

KELLY MELO DE MENEZES

# Difeomorfismos de Anosov



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

FACULDADE DE MATEMÁTICA

2016

KELLY MELO DE MENEZES

# Difeomorfismos de Anosov

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

**Área de Concentração:** Matemática.

**Linha de Pesquisa:** Sistemas Dinâmicos.

**Orientador:** Prof. Dr. Jean Venato Santos.

UBERLÂNDIA - MG

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

---

M543d Menezes, Kelly Melo De, 1987-  
2016 Difeomorfismos de Anosov / Kelly Melo de Menezes. - 2016.  
57 f. : il.

Orientador: Jean Venato Santos.  
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,  
Programa de Pós-Graduação em Matemática.  
Inclui bibliografia.

1. Matemática - Teses. 2. Sistemas dinâmicos diferenciais - Teses. 3.  
Difeomorfismos - Teses. I. Santos, Jean Venato. II. Universidade  
Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III.  
Título.

---

CDU: 51



SERVIÇO PÚBLICO FEDERAL  
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA



**Ata da defesa de DISSERTAÇÃO DE MESTRADO junto ao Programa de Pós-Graduação em  
Matemática da Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia**

**Defesa de:** Dissertação de Mestrado Acadêmico, nº. 52, PPGMAT;

**Data:** 19 de fevereiro de 2016;

**Discente:** 11412MAT011 – Kelly Melo de Menezes;

**Título do Trabalho:** Difeomorfismos de Anosov;

**Linha de Pesquisa:** Sistemas dinâmicos;

**Projeto de Pesquisa de Vinculação:** Folheações, injetividade global e subsistemas de ações Anosov.

Às 15:00 horas do dia 19 de fevereiro do ano de 2016 na Sala 1F 119 - Campus Santa Mônica da Universidade Federal de Uberlândia, reuniu-se a Banca Examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática em 20 de fevereiro de 2016, assim composta: Professores(as) Doutores(as) Carlos Alberto Maquera Apaza - DM-ICMC-USP – São Carlos/SP; Thiago Aparecido Catalan - FAMAT/UFU e Jean Venato Santos - FAMAT/UFU, orientador da candidata.

Iniciando os trabalhos, o presidente da mesa, Prof. Dr. Jean Venato Santos, agradeceu a presença do público, apresentou à Comissão Examinadora a candidata, concedendo à mesma a palavra para exposição de seu trabalho de dissertação. A duração da apresentação da candidata e o tempo de arguição e resposta foram cumpridos conforme as normas do Programa.

A seguir, o senhor presidente concedeu a palavra, pela ordem acima estabelecida, sucessivamente, aos examinadores, que passaram a arguir a candidata. Ultimada a arguição, que se desenvolveu dentro dos termos regimentais, a Banca, em sessão secreta, avaliou a dissertação, a apresentação e as respostas da candidata à arguição.

Em face do resultado obtido, a Banca Examinadora considerou a candidata **aprovada**.

Esta defesa de Dissertação de Mestrado Acadêmico é parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática. O competente diploma será expedido após cumprimento dos demais requisitos, conforme as normas do Programa, legislação e a regulamentação interna da UFU.

Nada mais havendo a tratar foram encerrados os trabalhos às 16:30 horas. Foi lavrada a presente ata que, após lida e achada conforme, foi assinada pela Banca Examinadora.

Prof. Dr. Carlos Alberto Maquera Apaza  
DM/ICMC/USP

Prof. Dr. Thiago Aparecido Catalan  
FAMAT/UFU

Prof. Dr. Jean Venato Santos  
FAMAT/UFU - Orientador

## Dedicatória

Dedico esse trabalho aos meus pais Suzilei e Paulo, meu irmão Jean e meu esposo Rangel.

# Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Suzilei Ângela de Menezes Melo e Paulo de Melo Ferreira que além de terem sido meu exemplo de caráter e responsabilidade, dedicaram suas vidas para que eu tivesse uma boa educação.

Ao meu esposo Rangel Crozara Gomes Pires por todo o companheirismo e incentivo ao longo da minha vida acadêmica.

Ao meu irmão Jean Karllo Melo Menezes por seu apoio e por ser sempre um motivo de alegria.

Ao professor Jean Venato Santos que me orientou com dedicação e competência para realização desse trabalho.

Aos professores Carlos Alberto Maquera Apaza, Thiago Aparecido Catalan, Marcus Augusto Bronzi e Walter Teófilo Huaraca Vargas por terem aceito o convite para fazer parte dessa banca.

A todos os professores da faculdade de matemática da UFU por tudo o que me ensinaram.

Aos meus colegas de mestrado que compartilharam comigo esse momento de aprendizado, em especial à turma de 2014 que foi sem dúvida a melhor experiência que tive de amizade e companheirismo.

Aos meus avós, tios e primos que sempre acreditaram e torceram por mim.

Aos meus queridos animais de estimação Meg, Lisa e Bart por terem ouvido tantas vezes a defesa da minha dissertação.

À CAPES pelo auxílio financeiro que possibilitou que eu me dedicasse exclusivamente aos estudos.

MENEZES, K. M. *Difeomorfismos de Anosov* 2016. (57 páginas). Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

## Resumo

O principal objeto de estudo deste trabalho são os difeomorfismos de Anosov. Serão tratadas propriedades fundamentais em sistemas dinâmicos tais como estabilidade estrutural, transitividade e o fato do conjunto dos difeomorfismos de Anosov ser aberto no espaço dos difeomorfismos. O resultado principal é uma versão preliminar, apresentado por John Franks em [4], de que todo difeomorfismo de Anosov no toro é topologicamente conjugado a um automorfismo linear hiperbólico do toro.

*Palavras-chave:* Sistemas dinâmicos hiperbólicos, difeomorfismos de Anosov, classificação global.

MENEZES, K. M. *Anosov diffeomorphisms.* 2016. (57 pages) M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

## Abstract

The main target of this work are the Anosov diffeomorphisms. Fundamental properties of dynamical systems will be addressed such as structural stability, transitivity and the fact of the set of Anosov diffeomorphisms be open in the space of diffeomorphisms. The main result is a preliminary version presented by John Franks in [4], that every Anosov diffeomorphism of the torus is topologically conjugated to a linear hyperbolic automorphism of the torus.

*Keywords:* Hyperbolic dynamical systems, Anosov diffeomorphisms, global classification.

# Sumário

|  |    |
|--|----|
| <b>Resumo</b>  | v  |
| <b>Abstract</b>  | vi |
| <b>Introdução</b>  | 1  |
| <b>1 Preliminares</b>  | 3  |
| 1.1 Conceitos básicos em sistemas dinâmicos . . . . .                  | 3  |
| 1.2 Variedades topológicas . . . . .                                   | 8  |
| 1.3 Variedades diferenciáveis . . . . .                                | 9  |
| 1.4 Variedades Riemannianas . . . . .                                  | 12 |
| <b>2 Difeomorfismos de Anosov</b>                                      | 14 |
| 2.1 Definições e propriedades fundamentais . . . . .                   | 14 |
| 2.2 Teoria local de difeomorfismos . . . . .                           | 18 |
| 2.3 Folheações . . . . .   | 20 |
| 2.4 Estabilidade estrutural . . . . .                                  | 27 |
| 2.5 Transitividade dos difeomorfismos de Anosov . . . . .              | 30 |
| 2.6 Automorfismos hiperbólicos no toro . . . . .                       | 36 |
| <b>3 Difeomorfismo de Anosov no toro</b>                               | 42 |
| 3.1 Aplicações homotópicas . . . . .                                   | 42 |
| 3.2 Teoria do índice . . . . .   | 45 |
| 3.3 Teoria hiperbólica local e suas aplicações . . . . .               | 46 |
| 3.4 Entropia topológica . . . . .                                      | 48 |
| 3.5 Classificação global de difeomorfismos de Anosov no toro . . . . . | 50 |
| <b>Referências Bibliográficas</b>                                      | 55 |

# Introdução

No final do século XIX Poincaré busca compreender a evolução do nosso sistema solar. Enquanto a abordagem utilizada até então ia no sentido de resolver as equações diferenciais do movimento, Poincaré propõe a utilização de ferramentas vindas de outras áreas, tais como a Topologia, Geometria, Álgebra e Análise, para obter uma descrição qualitativa e, quando possível, quantitativa do comportamento do sistema. Esta proposta marca o nascimento dos Sistemas Dinâmicos como área de pesquisa em matemática, tendo como objetivo desenvolver uma teoria capaz de prever a evolução de certos fenômenos, estudando o comportamento das órbitas de aplicações e fluxos.

Esta área teve contribuições fundamentais de alguns dos maiores matemáticos do século XX, tais como Lyapunov, Andronov, Birkhoff e Kolmogorov. Dmitri Victorovich Anosov (1963-2014) foi um matemático russo que estudou sistemas globalmente hiperbólicos, que posteriormente ficaram conhecidos como sistemas de Anosov. Com o passar do tempo os sistemas Anosov passaram a desempenhar um papel central na teoria de sistemas dinâmicos. Tais sistemas representam a ideia mais perfeita do comportamento hiperbólico global, e sua extensão natural, os sistemas parcialmente hiperbólicos, é um tópico de pesquisa bastante ativo na atualidade.

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre difeomorfismos de Anosov. Com o intuito de torná-lo auto-contido, no primeiro capítulo são introduzidos conceitos e resultados básicos de sistemas dinâmicos, assim como noções fundamentais de topologia diferencial tais como variedades diferenciáveis, espaços tangentes e variedades riemannianas. No Capítulo 2, estabelece-se a noção de hiperbolicidade e consequentemente define-se difeomorfismos de Anosov, em seguida, são apresentadas propriedades importantes destes sistemas, tais como: estabilidade estrutural, caracterizações sobre transitividade e o fato do conjunto dos difeomorfismos Anosov ser aberto no conjunto dos difeomorfismos. Esse capítulo termina com a construção e estudo detalhado sobre os automorfismos hiperbólicos do toro. O terceiro e último capítulo é dedicado à demonstração de que no toro os únicos difeomorfismos de Anosov são, essencialmente, os automorfismos hiperbólicos. De fato, o resultado apresentado é uma versão preliminar feita por Franks em

[4], na qual ele assume como hipótese que o conjunto dos pontos não-errantes é todo o toro. Posteriormente Manning em [10] completou a demonstração do resultado geral. Vale ressaltar que a demonstração aqui apresentada é uma adaptação feita Katok e Hasselblat em [7].

Kelly Melo de Menezes  
Uberlândia-MG, 19 de janeiro de 2016.

# Capítulo 1

## Preliminares

Iniciamos este capítulo introduzindo noções e exemplos fundamentais em sistemas dinâmicos e para tal nos baseamos nos livros [2, 7, 11, 13, 14]. Em seguida, baseando-nos na referência [9], definimos variedades diferenciáveis, espaços tangentes e variedades riemannianas.

### 1.1 Conceitos básicos em sistemas dinâmicos

Dado um espaço topológico  $X$ , qualquer aplicação  $f : X \rightarrow X$  é um sistema dinâmico com tempo discreto ou simplesmente sistema dinâmico.

Seja  $f$  uma aplicação em  $X$ . Para um inteiro positivo  $n$  denota-se por  $f^n$  a  $n$ -ésima iterada de  $f$ , isto é,

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_n.$$

Além disso,  $f^0 = Id_X$  e se  $f$  for invertível  $f^{-n} = (f^{-1})^n$ .

**Definição 1.1.** Dada uma transformação inversível  $f : X \rightarrow f(X)$ , a **órbita** de um ponto  $x \in X$  é o conjunto  $\mathcal{O}(x) = \{f^n(x), n \in \mathbb{Z}\}$ . Para  $n \in \mathbb{Z}$  denota-se por  $\mathcal{O}^-(x) = \{f^n(x), n \leq 0\}$  e  $\mathcal{O}^+(x) = \{f^n(x), n \geq 0\}$ .

**Definição 1.2.** Seja  $f$  uma função definida em  $X$ . Um ponto  $x \in X$  é um **ponto periódico** por  $f$  de período  $n$  se  $f^n(x) = x$  e  $f^N(x) \neq x$  para todo  $0 < N < n$ . Denota-se por  $\text{Per}(f)$  o conjunto de pontos periódicos por  $f$  em  $X$ . Se  $x$  for um ponto de período um então ele é chamado de **ponto fixo**. Denota-se por  $\text{Fix}(f)$  o conjunto de todos os pontos fixos por  $f$  em  $X$ . Se  $x$  for um ponto de período  $n$ , então a órbita  $\mathcal{O}(x)$  é dita uma **órbita periódica**.

**Definição 1.3.** Um subconjunto  $S \subset X$  é dito invariante em relação à transformação  $f$  se  $f(S) = S$ .

Note que uma órbita periódica é sempre um conjunto invariante.

**Definição 1.4.** Seja  $X$  um espaço métrico completo e  $f$  um homeomorfismo em  $X$ . O conjunto  $\omega$ -**limite** é definido por

$$\omega(x) = \{y \in X \mid y = \lim_{k \rightarrow \infty} f^{n_k}(x) \text{ onde } n_k \rightarrow \infty\}.$$

O conjunto  $\alpha$ -**limite** é definido por

$$\alpha(x) = \{y \in X \mid y = \lim_{k \rightarrow -\infty} f^{n_k}(x) \text{ onde } n_k \rightarrow -\infty\}.$$

Dizemos que  $x$  é  $\omega$ -**recorrente** se  $x \in \omega(x)$  e  $x$  é  $\alpha$ -**recorrente** se  $x \in \alpha(x)$ .

Vamos denotar por  $\text{Diff}^1(X)$  o espaço dos difeomorfismos de classe  $C^1$  com a topologia  $C^1$  em  $X$ . Ao longo deste trabalho, será considerada a topologia  $C^r$  clássica, no espaço das aplicações de classe  $C^r$ , apresentada, por exemplo, na Seção 7.1.1 do livro [14] ou na Seção 2 do Capítulo I de [13].

## Transitividade

Recordemos que o conjunto  $A$  é residual em um espaço  $X$  se existirem enumeráveis conjuntos abertos  $\{U_j\}_{j=1}^\infty$  densos em  $X$  tal que  $A = \bigcap_{j=1}^\infty U_j$ . O Teorema da categoria de Baire afirma que todo subconjunto residual em um espaço métrico completo é denso.

**Teorema 1.1.** (*Condição de Birkhoff para transitividade*) Seja  $X$  um espaço métrico completo com base enumerável e  $f : X \rightarrow X$  uma função contínua.

1. Se para todo aberto  $U \subset X$ ,  $\mathcal{O}^-(U) = \bigcup_{n \leq 0} f^n(U)$  é denso em  $X$  então existe um conjunto residual  $\mathcal{R}^+$  tal que para todo  $x \in \mathcal{R}^+$  a órbita  $\mathcal{O}^+(x)$  é densa em  $X$ .
2. Se  $f$  for um homeomorfismo e para todo aberto  $U \subset X$ ,  $\mathcal{O}^+(U) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(U)$  é denso em  $X$  então existe um conjunto residual  $\mathcal{R}^-$  tal que para todo  $x \in \mathcal{R}^-$  a órbita  $\mathcal{O}^-(x)$  é densa em  $X$ .
3. Combinando os dois itens anteriores, se  $f$  for um homeomorfismo e para todo aberto  $U \subset X$ ,  $\mathcal{O}^+(U)$  e  $\mathcal{O}^-(U)$  forem densas em  $X$  então existe um conjunto residual  $\mathcal{R} \subset X$  tal que para todo  $x \in \mathcal{R}$  as órbitas  $\mathcal{O}^+(x)$  e  $\mathcal{O}^-(x)$  são densas em  $X$ .

*Demonstração.* Seja  $\{V_j, j \in \mathbb{Z}\}$  uma base enumerável de  $X$ . Então

$$\mathcal{R} := \cap\{\mathcal{O}^-(V_j) \mid j \in \mathbb{Z}\}$$

é uma interseção de conjuntos densos e abertos e portanto é residual. Seja  $x \in \mathcal{R}^+$ . Então  $x \in \mathcal{O}^-(V_j)$  para todo  $j$ , portanto  $\mathcal{O}^+(x) \cap V_j \neq \emptyset$ . Isso prova o item 1, ou seja, que  $\mathcal{O}^+(x)$  é densa em  $X$ .

No item 2 assumimos que  $f$  é um homeomorfismo e portanto  $\mathcal{O}^-(x)$  está bem definida. A demonstração é análoga à anterior.

O item 3 é uma combinação dos itens 1 e 2. □

**Definição 1.5.** Um sistema dinâmico invertível  $f : X \rightarrow X$  se diz **topologicamente transitivo** ou **transitivo** se existe um ponto  $x \in X$  tal que sua órbita  $\mathcal{O}(x) = \{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  é densa em  $X$ .

O teorema anterior fornece o seguinte critério para transitividade:

**Corolário 1.1.1.** Seja  $f$  um homeomorfismo em um espaço métrico completo  $X$ . Se para todos abertos  $U, V \in X$  existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $U \cap f^n(V) \neq \emptyset$ , então  $f$  é transitivo.

## Exemplos

A fim de ilustrar o conceito de sistema dinâmico e a noção de comportamento assintótico vamos apresentar dois exemplos identificando propriedades que serão úteis posteriormente.

## Contrações

O tipo de comportamento assintótico mais simples que se pode imaginar é representado pela convergência das iteradas de um estado qualquer para um estado particular.

**Definição 1.6.** Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Uma transformação  $f : X \rightarrow X$  chama-se **contração** se existe  $\lambda < 1$  tal que para quaisquer  $x, y \in X$  tem-se

$$d(f(x), f(y)) < \lambda d(x, y). \quad (1.1)$$

A desigualdade (1.1) implica que a transformação  $f$  é contínua e portanto as suas iteradas positivas formam um sistema dinâmico topológico com tempo discreto.

Iterando (1.1), para qualquer inteiro positivo  $n$  tem-se

$$d(f^n(x), f^n(y)) < \lambda^n d(x, y). \quad (1.2)$$

E portanto quando  $n \rightarrow \infty$  tem-se

$$d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0$$

o que mostra que todos os pontos possuem o mesmo comportamento assintótico.

Por outro lado, para todo  $x \in X$  a sequência  $\{f^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$  é de Cauchy pois para  $N \geq n$  tem-se

$$\begin{aligned} d(f^N(x), f^n(x)) &\leq \sum_{k=0}^{N-n-1} d(f^{n+k+1}(x), f^{n+k}(x)) \leq \sum_{k=0}^{N-n-1} \lambda^{n+k} d(f(x), x) \\ &\leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(f(x), x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Assim se o espaço  $X$  for completo para qualquer  $x \in X$  existe o limite  $p$  de  $f^n(x)$  quando  $n \rightarrow \infty$  e por (1.2)  $p$  é o mesmo para todo ponto  $x$ .

Mostraremos que  $p$  é um ponto fixo de  $f$ . Para qualquer  $x \in X$  e qualquer  $n \in \mathbb{N}$  tem-se

$$\begin{aligned} d(p, f(p)) &\leq d(p, f^n(x)) + d(f^n(x), f^{n+1}(x)) + d(f^{n+1}(x), f(p)) \\ &\leq (1 + \lambda)d(p, f^n(x)) + \lambda^n d(x, f(x)). \end{aligned}$$

Uma vez que  $d(p, f^n(p)) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , obtém-se  $f(p) = p$ .

Fazendo  $N \rightarrow \infty$  em (1.3) obtém-se

$$d(p, f^n(x)) \leq \frac{\lambda^n}{1-\lambda} d(f(x), x).$$

Diremos que duas sequências de pontos num espaço métrico **convergem exponencialmente** (ou com velocidade exponencial) uma para a outra se existem constantes  $c > 0$  e  $\lambda < 1$  tal que  $d(x_n, y_n) < c\lambda^n$ . Em particular se uma das sequências for constante, isto é,  $y_n = y$ , diremos que  $x_n$  converge exponencialmente para  $y$ .

O argumento anterior contém a demonstração do seguinte resultado fundamental que fornece uma descrição completa do comportamento assintótico de um sistema dinâmico gerado por uma contração.

**Proposição 1.1.** (*Princípio de contração*) Seja  $X$  um espaço métrico completo. Iterando a contração  $f : X \rightarrow X$  todos os pontos convergem com velocidade exponencial para o único ponto fixo de  $f$ .

