

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM  
ENGENHARIA MECÂNICA**

**A INFLUÊNCIA DO AMORTECIMENTO  
VISCOELÁSTICO NA ESTABILIDADE  
AEROELÁSTICA DE PAINÉIS AERONÁUTICOS**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

**2015**

André Garcia Cunha Filho

# **A INFLUÊNCIA DO AMORTECIMENTO VISCOELÁSTICO NA ESTABILIDADE AEROELÁSTICA DE PAINÉIS AERONÁUTICOS**

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Área de concentração: Mecânica dos sólidos e vibrações

Orientador: Prof. Doutor Antônio Marcos Gonçalves de Lima

Co-Orientador: Prof. Doutor Maurício Vicente Donadon

Uberlândia - MG

Agosto de 2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

---

C972i  
2016      Cunha Filho, André Garcia, 1987-  
          A influência do amortecimento viscoelástico na estabilidade  
aeroelástica de painéis aeronáuticos / André Garcia Cunha Filho. - 2016.  
          106 f. : il.

Orientador: Antônio Marcos Gonçalves de Lima.  
Coorientador: Maurício Vicente Donadon.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.  
Inclui bibliografia.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Viscoelasticidade - Teses. 3.  
Método dos elementos finitos - Teses. 4. Aeroelasticidade - Teses. I.  
Lima, Antônio Marcos Gonçalves de, 1975- II. Donadon, Maurício  
Vicente, . III. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-  
Graduação em Engenharia Mecânica. IV. Título.

---

CDU: 621

*Eu dedico esta dissertação de mestrado  
ao meu Pai, André Garcia Cunha, minha mãe  
Natércia de Almeida Calixto e toda minha  
família.*

## AGRADECIMENTOS

Sou eternamente grato ao Prof. Marcos Antônio Gonçalves de Lima por ter acreditado em minhas capacidades e me dado a oportunidade de realizar este trabalho. Durante todo o desenvolvimento ele se mostrou sempre muito atencioso, focado e empenhado. Me ajudou e apoiou em todos os momentos difíceis, sempre mostrando o caminho mais fácil.

Gostaria também de agradecer ao Prof. Maurício Vicente Donadon que, apesar da distância, sempre esteve presente. Seu empenho e vontade de trabalhar me serviram de exemplo e motivação.

Aos professores do programa de Pós-Graduação da FEMEC/UFU, que trabalharam fortemente para a minha formação, agregando conceitos valiosos e uma nova forma de enxergar os problemas de engenharia.

À Universidade Federal de Uberlândia e à Faculdade de Engenharia Mecânica, pela oportunidade de realizar este Curso.

Ao CNPq, CAPES e ao coordenador do INCT-EIE Prof. Valder Steffen Jr. pelo suporte financeiro.

Agradeço aos Profs. Flávio Donizeti Marques e Valder Steffen por terem aceitado o convite de juris de minha banca de defesa de mestrado. É uma honra ter esta presença.

Um agradecimento especial ao Prof. Thiago Augusto Machado Guimarães, por seus conselhos valiosos.

Ao meu grande amigo Leandro de Souza Leão, muito obrigado pelo suporte técnico e principalmente emocional.

Obrigado a todos os meus colegas de trabalho e amigos do Laboratório de Mecânica de Estruturas, todos me ajudaram de alguma maneira.

Finalmente, não teria sido possível a concretização deste trabalho se não fosse o apoio de minha família.

FILHO, A.G.C., **A Influência do Amortecimento Viscoelástico na Estabilidade Aeroelástica de Painéis Aeronáuticos, 2015.** Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, Brasil.

## Resumo

Desde o advento dos veículos supersônicos, durante a Segunda Guerra Mundial, os engenheiros têm se preocupado mais com as interações entre os esforços aerodinâmicos e as estruturas aeronáuticas. Isto devido a um importante fenômeno altamente destrutivo denominado *Flutter* de painéis aeronáuticos.

O *Flutter* de painéis aeronáuticos é um tipo de fenômeno aeroelástico auto-excitado, que pode ocorrer durante voos supersônicos devido à interação simultânea de forças aerodinâmicas, inerciais e elásticas do sistema. Na condição de *flutter*, quando a pressão dinâmica crítica é atingida, as amplitudes de vibração do painel se tornam dinamicamente instáveis e aumentam significativamente com o tempo, afetando de maneira importante a vida em fadiga do painel e/ou da estrutura que o suporta. Neste contexto, o interesse deste trabalho é investigar a possibilidade de reduzir os efeitos da instabilidade aeroelástica de placas planas retangulares em regime supersônico através da aplicação de material viscoelástico como técnica passiva de controle de vibração. A motivação por trás deste tema é que vários trabalhos destinados a estudar a supressão do *flutter* através de técnicas de controle passivas, semiativas e ativas foram publicados, entretanto poucos são adaptados para tratar com o problema aeroelástico utilizando um modelo de material viscoelástico que leva em conta o comportamento dinâmico dependente da frequência e temperatura. Para tal, dois modelos diferentes de materiais viscoelásticos são desenvolvidos e aplicados ao modelo de placa sanduiche em elementos finitos. Depois da apresentação dos fundamentos teóricos da metodologia, vários exemplos de simulações numéricas, representando diversas situações, são mostrados afim de ilustrar os desenvolvimentos abordados ao longo do trabalho.

FILHO, A.G.C., **The Influence of the Viscoelastic Damping on the Aeroelastic Stability of Aeronautical Panels**, 2015. Master Thesis, Federal University of Uberlândia, Brazil.

## **Abstract**

Since the creation of supersonic vehicles, during the Second World War, the engineers have given special attention to the interaction between the aerodynamic efforts and the structures of the aircrafts due to a highly destructive phenomenon called flutter in aeronautical panel.

Flutter in aeronautical panels is a self-excited aeroelastic phenomenon, which can occur during supersonic flights due to dynamic instability of inertia, elastic and aerodynamic forces of the system. In the flutter condition, when the critical aerodynamic pressure is reached, the vibration amplitudes of the panel become dynamically unstable and increase exponentially with time, affecting significantly the fatigue life of the existing aeronautical components. Thus, in this paper, the interest is to investigate the possibility of reducing the effects of the supersonic aeroelastic instability of rectangular plates by applying passive constrained viscoelastic layers. The rationale for such study is the fact that as the addition of viscoelastic materials provides decreased vibration amplitudes it becomes important to quantify the suppression of plate flutter coalescence modes that can be obtained. Moreover, despite the fact that much research on the suppression of panel flutter has been carried out by using passive, semi-active and active control techniques, very few of them are adapted to deal with the problem of estimating the flutter speeds of viscoelastic systems, since they must conveniently account for the frequency- and temperature-dependent behavior of the viscoelastic material. In this context, two different models of viscoelastic material are developed and applied to the model of sandwich plate by using finite elements. After the presentation of the theoretical foundations of the methodology, the description of a numerical study on the flutter analysis of a three-layer sandwich plate is addressed.

# SUMÁRIO

<b>CAPÍTULO I .....</b>	<b>2</b>
1. <i>INTRODUÇÃO.....</i>	<i>2</i>
1.1. Contexto do estudo.....	2
1.2. Principais técnicas de controle passivo de vibrações .....	5
<b>CAPÍTULO II .....</b>	<b>12</b>
2. <i>Modelagem por EF de uma Placa Sanduíche de Três Camadas Contendo Amortecimento Viscoelástico .....</i>	<i>12</i>
2.1. Relações cinemáticas .....	12
2.2. Relações entre tensões e deformações.....	15
2.3. Discretização por elementos finitos.....	19
2.4. Obtenção das matrizes elementares de massa e rigidez .....	22
<b>CAPÍTULO III .....</b>	<b>27</b>
3. <i>Modelagem do Comportamento Dinâmico de Materiais Viscoelásticos ...</i>	<i>27</i>
3.1. A viscoelasticidade linear .....	27
3.2. Efeito de fatores ambientais e operacionais .....	29
3.3. Modelo do módulo complexo .....	31
3.3.1. Equações analíticas para o material ISD112 3M .....	34
3.4. Modelo de Golla-Hudges-McTavish (GHM) .....	38
3.5. Pré-processamento numérico do sistema de equações aumentado. ....	41
3.6. Decomposição espectral da matriz de rigidez fatorada do modelo GHM	42
3.7. Ajuste de curvas dos parâmetros do material viscoelástico.....	45
<b>CAPÍTULO IV .....</b>	<b>44</b>
4. <i>Aeroelasticidade de Placas.....</i>	<i>44</i>
4.1. Introdução à aeroelasticidade .....	44



4.2. A natureza física do problema.....	49
4.3. Modelo de carregamento aeroelástico linear .....	51
4.4. Introdução do efeito aerodinâmico no sistema viscoelástico .....	53
<b>CAPITULO V.....</b>	<b>44</b>
5. <i>Soluções Numéricas do Sistema Aeroviscoelástico</i> .....	44
5.1. Validação numérica do modelo mecânico de placa .....	59
5.2. Efeitos do tratamento com amortecimento viscoelástico .....	62
5.3. Comparação entre os dois modelos de material viscoelástico .....	67
5.4. Influência de parâmetros físicos e geométricos na velocidade de flutter	70
5.4.1. Espessura da camada restringente.....	70
5.4.2. Espessura da camada viscoelástica .....	71
5.5. Influência do efeito puramente viscoelástico.....	72
<b>CAPÍTULO VI.....</b>	<b>54</b>
6. <i>Conclusões</i> .....	54
6.1. Resumo e avaliação.....	54
6.2. Sugestões de trabalhos futuros.....	78
<b>Bibliografia.....</b>	<b>79</b>
<b>APENDICE .....</b>	<b>Error! Bookmark not defined.</b>
<b>ANEXO A .....</b>	<b>75</b>
Discretização por elementos finitos .....	75
Matrizes elementares de rigidez e massa de um elemento finito de placa sanduiche três camadas .....	85
Parametrização da camada viscoelástica.....	89
<b>ANEXO B .....</b>	<b>93</b>
Ajuste de curva: valores obtidos através da otimização .....	93

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 - Wernher Von Braun (A&E TELEVISION, 2015), criador do foguete alemão V-2 durante a Segunda Guerra Mundial (DUNGAN, 2009-2015).....	2
Figura 1.2 – Aplicação de mantas asfálticas nos tetos de carrocerias. Figura adaptada e obtida do site do fabricante (C3, 2015).....	6
Figura 1.3 – Esquema da montagem das técnicas de camada livre (a) e camada restringida (b).....	7
Figura 1.4 – Elemento discreto para tratamento passivo de vibrações similar ao absorvedor dinâmico de vibrações. Figura adaptada de Lima, Rade e Bouhaddi (2007).....	7
Figura 2.1 – Representação esquemática de um elemento tipo placa sanduíche contendo três camadas. Figura extraída de Lima et al. (2006). ....	12
Figura 2.2 – Cinemática da deformação do elemento finito de placa sanduíche de três camadas. Figura adaptada de (DE LIMA, STOPPA, et al., 2006).....	13
Figura 2.3 – Pontos de integração utilizados nas funções de interpolação. ....	21
Figura 3.1 – Esquema de uma típica rede estrutural polimérica. Adapta de Nashif et al. (1985). ....	28
Figura 3.2 – (a) aplicação e remoção da carga de maneira instantânea; (b) deformação de um material elástico em resposta ao carregamento; (c) deformação de um material viscoelástico em resposta ao carregamento; (d) deformação de um material viscoso em resposta ao carregamento. Figurada adaptada de Callister e Rethwisch (2009).....	29
Figura 3.3 - Comportamento esquemático de um material viscoelástico variando em função do aumento de temperatura. Figura adaptada de Nashif et al. (1985). ....	30
Figura 3.4 – Mapa do espectro de temperatura para uma placa de material compósito amortecida viscoelasticamente.....	31
Figura 3.5 – Ilustração do Princípio da Superposição Frequência-Temperatura – PSFT (DE LIMA, DA SILVA, et al., 2010). ....	33

Figura 3.6 – Nomograma de frequência reduzida do material ISD112 3M® extraído da referência (DE LIMA, RADE e FARIA, 2009). .....	35
Figura 3.7 – Módulo de armazenamento do material ISD112 3M em função da temperatura e frequência.....	36
Figura 3.8 – Fator de perda do material ISD112 3M em função da temperatura e frequência.....	37
Figura 3.9 – Etapas para a solução do problema de autovalor não-linear de sistemas contendo amortecimento viscoelástico.....	37
Figura 4.1 – Diagrama de Collar. Figura adaptada de (HODGES e PIRCE, 2002) .....	48
Figura 4.2 – Esquema ilustrativo de um experimento para a determinação do ponto de ocorrência do flutter em uma placa retangular fina: (1) parede rígida do túnel de vento, (2) placa retangular fina, (3) cavidade formada pela estrutura de fixação.....	49
Figura 4.3 – Resposta aerodinâmica de um painel (adaptado de (DOWELL, 1975)). .	50
Figura 4.4 – Método iterativo usado para a análise aerodinâmica de um sistema contendo amortecimento viscoelástico.....	56
Figura 5.1 – Estudo de convergência da malha baseada na velocidade crítica. ....	58
Figura 5.2 – Comparação entre as formas modais analíticas e numéricas de uma placa. ....	60
Figura 5.3 – Coalescência das duas primeiras frequências naturais da placa-base. ..	61
Figura 5.4 – Coalescência das dez primeiras frequências naturais da placa-base. ....	62
Figura 5.5 – Influência do tratamento viscoelástico superficial no comportamento aeroelástico da placa-base de alumínio. ....	63
Figura 5.6 – Modos da placa tratada: (a) Velocidade do ar de 2900 km/h; (b) Velocidade crítica de 3070 km/h. ....	65
Figura 5.7 – Modos da placa tratada: (a) Velocidade do ar de 2900 km/h; (b) Velocidade crítica de 3070 km/h. ....	65
Figura 5.8 - Placa sem tratamento, primeiro modo de vibrar, (a) Velocidade do ar de 2000 km/h; (b) Velocidade crítica de 2062 km/h. ....	66
Figura 5.9 - Placa sem tratamento, primeiro modo de vibrar, (a) Velocidade do ar de 2000 km/h; (b) Velocidade crítica de 2062 km/h. ....	66
Figura 5.10 – Comparação dos resultados obtidos para os modelos GHM e módulo complexo para a temperatura de 15°C.....	67
Figura 5.11 - Comparação dos resultados obtidos para os modelos GHM e módulo complexo para a temperatura de 30°C.....	68
Figura 5.12 - Comparação dos resultados obtidos para os modelos GHM e módulo complexo para a temperatura de 60°C.....	68

Figura 5.13 – Influência da espessura da camada restringente no comportamento aeroelástico da placa sanduiche. ....	71
Figura 5.14 – Influência da espessura da camada viscoelástica no comportamento aeroelástico da placa sanduiche. ....	72
Figura 5.15 – Quantificação do efeito do amortecimento viscoelástico no sistema aeroelástico. ....	74

# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

### 1.1. Contexto do estudo.

O trabalho apresentado se enquadra em uma cooperação realizada entre as equipes de pesquisa do Laboratório de Mecânica de Estruturas (LMEst), da Faculdade de Engenharia Mecânica (FEMEC) da Universidade Federal de Uberlândia (UFU) e do Laboratório de Estruturas do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA).

Atualmente, em função das condições econômicas dos países sedes das principais instituições governamentais responsáveis pelos mais importantes investimentos em pesquisa e desenvolvimento do setor aeroespacial, observa-se uma mudança nas fontes de recursos. Grande parte do financiamento tem migrado para o setor privado, uma vez que a manutenção de programas espaciais é altamente custosa, como por exemplo o “*Space Shuttle Program*” da NASA, o qual foi desativado em 2011, em função de cortes do estado. Um dos impactos desta migração de fontes econômicas foi o surgimento de empresas privadas que apareceram para suprir as necessidades criadas pelo estado. Como exemplo, podem ser citadas as empresas *Virgin Galactic* e *SpaceX* nos Estados Unidos. Neste contexto, pode-se dizer que criação de empresas privadas no setor é muito benéfica para a pesquisa e desenvolvimento do setor, pois gera-se uma intensa concorrência norteadas pela criação de novas tecnologias. Assim, é de se esperar que nos próximos anos vários trabalhos relacionados ao desenvolvimento de estruturais aeroespaciais sejam intensamente investigados.

A busca por estruturas aeroespaciais cada vez mais leves e resistentes sempre foi uma necessidade para o desenvolvimento da indústria aeroespacial. Entretanto, com o aumento da velocidade de operação das aeronaves e o decorrente aumento dos esforços envolvidos, soluções mais inteligentes em termos de eficiência estrutural são necessárias. Para tal, o uso de materiais como os compósitos e estruturas híbridas capazes de reduzir massa e manter, ou até mesmo melhorar a eficiência estrutural em relação aos metais, comumente utilizados, tem sido amplamente aplicados.

Todavia, como qualquer aplicação de novas tecnologias em engenharia, há a necessidade de se ter um profundo conhecimento das propriedades e do comportamento destes materiais e estruturas alternativas. No caso da aplicação em voos supersônicos, desafios estruturais complicados surgem devido aos fenômenos aeroelásticos decorrentes, como o *flutter*. Tal fenômeno é passível de ocorrer em superfícies de sustentação como asas e pás de helicópteros, em superfícies de controle como leme, aileron e profundor e em painéis de estruturas aeroespaciais como fuselagem de veículos durante voos supersônicos, sendo este último o tema de motivação deste estudo.

O flutter de painéis aeronáuticos teve sua primeira ocorrência durante a Segunda Guerra Mundial, mais precisamente no ano de 1944 (Pegado, 2003). Um dos mais importantes personagens desta história foi o engenheiro alemão Wernher Von Braun, pioneiro na criação de foguetes supersônicos. Seu principal desenvolvimento, na época, foi o míssil balístico V-2, capaz de atingir velocidades superiores a 5500km/h, fato que aterrorizou e assassinou milhares de pessoas devido a sua alta capacidade destrutiva, uma vez que atingiam seu alvo de forma silenciosa e indetectável.



Figura 1.1 - Wernher Von Braun, criador do foguete alemão V-2 durante a Segunda Guerra Mundial (Dungan, 2015).

Este foi o início de uma nova era dos veículos aéreos, os veículos supersônicos. Estas máquinas deveriam ser projetadas para operar em um regime extremo, onde a compreensão

das solicitações mecânicas geradas pela interação fluido-estrutura em velocidades tão altas ainda não eram completas. O resultado foi que 70 dos 500 foguetes V-2 sofreram falhas por razões, até então, desconhecidas, dificuldade que no contexto da guerra, atrasou o projeto do míssil favorecendo, em grande parte, a vitória dos aliados (Pegado, 2003). Mais tarde, um pesquisador dos Estados Unidos (Jordan, 1956) identificaria uma destas falhas como sendo o “flutter” de painéis aeronáuticos. Posteriormente, a mesma falha foi registrada em vários outros projetos como nos primeiros voos do X-15, nos ensaios em túnel de vento do X-20 e no desenvolvimento do Titan II e III e S-IV B (Pegado, 2003).

A relevância e atualidade do tema podem ser notadas durante as considerações de design do caça F-117A *stealth* no qual rachaduras nos painéis de revestimento foram encontradas. Após seções de testes, determinou-se que as causas das rachaduras foram atribuídas às instabilidades aeroelásticas durante voo supersônico da aeronave (Becker, 1992).

Afim de compreender o fenômeno de flutter em painéis aeronáuticos, o mesmo pode ser definido como sendo um tipo de instabilidade aeroelástica auto-excitada oriunda da interação simultânea de forças aerodinâmicas, elásticas e inerciais da estrutura (Dowell, 1975). Esta interação complexa ocorre quando o escoamento do fluido cria variações significantes de pressão sobre o painel deformando-o e armazenando energia potencial elástica que é posteriormente transformada em energia cinética. Como o fluxo escoar de maneira contínua sobre o painel, as flutuações de pressão aumentam de intensidade à medida que a velocidade do escoamento aumenta, intensificando as deformações do painel e a quantidade de energia cinética a ser liberada. Caso a velocidade do escoamento continue a aumentar, o processo continuará até a ocorrência do flutter.

O fenômeno pode ser visto tanto em placas finas como cascas de componentes aeroespaciais. Neste sentido, estas estruturas devem ser projetadas de maneira que todos os esforços envolvidos no envelope de voo da aeronave sejam considerados. No caso de uma abstenção em projeto, a ocorrência do fenômeno pode provocar a falha estrutural devido à fadiga do painel ou de seus componentes de fixação. Esta é uma das principais características do flutter de painéis, pois a falha não ocorre de forma súbita e catastrófica como nas superfícies de sustentação. Isto se deve ao fato de que em função de não-linearidades geométricas presentes, restrições são impostas nas amplitudes do movimento oscilatório do painel, limitando-as (Dowell, 1975).

Este tema surgiu na década de 50, e desde então evoluiu muito. Portanto, para a compreensão da evolução dos estudos realizados até então, pode-se dividir o processo de

desenvolvimento em dois períodos, a saber: um primeiro em que as equações lineares do problema foram estudadas objetivando determinar o ponto a partir do qual se iniciam as instabilidades aeroelásticas. Em seguida, equações não lineares foram abordadas no intuito de se determinar o ciclo limite das estruturas e desenvolver modelos em regime transiente; por fim, foram desenvolvidos modelos contendo não-linearidades estruturais na presença da aerodinâmica linear ou não linear (Dowell, 1975).

Desde a década de 50, quando o fenômeno de *flutter* em painéis aeronáuticos foi identificado, diversos trabalhos sobre o tema foram publicados buscando o aprimoramento dos modelos. Desde então teorias lineares e não-lineares foram propostas, entretanto houve uma diminuição no interesse sobre o assunto entre os anos 70 e 90. A partir de 1995 até o momento, o cenário mudou devido à utilização dos materiais compósitos e *Functionally Graded Materials (FGM)* para fabricação na indústria aeroespacial, renovando o interesse de pesquisadores no comportamento aeroelástico destas estruturas.

Singha e Ganapathi (2005) investigaram o efeito de parâmetros estruturais nas características do flutter de painéis compósitos, como: ângulo e orientação de fibras, condições de contorno, amortecimento e carregamentos termomecânicos. Os autores concluíram que todos os parâmetros citados têm direta influência na pressão aerodinâmica crítica. Kuo (2011) estudou os efeitos de espaçamentos de fibras variáveis em placas retangulares de material compósito. O autor concluiu que a sequência dos modos naturais pode ser alterada em função da disposição das fibras, além de que este espaçamento pode variar o valor de pressão dinâmica crítica. Song e Li (2011) estudaram como atuar nos limites de ocorrência de flutter de placas compósitas laminadas através de técnicas de controle ativo de vibração utilizando materiais piezelétricos colados em ambas as superfícies da placa. Nesta mesma linha de pesquisa, Almeida et al. (2012) estudaram os limites da estabilidade aeroelástica de painéis compósitos aeronáuticos curvos sujeitos a efeitos de enrijecimento causados por atuadores piezelétricos. Os autores concluíram que um importante aumento da rigidez aeroelástica pode ser atingida através desta técnica de controle ativo de vibrações. Além disso, é possível controlar a velocidade e a frequência de ocorrência de *flutter*. Prakash e Ganapathi (2006) avaliaram os efeitos térmicos nas características do *flutter* de painéis FGM. Sohn e Kim (2009) também pesquisaram os efeitos térmicos nas características do *flutter* de painéis cerâmicos/metal (FGM). Entretanto, eles utilizaram a teoria de tensões de von-Karman para considerar os efeitos de não-linearidades geométricas na modelagem do painel.

Kouchakzadeh, Rasekh e Haddadpour (2010) avaliaram o problema de aeroelasticidade de uma placa laminada compósita submetida a escoamento supersônico através da Teoria



do Pistão linear. Os autores fizeram uso da teoria de von-Karman de tensões não-lineares para a modelagem da placa no intuito de se determinar o ciclo limite do sistema. Foram avaliados os efeitos de tensões internas ao plano do painel, diferencial de pressão estática, orientação de fibras e amortecimento aerodinâmico. Pegado (2003) estudou a instabilidade aeroelástica de painéis em fluxos supersônicos inserindo não-linearidades estruturais e aerodinâmicas em seu modelo através do método da perturbação. Zhao and Cao (2013) investigaram a influência do enrijecimento de painéis compósitos pela aplicação de barras chatas fixadas à superfície do painel. Sohn e Kim (2009) e Prakash e Ganapathi (2006) pesquisaram as características do flutter supersônico de painéis levando em consideração os efeitos térmicos no mesmo.

Muitos são os trabalhos destinados ao estudo de modelos de placas compósitas lineares e não-lineares e também para verificar a influência de parâmetros estruturais nas características do *flutter*. Entretanto, escassos são os trabalhos voltados para o tratamento passivo de vibrações visando tratar o problema aeroelástico de painéis aeronáuticos. Shin, Oh et al. (2006) realizaram a análise de *flutter* em painéis cilíndricos compósitos introduzindo amortecimento estrutural pela aplicação de camadas viscoelásticas. A modelagem do comportamento dinâmico do material viscoelástico foi feita neste trabalho utilizando as equações analíticas de Drake & Soovere (1984). A introdução de propriedades viscoelásticas em modelos de elementos finitos fazem com que o mesmo se torne mais complicado, uma vez que as matrizes se tornam complexas, dificultando a solução de problema de autovalores. A forte dependência das condições operacionais e ambientais como frequência da excitação, temperatura, auto-aquecimento, umidade, pré-carga estática são os fatores que determinarão a complexidade do modelo.

## **1.2. Principais técnicas de controle passivo de vibrações**

Um dos principais objetivos deste trabalho é o emprego de material viscoelástico como técnica de controle passivo de vibrações para retardar o ponto de ocorrência do fenômeno de *flutter* em placas retangulares finas. Portanto, uma breve introdução é feita sobre as principais técnicas de aplicação deste material para mitigar ruídos e vibrações de sistemas dinâmicos:

1. Camadas superficiais (tratamento contínuo): Camadas viscoelásticas são aplicadas sobre a superfície da estrutura submetida a um carregamento dinâmico. Este tipo de técnica pode ser classificado em dois grupos distintos, dependendo de sua aplicação e funcionamento.

- Camada livre – Nesta configuração, a camada de material viscoelástico é colada ou pulverizada através de um “*spray*” sobre um dos lados da estrutura. Quando o carregamento dinâmico é aplicado ao conjunto, tensões normais de tração e compressão são geradas no material viscoelástico resultando na dissipação de energia através do efeito histerético do material. A Figura 1.2 mostra a importância da técnica no setor industrial automotivo, onde são aplicadas mantas asfálticas no teto de veículos monoblocos para redução de ruídos gerados por harmônicos do motor.



Figura 1.2 – Aplicação de mantas asfálticas nos tetos de carrocerias. Figura adaptada e obtida do site do fabricante, [www.citroen.com.br](http://www.citroen.com.br).

- Camada restringida – Vastas são as aplicações desta técnica nos setores aeronáutico e aeroespacial. Posicionando uma camada de material viscoelástico entre duas camadas de material elástico, uma sendo a própria estrutura e a outra denominada de camada restringente. A estrutura gerada é do tipo sanduíche, na qual a camada viscoelástica, possui espessura que pode variar de 0.1 mm a 1 mm dependendo da aplicação com vistas ao peso acrescentado à estrutura-base. A dissipação de energia é intensificada devido à introdução de tensões cisalhantes pela camada restringente.

A Figura 1.3, mostra esquematicamente como é feita a aplicação das camadas superficiais nos dois sistemas.

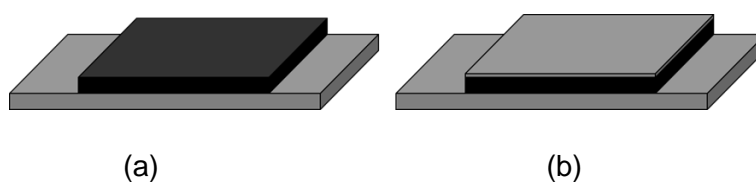


Figura 1.3 – Esquema da montagem das técnicas de camada livre (a) e camada restringida (b).

2. Sistemas discretos, posicionados em pontos estrategicamente selecionados da estrutura. Podem ser classificados como:

- Absorvedores dinâmicos viscoelásticos – Similares aos absorvedores clássicos de vibração. Constituído de um elemento viscoelástico e uma massa sobre o mesmo, onde o absorvedor é posicionado em um ponto crítico da estrutura em que se deseja reduzir os níveis vibratórios. Logo, a antirressonância do absorvedor age de modo a cancelar a ressonância da estrutura, resultando em níveis de vibração atenuados da estrutura acoplada. A Figura 1.4 esquematiza o absorvedor dinâmico de vibrações e seu comportamento dinâmico.

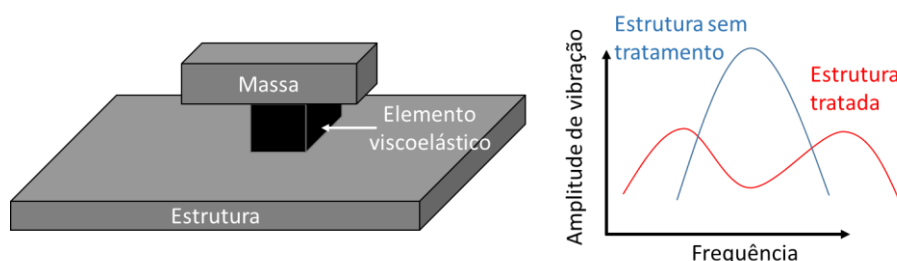


Figura 1.4 – Elemento discreto para tratamento passivo de vibrações similar ao absorvedor dinâmico de vibrações. Figura adaptada de Lima, Rade e Bouhaddi (2007)

Após uma avaliação dos principais métodos de tratamento passivo de vibração existentes, a técnica de camadas superficiais restringidas é adotada para o controlar as instabilidades aeroelásticas de placas finas retangulares. Assim, um modelo em elementos finitos de placa sanduíche composta por três camadas é proposto.

