para o coeficiente de flambagem  $K_4$  são representados no gráfico da Figura 7.4 ( $\varphi = \alpha / 3$ ).

Figura 7.4 – Comparação entre os coeficientes de flambagem  $K_4$  obtidos a partir do modelo teórico e simulação numérica

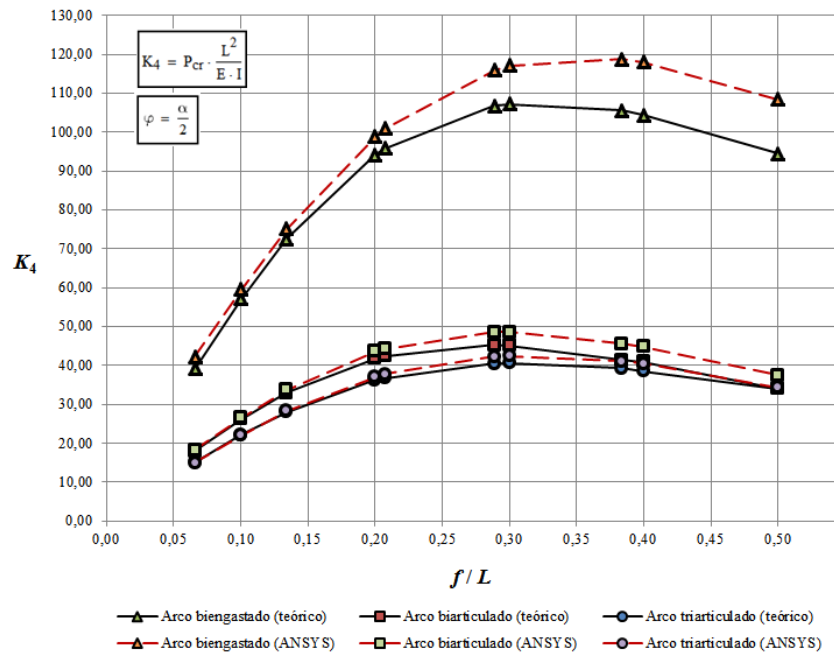


Fonte: Autor



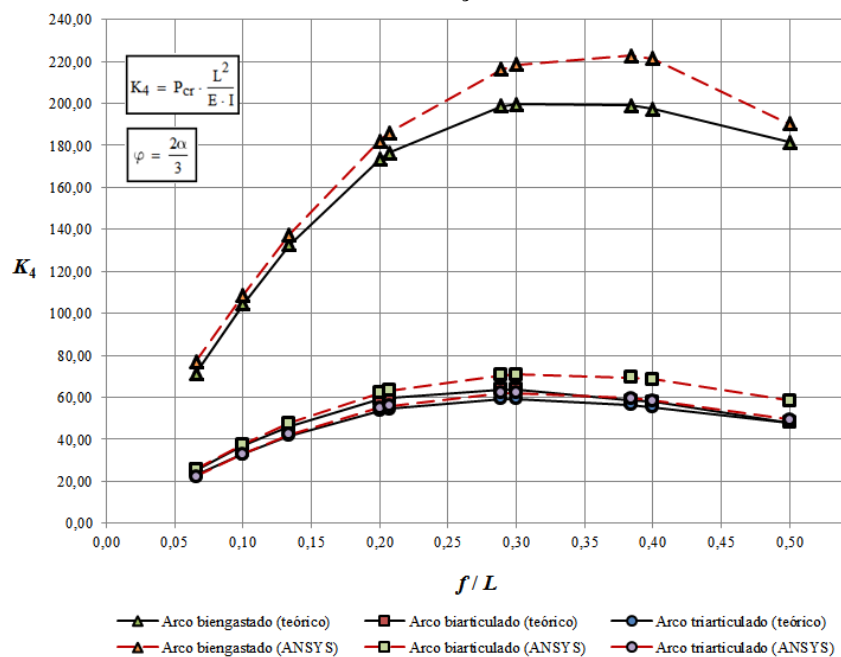
Os valores verificados na Tabela 7.5 para a variação do coeficiente de flambagem  $K_4$  também são representados no gráfico da Figura 7.5 ( $\varphi = \alpha / 2$ ), e os valores indicados na Tabela 7.6 são ilustrados no gráfico da Figura 7.6 ( $\varphi = 2\alpha / 3$ ).

Figura 7.5 – Comparação entre os coeficientes de flambagem  $K_4$  obtidos a partir do modelo teórico e simulação numérica



Fonte: Autor

Figura 7.6 – Comparação entre os coeficientes de flambagem  $K_4$  obtidos a partir do modelo teórico e simulação numérica



Fonte: Autor

Nota-se que a máxima diferença percentual ocorreu para o arco biarticulado, sendo 21,85% ( $\varphi = 2\alpha / 3$ ). As outras diferenças percentuais máximas foram associadas ao arco biengastado: 15,63% ( $\varphi = \alpha / 3$ ) e 14,78% ( $\varphi = \alpha / 2$ ). Em todos os casos, as variações máximas ocorreram para a maior relação flecha/vão (0,5).

