ELI CARLOS DE SOUZA COSTA

Espaços de Hilbert de Reprodução e a Transformada de Laplace

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2016

ELI CARLOS DE SOUZA COSTA

Espaços de Hilbert de Reprodução e a Transformada de Laplace

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Análise Funcional.

Orientador: Prof. Dr. José Claudinei Ferreira.

UBERLÂNDIA - MG
2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

C837e
2016

Costa, Eli Carlos de Souza, 1991-
Espaços de Hilbert de reprodução e a Transformada de Laplace / Eli Carlos de Souza Costa. - 2016.
78 f. : il.

Orientador: José Claudinei Ferreira.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Inclui bibliografia.

1. Matemática - Teses. 2. Hilbert, Espaço de - Teses. 3. Laplace, Transformadas de - Teses. I. Ferreira, José Claudinei. II. Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO: Eli Carlos de Souza Costa.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11412MAT006.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Análise Funcional.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Espaços de Hilbert de Reprodução e a Transformada de Laplace

ORIENTADOR: Prof. Dr. José Claudinei Ferreira.

Esta dissertação foi **aprovada** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 24 de março de 2016, às 16 horas e 30 minutos, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME	**ASSINATURA**
Prof. Dr. José Claudinei Ferreira UFU - Universidade Federal de Uberlândia	
Prof. Dr. Mário Henrique de Castro UFU - Universidade Federal de Uberlândia	Mário H. de Castro
Prof. Dra. Thaís Jordão USP - Universidade de São Paulo - São Carlos	Thaís Jordão

Uberlândia-MG, 24 março de 2016.

Dedicatória

Dedico este trabalho a Deus, meus pais Valdomiro e Sueli, ao meu irmão Odair, familiares e a todos os meus amigos.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a Deus por me dar sabedoria e força para superar todos os contratempos. Gostaria de agradecer de forma especial a minha mãe Sueli, que nunca, em momento algum, deixou de acreditar em mim, sempre me ajudando com palavras de incentivo. Agradecer também por ser o maior exemplo que tive. Mulher guerreira e honesta. Não menos importante, queria agradecer meu pai Valdomiro pela confiança e ajuda. Ao meu irmão Odair, pelo companheirismo de sempre. Quero agradecer ao meu orientador José Claudinei por todos os ensinamentos que me foram dados, toda disponibilidade e paciência e aos meus amigos que, eu sei, sempre confiaram que eu teria capacidade de concluir este mestrado. Por fim, à FAPEMIG pelo apoio financeiro.

Resumo

Este trabalho tem o objetivo de estudar os espaços de Hilbert de reprodução, propriedades espectrais da transformada de Laplace e um método para obtenção da transformada de Laplace inversa.

Abstract

This work aims to study the Hilbert spaces, spectral properties of the Laplace transform, and a method for obtaining the inverse Laplace transform.

Sumário

Introdução

Funções e núcleos positivos definidos, ou núcleos de reprodução, são muito utilizados em vários ramos da Matemática, tais como Análise de Fourier, Teoria dos Operadores, Teoria de Probabilidades, Teoria da Aproximação, entre outros.

Quando trabalhamos com núcleos positivos definidos temos algumas vantagens, dentre elas podemos citar:

(i) A matriz $[K(x_i, x_j)]$ é positiva definida (hermitiana, com autovalores positivos).
(ii) Permite melhor manipulação de sistemas lineares.

Na sequência, apresentamos um resultado que nos dá propriedades espectrais de operadores gerados por núcleos positivos definidos, o Teorema de Mercer.

A primeira versão deste teorema foi publicada em 1909, e ganhou esse nome em homenagem a James Mercer.

Teorema de Mercer: Todo núcleo positivo definido $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$, contínuo e simétrico, possui uma representação em série da forma

$$K(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{K})\varphi_n(x)\overline{\varphi_n(y)}, \quad x, y \in [0,1],$$

onde $\{\lambda_n(\mathcal{K})\}$ é uma sequência de números reais não negativos convergente para 0 e $\{\varphi_n\}$ é um conjunto ortonormal de $L^2[0,1]$ formado por funções contínuas. A série acima é absoluta e uniformemente convergente em ambas as variáveis.

A partir daí já surgiram algumas versões do Teorema de Mercer ([13]).

A teoria de núcleos positivos definidos possibilita definirmos o conceito de espaço de Hilbert de reprodução foi introduzido em 1950, de forma independente por Nachman Aronszajn e Stefan Bergman, e até mesmo antes, por E.H.Moore ao se referir a núcleos associados como matrizes hermitianas positivas.

Existem algumas formas de definir estes espaços, porém as propriedades são as mesmas. Estes espaços possuem várias propriedades interessantes e são úteis em vários segmentos da matemática, entre eles, Teoria do Aprendizado, Teoria da Aproximação, Análise Funcional, Probabilidade e Estatística, etc([3, 8, 30, 31]).

Na sequência do trabalho estudaremos algumas propriedades espectrais da transformada de Laplace tomando como domínio um espaço de Hilbert de Reprodução e por fim, estudaremos um método para obtenção da transformada inversa de Laplace ([19, 20]).

O trabalho se divide propriamente nas seguintes partes:

No Capítulo 1 apresentamos alguns resultados de Análise/Topologia, Teoria da Medida e Análise Funcional. No Capítulo 2, inicialmente apresentamos duas definições para o conceito de núcleos positivos definidos, exemplos e propriedades. Em seguida demonstramos uma versão do Teorema de Mercer e por fim estudamos alguns resultados sobre espaços de Hilbert de reprodução. No Capítulo 3 estudaremos algumas propriedades espectrais do operador transformada de Laplace.

Eli Carlos de Souza Costa.
Uberlândia-MG, 24 de março de 2016.

Capítulo 1

Preliminares

Neste primeiro capítulo estudaremos alguns resultados importantes que nos auxiliarão na conclusão deste trabalho.

1.1 Alguns resultados de Análise e Topologia

Neste trabalho será usado em grande parte dos resultados, a continuidade e convergência de sequências e séries numéricas e de funções. Esta seção é composta por resultados clássicos que serão usados de forma direta ou indireta ao longo do texto. Grande parte destes resultados podem ser encontrados em [27].

Teorema 1.1.1 *Sejam X e Y espaços topológicos. Se X é compacto e $f : X \to Y$ é contínua, então $f(X)$ é compacto.*

Demonstração. Sejam $(A_i)_{i\in I}$ abertos em Y tais que $f(X) \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i$. De $X = f^{-1}(f(X)) \subset f^{-1}\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i) \subset X$, segue que $X = \bigcup\limits_{i\in I} f^{-1}(A_i)$. Cada $f^{-1}(A_i)$ é aberto em X, pois f é contínua. Da compacidade de X existem $n \in \mathbb{N}$ e $i_1, ..., i_n \in I$ tais que $X = \bigcup\limits_{j=1} f^{-1}(A_{ij})$.

Vejamos que $f(X) \subset \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_{ij}$:

$$\begin{aligned} y \in f(X) &\implies \exists x \in X \text{tal que } y = f(x) \\ &\implies \exists j_0 \in \{1, ..., n\} \text{ tal } \text{ que } x \in f^{-1}(A_{ij0}) \\ &\implies y = f(x) \in A_{ij0} \subset \bigcup_{j=1}^{n} A_{ij}. \end{aligned}$$

E segue que $f(X)$ é compacto. $\square$

Teorema 1.1.2 ***(Weierstrass):*** *Se X é um espaço topológico compacto e $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua, então existem $x_0, x_1 \in X$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1), \quad x \in X$.*

Demonstração. Este resultado pode ser encontrado em [27, p.167]. □

O Teorema de Dini, nomeado assim em homenagem ao ilustre matemático italiano do século XIX, Ulisse Dini, é um resultado de Análise real que caracteriza a convergência de sequências de funções em um conjunto compacto. Nesse trabalho, em especial, vai ser usado para demonstrar o Teorema de Mercer.

Teorema 1.1.3 ***(Dini):*** *Sejam X um espaço topológico compacto e $\{f_n\}$ uma sequência de funções reais contínuas definidas em X. Se $\{f_n\}$ é monótona, ou seja, $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ ou $f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \quad \forall\, x \in X$, e pontualmente convergente para uma função contínua $f : X \to \mathbb{R}$, então a convergência é uniforme.*

Demonstração. Primeiramente, sem perda de generalidade, vamos supor que $\{f_n\}$ seja decrescente. Agora cada função $f_n - f$ é contínua e a sequência $\{f_n - f\}$ é decrescente. Por hipótese, X é compacto, e usando o Teorema de Weiestrass 1.1.2 temos a existência de $x_n \in X$ tal que

$$M_n := f_n(x_n) - f(x_n) = max_{x \in X}\{f_n(x) - f(x)\}.$$

Claramente, $\{M_n\}$ é uma sequência decrescente de termos não-negativos, logo converge para algum $c \geq 0$. Agora mostremos que $c = 0$. Novamente, usando o fato de X ser compacto, passando para uma subsequência, se preciso, podemos assumir que $\{x_n\}$ converge para algum $x_0 \in X$. Como

$$M_k = f_k(x_k) - f(x_k) \leq f_m(x_k) - f(x_k), \qquad k \geq m.$$

Fazendo $k \to \infty$ e usando a continuidade das funções envolvidas deduzimos que $c \leq f_m(x_0) - f(x_0)$. Fazendo agora $m \to \infty$, obtemos $c \leq 0$. Finalmente, fixado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $M_n < \epsilon$, quando $n \geq N$. Portanto,

$$0 \leq f_n(x) - f(x) \leq f_n(x_n) - f(x_n) = M_n < \epsilon, \quad x \in X.$$

Segue que

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \quad x \in X, \quad n \geq N,$$

ou seja, $\{f_n\}$ converge uniformemente para f. □

Teorema 1.1.4 *Sejam X um espaço topológico e M um espaço métrico. Se uma sequência $\{f_n\}$ de funções contínuas de X em M converge uniformemente para uma função $f : X \to M$ então f é contínua.*

Demonstração. A demonstração deste resultado pode encontrada em [27, p.190]. □

Definição 1.1.5 *Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é* ***primeiro enumerável*** *quando possui, em cada $x \in X$, uma base enumerável para a topologia do espaço.*

Exemplos de espaços primeiro enumeráveis são os espaços métricos.

Definição 1.1.6 *Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é localmente compacto, quando todo ponto de X admite uma vizinhança compacta.*

Teorema 1.1.7 *Sejam X um espaço topológico localmente compacto ou primeiro enuméravel e M um espaço métrico. O limite f de uma sequência $\{f_n\}$ de funções contínuas de X em M, uniformemente convergente em subconjuntos compactos de X, é uma função contínua.*

Demonstração. Suponha que X seja localmente compacto. Seja U um aberto de M e seja $\mathcal{F} = \cup_{\alpha \in A} F_\alpha$ uma cobertura aberta de $f^{-1}(U)$ de modo que o fecho $\overline{F_\alpha}$ de cada F_α é compacto. Do Teorema 1.1.4, segue que a restrição $f|_{\overline{F_\alpha}}$ de f a cada $\overline{F_\alpha}$, é contínua. Logo, $G_\alpha := (f|_{\overline{F_\alpha}})^{-1}(U) \cap F_\alpha$ é um aberto de X. Assim, $f^{-1}(U) = \cup_{\alpha \in A} G_\alpha$ é aberto e a continuidade de f segue. Agora suponha que X é primeiro enumerável. Seja $\{x_n\}$ uma sequência convergente para $x \in X$. Como $Y = \{x_n\} \cup \{x\}$ é compacto e $f|_Y$ é contínua, segue que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, ou seja, f é contínua em x. □

Denotaremos por $C(X)$, o conjunto de todas as funções contínuas que vão de X em $\mathbb{C}$.

Teorema 1.1.8 ***(Arzelá-Ascoli)*** *Seja X um espaço topológico de Hausdorff compacto. Se F é subconjunto de $C(X)$, então o fecho de F em $C(X)$ é compacto se, e somente se:*

(i) para cada $x \in X$, o conjunto $\{f(x) : f \in F\}$ é limitado;

(ii) F é equicontínuo, ou seja, para cada $\epsilon > 0$ e cada $x \in X$, existe um aberto $U = U_x$ tal que

$$\sup_{f\in F} \sup_{y\in U} |f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [27, p.290]. □

1.2 Alguns resultados da Teoria da Medida

A Teoria da Medida se divide basicamente em duas partes:

- Definir uma medida que associe a cada conjunto de uma família em um dado espaço um valor significativo do seu tamanho.
- Definir uma teoria de integração para as funções que tomam valores neste espaço.

Os resultados apresentados nesta seção podem ser encontrados em [2] e [22].

Definição 1.2.1 *Seja $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que uma propriedade P em X vale μ-quase sempre $(\mu - q.s)$ se existe $A \in \mathcal{M}$ tal que $\mu(A) = 0$ e todo ponto de A^c tem P, ou seja, $\mu(\{x \in X : x \text{ não tem } P\}) = 0$.*

Definição 1.2.2 *Se $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é um espaço de medida e $p \in [1, \infty)$, definimos*

$$L^p(X) := \{f : X \to \mathbb{C} : f \text{ é } \mu - \text{mensurável e } \|f\|_p < \infty\}$$

onde

$$\|f\|_p := \left[\int_X |f(x)|^p d\mu(x)\right]^{\frac{1}{p}}.$$

O conjunto $L^p(X)$ torna-se um espaço vetorial quando identificamos quaisquer duas funções f e g de $L^p(X)$ que são idênticas a menos de um conjunto em $\mathcal{M}$ de medida nula, ou seja, f e g são iguais quase sempre ou, simplificadamente, $f = g\ \mu - q.s.$

Denotaremos $M(X,\mathcal{M}) = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} : f \text{ é mensurável}\}$ e $M^+(X,\mathcal{M}) = \{f \in M(X,\mathcal{M}) : f(x) \geq 0, \quad \forall\, x \in X\}$

Teorema 1.2.3 ***(Teorema da convergência monótona):*** *Sejam $(X,\mathcal{M},\mu)$ um espaço de medida e $\{f_n\}$ uma sequência em $M^+(X,\mathcal{M})$ tais que:*
(i) $0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x), \quad \forall n, \quad \forall x.$
(ii) $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ é tal que $f_n(x) \to f(x), \quad \forall x \in X.$
Então $f \in M^+(X,\mathcal{M})$ e $\int_X f_n d\mu \to \int_X f d\mu$, ou seja, $\int_X \lim_n f_n d\mu = \int_X f d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu.$

Demonstração. A prova deste teorema pode ser encontrada em [22, p.73]. □

Teorema 1.2.4 ***(Teorema da convergência dominada):*** *Sejam $f_n, g : X \to \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$, funções integráveis e $f : X \to \mathbb{R}$ mensurável tais que:*
(i) $|f_n(x)| \leq g(x), \quad \forall n, \quad \forall x \in X.$
(ii) $f_n(x) \to f(x)\ \mu - q.s.$
Então $f \in L^1(X)$ e $\int_X f d\mu = \lim_n \int_X f_n d\mu$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [22, p.101]. □

Mais adiante faremos muitas manipulações de integrais e algumas podem ser difíceis de ser calculadas. Dai a necessidade de se ter em mãos algumas ferramentas para contornarmos estes problemas. Os próximos resultados podem ser encontrados em [22, p.220 e p.223].

Teorema 1.2.5 ***(Desigualdade de Hölder):*** *Seja $(X,\mathcal{M},\mu)$ um espaço de medida. Seja $p \in [1,\infty)$ e considere o expoente conjugado q de p, ou seja, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se f e g são funções mensuráveis em X, então*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Em particular,se $f \in L^p(X)$ e $g \in L^q(X)$, então $fg \in L^1(X)$.

Demonstração. A demonstração segue do Lema de Young [22, p.219]. □

Corolário 1.2.6 ***(Desigualdade de Cauchy-Schwarz):*** *Se $f, g \in L^2(X)$, então $fg \in L^1(X)$ e $\|fg\|_1 \leq \|f\|_2 \|g\|_2$.*

Teorema 1.2.7 ***(Desigualdade de Minkowski):*** *Seja $(X,\mathcal{M},\mu)$ um espaço de medida. Se $f, g \in L^p(X)$, então $(f+g) \in L^p(X)$ e*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Os próximos resultados que garantem a iteração de integrais em espaços produtos podem ser encontrados em [18, p.67].

Teorema 1.2.8 ***(Fubini-Tonelli):*** *Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ e $(Y, \mathcal{Z}, \nu)$ espaços de medida σ-finitos.*
(i)(Tonelli) Se $f \in M^+(X \times Y)$, então

$$g(x) = \int_Y f(x,y)d\nu(y) \in M^+(X) \text{ e } h(y) = \int_X f(x,y)d\mu(x) \in M^+(Y)$$

e vale a fórmula

$$\int_{X\times Y} fd(\mu \times \nu) = \int_X \left[\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right] d\mu(x) = \int_Y \left[\int_X f(x,y)d\mu(x)\right] d\nu(y).$$

(ii)(Fubini) Se $f \in L^1(X \times Y)$, então $f(x,\cdot) \in L^1(Y)$ para quase todo $x, f(\cdot, y) \in L^1(X)$ para quase todo y, e as funções definidas quase sempre

$$g(x) = \int_Y f(x,y)d\nu(y) \quad e \quad h(y) = \int_X f(x,y)d\mu(x),$$

são elementos de $L^1(X)$ e $L^1(Y)$, respectivamente. Além disso, a fórmula do ítem (i) vale.

Definição 1.2.9 *Uma função mensurável $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ é chamada localmente integrável (com respeito a medida de Lebesgue) se $\int_X |f(x)|dx < \infty$, para todo conjunto X, mensurável e limitado de $\mathbb{R}^n$.*

Denotamos o espaço das funções localmente compactas por L^1_{loc}.

Seja $x \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$. Definimos o conjunto de Lebesgue L_f de f como sendo

$$L_f = \left\{ x : \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} |f(y) - f(x)|dy = 0 \right\},$$

onde $B(x,r)$ representa a bola aberta de centro x e raio r.

Definição 1.2.10 *Dizemos que uma família de subconjuntos de Borel de $\mathbb{R}^n, \{E_r\}_{r>0}$, encolhe para x se*
(i) $E_r \subset B(x,r), \quad \forall r;$
(ii) Existe uma constante α, que independe de r, tal que $\mu(E_r) > \alpha\mu(B(x,r))$.

Teorema 1.2.11 ***(Teorema da Diferenciação de Lebesgue):*** *Suponha $f \in L^1_{loc}$. Para todo $x \in L_f$, temos*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\mu(E_r)} |f(y) - f(x)|dy = 0 \quad e \quad \lim_{r\to 0} \frac{1}{\mu(E_r)} \int_{E_r} f(y)dy = f(x)$$

para toda família $\{E_r\}_{r>0}$ que encolhe para x.

Demonstração. A demonstração desse teorema pode ser encontrado em [18, p.98].

□

1.3 Espaços de Hilbert e Espaços de Banach

Em Análise Funcional, talvez a principal classe de espaços estudados sejam os conhecidos espaços de Banach. Uma classe muito importante de espaços de Banach são os espaços de Hilbert. Nesta seção definiremos estes espaços e algumas de suas propriedades (veja [4, 28]).

Definição 1.3.1 *Uma **norma** no espaço vetorial X sobre o corpo $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ é uma função $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:*

(i) $\|x\| \geq 0, \quad \forall x \in X$;

(ii) $\|x\| = 0 \iff x = 0$;

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in X$;

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall x, y \in X$.

*O par $(X, \|\cdot\|)$ é chamado de **espaço normado**.*

Definição 1.3.2 *Um espaço normado que é completo com a métrica induzida pela norma é chamado **espaço de Banach**.*

Definição 1.3.3 *Um espaço de Hilbert é um espaço vetorial com produto interno que também é um espaço de Banach com a norma canônica definida pelo produto interno:*

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}.$$

Teorema 1.3.4 *O espaço $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em [22, p.240]. □

No nosso trabalho, na maioria dos resultados, a norma provém de um produto interno. O próximo exemplo nos traz uma estrutura ideal.

Exemplo 1.3.5 *Se $(X, \mathcal{M}, \mu)$ é espaço de medida, então $L^2(X)$ é um espaço de Hilbert com produto interno dado por*

$$\langle f, g\rangle_2 := \int_X f(x)\overline{g(x)}d\mu(x), \;\; f, g \in L^2(X).$$

Outro exemplo clássico de espaço de Hilbert é $l^2(\mathbb{N})$ com o produto interno $\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j \overline{y_j}$.

Não podemos dizer que todo espaço métrico é um espaço de Banach, pois estes últimos são espaços vetoriais e um espaço métrico é uma estrutura diferente, sendo apenas um conjunto com uma métrica. Um exemplo que ilustra este fato pode ser dado tomando o conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e a métrica $d(u, v) = \sqrt{\sum_{j=1}^{3}(v_j - u_j)^2}$. Podemos observar que (A, d) é um espaço métrico, mas não é um espaço vetorial, pois $\forall \lambda > 1$ tem-se que $\lambda v \notin A$. Por outro outro lado, um espaço de Banach sempre é um espaço métrico, pois há uma métrica induzida pela norma. Portanto, todo espaço de Hilbert é de Banach e métrico.

A sequência desta seção contém diversas propriedades destes espaços.

Lema 1.3.6 *Em um espaço vetorial V com produto interno, $u \perp v$, $u, v \in V$ se, e somente se, $\|u + tv\| \geq \|u\|$, $\forall t \in \mathbb{K}$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $v = 0$ a desigualdade é verdadeira.

Agora, para $v \neq 0$, temos

$$0 \leq \|u + tv\|^2 = \|u\|^2 + \overline{t\langle v, u\rangle} + t\langle v, u\rangle + t\bar{t}\|v\|^2 = \|u\|^2 + 2Re(t\langle v, u\rangle) + |t|^2\|v\|^2.$$

Se $u \perp v$, então para todo $t \in \mathbb{K}$, $\|u+tv\|^2 = \|u\|^2 + |t|^2\|v\|^2 \geq \|u\|^2$, isto é, $\|u+tv\| \geq \|u\|$.

($\Leftarrow$) Se $\|u + tv\| \geq \|u\|$ para todo $t \in \mathbb{K}$, então encolhendo $t = -\frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}$ e elevando esta desigualdade ao quadrado temos que

$$\begin{aligned} \|u + tv\|^2 &\geq \|u\|^2 \\ &\Leftrightarrow \|u\|^2 + \overline{t\langle v, u\rangle} + t\langle v, u\rangle + t\bar{t}\|v\|^2 \geq \|u\|^2 \\ &\Leftrightarrow -\frac{\overline{\langle u, v\rangle\langle v, u\rangle}}{\|v\|^2} - \frac{\langle u, v\rangle\overline{\langle u, v\rangle}}{\|v\|^2} + \frac{\langle u, v\rangle\overline{\langle u, v\rangle}}{\|v\|^2} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow -|\langle u, v\rangle|^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \langle u, v\rangle = 0. \end{aligned}$$

□

Teorema 1.3.7 *Seja X um espaço vetorial com um produto interno. Então, para quaisquer $u, v \in X$,*

(i) ***(Fórmula de polarização, caso real:)*** $\langle u, v\rangle = \dfrac{1}{4}\left(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2\right)$.

(ii) ***(Caso complexo:)*** $\langle u, v\rangle = \dfrac{1}{4}\left[\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i(\|u + iv\|^2 - \|u - iv\|^2)\right]$.

Demonstração. Sabemos que

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \|v\|^2$$

e

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 - \langle u, v\rangle - \langle v, u\rangle + \|v\|^2.$$

Agora, subtraindo as duas igualdades temos:

$$\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 2\langle u, v\rangle + 2\langle v, u\rangle = 4\langle u, v\rangle.$$

Logo (i) está provado.

