KARINE DE ALMEIDA SANTOS

# Teoria da Média para Equações Diferenciais Ordinárias e Algumas Aplicações em Mecânica Clássica

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2016

**KARINE DE ALMEIDA SANTOS**

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

**Área de Concentração:** Matemática.
**Linha de Pesquisa:** Equações Diferenciais Ordinárias.

**Orientador:** Prof. Dr. Márcio José Horta Dantas.

**UBERLÂNDIA - MG**
**2016**

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CPI)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil

S237t 2016

Santos, Karine de Almeida, 1988 -
Teoria da Média para Equações Diferenciais Ordinárias e Algumas Aplicações em Mecânica Celeste / Karine de Almeida Santos. - 2016.
77 f. : il.

Orientador: Márcio José Horta Dantas.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Inclui bibliografia.

1. Matemática - Teses. 2. Equações Diferenciais Ordinárias - Teses. 3. Método da Média - Teses. 4. Estabilidade - Teses. I. Dantas, Márcio José Horta. II. Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

**Universidade Federal de Uberlândia**
**Faculdade de Matemática**
**Programa de Pós-Graduação em Matemática**
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

**ALUNO(A):** Karine de Almeida Santos.

**NÚMERO DE MATRÍCULA:** 11412MAT010.

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO:** Matemática.

**LINHA DE PESQUISA:** Equações Diferenciais Ordinárias.

**PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA:** Nível Mestrado.

**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:** Teoria da Média para Equações Diferenciais Ordinárias e Algumas Aplicações em Mecânica Clássica.

**ORIENTADOR:** Prof. Dr. Márcio José Horta Dantas.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala 300 do Bloco 3P (Reitoria) do Campus Santa Mônica, em 17 de fevereiro de 2016, às 10h 00min, pela seguinte Banca Examinadora:

| NOME | ASSINATURA |
|---|---|
| Prof. Dr. Márcio José Horta Dantas<br>UFU - Universidade Federal de Uberlândia | |
| Prof. Dr. Cláudio Gomes Pessoa<br>UNESP - São José do Rio Preto | |
| Prof. Dr. Marcus Augusto Bronzi<br>UFU - Universidade Federal de Uberlândia | |

Uberlândia-MG, 17 de fevereiro de 2016.

# Dedicatória

Aos meus amados pais: Ilda e Leontino (*in memoriam*).

# Agradecimentos

A Deus, principalmente, por: me conduzir com saúde, força e proteção, pelas constantes formas de aprendizado, pelo dom da música e pelas boas pessoas que cruzam meu caminho.

Ao meu pai pelo amor, carinho e por deixar lembranças de sua alegria, boa conduta, generosidade e humildade.

A minha mãe pelo amor, carinho, pelos bons valores transmitidos, por acreditar em mim, incentivar e ajudar continuamente em todos os momentos, pelo aconchego do seu colo, sacrifícios, paciência, compreensão, conselhos e constantes orações. Por tantas outras coisas pequenas e grandiosas que só as mães fazem.

As minhas avós que sempre transmitiram amor, carinho, cuidado, bons valores e por suas preciosas orações.

Aos meus irmãos Leonardo e Wesley pelo amor, cuidado, carinho, torcida, compreensão e por me dar a segurança necessária para estar longe.

Ao afilhadinho Gabriel que alegra com sua chegada nesta reta final.

A presença, torcida e carinho das minhas madrinhas, em especial, aos padrinhos Nedina e Gentil, por além disso, incentivar e me acolherem em sua casa no início de dessa jornada.

A meus tios e tias, em especial, Mágda, Santa e Marília pela constante presença, ajuda, torcida e carinho.

Aos primos e primas pelo pensamento positivo, incentivo e por me acolherem com carinho, em especial, a minha prima Elizete, pelo forte incentivo, orientações, carinho, descontração e presença. A Elisangela e as primas Lilian, Elaine, Edivane, Thainara, Fernanda e Eliana por estarem sempre carinhosamente presentes, torcendo, alegrando e incentivando.

Aos amigos e amigas que estão sempre torcendo, em especial, Nívea, Eloiso, Mislene, Serginei, Daniela, Última, Luiz, Elizabete, Kelly e Gisele G. pela irmandade que supera ausência e distância, pelos bons papos, risadas, apoio, torcida e por ajudar, cada um a seu modo nas diversas etapas desta caminhada.

Ao meu namorado Leodan pelo carinho, alegria, cuidado e constante incentivo.

As pessoas que aqui em Uberlândia encontrei. A começar por Isabel e sua família por me acolherem com carinho e confiança, minha gratidão. A Murilo, Eduard, Nathali, Renato e Paula por me acolherem e incentivarem. A Kelly, Eli, Rafaela, Ana, Jennifer, Davidson, Danilo, Rodrigo, Simone e Letícia pelos vários momentos de alegria, companhia, aprendizado, união e apoio nesta caminhada.

Aos meus professores da UFV, em especial, ao Diogo, Catarina e Rogério pelos conselhos, oportunidades e incentivo dados na graduação para que eu prosseguisse estudando. Aos professores da UFU pelo aprendizado proporcionado, em especial, ao professor Márcio, por aceitar e conduzir este trabalho com paciência, empenho, flexibilidade e por contribuir em meu crescimento acadêmico. Aos membros da banca por contribuirem com a melhoria deste trabalho.

A todos que, de alguma forma, me ajudaram nesta caminhada.

A CAPES pelo apoio financeiro que nos permite a dedicação necessária.

Santos, K. A. *Teoria da Média Para Equações Diferenciais Ordinárias e Algumas Aplicações em Mecânica Clássica.* 2016. 77p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

## Resumo

O principal objetivo desta dissertação é estabelecer resultados básicos da Teoria da Média para Equações Diferenciais Ordinárias e aplicá-los em alguns problemas de Mecânica Clássica. Estudaremos dois problemas de mecânica. O primeiro versa sobre existência e estabilidade de soluções periódicas no pêndulo com dissipação. O segundo consiste em estudar a existência de soluções periódicas do problema lunar de Hill regularizado proveniente da Mecânica Celeste.

*Palavras-chave*: Equações Diferenciais Ordinárias, Método da Média e estabilidade.

Santos, K. A. *Averaging Theory For Ordinary Differential Equations And Some Applications in Classical Mechanics.* 2016. 77 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

**Abstract**

The main objective of this dissertation is to establish the basic results of the Averaging Theory for Ordinary Differential Equations and used them in some problems of Classical Mechanics. Two mechanical problems are given here. The first one is about the existence and stability of periodic solutions in the mathematical pendulum with dissipation. The second one is about the existence of periodic solutions of regularized Hill lunar problem with comes from Celestial Mechanics.

*Keywords*: Ordinary Differential Equations, Method of Average and estability.

# Sumário

**Resumo** vii

**Abstract** viii

**Introdução** 1

**1 Teoria Preliminar** 2

1.1 Tópicos preliminares de Análise . . . 2

1.1.1 Estabilidade de operadores lineares hiperbólicos . . . 6

1.1.2 Teorema da Função Implícita Global: um caso elementar . . . 14

1.2 Tópicos preliminares de Equações Diferenciais Ordinárias . . . 15

1.2.1 Um teorema de redução . . . 21

**2 Teoria da Média** 26

2.1 Notas históricas . . . 26

2.2 Fórmula Generalizada da Variação de Parâmetros . . . 27

2.2.1 Exemplos . . . 28

2.3 Principais resultados . . . 33

2.3.1 Teorema da Média: soluções aproximadas no caso periódico . . . 33

2.3.1.1 Exemplos . . . 41

2.3.2 Teorema da Existência de Órbitas Periódicas . . . 46

2.3.3 Teorema da Estabilidade de Órbitas Periódicas . . . 50

**3 Aplicação da Teoria da Média ao Pêndulo Amortecido** 54

**4 Aplicação da Teoria da Média ao Problema Lunar de Hill Regularizado** 64

**Referências Bibliográficas** 76

# Introdução

Este trabalho é composto por 4 capítulos e tem como objetivo estudar certos sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias (E. D. O.) por meio da Teoria da Média. Esta teoria teve surgimento por volta do século XVIII e foi validada por Fatou em 1928. Desde então tem sido estudada por outros nomes como Krylov, Bogoliubov, Mitropolsky, dentre outros e tem contemplado problemas de Física, Matemática e Engenharia.

No primeiro capítulo abordaremos conceitos e resultados fundamentais de Análise e E. D. O. que sustentarão o desenvolvimento dos demais capítulos. Aqui as referências utilizadas foram: [2], [3], [4], [5], [6], [7], [9], [12], [13] e [16].

O segundo capítulo irá abordar a Teoria da Média. Em um primeiro momento é feito uma abordagem histórica sobre a mesma e, em seguida, apresentamos o resultado da fórmula generalizada da variação dos parâmetros que nos será útil ao reescrever determinados sistema de E.D.O.. Na seção seguinte, introduzimos alguns conceitos e exemplificamos o uso dos mesmos bem como o uso dos resultados da seção anterior. A última seção deste capítulo aborda os três resultados que formalizam a Teoria da Média, a saber, o Teorema da Média que nos mostra que é mais simples estudar um dado sistema por meio do sistema médio, já que suas soluções são próximas; o Teorema de Existência de Órbitas Periódicas que irá garantir a existência de órbitas periódicas para um dado sistema por meio de algumas informações do sistema médio e, por fim, o Teorema de Estabilidade de Órbitas Periódicas que, como o próprio nome diz, irá permitir estudar a estabilidade de um dado sistema também via a estabilidade do sistema médio. As referências usadas neste capítulo foram: [1], [14], [15], [13] e [4].

Por fim, os capítulos 3 e 4 trazem duas aplicações baseadas respectivamente nos artigos [10] e [8] em que alguns cálculos foram realizados pelo software gratuito e de código aberto: *Maxima, a Computer Algebra System*.

Karine de Almeida Santos<br>Uberlândia-MG, 05 de janeiro de 2015.

# Capítulo 1

# Teoria Preliminar

Neste capítulo veremos conceitos e resultados preliminares para o desenvolvimento da teoria subsequente.

## 1.1 Tópicos preliminares de Análise

**Definição 1.1** *Dizemos que uma função $f : \mathbb{R} \times X \to \mathbb{R}^n$, onde $X \subseteq \mathbb{R}^n$, é $T$-**periódica** se existe $T > 0$ tal que $f(t+T, x) = f(t, x)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in X$.*

**Definição 1.2** *Uma função $f : (a - t_0, a + t_0) \times X \to \mathbb{R}^n$, onde $a$ é uma constante positiva e $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, é **Lipschitziana** com respeito à segunda variável se existe $L > 0$ tal que $|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$ para todos $x, y \in X$ e $t \in (a - t_0, a + t_0)$.*

**Definição 1.3** *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. O **segmento de reta** de extremos $x$ e $y$ é o conjunto*

$$[x, y] = \{(1-t)x + ty; t \in [0, 1]\}.$$

$C \subset \mathbb{R}^n$ é **convexo** quando contém qualquer segmento de reta cujos extremos pertencem a $C$. Isto é,

$$x, y \in C \Rightarrow [x, y] \subset C.$$

**Definição 1.4** *Seja $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) = \{T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n; T$ é um operador linear$\}$. Sobre esse espaço, definimos a norma*

$$\|\cdot\|: L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}, \quad \|T\| = \sup_{|x|_m \leq 1} |T(x)|_n,$$

*onde $|\cdot|_m$ e $|\cdot|_n$ denotam, respectivamente, as normas euclidianas de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$.*

**Lema 1.1** *Sejam $A, B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e $x \in \mathbb{R}^n$, temos:*

*(i)* $\|A(x)\| \leq \|A\| |x|_n$;

*(ii)* $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$;

*(iii)* $\|A^k\| \leq \|A\|^k$; $\forall\, k \in \mathbb{N}$.

Os item *(i)* pode ser visto em **(2)** página 92 de [5] bem como os itens *(ii)* e *(iii)* em **(7)** página 98 de [5].

**Teorema 1.1** *(Fórmula de Taylor com Resto Integral) Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe $C^{p+1}$ e $[a, a+v] \subset U$. Então*

$$f(a+v) = f(a) + f'(a) \cdot v + \frac{1}{2} f''(a) \cdot v^2 + \cdots + \frac{1}{p!} f^{(p)}(a) \cdot v^p + r_p(v),$$

*onde*

$$f^{(p)}(a) \cdot v^p = \frac{\partial^p f}{\partial v^p}(a) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial^{(p-1)} f}{\partial v^{(p-1)}}\right)(a) \ \text{ e } \ r_p(v) = \frac{1}{p!}\int_0^1 (1-t)^p f^{(p+1)}(a+tv) \cdot v^{p+1} dt$$

Sua demonstração pode ser vista em [6], página 262.

**Observação 1.1** *Ao longo do texto denotaremos os coeficientes da Fórmula de Taylor por $f_i(a) = \dfrac{1}{i!} f^{(i)}(a)$, onde $i$ é um inteiro não-negativo.*

**Teorema 1.2** *(Desigualdade do Valor Médio) Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, $f : U \to \mathbb{R}^n$ contínua em $[a, a+v] \subset U$ e diferenciável em todos os pontos do segmento $(a, a+v)$. Se $\|f'(x)\| \leq M$ para todo $x \in (a, a+v)$, então $|f(a+v) - f(a)|_n \leq M|v|_m$.*

**Corolário 1.1** *Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e convexo. Se $f : U \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável e $\|f'(x)\| \leq M$ para todo $x \in U$, então $f$ é Lipschitziana e $|f(x) - f(y)|_n \leq M|x - y|_m$ para todos $x, y \in U$.*

As demonstrações do Teorema 1.2 e seu Corolário 1.1 podem ser consultadas em [6], página 264.

**Definição 1.5** *Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto. Uma função $f : U \to \mathbb{R}^n$ é* **localmente Lipschitziana** *se para cada ponto $a$ de $U$, existe uma vizinhança $V$ de $a$ em $U$ tal que a restrição $f|_V$ é Lipschitziana em $V$.*

**Proposição 1.1** *Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe $C^1$, então $f$ é localmente Lipschitziana.*

A demonstração deste resultado pode ser consultada na página 163 de [4].

**Proposição 1.2** *(Derivação sob o Sinal de Integral) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \times [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função com as seguintes propriedades:*

*(i) para todo $x \in U$, a função $t \mapsto f(t, x)$ é integrável em $t \in [a, b]$;*

*(ii) a i-ésima derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)$ existe para cada $(x, t) \in U \times [a, b]$ e a função $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : U \times [a, b] \to \mathbb{R}$ assim definida, é contínua.*

*Então a função $\varphi : U \to \mathbb{R}$, dada por $\varphi(x) = \displaystyle\int_a^b f(t, x) dt$ possui a i-ésima derivada parcial em cada ponto $x \in U$, como sendo*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x) dt.$$

O próximo resultado será utilizado na demonstração do Lema 3.1.

**Corolário 1.2** *Se $f : [a, b] \times U \to \mathbb{R}$ é contínua e possui $n$ derivadas parciais contínuas $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} : [a, b] \times U \to \mathbb{R}$, então $\varphi : U \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = \displaystyle\int_a^b f(t, x) dt$ é de classe $C^1$.*

As demonstrações dos dois resultados acima podem ser consultadas em [6], páginas 143 e 144 respectivamente.

**Teorema 1.3** *(Teorema da Função Inversa) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $f : A \to \mathbb{R}^n$ de classe $C^r$ e $a \in A$. Se $\det\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)\right) \neq 0$, então existe uma vizinhança $U$ de $a$ tal que a restrição $f\Big|_U$ é um difeomorfismo de classe $C^r$ sobre $f(U) = V \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto.*

**Teorema 1.4** *(Teorema da Função Implícita) Seja $U \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$ aberto, $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe $C^r$, $(r \geq 1)$. Se $(a, b) \in U$ é tal que $f(a, b) = c$ e $\det\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b)\right) \neq 0$, então existem abertos $V \subseteq \mathbb{R}^k$ contendo $a$ e $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ tais que $f^{-1}(c) \cap (V \times Z)$ é o gráfico de uma função $g : V \to Z$, isto é, para cada $x \in V$ existe um único $y = g(x) \in Z$ tal que $f(x, y) = c$ e, consequentemente, $g(a) = b$. Além disso, $g$ é de classe $C^r$ tal que: para cada $x \in V$, tem-se*

$$g'(x) = \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))\right]^{-1} \circ \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))\right]$$

As demonstrações dos dois resultados acima podem ser consultadas, respectivamente, em [9], página 69 e [6], página 164.

**Definição 1.6** *Dizemos que um espaço métrico $(M, d)$ é completo se toda sequência de Cauchy em $M$ converge para um elemento de $M$.*

**Observação 1.2** *O espaço $(L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), d)$ é completo com a métrica $d$ induzida pela norma $\| \cdot \|$, em que*

$$\begin{aligned} d: \quad L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \times L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) &\to \mathbb{R} \\ (A, B) &\mapsto d(A, B) = \|A - B\|. \end{aligned}$$

O próximo resultado será utilizado no Teorema 2.2 para obtenção do inverso de $(I + \varepsilon A)$.

**Proposição 1.3** *Sejam $A \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon\|A\| = c < 1$. Então $(I + \varepsilon A)$ é inversível e seu inverso é dado por*

$$(I + \varepsilon A)^{-1} = I - \varepsilon A + \varepsilon^2 A^2 + \cdots + (-1)^n A^n + \cdots.$$

**Demonstração:**

Considere a série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\varepsilon A)^k$ e a sequência formada pela soma parcial de seus termos $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k (\varepsilon A)^k$. Mostremos que:

(i) $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de de Cauchy em $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$.

(ii) $\lim\limits_{n} S_n = S = (I - \varepsilon A)^{-1}$.

(i) De fato,

$$\|S_m - S_n\| = \left\| \sum_{k=0}^{m} (-1)^k (\varepsilon A)^k - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (\varepsilon A)^k \right\|$$

e, sem perda de generalidade, suponhamos $m > n$. Daí,

$$\|S_m - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} (-1)^k (\varepsilon A)^k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|(-1)^k (\varepsilon A)^k\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \|(\varepsilon A)\|^k \leq \sum_{k=n+1}^{m} c^k.$$

Como $\sum_{k=1}^{n} c^k$ é uma série geométrica de razão $|c| < 1$ segue que é convergente e, portanto, temos

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N};\ m, n > n_0 \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{m} c^k < \epsilon.$$

Dessa forma,

$$\|S_m - S_n\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} c^k < \epsilon.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|S_m - S_n\| < \epsilon$ sempre que $m, n > n_0$. Portanto, $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy. Agora, do fato de $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ ser de Cauchy em $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e este ser completo, segue que $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é convergente em $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, isto é, existe $S \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tal que $\lim_n S_n = S$.

(ii) Sabemos que

$$\begin{aligned}
(I + \varepsilon A)S &= (I + \varepsilon A) \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (I + \varepsilon A) S_n \\
&= \lim_{n\to\infty} (I + \varepsilon A)(I - \varepsilon A + \varepsilon^2 A^2 - \cdots + (-1)^n (\varepsilon A)^n) \\
&= \lim_{n\to\infty} (I + (-1)^n (\varepsilon A)^{n+1}).
\end{aligned}$$

Como

$$0 \leq \|I + (-1)^n (\varepsilon A)^{n+1} - I\| = \|(-1)^n (\varepsilon A)^{n+1}\| \leq \|\varepsilon A\|^{n+1} \leq c^{n+1}.$$

Tomando o limite, segue que

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \|\varepsilon A\|^{n+1} \leq c \lim_{n\to\infty} c^n \leq 0.$$

Assim, $\lim_{n\to\infty} (I + (\varepsilon A)^{n+1}) = I$. E, portanto, $(I + \varepsilon A)S = I$. Analogamente, verifica-se que $S(I + \varepsilon A) = I$. Dessa forma, concluímos que $S = \lim_n S_n = I - \varepsilon A + \varepsilon^2 A^2 - \cdots + (-1)^n (\varepsilon A)^n + \cdots$ é o inverso de $(I + (\varepsilon A))$.

■

### 1.1.1 Estabilidade de operadores lineares hiperbólicos

Iremos agora trabalhar alguns conceitos para demonstrarmos os dois últimos resultados desta seção. Ambos serão de grande importância para obtermos conclusões à respeito da estabilidade de soluções periódicas no Teorema 2.4.

**Definição 1.7** *Seja $S : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$ um operador linear em $\mathbb{C}^m$.*

*(i) Dizemos que $\lambda \in \mathbb{C}$ é um* **autovalor** *de $S$ se existe $x$ não nulo em $\mathbb{C}^m$ tal que $S\,x = \lambda x$.*

*(ii) O auto-espaço de $S$ associado a $\lambda$ é o subespaço de $\mathbb{C}^m$ dado por $V(\lambda, S) = \{x \in \mathbb{C}^m; S\,x = \lambda x\}$. Aos elementos de $V(\lambda, S)$ damos o nome de* **autovetores** *de $S$ associado a $\lambda$.*

**Definição 1.8** *Seja $A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ é* **autovalor** *de $A$ se o mesmo é raiz do polinômio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$.*

**Definição 1.9** *Um operador linear $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é* **hiperbólico** *se todos seus autovalores possuem parte real não nula.*

Sejam $z = (z_1, \ldots, z_m)$, $w = (w_1, \ldots, w_m) \in \mathbb{C}^m$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Sabemos que $\mathbb{C}^m$ munido com as operações

$$\begin{array}{rcl} (+) : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m & \longrightarrow & \mathbb{C}^m \\ (z, w) & \mapsto & z + w = (z_1 + w_1, \ldots, z_m + w_m) \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} (\cdot) : \mathbb{C} \times \mathbb{C}^m & \longrightarrow & \mathbb{C}^m \\ (\lambda, z) & \mapsto & \lambda z = (\lambda z_1, \ldots, \lambda z_m) \end{array}$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Definimos em $C^m$ o produto interno

$$\begin{array}{rcl} \langle\ ,\ \rangle_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m & \to & \mathbb{C} \\ (z, w) & \mapsto & \langle z, w\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} z_i \overline{w_i}, \end{array}$$

bem como a norma

$$\begin{array}{rcl} |\cdot|_{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^m & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & |z| = \sqrt{\langle z, z\rangle} \end{array}$$

**Observação 1.3** *Dado $z \in \mathbb{C}^m$ existem únicos $u, v \in \mathbb{R}^m$ tal que $z = u + vi$.*

**Definição 1.10** *Seja $A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$. A* **complexificação** *de $A$, $A^{\mathbb{C}} : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$, é definida por*

$$A^{\mathbb{C}}(u + iv) = Au + iAv,$$

*onde $u, v \in \mathbb{R}^m$.*

**Definição 1.11** *Seja $S : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^m$. A* **norma** *de $S$ é dada por*

$$\|\cdot\|_{\mathbb{C}} = \sup\{|S(z)|;\ z \in \mathbb{C}^m \text{ e } |z|_{\mathbb{C}} \leq 1\}.$$

**Lema 1.2** *Seja* $A \in (L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|)$, *então* $\|A^{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}} = \|A\|$.