A aplicação de técnicas de amortecimento passivo gerado por materiais viscoelásticos no intuito de atenuar vibrações é um tema importante da Engenharia Mecânica. Vários pesquisadores têm proposto modelos matemáticos bem adaptados para serem combinados

com a técnica de elementos finitos permitindo a modelagem numérico-computacional de diversos sistemas complexos de engenharia como robôs, automóveis, aeronaves, estruturas espaciais e edifícios no intuito de reduzir os níveis indesejáveis de ruído e vibração. Uma importante fonte de informação sobre os principais modelos, suas aplicações e limitações podem ser encontradas nos trabalhos de Nashif, Jones e Handerson (1985) e Mead (1998).

Dentre os modelos matemáticos mais importantes para representar o comportamento dinâmico de materiais viscoelásticos, merece destaque o Modelo de Derivadas Fracionárias (MDF), o qual amplia o modelo linear clássico pela inclusão de derivadas temporais de ordem fracionária (Bagley & Torvik, 1983). Nos trabalhos apresentados por Bagley e Torvik, o modelo MDF foi aplicado a barras finas e vigas, onde análises de problemas de autovalores complexos e respostas transientes foram realizadas através de simulações numéricas.

Um segundo modelo, baseado no Campo de Deslocamentos Anelásticos (*ADF – Anelastic Displacement Fields*) foi sugerido por Lesieutre e Bianchini (1995). A ideia foi considerar o campo de deslocamento generalizado (deslocamentos e rotações) como sendo composto por duas partes: uma que leva em consideração o comportamento anelástico associado aos efeitos de dissipação do material viscoelástico. E outra parte, que leva em conta a evolução no tempo dos campos anelásticos e é representada por uma equação diferencial de primeira ordem.

O modelo desenvolvido por Golla e Hughes (1985) e McTavish e Hughes (1993), conhecido como GHM (Golla-Hudges-McTavish), é baseado na introdução de variáveis internas dissipativas. No domínio de Laplace o módulo do material é representado por uma série de frações parciais com termos similares a uma equação de função de transferência de um sistema de um grau de liberdade com amortecimento viscoso e por isso são denominados de mini-osciladores. É observado que a inclusão destas coordenadas dissipativas implica na criação de um sistema acoplado aumentado, no qual o número total de graus de liberdade aumenta consideravelmente. Isto faz com que o custo computacional para a obtenção das respostas dinâmicas do sistema amortecido viscoelasticamente aumente consideravelmente.

Além dos modelos paramétricos citados anteriormente, outra maneira de se representar o comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos é o modelo proposto por Drake e Soveere (1984). Este método é baseado na teoria linear da viscoelasticidade e no conceito do módulo complexo combinado com os *Princípios da Superposição Frequência-Temperatura (PSFT)* e da *Correspondência Elástica-Viscoelástica (PCEV)* (Nashif, Jones, & Handerson, 1985). Ele estabelece uma equivalência entre os efeitos da frequência da excitação e da temperatura para uma larga classe de materiais viscoelásticos. Desta maneira, as

características viscoelásticas, como o módulo de armazenamento e o fator de perda para diferentes temperaturas podem ser relacionadas através de deslocamentos nos valores reais de frequência de excitação. Deste fato, surgem os conceitos de fator de deslocamento e frequência reduzida (de Lima, Rade, & Faria, Sensitivity Analysis of Frequency Response Functions of Composite Sandwich Plates Containing Viscoelastic Layers, 2009). Para efeito de comparação com o Modelo do Módulo Complexo modelado de acordo com as equações de Drake & Sooveere (Drake & Sooveere, 1984), será utilizado também neste trabalho o modelo GHM para a análise aeroelástica de placas contendo tratamento viscoelástico superficial.

Sistemas incorporando materiais viscoelásticos são apresentados por de Lima et al. (2010). Fazendo uso do método dos elementos finitos, os autores estudaram uma forma de redução de sistemas viscoelásticos utilizando o modelo analítico de Drake e Sooveere no intuito de simular estruturas mais complexas de engenharia. Friswell, Inman e Margaretha (1997) e Martin (Martin, 2011) implementaram uma nova estratégia numérica afim de facilitar o processo de ajuste de curvas do Modelo GHM (Golla-Hughes-McTavish). O trabalho consistiu em uma nova proposta da função do modelo, acrescida de um parâmetro. O novo modelo foi denominado de MGHM, ou, "*Modified GHM*".

A modelagem do comportamento dinâmico de materiais viscoelásticos em elementos finitos requer a solução de um problema não linear de autovalores complexos. Isto ocorre pelo fato de que estes materiais são simultaneamente dependentes da frequência de excitação e temperatura. Portanto, para obtenção da solução é proposto um método iterativo, o qual lineariza o problema. Isto é feito fixando um valor de temperatura e ajustando a rigidez dinâmica do material viscoelástico em função da velocidade do escoamento de ar sobre um lado da placa. Desta maneira, através da análise dos autovalores complexos o ponto de ocorrência de *flutter* é determinado de maneira similar ao método k ou V-g (Nam, Kim, & Weisshaar, 2001).

Além deste capítulo introdutório, este trabalho de mestrado é composto por um capítulo onde os métodos dos elementos finitos aplicado ao modelo de placa sanduiche contendo uma camada viscoelástica entre das camadas elásticas é desenvolvido e as equações do movimento são desenvolvidas de forma parametrizada, afim de diminuir os custos computacionais.

Em seguida, o terceiro capítulo contém uma breve introdução ao assunto da viscoelasticidade e as técnicas de desenvolvimento em elementos finitos dos modelos desenvolvidos por Drake e Sooveere (1984) e Golla e Huges (1985) e McTavish e Huges

(1993). Além disso, é descrito o processo de ajuste de curvas utilizado para determinar as propriedades do material viscoelástico segundo o método GHM.

O quarto capítulo se dá com uma introdução à aeroelasticidade de placas, onde a natureza física do problema proposto é descrita. São demonstrados os passos para o desenvolvimento em elementos finitos do carregamento aerodinâmico aplicado a placas finas através da Teoria do Pistão (Ashley & Zartarian, 1956).

O quinto capítulo contém todos os resultados das simulações numéricas obtidos através da teoria descrita ao longo desta dissertação. São mostradas todas as validações numéricas utilizadas para certificar o modelo desenvolvido, a comparação entre os dois modelos de material viscoelástico propostos e os efeitos dos parâmetros físicos mais influentes do sistema.

Finalmente, o texto se encerra com as conclusões e as perspectivas de trabalhos futuros.

## **CAPÍTULO II**

### **Modelagem por EF de uma Placa Sanduíche de Três Camadas Contendo Amortecimento Viscoelástico**

Neste capítulo, será apresentada a modelagem por elementos finitos (EF) de uma placa sanduíche composta por três camadas realizada com base nos desenvolvimentos originais de Khatua e Cheung (1973) e implementada por de Lima, Stoppa et al. (2006). Para tanto, são determinadas as matrizes de massa e rigidez das camadas elásticas segundo a teoria de placas de Kirchhoff e para a camada viscoelástica, a teoria de Mindlin é escolhida, uma vez que para esta será considerado o cisalhamento transversal. Além disso, será apresentada a parametrização das matrizes elementares visando separar os efeitos de flexão, membrana e cisalhamento de cada camada. Tal procedimento é adotado objetivando a construção sistemática e com custo computacional reduzido das matrizes globais da estrutura.

#### **2.1. Relações cinemáticas**

Nesta seção, a determinação das tensões cisalhantes decorrentes na camada viscoelástica é feita através de relações cinemáticas entre as camadas elásticas da placa sanduíche. Tomando um elemento finito de placa de três camadas conforme ilustrado na Figura 2.1, são adotadas as seguintes hipóteses: (i) os materiais envolvidos são isotrópicos e elasticamente lineares; (ii) as tensões na direção  $z$  são nulas para todas as camadas; (iii) as camadas elásticas (1) e (3) são modeladas de acordo com a teoria de placas de Kirchhoff;

(iv) para o núcleo viscoelástico, a teoria de Mindlin (1951) é adotada considerando o cisalhamento transversal; (v) as rotações  $\theta_x$  e  $\theta_y$  são iguais para as camadas elásticas e se diferem daquelas calculadas para a camada viscoelástica; (vi) o deslocamento transversal,  $w$ , é o mesmo para todas as camadas. O elemento contém quatro nós e sete graus de liberdade por nó. Os deslocamentos no plano da camada de base da placa nas direções  $x$  e  $y$  são representados por  $u_1$  e  $v_1$ , respectivamente, e os deslocamentos no plano da camada restrigente nas direções  $x$  e  $y$  são denotados por  $u_3$  e  $v_3$ , respectivamente. Os deslocamentos transversais,  $w$ , e as rotações das seções dos planos em torno dos eixos  $x$  e  $y$  são descritas por  $\theta_x$  e  $\theta_y$ , respectivamente. Condensando em um vetor todos os graus de liberdade a nível nodal, tem-se:  $\mathbf{u}_{(e)}(t) = [u_1, v_1, w, u_3, v_3, \theta_x, \theta_y]$ .

Vários autores utilizaram anteriormente este modelo obtendo boas correlações entre as respostas dinâmicas do modelo e as respectivas obtidas de ensaios experimentais (de Lima, Stoppa, & Rade, 2003).

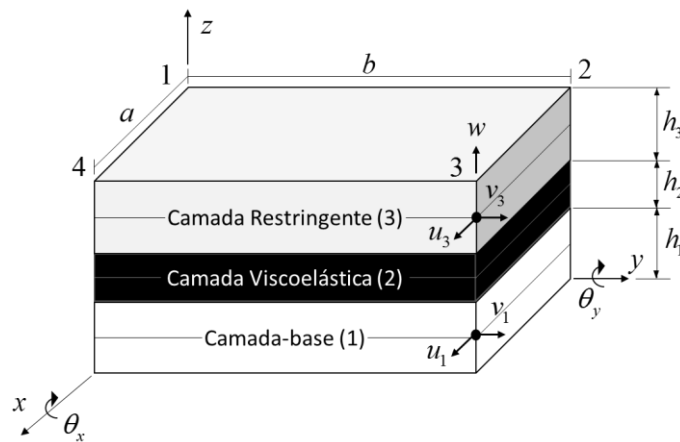


Figura 2.1 – Representação esquemática de um elemento tipo placa sanduíche contendo três camadas. Figura extraída de Lima et al. (2006).



A Figura 2.2 representa de forma esquemática a cinemática da deformação para os planos ZX e ZY.

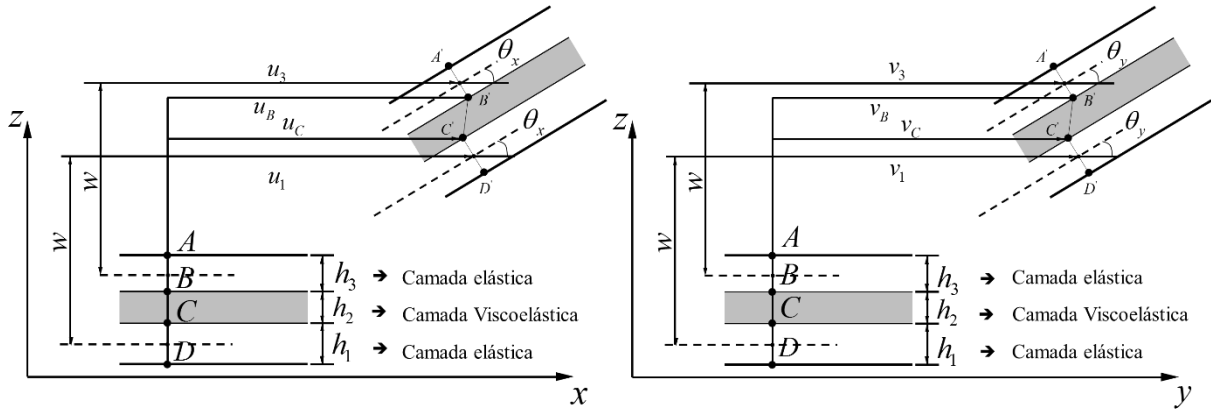


Figura 2.2 – Cinemática da deformação do elemento finito de placa sanduíche de três camadas. Figura adaptada de (de Lima A. , Stoppa, Rade, & Steffen Jr., 2006)

A deformação cisalhante na camada viscoelástica pode escrita como

$$\varepsilon_{xz} = \left( \frac{du}{dz} \right)_2 + \frac{dw}{dx} \quad (2.1)$$

onde

$$\left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_2 = \frac{u_B - u_C}{h_2} \quad (2.2)$$

e o índice 2 indica que a relação de deformação é relativa à camada viscoelástica. Os termos  $u_b$  e  $u_c$  são expressos da seguinte forma:

$$u_B = u_3 + d = u_3 + \frac{h_3}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.3)$$

$$u_c = u_1 - d = u_1 - \frac{h_1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.4)$$

Substituindo as Eqs.(2.3) e (2.4) na Eq.(2.2), tem-se

$$\left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_2 = \frac{1}{h_2} \left[ (u_3 - u_1) + \left( \frac{h_1 + h_3}{2} \right) \frac{dw}{dx} \right] + \frac{dw}{dx} \quad (2.5)$$

A Eq.(2.5) pode ser reescrita, fazendo  $d_2 = (h_1 + h_3)/2$ , assim tem-se:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_2 = \frac{d_2}{h_2} \left[ \frac{(u_3 - u_1)}{d_2} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (2.6)$$

Como mencionado anteriormente, as mesmas relações são válidas para o plano  $ZY$ .

$$\left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_2 = \frac{d_2}{h_2} \left[ \frac{(v_3 - v_1)}{d_2} + \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (2.7)$$

onde  $v_1$  e  $v_3$  são os deslocamentos médios longitudinais das camadas elásticas inferior e superior respectivamente na direção  $y$ .

Os deslocamentos médios longitudinais da camada viscoelástica podem ser determinados através dos deslocamentos médios dos pontos  $B'$  e  $C'$ :

$$u_2 = \frac{u_B + u_C}{2} = \frac{1}{2} \left[ (u_1 + u_3) + \left( \frac{h_3 - h_1}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (2.8)$$

$$v_2 = \frac{v_B + v_C}{2} = \frac{1}{2} \left[ (v_1 + v_3) + \left( \frac{h_3 - h_1}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (2.9)$$

## 2.2. Relações entre tensões e deformações

Nos desenvolvimentos que seguem, serão consideradas para as camadas elásticas somente as deformações de flexão e membrana no plano da placa. Além disso, para o núcleo viscoelástico, são consideradas as deformações cisalhantes transversais segundo a Teoria da Elasticidade Linear (Timoshenko & Goodier, 1951):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}; \quad (2.10)$$

No desenvolvimento que segue, é apresentado o campo de deformação para cada camada da placa sanduíche. Para tal, o índice ( $i$ ) faz referência à  $i$ -ésima camada elástica, e o parâmetro  $z_j$  é a distância na direção  $z$  entre a referência e o plano médio de cada camada.

Primeiramente, a Eq.(2.10) é desenvolvida para as camadas elásticas isotrópicas a partir de seus deslocamentos longitudinais médios nas direções  $x$ ,  $y$  e  $w$ , expressos por:

$$u^{(i)} = u_j - z_j \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_j \quad (2.11)$$

$$v^{(i)} = v_j - z_j \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_j \quad (2.12)$$

$$w^{(i)} = w_j \quad (2.13)$$

O índice  $j = 1,2,3,4$  faz referência aos nós de cada elemento. Substituindo as Eqs. (2.11), (2.12) e (2.13) na Eq.(2.10) as deformações relativas às camadas elásticas são determinadas:

$$\varepsilon_x^{(i)} = \frac{\partial u^{(i)}}{\partial x} = \frac{\partial u_j}{\partial x} - z_j \frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2} \quad (2.14)$$

$$\varepsilon_y^{(i)} = \frac{\partial v^{(i)}}{\partial y} = \frac{\partial v_j}{\partial y} - z_j \frac{\partial^2 w_j}{\partial y^2} \quad (2.15)$$

$$\gamma_{xy}^{(i)} = \frac{\partial u^{(i)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(i)}}{\partial x} = \frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial y} \quad (2.16)$$

Vale lembrar que as deformações cisalhantes são consideradas nulas, assim  $\gamma_{xz}^{(i)} = \gamma_{yz}^{(i)} = 0$ . Finalmente, as Eqs.(2.14), (2.15) e (2.16), podem ser reescritas na seguinte forma matricial:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i)} = \mathbf{E}^{(i)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} \quad (2.17)$$

onde  $\boldsymbol{\sigma}^{(i)}$ ,  $\mathbf{E}^{(i)}$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)}$  são, respectivamente, o campo de tensões, a matriz de elasticidade e a matriz das deformações relativas às camadas elásticas. Estas matrizes podem ser representadas da seguinte maneira:

$$\sigma^{(i)} = \begin{Bmatrix} \sigma_x^{(i)} \\ \sigma_y^{(i)} \\ \tau_{xy}^{(i)} \end{Bmatrix}; \quad E^{(i)} = \begin{bmatrix} \frac{E^{(i)}}{1-\nu^{(i)^2}} & \frac{E^{(i)}\nu^{(i)}}{1-\nu^{(i)^2}} & 0 \\ \frac{E^{(i)}\nu^{(i)}}{1-\nu^{(i)^2}} & \frac{E^{(i)}}{1-\nu^{(i)^2}} & 0 \\ 0 & 0 & G^{(i)} \end{bmatrix}; \quad \varepsilon^{(i)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(i)} \\ \varepsilon_y^{(i)} \\ \gamma_{xy}^{(i)} \end{Bmatrix} \quad (2.18)$$

Na Eq.(2.18) o termo  $\nu^{(i)}$  representa o coeficiente de Poisson do material de cada camada. Uma vez determinadas as relações tensão-deformação para as camadas elásticas, as relações da camada viscoelástica são estabelecidas em função de sua cinemática particular devido à camada restringente. Logo, o deslocamento longitudinal médio de um ponto qualquer na direção  $x$ , é dado por:

$$u^{(2)} = u_j + z_j \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_j \quad (2.19)$$

Substituindo a Eq. (2.5) na Eq. (2.19), obtêm-se a seguinte expressão:

$$u^{(2)} = u_2 + z_2 \left[ \frac{(u_3 - u_1)}{h_2} + \left( \frac{h_3 + h_1}{2h_2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] \quad (2.20)$$

De maneira análoga, para a direção  $y$ , o campo de deslocamento transversal vale:

$$v^{(2)} = v_2 + \frac{z_2}{h_2} \left[ (v_3 - v_1) + \left( \frac{h_3 + h_1}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] \quad (2.21)$$

Em seguida, substituindo os deslocamentos longitudinais  $u^{(2)}$  e  $v^{(2)}$  nas Eqs.(2.10), as deformações normais e cisalhantes da camada viscoelástica são determinadas.

$$\varepsilon_x^{(2)} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{z_2}{h_2} \left[ \left( \frac{\partial u_3 - \partial u_1}{\partial x} \right) + \left( \frac{h_3 + h_1}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] \quad (2.22)$$

$$\varepsilon_y^{(2)} = \frac{\partial v^{(2)}}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{z_2}{h_2} \left[ \left( \frac{\partial v_3 - \partial v_1}{\partial y} \right) + \left( \frac{h_3 + h_1}{2} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (2.23)$$

$$\gamma_{xy}^{(2)} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial v^{(2)}}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{z_2}{h_2} \left[ \left( \frac{\partial u_3 - \partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial v_3 - \partial v_1}{\partial x} \right) + (h_3 + h_1) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad (2.24)$$

$$\gamma_{xz}^{(2)} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial z_2} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{h_2} \left[ u_3 - u_1 + \left( \frac{h_3 + h_1}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} \right] + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.25)$$

$$\gamma_{yz}^{(2)} = \frac{\partial v^{(2)}}{\partial z_2} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{1}{h_2} \left[ v_3 - v_1 + \left( \frac{h_3 + h_1}{2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} \right] + \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.26)$$

Desta maneira, o campo de tensões da camada viscoelástica pode ser escrito matricialmente da seguinte maneira :

$$\boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \mathbf{E}^{(2)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} \quad (2.27)$$

onde o vetor das tensões  $\boldsymbol{\sigma}^{(2)}$ , a matriz elástica  $\mathbf{E}^{(2)}$  e o vetor de deformações  $\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}$ , podem ser escritos da seguinte maneira:

$$\boldsymbol{\sigma}^{(2)} = \begin{Bmatrix} \sigma_x^{(2)} \\ \sigma_y^{(2)} \\ \tau_{xy}^{(2)} \\ \tau_{xz}^{(2)} \\ \tau_{yz}^{(2)} \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{(j)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(2)} \\ \varepsilon_y^{(2)} \\ \gamma_{xy}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \\ \gamma_{yz}^{(2)} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{E}^{(j)} = \begin{bmatrix} \frac{E^{(2)}}{1-\nu^{(2)^2}} & \frac{E^{(2)}\nu^{(2)}}{1-\nu^{(2)^2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E^{(2)}\nu^{(2)}}{1-\nu^{(2)^2}} & \frac{E^{(2)}}{1-\nu^{(2)^2}} & 0 & 0 & 0 \\ & & G^{(2)} & 0 & 0 \\ & & & G^{(2)} & 0 \\ sim & & & & G^{(2)} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

É importante salientar que neste caso, os módulos  $E^{(2)}$  e  $G^{(2)}$  são dependentes da frequência e temperatura. A forma como esta dependência é representada matematicamente é explicada no capítulo seguinte, através da representação do módulo complexo segundo as equações analíticas de Drake & Soveere (1984) e do modelo paramétrico GHM, desenvolvido por Golla e Hudges (1985) e McTavish e Hudges (1993).

### 2.3. Discretização por elementos finitos

A discretização por elementos finitos é feita com base na proposição de Khatua e Cheung (1973), a qual também foi desenvolvida por Lima et al (2007). Um elemento retangular de três camadas de dimensões:  $x = a$  e  $y = b$ ; contendo quatro nós em suas extremidades e sete graus de liberdade por nó é adotado (ver Figura 2.1). Para a aproximação dos campos de deslocamentos longitudinais  $u$  e  $v$  no plano da placa, funções de interpolação lineares são utilizadas. No caso do deslocamento transversal,  $w$ , funções de interpolação cúbica contendo doze termos é empregada. As rotações em torno dos eixos  $x$  e  $y$  são descritas, respectivamente, pelas derivadas parciais  $\theta_x = \partial w / \partial x$  e  $\theta_y = \partial w / \partial y$ . Desta maneira, o vetor contendo todos os graus de liberdade do elemento pode escrito como segue:

$$\boldsymbol{\delta}_j = [u_{1j} \quad v_{1j} \quad u_{3j} \quad v_{3j} \quad w_j \quad \theta_{xj} \quad \theta_{yj}]^T \text{ para } j = 1, \dots, 4 \quad (2.29)$$

Reescrevendo a Eq.(2.29) ou a nível elementar da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\delta} = [\boldsymbol{\delta}_1 \quad \boldsymbol{\delta}_2 \quad \boldsymbol{\delta}_3 \quad \boldsymbol{\delta}_4]^T \quad (2.30)$$

onde os deslocamentos longitudinais nas direções  $x$  e  $y$ , são interpolados por funções lineares e os deslocamentos transversais por funções cúbicas, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \\ v_1 &= a_5 + a_6x + a_7y + a_8xy \\ u_3 &= a_9 + a_{10}x + a_{11}y + a_{12}xy \\ v_3 &= a_{13} + a_{14}x + a_{15}y + a_{16}xy \\ w &= b_1 + b_2x + b_3y + b_4x^2 + b_5xy + b_6y^2 + b_7x^3 + b_8x^2y + b_9xy^2 + b_{10}y^3 + b_{11}x^3y + b_{12}xy^3 \end{aligned} \quad (2.31)$$

O campo de deslocamentos transversais e longitudinais no interior do elemento é interpolado segundo as equações que seguem:

$$\Delta(x, y) = N(x, y) \boldsymbol{\delta} \quad \text{para } 0 \leq x \leq a; \quad 0 \leq y \leq b; \quad (2.32)$$

onde  $\Delta(x, y) = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w \quad \theta_x \quad \theta_y]$  e a matriz de funções de interpolação é representada

por:  $N(x, y) = [N_{u_1} \quad N_{v_1} \quad N_{u_3} \quad N_{v_3} \quad N_w \quad N_{\theta_x} \quad N_{\theta_y}]^T$ . Os termos da matriz  $N(x, y)$  são definidos como se segue:

$$\begin{aligned} N_{u_1} &= [N_{11} \quad \mathbf{0}_6 \quad N_{12} \quad \mathbf{0}_6 \quad N_{13} \quad \mathbf{0}_6 \quad N_{14} \quad \mathbf{0}_6], & N_{v_1} &= [0_1 \quad N_{11} \quad \mathbf{0}_6 \quad N_{12} \quad \mathbf{0}_6 \quad N_{13} \quad \mathbf{0}_6 \quad N_{14} \quad \mathbf{0}_5], \\ N_{u_3} &= [\mathbf{0}_2 \quad N_{11} \quad \mathbf{0}_6 \quad N_{12} \quad \mathbf{0}_6 \quad N_{13} \quad \mathbf{0}_6 \quad N_{14} \quad \mathbf{0}_4], & N_{v_3} &= [\mathbf{0}_3 \quad N_{11} \quad \mathbf{0}_6 \quad N_{12} \quad \mathbf{0}_6 \quad N_{13} \quad \mathbf{0}_6 \quad N_{14} \quad \mathbf{0}_3], \\ N_w &= [\mathbf{0}_4 \quad N_{1w} \quad N_{1\theta_x} \quad N_{1\theta_y} \quad \mathbf{0}_4 \quad N_{2w} \quad N_{2\theta_x} \quad N_{2\theta_y} \quad \mathbf{0}_4 \quad N_{3w} \quad N_{3\theta_x} \quad N_{3\theta_y} \quad \mathbf{0}_4 \quad N_{4w} \quad N_{4\theta_x} \quad N_{4\theta_y}], \\ N_{\theta_x} &= [\mathbf{0}_4 \quad N_{1w}^x \quad N_{1\theta_x}^x \quad N_{1\theta_y}^x \quad \mathbf{0}_4 \quad N_{2w}^x \quad N_{2\theta_x}^x \quad N_{2\theta_y}^x \quad \mathbf{0}_4 \quad N_{3w}^x \quad N_{3\theta_x}^x \quad N_{3\theta_y}^x \quad \mathbf{0}_4 \quad N_{4w}^x \quad N_{4\theta_x}^x \quad N_{4\theta_y}^x], \end{aligned}$$



$$N_{\theta_y} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_4 & N_{1w}^y & N_{1\theta_x}^y & N_{1\theta_y}^y & \mathbf{0}_4 & N_{2w}^y & N_{2\theta_x}^y & N_{2\theta_y}^y & \mathbf{0}_4 & N_{3w}^y & N_{3\theta_x}^y & N_{3\theta_y}^y & \mathbf{0}_4 & N_{4w}^y & N_{4\theta_x}^y & N_{4\theta_y}^y \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{\delta} = \left\{ \begin{array}{cccccccccccccccc} u_1^1 & v_1^1 & u_3^1 & v_3^1 & w^1 & \theta_x^1 & \theta_y^1 & u_1^2 & v_1^2 & u_3^2 & v_3^2 & w^2 & \theta_x^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & u_1^3 & v_1^3 & u_3^3 & v_3^3 & w^3 & \theta_x^3 & \theta_y^3 & u_1^4 & v_1^4 & u_3^4 & v_3^4 & w^4 & \theta_x^4 & \theta_y^4 \end{array} \right\}, \text{ e os termos}$$

$N_{1i}$ ,  $N_{1w}$ ,  $N_{1\theta_x}$ ,  $N_{1\theta_y}$ ,  $N_{2i}^x$ ,  $N_{2i}^y$ ,  $N_{2\theta_x}^x$ ,  $N_{2\theta_y}^x$ ,  $N_{2\theta_x}^y$  e  $N_{2\theta_y}^y$  para  $i = 1, \dots, 4$  são apresentados com maiores detalhes no ANEXO A.

A Figura 2.3 mostra a sequência dos nós adotada no elemento para determinação dos intervalos de integração das funções de interpolação. No esquema *a* e *b* são, respectivamente, os comprimentos nas direções *x* e *y* do elemento.

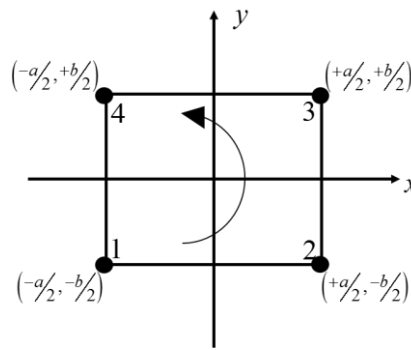


Figura 2.3 – Pontos de integração utilizados nas funções de interpolação.

Ao combinar as relações de deformação estabelecidas na Eq.(2.10) e a expressão do campo de deslocamento (2.32), o campo de deformações para o elemento é determinado:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y) = \mathbf{D}(x, y) \boldsymbol{\delta} \quad (2.33)$$

onde  $\mathbf{D}(x, y)$  é a matriz dos operadores diferenciais, indicados na Eq. (2.10), aplicada à matriz de funções de forma  $\mathbf{N}(x, y)$ .

## 2.4. Obtenção das matrizes elementares de massa e rigidez

É conveniente formular as equações do movimento a partir das equações de Lagrange. Desta maneira, as energias cinéticas e potências elásticas da placa, bem como os trabalhos não conservativos associados ao carregamento aerodinâmico são determinados (Bismarck-Nasr, 1999), a partir da seguinte expressão:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (2.34)$$

onde,  $L = T - U$ , é o lagrangeano,  $T$ , é a energia cinética,  $U$ , é a energia potencial elástica da placa,  $Q_i$  é o carregamento aerodinâmico e  $q_i$  são as coordenadas generalizadas do sistema.

