UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

CAROLINA INNOCENTE RODRIGUES

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE FRAÇÕES NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL A PARTIR DA TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL

Uberlândia
2015

CAROLINA INNOCENTE RODRIGUES

UMA PROPOSTA DE ENSINO DE FRAÇÕES NO 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL A PARTIR DA TEORIA HISTÓRICO-CULTURAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática

Orientadora**:** Profª. Drª. Fabiana Fiorezi de Marco

Uberlândia
2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

R696u
2015

Rodrigues, Carolina Innocente, 1983-
Uma proposta de ensino de frações no 6º ano do ensino fundamental a partir da teoria histórico-cultural / Carolina Innocente Rodrigues. - 2015.
132 f. : il.

Orientador: Fabiana Fiorezi de Marco.
Dissertação (mestrado profissional) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.
Inclui bibliografia.

1. Ciência - Estudo e ensino - Teses. 2. Matemática (Ensino fundamental) - Estudo e ensino - Teses. 3. Matemática - Prática de ensino - Teses. 4. Professores de matemática - Formação - Teses. I. Marco, Fabiana Fiorezi de. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. III. Título.

CDU: 50:37

FOLHA DE APROVAÇÃO

Carolina Innocente Rodrigues

Uma proposta de ensino de frações no 6º ano do ensino fundamental a partir da Teoria Histórico-Cultural

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Área de concentração: Ensino de Matemática

Aprovado em: ____/____/____

Banca Examinadora:

Profª. Drª. Fabiana Fiorezi de Marco Assinatura: ____________________________

Instituição: Universidade Federal de Uberlândia

Profª. Drª. Maria Teresa Meneses Freitas Assinatura: ____________________________

Instituição: Universidade Federal de Uberlândia

Profª. Drª. Rute Cristina Domingos da Palma Assinatura: ____________________________

Instituição: Universidade Federal do Mato Grosso

Dedico este trabalho aos meus pais, Claudio e Vilma, às minhas irmãs, Natalia e Giovana, pelo amor, apoio e participação integral em minha vida.

AGRADECIMENTOS

À querida e dedicada orientadora Prof.ª Dr.ª Fabiana Fiorezi de Marco, pelo acolhimento, carinho e ensinamentos durante esta jornada, que não se limitou apenas a questões acadêmicas. Em diversos momentos, me senti protegida e forte por suas palavras e gestos de preocupação.

Aos meus pais, Claudio e Vilma, me faltam palavras para expressar tudo que sinto por eles. Devo-lhes toda minha força para seguir em frente, por me apoiarem as minhas ideias malucas. Faço o melhor que posso para honrar a educação que me deram.

Às minhas "imãlis", Natalia e Giovana, por aguentarem todas as minhas chatices e manias, por partilharem momentos divertidíssimos e difíceis em minha vida. Em especial, à Giovana, por presentear a nossa família com sua vinda e nos mostrar que somos mais fortes juntos e que devemos lutar por nossas vidas, assim como ela o faz em todos os seus dias. "Somos muito vida loka!"

Tenho, como presente de Deus, não ter apenas uma família consanguínea maravilhosa, mas também uma espiritual. Aos meus irmãos Jefferson, Laiz e Michelly, por me compreenderem de um modo especial, pelo amor, pelas broncas e pela parceria.

À minha eterna inspiradora Prof.ª Dr.ª Maria do Carmo Sousa, por me incentivar a fazer parte do grupo que sempre faz um "trabalho de formiguinha" em favor do ensino de Matemática de qualidade no Brasil.

À Escola Municipal Odilon Custódio Pereira, aos gestores, Bruno e Márcia, por me possibilitarem o desenvolvimento desta pesquisa. Aos meus alunos, que carinhosamente chamo de meus filhos, por embarcarem nesta viagem comigo, o "nosso Egito é muito maneiro" mesmo!

À Prof.ª Dr.ª Rute Cristina Domingos de Palma, pela leitura atenciosa e valiosas contribuições e, à Prof.ª Dr.ª Maria Teresa Menezes Freitas, por me acompanhar nas disciplinas que ministrou e pelas sugestões em minha pesquisa.

Não poderia deixar de dedicar minha pesquisa à Alexis Nikolaevich Leontiev, Vasily Vasilovich Davydov e Manoel Oriosvaldo de Moura por todos os estudos que fazem parte do que sou, hoje, enquanto professora-pesquisadora e por tantos outros estudos que estão por vir.

Aos meus meninos, meus bichinhos lindos, Príncipe, Peperone, Pinga e Nenê que sempre me fazem companhia e deixam meus dias mais felizes.

Esta pesquisa de mestrado tem uma marca especial por acompanhar muitas mudanças que aconteceram desde 2012 em minha vida.

Se, hoje, sinto-me tranquila e segura quanto ao trabalho desenvolvido, foi porque tive muitas distrações em momentos que me desesperava pensando que o tempo não seria suficiente, que não estava fazendo o melhor possível ou que nada iria dar certo. Agradeço, então, às minhas distrações preferidas: Harry Potter, Bob Esponja, Just Dance, Jorge e Matheus e comes e bebes com meus amigos.

À Santiago de Chile, por me proporcionar um passeio realmente Histórico-Cultural. Saudades! Ainda voltarei para poder ler e desfrutar de alguns manuscritos de Davydov que lá encontrei na Biblioteca Nacional de Chile.

Termino esses agradecimentos sem muitas formalidades e sendo eu mesma...

Vai, Corinthians!

RESUMO

Neste texto, é apresentada a pesquisa desenvolvida no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, na qual pretendeu-se responder a pergunta: como as atividades orientadoras de ensino podem auxiliar para a aprendizagem do conceito de frações para estudantes do 6º ano do ensino fundamental? Os objetivos desta pesquisa foram: a) investigar se o uso da História da Matemática nas atividades de ensino pode auxiliar a aprendizagem de estudantes de 6º ano no conceito de fração; b) investigar se os nexos conceituais da fração possibilitam que os estudantes desenvolvam um pensamento teórico e, c) investigar se atividades de ensino refletem no saber pensar e saber fazer do estudante. Foram desenvolvidas cinco atividades de ensino (MOURA, 2002), na perspectiva da Atividade Orientadora de Ensino (AOE), e tiveram como objeto de estudo o ensino de frações para estudantes do 6º ano do ensino fundamental. Esta pesquisa qualitativa caracteriza-se como um estudo de caso por meio de uma AOE. Tais atividades, para efeito de análise, foram organizadas em episódios e cenas (MOURA, 2004) e discutiu-se como os estudantes lidam com a medição de quantidades inteiras (todo) e subunidades (parte) e como as representam na linguagem verbal ou escrita. Espera-se que a pesquisa se configure como uma importante contribuição à área do ensino de Matemática, podendo trazer benefícios com a formação inicial e continuada de professores de Matemática e com a formação do pensamento teórico de estudantes do ensino fundamental.

Palavras-chave: Ensino de Matemática. Frações. Teoria Histórico-Cultural. Atividade Orientadora de Ensino.

ABSTRACT

This text presents developed in the Graduate Program in Science and Mathematics Education at the Federal University of Uberlândia, in which it was intended to answer the question: What are the pedagogical implications for the fractions concept learning for students of the 6th grade of elementary school that the teaching guide activities can provide? The objectives of this research were: a) analyze the possible pedagogical implications for the learning of the fraction's concept for students of the 6th grade of elementary school through guiding teaching activities; b) using the conceptual connections of the fraction to enable students to develop an abstract thought and c) investigate whether guiding teaching activities reflect on 'how to think' and 'how to do' of the student. Five teaching activities have been developed (MOURA, 2002) from the perspective of teaching guiding activity (TGA) and had as object of study the teaching of fractions for students in 6th year of elementary school. They have been prepared and proposed activities in which it was intended to investigate the use of history of mathematics as an aid in learning the conceptual fraction links (CARAÇA, 1951) by students. Such activities, for analysis, were organized into episodes and scenes (MOURA, 2004) and discussed how students deal with the measurement of whole quantity (all) and subunits (part); how they represent in verbal or written language. It is hoped that the research is set up as an important contribution to mathematics teaching area and may contribute to the initial and continuing training of mathematics teacher sand the formation of theoretical thinking of elementary school students.

Keywords: Mathematical Teaching. Fractions. Cultural Historical Theory. Teaching Guiding Activity

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Cúbito egípcio 24
Figura 2: Segmentos de reta 29
Figura 3: Diferenças entre números fracionários discutidas pelo PCN (BRASIL, 1998) 32
Figura 4: Sujeito em atividade 47
Figura 5: AOE: relação entre atividade de ensino e atividade de aprendizagem 50
Figura 6: Movimento entre atividade de ensino e estudantes 51
Figura 7: Movimento entre estudantes ao vivenciar uma atividade de ensino 52
Figura 8: Movimento da professora-pesquisadora sobre os estudos teóricos realizados para a pesquisa 55
Figura 9: Panorama de divisão de terras antes da negociação 75
Figura 10: Panorama de divisão de terras depois da negociação 75
Figura 11: Desenho sobre a visualização da família 6 em relação à organização do Egito na Atividade 1 82
Figura 12: Desenho sobre a visualização da família 6 em relação à organização do Egito na Atividade 4 83
Figura 13: Representação do segmento da reta numérica 92
Figura 14: Representação do segmento da reta numérica sugerido pela estudante Maria do Carmo 92
Figura 15: Sugestão de Cirilo para representação de um meio no segmento da reta numérica 93
Figura 16: Sugestão de Vitão para representação da divisão do segmento de reta em dezesseis partes 93

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Dados dos livros didáticos analisados 33
Quadro 2: Análise das propostas sobre o ensino de frações nos livros didáticos 35
Quadro 3: Particularidades dos pensamentos empírico e teórico 45
Quadro 4: Paralelo entre as diferentes naturezas de atividade 50
Quadro 5: Modelo de quadro utilizado para organização dos registros dos estudantes na Atividade 5 70
Quadro 6: Atividades de ensino, episódios e cenas da pesquisa 74
Quadro 7: Sequência de fotos do procedimento de medição de inteiros e sobras da família 1 78
Quadro 8: Organização dos dados – sugestão dos estudantes 86
Quadro 9: Medidas descritas pelos estudantes em seus registros na Atividade 1 86
Quadro 10: Primeira adequação de registros de acordo com as ações mediadoras e sugestão dos estudantes 87
Quadro 11: Segunda adequação de registros de acordo com as ações mediadoras e sugestão dos estudantes 88
Quadro 12: Terceira adequação de registros de acordo com as ações mediadoras e sugestão dos estudantes 89
Quadro 13: Última adequação de registros de acordo com as ações mediadoras e sugestão dos estudantes 90
Quadro 14: Paralela entre caçada coletiva primitiva (LEONTIEV, 1978) e cena 2 95

LISTA DE SIGLAS

AOE: Atividade Orientadora de Ensino

E.F.: Ensino Fundamental

PCN: Parâmetros Curriculares Nacionais

PNLD: Programa Nacional do Livro Didático

MMC: Mínimo Múltiplo Comum

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO 19

CAPÍTULO I: NÚMEROS RACIONAIS NA FORMA FRACIONÁRIA 23

1.1. A fração na história da Matemática 23

1.2. Nexos conceituais da fração 27

1.3. O PCN e os livros didáticos: uma discussão sobre o ensino de frações 31

1.4. As diferentes interpretações da fração 37

1.4.1. A fração como medida 37

1.4.2. A fração como quociente 38

1.4.3. A fração como razão 39

1.4.4. A fração como operador 40

CAPÍTULO II: PENSAMENTO TEÓRICO E EMPÍRICO, TEORIA DA ATIVIDADE E ATIVIDADE DE ENSINO 42

2.1. Do pensamento teórico ao pensamento empírico 42

2.2. Atividade: de Leontiev à Moura 46

2.3. Ação mediadora 53

CAPÍTULO III: DESENVOLVIMENTO DA PROPOSTA 56

3.1. Conhecendo as turmas 58

3.1.1. Turma A – Escola 1 58

3.1.2. Turma A – Escola 2 59

3.1.3. Turma B – Escola 2 60

3.2. As famílias 60

3.3. Atividades de ensino desenvolvidas nesta pesquisa 62

CAPÍTULO IV: EPISÓDIOS E CENAS: UMA ANÁLISE DAS ATIVIDADES DE.......... 74

Episódio 1: Visitando o Egito Antigo 74

Episódio 2: Equivalências de frações: utilizando as medidas do Egito Antigo 85

CONSIDERAÇÕES FINAIS 97

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS 103

ANEXOS 107
ANEXO 1 107
ANEXO 2 116
ANEXO 1 127

INTRODUÇÃO

> [...] é preciso apresentar à criança obstáculos a transpor, e obstáculos que ela queira transpor. Na falta deles, a educação perderá todo seu sabor, não será mais do que alimento insípido e indigesto.
>
> Jean Chateau

Esta pesquisa se insere em um movimento de busca e investigação por alternativas e estratégias de ensino e de necessidade de abordar o conceito de frações com estudantes do 6º ano do ensino fundamental de uma escola pública municipal de Uberlândia (MG). Esta necessidade surge a partir dos anos de prática docente com o ensino de Matemática de 6º a9º anos do ensino fundamental, em que é possível perceber que os estudantes apresentam diversas dificuldades em compreender o conceito de fração e que, em alguns casos, os professores atribuem essas dificuldades, principalmente, a não compreensão por completo dos números naturais e as operações bases (adição, subtração, multiplicação e divisão).

Para atender às exigências da sociedade e das esferas governamentais que regem as leis referentes à educação, aos professores são atribuídas inúmeras responsabilidades que diferem por muitas vezes do real papel do professor e de suas crenças em relação ao ensino. Por esta razão, Prado (2000) aponta que os professores se encontram num estado de imobilismo, demonstrado pelo fato de abandonarem seus projetos e retornarem aos livros didáticos convencionais. Entendemos que este movimento faz com que as várias abordagens de ensino de Matemática que se distanciam do tradicional não permaneçam em sala de aula.

Temos, então, a importância da relação entre pesquisa e ensino, em que há a necessidade de conhecer o desconhecido, como forma de construção do conhecimento do professor e, por consequência, do estudante, uma vez que o professor pesquisador poderá refletir e adequar o ensino aos seus estudantes, refletindo sobre a realidade encontrada como também sobre o contexto escolar e social. Sendo assim, pesquisar sobre o ensino e a aprendizagem do conceito de frações nos proporciona a oportunidade de entender como um conjunto de conhecimentos pode ser aperfeiçoado para além de técnicas e procedimentos de ensino, mas, para isto, é necessário que o conteúdo faça sentido para professor e estudante (DAVYDOV, 1982).

Quando um estudante nos questionou, durante as propostas desta pesquisa, que: “se a fração também pode ser interpretada como divisão, então, por qual motivo não a escrever conforme o algoritmo da divisão?”, esta pergunta nos demonstrou que a representação fracionária pode ser apenas interpretada como divisão para o estudante. Inferimos a ela o caráter de mais um problema de aprendizagem na Matemática. Deste modo, ressaltamos que quando no ensino deste conteúdo, o número fracionário é tratado apenas como um operador, uma divisão, este conhecimento é entendido em sua superficialidade, pois demonstra apenas o atributo externo e, um dos objetivos nesta pesquisa, é justamente abordar os atributos internos da fração, ou seja, os nexos conceituais.

Na contramão do imobilismo, esta pesquisa propõe abordar o ensino de frações, utilizando seus nexos conceituais (CARAÇA, 1951), afastando-nos do ensino que permeia o pensamento empírico apenas, mas abordando o pensamento teórico do conceito (DAVYDOV, 1982). Nossa proposta é colocar os estudantes em atividade (LEONTIEV, 1978; 1983 e MOURA, 2000; 2002) para que possamos alcançar nossos objetivos.

Assim como outros conteúdos, o ensino de números fracionários tem se restringido à operação, mais especificamente, à divisão. Autores, como Caraça (1984), Aleksandrov *et al* (2003), Moura (2004), Lima (1998a), Prado (2005), Catalani (2002), abordam o fato de que não é suficiente para a compreensão do conceito de fração situar-se apenas na ideia de divisão e que os conceitos de medida e grandeza ajudam o desenvolvimento do pensamento, emancipando-o da mecânica, ou seja, do saber fazer operacional (LIMA, 1998b).

Com esta pesquisa, elaboramos e propusemos diversas atividades de ensino (MOURA, 1996) sobre o conceito de fração, que abordam os nexos conceituais da fração (medida e grandeza) (CARAÇA, 1951; 1984), diferentes interpretações para a fração, representação e equivalência. A reunião destas atividades, a unidade didática, compõe o produto desta pesquisa divulgado por meio de artigos e cursos de formação para professores. Porém não temos a intenção de difundir uma “receita de como ensinar frações”, mas de discutir e refletir o que os estudos apontam para uma melhoria de nossa prática.

A pesquisa se realizou em uma escola da rede municipal de ensino de Uberlândia/MG e para poder contribuir com o processo de ensino e aprendizagem e trazer as respostas obtidas no dia a dia para discussões, estudos e análises procurou-se investigar a questão: *como as atividades orientadoras de ensino podem auxiliar para a aprendizagem do conceito de frações para estudantes do 6º ano do ensino fundamental?*

Na Teoria Histórico-Cultural[1], estão baseadas as referências teóricas e metodológicas para nosso estudo e análise dos dados. Segundo Marco (2009, p.22) no referencial teórico que adotamos, *o homem, ao produzir conhecimento, modifica seu meio e modifica-se.* Com base nesta premissa, como **objetivo principal** desta pesquisa, procuramos analisar possíveis contribuições das atividades orientadoras de ensino para a aprendizagem do conceito de fração para estudantes do 6º ano do ensino fundamental. E, como **objetivos específicos**, pretendemos:

- investigar se o uso da História da Matemática nas atividades de ensino pode auxiliar a aprendizagem de estudantes de 6º ano no conceito de fração;
- investigar se os nexos conceituais da fração possibilitam que os estudantes desenvolvam um pensamento teórico;
- investigar se as atividades de ensino refletem no saber pensar e saber fazer do estudante.

Para que possamos atingir nossos objetivos, este trabalho está configurado da seguinte forma:

No capítulo 1, discutimos sobre o surgimento da fração no Egito Antigo e suas relações com os nexos conceituais (CARAÇA, 1951). Discutimos também como as propostas do ensino de frações vêm sendo apresentadas nos livros didáticos e Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (BRASIL, 1998) e, finalizamos o capítulo com as diferentes interpretações da fração que podem ser conferidas aos números racionais sob forma fracionária.

No capítulo 2, temos os aportes teóricos da teoria histórico-cultural adotada nesta pesquisa, destacando sobre o pensamento teórico x pensamento empírico, teoria da atividade (LEONTIEV, 1978; 1983) e sua relação com atividade orientadora de ensino (MOURA, 2000; 2002).

Apresentamos no capítulo 3, a metodologia da pesquisa, como a nossa proposta para o ensino de frações se desenvolveu, as descrições das atividades, os instrumentos escolhidos e utilizados e uma breve apresentação dos participantes desta pesquisa.

No capítulo 4, constam as análises dos episódios das atividades, em que destacamos

[1] Dentre os autores que representam a teoria histórico-cultural, temos por base Vygotsky. No que se refere à teoria da atividade, Leontiev (1978, 1983, 2001) e Davydov (1982, 1987) e os autores que nela se fundamentam, como Moura (1996, 2000, 2002) e Lanner de Moura et al. (2004a; b) para caracterizar atividade orientadora de ensino.

cenas que nos permitem compreender todo o movimento do processo percorrido e nos dão a possibilidade de responder nossa pergunta norteadora.

Temos como intuito que esta pesquisa se configure como uma importante contribuição à área de educação Matemática, pois integra o contexto de ensino de fração para o ensino fundamental, podendo contribuir com a formação inicial e continuada de professores de Matemática, criando uma situação de aprendizagem na qual estudantes e professores possam vivenciar momentos de elaboração, exploração e (re)significação do conceito matemático de fração.

Capítulo 1. Números racionais na forma fracionária

1.1. A Fração na História da Matemática

> Encontramo-nos com um novo conjunto numérico – o conjunto dos números racionais, ou campo racional – que compreende o conjunto dos números inteiros e mais o formado pelos números fracionários; estes são, de fato, os números novos.
> (CARAÇA, 1951, p.36)

Partindo da Teoria Histórico-Cultural, com Perlin e Lopes (2013), entendemos a escola como o local social privilegiado para a apropriação dos conhecimentos historicamente produzidos pela humanidade.

Frente a este entendimento, julgamos importante que seja realizado em sala de aula resgates históricos sobre acontecimentos e conceitos matemáticos para que, possivelmente, ocorra uma melhor compreensão destes. Assim, buscamos melhor compreender o movimento histórico que originou o conceito de fração para que pudéssemos desenvolver nossa proposta.

Nesta busca, encontramos Lanner de Moura *et al* (2004b) que alegam que,

> As primeiras atividades produtivas do homem primitivo estavam efetivamente relacionadas a sua sobrevivência imediata. A agricultura e a pecuária, que substituem a coleta e a caça, passam a ser as atividades que mais ocupam os homens e as que mais problemas colocam. Na superação destes problemas o homem vai criando instrumentos e uma complexa rede de ideias que passam a fazer parte de sua forma de compreender o mundo, de sua humanidade[2] (LANNER DE MOURA *et al*, 2004b).

A literatura nos leva a entender que, para sobreviver, os nômades, perambulavam por diversas regiões e passaram a se refugiar às margens dos rios, já que esses redutos facilitavam o plantio e criação de animais. Em detalhe, nos atentaremos à civilização egípcia, que se desenvolveu às margens do rio Nilo e contava com os referidos elementos.

> [...] os egípcios criaram seu próprio sistema de escrita, os hieróglifos. Foi com os sumérios e egípcios que nasceu a História, ou seja, o registro escrito dos acontecimentos através do tempo (GARBI, 2007, p.7).

[2] LANNER DE MOURA, A. R. et al. Repensando Conceitos Fundamentais da Matemática. Formação Continuada de Professores. Campinas, SP. 2004.

Os egípcios iniciaram o desenvolvimento de sua Matemática de forma indutiva, basicamente, para finalidades práticas, a exemplo da agrimensura, arquitetura e obras de irrigação (EVES, 2004).

Surge, então, a necessidade dos egípcios de dividir essas terras para terem controle das áreas e originar as cobranças de impostos. Por consequência, apareceram algumas dificuldades para que tal divisão ocorra: como fazer essa divisão de maneira justa à todas as famílias que ali estavam? Como lidar com os períodos de cheia do Rio Nilo, quando as famílias tinham prejuízo no lote de suas terras? Foram estas algumas das questões que emergiram.

Eves (2004), afirma que essa necessidade gerou mudanças culturais e uma dessas mudanças foi a escrita, pois no caso da atividade agrícola em desenvolvimento *requeria não só cooperação e a arte da engenharia como também, igualmente, um sistema de preservação de registros* (EVES, 2004, p.53).

Garbi (2007), em seu livro "A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática", traz uma passagem datada de V a.C. escrita por Heródoto sobre os egípcios, que faz referência à necessidade de divisão de terras e arrecadação de impostos:

> Esse faraó (Sesóstris) realizou a partilha das terras, concedendo a cada egípcio uma porção igual, com a condição de ser-lhe pago todos os anos certo tributo; se o rio carregava alguma parte do lote de alguém, o prejudicado ia procurar o rei e expor-lhe o ocorrido. O soberano enviava agrimensores para o local para determinar a redução sofrida pelo terreno, passando o proprietário a pagar um tributo proporcional ao que restara. Eis, ao que me parece a origem da Geometria, que teria passado do Egito para a Grécia (GARBI, 2007, p.12).

Nesta necessidade de partilha de terras e registros escritos, surge mais uma dificuldade: como medir essas terras? Qual unidade de medida adotar?

Para resolver este problema, concebido em 2000 a.C., durante milhares de anos, o cúbito egípcio (Figura 1) foi uma unidade de medida padrão. Um cúbito egípcio se estendia do cotovelo até a ponta dos dedos do faraó da época, medindo aproximadamente 524mm, e se subdividia em 28 partes, ou seja, deriva de partes do corpo humano, e serviu, com estas características, convenientemente, por séculos, na medição de terras (LIMA *et al*, 1998a).

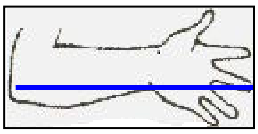


Figura 1: Cúbito egípcio

De acordo com Childe (1975), a escolha do cúbito deve-se a princípio por ser um objeto natural, como unidades pessoais de comprimento. Para o trabalho social que exige maior precisão, era preciso estabelecer uma única unidade de medida, no caso o cúbito (que é um múltiplo do palmo), especificamente do faraó por ser a entidade de maior referência no Egito Antigo. E, assim, as medidas utilizando o cúbito eram expressas da seguinte forma: *Uma rampa de 730 cúbitos de extensão, 55 cúbitos de largura*... (CHILDE, 1975, p.193).

Outra dificuldade surgida na época foi: o que fazer com a sobra[3]? Apesar da unidade padrão (cúbito egípcio), medir precisamente a sobra ainda era um problema. Sobre este aspecto, Patrono (2011) relata que,

> No Egito antigo, por volta de 2000 a.C., as inundações do rio Nilo tinham grande importância na vida dos agricultores. Quando as águas baixavam, deixavam as terras férteis para o plantio. De acordo com o avanço do rio, os limites eram estabelecidos e as terras distribuídas. A unidade de medida usada pelos agrimensores não era adequada para representar o número de vezes em que as terras eram divididas. Foi então que os egípcios criaram um novo tipo de número: o número fracionário (SCIPIONE, 2002, *apud* PATRONO, 2011, p.18).

Patrono (2011) ainda explica como era esse novo tipo de número:

> Eles trabalharam com as frações unitárias e desenvolveram a ideia de fração como parte de um todo, frações quaisquer como somas de frações unitárias, soma de frações por simples superposição e divisão de produto pelo inverso do divisor (PATRONO, 2011, p.19).

Apesar dos registros históricos, o surgimento da fração, a partir da medida, era impreciso. O desenvolvimento da sociedade egípcia com sua organização econômica, por meio de inventos, ferramentas e o desenvolvimento da escrita, mostram *que tanto a ideia de fração como sua notação surgem exatamente nos grandes vales aluviais do Nilo e no sistema Tigre-Eufrates com o desenvolvimento de culturas mais avançadas durante a idade do Bronze* (CATALANI, 2002, p.78).

> Os egípcios indicavam as frações (com numerador 1) por um sinal sobre o denominador, que pode ser representado em nossa notação por um risco. [...]. Seria, evidentemente, difícil, com esta notação, escrever $\frac{2}{5}$ ou $\frac{7}{10}$. E, na verdade, os egípcios jamais escreveriam essas frações. Sempre as representaram como uma soma de frações, com o numerador 1, ou, como diríamos, como partes alíquotas, exceto que $\frac{2}{3}$podia ser introduzido na série. Nossos exemplos são, assim resolvidos como se segue: $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ ou na notação egípcia$\overline{3} + \overline{15}$ e$\frac{7}{10} = \frac{2}{3} + \frac{1}{30}$. Foram

[3]Quando se diz sobra, faz-se referência as subdivisões da unidade. Como explicou Patrono (2011), os egípcios utilizavam a ideia da parte de um todo, logo, essas sobras são partes de um todo.

> compiladas tábuas dando a resolução correta de todas as frações cujo numerador é 2, e cujo denominador é um número ímpar, de 3 a 101. A primeira parte do Papiro Rhind expõe essa tábua, com o "desenvolvimento". [...]. Os egípcios não haviam, portanto, compreendido que as frações estavam sujeitas precisamente às mesmas regras dos números inteiros. Essa incapacidade se deve primeiramente à sua técnica primitiva de cálculo; a divisão realizada no plano egípcio resulta automaticamente apenas numa série de partes alíquotas. A notação defeituosa contribuía para perpetuar tal processo (CHILDE, 1975, p.196 e 197).

De acordo com Childe (1975), a escrita fracionária não era registrada primeiramente com numerais, mas exclusivamente com palavras. Podemos afirmar que a representação fracionária passa também pelos estágios, caracterizado por Nesselman, em 1842, relatado por Eves (2004), como os três estágios do desenvolvimento da notação algébrica:

i. <u>Álgebra retórica:</u> os argumentos das resoluções são escritos em "prosa pura", sem abreviações ou símbolos;
ii. <u>Álgebra sincopada:</u> foram adotadas abreviações para algumas quantidades e operações que se repetem frequentemente;
iii. <u>Álgebra simbólica:</u> como uma "taquigrafia matemática", formada de símbolos que aparentemente nada tem a ver como que representam.

Ao estudarmos a história do surgimento da fração no Egito, pudemos entender que os registros não nos dão todas as informações para explicarmos, por exemplo, por que o cúbito era subdividido em 28 partes, de acordo com as partes do corpo; por quanto tempo perdurou o uso do cúbito do faraó como medida. Contudo, fica possível compreender que a medida foi ponto preponderante para que iniciasse a discussão da relação da parte com o todo, o que fazer com as sobras e que esse processo era necessário para a vida e trabalho social dos egípcios.

Nesta via, consideramos importante compreender o lógico-histórico na Matemática, que poderá ser percebido em diversas atividades de ensino desenvolvidas nesta pesquisa. O lógico-histórico no pensamento humano assume um movimento fluente, pois *conecta o singular à totalidade, os nexos internos aos nexos externos do conceito, o pensamento flexível aos pensamentos empírico-discursivo e teórico* (SOUSA, 2004, p.52).

Essas conexões são necessárias, pois a todo tempo nos questionamos sobre a natureza da Matemática e, por consequência, seus conteúdos, afinal, a Matemática foi inventada ou descoberta? De acordo com Caraça (1984), a Matemática é uma invenção que teve como ponto de partida o labor humano.

Ao discorrer sobre o assunto, Panossian (2014) cita Kopnin (1978) para explicitar esse movimento fluente entre o pensamento (lógico) e o mundo objetivo (histórico):

> O lógico reflete não só a história do próprio objeto como também a história do seu conhecimento. Daí a unidade entre o lógico e o histórico, ser premissa necessária para a compreensão do processo de movimento do pensamento, da criação da teoria científica. [...]. A unidade entre o lógico e o histórico é premissa metodológica indispensável na solução de problemas de inter-relação do conhecimento e da estrutura do objeto e conhecimento da história de seu desenvolvimento. (KOPNIN, 1978, p.186 *citado por* PANOSSIAN, 2014, p.80)

Assumimos que, para o desenvolvimento desta pesquisa, também é indispensável a unidade entre o lógico e o histórico, pois, para que fosse possível aos estudantes a compreensão dos nexos internos e externos da fração, recorremos ao surgimento da fração no Egito.

1.2. Nexos Conceituais da Fração

A fração pode ser entendida pelo menos de duas formas: como técnica operatória, ou como linguagem, pensamento, criatividade e leitura do mundo. *Por ela passam múltiplos nexos históricos, geográficos, geométricos, filosóficos, culturais, físicos, químicos, literários, artísticos etc. É isto que faz da fração a melhor parte do inteiro* (LIMA, 1998a, s/n). Nesse sentido,

> Como compreender o pensamento fracionário? Vamos organizar nosso *movimento de aprendizagem* do conceito de fração, estudando quatro momentos que se apresentam na construção desse conceito: *o da oposição entre a parte da natureza que vem organizada em unidades naturais e a que se apresenta em continuidade; o da prática da geometrização da terra; a idéia de medição e o da história de uma ferramenta de trabalho* (LIMA, 1998b). Assim, consideraremos dois nexos conceituais: senso de grandeza e medida.[4]

Antes de discorrermos sobre os nexos conceituais da fração, há a necessidade de entendermos o que são nexos conceituais:

> Fundamentando-nos em Caraça (2000) podemos afirmar que os conceitos contêm dois aspectos: o simbólico e o substancial. Assim, os nexos conceituais são elos de ligação entre o pensamento empírico-discursivo e o pensamento teórico estudados

---

[4] Texto coletivo elaborado por Anna Regina Lanner de Moura, Manoel Oriosvaldo de Moura, Domicio Magalhães Maciel; Elaine S. Araujo, Erica Moreira Ferreira, Fabiana Fiorezi de Marco, Maria do Carmo de Sousa, Maria Elisa M. Bernardes, Micheline Kanaan, Silvia C. A. Tavares, Wellington L. Cedro tendo como referências os textos de Luciano Castro Lima & Roberto P. Moisés.