**Demonstração:**

Por definição, $\|A^{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}} = \sup\limits_{\substack{z \in \mathbb{C}^m \\ |z| \leq 1}} |A^{\mathbb{C}} z|$. Seja $z \in \mathbb{C}^m$ tal que $z = u + iv$, onde $u, v \in \mathbb{R}^m$, temos $|z|_{\mathbb{C}}^2 = |u|_m^2 + |v|_m^2 \leq 1$. Seja $z \in \mathbb{C}^m$ tal que $|z|_{\mathbb{C}} \leq 1$, então

$$
\begin{aligned}
|A^{\mathbb{C}}(z)|_{\mathbb{C}}^2 = |A^{\mathbb{C}}(u+iv)|_{\mathbb{C}}^2 &= \langle A^{\mathbb{C}}(u+iv), A^{\mathbb{C}}(u+iv) \rangle_{\mathbb{C}} \\
&= \langle A^{\mathbb{C}}u + iA^{\mathbb{C}}v, A^{\mathbb{C}}u + iA^{\mathbb{C}}v \rangle_{\mathbb{C}} \\
&= \langle A^{\mathbb{C}}u, A^{\mathbb{C}}u \rangle_{\mathbb{C}} + \langle iA^{\mathbb{C}}v, A^{\mathbb{C}}u \rangle_{\mathbb{C}} + \langle A^{\mathbb{C}}u, iA^{\mathbb{C}}v \rangle_{\mathbb{C}} + \langle iA^{\mathbb{C}}v, iA^{\mathbb{C}}v \rangle_{\mathbb{C}} \\
&= \langle A^{\mathbb{C}}u, A^{\mathbb{C}}u \rangle_{\mathbb{C}} + \langle iA^{\mathbb{C}}v, A^{\mathbb{C}}u \rangle_{\mathbb{C}} + \overline{\langle iA^{\mathbb{C}}v, A^{\mathbb{C}}u \rangle_{\mathbb{C}}} + \langle iA^{\mathbb{C}}v, iA^{\mathbb{C}}v \rangle_{\mathbb{C}} \\
&= \langle A^{\mathbb{C}}u, A^{\mathbb{C}}u \rangle_{\mathbb{C}} + \langle A^{\mathbb{C}}v, A^{\mathbb{C}}v \rangle_{\mathbb{C}} \\
&= |Au|_m^2 + |Av|_m^2 \\
&\leq \|A\|^2 |u|_m^2 + \|A\|^2 |v_m|^2 \leq \|A\|^2 (|u|_m^2 + |v|_m^2) = \|A\|^2 |z|_{\mathbb{C}} \leq \|A\|^2.
\end{aligned}
$$

Dessa forma,

$$|A^{\mathbb{C}}(u+iv)|_{\mathbb{C}} \leq \|A\|,$$

ou seja, $\|A\|$ é uma cota superior para $\left\{|A^{\mathbb{C}} z|_{\mathbb{C}}; z \in \mathbb{C}^m \text{ e } |z|_{\mathbb{C}} \leq 1\right\}$ e como $\sup\limits_{\substack{z \in \mathbb{C}^m \\ |z|_{\mathbb{C}} \leq 1}} |A^{\mathbb{C}} z|_{\mathbb{C}}$ é a menor delas, segue que

$$\|A^{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}} \leq \|A\|. \tag{1.1}$$

Por outro lado,

$$\|A^{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}} = \sup_{|u+iv|_{\mathbb{C}}=1} |A^{\mathbb{C}}(u+iv)|_{\mathbb{C}} \geq \sup_{|u|=1} |A^{\mathbb{C}}(u)| = \sup_{|u|=1} |A(u)| = \|A\|. \tag{1.2}$$

Assim, por (1.1) e (1.2), temos $\|A^{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}} = \|A\|$.

■

**Lema 1.3** *Seja* $A \in (L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|)$, $\lambda$ *é autovalor de* $A$ *se, e somente se,* $\lambda$ *é autovalor de* $A^{\mathbb{C}}$.

**Demonstração:**

Mostremos que $A$ e $A^{\mathbb{C}}$ possuem os mesmos polinômios característicos. Para isto vejamos que toda base de $\mathbb{R}^m$ sobre $\mathbb{C}$ é base de $\mathbb{C}^m$ sobre $\mathbb{C}$. De fato, seja $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_m\}$ uma base de $\mathbb{R}^m$, como $\mathcal{B}$ possui $m$ elementos e $dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^m) = m$ se mostrarmos que $\mathcal{B}$ gera $\mathbb{C}^m$, então $\mathcal{B}$ será base para $\mathbb{C}^m$. Seja $z \in \mathbb{C}^m$, pela Observação 1.3, existem únicos $a, b \in \mathbb{R}^m$ tais que $z = a + ib$ e como cada $a, b \in \mathbb{R}^m$, então existem $\alpha_i$ e $\beta_i$ reais, com $i = 1, \ldots, m$ tais que $a = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i\ v_i$ e $b = \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i\ v_i$. Logo, $z = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i\ v_i + i \sum\limits_{i=1}^{m} \beta_i\ v_i = \sum\limits_{i=1}^{m} (\alpha_i + i\beta_i) v_i$, ou seja, $\mathcal{B}$ gera $\mathbb{C}^m$ e, portanto, $\mathcal{B}$ é base de $\mathbb{C}^m$.

Considere agora $\mathcal{B}$ a base canônica do $\mathbb{R}^m$. Pelo que vimos acima, $\mathcal{B}$ também é base de $\mathbb{C}^m$. Assim, sendo $[A]_{\mathcal{B}}$ e $[A^{\mathbb{C}}]_{\mathcal{B}}$ as representações matriciais dos operadores $A$ e $A^{\mathbb{C}}$ escritos na base $\mathcal{B}$, segue que $[A]_{\mathcal{B}} = [A^{\mathbb{C}}]_{\mathcal{B}}$. Portanto, seus polinômios característicos são iguais.

■

**Lema 1.4** *Seja $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ tal que $A_n \to A$ em $(L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|)$. Então $A_n^{\mathbb{C}} \to A^{\mathbb{C}}$ em $(L(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^m), \|\cdot\|_{\mathbb{C}})$.*

**Demonstração:**

Por hipótese, $A_n \to A$, ou seja, $\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0$. Agora,

$$\begin{aligned}(A_n^{\mathbb{C}} - A^{\mathbb{C}})(u+iv) &= A_n^{\mathbb{C}}(u+iv) - A^{\mathbb{C}}(u+iv) \\ &= A_n u + iA_n v - Au - iAv \\ &= (A_n - A)u + i(A_n - A)v \\ &= (A_n - A)^{\mathbb{C}}(u+iv). \qquad (1.3)\end{aligned}$$

Dessa forma, por (1.3) e pelo Lema 1.2, temos

$$\|A_n^{\mathbb{C}} - A^{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}} = \|(A_n - A)^{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}} = \|A_n - A\| \qquad (1.4)$$

Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n^{\mathbb{C}} - A^{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}} = \lim_{n\to\infty} \|A_n - A\| = 0.$$

Logo, $A_n^{\mathbb{C}} \to A^{\mathbb{C}}$.

■

**Observação 1.4** *Ao considerarmos em $\mathbb{R}^m$ a base canônica, podemos identificar os elementos de $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ com matrizes $m \times m$ cujo espaço é denotado por $\mathbb{M}_m(\mathbb{R})$ e, dado um operador $A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$, representamos os elementos da $i$-ésima linha e $j$-ésima coluna da matriz associada à $A$ por $A_{ij}$.*

**Lema 1.5** *A função $\det : \mathbb{R}^n \times \ldots \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n^2} \to \mathbb{R}$ é de classe $C^{\infty}$.*

Sua demonstração pode ser consultada em [6], página 253.

**Teorema 1.5** *Seja $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $(L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|)$ tal que $A_n \to A$. Então existe uma subsequência $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ tal que, se $\lambda_{n_k,1}, \ldots, \lambda_{n_k,m}$ são raízes de $g_k(\lambda) = \det(\lambda I - A_{n_k})$, incluindo suas multiplicidades, então*

*(i)* $(\lambda_{n,j})_{n=1}^{\infty}, j = 1, \ldots, m$ *é limitada;*

*(ii)* *existe subsequência de* $(\lambda_{n,j})_{n=1}^{\infty}$ *que converge para* $\lambda_j$, $j = 1, \ldots, m$*;*

*(iii)* $\lambda_j$ *é raiz de* $g(\lambda) = \det(\lambda I - A)$.

*Além disso, todas as raízes de $g(\lambda)$ são dadas exatamente por $\lambda_j$, $j = 1, \ldots, m$.*

**Demonstração:**

Sejam $\lambda_{n,1}, \ldots, \lambda_{n,m}$ autovalores de $A_n^{\mathbb{C}}$ e $v_{n,1}, \ldots, v_{n,m}$ seus respectivos autovetores com $n \geq 1$ e $|v_{n,j}|_{\mathbb{C}} = 1$ para todo $j = 1, \ldots, m$.

(i) Note que:

$$\langle A_n^{\mathbb{C}} v_{n,j}, v_{n,j}\rangle_{\mathbb{C}} = \langle \lambda_{n,j} v_{n,j}, v_{n,j}\rangle_{\mathbb{C}} = \lambda_{n_j}\langle v_{n,j}, v_{n,j}\rangle_{\mathbb{C}} = \lambda_{n_j}|v_{n,j}|^2_{\mathbb{C}} = \lambda_{n,j}$$

e, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos:

$$|\lambda_{n,j}|_{\mathbb{C}} = |\langle A_n^{\mathbb{C}} v_{n,j}, v_{n,j}\rangle| \leq \|A_n^{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}}|v_{n,j}|^2_{\mathbb{C}} = \|A_n^{\mathbb{C}}\|_{\mathbb{C}} = \|A_n\|, \tag{1.5}$$

onde a última igualdade decorre do Lema 1.2.

Por hipótese, $A_n \to A$ em $(L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m), \|\cdot\|)$, logo $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ é limitada. Assim, existe $M > 0$ tal que $\|A_n\| \leq M$ e, portanto,

$$|\lambda_{n,j}|_{\mathbb{C}} \leq \|A_n\| \leq M, \text{ para todo } n \geq 1 \text{ e } j = 1, \ldots, m. \tag{1.6}$$

(ii) Seja $q_n = (\lambda_{n,1}, \ldots, \lambda_{n,m}) \in \mathbb{C}^m$. De (1.6) decorre que $q_n \in B[0, M] \subset \mathbb{C}^m$ para todo $n \geq 1$. Assim, $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ é limitada no compacto $B[0, M]$ e, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, segue que $(q_n)_{n=1}^{\infty}$ admite subsequência $(q_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ convergente. Pela compacidade de $B[0, M]$, concluímos que $q_{n_k} \to q = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ tal que $q \in B[0, M]$ e

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_{n_k,j} = \lambda_j \text{ com } j = 1, \ldots, m. \tag{1.7}$$

(iii) Seja $g_k(\lambda) = \det(\lambda I - A_{n_k}^{\mathbb{C}})$ o polinômio característico de $A_{n_k}^{\mathbb{C}}$. Como $\lambda_{n_k,j}$ é autovalor de $A_{n_k}^{\mathbb{C}}$, então o mesmo é raiz de $g_k$, ou seja,

$$0 = g_k(\lambda_{n_k}) = \det(\lambda_{n_k,j} I - A_{n_k}^{\mathbb{C}}),$$

então

$$0 = \lim_{k\to\infty} g_k(\lambda_{n_k,j}) = \lim_{k\to\infty} \det(\lambda_{n_k,j} I - A_{n_k}^{\mathbb{C}}). \tag{1.8}$$

Pelo Lema 1.5 e por (1.7) em (1.8) temos

$$\det\left(\lim_{k\to\infty}(\lambda_{n_k,j} I - A_{n_k}^{\mathbb{C}})\right) = \det(\lambda_j I - A^{\mathbb{C}}) = g(\lambda_j). \tag{1.9}$$

Assim, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ são autovalores de $A^{\mathbb{C}}$ e, pelo Lema 1.3, concluímos que os mesmos são autovalores de $A$.

■

**Observação 1.5** *No teorema anterior, as multiplicidades dos autovalores de $g_k$* **não** *são mantidas em $g$. Considere por exemplo*

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \dfrac{1}{k} \end{pmatrix}$$

*Note que $\lim_{n\to\infty} A_n = I$, $g_k(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 1 - \dfrac{1}{k})$ e $g(\lambda) = (\lambda - 1)^3$. O autovalor $\lambda = 1$ tem multiplicidade 2 em $g_k$ e, no entanto, o mesmo tem multiplicidade 3 em $g$.*

**Teorema 1.6** *Seja $A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ um operador hiperbólico. Então existe $\delta > 0$ tal que qualquer $C \in B(A, \delta) = \{B \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m); \|A - B\| < \delta\}$ tem todos os autovalores com partes reais não nulas.*

**Demonstração:**

Suponhamos, por absurdo, que o teorema não seja válido. Então para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $\delta_n = \dfrac{1}{n}$ tal que $C_n \in B\left(A, \dfrac{1}{n}\right)$ e $C_n$ tem um autovalor com parte real nula. Sejam $\lambda_{n,1}, \ldots, \lambda_{n,m}$ todos os autovalores de $C_n$ onde $\lambda_{n,i}$ é tal que $Re(\lambda_{n,i}) = 0$ para algum $i = 1, \ldots, m$. Pelo item *(ii)* do Teorema 1.5, existe uma subsequência $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ e $\lambda_j$, $j = 1, \ldots, m$, tal que $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_{n_k,j} = \lambda_j$. Pelo item *(iii)* do Teorema 1.5, $\lambda_j$ é autovalor de $A$, ou seja, como $Re(\lambda_{n,i}) = 0$ segue que $Re(\lambda_i) = 0$. Isto é $A$ possui um autovalor com parte real nula, o que contradiz a hipótese.

Portanto, existe $\delta > 0$ tal que se $C \in B(A, \delta)$ então todos os autovalores de $C$ tem parte real não nula.

∎

**Teorema 1.7** *Seja $A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ um operador hiperbólico tal que $A$ possua* **a** *autovalores com parte real negativa e* $\mathbf{b} = m - \mathbf{a}$ *autovalores com parte real positiva, incluindo suas possíveis multiplicidades. Então existe $\delta > 0$ tal que se $C \in B(A, \delta) \subset L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ então $C$ possui* **a** *autovalores com parte real negativa e* **b** *autovalores com parte real positiva, incluindo suas multiplicidades.*

**Demonstração:**

Pelo Teorema 1.6, existe $\delta > 0$ tal que $C \in B(A, \delta)$ então todos os autovalores de $C$ tem parte real não nula. Suponha que para todo $n \in N$ tal que $\dfrac{1}{n} < \delta$, exista $C_n \in B\left(A, \dfrac{1}{n}\right)$ tal que o número de autovalores de $C_n$ com parte real negativa seja $a_n$ e o número de autovalores com parte real positiva seja $b_n$ com $(a_n, b_n) \neq (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sendo $C_n$ hiperbólico, segue do Teorema 1.6 que $a_n + b_n = m$.

Temos

$$(a_n, b_n) \in \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, m\} \text{ e } \lim_{n\to\infty} \|C_n - A\| = 0. \tag{1.10}$$

Assim, pelo Teorema 1.5, existe $C_{n_k}$ subsequência de $C_n$ tal que $C_{n_k} \to A$ e se $\lambda_{n_k,1}, \ldots, \lambda_{n_k,m}$ são autovalores de $C_{n_k}$, então

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_{n_k,j} = \lambda_j, \tag{1.11}$$

onde $\lambda_j$ é autovalor de $A$ para todo $j = 1, \ldots, m$ incluindo suas multiplicidades. Como $\{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, m\}$ é compacto, ao passarmos à subsequência $(a_{n_k}, b_{n_k})$ de $(a_n, b_n)$, podemos assumir $a_{n_k} = a'$ e $b_{n_k} = b'$ tais que

$$a' + b' = m \tag{1.12}$$

e

$$(a', b') \neq (\mathbf{a}, \mathbf{b}). \tag{1.13}$$

Reordenemos os autovalores de $C_{n_k}$ de tal modo que os primeiros $a'$ autovalores tenham parte real negativa e os demais $b'$ autovalores sejam aqueles cuja parte real é positiva. Assim, de (1.11), segue que

$$\lim_{k\to\infty} Re(\lambda_{n_k,j}) = Re(\lambda_j), \ \forall j = 1, \ldots, m. \tag{1.14}$$

Dessa forma, como $Re(\lambda_{n_k,j}) < 0$ para todos $j = 1, \ldots, a'$ segue que de (1.14) que $Re(\lambda_j) < 0$ para todos $j = 1, \ldots, a'$. Portanto,

$$a' \leq \mathbf{a}. \tag{1.15}$$

Da mesma forma, se $j = a' + 1, \ldots, m$, então $Re(\lambda_{n_k,j}) > 0$ e, portanto, $Re(\lambda_j) > 0$ para todos $j = a' + 1, \ldots, m$. Logo,

$$b' \leq \mathbf{b}. \tag{1.16}$$

E, por (1.16) em (1.12), segue que

$$b' = m - a' \leq m - \mathbf{a} = \mathbf{b} \Leftrightarrow a' \geq \mathbf{a}.$$

Mas, por (1.15) e este último, resulta que $a' = \mathbf{a}$.
Analogamente, por (1.15) em (1.12) temos

$$a' = m - b' \leq m - \mathbf{b} = \mathbf{a} \Leftrightarrow b' \geq \mathbf{b}.$$

Mas por (1.16) e este último temos $b' = \mathbf{b}$. Desse modo, $(a', b') = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ o que contradiz o fato de $(a_n, b_n) \neq (\mathbf{a}, \mathbf{b})$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

$\blacksquare$

**Teorema 1.8** *Seja $M > 0$ e $A \in L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ um operador hiperbólico tal que $A$ tem exatamente $\mathbf{a}$ autovalores com parte real negativa e $\mathbf{b} = m - \mathbf{a}$ autovalores com parte real positiva, contando suas multiplicidades. Então existe $\varepsilon_0$ tal que a matriz $I_m + \varepsilon(A + \varepsilon B)$ tem $\mathbf{a}$ autovalores com norma menor que 1 e $\mathbf{b}$ autovalores com parte real com norma maior que 1 para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ e $\|B\| < M$, contando suas multiplicidades.*

**Demonstração:**

Note que $I + \varepsilon(A + \varepsilon B) = I + \varepsilon(A + O(\varepsilon))$, pois $\|B\| \leq M$. Seja $C = A + O(\varepsilon)$ e $\varepsilon_0 > 0$ tal que $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, então pelo Teorema 1.7, existe $\delta > 0$ tal que $C \in B(A, \delta)$ e $C$ possui $\mathbf{a}$ autovalores com parte real negativa e $\mathbf{b}$ autovalores com parte real positiva. Considere $v_{\varepsilon,1}, \ldots, v_{\varepsilon,\mathbf{a}}, v_{\varepsilon,\mathbf{a}+1} \ldots v_{\varepsilon,\mathbf{b}}$ seus respectivos autovetores tais que $|v_{\varepsilon,j}| = 1$, para todos $j = 1, \ldots, m$. Assim,

$$C^{\mathbb{C}} v_{\varepsilon,j} = \lambda_{\varepsilon,j} v_{\varepsilon,j},$$

onde

$$\begin{cases} Re(\lambda_{\varepsilon,j}) < 0, \text{ se } j = 1, \ldots, \mathbf{a} \\ Re(\lambda_{\varepsilon,j}) > 0, \text{ se } j = \mathbf{a} + 1, \ldots, \mathbf{b} \end{cases}. \tag{1.17}$$

Escreva $\lambda_{\varepsilon,j} = \alpha_{\varepsilon,j} + i\beta_{\varepsilon,j}$, onde $\alpha_{\varepsilon,j}, \beta_{\varepsilon,j} \in \mathbb{R}$ para todos $j = 1, \ldots, m$. Segue de (1.17) que

$$\begin{cases} \alpha_{\varepsilon,j} < 0, \text{ se } j = 1, \ldots, \mathbf{a} \\ \alpha_{\varepsilon,j} > 0, \text{ se } j = \mathbf{a} + 1, \ldots, \mathbf{b} \end{cases}. \tag{1.18}$$

Dessa forma, temos

$$(I + \varepsilon C^{\mathbb{C}}) v_{\varepsilon,j} = I\ v_{\varepsilon,j} + \varepsilon C^{\mathbb{C}} v_{\varepsilon,j} = v_{\varepsilon,j} + \varepsilon \lambda_{\varepsilon,j} v_{\varepsilon,j} = (1 + \varepsilon \lambda_{\varepsilon,j}) v_{\varepsilon,j}. \tag{1.19}$$

Portanto, os autovalores de $(I + \varepsilon C^{\mathbb{C}})$ são $1 + \varepsilon \lambda_{\varepsilon,j}$, onde $j = 1, \ldots, m$.
Mostremos que:

(i) Se $j = 1, \ldots, \mathbf{a}$, então $|1 + \varepsilon \lambda_{\varepsilon,j}|_{\mathbb{C}} < 1$;

(ii) Se $j = \mathbf{a}+1,\dots,m$, então $|1+\varepsilon\lambda_{\varepsilon,j}|_{\mathbb{C}} > 1$.

Primeiramente, como $\lambda_{\varepsilon,j} = \alpha_{\varepsilon,j} + i\beta_{\varepsilon,j}$, temos

$$\begin{aligned} |1+\varepsilon\lambda_{\varepsilon,j}|_{\mathbb{C}} &= |1+\varepsilon(\alpha_{\varepsilon,j}+i\beta_{\varepsilon,j})| = |(1+\varepsilon\alpha_{\varepsilon,j}) + i\varepsilon\beta_{\varepsilon,j}| \\ &= \sqrt{(1+\varepsilon\alpha_{\varepsilon,j})^2 + (\varepsilon\beta_{\varepsilon,j})^2}. \end{aligned} \tag{1.20}$$

E, também pelo Lema 1.2, temos

$$\|C^{\mathbb{C}}\|^2_{\mathbb{C}} = \|C\|^2 = \|A+O(\varepsilon)\|^2 \leq \|A\| + \|\varepsilon B\| \leq M', \tag{1.21}$$

onde $\|B\| \leq M$.

(i) Se $j \in \{1,\dots,\mathbf{a}\}$, então $\alpha_{\varepsilon,j} < 0$. Note que de (1.20), temos

$$|1+\varepsilon\lambda_{\varepsilon,j}|^2_{\mathbb{C}} = 1 + 2\varepsilon\alpha_{\varepsilon,j} + \varepsilon^2\alpha^2_{\varepsilon,j} + \varepsilon^2\beta^2_{\varepsilon,j} = 1 + \varepsilon(2\alpha_{\varepsilon,j} + \varepsilon|\lambda_{\varepsilon,j}|^2). \tag{1.22}$$

Sejam $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ os autovalores de $C$, tais que:

$$\begin{aligned} &Re(\lambda_j) < 0, \quad \text{se} \quad j = 1,\dots,\mathbf{a} \\ &Re(\lambda_j) > 0, \quad \text{se} \quad j = \mathbf{a}+1,\dots,m. \end{aligned}$$

Então

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \lambda_{\varepsilon,j} = \lambda_j, \quad j = 1,\dots,m. \tag{1.23}$$

Logo,

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} Re(\lambda_{\varepsilon,j}) = Re(\lambda_j), \quad j = 1,\dots,m.$$

Seja

$$\max\{Re(\lambda_1),\dots,Re(\lambda_a)\} = L < 0. \tag{1.24}$$

Dessa forma, $\dfrac{L}{2} > \lambda_j$ para todo $j = 1,\dots,a$. Assim, dado $-\dfrac{L}{2} > 0$, existe $\varepsilon_j > 0$ tal que, se $0 < \varepsilon < \varepsilon_j$ então

$$|Re(\lambda_{\varepsilon,j}) - Re(\lambda_j)| < -\frac{L}{2} \Rightarrow Re(\lambda_{\varepsilon,j}) < Re(\lambda_j) - \frac{L}{2} \leq L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2},$$

onde esta última desigualdade decorre de (1.24).