A energia de deformação total é calculada através da soma das parcelas das energias de deformação de cada camada da placa sanduíche da seguinte maneira:

$$U = \sum_{k=1}^3 U^{(k)}, \text{ para } k = 1, 2, 3. \quad (2.35)$$

onde o índice  $k$  refere-se à camada. Logo, a energia de deformação elástica de cada camada é expressa da seguinte maneira

$$U^{(k)} = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^{(k)T} \mathbf{E}^{(K)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(K)} dV \quad (2.36)$$

Ao introduzir a Eq.(2.33) na Eq.(2.36) efetua-se a integral para a obtenção das matrizes de rigidez elementares:

$$\mathbf{U}^{(k)} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T \left( \int_V \mathbf{D}^{(k)T} \mathbf{E}^{(K)} \mathbf{D}^{(K)} dV \right) \boldsymbol{\delta} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{K}^{(K)} \boldsymbol{\delta} \quad (2.37)$$

onde  $\mathbf{K}^{(k)} = \int_V \mathbf{D}^{(k)T} \mathbf{E}^{(K)} \mathbf{D}^{(K)} dV$  corresponde à parcela de rigidez respectiva a  $k$  –ésima camada da placa, onde  $k = 1, 2, 3$ . Após algumas manipulações matemáticas (ver detalhes no ANEXO A), as matrizes de rigidez elementar são calculadas. Os índices  $k = 1, 3$  fazem referência às camadas elásticas do elemento. O índice sobrescrito  $(e)$  faz referência à quantidade elementar e o índice subscrito  $e$ , faz referência à propriedade elástica. Desta maneira, a matriz de rigidez elástica elementar pode ser escrita da seguinte forma:

$$\mathbf{K}_e^{(e)} = E^{(k)} h^{(k)} \mathbf{K}_{ff}^{(k)} + \frac{E^{(k)} h^{(k)^2}}{2} \mathbf{K}_{fm}^{(k)} + \frac{E^{(k)} h^{(k)^3}}{3} \mathbf{K}_{mm}^{(k)} \text{ para } k = 1, 3 \quad (2.38)$$

onde  $\mathbf{K}_{ff}^{(k)} = \int \int_{y \ x} \mathbf{D}_{ff}^{(k)} dx dy$ ,  $\mathbf{K}_{fm}^{(k)} = \int \int_{y \ x} \mathbf{D}_{fm}^{(k)} dx dy$ ,  $\mathbf{K}_{mm}^{(k)} = \int \int_{y \ x} \mathbf{D}_{mm}^{(k)} dx dy$  representam as parcelas de rigidez devido aos efeitos de flexão pura, acoplamento flexão-membrana e membrana pura. Já a matriz de rigidez elementar da camada viscoelástica ( $k = 2$ ) apresenta outros efeitos, além de flexão e membrana, pelo fato de as deformações cisalhantes serem consideradas.

$$\mathbf{K}^{(2)} = \mathbf{K}_{mm}^{(2)} + \mathbf{K}_{ff}^{(2)} + \mathbf{K}_{cc}^{(2)} + 2\mathbf{K}_{mf}^{(2)} + 2\mathbf{K}_{mc}^{(2)} + 2\mathbf{K}_{cf}^{(2)} = \bar{\mathbf{K}}_v, \quad (2.39)$$

onde  $\mathbf{K}_{mm}^{(2)} = \int_V \mathbf{D}_m^{(2)T} \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{D}_m^{(2)} dV$ ,  $\mathbf{K}_{ff}^{(2)} = \int_V \mathbf{D}_f^{(2)T} \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{D}_f^{(2)} dV$ ,  $\mathbf{K}_{cc}^{(2)} = \int_V \mathbf{D}_c^{(2)T} \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{D}_c^{(2)} dV$ ,  $\mathbf{K}_{mf}^{(2)} = \int_V \mathbf{D}_m^{(2)T} \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{D}_f^{(2)} dV$ ,  $\mathbf{K}_{mc}^{(2)} = \int_V \mathbf{D}_m^{(2)T} \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{D}_c^{(2)} dV$  e  $\mathbf{K}_{fc}^{(2)} = \int_V \mathbf{D}_f^{(2)T} \mathbf{E}^{(2)} \mathbf{D}_c^{(2)} dV$ , são, respectivamente, as parcelas de rigidez devido aos efeitos puramente de membrana, flexão e cisalhamento, além dos acoplamentos flexão-membrana, membrana-flexão e flexão-cisalhamento.

A matriz elementar,  $\bar{\mathbf{K}}_v$ , é definida de tal forma que as propriedades do material viscoelástico são mantidas fatoradas dos coeficientes da mesma. Este processo é realizado

através do *Princípio da Correspondência Elástica-Viscoelástica (PCEV)*, o qual permite supor que a subestrutura viscoelástica possui propriedades puramente elásticas, a priori (de Lima, Stoppa, & Rade, 2003). Desta maneira, a seguinte relação pode ser escrita

$$\mathbf{K}_v(\omega, T) = G(\omega, T) \bar{\mathbf{K}}_v \quad (2.40)$$

onde  $G(\omega, T)$ , é o módulo de cisalhamento do material viscoelástico, o qual será modelizado e introduzido no modelo de elementos finitos posteriormente.

Finalmente, a rigidez elementar total pode ser definida como sendo a soma algébrica das parcelas relativas à cada uma das três camadas do elemento de placa sanduíche:

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{K}_e^{(1)} + \mathbf{K}_v(\omega, T) + \mathbf{K}_e^{(3)} = \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v(\omega, T) \quad (2.41)$$

Em seguida, a matriz de massa elementar é determinada considerando as energias cinéticas de cada camada do elemento de placa sanduíche

$$\mathbf{T}^{(e)} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{T}^{(k)} \quad \text{para } k = 1, 2, 3. \quad (2.42)$$

onde,

$$\mathbf{T}^{(k)} = \frac{\rho^{(k)}}{2} \int_V \left( \dot{\mathbf{u}}^{(k)T} \dot{\mathbf{u}}^{(k)} + \dot{\mathbf{v}}^{(k)T} \dot{\mathbf{v}}^{(k)} + \dot{\mathbf{w}}^{(k)T} \dot{\mathbf{w}}^{(k)} \right) dV \quad (2.43)$$

Na Eq. (2.43), os termos  $\rho^{(k)}$ , representam as densidades relativas à cada camada do elemento,  $\dot{\mathbf{u}}^{(k)}$ ,  $\dot{\mathbf{v}}^{(k)}$  e  $\dot{\mathbf{w}}^{(k)}$  são os campos de velocidade nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ . As energias

cinéticas podem ainda serem escritas fatorando-se as espessuras,  $h^{(k)}$ , obtendo assim a seguinte expressão.

$$\mathbf{T}^{(K)} = \frac{\rho^{(k)} h^{(k)}}{2} \left( \int_A \dot{\mathbf{u}}^{(k)T} \dot{\mathbf{u}}^{(k)} dA + \int_A \dot{\mathbf{v}}^{(k)T} \dot{\mathbf{v}}^{(k)} dA + \int_A \dot{\mathbf{w}}^{(k)T} \dot{\mathbf{w}}^{(k)} dA \right) \quad (2.44)$$

Substituindo na Eq. (2.44), as respectivas funções de forma, a mesma pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{T}^{(K)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \dot{\boldsymbol{\delta}}^T \left( \rho^{(k)} h^{(k)} \int_A \left( \mathbf{N}_u^{(k)T} \mathbf{N}_u^{(k)} + \mathbf{N}_v^{(k)T} \mathbf{N}_v^{(k)} + \mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w \right) dA \right) \dot{\boldsymbol{\delta}} \quad (2.45)$$

$$\mathbf{T}^{(K)} = \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{\delta}}^T \mathbf{M}^{(k)} \dot{\boldsymbol{\delta}} \quad (2.46)$$

onde  $\mathbf{M}^{(k)} = \rho^{(k)} h^{(k)} \int_A \left( \mathbf{N}_u^{(k)T} \mathbf{N}_u^{(k)} + \mathbf{N}_v^{(k)T} \mathbf{N}_v^{(k)} + \mathbf{N}_w^T \mathbf{N}_w \right) dA$  representa a contribuição da massa

da  $k$  –ésima camada do elemento,  $\mathbf{N}_u^{(k)}$ ,  $\mathbf{N}_v^{(k)}$ ,  $\mathbf{N}_w$  são as matrizes contendo as funções de interpolação. Desta maneira, a matriz de massa elementar é determinada pela soma das massas de todas as camadas do elemento da seguinte maneira:

$$\mathbf{M}^{(e)} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{M}^{(k)} \quad (2.47)$$

onde

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^{(1)} &= \rho^{(1)} h^{(1)} \int_A \left( \mathbf{N}_u^{(1)T} \mathbf{N}_u^{(1)} + \mathbf{N}_v^{(1)T} \mathbf{N}_v^{(1)} + \mathbf{N}_w^{(1)T} \mathbf{N}_w^{(1)} \right) dA, \\ \mathbf{M}^{(2)} &= \rho^{(2)} h^{(2)} \int_A \left( \mathbf{N}_u^{(2)T} \mathbf{N}_u^{(2)} + \mathbf{N}_v^{(2)T} \mathbf{N}_v^{(2)} + \mathbf{N}_w^{(2)T} \mathbf{N}_w^{(2)} \right) dA, \\ \mathbf{M}^{(3)} &= \rho^{(3)} h^{(3)} \int_A \left( \mathbf{N}_u^{(3)T} \mathbf{N}_u^{(3)} + \mathbf{N}_v^{(3)T} \mathbf{N}_v^{(3)} + \mathbf{N}_w^{(3)T} \mathbf{N}_w^{(3)} \right) dA.\end{aligned}$$

Finalmente, as matrizes de massa e rigidez a nível elementar podem ser transformadas para o nível global, quantidade indicada pelo sobrescrito,  $g$ , através de uma transformação linear realizada pela *matriz de conectividade*  $\mathbf{L}_e$  (Assan, 2003), como mostrado a seguir:

$$\mathbf{M}_g = \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{L}_e^T \mathbf{M}^{(e)} \mathbf{L}_e \quad (2.48)$$

$$\mathbf{K}_g(\omega, T) = \sum_{e=1}^{ne} \mathbf{L}_e^T \mathbf{K}^{(e)}(\omega, T) \mathbf{L}_e \quad (2.49)$$

Assim a equação do movimento governante da placa sanduíche é determinada:

$$\mathbf{M}_g \ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{K}_g(\omega, T) \mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (2.50)$$

onde  $\mathbf{K}_g(\omega, T) = \mathbf{K}_e + G(\omega, T) \bar{\mathbf{K}}_v$ . Admitindo uma solução harmônica do tipo  $x(t) = X e^{i\omega t}$ , um problema de autovalor pode ser determinado:

$$\left[ \mathbf{K}_e + G(\omega, T) \bar{\mathbf{K}}_v - \omega^2 \mathbf{M}_g \right] X = 0 \quad (2.51)$$

Maiores detalhes sobre a determinação das matrizes de massa e rigidez podem ser vistos no ANEXO A.

## CAPÍTULO III

### Modelagem do Comportamento Dinâmico de Materiais Viscoelásticos

Neste capítulo são apresentadas duas maneiras de se incorporar o comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos em modelos de elementos finitos. A primeira delas, através do módulo complexo e equações analíticas propostas por Drake e Soovere (1984), faz uso do *Princípio da Equivalência Elástica-Viscoelástica* e o do *Princípio da Superposição Frequência-Temperatura*; a segunda forma é o modelo de equações paramétricas desenvolvido por Golla e Hudges (1985) e McTavish e Hughes (1993) denominado de Modelo Paramétrico de Golla-Hudges-McTavish (GHM). Será também apresentado neste capítulo algumas técnicas a serem empregadas para a redução do custo computacional envolvido no tratamento das equações aumentadas do sistema viscoelástico via emprego do modelo GHM com vistas à análise de instabilidade aeroelástica de sistemas viscoelásticos.

#### 3.1. A viscoelasticidade linear

Os materiais poliméricos são formados por longas cadeias de carbono dispostas de tal forma que uma complexa rede molecular é formada, como pode ser visto na Figura 3.1. Tal disposição de moléculas é capaz de gerar amortecimento quando de um processo de deformação, uma vez que o estiramento e recuperação do material gera importante quantidade de calor devido ao atrito entre as cadeias de carbono.

Tal interação entre movimento molecular e temperatura possui forte dependência da temperatura e frequência de excitação (Nashif, Jones, & Handerson, 1985).

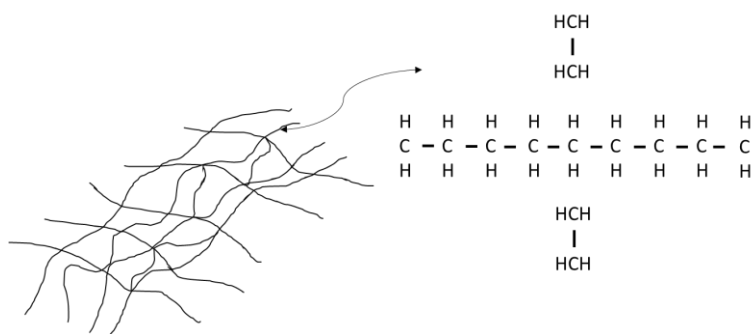


Figura 3.1 – Esquema de uma típica rede estrutural polimérica. Adaptado de Nashif et al. (1985).

Os materiais viscoelásticos são também particulares quanto à maneira de deformar frente a um carregamento mecânico. Materiais puramente elásticos, quando submetidos a um carregamento mecânico se deformam instantaneamente, e retomam sua forma original imediatamente após a remoção das forças. Já os materiais viscoelásticos, se deformam instantaneamente de maneira elástica, e em seguida assumem um comportamento viscoso e dependente do tempo, chamado de fluência. Em seguida, após a remoção do carregamento, entra no estado de relaxação representado por uma lenta capacidade de retornar a sua forma original. Os materiais viscosos não se deformam instantaneamente, a deformação é dependente do tempo, além de não retomarem sua forma original após a remoção do carregamento. Este comportamento é mostrado na Figura 3.2.



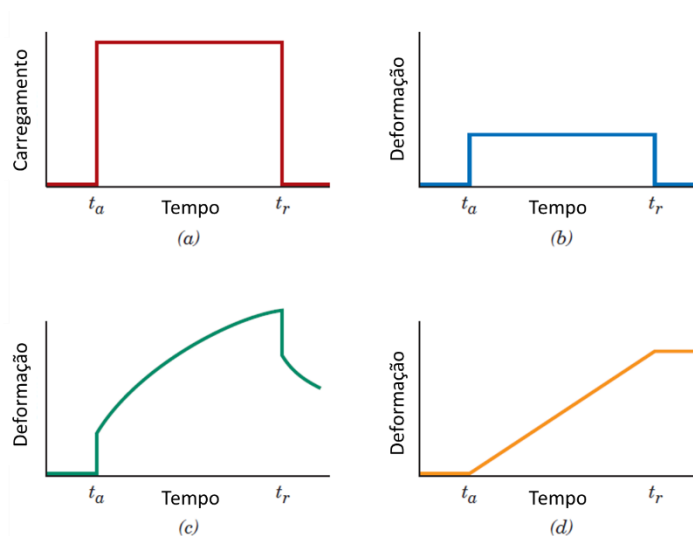


Figura 3.2 – (a) aplicação e remoção da carga de maneira instantânea; (b) deformação de um material elástico em resposta ao carregamento; (c) deformação de um material viscoelástico em resposta ao carregamento; (d) deformação de um material viscoso em resposta ao carregamento. Figurada adaptada de Callister e Rethwisch (2009)

Os polímeros são também muito versáteis quanto à sua fabricação, pois durante a manufatura é possível determinar qualidades específicas em função de sua aplicação, como por exemplo: propriedades amortecedoras, duração de vida, resistência à fluência, estabilidade térmica, além de outras propriedades desejáveis quando solicitado dinamicamente em uma larga banda de frequência e temperatura (de Lima, Rade, & Bouhaddi, Modelagem e Otimização Robusta de Sistemas Mecânicos em Presença de Amortecimento Viscoelástico, 2007).

### 3.2. Efeito de fatores ambientais e operacionais

A utilização correta de materiais viscoelásticos é uma tarefa complexa do ponto de vista matemático e prático, pois devido à simultânea dependência de fatores ambientais como temperatura e operacionais como frequência de excitação, é imprescindível a previsão correta de seu comportamento dinâmico.

Os polímeros amorfos possuem a característica de variar suas propriedades mecânicas de acordo com a temperatura. Em baixas temperaturas predomina-se um comportamento dito vítreo e o módulo de elasticidade assume um valor elevado, além de apresentar os menores

valores para o fator de amortecimento. À medida que se aumenta a temperatura do material, o comportamento vítreo evolui para um estado transitório entre este último e o comportamento de uma borracha, com valores decrescentes de módulo de elasticidade do material. Entretanto, é nesta região que o fator de amortecimento apresenta valor ótimo. Se a temperatura continuar a aumentar, o material se comportará como borracha e finalmente evoluirá para o comportamento viscoso de um fluido. Nas temperaturas intermediárias, por apresentar características dos dois extremos, o comportamento é chamado de viscoelástico (Callister & Rethwisch, 2009). A Figura 3.3, retrata este comportamento.

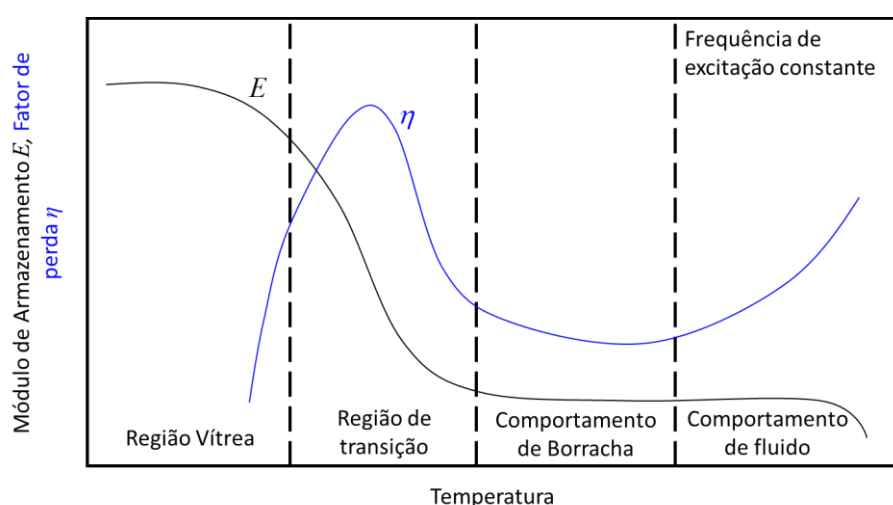


Figura 3.3 - Comportamento esquemático de um material viscoelástico variando em função do aumento de temperatura. Figura adaptada de Nashif et al. (1985).

Um exemplo de quão sensível é este comportamento pode ser visto na Figura 3.4, em que uma simulação numérica foi realizada para avaliar o comportamento dinâmico de uma placa de material compósito tratada superficialmente com material viscoelástico para uma larga banda de frequência para diversos valores de temperatura.

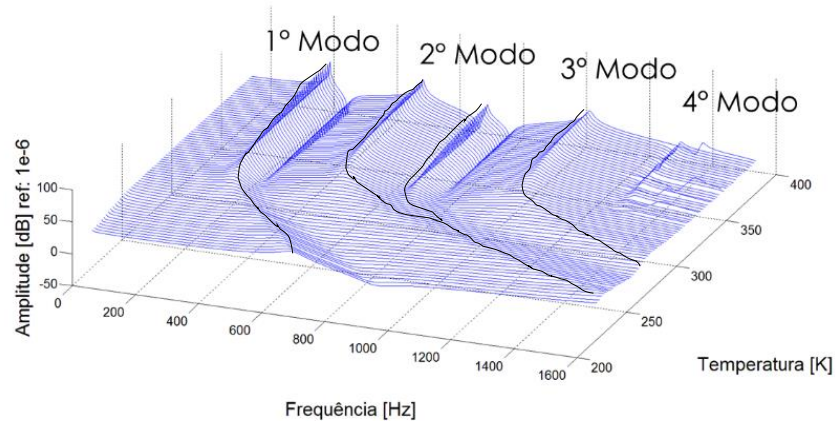


Figura 3.4 – Mapa do espectro de temperatura para uma placa de material compósito amortecida viscoelasticamente.

As linhas pretas evidenciam os picos de amplitudes para os quatro primeiros modos naturais da placa, mostrando que até  $300K$  ( $27^{\circ}C$ ), o material viscoelástico é muito eficiente, a ponto de deslocar significativamente os valores dos quatro picos. Entretanto seu comportamento é não-linear.

Portanto, durante a concepção de estruturas incorporando materiais viscoelásticos com o intuito de mitigar vibrações e ruídos, o uso de modelos matemáticos capazes de representar adequadamente a dependência em frequência e temperatura do comportamento desses materiais é importante.

### 3.3. Modelo do módulo complexo

Segundo a teoria da viscoelasticidade linear (Christensen, 1982), o módulo complexo de um material viscoelástico no domínio da frequência é expresso da seguinte maneira:

$$E(\omega, T) = E'(\omega, T) + iE''(\omega, T) = E'(\omega, T)[1 + \eta(\omega, T)] \quad (3.1)$$

onde  $E'(\omega, T)$  é o módulo de armazenamento, termo que representa fisicamente a rigidez do material,  $E''(\omega, T)$  é o módulo de perda, parte complexa do módulo e que é associada ao

amortecimento e  $\eta(\omega, T) = E'(\omega, T)/E''(\omega, T)$  é o fator de perda, termo que representa de fato o amortecimento do material.

Assumindo a hipótese de que o coeficiente de Poisson do material viscoelástico,  $\nu$ , independe da frequência e da temperatura (Christensen, 1982), e que o material viscoelástico é homogêneo e isotrópico, a seguinte relação entre o módulo de elasticidade longitudinal,  $E(\omega, T)$ , e o módulo de cisalhamento  $G(\omega, T)$  pode ser estabelecida:

$$G(\omega, T) = E(\omega, T)/2(1 + \nu) \quad (3.2)$$

Além disso, são empregados os *Princípios da Superposição Frequência-Temperatura* (PSFT) também conhecido como *Princípio de Williams, Landell e Ferry (WLF)* e o *Princípio da Correspondência Elástica Viscoelástica* (Nashif, Jones, & Handerson, 1985). O primeiro cria os conceitos de *fator de deslocamento*  $\alpha_T(T)$  e *frequência reduzida*,  $\omega_r = \alpha_T(T)\omega$ , onde  $\omega$  é a frequência circular ou frequência real de excitação. Tais conceitos permitirão determinar as propriedades mecânicas do material viscoelástico para qualquer valor de frequência e temperatura desejados. O segundo permite admitir que a subestrutura viscoelástica tenha propriedades puramente elásticas, possibilitando assim a fatoração do módulo elástico da matriz de rigidez viscoelástica. Isto facilita o processo de modelagem do comportamento dinâmico do material viscoelástico. Desta maneira o módulo de cisalhamento,  $G(\omega, T)$ , e o fator de perda,  $\eta(\omega, T)$ , tomam a seguinte forma:

$$\begin{aligned} G(\omega, T) &= G(\omega_r, T_0) = G(\alpha_T \omega, T_0) \\ \eta_G(\omega, T) &= \eta_G(\omega_r, T_0) = \eta_G(\alpha_T \omega, T_0) \end{aligned} \quad (3.3)$$

onde  $T$  é a temperatura atual do material viscoelástico e  $T_0$  é uma temperatura de referência, característica de cada material.

Para compreender a aplicação dos conceitos de fator de deslocamento e frequência reduzida, a Figura 3.5 mostra que uma vez determinados os valores de módulo de armazenamento e fator de perda para uma temperatura de referência de um material viscoelástico qualquer, é possível estender o intervalo de temperatura:  $T_{-1} < T_0 < T_1$ . O

processo é feito através de deslocamentos horizontais, no eixo das frequências, aplicados a cada uma das curvas, de tal maneira que somente uma curva contendo as informações de todas as temperaturas desejadas seja obtida. O deslocamento horizontal é determinado pelo parâmetro  $\alpha_T(T)$ .

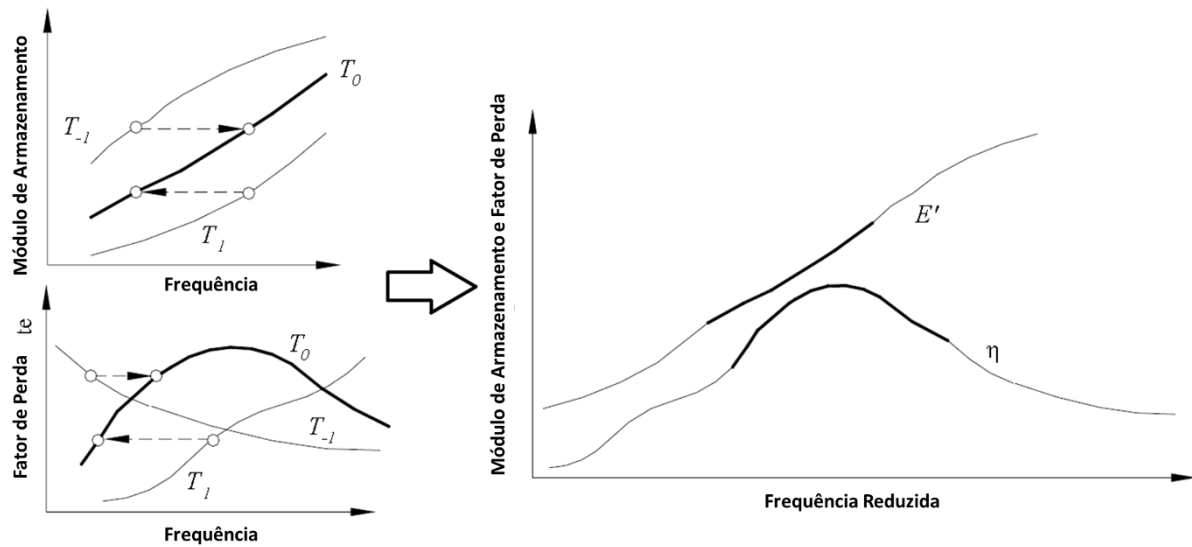


Figura 3.5 – Ilustração do Princípio da Superposição Frequência-Temperatura – PSFT (de Lima, da Silva, Rade, & Bouhaddi, 2010).

A esta curva mestre obtida, é dado o nome ábaco de nomograma. Cada temperatura corresponde a um fator de deslocamento,  $\alpha_T(T)$ , o qual define uma isoterma, representada por uma reta no plano  $(\omega_r, \omega)$ . Assim, para uma frequência de excitação  $\omega_i$  e uma temperatura  $T_i$ , a leitura do ábaco é feita da seguinte maneira, descritas na Figura 3.6:

- Traçar uma horizontal a partir do valor de frequência  $\omega_i$  até o ponto de cruzamento ( $P$ ) com uma isoterma;
- Leitura da abcissa do ponto  $P$ , a qual fornece o valor de frequência reduzida  $\omega_i \alpha_T(T_i)$ ;
- Leitura dos valores de  $E'$  e  $\eta$  sobre as curvas mestres em função de  $\omega_i \alpha_T(T_i)$ .

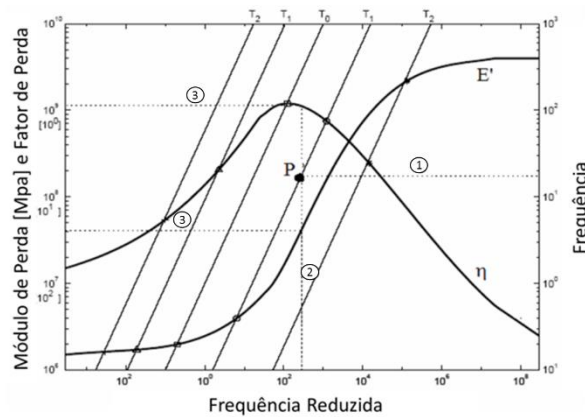


Figura 3.6 – Ilustração de um ábaco ou nomograma em frequência reduzida. Figurada adaptada da referência (de Lima, Rade, & Bouhaddi, Modelagem e Otimização Robusta de Sistemas Mecânicos em Presença de Amortecimento Viscoelástico, 2007).

### 3.3.1. Equações analíticas para o material ISD112 3M

A partir da seção anterior, é possível determinar as propriedades de um material viscoelástico e utilizá-las para a modelagem em elementos finitos do comportamento dinâmico do mesmo. Neste caso, foi utilizado o material utilizado é o ISD112™. A Figura 3.7 mostra como o Módulo de Armazenamento e o Fator de Perda variam em função da frequência reduzida  $\omega_r$ . É mostrado também como o fator de deslocamento,  $\alpha(T)$ , varia em função da temperatura. Nota-se que a temperatura de referência é determinada quando  $\alpha(T) = 0$ .

