DAVIDSON FREITAS NOGUEIRA

ESPAÇOS DE SEQUÊNCIAS VETORIAIS E IDEAIS DE OPERADORES

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2016

DAVIDSON FREITAS NOGUEIRA

ESPAÇOS DE SEQUÊNCIAS VETORIAIS E IDEAIS DE OPERADORES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Análise Funcional.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

UBERLÂNDIA - MG
2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CPI)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil

N778e
2016

Nogueira, Davidson Freitas, 1990 -

Espaços de sequências vetoriais e ideais de operadores / Davidson Freitas Nogueira. - 2016

89 f.: il.

Orientador: Geraldo Márcio de Azevedo Botelho

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática

Inclui bibliografia

1. Matemática - Teses. 2. Banach, Espaços de - Teses. 3. Sequências (Matemática) - Teses. 4. Operadores lineares - Teses. 5. Análise funcional - Teses. 6. Análise matemática - Teses I. Botelho, Geraldo Márcio de Azevedo. II. Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAçÃO EM MATEMÁTICA
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO: Davidson Freitas Nogueira

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11412MAT005.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Análise Funcinal.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Espaços de Sequências Vetoriais e Ideais de Operadores.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 25 de Fevereiro de 2016, às 10h, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME	ASSINATURA
Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho UFU - Universidade Federal de Uberlândia (orientador)	
Prof. Dr. Ariosvaldo Marques Jatobá UFU - Universidade Federal de Uberlândia	Ariosvaldo M. Jatobá
Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos UFPB - Universidade Federal da Paraíba	

Uberlândia-MG, 25 de Fevereiro de 2016.

Dedicatória

Dedico a minha mãe e a minha esposa

Agradecimentos

Agradeço principalmente a Deus por todas as vitórias conquistadas até hoje e todas aquelas que ainda virão, pela força e proteção, pela minha saúde, por sempre estar me ensinando e por colocar todas as pessoas mencionadas abaixo em minha vida.

Ao meu orientador, Geraldo Márcio Azevedo Botelho pela sua paciência e disponibilidade. Pessoa fundamental na realização desse trabalho e que contribuiu de maneira significativa na minha formação. Um excelente professor, orientador e pesquisador que, pelas minhas memórias, nesses três quesitos, foi o melhor que conheci até hoje.

A minha mãe Maria do Rosário de Freitas pelo amor, carinho e valores transmitidos. Pessoa honesta, trabalhadora e vitoriosa. Agradeço todos os dias pelas broncas, tapas e castigos, pois esses é que me fizeram quem sou hoje. Agradeço pelas pequenas e pelas grandes coisas que essa grande mulher fez em minha vida. Obrigado Deus por me fazer filho dela.

Ao meu pai Antônio Luiz Nogueira, que mesmo na ausência de determinados momentos colaborou de maneira significativa no meu senso de justiça, moral e ética.

A minha querida avó Percília Goulart da Silva (*in memoriam*), que mesmo após uma década e meia ainda enche meus olhos de lagrimas, quando vivo suas memórias em minha mente.

Ao casal Luíza e Marcelo pela contribuição indispensável em minha formação e pela presença nos momentos em que mais precisei.

Aos meus professores do Instituto Federal Goiano: João Lopes Cardoso Filho, Suzane, Thelma, Letícia Tavares, Júlio César, Cláudio Humberto, Eduardo Silva Vasconcelos, Eliane Fonseca Campos Mota, Agda Lovato Teixeira e Caike Damke, que tiveram importante contribuição na minha formação acadêmica.

Aos meus professores da Universidade Federal de Uberlândia: Vinícius Vieira Fávaro, Jean Venato Santos, Geraldo Botelho, Cícero Fernandes de Carvalho e Rosana Sueli da Motta Jafelice.

Ao casal Cristiane e Jucelino pelas incansáveis noites de boa conversa.

Agradeço à minha esposa, Izabela Paiva Martins, por me amar, compreender, ajudar e me dar carinho. Ela me amou mesmo ficando várias e várias noites acordado estudando, pois sabia da importância que era e é o estudo em Matemática na minha vida; me ajudou quando estava com o espírito fraco me dando força e incentivo, não me deixando desanimar; é carinhosa em todos os momentos que estamos juntos. Dizem que o homem escolhe a mulher espelhando-se na sua própria mãe. Comigo isso se concretizou, pois minha esposa é um exemplo de mulher honesta, guerreira, trabalhadora e que, com toda certeza, será uma vencedora (mais do que já é). Muito obrigado Izabela por ter me escolhido.

Agradeço à todos os meus colegas de mestrado, especialmente a minha turma: Ana Maria Travaglini, Eli Carlos de Souza Costa, Jennifer Cristina Borges, Karine de Almeida Santos, Kelly Melo de Menezes e Rafaela Ferreira Afonso.

Agradeço à José Lucas Pereira Luiz pela companhia durante todo o ano de 2015 e as horas de conversa sobre Análise Funcional.

Agradeço à Guilherme dos Santos Martins Dias, Suélen Almeida Carvalho e Wagner Dias Alves de Souza por escutar minhas baboseiras na hora em que quase ninguém estava escutando.

Agradeço à Capes pelo auxilio financeiro durante todo o meu primeiro ano de mestrado.

Por fim, agradeço ao Prof. Dr. Jamilson Ramos Campos, professor da Universidade Federal da Paraíba, e ao Prof. Dr. Ariosvaldo Marques Jatobá, professor da Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, por terem aceito ao nosso pedido para participarem da Banca julgadora dessa dissertação.

NOGUEIRA, D. F. *Espaços de sequências vetoriais e ideais de operadores* 2016. - 73p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

O principal objetivo desta dissertação é estudar ideais de operadores entre espaços de Banach definidos, ou caracterizados, por meio da transformação de sequências vetoriais. Iniciamos o estudo elencando os resultados conhecidos em Análise funcional que serão usados. Em seguida estudamos os espaços de sequências vetoriais que serão exemplos importantes de classes de sequências e que fornecerão exemplos de ideais de operadores da forma que estudamos. Em seguida apresentamos um ambiente abstrato, chamado classes de sequências (no sentido de Botelho e Campos [4]), que serão os alicerces dos ideais de operadores que serão construídos. O próximo passo é apresentar e estudar os ideais de operadores caracterizados por meio de transformações de classes de sequências. Por fim, mostraremos que vários ideais de operadores clássicos são casos particulares da construção abstrata feita anteriormente. Propriedades especiais desses ideais também serão investigadas.

Palavras-chave: espaços de Banach, espaços de sequências, ideais de operadores, sequências absolutamente somáveis, sequências fracamente somáveis, sequências fracamente nulas, operadores somantes.

NOGUEIRA, D. F. *Spaces of vector-valued sequences and operator ideals.* 2016. - 73p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

The main purpose of this dissertation is the study of ideals of operators between Banach spaces (operator ideals) that are defined, or characterized, by means of the transformation of vector-valued sequences. We begin by stating some known results on Functional Analysis that will be useful later. Next we study the spaces of vector-valued sequences (sequence spaces) that shall be important examples of sequences classes and that will provide examples of operator ideals of the sort we are studying. Next we present an abstract framework, called sequence classes (in the sense of Botelho and Campos [4]), which will be the background of the operators ideals we shall contruct. The next step is the introduction and the investigation of the operator ideals characterized by means of the transformation of sequence classes. Finally we show that several classical operator ideals are particular instances of the abstract framework constructed before. Special properties of these ideals are also investigated.

Keywords: Banach spaces, sequence spaces, operator ideals, strongly summable sequences, weakly summable sequences, weakly null sequences, summing operators.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
X, Y e Z	espaços topológicos ou classes de sequências
E, F, G e H	espaços vetoriais ou espaços vetoriais normados ou espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$
BAN	família de todos os espaços de Banach
$\mathcal{L}(E, F)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos operadores lineares e contínuos de E em F
$(\mathcal{L}(E, F), \\|\cdot\\|)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos operadores lineares e contínuos de E em F munido com a norma usual do sup
E'	dual topológico de E, isto é, $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$
E''	bidual topológico de E
u'	operador adjunto de u
e_j	$(0, \cdots, 0, \overset{(j)}{1}, 0, \cdots)$
i	operador inclusão
B_E	bola unitária fechada no espaço E
$(c_{00}, \\|\cdot\\|_\infty)$	$\{(a_j)_{j=1}^\infty : a_j \in \mathbb{K}, \forall j \in \mathbb{N}$ e $\exists j_0$ tal que $a_j = 0, \forall j \geq j_0\}$, onde $\\|(a_j)_{j=1}^\infty\\|_\infty = \sup\limits_j \|a_j\|$
$(c_0, \\|\cdot\\|_\infty)$	$\{(a_j)_{j=1}^\infty : a_j \in \mathbb{K}, \forall j \in \mathbb{N}$ e $a_j \longrightarrow 0\}$, onde $\\|(a_j)_{j=1}^\infty\\|_\infty = \sup\limits_j \|a_j\|$
$(\ell_p, \\|\cdot\\|_p)$	$\left\{(a_j)_{j=1}^\infty : a_j \in \mathbb{K}, \forall j \in \mathbb{N} \text{ e } \sum\limits_{j=1}^\infty \|a_j\|^p < \infty\right\}$, onde $\\|(a_j)_{j=1}^\infty\\|_p = \left(\sum\limits_{j=1}^\infty \|a_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

$(\ell_\infty, \Vert\cdot\Vert_\infty)$	$\{(a_j)_{j=1}^\infty : a_j \in \mathbb{K}, \forall j \in \mathbb{N}$ e $\exists M \geq 0$ tal que $\vert a_j\vert \leq M, \forall j\}$, onde $\Vert(a_j)_{j=1}^\infty\Vert_\infty = \sup_j \vert a_j\vert$
$J_E \colon E \longrightarrow E''$	mergulho canônico de E em E''
$(C(K), \Vert\cdot\Vert_{C(K)})$	$C(K)$ o espaço de Banach formado por todas as funções $f\colon K \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas munido da norma do sup
$\mathcal{B}(X)$	σ-álgebra de Borel sobre X
$(\mathcal{M}(K), \Vert\cdot\Vert)$	$\{\mu : \mu$ é uma medida de Radon com sinal sobre $K\}$ munido com a norma variação total
$\mathcal{A}$	σ-álgebra sobre um conjunto Ω
$\delta_x : \mathcal{A} \longrightarrow \{0,1\}$	Medida de Dirac concentrada em x
rank(u)	dimensão da imagem do operador u
$\ell_\infty(E)$	$\left\{(x_j)_{j=1}^\infty : x_j \in E \text{ e } \exists M > 0 \text{ tal que } \Vert x_j\Vert_E \leq M, \forall j \in \mathbb{N}\right\}$
$c_0(E)$	$\left\{(x_j)_{j=1}^\infty : x_j \in E \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \Vert x_j\Vert_E \xrightarrow{j} 0\right\}$
$c_{00}(E)$	$\left\{(x_j)_{j=1}^\infty : x_j \in E, \forall j \in \mathbb{N} \text{ e existe } j_0 \in \mathbb{N} \text{ tal que } x_j = 0, \forall j \geq j_0\right\}$
$\ell_p(E)$	$\left\{(x_j)_{j=1}^\infty : x_j \in E \quad \forall j \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{j=1}^\infty \Vert x_j\Vert^p < \infty\right\}$
$\ell_p^w(E)$	$\left\{(x_j)_{j=1}^\infty : x_j \in E, \forall j \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{j=1}^\infty \vert\varphi(x_j)\vert^p < \infty, \forall \varphi \in E'\right\}$
$\ell_p^u(E)$	$\left\{(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E) : \lim_{n\to\infty} \Vert(x_j)_{j=n}^\infty\Vert_{w,p} = 0\right\}$
$\ell_p\langle E\rangle$	$\left\{(x_j)_{j=1}^\infty : x_j \in E, \forall j \in \mathbb{N} \text{ e } \forall (\varphi_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(E'), \sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x_j) \text{ converge}\right\}$
$c_0^w(E)$	$\left\{(x_j)_{j=1}^\infty : x_j \in E \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } x_j \xrightarrow{w} 0\right\}$
$(\lambda_j)_{j=1}^\infty \otimes x$	produto tensorial entre $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \subset \mathbb{K}$ e x definido por $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \otimes x = (\lambda_j x)_{j=1}^\infty$
$\mathcal{C}(E, F)$	conjunto dos operadores lineares completamente contínuos de E em F
$\mathcal{F}(E; F)$	conjunto dos operadores lineares de posto finito entre os espaços de Banach E e F
$\mathcal{L}_{X,Y}(E, F)$	conjunto dos operadores lineares $(X;Y)$-somantes entre os espaços de Banach E e F
$\mathcal{K}(E; F)$	conjunto dos operadores lineares compactos entre os espaços de Banach E e F
$\Pi_{q,p}(E, F)$	conjunto dos operadores lineares absolutamente (q,p)-somantes entre os espaços de Banach E e F
$\mathcal{C}_p(E, F)$	conjunto dos operadores lineares p-convergentes entre os espaços de Banach E e F
$\mathcal{U}_{p,r}(E, F)$	conjunto dos operadores lineares incondicionalmente (p,r)-somantes entre os espaços de Banach E e F
$\mathcal{D}_p(E, F)$	conjunto dos operadores lineares Cohen fortemente p-somantes entre os espaços de Banach E e F

$\mathcal{I}$	ideal de operadores
$(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$	ideal normado de operadores
$\mathcal{I}^{dual}(E,F)$	$\{u \in \mathcal{L}(E,F) : u' \in \mathcal{I}(F',E')\}$

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Em essência, a Análise Funcional Linear trata de operadores lineares contínuos entre espaços normados ou espaços de Banach. Em um espaço normado tem-se naturalmente duas estruturas associadas, a saber, a estrutura algébrica de espaço vetorial e a estrutura topológica de espaço normado. Existe um ganho significativo na junção dessas duas estruturas: associadas à estrutura algébrica estão as transformações lineares e à estrutura topológica estão associadas as funções contínuas. Um bom e simples exemplo desse ganho é: dados dois espaços topológicos E e F e uma função $f\colon E \longrightarrow F$ é verdade que

$$\begin{aligned} f \text{ lipschitziana } &\Rightarrow f \text{ uniformemente contínua} \\ &\Rightarrow f \text{ contínua } \Rightarrow f \text{ contínua na origem,} \end{aligned}$$

não valendo, em geral, as recíprocas. Porém, ao se adicionar a estrutura algébrica nos espaços E e F, podendo definir normas, tornam-se verdade todas as recíprocas. Mas ainda,

$$\begin{aligned} f \text{ lipschitziana } &\Leftrightarrow f \text{ uniformemente contínua } \Leftrightarrow f \text{ contínua} \\ &\Leftrightarrow f \text{ contínua em algum ponto de } E \Leftrightarrow f \text{ contínua na origem} \\ &\Leftrightarrow \sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|} < \infty \Leftrightarrow \exists C \geq 0 \text{ tal que } \|f(x)\| \leq C\|x\|, \forall x \in E. \end{aligned}$$

Umas das subáreas mais frutíferas da Análise funcional é o estudo dos ideais de operadores lineares entre espaços de Banach, teoria esta que nasceu em 1941 (ver [15, Capítulo 11]). Os ideais de operadores são famílias de operadores lineares contínuos que se comportam de maneira similar aos ideais de álgebra no seguinte sentido:

Se $u\colon E \longrightarrow F$ é um elemento do ideal $\mathcal{I}$, então para quaisquer operadores lineares e contínuos $v\colon H \longrightarrow E$ e $t\colon F \longrightarrow G$, a composta $t \circ u \circ v\colon H \longrightarrow G$ pertence a $\mathcal{I}$.

Muitas famílias de operadores que satisfazem essa propriedade de operadores foram estudadas isoladamente. Exemplos importantes de famílias de operadores lineares contínuos são os operadores compactos, os fracamente compactos, os nucleares e os absolutamente somantes. Em seu livro [19], A. Pietsch, em 1980, reuniu os principais exemplos até então estudados e unificou-os com a teoria abstrata dos ideais de operadores.

O título desta dissertação é bem claro com relação a sua proposta, a saber, estudar ideais de operadores que podem ser caracterizados por meio de transformações de sequências vetoriais. Conforme veremos no texto, muitos, importantes e variados são os ideais de operadores importantes que assim podem ser caracterizados.

Para possibilitar uma boa leitura do texto, escrevemos no primeiro capítulo os conceitos e resultados básicos da Análise Funcional que serão usados no decorrer do texto. Porém, por se tratar de uma parte básica, nos atentamos apenas às definições e aos enunciados dos resultados, disponibilizando as devidas referências para as demonstrações. As principais referências usadas foram Botelho, Pellegrino e Teixeira [6] e Bartle [3].

No segundo capítulo introduziremos os espaços de sequências. Dado um espaço de Banach E podemos considerar sequências formadas por elementos de E que satisfazem uma determinada propriedade. O conjunto formado por essas sequências, digamos $X(E)$, será chamado de espaço de sequências. Num primeiro momento estaremos interessados nas boas propriedades que esses espaços possuem, a saber, as propriedades de espaço vetorial, norma e completude. Aqui estudaremos oito espaços de sequências, todos munidos de uma norma, sendo sete deles espaços completos, isto é, espaços de Banach. Esses espaços se tornarão importantes no Capítulo 4 quando formos exemplificar os ideais de operadores caracterizados por meio de transformações de sequências. A seguir apresentamos um diagrama com os espaços que serão construídos, com suas respectivas normas, onde a seta significa subespaço. Por exemplo, $X(E) \longrightarrow Y(E)$ significa que $X(E)$ é subespaço de $Y(E)$.

$$\begin{tikzcd}
(c_0(E), \|\cdot\|_\infty) \arrow[rr] & & (c_0^w(E), \|\cdot\|_\infty) \arrow[dr] & \\
(\ell_p(E), \|\cdot\|_p) \arrow[u] \arrow[r] & (\ell_p^u(E), \|\cdot\|_{w,p}) \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[r] & (\ell_p^w(E), \|\cdot\|_{w,p}) \arrow[u] \arrow[r] & (\ell_\infty(E), \|\cdot\|_\infty) \\
(\ell_p\langle E\rangle, \|\cdot\|_{C,p}) \arrow[u] & & & \\
(c_{00}(E), \|\cdot\|_\infty) \arrow[u] & & &
\end{tikzcd}$$

As principais referências para este capítulo são: [7, 9, 10, 12, 17].

No terceiro capítulo a referência é Botelho e Campos [4]. Esses autores notaram que muitos ideais de operadores são caracterizados por meio de transformações entre espaços de sequências. Com intuito de unificar todos os exemplos deste tipo, Botelho e Campos definiram um ambiente abstrato, chamado classes de sequências, e começaram a estudar os operadores lineares contínuos entre espaços de sequências buscando condições necessárias e suficientes para que a família desses operadores formassem um ideal de operadores. A grosso modo, uma classe de sequências é uma regra que a cada espaço de Banach E associa a um espaço de Banach $X(E)$ formado por sequências em E. Denotamos essa correspondência por $X(\cdot)$, ou simplesmente por X. Porém, essa associação não poderá ser feita de maneira arbitrária e, por essa razão, definimos o que vem a ser classe de sequências linearmente estáveis e provaremos que todos os espaços introduzidos no capítulo anterior satisfazem essa propriedade.

Finalmente, no quarto capítulo trabalharemos com os ideais de operadores caracterizados por meio de transformações de classes de sequências. Veremos condições sobre as classes de sequências para que se obtenha ideais de Banach de operadores, e condições adicionais para que esses ideais gozem de propriedades especiais. Na última seção da dissertação mostraremos que muitos ideais importantes da teoria de ideais de operadores são casos particulares da construção abstrata que foi feita no Capítulo 3. Veremos que propriedades especiais desses ideais também decorrem do caso abstrato. Além de resgatar muitos ideais que vinham sendo estudados separadamente, esta abordagem abstrata permite que novos ideais, que assim possam ser caracterizados, que venham a ser introduzidos no futuro já tenham sua teoria básica estabelecida. Por sinal, é isso exatamente o que aconteceu com os novos ideais de operadores estudados por Botelho, Campos e Santos [5].

Cabe ressaltar que o conteúdo da Seção 4.3 é inédito, não tendo aparecido antes na literatura. Tanto quanto sabemos, o problema que apontamos na demonstração de [14, Proposition 1.6] na Subseção 4.4.3, também aparece aqui pela primeira vez.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

Os objetos centrais da Análise Funcional são os espaços de Banach e os operadores lineares e contínuos entre eles. Sendo assim, nada mais natural do que iniciar essa dissertação com as notações e os resultados clássicos da Análise Funcional que, frequentemente, serão usados no decorrer do texto. Resultados com pouco uso serão introduzidos em momento oportuno. Na construção do capítulo, a principal referência usada foi o livro [6].

Letras maiúsculas representarão, salvo menção contrária, espaços normados sobre o corpo $\mathbb{K}$, que pode ser $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Denotaremos por BAN a classe de todos os espaços normados que são completos com suas respectivas normas, isto é, a classe de todos os espaços de Banach. Usaremos B_E para denotar a bola unitária fechada no espaço normado E, mais explicitamente, $B_E := \{x \in E : \|x\|_E \leq 1\}$.

Para uma leitura cômoda iremos revisitar as notações e os conceitos descritos acima, entre outros.

Definição 1.0.1 Seja E um espaço vetorial. Uma norma sobre E é uma aplicação

$$\|\cdot\|_E \colon E \longrightarrow [0,\infty)\ ,\ x \longmapsto \|x\|_E,$$

que satisfaz as seguintes condições:

N1) $\|x\|_E \geq 0$ para todo $x \in E$ e $\|x\|_E = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

N2) $\|\lambda x\|_E = |\lambda| \cdot \|x\|_E$ para todos $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in E$.

N3) $\|x + y\|_E \leq \|x\|_E + \|y\|_E$ para todos $x, y \in E$ (Desigualdade triangular).

Neste caso, o par $(E, \|\cdot\|_E)$ é chamado de espaço vetorial normado, ou simplesmente, espaço normado. Quando não houver perigo de ambiguidade, escreveremos $\|\cdot\|$ no lugar de $\|\cdot\|_E$.

Os axiomas de norma na forma como conhecemos hoje são devidos a Stefan Banach em seu celebre trabalho *Théorie des opérations linéaires*, publicado em 1932. Veja uma tradução deste trabalho para o inglês em [2].

Definição 1.0.2 Um espaço normado E é chamado de espaço de Banach quando for completo na métrica

$$d(x, y) = \|x - y\|, \ x, y \in E,$$

chamada de métrica induzida pela norma. A classe de todos os espaços de Banach será denotada por BAN.

Teorema 1.0.3 *Sejam E e F espaços normados e $u\colon E \longrightarrow F$ um operador linear. São equivalentes:*

(a) *u é Lipschitziano.*

(b) *u é uniformemente contínuo.*

(c) *u é contínuo.*

(d) *u é contínuo na origem.*

(e) *Existe $C > 0$ tal que $\|u(x)\|_F \leq C\|x\|_E$ para todo $x \in E$.*

Demonstração. Veja [6, Teorema 2.1.1]. ■

Denotamos por $\mathcal{L}(E, F)$ o conjunto de todos os operadores lineares contínuos entre espaços normados E e F. Não é muito trabalhoso mostrar que $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço vetorial com as operações pontuais e que a expressão

$$\|u\| := \sup_{x \in B_E} \|u(x)\|_F$$

$$= \inf\{C > 0 : \|u(x)\|_F \leq C\|x\|_E, \forall x \in E\}.$$

define uma norma em $\mathcal{L}(E, F)$. Mais ainda, se $F \in$ BAN, então $(\mathcal{L}(E, F), \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach (ver [6, Proposição 2.1.4]). Quando $F = \mathbb{K}$, no lugar de $\mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ escrevemos E' e chamamos este espaço de dual topológico de E, ou simplesmente dual de E, e seus elementos de funcionais lineares. Como $\mathbb{K}$ é completo, segue que E' é sempre Banach.

Proposição 1.0.4 *Sejam E um espaço de Banach e F um subespaço vetorial de E. Então F é um espaço de Banach, com a norma induzida de E, se, e somente se, F é fechado em E.*

Demonstração. Veja [6, Proposição 1.1.1]. ■

Proposição 1.0.5 *Sejam E, F e G espaços normados. Se $u \in \mathcal{L}(E, G)$ e $v \in \mathcal{L}(G, F)$, então $v \circ u \in \mathcal{L}(E, F)$ e*

$$\|v \circ u\| \leq \|v\| \cdot \|u\|.$$

Demonstração. De

$$\|v \circ u(x)\| \;=\; \|v(u(x))\| \leq \|v\| \cdot \|u(x)\| \leq \|v\| \cdot \|u\| \cdot \|x\|$$

para todo $x \in E$, tem-se $\|v \circ u\| \leq \|v\| \cdot \|u\|$. ■

A seguir exibiremos uma lista de espaços formados por sequências escalares que são clássicos em Análise Funcional e que serão generalizados no Capítulo 2.

$$\begin{aligned}
c_{00} &:= \{(a_j)_{j=1}^{\infty} : a_j \in \mathbb{K}, \forall j \in \mathbb{N} \text{ e } \exists j_0 \text{ tal que } a_j = 0, \forall j \geq j_0\},\\
c_0 &:= \{(a_j)_{j=1}^{\infty} : a_j \in \mathbb{K}, \forall j \in \mathbb{N} \text{ e } \lim_j a_j = 0\},\\
\ell_p &:= \left\{(a_j)_{j=1}^{\infty} : a_j \in \mathbb{K}, \forall j \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < \infty\right\} \text{ para } p \in [1, +\infty),\\
\ell_\infty &:= \{(a_j)_{j=1}^{\infty} : a_j \in \mathbb{K}, \forall j \in \mathbb{N} \text{ e } \exists M \geq 0 \text{ tal que } |a_j| \leq M, \forall j\}.
\end{aligned}$$

c_{00}, c_0, ℓ_p e ℓ_∞ são chamados, respectivamente, de espaço das sequências eventualmente nulas, espaço das sequências nulas, espaço das sequências p-somáveis e espaço das sequências limitadas. Em ℓ_∞ definimos a norma

$$\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_\infty := \sup_j |a_j|,$$

e em ℓ_p a norma

$$\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Em [6] mostra-se que ℓ_∞ e ℓ_p são espaços de Banach com as normas definidas acima. Mais ainda, mostra-se também que c_0 é um subespaço fechado de ℓ_∞, porém c_{00} não o é.

É fácil mostrar que $\ell_p \subseteq c_0$ e encontrar exemplos que mostram que $c_{00} \subsetneq \ell_p \subsetneq c_0 \subsetneq \ell_\infty$.

A seguir apresentamos dois teoremas que serão valiosos no decorrer do texto, e que, em particular, provam que ℓ_p é espaço vetorial e que $\|\cdot\|_p$ é uma norma.

Teorema 1.0.6 (Desigualdade de Hölder) *Sejam $p, q \in [1, \infty)$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ($\frac{1}{\infty} = 0$). Se $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ e $(b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q$, então*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \cdot |b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^q\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.1}$$

Demonstração. Veja [6, Proposição 1.4.1]. ■

Teorema 1.0.7 (Desigualdade de Minkowski) *Se $p \in [1, \infty)$ e $(a_j)_{j=1}^{\infty}, (b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$, então $(a_j + b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$ e*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j + b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{1.2}$$

Demonstração. Vejag [6, Proposição 1.4.2]). ■

Em Análise Funcional existem quatro teoremas que possuem grandes aplicações, a saber, o Teorema de Banach-Steinhaus, o Teorema da Aplicação Aberta, o Teorema do Gráfico Fechado e o Teorema de Hahn-Banach. Os enunciaremos a seguir juntamente com algumas de suas aplicações.

Teorema 1.0.8 (Banach-Steinhaus) *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $(T_i)_{i\in I}$ uma família de operadores em $\mathcal{L}(E,F)$ satisfazendo a condição de que para cada $x \in E$ existe $C_x < \infty$ tal que*

$$\sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < C_x.$$

Então $\sup\limits_{i\in I} \|T_i\| < \infty$.

Demonstração. Veja [6, Teorema 2.3.2]. ■

Corolário 1.0.9 *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathcal{L}(E,F)$ tal que $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é convergente em F para todo x em E. Se definirmos*

$$T\colon E \longrightarrow F \ , \ T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x),$$

então T é um operador linear contínuo.

