

**JENNIFER CRISTINA BORGES**

# **Estudo da Concentração da Poluição do Ar com Parâmetro Fuzzy em Uberlândia**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE MATEMÁTICA  
2016**

Jennifer Cristina Borges

# **Estudo da Concentração da Poluição do Ar com Parâmetro Fuzzy em Uberlândia**

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

**Área de Concentração:** Matemática.

**Linha de Pesquisa:** Análise Numérica.

**Orientadora:** Profa. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice.

**UBERLÂNDIA - MG  
2016**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CPI)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil

---

B732e      Borges, Jennifer Cristina, 1992 -  
2016          Estudo da concentração da poluição do ar com parâmetro Fuzzy em Uber-  
lândia / Jennifer Cristina Borges. - 2016  
109 f.

Orientador: Rosana Sueli da Motta Jafelice  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia. Programa  
de Pós-Graduação em Matemática  
Inclui bibliografia

1. Matemática - Teses. 2. Equações diferenciais parciais - Teses. 3.  
Sistemas difusos - Teses. 4. Poluentes - Teses. I. Jafelice, Rosana Sueli da  
Motta. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação  
em Matemática. III. Título.

CDU: 51

---



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**  
**FACULDADE DE MATEMÁTICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**  
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152  
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

**ALUNA:** Jennifer Cristina Borges.

**NÚMERO DE MATRÍCULA:** 11412MAT008.

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO:** Matemática.

**LINHA DE PESQUISA:** Análise Numérica.

**PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA:** Nível Mestrado.

**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:** Estudo da Concentração da Poluição do Ar com Parâmetro Fuzzy em Uberlândia.

**ORIENTADORA:** Profa. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice.

**NOME**

**ASSINATURA**

Profa. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice  
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

---

Prof. Dr. Silvio Alexandre de Araujo  
UNESP - Universidade Estadual Paulista

---

Prof. Dr. Cesar Guilherme De Almeida  
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

---

Uberlândia-MG, 20 de Fevereiro de 2016.

## **Dedicatória**

Quero dedicar este trabalho às pessoas que são o maior motivo da minha luta em busca dos meus objetivos, meus pais Geraldo e Glêvia, pelo amor, apoio, esforço e dedicação que sempre tiveram e que apesar da distância, continuam tendo.

A todos os meus amigos que se tornaram uma segunda família, dando apoio para que não desistisse dos meus sonhos.

## Agradecimentos

Agradeço:

Em primeiro lugar a Deus por me dar forças para vencer todos os obstáculos encontrados pelo caminho.

Aos meus pais Geraldo e Glêvia, a minha irmã Steffânia, por sempre darem seu amor, apoio e confiança para conseguir alcançar meus objetivos.

Ao meu namorado Thallis por sempre estar ao meu lado.

Aos meus amigos da faculdade, que sempre me ajudaram com as minhas dificuldades não deixando com que eu desistisse. Em especial ao Davidson amigo e colega de sala, que sempre esteve disponível para tirar minhas dúvidas.

À CAPES pela bolsa de mestrado concedida.

À minha orientadora Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice, por sua dedicação, pela paciência, por ter apresentado a “Biomatemática” que é a área com a qual sou apaixonada e por todos os ensinamentos não só matemáticos mas também conhecimentos sobre a vida.

Aos professores Dra. Ana Maria Amarillo Bertone e Dr. Cesar Guilherme De Almeida pelos conhecimentos compartilhados durante os Seminários da Matemática Aplicada-FAMAT onde discutimos a Estimativa de Erro, que foi fundamental neste trabalho. Especialmente à professora Ana Maria que considero minha coorientadora.

Ao professor Dr. Luiz Antônio de Oliveira responsável pelo Laboratório de Climatologia da UFU, pela enorme ajuda e dedicação na parte de obtenção dos dados, que foram fundamentais para elaboração dos SBRFs juntamente com seus conhecimentos climatológicos.

Ao professor Dr. Raphael de Oliveira Garcia pela a disponibilidade de vir até Uberlândia para expor seus conhecimentos sobre o Método de Elementos Finitos e apresentar o programa que utilizamos na resolução numérica da equação de Poisson.

Aos professores da Faculdade de Matemática da UFU: Dr. Geraldo Marcio De Azevedo Botelho, Dr. Vinícius Vieira Fávaro, pela compreensão e sua ajuda.

Às minhas amigas Jéssica, Bruna e Apollyanne que dividem apartamento comigo, que sempre me ajudaram e apoiaram. Em especial à Jéssica, pois sempre que precisava ela se dispunha a escutar minhas apresentações mesmo sem entender nada.

Às minhas queridas amigas Camila e Marcela, que mesmo estando longe, nunca se esqueceram de mim.

Aos amigos e segunda família que fazem parte da minha vida desde a graduação.

Sei que posso estar esquecendo de muita gente, mas quero agradecer de coração a todos os que dia a dia me apoiam e dão forças para alcançar o que me proponho. Muito Obrigada!!!.

Borges, J. C. *Estudo da Concentração da Poluição do Ar com Parâmetro Fuzzy em Uberlândia*. 2016. 109 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

## Resumo

Vários fenômenos que acontecem no nosso dia a dia podem ser modelados através de equações diferenciais. Em geral, temos uma certa dificuldade em modelar um fenômeno através destas equações, uma vez que estas dependem da precisão dos parâmetros utilizados. O objetivo geral deste trabalho é estudar a aproximação numérica da solução para alguns tipos de equações diferenciais através do método de elementos finitos, tais como: uma equação unidimensional, uma bidimensional estacionária e uma bidimensional não estacionária. Também, apresentamos as estimativas para os erros numéricos cometidos quando determinamos as aproximações destas soluções. Mais especificamente, modelamos através de uma equação diferencial parcial advectiva-difusiva, uma fonte de poluição que consideramos como sendo a chaminé de uma indústria com parâmetros constantes e com condição de fronteira de Dirichlet homogênea na cidade de Uberlândia. Finalmente, conseguimos realizar essa modelagem unindo a equação diferencial parcial advectiva-difusiva com a teoria dos conjuntos fuzzy, pois três parâmetros desta equação são determinados por Sistemas Baseados em Regras Fuzzy. O parâmetro difusão depende da temperatura e da concentração de poluentes e as velocidades na direção  $x$  e  $y$  dependem da força de atrito presente na cidade. Esta força de atrito é representada por prédios, vegetações, relevos e outros fatores. Utilizamos imagens de satélite para determinar as temperaturas da cidade de Uberlândia; e os intervalos de variações da difusão e das velocidades são obtidos da literatura. A união destas duas teorias proporcionou determinar qual é a melhor localização de um “polo industrial”, dos cinco pontos estudados em setores de regionalização diferentes da cidade de Uberlândia.

*Palavras-chave:* Equações Diferenciais Parciais; Sistema Baseado em Regras Fuzzy; Concentração de Poluentes; Dados de Satélite; Método de Elementos Finitos.

Borges, J. C. Study on the Air Pollution Concentration with Fuzzy Parameter in Uberlândia. 2016. 109 p. Masters Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

### **Abstract**

Several of our daily occurring phenomena may be modeled by means of differential equations. In general, there are some difficulties in modeling such phenomena through those equations since they depend on the precision of the estimates of the parameters. The objective of this research is to study the numerical approximation to the solution for some types of differential equations through the use of the finite elements method, such as: a uni-dimensional, a stationary bi-dimensional and a non stationary bi-dimensional equation. We also present the estimates for the numerical errors committed when the approximations of the solutions are determined. More specifically, by means of an advective-diffusive partial differential equation with evolution in time, we model a pollution source that we consider as the chimney of a plant with constant parameters and with a homogeneous Dirichlet boundary condition in the city of Uberlândia. Finally, we were able to perform this modeling by merging the advective-diffusive partial differential equation with evolution in time with the fuzzy set theory, on the grounds that three parameters of this equation are determined by Fuzzy Rule-Based Systems. The diffusion parameter depends on temperature and concentration of the pollutants and the velocity towards  $x$  and  $y$  depends on the friction force presented in the city. This friction force is due to buildings, vegetation, terrain profile and other factors. We utilized satellite images in order to determine the temperatures in the city and the intervals of variation for diffusion whereas velocities were obtained through literature. The merge of those two types of theory provided the means to determine which is the best localization of an industrial district amongst the five points studied within different regional sectors of the city of Uberlândia.

*Keywords:* Partial differential equations; Fuzzy Rule-Based Systems; Pollutant Concentration; Satellite data; Finite Element Method.



# Lista de Figuras

1.1	Imagem da poluição de uma indústria. . . . .	4
1.2	Imagem do satélite do mês de junho processada no Envi 4.7. . . . .	6
1.3	Imagem do satélite do mês de setembro processada no Envi 4.7. . . . .	7
1.4	Imagem do mapa de Uberlândia com as temperaturas no mês de junho. . . . .	8
1.5	Imagem do mapa de Uberlândia com as temperaturas no mês de setembro. . . . .	9
1.6	Mapa de Uberlândia discretizado. . . . .	10
2.1	Solução exata da equação (2.16). . . . .	22
2.2	Representação geométrica da função $\varphi_j$ . . . . .	25
2.3	Fronteira gerada no GMSH. . . . .	27
2.4	Aproximação da solução da equação (2.27). . . . .	27
3.1	Conjuntos fuzzy $A$ e $B$ [25]. . . . .	29
3.2	União dos fuzzy $A$ e $B$ [25]. . . . .	29
3.3	Interseção dos conjuntos fuzzy $A$ e $B$ [25]. . . . .	30
3.4	Conjunto fuzzy $A$ e seu complementar $A'$ [25]. . . . .	30
3.5	Variável Linguística. . . . .	30
3.6	Arquitetura de Sistemas Baseados em Regras Fuzzy. . . . .	31
3.7	Método de Mamdani com composição $max - min$ [25]. . . . .	32
3.8	Esquema do SBRF para a difusão. . . . .	33
3.9	Funções de pert. da temperatura em $^{\circ}C$ ( $T$ ). . . . .	34
3.10	Funções de pert. da quant. de poluentes. . . . .	34
3.11	Funções de pertinência da difusão da poluição. . . . .	34
3.12	Superfície gerada através do SBRF. . . . .	34
3.13	Esquema do SBRF para as coordenadas das velocidades. . . . .	35
3.14	Resultante da velocidade. . . . .	35
3.15	Funções de pertinência da Força de Atrito ( $A$ ). . . . .	36
3.16	Funções de pertinência da velocidade ( $v_1$ ). . . . .	36
3.17	Funções de pertinência da velocidade ( $v_2$ ). . . . .	36
3.18	Curva em função do atrito obtido pelo SBRF de $v_1$ . . . . .	37
3.19	Curva em função do atrito obtido pelo SBRF de $v_2$ . . . . .	37
4.1	Concentração de poluentes no ar no início do processo. . . . .	42
4.2	Aproximação numérica da solução da eq.(4.1). . . . .	42
4.3	Concentração de poluentes em cada iteração no nó 644. . . . .	42
4.4	Concentração de poluentes no ar no mês de junho. . . . .	43
4.5	Concentração de poluentes no ar no mês de setembro. . . . .	43
4.6	Regionalização de Uberlândia. . . . .	44
4.7	Concentração de poluentes na região sul (nó 130) no mês de junho. . . . .	44
4.8	Concentração de poluentes na região sul (nó 130) no mês de setembro. . . . .	44
4.9	Concentração de poluentes na região leste (nó 159) no mês de junho. . . . .	45
4.10	Concentração de poluentes na região leste (nó 159) no mês de setembro. . . . .	45

4.11	Concentração de poluentes na região oeste ( <i>nó</i> 512) no mês de junho. . . . .	45
4.12	Concentração de poluentes na região oeste ( <i>nó</i> 512) no mês de setembro. . . . .	45
4.13	Concentração de poluentes na região central ( <i>nó</i> 644) no mês de junho. . . . .	45
4.14	Concentração de poluentes na região central ( <i>nó</i> 644) no mês de setembro. . . . .	45
4.15	Concentração de poluentes na região norte ( <i>nó</i> 696) no mês de junho. . . . .	46
4.16	Concentração de poluentes na região norte ( <i>nó</i> 696) no mês de setembro. . . . .	46
4.17	Concentração de poluentes no ar em cada <i>nó</i> , no mês de junho. . . . .	46
4.18	Concentração de poluentes no ar em cada <i>nó</i> , no mês de setembro. . . . .	46
4.19	Diferença de concentração de poluentes dos meses de junho e setembro em cada <i>nó</i> . .	46
5.1	O erro cometido no método de Ritz-Galerkin é ortogonal ao espaço $V_h$ . . . . .	56
5.2	Triângulo “padrão” $\widehat{K}$ . . . . .	57
C.1	Triângulo “padrão” $\widehat{K}$ . . . . .	89
D.1	Transformação do triângulo “padrão” no triângulo “real”. . . . .	94

# Lista de Tabelas

1.1	Temperatura. . . . .	10
3.1	As 9 regras fuzzy para o SBRF. . . . .	34
A.1	Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho. . . . .	67
A.2	Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.	68
A.3	Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.	69
A.4	Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.	70
A.5	Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.	71
A.6	Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.	72
A.7	Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.	73
A.8	Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.	74
A.9	Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.	75
A.10	Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.	76
A.11	Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.	77
A.12	Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.	78
A.13	Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.	79
A.14	Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.	80
A.15	Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.	81
A.16	Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.	82
A.17	Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.	83
A.18	Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.	84
A.19	Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.	85

# Lista de Símbolos

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathbf{U}$	Conjunto universo.
$\{0, 1\}$	Conjunto contendo os elementos 0 e 1.
$\chi_A$	Função característica do conjunto $A$ .
$\mu_F$	Função de pertinência do conjunto fuzzy $F$ .
$[0, 1]$	Intervalo fechado com extremos 0 e 1.
$\mu_{A \cup B}$	Função de pertinência da união de conjuntos fuzzy $A$ e $B$ .
$\mu_{A \cap B}$	Função de pertinência da interseção de conjuntos fuzzy $A$ e $B$ .
$\mu_{A'}$	Função de pertinência do complemento do conjunto fuzzy $A$ .
$km^2$	Quilômetros quadrados.
$\mu m$	Micrómetro.
$^{\circ}C$	Graus Celsius.
$k$	Graus Kelvin
$u'$	Derivada da função $u$ com relação a variável $x$ .
$\mathbb{R}^M$	Produto cartesiano do conjunto dos números reais $M$ -vezes.
$I$	Intervalo de extremos $a$ e $b$ .
$\partial\Omega$	Fronteira do conjunto $\Omega$ .
$\Delta$	Laplaciano.
$\nabla$	Gradiente.
$P_e$	Número de Péclet.
$H^1(\Omega)$	Espaço de Hilbert.
$L^p(\Omega)$	Espaço das funções mensuráveis $p$ somáveis em $\Omega$ .
$H_0^1(I)$	Espaço das funções de $H^1(I)$ tais que se anulam nos extremos do intervalo $I$ .
$C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$	Conjunto das funções infinitamente diferenciáveis definidas em $\mathbb{R}^n$ e que se anulam no infinito.
$\partial^{\alpha}u$	Derivada no sentido das distribuições de ordem $\alpha$ .
$W^{m,p}(\Omega)$	Espaço de Sobolev.
$\text{div}(u)$	Divergente do vetor $u$ .

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>vii</b>
<b>Abstract</b>	<b>viii</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Símbolos</b>	<b>xii</b>
<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Fatores que Influenciam a Concentração de Poluentes do Ar em Uberlândia</b>	<b>4</b>
1.1 Determinação das Variáveis . . . . .	5
1.1.1 Temperatura . . . . .	5
1.1.2 Variação de Concentração de Poluentes e Velocidades . . . . .	11
<b>2 Método de Elementos Finitos para Problema Unidimensional e Bidimensional</b>	<b>12</b>
2.1 Formulação Fraca do Problema Unidimensional . . . . .	12
2.1.1 Método de Galerkin para o Caso Unidimensional . . . . .	16
2.1.2 Exemplo Unidimensional . . . . .	19
2.2 Formulação Fraca do Problema Bidimensional . . . . .	23
2.2.1 Método de Galerkin para o Caso Bidimensional . . . . .	24
2.2.2 Exemplo Bidimensional . . . . .	26
<b>3 Teoria dos Conjuntos Fuzzy</b>	<b>28</b>
3.1 Conjunto Clássico . . . . .	28
3.2 Conjuntos Fuzzy . . . . .	28
3.3 Operações Padrões entre Conjuntos Fuzzy . . . . .	29
3.4 Variáveis Linguísticas Fuzzy . . . . .	30
3.5 Sistema Baseado em Regras Fuzzy . . . . .	30
3.5.1 Processador de Entrada (Fuzzificação) . . . . .	31
3.5.2 Base de Regras . . . . .	31
3.5.3 Máquina de Inferência Fuzzy . . . . .	31
3.5.4 Processador de Saída (Defuzzificação) . . . . .	32
3.6 Exemplos de SBRF . . . . .	33
3.6.1 Difusão ( $\alpha$ ) . . . . .	33
3.6.2 Cálculo das Coordenadas da Velocidade . . . . .	35
<b>4 Modelagem da Concentração de Poluente do Ar</b>	<b>38</b>
4.1 Poluição no Ar com Fronteira Irregular . . . . .	38
4.2 Poluição no Ar com Parâmetros Fuzzy . . . . .	42

<b>5</b>	<b>Estimativa do Erro para as EDP Estudadas</b>	<b>48</b>
5.1	A Estimativa do Erro do Problema Unidimensional . . . . .	48
5.2	Estimativa do Erro do Caso Bidimensional Estacionário . . . . .	49
5.2.1	Um Contexto Teórico Mais Geral . . . . .	50
5.2.2	Derivada no Sentido das Distribuições e os Espaços de Sobolev . . . . .	51
5.2.3	O Método de Ritz-Galerkin . . . . .	55
5.3	Caso Bidimensional não Estacionário . . . . .	61
	<b>Conclusões</b>	<b>63</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>64</b>
	<b>Apêndice</b>	<b>67</b>
<b>A</b>	<b>Tabela das Temperaturas em cada <i>nó</i></b>	<b>67</b>
	<b>Apêndice</b>	<b>86</b>
<b>B</b>	<b>Construção das Funções</b>	<b>86</b>
	<b>Apêndice</b>	<b>89</b>
<b>C</b>	<b>Matrizes de Rigidez</b>	<b>89</b>
	<b>Apêndice</b>	<b>94</b>
<b>D</b>	<b>Transformação do Triângulo</b>	<b>94</b>

# Introdução

Em várias áreas tecnológicas é muito comum nos depararmos com a modelagem matemática de fenômenos do mundo real, isto é, a representação de tais fenômenos por expressões matemáticas. É muito comum, em se tratando de modelagem, a representação de fenômenos físicos, ambientais, biológicos e outros, através de Equações Diferenciais Parciais (EDP), essas em sua grande maioria são resolvidas com aproximações numéricas da solução. Assim, há uma grande importância em estudar métodos numéricos para obter uma aproximação da solução e o erro envolvido ao considerar um método numérico.

Em [28], o autor apresenta um histórico dos trabalhos desenvolvidos por um grupo de pesquisadores da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP. Estes vêm construindo modelos matemáticos com a utilização de diferentes equações e ou sistemas de equações não lineares, os quais, em sua maioria, não apresentam uma solução analítica, necessitando do desenvolvimento de processos numéricos na busca de soluções aproximadas. Nestes casos o grupo tem utilizado os tratamentos numéricos necessários para encontrar uma solução para a equação ou sistema de equações diferenciais parciais não-lineares, utilizando o Método de Galerkin, juntamente com o Método de Elementos Finitos ou Método das Diferenças Finitas e o Método de Crank-Nicolson. Citaremos alguns trabalhos deste grupo da área da Biomatemática. Os trabalhos destes pesquisadores, que utilizam o Método dos Elementos, Finitos se iniciaram na década de 90, com a dissertação de mestrado de Mistro [35]. Mistro realiza seu trabalho analisando a dispersão do mercúrio nos rios brasileiros, principalmente na região amazônica (Rondônia, Roraima, Pará e Norte do Mato Grosso), Goiás e norte do Rio de Janeiro. Para descrever o modelo matemático, Mistro utilizou [15], [32], [37] e [39] onde faz a simulação de como o mercúrio se desloca pelos rios através de uma fonte poluidora, analisando o espalhamento pela superfície da água, considerando inicialmente a superfície da água como um plano bidimensional e, considerando também a variação temporal. No trabalho utiliza uma equação diferencial parcial difusiva-advectiva.

Castro [11] faz um estudo sobre os poluentes do ar, construindo um modelo matemático que busca conhecer como ocorre a difusão dessa poluição. Neste trabalho considera-se um domínio restrito a um plano vertical com condições de contorno de Neumann e Dirichlet homogêneo, utilizando a equação diferencial parcial difusiva-advectiva com parâmetros constantes. Posterior a Castro, Diniz [12] realiza o primeiro trabalho do grupo retratando a dinâmica populacional. Constrói o modelo matemático através da equação de dispersão-migração, que retrata a situação da mudança de um habitat, tendo em vista a construção de represa, analisando a nova geomorfologia a que os peixes devem se adaptar.

Em [10] foi construído um modelo matemático que pudesse descrever como se movimenta a mancha de óleo na superfície de marés costeiras, para prevenção de futuros acidentes ou até mesmo de ações de contingência caso aconteça um acidente, este modela o problema e apresenta ferramentas que venham contribuir para decisões em situações de emergência. Assim, como nos trabalhos anteriores, Cantão trabalha com a equação de difusão-advectação, dada por

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\alpha \nabla u) + \sigma u + \operatorname{div}(V \cdot u) = f, \text{ para } (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, t \in I = (0; T]. \quad (1)$$

sendo  $u = u(x, y, t)$  a concentração de óleo,  $\alpha$  função que descreve a difusibilidade,  $V(x, y) =$

$(V_1(x, y); V_2(x, y))$  função vetorial que caracteriza a direção induzida pelo vento, circulação e marés,  $\sigma$  função de decaimento do óleo e  $f$  fonte de poluente.

O trabalho de Pregnotatto [43] faz um estudo sobre o Mal-das-Cadeiras em Capivaras na região do Esteros do Iberá, situado na Argentina. Este trabalho apresenta um modelo considerando populações de capivara diferenciadas, pois contém capivaras Suscetíveis, Infectadas e Mortas, denominado como modelo SIM. Este é o primeiro trabalho do grupo da UNICAMP que envolve um sistema de equações diferenciais parciais não lineares e apesar de ser um sistema, o tratamento matemático é semelhante aos trabalhos anteriores, levando em consideração três equações diferentes e as relações existentes entre as espécies. Neste mesmo período outros pesquisadores trabalharam com o Esteros do Iberá. Diniz [13] estrutura um modelo matemático analisando o lago do Iberá, na Argentina, neste trabalho Diniz constrói um sistema de duas equações, a primeira relacionada com a difusão de poluentes aérea e a segunda representando a difusão da poluição no meio aquático, considerando o domínio um campo bidimensional.

Vásquez [47] faz um estudo de dispersão de poluentes com a equação da difusão-advecção no meio aquático (marítimo), considerando o seu domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , onde as dimensões representavam a dispersão na superfície e na profundidade.

Inforzato [23] analisa o trabalho de Diniz (2003) e Vásquez (2005) e constrói um modelo matemático envolvendo os problemas tratados em cada trabalho, seu modelo analisa o processo de dispersão de poluentes no sistema ar-água com um domínio tridimensional ( $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ). Diniz (2003) se diferencia pelo domínio e Vásquez (2005) por trabalhar com a dispersão no ar.

Krindges [29] desenvolve seu trabalho na represa do Manso, localizada próximo a Cuiabá, analisando o problema da difusão dos poluentes na represa do rio Manso, trabalha com a mesma equação de difusão-advecção, porém com o domínio em  $\mathbb{R}^3$ , isto é,  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , com o campo advectivo (campo de velocidade) descrito pela equação de Navier-Stokes [46].

O interesse de profissionais e pesquisadores em construir modelos matemáticos para descrever fenômenos biológicos que envolvem incertezas tem crescido e se desenvolvido rapidamente nas últimas décadas. A teoria dos conjuntos fuzzy é uma ferramenta que está sendo muito utilizada em vários contextos. Esta teoria foi proposta por Zadeh em 1965 com o objetivo de fornecer um método de obtenção e manuseio de informações imprecisas que são típicas do pensamento e raciocínio humano [48]. A modelagem de fenômenos biológicos através de equações diferenciais ordinárias com parâmetros fuzzy vem sendo realizada a partir dos trabalhos [5], [24] e [38] e outros. O trabalho [3] apresenta uma equação diferencial parcial difusiva-advectiva e com parâmetro fuzzy para descrever uma dinâmica populacional. Este trabalho realiza uma ligação entre as EDP e o Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF). Missio [34] discute um modelo matemático do tipo Suscetível-Infectado-Recuperado (SIR) [15] retratando a febre aftosa. Missio constrói um modelo que interliga equações diferenciais parciais com tratamento através de modelos fuzzy, estocásticos, método dos elementos finitos e Cranck-Nicolson. Em [26], os autores apresentam uma equação diferencial parcial difusiva-advectiva com parâmetro fuzzy para descrever o comportamento de formigas cortadeiras. Também, [16] modela a luminescência de íons de Neomídio próximo ao ponto de incidência do laser de excitação, através de um sistema parcialmente fuzzy (p-fuzzy) de uma equação diferencial parcial. O estudo de algumas EDP, tais como, do calor, da onda e de Poisson com um parâmetro sendo representado por um número fuzzy foi apresentado em [7]. Este estudo foi realizado utilizando o princípio da extensão de Zadeh [6].

Alguns trabalhos foram realizados anteriormente, com abordagens mais hipotéticas do que nesta dissertação. A equação estudada que modela uma fonte de poluição como sendo a chaminé de uma indústria que contamina a atmosfera com uma nuvem de poluição é dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + v_1 \frac{\partial u}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma u = f \quad (x, y) \in \Omega, t \in (0, T] \quad (2)$$

onde  $u(x, y, t)$  é a concentração de poluentes no instante  $t$ ,  $\alpha$  representa a dispersão na área,  $v_1$  e



$v_2$  são a velocidade de transporte (que ocorrerá nos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente), o  $\sigma$  representa o decaimento e o  $f$  representa a fonte de poluentes (no nosso caso, a chaminé).

Oliveira et al. [40] utilizaram a equação (2), considerando apenas a velocidade na direção  $x$  diferente de zero ( $v_1$ ),  $\sigma$  constantes e  $\alpha$  como parâmetro fuzzy em um domínio retangular. Oliveira [41] utiliza a equação (2) com  $v_1$ ,  $v_2$  e  $\sigma$  constantes e  $\alpha$  como parâmetro fuzzy em um domínio retangular. Nestes dois trabalhos a aproximação numérica da solução da EDP é realizada pelo Método de Diferenças Finitas e a discretização no tempo pelo método de Cranck-Nicolson, com fronteira de Dirichlet.

Neste trabalho demos continuidade ao meu Trabalho de Conclusão de Curso [8] que consistia em resolver numericamente a equação (2), utilizando o Método de Diferenças Finitas juntamente com SBRF para determinar os parâmetros fuzzy  $\alpha$ ,  $v_1$  e  $v_2$ . A difusão  $\alpha$  tem as seguintes variáveis de entrada: temperatura, umidade relativa, pressão atmosférica e concentração de poluente. As velocidades  $v_1$  e  $v_2$  dependem da força de atrito. Consideramos uma cidade hipotética, ou seja, o domínio é uma malha regular. Os valores, em cada coordenada do domínio, para essas variáveis que influenciam nos parâmetros da equação, são representados por superfícies gaussianas [8]. Essas superfícies são hipotéticas e consideramos fronteira mista (Dirichlet e Neumann). Assim, com a intenção de tornar este estudo mais próximo da realidade, consideramos a fronteira do domínio como sendo o contorno da cidade de Uberlândia e utilizamos dados reais de temperatura obtidos pelo satélite Landsat-8.

O objetivo específico deste trabalho é modelar matematicamente uma fonte de poluição que consideramos como sendo a chaminé de uma indústria que contamina a atmosfera com uma nuvem de poluição que se espalha pela cidade de Uberlândia. Modelamos o problema considerando uma equação diferencial parcial advectiva-difusiva (2) em um domínio irregular, no caso o mapa de Uberlândia, com condição de fronteira de Dirichlet homogênea e os parâmetros difusão e velocidade são calculados através de SBRF. As variáveis de entrada do SBRF para a difusão são: temperatura e concentração de poluentes. A variável de entrada do SBRF para as velocidades é a força de atrito causada por barreiras (edifícios, vegetação, entre outros). Utilizamos dados reais de temperatura, variações de concentração de poluentes e variações das velocidades na direção  $x$  e  $y$  na cidade de Uberlândia, esses dados são importantes na obtenção dos SBRF utilizados para calcular os parâmetros da equação. A equação é resolvida através de aproximações numéricas via Método de Elementos Finitos e o Método de Cranck-Nicolson para a discretização no tempo. Através dessa modelagem é possível verificar qual é a melhor localização de um “polo industrial” em Uberlândia, nos pontos estudados.

A organização do presente trabalho é a seguinte:

No Capítulo 1, apresentamos o procedimento de obtenção de dados importantes da cidade de Uberlândia que são entradas do SBRF.

No Capítulo 2, realizamos um estudo do Método de Elementos Finitos utilizado para aproximar numericamente as soluções das EDP, e apresentamos um exemplo unidimensional e um bidimensional resolvidos através deste método.

No Capítulo 3, apresentamos definições importantes da Teoria dos Conjuntos Fuzzy, definimos o SBRF e apresentamos alguns exemplos de SBRF que são utilizados na modelagem do problema da concentração de poluição do ar.

No Capítulo 4, aplicamos a teoria dos conjuntos fuzzy no problema da dispersão de poluentes eliminados pela chaminé de uma indústria na cidade de Uberlândia.

No Capítulo 5, apresentamos o estudo da estimativa do erro para o Método de Elementos Finitos, para cada exemplo apresentado neste trabalho.

# Capítulo 1

## Fatores que Influenciam a Concentração de Poluentes do Ar em Uberlândia

De acordo com dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE) de 2010, Uberlândia é um dos municípios mais populosos localizado fora das regiões metropolitanas do país. Uberlândia conta com uma população de 604.013 habitantes no ano de 2010 [21], população esta que está distribuída em uma área total correspondente a 4.115, 21 km<sup>2</sup>.

Uberlândia está localizada no estado de Minas Gerais, na região do Triângulo Mineiro, além de ser a maior do interior de Minas Gerais, possui uma enorme importância econômica para sua região de abrangência (Triângulo Mineiro, Sudeste e Centro-Oeste do Brasil).

O crescimento econômico levou à industrialização da cidade, a qual recebeu várias indústrias de diferentes ramos, sendo estas localizadas nas saídas da cidade. Fábricas de equipamentos agrícolas e armazéns de estocagem de mercadorias também foram criados, sobretudo, na direção Norte, nas proximidades da rede ferroviária. Apesar do avanço econômico, as condições sociais, principalmente dos operários, eram bastante precárias, devido a ausência de energia elétrica e saneamento básico a essa população. Os mesmos residiam em vilas que eram criadas nos arredores das fábricas [45].

Como o processo de industrialização cresce a cada ano que passa, surge a preocupação com o meio ambiente, uma vez que as indústrias são um dos fatores que mais poluem a atmosfera, e com isso, ao implantar uma nova indústria em uma cidade é importante saber qual seria a melhor localização para que o impacto ambiental seja o menor possível.

Este capítulo tem por finalidade reunir os dados necessários relacionados a variáveis que influenciam nos parâmetros difusão e velocidade. Esses parâmetros aparecem em uma equação diferencial parcial evolutiva advectiva-difusiva que nos permite simular o comportamento de uma nuvem de poluição no ar através da chaminé de uma indústria na cidade de Uberlândia. A Figura 1.1 ilustra a chaminé de uma indústria, representando a situação estudada.



Figura 1.1: Imagem da poluição de uma indústria.

## 1.1 Determinação das Variáveis

Para determinarmos os fatores que influenciam a concentração da poluição do ar, tivemos a colaboração de um especialista na área de climatologia. Assim, concluímos que o parâmetro de difusão do ar depende da temperatura e da concentração de poluentes na região estudada e o parâmetro velocidade depende da força de atrito, que se refere à presença de barreiras tais como, prédios, vegetação e outros.

### 1.1.1 Temperatura

A Universidade Federal de Uberlândia (UFU) conta com uma estação meteorológica que coleta os dados de temperatura, porém teríamos as temperaturas apenas no Campus Santa Mônica. Para determinar a concentração de poluentes do ar em Uberlândia, precisamos de aproximadamente 900 valores de temperatura da cidade. Assim, participei de um minicurso sobre “Sensoriamento Remoto” oferecido pelo Prof. Luiz Antônio de Oliveira, responsável pelo Laboratório de Climatologia da UFU [42]. A finalidade do minicurso é utilizar imagens de satélite adquiridas no portal eletrônico do centro de sensoriamento remoto do Serviço Geológico dos Estados Unidos (USGS) para obtermos tais temperaturas.

A utilização de imagens de satélite para gerar valores de temperatura de superfície a partir de sensores remotos tem sido muito utilizada para estudar planejamentos urbanos, projetos ambientais, entre outros. Optamos por manipular as imagens no mês de junho e setembro por apresentar uma diferença expressiva de temperaturas. Utilizamos valores de temperatura aparente de superfície do Thermal Infrared Sensor (TIRS)/Landsat-8, banda 10, para os meses de junho e setembro de 2014. Nesta seção utilizamos duas imagens de satélite do Landsat-8, ambas da banda 10 (infravermelho termal) e de faixa espectral (10,6-11,9  $\mu m$ ) [31].

As imagens apresentadas nas Figuras 1.2 e 1.3 foram coletadas pelo satélite com passagem em 14 de junho de 2014 às 10:15min:12s e 18 de setembro de 2014 às 10:15min:38s respectivamente. Todos os processamentos de correção e conversão de imagens foram realizados no software Envi 4.7 e no ArcGis 10.1 com a colaboração do especialista na área. Posteriormente, para um melhor detalhamento dos dados, definiu-se classes (intervalos) de temperatura de superfície.

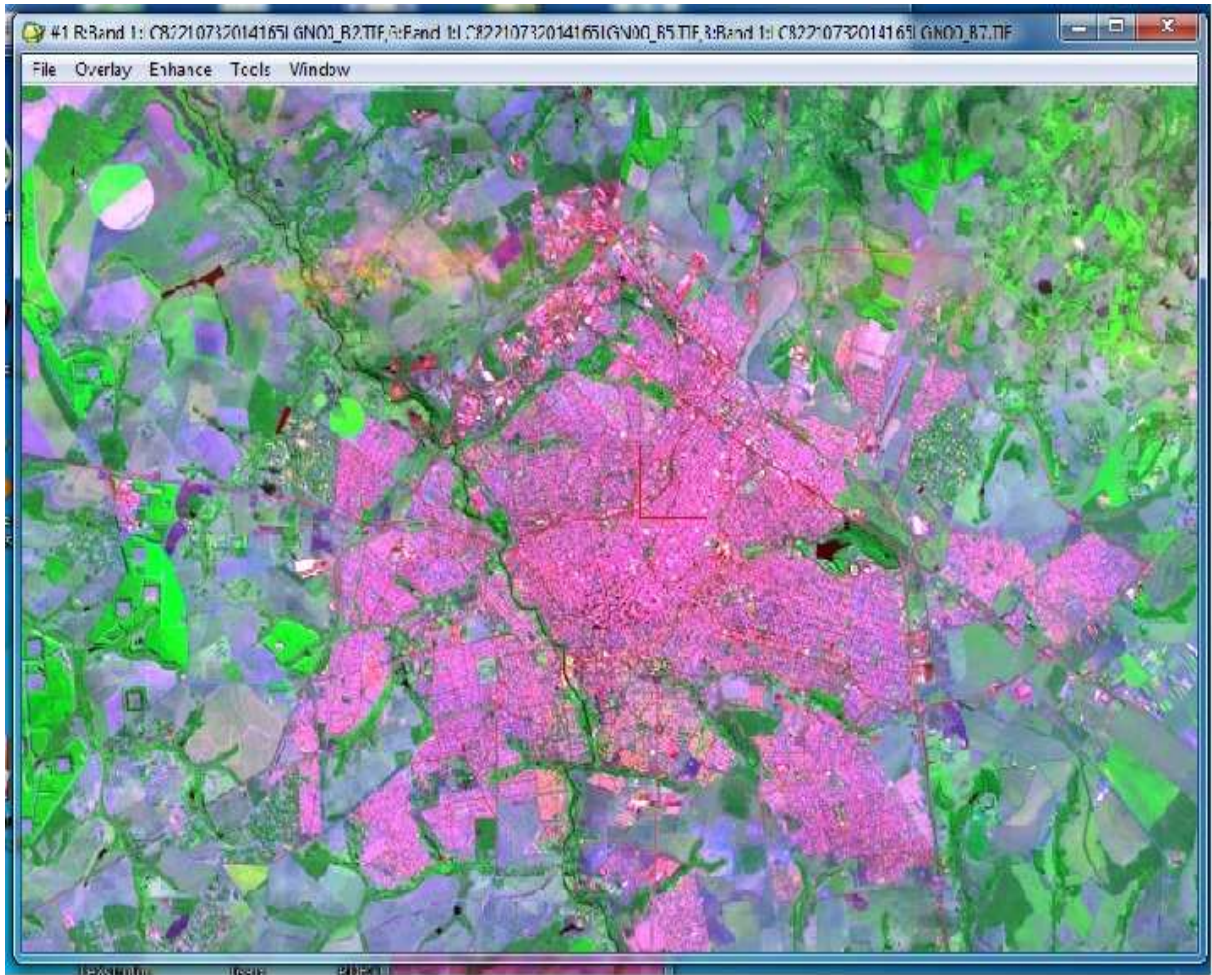


Figura 1.2: Imagem do satélite do mês de junho processada no Envi 4.7.

