



**ULISSES LIMA ROSA**

**ANÁLISE DE FADIGA DE SISTEMAS  
ESTOCÁSTICOS SUBMETIDOS A  
CARREGAMENTOS ALEATÓRIOS MULTIAXIAIS**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA

2016



ULISSES LIMA ROSA

**ANÁLISE DE FADIGA DE SISTEMAS ESTOCÁSTICOS SUBMETIDOS  
A CARREGAMENTOS ALEATÓRIOS MULTIAXIAIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA.**

Área de concentração: Mecânica dos sólidos e Vibrações.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Marcos Gonçalves de Lima

UBERLÂNDIA – MG

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

---

R788a      Rosa, Ulisses Lima, 1992-  
2016      Análise de fadiga de sistemas estocásticos submetidos a  
carregamentos aleatórios multiaxiais / Ulisses Lima Rosa. - 2016.  
89 f. : il.

Orientador: Antônio Marcos Gonçalves de Lima.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.  
Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Metais - Fadiga - Teses. 3.  
Método dos elementos finitos - Teses. I. Lima, Antônio Marcos  
Gonçalves de, 1975- II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa  
de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 621

---

*Dedico esse trabalho a meu amado avô  
Veriano. Seu apoio, sua dedicação e carinho  
incondicionais contribuíram de maneira  
indispensável para meu crescimento como  
homem e na percepção de que serei um  
eterno aprendiz. Saudades eternas!*



## AGRADECIMENTOS

Agradeço mamãe Júlia e papai José Carlos por terem me incentivado desde pequeno a gostar e apreciar a leitura, terem me dado todo apoio em todo curso e atividade extraescolar que eu quis participar, por terem me dado plena condição de crescer e hoje poder dizer que caminho com minhas próprias pernas.

Agradeço meu irmão Álisson, também conhecido como Chico, que se fez presente em todas as conquistas e todos os momentos de minha vida. Obrigado pelas ideias compartilhadas e opiniões divididas, que sempre me engrandeceram.

Um agradecimento especial à minha vovó Laurita e meu vovô Veriano, por me proporcionarem todo o apoio possível para que eu chegasse até aqui. Todo o carinho recebido deles foi um combustível para levantar a cabeça e buscar sempre vencer os obstáculos que a vida colocou em meu caminho. Vovô não está aqui para que eu o abraçe, mas tenho certeza que o orgulho que eu sinto dele é recíproco nesse dia. Muitíssimo obrigado!

Aos meus tios, tias, primos e primas eu agradeço por sempre estarem presentes nos momentos felizes e tristes, dividindo sorrisos e lágrimas, pois isso é família!

À minha namorada Lorraine todo o agradecimento por ter me acompanhado, me apoiado e relevado meu estresse nessa etapa final!

Agradeço a todos meus amigos do peito, meus irmãos que moram em outras casas. Obrigado pelos momentos que dividimos, festas que fizemos e alegrias que passamos! Desejo também todo o sucesso do mundo a vocês.

A meu orientador Antônio Marcos um enorme obrigado por ter me ajudado numa época de transição e pela dedicação e esforço dispendidos em me acompanhar durante o desenvolvimento dos meus estudos, me auxiliando a crescer como pessoa.

Agradeço a Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica e LMest pela disponibilização de seu espaço, aos professores e colaboradores que influenciaram de alguma forma meu desenvolvimento e aos colegas de laboratório, que sempre me ajudaram por meio do compartilhamento de ideias e informações.

Agradeço finalmente à CAPES pela concessão da minha bolsa de estudos, CNPq, FAPEMIG e ao coordenador do INCT-EIE Prof. Valder Steffen Jr. pelo suporte financeiro indispensável para o desenvolvimento desta pesquisa.





ROSA, U. L. **Análise de Fadiga de Sistemas Estocásticos Submetidos a Carregamentos Aleatórios Multiaxiais**. 2016. 89f. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

## Resumo

Este trabalho é dedicado ao estudo teórico e computacional do critério multiaxial de *Sines* para a análise de fadiga de sistemas estruturais do tipo placas finas na presença de incertezas paramétricas e sujeita a excitações aleatórias do tipo estacionárias e Gaussianas. Neste sentido, utilizando o Método dos Elementos Finitos Estocásticos, os parâmetros físicos e/ou geométricos de interesse fatorados das matrizes de massa e rigidez são considerados como variáveis aleatórias e modelados como campos homogêneos e Gaussianos. Estes campos são então discretizados conforme o método de expansão de Karhunen-Loève. Portanto, são geradas as matrizes estocásticas de massa e rigidez do problema através da modificação do processo de integração pelas funções de covariância. Uma vez obtidas as matrizes estocásticas do sistema sujeito também a cargas aleatórias, é feita a estimativa da raiz quadrada do segundo invariante do tensor desviatório de tensão a partir das respostas em tensão no domínio da frequência. Com relação ao critério de fadiga a ser empregado neste trabalho, optou-se por utilizar o Critério Multiaxial de *Sines* para carregamentos aleatórios multiaxiais e não proporcionais. Para tanto, serão empregadas técnicas de redução de modelos bem adaptadas aos sistemas estocásticos com vistas à redução das matrizes globais do sistema de equações do movimento, resultando num ganho de tempo envolvido na estimativa do índice de fadiga. A base de redução constante é formada por modos do sistema nominal que deve ser enriquecida com resíduos estáticos associados aos esforços externos. Os resultados obtidos são apresentados em termos dos envelopes das respostas em tensão, das funções de resposta em frequência e do índice de fadiga. A partir deles é possível verificar a importância da consideração das incertezas na vida em fadiga de sistemas dinâmicos, e a eficiência dos procedimentos de modelagem como ferramenta para a análise de fadiga de sistemas dinâmicos estocásticos.

---

*Palavras-chave: modelagem estocástica, propagação de incertezas, critério de fadiga, resposta em tensão, redução de modelo*



ROSA, U. L. **Fatigue Analysis of Stochastic Systems Subjected to Multiaxial Random Loads**. 2016. 89f. M. Sc. Dissertation, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia.

### Abstract

This work is devoted to the proposition of numerical and computational studies of the multiaxial *Sines'* criterion for fatigue analyses of structural systems such as rectangular plates, taking into account the parametric uncertainties and subjected to stationary random loads. In this context, the Stochastic Finite Elements Method is used in such a way that the design parameters to be considered as random variables are factored out of the mass and stiffness matrices. In the simulations, the random variables are modeled as homogeneous Gaussian random fields and discretized according to the so-called Karhunen-Loève expansion. Thus, the stochastic mass and stiffness matrices are generated due to the modification of the integration process by the covariance functions. In the sequence, a numerical strategy is implemented in order to estimate the mean of the second invariant of stress tensor in the frequency domain to compute the fatigue criterion based on the use of the *Sines'* damage criterion. With the aim of reducing the computational burden evolved in the estimation process of the multiaxial damage criterion, a model reduction technique is implemented for the stochastic system based on the construction of a constant reduction basis formed by the modes of the nominal systems enriched by static residues due to the external forces. The numerical results obtained are presented in terms of the envelopes of frequency response functions, stress responses and fatigue indexes. Through the obtained results it is possible to conclude about the interest in considering the uncertainties on the fatigue analyses of engineering systems for more realistic situations and put in evidence that the methodology is a useful tool for the fatigue analysis of stochastic systems.

---

*Keywords: stochastic modeling, uncertainties propagation, fatigue criterion, stress response, model condensation*



## LISTA DE SÍMBOLOS

### Símbolos Latinos

$\mathbf{B}(x, y, z)$	operadores diferenciais aplicados às funções de forma
$\mathbf{B}_N(x, y)$	matriz de derivadas das funções de formas
$C(x_1, x_2)$	função de covariância
$\mathbf{D}$	matriz de operadores diferencias
$D_{\text{Sines}}$	coeficiente de Sines
$E$	módulo de elasticidade
$E[\bullet]$	operador esperança matemática
$f(t)$	carregamento externo aplicado
$f_n$	frequência natural
$f_0$	limite de fadiga em tração repetida
$f_{-1}$	limite de fadiga em tração alternada simétrica
$g(t)$	esforço do tipo impulso unitário
$\mathbf{G}(\omega)$	matriz de funções resposta em frequência
$h$	espessura da placa
$\mathbf{H}$	matriz de propriedades mecânicas do material
$H(x, \theta)$	campo aleatório
$\hat{H}(x, \theta)$	campo aleatório aproximado
$H_r(x), \xi_r(\theta)$	funções determinísticas e variáveis aleatórias
$J_2$	segundo invariante do tensor desvio
$J_{2,a}$	segundo invariante do tensor desvio, aproximado
$\tilde{J}_{2,a}$	notação de $J_{2,a}$ sob carregamento aleatório
$k_a, k_b, k_c, k_d, k_e, k_f$	modificadores do limite de resistência à fadiga
$L_{cor,x}, L_{cor,y}$	comprimentos de correlação nas direções $x, y$
$\mathbf{M}^{(e)}(\theta), \mathbf{K}^{(e)}(\theta)$	matrizes elementares estocásticas
$\mathbf{M}, \mathbf{K}, \mathbf{C}$	matrizes de massa, rigidez e amortecimento do sistema
$\mathbf{M}^{(e)}, \mathbf{K}^{(e)}$	matrizes de massa e rigidez elementares
$\mathbf{M}_R, \mathbf{K}_R, \mathbf{C}_R$	matrizes de massa, rigidez e amortecimento reduzidas

$\mathbf{N}(x, y)$	vetor de funções de forma
$N_{GDL}$	número de graus de liberdade da estrutura completa
$\mathbf{N}_u, \mathbf{N}_v, \mathbf{N}_w, \mathbf{N}_{\theta_x}, \mathbf{N}_{\theta_y}$	funções de forma ou de aproximação
$p(x)$	função densidade de probabilidade
$p_{hid}(t)$	pressão hidrostática
$P_{unc}$	nível de incerteza
$R_x(\tau)$	função de autocorrelação
$S_e$	limite de resistência à fadiga uniaxial
$S_y, S_{ut}$	limite de escoamento e ruptura
$t_0$	limite de fadiga em torção repetida
$t_{-1}$	limite de fadiga em torção alternada simétrica
$\mathbf{U}(x, y, z, t)$	vetor de deslocamentos
$\hat{\mathbf{U}}(x, y, z, t)$	vetor deslocamentos aproximados pelas funções de forma
$u_e(t)$	deslocamentos elementares
$u_0, v_0, w_0, \theta_x, \theta_y$	graus de liberdade: deslocamentos e flexões
$u, v, w$	deslocamentos nas três direções cartesianas
$\mathbf{Z}(\omega)$	matriz de impedância mecânica do sistema

### Símbolos Gregos

$\beta$	coeficiente de amortecimento proporcional
$\delta_i$	fator de irregularidade
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	deformações normais e cisalhantes
$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z, t)$	vetor de deformações
$\phi_x(\omega)$	matriz de densidades espectrais de potência
$\Phi_s(\omega)$	matriz reduzida de densidades espectrais em tensão
$\gamma$	constante de Euler-Mascheroni
$\lambda_m$	momento estatístico de ordem $m$
$\lambda_r, f_r(x, y)$	autovalores e autofunções de $C(x_1, x_2)$
$\mu_i, \beta_i$	modo e dispersão de um processo aleatório

$\mu_x, s_x^2, \psi_x^2$	propriedades estatísticas de um processo $x$
$\nu$	coeficiente de Poisson
$\rho$	massa específica
$\sigma_a, \sigma_m$	níveis máximos e médios de tensão flutuante
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$	tensões normais e cisalhantes
$\sigma(x, y, z, t)$	vetor de tensões
$\omega$	frequência de excitação em $[rad / s]$
$\Omega_x, \Omega_y$	domínios estocásticos
$\zeta_3$	constante de Apery
$\Psi$	matriz de propriedades mecânicas reduzida

### Abreviações

FEM	método dos elementos finitos
FRF	função resposta em frequência
GDL	grau de liberdade
KL	método de Karhunen-Loève
LHC	método de amostragem Hipercubo Latino
MCS	método de Monte Carlo
PDF	função densidade de probabilidade
PSD	densidade espectral de potência
RMSD	raiz quadrada do desvio médio quadrático
SFEM	método dos elementos finitos estocásticos





## SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO .....</b>	<b>1</b>
1.1 Contexto do estudo .....	1
1.2 Conteúdo do trabalho .....	4
<b>CAPÍTULO II - REVISÃO DA MODELAGEM DETERMINÍSTICA DE PLACAS FINAS .....</b>	<b>6</b>
2.1 Campos de deslocamentos e deformações para um elemento de placa fina .....	6
2.2 Matrizes elementares de massa e rigidez. Obtenção das equações do movimento .....	11
2.3 Resposta em tensão sob carregamento aleatório do domínio da frequência .....	12
2.4 Redução de Modelos .....	17
<b>CAPÍTULO III - ANÁLISE DE FADIGA DE SISTEMAS DINÂMICOS .....</b>	<b>20</b>
3.1 Introdução à Fadiga em Metais .....	20
3.2 Propriedades de Processos Aleatórios Utilizadas na Análise de Fadiga .....	23
3.2.1 Momentos espectrais .....	23
3.2.2 Características de um histórico de tensões .....	24
3.2.3 Largura de banda .....	25
3.3 Vida em Fadiga Uniaxial .....	25
3.3.1 Resistência à fadiga .....	26
3.3.2 Fatores modificadores do limite de resistência à fadiga .....	27
3.3.3 Tensões flutuantes .....	28
3.3.4 Dano cumulativo de fadiga .....	29
3.3.5 Método de contagem de ciclos .....	29
3.4 Vida em Fadiga Multiaxial .....	32
3.4.1 Comparação entre critérios uniaxiais e multiaxiais .....	32
3.4.2 Critérios de fadiga multiaxiais .....	34
3.5 Critério de Sines .....	36
3.5.1 Estimativa da raiz quadrada do segundo invariante do tensor desvio .....	36
3.5.2 Adaptação do critério de Sines para carregamentos aleatórios .....	39

<b>CAPÍTULO IV - MODELAGEM DE SISTEMAS ESTOCÁSTICOS PARA A ANÁLISE DE FADIGA.....</b>	<b>44</b>
4.1 Introdução .....	44
4.2 Formulação do modelo de elementos finitos estocásticos de placa fina .....	45
4.2.1 Discretização de campos aleatórios.....	45
4.2.2 Matrizes elementares estocásticas de massa e rigidez.....	46
4.3 Solução do Problema Estocástico .....	51
<b>CAPÍTULO V - SIMULAÇÕES NUMÉRICAS .....</b>	<b>44</b>
5.1 Dados do problema .....	44
5.2 Resultados obtidos para o sistema determinístico.....	54
5.2.1 Análise modal .....	54
5.2.2 Avaliação das respostas dinâmicas do sistema reduzido.....	55
5.2.3 Estimação do índice de fadiga .....	58
5.3 Resultados obtidos para o sistema estocástico .....	59
<b>CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES GERAIS E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS .....</b>	<b>72</b>
6.1 Perspectivas de trabalhos futuros.....	74
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>75</b>

# **CAPÍTULO I**

## **INTRODUÇÃO**

### **1.1 Contexto do estudo**

O presente trabalho de dissertação está inserido no contexto das temáticas de pesquisa que vem sendo desenvolvidas pela equipe de dinâmica estrutural do Laboratório de Mecânica de Estruturas (LMEst), da Faculdade de Engenharia Mecânica (FEMEC), da Universidade Federal de Uberlândia (UFU), que trata da modelagem numérico-computacional de técnicas para a análise de fadiga de sistemas dinâmicos na presença de incertezas e submetidos a carregamentos dinâmicos aleatórios.

Em vários ramos da engenharia mecânica, nota-se atualmente a constante busca pela durabilidade, confiabilidade, segurança e conforto de máquinas e equipamentos impulsionados pela modernização de processos e produtos industriais (KOÇER, 2010). Além disso, na maioria das aplicações práticas de engenharia, as máquinas e/ou equipamentos estão frequentemente submetidos a perturbações dinâmicas que podem levar a níveis indesejáveis de vibrações e ruídos e, como consequência, agravar o problema de fadiga induzida por vibrações, levando a fraturas definitivas ou colapso da estrutura.

Sabe-se que, ao contrário das falhas ocorridas em regime estático onde há um aviso prévio por parte da estrutura comprometida, as falhas por fadiga são caracterizadas por propagação lenta de trincas seguida por uma fratura súbita e inesperada em tensões inferiores aos limites de resistência teóricos, o que as tornam bastante perigosas, principalmente nas indústrias aeronáutica e aeroespacial. Neste sentido, a importância dada ao problema de falha por fadiga induzida por vibrações é um dos grandes problemas das Engenharias Mecânica, Civil e Aeronáutica em virtude da preocupação em projetar e

construir estruturas que sejam confiáveis e que possuem resistência suficiente à fadiga sobre uma dada faixa de operação para evitar desastres catastróficos.

No contexto da análise de fadiga de sistemas dinâmicos, Lambert (2007) enfatiza que as trincas por fadiga geralmente surgem em pontos críticos da estrutura, tais como mudanças de geometria, pontos de aplicação do carregamento e das condições de contorno. Os métodos de prevenção desse tipo de falha envolvem levantamentos estatísticos sobre carregamentos e tensões referentes aos históricos no domínio do tempo. Esse é um método viável, porém, possui um alto custo computacional, requerendo muito tempo para aquisição de dados e pós-tratamento. Além disso, deve ser levado em conta o fato de que para sistemas sujeitos a vibrações, uma análise dinâmica da estrutura é importante no estudo de fadiga, uma vez que as perturbações podem excitar alguma frequência natural da estrutura, elevando os níveis de suas tensões. Portanto, técnicas de análise de fadiga no domínio da frequência são preferencialmente utilizadas.

No trabalho de Lambert (2007) foram geradas contribuições no âmbito da análise de dano causado por fadiga em estruturas determinísticas sujeitas a carregamentos aleatórios. Através da formulação clássica da resistência dos materiais foi desenvolvido um equacionamento que, aliado com análises estatísticas dos esforços aleatórios presentes na estrutura, critérios de fadiga e acúmulo de dano permitiram a obtenção de um método de análise da vida em fadiga de sistemas não amortecidos. Além disso, os autores apresentam uma breve teoria e algumas aplicações de otimização de estruturas sob carregamentos cíclicos. Esses conceitos foram aplicados em uma estrutura apresentando incertezas paramétricas, gerando um modelo completamente estocástico.

Weber (1999) realizou inúmeros estudos sobre fadiga de sistemas sujeitos a carregamentos multiaxiais. Por meio de ensaios experimentais foi possível comparar diferentes critérios de fadiga multiaxiais visando identificar quais levam a resultados mais satisfatórios com uma taxa de dispersão menor. Esses resultados têm auxiliado em muito a escolha do critério de fadiga mais adaptado a uma dada estrutura em estudo, satisfazendo as condições de aplicação e disponibilidade de dados. Na realização dos experimentos, se destacaram os métodos chamados de “abordagem global”, do qual o critério multiaxial de *Sines* está inserido, visto que apresentaram as menores dispersões de dados.

O critério multiaxial de *Sines* (1959) considera em sua formulação o plano octaédrico como sendo o plano de cisalhamento máximo, adotando o segundo invariante do tensor desvio de tensão e a pressão hidrostática do carregamento atuante como parâmetros. Além disso, ele apresenta uma formulação mais simples e custo de cálculo reduzido. A obtenção

do coeficiente de *Sines* recai na estimativa da raiz quadrada do segundo invariante do tensor desviatório de tensão da estrutura, supondo que os limites de resistência à fadiga estejam acessíveis. A obtenção deste parâmetro para carregamentos conhecidos ao longo do tempo pode ser feita através dos conceitos da resistência dos materiais (BORESI et al., 2011). Porém, se a estrutura está sujeita a carregamentos aleatórios, uma abordagem estatística é requerida para sua estimativa. Neste caso, Bin Li e Freitas (2002) propuseram um método em que o trajeto do carregamento é circunscrito por uma elipse e calculado em função de seus semieixos (abordagem bidimensional).

A teoria da elipse foi expandida para o domínio euclidiano de cinco dimensões na forma de uma casca prismática descrita no trabalho de Khalij, Pagnacco e Lambert (2010). Foi proposta também uma transformação de coordenadas onde as componentes do tensor tensão são levadas para o mesmo espaço do prisma.

Lambert, Pagnacco e Khalij (2010) continuaram desenvolvendo o método da elipse circunscrita por meio da aplicação de conceitos da análise de sinais avançada e propriedades estatísticas de processos aleatórios (BENDAT e PIERSOL, 2010). Essa teoria foi aplicada por de Lima et al. (2014) para a análise de fadiga de uma estrutura amortecida viscoelasticamente sob carregamentos aleatórios. Entretanto, nada foi feito com relação à consideração das incertezas nos parâmetros físicos e/ou geométricas do sistema dinâmico durante a análise de fadiga, nem a proposição de técnicas de redução de modelos para a avaliação de sistemas mais complexos de engenharia.

Outro aspecto importante que deve ser levado em conta no tocante à análise de fadiga de sistemas mecânicos e que deve responder às exigências de projeto é a consideração das incertezas que influenciam nas respostas dinâmicas dos sistemas. As incertezas podem estar presentes não só nas propriedades geométricas e físicas do problema, mas também no carregamento e nas condições de contorno (STEFANOU, 2009). Além disso, elas se propagam através dos modelos computacionais, afetando sobremaneira sua resposta final. Portanto, a proposição de modelos de análise de fadiga de sistemas dinâmicos estocásticos se faz necessária e, em função do alto custo computacional envolvido para a avaliação das respostas em tensão do sistema estocástico utilizadas para a estimação do índice de fadiga, métodos de redução de modelos são ferramentas indispensáveis.

Neste caso, o método dos elementos finitos estocásticos (GHANEM e SPANOS, 1991; STEFANOU, 2009) é uma ferramenta que permite a inclusão de variáveis aleatórias no modelo. Sua aplicação no domínio de elementos finitos requer também a discretização dos campos aleatórios e, uma das maneiras de realiza-la é através da expansão de Karhunen-

Loève, cujo método insere as incertezas não só nas variáveis aleatórias como também afeta o processo de integração das matrizes de massa e rigidez elementares, possibilitando sua propagação ao longo de todo o domínio do problema.

Existem diversas técnicas de solução para problemas estocásticos (SCHUELLER, 2001; STEFANOU, 2009) sendo que a mais utilizada é o método de Simulação de Monte Carlo, onde uma população com grande número de indivíduos é aplicada ao modelo como parâmetro de entrada. Cada conjunto de variáveis aleatórias que se considera nesse processo requer uma execução completa de toda a rotina de cálculo, além da necessidade de guardar uma grande quantidade de dados para que seja calculado o envelope de respostas e suas médias. Como consequência, dependendo da complexidade do problema, o custo computacional envolvido na obtenção dos envelopes de soluções se torna oneroso e, neste caso, é possível diminuir o esforço de cálculo através da aplicação de métodos de redução de modelos (CRAIG, 2006; GERGES, 2013; MACIEL E BARBOSA, 2015).

Por fim, como trabalho mais recente dos autores, Rosa e de Lima (2015) propuseram o emprego de uma base de redução constante formada pelos modos próprios de interesse da estrutura determinística e enriquecida com resíduos estáticos dos esforços externos para a obtenção das respostas em tensão do sistema reduzido e posterior estimativa dos índices de fadiga via critério de *Sines*, do domínio discretizado.

## **1.2 Conteúdo do trabalho**

No Capítulo II é realizada uma revisão da modelagem por elementos finitos de uma placa retangular fina empregando a teoria de Kirchhoff. São descritos os processos de obtenção dos campos de deslocamentos, deformações e resposta em tensão nos domínios do tempo e frequência. O procedimento de obtenção das equações do movimento do sistema a nível elementar e global é apresentado, permitindo a realização de diferentes análises dinâmicas.

O Capítulo III é dedicado aos métodos de análise fadiga. Primeiramente, alguns conceitos de fadiga em metais são recapitulados. Posteriormente é apresentada uma maneira de se conectar a teoria apresentada no Capítulo II ao estudo de fadiga por meio da análise estatística dos históricos de tensões. Na sequência são apresentados os critérios de fadiga uniaxiais, acúmulo de dano e contagem de ciclos de modo a preparar o leitor para a

análise de fadiga empregando o critério multiaxial de Sines a uma estrutura submetida a carregamentos multiaxiais aleatórios.