Além disso, temos

$$|\lambda_{\varepsilon,j}|^2_{\mathbb{C}} = |\lambda_{\varepsilon,j}|^2_{\mathbb{C}}|v_{\varepsilon,j}|^2_{\mathbb{C}} = |\lambda_{\varepsilon,j}v_{\varepsilon,j}|^2_{\mathbb{C}} = |C^{\mathbb{C}}v_{\varepsilon,j}|^2_{\mathbb{C}} \leq \|C^{\mathbb{C}}\|^2_{\mathbb{C}}|v_{\varepsilon,j}|^2_{\mathbb{C}} = \|C^{\mathbb{C}}\|^2_{\mathbb{C}} \leq M', \tag{1.25}$$

onde esta última desigualdade decorre de (1.21).
Assim, considerando $\overline{\varepsilon} = \min\left\{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_a, -\dfrac{L}{2M'}\right\}$, obtemos que se $0 < \varepsilon < \overline{\varepsilon}$ então $\alpha_{\varepsilon,j} = Re(\lambda_{\varepsilon,j}) \leq \dfrac{L}{2}$ e

$$2\alpha_{\varepsilon,j} + \varepsilon|\lambda_{\varepsilon,j}|^2 \leq 2\frac{L}{2} + \overline{\varepsilon}|\lambda_{\varepsilon,j}|^2_{\mathbb{C}} \leq L + \overline{\varepsilon}M' \leq L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2} < 0,$$

onde a segunda desigualdade ocorre devido a (1.25). Portanto, segue de (1.22) e deste último fato visto acima que

$$|1+\varepsilon\lambda_{\varepsilon,j}|_{\mathbb{C}}^2 = 1+\varepsilon(2\alpha_{\varepsilon,j}+\varepsilon|\lambda_{\varepsilon,j}|_{\mathbb{C}}^2) \leq 1+\varepsilon\frac{L}{2} < 1, \quad 0<\varepsilon<\overline{\varepsilon}.$$

(ii) Como $j \in \{\mathbf{a}+1,\ldots,m\}$ segue que $\alpha_{\varepsilon,j} > 0$ e $(1+\alpha_{\varepsilon,j})^2 > 1$. Além disso, $\beta_{\varepsilon,j}^2 > 0$ o que por (1.20) implica em $|1+\lambda_{\varepsilon,j}|_{\mathbb{C}} > 1$ para todos $j = \mathbf{a}+1,\ldots,m$.

■

### 1.1.2 Teorema da Função Implícita Global: um caso elementar

O resultado principal desta seção é uma pequena modificação do caso mais simples do principal teorema de [16]. Mas antes, vejamos o

**Lema 1.6** *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \times (a,b) \to \mathbb{R}$ tal que $f$ é de classe $C^1$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0$ para todo $(x,y) \in U \times (a,b)$. Se existe $g : U \to (a,b)$ tal que $f(x, g(x)) = 0$ para todo $x \in U$, então $g$ é de classe $C^1$.*

**Demonstração:**

Seja $x_0 \in U$ tal que $f(x_0, g(x_0)) = 0$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, g(x_0)) \neq 0$. Então pelo Teorema 1.4, existe $U_1 \subset U$ e $Z \subset U \times (a,b) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ tais que $x_0 \in U_1$ e $(x_0, g(x_0)) \in Z$ e uma única função $\varphi : U_1 \to (a,b)$ de classe $C^1$ tal que $\varphi(x_0) = g(x_0)$ e $f(x, \varphi(x)) = 0$, para todo $x \in U_1$. Como por hipótese $f(x, g(x)) = 0$ para todo $x \in U$, e $U_1 \subset U$, segue que $f(x, g(x)) = 0$ para todo $x \in U_1$. Assim, pelo Teorema de Valor Médio, existe $\overline{y} \in [g(x), \varphi(x)]$ tal que

$$0 = f(x, \varphi(x)) - f(x, g(x)) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \overline{y})(\varphi(x) - g(x)).$$

Além disso, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \overline{y}) \neq 0$, então $\varphi(x) = g(x)$ para todo $x \in U_1$. Como $\varphi$ é $C^1$ e $\varphi = g$ para todo $x \in U_1$ então, em particular, $g$ é $C^1$ em $x_0$ e como $x_0$ é arbitrário em $U$ segue que $g$ é $C^1$ em $U$.

■

**Teorema 1.9** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : \Omega \times (a,b) \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ tal que*

*(i)* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0$, $\forall (x,y) \in \Omega \times (a,b)$;

*(ii)* $\liminf\limits_{y \to a^+} f(x,y) < 0$, $\forall x \in \Omega$;

*(iii)* $\limsup\limits_{y \to b^-} f(x,y) > 0$, $\forall x \in \Omega$;

*então existe $g : \Omega \to (a,b)$ de classe $C^1$ tal que $f(x, g(x)) = 0$ para todo $x \in \Omega$.*

**Demonstração:**

Seja $x \in \Omega$, segue de *(ii)* e *(iii)* que existem $y_1, y_2 \in (a,b)$ tais que $f(x, y_1) < 0$ e $f(x, y_2) > 0$. Por *(i)* e pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $z \in [y_1, y_2]$ tal que $f(x,z) = 0$.

Mostremos que $z$ é único. De fato, suponhamos que exista $\overline{z} \neq z \in [y_1, y_2]$ tal que $f(x, \overline{z}) = 0$. Pelo Teorema do Valor Médio, temos

$$0 = f(x,z) - f(x,\overline{z}) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \overline{z})(z - \overline{z}) \tag{1.26}$$

Como $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, \overline{z}) \neq 0$, então $z - \overline{z} = 0 \Rightarrow z = \overline{z}$ que é uma contradição. Logo $z$ é único. Assim, para cada $x \in \Omega$, existe um único $z = g(x) \in (a,b)$ tal que $f(x, g(x)) = 0$ e pelo Lema 1.6, segue que $g$ é de classe $C^1$.

■

## 1.2 Tópicos preliminares de Equações Diferenciais Ordinárias

Os dois resultados que apresentaremos a seguir são de grande importância, suas demonstrações podem ser consultadas em [15] nas páginas 4 e 5 respectivamente.

**Teorema 1.10** *(Existência e Unicidade de Soluções) Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $I_b = \{t \in \mathbb{R}; \mid t - t_0 \mid \leq b\}$ com $b > 0$ e $f : I_b \times U \to \mathbb{R}^n$. Considere o problema de valor inicial*

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.27}$$

*onde $x \in D \subset U$, $D = \{x \in \mathbb{R}^n; \mid x - x_0 \mid \leq a\}$ sendo $a > 0$. Se $f$ é tal que:*

*(i) $f$ é contínua em $I_b \times D$;*

*(ii) $f$ é Lipschitziana com relação a $x$;*

*então o problema de valor inicial admite única solução em $I_\alpha$, onde $\alpha = \min\left(b, \dfrac{a}{M}\right)$ e $M = \sup\limits_{I_b \times D} |f(t,x)|$.*

**Teorema 1.11** *(Desigualdade de Gronwall) Sejam $\phi, \alpha, \beta$ funções reais contínuas tais que $\beta(t) \geq 0$ e*

$$\phi(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\phi(s)ds.$$

*Então*

$$\phi(t) \leq \alpha(t) + \int_0^t \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^t \beta(r)dr}ds.$$

Considere o sistema de equações

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{1.28}$$

onde $A(t) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é contínua.

**Definição 1.12** *Dizemos que $\varphi(t) = (\varphi_{ij}(t))_{i,j}$, de ordem $n$ e com $i,j = 1,\ldots,n$, é uma* **matriz solução** *de (1.28) se $\dot{\varphi} = A(t)\varphi(t)$, onde esta última se trata de uma igualdade entre matrizes.*

Neste caso, cada coluna $\varphi_j : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é solução de (1.28) em $\mathbb{R}$ com $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

**Lema 1.7** *Os vetores $\varphi_j(t)$, $j = 1,\ldots,n$, são linearmente independentes se, e somente se, $\det \varphi_j(t) \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Referência: [3], página 80.

**Observação 1.6** *Em particular, se para algum $t_0 \in \mathbb{R}$, $\varphi_j(t_0)$, $j = 1,\ldots,n$ são linearmente independentes, então $\varphi_j(t)$ são linearmente independentes para todo $j = 1,\ldots,n$ e $t \in \mathbb{R}$.*

**Definição 1.13** *Dizemos que $\varphi(t) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é uma* **matriz fundamental** *de (1.28) se $\varphi(t)$ é matriz solução, isto é, $\dot{\varphi} = A(t)\varphi(t)$ e, ainda, $\det \varphi(t_0) \neq 0$ para algum $t_0 \in \mathbb{R}$.*

**Observação 1.7** *Pelo Lema 1.7 e a Observação 1.6, temos que toda matriz fundamental é inversível.*

**Definição 1.14** *À matriz fundamental $\varphi(t)$ tal que $\varphi(t_0) = I$ damos o nome de* **matriz principal**.

O resultado seguinte pode ser encontrado em [3], página 93.

**Proposição 1.4** *Seja $X(t)$ a matriz solução de $\dot{X} = AX$. Se $\det X(0) \neq 0$, então $e^{At} = X(t)X^{-1}(0)$. Além disso, $(e^{At})^{-1} = e^{-At}$.*

A matriz $e^{At}$ é matriz principal de $\dot{X} = AX$ em $t_0 = 0$.

**Teorema 1.12** *(Floquet) Seja*

$$\dot{x} = A(t)x, \tag{1.29}$$

*onde $A(t)$ é contínua e $T$-periódica. Toda matriz fundamental $X(t)$ de (1.29) pode ser escrita na forma*

$$X(t) = P(t)e^{Bt},$$

*onde $P(t)$ é $T$-periódica e $B$ é uma matriz constante.*

Os dois resultados a seguir, podem ser consultados [13], página 144.

**Proposição 1.5** *Para toda matriz solução $X(t)$ de (1.28), existe uma matriz constante e não singular $C$ tal que $X(t+T) = X(t)C$. A esta matriz damos o nome de* **matriz monodromia**.

**Proposição 1.6** *Sejam $X_1(t)$ e $X_2(t)$ soluções de (1.28) e $C_1$, $C_2$ suas respectivas matrizes monodromia. Então $C_1$ e $C_2$ são conjugadas. Isto é, existe uma matriz não singular $P$ tal que $C_1 = P^{-1}C_2P$.*

Este último resultado nos diz que os autovalores da matriz fundamental da solução de (1.28) serão sempre os mesmos quaisquer que seja a matriz solução de (1.28).

**Proposição 1.7** *Seja $X(t)$ matriz fundamental de (1.28). Então a matriz monodromia de $X(t)$ é $C = e^{BT}$.*

**Demonstração:**

Pela Proposição 1.5, existe $C$ matriz monodromia de $X(t)$, tal que $X(t+T) = X(t)C$. Pelo Teorema 1.12, existem $P(t)$ $T$-periódica e $B$ matriz constante tal que $X(t) = P(t)e^{Bt}$. Assim,

$$X(t+T) = P(t+T)e^{B(t+T)} \Leftrightarrow X(T) = P(T)e^{BT}. \tag{1.30}$$

Além disso, $I = X(0) = P(0)\, I = P(0)$ e como $P(t)$ é $T$-periódica, temos: $P(T) = P(0) = I$. Assim, por (1.30), segue que $X(T) = e^{BT}$ e como $C$ é matriz monodromia de $X(t)$, então $X(T) = X(0+T) = X(0)C = I\, C = C$. Portanto, $C = X(T) = I\, e^{BT} = e^{BT}$.

∎

**Definição 1.15** *Aos autovalores de multiplicidade $k$ da matriz monodromia, $C$, damos o nome de* **números característicos** *ou* **multiplicadores característicos** *de multiplicidade $k$ de (1.28).*

**Definição 1.16** *Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, $f : \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}^m$ e*

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1.31}$$

*onde $f$ é $T$-periódica em $t$ e $\varphi(t)$ é uma solução $T$-periódica em $t$ de (1.31). A* **linearização** *de (1.31) é dada por*

$$\dot{y} = A(t)\, y,$$

*onde $A(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t))$ é $T$-periódica em $t$.*

Note que, como $f$ é $T$-periódica em $t$ então $A(t)$ também é.
De fato, por hipótese, $f(t+T, x) = f(t, x)$. Então, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t+T, x) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x)$. Assim, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t, x)$ é $T$-periódica. Agora,

$$A(t+T) = \frac{\partial f}{\partial x}(t+T, \varphi(t+T)) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t+T)) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \varphi(t)) = A(t).$$

Sendo que a penúltima igualdade decorre do fato de $\varphi$ ser $T$-periódica em $t$.

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe $C^1$, tal que

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = y. \tag{1.32}$$

**Definição 1.17** *Dizemos que $I(y)$ é o* **intervalo máximo** *de soluções de (1.32) contendo $y$ se, dada qualquer solução $x : J \to \mathbb{R}^n$ de (1.32), temos $J \subseteq I(y)$.*

Assim, para cada $y \in U$, existe um única solução $\Phi(t)$ tal que $\Phi(0) = y$ definida no intervalo maximal $I(y) \subset \mathbb{R}$. Considere então o seguinte conjunto $\Omega \subset \mathbb{R} \times U$ assim definido

$$\Omega = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times U; t \in I(y)\}.$$

**Definição 1.18** *A aplicação $\Phi : \Omega \to U$, $\Phi(t, y) = x(t)$ é denominada* **fluxo** *de (1.32) e algumas vezes denotaremos $\Phi(t, y)$ por $\Phi_t(y)$.*

**Teorema 1.13** *$\Omega$ é um aberto em $\mathbb{R} \times U$ e a aplicação $\Phi : \Omega \to U$ é contínua.*

A demonstração deste teorema pode ser consultada em [4], Teorema 2, página 175.

O teorema a seguir nos fornece uma propriedade que será utilizada mais adiante e pode ser consultado em [2], página 152.

**Teorema 1.14** *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe $C^1$ e $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é o fluxo de $\dot{x} = f(x)$. Então*

$$\Phi\Big(t, \Phi(s, x)\Big) = \Phi(t + s, x)$$

*para todos $s, t \in \mathbb{R}$ e $x \in U$ tais que $s, t + s \in I(x)$.*

**Teorema 1.15** *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}^n$ de classe $C^r$ onde $r \geq 1$. Então o fluxo $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ da equação diferencial $\dot{x} = f(x)$ também é de classe $C^r$.*

Sua demonstração pode ser consultada no Teorema 2, página 302 de [4].

**Observação 1.8** *Seja $\Omega = \{(t, y) \in \mathbb{R} \times U; t \in I(y)\}$, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $I(y) \subset \mathbb{R}$ é o intervalo maximal e seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Toda equação não autônoma (que depende de $t$):*

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(0) = y \tag{1.33}$$

*pode ser escrita como uma equação autônoma (que não depende de $t$)*

$$\dot{Z} = F(Z) = (1, f(Z)), \tag{1.34}$$

*onde $Z(t) = (s(t), x(t))$. De fato, basta fazer $s(t) = t$, daí*

$$Z'(t) = (1, x'(t)) = (1, f(t, x(t))) \tag{1.35}$$

*e defina*

$$F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1},\ F(Z) = (1, f(Z)).$$

*Sendo assim, (1.34) é um sistema autônomo. Ponha $Z(0) = (u, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. O fluxo de (1.34) é dado por*

$$\Upsilon(t, Z) = (\Upsilon_1(t), \Upsilon_2(t, Z)),$$

*onde $\Upsilon_1(t) = t + u$ e $\Upsilon_2$ é tal que $\dfrac{\partial \Upsilon_2}{\partial t}(t, Z) = f(\Upsilon_1(t), \Upsilon_2(t, Z))$. Além disso, pelo Teorema 1.15, segue que $\Upsilon(t, Z)$ é de classe $C^1$, isto é, $\Upsilon_1(t)$ e $\Upsilon_2(t, Z)$ também o são.*

*Agora vejamos que o fluxo de (1.33) é dado por:*

$$\Psi(t, y) = \Upsilon_2(t, (0, y)). \tag{1.36}$$

*De fato,*

*(i) Note que*

$$\Psi(0, y) = (\Upsilon_2(0, (0, y))) = y.$$

*(ii) E também,*

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, y) = \frac{\partial \Upsilon_2}{\partial t}(t, (0, y)) = f(t, \Upsilon_2(t, (0, y))) = f(t, \Psi(t, y)).$$

*Além disso, considere $y = (y_1, \ldots, y_n)$ e*

$$\begin{array}{rccl} \Upsilon_2 : & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n+1} & \to & \mathbb{R}^n \\ & (t, (u, y)) & \mapsto & (\Upsilon_2^1(t, (u, y_1)), \Upsilon_2^2(t, (u, y_2)), \ldots, \Upsilon_2^n(t, (u, y_n))) \end{array} \tag{1.37}$$

*Assim, temos*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Upsilon}{\partial (u,y)}(t,(u,y)) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Upsilon_1}{\partial u}(t,(u,y)) & \dfrac{\partial \Upsilon_1}{\partial y}(t,(u,y)) \\[2ex] \dfrac{\partial \Upsilon_2}{\partial u}(t,(u,y)) & \dfrac{\partial \Upsilon_2}{\partial y}(t,(u,y)) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\[2ex] \dfrac{\partial \Upsilon_2^1}{\partial u}(t,(u,y)) & \dfrac{\partial \Upsilon_2^1}{\partial y_1}(t,(u,y)) & \cdots & \dfrac{\partial \Upsilon_2^1}{\partial y_n}(t,(u,y)) \\[2ex] \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\[2ex] \dfrac{\partial \Upsilon_2^n}{\partial u}(t,(u,y)) & \dfrac{\partial \Upsilon_2^n}{\partial y_1}(t,(u,y)) & \cdots & \dfrac{\partial \Upsilon_2^n}{\partial y_n}(t,(u,y)) \end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}
\end{aligned}$$

*Assim,*

$$\det\left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial (u,y)}(t,(u,y))\right) = \det\left(\frac{\partial \Upsilon_2}{\partial y}(t,(u,y))\right).$$

*Note que* $\Upsilon(0,(u,y)) = (u,y)$*, então* $\dfrac{\partial \Upsilon}{\partial (u,y)}(0,(u,y)) = I$*. Logo,*

$$1 = \det I = \det\left(\frac{\partial \Upsilon}{\partial (u,y)}(0,(u,y))\right) = \det\left(\frac{\partial \Upsilon_2}{\partial y}(0,(u,y))\right).$$

*Portanto,*

$$\det\left(\frac{\partial \Upsilon_2}{\partial y}(0,(u,y))\right) \neq 0$$

*para* $t$ *adequadamente pequeno. Dessa forma, segue pelo Teorema* **??** *que, para todo* $y \in \mathbb{R}^n$*, existe um intervalo* $I_y$*, tal que* $0 \in I_y$ *e para cada* $t \in I_y$ *a aplicação*

$$y \mapsto \Psi(t,y)$$

*é inversível.*

**Observação 1.9** *Vejamos que o Teorema 1.14 não é válido para sistemas não autônomos. Consideremos o seguinte problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \dot{x} &= t\,x \\ x(0) &= x_0. \end{cases} \tag{1.38}$$

*Note que* $\Psi(t,x_0) = e^{\frac{t^2}{2}} x_0$ *é o fluxo de (1.38), pois*

$$\Psi'(t,x_0) = t\, e^{\frac{t^2}{2}} x_0 = t\Psi(t,x_0)$$

*e*

$$\Psi(0,x_0) = x_0.$$

*No entanto, tomando $s_0 = 1$, $t_0 = 2$ e $x_0 = 1$, temos*

$$\Psi(t_0 + s_0, x_0) = \Psi(1+2, 1) = \Psi(3, 1) = e^{\frac{9}{2}} \neq e^{\frac{5}{2}} = \Psi(1, e^{\frac{4}{2}}) = \Psi(1, \Psi(2, 1)) = \Psi(t_0, \Psi(s_0, x_0)).$$

À seguir introduziremos duas importantes definições que nos conduzirão ao conceito de estabilidade. Para tal, utilizaremos a notação $\varphi(t, t_0, x_0)$ para indicar a solução de (1.31) que passa pelas condições iniciais $(t_0, x_0)$.

**Definição 1.19** *Uma solução $\varphi(t, t_0, x_0)$ de (1.31) é* **Liapunov estável** *se as seguintes condições são satisfeitas:*

*(i) existe $\rho > 0$ tal que a solução $\varphi(t, t_0, x_1)$ está definida para todo $t \geq t_0$, sempre que $|x_1 - x_0| < \rho$.*

*(ii) para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $\delta \leq \rho$ e $|\varphi(t, t_0, x_1) - \varphi(t, t_0, x_0)| < \varepsilon$ para todo $t \geq t_0$, sempre que $|x_1 - x_0| < \delta$.*

**Definição 1.20** *A solução $\varphi(t, t_0, x_0)$ de (1.31) a qual é Liapunov estável é* **assintoticamente estável** *se existe $\sigma > 0$ tal que $\sigma \leq \rho$ e $|\varphi(t, t_0, x_1) - \varphi(t, t_0, x_0)| \to 0$ quando $t \to \infty$, sempre que $|x_1 - x_0| < \sigma$.*

**Teorema 1.16** *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$ $T$-periódica na variável $t$ e $\varphi(t, t_0, x_0)$ solução $T$-periódica de (1.31).*

*(i) Se todos os números característicos da linearização de (1.31) possuem valor absoluto menor que 1, então a solução $\varphi(t, t_0, x_0)$ é assintoticamente estável.*

*(ii) Se algum dos números característicos da linearização de (1.31) possui valor absoluto maior que 1, então a solução $\varphi(t, t_0, x_0)$ é instável.*

Demonstrações: *(i)* ver [13], página 264 e *(ii)* ver [1], página 281, Teorema 7.6.

**Definição 1.21** *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe $C^1$. Considere o seguinte sistema*

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.39}$$

*Uma* **integral primeira** *do sistema anterior é uma função $F : U \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ tal que $F(x(t))$ é constante, onde $x(t)$ é uma solução qualquer de (1.39).*

### 1.2.1 Um teorema de redução

O teorema a seguir nos fornece informações de um sistema de $n+1$ equações por meio de um sistema de $n$ equações.