Para o processamento das imagens de satélite e posterior resultados das LSTs (Land Surface Temperature), efetuamos primeiramente a correção radiométrica em relação aos valores obtidos no topo da atmosfera (TOA). Esta correção que foi realizada de acordo com o algoritmo de processamento, dado por:

$$L\lambda = M_L Q_{cal} + A_L. \quad (1.1)$$

onde:

- $L\lambda$  = valor da radiância espectral no topo da atmosfera- TOA, medida em  $\text{Watts} / (\text{m}^2 \cdot \text{srad} \cdot \mu\text{m})$ ;
- $M_L$  = fator multiplicativo escalonado específico constante no arquivo de metadado (RADIANCE\_ADD\_BAND\_x, onde x é o número da banda, neste arquivo temos 11 bandas);
- $Q_{cal}$  = produto padrão quantificado e calibrado por valores de pixel. Este valor é referente a cada banda da imagem;
- $A_L$  = fator aditivo escalonado específico constante no arquivo de metadado (RADIANCE\_ADD\_BAND\_x, onde x é o número da banda).

As cenas do sensor TIRs foram convertidas de radiância espectral para temperatura de brilho em graus Kelvin (k). A constante térmica necessária para a conversão é obtida através do arquivo metadados da imagem utilizada. Essa conversão é feita aplicando o algoritmo apresentado na equação:

$$T_k = \frac{K_2}{\ln\left(\frac{K_1}{L_\lambda} + 1\right)} \quad (1.2)$$





Figura 1.3: Imagem do satélite do mês de setembro processada no Envi 4.7.

onde

- $T_k$  = temperatura de brilho aparente em graus Kelvin (k);
- $L_\lambda$  = reflectância no topo da atmosfera ( Watts /( $m^2 \cdot \text{srad} \cdot \mu m$ ));
- $K_1$  = constante de conversão K1 específica para cada banda, também denominada de constante térmica, disponível no arquivo metadado (K1\_ CONSTANT\_ BAND\_ x, onde x é o número da banda, 10 ou 11);
- $K_2$  = constante de conversão K2 específica para cada banda, também denominada de constante térmica, disponível no arquivo metadado (K2\_ CONSTANT\_ BAND\_ x, onde x é o número da banda, 10 ou 11).

Assim, com a temperatura em graus Kelvin podemos obter a temperatura em graus Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ), dado por:

$$T_c = T_k - 273, \quad (1.3)$$

onde,

- $T_c$  = temperatura de brilho aparente em graus Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ );
- $T_k$  = temperatura de brilho aparente em graus Kelvin (k).

Observe que os valores de temperatura obtidos diz respeito à superfície dos materiais de superfície, logo, estes não são coincidentes com os valores de temperatura do ar levantados em termômetros de estações meteorológicas [31].

As Figuras 1.4 e 1.5 apresentam o mapa de Uberlândia com as temperaturas dos meses de junho e setembro, respectivamente, e a seguinte escala: 1cm é equivalente a 1,5km. O Prof. Dr. Luiz Antônio Oliveira organizou e forneceu essas figuras obtidas pelo software ArcGis 10.1, para serem utilizadas neste trabalho.

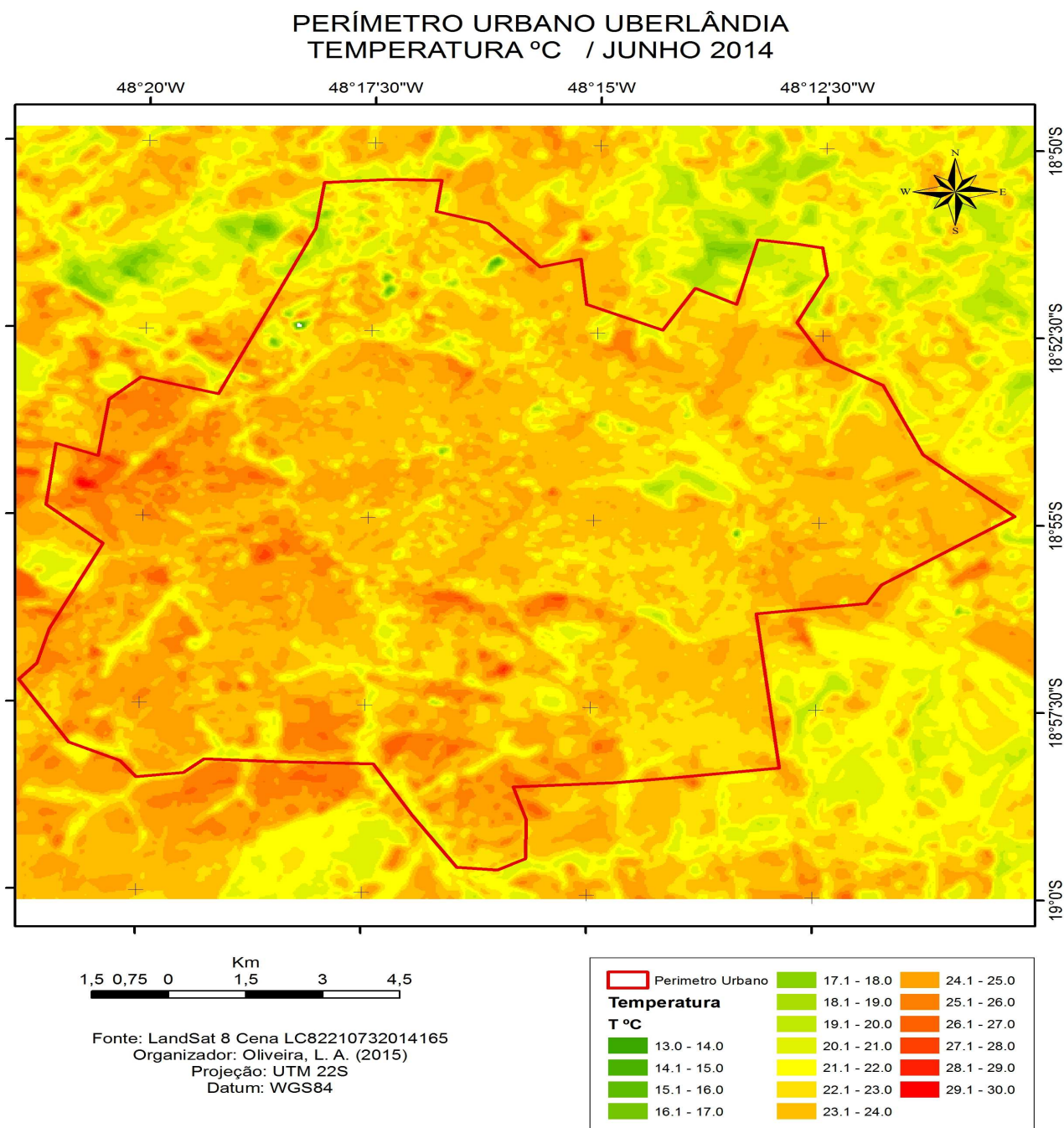


Figura 1.4: Imagem do mapa de Uberlândia com as temperaturas no mês de junho.



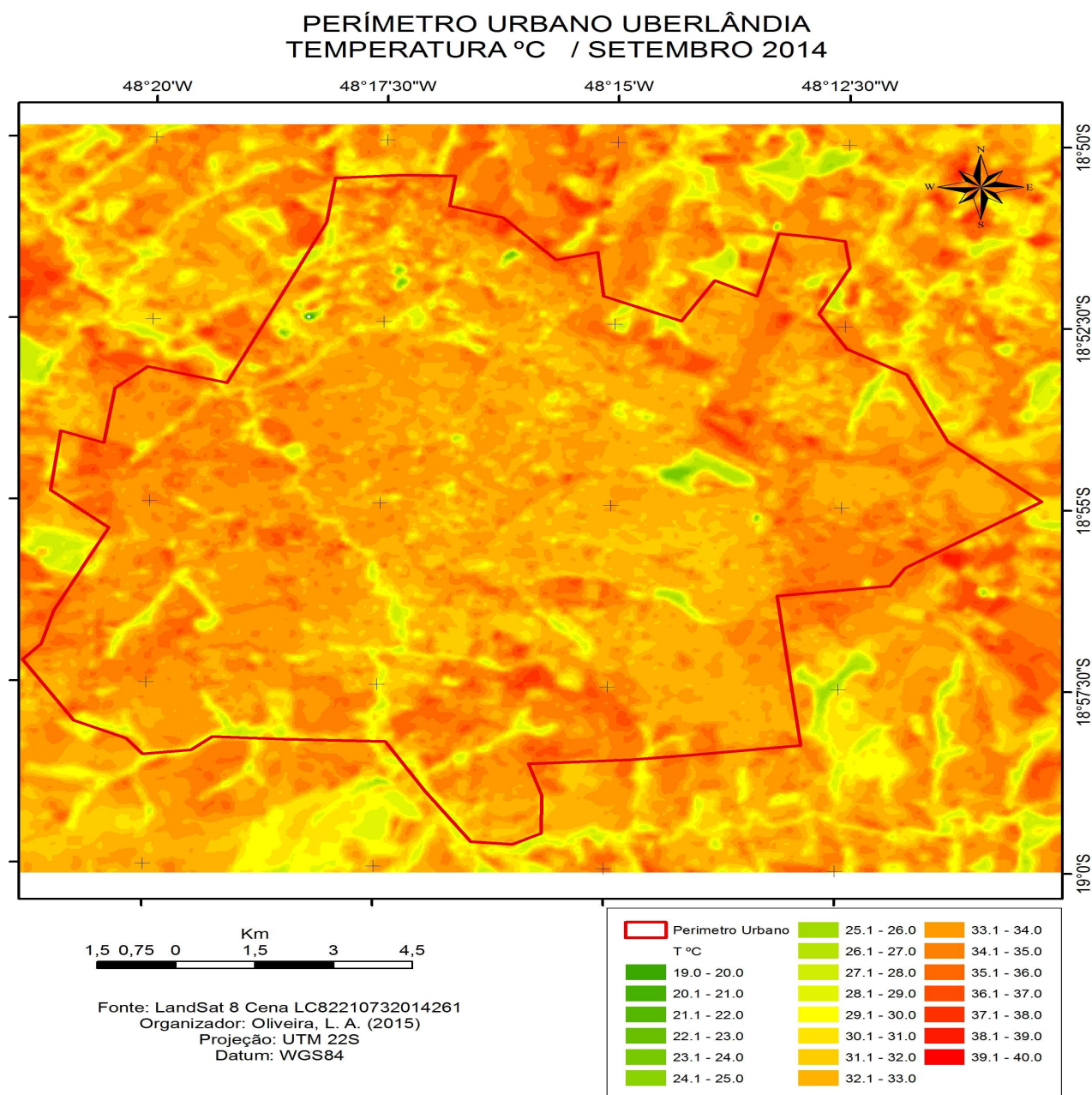


Figura 1.5: Imagem do mapa de Uberlândia com as temperaturas no mês de setembro.

A Figura 1.6 representa a malha discretizada utilizada para a aproximação numérica da equação (2). Essa malha foi obtida utilizando o contorno em vermelho apresentado na Figura 1.4, que geramos no software livre GMSH [20]. Esse software é utilizado para aproximar a fronteira de uma figura qualquer através de uma poligonal. Os pontos da poligonal são salvos no acessório bloco de notas do computador. Utilizando o software Matlab obtemos a poligonal que une esses pontos, e a partir daí, obtemos a malha triangularizada para a aplicação do MEF. Essa malha é exportada através de três elementos:

- $p$ : são as coordenadas  $x$  e  $y$  do número total de pontos da malha (chamamos esses pontos de “*nós*”), na malha estudada temos 896 *nós*;
- $e$ : são os *nós* que estão na fronteira, temos 178 *nós* na fronteira;
- $t$ : são os triângulos da malha, temos 403 triângulos.

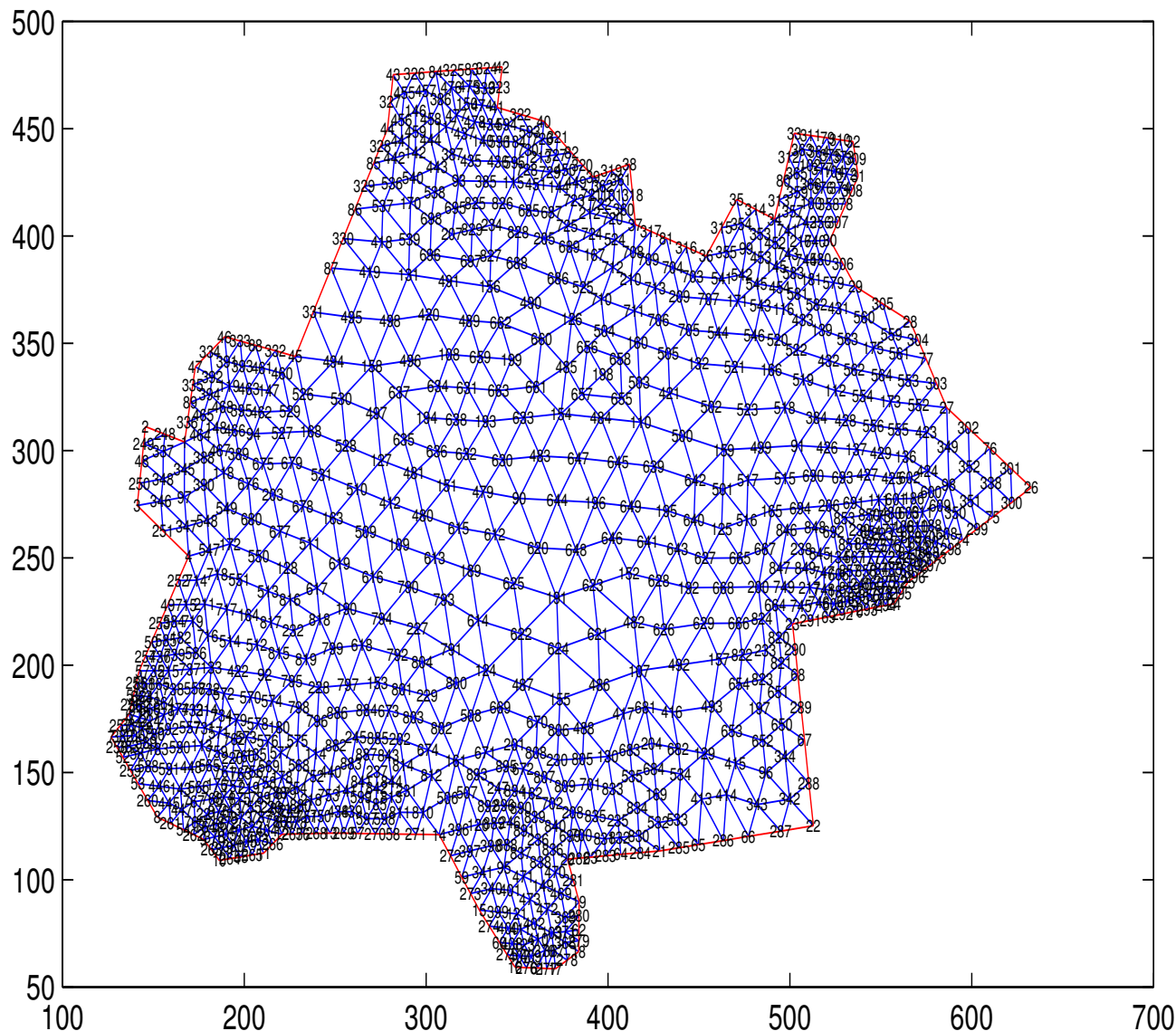


Figura 1.6: Mapa de Uberlândia discretizado.

Para relacionar cada *nó* da malha da Figura 1.6 com o mapa das temperaturas Figura 1.4, foi necessário sobrepor estas e fazer a intersecção para criar os 896 *nós* na Figura 1.4. Assim, temos o valor da temperatura em cada *nó* da malha. No Apêndice A apresentamos as Tabelas A.1 a A.19, onde a coluna 2 apresenta as classes (intervalos de temperatura) em cada *nó* e a coluna 3 apresenta a média dos intervalos no mês de junho.

Podemos observar que alguns *nós* destas tabelas aparecem duas vezes (estão em azul), isso ocorre devido ao fato de eles aparecerem em duas classes ao mesmo tempo, assim tomamos o valor deste *nó* como a média destas temperaturas. Para o mês de setembro fizemos de maneira análoga. A Tabela 1.1 apresenta as temperaturas mínima, média e máxima destes meses.

Variação de Temperatura		
	Junho	Setembro
mínima	14,5	23,5
média	23,39	33,19
máxima	27,5	37,5

Tabela 1.1: Temperatura.



### 1.1.2 Variação de Concentração de Poluentes e Velocidades

As partículas presentes na atmosfera são provenientes de fontes naturais, como vulcões, aerossóis marinhos e a ação do vento sobre o solo, e de outras de caráter antropogênico (causados pela ação do homem), tais como a queima de combustíveis fósseis, processos industriais e tráfego rodoviário [22].

As partículas presentes na atmosfera são normalmente designadas pelo método que usamos para medi-las. Nos últimos anos há uma dedicação especial aos efeitos das partículas, e portanto as medições tradicionais de Partículas Totais em Suspensão (PTS), que têm sido substituídas pela medição da fração de  $MP_{10}$  (partículas com um diâmetro aerodinâmico inferior a  $10\mu m$ ), uma vez que estas partículas representam um maior risco para a saúde.

O material particulado ou aerossol atmosférico é constituído pelas partículas sólidas e líquidas em suspensão na atmosfera. As partículas inaláveis ( $MP_{10}$ ) são definidas como partículas com diâmetro aerodinâmico menor que  $10\mu m$ , estas dividem-se em partículas grossas inaláveis com diâmetro aerodinâmico entre 2 e  $10\mu m$  e as partículas finas com diâmetro aerodinâmico menor que  $2\mu m$ .

Em muitas cidades as  $MP_{10}$  são consideradas como um dos poluentes que causam maiores preocupações, pois a sua ação causa vários problemas de saúde, desde a irritação nasal, tosse, até a bronquite, asma ou até mesmo a morte. A fração mais fina das  $MP_{10}$  ( $0,5\mu m$  a  $1,0\mu m$ ) pode ter efeitos muito grave para a saúde, uma vez que esta pode penetrar profundamente nos pulmões e atingir os alvéolos pulmonares, provocando dificuldades respiratórias e por vezes danos permanentes. Partículas com diâmetro inferior a  $1\mu m$ , podem permanecer em suspensão na atmosfera durante semanas e serem transportadas ao longo de centenas ou milhares de quilômetros, enquanto que partículas maiores que  $2,5\mu m$ , são removidas no período de algumas horas por precipitação e sedimentação.

O material particulado tem a capacidade de aumentar os efeitos fisiológicos dos gases presentes no ar, esse é um dos aspectos mais importantes a ser considerado. Os efeitos de uma mistura de material particulado e dióxido de enxofre, por exemplo, são mais acentuados do que os provocados na presença individualizada de cada um deles. Além disso, pequenas partículas podem absorver o dióxido de enxofre do ar e, com água (umidade do ar) formam partículas contendo ácido, o que irrita o sistema respiratório e pode danificar as células que protegem o nosso sistema [22].

A quantificação de partículas suspensas na atmosfera da cidade de Uberlândia-MG é executada pela Faculdade de Engenharia Química da Universidade Federal de Uberlândia desde o ano de 2003 nas proximidades do terminal de ônibus coletivos no centro da cidade. De [17], temos que a variação da concentração de  $MP_{10}$  é  $0 - 300\mu m$ .

A cidade de Uberlândia em geral não é dotada de edifícios de altura elevada, porém, as edificações existentes no percurso entre a estação meteorológica e a área onde estão localizados os receptores podem afetar sensivelmente a direção e velocidade do vento e provocar a formação de canyons devido ao efeito de rugosidade do terreno. A classe de velocidades de vento predominante no ano de 2012 foi de  $0.5 - 2m/s$  (variação da resultante da velocidade), segundo [17].

No próximo Capítulo, apresentamos um estudo sobre o Método de Elementos Finitos e alguns exemplos resolvidos utilizando este método.

## Capítulo 2

# Método de Elementos Finitos para Problema Unidimensional e Bidimensional

O Método de Elementos Finitos (MEF) é conhecido por ser aplicável em domínios mais elaborados, ou seja, domínios irregulares. Essa é uma das principais vantagens sobre o Método de Diferenças Finitas (MDF) [19].

A ideia do MEF é discretizar o domínio, representando-o, ainda que de forma aproximada, por uma região de número finito de elementos, e resolver no lugar do problema original o problema que lhe é associado, que chamamos de formulação fraca [4] e [44].

Neste capítulo apresentamos alguns exemplos resolvidos utilizando o MEF.

### 2.1 Formulação Fraca do Problema Unidimensional

Vamos considerar o problema de Dirichlet homogêneo unidimensional:

$$\begin{cases} -u'' = f(x), & x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $u'' = \frac{d^2u}{dx^2}$  e  $f$  é uma função contínua dada. Ao invés de resolver (2.1), o MEF se propõe a solucionar um problema equivalente, chamado de formulação fraca do original. Assim, encontraremos a solução  $u$  da equação (2.1) que denotamos por  $(S)$  que é também solução do problema de minimização  $(M)$  e do problema variacional  $(PV)$  (relacionado à formulação fraca), que definiremos a seguir.

Para isto vamos enunciar algumas definições e afirmações da teoria geral.

**Definição 2.1.** Se  $V$  é um espaço vetorial, então dizemos que  $L : V \rightarrow \mathbb{R}$  é uma **forma linear** em  $V$  se verificar

$$L(\beta v + \theta w) = \beta L(v) + \theta L(w) \text{ para todo } \beta, \theta \in \mathbb{R}, v, w \in V.$$

Denotamos a forma bilinear como  $a(\cdot, \cdot)$ . Além disso, dizemos que uma função  $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  é uma **forma bilinear** definida em  $V$  se verificar

$$a(u, \beta v + \theta w) = \beta a(u, v) + \theta a(u, w), \text{ para todo } \beta, \theta \in \mathbb{R}, v, w \in V,$$

e

$$a(\beta u + \theta v, w) = \beta a(u, w) + \theta a(v, w), \text{ para todo } \beta, \theta \in \mathbb{R}, v, w \in V.$$

A forma bilinear  $a(\cdot, \cdot)$  definida em  $V$  é dita **simétrica** se

$$a(v, w) = a(w, v), \text{ para todo } v, w \in V$$

A forma bilinear  $a(\cdot, \cdot)$  definida em  $V$  diz-se ser *definida positiva* sobre  $V$  se verificar que

$$a(v, v) > 0, \text{ para todo } v \in V, v \neq 0.$$

Quando em um espaço vetorial se define uma forma bilinear simétrica e definida positiva, então o espaço é dito **espaço vetorial normado**, com a norma  $\|\cdot\|_a$  induzida por  $a$ :

$$\|v\|_a = (a(v, v))^{\frac{1}{2}}, \text{ para todo } v \in V.$$

Denotamos a forma bilinear, simétrica e definida positiva como  $(\cdot, \cdot)$ , chamado de **produto interno** definido em  $V$ , com a correspondente norma induzida  $\|\cdot\|$ . O espaço vetorial é também um espaço normado com norma induzida.

**Observação 2.1.** *A partir da axiomática do produto escalar, pode-se demonstrar propriedades importantes como a **desigualdade de Cauchy-Schwarz**, que enuncia:*

$$|(v, w)| \leq \|v\| \|w\|, \text{ para todo } v \in V. \quad (2.2)$$

**Observação 2.2.** *temos que*

$$(v, w) = \int_0^1 v(x)w(x) dx,$$

*é um produto interno no espaço vetorial,  $\mathbb{F}$ , das funções contínuas e limitadas em  $[0, 1]$ .*

**Definição 2.2.** *Definimos o subespaço vetorial de  $\mathbb{F}$*

$$V = \{v : v \in C[0, 1], v' \text{ é uma função contínua por partes e limitada em } [0, 1], v(0) = v(1) = 0\}.$$

**Definição 2.3.** *Definimos o funcional  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  dado por:*

$$F(v) = \frac{1}{2}(v', v') - \int_0^1 f v dx.$$

Consideramos os seguintes problemas:

- (M) Problema de Minimização: encontre  $u \in V$  tal que  $F(u) \leq F(v)$  para todo  $v \in V$ ;
- (PV) Problema Variacional: encontre  $u \in V$  tal que  $(u', v') = \int_0^1 f v dx$  para todo  $v \in V$ .

O (PV) é obtido multiplicando (2.1) por uma função qualquer de  $V$  e integrando em  $[0, 1]$ , ou seja:

$$-\int_0^1 \frac{d^2 u}{dx^2} v dx = \int_0^1 f(x) v(x) dx. \quad (2.3)$$

Resolvendo o primeiro membro da igualdade (2.3), usando integração por partes, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) v(x) dx &= - \int_0^1 \frac{d^2 u}{dx^2} v dx \\ &= - \left( \left[ v(x) \frac{du(x)}{dx} \right]_{x=0}^{x=1} - \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx \right) \\ &= - \left( v(1) \frac{du(1)}{dx} - v(0) \frac{du(0)}{dx} - \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx \right) \\ &= \int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx. \end{aligned}$$

Assim temos que:

$$\int_0^1 \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \forall v \in V. \quad (2.4)$$

A equação (2.4) juntamente com a condição de Dirichlet homogênea é a formulação fraca do problema.

**Observação 2.3.** Note que em vários modelos a quantidade  $F(v)$  representa a energia potencial total associada ao escoamento  $v \in V$ . O termo  $1/2(v', v')$  representa a energia elástica interna e  $\int_0^1 f v dx$  o potencial de carga. Assim temos dois princípios:

1. **Princípio de Mínimo Potencial** correspondente ao problema (M);
2. **Princípio do Trabalho Virtual** correspondente ao problema (PV).

**Observação 2.4.** Note que temos a unicidade da solução de (PV). De fato, suponha que existem  $u_1, u_2 \in V$  soluções de (PV). Logo se verifica

$$(u'_1, v') = \int_0^1 f v dx, \text{ para todo } v \in V, \quad (2.5)$$

$$(u'_2, v') = \int_0^1 f v dx, \text{ para todo } v \in V, \quad (2.6)$$

subtraindo as equações (2.5) e (2.6) temos que,  $(u'_1 - u'_2, v') = 0$ , para todo  $v \in V$ . Tomando  $v' = u'_1 - u'_2$ , concluímos que  $u'_1 - u'_2 = 0$ , ou seja,  $u_1 - u_2 = \text{constante} = 0$ , pois  $u_1$  e  $u_2$  satisfazem a condição de fronteira. Portanto  $u_1 = u_2$ .

**Teorema 2.1.**  $(S) \Leftrightarrow (PV) \Leftrightarrow (M)$ , isto é, a solução da equação diferencial é equivalente à solução da formulação variacional e são equivalentes à solução do problema de minimização.

*Demonstração.* •  $(PV) \Rightarrow (M)$

Seja  $u \in V$  solução de (PV). Assim,  $(u', v') = \int_0^1 f v dx$ , para todo  $v \in V$

Seja  $v \in V$  qualquer e  $w = v - u$ , ou seja  $w \in V$  e  $v = u + w$ . Então

$$\begin{aligned} F(v) &= F(u + w) \\ &= \frac{1}{2} \|(u + w)'\|^2 - \int_0^1 f(u + w) dx \\ &= \frac{1}{2} (u' + w', u' + w') - \int_0^1 f u dx - \int_0^1 f w dx \\ &= \frac{1}{2} \|u'\|^2 - \int_0^1 f u dx + (u', w') - \int_0^1 f w dx + \frac{1}{2} \|w'\|^2 \\ &= F(u) + \frac{1}{2} \|w'\|^2 \geq F(u), \forall v. \end{aligned} \quad (2.7)$$

pois  $u$  é solução de (PV), ou seja,  $(u', w') - \int_0^1 f w dx = 0$ .

- $(M) \Rightarrow (PV)$

Seja  $u \in V$  solução de  $(M)$ , assim

$$F(u) \leq F(v), \text{ para todo } v \in V. \quad (2.8)$$

Defina  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{aligned} g(\varepsilon) &= F(u + \varepsilon v) \\ &= \frac{1}{2} \|u' + \varepsilon v'\|^2 - \int_0^1 f(u + \varepsilon v) dx \\ &= \frac{1}{2} \|u'\|^2 + \varepsilon(u', v') + \frac{\varepsilon^2}{2} \|v'\|^2 - \varepsilon \int_0^1 f v dx - \int_0^1 f u dx. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Por (2.8) e (2.9), segue que  $g(0) = F(u) \leq g(\varepsilon)$ ,  $\forall \varepsilon$ . Portanto  $g$  possui mínimo em  $\varepsilon = 0$ .

Assim,

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{g(\varepsilon) - g(0)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (u', v') + \frac{\varepsilon}{2} \|v'\|^2 - \int_0^1 f v dx \\ &= (u', v') - \int_0^1 f v dx. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Logo, pelo Teorema de Rolle, segue que  $g'(0) = 0 = (u', v') - \int_0^1 f v dx$  para todo  $v$  em  $V$ , isto

é,  $(u', v') = \int_0^1 f v dx$ , para todo  $v \in V$ . Portanto,  $u$  é solução de  $(PV)$ .

Note que se  $F : V \rightarrow \mathbb{R}$  com  $\dim(V) = \infty$ , definimos a Derivada de Gateaux de  $F$  como sendo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(u + \varepsilon v) - F(u)}{\varepsilon} = \frac{\partial F}{\partial v}(u).$$

Assim, se existir  $u \in V$ ,  $F(u) \leq F(v)$ , para todo  $v \in V$ , e  $\frac{\partial F}{\partial v}(u)$ , para todo  $v$ , então  $\frac{\partial F}{\partial v}(u) = 0$ . Teoricamente essa afirmação foi a que usamos anteriormente.

- $(S) \Rightarrow (PV)$

Seja  $u$  solução de  $(D)$ , ou seja:  $-u'' = f$ .

Considere  $v \in V$ , multiplicando  $(D)$  por  $v$  e integrando, obtemos:

$$- \int_0^1 u'' v = \int_0^1 f v.$$

Utilizando a técnica de integração por partes, obtemos

$$-u' v|_0^1 + \int_0^1 u' v' = \int_0^1 f v.$$

Portanto

$$(u', v')_V = \int_0^1 f v dx, \text{ para todo } v \in V.$$

- $(PV) \Rightarrow (S)$ .

De fato, se  $u \in V$  é solução do  $(PV)$  então

$$(u', v') = \int_0^1 f v \, dx, \text{ para todo } v \in V. \quad (2.11)$$

Supondo que

$$u \in C^2(I) = \{ \text{funções duas vezes continuamente diferenciáveis} \}, \quad (2.12)$$

de (2.11), obtemos que

$$0 = \int_0^1 u' v' - \int_0^1 f v = u' v|_0^1 - \int_0^1 u'' v - \int_0^1 f v,$$

de onde  $\int_0^1 (u'' + f)v = 0$ , para todo  $v \in V$ , concluindo que  $u'' + f = 0 \Rightarrow -u'' = f$ .

□

**Observação 2.5.** A condição (2.12) é uma condição necessária no espaço solução escolhido. Veremos mais adiante que esta condição está automaticamente satisfeita em espaços vetoriais “maiores” (ou seja, com mais funções).

### 2.1.1 Método de Galerkin para o Caso Unidimensional

**Definição 2.4.** Considere o espaço vetorial  $V_h$  de dimensão finita, subespaço de  $V$ , definido da seguinte maneira:

Seja  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_M < x_{M+1} = 1$  uma partição do intervalo  $(0,1)$ ,  $I_j = (x_{j-1}, x_j)$  e  $h_j = x_j - x_{j-1}$  e  $h = \max h_j$ , então

$$V_h = \{v | v \text{ é contínua em } [0, 1] \text{ e } v(0) = v(1) = 0, v|_{I_j} \text{ é linear para todo } j\}. \quad (2.13)$$

Suponha que  $u$  seja solução de  $(PV)$  em  $V$ . Então temos que  $(u', v') = \int_0^1 f v \, dx$ , para todo  $v \in V$ . Assim, dado  $v_h \in V_h$  temos que

$$(u', v_h') = \int_0^1 f v_h \, dx.$$

**Observação 2.6.** Quando usamos o espaço vetorial  $V_h$  definido em (2.13), o problema variacional  $(PV)_h$  é conhecido como o **Método de Galerkin**. Da mesma maneira  $(M)_h$ , problema de minimização em  $V_h$  é conhecido como o **Método de Ritz**.

Pelos mesmos argumentos temos  $(PV)_h \Leftrightarrow (M)_h$ , que corresponde ao Método de **Ritz-Galerkin**.

Ao discretizarmos o espaço  $V$ , o aproximamos pelo espaço  $V_h$ . Se  $v \in V_h$  temos que,  $v$  é uma função linear em cada intervalo da partição  $P_h$ , assim as funções  $\varphi$ , definidas por:

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{h_j}; & \text{se } x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{x_{j+1} - x}{h_{j+1}}; & \text{se } x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0; & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (2.14)$$

formam uma base para  $V_h$ .

**Observação 2.7.** O conjunto  $\{\varphi_j\}_{j=1}^M$  é uma base de  $V_h$ . Dado  $v \in V_h$  tem se provado que existe uma única representação do vetor  $v$  da forma

$$v(x) = \sum_{i=1}^M \eta_i \varphi_i(x), \quad \forall x \in [0, 1],$$

onde  $\eta_i = v(x_i)$ . Assim,  $\dim(V_h) = M$ .