A formulação do método dos elementos finitos estocásticos é apresentada no Capítulo IV. Ele é iniciado com a introdução dos conceitos de incertezas, variáveis aleatórias e campos aleatórios. A expansão de Karhunen-Loève é formulada na sequência, onde são mostrados os passos para a obtenção das matrizes estocásticas de massa e rigidez do sistema. Por fim, é apresentada a formulação do critério de *Sines* do problema estocástico e o procedimento para a avaliação do mesmo via emprego do Método de Monte Carlo.

No Capítulo V são apresentados os resultados das inúmeras simulações numéricas realizadas com o objetivo de avaliar a eficiência dos procedimentos de modelagem do índice de fadiga dos sistemas estocásticos, método de redução de modelos e respostas dinâmicas do sistema.

Por fim, no Capítulo VI são apresentadas as conclusões gerais e as perspectivas de trabalhos futuros.





## **CAPÍTULO II**

### **REVISÃO DA MODELAGEM DETERMINÍSTICA DE PLACAS FINAS**

Neste capítulo é apresentada a modelagem por elementos finitos de uma placa fina empregando a teoria de Kirchhoff para a posterior análise de fadiga. Num primeiro momento, são apresentados os campos de deslocamentos, as deformações e as tensões para o elemento finito de placa retangular fina. Posteriormente, são obtidas as respostas dinâmicas do sistema em termos das funções de resposta em frequência e densidades espectrais de potência em tensão. As respostas em tensão do sistema no domínio da frequência são necessárias para a avaliação do critério de fadiga utilizado neste trabalho. Por fim, é apresentado o método de redução de modelos a ser empregado para diminuir o esforço computacional na estimação do índice de fadiga.

#### **2.1 Campos de deslocamentos e deformações para um elemento de placa fina**

A teoria clássica de placas adotada neste trabalho segue as hipóteses propostas por Kirchhoff, que assumem as seguintes condições (REDDY, 1997):

- a) As linhas retas perpendiculares à superfície média indeformada (linha neutra) permanecem retas e perpendiculares após a deformação;
- b) As normais transversais não sofrem alongamento, ou seja, são inextensíveis. Entretanto, sofrem rotação de modo a permanecer perpendiculares à superfície média;
- c) A espessura da placa permanece constante durante a deformação;
- d) Os deslocamentos são pequenos em relação às dimensões da placa.

Dessa maneira, as duas primeiras condições impõem que o deslocamento transversal é independente da coordenada transversal (ao longo da espessura) e, portanto, a deformação normal nessa direção é zero ( $\varepsilon_z = 0$ ). Além disso, as deformações cisalhantes são nulas ( $\gamma_{xz} = 0, \gamma_{yz} = 0$ ). Levando-se em conta as outras condições e o fato da placa ser fina, pode-se afirmar que o sistema se encontra em um estado plano de tensões.

Na figura 2.1 pode-se observar o comportamento de uma linha através da espessura da placa seguindo essas hipóteses após a deformação.

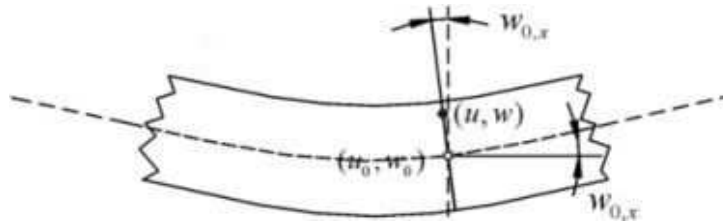


Figura 2.1 – Campos de deslocamentos da placa fina (adaptado de Faria (2006)).

Neste caso, o elemento de placa plana a ser adotado neste trabalho é composto por quatro nós e cinco graus de liberdade, sendo dois deslocamentos no plano da placa ( $u_0, v_0$ ), um deslocamento transversal ( $w_0$ ) e duas rotações das seções transversais ( $\theta_x, \theta_y$ ). Desta forma, os campos de deslocamentos nas três direções principais  $X, Y, Z$  para o elemento de placa são definidos como segue (REDDY, 1997):

$$u(x, y, z, t) = u_0 + z\theta_x \quad (2.1.a)$$

$$v(x, y, z, t) = v_0 + z\theta_y \quad (2.1.b)$$

$$w(x, y, z, t) = w_0 \quad (2.1.c)$$

onde  $\theta_x = \frac{\partial w_0}{\partial x}$  e  $\theta_y = \frac{\partial w_0}{\partial y}$  são as rotações em relação aos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente.

É conveniente adotar uma notação de maneira a agrupar as Eqs. (2.1) em um único vetor de campos de deslocamento, conforme apresentado na Eq. (2.2).

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) = \begin{Bmatrix} u(x, y, z, t) \\ v(x, y, z, t) \\ w(x, y, z, t) \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

A partir da hipótese de estado plano de tensões e negligenciando-se as deformações na direção transversal, é possível determinar os seguintes campos de deformação (TIMOSHENKO e GOODIER, 1951):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.3.a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.3.b)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.3.c)$$

A equação (2.4) agrupa esses campos em forma de vetor e introduz a matriz  $\mathbf{D}$ , que contém os operadores diferenciais do sistema.

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z, t) = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial / \partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial / \partial y & 0 \\ \partial / \partial y & \partial / \partial x & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \mathbf{D}\mathbf{U}(x, y, z, t) \quad (2.4)$$

Após a apresentação do equacionamento referente aos campos de deslocamentos e deformações da estrutura, é introduzido o conceito de funções de forma, que tem como objetivo aproximar os campos  $\mathbf{U}(x, y, z, t)$ . Neste contexto, a figura 2.2 abaixo representa o elemento finito de placa plana adotado neste trabalho com seu nós e graus de liberdade. As

Eqs. (2.5) representam as funções de interpolação de forma a serem empregadas no processo de integração das matrizes elementares.

$$\mathbf{N}_u(x, y) = [1 \quad x \quad y \quad xy] \quad (2.5.a)$$

$$\mathbf{N}_v(x, y) = [1 \quad x \quad y \quad xy] \quad (2.5.b)$$

$$\mathbf{N}_w(x, y) = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3y \quad xy^3] \quad (2.5.c)$$

$$\mathbf{N}_{\theta_x}(x, y) = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 2x \quad y \quad 0 \quad 3x^2 \quad 2xy \quad y^2 \quad 0 \quad 3x^2y \quad y^3] \quad (2.5.d)$$

$$\mathbf{N}_{\theta_y}(x, y) = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad x \quad 2y \quad 0 \quad x^2 \quad 2xy \quad 3y^2 \quad x^3 \quad 3xy^2] \quad (2.5.e)$$

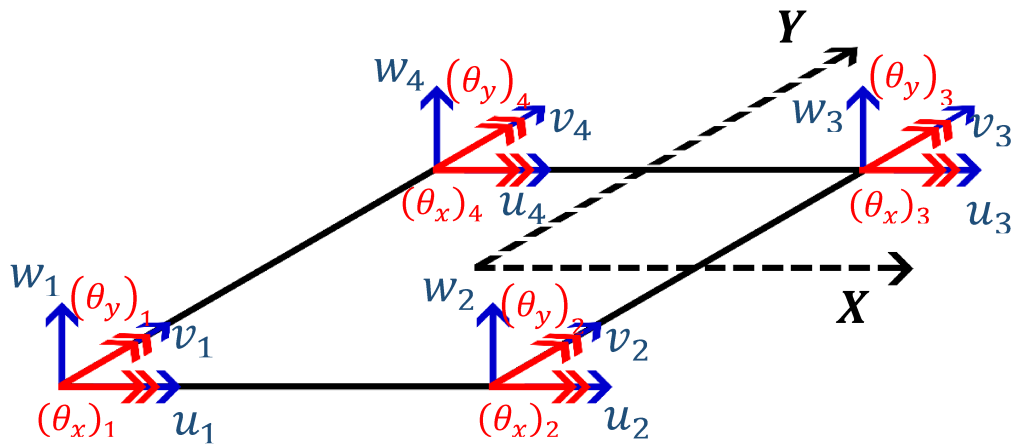


Figura 2.2 – Ilustração do elemento finito de placa fina retangular

Conforme a Fig. 2.2, as Eqs. (2.5) podem ser agrupadas de forma a gerar a seguinte matriz de funções de forma:

$$\mathbf{N}(x, y) = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_u(x, y) & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{N}_v(x, y) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{N}_w(x, y) \\ 0 & 0 & \mathbf{N}_{\theta_x}(x, y) \\ 0 & 0 & \mathbf{N}_{\theta_y}(x, y) \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Portanto, o vetor de deslocamentos nodais  $\mathbf{U}(x, y, z, t)$  definido na Eq. (2.2) é aproximado pelas funções de forma da seguinte forma:

$$\mathbf{U}(x, y, z, t) \approx \hat{\mathbf{U}}(x, y, z, t) = \mathbf{A}(z)\mathbf{N}(x, y)u_e(t) \quad (2.7)$$

onde  $\mathbf{A}(z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  e o vetor dos deslocamentos mecânicos nodais é dado por

$$u_e(t) = \left[ (u_0)_1 \quad (v_0)_1 \quad (w_0)_1 \quad (\theta_x)_1 \quad (\theta_y)_1 \quad \dots \quad (u_0)_4 \quad (v_0)_4 \quad (w_0)_4 \quad (\theta_x)_4 \quad (\theta_y)_4 \right]^T.$$

Introduzindo a notação  $\mathbf{B}(x, y, z) = \mathbf{DA}(z)\mathbf{N}(x, y)$  pode-se reescrever a Eq. (2.4) da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z, t) = \mathbf{B}(x, y, z)u_e(t) \quad (2.8)$$

Segundo a lei de Hooke generalizada (BORESI et al., 2011), a relação entre deformação e tensão é obtida através da aplicação da matriz dos coeficientes elásticos, dependentes do material e de sua orientação cristalina. Para o caso de materiais isotrópicos, esta relação assume a seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma}(x, y, z, t) = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{H}\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z, t) = \mathbf{HB}(x, y, z)u_e(t) \quad (2.9)$$

$$\text{onde: } \mathbf{H} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

## 2.2 Matrizes elementares de massa e rigidez. Obtenção das equações do movimento

As equações do movimento do elemento de placa retangular podem ser obtidas por meio da aplicação das equações de Lagrange às expressões das energias de deformação e cinética do elemento, formuladas a partir das relações (2.8) e (2.9). Rao (2010) apresenta esse desenvolvimento completo, levando-se à obtenção das seguintes expressões para as matrizes de massa e rigidez:

$$\mathbf{M}^{(e)} = \int_{V_e} \mathbf{N}(x,y)^T \rho \mathbf{N}(x,y) dV_e \quad (2.11)$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{V_e} \mathbf{B}_N(x,y)^T \mathbf{H} \mathbf{B}_N(x,y) dV_e \quad (2.12)$$

onde o superíndice (e) indica que as matrizes são elementares,  $V_e$  é o domínio volumétrico de integração do elemento finito e  $\mathbf{B}_N(x,y)$  corresponde à derivação das funções de forma em relação às coordenadas  $x, y$ , conforme a Eq. (2.13).

$$\mathbf{B}_N(x,y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_u}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_v}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_u}{\partial y} & \frac{\partial N_v}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_w}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_w}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_w}{\partial x \partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_{\theta x}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_{\theta x}}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_{\theta x}}{\partial x \partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2 N_{\theta y}}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 N_{\theta y}}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 N_{\theta y}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

As matrizes globais de massa e rigidez são obtidas pela concatenação das elementares, por meio da conectividade dos nós e dos graus de liberdade da estrutura (MOAVENI, 1999), possibilitando a obtenção das equações do movimento do sistema no domínio do tempo, conforme a Eq. (2.14).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (2.14)$$

onde  $\mathbf{M} = \bigcup_{n^{\circ} elem.} \mathbf{M}^{(e)}$ ,  $\mathbf{K} = \bigcup_{n^{\circ} elem.} \mathbf{K}^{(e)}$ ,  $\mathbf{f}(t)$  é o vetor dos carregamentos externos e  $\mathbf{u}(t)$  é o vetor dos deslocamentos.

Uma vez obtidos os deslocamentos  $\mathbf{u}(t)$  do sistema através da Eq. (2.14), é possível determinar a resposta em tensão do mesmo no domínio do tempo através da Eq. (2.9). Além disso, considerando-se uma excitação harmônica da forma  $\mathbf{f}(t) = \mathbf{F}e^{i\omega t}$ , que gera uma resposta harmônica  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{U}e^{i\omega t}$  e a inclusão de um amortecimento estrutural proporcional à rigidez,  $\mathbf{C} = \beta\mathbf{K}$ , a equação do movimento no domínio do tempo (2.14) é transformada em uma equação algébrica no domínio da frequência da seguinte forma (RAO, 2011):

$$[\mathbf{K} + j\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}]\mathbf{U}e^{i\omega t} = \mathbf{F}e^{i\omega t} \quad (2.15)$$

Isolando o módulo da relação entre deslocamento e força obtém-se a expressão da função de resposta em frequência (FRF)  $\mathbf{G}(\omega)$  conforme a equação matricial a seguir.

$$\mathbf{G}(\omega) = [\mathbf{K} + j\omega\mathbf{C} - \omega^2\mathbf{M}]^{-1} \quad (2.16)$$

### 2.3 Resposta em tensão sob carregamento aleatório no domínio da frequência

Uma das maneiras de se realizar a caracterização dos níveis de tensões em uma estrutura sujeita a carregamentos dinâmicos é a análise no domínio do tempo que levam em conta os dados calculados e registrados na forma de um histórico de tensões. Como consequência, um dos principais problemas é a avaliação de integrais de convolução (LAMBERT, 2007) para as análises numéricas, e o alto custo envolvido no processo, principalmente para os casos de carregamentos aleatórios.



Como alternativa, existe a análise de tensão no domínio da frequência (ou domínio de Fourier). Nesse processo, a obtenção das densidades espectrais de potência da resposta em tensão e dos esforços externos aplicados se faz necessária (LAMBERT, 2007).

Segundo Bendat e Piersol (2010), sendo  $X$  um processo aleatório Gaussiano, existem quatro importantes propriedades estatísticas utilizadas para descrevê-lo:

- a) Média e média quadrática;
- b) Função densidade de probabilidade;
- c) Função de autocorrelação;
- d) Densidade espectral de potência (ou função densidade autoespectral).

A média  $\mu_x$  e a variância  $s^2$  de um processo representam a tendência central e dispersão em torno dela, enquanto que a média quadrática  $\psi_x^2$  constitui uma combinação dessas duas, ou seja, carrega uma estimativa da variância em seu cálculo. Já a função densidade de probabilidade  $p(x)$ , por sua vez, representa a distribuição da probabilidade de uma variável aleatória contínua em assumir um dado valor. A área total embaixo de sua curva será sempre unitária, representando a certeza da ocorrência do processo num intervalo  $]-\infty, +\infty[$ . Por fim, a função de autocorrelação  $R_x(\tau)$  é definida como sendo uma medida de propriedades do sinal em diferentes tempos, ou seja, como o valor dessa variável variando no tempo afeta o processo. Ela é calculada em função de um atraso ou distância  $\tau$  desejada na medição, por exemplo, se essa distância é zero, o valor da função de autocorrelação será unitário, indicando total correlação da variável com ela mesma.

Por último vem a propriedade de maior interesse na elaboração da resposta em tensão de sistemas dinâmicos: a densidade espectral de potência  $\phi_x(\omega)$ . Ela representa a taxa de variação do valor da média quadrática com a frequência. Sua estimativa pode ser obtida de três maneiras (BENDAT e PIERSOL, 2010) sendo que a que melhor se aplica à metodologia empregada neste trabalho é a transformada de Fourier das funções de autocorrelação.

Seja  $\phi_u(\omega)$  a matriz de densidades espectrais de potência e  $R_u(\tau)$  a função de autocorrelação do deslocamento  $u(t)$  proveniente da aplicação de um carregamento externo  $f(t)$  com propriedades  $\phi_f(\omega)$  e  $R_f(\tau)$ . Seus valores podem ser calculados pelas Eqs. (2.17) e (2.18).

$$\phi_u(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_u(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.17)$$

$$\phi_f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_f(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \quad (2.18)$$

A aplicação da transformada inversa de Fourier nas equações anteriores resulta em:

$$R_u(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_u(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (2.19)$$

$$R_f(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_f(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \quad (2.20)$$

A função autocorrelação para um processo estacionário aleatório é dada como segue:

$$R_u(\tau) = E[\mathbf{u}(t)\mathbf{u}^T(t+\tau)] = E[\mathbf{u}(t-\tau)\mathbf{u}^T(t)] \quad (2.21)$$

onde  $E[\bullet]$  é o operador esperança matemática, definido como  $E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p(x)dx$ .

Seguindo os desenvolvimentos originais propostos por Lambert (2007), a equação precedente pode ser reescrita como segue:

$$\begin{aligned} R_u(\tau) &= E \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}(\lambda) \mathbf{f}(t-\lambda) \mathbf{f}^T(t+\tau-\zeta) \mathbf{g}^T(\zeta) d\lambda d\zeta \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}(\lambda) \mathbf{f}(t-\lambda) \mathbf{f}^T(t+\tau-\zeta) \mathbf{g}^T(\zeta) d\lambda d\zeta dt \end{aligned} \quad (2.22)$$

onde  $\mathbf{g}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{G}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$  é a resposta do sistema a um impulso unitário.

Considerando que a função de carregamento  $\mathbf{f}(t)$  é um processo estacionário e ergódico, pode-se escrever a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(t-\lambda) \mathbf{f}^T(t+\tau-\zeta) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{f}(t) \mathbf{f}^T(t+\tau+\lambda-\zeta) dt \\ &= R_f(\tau+\lambda-\zeta) \end{aligned} \quad (2.23)$$

Substituindo a Eq. (2.23) na Eq. (2.22), pode-se obter a função autocorrelação para o deslocamento do sistema:

$$R_u(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}(\lambda) R_f(\tau+\lambda-\zeta) \mathbf{g}^T(\zeta) d\lambda d\zeta \quad (2.24)$$

Essa equação define a resposta do deslocamento da estrutura sujeita a um carregamento aleatório no domínio do tempo. Por definição, o valor dessa função de correlação não depende do tempo  $t$  e, portanto, sendo este um sistema linear, se a excitação de entrada é um processo aleatório estacionário, sua resposta também será. Portanto, introduzindo a Eq. (2.24) na (2.17) obtém-se uma nova expressão para a densidade espectral de potência do deslocamento  $\mathbf{u}(t)$ :

$$\phi_u(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}(\lambda) R_f(\tau+\lambda-\zeta) \mathbf{g}^T(\zeta) d\lambda d\zeta \right] e^{j\omega\tau} d\tau \quad (2.25)$$

A resposta da Eq. (2.23), obedecendo a relação apresentada em (2.20) pode ser então reescrita na seguinte forma:

$$R_f(\tau+\lambda-\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_f(\omega) e^{j\omega(\tau+\lambda-\zeta)} d\omega \quad (2.26)$$

Introduzindo a Eq. (2.26) em (2.25), utilizando da definição de  $g(t)$  e através de manipulações matemáticas, chega-se à seguinte expressão para densidade espectral de potência do deslocamento:

$$\begin{aligned}
 \phi_u(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_f(\omega) e^{j\omega(\tau+\lambda-\zeta)} d\omega g^T(\zeta) d\lambda d\zeta \right] e^{j\omega t} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} g(\lambda) e^{-j\omega\lambda} d\lambda \times \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_f(\omega) e^{j\omega(\tau+\lambda-\zeta)} d\omega \times \int_{-\infty}^{+\infty} g^T(\zeta) e^{j\omega\zeta} d\zeta \right] e^{j\omega t} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \mathbf{G}(\omega) \times \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_f(\omega) e^{j\omega(\tau+\lambda-\zeta)} d\omega \times \mathbf{G}^H(\omega) \right] e^{j\omega t} d\tau \\
 &= \mathbf{G}(\omega) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} R_f(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau \right] \mathbf{G}^H(\omega)
 \end{aligned} \tag{2.27}$$

ou ainda, sob a forma:

$$\phi_u(\omega) = \mathbf{G}(\omega) \phi_f(\omega) \mathbf{G}^H(\omega) \tag{2.28}$$

O que permite obter a matriz de densidade espectral de potência da tensão:

$$\phi_s(\omega) = \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{G}(\omega) \phi_f(\omega) \mathbf{G}^H(\omega) \mathbf{B}^T \mathbf{H}^T \tag{2.29}$$

Através da análise dessa equação nota-se que a obtenção da resposta em tensão no domínio da frequência de um sistema dinâmico depende da FRF do sistema, da matriz dos operadores diferenciais aplicados às funções de forma do método dos elementos finitos, da matriz de propriedades elásticas do material, e do carregamento aplicado. Considerando o estado plano de tensões, a matriz da resposta em tensão do sistema, cuja diagonal principal será utilizada no cálculo posterior de momentos espectrais, assume a forma apresentada na Eq. (2.30), em unidades de  $Pa^2 / Hz$ .

$$\phi_s(\omega) = \begin{bmatrix} \phi_{xx}(\omega) & \phi_{xy}(\omega) & \phi_{xy}(\omega) \\ \phi_{yx}(\omega) & \phi_{yy}(\omega) & \phi_{yy}(\omega) \\ \phi_{yx}(\omega) & \phi_{yy}(\omega) & \phi_{yy}(\omega) \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

## 2.4 Redução de Modelos

Em aplicações práticas de engenharia, a utilização de modelos mais complexos em termos do número de graus de liberdade é uma realidade. Nestes casos, a avaliação das respostas dinâmicas de tais sistemas leva a um alto custo computacional envolvido no cálculo das respostas dinâmicas em processos iterativos de ajuste de modelos e otimização, por exemplo. Diante de tal situação, se faz necessário o emprego de métodos de redução de modelos.

O objetivo da condensação de modelos é sempre construir uma base de redução que seja capaz de representar as mesmas respostas dinâmicas dos modelos nominais, mesmo para os casos em que estes são modificados global ou localmente. Neste aspecto, dispor de uma base de redução capaz de representar o movimento de um modelo complexo é primordial nos processos iterativos de ajuste de modelos e de otimização, uma vez que tal base permite reanálises aproximadas rápidas e econômicas em termo do custo de cálculo. Esse fator é extremamente importante na análise de fadiga, pois esta envolve cálculos matriciais onerosos computacionalmente.

A partir da expressão (2.16), pode-se imaginar que para os modelos industriais de grande tamanho, não é prático (do ponto de vista do custo numérico) utilizar diretamente o modelo completo, pois, ele conduz a um tempo de cálculo proibitivo em virtude da inversão da matriz de rigidez dinâmica para cada passo em frequência. Neste caso, utilizam-se aproximações de respostas, buscando-se a solução num subespaço: isto é, a aproximação modal, que consiste a projetar as equações do movimento do sistema numa base de redução,  $\mathbf{T}$ , com o objetivo de diminuir o número de graus de liberdade do sistema e, portanto, acelerar a resolução numérica do problema, através da hipótese de que as respostas exatas, representadas pelas expressões (2.9), (2.14) e (2.29), podem ser aproximadas por soluções dentro de um subespaço reduzido da forma:

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}\mathbf{u}_r \quad (2.31)$$

onde a matriz  $\mathbf{T} \in \mathbb{C}^{N \times NR}$  é a base de redução, ou base de Ritz, e  $\mathbf{u}_r \in \mathbb{C}^{NR}$  com  $NR \ll N$  ( $NR$  representa os modos retidos na base).

Portanto, introduzindo a Eq. (2.31) nas expressões (2.9) e (2.14), e após a realização de manipulações matemáticas, as expressões (2.16) e (2.29) assumem as seguintes formas aproximadas:

$$\mathbf{G}_R(\omega) = [\mathbf{K}_R + j\omega\mathbf{C}_R - \omega^2\mathbf{M}_R]^{-1} \quad (2.32)$$

$$\Phi_S(\omega) = \Psi \mathbf{G}_R(\omega) \Phi_F(\omega) \mathbf{G}_R^H(\omega) \Psi^T \quad (2.33)$$

onde  $\mathbf{M}_R = \mathbf{T}^T \mathbf{M} \mathbf{T}$ ,  $\mathbf{K}_R = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T}$ ,  $\mathbf{C}_R = \beta \mathbf{K}_R$ ,  $\Psi = \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{T}$  e  $\Phi_F(\omega) = \mathbf{T}^T \phi_t(\omega) \mathbf{T}$ .