**Teorema 1.17** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ aberto, $f : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\overline{\varepsilon_0}, \overline{\varepsilon_0}) \to \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R} \times \Omega \times (-\overline{\varepsilon_0}, \overline{\varepsilon_0}) \to \mathbb{R}$ ambas de classe $C^r$, $r \geq 1$ e $2\pi$-periódicas na primeira variável. Suponha que $y_0(s,\varepsilon)$ seja uma solução $2\pi$-periódica de*

$$y'(s,\varepsilon) = \frac{\varepsilon f(s, y(s,\varepsilon), \varepsilon)}{1 + \varepsilon g(s, y(s,\varepsilon), \varepsilon)}. \tag{1.40}$$

*Então existem $\varepsilon_1 \in (0, \overline{\varepsilon_0})$ e $T : (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \to \mathbb{R}$ de classe $C^r$ tais que*

*(i) $T(0) = 2\pi$;*

*(ii) O sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon f(\theta(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), \varepsilon) \\ \dot{\theta} &= 1 + \varepsilon g(\theta(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon), \varepsilon) \end{aligned} \tag{1.41}$$

*tem solução $(x_0(t,\varepsilon), \theta_0(t,\varepsilon))$ tal que $x_0(t+T(\varepsilon),\varepsilon) = x_0(t,\varepsilon)$ e $\theta_0(t+T(\varepsilon),\varepsilon) = \theta_0(t,\varepsilon) + 2\pi$.*

**Demonstração:**

Consideremos $f$ e $g$ restritas a $\mathbb{R} \times \Omega \times [\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ onde $0 < \varepsilon_0 < \overline{\varepsilon_0}$. Vamos provar que:

(i) $(s,\varepsilon) \mapsto g(s, y(s), \varepsilon)$ é limitada;

Seja $s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ e $y_0(s,\varepsilon)$ uma solução $2\pi$-periódica de (1.40) na variável $s$ e como $g$ é $2\pi-$periódica na variável $s$, temos

$$\{g(s, y_0(s,\varepsilon), \varepsilon); s \in \mathbb{R}, \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]\} = \{g(\overline{s}, y_0(s,\varepsilon), \varepsilon); \overline{s} \in [0, 2\pi], \varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]\}.$$

Agora, como $[0, 2\pi] \times \{y_0(\overline{s}, \varepsilon)\} \times [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$ é compacto, $g \in C^r$, em particular contínua, segue do Teorema de Weierstrass que $g$ é limitada, digamos por $M$, para todo $s \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0]$.

(ii) existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $1 + \varepsilon g(s, y_0(s,\varepsilon), \varepsilon) > \frac{1}{2}$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$;

Tome $\varepsilon_1 > 0$ tal que $\varepsilon < \varepsilon_1 < \frac{1}{2M}$. Pelo item anterior, segue que

$$\begin{aligned} & -\varepsilon g(s, y_0(s,\varepsilon), \varepsilon) < |\varepsilon||g(s, y_0(s,\varepsilon), \varepsilon)| < \varepsilon_1 M < \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & -\varepsilon g(s, y_0(s,\varepsilon), \varepsilon) < -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & \varepsilon g(s, y_0(s,\varepsilon), \varepsilon) > -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & 1 + \varepsilon g(s, y_0(s,\varepsilon), \varepsilon) > \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

para todo $\varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$.

(iii) Seja $I \subset \mathbb{R}$ e $h : I \times (-\varepsilon_1, \varepsilon_1) \to \mathbb{R}$, $h(s,\varepsilon) = \displaystyle\int_0^s \frac{du}{1 + \varepsilon g(u, y_0(u,\varepsilon), \varepsilon)}$.

Para cada $\varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$, seja $h_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h_\varepsilon(s) = h$. Mostremos que $h_\varepsilon$ é um difeomorfismo. De fato, como

$$h'_\varepsilon(s) = \frac{\partial h_\varepsilon}{\partial s}(s) = \frac{1}{1 + \varepsilon g(s, y_0(s, \varepsilon), \varepsilon)} \neq 0, \tag{1.42}$$

temos $h'_\varepsilon(s) > 0$, isto é, $h_\varepsilon$ é monótona crescente e, portanto, injetora.

Além disso, pelo item $(i)$ e $(ii)$, temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} < 1 + \varepsilon g(u, y_0(u, \varepsilon), \varepsilon) < 1 + M \quad \Leftrightarrow \\ \frac{1}{1+M} < \frac{1}{1 + \varepsilon g(u, y_0(u, \varepsilon), \varepsilon)} < 2. \end{aligned} \tag{1.43}$$

Se $s > 0$, segue de (1.43) que

$$\int_0^s \frac{du}{1+M} < \int_0^s \frac{du}{1 + \varepsilon g(u, y_0(u, \varepsilon), \varepsilon)} < \int_0^s 2du \Rightarrow h_\varepsilon(s) > \frac{s}{1+M}.$$

Portanto,

$$\lim_{s \to +\infty} h_\varepsilon(s) \geq \lim_{s \to +\infty} \frac{s}{1+M} = +\infty \Rightarrow \lim_{s \to +\infty} h_\varepsilon(s) = +\infty. \tag{1.44}$$

Agora, se $s < 0$, segue de (1.43) que

$$\begin{aligned} \int_s^0 \frac{du}{1+M} &< \int_s^0 \frac{du}{1 + \varepsilon g(u, y_0(u, \varepsilon), \varepsilon)} \Leftrightarrow \\ -\int_0^s \frac{du}{1+M} &< -\int_0^s h_\varepsilon(s) \Leftrightarrow \int_0^s \frac{du}{1+M} > \int_0^s h_\varepsilon(s). \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{s \to -\infty} h_\varepsilon(s) \leq \lim_{s \to -\infty} \frac{s}{1+M} = -\infty \Rightarrow \lim_{s \to -\infty} h_\varepsilon(s) = -\infty. \tag{1.45}$$

Dessa forma, dado $z \in \mathbb{R}$ por (1.45), existe $s_1 \in \mathbb{R}$ tal que $h_\varepsilon(s_1) < z$ e por (1.44), existe $s_2 \in \mathbb{R}$ tal que $z < h_\varepsilon(s_2)$. Isto é,

$$h_\varepsilon(s_1) < z < h_\varepsilon(s_2).$$

Então pelo Teorema do Valor Intermediário, segue que existe $c \in (s_1, s_2)$ tal que $h_\varepsilon(c) = z$. Portanto, $h_\varepsilon$ é sobrejetora.

Assim, $h_\varepsilon$ admite inversa $h_\varepsilon^{-1}(s)$ e

$$(h_\varepsilon^{-1})'(h_\varepsilon(s)) = \frac{1}{h'_\varepsilon(s)}. \tag{1.46}$$

Além disso, note que tanto $h_\varepsilon$ quanto sua inversa são de classe $C^1$ pois $g$ assim o é.

Defina

$$\begin{aligned} \theta_0(t, \varepsilon) &= h_\varepsilon^{-1}(t) \\ x_0(t, \varepsilon) &= y_0(h_\varepsilon^{-1}(t), \varepsilon) \end{aligned} \tag{1.47}$$

De (1.46), segue que

$$\theta_0'(h(t,\varepsilon)) = (h_\varepsilon^{-1})'(h_\varepsilon(t)) = \frac{1}{h_\varepsilon'(t)} \tag{1.48}$$

Por (1.42) em (1.48), temos:

$$\begin{aligned} \theta_0'(h_\varepsilon(t)) &= 1 + \varepsilon g\Big(t, y_0(t,\varepsilon), \varepsilon\Big) \\ \Leftrightarrow \theta_0'(h_\varepsilon(h_\varepsilon^{-1}(t)), \varepsilon) &= 1 + \varepsilon g\Big(h_\varepsilon^{-1}(t), y_0(h_\varepsilon^{-1}(t), \varepsilon), \varepsilon\Big). \end{aligned}$$

Assim,

$$\theta_0'(t,\varepsilon) = 1 + \varepsilon g\Big(\theta_0(t,\varepsilon), x_0(t,\varepsilon), \varepsilon\Big). \tag{1.49}$$

E por (1.47), temos

$$\begin{aligned} x_0'(t,\varepsilon) &= y_0'(h_\varepsilon^{-1}(t),\varepsilon)(h_\varepsilon^{-1})'(t) \\ &= \frac{\varepsilon f\Big(h_\varepsilon^{-1}(t), y_0(h_\varepsilon^{-1}(t),\varepsilon),\varepsilon\Big)}{1+\varepsilon g\Big(h_\varepsilon^{-1}(t), y_0(h_\varepsilon^{-1}(t),\varepsilon),\varepsilon\Big)}\theta_0(t,\varepsilon) \\ &= \frac{\varepsilon f\Big(\theta_0(t,\varepsilon), x_0(t,\varepsilon),\varepsilon\Big)}{1+\varepsilon g\Big(\theta_0(t,\varepsilon), x_0(t,\varepsilon),\varepsilon\Big)}\Big(1+\varepsilon g\Big(\theta_0(t,\varepsilon), x_0(t,\varepsilon),\varepsilon\Big)\Big). \end{aligned}$$

Assim,

$$x_0'(t,\varepsilon) = \varepsilon f\Big(\theta_0(t,\varepsilon), x_0(t,\varepsilon), \varepsilon\Big) \tag{1.50}$$

E também por (1.47), temos

$$x_0(h_\varepsilon(t),\varepsilon) = y_0\Big(h_\varepsilon^{-1}(h_\varepsilon(t),\varepsilon)\Big) = y_0(t,\varepsilon).$$

Portanto,

$$x_0(h_\varepsilon(0),\varepsilon) = y_0(0,\varepsilon). \tag{1.51}$$

Por hipótese, $y_0(t,\varepsilon)$ é $2\pi$-periódica, então

$$x_0\Big(h_\varepsilon(t+2\pi),\varepsilon\Big) = y_0(t+2\pi,\varepsilon) = y_0(t,\varepsilon).$$

Portanto,

$$x_0\Big(h_\varepsilon(2\pi),\varepsilon\Big) = y_0(2\pi,\varepsilon) = y_0(0,\varepsilon). \tag{1.52}$$

De (1.51) e (1.52), segue que

$$x_0\Big(h_\varepsilon(2\pi),\varepsilon\Big) = x_0(0,\varepsilon). \tag{1.53}$$

Agora considere

$$T(\varepsilon) = h_\varepsilon(2\pi) = \int_0^{2\pi} \frac{du}{1+\varepsilon g(u, y_0(u,\varepsilon),\varepsilon)}.$$

Temos

$$T(0) = 2\pi.$$

Pelo Corolário 1.2, segue que $T$ é de classe $C^r$ e por (1.53), segue que

$$x_0(T(\varepsilon),\varepsilon) = x_0(0,\varepsilon). \tag{1.54}$$

Do mesmo modo,

$$\theta_0(t,\varepsilon) = h_\varepsilon^{-1}(t) \Rightarrow \theta_0\Big(h_\varepsilon(t),\varepsilon\Big) = h_\varepsilon^{-1}\Big(h_\varepsilon(t),\varepsilon\Big) = t. \tag{1.55}$$

Tomando $t = 2\pi$ em (1.55), temos

$$\theta_0(2\pi,\varepsilon) = \theta_0\Big(h_\varepsilon(2\pi),\varepsilon\Big) = \theta_0(T(\varepsilon),\varepsilon) = 2\pi. \tag{1.56}$$

Agora tomando $t = 0$ em (1.55), temos

$$\theta_0(0,\varepsilon) = \theta_0\Big(h_\varepsilon(0),\varepsilon\Big) = \theta_0(T(0),\varepsilon) = 0. \tag{1.57}$$

Considere

$$\begin{aligned} u(t,\varepsilon) &= \Big(x_0(t+T(\varepsilon),\varepsilon),\theta_0(t+T(\varepsilon),\varepsilon)\Big) = \Big(u_1(t,\varepsilon),u_2(t,\varepsilon)\Big) && (1.58)\\ v(t,\varepsilon) &= \Big(x_0(t,\varepsilon),\theta_0(t,\varepsilon)+2\pi\Big) = \Big(v_1(t,\varepsilon),v_2(t,\varepsilon)\Big). && (1.59)\end{aligned}$$

Mostremos que $u(t,\varepsilon)$ e $v(t,\varepsilon)$ são soluções de (1.40). De fato,

$$u'(t,\varepsilon) = \Big(u_1'(t,\varepsilon),u_2'(t,\varepsilon)\Big) = \Big(x_0'(t+T(\varepsilon),\varepsilon),\theta_0'(t+T(\varepsilon),\varepsilon)\Big).$$

Por (1.49) e (1.50), temos

$$\begin{aligned} u'(t,\varepsilon) &= \Big(\varepsilon f\Big(\theta_0(t+T(\varepsilon),\varepsilon),x_0(t+T(\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon\Big),1+\varepsilon g\Big(\theta_0(t+T(\varepsilon),\varepsilon),x_0(t+T(\varepsilon),\varepsilon),\varepsilon\Big)\Big)\\ &= \Big(\varepsilon f(u_2(t,v),u_1(t,\varepsilon),\varepsilon),1+\varepsilon g(u_2(t,v),u_1(t,\varepsilon),\varepsilon)\Big). && (1.60)\end{aligned}$$

Do mesmo modo,

$$v'(t,\varepsilon) = \Big(v_1'(t,\varepsilon),v_2'(t,\varepsilon)\Big) = \Big(x_0'(t,\varepsilon),\theta_0'(t,\varepsilon)\Big).$$

Por (1.49) e (1.50), temos

$$v'(t,\varepsilon) = \Big(\varepsilon f\Big(\theta_0(t,\varepsilon),x_0(t,\varepsilon),\varepsilon\Big),1+\varepsilon g\Big(\theta_0(t,\varepsilon),x_0(t,\varepsilon),\varepsilon\Big)\Big).$$

E pela periodicidade de $f$ e $g$ na primeira variável, segue que

$$\begin{aligned} v'(t,\varepsilon) &= \Big(\varepsilon f\Big(\theta_0(t,\varepsilon)+2\pi,x_0(t,\varepsilon),\varepsilon\Big),1+\varepsilon g\Big(\theta_0(t,\varepsilon)+2\pi,x_0(t,\varepsilon),\varepsilon\Big)\Big)\\ &= \Big(\varepsilon f(v_2(t,\varepsilon),v_1(t,\varepsilon),\varepsilon),1+\varepsilon g(v_2(t,\varepsilon),v_1(t,\varepsilon),\varepsilon)\Big). && (1.61)\end{aligned}$$

Além disso,

$$u(0,\varepsilon) = \Big(x_0(T(\varepsilon),\varepsilon),\theta_0(T(\varepsilon),\varepsilon)\Big)$$

e por (1.54) e (1.56), temos:
$$u(0,\varepsilon) = \Big(x_0(0,\varepsilon), 2\pi\Big).$$
E também como
$$v(0,\varepsilon) = \Big(x_0(0,\varepsilon), \theta_0(0,\varepsilon) + 2\pi\Big),$$
segue de (1.57) que
$$v(0,\varepsilon) = \Big(x_0(0,\varepsilon), 0 + 2\pi\Big) = \Big(x_0(0,\varepsilon), 2\pi\Big).$$
Assim,
$$u(0,\varepsilon) = \Big(x_0(0,\varepsilon), 2\pi\Big) = v(0,\varepsilon).$$
Portanto, tanto $u(t,\varepsilon)$ quanto $v(t,\varepsilon)$ são soluções de (1.40) passando pela mesma condição inicial. Dessa forma, pela unicidade das soluções, por (1.58) e (1.59), segue que:
$$u_1(t,\varepsilon) = x_0(t+T(\varepsilon),\varepsilon) = x_0(t,\varepsilon) = v_1(t,\varepsilon)$$
e
$$u_2(t,\varepsilon) = \theta_0(t+T(\varepsilon),\varepsilon) = \theta_0(t,\varepsilon) + 2\pi = v_2(t,\varepsilon).$$
Logo, $u(t,\varepsilon) = v(t,\varepsilon)$

■

**Observação 1.10** *Caso tenhamos*
$$y'(s) = \frac{f(s,y(s,\varepsilon),\varepsilon)}{a+\varepsilon g(s,y(s,\varepsilon),\varepsilon)},$$
*onde* $a \neq 0$ *e*
$$\begin{aligned} \dot{x} &= \varepsilon f(\theta(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon),\varepsilon) \\ \dot{\theta} &= a + \varepsilon g(\theta(t,\varepsilon), y(t,\varepsilon),\varepsilon) \end{aligned}$$
*o resultado anterior também é válido.*

# Capítulo 2

# Teoria da Média

## 2.1 Notas históricas

Este capítulo engloba os principais resultados da Teoria da Média. Para se ter uma ideia dessa teoria, Newton, em meados do século XVII, propôs o problema de N-corpos que consiste em obter equações de movimento que possam descrever as trajetórias dos planetas no sistema solar. Um fato curioso é que ele mesmo resolveu o problema para 2-corpos o que levou à constatação da teoria de trajetórias elípticas descrita por Kepler.

Naquela ocasião, o estudo das equações eram tomados de forma isolada entre dois corpos: o Sol e o outro corpo em questão. Posteriormente, percebeu-se que pequenos desvios de órbitas ocorriam devido, por exemplo, à presença dos outros corpos celestes bem como quanto ao meio ao qual se encontram. Devido à percepção dessa influência, o próximo passo seria obter soluções considerando os demais corpos em questão, a começar pelo problema de 3-corpos e isso era e ainda é algo complicado. Vários cientistas propuseram uma formulação para tal problema, muitas vezes envolvendo formas engenhosas com grandes cálculos numéricos, algo extremamente complicado e geralmente sem o devido êxito.

Eis que no século XVIII, surge a teoria de perturbação onde cientistas buscavam formas de relacionar a teoria da gravitação de Newton com movimento de planetas e satélites. Clairaut então dá os primeiros passos rumo ao que conhecemos hoje pelo Método da Média e, posteriormente, Lagrange e Laplace nos fornecem uma forma aprimorada e mais clara deste método que permite estudar, dentre vários outros, o problema de 3-corpos. Para isso, Lagrange propôs que uma perturbação fosse feita na equação do problema de 2-corpos.

Grosso modo, este método consiste em aplicar o Método da Variação de Parâmetros para escrever uma dada equação na forma que denominaremos canônica ou padrão. Dessa forma, obtemos um sistema mais simples que o primeiro, no entanto, a obtenção de solução pode ser tão difícil quanto antes. A fim de simplificar este último sistema aplicamos o Método da Média cuja ideia tem por base a expansão de Fourier que permite expressar uma função em termos de senos e cossenos, e estas devido sua periodicidade, irão eliminar vários termos durante o cálculo de integração dos coeficientes de Fourier o que torna mais simples nosso sistema de equações. Após o século XIX, esse método foi validado por Fatou, tem sido estudado e pode ser encontrado em artigos de vários pesquisadores como Krylov, Bogoliubov, Mitropolsky, etc. Para obtenção mais detalhada de tais fatos, o leitor poderá consultar [15], pág 136, 137 e [14], pág 337.

## 2.2 Fórmula Generalizada da Variação de Parâmetros

Para aplicarmos a Teoria da Média é necessário que o sistema esteja escrito em sua forma canônica, no entanto, nem sempre isso ocorre. O teorema a seguir nos fornece uma forma de fazer isto.

**Definição 2.1** *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : [0, +\infty) \times U \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^n$ onde $f$ é Lipschitziana com relação a segunda variável. Diremos que o sistema $\dot{x} = f(t, x, \varepsilon)$ se encontra na* **forma canônica** *ou* **padrão** *sempre que*

$$f(t, x, \varepsilon) = \varepsilon F(t, x, \varepsilon) \tag{2.1}$$

*onde $F : [0, +\infty) \times U \to \mathbb{R}^n$ é de classe $C^2$ ou simplesmente $f(t, x, 0) = 0$.*

**Teorema 2.1** *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R} \times U \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^n$ funções de classe $C^1$. Se $\Psi(t, y)$ é fluxo de (1.33) e $y(t) = \Psi_t^{-1}(x(t))$, então*

$$\dot{x} = f(t, x) + \varepsilon g(t, x, \varepsilon) \tag{2.2}$$

*é escrita como*

$$\dot{y} = \varepsilon g^*(t, y, \varepsilon), \tag{2.3}$$

*onde $g^*(t, y, \varepsilon) = \left[\dfrac{\partial \Psi}{\partial x}(t, y(t), \varepsilon)\right]^{-1} g(t, \Psi(t, y(t)), \varepsilon)$.*

**Demonstração:**

De posse da Observação 1.8, vimos que $\Psi_t(x(t))$ é inversível e, por hipótese, $y(t) = \Psi_t^{-1}(x(t))$. Daí,

$$x(t) = \Psi_t(y(t)) = \Psi(t, y(t)).$$

Derivando esta última, obtemos

$$x'(t) = \frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial \Psi}{\partial x}(t, y(t)) y'(t).$$

Substituindo em (2.2), temos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(t, y(t)) + \frac{\partial \Psi}{\partial x}(t, y(t)) y'(t) = f(t, \Psi(t, y(t))) + \varepsilon g(t, \Psi(t, y(t))), \varepsilon). \tag{2.4}$$

Agora, do fato de $\Psi$ ser fluxo de (1.33), segue que $\dfrac{\partial \Psi}{\partial t}(t, \Psi(t, y)) = f(t, \Psi(t, y(t)))$. Dessa forma, segue de (2.4) que

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x}(t, y(t)) y'(t) = \varepsilon g(t, \Psi(t, y(t))), \varepsilon).$$

Vimos também pela Observação 1.8 que $\dfrac{\partial \Psi}{\partial x}(t, y(t))$ é inversível. Portanto,

$$y'(t) = \varepsilon g^*(t, y, \varepsilon),$$

onde $g^*(t, y, \varepsilon) = \left[\dfrac{\partial \Psi}{\partial x}(t, y(t), \varepsilon)\right]^{-1} g(t, \Psi(t, y(t)), \varepsilon)$.

■

O resultado anterior é uma adaptação do argumento usado em [11], página 9.

**Corolário 2.1** *Considere o sistema*

$$\dot{x} = A(t)x + \varepsilon g(t, x), \tag{2.5}$$

*onde* $A(t) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ *é contínua e* $g(t,x)$ *é uma função diferenciável nas variáveis* $t$ *e* $x$*. Se* $\varphi(t)$ *é matriz principal do sistema* $\dot{x} = A(t)x$ *e* $y(t) = [\varphi(t)]^{-1}x(t)$*, então*

$$\dot{y} = \varepsilon[\varphi(t)]^{-1} g(t, \varphi(t)y). \tag{2.6}$$

**Demonstração:**

Note que este é um caso particular da equação (2.2), em que $f(t,x) = A(t)x$. Tomemos o fluxo $\Phi(t,y) = \varphi(t)y$ de (2.5), onde $y$ é um vetor $n \times 1$. Então pelo Teorema 2.1, temos

$$\dot{y} = \varepsilon[\varphi(t)]^{-1} g(t, \varphi(t)y). \tag{2.7}$$

Note que, se $A(t) = A$ matriz constante, então (2.7) reescreve-se como

$$\dot{y} = \varepsilon e^{-At} g(t, e^{At}y).$$

■

### 2.2.1 Exemplos

Considere o seguinte sistema

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, \dot{x}). \tag{2.8}$$

Agora reescreva (2.8) como segue

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ f(x,y) \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

No caso $\varepsilon = 0$, considere o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \\ x(0) = r_0 \cos\psi_0 \\ y(0) = -r_0 \operatorname{sen}\psi_0, \end{cases} \tag{2.10}$$

onde $r_0 \neq 0$.