Demonstração. Veja [6, Corolário 2.3.3]. ■

Teorema 1.0.10 *Seja $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Então a imagem $T(B_E) \subseteq F$ contém uma bola aberta centrada em $0 \in F$.*

Demonstração. Veja [16, Lema 4.12-3]. ■

Teorema 1.0.11 (Teorema da Aplicação Aberta) *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ linear, contínuo e sobrejetor. Então T é uma aplicação aberta. Em particular, todo operador linear contínuo e bijetor entre espaços de Banach é um isomorfismo.*

Demonstração. Veja [6, Teorema 2.4.2]. ■

Teorema 1.0.12 (Teorema do Gráfico Fechado) *Sejam E e F espaços de Banach e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear. Então T é contínuo se, e somente se, $\mathrm{Graf}(T) := \{(x, T(x)) : x \in E\}$ é fechado em $E \times F$.*

Demonstração. Veja [6, Teorema 2.5.1] ■

Teorema 1.0.13 (Hahn-Banach) *Sejam E um espaço normado. Para todo $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$, existe um funcional linear $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\|$.*

Demonstração. Veja [6, Corolário 3.1.4] ■

Teorema 1.0.14 (Hahn-Banach) *Sejam E um espaço normado, $E \neq \{0\}$ e $x \in E$. Então*
$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in B_{E'}\} = \max\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| = 1\}. \tag{1.3}$$

Demonstração. Veja [6, Corolário 3.1.5] ■

Seja (K, τ) um espaço topológico de Hausdorff compacto (ver [6, Apêndice B]). Denotamos por $C(K)$ o espaço de Banach formado por todas as funções $f\colon K \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas munido da norma
$$\|f\|_{C(K)} = \sup_{x \in K} |f(x)|.$$

Definição 1.0.15 Sejam X um espaço topológico, $\mathcal{B}(X)$ a σ-álgebra de Borel sobre X, $\mu\colon \mathcal{B}(X) \longrightarrow \mathbb{R}$ uma medida de Borel e E um boreliano de X. A medida μ é dita:

- *regular exterior* em E se
$$\mu(E) = \inf\{\mu(O) : O \supset E \text{ e } O \text{ aberto }\};$$

- *regular interior* em E se
$$\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq E \text{ e } K \text{ compacto }\};$$

- *regular* se μ é regular exterior e regular interior em todos os borelianos de X.

Definição 1.0.16 Sejam K um espaço topológico de Hausdorff compacto e $\mathcal{B}(X)$ a σ-álgebra de Borel sobre K. Uma medida μ diz-se *medida de Radon* sobre K se μ é boreliana, finita e regular. Chamamos *medida de Radon com sinal* uma medida com sinal μ tal que sua variação positiva μ^+ e sua variação negativa μ^- são medidas de Radon.
$$\mathcal{M}(K) := \{\mu : \mu \text{ é uma medida de Radon com sinal sobre } K\}$$
A medida $|\mu| := \mu^+ + \mu^-$ é chamada de *variação total* da medida com sinal μ

Proposição 1.0.17 *Seja K um espaço topológico de Hausdorff compacto. A função*
$$\|\cdot\|\colon \mathcal{M}(K) \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ \ \|\mu\| = |\mu|(K),$$
define uma norma em $\mathcal{M}(K)$. Mais ainda, $(\mathcal{M}(K), \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach.

Demonstração. Veja [13, Proposition 7.16]. ■

Teorema 1.0.18 (Teorema da Representação de Riesz) *Seja K um espaço topológico compacto de Hausdorff. O operador*
$$\begin{aligned} T : \mathcal{M}(K) \ &\longrightarrow \ C(K)' \\ \mu \ &\longmapsto \ T(\mu) = T_\mu : C(K) \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ T_\mu(f) = \int_K f d\mu, \end{aligned} \tag{1.4}$$
é um isomorfismo isométrico entre o espaço $\mathcal{M}(K)$ e o espaço $C(K)'$.

Demonstração. Veja [13, Corollary 7.18]. ■

Definição 1.0.19 Seja Ω um conjunto. Para toda σ-álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de Ω e para todo $x \in \Omega$, a função definida por:

$$\delta_x \colon \mathcal{A} \longrightarrow \{0,1\}\ ,\ \delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A, \end{cases}$$

é uma medida em $\mathcal{A}$, chamada de medida de Dirac concentrada em x.

Teorema 1.0.20 (Teorema da Convergência Monótona) *Seja $(X, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Se $f_j \colon X \longrightarrow [0, +\infty]$, $j \in \mathbb{N}$, é uma sequência de funções mensuráveis não negativas tais que*

i) $f_j \leq f_{j+1}$ *para todo* $j \in \mathbb{N}$ *e*

ii) $\lim\limits_{j\to\infty} f_j(x) = f(x)$ *para todo* $x \in X$,

então f é mensurável e $\displaystyle\int_X f d\mu = \lim_{j\to\infty} \int_X f_j d\mu.$

Demonstração. Veja [3, Theorem 4.6] ■

Definição 1.0.21 Sejam E e F espaços normados e $u \colon E \longrightarrow F$ um operador linear. A dimensão da imagem de u é denominada de posto (ou *rank*) e denotada por rank(u), isto é, rank(u) := dim $u(E)$. Se rank(u) $< +\infty$, dizemos que u possui *posto finito*. Por $\mathcal{F}(E; F)$ denotamos o conjunto de todos os operadores lineares contínuos de posto finito entre os espaços normados E e F

Definição 1.0.22 Sejam E, F espaços normados e $T \in \mathcal{L}(E; F)$ um operador linear contínuo. Definimos o operador $T' \colon F' \longrightarrow E'$ por

$$T'(\varphi)(x) = \varphi(T(x)),$$

para todos $x \in E$ e $\varphi \in F'$. O operador T' é chamado *adjunto* de T.

Proposição 1.0.23 *Seja $T \in \mathcal{L}(E; F)$. Então $T' \in \mathcal{L}(F'; E')$ e $\|T'\| = \|T\|$. Mais ainda, se T é um isomorfismo (isométrico), então T' também é um isomorfismo (isométrico).*

Demonstração. Veja [6, Teorema 4.3.11]. ■

O teorema seguinte diz, essencialmente, que todo espaço separável é um quociente de ℓ_1.

Teorema 1.0.24 *Para todo espaço de Banach separável E, existe um operador $T \colon \ell_1 \longrightarrow E$ linear, contínuo e sobrejetor.*

Demonstração. Veja [1, Theorem 2.3.1]. ■

CAPÍTULO 2

ESPAÇOS DE BANACH FORMADOS POR SEQUÊNCIAS VETORIAIS

Neste capítulo apresentaremos uma série de espaços normados cujos elementos são sequências formadas por vetores de um espaço de normado. Esses espaços serão usados, no capítulo 3, para ilustrar os conceitos de classes de sequências, classes de sequências linearmente estáveis e classes de sequências finitamente determinadas. Além disso, no Capítulo 4, servirão para exemplificar ideais de operadores definidos por meio de transformações de sequências.

2.1 O espaço das sequências limitadas

Definição 2.1.1 Seja E um espaço normado. Uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E é dita *limitada* se existe uma constante $M \geq 0$ tal que $\|x_j\| \leq M$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Denotamos por $\ell_\infty(E)$ o conjunto de todas as sequências limitadas em E.

Proposição 2.1.2 *Seja E um espaço normado. Então $\ell_\infty(E)$ é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências.*

Demonstração. É claro que a sequência identicamente nula pertence a $\ell_\infty(E)$. Dadas duas sequências $(x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty(E)$ e um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, existem constantes C_1 e C_2 positivas tais que $\|x_j\|_E \leq C_1$ e $\|y_j\|_E \leq C_2$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\|\lambda x_j + y_j\|_E \leq |\lambda|\|x_j\|_E + \|y_j\|_E \leq |\lambda|C_1 + C_2,$$

isto é, a sequência $\lambda(x_j)_{j=1}^{\infty} + (y_j)_{j=1}^{\infty} = (\lambda x_j + y_j)_{j=1}^{\infty}$ é limitada. Logo, $\lambda(x_j)_{j=1}^{\infty} + (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty(E)$ e portanto $\ell_\infty(E)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. ∎

Proposição 2.1.3 *Seja E um espaço normado. A função*

$$(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty(E) \mapsto \sup_j \|x_j\|_E,$$

define uma norma em $\ell_\infty(E)$.

Notação: Sempre que não houver o risco de confundir normas, denotaremos a norma em $\ell_\infty(E)$ por $\|\cdot\|_\infty$, lembrando que essa é a mesma notação usada para denotar a norma de ℓ_∞. Em alguns casos será melhor usar a notação $\|\cdot\|_{\ell_\infty(E)}$.

Demonstração. $\|\cdot\|_\infty$ está bem definida pois $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E)$ se, e somente se, $(\|x_j\|_E)_{j=1}^\infty$ é limitada em $\mathbb{K}$, logo existe o $\sup\limits_j \|x_j\|_E$. Verifiquemos os axiomas de norma.

N1) Como $\|\cdot\|_E$ é uma norma em E, segue que $\|x_j\|_E \geq 0$, para qualquer $x_j \in E$. Assim

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_\infty = \sup_j \|x_j\|_E \geq 0, \text{ para toda } (x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E).$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned}\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \sup_j \|x_j\|_E = 0 \Leftrightarrow \|x_j\|_E = 0, \forall j \in \mathbb{N}.\\ \Leftrightarrow x_j = 0, \forall j \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (x_j)_{j=1}^\infty \text{ é a sequência nula.}\end{aligned}$$

N2) Para quaisquer $\lambda \in \mathbb{K}$ e $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E)$,

$$\begin{aligned}\|\lambda(x_j)_{j=1}^\infty\|_\infty &= \|(\lambda x_j)_{j=1}^\infty\|_\infty = \sup_j \|\lambda x_j\|_E = \sup_j(|\lambda| \cdot \|x_j\|_E)\\ &= |\lambda| \cdot \sup_j \|x_j\|_E = |\lambda| \cdot \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_\infty.\end{aligned}$$

N3) Para quaisquer $(x_j)_{j=1}^\infty, (y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E)$,

$$\begin{aligned}\|(x_j)_{j=1}^\infty + (y_j)_{j=1}^\infty\|_\infty &= \sup_j \|x_j + y_j\|_E \leq \sup_j(\|x_j\|_E + \|y_j\|_E)\\ &\leq \sup_j \|x_j\|_E + \sup_j \|y_j\|_E = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_\infty + \|(y_j)_{j=1}^\infty\|_\infty.\end{aligned}$$

■

Proposição 2.1.4 *$(\ell_\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$ é um espaço de Banach se, e somente se, E é um espaço de Banach.*

Demonstração. Suponha que E seja um espaço de Banach. Seja $(x^k)_{k=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $\ell_\infty(E)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, denotemos $x^k = (x_j^k)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E)$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x^k - x^r\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \text{ sempre que } k, r \geq k_0. \tag{2.1}$$

Da desigualdade

$$\|x_j^k - x_j^r\|_E \leq \|x^k - x^r\|_\infty, \tag{2.2}$$

que é obviamente válida para todo $j \in \mathbb{N}$, concluímos que, para j fixo, a sequência $(x_j^k)_{k=1}^\infty$ é de Cauchy em E. Assim, podemos definir a sequência $y = (y_j)_{j=1}^\infty$ em E por $y_j = \lim\limits_k x_j^k$.

Devemos mostrar que $y \in \ell_\infty(E)$ e que $\|x^k - y\|_\infty \xrightarrow{k} 0$. Das desigualdades (2.1) e (2.2) segue que

$$\|x_j^k - x_j^r\|_E < \frac{\varepsilon}{2} \text{ sempre que } k, r \geq k_0.$$

Fazendo $r \longrightarrow \infty$,

$$\|x_j^k - y_j\|_E \leq \frac{\varepsilon}{2} \text{ sempre que } k \geq k_0 \text{ e } \forall j \in \mathbb{N}, \tag{2.3}$$

e, em particular, para $k = k_0$,

$$\sup_j \|x_j^{k_0} - y_j\|_E \leq \frac{\varepsilon}{2},$$

ou seja, $(x_j^{k_0})_{j=1}^\infty - (y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E)$. Portanto, $y = x^{k_0} - (x^{k_0} - y) \in \ell_\infty(E)$, pois $\ell_\infty(E)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Mais ainda, de (2.3) temos

$$\|x^k - y\|_\infty = \sup_j \|x_j^k - y_j\|_E \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \text{ sempre que } k \geq k_0,$$

o que prova que $\|x^k - y\|_\infty \xrightarrow{k} 0$.

A recíproca é óbvia pelo simples fato de que $\ell_\infty(E)$ contém uma cópia isométrica de E pela inclusão $x \in E \mapsto (x, 0, 0, \ldots) \in \ell_\infty(E)$. ■

2.2 Sequências nulas e eventualmente nulas

Definição 2.2.1 Seja E um espaço normado. Uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ em E é dita *eventualmente nula* se existe um natural j_0 tal que $x_j = 0$ para todo $j \geq j_0$. O espaço das sequências eventualmente nulas em E é denotado por $c_{00}(E)$.

Definição 2.2.2 Seja E um espaço normado. O espaço das *sequências nulas* é definido da seguinte forma:

$$c_0(E) := \left\{(x_j)_{j=1}^\infty : x_j \in E \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \|x_j\| \xrightarrow{j} 0\right\}.$$

Proposição 2.2.3 *Seja E um espaço normado. Então $c_{00}(E)$ é subespaço vetorial de $c_0(E)$ e $c_0(E)$ é subespaço vetorial de $\ell_\infty(E)$.*

Demonstração. As propriedades de subespaço são óbvias e serão omitidas. Se $(x_j)_{j=1}^\infty \in c_{00}(E)$, então a partir de um índice a sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ é nula e, portanto, converge para 0. Assim, $c_{00}(E) \subseteq c_0(E)$. Se $(x_j)_{j=1}^\infty \in c_0(E)$, então $\|x_j\| \xrightarrow{j} 0$ e sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ é limitada. Logo $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E)$ e, portanto $c_0(E) \subseteq \ell_\infty(E)$. ■

Podemos considerar em $c_{00}(E)$ e $c_0(E)$ a norma induzida pela norma em $\ell_\infty(E)$. O teorema a seguir mostra que $c_0(E)$ é Banach com a norma induzida de $\ell_\infty(E)$, porém $c_{00}(E)$ não goza desta propriedade, o que veremos no seguinte teorema:

Teorema 2.2.4 *Seja E um espaço normado. Então valem as seguintes afirmações:*
(a) *$c_0(E)$ é subespaço fechado de $\ell_\infty(E)$. Consequentemente, $(c_0(E), \|\cdot\|_\infty)$ é Banach.*
(b) *A inclusão $i\colon c_0(E) \longrightarrow \ell_\infty(E)$ é linear, contínua e $\|i\| = 1$.*
(c) *$c_{00}(E)$ não é fechado em $c_0(E)$.*

Demonstração. (a) Seja $(x^k)_{k=1}^\infty$ uma sequência em $c_0(E)$ tal que $x^k \xrightarrow{k} y \in \ell_\infty(E)$. Devemos mostrar que $y \in c_0(E)$. Como $\|x^k - y\|_\infty \longrightarrow 0$, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um índice $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_i^k - y_i\|_E \leq \|(x_j^k)_{j=1}^\infty - (y_j)_{j=1}^\infty\|_\infty = \sup_j \|x_j^k - y_j\|_E < \frac{\varepsilon}{2},$$

para todo $i \in \mathbb{N}$ e sempre que $k \geq k_0$. Em particular,

$$\|x_i^{k_0} - y_i\|_E < \frac{\varepsilon}{2} \text{ para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Como $x^{k_0} = (x_i^{k_0})_{i=1}^\infty \in c_0(E)$, temos $\|x_i^{k_0}\|_E \xrightarrow{i} 0$, e daí existe um índice $i_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_i^{k_0}\|_E < \frac{\varepsilon}{2} \text{ sempre que } i \geq i_0.$$

Logo,

$$\|y_i\|_E = \|y_i - x_i^{k_0} + x_i^{k_0}\|_E \leq \|y_i - x_i^{k_0}\|_E + \|x_i^{k_0}\|_E < \varepsilon$$

sempre que $i \geq i_0$. Portanto, $\|y_i\|_E \longrightarrow 0$ e, consequentemente, $c_0(E)$ é fechado.

(b) É óbvio, pois estamos considerando em ambos os espaços a mesma norma.

(c) Considere um vetor $x \in E$ qualquer com $\|x\| \neq 0$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, seja

$$x^k = \left(x, \frac{x}{2}, \frac{x}{3}, \cdots, \frac{x}{k}, 0, 0, \cdots\right).$$

É claro que $x^k \in c_{00}(E) \subseteq c_0(E)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Vejamos que

$$x^k \xrightarrow{k} \left(x, \frac{x}{2}, \frac{x}{3}, \frac{x}{4}, \cdots\right) \text{ em } c_0(E):$$

$$\begin{aligned}
\left\|x^k - \left(x, \frac{x}{2}, \frac{x}{3}, \frac{x}{4}, \cdots\right)\right\|_\infty &= \left\|\left(x, \frac{x}{2}, \frac{x}{3}, \cdots, \frac{x}{k}, 0, 0, \cdots\right) - \left(x, \frac{x}{2}, \frac{x}{3}, \frac{x}{4}, \cdots\right)\right\|_\infty \\
&= \left\|\left(0, 0, \cdots, 0, \frac{x}{k+1}, \frac{x}{x+2}, \frac{x}{x+3}, \cdots\right)\right\|_\infty \\
&= \sup\left\{\left\|\frac{x}{k+1}\right\|, \left\|\frac{x}{x+2}\right\|, \left\|\frac{x}{x+3}\right\|, \cdots\right\} \\
&= \sup\left\{\frac{\|x\|}{k+1}, \frac{\|x\|}{x+2}, \frac{\|x\|}{x+3}, \cdots\right\} \\
&= \|x\| \cdot \sup\left\{\frac{1}{k+1}, \frac{1}{x+2}, \frac{1}{x+3}, \cdots\right\} \\
&= \|x\| \cdot \frac{1}{k+1} \xrightarrow{k} 0.
\end{aligned}$$

Porém $\left(x, \frac{x}{2}, \frac{x}{3}, \frac{x}{4}, \cdots\right) \notin c_{00}(E)$ pois $x \neq 0$. Logo $c_{00}(E)$ não é fechado em E. ■

2.3 O espaço das sequências fortemente p-somáveis

Ao longo desta seção temos sempre $1 \leq p < \infty$ e E um espaço normado.

Definição 2.3.1 Uma sequencia $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E é *fortemente p-somável* se

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p < \infty.$$

Denotamos por $\ell_p(E)$ o espaço das sequências fortemente p-somáveis em E. Observe que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$ se, e somente se, $(\|x_j\|)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$.

Proposição 2.3.2 *$\ell_p(E)$ é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências.*

Demonstração. É claro que a sequência identicamente nula pertence a $\ell_p(E)$. Se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$, temos $(\|x_j\|)_{j=1}^{\infty}, (\|y_j\|)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$. Como ℓ_p é um espaço vetorial,

$$\lambda \left(\|x_j\|\right)_{j=1}^{\infty} + \left(\|y_j\|\right)_{j=1}^{\infty} = \left(\lambda\|x_j\| + \|y_j\|\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p.$$

Da desigualdade triangular segue que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|\lambda x_j + y_j\|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(|\lambda| \cdot \|x_j\| + \|y_j\|\right)^p < \infty$$

e, consequentemente, $\lambda(x_j)_{j=1}^{\infty} + (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$. ■

Proposição 2.3.3 *A função*

$$(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E) \mapsto \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{2.4}$$

define uma norma em $\ell_p(E)$.

Notação: Quando não houver risco de confusão entre os espaços ℓ_p e $\ell_p(E)$, denotaremos a norma (2.4) por $\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p$, caso contrário, a denotaremos por $\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_p(E)}$.

Demonstração. Sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Como $\|x_j\| \geq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, segue que

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0,$$

e

$$\begin{aligned}\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p = 0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p = 0 &\Leftrightarrow \|x_j\| = 0 \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow x_j = 0, \forall j \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (x_j)_{j=1}^{\infty} \text{ é a sequência nula.}\end{aligned}$$

Também temos que

$$\|\lambda(x_j)_{j=1}^\infty\|_p = \|(\lambda x_j)_{j=1}^\infty\|_p = \left(\sum_{j=1}^\infty \|\lambda x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^\infty |\lambda|^p \cdot \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= |\lambda| \cdot \left(\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \cdot \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_p.$$

Sabendo que $(\|x_j\|)_{j=1}^\infty, (\|y_j\|)_{j=1}^\infty \in \ell_p$, tomando $a_j = \|x_j\|$ e $b_j = \|y_j\|$ para todo $j \in \mathbb{N}$, resulta da Desigualdade de Minkowski (1.2) que

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty + (y_j)_{j=1}^\infty\|_p = \left(\sum_{j=1}^\infty \|x_j + y_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^\infty (\|x_j\| + \|y_j\|)^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\leq \left(\sum_{j=1}^\infty \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^\infty \|y_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|(x_j)_{j=1}^\infty + (y_j)_{j=1}^\infty\|_p.$$

■

Proposição 2.3.4 *Seja E um espaço normado. Então $(\ell_p(E), \|\cdot\|_p)$ é um espaço de Banach se, e somente se, E é um espaço de Banach.*

Demonstração. Suponha que E seja um espaço de Banach. Seja $(x^k)_{k=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $\ell_p(E)$. Note que, para cada $k \in \mathbb{N}$, x^k é uma sequência de vetores em E. Denotamos $x^k = (x_j^k)_{j=1}^\infty \in \ell_p(E)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Vejamos que, para cada $j \in \mathbb{N}$, a sequência $(x_j^k)_{k=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em E e portanto convergente. Como $(x^k)_{k=1}^\infty$ é de Cauchy em $\ell_p(E)$, dado $\varepsilon > 0$ existe um índice $k_0 = k_0(\varepsilon)$ tal que

$$\|x^k - x^r\|_p < \varepsilon \text{ sempre que } k, r \geq k_0,$$

isto é,

$$\|(x_i^k)_{i=1}^\infty - (x_i^r)_{i=1}^\infty\|_p < \varepsilon \text{ sempre que } k, r \geq k_0.$$

Observando que $\|x_j^k - x_j^r\|_E \leq \|(x_i^k)_{i=1}^\infty - (x_i^r)_{i=1}^\infty\|_p$ para todo $j \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\|x_j^k - x_j^r\|_E < \varepsilon \text{ sempre que } k, r \geq k_0 \text{ e para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Logo, para cada $j \in \mathbb{N}$ a sequência $(x_j^k)_{k=1}^\infty$ é de Cauchy em E, e portanto podemos tomar $y_j = \lim\limits_{k\to\infty} x_j^k \in E$. Assim, formamos uma sequência $y = (y_j)_{j=1}^\infty$ de elementos de E. Devemos provar que $y \in \ell_p(E)$ e que $x^k \xrightarrow{k} y$ em $\ell_p(E)$. Usando novamente que $(x^k)_{k=1}^\infty$ é de Cauchy em $\ell_p(E)$,

$$\left(\sum_{j=1}^\infty \|x_j^k - x_j^r\|_E^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x^k - x^r\|_p < \frac{\varepsilon}{2} \text{ sempre que } k, r \geq k_0,$$

ou, equivalentemente,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j^k - x_j^r\|_E^p = \|x^k - x^r\|_p^p < \frac{\varepsilon^p}{2^p} \text{ sempre que } k, r \geq k_0.$$

Em particular, para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=1}^{m} \|x_j^k - x_j^r\|_E^p < \frac{\varepsilon^p}{2^p}, \text{ sempre que } k, r \geq k_0.$$

Fixando k e fazendo $r \longrightarrow \infty$ acima obtemos

$$\sum_{j=1}^{m} \|x_j^k - y_j\|_E^p \leq \frac{\varepsilon^p}{2^p} \text{ sempre que } k \geq k_0, \forall m \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Agora, fazendo $m \longrightarrow \infty$ em (2.5) temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j^k - y_j\|_E^p \leq \frac{\varepsilon^p}{2^p} \text{ sempre que } k \geq k_0. \tag{2.6}$$

Em particular, para $k = k_0$ obtemos

$$x^{k_0} - y = (x_j^{k_0})_{j=1}^{\infty} - (y_j)_{j=1}^{\infty} = (x_j^{k_0} - y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E).$$

Como $\ell_p(E)$ é um espaço vetorial, resulta que $y = x^{k_0} - (x^{k_0} - y) \in \ell_p(E)$, e da desigualdade (2.6) concluímos que $x^k \xrightarrow{k} y \in \ell_p(E)$.

A recíproca é obvia, pois $\ell_p(E)$ contém uma cópia isométrica de E pela inclusão $x \in E \mapsto (x, 0, 0, \ldots,) \in \ell_p(E)$. ■

Proposição 2.3.5 (a) $c_{00}(E) \subseteq \ell_p(E)$.
(b) $\ell_p(E) \subseteq c_0(E)$ *e a inclusão* $i \colon \ell_p(E) \longrightarrow c_0(E)$ *é contínua de norma 1.*

Demonstração. O item (a) é imediato. Para o item (b), seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$. Então $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p < \infty$, donde podemos concluir que $\lim\limits_j \|x_j\| = 0$, ou seja, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0(E)$. Observe que, dada uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$, para todo $j \in \mathbb{N}$ tem-se $\|x_j\|^p \leq \sup\limits_i \|x_i\|^p$, logo

$$\sup_j \|x_j\| \leq \left(\sup_i \|x_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Assim,

$$\|i((x_j)_{j=1}^{\infty})\|_{\infty} = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup_j \|x_j\| \leq \left(\sup_j \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}\|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p.$$

Logo, i é contínuo e $\|i\| \leq 1$. Vejamos que $\|i\| = 1$. Para isto, tome $x \in E$ tal que $\|x\| = 1$. Com isso, $(x, 0, 0, \cdots) \in B_{\ell_p(E)}$ e

$$\|i((x, 0, 0, \cdots))\|_{\infty} = \|(x, 0, 0, \cdots)\|_{\infty} = 1.$$

Portanto, $\|i\| = \sup\limits_{(x_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_p(E)}} \|i((x_j)_{j=1}\infty)\| \geq 1.$ ■

Para ver que a inclusão na Proposição 2.3.5(a) pode ser própria, mesmo que E possua dimensão finita, basta tomar $E = \mathbb{K}$. Neste caso, $c_{00}(\mathbb{K}) = c_{00} \subsetneq \ell_p = \ell_p(\mathbb{K})$. O exemplo seguinte ilustra essa situação em dimensão infinita.

Exemplo 2.3.6 Considere o espaço de Banach $E = C[0, 1]$ com a norma

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Considere também a sequência $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de funções em E definidas por $f_n(x) = \dfrac{x^{\frac{n+1}{2}}}{n}$. Então, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f_n\|_2 = \frac{1}{n}\left(\int_0^1 |x^{\frac{n+1}{2}}|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Como $\|f_n\|_p \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $(f_n)_{n=1}^{\infty} \notin c_{00}(E)$. Porém,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|f_n\|_2^p = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3p}{2}}} = \xi\left(\frac{3p}{2}\right) < \infty,$$

onde a função ξ é a função zeta de Riemann (note que $\frac{3p}{2} > 1$). Logo $(f_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$ e, portanto, $\ell_p(E) \nsubseteq c_{00}(E)$.

Veremos a seguir como criar sequências vetoriais a partir de sequências escalares, de maneira a preservar o espaço em que a sequência original pertence.

Definição 2.3.7 Sejam E um espaço normado, $x \in E$ e $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência de escalares. Definimos o produto tensorial de $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$ por x como sendo:

$$(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \otimes x := (\lambda_j x)_{j=1}^{\infty} \in E^{\mathbb{N}}.$$

O símbolo $\otimes$ de produto tensorial se justifique pois esta operação obedece as propriedades usuais do produto tensorial, a saber:

$$\left((\lambda_j)_{j=1}^{\infty} + (\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\right) \otimes x = (\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \otimes x + (\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \otimes x,$$

$$(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \otimes (x + y) = (\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \otimes x + (\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \otimes y,$$

$$\lambda\left((\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \otimes x\right) = (\lambda\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \otimes x = (\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \otimes \lambda x.$$

Proposição 2.3.8 *Sejam* $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \in \mathbb{K}^\mathbb{N}$ *e* $0 \neq x \in E$. *Então:*

(a) $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \otimes x \in \ell_p(E) \Leftrightarrow (\lambda_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p$, *e neste caso* $\|(\lambda_j)_{j=1}^\infty \otimes x\|_p = \|(\lambda_j)_{j=1}^\infty\|_p \cdot \|x\|$.