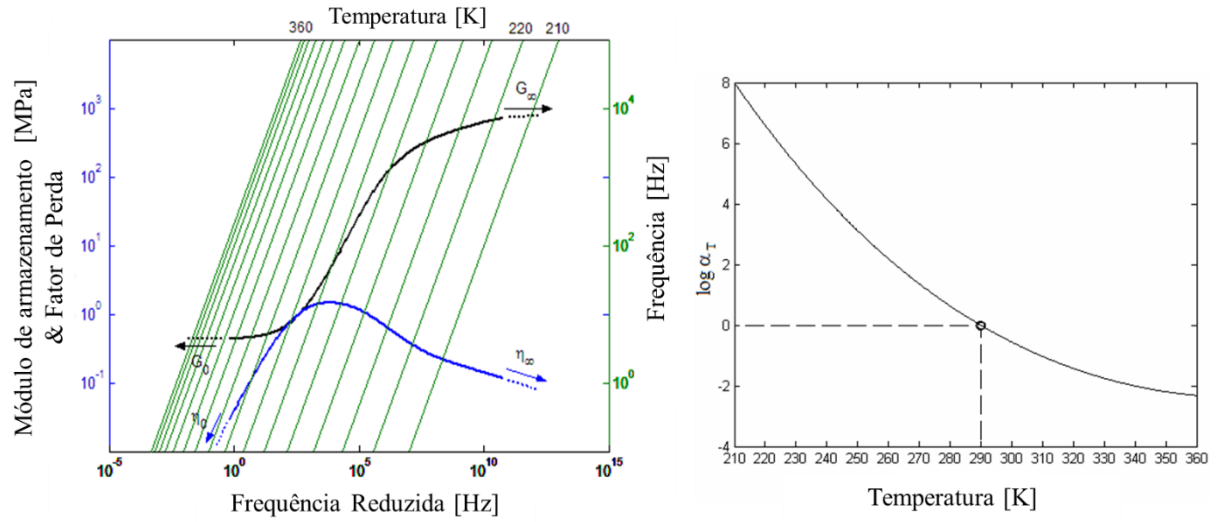


Figura 3.7 – Nomograma de frequência reduzida do material ISD112 3M® extraído da referência (de Lima, Rade, & Faria, Sensitivity Analysis of Frequency Response Functions of Composite Sandwich Plates Containing Viscoelastic Layers, 2009).

A função  $\alpha_T(T)$  pode ser obtida a partir de testes experimentais realizados em materiais viscoelásticos específicos. Neste contexto, foram adotadas as expressões analíticas, sugeridas por Drake e Soovere (1984), compostas de diversos parâmetros determinados empiricamente.

$$\log(\alpha_T) = a \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) + 2.303 \left( \frac{2a}{T_0} - b \right) \log_{10} \left( \frac{T}{T_0} \right) + \left( \frac{b}{T_0} - \frac{a}{T_0^2} - S_{AZ} \right) (T - T_0) \quad (3.4)$$

$$G(\omega_r) = B_1 + B_2 / \left( 1 + B_5 (i\omega_r/B_3)^{-B_6} + (i\omega_r/B_3)^{-B_4} \right) \quad (3.5)$$

onde cada parâmetro é mostrado na Tabela 3-1.

Tabela 3-1 - Parâmetros para o material 3M™ ISD112 (Drake &amp; Soovere, 1984).

Módulo Complexo – Eq. (3.4)					
$B_1$ [MPa]	$B_2$ [MPa]	$B_3$	$B_4$	$B_5$	$B_6$
0.4307	1200	1543000	0.6847	3.241	0.18
Fator de deslocamento – Eq. (3.5)					
$T_0$ [K]	$T_L$ [K]	$T_H$ [K]	$S_{AZ}$ [K] <sup>-1</sup>	$S_{AL}$ [K] <sup>-1</sup>	$S_{AH}$ [K] <sup>-1</sup>
290	210	360	0.05956	0.1474	0.009725
$a = (D_B C_C - C_B D_C)/D_E$			$b = (D_C C_A - C_C D_A)/D_E$		
$C_A = (1/T_L - 1/T_0)^2$		$C_B = (1/T_L - 1/T_0)$		$C_C = (S_{AL} - S_{AZ})$	
$D_A = (1/T_H - 1/T_0)^2$		$D_B = (1/T_H - 1/T_0)$		$D_C = (S_{AH} - S_{AZ})$	
$D_E = (D_B C_A - D_A C_B)$					

Foram utilizados para a construção do nomograma de frequência reduzida os seguintes intervalos de temperatura,  $210 \leq T \leq 360K$  e frequência  $1.0 \leq \omega \leq 10^6 Hz$ .

O nomograma de frequência reduzida permite determinar, para qualquer valor de temperatura e frequência de excitação, as propriedades mecânicas do material, como pode ser visto na Figura 3.8 e Figura 3.9, as quais mostram as superfícies geradas pelo módulo de armazenamento e fator de perda.

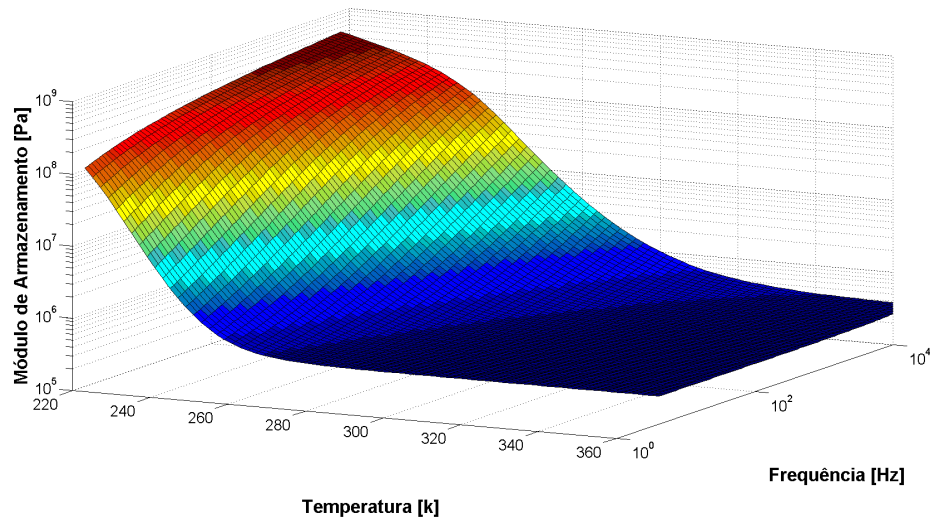


Figura 3.8 – Módulo de armazenamento do material ISD112 3M em função da temperatura e frequência.



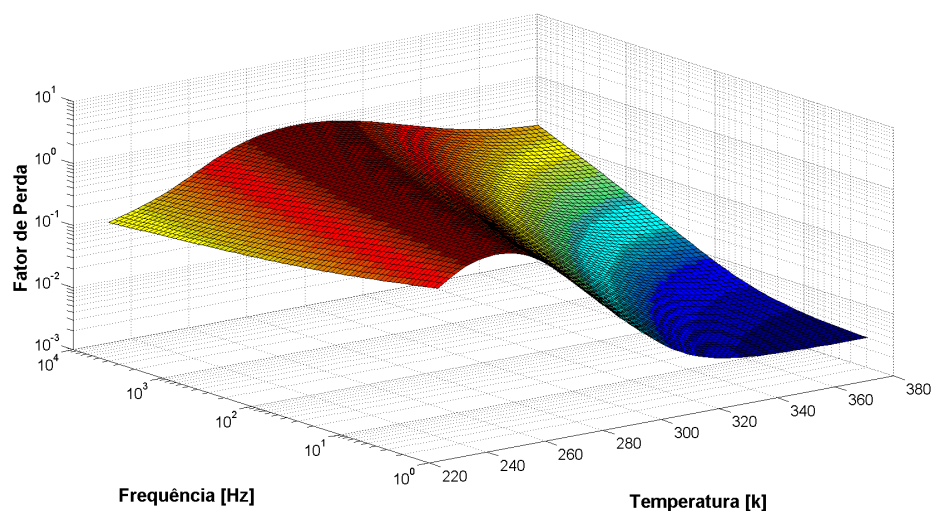


Figura 3.9 – Fator de perda do material ISD112 3M em função da temperatura e frequência.

Uma vez determinadas as propriedades do material viscoelástico,  $G(\omega, T)$ , estas são inseridas na equação do movimento, Eq.(2.50), fato que torna o problema de autovalor, descrito pela Eq. (2.51), não-linear devido à simultânea dependência da temperatura e frequência de excitação. Portanto, um método iterativo para a resolução do problema se faz necessário. Tal método, também utilizado por Meunier e Shinoi (2001), é proposto através de um diagrama de blocos conforme mostrado na Figura 3.10.

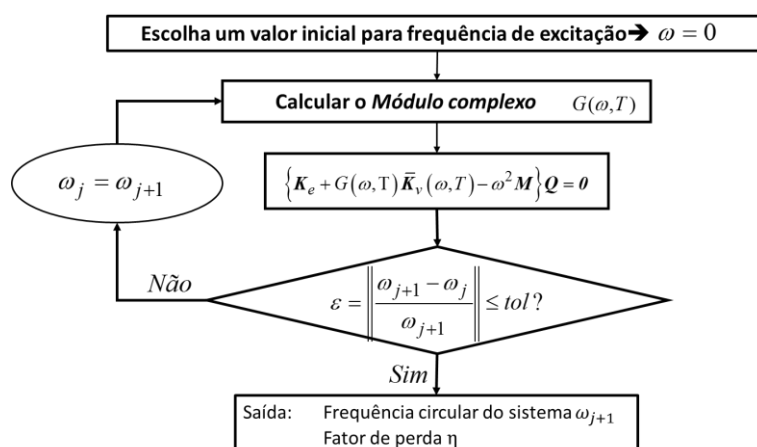


Figura 3.10 – Etapas para a solução do problema de autovalor não-linear de sistemas contendo amortecimento viscoelástico

No início do processo, um valor para a frequência de excitação  $\omega = 0$  é assumido. Em seguida, inicia-se o laço, onde o módulo complexo é calculado para esta frequência, a qual é um ponto particular das características do módulo complexo, denominado de módulo estático ou módulo a baixa frequência (de Lima, Rade, & Bouhaddi, Modelagem e Otimização Robusta de Sistemas Mecânicos em Presença de Amortecimento Viscoelástico, 2007), o qual não apresenta nenhum fator de perda. Em seguida, através das matrizes de massa e rigidez previamente calculadas, é estipulado o problema de autovalor que é finalmente resolvido, resultando nos valores de frequências naturais e modos de vibração. Um critério de parada é estabelecido baseado numa tolerância e um erro. O erro é determinado através da diferença entre a frequência de saída,  $\omega_{j+1}$ , e a frequência de entrada do laço,  $\omega_j$ . O laço continuará a ser executado até que o erro seja menor que a tolerância estabelecida arbitrariamente.

### 3.4. Modelo de Golla-Hudges-McTavish (GHM)

Representar o comportamento dinâmico de matérias viscoelásticos utilizando o método GHM é uma maneira bastante interessante e que utiliza também o conceito de módulo complexo e que pode ser utilizado para obter respostas transientes e/ou no domínio da frequência de sistemas viscoelásticos (Friswell, Inman, & Margaretha, 1997). Uma vantagem do método GHM é que leva à obtenção de matrizes de massa, amortecimento viscoso e rigidez aumentadas mas constantes, característica que faz com que o problema de autovalores seja resolvido de forma direta, assim evitando o processo iterativo como mostrado na seção anterior

Segundo os desenvolvimentos realizados por Golla e Hudges (1985) e McTavish e Hudges (1993), a função do módulo complexo de um material viscoelástico qualquer pode ser expressa segundo a forma:

$$G(s) = G_0 \left( 1 + \sum_{i=1}^{N_G} \alpha_i \frac{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s}{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2} \right) \quad (3.6)$$

Devido à similaridade entre cada termo da Eq.(3.6) e uma função de transferência de um sistema amortecido de um grau de liberdade (ver Figura 3.11), a função módulo pode ser interpretada como sendo constituída por uma série de  $N_G$  mini-osciladores (sistema massa-

mola-amortecedor) representados por três parâmetros positivos  $(\alpha_i, \omega_i, \zeta_i)$  mais um módulo estático,  $G_0$ , a serem determinados.

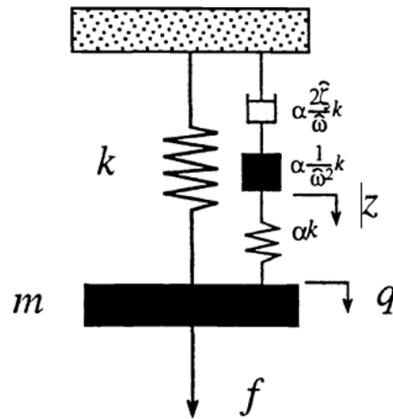


Figura 3.11 – Sistema de um grau de liberdade contendo um mini-oscilador. Figura adaptada da referência (Gibson, Smith, & McTavish, 1995).

Da Eq.(3.6), pode-se determinar o módulo em alta frequência, ou, módulo dinâmico como sendo:

$$G_{\infty} = G_0 \left( 1 + \sum_{i=1}^{N_G} \alpha_i \right) \quad (3.7)$$

Uma vez introduzidos os conceitos do método GHM, a equação do movimento pode se expressa da seguinte forma:

$$M\ddot{q}(t) + D\dot{q}(t) + K^* q(t) = f(t) \quad (3.8)$$

onde  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa,  $\mathbf{D}$  é a matriz de amortecimento viscoso e  $\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_e + G(\omega, T)\bar{\mathbf{K}}_v$  é a matriz de rigidez complexa. Os vetores  $\mathbf{q}(t)$  e  $\mathbf{f}(t)$  são, respectivamente, o campo de deslocamento e o carregamento externo.

Após aplicar a transformada de Laplace na Eq. (3.8) e substituir  $G(\omega, T)$  pela função do módulo dado pela equação (3.6), obtêm-se a seguinte equação do movimento:

$$\left[ s^2 \mathbf{M} + s \mathbf{D} + \mathbf{K}_e + G_0 \bar{\mathbf{K}}_v \left( 1 + \sum_{i=1}^{N_G} \alpha_i \frac{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s}{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2} \right) \right] \mathbf{Q} = \mathbf{F} \quad (3.9)$$

Uma série de coordenadas internas dissipativas  $\mathbf{Q}_i^G$  ( $i=1, \dots, N_G$ ) relacionadas com as coordenadas físicas são definidas de acordo com a expressão seguinte:

$$\mathbf{Q}_i^G = \frac{\omega_i^2}{s^2 + 2\zeta_i \omega_i s + \omega_i^2} \mathbf{Q} \quad (3.10)$$

Ao introduzir a Eq.(3.10) na Eq.(3.9) e após algumas manipulações matemáticas realiza-se a transformada inversa de Laplace, levando a Eq.(3.9) novamente para o domínio do tempo, porém, agora adaptada ao modelo GHM

$$\mathbf{M}_G \ddot{\mathbf{q}}_G(t) + \mathbf{D}_G \dot{\mathbf{q}}_G(t) + \mathbf{K}_G \mathbf{q}_G(t) = \mathbf{f}_G(t) \quad (3.11)$$

$$\text{onde } \mathbf{M}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\alpha_1}{\omega_1^2} \mathbf{K}_v^0 & \mathbf{0} & \vdots \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \frac{\alpha_{N_G}}{\omega_{N_G}^2} \mathbf{K}_v^0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{2\zeta_1 \alpha_1}{\omega_1} \mathbf{K}_v^0 & \mathbf{0} & \vdots \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \frac{2\zeta_{N_G} \alpha_{N_G}}{\omega_{N_G}} \mathbf{K}_v^0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_G = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v^\infty & -\alpha_1 \mathbf{K}_v^0 & \cdots & -\alpha_{N_G} \mathbf{K}_v^0 \\ -\alpha_{N_G} \mathbf{K}_v^{0T} & \alpha_1 \mathbf{K}_v^0 & \mathbf{0} & \vdots \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ -\alpha_{N_G} \mathbf{K}_v^{0T} & \cdots & \mathbf{0} & \alpha_{N_G} \mathbf{K}_v^0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}_G = [\mathbf{q}, \mathbf{q}_1^G, \dots, \mathbf{q}_{N_G}^G]^T \text{ e } \mathbf{f}_G = [f, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}]^T.$$

Na Eq.(3.11),  $\mathbf{M}_G, \mathbf{D}_G, \mathbf{K}_G \in \mathbb{R}^{T_G \times T_G}$  com  $T_G = N(I + N_G)$ , onde  $N$  é a ordem das matrizes de massa e rigidez convencionais e  $N_G$  é a quantidade de mini-osciladores definida no modelo.  $\mathbf{K}_v^0 = \mathbf{G}_0 \bar{\mathbf{K}}_v$  é a matriz de rigidez estática ou a baixa frequência e  $\mathbf{K}_v^\infty = \mathbf{G}_\infty^G \bar{\mathbf{K}}_v$  é a matriz de rigidez dinâmica ou rigidez a alta frequência, onde  $\mathbf{G}_\infty^G$  é o módulo dinâmico.

### 3.5. Pré-processamento numérico do sistema de equações aumentado.

A inclusão das coordenadas internas dissipativas no sistema é feita para considerar a dependência da frequência e temperatura do comportamento dinâmico do material viscoelástico. Este procedimento leva a um sistema aumentado e acoplado das equações do movimento onde o número total de graus de liberdade excede enormemente o número de graus de liberdade do sistema original. Além disso, a matriz de massa obtida através do emprego do modelo GHM é não-positiva definida. Como resultado, é necessário realizar um pré-processamento numérico para que seja possível resolver as equações do movimento (de Lima, Stopa, & Rade, Finite Element Modeling of Structures Incorporating Viscoelastic Materials, 2003). Segundo McTavish e Hughes (1993), uma matriz de massa definida positiva pode ser obtida para o modelo GHM ao se realizar a decomposição espectral da parte relativa à subestrutura viscoelástica (denotada por  $\bar{\mathbf{K}}_v$ ).

O procedimento consiste em eliminar os autovalores nulos e seus respectivos autovetores e, como resultado, o número de coordenadas dissipativas é diminuído, além tornar a matriz de massa definida positiva.

### 3.6. Decomposição espectral da matriz de rigidez fatorada do modelo GHM

A decomposição espectral para o modelo viscoelástico GHM é feita considerando que o módulo estático é fatorado da matriz de rigidez viscoelástica associada à subestrutura viscoelástica.

$$\mathbf{K}_v^0 = \mathbf{G}_0 \bar{\mathbf{K}}_v = \mathbf{G}_0 \bar{\mathbf{R}} \bar{\boldsymbol{\Lambda}} \bar{\mathbf{R}}^T \quad (3.12)$$

Definindo  $\boldsymbol{\Lambda} = \mathbf{G}_0 \bar{\boldsymbol{\Lambda}}$  como sendo os autovalores não-nulos,  $\mathbf{R} = \bar{\mathbf{R}} \boldsymbol{\Lambda}$  os autovetores respectivos aos autovalores não-nulos e  $\mathbf{q}^{GG} = \bar{\mathbf{R}}^T \mathbf{q}^G$  os graus de liberdade respectivos aos autovalores não-nulos. Introduzindo estes elementos reduzidos na Eq.(3.11), a mesma pode colocada da seguinte forma:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v^\infty) \mathbf{q} - \alpha \mathbf{R} \mathbf{q}^G = \mathbf{F} \quad (3.13)$$

ou ainda:

$$\frac{\alpha}{\omega^2} \boldsymbol{\Lambda} \ddot{\mathbf{q}}^{GG} - \frac{2\alpha\zeta}{\omega} \boldsymbol{\Lambda} \dot{\mathbf{q}}^{GG} + \alpha \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{q}^{GG} - \alpha \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{R}^T \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (3.14)$$

O sistema de equações (3.14) pode ser proposto segundo uma denotação de elementos reduzidos, como a seguir:

$$\mathbf{M}_G^r \ddot{\mathbf{q}}_G^r + \mathbf{D}_G^r \dot{\mathbf{q}}_G^r + \mathbf{K}_G^r \mathbf{q}_G^r = \mathbf{f}_G^r \quad (3.15)$$

$$\text{onde } \mathbf{M}_G^r = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{\alpha_I}{\omega_I^2} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \vdots \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \frac{\alpha_{NG}}{\omega_{NG}^2} \mathbf{A} \end{bmatrix}, \mathbf{D}_G^r = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{2\zeta_I \alpha_I}{\omega_I} \mathbf{A} & \mathbf{0} & \vdots \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \frac{2\zeta_{NG} \alpha_{NG}}{\omega_{NG}} \mathbf{A} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{K}_G^r = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_e + \mathbf{K}_v^\infty & -\alpha_I \mathbf{R} & \cdots & -\alpha_{NG} \mathbf{R} \\ -\alpha_{NG} \mathbf{R}^T & \alpha_I \mathbf{A} & \mathbf{0} & \vdots \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ -\alpha_{NG} \mathbf{R}^T & \cdots & \mathbf{0} & \alpha_{NG} \mathbf{A} \end{bmatrix}, \mathbf{q}_G^r = [\mathbf{q}, \mathbf{q}_I^{GG}, \dots, \mathbf{q}_{NG}^{GG}]^T, \mathbf{F}_G^r = [\mathbf{F}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0}]^T.$$

Logo, para solução da equação é necessário a transformação para o espaço de estado da Eq. (3.11), uma vez que a mesma é uma equação de segunda ordem com acoplamento entre o amortecimento e a rigidez.

$$\begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{X}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{X}}_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}_G^{r^T} \mathbf{K}_G^r & -\mathbf{M}_G^{r^T} \mathbf{D}_G^r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{X}_1(t) \\ \mathbf{X}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1/\mathbf{M}_G^r \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{f}_G^r \end{Bmatrix} \quad (3.16)$$

A Eq.(3.16) pode ser reescrita:

$$\{\dot{\mathbf{X}}(t)\} = \mathbf{A}\{\mathbf{X}(t)\} + \mathbf{B}\{\mathbf{f}_G\} \quad (3.17)$$

onde a matriz de estado utilizada na solução do problema de autovalor  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{2^{\text{TG}} \times 2^{\text{TG}}}$  é dada como segue:

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I} \\ -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}_T & \alpha_1 \mathbf{M}^{-1}\mathbf{R} & \cdots & \alpha_{N_G} \mathbf{M}^{-1}\mathbf{R} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \omega_1^2 \mathbf{A}^{-1}\mathbf{R}^T & \omega_1^2 \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -2\zeta_1 \omega_1 \mathbf{I} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{N_G}^2 \mathbf{A}^{-1}\mathbf{R}^T & \mathbf{0} & \cdots & \omega_{N_G}^2 \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & -2\zeta_{N_G} \omega_{N_G} \mathbf{I} \end{bmatrix}$$

É importante salientar que a ordem do sistema amortecido viscoelasticamente no espaço de estado dobra. Isto implica no pós-processamento dos dados, pois é necessário separar os modos de vibração físicos dos modos não físicos oriundos das variáveis internas dissipativas. Portanto, inicialmente determina-se os pares modais a partir dos autovalores obtidos, os quais possuem a seguinte forma:

$$\lambda_G \equiv \alpha_G + i\beta_G = -\zeta_G \omega_G + i\omega_G \sqrt{1 - \zeta_G^2} = -\zeta_G \omega_G + i\omega_{dG} \quad (3.18)$$

onde  $\omega_G$  é o vetor das frequências naturais da placa,  $\zeta_G$  é o vetor contendo os fatores de amortecimento e  $\omega_{dG}$  é o vetor contendo os valores da chamada frequência amortecida. As expressões da frequência amortecida e do fator de amortecimento são expressas por,

$$\omega_r = \sqrt{(-\zeta_G \omega_G)^2 + (\omega_G \sqrt{1 - \zeta_G^2})^2}, \zeta_G = \frac{\zeta_G \omega_G}{\sqrt{(-\zeta_G \omega_G)^2 + (\omega_G \sqrt{1 - \zeta_G^2})^2}} \quad (3.19)$$

Finalmente, os pares modais são determinados por,

$$\theta_G = [\omega_G \quad \zeta_G] \quad (3.20)$$



Em seguida, para separar os modos superamortecidos exclui-se aqueles em que  $\zeta_G > 0.99$  e os modos de corpo rígido e não físicos eliminando todos em que  $\omega_G < 1$ .

### 3.7. Ajuste de curvas dos parâmetros do material viscoelástico

Um aspecto importante relativo ao uso do modelo GHM é a necessidade de identificação dos parâmetros do modelo  $(G_0, \alpha_i, \omega_i, \zeta_i)$ . A identificação destes é feita com base no tipo do material viscoelástico utilizado, isto é, a partir da caracterização empírica de um material. No caso deste trabalho, os dados empíricos foram obtidos através do nomograma do material ISD112 3M® fornecido pelo fabricante.

Portanto, uma vez escolhido e caracterizado o material, traça-se uma curva do módulo de armazenamento,  $E'(\omega, T)$ , do módulo de perda  $E''(\omega, T)$  e do fator de perda  $\eta(\omega, T)$ . Estas curvas serão utilizadas no ajuste de curva que irá definir os valores dos parâmetros do modelo GHM.

Primeiramente, é necessário determinar a quantidade de parâmetros a ser utilizados. Para tal, faz-se uso da seguinte definição (de Lima, Rade, & Bouhaddi, Modelagem e Otimização Robusta de Sistemas Mecânicos em Presença de Amortecimento Viscoelástico, 2007):

$$N_{par}^G = 1 + 3N_G \quad (3.21)$$

onde  $N_G$  é definido em função da representatividade obtida em cada ajuste de curva. Isto impõe o seguinte problema: um valor pequeno de  $N_G$  não aportará a representatividade necessária, ao passo que um valor grande de  $N_G$  tornará o processo oneroso e até inviável (Martin, 2011).

Portanto, após várias análises, foi determinado um valor de  $N_G = 4$ , resultando um total de 13 parâmetros, suficientes para determinar os valores ótimos na banda de frequência de interesse e para as temperaturas investigadas.

A otimização foi realizada utilizando o programa de algoritmos genéticos (GA) contido no toolbox do MATLAB. Como função objetivo, foi utilizada a função dos mínimos quadrados entre os valores experimentais e aqueles obtidos em modelo,

$$f_{obj} = \sum \left[ \frac{real(GHM) - real(Exp)}{real(Exp)} \right]^2 + \left[ \frac{imag(GHM) - imag(Exp)}{imag(Exp)} \right]^2 \quad (3.22)$$

onde ***GHM*** é a matriz contendo os valores otimizados e ***Exp*** é a matriz contendo os valores experimentais.

Deve-se salientar que métodos determinísticos também foram analisados, porém, sem sucesso em função do grande número de parâmetros a serem determinados. Além disso, devido ao fato de que a otimização é característica de um problema de restrições laterais, foi necessário adaptá-las a cada iteração de maneira que o limite inferior e superior se modificam de  $-10\%$  e  $+10\%$ , respectivamente, em relação ao valor dos parâmetros otimizados para cada iteração.

Os valores obtidos e a respectivas curvas utilizadas para comparar com o modelo são mostradas no Anexo B.

# **CAPÍTULO IV**

## **Aeroelasticidade de Placas**

Este capítulo trata do estudo do comportamento aeroelástico de placas retangulares finas visando analisar o fenômeno do flutter em tais sistemas estruturais. Será apresentada uma breve discussão sobre aeroelasticidade, a natureza física do problema aeroelástico envolvendo painéis aeronáuticos e os requerimentos para compreensão e modelagem do problema linear aeroelástico visando a incorporação do mesmo ao modelo de placa sanduíche de três camadas contendo material viscoelástico desenvolvido no capítulo precedente. Será também apresentado o método iterativo a ser empregado na identificação do ponto de ocorrência das instabilidades aerodinâmicas para o sistema viscoelástico.

### **4.1. Introdução à aeroelasticidade**

A aeroelasticidade é um campo de estudos de natureza intrinsecamente interdisciplinar, uma vez que tal fenômeno envolve a interação mútua de três forças distintas, a saber: aerodinâmicas, elásticas e inerciais. O clássico triângulo aeroelástico de Collar (Wright & Cooper, 2007), ilustrado na Figura 4.1, sintetiza claramente esta interação, mostrando que as disciplinas controle e estabilidade, aeroelasticidade estática e dinâmica estrutural são, cada uma, resultado da interação entre dois dos três tipos de forças envolvidas.



Figura 4.1 – Diagrama de Collar. Figura adaptada de (Wright & Cooper, 2007).

Segundo Wright & Cooper (2007) a *aeroelasticidade estática* considera os efeitos não oscilatórios das forças aerodinâmicas que atuam sobre a estrutura da aeronave, a qual é flexível. No caso de uma asa, tal flexibilidade permite que a mesma se deforme, gerando grandes deslocamentos que irão influenciar na distribuição de sustentação ao longo da envergadura da asa em uma condição de voo em regime permanente (voo de cruzeiro, por exemplo). Desta maneira, independente de quão preciso e sofisticado sejam os cálculos aerodinâmicos, a deformação final da asa decorrente do carregamento aerodinâmico em regime permanente pode conter erros, decorrentes da modelagem incorreta. Estes erros resultarão em penalidades na predição de arrasto, resultando em uma errônea predição da autonomia da aeronave, por exemplo. Outro problema relacionado à aeroelasticidade estática é a redução da efetividade das superfícies de controle e até mesmo o fenômeno de inversão de controles. Há também, a possibilidade de ocorrência de um fenômeno altamente destrutivo, chamado de Divergência, o qual faz com que a torsão da asa aumente sem limite caso o momento de arfagem gerado exceda a capacidade de restauração elástica da estrutura.

Já o fenômeno de *aeroelasticidade dinâmica* trata os efeitos oscilatórios das interações aeroelásticas, e a principal área de interesse é o fenômeno de *flutter*, potencialmente catastrófico. Esta instabilidade envolve dois ou mais modos de vibrar e surge do acoplamento entre forças aerodinâmicas, elásticas e inerciais. Isto significa que a estrutura pode extrair energia do fluxo de ar e aumentar suas amplitudes de vibração. A principal dificuldade em prever o fenômeno de flutter reside na natureza instável das forças aerodinâmicas e momentos gerados quando a estrutura da aeronave oscila.

Considerações feitas no projeto aeroelástico da aeronave podem influenciar no design final da mesma em diversas maneiras. O envelope de voo deve assegurar que *flutter* e

divergência não ocorram e que a aeronave seja suficientemente controlável. As deformações finais da estrutura da aeronave devem ser precisamente determinadas, afim de evitar erros na predição do arrasto e consequentemente na performance da aeronave (Wright & Cooper, 2007).

Neste contexto, será realizado o estudo da instabilidade aeroelástica de placas, ou painéis aeronáuticos. O objetivo será determinar se o amortecimento gerado pelo material viscoelástico ISD112™ da 3M é efetivo no retardo do ponto de ocorrência de flutter. Para tal, a Teoria do Pistão em sua forma mais simples, denominada de Modelo Quase Estático de Ackeret, será desenvolvida e introduzida no modelo de elementos finitos de placa sanduiche previamente apresentado.