## Rotações do círculo

Podemos usar notação multiplicativa, onde a circunferência é representada pela circunferência unitária no plano complexo.

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\} = \{e^{2\pi i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\}$$

ou notação aditiva

$$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

onde a circunferência é representada pelo quociente do grupo aditivo dos números reais pelo subgrupo dos inteiros. A transformação logarítmica

$$e^{2\pi i\theta} \mapsto \theta$$

estabelece um isomorfismo entre as duas representações. Usaremos o símbolo  $R_\alpha$  para representar a rotação por um ângulo  $2\pi\alpha$ . Em notação multiplicativa

$$R_\alpha z = z_0 z \text{ com } z_0 = e^{2\pi i\alpha}.$$

E como seria de esperar, em notação aditiva temos

$$R_\alpha x = x + \alpha \pmod{1}$$

onde  $\pmod{1}$  significa que números diferindo entre si por um inteiro são identificados. As iteradas de uma rotação são respectivamente

$$R_\alpha^n z = R_{n\alpha} z = z_0^n z \text{ ou } R_{n\alpha} x = x + n\alpha.$$

Há uma diferença crucial entre os casos  $\alpha$  racional e  $\alpha$  irracional.

No primeiro caso, escrevemos  $\alpha = p/q$  onde  $p$  e  $q$  são inteiros primos entre si. Temos  $R_\alpha^q(x) = x$  para todo  $x$ . Logo  $R_\alpha^q$  é a transformação identidade e após  $q$  iteradas a transformação simplesmente repete-se.

O segundo caso é muito mais interessante. Começamos com uma definição de natureza mais geral que pertence à dinâmica topológica.

**Definição 1.7.** Um sistema dinâmico  $f : X \rightarrow X$  diz-se **minimal** se a órbita de qualquer ponto  $x \in X$  é densa em  $X$  ou ainda se  $f$  não tem conjuntos invariantes fechados próprios.

**Proposição 1.2.** Se  $\alpha$  é irracional então a rotação  $R_\alpha$  é minimal.

*Demonstração.* Seja  $A \subset S^1$  o fecho de uma órbita. Se a órbita não é densa, o complementar  $S^1 \setminus A$  é um conjunto aberto não-vazio constituído por intervalos disjuntos. Seja  $I$  o maior desses intervalos (ou um dos maiores, se existir mais do que um com comprimento máximo). Como as rotações preservam o comprimento de qualquer intervalo, as iteradas  $R_\alpha^n I$  não se intersectam. Caso contrário  $S^1 \setminus A$  teria um intervalo maior que  $I$ . Como  $\alpha$  é irracional, nenhuma iterada de  $I$  pode coincidir; caso contrário um extremo de  $I$  de uma iterada de  $I$  iria repetir e assim teríamos  $x + k\alpha = x \pmod{1}$  donde  $k\alpha = l$  inteiro e  $\alpha = l/k$  seria racional. Assim os intervalos  $R_\alpha^n I$  são todos disjuntos e de igual comprimento, mas tal é impossível porque a circunferência tem comprimento finito e a soma dos comprimentos de intervalos disjuntos não pode exceder o comprimento da circunferência.  $\square$

## 1.2 Variedades topológicas

**Definição 1.8.** Seja  $M$  um espaço topológico. Um **sistema de coordenadas locais** ou uma **carta local** em  $M$  é um homeomorfismo  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  de um subconjunto aberto  $U \in M$  sobre um aberto  $\varphi(U) \in \mathbb{R}^m$ . Diz-se que  $m = m(U)$  é a **dimensão** de  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ .

Para cada  $x \in U$  tem-se  $\varphi(x) = (\varphi^1(x), \dots, \varphi^m(x))$ . Os números  $\varphi^i = \varphi^i(x)$ ,  $i = 1, \dots, m$  são chamados de **coordenadas** do ponto  $x \in M$  no sistema  $\varphi$ .

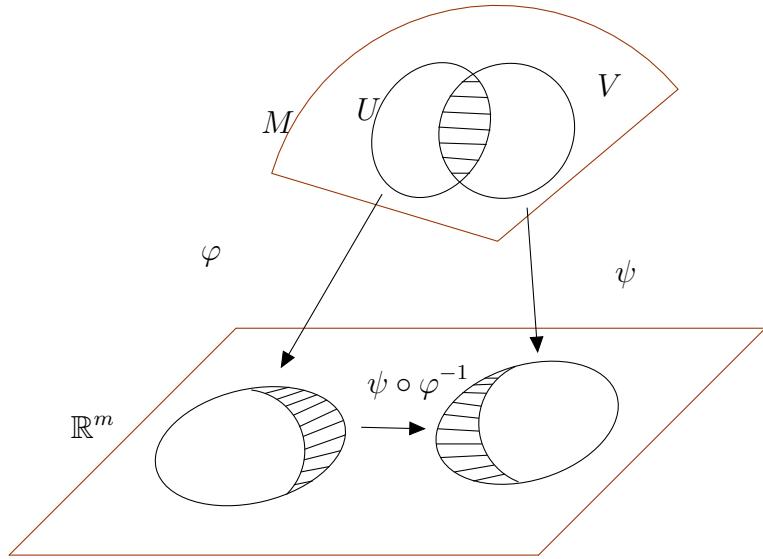
**Definição 1.9.** Um **atlas** de dimensão  $m$  sobre um espaço topológico  $M$  é uma coleção  $\mathfrak{U}$  de sistemas de coordenadas locais  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  em  $M$ , cujos domínios  $U$  cobrem  $M$ . Os domínios  $U$  dos sistemas de coordenadas  $\varphi \in \mathfrak{U}$  são chamados as **vizinhanças coordenadas** de  $\mathfrak{U}$ .

**Definição 1.10.** Um espaço topológico  $M$  no qual existe um atlas de dimensão  $m$  chama-se uma **variedade topológica** de dimensão  $m$ .

Em outras palavras,  $M$  é uma variedade topológica se, e somente se, cada ponto de  $M$  tem uma vizinhança homeomorfa a um aberto do  $\mathbb{R}^m$ .

Dados os sistemas de coordenadas  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  e  $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  no espaço topológico  $M$ , tais que  $U \cap V \neq \emptyset$ , cada ponto  $x \in U \cap V$  tem coordenadas  $\varphi_i = \varphi_i(x)$  no sistema  $\varphi$  e coordenadas  $\psi_i = \psi_i(x)$  no sistema  $\psi$ .

A correspondência  $(\varphi^1(x), \dots, \varphi^m(x)) \leftrightarrow (\psi^1(x), \dots, \psi^m(x))$  estabelece um homeomorfismo  $\Phi_{\varphi\psi} = \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  que é chamado **mudança de coordenadas**.



### 1.3 Variedades diferenciáveis

Um atlas  $\mathfrak{U}$  sobre um espaço topológico  $M$  é um **atlas diferenciável** de classe  $C^r$ , ( $r \geq 1$ ), se todas as mudanças de coordenadas  $\Phi_{\varphi,\psi}$ , com  $\varphi, \psi \in \mathfrak{U}$ , são aplicações  $C^r$ . Escreve-se então  $\mathfrak{U} \in C^r$ .

Como  $\Phi_{\varphi\psi} = (\Phi_{\psi\varphi})^{-1}$ , os  $\Phi_{\varphi\psi}$  são, de fato, difeomorfismos de classe  $C^r$ .

Seja  $\mathfrak{U}$  um atlas de dimensão  $m$  e classe  $C^r$  num espaço topológico  $M$ . Um sistema de coordenadas  $\phi : W \rightarrow \mathbb{R}^m$  em  $M$  diz-se **admissível** relativamente ao atlas  $\mathfrak{U}$  se, para todo sistema de coordenadas locais  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , pertencente a  $\mathfrak{U}$ , com  $U \cap W \neq \emptyset$ , as mudanças de coordenadas  $\Phi_{\varphi\phi}$  e  $\Phi_{\phi\varphi}$  são  $C^r$  em  $M$ . Em outras palavras, se  $\mathfrak{U} \cup \{\phi\}$  é ainda um atlas de classe  $C^r$  em  $M$ .

Um atlas  $\mathfrak{U}$  de dimensão  $m$  e classe  $C^r$  sobre  $M$  diz-se **maximal** quando contém todos os sistemas de coordenadas locais que são admissíveis em relação a  $\mathfrak{U}$ .

Todo atlas de classe  $C^r$  em  $M$  pode ser ampliado, de modo único, até se tornar um atlas máximo de classe  $C^r$ : basta acrescentar-lhe todos os sistemas de coordenadas admissíveis.

**Definição 1.11.** Uma **variedade diferenciável**, de dimensão  $m$  e classe  $C^r$  é um par ordenado  $(M, \mathfrak{U})$ , onde  $M$  é um espaço topológico de Hausdorff, com base enumerável e  $\mathfrak{U}$  é um atlas máximo de dimensão  $m$  e classe  $C^r$  sobre  $M$ .

## Espaço tangente

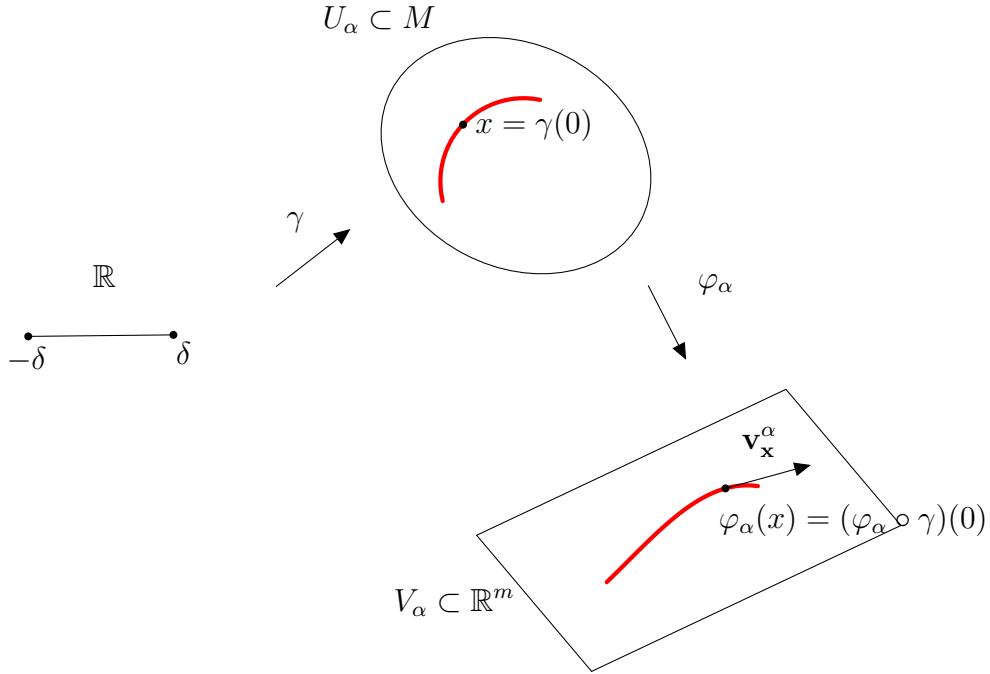
Vamos começar definindo vetores tangentes em um espaço Euclidiano.

**Definição 1.12.** Fixe um ponto  $x \in \mathbb{R}^m$ . Um **vetor tangente** em  $x$  é um par  $(x, v)$  onde  $v \in \mathbb{R}^m$ . O par  $(x, v)$  é também denotado por  $v_x$ . O conjunto de todos os possíveis vetores tangentes em  $x$  é denotado por  $T_x \mathbb{R}^m$  e é chamado de **espaço tangente** em  $x$ .

O **espaço tangente** em  $x$  é um espaço vetorial onde  $(x, v) + (x, w) = (x, v + w)$ . A união disjunta dos vetores tangentes nos diferentes pontos de  $\mathbb{R}^m$  é chamado de **fibrado tangente** de  $\mathbb{R}^m$  e é denotado por  $T\mathbb{R}^m$ . Assim:

$$T\mathbb{R}^m = \{(x, v) \mid x \in \mathbb{R}^m \text{ e } v \text{ é um vetor tangente em } x\} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m.$$

Para uma variedade  $M$  de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , precisamos especificar o que significa um vetor ser tangente a um ponto  $x$ . Seja  $\gamma : (-\delta, \delta) \subset \mathbb{R} \rightarrow M$  uma curva  $C^1$  com  $\gamma(0) = x$ . Seja  $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow V_\alpha$  um sistema de coordenadas em  $x$ . Pela definição de diferenciabilidade  $\varphi_\alpha \circ \gamma(t)$  é  $C^1$ . No sistema de coordenadas o vetor tangente determinado por  $\gamma$  é dado por  $(\varphi_\alpha \circ \gamma)'(0) = v_x^\alpha$ .



Se  $\varphi_\beta : U_\beta \rightarrow V_\beta$  é outro sistema de coordenadas em  $x$  então o vetor tangente determinado por  $\gamma$  nesse sistema de coordenadas é dado por  $(\varphi_\beta \circ \gamma)'(0) = v_x^\beta$ .

Note que

$$v_x^\beta = D(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})_{x^\alpha} v_x^\alpha$$

onde  $x^\alpha = \varphi_\alpha(x)$ . Esses vetores  $v_x^\alpha$  e  $v_x^\beta$  representam o mesmo vetor em diferentes sistemas de coordenadas pois eles representam a derivada das coordenadas representantes da mesma curva.

A derivada de uma curva em uma variedade, ou vetor tangente à curva, é a classe de equivalência de representantes de diferentes sistemas de coordenadas, onde  $v_x^\alpha \sim v_x^\beta$  se  $v_x^\beta = D(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})_{x^\alpha} v_x^\alpha$ .

Sendo assim, dizemos que um **vetor tangente** a  $M$  em  $x$  é a derivada da uma curva diferenciável em  $x$ . E o **espaço tangente** de  $M$  em  $x$  é o conjunto de todos os vetores tangentes em  $x$  e é denotado por  $T_x M$ . Assim:

$$T_x M = \{v_x \mid v_x \text{ é a derivada de uma curva diferenciável em } x\}.$$

Fixado um ponto  $x$  em  $M$  temos que  $T_x M$  é um espaço vetorial (usando a adição em qualquer um dos sistemas de coordenadas em  $x$ ). A união disjunta dos vetores tangentes em

todos os pontos de  $M$  dá o **fibrado tangente** da variedade  $M$  que é denotado por  $TM$ . Assim:

$$TM = \{(x, v) \mid x \in M \text{ e } v \text{ é um vetor tangente em } x\} = \bigcup_{x \in M} \{x\} \times T_x M.$$

**Definição 1.13.** Se  $f : M_1 \rightarrow M_2$  é uma aplicação  $C^1$  entre variedades, consideramos a **derivada** de  $f$  no ponto  $x$  sendo uma aplicação linear de  $T_x M_1$  em  $T_{f(x)} M_2$ ,  $Df_x : T_x M_1 \rightarrow T_{f(x)} M_2$ . Se  $\varphi_\alpha : U_\alpha \subset M_1 \rightarrow V_\alpha$  e  $\varphi_\beta : U_\beta \subset M_2 \rightarrow V_\beta$  são sistemas de coordenadas em  $x$  e  $f(x)$ , respectivamente, então:

$$D(\varphi_\beta \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1})_{x^\alpha} v_x^\alpha = w_{f(x)}^\beta$$

leva o representante de um vetor em  $x$  no sistema de coordenadas  $(\varphi_\alpha, U_\alpha, V_\alpha)$  no representante de um vetor em  $f(x)$  no sistema de coordenadas  $(\varphi_\beta, U_\beta, V_\beta)$ .

## 1.4 Variedades Riemannianas

**Definição 1.14.** Uma **métrica riemanniana** numa variedade diferenciável  $M$  é uma correspondência que associa a cada ponto  $x \in M$  um produto interno no espaço tangente  $T_x M$ .

Seja  $g$  uma métrica riemanniana em  $M$ . Indicamos com  $g_x(u, v)$  ou, quando não há perigo de confusão,  $\langle u, v \rangle_x$ , o produto interno dos vetores  $u, v \in T_x M$ . O comprimento ou **norma** do vetor tangente  $u \in T_x M$  é definido por

$$|u|_x = \sqrt{g_x(u, u)}.$$

**Definição 1.15.** Uma variedade diferenciável onde está definida uma métrica riemanniana chama-se **variedade riemanniana**. Em termos mais precisos, trata-se se um par  $(M, g)$  onde  $g$  é uma métrica riemanniana na variedade  $M$ .

Em uma variedade Riemanniana  $M$  podemos definir o **comprimento de um caminho**  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  de classe  $C^1$  como sendo

$$\ell(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt. \quad (1.4)$$

Um caminho  $\gamma : [a, b] \rightarrow M$  diz-se **seccionalmente de classe  $C^1$**  se  $\gamma$  for contínuo e existir uma partição  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$  tal que  $\gamma_i = \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$  é de classe  $C^1$ , para todo

$$i = 0, 1, \dots, k - 1.$$

Dados dois pontos arbitrários,  $x, y \in M$ , existe um caminho  $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ , seccionalmente de classe  $C^r$ , tal que  $\gamma(0) = x$  e  $\gamma(1) = y$ . Definimos a **distância intrínseca**  $d(x, y)$  entre dois pontos  $x, y$  de uma variedade riemanniana conexa como

$$d(x, y) = \inf\{\ell(\gamma) \mid \gamma \text{ é seccionalmente } C^1 \text{ em } M \text{ ligando } x \text{ a } y\}. \quad (1.5)$$

# Capítulo 2

## Difeomorfismos de Anosov

Começamos este capítulo introduzindo e analisando a definição de conjuntos hiperbólicos e consequentemente de difeomorfismos de Anosov. Em seguida, apresentamos uma série de consequências desta estrutura, que foram extraídas dos livros [2, 7, 11, 13, 14], e que culminam na construção e no estudo detalhado dos automorfismos hiperbólicos do toro. Para a parte de folheações usamos também a referência [3].

### 2.1 Definições e propriedades fundamentais

Diz-se que uma transformação linear  $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é **hiperbólica** se todos os seus autovalores têm valor absoluto diferente de um.

Se  $\lambda$  é um autovalor de  $A$  denotaremos por  $E_\lambda$  o autoespaço generalizado correspondente a  $\lambda$ , isto é, o espaço de todos os vetores  $v \in \mathbb{R}^m$  tal que  $(A - \lambda Id)^n v = 0$  para algum  $n \in \mathbb{Z}$ .

Analogamente, para um par de autovalores complexos conjugados  $\lambda, \bar{\lambda}$  seja  $E_{\lambda, \bar{\lambda}}$  a interseção de  $\mathbb{R}^m$  com a soma dos autoespaços generalizados correspondentes a  $E_\lambda$  e  $E_{\bar{\lambda}}$  para o complexificado de  $A$  (isto é, a extensão ao espaço  $\mathbb{C}^m$ ). Para abreviar designaremos também  $E_{\lambda, \bar{\lambda}}$  por autoespaço generalizado.

Sejam

$$E^s = E^s(A) = \bigoplus_{|\lambda| < 1} E_\lambda \oplus \bigoplus_{|\lambda| < 1} E_{\lambda, \bar{\lambda}}$$

$$E^u = E^u(A) = \bigoplus_{|\lambda| > 1} E_\lambda \oplus \bigoplus_{|\lambda| > 1} E_{\lambda, \bar{\lambda}}$$

Se a transformação  $A$  for invertível então  $E^u(A) = E^s(A^{-1})$ . Finalmente seja

$$E^0 = E^0(A) = E_1 \oplus E_{-1} \oplus \bigoplus_{|\lambda|=1} E_{\lambda, \bar{\lambda}}$$

Os espaços  $E^s, E^u, E^0$  são obviamente invariantes em relação a  $A$  e  $\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u \oplus E^0$ .

Uma forma equivalente de descrever transformações lineares hiperbólicas é dizer que  $A$  é hiperbólica se  $E^0 = \{0\}$  ou ainda se  $\mathbb{R}^m = E^s \oplus E^u$ .

**Definição 2.1.** O espaço  $E^s(A)$  é chamado de **subespaço estável** e o espaço  $E^u(A)$  é chamado de **subespaço instável**.

Sejam  $M$  uma variedade riemanniana de classe  $C^1$ ,  $U \subset M$  um subconjunto aberto e  $f : U \rightarrow f(U) \subset M$  um difeomorfismo de classe  $C^1$ .