Escolhemos  $v = \varphi_j$  tal que,

$$(u'_h, \varphi'_j) = \int_0^1 f \varphi_j dx, \quad \forall j = 1, \dots, M.$$

Suponha que

$$u_h = \sum_{i=1}^M \xi_i \varphi_i(x), \quad \xi_i = u_h(x_i),$$

então

$$\left( \sum_{i=1}^M \xi_i \varphi'_i(x), \varphi'_j(x) \right) = \int_0^1 f \varphi_j dx, \quad \forall j.$$

Portanto obtemos o seguinte sistema linear de equações:

$$\begin{pmatrix} (\varphi'_1, \varphi'_1) & (\varphi'_2, \varphi'_1) & \cdots & (\varphi'_M, \varphi'_1) \\ (\varphi'_1, \varphi'_2) & (\varphi'_2, \varphi'_2) & \cdots & (\varphi'_M, \varphi'_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\varphi'_1, \varphi'_M) & (\varphi'_2, \varphi'_M) & \cdots & (\varphi'_M, \varphi'_M) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 f \varphi_1 dx \\ \int_0^1 f \varphi_2 dx \\ \vdots \\ \int_0^1 f \varphi_M dx \end{pmatrix}$$

Definindo  $a_{ij} = (\varphi'_j, \varphi'_i) = (\varphi'_i, \varphi'_j) = a_{ji}$ , obtemos a matriz quadrada  $M \times M$ ,  $A = (a_{ij})$ , chamada de rigidez (stiffness matrix, em inglês). O vetor  $b_j = \int_0^1 f \varphi_j dx$  é chamado de vetor de carga. Pela definição de produto interno, obtemos a matriz de rigidez da seguinte maneira:

$$A = \begin{bmatrix} \int_0^1 \frac{d\varphi_1}{dx} \frac{d\varphi_1}{dx} dx & \int_0^1 \frac{d\varphi_2}{dx} \frac{d\varphi_1}{dx} dx & \cdots & \int_0^1 \frac{d\varphi_M}{dx} \frac{d\varphi_1}{dx} dx \\ \int_0^1 \frac{d\varphi_1}{dx} \frac{d\varphi_2}{dx} dx & \int_0^1 \frac{d\varphi_2}{dx} \frac{d\varphi_2}{dx} dx & \cdots & \int_0^1 \frac{d\varphi_M}{dx} \frac{d\varphi_2}{dx} dx \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \frac{d\varphi_1}{dx} \frac{d\varphi_M}{dx} dx & \int_0^1 \frac{d\varphi_2}{dx} \frac{d\varphi_M}{dx} dx & \cdots & \int_0^1 \frac{d\varphi_M}{dx} \frac{d\varphi_M}{dx} dx \end{bmatrix}$$

O sistema linear resultante é:

$$A\xi = b. \quad (2.15)$$

A seguir demonstraremos a existência e unicidade da solução do problema aproximado  $(PV)_h$ . Isto será provada na seguinte proposição.

**Proposição 2.1.** A matriz  $A$  possui as seguintes propriedades:

R1) é simétrica;

R2) é tridiagonal;

R3) é positiva definida, isto é,  $w^t A w > 0$ ,  $\forall w$  não nulo em  $\mathbb{R}^M$ .

*Demonstração.* R1) é consequência da comutatividade do produto das funções

$$a_{ij} = \int_0^1 \frac{d\varphi_j}{dx} \frac{d\varphi_i}{dx} dx = \int_0^1 \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} dx = a_{ji}.$$

R2) Calculando os elementos  $a_{ij}$  mostramos que a matriz  $A$  é tridiagonal. Para isso, utilizamos as derivadas das funções  $\varphi_j$  definidas em (2.14).

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{h_i}; & \text{se } x \in [x_{j-1}, x_j] \\ \frac{-1}{h_{i+1}}; & \text{se } x \in [x_j, x_{j+1}] \\ 0; & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim se  $i = j$  temos:

$$\begin{aligned} a_{ii} &= \int_0^1 \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_i}{dx} dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_i}{dx} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_i}{dx} dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{h_i} \frac{1}{h_i} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{-1}{h_{i+1}} \frac{-1}{h_{i+1}} dx \\ &= \frac{1}{h_i^2} (x_i - x_{i-1}) + \frac{1}{h_{i+1}^2} (x_{i+1} - x_i) \\ &= \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}}. \end{aligned}$$

Se  $i \neq j$ , por apenas uma unidade  $a_{i,i-1} = a_{i-1,i}$ , temos:

$$\begin{aligned} a_{i,i-1} &= a_{i-1,i} \\ &= \int_0^1 \frac{d\varphi_{i-1}}{dx} \frac{d\varphi_i}{dx} dx \\ &= \int_{x_{i-2}}^{x_{i-1}} \frac{d\varphi_{i-1}}{dx} \frac{d\varphi_i}{dx} dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{d\varphi_{i-1}}{dx} \frac{d\varphi_i}{dx} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d\varphi_{i-1}}{dx} \frac{d\varphi_i}{dx} dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{d\varphi_{i-1}}{dx} \frac{d\varphi_i}{dx} dx \\ &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{-1}{h_i} \frac{1}{h_i} dx \\ &= -\frac{(x_i - x_{i-1})}{h_i^2} = -\frac{1}{h_i}. \end{aligned}$$



Finalmente, se  $i \neq j$  por mais de uma unidade, temos que  $a_{i,j} = 0$ . Concluimos assim que apenas os termos das formas,  $a_{i,i}$ ,  $a_{i,i+1}$  e  $a_{i,i-1}$  são não nulos. Logo, a matriz de rigidez  $A$  é tridiagonal.

R3) Dado  $w \in V_h$ , temos que

$$\begin{aligned} w^t A w &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M w_j \left( \int_0^1 \frac{d\varphi_j}{dx} \frac{d\varphi_i}{dx} dx \right) w_i \\ &= \int_0^1 \left[ \left( \sum_{j=1}^M w_j \frac{d\varphi_j}{dx} \right) \left( \sum_{i=1}^M w_i \frac{d\varphi_i}{dx} \right) \right] dx \\ &= \int_0^1 \left( \sum_{j=1}^M w_j \frac{d\varphi_j}{dx} \right)^2 dx \geq 0. \end{aligned}$$

A última desigualdade só será uma igualdade para o caso onde o vetor  $w$  seja nulo. Como  $w$  é um vetor qualquer, isso ocorreria somente se tivéssemos

$$\varphi'_i = 0, \text{ para todo } i \text{ e em todo } [0,1].$$

Como por hipótese,  $\varphi_i$  é contínua e cumpre a condição de fronteira de Dirichlet, implica que as funções da base são identicamente nulas, o que é um absurdo. Logo,  $w^t A w$  é estritamente positivo. O que mostra a proposição.  $\square$

**Observação 2.8.** Como consequência do fato de  $A$  ser positiva definida, temos que o sistema (2.15) sempre admite uma única solução. Além disso, note que os coeficientes  $\xi_j$ , juntamente com as funções da base, determinam a aproximação  $u_h$  de  $u$ .

**Observação 2.9.** Se  $h_j = h = \frac{1}{M+1}$ , então

$$A = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Assim, o MEF nos leva a um sistema de equações com matriz de rigidez esparsa, simétrica e positiva definida.

## 2.1.2 Exemplo Unidimensional

Considere a equação:

$$\begin{cases} -\frac{d^2 u}{dx^2} = \sin(x) & \text{em } [0, 1] \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Para resolver a equação (2.16) utilizamos o MEF e o MDF comparando com a solução analítica. Considerando o mesmo espaçamento  $h$  nas discretizações da equação e resolvendo primeiramente pelo MEF, utilizando o sistema matricial (2.15), calculamos a matriz  $A$  e o vetor  $b$ .

Na demonstração da Proposição 2.1 mostramos que a matriz  $A$  é tridiagonal e seus elementos  $a_{i,j}$  são da forma:

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} = \frac{2}{h}. \\ a_{i-1,i} &= a_{i,i-1} = -\frac{1}{h}. \end{aligned}$$

Logo

$$\varphi_j = \begin{cases} \frac{2}{h} & \text{se } i = j \\ \frac{-1}{h} & \text{se } i = j - 1 \text{ ou } j = i - 1 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

o termo geral do vetor  $b$  é dado por:

$$\begin{aligned} b_j &= \int_0^1 \text{sen}(x) \varphi_j(x) dx \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \text{sen}(x) \frac{x - x_{j-1}}{h} dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} \text{sen}(x) \frac{x_{j+1} - x}{h} dx. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \text{sen}(x) \frac{x - x_{j-1}}{h} dx &= \frac{1}{h} \int_{x_{j-1}}^{x_j} \text{sen}(x)(x - x_{j-1}) dx \\ &= \frac{1}{h} \left[ -(x - x_{j-1}) \cos(x) \Big|_{x=x_{j-1}}^{x=x_j} + \int_{x_{j-1}}^{x_j} \cos(x) dx \right] \\ &= \frac{1}{h} (-(x_j - x_{j-1}) \cos(x_j) + (x_{j-1} - x_{j-1}) \cos(x_{j-1}) \\ &\quad + \text{sen}(x_j) - \text{sen}(x_{j-1})) \\ &= \frac{1}{h} (-h \cos(x_j) + \text{sen}(x_j) - \text{sen}(x_{j-1})), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \text{sen}(x) \frac{x_{j+1} - x}{h} dx &= \frac{1}{h} \int_{x_j}^{x_{j+1}} \text{sen}(x)(x_{j+1} - x) dx \\ &= \frac{1}{h} \left[ -(x_{j+1} - x) \cos(x) \Big|_{x=x_j}^{x=x_{j+1}} - \int_{x_j}^{x_{j+1}} \cos(x) dx \right] \\ &= \frac{1}{h} (-(x_{j+1} - x_{j+1}) \cos(x_{j+1}) - (x_{j+1} - x_j) \cos(x_j) \\ &\quad - \text{sen}(x_{j+1}) + \text{sen}(x_j)) \\ &= \frac{1}{h} (h \cos(x_j) + \text{sen}(x_j) - \text{sen}(x_{j+1})). \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned} b_j &= \frac{1}{h} (-h \cos(x_j) + \text{sen}(x_j) - \text{sen}(x_{j-1})) + \frac{1}{h} (h \cos(x_j) - \text{sen}(x_{j+1}) + \text{sen}(x_j)) \\ &= -\frac{\text{sen}(x_{j-1})}{h} + \frac{2\text{sen}(x_j)}{h} - \frac{\text{sen}(x_{j+1})}{h}. \end{aligned}$$

Logo, obtemos o sistema  $A\xi = b$ , onde

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{h} & \frac{-1}{h} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{-1}{h} & \frac{2}{h} & \frac{-1}{h} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{h} & \frac{2}{h} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{2}{h} & \frac{-1}{h} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{-1}{h} & \frac{2}{h} \end{bmatrix}, \quad \xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \\ \xi_n \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$b = \begin{bmatrix} \frac{1}{h}(-\text{sen}(x_0) + 2\text{sen}(x_1) - \text{sen}(x_2)) \\ \frac{1}{h}(-\text{sen}(x_1) + 2\text{sen}(x_2) - \text{sen}(x_3)) \\ \frac{1}{h}(-\text{sen}(x_2) + 2\text{sen}(x_3) - \text{sen}(x_4)) \\ \vdots \\ \frac{1}{h}(-\text{sen}(x_{n-2}) + 2\text{sen}(x_{n-1}) - \text{sen}(x_n)) \\ \frac{1}{h}(-\text{sen}(x_{n-1}) + 2\text{sen}(x_n) - \text{sen}(x_{n+1})) \end{bmatrix}.$$

Portanto, basta resolver o sistema a seguir:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \xi_{n-1} \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\text{sen}(x_0) + 2\text{sen}(x_1) - \text{sen}(x_2) \\ -\text{sen}(x_1) + 2\text{sen}(x_2) - \text{sen}(x_3) \\ -\text{sen}(x_2) + 2\text{sen}(x_3) - \text{sen}(x_4) \\ \vdots \\ -\text{sen}(x_{n-2}) + 2\text{sen}(x_{n-1}) - \text{sen}(x_n) \\ -\text{sen}(x_{n-1}) + 2\text{sen}(x_n) - \text{sen}(x_{n+1}) \end{bmatrix}. \quad (2.17)$$

E assim obtemos a aproximação da solução de (2.16) através do MEF.

Utilizando o MDF para aproximar a derivada segunda da equação (2.16), dada por:

$$\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2},$$

e substituindo na equação (2.16) temos:

$$-\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = \text{sen}(x_i) \Rightarrow -u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1} = h^2 \text{sen}(x_i).$$

Para  $i = 1, 2, \dots, n-1$ , temos:

$$\begin{aligned} -u_2 + 2u_1 - u_0 &= h^2 \text{sen}(x_1) \\ -u_3 + 2u_2 - u_1 &= h^2 \text{sen}(x_2) \\ &\vdots \\ -u_n + 2u_{n-1} - u_{n-2} &= h^2 \text{sen}(x_{n-1}) \end{aligned}$$

Assim obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2 \text{sen}(x_1) \\ h^2 \text{sen}(x_2) \\ h^2 \text{sen}(x_3) \\ \vdots \\ h^2 \text{sen}(x_{n-1}) \end{bmatrix}. \quad (2.18)$$

Resolvemos o sistema (2.18) e determinamos a aproximação da solução pelo MDF.

Por fim resolvemos a equação (2.16) analiticamente:

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} = \text{sen}(x).$$

Integrando duas vezes obtemos:

$$u(x) = \int \int -\frac{d^2 u}{dx^2} dx dx = \int \int -\text{sen}(x) dx dx = \int (\cos(x) + c_1) dx = \text{sen}(x) + c_1 x + c_2.$$

Como  $u(0) = u(1) = 0$ , temos:  $u(x) = \text{sen}(x) - \text{sen}(1)x$ .

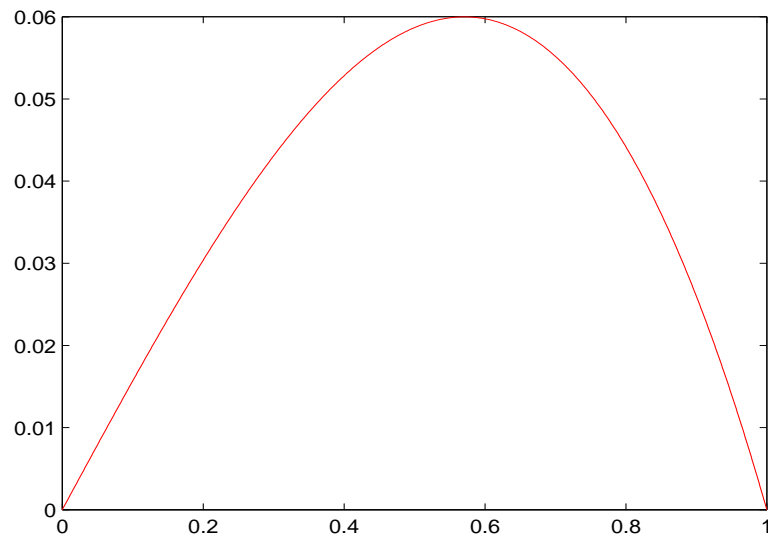


Figura 2.1: Solução exata da equação (2.16).

O erro é calculado através da fórmula:

$$\max | \text{solução analítica} - \text{aproximação da solução} |. \quad (2.19)$$

Assim obtemos

$$r_1 = 4,999449181031235 \cdot 10^{-009} \text{ e } r_2 = 2,008809785181143 \cdot 10^{-014},$$

sendo  $r_1$  o erro entre a solução analítica e a aproximação obtida utilizando o MDF e  $r_2$  o erro entre a solução analítica e a aproximação obtida utilizando o MEF. Assim, podemos concluir que o MEF aproxima melhor da solução da equação (2.16).

## 2.2 Formulação Fraca do Problema Bidimensional

Considere  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  um conjunto aberto e limitado e uma função  $f$  real contínua por partes e limitada em  $\Omega$ .

Assim como fizemos anteriormente, encontramos a formulação fraca da equação de Poisson com fronteira de Dirichlet homogêneo:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, y) & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.20)$$

Definimos o espaço de funções

$$V := \left\{ v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \left| \begin{array}{l} v \text{ é uma função contínua em } \Omega, \frac{\partial v}{\partial x} \text{ e } \frac{\partial v}{\partial y} \\ \text{são contínuas por partes em } \Omega \text{ e } v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \end{array} \right. \right\}.$$

Devemos multiplicar a equação (2.20) por uma função qualquer de  $V$  e integrar sobre  $\Omega$ , ou seja

$$\int_{\Omega} -\Delta u \cdot v = \int_{\Omega} f(x, y) \cdot v, \quad \forall v \in V,$$

para resolver a integral do lado esquerdo precisamos do Teorema a seguir.

**Teorema 2.2** (Teorema do Divergente). *Dado um conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  de fronteira suave e  $A = (F_1, F_2)$  um campo definido em  $\Omega$ . Então*

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(A) \, dxdy = \int_{\Omega} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} \right) \, dxdy = \int_{\partial\Omega} (F_1, F_2) \cdot (\eta_1, \eta_2) \, ds = \int_{\partial\Omega} A \cdot \eta \, ds,$$

onde  $\eta = (\eta_1, \eta_2)$  é o vetor unitário normal à  $\partial\Omega$ .

Para obtermos as hipóteses do Teorema 2.2 considere os campos  $F_1 = (v \frac{\partial u}{\partial x}, 0)$  e  $F_2 = (0, v \frac{\partial u}{\partial y})$ , onde  $u, v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ , temos que

$$\operatorname{div}(F_1) = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \operatorname{div}(F_2) = \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (2.21)$$

e aplicando o Teorema 2.2, obtemos

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(F_1) \, dxdy = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x} \eta_1, \quad (2.22)$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(F_2) \, dxdy = \int_{\partial\Omega} v \frac{\partial u}{\partial y} \eta_2. \quad (2.23)$$

Somando (2.22) e (2.23), obtemos:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(F_1) + \operatorname{div}(F_2) \, dxdy = \int_{\partial\Omega} v \left( \frac{\partial u}{\partial x} \eta_1 + \frac{\partial u}{\partial y} \eta_2 \right).$$

Como  $\operatorname{div}(F_1) + \operatorname{div}(F_2) = \nabla v \cdot \nabla u + v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$ , temos

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u + \underbrace{\int_{\Omega} v \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)}_{\Delta u} = \int_{\partial\Omega} \underbrace{v \left( \frac{\partial u}{\partial x} \eta_1 + \frac{\partial u}{\partial y} \eta_2 \right)}_{\nabla u \cdot \eta},$$

donde

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u + \int_{\Omega} v \Delta u = \int_{\partial\Omega} v \underbrace{\nabla u \cdot \eta}_{\frac{\partial u}{\partial \eta}}. \quad (2.24)$$

A expressão (2.24) é conhecida como a *Fórmula de Green*.

Vamos mostrar que se  $u$  é solução da equação de Poisson (2.20), então  $u$  é solução do seguinte problema variacional:

(PV) Encontrar  $u \in V$  tal que

$$a(u, v) = \int_{\Omega} f v \, dx dy \quad \forall v \in V, \quad (2.25)$$

onde

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy = \int_{\Omega} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy.$$

A equação (2.25) juntamente com a condição de Dirichlet homogênea formam a formulação fraca de (2.20).

Como no caso unidimensional, podemos mostrar que o problema (PV) é equivalente ao problema de minimização (M).

(M) Encontrar  $u \in V$  tal que

$$F(u) \leq F(v), \quad \forall v \in V$$

onde  $F(v)$  é o potencial total de energia

$$F(v) = \frac{1}{2} a(v, v) - \int_{\Omega} f v \, dx dy.$$

Vamos mostrar que  $(S) \Rightarrow (PV)$ . De fato, dado  $v \in V$ , temos pela fórmula de Green (2.24), temos:

$$\int_{\Omega} f v \, dx dy = - \int_{\Omega} \Delta u v \, dx dy = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v \, dx dy + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy = a(u, v),$$

sendo  $v = 0$  em  $\partial\Omega$ .

**Observação 2.10.** Para provar estritamente a equivalência, precisamos de regularidade suficiente para  $u$ , que será apresentado no Capítulo 5.

## 2.2.1 Método de Galerkin para o Caso Bidimensional

Construímos um subespaço de dimensão finita  $V_h \subset V$ .

Para simplificar, assumimos que  $\Omega$  é um polígono e como consequência  $\partial\Omega$  é uma curva poligonal. Vamos fazer uma triangulação de  $\Omega$ , subdividindo-o no conjunto  $T_h$ , onde

$$T_h = \{K_1, \dots, K_m\}, \quad K_i \text{ são triângulos não sobrepostos.}$$

$$\Omega = \bigcup_{K \in T_h} K = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_m,$$

tal que o vértice de um triângulo não encontra o lado de outro triângulo.

**Definição 2.5.** Definimos o número  $h = \max_{K \in T_h} \text{diam}(K)$ , onde  $\text{diam}(K)$  é o diâmetro de um conjunto, ou seja diâmetro de  $K$  é a maior distância euclidiana entre os pontos de  $K$ .

Definindo  $V_h$  como segue:

$$V_h = \{v : v \text{ é contínua em } \Omega, v|_K \text{ é linear para cada } K \in T_h, v = 0 \text{ em } \partial\Omega\}.$$

**Observação 2.11.** O espaço  $V_h$  consiste de todas as funções contínuas que são lineares em cada triângulo  $K$  e zeram na fronteira  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ .

Considerando o conjunto  $N$  dos vértices dos triângulos do conjunto  $T_h$ , cujos elementos denominamos  $N_i$ , definimos a função linear de  $V_h$  por

$$\varphi_j(N_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, M. \end{cases}$$

A Figura 2.2 ilustra a função  $\varphi_j$  e no Apêndice B determinamos a expressão dessa função.

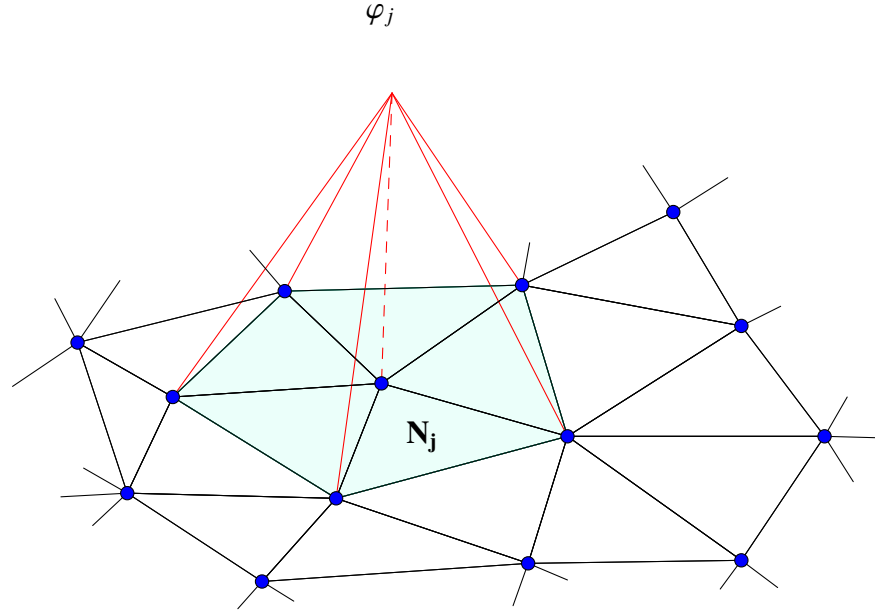


Figura 2.2: Representação geométrica da função  $\varphi_j$ .

Como no caso unidimensional, consideramos  $v \in V_h$

$$v(x) = \sum_{j=1}^M \eta_j \varphi_j(x), \quad \eta_j = v(N_j), \quad \text{para } x \in \Omega \cup \partial\Omega.$$

Podemos apresentar o MEF para (2.20) a partir da formulação variacional (PV) restrita ao subespaço  $V_h$ , como segue:

( $PV_h$ ) encontrar  $u_h \in V_h$  tal que

$$a(u_h, v) = \int_{\Omega} f v \, dx dy, \quad \text{para todo } v \in V_h.$$

Como resultado desta formulação, obtemos um sistema linear da forma,

$$A\xi = b, \tag{2.26}$$

onde  $A = (a_{ij})$ ,  $a_{ij} = a(\varphi_i, \varphi_j)$ ,  $\xi = (\xi_i) = u_h(N_i)$ ,  $b = (b_i) = \int_{\Omega} f \varphi_i \, dx dy$ .

Da mesma forma que no caso unidimensional, podemos mostrar que  $A$  é simétrica, positiva definida e assim não singular para que o sistema  $A\xi = b$  admita uma única solução.

### 2.2.2 Exemplo Bidimensional

Esse exemplo tem por objetivo modelar matematicamente a distribuição da temperatura de uma jóia de prata no formato de um trevo de quatro folhas. O trevo apresentado na Figura 2.3 tem calor sendo gerado uniformemente em todos os pontos, com taxa  $q = 1.5 \text{ cal/cm}^3 \cdot \text{s}$ . A temperatura de estado estável  $u(x, y)$  satisfaz a equação de Poisson [18]:

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{q}{k}; & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 1; & (x, y) \in \partial\Omega_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \eta}(x, y) = 0; & (x, y) \in \partial\Omega_2. \end{cases} \quad (2.27)$$

onde  $k$ , a condutividade térmica, é  $1.04 \text{ cal/cm}^\circ\text{C} \cdot \text{s}$ . A Figura 2.3 mostra a região de estudo  $\Omega$ , e a sua fronteira dividida em,  $\partial\Omega_1$  que apresenta condição de Dirichlet e  $\partial\Omega_2$  que apresenta condição de Neumann. Observe que esse exemplo é um caso particular da equação (2.20) com o detalhe de uma parte da fronteira ser de Neumann, assim podemos utilizar toda teoria apresentada anteriormente para resolução numérica deste problema tendo apenas uma diferença no processo de obtenção da formulação fraca, que apresentamos a seguir. Utilizando (2.24) e lembrando que  $v$  satisfaz as condições de fronteira enunciadas em (2.27), ou seja,

$$\begin{cases} v = 1 & \text{em } \partial\Omega_1 \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 & \text{em } \partial\Omega_2. \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} v \nabla u \cdot \eta &= \int_{\partial\Omega_1} v \nabla u \cdot \eta + \int_{\partial\Omega_2} v \nabla u \cdot \eta \\ &= \int_{\partial\Omega_1} 1 \underbrace{\nabla u \cdot \eta}_{=0} + \int_{\partial\Omega_2} v \underbrace{\nabla u \cdot \eta}_{0 = \frac{\partial u}{\partial \eta} \text{ em } \partial\Omega_2} = 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u + \int_{\Omega} v \Delta u = 0.$$

Ou seja,

$$\int_{\Omega} v \Delta u = - \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u. \quad (2.28)$$

Substituindo (2.28) em (2.25), sendo  $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx dy$ , obtemos:

$$\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla u = \int_{\Omega} v f. \quad (2.29)$$

Portanto a equação (2.29) é a formulação fraca de (2.27). Com isso podemos aplicar o método de Galerkin para a discretização da formulação fraca obtendo o sistema linear (2.26).



A Figura 2.3 apresenta o malha(trevo) gerada a partir do software livre GMSH.

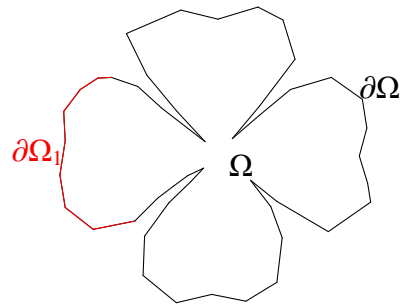


Figura 2.3: Fronteira gerada no GMSH.

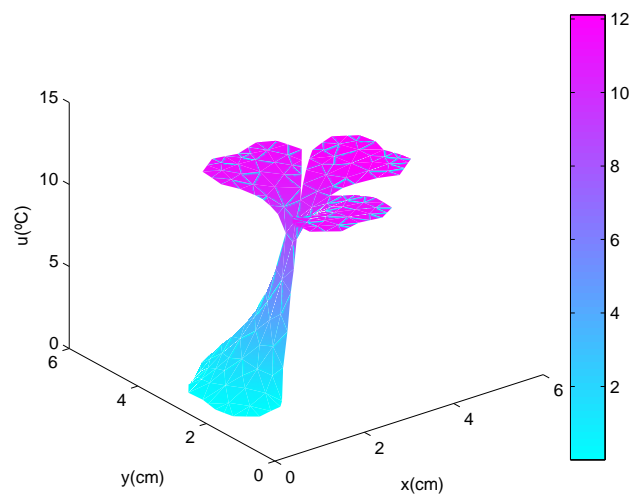


Figura 2.4: Aproximação da solução da equação (2.27).

Assim, determinamos uma aproximação para a distribuição da temperatura da jóia de prata como mostra a Figura 2.4, sendo parte da fronteira com a temperatura igual a 1 e parte da fronteira sem variação de temperatura[9] e [33].

No próximo capítulo apresentamos alguns conceitos na Teoria dos Conjuntos Fuzzy e exemplos de Sistema Baseado em Regras Fuzzy.

# Capítulo 3

## Teoria dos Conjuntos Fuzzy

A Teoria dos Conjuntos Fuzzy, recente do ponto de vista de historiografia, vem se desenvolvendo e ganhando espaço e, cada vez mais, está sendo usada como ferramenta para a formulação de modelos nos vários campos da ciência. A primeira publicação sobre conjuntos fuzzy é devida a L. Zadeh (1965) e o desenvolvimento da teoria e suas aplicações vêm apresentando uma evolução muito rápida.

Para descrever certos fenômenos relacionados às variáveis, temos utilizado graus que representam qualidades ou verdades parciais ou ainda padrões do melhor. Esse é o caso, por exemplo, dos conceitos de *alto*, *fumante*, *infeccioso* e outros. É precisamente neste tipo de incerteza que a Lógica Fuzzy tem dado suas principais contribuições. Usando uma linguagem conjuntista poderíamos nos referir, respectivamente, aos conjuntos das pessoas *altas*, *fumantes* ou *infecciosos*. Este são exemplos típicos de conjuntos cujas fronteiras podem ser consideradas incertas, isto é, definidas por meio de propriedades subjetivas ou atributos imprecisos [6].

### 3.1 Conjunto Clássico

Um conjunto clássico  $A$  do conjunto universo  $U$  é definido por uma função característica de  $A$  dada por:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Desta forma,  $\chi_A$  é uma função cujo domínio é  $U$  e a imagem está contida em  $\{0, 1\}$ , com  $\chi_A(x) = 1$  indicando que o elemento  $x$  está em  $A$ , enquanto  $\chi_A(x) = 0$  indica que  $x$  não é elemento de  $A$ . Assim, a função característica descreve completamente o conjunto  $A$  já que tal função indica quais elementos do conjunto  $U$  são elementos também de  $A$ .

### 3.2 Conjuntos Fuzzy

Um conjunto fuzzy  $F$  do conjunto universo  $U$  é definido em termos de uma função, a qual chamamos de *função de pertinência*. Cada elemento  $x$  de  $U$  é associado a um número  $\mu(x)$  de modo que  $0 \leq \mu(x) \leq 1$  e chamamos  $\mu(x)$  de *grau de pertinência de  $x$  a  $F$* . Assim, o conjunto fuzzy  $F$  é simbolicamente indicado por sua função de pertinência.

$$\mu_F : U \rightarrow [0, 1]$$

Os valores  $\mu_F(x) = 1$  e  $\mu_F(x) = 0$  indicam, respectivamente, a pertinência plena e a não pertinência do elemento  $x$  a  $F$ .

### 3.3 Operações Padrões entre Conjuntos Fuzzy

Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos clássicos de  $U$  representados pelas funções características  $\chi_A$  e  $\chi_B$ , respectivamente, Figura 3.1. Os conjuntos

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \text{ ou } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

$$A' = \{x \in U : x \notin A\}$$

têm, respectivamente, as funções características:

$$\chi_{A \cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\};$$

$$\chi_{A \cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\};$$

$$\chi_{A'}(x) = 1 - \chi_A(x), \quad \forall x \in U.$$

Pensando novamente em conjuntos fuzzy como sendo caracterizados pelas funções de pertinência que são extensões da função característica, podemos definir união, intersecção e complementar de conjuntos fuzzy.

**Definição 3.1.** *Seja  $A$  e  $B$  conjuntos fuzzy (Figura 3.1). As funções de pertinência que representam os conjuntos fuzzy união (Figura 3.2), intersecção (Figura 3.3) e complementar (Figura 3.4) de conjuntos fuzzy são dadas por,*

$$\mu_{A \cup B}(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\},$$

$$\mu_{A \cap B}(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\},$$

$$\mu_{A'}(x) = 1 - \mu_A(x), \quad \forall x \in U,$$

respectivamente.

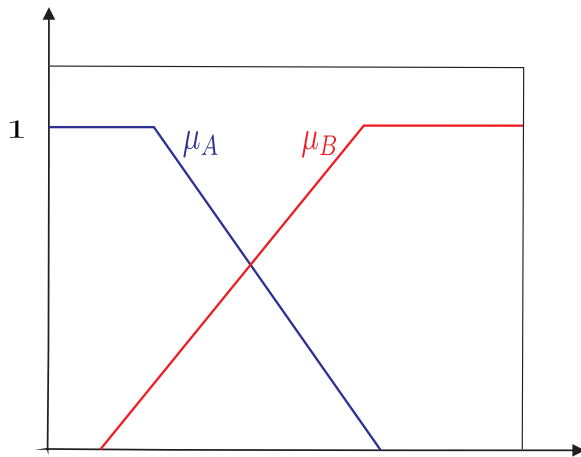


Figura 3.1: Conjuntos fuzzy  $A$  e  $B$  [25].

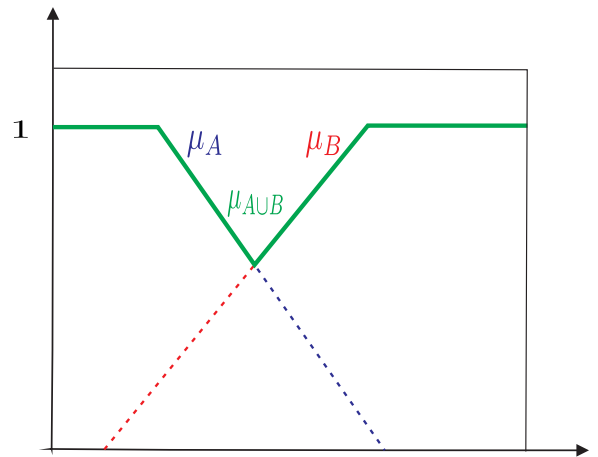


Figura 3.2: União dos fuzzy  $A$  e  $B$  [25].

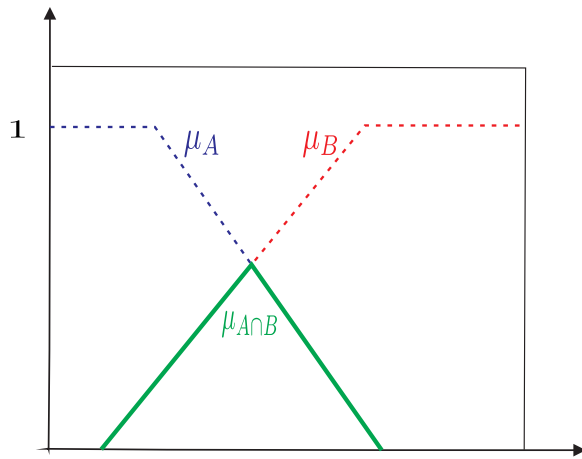


Figura 3.3: Interseção dos conjuntos fuzzy  $A$  e  $B$  [25].

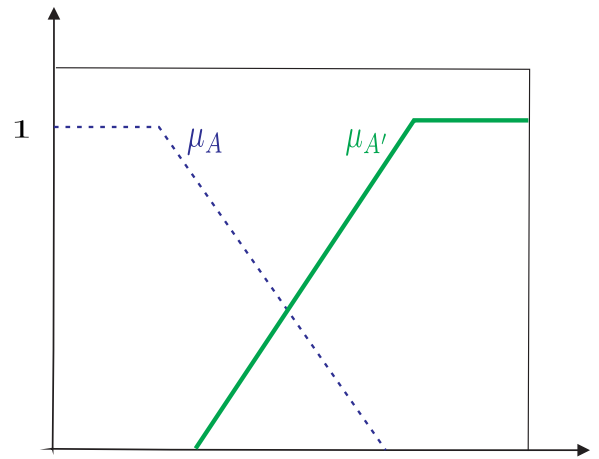


Figura 3.4: Conjunto fuzzy  $A$  e seu complementar  $A'$  [25].

### 3.4 Variáveis Linguísticas Fuzzy

Uma variável linguística é nada a mais do que uma variável cujo valor é expresso qualitativamente por termos linguísticos (que fornece um conceito à variável) e quantitativamente por uma função de pertinência, Figura 3.5.

