RAFAELA FERREIRA AFONSO

Um estudo do comportamento dos zeros dos Polinômios de Gegenbauer

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2016

RAFAELA FERREIRA AFONSO

Um estudo do comportamento dos zeros dos Polinômios de Gegenbauer

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Polinômios Ortogonais.

Orientador: Prof. Dr. Fernando Rodrigo Rafaeli.

UBERLÂNDIA - MG
2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

A257e
2016

Afonso, Rafaela Ferreira, 1990-
Um estudo do comportamento dos zeros dos Polinômios de Gegenbauer / Rafaela Ferreira Afonso. - 2016.
79 f.

Orientador: Fernando Rodrigo Rafaeli.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Inclui bibliografia.

1. Matemática - Teses. 2. Polinômios ortogonais - Teses. 3. Sturm-Liouville, Equação de - Teses. 4. Equações diferenciais - Teses. I. Rafaeli, Fernando Rodrigo. II. Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO(A): Rafaela Ferreira Afonso.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11412MAT013.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Polinômios Ortogonais.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Um estudo do comportamento dos zeros dos Polinômios de Gengenbauer.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Fernando Rodrigo Rafaeli.

Esta dissertação foi APROVADA em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 29 de Fevereiro de 2016, às 14 h 00 min, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME	ASSINATURA
Prof. Dr. Fernando Rodrigo Rafaeli UFU - Universidade Federal de Uberlândia	Fernando R. Rafaeli
Prof(a). Dra. Regina Litz Lamblém UEMS- Universidade Estadual do Mato Grosso do Sul, Campus Cassilândia	[illegible]
Prof(a). Dra. Marisa de Souza Costa UFU - Universidade Federal de Uberlândia	Marisa S. Costa

Uberlândia-MG, 29 de Fevereiro de 2016.

Dedicatória

Dedico este trabalho aos meus pais,
Lauro e Zuleica,
e ao meu irmão, Daniel,
baluartes de minha vida
e a mais sublime expressão de amor incondicional.

Agradecimentos

Segundo Santa Terezinha do Menino Jesus, “Deus não nos inspiraria desejos irrealizáveis”. Agradeço a Ele por colocar sonhos em meu coração e me dar força e determinação para transformá-los em realidade, além de presentear-me com a rica convivência de pessoas especiais que muito colaboraram para a concretização deste ideal.

Aos meus pais, Lauro e Zuleica, e ao meu irmão, Daniel, por serem meu apoio e exemplo de trabalho, determinação, dedicação e, principalmente, por toda compreensão e amor incondicional.

À minha mãe e ao meu pai, por me ensinar que não se pode desistir de nada e por mostrar-me o valor da educação.

Às minhas tias, Lídia e Paula, pelo apoio e torcida.

Aos meus amigos, presentes de Deus na minha vida. Ao Matheus e Erlon, que, mesmo longe, estiveram presentes e me ajudaram a concluir mais esta etapa. Aos amigos do Mestrado, pela convivência e companheirismo. Aos novos amigos que conquistei em Uberlândia, em especial Fernanda e Mirian.

Aos professores, pelo conhecimento matemático compartilhado e pelo ensinamento técnico e científico que, permeados por grandes lições de vida, serão referências essenciais em minha prática educacional.

De forma especial, ao Professor Doutor Fernando Rodrigo Rafaeli, por me orientar e por ser o maior incentivador na superação de meus limites, acreditando em meu potencial. Por se tornar meu exemplo de orientador e professor, minha eterna gratidão.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

AFONSO, R. F. *Um estudo do comportamento dos zeros dos Polinômios de Gegenbauer.* 2016. 70 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Neste trabalho estudamos os Teoremas de Sturm Liouville para zeros de soluções de equações diferenciais lineares de segunda ordem. Estes teoremas clássicos são aplicados para análise do crescimento e decrescimento de certas funções que envolvem os zeros de Polinômios Ortogonais Clássicos, como os Polinômios de Gegenbauer.

Palavras-chave: Polinômios Ortogonais; Polinômio Ortogonais de Gegenbauer; Teoremas Clássicos de Sturm-Liouville; Zeros de Polinômios Ortogonais.

AFONSO, R. F. *Um estudo do comportamento dos zeros dos Polinômios de Gegenbauer.* 2016. 70 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

In this dissertation, we study the Sturm Liouvile's theorems for the zeros of the solutions of linear differential equations of second order. These classical theorems are applied to analysis of the monotonicity of functions involving the zeros of classical orthogonal polynomials, in particular, Gegenbauer polynomials.

Keywords: Orthogonal polynomials; Gegenbauer orthogonal polynomials; Sturm-Liouville classical theorems; zeros of orthogonal polynomials.

Sumário

Introdução

O objetivo deste trabalho é o estudo do crescimento e decrescimento das quantidades $f_n(\lambda)x_{n,k}(\lambda)$ e $f_n(\lambda)x_{n,k} + \dfrac{d_n}{g_n(\lambda)}x_{n,k}(\lambda)$, com $x_{n,k}(\lambda)$ zeros dos polinômios de Gegenbauer.

O comportamento dos zeros dos polinômios ortogonais vem sendo estudados desde o final do século XIX por A. Markov e T.J. Stiltjes e na terceira década do século XX por G. Szegö. Atualmente, matemáticos como Percy Deift e Barry Simon contribuem de forma significativa para o estudo do comportamento dos zeros dos polinômios ortogonais. O interesse de Barry Simon resultou em um livro chamado "Orthogonal Polynomials on the Unit Circle"e em vários artigos que tratam de polinômios ortogonais na reta real e na circunferência unitária.

Podemos citar dois motivos entre vários para estudarmos os zeros dos polinômios ortogonais, um deles é a interpretação física vinda da eletrostática e o outro é que eles são os melhores nós da Fórmula de Quadratura de Gauss. Há ainda aplicações dos polinômios ortogonais em Equações diferenciais, Teoria dos Códigos, Física Matemática e em Mecânica Quântica.

Um questionamento, que motiva muitos estudos na área, tem como objetivo conhecer com que velocidade os zeros crescem ou decrescem quando os parâmetros crescem. Neste trabalho, a velocidade do crescimento e decrescimento dos zeros dos Polinômios de Gegenbauer tem destaque. Ao longo de 25 anos, muitas conjecturas e teoremas contribuíram para obtermos os resultados atuais sobre o assunto. Matemáticos como A. Laforgia, M. E. Ismail, J. Letessier, R. A. Askey, S. Ahamed, M. E. Muldoon, R. Spigler, E. K. Ifantis, P.D.Siafarikas, A. Elbert e D.K. Dimitrov foram os grandes responsáveis pelas inúmeras contribuições para o estudo do comportamento dos zeros dos Polinômios Ortogonais de Gegenbauer que nos permitiu aprofundar sobre o tema.

A importância do estudo dos Teoremas Clássicos de Sturm Liouville para os polinômios ortogonais é que estes teoremas são aplicados para analisar os zeros dos polinômios ortogonais clássicos de Jacobi, Gegenbauer, Laguerre e Hermite. Estes teoremas nos permitem estudar a alternância de sinal das soluções de equações diferenciais de Sturm Liouville, isto é, se

$$\begin{aligned} y"(x) + f(x)y(x) &= 0 \\ Y"(x) + F(x)Y(x) &= 0 \end{aligned}$$

são duas equações diferenciais de segunda ordem que estão na forma de Sturm Liouville, o teorema da comparação nos garante que $Y(x)$ troca de sinal pelo menos uma vez entre dois zeros consecutivos de $y(x)$.

Os Teoremas Clássicos de Sturm Liouville nos permitirão determinar se as quantidades $f_n(\lambda)x_{n,k}(\lambda)$ e $f_n(\lambda)x_{n,k} + \dfrac{d_n}{g_n(\lambda)}x_{n,k}(\lambda)$, com $x_{n,k}(\lambda)$ zeros dos polinômios de Gegenbauer, são crescentes e decrescentes, respectivamente.

Este trabalho está estruturado da seguinte maneira:

- O Capítulo 1 tem como objetivo fornecer conceitos básicos sobre polinômios ortogonais, sua forma matricial e também uma breve seção sobre Quadratura de Gauss.

- O Capítulo 2 é dedicado ao estudo dos Polinômios Ortogonais Clássicos, em especial apresentaremos a Relação de Recorrência de Três Termos e ortogonalidade desses polinômios.
- O Capítulo 3 apresenta os Teoremas Clássicos de Sturm Liouville em detalhes, destacamos os teoremas da comparação e a versão integral do Teorema de Sturm Liouville.
- O Capítulo 4 contém um breve histórico de como chegamos às quantidades apresentadas nas aplicações do Teorema de Sturm Liouville. Neste capítulo, dividimos as demonstrações em algumas partes para facilitar a compreensão do leitor.

Rafaela Ferreira Afonso
Uberlândia-MG, 16 de janeiro de 2016.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo forneceremos alguns conceitos básicos de polinômios ortogonais na reta real e seus zeros. Neste capítulo temos como principal referência o livro Introdução aos Polinômios Ortogonais da SBMAC.

Um polinômio algébrico real de grau n é toda expressão da forma

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n, \tag{1.1}$$

com $a_0, a_1, ..., a_n$ números reais.

Seja π_n o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a n,

$$\pi_n = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n, \text{ com } a_j \in \mathbb{R}\}, j \in \{0, 1, ..., n\}. \tag{1.2}$$

Note que dimensão de π_n é $n + 1$.

Vamos denotar como $\pi = \bigcup_{i=1}^{\infty} \pi_n$, o espaço vetorial de todos os polinômios e considerar esse espaço vetorial com um produto interno.

Definição 1.1. *Função peso: Dizemos que $w(x)$ é uma função peso quando é uma função não negativa e não identicamente nula em um intervalo (a, b), isto é, $w(x) \geq 0$ mas $w(x)\not\equiv 0$, para todo x no intervalo (a, b).*

O produto interno para o espaço vetorial π é definido como:

$$\langle p, q\rangle = \int_a^b p(x)q(x)w(x)dx, \tag{1.3}$$

onde $p, q \in \pi$.

A norma correspondente é dada por:

$$||p|| = \sqrt{\langle p, p\rangle} = \left(\int_a^b p(x)^2w(x)dx\right)^{1/2}, \tag{1.4}$$

com $p \in \pi$.

Definição 1.2. *Uma Sequência de Polinômios Ortogonais (SPO) em π é uma sequência de polinômios $\{p_0, p_1, ...\}$, finita ou infinita, com cada polinômio p_n, de grau exatamente n, que satisfaz:*

$$\langle p_n, p_m\rangle = \begin{cases} 0 & se \quad n \neq m \\ \gamma_n > 0 & se \quad n = m \end{cases}. \tag{1.5}$$

Uma das formas de se obter uma sequência de polinômios ortogonais é através do método de ortogonalização de Gram-Shmidt.

1.1 Algumas propriedades

Teorema 1.1. *Toda subsequência finita,*$\{p_{i_1}(x), ..., p_{i_n}(x)\}$ *de uma Sequência de Polinômios Ortogonais,* $\{p_0, p_1, ...\}$*, é um sistema linearmente independente.*

Demonstração. Suponha que exista uma sequência finita linearmente dependente, ou seja, $p_{i_0}, p_{i_1}, ..., p_{i_n}$ e $\alpha_0, ..., \alpha_n$ não todos nulos, tais que

$$p(x) = \alpha_0 p_{i_0} + ... + \alpha_n p_{i_n},$$

onde $p(x) \equiv 0$.

Logo,

$$\langle p, p_j \rangle = \langle 0, p_j \rangle = 0, \forall j \in \{0, ..., n\}. \tag{1.6}$$

Por outro lado, seja k, $0 \leq k \leq n$ tal que $\alpha_k \neq 0$ em $p(x) = \alpha_0 p_{i_0} + ... + \alpha_n p_{i_n}$. Então,

$$0 = \langle \alpha_0 p_{i_0} + ... + \alpha_n p_{i_n}, p_{i_k} \rangle = \alpha_0 \langle p_{i_n}, p_{i_k} \rangle + ... + \alpha_n \langle p_{i_n}, p_{i_k} \rangle = \alpha_k \langle p_{i_k}, p_{i_k} \rangle. \tag{1.7}$$

Como,$\langle p_{i_k}, p_{i_k} \rangle \neq 0$, chegamos a uma contradição.

■

Teorema 1.2. *Se o polinômio* $p(x)$ *é de grau menor igual a* n*, então* $p(x)$ *pode ser unicamente representado por* $p(x) = a_0 p_0(x) + a_1 p_1(x) + ... + a_n p_n(x)$

Demonstração. Seja $p \in \pi_n$. Como π_n é um espaço vetorial e tem dimensão $n + 1$ e $\{p_0(x), ..., p_n(x)\}$ uma sequência de polinômios ortogonais, então pelo Teorema 1.1, $\{p_0(x), ..., p_n(x)\}$ é linearmente independente. Assim, forma uma base para π_n. Portanto cada elemento de π_n pode ser unicamente representado como combinação linear de elementos da base. ■

Teorema 1.3. *Seja* $\langle ., . \rangle$ *em* π *definido por (1.3). Então são equivalentes:*

a) $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ *é uma SPO com relação a* $\langle ., . \rangle$*;*

b) $\langle p, p_n \rangle = 0$ *para todo polinômio* p *de grau menor que* n *e* $\langle p, p_n \rangle \neq 0$ *para todo polinômio* p *de grau exatamente* n*;*

c) $\langle x^m, p_n \rangle = 0$ *para* $m < n$ *e* $\langle x^n, p_n \rangle \neq 0$.

Demonstração. ($a \Rightarrow b$) Seja $\{p_n\}$ uma SPO. Seja p um polinômio de grau m. Então existem escalares $\alpha_0, ..., \alpha_m$ tais que $p(x) = \alpha_0 p_0(x) + ... + \alpha_m p_m(x)$, com $\alpha_m \neq 0$.

Pela linearidade do produto interno, temos

$$\langle p, p_n \rangle = \langle \alpha_0 p_0 + ... + \alpha_m p_m, p_n \rangle = \alpha_0 \langle p_0, p_n \rangle + ... \alpha_m \langle p_m, p_n \rangle \tag{1.8}$$

Assim,

$$\langle p, p_n \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad m < n \\ \alpha_m \langle p_m, p_n \rangle & \text{se} \quad m = n \end{cases}.$$

($b \Rightarrow c$) Basta tomar $p(x) = x^m$, o resultado é imediato.

($c \Rightarrow a$) Suponha que $\langle x^m, p_n \rangle = 0$ se $m < n$ e $\langle x^m, p_n \rangle \neq 0$.
Seja $p_m(x) = a_{m_0} + a_{m_1} x + ... + a_{m_n} x^m$. Sem perda de generalidade, suponha $m \leq n$.
Assim, temos,
$\langle p_m, p_n \rangle = a_{m_0} \langle 1, p_n \rangle + a_{m_1} \langle x, p_n \rangle + ... + a_{m_n} \langle x^m, p_n \rangle$.

Portanto, $\langle p_m, p_n \rangle = \begin{cases} 0 & , \quad m < n \\ \neq 0 & , \quad m = n \end{cases}$.

■

Definição 1.3. *Uma sequência dos polinômios* $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ *é dita ortonormal se* $\langle p_n, p_m \rangle = \begin{cases} 0, & m < n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$

Teorema 1.4 (Relação de Recorrência de Três Termos)**.** *Considere* $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ *uma sequência de polinômios ortogonais. Os polinômios ortogonais satisfazem uma Relação de Recorrência de Três Termos da seguinte forma:*

$$xp_k(x) = \gamma_k p_{k+1}(x) + \beta_k p_k(x) + \delta_k p_{k-1}, k \geq 0,$$

com condições iniciais, $p_{-1}(x) = 0$, $p_0(x) = 1, \beta_k \in \mathbb{R}$ *e* $\gamma_k \delta_{k+1} > 0$.

Demonstração. Como o polinômio $xp_k(x) \in \pi_{k+1}$, podemos escrevê-lo como segue:

$$xp_k(x) = \sum_{j=0}^{k+1} \alpha_j p_j(x) = \alpha_0 p_0(x) + ... + \alpha_{k+1} p_{k+1}(x),$$

pois $\{p_0, ..., p_{k+1}\}$ forma uma base para π_{k+1}.

Vamos provar que $\alpha_j = 0$ para $j \in \{0, 1, ..., k-2\}$ e que $\gamma_k \delta_{k+1} > 0$.

Pela ortogonalidade, temos

$$0 = \langle xp_j(x), p_k(x) \rangle = \langle p_j(x), xp_k(x) \rangle = \sum_{i=0}^{k+1} \alpha_i \langle p_j(x), p_i(x) \rangle = \alpha_j \langle p_j(x), p_j(x) \rangle,$$

para todo $j \in \{0, 1..., k-2\}$.

Como $\langle p_j, p_j \rangle \neq 0$, então $\alpha_j = 0$ para $j \in \{0, 1..., k-2\}$. Logo,

$$xp_k(x) = \alpha_{k-1} p_{k-1}(x) + \alpha_k p_k(x) + \alpha_{k+1} p_{k+1}(x).$$

Sejam

$$xp_k(x) = \gamma_k p_{k+1}(x) + \beta_k p_k(x) + \delta_k p_{k-1}(x) \tag{1.9}$$

e

$$xp_{k+1}(x) = \gamma_{k+1} p_{k+2}(x) + \beta_{k+1} p_{k+1}(x) + \delta_{k+1} p_k(x). \tag{1.10}$$

De (1.9), temos

$$0 \neq \langle xp_k, p_{k+1} \rangle = \gamma_k \langle p_{k+1}, p_{k+1} \rangle, \tag{1.11}$$

e de (1.10), temos

$$0 \neq \langle xp_{k+1}, p_k \rangle = \delta_{k+1} \langle p_k, p_k \rangle. \tag{1.12}$$

Multiplicando (1.11) e (1.12),

$$0 < (\langle xp_k, p_{k+1} \rangle)^2 = \gamma_k \delta_{k+1} \langle p_{k+1}(x), p_{k+1}(x) \rangle \langle p_k(x), p_k(x) \rangle \Rightarrow \gamma_k \delta_{k+1} > 0.$$

■

Corolário 1.1. *Seja* $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ *uma Sequência de Polinômios Ortonormais. Então,*

$$xp_k(x) = a_k p_{k+1}(x) + b_k p_k(x) + a_{k-1} p_{k-1}, \tag{1.13}$$

com $k \geq 0$, $a_k = \sqrt{\gamma_k \delta_{k+1}}$ *e* $b_k = \beta_k$.

Agora, se multiplicarmos (1.13) por $p_k(y)$, obtemos:

$$\begin{aligned} xp_k(x)p_k(y) &= [a_kp_{k+1}(x) + b_kp_k(x) + a_{k-1}p_{k-1}(x)]p_k(y) \\ &= a_kp_{k+1}(x)p_k(y) + b_kp_k(x)p_k(y) + a_{k-1}p_{k-1}(x)p_k(y). \end{aligned} \tag{1.14}$$

De forma análoga,

$$yp_k(y)p_k(x) = a_kp_{k+1}(y)p_k(x) + b_kp_k(y)p_k(x) + a_{k-1}p_{k-1}(y)p_k(x). \tag{1.15}$$

Subtraindo a equação (1.14) pela equação (1.15), obtemos

$$(x-y)p_k(x)p_k(y) = a_k(p_{k+1}(x)p_k(y) - p_{k+1}(y)p_k(x)) + a_{k-1}(p_{k-1}(x)p_k(y) - p_{k-1}(y)p_k(x)).$$

Fazendo $k \in \{0, 1, ..., n\}$ e somando, temos:

$$(x-y)\sum_{k=0}^{n}(p_k(x)p_k(y)) = a_n(p_{n+1}(x)p_n(y) - p_{n+1}(y)p_n(x)).$$

Provamos o seguinte:

Teorema 1.5 (Identidade de Christoffel Darboux)**.** *Seja $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma Sequência de Polinômios Ortonormais, então*

$$K_n(x,y) = \sum_{k=0}^{n}(p_k(x)p_k(y)) = a_n\frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_{n+1}(y)p_n(x)}{x-y}.$$

A função $K_n(x,y)$ é chamada de núcleo de reprodução. Fazendo $y \to x$, obtemos

$$0 < K_n(x,x) = a_n(p'_{n+1}(x)p_n(x) - p'_n(x)p_{n+1}(x)).$$

De fato.

$$\begin{aligned} 0 < K_n(x,x) &= a_n\frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_{n+1}(y)p_n(x)}{x-y} \\ &= a_n\frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_{n+1}(y)p_n(x) + p_n(x)p_{n+1}(x) - p_n(x)p_{n+1}(x)}{x-y} \\ &= a_n\left(p_{n+1}\frac{p_n(y)-p_n(x)}{x-y} + p_n(x)\frac{p_{n+1}(x)-p_{n+1}(y)}{x-y}\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{y\to x} K_n(x,y) &= \lim_{y\to x} a_n\left(p_{n+1}\frac{p_n(y)-p_n(x)}{x-y} + p_n(x)\frac{p_{n+1}(x)-p_{n+1}(y)}{x-y}\right) \\ &= a_n(p'_{n+1}(x)p_n(x) - p'_n(x)p_{n+1}(x)). \end{aligned}$$

1.2 Forma Matricial dos Polinômios Ortogonais

Dada uma formula de recorrência

$$xp_k(x) = a_kp_{k+1}(x) + b_kp_k(x) + a_{k-1}(x)p_{k-1}, \tag{1.16}$$

podemos reescrevê-la como veremos a seguir.

Fazendo, $k = 0, 1, ..., n-1$, obtemos o sistema,

$$\begin{array}{rcl} xp_0(x) & = & a_0p_1(x) + b_0p_0(x) \\ xp_1(x) & = & a_1p_2(x) + b_1p_1(x) + a_0p_0(x) \\ xp_2(x) & = & a_2p_3(x) + b_2p_3(x) + a_1p_1(x) \\ \vdots & & \vdots \\ xp_{n-2} & = & a_{n-2}p_{n-1}(x) + b_{n-2}p_{n-2}(x) + a_{n-3}p_{n-3}(x) \\ xp_{n-1} & = & a_{n-1}p_n(x) + b_{n-1}p_{n-1}(x) + a_{n-2}p_{n-2}(x). \end{array}$$

Dessa forma, considerando as matrizes

$$J_n = \begin{pmatrix} b_0 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_0 & b_1 & a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & b_2 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_{n-2} & b_{n-1} \end{pmatrix}, \overline{P} = \begin{pmatrix} p_0(x) \\ p_1(x) \\ \vdots \\ p_{n-2}(x) \\ p_{n-1}(x) \end{pmatrix} \text{ e } A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{n-1}p_n(x) \end{pmatrix},$$

a forma matricial da equação (1.16) pode ser escrita como:

$$J_n\overline{P} = x\overline{P} - A. \tag{1.17}$$

A matriz J_n é conhecida como matriz de Jacobi. Denotaremos $x_{n,k}$ como os zeros de $P_n(x)$. Então:

$$J_n\overline{P}(x_{n,k}) = x_{n,k}\overline{P}(x_{n,k})$$

Observação: Matriz simétrica $\Rightarrow$ Autovalores reais.

Teorema 1.6. *Seja $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma Sequência de Polinômios Ortogonais em relação à função peso $w(x)$ no intervalo (a,b), então os zeros de cada polinômio ortogonal são reais.*

Demonstração. Consideremos $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma Sequência de Polinômios Ortogonais em relação ao produto interno

$$\langle f(x), g(x)\rangle = \int_a^b f(x)g(x)w(x)dx.$$

Sejam $\{x_{n,1}, ..., x_{n,n}\}$ os zeros de $p_n(x)$ e $\overline{P}_{n,j} = [p_0(x_{n,j}), \cdots, p_{n-1}(x_{n,j})]^T$. Substituindo x por $x_{n,j}$ em (1.17), temos:

$$J_n\overline{P}(x_{n,j}) = x_{n,j}\overline{P}(x_{n,j}).$$

Portanto, $x_{n,j}$ é autovalor de J_n.

Como a matriz de Jacobi é simétrica, concluímos, da observação acima, que os seus autovalores são reais, isto é, os zeros de p_n são todos reais.

■

Definição 1.4. *Seja $p \in \pi_n$. Então x é um zero de multiplicidade k do polinômio p se:*

$$p(x) = p'(x) = ... = p^{(k-1)}(x) = 0 \text{ e } p^{(k)}(x) \neq 0.$$

Teorema 1.7. *Seja $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma Sequência de Polinômios Ortogonais em relação à função peso $w(x)$ no intervalo (a,b). Então, os zeros dos polinômios ortogonais são distintos.*

Demonstração. Suponha que algum zero, $x_{n,j}$ de $p_n(x)$ tenha multiplicidade maior que um. Assim,

$$0 < K_n(x_{n,j}, x_{n,j}) \;=\; a_n(p'_{n+1}(x_{n,j})p_n(x_{n,j}) - p'_n(x_{n,j})p_{n+1}(x_{n,j})). \tag{1.18}$$

Como $p_n(x_{n,j}) = 0$ e $p'_n(x_{n,j}) = 0$, então $K_n(x_{n,j}, x_{n,j}) = 0$, que é absurdo. ■

Teorema 1.8. *Seja $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma Sequência de Polinômios Ortogonais em relação à função peso $w(x)$ no intervalo (a, b). Então os zeros dos polinômios ortogonais estão no intervalo (a, b).*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que nem todos os zeros estejam em (a, b). Mais precisamente, suponha que existam j zeros, $x_{n,1}, ..., x_{n,j}$ de $p_n(x)$ fora de (a, b).

Então,

$$q(x) = \frac{p_n(x)}{(x - x_{n,1})...(x - x_{n,n-j})} \in \pi_{n,j}$$

é um polinômio de grau $n - j$.

Se $j > 0$, então pela ortogonalidade, temos

$$\begin{aligned} 0 = \langle p_n(x), q(x)\rangle &= \int_a^b p_n(x)\frac{p_n(x)}{(x - x_{n,1})...(x - x_{n,n-j})}w(x)dx \\ &= \int_a^b \frac{p_n^2(x)w(x)}{(x - x_{n1})...(x - x_{n-j})}\;dx \neq 0. \end{aligned}$$

Assim, $\langle p_n, q\rangle$ não muda de sinal em (a, b), pois $p_n^2(x)w(x) \geq 0$ e $(x-x_{n,1})...(x-x_{n,n-j}) \neq 0$.
Portanto, $j = 0$ e, assim, todos os zeros de $p_n(x)$ estão em (a, b). ■

Resumindo, temos:

Seja $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma Sequência de Polinômios Ortogonais em relação à função peso $w(x)$ no intervalo (a, b). Então os zeros de cada polinômio ortogonal são reais, distintos e estão em (a, b).

1.3 Quadratura de Gauss

Seja f uma função definida em $x_1, ..., x_n$ no intervalo (a, b). Definimos: $I(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx$.

Definição 1.5. *Fórmula de Quadradura é toda expressão da forma*

$$Q(f) = \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k),$$

sendo f uma função definida em $x_1, ..., x_n$ e $a_k \in \mathbb{R}$. Onde $I(f) \approx Q(f)$.

Definição 1.6. *Seja $Q(f)$ uma fórmula de quadratura para $I(f)$. Dizemos que:*

1. *$Q(f)$ é exata para π_m se $I(f) = Q(f)$, para toda $f \in \pi_m$.*
2. *$Q(f)$ possui grau de precisão algébrica m se satisfaz (1) e, além disso, existe $g \in \pi_{m+1}$ tal que $I(g) \neq Q(g)$.*

   Quando $Q(f)$ satisfaz (1)e (2),escrevemos que o Grau de Precisão Algébrica (GPA) será m, isto é, $GPA(Q) = m$.