Provemos (ii): Considere as igualdades abaixo:

$$\|u + iv\|^2 = \|u\|^2 + \langle u, iv\rangle + \langle iv, u\rangle + \|v\|^2 = \|u\|^2 - i\langle u, v\rangle + i\langle v, u\rangle + \|v\|^2$$

e

$$\|u - iv\|^2 = \|u\|^2 + \langle u, -iv\rangle + \langle -iv, u\rangle + \|v\|^2 = \|u\|^2 + i\langle u, v\rangle - i\langle v, u\rangle + \|v\|^2.$$

Subtraindo-as, temos que:

$$\|u + iv\|^2 - \|u - iv\|^2 = -2i\langle u, v\rangle + 2i\langle v, u\rangle.$$

Subtraindo novamente as igualdades usadas na demonstração de (i), segue que:

$$\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 = 2\langle u, v\rangle + 2\langle v, u\rangle.$$

Combinando essas duas últimas igualdades, prova (ii). □

Teorema 1.3.8 ***(Lei do Paralelogramo:)*** *Em um espaço vetorial V com produto interno vale*

$$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \quad \forall u, v \in V.$$

Demonstração. Sabemos que

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \langle u, v\rangle + \overline{\langle u, v\rangle} + \|v\|^2,$$

da mesma forma temos que

$$\|u-v\|^2 = \|u\|^2 - \langle u, v\rangle - \overline{\langle u, v\rangle} + \|v\|^2.$$

Daí, segue o resultado. □

Lema 1.3.9 ***(Projeção Ortogonal):*** *Se W é um subespaço vetorial fechado de um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, então $\mathcal{H} = W \oplus W^{\perp}$.*

Demonstração. Sejam $u \in \mathcal{H}$, $\delta := inf_{w\in W}\|u-w\|$ e uma sequência $\{v_n\} \subset W$ tal que $\|u - v_n\| \to \delta$. Pela Lei do Paralelogramo 1.3.8, temos que :

$$2\|v_n - u\|^2 + 2\|v_m - u\|^2 = \|v_n - v_m\|^2 + \|v_n + v_m - 2u\|^2, \quad n, m \in \mathbb{N}.$$

Como $\dfrac{(v_n + v_m)}{2} \in W$ e $\delta := inf_{w\in W}\|u-w\|$, então

$$\|v_n - v_m\|^2 = 2\|v_n - u\|^2 + 2\|v_m - u\|^2 - 4\left\|\frac{(v_n+v_m)}{2} - u\right\|^2 \leq 2\|v_n - u\|^2 + 2\|v_m - u\|^2 - 4\delta^2.$$

Logo, para n, m grandes, tem-se $\|v_n - v_m\|^2 \to 0$. Portanto, a sequência $\{v_n\}$ é de Cauchy em W e convergente para algum $v \in W$, já que W é fechado. Como a norma é contínua, temos que $\|u - v\| = \delta$.

Dado que $tw - v \in W$, $\forall w \in W$ e $t \in \mathbb{K}$, e como por hipótese $\delta := inf_{w\in W}\|u-w\|$, então

$$\|(u-v) + tw\| = \|u + (tw - v)\| \geq \delta = \|u - v\|.$$

Usando o Lema 1.3.6, temos que $(u - v) \in W^{\perp}$ e $u = v + (u - v)$, $v \in W$ e $u - v \in W^{\perp}$.

Suponhamos agora que existam $v' \in W$ e $w' \in W^{\perp}$ tais que $u = v' + w'$. Daí,

$$v' + w' = v + (u - v) \Leftrightarrow w' - (u - v) = v - v' \in W \cap W^{\perp}$$

e, assim,

$$v - v' = 0 \Longrightarrow v = v' \text{ e } w' - (u - v) = 0 \Longrightarrow w' = u - v.$$

Logo, para qualquer $u \in \mathcal{H}$ existem únicos $v \in W$ e $u-v \in W^{\perp}$ de forma que $u = v + (u-v)$. □

Teorema 1.3.10 ***(Cauchy-Schwarz):*** *Se $\mathcal{H}$ é um espaço de Hilbert com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$, então*

$$|\langle x, y\rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|x\|_{\mathcal{H}}\|y\|_{\mathcal{H}} \ , \quad x, y \in \mathcal{H}.$$

Demonstração. Se $\langle u,v\rangle = 0$ ou $\|u\| = 0$ ou $\|v\| = 0$ não há nada que fazer e o resultado está provado.

Consideremos $\langle u,v\rangle \neq 0$, $\|u\| \neq 0$, $\|v\| \neq 0$. Assim, para todo $\alpha \in \mathbb{C}$ vale:

$$0 \leq \left\| \frac{\alpha}{\|v\|}v - \frac{1}{\|u\|}u \right\|^2.$$

Agora, expandindo o lado direito, temos:

$$0 \leq \left\langle \frac{\alpha}{\|v\|}v - \frac{1}{\|u\|}u, \frac{\alpha}{\|v\|}v - \frac{1}{\|u\|}u \right\rangle = |\alpha|^2 + 1 - \frac{2}{\|u\|\|v\|}Re(\alpha\langle u,v\rangle),$$

ou seja,

$$2Re(\alpha\langle u,v\rangle) \leq (|\alpha|^2+1)\|u\|\|v\|.$$

Em particular, tomando $\alpha = \frac{|\langle u,v\rangle|}{\langle u,v\rangle}$, teremos $|\alpha| = 1$ e portanto $|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$. □

Definição 1.3.11 ***(Delta de Kronecker)*** *Sejam I um conjunto qualquer e $i,j \in I$, definimos*

$$\delta_{ij} = 0, \quad se \quad i \neq j \text{ e } \delta_{ij} = 1, \quad se \quad i = j.$$

Dessa forma, um conjunto $\{x_i : i \in I\}$ de vetores de um espaço com produto interno é ortonormal se, e somente se, $\langle x_i, x_j\rangle = \delta_{ij}$ para todos $i,j \in I$.

Caminharemos agora na direção de estabelecer duas relações fundamentais da teoria dos espaços de Hilbert, a saber, a Desigualdade de Bessel e a Identidade de Parseval.

Proposição 1.3.12 *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\{x_1,...,x_n\}$ um conjunto ortonormal em $\mathcal{H}$.*

(a) Se $M = [x_1,...,x_n]$ e $x \in \mathcal{H}$, então $\left\| x - \sum_{i=1}^{n}\langle x, x_i\rangle \right\| = dist(x,M)$.

(b) Para todo $x \in \mathcal{H}$, $\sum_{i=1}^{n} |\langle x,x_i\rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

Demonstração. Seja M um subespaço fechado de $\mathcal{H}$. Sabemos pela Projeção Ortogonal 1.3.9 que $\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$. Daí, podemos tomar $p \in M$ e $q \in M^{\perp}$ tais que $x = p+q$ e $\|x-p\| = dist(x,M)$. Como $p \in M$, existem escalares $\alpha_1,...,\alpha_n$ tais que $p = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$. E como $x - p = q \in M^{\perp}$, temos $(x-p) \perp x_j$, para todo $j = 1,...,n$. Segue então que $0 = \langle x-p, x_j\rangle = \langle x,x_j\rangle - \alpha_j$, isto é, $\alpha_j = \langle x, x_j\rangle$, para todo $j = 1,...,n$. Daí (a) é provado.

Provemos (b). Dado $x \in \mathcal{H}$, sejam $\alpha_1,...,\alpha_n$ como em (a). Assim, como $\langle x_i,x_j\rangle = \delta_{ij}$, para todos $i,j = 1,...,n$,

$$0 \leq \left\langle x - \sum_{i=1}^{n}\langle x,x_i\rangle x_i, x - \sum_{i=1}^{n}\langle x,x_i\rangle x_i \right\rangle = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n}|\langle x,x_i\rangle|^2 - \sum_{i=1}^{n}|\langle x,x_i\rangle|^2 + \sum_{i=1}^{n}|\langle x,x_i\rangle|^2,$$

e o resultado segue. □

Lema 1.3.13 *Seja $S = \{x_i : i \in I\}$ um conjunto ortonormal no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então, para cada $x \in \mathcal{H}$ não nulo, o conjunto $J = \{i \in I : \langle x, x_i\rangle \neq 0\}$ é finito ou enumerável.*

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos $J_k = \{i \in I : |\langle x, x_i \rangle| > \frac{1}{k}\}$ para obter $J = \cup_{k=1}^{\infty} J_k$.

Basta então mostrar que cada J_k é finito. Da Proposição 1.3.12 sabemos que para todo subconjunto finito J_0 de J é verdade que $\sum_{i \in J_0} |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2$.

Em particular, dado um número finito de elementos $i_1, ..., i_n$ de J_k,

$$\frac{n}{k^2} = \frac{1}{k^2} + ... + \frac{1}{k^2} < |\langle x, x_{i1} \rangle|^2 + ... + |\langle x, x_{in} \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Consequentemente $n \leq k^2 \|x\|^2$. Isso significa que o número de elementos de qualquer subconjunto finito de J_k não excede $k^2 \|x\|^2$. Portanto J_k é finito. □

Teorema 1.3.14 ***(Desigualdade de Bessel)*** *Seja $S = \{x_i : i \in I\}$ um conjunto ortonormal no espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. Então, para todo $x \in \mathcal{H}$,*

$$\sum_{i \in J} |\langle x, x_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2,$$

onde $J = \{i \in I : \langle x, x_i \rangle \neq 0\}$.

Demonstração. Sabemos pelo Lema 1.3.13 que J é finito ou enumerável. A Proposição 1.3.12 resolve o caso em que J é finito. Basta então ver o caso em que J é enumerável. Como todos os termos da série são positivos, não importa a ordem em que fazemos a soma da série. Podemos então considerar uma enumeração qualquer $i_1, i_2, ...$ dos elementos de J. Para cada $n \in \mathbb{N}$, a Proposição 1.3.12 garante que

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, x_{ik} \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Agora basta fazer n tender a infinito nesta desigualdade para obter

$$\sum_{i \in J} |\langle x, x_i \rangle|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, x_{ik} \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

□

Para chegar a Identidade de Parseval, se faz necessário conhecer mais alguns resultados.

Definição 1.3.15 *Seja $\{x_n\}$ uma sequência no espaço normado X. Dizemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente se existe $x \in X$ tal que a sequência das somas parciais $\left\{\sum_{j=1}^{n} x_j\right\}$ converge para x. Nesse caso, dizemos que x é a soma da série e escrevemos*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Diz-se que a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é incondicionalmente convergente se for convergente em qualquer ordenação em que considerarmos suas parcelas; mais precisamente, se para toda função bijetora $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ for convergente.

Proposição 1.3.16 *Seja* $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ *uma série incondicionalmente convergente em um espaço normado* X*. Se* $\sigma_1, \sigma_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *são funções bijetoras, então*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_1(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_2(n)}.$$

Demonstração. A prova deste resultado pode ser encontrada em [4, p.117]. $\square$

Lema 1.3.17 *Seja* $S = \{x_i : i \in I\}$ *um conjunto ortonormal no espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$*. Então, para cada* $x \in \mathcal{H}$*, denotando* $I_x = \{i \in I : \langle x, x_i \rangle \neq 0\}$*, a série*

$$\sum_{i \in I_x} \langle x, x_i \rangle x_i$$

é incondicionalmente convergente.

Demonstração. Não há o que falar se I_x for finito. Suponha que I_x seja infinito e tome $\{y_j\}$ uma enumeração qualquer do conjunto $\{w \in S : \langle x, w \rangle \neq 0\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $S_n = \sum_{i=1}^{\infty} \langle x, y_i \rangle y_i$. Da Desigualdade de Bessel 1.3.14 sabemos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, y_n \rangle|^2$ é convergente. Como $\langle y_i, y_j \rangle = \delta_{ij}$,

$$\|S_n - S_m\|^2 = \left\| \sum_{i=m+1}^{n} \langle x, y_i \rangle y_i \right\|^2 = \sum_{i=m+1}^{n} |\langle x, y_i \rangle|^2$$

para $n > m$, e portanto a sequência $\{S_n\}$ é de Cauchy em $\mathcal{H}$, logo converge. $\square$

Teorema 1.3.18 *Seja* $S = \{x_i : i \in I\}$ *um conjunto ortonormal no espaço de Hilbert* $\mathcal{H}$*. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *Para todo* $x \in \mathcal{H}$*,* $x = \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle x_i$*.*

(b) *S é um sistema ortonormal completo.*

(c) $\overline{[S]} = \mathcal{H}$*.*

(d) *Para cada* $x \in \mathcal{H}$*,* $\|x\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2$*. (**Identidade de Parseval**)*

(e) *Para todos* $x, y \in \mathcal{H}$*,* $\langle x, y \rangle = \sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle \overline{\langle y, x_i \rangle}$*.*

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$ Seja $x \in S^{\perp}$. Como $\langle x, x_i \rangle = 0$ para todo $i \in I$, de (a) segue imediatamente que $x = 0$. Assim $S^{\perp} = \{0\}$ e S é completo.

$(b) \Rightarrow (a)$ Seja $x \in \mathcal{H}$. Tratemos do caso em que $J := \{i \in I : \langle x, x_i \rangle \neq 0\}$ é infinito, e portanto enumerável. Seja $\{i_1, i_2, ...\}$ uma enumeração qualquer de J. Do Lema 1.3.17 e da Proposição 1.3.16 sabemos que

$$\sum_{i \in I} \langle x, x_i \rangle x_i = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, x_{i_j} \rangle x_{i_j}.$$

Seja $i \in I$. Se $i \notin J$, então

$$\left\langle x - \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, x_{i_j} \rangle x_{i_j}, x_i \right\rangle = 0.$$

E se $i \in J$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $i = i_k$. Neste caso, como $\langle x_{i_j}, x_{i_k} \rangle = \delta_{i_j i_k} = \delta_{j,k}$,

$$\begin{aligned} \left\langle x - \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, x_{i_j} \rangle x_{i_j}, x_i \right\rangle &= \left\langle x - \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, x_{i_j} \rangle x_{i_j}, x_{i_k} \right\rangle \\ &= \langle x, x_{i_k} \rangle - \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, x_{i_j} \rangle \langle x_{i_j}, x_{i_k} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Como S é completo, obtemos

$$x - \sum_{j \in I} \langle x, x_i \rangle x_i = x - \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, x_{i_j} \rangle x_{i_j} = 0.$$

O argumento acima se adapta facilmente ao caso em que J é finito.

$(b) \Rightarrow (c)$ Chamemos $M = \overline{[S]}$. Por S ser subconjunto de M segue que $M^\perp$ é subespaço de $S^\perp = \{0\}$, logo $M^\perp = \{0\}$. Mas $\mathcal{H} = M \oplus M^\perp$, e daí concluimos que $\mathcal{H} = M = \overline{[S]}$.

$(c) \Rightarrow (d)$ Sejam $x \in \mathcal{H}$ e $\varepsilon > 0$. Por (c) existe $y_\varepsilon \in [S]$ tal que $\|x - y_\varepsilon\| < \varepsilon$. Como $y_\varepsilon \in [S]$, existem um subconjunto finito J_ε de I e escalares $(a_i)_{i \in J_\varepsilon}$ tais que $y_\varepsilon = \sum_{i \in J_\varepsilon} a_i x_i$. Da Proposição 1.3.12 sabemos que o vetor $\displaystyle\sum_{i \in J_\varepsilon} \langle x, x_i \rangle x_i$ é a melhor aproximação de x em $[x_i : i \in J_\varepsilon]$, portanto

$$\left\| x - \sum_{i \in J_\varepsilon} \langle x, x_i \rangle x_i \right\| \leq \left\| x - \sum_{i \in J_\varepsilon} a_i x_i \right\| = \|x - y_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

Como J_ε é ortonormal,

$$\begin{aligned} \|x\|^2 - \sum_{i \in J_\varepsilon} |\langle x, x_i \rangle|^2 &= \left\langle x - \sum_{i \in J_\varepsilon} \langle x, x_i \rangle x_i, x - \sum_{i \in J_\varepsilon} \langle x, x_i \rangle x_i \right\rangle \\ &= \left\| x - \sum_{i \in J_\varepsilon} \langle x, x_i \rangle x_i \right\|^2 < \varepsilon^2. \end{aligned}$$

Combinando isso com a Desigualdade de Bessel 1.3.14 obtemos

$$\|x\|^2 < \sum_{i \in J_\varepsilon} |\langle x, x_i \rangle|^2 + \varepsilon^2 \leq \sum_{i \in I} |\langle x, x_i \rangle|^2 + \varepsilon^2 \leq \|x\|^2 + \varepsilon^2.$$

O resultado segue fazendo $\varepsilon \to 0^+$.

$(d) \Rightarrow (e)$ Sejam $x, y \in \mathcal{H}$ e a um escalar. Por (d),

$$\langle ax + y, ax + y \rangle = \|ax + y\|^2 = \sum_{i \in I} |\langle ax + y, x_i \rangle|^2 = \sum_{i \in I} \langle ax + y, x_i \rangle \overline{\langle ax + y, x_i \rangle},$$

e daí,

$$|a|^2 \|x\|^2 + a\langle x, y \rangle + \overline{a}\langle y, x \rangle + \|y\|^2 = |a|^2 \|x\|^2 + \sum_{i \in I} a\langle x, x_i \rangle \langle x_i, y \rangle + \sum_{i \in I} \overline{a}\langle y, x_i \rangle \langle x_i, x \rangle + \|y\|^2.$$

Então

$$\begin{aligned} a\langle x,y\rangle+\overline{a}\langle y,x\rangle &= \sum_{i\in I} a\langle x,x_i\rangle\langle x_i,y\rangle+\sum_{i\in I}\overline{a}\langle y,x_i\rangle\langle x_i,x\rangle \\ &= a\Big(\sum_{i\in I}\langle x,x_i\rangle\overline{\langle y,x_i\rangle}\Big)+\overline{a}\Big(\sum_{i\in I}\langle y,x_i\rangle\overline{\langle x,x_i\rangle}\Big). \end{aligned}$$

Escolhendo primeiro $a=1$ e depois $a=i$, obtemos

$$Re\langle x,y\rangle = Re\Big(\sum_{i\in I}\langle x,x_i\rangle\overline{\langle y,x_i\rangle}\Big) \ e \ Im\langle x,y\rangle = Im\Big(\sum_{i\in I}\langle x,x_i\rangle\overline{\langle y,x_i\rangle}\Big),$$

e o resultado segue.

$(e)\Rightarrow(b)$ Seja $x\in S^{\perp}$. Logo $\langle x,y\rangle=0$ para todo $i\in I$. Usando (e) com $x=y$ obtemos $\langle x,x\rangle=0$ e consequentemente x é o vetor nulo. □

Definição 1.3.19 *Sejam X e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. O conjunto $\mathcal{B}(X,Y)$ é o conjunto de todos os operadores lineares contínuos de X em Y. Quando $X=Y$, escrevemos $\mathcal{B}(X,Y)=\mathcal{B}(X)$.*

Teorema 1.3.20 *Valem as seguintes propriedades:*

(i) Se X e Y são espaços vetoriais normados, então $\mathcal{B}(X,Y)$ é um espaço vetorial normado. A expressão

$$\begin{aligned} \|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)} &:= \sup\{\|T(x)\|_Y : x\in X, \|x\|_X=1\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} : 0\neq x\in X\right\} x\in X\}, \end{aligned}$$

define uma norma em $\mathcal{B}(X,Y)$.

(ii) Nas condições em (i), se Y é um espaço de Banach, então $\mathcal{B}(X,Y)$ também é.

Definição 1.3.21 *Sejam X e Y espaços de Banach. Um operador $T\in\mathcal{B}(X,Y)$ é compacto quando a imagem de cada sequência limitada de X possuir uma subsequência convergente em Y.*

Um exemplo de operador compacto é fornecido pelo teorema abaixo:

Teorema 1.3.22 *Sejam X e Y espaços de Banach. Se $T_j\in\mathcal{B}(X,Y), j=1,...,n$ tem posto finito e $T_j\to T$ em $\mathcal{B}(X,Y)$, então T é compacto.*

O próximo teorema nos dá mais uma maneira de obter operadores compactos.

Teorema 1.3.23 *Sejam X, Y, Z espaços de Banach. Se $T\in\mathcal{B}(X,Y)$, $S\in\mathcal{B}(Y,Z)$ e T ou S é compacto então a composição ST é um operador compacto.*

Teorema 1.3.24 ***(Teorema da Representação de Riesz):*** *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $f:\mathcal{H}\longrightarrow\mathbb{K}$ um funcional linear contínuo. Então existe um único $v\in\mathcal{H}$ tal que $f(u)=\langle u,v\rangle,\ \forall\ u\in\mathcal{H}$.*

Demonstração. Suponha que existam $v, w \in \mathcal{H}$ tais que $f(u) = \langle u, v\rangle = \langle u, w\rangle, \ \forall u \in \mathcal{H}$. Assim,

$$f(v-w) = \langle v-w, v\rangle = \langle v-w, w\rangle \Longleftrightarrow \langle v-w, v-w\rangle = 0 \Longleftrightarrow v-w=0 \Longleftrightarrow v=w.$$

Se $f(u) = 0, \forall u \in \mathcal{H}$, basta tomar $v = 0$ e, daí temos que $f(u) = \langle u, v\rangle, \quad \forall u \in \mathcal{H}$.

Agora, se $f(u_0) \neq 0$ para algum $u_0 \in \mathcal{H}$, então considera-se o conjunto $W = \{x \in \mathcal{H}; f(x) = 0\}$. Assim, pelo Lema 1.3.9, podemos supor que $u_0 \in W^{\perp}$ e $\|u_0\| = 1$. Seja $z = f(x)u_0 - f(u_0)x$, para algum $x \neq 0, x \in \mathcal{H}$. Agora, observa-se que

$$f(z) = f(f(x)u_0 - f(u_0)x) = f(x)f(u_0) - f(u_0)f(x) = 0.$$

Assim, $z \in W$ e

$$0 = \langle z, u_0\rangle = \langle f(x)u_0 - f(u_0)x, u_0\rangle = f(x)\langle u_0, u_0\rangle - f(u_0)\langle x, u_0\rangle = f(x) - \langle x, \overline{f(u_0)}u_0\rangle.$$

Portanto, $f(x) = \langle x, \overline{f(u_0)}u_0\rangle$ e tomando $v = \overline{f(u_0)}u_0$, temos que $f(x) = \langle x, v\rangle, \quad \forall x \in \mathcal{H}$. □

Teorema 1.3.25 *Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert. Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ então existe um único operador $T^* \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ tal que*

$$\langle T(x), y\rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle x, T^*(y)\rangle_{\mathcal{H}_1}, \quad x \in \mathcal{H}_1, y \in \mathcal{H}_2.$$

Notação: *T^* é chamado de operador adjunto de T.*

Definição 1.3.26 *Dizemos que o operador T é autoadjunto quando $T = T^*$ e T é normal quando $T^*T = TT^*$.*

Teorema 1.3.27 *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Então T é um operador compacto se, e somente se, T^* é compacto. Ainda, o conjunto dos operadores de posto finito é denso no espaço (de Banach) dos operadores compactos.*

Definição 1.3.28 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Um operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é positivo quando $\langle T(x), x\rangle_{\mathcal{H}} \geq 0, \quad x \in \mathcal{H}$.*

Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é positivo, escrevemos $T \geq 0$. Se $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, escrevemos $T_1 \geq T_2$ para indicar que $T_1 - T_2$ é positivo, ou seja, $T_1 - T_2 \geq 0$. Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ então $T^*T \geq 0$ é autoadjunto uma vez que

$$\begin{aligned} \langle T^*T(x), x\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle T(x), T(x)\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \|T(x)\|^2_{\mathcal{H}} \geq 0, \quad x \in \mathcal{H}. \end{aligned}$$

O próximo teorema fornece uma maneira de concluir que um determinado operador em um espaço de Hilbert é autoadjunto. Neste trabalho, este resultado será útil na demonstração de que operadores compactos possuem uma raiz quadrada.

Teorema 1.3.29 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert complexo. Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é um operador positivo, então T é um operador autoadjunto.*

Demonstração. A prova segue diretamente da Identidade de Polarização 1.3.7. □

Definição 1.3.30 *Seja $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Definimos $|T| := \sqrt{T^*T}$.*

Observe que $|T| = T$ quando este é autoadjunto e positivo.

1.4 Um pouco de teoria espectral

Essa seção contém resultados clássicos da teoria espectral e todos os resultados aqui demonstrados podem ser encontrados em [28].

Definição 1.4.1 *Sejam V um espaço vetorial e $T : V \to V$ é uma transformação linear, um autovetor de T é um vetor $v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$, para algum $\lambda \in \mathbb{K}$ e, neste caso, λ é um autovalor de T.*

Se λ for autovalor de T, então $T_\lambda = T - \lambda I$ é não invertível, onde I é operador identidade.