> por Davydov (1982). Os conceitos contêm nexos internos e externos. Os nexos externos estão ligados à linguagem, ao simbólico e os nexos internos estão relacionados ao lógico-histórico do objeto estudado. Os nexos internos representam o aspecto substancial do conceito (LANNER DE MOURA & SOUSA, 2004a, s/n).

Em conformidade com as ideias de Caraça (1951), Catalani (2002, p.74), ao citar Lefebvre (1995), destaca a importância de compreender e apreender as conexões internas no estudo de algo e, assim, *captar suas transições* e *seus aspectos contraditórios*. E mais, como citado por Catalani (2002, p.74), Lefebvre (1995) afirma que *tudo está ligado a tudo e o processo de aprofundamento do conhecimento é infinito*. Portanto, foi fundamental para o desenvolvimento desta pesquisa o conhecimento da história da fração para que fossem mais bem compreendidos os nexos conceituais deste número racional, representado por meio da fração, além de estarmos atentos aos nexos internos do conceito de fração.

É comum encontrar em livros didáticos e propostas pedagógicas a fração como uma divisão. Entendemos que esta visão está relacionada ao nexo externo da fração, sendo uma linguagem que representa este número racional.

Caraça (1951; 1984), em seus estudos, defende que os nexos conceituais da fração são a medida e a grandeza, numa visão em que o pensamento abstrato é privilegiado. Desta forma,

> <u>Medir</u> e <u>contar</u> são as operações cuja realização a vida de todos os dias exige com maior frequência. A dona de casa ao fazer as suas provisões de roupa, o engenheiro ao fazer o projeto de uma ponte, o operário ao ajustar um instrumento de precisão, o agricultor ao calcular a quantidade de semente a lançar à terra de que dispõe, toda a gente, nas mais variadas circunstâncias, qualquer que seja a sua profissão, tem necessidade de medir. Mas o que é – <u>medir</u>? Todos sabem em que consiste o <u>comparar duas</u> grandezas da mesma espécie – dois comprimentos, dois pesos, dois volumes, etc. (CARAÇA, 1984, p. 29 – grifos do original).

Temos, então, a definição de medir e, portanto, de medida sendo esta uma comparação entre duas grandezas de mesma espécie e que, segundo Caraça (1951), no problema da medida existem *três fases e três aspectos distintos – <u>escolha</u> da unidade; <u>comparação</u> com a unidade; <u>expressão</u> do resultado dessa comparação por um número*. (CARAÇA, 1951, p.30 – grifos do original).

Mas afinal, o que é grandeza? Para esta pergunta, tomemos a explicação de Lima *et al* (1998a):

> Todas as coisas da natureza têm dois aspectos: qualidade e quantidade. As ovelhas dos pastores têm várias qualidades: elas são pesadas, são mansas, balem, tem altura e etc. Cada uma das suas <u>qualidades</u> possui <u>quantidade</u>. Cada <u>quantidade</u> varia apresentando-se numa **grandeza**. Todas as coisas podem apresentar uma grandeza maior ou menor de temperatura: todos os objetos possuem uma temperatura.O técnico de basquete precisa de jogadores com diferentes características, mas que

> tenham uma qualidade comum – altura – para montar um bom time. Esta qualidade se apresenta numa quantidade que varia de atleta para atleta. Todos os seres e corpos da natureza são diferentes entre si e possuem múltiplas qualidades. Algumas destas qualidades são comuns a diferentes seres e corpos. Esta qualidade corresponde a uma quantidade. Toda quantidade se apresenta sempre numa dada **grandeza**. **Grandeza** é a variação da quantidade de uma qualidade comum a vários corpos. A grandeza se refere ao movimento quantitativo de uma certa qualidade que é comum a diferentes elementos da natureza (LIMA *et al*, 1998a, p.102 – grifos do original).

Para ilustrar esta citação, tomemos o exemplo proposto por Caraça (1951), entre dois segmentos de reta: $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$,

Figura 2: Segmentos de reta
Fonte: CARAÇA, 1951, p.30

Neste caso, podemos afirmar que o comprimento de $\overline{AB}$ é maior que o de $\overline{CD}$ ou que o comprimento de $\overline{CD}$ é menor que o de $\overline{AB}$. Mas quantas vezes o segmento $\overline{CD}$ cabe em $\overline{AB}$?

Para esta pergunta, se não tivermos um termo de comparação único, tal comparação torna-se impossível. Estabelece-se a **unidade** de medida da grandeza, que, neste caso, pode ser o centímetro. Então, o resultado desta comparação pode ser que no segmento $\overline{AB}$ caibam *três vezes* a unidade $\overline{CD}$ ou que a *medida de* $\overline{AB}$ *tomando* $\overline{CD}$ *como unidade, é três.*

Esse exemplo compara grandezas de mesma espécie e, a partir dessa comparação, podemos fazer certas afirmações de acordo com a qualidade, a exemplo: um é mais pesado (massa) que o outro, um é maior (comprimento) que o outro, entre outras. Para a pergunta *quantas vezes cabem?* Esperamos que a resposta seja um valor numérico.

Baseamo-nos nesta ideia de escolha da unidade, comparação com a unidade e expressão dessa comparação por um número e, na pesquisa de Prado (2000) para a adaptação e desenvolvimento da ***Atividade 1: Medindo terras no Egito Antigo*** desta pesquisa, que será descrita e analisada posteriormente.

Ao tratarmos da grandeza como um dos nexos conceituais da fração, não podemos deixar de explanar sobre o mundo das quantidades (LIMA *et al*, 1998b), pois, como já foi detalhado no início desta seção, a grandeza relaciona qualidade e quantidade dos elementos. Estas quantidades podem ou não serem organizadas por unidades naturais, as quais chamamos, respectivamente, de discretas ou contínuas.

Num contexto histórico, embora a terra seja contínua, o homem precisou discretizá-la para poder dividi-la igualitariamente, porém, como conhecia somente os números naturais criou um novo problema, pois não sabia como fazer esta distribuição igualitária, neste contexto, surge o conceito de medida. Para isto, era preciso quantificar a terra. Então consideramos quantidades discretas, aquelas organizadas em unidades naturais e quantidades contínuas, as que não se apresentam em unidades naturais (LIMA *et al*, 1998).

Entendemos, então, que é importante abordarmos sobre o contínuo e o discreto em sala de aula, pois, em contexto escolar, não é comum este tema, tampouco é relacionado ao conceito de fração. Porém como quantificar elementos que não são organizados em unidades naturais?

Em nossa prática docente, foi possível perceber que há a ideia por parte dos estudantes de que tudo no mundo é possível quantificar ou medir. Esta discussão será desenvolvida na ***Atividade 2: Unidades naturais são sempre organizadas?*** desta pesquisa.

Avançamos para as representações e as ideias que os estudantes têm sobre parte, todo, unidade e subunidades na ***Atividade 3: O que é fração?*** As atividades seguintes, que abordam, respectivamente, a representação fracionária e a equivalência de frações: ***Atividade 4: De volta ao Egito: a necessidade de organização em sociedade e Atividade 5: Equivalência de frações: utilizando as medidas do Egito***, fecham a unidade didática proposta, produto educacional desta pesquisa.

Por unidade didática, assumimos o *conjunto de atividades organizadas que objetivam a aprendizagem do conteúdo a que se refere e que pode envolver diversas atividades orientadoras de ensino* (PERLIN e LOPES, 2013, s/n).

Na seção seguinte, discutimos as abordagens sobre fração encontradas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1998) e em alguns livros didáticos relativas ao ensino fundamental.

1.3. O PCN e os livros didáticos: uma discussão sobre o ensino de frações

Nesta seção, há a intenção de discutir as propostas que o PCN (BRASIL, 1998) e os livros didáticos trazem acerca do ensino de frações para o ensino fundamental.

Nos PCN (BRASIL, 1998), não há um bloco direcionado exclusivamente para o ensino de frações, porém o número fracionário é citado por diversas vezes nos blocos: ***Números e Operações*** e ***Grandezas e Medidas***.

Neste documento, essencialmente o número fracionário, é tratado como uma representação do número racional, tendo como objetivo principal:

> O estudo dos números racionais, nas suas representações fracionária e decimal, merece especial atenção no terceiro ciclo, partindo da exploração de seus significados, tais como: a relação parte/todo, quociente, razão e operador. (BRASIL, 1998, p.66).

Segundo o PCN (BRASIL, 1998), a justificativa para ensinar o número fracionário, como representação do racional,

> Por ser fundamental para o desenvolvimento de outros conteúdos matemáticos (proporções, equações, cálculo algébrico). Também nas situações que envolvem cálculos com dízimas periódicas, a representação na forma fracionária favorece a obtenção dos resultados com maior precisão, uma vez que na forma decimal é preciso fazer aproximações. (BRASIL, 1998, p.103).

E, ainda, afirma que, apesar de o número fracionário e decimal (representações do racional) ser desenvolvido nos ciclos iniciais, muitos estudantes ingressam no terceiro ciclo com muitas dificuldades, tais como:

- cada número racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias: por exemplo, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$, $\frac{4}{12}$,... são diferentes representações de um mesmo número;
- a comparação entre racionais: acostumados com a relação 3 > 2, terão de compreender uma desigualdade que lhes parece contraditória, ou seja, $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$;
- se o "tamanho" da escrita numérica, no caso dos naturais, é um bom indicador da ordem de grandeza (8345 > 83), a comparação entre 2,3 e 2,125 já não obedece ao mesmo critério;
- se, ao multiplicar um número natural por outro natural (sendo este diferente de 0 ou 1) a expectativa é a de encontrar um número maior que ambos, ao multiplicar 10 por $\frac{1}{2}$ se surpreenderão ao ver que o resultado é menor do que 10;

Figura 3: Dificuldades sobre o número fracionário, discutidas pelo PCN.
Fonte: BRASIL (1998, p.101).

Uma das razões apontadas pelo documento para estas dificuldades é a ruptura de ideias construídas para os números naturais e afirma que o estudo dos racionais abordando, *os problemas históricos envolvendo medidas, que deram origem a esses números, oferecem bons contextos para seu ensino* (BRASIL, 1998, p.101).

Um estudo realizado pelo Núcleo de Estudos e Pesquisas sobre Educação Matemática em 2004[5] aponta que uma das explicações para essas grandes dificuldades é que os programas curriculares enfatizam os procedimentos algorítmicos em detrimento da compreensão do conceito de número racional.

No referido estudo, há a discussão sobre o uso de frações pelos egípcios para *"operar pesos e medidas"*, a relação da fração unitária para os egípcios para exprimir resultados e, assim, assumir diferentes contextos: relação parte/todo, divisão e razão.

Apesar de fazer referências às medidas e grandezas como ponto inicial para o número fracionário, o PCN não faz um detalhamento dos conceitos internos do número fracionário e, portanto, é superficial a relação da medida, grandeza e origem da fração na civilização egípcia com as dificuldades anteriormente mencionadas pelo próprio documento.

---

[5] Núcleo vinculado ao Programa de Mestrado em Educação da Universidade São Francisco, Itatiba/SP, composto por estudantes da graduação e da pós-graduação, professores escolares e professores da USF. Este núcleo publicou o artigo intitulado **Números racionais:** aspectos conceituais, o papel da linguagem e dos materiais manipulativos, na Revista Horizontes, Bragança Paulista, v. 22, n. 1, p. 53-64, jan./jun. 2004.

Vale ressaltar que, ao citar a relação parte/todo, o PCN (BRASIL, 1998) não se aproxima do que Caraça (1951) propõe: escolha da unidade, comparação de grandezas de mesma espécie e o resultado desta comparação. Para o PCN (BRASIL, 1998), ao que se refere relação parte/todo, entende-se como,

> A interpretação da fração como relação parte/todo supõe que o aluno seja capaz de identificar a unidade que representa o todo (grandeza contínua ou discreta), compreenda a inclusão de classes, saiba realizar divisões operando com grandezas discretas ou contínuas.
> Uma outra interpretação do número racional como quociente de um inteiro por outro (a: b $=\frac{a}{b}$, b ≠ 0). Para o aluno, ela se diferencia da interpretação anterior, pois dividir uma unidade em 3 partes e tomar 2 dessas partes é uma situação diferente daquela em que é preciso dividir 2 unidades em 3 partes iguais. No entanto, nos dois casos, o resultado é dado pelo mesmo número: $\frac{2}{3}$ (BRASIL, 1998, p.102).

Para exemplificar como o ensino de frações tem se apresentado nos livros didáticos, foram selecionados alguns destes para análise, de acordo com a disponibilidade na biblioteca da escola em que a pesquisa foi desenvolvida, com publicação entre 1997 e 2014, vigente de acordo com Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) dos anos de 1998 a 2014[6]. São eles:

Título	Autor (es)	Editora	Ano ou Série	Ano de Publicação
MATEMÁTICA	*Imenes & Lellis*	Scipione	6ª	1997
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA	*Célia Carolino Pires, Edda Curi e Ruy Pietropaolo*	Atual	5ª	2002
TUDO É MATEMÁTICA	*Luiz Roberto Dante*	Ática	5ª	2005
MATEMÁTICA E REALIDADE	*Gelson Iezzi* *Osvaldo Dolce* *Antonio Machado*	Atual	6º	2009
MATEMÁTICA	*Edwaldo Bianchini*	Moderna	6º	2014

Quadro 1: Dados dos livros didáticos analisados

[6] O período de 1997 e 2014 foi escolhido pelo fato de todos os didáticos publicados a partir de 1997, deveriam atender às exigências do PCN de Matemática (ensino fundamental) de 1998, com exceção do livro Matemática, Imenes & Lellis publicado em 1997, que já havia sido publicado antes do PCN, e de acordo com o PNLD, os livros são vigentes por 4 anos, isto quer dizer que nos anos de 1998, 2002, 2006, 2010 e 2014, os didáticos já tinham sido editados e revisados para verificar se atendiam ao PCN e as escolas públicas fazem as seleções para adoção destes no ano anterior (1997, 2001, 2005, 2009 e 2013) para utilizá-los no ano seguinte.

Para esta breve análise, temos o interesse de verificar:

- Como o conteúdo de frações é organizado?
- Há abordagem num contexto histórico? Se sim, como se apresenta?
- Nos exercícios propostos, tarefas, problemas e/ou atividades, em que tipo de procedimento ocorre a maior ênfase?
- Há alguma relação deste conteúdo com grandezas e medidas (nexos conceituais)?
- No geral, o número fracionário é abordado como: relação parte/todo, quociente, razão e/ou operador?

A seguir apresentamos um quadro no qual traçamos o panorama dos livros didáticos analisados:

Título do livro/ Autor (es)	**Organização do conteúdo**	**Procedimentos algorítmicos**	**Nexos conceituais da fração**	**Interpretações do número fracionário**
<u>Matemática</u> **Imenes & Lellis**	• Uso social do racional; • Representação da fração por meio de desenhos; • Fração mista; • Operações (adição, subtração, multiplicação e divisão).	Os exercícios propostos priorizam as operações e os problemas exemplificam situações divergentes do dia a dia, apesar de ser contextualizado como parte da rotina.	Há um capítulo separado de medidas e grandezas, porém não foi encontrado qualquer indício de referência à fração.	Operador
<u>Educação Matemática</u> **Célia Carolino Pires, Edda Curi e Ruy Pietropaolo**	• Representação da fração por meio de desenhos; • Fração como quociente; • Uso social; • Equivalência e comparação de frações; • Operações (adição e subtração).	Apresenta exercícios que fazem relação de desenhos com as frações. Abordam a fração numa relação à interpretação de quociente sem que outras interpretações sejam propostas.	Há um capítulo separado de medidas e grandezas, porém não foi encontrado qualquer indício de referência à fração. Em relação à grandeza, não há qualquer menção.	Quociente e operador
<u>Tudo é Matemática</u> **Luiz Roberto Dante**	• Apresentação com as diferentes interpretações da fração e seu uso social; • Representação da fração por meio de desenhos; • Leitura de frações; • Frações equivalentes; • Fração mista; • Operações (adição, subtração, multiplicação e divisão).	A quantidade de exercícios é grande, na maioria, fazem referência ao uso social. A relação do número fracionário com os desenhos é excessiva. Nos exercícios que envolvem equivalências ou operações, o procedimento é valorizado. Porém estes abordam as diferentes interpretações da fração, não somente a fração como divisão.	Somente no início do capítulo, há menção e alguns exercícios da fração como medida, mas sem maiores detalhes.	Medida, razão, operador e quociente

<u>Matemática e realidade</u> **Gelson Iezzi** **Osvaldo Dolce** **Antonio Machado**	• Uso do tangran para relacionar a representação parte e todo com a escrita fracionária; • Equivalência e comparação de frações e operações fracionárias; • Expressões de números fracionários.	Apesar da pequena quantidade de exercícios, estes somente priorizam a resolução mecânica. Ao final de cada subcapítulo, consta a sessão: Matemática em notícia, que apresenta alguma notícia veiculada pela imprensa com algumas situações - problemas, porém, no capítulo de frações, nenhuma dessas sessões relacionavam o conteúdo abordado no capítulo com a notícia	Não há	Operador e quociente
<u>Matemática Bianchini</u> **Edwaldo Bianchini**	• Número fracionário enquanto representação do racional; • Uso social (estatística e receitas culinárias); • Como se lê e diferentes representações (desenhos geométricos e pizza); • Interpretações fracionárias; • Frações equivalentes; • Operações; • Potenciação; • Expressões numéricas.	Há exercícios propostos e desafios, porém todos utilizam apenas de algoritmos.	Não há	Quociente e operador

Quadro 2 - Análise das propostas sobre o ensino de frações nos livros didáticos

Pela análise realizada, verificarmos que apenas no livro didático *Matemática e realidade* há ao final do capítulo um texto sobre a ideia de divisão fracionária e a escrita destes números pela civilização egípcia. Porém, em nenhuma outra passagem do texto há qualquer referência a esta mesma ideia, mesmo que de acordo com o PCN (BRASIL, 1998) esta não seja a orientação sobre o uso da História da Matemática enquanto metodologia de ensino.

1.4. As diferentes interpretações da fração

Há uma ideia inicial, no senso comum e, muitas vezes, na cultura escolar, de que a fração pode ser interpretada apenas como quociente/divisão. Ao longo de nossa pesquisa, verificamos que há diferentes interpretações para a fração, mas que não recebe destaque em seu ensino, conforme pode ser notado no PCN (BRASIL, 1998) e livros didáticos, como detalhado na seção anterior.

Nesta seção, serão elucidadas as interpretações que podem ser conferidas aos números racionais sob forma fracionária, de acordo com as seguintes classificações: medida, quociente, razão e operador.

1.4.1 A fração como medida

David *et al* (1997) apontam que o primeiro contato dos estudantes (3ª e 4ª séries, que equivalem aos 4º e 5º anos do ensino fundamental) com o número fracionário é concebido sem uma grande preocupação com as funções dos termos numerador e denominador, em que os estudantes podem aprender a ler e escrever $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{4}$, mas não quer dizer que aprenderam a representar e interpretá-las. Já no 6º ano do ensino fundamental, o conceito de fração é tratado mais sistematicamente.

Nesse momento, na escola, explicita-se a ideia de comparação parte-todo em diagramas de disco ou barra, que, geralmente, referem-se metaforicamente à pizza ou ao chocolate. Essas representações podem expressar a relação entre a parte e um todo contínuo ou entre um subconjunto e um conjunto discreto. Outra representação da fração é na reta numérica a qual, especialmente, os estudantes têm grande dificuldade de interpretar, pois,

> [...] muitos tendem a considerar como unidade a totalidade do segmento desenhado e não o segmento unitário. Eles não compreendem que o ponto que, na reta numérica representa $\frac{2}{3}$ é justamente o ponto que está a $\frac{2}{3}$ da unidade de distância do ponto zero (DAVID *et al* 1997, p.57).

No caso apresentado anteriormente, temos a unidade dividida em partes iguais e essas partes passam a funcionar como subunidades. Assim, o denominador indica qual a subunidade do inteiro se estará usando e o numerador a *medida* dessa subunidade.

De acordo com as autoras, essa dificuldade deve-se ao fato de que os estudantes não compreendem que esta interpretação é uma ideia de medida e não de quociente. Da mesma forma, as comparações parte-todo em regiões geométricas ou em conjuntos discretos estão associadas à ***medição***.

A seguir, outro exemplo sob a interpretação da medição:

> Os herdeiros de uma fazenda resolveram transformar suas terras em um grande loteamento. Para comercialização dos terrenos, a incorporadora estabelece um “lote padrão”, que tem área definida. O interessado em adquirir terras nesse loteamento poderá comprar 1, 2, 3, lotes, conforme seus objetivos e sua disponibilidade de recursos. O “lote” é, assim, uma unidade de medida de área, que expressa (de forma inequívoca para quem conhece o que seja “um lote”) o tamanho dos terrenos negociados. Entretanto, pode haver situações em que se queria falar de terrenos menores do que um lote. Digamos que um pequeno sitiante, que adquiriu apenas 2 lotes, esteja fazendo planos para sua propriedade:
> − Um lote vai ficar para a casa, os jardins, essas coisas... Mas, o outro, vou dividi-lo em quatro partes iguais: umas delas fica para horta e, no resto, vou plantar milho...
> Se o sitiante quiser contar a seu vizinho qual é a área que destinará ao plantio de milho, poderá dizer:
> − Vai ser só 3 quartos de um lote, mas você vai ver a fartura que vai dar... (DAVID *et al*, 1997, p.59).

Nesse exemplo, é associada a fração $\frac{3}{4}$ para a medida estabelecida à área destinada ao plantio de milho em relação ao lote todo.

1.4.2 A fração como quociente

O quociente é a interpretação mais frequente para a fração, como já dito anteriormente. Os exemplos em relação a esta interpretação, geralmente, referem-se à partilha de objetos, alimentos para uma quantidade de pessoas, em que se deve saber quanto cada uma receberá. Um exemplo para esta interpretação é:

> Quatro pessoas receberam uma cesta com 20 laranjas, 8 barras de chocolate e 3 queijos.
>
> a) Quanto de laranja cada um recebeu?
> b) Quanto de chocolate cada um recebeu?
> c) Quanto de queijo cada um recebeu? (DAVID *et al*, 1997, p.61).

Portanto, de acordo com os exemplos, a ideia centralizadora desta interpretação é apenas a divisão, sem especificar a que se refere o denominador e numerador quanto à medida e grandeza.

1.4.3 A fração como razão

A fração, neste caso, é um índice comparativo entre quantidades ou grandezas, essa comparação pode ser entre grandezas de mesma natureza ou de naturezas diferentes.

Comparando grandezas de mesma natureza, estas podem ser entre a parte e o todo, partes disjuntas e complementares ou entre partes não disjuntas nem complementares. Não interessa, nesta interpretação, o tamanho da parte ou do todo, somente a relação que existe entre elas (DAVID *et al*, 1997). Segue um exemplo:

> Pode-se dizer que é expressiva a preponderância da cultura americana sobre a cultura francesa, hoje no Brasil, já que, entre os brasileiros falantes da língua estrangeira, a relação entre o número dos que falam inglês e o número dos que falam francês é $\frac{7}{2}$ (7 para 2) (DAVID *et al*, 1997, p.64).

Esse exemplo, nada nos informa sobre a quantidade de brasileiros que falam ou não língua estrangeira, tampouco quantos falam inglês ou francês. Apenas a relação entre as partes dos falantes de inglês e francês.

Para a comparação entre grandezas de naturezas diferentes, podemos exemplificar a relação de espaço e tempo, em que para cada 1 hora um carro pode percorrer 80 quilômetros (80km/h) ou um outro exemplo:

> Na proposta da Escola Plural (PBH), no 1º ciclo, cada grupo de 3 professores se responsabilizaria por 2 turmas; assim a relação entre o número de professores regentes de uma escola e o número de turmas deverá ser de $\frac{3}{2}$ (DAVID *et al*, 1997, p.64).

A leitura deste número fracionário já diferencia das interpretações anteriores, pois lê-se três para dois, em que se compara a quantidade de professores e turmas.

Esta interpretação é considerada mais requintada no quesito cognitivo, pois trata da ideia de proporcionalidade de magnitudes relativas, enquanto para a fração enquanto medida ou quociente as magnitudes são absolutas, porém a utilização da fração como razão é muito comum em textos de Geografia ou História, como também pode ser visto nos jornais quando citam taxas e índices.

1.4.4 A fração como operador

Nesta interpretação, o número fracionário pode ser um transformador, pois evidencia a ação que se deve imprimir a um número ou quantidade, o que transforma seu valor em processo (DAVID *et al*, 1997).

> Quando se associa ao número racional na forma fracionária $\frac{p}{q}$ a ideia de um operador, passa-se a ver esse número como uma função que ora transforma uma figura geométrica em outra, cujo tamanho é $\frac{p}{q}$ vezes o tamanho inicial, ora transforma um conjunto em outro conjunto com uma quantidade de elementos que é $\frac{p}{q}$ vezes sua quantidade inicial de elementos (DAVID *et al*, 1997, p.65).

O operador em um objeto contínuo pode ser pensado como uma combinação de ampliação-redução; em um objeto discreto, de multiplicador-divisor. Neste último exemplo, estas ideias se esclarecem:

> Pelos últimos levantamentos, $\frac{2}{3}$ dos formandos de Pedagogia ingressarão na carreira de magistério. Se tivermos 96 formandos, quantos formandos ingressarão na carreira de magistério? (DAVID *et al*, 1997, p.66).

Para respondermos à pergunta, basta dividirmos 96 por 3 (para achar $\frac{1}{3}$) e depois multiplicarmos por 2. Mas se conferirmos à fração $\frac{2}{3}$ como operador, aplicaremos $\frac{2}{3}$ ao número de formandos e obteremos o número dos que ingressarão ao magistério, o cálculo é expresso por: (96 x 2) : 3.

Esta interpretação é mais recorrente nos livros didáticos, conforme detalhamos anteriormente (Quadro 2), limitando as possibilidades de professores e o entendimento do estudante no ensino básico e, consequentemente no ensino superior.

No capítulo seguinte, apresentamos estudos no ensino de frações, a partir da Teoria Histórico-Cultural, e como estes nos auxiliaram a compreender sobre as diferenças entre o pensamento teórico e empírico[7], teoria da atividade e atividade de ensino expressas nesta pesquisa.

[7]De acordo com estudos no Brasil sobre a Teoria Histórico-Cultural, entendemos como sinônimos os termos: pensamento abstrato e teórico, assim como: pensamento concreto e empírico.

Capítulo 2. Pensamento Teórico e Empírico, Teoria da Atividade e Atividade de Ensino

Sob a Teoria Histórico-Cultural, abordamos, nesta seção, a importância do pensamento teórico para compreensão de conceitos matemáticos, mais especificamente, sobre os conceitos internos da fração, nosso foco de estudo nesta pesquisa. Explanamos também a teoria da atividade (LEONTIEV, 1978; 1983) e sua relação com atividade orientadora de ensino (MOURA, 2000; 2002).

2.1. Do pensamento teórico ao pensamento empírico

Nos estudos que realizamos sobre o ensino de frações, no Brasil[8], verificamos que assim como em outros conteúdos matemáticos, o pensamento pode ser levado a movimentar-se (quando acontece) do empírico ao teórico, preconizando um pensamento mecânico, que dispensa por muitas vezes, a compreensão do conceito relacionado a um determinado conteúdo, emergindo apenas a operação e a representação matemática, ou seja, respostas reprodutivas e mnemônicas, aspectos externos do conceito.

Davydov (1988) aponta causas e consequências para a dificuldade dos estudantes de generalizar situações e compreender conteúdos com conceitos abstratos,

> A primeira causa tem um sentido prático sócio pedagógico. Na época da revolução técnico-científica se requeria do homem, que participava ativamente da vida produtiva e social, um nível bastante alto de preparação cultural geral e profissional. Agora, isto propõe o desenvolvimento do indivíduo com diversas necessidades e capacidades, em particular, capacidades intelectuais. Mas o sistema de instrução, ensino e educação existente já não resolve com a necessária eficácia alguns problemas importantes ligados a esta tarefa social. (DAVYDOV, 1988, p.46 – tradução nossa).

Libâneo (2015) aponta que atualmente, nosso sistema de ensino preconiza o atendimento social-assistencialista e, em muitos casos, despreza a questão intelectual modificando os objetivos da escola. Alega ainda que, se as políticas públicas focarem apenas nas diferenças sociais.

[8] Siebert *et al* (2014), Damazio *et al* (2012), Patrono (2011), Catalani (2002), entre outros.

Nossa proposta, não é menosprezar a capacidade intelectual dos estudantes e sim propiciar uma oportunidade de desenvolverem o pensamento teórico.

É preciso, portanto, explicitar nossa compreensão do termo pensamento, antes de discutir sobre ele. Numa visão marxista (base para o desenvolvimento da Teoria Histórico-Cultural), a apropriação[9] de conhecimento é uma condição exclusivamente humana e tal apropriação se dá por meio do pensamento. Como Leontiev (1978) define

> Chamamos de pensamento, em sentido próprio, o processo de reflexão consciente da realidade, nas suas propriedades, ligações e relações objetivas, incluindo mesmo os objetos inacessíveis à percepção imediata. (LEONTIEV, 1978, p.84 – tradução nossa).

Desta forma, se o estudante não faz as ligações e relações objetivas, a que Leontiev (1978) se referiu, o mesmo não tem a consciência daquilo que se está a compreender. Portanto, uma das responsabilidades do professor é favorecer o desenvolvimento do pensamento do estudante, instigar um *querer aprender, uma vez que esse não é um valor natural, mas construído historicamente* (RIGON *et al*, 2010, p.31). Porém este processo torna-se difícil de se formar quando apenas propomos, aos estudantes, cálculos incessantes, quando este não se constitui em motivo ou necessidade alguma de apropriar-se do mesmo.

Entendemos que não é uma tarefa fácil para o professor transformar os conhecimentos científicos (VYGOSTKY, 2001) em conhecimentos escolares, pois *pressupõe uma seleção dos conceitos considerados socialmente relevantes* (ROSA *et al*, 2010, p.68).

Por ser indispensável entender as particularidades psicológicas do pensamento para compreender melhor o desenvolvimento do pensamento dos estudantes, temos uma necessidade em assinalar *a generalização, a abstração e o conceito* que são os processos das formas principais do pensamento.

Quando o professor afirma que o estudante não faz generalizações, quer dizer que o estudante não identificou as características comuns de um determinado conteúdo, relacionando todas as explorações feitas neste. De modo geral, a *generalização* pode ocorrer quando, por meio da comparação, separamos do grupo de objetos ou fenômenos algumas características (qualidades) comuns. Para Talizina (2000), essa comparação, para ser sólida, precisa atender cinco condições: 1) uma ação adequada e orientada pelo professor; 2)

---

[9] Dentro do referencial teórico adotado nesta pesquisa, o termo apropriação ocorre quando o sujeito “reproduz em si as formas histórico-sociais da atividade” (DAVYDOV, 1982, p.11). Sobre isso, Davydov (1982) afirma que esse processo de interiorização é responsável pelo sujeito estar em atividade convertendo o conhecimento em individual e os meios desta organização, em internos.

conhecimento da estrutura da ação (atualização das características necessárias e suficientes, além da ajuda de regras lógicas para avaliar os resultados obtidos); 3) a representação de todos os elementos materializados; 4) verificação de todas as ações efetuadas, pois o estudante pode obter resultados diferentes (esta condição deve ser executada pelo estudante de modo independente); 5) para a formação do conceito, por meio de mediação, verifica-se cada característica, comparando-a com a regra lógica.

Davydov (1988) assinala que a generalização é uma relação inseparável da *abstração*. Podemos inferir, então, que a abstração é um componente da generalização.