Em seu trabalho, Gerges (2013) apontou algumas técnicas para a obtenção de bases de redução  $\mathbf{T}$ . Para o caso de uma estrutura linear cujas características físicas do sistema são bem conhecidas, o mais apropriado é usar a base modal de Ritz enriquecida com resíduos estáticos devidos aos esforços externos aplicados. Neste caso, a base de Ritz é formada pelos primeiros  $N_m$  modos do sistema nominal (autovetores obtidos pela solução do problema do sistema (2.9)) e enriquecida com o resíduo estático  $\bar{\mathbf{U}}$  proveniente da aplicação de uma força unitária ( $F = 1$ ) na estrutura, obtido da forma:

$$\bar{\mathbf{U}} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} \quad (2.34)$$

A definição da quantidade de modos que será utilizada na composição da base de formas modais  $\mathbf{U}_{\text{mod}}$  depende de alguns critérios de escolha (MACIEL e BARBOSA, 2015). Recomenda-se primeiramente expandir a faixa de análise, utilizando 1,5 vezes a frequência máxima desejada na banda de interesse (ROSA e DE LIMA, 2015). Por exemplo, para uma análise na faixa 0-100 Hz, será usada uma nova banda de 0-150 Hz e a base  $\mathbf{U}_{\text{mod}}$  será composta de todos os modos de vibrar até 150 Hz. A equação (2.42) mostra a composição final da base modal,  $\mathbf{T}$ , enriquecida:

$$\mathbf{T} = [\mathbf{U}_{\text{mod}} \bar{\mathbf{U}}] \quad (2.35)$$

A Fig. 2.3 ilustra as etapas principais a serem utilizadas para a obtenção da resposta em tensão reduzida de sistemas dinâmicos no domínio da frequência.

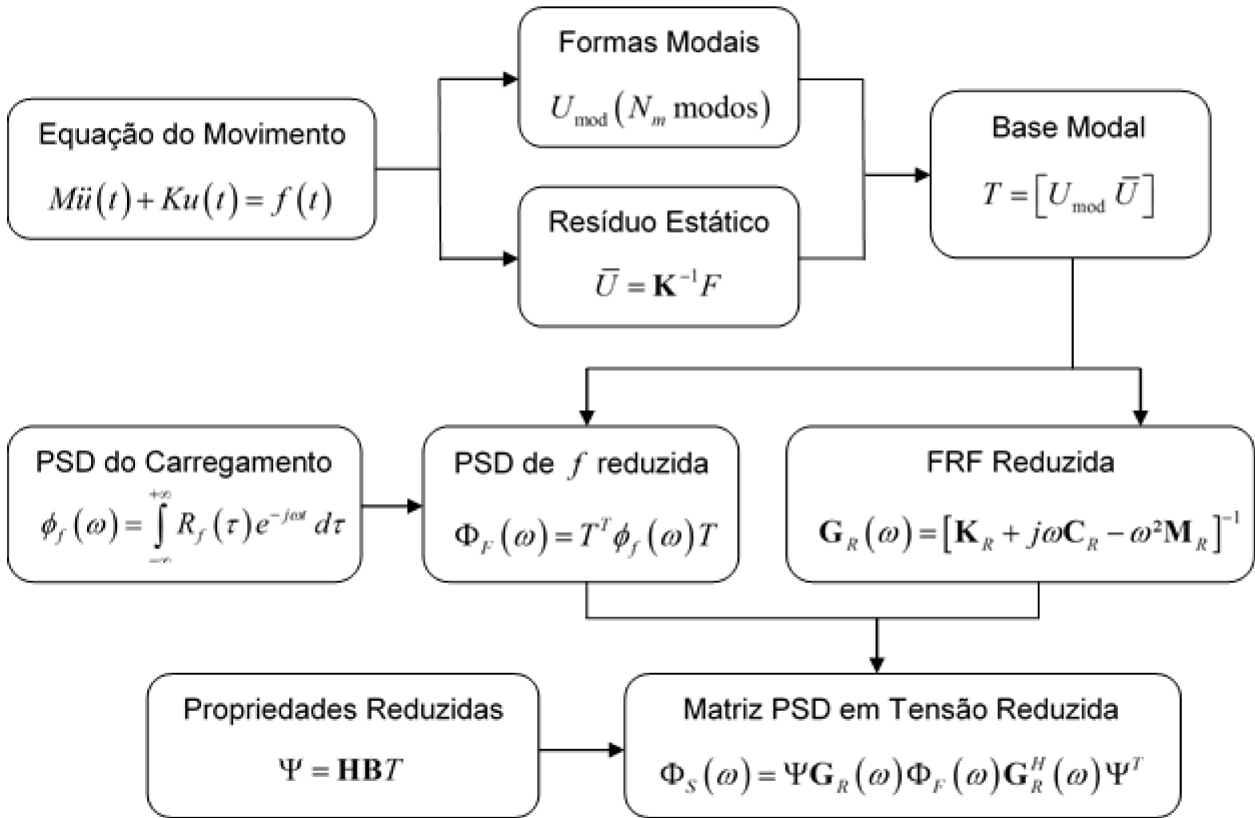


Figura 2.3 – Fluxograma do desenvolvimento completo da resposta em tensão no domínio da frequência

## **CAPÍTULO III**

### **ANÁLISE DE FADIGA DE SISTEMAS DINÂMICOS**

Este capítulo apresenta uma revisão sobre alguns métodos de análise de fadiga de estruturas metálicas, onde são apresentados os critérios de estimativa de dano por fadiga e as propriedades de processos aleatórios estacionários e Gaussianos a serem abordados ao longo deste trabalho. Com base na teoria apresentada por Budynas e Nisbett (2011), as principais características do processo de fadiga são descritas, fortalecidas pela teoria da mecânica da fratura apresentada por Dowling (2007). Utilizando conceitos de análise de sinais aliados ao trabalho de Lambert (2007) é possível obter as características estatísticas do carregamento externo atuante na estrutura, o que permite estimar os prováveis pontos de falha do sistema.

#### **3.1 Introdução à Fadiga em Metais**

A falha de um material ou estrutura ocorre quando ela deixa de desempenhar a função para a qual foi projetada (DOWLING, 2007). Por meio dessa definição, nota-se que o conceito de “falha” é amplo, dependendo fortemente do meio de operação do sistema, da responsabilidade de sua aplicação e do seu desempenho, dentre outros fatores.

A falha por deformação consiste em uma mudança nas dimensões físicas ou da forma de um componente estrutural, de modo que sua função seja perdida ou prejudicada. Esse tipo de falha corresponde geralmente ao aparecimento de uma deflexão muito grande, visto que as tensões excederam o limite de escoamento. Dessa forma é possível realizar a substituição da peça antes que o processo de fratura ocorra. Esse tipo de falha é definido



quando um corpo sofre uma trinca de uma extremidade à outra e é separado em duas ou mais partes (DOWLING, 2007). Portanto, para desenvolver projetos estruturais é importante estar atento às condições ambientais e operacionais as quais a estrutura estará sujeita. Alguns tipos de falha por deformação e fratura estão descritos na Fig. 3.1.

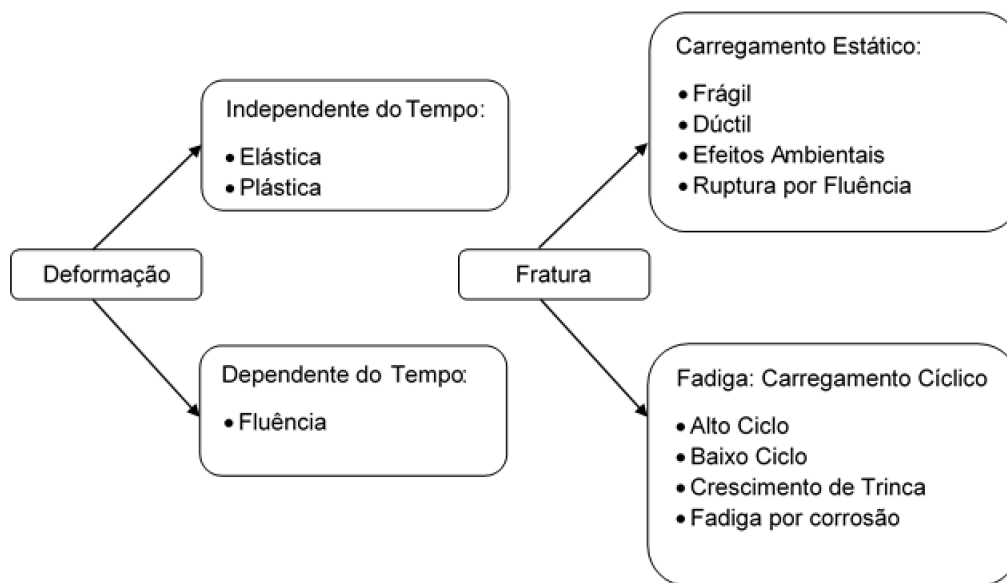


Figura 3.1 – Tipos básicos de falha dos metais (adaptado de Dowling (2007))

O interesse desse capítulo é descrever o fenômeno de fadiga. Esse tipo de falha geralmente ocorre numa condição na qual as tensões flutuam entre níveis, gerando tensões que recebem o nome de variáveis, repetidas, alternantes ou flutuantes. Muitas falhas estáticas geram um aviso visível antes de sua ocorrência. A falha por fadiga, no entanto, se inicia com o aparecimento de uma trinca e sua posterior propagação, ocasionando geralmente uma fratura súbita e catastrófica com ruptura total da peça, o que leva a um grande perigo e risco a passageiros e usuários (BUDYNAS e NISBETT, 2011).

A falha por fadiga ocorre devido à nucleação de uma trinca, geralmente em uma descontinuidade do material ou ponto de concentração de tensões. Após seu surgimento, ela se propaga em torno desse ponto devido à flutuação de tensões inferiores às tensões de escoamento, causando fratura súbita quando atinge um tamanho crítico. Dentre os fatores que aceleram o início e proporcionam uma propagação mais rápida da trinca, estão tensões residuais, altas temperaturas, ciclagem térmica, meios corrosivos e ciclagem em alta frequência. A estrutura fraturada por esse fenômeno apresenta uma forma característica, sendo fácil perceber cada uma das três fases. Devido à sua forma, a fase de propagação da

trinca recebe por vezes o nome de “marcas de praia”. A Fig. 3.2 mostra um esquema simplificado de uma peça que sofreu fratura por fadiga.

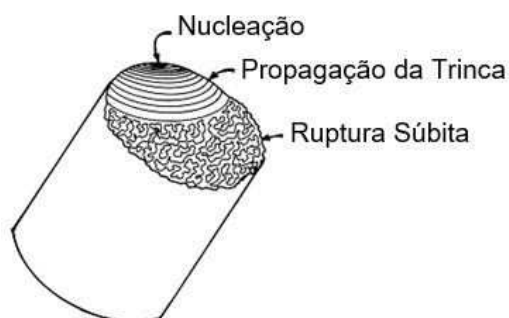


Figura 3.2 – Estrutura sob falha por fadiga e suas características (adaptado de Askeland e Wright (2014))

Existem dois domínios principais de estudo de fadiga: fadiga de baixo ciclo e fadiga de alto ciclo. O primeiro deles (também chamado oligocíclico) consiste na aplicação de tensões flutuantes de maior magnitude, algumas vezes superando os limites elásticos do material. A falha geralmente ocorre entre  $10^4$  e  $10^5$  ciclos, embora alguns autores considerem como fadiga de baixo ciclo somente até  $10^3$ . Sua característica principal é uma deformação plástica seguida da ruptura.

O segundo tipo, também chamado de fadiga policíclica, é o objeto de estudo deste trabalho. Ela ocorre quando o sistema é solicitado por carregamentos que geram tensões sempre inferiores aos limites elásticos do material, fazendo com que a nucleação da trinca ocorra em um número maior de ciclos (entre  $10^5$  e  $10^7$ ). Além disso, nessa abordagem existe a definição de vida finita e vida infinita, sendo que para esse segundo caso, teoricamente não ocorrerá falha por fadiga caso a estrutura esteja sujeita a um certo nível de tensão. Na prática, a vida infinita implica em um número muito elevado de ciclos antes da ruptura, sendo que provavelmente ela não ocorrerá antes de  $10^8$  ciclos (LAMBERT, 2007).

Segundo Budynas e Nisbett (2011), a fadiga ainda não foi completamente caracterizada e não é totalmente compreendida pela ciência e engenharia. Sendo assim, desde a sua descoberta, numerosos critérios foram desenvolvidos de maneira a quantificar esse fenômeno, agrupando-se em três principais categorias:

- a) Métodos de vida sob deformação, onde são utilizados como parâmetros as curvas  $\varepsilon - N$  (deformação – número de ciclos). Esse procedimento pode ser utilizado para estimar resistência à fadiga, porém, em seu desenvolvimento é necessária a composição de várias idealizações de modo que sempre existirão incertezas nos resultados. Devido a esse fator, esse método não será abordado no presente estudo;
- b) Métodos baseados na densidade de energia de deformação. Eles possuem a particularidade de poderem ser aplicados na avaliação da fadiga de uma estrutura sujeita à combinação de carregamentos de diferentes naturezas, como por exemplo, térmicos, fluência, etc. Apesar desse método se adaptar bem à fadiga policíclica, ele também não será abordado nesse trabalho;
- c) Métodos de vida sob tensão, onde são utilizados como parâmetros as curvas  $S - N$  (tensão – número de ciclos, ou curvas de Wöhler) ou outros parâmetros relacionados com o estado de tensão do material como invariantes do tensor tensão e/ou dos desviatórios de tensão. Devido ao fato deles admitirem que o surgimento e a propagação de trincas ocorrem nos pontos da estrutura sujeitos aos maiores níveis de tensão, são os mais apropriados e utilizados na estimativa da vida em fadiga de metais e serão descritos no texto a seguir.

### 3.2 Propriedades de Processos Aleatórios Utilizadas na Análise de Fadiga

Na seção 2.4 do Capítulo II foi apresentada a formulação para o cálculo da resposta em tensão no domínio da frequência de um sistema dinâmico sujeito a um carregamento aleatório estacionário e Gaussiano. Nessa seção, serão apresentadas algumas propriedades utilizadas na análise de fadiga extraídas da densidade espectral de potência em tensão, bem como sua formulação e uma pequena revisão teórica sobre a quantificação da vida em fadiga de uma estrutura.

#### 3.2.1 Momentos espectrais

Um processo estacionário e Gaussiano,  $\phi_s(\omega)$ , é caracterizado por um conjunto de valores chamados momentos espectrais relacionados à PSD (BENDAT e PIERSOL, 2010). Um momento espectral de ordem  $m$ , denominado  $\lambda_m$  é calculado através da Eq. (3.1).

$$\lambda_m = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^m \phi_s(\omega) d\omega \quad (3.1)$$

A informação contida nesses momentos permite a avaliação de algumas características estatísticas de um processo aleatório, Gaussiano e estacionário importantes para a análise do histórico de tensões, conforme mostrado na subseção a seguir.

### 3.2.2 Características de um histórico de tensões

Dentre as propriedades que incluem os momentos espectrais em seu cálculo estão (LAMBERT, 2007): (a) número de passagens por um nível  $b$  em um período  $T$  com inclinação positiva, dada pela Eq. (3.2); (b) número de passagens por zero com inclinação positiva, dada pela Eq. (3.3); (c) número de máximos em um período  $T$ , dada pela Eq. (3.4).

$$N_b = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}} \exp\left(-\frac{b^2}{2\lambda_0}\right) \quad (3.2)$$

$$N_0 = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_0}} \quad (3.3)$$

$$N_{\max} = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_4}{\lambda_2}} \quad (3.4)$$

Pode-se ver um exemplo dessa contagem de passagens por zero e número de máximos em um período na Fig. 3.3, onde está representado um sinal aleatório  $s(t)$  com características  $N_0 = 5$  passagens e  $N_{\max} = 9$ .

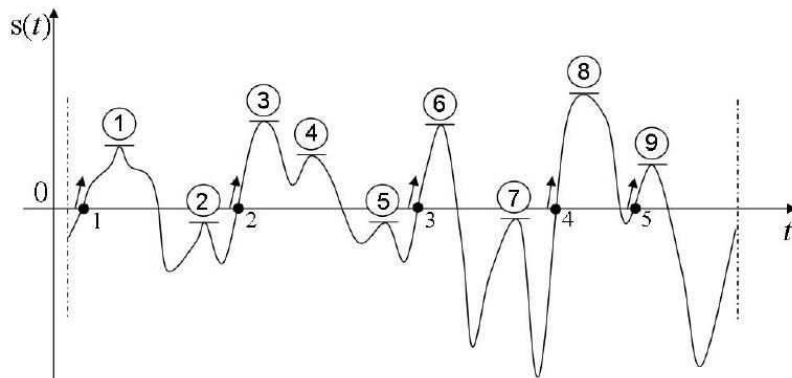


Figura 3.3 – Sinal aleatório  $s(t)$  com a contagem de cinco passagens por zero e nove máximos no período  $T$  (adaptado de Lambert (2007))

### 3.2.3 Largura de banda

A largura de banda é uma medida espectral do sinal. Em outras palavras, um sinal é dito de banda estreita se sua PSD possui valores significativos em um intervalo limitado de frequência. Se o contrário ocorre e o seu espectro apresenta valores significativos em um grande intervalo de frequências, ele é dito de banda larga.

O indicador de largura de banda de um processo é chamado de fator  $\alpha_2$ , dado pela razão entre o número de passagens por zero e o número de máximos. Seu equacionamento é dado na Eq. (3.5). Ressalta-se que esse parâmetro adimensional tende a zero para os processos em banda larga e à unidade para processos em banda estreita.

$$\alpha_2 = \frac{N_0}{N_{\max}} = \frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_0 \lambda_2}} \quad (3.5)$$

## 3.3 Vida em Fadiga Uniaxial

Nessa seção são apresentados alguns critérios de fadiga uniaxiais e seu método de aplicação, uma vez que os critérios multiaxiais de análise de fadiga os têm como base.

### 3.3.1 Resistência à fadiga

O método de estabelecimento da resistência à fadiga de um material exige a realização de vários testes devido à natureza estatística do fenômeno. Motivado por falhas repentinas e catastróficas em eixos de locomotivas e vagões, o engenheiro ferroviário alemão August Wöhler realizou estudos nessa área entre os anos de 1860 e 1870, desenvolvendo um aparato para o ensaio de fadiga rotativa com um espécime do tipo viga. Nesse ensaio, o corpo de prova é solicitado axialmente enquanto rotaciona, gerando um esforço flutuante do tipo tração-compressão nas fibras de sua superfície.

Por meio de seus estudos, Wöhler chegou à conclusão de que a fadiga ocorre devido à nucleação e crescimento de uma trinca proveniente de defeitos superficiais, até que a estrutura não resiste mais, e falha à uma tensão inferior aos seus limites elásticos. Esse resultado foi de grande expressão internacional na época, sendo publicado em Paris no ano de 1867. Além disso, e não menos importante, ele elaborou gráficos que relacionam a tensão aplicada com o número de ciclos que a peça suporta, desenvolvendo os chamados diagramas  $S - N$  ou simplesmente curvas de Wöhler.

Os diagramas  $S - N$  podem ser traçados em escalas *loglog* ou *semilog*, sendo geralmente adotado o segundo caso para que o comportamento de flexão da curva seja visualizado. A ordenada dessa curva representa a resistência à fadiga do material. A Fig. 3.4 apresenta um exemplo de curva de Wöhler, obtida para um aço UNS G41300.

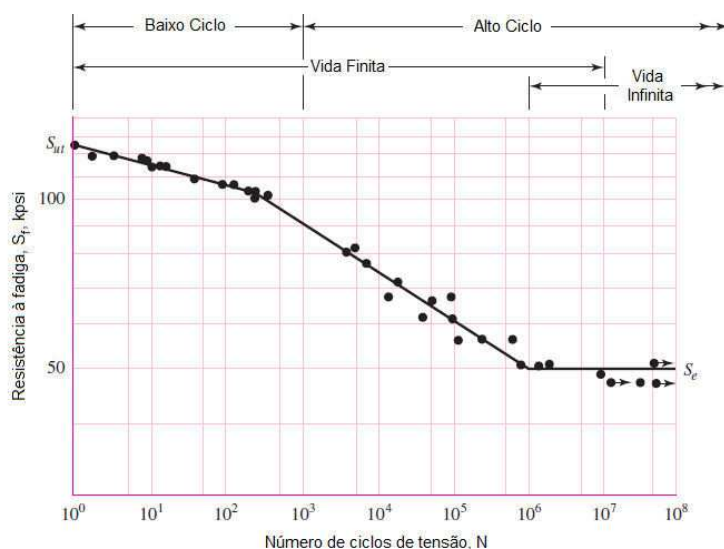


Figura 3.4 – Curva  $S - N$  para um aço UNS G41300, com vida infinita (adaptado de Budynas e Nisbett (2011))

### 3.3.2 Fatores modificadores do limite de resistência à fadiga

Conforme mencionado anteriormente, os gráficos presentes na literatura são obtidos para ensaios em uma viga sujeita a esforços flutuantes de flexão, realizado em laboratório em condições controladas de temperatura, umidade e pressão. Devido à natureza da fadiga, ao se utilizar corpos com outras geometrias e tipos diferentes de carregamento e condições de operação, os valores do limite de resistência à fadiga sofrem alterações, podendo ser corrigidos por meio de fatores modificadores na forma de coeficientes aplicados diretamente ao valor extraído da curva. Neste caso, o limite de resistência à fadiga pode ser corrigido da seguinte forma (MARIN, 1962):

$$S_e = k_a k_b k_c k_d k_e k_f S'_e \quad (3.6)$$

onde  $S_e$  é o limite de resistência modificado,  $S'_e$  é o obtido através do ensaio de viga rotativa presente do diagrama de Wöhler e os fatores modificadores são (BUDYNAS e NISBETT, 2011):

- a) Fator de superfície  $k_a$ , obtido dependendo do tipo de acabamento superficial a qual a peça foi submetida durante seu processo de fabricação. Os fatores para estimativa desse parâmetro são obtidos em tabelas na literatura;
- b) Fator de tamanho  $k_b$ , usado para corrigir as dimensões da estrutura utilizada, como por exemplo, vigas com diâmetro ou seção transversal diferentes do corpo de prova. Seus valores são tabelados em função de um diâmetro equivalente;
- c) Fator de carregamento  $k_c$ , aplicado quando o tipo de solicitação é diferente da utilizada no ensaio. Seus valores típicos são 1 para flexão, 0,85 para esforço axial e 0,59 para torção;
- d) Fator de temperatura  $k_d$ , utilizado para correção gerada pela diferença de temperatura entre o ensaio e a aplicação real da peça. Seus valores são calculados por equações presentes na literatura;
- e) Fator de confiabilidade  $k_e$ , leva em conta o espalhamento de dados dos ensaios. Conforme a responsabilidade da aplicação e o consequente aumento da confiança, os valores tabelados desse coeficiente decrescem. Por exemplo, para 50% de confiança seu valor é 1 e para 99% passa a ser 0,814.

- f) Fator de efeitos diversos  $k_f$ , inserido quando ocorre redução do limite de resistência devido a fatores tais como corrosão, chapeamento eletrolítico, pulverização de metal, frequência cíclica, microabrasão, interação estrutural, dentre outros.

### 3.3.3 Tensões flutuantes

Se a tensão gerada na peça por meio dos esforços aplicados possui média nula, a aplicação de um critério de fadiga se dá diretamente pela comparação desta com o valor obtido na Eq. (3.6). Por outro lado, na maioria dos casos, a tensão presente na estrutura não apresenta média nula, estando presentes as chamadas tensões flutuantes.

Nesse caso foram estabelecidos alguns critérios que levam em conta esses valores de média não nula. Os principais e mais aceitos na literatura são os critérios de falha de Gerber (1874), Goodman (1890) e Sodeberg (1930). Todos eles geram superfícies e linhas delimitando uma zona ou banda na qual a peça resiste à fadiga. Além de sua representação gráfica, seu valor também pode ser estimado por meio de expressões analíticas. A Eq. (3.7) corresponde ao critério da linha de Gerber, a Eq. (3.8) ao critério da linha de Goodman e a Eq. (3.9) à linha de Sodeberg, todos eles já contendo a aplicação de um coeficiente de segurança,  $n$ .

$$\frac{n\sigma_a}{S_e} + \left( \frac{n\sigma_m}{S_{ut}} \right)^2 = 1 \quad (3.7)$$

$$\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_{ut}} = \frac{1}{n} \quad (3.8)$$

$$\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_y} = \frac{1}{n} \quad (3.9)$$

onde  $\sigma_a$  é o valor da tensão alternante,  $\sigma_m$  é o valor médio da tensão,  $S_{ut}$  é o limite de resistência mecânica e  $S_y$  é o limite de escoamento do material.