Denotamos por $\sigma_p(T)$ o conjunto dos autovalores de T. De modo geral esse conjunto é chamado de espectro pontual de T.

Definição 1.4.2 *Um subespaço U de V é chamado T-invariante se $T(U) \subset U$, isto é, se $x \in U$, então $T(x) \in U$. Se U é T-invariante, então seu fecho também é. Além disso $U^\perp$ é T-invariante, pois se $x \in U^\perp$, então para todo $y \in U$ temos $\langle y, T(x)\rangle = \langle T(y), x\rangle = 0$.*

Lema 1.4.3 *Todo operador não nulo $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ compacto e autoadjunto possui um autovalor não-nulo, pois $-\|T\|$ ou $\|T\|$ é autovalor de T.*

Demonstração. Usando a compacidade de T será mostrado que um deles é autovalor, o que equivalerá a mostrar que existe $0 \neq \zeta \in \mathcal{H}$ com $(T^2 - \|T\|^2 Id)\zeta = 0$.

Seja $\{x_n\}$, $\|x_n\| = 1$, $\forall n$, de modo que $\|T(x_n)\| \to \|T\|$. Como T é compacto, existe subsequência de $\{T(x_n)\}$, também denotada por $\{T(x_n)\}$, convergente. Como T é contínuo, $\{T^2(x_n)\}$ também converge.

A estimativa

$$\begin{aligned} 0 \leq \|T^2(x_n) - \|T(x_n)\|^2 x_n\|^2 &= \|T^2(x_n)\|^2 - \|T(x_n)\|^4 \\ &\leq \|T\|^2\|T(x_n)\|^2 - \|T(x_n)\|^4 \to 0 \textit{ para } n \to \infty, \end{aligned}$$

mostra que a sequência $y_n = T^2(x_n) - \|T(x_n)\|^2 x_n$ converge para zero e, assim,

$$x_n = \frac{(T^2(x_n) - y_n)}{\|T(x_n)\|^2}$$

converge para um vetor ζ com $\|\zeta\| = 1$. Portanto, denotando por $\lambda = \|T\|$ e lembrando que T é contínuo, $0 = T^2(\zeta) - \|T\|^2(\zeta) = T_\lambda T_{-\lambda}(\zeta)$. Daí, segue que ou $T_{-\lambda}(\zeta) = 0$ e $-\|T\|$ é um autovalor de T, ou $T_{-\lambda}(\zeta) \neq 0$ e $\|T\|$ é um autovalor de T. $\square$

Denotaremos por $\mathcal{B}_0(\mathcal{H})$ o conjunto dos operadores compactos de $\mathcal{H}$ em $\mathcal{H}$.

Teorema 1.4.4 ***(Hilbert-Schmidt:)*** *Se $T \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H})$ é autoadjunto, então*

$$\mathcal{H} = \left[\oplus_{0\neq\lambda\in\sigma_p(T)} N(T_\lambda)\right] \oplus N(T).$$

Demonstração. Como T é auto-adjunto, $N(T_\lambda) \perp N(T_\mu)$ se $\lambda \neq \mu$, e a soma direta do enunciado está bem definida. Seja $E = \oplus_{0\neq\lambda\in\sigma_p(T)} N(T_\lambda)$. Se $y \in E^\perp$, então para todo $x_\lambda \in N(T_\lambda)$ tem-se $\langle T(y), x_\lambda\rangle = \langle y, T(x_\lambda)\rangle = \lambda\langle y, x_\lambda\rangle = 0$, mostrando que $T(y) \in E^\perp$. Como isto ocorre para todo $\lambda \in \sigma_p(T)$, segue que $T(y) \in E^\perp$, ou seja, $E^\perp$ é invariante por T. Também tem-se que $\mathcal{H} = E \oplus E^\perp$.

Para completar a demonstração, falta mostrar que $E^{\perp} = N(T)$. Como E também é invariante por T, conclui-se que $S = T|_{E^{\perp}}$, $S : E^{\perp} \to E^{\perp}$, a restrição de T a $E^{\perp}$, está bem definida e é um operador autoadjunto compacto. Se $S \neq 0$, pelo Lema 1.4.3, existe um autovetor ζ não nulo de S com autovalor não nulo; assim, por construção, $\zeta \in E$ e $\zeta \in E^{\perp}$, e necessariamente $\zeta = 0$. Isso mostra que $S = 0$, ou seja, $E^{\perp} = N(T)$. □

Corolário 1.4.5 *Se $T \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H})$ é autoadjunto, então $\mathcal{H}$ possui uma base ortonormal formada por autovetores de T.*

Demonstração. A demonstração desse resultado é simples de ser feita e pode ser encontrada em [28, p.181].

□

Lema 1.4.6 *Seja $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Então existem únicos operadores autoadjuntos T_R e T_I de forma que $T = T_R + iT_I$ e $T^* = T_R - iT_I$. Ainda mais, T é normal se, e somente se, T_R e T_I comutam entre si e unitário se, e somente se, T_R e T_I comutam entre si e $T_R^2 + T_I^2 = Id$.*

Demonstração. Seja $T \in B(\mathcal{H})$. Definimos $T_R = \frac{(T+iT^*)}{2}$ e $T_I = \frac{(T-T^*)}{2i}$. Assim, claramente, temos que $T = T_R + iT_I$ e $T^* = T_R - iT_I$.

Agora, se T_R comuta com T_I, podemos notar que T comuta com T^*, assim T é normal. Agora, se T comuta com T^*, então usando esta decomposição, encontra-se

$$-i(T_R T_I - T_I T_R) = i(T_R T_I - T_I T_R).$$

Daí tem-se que $(T_R T_I - T_I T_R) = 0$. Por fim, explicitando-se

$$TT^* = Id = T^*T$$

e igualando as partes reais e imaginárias encontra-se a caracterização dos operadores unitários.

□

O lema a seguir é útil quando trabalhamos com operadores compactos e autoadjuntos.

Lema 1.4.7 *Se $R, S \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H})$ são autoadjuntos e comutam, então $\mathcal{H}$ possui uma base ortonormal de autovetores simultâneos de R e S.*

Demonstração. Para cada autovalor λ de S, $S\xi^{\lambda} = \lambda\xi^{\lambda}$, tem-se que

$$S(R\xi^{\lambda}) = R(S\xi^{\lambda}) = \lambda R\xi^{\lambda},$$

e $N(S_{\lambda})$ é invariante por R (bem como seu complemento ortogonal). Como o operador restrição

$$R|_{N(S_{\lambda})}$$

é autoadjunto e compacto, pode-se escolher se uma base ortonormal de $N(S_{\lambda})$ de $N(\lambda_i)$ como em 1.4.5 [28, p.181], formada por autovetores de R, e logicamente, também autovetores de S. Tomando a união sobre todos os autovalores de S o resultado segue, pelo Corolário 1.4.5.

□

Corolário 1.4.8 *Se $T \in B_0(\mathcal{H})$ é normal, então $\mathcal{H}$ possui uma base ortonormal de autovetores de T e vale a decomposição de $\mathcal{H}$ como no teorema de Hilbert-Schmidt. Em particular,*

$$T(f) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle f, \varphi_n \rangle_{\mathcal{H}} \varphi_n, \quad f \in \mathcal{H},$$

onde $\{\lambda_n\}$ contém autovalores (contadas as multiplicidades, com $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}| \to 0$) e $\{\phi_n\}$ contém autovetores ortonormais de T.

Demonstração. Basta lembrar que $T = T_R + iT_I$, com T_R, T_I autoadjuntos , e sendo T normal, temos pelo Lema 1.4.6, que T_R comuta com T_I, e então aplicar o Lema 1.4.7. Note que se $T\xi^\lambda = (Im\lambda)\xi^\lambda$, e que os autovetores correspondendo a autovalores distintos são ortogonais. □

Teorema 1.4.9 ***(Teorema Espectral para Operadores Compactos Autoadjuntos)*** *Sejam T um operador linear compacto e normal em $\mathcal{H}$, $\{\lambda_j\} \subset \mathbb{C}$ os autovalores não nulos de T e $\{P_j\}$ os projetores ortogonais sobre $N(T_{\lambda_j})$ $(dim N(T_{\lambda_j}) < \infty)$. Então*

$$T = \sum_j \lambda_j P_j,$$

com a série convergente em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Demonstração. Seja P_0 o projetor ortogonal sobre $N(T)$. Pelo Corolário 1.4.8 tem-se $Id = P_0 + \sum_j P_j$. Assim, para todo $\xi \in \mathcal{H}$,

$$T\xi = TP_0\xi + T\sum_j P_j\xi = \sum_j T(P_j\xi) = \sum_j \lambda_j P_j \xi.$$

Disto e $P_jP_k = 0$, $j \neq k$, segue que

$$\begin{aligned} \left\| (T - \sum_{j=n+1}^{\infty} \lambda_j P_j)\xi \right\|^2 &= \sum_{j=n+1}^{\infty} |\lambda_j|^2 \|P_j\xi\|^2 \\ &\leq (\max_{j \geq n+1} |\lambda_j|^2) \sum_{j+n+1}^{\infty} \|P_j\xi\|^2 \\ &\leq (max_{j \geq N+1} |\lambda_j|^2) \|\xi\|^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left\| T - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j \right\|^2 \leq \max_{j \geq n+1} |\lambda_j|^2.$$

Como $\lambda_j \to 0$, se $j \to \infty$, vem que $T = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j P_j$ em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$. □

Uma característica interessante de um operador positivo contínuo é o fato do mesmo possuir uma única raíz quadrada positiva.

Teorema 1.4.10 ***(Lema da Raiz n-ésima)***: *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ um operador positivo. Se n é um inteiro positivo então existe um único operador positivo S em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $S^n = T$. O operador S descrito acima é denotado por $T^{\frac{1}{n}}$ e chamado* ***raiz n-ésima de*** *T.*

Demonstração. Como T é positivo, então pelo Teorema 1.3.29, T é autoadjunto com seus autovalores satisfazendo $\lambda_j > 0$. Pelo Teorema Espectral 1.4.9 temos que $T = \sum_j \lambda_j P_j$.

Defina o operador S por $S = \sum_j \sqrt[n]{\lambda_j} P_j$, o qual é compacto pois $\lambda_j \to 0$ para $j \to \infty$ e S pode ser aproximado por operadores de posto finito em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ (explicitamente por $\sum_{j=1}^n \sqrt[n]{\lambda_j} P_j$).

Para concluir a demonstração precisamos mostrar que $S^n = T$ e que vale a unicidade. Da forma como foi definido o operador S, claramente podemos notar que $S^n = T$, pois $(\sqrt[n]{\lambda_j})^n = \lambda_j$ e cada P_j é uma projeção.

Agora mostremos a unicidade: Suponha que existem dois operadores positivos e compactos S_1 e S_2 que possuem a forma $S_1^n = T$ e $S_2^n = T$.

Assim $S_1 = S_2$ ou $S_1 = -S_2$, mas por hipótese, S_1 e S_2 são positivos, temos que $S_1 = S_2$. E assim a prova está completa. □

Definição 1.4.11 *Sejam $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert e $\{x_n\}$ uma base ortonormal de $\mathcal{H}$. Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ e $T \geq 0$, o traço de T é definido por*

$$tr(T) := \sum_{n=1}^{\infty} \langle T(x_n), x_n \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Definição 1.4.12 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Um operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é nuclear quando $tr(|T|) := tr(\sqrt{T^*T}) < \infty$.*

Nas condições da definição acima, temos algumas propriedades:

(i) O conjunto dos operadores nucleares é um subespaço vetorial de $\mathcal{B}(\mathcal{H})$;

(ii) Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é um operador nuclear e $\{x_n\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} \langle T(x_n), x_n \rangle_{\mathcal{H}}$ é absolutamente convergente;

(iii) Nas condições do item (ii), o valor da série independe da base utilizada;

(iv) Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é nuclear, então T é compacto.

Mais comentários a respeito destas propriedades podem ser encontradas em [14, p.207,209,211].

O espaço dos operadores nucleares é normalizável. Uma possível norma é dada pela expressão

$$\|T\|_{\mathcal{H}} := \sum_{n=1}^{\infty} |\langle T(x_n), x_n \rangle_{\mathcal{H}}|,$$

onde $\{x_n\}$ é uma base ortonormal de $\mathcal{H}$. Como a expressão $tr(T) := \sum_{n=1}^{\infty} \langle T(x_n), x_n \rangle_{\mathcal{H}}$ é absolutamente convergente e independe da base é imediato que $tr(\cdot)$ é um funcional linear contínuo no espaço dos operadores nucleares com norma menor ou igual a 1.

Finalizamos esta seção com exemplos de operadores compactos.

Definição 1.4.13 *Considere um operador $T : L^2(X, \mu) \to L^2(X, \mu)$. Se existir uma função $K : X \times X \to \mathbb{C}$ para o qual*

$$T(f)(x) = \int_X K(x, y) f(y) d\mu(y), \;\; f \in L^2(X, \mu), \quad x \in X \quad q.s,$$

dizemos que T é um operador integral sobre $L^2(X,\mu)$. Neste caso, escrevemos $T = \mathcal{K}$ e dizemos que K é o núcleo gerador deste operador.

Quando o núcleo $K \in L^2(X \times X, \mu \times \mu)$ e μ é σ-finita, o Teorema de Fubini 1.2.8 e a Desigualdade de Cauchy 1.2.6, nos ajudam a notar que

$$\|\mathcal{K}(f)\|_2^2 = \int_X |\mathcal{K}(f)(x)|^2 d\mu(x) = \int_X \left| \int_X K(x,y) f(y) d\mu(y) \right|^2 d\mu(y)$$

Agora,

$$\begin{aligned} \int_X \left| \int_X K(x,y) f(y) d\mu(y) \right|^2 d\mu(y) &\leq \int_X \left(\left(\int_X |K(x,y)|^2 d\mu(y) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_X |f(y)|^2 d\mu(y) \right)^{\frac{1}{2}} \right)^2 d\mu(x) \\ &= \|K\|_2^2 \|f\|_2^2, \end{aligned}$$

$f \in L^2(X,\mu)$, ou seja, $\|\mathcal{K}\| \leq \|K\|_2$.

Definição 1.4.14 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Dizemos que um operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é do tipo Hilbert-Schmidt quando $tr(T^*T) < \infty$.*

Denotamos o conjunto dos operadores do tipo Hilbert-Schmidt por $HS(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$.

Outra forma de definir um operador do tipo Hilbert-Schmidt é dada pelo seguinte resultado.

Lema 1.4.15 *Um operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ é do tipo Hilbert-Schmidt se existe uma base ortonormal $\{e_j\}_{j \in J}$ de $\mathcal{H}_1$ com*

$$\|T\|_{HS} := \left(\sum_{j \in J} \|Te_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Proposição 1.4.16 *Seja $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Então*
(i) $\|T\|_{HS}$ não depende da base ortonormal considerada.
(ii) $T \in HS(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ se, e somente se, seu adjunto $T^* \in HS(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$. Além disso,

$$\|T\|_{HS} = \|T^*\|_{HS}.$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada [28, p.154]. □

O próximo resultado mostra a compacidade dos operadores do tipo Hilbert-Schmidt [28, p.156].

Teorema 1.4.17 *Todo operador Hilbert-Schmidt é compacto.*

Demonstração. Sejam $T \in HS(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ e $\{x_n\} \subset \mathcal{H}_1$, com $x_n \to x$. Para mostrar que T é compacto, basta provar que $T(x_n) \to T(x)$.

Note que, por linearidade, é suficiente considerar o caso $x_n \to 0$.

Seja $\{e_j\}_{j \in J}$ uma base ortonormal de $\mathcal{H}_2$. Para cada n sabe-se que o conjunto $\{j \in J : \langle e_j, T(x_n) \rangle \neq 0\}$ é contável (se for finito para todo n o argumento que segue se adapta facilmente) e, por simplicidade de notação, será denotado pelos números naturais.

Assim,

$$\|T(x_n)\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle e_j, T(x_n)\rangle|^2 \leq \sum_{j=1}^{N} |\langle T^*(e_j), x_n\rangle|^2 + M \sum_{j=N+1}^{\infty} \|T^*(e_j)\|^2,$$

sendo $M = sup_{n\in\mathbb{N}}\|x_n\|^2$ (M é finito pois toda sequência fracamente convergente é limitada).

Dado $\varepsilon > 0$, escolha N com $\sum_{j=N+1}^{\infty} \|T^*(e_j)\|^2 < \frac{\varepsilon}{M}$, o qual existe pois $T^* \in HS(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$.

Agora, como $x_n \to 0$, existe k de modo que $\sum_{j=1}^{N} |\langle T^*(e_j), x_n\rangle|^2 < \varepsilon$, se $n \geq k$. Assim, se $n \geq k$ tem-se $\|T(x_n)\|^2 < 2\varepsilon$, e conclui-se que $T(x_n) \to 0$. Portanto T é compacto.

□

Notação: $\overline{\psi} \otimes \phi(x, y) = \overline{\psi(y)} \otimes \phi(x)$.

Lema 1.4.18 *Sejam $\mathcal{H}_1 = L^2(X_1, \mu)$ e $\mathcal{H}_2 = L^2(X_2, \nu)$ espaços separáveis, com μ e ν medidas σ-finitas, e $\mathcal{H}_3 = L^2(X_1{\times}X_2, \mu{\times}\nu)$. Então, se $\{\psi_n\}$ e $\{\phi_j\}$ são bases ortonormais (contáveis)de $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, respectivamente, então $\{\overline{\psi_n}{\otimes}\phi_j\}$ é base ortonormal de $\mathcal{H}_3$, o qual também é separável.*

Demonstração. A demonstração deste lema pode ser encontrada em [28, p.157].

□

O próximo resutado nos dá outra representação de operadores do tipo Hilbert-Schmidt.

Proposição 1.4.19 *Sejam $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ e $\mathcal{H}_3$ como no Lema 1.4.18. Então, o operador $T \in HS(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ se, e somente se, existe $K \in \mathcal{H}_3$ de modo que*

$$T(f)(x) = T_K(f)(t) = \int_{X_1} K(x, y) f(y) d\mu(y), \quad f \in \mathcal{H}_1.$$

Além disso, $\|T\|_{HS} = \|K\|_{\mathcal{H}_3}$.

Demonstração. Se $\{\psi_n\}$ e $\{\phi_j\}$ são bases ortonormais de $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, respectivamente, então, pelo Lema 1.4.18, $\{\overline{\psi_n} \otimes \phi_j\}$ é base ortonormal de $\mathcal{H}_3$.
Suponha que $T = T_K$; então

$$\sum_n \|T_K\psi_n\|_{\mathcal{H}_2} = \sum_{n,j} |\langle T_K\psi_n, \phi_j\rangle_{\mathcal{H}_2}|^2 = \sum_{n,j} |\langle K, \overline{\psi_n} \otimes \phi_j\rangle_{\mathcal{H}_3}|^2 = \|K\|_{\mathcal{H}_2},$$

mostrando que $T_K \in HS(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ e $\|T_K\|_{HS} = \|K\|_{\mathcal{H}_3}$.

Seja $T \in HS(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Daí, tem-se

$$\sum_{n,j} |\langle \phi_j, T\psi_n\rangle_{\mathcal{H}_2}|^2 = \sum_n \|T\psi_n\|^2 = \|T\|^2 < \infty,$$

o que permite definir a função

$$K_0(x, y) = \sum_{n,j} \langle \phi_j, T\psi_n\rangle_{\mathcal{H}_2} \overline{\psi_n(y)} \otimes \phi_j(x)$$

no espaço $\mathcal{H}_3$, note que $\|K_0\|_{\mathcal{H}_3} = \|T\|_{HS}$.

Será verificado que $T = T_{K_0}$.

Se $f \in \mathcal{H}_1$ e $g \in \mathcal{H}_2$ tem-se

$$\begin{aligned}
\langle g, T_{K_0} \rangle_{\mathcal{H}_2} &= \int_{X_2} \left(\overline{g(x)} \int_{X_1} K_0(x,y) f(y) d\mu(y) \right) d\nu(x) \\
&= \langle g \otimes \overline{f}, K_0 \rangle_{\mathcal{H}_3} \\
&= \sum_{n,j} \langle \phi_j, T\psi_n \rangle_{\mathcal{H}_2} \langle g \otimes \overline{f}, \phi_j \otimes \psi_n \rangle_{\mathcal{H}_3} \\
&= \sum_{n,j} \langle \phi_j, T\psi_n \rangle_{\mathcal{H}_2} \langle g, \phi_j \rangle_{\mathcal{H}_2} \langle \psi_n, f \rangle_{\mathcal{H}_1} \\
&= \left\langle \sum_j \langle \phi_j, g \rangle_{\mathcal{H}_2}, \sum_n \langle \psi_n, f \rangle_{\mathcal{H}_1} T\psi_n \right\rangle_{\mathcal{H}_2} \\
&= \left\langle g, \sum_n \langle \psi_n, f \rangle_{\mathcal{H}_1} T\psi_n \right\rangle_{\mathcal{H}_2} \\
&= \left\langle g, T \sum_n \langle \psi_n, f \rangle_{\mathcal{H}_1} \psi_n \right\rangle_{\mathcal{H}_2} \\
&= \langle g, Tf \rangle_{\mathcal{H}_2}.
\end{aligned}$$

Portanto, $T = T_{K_0}$.

□

1.5 Transformada de Laplace

A técnica da Transformada de Laplace é uma poderosa ferramenta na determinação de soluções de equações diferenciais ordinárias com condições iniciais. O operador $\mathcal{L}$ é um operador integral linear que transforma edo's em equações algébricas.

Definição 1.5.1 *Dizemos que f é contínua por partes em $[a, b]$ se é contínua exceto num número finito de pontos deste intervalo e se em cada ponto x_0 de descontinuidade existem os limites laterais à direita e à esquerda.*

Seja $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ e consideremos

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t) dt,$$

onde s é uma variável real. Quando f é suficientemente bem comportada, esta integral convergirá para certos valores de s, definindo uma função de s, chamada de transformada de Laplace de f, e será denotada por $\mathcal{L}(f)$ ou $\mathcal{L}(f)(s)$.

Definição 1.5.2 *Dizemos que f é de ordem exponencial em $[0, \infty)$ se existem constantes $C > 0$ e α tais que*

$$|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}, \quad \forall t > 0,$$

Teorema 1.5.3 ***(Condições suficientes para a existência de $\mathcal{L}$)*** *Se f é contínua por partes e de ordem exponencial, então existe um real $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt,$$

converge para todos os valores de $s > \alpha$.

Demonstração. Como f é de ordem exponencial, existem $C > 0$ e α reais tais que

$$|f(t)| \leq Ce^{\alpha t}.$$

Logo, temos que

$$\Big| \int_0^\infty e^{(-st)} f(t)dt \Big| \leq C \int_0^\infty e^{(\alpha - s)t} dt = \lim_{t_0 \to \infty} \frac{C}{s - \alpha} \left[1 - e^{(\alpha - s)t_0}\right] = \frac{C}{s - \alpha},$$

se $s > \alpha$.

$\square$

Logo, a Transformada de Laplace de toda função de ordem exponencial existe. Mas será que vale a recíproca? A resposta é não e um contraexemplo pode ser a função $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ tem transformada de Laplace, dada por $\sqrt{\frac{\pi}{s}}$ embora não seja de ordem exponencial.

1.5.1 Propriedades

Denotaremos por ε_∞ o conjunto de todas as funções parcialmente contínuas de ordem exponencial.

Teorema 1.5.4 ***(Linearidade)*** *Sejam f e g pertencentes a ε_∞ e $k \in \mathbb{R}$. Então, $\mathcal{L}(kf + g)(s) = k\mathcal{L}(f)(s) + \mathcal{L}(g)(s)$.*

Demonstração. A prova é simples e é dada por:

$$\mathcal{L}(kf+g)(s) = \int_0^\infty e^{-st}(kf+g)(t)dt = k\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt + \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt = k\mathcal{L}(f)(s) + \mathcal{L}(g)(s).$$

$\square$

O próximo resultado diz que $\mathcal{L}$ é injetiva em ε_∞.