(b) $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \otimes x \in c_{00}(E) \Leftrightarrow (\lambda_j)_{j=1}^\infty \in c_{00}$, *e neste caso* $\|(\lambda_j)_{j=1}^\infty \otimes x\|_\infty = \|(\lambda_j)_{j=1}^\infty\|_\infty \cdot \|x\|$.

(c) $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \otimes x \in c_0(E) \Leftrightarrow (\lambda_j)_{j=1}^\infty \in c_0$, *e neste caso* $\|(\lambda_j)_{j=1}^\infty \otimes x\|_\infty = \|(\lambda_j)_{j=1}^\infty\|_\infty \cdot \|x\|$.

(d) $(\lambda_j)_{j=1}^\infty \otimes x \in \ell_\infty(E) \Leftrightarrow (\lambda_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty$, *e neste caso* $\|(\lambda_j)_{j=1}^\infty \otimes x\|_\infty = \|(\lambda_j)_{j=1}^\infty\|_\infty \cdot \|x\|$.

Demonstração. O item (a) segue imediatamente da igualdade

$$\sum_{j=1}^\infty \|\lambda_j x\|^p = \|x\|^p \cdot \sum_{j=1}^\infty |\lambda_j|^p.$$

A primeira afirmação de (b) é óbvia e a primeira afirmação de (c) segue de

$$\begin{aligned}(\lambda_j)_{j=1}^\infty \otimes x \in c_0(E) &\Leftrightarrow (\lambda_j x)_{j=1}^\infty \in c_0(E) \Leftrightarrow \|\lambda_j x\| \longrightarrow 0 \Leftrightarrow \|x\| \cdot |\lambda_j| \longrightarrow 0 \\ &\Leftrightarrow |\lambda_j| \longrightarrow 0 \Leftrightarrow (\lambda_j)_{j=1}^\infty \in c_0.\end{aligned}$$

A primeira afirmação de (d) segue de

$$\begin{aligned}(\lambda_j)_{j=1}^\infty \otimes x \in \ell_\infty(E) &\Leftrightarrow (\lambda_j x)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E) \\ &\Leftrightarrow \text{existe } M \geq 0 \text{ tal que } \|\lambda_j x\| \leq M \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \text{existe } M \geq 0 \text{ tal que } |\lambda_j| \cdot \|x\| \leq M \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow \text{existe } M \geq 0 \text{ tal que } |\lambda_j| \cdot \leq \frac{M}{\|x\|} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow (\lambda_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty.\end{aligned}$$

As segundas afirmações de (b), (c) e (d) seguem de

$$\begin{aligned}\|(\lambda_j)_{j=1}^\infty \otimes x\|_\infty &= \|(\lambda_j x)_{j=1}^\infty\|_\infty = \sup_{j \in \mathbb{N}} \|\lambda_j x\| \\ &= \|x\| \cdot \sup_{j \in \mathbb{N}} |\lambda_j| = \|(\lambda_j)_{j=1}^\infty\|_\infty \cdot \|x\|.\end{aligned}$$

■

2.4 O espaço das sequências fracamente p-somáveis

Novamente, ao longo desta seção temos sempre $1 \leq p < \infty$ e E um espaço normado.

Definição 2.4.1 Uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ em E é *fracamente p-somável* se

$$\sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)|^p < \infty$$

para todo $\varphi \in E'$. Indicamos por $\ell_p^w(E)$ o espaço de todas as sequências fracamente p-somáveis em E.

Observe que uma sequência $(x_j)_{j=1}^\infty$ de vetores em E é fracamente p-somável se, e somente, para todo funcional linear contínuo $\varphi \in E'$, a correspondente sequência de escalares $(|\varphi(x_j)|)_{j=1}^\infty$ é uma sequência em ℓ_p.

Proposição 2.4.2 *$\ell_p^w(E)$ é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências.*

Demonstração. Como cada funcional $\varphi \in E'$ é linear, é claro que a sequência identicamente nula pertence a $\ell_p^w(E)$. Sejam $(x_j)_{j=1}^\infty, (y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $\varphi \in E'$. Pela Desigualdade de Minkowski,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi(\lambda x_j + y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{j=1}^\infty |\lambda\varphi(x_j) + \varphi(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \lambda \cdot \left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi(y_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,\end{aligned}$$

provando que $\lambda(x_j)_{j=1}^\infty + (y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$. ∎

Nosso próximo objetivo é mostrar que a expressão

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,p} := \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

define uma norma em $\ell_p^w(E)$. Em primeiro lugar precisamos mostrar que este supremo é finito:

Lema 2.4.3 *Para cada sequência $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$, tem-se*

$$\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Demonstração. Pela definição de $\ell_p^w(E)$, o operador

$$T\colon E' \longrightarrow \ell_p \ , \ T(\varphi) = (\varphi(x_j))_{j=1}^\infty,$$

está bem definido. Se T for linear e contínuo, teremos

$$\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|(\varphi(x_j))_{j=1}^\infty\|_{\ell_p} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|T(\varphi)\|_{\ell_p} = \|T\| < \infty,$$

e a demonstração estará completa. Basta então provar que T é linear e contínuo. A linearidade é imediata: dados $\varphi, \psi \in E'$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}T(\lambda\varphi + \psi) &= ((\lambda\varphi + \psi)(x_j))_{j=1}^\infty = (\lambda\varphi(x_j))_{j=1}^\infty + (\psi(x_j))_{j=1}^\infty \\ &= \lambda(\varphi(x_j))_{j=1}^\infty + (\psi(x_j))_{j=1}^\infty = \lambda T(\varphi) + T(\psi).\end{aligned}$$

Para a continuidade de T usaremos o Teorema do Gráfico Fechado conforme enunciado no Teorema 1.0.12. Para isso, note primeiramente que E' e ℓ_p são espaços de Banach. Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $(\varphi_k, T(\varphi_k)) \in \text{Graf}(T)$ tal que $(\varphi_k, T(\varphi_k)) \longrightarrow (\varphi, y)$ em $E' \times \ell_p$. Dessa convergência segue que $\varphi_k \longrightarrow \varphi$ em E' e $T(\varphi_k) = (\varphi_k(x_j))_{j=1}^{\infty} \xrightarrow{k} y := (y_j)_{j=1}^{\infty}$ em ℓ_p. Dessa última convergência segue que $\varphi_k(x_j) \xrightarrow{k} y_j$ em $\mathbb{K}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como $\varphi_k \xrightarrow{k} \varphi$ em E', temos $\varphi_k(x_j) \xrightarrow{k} \varphi(x_j)$ em $\mathbb{K}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Pela unicidade do limite, $\varphi(x_j) = y_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo,

$$y = (y_j)_{j=1}^{\infty} = (\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty} = T(\varphi).$$

A igualdade $T(\varphi) = y$, onde $y = (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$, implica que $(\varphi, y) \in \text{Graf}(T)$. Portanto, $\text{Graf}(T)$ é fechado em $E' \times \ell_p$ e pelo Teorema 1.0.12 concluímos que T é contínuo. ■

Proposição 2.4.4 *A função* $\|\cdot\|_{w,p} \colon \ell_p^w(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ *dada por*

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} := \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

define uma norma em $\ell_p^w(E)$.

Demonstração. A boa definição da função segue do Lema 2.4.3. Verifiquemos os axiomas de norma.

N1) É óbvio que $\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} \geq 0$ para toda $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$. Se $x_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, então $\varphi(x_j) = 0$ para todo $\varphi \in E'$ e todo j. Consequentemente,

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} = 0 \Rightarrow \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p = 0, \forall \varphi \in B_{E'} \\ \Rightarrow \varphi(x_j) = 0, \forall \varphi \in B_{E'}, \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow x_j = 0, \forall j \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

onde a última implicação segue do Teorema de Hahn-Banach (Teorema (1.0.14)).

N2) Sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então

$$\begin{aligned} \|\lambda(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} = \|(\lambda x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(\lambda x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda \varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda|^p \cdot |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

$$= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(|\lambda|^p \cdot \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\lambda| \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$= |\lambda| \cdot \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \cdot \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p}.$$

N3) Sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$. Então, usando a Desigualdade de Minkowski, temos

$$\begin{aligned}
\|(x_j)_{j=1}^{\infty} + (y_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} &= \|(x_j + y_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} \\
&= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j + y_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j) + \varphi(y_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left[\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(y_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right] \\
&\leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(y_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} + \|(y_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p}.
\end{aligned}$$

■

Proposição 2.4.5 *Para todo espaço de Banach E, $(\ell_p^w(E), \|\cdot\|_{w,p})$ é também um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(x^k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\ell_p^w(E)$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, denotamos $x^k = (x_j^k)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe um índice $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x^k - x^r\|_{w,p} = \|(x_j^k - x_j^r)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j^k - x_j^r)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

sempre que $k, r \geq k_0$. Assim, para todos $\varphi \in B_{E'}$ e $i \in \mathbb{N}$, temos

$$|\varphi(x_i^k - x_i^r)|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j^k - x_j^r)|^p \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j^k - x_j^r)|^p \right) < \varepsilon^p$$

sempre que $k, r \geq k_0$.e Portanto,

$$|\varphi(x_i^k - x_i^r)| < \varepsilon \text{ sempre que } k, r \geq k_0.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach (Teorema (1.0.14)) segue que, para todo $i \in \mathbb{N}$,

$$\|x_i^k - x_i^r\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x_i^k - x_i^r)| < \varepsilon \text{ sempre que } k, r \geq k_0,$$

isto é, a sequência $(x_j^k)_{k=1}^\infty$ é de Cauchy em E para cada $j \in \mathbb{N}$ fixado. Como E é um espaço de Banach, para cada j existe $y_j \in E$ tal que $x_j^k \xrightarrow{k} y_j$ em E. Formamos assim uma sequência $y = (y_j)_{j=1}^\infty$ em E. Basta provar que $y \in \ell_p^w(E)$ e que $x^k \longrightarrow y$ em $\ell_p^w(E)$. Para isso, note que para cada $m \in \mathbb{N}$ e cada $\varphi \in B_{E'}$,

$$\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j^k - x_j^r)|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j^k - x_j^r)|^p \leq \|x_j^k - x_j^r\|_{p,w} < \varepsilon^p$$

sempre que $k, r \geq k_0$. Fazendo $r \longrightarrow \infty$ na desigualdade acima obtemos

$$\sum_{j=1}^{m} |\varphi(x_j^k - y_j)|^p < \varepsilon^p \text{ sempre que } k \geq k_0 \text{ e para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Fazendo $m \longrightarrow \infty$ obtemos

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j^k - y_j)|^p \leq \varepsilon^p \text{ sempre que } k \geq k_0. \tag{2.7}$$

Seja $\psi \in E', \psi \neq 0$. Então $\dfrac{\psi}{\|\psi\|} \in B_{E'}$ e, consequentemente, se $k \geq k_0$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\frac{\psi}{\|\psi\|}(x_j^k - y_j)|^p \leq \varepsilon^p,$$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\psi(x_j^k - y_j)|^p \leq \|\psi\|^p \varepsilon^p.$$

Concluímos que, para todo $k \geq k_0$, a sequência $(x^k - y)$ pertence a $\ell_p^w(E)$. Em particular, para $k = k_0$, $(x^{k_0} - y) \in \ell_p^w(E)$. Como $\ell_p^w(E)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, concluímos que $y = x^{k_0} - (x^{k_0} - y) \in \ell_p^w(E)$. Mais ainda, de (2.7) segue que

$$\|x^k - y\|_{p,w} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j^k - y_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon \text{ sempre que } k \geq k_0,$$

provando que $x^k \longrightarrow y$ em $\ell_p^w(E)$. ■

Apresentamos a seguir exemplos de sequências fracamente somáveis, que serão úteis mais adiante. Por $(e_j)_{j=1}^\infty$ denotamos as sequências canônicas formadas por zeros e uns.

Exemplo 2.4.6 Vejamos que se $1 \leq p' \leq q < \infty$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, então $(e_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(\ell_p)$ e $\|(e_j)_{j=1}^\infty\|_{w,q} = 1$. De fato, como $e_j \in \ell_p$ para todo $j \in \mathbb{N}$, é suficiente verificar que

$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(e_j)|^q < \infty$ para todo $\varphi \in (\ell_p)'$. Seja então $\varphi \in (\ell_p)'$. Por meio do isomorfismo isométrico

$$b = (b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p'} \overset{J}{\longmapsto} J(b) \in (\ell_p)' \ , \ J(b)\left((a_j)_{j=1}^{\infty}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j,$$

existe $b = (b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p'}$ tal que $\varphi = J(b)$. De $p' \leq q$ segue que $\ell_{p'} \subseteq \ell_q$, logo $b \in \ell_q$. Daí,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(e_j)|^q = \sum_{j=1}^{\infty} |J(b)(e_j)|^q = \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^q < \infty,$$

provando que $(e_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(\ell_p)$. A igualdade $\|(e_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,q} = 1$ segue facilmente.

Exemplo 2.4.7 Vejamos que $(e_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(c_0)$ para todo $p \geq 1$. Para isso usaremos o isomorfismo isométrico

$$b = (b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1 \overset{J}{\longmapsto} J(b) \in (c_0)' \ , \ J(b)\left((a_j)_{j=1}^{\infty}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j.$$

Dado $\varphi \in (c_0)'$, tome $b = (b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$ tal que $\varphi = J(b)$. Como $\ell_1 \subseteq \ell_p$ para todo $p \geq 1$, segue que $b \in \ell_p$, e daí,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(e_j)|^p = \sum_{j=1}^{\infty} |J(b)(e_j)|^p = \sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^p < \infty.$$

Um passo natural é considerar o espaço de sequências vetoriais que são limitadas na topologia fraca, ou seja,

$$\ell_\infty^w(E) = \{(x_j)_{j=1}^{\infty} : (\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty, \forall \varphi \in E'\},$$

com a norma

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,\infty} := \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_\infty.$$

O próximo passo seria mostrar que $(\ell_\infty^w(E), \|\cdot\|_{w,\infty})$ é um espaço de Banach. Todavia, iremos mostrar que $\ell_\infty^w(E) = \ell_\infty(E)$ com igualdade de normas, tornando desnecessário a introdução de $\ell_\infty^w(E)$. Para isso precisaremos de dois resultados preparatórios.

Definição 2.4.8 Um subconjunto $A \subseteq E$ é fracamente limitado se $\varphi(A)$ é limitado em $\mathbb{K}$ para todo funcional $\varphi \in E'$.

Lema 2.4.9 *Um subconjunto $A \subseteq E$ é limitado se, e somente se, A é fracamente limitado.*

Demonstração. Por um lado, seja $\varphi \in E'$. Se $A \subseteq E$ for limitado, existe uma constate $M \geq 0$ tal que $\|x\| \leq M$ para todo $x \in A$. Logo

$$|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \cdot \|x\| \leq \|\varphi\| \cdot M, \forall \varphi \in E'$$

para todo $x \in A$. Portando A é fracamente limitado.

Por outro lado, suponha que $\varphi(A)$ seja limitado para todo $\varphi \in E'$. Para cada $\varphi \in E'$ existe $M_\varphi > 0$ tal que $|\varphi(x)| \leq M_\varphi$ para todo $x \in A$. Considerando o mergulho canônico J_E de E no seu bidual E'', segue que $|J_E(x)(\varphi)| = |\varphi(x)| \leq M_\varphi$ para todo $x \in A$. Assim $(J_E(x))_{x \in A}$ é uma família pontualmente limitada no espaço de Banach E'. Pelo Teorema de Banach-Steinhaus (Teorema 1.0.8), a família é uniformemente limitada, isto é,

$$\sup_{x \in A} \|x\| = \sup_{x \in A} \|J_E(x)\| < \infty,$$

o que prova que A é limitado. ∎

O resultado a seguir será usado várias vezes neste trabalho.

Lema 2.4.10 *Sejam A e B conjuntos não vazios e $f : A \times B \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função. Então*

$$\sup_{x \in A} \sup_{y \in B} f(x, y) = \sup_{y \in B} \sup_{x \in A} f(x, y).$$

Demonstração. Suponhamos primeiramente que $\sup_{x \in A} \sup_{y \in B} f(x, y) = \infty$. Neste caso, para qualquer $M \in \mathbb{R}$ existe $x_0 \in A$ tal que $\sup_{y \in B} f(x_0, y) > M$, donde existe $y_0 \in B$ tal que $f(x_0, y_0) > M$. Logo,

$$\sup_{y \in B} \sup_{x \in A} f(x, y) \geq \sup_{x \in A} f(x, y_0) \geq f(x_0, y_0) > M$$

e segue que $\sup_{y \in B} \sup_{x \in A} f(x, y) = \infty$. Da mesma forma, se $\sup_{y \in B} \sup_{x \in A} f(x, y) = \infty$, então $\sup_{x \in A} \sup_{y \in B} f(x, y) = \infty$. Resta agora tratar o caso em que

$$l := \sup_{x \in A} \sup_{y \in B} f(x, y) < \infty \quad \text{e} \quad s := \sup_{y \in B} \sup_{x \in A} f(x, y) < \infty.$$

Neste caso,

$$\sup_{x \in A} \sup_{y \in B} f(x, y) = l \Rightarrow \sup_{y \in B} f(x, y) \leq l, \forall x \in A \Rightarrow f(x, y) \leq l, \forall x \in A, \forall y \in B \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \sup_{x \in A} \leq l, \forall y \in B \Rightarrow s = \sup_{y \in B} \sup_{x \in A} f(x, y) \leq l.$$

Argumento análogo mostra que $l \leq s$. ∎

Proposição 2.4.11 $\ell_\infty^w(E) = \ell_\infty(E)$ *isometricamente.*

Demonstração. Sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty(E)$ e $\varphi \in E'$. Então

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} |\varphi(x_j)| \leq \sup_{j\in\mathbb{N}}(\|\varphi\| \cdot \|x_j\|) = \|\varphi\| \cdot \sup_{j\in\mathbb{N}} \|x_j\| < \infty.$$

Logo $(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty$, e portanto $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty^w(E)$. Reciprocamente, se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty^w(E)$, então para qualquer $\varphi \in E'$ a sequência $(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}$ é limitada, ou seja, para qualquer $\varphi \in E'$ o conjunto $\varphi(\{x_j : j \in \mathbb{N}\})$ é limitado ou, equivalentemente, $\{x_j : j \in \mathbb{N}\}$ é fracamente limitado. Pelo Lema 2.4.9 segue que que $\{x_j : j \in \mathbb{N}\}$ é limitado. Portanto, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty(E)$. Por fim, aplicando o Lema 2.4.10 e o Teorema 1.0.14,

$$\begin{aligned}\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,\infty} &= \sup_{\varphi\in B_{E'}} \|(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_\infty = \sup_{\varphi\in B_{E'}} \sup_{j\in\mathbb{N}} |\varphi(x_j)| = \sup_{j\in\mathbb{N}} \sup_{\varphi\in B_{E'}} |\varphi(x_j)| \\ &= \sup_{j\in\mathbb{N}} \|x_j\| = \|(x_j)_{j=1}\|_\infty.\end{aligned}$$

■

Proposição 2.4.12 (a) *$\ell_p(E) \subseteq \ell_p^w(E)$ e a inclusão $i\colon \ell_p(E) \longrightarrow \ell_p^w(E)$ é contínua com norma 1.*
(b) *$\ell_p^w(E) \subseteq \ell_\infty(E)$ e a inclusão $i\colon \ell_p^w(E) \longrightarrow \ell_\infty(E)$ é contínua com norma 1.*

Demonstração. (a) Se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$, então $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_E^p < \infty$. Dado um funcional linear $\varphi \in E'$, da continuidade temos $|\varphi(x_j)|^p \leq \|x_j\|_E^p \cdot \|\varphi\|^p$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_E^p \cdot \|\varphi\|^p = \|\varphi\|^p \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_E^p < \infty,$$

isto é, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$. É claro que a inclusão é um operador linear. Para todo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$, como

$$\begin{aligned}\|i((x_j)_{j=1}^{\infty})\|_{w,p} &= \sup_{\varphi\in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{\varphi\in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|\varphi\|^p \cdot \|x_j\|_E^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sup_{\varphi\in B_{E'}} \left[\|\varphi\| \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_E^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_E^p\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \sup_{\varphi\in B_{E'}} \|\varphi\| \\ &= \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p,\end{aligned}$$

concluímos que i é contínuo e $\|i\| \leq 1$. Por outro lado, tome $x \in E$ com $\|x\|_E = 1$. Pelo Teorema de Hahn-Banach (Teorema (1.0.13)) existe um funcional linear contínuo $\psi \in E'$ tal que $\|\psi\| = 1$ e $\psi(x) = \|x\|_E = 1$. Considerando a sequência $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$ definida por $y_1 = x$ e $y_j = 0$ para todo $j > 1$, temos

$$\|i\| = \sup\{\|i((x_j)_{j=1}^{\infty})\|_{w,p} : (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E) \text{ e } \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p \leq 1\}$$

$$\geq \|(y_j)_{j=1}^\infty\|_{w,p} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^\infty |\varphi(y_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{j=1}^\infty |\psi(y_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$
$$\geq (|\psi(y_1)|^p + |\psi(y_2)|^p + \cdots)^{\frac{1}{p}} = (|\psi(x)|^p)^{\frac{1}{p}} = |\psi(x)| = 1.$$

(b) Seja $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$. Então, $(\varphi(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p$. É imediato ver que $(x_j)_{j=1}^\infty$ é fracamente limitada e, pelo Lema 2.4.9, $(x_j)_{j=1}^\infty$ é limitada, ou seja, $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E)$. Vejamos a continuidade de i: para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$\|x_j\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x_j)| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} (|\varphi(x_j)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{k=1}^\infty |\varphi(x_k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|(x_k)_{k=1}^\infty\|_{w,p}.$$

Tomando o supremo sobre j obtemos $\|i\| \leq 1$.

Para ver que $\|i\| = 1$, basta tomar $x \in E$ tal que $\|x\| = 1$ e $(x, 0, 0, \cdots) \in \ell_p^w(E)$. ■

Em vista da proposição anterior, um trajeto natural seria perguntar sobre a validade da igualdade $\ell_p^w(E) = \ell_p(E)$. A resposta é dada pelo resultado enunciado a seguir, conhecido como *Teorema Fraco de Dvortezky-Rogers*.

Teorema 2.4.13 *$\ell_p^w(E) = \ell_p(E)$ se, e somente se, E tem dimensão finita.*

Demonstração. Veja [12, Theorem 2.18]. ■

2.5 A norma do espaço $\ell_p^w(C(K))$

O objetivo desta seção é provar uma fórmula que facilita o cálculo da norma do espaço $\ell_p^w(C(K))$, em que K é um compacto Hausdorff e $1 \leq p < \infty$.

Definição 2.5.1 Um conjunto $A \subseteq E'$ é *normante* no espaço normado E se

$$\|x\| = \sup_{\varphi \in A} |\varphi(x)| \text{ para todo } x \in E.$$

Exemplo 2.5.2 Pelo Teorema 1.0.14, para qualquer espaço normado E a bola unitária $B_{E'}$ é normante em E.

Proposição 2.5.3 *Se $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$ e $A \subseteq E'$ é normante em E, então*

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,p} = \sup_{\psi \in A} \|(\psi(x_j))_{j=1}^\infty\|_p.$$

Demonstração. Seja q o conjugado de p ($q = \infty$ caso $p = 1$). Já sabemos que a aplicação

$$b = (b_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p \stackrel{J}{\longmapsto} J(b) \in (\ell_q)' \ , \ J(b)\left((a_j)_{j=1}^\infty\right) = \sum_{j=1}^\infty a_j b_j,$$

é um isomorfismo isométrico. Sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p^w(E)$ e $\varphi \in E'$. Então $(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência em ℓ_p e, consequentemente, $J((\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty})$ é um funcional em ℓ_q'. Como J é um isomorfismo isométrico,

$$\begin{aligned}\|(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_p} = \|J((\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty})\|_{\ell_q'} &= \sup_{(a_j)_{j=1}^{\infty}\in B_{\ell_q}} |J((\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty})((a_j)_{j=1}^{\infty})| \\ &= \sup_{(a_j)_{j=1}^{\infty}\in B_{\ell_q}} \left|\sum_{j=1}^{\infty} a_j\varphi(x_j)\right| = \sup_{(a_j)_{j=1}^{\infty}\in B_{\ell_q}} \left|\varphi\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j\right)\right|. \end{aligned} \tag{2.8}$$

E como A é normante de E, tem-se

$$\begin{aligned}\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} &= \sup_{\varphi\in B_{E'}} \|(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_p} \overset{2.8}{=} \sup_{\varphi\in B_{E'}} \sup_{(a_j)_{j=1}^{\infty}\in B_{\ell_q}} \left|\varphi\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j\right)\right| \\ &\overset{2.4.10}{=} \sup_{(a_j)_{j=1}^{\infty}\in B_{\ell_q}} \sup_{\varphi\in B_{E'}} \left|\varphi\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j\right)\right| \overset{1.3}{=} \sup_{(a_j)_{j=1}^{\infty}\in B_{\ell_q}} \left\|\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j\right\| \\ &\overset{2.5.1}{=} \sup_{(a_j)_{j=1}^{\infty}\in B_{\ell_q}} \sup_{\psi\in A} \left|\psi\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j\right)\right| \overset{2.4.10}{=} \sup_{\psi\in A} \sup_{(a_j)_{j=1}^{\infty}\in B_{\ell_q}} \left|\psi\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j\right)\right| \\ &\overset{2.8}{=} \sup_{\psi\in A} \|(\psi(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_p}\end{aligned}$$

■

Lema 2.5.4 *Seja f uma função não negativa mensurável em um espaço mensurável $(\Omega, \mathcal{A})$. Então existe uma sequência $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ de funções mensuráveis tais que:*
(a) *Cada f_j é simples.*
(b) *$0 \leq f_j(x) \leq f_{j+1}(x)$ para todos $x \in \Omega$ e $j \in \mathbb{N}$.*
(c) *$f(x) = \lim_j f_j(x)$ para todo $x \in \Omega$.*

Demonstração. Veja [3, Lema 2.11] ■

Teorema 2.5.5 *Sejam $(\Omega, \mathcal{A})$ um espaço mensurável, $x \in \Omega$, δ_x a medida de Dirac concentrada em x e $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função δ_x-integrável. Então*

$$\int_\Omega f d\delta_x = f(x). \tag{2.9}$$

Demonstração. Caso 1: f é uma função característica. Neste caso existe um conjunto $A \in \mathcal{A}$ tal que $f \equiv \mathcal{X}_A$. Então

$$\int_\Omega f d\delta_x = \int_\Omega \mathcal{X}_A d\delta_x = \delta_x(A) = \mathcal{X}_A(x) = f(x).$$

Caso 2: f é uma função simples mensurável. Sejam $c_1, \ldots, c_n$ os valores distintos assumidos por f e $A_j = f^{-1}(c_j)$ para $j = 1, \ldots, n$. Segue que cada A_j é mensurável e, como

$A_j \cap A_i = \emptyset$ para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, n\}$ com $i \neq j$, tem-se que x pertence a apenas um A_k para $k \in \{1, \dots, n\}$. Logo $\delta_x(A_j) = \delta_{kj}$ e $f(x) = c_k$. Assim,

$$\int_\Omega f d\delta_x = \sum_{j=1}^{n} c_j \delta_x(A_j) = \sum_{j=1}^{n} c_j \delta_{kj} = c_k = f(x). \tag{2.10}$$

Caso 3: f é uma função não negativa. Seja $(f_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência de funções de acordo com o Lema 2.5.4. Pelo Teorema 1.0.20 e pelo Caso 2,

$$\int_\Omega f d\delta_x = \lim_{j\to\infty} \int_\Omega f_j d\delta_x \overset{2.10}{=} \lim_{j\to\infty} f_j(x) = f(x).$$

Caso 4: f é uma função δ_x-integrável qualquer. Neste caso, podemos decompor f como sendo a diferença da sua parte positiva com a sua parte negativa, isto é, $f = f^+ - f^-$, onde:

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{se } f(x) < 0, \end{cases}$$

e

$$f^-(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } f(x) > 0 \\ -f(x), & \text{se } f(x) \leq 0. \end{cases}$$

Logo, como f é δ_x-integrável e pelo Caso 3,

$$\int_\Omega f d\delta_x = \int_\Omega f^+ d\delta_x - \int_\Omega f^- d\delta_x = f^+(x) - f^-(x) = f(x).$$

■

Lema 2.5.6 *Sejam K um espaço topológico compacto de Hausdorff, $C(K)$ o espaço das funções contínuas $f\colon K \longrightarrow \mathbb{R}$, δ_x a medida de Dirac concentrada em $x \in K$ definida nos borelianos de K e T o isomorfismo isométrico (1.4), estabelecido no Teorema da Representação de Riesz.*
(a) *Para quaisquer $x \in K$ e $f \in C(K)$,*

$$\int_K f d\delta_x = f(x). \tag{2.11}$$

(b) *O subconjunto $\{T_{\delta_x} : x \in K\}$ de $C(K)'$ é normante em $C(K)$.*

Demonstração. (a) Como f é contínua tem-se que f é δ_x integrável e o resultado segue do Teorema 2.5.5.
(b) Para toda $f \in C(K)$,

$$\begin{aligned} \|f\|_{C(K)} &= \sup_{x\in K} |f(x)| = \sup_{x\in K} \left| \int_K f d\delta_x \right| = \sup_{x\in K} |T_{\delta_x}(f)| = \sup \{|T_{\delta_x}(f)| : x \in K\} \\ &= \sup \{|\varphi(f)| : \varphi \in \{T_{\delta_x}; x \in K\}\} = \sup_{\varphi\in\{T_{\delta_x}:x\in K\}} |\varphi(f)|. \end{aligned}$$

■

Agora sim podemos provar a fórmula simplificada para a norma do espaço $\ell_p^w(C(K))$.