### 3.3.4 Dano cumulativo de fadiga

Na maioria dos casos onde uma estrutura está sujeita a esforços que causam fadiga, o carregamento não é distribuído uniformemente ao longo do tempo, apresentando diversos níveis. Neste caso, o dano total  $D_i$ , produzido por  $n_i$  ciclos de amplitude  $\sigma_{ai}$  é dado pela seguinte lei proposta por Miner (1945).

$$D_i = \frac{n_i}{N_i} \quad (3.10)$$

onde  $N_i$  é o número de ciclos onde a ruptura ocorreria sob uma tensão  $\sigma_{ai}$ .

Portanto, a aplicação de  $k$  carregamentos com diferentes níveis de tensão gera um dano total  $D$ , estimado pela soma dos coeficientes  $D_i$ . Essa formulação foi inicialmente proposta por Palmgren (1924) e a combinação dela com a lei de Miner permitiu formular a seguinte lei de dano cumulativo de fadiga, conhecida como lei de Palmgren-Miner:

$$D = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{N_i} \quad (3.11)$$

A lei de Palmgren-Miner é de fácil aplicação quando se conhece o histórico de tensões no domínio do tempo. Entretanto, ela possui o inconveniente de não levar em conta a ordem de aplicação dos carregamentos. Existem alguns outros métodos que consideram essa ordem, mas para estudos considerando carregamentos aleatórios, eles perdem eficácia. Nestes casos, podem ser aplicados métodos de contagem de ciclos.

### 3.3.5 Método de contagem de ciclos

Existem vários métodos para se realizar a contagem de ciclos de tensão na análise de fadiga descritos pela ASTM (1985). A grande parte desses métodos admite que somente os pontos de tensão máximos e mínimos afetam de forma significativa a vida em fadiga da

estrutura. Além disso, para uma boa aplicação é altamente recomendada a atenuação de sinais de ruído nas medidas provenientes da aquisição dos dados experimentais por meio de filtros, a fim de se diminuir os erros e incertezas presentes nos testes.

Dentre os métodos clássicos e mais utilizados está o método de contagem *Rainflow* (alguns autores traduzem para o português como “método de fluxo de chuva”), que é largamente o mais aplicado no domínio da fadiga. Ele consiste na transformação de um conjunto de tensões flutuantes em um conjunto simplificado de dados de inversão de tensões. Seu algoritmo foi apresentado primeiramente por Matsuishi e Endo (1968) e consiste nos seguintes passos, descritos de maneira simplificada e fazendo alusão ao escoamento de água em um telhado (citado pelos autores como um telhado de um Pagode, famoso tipo de construção de templos japoneses, por curiosidade, representado na Fig. 3.5):

- a) Reduzir os dados do histórico de tensão para uma forma sequencial de picos e vales de tração/compressão;
- b) Girar o gráfico de 90° no sentido horário, deixando os tempos menores na borda superior;
- c) Considerar o gráfico como uma “estrutura rígida”, como um telhado;
- d) Cada pico é considerado uma fonte de água, que escorre pelo telhado;
- e) Realizar a contagem dos meio-ciclos de tração através das terminações do escoamento quando o fluxo chega ao final do histórico, se junta com a água de um pico anterior ou termina de maneira oposta a um ciclo de maior magnitude;
- f) Repetir o procedimento anterior para os ciclos de compressão;
- g) Admitir valores de magnitude para as tensões medidas igual a diferença entre o valor de início e de término;
- h) Emparelhar ciclos de mesma magnitude e realizar a soma dos efeitos.



Figura 3.5 – Templo japonês (Pagode) citado no método de contagem *Rainflow*

A título de exemplo, através de uma rotina desenvolvida em linguagem MatLab® foi realizada a contagem *Rainflow* para o histórico de tensões mostrado na Fig. 3.6. Para essa contagem, os níveis de tensão foram divididos em treze intervalos e contados conforme o método apresentado anteriormente. A identificação de cada intervalo, os valores de suas tensões e os ciclos foram agrupados na Tab. 3.1 (o número total de ciclos foi arredondado para cima). Para uma melhor visualização foi gerado um gráfico do tipo histograma mostrando a distribuição dos valores de cada intervalo, conforme visto na Fig. 3.7.

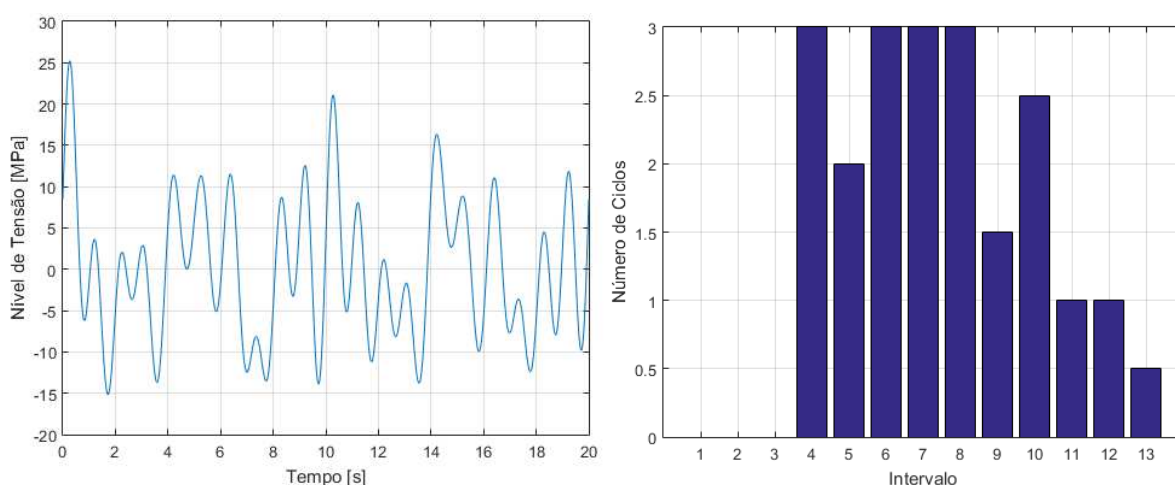


Figura 3.6 – Histórico de tensões e histograma da contagem de ciclos.

Tabela 3.1 – Denominação dos intervalos e número de ciclos da contagem Rainflow

Intervalo	Nível Inferior [MPa]	Nível Superior [MPa]	Número de Ciclos
1	0,000	1,009	0,0
2	1,009	2,018	0,0
3	2,018	4,035	0,0
4	4,035	6,053	3,0
5	6,053	8,070	2,0
6	8,070	12,110	3,0
7	12,110	16,140	3,0
8	16,140	20,180	3,0
9	20,180	24,210	1,5
10	24,210	28,250	2,5
11	28,250	32,280	1,0
12	32,280	36,320	1,0
13	36,320	40,350	0,5
<b>TOTAL</b>	-	-	21

Após a aplicação de uma análise computacional como essa, tendo em mãos os valores de cada um dos níveis de tensão e número de aparições é possível aplicar uma lei de acúmulo para estimar a vida do sistema. Observa-se na atualidade uma gama enorme de aplicações que utilizam a contagem *Rainflow* aliada com a lei de acúmulo de Palmgren-Miner como forma de análise uniaxial de fadiga.

### 3.4 Vida em Fadiga Multiaxial

#### 3.4.1 Comparação entre critérios uniaxiais e multiaxiais

Na maior parte das aplicações de engenharia, o estado gerado por excitações de natureza cíclica é complexo como, por exemplo, tensões biaxiais causadas por um fluido num tubo, tensões combinadas de torção e flexão em um eixo e flexão de placas e cascas em mais de um eixo (DOWNLING, 2007). Reforçando o que foi citado anteriormente, não há como estudar os critérios de fadiga multiaxiais sem antes ter noção de como são aplicados os critérios uniaxiais.

A diferença, no entanto, está nas tensões utilizadas para comparação com a propriedade de resistência do material. No estado uniaxial se utilizava diretamente a tensão  $\sigma_a$  para verificação da vida em fadiga. Para a fadiga multiaxial, serão usadas tensões equivalentes como formas de comparação como, por exemplo, as tensões de Tresca, de Von Mises, a tensão principal máxima, os invariantes de tensão, os planos críticos, dentre outros. Esses valores são conhecidos como variáveis de contagem e permitem a aplicação de uma técnica de contagem de ciclos e aplicação de lei de acúmulo de dano.

Os limites de resistência extraídos da curva de Wöhler também não são mais aplicáveis para esse tipo de análise. Nesse caso, existem outros limites de resistência para diferentes modos de solitação, obtidos experimentalmente para cada material. É importante salientar que esses valores não são de fácil acesso devido às inúmeras possibilidades de ensaios e condições de carregamento. Além disso, eles carregam erros e incertezas que se propagam durante os testes, o que será tratado posteriormente neste trabalho. Devido a esses fatores, um critério de fadiga utilizando o menor número de limites de resistência é desejado. Os principais são:

- a) Limite de fadiga em torção alternada simétrica  $t_{-1}$ ;
- b) Limite de fadiga em tração alternada simétrica  $f_{-1}$ ;
- c) Limite de fadiga em torção repetida  $t_0$ ;
- d) Limite de fadiga em tração repetida  $f_0$ .

A maior parte dos critérios de fadiga multiaxial consiste na estimativa de um coeficiente  $D$ , que é função do estado de tensão, tensão equivalente utilizada e dos limites de resistência. Esse valor é então comparado com um valor crítico  $D_c$  (geralmente um valor unitário) e a condição de ruptura da peça pode ser determinada da seguinte maneira:

- $D = q(\sigma, f_{-1}, f_0, t_{-1}, \dots) \geq D_c \rightarrow \text{ruptura}$
- $D = q(\sigma, f_{-1}, f_0, t_{-1}, \dots) \leq D_c \rightarrow \text{não ruptura}$

A Fig. 3.8 apresenta um esquema comparativo entre os critérios de fadiga quanto ao histórico de tensões.

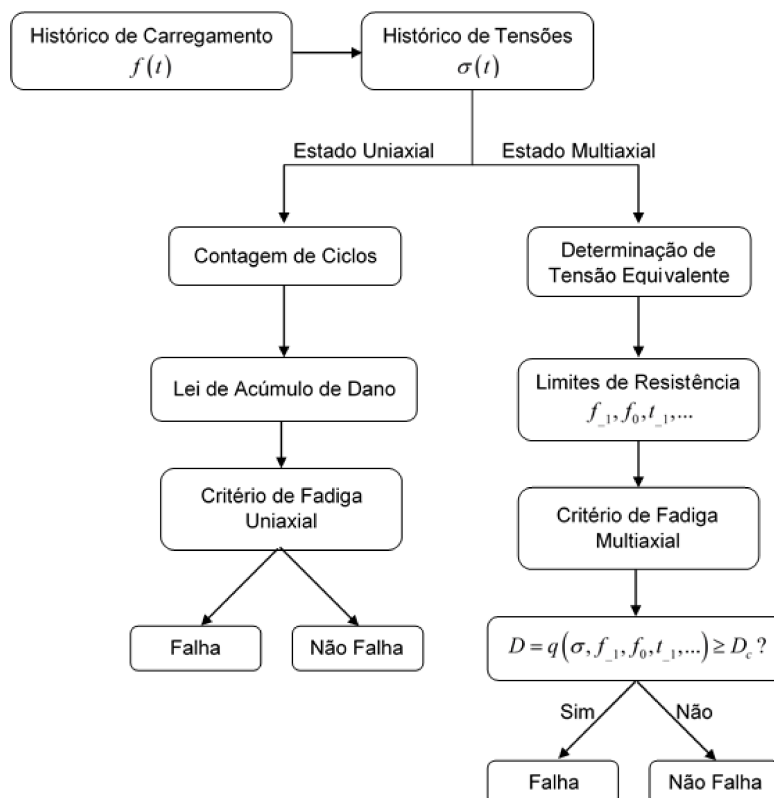


Figura 3.8 – Comparação entre a aplicação dos critérios de fadiga uniaxial e multiaxial (adaptado de Lambert (2007))

### 3.4.2 Critérios de fadiga multiaxiais

Segundo Lambert (2007), existem quatro tipos principais de abordagens para os critérios de fadiga multiaxiais:

- a) Critérios empíricos, que geralmente utilizam como tensão equivalente as de Von Mises ou Tresca, obtidas através de um grande número de ensaios de fadiga. Esses critérios podem gerar boas previsões de vida em fadiga, porém, somente para as condições de carregamento para os quais foram elaborados. Considerando a complexidade dos carregamentos aleatórios que serão utilizados como excitação no modelo, esses métodos se mostraram inviáveis para essa aplicação.
- b) Critérios de energia, que se baseiam na energia transmitida durante a excitação do sistema, englobando uma parte de energia elástica e considerando dissipações na forma de deformação e calor. Esses critérios são mais bem adaptados à fadiga de baixo ciclo devido ao nível de deformação plástica envolvido. Dessa forma, como nesse estudo será analisado o domínio de alto ciclo, esses critérios não são aplicáveis pois a dissipação de energia passa a ocorrer também em nível microscópico.
- c) Critérios do tipo plano crítico, que adotam como planos críticos os pontos onde a ocorrência de fadiga é mais provável, decompondo o tensor tensão em sua direção e gerando um trajeto de carregamento que deve ser analisado para determinar o coeficiente de comparação. Esse tipo de critério é bem adaptado quando o carregamento é proporcional como, por exemplo, quando ocorre flexão e torção em fase.
- d) Critérios de abordagem global utilizam o primeiro invariante  $I_1$  do tensor tensão ou o segundo invariante  $J_2$  do tensor desvio de tensão como variável de comparação. Esses critérios são os mais bem adaptados para o caso de carregamentos não-proporcionais ou fora de fase.

O terceiro grupo de critérios é o mais utilizado na atualidade, sendo os principais o critério de Dang Van (1993), Papadopoulos (1995) e Matake (1977). Os critérios de Sines (1959) e Crossland (1956) se encaixam na quarta categoria com algumas características da terceira, adotando o plano octaédrico como plano de cisalhamento máximo além de considerar em sua formulação a pressão hidrostática.

Weber (1999) realizou um estudo comparativo entre os principais critérios do tipo plano crítico e globais presentes na literatura. Para cada um desses critérios ele realizou 233 ensaios de fadiga multiaxiais avaliando os resultados por meio da inclusão em diferentes intervalos de precisão: entre -40% e +40% de variação, entre -2% e +2%, -40% e +2%, -2% e +40%, nomeando cada um de acordo com seu tamanho. A tabela 3.2 contém os valores obtidos através desse experimento, classificados de maneira decrescente em função dos valores da categoria “justo”.

Tabela 3.2 – Resultados dos ensaios de validação dos critérios de fadiga multiaxiais obtidos por Weber (1999)

Critério	Nº de ensaios	Número de ensaios no intervalo referido			
		[-40%, +40%]	[-2%, +2%]	[-40%, +2%]	[-2%, +40%]
			“justo”	“não-conservativo”	“conservativo”
<b>Fogue</b>	233	232	52 (22,3%)	90 (38,9%)	81 (34,8%)
<b>Sines</b>	233	231	47 (20,2%)	99 (42,5%)	85 (36,5%)
<b>Froustey</b>	233	224	46 (19,7%)	73 (31,3%)	105 (45,1%)
<b>Dang Van</b>	233	232	45 (19,3%)	115 (49,4%)	72 (30,9%)
<b>Papadopoulos</b>	233	232	45 (19,3%)	130 (55,8%)	57 (24,5%)
<b>Deperrois</b>	233	232	44 (18,9%)	100 (42,9%)	88 (37,8%)
<b>Robert</b>	233	232	44 (18,9%)	92 (39,5%)	96 (41,2%)
<b>Matake</b>	233	227	40 (17,2%)	96 (41,2%)	91 (39,1%)
<b>Crossland</b>	233	230	28 (12,0%)	180 (77,3%)	22 (9,4%)

Através da análise dos resultados obtidos por Weber, adotando como fator de comparação o número de resultados contidos no intervalo “justo”, nota-se que os dois melhores resultados foram obtidos pelos critérios de abordagem global de Fogue e Sines, nessa ordem. O primeiro critério necessita de utilização de três limites de resistência em fadiga multiaxial, enquanto que o segundo possui uma formulação mais simples, utilizando somente um plano de avaliação, apenas dois limites de fadiga e, dependendo do carregamento aplicado, a utilização de somente uma propriedade do material. Devido à sua simplicidade o critério de Sines será, então, adotado como critério de fadiga multiaxial para aplicação no modelo de elementos finitos desenvolvido no Capítulo II.

### 3.5 Critério de Sines

Sines (1959) propôs um critério de fadiga baseado no segundo invariante do tensor desvio de tensão ( $J_2$ ), onde é adotado como plano de tensões máximas o plano octaédrico. Sua formulação se baseia no cálculo de um coeficiente  $D_{\text{Sines}}$ , que deve ser inferior à unidade para que o sistema não falhe. Além de  $J_2$ , é levado em consideração também a média da pressão hidrostática  $p_{\text{hid}}(t)$ . O critério proposto utiliza somente duas propriedades de resistência à fadiga multiaxial:  $t_{-1}$  e  $f_{-1}$ . Sua formulação é mostrada na Eq. (3.12).

$$D_{\text{Sines}} = \frac{\sqrt{J_{2,a}} + \alpha E[p_{\text{hid}}(t)]}{t_{-1}} \quad (3.12)$$

onde  $\sqrt{J_{2,a}}$  é uma estimativa da raiz quadrada do segundo invariante do tensor desvio de tensão,  $\alpha = \frac{3t_{-1}(S_{ut} + f_{-1})}{f_{-1}S_{ut}} - \sqrt{6}$ ,  $E[p_{\text{hid}}(t)] = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$  e  $S_{ut}$  é o limite de ruptura.

#### 3.5.1 Estimativa da raiz quadrada do segundo invariante do tensor desvio

A definição clássica do segundo invariante do tensor desvio de tensão é calculada classicamente como segue (BORESI et al., 2011).

$$\sqrt{J_2(t)} = \sqrt{\frac{1}{2} \mathbf{d}(t) \cdot \mathbf{d}(t)} \quad (3.13)$$

onde  $\mathbf{d}(t)$  é o tensor desvio de tensão. Além disso, sendo o carregamento proporcional e em fase, pode-se realizar a estimativa do segundo invariante através das componentes do tensor tensão de maneira direta:



$$\sqrt{J_{2,a}} = \sqrt{\frac{1}{6} \left[ (\sigma_{x,a} - \sigma_{y,a})^2 + (\sigma_{y,a} - \sigma_{z,a})^2 + (\sigma_{z,a} - \sigma_{x,a})^2 + 6(\tau_{xy,a} + \tau_{yz,a} + \tau_{xz,a})^2 \right]} \quad (3.14)$$

onde os  $\sigma_{i,a}$  e  $\tau_{ij,a}$  são os valores estimados para as tensões normais e cisalhantes.

De modo a simplificar o equacionamento, os termos presentes na raiz quadrada da Eq. (3.14) são decompostos num espaço euclidiano reduzido de cinco dimensões (LAMBERT, PAGNACCO e KHALIJ, 2010),  $\mathbf{D}(t) = [D_1(t), D_2(t), D_3(t), D_4(t), D_5(t)]$ , onde:

$$D_1(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \sigma_x(t) - \frac{1}{3}\sigma_y(t) - \frac{1}{3}\sigma_z(t) \right) \quad (3.15.a)$$

$$D_2(t) = \frac{1}{2}\sigma_y(t) - \frac{1}{2}\sigma_z(t) \quad (3.15.b)$$

$$D_3(t) = \tau_{xy}(t) \quad (3.15.c)$$

$$D_4(t) = \tau_{yz}(t) \quad (3.15.d)$$

$$D_5(t) = \tau_{zx}(t) \quad (3.15.e)$$

Dessa forma a Eq. (3.13) pode ser reescrita como segue:

$$\sqrt{J_2(t)} = \sqrt{D_1^2(t) + D_2^2(t) + D_3^2(t) + D_4^2(t) + D_5^2(t)} \quad (3.16)$$

Da mesma maneira que anteriormente, para um carregamento proporcional e em fase, chega-se à seguinte relação:

$$\sqrt{J_{2,a}} = \sqrt{D_{1,a}^2 + D_{2,a}^2 + D_{3,a}^2 + D_{4,a}^2 + D_{5,a}^2} \quad (3.17)$$

Para o caso de um carregamento não proporcional ou fora de fase, a Eq. (3.17) não é mais aplicável, sendo necessário utilizar outros métodos para a estimação do  $\sqrt{J_{2,a}}$ . Neste contexto, o método de Bin Li e Freitas (2002) considera uma elipse de semi-eixos  $R_1$  e  $R_2$  contendo o trajeto do carregamento circunscrito. Dessa forma é incluído no cálculo os efeitos da não-proporcionalidade. Segundo essa teoria, o valor de  $\sqrt{J_{2,a}}$  é dado pela Eq. (3.18). Os caminhos de um carregamento proporcional e outro não proporcional e a elipse mínima circunscrita são apresentados na Fig. 3.9.

$$\sqrt{J_{2,a}} = \sqrt{R_1^2 + R_2^2} \quad (3.18)$$

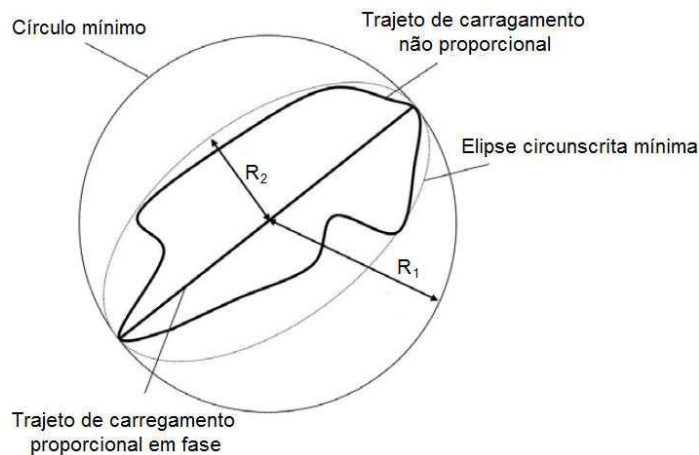


Figura 3.9 – Trajeto dos carregamentos e elipse mínima circunscritos segundo a teoria de Bin Li et al. (adaptado de Lambert (2007))

Ainda assim, esse método não é aplicável a esse caso da maneira como foi formulado, pois engloba um espaço bidimensional, sendo que foi adotado um espaço em cinco dimensões na formulação da Eq. (3.17). Neste contexto, Khalij, Pagnacco e Lambert (2010) propuseram uma teoria que inclui o trajeto do carregamento através do uso de uma casca prismática, em que os caminhos das tensões geradas por carregamentos não proporcionais podem ser melhor representados e levados em conta na obtenção de  $\sqrt{J_{2,a}}$ . Vale ressaltar que essa teoria de estimativa foi utilizada com sucesso por de Lima et al. (2014), Rosa e de Lima (2015) e Rosa e de Lima (2016).

Esse método permite finalmente a aplicação da Eq. (3.16) para uma estrutura sujeita a carregamentos não proporcionais, podendo ser reescrita em termo das dimensões da casca prismática que contém o trajeto do carregamento:

$$\sqrt{J_{2,a}} = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 + R_4^2 + R_5^2} \quad (3.19)$$

### 3.5.2 Adaptação do critério de Sines para carregamentos aleatórios

A aplicação de carregamentos aleatórios na estrutura (e também na presença de incertezas como será tratado no capítulo posterior) implica não mais na estimativa direta do coeficiente de Sines e sim na estimativa de sua esperança matemática. Neste caso, o índice de fadiga pode ser estimado pela seguinte relação:

$$E[D_{\text{Sines}}] = \frac{E[\sqrt{J_{2,a}}] + \alpha E[p_{hid}(t)]}{t_{-1}} \quad (3.20)$$

Por exemplo, o campo de tensões gerado por um carregamento aleatório do tipo ruído branco apresenta média zero e densidade espectral de potência igual a uma constante correspondente ao seu nível de energia (BENDAT e PIERSOL, 2010). Como esse é o tipo de carregamento a ser considerado neste trabalho, o problema então recai no conhecimento da propriedade  $t_{-1}$  e na estimativa de  $E[\sqrt{J_{2,a}}]$ , sendo a pressão hidrostática nula. Neste caso, a Eq. (3.20) pode ser reescrita da forma:

$$E[D_{\text{Sines}}] = \frac{E[\sqrt{J_{2,a}}]}{t_{-1}} \quad (3.21)$$

$$\text{onde: } E[\sqrt{J_{2,a}}] \approx \sqrt{E[R_1^2] + E[R_2^2] + E[R_3^2] + E[R_4^2] + E[R_5^2]} \quad (3.22)$$

Na presença do carregamento aleatório, os eixos  $R_i$  do prisma no espaço de cinco dimensões devem ser determinados estatisticamente conforme as seguintes etapas (LAMBERT, PAGNACCO E KHALIJ, 2010):

- a)  $D_i'(t)$  uma das componentes do vetor  $\mathbf{D}'(t)$ , linearmente associado a  $\mathbf{D}(t)$  através da relação  $\mathbf{D}'(t) = \mathbf{P}_D \mathbf{D}(t)$ ;
- b)  $\mathbf{P}_D$  obtido através dos auto vetores da matriz de covariância  $V[\mathbf{D}(t)]$ ;
- c)  $X_i(t) = D_i'(t) - E[D_i']$  um processo aleatório Gaussiano de média zero e momentos espectrais  $\lambda_{m,i}(D_i')$ ;
- d)  $N(\alpha_0, 0, T)$  o número de passagens pelo nível  $\alpha_0$  no intervalo  $[0, T]$ , conforme a Eq. (3.2);
- e)  $T_f(\alpha_0)$  o tempo do primeiro cruzamento no nível  $\alpha_0$ ;
- f)  $\mathfrak{R}_i = \max_{0 \leq t \leq T} X_i(t)$  o valor máximo alcançado por  $X_i$  no intervalo  $[0, T]$ .