Teorema 1.5.5 ***(Lerch)*** *Sejam f e g pertencentes a ε_∞. Suponha que existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(g)(s), \quad \forall s > s_0$. Então $f(t) = g(t), \quad \forall t > 0$, exceto possivelmente nos pontos de descontinuidade.*

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [10, p.185]. $\square$

Teorema 1.5.6 ***(Comportamento Assintótico de $\mathcal{L}(f)$)*** *Se $f \in \varepsilon_\infty$, então $\lim_{s \to \infty} \mathcal{L}(f)(s) = 0$.*

Demonstração. Como existem constantes $C > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$|\mathcal{L}(f)(s)| \leq \frac{C}{s-\alpha}, \quad \forall s > \alpha,$$

o resultado segue imediatamente. $\square$

Teorema 1.5.7 *Sejam f contínua, f' contínua por partes e de ordem exponencial em $[0, \infty)$. Então*

$$\mathcal{L}(f') = s\mathcal{L}(f) - f(0).$$

Demonstração. Por definição, temos que

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0 e^{-st} f'(t)dt = \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} f'(t)dt.$$

Aplicando a integração por partes segue que:

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \lim_{b\to\infty} e^{-sb} f(b) - f(0) + s\int_0^b e^{-st} f(t)dt = -f(0) + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt,$$

isto é,

$$\mathcal{L}(f) = s\mathcal{L}(f) - f(0).$$

$\square$

Se a equação $\mathcal{L}(f)(t) = F(s)$ pode ser resolvida em relação a $f(t)$, então a solução é essencialmente única, diferindo apenas em pontos de descontinuidades. Esta solução é chamada de Transformada Inversa de Laplace da função $F(s)$ e é denotada por $\mathcal{L}^{-1}(F)(s)$. Ela é caracterizada pela propriedade:

$$\mathcal{L}^{-1}(F)(s) = f(t) \Leftrightarrow \mathcal{L}(f)(t) = F(s).$$

Um método conveniente para se obter as transformadas inversas de Laplace, consiste em usar uma tabela de transformadas de Laplace.

Se uma transformada $F(s)$ não puder ser encontrada na tabela, então podemos expandir em frações parciais e escrever $F(s)$ em termos de funções simples de s nas quais as transformadas são conhecidas.

1.5.2 Algumas aplicações

Nesta subseção analisaremos algumas aplicações da transformada de Laplace. Outras aplicações, como problemas de vibrações (osciladores harmônicos), de vigas (problemas de contorno), de difusão (equações diferenciais parciais) e problemas de transporte (equações integro-diferenciais), podem ser encontrados em [33, p.79].

Exemplo 1.5.8 *Resolva o sistema de equações diferenciais lineares*

$$\begin{cases} x'(t) = 2x(t) - 3y(t) \\ y'(t) = y(t) - 2x(t) \end{cases}$$

Resolução: *Aplicando a transformada de Laplace na variável t do sistema de EDO acima, considerando que $\mathcal{L}(x(t)) = X(s)$ e $\mathcal{L}(y(t)) = Y(s)$, resulta que*

$$\begin{cases} (s-2)X(s) + 3Y(s) = 8 \\ 2X(s) + (s-1)Y(s) = 3 \end{cases}.$$

Resolvendo simultaneamente as equações acima, usando o método de Cramer, temos

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 3 & s-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{5}{s+1} + \frac{3}{s-4}$$

e

$$Y(s) = \frac{\begin{vmatrix} s-2 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{5}{s+1} - \frac{2}{s-4},$$

Assim, aplicando a transformada inversa de Laplace, obtemos que $x(t) = 5e^{-t} + 3e^{4t}$ e $y(t) = 5e^{-t} - 2e^{4t}$.

Exemplo 1.5.9 ***(Aplicação em circuitos elétricos):*** *Seja um simples circuito RCL, onde temos uma resistência R (em ohms), uma indutância L (em henrys), uma capacitância C (em farads) e um gerador ou bateria, fornecendo uma força eletromotriz $E(t)$. Quando a chave k é fechada, ou seja, o circuito é fechado, uma carga $q(t)$ (em coulombs) fluirá nas placas do capacitor, gerando uma corrente $I(t) = \frac{dq}{dt}(t)$ (em amperes). O tempo t é medido em segundos.*

Devemos lembrar que podemos definir a diferença de potencial no resistor, indutor, capacitor e gerador, respectivamente, por

$V_R = RI(t) = R\frac{dq}{dt}(t)$, $V_L(t) = L\frac{dI}{dt}(t) = L\frac{d^2q}{dt^2}(t)$, $\quad V_C(t) = \frac{1}{C}q(t)$ *e* $V_G(t) = -E(t)$.

Assim, pela Lei de Kirchoff, temos que

$$L\frac{d^2q}{dt^2}(t) + R\frac{dq}{dt}(t) + \frac{1}{C}q(t) = E(t)$$

ou

$$L\frac{d^2I}{dt^2}(t) + R\frac{dI}{dt}(t) + \frac{1}{C}I(t) = \frac{dE}{dt}(t).$$

Através do uso da transformada de Laplace, podemos resolver as equações diferenciais acima, sujeitas a condições iniciais do tipo da carga e corrente conhecidas em $t = 0$.

Problema 1: *Um indutor de 2 henrys, um resistor de 16 ohms e um capacitor de 0.02 farads estão conectados em série a uma força eletromotriz de $E(t)$ volts. Em $t = 0$, a carga sobre o capacitor e a corrente no circuito são nulas. Encontre a carga e a corrente num tempo $t > 0$ qualquer, se $E(t) = 300V$.*

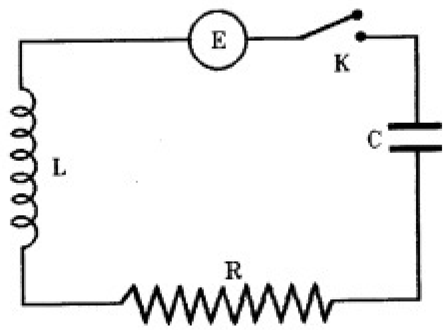

Figura 1.1: Circuito RCL

Resolução: *Sejam $q(t)$ e $I(t)$ a carga e a corrente, respectivamente, no circuito, num dado tempo t. Assim, pela lei de Kirchoff, temos a seguinte equação,*

$$2\frac{dI}{dt}(t) + 16I(t) + \frac{1}{0,02}q(t) = E(t)$$

sujeita as condições iniciais $q(0) = 0$ e $I(0) = q'(0) = 0$.

Usando a transformada de Laplace, onde $Q(s) = \mathcal{L}(q(t))$ e $F(s) = \mathcal{L}(E(t))$, temos que:

$$(s^2Q(s) - sq(0) - q'(0)) + 8(sQ(s) - q(0)) + 25Q(s) = \frac{1}{2}F(s).$$

Agora, usando as condições iniciais, e isolando $Q(s)$ e aplicando a transformada inversa de Laplace, obtemos

$$q(t) = \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{s^2 + 8s + 25}\right). \tag{1.2}$$

Daí estamos aptos a calcular $q(t)$ e $I(t)$.

Para $E(t) = 300V$, resolveremos a Equação 1.2 usando a decomposição em frações parciais e o completamento de quadrados, ou seja,

$$\begin{aligned} q(t) = 150\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2 + 8s + 25)}\right) &= 150\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{A}{s} + \frac{B(s+4) + C}{(s+4)^2 + 9}\right) \\ &= 6\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s} - \frac{(s+4) + 4}{(s+4)^2 + 9}\right) \\ &= 6 - e^{-4t}[6cos(3t) + 8sen(3t)] \end{aligned}$$

e

$$I(t) = \frac{dq}{dt}(t) = 50e^{-4t}sen(3t).$$

Exemplo 1.5.10 ***(Aplicação à mecânica):*** *Consideremos uma mola comum resistente a compressão e à extensão. Suponhamos que esta mola está suspensa verticalmente, que sua* *extremidade superior está presa em um suporte fixo e que na sua extremidade inferior está fixado um corpo de massa m muito maior que a massa da mola, a um ponto que a massa da mola possa ser desprezada.*

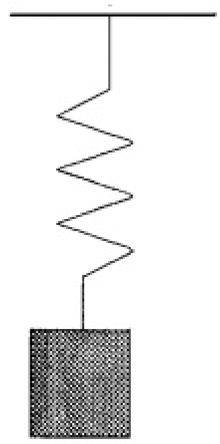

Figura 1.2: Sistema Massa-mola amortecida

Puxando esta massa m verticalmente para baixo uma certa distância e, então, soltando-a, este corpo passará a se movimentar.

Sabemos, pela segunda lei de Newton, que a resultante das forças que atuam sobre um corpo é igual a força da inércia, ou seja, o produto da massa pela aceleração deste corpo.

Analisemos as forças que atuam sobre este corpo de massa m.

(1) Força da gravidade: $F_1 = m.g$, *onde g é a aceleração da gravidade.*

(2) Força da mola: *É a força exercida pela mola quando deformada. Esta força é proporcional a deformação (quanto mais rígida a mola, maior a constante de proporcionalidade k). Quando o corpo está em repouso (posição de equilíbrio), esta mola tem um alongamento* s_0 *devido a força da gravidade que atua sobre o corpo. Esta força age no sentido para cima, contrário a* F_1, *e é igual em módulo a* $ks_0 = m.g$.

Chamamos de $x(t)$ *o deslocamento instantâneo da massa m num tempo t a partir de uma posição de equilíbrio, com sentido positivo voltado para baixo. Assim, pela lei de Hooke, a força da mola correspondente a um deslocamento* $x(t)$ *é a resultante da força da mola na posição de equilíbrio e a força causada pelo deslocamento, ou seja,* $F_2 = -ks_0 - kx(t)$.

Assim, a força que atua sobre o sistema é dada por

$$F = F_1 + F_2 = mg - ks_0 - kx(t) = mg - mg - kx(t) = -kx(t).$$

Logo, se o amortecimento do sistema é tão pequeno que pode ser desprezado, segue que $-kx(t)$ *é a resultante de todas as forças que agem sobre o corpo. Assim, de acordo com a lei de Newton: "Força é igual a massa vezes a aceleração", temos que*

$$m\frac{d^2x}{dt^2}(t) = -kx(t)$$

ou

$$mx''(t) + kx(t) = 0.$$

(3) Força de Amortecimento: *Se levarmos em conta o amortecimento viscoso do sistema, temos ainda no somatório das forças que atuam sobre o corpo uma força de amortecimento que possui sentido contrário ao movimento, e que supomos proporcional a velocidade do corpo. Para pequenas velocidades, esta hipótese constitui em uma boa aproximação.*

Assim a força de amortecimento é da forma $F_3 = \beta x'(t)$.

Logo, a equação do movimento da mola pode ser escrita como

$$m\frac{d^2x}{dt^2}(t) = -kx(t) - \beta\frac{dx}{dt}(t) \qquad ou \qquad mx''(t) + \beta x'(t) + kx(t) = 0, \tag{1.3}$$

onde a constante de proporcionalidade β *é chamada de constante de amortecimento.*

Podemos, ainda, ter uma força externa dependente de t, *denotada aqui por* $f(t)$, *atuando sobre o sistema. Neste caso, temos que*

$$m\frac{d^2x}{dt^2}(t) = -kx(t) - \beta\frac{dx}{dt}(t) + f(t) \quad ou \quad mx''(t) + \beta x'(t) + kx(t) = f(t).$$

Através do uso da transformada de Laplace, podemos resolver as equações diferenciais acima, sujeitas a vários tipos de condições iniciais que são de interesse físico.

Problema 2: *Sabe-se que um peso de* $5\ Kg$ *estica uma mola de* $\frac{1}{12}$ *metros. O amortecimento exerce uma força de* $0,02Kg$ *para uma velocidade de* $\frac{1}{16}m/s$.

Um peso de $613,125g$ *é ligado à mola e solto de uma posição* $\frac{1}{6}m$ *abaixo da posição de equilíbrio. Determine a posição deste corpo, em relação à posição de equilíbrio, em um dado instante* t.

Resolução: *Pelo que vimos acima, a massa do corpo será de*

$$m = \frac{P}{g} = \frac{0,613125}{9,81} = \frac{1}{16}Kg.s^2/m$$

e as constantes da mola e de amortecimento assumirão os valores

$$k = \frac{P}{s_0} = 60Kg/m$$

e

$$\beta = \frac{força}{velociddade} = 0,12Kg.s/m.$$

Consequentemente, pela equação 1.3 temos que:

$$\frac{1}{16}x''(t) + 0,12x'(t) + 60x(t) = 0,$$

onde x *é medido em metros e* t *em segundos.*

As condições iniciais são $x(0) = \frac{1}{6}$ *e* $x'(0) = 0$.

A equação acima será resolvida usando a transformada de Laplace na variável t. *Assim,*

$$\frac{1}{16}[s^2X(s) - sx(0) - x'(0)] + 0,12[sX(s) - x_0] + 60X(s) = 0$$

ou, multiplicando esta equação por 16 *e usando as condições iniciais;*

$$\left[s^2X(s) - \frac{s}{6}\right] + 1,92\left[sX(s) - \frac{1}{6}\right] + 960X(s) = 0 \rightarrow X(s) = \frac{1}{6}\frac{s + 1,92}{s^2 + 1,92s + 960}.$$

Finalmente, usando a transformada inversa de Laplace e a técnica do completamento de quadrados, temos

$$x(t) = \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s + 0,96) + 0,96}{(s + 0,96)^2 + 959,0784}\right] \cong \frac{e^{-0,96t}}{6}\left[cos(30,97t) + \frac{0,96}{30,97}sen(30,97t)\right].$$

Capítulo 2

Núcleos Positivos Definidos e Espaços de Hilbert de Reprodução

Esta seção apresenta resultados da teoria de núcleos positivos definidos, núcleos L^2-positivos definidos, algumas propriedades e exemplos clássicos. Estes resultados podem ser encontrados em [14, cap.2].

2.1 Matrizes não-negativas definidas

Definição 2.1.1 *Uma matriz $A_{n\times n}$ é não-negativa definida quando*

$$\overline{x}Ax^T \geq 0, \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{C}^n.$$

Definição 2.1.2 *Seja X um conjunto não-vazio. Dizemos que um núcleo $K : X \times X \to \mathbb{C}$ sobre X é positivo definido quando a matriz $A = (K(x_i, x_j))$ de ordem n é não-negativa definida, para qualquer $n \geq 1$ e qualquer n-upla $(x_1, ..., x_n) \in X^n$.*

Temos que a definição acima é equivalente à validade da desigualdade

$$\sum_{i,j=1}^{n} \overline{c_i} c_j K(x_i, x_j) \geq 0, \tag{2.1}$$

quando $n \geq 1$, $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$ e $\{c_1, ..., c_n\} \subset \mathbb{C}$.

Escrevemos $PD(X)$ para denotar a classe dos núcleos positivos definidos com domínio $X \times X$.

Após ter definido o que é um núcleo positivo definido veremos agora alguns exemplos.

Exemplo 2.1.3 *Se $f : X \to \mathbb{C}$ é uma função qualquer, o núcleo dado pela fórmula $K := f \otimes \overline{f}$, positivo definido. De fato, se $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$ e $\{c_1, ..., c_n\} \subset \mathbb{C}$, então*

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} \overline{c_i} c_j K(x_i, x_j) &= \sum_{i,j=1}^{n} \overline{c_i} c_j f(x_i)\overline{f(x_j)} \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \overline{c_i} f(x_i)\overline{\overline{c_j} f(x_j)} \\
&= \left| \sum_{i=1}^{n} \overline{c_i} f(x_i) \right|^2 \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

Exemplo 2.1.4 *Se X é um espaço vetorial complexo com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$, então $K(x,y) := \langle x, y \rangle_X, \quad x, y \in X$, é positivo definido.*

De fato,

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} \overline{c_i} c_j K(x_i, x_j) &= \sum_{i,j=1}^{n} \overline{c_i} c_j \langle x_i, x_j \rangle_X \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \overline{c_i} c_j \overline{\langle x_j, x_i \rangle} \\
&= \overline{\left\langle \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \right\rangle_X} \\
&= \left\langle \sum_{i}^{n} c_i x_i, \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \right\rangle_X \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \right\|_X \\
&\geq 0.
\end{aligned}$$

2.1.1 Algumas propriedades de núcleos positivos definidos

Definição 2.1.5 *Dizemos que $\lambda \in \mathbb{C}$ e $v \in \mathbb{C}^n$ são, respectivamente, autovalor e autovetor associado a λ de uma matriz A se $Av^T = \lambda v^T$.*

Podemos tirar uma observação desta definição, se A for uma matriz não negativa definida e λ for um autovalor, com v associado, temos que

$$0 \leq \overline{v} A v^T = \lambda \overline{v} v^T = \lambda \|v\|^2, \tag{2.2}$$

ou seja, garante que $\lambda \geq 0$.

Definição 2.1.6 *Seja H uma matriz qualquer. Dizemos que H é autoadjunta se $\langle Hx^T, y \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle x, Hy^T \rangle_{\mathbb{C}^n}$, para todo $x, y \in \mathbb{C}^n$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n}$ é o produto interno canônico em $\mathbb{C}^n$.*

Proposição 2.1.7 *Seja $K \in PD(X)$, então dados $x, y \in X$ as seguintes afirmações são verdadeiras:*
(i) $K(x,x) \geq 0$, ou seja, K é diagonalmente não negativo;
(ii) $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$, ou seja, K é hermitiano;
(iii) $|K(x,y)|^2 \leq K(x,x)K(y,y)$, isto é, K é diagonalmente dominante.

Demonstração. (i) Bastar tomar $n = 1$ e $c_1 = 1$ na desigualdade 2.1.

(ii) Como $K \in PD(X)$, então a matriz $A = (K(x_i, x_j))$ de ordem n é não negativa definida para qualquer $n \geq 1$ e qualquer n-upla $(x_1, x_2, ..., x_n) \in X^n$, ou seja, $\overline{w}Aw^T \geq 0, \quad \forall w \in \mathbb{C}^n$.

Tomando $n = 2$, $w = (1, 1)$ e fazendo $a_{ij} = K(x_i, x_j)$, então

$$0 \leq (1,1) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a_{11} + a_{12} + a_{21} + a_{22}.$$

Pelo item (i) segue que $a_{11}, a_{22} \in \mathbb{R}$ e, assim temos que $Im(a_{12}) = -Im(a_{21})$. Agora tomando $w = (1, i)$,

$$0 \leq (1,i) \begin{pmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = a_{11} - ia_{12} + ia_{21} + a_{22}.$$

Logo, $Re(a_{12}) = Re(a_{21})$ e $a_{12} = \overline{a_{21}}$, ou seja, $K(x,y) = \overline{K(y,x)}, \quad \forall x, y \in X$.

(iii) Observando o item (ii), temos que A é autoadjunta. Assim, pela expressão 2.2, segue que

$$det \begin{pmatrix} a_{11} & \overline{a_{21}} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - |a_{21}|^2 = \lambda_1\lambda_2 \geq 0,$$

onde λ_1 e λ_2 são autovalores da matriz A. Daí, $|a_{21}|^2 \leq a_{11}a_{22}$, isto é,

$$|K(x,y)|^2 \leq K(x,x)K(y,y), \quad \forall x, y \in X.$$

$\square$

Denotamos a função κ definida por

$$\kappa(x) := K(x,x), \quad x \in X.$$

Corolário 2.1.8 *Sejam $K : X \times X \to \mathbb{C}$ um núcleo positivo definido e a matriz $A = (K(x_i, x_j))$, $i, j = 1, ..., n$, então existe uma matriz G tal que $A = G\overline{G}^T$*

Demonstração. Da Proposição 2.1.7, temos que $A = \overline{A}^T$ e daí que A é autoadjunta. Daí, da unicidade da raiz quadrada, Lema 1.4.10, existe uma matriz G autoadjunta não negativa definida tal que $A = G^2$. Pelo fato de G ser autoadjunta, vem que $G = \overline{G}^T$, e portanto, $A = G\overline{G}^T$.

$\square$

Teorema 2.1.9 *Sejam $K_1, K_2, ..., K_q \in PD(X)$ e $d_1, d_2, ..., d_q \geq 0$:*
(i) A soma $\sum_{l=1}^{q} d_l K_l$ está em $PD(X)$;
(ii) O produto K_1K_2 está em $PD(X)$;
(iii) Se $\{K_n(x,y)\}$ converge para $K(x,y)$, então $K \in PD(X)$;

(iv) Se K é núcleo simétrico, ou seja, $K(x,y) = K(y,x), \quad x,y \in X$. Então K é positivo definido se, e somente se,

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j K(x_i, x_j) \geq 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subseteq X$ e $\{c_1, c_2, ..., c_n\} \subseteq \mathbb{R}$.

Demonstração. (i) Observe que se $K = \sum_{l=1}^{q} d_l K_l$, então

$$\sum_{i,j=1}^{n} \overline{c_i} c_j K(x_i, x_j) = \sum_{l=1}^{q} d_l \left(\sum_{i,j=1}^{n} \overline{c_i} c_j K_l(x_i, x_j) \right) \geq 0.$$

Portanto $K \in PD(X)$.

(ii) Temos que mostrar que $K_1(x,y)K_2(x,y)$, $\forall x, y \in X$ é positivo definido. Dessa forma, temos que provar que $(K_1(x_i,x_j)(K_2(x_i,x_j))$ é não negativa definida. Consideremos $A = (a_{ij}) = K_1(x_i, y_j)$ e $B = (b_{ij}) = K_2(x_i, y_j)$. Usando o Corolário 2.1.8, existe uma única matriz G tal que $A = G\overline{G}^T$. Assim, tomando $G = (g_{ij})$, e fazendo $A = G\overline{G}^T$, vem que

$$a_{ij} = \sum_{q=1}^{n} g_{iq} \overline{g_{jq}}, \quad para \quad i,j = 1, ..., n.$$

Sejam $c_1, ..., c_n \in \mathbb{C}$ quaisquer, então como a matriz B é não negtiva definida,

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} a_{ij} b_{ij} = \sum_{q=1}^{n} \sum_{i,j=1}^{n} c_i g_{iq} \overline{c_j g_{jq}} b_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} a_i \overline{a_j} b_{ij} \geq 0,$$

onde $a_i = \sum_{q=1}^{n} \overline{c_i} g_{iq}$ e $a_j = \sum_{q=1}^{n} c_j g_{jq}$.

(iii) Pelo fato de $\{K_n(x,y)\}$ convergir para $K(x,y)$, temos

$$\sum_{i,j=1}^{n} \overline{c_i} c_j K(x_i, x_j) = \lim_{q \to \infty} \sum_{i,j=1}^{n} \overline{c_i} c_j K_q(x_i, x_j) \geq 0,$$

logo $K \in PD(X)$.

(iv) Basta notar que se $\{x_1, ..., x_n\} \subseteq X$ e $\{c_1, ..., c_n\} \subseteq \mathbb{C}$ onde $c_j = a_j + ib_j, j = 1, ..., n$, com a_j e b_j reais, então

$$\sum_{j,l=1}^{n} c_j \overline{c_l} K(x_j, x_l) = \sum_{j,l=1}^{n} (a_j a_l + b_j b_l) K(x_j, x_l) + i \sum_{j,l=1}^{n} (b_j a_l - a_j b_l) K(x_j, x_l).$$

Agora, como K é simétrico, segue que

$$\sum_{j,l=1}^{n} (b_j a_l - a_j b_l) K(x_j, x_l) = \sum_{j,l=1}^{n} (b_j a_l) K(x_j, x_l) - \sum_{j,l=1}^{n} (a_j b_l) K(x_l, x_j) = 0.$$

□

O próximo exemplo é o núcleo mais conhecido dessa teoria e é chamado núcleo Gaussiano.