> A separação de uma certa qualidade essencial como comum, inclui o desmembramento de outras qualidades. Isto permite ao estudante [sujeito] converter a qualidade geral em um objeto independente e especial das ações seguintes (a qualidade geral se designa com uma palavra). O conhecimento do comum, sendo este resultado da comparação e de sua fixação por meio da palavra, sempre é algo *abstrato, imaginável*. (DAVYDOV, 1988, p.103 – itálico e tradução nossa).

Portanto, a abstração é a separação do geral sendo confrontado com o particular. O que nos possibilita afirmar que o *conceito* está associado às ideias abstratas e generalizadoras.

> O conceito intervém aqui como forma de atividade mental mediante à qual se reproduz o objeto idealizado e o sistema de suas conexões que refletem na unidade da generalização e da essência do movimento do objeto material. (DAVYDOV, 1982, p.299-230 – tradução nossa).

Ainda sobre a abstração, Aleksandrov *et al* (2003) afirmam que a mesma é característica de toda atividade mental e, especificamente na Matemática, ocorrem:

- Relações quantitativas e formas espaciais;
- Sucessão crescente de graus de abstração;
- Move-se no campo de conceitos abstratos e suas interrelações.

Em contrapartida a estas ideias, conforme nossa experiência docente, no cenário escolar atual, o ensino tem se apoiado nas percepções e representações que o estudante dá ao objeto. Neste caso, o processo de generalização e abstração parte da intuição e da percepção. Este processo é, geralmente, sistematizado pela classificação, numa visão de pensamento empírico, em que o aspecto intuitivo presente neste tipo de pensamento não é suficiente para o desenvolvimento completo do pensamento do estudante[10].

[10] Davydov (1982; 1988), Leontiev (1978; 1983), Vygotsky (2000; 2001), entre outros estudiosos da teoria histórico-cultural.

Surge, então, a grande diferença entre os pensamentos empírico (concreto) e teórico (abstrato). Nesta perspectiva, Davydov (1988) assinala que o caráter lógico-formal só leva a formar os chamados conceitos empíricos, pois as abstrações e generalizações não expressam as especificidades dos conceitos científicos, que são estritamente teóricos, evidenciando um dos problemas do pensamento empírico que é tornar essencial apenas as propriedades externas do objeto ou do fenômeno.

A partir de nossos estudos sobre o pensamento empírico e sobre o pensamento teórico, são diferenciadas a seguir suas particularidades.

Particularidades dos pensamentos empíricos e teóricos	
Empírico (concreto)	**Teórico (abstrato)**
Se materializa por meio de escolha de exemplos relativos a certa classe formal	Transforma o saber em teoria desenvolvida mediante dedução e explicação
Elaborado mediante a comparação dos objetos às suas representações, valorizando-se, assim, as propriedades comuns aos objetos	Elaborado por meio da análise do papel e da função de certa relação entre as coisas no interior de um sistema
Expresso por um único termo	Expressa por diferentes sistemas semióticos
Fundamentado na observação de objetos	Fundamentado na transformação dos objetos
A propriedade formal comum é análoga às propriedades dos objetos	Apresenta de forma universal simultaneamente as características de um representante de uma classe e um objeto particular
A generalização, forma das propriedades dos objetos permite situar os objetos específicos no interior de uma dada classe formal	Relaciona o geral e o particular
Representações concretas do objeto	Representa a relação entre as propriedades do objeto e as suas ligações internas

Quadro 3: Particularidades dos pensamentos empírico e teórico
Fonte: ROSA *et al*, 2010, p.67-80

As propostas de atividades de ensino, detalhadas posteriormente, preconizam o pensamento em que *se constrói a abstração (conceito) de modo geral, a que por sua essência* *não pode expressar de forma mental o conteúdo especificamente concreto do objeto*. (DAVYDOV, 1988, p.108).

A exemplo, quando, na escola, o conceito de fração é tratado apenas como uma divisão e assim é apresentado aos estudantes, as representações numéricas e gráficas, geralmente, iniciam-se pela fração $\frac{1}{2}$ e mostra-se uma barra (geralmente que representa um chocolate) dividida em duas partes iguais. Esta mesma estrutura é utilizada para outros números fracionários, sem esquecer que, ao lado do número fracionário, no caso $\frac{1}{2}$, é descrito sua leitura: (lê-se: um meio ou metade). Os estudantes observam esses conjuntos, comparam e deveriam abstrair os atributos comuns, porém como resultado temos "um conjunto que pode ser como o signo numérico ou palavra numérica" um meio, um terço, um quarto e assim por diante (ROSA *et al*, 2010, p.138).

Essa situação apresentada, para Davydov (1982), não desenvolve nos estudantes os conhecimentos científicos por estar centrada nas peculiaridades exclusivas do empírico.

> O trânsito correto e oportuno das crianças do apoio na evidência natural até a faculdade de orientação nas relações das próprias grandezas e números (nas "relações abstratas") é uma condição importante para iniciar-se do domínio da Matemática. No entanto, na prática, a manutenção excessiva das crianças no nível das representações sobre os objetos reais circundantes e seus conjuntos entorpece a formação dos conceitos genuinamente matemáticos. (DAVYDOV, 1982, p.156).

De acordo com os pressupostos teóricos expostos acima, os estudantes ao compreenderem as generalidades de um conhecimento, terão condições de lidar com as variações particulares. Contudo, estes conceitos não são apropriados pelos estudantes de maneira direta, é preciso que o professor organize a interação entre os pares. *Essas condições são fundamentais para a organização do ensino de Matemática como atividade*. (ROSA *et al*, 2010, p.153).

A partir destes pressupostos, é que organizamos as atividades de ensino sobre o conceito de fração utilizadas nesta pesquisa.

2.2. Atividade: de Leontiev à Moura

> Marx escreve: Na produção, os homens não agem apenas sobre a natureza. Eles só produzem colaborando de uma determinada maneira e trocando entre si as suas atividades [...] (LEONTIEV, 1978, p.75).

Nesta seção, serão abordados os pressupostos da Teoria da Atividade (LEONTIEV, 1978; 1983) direcionando para a compreensão de Atividade de Ensino e Atividade Orientadora de Ensino (MOURA, 2000; 2002). Assim, como o conhecimento e o pensamento são elementos exclusivamente humanos, a atividade também o é, desde que seja movida por uma *intencionalidade*, regida por uma *necessidade*, que por um *objeto* se direciona a um *motivo* e este, por sua vez, estimula as *ações* do sujeito (LEONTIEV, 1978). Tem-se, então, um sujeito em atividade, como representamos no esquema a seguir:

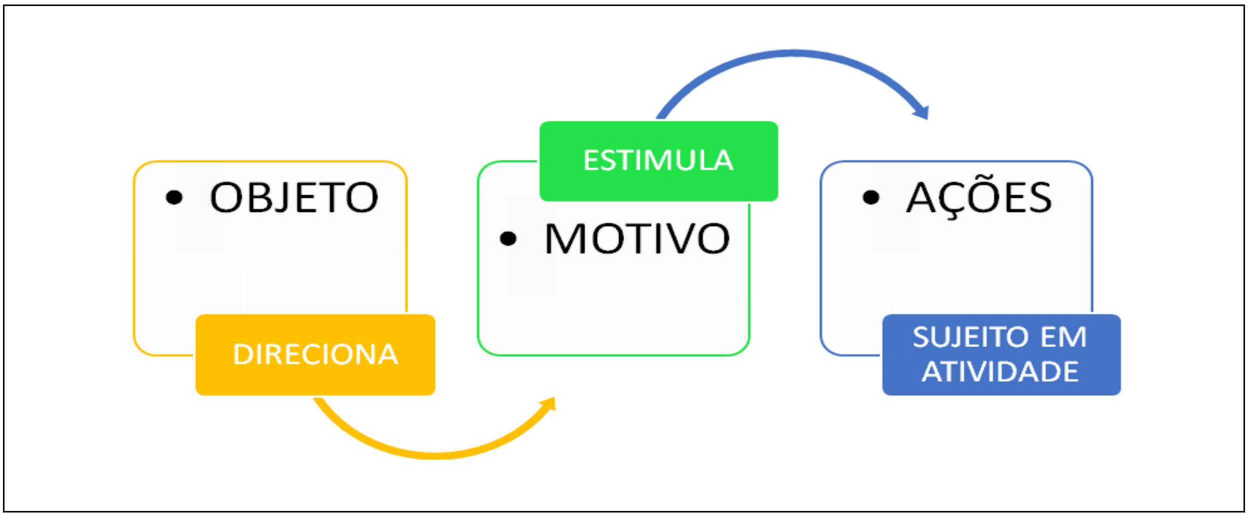


Figura4: Sujeito em atividade

No quadro acima, destacamos alguns dos elementos principais da Teoria da Atividade que, ao longo desta seção, serão detalhados.

Diante do exposto, recorremos a Leontiev (2001) que define atividade como sendo

> processos psicologicamente caracterizados por aquilo a que o processo, com um todo, se dirige (seu objeto), coincidindo sempre com o objetivo que estimula o sujeito a executar esta atividade, isto é, o motivo. (LEONTIEV, 2001, p.68).

E, ainda esse autor faz a distinção do que pode ou não ser considerado como atividade:

> Não chamamos todos os processos de atividade. Por esse termo designamos apenas aqueles processos que, realizando as relações do homem com o mundo, satisfazem uma necessidade especial correspondente a ele. Nós não chamamos de atividade um processo como, por exemplo, a recordação, porque ela, em si mesma, não realiza, via de regra, nenhuma relação independente com o mundo e não satisfaz qualquer necessidade especial. (LEONTIEV, 2001, p.68).

Como componente básico da atividade, temos a *ação*, que é o processo em que o objeto e o motivo não se coincidem e só é possível no seio de um processo coletivo (LEONTIEV, 1978). *Motivo*, é *aquilo em que a necessidade se concretiza de objetivo nas* *condições consideradas e para as quais a atividade se orienta, o que a estimula* (LEONTIEV, 1978, p.97). Portanto, o *objeto da atividade é o motivo real* (LEONTIEV, 1983, p.83 – grifo nosso). As *necessidades* dirigem a atividade do sujeito, mas são capazes de realizar sua função somente se forem materiais; essas necessidades são condições internas.

Para o sujeito estar em atividade, é preciso que tenha consciência deste processo. Esta *consciência* é um conhecimento compartilhado, que só ocorrerá se existir uma consciência social e uma língua que seja seu substrato real. E se concretiza pela *linguagem*, que é a forma prática de conhecimento humano.

É na atividade que o sujeito atribui *significações* a um objeto ou fenômeno, descoberta *num sistema de ligações, de interações e de relações objetivas*. Esta *significação* é refletida e fixada na linguagem, na qual o homem assimila a experiência humana. (LEONTIEV, 1978, p.94).

Para melhor entendermos as ideias de Leontiev acerca da Teoria da Atividade, recorremos ao exemplo da caçada primitiva coletiva.

> A caçada coletiva é a atividade, a caça o seu **objeto**, e a fome da presa é o seu **motivo**. Quando os batedores fazem barulho para assustar o veado, o bater das suas mãos é uma **operação**, e o bater como um todo é uma **ação** dentro da atividade da caça, motivada pela fome a ser satisfeita pela realização da atividade. Essa ação de fazer barulho tem como objetivo assustar o veado. No entanto, o objetivo contradiz o objeto e o motivo da atividade, que é apanhar o animal e distribuir e consumir a comida. A ação dos batedores é parte da atividade na base do seu saber consciente de que eles assustam o veado para que ele possa ser apanhado. Isto implica que a **consciência** humana tem um aspecto representacional mediador e mobilizador. A ação dos batedores só é possível na condição de representar a ligação entre o objetivo da sua ação e o motivo da atividade cooperativa. Eles precisam ser capazes de representar relações entre objetos, mesmo sendo irrelevantes para as suas necessidades reais, ou então eles continuarão simplesmente por si próprios e dessa forma muitas vezes falhando na obtenção do objeto. As suas consciências específicas e particulares são constituídas através do seu conteúdo, o qual tem como elementos os significados. Através dos **significados** eles são capazes de representar a relação entre o motivo e o objetivo da ação; desta forma eles implicam-se na atividade; faz sentido para os batedores. Uma atividade distingue-se de outra principalmente pelo seu objeto e motivo. Isto pode ser a chave para nos apercebermos do desenvolvimento da atividade da seguinte forma. Se, por exemplo, um batedor descobrir que é divertido bater, se ele começa a bater pelo seu belo prazer, ele está motivado pelo bater; o bater é um objeto apropriado; ele produz uma nova atividade a partir de uma antiga ação. Uma ação pode, portanto, desenvolver-se numa atividade pela aquisição de um motivo, e a nova atividade pode ela própria subdividir-se num conjunto de ações. Por outro lado, uma atividade pode tornar-se uma ação se o seu motivo se desvanece, e pode integrar-se noutra atividade. Da mesma forma, uma ação pode evoluir para uma operação, capaz de cumprir várias ações (LEONTIEV, 1983, p.76).

Ao que se refere ao ensino e a educação escolares, temos a atividade de estudo (DAVYDOV, 1988), que tem como conteúdo os conhecimentos teóricos, discutidos anteriormente.

> O pensamento dos alunos, no processo de atividade de estudo tem algo em comum com o pensamento científico, que expõem os resultados de suas investigações por meio das abstrações e generalizações substanciais e os conceitos teóricos que funcionam no processo de ascensão do abstrato ao concreto (DAVYDOV, 1988, p.173).

À essa atividade de estudo podemos relacionara Atividade Orientadora de Ensino – AOE –, proposta por Moura (1996; 2000; 2002) e que é organizada pelo professor, pois pode-se dizer que a mesma tem como conteúdo principal a atividade de estudo realizada pelo estudante. As AOEs podem revelar um modo de organização pelo professor da atividade de estudo para o estudante, desde que tenha intencionalidade.

A atividade orientadora de ensino é definida como

> aquela que se estrutura de modo a permitir que sujeitos interajam, mediados por um conteúdo, negociando significados, com o objetivo de solucionar coletivamente uma situação-problema. É atividade orientadora porque define elementos essenciais da ação educativa e respeita a dinâmica das interações que nem sempre chegam a resultados esperados pelo professor. Este estabelece os objetivos, define as ações e elege os instrumentos auxiliares de ensino, porém não detém todo o processo, justamente porque aceita que os sujeitos em interação partilhem significados que se modificam diante do objeto de conhecimento em discussão (MOURA, 2001, p.155, *citado por* MARCO, 2013, p.32).

Diante desta definição e para a entendermos melhor, recorremos ao esquema sobre Atividade Orientadora de Ensino:

Figura 5: AOE: relação entre atividade de ensino e atividade de aprendizagem
Fonte: MOURA *et al*, 2010, p.98

Segue um breve paralelo entre as atividades humana de ensino (MORETTI, 2007, p.96) e, acrescentamos a estas, a atividade de estudo:

Atividade humana	Atividade de ensino	Atividade de estudo
Necessidade material ou ideal.	Necessidade do professor na organização do ensino em favorecimento à aprendizagem dos estudantes.	Necessidade do estudante em construir conhecimentos teóricos.
Objetivado no seu produto.	Objetivado na situação-problema proposta e no plano de ação docente.	Objetivado no motivo que o leva a ação.

Quadro 4: Paralelo entre as diferentes naturezas de atividade

Marco (2009) elaborou um mapa conceitual para auxiliar a compreensão sobre atividade de ensino:

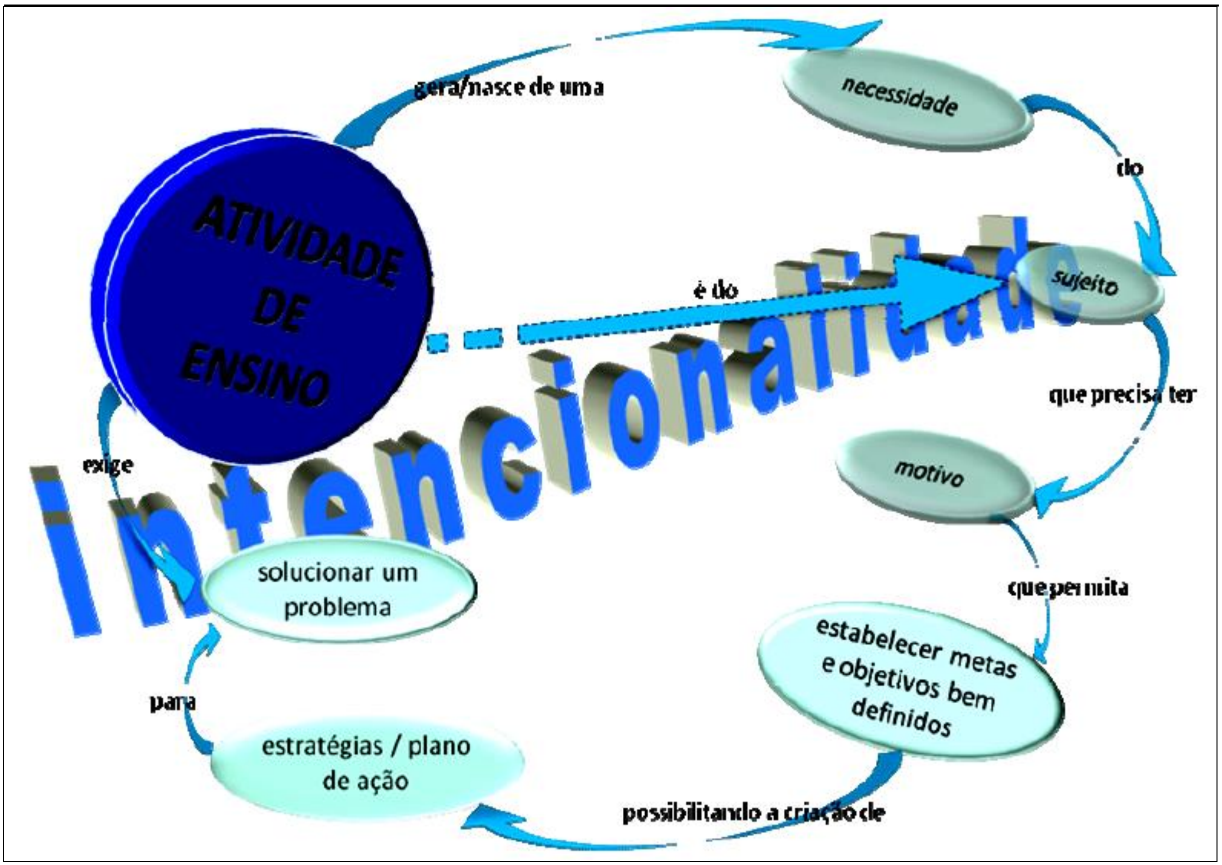


Figura6: Movimento entre atividade de ensino e estudantes (MARCO, 2009, p.34)

Segundo Marco (2009),

> O compartilhar significados e experiências com o outro constitui um momento muito importante na atividade de ensino, pois pode encaminhar para a resolução do problema coletivamente, mediante a análise de ideias e diferentes pontos de vista dos envolvidos no dinâmico processo de ensino e aprendizagem. (MARCO, 2009, p.34)

O compartilhamento de significados e experiências, presente nesta pesquisa, se deu por meio da dinâmica indivíduo-grupo-classe nos seguintes momentos: 1) o pensar individual sobre a situação-problema a qual está inserido e atribuir significados próprios a ela; 2) discutir suas ideias em um pequeno grupo, a fim de elaborar uma síntese coletiva que represente este grupo e 3) discussão grupo-classe para encontrar uma possível solução ou a mais adequada e que ocorre mediada pelo professor. (LANNER DE MOURA *et al*, 2003). Essa dinâmica pode ser representada pelo mapa conceitual a seguir:

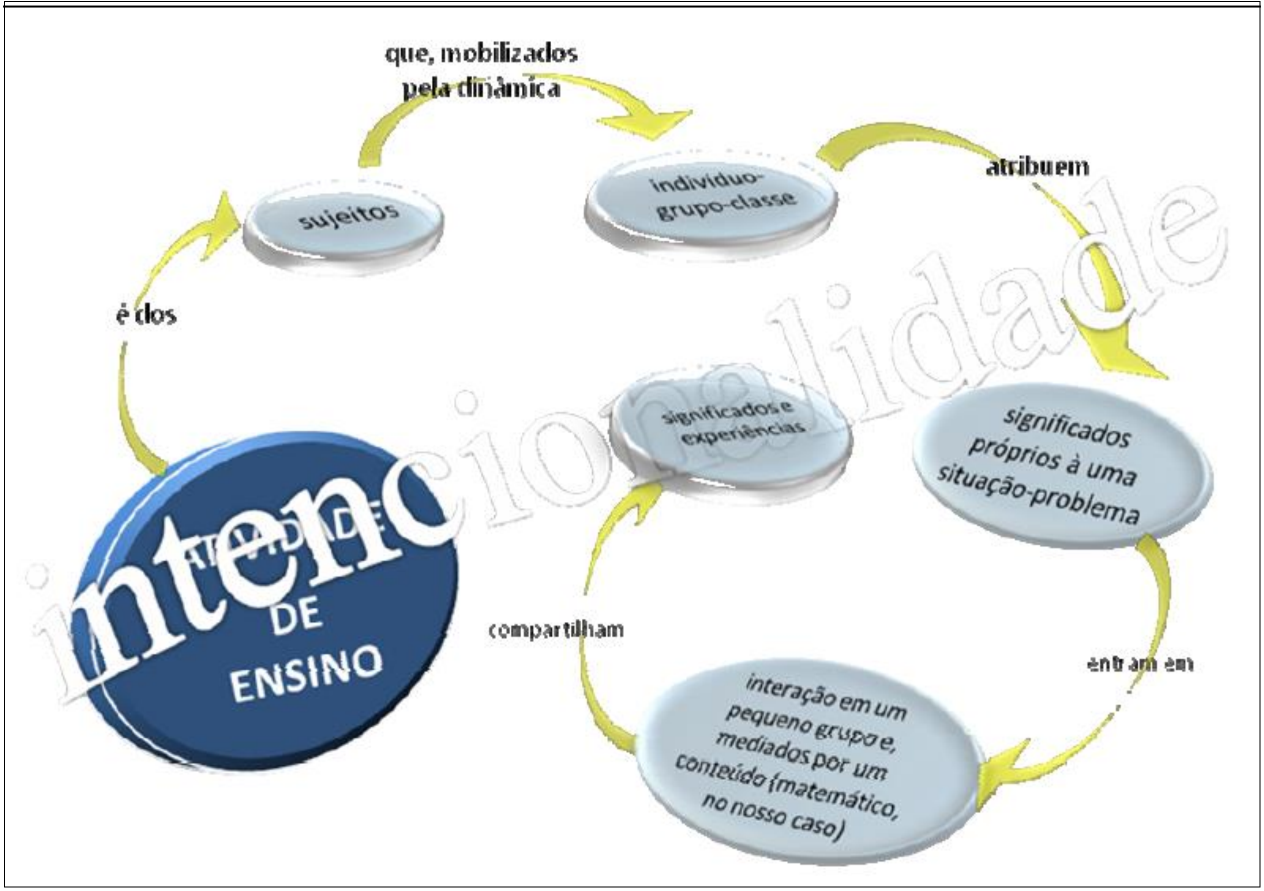


Figura7: Movimento entre estudantes ao vivenciar uma atividade de ensino (MARCO, 2009, p.35)

Nos capítulos dedicados à metodologia e à análise das atividades de ensino desenvolvidas nesta pesquisa, vemos o movimento de reelaboração das atividades desenvolvidas pela da professora-pesquisadora a fim de possibilitar que seus estudantes tivessem a necessidade de aprender, a partir de uma situação desencadeadora de aprendizagem, principalmente na primeira atividade (ANEXO I) que trata da medição de terras. Constata-se pelas transcrições das videogravaçãoes que a dinâmica indivíduo-grupo-classe pode ser considerada fator essencial para que os sujeitos estejam em atividade.

Pelos pressupostos da Teoria da Atividade e Atividade Orientadora de Ensino, a ação, o pensamento e o trabalho são produções humanas. Assim, no ambiente escolar, para os sujeitos estarem em atividade, precisam construí-la coletivamente e as ações mediadoras do professor são fundamentais para que os estudantes se sintam motivados e tenham a necessidade de encontrar uma solução para a situação desencadeadora de aprendizagem.

2.3. Ação Mediadora

> Ter a profissão de professor é organizar situações cujos resultados são as modificações do sujeito a quem intencionalmente visamos modificar. É claro que na sociedade as múltiplas interações são situações de ensino e aprendizagem. Basta interagirmos para que tenhamos aprendizagens. Na interação, partilhamos significados. Modificamos a realidade cognitiva dos sujeitos com quem interagimos e ao mesmo tempo estamos sofrendo alterações em nossos esquemas cognitivos no esforço de produzir sínteses que possibilitem comunicar nossas intenções. (MOURA, 2002, p.144).

A ação mediadora não é um processo individual, sendo por meio dela que os significados são elaborados historicamente. Quando em atividade, é possível conferir as ações mediadoras no movimento indivíduo-grupo-classe, mas não tão somente professores e estudantes como mediadores, como também a interação com os instrumentos adotados pelos professores em uma atividade de ensino (MORETTI, 2007). Ao propor uma atividade, o professor, como já citamos, deve ter claro o objetivo a ser alcançado por meio da própria atividade, a ação mediadora é importante, pois do contrário trata-se de reprodução de conceito, somente.

Concordamos com Leontiev (1983), quando afirma que os conceitos tratados em ambiente escolar devem se constituir pela interação dos sujeitos, num sistema mediador na apropriação de conhecimento. E nesse processo de mediação, o professor detém alguns instrumentos, sejam eles lousa, atividades, materiais manipuláveis etc. Moretti (2007) aponta que,

> A mediação é elemento fundamental na constituição do humano, uma vez que permite a este se apropriar da produção histórica e social da humanidade ao agir sobre a realidade de forma mediada por instrumentos e signos produzidos culturalmente (MORETTI, 2007, p.15).

Dessa forma, o instrumento é *um objeto com o qual se realiza uma ação de trabalho, operações de trabalho*, que não necessariamente são de características físicas, mas também sociais (LEONTIEV, 1978, p.82).

Quando usamos o termo mediação, fazemos relação também à comunicação, por meio da linguagem e, sobre isso, Vygotsky (2001) pondera sobre a linguagem ser um movimento da necessidade durante o trabalho, mas alerta que a comunicação real exige significado, ou seja, a generalização.

Portanto, *mediação* é o processo que caracteriza as relações do homem com o mundo e com outros homens, *um processo de vir-a-ser no desenvolvimento intelectual, que se* *beneficia da criação e emprego de estímulos artificiais criado pelo próprio homem* (NASCIMENTO, 2014, p.189). Quando esse elemento histórico-cultural é trazido à escola, é importante haver a consciência de que o professor tem um papel importante, pois como apontou Moura (2000), o professor deve intervir para reorganizar, reelaborar a proposta, dirigindo a construção do conhecimento dos estudantes a outro patamar.

A partir do mapa conceitual a seguir (Figura 8), tentamos esclarecer as exposições feitas nesta seção.

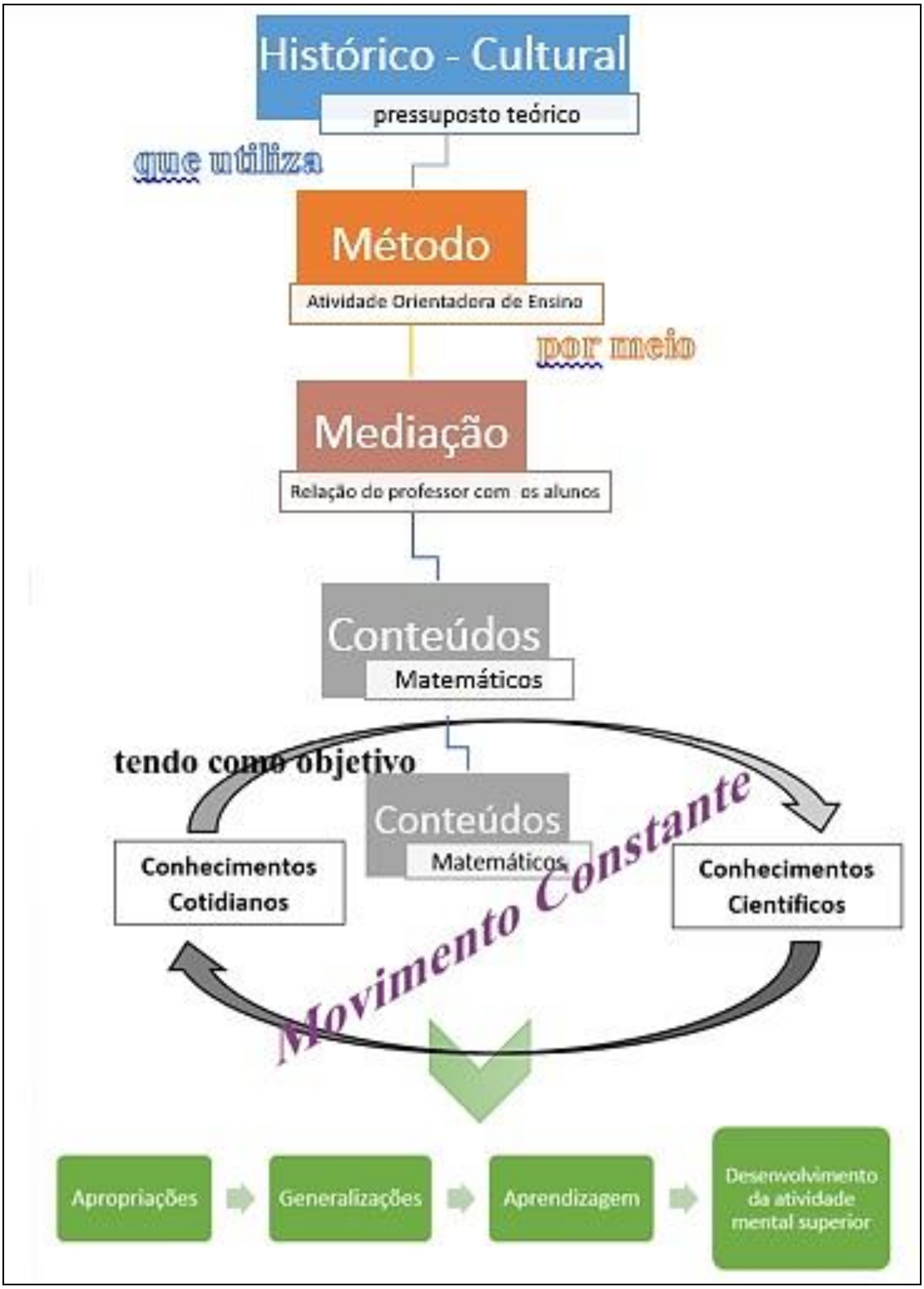


Figura 8: Movimento da professora-pesquisadora sobre os estudos teóricos para a pesquisa

Capítulo 3.Desenvolvimento da proposta

A abordagem desta pesquisa é qualitativa e caracterizada como estudo de caso por meio de uma AOE, pois, segundo Fiorentini e Lorenzato (2007), buscamos retratar da forma mais profunda possível a realidade, por meio da ênfase na análise do objeto no contexto que será detalhado mais à frente. Desta forma, não podemos manipular nossos registros e tão pouco generalizar os resultados aqui obtidos, pois, do contrário, estaríamos desqualificando todo o trabalho de pesquisa aqui desenvolvido.

Tomamos a sala de aula como nosso campo de investigação, entendendo-a como um "ambiente natural", o que nos aproxima das características de uma pesquisa de enfoque qualitativo. Segundo Bogdan e Biklen (1994, p. 47),

> [...] a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituído o investigador o instrumento principal. [...]. Os dados são recolhidos em situação e complementados pela informação que se obtém através do contato direto. Além do mais, os materiais registrados mecanicamente são revistos na sua totalidade pelo investigador, sendo o entendimento que este tem deles o instrumento-chave de análise.

Bogdan e Biklen (1994, p.48) afirmam ainda que os pesquisadores que adotam a pesquisa qualitativa *tentam analisar os dados em toda sua riqueza, respeitando, tanto quanto possível, a forma com que estes registros foram registrados ou transcritos*.