Os coeficientes relacionados ao arco triarticulado foram os que menos variaram nas três situações quando comparadas as duas análises. Para o arco biarticulado a variação foi crescente de acordo com o aumento da relação flecha/vão, e tanto para arco biarticulado quanto para o biengastado as principais diferenças foram notadas para as maiores relações flecha/vão.

A diferença percentual também foi superior conforme maior o valor de  $\varphi$ , ou seja, para quando a força concentrada atua em uma posição mais próxima de uma das extremidades. No modelo teórico a ação do esforço normal crítico é considerada apenas em uma das extremidades conforme as condições de contorno do arco, logo essa concentração da força próxima a um dos apoios contribuiu para minimizar a força crítica em relação à simulação numérica, em que é considerada a distribuição dos esforços na determinação da força crítica. De forma análoga, para essa solicitação há a ocorrência de momentos fletores de primeira ordem, que também não foram considerados na formulação do modelo teórico.

Em geral, os valores obtidos para os coeficientes de flambagem determinados a partir do modelo teórico foram menores que os obtidos pela simulação numérica, sugerindo que a força crítica ocorre num intervalo menor. Dessa forma, são favoráveis à segurança da estrutura quando adotados.

#### 7.4 Discussão sobre solicitações desfavoráveis

Com relação à solicitação mais desfavorável para flambagem do arco circular, a comparação é realizada de acordo com a forma de aplicação da força, sendo distribuída ou concentrada.

Para o arco submetido à força uniformemente distribuída ao longo do vão, os valores determinados para o coeficiente de flambagem foram menores ou iguais que os calculados para o arco sujeito à força uniformemente distribuída na direção radial ( $K_3 \leq K_1$ ). Dessa

forma, para as forças distribuídas analisadas, a força uniformemente distribuída ao longo do vão foi mais desfavorável.

No caso da força concentrada, foi constatado que a força verticalmente concentrada no meio do vão ocasionou valores menores para o coeficiente de flambagem, se comparado à situação da força concentrada na direção radial atuante em uma posição arbitrária ( $K_2 < K_4$ ). É importante ressaltar que se o ângulo arbitrado para definir o ponto de aplicação da força concentrada na direção radial for nulo, tem-se a mesma condição de carregamento, logo os coeficientes de flambagem são idênticos nessa situação. Portanto, segundo as forças concentradas analisadas, a força verticalmente concentrada no meio do vão foi mais desfavorável.

# CAPÍTULO 8

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

### 8.1 Comentários gerais

No estudo desenvolvido foram indicadas formulações para análise da estabilidade estrutural de arcos simétricos com forma circular por meio da determinação da força crítica de flambagem. Nesse contexto, foram apresentados três modelos de análise e realizada simulação numérica por elementos finitos no programa computacional ANSYS, sendo os resultados associados aos coeficientes de flambagem determinados a partir de dez valores atribuídos ao ângulo de abertura dos arcos e relação flecha/vão. A aplicação de coeficientes de flambagem permite padronizar a análise da força crítica quando o ângulo de abertura ou a relação flecha/vão do arco são conhecidos, sendo os coeficientes de flambagem também considerados como forças críticas adimensionais.

Como objetivo específico deste trabalho, foi desenvolvido um programa computacional para sistemas operacionais Windows, denominado INSTARC, que possibilita a determinação da força crítica de flambagem em arcos circulares submetidos às condições de carregamento e de contorno indicadas no trabalho. As equações empregadas no programa computacional para a efetuação dos cálculos foram baseadas no modelo teórico. Além de forças críticas, o programa computacional possibilita a determinação de outros parâmetros relacionados à flambagem, como esforço normal crítico e coeficiente de flambagem, além de parâmetros geométricos do arco, como raio, ângulo de abertura e comprimento axial.

Além das equações voltadas a análise da força crítica de flambagem, durante o desenvolvimento do modelo teórico, foram abordadas diversas expressões que definem simbolicamente as componentes das reações de apoio em arcos circulares submetidos às condições de carregamento estudadas, que não são frequentemente indicadas na literatura. Para os arcos biarticulados e biengastados, essas expressões foram derivadas a partir do Método das Forças.

Com relação à análise da força crítica de flambagem em arcos biarticulados pelos três modelos desenvolvidos, a diferença ocasionada nos coeficientes de flambagem determinados a partir dos modelos matricial e aproximado foi muito pequena quando comparados ao modelo teórico. É justificável a proximidade dos resultados, uma vez que os três modelos são bastante influenciados pela expressão que define o esforço normal no arco biarticulado, e pela hipótese de que o esforço normal crítico ocorre em uma das extremidades do arco. Portanto, para as condições de carregamento analisadas, o modelo matricial e o aproximado estão em conformidade com o modelo teórico na análise de arcos biarticulados, sendo alternativas adequadas para determinação de forças críticas e coeficientes de flambagem.

Por outro lado, houve variações na comparação do modelo teórico com a simulação numérica realizada a partir do programa computacional ANSYS, especialmente no caso de arcos submetidos à força uniformemente distribuída ao longo do vão e à força concentrada na direção radial. Essas variações provavelmente foram ocasionadas pela desconsideração dos momentos fletores de primeira ordem no modelo teórico, e também pela consideração do esforço normal crítico em uma das extremidades do arco, ao contrário da simulação numérica em que é considerada a variação do esforço na estrutura. Apesar disso, os valores obtidos para os coeficientes de flambagem determinados a partir do modelo teórico, que apresentaram variação significativa em relação aos obtidos por simulação numérica, foram geralmente menores que esses últimos. Nesses casos, a força crítica ocorre com menor intensidade, logo os valores são favoráveis à segurança da estrutura quando adotados. Nos demais casos, em que a variação foi menor, mesmo consideradas as hipóteses citadas no modelo teórico foi obtida boa proximidade entre os valores determinados a partir do modelo teórico e pela simulação numérica.