Sendo assim, os autovalores de $A$ são $\lambda_1 = i$ e $\lambda_2 = -i$. O autovetor associado a $\lambda_1$ é $v_1 = (-i, 1)$. Dessa forma a solução

$$S(t) = e^{\lambda_1 t} v_1 = (\cos(t) + i \operatorname{sen}(t)) \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -\cos t \\ \operatorname{sen} t \end{pmatrix}.$$

Assim, uma matriz fundamental $X(t)$ é dada tomando os vetores colunas de $S(t)$, isto é,

$$X(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t & -\cos t \\ \cos t & \operatorname{sen} t \end{pmatrix}.$$

Note que $\det X(0) = -1 \neq 0$ e sua inversa é

$$X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t & \cos t \\ -\cos t & \operatorname{sen} t \end{pmatrix}.$$

Assim, pela Proposição 1.4 temos

$$e^{At} = X(t)X^{-1}(0) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t & -\cos t \\ \cos t & \operatorname{sen} t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Logo, a solução geral de (2.8) é

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos t + b\operatorname{sen} t \\ -a\operatorname{sen} t + b\cos t \end{pmatrix}. \tag{2.12}$$

Agora, pelas condições iniciais, segue que

$$a = x(0) = r_0 \cos\psi_0 \quad \text{e} \quad b = y(0) = -r_0 \operatorname{sen}\psi_0.$$

Portanto, substituindo os valores de $a$ e $b$ em (2.12), temos

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0\cos\psi_0\cos t - r_0\operatorname{sen}\psi_0\operatorname{sen} t \\ -r_0\cos\psi_0\operatorname{sen} t - r_0\operatorname{sen}\psi_0\cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_0\cos(t+\psi_0) \\ -r_0\operatorname{sen}(t+\psi_0) \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Assim, o fluxo de (2.10) em termos de coordenadas polares é

$$\Phi(t,(r,\psi)) = \begin{pmatrix} r\cos(t+\psi) \\ -r\operatorname{sen}(t+\psi) \end{pmatrix}. \tag{2.14}$$

E

$$\frac{\partial\Phi}{\partial(r,\psi)}(t,(r,\psi)) = \begin{pmatrix} \cos(t+\psi) & -r\operatorname{sen}(t+\psi) \\ -\operatorname{sen}(t+\psi) & -r\cos(t+\psi) \end{pmatrix}, \tag{2.15}$$

$$\left[\frac{\partial\Phi}{\partial(r,\psi)}(t,(r,\psi))\right]^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(t+\psi) & -\operatorname{sen}(t+\psi) \\ -\dfrac{\operatorname{sen}(t+\psi)}{r} & -\dfrac{\cos(t+\psi)}{r} \end{pmatrix}. \tag{2.16}$$

Dessa forma, aplicando o Teorema 2.1 em (2.9), temos

$$\begin{pmatrix} \dot r \\ \dot\psi \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \cos(t+\psi) & -\operatorname{sen}(t+\psi) \\ -\dfrac{\operatorname{sen}(t+\psi)}{r} & -\dfrac{\cos(t+\psi)}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon f(r\cos(t+\psi), -r\operatorname{sen}(t+\psi)) \end{pmatrix}, \tag{2.17}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \dot r &=& -\varepsilon\operatorname{sen}(t+\psi) f(r\cos(t+\psi), -r\operatorname{sen}(t+\psi)) \\ \dot\psi &=& -\varepsilon\dfrac{\cos(t+\psi)}{r} f(r\cos(t+\psi), -r\operatorname{sen}(t+\psi)) \end{cases} \tag{2.18}$$

Neste caso, também poderíamos ter usado o Corolário 2.1.

**Exemplo 2.1** *Considere a equação*

$$\ddot x + x = \varepsilon(-\dot x + x^2). \tag{2.19}$$

*Neste caso, $f(x,\dot x) = x^2 - \dot x$. Para efeito de cálculos iremos considerar $r$ no lugar de $r(t)$ bem como $\psi$ em vez de $\psi(t)$. Note que*

$$\begin{aligned} f\left(r\cos(t+\psi), -r \operatorname{sen}(t+\psi)\right) &= \left[r^2\cos^2(t+\psi) - (-r \operatorname{sen}(t+\psi))\right] \\ &= \left[r^2\cos^2(t+\psi) + r \operatorname{sen}(t+\psi))\right]. \end{aligned}$$

*Por* (2.18), *segue que*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = -\varepsilon \operatorname{sen}(t+\psi)\left[r^2\cos^2(t+\psi) + r\operatorname{sen}(t+\psi))\right] \\ \dot{\psi} = -\dfrac{\varepsilon}{r}\cos(t+\psi)\left[r^2\cos^2(t+\psi) + r\operatorname{sen}(t+\psi))\right] \end{array} \right.$$

*Ou ainda,*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = -\varepsilon\left[r \operatorname{sen}^2(t+\psi) - r^2 \operatorname{sen}(t+\psi)\cos^2(t+\psi)\right] \\ \dot{\psi} = -\varepsilon\left[r\cos^3(t+\psi) - \operatorname{sen}(t+\pi)\cos(t+\psi)\right] \end{array} \right.$$

*Note que este último se encontra na forma canônica.*

Os dois exemplos à seguir ilustram a aplicação da técnica descrita pelo Corolário 2.1.

**Exemplo 2.2** *Considere novamente a equação*

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(-\dot{x} + x^2).$$

*Queremos escrever o sistema acima na forma canônica. Para isso, a reescrevamos da seguinte forma:*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = y \\ \dot{y} = \varepsilon(-y + x^2) - x \end{array} \right. . \tag{2.20}$$

*Isto é,*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix} 0 \\ -y + x^2 \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

*Note que este sistema está conforme $\dot{x} = Ax + \varepsilon g(t,x,y)$ cuja matriz fundamental do sistema não perturbado ($\varepsilon = 0$) é dada por*

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t & -\cos t \\ \cos t & \operatorname{sen} t \end{pmatrix}.$$

*Como foi visto no exemplo anterior,*

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t, \end{pmatrix}$$

*e,*

$$e^{-At} = \begin{pmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t, \end{pmatrix}.$$

*Assim, tomando o fluxo do sistema não perturbado de* (2.20), $\Phi(t) = e^{At}Y(t)$, *onde*

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \end{pmatrix} \quad e \quad Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix},$$

*temos*

$$\begin{pmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \operatorname{sen} t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$$

*Ou seja,*

$$\begin{cases} \Phi_1(t) = y_1(t)\cos t + y_2(t)\,\mathrm{sen}\, t \\ \Phi_2(t) = -y_1(t)\,\mathrm{sen}\, t + y_2(t)\cos t \end{cases}. \tag{2.22}$$

*Então, pelo Corolário 2.1, temos*

$$\dot{Y} = \varepsilon e^{-At} g(t, e^{At}Y(t)), \tag{2.23}$$

*onde* $g(t, e^{At}Y(t)) = g(t, \Phi_1(t), \Phi_2(t)) = (0, -\Phi_2(t) + \Phi_1^2(t))$.

*Isto é, o sistema escrito explicitamente em sua forma canônica é:*

$$\begin{cases} \dot{y}_1 & = & -\varepsilon\,\mathrm{sen}\, t\Big[y_1(t)\,\mathrm{sen}\, t - y_2(t)\cos t + (y_1(t)\cos t + y_2(t)\,\mathrm{sen}\, t)^2\Big] \\ \dot{y}_2 & = & \varepsilon \cos t\Big[y_1(t)\,\mathrm{sen}\, t - y_2(t)\cos t + (y_1(t)\cos t + y_2(t)\,\mathrm{sen}\, t)^2\Big] \end{cases}.$$

**Exemplo 2.3** *Considere a equação*

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon g(t, x, \varepsilon),\ \omega > 0. \tag{2.24}$$

*A expressão (2.24) pode ser reescrita em forma de sistema como segue*

$$\begin{cases} \dot{x} & = & y \\ \dot{y} & = & -\omega^2 x + \varepsilon g(t, x, y) \end{cases}, \tag{2.25}$$

*ou equivalentemente,*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ g(t, x, y) \end{pmatrix}.$$

*A matriz fundamental de* $\dot{x} = Ax$, *onde* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$, *é dada por*

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \mathrm{sen}\, \omega t \\ -\omega\,\mathrm{sen}\, t & \omega \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

*A matriz principal* $e^{At}$ *é obtida pela Proposição 1.4, ou seja,*

$$e^{At} = \varphi(t)\varphi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \dfrac{\mathrm{sen}\, \omega t}{\omega} \\ -\omega\,\mathrm{sen}\, \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix},$$

*sua inversa é*

$$e^{-At} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & -\dfrac{\mathrm{sen}\, \omega t}{\omega} \\ \omega\,\mathrm{sen}\, \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix}.$$

*Tome o fluxo* $\Phi(t) = e^{At}Y(t)$, *onde*

$$\begin{pmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \dfrac{\mathrm{sen}\, \omega t}{\omega} \\ -\omega\,\mathrm{sen}\, \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}.$$

*Isto é,*

$$\begin{cases} \Phi_1(t) = y_1(t)\cos \omega t + \dfrac{y_2(t)\,\mathrm{sen}\, \omega t}{\omega} \\ \Phi_2(t) = -\omega y_1(t)\,\mathrm{sen}\, \omega t + y_2(t)\cos \omega t \end{cases}.$$

*Pelo Corolário 2.1 temos*

$$\dot{Y} = \varepsilon e^{-At} g(t, e^{At} Y(t)),$$

*onde* $g(t, e^{At}) = g(t, \Phi_1(t), \Phi_2(t))$. *Ou mais explicitamente, obtemos o seguinte sistema na forma canônica:*

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\varepsilon \dfrac{\operatorname{sen} \omega t}{\omega}\, g(t, \Phi_1(t), \Phi_2(t)) \\ \dot{y}_2 = \varepsilon \omega \cos \omega t\; g(t, \Phi_1(t), \Phi_2(t)) \end{cases}.$$

## 2.3 Principais resultados

Os três resultados que compõem esta seção formam a estrutura básica da Teoria da Média para E.D.O.. O primeiro teorema nos mostra que é consistente estudar o sistema inicial via sistema médio já que as soluções de ambos se aproximam. Dito isso, faz sentido então estudar existência de órbitas periódicas e estabilidade do sistema inicial por meio do sistema médio e com isso obter informações do sistema inicial como veremos no segundo e terceiro teorema deste capítulo. As versões aqui apresentadas podem ser consultadas na seção 11.8 de [15].

**Definição 2.2** *Seja* $f : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}^n$, *onde* $D = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x - x_0| < a\} \subset \mathbb{R}^n$, $a > 0$, $f$ *é contínua e* $T$*-periódica na primeira variável. A* **média de** $f$ *é dada por*

$$f^0(y) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t, y)dt, \tag{2.26}$$

*onde a variável* $y$ *é mantida constante durante o cálculo da integração.*

**Definição 2.3** *A equação*

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y), \quad y(0) = x_0 \tag{2.27}$$

*é denominada* **equação da média** *ou* **sistema médio**.

**Definição 2.4** *Seja* $f : I \times \mathbb{R}^n \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}^n$ *contínua com relação a* $t \in I \subset \mathbb{R}$ *e* $x \in D \subset \mathbb{R}^n$. *Dizemos que:*

*(i)* $f(t, x, \varepsilon) = O(\varepsilon)$, *se existe uma constante* $k$ *(que independe de* $t$, $x$ *e* $\varepsilon$*) tal que* $|f(t, x, \varepsilon)| \leq k\varepsilon$, *para todo* $(t, x, \varepsilon) \in I \times D \times (0, \varepsilon_0]$.

*(ii)* $f(t, x, \varepsilon) = O(\varepsilon)$ *na escala de tempo* $\frac{1}{\varepsilon}$, *se existem* $k_1, k_2 > 0$ *que independem de* $\varepsilon$, *tais que* $|f(t, x, \varepsilon)| \leq k_1\varepsilon$, *para todo* $t \in \left[0, \frac{k_2}{\varepsilon}\right]$, $x \in D$ *e* $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

### 2.3.1 Teorema da Média: soluções aproximadas no caso periódico

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R} \times U \times (0, \varepsilon_0] \to \mathbb{R}$. Consideremos o problema de valor inicial

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x) + \varepsilon^2 g(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0. \tag{2.28}$$

**Teorema 2.2** *Considere o problema de valor inicial (2.28) e (2.27) onde* $x, y, x_0 \in D = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x_0| < a\}$, $t \geq 0$ *e cujas soluções são* $x(t, \varepsilon)$ *e* $y(t, \varepsilon)$ *respectivamente. Suponhamos que:*

*(i) as funções* $f$, $g$ *e* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *estão definidas, são contínuas e limitadas por uma constante* $M$ *(independente de* $\varepsilon$*) em* $[0, \infty) \times D$;

*(ii)* $g$ *é Lipschitiziana em relação a* $x$;

*(iii)* $f$ *é* $T$*-periódica em* $t$ *com média* $f^0(x)$, *onde* $T$ *é constante e independe de* $\varepsilon$.

*Então,* $x(t, \varepsilon) - y(t, \varepsilon) = O(\varepsilon)$ *na escala de tempo* $\frac{1}{\varepsilon}$.

**Demonstração:**

Por hipótese, $D$ é aberto, $f$ é diferenciável e $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ é tal que $\left\|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right\| \leq M$. Pelo Corolário 1.1, segue que $f$ é Lipschitziana. Definamos $u : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}^n$ como sendo

$$u(t,x) = \int_0^t \big(f(s,x) - f^0(x)\big)\, ds.$$

As seguintes afirmações sobre $u$ são verdadeiras:

(i) $u(t,x)$ e $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ são $T$-periódicas;

(ii) $\sup\limits_{0\leq t\leq T} |u(t,x)| = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |u(t,x)|$ e $\sup\limits_{0\leq t\leq T} \left|\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right| = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \left|\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right|$;

(iii) $u(t,x)$ e $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ são limitadas.

(i) Mostremos que $u$ é $T$-periódica, isto é, $u(t,x) = u(t+T,x), T, t \geq 0$. De fato,

$$\begin{aligned} u(t+T,x) &= \int_0^{t+T} \big(f(s,x) - f^0(x)\big)\, ds \\ &= \int_0^{t} \big(f(s,x) - f^0(x)\big)\, ds + \int_t^{t+T} \big(f(s,x) - f^0(x)\big)\, ds \\ &= u(t,x) + \int_t^{t+T} \big(f(s,x) - f^0(x)\big)\, ds. \end{aligned}$$

Para isso, vejamos que $\displaystyle\int_t^{t+T} \big(f(s,x) - f^0(x)\big)\, ds = 0$. Note que

$$\begin{aligned} \int_t^{t+T} \big(f(s,x) - f^0(x)\big)\, ds &= \int_t^{t+T} f(s,x)ds - \int_t^{t+T} f^0(x)ds \\ &= \int_t^{t+T} f(s,x)ds - f^0(x)T. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Por (2.26), $f^0(x)T = \displaystyle\int_0^T f(s,x)ds$. Segue de (2.29), que

$$\begin{aligned} &\int_t^{t+T} \big(f(s,x) - f^0(x)\big)\, ds = \int_t^{t+T} f(s,x)ds - \int_0^T f(s,x)ds \\ &= \left(\int_t^T f(s,x)ds + \int_T^{t+T} f(s,x)ds\right) - \left(\int_0^t f(s,x)ds + \int_t^T f(s,x)ds\right) \\ &= \int_T^{t+T} f(s,x)ds - \int_0^t f(s,x)ds = \int_T^{t+T} f(s,x)ds - \int_0^t f(s+T,x)ds \\ &= \int_T^{t+T} f(s,x)ds - \int_T^{t+T} f(s,x)ds = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $u$ é $T$-periódica para todo $(t,x) \in [0,\infty) \times D$.

Note que $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ também é $T$-periódica, pois como

$$u(t+T,x) \;=\; u(t,x),\ x \in D,\ t \in [0,\infty),$$

então

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t+T,x) = \frac{\partial u}{\partial x}(t,x),\ x \in D,\ t \in [0,\infty).$$

(ii) Primeiramente, note que $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}}[nT,(n+1)T]$. Seja $t \in \mathbb{R}$, então existe $n_t \in \mathbb{Z}$ tal que $t \in [n_tT,(n_t+1)T]$, isto é,

$$n_tT \le t \le (n_t+1)T \Leftrightarrow n_tT \le t \le n_tT + T \Leftrightarrow 0 \le t - n_tT \le T \Leftrightarrow t - n_tT \in [0,T]\,.$$

Assim, do fato de $u(t,x)$ ser $T$-periódica, segue que $u(t,x) = u(t-n_tT,x)$ para algum $n_t \in \mathbb{Z}$. Daí, $\{u(t,x); t \in \mathbb{R}\} = \big\{u(\bar t,x); \bar t = t - n_t \in [0,T]\big\}$, isto é, $\sup\limits_{t\in\mathbb{R}}|u(t,x)| = \sup\limits_{\bar t\in[0,T]}|u(\bar t,x)|$. De modo análogo, concluímos que $\sup\limits_{0\le t\le T}\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right| = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}}\left|\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,x)\right|$.

(iii) Dado $t \ge 0$, pelo item anterior, existe $\bar t \in [0,T]$ tal que

$$u(t,x) = u(\bar t,x) \;=\; \int_0^{\bar t}(f(s,x) - f^0(x))ds = \int_0^{\bar t} f(s,x)ds - \int_0^{\bar t} f^0(x)ds.$$

Usando a desigualdade triangular, temos

$$|u(\bar t,x)| \;\le\; \left|\int_0^{\bar t} f(s,x)ds\right| + \left|\int_0^{\bar t} f^0(x)ds\right| \le \int_0^{\bar t}\Big|f(s,x)\Big|ds + \int_0^{\bar t}\Big|f^0(x)\Big|ds.$$

Como $f$ é limitada por $M$, segue que

$$\begin{aligned}
|u(\bar t,x)| \;&\le\; \int_0^{\bar t} Mds + \Big|f^0(x)\Big|\int_0^{\bar t} ds = M\bar t + \left|\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x)ds\right|\bar t \\
&\le\; M\bar t + \frac{\bar t}{T}\int_0^T \Big|f(s,x)\Big|ds = M\bar t + \frac{\bar t}{T}\int_0^T Mds \\
&=\; M\bar t + \frac{1}{T}TM\,\bar t \le 2MT.
\end{aligned}$$

Assim,

$$|u(t,x)| = |u(\bar t,x)| \le 2MT.$$

Vejamos que $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ é limitada. Seja $t \ge 0$, pelo item anterior, existe $\bar t \in [0,T]$ tal que

$$\begin{aligned}
u(t,x) = u(\bar t,x) \;&=\; \int_0^{\bar t}\Big(f(s,x) - f^0(x)\Big)ds \\
&=\; \int_0^{\bar t}\left[f(s,x) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s,x)dt\right]ds.
\end{aligned}$$

Derivando ambos os membros desta última igualdade com relação a $x$, usando a Proposição 1.2

e aplicando norma, temos

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial u}{\partial x}(\bar{t},x)\right\| &= \left\|\int_0^{\bar{t}}\frac{\partial}{\partial x}f(s,x)ds-\frac{1}{T}\int_0^T\frac{\partial}{\partial x}f(s,x)ds\right\| \\ &\leq \int_0^{\bar{t}}\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(s,x)\right\|ds+\frac{1}{T}\int_0^T\left\|\frac{\partial f}{\partial x}(s,x)\right\|ds \\ &\leq M\bar{t}+MT\leq MT+MT=2MT.\end{aligned}$$

Considere a seguinte aplicação $H:[0,+\infty)\times D\times[0,\varepsilon_1]\to\mathbb{R}^n$, $H(t,z,\varepsilon)=z+\varepsilon u(t,z)$, para a qual

$$\frac{\partial H}{\partial z}(t,z,\varepsilon)=I+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial z}(t,z)$$

Pelo item acima, $\left\|\frac{\partial u}{\partial z}(t,z)\right\|\leq 2MT$ para todo $t\geq 0$ e $z\in D$.

Tome $0<\varepsilon<\frac{1}{2MT}$. Assim, $\varepsilon\left\|\frac{\partial u}{\partial z}(t,z)\right\|<1$ e pela Proposição 1.3, temos $H(t,z,\varepsilon)=I+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial z}(t,z)$ inversível, ou seja, $\det\left(\frac{\partial H}{\partial z}(t,z,\varepsilon)\right)\neq 0$ para todo $t\in[0,\infty)$, $z\in D$ e $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$. Fixados $t,\varepsilon$, defina $H_{t,\varepsilon}:D\to\mathbb{R}^n$ por $H_{t,\varepsilon}(x)=H(t,\varepsilon,x)$. Dessa forma, $\det\left(H'_{t,\varepsilon}(x_0)\right)\neq 0$, pelo Teorema da Função Inversa 1.3, existe uma vizinhança $U$ de $x_0$ contida em $D$ tal que a restrição $H_{t,\varepsilon}\big|_U$ aplica $U$ injetivamente sobre um aberto $V$ de $\mathbb{R}^n$ e sua inversa é de classe $C^k$. Seja $x(t)$ uma solução de (2.28), defina $z(t)=H_{t,\varepsilon}^{-1}\big|_U(x(t))$, daí

$$x(t) = z(t)+\varepsilon u(t,z(t)) \tag{2.30}$$
$$\dot{x} = \dot{z}+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}(t,z)+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial z}(t,z)\dot{z}. \tag{2.31}$$

Aplicando essa mudança em (2.28), temos

$$\dot{x}=\varepsilon f(t,z+\varepsilon u(t,z))+\varepsilon^2 g(t,z+\varepsilon u(t,z),\varepsilon). \tag{2.32}$$

Por (2.30) e (2.32), segue que

$$\begin{aligned}\dot{z}+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}(t,z)+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial z}(t,z)\dot{z} &= \varepsilon f(t,z+\varepsilon u(t,z))+\varepsilon^2 g(t,z+\varepsilon u(t,z),\varepsilon) \\ \Leftrightarrow\left[I+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial z}(t,z)\right]\dot{z}+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial t}(t,z) &= \varepsilon f(t,z+\varepsilon u(t,z))+\varepsilon^2 g(t,z+\varepsilon u(t,z),\varepsilon).\end{aligned} \tag{2.33}$$

Por hipótese, $f$ é $C^1$ e, pelo modo que está definida, $f^0(z)$ também é $C^1$. Assim,

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,z)=f(t,z)-f^0(z).$$

Substituindo esta última em (2.33), obtemos

$$\begin{aligned}\left[I+\varepsilon\frac{\partial u}{\partial z}(t,z)\right]\dot{z} &= \varepsilon f(t,z+\varepsilon u(t,z))+\varepsilon^2 g(t,z+\varepsilon u(t,z),\varepsilon)-\varepsilon\left[f(t,z)-f^0(z)\right] \\ &= \varepsilon f^0(z)+\varepsilon f(t,z+\varepsilon u(t,z))-\varepsilon f(t,z)+\varepsilon^2 g(t,z+\varepsilon u(t,z),\varepsilon).\end{aligned} \tag{2.34}$$

Desse modo, temos

$$\left[I + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t,z)\right] \dot{z} = \varepsilon f^0(z) + R(t,z,\varepsilon), \tag{2.35}$$

onde

$$R(t,z,\varepsilon) = \varepsilon f(t, z + \varepsilon u(t,z)) - \varepsilon f(t,z) + \varepsilon^2 g(t, z + \varepsilon u(t,z), \varepsilon).$$

Pela Proposição 1.3, temos

$$\left(I + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t,z)\right)^{-1} = \left[I - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t,z) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z}(t,z)\right)^2 + \cdots\right].$$

Logo, por (2.35), segue que

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \left[I + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t,z)\right]^{-1} \left[\varepsilon f^0(z) + R(t,z,\varepsilon)\right] \\ &= \left[I - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t,z) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z}(t,z)\right)^2 + \cdots\right] \left[\varepsilon f^0(z) + R(t,z,\varepsilon)\right]. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Além disso, verifiquemos as duas seguintes equações

(i) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \varepsilon^k \left(\frac{\partial u}{\partial z}(t,z)\right)^k = \sum_{k=2}^{\infty} a_k = O(\varepsilon^2).$

Mostremos que $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} a_k$ é absolutamente ocnvergente. De fato, note primeiro que

$$\sum_{k=2}^{\infty}|a_k| = \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k \left(\frac{\partial u}{\partial z}(t,z)\right)^k.$$

Vimos que $\varepsilon \left\| \left(\frac{\partial u}{\partial z}(t,z)\right) \right\| < 1$. Logo, $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}|a_k|$ é uma série geométrica de razão menor que 1 e, portanto, convergente. Como toda série absolutamente convergente é convergente, segue que $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} a_k$ é convergente e, portanto, limitada. Dessa forma, ponha

$$\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \varepsilon^k \left(\frac{\partial u}{\partial z}(t,z)\right)^k = \varepsilon^2 \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \varepsilon^{k-2} \left(\frac{\partial u}{\partial z}(t,z)\right)^k,$$

onde $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k \varepsilon^{k-2} \left(\frac{\partial u}{\partial z}(t,z)\right)^k$ é limitada e assim cumpre a definição de ser $O(\varepsilon^2)$.