## 4.2. A natureza física do problema

Para compreender a natureza física do problema de *flutter* em placas, considere uma placa plana e flexível apoiada em seus quatro bordos. Sobre somente um dos lados da placa escoo um fluxo de ar a um determinado número de Mach. É importante remarcar que a outra superfície da placa se encontra em uma região de ar estagnado, a Figura 4.2 ilustra a situação descrita

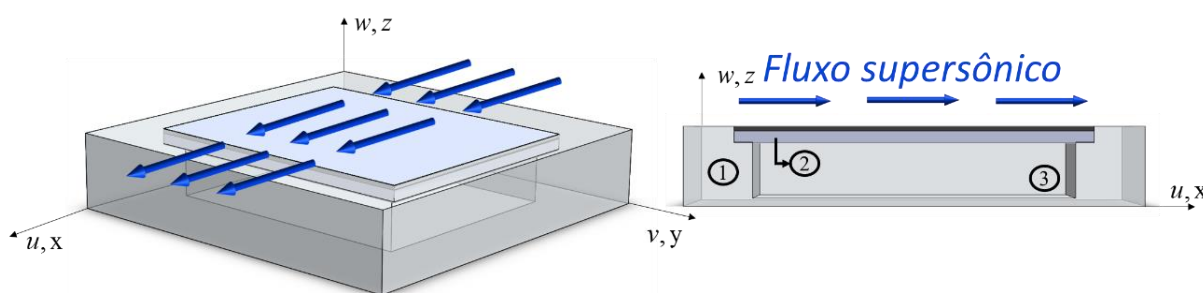


Figura 4.2 – Esquema ilustrativo de um experimento para a determinação do ponto de ocorrência do flutter em uma placa retangular fina: (1) parede rígida do túnel de vento, (2) placa retangular fina, (3) cavidade formada pela estrutura de fixação.

O limite de *flutter* deste painel é atingido quando a velocidade do ar escoando é aumentada, intensificando também a pressão dinâmica. Para pequenos valores de pressão

dinâmica, o sistema se encontra em um ponto anterior ao seu limite de *flutter*. Nesta condição, são observadas oscilações aleatórias com componentes de frequência dominantes próximas à frequências naturais mais baixas do painel. Além disso, as máximas amplitudes de oscilação possuem magnitudes iguais a uma pequena fração da espessura do painel (Dowell, 1975).

Quando o limite de *flutter* é ultrapassado, após o ponto em que a pressão dinâmica se torna crítico, as oscilações do painel tornam aproximadamente senoidais com amplitudes de vibração superiores à espessura do painel. Este comportamento é mostrado na Figura 4.3.

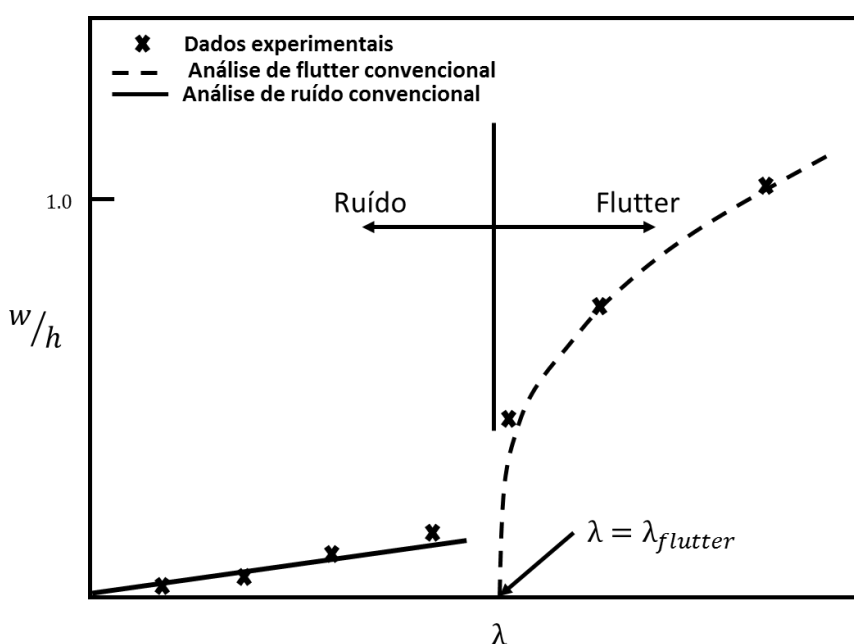


Figura 4.3 – Resposta aerodinâmica de um painel (adaptado de (Dowell, 1975)).

Após a ocorrência do *flutter*, o comportamento do painel é dominado por não linearidades geradas no sistema. A principal delas é o acoplamento estrutural entre as tensões de flexão e membrana no plano do painel. Tal acoplamento pode ser compreendido da seguinte maneira, à medida que a placa flete, tensões de membrana atuam simultaneamente aumentando de maneira não-linear a rigidez efetiva do painel, limitando assim as amplitudes de vibração (Dowell, 1975). Estas não-linearidades são também chamadas de não-linearidades geométricas.

O enrijecimento do painel influencia diretamente nos mecanismos de falha. Diferentemente do *flutter* em asas, onde a falha se dá de maneira súbita e catastrófica, no *flutter* em painéis, geralmente, a falha se dá por fadiga do material do painel ou da sua

estrutura de fixação. Isto ocorre quando as tensões no plano do painel são relativamente pequenas. Caso as amplitudes das tensões ultrapassem o limite de escoamento do material, então falha súbita ou catastrófica ocorrerá (Dowell, 1975).

#### 4.3. Modelo de carregamento aeroelástico linear

Normalmente a pressão aerodinâmica pode ser considerada como sendo formada por duas partes: uma primeira, gerada por flutuações de pressões na superfície (camada limite turbulenta) do painel, na ausência de qualquer deslocamento do mesmo. Uma segunda, dada pelo próprio deslocamento do painel. A superposição dos dois efeitos forma a pressão aerodinâmica total. Segundo Dowell (1975), a parcela resultante do deslocamento do painel não é capaz de modificar as flutuações de pressão geradas pela camada limite turbulenta, devido às pequenas amplitudes de vibração.

A partir desta suposição, a modelagem do carregamento aerodinâmico linear é feita através da Teoria do Pistão, originalmente desenvolvida por Lighthill (1953). Esta teoria fornece uma aproximação para o campo de pressão aerodinâmico gerado por um escoamento supersônico que passa sobre um dos lados de uma placa fina. É um modelo de carregamento aerodinâmico não estacionário que pode ser desenvolvido segundo equações lineares ou não-lineares e aplicado utilizando o método dos elementos finitos.

A forma linear da Teoria do Pistão é amplamente utilizada para investigar o *flutter* em painéis aeronáuticos (Krumhaar, 1963). A forma mais geral da Teoria do Pistão pode ser expressa por

$$p = p_{\infty} \left[ 1 + \frac{\gamma_{ar} - 1}{2a_{\infty}} \left( \frac{dw}{dt} + U_{\infty} \frac{dw}{dx} \right) \right]^{\frac{2\gamma_{ar}}{\gamma_{ar} - 1}} \quad (4.1)$$

onde  $U_{\infty}$  é a velocidade do escoamento em um ponto distante da estrutura que não influencia na mesma (velocidade de estagnação),  $a_{\infty}$  é a velocidade do som neste mesmo ponto e  $\gamma_{ar}$  é a razão entre os calores específicos do ar (Pegado, 2003). Nota-se que, o campo de deslocamento lateral  $w$ , é derivado em relação a  $x$ , determinando assim o sentido do escoamento do ar sobre a placa.

A Eq.(4.1) pode ser expandida em série, retornando a seguinte equação:

$$p - p_{\infty} = \frac{2p_{din}}{M} \left[ \left( \frac{d\mathbf{w}}{dx} + \frac{1}{U_{\infty}} \frac{d\mathbf{w}}{dt} \right) + \frac{\gamma_{ar} + 1}{4} M \left( \frac{d\mathbf{w}}{dx} + \frac{1}{U_{\infty}} \frac{d\mathbf{w}}{dt} \right)^2 + \frac{\gamma_{ar} + 1}{12} M^2 \left( \frac{d\mathbf{w}}{dx} + \frac{1}{U_{\infty}} \frac{d\mathbf{w}}{dt} \right)^3 + \dots \right] \quad (4.2)$$

onde o parâmetro  $P_{din} = \rho_{\infty} V_{\infty}^2 / 2$  representa a pressão dinâmica devido ao escoamento do fluido sobre a placa. A Eq.(4.2) pode ser truncada em qualquer termo. A partir do termo de segunda ordem, teorias não lineares são adotadas. Se truncada no termo de primeira ordem, a equação resultante representa a Teoria do Pistão Linear:

$$p - p_{\infty} = \frac{2p_{din}}{M} \left( \frac{d\mathbf{w}}{dx} + \frac{1}{U_{\infty}} \frac{d\mathbf{w}}{dt} \right) \quad (4.3)$$

A Eq.(4.3) é conhecida por relacionar o movimento de um pistão em um cilindro e a variação de pressão em função de seu deslocamento  $\mathbf{w}$ , daí a origem de seu nome. É interessante remarcar que a Eq.(4.3) é regida por um termo atemporal, e um termo temporal. Estes termos representam, respectivamente, a deformação do painel (termo responsável por fornecer a matriz de rigidez aerodinâmica) e a velocidade dos deslocamentos (termo responsável por fornecer a matriz de amortecimento aerodinâmico). Simplificações podem ser feitas, dependendo do tipo de problema a ser estudado, como por exemplo, a avaliação no domínio da frequência de um painel aerodinâmico, em que o objetivo é determinar somente o valor de pressão dinâmica crítica e frequências naturais. Neste caso, o amortecimento aerodinâmico, representado pelo termo temporal da Eq.(4.3), pode ser desconsiderado devido a sua pequena magnitude (Singha & Ganapathi, 2005). Esta simplificação remete ao modelo aerodinâmico mais simples da Teoria do Pistão, denominado de Modelo Quase Estático de Ackeret, expresso por:

$$p - p_{\infty} = \frac{2p_{din}}{M} \left( \frac{d\mathbf{w}}{dx} \right) \quad (4.4)$$



Lighthill (1953) afirma que as Eqs. (4.3) e (4.4) podem ser utilizadas com excelente precisão no cálculo da pressão sobre estruturas planas para escoamentos em regime permanente ou não. Para tal, é necessário que número de Mach seja da ordem  $M^2 \gg 1$ , ou ainda, que esteja compreendido no intervalo de velocidades de  $\sqrt{2} < M < \sqrt{5}$ .

#### 4.4. Introdução do efeito aerodinâmico no sistema viscoelástico

A partir da Eq.(4.4), o trabalho das forças não-conservativas, pode ser calculado para determinação da matriz de rigidez aerodinâmica, a qual será introduzida no sistema viscoelástico. O cálculo se dá por,

$$W_{n.c.} = -W_f \quad (4.5)$$

onde

$$W_f = -\frac{2p_{din}}{M} \int \frac{d\mathbf{w}}{dx} \mathbf{w} dA \quad (4.6)$$

onde o campo de deslocamentos  $\mathbf{w}$ , para o caso da placa sanduíche de três camadas é determinado através das funções de forma estabelecidas na seção 2.3, Capítulo II, mais precisamente pelo termo  $N_w$ .

Após integrar a Eq. (4.6), o trabalho do carregamento aerodinâmico passa a contemplar em seu formalismo a matriz de rigidez aerodinâmica da seguinte forma,

$$W_a = -\frac{2p_{din}}{M} \boldsymbol{\delta}^T \mathbf{a} \boldsymbol{\delta} \quad (4.7)$$

onde os vetores  $\boldsymbol{\delta}$  contém os graus de liberdade a nível elementar para o elemento finito de placa sanduíche de três camadas, e a matriz  $\mathbf{a}$  representa a matriz de rigidez aerodinâmica

elementar. Pode-se ainda determinar o parâmetro de pressão aerodinâmica da seguinte maneira:

$$\lambda = -\frac{2P_{din}}{M} \quad (4.8)$$

Uma vez determinada a matriz aerodinâmica, a introdução no modelo de elementos finitos de placa sanduíche é feita através da equação do movimento (2.50). Entretanto, deve-se salientar que a resolução do problema aerodinâmico do sistema contendo amortecimento viscoelástico depende do tipo de abordagem matemática adotada para representar o comportamento dinâmico do material viscoelástico (ver CAPÍTULO III).

A partir do problema de autovalor obtido da equação movimento (2.51), a matriz de rigidez aerodinâmica pode ser introduzida no problema via acréscimo da matriz de rigidez aerodinâmica ao sistema viscoelástico. Deste processo, resulta um novo sistema denominado de aeroviscoelástico, representado a seguir

$$\left[ \mathbf{K}_e + G(\omega, T) \overline{\mathbf{K}}_v + \lambda \mathbf{a} - \omega^2 \mathbf{M} \right] \boldsymbol{\phi}^* = 0 \quad (4.9)$$

Logo, para se determinar o ponto de ocorrência de *flutter*, é necessário fazer variar o parâmetro de pressão dinâmica,  $\lambda$ . Isso implica que para cada valor de  $\lambda$ , é necessário resolver um problema de autovalor para determinar as frequências e modos de vibração do sistema viscoelástico cujas propriedades são fortemente dependentes da própria frequência a ser determinada e, simultaneamente da temperatura. Portanto, tem-se de um problema de autovalores não-lineares do sistema viscoelástico a ser resolvido.

Entretanto, como explicado na seção 3.3, a resolução do problema de autovalor do sistema viscoelástico, quando adotado o modelo do módulo complexo, requer um método iterativo. Logo os dois problemas são avaliados simultaneamente através da construção de um laço interno a outro. Assim, é preciso determinar as propriedades do material viscoelástico dependentes da frequência, a qual deve ser determinada para uma dada temperatura fixa e para cada valor do carregamento aerodinâmico. Portanto, um método iterativo modificado foi desenvolvido baseado no método proposto na Seção 3.3. O mesmo foi acrescido de alguns

procedimentos necessários para identificação do ponto de *flutter* para um sistema dinâmico contendo amortecimento viscoelástico.

Normalmente, para problemas aeroelásticos sem a presença de amortecimento viscoelástico ou estrutural envolvendo painéis aeronáuticos, o ponto de ocorrência de flutter pode ser determinado utilizando um método similar ao método k (Hodges & Pierce, 2002) utilizado em seções típicas de superfícies de sustentação. O sistema de equações para este problema é mostrado a seguir:

$$\left[ \mathbf{K}_e + \lambda \mathbf{a} - \omega^2 \mathbf{M} \right] \boldsymbol{\phi}^* = 0 \quad (4.10)$$

Neste caso, os autovalores,  $\omega$ , obtidos são reais, e o ponto de ocorrência de flutter pode ser determinado de duas maneiras: seja quando duas frequências quaisquer coalescerem, ou, quando o autovalor obtido passa a ser um complexo conjugado. Entretanto, para o caso aqui estudado, a identificação do ponto de *flutter* é dificultada devido à presença do amortecimento introduzido pelo material viscoelástico, como mostrado na Eq.(4.9). Isso faz com que, para qualquer valor de  $\lambda$ , os autovalores obtidos sejam complexos e se aproximem um do outro, entretanto eles não coalescem. Nestes casos, o ponto de ocorrência de *flutter* é determinado quando a parte imaginária de um dos autovalores for igual a zero (Singha & Ganapathi, 2005).

Entretanto, é necessário realizar a decomposição da parte imaginária do autovalor obtido, pois esta é composta pelo amortecimento estrutural e uma outra parte devida ao problema aeroelástico. Uma vez decomposto, o procedimento é o mesmo, ou seja, o *flutter* é determinado quando o amortecimento for igual a zero.

Um diagrama de blocos contendo os passos do processo de determinação do ponto de *flutter* de um sistema contendo amortecimento estrutural dentro do método iterativo é apresentado na figura seguinte.

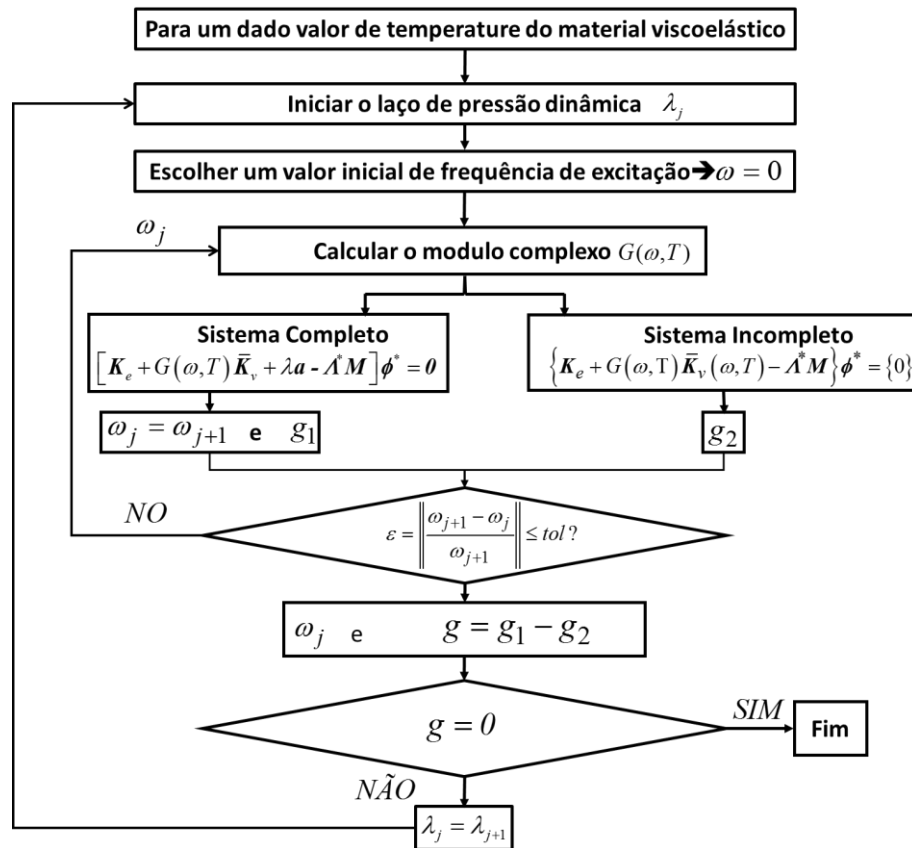


Figura 4.4 – Método iterativo usado para a análise aerodinâmica de um sistema contendo amortecimento viscoelástico.

A decomposição é feita adotando dois sistemas em paralelo: um sistema completo contendo todas as componentes de rigidez estrutural, viscoelástica e aerodinâmica e um sistema incompleto, o qual desconsidera os efeitos do termo  $dw/dx$  do modelo de Ackeret; termo de trabalho não-conservativo. Para identificação dos parâmetros, determina-se que o amortecimento gerado pelo sistema completo seja denominado de  $g_1$  e o amortecimento do sistema incompleto seja denominado de  $g_2$ . Destes dois termos, pode ser obtido o amortecimento resultante e, finalmente, determinado o ponto de ocorrência de *flutter*:

$$g = g_1 - g_2 = 0 \quad (4.11)$$

## CAPITULO V

### Soluções Numéricas do Sistema Aeroviscoelástico

Para ilustrar as principais características e a eficiência dos procedimentos de modelagem usados para avaliar o fenômeno de *flutter* em sistemas contendo materiais viscoelásticos, um exemplo numérico composto por placa sanduíche de três camadas, sendo as camadas externas compostas de material elástico e camada central composta do material viscoelástico 3M ISD112™. As propriedades geométricas e físicas da placa são apresentadas, respectivamente, nas Tabela 5-1 e Tabela 5-2.

Tabela 5-1 – Propriedades geométricas da placa sanduíche.

Camada	Comprimento X [mm]	Comprimento Y [mm]	Espessura [mm]
Placa base	390	330	1.5
Viscoelástica	390	330	0.0254
Restringente	390	330	0.5

Para as três camadas, são definidos três tipos de materiais com as seguintes propriedades mecânicas:

Tabela 5-2 – Propriedades mecânicas da placa sanduíche

Camada	Módulo de Young [GPa]	Coef. de Poisson	Densidade $\left[\frac{kg}{m^3}\right]$
Placa Base	70	0.34	2700
Viscoelástica	-----	0.49	950
Restringente	70	0.34	2700

O módulo de elasticidade escolhido corresponde ao alumínio, material utilizado na indústria aeroespacial para construção das aeronaves. O Material ISD112™ é empregado, pois o mesmo possui excelentes propriedades dissipativas. Além disso suas propriedades mecânicas foram devidamente caracterizadas experimentalmente.

É importante salientar que as propriedades apresentadas na Tabela 5-1 e Tabela 5-2 serão adotadas para a geração do modelo de elementos finitos do sistema. Além disso, assume-se que esta é referência utilizada no estudo paramétrico.

Após um estudo de convergência de malha do sistema sem tratamento viscoelástico superficial, conforme mostrado na Figura 5.1, os resultados mostram que as malhas compostas por  $2 \times 2$  e  $3 \times 3$  elementos não representam adequadamente a velocidade crítica de *flutter*. Desta maneira, nas simulações que seguem será empregada a malha composta por  $6 \times 6$  elementos.

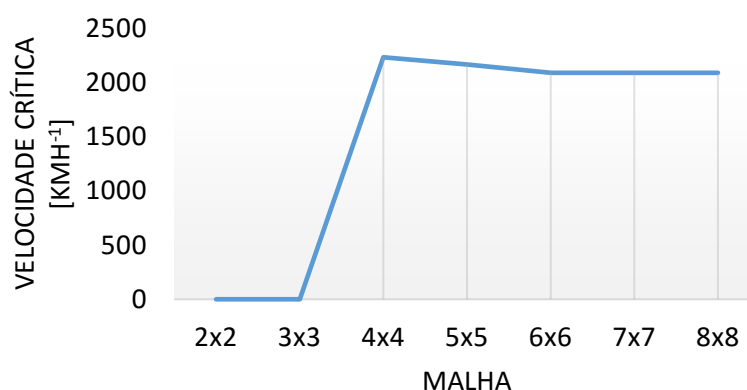


Figura 5.1 – Estudo de convergência da malha baseada na velocidade crítica.

Com relação às condições de contorno foi adotado que a placa é simplesmente apoiada pelos quatro bordos, ou seja, para todos os nós dos elementos presentes nas extremidades da placa, o grau de liberdade  $w = 0$ .

### 5.1. Validação numérica do modelo mecânico de placa

A validação numérica do modelo Aeroviscoelástico é feita a partir das propriedades de placa sanduíche descritas na seção anterior. Os resultados obtidos são comparados com valores analíticos da literatura pertinente. A Tabela 5-3 mostra os resultados sugeridos por Jones (1999).

Tabela 5-3 – Comparação entre as frequências naturais analíticas e numéricas

Valores exatos	Valores numéricos
$\omega_1 = 58.02 \text{ Hz}$	$\omega_1 = 57.17 \text{ Hz}$
$\omega_2 = 130.66 \text{ Hz}$	$\omega_2 = 127.65 \text{ Hz}$
$\omega_3 = 159.48 \text{ Hz}$	$\omega_3 = 156.20 \text{ Hz}$

Jones (1999), sugere também, para os mesmos valores de frequência natural apresentados na Tabela 5-3, soluções analíticas para as respectivas formas modais. Nota-se, a partir da Figura 5.2, que para a solução exata, as linhas pontilhadas representam os pontos em que os deslocamentos dos nós são nulos e para a solução numérica, as zonas em azul e vermelho representam, respectivamente, os valores mínimos e máximos dos deslocamentos nodais.

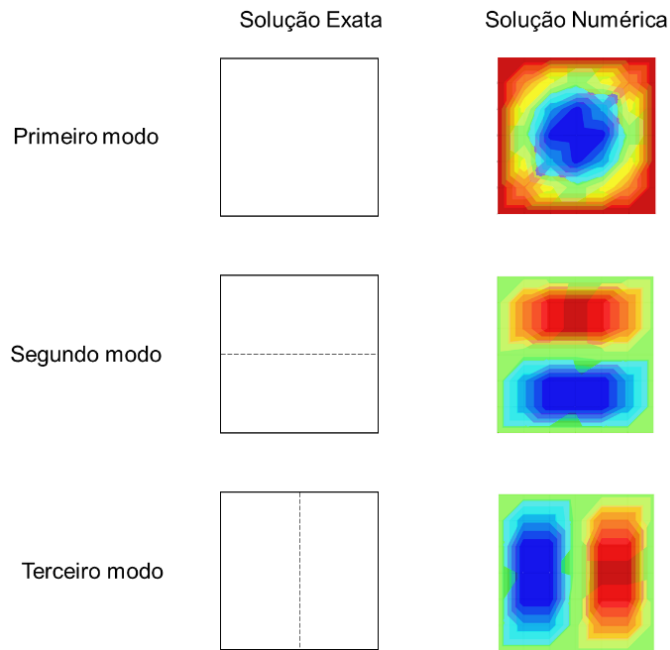


Figura 5.2 – Comparação entre as formas modais analíticas e numéricas de uma placa.

Finalmente, o modelo de carregamento aerodinâmico em elementos finitos e aplicado ao painel aeronáutico é validado através de solução analítica fornecida por Bismarck-Nars (1999). O autor determina os valores exatos de pressão dinâmica crítica adimensionalizadas, segundo a Teoria Linear do Pistão, para diferentes dimensões de placas retangulares. Neste caso, a verificação é feita para uma placa quadrada de dimensões  $0.4 \times 0.4 m^2$ , que segundo a referência o valor de pressão dinâmica crítica adimensional vale 512.65. O modelo numérico obteve um valor de 511.75, como pode ser visto no diagrama V-g mostrado na Figura 5.3. Neste caso, a pressão dinâmica adimensional foi calculada segundo a seguinte expressão:

$$\lambda^* = \frac{\lambda L_x^3}{D} \quad (5.1)$$

onde,  $\lambda$ , ver Eq.(4.8), é a pressão dinâmica. A faixa de Mach adotada varia de  $1.6 \leq M \leq 5$ , segundo a Teoria do Pistão.  $L_x$  é o comprimento da placa na direção  $x$  e  $D$  é o coeficiente de rigidez à flexão da placa.



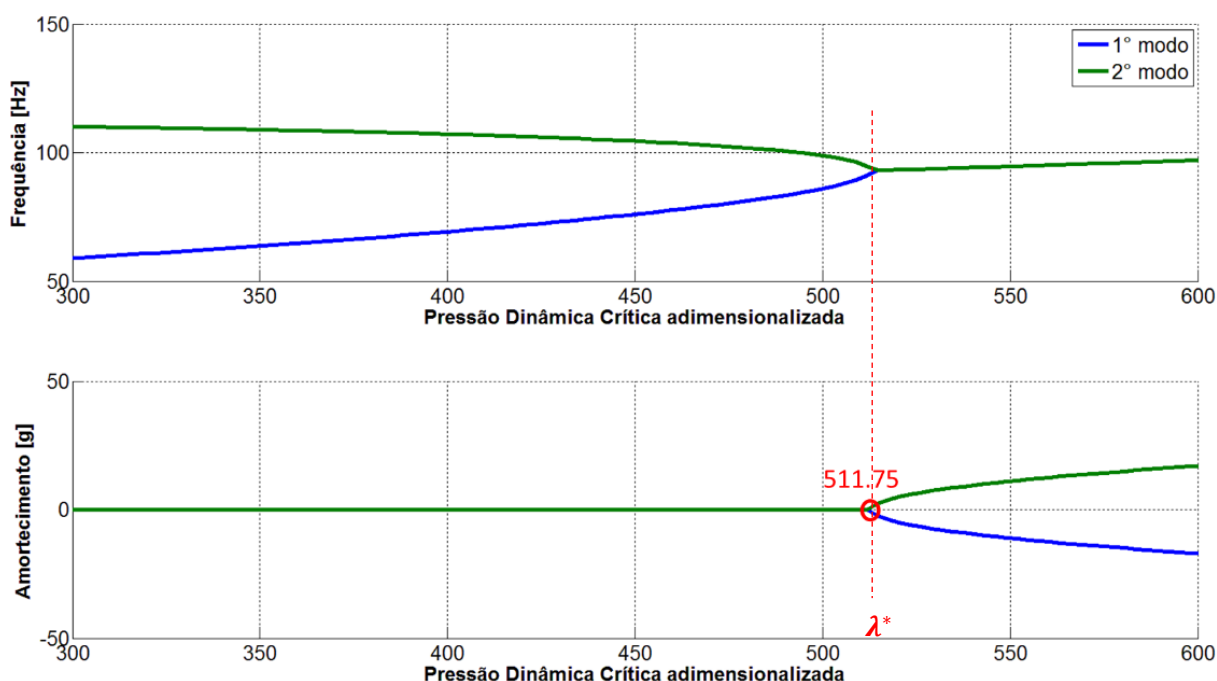


Figura 5.3 – Coalescência das duas primeiras frequências naturais da placa-base.

Como a avaliação é feita para uma placa puramente elástica sem a presença de amortecimento estrutural, os autovalores obtidos são reais até o ponto de primeira coalescência das frequências naturais, o qual informa a ocorrência do *flutter*. A partir deste ponto, os autovalores se tornam complexos e conjugados.

É importante ressaltar que para a análise da influência de parâmetros físicos e geométricos no comportamento aeroelástico da placa sanduíche foram considerados somente os dois primeiros modos de vibração da placa sanduíche, pois a coalescência das frequências naturais ocorre primeiro para estes modos. A Figura 5.4 mostra os resultados de coalescência para as dez primeiras frequências naturais do sistema.