**Definição 2.2.** Um ponto  $x \in U$  periódico de período  $n$  para  $f$  é chamado **ponto hiperbólico** se o módulo de qualquer autovalor de  $Df_x^n$  é diferente de 1.

**Definição 2.3.** Um subconjunto invariante  $\Lambda \subset U$  tem uma **estrutura hiperbólica** por  $f$  se, para cada ponto  $x$  em  $\Lambda$  tem-se:

1.  $T_x M = E_x^u \bigoplus E_x^s$ ;
2. Esta decomposição é invariante sobre a ação da derivada, ou seja,  $Df_x(E_x^u) = E_{f(x)}^u$  e  $Df_x(E_x^s) = E_{f(x)}^s$ ;
3.  $E_x^u$  e  $E_x^s$  variam continuamente com  $x$ .
4. Existem  $0 < \lambda < 1$  e  $c \geq 1$  independente de  $x$  tal que para todo  $n \geq 0$

$$\|Df_x^n(v)\| \leq c\lambda^n \|v\| \text{ para } v \in E_x^s \quad (2.1)$$

$$\|Df_x^{-n}(v)\| \leq c\lambda^n \|v\| \text{ para } v \in E_x^u. \quad (2.2)$$

As letras  $u$  e  $s$  podem indicar tanto subespaços instável e estável quanto suas respectivas dimensões.

**Definição 2.4.** Um difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  é chamado de **difeomorfismo de Anosov** se toda a variedade  $M$  possui uma estrutura hiperbólica por  $f$ .

É claro que (2.1) significa que vetores em  $E^s$  se contraem com velocidade exponencial no futuro e (2.2) indica que os vetores de  $E^u$  se contraem no passado. Além disto, a definição independe da escolha da métrica riemanniana.

Claramente temos  $0 < u, s < m$ . Por exemplo, para  $u = 0$ , então para  $n > 0$  suficientemente grande,  $f^n$  é uma contração, e não pode ser um difeomorfismo em uma variedade compacta.

À primeira vista, a Definição 2.3 parece muito forte, pois ela postula uma decomposição  $Df$ -invariante do fibrado tangente. No entanto existe uma definição equivalente na qual a decomposição do fibrado tangente não é utilizada. Para apresentar essa definição devemos analisar alguns fatos.

Substituindo  $v$  por  $Df^{-n}(v)$  em (2.1), obtemos a seguinte desigualdade equivalente a (2.1).

$$\|Df^{-n}(v)\| \geq c^{-1}\lambda^{-n}\|v\|, \quad v \in E^s, \quad n > 0. \quad (2.3)$$

De modo análogo, obtemos a seguinte desigualdade equivalente a (2.2).

$$\|Df^n(v)\| \geq c^{-1}\lambda^{-n}\|v\|, \quad v \in E^u, \quad n > 0. \quad (2.4)$$

A equação (2.3) indica o crescimento exponencial de vetores em  $E^s$  no passado.

**Lema 2.1.** *Seja  $f$  um difeomorfismo de Anosov. Então existe uma métrica riemanniana para a qual temos*

$$\|Df(v)\| < \|v\|, \quad \text{para } v \in E^s \text{ e} \quad (2.5)$$

$$\|Df(v)\| > \|v\|, \quad \text{para } v \in E^u. \quad (2.6)$$

*Demonsração.* Comece com uma métrica riemanniana qualquer e escolha  $n > 0$  tal que  $\|Df^n(v)\| < \|v\|$  para todo  $v \in E^s$ . Defina uma métrica  $\|\cdot\|_*$  em  $E^s$  por

$$\|v\|_* = \|v\| + \|Df(v)\| + \cdots + \|Df^{n-1}(v)\|.$$

Então

$$\|Df(v)\|_* = \|Df(v)\| + \|Df^2(v)\| + \cdots + \|Df^n(v)\| = \|v\|_* - \|v\| + \|Df^n(v)\|.$$

Como  $\|Df^n(v)\| < \|v\|$  para  $v \in E^s$ , concluímos que  $\|Df(v)\|_* < \|v\|_*$ , para  $v \in E^s$ .

Analogamente, escolha  $n > 0$  tal que  $\|Df^n(v)\| > \|v\|$  para algum  $v \in E^u$ . Então  $\|Df(v)\|_* > \|v\|_*$ , para  $v \in E^u$ .  $\square$

**Observação 2.1.** A métrica  $\|\cdot\|_*$  do lema anterior é chamada de métrica adaptada.

É possível usar o Lema 2.1 para definir difeomorfismo de Anosov. No entanto a Definição 2.3 é a mais utilizada pois ela não depende da escolha de uma métrica riemanniana.

Apesar dos conjuntos hiperbólicos serem definidos em termos de famílias de subespaços invariantes, não raramente é conveniente trabalhar com famílias de cones invariantes no lugar de subespaços. A seguir vamos apresentar uma caracterização de hiperbolicidade em termos de famílias de cones invariantes. Como consequência iremos obter que o conjunto dos difeomorfismos de Anosov é aberto em  $\text{Diff}^1(M)$ .

Seja  $f : M \rightarrow M$  um  $C^1$ -difeomorfismo de Anosov. Assuma que a métrica é a do Lema 2.1. Dados  $x \in M$  e  $\alpha > 0$ , defina os cones estável e instável de tamanho  $\alpha$  em  $T_x M$  por

$$C_x^s(\alpha) = \{(v, w) \in E_x^s \times E_x^u \mid |w| \leq \alpha|v|\} \text{ e}$$

$$C_x^u(\alpha) = \{(v, w) \in E_x^s \times E_x^u \mid |v| \leq \alpha|w|\}.$$

Denotaremos por  $C^\sigma$ ,  $\sigma = u, s$ , a família de cones no fibrado tangente  $TM$ , que para cada  $x$  associa  $C_x^\sigma(\alpha)$ . Para  $\sigma = u, s$ , podemos dizer que  $C^\sigma$  é o conjunto de vetores que formam ângulo com  $E^\sigma$  menor que um certo número.

Note que, mudando  $c$  e  $\lambda$  se necessário, os vetores em  $v \in C^s$  satisfazem a condição (2.3) e os  $w \in C^u$  satisfazem a condição (2.4).

Observe também que  $C^u$  é projetado em si mesmo por  $Df$  e que  $C^s$  é projetado em si mesmo por  $Df^{-1}$  desde que seja escolhida a métrica do Lema 2.1. A seguinte proposição diz que essa situação é também suficiente para que  $f$  seja um difeomorfismo de Anosov.

**Proposição 2.1.** *Um difeomorfismo  $f$  é de Anosov se e somente se existir uma decomposição do fibrado tangente:  $TM = E^u \oplus E^s$  e cones  $C^\sigma$  de  $E^\sigma$ ,  $\sigma = u, s$  de vetores tais que*

1.  *$Df$  leva o fecho de  $C^u$  em  $C^u$  e  $Df^{-1}$  leva o fecho de  $C^s$  em  $C^s$ .*

2. *Para todo  $n > 0$*

$$\|Df^{-n}(v)\| \geq c^{-1}\lambda^{-n}\|v\| \text{ para } v \in C^s \quad (2.7)$$

$$\|Df^n(v)\| \geq c^{-1}\lambda^{-n}\|v\| \text{ para } v \in C^u. \quad (2.8)$$

Apresentamos um esboço da demonstração desta proposição. Para uma demonstração completa indicamos o livro texto [2].

*Ideia da demonstração.* Pela compacidade de  $M$  e do fibrado tangente unitário de  $M$ , pode-se mostrar que existe uma constante  $\lambda' \in (0, 1)$  tal que

$$\|Df_x(v)\| \leq \lambda'\|v\| \text{ para } v \in C_x^s(\alpha) \text{ e } \|Df_x^{-1}(v)\| \leq \lambda'\|v\| \text{ para } v \in C_x^u(\alpha).$$

Em seguida mostra-se que para todo  $x \in M$ ,

$$E_x^s = \bigcap_{n \geq 0} Df_{f^n(x)}^{-n} C_{f^n(x)}^s(\alpha) \text{ e } E_x^u = \bigcap_{n \geq 0} Df_{f^{-n}(x)}^n C_{f^{-n}(x)}^u(\alpha)$$

satisfazem a definição de hiperbolicidade com constantes  $\lambda'$  e  $c = 1$ .  $\square$

Note que se  $f$  satisfaz as condições da Proposição 2.1 então difeomorfismos  $C^1$ -próximos de  $f$  também satisfarão condições análogas, pela proximidade das respectivas derivadas. Portanto, uma importante consequência da Proposição 2.1 é:

**Corolário 2.1.1.** *O conjunto  $\mathcal{A}$  dos difeomorfismos de Anosov é um subconjunto aberto de  $\text{Diff}^1(M)$ .*

Não é verdade que  $\mathcal{A}$  é não vazio para toda variedade  $M$ . Pelo contrário, as variedades que admitem difeomorfismo de Anosov são raras. Mas elas existem. Vamos dar um exemplo.

**Exemplo 2.1.** Denote por  $SL(n, \mathbb{Z})$  o grupo de matrizes formada por entradas inteiras e cujo determinante seja igual a 1. Seja  $A \in SL(n, \mathbb{Z})$  uma matriz hiperbólica, ou seja, que não possui autovalores cujo valor absoluto seja igual a 1.

Denote por  $E_0^u$  (respectivamente  $E_0^s$ ) a soma dos autoespaços que correspondem aos autovalores cujo módulo seja maior (respectivamente menor) que um. Então, claramente  $E_0^\sigma$  ( $\sigma = u, s$ ) é invariante por  $A$ ,  $\mathbb{R}^m = E_0^u \oplus E_0^s$  e existe  $C > 0$  tal que para todo  $n > 0$

$$\|A^n(v)\| \geq C\lambda^n \|v\| \text{ para } v \in E_0^s \text{ e}$$

$$\|A^{-n}(v)\| \geq C\lambda^n \|v\| \text{ para } v \in E_0^u.$$

Então  $A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é um difeomorfismo de Anosov.

## 2.2 Teoria local de difeomorfismos

Sejam  $M$  uma variedade diferenciável,  $f$  um difeomorfismo de classe  $C^r$  em  $M$ ,  $x \in M$  um ponto fixo hiperbólico para  $f$ ,  $U$  uma vizinhança de  $x$  em  $M$  e

$$h : U \rightarrow \tilde{U} \subset \mathbb{R}^m$$

um sistema de coordenadas locais tal que  $h(x) = 0$ .

Seja  $V$  uma vizinhança de  $x$  tal que  $f(V) \subset U$ . Considere a aplicação  $\tilde{f} = h \circ f \circ h^{-1}$  que é um difeomorfismo de  $\tilde{V} = h(V)$  em sua imagem.

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & U \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \tilde{V} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{U} \end{array}$$

Vejamos que  $0$  é ponto fixo hiperbólico de  $\tilde{f}$ . Como  $\tilde{f}(0) = h(f(h^{-1}(0))) = h(f(x)) = h(x) = 0$ ,  $0$  é ponto fixo. Pela regra da cadeia

$$D\tilde{f}(0) = Dh(f(h^{-1}(0))).Df(h^{-1}(0)).Dh^{-1}(0) = Dh(x).Df(x).Dh^{-1}(0).$$

Em termos de matrizes Jacobianas, concluímos que  $D\tilde{f}(0)$  e  $Df(x)$  são matrizes semelhantes e portanto  $0$  ser ponto fixo hiperbólico de  $\tilde{f}$  equivale a  $x$  ser ponto fixo hiperbólico de  $f$ .

Denota-se por  $E_0^u$  (respectivamente  $E_0^s$ ) a soma dos autoespaços associados aos autovalores de módulo maior (respectivamente menor) do que  $1$ . Então  $R^m = E_0^u \oplus E_0^s$  e esses subespaços são invariantes por  $Df'(0)$ .

No que se segue, considere o caso em que  $0 < u < n$  e, para simplificar a notação, tome  $\sigma = u$  ou  $\sigma = s$ .

Para  $l > 0$ , denote por  $E_0^\sigma(l)$  a bola fechada em  $E_0^\sigma$  e raio  $l$ .

Passando a um subconjunto se necessário, pode-se supor que  $\tilde{V} = E_0^u(l) \times E_0^s(l)$  e que  $\tilde{f}^{-1}$  também está definido em  $\tilde{V}$ .

Considere os seguintes conjuntos:

$$W_0^u(l) = \{\tilde{x} \in \tilde{V} \mid \tilde{f}^{-n}(\tilde{x}) \in \tilde{V}, \forall n \geq 0\}$$

e

$$W_0^s(l) = \{\tilde{x} \in \tilde{V} \mid \tilde{f}^n(\tilde{x}) \in \tilde{V}, \forall n \geq 0\}.$$

**Lema 2.2.** A função  $\tilde{f}^{-1}$  leva  $W_0^u(l)$  em si mesmo. Do mesmo modo  $\tilde{f}$  leva  $W_0^s(l)$  em si mesmo.

*Demonstração.* Dado  $\tilde{x} \in W_0^u(l)$ , então  $\tilde{x} \in \tilde{V}$  e  $\tilde{f}^{-k}(\tilde{x}) \in \tilde{V}$ , para todo  $k \geq 0$ . Em particular,  $\tilde{f}^{-n}(\tilde{f}^{-1}(\tilde{x})) \in \tilde{V}$  para todo  $n \geq 0$ , donde  $\tilde{f}^{-1}(\tilde{x}) \in \tilde{V}$ . Análogo para  $W_0^s(l)$ .  $\square$

**Lema 2.3.** Se  $l$  for suficientemente pequeno então  $W_0^\sigma$  é uma subvariedade  $C^r$  de  $\tilde{V}$  tangente a  $E_0^\sigma$  no ponto  $0$ .

A demonstração desse lema pode ser encontrada em [5] e [6].

**Definição 2.5.** Dado um ponto fixo hiperbólico  $x \in M$  por um difeomorfismo  $f : M \rightarrow M$  de classe  $C^r$  definimos a **variedade instável** por um ponto  $x$  pelo seguinte conjunto:

$$W_x^u = \{y \in M \mid f^{-j}(y) \rightarrow x \text{ quando } j \rightarrow \infty\}.$$

Nas mesmas condições definimos a **variedade instável** por um ponto  $x$  pelo conjunto:

$$W_x^s = \{y \in M \mid f^j(y) \rightarrow x \text{ quando } j \rightarrow \infty\}.$$

**Corolário 2.0.2** (Teorema da Variedade Instável).  $W_x^u$  é uma cópia imersa de  $\mathbb{R}^m$ , passando por  $x$  e tangente a  $E_x^u = Dh^{-1}(0)(E_0^u)$ .

O seguinte lema é conhecido como lema da inclinação ou  $\lambda$ -lema e diz que as imagens sucessivas de um disco apropriado transversal à variedade estável de um ponto fixo hiperbólico se acumulam (na topologia  $C^1$ ) na variedade instável desse ponto. Para enunciar esse resultado, considere um ponto fixo hiperbólico  $x$  de um difeomorfismo local de classe  $C^r$   $f : U \rightarrow M$ ,  $r \geq 1$ . Observe que existe uma vizinhança  $V \subset U$  de  $x$  e coordenadas  $C^r \psi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  tais que  $\psi(W_x^u \cap V) \subset \mathbb{R}^{m_0} \oplus \{0\}$  e  $\psi(W_x^s \cap V) \subset \{0\} \oplus \mathbb{R}^{m-m_0}$  chamadas de **coordenadas adaptadas**. Convenientemente vamos considerar a projeção na primeira coordenada  $\pi_1 : \mathbb{R}^{m_0} \oplus \mathbb{R}^{m-m_0} \rightarrow \mathbb{R}^{m_0}$ .

**Lema 2.4.** ( $\lambda$ -Lema) Consideremos coordenadas adaptadas  $C^r$  numa vizinhança  $V$  de  $x$ . Dados  $\epsilon, K, \eta > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que se  $\mathcal{D}$  é um disco  $C^1$  contendo  $y \in W_x^s \cap V$  com todos os espaços tangentes em cones- $K$  horizontais e tal que  $\pi_1(\mathcal{D})$  contém uma bola- $\eta$  em torno de  $0 \in \mathbb{R}^{m_0} \oplus \{0\}$  e  $n \geq n_0$  então  $\pi_1(f^n(\mathcal{D})) = W_x^u \cap V$  e  $T_z f^n(\mathcal{D})$  está contido num cone- $\epsilon$  horizontal para todo  $z \in f^n(\mathcal{D})$ .

A demonstração desse lema pode ser vista em [7].

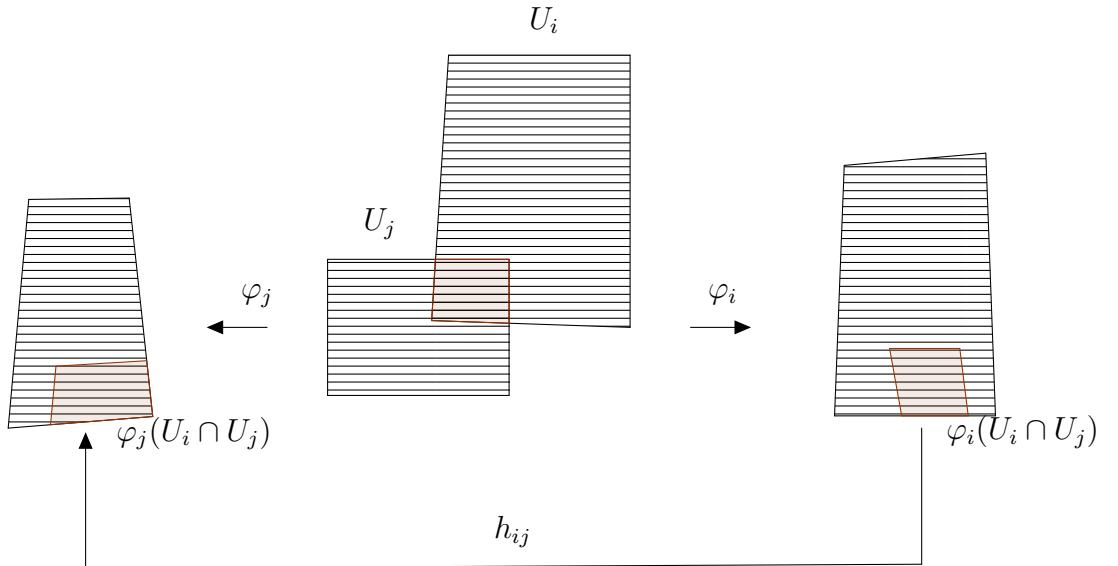
## 2.3 Folheações

Difeomorfismos de Anosov estão sempre acompanhados de duas folheações, chamadas de folheações estáveis e instáveis. O estudo dessas folheações é muito importante para entender o difeomorfismo de Anosov.

Seja  $M$  uma variedade diferenciável de dimensão  $m$  e classe  $C^\infty$ .

**Definição 2.6.** Uma folheação  $\mathcal{F}$  de  $M$  de classe  $C^r$  e codimensão  $p$  (dimensão  $q$ ) é uma coleção de cartas locais  $\varphi_i : U_i \subset M \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $i \in I$  tal que:

1.  $\bigcup_{i \in I} U_i = M$
2. Se  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , as mudanças de coordenadas  $h_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$  tem a forma  $h_{ij}(x, y) = (h^1(x, y), h^2(y))$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^{m-p} \times \mathbb{R}^p$  e são de classe  $C^r$ .



As componentes conexas de  $\varphi_i^{-1}(x, y_0)$ ,  $y_0 = \text{constante}$ , são denominadas **placas** de  $U_i$ . Elas são subvariedades mergulhadas de  $U_i$  de codimensão  $p$ . A condição 2 da Definição 2.6 expressa que se  $\alpha_i \subset U_i$ ,  $\beta_j \subset U_j$  são placas então ou  $\alpha_i \cap \beta_j = \emptyset$  ou  $\alpha_i \cap \beta_j$  é aberto em  $\alpha_i$  e  $\beta_j$ .

Se  $\pi_2 : \mathbb{R}^{n-p} \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  é a projeção  $\pi_2(x, y) = y$ , definimos  $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^p$  por  $f_i = \pi_2 \circ \varphi_i$ . As placas de  $U_i$  são então as componentes conexas de  $f_i^{-1}(y_0)$ ,  $y_0 \in \mathbb{R}^p$ .