Exemplo 2.1.10 *O núcleo* $K(x,y)=e^{-\epsilon^2|x-y|^2}, \quad x,y\in\mathbb{R}^n, \quad \epsilon>0$ *é positivo definido.*

Mostremos inicialmente que $K(x,y)=e^{-\epsilon^2|x-y|^2}, \quad x,y\in\mathbb{R}, \quad \epsilon>0$ *é positivo definido. Sabemos que*

$$e^{2\epsilon^2 xy}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(2\epsilon^2)^l}{l!}x^l y^l, \quad x,y\in X\subset\mathbb{R}.$$

Assim,

$$\sum_{i,j=1}^{n}\overline{c_i}c_j e^{2\epsilon^2 x_i x_j}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(2\epsilon^2)^l}{l!}\sum_{i,j=1}^{n}\overline{c_i}c_j x_i^l x_j^l=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(2\epsilon^2)^l}{l!}\left|\sum_{i=1}^{n}\overline{c_i}x_i^l\right|^2\geq 0.$$

Como

$$K(x,y)=e^{-\epsilon\|x-y\|^2}=e^{-\epsilon^2x^2}e^{-\epsilon^2y^2+2\epsilon^2xy}=e^{-\epsilon^2x^2-\epsilon^2y^2}e^{2\epsilon^2xy}$$

temos que

$$\sum_{i,j=1}^{n}\overline{c_i}c_j K(x_i,x_j)=\sum_{i,j=1}^{n}\overline{d_i}d_j e^{2\epsilon^2x_ix_j}\geq 0,$$

onde $d_i=c_ie^{-\epsilon^2x_i^2}$*.*

Dessa forma, usando o ítem (ii) do Teorema 2.1.9 tem-se a positividade do núcleo Gaussiano.

Exemplo 2.1.11 *Sejam* $\{\phi_n\}$ *uma sequência de funções com domínio* X *e* $\{\mu_n\}$ *uma sequência de termos não-negativos. Se a série* $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\phi_n(x)\overline{\phi_n}(y)$ *for pontualmente convergente em* $X\times X$*, então, pelas propriedades anteriores, temos que*

$$K(x,y):=\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\phi_n(x)\overline{\phi_n(y)}$$

pertence a $PD(X)$*.*

A próxima observação define uma extensão de um núcleo positivo definido:

Observação: Se $Y\subset X$ e $K\in PD(Y)$, a extensão $\dot{K}$ de K é dada por

$$K(x,y)=\begin{cases} K(x,y), & x,y\in Y\\ 0, & x\notin Y \text{ ou } y\notin Y.\end{cases}$$

Se $Y\subset X$ *e* $K\in PD(Y)$, a extensão $\dot{K}$ de K *a* $X\times X$ que é nula fora de $Y\times Y$, define um elemento de $PD(X)$.
Se $Y\subset X$ e $K: X\times X\to\mathbb{C}$ são tais que $K: Y\times Y\to\mathbb{C}$ é positivo definido em Y, não podemos afirmar que $K\in PD(X)$.

2.2 Núcleos L^2-positivos definidos

Nesta seção será feito um breve estudo sobre a classe dos núcleos L^2-positivos, núcleos esses que melhor se encaixam ao contexto de espaços de Hilbert e apresentaremos alguns resultados dessa teoria. Em [14, p.25] podemos encontrar outros teoremas e observações.

Definição 2.2.1 *Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $K \in L^2(X \times X)$. Dizemos que K é um núcleo L^2- positivo definido quando*

$$\langle \mathcal{K}(\phi), \phi \rangle_2 = \int_X \left(\int_X K(x,y)\phi(y)d\mu(y) \right) \overline{\phi(x)} d\mu(x) \geq 0, \quad \phi \in L^2(X).$$

Denotamos por $L^2PD(X)$ o conjunto dos núcleos L^2-positivos definidos.

Exemplo 2.2.2 *Sejam $(X, \mathcal{M}, \mu)$ um espaço de medida e $f \in L^2(X)$. Como*

$$\int_X \left(\int_X f(x)\overline{f(y)}\phi(y)d\mu(y) \right) \overline{\phi(x)} d\mu(x) = \left| \int_X f(x)\overline{\phi(x)} d\mu(x) \right|^2, \quad \phi \in L^2(X),$$

temos que $K := f \otimes \overline{f} \in L^2PD(X)$.

O próximo lema indica um contexto onde as definições de núcleos positivos definidos e L^2-positivos definidos coincidem.

Lema 2.2.3 *Sejam X um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^m$ e $K \in L^2(X \times X)$. Então, $K \in L^2PD(X)$ se, e somente se, $\dot{K} \in L^2PD(\mathbb{R}^m)$.*

Demonstração. Basta observar dois fatos: se $\phi \in L^2(\mathbb{R}^m)$, então $\phi|_X \in L^2(X)$; se $\psi \in L^2(X)$ e definirmos $\dot{\psi}(x) := \chi_X(x)\psi(x), \quad x \in \mathbb{R}^m$, então $\dot{\psi} \in L^2(\mathbb{R}^m)$. □

Proposição 2.2.4 *Seja X um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^m$. Se $K \in PD(X)$, $\dot{K}$ é um elemento de $L^2(X \times X)$ e a função*

$$(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \mapsto \dot{K}(x,y)\overline{\phi(x)}\phi(y), \qquad \phi \in L^2(\mathbb{R}^m) \cap C(\mathbb{R}^m),$$

é Riemann-integrável, então $K \in L^2PD(X)$.

Demonstração. A prova desta proposição pode ser encontrada em [14, p.26]. □

Para ficar mais fácil ao leitor, a partir de agora denotaremos por ∂X a fronteira do conjunto X e X^o indica o interior do conjunto X. O próximo resultado é uma aplicação da Proposição 2.2.4.

Corolário 2.2.5 *Sejam X um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^m$ e $K \in C(X \times X)$. Se $K \in PD(X) \cap L^2(X \times X)$ e $\partial(X)$ tem medida nula, então $K \in L^2PD(X)$.*

Vejamos mais um exemplo de núcleo L^2-positivo definido:

Exemplo 2.2.6 *Se $X \subset \mathbb{R}^m$ é mensurável, tem fronteira com medida nula e medida finita, então os exemplos 2.2.2 e 2.1.3 mostram que se $K(x,y) := cos(|x| - |y|), \quad x, y \in X$, então $K \in L^2PD(X) \cap PD(X)$.*

Definição 2.2.7 *Dizemos que um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ é ∂-mensurável quando: X é mensurável, $\partial(X) = \partial(X^o)$ e X^o é não vazio.*

O próximo resultado nos mostra uma situação onde a restrição de um núcleo L^2-positivo definido torna-se positivo definido.

Proposição 2.2.8 *Se X é ∂-mensurável, então $L^2PD(X) \cap C(X \times X) \subset PD(X)$.*

Demonstração. Tomemos X ∂-mensurável. Sejam $K \in L^2PD(X) \cap C(X \times X)$, $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset X^o$ e $\{c_1, c_2, ..., c_n\} \subset \mathbb{C}$. Tome $\epsilon > 0$ de tal forma que o cubo $C[x_j, \epsilon]$ esteja em X^o, $j = 1, 2, ..., n$, e defina

$$\phi_j(x) = \frac{1}{|C[x_j, \epsilon]|} \chi_{C[x_j,\epsilon]}(x), \quad j = 1, 2, ..., n.$$

Como $\phi_j \in L^2(X)$, $j = 1, 2, ..., n$, segue que $\phi(x) = \sum_{j=1}^n c_j \phi_j(x) \in L^2(X)$.
Então

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_X \int_X K(x,y)\phi(y)\overline{\phi(x)}dxdy &= \int_X \int_X K(x,y) \sum_{i,j=1}^n c_j\phi_j(y)\overline{c_i\phi_i(x)}dxdy \\ &= \sum_{i,j=1}^n \overline{c_i}c_j \frac{1}{|C[(x_i,x_j),\epsilon]|} \int_{C[(x_i,x_j),\epsilon]} K(x,y)dxdy. \end{aligned}$$

Agora usando o Teorema da Diferenciação de Lebesgue 1.2.11, temos que

$$\sum_{i,j=1}^n \overline{c_i}c_j K(x_i, x_j) \geq 0.$$

O caso geral segue aproximando-se elementos de X por elementos de X^o e usando-se argumentos de continuidade. □

Sob algumas condições, estas definições que vimos de núcleos coincidem. O próximo teorema diz isto.

Teorema 2.2.9 *Sejam X um conjunto ∂-mensurável e $K \in L^2(X \times X) \cap C(X \times X)$. Se $\partial(X)$ tem medida nula, as seguintes afirmações são equivalentes:*
(i) $K \in PD(X)$;
(ii) $K \in L^2PD(X)$;
(iii) $\mathcal{K}$ é um operador positivo sobre $L^2(X \times X)$.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$: Por hipótese temos que X é ∂-mensurável, $K \in C(X \times X)$ e $\partial(X)$ tem medida nula, segue do Corolário 2.2.5 que $K \in L^2PD(X)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Como X é ∂-mensurável e $K \in C(X \times X)$, temos pela Proposição 2.2.8 que $K \in PD(X)$.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$: é imediata. □

Apresentaremos dois resultados que caracterizam núcleos L^2-positivos definidos, através de núcleos positivos definidos contínuos e das medidas tomadas nos espaços mensuráveis. Estes e mais resultados (mais gerais), bem como suas demonstrações, podem ser encontrados em

[13, p.21]. Em [14, p.37] pode-se ver outras propriedades dos núcleos L^2-positivos definidos e também como representá-los como séries absoluta e uniformemente convergentes.

Denotamos por $C_B(X)$ o conjunto das funções contínuas e limitadas em X, que se anulam fora de um subconjunto limitado de X.

Teorema 2.2.10 *Seja X um subconjunto mensurável de $\mathbb{R}^m$ munido da restrição da medida de Lebesgue usual μ. Todo núcleo K em $PD(X) \cap C(X \times X)$ que gera um operador integral limitado em $L^2(X, \mu)$ é um elemento de $L^2PD(X)$.*

Demonstração. Seja K um núcleo em $PD(X) \cap C(X \times X)$ para o qual $\mathcal{K}$ é limitado. Como $C_B(X)$ é denso em $L^2(X,\mu)$ [18, p.217], para mostrar que $\langle \mathcal{K}(f), f\rangle_2 \geq 0, \quad f \in L^2(X,\mu)$, basta mostrar que $\langle \mathcal{K}(f), f\rangle_2 \geq 0, \quad f \in C_B(X)$. Seja então $f \in C_B(X)$ e denote por X_f um subconjunto limitado de X para o qual $f(x) = 0, \quad x \in X \setminus X_f$. Existe uma sequência $\{A_n\}$ de subconjuntos compactos de X_f para os quais $A_n \subset A_{n+1}$, $n = 1, 2, ...$ e $\lim_{n\to\infty} \mu(X_f \setminus A_n) = 0$ [18, p.70]. Em particular, o núcleo K_f definido por $K_f(x,y) = K(x,y)\overline{f(x)}f(y), \quad x, y \in X$, é uniformemente contínuo em $A_n \times A_n$. Aplicando o Teorema da Convergência Monótona 1.2.3, obtemos a convergência de $\{K_f \chi_{A_n \times A_n}\}$ para K_f, em $L^1(X \times X, \mu \times \mu)$. Agora, para cada n, podemos encontrar um número real $b = b(n) > 0$ tal que $A_n \subset [-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}]^m$. Escrevendo

$$\left[-\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right] = \cup_{j=1}^{k^m} C_j^k,$$

onde $C_1^k, C_2^k, ..., C_{k^m}^k$, são cubos m-dimensionais de lados $\frac{b}{k}$, paralelos aos eixos coordenados, podemos decompor A_n da seguinte forma

$$A_n = \cup_{j=1}^{k^m} A_j^k, \quad A_j^k \subset C_j^k, \quad A_j^k \cap A_l^k = \emptyset, \quad l \neq k.$$

Assumindo, por simplicidade, que $A_j^k \neq \emptyset$, escolhendo $x_j \in A_j^k, \quad j = 1, 2, ..., k^m$, e definindo

$$g_k^n = \sum_{i,j=1}^{k^m} K(x_i^k, x_j^k)\overline{f(x_i^k)}f(x_j^k)\chi_{A_i^k \times A_j^k},$$

é fácil ver que $\{g_k^n\}$ converge uniformemente para $K_f \chi_{A_n \times A_n}$ em $A_n \times A_n$, quando $k \to \infty$. Ainda, como $K \in PD(X)$, segue que $g_k^n(x,y) \geq 0, \quad x, y \in A_n$. Considerando o fato de $K_f \chi_{A_n \times A_n}$ ser limitado e $\mu(A_n) < \infty$, podemos usar o Teorema da Convergência Dominada 1.2.4 para concluir que

$$\begin{aligned}
\int_X \int_X K_f(x,y) d\mu(x) d\mu(y) &= \int_{X_f} \int_{X_f} K_f(x,y) d\mu(x) d\mu(y) \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \int_{A_n} K_f(x,y) d\mu(x) d\mu(y) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{k\to\infty} \int_{A_n} \int_{A_n} g_k^n(x,y) d\mu(x) d\mu(y) \right) \geq 0.
\end{aligned}$$

Portanto $K \in L^2PD(X)$.

□

Corolário 2.2.11 *Seja X um espaço topológico de Hausdorff, localmente compacto e munido de uma medida de Radon μ. Todo núcleo K em $PD(X) \cap C(X \times X)$ que gera um operador integral limitado em $L^2(X, \mu)$ é um elemento de $L^2PD(X)$.*

Demonstração. Para demonstrar esse corolário devemos usar a mesma ideia que foi usada na demonstração do Teorema anterior, tomando A_n compacto [18, p.217] e $A_n^k = K_f^{-1}(C_j^k) \cap A_n$ onde cada C_j^r é um quadrado de lado $\frac{b}{k}$ em $\mathbb{C}$ e a família $\{C_j^r\}$ é disjunta e cobre a imagem de $A_n \times A_n$ por K_f.

□

A recíproca do teorema anterior vale em contextos mais gerais, mas é necessário algumas restrições sobre a medida. Se X é um espaço topológico e μ uma medida de Borel (completa ou σ-finita), dizemos que μ é uma medida estritamente positiva, se todo aberto de X possui medida não nula e todo ponto de X possui uma vizinhança aberta com medida finita. Assim, neste caso, todo compacto de X possui medida finita. Daí, segue o próximo resultado.

Teorema 2.2.12 *Seja X um espaço topológico munido de uma medida estritamente positiva μ. Então,*

$$L^2PD(X,\mu) \cap C(X \times X) \subset PD(X).$$

Demonstração. Sejam $K \in L^2PD(X,\mu) \cap C(X \times X)$, $x_1, x_2, ..., x_n$ pontos em X e $c_1, c_2, ..., c_n$ em $\mathbb{C}$. Da continuidade de K e do fato de $X \times X$ estar munido da topologia produto segue que, para cada $\epsilon > 0$ e $j \in \{1, 2, ..., n\}$, existe um conjunto aberto X_j^ϵ tal que $x_j \in X_j^\epsilon$ e

$$|K(x,y) - K(x_i,x_j)| < \epsilon, \quad x \in X_i^\epsilon, \quad y \in X_j^\epsilon, \quad i,j = 1,2,...,n.$$

Como μ é estritamente positiva, pode-se supor que $0 < \mu(X_j^\epsilon) < \infty, \quad j = 1,2,...,n.$

Assim, integrando esta expressão, obtemos

$$\frac{1}{\mu(X_i^\epsilon)\mu(X_j^\epsilon)} \int_{X_i^\epsilon} \int_{X_j^\epsilon} |K(x,y) - K(x_i,x_j)| d\mu(x) d\mu(y) < \epsilon.$$

Em particular

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} \frac{1}{\mu(X_i^\epsilon)\mu(X_j^\epsilon)} \int_{X_i^\epsilon} \int_{X_j^\epsilon} K(x,y) d\mu(x) d\mu(y) = K(x_i,x_j).$$

Tomando as funções

$$f_\epsilon := \sum_{j=1}^n \frac{c_j}{\mu(X_j^\epsilon)} \chi_{X_j^\epsilon}, \quad \epsilon > 0;$$

que estão em $L^2(X,\mu)$. Da desigualdade

$$0 \leq \langle \mathcal{K}(f_\epsilon), f_\epsilon \rangle_2 = \sum_{i,j=1}^n \overline{c_i} c_j \frac{1}{\mu(X_i^\epsilon)\mu(X_j^\epsilon)} \int_{X_i^\epsilon} \int_{X_j^\epsilon} K(x,y) d\mu(x) d\mu(y)$$

vem que

$$0 \leq \sum_{i,j=1}^n \overline{c_i} c_j K(x_i,x_j),$$

ou seja, $K \in PD(X)$.

□

2.2.1 O Teorema de Mercer

Este teorema recebeu este nome em homenagem a J. Mercer, autor do clássico artigo [26] que deu origem a vários estudos de propriedades espectrais de operadores gerados por núcleos positivos definidos no caso em que $X = [0,1]$. Esta foi a primeira versão deste resultado. Outros resultados e conexões com o Teorema de Mercer podem ser encontrados em [17] e a expansão de Karhunen-Loève [3, p.70] pode ser destacada como uma aplicação do Teorema.

Teorema 2.2.13 *(Mercer) Seja X um espaço topológico localmente compacto, e seja μ uma medida de Borel positiva σ-finita em X satisfazendo $\mu(U) > 0$ para todo subconjunto aberto não vazio de X. Suponhamos que uma função contínua $K : X \times X \to \mathbb{K}$ possui as seguintes propriedades:*

(i) $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$;

(ii) K é $\mathbb{B}(X) \otimes \mathbb{B}(X)$-mensurável e $K \in L^2(X \times X, \mu \times \mu)$;

(iii) $K(x,\cdot) \in L^2(X,\mu)$ para todo $x \in X$;

(iv) $\mathcal{K}(f) := \displaystyle\int_X K(\cdot,y)f(y)d\mu(y)$ define uma função contínua em X para qualquer $f \in L^2(X,\mu)$;

(v) $\langle \mathcal{K}(f), f\rangle_2 \geq 0$ para toda $f \in L^2(X,\mu)$.

Então, para todo $x, y \in X$, vale a igualdade

$$K(x,y) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \varphi_n(x)\overline{\varphi_n(y)}, \tag{2.3}$$

onde a série é absoluta e uniformemente convergente em todo subconjunto compacto de $X \times X$.

Demonstração. Primeiramente, podemos notar que $\mathcal{K}$ é um operador Hilbert-Schmidt, não negativo e autoadjunto em $L^2(X,\mu)$ (por (i), (ii) e (v)), assim, pelo Teorema Espectral 1.4.9, tome

$$\mathcal{K} = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle \cdot, \varphi_n\rangle_2 \varphi_n,$$

onde $N \in \mathbb{N} \cup \{0,\infty\}$ e $\lambda_n > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, com $n \leq N$.

Seja $n \in \mathbb{N}$, $n \leq N$ e tome $K_n(x,y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(x)\varphi_i(y)$.

Assim,

$$\|K - K_n\|_2^2 = \|K\|_2^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = 0, \ se\ N < \infty, \ n = N, \tag{2.4}$$

e

$$\|K - K_n\|_2^2 = \|K\|_2^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 \to 0, \ se\ N = \infty. \tag{2.5}$$

Se $N < \infty$, então 2.4 implica que $K = K_N$ $\mu \times \mu$-quase sempre e daí a igualdade 2.3 segue imediatamente, desde que K e K_N sejam contínuos em $X \times X$.

$N = \infty$. Se este fato acontece, então a expressão 2.5 nos diz que em $L^2(X \times X, \mu \times \mu)$ temos

$$K(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \varphi_i(x) \overline{\varphi_i(y)}$$

e

$$G_n(x,y) = K(x,y) - K_n(x,y) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i \varphi_i(x) \overline{\varphi_i(y)}.$$

Consequentemente, para toda $f \in L^2(X, \mu)$,

$$\int_{X \times X} G_n(x,y) \overline{f(x)} f(y) d(\mu \times \mu)(x,y) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i \int_X \int_X \varphi_i(x) \overline{\varphi_i(y) f(x)} f(y) d\mu(x) d\mu(y) \quad (2.6)$$

e por sua vez, temos

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i \int_X \int_X \varphi_i(x) \overline{\varphi_i(y) f(x)} f(y) d\mu(x) d\mu(y) \quad = \quad \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i |\langle f, \varphi_i \rangle_2|^2 \geq 0.$$

Assim $G_n \in L^2PD(X)$ e a $PD(X)$ Seja $x \in X$ e suponha $K(x,x) < K_n(x,x)$. Pela continuidade de K e K_n, existe uma vizinhança aberta U de $x \in X$ tal que $K(x',y) < K_n(x',y), \quad (x',y) \in U \times U$ em $U \times U$. Então $\mu(U) > 0$, pois μ é positiva, e desde que μ seja σ-finita, podemos escolher $V \in \mathbb{B}(X)$ tal que $V \subset U$ e $0 < \mu(V) < \infty$. Agora para $f := \chi_V \in L^2(X)$, a integral na expressão 2.6 é estritamente negativa, o que é contradição. Logo $K(x,x) \geq K_n(x,x)$, e fazendo $n \to \infty$ temos que,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |\varphi_i(x)|^2 \leq K(x,x) < \infty, \quad \textit{para todo } x \in X. \quad (2.7)$$

Então, para qualquer subconjunto W de X, em que $K(x,x)$ é limitado, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que

$$\begin{aligned} \sup_{y \in W} \left| \sum_{i=m+1}^{n} |\lambda_i \varphi_i(x) \overline{\varphi_i(y)}| \right|^2 &\leq \sup_{y \in W} \left(\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i |\varphi_i(x)|^2 \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i |\varphi_i(y)|^2 \right) \\ &\leq \sup_{y \in W} K(y,y) \sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i |\varphi_i(x)|^2 \to 0, \end{aligned}$$

quando $m, n \to \infty$.

Assim para cada $x \in X$ a série $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \varphi_i(x) \overline{\varphi_i}$ de funções contínuas em X é absoluta e uniformemente convergente em todo subconjunto compacto de X, e o limite, que é chamado H_x, é mais uma vez uma função contínua em X desde que X seja localmente compacto.

Por outro lado, se $\Psi \in N(\mathcal{K})$ então $\int_X K(x,y)\Psi(y)d\mu(y) = 0$, para $x \in X$ $\mu-$*quase sempre*, e isto é verdade para qualquer $x \in X$ desde que $\int_X K(\cdot,y)\Psi(y)d\mu(y)$ seja contínua. Agora seja $x \in X$. Então,

$$\langle \varphi_n, \overline{K(x,\cdot)} \rangle_2 = \int_X K(x,y) \varphi_n(y) d\mu(y) = \lambda_n \varphi_n(x), \quad n \in \mathbb{N}, \quad (2.8)$$

$$\langle\Psi, \overline{K(x,\cdot)}\rangle_2 = \int_X K(x,y)\Psi(y)d\mu(y) = 0, \quad \Psi \in N(\mathcal{K}). \tag{2.9}$$

Logo $\overline{K(x,\cdot)} \in N(\mathcal{K})^\perp$, e então a expressão 2.8 nos rende a série

$$K(x,\cdot) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \varphi_i(x)\overline{\varphi_i} \tag{2.10}$$

em $L^2(X,\mu)$, assim $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é um sistema completo ortonormal de $N(\mathcal{K})^\perp$. Podemos tomar uma subsequência $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{N}$ de modo que $\sum_{i=1}^{n_k} \lambda_i\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}$ converge para $K(x,y)$, quando $k\to\infty$ para $y \in X$ $\mu -$ *quase sempre*, e isso converge para $H_x(y)$ para todo $y \in X$ pelo que foi explicado anteriormente. Logo $K(x,\cdot) = H_x \quad \mu -$ *quase sempre* e portanto em toda parte de X pela continuidade de $K(x,\cdot)$ e H_x. Em outras palavras, para cada $x \in X$, a expansão 2.10 é válida em $L^2(X,\mu)$ e no sentido da convergência absoluta e uniforme em todo subconjunto compacto de X. Em particular,

$$K(x,x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i|\varphi_i(x)|^2, \qquad \textit{para todo } x \in X, \tag{2.11}$$

onde $K_n(x,x)$ é não decrescente. Assim, como o limite $K(x,x)$ e cada termo $\lambda_i|\varphi_i(x)|^2$ da série de 2.11 são contínuos em $x \in X$, juntamente com o Teorema de Dini 1.1.3, implicam que a convergência da expansão 2.11 é uniforme em todo subconjunto compacto de X.