Outra característica da relevância da pesquisa em sala de aula é destacada por Moura (2000, p. 14-15), que a considera o *lugar privilegiado para a observação dos alunos nos seus processos de aquisição de conhecimentos e onde as interações tanto podem servir para resolver problemas dados como para gerarem novos pela troca simbólica em jogo*.

Na pesquisa em educação matemática, Fiorentini e Lorenzato (2007, p.110) destacam que a abordagem qualitativa *busca investigar e interpretar o caso como um todo orgânico, uma unidade em ação com dinâmica própria, mas que guarda forte relação com seu entorno e contexto sociocultural*. Sobre os procedimentos éticos na pesquisa em educação matemática, estes autores sugerem alguns princípios e cuidados que procuramos seguir. São eles: consentimento dos envolvidos; preservação da identidade e da integridade dos envolvidos; mínima interferência do pesquisador no ambiente e cuidados na divulgação dos dados. Sobre a interferência, entendemos que em nossa pesquisa, enquanto estudo de caso, isto se torna dificultoso e ocorre advinda das ações mediadoras da professora-pesquisadora, porém destacamos que estas não são manipuladas.

Para a análise das atividades de ensino, utilizamos de episódios e cenas (MOURA, 1996; 2004), em que são selecionados momentos nos quais encontramos *ações reveladoras do processo de ações dos sujeitos participantes* (MOURA, 2004, p.272).

> Os ***episódios*** poderão ser frases escritas ou faladas, gestos e ações que constituem ***cenas*** que podem revelar interdependência entre os elementos de ação formadora. Assim, os episódios não são definidos a partir de um conjunto de ações lineares. Pode ser que uma afirmação de um participante de uma atividade não tenha impacto imediato sobre os outros sujeitos da coletividade. Esse impacto poderá estar revelado em um outro momento em que o sujeito foi solicitado a utilizar-se de algum conhecimento para participar de uma ação no coletivo (MOURA, 2004, p. 276, grifos do autor).

A produção dos dados utilizados para a análise dos episódios foi registrada em diário de campo da professora, atividades produzidas pela professora e desenvolvidas pelos estudantes e seus registros escritos e desenhos, audiogravações e videogravações.

Ao longo dos anos de nossa prática docente, foi possível verificar que alguns conteúdos matemáticos são problemas de aprendizagem para os estudantes, mas também são problemas para a organização do ensino para o professor. O que motivou essa pesquisa foi justamente esse fator. Quando citamos o problema para o ensino, não nos referimos ao cálculo, mas ao conceito que envolve determinado conteúdo.

O conteúdo escolhido para nossa pesquisa foi o conteúdo de frações, desenvolvido no 6º ano do ensino fundamental. Essa necessidade surgiu de um desconforto em relação ao ensino deste conteúdo vivenciado em outros momentos de nossa prática. Para as frações, a relação direta, na maioria das vezes, é a interpretação da divisão e é perceptível que os estudantes não compreendem o número fracionário desta forma tão facilmente.

Nesta pesquisa, usufruímos da oportunidade de levar à sala de aula, uma proposta de organização do ensino, caracterizada como atividade orientadora de ensino, já detalhada anteriormente, a fim de trilhar um caminho que possa nos indicar resposta(s) para a questão norteadora deste estudo: *Como as atividades orientadoras de ensino podem auxiliar a aprendizagem do conceito de frações para estudantes do 6º ano do ensino fundamental?*

Assim, nosso olhar mais específico se destinará a:

- investigar se o uso da História da Matemática nas atividades de ensino pode auxiliar a aprendizagem de estudantes de 6º ano no conceito de fração;
- investigar se os nexos conceituais da fração possibilitam que os estudantes desenvolvam um pensamento teórico;

- investigar se atividades orientadoras de ensino refletem no saber pensar e saber fazer dos estudantes.

De posse do exposto passamos a apresentar os sujeitos da pesquisa, a organização dos mesmos em grupos, que os chamaremos de famílias e, as atividades de ensino propostas.

3.1. Conhecendo as turmas[11]

O desenvolvimento das atividades ocorreu entre maio e dezembro de 2014 e foram propostas para três turmas de 6º ano do ensino fundamental de duas escolas municipais de Uberlândia/MG.

Para análise das atividades desenvolvidas, utilizamos o critério da necessidade de haver pelo menos 75% de frequência nas aulas ao longo dos bimestres. Este critério nos levou a selecionar apenas uma turma para nossas análises.

Optamos por utilizar os nomes fictícios dos estudantes e da escola a fim de preservarmos as identidades dos mesmos. Segue o perfil das turmas para elucidar esta seleção.

3.1.1. Turma A – Escola 1

Com 30 estudantes matriculados, essa turma tinha alta rotatividade de estudantes, sendo que para cinco destes estudantes matriculados havia um índice de falta que no 1º bimestre de 2014 se aproximava a 80% das aulas[12]. Somente seis estudantes tinham índice de faltas inferior a 10%. Portanto, a dificuldade em se conseguir uma sequência no trabalho docente é um dos fatores que prejudicam o desempenho dos estudantes. A faixa etária desta turma variava de 11 a 16 anos.

Dos 30 estudantes desta turma, cinco deles foram reprovados em algum ano escolar, sendo que, dois deles, estavam cursando pela terceira vez consecutiva o 6º ano do ensino fundamental.

Outro fator, importante no âmbito escolar e que tem se mostrado um dos problemas mais difíceis de resolver é a indisciplina. Nesta turma, este problema é presente e um

[11]A pesquisa foi autorizada pela escola que já dispõe de autorização de imagem dos responsáveis dos estudantes.
[12]Vale ressaltar que o índice admitido pela Secretaria Municipal de Educação de Uberlândia para considerar o estudante como desistente é de 75% do ano letivo.

empecilho para o desenvolvimento do trabalho não só da professora-pesquisadora, como também dos professores das outras disciplinas.

A associação dos fatores infrequência e indisciplina limitaram as possibilidades de se desenvolver um bom trabalho, porém alguns estudantes desta turma demonstraram interesse pelas atividades apresentadas. Coincidência ou não, estes eram os estudantes mais frequentes em aulas.

De modo geral, ao longo do desenvolvimento das atividades que faz parte da pesquisa, o índice de infrequência foi de cerca de 65%. O que nos fez descartar a análise das atividades dessa turma, mas não significa que a pesquisa não foi desenvolvida nela.

3.1.2. Turma A – Escola 2

Dos 32 estudantes matriculados, apenas três são infrequentes, logo, esta turma tem baixíssima rotatividade de estudantes e, por isso, foi tomada para as análises.

Nesta turma, somente dois estudantes foram reprovados em anos anteriores e estes, são infrequentes. A faixa etária é de 10 a 13 anos.

Parte desta turma expressou preocupação (por meio de diálogos com a professora e comportamento corporal nas aulas de Matemática) com o fracasso na Matemática, dificuldade em compreender os conceitos matemáticos e a prática de apenas memorizar o que é visto nas aulas. Além destas preocupações, estes estudantes demonstravam interesse em aprender.

O problema de indisciplina nesta turma existe, mas de maneira amena, poucas foram as interrupções que a professora-pesquisadora precisava fazer para resolver alguma situação.

Destacamos alguns pontos positivos desta turma: o diálogo e a presença familiar. Os estudantes procuravam conversar com os professores sobre os problemas da própria turma durante as aulas e pediam ajuda para encontrarem possíveis soluções; a presença familiar no acompanhamento dos estudos foi outro ponto positivo, pois os pais, por meio de visitas ou bilhetes, sempre se mostravam presentes.

Em todas as atividades de ensino desenvolvidas, os estudantes expressavam grande interesse pelo movimento não costumeiro nas aulas de Matemática: não receber as informações diretas, definições ou características dos conteúdos, mas terem que pensar sobre uma situação-problema e compartilhar este pensamento com um grupo e com a classe.

3.1.3. Turma B – Escola 2

Esta turma tem apenas 20 estudantes matriculados e apenas 13 frequentavam as aulas, sendo que destes, apenas cinco eram frequentes assíduos. Em média, o índice de faltas desta turma abrange 70% das aulas e a faixa etária varia entre 10 e 15 anos.

O índice de reprovação é alto e sete estudantes, dos 13 frequentes, foram reprovados em algum ano escolar.

Destacam-se duas particularidades desta turma:

Os estudantes desta turma têm grande dificuldade em expor para a classe seus pensamentos e sintetizá-los em grupo. A exemplo, na primeira atividade realizada, foi percebido uma falta de interesse muito grande em participar, pois esta situação não era habitual. Ao serem questionados qual era o motivo da falta de interesse, um dos estudantes disse: *"Fessora, tá doida!? Num pode dá liberdade pra gente não, porque senão a gente apronta" (sic).* E um outro completa: *"A gente pode fazer isso sozinho? Cada um na sua, de boa? Quero pensar só com a minha mente, não quero ninguém me enchendo" (sic)*.

Os estudantes solicitavam que a professora-pesquisadora propusesse tarefas do tipo: calcule, resolva os problemas, encontre o valor das expressões numéricas. Expressavam, verbalmente, em tom de indignação, não saberem responder quando não havia sido feito alguma situação-exemplo anteriormente, logo, pode inferir-se que o saber-fazer dos estudantes limitava-se a modelos de cálculos.

3.2. As Famílias

Para as atividades de ensino propostas, os estudantes foram divididos em grupos, denominados por de famílias, simulando as famílias nômades existentes no Antigo Egito e relacionando com a função dos grupos nas atividades de ensino que seriam propostas. A divisão ocorreu da seguinte forma:

i. Foi solicitado pela professora que cada estudante pensasse em uma qualidade que atribuiria a si próprio;
ii. Cada um deveria falar a sua qualidade e esta seria anotada na lousa pela professora;

iii. Alguns exemplos de qualidades surgidos foram: bom jogador, legal, feliz, amiga, ...
iv. As palavras foram anotadas sem a identificação do nome;
v. Depois de registrado todos os adjetivos identificando a qualidade atribuída a cada uma, foi perguntado para os estudantes como queriam dividir as famílias;
vi. A sugestão de uma das estudantes foi que as palavras sinônimas ficassem em famílias diferentes, justificando que as pessoas que compõem as famílias fossem sempre diferentes umas das outras;
vii. A sugestão foi aceita por todos.

Diante do exposto, as famílias tiveram a seguinte composição:

Família 1	**Família 2**	**Família 3**	**Família 4**	**Família 5**	**Família 6**
Michelly	Guilherme	Vinícius	Claudio	Giseli	Jair
Mayra	Zé	Vitão	Maria do Carmo	Ivete	Fabiana
Cirilo	Daniela	Gilson	Furquim	Viviane	Naná
Jefferson	Giovana	Natalia	Juliane	Albertinho	Elaine
Tito		Edi	Ricardinho	Vilma	Laiz

Foram necessárias realizar algumas alterações no fim do mês de junho de 2014, pois os estudantes: Naná e Ricardinho foram remanejados para outras turmas e Guilherme e Jefferson foram transferidos para outras escolas. Abaixo apresentamos a nova composição dos grupos denominados por famílias:

Família 1	**Família 2**	**Família 3**	**Família 4**	**Família 5**	**Família 6**
Michelly		Vinícius	Claudio	Giseli	Jair
Mayra		Vitão	Maria do Carmo	Ivete	Fabiana
Cirilo		Gilson	Furquim	Viviane	Daniela
Zé		Natalia	Juliane	Albertinho	Elaine
Tito		Edi	Giovana	Vilma	Laiz

A divisão do grupo de estudantes em família havia sido pensada pela professora em função do trabalho coletivo, mas os estudantes observaram tão fortemente a identidade de família que determinaram os parentescos e tinham atitudes uns com os outros como se realmente fossem familiares.

Seguimos, então, com a proposta das atividades de ensino desta pesquisa.

3.3. Atividades de ensino desenvolvidas nesta pesquisa

Foram propostas cinco atividades de ensino[13]:

I. *Medindo terras no Egito Antigo*
II. *O que é contínuo e o que é discreto?*
III. *O que é fração?*
IV. *De volta ao Egito Antigo: a necessidade de organização em sociedade*
V. *Equivalência de frações: utilizando as medidas do Egito Antigo*

Vejamos o detalhamento destas atividades:

I. Medindo terras no Egito Antigo

Conteúdo: **Medida: escolha da unidade padrão**

Objetivo geral: aprendizagem do nexo conceitual da fração - medida

Objetivos específicos:

1– Possibilitar que os estudantes percebam que, para medir quantidades não controladas naturalmente, é necessário a definição de uma unidade artificial padrão;

2 – Instigar os estudantes a "testarem" diversas unidades de medida para a escolha da unidade padrão;

3 – Proporcionar aos estudantes discussão em grupo e com a classe para que por meio deste conteúdo, possam alcançar novos significados para o entendimento de medida e unidade natural e artificial.

[13]As atividades utilizadas neste momento foram adaptadas do livro "A fração – A repartição da Terra" (de Luciano Lima e Roberto Moisés, São Paulo: CEVEC-CIARTE, (1998) e de atividades elaboradas por: Profª Drª Anna Regina Lanner de Moura, Prof. Dr. Manoel Oriosvaldo de Moura, Elaine S. Araújo, Erica Moreira Ferreira, Fabiana Fiorezi de Marco, Maria do Carmo de Sousa, Maria Elisa M. Bernardes, Micheline Kanaan, Silvia C. A. Tavares, Wellington L. Cedro e da pesquisa de mestrado, intitulada "Uma reflexão sobre formação de professores no ensino da Matemática" de Esther Pacheco de Almeida Prado, 1998, PUC-SP.

Primeira e Segunda aulas

Ao iniciar a aula, foi falado aos estudantes que o assunto do bimestre seria frações e iniciaríamos com o problema da medição de terras no Egito Antigo:

Era preciso dividir as propriedades de terras entre os egípcios para plantar e criar animais e, assim, obter seu sustento, surge então o primeiro problema: Como organizar o espaço para que cada egípcio tenha um lote de terras? Qual unidade de medida usar para que essas divisões sejam justas?

Os estudantes, organizados em grupos, denominados por famílias[14], desta forma semelhante à situação do Egito, os estudantes foram levados a um grande gramado atrás da sala de aula, o qual foi chamado de Egito Antigo. Tiveram um espaço pré-definido e precisariam se organizar para delimitar seus próprios terrenos. Deveriam definir a melhor medida e para isso, poderiam utilizar partes do corpo, objetos que considerassem apropriados, tendo apenas o impedimento de uso de instrumentos medidores modernos (régua, trena e etc.).

A divisão das terras foi realizada em dois momentos: o primeiro, atendendo aos próprios interesses de cada família e, o segundo, à adequação para que a divisão fosse o mais justa possível para todos. Findada as divisões, cada família deveria registrar da maneira que considerasse mais eficiente todos os procedimentos adotados, desde a divisão de terras até a medição.

Terceira aula

Em sala de aula, cada grupo expôs seus registros e a partir destes diálogos e a professora pôde questionar sobre as ideias e sensações em relação à unidade de medida escolhida por cada família e, assim, foi fomentada uma discussão entre grupos-classe sobre as unidades de medida escolhidas pelos grupos. Neste momento, a professora alertou para a possibilidade da medida não exata, ou seja, que solução os estudantes encontraram, caso o terreno a ser medido a partir da unidade escolhida, não tivesse apenas quantidades inteiras desta medida? (O que fazer com a sobra?).

Quarta aula

[14] A organização das famílias foi detalhada subcapítulo *3.2. As famílias*.

Procurando responder à questão “O que fazer com a sobra?”, as famílias deveriam responder as seguintes questões:

A. Quais foram os passos da medição do terreno?
B. Qual foi a unidade escolhida pelo grupo para fazer as medições?
C. Como o grupo registrou a quantidade de terra que não coube na unidade de medida escolhida? (O grupo deveria explicar como registrar a sobra de terras em relação a unidade de medida escolhida).

<u>**Quinta e sexta aulas**</u>

A professora questionou as famílias se a divisão de terras feita por eles era justa? Se alguma família se considerava prejudicada ou favorecida em relação aos outros?

A partir daí as famílias foram orientadas que deveriam definir uma única unidade de medida para que a divisão de terras fosse realmente justa.

A escolha ocorreu após algumas discussões entre os estudantes, pois não concordavam ora com um, ora com outro. Definiram, então, que o pé calçado com o tênis da professora seria a unidade de medida. Estavam utilizando a ideia de se aproximar do cúbito do faraó (unidade padrão utilizada no Egito Antigo, conforme detalhamento no capítulo anterior), em que a professora era o faraó e a medida de seu pé calçado com tênis, seria o cúbito. Após esta escolha, um novo problema relacionado à divisão de terras no Egito Antigo é exposto aos estudantes:

Todo o ano as cheias do Nilo cobrem os terrenos repartidos, apagando as marcas das divisões. Além disto o rio alagava muitas porções, diminuindo os tamanhos dos terrenos.
Como resolver este problema?
Como registrar numericamente a divisão de terras mesmo após as cheias e a mesma continue sendo justa a todos?

Após a discussão em classe, os estudantes foram solicitados a registrar a solução (individualmente), para verificação da compreensão de medida, unidade padrão e a representação para as sobras.

II. O que é contínuo e o que é discreto?

Conteúdo: **Unidades naturais são sempre organizadas?**

Objetivo geral: compreender a diferença entre quantidades discretas e contínuas

Objetivo específico: Possibilitar aos estudantes percepção da interferência do homem na organização das unidades naturais e a necessidade de se obter unidades artificiais para a organização dessas unidades naturais.

Primeira aula

Sem que fosse explicitado informações sobre quantidade contínua ou discreta, iniciou-se uma discussão questionando aos estudantes, se os elementos listados a seguir eram ou não organizados em unidades naturais.

Água	Feijão	Altura	Velocidade
Coco	Açúcar	Peso (massa)	Idade
Geladeira	Eletricidade	Estrelas	Alegria
Som	Saudade	Vírus	

Nesta atividade, a professora pesquisadora mediou a discussão, instigando os estudantes a compreenderem que alguns destes elementos só podem ser organizados por unidades artificiais, pois tiveram interferência do homem para serem organizadas, enquanto outros são organizados em unidades naturais. A partir desta discussão, deveria ser construída com os estudantes a compreensão de quantidades discretas e contínuas.

Verifica-se ser interessante que o professor também solicite aos estudantes que escrevam outros elementos que podem ou não ser organizados em unidades naturais.

Após estas discussões, os estudantes foram solicitados a responder:

A. O que é uma quantidade contínua?
B. O que é uma quantidade discreta?

Esta atividade foi necessária para a pesquisa no que se refere ao movimento reflexivo da professora-pesquisadora para a organização das próximas atividades no intuito de propiciar aos estudantes a percepção das diferenças entre as unidades naturais e artificiais e, então compreenderem que a unidade padrão escolhida na Atividade 1 era, então, uma unidade artificial que teria a função de discretizar a terra que, sem a interferência do homem, é uma quantidade contínua.

III. O que é fração?

Conteúdo: **O que é fração?**

Objetivo geral: verificar a compreensão dos estudantes ao que se refere a parte e inteiro na fração.

Objetivos específicos:

1– Instigar os estudantes para que identifiquem as diferenças entre parte e inteiro, partes iguais, partes diferentes, unidades menores e divisão da unidade inteira;

2 – Verificar se os estudantes conseguem representara fração a partir de situações propostas, de acordo com o que expressaram já conhecer desde o 5º ano do ensino fundamental.

Primeira e Segunda aulas

Os estudantes foram solicitados a se organizarem em famílias constituídas para o desenvolvimento da Atividade 1 e cada família deveria, sob orientação da professora, responder às seguintes perguntas:

Observando os estudantes presentes nesta sala,

a) Qual é o **inteiro**?

b) O que podemos considerar como **parte**?

No momento seguinte, os estudantes deveriam escolher algumgrupo a observar, anotar o nome do grupo e por conseguinteresponderem:

c) Em quantas “unidades menores” se encontra “dividida a unidade inteira”?

d) Quantas “unidades menores” existem na parte?

e) Escreva a representação fracionária que resulta desta contagem.

f) Escreva a representação fracionária que indica os estudantes da sua sala e o grupo escolhido.

g) Escreva a representação fracionária que indica as carteiras de sua sala de aula e aquelas que estão desocupadas.
h) Escreva a representação fracionária que indica as letras do seu nome e as vogais presentes nele.

Cada grupo deveria compartilhar suas respostas com a classe e responder:

i) Todos os grupos obtiveram as mesmas representações? Por quê?
j) Quando tratamos de partes em relação ao todo, essas partes devem ser iguais ou diferentes?
k) Afinal, o que é fração?

A discussão foi intensa, os estudantes compartilharam suas respostas, porém foi possível perceber que ainda não estavam satisfeitos e não foi possível chegar à alguma conclusão naquele momento.

Terceira aula

A partir das situações abaixo, individualmente, os estudantes deveriam indicar quais representações fracionária são solicitadas.

A. Maria repartiu uma corda de 1 metro em 7 pedaços iguais e deu cada pedaço a uma colega diferente. Cada colega de Maria recebeu que fração da corda?

B. Um eletricista pegou um fio de 1 metro de extensão e cortou em 10 pedaços iguais. Indique a fração que representa um pedaço do fio.

C. Zezé dividiu um bolo em 5 pedaços iguais. Deu 2 pedaços para a irmã menor e ficou com os outros. Indique a fração do bolo de Zezé e de sua irmã menor.

D. Encontre a fração indicada nos problemas abaixo:

a) Pedro dividiu seu caderno em partes iguais para cinco matérias que estuda. Cada parte do caderno corresponde a qual fração?

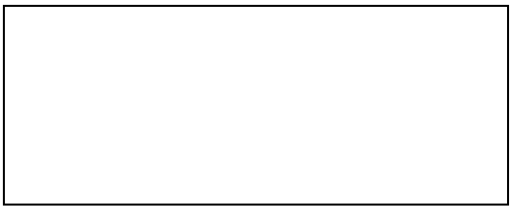
b) E as matérias de História, Geografia e Ciências juntas correspondem a que fração?

c) Uma hora corresponde a que fração do dia?

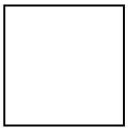
d) Osmar anda 200 metros da sua casa até o trabalho. Ele já andou 60 metros. Que fração do total da distância ele andou?

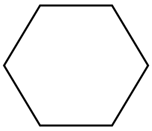
e) Que fração do total da distância falta ainda para Osmar andar?

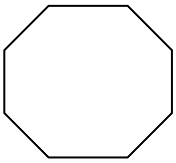
E. O desenho abaixo representa um determinado terreno. Paulo comprou $\frac{2}{3}$ deste terreno. Sombreie a parte que Paulo comprou.



F. Faça o mesmo para:

a) $\frac{1}{4}$ em 

b) $\frac{5}{6}$ em 

c) $\frac{3}{8}$ em 

d) $\frac{2}{9}$ em 

A atividade 3 foi proposta motivada pela ação de alguns estudantes que, desde a Atividade 1, expressavam que “já sabiam fração”. Com a intencionalidade, de refletir sobre o que haviam estudado em anos anteriores e o que ainda estava a ser proposto nesta pesquisa, tomou-se a decisão de desenvolver esta atividade, a fim de compreender o que era de real conhecimento sobre frações por parte dos estudantes e quais possíveis problemas essa representação do número racional traria às aulas seguintes. Foi possível verificar, por meio registros feitos pelos estudantes nesta atividade, que o que os estudantes diziam saber sobre frações era, na verdade, apenas o reconhecimento da representação numérica, não compreendiam os atributos internos do número fracionário.

IV. De volta ao Egito: a necessidade de organização em sociedade

Conteúdo: **<u>Medição e escrita fracionárias, organização do inteiro e da parte</u>**

Objetivo geral: Atender e instigar as necessidades dos estudantes em voltar às terras do Egito para organizarem-se em sociedade e assim dividir novamente as terras.

Objetivos específicos:

1– Verificar os procedimentos de medição e unidade padrão adotada;

2 – Verificar como os estudantes medem e registram as sobras;

3 – Representações das medidas avançando da escrita retórica para simbólica

<u>Primeira aula e segunda aula</u>

A partir da situação desencadeadora de aprendizagem da Atividade I, outras decorreram desta, partindo de sugestões dos estudantes, tais como: organizar o Egito como uma cidade, com setores distintos para moradia, plantio, criação de gado e mercado de trocas; determinada a unidade padrão, fazer esta reorganização, utilizando-a para medir e assim, registrar o que foi feito.

A partir da necessidade demonstrada pelos estudantes e da unidade padrão (pé da professora-pesquisadora) escolhida pelos estudantes na Atividade I, foi entregue aos estudantes, tiras de papel com tal medida, explicitando que aquela seria a unidade padrão. De volta às terras do Egito, os estudantes determinaram os espaços que seriam destinados à moradia, plantio, criação de gado e mercado de trocas. Com as tiras de papel, as famílias foram solicitadas a dividir as terras para alocarem estes setores e, assim, registrar as medidas obtidas e procedimentos de medição. Neste momento de medição precisariam lidar com a sobra e então encontrar um modo para medir e registrá-la.

Após a realização das medições, os estudantes foram solicitados afazerem seus registros. A professora-pesquisadora somente determinou que deveria ter a parte escrita dissertativa e não apenas um desenho.

<u>Terceira aula</u>

Os registros foram entregues à professora-pesquisadora e uma roda de conversa foi realizada para verificar as compreensões dos estudantes em relação a este outro momento de medição, pois o mesmo difere daquele vivido na Atividade I, já que a necessidade deste partiu dos próprios estudantes.

V. Equivalência de frações: utilizando as medidas do Egito

Conteúdo: **Equivalência de frações na reta numérica**

Objetivo geral: A partir dos registros das medições obtidas pelos estudantes na Atividade IV, explorar frações equivalentes.

Objetivos específicos:

1– Comparar diferentes representações fracionárias;

2 – Verificar se os estudantes compreendem a localização das frações na reta numérica;

3 – Explorar a reta numérica para determinar as frações equivalentes.

Primeira aula

Organizar as frações (utilizando a representação encontradas pelas famílias nos registros) obtidas das medições na Atividade IV em um quadro, conforme o modelo abaixo:

Setor	Família responsável	Lado 1	Lado 2	Lado 3	Lado 4
Moradia					
Plantação					
Criação de gado					
Mercado de trocas					

Quadro 5: Modelo de quadro utilizado para organização dos registros dos estudantes na Atividade 5

Após esta organização em um quadro, foi solicitada a reescrita de tais frações, utilizando somente números, pois as mesmas foram registradas pelos estudantes a partir da linguagem retórica e sincopada[15] (EVES, 2004).

Segunda aula, terceira aula e quarta aula

Após a obtenção de representação das frações, representadas apenas com números, o trabalho coletivo iniciado foi de localizá-las em retas numéricas, separadamente e, a partir daí, representar na reta uma fração equivalente àquela selecionada.

Destarte, foram desenvolvidas as cinco atividades, ressaltando que as Atividades 2 e 3 fizeram parte do movimento reflexivo da professora-pesquisadora acerca das ações dos

[15] Estes conceitos foram discutidos no capítulo 1.

estudantes para melhor reorganizar o ensino de número fracionário, como também a compreensão de unidades naturais e artificiais. Sendo assim, no capítulo seguinte, traremos em episódios e cenas as análises das Atividades 1, 4 e 5, pois nelas os estudantes expõem suas necessidades, motivos e ações, num movimento dialético entre o lógico e o histórico do conceito de fração.

Capítulo 4. Episódios e cenas: uma análise das atividades de ensino

Para a construção de nossa análise, tomamos por fundamento, como já definimos nos capítulos anteriores, a teoria histórico-cultural desenvolvida por Vygotsky, Leontiev, Davydov, dentre outros. Esta teoria aborda a importância de se gerar **uma necessidade** no indivíduo e **um motivo pessoal** para aprender. Segundo estes autores, *a presença desses dois aspectos nas ações dos indivíduos é demonstrativa de que eles se encontram em atividade, se encontram envolvidos psicologicamente numa finalidade* (MARCO, 2009, p.110).

Neste sentido, Marco (2009, p.110) considera que *se o aluno, ao desenvolver atividades em sala de aula, é colocado pelo planejamento do professor em condições favoráveis para que tenha um envolvimento ativo — ou seja, se tiver uma necessidade e um motivo pessoal para participar dessas atividades —, ele pode se encontrar em condições facilitadoras para aprender.*

Assim, o movimento nesta seção foi o de analisar as atividades de ensino 1, 4 e 5[16] desenvolvidas com os estudantesda Turma A – Escola 2, organizadas em episódios e cenas (MOURA, 2004). Adotou-se esta metodologia, porque este tipo de organização

> [...] aponta para a possibilidade de tomada de um elemento observável mediante o qual se pode inferir forma e conteúdo da subjetividade, ao mesmo tempo que permite identificar indícios de internalização de um conteúdo externo. (MOURA, 2010, p.158).

Sendo assim, nossas análises estão detalhadas conforme organização demonstrado no quadro a seguir:

[16] As atividades 2 e 3, não serão tomadas para análise, pois conforme explanado no Capítulo III desta pesquisa, estas fizeram parte das ações reflexivas sobre o movimento da professora-pesquisadora a partir do que os estudantes traziam como experiência com números fracionários em anos escolares anteriores, servindo como orientadoras para a elaboração das atividades 4 e 5.

Atividades de Ensino	Episódios	Cenas
Medindo terras no Egito Antigo	Visitando o Egito Antigo	1. Os procedimentos de medição
		2. A relação com a sobra
De volta ao Egito: a necessidade de organização em sociedade		3. Como registrar?
Equivalências de frações: utilizando as medidas do Egito Antigo	A reta numérica e as equivalências	1. Um passeio pelas escritas: retórica, sincopada e simbólica
		2. Por que na reta?

Quadro 6: Atividades de ensino, episódios e cenas da pesquisa (organizados pela autora)

Episódio 1: Visitando o Egito Antigo

Neste episódio, analisamos três cenas que revelam, por meio das ações dos estudantes objetivadas nas Atividades 1 e 4, a necessidade que os estudantes tiveram de estabelecer seus objetivos e ações para suprir a situação desencadeadora de aprendizagem, que inicialmente era a de dividir as terras de forma justa. Durante o desenvolvimento da atividade, foram surgindo outras necessidades para os estudantes, por exemplo: como organizar o Egito Antigo de modo que as terras fossem divididas e se estabelecessem relações societárias entre as famílias?

Para este momento, selecionamos três cenas que passamos a analisá-las:

Cena 1: Os procedimentos de medição

Esta cena foi desenvolvida num espaço aberto da escola, um gramado grande, atrás da sala de aula da turma. Este cenário foi delineado pela situação desencadeadora de aprendizagem de como dividir as terras de modo justo para todas as famílias e como organizá-lo numa estrutura semelhante à de uma cidade. Assim, a situação proposta aos estudantesfoi: sem instrumentos de medida padronizados, como dividir as terras? Na tentativa de elucidar esta situação, foi presenciado o seguinte diálogo na família 1:

Michelly: *Mas como é que vai dar certo, sem medir?*
[Professora]: *Esse é justamente o problema dos egípcios, como será que eles resolveram? Será que conseguiram?*
Guilherme: *Vamo lá fora, que daí a gente pensa, num adianta nada ficar resmungando, Michelly!*

Para se apropriarem do procedimento de medição, foi preciso recorrer às partes do corpo (pés, mãos e braços, mas se concentraram no uso dos pés) como instrumentos de medida artificiais (LIMA *et al*, 1998a; b), já que não dispunham de instrumentos padronizados para isto. A priori, houve um estranhamento em utilizar o corpo, pois entendiam que para medir algo só era possível com o auxílio da régua ou trena. Após alguns minutos de discussão em grupo, os estudantes logo elegeram um membro da família e qual parte do seu corpo seria utilizada como instrumento de medida. Todas as famílias utilizaram passos para a medição, cada qual à sua maneira. Com barbantes, fizeram as primeiras demarcações que foram alteradas após negociação (Figuras 9 e 10).