No caso em que  $r \geq 1$  podemos tomar a seguinte definição equivalente:

**Definição 2.7.** Uma **folheação**  $\mathcal{F}$  de codimensão  $p$  e classe  $C^r$  está definida por uma coleção de submersões  $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^p$ ,  $i \in I$  tais que:

1. Para todo  $i \in I$ ,  $U_i$  é aberto em  $M$  e  $\bigcup_{i \in I} U_i = M$ .
2. Se  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , existem homeomorfismos de classe  $C^r$ ,  $g_{ij} : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^p$  tais que  $f_j = g_{ij} \circ f_i$  nos pontos de  $U_i \cap U_j$ .

As aplicações  $f_i$  são denominadas **aplicações distinguidas** da folheação e as subvariedades  $f_i^{-1}(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^p$ , placas de  $U_i$ .

Uma **folha** de  $\mathcal{F}$  é um subconjunto conexo que é união maximal de placas de  $\mathcal{F}$ . Isto é, se  $F$  é uma folha e  $\alpha$  é uma placa com  $\alpha \cap F \neq \emptyset$  então  $\alpha \subset F$ .

Considere uma  $C^r$ -folheação  $\mathcal{F}$  de dimensão  $p$  de uma variedade  $M$ . Em cada ponto  $x \in M$ , o espaço tangente da folha passando por  $x$  é um subespaço do espaço tangente  $T_x M$ . Eles definem um subfibrado de  $TM$  de dimensão  $p$  chamado de **fibrado tangente de  $\mathcal{F}$**  e denotado por  $T\mathcal{F}$ .

De modo geral, não é verdade que um subfibrado  $E$  de  $TM$  é um fibrado tangente a uma folheação. Dizemos que  $E$  é **integrável** se ele for um fibrado tangente a uma folheação.

O seguinte resultado sobre integrabilidade de subfibrados é de grande importância em sistemas hiperbólicos, sua demonstração é altamente técnica e utiliza argumentos matemáticos que não serão apresentadas nesse trabalho. Uma prova formal pode ser encontrada em [5]. Veja também [1].

**Teorema 2.1.** *Para  $\sigma = u, s$ ,  $E^\sigma$  é integrável.*

**Definição 2.8.** *Suponhamos que  $f : M \rightarrow M$  seja um difeomorfismo de Anosov. Dizemos que o fibrado instável  $E^+$  é **orientável** se for possível atribuir um sinal a cada referencial num subespaço instável  $E_x^+$  de tal forma que esse sinal seja constante quando movemos o referencial continuamente.*

**Definição 2.9.** *A folheação  $W^s$  tangente à  $E^s$  é chamada **folheação estável** e a folheação  $W^u$  tangente à  $E^u$  é chamada **folheação instável** do difeomorfismo de Anosov  $f$ . A folha passando por um ponto  $x$  da folheação  $W^\sigma$  é denotada por  $W_x^\sigma$ ,  $\sigma = s, u$ .*

A  $Df$ -invariância do fibrado tangente  $E^\sigma$  e a unicidade da folheação tangente a  $E^\sigma$  implica na seguinte proposição.

**Proposição 2.2.** *A folheação  $W^\sigma$  é  $f$ -invariante. Precisamente, tem-se que  $f(W_x^\sigma) = W_{f(x)}^\sigma$ .*

O próximo teorema fala sobre a suavidade da folheação  $W^\sigma$ . Veja a prova em [5]. Note que, de acordo com a definição de folheações, mesmo que uma folheação tenha todas as folhas suaves isso não implica que a folheação seja suave.

**Teorema 2.2.** *A folheação  $W^\sigma$  é uma folheação contínua por folhas  $C^r$ . A folha depende continuamente de  $x$  na topologia  $C^r$ .*

De agora em diante, usaremos a métrica riemanniana do Lema 2.1. Pela compacidade de  $M$ , temos que para algum  $0 < \lambda < 1$

$$\|Df(v)\| \leq \lambda \|v\|, \text{ para } v \in E^s \quad (2.9)$$

$$\|Df^{-1}(v)\| \leq \lambda \|v\|, \text{ para } v \in E^u. \quad (2.10)$$

Podemos também tomar uma norma que provém de um produto interno onde  $E^s$  e  $E^u$  sejam ortogonais.

Denote por  $d^\sigma$  a distância intrínseca na folha  $W^\sigma$  induzida pela métrica riemanniana. Temos o seguinte lema.

**Lema 2.5.** *Para todo ponto  $y \in W_x^s$  tem-se*

$$d^s(f(x), f(y)) \leq d^s(x, y).$$

*Para todo ponto  $y \in W_x^u$  tem-se*

$$d^u(f^{-1}(x), f^{-1}(y)) \leq d^u(x, y).$$

*Demonstração.* De acordo com (1.4) e (1.5) temos

$$\begin{aligned} d^s(f(x), f(y)) &= \inf_{\beta \in C_{f(x), f(y)}^1} \left\{ \int_a^b \|\beta'(t)\| dt \right\} = \inf \left\{ \int_a^b \|(f \circ \alpha)'(t)\| dt \right\} = \\ &= \inf \left\{ \int_a^b \|Df(\alpha'(t))\| dt \right\} \end{aligned}$$

Note que sendo  $\beta$  um caminho em  $W_{f(x)}^s$  ligando  $f(x)$  a  $f(y)$ , temos que  $\alpha = f^{-1} \circ \beta$  é um caminho em  $W_x^s$  ligando  $x$  a  $y$  e que  $\alpha'(t) \in E_{\alpha(t)}^s$  para todo  $t$ . De (2.9) temos que  $\|Df(\alpha'(t))\| \leq \lambda \|\alpha'(t)\|$ , logo

$$\inf \left\{ \int_a^b \|Df(\alpha'(t))\| dt \right\} \leq \inf \left\{ \int_a^b \lambda \|\alpha'(t)\| dt \right\} = \lambda \inf \left\{ \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt \right\} = \lambda d^s(x, y).$$

Análogo para  $y \in W_x^u$ . □

Como consequência temos

$$f(W_x^s(\epsilon)) \subset W_{f(x)}^s(\lambda\epsilon) \text{ e} \quad (2.11)$$

$$f^{-1}(W_x^u(\epsilon)) \subset W_{f^{-1}(x)}^u(\lambda\epsilon). \quad (2.12)$$

Vejamos que vale (2.11). Seja  $y \in W_x^s(\epsilon)$ . Então por (2.9) e pelo Lema 2.5 temos

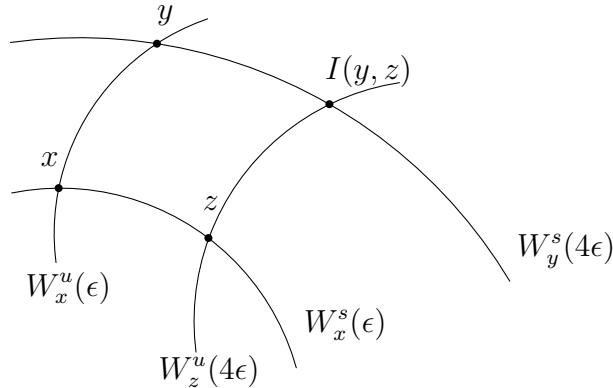
$$\epsilon > d^s(y, x) \geq \frac{1}{\lambda} d^s(f(x), f(y))$$

Portanto  $f(y) \in W_{f(x)}^s$  e  $d^s(f(x), f(y)) < \lambda\epsilon$ , ou seja  $f(y) \in W_{f(x)}^s(\lambda\epsilon)$ . De maneira análoga mostra-se que vale (2.12).

As folheações estáveis e instáveis são ortogonais e possuem dimensões complementares. Portanto elas dão uma estrutura de produto local na variedade. Isso mostra o lema seguinte.

**Lema 2.6.** *Existe  $\epsilon_0 > 0$  tal que para todo  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  e para todos  $x, y$  que distam menos que  $\epsilon$ , os conjuntos  $W_y^s(2\epsilon)$  e  $W_x^u(2\epsilon)$  se intersectam exatamente em um ponto.*

Escolha  $2\epsilon < \epsilon_0$ . Seja  $x \in M$  um ponto arbitrário. Então para todo  $y \in W_x^u(\epsilon)$  e  $z \in W_x^s(\epsilon)$ , tem-se que  $d(y, z) < 2\epsilon$  e como consequência do Lema 2.6 tem-se que  $W_y^s(4\epsilon)$  e  $W_z^u(4\epsilon)$  se intersectam em um único ponto, digamos  $I(y, z)$ .



**Definição 2.10.** *O conjunto*

$$R_x(\epsilon) = \{I(y, z) \mid y \in W_x^u(\epsilon), z \in W_x^s(\epsilon)\}$$

*é chamado de **retângulo em**  $x$  de raio  $\epsilon$ .*

A restrição da folheação  $W^\sigma$  ao retângulo  $R_x(\epsilon)$  é uma folheação trivial. Todas as folhas são difeomorfas a  $W_x^\sigma(\epsilon)$ .  $R_x(\epsilon)$  é homeomorfo a  $W_x^u(\epsilon) \times W_x^s(\epsilon)$ . Para todo ponto  $y \in R_x(\epsilon)$ , a folha de  $W^\sigma$  passando por  $y$  restrita a  $R_x(\epsilon)$  é denotada por  $R_x(\epsilon)_y^\sigma$ . O lema seguinte decorre diretamente da definição.

**Lema 2.7.** *Existe  $\epsilon_1 > 0$  tal que para todo  $0 < \epsilon < \epsilon_1$ ,  $x \in M$ ,  $y \in W_x^s(\epsilon)$  e  $z \in W_x^u(\epsilon)$ , tem-se*

$$W_z^s(\lambda^{1/2}\epsilon) \subset R_x(\epsilon)_z^s \subset W_z^s(\lambda^{-1/2}\epsilon) \text{ e}$$

$$W_y^u(\lambda^{1/2}\epsilon) \subset R_x(\epsilon)_y^u \subset W_y^u(\lambda^{-1/2}\epsilon).$$

De agora em diante, nessa seção, tomemos  $\epsilon$  tal que

$$\epsilon < \min\{\epsilon_0/2, \epsilon_1\} \quad (2.13)$$

A seguir vamos comparar  $f(R_x(\epsilon))$  com  $R_{f(x)}(\epsilon)$ . A proposição seguinte decorre de (2.11) e (2.12) e do Lema 2.7.

**Proposição 2.3.** *Para todo  $y \in R_x(\epsilon) \cap f^{-1}(R_{f(x)}(\epsilon))$ , tem-se*

$$R_{f(x)}(\epsilon)_{f(y)}^u \subset f(R_x(\epsilon)_y^u) \text{ e} \quad (2.14)$$

$$R_x(\epsilon)_y^s \subset f^{-1}(R_{f(x)}(\epsilon)_{f(y)}^s). \quad (2.15)$$

*Demonstração.* Note que para mostrar (2.14) basta considerar o caso em que  $y \in W_x^s(\epsilon)$ . De (2.12) segue que

$$W_x^u(\epsilon) \subset f(W_{f^{-1}(x)}^u(\lambda\epsilon))$$

Pelo Lema 2.7 temos

$$R_{f(x)}(\epsilon)_{f(y)}^u \subset W_{f(y)}^u(\lambda^{-1/2}\epsilon) \subset f(W_y^u(\lambda^{1/2}\epsilon)) \subset f(R_x(\epsilon)_y^u).$$

□

Agora, considere a seguinte sequência decrescente de subconjuntos.

$$R_x(\epsilon) \supset R_x(\epsilon) \cap f(R_{f^{-1}(x)}(\epsilon)) \supset R_x(\epsilon) \cap f(R_{f^{-1}(x)}(\epsilon)) \cap f^2(R_{f^{-2}(x)}(\epsilon)) \supset \dots$$

Então, o retângulo vai ficando cada vez mais fino na direção de  $W^s$  até que no limite coincide com  $W_x^u(\epsilon)$ .

Considere também a seguinte sequência decrescente

$$R_x(\epsilon) \supset R_x(\epsilon) \cap f^{-1}(R_{f(x)}(\epsilon)) \supset R_x(\epsilon) \cap f^{-1}(R_{f(x)}(\epsilon)) \cap f^{-2}(R_{f^2(x)}(\epsilon)) \supset \dots.$$

A partir desses resultados pode-se escrever a seguinte proposição.

**Proposição 2.4.** *Tem-se*

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(R_{f^{-n}(x)}(\epsilon)) = W_x^u(\epsilon), \quad (2.16)$$

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(R_{f^n(x)}(\epsilon)) = W_x^s(\epsilon) \text{ e} \quad (2.17)$$

$$\bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^{-n}(R_{f^n(x)}(\epsilon)) = \{x\}. \quad (2.18)$$

**Proposição 2.5.** *As folheações  $W^u$  e  $W^s$  são caracterizadas respectivamente por*

$$W_x^u = \{y \in M \mid d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty\} \text{ e}$$

$$W_x^s = \{y \in M \mid d(f^n(x), f^n(y)) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

*Demonstração.* Vamos verificar somente o caso de  $W^u$ . Tome  $y \in W_x^u$ . Então pelo Lema 2.5 quando  $n \rightarrow \infty$  temos

$$d^u(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \rightarrow 0.$$

Desde que  $d^u(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \geq d(f^{-n}(x), f^{-n}(y))$  tem-se

$$d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \rightarrow 0.$$

Por outro lado, suponha que  $y$  satisfaz  $d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) \rightarrow 0$ . Vamos mostrar que  $y \in W_x^u$ . Existe  $n_0$  tal que para  $n \geq n_0$  tem-se  $f^{-n}(y) \in R_x(\epsilon)$ . De acordo com a Proposição 2.2 a folheação  $W^u$  é  $f$ -invariante e logo  $y \in W_x^u$  se e somente se  $f^{-n_0}(y) \in W_{f^{-n_0}(x)}^u$ . Por simplicidade pode-se substituir  $f^{-n_0}(x)$  por  $x$  e  $f^{-n_0}(y)$  por  $y$  e conclui-se que

$$y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(R_{f^{-n}(x)}(\epsilon)).$$

Portanto, segue da Proposição 2.4 que  $y \in W_x^u$ . □

## 2.4 Estabilidade estrutural

Os difeomorfismos de Anosov satisfazem algumas propriedades notáveis. Dentre elas está a estabilidade estrutural, isto é, qualquer pequena perturbação de  $f$  tem a mesma estrutura topológica de  $f$ . Precisamente

**Definição 2.11.** Para  $r \geq 0$ , duas transformações de classe  $C^r$ ,  $f : M_1 \rightarrow M_1$  e  $g : M_2 \rightarrow M_2$  são **topologicamente conjugadas** se existir um homeomorfismo  $h : M_1 \rightarrow M_2$  tal que  $f = h^{-1} \circ g \circ h$ .

**Definição 2.12.** Uma transformação  $g : M_2 \rightarrow M_2$  é um **fator** (ou fator topológico) de  $f : M_1 \rightarrow M_1$  se existir uma transformação contínua sobrejetora  $h : M_1 \rightarrow M_2$  tal que  $h \circ f = g \circ h$ . Neste caso a transformação  $h$  é chamada de **semiconjugação**.

**Teorema 2.3** (Teorema da Estabilidade Estrutural). Seja  $f$  um difeomorfismo de Anosov em uma variedade fechada  $M$ . Então existe uma vizinhança  $\mathcal{M}$  de  $f$  em  $\text{Diff}^1(M)$  tal que todo  $g \in \mathcal{M}$  é topologicamente conjugado a  $f$ .

O propósito dessa seção é demonstrar esse teorema. Para isso vamos apresentar alguns conceitos que serão úteis.

**Definição 2.13.** Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico,  $U \subset M$  um aberto,  $f : U \rightarrow X$  um homeomorfismo e  $\epsilon, \delta > 0$ . Para  $a \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$  e  $b \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ , uma sequência  $\{x_n\}_{a < n < b} \subset U$  diz-se uma  **$\delta$ -pseudo órbita** para  $f$  se  $d(f(x_n), x_{n+1}) < \delta$  para todo  $a < n < b$ .

Se  $x_b = x_a$  dizemos que a sucessão é uma ou  **$\delta$ -pseudo órbita periódica**

A sequência é dita uma **pseudo órbita  $\epsilon$ -sombreada** por um ponto  $y \in U$  se tivermos

$$d(f^n(y), x_n) < \epsilon$$

para todo  $a < n < b$ .

A função  $f$  é dita ter uma **propriedade de sombreamento de pseudo órbita** (*shadowing*) se para todo  $\epsilon > 0$  existir  $\delta > 0$  tal que toda  $\delta$ -pseudo órbita é  $\epsilon$ -sombreada por algum ponto.

**Definição 2.14.** Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico,  $U \subset X$  um aberto,  $f : U \rightarrow X$  um homeomorfismo.  $f$  é dita **expansiva** (ou  **$\epsilon$ -expansiva por precisão**) se existe  $\epsilon > 0$  tal que

para todos  $x \neq y \in X$  existe um  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \epsilon$ . Equivalentemente, se  $d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon$  para todo  $n$  então  $x = y$ . O número  $\epsilon$  é chamado de constante de expansão.

De agora em diante considere  $f$  um difeomorfismo de Anosov em uma variedade fechada  $M$ , isto é,  $M$  é compacta e sem bordo.

**Lema 2.8.** *Dado  $\epsilon$  satisfazendo (2.13), existe  $\delta > 0$  com a seguinte propriedade: Se  $d(f(x_0), x_1) < \delta$ , então para todo  $y \in R_{x_0}(\epsilon) \cap f^{-1}(R_{x_1}(\epsilon))$ , temos*

$$R_{x_1}(\epsilon)_{f(y)}^u \subset f(R_{x_0}(\epsilon)_y^u) \text{ e} \quad (2.19)$$

$$R_{x_0}(\epsilon)_y^s \subset f^{-1}(R_{x_1}(\epsilon)_{f(y)}^s). \quad (2.20)$$

*Demonastração.* Note que com essas hipóteses vale a Proposição 2.3. É claro que em vez de  $x$  e  $f(x)$  pode-se tomar um ponto  $x_1$  próximo de  $f(x)$  e a relação entre  $f(R_x(\epsilon))$  e  $R_{x_1}(\epsilon)$  é semelhante à relação entre  $f(R_x(\epsilon))$  e  $R_{f(x)}(\epsilon)$ . Denotando  $x$  por  $x_0$  prova-se esse resultado.  $\square$

**Lema 2.9.**  *$f$  possui propriedade de sombreamento de pseudo órbita.*

*Demonastração.* Dado  $\epsilon > 0$ , devemos encontrar  $\delta > 0$  tal que toda  $\delta$ -pseudo órbita seja  $\epsilon$ -sombreada. Primeiramente, note que devemos considerar somente o caso em que  $\epsilon$  seja suficientemente pequeno. Portanto, pode-se assumir que  $\epsilon$  satisfaz as hipóteses de (2.13). Então o resultado segue diretamente do Lema 2.8.  $\square$

Agora, seja  $\{x_n\}_{n=-\infty}^\infty$  uma  $\delta$ -pseudo órbita. Então  $d(f(x_{n-1}), x_n) < \delta$  e a relação entre  $f(R_{x_{n-1}}(\epsilon))$  e  $R_{x_n}(\epsilon)$  é como no Lema 2.8.

A propriedade de contração do difeomorfismo de Anosov mostra claramente a seguinte generalização da Proposição 2.4.

$$\text{Existe } y^* \in R_{x_0}(\epsilon) \text{ tal que } \bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(R_{x_{-n}}(\epsilon)) = R_{x_0}(\epsilon)_{y^*}^u. \quad (2.21)$$

$$\text{Existe } y^{**} \in R_{x_0}(\epsilon) \text{ tal que } \bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(R_{x_n}(\epsilon)) = R_{x_0}(\epsilon)_{y^{**}}^s. \quad (2.22)$$

$$\text{Existe } y \in R_{x_0}(\epsilon) \text{ tal que } \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^{-n}(R_{x_n}(\epsilon)) = R_{x_0}(\epsilon)_{y^*}^u \cap R_{x_0}(\epsilon)_{y^{**}}^s = \{y\}. \quad (2.23)$$

A relação (2.23) mostra que  $y$   $\delta$ -sobreia a pseudo órbita  $\{x_n\}$ .

**Lema 2.10.** *Existe uma vizinhança  $C^1$   $\mathcal{M}$  de  $f$  e uma constante  $\epsilon > 0$  tal que todo difeomorfismo em  $\mathcal{M}$  é  $\epsilon$ -expansivo.*

*Demonstração.* Por (2.18) da Proposição 2.4 é claro que  $f$  é expansiva em si mesma com constante de expansão igual ao mínimo entre os tamanhos de certos retângulos cobrindo  $M$ .