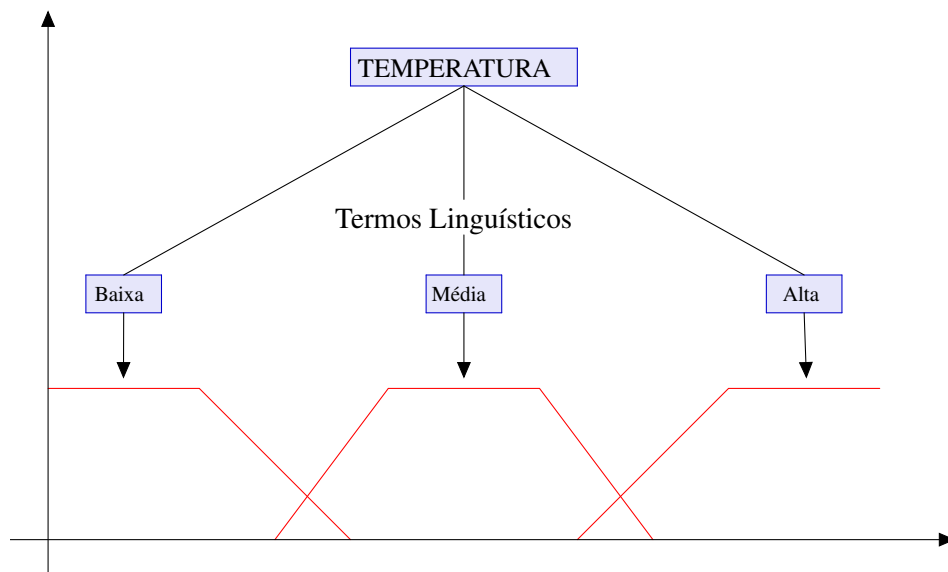


Figura 3.5: Variável Linguística.

### 3.5 Sistema Baseado em Regras Fuzzy

Sistemas Baseados em Regras Fuzzy (SBRF) contêm quatro componentes: um processador de entrada que realiza a fuzzificação dos dados de entrada, uma coleção de regras fuzzy chamada base de regras, uma máquina de inferência fuzzy e um processador de saída. Estes componentes estão conectados conforme indicado na Figura 3.6, supondo  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $y \in \mathbb{R}^m$ .

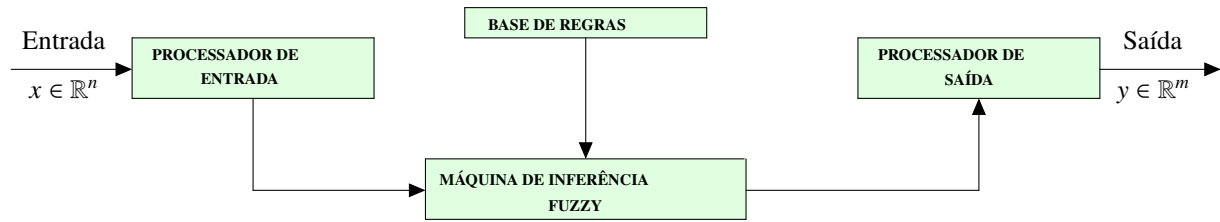


Figura 3.6: Arquitetura de Sistemas Baseados em Regras Fuzzy.

### 3.5.1 Processador de Entrada (Fuzzificação)

Neste componente as entradas do sistema são traduzidas em conjuntos fuzzy em seus respectivos domínios. A atuação de um especialista na área do fenômeno a ser modelado é de fundamental importância para colocar na construção das funções de pertinência para a descrição das entradas.

### 3.5.2 Base de Regras

Este componente, juntamente com a máquina de inferência, pode ser considerado o núcleo dos sistemas baseados em regra fuzzy. Ele é composto por uma coleção de proposições fuzzy na forma *Se... então...*. Cada uma dessas proposições pode, por exemplo, ser descrita linguisticamente de acordo com o conhecimento de um especialista. A base de regras descreve relações entre as variáveis linguísticas para serem utilizadas na máquina de inferência fuzzy que será descrita no próximo item.

### 3.5.3 Máquina de Inferência Fuzzy

É neste componente que cada proposição fuzzy é traduzida matematicamente por meio das técnicas de raciocínio aproximado. Os operadores matemáticos serão selecionados para definir a relação fuzzy que modela a base de regras. Desta maneira, a máquina de inferência fuzzy é de fundamental importância para o sucesso do sistema fuzzy, já que apresenta a saída a partir de cada entrada fuzzy e da relação definida pela base de regras.

Agora, apresentaremos o método de Inferência Fuzzy que será utilizado em um exemplo mais adiante: o Método de Mamdani [6].

#### *Método de Mamdani*

Uma regra ‘Se’ (antecedente) ‘então’ (consequente) é definida pelo produto cartesiano fuzzy dos conjuntos fuzzy que compõem o antecedente e o consequente da regra. O método de Mamdani agrega as regras através do operador lógico OU, que é modelado pelo operador máximo e, em cada regra, o operador lógico E que é modelado pelo operador mínimo. Veja as regras a seguir:

Regra 1: Se ( $x$  é  $A_1$  e  $y$  é  $B_1$ ) então ( $z$  é  $C_1$ ).

Regra 2: Se ( $x$  é  $A_2$  e  $y$  é  $B_2$ ) então ( $z$  é  $C_2$ ).

A Figura 3.7 ilustra como uma saída real  $z$  de um sistema de inferência do tipo Mamdani é gerada a partir das entradas  $x$  e  $y$  reais e a regra de composição *max/min*. A saída  $z \in \mathbb{R}$  é obtida pela defuzzificação do conjunto fuzzy de saída  $C = C'_1 \cup C'_2$  da Figura 3.7.

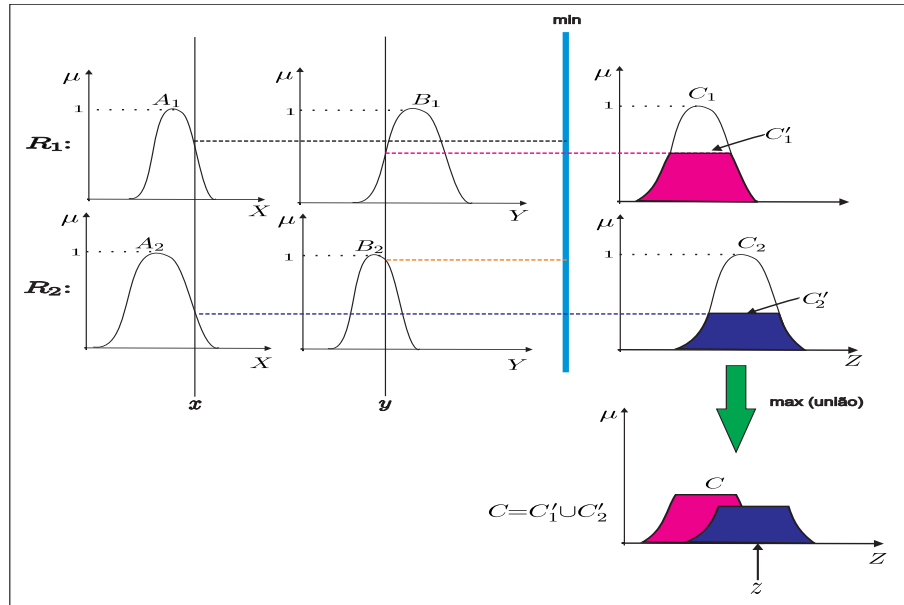


Figura 3.7: Método de Mamdani com composição *max – min* [25].

### 3.5.4 Processador de Saída (Defuzzificação)

Na teoria dos conjuntos fuzzy pode-se dizer que a defuzzificação é um processo de se representar um número real por um conjunto fuzzy. Em sistemas fuzzy, em geral a saída é um conjunto fuzzy. Assim, devemos escolher um método para defuzzificar a saída e obter um número real que a represente.

Definiremos, a seguir, o método mais comum de defuzzificação.

#### *Centro de Gravidade*

Este método de defuzzificação é semelhante à média ponderada para distribuição de dados em que a diferença é que os pesos são os valores  $C(z_i)$  que indicam o grau de compatibilidade do valor  $z_i$  com o conceito modelado pelo conjunto fuzzy  $C$ .

Para um domínio discreto tem-se

$$G(C) = \frac{\sum_{i=0}^n z_i C(z_i)}{\sum_{i=0}^n C(z_i)}. \quad (3.1)$$

Para um domínio contínuo tem-se

$$G(C) = \frac{\int_R z C(z) dz}{\int_R C(z) dz}, \quad (3.2)$$

onde  $R$  é a região de integração e  $z, z_i \in R$ .

A seguir apresentamos alguns exemplos de SBRF que serão utilizados no Capítulo 4.

## 3.6 Exemplos de SBRF

Nesta seção apresentamos os SBRF que são utilizados para os parâmetros fuzzy da equação diferencial parcial evolutiva advectiva-difusiva (4.13). A difusão e as velocidades na direção  $x$  e  $y$  são consideradas parâmetros fuzzy.

### 3.6.1 Difusão ( $\alpha$ )

A difusão depende da temperatura e da concentração de poluentes, como mencionado anteriormente. A Figura 3.8 apresenta o esquema do SBRF.

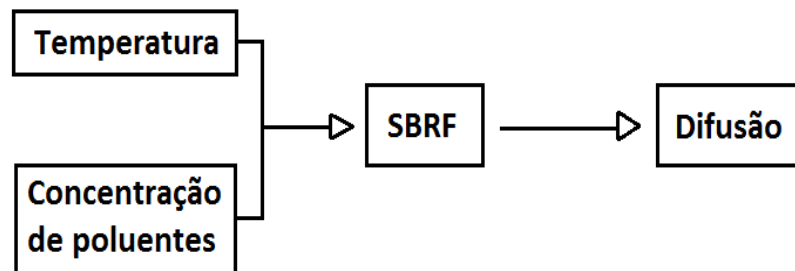


Figura 3.8: Esquema do SBRF para a difusão.

Utilizamos as variações da temperatura e da concentração de  $MP_{10}$  já apresentado no Capítulo 1.

Para obter o SBRF precisamos saber a variação geral da temperatura. Logo tomamos o valor mínimo, médio e máximo geral da Tabela 1.1. Esses resultados foram:

- Temperatura Mínima =  $14,5^{\circ}C$ ;
- Temperatura Média =  $28,29^{\circ}C$ ;
- Temperatura Máxima =  $37,5^{\circ}C$ .

As variáveis linguísticas de entrada para  $\alpha$  são:

- Temperatura: domínio  $[14.5, 37.5]$ , dividido em faixas: menor que 23.51, entre 20.21 e 35.23, e maior que 37.02 e os termos linguísticos são *baixa*, *média* e *alta*. As funções de pertinência são triangulares e trapezoidais, como mostra a Figura 3.9.
- Concentração de Poluentes; domínio  $[0, 300]$ , dividido em faixas: menor que 108.3, entre 61.18 e 227.9, e maior do que 191.4 e os termos linguísticos são *baixa*, *média* e *alta*. As funções de pertinência são triangulares e trapezoidais, como mostra a Figura 3.10.

A variável linguística de saída é  $\alpha$ :

- $\alpha$  (Difusão da poluição): domínio  $[0, 1]$ , dividido em faixas: menor que 0.36, entre 0.202 e 0.787, e maior do que 0.64 e os termos linguísticos são *baixa*, *média* e *alta*. As funções de pertinência são triangulares, como mostra a Figura 3.11.

As regras fuzzy utilizadas estão apresentadas na Tabela 3.1. A Figura 3.12 apresenta a superfície gerada pelo SBRF, obtidas com as informações do especialista na área de climatologia.

O método de inferência é o método de Mamdani e o método de defuzzificação é o Centro de Gravidade.

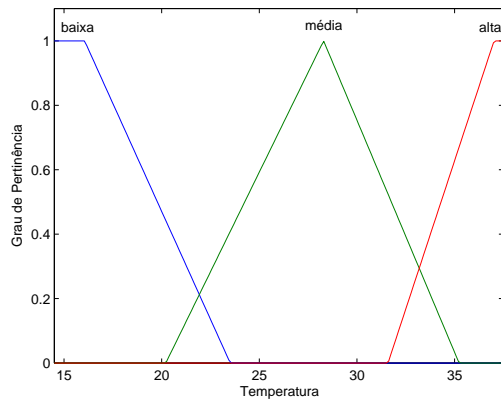


Figura 3.9: Funções de pert. da temperatura em  $^{\circ}\text{C}$  ( $T$ ).

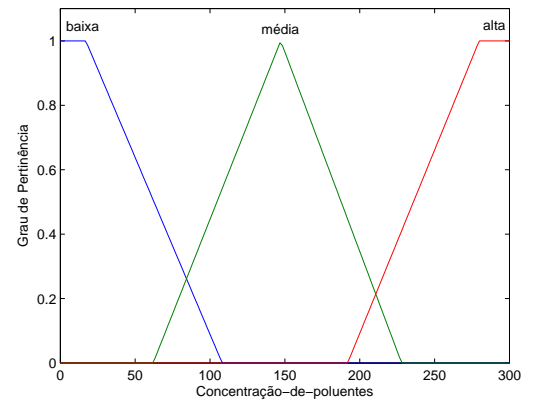


Figura 3.10: Funções de pert. da quant. de poluentes.

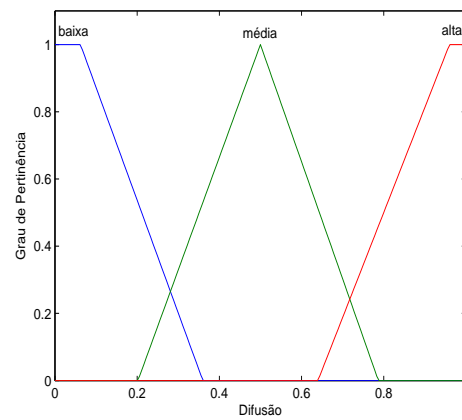


Figura 3.11: Funções de pertinência da difusão da poluição.

Concentração			
	Baixa	Média	Alta
Temperatura			
Baixa	Baixa	Baixa	Média
Média	Baixa	Média	Média
Alta	Alta	Alta	Alta

Tabela 3.1: As 9 regras fuzzy para o SBRF.

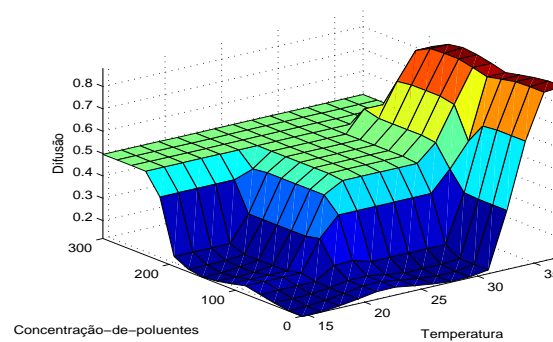


Figura 3.12: Superfície gerada através do SBRF.



### 3.6.2 Cálculo das Coordenadas da Velocidade

As velocidades dependem da força de atrito. A Figura 3.13 apresenta o esquema do SBRF.



Figura 3.13: Esquema do SBRF para as coordenadas das velocidades.

Para obter a variação das velocidades na direção  $x$  e  $y$  utilizamos [17] já mencionado no Capítulo 1, ou seja, a variação da resultante da velocidade está entre  $0.5$  e  $2m/s$ . Como os valores fornecidos são referentes à resultante da velocidade e estamos trabalhando com as componentes  $x$  e  $y$  da velocidade, devemos determinar as variações das componentes. Consideramos no SBRF a velocidade na direção do eixo  $x$  variando de  $0$  a  $0.5m/s$  e a velocidade na direção do eixo  $y$  variando de  $0$  a  $0.01m/s$ , ou seja, a resultante é igual  $0.5m/s$ , quando as componentes são  $0.01m/s$  e  $0.5m/s$ , como mostra a Figura 3.14.

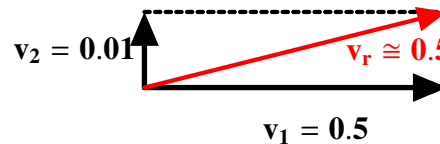


Figura 3.14: Resultante da velocidade.

Para justificar essa escolha apresentamos um breve estudo sobre o Número de Péclet ( $P_e$ ).

**Número de Péclet ( $P_e$ )** Métodos de discretização, funções de interpolação e análise de sensibilidade do número de Péclet são constantemente avaliados neste sentido. O número de Péclet é um parâmetro adimensional que mede a razão entre as intensidades dos processos de convecção e difusão, definido por:

$$P_e = \frac{vL}{\alpha},$$

onde  $v$  é a velocidade característica,  $L$  é o comprimento do domínio e  $\alpha$  é a difusão. Quando utilizamos o método de Galerkin, como é nosso caso, é adequado que o número de Péclet seja muito pequeno ou igual a zero [36].

Assim, podemos dar continuidade na construção do SBRF para a velocidade.

A variável linguística de entrada para  $v_1$  e  $v_2$  são:

- Força de atrito: domínio  $[0, 1]$ , dividido em faixas: menor que  $0.36$ , entre  $0.14$  e  $0.86$ , e maior que  $0.64$  e os termos linguísticos são *baixa*, *média* e *alta*. As funções de pertinência são trapezoidais, como mostra a Figura 3.15.

A variável linguística de saída é  $v_1$  e  $v_2$ :

- $v_1$  (Velocidade na direção  $x$ ): domínio  $[0, 0.5]$ , dividido em faixas: menor que  $0.252$ , entre  $0.2033$  e  $0.4307$ , e maior do que  $0.3647$  e os termos linguísticos são *baixa*, *média* e *alta*. As funções de pertinência são trapezoidais, como mostra a Figura 3.16.

- $v_2$  (Velocidade na direção y): domínio  $[0, 0.01]$ , dividido em faixas: menor que 0.00504, entre 0.004067 e 0.008613, e maior do que 0.007293 e os termos linguísticos são *baixa*, *média* e *alta*. As funções de pertinência são trapezoidais, como mostra a Figura 3.17.

Como temos as temperaturas em cada *nó* da malha, precisamos do valor do atrito em cada *nó*. Devido à dificuldade de obter barreiras nos pontos da cidade, optamos por utilizar uma distribuição randômica entre 0 e 1, para o valor do atrito em cada *nó* da malha.

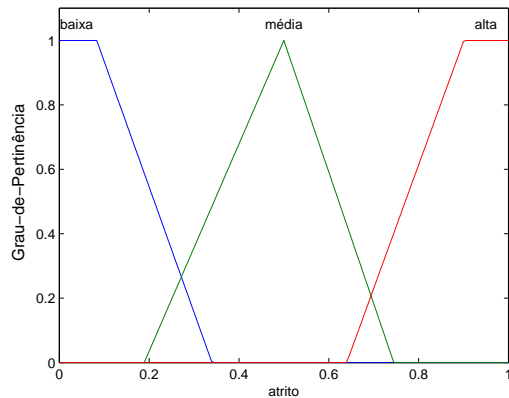


Figura 3.15: Funções de pertinência da Força de Atrito (A).

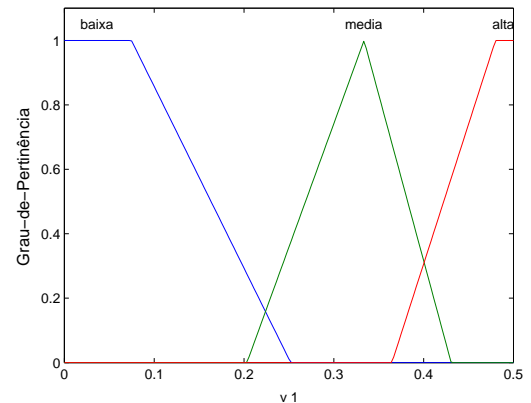


Figura 3.16: Funções de pertinência da velocidade ( $v_1$ ).

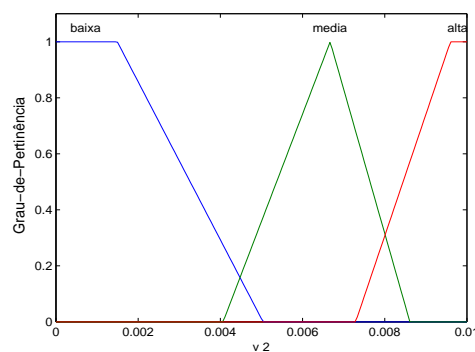


Figura 3.17: Funções de pertinência da velocidade ( $v_2$ ).

As regras fuzzy baseadas no conhecimento do especialista na área são os seguintes:

- Se a força de atrito é *baixa* então as velocidades  $v_1$  e  $v_2$  são *altas*;
- Se a força de atrito é *média* então as velocidades  $v_1$  e  $v_2$  são *médias*;
- Se a força de atrito é *alta* então as velocidades  $v_1$  e  $v_2$  são *baixas*.

As Figuras 3.18 e 3.19 apresentam as curvas que representam as regras das velocidade  $v_1$  e  $v_2$ .

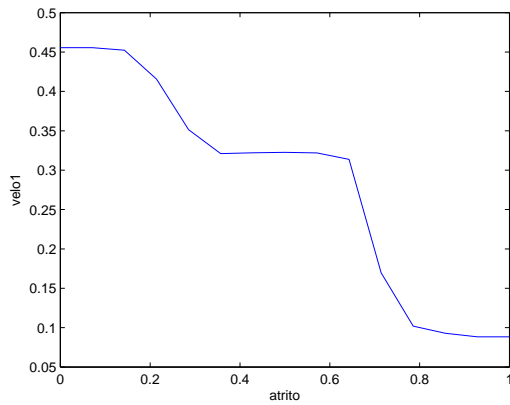


Figura 3.18: Curva em função do atrito obtido pelo SBRF de  $v_1$ .

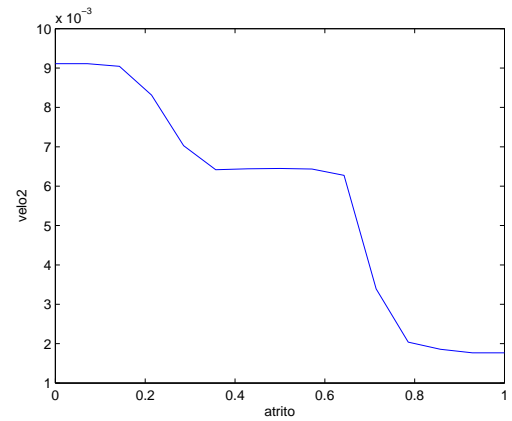


Figura 3.19: Curva em função do atrito obtido pelo SBRF de  $v_2$ .

Na saída dos SBRF, obtemos os diferentes valores de  $\alpha$ ,  $v_1$  e  $v_2$  um para cada ponto da malha discretizada da região.

Assim, podemos observar que a Teoria dos Conjuntos Fuzzy é uma ferramenta que permite cálculos de variáveis imprecisas, em alguns estudos sua utilização pode ser mais eficiente do que outras formulações matemáticas.

No próximo capítulo, apresentamos o modelo de dispersão de poluentes.

## Capítulo 4

# Modelagem da Concentração de Poluente do Ar

Neste capítulo apresentamos o estudo do modelo dos poluentes na cidade de Uberlândia. Primeiramente nos preocupamos apenas em resolver a equação através do MEF, ou seja, obter uma solução determinística. Depois incorporamos dois SBRF para levar em consideração fatores reais que influenciam a difusão de poluentes e as velocidades.

### 4.1 Poluição no Ar com Fronteira Irregular

Este problema propõe um modelo para simular o comportamento de uma nuvem de poluição no ar. A modelagem matemática é construída através de uma equação diferencial parcial evolutiva advectiva-difusiva. O propósito desse problema é o de modelar na cidade de Uberlândia, ou seja, em uma malha irregular tendo uma fonte de poluição que consideraremos como sendo uma chaminé de uma indústria que contamina a atmosfera com uma nuvem de poluição que se espalha por toda a cidade (malha).

Vamos considerar, também, a presença de um vento regional, e a possibilidade de um decaimento de aerossóis poluentes por conta do assentamento das partículas. Como estamos considerando um certo vento regional, podemos tomar a velocidade como sendo  $v = (v_1, v_2)$ . Vamos construir um modelo evolutivo para descrever esta situação e programar um código numérico de modo que possamos obter aproximações da evolução do quadro de impacto num determinado período de tempo [40] e [41].

A equação que descreve o fenômeno abordado no problema é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + v_1 \frac{\partial u}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma u = f \quad (x, y) \in \Omega, t \in (0, T] \\ u = 0 \quad \text{em } \partial\Omega \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y) \end{array} \right. \quad (4.1)$$

onde  $u(x, y, t)$  é a concentração de poluentes no instante  $t$ ,  $\alpha$  representa a dispersão na área,  $v_1$  e  $v_2$  são a velocidade de transporte (que ocorrerá nos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente), o  $\sigma$  representa o decaimento e o  $f$  representa a fonte de poluentes (no nosso caso, a chaminé). A função  $f$  é definida como:

$$f(x, y, t) = 0, \quad \forall (x, y) \neq (x_i, y_i) \text{ para algum } i \in \{1, \dots, 896\} \text{ e} \\ f(x_i, y_i, t) = d, \quad \forall t \in \mathbb{N}.$$

Vamos considerar as condições de contorno  $u = 0$ , isto é, assumindo que a cidade de Uberlândia seja grande o suficiente, que a concentração de poluentes na fronteira seja igual a zero[42].

Como nos exemplos anteriores começamos com o procedimento de obter a formulação fraca de (4.1). Aplicamos os métodos de Galerkin para obter a discretização para o domínio da formulação

fraca, e para a derivada no tempo utilizamos o método de Crank-Nicolson. A seguir mostramos a obtenção da formulação fraca e a discretização da mesma.

Vamos estabelecer algumas notações que servirão para a obtenção da formulação fraca no intuito de organizar e simplificar a equação resultante. Começamos reescrevendo a equação (4.1) da forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \Delta u + v \cdot \nabla u + \sigma u = f, \text{ com } v = (v_1, v_2). \quad (4.2)$$

Lembrando que o espaço  $L^2(\Omega)$  é o espaço das funções mensuráveis de quadrado somável, denotamos o produto interno e a respectiva norma em  $L^2(\Omega)$  por:

$$(u, w)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u \cdot w \, d\mu \quad \text{e} \quad \|u\|_{L^2(\Omega)} = (u, u)_{L^2(\Omega)}$$

Consideremos também o produto interno sobre a fronteira  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ .

$$(u, w)_{L^2(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} u \cdot w \, d\partial\Omega \quad \text{e} \quad \|u\|_{L^2(\partial\Omega)} = (u, u)_{L^2(\partial\Omega)}$$

Considere também o espaço  $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$ , espaço das funções em  $L^2(\Omega)$  cujas derivadas de primeira ordem, no sentido fraco, também pertencem a  $L^2(\Omega)$

$$H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) / \frac{\partial u}{\partial x_k} \in L^2(\Omega), k = 1, 2, \dots\}.$$

com produto interno e norma correspondente

$$(u, w)_{H^1(\Omega)} = (u, w)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla w)_{L^2(\Omega)} \quad \text{e} \quad \|u\|_{H^1(\Omega)} = \|u\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

onde  $(\nabla u, \nabla w)_{L^2(\Omega)} = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial w}{\partial x_k} \, d\mu$ . Multiplicando a equação (4.2) por  $w \in H^1(\Omega)$ , obtemos:

$$\frac{\partial u}{\partial t} w - \alpha \Delta uw + v \cdot \nabla uw + \sigma uw = fw, \forall w \in H^1(\Omega),$$

e integrando sobre  $\Omega$ , obtemos:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} w \, d\mu - \alpha \int_{\Omega} \Delta uw \, d\mu + \int_{\Omega} (v \cdot \nabla u) w \, d\mu + \int_{\Omega} \sigma uw \, d\mu = \int_{\Omega} fw \, d\mu, \forall w \in H^1(\Omega). \quad (4.3)$$

Usando o Teorema de Green temos que:

$$-\alpha \int_{\Omega} \Delta uw \, d\mu = \alpha \int_{\Omega} (\nabla u \cdot \nabla w) - \alpha \int_{\partial\Omega} w \frac{\partial u}{\partial \eta} \, d\partial\Omega, \quad (4.4)$$

sendo  $\eta$  o vetor unitário normal a  $\partial\Omega$ . Observe que  $\int_{\partial\Omega} w \frac{\partial u}{\partial \eta} \, d\partial\Omega = 0$  pois  $u = 0$  na fronteira. Assim reescrevendo a equação (4.3) utilizando as notações de produto interno obtemos:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t}, w \right)_{L^2(\Omega)} + \alpha (\nabla u, \nabla w)_{L^2(\Omega)} + (v \nabla u, w)_{L^2(\Omega)} + \sigma (u, w)_{L^2(\Omega)} = (f, w)_{L^2(\Omega)}, \forall w \in H^1(\Omega). \quad (4.5)$$

Para simplificar a notação, consideramos  $(u, v)_{L^2(\Omega)} = (u, v)$ . A equação (4.5) é a formulação fraca do problema (4.1). Usando o método de Galerkin para a discretização da mesma forma feita nos exemplos do Capítulo 2, consideramos um subespaço  $V_h$  de dimensão finita de  $H^1(\Omega)$ . Considerando

a base  $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M\}$  desse subespaço, temos que a solução no subespaço  $V_h$  pode ser escrita como combinação linear das funções de  $B$ .

$$u_h(x, y, t) = \sum_{j=1}^N u_j(t) \varphi_j(x, y).$$

Substituindo  $u_h$  na formulação fraca (4.5), e tomando  $w \in V_h$ , temos:

$$\left( \frac{\partial u_h}{\partial t}, w \right) + \alpha (\nabla u_h, \nabla w) + (v \nabla u_h, w) + \sigma(u_h, w) = (f, w), \forall w \in V_h.$$

ou seja,

$$\begin{aligned} & \left( \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial t} u_j \varphi_j, w \right) + \alpha \left( \sum_{j=1}^N u_j \nabla \varphi_j, \nabla w \right) + \left( \sum_{j=1}^N u_j (v \nabla \varphi_j), w \right) + \\ & + \sigma \left( \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j, w \right) = (f, w), \forall w \in V_h. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Observe que as funções  $u_j(t)$  não dependem de  $(x, y)$ , assim podemos tirá-las do produto interno, logo,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \frac{\partial u_j}{\partial t} (\varphi_j, w) + \alpha \sum_{j=1}^N u_j (\nabla \varphi_j, \nabla w) + \sum_{j=1}^N u_j (v \nabla \varphi_j, w) + \\ & + \sigma \sum_{j=1}^N u_j (\varphi_j, w) = (f, w), \forall w \in V_h. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Como a equação (4.7) é válida para todo  $w \in V_h$ , podemos tomar  $w$  como uma função  $\varphi_i$  da base  $B$  de  $V_h$ . Portanto,

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \frac{\partial u_j}{\partial t} (\varphi_j, \varphi_i) + \alpha \sum_{j=1}^N u_j (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) + \sum_{j=1}^N u_j (v \nabla \varphi_j, \varphi_i)_{L^2(\Omega)} + \\ & + \sigma \sum_{j=1}^N u_j (\varphi_j, \varphi_i) = (f, \varphi_i), \forall \varphi_i \in B. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Utilizamos o método de Crank-Nicolson para apresentar uma aproximação da derivada de  $u$  no tempo, que aparece na equação (4.8). O método de Crank-Nicolson é um método implícito, nele utilizamos uma aplicação da discretização da equação diferencial em um tempo intermediário entre  $t_n$  e  $t_{n+1}$ . Logo, considerando as aproximações:

$$\frac{du_j}{dt} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \quad \text{e} \quad u_j = \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2}$$

e substituindo na equação (4.8) obtemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} (\varphi_j, \varphi_i) + \alpha \sum_{j=1}^N \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2} (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) + \sum_{j=1}^N \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2} (v \nabla \varphi_j, \varphi_i) + \\ & + \sigma \sum_{j=1}^N \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2} (\varphi_j, \varphi_i) = (f^{n+\frac{1}{2}}, \varphi_i), \forall \varphi_i \in B. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Multiplicando a equação (4.9) por  $(2\Delta t)$  temos,

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{j=1}^N (u_j^{n+1} - u_j^n) (\varphi_j, \varphi_i) + \alpha \Delta t \sum_{j=1}^N (u_j^{n+1} + u_j^n) (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i) + \\ & + \Delta t \sum_{j=1}^N (u_j^{n+1} + u_j^n) (v \nabla \varphi_j, \varphi_i) + \Delta t \sigma \sum_{j=1}^N (u_j^{n+1} + u_j^n) (\varphi_j, \varphi_i) = \\ & = 2\Delta t (f^{n+\frac{1}{2}}, \varphi_i), \forall \varphi_i \in B. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Separando no primeiro membro da equação (4.10) as expressões que estão no tempo  $n + 1$  e no segundo membro as expressões que estão no tempo  $n$ , obtemos

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N u_j^{n+1} \left( (2 + \Delta t \sigma)(\varphi_j, \varphi_i) + \alpha \Delta t (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_j) + \Delta t (v \nabla \varphi_j, \varphi_i) \right) = \\ & = \sum_{j=1}^N u_j^n \left( (2 - \Delta t \sigma)(\varphi_j, \varphi_i) - \alpha \Delta t (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_j) - \Delta t (v \nabla \varphi_j, \varphi_i) \right) + (f^{n+\frac{1}{2}}, \varphi_i). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Definindo

$$\begin{aligned} X &= (2 + \Delta t \sigma)(\varphi_j, \varphi_i) + \alpha \Delta t (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_j) + \Delta t (v \nabla \varphi_j, \varphi_i); \\ Y &= (2 - \Delta t \sigma)(\varphi_j, \varphi_i) - \alpha \Delta t (\nabla \varphi_j, \nabla \varphi_j) - \Delta t (v \nabla \varphi_j, \varphi_i); \\ F^{n+\frac{1}{2}} &= (f^{n+\frac{1}{2}}, \varphi_i); \\ U^{n+1} &= \begin{pmatrix} u_1^{n+1} \\ \vdots \\ u_N^{n+1} \end{pmatrix}; \\ U^n &= \begin{pmatrix} u_1^n \\ \vdots \\ u_N^n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

obtemos o seguinte sistema:

$$XU^{n+1} = YU^n + F^{n+\frac{1}{2}}. \quad (4.12)$$

Tendo definidas nossas matrizes, resolvemos o problema (4.1) utilizando o sistema (4.12). Observe que as matrizes  $X$ ,  $Y$  e  $F$ , dependem dos produtos internos referente às funções  $\varphi_i$  da base  $B$  de  $V_h$ . Tais produtos internos são apresentados no Apêndice C, considerando essas funções em um elemento padrão. Depois utilizamos a transformação apresentada no Apêndice D, para obtermos o sistema no elemento real. Assim, utilizando o software MatLab encontramos o valor da poluição em cada ponto da malha no próximo tempo. A Figura 4.1 apresenta a chaminé de uma indústria no início do processo. A aproximação numérica da solução deste modelo no nó 644 após 100 iterações, com  $\sigma = 0.001$ ,  $\alpha = 0.8$ ,  $v_1 = 0.02m/s^2$ ,  $v_2 = 0.001m/s^2$ , o valor da fonte é  $d = 0.002$  e a condição inicial é dada por:

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= 0, \quad \forall (x, y) \neq (x_i, y_i) \text{ para algum } i \in \{1, \dots, 896\} \text{ e} \\ u_0(x_i, y_i) &= d, \end{aligned}$$

é apresentado na Figura 4.2.

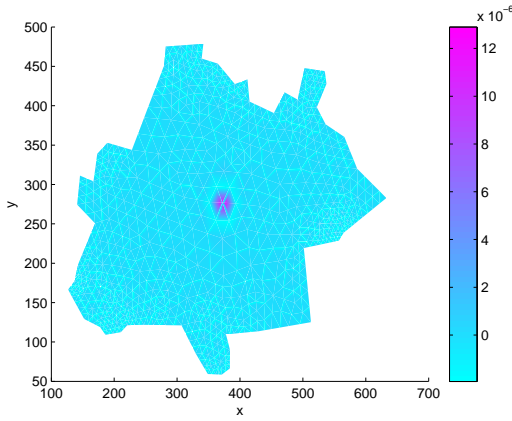


Figura 4.1: Concentração de poluentes no ar no início do processo.