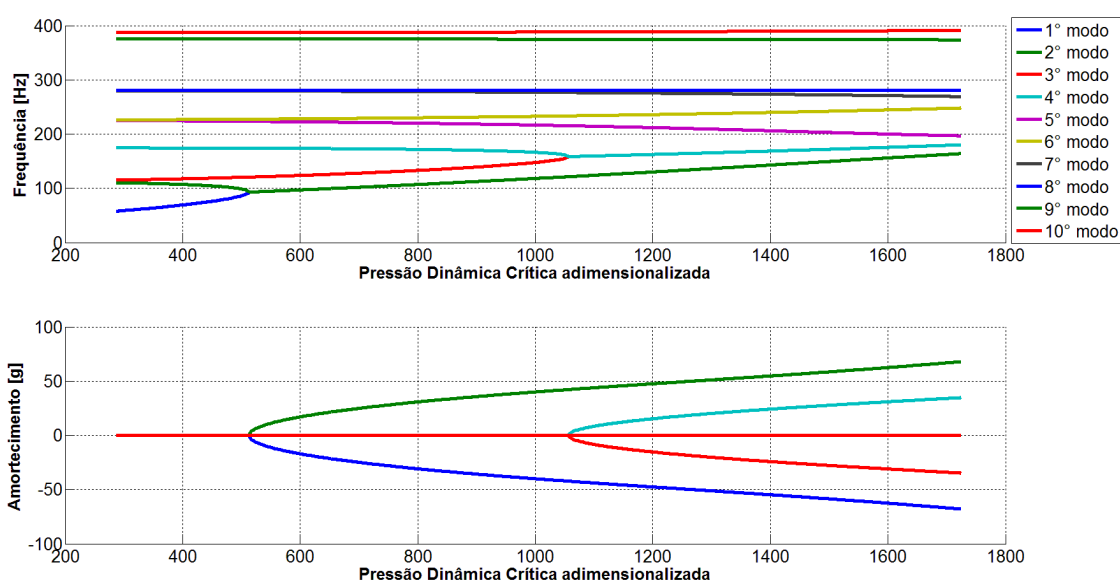


Figura 5.4 – Coalescência das dez primeiras frequências naturais da placa-base.

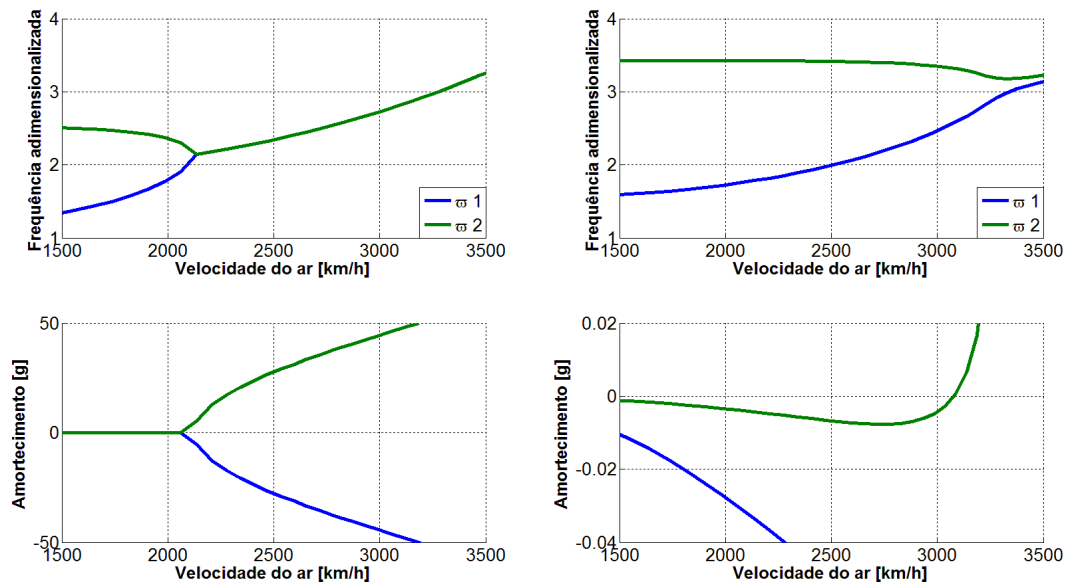
Após verificação do modelo de elementos finitos da placa-base, a análise para avaliar a influência do tratamento viscoelástico superficial por camada restrita passiva no comportamento aeroelástico da mesma é mostrado na sequência.

## 5.2. Efeitos do tratamento com amortecimento viscoelástico

A primeira análise a ser realizada tem o objetivo de avaliar o impacto do amortecimento viscoelástico no comportamento aeroelástico do painel sanduíche. Para tal, um painel com as características apresentadas na Tabela 5-1 e Tabela 5-2 é simulado fazendo variar somente a temperatura do material viscoelástico.

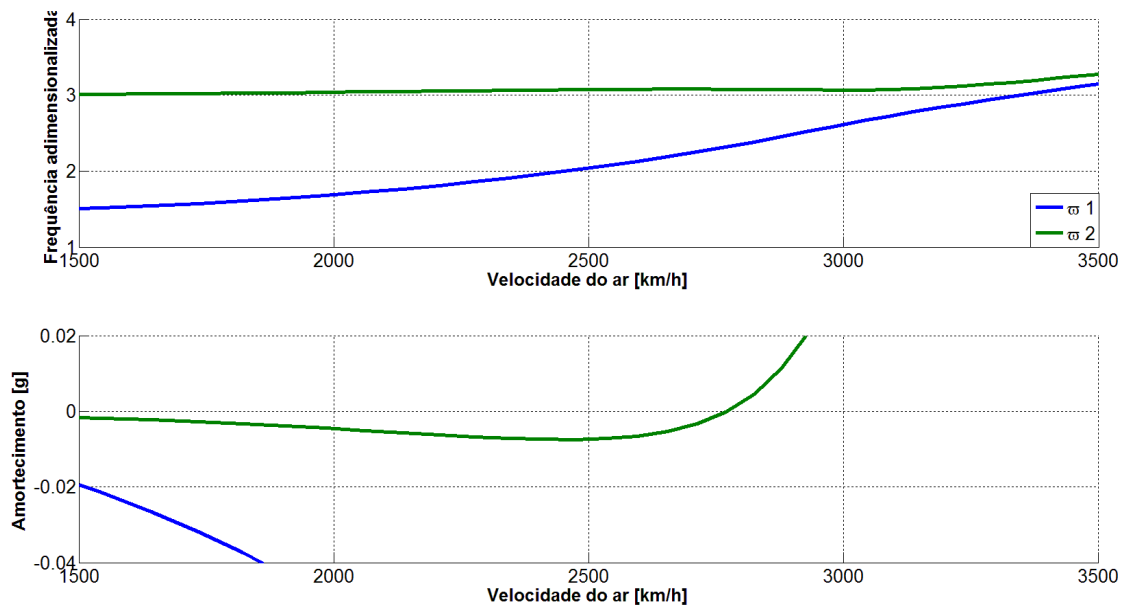
As análises foram feitas no intervalo de pressão de  $1 - 6 \times 10^5 \text{ Pa}$  com um passo constante e arbitrário de  $15 \times 10^3 \text{ Pa}$ . Os resultados são fornecidos em termos de frequências naturais adimensionalizadas, determinadas através da relação:  $\varpi = \omega_j a^2 / \pi^2 h_1 \sqrt{\rho_1 / E_1}$ , onde  $a$ ,  $h_1$ ,  $\rho_1$  e  $E_1$  são, respectivamente, o comprimento, a espessura, a densidade e o módulo de Young da placa-base.

Os cálculos consistem em obter a velocidade de flutter do sistema viscoelástico pela a observação da parte imaginária do autovalor do sistema amortecido, quando o mesmo for igual a zero, implicará na ocorrência do flutter.



(a)

(b)



(c)

Figura 5.5 – Influência do tratamento viscoelástico superficial no comportamento aeroelástico da placa-base de alumínio. (a) Placa sem tratamento viscoelástico - velocidade de ocorrência de *flutter* de 2062 km/h; (b) Tratamento viscoelástico a 15°C – velocidade de ocorrência de *flutter* de 3070 km/h; (c) tratamento viscoelástico a 40°C – velocidade de ocorrência de *flutter* – 2772 km/h.

Os valores de temperatura de 15 e 40 °C foram escolhidos, pois esta primeira está próxima do ponto de trabalho ideal do material viscoelástico e a segunda por ser uma temperatura em que há importante perda de eficiência de dissipação de energia.

Pela Figura 5.5, pode-se ver que a placa-base sem tratamento viscoelástico entra em flutter a uma velocidade de aproximadamente 2062 *km/h*. Ao incorporar o tratamento viscoelástico superficial na placa-base, assumindo uma temperatura do material viscoelástico de 15°C, esta velocidade aumenta para 3070.49 *km/h*, representando um considerável aumento de 48.88% na velocidade crítica da placa. Isto mostra claramente a efetividade do tratamento viscoelástico superficial no que concerne a estabilizar os efeitos de flutter. Entretanto, à medida que a temperatura do material viscoelástico é aumentada para 40°C, uma redução significativa na capacidade de dissipar energia do tratamento viscoelástico é constatada, implicando em uma considerável redução de 11,71% na velocidade de flutter, 27712 *km/h*. Neste caso, pode-se concluir de imediato que as características dinâmicas e aeroelásticas do sistema viscoelástico são sensíveis às variações de temperatura.

Este resultado induz ao raciocínio de que a aplicação da técnica de tratamento viscoelástico superficial deve ser feita tendo em mente o tipo de ambiente no qual a estrutura em questão será submetida. Como por exemplo: veículos supersônicos, foguetes de lançamento e até mesmo, mísseis balísticos, onde as superfícies externas das estruturas destes equipamentos estão sujeitas a intensas variações de temperatura em virtude do escoamento compressível e alto nível de fricção.

É importante remarcar que o sistema não amortecido tem a característica particular de apresentar a coalescência das frequências naturais respectivas aos modos de vibrar responsáveis por entrar em flutter. Já no caso do sistema amortecido viscoelasticamente, este comportamento não é visto, uma vez que as frequências naturais se aproximam umas das outras, mas não coalescem. Logo, o ponto de ocorrência de flutter é determinado no ponto em que a parte imaginária do autovalor se é igual a zero.

As Figuras Figura 5.6 e Figura 5.7 mostram as formas modais para a placa com tratamento viscoelástico superficial e sem tratamento, respectivamente, para uma temperatura de 15°C, e para dois valores de fluxo de ar, um imediatamente antes e outro no ponto de ocorrência de flutter. Nota-se pelos resultados obtidos como são similares as formas de vibrar do primeiro e do segundo modo para ambos os sistemas, mas devido ao fato de que não há a coalescência para o sistema viscoelástico, as formas modais apresentam ligeiras diferenças, as quais não aparecem no caso do sistema sem amortecimento.

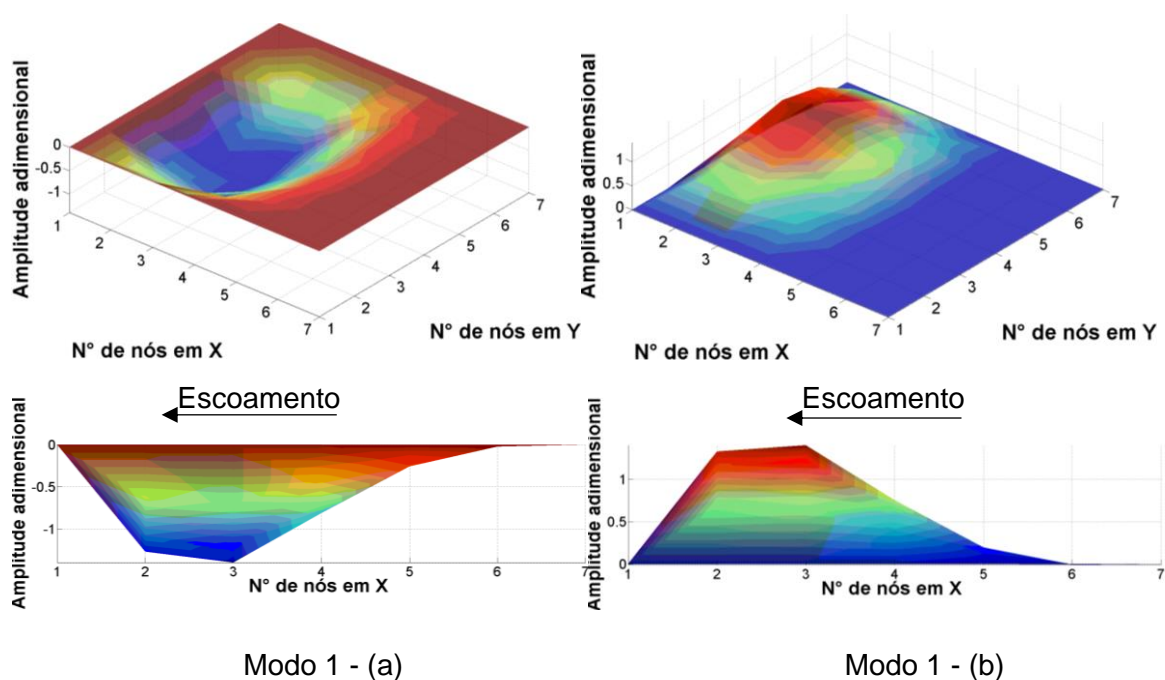


Figura 5.6 – Modos da placa tratada: (a) Velocidade do ar de 2900 km/h; (b) Velocidade crítica de 3070 km/h.

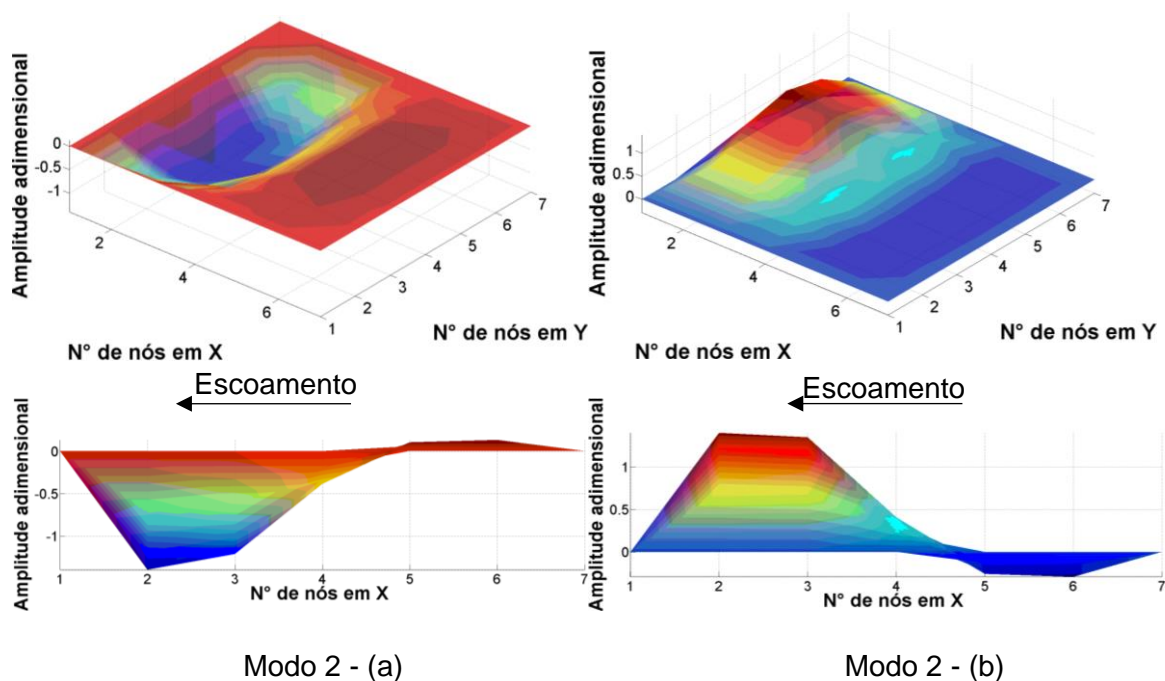


Figura 5.7 – Modos da placa tratada: (a) Velocidade do ar de 2900 km/h; (b) Velocidade crítica de 3070 km/h.

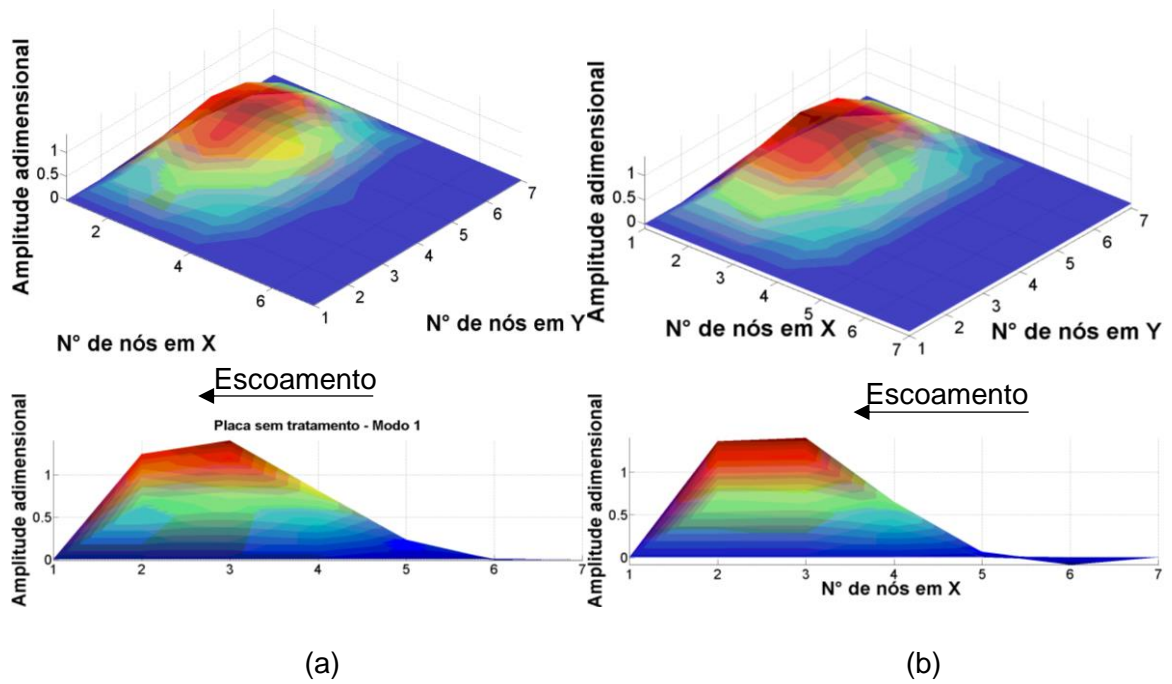


Figura 5.8 - Placa sem tratamento, primeiro modo de vibrar, (a) Velocidade do ar de 2000 km/h; (b) Velocidade crítica de 2062 km/h.

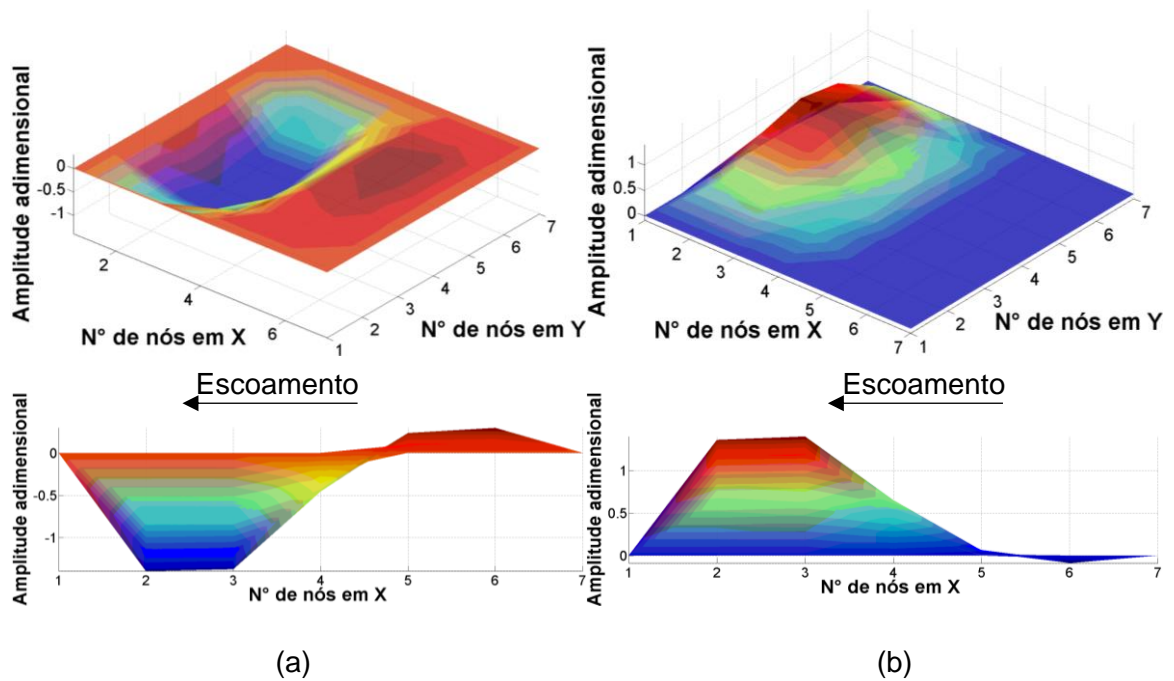


Figura 5.9 - Placa sem tratamento, segundo modo de vibrar, (a) Velocidade do ar de 2000 km/h; (b) Velocidade crítica de 2062 km/h.

### 5.3. Comparação entre os dois modelos de material viscoelástico

Nesta seção, serão comparados os resultados obtidos da análise dos dois sistemas aeroviscoelásticos modelados, conforme apresentado nas Seções 3.3 e 34 do Capítulo 3. O objetivo é identificar as vantagens e desvantagens de cada estratégia em termos da análise aerodinâmica, custo computacional de processamento.

Utilizando uma placa com propriedades detalhadas nas Tabela 5-1 e Tabela 5-2, várias análises foram realizadas para diferentes valores de temperatura do material viscoelástico para cada um dos modelos. Os resultados são mostrados nas Figura 5.10, Figura 5.11 e Figura 5.12.

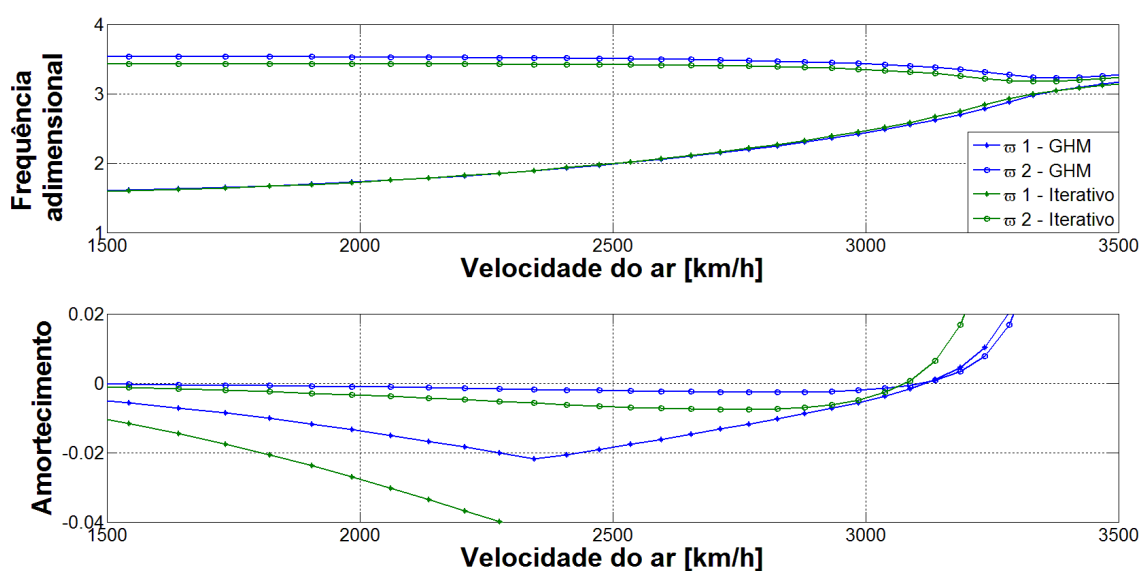


Figura 5.10 – Comparação dos resultados obtidos para os modelos GHM e módulo complexo para a temperatura de 15°C.

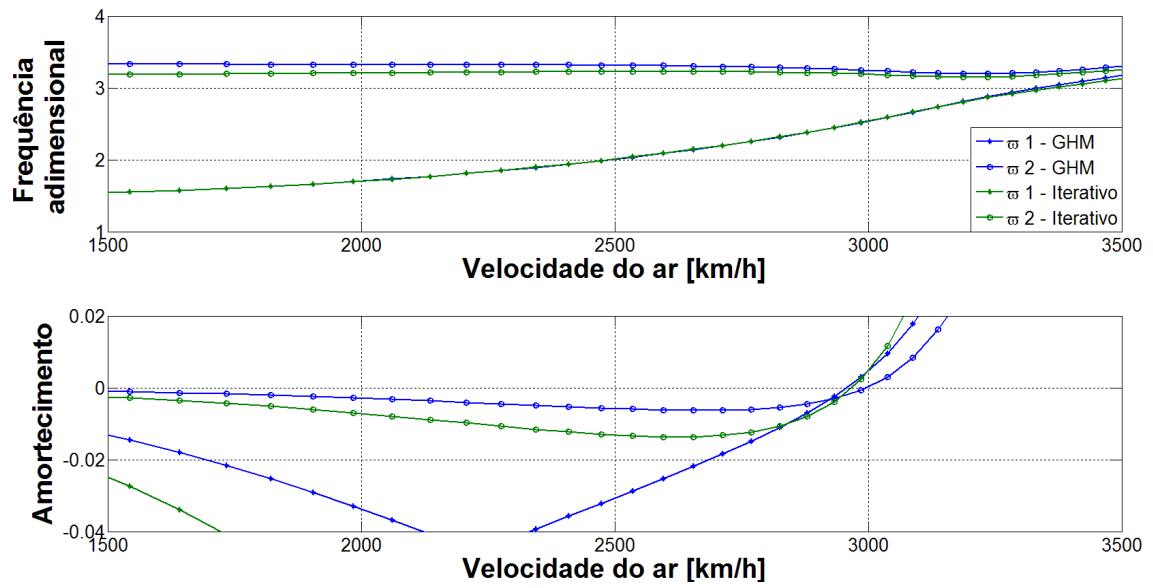


Figura 5.11 - Comparação dos resultados obtidos para os modelos GHM e módulo complexo para a temperatura de 30°C.

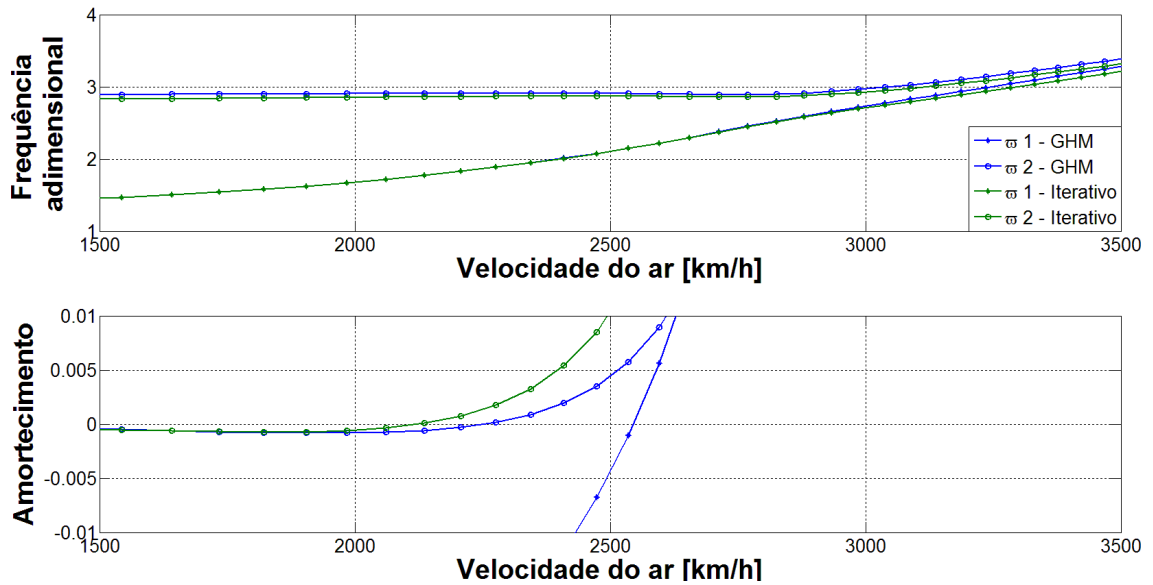


Figura 5.12 - Comparação dos resultados obtidos para os modelos GHM e módulo complexo para a temperatura de 60°C.



Para facilitar a visualização dos resultados, os mesmos são descritos na Tabela 5-4.

Tabela 5-4 – Comparação dos resultados obtidos pelos modelos do Módulo Complexo e o do Modelo GHM

Velocidade de Ocorrência de <i>flutter</i> $[km/h]$		
Temperatura $[^{\circ}C]$	Módulo Complexo	GHM
15	3077	3110
30	2966	2957
60	2123	2261

Pode-se concluir que ambas as estratégias de modelagem do comportamento dinâmico do material viscoelástico indicam a mesma região de ocorrência do fenômeno de *flutter*. Além disso, as pequenas diferenças observadas se devem, em grande parte, ao número de mini-osciladores utilizados, pois quanto maior a quantidade de parâmetros, mais difícil é a identificação dos mesmos. Esta grande quantidade de parâmetros dificulta a busca pelo mínimo global, fazendo com que o valor do erro da função objetivo, ver Eq.(3.22), seja igual a 0.7 para todas as curvas otimizadas. Finalmente há a presença de erros introduzidos desde a obtenção dos dados experimentais fornecidos pelo fabricante até o processo de *curve fitting* em si. Os ajustes de curva são mostrados no ANEXO B.