A fim de mostrar a uniformidade local da constante de expansividade, apenas note que o tamanho dos retângulos podem ser escolhidos pequenos semi-contínuo inferiormente sobre o difeomorfismo na topologia  $C^1$ .  $\square$

Agora temos condições de demonstrar o Teorema 2.3.

#### *Demonstração do Teorema 2.3*

Dado  $\epsilon > 0$  vamos definir uma  $C^1$ -vizinhança  $\mathcal{M}$  tal que todo difeomorfismo  $g$  em  $\mathcal{M}$  seja conjugado a  $f$  por um homeomorfismo  $h$ ,  $\epsilon$ -próximo à identidade.

Seja  $\mathcal{M}_1$  uma vizinhança de  $f$  tal que todo difeomorfismo  $g$  em  $\mathcal{M}_1$  seja  $2\epsilon$ -expansivo (Lema 2.10). Como  $f$  é de Anosov, pelo Lema 2.9  $f$  possui propriedade de sombreamento de pseudo-órbita. Logo, existe  $\delta > 0$  tal que toda  $\delta$ -pseudo órbita é  $\epsilon$ -sombreada.

Seja  $\mathcal{M}_2$  uma vizinhança  $C^0$  de  $f$  contendo todos os difeomorfismos  $g$  tais que  $d(f(x), f(y)) < \delta$ , para todo  $x \in \mathcal{M}$ .

Vamos mostrar que  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$  satisfaz as condições do teorema.

Seja  $g$  um difeomorfismo arbitrário em  $\mathcal{M}$ . Então para todo  $x \in \mathcal{M}$  a sequência  $\{g^n(x)\}$  é uma  $\delta$ -pseudo órbita para  $f$ . Portanto essa sequência é  $\epsilon$ -sombreada por algum ponto, digamos  $h(x)$ . Note que tal ponto é único, já que  $f$  é  $2\epsilon$ -expansiva.

Vejamos que  $d(f^n(f(h(x)), f^n(h(g(x)))) < 2\epsilon$ . Como  $\{g^n\}$  é  $\epsilon$ -sombreada por  $h(x)$  temos que para todo  $n \in \mathbb{N}$   $d(f^n(h(x)), g^n(x)) < \epsilon$ . Agora,  $d(f^n(f(h(x)), f^n(h(g(x)))) \leq d(f^n(f(h(x)), g^n(x)) + d(g^n(x), f^n(h(g(x)))) < 2\epsilon$ .

A unicidade também mostra a igualdade  $f \circ h = h \circ g$ .

Note que a aplicação  $h : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  está  $\epsilon$ -próximo à identidade (pois  $h(x)$  está  $\epsilon$ -próximo de  $x$ ).

Vamos mostrar a continuidade de  $h$ . (O difeomorfismo  $g$  já está fixado). Suponha  $y$  muito próximo de  $x$ . Para  $a > 0$  suficientemente grande  $g^n(y)$  e  $g^n(x)$  estão mutuamente próximos para  $-a \leq n \leq a$ . Agora,  $h(x) \in \bigcap_{n=-a}^a f^{-n}(R_{g^n(x)}(\epsilon))$  e  $h(y) \in \bigcap_{n=-a}^a f^{-n}(R_{g^n(y)}(\epsilon))$  e o diâmetro de  $[f^{-n}(R_{g^n(x)}(\epsilon))] \cup [f^{-n}(R_{g^n(y)}(\epsilon))]$  é muito pequeno.

Finalmente, devemos mostrar que  $h$  é injetora. Suponha  $h(x) = h(y)$ , isto é, duas sequências  $\{g^n(x)\}$  e  $\{g^n(y)\}$  são  $\epsilon$ -sombreadas pelo mesmo ponto. Então temos  $d(g^n(x), g^n(y)) < 2\epsilon$ . Como  $g$  é  $2\epsilon$ -expansiva segue que  $x = y$ .

Vejamos que  $h$  é sobrejetora. O teorema da invariância do domínio afirma que se  $N_1$  e  $N_2$  são variedades topológicas sem bordo de mesma dimensão finita e  $\tilde{h} : N_1 \rightarrow N_2$  é uma aplicação

contínua e localmente injetora então  $\tilde{h}$  é uma aplicação aberta. No nosso caso, como  $M$  é compacta  $h(M)$  é compacta e portanto fechada, sendo  $M$  conexa concluímos que  $h(M) = M$ .  $\square$

## 2.5 Transitivity dos difeomorfismos de Anosov

**Definição 2.15.** Seja  $f$  um homeomorfismo no espaço métrico completo  $X$ . Um ponto  $x \in X$  é chamado de **não errante** se para toda vizinhança  $U$  de  $x$  existir um inteiro  $n > 0$  tal que  $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$ . Ou seja, existe um ponto  $y \in U$  com  $f^n(y) \in U$ . O conjunto de todos os pontos não errantes por  $f$  é chamado de **conjunto não errante** de  $f$  e será denotado por  $\Omega(f)$ .

Um ponto periódico é um exemplo de ponto não errante.

**Proposição 2.6.** O conjunto não errante  $\Omega(f)$  é fechado e invariante por  $f$ , mais ainda,  $f(\Omega(f)) = \Omega(f)$ .

*Demonstração.* •  $\Omega(f)$  é fechado

Seja  $x \in (\Omega(f))^c$ . Então existe uma vizinhança  $U_0$  de  $x$  tal que  $U_0 \cap f^n(U_0) = \emptyset$  para todo  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Note que  $U_0 \subset (\Omega(f))^c$ . De fato, se  $y \in U_0$  é tal que  $y \in \Omega(f)$  então, como  $U_0$  é vizinhança de  $y$ , deveríamos ter que  $U_0 \cap f^n(U_0) \neq \emptyset$ , para algum  $n \in \mathbb{N}$ , o que seria um absurdo. Isso prova que  $(\Omega(f))^c$  é aberto, ou seja,  $\Omega(f)$  é fechado.

•  $\Omega(f)$  é invariante por  $f$

Seja  $x \in \Omega(f)$ . Seja  $V$  uma vizinhança de  $f(x)$ . Então  $f^{-1}(V)$  é uma vizinhança de  $x$ . Como  $x \in \Omega(f)$  existe um inteiro  $n \neq 0$  tal que  $f^{-1}(V) \cap f^n(f^{-1}(V)) \neq \emptyset$ . Logo  $f^{-1}(V) \cap f^{n-1}(V) \neq \emptyset$  e como  $f$  é homeomorfismo  $V \cap f^n(V) \neq \emptyset$ . Portanto  $f(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$ .

Por outro lado, se  $x \in \Omega(f)$  então para toda vizinhança  $U$  de  $x$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $U \cap f^n(U) \neq \emptyset$ . Logo,  $f(U) \cap f^{n+1}(U) \neq \emptyset$ , ou seja,  $x \in f(\Omega(f))$ .  $\square$

**Proposição 2.7.** O conjunto  $\Omega(f)$  contém os  $\alpha$  e  $\omega$ -limite de todos os pontos.

*Demonstração.* Seja  $x = \lim_{n_k \rightarrow \infty} f^{n_k}(y) \in U$  com  $U$  aberto. Suponhamos que  $n_k$  é uma sequência crescente. Então  $f^{n_k}(y) \in U$  para  $k$  suficientemente grande e  $f^{n_{k+1}}(y) \in U$  pelo que  $U \cap f^{n_{k+1}-n_k}(U) \neq \emptyset$ . O argumento para os pontos  $\alpha$ -limite é completamente análogo.  $\square$

Uma vez que para todo  $x \in X$  o conjunto  $\omega$ -limite é não-vazio, sempre que  $X$  é compacto, temos:

**Corolário 2.7.1.** *Se  $X$  é compacto e  $f : X \rightarrow X$  é um homeomorfismo então  $\Omega(f) \neq \emptyset$ .*

Qualquer ponto fora de  $\Omega(f)$  não pode voltar muito próximo de si mesmo, o que torna a dinâmica simples. Por outro lado a dinâmica dentro de  $\Omega(f)$  pode ser extremamente complicada.

O Lema 2.11 dá um exemplo de pontos não errantes.

**Definição 2.16.** *Seja  $(X, d)$  um espaço métrico e  $f : X \rightarrow X$  um homeomorfismo. O ponto  $x \in X$  é dito **homoclínico** ao ponto  $y \in X$  se*

$$\lim_{|n| \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0$$

É dito **heteroclínico** aos pontos  $y_1, y_2 \in X$  se

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(f^n(x), f^n(y_1)) = \lim_{n \rightarrow -\infty} d(f^n(x), f^n(y_2)) = 0$$

Se  $M$  for uma variedade diferenciável e  $y \in M$  é um ponto periódico hiperbólico para  $f \in \text{Diff}^1(M)$  então dizemos que  $x \in M$  é um ponto **homoclínico transverso** se  $x$  é um ponto de interseção transversal entre as variedades instável e estável de  $y$ .

De agora em diante, nessa seção, considere  $f$  um difeomorfismo de Anosov numa variedade fechada  $M$ .

**Lema 2.11.** *Seja  $y$  um ponto periódico e  $x$  um ponto homoclínico transverso, ou seja,  $x \in W_y^u \cap W_y^s$ . Então  $x$  é um ponto não errante.*

*Demonstração.* Por simplicidade, pode-se assumir que  $y$  é um ponto fixo. Para  $\epsilon > 0$  arbitrariamente pequeno, considere o retângulo  $R_x(\epsilon)$ . Pelas iteradas  $f^n(n > 0)$ , a folha instável  $W_x^u(\epsilon)$  será esticada até ser uma grande bola nas folhas instáveis. Por outro lado nós temos  $f^n(x) \rightarrow y$  quando  $n \rightarrow \infty$  pois  $x$  está em  $W_y^s$ . Isso mostra que  $f^n(W_x^u(\epsilon))$  aproxima-se de  $W_y^u$ .

Em particular, para  $n$  suficientemente grande o conjunto  $f^n(W_x^u(\epsilon))$  intersecta o retângulo  $R_x(\epsilon)$  mostrando que  $x$  é um ponto não errante.  $\square$

**Teorema 2.4.**  *$\Omega(f)$  coincide com o fecho do conjunto de todos os pontos periódicos.*

*Demonstração.* Tudo o que precisamos mostrar é que pontos periódicos são densos em  $\Omega(f)$ .

Tome  $x \in \Omega(f)$  arbitrário e  $\epsilon > 0$  como em (2.13). Vamos mostrar que existe um ponto periódico no retângulo  $R_x(\epsilon)$ . Dado  $\delta > 0$  existe um ponto  $y$   $\delta$ -próximo a  $x$  tal que  $f^n(y)$  também está  $\delta$ -próximo a  $y$ , para algum  $n > 0$ .

Além disto, observe que para  $z \in R_x(\epsilon) \cap f^{-n}(R_x(\epsilon))$

$$R_x(\epsilon)_{f^n(z)}^u \subset f^n(R_x(\epsilon)_z^u),$$

$$R_x(\epsilon)_z^s \subset f^{-n}(R_x(\epsilon)_{f^n(z)}^u).$$

O quociente  $\mathcal{Q}$  de  $R_x(\epsilon)$  pela folheação instável é homeomorfo a uma bola aberta em  $\mathbb{R}^m$  e pela propriedade acima obtemos uma aplicação de  $\mathcal{Q}$  em si mesma. Esta aplicação é uma contração e possui um ponto fixo. Vamos denotar por  $F$  a folha em  $R_x(\epsilon)$  da folheação instável que corresponde a este ponto fixo. Então temos que  $f^{-n}$  é uma contração de  $F$  portanto temos um ponto fixo por  $f^n$  (é  $n$ -periódico).  $\square$

**Corolário 2.4.1.** *Um difeomorfismo de Anosov admite pontos periódicos.*

Para demonstrar o Teorema 2.5 vamos utilizar os seguintes resultados.

**Lema 2.12.** *Suponha que pontos periódicos são densos em  $M$ . Seja  $X \subset M$  satisfazendo as seguintes condições*

1.  $X$  é um subconjunto não vazio e fechado;
2.  $X$  é uma união de folhas da folheação  $W^\sigma$ ;
3.  $X$  é invariante por  $f^n$  para algum  $n > 0$ .

Então  $X = M$ .

*Demonstração.* Façamos o caso em que  $\sigma = u$ .

Como  $M$  é conexa, o único subconjunto aberto e fechado não vazio de  $M$  é o próprio  $M$ . Então é suficiente mostrar que  $X$  é aberto.

Tome um ponto  $x \in X$ ,  $\epsilon > 0$  pequeno e considere o retângulo  $R_x(\epsilon)$ .

Como os pontos periódicos são densos em  $M$ , precisamos apenas mostrar que todo ponto periódico  $z \in R_x(\epsilon)$  pertence a  $X$  (pois  $X$  é fechado).

Considere um ponto

$$y \in R_x(\epsilon)_x^u \cap R_x(\epsilon)_z^s.$$

Pelo item 2 temos que  $y \in X \cap W_z^s$ .

Seja  $n_0$  um múltiplo comum entre  $n$  e o período de  $z$ . Então  $X$  e  $W_z^s$  são invariantes por  $f^{n_0}$ . Agora, se  $y \in W_z^s$ , a sequência  $\{f^{in_0}(y)\}$  aproxima-se de  $z$  quando  $i \rightarrow \infty$ . Como  $f^{in_0}(y) \in X$  temos que  $z$  está contido no conjunto fechado  $X$ .  $\square$

**Teorema 2.5.** *As cinco afirmações seguintes são equivalentes:*

1.  $\Omega(f) = M$ .
2. Pontos periódicos são densos em  $M$ .
3.  $f$  é transitivo.
4. Todas as folhas da folheação instável  $W^u$  são densas em  $M$ .
5. Todas as folhas da folheação estável  $W^s$  são densas em  $M$ .

*Demonstração.*

$1 \Rightarrow 2$  Pelo Teorema 2.4 se  $P \subset M$  é o conjunto dos pontos periódicos então  $\overline{P} = \Omega(f)$ . Se  $\Omega(f) = M$  então  $\overline{P} = M$ , ou seja,  $P$  é denso em  $M$ .

$2 \Rightarrow 4$  Assumindo que os pontos periódicos são densos em  $M$  vamos mostrar que para todo  $x$ ,  $W_x^u$  é denso em  $M$ .

Seja  $Y = \overline{W_x^u}$  para  $x$  arbitrário. Então  $Y$  é uma união de folhas instáveis.

Sejam

$$n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \text{e} \quad Z_n = \overline{\bigcup_{i \geq 0} f^{-in}(Y)}.$$

Então, como  $f$  é difeomorfismo

$$f^{-n}(Z_n) = \overline{\bigcup_{i \geq 1} f^{-in}(Y)} \subset Z_n.$$

Portanto temos a seguinte sequência decrescente

$$\dots \subset f^{-3n}(Z_n) \subset f^{-2n}(Z_n) \subset f^{-n}(Z_n) \subset Z_n.$$

Logo, a interseção

$$X_n = \bigcap_{i \geq 0} f^{-in}(Z_n) = \overline{\bigcup_{i \geq 0} f^{-in}(Y)} \cap \overline{\bigcup_{i \geq 1} f^{-in}(Y)} \cap \dots$$

é um subconjunto fechado, não vazio (pela propriedade de compactos encaixantes) que é a união de folhas instáveis e  $f^n$ -invariante. Portanto pelo Lema 2.12 nós temos  $X_n = M$ .

Seja  $p$  um ponto periódico arbitrário de período  $n$ . Então como o conjunto  $X_n$  construído acima coincide com  $M$  temos o seguinte

$$X_n \cap W_p^s(\epsilon) = W_p^s(\epsilon).$$

Como  $W_x^u$  é aproximado por alguma folha contida em  $Y = \overline{W_x^u}$  (propriedade de fecho), pela transversalidade de  $W^u$  e  $W^s$  e sendo  $W_p^s(\epsilon) \subset W_p^s$  temos que

$$W_x^u \cap W_p^s(\epsilon) \neq \emptyset.$$

Em particular temos que para algum  $i \geq 0$

$$f^{-in}(Y) \cap W_p^s(\epsilon) = W_p^s(\epsilon).$$

Mas como  $n$  é o período de  $p$  temos que  $f^{in}(W_p^s(\epsilon)) \subset W_p^s(\epsilon)$  e logo  $f^{-in}(Y) \cap W_p^s(\epsilon) \neq \emptyset$ .

Assim

$$Y \cap f^{in}(W_p^s(\epsilon)) \neq \emptyset$$

e portanto

$$Y \cap W_p^s(\epsilon) \neq \emptyset.$$

Para  $\epsilon$  suficientemente pequeno isso mostra que  $p \in \overline{Y} = Y$ .

Como  $p$  é um ponto periódico arbitrário e como assumimos que pontos periódicos são densos em  $M$  temos  $Y = M$  como queríamos.

De modo análogo podemos mostrar que  $2 \Rightarrow 5$ .

$4 \Rightarrow 1$  Assuma que todas as folhas da folheação instável  $W^u$  são densas em  $M$ . Vejamos que  $\Omega(f) = M$ .

Como  $f$  é difeomorfismo de Anosov, pelo Corolário 2.4.1 existe um ponto periódico  $p$ . Para simplificar podemos supor que  $p$  é ponto fixo.

Basta mostrar que a folha estável  $W_p^s$  é densa em  $M$ , pois assumindo que  $W_p^u$  também é denso, os pontos da interseção de  $W_p^u$  e  $W_p^s$  são densos em  $M$ . Já mostramos no Lema 2.11 que esses pontos são não errantes.

Como  $\overline{W_p^u} = M$  e  $\overline{W_p^s} = M$  temos que  $\overline{W_p^u \cap W_p^s} = M$ . Então

$$M = \overline{W_p^u \cap W_p^s} \subset \overline{\Omega(f)} = \Omega(f).$$

Assim teremos que  $\Omega(f) = M$ .

Assuma, por contradição que  $R = \overline{W_p^s}$  não é toda a variedade  $M$ . Claramente  $R$  não é uma união de folhas estáveis.

Se  $p$  é ponto fixo  $W_p^s$  é invariante por  $f$  é portanto  $R$  é invariante por  $f$ .

Se  $\epsilon$  for suficientemente pequeno  $U$  é um subconjunto próprio de  $N$ .

Temos que para  $n \geq 0$

$$f^{-n}(U) \subset \bigcup_{x \in R} W_x^u(\lambda^n(\epsilon)), \quad (2.24)$$

onde  $0 < \lambda < 1$  é a constante definida na subseção anterior.

Assim  $U$  satisfaz

$$\dots \subset f^{-2}(U) \subset f^{-1}(U) \subset U. \quad (2.25)$$

É claro que  $R \subset \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(U)$ . Por outro lado de (2.24) segue que

$$\bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(U) = R. \quad (2.26)$$

Considere  $U^c$  o complemento de  $U$  e defina

$$A = \bigcap_{n \geq 0} f^n(U^c) = U^c \cap f(U^c) \cap f^2(U^c) \dots$$

Então  $A$  é um conjunto fechado e  $f$ -invariante.

É claro que  $A$  e  $R$  não se intersectam. Então existe  $d_0 > 0$  tal que  $d(x, y) \geq d_0$  para todo  $x \in A$  e  $y \in R$ .

Nós devemos mostrar que  $A$  é a união das folhas instáveis. Seja  $x \in A$  e vamos provar que  $W_x^u \subset A$ .

Seja  $z \in W_x^u$ . Então  $d(f^{-n}(x), f^{-n}(z)) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Assuma por contradição que  $z \notin A$ . Então  $f^{-n}(x) \rightarrow R$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Se  $x \in A$  então  $x \in U^c \cap f(U^c) \cap f^2(U^c) \dots$  e portanto  $f^{-n}(x) \in U^c$ . Assim  $f^{-n}(x) \in A$  pois  $A$  é invariante, o que é uma contradição. Portanto  $z \in A$ .

Assim  $A$  é a união de folhas instáveis. Como  $A$  é fechado isso contradiz o item 4, pois nesse caso teríamos  $A = M$ .

Mostramos que  $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$ . De maneira análoga podemos mostrar que  $5 \Rightarrow 1$ .