Apresentaremos a seguir algumas propriedades de $I(f)$ e $Q(f)$:

- $I(f+g) := I(f) + I(g)$;
- $Q(f+g) := Q(f) + Q(g)$;
- $I(\alpha f) := \alpha I(f)$;
- $Q(\alpha f) := \alpha Q(f)$.

Lema 1.1. *Uma fórmula de quadratura $Q(f)$ é exata, se e somente se, ela é exata para uma base de π_m. Em particular, $Q(f)$ é exata se, e somente se, ela é exata para $\{1, x, x^2, ..., x^m\}$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Sabemos que $I(f) = Q(f)$, para toda $f \in \pi_m$. Seja $B = \{b_0, b_1, ..., b_m\}$ uma base de π_m. Então, $b_k \in \pi_m, 1 \leqslant k \leqslant m$.

Portanto, $I(b_k) = Q(b_k), k = \{1, 2, ..., m\}$.

($\Leftarrow$) Seja $B = \{b_0, b_1, ..., b_m\}$ uma base de π_m. Daí para toda $f \in \pi_m$, existem escalares tais que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k b_k.$$

Por hipótese, $I(b_k) = Q(b_k)$, onde $k \in \{1, 2, ..., m\}$. Logo,

$$\begin{aligned} I(f) &= I(\alpha_0 b_0 + ... + \alpha_m b_m) \\ &= \alpha_0 I(b_0) + ... + \alpha_m I(b_m) \\ &= \alpha_0 Q(b_0) + ... + \alpha_m Q(b_m) \\ &= Q(\alpha_0 b_0 + ... + \alpha_m b_m) \\ &= Q(f). \end{aligned}$$

Portanto, $I(f) = Q(f)$, para toda $f \in \pi_m$.

■

Lema 1.2. *Se $Q(f)$ é exata para π_m e existe $g \in \pi_{m+1}$, tal que $I(g) \neq Q(g)$, então $I(h) \neq Q(h)$, para todo polinômio de grau $m+1$.*

Demonstração. Se g é um polinômio de grau $m+1$, então $g(x) = \alpha_{m+1}x^{m+1} + f(x)$, onde $f \in \pi_m$ e $\alpha_{m+1} \neq 0$.

Como por hipótese $I(g) \neq Q(g)$, então, $I(g) - Q(g) \neq 0$.

Observe que

$$\begin{aligned} I(g) - Q(g) &= I(\alpha_{m+1}x^{m+1} + f(x)) - Q(\alpha_{m+1}x^{m+1} + f(x)) \\ &= \alpha_{m+1}(I(x^{m+1}) - Q(x^{m+1}). \end{aligned}$$

Portanto, $I(x^{m+1}) \neq Q(x^{m+1})$.

Se $h \in \pi_{m+1} \backslash \pi_m$, então $h(x) = \beta_{m+1}x^{m+1} + f(x)$, em que $f \in \pi_m$, $\beta_{m+1} \in \mathbb{R}$ e $\beta_{m+1} \neq 0$.

Daí,

$$\begin{aligned} I(h) - Q(h) &= I(\beta_{m+1}x^{m+1} + f(x)) - Q(\beta_{m+1}x^{m+1} + f(x)) \\ &= \beta_{m+1}I(x^{m+1}) + I(f) - \beta_{m+1}Q(x^{m+1}) - Q(f) \\ &= \beta_{m+1}(I(x^{m+1}) - Q(x^{m+1})) \neq 0. \end{aligned}$$

Assim, $I(h) \neq Q(h)$.

■

Definição 1.7. *A fórmula de quadratura* $Q(f) = \sum_{k=1}^{m} a_k f(x_k)$ *é chamada interpolatória se* $Q(f) = \int_a^b L_{n-1}(f;x)w(x)dx$, *onde* $L_{n-1}(f,x)$ *é o polinômio interpolador de Lagrange de* f *em* $x_1, ..., x_n$, *ou equivalentemente,*

$$a_k = \int_a^b l_{n_k}(x)w(x)dx$$

,

Denotamos $l_k = \dfrac{\sigma(x)}{(x-x_k)\sigma'(x_k)}$, *onde* $\sigma(x) = (x-x_1)...(x-x_n)$.

Lema 1.3. *Uma fórmula de quadratura* $Q(f) = \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k)$ *é exata para* π_{n-1}, *se e somente se,* $Q(f)$ *é interpolatória, ou seja,* $a_k = \int_a^b l_{n_k}(x)w(x)dx$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $Q(f)$ é exata para π_{n-1}, então $I(f) = Q(f), \forall f \in \pi_{n-1}$.

Assim,

$$I(l_{nj}(x)) = Q(l_{nj}(x)) = \sum_{k=1}^{n} a_k l_{nj}(x_k) = a_j$$

.

($\Leftarrow$) Por hipótese, $Q(f)$ é interpolatória, ou seja, $Q(f) = I(L_{n-1}(f;x))$. Logo, $Q(f) = I(f)$. Portanto, Q é exata para π_{n-1}. ■

Observação: Se Q é interpolatória, então $GPA(Q) \geq n-1$.

Teorema 1.9. *Seja* $I(f) = \int_a^b f(x)w(x)dx$. *O GPA máximo de uma fórmula de quadratura para* $I(f)$ *de* n *nós é* $2n-1$.

A fórmula de quadratura que atinge esse grau de precisão algébrica é única e é dada por:

$$Q(f) = \sum_{k=1}^{n} a_k f(x_k), \tag{1.19}$$

onde $x_1, ..., x_n$ *são zeros do n-ésimo polinômio ortogonal da Sequência de Polinômios Ortogonais* $\{p_k\}_{k=0}^{\infty}$ *associado ao produto interno*

$$\langle p, q \rangle = \int_a^b p(x)q(x)w(x)dx.$$

Os números a_k *são positivos e dados por*

$$a_k = \frac{1}{p_n'(x_k)} \int_a^b \frac{p_n(x)w(x)}{x-x_k}dx,\ k \in \{1, 2, ..., n\}. \tag{1.20}$$

Demonstração. Vamos mostrar que a fórmula de quadratura (1.19) é exata para polinômios de grau $2n-1$, isto é, $I(p) = Q(p)$, $\forall p \in \pi_{2n-1}$.

Seja $p \in \pi_{2n-1}$ e consideremos $L(x)$ o polinômio interpolador de p em $x_1, x_2, ..., x_n$, onde $x_1, x_2, ..., x_n$ são zeros de p_n.

Assim, $L(x) = L_{n-1}(p,x) = \sum_{k=1}^{n} p(x_k) l_{n,k}(x) = \sum_{k=1}^{n} p(x_k) \dfrac{p_n(x)}{p_n'(x_k)(x-x_k)}$.

Note que $L(x_k) = p(x_k)$, para todo $k \in \{1, ..., n\}$.

Como $p \in \pi_{2n-1}$ e $L \in \pi_{n-1}$, então $p - L \in \pi_{2n-1}$.

Definindo $q = p - L$ observamos que $x_1, ..., x_n$ são zeros de q, pois,

$$q(x_k) = p(x_k) - L(x_k) = 0, \text{ para todo } k = 1, ..., n.$$

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, $q(x) = p(x) - L(x) = (x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n)r(x)$, onde $(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n) \in \pi_n$ e $r(x) \in \pi_{n-1}$.

Assim, $p(x) - L(x) = p_n(x)r(x)$, e portanto $p(x) = L(x) + p_n(x)r(x)$.

Integrando em ambos os lados obtemos:

$$\int_a^b p(x)w(x)dx = \int_a^b L(x)w(x)dx + \int_a^b p_n(x)r(x)w(x)dx.$$

Pela ortogonalidade temos que $\int_a^b p_n(x)r(x)w(x)dx = 0$, pois, $r \in \pi_{n-1}$ e $p_n \in \pi_n$.

Assim,

$$\begin{aligned}
I(p) &= \int_a^b p(x)w(x)dx \\
&= \int_a^b L(x)w(x)dx \\
&= \int_a^b \sum_{k=1}^{n} p(x_k)\frac{p_n(x)}{p_n'(x_k)(x-x_k)}w(x)dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} p(x_k)\int_a^b \frac{p_n(x)}{p_n(x)(x-x_k)}w(x)dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} a_k p(x_k) \\
&= Q(p).
\end{aligned}$$

Portanto, a fórmula de quadratura é exata para $p \in \pi_{2n-1}$.

Provaremos a unicidade da fórmula de quadratura.

Suponha que existam nós, $z_1, z_2, ..., z_n$ que não sejam os zeros de p_n e coeficientes $b_1, b_2, ..., b_n$ tal que,

$$\int_a^b p(x)w(x)dx = \sum_{k=1}^{n} b_k p(x_k) = b_1 p(x_1) + \cdots + b_n p(x_n) \tag{1.21}$$

seja satisfeita para todo polinômio de grau $2n - 1$.

Seja $g \in \pi_n$, onde $g(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$.

Os polinômios $g(x)x^k$, $k = 0, 1, \cdots, n-1$ possuem grau no máximo $2n-1$. Então, a equação (1.21) vale para os polinômios $g(x)x^k$, $k = 0, 1, \cdots, n - 1$. Assim,

$$\int_a^b g(x)x^k w(x)dx = b_1 g(x_1)x_1^k + \cdots + b_n g(x_n)x_n^k = 0, \; k = 1, \cdots, n-1.$$

Pelo Teorema 1.3, $g(x)$ é um polinômio ortogonal de grau n. Assim $z_1, \cdots, z_n$ coincidem com $x_1, \cdots, x_n$, que são os zeros de $p_n(x)$.

Os coeficientes b_j são obtidos aplicando a fórmula de quadratura (1.20), para $f(x) = \dfrac{p_n(x)}{(x - x_j)}$

$$\begin{aligned}
b_j &= \frac{1}{p_n'(x_j)}\int_a^b \frac{p_n(x)}{(x-x_j)}w(x)dx \\
&= \frac{1}{p_n'(x_j)}\int_a^b f(x)w(x)dx = a_j.
\end{aligned}$$

Resta mostrar que os coeficientes a_j são positivos. De fato.

Seja $\dfrac{p_n^2(x)}{(x-x_j)^2} \in \pi_{2n-2}$, pois $p_n \in \pi_{n-1}$, então $p_n^2 \in \pi_{2n-2}$.

Aplicando $\dfrac{p_n^2(x)}{(x-x_j)^2}$ em (1.19), temos:

$$
\begin{aligned}
Q\left(\frac{p_n^2(x)}{(x-x_j)^2}\right) &= I\left(\frac{p_n^2(x)}{(x-x_j)^2}\right) \\
&= \int_a^b \frac{p_n^2(x)}{(x-x_j)^2} w(x)dx > 0
\end{aligned}
$$

pois, $p_n^2(x),\ (x-x_j)^2,\ w(x) > 0$, para todo x.

Note que:

$$
\begin{aligned}
p_n'(x) &= \left((x-x_j)\frac{p_n(x)}{(x-x_j)}\right)' \\
&= \frac{p_n(x)}{(x-x_j)} + (x-x_j)\left[\frac{p_n(x)}{(x-x_j)}\right]'.
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Capítulo 2

Polinômios Ortogonais Clássicos

O objetivo deste capítulo é introduzir teoremas e algumas propriedades básicas dos Polinômios Ortogonais Clássicos, como relação de ortogonalidade, Relação de Recorrência de Três Termos entre outras propriedades.

Os Polinômios Ortogonais Clássicos estudados neste capítulo serão os Polinômios de Jacobi e os casos especiais desses polinômios (Polinômios de Legenge, de Gengerbauer e Chebyshev de primeira e segunda espécie), como também os Polinômios de Laguere e de Hermite.

Definição 2.1. *Os polinômios ortogonais, com respeito ao produto interno (1.3) no intervalo (a,b), são chamados de Polinômios Ortogonais Clássicos se a função peso $w(x)$ satisfizer a seguinte equação diferencial:*

$$\frac{\partial M(x)w(x)}{\partial x} = N(x)w(x),$$

onde $M(x) = \begin{cases} 1-x^2 & ,se \quad (a,b) = (-1,1) \\ x & ,se \quad (a,b) = (0,\infty) \\ 1 & ,se \quad (a,b) = (-\infty,0) \end{cases}$ *e $N(x)$ é um polinômio de grau 1.*

2.1 Polinômios de Jacobi

Os Polinômios de Jacobi serão denotados por $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$, sendo definidos através da Fórmula de Rodrigues, dada por:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right]. \tag{2.1}$$

Para cacularmos o coeficiente do termo de maior grau do Polinômio de Jacobi tomaremos $f(x) = (1-x)^{\alpha+n}$ e $g(x) = (1+x)^{\beta+n}$.

Note que a j-ésima derivada de $f(x)$ e $g(x)$ são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} \frac{\partial^j}{\partial x^j}f(x) &= f^j(x) \\ &= (-1)^j(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+n-(j-1))(1-x)^{\alpha+n-j}, \qquad (2.2) \\ \frac{\partial^j}{\partial x^j}g(x) &= g^j(x) \\ &= (\beta+n)(\beta+n-1)\cdots(\beta+n-(j-1))(1+x)^{\beta+n-j}. \qquad (2.3) \end{aligned}$$

Pela regra de Leibniz, temos:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[f(x)g(x)\right] = \frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\right] = \sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right) f^{n-k}(x)g^k(x). \tag{2.4}$$

Substituindo (2.2) e (2.3) em (2.4), temos:

$$\frac{d^n}{dx^n}\left[f(x)g(x)\right] = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) (-1)^k(\alpha+n)\cdots(\alpha+n-k+1)$$
$$(\beta+n)\cdots(\beta+n-k+1)(1-x)^{\alpha+n-k}(1+x)^{\beta+n-j}. \tag{2.5}$$

Substituindo (2.5) na fórmula de Rodrigues para o Polinômio de Jacobi, temos:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}(-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!}(-1)^k(\alpha+n)\cdots(\alpha+n-k+1)$$
$$(\beta+n)\cdots(\beta+n-k+1)(1-x)^{\alpha+n-k}(1+x)^{\beta+n-j}. \tag{2.6}$$

Assim,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}(\alpha+n)\cdots(\alpha+k+1)(\beta+n)\cdots(\beta+n-k+1)(1-x)^k(1+x)^{(n-k)}.$$

Podemos escrever $(1-x)^k$ e $(1+x)^{(n-k)}$, como

$$\begin{aligned}
(1-x)^k &= \sum_{j=0}^{k}(-1)^j \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) x^j = \left(\begin{array}{c} k \\ 0 \end{array} \right) x^0 - \left(\begin{array}{c} k \\ 1 \end{array} \right) x^1 + \left(\begin{array}{c} k \\ 2 \end{array} \right) x^2 + \cdots + (-1)^k \left(\begin{array}{c} k \\ k \end{array} \right) x^k, \\
(1+x)^{n-k} &= \sum_{i=0}^{n-k} \left(\begin{array}{c} n-k \\ i \end{array} \right) x^i \\
&= \left(\begin{array}{c} n-k \\ 0 \end{array} \right) x^0 + \left(\begin{array}{c} n-k \\ 1 \end{array} \right) x^1 + \left(\begin{array}{c} n-k \\ 2 \end{array} \right) x^2 + \cdots + \left(\begin{array}{c} n-k \\ n-k \end{array} \right) x^{n-k}.
\end{aligned}$$

Fazendo o Produto de Cauchy, em $(1-x)^k(1+x)^{n-k}$, temos

$$(-1)^k x^k + \left(\begin{array}{c} n-k \\ 1 \end{array} \right) (-1)^k x^{k+1} + \cdots + (-1)^k x^n + \cdots .$$

Substituindo a equação acima em (2.6), temos

$$\begin{aligned}
P_n^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(\alpha+n)\cdots(\alpha+k-1)(\beta+n)\cdots(\beta+n-k+1) \\
&\left\{(-1)^k x^n + \left[(-1)^{k-1}\left(\begin{array}{c} k \\ k-1 \end{array} \right) + (-1)^k \left(\begin{array}{c} n-k \\ n-k-1 \end{array} \right)\right] x^{n-1}\right\} \\
= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} &\frac{1}{k!(n-k)!}(\alpha+n)\cdots(\alpha+k-1)(\beta+n)\cdots(\beta+n-k+1)x^n + \cdots .
\end{aligned}$$

Assim, o coeficiente do termo de maior grau é

$$a_{n,n} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!}(\alpha+n)\cdots(\alpha+k-1)(\beta+n)\cdots(\beta+n-k+1). \tag{2.7}$$

Apresentaremos a seguir algumas propriedades da função gama

1. $\Gamma(x+1) = x!$ e $\Gamma(1) = 1$;

2. $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$;

3. Se $x, y > 0$, temos $\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array} \right) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(y+1)\Gamma(x-y+1)}$;

4. Se $n \in \mathbb{Z}$ e $x > 0$, temos $\left(\begin{array}{c} x \\ n \end{array} \right) = \dfrac{\Gamma(x+1)}{n!\Gamma(x-n+1)}$.

Podemos escrever o coeficiente do termo de maior grau dos Polinômios de Jacobi em função da função gama, isto é

$$\begin{aligned} \Gamma(\alpha+n+1) &= (\alpha+n)(\alpha+n-1)\,\Gamma(\alpha+n-1) \\ &= (\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+k+1)\,\Gamma(\alpha+k+1). \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)} = (\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+k+1).$$

Temos também:

$$\begin{aligned} \Gamma(\beta+n+1) &= (\beta+n)(\beta+n-1)\Gamma(\beta+n-1) \\ &= (\beta+n)(\beta+n-1)\cdots(\beta+n-k+1)\Gamma(\beta+n-k+1). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+n-k+1)} = (\beta+n)(\beta+n-1)\cdots(\beta+n-k+1).$$

Com as propriedades da função gama e as igualdades acima, concluímos que

$$a_{n,n} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+k+1)}\frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+n-k+1)}. \tag{2.8}$$

Proposição 2.1. *O coeficiente do termo de maior grau do polinômio de Jacobi $a_{n,n}$ também pode ser dado por:*

$$a_{n,n} = \frac{1}{2^n n!}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}. \tag{2.9}$$

Demonstração. Temos

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} \alpha+n \\ n-k \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \beta+n \\ n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} \alpha+\beta+2n \\ n \end{array} \right). \tag{2.10}$$

Tomando $a_{n,n}$ como em (2.8), temos:

$$a_{n,n} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{(n-k)!\Gamma(\alpha+n-(n-k)+1)}\;\frac{\Gamma(\beta+n+1)}{k!\Gamma(\beta+n-k+1)}.$$

Pela Propriedade 4 da função gama e usando (2.10), temos

$$\begin{aligned} a_{n,n} &= \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} \alpha+n \\ n-k \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} \beta+n \\ k \end{array} \right) \\ &= \frac{1}{2^n}\left(\begin{array}{c} \alpha+\beta+2n \\ n \end{array} \right). \end{aligned}$$

Aplicando novamente a Propriedade 4, obtemos:

$$a_{n,n} = \frac{1}{2^n n!}\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}.$$

■

Definição 2.2. *Definiremos o produto interno de dois polinômios de Jacobi como:*

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x),\ P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\rangle = \int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\ P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\ (1-x)^{\alpha}\ (1+x)^{\beta}dx.$$

Para a demonstração do próximo Teorema usaremos a função beta, que é definida como:

$$B(x,y) = \int_{0}^{1} t^{(x-1)}(1-t)^{y-1}dt. \tag{2.11}$$

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{2.12}$$

Teorema 2.1. *Os polinômios de Jacobi satisfazem à seguinte relação de ortogonalidade:*

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x),\ P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\rangle = \begin{cases} 0, & se\ m \neq n, \\ \dfrac{2^{\alpha+\beta+1}\ \Gamma(\alpha+n+1)\ \Gamma(\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)\ n!\ \Gamma(\alpha+\beta+n+1)}, & se\ m = n. \end{cases}$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, considere $n \leq m$. Assim,

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x),\ P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\rangle = \int_{-1}^{1} P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\ P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\ (1-x)^{\alpha}\ (1+x)^{\beta}dx$$

$$= \int_{-1}^{1}\left\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\left[\frac{(-1)^m}{2^m\ m!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^m}{dx^m}\left[(1-x)^{\alpha+m}(1+x)^{\beta+m}\right]\right]\right\}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx$$

$$= \frac{(-1)^m}{2^m m!}\int_{-1}^{1}\left(P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\frac{d^m}{dx^m}\left[(1-x)^{(\alpha+m)}(1+x)^{\beta+m}\right]\right)dx.$$

Fazendo $y_m(x) = (1-x)^{\alpha+m}(1+x)^{\beta+m}$, temos

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x), P_m^{(\alpha,\beta)}\rangle = \frac{(-1)^m}{2^m m!}\int_{-1}^{1}\left(P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\frac{d^m}{dx^m}y_m(x)\right)dx.$$

Integrando m vezes por partes, onde $u = P_n(x)$ e $dv = \dfrac{d^m}{dx^m}y_m(x)dx$, obtemos

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x), P_m^{(\alpha,\beta)}\rangle = \frac{(-1)^m}{2^m m!}\int_{-1}^{1}\left(\frac{d^m}{dx^m}(P_n^{(\alpha,\beta)}(x))y_m(x)\right)dx.$$

1. Se $n < m$, então $\dfrac{d^m}{dx^m}(P_n^{(\alpha,\beta)}(x)) = 0$. Logo, $\langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x), P_m^{(\alpha,\beta)}\rangle = 0$.

2. Consideremos $m = n$. Observando que $\dfrac{d^n}{dx^n}(P(x)) = a_{n,n}n!$, temos:

$$\begin{aligned}
\langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x), P_m^{(\alpha,\beta)}\rangle &= \frac{(-1)^m}{2^m m!}\int_{-1}^{1}\left(\frac{d^m}{dx^m}(P_n^{(\alpha,\beta)}(x))y_m(x)\right)dx \\
&= \frac{a_{n,n}n!}{2^n n!}\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}dx \\
&= \frac{a_{n,n}}{2^n}\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}dx.
\end{aligned}$$

Fazendo $x = 2t-1$, onde $t \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_m^{(\alpha,\beta)}\rangle &= a_{n,n}\int_{0}^{1}(1-2t+1)^{\alpha+n}(1+2t-1)^{\beta+n}2dt \\
&= \frac{2a_{n,n}2^{\alpha+n}2^{\beta+n}}{2^n}\int_{0}^{1}(1-t)^{\alpha+n}t^{\beta+n}dt \\
&= 2^{\alpha+\beta+n+1}a_{n,n}\int_{0}^{1}(1-t)^{\alpha+n}t^{\beta+n}dt.
\end{aligned}$$

Assim, substituindo por (2.11),

$$\langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x), P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\rangle = 2^{\alpha+\beta+n+1}\, a_{n,n}\, B(\beta+n+1, \alpha+n+1). \tag{2.13}$$

Substituindo (2.12) em (2.13), temos

$$\begin{aligned}
\langle P_n^{(\alpha,\beta)}(x), P_m^{(\alpha,\beta)}(x)\rangle &= 2^{\alpha+\beta+n+1}\, a_{n,n}\,\frac{\Gamma(\beta+n+1)\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\beta+n+1+\alpha+n+1)} \\
&= 2^{\alpha+\beta+n+1}\,\frac{1}{2^n n!}\,\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}\,\frac{\Gamma(\beta+n+1)\,\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\beta+\alpha+2n+2)} \\
&= \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{n!}\,\frac{\Gamma(\beta+n+1)\,\Gamma(\alpha+n+1)}{(\beta+\alpha+2n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}.
\end{aligned}$$

■

Apresentaremos algumas propriedades que utilizaremos a seguir:

1. $P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \begin{pmatrix} \alpha+n \\ n \end{pmatrix}$.

2. $P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n \begin{pmatrix} \beta+n \\ n \end{pmatrix}$.

De fato.
Seja,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{2^n n!}(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+1)(1+x)^n + \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!(n-k)!}(\alpha+n)\cdots$$

$$\cdots(\alpha+k-1)(\beta+n)\cdots(\beta+n-k+1)(1-x)^k(1+x)^{(n-k)}. \tag{2.14}$$

Para $x = 1$, temos a seguinte equação:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{1}{2^n}\left[\frac{1}{n!}(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+1)(1+1)^n\right].$$

Assim,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{1}{n!}(\alpha+n)(\alpha+n-1)\cdots(\alpha+1) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}.$$

Pela Propriedade 4 da função gama, concluímos que

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \left(\begin{array}{c} \alpha+n \\ n \end{array} \right).$$

Para $x=-1$,

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = \frac{1}{2^n}\left[\frac{(-1)^n}{n!}(\beta+n)(\beta+n-1)\cdots(\beta+1)2^n\right] = (-1)^n\frac{\Gamma(\beta+n+1)}{n!\Gamma(\beta+1)}.$$

Pela Propriedade 4 da função gama, temos

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = \left(\begin{array}{c} \beta+n \\ n \end{array} \right).$$

Podemos escrever a Relação de Recorrência de Três Termos do Teorema 1.4 da seguinte forma:

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \tag{2.15}$$

com,

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0, \quad \beta_{n+1} = \gamma_{n+1}\frac{\langle xP_n(x), P_n(x)\rangle}{\langle P_n(x), P_n(x)\rangle} \text{ e } \alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \quad \frac{\langle P_n(x), P_n(x)\rangle}{\langle P_{n-1}(x), P_{n-1}(x)\rangle}. \tag{2.16}$$

A seguir, obtemos explicitamente os coeficientes $\beta_{n+1}, \gamma_{n+1}$ e α_{n+1}.

Calculemos γ_{n+1}

$$\gamma_{n+1} = \frac{\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+3)}{2^{n+1}(n+1)!\ \Gamma(\alpha+\beta+n+1)}}{\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{2^n n!\ \Gamma(\alpha+\beta+n+1)}} = \frac{(\alpha+\beta+2n+2)\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}{2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)\ \ \Gamma(\alpha+\beta+n+1)},$$

portanto,

$$\gamma_{n+1} = \frac{(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+\beta+2n+1)}{2(n+1)(\alpha+\beta+n+1)}. \tag{2.17}$$

Para obter α_{n+1}, observamos que

$$\alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \quad \frac{\langle P_n(x), P_n(x)\rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle} = \frac{(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+\beta+2n+1)}{(n+1)(\alpha+\beta+n+1)}\frac{\alpha+\beta+n}{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n-1)}$$
$$\left(\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{n\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}\frac{(\alpha+\beta+2n-1)(\Gamma(\alpha+\beta+n))}{\Gamma(\alpha+n)\Gamma(\beta+n)}\right).$$

Simplificando a equação acima, temos

$$\alpha_{n+1} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)(\alpha+\beta+2n+2)}{(n+1)(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n)}. \tag{2.18}$$

Pela Propriedade 1 enunciada acima, temos

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)}.$$

Para calcularmos β_{n+1}, fazemos $x=1$ na fórmula de recorrência:

$$P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(1) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n^{(\alpha,\beta)}(1) - \alpha_{n+1}P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(1).$$

Substituindo, $P_n^{(\alpha,\beta)}(1)$, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\Gamma(\alpha+n+2)}{(n+1)!\Gamma(\alpha+1)} &= (\gamma_{n+1}-\beta_{n+1})\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\Gamma(\alpha+1)} - \alpha_{n+1}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{(n-1)!\Gamma(\alpha+1)} \\
\Rightarrow \frac{(\alpha+n+1)(\alpha+n)\Gamma(\alpha+n)}{(n+1)!\Gamma(\alpha+1)} &= (\gamma_{n+1}-\beta_{n+1})\frac{(\alpha+n)\Gamma(\alpha+n)}{n!\Gamma(\alpha+1)} - \alpha_{n+1}\frac{\Gamma(\alpha+n)}{(n+1)!\Gamma(\alpha+1)} \\
\Rightarrow \frac{(\alpha+n+1)(\alpha+n)}{n(n+1)} &= (\gamma_{n+1}-\beta_{n+1})\frac{(\alpha+n)}{n} - \alpha_{n+1}.
\end{aligned}$$

Substituindo (2.18) e (2.17) na equação acima, temos

$$\begin{aligned}
\beta_{n+1} &= \frac{n}{\alpha+n}\left(\gamma_{n+1}\frac{\alpha+n}{n} - \frac{(\alpha+n+1)(\alpha+n)}{(n+1)n} - \alpha_{n+1}\right) \\
&= \gamma_{n+1} - \frac{\alpha+n+1}{n+1} - \alpha_{n+1}\frac{n}{n+1} \\
&= \frac{1}{2(n+1)}\frac{(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+\beta+2n+1)}{(\alpha+\beta+n+1)} - \frac{(\alpha+n+1)}{n+1} \\
&- \frac{n(\beta+n)(\alpha+\beta+2n+2)}{(n+1)(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n)} \\
&= \frac{1}{n+1}\left[\frac{(\alpha+\beta+2n)(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+\beta+2n+1)}{2(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n)}\right. \\
&\left.-\frac{2(\alpha+n+1)(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n)}{2(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n)} - \frac{2n(\beta+n)(\alpha+\beta+2n+2)}{2(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n)}\right].
\end{aligned}$$

Assim,

$$\beta_{n+1} = \frac{(\beta^2-\alpha^2)(\alpha+\beta+2n+2)}{2(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+\beta+2n)}. \tag{2.19}$$

2.2 Polinômios de Legendre

Os Polinômios de Legendre são um caso especial dos Polinômios de Jacobi com $\alpha=\beta=0$, portanto, são ortogonais com relação à função peso $w(x)=1$. Por simplicidade, denotaremos por $P_n(x)$.