Conceitualmente, segundo todas as análises efetuadas, compreende-se que o arco biengastado suporta valores muito superiores para o coeficiente de flambagem – e,

portanto, para a força crítica – que os outros arcos devido à rigidez proporcionada, considerando um mesmo ângulo de abertura ou relação flecha/vão e as demais propriedades constantes. Por outro lado, no arco triarticulado são obtidos valores inferiores em virtude do comportamento isostático e descontínuo do sistema devido à presença da articulação interna, que possibilita a ocorrência de esforços internos com maior intensidade.

Ainda de acordo com as análises efetuadas, foi constatado que a força distribuída mais desfavorável foi associada à força uniformemente distribuída ao longo do vão, uma vez que os coeficientes de flambagem determinados foram menores. De forma análoga, no caso de solicitação por força concentrada, a situação mais desfavorável foi relacionada à força verticalmente concentrada no meio do vão.

Por fim, foi observada que a relação flecha/vão próxima de 0,3 ocasiona valores elevados para os coeficientes de flambagem segundo as condições de carregamento avaliadas, logo essa relação possibilita ao arco maior eficiência quanto à estabilidade estrutural e pode ser utilizada como parâmetro em situações de projeto e otimização estrutural.

## **8.2 Sugestões para trabalhos futuros**

No contexto da análise da força crítica de flambagem em arcos, é possível indicar as seguintes abordagens como sugestões para trabalhos futuros:

1. Formulação dos modelos matricial e aproximado para análise de arcos circulares com outras condições de contorno e carregamento.
2. Formulação de modelos para análise de arcos com outras formas geométricas e condições de carregamento.
3. Consideração de imperfeições geométricas iniciais na formulação dos modelos de análise.
4. Atribuição do efeito de plasticidade do material na formulação dos modelos de análise.

## REFERÊNCIAS

ANSYS. **Mechanical Applications** – Mechanical User Guide. Release 14.5, ANSYS, Inc., 2012.

ANDRÉ, J. C. **Contribuição ao estudo da estabilidade de arcos em regime elástico linear submetidos a carregamentos conservativos**. 128 f. 1984. Tese (Doutorado em Engenharia Civil). Universidade de São Paulo, São Paulo, 1984.

BAZANT, Z. P.; CEDOLIN, L. **Structural stability**: elastic, inelastic, fracture, and damage theories. New York: Oxford University Press, 1991.

GESUALDO, F. A. R.; RISKOWSKI, G. L. . Structures formed by non-parallel layers joined by connectors. **International Conference on Timber Engineering**, v. 2, p. 297-301, 1999.

JÚNIOR, R. B.. **Contribuição ao estudo de estabilidade estrutural de arcos**. 1989. 128 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil). Universidade de São Paulo, São Paulo, 1989.

KARNOVSKY, I. **Theory of arched structures** - Strength, Stability, Vibration. Springer, 2012.

LITEWKA, P.; RAKOWSKI, J. **The exact thick arch finite element**. Computers and Structures, v. 68, p. 369-379, 1998.

MOAVENI, S. **Finite element analysis**: theory and application with Ansys. Mankato, Minnesota: Prentice Hall, 1999.

SIMITSES, G. J.; HODGES, D. H. **Fundamentals of structural stability**. Butterworth-Heinemann, 2006. 389 p.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. **Theory of elastic stability**. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1961. 541 p.

XANTHAKOS, P. P. **Theory and design of bridges**. John Wiley & Sons, 1993. 1464 p.

XU, Y.J.; GUI, X.M.; ZHAO, B.; ZHOU, R.Q. In-plane elastic stability of arches under a radial concentrated load. **Engineering**, v. 6, p. 572-583, 2014.

ZIEMIAN, R. **Guide to stability design criteria for metal structures**. 6. ed. John Wiley & Sons, 2010.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The finite element method: the basis**. 5. ed. Butterworth Heinemann, 2000.