Proposição 2.5.7 *Sejam K um espaço topológico compacto de Hausdorff, $1 \leq p < \infty$ e $(f_j)_{j=1}^{\infty} \in l_p^w(C(K))$. Então*

$$\|(f_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} = \sup_{x\in K} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.12}$$

Demonstração. Pelo Lema 2.5.6 sabemos que $(T_{\delta_x})_{x\in K}$ é um subconjunto normante de $C(K)'$. Aplicando a Proposição 2.5.3, temos

$$\begin{aligned}\|(f_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} &= \sup_{\varphi\in\{T_{\delta_x};x\in K\}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(f_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{x\in K} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |T_{\delta_x}(f_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{x\in K} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \int_K f_j d\delta_x \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{x\in K} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f_j(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.\end{aligned}$$

■

2.6 Sequências incondicionalmente p-somáveis

Dada uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$, temos $\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p < \infty$ e, portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \|(x_j)_{j=n}^{\infty}\|_p = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{j=n}^{\infty} \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0. \tag{2.13}$$

Será que o mesmo vale para sequências fracamente p-somáveis? Ou seja, dada uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$, é verdade que $\lim_{n\to\infty} \|(x_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} = 0$? Veremos mais adiante que isso nem sempre é verdade, o que sugere a consideração das sequências que satisfazem essa propriedade. Mais uma vez, nesta seção, E é um espaço normado e $1 \leq p < \infty$.

Definição 2.6.1 Definimos o espaço das sequências em E que são *incondicionalmente p-somáveis* da seguinte forma:

$$\ell_p^u(E) := \left\{ (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E) : \lim_{n\to\infty} \|(x_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} = 0 \right\}.$$

A pergunta acima se transforma então em: é verdade que $\ell_p^u(E) = \ell_p^w(E)$?

Para justificar o termo incondicionalmente p-somável, relembremos a seguinte definição clássica:

Definição 2.6.2 Uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E é dita *incondicionalmente somável* se, para toda bijeção $\eta\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, a série $\sum_{j=1}^{\infty} x_{\eta(j)}$ é convergente em E.

Teorema 2.6.3 *Uma sequência* $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ *em* E *é incondicionalmente somável se, e somente se, pertence a* $\ell_1^u(E)$.

Demonstração. Veja [10, Proposition 8.3]. ∎

Uma vez justificado o nome, passemos ao estudo do espaço $\ell_p^u(E)$.

Proposição 2.6.4 $\ell_p^u(E)$ *é um subespaço fechado de* $\ell_p^w(E)$ *e portanto é um espaço de Banach, com a norma* $\|\cdot\|_{w,p}$, *quando* E *for Banach.*

Demonstração. Sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então $\lim_{n\to\infty} \|(x_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} = \lim_{n\to\infty} \|(y_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} = 0$ e, pela desigualdade triangular, segue que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \lim_{n\to\infty} \|(x_j + \lambda y_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \|(x_j)_{j=n}^{\infty} + \lambda (y_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \|(x_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} + |\lambda| \lim_{n\to\infty} \|(y_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} = 0,
\end{aligned}$$

ou seja, $\lim_{n\to\infty} \|(x_j + \lambda y_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} = 0$. Logo $(x_j)_{j=1}^{\infty} + \lambda (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E)$.

Vejamos que $\ell_p^u(E)$ é fechado em $\ell_p^w(E)$. Sejam $(x^k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência em $\ell_p^u(E)$ e $x \in \ell_p^w(E)$ tais que $x^k \xrightarrow{k} x$ em $\ell_p^w(E)$. Denotemos $x = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, $x^k = (x_j^k)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \|(x_j^k)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} = 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{N},$$

ou seja, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0(k) \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|(x_j^k)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } n \geq n_0(k). \tag{2.14}$$

Além disso, como $x^k \xrightarrow{k} x$ em $\ell_p^w(E)$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{2} > \|x^k - x\|_{w,p} &= \|(x_j^k)_{j=1}^{\infty} - (x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} \\
&= \|(x_j^k - x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} \\
&= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j^k - x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=n}^{\infty} |\varphi(x_j^k - x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq \|(x_j^k)_{j=n}^{\infty} - (x_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p}
\end{aligned} \tag{2.15}$$

para todos $k \geq k_0$ e $n \in \mathbb{N}$.

Logo, para $n \geq n_0(k_0)$, de (2.14) e (2.15) temos

$$\begin{aligned}
\|(x_j)_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} &= \|(x_j)_{j=n}^{\infty} - (x_j^{k_0})_{j=n}^{\infty} + (x_j^{k_0})_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} \\
&\leq \|(x_j)_{j=n}^{\infty} - (x_j^{k_0})_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} + \|(x_j^{k_0})_{j=n}^{\infty}\|_{w,p} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Isso prova que $x \in \ell_p^u(E)$ e, portanto, $\ell_p^u(E)$ é fechado em $\ell_p^w(E)$. ∎

Proposição 2.6.5 *$\ell_p(E) \subseteq \ell_p^u(E)$ e a inclusão $\ell_p(E) \hookrightarrow \ell_p^u(E)$ é contínua com norma 1.*

Demonstração. Seja $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p(E)$. Pela Proposição 2.4.12 sabemos que $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$. Então é suficiente mostrar que $\lim_n \|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{w,p} = 0$. Seja $n \in \mathbb{N}$. Novamente pela Proposição 2.4.12, sabe-se que $\|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{w,p} \leq \|(x_j)_{j=n}^\infty\|_p$. Logo, por (2.13)

$$\lim_n \|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{w,p} \leq \lim_n \|(x_j)_{j=n}^\infty\|_p = 0,$$

ou seja, $\lim_n \|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{w,p} = 0$.

Quanto à inclusão $\ell_p(E) \hookrightarrow \ell_p^u(E)$ não há nada o que fazer, dado o que já foi feito na Proposição 2.4.12. ■

Proposição 2.6.6 *$\ell_p^u(E) \subseteq c_0(E)$ e a inclusão $\ell_p^u(E) \hookrightarrow c_0(E)$ é contínua com norma 1.*

Demonstração. Seja $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^u(E)$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ escolha $\varphi_j \in B_{E'}$ tal que $\|x_j\| = \varphi_j(x_j)$, o que sabemos ser possível pelo Teorema de Hahn-Banach (Teorema (1.0.13)). Dessa forma,

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_n \|x_n\| = \lim_n \varphi_n(x_n) = \lim_n |\varphi_n(x_n)| &\leq \lim_n \left(\sum_{j=n}^\infty |\varphi_n(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \lim_n \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=n}^\infty |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \lim_n \|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{w,p} = 0, \end{aligned}$$

provando que $(x_j)_{j=1}^\infty \in c_0(E)$. As afirmações quanto à inclusão seguem da Proposição 2.4.12(2), pois a norma em $c_0(E)$ é a mesma de $\ell_\infty(E)$. ■

Responderemos agora a pergunta do início da seção. Veremos que nem sempre é verdade que $\ell_p^u(E) = \ell_p^w(E)$.

Exemplo 2.6.7 Considere a sequência $(e_j)_{j=1}^\infty$ dos vetores canônicos em c_0. No Exemplo 2.4.7 vimos que $(e_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(c_0)$ para qualquer $1 \leq p < \infty$. Vejamos que $(e_j)_{j=1}^\infty \notin \ell_p^u(c_0)$. Para todo $\psi \in B_{c_0'}$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\|(e_j)_{j=n}^\infty\|_{w,p} = \sup_{\varphi \in B_{c_0'}} \left(\sum_{j=n}^\infty |\varphi(e_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq \left(\sum_{j=n}^\infty |\psi(e_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq |\psi(e_n)|.$$

Pelo Teorema de Hahn-Banach (Teorema (1.0.13)), para cada $e_n \in c_0$ existe $\psi_n \in (c_0)'$ tal que $\|\psi_n\| = 1$ e $\psi_n(e_n) = \|e_n\|_\infty = 1$. Logo,

$$\|(e_j)_{j=n}^\infty\|_{w,p} \quad \geq \quad |\psi_n(e_n)| = 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N},$$

e, portanto, $\lim_{n \longrightarrow \infty} \|(e_j)_{j=n}^\infty\|_{w,p} \neq 0$.

2.7 Sequências Cohen fortemente p-somáveis

Em 1973 Cohen em [9] introduziu o espaço das sequências *fortemente p-somáveis* em um espaço de Banach E, denotado por $\ell_p\langle E\rangle$. Segundo Cohen, uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E é chamada *fortemente p-somável* se para toda sequência $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E')$, em que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, a série $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\varphi_j(x_j)$ é convergente. Mais ainda, neste espaço Cohen definiu a seguinte norma:

$$\sigma_p((x_j)_{j=1}^{\infty}) = \sup\left\{\left|\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j(x_j)\right| : (\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E') \text{ e } \|(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,q} \leq 1\right\}.$$

A principal referência para esta seção será a tese de Campos [7]. Porém, na tese de Campos defini-se a norma em $\ell_p\langle E\rangle$ por

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{C,p} = \sup\left\{\sum_{j=1}^{\infty}|\varphi_j(x_j)| : (\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E') \text{ e } \|(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,q} \leq 1\right\}. \tag{2.16}$$

Mais ainda, as sequências desse espaço são chamadas de sequências Cohen fortemente p-somáveis. Iremos provar que as expressões coincidem, assim como algumas propriedades consideradas importantes para o espaço $\ell_p\langle E\rangle$. A partir de agora, E é um espaço normado, $1 \leq p < \infty$ e q é o conjugado de p, isto é, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Definição 2.7.1 Uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E é *Cohen fortemente p-somável* se para qualquer sequência $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E')$, a série $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\varphi_j(x_j)$ é convergente.

Notação: Denotamos $\ell_p\langle E\rangle$ ao conjunto das sequências Cohen fortemente p-somáveis.

Proposição 2.7.2 *$\ell_p\langle E\rangle$ é um espaço vetorial com as operações usuais de sequências.*

Demonstração. É claro que a sequência identicamente nula pertence a $\ell_p\langle E\rangle$. Se $(x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p\langle E\rangle$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j(\lambda x_j + y_j) &= \sum_{j=1}^{\infty}(\lambda\varphi_j(x_j)+\varphi_j(y_j)) \\ &= \lambda\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j(x_j)+\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j(y_j) < \infty\end{aligned}$$

para toda sequência $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E')$. Isso prova que $\lambda(x_j)_{j=1}^{\infty}+(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p\langle E\rangle$. ∎

Proposição 2.7.3 *Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência no espaço de Banach E. A série $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\varphi_j(x_j)$ converge para toda $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E')$ se, e somente se, a série $\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\varphi_j(x_j)|$ converge para toda $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E')$.*

Demonstração. Veja [7, Proposição 1.1.2] ■

Lema 2.7.4 *Seja* $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p\langle E\rangle$. *Então* $\displaystyle\sup_{(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_q^w(E')}} \left|\sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x_j)\right| < \infty.$

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$ considere o operador

$$T_n \colon \ell_q^w(E') \longrightarrow \mathbb{K}\ ,\ T_n((\varphi_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{n} \varphi_j(x_j).$$

Cada T_n é linear, pois dados $\lambda \in \mathbb{K}$ e $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}, (\psi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E')$, tem-se

$$\begin{aligned} T_n(\lambda(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} + (\psi_j)_{j=1}^{\infty}) = T_n((\lambda\varphi_j + \psi_j)_{j=1}^{\infty}) &= \sum_{j=1}^{n}(\lambda\varphi_j + \psi_j)(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{n}(\lambda\varphi_j(x_j) + \psi_j(x_j)) = \lambda\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x_j) + \sum_{j=1}^{n}\psi_j(x_j) \\ &= \lambda T_n((\varphi_j)_{j=1}^{\infty}) + T_n((\psi_j)_{j=1}^{\infty}). \end{aligned}$$

Vejamos que cada T_n é contínuo. Seja $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E')$. Veremos a seguir que $\ell_p\langle E\rangle \subseteq \ell_\infty(E)$, logo podemos tomar $K > 0$ tal que $\|x_i\| \leq K$ para todo i. Temos

$$\begin{aligned} |T_n((\varphi_j)_{j=1}^{\infty})| = \left|\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(x_j)\right| &\leq \left(\sum_{j=1}^{n}|\varphi_j(x_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n}1^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{n}|J_E(x_j)(\varphi_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}} n^{\frac{1}{p}} \leq n^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|J_E\left(\|x_j\|\frac{x_j}{\|x_j\|}\right)(\varphi_j)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq n^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|^q \cdot \left|J_E\left(\frac{x_j}{\|x_j\|}\right)(\varphi_j)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq n^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{n}K^q\left|J_E\left(\frac{x_j}{\|x_j\|}\right)(\varphi_j)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &= Kn^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|J_E\left(\frac{x_j}{\|x_j\|}\right)(\varphi_j)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq Kn^{\frac{1}{p}}\sup_{f \in B_{E''}}\left(\sum_{j=1}^{n}|f(\varphi_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq Kn^{\frac{1}{p}}\sup_{f \in B_{E''}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|f(\varphi_j)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq Kn^{\frac{1}{p}}\|(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,q}. \end{aligned}$$

Isso prova que cada T_n é contínuo. Como $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p\langle E\rangle$, por definição a série $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\varphi_j(x_j)$ converge para toda $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E')$, logo o operador linear

$$T \colon \ell_q^w(E') \longrightarrow \mathbb{K}\ ,\ T((\varphi_j)_{j=1}^{\infty}) = \lim_{n\to\infty} T_n((\varphi_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty}\varphi_j(x_j),$$

está bem definido. Na Proposição 2.4.5 provamos que $\ell_q^w(E')$ é um espaço de Banach, portanto do Corolário 1.0.9 segue que T é contínuo. Donde,

$$+\infty > \|T\| = \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E')}} |T((\varphi_j)_{j=1}^\infty)| = \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E')}} \left|\sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x_j)\right| = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{C,p}.$$

■

Proposição 2.7.5 *Seja $(x_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência no espaço de Banach E. A série $\sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)|$ converge para toda $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(E')$ se, e somente se, a série $\sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x_j)$ converge para toda $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(E')$. Mais ainda, vale a igualdade*

$$\sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E')}} \left|\sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x_j)\right| = \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E')}} \sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)|.$$

Demonstração. Usando a desigualdade triangular,

$$\left|\sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x_j)\right| \leq \sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)|,$$

para toda $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(E')$. Logo, se a série $\sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)|$ converge para toda $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(E')$, então a série $\sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x_j)$ converge para toda $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(E')$ e

$$\sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E')}} \left|\sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x_j)\right| \leq \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E')}} \sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)|.$$

Reciprocamente, para cada $j \in \mathbb{N}$ considere

$$\psi_j = \begin{cases} \varphi_j, & \text{se } \varphi_j(x_j) \geq 0 \\ -\varphi_j, & \text{se } \varphi_j(x_j) < 0 \end{cases}, \tag{2.17}$$

para o caso em $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\psi_j = \varphi_j e^{-i\theta_j}$, onde θ_j é o argumento principal de $\varphi_j(x_j)$, no caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Para cada $j \in \mathbb{N}$, da igualdade

$$\begin{aligned} \|\psi_j\| = \sup_{x \in B_E} |\psi_j(x)| &= \begin{cases} \sup\limits_{x \in B_E} |\varphi_j(x)|, & \text{se } \varphi_j(x_j) \geq 0 \\ \sup\limits_{x \in B_E} |-\varphi_j(x)|, & \text{se } \varphi_j(x_j) < 0 \end{cases} \\ &= \sup_{x \in B_E} |\varphi_j(x)| = \|\varphi_j\|, \end{aligned}$$

no caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou

$$\|\psi_j\| = \sup_{x \in B_E} |\psi_j(x)| = \sup_{x \in B_E} |\varphi_j(x) e^{-i\theta_j}| = \sup_{x \in B_E} |\varphi_j(x)| = \|\varphi_j\|,$$

no caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, resulta que $\psi_j \in E'$ e, mais ainda, $\|(\psi_j)_{j=1}^\infty\|_{w,q} = \|(\varphi_j)_{j=1}^\infty\|_{w,q}$. Por hipótese, a série $\sum\limits_{j=1}^\infty \psi_j(x_j)$ converge para toda $(\psi_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(E')$, logo

$$\sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)| = \sum_{j=1}^\infty \psi_j(x_j)$$

converge para toda $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(E')$. Por fim

$$\sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E')}} \sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)| = \sup_{(\psi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E')}} \sum_{j=1}^\infty \psi_j(x_j) \le \sup_{(\psi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E')}} \left|\sum_{j=1}^\infty \psi_j(x_j)\right|.$$

■

Teorema 2.7.6 *A expressão*

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{C,p} := \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E')}} \left|\sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x_j)\right| = \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E')}} \sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)|.$$

define uma norma em $\ell_p\langle E\rangle$.

Demonstração. O Lema 2.7.4 mostra que $\|\cdot\|_{C,p}$ está bem definida e a Proposição 2.7.5 garante a igualdade dos supremos. Verifiquemos os axiomas de norma.

É imediato que $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{C,p} \ge 0$ para qualquer $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{C,p} \in \ell_p\langle E\rangle$, e que $x_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ implica que $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{C,p} = 0$. Por outro lado, se $\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{C,p} = 0$, então

$$\sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E')}} \sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)| = 0.$$

Isso implica que $\varphi_j(x_j) = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e para todo $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(E')$. Em particular, fixado $j \in \mathbb{N}$, tem-se $\varphi(x_j) = 0$ para toda $\varphi \in E'$. Donde $x_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Dados $\lambda \in \mathbb{K}$ e $(x_j)_{j=1}^\infty, (y_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p\langle E\rangle$, temos

$$\begin{aligned}
\|\lambda(x_j)_{j=1}^\infty\|_{C,p} &= \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E')}} \left|\sum_{j=1}^\infty \varphi_j(\lambda x_j)\right| = \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E')}} \left|\sum_{j=1}^\infty \lambda\varphi_j(x_j)\right| \\
&= \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E')}} \left|\lambda \cdot \sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x_j)\right| = \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E')}} |\lambda| \cdot \left|\sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x_j)\right| \\
&= |\lambda| \cdot \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E')}} \left|\sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x_j)\right| = |\lambda| \cdot \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{C,p},
\end{aligned}$$

e

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty + (y_j)_{j=1}^\infty\|_{C,p} = \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E')}} \left|\sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x_j + y_j)\right|$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E')}} \left| \sum_{j=1}^{\infty} (\varphi_j(x_j) + \varphi_j(y_j)) \right| \\
&= \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E')}} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x_j) + \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(y_j) \right| \\
&\leq \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E')}} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x_j) \right| + \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E')}} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(y_j) \right| \\
&\leq \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{C,p} + \|(y_j)_{j=1}^\infty\|_{C,p}.
\end{aligned}
$$

■

Para provar a completude de $\ell_p\langle E\rangle$ precisamos do seguinte resultado clássico da Teoria dos Espaços de Banach:

Proposição 2.7.7 *Um espaço normado E é um espaço de Banach se, e somente se, toda sequência absolutamente somável em E é somável.*

Demonstração. Ver [6, Proposição 10.1.4]. ■

Teorema 2.7.8 *Um espaço de normado E é de Banach se, e somente se, $(\ell_p\langle E\rangle, \|\cdot\|_{C,p})$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja $(x^k)_{k=1}^\infty$ uma sequência absolutamente somável em $\ell_p\langle E\rangle$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, denotemos $x^k = (x_j^k)_{j=1}^\infty$. Tem-se

$$
\infty > \sum_{k=1}^{\infty} \|x^k\|_{C,p} = \sum_{k=1}^{\infty} \|(x_j^k)_{j=1}^\infty\|_{C,p} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E')}} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(x_j^k)| \right).
$$

Note que, para todo $\psi \in B_{E'}$, a sequência $(\psi, 0, 0, \cdots) \in B_{\ell_q^w(E')}$. Assim, para cada par $(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,

$$
\|x_j^k\| = \sup_{\psi \in B_{E'}} |\psi(x_j^k)| \leq \sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E')}} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x_n^k)|.
$$

Logo,

$$
\sum_{k=1}^{\infty} \|x_j^k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sup_{(\varphi_n)_{n=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E')}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi_n(x_n^k)| \right) \right) < \infty,
$$

ou seja, a sequência $(x_j^k)_{k=1}^\infty$ é absolutamente somável em E e, como E é um espaço de Banach, pela Proposição 2.7.7, segue que $(x_j^k)_{k=1}^\infty$ é somável em E. Sendo assim, a sequência $y = (y_j)_{j=1}^\infty$ dada por

$$
y_j = \sum_{k=1}^{\infty} x_j^k \in E, \text{ para todo } j \in \mathbb{N},
$$

está bem definida. Mais ainda, para toda $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E')$, de

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(y_j)| &= \sum_{j=1}^{\infty} \left|\varphi_j\left(\sum_{k=1}^{\infty} x_j^k\right)\right| = \sum_{j=1}^{\infty} \left|\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_j(x_j^k)\right| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi_j(x_j^k)| = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(x_j^k)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|x^k\|_{C,p} < \infty,\end{aligned}$$

segue que $y \in \ell_p\langle E\rangle$. Vejamos que $y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x^k$ em $\ell_p\langle E\rangle$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, de

$$\begin{aligned}\left\|y - \sum_{k=1}^{n} x^k\right\|_{C,p} &= \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_j^k\right)_{j=1}^{\infty} - \sum_{k=1}^{n} (x_j^k)_{j=1}^{\infty} \right\|_{C,p} = \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_j^k - \sum_{k=1}^{n} x_j^k\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{C,p} \\ &= \left\| \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} x_j^k\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{C,p} = \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_q^w(E')}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\varphi_j\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} x_j^k\right)\right|\right) \\ &= \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_q^w(E')}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} \varphi_j(x_j^k)\right|\right) \\ &\leq \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_q^w(E')}} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(x_j^k)|\right) \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\sup_{(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_q^w(E')}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(x_j^k)|\right)\right) \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \|x^k\|_{C,p} \xrightarrow{n} 0,\end{aligned}$$

segue que

$$y = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x^k = \sum_{k=1}^{\infty} x^k,$$

pois $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \|x^k\|_{C,p}$ é a cauda da série convergente $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x^k\|_{C,p}$, de onde podemos concluir que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} \|x^k\|_{C,p} = 0$. Portanto, $(x^k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência somável em $\ell_p\langle E\rangle$ e o resultado segue da Proposição 2.7.7.

A recíproca é clara uma vez que $\ell_p\langle E\rangle$ contém uma cópia isométrica de E. ■

Uma adaptação imediata do fato de que o dual de ℓ_p coincide isometricamente com ℓ_q garante que o operador

$$T\colon \ell_q(E') \longrightarrow \ell_p(E)'\ ,\ T((\varphi_j)_{j=1}^{\infty})((x_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j(x_j), \tag{2.18}$$

é um isomorfismo isométrico. Vamos usar tal fato para provar a seguinte proposição:

Proposição 2.7.9 (a) $c_{00}(E) \subseteq \ell_p\langle E\rangle \subseteq \ell_p(E)$ *e a inclusão* $i\colon \ell_p\langle E\rangle \longrightarrow \ell_p(E)$ *é um operador linear, contínuo e com norma igual a 1.*
(b) $\ell_1\langle E\rangle = \ell_1(E)$.

Demonstração. (a) A primeira continência é óbvia. Dada $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p\langle E\rangle$, de

$$\begin{aligned}
\|i((x_j)_{j=1}^\infty)\|_p = \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_p &= \sup_{\psi\in B_{\ell_p(E)'}} |\psi((x_j)_{j=1}^\infty)| \\
&= \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty\in B_{\ell_q(E')}} |T((\varphi_j)_{j=1}^\infty)((x_j)_{j=1}^\infty)| = \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty\in B_{\ell_q(E')}} \left|\sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x_j)\right| \\
&\le \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty\in B_{\ell_q^w(E')}} \left|\sum_{j=1}^\infty \varphi_j(x_j)\right| \le \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{C,p},
\end{aligned}$$

segue a segunda continência e que a inclusão i é um operador linear contínuo com $\|i\| \le 1$. Por outro lado, seja $x \in E$ com $\|x\| = 1$. Considere a sequência $(x, 0, 0, \cdots) \in \ell_p\langle E\rangle$. Vejamos que $(x, 0, 0, \cdots) \in B_{\ell_p\langle E\rangle}$. De fato,

$$\|(x, 0, 0, \cdots)\|_{C,p} = \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty\in B_{\ell_q^w(E')}} |\varphi_1(x)| = \sup_{\varphi_1\in B_{E'}} |\varphi_1(x)| = \|x\| = 1.$$

Daí,

$$\|i\| = \sup_{(x_j)_{j=1}^\infty\in B_{\ell_p\langle E\rangle}} \|i((x_j)_{j=1}^\infty)\|_p \ge \|(x, 0, 0, \cdots)\|_p = 1.$$

(b) Seja $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1(E)$. Como $p = 1$, então $q = \infty$. Dada $(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty^w(E') = \ell_\infty(E')$ (Proposição 2.4.11), existe uma constante $M \ge 0$ tal que $\|\varphi_j\| \le M$, para todo $j \in \mathbb{N}$, e sendo assim

$$\sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)| \le \sum_{j=1}^\infty \|\varphi_j\| \cdot \|x_j\| \le M \cdot \sum_{j=1}^\infty \|x_j\| < \infty.$$

■

2.8 O espaço das sequências fracamente nulas

Toda sequência em um espaço normado que converge em norma para zero converge fracamente para zero. Mas a recíproca não é válida, por exemplo, em ℓ_2 temos $e_n \xrightarrow{w} 0$, mas $e_n \not\longrightarrow 0$. Isso nos leva a considerar o conjunto formado pelas sequências que convergem fracamente para zero, chamadas de sequências *fracamente nulas*.