A probabilidade de que o valor máximo no intervalo  $[0, T]$  não exceda o nível  $\alpha_0$  pode ser calculado pela seguinte expressão:

$$P[\mathfrak{R}_i \leq \alpha_0] = P[T_f(\alpha_0) > T] = P[N(\alpha_0, 0, T) = 0] \quad (3.23)$$

Utilizando as definições acima e a Eq. (3.2) formula-se a Eq. (3.24):

$$E[N(\alpha_0, 0, T)] = \frac{T}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda_{2,i}}{\lambda_{0,i}}} \exp\left(-\frac{\alpha_0^2}{2\lambda_{0,i}}\right) = N_{0,i} \exp\left(-\frac{\alpha_0^2}{2\lambda_{0,i}}\right) \quad (3.24)$$

onde  $N_{0,i}$  é o número de cruzamento por zero com inclinação positiva, conforme a Eq. (3.3).

Busca-se agora uma função de distribuição de probabilidade  $P_{R_i}(\alpha_0)$  que se adapte à forma apresentada na Eq. (3.24). Preumont (1985) propôs a distribuição de Gumbel:

$$P_{R_i}(\alpha_0) = \exp\left(-\exp\left(\frac{\mu - \alpha_0}{\beta}\right)\right) \quad (3.25)$$

Essa distribuição supõe que o cruzamento por um dado nível ocorre segundo um processo Markoviano, ou seja, os estados anteriores são irrelevantes para a predição dos estados seguintes, desde que o estado atual seja conhecido. O modo  $\mu_i$  e a dispersão  $\beta_i$  são calculados pelas relações (3.26), onde  $\kappa_u$  e  $\kappa_a$  são parâmetros de largura de banda obtidos pelas Eqs. (3.27), função do fator irregularidade  $\delta_i$ , proveniente da Eq. (3.28).

$$\mu_i = \sqrt{2\ln(\kappa_u N_{0,i})} \quad (3.26.a)$$

$$\beta_i = \frac{1}{\sqrt{2\ln(\kappa_a N_{0,i})}} \quad (3.26.b)$$

$$\kappa_u = \begin{cases} 1,5(1 - e^{1,8\delta_i}), & \delta_i < 0,5 \\ 0,94 & , \delta_i \geq 0,5 \end{cases} \quad (3.27.a)$$

$$\kappa_a = \begin{cases} 7\delta_i, & \delta_i < 0,5 \\ 4,05, & \delta_i \geq 0,5 \end{cases} \quad (3.27.b)$$

$$\delta_i = \left(1 - \frac{\lambda_{1,i}^2}{\lambda_{0,i}\lambda_{2,i}}\right)^{1/2} \quad (3.28)$$

Através das propriedades da distribuição de Gumbel, é possível formular expressões para a média e variância de  $R_i$ , conforme as expressões seguintes, sendo  $\gamma \approx 0,57721$  a constante de Euler-Mascheroni.

$$E[\mathfrak{R}_i] = \sqrt{\lambda_{0,i}} (\mu_i + \gamma\beta_i) \quad (3.29.a)$$

$$V[\mathfrak{R}_i] = \lambda_{0,i} \frac{(\beta_i\pi)^2}{6} \quad (3.29.b)$$

Na sequência, é feita a caracterização estatística de  $\sqrt{\mathfrak{J}_{2,a}} = \sqrt{\mathfrak{X}_1^2 + \mathfrak{X}_2^2 + \mathfrak{X}_3^2 + \mathfrak{X}_4^2 + \mathfrak{X}_5^2}$  através das propriedades estatísticas dos semieixos  $\mathfrak{X}_i$ , considerando que cada uma delas não apresenta correlação. Primeiramente, estimam-se as propriedades de  $\left(\sqrt{\mathfrak{J}_{2,a}}\right)^2$ , segundo as Eqs. (3.30).

$$E\left[\mathfrak{J}_{2,a}\right] = E\left[\mathfrak{X}_1^2\right] + E\left[\mathfrak{X}_2^2\right] + E\left[\mathfrak{X}_3^2\right] + E\left[\mathfrak{X}_4^2\right] + E\left[\mathfrak{X}_5^2\right] \quad (3.30.a)$$

$$V\left[\mathfrak{J}_{2,a}\right] = V\left[\mathfrak{X}_1^2\right] + V\left[\mathfrak{X}_2^2\right] + V\left[\mathfrak{X}_3^2\right] + V\left[\mathfrak{X}_4^2\right] + V\left[\mathfrak{X}_5^2\right] \quad (3.30.b)$$

Através das definições de variância e da não correlação entre as variáveis aleatórias é possível escrever as seguintes relações:

$$E\left[\mathfrak{X}_i^2\right] = E\left[\mathfrak{X}_i\right]^2 + V\left[\mathfrak{X}_i\right] \quad (3.31.a)$$

$$V\left[\mathfrak{X}_i^2\right] = E\left[\left(\mathfrak{X}_i^2 - E\left[\mathfrak{X}_i^2\right]\right)^2\right] = E\left[\mathfrak{X}_i^4\right] - E\left[\mathfrak{X}_i^2\right]^2 \quad (3.31.b)$$

Das equações acima, somente  $E\left[\mathfrak{X}_i^4\right]$  é uma incógnita. Da definição das propriedades estatísticas de variáveis aleatórias vem a Eq. (3.32).

$$\begin{aligned} E\left[\mathfrak{X}_i^4\right] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{X}_i^4 dP_{\mathfrak{X}_i} \\ &= 4E\left[\mathfrak{X}_i\right]^2 \times V\left[\mathfrak{X}_i\right] + \frac{22}{5}V\left[\mathfrak{X}_i\right]^2 + 48\zeta_3 \frac{\sqrt{6}}{\pi^3} E\left[\mathfrak{X}_i\right] \times V\left[\mathfrak{X}_i\right]^{3/2} \end{aligned} \quad (3.32)$$

onde  $\zeta_3 = 1,20206$  é a constante de Apéry.

Supondo que a variável aleatória  $\sqrt{\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}}$ , por ser uma combinação das  $\mathfrak{R}_i$ , também apresenta uma distribuição de probabilidades que segue a lei de Gumbel, pode-se escrever a expressão de maneira similar à (3.32):

$$\begin{aligned} E[\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}^2] &= 4E[\sqrt{\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}}]^2 V[\sqrt{\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}}] + \frac{22}{5} V[\sqrt{\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}}]^2 \\ &\quad + 48\zeta_3 \frac{\sqrt{6}}{\pi^3} E[\sqrt{\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}}] V[\sqrt{\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}}]^{3/2} \end{aligned} \quad (3.33)$$

Da mesma forma, as expressões de média e variância são escritas da forma:

$$E[\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}^2] = E[\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}]^2 - V[\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}] \quad (3.34.a)$$

$$V[\sqrt{\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}}] = E[\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}] - E[\sqrt{\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}}]^2 \quad (3.34.b)$$

Substituindo as Eqs. (3.34) na Eq. (3.33) formula-se a Eq. (3.35), que possui como única incógnita o valor  $E[\sqrt{\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}}]$ .

$$\begin{aligned} E[\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}]^2 + V[\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}] - 4E[\sqrt{\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}}]^2 \left( E[\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}] - E[\sqrt{\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}}]^2 \right) \\ - \frac{22}{5} \left( E[\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}] - E[\sqrt{\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}}]^2 \right)^2 \\ - 48\zeta_3 \frac{\sqrt{6}}{\pi^3} E[\sqrt{\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}}] \left( E[\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}] - E[\sqrt{\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}}]^2 \right)^{3/2} = 0 \end{aligned} \quad (3.35)$$

A solução da Eq. (3.35) através do método de Newton-Raphson permite estimar o valor de  $E[\sqrt{\tilde{\mathfrak{J}}_{2,a}}]$ , caracterizando o segundo invariante do tensor desvio obtido por um processo aleatório. Com esse valor calculado, pode-se aplicá-lo à Eq. (3.20) ou (3.21) de modo a estimar a esperança matemática do coeficiente de Sines.

## **CAPÍTULO IV**

### **MODELAGEM DE SISTEMAS ESTOCÁSTICOS PARA A ANÁLISE DE FADIGA**

Neste capítulo, será apresentada a modelagem por elementos finitos estocásticos de placas retangulares finas para a análise de fadiga. Neste caso, as incertezas são introduzidas nos parâmetros de concepção da estrutura que influem significativamente no índice de fadiga multiaxial empregado neste trabalho. Através da expansão de Karhunen-Loève, as matrizes estocásticas de massa e rigidez do sistema são obtidas através das funções de interpolação do modelo de elementos finitos apresentado no Capítulo II.

#### **4.1 Introdução**

Uma estrutura é caracterizada por suas dimensões físicas, material (propriedades mecânicas) e condições de operação (carregamento, condições de contorno). Esses valores devem ser obtidos por meio de medidas e/ou estimativas através do emprego de instrumentos metrológicos (régua, paquímetro, micrômetro, etc.), ou através de ensaios mecânicos. Portanto, é de se esperar que devido a fatores como variação de temperatura, processo de fabricação da peça, tolerâncias dimensionais e erros humanos, esses valores se tornam incertos, afetando sobremaneira as propriedades dos materiais (SCHUELLER, 2001). Além disso, a modelagem de sistemas físicos passa geralmente por uma etapa de equacionamento matemático que, na maioria dos casos, apresenta solução numérica com elevado custo computacional. Diante disso, torna-se necessária a consideração de hipóteses que simplificam o problema, resultando numa fonte de incerteza que deve ser levada em conta nos modelos. Isto é traduzido por uma modelagem mais elaborada e onerosa, mas apresenta-se como sendo mais realista dos sistemas mecânicos reais.



De uma maneira geral, as incertezas são consideradas nos modelos segundo a aproximação não paramétrica que permite a introdução das mesmas diretamente nas matrizes globais do modelo (SOIZE, 2000; RITTO, SAMPAIO e CATALDO, 2008), e pela aproximação paramétrica, utilizando-se principalmente o método dos elementos finitos estocásticos (*Stochastic Finite Element Method - SFEM*), que permite uma combinação da análise clássica por elementos finitos e a análise estatística (GHANEM e SPANOS, 1991; SCHUELLER, 2001). Neste sentido, o interesse é obter as equações do movimento do sistema estocástico via construção das matrizes estocásticas de massa e rigidez do sistema dinâmico apresentado no Capítulo II, para a análise dos efeitos das incertezas paramétricas nas respostas em tensão do sistema e, portanto, no índice de fadiga.

## 4.2 Formulação do modelo de elementos finitos estocásticos de placa fina

### 4.2.1 Discretização de campos aleatórios

Um campo aleatório  $H(x, \theta)$  é uma coleção de variáveis aleatórias indexadas por um conjunto de parâmetros contínuos  $x \in \Omega$ , onde  $\Omega \in R^d$  representa o conjunto aberto que descreve a geometria do sistema físico. Um procedimento de discretização é baseado na aproximação de  $H(x, \theta)$  por  $\hat{H}(x, \theta)$ . Dentre as famílias de métodos utilizados para discretizar espacialmente um campo estocástico, utiliza-se neste trabalho os métodos chamados *Series Expansion Methods* (GHANEM e SPANOS, 1991), que consistem no acoplamento do desenvolvimento em série do campo aleatório e uma análise espectral para uma seleção dos termos mais importantes. Dentre os três métodos que fazem parte desta categoria, destaca-se a expansão de *Karhunen-Loève (KL)* como detalhado no livro de Ghanem e Spanos (1991). A discretização por KL de um campo aleatório gaussiano e homogêneo é escrito sob a seguinte forma:

$$\hat{H}(x, \theta) = \mu + \sum_{r=1}^n H_r(x) \xi_r(\theta) \quad (4.1)$$

onde  $\{\xi_r, r = 1, \dots, n\}$  são as variáveis aleatórias gaussianas e independentes (média zero e variância unitária),  $\{H_r(x), r = 1, \dots, n\}$  representa as funções determinísticas,  $x$  e  $\theta$  representam, respectivamente, o vetor do campo e a variável pertencente ao espaço dos eventos aleatórios.

Seja  $C(x_1, x_2)$  a função de covariância conhecida associada a  $H(x, \theta)$ , restrita, simétrica e definida-positiva. Neste caso, a decomposição espectral de  $C(x_1, x_2)$  é realizada como segue (GHANEM e SPANOS, 1991):

$$C(x_1, x_2) = \sum_{r=1}^{\infty} \lambda_r f_r(x_1) f_r(x_2) \quad (4.2)$$

onde  $(\lambda_r, f_r)$  representa, respectivamente, os valores próprios e as funções próprias de  $C(x_1, x_2)$ . A decomposição por KL de  $H(x, \theta)$  sobre a base das funções próprias  $f_r(x)$  é dada pela seguinte expressão:

$$H(x, \theta) = \mu + \sum_{r=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_r} f_r(x) \xi_r(\theta) \quad (4.3)$$

A forma truncada dos  $r$  primeiros termos da série pode ser escrita como segue:

$$\hat{H}(x, \theta) = \mu + \sum_{r=1}^n \sqrt{\lambda_r} f_r(x) \xi_r(\theta) \quad (4.4)$$

#### 4.2.2 Matrizes elementares estocásticas de massa e rigidez

A formulação do elemento finito estocástico de placa fina é baseada na utilização da decomposição de KL de um campo aleatório  $H(x, \theta)$  sobre a base das funções próprias do modelo no qual a formulação determinística é apresentada no Capítulo II. De uma forma geral, os parâmetros incertos podem ser a espessura e as propriedades mecânicas da

placa. Portanto, através das Eqs. (2.11) e (2.12), as matrizes de massa e rigidez estocásticas do elemento de placa fina são obtidas pelas seguintes relações:

$$\mathbf{M}^{(e)} = \int_{V_e} H_r(x, y) \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} dV_e, \mathbf{K}^{(e)} = \int_{V_e} H_r(x, y) \mathbf{B}_N^T \mathbf{H} \mathbf{B}_N dV_e \quad (4.5)$$

onde  $H_r(x, y)$  para os problemas bidimensionais pode ser obtido através da resolução do problema de autovalores definido pela seguinte integral (GHANEM e SPANOS, 1991):

$$H_r(x, y) = \int_{\Omega} C(x, y) f_r(x, y) dx dy \quad (4.6)$$

Desta forma, o termo  $H_r(x, y)$  pode ser calculado como segue:

$$H_r(x, y) = \sqrt{\lambda_r} f_r(x, y) \quad (4.7)$$

onde  $\lambda_r$  e  $f_r(x, y)$  representam, respectivamente, os autovalores e autofunções.

Para o problema bidimensional em questão, considera-se que todas as variáveis fatoradas das matrizes (modelo parametrizado mostrado no Capítulo II), representam processos aleatórios bidimensionais Gaussianos com a seguinte função de covariância:

$$C((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = C(x_1 - x_2, y_1 - y_2) = \exp\left(-\frac{|x_1 - x_2|}{L_x} - \frac{|y_1 - y_2|}{L_y}\right) \quad (4.8)$$

onde  $(x_1, x_2) \in \Omega_x$  e  $(y_1, y_2) \in \Omega_y$ .  $L_x$  e  $L_y$  representam, respectivamente, os comprimentos de correlação para os domínios  $\Omega_x = [0, a]$  e  $\Omega_y = [0, b]$ , respectivamente, ilustrados na Fig. 4.1.

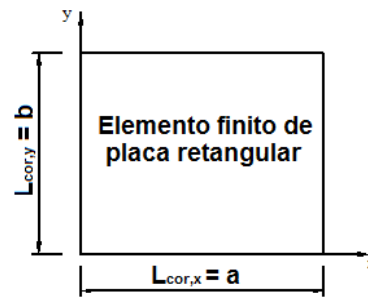


Figura 4.1 – Domínio de correlação para o elemento finito de placa retangular

Para mostrar a diferença gerada por diferentes entradas, foram considerados dois cenários de teste: no primeiro, foi adotado um comprimento de correlação  $L_{cor,x} = 0,1\text{ m}$  e domínio  $\Omega_x = [0; 0,1]$ ; no segundo, foi assumido  $L_{cor,x} = 0,05\text{ m}$  e  $\Omega_x = [0; 0,05]$ . Neste caso, foram obtidos os quatro primeiros autovalores e autofunções cada um deles. A Fig. 4.2 mostra os gráficos das autofunções em cada domínio e os autovalores estão na Tab. 4.1.

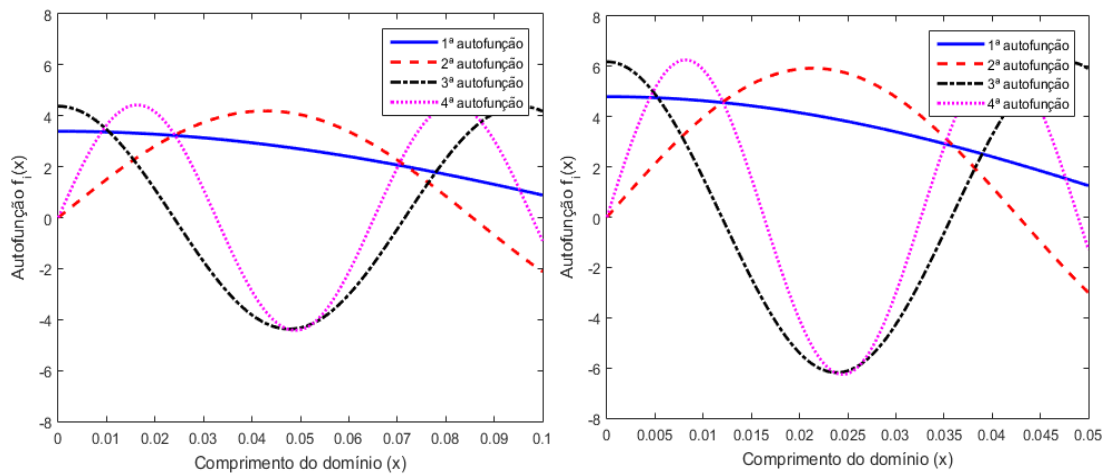


Figura 4.2 – Representação das autofunções para os cenários analisados.

Tabela 4.1 – Valores dos autovalores calculados para cada cenário

Cenário	$1^{\circ}\lambda_x$	$2^{\circ}\lambda_x$	$3^{\circ}\lambda_x$	$4^{\circ}\lambda_x$
1	0,0739	0,0138	0,0045	0,0021
2	0,0369	0,0069	0,0023	0,0011

A consequência imediata da escolha da função de covariância é o fato de que o problema bidimensional de placa pode ser desacoplado em dois problemas de valores próprios independentes unidimensionais:

$$f_r(x, y) = f_i(x) f_j(y) \quad \text{e} \quad \lambda_r = \lambda_i \lambda_j \quad (4.9)$$

Como consequência, os termos  $(\lambda_i, f_i(x))$ , soluções da expressão (4.6) pela introdução da função de covariância (4.8), são obtidas através da resolução da decomposição de KL com um comprimento de correlação  $L_x \in \Omega_x$ . Em contrapartida, os termos  $(\lambda_j, f_j(y))$  são obtidos resolvendo-se o mesmo problema, mas para um comprimento de correlação  $L_y \in \Omega_y$ . Esses termos são expressos como segue (GHANEM E SPANOS, 1991):

- **Se  $i$  e  $j$  são ímpares  $i \geq 1$  e  $j \geq 1$ :**

$$\lambda_i = \frac{2c_1}{\omega_i^2 + c_1^2}; \quad f_i(x) = \alpha_i \cos(\omega_i x) \quad (4.10.a)$$

$$\lambda_j = \frac{2c_2}{\omega_j^2 + c_2^2}; \quad f_j(y) = \alpha_j \cos(\omega_j y) \quad (4.10.b)$$

onde  $\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{a + \frac{\sin(2\omega_i a)}{2\omega_i}}}$  e  $\alpha_j = \frac{1}{\sqrt{b + \frac{\sin(2\omega_j b)}{2\omega_j}}}$ . Os termos  $\omega_i$  e  $\omega_j$  representam as

soluções das seguintes equações:

$$c_1 - \omega_i \tan(\omega_i a) = 0; \quad c_2 - \omega_j \tan(\omega_j b) = 0 \quad (4.10.c)$$

nos domínios  $\left[ (i-1)\frac{\pi}{a}, \left(i - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{a} \right]$  e  $\left[ (j-1)\frac{\pi}{b}, \left(j - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{b} \right]$ .  $c_1 = 1/L_x$  e  $c_2 = 1/L_y$ .

- Se  $i$  e  $j$  são pares  $i \geq 2$  e  $j \geq 2$  :

$$\lambda_i = \frac{2c_1}{\omega_i^2 + c_1^2} ; \quad f_i(x) = \alpha_i \sin(\omega_i x) \quad (4.11.a)$$

$$\lambda_j = \frac{2c_2}{\omega_j^2 + c_2^2} ; \quad f_j(y) = \alpha_j \sin(\omega_j y) \quad (4.11.b)$$

onde  $\alpha_i = \frac{1}{\sqrt{a - \frac{\sin(2\omega_i a)}{2\omega_i}}}$  e  $\alpha_j = \frac{1}{\sqrt{b - \frac{\sin(2\omega_j b)}{2\omega_j}}}$ . Os termos  $\omega_i$  e  $\omega_j$  representam,

respectivamente, as soluções das seguintes equações:

$$\omega_i + c_1 \tan(\omega_i a) = 0 ; \quad \omega_j + c_2 \tan(\omega_j b) = 0 \quad (4.11.c)$$

nos domínios  $\left[ \left( i - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{a}, i \frac{\pi}{a} \right]$  e  $\left[ \left( j - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi}{b}, j \frac{\pi}{b} \right]$ , respectivamente.

Através da substituição das expressões (4.11) e (4.12) na relação (4.8), as matrizes de massa e rigidez estocásticas podem ser calculadas da seguinte forma:

$$\mathbf{M}^{(e)} = \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_y} H_r(x, y) \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} d\Omega_y d\Omega_x \quad (4.12.a)$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \int_{\Omega_x} \int_{\Omega_y} H_r(x, y) \mathbf{B}_N^T \mathbf{H} \mathbf{B}_N d\Omega_y d\Omega_x \quad (4.12.b)$$

onde  $H_r(x, y) = \sqrt{\lambda_r} f_r(x, y)$  é avaliado para  $r$  pares e ímpares, respectivamente.