$3 \Rightarrow 1$  Queremos mostrar que se existe  $x$  tal que  $\{f^n(x)\}$  é densa em  $M$  então  $\Omega(f) = M$ . Mas se  $x$  é não errante e  $\Omega(f)$  é fechado

$$M = \overline{\{f^n(x)\}} \subset \overline{\Omega(f)} = \Omega(f).$$

$1, 2, 4, 5 \Rightarrow 3$  Vamos mostrar que para todos abertos  $U, V$  existe  $n \in \mathbb{Z}$  tal que  $U \cap f^n(V) \neq \emptyset$ . De fato vamos mostrar a existência de uma órbita que passa tanto em  $U$  quanto em  $V$ . Então, pelo Corolário 1.1.1,  $f$  admite uma órbita densa.

Do item 2 podemos escolher pontos periódicos  $p \in U$  e  $q \in V$ . Seja  $N$  um múltiplo comum dos períodos. Pelos itens 4 e 5  $W_p^u$  e  $W_q^s$  são densos em  $M$  então existe um ponto  $z \in W_p^u \cap W_q^s$ .

Assim  $f^{Nn}(z) \rightarrow q$  e  $f^{-Nn}(z) \rightarrow p$  quando  $n \rightarrow \infty$ , isto é, a órbita de  $z$  intersecta  $U$  e  $V$ .

□

Sabe-se que quando a folheação estável ou a instável possui codimensão um então o difeomorfismo de Anosov é transitivo. Esse resultado pode ser visto em [12].

Porém, em geral, a seguinte pergunta é um problema em aberto:

*Existe um difeomorfismo de Anosov não transitivo?*

## 2.6 Automorfismos hiperbólicos no toro

Considere o toro

$$\mathbb{T}^m = \frac{\mathbb{R}^m}{\mathbb{Z}^m}$$

Seja  $A = (a_{ij})$  uma matriz de ordem  $m$  com todas as entradas inteiras tal que  $\det(A) = \pm 1$  e  $A$  seja hiperbólica (não possui autovalor cujo valor absoluto seja 1). Seja  $L_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  a aplicação linear em  $\mathbb{R}^m$  associada a  $A$ . Como  $A$  tem entradas inteiras,  $L_A$  leva valores de  $\mathbb{Z}^m$  em si mesmo. Como  $\det(A) = \pm 1$ ,  $A^{-1}$  tem entradas com números inteiros e  $(L_A)^{-1} = L_{A^{-1}}$  também leva  $\mathbb{Z}^m$  em si mesmo. Logo  $L_A(\mathbb{Z}^m) = \mathbb{Z}^m$ .

Seja  $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{T}^m$  a projeção que leva pontos  $\bar{x} = (x_1, \dots, x_m)$  de  $\mathbb{R}^m$  a pontos no toro, tomando cada componente módulo 1.

Como  $L_A(\mathbb{Z}^m) = \mathbb{Z}^m$ ,  $L_A$  induz uma aplicação  $f_A$  do toro  $T^m$  em si mesmo, onde

$$f_A \circ \pi(\bar{x}) = \pi \circ L_A(\bar{x}).$$

Se  $\pi(\bar{x}) = \pi(\bar{x}') \rightarrow \bar{x} = \bar{x}' + a$  com  $a \in \mathbb{Z}^m$ .

Então  $\pi \circ L_A(\bar{x}) = \pi \circ L_A(\bar{x}') + \pi \circ L_A(a) = \pi \circ L_A(\bar{x}')$  e  $f_A$  está bem definida. Além disto, como  $A^{-1}$  é uma matriz com entradas inteiras, então  $f_A$  é um difeomorfismo com  $f_A^{-1} = f_{A^{-1}}$ .

Uma aplicação desse tipo é um automorfismo hiperbólico no toro.

**Exemplo 2.2.** Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

então

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Note que  $A$  e  $A^2$  não possuem autovalores cujo valor absoluto seja igual a 1 e portanto elas são hiperbólicas.

Os autovalores de  $A$  são  $\lambda^- = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  e  $\lambda^+ = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . Os autovetores associados a  $\lambda^-$  e  $\lambda^+$  respectivamente são

$$v^s = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 - \sqrt{5} \end{pmatrix} \text{ e}$$

$$v^u = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 + \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Note que ambos os autovetores possuem inclinação irracional. Pode ser mostrado que isso ocorre no caso de matrizes inteiras hiperbólicas de determinante igual a 1.

Note que  $A$  muda de orientação e possui autovalor negativo enquanto que  $A^2$  preserva orientação com dois autovalores positivos:  $(\lambda^-)^2$  e  $(\lambda^+)^2$ . Os autovetores de  $A^2$  são os mesmos de  $A$ .

Com esse exemplo como modelo podemos enunciar o teorema seguinte.

**Teorema 2.6.** Seja  $f_A$  um automorfismo hiperbólico no toro. Então:

1. Pontos periódicos são densos em  $\mathbb{T}^m$ . Em particular existem infinitos pontos periódicos. Além disso o conjunto não errante  $\Omega(f_A)$  de  $f_A$  é todo  $\mathbb{T}^m$ .

2. O automorfismo  $f_A$  tem uma estrutura hiperbólica em todo  $\mathbb{T}^m$ .

- (a)  $E^s$  é o espaço dos autovetores generalizados estáveis de  $A$ .
- (b)  $E^u$  é o espaço dos autovetores generalizados instáveis de  $A$ .
- (c)  $E_x^s$  é a translação de  $E^s$  para  $T_x \mathbb{T}^m$ .
- (d)  $E_x^u$  é a translação de  $E^u$  para  $T_x \mathbb{T}^m$ .
- (e)  $f_A$  é um difeomorfismo Anosov.
- (f) Se  $\pi(\bar{x}) = x$  então  $W_x^s = \pi(\bar{x} + E^s)$  e  $W_x^u = \pi(\bar{x} + E^u)$ .

3. Para todo  $x \in \mathbb{T}^m$ , cada  $W_x^s$  e  $W_x^u$  é densa em  $\mathbb{T}^m$ , assim como sua interseção, que é formada por pontos homoclínicos transversos (cf. Definição 2.16).

4. O automorfismo  $f_A$  é topologicamente transitivo.

*Demonstração.* 1. Seja  $q \in \mathbb{Z}$ . Seja  $\text{Rac}(q)$  o conjunto dos pontos racionais em  $\mathbb{T}^m$  com denominador  $q$ .

$$\text{Rac}(q) = \pi \left\{ \left( \frac{i_1}{q}, \dots, \frac{i_m}{q} \mid i_j \in \mathbb{Z} \right) \right\} \subset \mathbb{T}^m.$$

Então

$$L_A \left( \left\{ \left( \frac{i_1}{q}, \dots, \frac{i_m}{q} \mid i_j \in \mathbb{Z} \right) \right\} \right) \subset \left\{ \left( \frac{i_1}{q}, \dots, \frac{i_m}{q} \mid i_j \in \mathbb{Z} \right) \right\}.$$

Logo  $f_A(\text{Rac}(q)) \subset \text{Rac}(q)$ .

Este conjunto tem um número finito de pontos ( $q^m$  pontos) e  $f_A$  é injetora, então  $f_A|_{\text{Rac}(q)}$  é uma permutação dos  $\text{Rac}(q)$  e cada ponto nesse conjunto é periódico.

Finalmente  $\bigcup_q \text{Rac}(q)$  é denso no toro e então os pontos periódicos são densos.

Uma vez que  $\Omega(f_A)$  contém o conjunto dos pontos periódicos  $\text{Per}(f_A)$  e é fechado, temos que  $\mathbb{T}^m = \overline{\text{Per}(f_A)} \subset \Omega(f_A)$ , donde,  $\Omega(f_A) = \mathbb{T}^m$ .

2. Como  $\pi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{T}^m$  é sobrejetora, essa projeção dá as coordenadas globais.

Se  $U \subset \mathbb{T}^m$  é um conjunto aberto e  $\varphi_1, \varphi_2 : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  são dois sistemas de coordenadas locais em  $U$  que são inversos de  $\pi$ , então  $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(\bar{x}) = \bar{x} + a$ , onde  $a \in \mathbb{Z}^m$ . Portanto para  $x \in \mathbb{T}^m$ , o espaço tangente em  $x$  pode ser dado por  $\{x\} \times \mathbb{R}^m$ .

Em coordenadas locais, a aplicação  $f_A$  é dada por  $L_A$ . Como uma aplicação em  $\mathbb{R}^m$ , a derivada de  $L_A$  no ponto  $\bar{x}$  é igual à matriz  $A$  (ou a aplicação linear  $L_A$ )  $D(L_A)_{\bar{x}} = A$ .

Portanto  $D(f_A)_x = A$  como uma aplicação de  $T_x \mathbb{T}^m = \{x\} \times \mathbb{R}^m$  a  $T_{f_A(x)} \mathbb{T}^m = \{f(x)\} \times \mathbb{R}^m$ .

Em dimensão dois o espaço dos autovetores dá as direções estáveis e instáveis de  $A$

$$E^s = \{tv^s \mid t \in \mathbb{R}\} \text{ e } E^u = \{tv^u \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Em dimensões maiores eles são os autoespaços generalizados estável e instável de  $A$  respectivamente, como enunciado no teorema.

Existem  $c \geq 1$ ,  $0 < \mu < 1$  e  $\lambda > 1$  tal que para  $n \geq 1$

$$\|A^n|_{E^s}\| \leq c\mu^n \text{ e } \|A^{-n}|_{E^u}\| \leq c\lambda^{-n}.$$

Para qualquer ponto  $x \in \mathbb{T}^m$ , defina os subespaços no ponto  $x$  pela translação dos autoespaços estáveis e instáveis de  $A$

$$E_x^s = \{x\} \times E^s \text{ e } E_x^u = \{x\} \times E^u.$$

Para  $x \in \mathbb{T}^m$  e  $v \in E_x^s$  tem-se

$$|D(f_A^n)_x v| = |A^n v| \leq c\mu^n |v|$$

onde  $c \geq 1$ ,  $0 < \mu < 1$  são as constantes dadas acima. Do limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c\mu^k |v| = 0,$$

temos que  $E_x^s$  é formado por vetores estáveis.

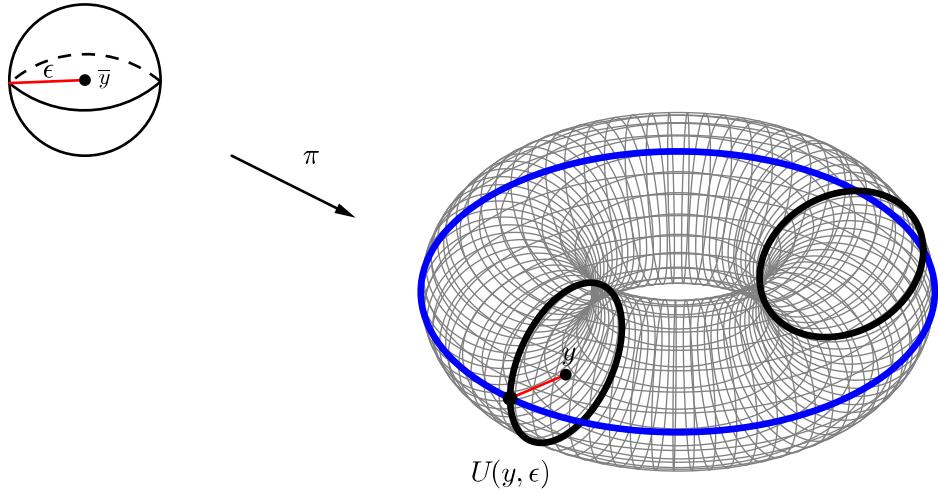
Um argumento análogo se aplica para  $v \in E_x^u$  quando  $k \rightarrow -\infty$ . De acordo com a Definição 2.3 concluímos que  $f_A$  tem uma estrutura hiperbólica.

Como  $f_A$  possui uma estrutura hiperbólica em  $\mathbb{T}^m$  e todos os pontos são não errantes,  $f_A$  é um difeomorfismo de Anosov.

Agora vamos voltar à variedade estável por um ponto  $x = \pi(\bar{x})$ . Para  $\epsilon > 0$  e  $y = \pi(\bar{y})$  seja  $B(\bar{y}, \epsilon) \subset \mathbb{R}^m$  a bola de centro  $\bar{y}$  e raio  $\epsilon$  e  $U(y, \epsilon) = \pi(B(\bar{y}, \epsilon)) \subset \mathbb{T}^m$ . Para  $\epsilon$  suficientemente pequeno,  $f_A^{-1}(U(f(y), \epsilon))$  não completa uma volta no toro (pois irá

expandir por um lado e contrair por outro). Então

$$f_A^{-1}(U(f(y), \epsilon)) \cap U(y, \epsilon) = \pi(L_A^{-1}(B(L_A(\bar{y}), \epsilon)) \cap B(\bar{y}, \epsilon)).$$



Então as variedades estáveis são dadas por

$$\begin{aligned} W_\epsilon^s(x, f_A) &= \bigcap_{n \geq 0} f_A^{-n}(U(f_A^n(x), \epsilon)) \\ &= \pi \left( \bigcap_{n \geq 0} L_A^{-n}(B(L_A^n(\bar{x}), \epsilon)) \right) \\ &= \pi \left( \bar{x} + \bigcap_{n \geq 0} A^{-n}(B(0, \epsilon)) \right). \end{aligned}$$

Pelas propriedades de aplicação linear

$$\pi(\bar{x} + E^s(c^{-1}\epsilon)) \subset W_\epsilon^s(x, f_A) \subset \pi(\bar{x} + E^s(\epsilon)).$$

Portanto a variedade estável global é dada por

$$W^s(x, f_A) = \bigcup_{n \geq 0} f_A^{-n}(W_\epsilon^s(f_A^n(x), f_A)) = \pi(\bar{x} + E^s).$$

O resultado sobre a variedade instável é análogo.

3. Para  $m = 2$ , as inclinações das retas  $E^s$  e  $E^u$  são irracionais em  $\mathbb{R}^2$ , portanto cada uma das retas  $W_x^s = \pi(\bar{x} + E^s)$  e  $W_x^u = \pi(\bar{x} + E^u)$  é densa em  $\mathbb{T}^2$ . Como tais retas são transversais, sua interseção é também densa em  $\mathbb{T}^2$ .

Para  $n > 2$ , seja  $y$  um ponto periódico de  $f_A$  com período  $p$  e levantamento  $\bar{y}$ . As variedades estável e instável de  $L_A$  pelo ponto  $\bar{y}$  são os subespaços afins  $W^s(\bar{y}, L_A) = \bar{y} + E^s$  e  $W^u(\bar{y}, L_A) = \bar{y} + E^u$ , respectivamente. Desde que  $W^u(0, L_A)$  e  $W^s(\bar{y}, L_A)$  são subespaços afins não paralelos e de dimensões complementares, existe  $\bar{z} \in W^u(0, L_A) \cap W^s(\bar{y}, L_A) \neq \emptyset$ . Fazendo  $z = \pi(\bar{z})$ , temos que  $z \in W^u(\pi(0), f_A) \cap W^s(y, f_A)$  e  $d(f_A^n(z), f_A^n(y)) \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Logo,  $W^u(\pi(0), f_A)$  se acumula em  $y$  pelos pontos  $f_A^{pn}(z)$ . Como o conjunto dos pontos periódicos é denso em  $\mathbb{T}^m$ ,  $W^u(\pi(0), f_A)$  é denso em  $\mathbb{T}^m$ . Analogamente,  $W^s(\pi(0), f_A)$  se acumula em  $y$  e portanto  $W^s(\pi(0), f_A)$  é denso em  $\mathbb{T}^m$ . Desde que  $W^u(\pi(0), f_A)$  e  $W^s(\pi(0), f_A)$  são projeções de subespaços de dimensões complementares, eles se intersectam transversalmente arbitrariamente próximo de  $y$ , portanto os pontos homoclínicos transversos são densos em  $\mathbb{T}^m$ .

Para uma ponto qualquer  $x \in \mathbb{T}^m$ ,  $W^u(x, f_A)$  e  $W^s(x, f_A)$  são translações das respectivas variedades de  $\pi(0)$ , e portanto cada uma é densa em  $\mathbb{T}^m$ , assim como as interseções homoclínicas associadas a  $x$  são densas em  $\mathbb{T}^m$ .

4. Para provar que  $f_A$  é transitivo devemos verificar as hipóteses do Teorema 1.1. Vamos verificar que  $O^+(U) = \bigcup_{n \leq 0} f^n(U)$  e  $O^-(U) = \bigcup_{n \geq 0} f^n(U)$  são densos em  $X$ .

Sejam  $U$  e  $V$  dois conjuntos abertos quaisquer em  $\mathbb{T}^m$ . Pelo item anterior, a variedade estável na origem  $W_{\pi(0)}^s$  é densa em  $\mathbb{T}^m$ , então ela intersecta  $U$  em um ponto  $x$ .

Seja  $J = \pi(\bar{x} + E^u(\epsilon))$ , onde  $\epsilon > 0$  é suficientemente pequeno de modo que  $J \subset U$ .

Se  $\lambda$  é uma cota inferior entre os autovalores instáveis, então a  $N$ -ésima iterada do disco  $f_A^N(J)$  contém um disco de raio pelo menos  $c^{-1}\lambda^N\epsilon$  em  $W^u(f_A^N(x))$ . Conforme  $N$  cresce o raio de  $f_A^N(J)$  fica maior e então  $f_A^N(J)$  se acumula em uma parte compacta de  $W_{\pi(0)}^u$  e portanto ela deve intersectar  $V$ .

Para esta iterada tem-se

$$\emptyset \neq f_A^N(J) \cap V \subset f_A^N(U) \cap V$$

e portanto  $O^+(U) \cap V \neq \emptyset$ .

Analogamente, mostra-se que  $O^-(U) \cap V \neq \emptyset$ .

Pelo Teorema 1.1 conclui-se que  $f_A$  é topologicamente transitivo.

□

**Observação 2.2.** Note que uma forma alternativa de demonstrar os ítems 3 e 4 do teorema anterior é observar que essa é uma consequência direta do ítem 1 juntamente com o teorema 2.5.

# Capítulo 3

## Difeomorfismo de Anosov no toro

As primeiras seções deste capítulo consistem numa preparação para a demonstração do resultado principal deste trabalho. Apresentamos algumas noções sobre homotopia baseadas em [8]. Todo o restante do capítulo foi escrito seguindo o livro texto [7].

### 3.1 Aplicações homotópicas

Homotopia é um importante conceito de topologia algébrica e o grupo fundamental é o invariante topológico mais simples associado a essa ideia. Essas ideias serão úteis nesse trabalho para demonstrar resultados que estamos interessados. A definição de homotopia será feita de maneira breve pois não pretendemos desenvolver tal estudo. Uma boa abordagem desse assunto pode ser vista em [8].

**Definição 3.1.** *Duas transformações contínuas  $h_0, h_1 : X \rightarrow Y$  entre espaços topológicos são **homotópicas** se existe uma transformação contínua  $h : [0, 1] \times X \rightarrow Y$  tal que  $h(0, x) = h_0(x)$  e  $h(1, x) = h_1(x)$ . A transformação  $h$  é chamada de **homotopia** entre  $h_0$  e  $h_1$ .*

**Definição 3.2.** *Sejam  $M$  uma variedade topológica,  $x \in M$  e considere a coleção de curvas  $c : [0, 1] \rightarrow M$  com  $c(0) = c(1) = x$ . Se  $c_1$  e  $c_2$  são duas dessas curvas então definimos a curva  $c_1.c_2$  por:*

$$c_1.c_2(t) := \begin{cases} c_1(2t) & \text{para } t \in [0, 1/2] \\ c_2(2t - 1) & \text{para } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

*Identificando curvas homotópicas com extremos fixos obtemos um grupo  $\pi_1(M, x)$  denominado **grupo fundamental** de  $M$  em  $x$ . Um espaço com grupo fundamental trivial diz-se **simplesmente conexo** e diz-se **1-conexo** se também for conexo.*

**Observação 3.1.** Seja  $f : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^m$  uma aplicação contínua. Como  $\mathbb{Z}^m$  é o grupo fundamental de  $\mathbb{T}^m$  temos que  $f$  induz uma transformação linear  $f_* : \mathbb{Z}^m \rightarrow \mathbb{Z}^m$ . Tal transformação linear pode ser pensada como uma matriz  $L$ , onde todos os coeficientes são inteiros. Tal matriz induz uma transformação linear  $F_L$  de  $\mathbb{T}^m$  em  $\mathbb{T}^m$ . Agora, dada uma aplicação contínua  $g : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^m$  na mesma classe de homotopia de  $f$ , os inteiros relacionados com o número de voltas que a  $g$  vai dar nos laços geradores do grupo fundamental de  $\mathbb{T}^m$  não podem ser distintos daqueles induzidos pela  $f$ . Assim, a matriz  $G$  relacionada a  $g_*$ , será igual à matriz  $L$  e portanto a transformação linear  $F_G$  de  $\mathbb{T}^m$  em  $\mathbb{T}^m$  também será igual a  $F_L$ .