Definição 2.8.1 O espaço das sequências fracamente nulas no espaço normado E é definido por:

$$\begin{aligned}
c_0^w(E) &:= \{(x_j)_{j=1}^\infty : x_j \in E \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \varphi(x_j) \longrightarrow 0 \text{ para todo } \varphi \in E'\} \\
&= \{(x_j)_{j=1}^\infty : x_j \in E \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } x_j \xrightarrow{w} 0\}.
\end{aligned}$$

Proposição 2.8.2 *Seja E um espaço normado. Então*
(a) *$c_0^w(E)$ é um subespaço fechado de $\ell_\infty(E)$, logo $(c_0^w(E), \|\cdot\|_\infty)$ é Banach.*
(b) *$c_0(E) \subseteq c_0^w(E)$.*
(c) *$\ell_p^w(E) \subseteq c_0^w(E)$ e a inclusão $i\colon \ell_p^w(E) \longrightarrow c_0^w(E)$ é contínua com norma 1.*

Demonstração. (a) É claro que a sequência identicamente nula pertence a $c_0^w(E)$. Seja $(x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^w(E)$. Então a sequência $(\varphi(x_j))_{j=1}^\infty$ converge para 0 qualquer que seja $\varphi \in E'$. Segue que o conjunto $\{x_j : j \in \mathbb{N}\}$ é fracamente limitado e então $\{x_j : j \in \mathbb{N}\}$ é limitado pelo Lema 2.4.9. Isso prova que $c_0^w(E) \subseteq \ell_\infty(E)$. Da continuidade dos funcionais lineares segue que $c_0^w(E)$ é um subespaço de $\ell_\infty(E)$, pois

$$\varphi(\lambda x_j + y_j) = \lambda\varphi(x_j) + \varphi(y_j) \longrightarrow 0,$$

quaisquer que sejam $(x_j)_{j=1}^\infty, (y_j)_{j=1}^\infty \in c_0^w(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $\varphi \in E'$. Vejamos que $c_0^w(E)$ é fechado em $\ell_\infty(E)$. Sejam $(x^k)_{k=1}^\infty$ uma sequência em $c_0^w(E)$ e $y \in \ell_\infty(E)$ tais que $x^k = (x_j^k)_{j=1}^\infty \longrightarrow y = (y_j)_{j=1}^\infty$ em $\ell_\infty(E)$. Dados $\varphi \in E'$ e $\varepsilon > 0$, devemos provar que existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|\varphi(y_j)| < \varepsilon$ para todo $j \geq j_0$. Se $\varphi \equiv 0$, então $\varphi(y_j) = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Se φ não for identicamente nulo, então, como $x^k \longrightarrow y$ em $\ell_\infty(E)$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{\varepsilon}{2\|\varphi\|} > \|x^k - y\|_\infty = \|(x_i^k)_{i=1}^\infty - (y_i)_{i=1}^\infty\|_\infty = \|(x_i^k - y_i)_{i=1}^\infty\|_\infty \geq \|x_j^k - y_j\|,$$

para todos $k \geq k_0$ e $j \in \mathbb{N}$. Em particular,

$$\|x_j^{k_0} - y_j\| < \frac{\varepsilon}{2\|\varphi\|}, \text{ para todo } j \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, como $\varphi(x_j^{k_0}) \xrightarrow{j\to\infty} 0$, existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\varphi(x_j^{k_0})| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todo } j \geq j_0.$$

Segue que

$$\begin{aligned}
|\varphi(y_j)| &= |\varphi(y_j - x_j^{k_0} + x_j^{k_0})| = |\varphi(y_j - x_j^{k_0}) + \varphi(x_j^{k_0})| \\
&\leq |\varphi(y_j - x_j^{k_0})| + |\varphi(x_j^{k_0})| \leq \|\varphi\| \cdot \|x_j^{k_0} - y_j\| + |\varphi(x_j^{k_0})| \\
&< \|\varphi\| \cdot \frac{\varepsilon}{2\|\varphi\|} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

para todo $j \geq j_0$.
(b) Segue imediatamente da desigualdade

$$|\varphi(x)| \leq \|\varphi\| \cdot \|x\|, \text{ para todos } x \in E \text{ e } \varphi \in E'.$$

(c) Sejam $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$ e $\varphi \in E'$. Da convergência

$$\sum_{j=1}^\infty |\varphi(x_j)|^p < \infty,$$

segue que $|\varphi(x_j)|^p \longrightarrow 0$ e, consequentemente, $|\varphi(x_j)| \longrightarrow 0$. Portanto, $(x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^w(E)$. As informações sobre a inclusão seguem da Proposição 2.4.12(b). ∎

CAPÍTULO 3

CLASSES DE SEQUÊNCIAS VETORIAIS

No capítulo anterior aprendemos várias maneiras de, dado um espaço de Banach E, construir um espaço de Banach formado por sequências de elementos de E, tais como $c_0(E), c_0^w(E), \ell_p(E), \ell_p^w(E), \ell_p^u(E)$ e $\ell_p\langle E\rangle$. O objetivo desta seção é montar um aparato abstrato que permita considerar, de forma unificada, todos esses espaços de sequências vetoriais, alguns outros não estudados aqui e também aqueles que eventualmente apareçam no futuro. A ideia é isolar as propriedades que tornam esses espaços importantes e estudar, abstratamente e de forma unificada, todos os espaços que satisfaçam tais propriedades.

Agindo dessa forma, estaremos construindo a ponte que ligará os espaços de sequências estudados no capítulo anterior com os ideais de operadores que serão estudados no capítulo seguinte. A referência básica desta seção é o artigo [4].

3.1 Definição e exemplos

Uma classe de sequências é uma correspondência que a cada espaço de Banach E faz associar um espaço de Banach formado por sequências em E satisfazendo determinadas propriedades. É esperado que, quanto mais propriedades exigirmos, menos exemplos teremos. Por isso definiremos, neste primeiro momento, classes de sequências de um forma bem ampla, de maneira a acomodar um grande número de exemplos.

Dados espaços de Banach E e F, o símbolo $E \overset{1}{\hookrightarrow} F$ significa que E é subespaço vetorial de F e $\|x\|_F \le \|x\|_E$ para todo $x \in E$.

Definição 3.1.1 Uma *classe de sequências vetoriais*, ou simplesmente uma *classe de sequências*, é uma regra $E \longmapsto X(E)$, que associa a cada espaço de Banach E um espaço de Banach $X(E)$ formado por sequências em E, isto é, $X(E)$ é um subespaço vetorial de $E^{\mathbb{N}}$ com as operações usuais, tal que:

(a) $c_{00}(E) \subseteq X(E)$, isto é, $X(E)$ contém as sequências finitas,

(b) $X(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(E)$. Em particular as sequências de $X(E)$ são limitadas,

(c) $\|e_j\|_{X(\mathbb{K})} = 1$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

Notação: Denotaremos a classe de sequência $E \longmapsto X(E)$ por $X(\cdot)$ ou, não havendo perigo de ambiguidade, denotaremos simplesmente por X.

Exemplo 3.1.2 De acordo com o que vimos no capítulo anterior, as seguintes correspondências são classes de sequências ($1 \leq p < +\infty$): $\ell_\infty(\cdot)$, $c_0(\cdot)$, $c_0^w(\cdot)$, $\ell_p(\cdot)$, $\ell_p^w(\cdot)$, $\ell_p^u(\cdot)$ e $\ell_p\langle\cdot\rangle$.

Exemplo 3.1.3 A correspondência

$$E \longmapsto X(E) = \begin{cases} c_0(E), & \text{se } E \text{ é reflexivo} \\ \ell_\infty(E), & \text{caso contrário ,} \end{cases}$$

é uma classe de sequências.

Exemplo 3.1.4 A correspondência

$$E \longmapsto X(E) = \begin{cases} c_0(E), & \text{se a dimensão de } E \text{ é infinita} \\ \ell_\infty(E), & \text{caso contrário ,} \end{cases}$$

é uma classe de sequências.

O seguinte resultado é uma consequência simples da definição de classes de sequências. Optamos por enunciá-lo e demonstrá-lo pois ele será muito importante no que faremos adiante.

Proposição 3.1.5 *Seja X uma classe de sequências. Então, para qualquer espaço de Banach E, convergência em $X(E)$ implica em convergência coordenada a coordenada em E, isto é, se $(x^k)_{k=1}^\infty$ é uma sequência em $X(E)$, com $x^k = (\xi_j^k)_{j=1}^\infty$, para cada $k \in \mathbb{N}$, tal que $x^k \longrightarrow x = (\eta_j)_{j=1}^\infty$ em $X(E)$, então $\xi_j^k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \eta_j$ em E para todo $j \in \mathbb{N}$*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|x^k - x\|_{X(E)} < \varepsilon$, para todo $k \geq k_0$. Para todo $j \in \mathbb{N}$, usando a condição $\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_{X(E)}$ da definição de classe de sequências, segue que

$$\begin{aligned} \|\xi_j^k - \eta_j\| &\leq \sup_m \|\xi_m^k - \eta_m\| = \|(\xi_m^k - \eta_m)_{m=1}^\infty\|_\infty \\ &\leq \|(\xi_m^k - \eta_m)_{m=1}^\infty\|_{X(E)} = \|(\xi_m^k)_{m=1}^\infty - (\eta_m)_{m=1}^\infty\|_{X(E)} \\ &= \|x^k - x\|_{X(E)} < \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $k \geq k_0$. Portanto, para todo $j \in \mathbb{N}$, tem-se $\xi_j^k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \eta_j$ em E. ∎

3.2 Estabilidade linear

As classes de sequências exibidas no Exemplo 3.1.2 têm uma característica que os distingue das classes apresentadas nos dois exemplos seguintes, a saber, para todo E, $X(E)$ tem a mesma lei de formação. Além de ser esteticamente mais agradável, essas classes com leis uniformes de formação são exatamente aquelas que serão usadas no estudo de ideais de operadores. Neste seção estudaremos uma propriedade de classes de sequências que separa as classes que são, de certa forma, artificiais.

Definição 3.2.1 Dizemos que uma classe de sequências $X(\cdot)$ é *linearmente estável* se para quaisquer espaços de Banach E, F e para qualquer $u \in \mathcal{L}(E,F)$ é verdade que

$$(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in X(F) \text{ sempre que } (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$$

e que o operador linear induzido

$$\widehat{u}\colon X(E) \longrightarrow X(F)\ ,\ \widehat{u}((x_j)_{j=1}^{\infty}) = (u(x_j))_{j=1}^{\infty},$$

é contínuo e $\|\widehat{u}\| = \|u\|$.

Vejamos primeiramente que os exemplos não-uniformes da seção anterior não são linearmente estáveis.

Exemplo 3.2.2 A classe de sequências do Exemplo 3.1.3 não é linearmente estável. Para ver isso, considere o operador inclusão $i\colon \ell_1 \longrightarrow l_2$. Tomando os vetores canônicos $(e_j)_{j=1}^{\infty}$, temos $(e_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty(\ell_1) = X(\ell_1)$, pois $\|e_j\|_1 = 1$ para todo j, mas $(i(e_j))_{j=1}^{\infty} = (e_j)_{j=1}^{\infty} \notin c_0(\ell_2) = X(\ell_2)$, pois $\|e_j\|_2 = 1$ para todo j.

Exemplo 3.2.3 A classe de sequências do Exemplo 3.1.4 não é linearmente estável. Para ver isso, considere o operador linear contínuo

$$u\colon \mathbb{K} \longrightarrow \ell_\infty\ ,\ u(\lambda) = (\lambda, \lambda, \lambda, \ldots).$$

Temos $(1,1,1,\ldots,) \in \ell_\infty = \ell_\infty(\mathbb{K}) = X(\mathbb{K})$ mas

$$(u(1), u(1), u(1), \ldots) = ((1,1,1,\ldots),(1,1,1,\ldots),\ldots) \notin c_0(\ell_\infty) = X(\ell_\infty).$$

Exemplo 3.2.4 É muito fácil verificar que as classes de sequências $c_0(\cdot)$, $\ell_p(\cdot)$, para $p \in [1,\infty)$, e $\ell_\infty(\cdot)$ são linearmente estáveis. Por exemplo, dados $u \in \mathcal{L}(E;F)$, $1 \leq p < \infty$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$, de

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|u(x_j)\|^p \leq \|u\|^p \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p,$$

conclui-se que $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F)$.

O próximo lema será usado para simplificar as demonstrações de que determinadas classes de sequências são linearmente estáveis. Definimos $\|u\| = \sup\{\|u(x)\| : x \in B_E\}$ para todo operador linear u, não necessariamente contínuo. É claro que $\|u\| < +\infty$ se, e somente se, u é contínuo.

Lema 3.2.5 *Seja $X(\cdot)$ uma classe de sequências satisfazendo as seguintes condições:*
(a) *Se $u \in \mathcal{L}(E,F)$, então $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in X(F)$ para toda $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$.*
(b) *$\|(0,\ldots,0,x,0\ldots)\|_{X(E)} = \|x\|$ para todo espaço de Banach E e todo $x \in E$.*
Então o operador induzido $\widehat{u}\colon X(E) \longrightarrow X(F)$ é linear e $\|\widehat{u}\| \geq \|u\|$.

Demonstração. A boa definição de $\widehat{u}$ decorre da condição (a) e sua linearidade decorre da linearidade de u e das definições das operações usuais de sequências. Para todo $x \in E$ tem-se $(0,\ldots,0,u(x),0,0,\ldots) \in c_{00}(F) \subseteq X(F)$ e usando a condição (b), temos

$$\begin{aligned}
\|\widehat{u}\| &= \sup\{\|\widehat{u}((x_j)_{j=1}^{\infty})\|_{X(F)} : (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E) \text{ e } \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} \leq 1\} \\
&= \sup\{\|(u(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_{X(F)} : (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E) \text{ e } \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} \leq 1\} \\
&\geq \sup\{\|(0,\cdots,0,u(x),0,0,\cdots)\|_{X(F)} : x \in E, \|x\| \leq 1\} \\
&= \sup\{\|u(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} = \|u\|.
\end{aligned}$$

■

Proposição 3.2.6 *A classe de sequência $\ell_p^w(\cdot)$, $1 \leq p < \infty$, é linearmente estável.*

Demonstração. Sejam E e F espaços de Banach, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$. Então $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p < \infty$ para todo $\varphi \in E'$. Dado ψ um funcional linear e contínuo em F', pela Proposição 1.0.5 sabemos que $\psi \circ u\colon E \longrightarrow \mathbb{K}$ é um funcional linear contínuo, isto é, $\psi \circ u \in E'$. Logo

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\psi(u(x_j))|^p = \sum_{j=1}^{\infty} |(\psi \circ u)(x_j))|^p < \infty.$$

Portanto $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(F)$ e assim está verificada a condicão do item (a) do Lema 3.2.5. Para verificar a condição (b), seja $x \in E$. Pelo Teorema 1.0.14,

$$\begin{aligned}
\|(0,\ldots,0,x,0,0,\ldots,)\|_{w,p} &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(|\varphi(0)|^p + \cdots + |\varphi(0)|^p + |\varphi(x)|^p + |\varphi(0)|^p + \cdots\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(|\varphi(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)| = \|x\|_E.
\end{aligned}$$

Segue do Lema 3.2.5 que o operador induzido $\widehat{u}\colon \ell_p^w(E) \longrightarrow \ell_p^w(F)$ é linear e $\|\widehat{u}\| \geq \|u\|$. Para terminar, basta mostrar que $\widehat{u}$ é contínuo e que $\|\widehat{u}\| \leq \|u\|$. Se $\psi \in B_{F'}$, então pela Proposição 1.0.5, $\psi \circ \dfrac{u}{\|u\|} \in B_{E'}$. Logo, dada $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$,

$$\begin{aligned}
\|\widehat{u}((x_j)_{j=1}^{\infty})\|_{w,p} = \|(u(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} &= \sup_{\psi \in B_{F'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\psi(u(x_j))|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\psi \in B_{F'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |(\psi \circ u)(x_j))|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|u\| \cdot \sup_{\psi \in B_{F'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\left(\psi \circ \frac{u}{\|u\|}\right)(x_j))\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|u\| \cdot \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j))|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|u\| \cdot \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p}.
\end{aligned}$$

Segue que $\widehat{u}$ é contínuo e que $\|\widehat{u}\| \leq \|u\|$. ■

Proposição 3.2.7 *A classe de sequências $\ell_p^u(\cdot)$, $1 \leq p < \infty$, é linearmente estável.*

Demonstração. Sejam E e F espaços de Banach, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ e $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^u(E)$. Então $\lim\limits_{n\to\infty} \|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{w,p} = 0$. Da desigualdade

$$\|(u(x_j))_{j=n}^\infty\|_{w,p} \leq \|u\| \cdot \|(x_j)_{j=n}^\infty\|_{w,p},$$

que segue exatamente como na demonstração anterior, temos $\lim\limits_{n\to\infty} \|(u(x_j))_{j=n}^\infty\|_{w,p} = 0$, provando a condição (a) do Lema 3.2.5. A condição (b) foi verificada na demonstração anterior. Assim, pelo Lema 3.2.5, o operador induzido $\widehat{u}\colon \ell_p^u(E) \longrightarrow \ell_p^u(F)$ é linear e $\|\widehat{u}\| \geq \|u\|$. A demonstração da desigualdade inversa também é idêntica à da demonstração anterior. ■

Para provar a estabilidade linear da classe de sequências $\ell_p\langle\cdot\rangle$ precisamos do

Lema 3.2.8 *Sejam E e F espaços de Banach, $(\psi_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(F')$ e $u \in \mathcal{L}(E; F)$. Então $(\psi_j \circ u)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(E')$ e, mais ainda,*

$$\|(\psi_j \circ u)_{j=1}^\infty\|_{w,q} \leq \|u\| \cdot \|(\psi_j)_{j=1}^\infty\|_{w,q}.$$

Demonstração. Considere o operador adjunto $u'\colon F' \longrightarrow E'$ (veja Definição 1.0.22). Pela Proposição 3.2.6 sabemos que a classe de sequências $\ell_q^w(\cdot)$ é linearmente estável, logo

$$(\psi_j \circ u)_{j=1}^\infty = (u'(\psi_j))_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(E').$$

Mais ainda, o operador induzido $\widehat{u'}\colon \ell_q^w(F') \longrightarrow \ell_q^w(E')$ é linear, contínuo e $\|\widehat{u'}\| = \|u'\| = \|u\|$. Assim,

$$\begin{aligned}\|(\psi_j \circ u)_{j=1}^\infty\|_{w,q} &= \|(u'(\psi_j))_{j=1}^\infty\|_{w,q} = \|\widehat{u'}((\psi_j)_{j=1}^\infty)\|_{w,q} \\ &\leq \|\widehat{u'}\| \cdot \|(\psi_j)_{j=1}^\infty\|_{w,q} = \|u\| \cdot \|(\psi_j)_{j=1}^\infty\|_{w,q}\end{aligned}$$

■

Proposição 3.2.9 *A classe de sequências $\ell_p\langle\cdot\rangle$ é linearmente estável.*

Demonstração. Sejam E e F espaços de Banach, $u \in \mathcal{L}(E; F)$ e $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p\langle E\rangle$. Pelo Lema 3.2.8, $(\psi_j \circ u)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(E')$ para toda sequência $(\psi_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(F')$, logo, pela definição de $\ell_p\langle E\rangle$, a série

$$\sum_{j=1}^\infty \psi_j(u(x_j)) = \sum_{j=1}^\infty (\psi_j \circ u)(x_j)$$

é convergente para toda sequência $(\psi_j)_{j=1}^\infty \in \ell_q^w(F')$, ou seja, $(u(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p\langle E\rangle$. Isso prova a condição (a) do Lema 3.2.5. Para a condição (b), seja $x \in E$, considere que x ocupe a n-ésima posição na sequência $(0, \ldots, 0, x, 0, , \ldots) = (x_j)_{j=1}^\infty$ e note que

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{C,p} = \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E')}} [|\varphi_1(0)| + \cdots + |\varphi_{n-1}(0)| + |\varphi_n(x)| + |\varphi_{n+1}(0)| + \cdots]$$

$$= \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E')}} |\varphi_n(x)| = \sup_{\varphi_n \in B_{E'}} |\varphi_n(x)| = \|x\|.$$

Pelo Lema 3.2.5, o operador induzido $\widehat{u}\colon \ell_p\langle E\rangle \longrightarrow \ell_p\langle F\rangle$ é linear e $\|\widehat{u}\| \geq \|u\|$. Por fim, basta verificar que $\|\widehat{u}\| \leq \|u\|$. Dada $(\psi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(F')}$, segue do Lema 3.2.8 que $\left(\psi_j \circ \frac{u}{\|u\|}\right)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E')}$, pois

$$\left\| \left(\psi_j \circ \frac{u}{\|u\|}\right)_{j=1}^\infty \right\|_{w,q} = \frac{1}{\|u\|} \cdot \|(\psi_j \circ u)_{j=1}^\infty\|_{w,q} \leq \frac{1}{\|u\|} \cdot \|u\| \cdot \|(\psi_j)_{j=1}^\infty\|_{w,q} \leq 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|\widehat{u}((x_j)_{j=1}^\infty)\|_{C,p} &= \|(u(x_j))_{j=1}^\infty\|_{C,p} = \sup_{(\psi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(F')}} \sum_{j=1}^\infty |\psi_j(u(x_j))| \\
&= \sup_{(\psi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(F')}} \sum_{j=1}^\infty |\left(\psi_j \circ u\right)(x_j)| \\
&= \|u\| \cdot \sup_{(\psi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(F')}} \sum_{j=1}^\infty \left| \left(\psi_j \circ \frac{u}{\|u\|}\right)(x_j) \right| \\
&\leq \|u\| \cdot \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E')}} \sum_{j=1}^\infty |\varphi_j(x_j)| = \|u\| \cdot \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{C,p},
\end{aligned}$$

para toda $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p\langle E\rangle$,ou seja, $\widehat{u}$ é contínuo e $\|\widehat{u}\| \leq \|u\|$. ∎

Proposição 3.2.10 *A classe de sequências $c_0^w(\cdot)$ é linearmente estável.*

Demonstração. Sejam E e F espaços de Banach, $u \in \mathcal{L}(E;F)$ e $(x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^w(E)$. Se $\psi \in F'$, então $\psi \circ u \in E'$. Assim,

$$\psi(u(x_j)) = (\psi \circ u)(x_j) \longrightarrow 0,$$

qualquer que seja $\psi \in F'$, ou seja, $(u(x_j))_{j=1}^\infty \in c_0^w(F)$. Temos então a condição (a) do Lema 3.2.5. A condição (b) é óbvia, pois em $c_0^w(\cdot)$ trabalhamos com a norma do supremo. Segue então que o operador induzido $\widehat{u}\colon c_0^w(E) \longrightarrow c_0^w(F)$ é linear e $\|\widehat{u}\| \geq \|u\|$. Por fim, basta verificar que $\|\widehat{u}\| \leq \|u\|$, o que segue de

$$\begin{aligned}
\|\widehat{u}((x_j)_{j=1}^\infty)\|_\infty = \|(u(x_j))_{j=1}^\infty\|_\infty &= \sup_{j\in\mathbb{N}} \|u(x_j)\| \\
&\leq \sup_{j\in\mathbb{N}}(\|u\| \cdot \|x_j\|) \leq \|u\| \cdot \sup_{j\in\mathbb{N}} \|x_j\| \leq \|u\| \cdot \|(x_j)_{j=1}^\infty\|_\infty,
\end{aligned}$$

que vale para toda sequência $(x_j)_{j=1}^\infty \in c_0^w(E)$. ∎

3.3 Classes de sequências finitamente determinadas

Estudaremos nesta seção uma outra propriedade de classes de sequências que será muito útil no capitulo final.

Definição 3.3.1 Uma classe de sequências X é dita *finitamente determinada* se para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E, tem-se que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$ se, e somente se, $\sup\limits_k \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)} < +\infty$ e, em tal caso,

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} = \sup_k \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)}.$$

Passaremos agora a verificar quais das classes que estudamos são finitamente determinadas. Como sempre, E será um espaço de Banach e $1 \leq p < \infty$.

Proposição 3.3.2 *$\ell_\infty(\cdot)$ é uma classe de sequências finitamente determinada.*

Demonstração. Se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty(E)$, então $\sup\limits_{j\in\mathbb{N}} \|x_j\| < \infty$ e, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\|(x_j)_{j=1}^k\|_\infty = \sup_{1\leq j\leq k} \|x_j\| \leq \sup_{j\in\mathbb{N}} \|x_j\| = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_\infty < \infty$$

Assim, $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^k\|_\infty \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_\infty < \infty$.

Reciprocamente, note que para todo $j \in \mathbb{N}$ tem-se $\|x_j\| \leq \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \sup\limits_{1\leq n\leq k} \|x_n\| = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^k\|_\infty$. Sendo $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^k\|_\infty < +\infty$, temos que $(\|x_j\|)_{j=1}^{\infty}$ é limitada em $\mathbb{K}$, ou seja, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty(E)$. Mais ainda,

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} \|x_j\| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{1\leq n\leq k} \|x_n\| = \sup_k \|(x_j)_{j=1}^k\|_\infty,$$

e portanto $\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_\infty = \sup\limits_k \|(x_j)_{j=1}^k\|_\infty$. ■

Proposição 3.3.3 *$\ell_p(\cdot)$ é uma classe de sequências finitamente determinada.*

Demonstração. Basta observar que se $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência em E, então

$$\begin{aligned}\sup_k \|(x_j)_{j=1}^k\|_{\ell_p(E)} &= \sup_k \left(\sum_{j=1}^k \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \lim_{k\to+\infty} \left(\sum_{j=1}^k \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\lim_{k\to+\infty} \sum_{j=1}^k \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p.\end{aligned}$$

■

Proposição 3.3.4 *$\ell_p^w(\cdot)$ é uma classe de sequência finitamente determinada.*

Demonstração. Basta observar que se $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência em E, uma troca de supremos (veja Lema 2.4.10) nos fornece

$$\begin{aligned}
\sup_k \|(x_j)_{j=1}^k\|_{\ell_p^w(E)} &= \sup_k \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^k |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sup_k \left(\sum_{j=1}^k |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \lim_{k \to +\infty} \left(\sum_{j=1}^k |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\lim_{k \to +\infty} \sum_{j=1}^k |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p}.
\end{aligned}$$

■

Proposição 3.3.5 *A classe de sequências $\ell_p\langle\cdot\rangle$ é finitamente determinada.*

Demonstração. Basta observar que, para qualquer sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E, trocando novamente os supremos, tem-se

$$\begin{aligned}
\sup_k \|(x_j)_{j=1}^k\|_{\ell_p\langle E\rangle} &= \sup_k \left(\sup_{(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_q^w(E')}} \sum_{j=1}^k |\varphi_j(x_j)| \right) \\
&= \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_q^w(E')}} \left(\sup_k \sum_{j=1}^k |\varphi_j(x_j)| \right) \\
&= \sup_{(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_q^w(E')}} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(x_j)| = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{C,p}.
\end{aligned}$$

■

Veremos a seguir que as demais classes de sequências que apresentamos neste trabalho não são finitamente determinadas.

Exemplo 3.3.6 A classe de sequência $c_0(\cdot)$ não é finitamente determinada. De fato, considere E um espaço de Banach, $y \in E$ tal que $\|y\| \neq 0$ e a sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E definida por $x_j = y$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\sup_k \|(x_j)_{j=1}^k\|_{c_0(E)} = \sup_k \|y\|_E = \|y\|_E < \infty,$$

mas obviamente $(x_j)_{j=1}^{\infty} \notin c_0(E)$.

Exemplo 3.3.7 A classe de sequência $c_0^w(\cdot)$ não é finitamente determinada. De fato, considere $E = \mathbb{K}$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty} = (1, 1, 1, \cdots)$. Dessa forma, $\sup\limits_k \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{c_0^w(\mathbb{K})} = 1$, mas $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ não converge fracamente para 0, pois existe um funcional linear contínuo φ tal que $\varphi(1) = 1$, assim $\varphi(x_j) = \varphi(1) = 1 \nrightarrow 0$.

Exemplo 3.3.8 A classe de sequência $\ell_p^u(\cdot)$ não é finitamente determinada. Combinando o que vimos nos Exemplos 2.4.7 e 2.6.7, sabemos que $(e_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p^w(c_0)$ e $(e_j)_{j=1}^\infty \notin \ell_p^u(c_0)$. Como na Proposição 3.3.4 provamos que a classe de sequências $\ell_p^w(\cdot)$ é finitamente determinada, temos

$$\sup_k \|(e_j)_{j=1}^k\|_{\ell_p^u(c_0)} = \sup_k \|(e_j)_{j=1}^k\|_{w,p} = \|(e_j)_{j=1}^\infty\|_{w,p} < \infty,$$

mas $(e_j)_{j=1}^\infty \notin \ell_p^u(c_0)$.

Na tabela a seguir fazemos uma síntese do capítulo quanto a estabilidade linear e as classes finitamente determinadas.

Classe	Linearmente estável	Finitamente determinada
$c_0(\cdot)$	sim	não
$c_0^w(\cdot)$	sim	não
$\ell_\infty(\cdot)$	sim	sim
$\ell_p(\cdot)$	sim	sim
$\ell_p^w(\cdot)$	sim	sim
$\ell_p\langle\cdot\rangle$	sim	sim
$\ell_p^u(\cdot)$	sim	não

CAPÍTULO 4

IDEAIS DE OPERADORES

O objetivo deste capítulo é estudar os operadores lineares contínuos que transformam sequências de uma determinada classe em sequências de uma outra determinada classe. Faremos isso no âmbito da teoria dos ideais de operadores, que são classes de operadores que são estáveis por composição com outros operadores lineares contínuos.