É importante remarcar que o modelo GHM faz uso de matrizes constantes de massa, rigidez e amortecimento, logo os resultados são obtidos de forma direta, não sendo necessário de um processo iterativo. Em contrapartida, a ordem do sistema é consideravelmente aumentada. Este aumento dependerá da quantidade de mini-osciladores empregado no processo de identificação dos parâmetros do modelo. Como resultado, o emprego do modelo GHM gera um alto custo computacional que pode se tornar inviável dependendo da complexidade geométrica da estrutura avaliada. Uma solução para este problema são as técnicas de redução de modelos adaptadas a sistemas viscoelásticos conforme discutido em de Lima (2015).

#### 5.4. Influência de parâmetros físicos e geométricos na velocidade de flutter

Os painéis aeronáuticos tem como premissas de projeto o peso, logo, desenvolver estruturas leves e eficientes é sempre o ideal. Portanto a avaliação da melhor configuração de placas sanduiche pode ser feita através de uma análise da sensibilidade das respostas do sistema a diversos parâmetros de projeto, como por exemplo: as espessuras da camada restringente e da camada viscoelástica, e da temperatura do material viscoelástico.

##### 5.4.1. *Espessura da camada restringente*

O primeiro parâmetro avaliado é a espessura da camada restringente. Serão avaliadas diversas espessuras, varrendo um intervalo de  $0.1 - 1.0mm$ , mantendo a espessura da camada viscoelástica de  $0.0254mm$  e temperatura de  $30^{\circ}C$ . O comportamento do sistema será sintetizado através de uma curva mostrando a espessura da camada restringente em função da velocidade de flutter.

Ao observar a curva da Figura 5.12, constata-se claramente que a velocidade crítica de flutter aumenta de maneira significativa com o aumento da espessura da camada restringente. Isto pode ser explicado pelo fato de que quando a camada restringente do tratamento viscoelástico superficial aumenta, é observado um aumento das deformações cisalhantes induzidas no núcleo viscoelástico, resultando num aumento da capacidade de amortecimento do viscoelástico. Além disso, a variação do parâmetro com a velocidade de flutter mostrou ser aproximadamente linear.

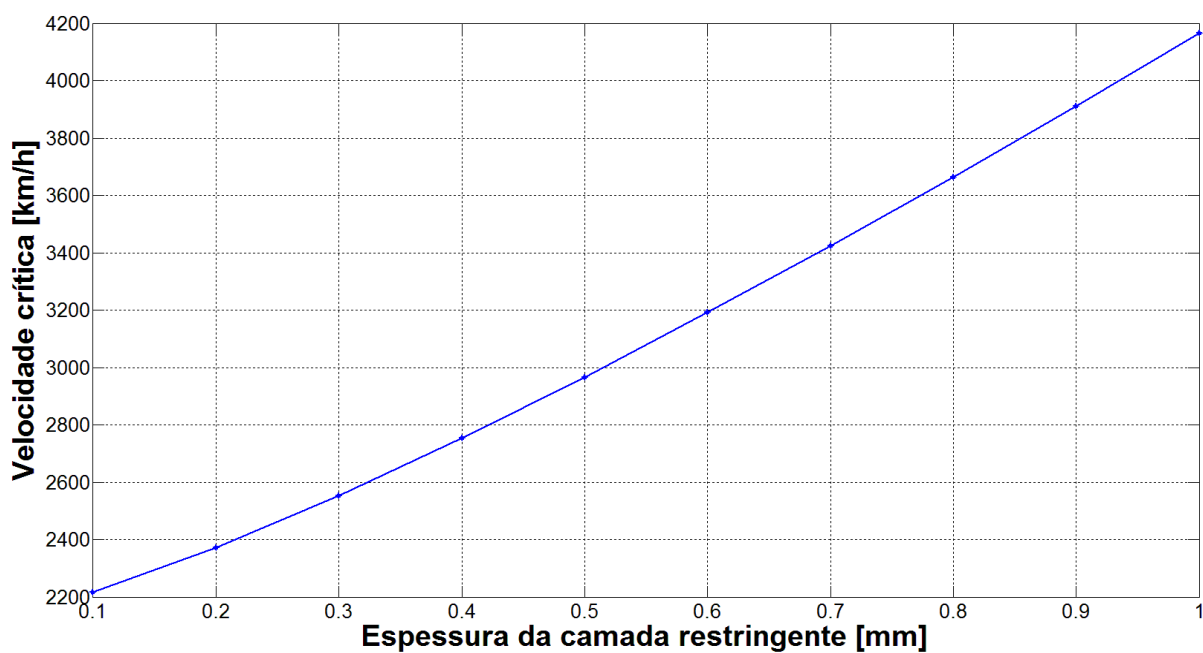


Figura 5.13 – Influência da espessura da camada restrigente no comportamento aeroelástico da placa sanduiche.

#### 5.4.2. Espessura da camada viscoelástica

De maneira semelhante, a camada de material viscoelástico é avaliada para diferentes valores de espessuras:  $0.02 - 0.10 \text{ mm}$ , mantendo-se a temperatura de  $30^{\circ}\text{C}$  e a camada restrigente de  $0.5 \text{ mm}$ . Os resultados são mostrados na figura abaixo.

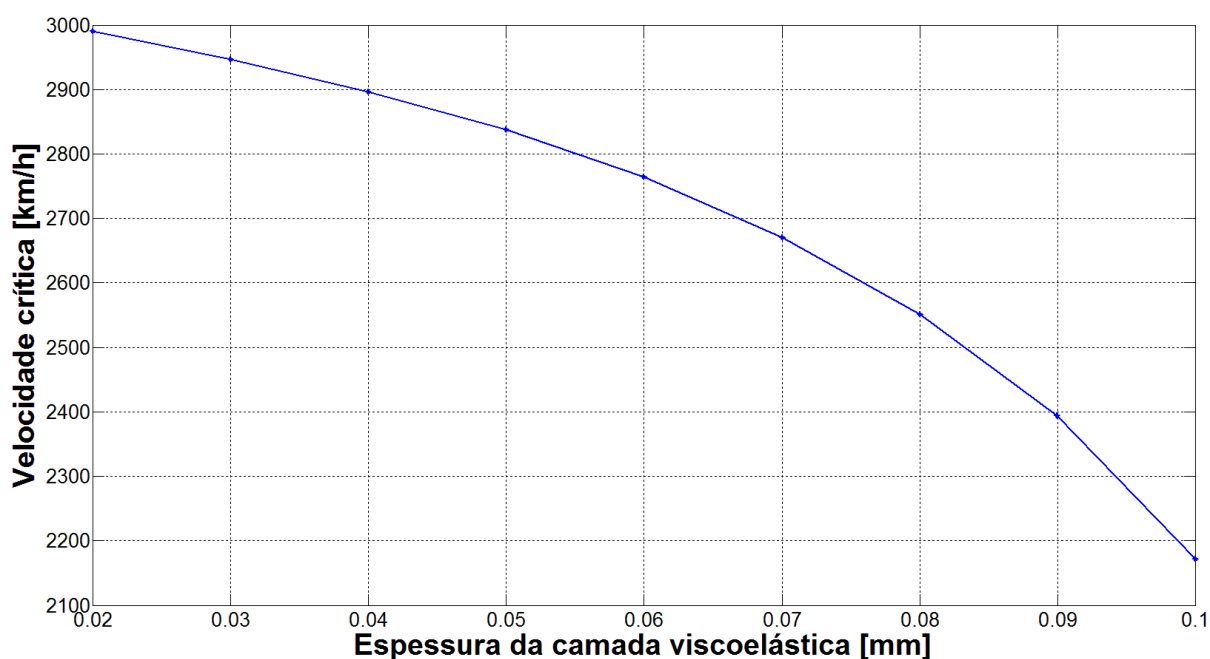


Figura 5.14 – Influência da espessura da camada viscoelástica no comportamento aeroelástico da placa sanduiche.

Da mesma forma que para a camada restrigente, a resposta aerodinâmica do sistema se mostra também bastante sensível a variações na espessura da camada viscoelástica. Entretanto, os valores de velocidade de flutter são inversamente proporcionais ao aumento de espessura do material viscoelástico. Além disso, a resposta obtida do sistema frente a tal variação se mostra não linear.

### 5.5. Influência do efeito puramente viscoelástico

Ao utilizar o tratamento viscoelástico superficial segundo a técnica da camada restrigente para retardar as instabilidades aeroelásticas de painéis aeronáuticos, a adição das camadas viscoelástica e restrigente podem afetar significativamente a massa e a rigidez da estrutura base, os quais contribuem para retardar o ponto de ocorrência de flutter, além do principal fator, o amortecimento viscoelástico. Portanto, é interessante quantificar a real contribuição unicamente do amortecimento viscoelástico. Para tanto, uma avaliação diferente é realizada através da modificação da rigidez global da placa. Ao invés de adotar a rigidez da camada viscoelástica como sendo dependente da frequência, é utilizado somente o módulo a baixa frequência do material viscoelástico,  $G_0 = 430700 \text{ Pa}$ , que é real e constante. Logo, a

rigidez global da placa toma a forma,  $K_0 = K_e + G_0 \bar{K}_v$ , e a equação do movimento pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\left[ K_0 + \lambda a - \omega^2 M \right] X = 0 \quad (5.2)$$

As curvas mostradas na Figura 5.15 mostram a coalescência das duas primeiras frequências adimensionais da placa sanduiche considerando somente o módulo a baixa frequência e da placa sanduiche com módulo complexo determinado para a temperatura de 30°C. As definições geométricas da placa são as mesmas daquelas apresentadas na. As propriedades geométricas e físicas da placa são apresentadas, respectivamente, nas Tabelas 5.1 e 5.2. Através da comparação das velocidades de *flutter* para as duas situações investigadas, pode-se perceber a influência do efeito do amortecimento viscoelástico puro. Além disso, comparando os resultados da Figura 5.15 com os resultados da placa sem tratamento mostrados na (c)

Figura 5.5, é possível quantificar o aumento na velocidade de *flutter* que pode ser obtido pelo acréscimo de massa e rigidez devido ao tratamento viscoelástico superficial.

O sistema que representa o comportamento estático do material viscoelástico apresentou uma velocidade de *flutter* de 2595 km/h. Já esta mesma placa sem qualquer adição de material, apresenta uma velocidade de *flutter* de 2062 km/h. Finalmente após aplicar o tratamento superficial e adotando a temperatura do material viscoelástico igual a 30°C, a velocidade de *flutter* aumenta para 2966 km/h. Quantitativamente o ganho proporcionado pelo amortecimento foi de 12,5%.

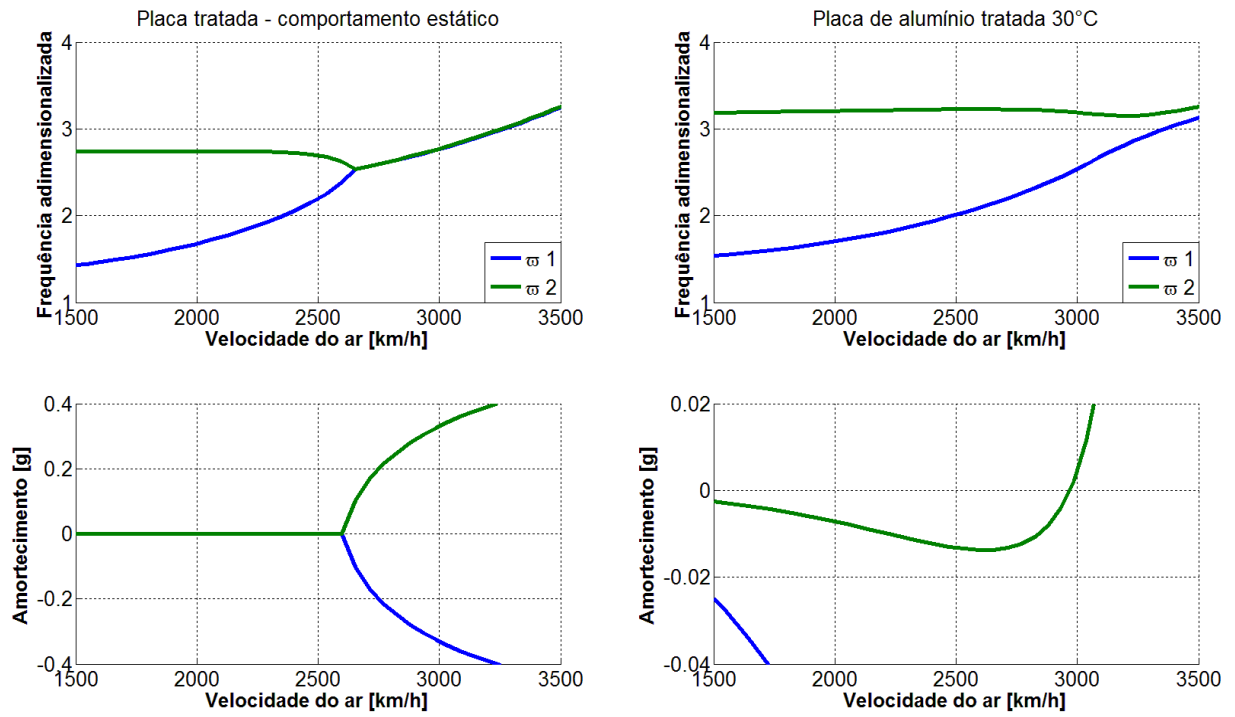


Figura 5.15 – Quantificação do efeito do amortecimento viscoelástico no sistema aeroelástico.

# **CAPÍTULO VI**

## **Conclusões**

### **6.1. Resumo e avaliação**

Neste trabalho de dissertação representa uma contribuição aos desenvolvimentos recentes com relação ao estudo numérico-computacional da viabilidade da aplicação de tratamentos viscoelásticos superficiais a sistemas dinâmicos submetidos ao fenômeno do flutter para o controle passivo do mesmo. Além disso, este trabalho é o resultado de uma parceria em pesquisa entre o Laboratório de Mecânica de Estruturas (LMEst), da Faculdade de Engenharia Mecânica (FEMEC-UFU), e o Laboratório de Estruturas do Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA).

A primeira parte do trabalho é dedicada à descrição de algumas contribuições mais recentes acerca do emprego de técnicas de controle do fenômeno do flutter em painéis aeronáuticos metálicos e em materiais compósitos submetidos condições subsônicas, e as vantagens em se utilizar os materiais viscoelásticos para o controle passivo de vibrações e sua viabilidade para retardar as velocidades de flutter de sistemas dinâmicos. Em seguida, foi descrita de forma sucinta a modelagem por elementos finitos de uma placa sanduiche composta por três camadas fazendo uso da teoria de Kirchhoff para as camadas metálicas e da teoria de Mindlin para o núcleo viscoelástico. Neste contexto, foi empregado os Princípios da Equivalência Elástico-Viscoelástico e da Correspondência Frequência-Temperatura para a modelagem da subestrutura viscoelástica e consequente introdução no modelo do comportamento dinâmico do material viscoelástico via emprego do modelo do módulo complexo.

Na sequência, foi apresentado o desenvolvimento do modelo GHM como outra opção bastante interessante para representar o comportamento dinâmico do material viscoelástico. Neste contexto, foi apresentado todo o desenvolvimento em elementos finitos de construção das matrizes globais aumentadas de massa, rigidez e amortecimento viscoso do sistema aerodinâmico através da consideração das variáveis internas dissipativas referentes aos min-osciladores. Como resultado, foi gerado um sistema acoplado de equações do movimento exigindo a transformação *a posteriori* para o espaço de estado para a posterior resolução do problema de autovalores e obtenção das velocidades de flutter. Por fim, foi apresentado também a técnica de decomposição espectral das matrizes relativas à subestrutura viscoelástica com o objetivo de eliminar os autovalores nulos e seus respectivos autovetores para a redução do número de coordenadas dissipativas.

Uma vez definidos os modelos de elementos finitos do sistema dinâmico e os modelos viscoelásticos, na sequência foi apresentado o modelo de carregamento aerodinâmico utilizado neste trabalho que foi baseado na Teoria do Pistão em sua forma mais simples, o Modelo-Quase Estático de Ackeret. Este modelo utiliza o campo de deslocamento transversal para o cálculo do trabalho dos esforços aerodinâmicos e posterior determinação da matriz de rigidez aerodinâmica a ser inserida na equação do movimento do sistema viscoelástico.

Os resultados das simulações numéricas apresentadas na sequência permitiram concluir acerca da eficiência do tratamento viscoelástico superficial em retardar as velocidades de flutter de sistemas dinâmicos. Além disso, foi investigada a influência de parâmetros físicos e geométricos na eficiência do tratamento viscoelástico, além da comparação direta com os resultados obtidos para as duas estratégias de modelagem do comportamento dinâmico do material viscoelástico. Neste sentido, as principais conclusões foram:

- i) A técnica de tratamento passivo de vibração que faz uso de camadas superficiais de material viscoelástico se mostrou bastante eficiente na supressão do flutter de placas finas;
- ii) Os dois modelos utilizados para representar o comportamento dinâmico dos materiais viscoelásticos, indicaram valores coerentes de ocorrência de flutter, demonstrando que ambos podem ser utilizados para modelar este tipo de problema. Além disso, o estudo permitiu observar resultados da comparação dos dois métodos no que tange ao custo computacional e dificuldade de modelagem numérico-computacional. O modelo do módulo complexo, o qual faz uso de um



procedimento iterativo para solução do problema de autovalores não-linear, se mostrou mais rápido na realização dos cálculos. Utilizando uma máquina com as seguintes configurações: Intel® Core™ i7-4500U CPU @ 1.80GHz, 16.0 GB de memória RAM; o tempo médio de processamento gasto pelo método do módulo complexo foi de 116.66 segundos e o método GHM foi de 252.77 segundos. Entretanto, o modelo GHM, apesar de ter sua ordem aumentada por ser tratado no espaço de estado e fazer uso de variáveis internas dissipativas, não requer um procedimento iterativo para solução do problema de autovalores, sendo a solução determinada de forma direta.

- iii) Ficou clara a sensibilidade do material viscoelástico frente a variações de temperatura e frequência de excitação. Deste ponto de vista, esta grande sensibilidade pode se tornar revés quando do projeto de uma aeronave supersônica, uma vez que as estruturas destes veículos estão sujeitas a intensas variações de temperatura em seu envelope de voo. Segundo Starke, Cornélia et al. (1996) estas temperaturas podem variar da temperatura ambiente até valores entre 100°C e 200°C. Maiores detalhes podem ser encontrados na referência (Starke, et al., 1996);
- iv) Os parâmetros estruturais avaliados foram as espessuras das camadas restringente e viscoelástica. Primeiramente, conclui-se que o aumento da espessura da camada restringente aumenta a eficiência de forma linear, quase dobrando a velocidade de flutter com o acréscimo total de 0.9 mm na espessura. Já o aumento da camada viscoelástica ocasionou a diminuição da velocidade de flutter, ou seja, à medida que a espessura da camada viscoelástica aumenta, a velocidade crítica diminui. Além disso, o comportamento do sistema se mostrou não linear a esta variação;
- v) Finalmente, as avaliações terminam com a contribuição do amortecimento viscoelástico na atenuação da velocidade de flutter. Conclui-se que além dos efeitos de rigidez e massa inseridos pelas camadas viscoelástica e restringente, o amortecimento viscoelástico puro tem grande capacidade de retardar a velocidade crítica de flutter.

## 6.2. Sugestões de trabalhos futuros

Os trabalhos realizados nesta dissertação de mestrado proporcionaram a idealização de inúmeros outros trabalhos relacionados, que podem dar continuidade ao já realizado. Alguns dos principais temas são listados abaixo:

- Melhoria do modelo em elementos finitos do painel introduzindo não linearidades geométricas, curvaturas que permitirão descrever o movimento de painéis finos em regime transiente durante e depois do flutter;
- Introduzir no modelo de carregamento aerodinâmico e também nas deformações do painel o efeito de auto-aquecimento do material viscoelástico, aproximando-o ainda mais de um modelo real;
- Substituir o modelo de placa sanduiche que utiliza material elástico isotrópico, por modelos de materiais compósitos;
- Aplicação de técnicas de redução de modelos no intuito de simular estruturas mais complexas de engenharia;
- Introdução de incertezas paramétricas com vistas à obtenção dos envelopes/regiões favoráveis das soluções em termos das velocidades de flutter;
- Melhorar o modelo aerodinâmico introduzindo amortecimento aerodinâmico; aplicar a Teoria do Pistão não linear; considerar os efeitos aquecimento estrutural ligado ao escoamento supersônico incompressível.

## Bibliografia

- Almeida, A., Donadon, M., & de Almeida, S. (2012). The effect of piezoelectrically induced stress stiffening on the aeroelastic stability of curved composite panel. *Composite Structures*.
- Ashley, H., & Zartarian, G. (1956). Piston Theory - A new Aerodynamic Tool for the Aeroelastician. *Twenty-Fourth Annual Meeting, IAS*, (pp. 23-26). New York.
- Assan, A. (2003). *Método dos Elementos Finitos: Primeiros Passos* (2° ed.). Campinas: Unicamp.
- Bagley, R., & Torvik, P. (1983). Fractional Calculus - A Different Approach to the Analysis of Viscoelastically Damped Structures. *AIAA Journal*, 21, 741-748.
- Becker, R. (1992, Abril). Structures and Dynamics Design Considerations. *AIAA Dynamics Specialists Conference*.
- Bismarck-Nasr, M. (1999). *Structural Dynamics in Aeronautical Engineering*. São José dos Campos.
- Callister, W. J., & Rethwisch, D. (2009). *Materials Science and Engineering an Introduction* (9 ed., Vol. 2). Utah: John Wiley & Sons. Inc.
- Christensen, R. (1982). *Theory of Viscoelasticity: An introduction* (2nd edition ed.). New York: Academic Press.
- de Lima, A. M., Stoppa, M. H., & Rade, D. A. (2003). Finite Element Modelling and Experimental Characterization of Beams and Plates Treated with Constraining Damping Layers. *Proceedings of the 17th International Conference of Mechanical Engineering*. São Paulo, Brazil.

- de Lima, A., Bouhhadi, N., Rade, D., & Belonsi, M. (2015). A time-domain finite element model reduction method for viscoelastic linear and nonlinear systems. *Latin American Journal of Solids and Structures*.
- de Lima, A., da Silva, A., Rade, D., & Bouhaddi, N. (2010). Component mode synthesis combining ribust enriched Ritz approach for viscoelastically damped structures. *Engeneering Structures*, 32, 1479-1488.
- de Lima, A., Rade, D., & Bouhaddi, N. (2007). *Modelagem e Otimização Robusta de Sistemas Mecânicos em Presença de Amortecimento Viscoelástico*. Universidade Federal de Uberlândia - Faculdade de Engenharia Mecânica, Uberlândia.
- de Lima, A., Rade, D., & Faria, W. (2009). Sensitivity Analysis of Frequency Response Functions of Composite Sandwich Plates Containing Viscoelastic Layers. *Composite Structures*, 92, 364-376.
- de Lima, A., Stopa, M., & Rade, D. (2003). Finite Elment Modeling of Structures Incorporating Viscoelastic Materials. *Proceedings of IMACXXI - Conference and Exposition on Structural Dynamics*.
- de Lima, A., Stoppa, M., Rade, D., & Steffen Jr., V. (2006). Sensitivity Analysis of Viscoelastic Structures. *Sock and Vibration*, 13, 545-558.
- Dowell, E. (1975). *Aeroelasticity of plates and shells*. Princetown: 1975 Noordhoff International Publishing.
- Drake, M., & Soovere, J. (1984). A design guide for damping of aerospace structures. *Proceedings of vibration damping workshop*.
- Dungan, T. (2015). [www.v2rocket.com](http://www.v2rocket.com). Retrieved 01 05, 2014, from V2ROCKET.COM.
- Friswell, M., Inman, D., & Margaretha, J. (1997). On the Realisation of GHM Models in Viscoelasticity. *Journal of Intelligent Material System and Structures*, 8(11), 986-993.
- Gibson, W., Smith, C., & McTavish, D. (1995). Implementation of the GHM Method for Viscoelastic Materials using MATLAB and NASTRAN. *Smart Structures & Materials*, 312-323.
- Golla, D., & Hughes, P. (1985). Dynamics of Viscoelastic Structures - A Time Domain, Finite Element Formulation. *Journal of Applied Mechanics*, 52, 897-906.
- Hodges, D., & Pierce, G. (2002). *Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity*. Cambridge.

- Jones, R. (1999). *Mechanics of Composite Materials* (2° ed.). Taylor & Francis.
- Jordan, P. (1956). The Physical Nature of Panel Flutter. *Aero Digest*, 34-38.
- Khatua, T. P., & Cheung, Y. K. (1973). Bending and Vibration of Multilayer Sandwich Beams and Plates. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 6, 11-24.
- Kouchakzadeh, M., Rasekh, M., & Haddadpour, H. (2010). Panel flutter analysis of general laminated composite plates. *Composite Structures*, 2906 - 2915.
- Krumhaar, H. (1963). *The Accuracy of Applying Linear Piston Theory to Cylindrical Shells*. California Institute of Technology, Pasadena, California.
- Kuo, S.-Y. (2011). Flutter of rectangular composite plates with variable fiber pacing. *Composite Structures*, 93, 2533-2540.
- Lesieutre, G., & Bianchini, E. (1995). Time Domain Modeling of Linear Viscoelasticity Using Anelastic Displacement Fields. pp. 424-430.
- Lighthill, M. (1953, Junho). Oscillating Airfoils at High Mach Number. *Journal of Aeronautical Sciences*, 20, 402-406.
- Martin, L. (2011). *Tese: A Novel Material Modulus Function for Modeling Viscoelastic Materials*. Faculty of the Virginia Polytechnic Institute, Blacksburg, Virginia.
- McTavish, D., & Hughes, P. (1993). Modeling of Linear Viscoelastic Space Structures. *Journal of Vibration and Acoustics*, 115, 103-115.
- Mead, D. (1998). Passive Vibration Control. pp.554.
- Meunier, M., & Shenoi, R. (2001). Dynamic analysis of composite sandwich plates with damping modelled using high-order shear deformation theory. *Composite Structures*, 54, 243-254.
- Mindlin, R. (1951, Novembro 6). Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motion of Isotropic, Elastic Plates. *ASME - Journal of Applied Mechanics*, 18, 31-38.
- Nam, C., Kim, Y., & Weisshaar, T. (2001). *Computational Aids in Aeroservoelastic Analysis Using MATLAB*.
- Nashif, A., Jones, D., & Handerson, J. (1985). Vibration Damping. *New York: John Wiley & Sons*.
- Pegado, H. d. (2003). *Método de Perturbações no Estudo de Não-linearidades na Aeroelasticidade de Painéis em Regime Supersônico*. São José dos Campos.

- Prakash, T., & Ganapathi, M. (2006). Supersonic Flutter Characteristics of Functionally Graded Flat Panels Including Thermal Effects. *Composite Structures*, 72, 10-18.
- Shin, W.-H., Oh, I.-K., Han, J.-H., & Lee, I. (2006). Aeroelastic Characteristics of Cylindrical Hybrid Composite Panels with Viscoelastic Damping Treatments. *Journal of Sound and Vibration*, 296, 99-116.
- Singha, M., & Ganapathi, M. (2005). A Parametric Study on Supersonic Flutter Behaviour of Laminated Composite Skew Flat Panels. *Composite Structures*, 69, 55-63.
- Sohn, K.-J., & Kim, J.-H. (2009). Nonlinear Thermal Flutter of Functionally Graded Panels Under a Supersonic Flow. *Composite Structures*, 88, 380-387.
- Song, Z.-G., & Li, F.-M. (2011). Active aeroelastic flutter analysis and vibration control of supersonic composite laminated plate. *Composite Structures*, 94, 702-713.
- Starke, E., Cornelia, R., Greszczuk, L., Karabin, L., Lewandowski, J., Saxena, A., . . . Ward, D. (1996). *Accelerated Aging of Materials and Structures - The Effects of Long-Term Elevated-Temperature Exposure*. National Academy Press, Washington, D.C.
- Timoshenko, S., & Goodier, J. (1951). *Theory of Elasticity*. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc.
- Wright, J., & Cooper, J. (2007). *Introduction to Aircraft Aeroelasticity and Loads*. Manchester: John Wiley & Sons, Ltd.
- Zhao, H., & Cao, D. (2013). A study on the aero-elastic flutter of stiffened laminated composite panel in the supersonic flow. *Journal of Sound and Vibration*, 332, 4668-4679.