Figura 9: Panorama de divisão de terras antes da negociação

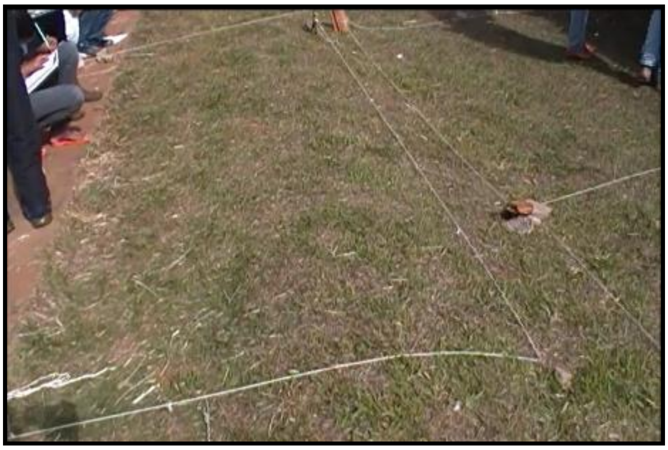


Figura 10: Panorama de divisão de terras depois da negociação

Maria do Carmo: *Na minha família só tem 5 pessoas, esse espaço aqui tá bom, dá pra todo mundo!*
Vinicius: *Ah nem! O deles tá mó grandão!*
Zé: *Vamo ter que diminuir o nosso!*
Vilma: *A gente pede pra Juliane ir um pouco mais pra lá.*
Claudio: *Põe o pauzinho deles mais pra lá, ó, e a gente puxa o nosso pra frente, daí desamarra da grade e coloca mais pra lá, que daí o delas fica maior.*
Jefferson: *Eu não quero mudar o meu.*
Professora: *Estão todos satisfeitos?*
Professora: *Ué Maria do Carmo, você mudou de ideia?*
Maria do Carmo: *[indignada] Claro né, olha isso!*
Professora: *Por que?*
Maria do Carmo: *[indignada] Os meninos querem tudo pra eles, olha o nosso e da Juliane, tá muito piquinim.*

Neste momento, os estudantes precisaram utilizar de suas relações interpessoais para resolver o impasse surgido na divisão das terras e, coletivamente, chegar a um senso comum. A fala de Maria do Carmo, *os meninos querem tudo pra eles, olha o nosso e da Juliane, tá muito piquinim,* demonstra que as ações foram realizadas pelos estudantes de modo natural e tal fenômeno pode ser atribuído ao fato de que muitos dos estudantes serem moradores de um assentamento de sem-terra, localizado próximo à escola. Essa experiência de vida influenciou-os, levando-os a assimilar uma dada significação que, para Leontiev (1978), apoiado nas ideias de Marx (1975),

> O homem encontra um sistema de significações pronto, elaborado historicamente, e apropria-se dele tal como se apropria do instrumento, esse precursor material da significação. O fato propriamente psicológico, o fato da minha vida, é que eu me aproprie ou não, que eu assimile ou não uma dada significação, em que grau eu a assimilo e também o que ela se torna para mim, para a minha personalidade; este último elemento depende do sentido subjetivo e pessoal que esta significação tenha para mim (LEONTIEV, 1978, p.96).

Os estudantes perceberam, em roda de conversa, que por mais que a maioria das famílias estivesse satisfeita com as divisões e os espaços demarcados, estes jamais seriam iguais, já que cada um adotou uma unidade de medida diferente e que, então, era preciso estabelecer uma unidade padrão.

Cirilo: *Assim não dá fessora! Cada um tem o pé de um tamanho, a gente tem que usar um pé só que nem os egípcios!*
Vinícius: *A gente num tem um faraó, mas tem a fessora!*
Natalia: *Então a fessora é o nosso faraó, vamo usar os pé dela!*
[Classe]: *ÉÉÉÉÉÉÉÉÉÉÉ*
Furquim: *A gente desenha no papel o pé da fessora e usa pra medir.*
Professora: *Então conseguimos estabelecer nossa unidade padrão?*
[Classe]: *Simmmmmmmm*
Professora: *Então qual a nossa necessidade em ter unidade padrão?*

> **Cirilo:** *Poder dividir tudo certinho, porque daí conseguimos ver quantas partes inteiras e quantas partes que sobram na hora de medir.*

Neste movimento coletivo, por meio da linguagem, os estudantes estabelecem relações sobre o que haviam feito e o que ainda deveriam fazer para que a situação desencadeadora de aprendizagem fosse solucionada, uma vez que houve uma necessidade em quantificar o inteiro e as partes. A fala de Cirilo, *cada um tem o pé de um tamanho, a gente tem que usar um pé só que nem os egípcios!*, nos revela esta necessidade sentida pelo grupo. Este fato nos lembra Caraça (1951) que, ao discorrer sobre o conceito de medida, afirma que era preciso saber quantas vezes um comprimento cabe no outro. Para responder esta pergunta, foi preciso uma nova visita *ao Egito* e com uma unidade padrão definida. Para tal definição, Vinícius e Natália se colocaram neste movimento: *A gente num tem um faraó, mas tem a fessora!* (Vinícius). *Então a fessora é o nosso faraó, vamo usar os pé dela!* (Natalia).

Ora, com a unidade padrão definida e as famílias necessitando se organizar em sociedade, o procedimento de medição teve uma modificação, pois antes o motivo para as ações dos estudantes era apenas dividir as terras de modo justo, agora era estabelecer uma quantificação de inteiros e subunidades para esta medição. A modificação na ação de medir dos estudantespode ser acompanhada pela discussão a seguir:

> **Cirilo:** *Fessora, deu 10 daqui e 13 de lá.*
> **Professora:** *10 o quê?*
> **Cirilo:** *10 pés inteiros e 13 pés inteiros.*
> **Professora:** *E os outros dois lados já mediu? É possível garantir que este espaço é regular?*
> **Tito:** *Não! Precisa medir tudinho, vamo lá!*

Até este momento, as sobras não tinham se tornado um problema para esta família, mas outras já haviam expressado como medida: *oito inteiros e uma parte*. Nessa fala, podemos inferir que o estudante ainda não tinha de forma consciente a necessidade de expressar (pelo menos verbalmente) quantas subunidades formavam esta parte. No entanto, era necessidade da professora que esses estudantespensassem em "O que fazer com a sobra?" Esta situação desencadeadora tinha como principal objetivo da professora, o direcionamento das ações dos estudantes na tentativa de encontrar uma forma de registrar a sobra: a representação fracionária.

Na tentativa de solucionar esta situação desencadeadora, passamos a analisar a ***cena 2: A relação com a sobra,*** na qual destacamos as ações realizadas pelos estudantesà procura da solução dessa nova necessidade, que também passou a ser deles.

Cena 2: A relação com a sobra

Na cena 1, os procedimentos de medição foram se aperfeiçoando conforme surgiam as necessidades de quantificar mais precisamente as medidas. Nesta cena, são destacadas as ações e diálogos de uma das famílias. No momento que iam medindo, marcavam com os dedos onde as tiras de papel (a medida padrão estabelecida, o pé com tênis da professora) paravam, iam revezando a posição das mesmas e contando a quantidade de tiras inteiras utilizadas. Para a quantidade de terras em que o inteiro não cabia, tinham de dobrar a tira e verificar as quantidades de partes para aquele pedaço de terra. Este processo exigiu dos estudantes o "pensar sobre" a situação encontrada, o que tornou a situação interessante Segue o diálogo completo e uma sequência de fotografias que podem elucidar melhor as ações dos estudantes.

Cirilo: *Ó é assim que estamos fazendo...*

 **Sequência 1**	 **Sequência 2**
 **Sequência 3**	 **Sequência 4**
 **Sequência 5**	 **Sequência 6**

Quadro 7: Sequência de fotos do procedimento de medição com inteiros e sobras da família 1

Cirilo: *1, 2, 3, 4, ...*
Professora: *Beleza!*
Cirilo: *6...*
Tito: *E agora, fessora?*
Professora: *Olha a sobrinha, ali tá faltando...*
Cirilo: *Dobra, dobra!!!*
Professora: *Como é que os egípcios faziam?*
Cirilo: *Dividia no meio...*
Michelly: *Dava um nó...*

Enquanto falavam, já iam dobrando a tira de papel ao meio.

Professora: *Vamos tirar a pedra para vocês poderem medir essa sobra.*
Cirilo: *Um pedaço e meio!*
Professora: *E aquele pedacinho? O que precisa fazer?*
Michelly: *Vai dobrando mais...*
Professora: *Precisa dobrar mais? Deu certo? Quantas vezes você dobrou, usou uma metade e...?*
Cirilo: *1, 2, 3, ...* (Cirilo abria a tira e contava as vezes que desdobrava, até chegar no que chamou de meio).
Cirilo: *1, 2, 3, 4!* (Com a tira toda desdobrada).
Professora: *Quantas marquinhas ficaram na sua tira?*
Cirilo: *16!*

Neste momento ao serem questionados sobre a quantidade de inteiros, os estudantes da família 1 demostraram que haviam esquecido de registrar suas medidas e a estudante Michelly voltou a fazer a medição sozinha da quantidade de inteiros.

Cirilo: *Como vou anotar essas pitititinhas?*
Professora: *Quantas usou?*
Cirilo: *Todas.*
Professora: *Todas?*
Cirilo: (risos) *Não só uma!*
Professora: *E como vai anotar?*
Cirilo: *Vai tudo com palavras.*
Tito: *Não tonto! O número você faz com número e o inteiro e a parte com palavras.*
Michelly: *Nove! Nove inteiros!!!*
Professora: *Agora vocês têm os inteiros e as partes.*
Cirilo: *Nove inteiros, uma metade e uma parte de dezesseis!*
Professora: *O que podemos falar sobre essa quantidade?*
Michelly: *A gente usou uma unidade artificial né, então a quantidade é discreta, apesar da terra ser contínua*[17]*!*

[17] A discussão com os estudantes sobre quantidades contínuas e discretas havia sido feita na Atividade 2 desta pesquisa e não será foco de análise por entendermos que a mesma nos auxiliou em detalhar a diferença entre unidade natural e artificial, para podermos explicar o que a unidade padrão escolhida na Atividade 1 e utilizada na Atividade 4, seria uma forma de discretizarmos a quantidade contínua.

No diálogo acima, lidar com a sobra era essencial, mas ainda era presente a dificuldade de como fazê-lo. Quando exposta uma situação da História da Matemática sobre como os egípcios faziam, durante roda de conversa na Atividade I[18], o movimento dos estudantes foi o de reconstruir tal situação, dobrando a tira de papel. Este fato não foi verificado quando utilizavam os passos como unidade, pois diziam *5 passos e um pouco*. Para os estudantes, naquele momento, este *pouco*, não precisava ser quantificado, pois as necessidades da turma não se voltavam para a sobra, mas para a divisão mais justa de terras. Quando a família disse: *nove inteiros, uma metade e uma parte de dezesseis*, inicia-se, retoricamente, (EVES, 2004) a representação da fração $9\frac{9}{16}$, pois ainda organizavam suas medidas e registros.

Na última fala do diálogo, quando Michelly diz à professora *A gente usou uma unidade artificial né, então a quantidade é discreta, apesar da terra ser contínua!*, fica nítido que as inter-relações estabelecidas não são apenas no atributo externo do conceito, como também no interno. Parece-nos ter havido, para esta estudante, a compreensão de que a partir da escolha de uma unidade padrão, tem-se uma unidade artificial e, que ao medir, se expressa discreta a quantidade que antes desta interferência era contínua. Michelly mostrou,

> ser capaz de concretizar a relação geneticamente inicial e universal do objeto em estudo em um sistema de conhecimentos particulares sobre ele, os quais devem manter-se em uma só unidade, que possa garantir transições mentais do universal ao particular e vice-versa (DAVYDOV, 1987, p.106).

De acordo com Leontiev (1978), essa interiorização expressa na fala de Michelly, dá-se pela generalização específica dos seus encadeamentos, na qual modifica o nível de pensamento em que atua.

É importante observar, nesta cena, que cada estudante tinha a sua função no coletivo (um anotou, outro coordenava as ações, outro fazia as medições) e que todos se mostravam satisfeitos com suas ações, pois o conhecimento formado coletivamente serviu de resposta às dúvidas individuais. Diante deste fato, pode-se inferir que os estudantes estavam em atividade (LEONTIEV, 1983). Além disso, esta família demonstrou determinação em todos os momentos do trabalho, o que nos leva a entender que, neste tipo de atividade, os estudantes demonstram maior autonomia, pois, a partir de indagações feitas pela professora e por eles mesmos, deram prosseguimento às suas ações para determinar à medida que procuravam sem esperar que a professora-pesquisadora lhes atribuíssem tarefas.

---

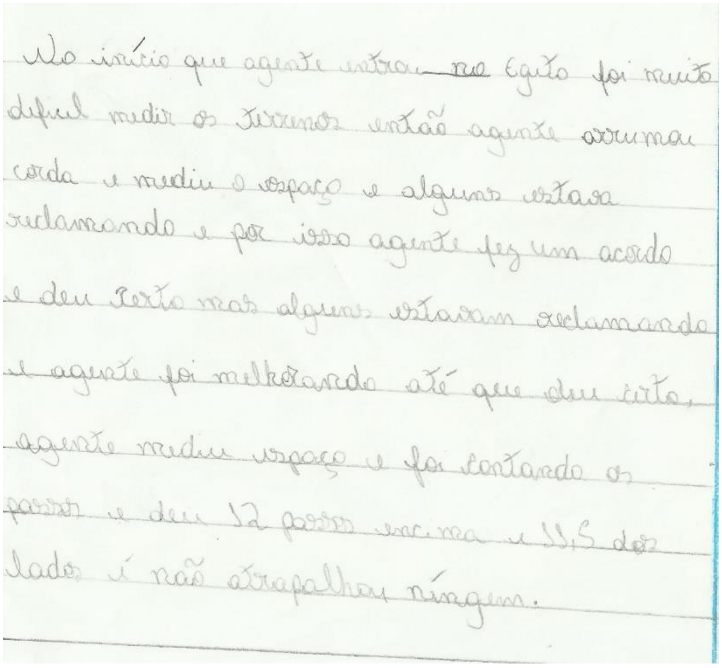
[18] Vide Anexo I desta pesquisa.

Nas ações dos estudantes, tanto o processo de medição quanto a relação com a sobra precisavam ser registrados de alguma forma. Tais registros foram modificando-se ao passar do tempo, e é sobre isso que discutiremos na cena a seguir.

Cena 3: Como registrar?

Nas atividades 1 e 4, foi possível perceber que as tomadas de consciência não se deram somente pela linguagem, pela comunicação verbal entre os estudantes, pois, em muitos momentos, a comunicação expressava-se por registros escritos, seja em forma de texto ou com auxílio de um desenho. São essas diferenças que analisaremos nesta cena.

Na ***Cena3: Como registrar?*** Utilizamos os registros da família 6, cujos membros são: Fabiana, Laiz, Elaine, Daniela e Jair. Na Atividade 1, quando solicitados a descrever o que vivenciaram, o texto desta família foi o seguinte:


No início que agente entrau no Egito foi muito dificil medir os terrenos então agente arrumau corda e mediu o espaço e alguns estava reclamando e por isso agente fez um acordo e deu certo mas alguns estavam reclamando e agente foi melhorando até que deu certo. agente mediu espaço e foi contando os passos e deu 12 passos em cima e 11,5 dos lados é não atrapalhou ningem.

No início que a gente entrou no Egito foi muito difícil medir os terrenos, então a gente arrumou corda e mediu o espaço e alguns estavam reclamando, por isso a gente fez um acordo. Deu certo! Mas alguns estavam reclamando e a gente foi melhorando até que deu certo. A gente mediu espaço e foi contando os passos e deu 12 passos em cima e 11,5 dos lados. É, não atrapalhou ninguém!!!

Fonte: Registro escrito da Atividade 1 da família 6, conforme Anexo 2

A família 6 sentiu a necessidade de reafirmar o texto com o auxílio do desenho abaixo (Anexo 2), como tentativa de informar, exatamente, como foi a divisão.

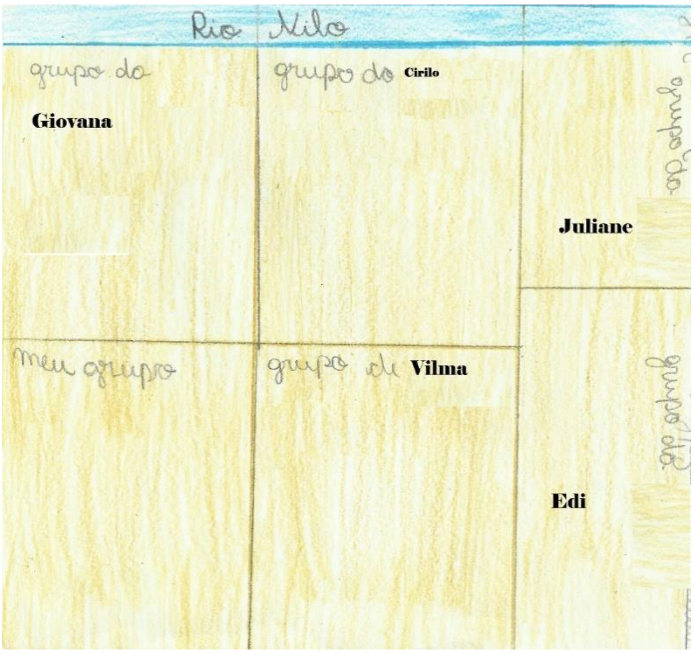
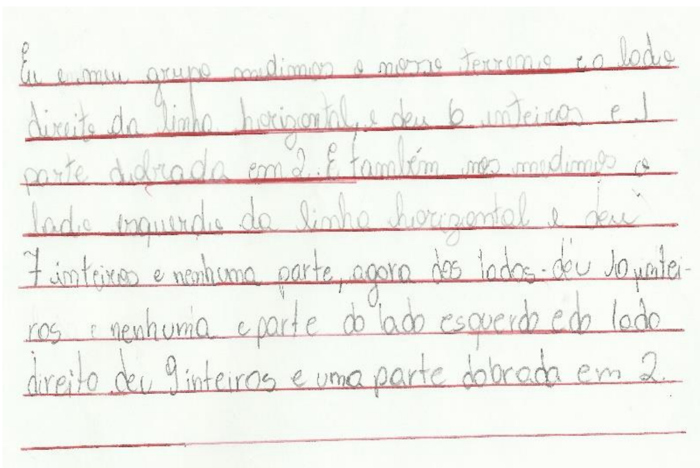


Figura 11: Desenho sobre a visualização da família 6 em relação à organização do Egito na Atividade 1

Para esta família, o texto tinha caráter descritivo das ações que os levaram a dividir os terrenos e registrava a importância que esta divisão tinha em ser justa a todas as famílias e mostrava a preocupação em evidenciar as medidas, ao contrário do que podemos verificar no desenho. Apesar de terem utilizado a representação decimal para um dos lados, é possível também perceber que os estudantes não tiveram a preocupação de medir os quatro lados do terreno para verificarem se as medidas eram iguais, apenas assumiram que, por visualizarem o terreno como um retângulo, este teria as propriedades geométricas da forma retangular. Vejamos, então, como a família construiu seu texto na Atividade 4, quando retornaram ao Egito Antigo:



Eu e meu grupo, medimos o nosso terreno e o lado direito da linha horizontal deu 6 inteiros e 1 parte dobrada em 2. E também, nós medimos o lado esquerdo da linha horizontal e deu 7 inteiros nenhuma parte. Agora, dos lados deu: 10 inteiros e nenhuma parte, do lado esquerdo e, do lado direito deu 9 inteiros e uma parte dobrada em 2.

Fonte: Registro escrito da Atividade 4 da família 6, conforme Anexo 3

Ao propormos a atividade 4, o desenho desta família também se modificou (ANEXO 3):

Figura 12: Desenho sobre a visualização da família 6 em relação à organização do Egito na Atividade 4

A preocupação era demasiada em localizar os lados que estavam sendo medidos e os detalhes de cada medida. O “como se fez” e o “quem fez”, não foi explicitado no texto demonstrando que, naquele momento, a necessidade estava realmente na medida e não em seus procedimentos apenas. Esta preocupação nos leva a inferir que a ação coletiva predominava.

Nos dois textos desta família, a linguagem escrita utilizada foi a sincopada, com explicação simples; quando a família realizava todas as medições, a escrita era retórica, que se fez presente apenas nos rascunhos da própria família. Quando solicitamos que os registros fossem entregues à professora, os estudantes desejaram fazer novos registros, com a justificativa de *entregar mais caprichado*. A professora disse, então, que poderiam entregar os dois, tanto o rascunho quanto o *caprichado*, mas os estudantes não aceitaram a proposta. Como foi possível perceber nos depoimentos apresentados acima, o registro era importante para os estudantes, a professora então combinou com os estudantes que entregariam *o* caprichado, mas que deveriam guardar o rascunho para conferência em caso de dúvida.

Quanto aos desenhos, podemos inferir que no primeiro, a família pretendia apenas localizar a disposição dos terrenos de cada família, não sendo necessário nem expressar as medidas do próprio terreno, enquanto, que no segundo, só detalharam as medidas do setor de Mercado de Trocas, uma vez que ficaram responsáveis por este setor. Este último desenho também facilitou o entendimento sobre o que o texto descrevia quanto às direções e sentidos, como quando descreveram: *lado direito da linha horizontal deu 6 inteiros e 1 parte dobrada em 2*.

Podemos inferir que o registro “matemático” ainda não era o problema para esta família e pouco gerou, neste momento, a necessidade de saber como escrever uma medida de forma simbólica (EVES, 2004). Assim, julgamos que o desenvolvimento dos nexos conceituais de fração, definidos no capítulo I, por meio de atividades de ensino, pôde auxiliar na passagem de uma representação a outra, favorecendo a construção do conceito.

Por meio desta proposta, foi possível entendermos que os registros não só podem estabelecer um elo de comunicação, como também *uma forma da consciência e pensamento humanos* (LEONTIEV, 1978, p. 87). Ainda segundo Leontiev (1978),

> Tal ou tal conteúdo, significado na palavra, fixa-se na linguagem. Mas para que um fenômeno possa ser significado e refletir-se na linguagem, deve ser destacado, tornar-se fato de consciência, o que, como vimos, se faz inicialmente na atividade prática dos homens, na produção. (LEONTIEV, 1978, p.87).

Podemos, então, inferir que os textos e os desenhos produzidos pelos estudantes a partir das experiências vividas nas atividades propostas foi uma forma de significação e, para cada um dos estudantes, teve uma forma diferente. Porém o reflexo do objeto, a consciência de suas ações, ocorreu pela prática social, coletiva, o que nos leva a entender que tratava-se de transformar a ação de fazer a atividade em atividade de cada elemento da família, pois uma ação só se torna atividade se os motivos do coletivo são também do sujeito (LEONTIEV, 1978).

De modo geral, entendemos que os momentos vividos pelos estudantes, ao longo destas duas atividades (1 e 4), nos levam a crer que a reprodução do histórico auxiliou a compreensão do lógico no que se refere aos nexos conceituais da fração (medida e grandeza) e, mais, surgiram diferentes necessidades por parte dos estudantes em continuar na reprodução do histórico, quando solicitam a organização societária do Egito Antigo. Podemos afirmar que foi, a partir desta experiência, que, naturalmente, por meio dos registros, a representação fracionária floresceu. Tal análise será feita no episódio a seguir.

Episódio 2: Equivalências de frações: utilizando as medidas do Egito Antigo

Neste episódio, trazemos duas cenas para análise: a primeira apresenta novamente as diferenças entre os registros escritos dos estudantes, iniciados na Atividade 4 e a segunda contrapõe a visão de que equivalência fracionária só é possível com a mecanização do uso do mínimo múltiplo comum (MMC). Os dados utilizados neste episódio constam no diário de campo da professora e audiogravações, pois a Atividade 5, num primeiro momento, ocorreu com toda a turma, ou seja, foi produzido coletivamente tendo a ação mediadora da professora e cada estudante fez o registro individual em seu caderno.

Cena 1: Um passeio pelas escritas: retórica, sincopada e simbólica

Nesta cena, destacamos as diferenças nos registros escritos dos estudantes quando se trata das medidas por eles aferidas, utilizando uma unidade-padrão de acordo com a situação-problema proposta na Atividade 4.

Para que as equivalências fracionárias pudessem ser exploradas, era preciso que tivéssemos uma fração qualquer. Assim, como ligação entre as Atividades 4 e 5, foram utilizadas as medidas que cada família atribuíra ao setor que havia medido. Como forma de organização das medidas, foram utilizados quadros onde inserimos as medidas registradas pelas famílias na Atividade 4. Ao todo, foram elaborados cinco quadros que se fizeram necessários de acordo com as ações mediadoras da professora e as ações dos estudantes, nos quais foi possível verificar a necessidade humana das linguagens retórica, sincopada e simbólica (EVES, 2004).

Vejamos como se iniciou o diálogo entre a professora e a turma:

> **Professora:** *Vamos montar um quadro com todas as medidas dos setores que vocês fizeram nos seus rascunhos?*
> **Classe:** *Vamooooooo!*
> **Professora:** *Então o que precisaremos neste quadro?*
> **Natalia:** *Das famílias, das medidas e dos trem que a gente mediu*
> **Professora:** *Então podemos fazer assim?* (a professora desenha na lousa um quadro como o que segue):

Setor	Família responsável	Medidas
Moradia		
Plantação		
Criação de gado		
Mercado de trocas		

Quadro 8: Organização dos dados - sugestão dos estudantes

Natalia: *Não né! Como é que vamos colocar as medidas de todos os lados num espacinho só!? Faz assim: coloca separadinho, os quatro lados.*
Cirilo: *É aí vai dar certo!*
Professora: *Assim?*
Classe: *Siiimmmmmmm*

Então, a formatação do quadro 9, a seguir, reproduz o que foi feito na lousa pela professora e utilizado na Atividade 5, pois foi preenchida com as medidas que os estudantes coletaram no momento em que mediam e que constavam apenas no rascunho em seus cadernos pessoais.

A professora solicitou que cada família lesse exatamente como haviam escrito em seus cadernos e registrou na lousa.

Setor	Família responsável	Lado 1	Lado 2	Lado 3	Lado 4
Moradia	4 e 5	Trinta e dois inteiros	7 inteiros	Trinta e dois inteiros e uma parte dobrada em dois	7 inteiros e uma parte dobrada em duas
Plantação	1	Dez inteiros	Treze inteiros	Nove inteiros, uma metade e uma parte de dezesseis	Onze inteiros
Criação de gado	3	Dez inteiros e uma parte dobrado ao meio	Dez inteiros	12 inteiros	Dez inteiros e uma parte dobrada ao meio
Mercado de trocas	6	7 inteiros e nenhuma parte	Dez inteiros e nenhuma parte	6 inteiros e uma parte dobrado em 2	Nove inteiros e uma parte dobrado em 2

Quadro 9: Medidas descritas pelos estudantes em seus registros na Atividade 4

O fato de não ter ocorrido coincidência nas medidas dos lados que eram comuns aos setores (por exemplo, o lado 2 do setor de criação de gado é o lado 4 do mercado de trocas), imediatamente, foi percebido pelos estudantes após o total preenchimento da tabela. O estudante Cirilo justifica o fato, afirmando que nem todas as famílias fizeram as medidas corretas:

> **Cirilo:** *Que nem fessora, no nosso teve aquele lado que ficou uma partinha bem pititinha, daí pode ser que as outras famílias num prestaram atenção, daí o deles furou né!*
> **Vinícius:** *Nossaaaa, é memo, a gente largou um pedacinho porque ia ter que dobrar muito e a gente não sabia como que ia escrever.*
> **Professora:** *Como podemos então continuar? Vocês querem fazer novas medidas?*
> **Vários estudantes:** *Não, deixa assim, porque senão a gente num vai escrever logo a fração!*
> **Giovana:** *É porque tô curiosa pra saber como isso vai virar fração.*
> **Professora:** *Ok, podemos continuar?*
> **Classe:** *Siiimmmmmmm*
> **Professora:** *O que vocês acharam da nossa tabela?*
> **Vários estudantes:** *Difícil! Afff, ficou muito grande!!!*
> **Professora:** *E como podemos melhorar isso?*
> **Furquim:** *Escreve os números só com números, que nem a gente fez nos desenhos que entregou pra você, fêssora!*

E, então, foi feito o segundo quadro na lousa, que terminou da seguinte forma:

Setor	Família responsável	Lado 1	Lado 2	Lado 3	Lado 4
Moradia	4 e 5	32 inteiros	7 inteiros	32 e uma parte dobrada em dois	7 inteiros e uma parte dobrada em duas
Plantação	1	10 inteiros	13 inteiros	9 inteiros e 1 parte 16	11 inteiros
Criação de gado	3	10 e 1 parte dobrado ao meio	10 inteiros	12 inteiros	10 e 1 parte dobrada ao meio
Mercado de trocas	6	7 inteiros e nenhuma parte	10 inteiros e nenhuma parte	6 inteiros e 1 parte dobrado em 2	9 e uma parte dobrado em 2

Quadro 10: Adequação de registros de acordo com as ações mediadoras e sugestão dos estudantes

> **Cirilo:** *Ixi fessora, ficou faltando um trem aí no lado 3 da minha família!*
> **Professora:** *Mas fiz como está no desenho.*
> **Cirilo:** *Então arruma aí que acho que a gente esqueceu de escrever aquela parte dobrada na metade.*
> **Professora:** *E como devo escrever?*

Cirilo: *Que nem a gente falou lá: nove inteiros, uma metade e uma parte de dezesseis.*
Professora: *Mas como devo escrever só com números, como foi a sugestão do Furquim?*
Cirilo: *Posso ir aí escrever?*
Professora: *Claro!*

Cirilo foi até a lousa, apagou o que considerou não estar completo e escreveu:

Setor	Família responsável	Lado 1	Lado 2	Lado 3	Lado 4
Moradia	4 e 5	32 inteiros	7 inteiros	32 e uma parte dobrada em dois	7 inteiros e uma parte dobrada em duas
Plantação	1	10 inteiros	13 inteiros	9 inteiros e $\frac{1}{2}$ e 1 parte 16	11 inteiros
Criação de gado	3	10 e 1 parte dobrado ao meio	10 inteiros	12 inteiros	10 e 1 parte dobrada ao meio
Mercado de trocas	6	7 inteiros e nenhuma parte	10 inteiros e nenhuma parte	6 inteiros e 1 parte dobrado em 2	9 e uma parte dobrado em 2

Quadro 11: Segunda adequação de registros de acordo com as ações mediadoras e sugestão dos estudantes

Furquim: *Eita! Ó lá ó, apareceu a fração!*
Professora: *Mas será que só nesta medida podemos utilizar a fração? Agora o quadro está bom?*
Furquim: *Não, peraí, deixa a gente pensar um pouco, também quero que no meu tenha fração!*
Vitão: *Tô sacando...*

Neste instante, a classe aguardou que Vitão contasse o que estava pensando, mas, ao contrário disso, começou a escrever em seu caderno. Foi preciso pouco mais de cinco minutos para que Vitão dissesse: *Saquei já, tudo que a gente falou parte é da fração!* O semblante dos estudantes mudou, uma mistura de perplexidade com felicidade exalava de suas expressões. E logo, a maioria dos estudantes, começou a esboçar tentativas de registros para a fração. Pouco tempo depois, a turma já havia feito suas anotações dos números fracionários que antes estavam descritos em palavras, em seus cadernos.