Portanto cada transformação do toro  $f : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^m$  é determinada a menos de homotopia pela sua ação  $f_*$  no grupo fundamental  $\mathbb{Z}^m$ . Esta ação é dada por uma matriz  $m \times m$  inteira  $A$  que também determina uma única transformação linear  $F_A$  na classe de homotopia de  $f$ .

**Teorema 3.1.** Todo automorfismo linear hiperbólico  $F_L$  no toro  $\mathbb{T}^2$  é um fator de qualquer homeomorfismo  $g$  na mesma classe de homotopia, através de uma única semiconjugação homotópica à identidade. Se  $g$  está  $C^0$  próximo de  $F_L$  então a semiconjugação está próxima da identidade na topologia  $C^0$ .

*Demonstração.* Seja  $g : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  um homeomorfismo homotópico a  $F_L$ . Provaremos a existência de uma função contínua  $h : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  homotópica à identidade (e logo sobrejetora uma vez que seu grau é diferente de zero) tal que:

$$h \circ g = F_L \circ h \quad \text{ou} \quad h = F_L^{-1} \circ h \circ g. \quad (3.1)$$

Vamos desenvolver um modo conveniente de escrever nossas equações. Qualquer transformação no toro em si mesmo pode ser levantada à cobertura universal  $\mathbb{R}^2$ . Além disso, uma transformação  $S : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é o levantamento de uma transformação de  $\mathbb{T}^2$  se e somente se existir um endomorfismo  $A : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^2$  tal que  $S(x + a) = Sx + Aa$  para quaisquer  $x \in \mathbb{R}^2$  e  $a \in \mathbb{Z}^2$ . Em particular, para o levantamento de uma transformação homotópica à identidade tem-se  $A = Id$ , isto é,  $S - Id$  é uma função duplamente periódica.

O levantamento de  $F_L$  é a transformação linear hiperbólica  $L$ . Denotemos o levantamento de  $g$  por  $L + \tilde{g}$ , onde  $\tilde{g}$  é duplamente periódica, isto é,  $\tilde{g}(x + a) = \tilde{g}(x)$  para  $a \in \mathbb{Z}^2$  e o levantamento de  $h$  por  $Id + \tilde{h}$  com  $\tilde{h}$  duplamente periódica.

A segunda equação em (3.1) é equivalente a:

$$Id + \tilde{h} = L^{-1} \circ (Id + \tilde{h}) \circ (L + \tilde{g}) \quad \text{ou seja} \quad \tilde{h} = L^{-1}\tilde{g} + L^{-1} \circ \tilde{h} \circ (L + \tilde{g}) \quad (3.2)$$

A resolução de (3.2) pode ser reduzida à determinação de pontos fixos de operadores de contração usando a decomposição de  $\mathbb{R}^2$  em autoespaços da matriz  $L$ . Sejam  $e_1, e_2$  autovetores de  $L$  tais que

$$Le_1 = \lambda_1 e_1, \quad Le_2 = \lambda_2 e_2, \quad |\lambda_1| = |\lambda_2^{-1}| > 1.$$

Vamos decompor as funções vetoriais  $\tilde{h}$  e  $\tilde{g}$  na forma

$$\tilde{h} = h_1 e_1 + h_2 e_2 \quad \text{e} \quad \tilde{g} = g_1 e_1 + g_2 e_2 \quad (3.3)$$

então (3.2) é equivalente a duas equações envolvendo funções escalares contínuas duplamente periódicas desconhecidas, a saber  $h_1$  e  $h_2$ , que verificam

$$h_1 = \lambda_1^{-1} g_1 + \lambda_1^{-1} h_1 \circ (L + \tilde{g}) \quad \text{e} \quad (3.4)$$

$$h_2 = \lambda_2^{-1} g_2 + \lambda_2^{-1} h_2 \circ (L + \tilde{g}). \quad (3.5)$$

Denotemos o lado direito de (3.4) por  $f_1(h_1)$  e consideremos  $f_1$  como um operador no espaço das funções contínuas duplamente periódicas em  $\mathbb{R}^2$  com a topologia uniforme. Vê-se facilmente que  $f_1$  é uma contração

$$\begin{aligned} \|f_1(h) - f_1(h^*)\| &= |\lambda_1^{-1}| \sup_{x \in \mathbb{T}^2} |h(Lx - \tilde{g}(x)) - h^*(Lx + \tilde{g}(x))| \leq |\lambda_1^{-1}| \sup_{y \in \mathbb{T}^2} |h(y) - h^*(y)| \\ &= |\lambda_1^{-1}| \|h - h^*\|. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Assim pela Proposição 1.1,  $f_1$  tem um único ponto fixo  $h_1$  cuja norma pode ser estimada iterando a transformação nula

$$\|h_1\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|f_1^{n+1}(0) - f_1^n(0)\| = \frac{1}{1 - |\lambda_1|^{-1}} \|f_1(0)\| = \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_1| - 1} \|g_1\|.$$

A equação (3.5) deve ser ligeiramente reescrita de modo a representá-la como uma equação do ponto fixo para um operador de contração. Usando o fato de que  $g$  e logo  $L + \tilde{g}$  serem homeomorfismos podemos inverter a segunda transformação. Então, denotando sua inversa por  $S$ , (3.5) torna-se

$$h_2 = \lambda_2 h_2 \circ S - g_2 \circ S =: f_2(h_2). \quad (3.7)$$

Um cálculo análogo ao anterior mostra que  $f_2$  é um operador de contração cujo ponto fixo  $h_2$

satisfaz a estimativa

$$\|h_2\| \leq \frac{\|g_2\|}{1 - |\lambda_2|}.$$

Substituindo as soluções de (3.4) e (3.7) em (3.3) e projetando  $Id + \tilde{h}$  no toro obtém-se uma solução de (3.1) que é de fato única entre as transformações contínuas de  $\mathbb{R}^2$  homotópicas à identidade.  $\square$

## 3.2 Teoria do índice

A noção de índice está relacionada com o número de pontos periódicos de uma aplicação e nos fornece informação acerca da estrutura orbital de alguns sistemas dinâmicos. Nesse trabalho iremos definir o índice de uma aplicação diferenciável com objetivo de demonstrar o Teorema 3.6. Uma definição mais geral é dada a partir do conceito de grau homológico de uma aplicação.

**Definição 3.3.** Seja  $A$  uma matriz hiperbólica. Definimos o **índice de uma matriz  $A$**  por:

$$\text{ind}_A := \text{sign} \det(Id - A).$$

Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciável em  $0 \in U \subset \mathbb{R}^m$ . Se  $0$  for um ponto fixo para  $f$  e  $A = Df(0)$  for hiperbólica, definimos o **índice da função  $f$**  por:

$$\text{ind}_f(0) := \text{ind}_{Df(0)}.$$

**Proposição 3.1.**  $\text{ind}_A = (-1)^{\text{card}\{i: \lambda_i > 1\}}$ , onde  $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$  são os autovalores de  $A$ .

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \text{sign} \det(Id - A) &= \text{sign} \prod_{i=1}^n (1 - \lambda_i) \\ &= \text{sign} \prod_{\lambda_i > 1} (1 - \lambda_i) \cdot \text{sign} \prod_{\lambda_i < 1} (1 - \lambda_i) \cdot \text{sign} \prod_{\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} (1 - \lambda_i) \\ &= (-1)^{\text{card}\{i: \lambda_i > 1\}} \cdot 1 \cdot \text{sign} \prod_{\lambda_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} (1 - \lambda_i) = (-1)^{\text{card}\{i: \lambda_i > 1\}} \end{aligned}$$

$\square$

O número de Lefschetz de  $f$  relaciona a ação da transformação  $f$  nos grupos de homologia com a soma dos índices de pontos fixos. Como o estudo de grupos de homologia foge do propósito

desse trabalho, a demonstração do teorema seguinte não será feita e é uma consequência da Fórmula do Ponto fixo de Lefschetz, dados em [7].

**Definição 3.4.** *Sejam  $M$  uma variedade compacta, possivelmente com fronteira e  $f : M \rightarrow M$  uma transformação contínua cujos pontos fixos são isolados. Defina o número de Lefschetz de  $f$  por:*

$$L(f) = \sum_{x \in \text{Fix}(f)} \text{ind}_f(x). \quad (3.8)$$

**Observação 3.2.** *Dada uma matriz  $A$  de ordem  $m$ , seja  $F_A : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  a transformação linear associada. É possível mostrar que:*

$$L(F_A) = \det(Id - A). \quad (3.9)$$

**Teorema 3.2.** *Se  $\epsilon = \pm 1$  e  $\text{ind}_{f^n}(x) = \epsilon$  para todo  $x \in \text{Fix}(f^n)$  têm-se que o número de pontos periódicos por  $f$  de período  $n$  é dado por  $\epsilon L(f^n)$ .*

### 3.3 Teoria hiperbólica local e suas aplicações

O teorema seguinte mostra que a hiperbolicidade fornece um mecanismo para encontrar muitas órbitas periódicas.

**Teorema 3.3.** *(Lema do Fecho de Anosov) Sejam  $M$  uma variedade riemanniana,  $U \subset M$  um aberto,  $f : U \rightarrow M$  um difeomorfismo e  $\Lambda \subset U$  um conjunto hiperbólico para  $f$ . Então existem uma vizinhança aberta  $V \supset \Lambda$ , e  $C, \epsilon_0 > 0$  tais que para  $\epsilon < \epsilon_0$  e qualquer  $\epsilon$ -órbita periódica  $(x_0, \dots, x_n) \subset V$  existe um ponto  $y \in U$  tal que  $f^n(y) = y$  e  $\text{dist}(f^N(y), x_N) < C\epsilon$  para  $N = 0, \dots, n-1$ .*

**Observação 3.3.** *Um caso particular de  $\epsilon$ -órbita periódica é dado por um segmento de órbita:  $x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0)$  tal que  $\text{dist}(f^n(x_0), x_0) < \epsilon$ . Assim o Lema do fecho de Anosov implica em particular que próximo de qualquer ponto num conjunto hiperbólico cuja órbita quase retorna a esse ponto existe uma órbita periódica que segue de perto o segmento que quase retorna.*

O Lema do Fecho de Anosov não afirma que a órbita periódica que fornece se encontra no conjunto hiperbólico  $\Lambda$ . No entanto isso é válido para todos os conjuntos hiperbólicos que são maximais numa vizinhança aberta. Dada uma vizinhança  $V$  de  $\Lambda$  denote:

$$\Lambda_V^f = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(\overline{V}).$$

**Definição 3.5.** Seja  $\Lambda$  um conjunto hiperbólico para  $f : U \rightarrow M$ . Dizemos que  $\Lambda$  é **localmente maximal** se existir uma vizinhança aberta  $V$  de  $\Lambda$  tal que  $\Lambda = \Lambda_V^f$ .

**Corolário 3.3.1.** Sejam  $\Lambda$  um conjunto hiperbólico para  $f : U \rightarrow M$  e  $V$  tal que  $\Lambda_V^f$  é hiperbólico. Então os pontos periódicos são densos em  $\Omega(f|_{\Lambda_V^f})$ .

*Demonstração.* Sejam  $x \in \Omega(f|_{\Lambda_V^f})$  e  $\epsilon > 0$ . Denotemos por  $U_\epsilon$  a  $\frac{2\epsilon}{2C+1}$ -vizinhança de  $x$  em  $\Lambda_V^f$ , onde  $C$  está nas condições do Lema do Fecho de Anosov. Então existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $f^N(U_\epsilon) \cap U_\epsilon \neq \emptyset$ . Para  $y \in f^N(U_\epsilon) \cap U_\epsilon$  temos  $\text{dist}(f^N(y), y) < \frac{2\epsilon}{2C+1}$  para  $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$  e portanto pelo Lema do Fecho de Anosov existe um ponto periódico  $z$  tal que  $\text{dist}(f^n(z), f^n(y)) < \frac{2C\epsilon}{2C+1}$  para  $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$ , se  $\epsilon$  é suficientemente pequeno. Para  $\epsilon$  suficientemente pequeno temos também  $z \in V$  e consequentemente  $z \in \Lambda_V^f$ . Finalmente  $\text{dist}(x, z) \leq \text{dist}(x, y) + \text{dist}(y, z) = \frac{(2C+1)\epsilon}{2C+1} = \epsilon$ .  $\square$

**Definição 3.6.** Um sistema dinâmico topológico  $f : X \rightarrow X$  diz-se **topologicamente misturador** se para quaisquer dois conjuntos abertos não vazios  $U, V \subset X$  existir um natural  $N = N(U, V)$  tal que para todo  $n > N$   $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$ .

O teorema seguinte mostra que o conjunto não errante de um conjunto hiperbólico localmente maximal para um difeomorfismo  $f$  se divide num número finito de componentes permutadas por  $f$  tal que cada uma destas componentes numa iterada apropriada de  $f$  é topologicamente misturadora.

**Teorema 3.4.** (Teorema da decomposição espectral) Sejam  $M$  uma variedade riemanniana,  $U \subset M$  um aberto,  $f : U \rightarrow M$  um difeomorfismo e  $\Lambda \subset U$  um conjunto hiperbólico compacto localmente maximal para  $f$ . Então existem conjuntos fechados disjuntos  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_N$  e uma permutação  $\sigma$  de  $\{1, \dots, N\}$  tal que  $\Omega(f|_\Lambda) = \bigcup_{i=1}^N \Lambda_i$ ,  $f(\Lambda_i) = \Lambda_{\sigma(i)}$  e quando  $\sigma^k(i) = i$  a transformação  $f^k|_{\Lambda_i}$  é topologicamente misturadora.

*Demonstração.* Pelo Corolário 3.3.1,  $\text{Per}(f|_\Lambda)$  é denso em  $\Omega(f|_\Lambda)$ . Defina a relação em  $\text{Per}(f|_\Lambda)$  por  $x \sim y$  se e somente se  $W_x^u \cap W_y^s \neq \emptyset$  e  $W_x^s \cap W_y^u \neq \emptyset$  com ambas as interseções transversais em pelo menos um ponto. Pretendemos mostrar que esta é uma relação de equivalência e obter cada  $\Lambda_i$  como o fecho de uma classe de equivalência.

Notemos que  $\sim$  é trivialmente reflexiva e simétrica. Para verificar a transitividade, suponhamos que  $x, y, z \in \text{Fix}(f^N|_\Lambda)$  e  $p \in W_x^u \cap W_y^s$ ,  $q \in W_y^u \cap W_z^s$  são pontos de interseção transversais. De acordo com o Lema 2.4 ( $\lambda$ -Lema), as imagens de uma bola em  $W_p^u = W_x^u = f^N(W_x^u)$ , centrada em  $p$ , se acumulam em  $W_y^u$  e logo  $W_x^u$  e  $W_z^s$  têm uma interseção transversal. Pelo Lema

**2.6**, quaisquer dois pontos suficientemente próximos são equivalentes e logo, por compacidade, temos um número finito de classes de equivalência cujos fechos (disjuntos dois a dois) denotamos por  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$ . Estes são permutados por  $f$  de acordo com alguma permutação  $\sigma$ , isto é,  $f(\Lambda_i) = \Lambda_{\sigma(i)}$ . Seja  $l$  a ordem de  $\sigma$ . Pelo Corolário 3.3.1,  $\Omega(f|_\Lambda) \subset \overline{\text{Per}(f|_\Lambda)}$ , pois  $\Lambda$  é localmente maximal e logo  $\bigcup_{i=1}^k \Lambda_i = \Omega(f|_\Lambda)$ .

Resta mostrar que  $f^l|_{\Lambda_i}$  é topologicamente misturadora. Para tal notemos que se  $p \in \Lambda_i$  é periódico e  $p \sim q$  com  $q$  periódico então, por definição, existe um ponto heteroclínico  $z \in W_p^u \cap W_q^s$ . Se  $n_0$  for o período comum então uma aplicação do  $\lambda$ -Lema mostra que  $W_p^u$  se acumula em  $q$  e logo  $W_p^u$  é denso em  $\Lambda_i \cap \text{Per}(f|_\Lambda)$  e portanto em  $\Lambda_i$ . Para simplificar a notação vamos assumir que  $l = 1$  e que  $\Lambda = \Lambda_i$ .

De acordo com a Definição 3.6 precisamos mostrar que para quaisquer dois conjuntos abertos  $U$  e  $V$  em  $\Lambda$  existe  $\eta \in \mathbb{N}$  tal que  $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$  para todo  $n \geq \eta$ . Para  $U, V \subset \Lambda$  abertos, a densidade dos pontos periódicos implica a existência de  $p \in U$  tal que para algum  $N \in \mathbb{N}$   $f^N(p) = p$ . Sendo  $U$  aberto, ele contém uma vizinhança  $W_p^u(\delta)$  de  $p$  na variedade instável de  $p$ . Como  $W_p^u = \bigcup_{i=0}^{\infty} f^{iN}(W_p^u(\delta))$  é densa, existe  $N_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $V \cap \bigcup_{i=0}^{N_0} f^{in}(W_p^u(\delta)) \neq \emptyset$ . Como  $f^j(W_p^u(\delta))$  é uma vizinhança de  $f^j(p)$  em  $W_{f^j(p)}^u$  obtemos também  $N_1, \dots, N_{n-1} \in \mathbb{N}$  tais que  $V \cap \bigcup_{i=0}^{N_j} f^{j+iN}(W_p^u(\delta)) \neq \emptyset$ . Tomemos  $\eta = \max_k (N+1)N_k$ . Então para  $n \geq \eta$  temos  $V \cap \bigcup_{i=0}^n f^i(W_p^u(\delta)) \neq \emptyset$  e logo  $V \cap f^n(U) \neq \emptyset$ .  $\square$

**Corolário 3.4.1.** *Seja  $f : M \rightarrow M$  um difeomorfismo de Anosov de uma variedade compacta conexa tal que  $\Omega(f) = M$ . Então  $f$  é topologicamente misturador.*

## 3.4 Entropia topológica

O invariante numérico mais importante relacionado com o crescimento orbital é a entropia topológica. Representa a taxa de crescimento exponencial do número de segmentos de órbitas distinguíveis com precisão arbitrariamente pequena mas finita. Num certo sentido a entropia topológica descreve, de um modo pouco preciso mas sugestivo, a complexidade exponencial total da estrutura orbital através de um único número.

Seja  $f : X \rightarrow X$  uma transformação contínua de um espaço métrico compacto  $X$  com a distância  $d$ . Define-se uma sucessão crescente de distâncias  $d_n^f$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , começando com

$d_1^f = d$ , por

$$d_n^f(x, y) = \max_{0 \leq i \leq n-1} d(f^i(x), f^i(y)).$$

Ou seja,  $d_n^f$  mede a distância entre os segmentos de órbita  $I_x^n = \{x, \dots, f^{n-1}(x)\}$  e  $I_y^n$ . Denotamos a bola aberta  $\{y \in X : d_n^f(x, y) < \epsilon\}$  por  $B_f(x, \epsilon, n)$ .

Um conjunto  $E \subset X$  diz-se  **$(n, \epsilon)$ -gerador** se  $X \subset \bigcup_{x \in E} B_f(x, \epsilon, n)$ . Seja  $S_d(f, \epsilon, n)$  a cardinalidade mínima de um conjunto  $(n, \epsilon)$ -gerador ou, de forma equivalente, a cardinalidade de um  **$(n, \epsilon)$ -gerador minimal**. Podemos expressar verbalmente o significado desta quantidade dizendo que é igual ao menor número de condições iniciais cujo comportamento até o instante  $n$  se aproxima do comportamento de qualquer condição inicial a menos de  $\epsilon$ . Consideraremos a taxa de crescimento exponencial para essa quantidade,

$$h_d(f, \epsilon) := \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log S_d(f, \epsilon, n).$$

Obviamente  $h_d(f, \epsilon)$  não decresce com  $\epsilon$ . Define-se a entropia topológica  $h_d(f)$  por

$$h_d(f) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_d(f, \epsilon).$$

Esta quantidade não depende da distância  $d$ .