Seja Γ um subconjunto compacto de $X \times X$, $\Gamma_1 := \{x \in X|(x,y) \in \Gamma \textit{ para algum } y \in X\}$ e $\Gamma_2 := \{y \in X|(x,y) \in \Gamma \textit{ para algum } x \in X\}$. Então Γ_1 e Γ_2 são subconjuntos compactos de X e $\Gamma \subset \Gamma_1 \times \Gamma_2$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\sup_{(x,y)\in\Gamma}\left|\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}\right|^2 &\leq \sup_{(x,y)\in\Gamma}\left(\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i|\varphi_i(x)|^2\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i|\varphi_i(y)|^2\right)\\
&\leq \sup_{x\in\Gamma_1}\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i|\varphi_i(x)|^2 \sup_{y\in\Gamma_2}\sum_{i=n}^{\infty}\lambda_i|\varphi_i(y)|^2 \to 0,
\end{aligned}$$

quando $n\to\infty$ e por fim segue que $K(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i\varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}$ para todo $x, y \in X$, com convergência absoluta e uniforme em compactos.

□

Integrando 2.11, e usando o Teorema da Convergência Monótona 1.2.3, temos o seguinte resultado.

Corolário 2.2.14 *Se $\kappa(x) = K(x,x), \quad x \in X$, está em $L^2(X,\mu)$, então K é nuclear e*

$$tr(K) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i = \int_X \kappa(x)d\mu(x).$$

2.3 Espaços de Hilbert de Reprodução

Os espaços de Hilbert de reprodução (reproducing kernel Hilbert spaces) têm sua origem no famoso artigo de Aronszajn [1] e são utilizados em diversas áreas da Matemática, entre eles, Teoria do Aprendizado [8], Teoria da Aproximação, onde são chamados de espaços nativos, Análise Funcional, Probabilidade e Estatística [3, 12], etc. Uma formalização e várias propriedades em torno da definição de espaços de reprodução podem ser encontradas em [1, 8].

Existem algumas formas de definir o que é um espaço de Hilbert de reprodução, porém independente da forma que os definimos, teremos as mesmas propriedades.

Definição 2.3.1 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert de funções $f : X \to \mathbb{C}$ definidas em um conjunto não vazio X. Para cada $x \in X$, a função $\delta_x : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ dada por $\delta_x(f) = f(x)$ é chamada de função avaliação em x.*

Observação: Todas as funções avaliações são lineares já que para quaisquer $f, g \in \mathcal{H}$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, temos

$$\delta_x(\alpha f + g) = (\alpha f + g)(x) = \alpha f(x) + g(x) = \alpha \delta_x(f) + \delta_x(g).$$

Definição 2.3.2 *Um espaço de Hilbert de funções $f : X \to \mathbb{C}$, definidas em um conjunto não vazio X, é um* ***Espaço de Hilbert de Reprodução*** *(EHR), se δ_x é contínua, para todo $x \in X$.*

Uma propriedade importante em teoria da aproximação é a que segue.

Lema 2.3.3 *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções em um EHR $\mathcal{H}$ convergindo para uma função f desse espaço. Então, $\{f_n\}$ converge pontualmente para f, ou seja, se $\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\mathcal{H}} = 0$, então $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x), \forall x \in X$. Essa convergência é uniforme em todo $Y \subset X$ tal que* $\sup_{x \in Y} \|f(x)\| < \infty$.

Demonstração. Basta notar que, se $x \in X$, então

$$|f_n(x) - f(x)| = |\delta_x(f_n) - \delta_x(f)| = |\delta_x(f_n - f)| \leq \|\delta_x\| \|f_n - f\|_{\mathcal{H}},$$

onde $\|\delta_x\|$ é a norma da função avaliação que é limitado por definição.

Definição 2.3.4 *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert de funções $f : X \to \mathbb{C}$ para um conjunto não vazio X. Uma função $K : X \times X \to \mathbb{C}$ é chamada de núcleo associado a $\mathcal{H}$ se satisfizer:*
(i) $\forall x \in X,\ K(\cdot, x) \in \mathcal{H}$;
(ii) $\forall x \in X$ e $\forall f \in \mathcal{H},\ \langle f, K(\cdot, x)\rangle_{\mathcal{H}} = f(x)$.
Onde $K(\cdot, x) : X \to \mathbb{C}, y \in X \mapsto K(x, y)$.

Observação: Pode-se notar que tomando $f = K(\cdot, y) \in \mathcal{H}$ tem se

$$K(x, y) = f(x) = \langle f, K(\cdot, x)\rangle_{\mathcal{H}} = \langle K(\cdot, y), K(\cdot, x)\rangle_{\mathcal{H}} \text{ para } x, y \in X. \tag{2.12}$$

Observemos também que $K(x, x) \geq 0$, pois

$$K(x, x) = \langle K(\cdot, x), K(\cdot, x)\rangle_{\mathcal{H}} = \|K(\cdot, x)\|^2_{\mathcal{H}}.$$

A próxima proposição liga o conceito de núcleo positivo definido aos espaços de Hilbert de reprodução.

Proposição 2.3.5 *Seja K o núcleo associado a $\mathcal{H}$. Se existir, o núcleo associado a $\mathcal{H}$ é único.*

Demonstração. Suponha que $\mathcal{H}$ tenha dois núcleos associados K_1 e K_2. Assim,

$$\begin{aligned}\langle f, K_1(\cdot,x) - K_2(\cdot,x)\rangle_{\mathcal{H}} &= \langle f, K_1(\cdot,x)\rangle_{\mathcal{H}} - \langle f, K_2(\cdot,x)\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= f(x) - f(x) \\ &= 0, \forall f \in \mathcal{H},\ \forall x \in X.\end{aligned}$$

Logo, tomando $f = K_1(\cdot,x) - K_2(\cdot,x)$, obtem-se:

$$\|K_1(\cdot,x) - K_2(\cdot,x)\|^2_{\mathcal{H}} = 0 \Longleftrightarrow K_1(\cdot,x) - K_2(\cdot,x) = 0, \quad \forall x \in X.$$

Portanto $K_1 = K_2$. $\square$

Teorema 2.3.6 *O espaço $\mathcal{H}$ é um EHR $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{H}$ tem um núcleo associado.*

Demonstração. Suponha que $\delta_x \in \mathcal{H}'$, onde $\mathcal{H}'$ é o dual de $\mathcal{H}$, ou seja, δ_x é limitada . Pelo Teorema da Representação de Riesz 1.3.24, existe um elemento $h_x \in \mathcal{H}$ tal que

$$\delta_x(f) = \langle f, h_x\rangle_{\mathcal{H}}, \forall\ f \in \mathcal{H}.$$

Defina

$$K(y,x) = h_x(y), \forall\ x, y \in X.$$

Então, claramente

$$K(\cdot,x) = h_x \in \mathcal{H}$$

e

$$\langle f, K(\cdot,x)\rangle_{\mathcal{H}} = \delta_x(f) = f(x).$$

Logo, K é núcleo associado a $\mathcal{H}$.

Suponha que o espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ tenha um núcleo associado K. Assim, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, para qualquer $f \in \mathcal{H}$ *e* $\forall x \in X$, tem-se

$$|\delta_x(f)| = |f(x)| = |\langle f, K(\cdot,x)\rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|K(\cdot,x)\|_{\mathcal{H}}\|f\|_{\mathcal{H}} = \sqrt{\langle K(x,x)\rangle_{\mathcal{H}}}\|f\|_{\mathcal{H}}. \tag{2.13}$$

Logo, o funcional linear $\delta_x : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ é limitado, com $\|\delta_x\| \leq \sqrt{K(x,x)}$. Portanto, $\mathcal{H}$ é um EHR.

$\square$

Outra caracterização desses espaços está explícita na próxima observação.

Observação A definição de núcleo positivo definido possibilita definir um produto interno no espaço das funções

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \overline{c_i} K(x, x_i)$$

com

$$\langle g, h\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \overline{c_i} d_j K(x_i, x_j),$$

onde $h(x) = \sum_{j=1}^{n} d_j K(x_j, x)$. O completamento desse espaço é chamado de **espaço de Hilbert de reprodução**, pois

$$|g(x)| \leq |\langle g, K(\cdot,x)\rangle| \leq \|g\|\|K(\cdot,x)\|.$$

Denotaremos por $EHR = \mathcal{H}_K$, o espaço de Hilbert de reprodução com núcleo associado K.

Os próximos resultados são propriedades de espaços de Hilbert de reprodução e podem ser encontrados em [13, p.44].

Teorema 2.3.7 *Seja K um núcleo positivo definido sobre X. Se a função κ é limitada em subconjuntos compactos de X e cada função $K(\cdot, x)$ é contínua então $\mathcal{H}_K$ é subconjunto de $C(X)$.*

Demonstração. Seja f_n uma sequência convergente para f em $\mathcal{H}_K$. Neste caso,

$$|f_n(x) - f(x)| = |\langle f_n - f, K(\cdot, x)\rangle_{\mathcal{H}_K}| \leq \|f_n - f\|_{\mathcal{H}_K} \kappa(x)^{\frac{1}{2}}, x \in X.$$

Se $f_n = \sum_{i=1}^n c_i K(\cdot, x_i)$, κ é limitada em compactos e cada $K(\cdot, x)$ é contínua, daí segue pelo Teorema 1.1.7 que f é contínua. Como o conjunto das funções com a descrição acima é denso em $\mathcal{H}_K$, o resultado segue.

□

Até o final da seção, consideraremos K como sendo um núcleo L^2-positivo definido contínuo e usaremos algumas propriedades de K e $\mathcal{K}$ apresentadas anteriormente para estudar outras propriedades de $\mathcal{H}_K$.

Temos que todas as funções de $\mathcal{H}_K$ são contínuas e o próximo resultado apresenta um contexto onde a inclusão de $\mathcal{H}$ em $C(X)$ é limitada. A condição que tomamos sobre K aparece em diversos problemas que envolvem o Teorema de Mercer para K e $\mathcal{K}$ ([15]).

Corolário 2.3.8 *Se $\sup_{x \in X} \kappa(x) < \infty$ então a inclusão $i : \mathcal{H}_K \hookrightarrow C(X)$ é limitada.*

Demonstração. Sejam K um núcleo positivo sobre X, $f \in \mathcal{H}_K$ e $x \in X$. Usando a propriedade de reprodução, temos

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |\langle f, K(\cdot, x)\rangle_{\mathcal{H}_K}| \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{H}_K} \|K(\cdot, x)\|_{\mathcal{H}_K} \\ &= \|f\|_{\mathcal{H}_K} \kappa(x)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Daí, segue o resultado.

□

Alguns problemas exigem que dentro de $\mathcal{H}$ tenham somente funções mensuráveis. Mas no nosso caso não temos problemas pois X está munido de uma medida de Borel (completa ou σ-finita), e portanto, como todas as funções são contínuas, temos que todas são mensuráveis. Ainda por 2.13 e uma condição de integrabilidade sobre κ podemos mergulhar $\mathcal{H}_K$ em $L^p(X, \mu)$, $p > 0$. Um resultado que ilustra isto é o seguinte:

Corolário 2.3.9 *Se κ é um elemento de $L^1(X, \mu)$ então $\mathcal{H}_K$ é um subconjunto de $L^2(X, \mu)$. Em particular, a inclusão $i : \mathcal{H}_K \hookrightarrow L^2(X, \mu)$ é limitada e tem norma no máximo $\|\kappa\|_1^{\frac{1}{2}}$.*

A continuidade do núcleo K depende da continuidade da aplicação $\eta : X \to \mathcal{H}_K$ dada por $\eta(x) = K(\cdot, x)$, $x \in X$. Como $\|\eta(x)\|^2_{\mathcal{H}_\mathcal{K}} = \kappa(x)$, $x \in X$, η é uniformemente limitada se, e somente se, a função $\kappa^{\frac{1}{2}}$ é limitada. Além disso,

$$\begin{aligned} \|\eta(x) - \eta(y)\|^2_{\mathcal{H}_\mathcal{K}} &= \langle K(\cdot, x) - K(\cdot, y), K(\cdot, x) - K(\cdot, y)\rangle_{\mathcal{H}_\mathcal{K}} \\ &= K(x, x) - K(x, y) - K(y, x) + K(y, y), \quad x, y \in X, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |K(x,y) - K(u,v)| &= |\langle \eta(x), \eta(y)\rangle_{\mathcal{H}} - \langle \eta(u), \eta(v)\rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{K}}}| \\ &\leq |\langle \eta(x) - \eta(u), \eta(y)\rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{K}}} + \langle \eta(u), \eta(y) - \eta(v)\rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{K}}}|, \quad x, y, u, v \in X. \end{aligned}$$

Portanto, se X for primeiro enumerável, o núcleo K será contínuo se, e somente se, η for contínua. Agora, se X é compacto e Hausdorff, usando o Teorema de Arzelà-Ascoli 1.1.8 garantimos que K é contínuo se, e somente se, a inclusão $i : \mathcal{H}_K \hookrightarrow C(X)$ for compacta.

Proposição 2.3.10 *Seja X um espaço topológico compacto e de Hausdorff. Se K é contínuo então a inclusão $i : \mathcal{H}_K \hookrightarrow C(X)$ é compacta. Se X é também primeiro enumerável, a recíproca da afirmação anterior também vale.*

Demonstração. Suponha primeiramente K contínuo. Como X é compacto, existe um número real positivo M tal que $|K(x,y)|^{\frac{1}{2}} < M, \quad x, y \in X$. Do Corolário 2.3.8 vem que

$$|f(x)| \leq M\|f\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{K}}}, \quad x \in X, \quad f \in \mathcal{H}_K,$$

e que a inclusão é limitada. Pelo Teorema 2.3.7, temos que $\mathcal{H}_K \subset C(X)$ e por 2.13 que

$$|f(x) - f(y)|^2 = |\langle f, K(\cdot, x) - K(\cdot, y)\rangle_{\mathcal{H}}|^2 \leq \|f\|^2_{\mathcal{H}_{\mathcal{K}}} \|K(\cdot, x) - K(\cdot, y)\|^2_{\mathcal{H}_{\mathcal{K}}}, \quad x, y \in X, \quad f \in \mathcal{H}_K.$$

Da compacidade de X temos que todo conjunto limitado de $\mathcal{H}_K$ é equicontínuo. Portanto, pelo Teorema de Arzelà-Ascoli 1.1.8 temos que a inclusão é compacta.

Suponha agora que a inclusão i é compacta, seja B a bola unitária fechada em $\mathcal{H}_K$. Se $x, y \in X$ então

$$\sup_{f\in B} |\langle f, K(\cdot, x) - K(\cdot, y)\rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{K}}}| = \sup_{f\in B} |f(x) - f(y)| = \|K(\cdot, x) - K(\cdot, y)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{K}}} = \|\eta(x) - \eta(y)\|_{\mathcal{H}_{\mathcal{K}}}.$$

Pelo Teorema de Arzelà-Ascoli 1.1.8, temos que B é equicontínuo e, portanto, η *e* K são funções contínuas quando tomamos X primeiro enumerável. □

Corolário 2.3.11 *Suponha que X é compacto e de Hausdorff. Se K é contínuo, então todo conjunto fechado e limitado de $\mathcal{H}_K$ é compacto em $C(X)$.*

Demonstração. Seja B um conjunto fechado e limitado de $\mathcal{H}_K$ e assuma que K seja contínuo. A Proposição 2.3.10 garante que o fecho de B em $C(X)$ é compacto. Seja $\{f_n\} \subset B$ uma sequência uniformemente convergente. Como $\mathcal{H}_K$ é um espaço de Hilbert, B é fracamente compacto [18, p.169]. Logo, existe uma subsequência $\{f_n\}$ fracamente convergente em B, digamos para $f \in B$. Como

$$f_{n_j} - f(x) = \langle f_{n_j} - f, K(\cdot, x)\rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{K}}}, \quad x \in X,$$

segue que $\{f_{n_j}\}$ converge pontualmente para f. Sendo assim, $\{f_n\}$ converge para f em $C(X)$. Portanto, B é fechado em $C(X)$. □

Em algumas aplicações, como em versões do Teorema de Mercer, [32, 34], e para provarmos o próximo resultado, é desejável que a imagem de $\mathcal{K}$ seja um subconjunto de $\mathcal{H}_K$.

Proposição 2.3.12 *Se $\kappa \in L^1(X,\mu)$, então a imagem de $\mathcal{K}$ é um subconjunto de $\mathcal{H}_K$.*

Demonstração. Tome $f \in L^2(X,\mu)$ e note que $K(\cdot,x) \in L^2(X,\mu)$. Da propriedade de reprodução, basta mostrar que

$$\mathcal{K}(f)(x) = \langle h, K(\cdot,x)\rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{K}}}, \quad x \in X,$$

para alguma $h \in \mathcal{H}_K$. Para prosseguir com a demonstração, é necessário considerar o funcional linear $\Phi_f : \mathcal{H}_K \to \mathbb{C}$ dado por

$$\Phi_f(g) = \langle g, f\rangle_2, \quad g \in \mathcal{H}_K.$$

Aplicando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz 1.2.6 e pela desigualdade 2.13, deduzimos que

$$|\Phi_f(g)| \leq \|f\|_2\|g\|_2 \leq \|f\|_2\|\kappa\|_1\|g\|_{\mathcal{H}}.$$

Assim, pelo Teorema da Representação de Riesz 1.3.24, temos a existência de $h \in \mathcal{H}_K$ tal que

$$\Phi_f(g) = \langle g, f\rangle_2 = \langle g, h\rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{K}}}.$$

Em particular,

$$\begin{aligned} h(x) = \langle h, K(\cdot,x)\rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{K}}} &= \overline{\langle K(\cdot,x), h\rangle_{\mathcal{H}_{\mathcal{K}}}} \\ &= \Phi_f(K(\cdot,x)) \\ &= \langle K(\cdot,x), f\rangle_2 \\ &= \langle f, K(\cdot,x)\rangle_2 \\ &= \mathcal{K}(f)(x), \quad x \in X. \end{aligned}$$

O resultado segue. □

Existem ainda diversos resultados que intercectam com o estudo dos espaços de Hilbert de reprodução. Em [13, p.47], o autor faz um estudo sobre a teoria de bases de espaços de Hilbert de reprodução, usando mais adiante essa teoria no estudo de núcleos positivos definidos diferenciáveis.

2.3.1 Exemplos de espaços de Hilbert de reprodução

O próximo exemplo pode ser encontrado em [12, p.73].

Exemplo 2.3.13 *Denotamos por $W[0,1]$ o espaço das funções $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ absolutamente contínuas, com um produto interno dado por*

$$\langle f, g\rangle_W = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(x)g'(x)dx.$$

Observação: *Podemos mostrar que $f \in W[0,1]$ se, e somente se, existe $h \in L^2[0,1]$ tal que*

$$f(x) = f(0) + \int_0^x h(s)ds.$$

Essa função h é chamada de derivada de f, no sentido que vale a regra de integração por partes. Ou seja,

$$\int_0^1 f(x)\varsigma(x)dx = f(x)\int_0^x \varsigma(s)ds - \int_0^1 \left(\int_0^x \varsigma(s)ds\right) h(x)dx,$$

sempre que ς for contínua em $[0,1]$. Dessa forma, podemos usar a notação $f' = h$ ([p.106][18]).

Mostremos que $W[0,1]$ é um espaço de Hilbert de reprodução:

Teorema 2.3.14 *$W[0,1]$ é um espaço de Hilbert.*

Demonstração. *Basta mostrar que $W[0,1]$ é completo. Seja $\{f_n\}$ uma sequência de Cauchy em $W[0,1]$. Isto é, dado $\epsilon > 0$, existe N tal que, se $n, m > N$, então*

$$\|f_n - f_m\|^2 = (f_n(0) - f_m(0))^2 + \int_0^1 (f'_n(x) - f'_m(x))^2 dx < \epsilon.$$

Note que $\{f_n(0)\}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ e $\{f'_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2[0,1]$. Como esses espaços são completos, existem $f(0) \in \mathbb{R}$ e $f' \in L^2[0,1]$ tais que,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 (f'_n(x) - f'(x))^2 dx = 0.$$

Ou seja, existe N_1 tal que, se $n > N_1$ então:

$$|f_n(0) - f(0)|^2 < \epsilon \quad e \quad \int_0^1 (f'_n(x) - f'(x))^2 dx < \epsilon.$$

Tome

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(s)ds.$$

Consequentemente, $f \in W[0,1]$ e segue que

$$\|f_n - f\|^2 < \epsilon.$$

□

Teorema 2.3.15 *$W[0,1]$ é um espaço de Hilbert de reprodução com o núcleo*

$$K(x,y) = 1 + min(x,y) = \begin{cases} 1+y, & y \le x \\ 1+x, & y > x \end{cases}.$$

Demonstração. *Para que K seja um núcleo associado a $W[0,1]$ é preciso mostrar que*

(i) $\forall x \in [0,1]$, $\quad K(\cdot, x) \in W[0,1]$.

(ii) $\forall x \in [0,1] \quad e \quad \forall f \in W[0,1]$ vale a propriedade de reprodução

$$\langle f(x), K(\cdot,x)\rangle_W = f(x).$$

(i) Observe que, se $g(x) = K(x,y)$, para todo $y \in [0,1]$ fixo, temos que

$$g'(x) = \begin{cases} 0, & y \le x \\ 1, & y > x \end{cases}$$

está em $L^2[0,1]$ *e*

$$g(x) = g(0) + \int_0^x g'(s)ds,$$

ou seja, $K(\cdot, y) \in W[0,1]$.

(ii) Se $f \in W[0,1]$, *então*

$$\begin{aligned}
\langle f, K(\cdot,y)\rangle_W &= f(0)K(0,y) + \int_0^1 f'(x)K'(x,y)dx \\
&= f(0)(1+0) + \int_0^y f'(x)K'(x,y)dx + \int_y^1 f'(x)K'(x,y)dx \\
&= f(0) + \int_0^y f'(x)(1+x)'dx + \int_y^1 f'(x)(1+y)'dx \\
&= f(0) + \int_0^y f'(x)dx + \int_y^1 f'(x)dx \\
&= f(0) + f(x)|_0^y \\
&= f(0) + f(y) - f(0) \\
&= f(y).
\end{aligned}$$

□

Exemplo 2.3.16 *Considerando o espaço das sequências reais* $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ *tais que*

$$\lim_{i\to\infty} x_i = 0 \ e \ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\Delta x_i)^2}{\theta^i} < \infty$$

onde $0 < \theta < 1$ *é fixo e* Δx_i *denota a sequência* $(x_{i+1} - x_i)_{i\mathbb{N}}$, *com a norma dada por*

$$\|x\| = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(\Delta x_i)^2}{\theta^i} < \infty$$

e com o núcleo de reprodução dado por

$$K(i,j) = \frac{\theta^{max(i,j)}}{1-\theta}, \qquad (i,j) \in \mathbb{N}^2,$$

é um espaço de Hilbert de reprodução.

Exemplo 2.3.17 *Sejam* $X \subset \mathbb{R}$ *um conjunto não vazio e o núcleo positivo definido* $K : X \times X \to \mathbb{R}$ *dado por* $K(x,y) = cos(x-y)$. *Seja*

$$\mathcal{H} = \left\{ f : X \to \mathbb{R}; \quad f(t) = \sum_{i=1}^{n} cos(t - x_i), \quad \alpha_i \in \mathbb{R} \right\}$$

é um espaço de Hilbert de reprodução, com produto interno dado por

$$\langle f, g\rangle_{\mathcal{H}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \overline{\beta_j}\alpha_i cos(y_i - x_i).$$

Mais exemplos de espaços de Hilbert de reprodução podem ser encontrados no apêndice de [3].

No capítulo seguinte apresentaremos uma forma de construir núcleos positivos definidos em $(0, +\infty)$.

Capítulo 3

Transformada de Laplace e operadores do tipo Hilbert-Schmidt

Neste capítulo estudaremos algumas propriedades espectrais da transfomada de Laplace e um método para encontrar a transformada inversa de Laplace.

3.1 O espaço $\mathbf{H}_{K_\rho}$

Nesta seção definiremos o espaço $H_{K\rho}$ e mostraremos que este espaço é um espaço de Hilbert de reprodução. Alguns resultados e outras observações aqui apresentados podem ser encontrados em [19] e [20].

Primeiramente, consideramos uma função peso qualquer, e mais adiante veremos a transformada de Laplace restrita a certos domínios escolhidos, dizendo desta função.