Se  $\xi_r(\theta) = \bar{\xi}_r + \Delta \xi_r(\theta)$  representam as variáveis aleatórias fatoradas associadas a um elemento finito, chega-se às Eqs. (4.13).

$$\mathbf{M}^{(e)} = \xi_r(\theta) \alpha_i \alpha_j \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} \int_{\Omega_x} f_j(y) \int_{\Omega_y} f_i(x) \mathbf{N}^T \rho \mathbf{N} d\Omega_y d\Omega_x \quad (4.13.a)$$

$$\mathbf{K}^{(e)} = \xi_r(\theta) \alpha_i \alpha_j \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_j} \int_{\Omega_x} f_j(y) \int_{\Omega_y} f_i(x) \mathbf{B}_N^T \mathbf{H} \mathbf{B}_N d\Omega_y d\Omega_x \quad (4.13.b)$$

Após a aplicação de procedimentos padrões de montagem de matrizes elementares levando-se em conta a conectividade de nós, as matrizes globais e, portanto, as equações do movimento do sistema estocástico podem ser formuladas. Neste contexto, as matrizes das FRFs (2.16) e da resposta em tensão (2.29) do sistema determinístico, assumem as seguintes formas, respectivamente, para o sistema dinâmico estocástico:

$$\mathbf{G}(\omega, \theta) = [\mathbf{K}(\theta) + j\omega \mathbf{C}(\theta) - \omega^2 \mathbf{M}(\theta)]^{-1} \quad (4.14.a)$$

$$\boldsymbol{\varphi}_s(\omega, \theta) = \mathbf{H} \mathbf{B} \mathbf{G}(\omega, \theta) \boldsymbol{\varphi}_f(\omega) \mathbf{G}^H(\omega, \theta) \mathbf{B}^T \mathbf{H}^T \quad (4.14.b)$$

### 4.3 Solução do Problema Estocástico

Os métodos de solução de problemas estocásticos se dividem nos seguintes grupos (SCHUELLER, 2001; STEFANO, 2009):

- a) *Método de simulação de Monte Carlo*: é o mais simples método para tratar o problema de variabilidade de respostas aleatórias. Sua metodologia é baseada no fato de que a melhor maneira de se obter uma distribuição de probabilidade adequada é tendo uma grande população como base dos cálculos;
- b) *Métodos de perturbação*: se baseiam em expansões das funções e operadores envolvidos em séries de Taylor ou séries de Neumann, fundamentando suas respostas em torno das médias das variáveis aleatórias;
- c) *Métodos espectrais*: baseados numa extensão do método dos elementos finitos para a solução de problemas de valor de contorno sujeitos à propriedades aleatórias descritas por campos Gaussianos. Eles utilizam funções de base no espaço de Hilbert, podendo ser polinômios ortogonais ou um caos polinomial.

Neste trabalho, será adotado o Método de Monte Carlo para a solução do problema estocástico (4.14). Para a aplicação do método é necessário primeiro gerar uma população

com uma função de distribuição de probabilidade conhecida *a priori*. Neste caso, com o intuito de obter uma convergência mais rápida, foi adotado o Hipercubo-Latino (HCL) como gerador de amostras (FLORIAN, 1992; MANTEUFEL, 2000).

É importante salientar que uma análise de convergência das respostas do sistema estocástico foi feita através do cálculo da raiz quadrada do desvio médio quadrático em função do número de amostras  $n_s$ , segundo a seguinte expressão:

$$RMSD = \sqrt{\frac{1}{n_s} \sum_{i=1}^{n_s} \left( \left| \mathbf{G}(\omega, \theta) - \bar{\mathbf{G}}(\omega) \right|^2 \right)} \quad (4.15)$$





# CAPÍTULO V

## SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Nesse capítulo serão apresentados os resultados obtidos pelas simulações numéricas realizadas, empregando as rotinas desenvolvidas em ambiente de programação MATLAB®. Uma estrutura do tipo placa fina foi modelada primeiramente seguindo uma abordagem determinística. Foram realizadas análises dinâmicas para a obtenção das repostas em tensão do sistema no domínio da frequência e a aplicação do critério de fadiga de Sines. Os resultados foram gerados para os sistemas completo e reduzido. Na sequência, os envelopes das soluções dinâmicas e o índice de fadiga foram obtidos para o sistema estocástico levando-se em conta a presença das incertezas para alguns cenários investigados.

### 5.1 Dados do problema

A Fig. 5.1 ilustra a estrutura a ser analisada formada por uma placa fina retangular de alumínio de dimensões  $0,654\text{ m} \times 0,527\text{ m}$ , engastada em dois bordos ao longo do eixo y. A placa foi discretizada em  $12 \times 12$  elementos finitos retangulares de placa fina conforme apresentado no Capítulo II, resultando num total de 845 graus de liberdade. O ponto de aplicação da força externa está indicado no centro da placa. Além disso, em vermelho está indicado o elemento do qual serão extraídos os valores da resposta em tensão. Já os valores determinísticos das propriedades físicas e geométricas utilizadas na construção do modelo de elementos finitos são apresentados na Tabela 5.1.

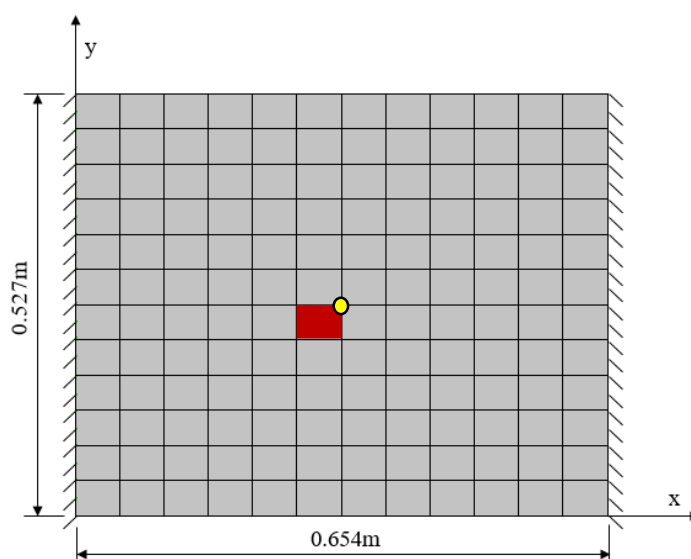


Figura 5.1 – Ilustração da placa alumínio utilizada nas simulações numéricas

Tabela 5.1 – Propriedades físicas e geométricas da placa de alumínio

Espessura (mm)	Módulo de Elasticidade (GPa)	Coefficiente de Poisson	Massa Específica (kg/m <sup>3</sup> )	Limite de Ruptura (MPa)	Limite de Torção Alternada <sup>(1)</sup> (MPa)	Limite de Tração Alternada <sup>(1)</sup> (MPa)
1.5	70	0.33	2700	343	92	132

<sup>(1)</sup>obtidos para  $2.0 \times 10^6$  ciclos

## 5.2 Resultados obtidos para o sistema determinístico

### 5.2.1 Análise modal

Por meio da solução do problema de autovalores do sistema foram extraídos as dez primeiras frequências naturais e modos de vibrar da placa bi-engastada. Essa análise dinâmica permite verificar as implementações numérico-computacionais, além de ser útil no processo de escolha dos modos a serem considerados na construção da base de redução do modelo. A título de ilustração, a Fig. 5.1 representa as formas modais associadas às quatro primeiras frequências naturais do sistema determinístico.

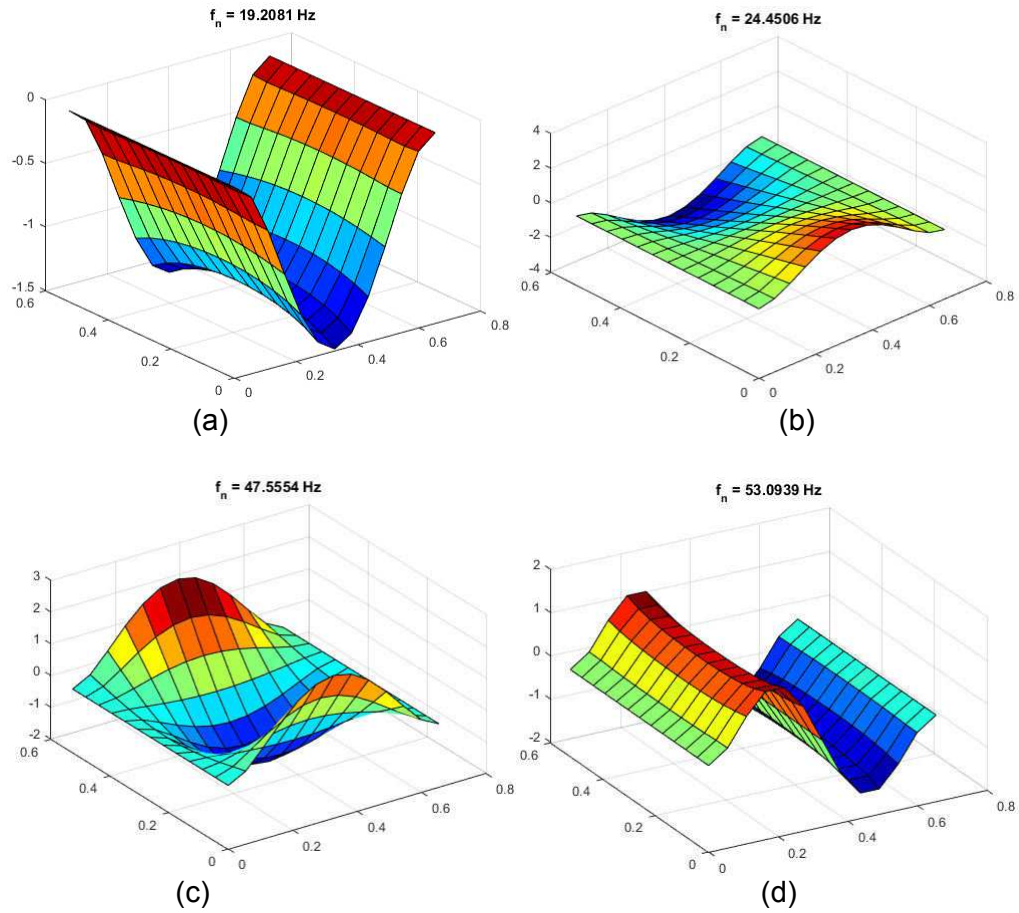


Figura 5.2 – Modos de vibrar da placa: (a) 1º modo (19,208 Hz), (b) 2º modo (24,451 Hz), (c) 3º modo (47,555 Hz), (d) 4º modo (53,094 Hz)

### 5.2.2 Avaliação das respostas dinâmicas do sistema reduzido

Esta fase consiste em avaliar a base de redução nominal para o sistema dinâmico considerado neste trabalho. Os cálculos consistem em obter as funções de resposta em frequência (FRFs),  $\mathbf{G}(\omega)$ , do sistema reduzido a serem empregadas na determinação das respostas em tensão conforme Eq. (2.39). Vale ressaltar que nas simulações que seguem, foi considerado um amortecimento estrutural proporcional à rigidez com coeficiente  $\beta = 2,5 \times 10^{-4}$ . Para verificar a eficiência da base de redução na banda de frequência de interesse [0-100 Hz], considera-se a seguinte base:  $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_{\text{mod}}^{(10)} & \bar{\mathbf{U}}^{(1)} \end{bmatrix}$  (10 vetores próprios, 1 vetor resíduo proveniente de carga unitária estática, conforme Eq. (2.41)). Desta forma, a aplicação dessa base nas matrizes do sistema possibilita uma redução de 845 graus de

liberdade estruturais para 11 graus de liberdade para o sistema reduzido, conforme Eq. (2.44).

A Fig. 5.3 mostra as amplitudes das FRFs obtidas para o sistema completo e as respectivas calculadas através do emprego da base de redução. Na Fig. 5.3(a) estão os resultados para o sistema reduzido sem o enriquecimento da base de Ritz por meio do resíduo estático e, na Fig. 5.3(b), está representado o sistema enriquecido. Nota-se a precisão do sistema reduzido e a capacidade de representar o comportamento em frequência do sistema completo na banda de interesse e a evidente melhora dos resultados obtidos por meio do enriquecimento da base com o resíduo estático dos esforços externos aplicados. É importante salientar que para essa configuração foi obtido um ganho computacional de cerca de 90% no cálculo da FRF.

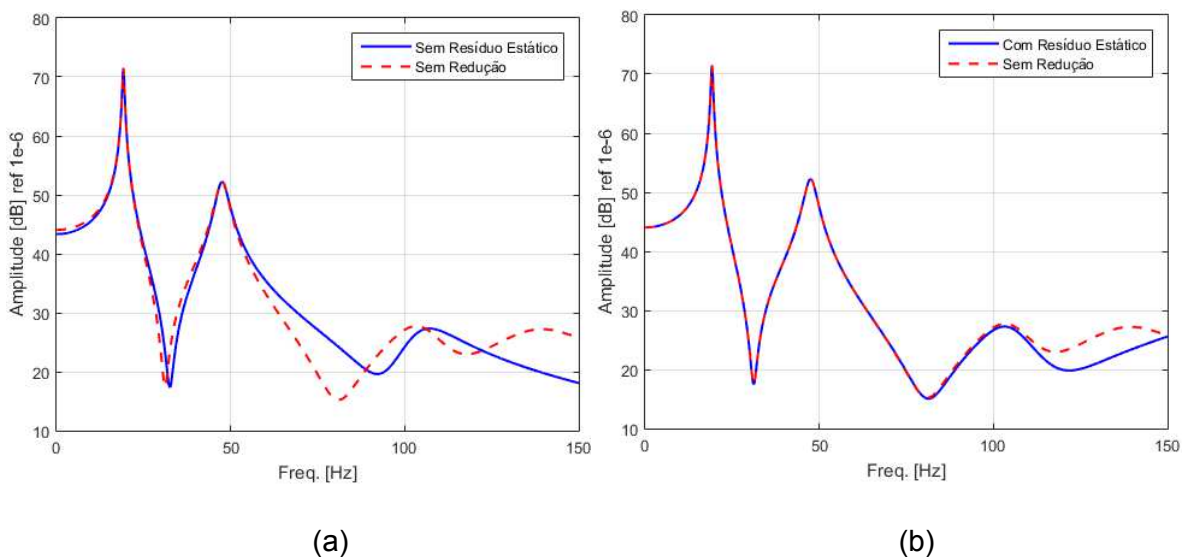


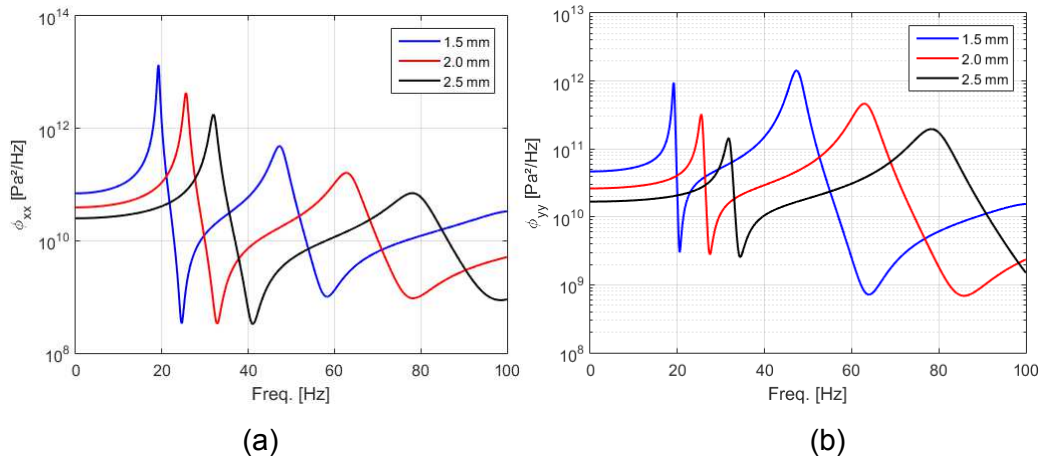
Figura 5.3 – Comparação entre as amplitudes das FRFs dos sistemas reduzidos e completo: (a) base sem enriquecimento, (b) base enriquecida

Portanto, devido ao elevado custo computacional envolvido no cálculo das respostas em tensão do sistema para cada ponto em frequência na banda de interesse (pois envolve matrizes tridimensionais da ordem de  $845 \times 845 \times 2000$  para cada um dos 144 elementos), será empregado o modelo reduzido formado por 11 graus de liberdade. Além disso, ao analisar a quantidade de operações envolvidas nas simulações de Monte Carlo para a obtenção dos envelopes das soluções do sistema estocástico, reforça-se a necessidade do uso do modelo reduzido.

Neste caso, as respostas em tensão no domínio da frequência foram calculadas através das densidades espectrais de potência (ver Eq. (2.29)), que empregam as FRFs,  $\mathbf{G}(\omega)$  do sistema reduzido. Nesta aplicação, além de apresentar as respostas para cada uma das três componentes de tensão  $(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy})$ , foi feita uma comparação através da variação determinística da espessura média da placa (1,5 mm, 2,0 mm e 2,5 mm). Neste caso, foi assumido que a placa está sujeita a uma carga aleatória transversal aplicada em seu centro e definida pela sua densidade espectral de potência,  $\phi_f(\omega) = 85 \times 10^3 \text{ Pa}^2 / \text{Hz}$  (ruído branco). Além disso, para determinar a matriz PSD definida pela Eq. (2.29), as tensões da placa são determinadas pela consideração da seguinte matriz de propriedades para o material isotrópico:

$$\mathbf{H} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Os resultados mostrados na Fig. 5.4 foram obtidos para o elemento central da placa. Percebe-se claramente que um aumento na espessura da placa leva a um aumento na frequência de ressonância de cada pico e consequente diminuição no nível das tensões para o elemento investigado. Isto pode ser explicado pelo acréscimo de massa e rigidez gerado pelo aumento da espessura. Portanto, espera-se uma diminuição no índice de fadiga para a estrutura sujeita a menores níveis de tensão.



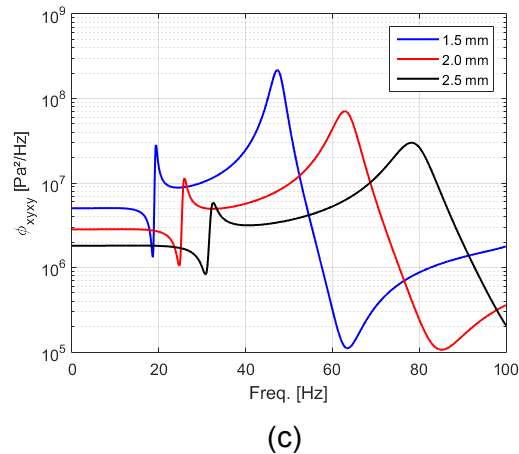


Figura 5.4 – Respostas em tensão no domínio da frequência considerando variações na espessura da placa, calculados para o elemento central: (a) Tensão normal  $x$ ; (b) Tensão normal  $y$ ; (c) Tensão tangencial  $xy$

### 5.2.3 Estimativa do índice de fadiga

Como citado anteriormente, é assumido que a placa da Fig. 5.1 está sujeita a uma carga aleatória concentrada definida pela sua densidade espectral de potência. Portanto, deve-se considerar a natureza aleatória do carregamento aplicado no processo de estimação dos valores médios do índice de fadiga,  $E[D_{\text{Sines}}]$ , conforme apresentado no Capítulo III.

A Fig. 5.5(a) representa graficamente a distribuição da esperança dos coeficientes de fadiga para a placa analisada. Nota-se que as áreas mais críticas, possuindo maiores valores do índice de fadiga, estão associadas aos elementos localizados na porção central e bordas da placa. Isto pode ser explicado em função da simetria da placa, das condições de contorno e da natureza da força aplicada. A título de comparação, a Fig. 5.5(b) faz uma representação gráfica dos níveis de fadiga obtidos nesta simulação. Por fim, como o valor mais alto encontrado foi de 0,8113, conclui-se que essa estrutura provavelmente não falhará por fadiga antes de atingir 2 milhões de ciclos.

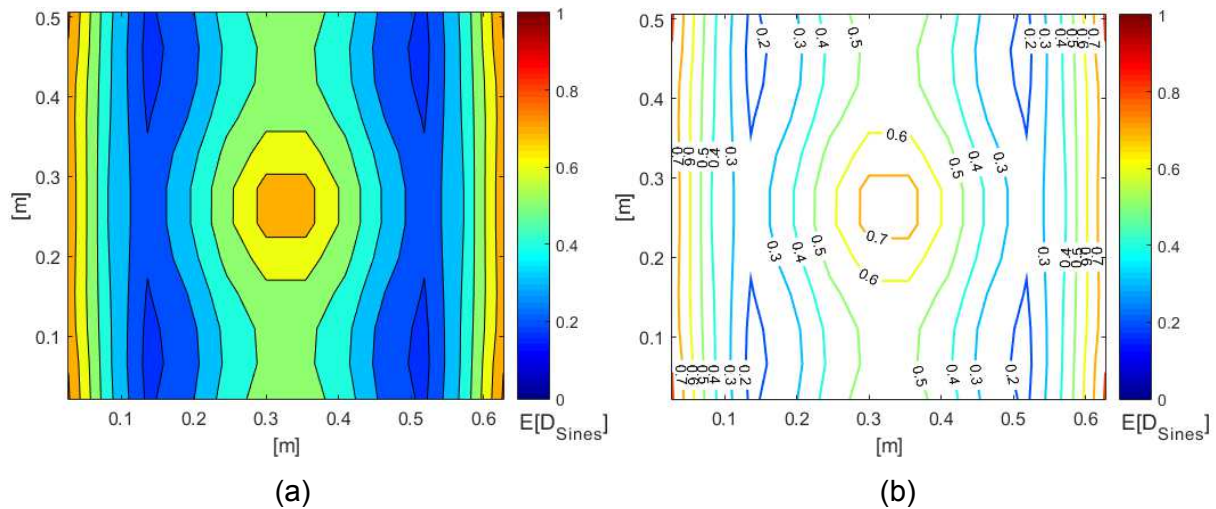


Figura 5.5 – (a) distribuição do índice de fadiga; (b) curvas dos níveis de fadiga.

### 5.3 Resultados obtidos para o sistema considerando incertezas paramétricas

Nesta seção, são mostrados os resultados obtidos por meio das simulações numéricas realizadas empregando o modelo completamente estocástico, ou seja, compreendendo carregamento aleatório e a presença de incertezas paramétricas. Num primeiro momento, assume-se que as propriedades mecânicas e a espessura da placa são variáveis aleatórias, conforme discutido no Capítulo IV. Numa segunda etapa, será considerada como variável aleatória a resistência à torção alternada da placa de alumínio, propriedade relativa à fadiga utilizada na estimativa do índice de Sines, e que normalmente é obtida de ensaios experimentais.

Os parâmetros a serem utilizados na construção do modelo estocástico são apresentados na Tabela 5.2. Conforme mencionado no Capítulo IV, eles serão adotados de maneira a corresponder às dimensões do elemento finito retangular. As autofunções obtidas por eles são apresentadas na Fig. 5.6.

Tabela 5.2 – Domínios e comprimentos de correlação do modelo estocástico

Domínios		Comprimentos de Correlação	
$\Omega_x$	$\Omega_y$	$L_{cor,x}$	$L_{cor,y}$
[0;0,0545]	[0;0,0439]	0,0545m	0,0439m



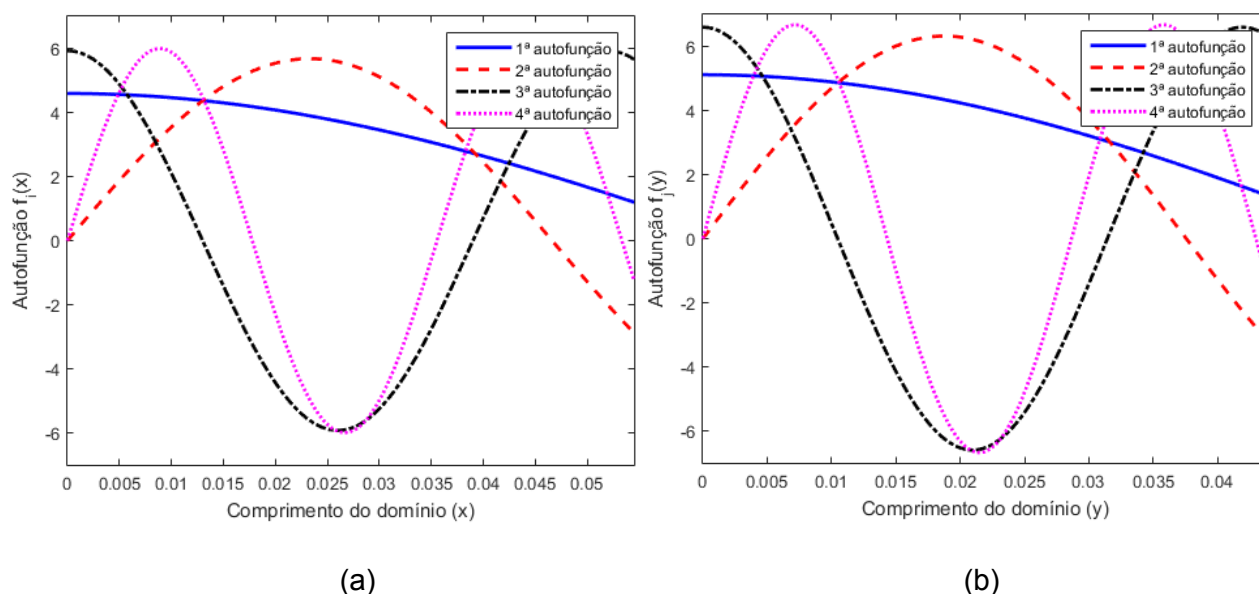


Figura 5.6 – Autofunções associadas aos domínios definidos: (a) domínio x, (b) domínio y

O próximo passo é determinar o número de elementos utilizados na composição da expansão de Karhunen-Loève. Segundo recomendações de Ghanem e Spanos (1991) e com base na observação dos trabalhos desenvolvidos por de Lima (2007), de Lima, Rade e Bohuaddi (2010) e Koroishi et al. (2012), optou-se pela utilização de dez termos na composição da série.