Professora: *Vamos fazer um novo quadro com o que vocês escreveram?*
Classe: *Siiimmmm...*

Segue o penúltimo quadro com as modificações sugeridas pelos estudantes:

Setor	Família responsável	Lado 1	Lado 2	Lado 3	Lado 4
Moradia	4 e 5	32	7	32 e $\frac{1}{2}$	7 e $\frac{1}{2}$
Plantação	1	10	13	9 e $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{16}$	11
Criação de gado	3	10 e $\frac{1}{2}$	10	12	10 e $\frac{1}{2}$
Mercado de trocas	6	7	10	6 e $\frac{1}{2}$	9 e $\frac{1}{2}$

Quadro 12: Terceira adequação de registros de acordo com as ações mediadoras e sugestão dos estudantes

Professora: *E agora ficou bom? Podemos seguir?*
Furquim: *Ih! Nem professora! Num tem um jeito de escrever só de fração sem a palavra, porque a gente continua usando o 'e'!*
Professora: *Ué, vocês não têm nenhuma sugestão?*
Laiz: *Num pode escrever tudo junto, sem o 'e'?*
Professora: *Como? Você pode vir mostrar pra gente?*
Laiz: *Assim ó, vou falar da minha família, no lado 3, escreve assim:* $6\frac{1}{2}$.
Professora: *O que isto significa pra você?*
Laiz: *Uai fessora, que eu tenho seis inteiros e uma metade, daí aquele lá de 1 parte dobrada em 2, eu entendi que era do inteiro, eu só usava uma metade e não tudo.*
Professora: *E aí pessoal, faz sentido?*
Cirilo: *Nossa, hein, professora, se os egípcios soubessem escrever igual a gente, ia ajudar muito né!?*
Professora: *Pois então, eles até sabiam, mas a forma como escreviam essa representação era diferente, mas antes de conversarmos sobre isso, vamos continuar a melhorar nosso quadro?*
Furquim: *Ah, mas num é possível que agora num vai ficar bão!*

Por fim, a versão final do quadro, para satisfação da turma foi a que segue:

Setor	Família responsável	Lado 1	Lado 2	Lado 3	Lado 4
Moradia	4 e 5	32	7	$32\frac{1}{2}$	$7\frac{1}{2}$
Plantação	1	10	13	$9\frac{1}{2}\frac{1}{16}$	11
Criação de gado	3	$10\frac{1}{2}$	10	12	$10\frac{1}{2}$
Mercado de trocas	6	7	10	$6\frac{1}{2}$	$9\frac{1}{2}$

Quadro 13: Última adequação de registros de acordo com as ações mediadoras e sugestão dos estudantes

Nesta cena, é possível percebermos que, para estruturar a versão final do quadro, foi necessário ocorrer o que chamamos de "passeio pelas escritas", pois, no quadro 9, a escrita predominante foi a retórica. Porém, ao verem que ficou cansativo de preencher e que visualmente dificultava a compreensão da quantificação das medidas, sentiram a necessidade de modificar a escrita. Passamos, então, à escrita sincopada que, apesar de ter causado uma melhoria visual ainda não atendia aos anseios dos estudantes em escrever na forma fracionária. A partir da fala da Laiz (*Num pode escrever tudo junto, sem o 'e'?* e: *Assim ó, vou falar da minha família, no lado 3, escreve assim:* $6\frac{1}{2}$, dessa forma, foi possível satisfazer a necessidade dos estudantes quanto a representação fracionária.

Os estudantes simularam esta viagem no tempo sem que, em momento algum, fosse necessário falar sobre fração própria, imprópria ou mista. Para Leontiev (1978), trata-se da tomada de consciência, pois os estudantes, em condições de uma atividade de aprendizagem por meio da linguagem existente neste processo, efetivaram suas ações, transformando o reflexo inconsciente em consciente, perceptível, como podemos observar na fala de Laiz: *Uai fessora, que eu tenho seis inteiros e uma metade, daí aquele lá de 1 parte dobrada em 2, eu entendi que era do inteiro, eu só usava uma metade e não tudo.*

Mas a estranheza em relação à representação do lado 3, no setor de plantação, não ficou despercebido pelos estudantes. Cirilo comentou que a representação não poderia ser daquela forma e perguntou: *Num tem um jeito de ficar um número só pras partes?*

Este questionamento foi preponderante para o prosseguimento com a Atividade 5, pois não foi preciso a professora discorrer sobre equivalências de frações, o próprio estudante verificou que aquele número estava diferente dos outros e que era preciso representar as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{16}$ em unicidade. Abordamos como a discussão sobre equivalência ocorreu na cena seguinte.

Cena 2: Por que na reta?

Nesta cena, exploramos como se desenvolveu o ensino de equivalência de frações a partir do questionamento do estudante Cirilo: *Num tem um jeito de ficar um número só pras partes?,* sobre uma das medidas ($9\frac{1}{2}\frac{1}{16}$) detalhadas na cena anterior.

Assim que o estudante questionou a professora, a mesma devolveu a questão para a turma toda: *E aí, pessoal, o que vocês acham?* O momento de silêncio foi longo, os estudantes foleavam o caderno buscando algo que os permitissem dar alguma resposta convincente. Mas o próprio Cirilo respondeu: *Assim né, como teve uma hora que minha família dobrou em duas partes e depois em dezesseis, eu penso que era mais fácil se a gente tivesse visto quantos pedacinhos dobrados em dezesseis cabia naquele tanto lá do terreno.* A partir desta intervenção de Cirilo, iniciou-se um breve diálogo:

> **Professora:** *Então você quer dizer que era melhor para esta representação se as partes do todo fossem todas dezesseis?*
> **Cirilo:** *É, porque daí num ia ter esse meio, que tá esquisito.*
> **Professora:** *E quantas partes de dezesseis cabem em um meio, então?*
> **Cirilo:** *Ah! Isso eu num sei.*
> **Professora:** *A minha proposta é utilizar a reta numérica para resolver esse probleminha da representação!*

Em nenhum momento foi necessário que a professora propusesse aos estudantes que aquela representação não era a melhor. Esta conclusão feita por um dos estudantes, membro de uma das famílias, e compartilhada com a turma, nos possibilita corroborar com Davydov (1987) e Hedegaard *et AL* (1999) quando este sugere que o professor deve proporcionar, aos estudantes, condições para que efetuem transformações específicas dos objetos e fenômenos e, como consequência, a conversão das propriedades internas do objeto em conteúdo do conceito.

Retomando que nosso objeto é a ***fração***, que as propriedades internas deste objeto são ***medida*** e ***grandeza*** e que, na frase do estudante *eu penso que era mais fácil se a gente tivesse visto quantos pedacinhos dobrados em dezesseis cabia naquele tanto lá do terreno*, estes elementos trazem, de forma particular, relações gerais entre grandezas, por meio de uma medida. Podemos, então, inferir que a atividade de ensino pensada e organizada pela professora, com intencionalidade sobre o conteúdo de frações, permitiu que os estudantes estivessem em atividade de aprendizagem, pois as ações desenvolvidas por eles foram motivadas pela necessidade gerada em um estudante, num primeiro momento, de representar as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{16}$ em um único denominador comum.

Seguindo com a cena, era importante para os estudantes descobrir quantos *pedacinhos dobrados em dezesseis* caberiam em *um meio*. A professora, então, representou na lousa um exemplo da reta numérica (Figura 13):

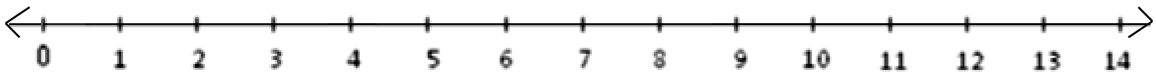


Figura 13: Representação da reta numérica

Imediatamente, para surpresa da professora, Maria do Carmo explica que *num pode ser essa professora, a gente só precisa de um tequinho disso tudo, porque lá na medida do Cirilo são nove inteiros, então só desenha do nove ao dez!* O que a estudante chama de "tequinho", na verdade, é o segmento da reta numérica determinada pelos pontos 9 e 10.

De acordo com Leontiev (1978), essa fala da estudante Maria do Carmo, sobre a compreensão de que o racional o qual se queria representar era o lugar geométrico na reta numérica limitada pelos números 9 e 10, se refletiu à medida que ela teve consciência do número racional, apoiada na experiência da prática social (sentido pessoal dado, expresso nas significações).

A professora percebeu que a turma toda concordava com a observação de Maria do Carmo e entendeu que não era preciso explicitar mais do que a estudante já havia feito e assim continuou: *Tá bom, então, vou mudar aqui na lousa* (Figura 14).

Figura 14: Representação do segmento da reta numérica sugerido pela estudante Maria do Carmo

Para poder seguir adiante, era preciso que a professora estabelecesse com a turma, de forma objetiva, como seria *fazer caber dezesseis pedacinhos em um meio*.

Professora: *Tá e agora? Como podemos fazer caber os pedacinhos dobrados em dezesseis no um meio que o Cirilo falou?*
Gilson: *Professora, primeiro a gente não tem que saber onde tá o meio?*
Professora: *Por que precisamos saber disso?*
Michelly: *É que tem que saber onde tá mesmo, pra poder colocar os pedacinhos lá que o Cirilo falou.*
Professora: *E como faremos isso, se não sei quanto mede esse meu segmento da reta numérica?*
Cirilo: *Num precisa uai, qualquer tamanho que a gente fizer vai ter a metade disso!*
Professora: *Mas vou poder garantir que é a metade?*
Cirilo: *Não, mas se você fizer aí um risquinho mais ou menos no meio e escrever a fração da metade, já vai dar certo, porque não é a medida que importa pra gente?*
Professora: *E o que importa pra vocês?*
Edi: *Descobrir esse trem do dezesseis, porque eu num sei como vai ficar dezesseis dentro de dois!*
Professora: *Podemos então seguir a sugestão do Cirilo?*
Classe: *Siiimmmm...*

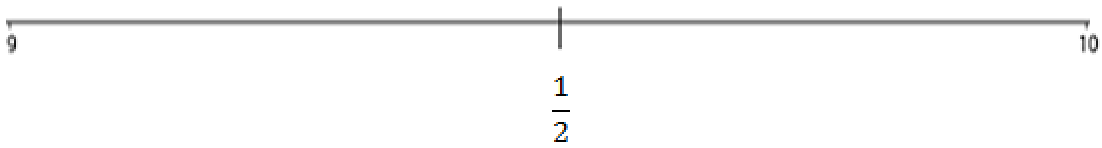


Figura 15: Sugestão de Cirilo para a representação de um meio no segmento da reta numérica

Professora: *E agora, como podemos representar a tira de papel que a família do Cirilo usou dobrada em dezesseis partes?*
Vitão: *Igual né, não!? Faz de conta que a gente pode dobrar essa reta aí, pra ficar o todo em dezesseis partes, fica oito pra cada lado*
Professora: *Todo mundo entendeu?*
Edi: *Mas num é só o meio em dezesseis partes?*
Vitão: *Nãoooooo, tem que ser tudo porque é o tequinho todo, senão vai dar trinta e dois. Faz aí, fessora, oito risquinho pra cada lado!*
Professora: *Assim?* (Figura 16).

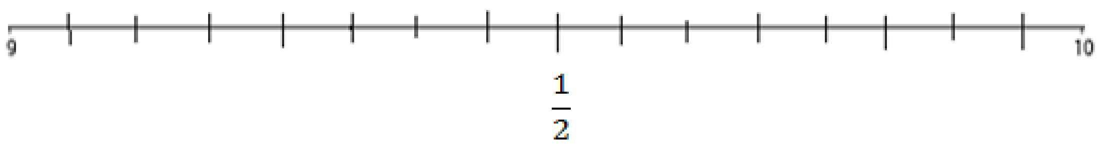


Figura 16: Sugestão de Vitão para a representação de divisão do segmento de reta em dezesseis partes

Professora: *Alguém pode me explicar o que significa isso que nós fizemos?*
Vitão: *Que a gente fez a mesma coisa com o cúbito ué, dividiu no tanto que precisa para caber lá no terreno.*
Edi: *Eu entendi agora, é assim fessora, cada pedacinho aí desse é uma partinha de dezesseis né!?*
Cirilo, Vitão, Furquim e Gilson: *Aeeeeeee... Até que enfim!*
Professora: *Sim é isso mesmo Edi. Agora, será que a gente consegue responder aquela pergunta de lá atrás do Cirilo? Que ele queria saber quantos pedacinhos da tira dobrada em dezesseis caberia em um meio.*

Edi: *Eu sei, é só a gente contar agora, 1, 2, 3, ..., 8! Oito pedacinhos de dezesseis cabem lá no meio.*
Professora: *Todo mundo concorda?*
A classe começa a gritar eufórica que sim, batem palmas pela satisfação de terem descoberto uma solução para a representação.
Professora: *Calma, galera!*
Cirilo: *Oh, gente, gente, calma que eu acho que não acabou, porque agora a gente tem que reescrever lá a medida do lado do meu setor.*
Professora: *E como fica?*
Cirilo vai até a lousa, pega um giz e escreve:

$$9\frac{8}{16}\frac{1}{16}$$

Vinícius já levanta e fala: *Não é assim, é assim ó!*

$$9\frac{9}{16}$$

Professora: *Qual das duas é a melhor representação?*
Cirilo: *É a do Vinícius mesmo, porque eu tinha esquecido do outro pedacinho, daí tinha os oito que a gente descobriu agora e mais aquele outro que a Michelly tinha medido já, daí oito mais um, dá nove!*
Professora: *Hum.... Todo mundo entendeu o que o Vinícius e o Cirilo fizeram?*
Furquim: *Uai, fessora, a gente mudou o número debaixo da fração e ainda fez continha de mais?*
Professora: *Parece que sim.*
Furquim: *Credoooo, eu nunca tinha feito desse jeito, esse daí é o MMC?*
Professora: *Me explica melhor o que você tá pensando.*
Furquim: *É que no ano passado lá, no quinto lá, a professora fez o MMC pra ficar os números debaixo da fração tudo igualzinho, eu num entendia nada!*
Natalia: *É mesmo, eu lembro, também errava tudo, affff, quanta conta que tinha que fazer. Por que a gente num fez conta nenhuma com a reta?*
Vinícius: *A professora é esperta, ela fez a gente ir todo esse tempo pro Egito pra gente aprender as continhas de fração...*
Professora: *Bom, e essa minha esperteza, de que adiantou? Vocês conseguiram entender que nós estávamos equivalendo o número debaixo da fração que se chama denominador, para que nossa representação ficasse mais simples de se entender?*
Cirilo: *Vixi, agora entendi tudinho, vamos fazer mais?*
Professora: *Vamos sim!*

De acordo com Talizina (2000), para formalizar um conteúdo que, nesta cena tratava-se da equivalência de frações, não é preciso reproduzir definições ou mecanismos de cálculos, mas é preciso ter a consciência do conteúdo para assimilar o conceito que o envolve. E isto independe do volume de exercícios.

A partir deste entendimento e para que o processo de aquisição do conhecimento de fração fosse completado, foi preciso que a atividade de ensino fosse organizada intencionalmente e que tivesse a ação mediadora da professora para que ocorresse a compreensão consciente das características do conceito pelos estudantes.

Nosso paralelo sobre esta cena se faz com o exemplo dado por Leontiev (1978) sobre a caçada primitiva coletiva, onde:

	Caçada primitiva coletiva	**Cena 2**
Atividade	Caçada coletiva	Equivalência de frações
Objeto	Caça	Ensino de Fração
Motivo	Fome pela presa	Descobrir quantas partes de dezesseis cabem em um meio
Necessidade	Se alimentar	Representar a fração com um único denominador
Ação	Bater das mãos – fazer barulho para assustar a caça	Dividir o segmento da reta numérica em dezesseis partes
Operação	Apanhar a caça	Concluir quantas partes de dezesseis representam um meio

Quadro 14: Paralelo entre caçada coletiva primitiva (Leontiev, 1978) e cena 2 (elaborados pela autora)

Os estudantes se apropriaram do que poderia ser a equivalência de um número fracionário a partir de um sistema de significações durante o desenvolvimento da proposta. Este fato pode ser verificado na fala de Vinícius quando alega: a *professora, é esperta, ela fez a gente ir todo esse tempo pro Egito pra gente aprender as continhas de fração...*. De acordo com o que foi dito pelos estudantes durante a cena 2, cada um assimilou todo o processo num determinado tempo e profundidade, já que este sistema de significações depende do *sentido subjetivo e pessoal que esta significação* (LEONTIEV, 1978, p.95) tem para cada estudante.

> Está fora de questão que a experiência individual de um homem, por mais rica que seja, baste para produzir a formação de um pensamento lógico ou matemático abstrato e sistemas conceituais correspondentes. (LEONTIEV, 1978, p.266).

Entendemos que esta atividade, mesmo tendo sido desenvolvida o tempo todo na lousa, mas conduzida pelas sugestões dos estudantes e mediada pela ação da professora, justifica-se, pois, novamente, a formação do pensamento teórico (DAVYDOV, 1998) deu-se no coletivo.

Julgamos importante este fato, pois para Davydov (1988), que se fundamenta na teoria do conhecimento do materialismo dialético, do ponto de vista da formação dos conceitos científicos na escola, a formação do pensamento teórico no processo escolar é que permitirá ao jovem atender às exigências da sociedade atual, pois o

> [...] saber contemporâneo pressupõe que o homem domine *o processo de origem e desenvolvimento das coisas mediante o pensamento teórico*, que estuda e descreve a lógica dialética. O pensamento teórico tem seus tipos específicos de generalização e abstração, seus procedimentos de formação dos conceitos e operações com eles. Justamente a formação de tais conceitos abre aos escolares o caminho para dominar os fundamentos da cultura teórica atual. [...]. A escola, a nosso juízo, deve ensinar os alunos a *pensar teoricamente* (DAVYDOV, 1988, p.6, itálicos do original - tradução nossa).

Para Davydov (1988), a essência do pensamento teórico consiste em o homem compreender as coisas e os acontecimentos *por via da análise das condições de sua* <u>*origem e desenvolvimento*</u>*. Quando os alunos estudam as coisas e os acontecimentos do ponto de vista deste enfoque, começam a pensar teoricamente.* (p.6, grifos do original; tradução nossa). Podemos transferir estas ideias para nossos dias e considerar que o conhecimento teórico constitui o objetivo principal da atividade de ensino, pois é por meio de sua aquisição que se estrutura a formação do pensamento teórico (MARCO, 2009).

Ao longo da análise dos episódios, percebemos que as ações dos estudantes, individuais ou coletivas, contribuíram para que eles mesmos solucionassem seus questionamentos. De acordo com Vygotsky (2001), trata-se de um processo de internalização e, sobre isso, Moura (2010) *et al* esclarece que

> [...] as relações intrapsíquicas (atividade individual) constituem-se com base nas relações interpsíquicas (atividade coletiva). É nesse movimento do social ao individual que se dá a apropriação de conceitos e significações, ou seja, que se dá a apropriação da experiência social da humanidade (MOURA *et al*, 2010, p.83).

Ao longo da proposta de ensino de frações, apresentada neste estudo, as necessidades dos estudantes se modificaram de acordo com as atividades, mas todas haviam sido despertadas pela situação desencadeadora inicial, detalhada na Atividade 1. Além disso, vale destacar que a motivação dos estudantes nutriu-se por conta das ações mediadoras da professora-pesquisadora que instigava a fluidez do pensamento teóricos dos estudantes. Consequentemente, de acordo com a teoria Histórico-Cultural, os conhecimentos dos estudantes estavam sendo feitos e refeitos a todo instante.

Nessa perspectiva, podemos depreender uma série de elementos que propiciaram aos estudantes atribuírem sentido pessoal à atividade orientadora de ensino proposta pela professora.

Nosso movimento no capítulo seguinte será o apresentar nossas considerações sobre a pesquisa e a produção de conhecimentos adquiridos pelos estudantes e o processo de formação da professora-pesquisadora a partir do movimento instaurado.

CONSIDERAÇÕES

Muitas das inquietações e necessidades que nos levaram a realizar esta pesquisa estiveram relacionadas à nossa formação como estudante e como professora de matemática, sendo o estudo do conceito de frações, há tempos discutido em eventos e cursos de formação dos professores de matemática, um entrave em muitas salas de aula.

A possibilidade de atuar no 6º ano do Ensino Fundamental e trabalhar o conceito de fração, na perspectiva da atividade orientadora de ensino (MOURA, 2002) que pode desencadear e desenvolver, no estudante, a necessidade e o motivo para envolver-se em um processo de pensar conceitos matemáticos de modo significativo foi nosso elemento motivador.

Dessa forma, nossa questão de investigação foi sendo lapidada aos poucos, para propiciar uma expressão mais autêntica de nossa inquietação. Após escritas e reescritas, chegamos à seguinte questão norteadora: *Como as atividades orientadoras de ensino podem auxiliar para a aprendizagem do conceito de frações para estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental?* Neste processo, consideramos imprescindível, retomar alguns pontos das atividades propostas e a interação dos estudantes, da reflexão da professora-pesquisadora acerca da prática docente e unidade didática elaborada, apresentando nossa avaliação a respeito do tema pesquisado. Consideramos estes pontos mais emergentes ao longo do desenvolvimento da pesquisa, tanto na formação do pensamento teórico dos estudantes quanto em nossa formação docente.

Assim, tendo como um dos objetivos investigar se a História da Matemática poderia ser um auxiliar para a aprendizagem do conceito de frações, entendemos que abdicar da História da Matemática em nossa proposta, na unidade didática, seria o mesmo que desconectar e mecanizar os conteúdos abordados em cada atividade de ensino, pois as atividades analisadas na pesquisa não seriam realizadas pelos estudantes do modo que desejávamos se não utilizássemos o histórico do surgimento da fração na civilização egípcia. Esta escolha desencadeou, por meio da primeira situação-problema, todas as ações dos estudantes detalhadas neste texto.

Entendemos que a História da Matemática protagonizou não apenas nas situações-problemas aqui abordadas, como também uma via de compreensão da existência da Matemática e sua importância para o desenvolvimento da sociedade. Não defendemos o uso da História da Matemática como “contação de histórias”, nossa posição refere-se em fazer uso do histórico para compreensão do lógico que sustenta os conceitos matemáticos presentes no currículo brasileiro atual.

Nossa intenção em propulsar o desenvolvimento do pensamento teórico por parte dos estudantes não seria possível se desprezássemos os nexos conceitos das frações, sem que os aproximássemos aos atributos internos.

Fazendo alusão à nossa corrente sanguínea, nosso sangue, se movimenta nas veias, que irrigam todos os órgãos, sendo essencial à vida. Os leucócitos defendem nosso sistema, os eritrócitos, oxigenam nosso sistema e plaquetas auxiliam em cessar o vazamento de sangue, para auxiliar a reparação do tecido danificado. Assim, se o nosso pensamento teórico irriga toda nossa condição de ser humano fluente e interdependente das produções e evoluções das civilizações, o saber fazer do estudante é uma defesa para o que não generaliza, mas por si só não compõe todo o sangue, então, entendemos que os nexos conceituais oxigenam nosso pensamento por meio dos atributos internos do conceito. Todo esse processo movimenta-se por meio das atividades orientadoras de ensino (MOURA, 2002), já que movimenta o professor em organizar, definir os procedimentos de como e quais os recursos que utilizará para ensinar determinados conhecimentos teóricos na atividade de ensino. Com isso, o estudante pode se apropriar destes conhecimentos, utilizando os recursos pensados pelo professor para resolver problemas de aprendizagem.

Para podermos melhor estudar nosso objeto, imergimos no ambiente de sala de aula e buscam os autores da teoria histórico-cultural para serem nossos interlocutores em todo o processo.

Fundamentando-nos nas ideias de Vygotsky, Davydov e Leontiev, inserimo-nos na proposta de formação que estávamos investigando e, junto com os estudantes, fizemos parte do movimento vivido por eles, deixando-nos levar por caminhos não previstos *a priori*, porém organizados por meio das atividades de ensino (MOURA 2002).

Nesse contexto de pesquisa, a vivência de atividades de ensino sobre o desenvolvimento conceitual da fração permitiu que os estudantes, a partir dos próprios entendimentos, formulassem e até mesmo (re)elaborassem, o seu pensar matemático. Foi possível, também, perceber que os estudantes apuravam sua compreensão do número fracionário e que o mesmo não assumia apenas a interpretação da divisão, principalmente que era uma relação de medida entre grandezas.

Por mais que os estudantes verbalizassem durante as aulas que já haviam tido uma experiência escolar com as frações, foi possível identificarmos, por meio das atividades propostas, que essa compreensão permeava apenas os atributos externos do conceito e que não havia consciência deste, pois nos registros elaborados pelos estudantes verificamos que estes não compreendiam a relação de parte e todo, que a fração também poderia ser interpretada como comparação, que apenas utilizavam da representação $\left(\frac{a}{b}\right)$ utilizando aleatoriamente os valores numéricos presentes nas situações-problemas.

Nas atividades 1, 4 e 5 apresentadas e analisadas, os estudantes tinham suas necessidades e motivos, incentivados por situações-problema, em que suas finalidades práticas eram: dividir terras, medi-las, setorizá-las, representar as frações de modo que tivessem sentido para eles. Vimos no desenvolvimento das atividades o labor humano (CARAÇA, 1984), o labor do estudante. Labor que foi estimulado pelo pensamento teórico, se afastando da dependência do pensamento empírico, presente no ensino de matemática brasileiro atual.

É evidente que a mecanização dos conteúdos, por meio de incansáveis cálculos tem levado professores e pesquisadores a desenvolver propostas que se afastam desta prática, mas há de se destacar que uma atualização nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998) é necessária, pois nossos estudos nos revelaram que não há clareza no documento dos objetivos para o ensino de frações. Ao mesmo tempo em que o documento explicita que as frações não devem apenas ser interpretadas como divisão e as dificuldades dos estudantes, a exemplo: diferentes representações de um mesmo número fracionário – equivalências, comparação dos fracionários que se difere dos naturais e operações com números fracionários, utiliza como justificativa para o ensino deste conteúdo, o fator facilitador de resultados precisos para o cálculo de dízimas periódicas.

Ao longo do desenvolvimento da proposta, nossa preocupação era garantir que a prática não se desvinculasse da teoria adotada nesta pesquisa, fato que nos levou a nos apropriar da teoria e das necessidades dos estudantes para uma possível melhoria da aprendizagem de matemática.

Nossos estudos nos levaram a determinar essas atividades como nossa unidade didática inerente à esta pesquisa, mas isto não significa que o plano de ação do professor, orientador de suas ações na atividade, deva ser inflexível. Diante das dificuldades que o professor pode enfrentar na proposição de uma situação-problema, é possível reelaborá-la, na busca de responder à sua necessidade de ensino, à qual depende sua intencionalidade, sem deixar de buscar condições para que essa situação-problema seja além do objeto de ensino, um objeto de aprendizagem, para então ser uma *necessidade dos sujeitos que aprendem*. (MOURA, 2001, p.157 *citado por* MORETTI, 2007, p.96).

Assim, as atividades de ensino se fizeram organizadas conforme as apresentamos no *Capítulo III*[19], uma vez que, a professora-pesquisadora se colocou em movimento reflexivo da própria prática, não somente para o que estava sendo desenvolvido, mas para o que já havia sido feito durante os anos de prática docente.

Como já exposto nos *Capítulos III* e *IV*, as Atividades 2 e 3, naquele momento, foram importantes para identificarmos quais significações os estudantes atribuíam à expressão "já sabemos fração", surgida no desenvolver da Atividade 1. E, por mais que a Atividade 1 estivesse findada para a professora-pesquisadora, que o próximo passo já poderia ser dado e que a "viagem ao Egito Antigo" havia sido superada, os estudantes mostraram que a Atividade 1 não bastava, que era preciso organizar o Egito Antigo de maneira societária. Já que as discussões concerniam sobre medida e grandeza, sentimos, enquanto organizadoras do ensino, a necessidade de tratar as quantidades contínuas e discretas, pois era preciso que os estudantes compreendessem que na Atividade 1, ao fazer as medições estavam discretizando uma quantidade contínua (terra). Nas Atividades 4 e 5, os estudantes exacerbaram o saber fazer consonante com o saber pensar, quando decidiram quais setores as famílias necessitavam para sobrevivência no Egito Antigo, qual unidade padrão utilizariam em suas medições, em como representariam essas medidas (inteiro e sobra) e como seria possível por meio da reta numérica equivaler aqueles números fracionários.

Neste processo, as ações mediadoras da professora-pesquisadora e as atividades de ensino propostas possibilitaram que os estudantes se colocassem em atividade de aprendizagem, apurado nas análises dos episódios. O modo como suas ações registradas por vídeo e audiogravações, registros escritos e desenhos se modificaram no decurso da pesquisa, contribuir para que se entrelaçaram à história egípcia do surgimento da fração e os problemas foram sendo superados enquanto o pensamento teórico sobre o conceito de frações parecia ser apropriado pelos estudantes.

Não pretendemos divulgar uma "receita de como ensinar frações", o que nos leva a defender que a unidade didática aqui apresentada pode e deve ser repensada e adaptada de acordo com as intenções e necessidades de professores e estudantes. Outro aspecto que distancia esta unidade didática de uma receita é o fato de que todo o desenvolvimento da

[19] As atividades de ensino também se encontram no CD anexo ao final desta pesquisa.

proposta, detalhado ao longo deste texto foi único, ocorrendo pela interdependência das ações mediadoras realizadas pela professora-pesquisa durante as atividades, possibilitando aos estudantes acentuar suas ações, detalhadas e analisadas.

O afastamento da professora-pesquisadora da pesquisa possibilitou que ao revisar todos os registros (escritos, desenhos, videogravações e audiogravações), na busca do sentido do objeto de nosso estudo, as ações dos estudantes brilhavam aos nossos olhos, demonstrando que para as análises dos dados da pesquisa, o foco deveria ser este: as *ações reveladoras do processo de ações dos sujeitos participantes* (MOURA, 2004, p.272), já que queríamos verificar a contribuição das AOEs na aprendizagem dos estudantes sobre o conceito de frações.

Podemos afirmar que esta pesquisa trouxe benefícios também para nossa formação como professora, pois em concordância com as ideias de Marco (2009), houve um vínculo entre a teoria estudada e as atividades de nossa proposta, que nos levam a verificar diferentes possibilidades de resultados, sem qualquer certeza se teríamos uma linha de chegada, por mais que estivessem nítidas as nossas intenções nessa proposta.

Em relação à nossa formação docente, há de se exaltar, ainda, a modificação do tratamento das reflexões sobre as ações práticas, pois anteriormente à pesquisa estas ficavam apenas como anotações ou discussões breves. A partir do desenvolvimento da pesquisa, o aprendizado mostrou que tais reflexões podem ser revertidas em estudos aprofundados sobre os conceitos dos conteúdos escolares a fim de melhor elaborar e desenvolver atividades orientadoras de ensino.

Como intuito desta pesquisa, da qual fazem parte as atividades e reflexões detalhadas neste texto, desejamos que ela se configure como uma importante contribuição à área do ensino de matemática, pois integra o contexto de ensino de fração podendo colaborar com a formação inicial e continuada de professores de matemática, criando uma situação de aprendizagem na qual possam vivenciar momentos de exploração e significação do conceito matemático de fração.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALEKSANDROV, A.D.; KOLMOGOROV, A.N. & LAURENTIEV, M.A. **La Matemática: su contenido, método y significados**. 10ª ed. Madrid: Alianza Universidad, 2003.

BIANCHINI, E. **Matemática: Bianchini**. 7ª ed. São Paulo: Moderna, 2014.

BOGDAN, R.C.; BIKLEN, S.K. **Investigação qualitativa em educação**. Tradução: ALVAREZ, M.J.; SANTOS, S.B.; BAPTISTA, T.M. Portugal: Porto Editora, 1994.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, Brasília, 1998.

CARAÇA, B.J. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. Lisboa: Topografia Matemática, 1951.

_________. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 2ª Ed. Lisboa: Gradiva, 1984.

CATALANI, E.M.T. **A inter-relação forma e conteúdo no desenvolvimento conceitual da fração**. (Dissertação de Mestrado). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, São Paulo, 2002.

CHILDE, V.G. **A evolução cultural do homem**. 3ª ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1975.

DAMAZIO, A.; ROSA J. E.; EUZÉBIO J. S. O ensino do conceito de número em diferentes perspectivas. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.14, n.1, p. 209-231, 2012.

DANTE, L.R. **Tudo é matemática: ensino fundamental**. São Paulo: Ática, 2005.

DAVID, M.M.M.S; FONSECA, M.C.F.R. Sobre o conceito de número racional e a representação fracionária. **Presença Pedagógica**, Belo Horizonte, v.3, n.14 mar/ abr. p. 55-67, 1997.

DAVYDOV, V.V. **Tipo de generalización em la enseñanza**. Havana: Pueblo y Educación, 1982.