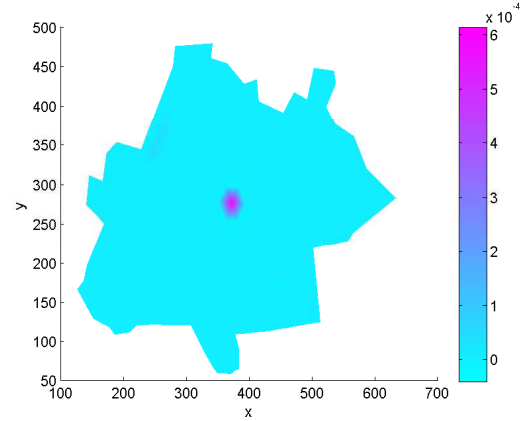


Figura 4.2: Aproximação numérica da solução da eq.(4.1).

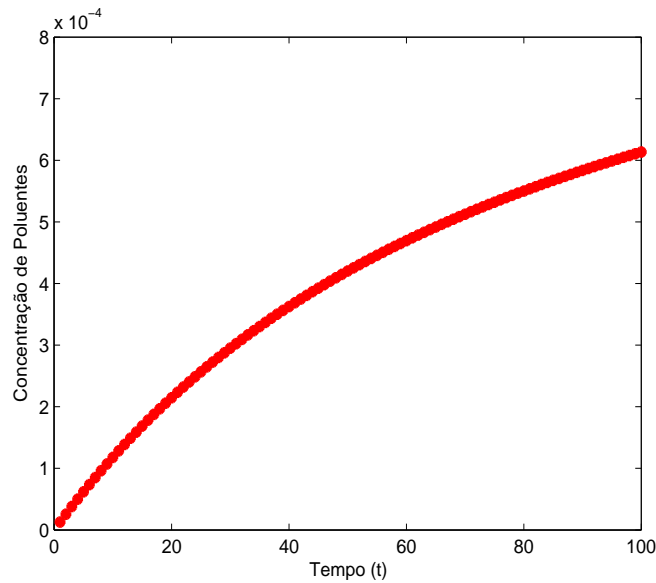


Figura 4.3: Concentração de poluentes em cada iteração no nó 644.

A Figura 4.3 apresenta a concentração de poluentes no nó 644 em cada iteração. Observe que independente do nó que colocamos a fonte de poluentes, ou seja, a chaminé da indústria, obtemos a mesma concentração de poluentes, pois consideramos os parâmetros  $\alpha$ ,  $v_1$ ,  $v_2$  e  $\sigma$  constantes.

## 4.2 Poluição no Ar com Parâmetros Fuzzy

Em trabalhos anteriores, foi apresentado o modelo de poluição do ar através da chaminé de uma indústria com difusão como parâmetro fuzzy e velocidade no eixo  $x$  e  $y$  constantes [40], além disso consideravam-se o domínio sendo uma cidade hipotética na forma de um retângulo, ou seja, fronteira regular. Na equação (4.1), incorporamos a velocidade no eixo  $x$  e  $y$  como parâmetro fuzzy, e lembrando que em (4.1) o domínio considerado é a cidade de Uberlândia. Assim a equação do modelo se apresenta da forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha(T, u) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + v_1(A) \frac{\partial u}{\partial x} + v_2(A) \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma u = f \quad (x, y) \in \Omega, t \in (0, T] \\ u = 0 \quad \text{em } \partial\Omega \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y). \end{array} \right. \quad (4.13)$$



Esta equação descreve a concentração de poluição  $u(x, y, t)$ , provinda da chaminé de uma indústria em cada ponto da cidade de Uberlândia representada pela malha discretizada, dependendo dos parâmetros  $\alpha$  que representa a difusão,  $v_1$  a velocidade no eixo  $x$  e  $v_2$  a velocidade no eixo  $y$ . Note que esses parâmetros são calculados em função de algumas características da posição da malha através de um SBRF, sendo o valor da fonte  $d = 100$ .

Vamos utilizar a temperatura ( $T$ ) e a concentração de poluição ( $u$ ) de cada ponto da cidade(malha) como fatores que influenciam na difusão  $\alpha$ . Também, consideramos a força de atrito ( $A$ ) como variável que influencia nas velocidades, lembrando que essas informações foram baseadas no especialista da área de climatologia [42]. Este estudo com domínio regular foi feito em [8]. Assim utilizamos os SBRF mostrados no Capítulo 3 para obtermos os diferentes valores de  $\alpha$ ,  $v_1$  e  $v_2$  um para cada ponto do domínio discretizado, onde acontece a difusão.

A função  $f$  é definida como:

$$f(x, y, t) = 0, \forall (x, y) \neq (x_i, y_i) \text{ para algum } i \in \{1, \dots, 896\} \text{ e}$$

$$f(x_i, y_i, t) = \begin{cases} d, & \text{se } t < t_0 \\ 0, & \text{se } t \geq t_0, \quad d > 0. \end{cases}$$

Na simulação consideramos a condição inicial dada por:

$$u_0(x, y) = 0, \forall (x, y) \neq (x_i, y_i) \text{ para algum } i \in \{1, \dots, 896\} \text{ e}$$

$$u_0(x_i, y_i) = d.$$

O valor de  $t_0 = 5$  representa o tempo de funcionamento da indústria. Consideramos que a indústria emite poluentes no período matutino, pois a passagem do satélite é nesse período. Estamos considerando que cada iteração representa uma hora, desta forma, a indústria emite poluentes por cinco horas.

Podemos observar que a equação (4.13) não é linear, pois precisamos determinar a difusão da poluição no presente instante afim de encontrar a solução em cada tempo posterior. Assim utilizamos o cálculo da extrapolação da concentração da poluição feita por  $u_{ext} = 2u_{i+1} - u_i, i = 1, 2, \dots$ , obtendo a concentração no presente instante e determinamos a difusão pelo SBRF. Logo a aproximação da solução numérica da equação (4.13) é obtida utilizando o método de elementos finitos, o método de Galerkin e o método de Crank-Nicolson da mesma forma apresentada na seção anterior, e os parâmetros fuzzy  $\alpha$ ,  $v_1$  e  $\varphi_2$ .

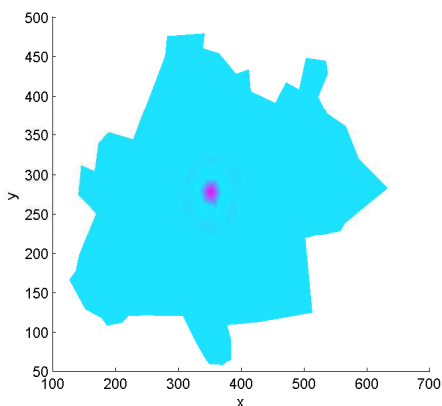


Figura 4.4: Concentração de poluentes no ar no mês de junho.

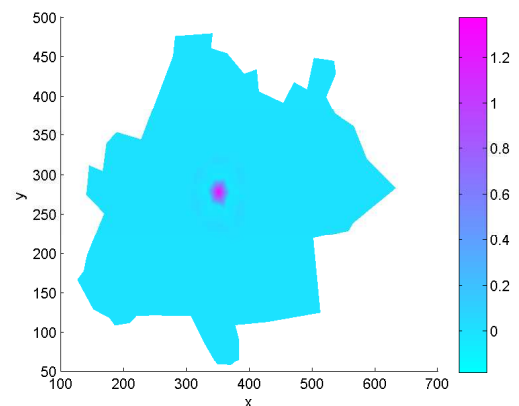


Figura 4.5: Concentração de poluentes no ar no mês de setembro.

As Figuras 4.4 e 4.5, apresentam a aproximação da solução da equação (4.13) com a chaminé da indústria localizada no nó 644, no mês de junho e no mês de setembro, respectivamente.

Consideramos a cidade de Uberlândia dividida em 5 regiões como mostra a Figura 4.6, escolhemos um *nó* em cada região para estudarmos a concentração de poluentes nessas regiões. Os *nós* escolhidos foram:

- *nó 130*: Região Sul (Proximidades do bairro Shopping Park e da Faculdade UNITRI);
- *nó 159*: Região Leste (Proximidades do Parque do Sabiá);
- *nó 512*: Região Oeste (Imediações do bairro Jardim Europa);
- *nó 644*: Região Central (Centro da cidade);
- *nó 696*: Região Norte (Proximidades do Distrito Industrial).



Figura 4.6: Regionalização de Uberlândia.

As Figuras 4.7, 4.9, 4.11, 4.13 e 4.15 apresentam a aproximação da solução da equação (4.13) com a chaminé da indústria localizada em cada região considerada no mês de junho. As Figuras 4.8, 4.10, 4.12, 4.14 e 4.16 apresentam a aproximação da solução da equação (4.13) com a chaminé da indústria localizada em cada região considerada no mês de setembro.

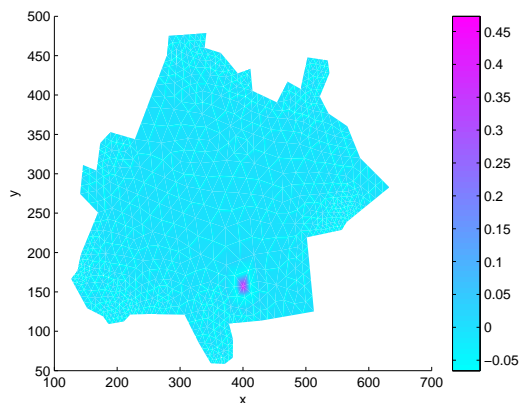


Figura 4.7: Concentração de poluentes na região sul (*nó 130*) no mês de junho.

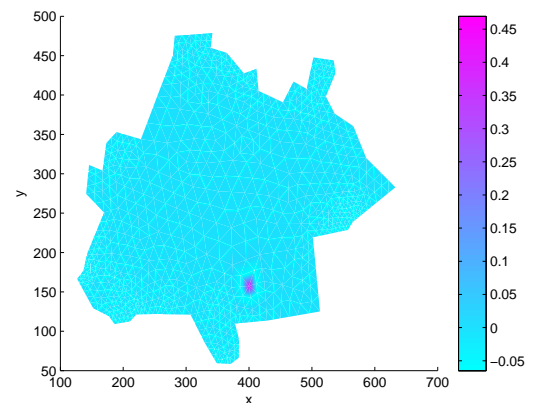


Figura 4.8: Concentração de poluentes na região sul (*nó 130*) no mês de setembro.

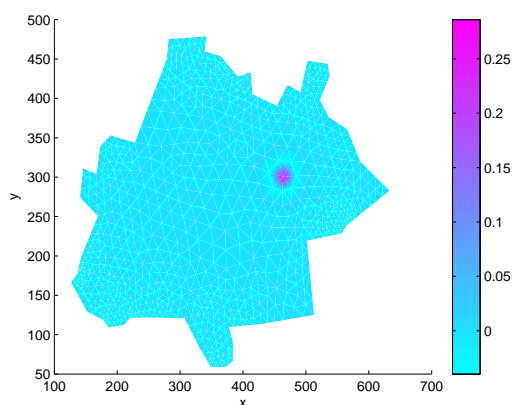


Figura 4.9: Concentração de poluentes na região leste (nó 159) no mês de junho.

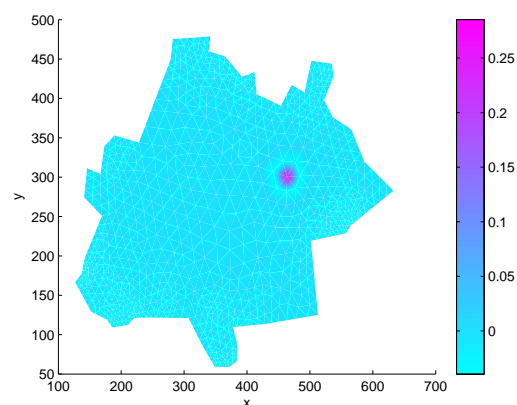


Figura 4.10: Concentração de poluentes na região leste (nó 159) no mês de setembro.

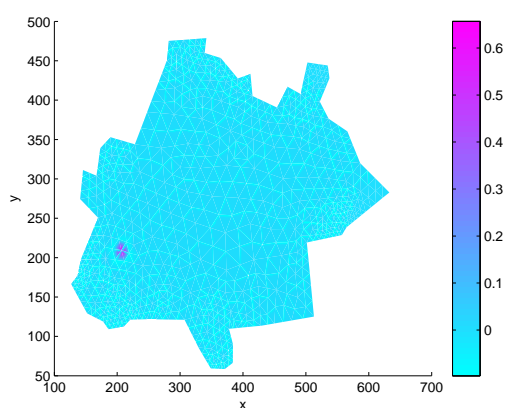


Figura 4.11: Concentração de poluentes na região oeste (nó 512) no mês de junho.

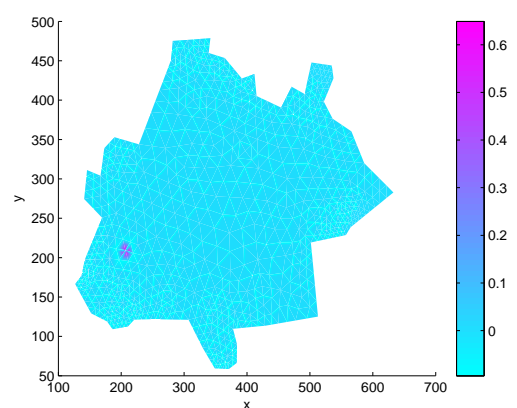


Figura 4.12: Concentração de poluentes na região oeste (nó 512) no mês de setembro.

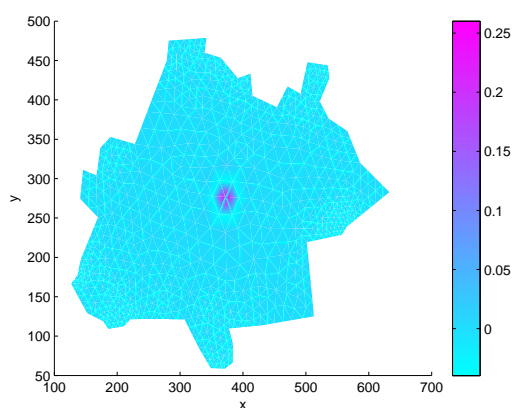


Figura 4.13: Concentração de poluentes na região central (nó 644) no mês de junho.

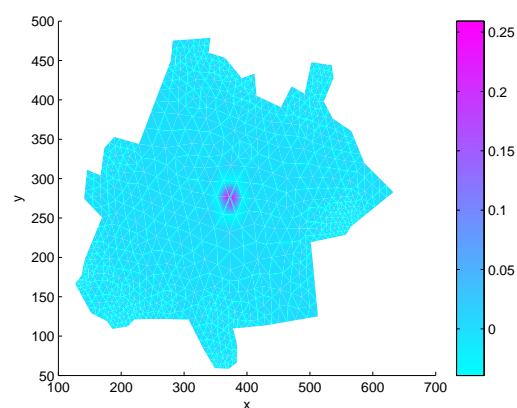


Figura 4.14: Concentração de poluentes na região central (nó 644) no mês de setembro.

As Figuras 4.17 e 4.18 apresentam a concentração de poluentes após 8 iterações nos nós 644, 130, 159, 512 e 696. As simulações foram feitas nesses cinco nós para identificar qual seria a melhor localização para se construir outras indústrias. Esta identificação é realizada verificando-se onde a concentração de poluentes assume o menor valor. Observe que os gráficos das figuras mostram que a concentração de poluentes aumenta até a iteração 5, mostrando que a indústria está emitindo poluente.

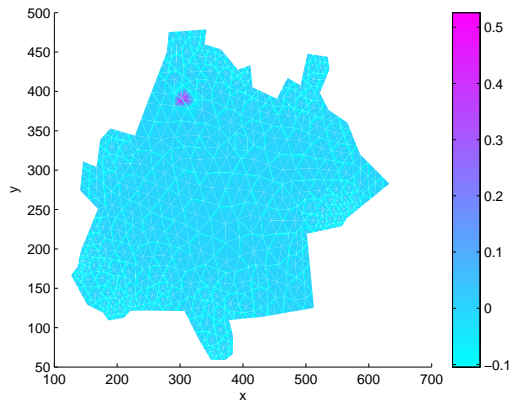


Figura 4.15: Concentração de poluentes na região norte (nó 696) no mês de junho.

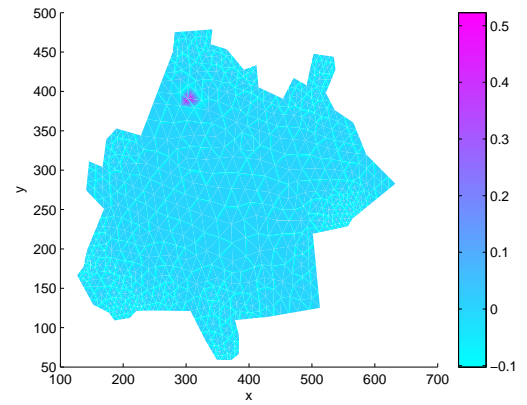


Figura 4.16: Concentração de poluentes na região norte (nó 696) no mês de setembro.

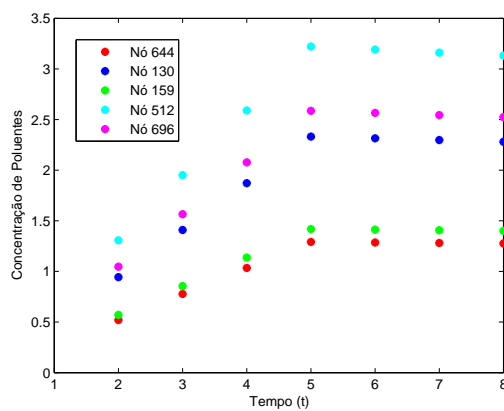


Figura 4.17: Concentração de poluentes no ar em cada nó, no mês de junho.

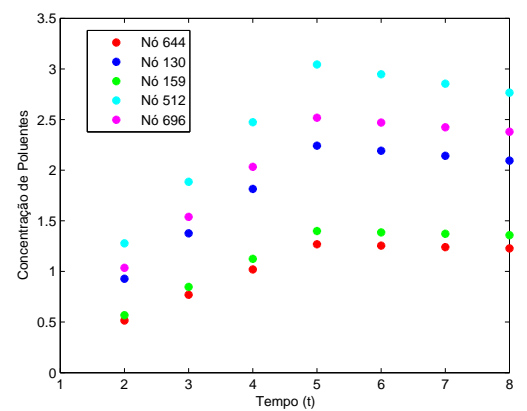


Figura 4.18: Concentração de poluentes no ar em cada nó, no mês de setembro.

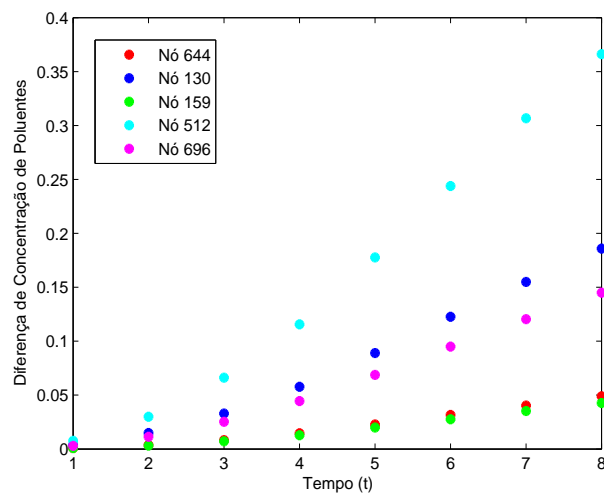


Figura 4.19: Diferença de concentração de poluentes dos meses de junho e setembro em cada nó.

Nas iterações seguintes, a concentração de poluentes diminui a cada iteração. Este comportamento é compatível com o esperado.

A Figura 4.19 apresenta a diferença de concentração de poluentes entres os meses de junho e setembro em cada nó e através dessa figura nota-se que a região mais adequada para a construção de

outras indústrias é próximo do *nó 644*.

Como o *nó 644* está localizado na região central da cidade, pela lógica não seria viável construir uma indústria neste local, assim devemos observar o *nó* que teria a segunda menor concentração. Logo a melhor localização seria no *nó 159* que está localizado na região leste da cidade. Portanto concluímos que a melhor localização para se construir outras indústrias na cidade de Uberlândia seria na região Leste da cidade, considerando os *nós* estudados.

A aproximação da solução da equação (4.13) corresponde ao comportamento mais próximo da realidade, de uma fonte de poluente em um determinado local. A principal diferença entre os modelos clássicos e o modelo fuzzy é que o modelo utilizando parâmetros fuzzy explora esses parâmetros de incerteza enquanto os modelos clássicos não. Assim, acreditamos que, devido à incerteza dos fenômenos naturais, a combinação de equações diferenciais e a teoria da lógica fuzzy nos permite obter simulações computacionais para retratar o fenômeno estudado mais próximo da realidade possível.

O tempo de execução do programa computacional executado no software MatLab, para obter os gráficos dos meses de junho e setembro nos 5 *nós*, foi de 70 minutos.

No próximo capítulo apresentaremos a estimativa do erro para os exemplos apresentados ao longo deste trabalho.

# Capítulo 5

## Estimativa do Erro para as EDP Estudadas

Um método numérico é um método não analítico, que tem como objetivo determinar um ou mais valores numéricos, que são soluções de um certo problema. Ao contrário das metodologias analíticas, que conduzem a soluções exatas para os problemas, os métodos numéricos produzem, em geral, apenas soluções aproximadas. Por este fato, é necessário obter uma estimativa para a precisão dos cálculos com que se pretende obter a solução numérica desejada. Essa precisão dos cálculos numéricos é também, um importante critério para a seleção do método que será utilizado na resolução de um dado problema. No estudo deste capítulo, calculamos o erro como sendo a norma da diferença entre o valor obtido (aproximado) e o valor exato.

Neste capítulo vamos apresentar a estimativa do erro relacionado ao problema unidimensional apresentado na Seção 2.1, a estimativa do erro relacionado ao problema bidimensional estacionário apresentado na Seção 2.2 e por fim a estimativa do erro relacionado ao problema bidimensional no tempo (Modelo da Poluição).

### 5.1 A Estimativa do Erro do Problema Unidimensional

Vamos estudar o erro  $u - u_h$  onde  $u$  é a solução de  $(S)$  e  $u_h$  é a solução do problema de elementos finitos  $(V_h)$ . Temos que,

$$(u', v') = \int_{\Omega} f v, \quad \text{para todo } v \in V_h, \quad (5.1)$$

e

$$(u'_h, v') = \int_{\Omega} f v, \quad \text{para todo } v \in V_h. \quad (5.2)$$

Subtraindo as equações (5.1) e (5.2), obtemos

$$(u' - u'_h, v') = 0, \quad \text{para todo } v \in V_h. \quad (5.3)$$

**Teorema 5.1.** *Para todo  $v_h \in V_h$  temos*

$$\|u' - u'_h\| \leq \|u' - v'_h\|.$$

*Demonstração.* De (5.3), tomando  $v = u_h - v_h \in V_h$ , obtemos

$$\begin{aligned} \|u' - u'_h\|^2 &= (u' - u'_h, u' - u'_h) + (u' - u'_h, v') \\ &= (u' - u'_h, u' - u'_h + u'_h - v'_h) \\ &= (u' - u'_h, u' - v'_h) \\ &\leq \|u' - u'_h\| \cdot \|u' - v'_h\|, \end{aligned}$$

o que implica

$$\frac{\|u' - u'_h\|^2}{\|u' - u'_h\|} \leq \|u' - v'_h\|.$$

Portanto,

$$\|u' - u'_h\| \leq \|u' - v'_h\|.$$

□

**Observação 5.1.** Note que o vetor  $(u - u_h)'$  tem a menor norma  $L^2$  dentro de todos os elementos do conjunto  $\{(u - v)'\}$ ,  $v \in V_h$ .

Agora consideremos  $\tilde{u}_h$  sendo o interpolante linear de  $u$ , ou seja,

$$\tilde{u}_h(x_j) = u(x_j), \quad j = 0, \dots, M + 1.$$

Podemos demonstrar que

$$|u(x) - \tilde{u}_h(x)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{0 \leq y \leq 1} |u''(y)|. \quad (5.4)$$

De fato,

Para um polinômio de grau 1,  $p_1(x)$ , com pontos de interpolação  $x_0, x_1$ , sabemos que a estimativa do erro de interpolação é dado por:

$$|f(x) - p_1(x)| \leq \frac{|(x - x_0)|(x - x_1)|}{(2)!} \cdot M_2, \quad (5.5)$$

onde  $M_2 = \max\{|f''(x)|, x \in [x_0, x_1]\}$ .

Neste caso  $f(x) = u(x)$  e  $p_1(x) = \tilde{u}_h(x)$ , assim

$$|u(x) - \tilde{u}_h(x)| \leq \frac{|(x - x_0)(x - x_1)|}{(1 + 1)!} \max_{y \in [0, 1]} u''(y) \leq \frac{\max |N(x)|}{(2)!} \max_{y \in [0, 1]} |u''(y)|, \quad (5.6)$$

onde  $N(x) = (x - x_0)(x - x_1)$ .

O ponto crítico de  $N(x)$  é dado por

$$N'(x) = (x - x_1) + (x - x_0) = 0, \text{ logo } x = \frac{x_1 + x_0}{2}.$$

Então,  $N(\frac{x_1 + x_0}{2}) = -\frac{h^2}{4}$ , como queremos  $\max |N(x)|$ , basta estimar o valor máximo de  $N(x)$  por  $\frac{h^2}{4}$  em (5.6).

Portanto obtemos a estimativa (5.4)[27].

## 5.2 Estimativa do Erro do Caso Bidimensional Estacionário

Nesta seção vamos estudar o erro do seguinte problema de fronteira para a Equação de Poisson estudado na seção 2.2:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, y) & \text{em } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (5.7)$$

onde  $\Omega$  é um domínio aberto e limitado em  $\mathbb{R}^2$  com fronteira  $\partial\Omega$ ,  $f$  é uma função dada. Também, com os mesmos argumentos usados no caso unidimensional, obtemos que

$$\|\nabla u - \nabla u_h\| \leq \|\nabla u - \nabla v\|, \text{ para todo } v \in V_h,$$

onde  $\|\nabla v\| = \sqrt{a(v, v)} = \left( \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$ . Em particular

$$\|\nabla u - \nabla u_h\| \leq \|\nabla u - \nabla \tilde{u}_h\|, \quad (5.8)$$

onde  $\tilde{u}_h$  é o interpolante de  $u$ , isto é,  $\tilde{u}_h \in V_h$  e  $\tilde{u}_h(N_i) = u(N_i)$ .

O objetivo é fornecer uma estimativa na norma da própria função e não do gradiente. Para isso precisamos encontrar a solução em um conjunto maior, como veremos a seguir.

### 5.2.1 Um Contexto Teórico Mais Geral

Ao dar formulações variacionais de problemas de valor de contorno para equações diferenciais parciais, a partir do ponto de vista matemático, é natural e muito útil trabalhar com espaços de funções  $V$  que são um pouco maiores, no sentido de conter mais funções que os espaços de funções contínuas com derivadas contínuas por partes, utilizadas nas seções anteriores. Mais precisamente,  $V$ , será considerado como um espaço de Hilbert.

Como motivação, note que no caso do problema unidimensional (2.1), pode-se usar o espaço

$$H_0^1(I) = \{v \in H^1(I); v(a) = v(b) = 0\}, \text{ onde } I = (a, b),$$

para determinar a solução do problema.

Assim, a formulação variacional desse problema estendido ao espaço de Hilbert  $H_0^1(I)$ , se enuncia da seguinte forma:

(PV): encontrar  $u \in H_0^1(I)$  tal que

$$(u', v') = \int_{\Omega} f v, \text{ para todo } v \in H_0^1(I).$$

Neste caso, a estimativa do erro é feita diretamente com a norma da diferença entre a função solução  $u$  e a solução numérica  $u_h$  e não com suas derivadas e de forma pontual como na fórmula (5.8). De fato, obtém-se a estimativa na norma:

$$\|u - u_h\|_{H_0^1(\Omega)} \leq Ch, C \text{ é uma constante.}$$

Em seguida definiremos espaço de Hilbert.

**Definição 5.1.** *Seja  $V$  um espaço vetorial com produto interno e norma induzida  $\|\cdot\|$  e  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} = \{v_1, v_2, \dots, v_n, \dots\} \in V$ , uma sequência. Então  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é chamada de **sequência de Cauchy** se para todo  $\epsilon > 0$  existe um número natural  $N$  tal que*

$$\|v_i - v_j\| < \epsilon \text{ se } i, j > N.$$

**Definição 5.2.** *Seja  $V$  um espaço vetorial com produto escalar e norma induzida  $\|\cdot\|$ . Então  $V$  é um **espaço de Hilbert** se toda sequência de Cauchy com respeito a norma  $\|\cdot\|$  é convergente. Também  $V$  é dito ser um **espaço vetorial completo** na norma induzida.*

**Exemplo:** O espaço  $L^2(I)$  das funções de quadrado integrável no sentido de Lebesgue é um espaço Hilbert com produto interno [1]

$$(v, w) = \int_I v w dx,$$

e com a norma induzida

$$\|v\|_{L^2(I)} = \left( \int_I v^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = (v, v)^{\frac{1}{2}}.$$



Aplicando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz(2.2), tem-se

$$|(v, w)| \leq \|v\|_{L^2(I)} \|w\|_{L^2(I)}.$$

Um espaço mais amplo, aonde a derivada é considerada no **sentido das distribuições**, será apresentado nesta seção. Como já mencionado anteriormente, o objetivo principal de considerar espaços com maior número de funções é a de obter uma estimativa do erro na norma da própria função. Além disso, os espaços a serem considerados resolvem o problema da regularidade da solução.

Por exemplo, no caso do problema da seção 2.1, a condição (2.12) não será necessária para a solução em um maior espaço de Hilbert.

A seguir veremos a definição de derivada no sentido das distribuições e uma pequena resenha da teoria.

### 5.2.2 Derivada no Sentido das Distribuições e os Espaços de Sobolev

Consideremos o conjunto

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = \{\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\},$$

onde  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  é o conjunto das funções infinitamente diferenciáveis definidas em  $\mathbb{R}^n$  e que se anulam no infinito.

**Definição 5.3.** Considerando o espaço vetorial  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  definimos como uma **distribuição** a todo funcional linear contínuo definido em  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ , ou seja,  $T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$  linear e contínuo.

**Exemplo:** Um importante exemplo de distribuição é a conhecida **delta de Dirac** no ponto  $a$ , denotada por  $\delta_a$  e definida por:

$$\begin{aligned} \delta_a &: \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \varphi(a) \end{aligned}$$

Usando a notação de dualidade [1], temos que

$$\delta_a(\varphi) = \langle \delta_a, \varphi \rangle = \varphi(a).$$

Seja  $T(\varphi) = \langle T, \varphi \rangle$ , suponha  $f$  uma função com derivadas parciais contínuas (portanto diferenciável). Definimos

$$T_f(\varphi) = \langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi, \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \quad (5.9)$$

que é uma distribuição [1]. Da mesma maneira podemos definir a distribuição

$$T_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi. \quad (5.10)$$

Vemos a seguir como essas duas distribuições (5.9) e (5.10) se relacionam. Considerando  $dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ , temos que

$$\begin{aligned} \left\langle T_{\frac{\partial f}{\partial x_1}}, \varphi \right\rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1} \varphi \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx_2 \cdots \int_{\mathbb{R}} dx_n \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_1} \varphi \, dx_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}} dx_2 \cdots \int_{\mathbb{R}} dx_n \left( \underbrace{f \varphi \Big|_{-\infty}^{+\infty}}_{=0} - \int_{\mathbb{R}} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \, dx_1 \right) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \, dx \\ &= - \left\langle T_f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\rangle, \end{aligned}$$

ou seja

$$\left\langle T_{\frac{\partial f}{\partial x_1}}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T_f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \right\rangle. \quad (5.11)$$

Inspirados na igualdade (5.11), se define a distribuição derivada parcial de uma distribuição qualquer  $T$ , como vemos a seguir.

**Definição 5.4.** *Seja  $T$  uma distribuição. Definimos como derivada parcial de  $T$  a distribuição:*

$$\left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle, \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{D}.$$

Como consequência da definição 5.4, pode-se provar que as distribuições são infinitamente deriváveis. Isto é mostrado na seguinte proposição 5.1.

**Proposição 5.1.** *Toda distribuição  $T$  é infinitamente derivável. Além disso, temos*

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_i},$$

para todo  $i, j$ .

*Demonstração.* A primeira afirmação é imediata pela definição 5.3. Com respeito à segunda afirmação, temos que

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}, \varphi \right\rangle &\stackrel{\text{def.}}{=} - \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle \\ &\stackrel{\text{def.}}{=} \left\langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle \\ &\stackrel{\varphi \in C_0^\infty}{=} \left\langle T, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_i} \right\rangle \\ &\stackrel{\text{def.}}{=} - \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle \\ &\stackrel{\text{def.}}{=} \left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_i}, \varphi \right\rangle. \end{aligned}$$

Assim

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_i}.$$

□

A seguir daremos um resumo dos Espaços de Sobolev que utilizaremos nos dois casos (Problema estacionário e não estacionário).

Sejam  $\Omega$  um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  e  $m \in \mathbb{N}$ . Se  $u \in L^p(\Omega)$ , sabemos que  $u$  possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições. Considerando  $\partial^\alpha u$  como a derivada no sentido das distribuições de ordem  $\alpha$ , temos que  $\partial^\alpha u$  não é, em geral, um funcional definido por uma função de  $L^p(\Omega)$  [1]. Quando  $\partial^\alpha u$  é definida por uma função de  $L^p(\Omega)$ , temos um novo espaço denominado **espaço de Sobolev**.

Representa-se por  $W^{m,p}(\Omega)$  o espaço vetorial de todas as funções  $u$  de  $L^p(\Omega)$  tais que para todo  $|\alpha| \leq m$ ,  $\partial^\alpha u$  pertence a  $L^p(\Omega)$ . Isto é

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \partial^\alpha u \in L^p(\Omega), \text{ para todo } |\alpha| \leq m\}.$$

Para cada  $u \in W^{m,p}(\Omega)$  define-se a norma de  $u$  por

$$\|u\|_{m,p,\Omega} = \left( \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \leq m} |\partial^{\alpha} u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (5.12)$$

e uma seminorma definida por

$$|u|_{m,p,\Omega} = \left( \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=m} |\partial^{\alpha} u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (5.13)$$

Quando  $m = 0$ , tem-se  $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$ . Também temos que o conjunto  $\mathfrak{D}(\Omega)$  é denso em  $L^p(\Omega)$ , mas não é verdade que  $\mathfrak{D}(\Omega)$  seja denso em  $W^{m,p}(\Omega)$  para  $m \geq 1$ . Motivado por este fato, define-se o espaço  $W_0^{m,p}(\Omega)$  como sendo o fecho de  $\mathfrak{D}(\Omega)$  na norma em  $W^{m,p}(\Omega)$ . Quando  $p = 2$ , escreve-se  $H^m(\Omega)$  em lugar de  $W^{m,2}(\Omega)$ .

O espaço de Sobolev para  $p = 2$  é um espaço de Hilbert.

**Observação 5.2.** *Uma propriedade importante que se verifica nos espaços de Sobolev é a conhecida **desigualdade de Poincaré**, mediante a qual a seminorma (5.13) se transforma em uma norma equivalente à norma (5.12), ou seja, existem  $c_1$  e  $c_2$  tais que*

$$c_1 \|v\|_{m,p,\Omega} \leq |v|_{m,p,\Omega} \leq c_2 \|v\|_{m,p,\Omega}, \text{ para todo } v \in W_0^{m,p}(\Omega). \quad (5.14)$$

A desigualdade de Poincaré afirma que se  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  é limitado e  $1 \leq p \leq n$ . Então existe  $C = C(n, p, |\Omega|) > 0$  tal que,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \| \nabla u \|_{L^p(\Omega)}, \text{ para todo } u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

onde  $|\Omega|$  é a medida de  $\Omega$ .