(ii) $R(t,z,\varepsilon) = O(\varepsilon^2)$.
Primeiramente, vimos que $f$ é Lipschitiziana com relação a segunda variável, considere $L > 0$ a constante de Lipschitz, logo

$$|f(t, z + \varepsilon u(t,z)) - f(t,z)| \leq L|z + \varepsilon u(t,z) - z| \leq 2MTL\varepsilon,$$

onde esta última desigualdade decorre do fato de que $u(t,z)$ é limitada por $2MT$.

Agora,

$$\begin{aligned}
|R(t,z,\varepsilon)| &= |\varepsilon f(t,z+\varepsilon u(t,z)) - \varepsilon f(t,z) + \varepsilon^2 g(t,z+\varepsilon u(t,z),\varepsilon)| \\
&\leq \varepsilon|f(t,z+u(t,z)) - f(t,z)| + \varepsilon^2 |g(t,z+\varepsilon u(t,z),\varepsilon)| \\
&\leq 2LM\varepsilon^2 + \varepsilon^2 M \\
&= \varepsilon^2 C
\end{aligned}$$

onde $C = 2LM + M > 0$, $t \geq 0$ e $z \in D$.

Assim, reescrevemos (2.36), como segue

$$\dot{z} = \left[ I - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t,z) + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k (\varepsilon)^k \left( \frac{\partial u}{\partial z}(t,z) \right)^k \right] \left[ \varepsilon f^0(z) + R(t,z,\varepsilon) \right].$$

Usando os itens *(i)* e *(ii)* acima, temos

$$\begin{aligned}
\dot{z} &= \left[ I - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t,z) + O(\varepsilon^2) \right] \left[ \varepsilon f^0(z) + R(t,z,\varepsilon) \right] \\
&= \varepsilon f^0(z) + R(t,z,\varepsilon) - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial z}(t,z) f^0(z) + O(\varepsilon^3) \\
&= \varepsilon f^0(z) - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial z}(t,z) f^0(z) + O(\varepsilon^2). \qquad (2.37)
\end{aligned}$$

Observe que o termo $\varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial z}(t,z) f^0(z)$ da equação (2.37) é $O(\varepsilon^2)$, podemos entendê-la da maneira que segue

$$\dot{z} = \varepsilon f^0(z) + \varepsilon^2 R^*(t,z,\varepsilon), \qquad (2.38)$$

onde

$$|R^*(t,z,\varepsilon)| < K, \ t \in \mathbb{R}, \ z \in D. \qquad (2.39)$$

Vamos mostrar que a solução $y(t)$ de (2.27) é uma aproximação para a solução $z(t)$ de (2.38). Isto é, $z(t) - y(t) = O(\varepsilon)$.

Para isto, considere a substituição $\tau = \varepsilon t \Rightarrow t = \frac{\tau}{\varepsilon}$ em (2.38), isto é,

$$\dot{z} = \varepsilon f^0 \left( z \left( \frac{\tau}{\varepsilon} \right) \right) + \varepsilon^2 R^* \left( \frac{\tau}{\varepsilon}, z\left( \frac{\tau}{\varepsilon} \right), \varepsilon \right). \qquad (2.40)$$

E ainda, faça $\varphi(\tau) = z\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)$ cuja derivada é $\varphi'(\tau) = \frac{1}{\varepsilon} z'\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)$, isto é, $z'\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) = \varepsilon \varphi'(\tau)$. Substituindo em (2.40), temos

$$\varphi'(\tau) = f^0(\varphi(\tau)) + \varepsilon R^* \left( \frac{\tau}{\varepsilon}, \varphi(\tau), \varepsilon \right), \quad \varphi(0) = x_0.$$

Portanto,

$$\varphi(\tau) = x_0 + \int_0^{\tau} f^0(\varphi(s)) + \varepsilon R^* \left( \frac{s}{\varepsilon}, \varphi(s), \varepsilon \right) ds. \qquad (2.41)$$

Aplicando a mesma mudança $t = \frac{\tau}{\varepsilon}$ em (2.27), faça $\psi(\tau) = y\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right)$ e veja que sua derivada é $\psi'(\tau) = \dfrac{1}{\varepsilon} y'\left(\dfrac{\tau}{\varepsilon}\right)$, isto é, $y'\left(\dfrac{\tau}{\varepsilon}\right) = \varepsilon\psi(\tau)$. Substituindo em (2.27), temos

$$\psi(\tau) = f^0(\psi(\tau)), \quad \psi(0) = x_0.$$

Sua solução geral é dada por

$$\psi(\tau) = x_0 + \int_0^\tau f^0(\psi(s))ds. \tag{2.42}$$

Além disso, $f^0$ é Lipschitziana, pois

$$\begin{aligned} |f^0(\varphi(s)) - f^0(\psi(s))| &= \left|\frac{1}{T}\int_0^T f(t,\varphi(s))dt - \frac{1}{T}\int_0^T f(t,\psi(s))dt\right| \\ &= \left|\frac{1}{T}\int_0^T \Big[f(t,\varphi(s)) - f(t,\psi(s))dt\Big]\right| \\ &\leq \frac{1}{T}\int_0^T |f(t,\varphi(s)) - f(t,\psi(s))|dt. \end{aligned}$$

Do fato de $f$ ser Lipschitiziana, segue que existe $L > 0$ tal que

$$|f(t,\varphi(s)) - f(t,\psi(s))| < L|\varphi(s) - \psi(s))|,$$

daí temos

$$\begin{aligned} |f^0(\varphi(s)) - f^0(\psi(s))| &\leq \frac{1}{T}\int_0^T L\Big|\varphi(s) - \psi(s))\Big|dt \\ &= L\Big|\varphi(s) - \psi(s))\Big|\frac{1}{T}\int_0^T dt \\ &= L\Big|\varphi(s) - \psi(s))\Big|. \end{aligned}$$

Agora, de (2.41) e (2.42) segue que

$$\begin{aligned} |\varphi(\tau) - \psi(\tau)| &= \Bigg|\left(x_0 + \int_0^\tau f^0(\varphi(s)) + \varepsilon R^*\left(\frac{s}{\varepsilon},\varphi(s),\varepsilon\right)ds\right) \\ &- \left(x_0 + \int_0^\tau f^0(\psi(s))ds\right)\Bigg| \\ &= \left|\int_0^\tau f^0(\varphi(s)) + \varepsilon R^*\left(\frac{s}{\varepsilon},\varphi(s),\varepsilon\right) - f^0(\psi(s))ds\right| \\ &\leq \int_0^\tau |f^0(\varphi(s)) - f^0(\psi(s))|ds + \varepsilon\int_0^\tau \left|R^*\left(\frac{s}{\varepsilon},\varphi(s),\varepsilon\right)\right|ds. \end{aligned} \tag{2.43}$$

E do fato de $f^0$ ser Lipschitziana e usando (2.39) em (2.43) segue que

$$|\varphi(\tau) - \psi(\tau)| \leq \int_0^\tau L|\varphi(s) - \psi(s)|ds + \varepsilon K\tau = \varepsilon K\tau + \int_0^\tau L|\varphi(s) - \psi(s)|ds. \tag{2.44}$$

Seja $h(\tau) = |\varphi(s) - \psi(s)|$, desse modo, reescrevemos (2.44) como segue

$$h(\tau) \leq \varepsilon K\tau + \int_0^\tau Lh(s)ds.$$

Observe que $\alpha(\tau) = \varepsilon K\tau$ e $\beta(\tau) = L$ são funções reais contínuas onde $\beta(\tau) > 0$, $\forall \tau \in \mathbb{R}$. Assim, pela desigualdade de Gronwall, Teorema 1.11, temos:

$$\begin{aligned} h(\tau) &\leq \alpha(\tau) + \int_0^\tau \beta(s)\alpha(s)e^{\int_s^\tau \beta(r)dr}ds \\ &\leq \varepsilon K\tau + \int_0^\tau L\varepsilon K s e^{\int_s^\tau L dr}ds \\ &= \varepsilon K\tau + \int_0^\tau L\varepsilon K s e^{(\tau-s)L}ds = \varepsilon K\tau + \varepsilon K \int_0^\tau L s e^{L\tau}e^{-Ls}ds \\ &= \varepsilon K\tau + \varepsilon K e^{L\tau}\int_0^\tau L s e^{-Ls}ds = \varepsilon K\tau + \varepsilon K e^{L\tau}\left[-\tau e^{-L\tau} - \frac{e^{-L\tau}}{L} + \frac{1}{L}\right] \\ &= \varepsilon K\tau - \varepsilon K\tau - \frac{\varepsilon K}{L} + \varepsilon K\frac{e^{L\tau}}{L} = \frac{\varepsilon K}{L}\left(e^{L\tau} - 1\right). \end{aligned}$$

Mas, $h(\tau) = |\varphi(\tau) - \psi(\tau)|$, daí

$$|\varphi(\tau) - \psi(\tau)| \leq \frac{\varepsilon K}{L}\left(e^{L\tau} - 1\right), \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0. \tag{2.45}$$

Agora, suponha $0 < \tau < k \leq 1$. Assim, $0 < \frac{\varepsilon K}{L}\left(e^{L\tau} - 1\right) \leq \frac{\varepsilon K}{L}\left(e^{Lk_1} - 1\right) = k_2\varepsilon > 0$, onde $k_2 = \frac{K}{L}(e^{lk_1} - 1)$ e (2.45) fica

$$|\varphi(\tau) - \psi(\tau)| \leq k_2\varepsilon, \qquad 0 < \tau \leq k_1,$$

ou ainda,

$$|\varphi(t\varepsilon) - \psi(t\varepsilon)| \leq k_2\varepsilon, \qquad 0 < t\varepsilon \leq k_1. \tag{2.46}$$

Além disso, $\varphi(t\varepsilon) = z(t)$ e $\psi(t\varepsilon) = y(t)$. Portanto, por (2.46), segue que

$$|z(t) - y(t)| < k_2\varepsilon, \quad 0 < t \leq \frac{k_1}{\varepsilon}.$$

Isto é, $z(t,\varepsilon) - y(t,\varepsilon) = O(\varepsilon)$ na escala de tempo $\frac{1}{\varepsilon}$.

Para concluirmos o resultado do teorema, precisamos mostrar que $x(t,\varepsilon) - y(t,\varepsilon) = O(\varepsilon)$. De fato,

$$\begin{aligned} |x(t,\varepsilon) - y(t,\varepsilon)| &= |x(t,\varepsilon) - z(t,\varepsilon) + z(t,\varepsilon) - y(t,\varepsilon)| \\ &\leq |x(t,\varepsilon) - z(t,\varepsilon)| + |z(t,\varepsilon) - y(t,\varepsilon)| \\ &\leq |\varepsilon u(t, z(t))| + k_2\varepsilon \leq 2MT\varepsilon + k_2\varepsilon \\ &= \varepsilon(2MT + k_2) = C\varepsilon, \end{aligned}$$

para $0 < t \leq \frac{k_1}{\varepsilon}$ com $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ e $C = 2MT + k_2$.

■

#### 2.3.1.1 Exemplos

Os próximos exemplos ilustram a aplicação dos dois últimos resultados em que $\big(x(t), y(t)\big)$ sempre irá representar a solução do sistema inicial.

**Exemplo 2.4** *Considere a equação*

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(-\dot{x} + x^2), \tag{2.47}$$

*para a qual consideramos* $f(x, \dot{x}) = -\dot{x} + x^2$.

*Pela mudança de variáveis vista no Exemplo 2.1, obtemos o sistema em sua forma canônica*

$$\begin{cases} \dot{r} = & -\varepsilon f_1(r, \psi) \\ \\ \dot{\psi} = & -\varepsilon f_2(r, \psi) \end{cases},$$

*onde*

$$\begin{aligned} f_1(r, \psi) &= r(t) \operatorname{sen}^2(t + \psi(t)) + r^2(t) \operatorname{sen}(t + \psi(t)) \cos^2(t + \psi(t)) \\ &= r(t) \operatorname{sen}(t + \psi(t)) \left[\operatorname{sen}(t + \psi(t)) + r(t) \cos^2(t + \psi(t))\right] \end{aligned}$$

*e*

$$\begin{aligned} f_2(r, \psi) &= \operatorname{sen}(t + \psi(t)) \cos(t + \psi(t)) + r(t) \cos^3(t + \psi(t)) \\ &= \cos(t + \psi(t)) \left[\operatorname{sen}(t + \psi(t)) + r(t) \cos^2(t + \psi(t))\right]. \end{aligned}$$

*Note que* $(f_1(r, \psi), f_2(r, \psi))$ *satisfaz as hipóteses do Teorema 2.2, isto é, é* $2\pi$*-periódica e tem suas derivadas parciais definidas e contínuas. Além disso, considerando* $r$ *limitada, temos que* $(f_1(r, \psi), f_2(r, \psi))$ *também será e sua média é dada por*

$$\begin{aligned} f_1^0(r, \psi) = f_1^0(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\psi}^{2\pi+\psi} r \operatorname{sen}^2 s + r^2 \operatorname{sen} s \cos^2 s ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( \int_{\psi}^{2\pi+\psi} r \operatorname{sen}^2 s ds + \int_{\psi}^{2\pi+\psi} r^2 \operatorname{sen} s \cos^2 s ds \right) = \frac{1}{2} r. \end{aligned}$$

*Enquanto que*

$$f_2^0(r, \psi) = f_2^0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(t + \psi) \cos(t + \psi) + r \cos^3(t + \psi) dt = 0.$$

*Como o sistema médio é dado por* $\dot{y} = \varepsilon f^0(y),\ y(0) = x_0$, *temos*

$$\begin{cases} \dot{r}_a = & -\varepsilon f_1^0(r_a) = -\varepsilon \frac{1}{2} r_a, \quad r_a = r(0) \\ \\ \dot{\psi}_a = & -\varepsilon f_2^0(r_a) = 0, \quad \psi_a(t) = \psi(0) \end{cases}, \tag{2.48}$$

*cuja solução é*

$$\begin{pmatrix} r_a(t) \\ \psi_a(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(0) e^{-\frac{\varepsilon}{2} t} \\ \psi(0) \end{pmatrix}.$$

*Dessa forma, como as hipóteses do Teorema 2.2 foram satisfeitas, segue que*

$$\begin{pmatrix} r(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_a(t) \\ \psi_a(t) \end{pmatrix} = O(\varepsilon) \text{ na escala de tempo } \frac{1}{\varepsilon}.$$

*Isto é, existem* $k_1, k_2 > 0$ *tais que* $\left|\Big(r(t), \psi(t)\Big)\right| \leq k_1$ *e* $t \in \left[0, \dfrac{k_2}{\varepsilon}\right]$*. Queremos mostrar que*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_a(t) \\ y_a(t) \end{pmatrix} = O(\varepsilon) \text{ na escala de tempo } \frac{1}{\varepsilon}.$$

*Como* $x(t) = r(t)\cos(t + \psi(t))$*, então* $x_a(t) = r_a(t)\cos(t + \psi_a(t))$ *e:*

$$\begin{aligned} |x(t) - x_a(t)| &= |r(t)\cos(t+\psi(t)) - r_a(t)\cos(t+\psi_a(t))| \\ &= |r(t)\cos(t+\psi(t)) - r_a(t)\cos(t+\psi(t)) + r_a(t)\cos(t+\psi(t)) - r_a(t)\cos(t+\psi_a(t))| \\ &\leq |\cos(t+\psi(t))|\,|(r(t)-r_a(t))| + |r_a(t)|\,|\cos(t+\psi(t)) - \cos(t+\psi_a(t))|, \end{aligned} \tag{2.49}$$

*onde* $t \in \left[0, \dfrac{k_2}{\varepsilon}\right]$.

*Considere* $\psi$ *limitada. Pelo fato da função cosseno ser lipschitziana, segue que existe* $L > 0$ *tal que* $|\cos(t+\psi(t)) - \cos(t+\psi_a(t))| \leq L|\psi(t) - \psi_a(t)|$*. Além disso,* $r(t) - r_a(t) = 0(\varepsilon)$ *e* $r_a$ *é limitada, digamos por* $M$*, para* $t \in \left[0, \dfrac{k_2}{\varepsilon}\right]$*. Dessa forma, por (2.49) segue que*

$$|x(t) - x_a(t)| \leq k_1\varepsilon + ML|\psi(t) - \psi_a(t)|.$$

*Agora, como* $|\psi(t) - \psi_a(t)| = O(\varepsilon)$ *na escala de tempo* $\dfrac{1}{\varepsilon}$*, segue que*

$$|x(t) - x_a(t)| \leq k_1\varepsilon + MLk_1\varepsilon = (k_1 + k_1ML)\varepsilon = K\varepsilon,$$

*onde* $t \in \left[0, \dfrac{k_2}{\varepsilon}\right]$*. Logo,* $x(t) - x_a(t) = O(\varepsilon)$ *na escala de tempo* $\dfrac{1}{\varepsilon}$.

*Analogamente, como* $y(t) = -r(t)\operatorname{sen}(t+\psi(t))$*, então* $y_a(t) = -r_a(t)\operatorname{sen}(t+\psi_a(t))$ *e segue pelo mesmo raciocínio empregado acima que* $y(t) - y_a(t) = O(\varepsilon)$ *na escala de tempo* $\dfrac{1}{\varepsilon}$.

**Exemplo 2.5** *Considere a equação*

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, \dot{x}).$$

*Usando a mudança de variáveis vista no Exemplo 2.1, obtemos o sistema em sua forma canônica*

$$\begin{cases} \dot{r} = & -\varepsilon \operatorname{sen}(t+\psi) f(r\cos(t+\psi), -r\operatorname{sen}(t+\psi)) \\ \\ \dot{\psi} = & -\dfrac{\varepsilon}{r} f(r\cos(t+\psi), -r\operatorname{sen}(t+\psi)) \end{cases}.$$

*As respectivas médias* $f_1(r,\psi)$ *e* $f_2(r,\psi)$ *das funções do lado direito da igualdade de cada uma das equações acima são*

$$\begin{aligned} f_1^0(r,\psi) = f_1^0(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(t+\psi) f(r\cos(t+\psi), -r\operatorname{sen}(t+\psi))dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_\psi^{2\pi+\psi} \operatorname{sen} s\, f(r\cos s, -r\operatorname{sen} s)ds \end{aligned}$$

*e, do fato de $f$ ser $2\pi$-periódica em $t$, segue que*

$$f_1^0(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} s f(r\cos s, -r\operatorname{sen} s)ds.$$

*Além disso, também temos*

$$\begin{aligned} f_2^0(r,\psi) = f_2^0(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(t+\psi) f(r\cos(t+\psi), -r\operatorname{sen}(t+\psi))dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi}\int_\psi^{2\pi+\psi} \cos(s) f(r\cos(s), -r\operatorname{sen}(s))ds \end{aligned}$$

*e, novamente pelo fato de $f$ ser $2\pi$-periódica temos*

$$f_2^0(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos(s) f(r\cos(s), -r\operatorname{sen}(s))ds.$$

*Isto é, temos o seguinte sistema médio*

$$\begin{cases} \dot{r}_a = & -\varepsilon f_1^0(r_a), \quad r_a(0) = r(0) \\ \dot{\psi}_a = & -\dfrac{\varepsilon}{r_a} f_2^0(\psi), \quad \psi_a(0) = \psi(0) \end{cases}.$$

*Vejamos o exemplo acima em um caso mais concreto, para isto, considere a equação de Van Der Pol:*

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1-x^2)\dot{x}.$$

*Seja $f(x,\dot{x}) = (1-x^2)\dot{x}$ e tome a mudança de variáveis (2.22), de forma a obter*

$$\begin{cases} \dot{r} = & -\varepsilon\operatorname{sen}(t+\psi) f(r\cos(t+\psi), -r\operatorname{sen}(t+\psi)) \\ \dot{\psi} = & -\dfrac{\varepsilon}{r} f(r\cos(t+\psi), -r\operatorname{sen}(t+\psi)) \end{cases},$$

*isto é,*

$$\begin{cases} \dot{r} = & -\varepsilon\operatorname{sen}(t+\psi)\left[1 - r^2\cos^2(t+\psi)(-r\operatorname{sen}(t+\psi))\right] \\ \dot{\psi} = & -\dfrac{\varepsilon}{r}\left[1 - r^2\cos^2(t+\psi)(-r\operatorname{sen}(t+\psi))\right] \end{cases},$$

*ou ainda,*

$$\begin{cases} \dot{r} = & -\varepsilon r\operatorname{sen}^2(t+\psi) - \varepsilon r^3\operatorname{sen}^2(t+\psi)\cos^2(t+\psi) \\ \dot{\psi} = & \varepsilon\operatorname{sen}(t+\psi)\cos(t+\psi) - \varepsilon r^2\operatorname{sen}(t+\psi)\cos^3(t+\psi) \end{cases}, \tag{2.50}$$

*cujas médias são dadas por*

$$f_1^0(r,\psi) = f_1^0(r) = \frac{1}{2\pi}\int_\psi^{2\pi+\psi} r\operatorname{sen}^2 s - r^3\operatorname{sen}^2 s\cos^2 s ds = \frac{r}{2} - \frac{1}{8}r^3 = \frac{1}{2}\varepsilon r\left(1 - \frac{1}{4}r^2\right)$$

*e*

$$f_2^0(r,\psi) = f_2^0(r) = 0.$$

*Desse modo, temos o sistema médio*

$$\left\{\begin{array}{ll}\dot{r}_a & = f_1^0(r_a) = \frac{1}{2}\varepsilon r_a\left(1-\frac{1}{4}r_a^2\right), r_a(0)=r(0)\\ \\ \dot{\psi}_a & = f_2^0(\psi_a) = 0, \psi_a(0)=\psi(0)\end{array}\right.,$$

*cujas soluções são*

$$r_a(t) = \frac{r(0)e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}}{\left[1+\frac{1}{4}r^2(0)\left(e^{\varepsilon t}-1\right)\right]^{\frac{1}{2}}} \text{ e } \psi_a(t)=\psi(0).$$

*Como* $(f_1(r,\psi), f_2(r,\psi))$ *está sob as condições do Teorema 2.2, temos*

$$\begin{pmatrix} r(t)\\ \psi(t)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_a(t)\\ \psi_a(t)\end{pmatrix} = O(\varepsilon) \text{ na escala de tempo } \frac{1}{\varepsilon}.$$