_________. **La Psicologia evolutiva y pedagogia en la URSS**. Tradução: SHUARE, M. Moscou: Editorial Progresso, 1987.

_________. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico.** Moscou: Editorial Progreso, 1988.

EVES, H. **Introdução à história da Matemática**. Tradução: DOMINGUES, H.H. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação Matemática:** percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados, 2007.

GARBI, G.G. **A rainha das ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática**. 2ª ed. Campinas, SP: Editora Livraria da Física, 2007.

HEDEGAARD, M.; CHAIKLIN, S. JENSEN, S.J. **Activity Theory and Social Pratice: Cultural – Historical Approaches.** Aarhus: Aarhus Univesity, 1999.

IMENES, L.M.P. **Matemática/ Imenes & Lellis**. São Paulo: Scipione, 1997.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e realidade**. São Paulo, Atual, 2009.

LANNER DE MOURA, A. R.; SOUZA, M. C. Movimento Conceitual em sala de aula. In: **Anais da XI Conferência Interamericana de Educação Matemática**. CIAEM, Blumenau/SC, 13-17 de julho de 2003.

_________. **O ensino de álgebra vivenciado por professores do ensino fundamental: a particularidade e a singularidade dos olhares**, Campinas, SP, 2004.

_________. **Repensando Conceitos Fundamentais da Matemática.** Formação Continuada de Professores. Campinas, SP. 2004.

LEONTIEV, A. **O desenvolvimento do psiquismo**. DUARTE, M.D. [TRADUÇÃO]. Horizontes: Lisboa, 1978.

_________. **Actividad, consciência, personalidad**. 2ª reimpressão. La Habana: Editorial Pueblo y Educación, 1983.

_________. Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil. In: Vygostky, L.S. *et al.* **Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem**. São Paulo: Ícone, 2001. p. 59-83

LIBÂNEO, J. C. **Políticas e práticas de formação de professores no Brasil:** desafios e perspectivas. Disponível em: <http://webconf2.rnp.br/p3g2c9ugak9/?launcher=false&fcsContent=true&pbMode=normal>. Acesso em 28 de jul. 2015.

LIMA, L.; MOISÉS, R. P. – **Apostila básica de Matemática**. Secretaria de Estado da Educação – Projetos de Educação Continuada – Pólo 3 – Universidade de Mogi das Cruzes. São Paulo/SP, CTEAC, 1998.

_________. **A fração: a repartição da Terra**. São Paulo/SP, CEVEC-CIARTE, 1998.

MARCO, F.F. Atividade orientadora de ensino de Matemática na formação inicial de professores. **Educ. Matem. Pesq.**, São Paulo, v.15, n.2, p. 317-336, 2013.

MARCO, F.F. **Atividades computacionais de ensino na formação inicial do professor de Matemática.** Tese (Doutorado em Educação: Educação Matemática) — Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. 2009. 223p.

MORETTI, V.D. **Professores de Matemática em atividade de ensino: uma perspectiva histórico-cultural para a formação docente**. (Tese de Doutorado). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

MOURA, M.O. A atividade de ensino como unidade formadora. **Bolema**, ano II, n. 12, p. 29-43, 1996.

_______. **O educador matemático na coletividade de formação**: uma experiência com a escola pública. Tese (Livre Docência) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, 2000.

_______. A atividade de ensino como ação formadora. In: CASTRO, A. D.; CARVALHO, Ana Maria Pessoa de (Org.). **Ensinar a ensinar:** didática para a escola fundamental e média. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2002.

_______. Pesquisa colaborativa: um foco na ação formadora. In: BARBOSA, R. L. (Org). **Trajetórias e perspectivas da formação de educadores**. São Paulo: Editora UNESP, 2004. p. 257-284

_______. Afastar-se. In: MOURA, Manoel Oriosvaldo de (org.). **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Brasília: Liber Livro, 2010. p. 155-163.

MOURA, M.O.; ARAÚJO, E.S.; RIBEIRO, F.D.; PASSONIAN, M.L.; MORETTI, V.D. A atividade orientadora de ensino com unidade entre ensino e aprendizagem. In: MOURA, Manoel Oriosvaldo de (org.). **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Brasília: Liber Livro, 2010. p. 81-109.

NASCIMENTO, R.O. **Um estudo da mediação na teoria de Lev Vigotski e suas implicações para a educação**. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Federal de Uberlândia, 2014, 406 p.

PATRONO, R.M. **Aprendizagem de números racionais na forma fracionária no 6º ano do ensino fundamental [manuscrito]: análise de uma proposta de ensino**. (Dissertação de Mestrado). xiv, 184f, Departamento de Matemática, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2011.

PANOSSIAN, M.L. **O movimento histórico e lógico dos conceitos algébricos como princípio para constituição do objeto de ensino de álgebra**. (Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2014, 317p.

PERLIN, P. LOPES, A.R.L.V. A necessidade histórica da criação das frações e a organização do ensino do professor dos anos iniciais. In: **VI Congresso Internacional de Ensino de Educação Matemática**, 2013. [s/n]. ULBRA, Canoas: Rio Grande do Sul.

PIRES, C.C.; CURI, E.; PIETROPAOLO, R. **Educação Matemática 5ª série**. São Paulo: Atual, 2002.

PRADO, E.P.A. de. **Uma reflexão sobre formação de professores no ensino de Matemática**. (Dissertação de Mestrado). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, 2000.

_______. A formação da escrita fracionária. In: **V CIIBEM Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática**, 2005, Porto: Portugal. Actas do V CIIBEM Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática, 2005. v. 1CD.

RIGON, A. J.; ASBAHR, F.S.F.; MORETTI, V.D. A Formação do Pensamento Teórico em uma Atividade de Ensino de Matemática. In: MOURA, Manoel Oriosvaldo de (org.). **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Brasília: Liber Livro, 2010. p. 13-44.

ROSA, J.E.; MORAES, S.P.G.; CEDRO, W. L. A Formação do Pensamento Teórico em uma Atividade de Ensino de Matemática. In: MOURA, Manoel Oriosvaldo de (org.). **A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural**. Brasília: Liber Livro, 2010. p. 135-173.

SIEBERT, V.T.; AMARAL, E.H; PALMA, R.C.D. Processo lógico-histórico da origem das frações: uma experiência na formação continuada de professores dos anos iniciais. In: **Simpósio sobre formação de professores**, v. 6, 2014, Tubarão. Adriana Mendonça Destro *et al*. (Orgs.). Anais. Tubarão: Unisul, 2014. p. 73-74. Disponível em <http://linguagem.unisul.br/paginas/ensino/pos/linguagem/eventos/simfop/vi_simfop.pdf>. Acesso em 15 de jul. 2014.

SOUSA, M. C.**O ensino de álgebra numa perspectiva lógico-histórica:** um estudo das elaborações correlatas de professores do ensino fundamental. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. 2004. [s.n.]

TALIZINA, N.F. **Manual de psicología pedagógica**. Facultad de Psicología. Universidad Autónoma de San Luis Potosí. San Luis Potosí: México, 2000.

VYGOTSKY, L. S. **Obras escogidas II**. Madrid: Visor, 2000.

______. **A construção do pensamento e da linguagem**. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

ANEXOS

ANEXO 1

Transcrições das explicações de todas as famílias durante a Atividade 1: Medindo terras no Egito Antigo

Explicação da família 1 (5 membros)

Jefferson: *A gente queria um pedação e também queria ficar perto do Rio Nilo, porque daí fica mais fácil pra pegar água pros animais e pra gente tomar banho.*

Michelly: *E também pra regar a plantação*

Jefferson: *É isso... Daí a gente pegou o marcou um quadradão assim ó* (o estudante mostra o desenho que fizeram, por meio dos registros feitos pela família). *Só que depois quando a gente foi ver num tava justo, porque o nosso terreno tava muito grande, daí a família do Vinícius reclamou que o espaço deles tava pouco, a gente deu um jeitinho lá e diminuiu um pouco...foi bem de boa*

Michelly: *O pé foi o meu!*

Professora: *E como vocês fizeram essa medida? Mostra pra mim!*

Michelly: *Assim...* (o estudante coloca um pé frente ao outro, sem deixar espaços[20])

Professora: *Você estava descalço?*

Michelly: *Não, tava com esse tênis mesmo.*

Jefferson: *E só!*

Explicação da família 2 (4 membros)

Giovana: *No início quando nós chegamos, nós queríamos que nosso terreno ficasse perto do Rio Nilo, era mais fácil de você pegar água, pescar, essas coisas...Aí depois tinha a hora de medir: primeiramente nós "mediu", ficou muito pequeno, ninguém do grupo gostou. Aí o Guilherme aumentou um pouquinho, aí*

[20]Não foi possível filmar os passos de Michelly, pois, neste momento, a filmadora estava com problemas no foco e demorou um pouco para ser resolvido.

na divisão do espaço pra ficar certinho o Guilherme na lateral assim deu 8 passos e na frente 9 passos.

Professora: *Então primeiro estava pequeno e ninguém do grupo gostou, aí vocês aumentaram?*

Giovana: *Aumentou.*

Professora: *Vocês ficaram satisfeitos?*

Giovana: *Uhum*

Professora: *Na negociação, alguma família reclamou?*

Giovana: *O grupo da Jessica, eles falaram que o deles tava muito pequeno, daí a gente afastou o nosso mais pro cantinho, aí que o grupo deles resolveu.*

Professora: *Ah tá, eu lembro que na hora da negociação vocês tiveram que afastar um pouco e o Guilherme teve uma ideia de descer a rampinha na grama. Ficou bom pra todos no final?*

Natalia (família 3): *Mais ou menos.*

Professora: *Por que?*

Natalia (família 3): *Ainda ficou pequeno.*

Giovana: *Mas daí eles num reclamaram, num falaram nada... Lá tinha mais dois grupos, tinha do Jefferson e acho que o grupo do Claudio, tava do lado da Natalia, daí eles tavam do lado um do outro, eles não tinham mais que resolver com a gente, tinha que ver com os outros grupos.*

Professora: *Ah entendi, vocês resolviam com a família que estava mais próximo de vocês?*

Giovana: *Uhum*

Guilherme: *Porque a gente tinha que deixar um bequinho pra passar.*

Professora: *Ah, por isso vocês deixaram aquele espacinho!?*

Giovana: *Isso, aquele espacinho. A gente combinou com o grupo da Vilma porque tava um de frente pro outro e precisava daquele bequinho pra passar.*

Figura 9: Medida adotada pela família 2, demonstração feita pelo estudante Guilherme de seus passos. Fonte: Videogravações da professora-pesquisadora

Note que o estudanteGuilherme estava de chinelo, no dia da divisão de terras, ele estava com outro chinelo, *"do mesmo tipo, mas era amarelo"*, conforme descrição do estudante.

Explicação da família 3 (5 membros)

Professora:	*Fala Vinícius!*
Natalia:	*Fala lá!*
Vinícius:	*Ela mais a Edi ficava só dormindo, e "nóis" ia trabalhar e "nóis arrumava" a casa, aí o vovô...*
Natalia:	*Aí o Vinícius cuidava da cabrita Pipi.*
Vinícius:	*Aí "nóis ficou" na sombra por causa do coqueiro, aí quando elas "levantava" pra arruma a casa "nóis" saia pra caçar, pra "nóis cumer".*
Professora:	*Então vocês arrumavam a casa, vocês iam caçar e o que mais?*
Vinícius:	*Aí "ota" coisa!*
Professora:	*E elas só dormiam?*
Natalia:	*Não! "Nóis" arrumava a casa na hora que "nóis" levantava.*
Professora:	*Ah entendi!!!*
Natalia:	*Entendeu?*
Vinícius:	*Aí o Vitão ficava "cuidano" delas "causo" que o Vitão num*

dava conta de fazer nada, aí eu e o Gilson ia "trabaiá".

Natalia: *Professora, deixa eu falar como é que "nóis" dividiu.*

Professora: *Então fala!*

Natalia: *Além de "nóis" tem mais 5 famílias.*

Professora: *Como é?* [os outros estudantesestavam conversando cada vez mais alto].

Natalia: *Além de "nóis" tem mais 5 famílias, aí a Juliane falou que "nóis" não ajudou a dividir e eles num "achou" justo. Só que o Vitão é que tava arrumando, ele falou que podia deixar que ele ia arrumar. Aí ele dividiu o espaço deles lá. Aí depois os meninos... Aí, a Vilma dividiu o da frente.*

Professora: *Pessoal, por favor!* [foi preciso chamar a atenção dos estudantes, pois estavam falando muito alto e dificultava ouvir a explicação da família 3]

Natalia: *Aí a Vilma dividiu o da frente, aí "nóis" achou um pouco porque o deles tava maior. Aí "nóis" escolheu pra trás do Rio Nilo por causa da sombra do coqueiro que o Vinícius mostrou.*

Professora: *Ah tá! Então peraí, deixa eu ver se entendi. Primeiro a Vilma reclamou, aí o Vitão falou que ia arrumar, mas você não sabe se ele arrumou?*

Natalia: *Ele tinha dividido, amarrado lá com um barbante na grade e dividiu. Aí, depois a Vilma, a Viviane "arrumou" os da frente deles, a parte deles lá... a família da Viviane. Mas aí "nóis" achou injusto por causa que o deles ficou maior.*

Professora: *Mas vocês não negociaram mais um pouco?*

Vinícius: *Ih, "fessora", nosso tava "pequeninim"e tava cabendo 5 pessoas e o deles era 3, 3 e menos. Aí, tava cabendo, aí tava muito grandão assim ó* [o estudante abre os braços para mostrar o quanto era grandão] *e tinha pouquinha gente.*

Professora: *Entendi... e como vocês mediram?*

Natalia: *Com os passos da Edi.*

Professora: *E quantos passos deram?*

Vinícius: *3 e 2!*

Natalia: *3 passos e meio e 2!*

Professora: *Como são 3 passos e meio? Sobrou um pouquinho do pé dela?*

Vinícius: *Sobrou!*

Vários membros da família: *Por causa da pelinha do pé* [essa "pelinha", que os estudantescitaram é a parte mais sensível da planta do pé].

Professora: *Ah tá, entendi! Deixa eu ver como ficou aqui* [registros da família 3]. *Esse é o espaço de vocês? E isso aqui, o que é?*

Natalia: *É pra falar isso daqui ó* [ela apontou para o desenho].

Professora: *Mas tudo isso é o terreno de vocês?*

Vinícius: *Né não "fessora", ó, esse aqui é o nosso!*

Natalia: *Esse daqui!* [os estudantesapontavam para desenhos diferentes]

Professora: *Mas esse não é a mesma coisa desse?*

Vinícius: *É não, aqui não tem a Pipi!*

Professora: *Então, esse daqui é quando é visto de cima e esse daqui é visto de perto?*

Vários membros da família: *É...*

Neste dia, a estudante Edi não estava presente, então, não foi possível filmar como foi o passo adotado como medida da família 4.

Explicação da família 4 (5 membros)

Professora: *Como é?*

Maria do Carmo: *Ficou muito pequeno!* [tom de indignação]

Professora: *O quê?*

Maria do Carmo: *O terreno, porque aí tava um pouquinho maior, aí a Natalia ficou reclamando que o terreno dela tava menos, daí ela foi lá e afastou e ficou muito estreitinho... Deu 5 passos na horizontal e 3 passos na vertical.*

Professora: *Passos de quem?*

Maria do Carmo: *Da Juliane. E também ficou muito pequeno, ela* [Juliane] *reclamou, mas foi ela que escolheu e ficou reclamando que ficou muito pequeno, porque o da Natalia tava maior.*

Professora: *Mas vocês não negociaram?*

Maria do Carmo: *Quando falei pra eles que tava muito pequeno, só que aí, eles chegaram mais pra cá e o do Vitão que não queria chegar mais pra lá.*

Professora: *Mas vocês não tinham espaço para ir para frente?*

Maria do Carmo: *O terreno, porque aí tava um pouquinho maior, aí a Natalia ficou reclamando que o terreno dela tava menos, daí ela foi lá e afastou e ficou muito estreitinho... Deu 5 passos na horizontal e 3 passos na vertical.*

Professora: *Passos de quem?*

Furquim: *A Maria do Carmo era a mãe, ele* [Ricardinho] *era o pai, "nóis" dois* [Furquim e Claudio] *era o "fii" e ela* [Juliane] *era a tia. Aí ela buscava o leite, ele buscava a comida, ela pescava e ajudava eles*

Professora: *Entendi...*

Maria do Carmo: *Aí "nóis" já limpava a casa...*

Professora: *Tá, mas me fala uma coisa, vocês ficaram com o terreno pequeno mesmo e ficou por isso mesmo?*

Vários membros da família: *Ficou...*

Furquim: *"Nóis" reclamou pra aquele grupo lá, só que eles num "fez" nada!*

Professora: *Então para vocês não foi justo?*

Vários membros da família: *Nãooooo!!!*

Professora: *Mas vocês não tentaram negociar nem amis um pouco? Não tinha nenhuma parte sem dono?*

Maria do Carmo: *Não porque se fosse mais pra frente ia entrar no território da Vilma...*

Professora: *Hum... E você não podia falar com ela para diminuir um pouquinho?*

Vários membros da família: *Não, porque eles não queriam afastar!!!*

Professora:	*Ah! Eles não queriam afastar! Deixa eu ver como ficou o desenho do Rio Nilo... é ali encima não é?*
Vários membros da família:	*É...*

Figura 10: Medida adotada pela família 5, demonstração feita pela estudanteJuliane de seus passos. Fonte: Videogravaçãoes da professora pesquisadora

Explicação da família 5 (5 membros)

Vilma:	*A nossa casa foi 13 passos de largura, 15 de tamanho e quem fez foi a Viviane.*
Professora:	*Como é?*
Vilma:	*13 de largura e 15 de tamanho.*
Professora:	*Como é 15 de tamanho.*
Vilma:	*Assim ó* [um gesto verticalmente com as mãos ela mostra que tamanho era o mesmo que altura]. *Pode falar?*
Professora:	*Vai falando...*
Vilma:	*A Ivete era a filha, o Albertinho era o pai, a Viviane era a filha, eu sou a mãe e a Giseli é a tia.*
Professora:	*Ah, então vocês constituíram família? Cada um tinha uma função?*
Vilma:	*A Viviane era a leiteira e a dona de gado.*
Professora:	*Olha que chique!!!*

Vilma: *O Albertinho era pastor, a Ivete era dona de casa e pastora também... é aquelas que "cuida" de ovelha e eu era a mãe que cuidava da casa!*

Professora: *E quem fazia a comida?*

Vilma: *Era eu... lá na nossa casa ficou assim...*

Professora: *Oh, pessoal, colabora vai!!!* [mais uma interrupção, por conta do barulho que a turma estava fazendo].

Vilma: *Ficou as outras famílias, ficou o rebanho e ficou o gado e o Rio* [ela mostra o desenho].

Professora: *Por que vocês escolheram aquele lugar mais para trás?*

Vilma: *Pra ficar mais na sombra, se quisesse ia pra sombra e saía do Sol.*

Professora: *E teve algum problema? Por que a Giovana falou que vocês acharam que o terreno de vocês estava pequeno...*

Vilma: *Foi...só tava nesse, aí a Viviane e o Albertinho quiseram aumentar. Aí "nóis" pegou e deixou um espacinho pra passar.*

Professora: *Ah entendi.*

Vilma: *Pra num pisar na casa dos outros... Aí ficou assim: ficou o Rio, as outras casas aqui, ficou o Egito e a nossa casa!*

Professora: *E o que mais você quer falar?*

Vilma: *E... nossa, que tanto de folha que deu!!! E aí antes desse tem esse que eu tinha "fazido", a Viviane era a leiteira, o Albertinho era o pastor, a Giseli era a dona da casa...*

Albertinho: *Você já falou isso!*

Vilma: [olha brava para Albertinho e continua] Aí antes eu tinha "fazido" esse desenho: aqui era o Rio, aqui era a nossa casa, aqui o gado, o rebanho aqui e as famílias.

Professora: *E por que mudou?*

Vinícius: *Porque depois mudou todo mundo...* [referência às negociações]

Vilma: *Foi esse aqui do lado de cá, tinha o Rio, aqui era a parede. Aí ficou o gado, no nosso caso, o gado, o rebanho e as outras famílias, que foi o tanto de lá.*

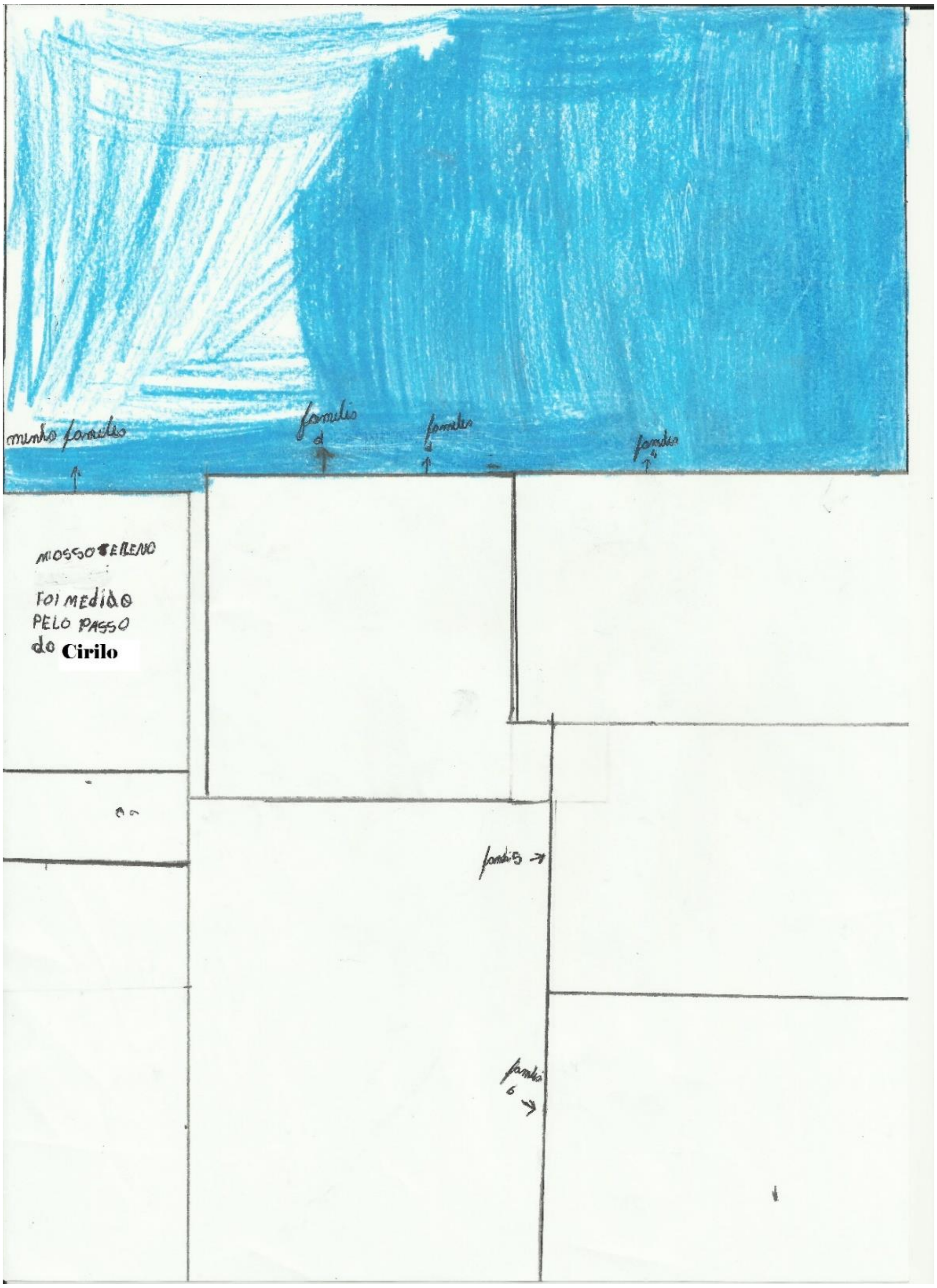
Figura 11:Medida adotada pela família 5, demonstração feita pela estudante Viviane de seus passos. Fonte: Videogravações da professora-pesquisadora

Não foi possível registrar a explicação da família 6, pois os membros disseram que já estava explicado nos registros, mas na verdade estavam envergonhados com a filmagem, apesar dos argumentos da professora de que eles não apareceriam, os mesmos não se mostraram convencidos. Então a vontade deles foi respeitada.

ANEXO 2

Registros por escrito/ desenho de todas as famílias durante a Atividade 1: Medindo terras no Egito Antigo

Família 1



P2A gamenta

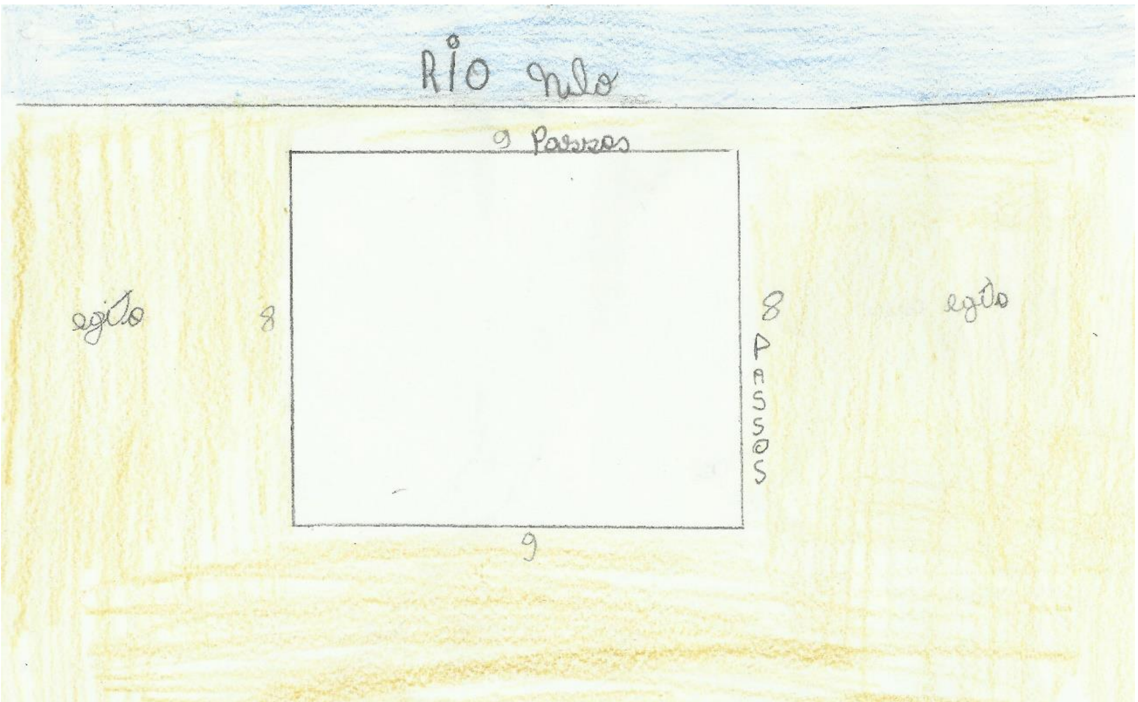
nos chegamo e começamos a marca o Terreno primeiro
o Terreno ficou muito pequeno nos desmarcamos, o
Cirilo começou a marca o Terreno com os pés passou uns 5
minuto chegamos a conclusão o Terreno ficou bom

DeBaTe

o meu espaço Eu achei bom mas o espaço
Dos meus colegas eu achei ruim
De acordo nos podemos mudar o Terreno a
medida Do Terreno ficou 9m 6c

Família 2

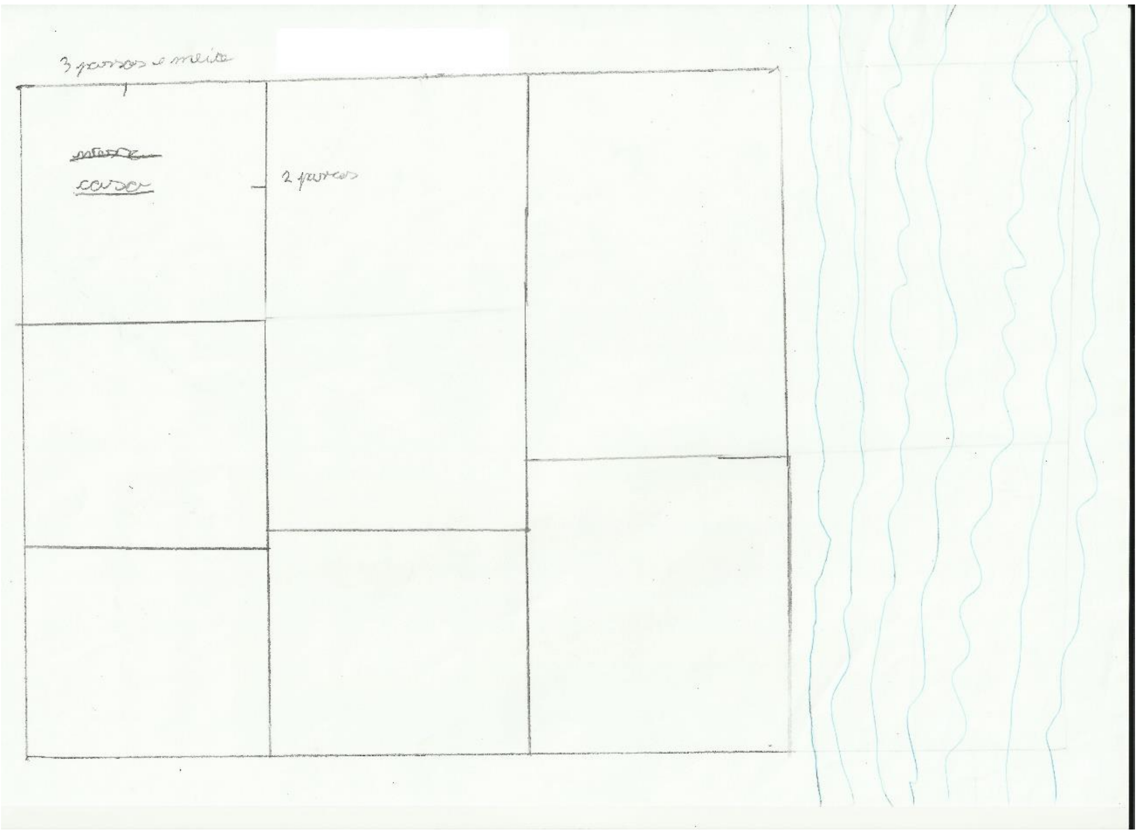
No inicio todas as familias ficaram muita agitada, mas
comesamos a medir os terrenos teve muitas discursões e
muitas familias se chatearam eu, e minha familia me-
dimos com nossos pés o Guilherme que mediu nas late-
rais e na frete e no fundo, deu na frente e fundo
9 passos e nas laterais 8 passos isto foi antes
de as familias reclamarem do espaço ai conversamos
eu os meus vizinhos do lado e frente resolvemos e
finalmente conseguimos acabar o meu terreno as
margens do rio nilo porquê e mais perto e podemo
criar mais bichos para ficarem perto da água.