Na sequência, será fixado o tamanho das amostras em 500 indivíduos gerados pelo método HCL visto que, para aplicações similares realizadas por Ribeiro (2015) e Rosa e de Lima (2016), a convergência foi atingida com populações menores. Foi adotada uma amostragem de distribuição normal Gaussiana com intervalo de confiança  $\pm 3\sigma$ , ou seja, pode-se afirmar com 99,73% de certeza que o valor esperado estará contido nesse intervalo e nos envelopes de soluções. As variáveis aleatórias a serem consideradas nas simulações são definidas na Tabela 5.3 com os respectivos níveis de incertezas.

Tabela 5.3 – Cenários de incertezas investigados – primeira abordagem.

Cenário	Nível de Incerteza		
	$h$	$E$	$\rho$
1	5%	---	---
2	10%	---	---
3	5%	5%	---
4	5%	5%	5%

Para cada cenário, os resultados são apresentados na forma de envelopes de soluções em termos das FRFs (ver Figs. 5.7) e respostas em tensão (ver Figs. 5.9 a 5.11), da análise de convergência (ver Fig. 5.8), das distribuições dos valores máximos, médios e mínimos do índice de fadiga para a estrutura (ver Figs. 5.12), e os índices de fadiga para o elemento críticos do centro e da borda (ver Tab. 5.4).

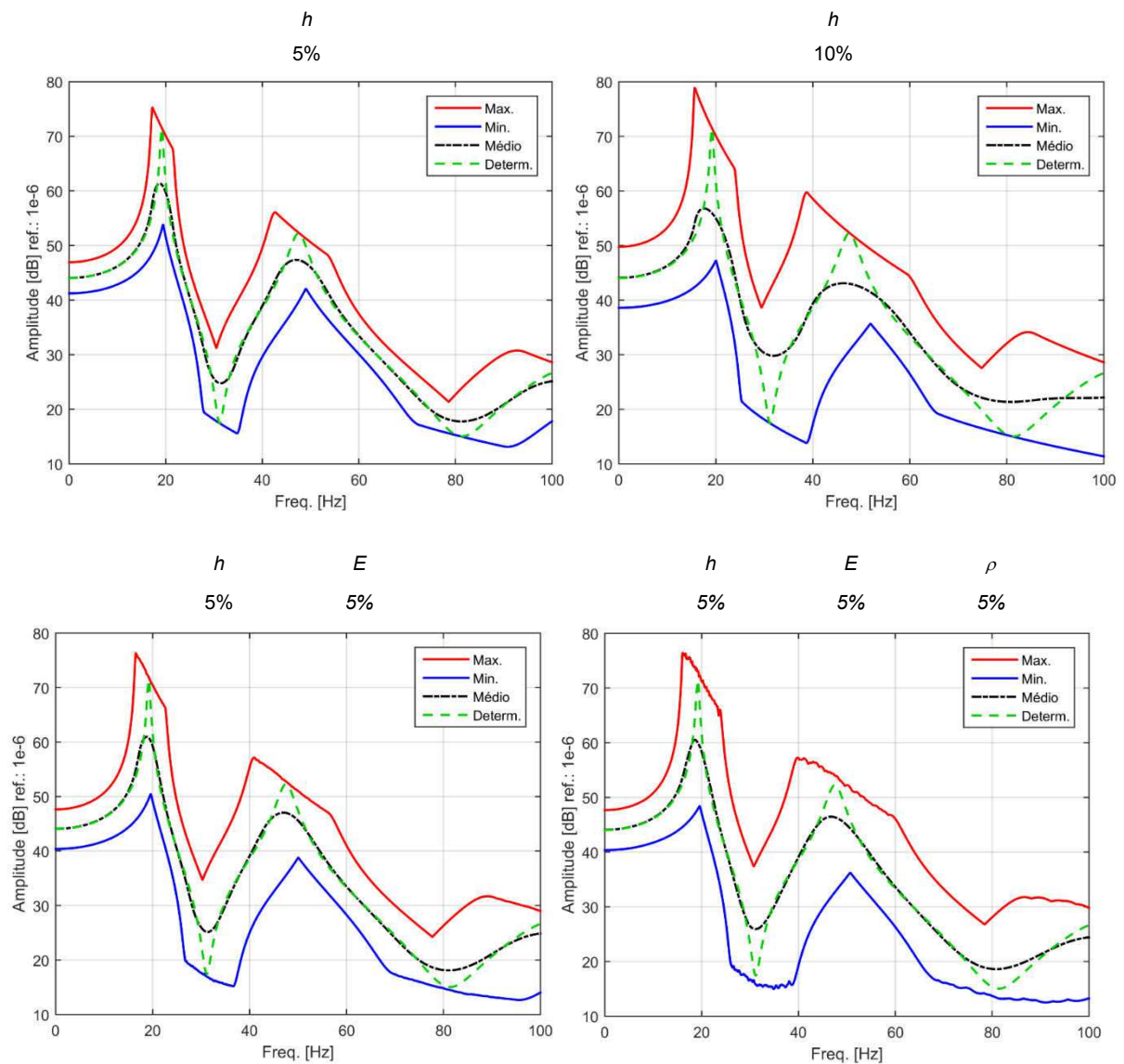


Figura 5.7 – Envelopes das FRFs

A figura anterior ilustra as dispersões da resposta dinâmica aleatória representando, respectivamente, os valores médios e os estatísticos extremos para os casos de incertezas estudados. Além disso, é mostrada a resposta determinística do sistema. Através da

comparação das Figs. 5.7(a) e 5.7(b) pode-se constatar sem dificuldades a influência significativa da espessura da placa sobre as respostas em frequência aleatórias do sistema. Esta influência fica mais evidente à medida em que a frequência de ressonância aumenta. Já para os parâmetros físicos que caracterizam o tipo de material, esta influência é menor como pode ser visto pela comparação das Figs. 5.7(a), 5.7(c) e 5.7(d).

A Fig. 5.8 mostra a análise de convergência realizada para o cenário 2, visto que o envelope gerado para este cenário foi o mais amplo, sendo considerado o cenário de referência para avaliação da convergência. Portanto, conclui-se que o número utilizado de 500 amostras para todos os cenários garante uma boa convergência dos resultados.

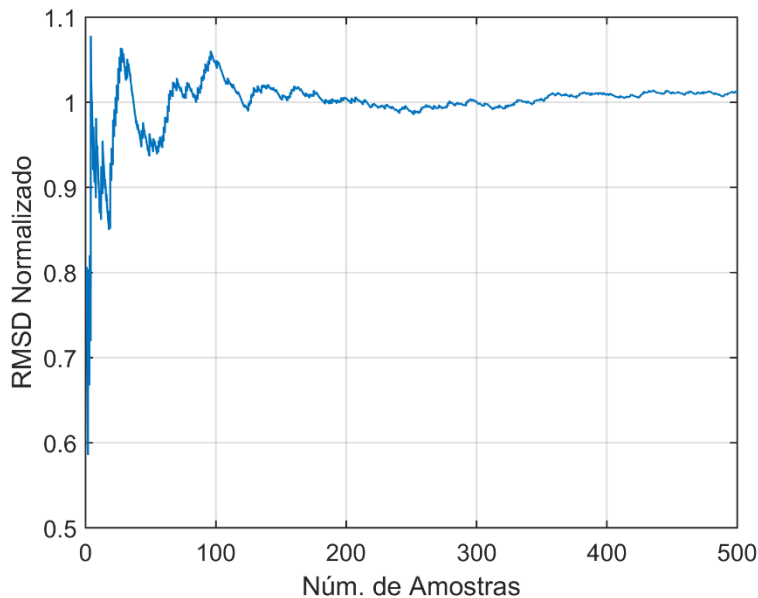


Figura 5.8 – Análise de convergência via RMSD normalizado do cenário 2

As figuras a seguir representam as dispersões das respostas em tensão aleatórias obtidas com base nas densidades espectrais de potência para cada uma das tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  e para os casos de incertezas investigados.

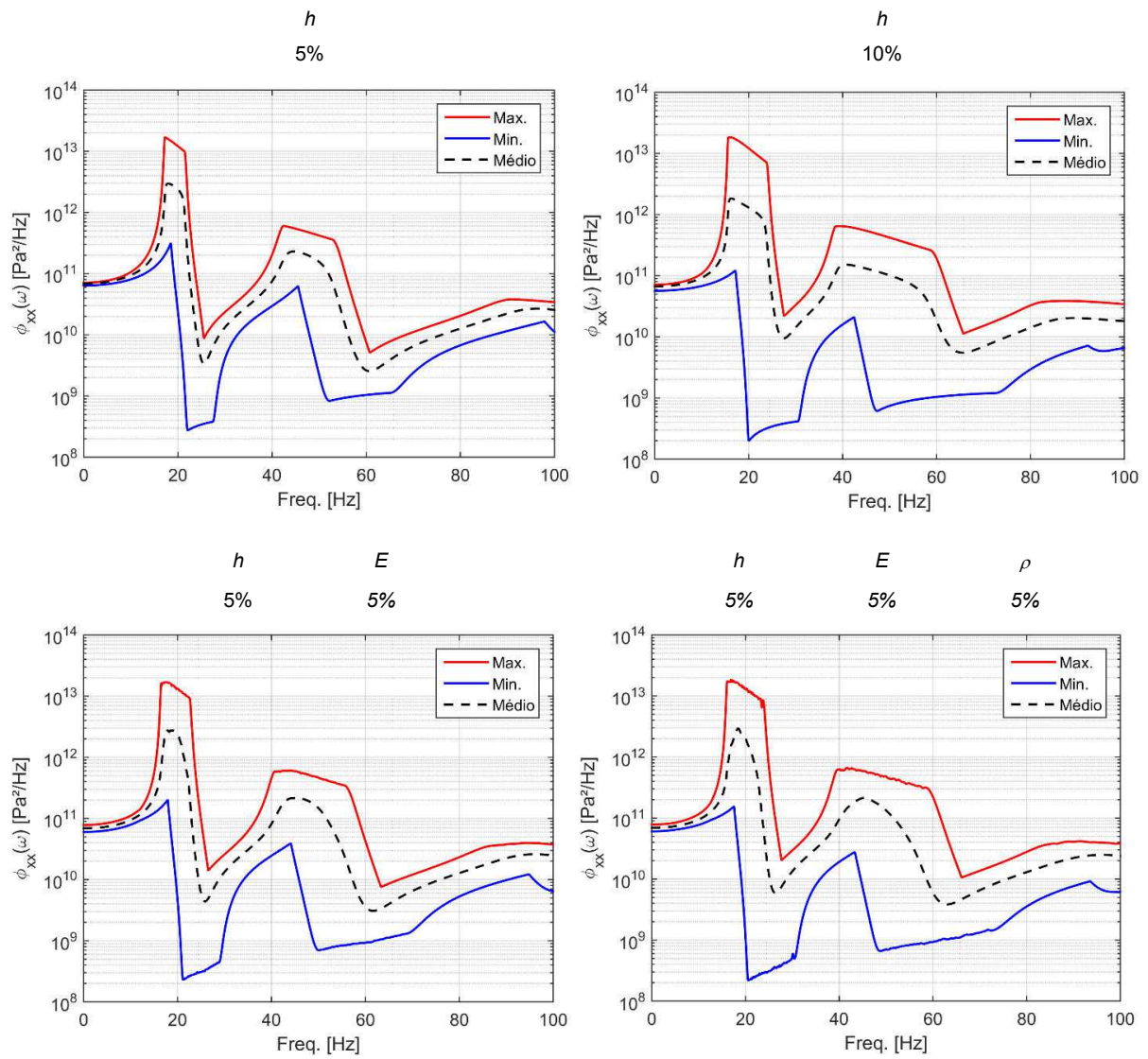


Figura 5.9 – Envelopes das respostas em tensão,  $\phi_{xx}(\omega)$

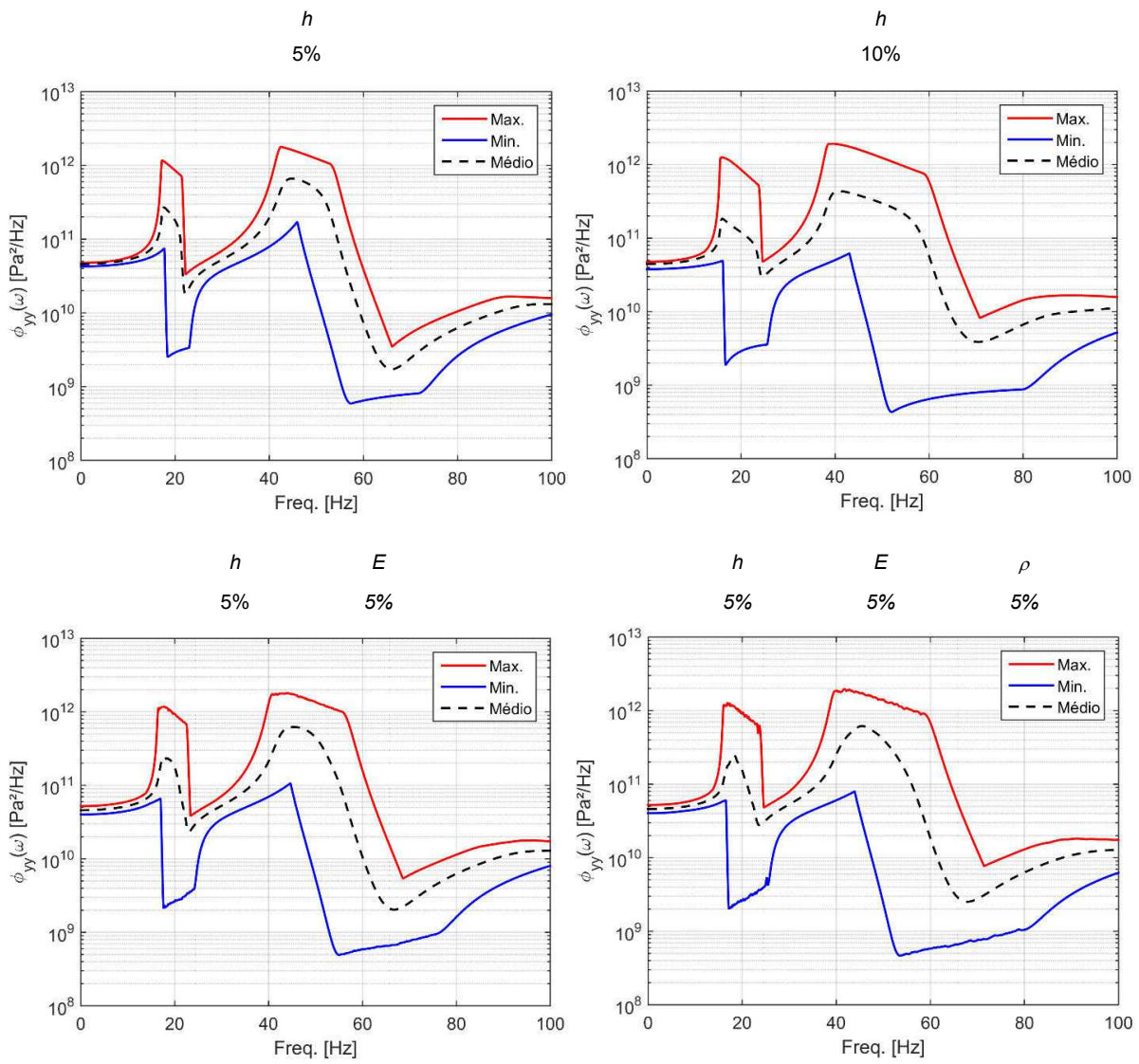


Figura 5.10 – Envelopes das respostas em tensão  $\phi_{yy}(\omega)$



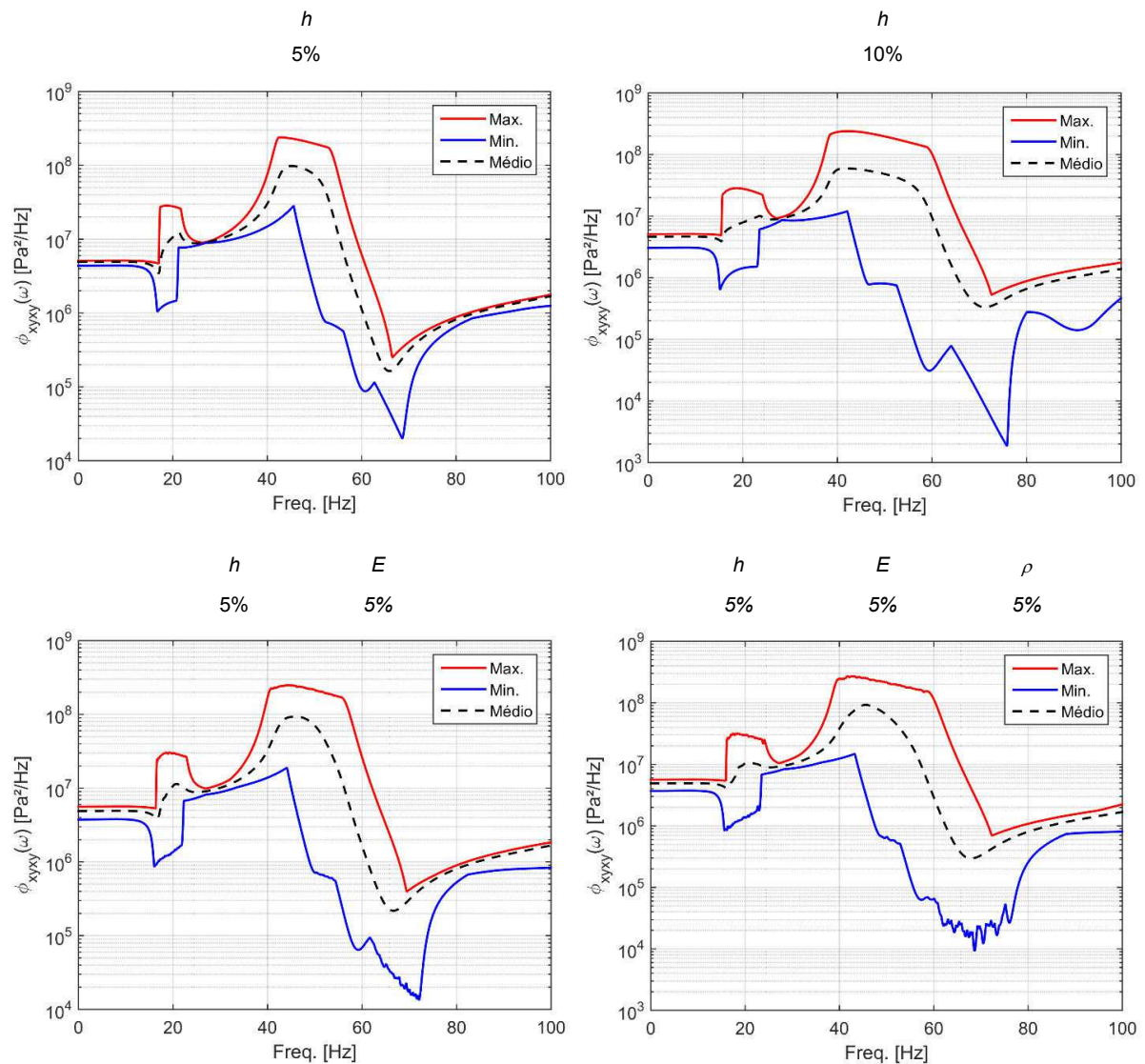


Figura 5.11 – Envelopes das respostas em tensão  $\phi_{xyxy}(\omega)$

De uma maneira geral, analisando os resultados das Figs. 5.9 a 5.11 nota-se também a influência significativa da espessura da placa nas respostas em tensão aleatórias do sistema quando comparado com os parâmetros materiais. Vale ressaltar que como as densidades espectrais de potência das respostas em tensão aleatórias são obtidas a partir das FRFs, esta influência já era esperada. Portanto, o aumento do nível de incertezas na espessura de 5% para 10% acarretou num envelope mais largo para todos os gráficos, gerando tensões médias de alto nível em uma faixa maior de frequências. De maneira similar, a inclusão de variações nas propriedades do material gerou um efeito menos notável. Esse resultado permitiu estabelecer os prováveis níveis de tensão que a estrutura está sujeita e também evidenciou a faixa de frequências onde os mais altos índices ocorrem.

Tendo em mente uma aplicação na indústria aeronáutica, por exemplo, esses valores podem ser interpretados como uma faixa de frequências a se evitar ou controlar, visto que maiores tensões implicam diretamente em menor vida em fadiga.

As figuras a seguir representam as distribuições da esperança dos coeficientes de fadiga para o sistema estocástico. Os valores críticos para o centro e para a borda em cada um dos cenários pode ser visto de maneira agrupada na Tab. 5.4.

Tabela 5.4 – Valores do índice de fadiga para os elementos do centro e das bordas

<b>Cenário</b>	<b>Centro</b>		<b>Bordas</b>	
	<b>Mínimo</b>	<b>Máximo</b>	<b>Mínimo</b>	<b>Máximo</b>
<b>1</b>	0,7059	0,7469	0,7762	0,8243
<b>2</b>	0,6648	0,7468	0,7314	0,8243
<b>3</b>	0,6839	0,7820	0,7520	0,8613
<b>4</b>	0,6857	0,7818	0,7533	0,8613

Com base na tabela anterior podem ser gerados intervalos de confiança do sistema em termos do índice de fadiga, tendo como base os piores cenários de falha. Além disso, a partir das distribuições do índice de fadiga mostrados na Fig. 5.12 para os cenários de incertezas investigados, pode-se concluir que provavelmente nenhuma das estruturas falhará antes de dois milhões de ciclos, pois os intervalos não contêm valores maiores que a unidade. Para comparação entre os índices foi levado em conta o valor crítico obtido nos testes determinísticos, que foi de 0,8113 para os elementos das bordas. Os valores percentuais contidos na Tab. 5.5 são as diferenças relativas entre os valores máximos obtidos nos ensaios estocásticos e o valor determinístico.