Pela fórmula de Rodrigues para polinômios de Jacobi, temos

$$P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^0(1+x)^0\,\frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^n(1+x)^n\right].$$

Assim, o Polinômio de Legendre é dado por

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right], \tag{2.20}$$

e, por (2.9), podemos calcular o coeficiente do termo maior grau do polinômio de Legendre:

$$a_{n,n} = \frac{1}{2^n n!}\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1)}.$$

Aplicando propriedades da função gama, temos

$$a_{n,n} = \frac{1}{(2^n)n!}\frac{2n!}{n!} = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}. \tag{2.21}$$

Pelo Teorema 2.1, a relação de ortogonalidade para os Polinômios de Legendre é dada por

$$\begin{aligned}
\langle P_n(x),\ P_m(x)\rangle &= \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \dfrac{2\Gamma(n+1)\Gamma(n+1)}{(2n+1)n!\Gamma(n+1)}, & \text{se } m = n \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n, \\ \dfrac{2}{(2n+1)}, & \text{se } m = n. \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

A Relação de Recorrência de Três Termos para os Polinômios de Legendre pode ser obtida tomando $\alpha = \beta = 0$ em (2.18),(2.17) e (2.19). Assim,

$$\alpha_{n+1} = \frac{(n)(n)(2n+2)}{(n+1)(n+1)(2n)} = \frac{n}{n+1}, \tag{2.23}$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{2(n+1)(n+1)} = \frac{2n+1}{n+1}, \tag{2.24}$$

$$\beta_{n+1} = 0. \tag{2.25}$$

Portanto, a Relação de Recorrência de Três Termos para os Polinômios de Legendre é

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1}xP_n(x) - \frac{n}{n+1}P_{n-1}(x),\ n \geqslant 1,$$

com $P_0(x) = \dfrac{1}{2^0 0!}\dfrac{d^0}{dx^0}(x^2-1)^0 = 1$ e $P_1(x) = \dfrac{1}{2^1 1!}\dfrac{d^1}{dx^1}(x^2-1)^1 = x$.

2.3 Polinômios de Gegenbauer

Os Polinômios de Gegenbauer, Ultraesféricos, são um caso especial dos Polinômios de Jacobi, em que $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2} > -1$. Os Polinômios de Gegenbauer são ortogonais no intervalo [-1,1] em relação à função peso $w(x) = (1-x^2)^{\lambda - \frac{1}{2}}$.

Notação: $P_n^{\lambda}(x)$

Os polinômios satisfazem a fórmula:

$$P_n^{\lambda}(x) = \begin{pmatrix} 2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} n+2\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} P_n^{(\alpha,\alpha)(x)}, \tag{2.26}$$

onde $P_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ são os Polinômios de Jacobi com $\beta = \alpha$.

Podemos escrever os Polinômios de Gegenbauer em função da Função Gama. De fato:

$$\begin{aligned} P_n^\lambda(x) &= \left(\frac{\Gamma(2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+1)}\right)^{-1}\left(\frac{\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)}\right)P_n^{(\alpha,\alpha)}(x) \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)}P_n^{(\alpha,\alpha)}(x). \end{aligned} \tag{2.27}$$

Tomando $\alpha = \lambda - \frac{1}{2}$, e substituindo em (2.27), temos:

$$P_n^\lambda(x) = \frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+\lambda+\frac{1}{2})}P_n^{(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2})}(x). \tag{2.28}$$

Para determinarmos a Relação de Recorrência de Três Termos para os Polinômios de Gegenbauer, basta tomarmos $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$ em (2.18), (2.19) e (2.17). Assim,

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= 0 \\ \gamma_{n+1} &= \frac{1}{2(n+1)}\frac{\Gamma(2\alpha+2n+3)\Gamma(2\alpha+n+1)}{\Gamma(2\alpha+n+2)\Gamma(2\alpha+2n+1)} = \frac{(n+\alpha+1)(2\alpha+2n+1)}{(n+1)(2\alpha+n+1)} \\ \alpha_{n+1} &= \frac{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}{(n+1)(2\alpha+n+1)}. \end{aligned}$$

Temos que a Relação de Recorrência de Três Termos será dada por:

$$\frac{\Gamma(n+\alpha+2)}{\Gamma(n+2\alpha+2)}P_{n+1}^\lambda(x) = \frac{(n+\alpha+1)(2\alpha+2n+1)}{(n+1)(2\alpha+n+1)}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+2\alpha+1)}xP_n^\lambda(x) - \frac{(\alpha+n)\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+2\alpha)}P_{n-1}^\lambda(x).$$

Simplificando a equação acima, temos

$$(n+1)P_{n+1}^\lambda(x) = (2\alpha+2n+1)xP_n^\lambda(x) - (n+2\alpha)P_{n-1}^\lambda(x).$$

Tomando $\alpha = \lambda - \frac{1}{2}$, temos

$$(n+1)P_{n+1}^\lambda(x) = 2(\lambda+n)xP_n^\lambda(x) - (n+2\lambda-1)P_{n-1}^\lambda(x). \tag{2.29}$$

Os polinômios, $P_{-1}^\lambda(x)$ e $P_0^\lambda(x)$, são dados por:

$$P_{-1}^\lambda(x) = \frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+\lambda+\frac{1}{2})}P_{-1}^{(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2})}(x) = 0,$$

pois $P_{-1}^{(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2})}(x) = 0$ e $P_0^\lambda(x) = 1$

O coeficiente do termo de maior grau é dado por

$$a_{n,n} = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+2\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+1)}\ \frac{\Gamma(2\alpha+2n+1)}{2^n n!\Gamma(2\alpha+n+1)}.$$

Simplificando e substituindo $\alpha = \lambda - \frac{1}{2}$, temos

$$a_{n,n} = \frac{1}{2^n n!}\ \frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+\lambda+\frac{1}{2})}. \tag{2.30}$$

A forma mônica satisfaz a relação de recorrência, basta tomar $\widehat{P}_n^\lambda(x) = \frac{1}{a_{n,n}}P_n^\lambda(x)$, assim:

$$\frac{1}{a_{n+1,n+1}}P_{n+1}^{\lambda}(x) = \frac{2(n+\lambda)}{n+1}xP_n^{\lambda}(x) - \frac{(n+2\lambda-1)}{n+1}\frac{1}{a_{n+1,n+1}}P_{n-1}^{\lambda}(x). \tag{2.31}$$

Observe que:

$$\begin{aligned} a_{n+1,n+1} &= a_{n,n}\frac{2\lambda+2n}{n+1} \\ \text{e } a_{n+1,n+1} &= a_{n-1,n-1}\frac{(2\lambda+2n)(2\lambda+2n-2)}{n(n+1)}. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Substituindo (2.32) em (2.31), temos:

$$\begin{aligned} \widehat{P}_{n+1}(x) &= a_{n,n}xP_n^{\lambda}(x) - \frac{n(n+2\lambda-1)}{4(\lambda+n)(n+\lambda+1)}\ \frac{1}{a_{n-1,n-1}}P_{n-1}^{\lambda}(x) \\ \widehat{P}_{n+1}^{\lambda}(x) &= x\widehat{P}_n^{\lambda}(x) - \frac{n(n+2\lambda-1)}{4(n+\lambda)(n+\lambda+1)}\ \widehat{P}_{n-1}^{\lambda}(x). \end{aligned} \tag{2.33}$$

Há dois casos especiais, em que $\lambda = \frac{1}{2}$ e $\lambda = 1$. Nestes casos os polinômios serão $P_n^{\frac{1}{2}}(x) = P_n^{(0,0)}(x)$ e $P_n^1(x) = \dfrac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(n+2)}{\Gamma(2)\Gamma(n+\frac{3}{2})}P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x)$.

Os Polinômios de Gegenbauer satisfazem a seguinte equação diferencial de segunda ordem:

$$(1-x^2)y'' - (2\lambda+1)xy' + n(n+2\lambda)y = 0. \tag{2.34}$$

2.4 Polinômios de Chebyshev de Primeira Espécie

Os Polinômios de Chebyshev de primeira espécie são denotados por $T_n(x)$. Eles são ortogonais no intervalo [-1,1] em relação à função $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)}}$. Note que tomando $\alpha = \beta = \frac{-1}{2}$ temos que os Polinômios de Chebyshev de 1ª espécie são múltiplos dos Polinômios de Jacobi.

Definiremos $T_n(x)$, com $x \in [-1,1]$, por:

A Relação de Recorrência de Três Termos é dada por:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \text{ com } n \geq 1.$$

Para obtermos a relação acima, basta tomar $x = \cos\theta$ e utilizar a seguinte relação trigonométrica: $\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos(n\ \theta)\cos\theta$.

Temos:

$$\tag{2.35}$$

Substituindo (**??**), (**??**) e (**??**) na relação trigonométrica, obtemos a relação de recorrência já enunciada.

Observe que $T_0(x) = 1$, pois, $T_0(x) = T_{1-1}(x) = \cos((1-1)\theta) = \cos 0 = 1$

Para determinarmos o coeficiente do termo de maior grau, vamos calcular os primeiros Polinômios de Chebyshev de primeira espécie.

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 1, \\
T_1(x) &= \cos(\arccos(x)) = x = 2^0 x, \\
T_2(x) &= 2xT_1(x) - T_0(x) = 2^1 x^2 - 1, \\
T_3(x) &= 2xT_2(x) - T_1(x) = 2^2 x^3 - 3x, \\
\vdots &= \vdots \\
T_n(x) &= 2^{n-1} x^n + \cdots .
\end{aligned}$$

Por recorrência, temos que $a_{n,n} = 2^{n-1}$, $n \geq 1$.

Teorema 2.2. *Os Polinômios de Chebyshev de Primeira Espécie satisfazem a seguinte relação de ortogonalidade:*

$$\langle T_n, T_m \rangle = \begin{cases} \pi, & se \quad m = n = 0, \\ \frac{\pi}{2}, & se \quad m = n > 0, \\ 0, & se \quad m \neq n. \end{cases} \tag{2.36}$$

Demonstração. Definimos o produto interno como

$$\begin{aligned}
\langle T_n, T_m \rangle &= \int_{-1}^{1} T_n(x)\, T_m(x)\, w(x) dx \\
&= \int_{-1}^{1} \cos(n \arccos(x)) \cos(m \arccos(x)) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx
\end{aligned}$$

Tomando $x = \cos\theta$, temos:

$$\begin{aligned}
\langle T_n, T_m \rangle &= -\int_{\pi}^{0} \frac{\cos(n\theta)\cos(m\theta)\mathrm{sen}(\theta)}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}}\, d\theta \\
&= \int_{0}^{\pi} \cos(n\theta)\ \cos(m\theta)\ d\theta. \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

1. Se $m = n = 0$, temos $\langle T_0, T_0 \rangle = \int_0^\pi d\theta = \pi$;

2. Se $m = n > 0$, temos que $\langle T_n, T_m \rangle = \int_0^\pi \cos^2(n\theta)\ d\theta$.

   Integrando por partes:

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi \cos(n\ \theta)\cos(n\ \theta)\ d\theta &= \left.\frac{\mathrm{sen}(n\ \theta)\cos(n\ \theta)}{n}\right|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{n\ \mathrm{sen}^2(n\ \theta)}{n} d\theta \\
&= \int_0^\pi \mathrm{sen}^2(n\theta) \\
&= \int_0^\pi d\theta - \int_0^\pi \cos^2(n\theta),
\end{aligned}$$

   portanto, $\int_0^\pi \cos(n\theta)\cos(n\theta) d\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

   Assim, $\langle T_m, T_n \rangle = \dfrac{\pi}{2}$.

3. Seja $m \neq n$.

Observe que

$$\int_0^\pi (\cos((m+n)\theta)\ \cos((m-n)\theta))\ d\theta = \int_0^\pi (\cos(m\theta)\cos(n\theta) - \text{sen}(n\theta)\text{sen}(m\theta)$$
$$+ \cos(m\theta)\cos(n\theta) + \text{sen}(m\theta)\text{sen}(n\theta))\ d\theta$$
$$= 2\int_0^\pi \cos(m\theta)\ \cos(n\theta)\ d\theta.$$

Assim,

$$\begin{aligned} 2\langle T_m, T_n\rangle &= \int_0^\pi (\cos(m+n)\theta\cos(m-n)\theta)d\theta && (2.38)\\ &= \int_0^\pi (\cos(m+n)\theta)d\theta + \int_0^\pi \cos(m-n)\theta)d\theta && (2.39)\\ &= \left.\frac{\text{sen}(m+n)\theta}{m+n}\right|_0^\pi + \left.\frac{\text{sen}(m-n)\theta}{m-n}\right|_0^\pi = 0. && (2.40)\end{aligned}$$

■

Observação 2.1. *Note que tomando $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ na função peso do Polinômio de Jacobi obtemos:*

$$w(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Assim, podemos escrever $T_n(x) = c_n P_n^{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})}$, em que $c_n = 2^{2n-1}\begin{pmatrix} 2n-1 \\ n\end{pmatrix}^{-1}$, pois considerando $a_{n,i}^T, i = 1, ..., n$ os coeficientes do Polinômio de Chebyshev de Primeira Espécie $a_{n,j}^P$ e os coeficientes do Polinômio de Jacobi para $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$, temos

$$a_{n,n}^T x^n + a_{n-1,n-1}^T x^{n-1} + ... + a_{n,0}^T = c_n(a_{n,n}^P x^n + a_{n-1,n-1}^P x^{n-1} + ... + a_{n,0}^P).$$

Logo,

$$\begin{aligned} c_{n,n} &= \frac{a_{nn}^T}{a_{n,n}^P}\\ &= \frac{2^{n-1}}{\frac{\Gamma(2n)}{2^n n!\Gamma(n)}}\\ &= \frac{2^{2n-1}n!\Gamma(n)}{\Gamma(2n)}\\ &= 2^{2n-1}\begin{pmatrix} 2n-1 \\ n\end{pmatrix}^{-1}.\end{aligned}$$

Observação 2.2. *Para obtermos as raízes de $T_n(x)$, vamos considerar a equação:*

$$\cos(n\ \theta) = 0 \text{ para } 0 \le \theta \le \pi,$$

onde $(n\ \theta)_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k = 0, 1, ..., n$ ou ainda, $\theta_k = \dfrac{\pi + 2k\pi}{2n} = \dfrac{\pi(1+2k)}{2n}, k = 0, 1, ..., n.$

As raízes são dadas por:

$$T_n(x) = 0 \Longrightarrow \cos(n \arccos(x)) = 0 \Longrightarrow \cos(n\ \theta) = 0 \Longrightarrow x_{n,k} = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right),$$

com $k = 0, 1, ..., n-1$.

Observação 2.3. *Os pontos de máximos e mínimos de* $T_n(x)$ *são os pontos onde* $\cos(n\theta) = 1$ *ou* $\cos(n\theta) = -1$ *para* $0 \leq \theta \leq \pi$. *Os pontos que satisfazem* $\cos(n\theta) = 1$ *ou* $\cos(n\theta) = -1$ *são* $\theta_k = \dfrac{k\pi}{n}$, *para* $k = 0, 1, ..., n$ *e os extremos são dados por* $m_{n,k} = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$, $k = 0, 1, ..., n$.

2.5 Polinômios de Chebyshev de Segunda Espécie

Os Polinômios de Chebyshev de Segunda Espécie, $U_n(x)$, são ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ em relação à função peso $w = \sqrt{1 - x^2}$ e definidos por:

$$U_n(x) = \frac{\text{sen}((n+1)\ \arccos\ (x))}{\sqrt{1 - x^2}},$$

com $x \in [-1, 1]$, para $n = 0, 1, 2, \cdots$. Se fizermos $x = \cos\theta$, temos que

$$U_n(x) = \frac{\text{sen}((n+1)\ \theta)}{\text{sen}\theta},$$

com $\theta \in [0, \pi]$.

Obteremos a Relação de Recorrência de Três Termos dos Polinômios de Chebyshev de Segunda Espécie através da seguinte relação trigonométrica:

$$\text{sen}(n+2)\theta + \text{sen}(n\theta) = 2\cos\theta\ \text{sen}(n+1)\theta, \tag{2.41}$$

Para obter a Relação de Recorrência de Três Termos dos Polinômios de Chebyshev de Segunda Espécie observamos que

$$\begin{aligned}
U_{n-1}(x) &= \frac{\text{sen}(n\ \arccos(\cos\theta))}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} \\
&= \frac{\text{sen}(n\theta)}{\text{sen}\theta} \\
U_n(x) &= \frac{\text{sen}((n+1)\ \arccos(\cos\theta))}{\sqrt{1-\cos^2\theta}} \\
&= \frac{\text{sen}((n+1)\theta)}{\text{sen}\theta} \\
U_{n+1}(x) &= \frac{\text{sen}((n+2)\theta)}{\text{sen}\theta}.
\end{aligned}$$

Dividindo (2.41) por $\text{sen}\theta$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\text{sen}(n+2)\theta}{\text{sen}\theta} + \frac{\text{sen}(n\theta)}{\text{sen}\theta} &= \frac{2\cos\theta\ \text{sen}(n+1)\theta}{\text{sen}\theta} \\
\Rightarrow U_{n+1}(x) + U_{n-1}(x) &= 2xU_n(x).
\end{aligned}$$

Concluímos que a Relação de Recorrência de Três Termos será $U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$, $x \geq 1$.

Para determinarmos o coeficiente do termo de maior grau, observaremos os polinômios abaixo:

$$\begin{aligned}
U_0(x) &= \frac{\text{sen}\theta}{\text{sen}\theta} = 1, \\
U_1(x) &= \frac{\text{sen}2\theta}{\text{sen}\theta} = 2\ \cos\theta = 2x, \\
U_2(x) &= 2xU_1(x) - U_0(x) \Longrightarrow U_2(x) = 4x^2 - 1, \\
U_3(x) &= 2xU_2(x) - U_1(x) \Longrightarrow U_3(x) = 8x^3 - 4x, \\
&\vdots \\
U_n(x) &= 2^n x^n + \cdots .
\end{aligned}$$

Por recorrência, temos que $a_{n,n} = 2^n$.

Teorema 2.3. *A relação de ortogonalidade para os Polinômios de Chebyshev de Segunda Espécie é dada por:*

$$\langle U_n, U_m \rangle = \begin{cases} 0, & se \quad m \neq n, \\ \dfrac{\pi}{2} & se \quad m = n. \end{cases} \tag{2.42}$$

Demonstração. Calculando $\langle U_n, U_m \rangle$, temos:

$$\langle U_n, U_m \rangle = \int_{-1}^{1} U_n(x) U_m(x) w(x) dx. \tag{2.43}$$

Substituindo U_n, U_m e $w(x)$:

$$\begin{aligned} \langle U_n, U_m \rangle &= \int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sen}[(n+1) \arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} \frac{\operatorname{sen}[(m+1) \arccos x]}{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2} dx & (2.44) \\ &= \int_{0}^{\pi} \operatorname{sen}((n+1)\theta) \operatorname{sen}((m+1)\theta)\, d\theta, & (2.45) \end{aligned}$$

com $x = \cos\theta$.

1. Se $m = n$:

$$\begin{aligned} \langle U_n, U_n \rangle &= \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2((n+1)\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} (\operatorname{sen}(n+1)\theta)(\operatorname{sen}(n+1)\theta)\, d\theta. \end{aligned}$$

Integrando por partes, temos:

$$\begin{aligned} \langle U_n, U_n \rangle &= -\frac{(\operatorname{sen}(n+1)\theta)\cos((n+1)\theta)}{(n+1)}\bigg|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos^2((n+1)\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \cos^2((n+1)\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} (1 - \operatorname{sen}^2(n+1)\theta) d\theta \\ &= \pi - \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2((n+1)\theta)\, d\theta \\ &= \pi - \langle U_n, U_n \rangle \\ 2\,\langle U_n, U_n \rangle &= \pi, \end{aligned}$$

portanto, $\langle U_n, U_n \rangle = \dfrac{\pi}{2}$.

2. Se $m \neq n$.

Integrando por partes (2.45), temos:

$$
\begin{aligned}
\langle U_n, U_m\rangle = \int_0^\pi \operatorname{sen}((n+1)\theta)\operatorname{sen}((m+1)\theta)\, d\theta \\
= -\frac{[\operatorname{sen}((n+1)\theta)\ \cos((m+1)\theta)](n+1)}{(m+1)}\Bigg|_0^\pi + \\
\int_0^\pi \frac{(n+1)[\cos((m+1)\theta)\cos((n+1)\theta)]}{m+1}\, d\theta \\
= \frac{n+1}{m+1}\int_0^\pi (\cos(m+1)\theta)(\cos(n+1)\theta) d\theta \\
= \left(\frac{n+1}{m+1}\right)^2 \int_0^\pi (\operatorname{sen}(m+1)\theta)(\operatorname{sen}(n+1)\theta) d\theta
\end{aligned}
$$

$$
\langle U_n, U_m\rangle = \left(\frac{n+1}{m+1}\right)^2 \langle U_n, U_m\rangle. \tag{2.46}
$$

Por hipótese $m \neq n$, então, $\dfrac{n+1}{m+1} \neq 1$,daí $\langle U_n, U_m\rangle = 0$.

■

Observação 2.4. *Note que fazendo $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ na função peso dos Polinômios de Jacobi obtemos $w(x) = \sqrt{1-x^2}$. Logo, $U_n(x) = 2^{2n}\begin{pmatrix} 2n+1 \\ n+1 \end{pmatrix}^{-1} P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x)$.*

Temos que os Polinômios de Chebyshev de Segunda Espécie são múltiplos dos Polinômios de Jacobi, logo, podemos escrever $U_n(x) = c_n P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x)$.

Considerando a_{ni}^U os coeficientes do Polinômio de Chebyshev de Segunda Espécie e a_{nj}^P os coeficientes do Polinômio de Jacobi para $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$, então

$$
a_{n,n}^U x^n + a_{n-1,n-1}^U x^{n-1} + ... + a_{n,0}^U = c_n(a_{n,n}^P x^n + a_{n-1,n-1}^P x^{n-1} + ... + a_{n,0}^P).
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
c_{n,n} &= \frac{a_{n,n}^U}{a_{n,n}^P} \\
&= \frac{2^n}{\dfrac{\Gamma(2n+2)}{2^n n!\Gamma(n+2)}} \\
&= \frac{2^{2n}(n+1)!\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+2)} \\
&= 2^n \begin{pmatrix} 2n+1 \\ n+1 \end{pmatrix}^{-1}.
\end{aligned}
$$

Assim, $U_n(x) = 2^n \begin{pmatrix} 2n+1 \\ n+1 \end{pmatrix}^{-1} P_n^{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(x)$.

Observação 2.5. *As raízes de $U_n(x)$ são os pontos nos quais*

$$
\operatorname{sen}((n+1)\theta) = 0 \text{ para } 0 < \theta < \pi.
$$

Logo $\theta_k = \dfrac{k\pi}{n+1}$, $k = 1, ..., n$.

As raízes são dadas por:

$$U_n(x) = 0 \Longrightarrow x_{nk} = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right),$$

com k=1,...,n.

Observação 2.6. *Os pontos de máximos e mínimos de $U_{n-1}(x)$ são os pontos de máximo e mínimos de $T_n(x)$, pois:*

$$T_n'(x) = -\text{sen}(n \text{ arccos } x)\; n\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = n\frac{\text{sen}(n \text{ arccos } x)}{\sqrt{1-x^2}} = n\, U_{(n-1)}(x).$$

2.6 Polinômios de Laguerre

Os Polinômios de Laguerre são denotados por $L_n^{(\alpha)}(x)$ e serão definidos pela fórmula de Rodrigues:

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+n} e^{-x}). \tag{2.47}$$

Os Polinômios de Laguerre são ortogonais no intervalo $[0, \infty)$, em relação à função peso $w(x) = x^\alpha e^{-x}, \quad \alpha > -1$ e são mônicos, isto é, o coeficiente do termo do coeficiente de maior grau é 1. De fato:

Se tomarmos $f(x) = x^{\alpha+n}$ e $g(x) = e^{-x}$, pela Regra de Leibnitz, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d^j}{dx^j} f(x) &= (\alpha+n)(\alpha+n-1)...(\alpha+n-j+1)x^{\alpha+n-j} \\
\frac{d^j}{dx^j} g(x) &= (-1)^j e^{-x} \\
\frac{d^n}{dx^n}(f(x)g(x)) &= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (\alpha+n)...(\alpha+n-j+1)x^{\alpha+n-j}(-1)^j e^{-x}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$L_n^\alpha(x) = (-1)^n x^{-\alpha} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (\alpha+n)...(\alpha+n-j+1)x^{\alpha+n-j}(-1)^j.$$

Observe que L_n^α pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
L_n^\alpha(x) &= (-1)^n \left[(-1)^n \binom{n}{n} x^n + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} (\alpha+n)x^{n-1} + \cdots\right] \\
&= x^n - n(\alpha+n)x^{n-1} + \cdots .
\end{aligned}$$

Note que $a_{n,n} = 1$.

Teorema 2.4. *A relação de ortogonalidade para os Polinômios de Laguerre é dada por:*

$$\langle L_n^\alpha, L_m^\alpha \rangle = \begin{cases} 0, & se \quad m \neq n, \\ n!, \Gamma(n+\alpha+1) & se \quad m = n; \end{cases} \tag{2.48}$$

onde o produto interno é definido por

$$\langle L_n^\alpha, L_m^\alpha \rangle = \int_0^\infty L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) x^\alpha e^{-x} dx.$$

Demonstração. Considerando $m \leq n$, o produto interno será:

$$\langle L_n^\alpha, L_m^\alpha \rangle = \int_0^\infty L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) x^\alpha e^{-x} dx \tag{2.49}$$

$$= \int_0^\infty (-1)^n x^{(-\alpha)} e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+n} e^{-x}) L_m^\alpha(x) e^{-x} x^\alpha dx \tag{2.50}$$

$$= (-1)^n \int_0^\infty \frac{d^n(x^{\alpha+n} e^{-x})}{dx^n} L_m^\alpha(x)\, dx. \tag{2.51}$$

Tomando $y_n(x) = x^{\alpha+n}e^{-x}$, obtemos $\dfrac{d^n(x^{\alpha+n}e^{(-x)})}{dx^n} = y_n^n(x)$.
Assim, $\langle L_n^\alpha, L_m^\alpha \rangle = \int_0^\infty L_m^\alpha(x)(-1)^n\, y_n^n(x)\, dx$.
Integrando por partes, temos:

$$\langle L_n^\alpha, L_m^\alpha \rangle = \int_0^\infty \frac{d^n[L_m^\alpha(x)]}{dx^n}\, y_n(x)\, dx.$$

1. Para $m < n$,temos:
   $\langle L_n^\alpha, L_m^\alpha \rangle = \int_0^\infty [L_m^\alpha(x)]^n\, y_n(x)\, dx = 0$, pois $[L_m^\alpha(x)]^{(n)} = 0$.