## ANEXO A

### Discretização por elementos finitos

Os coeficientes da matriz  $N$  da Eq.(2.32):  $N_{li}$ ,  $N_{iw}$ ,  $N_{i\theta_x}$ ,  $N_{i\theta_y}$ ,  $N_{iw}^x$ ,  $N_{i\theta_x}^x$ ,  $N_{i\theta_y}^x$ ,  $N_{i\theta_x}^y$  e  $N_{i\theta_y}^y$ , onde  $i = 1, 2, 3, 4$ , são dados pelas expressões:

$$N_{11} = N_{21} = N_{31} = N_{41} = \frac{(y-b)(x-a)}{ab};$$

$$N_{12} = N_{22} = N_{32} = N_{42} = \frac{x(b-y)}{ab};$$

$$N_{13} = N_{23} = N_{33} = N_{43} = \frac{xy}{ab};$$

$$N_{14} = N_{24} = N_{34} = N_{44} = \frac{y(a-x)}{ab};$$

$$N_{1w} = \frac{(b-y)(x-a)(2x^2b^2 - xab^2 + 2y^2a^2 - ya^2b - a^2b^2)}{a^3b^3};$$

$$N_{2w} = \frac{x(y-b)(2y^2a^2 - ya^2b - 3xab^2 + 2x^2b^2)}{a^3b^3};$$

$$N_{3w} = \frac{-xy(a^2b^2 - 3xab^2 - 3ya^2b + 2x^2b^2 + 2y^2a^2)}{a^3b^3};$$

$$N_{4w} = \frac{y(x-a)(2x^2b^2 - xab^2 - 3ya^2b + 2y^2a^2)}{a^3b^3};$$

$$N_{1\theta_x} = \frac{x(x-a)^2(b-y)}{a^2b}; \quad N_{2\theta_x} = \frac{x^2(y-b)(x-a)}{a^2b};$$

$$N_{3\theta_x} = \frac{x^2y(x-a)}{a^2b}; \quad N_{4\theta_x} = \frac{xy(x-a)^2}{a^2b};$$

$$N_{1\theta_y} = \frac{y(y-b)^2(a-x)}{ab^2}; \quad N_{2\theta_y} = \frac{xy(y-b)^2}{ab^2};$$

$$N_{3\theta_y} = \frac{x(y-b)y^2}{ab^2}; \quad N_{4\theta_y} = \frac{(y-b)(a-x)y^2}{ab^2};$$

$$N_{1w}^x = \frac{(b-y)(2y^2a^2 - ya^2b - 6xab^2 + 6x^2b^2)}{a^3b^3};$$

$$N_{2w}^x = \frac{(y-b)(2y^2a^2 - ya^2b - 6xab^2 + 6x^2b^2)}{a^3b^3};$$

$$N_{3w}^x = \frac{-y(a^2b^2 - 6xab^2 - 3ya^2b + 6x^2b^2 + 2y^2a^2)}{a^3b^3};$$

$$N_{4w}^x = \frac{y(a^2b^2 - 6xab^2 - 3ya^2b + 6x^2b^2 + 2y^2a^2)}{a^3b^3};$$

$$N_{1\theta_x}^x = \frac{(3x-a)(a-x)(y-b)}{a^2b}; \quad N_{2\theta_x}^x = \frac{x(y-b)(2a-3x)(y-b)}{a^2b};$$

$$N_{3\theta_x}^x = \frac{xy(3x-2a)(y-b)}{a^2b}; \quad N_{4\theta_x}^x = \frac{y(3x-a)(x-a)}{a^2b};$$

$$N_{1\theta_y}^x = \frac{-y(y-b)^2}{ab^2}; \quad N_{2\theta_y}^x = \frac{y(y-b)^2}{ab^2}; \quad N_{3\theta_y}^x = \frac{(y-b)y^2}{ab^2}; \quad N_{4\theta_y}^x = \frac{(b-y)y^2}{ab^2};$$

$$N_{1w}^y = \frac{(a-x)(2x^2b^2 - xab^2 + 6y^2a^2 - 6ya^2b)}{a^3b^3};$$



$$N_{2w}^y = \frac{x(a^2b^2 - 3xab^2 - 6ya^2b + 2x^2b^2 + 6y^2a^2)}{a^3b^3};$$

$$N_{3w}^y = \frac{-x(a^2b^2 - 3xab^2 - 6ya^2b + 2x^2b^2 + 6y^2a^2)}{a^3b^3};$$

$$N_{4w}^y = \frac{(x-a)(2x^2b^2 - xab^2 + 6ya^2b - 6ya^2b)}{a^3b^3};$$

$$N_{1\theta_x}^y = \frac{-x(x-a)^2}{a^2b}; N_{2\theta_x}^y = \frac{-x^2(a-x)}{a^2b}; N_{3\theta_x}^y = \frac{(x-a)x^2}{a^2b}; N_{4\theta_x}^y = \frac{x(x-a)^2}{a^2b};$$

$$N_{1\theta_y}^y = \frac{(3y-b)(y-b)(a-x)}{ab^2}; N_{2\theta_y}^y = \frac{x(3y-b)(y-b)}{ab^2};$$

$$N_{3\theta_y}^y = \frac{xy(3y-2b)}{ab^2}; N_{4\theta_y}^y = \frac{y(2b-3y)(x-a)}{ab^2};$$

### Matrizes elementares de rigidez e massa de um elemento finito de placa sanduiche três camadas

A partir da relação tensão-deformação mostrada na Eq. (2.27), as matrizes de deformação,  $\boldsymbol{\varepsilon}_e^{(i)}$ , com  $i = 1, 2$ , relativas às camadas elásticas, podem ser parametrizadas segundo o desenvolvimento apresentado.

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_x^{(i)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}_y^{(i)} \\ \gamma_{xy}^{(i)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_i}{\partial x} \\ \frac{\partial v_i}{\partial y} \\ \frac{\partial u_i}{\partial y} + \frac{\partial v_i}{\partial x} \end{Bmatrix} + z_i \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.1})$$

A Eq. (A.1) pode ser reescrita em forma matricial originando os termos,  $\mathbf{D}_f$  e  $\mathbf{D}_m$ , as quais são matrizes de operadores diferenciais que representam os efeitos de flexão e membrana:

$$\mathbf{D}_f = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_m = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \partial^2/\partial x^2 \\ 0 & 0 & \partial^2/\partial y^2 \\ 0 & 0 & 2\partial^2/\partial x\partial y \end{bmatrix}$$

Desta maneira a Eq. (A.1) toma a seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(i)} = \mathbf{D}_f^{(i)} \boldsymbol{\delta} + z_i \mathbf{D}_m^{(i)} \boldsymbol{\delta} \quad (\text{A.2})$$

onde  $\boldsymbol{\delta} = [u_i \quad v_i \quad w_i]$ .

Substituindo o resultado obtido em (A.2) na Eq. (2.36), a energia de deformação das camadas elásticas da placa é determinada.

$$U^{(i)} = \frac{1}{2} \int_V \left( \mathbf{D}_m^{(i)} + z_i \mathbf{D}_f^{(i)} \right)^T \boldsymbol{\delta}^T E^{(i)} \left( \mathbf{D}_m^{(i)} + z_i \mathbf{D}_f^{(i)} \right) \boldsymbol{\delta} dV \quad (\text{A.3})$$

Após a multiplicação dentro da integral, os termos referentes às contribuição de flexão, flexão-membrana e membrana são claramente evidenciados:

$$U^{(i)} = \frac{1}{2} \int_V \left[ \left( \mathbf{D}_f^{(i)T} E^{(i)} \mathbf{D}_f^{(i)} \right) + z_i \left( \mathbf{D}_f^{(i)T} E^{(i)} \mathbf{D}_m^{(i)} + \mathbf{D}_m^{(i)T} E^{(i)} \mathbf{D}_f^{(i)} \right) + z_i^2 \left( \mathbf{D}_m^{(i)T} E^{(i)} \mathbf{D}_m^{(i)} \right) \right] dV \quad (\text{A.4})$$

onde  $\mathbf{D}_{ff}^{(i)} = \mathbf{D}_f^{(i)T} E^{(i)} \mathbf{D}_f^{(i)}$ ,  $\mathbf{D}_{fm}^{(i)} = \left( \mathbf{D}_f^{(i)T} E^{(i)} \mathbf{D}_m^{(i)} + \mathbf{D}_m^{(i)T} E^{(i)} \mathbf{D}_f^{(i)} \right)$ ,  $\mathbf{D}_{mm}^{(i)} = \left( \mathbf{D}_m^{(i)T} E^{(i)} \mathbf{D}_m^{(i)} \right)$ .

Desta maneira, a rigidez elementar pode ser determinada de tal maneira que os efeitos de flexão e membrana sejam separados.

$$\mathbf{K}_e^{(e)} = E^{(i)} h^{(i)} \mathbf{K}_{ff}^{(i)} + \frac{E^{(i)} h^{(i)^2}}{2} \mathbf{K}_{fm}^{(i)} + \frac{E^{(i)} h^{(i)^3}}{3} \mathbf{K}_{mm}^{(i)} \quad (\text{A.5})$$

onde  $\mathbf{K}_{ff}^{(i)} = \int \int_{y \ x} \mathbf{D}_{ff}^{(i)} dx dy$ ,  $\mathbf{K}_{fm}^{(i)} = \int \int_{y \ x} \mathbf{D}_{fm}^{(i)} dx dy$ ,  $\mathbf{K}_{mm}^{(i)} = \int \int_{y \ x} \mathbf{D}_{mm}^{(i)} dx dy$ .

Para determinar as matrizes de rigidez e massa da camada viscoelástica, as deformações cisalhantes são consideradas, afim de melhor representar a capacidade dissipativas do material. Logo, a partir das relações cinemáticas descritas na Seção 2.1 para a camada viscoelástica e considerando as relações tensão-deformação da Eq. (2.27), o campo de deformação é escrito:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(2)} \\ \varepsilon_y^{(2)} \\ \gamma_{xy}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \\ \gamma_{yz}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_{(2)}}{\partial x} \\ \frac{\partial v_{(2)}}{\partial y} \\ \frac{\partial u_{(2)}}{\partial y} + \frac{\partial v_{(2)}}{\partial x} \\ \frac{\partial u_{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v_{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Da Eq.(A.6), os termos  $\partial w / \partial x$  e  $\partial w / \partial y$  são nulos, pois deformações na direção  $z$  são muito pequenas. Após expandir a (A.6), o campo de deformações pode ser escrito da seguinte maneira.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \boldsymbol{\varepsilon}_m^{(2)} + \boldsymbol{\varepsilon}_f^{(2)} + \boldsymbol{\varepsilon}_c^{(2)} \quad (\text{A.7})$$

onde os índices  $m, f$  e  $c$  representam as componentes de deformação devido aos efeitos de membrana, flexão e cisalhamento, respectivamente. E os termos  $\boldsymbol{\varepsilon}_m^{(2)}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_f^{(2)}$  e  $+\boldsymbol{\varepsilon}_c^{(2)}$  são:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_m^{(2)} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_j}{\partial x} \\ \frac{\partial v_j}{\partial y} \\ \frac{\partial u_j}{\partial y} + \frac{\partial v_j}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon}_f^{(2)} = \frac{z_j}{h_j} \begin{Bmatrix} \frac{\partial(u_3 - u_1)}{\partial x} + \frac{d_1}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \frac{\partial(v_3 - v_1)}{\partial y} + \frac{d_1}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \frac{\partial(u_3 - u_1)}{\partial y} + \frac{\partial(v_3 - v_1)}{\partial x} + d_1 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_c^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_3 - u_1 + \frac{d_1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ v_3 - v_1 + \frac{d_1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{Bmatrix}.$$

Finalmente, a matriz de rigidez da camada viscoelástica é determinada substituindo a relação (A.7) na Eq. (2.36) para  $k = 2$ .

$$\mathbf{K}^{(2)} = \int_V \left( \boldsymbol{\varepsilon}_m^{(2)} + \boldsymbol{\varepsilon}_f^{(2)} + \boldsymbol{\varepsilon}_c^{(2)} \right)^T \mathbf{E}^{(2)} \left( \boldsymbol{\varepsilon}_m^{(2)} + \boldsymbol{\varepsilon}_f^{(2)} + \boldsymbol{\varepsilon}_c^{(2)} \right) dV \quad (\text{A.8})$$

onde, após a multiplicação distributiva dos termos, são obtidos:

$$\mathbf{K}_{mm}^{(2)} = \int_V \left( \boldsymbol{\varepsilon}_m^{(2)} E^{(2)} \boldsymbol{\varepsilon}_m^{(2)} \right) dV; \quad \mathbf{K}_{ff}^{(2)} = \int_V \left( \boldsymbol{\varepsilon}_f^{(2)} E^{(2)} \boldsymbol{\varepsilon}_f^{(2)} \right) dV; \quad \mathbf{K}_{cc}^{(2)} = \int_V \left( \boldsymbol{\varepsilon}_c^{(2)} E^{(2)} \boldsymbol{\varepsilon}_c^{(2)} \right) dV;$$

$$\mathbf{K}_{mf}^{(2)} = \int_V \left( \boldsymbol{\varepsilon}_m^{(2)} E^{(2)} \boldsymbol{\varepsilon}_f^{(2)} \right) dV; \quad \mathbf{K}_{fm}^{(2)} = \int_V \left( \boldsymbol{\varepsilon}_f^{(2)} E^{(2)} \boldsymbol{\varepsilon}_m^{(2)} \right) dV; \quad \mathbf{K}_{mc}^{(2)} = \int_V \left( \boldsymbol{\varepsilon}_m^{(2)} E^{(2)} \boldsymbol{\varepsilon}_c^{(2)} \right) dV;$$

$$\mathbf{K}_{cm}^{(2)} = \int_V \left( \boldsymbol{\varepsilon}_c^{(2)} E^{(2)} \boldsymbol{\varepsilon}_m^{(2)} \right) dV; \quad \mathbf{K}_{cf}^{(2)} = \int_V \left( \boldsymbol{\varepsilon}_c^{(2)} E^{(2)} \boldsymbol{\varepsilon}_f^{(2)} \right) dV; \quad \mathbf{K}_{fc}^{(2)} = \int_V \left( \boldsymbol{\varepsilon}_f^{(2)} E^{(2)} \boldsymbol{\varepsilon}_c^{(2)} \right) dV;$$

Portanto, pode-se dizer que a matriz de rigidez da camada viscoelástica vale:

$$\mathbf{K}^{(2)} = \mathbf{K}_{mm}^{(2)} + \mathbf{K}_{ff}^{(2)} + \mathbf{K}_{cc}^{(2)} + 2\mathbf{K}_{mf}^{(2)} + 2\mathbf{K}_{mc}^{(2)} + 2\mathbf{K}_{cf}^{(2)} \quad (\text{A.9})$$

### Parametrização da camada viscoelástica

A parametrização do modelo pode ser feita fatorando termos comuns das matrizes como mostrado a seguir para o campo de deformações:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{(2)} \\ \varepsilon_y^{(2)} \\ \gamma_{xy}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \\ \gamma_{yz}^{(2)} \end{Bmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \frac{\partial(u_1 + u_3)}{\partial x} \\ \frac{\partial(v_1 + v_3)}{\partial y} \\ \frac{\partial(u_1 + u_3)}{\partial y} + \frac{\partial(v_1 + v_3)}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + d \begin{Bmatrix} \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \frac{1}{4} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \dots \\ &\dots + \frac{z_2}{h_2} \begin{Bmatrix} \frac{\partial(u_3 - u_1)}{\partial x} \\ \frac{\partial(v_3 - v_1)}{\partial y} \\ \frac{\partial(u_3 - u_1)}{\partial y} + \frac{\partial(v_3 - v_1)}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{z_2 d_1}{h_2} \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \dots \\ &\dots + \frac{1}{h_2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_3 - u_1 \\ v_3 - v_1 \end{Bmatrix} + \frac{d_1}{h_2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

onde  $d = h_3 - h_1$ ,  $d_1 = h_3 + h_1$ . Desta maneira, obtêm-se o campo de deformações para a camada viscoelástica parametrizado.

$$\varepsilon^{(2)} = \frac{1}{2} \mathbf{D}_0 + d \mathbf{D}_1 + \frac{z_2}{h_2} \mathbf{D}_2 + \frac{d_1 z_2}{h_2} \mathbf{D}_3 + \frac{1}{h_2} \mathbf{D}_4 + \frac{d_1}{2h_2} \mathbf{D}_5 \quad (\text{A.11})$$

De maneira análoga, é feita a parametrização das matrizes de massa das camadas elásticas e viscoelástica a partir da formulação das energias cinéticas, ver Eq. (2.45), como mostrado nas equações a seguir. O desenvolvimento da determinação da massa relativa à camada viscoelástica será apresentado em seguida.

$$\dot{\mathbf{u}}_{(1)}^T \dot{\mathbf{u}}_{(1)} = \left( \mathbf{u}_1^T - z_1 \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial x} \right) \left( \mathbf{u}_1 - z_1 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \right) = \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1 + z_1 \left( -\mathbf{u}_1^T \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial x} \mathbf{u}_1 \right) + z_1^2 \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \quad (\text{A.12})$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{(3)}^T \dot{\mathbf{u}}_{(3)} = \left( \mathbf{u}_3^T - z_3 \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial x} \right) \left( \mathbf{u}_3 - z_3 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \right) = \mathbf{u}_3^T \mathbf{u}_3 + z_3 \left( -\mathbf{u}_3^T \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial x} \mathbf{u}_3 \right) + z_3^2 \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \quad (\text{A.13})$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{(1)}^T \dot{\mathbf{v}}_{(1)} = \left( \mathbf{v}_1^T - z_1 \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial y} \right) \left( \mathbf{v}_1 - z_1 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} \right) = \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 + z_1 \left( -\mathbf{v}_1^T \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial y} \mathbf{v}_1 \right) + z_1^2 \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} \quad (\text{A.14})$$

$$\dot{\mathbf{v}}_{(3)}^T \dot{\mathbf{v}}_{(3)} = \left( \mathbf{v}_3^T - z_3 \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial y} \right) \left( \mathbf{v}_3 - z_3 \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} \right) = \mathbf{v}_3^T \mathbf{v}_3 + z_3 \left( -\mathbf{v}_3^T \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial y} \mathbf{v}_3 \right) + z_3^2 \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} \quad (\text{A.15})$$

$$\dot{\mathbf{w}}^T \dot{\mathbf{w}} = \mathbf{w}^T \mathbf{w} \quad (\text{A.16})$$

Portanto, somando cada parcela têm-se:

$$\mathbf{M}^{(k)} = \sum_{k=1}^3 \rho_k h_k \int_A \left( \mathbf{u}_{(k)}^T \mathbf{u}_{(k)} + \mathbf{v}_{(k)}^T \mathbf{v}_{(k)} + \mathbf{w}_{(k)}^T \mathbf{w}_{(k)} \right) dA \quad (\text{A.17})$$

Desenvolvendo a Eq. (A.17) a partir das equações (A.12 - A.16), têm-se:

$$\mathbf{M}^{(1)} = \left( \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1^T \mathbf{w}_1 \right) + z_1 \left( -\mathbf{u}_1^T \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial x} \mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1^T \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial y} \mathbf{v}_1 \right) + z_1^2 \left( \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} \right) \quad (\text{A.18})$$

$$\mathbf{M}^{(3)} = \left( \mathbf{u}_3^T \mathbf{u}_3 + \mathbf{v}_3^T \mathbf{v}_3 + \mathbf{w}_3^T \mathbf{w}_3 \right) + z_3 \left( -\mathbf{u}_3^T \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial x} \mathbf{u}_3 - \mathbf{v}_3^T \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} - \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial y} \mathbf{v}_3 \right) + z_3^2 \left( \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} \right) \quad (\text{A.19})$$

Como os efeitos de rotação serão desconsiderados no cálculo da energia cinética, por serem desprezíveis, os termos multiplicados por  $z_{(i)}$  são desconsiderados. Desta maneira, as massas relativas às camadas elásticas podem escritas da seguinte maneira:

$$\mathbf{M}_e^{(e)} = \rho_1 h_1 \int_A \left( \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 + \mathbf{w}_1^T \mathbf{w}_1 \right) dA + \rho_3 h_3 \int_A \left( \mathbf{u}_3^T \mathbf{u}_3 + \mathbf{v}_3^T \mathbf{v}_3 + \mathbf{w}_3^T \mathbf{w}_3 \right) dA \quad (\text{A.20})$$

Em seguida é determinada a matriz de massa relativa à camada viscoelástica através das relações (2.20) à (2.21), também considerando somente os efeitos de translação.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}_{(2)}^T \dot{\mathbf{u}}_{(2)} &= \frac{1}{4} \left( \mathbf{u}_3^T \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_3^T \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_1^T \mathbf{u}_1 \right) + \frac{d}{8} \left( \mathbf{u}_1^T \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + \mathbf{u}_3^T \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial x} \mathbf{u}_3 + \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial x} \mathbf{u}_1 \right) + \dots \\ &\dots + \frac{d^2}{16} \left( \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

$$\begin{aligned}
\dot{\mathbf{v}}_{(2)}^T \dot{\mathbf{v}}_{(2)} &= \frac{1}{4} \left( \mathbf{v}_3^T \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_3^T \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_1 \right) + \frac{d}{8} \left( \mathbf{v}_3^T \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} + \mathbf{v}_1^T \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial y} \mathbf{v}_3 + \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial y} \mathbf{v}_1 \right) + \dots \\
&\dots + \frac{d^2}{16} \left( \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{A.22}$$

$$\dot{\mathbf{w}}_{(j)}^T \dot{\mathbf{w}}_{(j)} = \mathbf{w}^T \mathbf{w} \tag{A.23}$$

Reescrevendo de maneira simplificada a soma dos quadrados das velocidades, têm-se:

$$\dot{\mathbf{u}}_{(2)}^T \dot{\mathbf{u}}_{(2)} + \dot{\mathbf{v}}_{(2)}^T \dot{\mathbf{v}}_{(2)} + \dot{\mathbf{w}}_{(j)}^T \dot{\mathbf{w}}_{(j)} = \frac{1}{4} (\mathbf{U}_0 + \mathbf{V}_0 + 4\mathbf{W}^T \mathbf{W}) + \frac{d}{8} (\mathbf{U}_1 + \mathbf{V}_1) + \frac{d^2}{16} (\mathbf{U}_2 + \mathbf{V}_2) \tag{A.24}$$

E a matriz de massa é obtida.

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_e^{(2)} &= \frac{\rho_2 h_2}{4} \int \int_{y \ x} (\mathbf{U}_0 + \mathbf{V}_0 + 4\mathbf{W}^T \mathbf{W}) dx dy + \frac{\rho_2 h_2 d}{8} \int \int_{y \ x} (\mathbf{U}_1 + \mathbf{V}_1) dx dy + \dots \\
&\dots + \frac{\rho_2 h_2 d^2}{16} \int \int_{y \ x} (\mathbf{U}_2 + \mathbf{V}_2) dx dy
\end{aligned} \tag{A.25}$$



## ANEXO B

### Ajuste de curva: valores obtidos através da otimização

A Tabela 6-1 contém os valores de todos os parâmetros ajustados para as temperaturas de 15, 20, 30, 40, 50 e 60°C.

Tabela 6-1 – Tabela que contém os valores dos parâmetros otimizados do modelo GHM

Mini oscilador	Temperatura 15°C				Temperatura de 40°C			
	Gr=0.49147 [Mpa]				Gr=0.46065 [Mpa]			
	1	2	3	4	1	2	3	4
$\alpha_i$	1.1992	14.791	121.03	4.4974	4.0767	0.38704	1.2267	13.607
$\zeta_i$	102.32	27.698	2.2771	44.939	0.085745	4.9352	10.196	1.9882
$\omega_i$ [Hz]	4774.2	98956	70340	24366	9805.2	958.75	3258.7	$1.2428 \times 10^5$

Mini oscilador	Temperatura de 20°C				Temperatura de 50°C			
	Gr=0.63159				Gr=0.44795			
	1	2	3	4	1	2	3	4
$\alpha_i$	1.9059	1.7095	5.8028	66.926	3.3985	0.22409	0.75053	8.25
$\zeta_i$	0.54981	2.2224	1.5402	4.4561	0.0696	4.7283	2.6357	6.8488
$\omega_i$ [Hz]	68959	637.7	3798.6	$1.3458 \times 10^5$	11778	928.05	4649.1	$1.2095 \times 10^5$

Mini oscilador	Temperatura de 30°C				Temperatura de 60°C			
	Gr=0.49548				Gr=0.28291			
	1	2	3	4	1	2	3	4
$\alpha_i$	8.7236	0.65348	2.344	22.289	9.9654	0.59262	0.38184	1.4118
$\zeta_i$	0.12758	1.6652	2.0276	6.6081	0.65573	6.2515	7.6494	10.196
$\omega_i$ [Hz]	10247	298.4	3257.1	98510	18686	20.942	3807.9	42542

As curvas ilustram a qualidade do ajuste. As curvas em pontilhado vermelho representam os valores otimizados através do método de algoritmos genéticos.

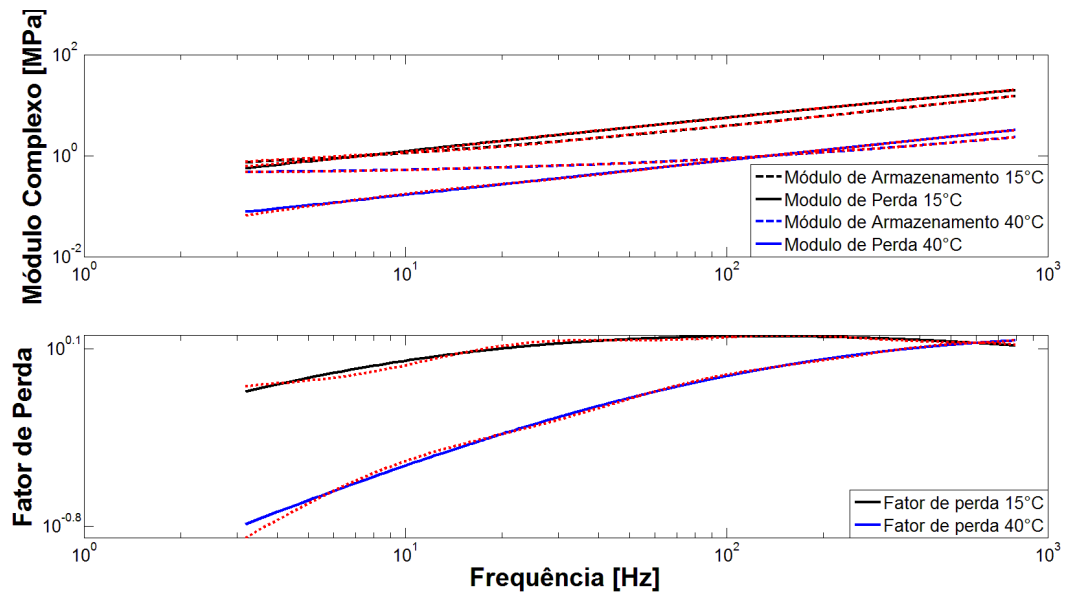


Figure 6.1 – Ajuste de curva para as temperaturas de 15°C e 40°C

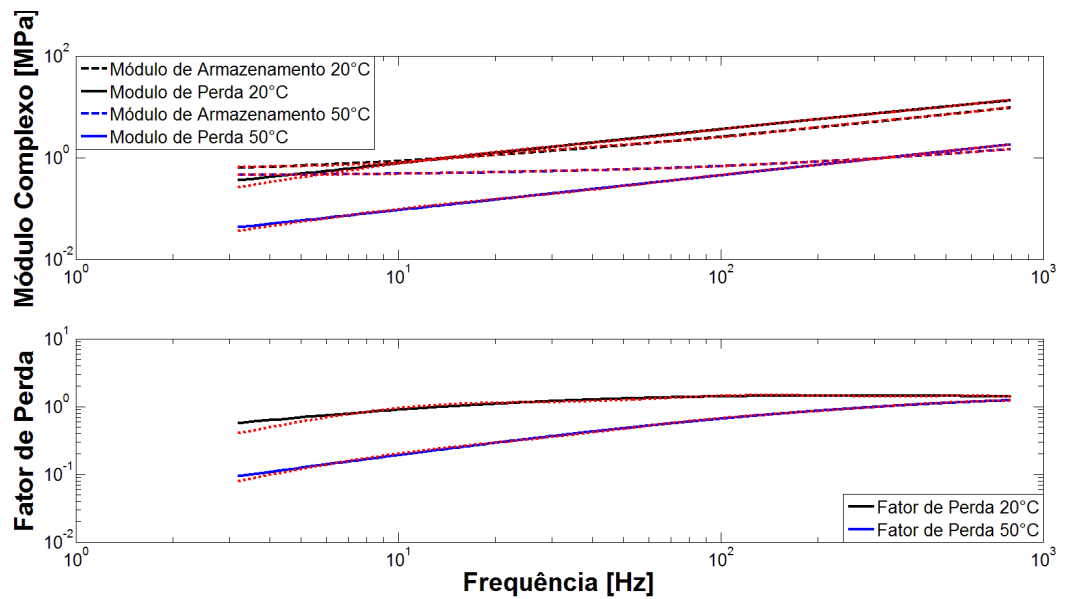


Figure 6.2 – Ajuste de curva para as temperaturas de 20°C e 50°C

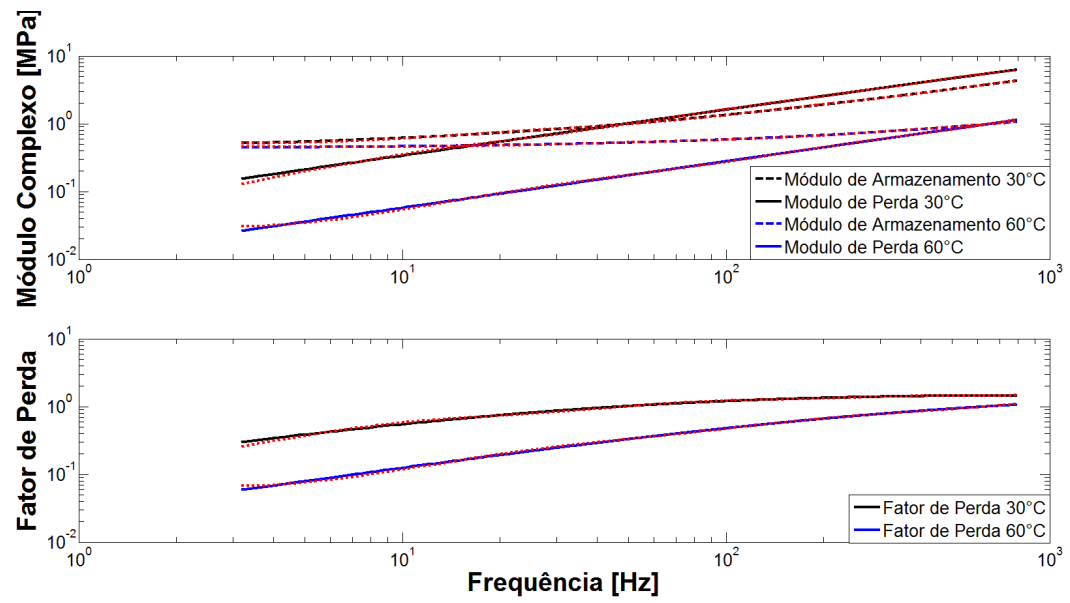


Figure 6.3 - Ajuste de curva para as temperaturas de 30°C e 60°C