*Por um argumento análogo ao usado no exemplo anterior, segue que*

$$\begin{pmatrix} x(t)\\ y(t)\end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_a(t)\\ y_a(t)\end{pmatrix} = O(\varepsilon) \text{ na escala de tempo } \frac{1}{\varepsilon}.$$

**Exemplo 2.6** *Considere a equação de Mathieu*

$$\ddot{x}+x = -2x\varepsilon\cos 2t$$
$$x(0)=x_0, \quad \dot{x}(0)=0,$$

*reescrita como segue*

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \varepsilon\begin{pmatrix}0\\ -2x\cos 2t\end{pmatrix}.$$

*Note que este sistema é o mesmo visto no Exemplo 2.3 tomando* $\omega=1$, $g(t,x,\varepsilon)=-2x\cos 2t$ *e a mudança de variáveis, temos*

$$\left\{\begin{array}{lll}\dot{y}_1 = & 2\varepsilon\,\mathrm{sen}\,t(y_1\cos t+y_2\,\mathrm{sen}\,t)\cos 2t, & y_1(0)=x_0\\ \dot{y}_2 = & -2\varepsilon\cos t(y_1\cos t+y_2\,\mathrm{sen}\,t)\cos 2t, & y_2(0)=0\end{array}\right..$$

*Considerando o sistema médio*

$$\left\{\begin{array}{ll}\dot{y}_{1a} = \varepsilon f_1^0(y_{1a},y_{2a}), & y_{1a}(0)=x_0\\ \dot{y}_{2a} = \varepsilon f_2^0(y_{1a},y_{2a}), & y_{2a}(0)=0\end{array}\right., \tag{2.51}$$

*onde*

$$\begin{aligned} f_1^0(y_{1a},y_{2a}) = f_1^0(y_{2a}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2\,\mathrm{sen}\,t\cos 2t(y_{1a}\cos t+y_{2a}\,\mathrm{sen}\,t)dt = -\frac{1}{2}y_{2a}\\ f_2^0(y_{1a},y_{2a}) = f_2^0(y_{1a}) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} -2\cos t\cos 2t(y_{1a}\cos t+y_{2a}\,\mathrm{sen}\,t)dt = -\frac{1}{2}y_{1a},\end{aligned}$$

*por* (2.51) *temos*

$$\begin{cases} \dot{y}_{1a} = -\varepsilon \dfrac{1}{2} y_{2a}, & y_{1a}(0) = x_0 \\ \\ \dot{y}_{2a} = -\varepsilon \dfrac{1}{2} y_{1a}, & y_{2a}(0) = 0 \end{cases},$$

*cuja solução é dada por*

$$\begin{pmatrix} y_{1a} \\ y_{2a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} x_0 e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t} + \dfrac{1}{2} x_0 e^{\frac{1}{2}\varepsilon t} \\ \\ \dfrac{1}{2} x_0 e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t} - \dfrac{1}{2} x_0 e^{\frac{1}{2}\varepsilon t} \end{pmatrix}. \tag{2.52}$$

*Assim, pelo Teorema* 2.2, *segue que*

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_{1a}(t) \\ y_{2a}(t) \end{pmatrix} = O(\varepsilon) \textit{na escala de tempo } \frac{1}{\varepsilon}.$$

*Por um argumento análogo ao utilizado no Exemplo* 2.4, *segue que*

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_{1a}(t) \\ y_{2a}(t) \end{pmatrix} = O(\varepsilon) \textit{na escala de tempo } \frac{1}{\varepsilon}.$$

### 2.3.2 Teorema da Existência de Órbitas Periódicas

Vejamos um resultado que será utilizado na demonstração do próximo teorema.

**Proposição 2.1** *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}^n$, $f$ é $T$-periódica em $t$ e de classe $C^1$. Considere a equação*

$$\dot{x} = f(t, x). \tag{2.53}$$

*Então, $x(t)$ é uma solução $T$-periódica de (2.53) se, e somente se, $x(0) = x(T)$.*

**Demonstração:**

[$\Rightarrow$] Como $x(t)$ é uma solução $T$-periódica de (2.53), então $x(t) = x(t + T)$ para todo $t$, em particular para $t = 0$, temos $x(0) = x(T)$.

[$\Leftarrow$] Por hipótese, $x'(t) = f(t, x(t))$, então

$$x'(t + T) = f(t + T, x(t + T)) = f(t, x(t + T)), \tag{2.54}$$

pois, $f$ é $T$-periódica com relação à $t$. Defina $y(t) = x(t + T)$. Note que $y(0) = x(T)$ e, por hipótese, segue que $x(T) = x(0)$. Assim, por (2.54), temos $y'(t) = f(t, y(t))$. Dessa forma, $y(t)$ é solução de (2.53), pois a satisfaz e passa por $y(0) = x(0)$. Sendo $x(t)$ também uma solução de (2.53), segue pela unicidade de soluções, que $x(t) = y(t) = x(t + T)$, ou seja, $x(t) = x(t + T)$. Logo, $x(t)$ é $T$-periódica.

■

No teorema a seguir considere $f$ de classe $C^2$ e $g$ de classe $C^1$.

**Teorema 2.3** *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}^n$ e $g : \mathbb{R} \times U \times [0, \varepsilon_0] \to \mathbb{R}^n$. Considere a equação*

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x) + \varepsilon^2 g(t, x, \varepsilon). \tag{2.55}$$

*Suponhamos que $f, g, \dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ e $\dfrac{\partial g}{\partial x}$ são definidas, contínuas e limitadas por $M$. Além disso, suponha $f$ e $g$ $T$-periódicas com respeito a variável $t$ ($T$ independe de $\varepsilon$). Se $p$ é um ponto crítico da equação da média, isto é, $f^0(p) = 0$, e se $\det\left(\dfrac{\partial f^0}{\partial y}(p)\right) \neq 0$, então existe uma solução $\phi(t, \varepsilon)$ $T$-periódica de (2.55) e $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \phi(t, \varepsilon) = p$.*

**Demonstração:**

Assim como foi feito no Teorema 2.2, vamos aplicar a mesma mudança de variáveis $x(t) = z(t) + \varepsilon u(t, z(t))$ de modo a obter

$$\dot{z} = \varepsilon f^0(z) + \varepsilon^2 R^*(t, z, \varepsilon), \text{ onde } R^*(t, z, \varepsilon) < K, t \in \mathbb{R}, z \in U. \tag{2.56}$$

Seja $\Phi(t, z, \varepsilon)$ o fluxo de 2.56, pelo Teorema (1.15) sabemos que $\Phi(t, z, \varepsilon)$ é de classe $C^1$. Pela Fórmula de Taylor com resto integral, temos:

$$\Phi(t, z, \varepsilon) = \Phi_0(t, z) + \varepsilon \Phi_1(t, z) + r_1(t, z, \varepsilon), \tag{2.57}$$

onde,

$$r_1(t, z, \varepsilon) = \int_0^1 (1 - s) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varepsilon^2}(s, z, s\varepsilon) \cdot \varepsilon^2 ds = \varepsilon^2 \overline{r}_1(t, z, \varepsilon).$$

Substituindo (2.57) em (2.56), temos

$$\begin{aligned}&\Phi_0'(t,z)+\varepsilon\Phi_1'(t,z)+\varepsilon^2\overline{r}_1'(t,z,\varepsilon)=\\&\varepsilon f^0(\Phi_0(t,z)+\Phi_1(t,z)\varepsilon+\varepsilon^2\overline{r}_1(t,z,\varepsilon))+\varepsilon^2R^*(t,\Phi_0(t,z)+\Phi_1(t,z)\varepsilon+\varepsilon^2\overline{r}_1(t,z,\varepsilon),\varepsilon).\end{aligned}\tag{2.58}$$

Agora, como $|R^*(t,z,\varepsilon)|\leq K$, então $\varepsilon^2R^*\Big(t,\Phi_0(t,z)+\varepsilon\Phi_1(t,z)+\varepsilon^2\overline{r}_1(t,z,\varepsilon),\varepsilon\Big)=O(\varepsilon^2)$. Assim, por (2.58), segue que

$$\Phi_0'(t,z)+\varepsilon\Phi_1'(t,z)+\varepsilon^2\overline{r}_1'(t,z,\varepsilon)=\varepsilon f^0\Big(\Phi_0(t,z)+\varepsilon\Phi_1(t,z)+\varepsilon^2\overline{r}_1(t,z,\varepsilon)\Big)+O(\varepsilon^2).\tag{2.59}$$

Considere a Fórmula de Taylor para $f^0\Big(\Phi_0(t,z)+\varepsilon\Phi_1(t,z)+\varepsilon^2\overline{r}_1(t,z,\varepsilon)\Big)$ em $\varepsilon=0$, isto é,

$$f^0\Big(\Phi_0(t,z)+\varepsilon\Phi_1(t,z)+\varepsilon^2\overline{r}_1(t,z,\varepsilon)\Big)=f^0(\Phi_0(t,z))+O(\varepsilon^2).$$

Assim, por (2.59) temos

$$\begin{aligned}\Phi_0'(t,z)+\varepsilon\Phi_1'(t,z)+\varepsilon^2\overline{r}_1'(t,z,\varepsilon)&=\varepsilon f^0(\Phi_0(t,z))+O(\varepsilon^2)\\&=\varepsilon f^0\left(\Phi_0(t,z)\right)+\varepsilon^2S(t,z,\varepsilon),\end{aligned}\tag{2.60}$$

onde $|S(t,z,\varepsilon)|< c$.

Por hipótese, $0\leq\varepsilon\leq\varepsilon_0$, façamos $\varepsilon=0$ em (2.60). Desse modo,

$$\Phi_0'(t,z)=0\tag{2.61}$$

e podemos reescrever (2.60) como segue

$$\varepsilon\Phi_1'(t,z)+\varepsilon^2\overline{r}_1'(t,z,\varepsilon)=\varepsilon f^0(\Phi_0(t,z))+\varepsilon^2S(t,z,\varepsilon).$$

Agora suponha $\varepsilon\neq0$ e simplifiquemos a equação acima por $\varepsilon$, isto é,

$$\Phi_1'(t,z)+\varepsilon\overline{r}_1'(t,z,\varepsilon)=f^0(\Phi_0(t,z))+\varepsilon S(t,z,\varepsilon).$$

Fazendo $\varepsilon\to0^+$, temos

$$\Phi_1'(t,z)=f^0(\Phi_0(t,z)).$$

Agora pela propriedade de fluxo sabemos que

$$\Phi(0,z,\varepsilon)=z.\tag{2.62}$$

Fazendo $t=0$ em (2.57), temos

$$z=\Phi(0,z,\varepsilon)=\Phi_0(0,z)+\varepsilon\Phi_1(0,z)+\varepsilon^2\overline{r}_1(0,z,\varepsilon).\tag{2.63}$$

Fazendo $\varepsilon=0$ em (2.57), obtemos

$$\Phi(0,z,\varepsilon)=\Phi_0(t,z)\tag{2.64}$$

Por este último e (2.62), segue que

$$\Phi_0(t,z)=z.\tag{2.65}$$

Assim, por (2.63), segue que

$$\Phi(0, z, \varepsilon) = z + \varepsilon\Phi_1(0, z) + \varepsilon^2\overline{r}_1(0, z, \varepsilon) = z.$$

Daí,

$$\varepsilon\Phi_1(0, z) + \varepsilon^2\overline{r}_1(0, z, \varepsilon) = 0.$$

Simplificando esta última por $\varepsilon \neq 0$ e fazendo $\varepsilon \to 0^+$, obtemos

$$\Phi_1(t, z) = 0. \tag{2.66}$$

Por (2.61), (2.65) e (2.3.2), (2.66), temos

$$\begin{cases} \Phi_0'(t, z) = 0 \\ \Phi_0(0, z) = z \end{cases} \tag{2.67}$$

e

$$\begin{cases} \Phi_1'(t, z) = f^0(\Phi_0(t, z)) \\ \Phi_1(0, z) = 0 \end{cases} \tag{2.68}$$

A solução de (2.67) é $\Phi_0(t, z) = z$. Substituindo em (2.68), reescrevemos

$$\begin{cases} \Phi_1'(t, z) = f^0(z) \\ \Phi_1(0, z) = 0 \end{cases},$$

cuja solução é $\Phi_1(t, z) = tf^0(z)$.
Assim, por (2.57), temos

$$\Phi(t, z, \varepsilon) = z + \varepsilon t f^0(z) + \varepsilon^2\overline{r}_1(t, z, \varepsilon),$$

onde $0 \leq t \leq T$. Queremos mostrar que $\Phi(t, z, \varepsilon)$ é solução $T$-periódica de (2.56), isto é, precisamos que o fluxo atenda a condição da Proposição 2.1, ou seja,

$$\begin{aligned} \Phi(0, z, \varepsilon) &= \Phi(T, z, \varepsilon) \\ \Leftrightarrow z &= z + \varepsilon T f^0(z) + \varepsilon^2\overline{r}_1(T, z, \varepsilon) \\ \Leftrightarrow 0 &= \varepsilon T f^0(z) + \varepsilon^2\overline{r}_1(t, z, \varepsilon). \end{aligned}$$

Suponhamos $\varepsilon \neq 0$, daí, $Tf^0(z) + \varepsilon\overline{r}_1(t, z, \varepsilon) = 0$. Agora, definamos

$$H(\varepsilon, z) = Tf^0(z) + \varepsilon\overline{r}_1(t, z, \varepsilon).$$

Note que $H$ é de classe $C^1$, pois é soma de funções de classe $C^1$ e, ainda, $H(0, p) = 0$, pois por hipótese $f^0(p) = 0$. Além disso,

$$\frac{\partial H}{\partial z}(\varepsilon, z) = T\frac{\partial f^0}{\partial z}(z) + \varepsilon\frac{\partial \overline{r}_1}{\partial z}(t, z, \varepsilon) \quad \text{e}$$

$$\frac{\partial H}{\partial z}(0, z) = T\frac{\partial f^0}{\partial z}(z).$$

Observe que $\det\left(\frac{\partial H}{\partial z}(0, p)\right) = T^n \det\left(\frac{\partial f^0}{\partial z}(p)\right)$ e, por hipótese, $\det\left(\frac{\partial f^0}{\partial z}(p)\right) \neq 0$, então $\det\left(\frac{\partial H}{\partial z}(0, p)\right) \neq 0$. Sendo assim, $H$ está sob as condições do Teorema da Função Implícita

1.4, isto é, existe um aberto $V \subset \mathbb{R}$ contendo 0, um aberto $Z \subseteq U$ contendo $(0, p)$ e uma única função $g : V \to \mathbb{R}^n$ de classe $C^1$ tal que $(\varepsilon, g(\varepsilon)) \in Z$ e $H(\varepsilon, g(\varepsilon)) = 0$.

Agora, do fato de $H(\varepsilon, g(\varepsilon)) = 0$, temos

$$H(\varepsilon, g(\varepsilon)) = 0 \Leftrightarrow \Phi(0, g(\varepsilon), \varepsilon) = \Phi(T, g(\varepsilon), \varepsilon).$$

Isto é, a condição da Proposição 2.1 é atendida sendo, portanto, $\Phi(t, g(\varepsilon), \varepsilon)$ solução $T$-periódica de

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{z} = \varepsilon f^0(z) + \varepsilon^2 R^*(t, z, \varepsilon) \\ z(0) = g(\varepsilon) \end{array} \right. . \tag{2.69}$$

Além disso, temos

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \Phi(t, g(\varepsilon), \varepsilon) = \Phi(t, g(0), 0) = \Phi(t, p, 0) = p. \tag{2.70}$$

Agora, como havíamos tomado a mudança de variáveis $x(t) = z(t) + \varepsilon u(t, z(t))$ e $\Phi$ é solução de (2.69), temos

$$x(t, g(\varepsilon), \varepsilon) = \Phi(t, g(\varepsilon), \varepsilon) + \varepsilon u(t, \Phi(t, g(\varepsilon), \varepsilon)) \tag{2.71}$$

e tomando o limite, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \to 0} x(t, g(\varepsilon), \varepsilon) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \Big[ \Phi(t, g(\varepsilon), \varepsilon) + \varepsilon u(t, \Phi(t, g(\varepsilon), \varepsilon)) \Big] \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \Phi(t, g(\varepsilon), \varepsilon) + \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon u(t, \Phi(t, g(\varepsilon), \varepsilon)). \end{aligned} \tag{2.72}$$

Pelo fato de $u$ ser limitada, por (2.70) e (2.72), segue que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x(t, g(\varepsilon), \varepsilon) = p. \tag{2.73}$$

Note ainda que por (2.71), $x(t, g(\varepsilon), \varepsilon)$ é $T$-periódica já que $\Phi$ e $u$ o são. Assim, $x(t, g(\varepsilon), \varepsilon)$ é uma solução $T$-periódica de (2.55) que satisfaz (2.73).

■

### 2.3.3 Teorema da Estabilidade de Órbitas Periódicas

**Teorema 2.4** *Considere a equação (2.55) e suponha que as hipóteses do Teorema 2.3 sejam válidas.*

*(i) Se todos os autovalores de* $\dfrac{\partial f^0}{\partial y}(p)$ *têm parte real negativa, então a solução periódica* $\phi(t,\varepsilon)$ *de (2.55) é assintoticamente estável para* $\varepsilon$ *suficientemente pequeno.*

*(ii) Se um dos autovalores de* $\dfrac{\partial f^0}{\partial y}(p)$ *tem parte real positiva, então a solução periódica* $\phi(t,\varepsilon)$ *de (2.55) é instável.*

**Demonstração:**

(i) Conforme o Teorema 2.3, sabemos que existe uma solução $\phi(t,\varepsilon)$ $T$-periódica. A fim de provar que $\phi(t,\varepsilon)$ é assintoticamente estável faremos uso de dois teoremas que foram enunciados anteriormente, a saber, Teoremas 1.7 e 1.8.

Pela Definição 1.16, vimos que a linearização para (2.55) é dada por

$$\dot{y} = A(t,\varepsilon)y, \tag{2.74}$$

onde

$$A(t,\varepsilon) = \varepsilon\frac{\partial f}{\partial x}(t,\phi(t,\varepsilon)) + \varepsilon^2\frac{\partial g}{\partial x}(t,\phi(t,\varepsilon),\varepsilon)$$

a qual vimos ser $T$-periódica em $t$. Por hipótese, $\dfrac{\partial f^0}{\partial y}(p)$ com todos autovalores possui parte real menores que zero. Mostremos que todos os números característicos de (2.74) tem norma menor que um.

Seja $\Phi(t,y,\varepsilon)$ o fluxo de (2.74). Como $A(t,\varepsilon)$ é de classe $C^1$, pelo Teorema 1.15 segue que $\Phi(t,y,\varepsilon)$ também é de classe $C^1$ e pela Fórmula de Taylor em $\varepsilon = 0$, temos

$$\Phi(t,y,\varepsilon) = \Phi_0(t,y) + \varepsilon\Phi_1(t,y) + \varepsilon^2 R(t,y,\varepsilon), \tag{2.75}$$

onde $|R(t,y,\varepsilon)|\leq M$ com $t\in[0,T]$, $y\in B\subset\mathbb{R}^n$, $B$ compacto e $\varepsilon\in[0,\varepsilon_0]$.
Seja $M(t,\varepsilon)$ a matriz principal de (2.74). Pela Proposição 1.5, existe uma matriz não singular $D$ tal que $M(t+T,\varepsilon) = M(t,\varepsilon)D$, cujos números característicos de (2.74) são os autovalores de $D$. Note que

$$M(T,\varepsilon) = M(0,\varepsilon) = I\cdot D = D,$$

isto é, os autovalores de $D$ são os de $M(T,\varepsilon)$. Dessa forma, vamos obter $M(T,\varepsilon)$. Consideremos para cada $j\in\{1,\dots,n\}$, o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{y} = A(t,\varepsilon)y \\ y(0) = e_j \end{cases}, \tag{2.76}$$

onde $\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$ é base canônica de $\mathbb{R}^n$. Vamos obter a matriz principal $M(t,\varepsilon)$ de (2.76) utilizando (2.75), isto é, vamos calcular $\Phi(t,e_j,\varepsilon)$. Denotemos

$$\begin{aligned} \Phi(t,e_j,\varepsilon) &= \Phi_0(t,e_j) + \varepsilon\Phi_1(t,e_j) + \varepsilon^2 R(t,e_j,\varepsilon) \\ &= \Phi_0(t) + \varepsilon\Phi_1(t) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{2.77}$$

Como $\Phi(t, e_j, \varepsilon)$ é o fluxo de (2.76), então o mesmo o satisfaz. Isto é,

$$\Phi_0'(t) + \varepsilon\Phi_1'(t) + O'(\varepsilon^2) = A(t,\varepsilon)\left[\Phi_0(t) + \varepsilon\Phi_1(t) + O(\varepsilon^2)\right], \tag{2.78}$$

onde $O'(\varepsilon^2) = \overline{O}(\varepsilon^2)$ [1]. Isto é, existe uma função $r(t, y, \varepsilon)$ tal que $O(\varepsilon^2) = \varepsilon^2 r(t, y, \varepsilon)$ com $|r(t, y, \varepsilon)| \leq c$, $t \in [0, T]$, $y \in B$ e $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Sendo assim, $O'(\varepsilon^2) = r'(t, y, \varepsilon) = \overline{O}(\varepsilon^2)$. Para reduzir notação, vamos denotar $\overline{O}(\varepsilon^2)$ por $O(\varepsilon^2)$.

Agora, por (2.78) e pelo comentário feito acima, temos

$$\begin{aligned} \Phi_0'(t) + \varepsilon\Phi_1'(t) + O(\varepsilon^2) &= A(t,\varepsilon)\left[\Phi_0(t) + \varepsilon\Phi_1(t) + O(\varepsilon^2)\right] \\ &= \varepsilon\left[\frac{\partial f}{\partial x}(t, \phi(t,\varepsilon)) + \varepsilon\frac{\partial g}{\partial x}(t, \phi(t,\varepsilon), \varepsilon)\right]\left[\Phi_0(t) + \varepsilon\Phi_1(t) + O(\varepsilon^2)\right] \\ &= \varepsilon\left[\frac{\partial f}{\partial x}(t, \phi(t,0)) + O(\varepsilon)\right]\left[\Phi_0(t) + \varepsilon\Phi_1(t) + O(\varepsilon^2)\right], \end{aligned} \tag{2.79}$$

onde na última igualdade foi usada a Fórmula de Taylor em $\varepsilon = 0$ para o termo $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t, \phi(t,\varepsilon)) + \varepsilon\dfrac{\partial g}{\partial x}(t, \phi(t,\varepsilon), \varepsilon)$. Pelo Teorema 2.3, vimos que $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \Phi(t, \varepsilon) = p$. Assim, reescrevemos (2.79) como sendo

$$\begin{aligned} \Phi_0'(t) + \varepsilon\Phi_1'(t) + O(\varepsilon^2) &= \varepsilon\left[\frac{\partial f}{\partial x}(t, p) + O(\varepsilon)\right]\left[\Phi_0(t) + \varepsilon\Phi_1(t) + O(\varepsilon^2)\right] \\ &= \varepsilon\frac{\partial f}{\partial x}(t, p)\Phi_0(t) + O(\varepsilon^2). \end{aligned} \tag{2.80}$$

Por hipótese, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$. Façamos $\varepsilon = 0$ em (2.80), daí temos

$$\Phi_0'(t) = 0 \tag{2.81}$$

e por (2.80), temos

$$\varepsilon\Phi_1'(t) + O(\varepsilon^2) = \varepsilon\frac{\partial f}{\partial x}(t, p)\Phi_0(t) + O(\varepsilon^2).$$

Suponhamos $\varepsilon \neq 0$, dessa forma, temos

$$\Phi_1'(t) + O(\varepsilon) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, p)\Phi_0(t) + O(\varepsilon).$$

Fazendo $\varepsilon \to 0^+$ segue que

$$\Phi_1'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, p)\Phi_0(t). \tag{2.82}$$

E ainda,

$$\Phi(t, e_j, \varepsilon) = \Phi_0(t) + \varepsilon\Phi_1(t) + O(\varepsilon^2).$$

Pela propriedade de fluxo, $\Phi(0, e_j, \varepsilon) = e_j$, daí temos

$$\begin{aligned} \Phi(0, e_j, \varepsilon) &= \Phi_0(0) + \varepsilon\Phi_1(0) + O(\varepsilon^2) \\ \Leftrightarrow e_j &= \Phi_0(0) + \varepsilon\Phi_1(0) + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

[1] A princípio $O'(\varepsilon^2)$ e $\overline{O}(\varepsilon^2)$ são utilizadas apenas para distinguir uma da outra, no entanto, possuem o mesmo sentido da notação $O(\varepsilon)$.