2. Para $m = n$, temos:

$$\begin{aligned} \langle L_n^\alpha, L_n^\alpha \rangle &= \int_0^\infty [L_n^\alpha(x)]^n\, y_n(x)\, dx \\ &= \int_0^\infty a_{n,n}\, n!\, y_n(x)\, dx. \end{aligned}$$

   Temos que $\Gamma(y) = \int_0^\infty e^{-x} e^{y-1} dx$, com $y > 0$. Então, $\int_0^\infty x^{n+\alpha} e^{-x}\, dx = \Gamma(n + \alpha + 1)$.
   Assim,

$$\begin{aligned} \langle L_n^\alpha, L_n^\alpha \rangle &= \int_0^\infty n!(x^{\alpha+n} e^{-x}) dx \\ &= n! \int_0^\infty x^{\alpha+n} e^{-x} dx \\ &= n!\, \Gamma(n + \alpha + 1). \end{aligned}$$

   Portanto,

$$\langle L_n^\alpha, L_m^\alpha \rangle = \begin{cases} 0 & se \quad m \neq n \\ n!\, \Gamma(n + \alpha + 1) & se \quad m = n \end{cases}. \tag{2.52}$$

■

A Relação de Recorrência de Três Termos dos Polinômios de Laguerre é

$$L_{n+1}(x) = (x - 2n + \alpha + 1) L_n^\alpha(x) - n(n+1) L_{n-1}^\alpha(x),$$

com $n \geq 0$.

Para demonstrá-la, vamos calcular os coeficientes $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$ e γ_{n+1}, que são dados por (2.16).

Temos que $\gamma_{n+1} = 1$ e α_{n+1} e β_{n+1} dados por:

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= \frac{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)}{(n+1)!\,\Gamma(n-1+\alpha+1)}\\ &= \frac{n!\,(n+\alpha)}{(n-1)!} = n\,(n+\alpha), &(2.53)\\ \beta_{n+1} &= \frac{\langle xL_n^\alpha, L_n\rangle}{\langle L_n, L_n\rangle}. &(2.54)\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}L_n^\alpha(x) &= x^n - n(n+\alpha)x^{n-1} + \cdots, &(2.55)\\ L_{n+1}^\alpha(x) &= x^{n+1} - (n-1)(n+1+\alpha)x^n + \cdots, &(2.56)\\ xL_n^\alpha(x) &= x^{n+1} - n(n+\alpha)x^n + \cdots. &(2.57)\end{aligned}$$

Fazendo $xL_n^\alpha(x) - L_{n+1}^\alpha(x)$, temos:

$$xL_n^\alpha(x) - L_{n+1}^\alpha(x) = [(n+1)(n+1+\alpha) - n(n+\alpha)]x^n + ... \qquad (2.58)$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}[(n+1)(n+1+\alpha) - n(n+\alpha)]L_n^\alpha(x) &= [(n+1)(n+\alpha+1) - n(n+\alpha)]x^n\\ &- [(n+1)(n+\alpha+1) - n(n+\alpha)]n(n+\alpha)x^{n-1} + \cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[(n+1)(n+\alpha+1) - n(n+\alpha)]x^n &= [(n+1)(n+1+\alpha) - n(n+\alpha)]L_n^\alpha(x)\\ &+ [(n+1)(n+\alpha+1) - n(n+\alpha)]n(n+\alpha)x^{n-1} - \cdots\end{aligned}$$

$$[(n+1)(n+\alpha+1) - n(n+\alpha)]x^n = [(n+1)(n+1+\alpha) - n(n+\alpha)]L_n^\alpha(x) + q_{n-1}(x),$$

onde $q_{n-1}(x)$ é um polinômio de grau $n-1$.
Substituindo em (2.58),

$$xL_n^\alpha(x) = L_{n+1}^\alpha(x) + [(n+1)(n+1+\alpha) - n(n+\alpha)]L_n^\alpha(x) + q_{n-1}(x).$$

Fazendo o produto interno de $xL_n^\alpha(x)$ e $L_n^\alpha(x)$, temos:

$$\langle xL_n^\alpha, L_n^\alpha\rangle = \langle L_{n+1}^\alpha + [(n+1)(n+1+\alpha) - n(n+\alpha)]L_n^\alpha + q_{n-1(x)}, L_n^\alpha\rangle$$

$$= \langle L_{n+1}^\alpha, L_n^\alpha\rangle + [(n+1)(n+1+\alpha) - n(n+\alpha)]\langle L_n^\alpha, L_n^\alpha\rangle + \langle q_{n-1}, L_n^\alpha\rangle$$

$$\frac{\langle xL_n^\alpha, L_n^\alpha\rangle}{\langle L_n^\alpha, L_n^\alpha\rangle} = (n+1)(n+1+\alpha) - n(n+\alpha)$$

$$\frac{\langle xL_n^\alpha, L_n^\alpha\rangle}{\langle L_n^\alpha, L_n^\alpha\rangle} = 2n+\alpha+1.$$

Portanto, $\beta_{n+1} = 2n+\alpha+1$.

Substituindo $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}$ e γ_{n+1}, obtemos a Relação de Recorrência de Três Termos do Polinômios de Laguerre:

$$L_{n+1}^\alpha(x) = (x - 2n - \alpha - 1)L_n^\alpha(x) - n(n+1)L_{n-1}^\alpha(x),$$

com $n \geq 0$.

Através da relação de recorrência, podemos determinar os Polinômios de Laguerre. Os primeiros polinômios são:

$$\begin{aligned}
L_0^\alpha(x) &= (-1)^0 x^{-\alpha} e^x x^\alpha e^{-x} = 1 \\
L_1^\alpha(x) &= (-1) x^{-\alpha} e^x \frac{x^{\alpha+1} e^{-x}}{dx} = x - \alpha - 1 \\
L_2^\alpha(x) &= (x - 3 - \alpha)(x - \alpha - 1) - (\alpha + 1) = x^2 - 2(\alpha + 2)x + (\alpha + 2)(\alpha + 1).
\end{aligned}$$

2.7 Polinômios de Hermite

Os Polinômios de Hermite formam uma Sequência de Polinômios Ortogonais, no intervalo $(-\infty, \infty)$, em relação à função peso $w(x) = e^{-x^2}$.

A Fórmula de Rodrigues que define os Polinômios de Hermite é dada por

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}[e^{-x^2}].$$

Utilizando esta fórmula podemos calcular os primeiros polinômios.

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= (-1)^0 e^{x^2}(e^{-x^2}) = 2^0 \\
H_1(x) &= -e^{x^2} \frac{d^1}{dx^1}[e^{-x^2}] = 2^1 x \\
H_2(x) &= e^{x^2} \frac{d^2}{dx^2}[e^{-x^2}] = 2^2 x^2 - 2 \\
&\vdots \\
H_n(x) &= 2^n x^n + ...
\end{aligned}$$

Por recorrência, obtemos que o coeficiente do termo de maior grau é $a_{n,n} = 2^n$.

Teorema 2.5. *Os Polinômios de Hermite satisfazem à seguinte relação de ortogonalidade*

$$\langle H_n, H_m \rangle = \begin{cases} 0, & se \quad m \neq n, \\ 2^n n!, \sqrt{\pi} & se \quad m = n. \end{cases}$$

Demonstração. Vamos considerar, sem perda de generalidade, que $m \leq n$.

1. Seja $m < n$ e substituindo $H_n(x)$,

$$\begin{aligned}
\langle H_n, H_m \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}[e^{-x^2}] \ e^{-x^2} dx \\
&= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} H_m(x) \phi^n(x) dx.
\end{aligned}$$

Integrando por partes,

$$\langle H_n, H_m \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = (-1)^{n+1} \int_{-inft}^{\infty} H_m'(x) \phi^{n-1}(x) dx.$$

Se integrarmos por partes n vezes, a integral acima,

$$\langle H_n, H_m \rangle = \int_{-infty}^{\infty} H_m^{(n)}(x) \phi(x) dx = 0,$$

pois se $H_m(x)$ tem grau m e $m < n$, então $H_m^{(n)}(x) = 0$.

2. Se $m = n$, temos

$$\langle H_n, H_n \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_n(x) e^{-x^2} dx.$$

Pelo item 1,

$$\begin{aligned}\langle H_n, H_n \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_n(x) e^{-x^2} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} H_n^{(n)}(x) e^{-x^2} dx \\ &= 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.\end{aligned}$$

Portanto, $\langle H_n, H_n \rangle = 2^n n! \sqrt{\pi}$.

■

A Relação de Recorrência de Três Termos dos Polinômios de Hermite é dada por

$$H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x).$$

De fato, se tomarmos $\phi(x) = e^{-x^2}$ e derivarmos n vezes, temos:

$$\phi^n(x) = \frac{d^n}{dx^n}[e^{-x^2}] = H_n(x)(-1)^n e^{-x^2}.$$

Derivando novamente, temos:

$$\begin{aligned}\phi^{n+1}(x) &= (-1)^{n+1} e^{-x^2} [2x H_n(x) - H_n'(x)] \\ \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}[e^{-x^2}] &= (-1)^{n+1} e^{-x^2} [2x H_n(x) - H_n'(x)] \\ H_{n+1}(x) &= [2x H_n(x) - H_n'(x)].\end{aligned}$$

Por outro lado, sabemos que a relação de recorrência é dada por:

$$\begin{aligned}H_{n+1}(x) &= (\gamma_{n+1} x - \beta_{n+1}) H_n(x) + \alpha_{n+1} H_{n-1}(x) \\ 2x H_n(x) - H_n'(x) &= (\gamma_{n+1} x - \beta_{n+1}) H_n(x) + \alpha_{n+1} H_{n-1}(x).\end{aligned}$$

Assim, $\beta_{n+1} = 0$, $\gamma_{n+1} = 2$ e para determinarmos α, vamos tomar a relação (2.16),

$$\alpha_{n+1} = \frac{2^n \; n! \; \sqrt{\pi}}{2^{n+1} \; (n+1)! \; \sqrt{\pi}} = 2n.$$

Portanto, $H_n'(x) = 2n \; H_{n-1}(x)$.
Concluímos assim que a relação de recorrência para os Polinômios de Hermite é dada por

$$H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x).$$

Capítulo 3

Teoremas Clássicos de Sturm Liouville

Neste capítulo estudaremos as equações de segunda ordem de Sturm Liouville e algumas de suas propriedades, como a localização relativa entre zeros de duas soluções de uma mesma equação diferencial de segunda ordem e a comparação dos zeros de duas equações distintas.

Dentre os teoremas estudados neste capítulo, dois deles se destacam: Teorema da Comparação de Sturm Liouville e Teoremada Forma Integral do Teorema de Sturm Liouville.

Estes teoremas nos permitem analisar o comportamento dos zeros de polinômios ortogonais, por exemplo, dos zeros dos Polinômios de Gegenbauer, pois eles satisfazem uma equação diferencial de segunda ordem que, através de uma transformação, torna-se uma equação de Sturm Liouville.

3.1 Teorema da Comparação de Sturm Liouville

Dividiremos Teorema 3.1, em dois casos. O primeiro, quando os dois zeros de $y(x)$ são consecutivos, então entre esses dois zeros há pelo menos um zero de $Y(x)$, isto é, $x_1 < X_1 < x_2$. O segundo, quando o primeiro zero de $y(x)$ maior que a é x_1, com $x \in (a, b)$, então existe um zero de $Y(x)$ no intervalo (a, x_1), isto é, $a < X_1 < x_1$.

Teorema 3.1. *[11] Sejam $y(x)$ e $Y(x)$ soluções não triviais das equações diferenciais,*

$$\begin{aligned} y''(x) + f(x)y(x) &= 0 & (3.1)\\ Y"(x) + F(x)Y(x) &= 0, & (3.2) \end{aligned}$$

respectivamente, no intervalo (a, b).

Suponha que f(x) e F(x) são funções contínuas no intervalo (a, b) e $f(x) < F(x)$, para todo $x \in (a, b)$.

Sejam x_k e x_{k+1} dois zeros consecutivos de $y(x)$, $a < x_k < x_{k+1} < b$ e X_k é solução de $Y(x)$. Então, entre os dois zeros consecutivos de $y(x)$ há pelo menos um zero de $Y(x)$.

Demonstração. Sejam x_k e x_{k+1} zeros consecutivos de $y(x)$ em (a, b). A demonstração será feita por absurdo. Suponhamos que $Y(x)$ não se anula em (x_k, x_{k+1}) e, sem perda de generalidade, suponhamos que $y(x)$ é positiva em (x_k, x_{k+1}).

1º Caso:

Seja $Y(x) > 0$ em (x_k, x_{k+1}). Calculando o Wronskiano de $y(x), Y(x)$ para $x = x_k$ e $x = x_{k+1}$.

O Wronskiano é dado por

$$W(y, Y, x) = y(x)Y'(x) - Y(x)y'(x). \tag{3.3}$$

Para $x = x_k$, o Wronskiano é

$$W(y, Y, x_k) = y(x_k)Y'(x_k) - Y(x_k)y'(x_k) = -Y(x_k)y'(x_k) \leq 0, \tag{3.4}$$

pois $Y(x_k)$ e $y'(x_k)$ são positivos.
E para x_{k+1},

$$W(y, Y, x_{k+1}) = y(x_{k+1})Y'(x_{k+1}) - Y(x_{k+1})y'(x_{k+1}) = -Y(x_{k+1})y'(x_{k+1}) \geq 0, \tag{3.5}$$

pois $Y(x_k)$ é positivo e $y'(x_k)$ é negativo.
Ao derivarmos o Wronskiano, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}W(y, Y, x) &= \frac{d}{dx}(y(x)Y'(x) - Y(x)y'(x)) \\ &= y'(x)Y'(x) + y(x)Y''(x) - (Y'(x)y'(x) + Y(x)y''(x)) \\ &= y(x)Y''(x) - Y(x)y''(x). \end{aligned}$$

Substituindo, (3.1) e (3.2), temos:

$$= y(x)Y(x)(f(x) - F(x)). \tag{3.6}$$

Como $y(x)$ e $Y(x)$ são positivas e $f(x) - F(x)$ é negativa, então (3.6) é negativa, ou seja, $\frac{d}{dx}W(y, Y, x) \leq 0$. Assim, concluímos que $W(y, Y, x)$ é uma função decrescente em $[x_k, x_{k+1}]$. Portanto, contradiz (3.4) e (3.5).

2º Caso:
Seja $Y(x) < 0$ em (x_k, x_{k+1}). Tomando, $x = x_k$ e $x = x_{k+1}$ em (3.5),

$$W(y, Y, x_k) = -Y(x_k)y'(x_k) \geq 0 \tag{3.7}$$

$$W(y, Y, x_{k+1}) = -Y(x_{k+1})y'(x_{k+1}) \leq 0. \tag{3.8}$$

Note que (3.7) é positiva, pois, por hipótese, $Y(x)$ é negativa em (x_k, x_{k+1}) e $y(x_k)$ é positiva, e (3.8) é negativa, pois $Y(x_{k+1})$ e $y(x_{k+1})$ são negativas.

E, por (3.6), a derivada do Wronskiano é positiva pois $y(x)$ é positiva e $(f(x)-F(x))$ e $Y(x)$ são negativas, portanto,$W(y, Y, x)$ é uma função crescente em $[x_k, x_{k+1}]$, contradizendo (3.7) e (3.8).

Observando os dois casos, concluímos que $Y(x)$ muda pelo menos uma vez de sinal no intervalo (x_k, x_{k+1}), isto é, $x_k < X_k < x_{k+1}$.

■

A demonstração do teorema a seguir é semelhante ao Teorema 3.1, a qual também será feita por contradição nos casos em que $y(a_+) = 0$ e $y(b_-) = 0$.

Teorema 3.2. *[11] Sejam $y(x)$ e $Y(x)$ soluções não triviais das equações diferenciais (3.1) e (3.2), respectivamente, no intervalo (a, b), com f(x) e F(x) funções contínuas no intervalo (a, b) e $f(x) \leq F(x)$, para todo $x \in (a, b)$.*

a) Se x_1 é o primeiro zero de $y(x)$ em (a, b) e $y(a_+) = 0$ ou $\lim_{x \to a_+} W(y, Y, x) = 0$, então $Y(x)$ tem pelo menos um zero, X_1, em (a, x_1), isto é, $a < X_1 < x_1$.

b) Se x_n é o último zero de $y(x)$ em (a, b) e $y(b_-) = 0$ ou $\lim_{x \to b_-} W(y, Y, x) = 0$, então, $Y(x)$ tem pelo menos um zero, X_n, em (x_n, b), isto é, $x_n < X_n < b$.

Demonstração. a) Se x_1 é o primeiro zero de $y(x)$ em (a, b) e $y(a_+) = 0$ ou $\lim_{x \to a_+} W(y, Y, x) = 0$, então $Y(x)$ tem pelo menos um zero, X_1 em (a, x_1), isto é, $a < X_1 < x_1$.

1) Se $y(a_+) = 0$.
Suponha, sem perda de generalidade, que $y(x) > 0$ em (a, x_1), então, $y'(a) \geq 0$ e $y'(x_1) \leq 0$.
1º Caso: Suponha que $Y(x) > 0$ em (a, x_1). Substituindo $x = a$ e $x = x_1$ em (3.3), obtemos as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} W(y, Y, a) &= y(a)Y'(a) - Y(a)y'(a) = -Y(a)y'(a) \leq 0 && (3.9) \\ W(y, Y, x_1) &= y(x_1)Y'(x_1) - Y(x_1)y'(x_1) = -Y(x_1)y'(x_1) \geq 0. && (3.10) \end{aligned}$$

Ao derivarmos o Wronskiano, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}W(y, Y, x) &= \frac{d}{dx}(y(x)Y'(x) - Y(x)y'(x)) \\ &= y'(x)Y'(x) + y(x)Y''(x) - (Y'(x)y'(x) \\ &+ Y(x)y''(x)) \\ &= y(x)Y''(x) - Y(x)y''(x) \end{aligned}$$

Substituindo (3.1) e (3.2) temos:

$$= y(x)Y(x)(f(x) - F(x)).$$

Como $y(x)$ e $Y(x)$ são positivas em (a, x_1) e $f(x) - F(x)$ negativa, então

$$\frac{d}{dx}W(y, Y, x) \leq 0.$$

Assim, concluímos que $W(y, Y, x)$ é uma função decrescente em $[x_k, x_{k+1}]$, o que contradiz (3.9) e (3.10).

2º Caso: Supondo que $Y(x) < 0$ em (a, x_1), temos,

$$\begin{aligned} W(y, Y, a) &= y(a)Y'(a) - Y(a)y'(a) = -Y(a)y'(a) \geq 0 && (3.11) \\ W(y, Y, x_1) &= y(x_1)Y'(x_1) - Y(x_1)y'(x_1) = -Y(x_1)y'(x_1) \leq 0. && (3.12) \end{aligned}$$

Observe que, por (3.6), a derivada do Wronskiano é positiva, assim, $W(y, Y, x)$ é uma função crescente em $[x_k, x_{k+1}]$, contradizendo (3.11) e (3.12).
Portanto, $Y(x)$ muda de sinal pelo menos uma vez no intervalo (a, x_1), ou seja, $a < X_1 < x_1$.

2) Se $\lim_{x \to a^+} W(y, Y, x) = 0$.
Suponhamos, sem perda de generalidade, que $y(x)$ é positiva e não identicamente nula em (a, x_1), onde x_1 é o primeiro zero de $y(x)$ maior que a e que $\lim_{x \to a^+} W(y, Y, x) = 0$.
1º Caso: Suponha que $Y(x) < 0$ em (a, x_1), então

$$W(y, Y, x_1) = y(x_1)Y'(x_1) - Y(x_1)y'(x_1) = -Y(x_1)y'(x_1) \geq 0,$$

e por outro lado a derivada do Wronskiano é negativa como vimos em (3.6).

Como $W(y, Y, x_1) > 0$, $\lim\limits_{x\to a_+} W(y, Y, x) = 0$ e o Wronskiano é decrescente então há uma mudança de sinal, portanto temos uma contradição.

2º Caso: Suponha que $Y(x) > 0$ em (a, x_1), então

$$W(y, Y, x_1) = y(x_1)Y'(x_1) - Y(x_1)y'(x_1) = -Y(x_1)y'(x_1) \leq 0,$$

e por outro lado a derivada do Wronskiano é positiva como vimos em (3.6).

Como $W(y, Y, x_1) < 0$, $\lim\limits_{x\to a_+} W(y, Y, x) = 0$ e o Wronskiano é crescente então há uma mudança de sinal, portanto temos uma contradição.

Concluímos assim, que $Y(x)$ muda de sinal pelo menos uma vez em (a, x_1).

b) Se x_n é o último zero de $y(x)$ em (a, b) e $y(b_-) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to b_-} W(y, Y, x) = 0$, então, $Y(x)$ tem pelo menos um zero X_n em (x_n, b), isto é, $x_n < X_n < b$.

A demonstração é análoga ao primeiro item.

■

Corolário 3.1. *[11] Sejam as funções $y(x)$ e $Y(x)$ soluções não triviais das equações diferenciais (3.1) e (3.2), respectivamente, no intervalo (a, b).*

Denotamos os zeros de $y(x)$ por $x_1 < x_2 < ... < x_n$ e os de $Y(x)$ por $X_1 < X_1 < ... < X_n$. Suponha que $f(x)$ e $F(x)$ sejam contínuas em (a, b), $f(x) < F(x)$ e $f(x) \not\equiv F(x)$ em (a, b) e que

$$\begin{array}{rcl} y(a) & = & 0 \\ y(b) & = & 0 \end{array} \quad ou \quad \begin{array}{rcl} \lim\limits_{x\to a_+} W(y, Y, x) & = & 0 \\ \lim\limits_{x\to b_-} W(y, Y, x) & = & 0. \end{array} \tag{3.13}$$

Então, $X_k < x_k$ para todo $k = 1, ..., n-1$.

Demonstração. Sejam $x_1 < x_2 < ... < x_n$ e $X_1 < X_2 < ... < X_n$ os zeros de $y(x)$ e $Y(x)$ respectivamente.

Tomando o intervalo (a, x_1), onde x_1 é a primeira raiz de $y(x)$ e por (3.13), estamos nas hipóteses do Teorema 3.2 item (a), então $a < X_1 < x_1$. O mesmo se aplica para o intervalo (x_n, b), onde x_n é o último zero de $y(x)$, portanto, $x_n < X_n < b$.

Pelo Teorema 3.1, temos que para cada intervalo, (x_k, x_{k+1}), com $k = 1, ..., n-1$, segue que $x_k < X_{k+1} < x_{k+1}$ com $k = 1, ..., n-1$.

Portanto, $X_k < x_k$ para todo $k = 1, ..., n-1$.

■

Corolário 3.2. *[11] Seja $y''(x;\mu) + f(x;\mu)y(x;\mu) = 0$ uma família de equações diferenciais de Sturm Liouville no intervalo (a, b), tais que para todo $\mu \in (c, d)$, a solução $y(x;\mu)$, desta equação, possui zeros $a < x_1(\mu) < ... < x_n(\mu) < b$ distintos.*

Se $\dfrac{\partial f(x;\mu)}{\partial \mu}$ existe e é menor que zero e $y(a,\mu) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to a_+} W(y, Y, x) = 0$, então, todos os zeros, $\xi_k = \xi_k(\mu)$ de $y(x;\mu)$ são funções crescentes de μ.

Note que se $\dfrac{\partial f(x;\mu)}{\partial \mu}$ é maior que zero, então os zeros $\xi_k = \xi_k(\mu)$ de $y(x;\mu)$ são funções decrescentes de μ.

Demonstração. Sejam

$$y''(x;\mu) + f(x;\mu)y(x;\mu) = 0 \tag{3.14}$$

$$y''(x;\mu+\epsilon) + f(x;\mu+\epsilon)y(x;\mu+\epsilon) = 0. \tag{3.15}$$

Em que $\xi_k(\mu)$ é raiz da equação (3.14) e $\xi_k(\mu+\epsilon)$ é raiz da equação (3.15).

Por hipótese temos que $\dfrac{\partial f(x;\mu)}{\partial \mu} < 0$, isto é, $f(x;\mu)$ é decrescente em relação a μ.

Portanto, $f(x;\mu) > f(x;\mu+\epsilon)$.

Temos por hipótese também que $y(a,\mu)=0$ ou $\lim\limits_{x\to a_+} W(y,Y,x)=0$.

Assim, estamos nas hipóteses do Corolário 3.1 e podemos concluir que $\xi_k(\mu+\epsilon) < \xi_k(\mu)$, para $k=1,...,n$.

Portanto, $\xi_k(\mu)$ é decrescente.

■

Teorema 3.3. *[11] Sejam $y(x)$ e $Y(x)$ soluções não triviais das equações:*

$$\begin{aligned} y''(x)+f(x)y(x) &= 0 && (3.16)\\ Y''(x)+F(x)Y(x) &= 0, && (3.17) \end{aligned}$$

e sejam $x_1,x_2,...,x_n,X_1,X_2,...,X_n$ zeros de $y(x)$ e $Y(x)$, respectivamente, no intervalo (a,b). Suponha que $f(x)\leq F(x)$ e $f(x)\not\equiv F(x)$ em (a,x_n) e que $y(a)=0$ ou $\lim\limits_{x\to a_+} W(y,Y,x)=0$.

Então, $X_k < x_k$, com $k=1,2,...,n$.

Observação 3.1. *Podemos supor que $y(x)$ possui n zeros em (a,b) e que $Y(x)$ possui n zeros em (a,c) com $c\leq b$.*

Demonstração. Sejam $x_1 < x_2 < ... < x_n$ e $X_1 < X_2 < ... < X_n$ zeros de $y(x)$ e $Y(x)$ respectivamente. Aplicando o Teorema 3.2 no intervalo (a,x_1), temos $a < X_1 < x_1$ e aplicando o Teorema 3.1 em cada intervalo (x_k,x_{k+1}), $k=1,...,n-1$, segue que $x_k < X_{k+1} < x_{k+1}$.

Note que na hipótese podemos ter $f(x) < F(x)$ desde que $f(x)\not\equiv F(x)$, em cada intervalo $[a,x_1]$ e $[x_k,x_{k+1}]$, com $k=1,...,n-1$.

■

Teorema 3.4. *[11] Sejam $f,F\in C(a,b)$ e $y(x)$ e $Y(x)$ são soluções das equações diferenciais*

$$\begin{aligned} y''(x)+f(x)y(x) &= 0 && (3.18)\\ Y''(x)+F(x)Y(x) &= 0, && (3.19) \end{aligned}$$

que satisfazem $y(a)=0$ ou $\lim\limits_{x\to a_+} W(y,Y,x)=0$ ($y(b)=0$ ou $\lim\limits_{x\to b_-} W(y,Y,x)=0$) e também possuem zeros distintos em (a,b), onde os zeros de $y(x)$ e os zeros de $Y(x)$ em (a,b) são, respectivamente, $x_1 < x_2 < ... < x_n$ e $X_1 < X_2 < ... < X_n$.