**Observação 5.3.** *Outra propriedade importante dos espaços de Sobolev são as **imersões** entre estes espaços e os espaços de funções contínuas ou continuamente diferenciáveis. As imersões de Sobolev são de extrema importância na prova da regularidade da solução do problema variacional.*

**Definição 5.5.** *Uma imersão entre espaços vetoriais normados  $V$  e  $W$  ( $V \subset W$ ), com  $V$  subespaço de  $W$ , não necessariamente com a norma induzida pela norma de  $W$ , é a função  $I$  (Identidade) de  $V$  em  $W$ . Se  $I$  for contínua nas normas consideradas a imersão é chamada contínua. Denotamos neste caso  $V \hookrightarrow W$ . Em outras palavras, considerando a norma  $\|\cdot\|_V$  em  $V$  e a norma  $\|\cdot\|_W$  em  $W$ ,  $V \hookrightarrow W$  se existe uma constante  $c$  tal que  $\|\cdot\|_V \leq c \|\cdot\|_W$ .*

Claramente temos

$$H^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

Além dessa imersão usaremos neste trabalho [1] a seguinte imersão crucial para a regularidade da solução:

$$H^2(\Omega) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega}). \quad (5.15)$$

A seguir iremos dar uma formulação abstrata para o método de elementos finitos para qualquer caso do tipo estacionário, com as definições e teoremas a seguir.

Seja  $V$  um espaço de Hilbert com produto escalar  $(\cdot, \cdot)_V$  e norma induzida  $\|\cdot\|_V$ . Seja também  $a(\cdot, \cdot)$  uma forma bilinear definida em  $V$  e  $L$  um funcional linear em  $V$  tais que

- (i)  $a(\cdot, \cdot)$  é simétrica;

(ii)  $a(\cdot, \cdot)$  é contínua, i.e., existe  $r > 0$  tal que

$$|a(v, w)| \leq r \|v\|_V \|w\|_V, \text{ para todo } v, w \in V.$$

(iii)  $a(\cdot, \cdot)$  é  $V$ -elítica ou coerciva, ou seja, existe um  $\alpha > 0$  tal que

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V^2, \text{ para todo } v \in V.$$

(iv)  $L$  é contínuo, ou seja, existe  $\lambda > 0$  tal que

$$|L(v)| \leq \lambda \|v\|_V, \text{ para todo } v \in V.$$

Consideramos o problema de minimização abstrato

(M) Encontre  $u \in V$  tal que

$$F(u) = \min_{v \in V} F(v),$$

onde  $F(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - L(v)$ .

e o problema variacional abstrato:

(PV) Encontre  $u \in V$  tal que

$$a(u, v) = L(v), \text{ para todo } v \in V.$$

**Observação 5.4.** Dizemos que (PV) é a **formulação fraca** da equação (5.7) e a solução de (PV) chama-se **solução fraca** de (5.7).

A existência da solução de (PV) é mostrada pelo teorema de **Lax-Milgram**, que é uma adaptação do teorema da representação de Riesz, na teoria dos espaços de Hilbert, enunciado a seguir.

**Teorema 5.2.** (Teorema de Lax-Milgram) Sejam  $V$  um espaço de Hilbert.  $a(\cdot, \cdot)$  uma forma bilinear,  $V$ -elítica e contínua e  $L$  um funcional contínuo. Então existe  $u \in V$  tal que, para todo  $v \in V$ ,  $a(u, v) = L(v)$ .

O teorema de Lax-Milgram também afirma a unicidade da solução, que será demonstrada no teorema a seguir.

**Teorema 5.3.** Os problemas (M) e (PV) são equivalentes. Além disso, existe uma única solução  $u \in V$  com a seguinte estimativa de estabilidade a priori:

$$\|u\|_V \leq \frac{\lambda}{\alpha}.$$

**Demonstração.** (M)  $\Rightarrow$  (PV) Seja  $v \in V$  e  $\epsilon \in \mathbb{R}$  arbitrário e  $u$  o mínimo de  $F(u)$ . Então, se  $u + \epsilon v \in V$  temos que

$$F(u) \leq F(u + \epsilon v), \text{ para todo } \epsilon \in \mathbb{R}.$$

Usando a notação  $g(\epsilon) = F(u + \epsilon v)$ ,  $\epsilon \in \mathbb{R}$ , tem-se

$$g(0) \leq g(\epsilon), \text{ para todo } \epsilon \in \mathbb{R}.$$

Portanto devemos ter  $g'(0) = 0$ .

$$\begin{aligned} g(\epsilon) &= \frac{1}{2}a(u + \epsilon v, u + \epsilon v) - L(u + \epsilon v) \\ &= \frac{1}{2}a(u, u) + \frac{\epsilon}{2}a(u, v) + \frac{\epsilon}{2}a(v, u) + \frac{\epsilon^2}{2}a(v, v) - L(u) - \epsilon L(v) \\ &= \frac{1}{2}a(u, u) - L(u) + \epsilon a(u, v) - \epsilon L(v) + \frac{\epsilon^2}{2}a(v, v), \end{aligned}$$

onde foi usada a simetria de  $a(\cdot, \cdot)$ . Segue-se que

$$0 = g'(0) = a(u, v) - L(v),$$

donde a afirmação fica demonstrada.

Para completar o teorema, mostremos que  $\|u\|_V \leq \frac{\lambda}{\alpha}$ . De fato, temos que

$$\alpha\|u\|_V^2 \leq a(u, u) = L(u) \leq \lambda\|u\|_V,$$

consequentemente,

$$\|u\|_V \leq \frac{\lambda}{\alpha} \text{ se } \|u\|_V \neq 0.$$

Seguidamente mostramos a unicidade da solução. Suponha que  $u_1, u_2$  são soluções, então

$$a(u_i, v) = L(v), \text{ para todo } v, i = 1, 2,$$

e, assim,

$$a(u_1 - u_2, v) = 0, \text{ para todo } v \in V.$$

Portanto,

$$\|u_1 - u_2\|_V \leq \frac{0}{\alpha},$$

concluindo que  $u_1 = u_2$ .

A recíproca é análoga ao caso unidimensional. □

### 5.2.3 O Método de Ritz-Galerkin

O objetivo desta seção é o de aproximar o problema variacional (PV). Vamos considerar  $V_h \subset V$  um subespaço de  $V$  de dimensão  $M$  finita. O método de Ritz-Galerkin propõe a restrição do problema (PV) ao subespaço  $V_h$ , formulando o problema abstrato discreto  $(PV_h)$ , que consiste em encontrar  $u_h \in V_h$  tal que:

$$a(u_h, v) = L(v_h) \text{ para todo } v_h \in V_h. \quad (5.16)$$

Novamente, pelo teorema de Lax-Milgram, garantimos a existência de uma única solução  $u_h \in V_h$ . A construção da solução aproximada segue os passos vistos no caso unidimensional. Tomando  $\{\varphi_h^{(1)}, \dots, \varphi_h^{(M)}\}$  uma base para  $V_h$ , e supondo que  $u_h$  é solução do problema (5.16), escrevemos  $u_h$  como combinação linear dos elementos da base escolhida para obter

$$u_h = \sum_{i=1}^M \xi_i \varphi_h^{(i)}, \quad \xi_i \in \mathbb{R}.$$

Assim, sabendo que  $u_h$  é solução, obtemos

$$\sum_{i=1}^M a(\varphi_h^{(j)}, \varphi_h^{(i)}) \xi_i = L(\varphi_h^{(j)}), \quad j = 1, \dots, M,$$

obtendo o sistema linear

$$A_h \xi_h = b_h, \quad (5.17)$$

onde  $\xi_h = (\xi_1, \dots, \xi_M)^T$ ,  $b_i = L(\varphi_h^{(i)})$  e  $A_h$  é a matriz de rigidez.

**Observação 5.5.** Existem basicamente dois grandes aspectos referidos à construção de um conjunto de dimensão finita de subespaços  $V_h$ :

1. a resolução computacional otimizada da solução do sistema (5.17);
2. a precisão da aproximação da solução  $u \in V$  pela solução  $u_h \in V_h$  é garantida e obtida pelo teorema de Lax-Milgram.

Com respeito ao segundo aspecto, o Lema de Céa, que enunciaremos e demonstraremos a seguir, afirma que, sob as hipóteses do Teorema de Lax-Milgram, a solução  $u_h$  é a **melhor aproximação** da solução  $u \in V$ , de todas as que possam ser criadas por outros métodos. Esta afirmação está baseada no seguinte fato:

o erro cometido pela aproximação  $u_h$  é ortogonal com relação a forma bilinear ao subespaço  $V_h$ ,  
(5.18)

ou seja

$$a(u - u_h, v_h) = 0 \text{ para todo } v_h \in V_h,$$

como ilustra a Figura 5.1

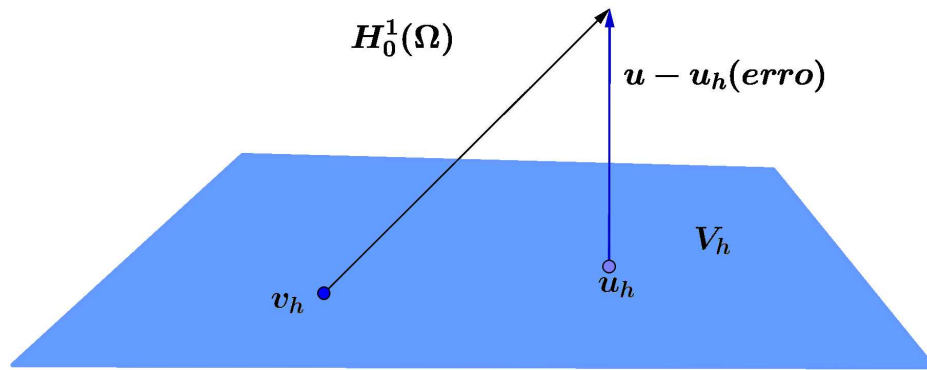


Figura 5.1: O erro cometido no método de Ritz-Galerkin é ortogonal ao espaço  $V_h$ .

A propriedade (5.18) é chamada de ortogonalidade de Galerkin.

**Lema 5.1.** (Lema de Céa) Suponha que  $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  é uma forma bilinear  $V$ -elítica, contínua e coerciva e  $L : V \rightarrow \mathbb{R}$  um funcional linear contínuo. Então as únicas soluções,  $u$  e  $u_h$  dos problemas variacionais (PV) e  $(PV_h)$ , respectivamente, verificam

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{\lambda}{\alpha} \|u - v\|_V, \text{ para todo } v \in V_h. \quad (5.19)$$

*Demonstração.* Como  $V_h$  é um subespaço de  $V$ , temos que

$$a(u, w) = L(w), \text{ para todo } w \in V_h,$$

e

$$a(u_h, w) = L(w), \text{ para todo } w \in V_h.$$

Assim,

$$a(u - u_h, w) = 0, \text{ para todo } w \in V_h.$$

Seja  $w = u_h - v$ . Concluimos que

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|_V^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) \\ &= a(u - u_h, u - u_h) + a(u - u_h, w) \\ &= a(u - u_h, u - u_h + w) \\ &= a(u - u_h, u - v) \\ &\leq \lambda \|u - u_h\|_V \|u - v\|_V, \end{aligned}$$

donde segue a afirmação do lema. □

O nosso objetivo a seguir, é encontrar uma interpolação apropriada  $\pi_h u$  de  $u$  e estimar o número  $\|u - \pi_h u\|_V$ . Assim usando (5.19), obtemos uma estimativa para o erro  $\|u - u_h\|_V$ .

No caso bidimensional estacionário, o espaço  $V_h$  considerado para o problema (5.7) discreto, consiste em um conjunto de **funções lineares** definidas em uma triangularização

$$T_h = \{K_1, \dots, K_m\},$$

onde  $K_i$  são triângulos não sobrepostos do conjunto  $\Omega$  de fronteira  $\partial\Omega$  poligonal. Construimos uma triangularização de  $\Omega$  e realizamos os cálculos das integrais em um triângulo  $\widehat{K}$  que chamamos de triângulo “padrão”. Através da transformação afim  $Y_e$  apresentada no apêndice C, relacionamos o cálculo das integrais no elemento  $K_i$  com o cálculo das integrais no elemento  $\widehat{K}$ . O triângulo padrão  $\widehat{K}$  é mostrado na Figura 5.2.

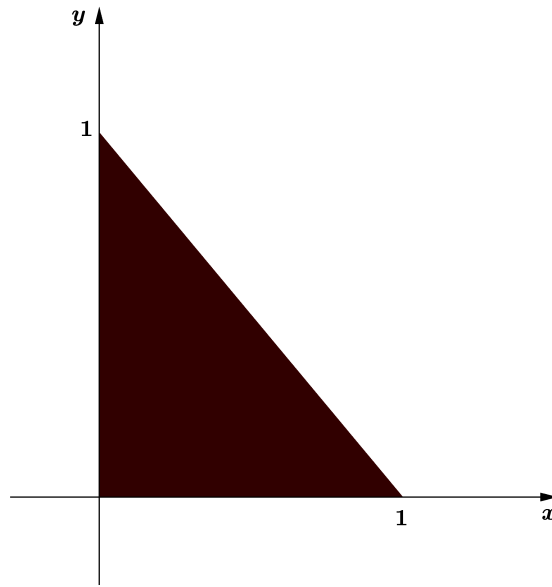


Figura 5.2: Triângulo “padrão”  $\widehat{K}$ .

Dessa maneira, considerando  $d_{K_i}$  como o diâmetro do triângulo  $K_i$  e  $\theta_{K_i}$  o menor ângulo do mesmo triângulo  $K_i$ , uma condição para a precisão no erro é que exista  $\beta > 0$  tal que

$$\frac{\theta_{K_i}}{d_{K_i}} \geq \beta. \quad (5.20)$$

Como  $d_{K_i} \leq h$  temos que  $\frac{\theta_{K_i}}{d_{K_i}} \geq \frac{\theta_{K_i}}{h}$ , onde  $h$  é um número definido conforme a definição 2.5. Daí, garantindo que  $\frac{\theta_{K_i}}{h} \geq \beta$  para todo  $h$ , então a condição (5.20) é satisfeita.

**Observação 5.6.** A condição (5.20) significa que os triângulos  $K_i$  não podem ser arbitrariamente “finos” ou, equivalentemente, os ângulos dos triângulos de  $K_i$  não podem ser arbitrariamente pequenos.

Como no caso unidimensional, dado  $u \in C^0(\bar{\Omega})$  definimos o interpolante de  $u$ , que denotamos por  $\pi_h u$ , como a função linear por partes coincidindo com  $u$  em  $N_i$ , i.e.,

$$\pi_h u(N_i) = u(N_i) \quad i = 1, \dots, M.$$

**Teorema 5.4.** *Seja  $K \in T_h$  um triângulo com vértices  $a^i, i = 1, 2, 3$ . Seja  $v \in C^\infty(K)$  e  $\pi v$  definida por*

$$\pi v(a^i) = v(a^i), i = 1, 2, 3.$$

*Então temos as seguintes estimativas:*

$$\|v - \pi v\|_{L^\infty(K)} \leq 2h^2 \max_{|\alpha|=1} \|\partial^\alpha v\|_{L^\infty(K)}$$

$$\max_{|\alpha|=1} \|\partial^\alpha (v - \pi v)\|_{L^\infty(K)} \leq 6 \frac{h^2}{\theta_K} \max_{|\alpha|=2} \|\partial^\alpha v\|_{L^\infty(K)},$$

onde  $\|v\|_{L^\infty(K)} = \max_{x \in K} |v(x)|$ .

*Demonstração.* Sendo  $\varphi_i(x)$  as funções da base de  $V_h$ , temos que

$$\pi v(x) = \sum_{i=1}^3 v(a^i) \varphi_i(x). \quad (5.21)$$

Usando a expansão de Taylor no ponto  $x = (x_1, x_2)$  obtemos que

$$\begin{aligned} v(a^i) &= v(x) + \sum_{j=1}^2 \frac{\partial v}{\partial x_j}(x)(a_j^i - x_j) + \frac{1}{2} \sum_{s,j=1}^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_s \partial x_j}(\xi)(a_s^i - x_s)(a_j^i - x_j) \\ &= v(x) + p_i(x) + R_i(x), \quad \xi \in (tx + (1-t)a^i), t \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Como temos que

$$|a_j^i - x_j| \leq h, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2$$

concluimos a seguinte estimativa para o resto  $R_i(x)$ :

$$|R_i(x)| \leq 2h^2 \max_{|\alpha|=2} \|\partial^\alpha v\|_{L^\infty(K)}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.23)$$

Por outro lado, temos que

$$\pi v(x) = v(x) \sum_{i=1}^3 \varphi_i(x) + \sum_{i=1}^3 p_i(x) \varphi_i(x) + \sum_{i=1}^3 R_i(x) \varphi_i(x).$$

Precisamos das seguintes afirmações:

$$\sum_{i=1}^3 \varphi_i(x) = 1, \quad (5.24)$$

$$\sum_{i=1}^3 p_i(x) \varphi_i(x) = 0, \quad (5.25)$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_i(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=1}^3 \varphi_i(x) = 0, \quad (5.26)$$

$$\sum_{i=1}^3 p_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial v}{\partial x_j}(x). \quad (5.27)$$

Vamos mostrar as afirmações (5.24)-(5.27). De fato, considere  $v \equiv 1$ , então

$$1 = v = \sum_{i=1}^3 v(a^i) \varphi_i(x) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i(x),$$



e

$$0 = \frac{\partial v}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi_i(x)) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \sum_{i=1}^3 \varphi_i(x) \right),$$

o que provou as afirmações (5.24) e (5.26). A seguir, seja  $v(x) = d_1 x_1 + d_2 x_2$ . Assim  $\pi v(x) = v(x)$ ,  $p_i(x) = d_1(a_1^i - x_1) + d_2(a_2^i - x_2)$  e  $R_i \equiv 0$ . Portanto,

$$v(x) = v(x) + \sum_{i=1}^3 [d_1(a_1^i - x_1) + d_2(a_2^i - x_2)]\varphi_i(x).$$

Escolhendo  $d_i = \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)$ , obtemos (5.25).

Para provar a afirmação (5.27), usando-se (5.21) e (5.23), observe que

$$\frac{\partial \pi v}{\partial x_1}(x) = v(x) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(x) + \sum_{i=1}^3 p_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(x) + \sum_{i=1}^3 R_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_1}(x),$$

que inserido na expressão  $v(x) = d_1 x_1 + d_2 x_2$  nos fornece

$$\frac{\partial v}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^2 d_j(a_j^i - x_j) \right) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x), \quad j = 1, 2.$$

Finalmente escolhendo  $d_j = \frac{\partial v}{\partial x_j}(x)$  obtemos

$$\frac{\partial v}{\partial x_j}(x) = \sum_{i=1}^3 p_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x).$$

Usando estas afirmações temos que

$$\pi v(x) = v(x) + \sum_{i=1}^3 R_i(x) \varphi_i(x),$$

ou, equivalentemente

$$v(x) - \pi v(x) = - \sum_{i=1}^3 R_i(x) \varphi_i(x).$$

Como também temos que  $0 \leq \varphi_i(x) \leq 1$ , então

$$\begin{aligned} |v(x) - \pi v(x)| &\leq \sum_{i=1}^3 |R_i(x)| |\varphi_i(x)| \\ &\leq \max_i |R_i(x)| \sum_{i=1}^3 \varphi_i(x) \\ &\leq 2h^2 \max_{|\alpha|=2} \|\partial^\alpha v\|_{L^\infty(K)}. \end{aligned}$$

Utilizando (5.21), temos que

$$\frac{\partial \pi v}{\partial x_j}(x) = \sum_{i=1}^3 v(a^i) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x), \quad j = 1, 2.$$

Por (5.23), segue que

$$\frac{\partial \pi v}{\partial x_j}(x) = v(x) \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^3 p_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^3 R_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x), j = 1, 2.$$

Assim, usando as afirmações (5.24) e (5.25), obtemos:

$$\frac{\partial \pi v}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^3 R_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x),$$

portanto

$$\left( \frac{\partial v}{\partial x_j} - \frac{\partial \pi v}{\partial x_j} \right)(x) = - \sum_{i=1}^3 R_i(x) \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x). \quad (5.28)$$

Usando que

$$\max_{x \in K} \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) \right| \leq \frac{1}{\theta_K},$$

e considerando que:

$$\sum_{i=1}^3 |R_i(x)| \left| \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) \right| = |R_1(x)| \frac{1}{\theta_K} + |R_2(x)| \frac{1}{\theta_K} + |R_3(x)| \frac{1}{\theta_K} \stackrel{(5.23)}{\leq} \frac{3}{\theta_K} (2h^2 \max_{|\alpha|=2} \|\partial^\alpha v\|_{L^\infty(K)}).$$

obtemos que

$$\left| \frac{\partial v}{\partial x_j}(x) - \frac{\partial \pi v}{\partial x_j}(x) \right| \leq 6 \frac{h^2}{\theta_K} \max_{|\alpha|=2} \|\partial^\alpha v\|_{L^\infty(K)}.$$

O que demonstra o Teorema 5.4. □

Como conclusão temos o seguinte corolário.

**Corolário 5.1.** *Sob as mesmas hipóteses do teorema 5.4, existe uma constante  $C$  tal que*

$$\|v - \pi v\|_{L^2(K_i)} \leq Ch^2 \|v\|_{H^2(K_i)}, k_i \in T_h,$$

e

$$\|v - \pi v\|_{H^1(K_i)} \leq C \frac{h^2}{\theta_K} \|v\|_{H^2(K_i)}. \quad (5.29)$$

Temos assim que, se  $u$  é solução de (5.7):

$$\begin{aligned} \|u - \pi u\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \sum_{i=1}^m \|u - \pi u\|_{L^2(K_i)}^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^m C^2 h^4 \|u\|_{H^2(K_i)}^2 \\ &\leq C^2 h^4 \sum_{i=1}^m \|u\|_{H^2(K_i)}^2 \\ &= C^2 h^4 \|u\|_{H^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

De forma análoga, lembrando-se que  $\frac{\theta_K}{h} \geq \beta$  (veja o parágrafo após a equação (5.20)), temos que

$$\|u - \pi_h u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \sum_{i=1}^m C^2 \frac{h^4}{\theta_K^2} \|u\|_{H^2(K_i)}^2 \leq \sum_{i=1}^m \frac{C^2 h^2}{\beta^2} \|u\|_{H^2(K_i)}^2,$$

concluindo-se que

$$\|u - \pi u\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{Ch}{\beta} \|u\|_{H^2(\Omega)}. \quad (5.30)$$

Finalmente podemos concluir a estimativa final de erro usando a **regularidade** da solução proveniente da formulação fraca. Esta regularidade também mostra a equivalência dos problemas (PV) e (5.7), partindo da hipótese de que  $f \in L^2(\Omega)$  em ambos os casos, unidimensional e bidimensional.

De fato, usamos o argumento de “bootstrap” da seguinte maneira [1]:

- da equação (5.7), temos que  $u \in H^2(\Omega)$ ;
- da imersão de Sobolev (5.15), temos que  $H^2(\Omega)$  está imerso continuamente em  $C(\overline{\Omega})$ , podendo então definir o interpolante em  $V_h$ .
- No caso de tomarmos  $f \in C(\Omega)$  então teríamos  $u \in C^2(\Omega)$  ou seja uma solução clássica.

Além disso, temos a seguinte estimativa devida a Agmon, Douglis, Nirenberg [2] para o caso em que  $f \in L^2(\Omega)$ , que afirma a existência de uma constante  $C_1$  que apenas depende da medida de  $\Omega$  tal que

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C_1 \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (5.31)$$

Usando esta conclusão na desigualdade (5.30), obtemos que

$$\|u - \pi u\|_{H^1(\Omega)} \leq C \frac{hC_1}{\beta} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (5.32)$$

o que mostra que a estimativa do erro na norma é de ordem 1, como visto para o caso unidimensional.

### 5.3 Caso Bidimensional não Estacionário

No Capítulo 4 estudamos a seguinte equação:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + v_1 \frac{\partial u}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma u = f, & (x, y) \in \Omega, t \in (0, T] \\ u = 0 & \text{em } \partial\Omega \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), \end{cases} \quad (5.33)$$

onde  $f$  é definida como:

$$f(x, y, t) = 0, \quad \forall (x, y) \neq (x_i, y_i) \text{ para algum } i \in \{1, \dots, 896\} \text{ e}$$

$$f(x_i, y_i, t) = \begin{cases} d, & \text{se } t < t_0 \\ 0, & \text{se } t \geq t_0, \quad d > 0. \end{cases}$$

Definimos a forma bilinear da formulação fraca do problema (5.33) como segue:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \alpha \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + v_1 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + v_2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma uv \, dx.$$

Vamos aproximar a solução de (5.33) exigindo que  $u$  e  $v$  estejam em um subespaço de  $H_0^1(\Omega)$  de dimensão finita para cada  $t$ . Seja  $\varphi_i \in H_0^1(\Omega)$  para  $i = 1, \dots, M$  base do subespaço  $V_h^t$  de  $H_0^1(\Omega)$ . Vamos aproximar  $u$ , solução de (5.33), por uma função

$$u_h(t, x) = \sum_{i=1}^M \alpha_i(t) \varphi_i(x), \quad (5.34)$$

que satisfaz

$$\begin{cases} \left\langle \frac{\partial u}{\partial t}, v \right\rangle + a(u, v) = \langle f, v \rangle, & v \in H_0^1(\Omega), t > 0, \\ \langle u(\cdot, 0), v \rangle = \langle u_0, v \rangle, & \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u(x, t) \in H_0^1(\Omega), & t > 0. \end{cases} \quad (5.35)$$

A discretização no tempo é feita através do método de Crank-Nicolson, como descrita no Capítulo 4, nas equações (4.9), (4.10), (4.11) e (4.12).

Temos a seguinte estimativa a priori:

$$\|u(T, \cdot)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^T a(u(t), u(t)) dt \leq C(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega)}^2 + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2), \quad (5.36)$$

escolhendo  $v = u$ . Tem-se também a estimativa a priori para a derivada (no sentido do traço)

$$\|\partial_t u\|_{L^\infty((0,T), L^2(\Omega))}^2 + \int_0^T a(u(t), u(t)) dt \leq C(\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+ \times \Omega)}^2 + \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2), \quad (5.37)$$

onde  $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$  e para extensões de  $u$  e  $u_0$  a todo o espaço produto indicado. Para mais detalhes sobre a obtenção destas estimativas (5.36)-(5.37), ver [30].

A partir das estimativas a priori (5.36)-(5.37), pode-se concluir uma estimativa do erro no caso bidimensional não estacionário da forma:

$$\|u_h - \pi u\|_{L^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \leq Ch^2 + |\Delta t|^4, \quad (5.38)$$

sendo  $u_h$  a aproximação da solução correspondente ao estágio de comprimento  $h$ . Para mais detalhes ver [14].

**Observação 5.7.** Note que na estimativa (5.38) quando o  $|\Delta t|$  tende para zero, temos uma estimativa similar (a menos da constante  $C$ ) à obtida para o caso estacionário (1.29).

Assim, determinamos as estimativas dos erros das equações estudadas.

# Conclusões

Estudamos o MEF para resolução de uma EDO e EDP, onde trabalhamos um exemplo de EDO para entendermos mais claramente o MDF e o MEF. Ao estudar o MEF em uma equação de Poisson em malha irregular, modelamos a temperatura em uma jóia de prata no formato de um trevo. E com isso percebemos a importância do MEF por ser aplicado em malhas irregulares, uma vez que, na maior parte das equações que modelam situações do nosso cotidiano os domínios são irregulares. Esse estudo foi fundamental para aprendermos a utilizar o MEF, para a equação que modela a dispersão de poluição do ar.

A utilização de parâmetros fuzzy obtido através dos SBRF com as EDP podem modelar e explicar certos fenômenos incorporando um maior número de variáveis que influenciam o processo. Este tipo de abordagem é utilizado no problema que modela a fonte de poluição de uma indústria.

Ao longo do trabalho, procuramos considerar fatores que influenciam no fenômeno estudado afim de considerarmos o problema mais próximo da realidade possível. Assim no Capítulo 1, procuramos informações sobre os fatores que influenciam nos parâmetros que consideramos como parâmetros fuzzy  $\alpha$ ,  $v_1$  e  $v_2$ , ou seja, procuramos informações sobre a temperatura ( $T$ ) e concentração de poluentes ( $u$ ) que influenciam na difusão  $\alpha$ , a força de atrito ( $A$ ) que influencia nas velocidades na direção  $x$  e  $y$ , para a construção dos SBRF. Neste capítulo percebemos a importância da colaboração de um especialista em climatologia.

No problema de poluição do ar com fronteira irregular determinístico, obtemos a mesma concentração de poluentes em diferentes nós pois, todos os parâmetros da equação são considerados constantes. Entretanto no problema de poluição do ar com a difusão, velocidades na direção  $x$  e  $y$  sendo parâmetros fuzzy, considerando o domínio sendo o mapa de uma cidade, no caso Uberlândia, determinamos que a melhor localização para um polo industrial, dentre os cinco nós estudados é na região leste, no nó 159. Essa conclusão só foi possível porque os valores para a difusão e para as velocidades são diferentes em pontos diferentes da cidade. Observamos também a importância de utilizar dados reais associados aos parâmetros, principalmente os da temperatura obtidos pelo satélite Landsat-8, pois tornamos o modelo mais consistente.

Afim de apresentar uma estimativa do erro para as aproximações das soluções numéricas para os problemas unidimensional, bidimensional estacionário e bidimensional no tempo foi necessário estudar vários conceitos da teoria de Análise Funcional. Com esse estudo concluímos que as aproximações das soluções das equações obtidas pelo MEF para os exemplos estudados tem erro de ordem 1. Para a aproximação da solução numérica da equação da concentração de poluentes, obtemos um erro dependendo apenas da malha e da discretização no tempo.

Para trabalhos futuros podemos estender o estudo realizado de dispersão da poluição de uma chaminé de uma indústria, para uma malha irregular representando o contorno de uma cidade com fronteira de Neumann, indicando a perda de poluição na fronteira da cidade. Outro estudo a ser realizado é incorporar outros fatores que influenciam a difusão e a velocidade, levando em consideração as informações dos especialistas na área. Estes estudos podem ser realizados colocando outras fontes de poluição no mesmo setor da cidade no mesmo tempo, e inclusive, medir a poluição em um ponto do setor que não tenha fonte de poluente. Essa modelagem matemática da concentração de poluentes pode ser realizada para outras cidades ou regiões mais extensas; também podemos incorporar informações de outros especialistas na área de climatologia e trabalhar com SBRF do tipo 2.

# Referências Bibliográficas

- [1] Adams, R.A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2] Agmon, S., Douglis, A. e Nirenberg, L., *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions*, I. Communications on Pure and Applied Mathematics, Vol.12, No. 4, p. 623-727, 1959.
- [3] Almeida, C. G., Jafelice, R. M. e Meyer, J. F. C. A., *Modelagem fuzzy em dinâmica populacional*, Anais do XXIX CNMAC, Campinas, 2006.
- [4] Axelsson, O. e Barker, V. A., *Finite element solution of boundary value problems*, Academic Press, 1984.
- [5] Barros, L. C., Bassanezi, R. C. e Leite, M. B., *The epidemiological models SI with fuzzy parameter of transmission*, Computers and Mathematics with Applications, Vol. 45, p. 1619-1628, 2003.
- [6] Barros, L. C. e Bassanezi, R. C., *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*, Editora Unicamp, 2ª ed., 2010.
- [7] Bertone, A. M. A., Jafelice, R. M., Barros, L. C. e Bassanezi, R. C., *On Fuzzy Solutions for Partial Differential Equations*, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 219, p. 68-80, 2013.
- [8] Borges, J. C., *Algumas Abordagens das Equações Diferenciais Parciais utilizando a Teoria dos Conjuntos Fuzzy*, Monografia, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2014.
- [9] Borges, J. C., Jafelice, R. S. M. e Garcia, R. O., *O Estudo da Temperatura de uma Jóia de Prata com Fronteira Irregular*, Anais do III Colóquio de Matemática da Região Sudeste, 2015.
- [10] Cantão, R. F., *Modelagem e simulação numérica de derrames de óleo no canal de São Sebastião*, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica-IMEC, Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada, Campinas-SP, 1998.
- [11] Castro, S. E. P., *Modelagem Matemática e Aproximação Numérica do Estudo de poluentes do Ar*, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica-IMEC, Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada, Campinas-SP, 1993.
- [12] Diniz, G. L., *A mudança no habitat de populações de peixes: de Rio a Represa-O Modelo Matemático*, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica-IMEC, Dissertação de Mestrado em Matemática Aplicada, Campinas-SP, 1994.
- [13] Diniz, G. L., *Dispersão de poluentes num sistema ar-água: modelagem, aproximação e aplicações*, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica-IMEC, Tese de Doutorado em Matemática Aplicada, Campinas-SP, 2003.
- [14] Douglas, Jr. e Dupont, T., *Galerkin Methods for Parabolic Equations*, SIAM Journal on Numerical Analysis, Vol. 7, No. 4, p. 575-626, Dec., 1970.

- [15] Edelstein-Keshet, L., *Mathematical Models in Biology*, SIAM, Philadelphia, 2005.
- [16] Ferreira, D. P. L., Jafelice, R. M. e Serqueira, E. O., *Using Fuzzy System in the Study of Luminescence and Potency of Neodymium Ions*, Applied Optics, Vol. 51, p. 6745-6752, 2012.
- [17] Fernandes, M. V. O., *Simulação da Concentração de Material Particulado de Origem Veicular em uma Interseção Sinalizada de Uberlândia-MG*, Instituto de engenharia Química-UFU, Dissertação de mestrado em Engenharia Química, Uberlândia - MG, 2013.
- [18] Franco, N. B., *Cálculo Numérico*, Pearson Prentice Hall, 2006.
- [19] Giacchini, B. L., *Uma breve introdução ao Método de Elementos Finitos*, Departamento de Matemática: Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais, 2012.
- [20] Gmsh: a three finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. <http://geuz.org/gmsh/>. Acesso: 28 de janeiro, 2015.
- [21] <http://www.cidades.ibge.gov.br>. Acesso: 10 de outubro, 2015.
- [22] [http://www.ufrgs.br/lmqa/arquivos/uploads/dispersao\\_poluentes.pdf](http://www.ufrgs.br/lmqa/arquivos/uploads/dispersao_poluentes.pdf). Acesso: 9 de outubro, 2015.
- [23] Inforzato, N. F., *Dispersão de poluentes nun sistema ar-água: modelagem matemática, aproximação numérica e simulação computacional*, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica-IMEC, Tese de Doutorado em Matemática Aplicada, Campinas-SP, 2008.
- [24] Jafelice, R. M., *Modelagem fuzzy para dinâmica de transferência de soropositivos para HIV em doença plenamente manifesta*, Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Tese de Doutorado, Campinas-SP, 2003.
- [25] Jafelice, R. M., Barros, L. C. e Bassanezi, R. C., *Usando a Teoria Fuzzy na Modelagem de Fenômenos Biológicos*, Simpósio de Aplicações em Lógica Fuzzy - SP, 2008.
- [26] Jafelice, R. M., Almeida, C., Meyer, J. F. C. A. e Vasconcelos, H. L., *Fuzzy parameters in a partial differential equation model for population dispersal of leaf-cutting ants*, Nonlinear Analysis: Real World Applications, Vol. 12, No. 6, p. 3397-3412, 2011.
- [27] Johnson, C., *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*, Courier Corporation, 2012.
- [28] Koga, M. T., *Dinâmica populacional da Mosca-dos-chifres (Haematobia irritans) em um ambiente com competição: simulações computacionais*, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica-IMEC, Tese de Doutorado em Matemática Aplicada, Campinas-SP, 2015.
- [29] Krindges, A., *Modelagem e simulação computacional de um problema tridimensional de difusão-advecção com uso de Navier-Stokes*, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica-IMEC, Tese de Doutorado em Matemática Aplicada, Campinas-SP, 2011.
- [30] Lions, J. L. , *Equations différentielles operationnelles et probleme aux limites*, Springer-Verlag, Berlin, 1961.
- [31] Marciel, S. A. e Oliveira, L. A., *Avaliação do valores gerados de temperatura de superfície dos sensores TIRs do satélite Landsat 8 aplicados ao perímetro urbano do município de Uberlândia-MG*, I Simpósio Internacional de Águas, Solos e Geotecnologias-SASGO, Uberlândia, 2015.