## APÊNDICE A

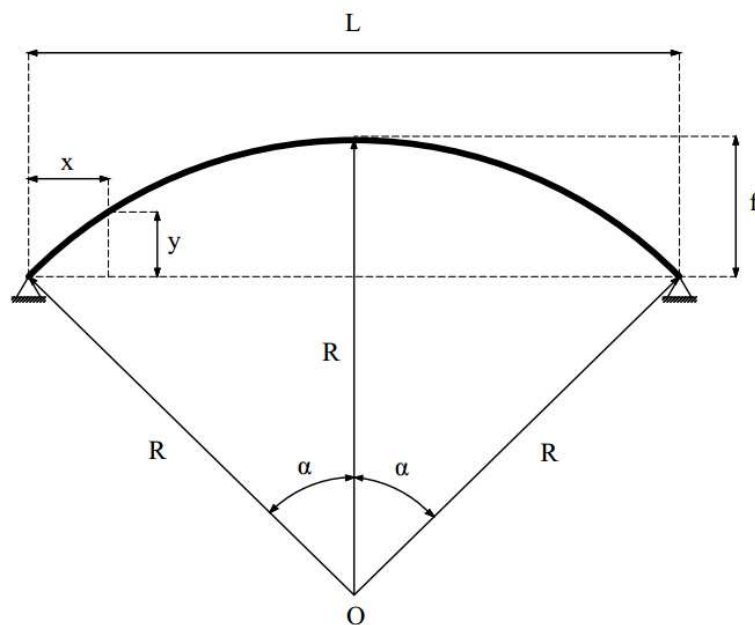
### PARÂMETROS GEOMÉTRICOS

#### B.1 Considerações gerais

Os parâmetros geométricos são importantes para definir a geometria do arco, sendo obtidos a partir de princípios trigonométricos. Na formulação desses parâmetros forma usualmente considera-se o vão e a flecha do arco como propriedades constantes e inicialmente atribuídas. No caso do arco circular é possível adotar o raio e o ângulo de abertura total como propriedades iniciais.

Para o arco circular apresentado na Figura A.1 o raio é constante e indicado na Equação A.1 a partir de valores definidos para vão e flecha.

Figura A.1 – Parâmetros geométricos referentes ao arco circular



Fonte: Autor

$$R = \frac{L^2}{8 \cdot f} + \frac{f}{2} \quad \text{Equação A.1}$$

O ângulo de abertura do arco é calculado a partir da Equação A.2.

$$\alpha = \arcsen\left(\frac{L}{2 \cdot R}\right) \quad \text{Equação A.2}$$

O conhecimento do raio e do ângulo de abertura é necessário quando a análise do arco é feita em coordenadas polares.

Quando a análise é realizada em coordenadas cartesianas, é necessário estabelecer coordenadas horizontais e verticais. Quando a coordenada horizontal é admitida inicialmente, a coordenada vertical de qualquer ponto no arco pode ser obtida pela Equação A.3.

$$y = \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2} - x\right)^2} + f - R \quad \text{Equação A.3}$$

O arco circular possui comprimento axial total indicado na Equação A.4.

$$S = 2 \cdot R \cdot \alpha \quad \text{Equação A.4}$$

A relação flecha/vão pode ser determinada em função do ângulo de abertura na Equação A.5.

$$\frac{f}{L} = \frac{1 - \cos(\alpha)}{2 \cdot \sin(\alpha)} \quad \text{Equação A.5}$$

## APÊNDICE B

# MÉTODO DAS FORÇAS

### B.1 Considerações gerais

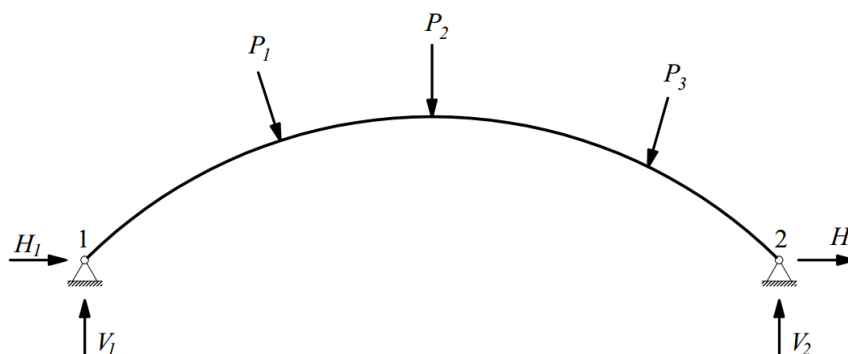
O método das forças é amplamente utilizado na análise de estruturas hiperestáticas. Nesse método, as incógnitas a serem determinadas são chamadas de *hiperestáticos*, geralmente definidos como forças e momentos que não podem ser determinados aplicando exclusivamente as equações de equilíbrio, uma vez que a quantidade de incógnitas excede o número de equações disponíveis no sistema. Dessa forma, o *grau de hiperestaticidade* de uma estrutura está relacionado à quantidade de hiperestáticos que possui: quanto maior o número de hiperestáticos, maior o grau de hiperestaticidade do sistema.

Para determinação dos hiperestáticos, a estrutura original possui restrições liberadas até recair num sistema isostático, conhecido como *sistema principal*, em que as equações de equilíbrio são aplicadas. Os deslocamentos virtuais referentes às restrições liberadas são calculados para a estrutura isostática empregando métodos específicos (PTV, por exemplo), bem como a ação unitária que os hiperestáticos exercem nesses deslocamentos. Essa ação unitária é definida por meio de *coeficientes de flexibilidade*, que podem ser padronizados conforme as características da estrutura e o tipo de hiperestático. A partir desse procedimento, os hiperestáticos são obtidos conforme a compatibilidade das equações de deslocamento.

Devido a sua complexidade de implementação computacional, o método das forças é recomendado principalmente para análise de estruturas que apresentam pequeno número de hiperestáticos.