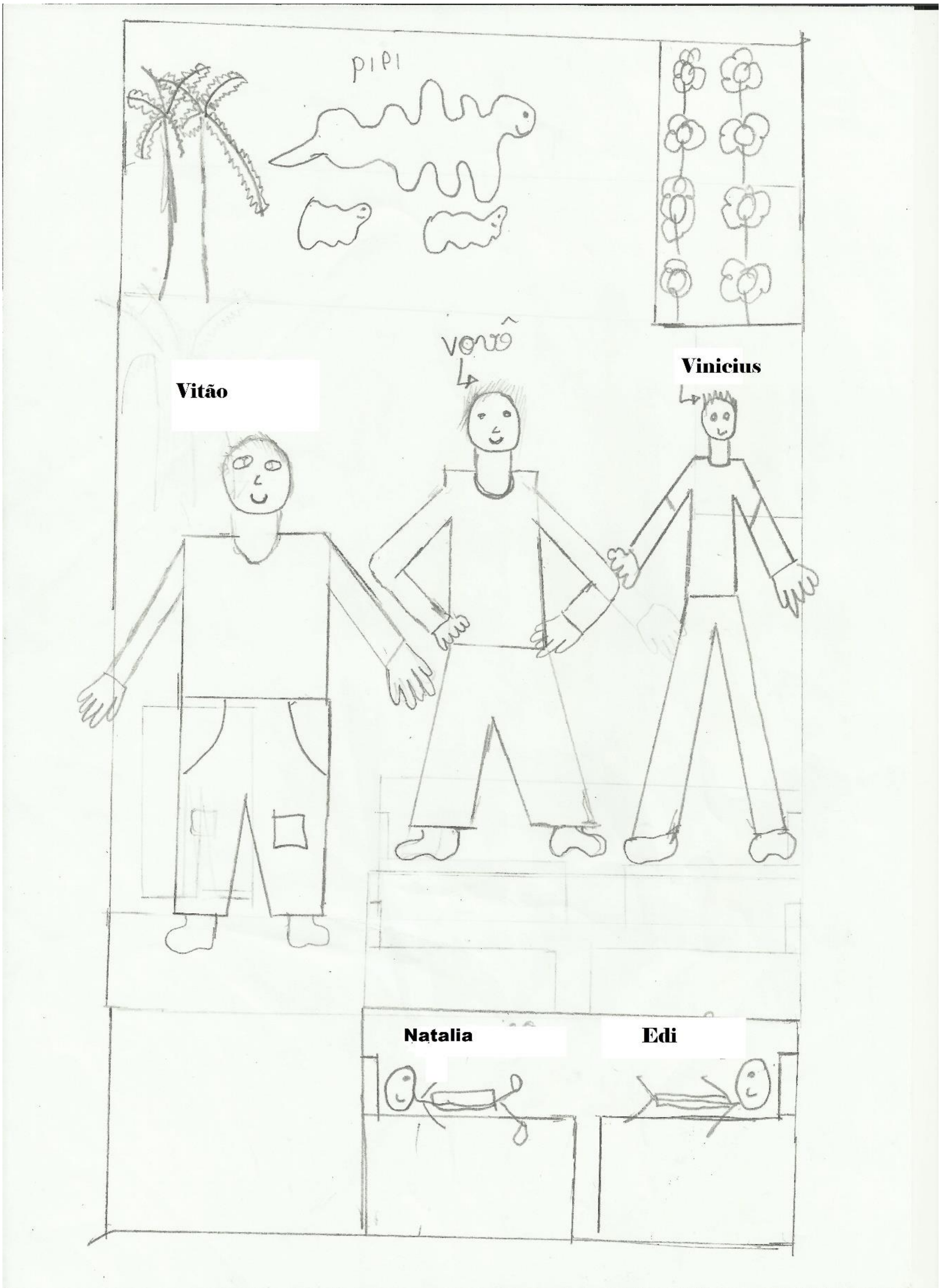


Família 3

na nossa casa moram 5 pessoas, e fizemos a
divisão da, nossa casa perto de um coqueiro um
pouco atrás do Rio nilo. Além de nossa família há mais
5 famílias. Nós medimos uma vez mais de estava
muito pequena mas ai a gente aumentou ai nossa famí-
lia concorda mais os outros não ai nos vamos
tentar dar um jeito

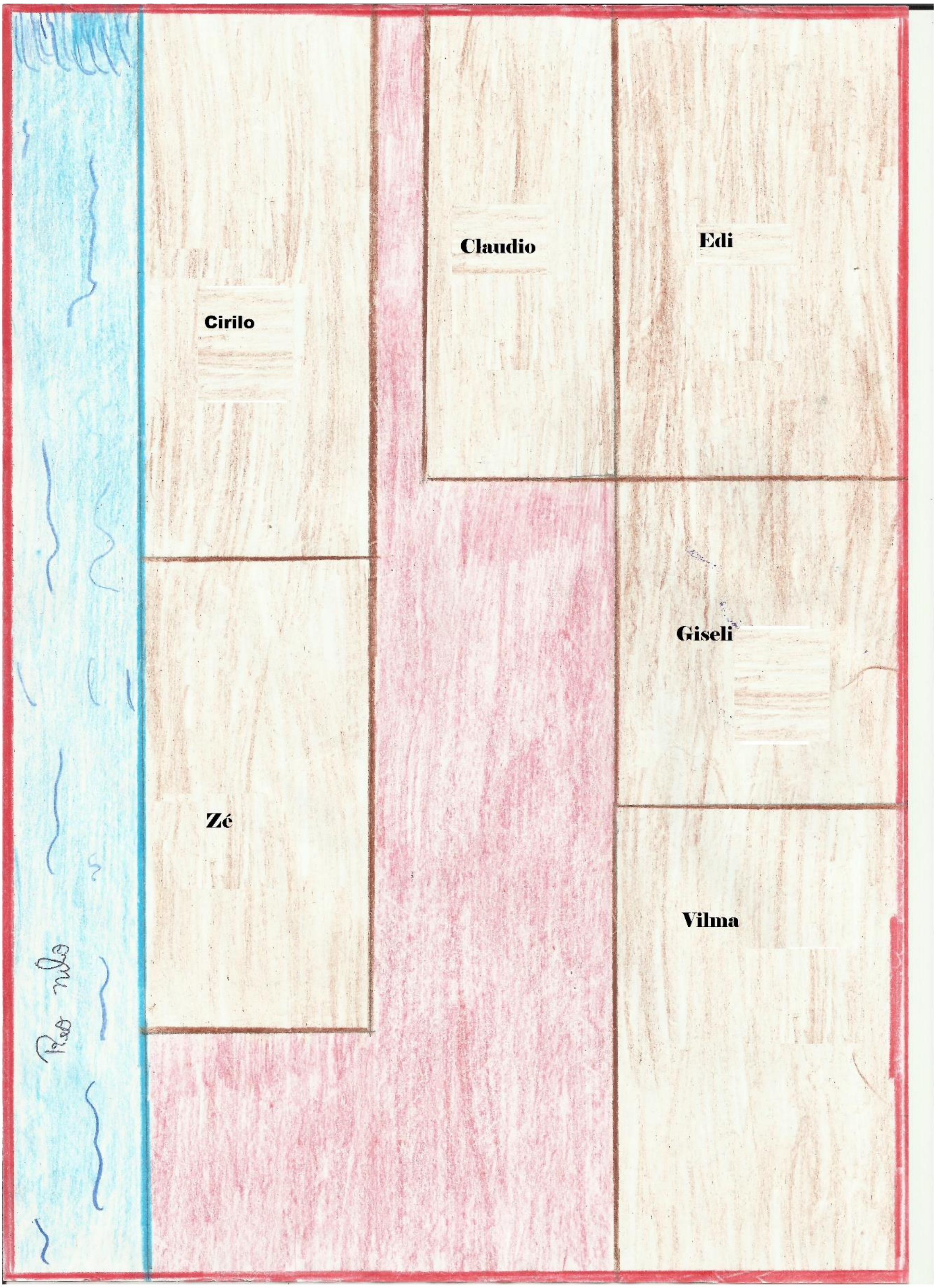
podemos reparar que há mais 2 terrenos
na frente da nossa casa. !
De largura nossa casa mede 2 passos
e de cumprimento 3 e meio não e muito
grande mais e o bastante para nos abitarmos
eu não acho muito justo por que tem ainda
terrenos maiores, mais se o resto concordar
esta tudo bem



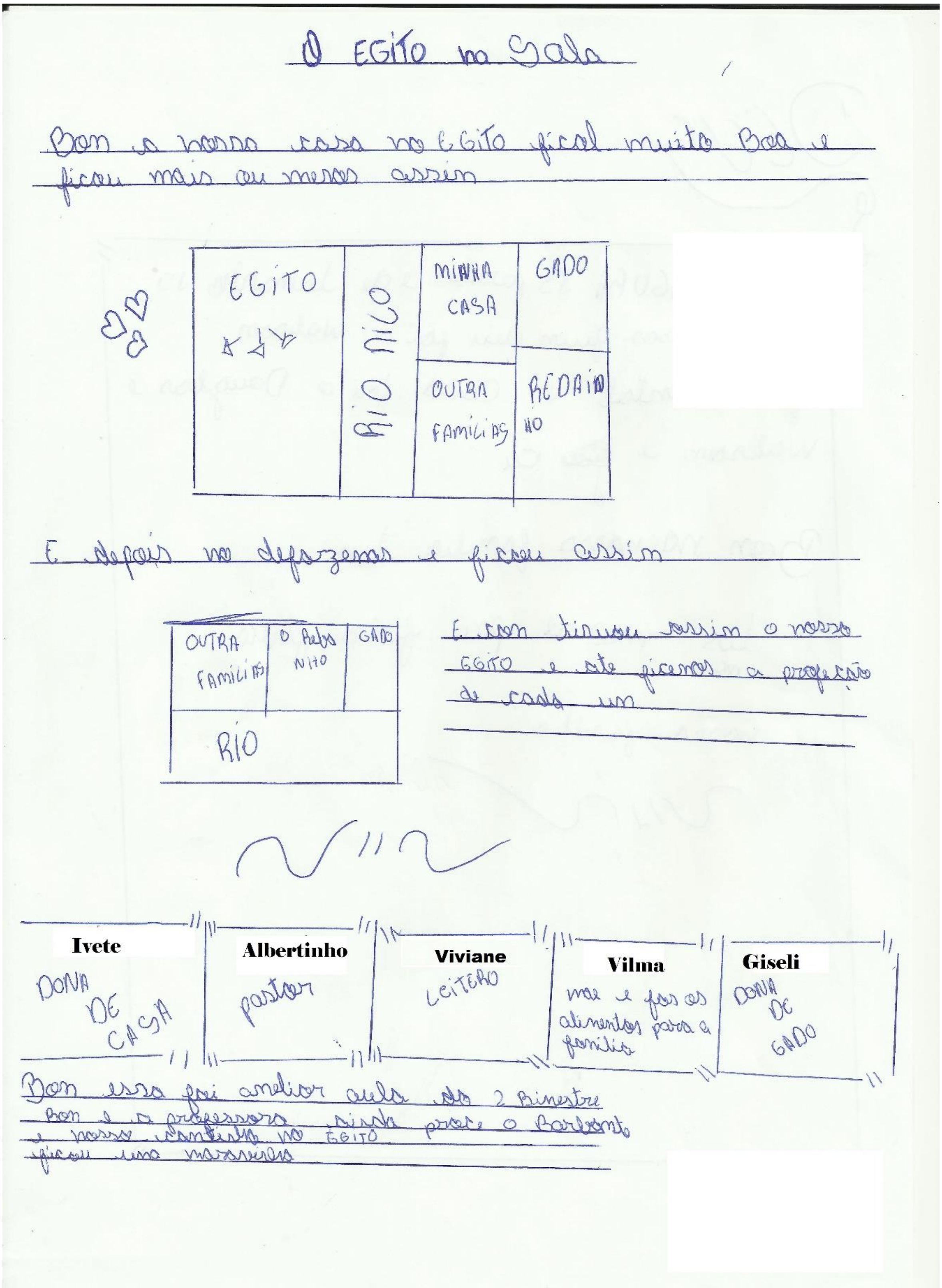

PIPI
Vitão
VOVÔ
Vinicius
Natalia
Edi

Família 4

Eu e o meu grupo decidiram um
com os outros para ver se o nosso
terreno estava bom o tamanho ok,
eu e o meu grupo decidiram que o
nosso espaço estava muito pequeno
e as outras duplas não foram justa
com a minha familia por que nois
a minha familia pedimos para almentar
um pouco do quinta para a minha familia
construir a nossa barraca e para que
criar o nosso gado, e a familia
do outros grupos não queria diminuir
um. pouco do quinta para aumenta o
o nosso quintal. A nossa casa está
muito peque por que só tem 5 passos
na horizontal e 3 passos na vertical e foi
com o passo da Juliane e é só esso.


Cirilo
Claudio
Edi
Giseli
Zé
Vilma

Família 5


O EGITO na Sala

Bom a nossa casa no EGITO ficou muito Boa e ficou mais ou menos assim

E depois nos desfazemos e ficou assim

E com tirou assim o nosso EGITO e ate ficamos a profeção de cada um

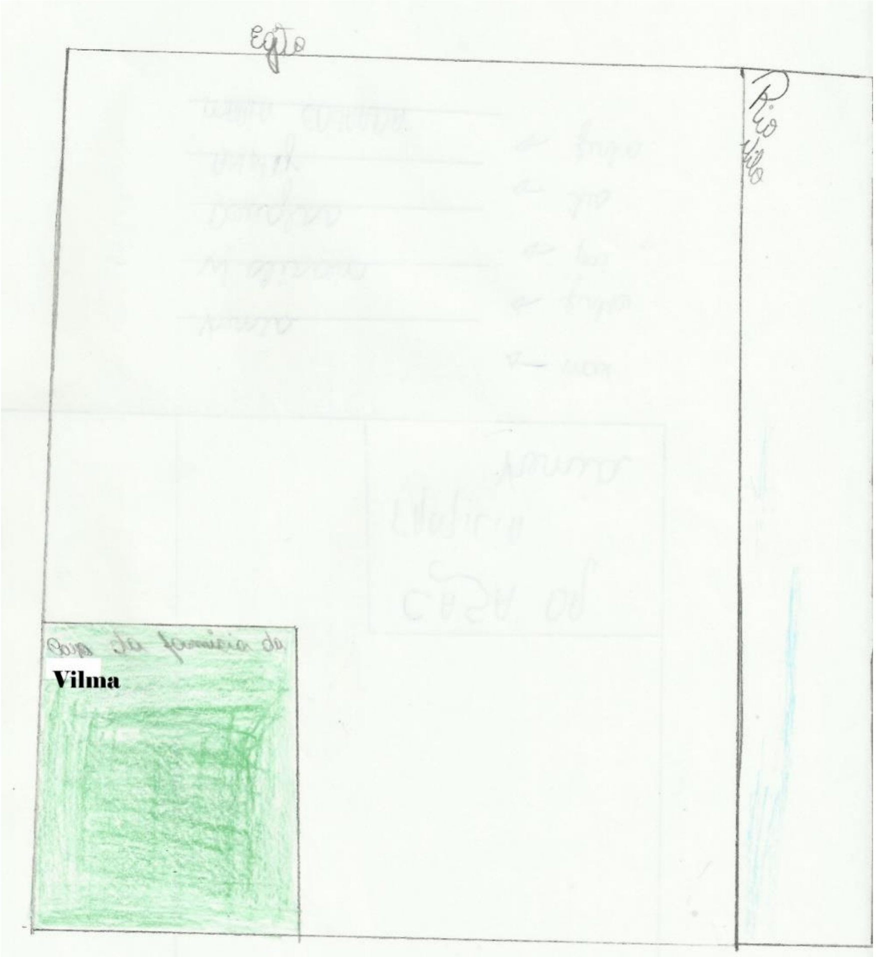
Ivete	Albertinho	Viviane	Vilma	Giseli
DONA DE CASA	pastor	LEITEIRO	mae e faz os alimentos para a familia	DONA DE GADO

Bom essa foi a melhor aula do 2 Bimestre
Bom e a professora ainda prase o Barbante
e nosso cantinho no EGITO
ficou uma maravilha

DE LARGURA 13 passos e de tamanho 15
e os passos quem deu foi o Viviane
quem mantel a casa foi o Albertinho e
Viviane e Eu

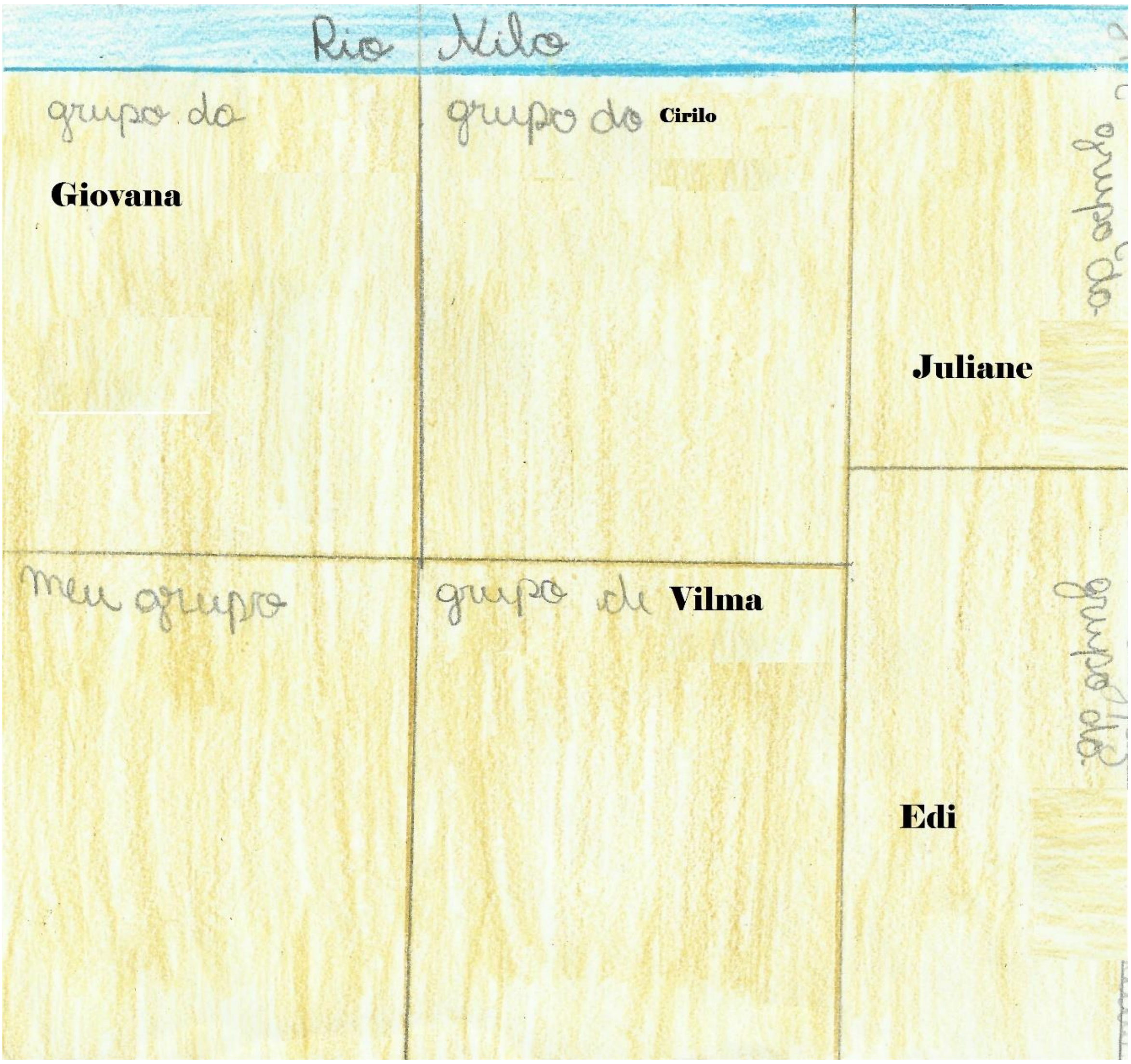
Bom na nossa familia tem
tis mamae pai firho firha
e nossa familia

Vilma ← mae
Viviane ← firho
Albertinho ← pai
Giseli ← tis
Ivete ← firha



Família 6

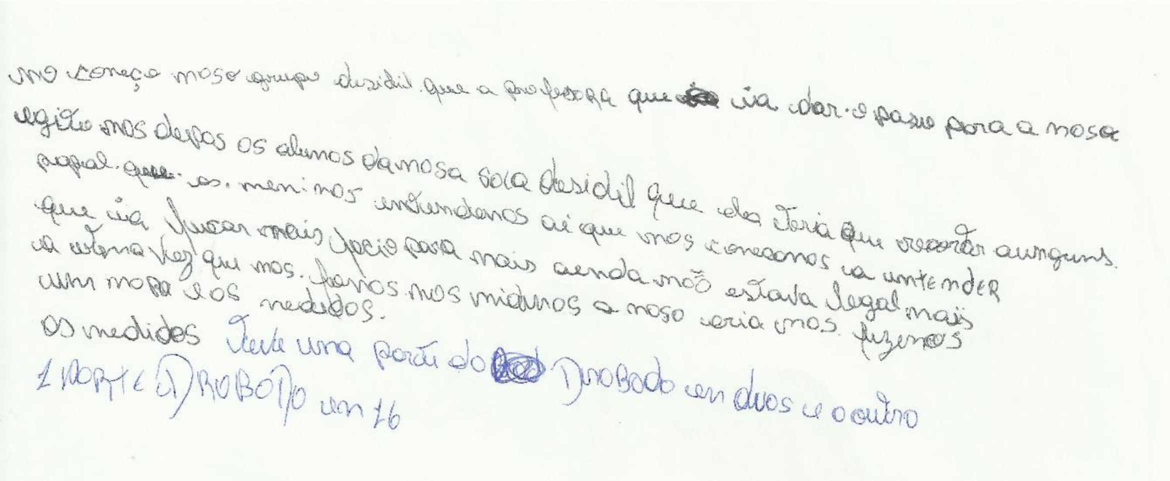
No início que agente entrou no Egito foi muito
difícil medir os terrenos então agente arrumou
corda e mediu o espaço e alguns estava
reclamando e por isso agente fez um acordo
e deu certo mas alguns estavam reclamando
e agente foi melhorando até que deu certo.
agente mediu espaço e foi contando os
passos e deu 12 passos em cima e 11,5 dos
lados e não atrapalhou ningem.


Rio Nilo
grupo do
Giovana
grupo do Cirilo
Juliane
meu grupo
grupo da Vilma
Edi

ANEXO 3

Registros por escrito/ desenho de todas as famílias durante a Atividade 4: De volta ao Egito: a necessidade de organização em sociedade.

Família 1

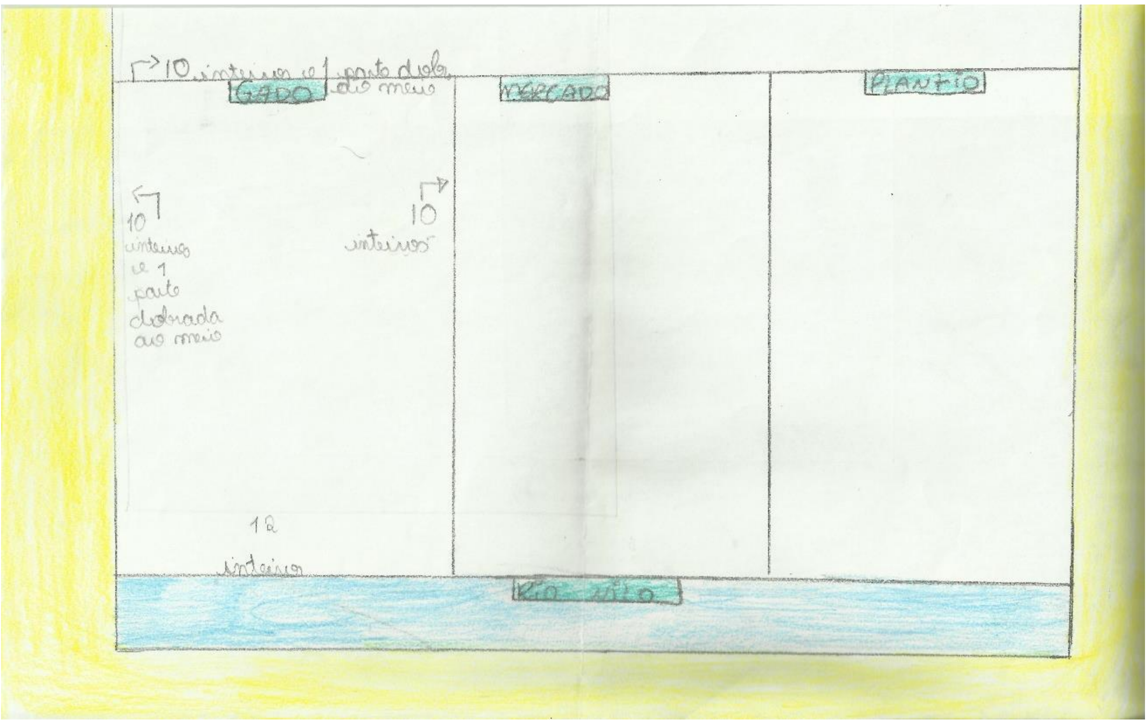

no começo noso grupo dusidil que a profesora que ia dar o paso para a nosa
ugião nos depos os alunos da nosa sala desidil que ela teria que recortar aungums
papel. que os meninos intendenos ai que nos começanos a untender
que ia ficar mais Opcio para mais aenda não estava legal mais
a ultima vez que nos fizemos nos medimos a noso veria mos. fizemos
um mapa dos medidos.
os medidos teve uma parti do dirobodo em duos e o outro
1 parte dirobodo um 16

Família 3

A gente começou a medir os territorios só que
ai a medida não tava justa.
Mais ai a Natalia arranjou uma solução
que foi colocar o mercado na onde tinha espaço
aberto e almentar a moradia.

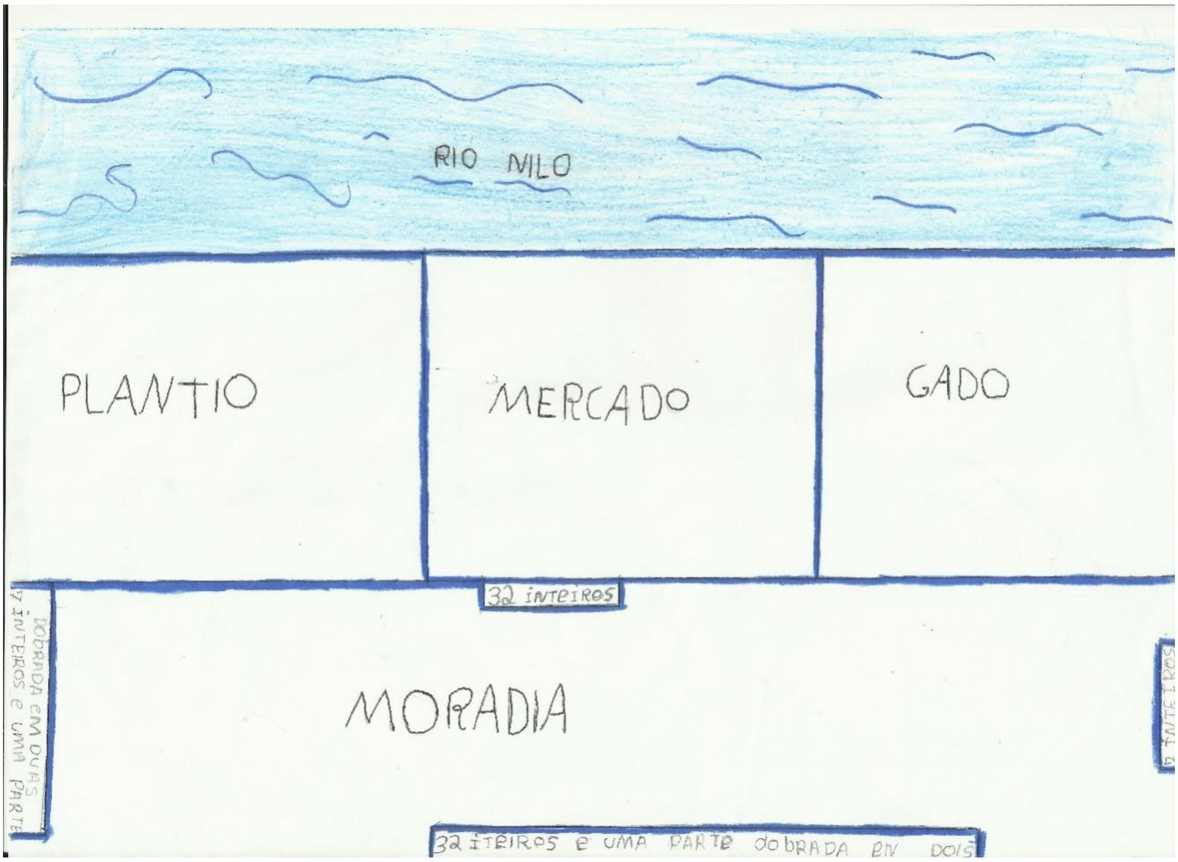
Nossa medida.

1 A primeira medida deu 10 inteiros e uma
parte dobrada ao meio.
na segunda deu 10 inteiros
na terceira deu 12 inteiros
na ultima deu 10 inteiros e uma parte dobrada
ao meio



Família 4

Quando chegamos ao egito foi uma bagunça
Todas as familias aflitas todos mediam de qualquer
jeito e então decidimos usar a medida padrão do pé-
com tênis da professora começamos a medir
e no final percebemos que o espaço para moradia
estava pequeno e decidimos mudar os terrenos de lugar
Então uma aluna chamada Jéssica teve uma ideia
de colocar o Mercado de troca em um espaço livre
e aumentar a moradia.
Aí começamos a medir o terreno de um lado
7 inteiros e 1 parte dobrada 2x do outro lado uma
medida diferente 7 inteiros e 2 partes e do outro 32
inteiros e do outro 32 inteiro 2x dobrada e então terminamos
de medir.
E enfim terminamos mas não tudo ainda
falta dividir as casas.

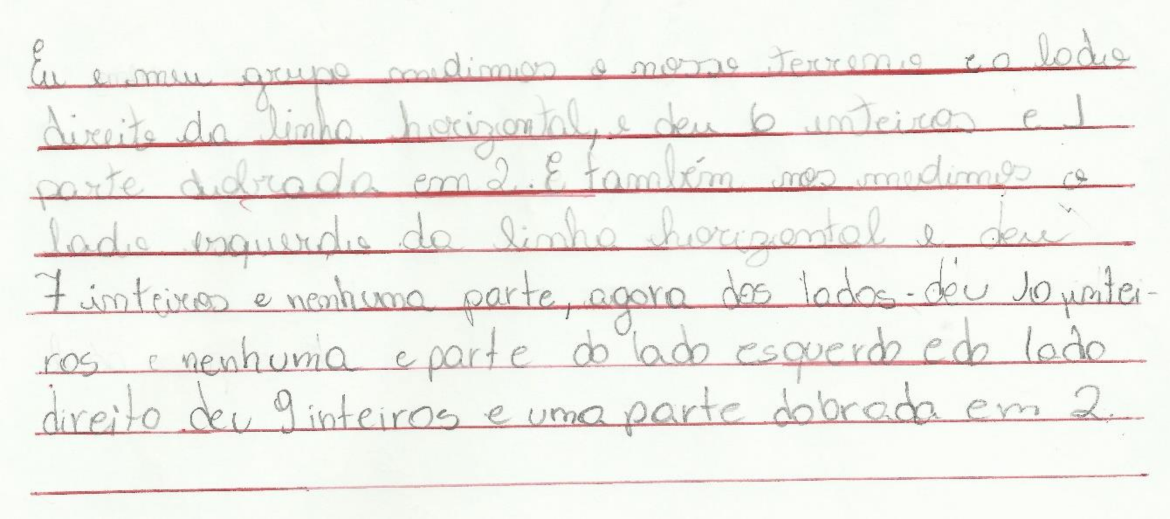


Família 5

~~Antes~~ Antis
tava tudo estranho mas a Natalia deu uma ideia de
separa o mercado o gado e o plantio e a moradia ai ficou mas
fasio para organisar a moradia ficou 7 inteiros e 1 drobado 7
07 intiros 2 vezes drobada 32 inteiros e uma parte as familhas
não disputaram e nem reclamaram por terras deu tudo
serto so deu uma pequena confusão o rio ficou perto
do mercado, plantim o gado e da moradia
a unica parte maior e foi a moradia para caber todo mundo


Rio nilo
gado
mercado de trigo
moradia

Família 6



Eu e meu grupo medimos o nosso terreno e o lado direito da linha horizontal, e deu 6 inteiros e 1 parte dobrada em 2. E também nos medimos o lado esquerdo da linha horizontal e deu 7 inteiros e nenhuma parte, agora dos lados - deu 10 inteiros e nenhuma e parte do lado esquerdo e do lado direito deu 9 inteiros e uma parte dobrada em 2.