Se existe $\eta\in(a,b)$ tal que $f(\eta)=F(\eta)$ e

1. *$F(x)-f(x) < 0$ para $x\in(a,\eta)$ e $F(x)-f(x) > 0$ para $x\in(\eta,b)$, então $x_k < X_k$, para todo $k=1,...,n$.*

2. *$F(x)-f(x) > 0$ para $x\in(a,\eta)$ e $F(x)-f(x) < 0$ para $x\in(\eta,b)$, então $X_k < x_k$, para todo $k=1,...,n$.*

Demonstração. Vamos demonstrar o item 1 O item 2 é análogo.

Suponha que $y(x)$ tenha m zeros em (a,η) e $(n-m)$ zeros em $[\eta,b)$, isto é,

$$a < x_1 < x_2 < ... < x_m < \eta \leq x_{m+1} < ... < x_n < b.$$

O caso em que $m=0$, temos que $x_k < X_k$ pelo teorema anterior.

E no caso em que $m = n$, temos que $x_k < X_k$, cujo resultado também decorre do teorema anterior.

Vamos analisar o caso em que $1 < m < n$.

Caso em que $x_k \in (a, \eta)$, *com* $k = 1, ..., m$:

Suponha, por absurdo, que para $1 \leq j \leq m$, temos $X_j < x_j$. Por hipótese temos que $F(x) < f(x)$ para $x \in (a, x_j)$ e $y(a) = 0$ ou $\lim_{x \to a_+} W(y, Y, x) = 0$; pelo Teorema 3.3, temos que $x_j < X_j$, para todo $k = 1, ..., n$. Absurdo.

Então, $X_k > x_k$, para todo $k = 1, ..., n$.

Caso em que $x_k \in (\eta, b)$, *com* $k = m+1, ..., n$:

Note que $f(x) < F(x)$ com $x \in (x_{m+1}, b)$ pois $y(b) = 0$ ou $\lim_{x \to b_-} W(y, Y, x) = 0$.

Pelo teorema anterior, $x_k < X_k$, para todo $k = m+1, ..., n$.

■

Proposição 3.1 ([9], página 40)**.** *Seja $y(x; \tau)$ solução da equação diferencial*

$$y''(x; \tau) + f(x; \tau) y(x; \tau) = 0$$

onde a derivada é em relação à variável x e $f(x; \tau) \in C[(a(\tau), b(\tau)) x (c, d)]$ que depende continuamente do parâmetro τ e possui zeros distintos $x_k(\tau) \in (a(\tau), b(\tau))$. Dados $\tau_1, \tau_2 \in (c, d)$, suponhamos

$$\lim_{x \longrightarrow a(\tau_1)} \left\{ y'(x; \tau_1) y\left(\frac{x - \gamma_2}{\gamma_1}; \tau_2\right) - \left[y'\left(\frac{x - \gamma_2}{\gamma_1}; \tau_2\right) y(x; \tau_1) \right] \right\} = 0, \tag{3.20}$$

onde a derivada refere-se a x e

$$\begin{aligned} \gamma_1 &:= \frac{b(\tau_1) - a(\tau_1)}{b(\tau_2) - a(\tau_2)} \\ \gamma_2 &:= b(\tau_1) - \frac{b(\tau_1) - a(\tau_1)}{b(\tau_2) - a(\tau_2)} b(\tau_2) \\ &= a(\tau_1) - \frac{b(\tau_1) - a(\tau_1)}{b(\tau_2) - a(\tau_2)} a(\tau_2). \end{aligned}$$

- *Se* $\dfrac{\partial f(x; \tau)}{\partial \tau} + \dfrac{\partial f(x; \tau)}{\partial x} < 0$ *para* $x \in (a(\tau), b(\tau))$ *e* $b'(\tau) - a'(\tau) < 0$ *para* $\tau \in (c, d)$, *então* $b(\tau) - x_k(\tau)$ *é decrescente para* τ, *para* $k = 1, ..., n$.
- *Se* $\dfrac{\partial f(x; \tau)}{\partial \tau} + \dfrac{\partial f(x; \tau)}{\partial x} > 0$ *para* $x \in (a(\tau), b(\tau))$ *e* $b'(\tau) - a'(\tau) > 0$ *para* $\tau \in (c, d)$, *então* $b(\tau) - x_k(\tau)$ *é crescente para* τ, *para* $k = 1, ..., n$.

Observação 3.2. *A condição do limite da Proposição 3.1,*

$$\lim_{x \longrightarrow a(\tau_1)} \left\{ y'(x; \tau_1) y\left(\frac{x - \gamma_2}{\gamma_1}; \tau_2\right) - \left[y'\left(\frac{x - \gamma_2}{\gamma_1}; \tau_2\right) y(x; \tau_1) \right] \right\} = 0$$

é equivalente ao limite

$$\lim \left\{ y'(x; \tau_1) y(z; \tau_2) - \frac{y'(z; \tau_2)}{\gamma_1} y(x; \tau_2) \right\} = 0 \tag{3.21}$$

para $x \longrightarrow a(\tau_1)$ *e* $z \longrightarrow a(\tau_2)$.

Corolário 3.3 ([9], página 41). *Seja*

$$y"(x;\tau) + f(x;\tau)y(x;\tau) = 0$$

uma família de equações diferenciais que satisfazem às condições da Proposição 3.1.

- *Se* $\dfrac{\partial f(x;\tau)}{\partial \tau} + \dfrac{\partial f(x;\tau)}{\partial x} < 0$ *para* $x \in (a(\tau), b(\tau))$ *e* $b'(\tau) - a'(\tau) < 0$ *para* $\tau \in (c, d)$*, então* $x_k(\tau)$ *é decrescente para* τ*, para* $k = 1, ..., n$*.*

- *Se* $\dfrac{\partial f(x;\tau)}{\partial \tau} + \dfrac{\partial f(x;\tau)}{\partial x} > 0$ *para* $x \in (a(\tau), b(\tau))$ *e* $b'(\tau) - a'(\tau) > 0$ *para* $\tau \in (c, d)$*, então* $x_k(\tau)$ *é crescente para* τ*, para* $k = 1, ..., n$*.*

3.2 Forma Integral do Teorema de Sturm Liouville

Teorema 3.5. *[11]*
Seja $y(x;\tau)$ *solução para a equação*

$$y''(x;\tau) + f(x;\tau)y(x;\tau) = 0, \tag{3.22}$$

onde $x \in (a, b)$ *e* $\tau \in (c, d)$*, e seja* $f(x;\tau)$ *continuamente diferenciável em relação a todas as variáveis e* $\dfrac{\partial f(x;\tau)}{\partial \tau}$ *é uma função integrável em* (a, b)*. A solução* $y(x;\tau)$ *é também suave com respeito a* x *e* τ*.*

Suponha que os zeros de y *são distintos, e cada zero* $\xi_k(\tau)$ *é uma função suave em relação ao parâmetro* τ*.*

1. *Se a solução satisfizer* $y(a;\tau) = 0$ *ou* $y'(a;\tau) = 0$*, onde a última derivada é com respeito a primeira variável, então*

$$\left[\left.\frac{\partial y(x;\tau)}{\partial x}\right|_{x=\xi}\right]^2 \xi'(\tau) = -\int_a^\xi \frac{\partial f(x;\tau)}{\partial \tau} \; [y(x;\tau)]^2 \; dx. \tag{3.23}$$

2. *Se a solução satisfizer* $y(b;\tau) = 0$ *ou* $y'(b;\tau) = 0$*, onde a última derivada é com respeito a primeira variável, então*

$$\left[\left.\frac{\partial y(x;\tau)}{\partial x}\right|_{x=\xi}\right]^2 \xi'(\tau) = -\int_a^\xi \frac{\partial f(x;\tau)}{\partial \tau} \; [y(x;\tau)]^2 \; dx. \tag{3.24}$$

Demonstração. Derivando a equação (3.22) em relação ao parâmetro τ, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\frac{\partial^2\, y(x;\tau)}{\partial x^2} + y(x;\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}f(x;\tau) + f(x;\tau)\frac{\partial}{\partial \tau}y(x;\tau) = 0. \tag{3.25}$$

Se multiplicarmos (3.22) por $\dfrac{\partial}{\partial \tau}y(x;\tau)$, temos,

$$\frac{\partial}{\partial \tau}y(x;\tau) \;\; \frac{\partial^2\, y(x;\tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial \tau}y(x;\tau) \;\; f(x;\tau)y(x;\tau) = 0. \tag{3.26}$$

Multiplicando (3.25) por $-y(x;\tau)$, temos

$$-y(x;\tau)\frac{\partial^3\, y(x;\tau)}{\partial\tau\partial x^2}-y(x;\tau)y(x;\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}f(x;\tau)-y(x;\tau)f(x;\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}y(x;\tau)=0. \tag{3.27}$$

Somando (3.26) com (3.27):

$$\frac{\partial}{\partial\tau}y(x;\tau)\ \frac{\partial^3\, y(x;\tau)}{\partial x^2}-y(x;\tau)\frac{\partial^2\, y(x;\tau)}{\partial\tau\partial x^2}-[y(x;\tau)]^2\frac{\partial}{\partial\tau}f(x;\tau)=0 \tag{3.28}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial\tau}y(x;\tau)\ \frac{\partial^2\, y(x;\tau)}{\partial x^2}-y(x;\tau)\frac{\partial^3\, y(x;\tau)}{\partial\tau\partial x^2}=[y(x;\tau)]^2\frac{\partial}{\partial\tau}f(x;\tau) \tag{3.29}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial y(x;\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial y(x;\tau)}{\partial x}-y(x;\tau)\frac{\partial y(x;\tau)}{\partial\tau\partial x}\right]=[y(x;\tau)]^2\frac{\partial}{\partial\tau}f(x;\tau). \tag{3.30}$$

Integrando com relação a x, de a até ξ:

$$\left[\frac{\partial y(x;\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial y(x;\tau)}{\partial x}-y(x;\tau)\frac{\partial y(x;\tau)}{\partial\tau\partial x}\right]\Bigg|_{x=a}^{x=\xi}=\int_a^{\xi}[y(x;\tau)]^2\frac{\partial}{\partial\tau}f(x;\tau)dx.$$

Por hipótese, $y(\xi;\tau)=0$ e $y(a;\tau)=0$ ou $y'(a;\tau)=0$, então

$$\left(\frac{\partial y(\xi;\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial y(\xi;\tau)}{\partial x}-y(\xi;\tau)\frac{\partial y(\xi;\tau)}{\partial\tau\partial x}\right)-\left(\frac{\partial y(a;\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial y(a;\tau)}{\partial x}-y(a;\tau)\frac{\partial y(a;\tau)}{\partial\tau dx}\right)=$$
$$\int_a^{\xi}[y(x;\tau)]^2\frac{\partial f(x;\tau)}{\partial\tau}\ dx,$$

ou seja,

$$\left(\frac{\partial y(\xi;\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial y(\xi;\tau)}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial y(a;\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial y(a;\tau)}{\partial x}-y(a;\tau)\frac{\partial y(a;\tau)}{\partial\tau\partial x}\right)=\int_a^{\xi}[y(x;\tau)]^2\frac{\partial f(x;\tau)}{\partial\tau}\ dx. \tag{3.31}$$

Por hipótese temos $y(a;\tau)\dfrac{\partial y(a;\tau)}{\partial x}=0$. Se derivarmos em relação a τ, temos

$$\frac{\partial y(a;\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial y(a;\tau)}{\partial x}+y(a)\frac{\partial^2 y(a;\tau)}{\partial x\partial\tau}\ =\ 0, \tag{3.32}$$

isto é,

$$y(a)\frac{\partial^2 y(a;\tau)}{\partial x\partial\tau}\ =\ -\frac{\partial y(a;\tau)}{\partial\tau}\frac{\partial y(a;\tau)}{\partial x}. \tag{3.33}$$

Como $y(\xi;\tau)=0$, segue que

$$\frac{\partial y(\xi;\tau)}{\partial x}\xi'(\tau)+\frac{\partial y(\xi;\tau)}{\partial\tau}\ =\ 0 \tag{3.34}$$

$$\frac{\partial y(\xi;\tau)}{\partial\tau}\ =\ -\frac{\partial y(\xi;\tau)}{\partial x}\ \xi'(\tau). \tag{3.35}$$

Substituindo (3.33) em (3.31), temos

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial y(\xi;\tau)}{\partial\tau}\ \frac{\partial y(\xi;\tau)}{\partial x}\right)-\left(-y(a;\tau)\frac{\partial y(a;\tau)}{\partial\tau dx}-y(a;\tau)\frac{\partial y(a;\tau)}{\partial\tau\partial x}\right)\ &=\ \int_a^{\xi}[y(x;\tau)]^2\frac{\partial f(x;\tau)}{\partial\tau}\ dx\\ \left(\frac{\partial y(\xi;\tau)}{\partial\tau}\ \frac{\partial y(\xi;\tau)}{\partial x}\right)+2y(a;\tau)\frac{\partial y(a;\tau)}{\partial\tau\partial x}\ &=\ \int_a^{\xi}[y(x;\tau)]^2\frac{\partial f(x;\tau)}{\partial\tau}\ dx.\end{aligned}$$

Se $y(a) = 0$ ou $\dfrac{\partial y(a;\tau)}{\partial x} = 0$,

$$\left(\frac{\partial y(\xi;\tau)}{\partial \tau} \quad \frac{\partial y(\xi;\tau)}{\partial x} \right) = \int_a^{\xi} [y(x;\tau)]^2 \frac{\partial f(x;\tau)}{\partial \tau}\, dx.$$

Substituindo (3.35), temos

$$\begin{aligned}
\left(-\frac{dy(\xi;\tau)}{dx}\xi'(\tau) \quad \frac{\partial y(\xi;\tau)}{\partial x} \right) &= \int_a^{\xi} [y(x;\tau)]^2 \frac{\partial f(x;\tau)}{\partial \tau}\, dx \\
\Rightarrow \left(\frac{\partial y(\xi;\tau)}{\partial x} \right)^2 \xi'(\tau) &= -\int_a^{\xi} [y(x;\tau)]^2 \frac{\partial f(x;\tau)}{\partial \tau}\, dx \\
\Rightarrow \left[\left. \frac{\partial y(x;\tau)}{\partial x} \right|_{x=\xi} \right]^2 \xi'(\tau) &= -\int_a^{\xi} [y(x;\tau)]^2 \frac{\partial f(x;\tau)}{\partial \tau}\, dx.
\end{aligned}$$

■

Capítulo 4

Aplicações dos Teoremas de Sturm Liouville

Neste capítulo temos como principal motivação o estudo do comportamento dos zeros positivos de Gegenbauer, que são funções estritamente decrescentes. Em 1984, A. Laforgia, conjecturou que as funções $\lambda x_{n,k}(\lambda)$ são crescentes para $\lambda > 0$. Durante um período de 25 anos várias contribuições foram feitas para esse estudo.

Os teoremas e conjecturas abaixo retratam esses 25 anos de estudo do comportamento dos zeros de Gegenbauer.

Em 1985, em [8], A. Laforgia conjecturou o primeiro resultado, que garantia que as funções $\lambda\ x_{n,k}(\lambda)$ são funções crescentes de λ, para $\lambda > 0$. No mesmo artigo, ele garante que para $\lambda \in (0,1)$ as funções $\lambda\ x_{nk}(\lambda)$ são crescentes em λ.

Em 1986, Ahmed, Muldoon e Spigler trazem em [1], um refinamento para o teorema acima, onde

$$\sqrt{\lambda + \frac{2n^2+1}{2(n+1)}} x_{n,k}(\lambda)$$

são estritamente crescente para $\lambda \in (-1/2, 3/2]$, com $x_{n,k}$ zeros de Gegenbauer.

R. A.Askey sugeriu que a função f não dependeria de n, $f(\lambda) = \sqrt{\lambda+1}$. Esta sugestão foi conjecturada por M.E.H Ismail [6] em 1989, onde $\sqrt{\lambda+1} x_{n,k}$ é crescente em λ e $\lambda > -1/2$. Neste mesmo ano, E.K. Ifantis e P.D.Siafarikas, em [4], provaram a conjectura feita por Ismail [6], usando técnica de função analítica. D.K.Dimitrov [2], em 1996, provou esta mesma conjectura para um n suficientemente grande e este mesmo teorema, usando um método diferente.

Em [2], temos o seguinte resultado:

Resultado 1

Seja $\lambda > -1/2$. Então,

- para todo n par, $\sqrt{\lambda+1}\ x_{n,k}(\lambda)$ é função crescente de λ;
- para todo $n \geq 3$ ímpar, $\sqrt{\lambda+2}\ x_{n,k}(\lambda)$ é função crescente de λ;

Elbert e Siafarikas, [7], em 1999, provou que $\sqrt{\lambda + \frac{2n^2+1}{4n+2}}\ x_{n,k}(\lambda)$ são funções crescentes em $\lambda > -1/2$, onde $x_{n,k}(\lambda)$ são zeros de Gegenbauer.

Em 2002, se encerrou a discussão sobre a escolha da função $\sqrt{\lambda + c_n}$ onde $\sqrt{\lambda + c_n}\ x_{n,k}(\lambda)$ seja uma função estritamente crescente de λ com $\lambda > -1/2$.

Em [3], A. Elbert e A. Laforgia determinaram uma fórmula assintótica para os zeros de Gegenbauer

Resultado 2

Dados $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, e $k = 1, ..., [n/2]$ e sejam $x_{n,k}$ zeros do n-ésimo polinômio de Gegenbauer em ordem decrescente, então:

$$x_{n,k} = h_{n,k}\lambda^{-1/2} - \frac{h_{n,k}}{8}(2n - 1 + 2h_{n,k}^2)\lambda^{-3/2}$$
$$+ h_{n,k}\left(\frac{12n^2 - 12n + 1}{128} + \frac{5n-2}{24}h_{n,k}^2 + \frac{5}{96}h_{n,k}^4\right)\lambda^{-5/2} + \mathcal{O}(\lambda^{-7/2}), \lambda \longrightarrow \infty.$$

Pela fórmula acima, concluímos que

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \sqrt{\lambda + c_n}\, x_{n,k}(\lambda) = h_{n,k}$$

para qualquer constante c_n. Podemos concluir também que as expressões $f_n(\lambda)\ x_{n,k}$, onde $f_n(\lambda) = \sqrt{\lambda + \frac{2n^2+1}{4n+2}}$, são estritamente crescentes e convergem para os respectivos zeros do n-ésimo Polinômio de Hermite.

Nosso questionamento agora é para quais sequências constantes $\{c_n\}, \{d_n\}$ e $\{e_n\}$ a expressão

$$\sqrt{\lambda + c_n}\, x_{n,k}(\lambda) + \frac{d_n}{\lambda + c_n}$$

é estritamente decrescente, onde $x_{n,k}(\lambda)$ são zeros de Gegenbauer.

Nesta dissertação apresentaremos a solução dos dois resultados descritos abaixo:

Teorema 4.1. *[7] Sejam $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e $k = 1, ..., [n/2]$. Então as quantidades*

$$f_n(\lambda)x_{n,k}(\lambda), \tag{4.1}$$

onde $f_n(\lambda) = \sqrt{\lambda + \frac{2n^2+1}{2+4n}}$, são crescentes de λ, para $\lambda \in (-1/2, \infty)$. Além disso,

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty} \sqrt{\lambda + c_n}\, x_{n,k}(\lambda) = h_{n,k}.$$

Teorema 4.2. *[9] Dados $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ e $k = 1, ..., [n/2]$, sejam $x_{nk}(\lambda)$ os zeros positivos do n-ésimo polinômio de Gegenbauer. Então as quantidades*

$$f_n(\lambda)x_{n,k}(\lambda) + \frac{d_n}{g_n(\lambda)}, \tag{4.2}$$

onde $g_n(\lambda) = f_n^2(\lambda)$ e $d_n = \frac{3+2n}{2+4n}\left(\frac{n^2+3n+2}{1+2n}\right)^{3/2}$ são decrescentes de λ, para $\lambda \in (-1/2, 3/2]$.

Além disso,

$$\lim_{\lambda \longrightarrow \infty}\left[\sqrt{\lambda + c_n} + \frac{d_n}{\lambda + e_n}\right] = h_{n,k}.$$

4.1 Prova do Teorema 4.1

Para provar o Teorema 4.1, vamos utilizar o Corolário 3.2. Para isso precisamos encontrar uma função que satisfaz uma equação diferencial de Sturm Liouville e na Seção 2.3 vimos que a função $u(x;\lambda) = (1-x^2)^{\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{4}} \ P_n^{\lambda}(x)$ é solução para a equação diferencial de Sturm Liouville.

Seja

$$\frac{d^2u(x;\lambda)}{dx^2} + \Lambda_n(x;\lambda)u(x;\lambda) = 0 \tag{4.3}$$

uma equação diferencial, onde

$$\Lambda_n(x;\lambda) = \frac{(n+\lambda)^2}{(1-x^2)} + \frac{(-\lambda^2+\lambda+\frac{1}{2})+\frac{x^2}{4}}{(1-x^2)^2} \text{ com } x \in (0,1). \tag{4.4}$$

Para o nosso propósito, consideremos a transformação $t = f_n x$ na equação acima. Assim, a função

$$U(t;\lambda) = u\left(\frac{t}{f_n};\lambda\right) = \left(1-\left(\frac{t}{f_n}\right)^2\right)^{\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{4}} \ P_n^{\lambda}\left(\frac{t}{f_n}\right), \tag{4.5}$$

é solução da equação diferencial de Sturm Liouville

$$\frac{d^2U(t;\lambda)}{dt^2} + \widehat{\Lambda_n}(t;\lambda)U(t;\lambda) = 0, \tag{4.6}$$

e $t \in (0, f_n)$ onde,

$$\begin{aligned}
\widehat{\Lambda_n}(t,\lambda) &= (f_n)^{-2} \ \Lambda\left(\frac{t}{f_n};\lambda\right) \\
&= \frac{1}{f_n^2(\lambda)}\left[\frac{(n+\lambda)^2}{1-t^2/f_n^2} + \frac{(-\lambda^2+\lambda+\frac{1}{2})+t^2/(4f_n^2)}{(1-t^2/f_n^2)^2}\right] \\
&= \frac{(n+\lambda)^2}{f_n^2-t^2} + \frac{f_n^2(-\lambda^2+\lambda+\frac{1}{2})+\frac{t^2}{4f_n^2}}{(f_n^2-t^2)^2}.
\end{aligned} \tag{4.7}$$

O Corolário 3.2 nos garante que se $\dfrac{\partial\widehat{\Lambda_n}}{\partial\lambda} < 0$ e $\lim\limits_{t\longrightarrow 0^+} W(U(t;\lambda_j), U(t;\lambda_k), t) = 0$, então os zeros da solução da equação diferencial (4.6) são funções crescentes do parâmetro λ_j, λ_k .

Para demonstrarmos este teorema, vamos verificar:

1. $\lim\limits_{t\longrightarrow 0^+} W(U(t;\lambda_j), U(t;\lambda_k), t) = 0$,

2. $\dfrac{\partial\widehat{\Lambda_n}}{\partial\lambda} < 0$.

Prova de 1

Seja

$$U_n(t;\lambda) = \left(1-\left(\frac{t}{f_n}\right)^2\right)^{\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{4}} \ P_n^{\lambda}\left(\frac{t}{f_n}\right).$$

Derivando $U_n(t;\lambda)$ em relação a t, temos:

$$U_n'(t;\lambda) = -2\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(1-\left(\frac{t}{f_n}\right)^2\right)^{\lambda/2-3/2}\left(\frac{t}{f_n}\right)P_n^{\lambda}\left(\frac{t}{f_n}\right).$$

Sabemos que:

$$\lim W(U(t;\lambda_j),U(t;\lambda_k),t) \;=\; \lim(U(t;\lambda_j)U'(t;\lambda_k)-U'(t;\lambda_j)U(t;\lambda_k)).$$

Fazendo $U_n(t;\lambda_j)U_n'(t;\lambda_k)$, temos:

$$\left(1-\left(\frac{t}{f_n}\right)^2\right)^{\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{4}} P_n^{\lambda}\left(\frac{t}{f_n}\right)\left[-2\left(\frac{\lambda_k}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(1-\left(\frac{t}{f_n}\right)^2\right)^{\lambda/2-3/2}\left(\frac{t}{f_n}\right)P_n^{\lambda}\left(\frac{t}{f_n}\right)\right].$$

O limite quando $t \longrightarrow 0^+$ é igual a zero.

Note que

$$\lim U_n(t;\lambda_k)U_n'(t;\lambda_j)=0,$$

quando $t \longrightarrow 0^+$.

Assim,

$$\lim[U_n(t;\lambda_j)U_n'(t;\lambda_k)-U_n(t;\lambda_k)U_n'(t;\lambda_j)]=0,$$

com $t \longrightarrow 0^+$.

Prova de 2

Derivando $\widehat{\Lambda_n}$ com relação a λ, temos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\widehat{\Lambda}(t;\lambda)}{\partial\lambda} &= \frac{1}{(f_n^2-t^2)^4}\{[2(n+\lambda)(f_n^2-t^2)+2(n+\lambda)^2 f_n f_n'+(1-2\lambda)f_n^2+2(-\lambda^2+\lambda+\frac{1}{2})f_n f_n'](f_n^2-t^2)^2\\ &\quad -4f_n f_n'(f_n^2-t^2)[(n+\lambda)^2(f_n^2-t^2)+(-\lambda^2+\lambda+\frac{1}{2})f_n^2+\frac{t^2}{4}\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&=(f_n^2-t^2)^{-3}\{f_n^4(2n+1)+2t^4(n+\lambda)+t^2 f_n f_n'[2(n+\lambda)^2-1+2\lambda^2-2\lambda]+t^2 f_n^2(-4n-2\lambda-1)\\ &\quad + f_n^3 f_n'(-2(n+\lambda)^2-2(\frac{1}{2}+\lambda-\lambda^2)-f_n f_n' t^2\}. \quad (4.8)\end{aligned}$$

Para que $\dfrac{\partial\widehat{\Lambda}(t;\lambda)}{\partial\lambda}$ seja negativa, é necessário que encontremos uma f_n para tornar a afirmação verdadeira.