Como exemplo do método das forças aplicado à análise de arcos hiperestáticos, é abordada a condição do arco biarticulado da Figura B.1 sujeito a um carregamento arbitrário. Nesse caso, o grau de hiperestaticidade é igual a 1, pois há apenas uma reação de apoio que excede a quantidade estritamente necessária para o equilíbrio. Essa reação excedente é o hiperestático do sistema.

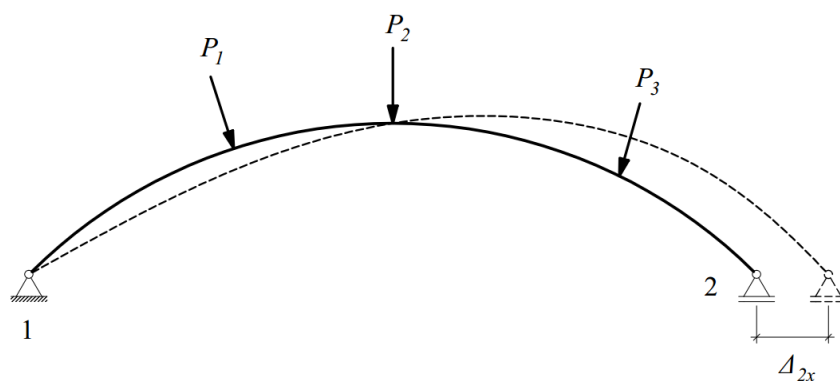
Figura B.1 – Arco circular biarticulado sujeito a um carregamento arbitrário



Fonte: Autor

Com a restrição liberada no apoio direito, por exemplo, tem-se o chamado arco simples (Figura B.2). A força  $H_2$ , que atua como reação de apoio na direção horizontal, é associada à restrição liberada e definida como o único hiperestático do sistema. No arco simples, é necessário determinar o deslocamento  $\Delta_{2x}$  correspondente à restrição liberada, que é ocasionado pelo carregamento atuante.

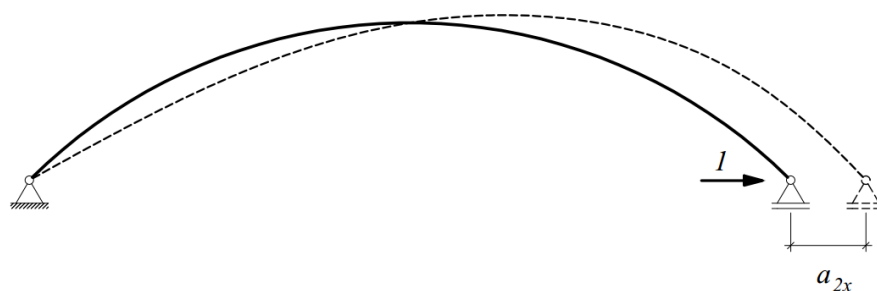
Figura B.2 – Arco simples sujeito a um carregamento arbitrário



Fonte: Autor

A ação unitária que o hiperestático causa na forma de deslocamento horizontal pode ser determinado com a aplicação de uma força unitária (Figura B.3), agindo na mesma direção que o hiperestático  $H_2$  no sistema principal (arco simples). Essa ação unitária é o coeficiente de flexibilidade, sendo  $a_{2x}$  equivalente ao deslocamento horizontal provocado pela ação da força unitária.

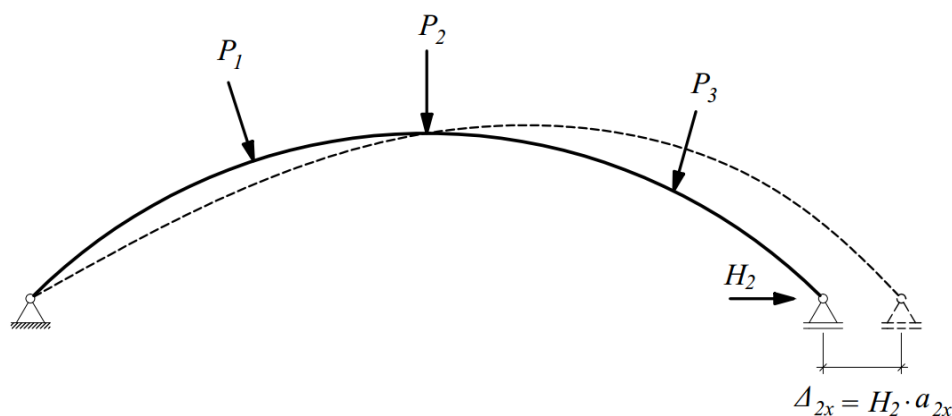
Figura B.3 – Arco simples sujeito a uma força unitária



Fonte: Autor

O deslocamento horizontal referente à restrição liberada é esquematicamente compatibilizado na Figura B.4, considerando que o deslocamento horizontal deve ser equivalente ao produto entre a reação e o coeficiente de flexibilidade.