A dois espaços normados E e F podemos associar o espaço normado $\mathcal{L}(E;F)$, o qual é Banach se F o for. É bem conhecido que B_E é compacta se, e somente se, E tem dimensão finita (veja [6, Teorema 1.5.4]). Será que dado um operador $u \in \mathcal{L}(E;F)$ pode acontecer de $\overline{u(B_E)}$ ser compacto sem que B_E o seja? É evidente que sim, bastando para isso que F tenha dimensão finita. Será que encontramos exemplos de operadores que gozam desta propriedade sem que F tenha dimensão finita? Tais operadores recebem o nome de *operadores compactos*. Denotamos a classe de todos os operadores compactos por $\mathcal{K}$ e $\mathcal{K}(E;F)$ denota a classe de todos os operadores compactos entre dois espaços de Banach E e F. Dizemos que $\mathcal{K}(E;F)$ é uma componente de $\mathcal{K}$.

Sabemos também que convergência fraca não implica em convergência em norma em geral (veja [6, Exemplo 6.2.4]), isto é,

$$x_j \overset{w}{\longrightarrow} x \text{ não implica em } x_j \longrightarrow x.$$

Porém, pode acontecer que para dado um operador $u \in \mathcal{L}(E;F)$ seja verdade que

$$x_j \overset{w}{\longrightarrow} x \text{ em } E \Rightarrow u(x_j) \longrightarrow u(x) \text{ em } F.$$

Neste caso, o operador u é dito *completamente contínuo*. A classe de operadores lineares e contínuos que são completamente contínuos é denotada por $\mathcal{C}$ e suas componentes por $\mathcal{C}(E;F)$.

Além das duas classes descritas acima, várias outras classes de operadores gozando de uma determinada propriedade foram estudadas isoladamente no século passado em Análise. Na década de 1970, A. Pietsch notou que todas essas classes, e por exemplo $\mathcal{K}$ e $\mathcal{C}$, satisfazem as seguintes propriedades:

(i) $\mathcal{K}(E;F)$ e $\mathcal{C}(E;F)$ são subespaços vetoriais de $\mathcal{L}(E;F)$.

(ii) Se $rank(u) < \infty$, isto é, se u tem posto finito, então $u \in \mathcal{K}$ e $u \in \mathcal{C}$.

(iii) Para quaisquer espaços de Banach G, E, F e H, $v \in \mathcal{L}(G; E)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$ tem-se

$$u \in \mathcal{K}(E; F) \Rightarrow t \circ u \circ v \in \mathcal{K}(G; H)$$

e

$$u \in \mathcal{C}(E; F) \Rightarrow t \circ u \circ v \in \mathcal{C}(G; H).$$

Isto motivou a definição de um ideal de operadores, que é a noção que unifica as classes de operadores que são estáveis por composição. A teoria de ideais de operadores foi formalizada por A. Pietsch no livro [19], cuja primeira edição data de 1978.

Na primeira seção introduziremos os ideais de operadores e apresentaremos algumas de suas propriedades básicas que serão necessárias nas próximas seções, lembrando que, como já sugere o nome da seção, trata-se aqui apenas de uma introdução. Para um aprofundamento veja [10, 11, 19] ou a dissertação de mestrado [18].

Na segunda seção iremos trabalhar com classes de sequências introduzidas no Capítulo 3 para caracterizar ideais de operadores que são definidos, ou caracterizados, por meio de transformações de sequências no ambiente abstrato das classes de sequências. Procuramos condições necessárias e suficientes sobre as classes de sequências X e Y para que a classe de todos operadores entre espaços de Banach, digamos E e F, que transformam sequências de $X(E)$ em sequências $Y(F)$ seja um ideal de operadores de Banach. A referência usada para essa seção foi [4].

Na terceira seção determinaremos condições necessárias para que esses ideais de operadores sejam injetores, sobrejetores ou regulares.

Finalmente, na quarta e última seção iremos resgatar os principais exemplos de ideais de operadores conhecidos na literatura usando o desenvolvimento da terceira seção. As referências da primeira seção são também recomendadas para essa seção com o acréscimo de [9, 7] para os operadores Cohen fortemente p-somantes, [12] para os operadores absolutamente somantes e (p, q)-somantes, [14] para os operadores incondicionalmente somantes e [8] para os operadore p-convergentes.

4.1 Introdução aos ideais de operadores

Definição 4.1.1 Um *ideal de operadores* $\mathcal{I}$ é uma subclasse da classe de todos os operadores lineares contínuos entre espaços de Banach $\mathcal{L}$ tal que, para quaisquer espaços de Banach E e F,

$$\mathcal{I}(E; F) := \mathcal{L}(E; F) \cap \mathcal{I},$$

que é chamada de componente de $\mathcal{I}$ em $\mathcal{L}(E; F)$, satisfaz as seguintes condições:

(i) $\mathcal{I}(E; F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E; F)$.

(ii) O conjunto dos operadores de posto finito de E em F, denotado por $\mathcal{F}(E; F)$, está contido em $\mathcal{I}(E; F)$.

(iii) (Propriedade de ideal) Se $u \in \mathcal{I}(E; F)$, $v \in \mathcal{L}(G; E)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, então $t \circ u \circ v \in \mathcal{I}(G; H)$.

É claro que $\mathcal{I}(E;F)$ é normado com a norma $\|\cdot\|$ usual de $\mathcal{L}(E;F)$. Será que $(\mathcal{I}(E;F);\|\cdot\|)$ é Banach? Vejamos um exemplo onde isto não ocorre.

Exemplo 4.1.2 É imediato que a classe $\mathcal{F}$ dos operadores de posto finito é um ideal de operadores. Mais ainda, pelo item (ii) da definição acima, $\mathcal{F}$ é o menor ideal de operadores. Como observado acima, para quaisquer espaços de Banach E e F tem-se que $(\mathcal{F};\|\cdot\|)$ é um espaço normado, porém $\mathcal{F}(c_0;\ell_1)$ não é fechado em $\mathcal{L}(c_0;\ell_1)$ (veja, por exemplo, [18, Proposição 2.2.2]) e, portanto, $(\mathcal{F}(c_0;\ell_1);\|\cdot\|)$ não é Banach.

Definição 4.1.3 Um ideal de operadores $\mathcal{I}$ é dito *fechado* se $\mathcal{I}(E;F)$ é fechado em $\mathcal{L}(E;F)$, para quaisquer espaços de Banach E e F. Neste caso, $(\mathcal{I}(E;F),\|\cdot\|)$ é Banach, para quaisquer espaços de Banach E e F.

Exemplo 4.1.4 Como dito na introdução deste capítulo, diz-se que um operador linear contínuo entre espaços normados $u\colon E \longrightarrow F$ é *compacto* se $\overline{u(B_E)}$ é compacto em F. Denotamos por $\mathcal{K}$ a classe de todos os operadores lineares contínuos compactos entre espaços normados e suas componentes por $\mathcal{K}(E;F)$. Em [18, Proposição 2.3.5] encontra-se a demonstração de que $\mathcal{K}$ é um ideal fechado de operadores.

Exemplo 4.1.5 No Exemplo 4.1.2 vimos que $\mathcal{F}(c_0;\ell_1)$ não é fechado em $\mathcal{L}(c_0;\ell_1)$. Logo, $\mathcal{F}$ não é um ideal fechado.

Lema 4.1.6 *Se E um espaço normado e F um subespaço de E, então $\overline{F}$ também é um subespaço de E.*

Demonstração. É claro que $0 \in \overline{F}$. Sejam $x, y \in \overline{F}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então existem sequências $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ e $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ em F convergentes para x e y, respectivamente. Pela continuidade das operações algébricas em E segue que $\lambda(x_j)_{j=1}^{\infty} + (y_j)_{j=1}^{\infty}$ converge para $\lambda x + y$. Porém, sendo F um subespaço vetorial de E, a sequência $\lambda(x_j)_{j=1}^{\infty} + (y_j)_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência em F convergente para $\lambda x + y$. Logo, $\lambda x + y \in \overline{F}$ e, portanto, $\overline{F}$ é um subespaço vetorial de E. ■

Proposição 4.1.7 *Dado um ideal de operadores $\mathcal{I}$, defina*

$$\overline{\mathcal{I}}(E;F) = \overline{\mathcal{I}(E;F)},$$

para todos $E, F \in BAN$. Então, $\overline{\mathcal{I}}$ é um ideal fechado.

Demonstração. Pelo lema anterior e do fato de que

$$\mathcal{F}(E;F) \subseteq \mathcal{I}(E;F) \subseteq \overline{\mathcal{I}(E;F)} = \overline{\mathcal{I}}(E;F),$$

segue que $\overline{\mathcal{I}}(E;F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$ contendo os operadores de posto finito. Mais ainda, se $u \in \overline{\mathcal{I}}(E;F)$, $v \in \mathcal{L}(G;H)$ e $t \in \mathcal{L}(F;H)$, então existe uma sequencia de operadores $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ em $\mathcal{I}(E;F)$ convergente a u na norma usual de operadores. Da propriedade de ideal de $\mathcal{I}$, a sequência $(t \circ u_j \circ v)_{j=1}^{\infty}$ está em $\mathcal{I}(E;F)$. De:

$$\|(t \circ u_j \circ v)(x) - (t \circ u \circ v)(x)\| \quad = \quad \|t(u_j(v(x))) - t(u(v(x)))\|$$

$$
\begin{aligned}
&= \|t((u_j - u)(v(x)))\| \\
&\leq \|t\| \cdot \|(u_j - u)(v(x))\| \\
&\leq \|t\| \cdot \|u_j - u\| \cdot \|v(x)\| \\
&\leq \|t\| \cdot \|u_j - u\| \cdot \|v\| \cdot \|x\|
\end{aligned}
$$

para todo $x \in G$, segue que,

$$\|t \circ u_j \circ v\| \leq \|t\| \cdot \|u_j - u\| \cdot \|v\| \longrightarrow 0.$$

Assim, $t \circ u_j \circ v \longrightarrow t \circ u \circ v$ na norma usual de operadores, provando que $t \circ u \circ v \in \overline{\mathcal{I}}(G; H)$ e, portanto, $\overline{\mathcal{I}}$ é um ideal de operadores. Que $\overline{\mathcal{I}}$ é fechado segue diretamente da sua definição. ■

Quando o ideal $\mathcal{I}$ não for fechado, suas componentes $\mathcal{I}(E; F)$ não são espaços de Banach com a norma usual de operadores. Por isso, muitas vezes precisamos de uma nova norma, que deve ser compatível com a propriedade de ideal das seguinte maneira:

Definição 4.1.8 Um *ideal normado de operadores* é um ideal de operadores $\mathcal{I}$ munido de uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} \colon \mathcal{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que:

(i) Para quaisquer espaços de Banach E e F, $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ restrita à componente $\mathcal{I}(E; F)$ é uma norma.

(ii) O funcional linear $Id_{\mathbb{K}} \colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por $Id_{\mathbb{K}}(\lambda) = \lambda$ é tal que $\|Id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 1$.

(iii) Se $u \in \mathcal{I}(E; F)$, $v \in \mathcal{L}(G; E)$ e $t \in \mathcal{L}(F; H)$, então

$$\|t \circ u \circ v\|_{\mathcal{I}} \leq \|t\| \cdot \|u\|_{\mathcal{I}} \cdot \|v\|. \tag{4.1}$$

Se $(\mathcal{I}(E; F), \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ for Banach para quaisquer espaços de Banach E e F, então dizemos que $(\mathcal{I}; \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um *ideal de Banach de operadores.*

Na Seção 4.4 veremos exemplos de normas diferentes da norma usual que transformam determinados ideais em ideais de Banach.

4.2 Ideais de operadores e classes de sequências

Nesta seção vamos introduzir um método abstrato de gerar ideais de Banach de operadores por meio da transformação de sequências vetoriais. Para isso faremos uso do conceito de das classes des sequências estudado no capítulo anterior.

Dadas duas classes de sequências X e Y e um operador $u \colon E \longrightarrow F$ entre os espaços de Banach E e F, podemos nos perguntar se $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in X(E)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in Y(F)$, isto é, se u transforma sequências de $X(E)$ em sequências de $Y(F)$. Investigaremos que condições devemos colocar nas classes de sequências X e Y para que a classe de todos os operadores que satisfazem essa condição se torne um ideal de Banach de operadores. Primeiro precisamos conhecer melhor os operadores que levam sequências de $X(E)$ em sequências de $X(F)$.

Proposição 4.2.1 *Sejam X e Y classes de sequências. As seguintes condições são equivalentes para um operador $u \in \mathcal{L}(E;F)$ dado entre os espaços de Banach E e F:*

(a) $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in Y(F)$ *sempre que* $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$.

(b) *O operador induzido*

$$\widehat{u}\colon X(E) \longrightarrow Y(F)\ ,\ \widehat{u}((x_j)_{j=1}^{\infty}) = (u(x_j))_{j=1}^{\infty},$$

está bem definido e é um operador linear contínuo.

As condições acima implicam na condição (c) *abaixo, e todas elas são equivalentes se as classes de sequências X e Y são finitamente determinadas.*

(c) *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|(u(x_j))_{j=1}^{k}\|_{Y(F)} \leq C\|(x_j)_{j=1}^{k}\|_{X(E)}, \tag{4.2}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e quaisquer $x_1, x_2, \ldots, x_k \in E$. Em tal caso,

$$\|\widehat{u}\|_{\mathcal{L}(X(E);Y(F))} = \inf\{C > 0 : (4.2) \text{ é satisfeita.}\} \tag{4.3}$$

Demonstração. (a) $\Leftrightarrow$ (b) É claro que, por (a), $\widehat{u}$ está bem definido e é fácil ver, usando a linearidade de u, que também é linear. Para mostrar que $\widehat{u}$ é contínuo usaremos o Teorema do Gráfico Fechado (Teorema 1.0.12). Para isso seja $((x^k, \widehat{u}(x^k)))_{k=1}^{\infty}$ uma seguência em $\mathrm{Graf}(\widehat{u}) \subseteq X(E) \times Y(F)$ tal que $(x^k, \widehat{u}(x^k)) \longrightarrow (x, z)$, isto é, $x^k \longrightarrow x$ em $X(E)$ e $\widehat{u}(x^k) \longrightarrow z$ em $Y(F)$. Denotemos

$$x^k = (\xi_j^k)_{j=1}^{\infty} \text{ para todo } k \in \mathbb{N},\ x = (\eta_j)_{j=1}^{\infty} \text{ e } z = (\zeta_j)_{j=1}^{\infty}.$$

Pela Proposição 3.1.5 segue que $\xi_j^k \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \eta_j$ em E, para todo $j \in \mathbb{N}$, e da continuidade de u segue que $u(\xi_j^k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} u(\eta_j)$ em F para todo $j \in \mathbb{N}$. Como

$$(u(\xi_j^k))_{j=1}^{\infty} = \widehat{u}((\xi_j^k)_{j=1}^{\infty}) = \widehat{u}(x^k) \longrightarrow z = (\zeta_j)_{j=1}^{\infty} \text{ em } Y(F),$$

novamente pela Proposição 3.1.5, temos $u(\xi_j^k) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \zeta_j$ em F para todo $j \in \mathbb{N}$. Da unicidade do limite segue que $u(\eta_j) = \zeta_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Finalmente,

$$\widehat{u}(x) = \widehat{u}((\eta_j)_{j=1}^{\infty}) = (u(\eta_j))_{j=1}^{\infty} = (\zeta_j)_{j=1}^{\infty} = z.$$

Isso prova que $\widehat{u}$ possui o gráfico fechado e, consequentemente, é contínuo.

Reciprocamente, supondo que $\widehat{u}$ está bem definido, segue que $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} = \widehat{u}((x_j)_{j=1}^{\infty}) \in Y(F)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$.

(b) $\Rightarrow$ (c) Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_k \in E$. Sendo $\widehat{u}$ linear e operador contínuo, tem-se

$$\|\widehat{u}((y_j)_{j=1}^{\infty})\|_{Y(F)} \leq \|\widehat{u}\|_{\mathcal{L}(X(E),Y(F))} \cdot \|(y_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)},$$

para toda sequência $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$. Assim, $(x_1, \cdots, x_k, 0, 0 \ldots) \in c_{00}(E) \subseteq X(E)$ implica em

$$\begin{aligned}
\|(u(x_j))_{j=1}^k\|_{Y(F)} &= \|(u(x_1), \ldots, u(x_k), u(0), u(0), \cdot)\|_{Y(F)} \\
&= \|\widehat{u}((x_1, \ldots, x_k, 0, 0 \ldots))\|_{Y(F)} \\
&\leq \|\widehat{u}\|_{\mathcal{L}(X(E),Y(F))} \cdot \|(x_1, \ldots, x_k, 0, 0 \ldots)\|_{X(E)} \\
&\leq \|\widehat{u}\|_{\mathcal{L}(X(E),Y(F))} \cdot \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)}.
\end{aligned}$$

Basta tomar $C = \|\widehat{u}\|_{\mathcal{L}(X(E),Y(F))}$. Segue também que

$$\|\widehat{u}\|_{\mathcal{L}(X(E);Y(F))} \geq \inf\{C : (4.2) \text{ é satisfeita}\}.$$

Suponhamos agora que as classes de sequências X e Y são finitamente determinadas e provemos que, neste caso, (c) $\Rightarrow$ (b). Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$. Como X é finitamente determinada, $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)} < +\infty$ e, em tal caso,

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)}. \tag{4.4}$$

Por hipótese, existe uma constante $C > 0$, que independe de $(x_j)_{j=1}^{\infty}$, tal que

$$\|(u(x_j))_{j=1}^k\|_{Y(F)} \leq C \cdot \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)} \tag{4.5}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, juntando a igualdade (4.4), e a desigualdade (4.5) e a informação de que Y é finitamente determinada, segue que

$$\begin{aligned}
\|\widehat{u}((x_j)_{j=1}^{\infty})\|_{Y(F)} &= \|(u(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_{Y(F)} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \|(u(x_j))_{j=1}^k\|_{Y(F)} \\
&\leq C \cdot \sup_{k\in\mathbb{N}} \|(x_j)_{j=1}^k\|_{X(E)} \leq C \cdot \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\widehat{u}$ é contínuo e

$$\|\widehat{u}\|_{\mathcal{L}(X(E);Y(F))} \leq \inf\{C : (4.2) \text{ é satisfeita.}\}$$

■

Definição 4.2.2 Sejam X e Y classes de sequências. Dizemos que:

(i) $X < Y$ se, para todo espaço de Banach E, $X(E)$ é um subespaço fechado de $Y(E)$ e, para cada sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in Y(E)$, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$ se, e somente se, $\lim\limits_{k} \|(x_j)_{j=k}^{\infty}\|_{Y(E)} = 0$.

(ii) $X \prec Y$ se, para todo espaço de Banach E, $X(E)$ é um subespaço fechado de $Y(E)$ e, para cada sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in Y(E)$, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$ se, e somente se, $\lim\limits_{k,l} \|(x_j)_{j=k}^{l}\|_{Y(E)} = 0$.

Proposição 4.2.3 *Sejam X e Y classes de sequência tais que $X < Y$ e Y é finitamente determinada. Então, X é finitamente determinada se, e somente se, $Y = X$.*

Demonstração. É claro que se $Y = X$, então X é finitamente determinada. Por outro lado, seja E um espaço de Banach. Devemos mostrar que $X(E) = Y(E)$. Como $X(E)$ é subespaço fechado de $Y(E)$, então basta mostrar qu $Y(E) \subseteq X(E)$. Se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in Y(E)$, como Y é finitamente determinada, $(x_j)_{j=1}^{k} \in X(E)$ e $X(E)$ é subespaço fechado de $Y(F)$, tem-se $\sup\limits_{k} \|(x_j)_{j=1}^{k}\|_{X(E)} = \sup\limits_{k} \|(x_j)_{j=1}^{k}\|_{Y(E)} < \infty$. Logo, sendo X finitamente determinada, segue que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$. ■

Proposição 4.2.4 *Sejam X, Y, Z e W classes de sequências tais que Z e W são finitamente determinadas. Suponha que vale uma das seguintes condições:*

(i) $X < Z$ *e* $Y < W$.

(ii) $X \prec Z$ *e* $Y \prec W$.

(iii) $X < Z$ *e* $Y \prec W$.

Então, para quaisquer espaços de Banach E e F, as seguintes condições são equivalentes para um operador linear $u \in \mathcal{L}(E; F)$ dado:

(a) $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in Y(F)$ *sempre que* $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$.

(b) $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in W(F)$ *sempre que* $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in Z(E)$.

Neste caso,

$$\|\widehat{u} \colon X(E) \longrightarrow Y(F)\| = \|\widehat{u} \colon Z(E) \longrightarrow W(F)\|. \tag{4.6}$$

Demonstração. (a) $\Rightarrow$ (b) Pela Proposição 4.2.1((a) $\Rightarrow$ (c)), existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|(u(x_j))_{j=1}^{k}\|_{Y(F)} \leq C \|(x_j)_{j=1}^{k}\|_{X(E)}$$

para quaisquer $k \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_k \in E$. Em qualquer uma das três hipóteses é verdade que $X(E)$ é subespaço vetorial fechado de $Z(E)$ e que $Y(F)$ é subespaço vetorial fechado de $W(F)$. Dessa forma,

$$C\|(x_j)_{j=1}^{k}\|_{Z(E)} = C\|(x_j)_{j=1}^{k}\|_{X(E)} \geq \|(u(x_j))_{j=1}^{k}\|_{Y(F)} = \|(u(x_j))_{j=1}^{k}\|_{W(F)}.$$

Como Z e W são finitamente determinadas, novamente pela Proposição 4.2.1 (agora usando a implicação (c) $\Rightarrow$ (a)), temos $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in W(F)$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$. Como $X(E)$ é subespaço de $Z(E)$, tem-se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in Z(E)$ e $\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{X(E)} = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{Z(E)}$. Por hipótese e pela Proposição 4.2.1 [(a) $\Rightarrow$ (c)], existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|(u(x_j))_{j=k}^{l}\|_{W(F)} \leq C\|(x_j)_{j=k}^{l}\|_{Z(E)} = C\|(x_j)_{j=k}^{l}\|_{X(E)}, \tag{4.7}$$

para quaisquer $l > k$ e $x_k, \ldots, x_l \in E$.

(i) Como $X < Z$ tem-se $\lim\limits_{k} \|(x_j)_{j=k}^{\infty}\|_{Z(E)} = 0$. Tomando-se o supremo em (4.7) sobre l com k fixo, e usando o fato de Z e de W serem finitamente determinadas, segue que

$$\begin{aligned} \|(u(x_j))_{j=k}^{\infty}\|_{W(F)} &= \sup_{l} \|(u(x_j))_{j=k}^{l}\|_{W(F)} \leq C \sup_{l} \|(x_j)_{j=k}^{l}\|_{Z(E)} \\ &\leq C\|(x_j)_{j=k}^{\infty}\|_{Z(E)}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Agora, fazendo $k \longrightarrow +\infty$ (4.8), temos

$$0 \le \lim_k \|(u(x_j))_{j=k}^\infty\|_{W(F)} \le C \lim_k \|(x_j)_{j=k}^\infty\|_{Z(E)} = 0,$$

e portanto $\lim_k \|(u(x_j))_{j=k}^\infty\|_{W(F)} = 0$. Sendo $Y < W$, segue que $(u(x_j))_{j=1}^\infty \in Y(F)$.

(ii) Por hipótese, $X \prec Z$, logo $\lim_{k,l} \|(x_j)_{j=k}^l\|_{Z(E)} = 0$. Tomando-se $k, l \longrightarrow +\infty$ em (4.7) segue

$$0 \le \lim_{k,l} \|(u(x_j))_{j=k}^l\|_{W(F)} \le C \lim_{k,l} \|(x_j)_{j=k}^l\|_{Z(E)} = 0,$$

ou seja, $\lim_{k,l} \|(u(x_j))_{j=k}^l\|_{W(F)} = 0$. Sendo $Y \prec W$, segue que $(u(x_j))_{j=1}^\infty \in Y(F)$.

iii) Sendo $X < Z$, tem-se $(x_j)_{j=1}^\infty \in Z(E)$ e, por hipótese, segue que $(u(x_j))_{j=1}^\infty \in W(F)$. Agora, usando o fato de que Z é finitamente determinada, $Y \prec W$ e que vale a desigualdade (4.7), segue que

$$\begin{aligned}\lim_{k,l} \|(u(x_j))_{j=k}^l\|_{W(F)} &\le C \lim_{k,l} \|(x_j)_{j=k}^l\|_{Z(E)} = C \lim_k \|(x_j)_{j=k}^\infty\|_{Z(E)} \\ &= C \sup_k \|(x_j)_{j=k}^\infty\|_{Z(E)} = 0.\end{aligned}$$

Portanto, $(u(x_j))_{j=1}^\infty \in Y(F)$.

■

Agora sim estamos em condições de definir classes de operadores que transformam sequências de uma determinada classe em sequências de uma outra determinada classe.

Definição 4.2.5 Sejam X e Y classes de sequências. Dizemos que um operador linear $u \in \mathcal{L}(E; F)$ é $(X;Y)$-*somante* se as condições equivalentes da Proposição 4.2.1 são satisfeitas para u, isto é, se

$$(u(x_j))_{j=1}^\infty \in Y(F) \text{ sempre que } (x_j)_{j=1}^\infty \in X(E).$$

Neste caso escrevemos $u \in \mathcal{L}_{X;Y}(E; F)$ e, considerando o operador induzido $\widehat{u}\colon X(E) \longrightarrow Y(F)$, definimos

$$\|u\|_{X;Y} = \|\widehat{u}\|_{\mathcal{L}(X(E);Y(F))}.$$

No caso em que $X = Y$ dizemos que u é X-somante e escrevemos $\mathcal{L}_X(E; F)$ e $\|u\|_X$.

Das definições segue diretamente o seguinte resultado:

Proposição 4.2.6 *Uma classe de sequências X é linearmente estável se, e somente se, $\mathcal{L}_X(E; F) \overset{1}{=} \mathcal{L}(E; F)$ para quaisquer espaços de Banach E e F, isto é, se $\mathcal{L}_X(E; F) = \mathcal{L}(E; F)$ e $\|\widehat{u}\colon X(E) \longrightarrow X(F)\| = \|u\|$, para quaisquer espaços de Banach E e F e qualquer operador $u \in \mathcal{L}(E; F)$.*

Trabalharemos agora no sentido de mostrar que, com poucas condições adicionais, $\mathcal{L}_{X;Y}$ é um ideal de operadores. O primeiro passo é mostrar que, com estabilidade linear, a condição (b) do Lema 3.2.5 está sempre satisfeita.

Lema 4.2.7 (a) *Seja X uma classe de sequências linearmente estável. Para todo espaço de Banach E,*

$$\|(0,\ldots,0,x,0,0,\ldots)\|_{X(E)} = \|x\|,$$

independentemente do vetor $x \in E$ e da posição que x aparece na sequência.
(b) *Se X e Y são classes de sequências linearmente estáveis, então $\|u\| \leq \|u\|_{X;Y}$, para todo $u \in \mathcal{L}_{X;Y}(E;F)$.*

Demonstração. (a) Considere o operador linear contínuo

$$u_x : \mathbb{K} \longrightarrow E \ , \ u_x(\lambda) = \lambda x, \tag{4.9}$$

e seja j a posição de x na sequência $(0,\ldots,0,x,0\ldots)$. Da condição $X(E) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(E)$ segue que

$$\begin{aligned}
\|x\|_E &= \|(0,\ldots,0,x,0\ldots)\|_{\ell_\infty(E)} \\
&\leq \|(0,\ldots,0,x,0\ldots)\|_{X(E)} \\
&= \|(u_x(0),\ldots,u_x(0),u_x(1),u_x(0)\ldots)\|_{X(E)} \\
&= \|(\widehat{u_x}(0,\ldots,0,1,0,\ldots)\| = \|\widehat{u_x}(e_j)\|_{X(E)},
\end{aligned}$$

onde $\widehat{u_x}\colon X(\mathbb{K}) \longrightarrow X(E)$ é o operador induzido de u_x. Como X é uma classe de sequência linearmente estável, segue que $\widehat{u}$ é um operador linear contínuo e que

$$\|\widehat{u}_x\|_{\mathcal{L}(X(\mathbb{K});X(E))} = \|u_x\|_{\mathcal{L}(\mathbb{K};E)} = \|x\|.$$

Das contas acima concluímos que

$$\begin{aligned}
\|x\|_E &\leq \|(0,\ldots,0,x,0\ldots)\|_{X(E)} \\
&\leq \|\widehat{u_x}(e_j)\|_{X(E)} \\
&\leq \|\widehat{u}_x\|_{\mathcal{L}(X(\mathbb{K});X(E))} \cdot \|e_j\|_{X(\mathbb{K})} = \|x\|,
\end{aligned}$$

donde segue a igualdade desejada.