Definição 3.1.1 *Seja $\rho : (0,\infty) \to [0,\infty)$ uma função Borel mensurável e suponha que $\int_0^T \rho(t)dt < \infty$, para todo $T \in (0,\infty)$. Definimos*

$$K_\rho(x,y) := \int_0^{x\wedge y} \rho(t)dt, \text{ para } x, y \in [0,\infty),$$

onde $x \wedge y := min\{x,y\}$ para $x, y \in \mathbb{R}$ e

$$H_{K_\rho} := \{f(x) : [0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x h(t)dt, \ h \in L^2((0,\infty), \rho(t)^{-1}dt)\},$$

com $f(0) = 0$.

Observação: Note que $\displaystyle\int_0^T |h(t)|dt < \infty$ para toda $h \in L^2((0,\infty), \rho(t)^{-1}dt)$ e todo $T \in (0,\infty)$, portanto $h = 0$ quase sempre em $\rho^{-1}\{0\}$ e $\frac{h}{\sqrt{\rho}}$, $\sqrt{\rho} \in L^2((0,T), dt)$. Ainda mais, toda $h \in L^2((0,\infty), \rho(t)^{-1}dt)$ determina uma função contínua $f \in H_{K_\rho}$ dada por $f(x) = \displaystyle\int_0^x h(t)dt$, $x \in [0,\infty)$.

Inversamente, para cada $f \in H_{K_\rho}$ tal $h \in L^2((0,\infty), \rho(t)^{-1}dt)$ é única pois $h = f'$ quase sempre em $(0,\infty)$, pelo Teorema da Diferenciação de Lebesgue 1.2.11.

Sobre este espaço podemos definir um produto interno, com o objetivo de mostrarmos que H_{K_ρ} é um espaço de Hilbert de reprodução.

Os próximos resultados podem ser encontrados em [19, 20, 29].

Proposição 3.1.2 *Seja $\rho : (0,\infty) \to [0,\infty)$ uma função Borel mensurável tal que $\int_0^T \rho(t)dt < \infty$, para todo $T \in (0,\infty)$. Então*

$$\langle f, g\rangle_{H_{K_\rho}} = \int_0^\infty f^{'}(t)g^{'}(t)\frac{1}{\rho(t)}dt.$$

define um produto interno em H_{K_ρ}.

Demonstração. Sejam $f, g \in H_{K_\rho}$, e $\lambda \in \mathbb{R}$. Daí:
(i)

$$\langle f, f\rangle_{H_{K_\rho}} = \int_0^\infty f'(t)f'(t)\frac{1}{\rho(t)}dt = \int_0^\infty |f'(t)|^2\frac{1}{\rho(t)}dt \geq 0,$$

pois $|f'(t)|^2 \geq 0$ e $\rho(t) \in [0,\infty)$.
Assim,

$$\langle f, f\rangle_{H_{K_\rho}} = 0 \text{ se, e somente se, } f = 0.$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\langle f + \lambda g, h\rangle_{H_{K_\rho}} &= \int_0^\infty (f+\lambda g)'(t)h'(t)\frac{1}{\rho(t)}dt \\
&= \int_0^\infty (f'(t) + \lambda g'(t))h'(t)\frac{1}{\rho(t)}dt \\
&= \int_0^\infty f'(t)h'(t)\frac{1}{\rho(t)}dt + \lambda\int_0^\infty g'(t)h'(t)\frac{1}{\rho(t)}dt \\
&= \langle f, h\rangle_{H_{K_\rho}} + \lambda\langle g, h\rangle_{H_{K_\rho}}.
\end{aligned}$$

□

Feito isso, temos todas as ferramentas necessárias para mostrarmos que H_{K_ρ} é um espaço de Hilbert.

Lema 3.1.3 *Se $f \in H_{K_\rho}$, então*

$$|f(x)| \leq \|f\|_{H_{K_\rho}}\left(\int_0^x \rho(s)ds\right) = \|f\|_{H_{K_\rho}}\sqrt{K(x,x)}$$

.

Demonstração. Seja $f \in H_{K_\rho}$. Então

$$f(x) = \int_0^x h(s)ds, \quad h \in L^2((0,\infty), \rho^{-1}(t)dt)$$

e $f' = h$.

Ainda mais

$$\|f\|^2_{H_K} = \int_0^\infty |h'(x)|^2\frac{1}{\rho(x)}dx.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} |f(x)| = \left|\int_0^x h(s)ds\right| &\leq \int_0^x |h(s)|\frac{\sqrt{\rho(s)}}{\sqrt{\rho(s)}}ds \\ &\leq \left(\int_0^\infty h^2(x)\frac{1}{\rho(s)}ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^x \rho(s)ds\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|h\|_{H_{K_\rho}}\left(\int_0^x \rho(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

□

Proposição 3.1.4 *H_{K_ρ} é um espaço de Hilbert com o produto interno definido acima.*

Demonstração. Seja $\{f_n\}$ uma sequência de Cauchy em H_{K_ρ}. Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq N_0$, então

$$\|f_n - f_m\|^2_{H_{K_\rho}} = \int_0^\infty |h_n(x) - h_m(x)|^2\frac{1}{\rho(x)}dx < \epsilon,$$

onde $f_n(x) = \int_0^x h_n(x)dx \in H_{K_\rho}$ com $h_n \in L^2((0,\infty), \rho^{-1}(t)dt)$.

Como $L^2((0,\infty), \rho^{-1}(t)dt)$ é completo e $\{h_n\}$ é de Cauchy, existe $h = \lim_n h_n$. Tomando $f(x) = \int_0^x h(x)dx$ temos que

$$\|f_n - f\|^2_{H_{K_\rho}} = \int_0^\infty |f_n'(x) - f'(x)|^2\frac{1}{\rho(x)}dx \to 0.$$

Portanto H_{K_ρ} é um espaço de Hilbert. □

Por fim, podemos demonstrar que K_ρ é o núcleo associado a H_{K_ρ}.

Teorema 3.1.5 *K_ρ é um núcleo associado a H_{K_ρ}, isto é, K_ρ é a única função que assume valores reais que possui as seguintes propriedades:*
(i) $K_\rho(\cdot, x) \in H_{K_\rho}$ para todo $x \in [0,\infty)$.
(ii) $\langle f, K_\rho(\cdot, x)\rangle_{H_{K_\rho}} = f(x)$, para toda $f \in H_{K_\rho}$ e todo $x \in [0,\infty)$.

Demonstração. Se $x \leq y$ temos que $K_\rho(x,y) = \displaystyle\int_0^x \rho(t)dt$ e assim $\frac{\partial K}{\partial x}(x,y) = \rho(x)$.

Se $y \leq x$ temos que $K_\rho(x,y) = \displaystyle\int_0^y \rho(t)dt$ e $\frac{\partial K}{\partial x}(x,y) = 0$.
Assim,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left|\frac{\partial K}{\partial x}(x,y)\right|^2\frac{1}{\rho(x)}dx &= \int_0^y \frac{|\rho(x)|^2}{\rho(x)}dx \\ &= \int_0^y \rho(x)dx < \infty. \end{aligned}$$

Portanto $K_\rho(\cdot, y) \in H_{K_\rho}$.

Mostremos que a propriedade de reprodução é satisfeita.

De fato,

$$\begin{aligned}\langle f, K(\cdot, x)\rangle_{H_{K_\rho}} &= \int_0^\infty f'(s)\frac{\partial K}{\partial x}(s,x)\frac{1}{\rho(s)}ds\\ &= \int_0^x f'(s)\frac{\rho(s)}{\rho(s)}ds\\ &= f(x)-f(0)\\ &= f(x).\end{aligned}$$

□

3.2 Compacidade de Operadores e Transformada de Laplace

Primeiramente definiremos um operador auxiliar e daí, no decorrer desta seção estudaremos algumas de suas propriedades, trabalhando no sentido de mostrar a compacidade de tal. Os resultados que vamos utilizar nesta seção podem ser encontrados em [19, 20, 29].

Definição 3.2.1 *Seja* $\mathcal{D}[\mathcal{L}] := \cap_{p\in(0,\infty)} L^1((0,\infty), e^{-pt}dt)$. *Para* $f \in \mathcal{D}[\mathcal{L}]$, *temos a transformada de Laplace* $\mathcal{L}f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *de* f *dada por*

$$\mathcal{L}f(p) := \int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt, \qquad p \in (0,\infty),$$

e definimos $Lf : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ *por*

$$Lf(p) := p\mathcal{L}f(p), \qquad p \in (0,\infty).$$

Proposição 3.2.2 *Seja* $\rho : (0,\infty) \to [0,\infty)$ *Borel mensurável e suponha* $\rho \in \mathcal{D}[\mathcal{L}]$, *Então* $L^2((0,\infty), \rho(t)^{-1}dt) \cup H_{K_\rho} \subset \mathcal{D}[\mathcal{L}]$. *Ainda mais,* $Lf = \mathcal{L}f'$ *para toda* $f \in H_{K_\rho}$.

Demonstração. Sejam $T, p \in (0,\infty)$. Sabemos que

$$\int_0^T \rho(t)dt \le \int_0^T e^{pT}e^{-pt}\rho(t)dt \le e^{pT}\int_0^\infty e^{-pt}\rho(t)dt < \infty.$$

- Se $h \in L^2((0,\infty), \rho(t)^{-1}dt)$ temos que $e^{-px}h \in L^1((0,\infty), dt)$ pois $e^{-px}\sqrt{\rho}$, $\frac{h}{\sqrt{\rho}} \in L^2((0,\infty), dt)$ e assim $h \in \mathcal{D}[\mathcal{L}]$.

- Seja $f \in H_{K_\rho}$ e defina $F \in H_{K_\rho}$ por $F(x) := \displaystyle\int_0^x |f'(t)|dt$. Então $|f(x)| \le F(x)$ em $[0,\infty)$.

  Fazendo uma integração por partes temos

  $$p\int_0^T e^{-pt}|f(t)|dt \le p\int_0^T e^{-pt}F(t)dt = \left(-e^{-pT}F(t) + \int_0^T e^{-pt}|f'(t)|dt\right). \tag{3.1}$$

  Assim $|f'| \in L^2((0,\infty), \rho(t)^{-1}dt) \subset \mathcal{D}[\mathcal{L}]$. Fazendo $T \to \infty$ na desigualdade 3.1, juntamente com $F \ge 0$ temos

$$p\int_0^\infty e^{-pt}|f(t)|dt \leq p\int_0^\infty e^{-pt}F(t)dt \leq \int_0^\infty e^{-pt}|f^{'}(t)|dt < \infty.$$

Então $f \in \mathcal{D}[\mathcal{L}]$.

Usando o Teorema da Convergência Dominada 1.2.4, $f(0) = 0$ e fazendo uma integração por partes novamente, obtemos

$$\mathcal{L}f^{'}(p) - Lf(p) = \lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-pt}(f^{'}(t) - pf(t))dt = \lim_{T\to\infty} e^{-pT}f(T) = 0,$$

uma vez que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-pt}|f(t)|dt < \infty$. Assim $Lf = \mathcal{L}f^{'}$. □

Para mostrarmos a compacidade de L precisaremos de algumas hipóteses adicionais e uma destas é a seguinte suposição:

Suposição: (HS): $\rho : (0,\infty) \to [0,\infty)$ é Borel mensurável com $\rho \in \mathcal{D}[\mathcal{L}]$ e $\mathcal{L}\rho(1) > 0$, μ é medida de Borel positiva em $(0,\infty)$ e $\mathcal{A}(\rho,\mu) = \int_0^\infty \mathcal{L}\rho(2p)d\mu(p) < \infty$.

Supondo (HS) podemos observar alguns fatos.

- Para uma função $\rho \in \mathcal{D}[\mathcal{L}]$ Borel mensurável e assumindo valores em $[0,\infty)$, a condição $\mathcal{L}\rho(1) > 0$ falha se, e somente se, $\rho = 0$ $q.s$ com a medida de Lebesgue.
- Um outro fato importante é que tomando a suposição acima como verdadeira, temos que μ é σ-finita.

O próximo resultado garante a linearidade do operador L e a demonstração pode ser encontrada em [19].

Proposição 3.2.3 *Supondo (HS), temos que L define um operador linear limitado $L : H_{K_\rho} \to L^2((0,\infty),\mu)$.*

Demonstração. Seja $f \in H_{K_\rho}$ e $p \in (0,\infty)$. Pela Proposição 3.2.2 e a Desigualdade de Hölder 1.2.5, temos que

$$\begin{aligned}|Lf(p)|^2 = |\mathcal{L}f'(p)|^2 &= \left|\int_0^\infty e^{-pt}\sqrt{\rho(t)}\frac{f'(t)}{\sqrt{\rho(t)}}dt\right|^2 \\ &\leq \left(\int_0^\infty e^{-2pt}\rho(t)dt\right)\left(\int_0^\infty \frac{|f'(t)|^2}{\rho(t)}dt\right) \\ &= \mathcal{L}\rho(2p)\|f\|^2_{H_{K_\rho}}.\end{aligned}$$

Integrando a desigualdade acima com relação a $d\mu(p)$ obtemos $\|Lf\|_2 \leq \sqrt{\mathcal{A}(\rho,\mu)}\|f\|_{H_{K_\rho}}$ □

A mesma suposição (HS) implica que L é um operador do tipo Hilbert-Schmidt e que LL^* admite um núcleo integral $\mathcal{L}\rho(p+q)$. O próximo teorema irá nos comprovar isto.

Teorema 3.2.4 *Supondo (HS), temos que $L : H_{K_\rho} \to L^2((0,\infty),\mu)$ é um operador do tipo Hilbert-Schmidt, com norma Hilbert-Schmidt dada por $\sqrt{\mathcal{A}(\rho,\mu)}$. Ainda mais, para toda $\varphi \in L^2((0,\infty),\mu)$, vale*

$$LL^*\varphi(p) = \int_0^{\infty)} \mathcal{L}\rho(p+q)\varphi(q)d\mu(q), \quad p \in (0,\infty). \tag{3.2}$$

com $f = L^*\varphi$.

Demonstração. Primeiro, mostremos que a igualdade 3.2 ocorre. Seja $\varphi \in L^2((0,\infty),\mu)$ e $t \in (0,\infty)$. Assumiremos $\varphi \geq 0$ sem perda de generalidade. Pela propriedade de reprodução de H_{K_ρ}, pela Proposição 3.1.2, que garante que $K'_\rho(\cdot,t) = \rho\chi_{(0,t)}$, e Teorema de Fubini 1.2.8, temos que

$$\begin{aligned}
L^*\varphi(t) &= \langle L^*\varphi, K_\rho(\cdot,t)\rangle_{H_{K_\rho}} \\
&= \langle \varphi, LK_\rho(\cdot,t)\rangle_2 \\
&= \int_0^\infty \varphi(q)\mathcal{L}\left[\rho\chi_{(0,t)}\right](q)d\mu(q) \\
&= \int_0^\infty \varphi(q)\left(\int_0^t e^{-qs}\rho(s)ds\right)d\mu(q) \\
&= \int_0^t \left(\int_0^\infty e^{-qs}\rho(s)\varphi(q)d\mu(q)\right)ds.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$(L^*\varphi)'(t) = \int_0^\infty e^{-qt}\rho(t)\varphi(q)d\mu(q),$$

e então, para todo $p \in (0,\infty)$, vale

$$\begin{aligned}
LL^*\varphi(p) = \mathcal{L}\left((L^*\varphi)'\right)(p) &= \int_0^\infty e^{-pt}\left(\int_0^\infty e^{-qt}\rho(t)\varphi(q)d\mu(q)\right)dt \\
&= \int_0^\infty \varphi(q)\left(\int_0^\infty e^{-(p+q)t}\rho(t)dt\right)d\mu(q) \\
&= \int_0^\infty \mathcal{L}\rho(p+q)\varphi(q)d\mu(q).
\end{aligned}$$

E segue a igualdade 3.2.

Agora, mostremos que LL^* é um operador Hilbert Schmidt:

Seja $\varrho(p) := \sqrt{\mathcal{L}\rho(2p)}$. Então $\varrho \in L^2((0,\infty),\mu)$ e $\|\varrho\|_2^2 = \mathcal{A}(\rho,\mu)$. Para todo $p, q \in (0,\infty)$ vale

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\rho(p+q) &= \int_0^\infty e^{-(p+q)t}\rho(t)dt \\
&\leq \sqrt{\int_0^\infty e^{-2pt}\rho(t)dt.\int_0^\infty e^{-2qt}\rho(t)dt} \\
&= \varrho(p)\varrho(q).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \int_0^\infty |\mathcal{L}\rho(p+q)|^2 d(\mu\times\mu)(p,q) &\leq \int_0^\infty\int_0^\infty \varrho(p)^2\varrho(q)^2 d\mu(p)d\mu(q)\\ &= \|\varrho\|_2^4\\ &< \infty.\end{aligned}$$

Isto é, LL^* tem um núcleo integral pertencente a $L^2((0,\infty),\mu\times\mu)$. Assim, LL^* é um operador Hilbert-Schmidt e em particular é compacto, pelo Teorema 1.4.17 .

Como LL^* é compacto e autoadjunto, na realidade positivo, ele admite a seguinte representação

$$LL^*(f) = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle f, \varphi_n\rangle_2 \varphi_n \tag{3.3}$$

dada pelo Teorema Espectral 1.4.9, onde $N \in \mathbb{N}\cup\{0,\infty\}$, $\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ é um conjunto ortonormal de $N(LL^*)^\perp$, $\{\lambda_n\}\subset(0,\infty)$ é não-crescente, e $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n = 0$ se $N=\infty$. Para cada n,

$$\varphi_n = \lambda_n^{-1} LL^*\varphi_n \in L^2((0,\infty),\mu).$$

Portanto φ_n é unicamente determinado como uma função contínua no suporte de μ, ou seja, em

$$supp[\mu] := \{p\in(0,\infty) | \mu(V)>0 \text{ para toda vizinhança aberta V de } \quad p\in(0,\infty)\},$$

que é o menor subconjunto fechado de $(0,\infty)$ cujo complementar tem μ-medida nula. Como $\mu((0,\infty)\setminus supp[\mu]) = 0$ segue que μ é uma medida de Borel positiva em $supp[\mu]$ e LL^* é um operador compacto em $L^2(supp[\mu],\mu)$. Pelo Teorema de Mercer 2.2.13, o núcleo integral $\mathcal{L}\rho(p+q)$ de LL^* admite uma expansão em série da forma

$$\mathcal{L}\rho(p+q) = \sum_{n=1}^{N}\lambda_n\varphi_n(p)\varphi_n(q), \qquad p,q\in supp[\mu], \tag{3.4}$$

com convergência absoluta e uniforme em todo subconjunto compacto de $supp[\mu]\times supp[\mu]$. Então pelo Teorema da Convergência Monótona 1.2.3,

$$\mathcal{A}(\rho,\mu) = \int_{supp[\mu]} (\mathcal{L}\rho)(2p)d\mu(p) = \sum_{n=1}^{N}\lambda_n \int_{supp[\mu]} |\varphi_n(p)|^2 d\mu(p) = \sum_{n=1}^{N}\lambda_n < \infty.$$

Por outro lado, seja $\{\Psi_m\}_{m=1}^M$ $(M\in\mathbb{N}\cup\{0,\infty\})$ um conjunto ortonormal de $N(LL^*)$ (note que $L^2((0,\infty),\mu)$ é separável). Então $\{\varphi_n\}_{n=1}^N\cup\{\Psi\}_{m=1}^M$ é um conjunto completo ortonormal de $L^2((0,\infty),\mu)$. Assim

$$\begin{aligned}\|L\|_{HS}^2 &= \|L^*\|_{HS}^2\\ &= \sum_{n=1}^{N}\|L^*\varphi_n\|_2^2 + \sum_{m=1}^{M}\|L^*\Psi\|_2^2\\ &= \sum_{n=1}^{N}\langle LL^*\varphi_n,\varphi_n\rangle_2 + \sum_{m=1}^{M}\langle LL^*\Psi_n,\Psi_n\rangle_2\\ &= \sum_{n=1}^{N}\lambda_n = \mathcal{A}(\rho,\mu)<\infty,\end{aligned}$$

onde $\|\cdot\|_{HS}$ denota a norma de Hilbert-Schmidt de L. $\square$

Até esse momento o estudo foi feito para uma função $\rho(t)$ qualquer, porém para analisarmos a fórmula da inversão do operador transformada de Laplace vamos tomar uma função peso particular. A função escolhida deve satisfazer as condições da suposição (HS) e também ser de ordem exponencial e contínua por partes. O próximo exemplo toma uma função que satisfaz todas essas condições.

Exemplo 3.2.5 *Seja* $\rho(t) = (t+1)^{2d}$ *com* $d \in \mathbb{N}$ *fixo e* $d\mu(p) = e^{\left(-p-\frac{1}{p}\right)dp}$. *Então temos a condição (HS) satisfeita e*

$$L^*\varphi(t) = \int_0^\infty \varphi(p)\frac{(2d)!}{p^{2d+1}}\{e_{2d}(p)e^{-p} - e_{2d}(p(1+t))e^{-p(1+t)}\}e^{-\frac{1}{p}}dp$$

e

$$LL^*\varphi(p) = \int_0^\infty \varphi(q)\frac{(2d)!}{(p+q)^{2d+1}}e_{2d}(p+q)e^{-p-\frac{1}{p}}dp,$$

onde

$$e_k(p) := 1 + p + \frac{p^2}{2!} + ... + \frac{p^k}{k!}.$$

Pode-se observar que quando tomamos diferentes funções pesos conseguimos por meio deste processo encontrar novos núcleos positivos definidos.

3.3 Método de inversão da Transformada de Laplace

Pode-se notar que $\rho(t) = te^{-t} \in L^2((0,\infty),\mu)$, para μ sendo a medida de Lebesgue usual e portanto satisfaz as condições impostas anteriormente. A partir de agora iremos adequar o que foi feito anteriormente para essa função peso.

Assim a norma do espaço H_{K_ρ} será dada por

$$\|f\|_{H_{K_\rho}} = \left(\int_0^\infty |f(t)|^2\frac{e^t}{t}dt\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \text{com } f(0) = 0.$$

O núcleo de reprodução é dado por

$$K(s,t) = \int_0^{\min\{s,t\}} \xi e^{-\xi}d\xi,$$

Caso 1: Se $s \leq t$. Chamando

$$\begin{cases} u = \xi \implies du = d\xi \\ dv = e^{-\xi}d\xi \implies v = -e^{-\xi}. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^s \xi e^{-\xi} d\xi &= (-\xi e^{-\xi})|_0^s - \int_0^s -e^{-\xi} d\xi \\ &= (-\xi e^{-\xi})|_0^s - (e^{-\xi})|_0^s \\ &= -se^{-s} - e^{-s} + 1.\end{aligned}$$

Caso 2: Se $t \leq s$. Chamando

$$\begin{cases} u = \xi \implies du = d\xi \\ dv = e^{-\xi} d\xi \implies v = -e^{-\xi}. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^t \xi e^{-\xi} d\xi &= (-\xi e^{-\xi})|_0^t - \int_0^t -e^{-\xi} d\xi \\ &= (-\xi e^{-\xi})|_0^t - (e^{-\xi})|_0^t \\ &= -te^{-t} - e^{-t} + 1.\end{aligned}$$

Portanto,

$$K(s,t) = \begin{cases} -se^{-s} - e^{-s} + 1, & s \leq t \\ -te^{-t} - e^{-t} + 1, & t \leq s \end{cases}$$

e assim, para $t \leq s$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(K(\cdot,t))(p) &= \int_0^\infty e^{-px} K(x,t) dx \\ &= \int_0^t e^{-px}(-xe^{-x} - e^{-x} + 1) dx + \int_t^\infty (-te^{-t} - e^{-t} + 1) e^{-px} dx \\ &= \int_0^t -xe^{-(p+1)x} dx - \int_0^t e^{-(p+1)x} dx \\ &\quad + \int_0^t e^{-px} dx + (-te^{-t} - e^{-t} + 1) \int_t^\infty e^{-px} dx.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(K(\cdot,t))(p) &= \frac{e^{-t(p+1)} - 1}{(p+1)^2} + \frac{te^{-t(p+1)} + e^{-t(p+1)} - 1}{p+1} + \frac{-te^{-t(p+1)} - e^{-t}(p+1) + 1}{p} \\ &= e^{-t(p+1)} \left(\frac{t}{p(p+1)} + \frac{1}{p(p+1)^2} \right) + \frac{1}{p(p+1)^2}.\end{aligned}$$

Portanto, para o operador compacto L, seu operador adjunto, L^*, pode ser escrito como

$$\begin{aligned}L^*\varphi(t) &= \langle L^*\varphi, K(\cdot,t) \rangle_{H_K} \\ &= \langle \varphi, LK(\cdot,t) \rangle_2 \\ &= \int_0^\infty \varphi(\xi) \frac{1}{(\xi+1)^2} \left\{ 1 - e^{-t(\xi+1)} \left(t(\xi+1) + 1 \right) \right\} d\xi,\end{aligned}$$

$$(3.6)$$

e

$$LL^*\varphi(\xi) = \int_0^\infty \frac{\varphi(q)}{(1+\xi+q)^2}dq.$$

Em [19], o autor faz um estudo numérico de alguns exemplos, incluindo 3.2.5 e exemplos onde ele tomou diferentes funções pesos.