Figura B.4 – Compatibilização do deslocamento



Fonte: Autor

Por superposição, a equação de compatibilidade do deslocamento horizontal é indicada na Equação B.1. Como o apoio fixo na estrutura real restringe o deslocamento na direção horizontal, o mesmo deve ser nulo. A reação  $H_2$  é, portanto, obtida em função do deslocamento e do coeficiente de flexibilidade.

$$\Delta_{2x} + H_2 \cdot a_{2x} = 0$$

$$H_2 = -\frac{\Delta_{2x}}{a_{2x}}$$

Equação B.1

## APÊNDICE C

### MÉTODO DAS FORÇAS ELÁSTICAS

#### C.1 Considerações gerais

O Método das Forças Elásticas (MFE) é utilizado para determinação aproximada de deslocamentos ocasionados numa estrutura. No caso de barras, o procedimento adotado consiste em dividir a estrutura em uma quantidade finita de segmentos, determinar os esforços internos atuantes nos nós que constituem esses segmentos, e aplicar uma estrutura fictícia que é idêntica à analisada (embora não tenha necessariamente as mesmas condições de contorno). Essa estrutura fictícia suportará as chamadas forças elásticas. Admite-se que o diagrama do momento fletor da estrutura fictícia, definido a partir da ação das forças elásticas, é equivalente à configuração deformada da estrutura original.

A determinação das forças elásticas é realizada de acordo com a Equação C.1, considerando apenas a influência do momento fletor. Nessa expressão é assumido que a divisão da barra em segmentos de mesmo comprimento, e as propriedades físicas e geométricas são constantes em toda a estrutura. Assume-se que as forças elásticas verticais são positivas quando atuam com sentido indicando para baixo.

$$W_n = \frac{S}{6 \cdot E \cdot I} \cdot (2 \cdot M_0 + M_1) \quad \text{para } n = 0$$
$$W_n = \frac{S}{6 \cdot E \cdot I} \cdot (M_{n-1} + 4 \cdot M_n + M_{n+1}) \quad \text{para } n > 0$$

Equação C.1

Para ilustrar o funcionamento do método, serão verificados os deslocamentos determinados a partir do MFE em dois exemplos de vigas, e os valores serão comparados com aqueles

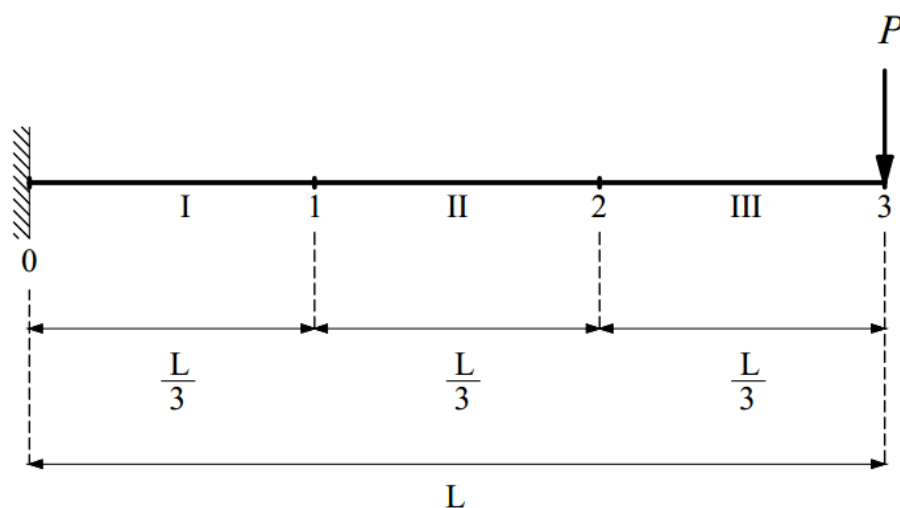
obtidos por meio da aplicação de métodos clássicos. É importante verificar que nenhum dos diagramas indicados nas próximas figuras estão desenhados em escala, pois a representação seria prejudicada.

## C.2 Viga em balanço submetida à força concentrada extrema

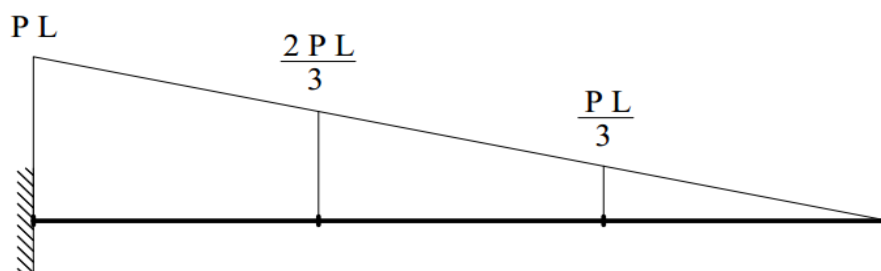
A viga ilustrada na Figura C.1a é dividida em três segmentos (I, II e III) de mesmo comprimento, que equivale a um terço do comprimento total da viga. O diagrama de momento fletor respectivo é indicado na Figura C.1b, em que pode ser observada a magnitude do momento fletor atuante nos nós analisados.