Dividindo (4.8) por f_n^4 temos:

$$\begin{aligned}&(f_n^2-t^2)^{-3}\Big\{(2n+1)+2\frac{t^4}{f_n^4}(n+\lambda)+\frac{t^2}{f_n^2}\frac{f_n'}{f_n}[2(n+\lambda)^2-1+2\lambda^2-2\lambda]+\frac{t^2}{f_n^2}(-4n-2\lambda-1)\\ &\quad +\frac{f_n'}{f_n}(-2(n+\lambda)^2-2(\frac{1}{2}+\lambda-\lambda^2)-\frac{t^2}{f_n^2}\frac{f_n'}{f_n}\Big\}. \quad (4.9)\end{aligned}$$

Fazendo $u = \frac{t^2}{f_n^2}$, onde $u \in (0,1)$, pois $t \in (0, f_n)$, obtemos

$$(t^2 - f_n^2)^{-3}\Big\{ -(2n+1) - 2u^2(n+\lambda) - u\frac{f_n'}{f_n}[2(n+\lambda)^2 - 1 + 2\lambda^2 - 2\lambda] - u(-4n - 2\lambda - 1) - \frac{f_n'}{f_n}(-2(n+\lambda)^2 - 2(\frac{1}{2} + \lambda - \lambda^2)) + u\frac{f_n'}{f_n}\Big\}. \quad (4.10)$$

Assim,

$$\frac{\partial \widehat{\Lambda}(t;\lambda)}{\partial \lambda} \le 0 \Longleftrightarrow \Big\{ -(2n+1) - 2u^2(n+\lambda) - u\frac{f_n'}{f_n}[2(n+\lambda)^2 - 1 + 2\lambda^2 - 2\lambda] - u(-4n - 2\lambda - 1) - \frac{f_n'}{f_n}(-2(n+\lambda)^2 - 2(\frac{1}{2} + \lambda - \lambda^2)) + u\frac{f_n'}{f_n}\Big\} > 0.$$

Determinemos f_n, para que a afirmação acima seja válida:

$$\frac{f_n'}{f_n}\left[-2u(n^2+2n\lambda+2\lambda^2-1-\lambda)+2n^2+4n\lambda+4\lambda^2+1+2\lambda\right] \ge (2n+1)+2(n+\lambda)u^2-u(2\lambda+4n+1).$$

Logo,

$$\frac{f_n'}{f_n} \ge \frac{(2n+1) + 2(n+\lambda)u^2 - u(2\lambda + 4n + 1)}{\left[-2u(n^2 + 2n\lambda + 2\lambda^2 - 1 - \lambda) + 2n^2 + 4n\lambda + 4\lambda^2 + 1 + 2\lambda\right]}.$$

Tomando $a = 2n+1, b = 2(n+\lambda), A = 2n^2 + 4n\lambda + 2\lambda + 1$ e $B = 2(n^2 + 2n\lambda + 2\lambda^2 - 1 + \lambda)$, temos:

$$\frac{f_n'}{f_n} \ge \frac{a + bu^2 - u(a+b)}{A - uB} = F(u). \quad (4.11)$$

Podemos escrever (4.11) como $\dfrac{f_n'}{f_n} \ge F(u)$ e para que, seja válida, é necessário e suficiente que $\dfrac{f_n'}{f_n} \ge \sup\limits_{0<u<1} F(u)$. Podemos mostrar que $\sup\limits_{0<u<1} F(u) = F(0)$, isto é, $\dfrac{a + bu^2 - u(a+b)}{A - uB} \le \dfrac{a}{A}$.

Vamos mostrar que $A - Bu$ é uma função decrescente.
Note que $B \le 0$:

$$B = 2[(n+\lambda)^2 + \lambda^2 - \lambda - 1].$$

Definindo $r(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$, então

$$r'(\lambda) \;=\; 2\lambda - 1.$$

Assim, $r'(\lambda) = 0$ se e somente se $\lambda = \dfrac{1}{2}$.
Como $r\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4}$ e $r(\lambda) \ge\ge r(1/2)$.
Segue que

$$2[(n+\lambda)^2 + \lambda^2 - \lambda - 1] \le 2\left[(n+\lambda)^2 - \frac{5}{4}\right].$$

Observe que

$$B > 0 \Leftrightarrow (n+\lambda)^2 > \frac{5}{4} \Leftrightarrow n + \lambda > \frac{\sqrt{5}}{2}$$

A afirmação acima é verdadeira, pois $n \geq 2$ e $\lambda \geq -\frac{1}{2}$. Logo, $n+\lambda > 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{9}}{2} > \frac{\sqrt{5}}{2}$.
Temos que $\dfrac{A}{B}$ é raiz de $A - Bu$. É necessário que $\dfrac{A}{B} \geq 1$ pois $0 < u < 1$.
Assim,

$$A \geq B \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 4\lambda - 3 \leq 0.$$

A inequação é negativa se $-\frac{1}{2} < \lambda \leq \frac{3}{2}$, ou seja, $A \geq B \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < \lambda \leq \frac{3}{2}$.

Observe que $b \geq 0$, pois $n \geq 2$ e $\lambda \geq -\frac{1}{2}$.
Seja

$$s(u) = a + bu^2 - u(a+b). \tag{4.12}$$

Resolvendo esta equação de segundo grau (4.12) , temos que

$$u = \frac{(a+b) \pm |a-b|}{2b} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{a}{b} \quad u_2 = 1 \quad se \quad a \geq b \quad \Rightarrow \quad \lambda \geq \frac{1}{2} \\ u_1 = 1 \quad u_2 = \frac{a}{b} \quad se \quad b \geq a \quad \Rightarrow \quad \lambda \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Temos dois casos, onde $a \geq b$ e $b \geq a$:
1º Caso: Se $a \leq b$.

$$\lambda \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} < 1 \Rightarrow F(0) = \frac{a}{A} \geq F(u).$$

2º Caso: Se $a \geq b$.

$$\lambda \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} > 1 \Rightarrow F(0) = \frac{a}{A} \geq F(u).$$

Assim, concluímos que $\dfrac{f_n'}{f_n} \geq \dfrac{a}{A}$.

Agora conseguimos determinar a função f para que $\dfrac{\partial \widehat{\Lambda}(t;\lambda)}{\partial \lambda} \leq 0$.
Como

$$\begin{aligned} ln|f| &= \int \frac{2n+1}{2n^2 + 4n\lambda + 2\lambda + 1} d\lambda \\ &= \int \frac{2n+1}{2n^2 + 1 + 2\lambda(2n+1)} d\lambda \\ &= \int \frac{1}{2(2n+1)} \frac{2n+1}{\lambda + \dfrac{2n^2+1}{2(2n+1)}} d\lambda \\ &= \frac{1}{2} ln \left| \lambda + \frac{2n^2+1}{2(2n+1)} \right|. \end{aligned}$$

Então, a menos de um fator constante, temos

$$f_n(\lambda) = \sqrt{\lambda + \frac{2n^2+1}{4n+2}}. \tag{4.13}$$

Portanto, $\dfrac{\partial \widehat{\Lambda}(t;\lambda)}{\partial \lambda} \leq 0$ se $f_n(\lambda) = \sqrt{\lambda + \dfrac{2n^2+1}{4n+2}}$, com $\lambda \in (-1/2, 3/2]$.

Provamos parcialmente o Teorema 4.1, ou seja, provamos o resultado apenas para $\lambda \in (-1/2, 3/2]$.

Afim de estender o resultado para todo $\lambda \in (-1/2, \infty)$, aplicaremos a Forma Integral do Teorema de Sturm Liouville, mais especificamente, o Teorema 3.5.

Seja $t_{n,k} = f_n(\lambda) x_{n,k}(\lambda)$, com $f_n(\lambda)$ definida em (4.13).

Temos que $t_{n,k} = f_n(\lambda)x_{n,k}(\lambda)$ e (4.5) são soluções para a Equação Diferencial de Sturm Liouville (4.6).

Fazendo $t^2 = \tau$ e $\varphi(\lambda) = f_n^2(\lambda)$, temos

$$R(\tau;\varphi(\lambda),\lambda) = \widehat{\Lambda}(\sqrt{\tau};\lambda) = \frac{(n+\lambda)^2}{\varphi(\lambda)-\tau} + \frac{\left(\frac{1}{2}+\lambda-\lambda^2\right)\varphi(\lambda)+\frac{\tau}{4}}{(\varphi(\lambda)-\tau)^2}.$$

Note que $U(0;\lambda)U'(0;\lambda) = 0$. Assim, podemos aplicar o Teorema da Forma Integral de Sturm. Para isso, calcularemos a derivada de $R(\tau;\varphi(\lambda),\lambda) = \widehat{\Lambda}(\tau;\lambda)$.

$$\begin{aligned}\frac{dR(\tau;\varphi(\lambda),\tau)}{d\lambda} &= \Bigg\{\Bigg[2(n+\lambda)(\varphi-\tau)+(n+\lambda)^2\varphi'+\varphi'\left(\frac{1}{2}+\lambda-\lambda^2\right)+\varphi(1-2\lambda)\Bigg](\varphi-\tau)^2- \\ &\Bigg[(n+\lambda)^2(\varphi-\tau)+\varphi\left(\frac{1}{2}+\lambda-\lambda^2\right)+\frac{\tau}{4}\Bigg]2(\varphi-\tau)\varphi'\Bigg\}(\varphi-\tau)^{-4}\end{aligned}$$

$$= \Bigg[2\varphi^2(n+\lambda)-2\varphi(n+\lambda)+(n+\lambda)^2\varphi+\varphi\left(\frac{1}{2}+\lambda-\lambda^2\right)+\varphi(1-2\lambda)-2\varphi\tau(n+\lambda)+2\tau^2(n+\lambda)-$$
$$\tau(n+\lambda)^2-\tau\left(\frac{1}{2}+\lambda-\lambda^2\right)-\tau\varphi(1-2\lambda)-2\varphi(m+\lambda)^2+2\tau(n+\lambda)^2-2\varphi\left(\frac{1}{2}+\lambda-\lambda^2\right)-\frac{\tau}{2}\Bigg](\varphi-\tau)^{-3}$$

$$\begin{aligned}&= \Bigg\{2\Big(n+\lambda\Big)\tau^2+\tau\Bigg[\Big(n+\lambda\Big)^2-1-\lambda-\lambda^2-\varphi\Big(4n+1+2\lambda\Big)\Bigg]- \\ &\quad\varphi\Bigg[\Big(n+\lambda\Big)^2+\frac{1}{2}+\lambda-\lambda^2+\varphi^2\Big(1-2n\Big)\Bigg]\Bigg\}(\varphi-\tau)^{-3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \Bigg\{2\Big(n+\lambda\Big)\tau^2+\tau\Bigg[\Big(n+\lambda\Big)^2-1-\lambda-\lambda^2-\varphi\Big(4n+1+2\lambda\Big)\Bigg]- \\ &\quad\varphi\Bigg[\Big(n+\lambda\Big)^2+\frac{1}{2}+\lambda-\lambda^2+\varphi^2\Big(1-2n\Big)\Bigg]\Bigg\}(\varphi-\tau)^{-3}. \quad (4.14)\end{aligned}$$

Tomamos

$$\begin{aligned} A &= 2(n+\lambda) && (4.15)\\ B &= [(n+\lambda)^2-1-\lambda-\lambda^2-\varphi(4n+1+2\lambda)] && (4.16)\\ C &= \varphi\Bigg[\Big(n+\lambda\Big)^2+\frac{1}{2}+\lambda-\lambda^2\Bigg]+\varphi^2\Big(1-2n\Big), && (4.17)\end{aligned}$$

em (4.14).

Segue pela definição de φ que $C = 0$.

De fato.

$$\begin{aligned} C &= \left(\lambda+\frac{2n^2+1}{4n+2}\right)\left[(n+\lambda)^2+\frac{1}{2}+\lambda-\lambda^2\right]+\left(\frac{2n^2+1}{4n+2}\right)^2(1-2n)\\ &= n^2\lambda+\frac{\lambda}{2}+(2n^2+1)\left(-\frac{\lambda}{2}\right)\\ &= 0\end{aligned}$$

Assim, $\dfrac{dR(\tau;\varphi(\lambda),\lambda)}{d\lambda} = \dfrac{A\tau^2+B\tau}{(\varphi-\tau)^3}$, onde $A>0, \varphi>0$ e $B<0$.

Analisando quando $A\tau^2+B\tau$ é igual a zero, temos:

$$A\tau^2+B\tau = 0 \Leftrightarrow \tau_0 = \frac{-B}{A} \text{ ou } \tau_1 = 0. \tag{4.18}$$

Vamos dividir em dois casos, onde $\frac{-B}{A} \geq \varphi$ e $\varphi \geq \frac{-B}{A}$. Para isto, vamos fazer o estudo do sinal quando $\frac{-B}{A} \geq \varphi$ e quando $\varphi \geq \frac{-B}{A}$.

$$\begin{gathered}
-\frac{[(n+\lambda)^2-1-\lambda-\lambda^2-\varphi(4n+1+2\lambda)]}{2(n+\lambda)} \geq \varphi \\
\Rightarrow (4n+2\lambda+1)\varphi-\lambda^2+\lambda+1-(n+\lambda)^2 \geq 2\varphi(n+\lambda) \\
\Rightarrow -\lambda^2+\lambda+1-(n^2+2n\lambda+\lambda^2) \geq \left(\lambda+\frac{2n^2+1}{4n+2}\right)(-2n-1) \\
\Rightarrow -\lambda^2+\lambda+1-n^2-2n\lambda-\lambda^2+(2n+1)\lambda+\frac{2n^2+1}{2} \geq 0 \\
\Rightarrow -2\lambda^2+2\lambda+\tfrac{3}{2} \geq 0.
\end{gathered}$$

Assim,

$$\begin{gathered}
-2\lambda^2+2\lambda+\tfrac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{-2\pm 4}{-4} \\
-2\lambda^2+2\lambda+\tfrac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow \lambda = -\tfrac{1}{2} \text{ ou } \lambda = \tfrac{3}{2}.
\end{gathered}$$

Portanto, se $\frac{-B}{A} \geq \varphi$, então $\lambda \in \left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$ e se $\varphi \geq \frac{-B}{A}$, então $\lambda \geq \frac{3}{2}$.

Faremos o estudo do sinal de $\dfrac{dR}{d\lambda}$:

$$\frac{dR(\tau;\varphi(\lambda),\lambda)}{d\lambda} = \begin{cases} <0 \quad para \quad 0<\tau<\varphi(\lambda), \quad se \quad \lambda \in \left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right] \\[2ex] <0 \quad para \quad 0<\tau<\tau_0, \quad se \quad \lambda > \frac{3}{2} \\[2ex] >0 \quad para \quad \tau_0<\tau<\varphi(\lambda), \quad se \quad \lambda > \frac{3}{2}. \end{cases} \tag{4.19}$$

Seja $t_{n,k}(\lambda) = f_n(\lambda)x_{nk}(\lambda)$ um zero positivo de $U(t,\lambda)=0$ e $U(t;\lambda)$ solução de

$$\frac{d^2U(t)}{dt^2} + \widehat{A}(t;\lambda)U(t) = 0$$

com $U(0)=0$ ou $U'(0)=0$. Então, pelo Teorema 3.5, temos que $t_{n,k}(\lambda)$ é diferenciável.

Assim, o sinal de $\dfrac{dt_{n,k}(\lambda)}{d\lambda}$ é determinado por (3.23).

Seja,

$$\phi(t_{n,k}(\lambda)) = -\int_0^{t_{n,k}(\lambda)} \frac{dR(\lambda;\varphi(\lambda),t^2)}{d\lambda}\ [U(\lambda;t)]^2\ dt,$$

com $0<t_{n,k}(\lambda)<f_n(\lambda)$.

Note que $\phi(t_{n,k}(\lambda))$ é positiva, pois por (4.19), $\dfrac{dR(\tau;\varphi(\lambda),\lambda)}{d\lambda}$ é negativa se $\lambda \in \left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$ e $U^2(\lambda,t)>0$, para todo λ.

Concluímos que $\phi(t_{n,k}(\lambda))>0$ para $\lambda \in \left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right]$.

Para $\lambda > \frac{3}{2}$, $\phi(t_{n,k}(\lambda))$ também é positiva,pois, se $t_{n,k} \in (0,\sqrt{\tau_0})$, temos que

$$\frac{dR(\tau;\varphi(\lambda),\lambda)}{d\lambda} < 0,$$

então $\phi(t_{n,k}(\lambda)) > 0$ e crescente.

Se $t_{n,k}(\lambda) \in (\sqrt{\tau_0}, f_n(\lambda))$ então $\dfrac{dR(\tau;\varphi(\lambda),\lambda)}{d\lambda} > 0$ e portanto $\phi(t_{n,k}(\lambda))$ decresce.

Observe que para $t_{n,k} = \sqrt{\tau_0}$, $\phi(t_{n,k}(\lambda))$ atinge o seu máximo.

Portanto, $\phi(t_{n,k}(\lambda))$ é positiva com $t_{n,k}(\lambda) \in (0, f_n(\lambda))$.

Afirmação: A função $\phi(t_{n,k}(\lambda))$, definida acima, é positiva em $0 < c < f_n(\lambda)$ e $\phi(0) = \phi(f_n(\lambda)) = 0$.

Vamos mostrar que $\phi(0) = \phi(f_n(\lambda)) = 0$. Para isso, demonstraremos que

$$\int_0^{f_n(\lambda)} \frac{dR(\tau;\varphi(\lambda),\lambda)}{d\lambda} U^2(t,\lambda)dt = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\int_0^{f_n(\lambda)} \frac{dR(\tau;\varphi(\lambda),\lambda)}{d\lambda} U^2(t,\lambda)dt &= \int_0^1 \frac{A\varphi(\lambda)x^4 + Bx^2}{\varphi^2(\lambda)(1-x^2)^3}(1-x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}}[P_n^\lambda(x)]^2\, f_n(\lambda)\, dx \\
&= \int_0^1 \frac{A\varphi(\lambda)x^4 + Bx^2}{f_n^3(\lambda)(1-x^2)^3}(1-x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}}[P_n^\lambda(x)]^2\, dx = 0 \quad (4.20)
\end{aligned}$$

Seja $I_\nu = I_\nu(n,\lambda)$ definido por

$$I_\nu(n,\lambda) = \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\nu-\frac{1}{2}}[P_n^\lambda(x)]^2\ \ dx, \text{ com } \lambda > \nu - \frac{1}{2}, \text{ e } \nu \in \{0,1,2\}. \quad (4.21)$$

Se tomarmos $\nu = 0$, temos

$$\begin{aligned}
I_0(n,\lambda) &= \int_{-1}^1 (1-x^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}[P_n^\lambda(x)]^2\ \ dx \quad (4.22)\\
&= \langle P_n^\lambda, P_n^\lambda\rangle. \quad (4.23)
\end{aligned}$$

Substituindo (2.28) na igualdade acima, temos:

$$\begin{aligned}
I_0(n,\lambda) &= \left(\frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+\lambda+\frac{1}{2})}\right)^2 \langle P_n^{(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2})}(x), P_n^{(\lambda-\frac{1}{2},\lambda-\frac{1}{2})}(x)\rangle \\
&= \left(\frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+\lambda+\frac{1}{2})}\right)^2 \frac{2^{\lambda-1/2+\lambda-1/2+1}\ \Gamma(\lambda-1/2+n+1)\ \Gamma(\lambda-1/2+n+1)}{(2\lambda-1+2n+1)\ n!\ \Gamma(2\lambda-1+n+1)} \\
&= 2^{2\lambda}\left(\frac{\Gamma(\lambda+\frac{1}{2})\Gamma(n+2\lambda)}{\Gamma(2\lambda)\Gamma(n+\lambda+\frac{1}{2})}\right)^2 \frac{\Gamma(\lambda+1/2+n)\ \Gamma(\lambda+1/2+n)}{(2\lambda+2n)\ n!\ \Gamma(2\lambda+n)} \\
&= \frac{2^{2\lambda}}{n!}\ \frac{(\Gamma(\lambda+1/2))^2\ \Gamma(n+2\lambda)}{2(\lambda+n)(\Gamma(2\lambda))^2} \\
&= \frac{\Gamma(n+2\lambda)}{(\lambda+n)n!}\ \frac{2^{2\lambda-1}\ (\Gamma(n+1/2))^2}{(\Gamma(2\lambda))^2}. \quad (4.24)
\end{aligned}$$

Por uma propriedade da Função Gama, $\dfrac{\Gamma(x+1/2)}{\Gamma(2x)} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{2x-1}\ \Gamma(x)}$.

Concluímos que

$$\begin{aligned}
I_0(n,\lambda) &= 2^{2\lambda-1}\,\frac{\Gamma(n+2\lambda)}{(\lambda+n)n!}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2^{2\lambda-1}\ \Gamma(\lambda)}\right)^2 \\
&= \frac{2^{1-2\lambda}\ \Gamma(n+2\lambda)\ \pi}{n!(n+\lambda)\ \Gamma(\lambda)^2}. \quad (4.25)
\end{aligned}$$

Calcularemos $I_1(n,\lambda)$ e $I_2(n,\lambda)$.
Seja

$$I_\nu = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\lambda-\nu-(1/2)}[P_n(x)^\lambda]^2 dx \text{ e } I_{\nu-1} = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\lambda-\nu+(1/2)}[P_n(x)^\lambda]^2 dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
(2\lambda-2\nu+1)(I_\nu - I_{\nu-1}) &= (2\lambda-2\nu+1)\left(\int_{-1}^{1}(P_n(x)^\lambda)^2 \ [(1-x^2)^{\lambda-\nu-(1/2)} - (1-x^2)^{\lambda-\nu+(1/2)}]\right) dx \\
&= (2\lambda-2\nu+1)\int_{-1}^{1}(P_n(x)^\lambda)^2 \ \frac{(1-x^2)^\lambda}{(1-x^2)^\nu}\left(\frac{1}{(1-x^2)^{1/2}} - (1-x^2)^{1/2}\right) dx \\
&= (2\lambda-2\nu+1)\int_{-1}^{1}(P_n(x)^\lambda)^2 \ (1-x^2)^{\lambda-nu-(1/2)} \ x^2 \ dx \\
&= 2(\lambda-\nu-1/2)\int_{-1}^{1}(P_n(x)^\lambda)^2 \ (1-x^2)^{\lambda-\nu-(1/2)} \ x^2 \ dx \\
&= -\int_{-1}^{1}[(1-x^2)^{\lambda-\nu-(1/2)}]' \ x \ (P_n(x)^\lambda)^2 \ dx \\
&= 2(\lambda-\nu-1/2)\int_{-1}^{1}(P_n(x)^\lambda)^2 \ (1-x^2)^{\lambda-\nu-(1/2)} \ x^2 \ dx \\
&= -\int_{-1}^{1}[(1-x^2)^{\lambda-\nu+(1/2)}]' \ x \ (P_n(x)^\lambda)^2 \ dx.
\end{aligned}$$

Derivando por partes, onde $u = x(P_n^\lambda(x))^2$ e $dv = -[(1-x^2)^{\lambda-\nu+(1/2)}]' \ dx$, temos

$$= [-x(P_n^\lambda(x))^2(1-x^2)^{\lambda-\nu+(1/2)}]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-\nu+(1/2)} \ [(P_n^\lambda(x))^2 + 2xP_n^\lambda(x)(P_n^\lambda(x))']dx$$

$$= \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-\nu+(1/2)} \ ((P_n^\lambda(x))^2 dx + 2\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-\nu+(1/2)} \ x \ P_n^\lambda(x)(P_n^\lambda(x))' dx.$$

Portanto,

$$(2\lambda-2\nu+1)(I_\nu - I_{\nu-1}) = I_{\nu-1} + 2\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-\nu+(1/2)} \ x \ P_n^\lambda(x)(P_n^\lambda(x))' dx. \quad (4.26)$$

Como o polinômio $x[P_n^\lambda(x)]' = nx^n + ...$ é um polinômio de grau n, podemos escrevê-lo como combinação linear de $\{1, x, ..., x^{n-1}, P_n\}$ ou de $\{P_0, P_1, ..., P_n\}$. Então,

$$x[P_n^\lambda(x)]' = nP_n(x) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i x_i. \quad (4.27)$$

Substituindo (4.27) em (4.26) e tomando $\nu = 1$, temos

$$(2\lambda-1)(I_1 - I_0) = I_0 + 2\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-(1/2)} \ P_n^\lambda(x) \ \left(nP_n(x) + \sum_{i=0}^{n-1} c_i x_i\right) \ dx.$$

Observe que, pela relação de ortogonalidade,

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-(1/2)} \ P_n^\lambda(x) \ \left(\sum_{i=0}^{n-1} c_i x_i\right) \ dx = 0.$$

Então,

$$(2\lambda-1)(I_1-I_0) = I_0+2n\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-(1/2)}\ (P_n^\lambda(x))^2\,dx.$$

Por, (4.25),

$$\begin{aligned}(2\lambda-1)(I_1-I_0) &= I_0+2nI_0\\ (2\lambda-1)I_1 &= (2\lambda-1)I_0+I_0+2nI_0\\ (2\lambda-1)I_1 &= 2(\lambda-n)I_0 \text{ para } \lambda>-\frac{1}{2}.\end{aligned} \tag{4.28}$$

Sabemos que os Polinômios de Gegenbauer satisfazem a equação diferencial de segunda ordem (2.34). Se tomarmos $y=P_n^\lambda(x)$, temos:

$$(1-x^2)(P_n^\lambda(x))''-(2\lambda+1)x\ (P_n^\lambda(x))'+n(n+2\lambda)P_n^\lambda(x)=0.$$

Multiplicando a equação acima por $(1-x^2)^{\lambda-3/2}P_n^\lambda(x)$, obtemos

$$\begin{aligned}(1-x^2)(1-x^2)^{\lambda-3/2}P_n^\lambda(x)(P_n^\lambda(x))''-(2\lambda+1)\ (1-x^2)^{\lambda-3/2}\ x\ P_n^\lambda(x)\ (P_n^\lambda(x))'\\ +n(n+2\lambda)(1-x^2)^{\lambda-3/2}(P_n^\lambda(x))^2=0.\end{aligned}$$

Integrando em $[-1,1]$,temos

$$\begin{aligned}\textstyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)(1-x^2)^{\lambda-3/2}P_n^\lambda(x)(P_n^\lambda(x))''dx-\int_{-1}^{1}(2\lambda+1)\ (1-x^2)^{\lambda-3/2}\ x\ P_n^\lambda(x)\ (P_n^\lambda(x))'\,dx\\ +\textstyle\int_{-1}^{1}n(n+2\lambda)(1-x^2)^{\lambda-3/2}(P_n^\lambda(x))^2\,dx=0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2\lambda+1)\ \textstyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-3/2}\ x\ P_n^\lambda(x)\ (P_n^\lambda(x))'\,dx=\int_{-1}^{1}(1-x^2)(1-x^2)^{\lambda-3/2}P_n^\lambda(x)(P_n^\lambda(x))''dx\\ +\textstyle\int_{-1}^{1}n(n+2\lambda)(1-x^2)^{\lambda-3/2}(P_n^\lambda(x))^2\,dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2\lambda+1)\textstyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-3/2}\ x\ P_n^\lambda(x)\ (P_n^\lambda(x))'\,dx=n(n+2\lambda)I_1\\ +\textstyle\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-1/2}P_n^\lambda(x)(P_n^\lambda(x))''dx.\end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.3, temos

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-1/2}P_n^\lambda(x)(P_n^\lambda(x))''dx=0. \tag{4.29}$$

Então,

$$(2\lambda+1)\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-3/2}\ x\ P_n^\lambda(x)\ (P_n^\lambda(x))'\,dx=n(n+2\lambda)I_1. \tag{4.30}$$

De (4.26) para $\nu=2$, temos

$$\begin{aligned}(2\lambda-3)(I_2-I_1) &= I_1+2\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-3/2}\ x\ P_n^\lambda(x)\ (P_n^\lambda(x))'\,dx\\ \frac{2\lambda-3}{2}I_2-\frac{2\lambda-2}{2}I_1 &= \int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-3/2}\ x\ P_n^\lambda(x)\ (P_n^\lambda(x))'\,dx.\end{aligned} \tag{4.31}$$

Substituindo (4.31) em (4.30), obtemos

$$\begin{aligned}(2\lambda+1)\left[\frac{2\lambda-3}{2}\, I_2-(\lambda-1)\, I_1\right] &= (n^2+2n\lambda)\, I_1\\ \frac{(2\lambda+1)\,(2\lambda-3)}{2}\, I_2 &= I_1\,(n^2+2n\lambda+2\lambda^2-2\lambda+\lambda-1)\\ (\lambda+1/2)\,(\lambda-3/2)\, I_2 &= [(n+\lambda)^2+\lambda^2-\lambda-1]\, I_1. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Agora podemos calcular (4.20). Para isso vamos substituir A e B, como determinados em (4.15) e (4.16),

$$\int_0^1 \frac{A\varphi x^4+Bx^2}{(1-x^2)^3}(1-x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}}[P_n^\lambda(x)]^2\,dx = \int_0^1 \left\{\frac{2(n+\lambda)\varphi(\lambda)x^4-(4n+2\lambda+1)\varphi(\lambda)x^2}{(1-x^2)^3}\right.$$
$$\left.+\frac{\lambda^2x^2-\lambda^2x^2-x^2+(n+\lambda)^2x^2}{(1-x^2)^3}(1-x^2)^{\lambda+1/2}[P_n^\lambda(x)]^2\,dx\right\}$$

$$=\int_0^1\left[\frac{\varphi[2(n+\lambda)(1-x^2)^2+(1-2\lambda)(1-x^2)]}{(1-x^2)^3}\right.$$
$$\left.-\frac{[(n+\lambda)^2+\lambda^2-\lambda-1](1-x^2)}{(1-x^2)^3}+\frac{(2\lambda^2-2\lambda-3/2)}{(1-x^2)^3}\right](1-x^2)^{\lambda+1/2}[P_n^\lambda(x)]^2\,dx$$

$$=\varphi\int_0^1 2(n+\lambda)(1-x^2)^{\lambda-1/2}[P_n^\lambda(x)]^2\,dx+\varphi\int_0^1(2\lambda^2-2\lambda-3/2)(1-x^2)^{\lambda-3/2}[P_n^\lambda(x)]^2dx$$
$$-\int_0^1[(n+\lambda)^2+\lambda^2-\lambda-1](1-x^2)^{\lambda-3/2}[P_n^\lambda(x)]^2dx+\int_0^1(2\lambda^2-2\lambda-3/2)(1-x^2)^{\lambda-5/2}[P_n^\lambda(x)]^2dx.$$

Por (4.21), (4.28), (4.32), temos

$$\int_0^1 \frac{A\varphi x^4+Bx^2}{(1-x^2)^3}(1-x^2)^{\lambda+\frac{1}{2}}[P_n^\lambda(x)]^2\,dx = 2\varphi(n+\lambda)I_0+\varphi(1-2\lambda)I_1-[(n+\lambda)^2+\lambda^2-\lambda+1]I_1+$$
$$(2\lambda^2-2\lambda-3/2)I_2$$

$$=\varphi[2(n+\lambda)\,I_0+(1-2\lambda)\,I_1]-[(n+\lambda)^2+\lambda^2-\lambda-1]\,I_1+2\,I_2\,(\lambda+1/2)\,(\lambda-3/2)=0.$$

Concluímos assim que $\phi(0)=\phi(f(\lambda))=0$.