**Definição 3.7.** A quantidade  $h_d(f)$  calculada para uma distância qualquer que gera a topologia de  $X$  diz-se a **entropia topológica** de  $f$  e denota-se por  $h(f)$  ou  $h_{top}(f)$ .

Para uma transformação  $f : X \rightarrow X$  denotamos por  $|\text{Per}_n(f)|$  o número de pontos periódicos de  $f$  com período  $n$  (não necessariamente mínimo), isto é, o número de pontos fixos de  $f^n$ .

**Teorema 3.5.** Seja  $\Lambda$  um conjunto hiperbólico compacto localmente maximal para um difeomorfismo  $f$  cujas partes topologicamente transitivas são topologicamente misturadoras. Então existem  $c_1, c_2 > 0$  tais que para todo  $n \in \mathbb{N}$ :

$$c_1 e^{n h_{top}(f)} \leq |\text{Per}_n(f)| \leq c_2 e^{n h_{top}(f)}. \quad (3.10)$$

Se  $\Lambda$  é um conjunto hiperbólico compacto localmente maximal para um difeomorfismo  $f$  então existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que (3.10) é válida para todo  $n = kN \in \mathbb{N}$ .

### 3.5 Classificação global de difeomorfismos de Anosov no toro

Esta seção será dedicada à demonstração do:

**Teorema 3.6.** *Todo  $C^1$ -difeomorfismo de Anosov  $f : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^m$ , tal que  $\Omega(f) = \mathbb{T}^m$ , é topologicamente conjugado a um automorfismo linear hiperbólico.*

Vimos, na Observação 3.1, que a classe de homotopia de  $f$  contém exatamente uma aplicação linear  $F_L : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^m$ .

**Lema 3.1.** *Seja  $f : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^m$  um difeomorfismo de Anosov. A transformação linear  $F_L : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^m$  contida na sua classe de homotopia é hiperbólica.*

*Demonstração.* Mostraremos que a transformação linear  $f_*$  induzida por  $f$  no grupo fundamental  $\mathbb{Z}^m$  de  $\mathbb{T}^m$  é hiperbólica. Isso é equivalente à hiperbolicidade de  $F_L$  porque a matriz associada define  $F_L$  em  $\mathbb{T}^m$ .

Pelo Teorema da Decomposição Espectral, o conjunto não errante  $\Omega(f)$  é a união das componentes nas quais alguma potência  $f^N$  é topologicamente misturadora e logo, pelo Teorema 3.5,  $|\text{Per}_n(f^N)|$  tem um comportamento assintótico exponencial multiplicativo.

Depois de passarmos para um recobrimento duplo de  $\mathbb{T}^m$  (que continua a ser um toro) podemos assumir que o fibrado instável  $E^+$  de  $f$  é orientável no sentido da Definição 2.8. Então cada componente misturadora  $f^N$  preserva ou inverte a orientação de  $E^+$  de forma consistente. Logo, passando para  $f^{2N}$  podemos assumir que  $f$  preserva a orientação de  $E^+$  (e  $|\text{Per}_n(f)|$  tem um comportamento exponencial multiplicativo).

Assim, pela Proposição 3.1, todos os pontos periódicos têm o mesmo índice, ou 1 ou  $-1$ . Logo, pelo Teorema 3.2 concluímos que:  $|\text{Per}_n(f)| = |L(f^n)|$ . De (3.8) e pela Observação 3.2 temos que  $|L(f^n)| = |L(f_*^n)|$ . Além disso, de (3.9) temos  $|L(f_*^n)| = |\det(Id - f_*^n)|$ . Portanto:

$$|\text{Per}_n(f)| = |\det(Id - f_*^n)|. \quad (3.11)$$

Assim, se  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  são os autovalores de  $f_*$  contados com multiplicidades então:

$$|\text{Per}_n(f)| = \left| \prod_{i=1}^k (\lambda_i^n - 1) \right| = \left| \prod_{|\lambda_i| > 1} (\lambda_i^n - 1) \right| \cdot \left| \prod_{|\lambda_i| < 1} (\lambda_i^n - 1) \right| \cdot \left| \prod_{|\lambda_i|=1} (\lambda_i^n - 1) \right|,$$

$$\text{com } \prod_{|\lambda_i| > 1} (\lambda_i^n - 1) = \prod_{|\lambda_i| > 1} \lambda_i^n (1 + o(n)) \text{ e } \prod_{|\lambda_i| < 1} (\lambda_i^n - 1) \rightarrow 1.$$

Suponha por absurdo, que  $f_*$  não seja hiperbólica. Então  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \left| \prod_{|\lambda_i|=1} (\lambda_i^n - 1) \right| = 0$ .

Isso é claro pois se  $\lambda_i$  for uma raiz de ordem  $q$  da unidade, então  $|\lambda_i^{kq} - 1| = 0$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Se, por outro lado,  $\lambda_i = e^{2\pi i \alpha}$  com  $\alpha$  irracional então, pela Proposição 1.2, a parte fracionária de  $n\alpha$  pode ser arbitrariamente pequena e logo  $\lambda_i^n$  pode ser arbitrariamente próximo de 1 enquanto  $|\lambda_i^n - 1| \leq 2$ .

Analogamente,  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \prod_{|\lambda_i|=1} (\lambda_i^n - 1) \right|$  está sempre se afastando de 0 (considerando raízes da unidade e argumentos iracionais separadamente).

Isso contradiz a existência de um comportamento assintótico exponencial multiplicativo de  $|\text{Per}_n(f)|$ . Tal contradição mostra que  $f_*$  e portanto  $F_L$  são hiperbólicos.  $\square$

**Observação 3.4.** É possível generalizar os argumentos do Teorema 3.1 para dimensão  $m > 2$ . Para isto é preciso adaptar as equações (3.4) e (3.5) usando funções vetoriais e substituindo  $\lambda_1^{-1}$  e  $\lambda_2^{-1}$  pela inversa das restrições de  $Df$  aos espaços instável e estável. Portanto, podemos assumir que  $F_L$  é um fator de  $f$  através de uma semiconjugação única  $h$  homotópica à identidade (em particular sobrejetora). Usando a continuidade uniforme podemos também concluir que  $h$  bem como seu levantamento  $H$  para  $\mathbb{R}^m$ , transformam variedades estáveis em variedades estáveis assim como variedades instáveis em variedades instáveis.

Para uma demonstração completa do próximo resultado são necessários argumentos técnicos das teorias de pontos fixos e de coincidências que fogem do escopo deste trabalho. Portanto nos limitamos a uma ideia de sua demonstração.

**Lema 3.2.** Se  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  é o levantamento de um difeomorfismo de Anosov e  $F_L$  o levantamento de um automorfismo hiperbólico tal que  $d(F(x), F_L(x))$  é limitada então  $F$  tem no máximo um ponto fixo.

*Ideia da demonstração.* Sendo  $F_L$  hiperbólica, 0 é seu o único ponto fixo. De (3.11)  $f$  tem  $|\det(Id - f_*)|$  diferentes pontos fixos. Tais pontos fixos levantam-se para pontos que são translados por diferentes vetores inteiros. De fato, se o levantamento  $F$  tivesse mais que um ponto fixo então  $f$  teria demasiados pontos fixos, contrariamente ao cálculo do índice.  $\square$

Considerando a semiconjugação  $h : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^m$  entre  $f$  e  $F_L$  e  $H : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  seu levantamento, como introduzido na Observação 3.4, mostraremos a seguir que  $H$  é uma aplicação própria.

**Lema 3.3.** Se  $Y \subset \mathbb{R}^m$  é limitado então  $H^{-1}(Y)$  é limitado.

*Demonstração.* Se  $I = [0, 1]^m \subset \mathbb{R}^m$  é o domínio fundamental canônico para  $\mathbb{T}^m = \frac{\mathbb{R}^m}{\mathbb{Z}^m}$  então  $K := H(I)$  é também um domínio fundamental compacto e  $A := \{l \in \mathbb{Z}^m | I \cap (K + l) \neq \emptyset\}$  é finito. Como  $K + l = H(I + h_*^{-1}(l))$ , temos  $H^{-1}(I) \subset \bigcup_{l \in A} (I + h_*^{-1}(l))$  e o último conjunto é compacto pois  $A$  é finito. Como um conjunto limitado é coberto por um número finito de translações de  $I$  fica concluída a demonstração.  $\square$

O próximo resultado estabelece que um levantamento de  $f$  tem uma estrutura de produto global.

**Lema 3.4.** *Seja  $f : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^m$  um difeomorfismo de Anosov e  $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  um levantamento de  $f$  para  $\mathbb{R}^m$ . Então se  $x \neq y$  a variedade estável de  $x$  e a variedade instável de  $y$  para  $F$  intersectam-se em exatamente um ponto.*

*Demonstração.* Inicialmente, vejamos que a interseção da variedade instável e instável para  $F$  consiste no máximo em um ponto. Para tal argumentamos por absurdo e supomos que  $y \in W_x^s \cap W_x^u$  com  $x \neq y$ . Tomemos uma vizinhança produto  $R$  de  $x$  que não contém  $y$ . Como  $W_R^s = \{z \mid W_z^s \cap R \neq \emptyset\}$  e  $W_R^u = \{z \mid W_z^u \cap R \neq \emptyset\}$  são abertos,  $W_R^s \cap W_R^u$  é uma vizinhança de  $y$ . Como, pelo Corolário 3.3.1, os pontos periódicos são densos em  $\Omega(f) = \mathbb{T}^m$ , existe um levantamento  $y'$  de um ponto  $f$ -periódico em  $W_R^s \cap W_R^u \setminus \overline{R}$ . Mas  $W_{y'}^s \cap R \neq \emptyset$  e  $W_{y'}^u \cap R \neq \emptyset$  e logo, pela estrutura produto em  $R$  existe um ponto  $x' \in W_{y'}^s \cap W_{y'}^u \cap R$ . Portanto, sem perda de generalidade, podemos assumir que  $y \in W_x^s \cap W_x^u$ ,  $x \neq y$  e  $x$  é o levantamento de um ponto fixo de  $f$  (possivelmente após passarmos para uma iterada). Alterando o levantamento  $F$  de  $f$  podemos assumir que  $x$  é um ponto fixo de  $F$ . Pelo Lema 2.11, o ponto  $F$ -homoclínico  $y$  é não-errante para  $F$  e logo, pela densidade dos pontos periódicos em  $\Omega(F)$ , existe um ponto periódico  $z$  de  $F$  próximo de  $y$ . Mas se  $n$  é o período de  $z$ , isto mostra que  $F^n$  tem dois pontos fixos, contradizendo o Lema 3.2.

Para mostrar que  $W_x^u \cap W_y^s \neq \emptyset$  para cada  $x, y$  notemos que para  $y$  dado e  $W_0^s := W_y^s$ , o conjunto  $G := \{x \mid W_x^u \cap W_0^s \neq \emptyset\}$  é aberto pois existe uma vizinhança  $U$  de  $W_0^s$  tal que  $G = \{x \mid W_x^u \cap U \neq \emptyset\}$ . Para mostrar que  $G = \mathbb{R}^m$  mostraremos que  $G$  é fechado. Para tal tomemos  $w \in \overline{G}$ ,  $x \in G$  próximo de  $w$  e  $\{y\} = W_x^u \cap W_0^s$ . A fim de fazer uma redução a duas dimensões, sejam  $\gamma : [0, 1] \rightarrow W_x^u$  e  $\eta : [0, 1] \rightarrow W_x^s$  arcos tais que  $\gamma(0) = \eta(0) = x$ ,  $\gamma(1) = y$  e  $\eta(1) = w$ . Mostraremos que existe uma transformação  $\theta : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que:

$$\theta(s, 0) = \gamma(s), \quad \theta(0, t) = \eta(t), \quad \{\theta(s, t)\} = W_{\gamma(s)}^s \cap W_{\eta(t)}^u. \quad (3.12)$$

Isto implica que  $w \in G$  pois  $\theta(1, 1)$  é o ponto de intersecção desejado. O que termina a

demonstração do lema.

A equação (3.12) define  $\theta$  em  $[0, 1] \times \{0\}$  e  $\{0\} \times [0, 1]$ . Como existe uma estrutura produto local, o domínio  $\mathcal{D}$  de  $\theta$  em  $[0, 1]^2$  é aberto. Sejam:

$$t_0 := \sup\{t \mid [0, 1] \times [0, t] \subset \mathcal{D}\}, \quad s_0 := \sup\{s \mid [0, s] \times \{t_0\} \subset \mathcal{D}\}, \quad J := [0, 1] \times [0, t_0)$$

Para vermos que  $\theta(J)$  é limitado, notamos primeiro que a projeção de  $h(\theta(J))$  na variedade instável  $V_0^u$  de 0 para  $F_L$  ao longo das folhas estáveis  $V^s$  de  $F_L$  é a projeção de  $H(\gamma([0, 1]))$ , e portanto é compacta. Notamos também que a projeção em  $V^s(0)$  ao longo de  $V^u$  está contida na projeção de  $H(\eta([0, 1]))$ . Logo  $H(\theta(J))$  é limitado e portanto  $\theta(J)$  é também limitado, pelo Lema 3.3. Assim existe uma sucessão  $(s_n, t_n) \rightarrow (s_0, t_0)$  com  $s_n \leq s_{n+1}$  tal que  $\theta(s_n, t_n) \rightarrow p$  para algum  $p \in \mathbb{R}^m$ .

Sem perda de generalidade, podemos assumir que essa sucessão está contida numa vizinhança produto  $O$  de  $p$ . Então

$$\theta(s_1, t_n) \rightarrow W_p^u \cap W_{\theta(s_1, t_1)}^s = \theta(s_1, t_0) \text{ e}$$

$$\theta(s_n, t_1) \rightarrow W_p^s \cap W_{\theta(s_1, t_1)}^u = \theta(s_0, t_1).$$

Logo para qualquer  $(S_n, T_n) \rightarrow (s_0, t_0)$  temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \theta(S_n, T_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} W_{\theta(s_1, T_n)}^u \cap W_{\theta(S_n, t_1)}^s = \\ &W^u \left( \lim_{n \rightarrow \infty} (\theta(s_1, T_n)) \right) \cap W^s \left( \lim_{n \rightarrow \infty} (\theta(S_n, t_1)) \right) = \\ &W_{\theta(s_1, t_0)}^u \cap W_{\theta(s_0, t_1)}^s = p. \end{aligned}$$

Assim, fazendo  $\theta(s_0, t_0) = p$  obtemos uma extensão contínua de  $\theta$  o que implica que  $(s_0, t_0) = (1, 1)$  e fica concluída a demonstração.  $\square$

Como as folhações estável e instável são contínuas e consequentemente a estrutura de produto global acima é contínua, existe um homeomorfismo  $\Phi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$  que envia cada  $W_x^u$  numa folha  $\mathbb{R}^k \times \{c\}$  e cada  $W_x^s$  numa folha  $\{c\} \times \mathbb{R}^{m-k}$ , dado por  $\Phi(x) := (W_x^s \cap W_0^u, W_x^u \cap W_0^s)$ .

**Lema 3.5.** *A semiconjugação  $h$  é injetora.*

*Demonstração.* Mostraremos primeiro que  $H$  é injetora em folhas instáveis de  $f$ . Se denotarmos por  $B^u(0, r)$  e  $B^s(0, r)$  as bolas de raio  $r$  nas variedades instável e estável de 0, respectivamente

(usando as métricas intrínsecas  $d^u$  e  $d^s$ ) então, pelo Lema 3.3, existe  $r > 0$  tal que  $H^{-1}(I) \subset D(r) := \{x \mid W_x^u \cap B^s(0, r) \neq \emptyset \text{ e } W_x^s \cap B^u(0, r) \neq \emptyset\}$ . Como  $D(r)$  tem fecho compacto, concluímos, usando o homeomorfismo  $\Phi$  da estrutura de produto global, que  $\mu := \sup\{d^u(x, y) \mid x, y \in D(r), y \in W_x^u\} < \infty$ . Se  $y \in W_x^u$  e  $H(x) = H(y)$ , seja  $x_n := F^n(x)$ ,  $y_n := F^n(y)$ . Então  $H(y_n) = H(F^n(y)) = F_L^n(H(y)) = F_L^n(H(x)) = H(F^n(x)) = H(x_n)$ . Mas existe  $l_n \in \mathbb{Z}^m$  tal que  $H(x_n + l_n) = H(y_n + l_n) \in I$  e logo  $x_n + l_n, y_n + l_n \in D(r)$ . Portanto  $d^u(F^n(x), F^n(y)) = d^u(x_n + l_n, y_n + l_n) \leq \mu$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Pela hiperbolicidade, isto implica que  $x = y$ , mostrando que  $H$  é injetora nas variedades instáveis.

Analogamente,  $H$  é injetora nas variedades estáveis.

Suponhamos agora que  $H(x) = H(y)$  para alguns  $x, y \in \mathbb{R}^m$ . Se existe um ponto heteroclínico  $z$  para  $x$  e  $y$  então  $H(z)$  é um ponto heteroclínico para  $H(x)$  e  $H(y)$  (sob  $F_L$ ), o que implica que  $H(x) = H(z) = H(y)$  porque  $F_L$  não tem pontos heteroclínicos não triviais. Mas pela injetividade de  $H$  nas folhas estáveis e instáveis,  $x = z = y$ . Assim, o levantamento  $H$  da semiconjugação é injetor.

A semiconjugação também tem que ser injetora pois  $H$  é dado pela soma da identidade com uma transformação periódica: se  $h(\pi(x)) = h(\pi(y))$  então  $H(x) = H(y) + k$  para algum  $k \in \mathbb{Z}^m$ ; portanto  $H(x - k) = H(y)$  e logo  $\pi(x) = \pi(y)$ .  $\square$

### *Demonstração do Teorema 3.6.*

Seja  $f : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^m$  um difeomorfismo de Anosov. Da Observação 3.1, sua classe de homotopia contém precisamente uma transformação linear  $F_L : \mathbb{T}^m \rightarrow \mathbb{T}^m$ . Pelo Lema 3.1, a transformação  $F_L$  é hiperbólica. Do Teorema 3.1 temos que  $F_L$  é um fator de  $f$  através de uma única semiconjugação  $h$  homotópica à identidade (e portanto sobrejetora). Pelo Lema 3.5,  $h$  é injetora e portanto é uma conjugação entre  $f$  e seu modelo linear  $F_L$ .  $\square$

# Referências Bibliográficas

- [1] ANOSOV, D.C., *Geodesic Flows on closed Riemannian manifolds with negative curvature*, Proc. Steckov Ins. Math. AMS Translations, 1969.
- [2] BARREIRA, L., VALLS, C., *Dynamical systems: an introduction*, Universitext, Springer-Verlag, Londres, 2013.
- [3] CAMACHO, C., LINS NETO, A., *Introdução à teoria das folheações*, IMPA, 1977.
- [4] FRANKS, J., *Anosov diffeomorphisms*, Global Analysis, Proc. Sym. Pure Math. AMS 14:61-93, 1970.
- [5] HIRSCH, M., PUGH. C., *Stable manifolds and hyperbolic sets*, Global Analysis, Proc. Sym. Pure Math. AMS XIV, 1970.
- [6] HIRSCH, M., PUGH. C., SHUB, M. *Invariant manifolds*, SLNM 583, 1977.
- [7] KATOK, A., HASSELBLAT, B., *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge, 1995.
- [8] LIMA, E. L., *Grupo fundamental e espaços de recobrimento*, IMPA, 2012.
- [9] LIMA, E. L., *Variedades diferenciáveis*, IMPA, 2011.
- [10] MANNING, A., *There are no new Anosov diffeomorphisms on tori*, Amer. J. Math., 96(3):422-429, 1974.
- [11] MATSUMOTO, S., *Codimension one Anosov flows*, Nihon University, 1995.
- [12] NEWHOUSE, S. E., *One codimension one Anosov diffeomorphisms*, Amer. J. Math., 92(3):761-770, 1970.
- [13] PALIS, J., MELO, W., *Introdução aos sistemas dinâmicos*, IMPA, 1975.

- [14] ROBINSON, C., *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics and chaos*, CRC Press, 1995.