Figura C.1 – Viga em balanço submetida à força concentrada extrema

a) Situação de carregamento



b) Diagrama de momento fletor



Fonte: Autor

O deslocamento máximo ocasionado nessa viga ocorre em sua extremidade livre, e sua magnitude é expressa na Equação C.2. Esse deslocamento pode ser determinado por meio de métodos clássicos para análise de deslocamentos em vigas, como a resolução da equação diferencial da linha elástica ou o PTV.

$$\delta = \frac{P \cdot L^3}{3 \cdot E \cdot I} \quad \text{Equação C.2}$$

As forças elásticas são calculadas na Equação C.3 apenas nos nós em que o momento fletor não é nulo (nós 0, 1 e 2). O sinal negativo dos momentos é destacado nas expressões para compatibilizar o sentido das forças elásticas.

$$\begin{aligned} W_0 &= \frac{S}{6 \cdot E \cdot I} \cdot (2 \cdot M_0 + M_1) \\ W_1 &= \frac{S}{6 \cdot E \cdot I} \cdot (M_0 + 4 \cdot M_1 + M_2) \\ W_2 &= \frac{S}{6 \cdot E \cdot I} \cdot (M_1 + 4 \cdot M_2 + M_3) \end{aligned} \quad \text{Equação C.3}$$

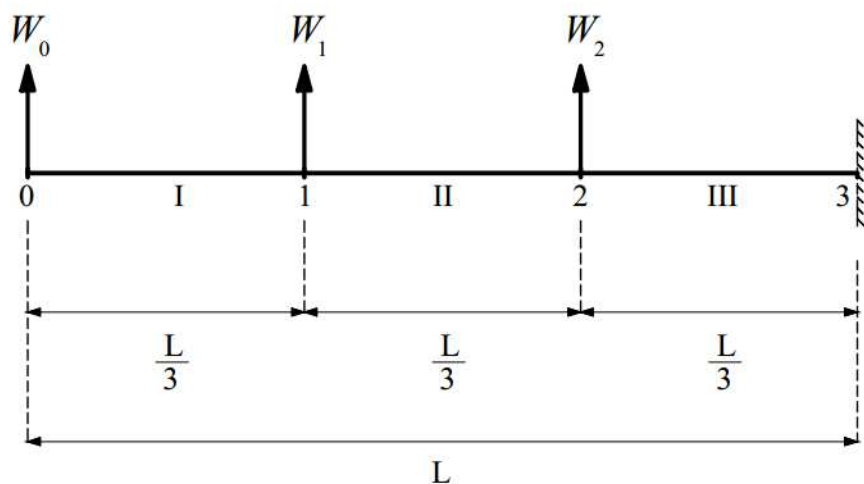
$$\begin{aligned} W_0 &= \frac{L}{18 \cdot E \cdot I} \cdot \left[ 2 \cdot (-P \cdot L) + \frac{(-2 \cdot P \cdot L)}{3} \right] = \frac{-4 \cdot P \cdot L^2}{27 \cdot E \cdot I} \\ W_1 &= \frac{L}{18 \cdot E \cdot I} \cdot \left[ -P \cdot L + 4 \cdot \frac{(-2 \cdot P \cdot L)}{3} + \frac{(-P \cdot L)}{3} \right] = \frac{-2 \cdot P \cdot L^2}{9 \cdot E \cdot I} \\ W_2 &= \frac{L}{18 \cdot E \cdot I} \cdot \left[ \frac{-2 \cdot P \cdot L}{3} + 4 \cdot \frac{(-P \cdot L)}{3} + 0 \right] = \frac{-P \cdot L^2}{9 \cdot E \cdot I} \end{aligned}$$

Para as forças elásticas determinadas, o momento fletor na extremidade direita é exatamente o mesmo valor obtido para o deslocamento em tal extremidade na estrutura original (Equação C.2). Outros valores obtidos para momentos fletores nessa viga fictícia também coincidem com os correspondentes deslocamentos na viga original. Na Figura C.2 é indicada a atuação das forças elásticas e o respectivo diagrama de momento fletor produzido por sua ação (o engaste agora está, ficticiamente, na extremidade direita da viga).