Portanto, $t_{n,k}(\lambda)=f_n(\lambda)x_{n,k}(\lambda)$ é uma função crescente de λ para $\lambda\in(-1/2,+\infty)$.

4.2 Prova do Teorema 4.2

Para provar o Teorema 4.2, utilizaremos o Corolário 3.3. Para isso precisamos encontrar uma função, cujos zeros são as quantidades (4.2), que satisfaz uma Equação Diferencial de Sturm Liouville da forma de (4.6).

Usamos a transformação

$$z=f_n(\lambda)x+\frac{d_n}{g_n}\Leftrightarrow x=\left(\frac{z}{f_n(\lambda)}-\frac{d_n}{g_n(\lambda)\,f_n(\lambda)}\right),$$

em (4.3), onde,

$$f_n(\lambda) = \sqrt{\lambda + \frac{2n^2+1}{4n+2}}, \tag{4.33}$$

$$\frac{d_n}{g_n(\lambda)} = \frac{\dfrac{3+2n}{2+4n}\left(\dfrac{n^2+3n+2}{1+2n}\right)^{3/2}}{\lambda + \dfrac{2n^2+1}{4n+2}}. \tag{4.34}$$

Dessa forma, a função

$$U_n(z;\lambda) = \left[1 - \left(\frac{z-(d_n/g_n(\lambda))}{f_n(\lambda)}\right)^2\right]^{\lambda/2+1/4} P_n^\lambda\left(\frac{z-(d_n/g_n(\lambda))}{f_n(\lambda)}\right) \tag{4.35}$$

é solução da Equação Diferencial de Sturm Liouville,

$$\frac{d^2}{dz^2}U(z;\lambda) + \widehat{\Lambda}_n(x;\lambda)U(z;\lambda) = 0 \tag{4.36}$$

com

$$\begin{aligned}\widetilde{\Lambda}_n(z;\lambda) &= \frac{(n+\lambda)^2}{f_n^2(\lambda)-(z-(d_n/g_n(\lambda)))^2} + \frac{(-\lambda^2+\lambda+1/2)f_n^2(\lambda)+(z-(d_n/g_n(\lambda)))^2/4}{(f_n^2(\lambda)-(z-(d_n/g_n(\lambda)))^2)^2}\\ &= f_n^{-2}(\lambda)\ \Lambda\left(\frac{z-(d_n/g_n(\lambda))}{f_n(\lambda)};\lambda\right).\end{aligned} \tag{4.37}$$

Observe que os zeros de $U(z;\lambda)$ são $z_{n,k}(\lambda) = f_n(\lambda)x_{n,k} + \dfrac{d_n}{g_n(\lambda)}$.

Para aplicar o Corolário 3.3, precisamos mostrar que:

1. Quando $z_k \longrightarrow (d_n/g_n(\lambda_k))$ e $z_j \longrightarrow (d_n/g_n(\lambda_j))$, tem-se
$$\lim U_n(z_j;\lambda_j)U_n'(z_k;\lambda_k) - \lim U_n(z_k;\lambda_k)U_n'(z_j;\lambda_j) = 0;$$
2. $\dfrac{\partial\widetilde{\Lambda}(z;\lambda)}{\partial\lambda} > 0$;
3. $\dfrac{\partial\widetilde{\Lambda}}{\partial z}(z;\lambda) = \dfrac{1}{f^3(\lambda)}\dfrac{\partial\Lambda(x;\lambda)}{\partial x} > 0$;
4. $f'(\lambda) > 0$;
5. $\left[\dfrac{d_n}{g_n(\lambda)}\right]' + f'(\lambda) < 0$.

Prova de 1

Derivando $U_n(z;\lambda)$ em relação a z, temos

$$\begin{aligned}U_n'(z;\lambda) = -2\left(\frac{\lambda}{2}+\frac{1}{4}\right)&\left[1-\left(\frac{z-(d_n/g_n(\lambda))}{f_n(\lambda)}\right)^2\right]^{\lambda/2-3/4}\left(\frac{z-(d_n/g_n(\lambda))}{f_n(\lambda)}\right)P_n^\lambda\left(\frac{z-(d_n/g_n(\lambda))}{f_n(\lambda)}\right)\\ &+\left[1-\left(\frac{z-(d_n/g_n(\lambda))}{f_n(\lambda)}\right)^2\right]^{\lambda/2+1/4}\frac{d}{dz}P_n^\lambda\left(\frac{z-(d_n/g_n(\lambda))}{f_n(\lambda)}\right)\end{aligned}$$

$$= \left[1 - \left(\frac{z - (d_n/g_n(\lambda))}{f_n(\lambda)}\right)^2\right]^{\lambda/2-3/4} \left[\left(1 - \left(\frac{z - (d_n/g_n(\lambda))}{f_n(\lambda)}\right)^2\right)\frac{d}{dz}P_n^{\lambda}\left(\frac{z - (d_n/g_n(\lambda))}{f_n(\lambda)}\right)\right.$$
$$\left. - 2\left(\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{z - (d_n/g_n(\lambda))}{f_n(\lambda)}\right)P_n^{\lambda}\left(\frac{z - (d_n/g_n(\lambda))}{f_n(\lambda)}\right)\right].$$

Assim,

$$U_n(z_j;\lambda_j)U_n'(z_k;\lambda_k) = \left[1 - \left(\frac{z_j - (d_n/g_n(\lambda_j))}{f_n(\lambda_j)}\right)^2\right]^{\lambda_j/2+1/4} P_n^{\lambda_j}\left(\frac{z_j - (d_n/g_n)(\lambda_j)}{f_n(\lambda_j)}\right)$$
$$\left\{\left[1 - \left(\frac{z_k - (d_n/g_n(\lambda_k))}{f_n(\lambda_k)}\right)^2\right]^{(\lambda_k/2)-3/4} \left[\left(1 - \left(\frac{z_k - (d_n/g_n(\lambda_k))}{f_n(\lambda_k)}\right)^2\right)\frac{d}{dz}P_n^{\lambda_k}\left(\frac{z_k - (d_n/g_n(\lambda_k))}{f_n(\lambda_k)}\right)\right.\right.$$
$$\left.\left. - 2\left(\frac{\lambda_k}{2} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{z_k - (d_n/g_n(\lambda_k))}{f_n(\lambda_k)}\right)P_n^{\lambda_k}\left(\frac{z_k - (d_n/g_n(\lambda_k))}{f_n(\lambda_k)}\right)\right]\right\}.$$

O limite quando $z_j \longrightarrow (d_n/g_n)(\lambda_j)$ e $z_k \longrightarrow (d_n/g_n(\lambda_k))$ é igual a zero. De fato:

$$\lim U_n(z_j;\lambda_j)U_n'(z_k;\lambda_k) = P_n^{\lambda_j}(0)\frac{d}{dz}\left[P_n^{\lambda_k}(z_k)\right]\Big|_{z_k=0} = 0.$$

Note que

$$\lim U_n(z_k;\lambda_k)U_n'(z_j;\lambda_j) = P_n^{\lambda_k}(0)\frac{d}{dz}\left[P_n^{\lambda_j}(z_j)\right]\Big|_{z_j=0} = 0,$$

quando $z_k \longrightarrow (d_n/g_n(\lambda_k))$ e $z_j \longrightarrow (d_n/g_n(\lambda_j))$.

Assim,

$$\lim U_n(z_j;\lambda_j)U_n'(z_k;\lambda_k) - \lim U_n(z_k;\lambda_k)U_n'(z_j;\lambda_j) = 0.$$

Prova de 2

Consideremos $f_n(\lambda) = f_n$, $(d_n/g_n(\lambda)) = (d_n/g_n)$ e $\dfrac{\partial(d_n/g_n(\lambda))}{\partial\lambda} = \dfrac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}$.

A derivada parcial de $\widetilde{\Lambda}(z;\lambda)$ em relação a λ será:

$$\frac{\partial\widetilde{\Lambda}(z;\lambda)}{\partial\lambda} = \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{(n+\lambda)^2}{(f_n^2 - (z - (d_n/g_n))^2)}\right] + \frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{(-\lambda^2 + \lambda + 1/2)f_n^2 + (z - (d_n/g_n))^2/4}{(f_n^2 - (z - (d_n/g_n))^2)^2}\right].$$

Para facilitar a compreensão, vamos dividir a derivada acima em duas partes:

Parte I

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{(n+\lambda)^2}{(f_n^2 - (z - (d_n/g_n))^2)}\right] = \frac{1}{(f_n^2 - (z - (d_n/g_n))^2)^2}\left\{2(n+\lambda)(f_n^2 - (z - (d_n/g_n))^2)\right.$$
$$\left. - 2(n+\lambda)^2 f_n f_n' - 2(n+\lambda)^2\left[2(z - (d_n/g_n))\left(-\frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}\right)\right]\right\}$$

$$= \frac{1}{(f_n^2 - (z - (d_n/g_n))^2)^2}\left\{2(n+\lambda)f_n^2 - 2(n+\lambda)(z - (d_n/g_n))^2\right.$$
$$\left. - 2(n+\lambda)^2 f_n f_n' + 4(n+\lambda)^2(z - (d_n/g_n))\left(\frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}\right)\right\}. \quad (4.38)$$

Parte II

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}\left[\frac{(-\lambda^2+\lambda+1/2)f_n^2+(z-(d_n/g_n))^2/4}{(f_n^2-(z-(d_n/g_n))^2)^2}\right]=\frac{1}{(f_n^2-(z-(d_n/g_n))^2)^4}\Bigg\{[(-2\lambda+1)f_n^2$$
$$+2(-\lambda^2+\lambda+1/2)f_nf_n'-\left[\frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}(z-(d_n/g_n))\right]/2](f_n^2-(z-(d_n/g_n))^2)^2$$
$$-2[(-\lambda^2+\lambda+1/2)f_n^2+(z-(d_n/g_n))^2/4][f_n^2-(z-(d_n/g_n))^2][2f_nf_n'+2\frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}(z-(d_n/g_n))]\Bigg\}. \tag{4.39}$$

Somando (4.38) e (4.39),

$$\frac{1}{(f_n^2-(z-(d_n/g_n))^2)^3}\Bigg\{2(f_n^2-(z-(d_n/g_n))^2)(n+\lambda)f_n^2$$
$$-2(f_n^2-(z-(d_n/g_n))^2)(n+\lambda)(z-(d_n/g_n))^2-2f_nf_n'(n+\lambda)^2(f_n^2-(z-(d_n/g_n))^2)$$
$$-2(n+\lambda)^2(z-(d_n/g_n))\left(f_n^2-(z-(d_n/g_n))^2\right)\frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}+(-2\lambda+1)f_n^2(f_n^2-(z-(d_n/g_n))^2)$$
$$+2f_nf_n'(-\lambda^2+\lambda+1/2)-\left(\frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}(z-q)(f_n^2-(z-(d_n/g_n))^2)\right)/2$$
$$-4\left(f_nf_n'+(z-(d_n/g_n))\frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}\right)[(-\lambda^2+\lambda+1/2)f_n^2+(z-(d_n/g_n))^2/4]\Bigg\}$$

Simplificando e agrupando termos semelhantes, temos

$$\frac{1}{(f_n^2-(z-(d_n/g_n))^2)^3}\Bigg\{2(n+\lambda)f_n^4-2(n+\lambda)f_n^2(z-(d_n/g_n))^2-2(n+\lambda)(z-(d_n/g_n))^2f_n^2$$
$$+2(n+\lambda)(z-(d_n/g_n))^4-2f_n^3f_n'(n+\lambda)^2+2f_nf_n'(n+\lambda)^2(z-(d_n/g_n))^2$$
$$-2(n+\lambda)^2f_n^2(z-(d_n/g_n))\frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}+2(n+\lambda)^2(z-(d_n/g_n))^3\frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}+(-2\lambda+1)f_n^4$$
$$-(-2\lambda+1)f_n^2(z-(d_n/g_n))^2+2f_n^3f_n'(-\lambda^2+\lambda+1/2)-2f_nf_n'(-\lambda^2+\lambda+1/2)(z-(d_n/g_n))^2$$
$$-\frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}(f_n^2(z-q))/2\frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}(z-(d_n/g_n))^3/2-4f_n^3f_n'(-\lambda^2+\lambda+1/2)-f_nf_n'(z-(d_n/g_n))^2$$
$$-4(-\lambda^2+\lambda+1/2)f_n^2(z-(d_n/g_n))\frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}-(z-(d_n/g_n))^3\frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}\Bigg\}. \tag{4.40}$$

Vamos escrever o numerador de (4.40) como:

$$\frac{A_n(z-(d_n/g_n))^4+B_n(z-(d_n/g_n))^3+C_n(z-(d_n/g_n))^2+D_n(z-(d_n/g_n))+E_n}{(f_n^2-(z-(d_n/g_n))^2)^3} \tag{4.41}$$

onde,

$$A_n=A_n(\lambda) = 2(n+\lambda); \tag{4.42}$$
$$B_n=B_n(\lambda) = \frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}(2(n+\lambda)^2-1/2); \tag{4.43}$$

$$\begin{aligned}C_n=C_n(\lambda) &= -4(n+\lambda)f_n^2+2f_nf_n'(n+\lambda)^2-(-2\lambda+1)f_n^2\\ &\quad -2f_nf_n'(-\lambda^2+\lambda+1/2)-f_nf_n';\end{aligned} \tag{4.44}$$

$$D_n = D_n(\lambda) \quad = \quad \frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda} f_n^2(-2(n+\lambda)^2 - 1/2 - 4f(-\lambda^2+\lambda+1/2)); \qquad (4.45)$$

$$E_n = E_n(\lambda) \quad = \quad 2(n+\lambda)f_n^4 - 2f_n^3 f_n'(n+\lambda)^2 + (-2\lambda+1)f_n^4 - 2f_n^3 f_n'(-\lambda^2+\lambda+1/2).$$

Vamos escolher f_n tal que anula E_n, isto é, de forma que $E_n = 0$

$$\begin{aligned} 2(n+\lambda)f_n^4 - 2f_n^3 f_n'(n+\lambda)^2 + (-2\lambda+1)f_n^4 - 2f_n^3 f_n'(-\lambda^2+\lambda+1/2) = 0 \Leftrightarrow \\ f_n^3((2n+1)f_n + f_n'(-2n-4n\lambda-2\lambda-1)) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow \quad (2n+1)f_n + f_n'(-2n-4n\lambda-2\lambda-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{f_n'}{f_n} = \frac{(2n+1)}{(2n+4n\lambda+2\lambda+1)} \\ &\Leftrightarrow \quad \int \frac{f_n'}{f_n} d\lambda = \int \frac{(2n+1)}{(2n+4n\lambda+2\lambda+1)} d\lambda \\ &\Leftrightarrow \quad ln|f_n| = ln|\sqrt{1+2n^2+(2+4n)\lambda}| \\ &\Leftrightarrow \quad f_n = \sqrt{2+4n}\sqrt{\lambda + \frac{1+2n^2}{2+4n}}. \end{aligned}$$

Tomando $f_n = \sqrt{\lambda + \dfrac{1+2n^2}{2+4n}}$ e substituindo em C_n e D_n, temos:

$$\begin{aligned} A_n &= 2(n+\lambda); && (4.46) \\ B_n &= \frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}(2(n+\lambda)^2 - 1/2); && (4.47) \\ C_n &= \frac{-3-8n-4n^3-6\lambda-12n\lambda-12n^2\lambda}{2+4n}; && (4.48) \\ D_n &= -\frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}\left[\lambda + \frac{1+2n^2}{4n+2}\right]\left[2(n^2+2n\lambda+\lambda^2) - 4\lambda^4 + 4\lambda + \frac{5}{2}\right] \\ &= -\frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}\left[\lambda + \frac{1+2n^2}{4n+2}\right]\frac{1}{2}\left[-4\lambda^2 + 8\lambda(n+1) + 4n^2 + 5\right] \\ &= 2\frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}\left[\lambda + f^2(0)\right](\lambda - \delta_+)(\lambda - \delta_-), && (4.49) \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} \delta_+ &= \frac{2(n+1) + \sqrt{8n^2+8n+9}}{2} && (4.50) \\ \delta_- &= \frac{2(n+1) - \sqrt{8n^2+8n+9}}{2}. && (4.51) \end{aligned}$$

Note que

- A_n é positivo;
- B_n é negativo.

De fato:

$$\frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda} = -\left[\left(\frac{3+2n}{2+4n}\right)\left(\frac{n^2+3n+2}{1+2n}\right)^{3/2}\right]\left(\lambda\frac{1+2n^2}{2+4n}\right)^{-2} < 0$$

$$\frac{1}{2} - 2(n+\lambda)^2 < -1,$$

para $n \geq 2$ e $\lambda > -1/2$.

- C_n é negativo para $n \geq 2$ e $\lambda > -1/2$;
- D_n é positivo no intervalo $\lambda \in (-1/2, 23/2]$. De fato:

Como já vimos, $\dfrac{\partial(d_n/g_n(\lambda))}{\partial\lambda} < 0$, portanto, $-\dfrac{\partial(d_n/g_n(\lambda))}{\partial\lambda} > 0$

Temos que $\lambda + f^2(0) > 0 \Leftrightarrow \lambda > -f^2(0)$. E como $f^2(0) > 0$, então $-f^2(0) < 0$.
Temos também que $-f^2(0) < -1/2$,

$$\begin{aligned} -f^2(0) < -1/2 \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{2n^2+1}{4n+2} < -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{2n^2+1}{4n+2} > \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad 4n^2 - 4n > 0 \\ &\Leftrightarrow \quad n > 1. \end{aligned}$$

Portanto, $-f^2(0) < -1/2$, para todo $n \geq 2$.

Basta estudarmos o sinal de $-4\lambda^2 + 8\lambda(n+1) + 4n^2 + 5$. Determinaremos o intervalo onde $-4\lambda^2 + 8\lambda(n+1) + 4n^2 + 5$ é positiva.

Observe que $\delta_- < 0$, para todo n e $\delta_- < -1/2$

$$\begin{aligned} \sqrt{8n^2+8n+9} &= \sqrt{4n^2+4n^2+8n+4n-4n+9} \\ &= \sqrt{(4n^2+12n+9)+4n(n-1)} \\ &= \sqrt{(2n+3)^2+4n(n-1)} > 2n+3. \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} -\sqrt{8n^2+8n+9} &< -2n-3 \\ 2n+2-\sqrt{8n^2+8n+9} &< -1 \\ \frac{2n+2-\sqrt{8n^2+8n+9}}{2} &< -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

δ_+ é crescente para $n \geq 2$, pois

$$\delta'_+(n) = 1 + \frac{2+4n}{\sqrt{9+8n+8n^2}} > 0. \tag{4.52}$$

Portanto, $\delta'_+(2) < \delta'_+(n)$, para todo $n \geq 2$ e $\delta'_+(2) = 23/2$.

Podemos concluir que $D_n(\lambda) > 0$, com $\lambda \in (-1/2, 23/2)$.

Sejam A_n, B_n, C_n e D_n dados por (4.46), (4.47), (4.48) e (4.49), respectivamente.

Vamos definir,

$$Q_n(z;\lambda) := A_n(\lambda)(z-(d_n/g_n))^3 + B_n(\lambda)(z-(d_n/g_n))^2 + C_n(\lambda)(z-(d_n/g_n)) + D_n(\lambda). \quad (4.53)$$

Pela Regra de Sinais de Descartes, $Q_n(z;\lambda)$ possui dois zeros reais no intervalo $((d_n/g_n(\lambda)), +\infty))$ ou nenhum zero neste intervalo, pois $Q_n(z;\lambda)$ tem duas mudanças de sinais se $\lambda \in (-1/2, 23/2)$.

Se tomarmos $z = (d_n/g_n)$ com $\lambda \in (-1/2, 23/2)$, temos que $Q_n((d_n/g_n);\lambda) = D_n > 0$.

Derivando $Q_n(z;\lambda)$ em relação a z, temos:

$$Q'_n(z;\lambda) = 3A_n(\lambda)(z-(d_n/g_n))^2 + 2B_n(\lambda)(z-(d_n/g_n)) + C_n(\lambda). \quad (4.54)$$

E $Q'_n(z;\lambda)$ possui um zero maior que $(d_n/g_n(\lambda))$ pois há uma mudança de sinal.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} Q_n((d_n/g_n(\lambda)) + f_n(\lambda);\lambda) &> 0 \quad (4.55)\\ Q'_n((d_n/g_n(\lambda)) + f_n(\lambda);\lambda) &< 0. \quad (4.56)\end{aligned}$$

Verificaremos que, de fato, (4.55) é positiva para algum intervalo.

$$Q_n((d_n/g_n(\lambda)) + f_n(\lambda);\lambda) = 2(\lambda+n)f_n^3 - \frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda} f_n^2 \Big[\frac{1}{2} - 2(n+\lambda)^2\Big]$$
$$- \frac{3+8n+4n^3+6\lambda+12n\lambda+12n^2\lambda}{2(1+2n)} f_n - f_n^2 \; \frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda} \; \frac{-4\lambda^2+8\lambda(n+1)+4n^2+5}{2}$$

$$= f_n\Bigg\{2(\lambda+n)f_n^2 - f_n\frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}\left[\frac{1}{2} - 2(n+\lambda)^2 + \frac{-4\lambda^2+8\lambda(n+1)+4n^2+5}{2}\right]$$
$$- \frac{3+8n+4n^3+6\lambda+12n\lambda+12n^2\lambda}{2(1+2n)}\Bigg\}.$$

Como $f_n(\lambda) > 0$ então para $Q_n((d_n/g_n(\lambda)) + f_n(\lambda);\lambda)$ ser maior que zero é necessário que

$$2(\lambda+n)f_n^2 - \frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda} f_n\left[\frac{1}{2} - 2(n+\lambda)^2 + \frac{-4\lambda^2+8\lambda(n+1)+4n^2+5}{2}\right]$$
$$- \frac{3+8n+4n^3+6\lambda+12n\lambda+12n^2\lambda}{2(1+2n)} > 0. \quad (4.57)$$

Basta determinar o intervalo que (4.57) é maior que zero:

$$
\begin{aligned}
-\,f_n\ \frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}&\left[\frac{1}{2}-2(n+\lambda)^2+\frac{-4\lambda^2+8\lambda(n+1)+4n^2+5}{2}\right]\\
&> \frac{3+8n+4n^3+6\lambda+12n\lambda+12n^2\lambda}{2(1+2n)}-2(\lambda+n)\lambda-2(\lambda+n)\frac{2n^2+1}{4n+2}
\end{aligned}
$$

$$
-\,f_n\ \frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}\left[\frac{-4\lambda^2+8\lambda(n+1)+4n^2+6-4(n+\lambda)^2}{2}\right] >
$$
$$
\frac{3+8n+4n^3+6\lambda+12n\lambda+12n^2\lambda-2(\lambda+n)(2n^2+1)-4(1+2n)(\lambda+n)\lambda}{2(1+2n)}
$$

$$
-\,f_n\ \frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}\left(\frac{-8\lambda^2+8\lambda+6}{2}\right) > \frac{1}{2}\left(\frac{3(2n+1)+4\lambda+8n\lambda-8n\lambda^2-4\lambda^2}{2n+1}\right)
$$

$$
-\,f_n\ \frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}\left(-4\lambda^2+4\lambda+3\right) > \frac{1}{2}\left(\frac{3(2n+1)+4\lambda(2n+1)-4\lambda^2(2n+1)}{2n+1}\right)
$$

$$
-\,f_n\ \frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}\left(-4\lambda^2+4\lambda+3\right) > \frac{1}{2}\left(3+4\lambda-4\lambda^2\right).
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}\ f_n &> \frac{1}{2}\\
\frac{d_n}{f_n^4}\ f_n &> \frac{1}{2}\\
d_n &> \frac{f_n^3}{2},
\end{aligned}
$$

para $\lambda\in(-1/2,3/2], n\geq 1$.