- [32] Marchuk, G. I., *Mathematical models in environmental problems*, Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 16, North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [33] Método dos Elementos Finitos: <http://www.ime.unicamp.br/~pulino/MT623/>. Acesso: 28 de janeiro, 2015.
- [34] Missio, M., *Modelos de EDP integrado à Lógica Fuzzy e Métodos Probabilísticos no tratamento de incertezas: uma aplicação à febre aftosa em bovinos*, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica-IMEC, Tese de doutorado em Matemática Aplicada, Campinas-SP, 2008.
- [35] Mistro, M., *O problema da poluição em rios por mercúrio metálico: Modelagem e Simulações*, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica-IMEC, Dissertação de mestrado em Matemática Aplicada, Campinas-SP, 1992.
- [36] Murcia, S. R. Dal-Ri e Lacaz, T. M. V. S., *Modelo de Poluição Atmosférica: Solução Numérica e Instabilidades Associadas*, Revista Matemática e Estatística, São Paulo, No. 20, p. 79-102, 2002.
- [37] Murray, J. D., *Mathematical Biology*, Springer, Heidelberg, 1989.
- [38] Obergunggenberger, M. e Pittschmann, S., *Differential equations with fuzzy parameter*, Math. and Computer Modelling of Dynamical Systems, Vol. 5, p. 181-202.
- [39] Okubo, A., *Diffusion an ecological pblems: Mathematical models*, Vol. 1, Springer, 1980.
- [40] Oliveira, C. C., Mello, P. H., Jafelice, R. S. M., Meyer, J.F., *A Model of Dispersion of Pollutants in the Air using Fuzzy Parameters*, International Symposium on Mathematical and Computational Biology, Rio de Janeiro - RJ, 2010.
- [41] Oliveira, D. S., *Aplicações de Equações Diferenciais com Parâmetro Fuzzy*, Monografia, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2011.
- [42] Oliveira, L. A., *Estudo de Caracterização Climática e de Direção Predominante dos Ventos da Cidade de Uberlândia/MG*, Relatório do Laboratório de Climatologia e Recursos Hídricos, Universidade Federal de Uberlândia, 2010.
- [43] Pregnotatto, S. A., *O Mal-das-Cadeiras em capivaras: estudo, modelagem e simulação de um caso*, Faculdade de Engenharia Elétrica e Computação-FEEC, Tese de Doutorado em Engenharia Elétrica, Campinas-SP, 2002.
- [44] Ruggiero, M. A. G., Lopes, V. L. R., *Cálculo Numérico- Aspectos teóricos e Computacionais*, Pearson Markron Books, 2<sup>a</sup> ed., 2006.
- [45] Silva, K. N. e Ribeiro Filho, V., *Desenvolvimento sócio-espacial e dinâmica urbana da zona sul da cidade de Uberlândia*, GEOUSP: Espaço e Tempo (Online), No. 31, p. 69-78, 2012.
- [46] Temam, R., *Navier-Stokes equations*, North-Holland, Amsterdam, 1977.
- [47] Vásquez, J. C. S., *Comportamento Evolutivo de Descarga de Água de Produção Decorrente de atividade Offshore: Tratamento Numérico e Simulação Computacional*, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica-IMEC, Tese de Doutorado em Matemática Aplicada, Campinas-SP, 2005.
- [48] Zadeh, L., *Fuzzy sets. Information and Control*, Vol. 8, p. 338-353, 1965.



# Apêndice A

## Tabela das Temperaturas em cada *nó*

As Tabelas A.1 a A.19 apresenta as temperaturas e as classes em cada *nó*.

Nós	Intervalos de temperaturas	Média dos intervalos	Nº da classe
1	26.0000-27.0000	26,50	14
2	24.0000-25.0000	24,50	12
3	23.0000-24.0000	23,50	11
4	24.0000-25.0000	24,50	12
5	24.0000-25.0000	24,50	12
5	25.0000-26.0000	25,50	13
6	24.0000-25.0000	24,50	12
6	25.0000-26.0000	25,50	13
7	24.0000-25.0000	24,50	12
8	22.0000-23.0000	22,50	10
9	24.0000-25.0000	24,50	12
9	25.0000-26.0000	25,50	13
10	21.0000-22.0000	21,50	9
10	22.0000-23.0000	22,50	10
11	21.0000-22.0000	21,50	9
11	22.0000-23.0000	22,50	10
12	21.0000-22.0000	21,50	9
13	24.0000-25.0000	24,50	12
14	22.0000-23.0000	22,50	10
15	21.0000-22.0000	21,50	9
16	21.0000-22.0000	21,50	9
17	21.0000-22.0000	21,50	9
18	21.0000-22.0000	21,50	9
19	24.0000-25.0000	24,50	12
20	25.0000-26.0000	25,50	13
21	23.0000-24.0000	23,50	11
22	24.0000-25.0000	24,50	12
23	23.0000-24.0000	23,50	11
23	24.0000-25.0000	24,50	12
24	24.0000-25.0000	24,50	12
25	23.0000-24.0000	23,50	11

Tabela A.1: Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.

Nós	Intervalos de temperaturas	Média dos intervalos	Nº da classe
26	21.0000-22.0000	21,50	9
26	22.0000-23.0000	22,50	10
27	23.0000-24.0000	23,50	11
28	24.0000-25.0000	24,50	12
29	25.0000-26.0000	25,50	13
30	23.0000-24.0000	23,50	11
30	24.0000-25.0000	24,50	12
31	20.0000-21.0000	20,50	8
32	21.0000-22.0000	21,50	9
33	20.0000-21.0000	20,50	8
34	23.0000-24.0000	23,50	11
35	19.0000-20.0000	19,50	7
36	21.0000-22.0000	21,50	9
36	22.0000-23.0000	22,50	10
37	23.0000-24.0000	23,50	11
38	24.0000-25.0000	24,50	12
39	24.0000-25.0000	24,50	12
40	22.0000-23.0000	22,50	10
41	21.0000 - 22.0000	21,50	9
42	24.0000 - 25.0000	24,50	12
43	23.0000 - 24.0000	23,50	11
44	19.0000 - 20.0000	19,50	7
45	22.0000 - 23.0000	22,50	10
45	23.0000 - 24.0000	23,50	11
46	24.0000 - 25.0000	24,50	12
46	25.0000 - 26.0000	25,50	13
47	24.0000 - 25.0000	24,50	12
47	25.0000 - 26.0000	25,50	13
48	22.0000 - 23.0000	22,50	10
49	21.0000 - 22.0000	21,50	9
50	24.0000 - 25.0000	24,50	12
51	25.0000 - 26.0000	25,50	13
52	22.0000 - 23.0000	22,50	10
53	22.0000 - 23.0000	22,50	10
54	24.0000 - 25.0000	24,50	12
55	22.0000 - 23.0000	22,50	10
56	21.0000 - 22.0000	21,50	9
57	22.0000 - 23.0000	22,50	10
58	22.0000 - 23.0000	22,50	10
59	23.0000 - 24.0000	23,50	11
60	20.0000 - 21.0000	20,50	8
61	22.0000 - 23.0000	22,50	10
62	23.0000 - 24.0000	23,50	11
63	24.0000 - 25.0000	24,50	12
64	23.0000 - 24.0000	23,50	11
65	23.0000 - 24.0000	23,50	11
66	23.0000 - 24.0000	23,50	11
67	22.0000 - 23.0000	22,50	10
68	23.0000 - 24.0000	23,50	11
69	24.0000 - 25.0000	24,50	12

Tabela A.2: Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.

Nós	Intervalos de temperaturas	Média dos intervalos	Nº da classe
70	25.0000 - 26.0000	25,50	13
71	23.0000 - 24.0000	23,50	11
72	24.0000 - 25.0000	24,50	12
73	23.0000 - 24.0000	23,50	11
74	23.0000 - 24.0000	23,50	11
75	23.0000 - 24.0000	23,50	11
76	24.0000 - 25.0000	24,50	12
77	23.0000 - 24.0000	23,50	11
78	19.0000 - 20.0000	19,50	7
79	21.0000 - 22.0000	21,50	9
80	21.0000 - 22.0000	21,50	9
81	24.0000 - 25.0000	24,50	12
82	23.0000 - 24.0000	23,50	11
83	23.0000 - 24.0000	23,50	11
84	20.0000 - 21.0000	20,50	8
85	21.0000 - 22.0000	21,50	9
86	22.0000 - 23.0000	22,50	10
87	24.0000 - 25.0000	24,50	12
88	25.0000 - 26.0000	25,50	13
89	24.0000 - 25.0000	24,50	12
90	23.0000 - 24.0000	23,50	11
91	23.0000 - 24.0000	23,50	11
92	24.0000 - 25.0000	24,50	12
93	22.0000 - 23.0000	22,50	10
94	25.0000 - 26.0000	25,50	13
95	23.0000 - 24.0000	23,50	11
96	22.0000 - 23.0000	22,50	10
97	25.0000 - 26.0000	25,50	13
98	24.0000 - 25.0000	24,50	12
99	23.0000 - 24.0000	23,50	11
100	20.0000 - 21.0000	20,50	8
101	23.0000 - 24.0000	23,50	11
102	20.0000 - 21.0000	20,50	8
103	24.0000 - 25.0000	24,50	12
104	20.0000 - 21.0000	20,50	8
105	24.0000 - 25.0000	24,50	12
106	23.0000 - 24.0000	23,50	11
107	23.0000 - 24.0000	23,50	11
108	23.0000 - 24.0000	23,50	11
109	22.0000 - 23.0000	22,50	10
110	23.0000 - 24.0000	23,50	11
111	22.0000 - 23.0000	22,50	10
112	22.0000 - 23.0000	22,50	10
113	24.0000 - 25.0000	24,50	12
114	23.0000 - 24.0000	23,50	11
115	21.0000 - 22.0000	21,50	9
116	23.0000 - 24.0000	23,50	11
117	22.0000 - 23.0000	22,50	10

Tabela A.3: Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.

Nós	Intervalos de temperaturas	Média dos intervalos	Nº da classe
118	24.0000 - 25.0000	24,50	12
119	24.0000 - 25.0000	24,50	12
120	24.0000 - 25.0000	24,50	12
121	24.0000 - 25.0000	24,50	12
122	23.0000 - 24.0000	23,50	11
123	23.0000 - 24.0000	23,50	11
124	23.0000 - 24.0000	23,50	11
125	23.0000 - 24.0000	23,50	11
126	23.0000 - 24.0000	23,50	11
127	24.0000 - 25.0000	24,50	12
128	23.0000 - 24.0000	23,50	11
129	22.0000 - 23.0000	22,50	10
130	21.0000 - 22.0000	21,50	9
131	22.0000 - 23.0000	22,50	10
132	23.0000 - 24.0000	23,50	11
133	23.0000 - 24.0000	23,50	11
134	23.0000 - 24.0000	23,50	11
135	24.0000 - 25.0000	24,50	12
136	23.0000 - 24.0000	23,50	11
137	23.0000 - 24.0000	23,50	11
138	23.0000 - 24.0000	23,50	11
139	21.0000 - 22.0000	21,50	9
140	23.0000 - 24.0000	23,50	11
141	21.0000 - 22.0000	21,50	9
142	22.0000 - 23.0000	22,50	10
143	24.0000 - 25.0000	24,50	12
144	23.0000 - 24.0000	23,50	11
145	24.0000 - 25.0000	24,50	12
146	21.0000 - 22.0000	21,50	9
147	24.0000 - 25.0000	24,50	12
148	24.0000 - 25.0000	24,50	12
149	24.0000 - 25.0000	24,50	12
150	22.0000 - 23.0000	22,50	10
151	24.0000 - 25.0000	24,50	12
152	23.0000 - 24.0000	23,50	11
153	23.0000 - 24.0000	23,50	11
154	23.0000 - 24.0000	23,50	11
155	26.0000 - 27.0000	26,50	14
156	21.0000 - 22.0000	21,50	9
157	21.0000 - 22.0000	21,50	9
158	23.0000 - 24.0000	23,50	11
159	19.0000 - 20.0000	19,50	7
160	22.0000 - 23.0000	22,50	10
161	23.0000 - 24.0000	23,50	11
162	23.0000 - 24.0000	23,50	11
163	24.0000 - 25.0000	24,50	12
164	22.0000 - 23.0000	22,50	10
165	22.0000 - 23.0000	22,50	10
166	24.0000 - 25.0000	24,50	12

Tabela A.4: Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.

Nós	Intervalos de temperaturas	Média dos intervalos	Nº da classe
167	22.0000 - 23.0000	22,50	10
168	21.0000 - 22.0000	21,50	9
169	25.0000 - 26.0000	25,50	13
170	19.0000 - 20.0000	19,50	7
171	23.0000 - 24.0000	23,50	11
172	24.0000 - 25.0000	24,50	12
173	23.0000 - 24.0000	23,50	11
174	25.0000 - 26.0000	25,50	13
175	19.0000 - 20.0000	19,50	7
176	24.0000 - 25.0000	24,50	12
177	23.0000 - 24.0000	23,50	11
178	23.0000 - 24.0000	23,50	11
179	24.0000 - 25.0000	24,50	12
180	23.0000 - 24.0000	23,50	11
181	23.0000 - 24.0000	23,50	11
182	24.0000 - 25.0000	24,50	12
183	23.0000 - 24.0000	23,50	11
184	23.0000 - 24.0000	23,50	11
185	25.0000 - 26.0000	25,50	13
186	23.0000 - 24.0000	23,50	11
187	23.0000 - 24.0000	23,50	11
188	23.0000 - 24.0000	23,50	11
189	23.0000 - 24.0000	23,50	11
190	24.0000 - 25.0000	24,50	12
191	22.0000 - 23.0000	22,50	10
192	23.0000 - 24.0000	23,50	11
193	21.0000 - 22.0000	21,50	9
194	22.0000 - 23.0000	22,50	10
195	23.0000 - 24.0000	23,50	11
196	23.0000 - 24.0000	23,50	11
197	22.0000 - 23.0000	22,50	10
198	22.0000 - 23.0000	22,50	10
199	24.0000 - 25.0000	24,50	12
200	22.0000 - 23.0000	22,50	10
201	25.0000 - 26.0000	25,50	13
202	23.0000 - 24.0000	23,50	11
203	24.0000 - 25.0000	24,50	12
204	24.0000 - 25.0000	24,50	12
205	24.0000 - 25.0000	24,50	12
206	22.0000 - 23.0000	22,50	10
207	23.0000 - 24.0000	23,50	11
208	21.0000 - 22.0000	21,50	9
209	25.0000 - 26.0000	25,50	13
210	23.0000 - 24.0000	23,50	11
211	24.0000 - 25.0000	24,50	12
212	23.0000 - 24.0000	23,50	11
213	23.0000 - 24.0000	23,50	11
214	23.0000 - 24.0000	23,50	11
215	24.0000 - 25.0000	24,50	12

Tabela A.5: Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.

Nós	Intervalos de temperaturas	Média dos intervalos	Nº da classe
216	22.0000 - 23.0000	22,50	10
217	24.0000 - 25.0000	24,50	12
218	23.0000 - 24.0000	23,50	11
219	24.0000 - 25.0000	24,50	12
220	24.0000 - 25.0000	24,50	12
221	22.0000 - 23.0000	22,50	10
222	23.0000 - 24.0000	23,50	11
223	23.0000 - 24.0000	23,50	11
224	24.0000 - 25.0000	24,50	12
225	24.0000 - 25.0000	24,50	12
226	23.0000 - 24.0000	23,50	11
227	24.0000 - 25.0000	24,50	12
228	23.0000 - 24.0000	23,50	11
229	22.0000 - 23.0000	22,50	10
230	22.0000 - 23.0000	22,50	10
231	24.0000 - 25.0000	24,50	12
232	23.0000 - 24.0000	23,50	11
233	22.0000 - 23.0000	22,50	10
234	22.0000 - 23.0000	22,50	10
235	23.0000 - 24.0000	23,50	11
236	23.0000 - 24.0000	23,50	11
237	24.0000 - 25.0000	24,50	12
238	23.0000 - 24.0000	23,50	11
239	24.0000 - 25.0000	24,50	12
240	24.0000 - 25.0000	24,50	12
241	24.0000 - 25.0000	24,50	12
242	21.0000 - 22.0000	21,50	9
243	23.0000 - 24.0000	23,50	11
244	21.0000 - 22.0000	21,50	9
245	24.0000 - 25.0000	24,50	12
246	25.0000 - 26.0000	25,50	13
247	23.0000 - 24.0000	23,50	11
248	25.0000 - 26.0000	25,50	13
249	22.0000 - 23.0000	22,50	10
250	23.0000 - 24.0000	23,50	11
251	23.0000 - 24.0000	23,50	11
252	21.0000 - 22.0000	21,50	9
253	24.0000 - 25.0000	24,50	12
254	26.0000 - 27.0000	26,50	14
255	24.0000 - 25.0000	24,50	12
256	24.0000 - 25.0000	24,50	12
258	24.0000 - 25.0000	24,50	12
259	23.0000 - 24.0000	23,50	11
260	23.0000 - 24.0000	23,50	11
261	21.0000 - 22.0000	21,50	9
262	23.0000 - 24.0000	23,50	11
263	25.0000 - 26.0000	25,50	13
264	22.0000 - 23.0000	22,50	10

Tabela A.6: Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.

Nós	Intervalos de temperaturas	Média dos intervalos	Nº da classe
265	21.0000 - 22.0000	21,50	9
266	22.0000 - 23.0000	22,50	10
267	22.0000 - 23.0000	22,50	10
268	22.0000 - 23.0000	22,50	10
269	23.0000 - 24.0000	23,50	11
270	22.0000 - 23.0000	22,50	10
271	25.0000 - 26.0000	25,50	13
272	21.0000 - 22.0000	21,50	9
273	22.0000 - 23.0000	22,50	10
274	21.0000 - 22.0000	21,50	9
275	21.0000 - 22.0000	21,50	9
276	22.0000 - 23.0000	22,50	10
277	22.0000 - 23.0000	22,50	10
278	21.0000 - 22.0000	21,50	9
279	22.0000 - 23.0000	22,50	10
280	22.0000 - 23.0000	22,50	10
281	25.0000 - 26.0000	25,50	13
282	25.0000 - 26.0000	25,50	13
283	24.0000 - 25.0000	24,50	12
284	24.0000 - 25.0000	24,50	12
285	22.0000 - 23.0000	22,50	10
286	24.0000 - 25.0000	24,50	12
287	22.0000 - 23.0000	22,50	10
288	23.0000 - 24.0000	23,50	11
289	22.0000 - 23.0000	22,50	10
290	23.0000 - 24.0000	23,50	11
291	22.0000 - 23.0000	22,50	10
292	25.0000 - 26.0000	25,50	13
293	24.0000 - 25.0000	24,50	12
294	24.0000 - 25.0000	24,50	12
295	24.0000 - 25.0000	24,50	12
296	23.0000 - 24.0000	23,50	11
297	24.0000 - 25.0000	24,50	12
298	23.0000 - 24.0000	23,50	11
299	23.0000 - 24.0000	23,50	11
300	21.0000 - 22.0000	21,50	9
301	24.0000 - 25.0000	24,50	12
302	22.0000 - 23.0000	22,50	10
303	22.0000 - 23.0000	22,50	10
304	24.0000 - 25.0000	24,50	12
305	22.0000 - 23.0000	22,50	10
305	23.0000 - 24.0000	23,50	11
306	24.0000 - 25.0000	24,50	12
307	20.0000 - 21.0000	20,50	8
308	21.0000 - 22.0000	21,50	9
309	21.0000 - 22.0000	21,50	9
310	20.0000 - 21.0000	20,50	8
311	20.0000 - 21.0000	20,50	8
312	19.0000 - 20.0000	19,50	7

Tabela A.7: Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.

Nós	Intervalos de temperaturas	Média dos intervalos	Nº da classe
313	23.0000 - 24.0000	23,50	11
314	21.0000 - 22.0000	21,50	9
315	22.0000 - 23.0000	22,50	10
316	20.0000 - 21.0000	20,50	8
317	23.0000 - 24.0000	23,50	11
318	23.0000 - 24.0000	23,50	11
319	23.0000 - 24.0000	23,50	11
320	24.0000 - 25.0000	24,50	12
321	23.0000 - 24.0000	23,50	11
322	23.0000 - 24.0000	23,50	11
323	20.0000 - 21.0000	20,50	8
324	23.0000 - 24.0000	23,50	11
325	20.0000 - 21.0000	20,50	8
325	21.0000 - 22.0000	21,50	9
326	20.0000 - 21.0000	20,50	8
327	20.0000 - 21.0000	20,50	8
328	22.0000 - 23.0000	22,50	10
329	19.0000 - 20.0000	19,50	7
330	23.0000 - 24.0000	23,50	11
331	23.0000 - 24.0000	23,50	11
332	24.0000 - 25.0000	24,50	12
333	25.0000 - 26.0000	25,50	13
334	21.0000 - 22.0000	21,50	9
335	24.0000 - 25.0000	24,50	12
336	24.0000 - 25.0000	24,50	12
337	24.0000 - 25.0000	24,50	12
338	23.0000 - 24.0000	23,50	11
339	22.0000 - 23.0000	22,50	10
340	25.0000 - 26.0000	25,50	13
341	22.0000 - 23.0000	22,50	10
342	22.0000 - 23.0000	22,50	10
343	22.0000 - 23.0000	22,50	10
344	23.0000 - 24.0000	23,50	11
345	26.0000 - 27.0000	26,50	14
346	25.0000 - 26.0000	25,50	13
347	25.0000 - 26.0000	25,50	13
348	26.0000 - 27.0000	26,50	14
349	22.0000 - 23.0000	22,50	10
350	24.0000 - 25.0000	24,50	12
351	23.0000 - 24.0000	23,50	11
352	23.0000 - 24.0000	23,50	11
353	23.0000 - 24.0000	23,50	11
354	22.0000 - 23.0000	22,50	10
355	22.0000 - 23.0000	22,50	10
356	21.0000 - 22.0000	21,50	9
357	22.0000 - 23.0000	22,50	10
358	20.0000 - 21.0000	20,50	8
359	21.0000 - 22.0000	21,50	9
360	23.0000 - 24.0000	23,50	11

Tabela A.8: Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.



Nós	Intervalos de temperaturas	Média dos intervalos	Nº da classe
361	23.0000 - 24.0000	23,50	11
362	23.0000 - 24.0000	23,50	11
363	19.0000 - 20.0000	19,50	7
364	20.0000 - 21.0000	20,50	8
365	20.0000 - 21.0000	20,50	8
366	20.0000 - 21.0000	20,50	8
367	22.0000 - 23.0000	22,50	10
368	23.0000 - 24.0000	23,50	11
369	23.0000 - 24.0000	23,50	11
370	22.0000 - 23.0000	22,50	10
371	24.0000 - 25.0000	24,50	12
372	21.0000 - 22.0000	21,50	9
373	21.0000 - 22.0000	21,50	9
374	20.0000 - 21.0000	20,50	8
375	20.0000 - 21.0000	20,50	8
376	20.0000 - 21.0000	20,50	8
377	19.0000 - 20.0000	19,50	7
378	22.0000 - 23.0000	22,50	10
379	23.0000 - 24.0000	23,50	11
380	24.0000 - 25.0000	24,50	12
381	25.0000 - 26.0000	25,50	13
382	23.0000 - 24.0000	23,50	11
383	23.0000 - 24.0000	23,50	11
384	24.0000 - 25.0000	24,50	12
385	23.0000 - 24.0000	23,50	11
386	23.0000 - 24.0000	23,50	11
387	21.0000 - 22.0000	21,50	9
388	25.0000 - 26.0000	25,50	13
389	26.0000 - 27.0000	26,50	14
390	25.0000 - 26.0000	25,50	13
391	25.0000 - 26.0000	25,50	13
392	25.0000 - 26.0000	25,50	13
393	25.0000 - 26.0000	25,50	13
394	24.0000 - 25.0000	24,50	12
395	24.0000 - 25.0000	24,50	12
396	23.0000 - 24.0000	23,50	11
397	23.0000 - 24.0000	23,50	11
398	24.0000 - 25.0000	24,50	12
399	23.0000 - 24.0000	23,50	11
400	24.0000 - 25.0000	24,50	12
401	23.0000 - 24.0000	23,50	11
402	23.0000 - 24.0000	23,50	11
403	23.0000 - 24.0000	23,50	11
404	23.0000 - 24.0000	23,50	11
405	24.0000 - 25.0000	24,50	12
406	24.0000 - 25.0000	24,50	12
407	22.0000 - 23.0000	22,50	10
408	23.0000 - 24.0000	23,50	11
409	22.0000 - 23.0000	22,50	10

Tabela A.9: Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.

Nós	Intervalos de temperaturas	Média dos intervalos	Nº da classe
410	23.0000 - 24.0000	23,50	11
411	22.0000 - 23.0000	22,50	10
412	23.0000 - 24.0000	23,50	11
413	23.0000 - 24.0000	23,50	11
414	22.0000 - 23.0000	22,50	10
415	22.0000 - 23.0000	22,50	10
416	23.0000 - 24.0000	23,50	11
417	22.0000 - 23.0000	22,50	10
418	22.0000 - 23.0000	22,50	10
419	21.0000 - 22.0000	21,50	9
420	23.0000 - 24.0000	23,50	11
421	22.0000 - 23.0000	22,50	10
422	24.0000 - 25.0000	24,50	12
423	24.0000 - 25.0000	24,50	12
424	23.0000 - 24.0000	23,50	11
425	23.0000 - 24.0000	23,50	11
426	23.0000 - 24.0000	23,50	11
427	22.0000 - 23.0000	22,50	10
428	23.0000 - 24.0000	23,50	11
429	23.0000 - 24.0000	23,50	11
430	23.0000 - 24.0000	23,50	11
431	21.0000 - 22.0000	21,50	9
432	22.0000 - 23.0000	22,50	10
433	23.0000 - 24.0000	23,50	11
434	23.0000 - 24.0000	23,50	11
435	22.0000 - 23.0000	22,50	10
436	22.0000 - 23.0000	22,50	10
437	21.0000 - 22.0000	21,50	9
438	22.0000 - 23.0000	22,50	10
439	23.0000 - 24.0000	23,50	11
440	22.0000 - 23.0000	22,50	10
441	22.0000 - 23.0000	22,50	10
442	19.0000 - 20.0000	19,50	7
443	20.0000 - 21.0000	20,50	8
444	22.0000 - 23.0000	22,50	10
445	23.0000 - 24.0000	23,50	11
446	24.0000 - 25.0000	24,50	12
447	24.0000 - 25.0000	24,50	12
448	24.0000 - 25.0000	24,50	12
449	23.0000 - 24.0000	23,50	11
450	23.0000 - 24.0000	23,50	11
451	22.0000 - 23.0000	22,50	10
452	23.0000 - 24.0000	23,50	11
453	23.0000 - 24.0000	23,50	11
454	24.0000 - 25.0000	24,50	12
455	22.0000 - 23.0000	22,50	10
456	20.0000 - 21.0000	20,50	8
457	23.0000 - 24.0000	23,50	11
458	19.0000 - 20.0000	19,50	7

Tabela A.10: Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.

Nós	Intervalos de temperaturas	Média dos intervalos	Nº da classe
459	20.0000 - 21.0000	20,50	8
460	22.0000 - 23.0000	22,50	10
461	24.0000 - 25.0000	24,50	12
462	24.0000 - 25.0000	24,50	12
463	25.0000 - 26.0000	25,50	13
464	25.0000 - 26.0000	25,50	13
465	24.0000 - 25.0000	24,50	12
466	24.0000 - 25.0000	24,50	12
467	22.0000 - 23.0000	22,50	10
468	24.0000 - 25.0000	24,50	12
469	24.0000 - 25.0000	24,50	12
470	24.0000 - 25.0000	24,50	12
471	25.0000 - 26.0000	25,50	13
472	24.0000 - 25.0000	24,50	12
473	23.0000 - 24.0000	23,50	11
474	23.0000 - 24.0000	23,50	11
475	23.0000 - 24.0000	23,50	11
476	21.0000 - 22.0000	21,50	9
477	21.0000 - 22.0000	21,50	9
478	22.0000 - 23.0000	22,50	10
479	22.0000 - 23.0000	22,50	10
480	23.0000 - 24.0000	23,50	11
481	24.0000 - 25.0000	24,50	12
482	23.0000 - 24.0000	23,50	11
483	23.0000 - 24.0000	23,50	11
484	23.0000 - 24.0000	23,50	11
485	22.0000 - 23.0000	22,50	10
486	23.0000 - 24.0000	23,50	11
487	24.0000 - 25.0000	24,50	12
488	22.0000 - 23.0000	22,50	10
489	23.0000 - 24.0000	23,50	11
490	22.0000 - 23.0000	22,50	10
491	23.0000 - 24.0000	23,50	11
492	23.0000 - 24.0000	23,50	11
493	23.0000 - 24.0000	23,50	11
494	24.0000 - 25.0000	24,50	12
495	23.0000 - 24.0000	23,50	11
496	23.0000 - 24.0000	23,50	11
497	23.0000 - 24.0000	23,50	11
498	23.0000 - 24.0000	23,50	11
499	21.0000 - 22.0000	21,50	9
500	23.0000 - 24.0000	23,50	11
501	23.0000 - 24.0000	23,50	11
502	22.0000 - 23.0000	22,50	10
503	22.0000 - 23.0000	22,50	10
504	22.0000 - 23.0000	22,50	10
505	23.0000 - 24.0000	23,50	11
506	23.0000 - 24.0000	23,50	11
507	24.0000 - 25.0000	24,50	12

Tabela A.11: Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.

Nós	Intervalos de temperaturas	Média dos intervalos	Nº da classe
508	21.0000 - 22.0000	21,50	9
509	24.0000 - 25.0000	24,50	12
510	22.0000 - 23.0000	22,50	10
511	24.0000 - 25.0000	24,50	12
512	24.0000 - 25.0000	24,50	12
513	22.0000 - 23.0000	22,50	10
514	23.0000 - 24.0000	23,50	11
515	23.0000 - 24.0000	23,50	11
516	23.0000 - 24.0000	23,50	11
517	23.0000 - 24.0000	23,50	11
518	22.0000 - 23.0000	22,50	10
519	21.0000 - 22.0000	21,50	9
520	23.0000 - 24.0000	23,50	11
521	21.0000 - 22.0000	21,50	9
522	21.0000 - 22.0000	21,50	9
523	21.0000 - 22.0000	21,50	9
524	22.0000 - 23.0000	22,50	10
525	22.0000 - 23.0000	22,50	10
526	24.0000 - 25.0000	24,50	12
527	24.0000 - 25.0000	24,50	12
528	20.0000 - 21.0000	20,50	8
529	25.0000 - 26.0000	25,50	13
530	23.0000 - 24.0000	23,50	11
531	24.0000 - 25.0000	24,50	12
532	24.0000 - 25.0000	24,50	12
533	22.0000 - 23.0000	22,50	10
534	22.0000 - 23.0000	22,50	10
535	24.0000 - 25.0000	24,50	12
536	20.0000 - 21.0000	20,50	8
537	21.0000 - 22.0000	21,50	9
538	23.0000 - 24.0000	23,50	11
539	21.0000 - 22.0000	21,50	9
540	20.0000 - 21.0000	20,50	8
541	22.0000 - 23.0000	22,50	10
542	22.0000 - 23.0000	22,50	10
543	24.0000 - 25.0000	24,50	12
544	23.0000 - 24.0000	23,50	11
545	23.0000 - 24.0000	23,50	11
546	24.0000 - 25.0000	24,50	12
547	23.0000 - 24.0000	23,50	11
548	24.0000 - 25.0000	24,50	12
549	24.0000 - 25.0000	24,50	12
550	23.0000 - 24.0000	23,50	11
551	23.0000 - 24.0000	23,50	11
552	23.0000 - 24.0000	23,50	11
553	23.0000 - 24.0000	23,50	11
554	22.0000 - 23.0000	22,50	10
555	22.0000 - 23.0000	22,50	10
556	23.0000 - 24.0000	23,50	11

Tabela A.12: Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.

Nós	Intervalos de temperaturas	Média dos intervalos	Nº da classe
557	22.0000 - 23.0000	22,50	10
558	22.0000 - 23.0000	22,50	10
559	22.0000 - 23.0000	22,50	10
560	23.0000 - 24.0000	23,50	11
561	20.0000 - 21.0000	20,50	8
562	23.0000 - 24.0000	23,50	11
563	22.0000 - 23.0000	22,50	10
564	23.0000 - 24.0000	23,50	11
565	24.0000 - 25.0000	24,50	12
566	23.0000 - 24.0000	23,50	11
567	23.0000 - 24.0000	23,50	11
568	23.0000 - 24.0000	23,50	11
569	24.0000 - 25.0000	24,50	12
570	24.0000 - 25.0000	24,50	12
571	24.0000 - 25.0000	24,50	12
572	23.0000 - 24.0000	23,50	11
573	24.0000 - 25.0000	24,50	12
574	23.0000 - 24.0000	23,50	11
575	25.0000 - 26.0000	25,50	13
576	24.0000 - 25.0000	24,50	12
577	22.0000 - 23.0000	22,50	10
578	24.0000 - 25.0000	24,50	12
579	24.0000 - 25.0000	24,50	12
580	24.0000 - 25.0000	24,50	12
581	23.0000 - 24.0000	23,50	11
582	22.0000 - 23.0000	22,50	10
583	23.0000 - 24.0000	23,50	11
584	23.0000 - 24.0000	23,50	11
585	25.0000 - 26.0000	25,50	13
586	23.0000 - 24.0000	23,50	11
587	22.0000 - 23.0000	22,50	10
588	22.0000 - 23.0000	22,50	10
589	23.0000 - 24.0000	23,50	11
590	24.0000 - 25.0000	24,50	12
591	24.0000 - 25.0000	24,50	12
592	23.0000 - 24.0000	23,50	11
593	23.0000 - 24.0000	23,50	11
594	23.0000 - 24.0000	23,50	11
595	23.0000 - 24.0000	23,50	11
596	22.0000 - 23.0000	22,50	10
597	24.0000 - 25.0000	24,50	12
598	24.0000 - 25.0000	24,50	12
599	25.0000 - 26.0000	25,50	13
600	23.0000 - 24.0000	23,50	11
601	24.0000 - 25.0000	24,50	12
602	23.0000 - 24.0000	23,50	11
603	23.0000 - 24.0000	23,50	11
604	24.0000 - 25.0000	24,50	12
605	24.0000 - 25.0000	24,50	12

Tabela A.13: Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.