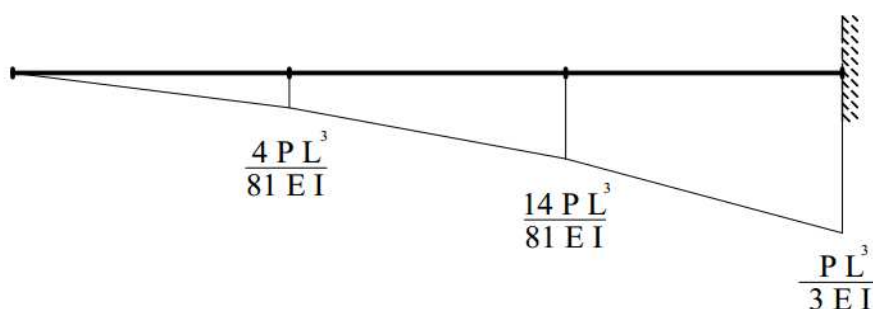


Figura C.2 – Viga em balanço submetida a forças elásticas

a) Ação das forças elásticas



b) Diagrama de momento fletor

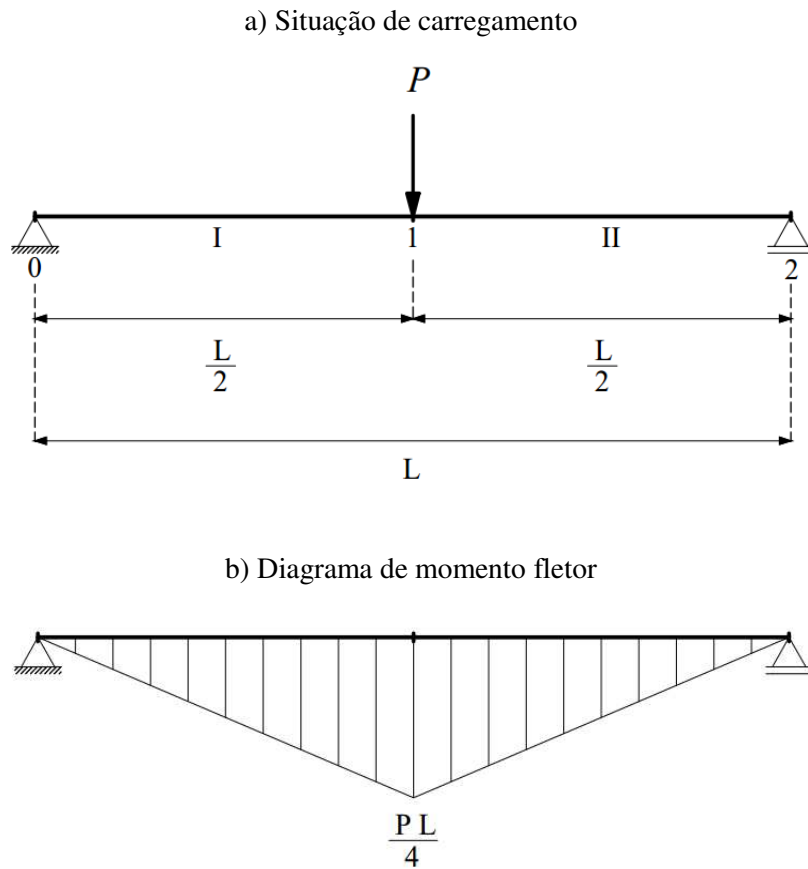


Fonte: Autor

### C.3 Viga biapoiada submetida à força concentrada no meio do vão

A viga ilustrada na Figura C.3a é dividida em dois segmentos (I e II) de mesmo comprimento, que equivale à metade do comprimento total da viga. O diagrama de momento fletor respectivo é indicado na Figura C.3b, em que pode ser observada a magnitude do momento fletor atuante nos nós analisados.

Figura C.3 – Viga biapoiada submetida à força concentrada no meio do vão



Fonte: Autor

O deslocamento máximo ocasionado nessa viga coincide com o ponto de momento fletor máximo, e sua magnitude é expressa na Equação C.4.

$$\delta = \frac{P \cdot L^3}{48 \cdot E \cdot I} \quad \text{Equação C.4}$$

A força elástica é determinada na Equação C.5 apenas para o nó interno dos segmentos (nó 1), uma vez que o momento fletor atuante é nulo nos outros nós por consequência dos apoios extremos.

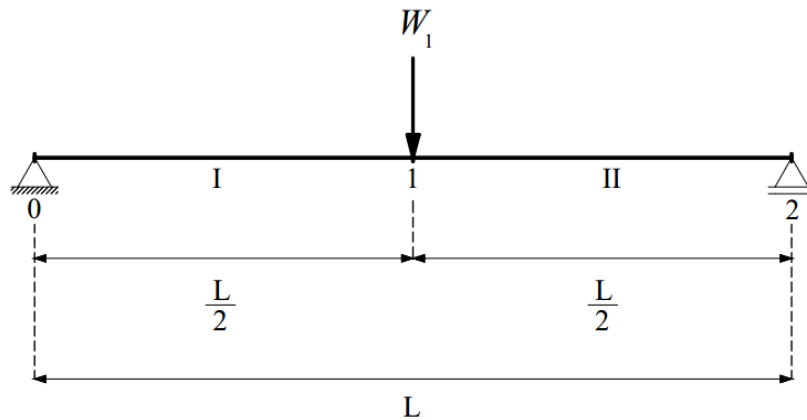
$$W_1 = \frac{S}{6 \cdot E \cdot I} \cdot (M_0 + 4 \cdot M_1 + M_2)$$

$$W_1 = \frac{L}{12 \cdot E \cdot I} \cdot \left( 0 + 4 \cdot \frac{P \cdot L}{4} + 0 \right) = \frac{P \cdot L^2}{12 \cdot E \cdot I} \quad \text{Equação C.5}$$

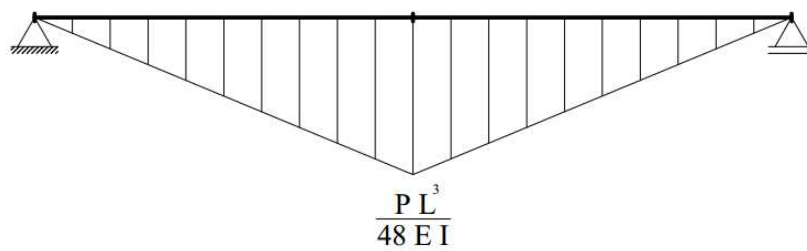
Para a força elástica determinada, o momento fletor no meio do vão é exatamente o mesmo valor obtido para o deslocamento na Equação C.4. Na Figura C.4 é indicada a atuação das forças elásticas e o respectivo momento fletor produzido por sua ação.

Figura C.4 – Viga biapoiada submetida a forças elásticas

a) Ação das forças elásticas



b) Diagrama de momento fletor



Fonte: Autor