Tabela 5.5 – Diferenças percentuais entre os valores máximos e mínimos dos ensaios estocásticos e o máximo determinístico

<b>Cenário</b>	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
<b>Máximo</b>	1,6029%	1,6030%	6,1661%	6,1585%
<b>Mínimo</b>	-4,3316%	-9,8536%	-7,3147%	-7,1655%

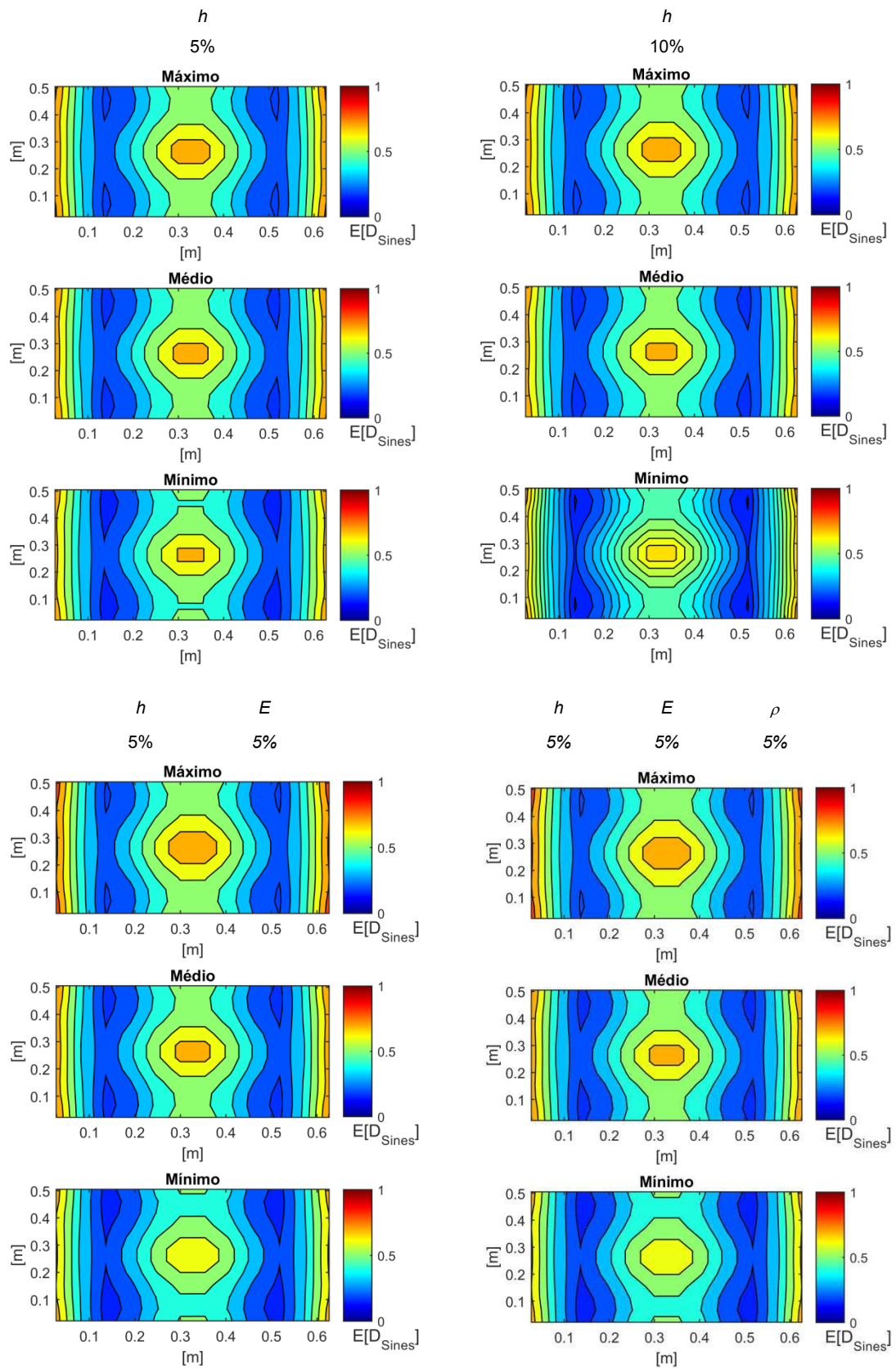


Figura 5.12 - Distribuições do índice de fadiga para o sistema estocástico



Vale ressaltar que o acréscimo percentual nos intervalos obtidos nos cenários de incertezas investigados, conforme mostrados na Tabela 5.5, já era esperado, pois o aumento no nível de incertezas configura um intervalo maior de valores possíveis. O interessante aqui são os resultados dos cenários 3 e 4. Entre os dois houve uma diferença desprezível da ordem de 0,01%, o que indica que a inclusão de um nível de incerteza de 5% na massa específica do sistema não implica em uma grande alteração no índice de fadiga do sistema estocástico. Já para os cenários 1 e 4, esta diferença foi de aproximadamente 5%, o que configura uma variação considerável.

Na sequência, será investigada a influência das incertezas na propriedade de fadiga do material do alumínio na estimativa do coeficiente de Sines: o limite de fadiga em torção alternada,  $t_{-1}$ . Lambert (2007) comenta em seu trabalho que essa é uma propriedade de difícil acesso visto que só é obtida por meio de ensaios experimentais, chegando a apresentar até 10% de variação nos seus valores obtidos experimentalmente. Além disso, são utilizados os valores determinísticos da densidade e do módulo de elasticidade do material. Portanto, serão consideradas as incertezas somente na espessura e no parâmetro,  $t_{-1}$ . A Tabela 5.6 apresenta os cenários de testes a serem investigados.

Tabela 5.6 – Cenários de incertezas investigados – segunda abordagem

Cenário	Nível de Incerteza	
	$h$	$t_{-1}$
<b>5</b>	5%	5%
<b>6</b>	5%	10%
<b>7</b>	10%	10%

Como o limite de fadiga em torção alternada não possui influência alguma sobre a obtenção dos envelopes das FRFs e os níveis de incerteza escolhidos para a espessura foram os mesmos, nesse segundo momento a análise dos resultados será feita somente por meio da análise de convergência via RMSD normalizado (ver Fig. 5.13), distribuição dos coeficientes de Sines (ver Fig. 5.14) e dos valores elementares para as bordas e para o centro (ver Tab. 5.7).

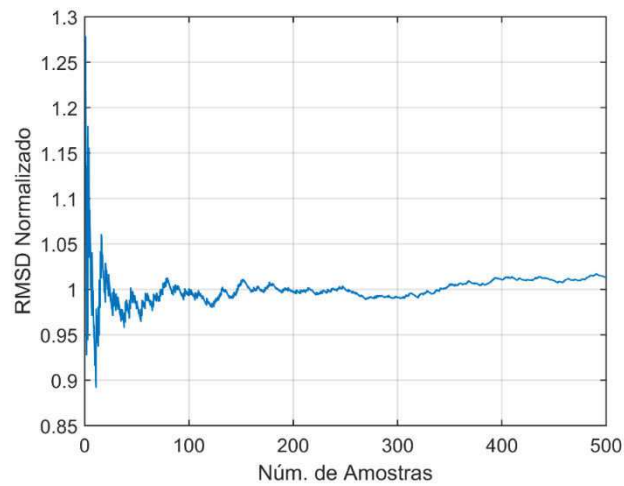
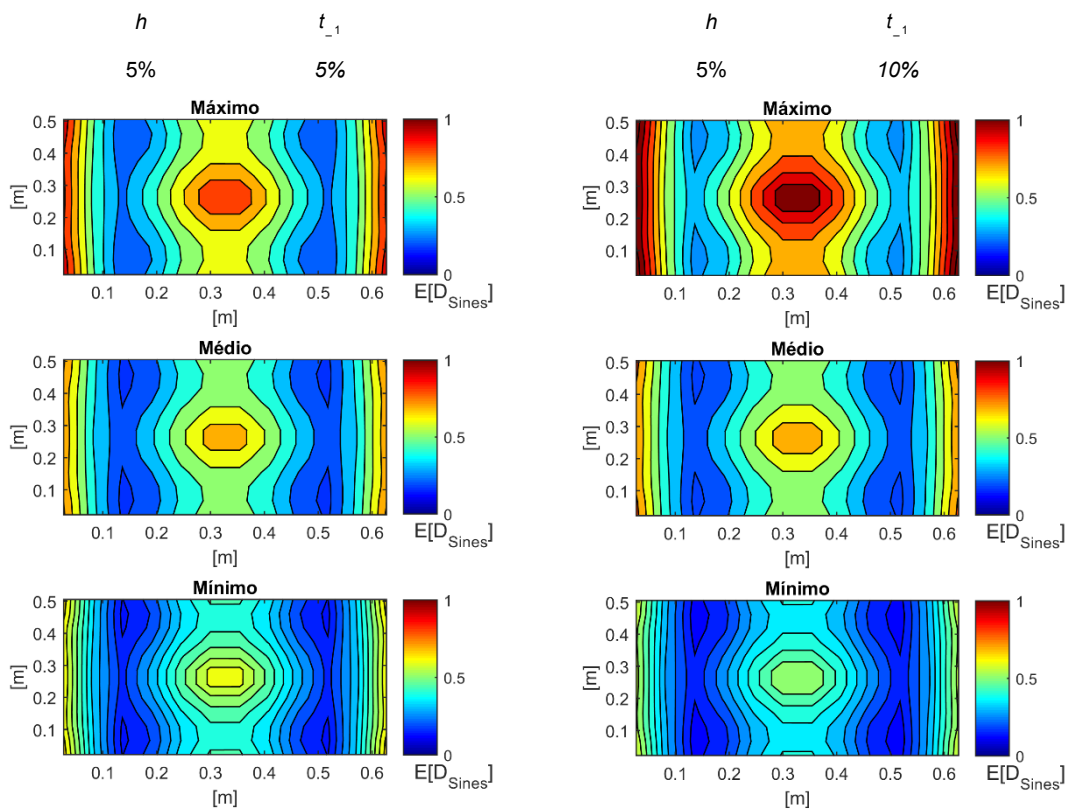


Figura 5.13 – Análise de convergência via RMSD normalizado do cenário 7

Da mesma maneira que os primeiros ensaios, a Fig. 5.13 mostra a análise de convergência via RMSD normalizado para o cenário 7 associado aos envelopes com maiores dispersões. A convergência do Método de Monte Carlo foi garantida para esses cenários também em torno de 250 amostras. É possível afirmar então que os dados gerados possuem validade para análise.



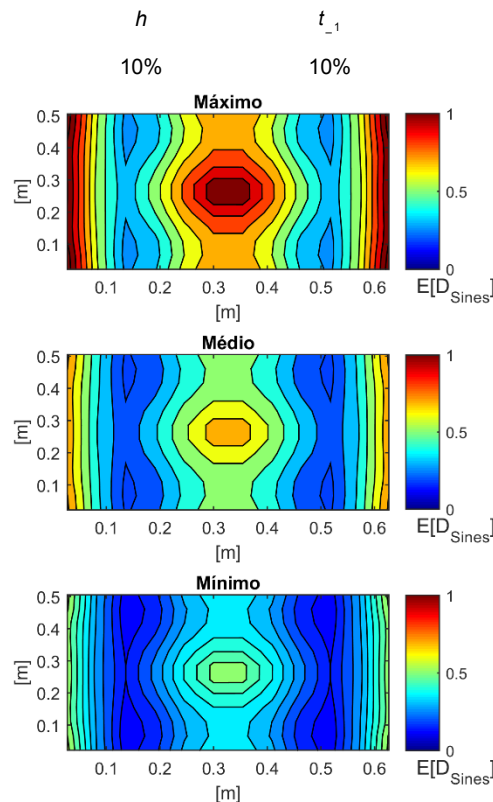


Figura 5.14 - Distribuição do índice de fadiga – segunda abordagem

Tabela 5.7 – Valores dos índices de fadiga para os elementos do centro e das bordas

Cenário	Centro		Bordas	
	Mínimo	Máximo	Mínimo	Máximo
<b>5</b>	0,6152	0,8780	0,6765	0,9692
<b>6</b>	0,5456	1,0603	0,6000	1,1688
<b>7</b>	0,5139	1,0567	0,5654	1,1638

Analisando os intervalos gerados pelos dados da Tab 5.7 nota-se que a estrutura do cenário 5 provavelmente não sofrerá falha por fadiga antes dos dois milhões de ciclos. Por outro lado, os intervalos de valores dos elementos críticos dos cenários 6 e 7 compreenderam valores maiores que 1, indicando que é possível que falhem por fadiga sob essas condições de aplicação.

Deseja-se estudar a mudança de comportamento do sistema quando foi acrescentado o limite de fadiga como variável aleatória. Para isso, o cenário 1 será comparado com os

cenários 5 e 6 e o cenário 2 será comparado com o 7. Por meio das diferenças percentuais relativas entre cada um dos casos descritos acima foram elaboradas as Tab. 5.8 e 5.9.

Tabela 5.8 – Diferenças percentuais entre os dados obtidos nos cenários 5 e 6 com o 1

	<b>Cenário 5</b>		<b>Cenário 6</b>	
	Centro	Bordas	Centro	Bordas
<b>Máximo</b>	17,56%	17,57%	41,97%	41,78%
<b>Mínimo</b>	-12,85%	-12,84%	-22,70%	-22,70%

Tabela 5.9 – Diferenças percentuais entre os dados obtidos no cenário 7 com o 2

	<b>Centro</b>	<b>Bordas</b>
<b>Máximo</b>	41,49%	41,19%
<b>Mínimo</b>	-22,69%	-22,69%

Analisando os resultados das tabelas anteriores e levando-se em conta a não ocorrência de falha dos quatro primeiros cenários e a de falha dos dois últimos, conclui-se que a consideração de efeitos aleatórios e variações nas propriedades de fadiga do material da placa teve grande impacto na estimativa da vida do sistema, mudando inclusive o resultado subjetivo da análise de falha. Portanto, isto reforça o fato da importância da consideração das incertezas durante a análise em fadiga de sistemas dinâmicos, uma vez que, como comentado anteriormente, a maioria dos parâmetros de fadiga de materiais são obtidos de ensaios experimentais que, inerentemente contêm erros de medição e/ou estimação.



## **CAPÍTULO VI**

### **CONCLUSÕES GERAIS E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS**

De uma maneira geral, pode-se concluir que o objetivo inicialmente proposto neste trabalho, relacionado à análise de fadiga de sistemas dinâmicos na presença de incertezas, foi cumprido. Portanto, tem-se disponível um conjunto de ferramentas numérico-computacionais próprias para a determinação dos elementos mais críticos sujeitos à falha em sistemas estocásticos sujeitos a carregamentos multiaxiais tanto determinísticos quanto aleatórios.

Uma importante contribuição do procedimento apresentado neste trabalho envolve a extensão da aproximação do critério multiaxial de Sines, originalmente desenvolvida para a análise de fadiga de sistemas determinísticos a partir das respostas em tensão dos mesmos, a sistemas dinâmicos estocásticos, onde as propriedades físicas e/ou geométricas são consideradas como variáveis aleatórias. Além disso, um procedimento de condensação de modelos baseado no emprego de uma base de redução constante enriquecida com resíduos estáticos dos esforços externos foi utilizado. Isto permitiu uma redução significativa do custo computacional envolvido principalmente na estimação do índice de fadiga dos sistemas estocásticos.

Num primeiro momento, considerando ainda o modelo determinístico, o interesse foi verificar a influência de alguns parâmetros na resposta em tensão do sistema. Como esperado, os resultados obtidos permitiram concluir sobre a grande influência da espessura nas respostas em tensão do sistema. Utilizando ainda o modelo determinístico, foi estimado o índice de fadiga por meio do critério de Sines. Os resultados apresentados em termos das distribuições para a malha de elementos finitos permitiu também verificar quais elementos

são os mais críticos para as condições de contorno e carregamento considerados neste trabalho.

Posteriormente foram realizados os experimentos computacionais considerando o sistema estocástico. As dispersões obtidas na resposta dinâmica aleatória por meio dos envelopes das FRFs permitiram constatar a maior influência das incertezas na espessura da placa. Posteriormente, foram gerados os envelopes das respostas em tensão, permitindo novamente verificar a grande influência das incertezas na espessura quando comparado com os parâmetros do material da placa. Nesta fase, foi possível estabelecer também os níveis máximos de tensão que a estrutura pode estar sujeita e as respectivas faixas de frequências em que ocorrem, sendo interpretados como valores indesejáveis de modo a garantir uma maior vida em fadiga.

Na sequência, foram inseridas incertezas no limite de resistência à fadiga torcional alternada da placa, baseado no fato de que este parâmetro contém erros de identificação de ensaios experimentais. Os resultados obtidos nessa análise foram de grande valia, pois permitiram concluir mais uma vez a importância de se considerar as incertezas na análise de fadiga de sistemas mecânicos.

Portanto, baseado nas inúmeras simulações numéricas realizadas neste trabalho, pode-se concluir de uma forma geral que a inclusão de incertezas num modelo determinístico visando a análise de fadiga estrutural é de grande importância, pois os resultados finais mostraram que uma condição de não falha do sistema determinístico pode se tornar uma condição de possível falha quando as incertezas são consideradas. Além disso, houve um acréscimo de mais de 40% nos valores da esperança matemática do coeficiente de Sines quando a espessura e propriedade de fadiga estavam sujeitas a um nível de incerteza de 10%, evidenciando novamente a necessidade de se realizar esse tipo de análise.

A extensão do critério de Sines para sistemas estocásticos aliada com redução de modelos foi a principal contribuição gerada nessa dissertação de mestrado. Os resultados obtidos através de programas desenvolvidos pelo autor em linguagem MatLab® geraram duas publicações em congressos internacionais de referência na área de dinâmica (Rosa e de Lima, 2015) e de incertezas (Rosa e de Lima, 2016).

## 6.1 Perspectivas de trabalhos futuros

As perspectivas futuras quanto à pesquisa e os resultados gerados nessa dissertação de mestrado são:

- estimativa da confiabilidade de um sistema mecânico (determinação da probabilidade de não-falha do sistema);
- utilização dessa metodologia aliada com técnicas de otimização para geração de projetos estruturais ótimos em termos da vida em fadiga;
- aplicação das técnicas de controle para o aumento da vida em fadiga de sistemas dinâmicos;
- continuidade do estudo de técnicas de quantificação de incertezas e modelagem estocásticas para a análise de fadiga.





## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASKELAND, D. R.; WRIGHT, W. J. **Essentials of Materials Science and Engineering**, Cengage Learning. Stamford, 2014.

ASTM. **Standard practices for cycle fatigue counting in fatigue analysis**, Designation E 1049-85, Metal Test Methods and Analytical procedure, vol. 03.(1), p. 836-848, 1985.

BENDAT, J. S.; PIERSON, A.G. **Random Data: Analysis and Measurements Procedures**. John Wiley & Sons, New Jersey, 4ª edição, 2010.

BIN LI; FREITAS, M. **A procedure for fast evaluation of high-cycle fatigue under multiaxial random loading**. Journal of Mechanical Design, vol. 124, p. 558-563, 2002.

BORESI, A. P.; CHONG, K. P.; LEE, J. D. **Elasticity in engineering mechanics**. John Wiley & Sons, New Jersey, 3ª edição, 2011.

BUDYNAS, R. G.; NISBETT, J. K. **Shigley's Mechanical Engineering Design**. McGraw-Hill, New York, 9ª edição, 2011.

CRAIG, Jr. R. R.; KURDILA, A. J. **Fundamentals of Structural Dynamics**. John Wiley & Sons, New Jersey, 2ª edição, 2006.

CROSSLAND, B. **Effects of large hydrostatic pressures on the torsional fatigue strength of an alloy steel**, International conference on fatigue of metals, London, 1956.

DANG VAN, K. **Sur la résistance à la fatigue des métaux**, Sciences et techniques de l'Armement, vol. 46, 3º fascículo, p. 641-722, 1973.

DE LIMA, A. M. G. **Modélisation et Optimisation Robuste de l'amortissement Viscoélastique de Systèmes Mécaniques**. Tese de Doutorado, Université de Franche-Comté, Besançon, 2007.

DE LIMA, A. M. G.; LAMBERT, S.; RADE, D. A.; KHALIJ, L. **Fatigue reliability analysis of viscoelastic structures subjected to random loads**, Mechanical Systems and Signal Processing, vol. 43, p. 305-318, 2014.

DE LIMA, A. M. G.; RADE, D. A.; BOUHADDI, N. **Stochastic modeling of surface viscoelastic treatments combined with model condensation procedures**, Shock and Vibration, vol. 17, p. 429-444, 2010.

DOWLING, N. E. **Mechanical Behavior of Materials: Engineering Methods for Deformation, Fracture and Fatigue**. Pearson Prentice Hall, 3ª edição. 2007.

FARIA, A. W. **Modelagem por Elementos Finitos de Placas Compostas Dotadas de Sensores e Atuadores Piezoelétricos: Implementação Computacional e Avaliação Numérica**, 152f. Dissertação de Mestrado, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, 2006.

FLORIAN, A. An efficient sampling scheme: updates Latin Hypercube sampling. **Probabilistic Engineering Mechanics**, vol. 7, p. 123-130, 1992.

Gerges, Y. **Méthodes de reduction de modèles en vibroacoustique non-linéaire**. Tese de Doutorado, Université de Franche-Comté, Besançon, 2013.

GHANEM, R.G.; SPANOS, P.D. **Stochastic Finite Elements – A Spectral Approach**. Springer Verlag, 1991.

KHALIJ, L.; PAGNACCO, E.; LAMBERT, S. **A measure of the equivalent shear stress amplitude from a prismatic hull in the principal coordinate system**, International Journal of Fatigue, vol. 32, p. 1977-1984, 2010.

KOÇER, B. **Vibration fatigue analysis of structures under broadband excitation**, Tese de doutorado, GSNAS of METU, Ankara, 2010.

KOROISHI, E. H.; CAVALINI Jr., A. A.; DE LIMA, A. M. G.; STEFFEN Jr., V. **Stochastic modeling of flexible rotors**, Journal of ABCM, vol. 34 (2), p. 574-583, 2012.

LAMBERT, S. **Contribution à l'analyse d l'endommagement par fatigue et au dimensionnement de structures soumises à des vibrations aléatoires**, Tese de doutorado, INSA de Rouen, Rouen, 2007.

LAMBERT, S.; PAGNACCO E.; KHALIJ, L. **A probabilistic model for the fatigue reliability of structures under random loadings with phase shift effects**, International Journal of Fatigue, Vol. 32, p. 463-474, 2010

MACIEL, G. P. R.; BARBOSA, R. S. **Técnicas para redução da ordem de sistemas dinâmicos na base modal**, SIMEA, Blucher Engineering Proceedings, vol. 2, 2015.

- MANTEUFEL, R. D. Evaluating the convergence of Latin Hypercube sampling. **AIAA/ASME Structures, Structural Dynamics and Materials Conference**, vol. 3, p. 100-106, 2000.
- MARIN, J. **Mechanical Behavior of Engineering Materials**, Prentice-Hal, Englewood Cliffs, N.J., 1962.
- MATAKE, K. **An explanation on fatigue limit under combined stress**, Bulletin of the Japanese Society of Mechanical Engineers, 1977.
- MATSUISHI, M.; ENDO, T. **Fatigue of metals subjected to varying stress**, Bulletin of the Japanese Society of Mechanical Engineers, 1968.
- MEIROVITCH, L. **Elements of vibration analysis**, McGraw-Hill, New York, 2ª edição, 1986.
- MINER, M. A. **Cumulative damage in fatigue**, Journal of Applied Mechanics, Transactions of ASME 12, p. 159-164, 1945.
- MOAVENI, S. **Finite Element Analysis: Theory and Application**, Prentice-Hall, 1999.
- PALMGREN, A. **Die Lebensdauer von Kugellagern**, ZVDI, vol. 68, p. 339-341, 1924.
- PAPADOPOULOS, I.V. **A high-cycle fatigue criterion applied in biaxial and triaxial out-of-phase stress conditions**, Fatigue Fracture Engineering, vol. 18, p. 79-91, 1995.
- PAPADRAKAKIS, M.; KOTSOPULOS, A. **Parallel solution methods for stochastic finite element analysis using Monte Carlo Simulation**. Computers Methods Applied Mechanics Engineering, vol. 168, p. 305-320, 1999.
- PREUMONT, A. **On the peak factor of stationary Gaussian processes**, Journal of Sound and Vibrations, vol. 100, p. 15-34, 1985.
- RAO, S. S. **Mechanical vibrations**, Prentice-Hal, Upper Saddle River, N.J., 5ª edição, 2011.
- RAO, S. S. **The Finite Element Method in Engineering**, Butterworth-Heinemann, 5ª edição, 2010.
- REDDY, J. N. **Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis**. Florida: CRC Press, 2ª edição, 1997.
- RITTO, T. G.; SAMPAIO, R.; CATALDO, E. **Timoshenko beam with uncertainty on the boundary conditions**, Journal of ABCM, vol. 30 (4), p. 295-303, 2008.
- ROSA, U. L.; DE LIMA, A. M. G. **Fatigue analysis of dynamic systems subjected to cyclic loading in the frequency domain**, Proceeding of 23rd ABCM International Congress of Mechanical Engineering, COBEM, Rio de Janeiro, RJ, 2015.

ROSA, U. L.; DE LIMA, A. M. G. **Fatigue analysis of stochastic systems subjected to cyclic loading in the frequency domain**, Proceedings of the 3rd International Symposium on Uncertainty Quantification and Stochastic Modeling, UNCERTAINTIES, Maresias, SP, 2016.

RUBINSTEIN, R. Y. **Simulation and the Monte Carlo Method**, John & Wiley & Sons, 1981.

SCHUELLER, G. I. **Computational stochastic mechanics - recent advances**, Journal of Computers and Structures, vol. 79, p. 2225-2234, 2001.

SINES, G. **Behavior of metals under complex stresses**, Metal Fatigue, McGraw-Hill, New York, 1959.

SOIZE, C. **A nonparametric model of random uncertainties for reduced matrix models in structural dynamics**, Probabilistic Engineering Mechanics, Elsevier, vol. 15 (3), p. 277-294, 2000.

STEFANOU, G. **The stochastic finite element method: Past, present and future**, Computational Methods Applied Mechanical Engineering, vol. 198, p. 1031-2051, 2009.

TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. N. **Theory of elasticity**, McGraw-Hill, New York, 1951.

WEBER, B. **Fatigue multiaxiale des structures industrielles sous chargement quelconque**, Tese de doutorado, INSA de Lion, Lion, 1999.