Nós	Intervalos de temperaturas	Média dos intervalos	Nº da classe
606	23.0000 - 24.0000	23,50	11
607	23.0000 - 24.0000	23,50	11
608	23.0000 - 24.0000	23,50	11
609	22.0000 - 23.0000	22,50	10
610	23.0000 - 24.0000	23,50	11
611	23.0000 - 24.0000	23,50	11
612	23.0000 - 24.0000	23,50	11
613	23.0000 - 24.0000	23,50	11
614	24.0000 - 25.0000	24,50	12
615	23.0000 - 24.0000	23,50	11
616	24.0000 - 25.0000	24,50	12
617	24.0000 - 25.0000	24,50	12
618	23.0000 - 24.0000	23,50	11
619	27.0000 - 28.0000	27,50	15
620	24.0000 - 25.0000	24,50	12
621	24.0000 - 25.0000	24,50	12
622	23.0000 - 24.0000	23,50	11
623	21.0000 - 22.0000	21,50	9
624	25.0000 - 26.0000	25,50	13
625	23.0000 - 24.0000	23,50	11
626	23.0000 - 24.0000	23,50	11
627	22.0000 - 23.0000	22,50	10
628	23.0000 - 24.0000	23,50	11
629	20.0000 - 21.0000	20,50	8
630	23.0000 - 24.0000	23,50	11
631	23.0000 - 24.0000	23,50	11
632	24.0000 - 25.0000	24,50	12
633	24.0000 - 25.0000	24,50	12
634	23.0000 - 24.0000	23,50	11
635	22.0000 - 23.0000	22,50	10
636	24.0000 - 25.0000	24,50	12
637	24.0000 - 25.0000	24,50	12
638	23.0000 - 24.0000	23,50	11
639	23.0000 - 24.0000	23,50	11
640	23.0000 - 24.0000	23,50	11
641	22.0000 - 23.0000	22,50	10
642	22.0000 - 23.0000	22,50	10
643	23.0000 - 24.0000	23,50	11
644	23.0000 - 24.0000	23,50	11
645	23.0000 - 24.0000	23,50	11
646	23.0000 - 24.0000	23,50	11
647	21.0000 - 22.0000	21,50	9
648	23.0000 - 24.0000	23,50	11
649	23.0000 - 24.0000	23,50	11
650	23.0000 - 24.0000	23,50	11
651	23.0000 - 24.0000	23,50	11
652	23.0000 - 24.0000	23,50	11
653	23.0000 - 24.0000	23,50	11
654	23.0000 - 24.0000	23,50	11

Tabela A.14: Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.

Nós	Intervalos de temperaturas	Média dos intervalos	Nº da classe
655	24.0000 - 25.0000	24,50	12
656	23.0000 - 24.0000	23,50	11
657	23.0000 - 24.0000	23,50	11
658	22.0000 - 23.0000	22,50	10
659	23.0000 - 24.0000	23,50	11
660	23.0000 - 24.0000	23,50	11
661	24.0000 - 25.0000	24,50	12
662	24.0000 - 25.0000	24,50	12
663	23.0000 - 24.0000	23,50	11
664	22.0000 - 23.0000	22,50	10
665	22.0000 - 23.0000	22,50	10
666	22.0000 - 23.0000	22,50	10
667	23.0000 - 24.0000	23,50	11
668	22.0000 - 23.0000	22,50	10
669	22.0000 - 23.0000	22,50	10
670	22.0000 - 23.0000	22,50	10
671	23.0000 - 24.0000	23,50	11
672	24.0000 - 25.0000	24,50	12
673	21.0000 - 22.0000	21,50	9
674	23.0000 - 24.0000	23,50	11
675	24.0000 - 25.0000	24,50	12
676	25.0000 - 26.0000	25,50	13
677	23.0000 - 24.0000	23,50	11
678	23.0000 - 24.0000	23,50	11
679	24.0000 - 25.0000	24,50	12
680	23.0000 - 24.0000	23,50	11
681	23.0000 - 24.0000	23,50	11
682	22.0000 - 23.0000	22,50	10
683	23.0000 - 24.0000	23,50	11
684	22.0000 - 23.0000	22,50	10
685	21.0000 - 22.0000	21,50	9
686	23.0000 - 24.0000	23,50	11
687	23.0000 - 24.0000	23,50	11
688	22.0000 - 23.0000	22,50	10
689	22.0000 - 23.0000	22,50	10
690	24.0000 - 25.0000	24,50	12
691	23.0000 - 24.0000	23,50	11
692	23.0000 - 24.0000	23,50	11
693	23.0000 - 24.0000	23,50	11
694	22.0000 - 23.0000	22,50	10
695	18.0000 - 19.0000	18,50	6
696	22.0000 - 23.0000	22,50	10
697	21.0000 - 22.0000	21,50	9
698	23.0000 - 24.0000	23,50	11
699	23.0000 - 24.0000	23,50	11
700	23.0000 - 24.0000	23,50	11
701	24.0000 - 25.0000	24,50	12
702	22.0000 - 23.0000	22,50	10
703	23.0000 - 24.0000	23,50	11

Tabela A.15: Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.

Nós	Intervalos de temperaturas	Média dos intervalos	Nº da classe
704	25.0000 - 26.0000	25,50	13
705	23.0000 - 24.0000	23,50	11
706	22.0000 - 23.0000	22,50	10
707	24.0000 - 25.0000	24,50	12
708	23.0000 - 24.0000	23,50	11
709	22.0000 - 23.0000	22,50	10
710	23.0000 - 24.0000	23,50	11
711	23.0000 - 24.0000	23,50	11
712	24.0000 - 25.0000	24,50	12
713	24.0000 - 25.0000	24,50	12
714	24.0000 - 25.0000	24,50	12
715	23.0000 - 24.0000	23,50	11
716	24.0000 - 25.0000	24,50	12
717	24.0000 - 25.0000	24,50	12
718	24.0000 - 25.0000	24,50	12
719	24.0000 - 25.0000	24,50	12
720	24.0000 - 25.0000	24,50	12
721	24.0000 - 25.0000	24,50	12
722	23.0000 - 24.0000	23,50	11
723	23.0000 - 24.0000	23,50	11
724	23.0000 - 24.0000	23,50	11
725	22.0000 - 23.0000	22,50	10
726	22.0000 - 23.0000	22,50	10
727	23.0000 - 24.0000	23,50	11
728	22.0000 - 23.0000	22,50	10
729	14.0000 - 15.0000	14,50	2
730	22.0000 - 23.0000	22,50	10
731	24.0000 - 25.0000	24,50	12
732	21.0000 - 22.0000	21,50	9
733	21.0000 - 22.0000	21,50	9
734	24.0000 - 25.0000	24,50	12
735	24.0000 - 25.0000	24,50	12
736	24.0000 - 25.0000	24,50	12
737	23.0000 - 24.0000	23,50	11
738	24.0000 - 25.0000	24,50	12
739	23.0000 - 24.0000	23,50	11
740	22.0000 - 23.0000	22,50	10
741	22.0000 - 23.0000	22,50	10
742	21.0000 - 22.0000	21,50	9
743	24.0000 - 25.0000	24,50	12
744	23.0000 - 24.0000	23,50	11
745	23.0000 - 24.0000	23,50	11
746	24.0000 - 25.0000	24,50	12
747	23.0000 - 24.0000	23,50	11
748	24.0000 - 25.0000	24,50	12
749	22.0000 - 23.0000	22,50	10
750	24.0000 - 25.0000	24,50	12
751	21.0000 - 22.0000	21,50	9
752	23.0000 - 24.0000	23,50	11

Tabela A.16: Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.



Nós	Intervalos de temperaturas	Média dos intervalos	Nº da classe
753	24.0000 - 25.0000	24,50	12
754	23.0000 - 24.0000	23,50	11
755	24.0000 - 25.0000	24,50	12
756	24.0000 - 25.0000	24,50	12
757	24.0000 - 25.0000	24,50	12
758	24.0000 - 25.0000	24,50	12
759	24.0000 - 25.0000	24,50	12
760	24.0000 - 25.0000	24,50	12
761	23.0000 - 24.0000	23,50	11
762	23.0000 - 24.0000	23,50	11
763	24.0000 - 25.0000	24,50	12
764	20.0000 - 21.0000	20,50	8
765	21.0000 - 22.0000	21,50	9
766	23.0000 - 24.0000	23,50	11
767	25.0000 - 26.0000	25,50	13
768	23.0000 - 24.0000	23,50	11
769	23.0000 - 24.0000	23,50	11
770	23.0000 - 24.0000	23,50	11
771	22.0000 - 23.0000	22,50	10
772	23.0000 - 24.0000	23,50	11
773	22.0000 - 23.0000	22,50	10
774	23.0000 - 24.0000	23,50	11
775	22.0000 - 23.0000	22,50	10
776	23.0000 - 24.0000	23,50	11
777	25.0000 - 26.0000	25,50	13
778	23.0000 - 24.0000	23,50	11
779	24.0000 - 25.0000	24,50	12
780	23.0000 - 24.0000	23,50	11
781	24.0000 - 25.0000	24,50	12
782	23.0000 - 24.0000	23,50	11
783	24.0000 - 25.0000	24,50	12
784	24.0000 - 25.0000	24,50	12
785	24.0000 - 25.0000	24,50	12
786	24.0000 - 25.0000	24,50	12
787	24.0000 - 25.0000	24,50	12
788	22.0000 - 23.0000	22,50	10
789	24.0000 - 25.0000	24,50	12
790	23.0000 - 24.0000	23,50	11
791	21.0000 - 22.0000	21,50	9
792	24.0000 - 25.0000	24,50	12
793	23.0000 - 24.0000	23,50	11
794	23.0000 - 24.0000	23,50	11
795	23.0000 - 24.0000	23,50	11
796	22.0000 - 23.0000	22,50	10
797	23.0000 - 24.0000	23,50	11
798	24.0000 - 25.0000	24,50	12
799	24.0000 - 25.0000	24,50	12
800	21.0000 - 22.0000	21,50	9
801	22.0000 - 23.0000	22,50	10

Tabela A.17: Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.

Nós	Intervalos de temperaturas	Média dos intervalos	Nº da classe
802	23.0000 - 24.0000	23,50	11
803	22.0000 - 23.0000	22,50	10
804	23.0000 - 24.0000	23,50	11
805	23.0000 - 24.0000	23,50	11
806	22.0000 - 23.0000	22,50	10
807	23.0000 - 24.0000	23,50	11
808	23.0000 - 24.0000	23,50	11
809	22.0000 - 23.0000	22,50	10
810	23.0000 - 24.0000	23,50	11
811	25.0000 - 26.0000	25,50	13
812	22.0000 - 23.0000	22,50	10
813	26.0000 - 27.0000	26,50	14
814	23.0000 - 24.0000	23,50	11
815	22.0000 - 23.0000	22,50	10
816	23.0000 - 24.0000	23,50	11
817	23.0000 - 24.0000	23,50	11
818	24.0000 - 25.0000	24,50	12
819	24.0000 - 25.0000	24,50	12
820	22.0000 - 23.0000	22,50	10
821	23.0000 - 24.0000	23,50	11
822	22.0000 - 23.0000	22,50	10
823	24.0000 - 25.0000	24,50	12
824	22.0000 - 23.0000	22,50	10
825	23.0000 - 24.0000	23,50	11
826	21.0000 - 22.0000	21,50	9
827	23.0000 - 24.0000	23,50	11
828	23.0000 - 24.0000	23,50	11
829	23.0000 - 24.0000	23,50	11
830	23.0000 - 24.0000	23,50	11
831	24.0000 - 25.0000	24,50	12
832	25.0000 - 26.0000	25,50	13
833	23.0000 - 24.0000	23,50	11
834	24.0000 - 25.0000	24,50	12
835	24.0000 - 25.0000	24,50	12
836	24.0000 - 25.0000	24,50	12
837	25.0000 - 26.0000	25,50	13
838	24.0000 - 25.0000	24,50	12
839	23.0000 - 24.0000	23,50	11
840	23.0000 - 24.0000	23,50	11
841	24.0000 - 25.0000	24,50	12
842	25.0000 - 26.0000	25,50	13
843	25.0000 - 26.0000	25,50	13
844	25.0000 - 26.0000	25,50	13
845	24.0000 - 25.0000	24,50	12
846	22.0000 - 23.0000	22,50	10
847	23.0000 - 24.0000	23,50	11
848	24.0000 - 25.0000	24,50	12
849	24.0000 - 25.0000	24,50	12
850	23.0000 - 24.0000	23,50	11

Tabela A.18: Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.

Nós	Intervalos de temperaturas	Média dos intervalos	Nº da classe
851	23.0000 - 24.0000	23,50	11
852	23.0000 - 24.0000	23,50	11
853	23.0000 - 24.0000	23,50	11
854	24.0000 - 25.0000	24,50	12
855	24.0000 - 25.0000	24,50	12
856	24.0000 - 25.0000	24,50	12
857	23.0000 - 24.0000	23,50	11
858	24.0000 - 25.0000	24,50	12
859	24.0000 - 25.0000	24,50	12
860	24.0000 - 25.0000	24,50	12
861	24.0000 - 25.0000	24,50	12
862	25.0000 - 26.0000	25,50	13
863	24.0000 - 25.0000	24,50	12
864	24.0000 - 25.0000	24,50	12
865	24.0000 - 25.0000	24,50	12
866	25.0000 - 26.0000	25,50	13
867	22.0000 - 23.0000	22,50	10
868	22.0000 - 23.0000	22,50	10
869	22.0000 - 23.0000	22,50	10
870	23.0000 - 24.0000	23,50	11
871	22.0000 - 23.0000	22,50	10
872	23.0000 - 24.0000	23,50	11
873	23.0000 - 24.0000	23,50	11
874	23.0000 - 24.0000	23,50	11
875	24.0000 - 25.0000	24,50	12
876	23.0000 - 24.0000	23,50	11
877	23.0000 - 24.0000	23,50	11
878	20.0000 - 21.0000	20,50	8
879	22.0000 - 23.0000	22,50	10
880	23.0000 - 24.0000	23,50	11
881	23.0000 - 24.0000	23,50	11
882	24.0000 - 25.0000	24,50	12
883	23.0000 - 24.0000	23,50	11
884	23.0000 - 24.0000	23,50	11
885	23.0000 - 24.0000	23,50	11
886	24.0000 - 25.0000	24,50	12
887	25.0000 - 26.0000	25,50	13
888	22.0000 - 23.0000	22,50	10
889	24.0000 - 25.0000	24,50	12
890	25.0000 - 26.0000	25,50	13
891	24.0000 - 25.0000	24,50	12
892	25.0000 - 26.0000	25,50	13
893	23.0000 - 24.0000	23,50	11
894	24.0000 - 25.0000	24,50	12
895	24.0000 - 25.0000	24,50	12
896	25.0000 - 26.0000	25,50	13

Tabela A.19: Continuação da Tabela de dados gerada pelo programa ArcGis 10.1 no mês de junho.

# Apêndice B

## Construção das Funções

Apresentamos a obtenção das funções  $\varphi_j$  da base do espaço  $V_h$ , lembrando que definimos essas funções como:

$$\varphi_j(N_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j, i, j = 1, \dots, M \end{cases}$$

Vamos supor que o domínio  $\Omega$  foi dividido em  $m$  triângulos,  $M$ , sendo  $\tilde{M}$  interiores (que não estão na fronteira de  $\Omega_h$ ). Lembrando que  $\Omega_h$  é a aproximação de  $\Omega$  através de uma poligonal juntamente com seu interior.

**Definição B.1.** 1. Chamamos de enumeração dos elementos a uma bijeção que associa a cada elemento a um número natural de 1 a  $m$ .

**Notação:**  $k_i$  é o  $i$ -ésimo elemento da malha.

2. Chamamos de enumeração global dos vértices interiores a uma bijeção que associa a cada vértice interior a um número natural de 1 a  $\tilde{M}$ .

**Notação:**  $p_i$  é o vértice interior  $i$  da malha.

3. Chamamos de enumeração global dos vértices a uma bijeção que associa a cada vértice da malha a um número natural de 1 a  $M$ , respeitando a enumeração dos vértices interiores, essa enumeração adota a enumeração da definição 2 e atribui números entre  $\tilde{M} + 1$  e  $M$  aos vértices da fronteira de  $\Omega_h$ .

4. Chamamos de enumeração local dos vértices a uma bijeção que:

i) associa a cada vértice de um elemento  $T_k$  um número do conjunto  $\{1, 2, 3\}$ ;

ii) percorre o elemento em sentido anti-horário. Isto é, definido o vértice 1 do elemento  $k_i$  no sentido anti-horário a partir de 1. O vértice  $s \in \{1, 2, 3\}$  de  $k_i$  tem coordenadas  $(x_s^{k_i}, y_s^{k_i})$ .

Assim o gráfico de  $\varphi_j$  no elemento  $K_i$  é  $\begin{cases} \text{plano} \neq 0 & \text{se } K_i \text{ tem o vértice } p_j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$ .

As funções  $\varphi_j$  formam uma base  $B$  de  $V_h$ . As únicas funções de  $B$  que assumem valores diferentes de zero em um dado elemento são aquelas associadas aos seus vértices ( $\varphi_j$  e  $p_j$  são associados). Em cada elemento pode existir no máximo três funções associadas.

Assim, falta determinar  $\varphi_j(x, y)$  em um ponto interior do elemento. Vejamos o que ocorre se  $(x, y) \in K_i$  e o triângulo  $K_i$  for associado à uma função  $\varphi_j$ .

Lembramos que em cada elemento temos a enumeração dos vértices:  $(x_1^{K_i}, y_1^{K_i}), (x_2^{K_i}, y_2^{K_i})$  e  $(x_3^{K_i}, y_3^{K_i})$ . Vamos supor que  $\varphi_j(x, y) \in B$  é associada ao vértice 1 de  $K_i$ .

Assim  $\varphi_j(x_1, y_1) = 1$  e  $\varphi_j(x_2, y_2) = \varphi_j(x_3, y_3) = 0$ , se  $(x, y) \in K_i$ , então  $(x, y, \varphi_j(x, y))$  está no plano determinado pelos pontos:  $(x_1, y_1, \varphi_j(x_1, y_1))$ ,  $(x_2, y_2, \varphi_j(x_2, y_2))$  e  $(x_3, y_3, \varphi_j(x_3, y_3))$ , ou seja,  $(x_1, y_1, 1)$ ,  $(x_2, y_2, 0)$  e  $(x_3, y_3, 0)$ .

Para que o gráfico de  $\varphi_j(x, y)$  esteja nesse plano, os três vetores que ligam  $(x, y, \varphi_j(x, y))$  a cada um dos vértices devem ser coplanares, ou seja, o produto misto deve ser 0.

Encontrando os vetores, temos:

$$\begin{aligned}(x, y, \varphi_j) - (x_1, y_1, 1) &= (x - x_1, y - y_1, \varphi_j - 1); \\(x, y, \varphi_j) - (x_2, y_2, 0) &= (x - x_2, y - y_2, \varphi_j); \\(x, y, \varphi_j) - (x_3, y_3, 0) &= (x - x_3, y - y_3, \varphi_j).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & \varphi_j - 1 \\ x - x_2 & y - y_2 & \varphi_j \\ x - x_3 & y - y_3 & \varphi_j \end{vmatrix} = 0.$$

Obtemos

$$\begin{aligned}0 &= (x - x_1)(y - y_2)\varphi_j + (x - x_2)(y - y_3)(\varphi_j - 1) + (x - x_3)(y - y_1)\varphi_j - \\ &\quad - [(x - x_3)(y - y_2)(\varphi_j - 1) + (x - x_2)(y - y_1)\varphi_j + (x - x_1)(y - y_3)\varphi_j] \\ &= \varphi_j[(x - x_1)(y - y_2) + (x - x_2)(y - y_3) + (x - x_3)(y - y_1) - (x - x_3)(y - y_2) - (x - x_2)(y - y_1) - (x - x_1)(y - y_3)] + \\ &\quad + [-(x - x_2)(y - y_3) + (x - x_3)(y - y_2)].\end{aligned}$$

Logo, podemos escrever  $\varphi_j$  como:

$$\varphi_j(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 \\ x - x_3 & y - y_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 \\ x - x_3 & y - y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x - x_3 & y - y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x - x_2 & y - y_2 \end{vmatrix}}. \quad (\text{B.1})$$

Fazendo algumas modificações nos determinantes acima, usando propriedades de determinantes podemos obter a função  $\varphi_j$  de uma forma mais fácil de manipulá-la. Por exemplo, no numerador, temos:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 \\ x - x_3 & y - y_3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 \\ x & y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} x & y \\ x & y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x & y \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & y \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}.\end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Fazendo os mesmos passos que apresentamos em (B.3) nos outros determinantes de (B.1), obtemos:

$$\varphi_j(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2^{K_i} & y_2^{K_i} \\ 1 & x_3^{K_i} & y_3^{K_i} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_1^{K_i} & y_1^{K_i} \\ 1 & x_2^{K_i} & y_2^{K_i} \\ 1 & x_3^{K_i} & y_3^{K_i} \end{vmatrix}}, \quad (\text{B.3})$$

Um resultado de Geometria Analítica nos diz que o determinante do denominador de (B.3) é justamente o dobro da área do triângulo de vértices  $(x_1^{K_i}, y_1^{K_i})$ ,  $(x_2^{K_i}, y_2^{K_i})$  e  $(x_3^{K_i}, y_3^{K_i})$ , ou seja, é o dobro da área  $A_{K_i}$  do elemento  $K_i$ . Assim, reescrevemos (B.3) como:

$$\varphi_j(x, y) = \frac{1}{2A_{K_i}} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2^{K_i} & y_2^{K_i} \\ 1 & x_3^{K_i} & y_3^{K_i} \end{vmatrix}.$$

Para considerar a função  $\varphi_j(x, y)$  associado ao vértice 2 do elemento  $K_i$  basta trocar os vértices como mostrado abaixo:

$$\begin{aligned} \text{vértice2} &\rightarrow \text{vértice1}; \\ \text{vértice3} &\rightarrow \text{vértice2}; \\ \text{vértice1} &\rightarrow \text{vértice3}. \end{aligned}$$

Isso resultaria em

$$\varphi_j(x, y) = \frac{1}{2A_{K_i}} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_3^{K_i} & y_3^{K_i} \\ 1 & x_1^{K_i} & y_1^{K_i} \end{vmatrix}.$$

E assim obtemos uma expressão geral para as funções  $\varphi_j$  de  $B$

$$\varphi_j(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2A_{K_i}} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2^{K_i} & y_2^{K_i} \\ 1 & x_3^{K_i} & y_3^{K_i} \end{vmatrix} & \text{se } (x, y) \in K_i \text{ e } \varphi_j \text{ associada ao vértice 1 de } K_i \\ \frac{1}{2A_{K_i}} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_3^{K_i} & y_3^{K_i} \\ 1 & x_1^{K_i} & y_1^{K_i} \end{vmatrix} & \text{se } (x, y) \in K_i \text{ e } \varphi_j \text{ associada ao vértice 2 de } K_i \\ \frac{1}{2A_{K_i}} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1^{K_i} & y_1^{K_i} \\ 1 & x_2^{K_i} & y_2^{K_i} \end{vmatrix} & \text{se } (x, y) \in K_i \text{ e } \varphi_j \text{ associada ao vértice 3 de } K_i \\ 0 & \text{se } (x, y) \in K_i \text{ mas } \varphi_j \text{ não for associada a } K_i. \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

# Apêndice C

## Matrizes de Rigidez

Apresentamos o cálculo das matrizes no elemento “padrão” do sistema linear obtido ao encontrarmos a formulação fraca dos problemas estudados. Para o cálculo dessas matrizes, precisamos obter as funções  $\varphi$  da base  $B$  no elemento “padrão”(Figura C.1).

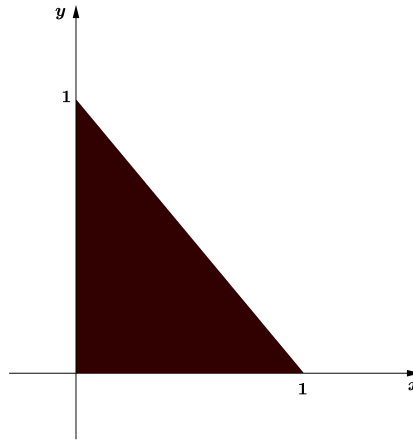


Figura C.1: Triângulo “padrão”  $\widehat{K}$ .

Assim, utilizando (B.4), temos:

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, y) &= \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2A} [1 - x - y] \\ \varphi_2(x, y) &= \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2A} x \\ \varphi_3(x, y) &= \frac{1}{2A} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2A} y\end{aligned}$$

onde  $A$  é a área do triângulo “padrão”.

Como podemos ver a área do triângulo “padrão” é  $\frac{1}{2}$ , temos que

$$\begin{aligned}\varphi_1(x, y) &= 1 - x - y; \\ \varphi_2(x, y) &= x; \\ \varphi_3(x, y) &= y.\end{aligned}\tag{C.1}$$

Podemos então calcular as matrizes de rigidez:

- Matriz ( $G$ ) do produto interno entre os gradientes das funções base  $G = (a_{i,j})$  onde  $a_{i,j} = (\nabla\varphi_i, \nabla\varphi_j)$

$$\begin{aligned}a_{1,1} &= (\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_1) \\ &= \int_{\Omega} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_1 \, dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \langle (-1, -1), (-1, -1) \rangle \, dxdy = 2; \\ a_{1,2} = a_{2,1} &= (\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_2) \\ &= \int_{\Omega} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 \, dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \langle (-1, -1), (1, 0) \rangle \, dxdy = -1; \\ a_{2,2} &= (\nabla\varphi_2, \nabla\varphi_2) \\ &= \int_{\Omega} \nabla\varphi_2 \cdot \nabla\varphi_2 \, dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \langle (1, 0), (1, 0) \rangle \, dxdy = 1; \\ a_{1,3} = a_{3,1} &= (\nabla\varphi_1, \nabla\varphi_3) \\ &= \int_{\Omega} \nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_3 \, dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \langle (-1, -1), (0, 1) \rangle \, dxdy = -1; \\ a_{2,3} = a_{3,2} &= (\nabla\varphi_2, \nabla\varphi_3) \\ &= \int_{\Omega} \nabla\varphi_2 \cdot \nabla\varphi_3 \, dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \langle (1, 0), (0, 1) \rangle \, dxdy = 0; \\ a_{3,3} &= (\nabla\varphi_3, \nabla\varphi_3) \\ &= \int_{\Omega} \nabla\varphi_3 \cdot \nabla\varphi_3 \, dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \langle (0, 1), (0, 1) \rangle \, dxdy = 1.\end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$G = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\tag{C.2}$$



- Matriz ( $S_1$ ) do produto interno entre as funções base  $S_1 = (c_{i,j})$  onde  $c_{i,j} = (\varphi_i, \varphi_j)$

$$\begin{aligned}
c_{1,1} &= (\varphi_1, \varphi_1) = \int_{\Omega} \varphi_1 \cdot \varphi_1 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} (1-x-y) \cdot (1-x-y) \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} 1 - 2x - 2y + 2xy + x^2 + y^2 \, dxdy = \frac{1}{12}; \\
c_{1,2} &= (\varphi_1, \varphi_2) = \int_{\Omega} \varphi_1 \cdot \varphi_2 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} (1-x-y) \cdot (x) \, dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-y} x - x^2 - yx \, dxdy = \frac{1}{24}; \\
c_{1,3} &= (\varphi_1, \varphi_3) = \int_{\Omega} \varphi_1 \cdot \varphi_3 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} (1-x-y) \cdot (y) \, dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-y} y - y^2 - yx \, dxdy = \frac{1}{24}; \\
c_{2,1} &= (\varphi_2, \varphi_1) = \int_{\Omega} \varphi_2 \cdot \varphi_1 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} (x) \cdot (1-x-y) \, dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-y} x - x^2 - yx \, dxdy = \frac{1}{24}; \\
c_{2,2} &= (\varphi_2, \varphi_2) = \int_{\Omega} \varphi_2 \cdot \varphi_2 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} x \cdot x \, dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-y} x^2 \, dxdy = \frac{1}{12}; \\
c_{2,3} &= (\varphi_2, \varphi_3) = \int_{\Omega} \varphi_2 \cdot \varphi_3 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} x \cdot y \, dxdy = \frac{1}{24}; \\
c_{3,1} &= (\varphi_3, \varphi_1) = \int_{\Omega} \varphi_3 \cdot \varphi_1 \, dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-y} (1-x-y) \cdot (y) \, dxdy = \frac{1}{24}; \\
c_{3,2} &= (\varphi_3, \varphi_2) = \int_{\Omega} \varphi_3 \cdot \varphi_2 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} y \cdot x \, dxdy = \frac{1}{24}; \\
c_{3,3} &= (\varphi_3, \varphi_3) = \int_{\Omega} \varphi_3 \cdot \varphi_3 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} y \cdot y \, dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-y} y^2 \, dxdy = \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$S_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}. \quad (C.3)$$

- Matriz ( $S_2$ ) do produto interno entre a derivada com relação a  $x$  das funções base com as funções base  $S_2 = (d_{i,j})$  onde  $d_{i,j} = (\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}, \varphi_i)$

$$\begin{aligned}
d_{1,1} &= (\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \varphi_1) = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cdot \varphi_1 \, dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-y} -1 \cdot (1-x-y) \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} -1 + x + y \, dxdy = \frac{-1}{6}; \\
d_{1,2} &= (\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \varphi_2) = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cdot \varphi_2 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} -1 \cdot (x) \, dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-y} x - x^2 - x \, dxdy = \frac{-1}{6}; \\
d_{1,3} &= (\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \varphi_3) = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \cdot \varphi_3 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} -1 \cdot (y) \, dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-y} y - y^2 - y \, dxdy = \frac{-1}{6}; \\
d_{2,1} &= (\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \varphi_1) = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \cdot \varphi_1 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} 1 \cdot (1-x-y) \, dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-y} 1 - x - y \, dxdy = \frac{1}{6}; \\
d_{2,2} &= (\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \varphi_2) = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \cdot \varphi_2 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} 1 \cdot x \, dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-y} x \, dxdy = \frac{1}{6}; \\
d_{2,3} &= (\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}, \varphi_3) = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \cdot \varphi_3 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} 1 \cdot y \, dxdy = \frac{1}{6}; \\
d_{3,1} &= (\frac{\partial \varphi_3}{\partial x}, \varphi_1) = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \cdot \varphi_1 \, dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-y} 0 \cdot (1-x-y) \, dxdy = 0; \\
d_{3,2} &= (\frac{\partial \varphi_3}{\partial x}, \varphi_2) = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \cdot \varphi_2 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} 0 \cdot x \, dxdy = 0; \\
d_{3,3} &= (\frac{\partial \varphi_3}{\partial x}, \varphi_3) = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \cdot \varphi_3 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} 0 \cdot y \, dxdy = 0.
\end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$S_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{-1}{6} & \frac{1}{6} & 0 \end{bmatrix}. \quad (C.4)$$

- Matriz ( $S_3$ ) do produto interno entre a derivada com relação a  $y$  das funções base com as funções base  $S_3 = (e_{i,j})$  onde  $e_{i,j} = (\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}, \varphi_i)$

$$\begin{aligned}
e_{1,1} &= (\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \varphi_1) = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \cdot \varphi_1 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} -1 \cdot (1-x-y) \, dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-y} -1 + x + y \, dxdy = \frac{-1}{6}; \\
e_{1,2} &= (\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \varphi_2) = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \cdot \varphi_2 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} -1 \cdot (x) \, dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-y} x - x^2 - x \, dxdy = \frac{-1}{6}; \\
e_{1,3} &= (\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}, \varphi_3) = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \cdot \varphi_3 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} -1 \cdot (y) \, dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-y} y - y^2 - y \, dxdy = \frac{-1}{6}; \\
e_{2,1} &= (\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \varphi_1) = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \cdot \varphi_1 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} 0 \cdot (1-x-y) \, dxdy = 0; \\
e_{2,2} &= (\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \varphi_2) = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \cdot \varphi_2 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} 0 \cdot x \, dxdy = 0; \\
e_{2,3} &= (\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}, \varphi_3) = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \cdot \varphi_3 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} 0 \cdot y \, dxdy = 0; \\
e_{3,1} &= (\frac{\partial \varphi_3}{\partial y}, \varphi_1) = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \cdot \varphi_1 \, dxdy = \int_0^1 \int_0^{1-y} 1 \cdot (1-x-y) \, dxdy = \frac{1}{6}; \\
e_{3,2} &= (\frac{\partial \varphi_3}{\partial y}, \varphi_2) = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \cdot \varphi_2 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} 1 \cdot x \, dxdy = \frac{1}{6}; \\
e_{3,3} &= (\frac{\partial \varphi_3}{\partial y}, \varphi_3) = \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} \cdot \varphi_3 \, dxdy \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-y} 1 \cdot y \, dxdy = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Logo, obtemos

$$S_3 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \\ \frac{-1}{6} & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}. \quad (C.5)$$

# Apêndice D

## Transformação do Triângulo

Na continuação apresentamos a transformação utilizada para passarmos do elemento “padrão” para o “real”.

Para facilitar os cálculos das matrizes do sistema podemos efetuar os cálculos em um elemento “padrão” que denotaremos por  $\hat{K}$  e depois utilizamos a transformação apresentada a seguir para passarmos para o elemento “real” que denotaremos por  $K_e$ .

Sejam  $\varphi_1(\xi, \eta) = \xi$ ,  $\varphi_2(\xi, \eta) = \eta$  e  $\varphi_3(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$  as funções da base  $B$ . Queremos uma transformação  $Y_e : \hat{K} \rightarrow K_e$ , onde temos as correspondências:

$$\begin{aligned}(1, 0) &\rightarrow (x_1, y_1); \\ (0, 1) &\rightarrow (x_2, y_2); \\ (0, 0) &\rightarrow (x_3, y_3).\end{aligned}$$

como mostra a Figura D.1.

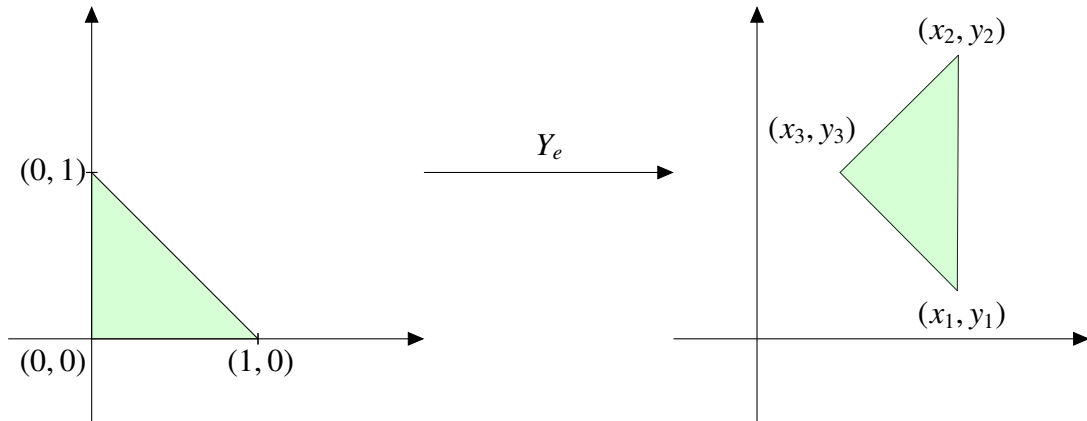


Figura D.1: Transformação do triângulo “padrão” no triângulo “real”.

Temos que:

$$Y_e(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}x(\xi, \eta) &= x_3 + (x_1 - x_3)\xi + (x_2 - x_3)\eta; \\ y(\xi, \eta) &= y_3 + (y_1 - y_3)\xi + (y_2 - y_3)\eta.\end{aligned}$$

Com isso o Jacobiano de  $Y_e$  é dado por:

$$JY_e = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - x_3 & y_2 - x_3 \end{pmatrix}.$$

Sabemos que  $\varphi_i(\xi, \eta) = \varphi_i(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ , então

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned}$$

Substituindo as derivadas temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} (x_1 - x_3) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} (y_1 - y_3); \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} (x_2 - x_3) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} (y_2 - y_3). \end{aligned}$$

Escrevendo na forma matricial, temos:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - x_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Logo obtemos:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} = ((JY_e)^t)^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \end{pmatrix},$$

e portanto  $Y = ((JY_e)^t)^{-1}$ .

Assim temos a seguinte transformação:

Sendo  $B = \{\varphi_1^K, \varphi_2^K, \varphi_3^K\}$  a base das funções no elemento “padrão” e  $\hat{B} = \{\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2, \hat{\varphi}_3\}$  a base das funções no elemento “real”, temos

$$\begin{aligned} \int_K \nabla \varphi_i^K \cdot \nabla \varphi_j^K &= \int_{\hat{K}} (((JY_e)^t)^{-1} \nabla \hat{\varphi}_i) \cdot (((JY_e)^t)^{-1} \nabla \hat{\varphi}_j) \det(JY_e) \\ &= 2\text{área}(K) \int_{\hat{K}} (((JY_e)^t)^{-1} \nabla \hat{\varphi}_i) \cdot (((JY_e)^t)^{-1} \nabla \hat{\varphi}_j) \end{aligned} \quad (D.1)$$

A equação (D.2) é utilizada no programa computacional desenvolvido neste trabalho.