(b) Para cada $x \in E$, por (a) juntamente com as condições de X e Y serem classes de sequências linearmente estáveis, segue que

$$\begin{aligned}
\|u(x)\|_F &= \|(u(x),0,0,\cdots)\|_{Y(F)} \\
&= \|\widehat{u}((x,0,0,\cdots))\| \\
&\leq \|\widehat{u}\|_{\mathcal{L}(X(E);Y(F))} \cdot \|(x,0,0,\cdots)\|_{X(E)} \\
&= \|u\|_{X;Y} \cdot \|x\|_E.
\end{aligned}$$

Disso segue imediatamente que $\|u\|_{\mathcal{L}(E;F)} \leq \|u\|_{X;Y}$. ■

Teorema 4.2.8 *Sejam X e Y classes de sequências linearmente estáveis tais que $X(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} Y(\mathbb{K})$. Então $(\mathcal{L}_{X;Y}, \|\cdot\|_{X;Y})$ é um ideal de Banach de operadores.*

Demonstração. Provemos que:

(i) $\mathcal{L}_{X;Y}(E;F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$: Sejam $u, v \in \mathcal{L}_{X;Y}(E;F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. A igualdade

$$\begin{aligned}((u+\lambda v)(x_j))_{j=1}^{\infty} &= (u(x_j)+\lambda v(x_j))_{j=1}^{\infty} \\ &= (u(x_j))_{j=1}^{\infty} + \lambda(v(x_j))_{j=1}^{\infty}\end{aligned}$$

para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$, somada ao fato de $Y(F)$ ser um espaço vetorial, mostra que $((u+\lambda v)(x_j))_{j=1}^{\infty} \in Y(F)$ para toda $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$. Portanto $(u+\lambda v) \in \mathcal{L}_{X;Y}(E;F)$.

(ii) $\mathcal{F}(E;F) \subseteq \mathcal{L}_{X;Y}(E;F)$: Se $u \in \mathcal{F}(E;F)$, então existem $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in E'$ e $b_1, \ldots, b_k \in F$ tais que

$$u = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j \otimes b_j,$$

onde $\varphi_j \otimes b_j$ denota o operador de E em F dado por

$$\varphi_j \otimes b_j(x) = \varphi_j(x) b_j \text{ para todo } x \in E.$$

Para se convencer de que todo operador de posto finito se escreve dessa forma, veja, por exemplo, [18, Seção 2.2]. Logo, basta mostrar que se $\varphi \in E'$ e $b \in F$, então $\varphi \otimes b \in \mathcal{L}_{X;Y}(E;F)$, pois foi mostrado no item anterior que $\mathcal{L}_{X;Y}(E;F)$ é um espaço vetorial. Para isso, considere o operador

$$T\colon \mathbb{K} \longrightarrow F \ , \ T(\lambda) = \lambda b.$$

Como Y é linearmente estável, tem-se $(T(y_j))_{j=1}^{\infty} \in Y(F)$ para toda $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in Y(\mathbb{K})$. Dada $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$, como $\varphi \in E'$ e X é linearmente estável, segue que $(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty} \in X(\mathbb{K}) \subseteq Y(\mathbb{K})$. Logo

$$\begin{aligned}(\varphi \otimes b(x_j))_{j=1}^{\infty} &= (\varphi(x_j)b)_{j=1}^{\infty} \\ &= (T(\varphi(x_j)))_{j=1}^{\infty} \in Y(F),\end{aligned}$$

provando que $\varphi \otimes b \in \mathcal{L}_{X;Y}(E;F)$.

(iii) Vale a propriedade de ideal: Sejam $u \in \mathcal{L}_{X;Y}(E;F)$, $v \in \mathcal{L}(G;E)$ e $t \in \mathcal{L}(F;H)$. Se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(G)$, como X é linearmente estável, então $(v(x_j))_{j=1}^{\infty} \in X(E)$, sendo u $(X;Y)$-somante, então $(u(v(x_j)))_{j=1}^{\infty} \in Y(F)$ e, finalmente, Y linearmente estável implica que

$$((t \circ u \circ v)(x_j))_{j=1}^{\infty} = (t(u(v(x_j))))_{j=1}^{\infty} \in Y(H), \forall (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(G).$$

Logo $t \circ u \circ v \in \mathcal{L}_{X;Y}(E;F)$ e, portanto, $\mathcal{L}_{X;Y}(E;F)$ é um ideal de operadores.

Verifiquemos agora os axiomas de norma:

Dado $u \in \mathcal{L}_{X;Y}(E;F)$, então $\|u\|_{X;Y} = \|\widehat{u}\|_{\mathcal{L}(X(E);Y(F))} \geq 0$. É claro que se $u \equiv 0$, então $\widehat{u} \equiv 0$ e, sendo assim, $\|u\|_{X;Y} = 0$. Suponha agora que $\|u\|_{X;Y} = 0$. Então $\widehat{u} \equiv 0$. Para todo $x \in E$, como $c_{00}(E) \subseteq X(E)$, tem-se que $(x, 0, 0, \cdots) \in X(E)$. Logo,

$$(u(x), 0, 0, \ldots) = \widehat{u}((x, 0, 0, \cdots)) = 0,$$

o que implica que $u(x) = 0$. Segue que $u \equiv 0$.

Dados $u, v \in \mathcal{L}_{X;Y}(E;F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, é fácil ver que $\widehat{\lambda u} = \lambda \widehat{u}$ e que $\widehat{u+v} = \widehat{u} + \widehat{v}$. Disso segue que

$$\begin{aligned} \|\lambda u\|_{X;Y} &= \|\widehat{\lambda u}\|_{\mathcal{L}(X(E);Y(F))} \\ &= |\lambda| \cdot \|\widehat{u}\|_{\mathcal{L}(X(E);Y(F))} \\ &= |\lambda| \cdot \|u\|_{X:Y} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|u+v\|_{X;Y} &= \|\widehat{u+v}\|_{\mathcal{L}(X(E);Y(F))} \\ &= \|\widehat{u} + \widehat{v}\|_{\mathcal{L}(X(E);Y(F))} \\ &\leq \|\widehat{u}\|_{\mathcal{L}(X(E);Y(F))} + \|\widehat{v}\|_{\mathcal{L}(X(E);Y(F))} \\ &= \|u\|_{X;Y} + \|v\|_{X;Y}. \end{aligned}$$

Está provado que $\|\cdot\|_{X;Y}$ é uma norma em cada componente.

Provemos que $\|Id_{\mathbb{K}}\|_{X;Y} = 1$: Como $Id_{\mathbb{K}}$ tem posto finito, então $Id_{\mathbb{K}} \in \mathcal{L}_{X;Y}$. Como $X(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} Y(\mathbb{K})$, tem-se

$$\begin{aligned} \|\widehat{Id_{\mathbb{K}}}((x_j)_{j=1}^{\infty})\|_{Y(\mathbb{K})} &= \|(Id_{\mathbb{K}}(x_j))_{j=1}^{\infty})\|_{Y(\mathbb{K})} \\ &= \|(x_j)_{j=1}^{\infty})\|_{Y(\mathbb{K})} \\ &\leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty})\|_{X(\mathbb{K})}, \end{aligned}$$

ou seja, $\|\widehat{Id_{\mathbb{K}}}\|_{\mathcal{L}(X(\mathbb{K});Y(\mathbb{K}))} \leq 1$. Mais ainda, considere agora $e_1 \in c_{00}(\mathbb{K}) \subseteq X(\mathbb{K}) \subseteq Y(\mathbb{K})$. Pelo lema 4.2.7 sabemos que $\|e_1\|_{Y(\mathbb{K})} = 1$, portanto

$$\|\widehat{Id_{\mathbb{K}}}(e_1)\|_{Y(\mathbb{K})} = \|e_1\|_{Y(\mathbb{K})} = 1.$$

Isso prova que $\|Id_{\mathbb{K}}\|_{X;Y} = \|\widehat{Id_{\mathbb{K}}}\|_{\mathcal{L}(X(\mathbb{K});Y(\mathbb{K}))} = 1$.

Provemos a desigualdade da propriedade de ideal. Sejam $u \in \mathcal{L}_{X;Y}(E;F)$, $v \in \mathcal{L}(G;E)$ e $t \in \mathcal{L}(F;H)$. Como X e Y são classes de sequências linearmente estáveis, por definição os operadores induzidos

$$\widehat{v}\colon X(G) \longrightarrow X(E) \ \text{ e } \ \widehat{t}\colon Y(F) \longrightarrow Y(H)$$

estão bem definidos, são lineares e contínuos e, mais ainda,

$$\|\widehat{v}\|_{\mathcal{L}(X(G);X(E))} = \|v\| \ \text{ e } \ \|\widehat{t}\|_{\mathcal{L}(Y(F);Y(H))} = \|t\|.$$

Já vimos que $t \circ u \circ v \in \mathcal{L}_{X;Y}(G;H)$. Uma conta rotineira verifica que $\widehat{t \circ u \circ v} = \widehat{t} \circ \widehat{u} \circ \widehat{v}$, e daí

$$\begin{aligned} \|t \circ u \circ v\|_{X;Y} &= \|\widehat{t \circ u \circ v}\colon X(G) \longrightarrow Y(H)\|_{\mathcal{L}(X(G);Y(H))} \\ &= \|\widehat{t} \circ \widehat{u} \circ \widehat{v}\colon X(G) \longrightarrow Y(H)\|_{\mathcal{L}(X(G);Y(H))} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \|\widehat{t}\|_{\mathcal{L}(Y(F);Y(H))} \cdot \|\widehat{u}\|_{\mathcal{L}(X(E);Y(F))} \cdot \|\widehat{v}\|_{\mathcal{L}(X(G);X(E))} \\ &= \|t\| \cdot \|u\|_{X;Y} \cdot \|v\|. \end{aligned}$$

Portanto, $(\mathcal{L}_{X;Y}, \|\cdot\|_{X;Y})$ é um ideal de operadores normado.

Por fim, provemos a completude. Seja $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}_{X;Y}(E;F)$. Como os operadores u_k's são lineares e contínuos e as classes X e Y são linearmente estáveis, então os operadores induzidos $\widehat{u}_k\colon X(E) \longrightarrow Y(F)$ estão bem definidos e $\|\widehat{u}_k\| = \|u\|_{X;Y}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Por um lado, essa igualdade de normas nos diz que a sequência $(\widehat{u}_k)_{k=1}^{\infty}$ é de Cauchy em $\mathcal{L}(X(E), Y(F))$ e, portanto, convergente em $\mathcal{L}(X(E), Y(F))$. Seja $T \in \mathcal{L}(X(E), Y(F))$ tal que $\widehat{u}_k \longrightarrow T$ em $\mathcal{L}(X(E), Y(F))$. Por outro lado, da desigualdade $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E;F)} \leq \|\cdot\|_{X;Y}$ provada no Lema 4.2.7, segue que $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E;F)$. Seja $u \in \mathcal{L}(E;F)$ tal que $u_k \longrightarrow u$ em $\mathcal{L}(E;F)$. Como a classe de sequência $\ell_\infty(\cdot)$ é linearmente estável, os operadores induzidos

$$\widetilde{u}_k\colon \ell_\infty(E) \longrightarrow \ell_\infty(F), k \in \mathbb{N}, \quad \text{e} \quad \widetilde{u}\colon \ell_\infty(E) \longrightarrow \ell_\infty(F)$$

estão bem definidos, são lineares e contínuos. Vejamos que $\widetilde{u}_k \longrightarrow \widetilde{u}$ em $\mathcal{L}(\ell_\infty(E), \ell_\infty(F))$. De fato,

$$\|\widetilde{u}_k - \widetilde{u}\|_{\mathcal{L}(\ell_\infty(E),\ell_\infty(F))} = \|\widetilde{u_k - u}\|_{\mathcal{L}(\ell_\infty(E),\ell_\infty(F))} = \|u_k - u\|_{\mathcal{L}(E,F)} \longrightarrow 0.$$

Para cada $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$, é claro que $\widetilde{u}_k((x_j)_{j=1}^{\infty}) = \widehat{u}_k((x_j)_{j=1}^{\infty})$. Mais ainda:

- Como $\widetilde{u}_k \longrightarrow \widetilde{u}$ em $\mathcal{L}(\ell_\infty(E), \ell_\infty(F))$, tem-se $\widetilde{u}_k((x_j)_{j=1}^{\infty}) \longrightarrow \widetilde{u}((x_j)_{j=1}^{\infty})$ em $\ell_\infty(F)$.
- Como $\widehat{u}_k \longrightarrow T$ em $\mathcal{L}(X(E), Y(F))$, tem-se $\widehat{u}_k((x_j)_{j=1}^{\infty}) \longrightarrow T((x_j)_{j=1}^{\infty})$ em $Y(F)$ e como $Y(F) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_\infty(F)$, tem-se $\widehat{u}_k((x_j)_{j=1}^{\infty}) \longrightarrow T((x_j)_{j=1}^{\infty})$ em $\ell_\infty(F)$.

Assim, temos

$$\widetilde{u}_k((x_j)_{j=1}^{\infty}) \overset{\ell_\infty(F)}{\longrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{u}((x_j)_{j=1}^{\infty}) \\ T((x_j)_{j=1}^{\infty}) \end{array} \right.$$

Da unicidade do limite segue que

$$\widehat{u}((x_j)_{j=1}^{\infty}) = \widetilde{u}((x_j)_{j=1}^{\infty}) = T((x_j)_{j=1}^{\infty}) \in Y(F),$$

para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$. Portanto u é $(X;Y)$-somante. Seja $\widehat{u}\colon X(E) \longrightarrow Y(F)$ seu operador induzido. Por fim,

$$\|u_k - u\|_{X;Y} = \|\widehat{u}_k - \widehat{u}\|_{\mathcal{L}(X(E);Y(F))} = \|\widehat{u}_k - T\|_{\mathcal{L}(X(E);Y(F))} \longrightarrow 0, \qquad (4.10)$$

provando que $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ converge para u em $\mathcal{L}_{X;Y}(E;F)$. ■

4.3 Ideais com propriedades especiais

Muitos ideais de operadores satisfazem determinadas propriedades que facilitam seu estudo, por exemplo, ideais injetores, sobrejetores, regulares, simétricos, minimais e maximais (veja [10, 19]). Estudaremos nesta seção quando os ideais de operadores estudados na seção anterior, neste nosso contexto, são injetores, sobrejetores e regulares. Deve ser dito que o conteúdo desta seção é inédito.

De acordo com a terminologia usual da teoria de ideais de operadores, dizemos que um operador linear e contínuo $v \in \mathcal{L}(E, F)$ é dito uma *injeção métrica* se $\|v(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in E$. Note que, em particular, toda injeção métrica é injetora.

Por $J_F \colon F \longrightarrow F''$ denotamos o mergulho canônico de F no seu bidual F''.

Definição 4.3.1 Diz-se que um ideal de operadores $\mathcal{I}$ é:

(a) *Regular* se para quaisquer espaços de Banach E, F e qualquer $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tais que $J_F \circ u \in \mathcal{I}(E, F'')$, tem-se $u \in \mathcal{I}(E, F)$.

(b) *Injetor* se para quaisquer espaços de Banach E, F e G, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ e uma injeção métrica $v \in \mathcal{L}(F, G)$ tais que $v \circ u \in \mathcal{I}(E, G)$, tem-se $u \in \mathcal{I}(E, F)$.

(c) *Sobrejetor* se para quaisquer espaços de Banach E, F e G, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ sobrejetor e $v \in \mathcal{L}(F, G)$ tais que $v \circ u \in \mathcal{I}(E, G)$, tem-se $v \in \mathcal{I}(F, G)$.

Observe que, como J_E é uma injeção métrica, todo ideal injetor também é regular.

Em palavras, o ideal ser regular quer dizer que não importa se um operador toma valores em um espaço ou no seu bidual; ser injetor quer dizer que não importa se um operador toma valores em um espaço ou em um espaço maior que o contenha como subespaço normado; e ser sobrejetor quer dizer que não importa se o operador está definido em um espaço ou em um quociente deste espaço.

Definiremos agora as condições que as classes de sequências devem satisfazer para que os ideais de operadores gerados no capítulo anterior sejam regulares, injetores ou sobrejetores.

Definição 4.3.2 Dizemos que uma classe de sequências X é:

(a) *Regular*, se para todos espaços de Banach E e F e toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E, a seguinte implicação se verifica:

$$(J_E(x_j))_{j=1}^{\infty} \in X(E'') \Rightarrow (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E).$$

(b) *Injetora*, se para todos espaços de Banach E e F, toda injeção métrica $v \in \mathcal{L}(E, F)$ e toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E, a seguinte implicação se verifica:

$$(v(x_j))_{j=1}^{\infty} \in X(F) \Rightarrow (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E).$$

(c) *Sobrejetora*, se para todo operador linear $u \in \mathcal{L}(E, F)$ sobrejetor entre espaços de Banach E e F a seguinte implicação se verifica:

$$(y_j)_{j=1}^{\infty} \in X(F) \Rightarrow \text{ existe } (x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E) \text{ tal que } u(x_j) = y_j \text{ para todo } j.$$

Assim como antes, toda classe injetora é regular.

Verifiquemos que são verdadeiras as informações contidas na seguinte tabela.

Classe	Regular	Injetora	Sobrejetora
$c_0(\cdot)$	sim	sim	sim
$c_0^w(\cdot)$	sim	sim	não
$\ell_\infty(\cdot)$	sim	sim	sim
$\ell_p(\cdot)$	sim	sim	sim
$\ell_p^w(\cdot)$	sim	sim	não
$\ell_p\langle\cdot\rangle$	sim	não	?

O ponto de interrogação não significa, necessariamente, que seja algo desconhecido, significa apenas que não sabemos se a classe $\ell_p\langle\cdot\rangle$ é sobrejetora ou não.

Proposição 4.3.3 *A classe de sequências $c_0(\cdot)$ é injetora (logo regular) e sobrejetora.*

Demonstração. Sejam $v \in \mathcal{L}(E,F)$ uma injeção métrica e $(x_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência em E tal que $(v(x_j))_{j=1}^\infty \in c_0(F)$. Assim,

$$\|x_j\| = \|v(x_j)\| \longrightarrow 0,$$

o que prova que $(x_j)_{j=1}^\infty \in c_0(E)$ e, consequentemente, $c_0(\cdot)$ é injetora.

Sejam agora $u \in \mathcal{L}(E,F)$ um operador sobrejetor e $(y_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência em F tal que $(y_j)_{j=1}^\infty \in c_0(F)$. Pelo Teorema 1.0.10 existe $\lambda > 0$ tal que $u\,(B_E)) \supseteq B_F(\lambda)$, onde $B_F(\lambda)$ é a bola em F centrada na origem e raio λ. Isto implica que para todo $y \in F$ com $\|y\| < \lambda$ que existe $x \in E$ tal que $\|x\| < 1$ e que $u(x) = y$. Note que, para qualquer $j \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \frac{\lambda y_j}{2\|y_j\|} \right\| < \lambda,$$

logo, pela observação acima existe $z_j \in E$, com $\|z_j\| < 1$, tal que

$$u(z_j) = \frac{\lambda y_j}{2\|y_j\|}.$$

Isto implica que

$$u\left(\frac{2\|y_j\|}{\lambda} z_j\right) = y_j.$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$ tome $x_j = \dfrac{2\|y_j\|}{\lambda} z_j \in E$. Como $\|y_j\| \longrightarrow 0$ e $\|z_j\| \leq 1$ para todo j, segue $\|x_j\| \longrightarrow 0$. Como $u(x_j) = y_j$ para todo j, concluímos que $c_0(\cdot)$ é também sobrejetora. ■

Proposição 4.3.4 *A classe de sequências $\ell_\infty(\cdot)$ é injetora (logo regular) e sobrejetora.*

Demonstração. Sejam $v \in \mathcal{L}(E,F)$ uma injeção métrica e $(x_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência em E tal que $(v(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(F)$, isto é, $(\|v(x_j)\|)_{j=1}^\infty$ é limitada. Da igualdade $\|v(x_j)\| = \|x_j\|$ segue imediatamente que $(\|x_j\|)_{j=1}^\infty$ também é limitada. Assim, $\ell_\infty(\cdot)$ é injetora.

Sejam agora $u \in \mathcal{L}(E, F)$ um operador sobrejetor e $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência em F tal que $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}(F)$. Repetindo o mesmo argumento da demonstração da Proposição 4.3.3 existe uma sequência $(z_j)_{j=1}^{\infty} \in E$ tal que $\|z_j\| < 1$ e

$$u(z_j) = \frac{\lambda y_j}{2\|y_j\|},$$

onde $\lambda > 0$ é determinado pelo Teorema 1.0.10. Tomando-se $x_j = \dfrac{2\|y_j\|}{\lambda} z_j$ temos que $u(x_j) = y_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. É claro que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}(E)$. Portanto $\ell_{\infty}(\cdot)$ é também sobrejetora. ■

Proposição 4.3.5 *A classe de sequências $\ell_p(\cdot)$, $1 \leq p < \infty$, é injetora (logo regular).*

Demonstração. Sejam $v \in \mathcal{L}(E, F)$ uma injeção métrica e $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência em E tal que $(v(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F)$. Então

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p \;=\; \sum_{j=1}^{\infty} \|v(x_j)\|^p < \infty$$

Logo, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$, provando que $\ell_p(\cdot)$ é injetora. ■

Proposição 4.3.6 *A classes de sequências $c_0^w(\cdot)$ e $\ell_p^w(\cdot)$, $1 \leq p < \infty$, são injetoras, logo regulares.*

Demonstração. Seja $v \in \mathcal{L}(E, F)$ uma injeção métrica. Então o operador

$$V \colon E \longrightarrow v(E) \ , \ V(x) = v(x),$$

é um isomorfismo isométrico, em particular $v(E)$ é um espaço de Banach e existe o operador inverso $V^{-1} \colon v(E) \longrightarrow E$. Suponha que $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ seja uma sequência em E tal que $(v(x_j))_{j=1}^{\infty} \in c_0^w(F)$. Dado $\varphi \in E'$, $\varphi \circ V^{-1} \in v(E)'$, e pelo Teorema de Hahn-Banach existe $\psi \in F'$ que estende $\varphi \circ V^{-1}$. Como $(v(x_j))_{j=1}^{\infty} \in c_0^w(F)$, temos

$$\varphi(x_j) = \varphi(V^{-1} \circ v(x_j)) = \varphi \circ V^{-1}(v(x_j)) = \psi\,(v(x_j)) \longrightarrow 0,$$

provando que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0^w(E)$. Segue que $c_0^w(\cdot)$ é injetora.

Suponha agora que $(v(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(F)$. Dado $\varphi \in E'$, procedendo como antes, temos $\psi \in F'$ que estende $\varphi \circ V^{-1}$ de $v(E)$ para F. Como $(v(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(F)$ e sabendo que $\varphi(x_j) = \psi(v(x_j))$ (provado acima), temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p = \sum_{j=1}^{\infty} |\psi(v(x_j)|^p < \infty,$$

provando que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$. Segue que $\ell_p^w(\cdot)$ é injetora. ■

Proposição 4.3.7 *A classe $\ell_p\langle\cdot\rangle$ é regular.*

Demonstração. Sejam E um espaço de Banach e $(x_j)_{j=1}^\infty$ uma sequência em E tal que $(J_E(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_p\langle E''\rangle$. Dada $(x_j^*)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E')}$ queremos mostrar que $(x_j^*(x_j))_{j=1}^\infty \in \ell_1$, isto é, $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_p\langle E\rangle$. Sendo $(x_j^*)_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E')}$, tem-se

$$\|(x_j^*)_{j=1}^\infty\|_{w,q} = \sup_{x^{**}\in B_{E''}} \left(\sum_{j=1}^\infty |x^{**}(x_j^*)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq 1.$$

Como, para qualquer $x \in B_E$ tem-se $J_E(x) \in B_{E''}$, concluímos que

$$\left(\sum_{j=1}^\infty |J_E(x)(x_j^*)|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|(x_j^*)_{j=1}^\infty\|_{w,q} \leq 1 \text{ para todo } x \in B_E,$$

ou seja,

$$\sum_{j=1}^\infty |J_E(x)(x_j^*)|^q = \sum_{j=1}^\infty |x_j^*(x)|^q \leq 1 \text{ para todo } x \in B_E. \tag{4.11}$$

Agora, defina $x_j^{***} := J_{E'}(x_j^*) \in E'''$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Vejamos que $(x_j^{***})_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E''')}$. Para isso seja $x^{**} \in B_{E''}$ dado. Pelo Teorema de Goldstine[1] existe uma rede $(x_\lambda)_\lambda$ em B_E tal que $J_E(x_\lambda) \xrightarrow{w^*} x^{**}$, isto é,

$$x^*(x_\lambda) = J_E(x_\lambda)(x^*) \xrightarrow{\lambda} x^{**}(x^*) \text{ para todo } x^* \in E'. \tag{4.12}$$

De (4.11) segue que $\displaystyle\sum_{j=1}^\infty |x_j^*(x_\lambda)|^q \leq 1$ para todo λ, em particular

$$\sum_{j=1}^k |x_j^*(x_\lambda)|^q \leq 1 \text{ para todos } k \in \mathbb{N} \text{ e } \lambda.$$

Usando (4.12) concluímos que

$$\sum_{j=1}^k |x_j^*(x_\lambda)|^q \xrightarrow{\lambda} \sum_{j=1}^k |x^{**}(x_j^*)|^q \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^\infty |x_j^{***}(x^{**})|^q &= \sum_{j=1}^\infty |J_{E'}(x_j^*)(x^{**})|^q = \sum_{j=1}^\infty |x^{**}(x_j^*)|^q \\ &= \sup_k \sum_{j=1}^k |x^{**}(x_j^*)|^q = \sup_k \lim_\lambda \sum_{j=1}^k |x_j^*(x_\lambda)|^q \leq 1,\end{aligned}$$

para todo $x^{**} \in B_{E''}$. Isso prova que $(x_j^{***})_{j=1}^\infty \in B_{\ell_q^w(E''')}$. Segue que

$$(x_j^*(x_j))_{j=1}^\infty \quad = \quad (J_E(x_j)(x_j^*))_{j=1}^\infty$$

[1] Veja [6, Teorema 6.4.4].

$$
\begin{aligned}
&= ([J_{E'}(x_j^*)](J_E(x_j)))_{j=1}^{\infty} \\
&= (x_j^{***}(J_E(x_j)))_{j=1}^{\infty} \in \ell_1 \text{ para toda } (x_j^*)_{j=1}^{\infty} \in B_{\ell_q^w(E')},
\end{aligned}
$$

provando que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p\langle E\rangle$. ■

Exemplo 4.3.8 Vejamos que a classe $c_0^w(\cdot)$ das sequências fracamente nulas não é sobrejetora. Pelo Teorema 1.0.24 existe um operador sobrejetor $u\colon \ell_1 \longrightarrow \ell_2$. Vejamos que $(e_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0^w(\ell_2)$: dado $\varphi \in \ell_2'$, como ℓ_2' é isomorfo isometricamente a ℓ_2, podemos tomar $(b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2$ tal que

$$
\varphi\left((a_j)_{j=1}^{\infty}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j \text{ para toda } (a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2.
$$

Note que $\sum\limits_{j=1}^{\infty} |b_j|^2 < \infty$, portanto $b_j \longrightarrow 0$. Então

$$
\varphi(e_j) = \varphi((0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)) = b_j \longrightarrow 0,
$$

provando que $(e_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0^w(\ell_2)$. Suponha que exista $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0^w(\ell_1)$ tal que $u(y_j) = e_j$ para todo j. Neste caso, $y_j \xrightarrow{w} 0$ em ℓ_1. Pelo Teorema de Schur [6, Teorema 6.2.12] temos $y_j \longrightarrow 0$ em ℓ_1, o que, pela continuidade de u nos dá

$$
e_j = u(y_j) \longrightarrow 0 \text{ em } \ell_2.
$$

Isso é um absurdo, pois $\|e_j\|_{\ell_2} = 1$ para todo j. Segue que $c_0^w(\cdot)$ não é sobrejetora.