Determinaremos o intervalo que (4.56) é menor que zero.

$$
\begin{aligned}
Q_n'((d_n/g_n(\lambda))+f_n(\lambda);\lambda) &= 6(\lambda+n)f_n^2-2\frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}f_n\left(\frac{1}{2}-2(n+\lambda)^2\right)\\
&- \frac{3+8n+4n^3+6\lambda+2n\lambda+12n\lambda^2}{2+4n}.
\end{aligned}
$$

Temos que $Q_n'((d_n/g_n(\lambda))+f_n(\lambda);\lambda)<0$, se e somente se,

$$
6(\lambda+n)f_n^2-2f_n\ \frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}\left(\frac{1}{2}-2(n+\lambda)^2\right)-\frac{3+8n+4n^3+6\lambda+2n\lambda+12n\lambda^2}{2+4n}<0. \quad (4.58)
$$

Determinaremos as condições para que (4.58) seja válida.

$$\begin{aligned}
6(\lambda+n)f_n^2 - 2f_n \ \frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}\left(\frac{1}{2}-2(n+\lambda)^2\right) &< \frac{3+8n+4n^3+6\lambda+2n\lambda+12n\lambda^2}{2+4n} \\
-2f_n \ \frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}\left(\frac{1}{2}-2(n+\lambda)^2\right) &< \frac{3+8n+4n^3+6\lambda+2n\lambda+12n\lambda^2}{2+4n} \\
&- \ 6(\lambda+n)f_n^2 \\
-2f_n \ \frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}\left(\frac{1}{2}-2(n+\lambda)^2\right) &< \frac{3+8n+4n^3+6\lambda+2n\lambda+12n\lambda^2}{2+4n} \\
&- \ 6(\lambda+n)\left(\lambda+\frac{1+2n^2}{2+4n}\right) \\
-f_n\frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}(1-4(n+\lambda)^2) &< \frac{1}{2+4n}\Big\{3+8n+4n^3+6\lambda+2n\lambda+12n\lambda^2 \\
&- \ 6\lambda(\lambda+n)(2+4n)-6(\lambda+n)(1+2n^2)\Big\}
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
-f_n \ \frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda}(1-4n^2-8n\lambda-4\lambda^2) &< \frac{3+2n-8n^3-24n\lambda^2-12\lambda^2-24n^2\lambda}{2+4n} \\
f_n \ \frac{\partial(d_n/g_n)}{d\lambda} &< \frac{3+2n-8n^3-24n\lambda^2-12\lambda^2-24n^2\lambda}{(2+4n)(-1+4n^2+8n\lambda+4\lambda^2)} \\
-\frac{d_n}{f_n^4} \ f_n &< -\frac{-3-2n+8n^3+24n\lambda^2+12\lambda^2+24n^2\lambda}{(2+4n)(-1+4n^2+8n\lambda+4\lambda^2)} \\
d_n &> f_n^3\frac{-3-2n+8n^3+24n\lambda^2+12\lambda^2+24n^2\lambda}{(2+4n)(-1+4n^2+8n\lambda+4\lambda^2)} \\
d_n &> \frac{f_n^3}{2} \ \frac{-3-2n+8n^3+24n\lambda^2+12\lambda^2+24n^2\lambda}{(1+2n)(-1+4n^2+8n\lambda+4\lambda^2)}.
\end{aligned}$$

Definindo

$$\rho(\lambda)=\frac{-3-2n+8n^3+24n\lambda^2+12\lambda^2+24n^2\lambda}{(1+2n)(-1+4n^2+8n\lambda+4\lambda^2)}, \tag{4.59}$$

temos

$$d_n > \frac{f_n^3}{2}\,\rho(\lambda). \tag{4.60}$$

A função $\rho(\lambda)$ definida acima é uma função crescente para $\lambda > -1/2$. De fato:

Para mostrarmos que $\rho(\lambda)$ é crescente para $\lambda > -1/2$, mostraremos que $\rho'(\lambda) > 0$ para $\lambda > -1/2$.

$$\rho'(\lambda) = \frac{1}{(1+2n)(-1+4n^2+8n\lambda+4\lambda^2)^2} \{(24n^2+24\lambda+48\lambda n)(1+2n)(-1+4n^2+8n\lambda+4\lambda^2) - [-3+8n^3+24n^2\lambda+12\lambda^2+n(24\lambda^2-2)](1+2n)(8n+8\lambda)\}$$

$$= \frac{1}{(1+2n)(-1+4n^2+8n\lambda+4\lambda^2)^2} \{(24n^2+24\lambda+48\lambda n)(-1+4n^2+8n\lambda+4\lambda^2) - [-3+8n^3+24n^2\lambda+12\lambda^2+n(24\lambda^2-2)](8n+8\lambda)\}$$

$$= \frac{1}{(1+2n)(-1+4n^2+8n\lambda+4\lambda^2)^2} \{8[(3n^2+3\lambda+6n\lambda)(-1+4n^2+8n\lambda+4\lambda^2) - (-3n+8n^4+24n^3\lambda+12\lambda^2 n-2n^2+24n^2\lambda^2-3\lambda+8n^3\lambda+24n^2\lambda^2+12\lambda^3-2n\lambda+24n\lambda^3)]\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{8n(-n+4n^3+16n^2\lambda+12n\lambda^2+12n\lambda+12\lambda^2-4\lambda+3)}{(1+2n)(-1+4n^2+8n\lambda+4\lambda^2)^2} \\
&= \frac{8n[n\lambda(12\lambda-4)+\lambda(12\lambda-4)+3(n+1)+4n^2(1+n)+16n\lambda(1+n)-4n(1+n)]}{(1+2n)(-1+4n^2+8n\lambda+4\lambda^2)^2} \\
&= \frac{8n(n+1)[\lambda(12\lambda-4)+3+4n^2+16n\lambda-4n]}{(1+2n)(-1+4n^2+8n\lambda+4\lambda^2)^2} \\
&= \frac{8n(n+1)[12\lambda^2+4\lambda(4n-1)+(3+4n^2-4n)]}{(1+2n)(-1+4n^2+8n\lambda+4\lambda^2)^2}.
\end{aligned}$$

Observe que $\rho'(\lambda)=0$, se e somente se, $12\lambda^2+4\lambda(4n-1)+(3+4n^2-4n)=0$. Assim,

$$\begin{aligned}
12\lambda^2+4\lambda(4n-1)+(3+4n^2-4n)=0 \Longrightarrow \lambda &= \frac{-4(4n-1)\pm\sqrt{64n^2+64n-128}}{24} \\
\lambda &= \frac{(1-4n)\pm 2\sqrt{n^2+n-2}}{6}.
\end{aligned}$$

Temos que

- $\dfrac{(1-4n)\pm 2\sqrt{n^2+n-2}}{6} = -1/2$ quando $n=2$;

- $\dfrac{(1-4n)\pm 2\sqrt{n^2+n-2}}{6}$ é uma função decrescente. Derivando em relação a n, temos:

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{(1-4n)\pm 2\sqrt{n^2+n-2}}{6}\right) = \frac{1}{6}\left(-4\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+n-2}}\right).$$

Analisando o sinal da derivada acima:

$$\begin{aligned}
\left(-4\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+n-2}}\right) &= 0\\
\frac{2n+1}{\sqrt{n^2+n-2}} &= 4\\
\frac{(2n+1)^2}{n^2+n-2} &= 16\\
-12n^2-12n+33 &= 0.
\end{aligned}$$

Temos que $n = \dfrac{1 \pm 2\sqrt{3}}{-2}$. Assim a derivada será decrescente para $n \geq 2$.
Podemos concluir que a função $\rho(\lambda)$ é crescente para $\lambda > -1/2$.
Logo,

$$d_n \geq \left\{\frac{f_n^3}{2}, \frac{f_n^3}{2}\rho(\lambda); \lambda \in (-1/2, 3/2]\right\}.$$

Tomamos

$$\begin{aligned}
d_n &= \sup\left\{\frac{f_n^3}{2}, \frac{f_n^3}{2}\rho(\lambda); \lambda \in (-1/2, 3/2]\right\}\\
&= \rho(3/2)\left(\frac{n^2+1}{1+2n}+\frac{3}{2}\right)^{3/2}\frac{1}{2}\\
&= \frac{3+2n}{1+2n}\left(\frac{n^2+3n+2}{1+2n}\right)^{3/2}\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Assim as desigualdades (4.55) e (4.56) são satisfeitas para

$$d_n = \frac{3+2n}{1+2n}\left(\frac{n^2+3n+2}{1+2n}\right)^{3/2}\frac{1}{2},$$

com $\lambda \in (1/2, 3/2]$.
Como

$$\begin{aligned}
Q_n(d_n/g_n(\lambda);\lambda) &= D_n(\lambda) > 0\\
Q_n((d_n/g_n(\lambda)) + f_n(\lambda);\lambda) &\geq 0\\
Q_n'((d_n/g_n(\lambda)) + f_n(\lambda);\lambda) &\leq 0,
\end{aligned}$$

então o polinômio (4.53) não possui zeros no intervalo $(d_n/g_n(\lambda), (d_n/g_n(\lambda)) + f_n(\lambda))$.
Concluímos assim que

$$\frac{\partial \widetilde{\Lambda}(z;\lambda)}{\partial \lambda} > 0.$$

Prova de 3

Para mostrar que

$$\frac{\partial \widetilde{\Lambda}}{\partial z}(z;\lambda) > 0,$$

basta mostrar que $\dfrac{\partial \Lambda(x;\lambda)}{\partial x} > 0$, pois $\dfrac{1}{f^3(\lambda)} > 0$.

Derivando $\Lambda_n(x;\lambda)$ em relação a x, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Lambda_n(x;\lambda)}{\partial x} &= -\frac{(n+\lambda)^2(-2x)}{(1-x^2)^2} + \frac{(x/2)(1-x^2)^2 - (-\lambda^2+\lambda+1/2+x^2/4)(-4x)(1-x^2)}{(1-x^2)^4} \\
&= \frac{2x(1-x^2)^2(n+\lambda)^2 + (x/2)(1-x^2)^2 + 4x(-\lambda^2+\lambda+1/2+x^2/4)(1-x^2)}{(1-x^2)^4} \\
&= \frac{4x(1-x^2)(n+\lambda)^2 + x(1-x^2) + 8x(-\lambda^2+\lambda+1/2+x^2/4)}{2(1-x^2)^3} \\
&= \frac{(1-x^2)(4x(n+\lambda)^2 + x) + (-8x\lambda^2 + 8x\lambda + 4x + 2x^3)}{2(1-x^2)^3} \\
&= \frac{-x^3[4(n+\lambda)^2+1] + x[4(n+\lambda)^2+1] - 8x\lambda^2 + 8x\lambda + 4x + 2x^3}{2(1-x^2)^3} \\
&= \frac{-x^3[4(n+\lambda)^2-1] + x[4(n+\lambda)^2 - 8\lambda^2 + 8\lambda + 5]}{2(1-x^2)^3} \\
&= \frac{-x\{x^2[4(n+\lambda)^2-1] - [4(n+\lambda)^2 - 8\lambda^2 + 8\lambda + 5]\}}{2(1-x^2)^3} \\
&= \frac{-x\{x^2[4(n+\lambda)^2-1] - [4(n^2+2n\lambda+\lambda^2) - 8\lambda^2 + 8\lambda + 5]\}}{2(1-x^2)^3} \\
&= \frac{-x\{x^2[4(n+\lambda)^2-1] - [4n^2+8n\lambda+4\lambda^2 - 8\lambda^2 + 8\lambda + 5]\}}{2(1-x^2)^3} \\
&= \frac{-x\{x^2[4(n+\lambda)^2-1] - 4n^2 - 8n\lambda + 4\lambda^2 - 8\lambda - 5\}}{2(1-x^2)^3}.
\end{aligned}$$

Temos que $\dfrac{\partial \Lambda_n(x;\lambda)}{\partial x} \geq 0$, se e somente se, $x^2[4(n+\lambda)^2-1] - 4n^2 - 8n\lambda + 4\lambda^2 - 8\lambda - 5 \leq 0$ para $x \in (0,1)$, pois, $\dfrac{-x}{2(1-x^2)^3} < 0$, $\forall x \in (0,1)$.

- $[4(n+\lambda)^2-1] > 0$. De fato.
  Como $n \geq 2$ e $\lambda \in (-1/2, 3/2)$,
$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2} < \lambda \leq \frac{3}{2} &\Rightarrow -2 < 4\lambda \leq 6 \\
&\Rightarrow 4n-2 < 4n+4\lambda \leq 4n+6 \\
&\Rightarrow 4n-3 < 4n+4\lambda-1 \leq 4n+5 \\
&\Rightarrow 4(n+\lambda)-1 \geq 4n-3 > 0.
\end{aligned}$$

- Analisando o sinal de $x^2[4(n+\lambda)^2-1] - 4n^2 - 8n\lambda + 4\lambda^2 - 8\lambda - 5$ com relação a n, temos:
$$x = \pm\sqrt{\frac{5+4n^2+8n\lambda-4\lambda^2}{4(n+\lambda)^2-1}}.$$
  Como $x \in (0,1)$, então $x = \sqrt{\dfrac{5+4n^2+8n\lambda-4\lambda^2}{4(n+\lambda)^2-1}} \geq 1 \iff \lambda \in (-1/2, 3/2]$. De fato:
$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{5+4n^2+8n\lambda-4\lambda^2}{4(n+\lambda)^2-1}} &\geq 1 \\
5+4n^2+8n\lambda-4\lambda^2 &\geq 4(n+\lambda)^2-1 \\
-8\lambda^2+8\lambda+6 &\geq 0 \\
-4\lambda^2+4\lambda+3 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Analisando o sinal da inequação acima, temos:

$$\lambda = \frac{-4 \pm 8}{-8} \Longrightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2} \text{ e } \lambda_2 = \frac{3}{2}.$$

Portanto, $x^2[4(n+\lambda)^2 - 1] - 4n^2 - 8n\lambda + 4\lambda^2 - 8\lambda - 5 < 0$ para $\lambda \in (-1/2, 3/2)$.
Concluímos, assim, que $\dfrac{d\Lambda_n(x;\lambda)}{dx} \geq 0$, para $\lambda \in (-1/2, 3/2)$.
Portanto, $\Lambda_n(x;\lambda)$ é crescente para $x \in (0,1)$.

Prova de 4

Seja

$$f_n(\lambda) = \sqrt{\lambda + \frac{2n^2+1}{4n+2}}, \tag{4.61}$$

com $\lambda \in (-1/2, 3/2]$.

Derivando f_n com relação a λ, temos:

$$f_n'(\lambda) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\lambda + \frac{2n^2+1}{4n+2}}\right)^{-1} > 0.$$

Prova de 5

Sejam $f_n =$ e $(d_n/g_n(\lambda))$ definidos no Teorema 4.2.
Se derivarmos $f_n(\lambda) + (d_n/g_n(\lambda))$ em relação a λ, temos:

$$\frac{d(f_n(\lambda) + (d_n/q_n(\lambda)))}{d\lambda} = \frac{1}{2\sqrt{\lambda + \dfrac{2n^2+1}{4n+2}}} - \frac{(3+2n)(4n+2)}{[\lambda(4n+2) + (1+2n^2)]^2}\left(\frac{n^2+3n+2}{1+2n}\right)^{3/2}. \tag{4.62}$$

Queremos determinar condições para que $\dfrac{d(f_n(\lambda) + (d_n/q_n(\lambda))}{d\lambda}$ seja igual a zero. Assim, desenvolveremos a equação (4.62).

$$\begin{aligned}\frac{d(f_n(\lambda) + (d_n/q_n(\lambda))}{d\lambda} &= \frac{\sqrt{2+4n}}{2\sqrt{\lambda(4n+2) + (2n^2+1)}} - \frac{2(3+2n)(n^2+2n+2)^{3/2}}{2[\lambda(4n+2) + (1+2n^2)]^2\sqrt{2n+1}} \\ &= \frac{\sqrt{(4n+2)(2n+1)}[\lambda(4n+2) + (1+2n^2)]^{3/2} - 4(3+2n)(n^2+2n+2)^{3/2}}{2[\lambda(4n+2) + (1+2n^2)]^2\sqrt{2n+1}}.\end{aligned} \tag{4.63}$$

Temos que

$$\frac{d(f_n(\lambda) + (d_n/q_n(\lambda))}{d\lambda} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4n+2}\sqrt{2n+1}[\lambda(4n+2) + (1+2n^2)]^{3/2} - 4(3+2n)(n^2+2n+2)^{3/2} = 0.$$

Analisaremos a equação à direita:

$$\sqrt{4n+2}\sqrt{2n+1}[\lambda(4n+2)+(1+2n^2)]^{3/2}-4(3+2n)(n^2+2n+2)^{3/2}=0$$

$$(4n+2)(2n+1)[\lambda(4n+2)+(1+2n^2)]^3=16(3+2n)^2(n^2+2n+2)^3$$

$$2(2n+1)^2[\lambda(4n+2)+(1+2n^2)]^3=16(3+2n)^2(n^2+2n+2)^3$$

$$(2n+1)^2[8\lambda^3(2n+1)^3+12\lambda^2(2n+1)^2(1+2n^2)+6\lambda(2n+1)(1+2n^2)^2+(1+2n^2)^3]= \\ 8(3+2n)^2(n^2+2n+2)^3$$

$$8\lambda^3(2n+1)^5+12\lambda^2(2n+1)^4(1+2n^2)+6\lambda(2n+1)^3(1+2n^2)^2+(1+2n^2)^3(1+2n)^2= \\ =8(3+2n)^2(n^2+2n+2)^3. \tag{4.64}$$

Dividindo (4.64) por $(1-2n)^5$, temos

$$8\lambda^3+12\lambda^2\frac{(1+2n^2)}{(2n+1)}+12\lambda^2\frac{(1+2n^2)}{(2n+1)}+6\lambda\frac{(1+2n^2)^2}{(2n+1)^2}+\frac{(1+2n^2)^3}{(1+2n)^3}=\frac{8(3+2n)^2(n^2+2n+2)^3}{(1+2n)^5}$$

$$(8\lambda^3+12\lambda^2-12\lambda^2+6\lambda-6\lambda+1-1)+12\lambda^2\frac{(1+2n^2)}{(2n+1)}+6\lambda\frac{(1+2n^2)^2}{(2n+1)^2}+\frac{(1+2n^2)^3}{(1+2n)^3} \\ =\frac{8(3+2n)^2(n^2+2n+2)^3}{(1+2n)^5}$$

$$(2\lambda+1)^3+(-12\lambda^2-6\lambda-1)+12\lambda^2\frac{(1+2n^2)}{(2n+1)}+6\lambda\frac{(1+2n^2)^2}{(2n+1)^2}+\frac{(1+2n^2)^3}{(1+2n)^3} \\ =\frac{8(3+2n)^2(n^2+2n+2)^3}{(1+2n)^5}$$

$$(2\lambda+1)^3+12\lambda^3\frac{[1+2n^2-(1+2n)]}{1+2n}+6\lambda\frac{(1+2n^2)^2-(2n+1)^2}{(2n+1)^2}+\frac{(1+2n^2)^3-(1+2n)^3}{(1+2n)^3} \\ =\frac{8(3+2n)^2(n^2+2n+2)^3}{(1+2n)^5}$$

$$(2\lambda+1)^3+12\lambda^3\frac{2n^2-2n}{1+2n}+6\lambda\frac{4n^4-4n}{(2n+1)^2}+\frac{8n^6-8n^3+12n^4-6n^2-6n}{(1+2n)^3} \\ =\frac{8(3+2n)^2(n^2+2n+2)^3}{(1+2n)^5}.$$

Somando e subtraindo a equação acima por $4\lambda\left(\frac{3(2n^2-2n)}{1+2n}\right)$ e $\frac{3(2n^2-2n)}{1+2n}$, temos

$$(2\lambda+1)^3+12\lambda^3\frac{2n^2-2n}{1+2n}+6\lambda\frac{4n^4-4n}{(2n+1)^2}+\frac{8n^6-8n^3+12n^4-6n^2-6n}{(1+2n)^3}+4\lambda\left(\frac{3(2n^2-2n)}{1+2n}\right)$$
$$-4\lambda\left(\frac{3(2n^2-2n)}{1+2n}\right)+\frac{3(2n^2-2n)}{1+2n}-\frac{3(2n^2-2n)}{1+2n}=\frac{8(3+2n)^2(n^2+2n+2)^3}{(1+2n)^5}$$

$$(2\lambda+1)^3+6\left(\frac{n^2-n}{1+2n}\right)(4\lambda^2+4\lambda+1)+2\lambda\left(\frac{12n^4-12n-6(2n^2-2n)(1+2n)}{(1+2n)^2}\right)$$
$$+\frac{8n^6-8n^3+12n^4-6n^2-6n}{(1+2n)^3}-\frac{3(2n^2-2n)}{1+2n}=\frac{8(3+2n)^2(n^2+2n+2)^3}{(1+2n)^5}$$

$$(2\lambda+1)^3+6\left(\frac{n^2-n}{1+2n}\right)(2\lambda+1)^2+2\lambda\left(\frac{12(n^4+n^2-2n^3)}{(1+2n)^2}\right)+\frac{8n^6-8n^3+12n^4-6n^2-6n}{(1+2n)^3}$$
$$-\frac{3(2n^2-2n)}{1+2n}=\frac{8(3+2n)^2(n^2+2n+2)^3}{(1+2n)^5}.$$

Somando e subtraindo $\frac{12(n^4+n^2-2n^3)}{(1+2n)^2}$, na equação acima, temos

$$(2\lambda+1)^3+6\left(\frac{n^2-n}{1+2n}\right)(2\lambda+1)^2+2\lambda\left(\frac{12(n^4+n^2-2n^3)}{(1+2n)^2}\right)+\frac{8n^6-8n^3+12n^4-6n^2-6n}{(1+2n)^3}$$
$$-\frac{3(2n^2-2n)}{1+2n}+\frac{12(n^4+n^2-2n^3)}{(1+2n)^2}-\frac{12(n^4+n^2-2n^3)}{(1+2n)^2}=\frac{8(3+2n)^2(n^2+2n+2)^3}{(1+2n)^5}$$

$$(2\lambda+1)^3+6\left(\frac{n^2-n}{1+2n}\right)(2\lambda+1)^2+\left(\frac{12(n^4+n^2-2n^3)}{(1+2n)^2}\right)(2\lambda+1)+\frac{8n^6-8n^3+12n^4-6n^2-6n}{(1+2n)^3}$$
$$-\frac{3(2n^2-2n)}{1+2n}-\frac{12(n^4+n^2-2n^3)}{(1+2n)^2}=\frac{8(3+2n)^2(n^2+2n+2)^3}{(1+2n)^5}$$

$$(2\lambda+1)^3+6\left(\frac{n^2-n}{1+2n}\right)(2\lambda+1)^2+\left(\frac{12(n^4+n^2-2n^3)}{(1+2n)^2}\right)(2\lambda+1)+\frac{8n^6-24n^5+24n^4-8n^3}{(1+2n)^3}$$
$$=\frac{8(3+2n)^2(n^2+2n+2)^3}{(1+2n)^5}$$

$$8(\lambda+1/2)^3+6\cdot4\left(\frac{n^2-n}{1+2n}\right)(\lambda+1/2)^2+2\left(\frac{12(n^4+n^2-2n^3)}{(1+2n)^2}\right)(\lambda+1/2)+8\left(\frac{n^6-3n^5+3n^4-n^3}{(1+2n)^3}\right)$$
$$=\frac{8(3+2n)^2(n^2+2n+2)^3}{(1+2n)^5}$$

$$(\lambda+1/2)^3+3\left(\frac{n^2-n}{1+2n}\right)(\lambda+1/2)^2+3\left(\frac{(n^2-n)^2}{(1+2n)^2}\right)(\lambda+1/2)+\left(\frac{(n^2-n)^3}{(1+2n)^3}\right)$$
$$-\frac{(3+2n)^2(n^2+2n+2)^3}{(1+2n)^5}=0.$$

Tomando,

$$\begin{aligned}\alpha_1(n) &= 1;\\ \alpha_2(n) &= 3\left(\frac{n^2-n}{1+2n}\right);\\ \alpha_3(n) &= 3\frac{(n^2-n)^2}{(1+2n)^2};\\ \alpha_4(n) &= \frac{(n^2-n)^3}{(1+2n)^3}-\frac{(3+2n)^2(n^2+2n+2)^3}{(1+2n)^5}.\end{aligned}$$

Observando que α_1,α_2 e α_3 são termos positivos. Assim para que

$$\alpha_1(n)(\lambda+1/2)^3+\alpha_2(n)(\lambda+1/2)^2+\alpha_3(n)(\lambda+1/2)+\alpha_4(n)=0, \tag{4.65}$$

temos que $\alpha_4(n)<0$.

De fato $\alpha_4(n)<0$:

$$\frac{(n^2-n)^3}{(1+2n)^3}-\frac{(3+2n)^2(n^2+2n+2)^3}{(1+2n)^5}<0 \Leftrightarrow (n^2-n)^3(1+2n)^2<(3+2n)^2(n^2+2n+2)^3.$$

Simplificando, temos:

$$-44n^7-152n^6-393n^5-691n^4-817n^3-644n^2-312n-72<0,\ \forall n.$$

Portanto, pela Regra de Sinal de Descartes, temos que (4.65) tem uma mudança de sinal, isto é, (4.65) possui apenas um zero real maior que $-1/2$. Basta mostrarmos agora que no intervalo $(3/2,9/2)$, (4.65) muda de sinal.

Fazendo $\lambda=3/2$ em (4.63), temos:

$$\frac{(\alpha_1(n)(3/2+1/2)^3+\alpha_2(n)(3/2+1/2)^2+\alpha_3(n)(3/2+1/2)+\alpha_4(n))}{(2[3/2(4n+2)+(1+2n^2)]^2\sqrt{2n+1})}=$$
$$-\frac{8(n+1)^4(n+2)^3}{(2n+1)^5\sqrt{(2n+1)}(3(4n+1)+(1+2n^2)^2}<0.$$

Fazendo $\lambda=9/2$ em (4.63), temos

$$\frac{(\alpha_1(n)(9/2+1/2)^3+\alpha_2(n)(9/2+1/2)^2+\alpha_3(n)(9/2+1/2)+\alpha_4(n))}{(2[9/2(4n+2)+(1+2n^2)]^2\sqrt{2n+1})}=$$
$$\frac{64n^7+892n^6+4326n^5+8097n^4+7356n^3+3432n^2+755n+53}{(2n+1)^5\sqrt{(2n+1)}(9(4n+1)+(1+2n^2)^2}>0.$$

Como $\frac{d}{d\lambda}(f_n(\lambda)+(d_n/g_n(\lambda))$ muda de sinal em $(3/2,9/2)$ e (4.65) possui somente um zero maior que $-1/2$, então podemos concluir que$f_n(\lambda)+(d_n/g_n(\lambda))$possui apenas um ponto crítico em $(3/2,9/2)$ e decrescente em $(-1/2,3/2)$.

Portanto, as hipóteses do Corolário 3.3 são satisfeitas.

Assim concluímos que os zeros $z_{n,k}=x_{n,k}f_n(\lambda)+d_n/g_n(\lambda)$ são decrescentes para $\lambda\in(-1/2,3/2]$.

Referências Bibliográficas

[1] AHMED S., MULDOON M. E., SPIGLER R. , *Inequalities and numerical bounds for zeros of ultraspherical polynomials*, SIAM J. Math. Anal., 17(4):1000-1007,1986.

[2] DIMITROV D.K. , *On a conjecture concerning monotocity of zeros of ultraspherical polynomials.*,J. Approx Theory,85(1):88-97,1998

[3] ELBERT A., LAFORGIA A., *Asymptotic formulas for ultraspherical polynomials*$P_n^\lambda(x)$ *and their zeros for large volues of* λ, Proc. Amer. Math. Soc., 114(2):371-377,1992

[4] IFANTIS E. K., SIAFARIKAS P. D., *Differential inequalities on the greatest zero of Laguerre and ultraspherical polynomials*, Actas del VI Simposium sobre Polinomios Ortogonales y Aplicaciones, Gijon,97:187-197,1989.

[5] DE ANDRADE E. X. L., BRACCIALI C. F. E RAFAELI, F. R. , *Introdução aos Polinômios Ortogonais*, SBMAC, 2012.

[6] ISMAIL M. E. H., *Monotonicity of zeros of ultraspherical polynomials*, Orthogonal Polynomials and Their Applications, Lecture Notes in Mathematics, Springer- Verlag, Berlin, 1329:329-330, 1988

[7] ELBERT A., SIAFARIKAS, P. D. , *Monotonicity Properties of the Zeros of Ultraspherical Polynomials*, J. Approx Theory 97 (1999), 31-39

[8] LAFORGIA, A., *Monotonicity propertiens for the zeros of ortogonal polynomials and Bessel functions* , Orthogonal polynomials and applications (Bar-le-Duc,1984), volume 1171 de Lecture Notes in Math, pages 267-277. Springer, Berlin, 1985.

[9] LUN, C. Y. , *O Teorema de Comparação de Sturm e Aplicações*, Tese Unicamp, 2013.

[10] RAFAELI, F. R. , *Teorema de Sturm e Zeros de Polinômios Ortogonais*, Dissertação UNESP, 2007.

[11] RAFAELI, F. R. , *Zeros de Polinômios Ortogonais na Reta Real*, Tese Unicamp, 2010.

[12] Szegő, G. , *Orthogonal Polynomials*, vol 23. Amer. Math. Soc., 1975.