3.3.1 Representação da inversão real em termos de valores singulares

Dados dois espaços de Hilbert $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$, seja $L \in \mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$ compacto. Assim

$$\langle LL^*x, x\rangle = \|Lx\|^2 \geq 0, \tag{3.7}$$

o que garante que LL^* é positivo, compacto e autoadjunto.
Portanto, pelo Teorema Espectral 1.4.9, tem um sistema de autovalores

$$\lambda_1(LL^*) \geq \lambda_2(LL^*) \geq ... > 0$$

e autovetores $\varphi_1, \varphi_2, ...$

Quando essa sequência é finita, completamos com zeros para torná-la infinita.

Definimos os **valores singulares de** L, denotados por μ_n, por

$$\mu_n(L) = \sqrt{\lambda_n(LL^*)}, \quad n = 1, 2, ...$$

Nota-se que $\mu_n(L) \geq \mu_{n+1}(L)$ e $\mu_n(L) \to 0$.

O Teorema 3.2.4 assegura a compacidade de L, e assim, por ter essa propriedade e pelo teorema a seguir, garantimos que o operador $Lf(p) = p(\mathcal{L}f)(p)$ tem um sistema singular. Sejam $\{\psi_n\}$ e $\{\varphi_n\}$ um sistema ortonormal completo de $N(L)^\perp$ (o complemento ortogonal do espaço nulo de L) e $\overline{Im(L)}$ (o fecho do espaço imagem de L), respectivamente, satisfazendo

$$L\varphi_n = \mu_n\psi_n, \qquad L^*\psi_n = \mu_n\varphi_n,$$

o que implica que

$$LL^*\psi_n = L\mu_n\varphi_n = \mu_n^2\psi_n \text{ e } L^*L\varphi_n = \mu_n^2\varphi_n,$$

daí vem que $\mu_n^2 = \lambda_n$ e λ_n é autovalor de LL^*.

A observação que vem a seguir será usada para demonstrar o próximo teorema. Esses resultados podem ser encontradas em [21, p.180].

Observação: Um sistema ortonormal $\{\varphi_n\}$ é uma base ortonormal de $\overline{ImLL^*} = N(LL^*)^\perp$ e para cada $x \in \mathcal{H}$,

$$x = P_0x + \sum_n \langle x, \varphi_n\rangle\varphi_n,$$

onde P_0 é a projeção ortogonal sobre $N(LL^*)$.

A importância dos valores singulares pode ser notada no próximo resultado. O Teorema da Decomposição Singular nos oferece uma caracterização para operadores compactos.

Teorema 3.3.1 *(**Teorema da Decomposição Singular**:) Seja $L : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ um operador linear compacto, então existe um sistema ortonormal $\{\varphi_j\} \subset \mathcal{H}_1$ e $\{\psi_j\} \subset \mathcal{H}_2$ tal que, para todo $x \in \mathcal{H}_1$,*

$$Lx = \sum_{j=1}^{v(L)} \mu_j \langle x, \varphi_j \rangle \psi_j, \tag{3.8}$$

onde $v(L)$ é o número de valores singulares não nulos de L (contando as suas multiplicidades). Também

$$L^* y = \sum_{j=1}^{v(L)} \mu_j \langle y, \psi_j \rangle \varphi_j. \tag{3.9}$$

Demonstração. Se $L = 0$, o teorema é trivial. Suponha que $L \neq 0$. Seja $\{\lambda_j\}$ e $\{\varphi_j\}$ um sistema de autovalores e autovetores de LL^*, respectivamente. Por abreviação, escrevemos $\lambda_j = \lambda_j(LL^*)$ e $\mu_j = \sqrt{\lambda_j}, \quad 1 \leq j \leq v(L)$. Tome $\psi_j = \frac{1}{\mu_j} L\varphi_j, \quad j = 1, 2, ...$

A sequência ψ_j é ortonormal. Assim

$$\langle \psi_k, \psi_j \rangle = \frac{1}{\mu_k \mu_j} \langle LL^* \varphi_k, \varphi_j \rangle = \frac{\mu_k^2}{\mu_k \mu_j} \delta_{kj}.$$

Dado $x \in \mathcal{H}_1$, existe, pela Observação anterior, $u \in N(LL^*)$ tal que

$$x = u + \sum_{j=1}^{v(L)} \langle x, \varphi_j \rangle \varphi_j. \tag{3.10}$$

De 3.7, segue que $N(LL^*) = N(L^*)$. Assim da igualdade 3.10 temos

$$Lx = \sum_{j=1}^{v(L)} \langle x, \varphi_j \rangle L\varphi_j = \sum_{j=1}^{v(L)} \mu_j \langle x, \varphi_j \rangle \psi_j.$$

Logo, para todo $x \in \mathcal{H}_1$ e $y \in \mathcal{H}_2$,

$$\langle Lx, y \rangle = \sum_{j=1}^{v(L)} \mu_j \langle x, \varphi_j \rangle \langle \psi_j, y \rangle = \left\langle x, \sum_{j=1}^{v(L)} \mu_j \langle y, \psi_j \rangle \varphi_j \right\rangle$$

o que implica a igualdade 3.9.

$\square$

O Teorema da Decomposição Singular foi colocado nesse capítulo para facilitar a leitura do texto, mas poderia ter sido colocado na seção de teoria espectral. Em geral é enunciado para LL^*.

O próximo resultado é um corolário do teorema anterior e pode ser encontrado em [21, p.250].

Corolário 3.3.2 *Sejam $\mathcal{H}_1$ e $\mathcal{H}_2$ espaços de Hilbert e $L : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ um operador compacto em $\mathcal{B}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$. Então*

$$\mu_j(L^*) = \mu_j(L).$$

Demonstração. Como L é compacto, segue pelo Teorema 1.3.27 que L^* é compacto. Consequentemente

$$\mu_j(L^*) = \lambda_j^{\frac{1}{2}}(LL^*).$$

Sejam L e L^* com suas respectivas representações 3.8 e 3.9. Então para $y \in \mathcal{H}_2$,

$$LL^*y = \sum_{j=1}^{v(L)} \mu_j \langle L^*y, \varphi_j \rangle \psi_j$$

e

$$\langle L^*y, \varphi_j \rangle = \sum_{k=1}^{v(L)} \mu_k \langle y, \psi_k \rangle \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle = \mu_j \langle y, \psi_j \rangle.$$

Consequentemente

$$LL^*y = \sum_{j=1}^{v(L)} \mu_j^2 \langle y, \psi_j \rangle \psi_j.$$

Assim

$$LL^*\psi_k = \mu_k^2 \psi_k = \lambda_k(LL^*)\psi_k, \quad 1 \leq j \leq v(L)$$

e

$$\mu_k(L^*) = \lambda_k^{\frac{1}{2}}(LL^*) = \mu_k(L), \quad k = 1, 2, ...$$

□

Teorema 3.3.3 ***(Fórmula de inversão da transformada de Laplace)*** *Consideremos a transformada de Laplace $\mathcal{L}f = F$. Se a função original $f \in H_K$, então a inversão real da transformada de Laplace, $\mathcal{L}^{-1}$, é*

$$(\mathcal{L}^{-1}F)(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} \left(\int_0^{\infty} pF(p)\psi_n(p)dp \right) \varphi_n(t).$$

E para toda F com $F(p)p \in L^2(\mathbb{R}^+)$ e um número natural M, a regularização espectral aproximada $\mathcal{L}_M^{-1}$ é dada como

$$(\mathcal{L}_M^{-1}F)(t) = \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{\mu_n} \left(\int_0^{\infty} pF(p)\psi_n(p)dp \right) \varphi_n(t).$$

Demonstração. Usando a Proposição 3.2.2 e a Identidade de Parseval 1.3.18, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} \left(\int_0^{\infty} pF(p)\psi_n(p)dp \right) \varphi_n(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^{\infty} \frac{1}{\mu_n} p\mathcal{L}(f)(p)\psi_n(p)dp \right) \varphi_n(t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} \langle L(f)(p), \psi_n(p) \rangle_2 \varphi_n(t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n} \langle f, L^* \psi_n \rangle \varphi_n(t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n(t) \\
&= f(t)
\end{aligned}$$

□

O sistema singular é útil para o ponto de vista análise inversa e precisa de ferramentas computacionais.

Os próximos resultados tratam da Regularização de Tikhonov, que é na verdade uma versão para mínimos quadrados em espaços de Hilbert. Mais resultados sobre esta regularização podem ser encontrados em [35, p.15].

O objetivo era resolver o seguinte problema

$$L(f) = G \Rightarrow L^* L(f) = L^* G.$$

Porém $L^* L$ pode não ter inverso ou ser instável numericamente, se existir,

$$(L^* L)^{-1}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n.$$

O próximo teorema contorna este problema, pois

$$(L^* L + \alpha I) f = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n^2 \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_n^2 + \alpha) \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n$$

tem inverso estável dado por

$$(L^* L + \alpha I)^{-1}(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2 + \alpha} \langle f, \varphi_n \rangle \varphi_n. \tag{3.11}$$

3.3.2 Regularização de Tikhonov

Para dar prosseguimento ao nosso trabalho lembramos o conceito de diferenciabilidade de uma função. Sejam B_1, B_2 espaços de Banach e $f : U \to B_2$, onde $U \subset B_1$ é um subconjunto aberto. Se $a \in U$ e existe $T : B_1 \to B_2$ linear e limitada, tal que

$$f(a+h) = f(a) + T(h) + r_a(h), \quad \lim_{h \to 0} \frac{r_a(h)}{|h|} = 0, \quad h \in B_1,$$

dizemos que f é diferenciável em a e que $T(h) = f'(a)h$ (veja [9] para mais detalhes).

Dito isso, pode-se demonstrar a seguinte versão da Fórmula de Taylor (veja [9, p. 190]).

Lema 3.3.4 *Se existirem $f'(a)$, $f''(a)$ contínuas, onde*

$$f'(a+h)k = f'(a)k + f''(a)(h)k + s_a(h)k, \quad \lim_{k\to 0}\frac{s_a(h)k}{|k|} = 0, \quad h,k \in B_1$$

e

$$f''(a)(h,k) = f''(a)(h)k = f''(a)(k)h$$

for bilinear, com

$$|f''(a)(h,k)| \leq \|f''(a)\||h||k|.$$

Então,

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)(h,h) + R(h), \quad \lim_{h\to 0}\frac{R(h)}{|h|^2} = 0.$$

Com esse resultado podemos facilmente demonstrar um resultado clássico sobre máximos e mínimos de funções. A versão apresentada aqui é adaptada aos nossos interesses e por isso será demonstrada.

Lema 3.3.5 *Sejam B um espaço de Banach e $U \subset B$ um conjunto aberto. Se $f : U \to \mathbb{R}$ for diferenciável em a, $f'(a) = 0$ e $\inf_{|h|=1} f''(a)(h,h) > 0$. Então, existe $\delta > 0$ tal que*

$$f(a+h) - f(a) > 0, \quad \forall h \in U, \quad |h| < \delta.$$

Ou seja, a é ponto de mínimo local de f.

Demonstração. Seja $c = \inf f''(a)(h,h) > 0$ e $\epsilon > 0$ tal que $\frac{c}{2} - \epsilon > 0$.

Do Lema 3.3.4, existe $\delta > 0$ tal que

$$|R(h)| < \epsilon|h|^2, \quad |h| < \delta.$$

Assim

$$\begin{aligned} f(a+h) - f(a) &= \frac{1}{2}f''(a)(h,h) + R(h) \\ &\geq \frac{c}{2}|h|^2 - \epsilon|h|^2 \\ &\geq \left(\frac{c}{2} - \epsilon\right)|h|^2 > 0, \quad |h| < \delta, \end{aligned}$$

pois $f(a)(h,h) = |h|^2 f''(a)\left(\frac{h}{|h|}, \frac{h}{|h|}\right) \geq c|h|^2$. $\square$

Teorema 3.3.6 ***(Regularização de Tikhonov):*** *Seja $L : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ um operador linear compacto e*

$$f_{\alpha,g}(x) = \|Lx - g\|^2 + \alpha\|x\|^2,$$

para algum $\alpha > 0$ e algum $g \in \mathcal{H}_2$. Então existe um único $\hat{x} \in \mathcal{H}_1$ tal que

$$f_{\alpha,g}(\hat{x}) = \min_{x\in\mathcal{H}_1} f_{\alpha,g}(x),$$

onde

$$(L^*L + \alpha I)\hat{x} = L^*g.$$

Demonstração. Seja $f(x) = f_{\alpha,g}(x), \quad x \in \mathcal{H}_1$. Segue que

$$\begin{aligned} f(x+h) &= \langle L(x+h)-g, L(x+h)-g\rangle + \alpha\langle x+h, x+h\rangle \\ &= \langle Lx+Lh-g, Lx+Lh-g\rangle + \alpha(\langle x,x\rangle + \langle x,h\rangle + \langle h,x\rangle + \langle h,h\rangle) \\ &= f(x) + 2\langle Lx-g, Lh\rangle + 2\alpha\langle x,h\rangle + \alpha|h|^2 \\ &= f(x) + 2\langle L^*(Lx-g), h\rangle + 2\alpha\langle x,h\rangle + \alpha|h|^2 \\ &= f(x) + 2\langle (L^*L+\alpha I)x - L^*g, h\rangle + \alpha|h|^2 \end{aligned}$$

e

$$f'(x)h = 2\langle (L^*L+\alpha I)x - L^*g, h\rangle$$

é contínua.

Ainda,

$$f''(x)(h,k) = \langle (L^*L+\alpha I)k, h\rangle$$

é contínua, com

$$f''(x)(h,h) = |Lh|^2 + \alpha|h|^2$$

Daí, segue que $\inf\limits_{|h|=1} f''(a)(h,h) > 0$.

Por fim, pode-se observar que

$f'(x) = 0$ apenas quando

$$(L^*L+\alpha I)x = L^*g$$

e que essa equação sempre tem solução única dada por

$$\hat{x} = (L^*L+\alpha I)^{-1}L^*g,$$

conforme a expressão 3.11.

Portanto pelo Lema 3.3.5 segue o resultado. $\square$

Teorema 3.3.7 *Na estrutura proposta, a regularização de Tikhonov da equação de $\mathcal{L}(f) = F$ com um parâmetro de regularização $\alpha > 0$ é*

$$(L^*L+\alpha I)f_{\alpha,G} = L^*G,$$

onde $G(p) := F(p)p$. Existe uma única solução regularizada $f_{\alpha,G} \in H_K$ para toda $G \in L^2(\mathbb{R}^+)$, que é a melhor solução aproximada no sentido de

$$\min_{f\in H_K}\left\{\alpha\int_0^\infty |f'(t)|^2\frac{e^t}{t}dt + \|(\mathcal{L}f)(p)p - G\|_2^2\right\} = \alpha\int_0^\infty |f'_{\alpha,G}(t)|^2\frac{e^t}{t}dt + \|(\mathcal{L}f_{\alpha,G})(p)p - G\|_2^2.$$

Assim, a solução regularizada de Tikhonov $f_{\alpha,G}$ é representada por

$$(\mathcal{L}_\alpha^{-1}F)(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mu_n}{\mu_n^2+\alpha}\left(\int_0^\infty pF(p)\psi_n(p)dp\right)\varphi_n(t).$$

Demonstração. Considere $pF(p) = G(p)$ e usando $\alpha f + L^*L(f) = L^*G$ e a Identidade de Parseval, temos

$$\begin{aligned}
f(t) &= (L^*L + \alpha I)^{-1}L^*G \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2 + \alpha}\langle L^*G, \varphi_n\rangle \varphi_n(t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2 + \alpha}\langle G, L\varphi_n\rangle \varphi_n(t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{\mu_n^2 + \alpha}\int_0^{\infty} \langle G, \psi_n\rangle \varphi_n(t) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{\mu_n^2 + \alpha}\left(\int_0^{\infty} pF(p)\psi_n(p)dp\right) \varphi_n(t).
\end{aligned}$$

□

A partir daí, existem métodos numéricos para lidar com problemas de inversão, como métodos para estimar valores singulares e autofunções. Podemos citar [7, 19, 20] como leituras referência.

Conclusões

Foi muito importante o estudo do capítulo de preliminares, pois revisei diversos conceitos e resultados de Análise/Topologia, Teoria da Medida e Análise Funcional que tem ligação com diversos resultados mais gerais. A transformada de Laplace, como foi visto, é uma ferramenta poderosa em diversas aplicações da matemática e problemas práticos.

O método da inversão do operador transformada de Laplace veio como uma importante ferramenta matemática. Particularmente, esse método além de ser essencial para o desenvolvimento da teoria matemática pura, tem uma interseção com a matemática aplicada. Como vimos nesta dissertação, existem trabalhos prontos que utilizam métodos numéricos para obter boas aproximações da $\mathcal{L}^{-1}$.

Acredito que o principal objetivo foi alcançado. Como a maioria dos trabalhos que foram publicados sobre o tema são recentes, acredito que ainda tenha muita coisa para ser feita.
Como pesquisador, é válido realizar um estudo e tentar aplicar o que foi feito aqui para outros operadores.

Apesar do tema ser recente, já existem diversos artigos publicados que nos ajudaram a entender melhor o que foi proposto. Por fim, espero que este trabalho possa ser uma porta de entrada para estudos futuros.

Referências Bibliográficas

[1] ARONSZAJN, N., *Theory of Reproducing Kernels*, Trans. Amer. Math.Soc., 68(1950),no.3,337-404.

[2] BARTLE, R. G, *The elements of integration and Lebesgue measure*, 1995.

[3] BERLINET, A.; THOMAS-AGNAN, C., *Reproducing kernel Hilbert spaces in probability and statistics*, With a preface by Persi Diaconis, Kçuwer Academic Publishers, Boston, MA, 2004.

[4] BOTELHO, G. ; PELLEGRINO, D. ; TEIXEIRA, E; *Fundamentos de Análise Funcional.* Riode Janeiro, SBM, 2012.

[5] BUESCU, J.; PAIXÃO, A. C., *Positive definite matrices and differentiable reproducing kernel inequalities*, J. Math. Anal. Appl., 320 (2006), 279-292.

[6] CASTRO, L.P; RODRIGUES, M.M; SAITOH,S. *A fundamental theorem on initial Value Problems by using the theory of Reproducing Kernels*, Complex Anal. Oper. Theory (2015) n.9:87-98.

[7] COHEN, A. M.: *Numerical methods for Laplace transform inversion.* Springer (2007).

[8] CUCKER, F.; SMALE, S., *On the mathematical foundations of learning*, Bull. Amer. Math. Soc (New series), 39 (2002), no.1, 1-49.

[9] DIEUDONNÉ, J., *Foudations of Modern Analysis*, Academic Press. Volume 10, 1969.

[10] D. L. KREIDER, R. G. KULLER, D. R. OSTBERG F. W. PERKINS., *An Introduction to Linear Analysis*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1966.

[11] DUC-JACQUET, M., *Approximation des fonctionnelles linéaires surles espaces hilbertiens autoreproduisants*, (Tese de doutorado). University of Grenoble, France, 1973.

[12] FERREIRA, E. C., *Espaços de Hilbert de Reprodução e Aproximação de Soluções de Equações Integrais de Volterra.* (Dissertação de Mestrado), UNIFAL, Alfenas, 2016.

[13] FERREIRA, J. C., *Operadores integrais positivos e espaços de Hilbert de reprodução.* (Tese de Doutorado), ICMC-USP, São Carlos, 2010.

[14] FERREIRA, J. C., *Decaimento dos autovalores e operadores integrais gerados por núcleos positivos definidos.* (Dissertação de mestrado), ICMC-USP, São Carlos, 2008.

[15] FERREIRA, J. C.; MENEGATTO, V. A., *Eigenvalues of integral operators defined by smooth positive kernels*, Integr. equ, oper. theory 64 (2009), 61-81.

[16] FERREIRA, J. C.; MENEGATTO, V. A.; PERON, A, P., *Integral operators on the sphere generated by positive definite smooth kernels*. J. Complexity, 24 (2008), no.5-6, 632-647.

[17] FERREIRA, J. C; MENEGATTO, V. A.; OLIVEIRA, C. P., *On the nuclearity of integral operators*, Positivity, 13 (2009), no. 3, 519-541.

[18] FOLLAND, G. B., *Real analysis: Modern techniques and their applications*. John Wiley Sons, 1999.

[19] SAWANO, Y., FUJIWARA, H., and SAITOH, S., *Real Inversion Formulas of the Laplace Transform on Weighted Function Spaces*. Compl. anal. oper. theory 2 (2008), 511-521 Birkhauser Verlag Basel/Switzerland.

[20] FUJIWARA, H., MATSUURA, T., SAITOH, S., and SAWANO, Y., *The real inversion of the Laplace transform by numerical singular value decomposition*. J. Anal. Appl. 6 (2008), 55-68.

[21] GOHBERG, I., GOLDBERG, S., KAASHOEK, M. *Basic Classes of linear operators*, Birkhauser, 2003.

[22] ISNARD, C., *Introdução à medida e integração*. Projeto Euclides, 3.ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.

[23] JIANG, W.; CHEN, Z.; *Solving a system of linear Volterra integral equations using the new reproducing kernel method*, Applied Mathematics and Computation, China, v.219, p.10225-10230, 2003.

[24] L. A. STEEN, *Highlights in The History of Spectral Theory*, Amer. Math. Monthly 80, 359-381.

elon1 LIMA, E. L., *Análise Real*. Vol. 1. IMPA, 2016.

[25] LIMA, E. L., *Curso de análise*. Vol. 2. IMPA, 1981.

[26] MERCER, J., *Functions of positive and negative type and theis conncetion with the theory of integral equations*, Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A, 209 (1909), 415-446.

[27] MUNKRES, J. R., *Topology, a first course*. Prentice-Hall, 1975.

[28] OLIVEIRA, R. C. *Introdução a Análise Funcional*. 2ª edição, IMPA, 2004.

[29] SAITOH., *Approximate real inversion formulas of the Laplace transform*, Far East J. Math.Sci. 11(2003), 53-64.

[30] SCHABACK, R., *A unified theory of radial basis functions. Native Hilbert spaces for radial basis functions II*, Numerical analysis in the 20th century, vol I, Approximation. J. Comput. and Appl. Math., 121 (2000), no 1-2, 165-177.

[31] SCHABACK, R., *Native Hilbert spaces for radial basis functions I*, New devolopments in approximation theory (Dortmund, 1998), 255-282, Internat. Ser. Numer. Math, 132, Birkhauser, Basel, 1999.

[32] SMALE, S.; ZHOU, DING-XUAN, *Learning theory estimates via integral operators and their approximations*, Constr. Approx., 26 (2007), 153-172.

[33] SPIEGEL, R. M., *Transformadas de Laplace*, Mc-Graw Hill book, EUA,1996.

[34] SUN, HONGWEI; WU, QIANG, *Application of integral operator for regularized least-square regression*, Math. Comput Modelling, 49 (2009),276-285.

[35] WHITNEY, MARY GEORGE L., *Theoretical and Numerical Study of Tikhonov's Regularization and Morozov's Discrepancy Principle*, Thesis, Georgia State University, 2009.

[36] YAO, K., *Applications of reproducing kernel Hilbert spaces-bandlimited signal models*. Inform. Control, 11, pp.429-444.