No próximo exemplo vemos que a classe de sequências $\ell_p^w(\cdot)$ não é sobrejetora para $p > 1$. Para o caso em que $p = 1$ não sabemos dizer.

Exemplo 4.3.9 Vejamos agora que a classe $\ell_p^w(\cdot)$, $p > 1$, não é sobrejetora. Chamando de q o conjugado de p, como $q < \infty$, ℓ_q é separável e pelo Teorema 1.0.24 existe um operador $u\colon \ell_1 \longrightarrow \ell_q$ sobrejetor. Pelo Exemplo 2.4.6 sabemos que $(e_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(\ell_q)$. Suponha que exista $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(\ell_1)$ tal que $u(y_j) = e_j$ para todo j. Como $\ell_p^w(\ell_1) \subseteq c_0^w(\ell_1)$, tem-se $y_j \xrightarrow{w} 0$ em ℓ_1. Pelo Teorema de Schur [6, Teorema 6.2.12] temos $y_j \longrightarrow 0$ em ℓ_1, o que, pela continuidade de u, nos dá

$$
e_j = u(y_j) \longrightarrow 0 \text{ em } \ell_q.
$$

Isso é um absurdo, pois $\|e_j\|_{\ell_q} = 1$ para todo j. Segue que $\ell_p^w(\cdot)$ não é sobrejetora.

Provaremos que a classe $\ell_p\langle\cdot\rangle$ não é injetora na Proposição 4.4.17.

Como todo o conteúdo desta seção, o próximo resultado não se encontra na literatura; e será usado na seção seguinte.

Teorema 4.3.10 *Sejam X e Y classes de sequências nas condições do Teorema 4.2.8.*

(a) *Se Y é regular, então o ideal de operadores $\mathcal{L}_{X;Y}$ é regular.*

(b) *Se Y é injetora, então o ideal de operadores $\mathcal{L}_{X;Y}$ é injetor.*

(c) *Se X é sobrejetora, então o ideal de operadores $\mathcal{L}_{X;Y}$ é sobrejetor.*

Demonstração.

(a) Sejam $E, F \in \mathrm{BAN}$ e $u \in \mathcal{L}(E,F)$ tal que $J_F \circ u \in \mathcal{L}_{X;Y}$. Então dada $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$, tem-se
$$(J_F(u(x_j)))_{j=1}^{\infty} \in Y(F'').$$
Como Y é regular, segue que $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in Y(F)$, ou seja, $u \in \mathcal{L}_{X;Y}$ e, portanto, $u \in \mathcal{L}_{X;Y}$ é regular.

(b) Sejam $E, F, G \in \mathrm{BAN}$, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ e uma injeção métrica $v \in \mathcal{L}(F,G)$ tais que $v \circ u \in \mathcal{L}_{X;Y}(E,G)$. Dada $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$, tem-se
$$(v(u(x_j)))_{j=1}^{\infty} \in Y(G).$$
Como Y é injetora, segue que $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in Y(F)$ e, portanto, $\mathcal{L}_{X;Y}$ é injetor.

(c) Sejam $E, F, G \in \mathrm{BAN}$, $u \in \mathcal{L}(E,F)$ sobrejetor e $v \in \mathcal{L}(F,G)$ tais que $v \circ u \in \mathcal{L}_{X,Y}$. Dada $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in X(F)$, como X é sobrejetora, tem-se que existe uma sequência $(z_j)_{j=1}^{\infty} \in X(E)$ tal que $u(z_j) = x_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo
$$(v(x_j))_{j=1}^{\infty} = (v \circ u(z_j))_{j=1}^{\infty} \in Y(G),$$

e portanto $\mathcal{L}_{X,Y}$ é sobrejetor. ■

4.4 Aplicações

Veremos nesta seção que vários ideais de operadores extensivamente estudados na literatura são casos particulares dos ideais que estudados na Seção 4.2. Mais ainda, que caracterizações e propriedades especiais destes operadores seguem imediatamente do que fizemos nas Seções 4.2 e 4.3.

4.4.1 Operadores absolutamente (q,p)-somantes

Definição 4.4.1 Sejam $1 \leq p \leq q < \infty$. Um operador linear contínuo $u : E \longrightarrow F$ é dito *absolutamente (q,p)-somante* se existe uma constante $c > 0$ tal que
$$\left(\sum_{j=1}^{k} \|u(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{k} |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$
para quaisquer $k \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_k \in E$. Neste caso definimos a norma (q,p)-somante de u por
$$\pi_{q,p}(u) = \inf\{C > 0 : C \text{ satisfaz a desigualdade acima}\}.$$
Denotamos por $\Pi_{q,p}(E,F)$ a classe de todos os operadores absolutamente (q,p)-somantes entre os espaços de Banach E e F. Quando $p = q$ dizemos simplesmente que o operador é *absolutamente p-somante* e escrevemos $\Pi_p(E,F)$ no lugar de $\Pi_{p,p}(E,F)$.

A classe Π_p dos operadores absolutamente p-somantes é um dos ideais de operadores mais estudados, em particular o livro [12] é todo dedicado ao estudos desses operadores e de suas aplicações.

Como as classes de sequências $\ell_q(\cdot)$ e $\ell_p^w(\cdot)$ são linearmente estáveis e finitamente determinadas e também como $\ell_p^u(\cdot) < \ell_p^w(\cdot)$, as seguintes caracterizações seguem das Proposições 4.2.1 e 4.2.4.

Proposição 4.4.2 *Dado um operador $u \in \mathcal{L}(E,F)$ entre espaços de Banach, as seguintes afirmações são equivalentes.*

(a) $u \in \Pi_{q,p}(E,F)$.

(b) *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|u(x_j)\|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq C \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.13}$$

para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$.

(c) $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_q(F)$ *para toda sequência* $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$.

(d) $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_q(F)$ *para toda sequência* $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E)$.

(e) *O operador linear induzido*

$$\widehat{u} \colon \ell_p^w(E) \longrightarrow \ell_q(F)$$

está bem definido e é contínuo.

(f) *O operador linear induzido*

$$\widetilde{u} \colon \ell_p^u(E) \longrightarrow \ell_q(F)$$

está bem definido e é contínuo.

(g) u *é* $(\ell_p^w(\cdot), \ell_q(\cdot))$*-somante, isto é,* $u \in \mathcal{L}_{\ell_p^w(\cdot);\ell_q(\cdot)}$.

(h) u *é* $(\ell_p^u(\cdot), \ell_q(\cdot))$*-somante, isto é,* $u \in \mathcal{L}_{\ell_p^u(\cdot);\ell_q(\cdot)}$.

E mais ainda,

$$\begin{aligned}\pi_{q,p}(u) &= \inf\{C : \text{ (4.13) } \textit{é satisfeita } \} = \|\widehat{u}\|_{\mathcal{L}(\ell_p^w(E),\ell_q(F))} \\ &= \|\widetilde{u}\|_{\mathcal{L}(\ell_p^w(E),\ell_q(F))} = \|u\|_{\ell_p^w(\cdot),\ell_q(\cdot)} = \|u\|_{\ell_p^u(\cdot),\ell_q(\cdot)}.\end{aligned}$$

Proposição 4.4.3 *A classe $\Pi_{q,p}$ de todos os operadores (q,p)-somantes é um ideal de Banach de operadores injetor.*

Demonstração. Na Proposição 3.2.6 e no exemplo 3.2.4 vimos que as classes de sequências $\ell_p^w(\cdot)$ e $\ell_q(\cdot)$ são linearmente estáveis. Pelo Teorema 2.4.13 temos que $\ell_q^w(\mathbb{K}) = \ell_q(\mathbb{K})$. Logo, sendo $1 \leq p \leq q < \infty$, é claro que $\ell_p^w(\mathbb{K}) \overset{1}{\hookrightarrow} \ell_q(\mathbb{K})$. Combinando o Teorema 4.2.8 com a proposição acima segue que $\Pi_{q,p}$ é um ideal de Banach de operadores. Pela Proposição 4.3.5 sabemos que $\ell_q(\cdot)$ é uma classe de sequência injetora, logo, pelo Teorema 4.3.10 segue que $\Pi_{q,p}$ é um ideal injetor. ∎

4.4.2 Operadores completamente contínuos e p-convergentes

Os operadores completamente contínuos são fartamente estudados na literatura, veja por exemplo [11] e [12], e os operadores p-convergentes foram introduzidos por Castillo em [8].

Definição 4.4.4 Sejam E e F espaços normados. Um operador linear e contínuo $u\colon E \longrightarrow F$ é dito:
• *Completamente contínuo* se para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E tal que $x_j \xrightarrow{w} x$ em E, é verdade que $u(x_j) \longrightarrow u(x)$ em F. Denotamos o conjunto de todos operadores lineares contínuos de E em F que são completamente contínuos por $\mathcal{C}(E, F)$.
• *p-convergente*, $1 \leq p < \infty$, se $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in c_0(F)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$. Denotamos por $\mathcal{C}_p(E, F)$ o conjunto de todos os operadores lineares e contínuos entre E e F que são p-convergentes.

Vejamos que essas classes são casos particulares da classes que estudamos abstratamente nos capítulos anteriores.

Proposição 4.4.5 *Sejam $X = c_0^w(\cdot)$, $Y = c_0(\cdot)$ e $Z = \ell_p^w(\cdot)$. Então $\mathcal{C} = \mathcal{L}_{X;Y}$ e $\mathcal{C}_p = \mathcal{L}_{Z;Y}$ e portanto ambas as classes são ideais de operadores.*

Demonstração. Suponha que u seja $(X;Y)$-somante. Dada uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E tal que $x_j \xrightarrow{w} x$ em E, tem-se que $(x_j - x)_{j=1}^{\infty} \in c_0^w(E)$. Como u é $(X;Y)$-somante, temos

$$(u(x_j) - u(x))_{j=1}^{\infty} = (u(x_j - x))_{j=1}^{\infty} \in c_0(F),$$

isto é, $\|u(x_j) - u(x)\|_{c_0(F)} \longrightarrow 0$. Portanto, $u(x_j) \longrightarrow u(x)$ em F e, consequentemente, u é completamente contínuo. Reciprocamente, seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0^w(E)$, isto é, $x_j \xrightarrow{w} 0$ em E. Como u é completamente contínuo tem-se $u(x_j) \longrightarrow 0 = u(0)$ em F. Portanto, $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in c_0(F)$, isto é, u é um operador $(X;Y)$-somante.

A outra igualdade decorre imediatamente das definições e a última afirmação do Teorema 4.2.8. ■

Proposição 4.4.6 *Sejam E e F espaços de Banach e $1 \leq p \leq q < \infty$.*

(a) $\mathcal{C}(E, F) \subseteq \mathcal{C}_p(E, F)$.

(b) $\mathcal{C}_p(E, F) \subseteq \mathcal{C}_q(E, F)$.

(c) $\mathcal{C}(E, F)$ *e* $\mathcal{C}_p(E, F)$ *são subespaços fechados de* $\mathcal{L}(E, F)$.

Demonstração.

(a) Sejam $u \in \mathcal{C}(E, F)$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$. Como $\ell_p^w(E) \subseteq c_0^w(E)$ temos $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0^w(E)$ e, como $u \in \mathcal{C}(E, F)$, segue, pela Proposição 4.4.5, que $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in c_0(F)$.

(b) Sejam $u \in \mathcal{C}_p(E, F)$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$. Como $\ell_q^w(E) \subseteq \ell_p^w(E)$ temos $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$ e, novamente pela Proposição 4.4.5, segue que $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in c_0(F)$. Logo, $u \in \mathcal{L}_{\ell_q^w(\cdot), c_0(\cdot)}(E, F)$, isto é, $u \in \mathcal{C}_q(E, F)$.

(c) Seja $(u_k)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathcal{C}_p(E,F)$ tal que $u_k \longrightarrow u$ em $\mathcal{L}(E,F)$. Vejamos que $u \in \mathcal{C}_p(E,F)$. Para isso, considere $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E) \subseteq \ell_\infty(E)$ e $\varepsilon > 0$. Do fato de que $u_k \longrightarrow u$ em $\mathcal{L}(E,F)$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_k - u\| < \frac{\varepsilon}{2\sup_j \|x_j\|} \text{ para todo } k \geq k_0.$$

Como $u_{k_0} \in \mathcal{C}_p(E,F)$, existe $N = N(k_0, \varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\|u_{k_0}(x_j)\| < \frac{\varepsilon}{2}$ para todo $j \geq N$. Assim, se $j \geq N$, então

$$\begin{aligned}
\|u(x_j)\| &= \|u(x_j) - u_{k_0}(x_j) + u_{k_0}(x_j)\| \\
&\leq \|u_{k_0}(x_j) - u(x_j)\| + \|u_{k_0}(x_j)\| \\
&= \|(u_{k_0} - u)(x_j)\| + \|u_{k_0}(x_j)\| \\
&\leq \|u_{k_0} - u\| \cdot \|x_j\| + \|u_{k_0}(x_j)\| \\
&\leq \|u_{k_0} - u\| \cdot \sup_j \|x_j\| + \|u_{k_0}(x_j)\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2\sup_j \|x_j\|} \cdot \sup_j \|x_j\| + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

o que prova que $u(x_j) \longrightarrow 0$ em F.

De maneira análoga prova-se que $\mathcal{C}(E,F)$ é fechado em $\mathcal{L}(E,F)$.

■

Quanto às propriedades especiais, temos:

Proposição 4.4.7 *A classes $\mathcal{C}$ de todos os operadores completamente contínuos e $\mathcal{C}_p$ de todos os operadores p-convergentes são ideais fechados injetores.*

Demonstração. Que são ideais fechados já vimos nos resultados anteriores desta seção. Pela Proposição 4.3.3 sabemos que $c_0(\cdot)$ é uma classe de sequências injetora. Combinando o Teorema 4.3.10 com a Proposição 4.4.5 concluímos que os ideais $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_p$ são injetores.

■

4.4.3 Operadores incondicionalmente (p,r)-somantes

Os operadores incondicionalmente (p,r)-somantes foram estudados por Junek e Matos em [14].

Definição 4.4.8 Sejam $1 \leq r \leq p < \infty$. Um operador $u \in \mathcal{L}(E,F)$ é dito *incondicionalmente (p,r)-somante* se u transforma sequências fracamente r-somáveis em E em sequências incondicionalmente p-somáveis em F, isto é, se $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(F)$ sempre que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_r^w(E)$. O conjunto de todos os operadores lineares contínuos de E em F que são incondicionalmente (p,r)-somantes é denotado por $\mathcal{U}_{(p,r)}(E,F)$.

Como as classes de sequências $\ell_p^w(\cdot)$ e $\ell_p^u(\cdot)$ cumprem as condições do Teorema 4.2.8 e $\mathcal{U}_{(p,r)} = \mathcal{L}_{\ell_p^w(\cdot);\ell_p^u(\cdot)}$, temos a

Proposição 4.4.9 *A classe $\mathcal{U}_{(p,r)}$ dos operadores incondicionalmente (p,r)-somantes é um ideal de Banach de operadores.*

Por comodidade, quando $p = r$ escrevamos $\mathcal{U}_p(E,F)$ no lugar de $\mathcal{U}_{(p,p)}(E,F)$. Vamos mostrar que $\mathcal{U}_1 = \mathcal{C}_1$.

Teorema 4.4.10 *Sejam E e F espaços normados. Então $\mathcal{U}_1(E,F) = \mathcal{C}_1(E,F)$.*

Demonstração. Se $u \in \mathcal{U}_1(E,F)$, então dada $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1^w(E)$ tem-se $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_1^u(F)$. Mas na Proposição 2.6.6 provamos que $\ell_1^u(F) \subseteq c_0(F)$. Logo, $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in c_0(F)$ para qualquer $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1^w(E)$, isto é, $u \in \mathcal{C}_1(E,F)$.

Suponha, por absurdo, que exista $u \in \mathcal{C}_1(E,F)$ tal que $u \notin \mathcal{U}_1(E,F)$, isto é, existe uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1^w(E)$ tal que $(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \notin \ell_1^u(F)$. Então a série $\sum\limits_{j=1}^{\infty} u(x_j)$ não é convergente. Pelo critério de Cauchy para séries, existem $\varepsilon > 0$ e duas sequências de números naturais $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ e $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ satisfazendo $m_1 < n_1 < m_2 < n_2 < m_3 < n_3 < \cdots$ tais que

$$\left\| \sum_{j=m_k}^{n_k} u(x_j) \right\| \geq \varepsilon \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Defina $z_k = \sum\limits_{j=m_k}^{n_k} x_j$. De $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1^w(E)$ segue que $(z_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1^w(E)$. De fato, basta observar que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(z_k)| &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \varphi\left(\sum_{j=m_k}^{n_k} x_j \right) \right| \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{j=m_k}^{n_k} \varphi(x_j) \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=m_k}^{n_k} |\varphi(x_j)| < \infty \end{aligned}$$

em que usamos o fato de $(x_{m_1}, x_{n_1}, x_{m_2}, x_{n_2}, x_{m_3}, x_{n_3}, \ldots)$ ser uma subsequência de $(x_j)_{j=1}^{\infty}$. Finalmente, temos as seguintes conclusões:

- Como $u \in \mathcal{C}_1(E,F)$ e $(z_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1^w(E)$, temos $\lim u(z_k) = 0$.
- $\lim\limits_k u(z_k) = \lim\limits_k u\left(\sum\limits_{j=m_k}^{n_k} x_j \right) = \lim\limits_k \sum\limits_{j=m_k}^{n_k} u(x_j) \neq 0.$

Essa contradição completa a demonstração. ■

Em [14, Proposition 1.6], a proposição acima é enunciada para todo $p \geq 1$. Entretanto, acreditamos que a demonstração de tal fato está incompleta no caso em $p > 1$, e foi por isso que provamos acima apenas o caso $p = 1$. O ponto da demonstração de [14, Proposition 1.6] no caso $p > 1$ que acreditamos estar incorreto, é o seguinte:

"... como $(e_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(\ell_{p'})$, então a sequência básica de blocos $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ relativa à base de Schauder $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ de $\ell_{p'}$ também pertence à $\ell_p^w(\ell_{p'})$".

Acreditamos que essa implicação é falsa e, para justificar isso apresentaremos um contra-exemplo. Neste contra contra-exemplo, os coeficientes da sequência de blocos básica são limitados e nem com essa hipótese adicional a implicação é verdadeira. Vejamos a definição:

Definição 4.4.11 Sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ uma base de Schauder de um espaço de Banach E e $(k_j)_{j=0}^{\infty}$ uma sequência estritamente crescente de inteiros positivos, com $k_0 = 0$. Uma sequência de vetores não nulos $(y_j)_{j=1}^{\infty}$ em E definida por

$$y_j = \sum_{i=k_{j-1}+1}^{k_j} b_i x_i$$

em que cada $b_i \in \mathbb{K}$, é chamada de *sequências de blocos básica relativa a* $(x_j)_{j=1}^{\infty}$. Os escalares $(b_j)_{j=1}^{\infty}$ são o que estamos chamando de *coeficientes*.

Exemplo 4.4.12 Vamos dar um contra-exemplo para a seguinte afirmação:

" Se $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência básica de blocos relativa à base de Schauder $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ de $\ell_{p'}$ com coeficientes limitados, então $(z_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_p^w(\ell_{p'})$."

Como queremos um contra-exemplo, basta considar o caso $p = 2$. Considere a sequência $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ definida por

$$z_k = \sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} e_j.$$

Então $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência básica de blocos relativa à $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ com todos coeficientes iguais a 1. Vejamos que $(z_k)_{k=1}^{\infty} \notin \ell_2^w(\ell_2)$. Para tal, considere o funcional

$$\varphi = \left(\frac{1}{j}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2' = \ell_2.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |\varphi(z_k)|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \left| \left(\frac{1}{j}\right)_{j=1}^{\infty} (z_k) \right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{j} \right)^2 \\
&\geq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=2^{k-1}}^{2^k-1} \frac{1}{2^k-1} \right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2^k - 2^{k-1}}{2^k - 1} \right)^2 = +\infty,
\end{aligned}$$

pois

$$\lim_{k\to+\infty} \left(\frac{2^k - 2^{k-1}}{2^k - 1} \right)^2 = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2^k}} \right)^2 = \frac{1}{2^2} \neq 0.$$

Isso prova que $(z_k)_{k=1}^{\infty} \notin \ell_2^w(\ell_2)$ e portanto a implicação usada na demonstração de [14, Proposition 1.6] é falsa. Tanto quanto sabemos, esta é a primeira vez em que este problema na demonstração de [14, Proposition 1.6] é apontado.

4.4.4 Operadores Cohen fortemente somantes

Os operadores Cohen fortemente p-somantes foram introduzidos por Cohen em [9] para descrever os operadores que têm adjuntos absolutamente p'-somantes (veja parte final desta seção). Para o desenvolvimento da teoria desses operadores, veja [7] e as referências contidas nesta tese.

Definição 4.4.13 Seja $1 \leq p < \infty$. Um operador $u \in \mathcal{L}(E, F)$ é *Cohen fortemente p-somante* se

$$(u(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p\langle F \rangle \text{ sempre que } (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E).$$

Denotamos por $\mathcal{D}_p(E, F)$ a classe de todos os operadores Cohen fortemente p-somante entre os espaços de Banach E e F. Pelo item (b) da Proposição 2.7.9 tem-se $\ell_1\langle E \rangle = \ell_1(E)$. Logo, $\mathcal{D}_1(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$. Por isso, apenas o caso $p > 1$ é considerado.

Proposição 4.4.14 *Para um operador $u \in \mathcal{L}(E, F)$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *u é Cohen fortemente p-somante.*

(b) *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|(u(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_{\ell_p\langle F \rangle} \leq C \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p, \tag{4.14}$$

para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$.

(c) *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|(u(x_j))_{j=1}^{k}\|_{\ell_p\langle F \rangle} \leq C \|(x_j)_{j=1}^{k}\|_p, \tag{4.15}$$

para todos $k \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_k \in E$.

(d) *O operador linear induzido*

$$\widehat{u} : \ell_p(E) \longrightarrow \ell_p\langle F \rangle$$

está bem definido e é contínuo.

(e) *u é $(\ell_p(\cdot), \ell_p\langle \cdot \rangle)$-somante.*

(f) *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi_j(u(x_j))| \leq C \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p \cdot \|(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p'}, \tag{4.16}$$

para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$.

(g) *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\sum_{j=1}^{k} |\varphi_j(u(x_j))| \leq C \|(x_j)_{j=1}^{k}\|_p \|(\varphi_j)_{j=1}^{k}\|_{w,p'}, \tag{4.17}$$

para todos $k \in \mathbb{N}$, $x_j \in E$, $\varphi_j \in F'$, $j = 1, \ldots, k$.

Mais ainda, $\mathcal{D}_p(E, F)$ é um espaço normado com a norma

$$\begin{aligned} d_p(u) := \|\widehat{u}\| &= \inf\{(4.14) \textit{ é satisfeita}\} = \inf\{(4.15) \textit{ é satisfeita}\} \\ &= \inf\{(4.16) \textit{ é satisfeita}\} = \inf\{(4.17) \textit{ é satisfeita}\}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Demonstração. Como as classes de sequências $\ell_p(\cdot)$ e $\ell_p\langle\cdot\rangle$ são linearmente estáveis e finitamente determinadas, as equivalência de (a) até (e) seguem das Proposições 4.2.1 e 4.2.4. Para as condições (e) e (f), veja [7]. ■

Proposição 4.4.15 *A classe de todos os operadores Cohen formente p-somante $\mathcal{D}_p$ é um ideal de operadores Banach com a norma definida em (4.18). Mais ainda, o ideal $\mathcal{D}_p$ é regular e sobrejetor.*

Demonstração. Como $\ell_p(\cdot)$ e $\ell_p\langle\cdot\rangle$ são linearmente estáveis, combinando o Teorema 4.2.8 com a proposição acima segue que $\mathcal{D}_p$ é um ideal de Banach de operadores. Pela Proposição 4.3.7 sabemos que $\ell_q\langle\cdot\rangle$ é uma classe de sequências regular, logo, pelo Teorema 4.3.10 segue que o ideal $\mathcal{D}_p$ é regular. ■

Justificaremos em seguida a afirmação, feita na seção anterior, de que a classe $\ell_p\langle\cdot\rangle$ não é injetora. Para isso relembremos a definição do dual de um ideal de operadores $\mathcal{I}$, que por sua vez também é um ideal de operadores:

$$\mathcal{I}^{dual}(E,F) = \{u \in \mathcal{L}(E,F) : u' \in \mathcal{I}(F',E')\},$$

onde u' é o adjunto do operador u. Cohen [9] provou que

$$\Pi_p^{dual} = \mathcal{D}_{p'} \;\text{ e }\; \mathcal{D}_p^{dual} = \Pi_{p'},$$

em que $p > 1$ e p' é o conjugado de p.

Proposição 4.4.16 *O dual de um ideal de operadores injetor é sobrejetor.*

Demonstração. Veja [19, Proposition 4.7.18]. ■

Proposição 4.4.17 *A classe $\ell_p\langle\cdot\rangle$ não é injetora.*

Demonstração. Suponha que $\ell_p\langle\cdot\rangle$ seja injetora. Pelo Teorema 4.3.10, neste caso o ideal $\mathcal{D}_p = \mathcal{L}_{\ell_p(\cdot),\ell_p\langle\cdot\rangle}$ seria injetor. Daí, por 4.4.16, o ideal $\mathcal{D}_p^{dual} = \Pi_{p'}$ seria sobrejetor. Como isso não acontece (veja, por exemplo, [19, Proposition 8.5.8]), segue que a classe $\ell_p\langle\cdot\rangle$ não é injetora. ■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] F. Albiac e N.J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Springer, 2006.

[2] S. Banach, *Theory of linear operations*, Vol. 38, Elsevier, 1987.

[3] R.G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure.*, Jhon Wiley and Sons, 1995.

[4] G. Botelho e J.R. Campos, *On the transformation of vector-valued sequences by multilinear operators*, preprint disponível em arXiv:1410.4261, 2014.

[5] G. Botelho, J.R. Campos e J. Santos, *Operator ideals related to absolutely summing and Cohen strongly summing operators*, preprint disponível em arXiv:1512.04713, 2015.

[6] G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira, *Fundamentos de Análise Funcional*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[7] J.R. Campos, *Contribuições à teoria dos operadores Cohen fortemente somantes*, Tese de Doutorado, João Pessoa, Paraíba, 2013.

[8] J.M.F. Castillo, *On Banach spaces X such that $\mathcal{L}(L_p, X) = \mathcal{K}(L_p, X)$*, Extracta Mathematicae **10** (1995), 27-36.

[9] J.S. Cohen, *Absolutely p-summing, p-nuclear operators and their conjugates*, Mathematische Annalen, Vol. 201, 1973, 177–200.

[10] A. Defant e K. Floret, *Tensor Norms and Operator Ideals*, Vol. 176, Elsevier, 1992.

[11] J. Diestel, H. Jarchow e A. Pietsch, *Operator ideals*, Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. 1, 437-496, North-Holland, Amsterdam, 2001.

[12] J. Diestel, H. Jarchow e A. Tonge, *Absolutely Summing Operators*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.

[13] G.B. Folland, *Real Analys, Modern Techniques and Their Applications*, John Wiles & Sons, 1999.

[14] H. Junek e M.C. Matos, *On unconditionally p-summing and weakly p-convergent polynomials*. Arch. Math. (Basel) **70** (1998), 41-51.

[15] N. Kalton, *Quasi-Banach spaces*, Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. 2, 1099-1130, North-Holland, Amsterdam, 2003.

[16] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, 1989.

[17] F.R. Oliveira, *O Teorema do tipo Dvoretzky-Rogers para sequências misto somáveis e resultados de espaçabilidade*, Dissertação de Mestrado, UFU, 2012.

[18] G.M.R. Pereira, *O dual de um ideal de operadores e ideais de operadores simétricos entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, UFU, 2012.

[19] A. Pietsch, *Operator Ideals*, North-Holland, 1980.