Tomando $\varepsilon = 0$, obtemos

$$e_j = \Phi_0(0). \tag{2.83}$$

Assim,

$$\begin{aligned} e_j = e_j + \varepsilon\Phi_1(0) + O(\varepsilon^2) \;&\Leftrightarrow\; \varepsilon\Phi_1(0) + O(\varepsilon^2) = 0 \\ &\Leftrightarrow\; \varepsilon\Phi_1(0) + \varepsilon^2 P(t, y, \varepsilon) = 0, \end{aligned}$$

onde $|P(t, y, \varepsilon)| \leq k$ e suponha $\varepsilon \neq 0$. Daí segue que

$$\Phi_1(0) + \varepsilon P(t, y, \varepsilon) = 0.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0^+$, temos

$$\Phi_1(0) = 0 \tag{2.84}$$

Por (2.81) e (2.83), (2.82) e (2.84) temos os seguintes sistemas

$$\begin{cases} \Phi_0'(t) = 0 \\ \Phi_0(0) = e_j \end{cases} \tag{2.85}$$

e

$$\begin{cases} \Phi_1'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, p) \cdot \Phi_0(t) \\ \Phi_1(0) = 0 \end{cases} \tag{2.86}$$

Resolvendo (2.85), obtemos

$$\int_0^t \Phi_0'(s)ds = \Phi_0(t) - \Phi_0(0) \Leftrightarrow 0 = \Phi_0(t) - \Phi_0(0) \Leftrightarrow \Phi_0(t) = \Phi_0(0) = e_j, \tag{2.87}$$

onde a última igualdade se deve a condição inicial de (2.85).

Substituindo a solução obtida do sistema (2.85) em (2.86), temos

$$\begin{cases} \Phi_1'(t) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(t, p) \cdot e_j \\ \Phi_1(0) = 0 \end{cases}, \tag{2.88}$$

cuja solução é dada por

$$\int_0^t \Phi_1'(s)ds = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(t, p) \cdot e_j ds \Leftrightarrow \Phi_1(t) - \Phi(0) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(t, p) \cdot e_j ds.$$

Pela condição inicial, $\Phi_1(0) = 0$, segue que

$$\Phi_1(t) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(t, p) \cdot e_j ds.$$

Por fim, obtemos a equação que descreve (2.77), isto é,

$$\Phi(t, e_j, \varepsilon) = e_j + \varepsilon \left[ \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, p)ds \right] \cdot e_j + O_j(\varepsilon^2). \tag{2.89}$$

E que, portanto, descreve a matriz principal $M(t, \varepsilon)$

$$M(t, \varepsilon) = \left[ \begin{array}{cccc} \Phi(t, e_1, \varepsilon) & \Phi(t, e_2, \varepsilon) & \cdots & \Phi(t, e_n, \varepsilon) \end{array} \right]. \tag{2.90}$$

Mas,

$$f^0(x) = \frac{1}{T}\int_0^T f(s,x)ds \Leftrightarrow \frac{\partial f^0}{\partial x}(p) = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(s,p)ds \Leftrightarrow T\frac{\partial f^0}{\partial x}(p) = \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x}(s,p)ds,$$

assim, por (2.90), segue que

$$M(t,\varepsilon) = I + \varepsilon\left(T\frac{\partial f^0}{\partial x}(p) + O(\varepsilon)\right). \tag{2.91}$$

Por hipótese, todos autovalores de $\frac{\partial f^0}{\partial x}(p)$ têm parte real negativa, então pelo Teorema 1.7, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ e $T\frac{\partial f^0}{\partial x}(p) + O(\varepsilon)$ também possui todos seus autovalores com parte real negativa. Além disso, pelo Teorema 1.8, segue que $D$ tem todos seus autovalores com norma menor que 1. Isto é, os números característicos do sistema linearizado (2.76) possuem norma menor que 1. Dessa forma, estamos sob as hipóteses do Teorema 1.16, onde *(i)* nos garante que $\phi(t,\varepsilon)$ é uma solução periódica assintoticamente estável.

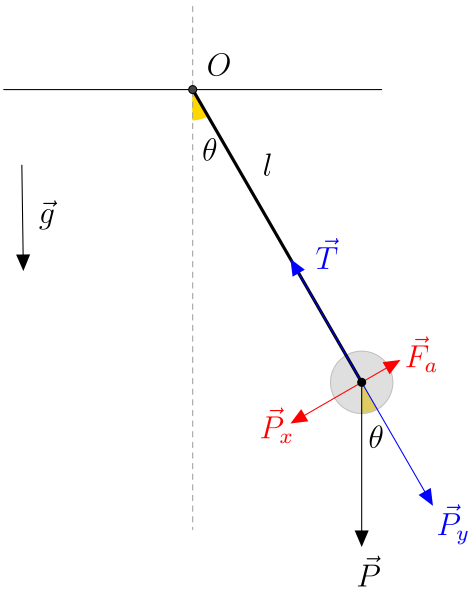
(ii) Por hipótese, um autovalor de $\frac{\partial f^0}{\partial x}(p)$ tem parte real positiva, então pelo Teorema 1.7, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$ e $T\frac{\partial f^0}{\partial x}(p) + O(\varepsilon)$ também possui um autovalor com parte real positiva. Agora, pelo Teorema 1.8, segue que $D$ tem um autovalor com norma maior que 1. Pelo item *(ii)* do Teorema 1.16 concluimos que $\phi(t,\varepsilon)$ é uma solução instável.

■

# Capítulo 3

# Aplicação da Teoria da Média ao Pêndulo Amortecido

Nosso intuito será estudar a equação do movimento do pêndulo por meio do Método da Média. Baseamos este estudo no artigo [10]. O pêndulo consiste de uma massa $m$ pendurada por um fio de comprimento $l$ fixado em um ponto $O$ como ilustra a figura abaixo. A figura também exibe a decomposição das forças que compõe o sistema.




Uma motivação para tal estudo é o relógio de pêndulo. Este dispositivo foi estudado por Galilei e sua invenção foi patenteada por Huygens por volta de 1656. O princípio de seu funcionamento é baseado na transformação de energia potencial gravitacional (no caso de relógios de pêndulo com mecanismo de peso) ou energia potencial elástica (no caso de relógios de pêndulos com mecanismo de mola) em energia cinética. No entanto, em ambos os casos, é necessário que de tempo em tempo os pesos sejam elevados (no primeiro caso) ou que seja dado corda (no segundo caso) para que o relógio funcione continuamente, ou seja, este processo não é viável por depender da força humana periodicamente. Posteriormente, a força humana foi substituída por baterias que mantém o sistema funcionando o que o tornou mais cômodo. Todavia, a bateria é consumida pelas forças dissipativas do sistema, sem elas o relógio de pêndulo funcionaria incessantemente baseando-se apenas na conservação da energia, ou seja, o relógio de pêndulo seria ideal: teria um período $T$ constante e oscilaria eternamente com este período. Além disso, as forças dissipativas também causam desgastes das peças fazendo com que ao passar dos anos o relógio se torne menos preciso, causando atrasos.

Então como obter um relógio de pêndulo que se aproxime do ideal? Para responder a esta pergunta, vamos considerar o sistema perturbado da equação do movimento do pêndulo e, impondo determinadas condições, obteremos soluções para o mesmo de forma que esta se aproxime da solução periódica (caso do pêndulo ideal: em que não há forças dissipativas).

De agora em diante, estaremos interessados em estudar o movimento do pêndulo.

Se soltarmos o pêndulo com determinada amplitude $\theta$, ele irá oscilar até atingir o repouso ($\theta = 0$). Isso ocorre devido as forças dissipativas que não permitem que o pêndulo oscile indefinidamente. Devido a esses fatores, seu movimento é denominado oscilação amortecida.

Observando a figura e aplicando a segunda Lei de Newton, temos: $F_a - P_x = m\alpha$, onde $\alpha$ é a aceleração angular dada por $\alpha = l\ddot{\theta}$ e $F_a$ é a força amortecedora a qual estamos supondo ser proporcional à velocidade angular $\dot{\theta}$ e cujo sinal negativo decorre do fato de que a força dissipativa sempre se opõe ao sentido da velocidade.
Assim,

$$F_a - P_x = ml\ddot{\theta} \Leftrightarrow -k\dot{\theta} - mg\,\mathrm{sen}\,\theta = ml\ddot{\theta} \Leftrightarrow \ddot{\theta} = -\frac{k}{ml}\dot{\theta} - \frac{g}{l}\,\mathrm{sen}\,\theta,$$

ou ainda,

$$\ddot{\theta} = -a\,\mathrm{sen}\,\theta - b\dot{\theta}, \tag{3.1}$$

onde $a, b > 0$ e $b$ é um coeficiente de amortecimento pequeno.

Note que a equação acima pode ser escrita em forma de sistema fazendo $x = \theta$ e $y = \dot{\theta}$, isto é,

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -a\,\mathrm{sen}\,x - by \end{cases} \tag{3.2}$$

Vamos estudar o comportamento deste sistema. Para começar, note que $(0,0)$ é ponto de equilíbrio de (3.2) e, portanto, o sistema linearizado é dado por

$$\dot{z} = Az, \tag{3.3}$$

onde $z \in \mathbb{R}^2$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (y, -a\,\mathrm{sen}\,x - by)$ e

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de $A$ são dados pelas raízes $\lambda_1 = \dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2}$ e $\lambda_2 = \dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2}$ do polinômio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 + b\lambda + a$. Analisemos o comportamento da solução de (3.3) próximo ao ponto de equilíbrio $(0,0)$ avaliando o sinal dos autovalores de $A$ em dois casos como veremos a seguir:

1º Caso: $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow b^2 \geq 4a$. A desigualdade $b^2 \geq b^2 - 4a$ é sempre válida, pois $a > 0$. Logo, $b \geq \sqrt{b^2 - 4a}$, isto é, ambos autovalores $\lambda_1$ e $\lambda_2$ são negativos e, neste caso, $(0,0)$ é nó atrator.

2º Caso: $\Delta < 0 \Leftrightarrow b^2 \leq 4a$. Neste caso ambos autovalores $\lambda_1$ e $\lambda_2$ são números complexos cuja parte real $-\dfrac{b}{2}$ é sempre negativa já que $b > 0$. Portanto, $(0,0)$ é um foco atrator.

**Observação 3.1** *Se $b = 0$, então ambos autovalores $\lambda_1$ e $\lambda_2$ são números complexos imaginários puros. Dessa forma, $(0,0)$ é chamado centro.*

Este estudo do sistema linearizado da equação movimento do pêndulo diz que em condições de soltura próximas à origem, o pêndulo tende à origem, ou seja, ao repouso.

Nosso objetivo será estudar o sistema de forma que a solução seja periódica não estacionária na origem. Para isso, considere a equação perturbada

$$\ddot{\theta} = -a \operatorname{sen} \theta - b\dot{\theta} + \varepsilon f(t, \theta, \dot{\theta}) + \varepsilon^2 g(t, \theta, \dot{\theta}) \tag{3.4}$$

onde $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ satisfazem as seguintes condições:

(i) $f$ e $g$ são de classe $C^2$;

(ii) $f$ e $g$ são $2\pi$-periódicas em $\theta$;

(iii) $f$ e $g$ são $T$-periódicas em $t$;

(iv) $f(t, 0, 0) = 0$.

Quando o par de funções $(f, g)$ satisfizer todos os itens acima, diremos que este cumpre as **condições básicas**. Iremos introduzir uma mudança de variáveis em (3.4) e em seguida aplicaremos a Teoria da Média.

Considere a seguinte mudança de variáveis

$$\theta = \varepsilon \phi. \tag{3.5}$$

Esta é a condição de ângulo pequeno. Introduzimos também a condição de dissipação pequena dada por

$$b = \varepsilon \bar{b}. \tag{3.6}$$

Usando (3.5) e (3.6) em (3.4), obtemos

$$\ddot{\phi} = -a \frac{\operatorname{sen}(\varepsilon\phi)}{\varepsilon} - \bar{b}\varepsilon\phi + f(t, \varepsilon\phi, \varepsilon\dot{\phi}) + \varepsilon g(t, \varepsilon\phi, \varepsilon\dot{\phi}). \tag{3.7}$$

O Lema a seguir permite reescrever a equação (3.7) de modo a facilitar nosso estudo sobre a mesma.

**Lema 3.1** *Existe uma função $r(t, \phi, \dot{\phi}, \varepsilon)$ $T$-periódica, de classe $C^1$ tal que (3.7) é escrito como*

$$\ddot{\phi} = -a\phi + \varepsilon \left[ g_0(t) + f_1(t)\phi + (f_2(t) - \bar{b})\dot{\phi} \right] + \varepsilon^2 r(t, \phi, \dot{\phi}, \varepsilon), \tag{3.8}$$

*onde $g_0(t) = g(t, 0, 0)$, $f_1(t) = \dfrac{\partial f}{\partial \theta}(t, 0, 0)$ e $f_2(t) = \dfrac{\partial f}{\partial \dot{\theta}}(t, 0, 0)$.*

**Demonstração:**

Defina $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $h(s) = F(t, \phi, \dot{\phi}, s)$,

$$F(t, \phi, \dot{\phi}, s) = -a\zeta(s, \phi) - \bar{b}s\phi + f(t, s\phi, s\dot{\phi}) + sg(t, s\phi, s\dot{\phi}), \tag{3.9}$$

onde

$$\zeta(s, \phi) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(s\phi)}{s}, & \text{se} \quad s \neq 0 \\ \phi, & \text{se} \quad s = 0 \end{cases}$$

é de classe $C^\infty$, pois pela Fórmula de Taylor em torno de 0, escrevemos

$$\text{sen}\,(s\phi) = s\phi - \frac{(s\phi)^3}{3!} + \frac{(s\phi)^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{(s\phi)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \tag{3.10}$$

Portanto, temos

$$\zeta(s,\phi) = \phi - \frac{s^2\phi^3}{3!} + \frac{s^4\phi^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{s^{2n}\phi^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \tag{3.11}$$

de classe $C^\infty$. Agora, pela Fórmula de Taylor com resto integral para $h$ em $s = 0$, temos

$$F(t,\phi,\dot{\phi},\varepsilon) = F(t,\phi,\dot{\phi},0) + \varepsilon \frac{\partial F}{\partial s}(t,\phi,\dot{\phi},0) + \varepsilon^2 \int_0^1 (1-u)\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(t,\phi,\dot{\phi},u\varepsilon)du. \tag{3.12}$$

Das hipóteses, obtemos

$$F(t,\phi,\dot{\phi},0) = -a\phi + f(t,0,0) = -a\phi \tag{3.13}$$

o que nos fornece

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial s}(t,\phi,\dot{\phi},s) \;&=\; -a\frac{\partial \zeta}{\partial s}(s,\phi) - \bar{b}\dot{\phi} + \left[\frac{\partial f}{\partial t}(t,s\phi,s\dot{\phi}) + \frac{\partial f}{\partial \phi}(t,s\phi,s\dot{\phi})\;\phi + \frac{\partial f}{\partial \dot{\phi}}(t,s\phi,s\dot{\phi})\;\dot{\phi}\right] \\
&+\; g(t,s\phi,s\dot{\phi}) + s\left[\frac{\partial g}{\partial t}(t,s\phi,s\dot{\phi}) + \frac{\partial g}{\partial \phi}(t,s\phi,s\dot{\phi})\;\phi + \frac{\partial g}{\partial \dot{\phi}}(t,s\phi,s\dot{\phi})\;\dot{\phi}\right].
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial s}(t,\phi,\dot{\phi},0) \;&=\; -\bar{b}\dot{\phi} + \left[\frac{\partial f}{\partial \phi}(t,0,0)\;\phi + \frac{\partial f}{\partial \dot{\phi}}(t,0,0)\;\dot{\phi}\right] + g(t,0,0) \\
&=\; f_1(t)\phi + (f_2(t) - \bar{b})\;\dot{\phi} + g_0(t).
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Por fim,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2}(t,\phi,\dot{\phi},s) \;=\; -a\frac{\partial^2 \zeta}{\partial s^2}(s,\phi) + \frac{\partial}{\partial s^2}\left[f(t,s\phi,s\dot{\phi}) + s\;g(t,s\phi,s\dot{\phi})\right]. \tag{3.15}$$

Logo, por (3.13), (3.14) e (3.15), temos

$$\begin{aligned}
F(\varepsilon,t,\phi,\dot{\phi}) = \;&-\; a\phi + \varepsilon\left[f_1(t)\phi + (f_2(t)-\bar{b})\;\dot{\phi} + g_0(t)\right] + \varepsilon^2\int_0^1 (1-u)\Big\{ - a\Big(\frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2}(s,\phi)\Big) \\
&+\; \frac{\partial}{\partial s^2}\left[f(t,s\phi,s\dot{\phi}) + s\;g(t,s\phi,s\dot{\phi})\right]\Big|_{s=u\varepsilon}\Big\}du.
\end{aligned} \tag{3.16}$$

E

$$r(t,\phi,\dot{\phi},\varepsilon) = \int_0^1 (1-u)\left\{-a\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial s^2}(s,\phi)\right) + \frac{\partial}{\partial s^2}\left[f(t,s\phi,s\dot{\phi}) + s\;g(t,s\phi,s\dot{\phi})\right]\Big|_{s=u\varepsilon}\right\}du.$$

Note ainda que $r$ é $T$-periódica em $t$, pois o integrando assim o é. Além disso, o integrando satisfaz as hipóteses do Corolário 1.2. Portanto, $r$ é de classe $C^1$.

■

Vamos assumir que a seguinte condição é válida

$$T = \frac{2p\pi}{\sqrt{a}},$$

onde $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$. Esta é denominada condição de ressonância.

**Teorema 3.1** *Considere o sistema* (3.4), *onde o par* $(f, g)$ *satisfaz as condições básicas. Sejam* $T = \dfrac{2p\pi}{\sqrt{a}}$ *e* $M$ *uma matriz* $2 \times 2$, *cujas entradas são*

$$M_{11} = -\frac{T}{2}\bar{b} + \frac{1}{T}\int_0^T \operatorname{sen}\sqrt{a}t\left(-\frac{\cos\sqrt{a}t}{\sqrt{a}}f_1(t) + \operatorname{sen}\sqrt{a}t f_2(t)\right)dt,$$

$$M_{12} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{\operatorname{sen}\sqrt{a}t}{a}\left(-\operatorname{sen}\sqrt{a}t f_1(t) - \sqrt{a}\cos\sqrt{a}t f_2(t)\right)dt,$$

$$M_{21} = \frac{1}{T}\int_0^T \cos\sqrt{a}t\left(-\cos\sqrt{a}t f_1(t) + \sqrt{a}\operatorname{sen}\sqrt{a}f_2(t)\right)dt \quad e$$

$$M_{22} = \frac{T}{2}\bar{b} + \frac{1}{T}\int_0^T \cos\sqrt{a}t\left(-\frac{\operatorname{sen}\sqrt{a}t}{\sqrt{a}}f_1(t) - \sqrt{a}\cos\sqrt{a}t f_2(t)\right)dt.$$

*Se* $\det M \neq 0$, *então* (3.4) *admite uma solução* $\theta(t, \varepsilon)$ $T$*-periódica tal que*

$$\lim_{\varepsilon \to 0}\left(\theta(0,\varepsilon), \dot{\theta}(0,\varepsilon)\right) = (0,0).$$

**Demonstração:**

Pelo Lema 3.1, estudar (3.4) equivale a estudar (3.8). Para isto, vamos escrever o sistema (3.8) em sua forma canônica. Fazendo $x = \phi$ e $y = \dot{\phi}$ em (3.8), obtemos

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}}_{\dot{X}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{X} + \varepsilon\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ g_0(t) + f_1(t)x + (f_2(t) - \bar{b})y \end{pmatrix}}_{F(t,X)} + \varepsilon^2\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ r(t,x,y,\varepsilon) \end{pmatrix}}_{R(t,X,\varepsilon)}.$$

Note que o sistema está escrito na forma

$$\dot{X} = AX + \varepsilon\underbrace{\left[F(t,X) + \varepsilon R(t,X,\varepsilon)\right]}_{G(t,X,\varepsilon)}. \tag{3.17}$$

Vamos obter a solução do sistema não perturbado, isto é, de $\dot{X} = AX$. Os autovalores de $A$ são $\lambda_1 = \sqrt{a}i$ e $\lambda_2 = -\sqrt{a}i$. O autovetor associado a $\lambda_1$ é $u_1 = (-i, \sqrt{a})$. A solução é dada por

$$X(t) = e^{\lambda_1 t}u_1 = \left(\cos\sqrt{a}t + i\operatorname{sen}\sqrt{a}t\right)\begin{pmatrix} -i \\ \sqrt{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\sqrt{a}t \\ \sqrt{a}\cos\sqrt{a} \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} -\cos\sqrt{a}t \\ \sqrt{a}\operatorname{sen}\sqrt{a}t \end{pmatrix}.$$

Logo, uma matriz fundamental $Z(t)$ é dada tomando os vetores colunas da matriz $X(t)$, isto é,

$$Z(t) = \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\sqrt{a}t & -\cos\sqrt{a}t \\ \sqrt{a}\cos\sqrt{a}t & \sqrt{a}\operatorname{sen}\sqrt{a}t \end{pmatrix}.$$

Note que $\det Z(0) = 1 \neq 0$. Então pela Proposição 1.4, a matriz principal

$$\begin{aligned} e^{At} = Z(t)Z^{-1}(0) &= \begin{pmatrix} \operatorname{sen}\sqrt{a}t & -\cos\sqrt{a}t \\ \sqrt{a}\cos\sqrt{a}t & \sqrt{a}\operatorname{sen}\sqrt{a}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\sqrt{a}t & \frac{\operatorname{sen}\sqrt{a}t}{\sqrt{a}} \\ -\sqrt{a}\operatorname{sen}\sqrt{a}t & \cos\sqrt{a}t \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Pelo Corolário 2.1, o sistema (3.17) é escrito na forma canônica

$$\dot{Y} = \varepsilon e^{-At}G(t, e^{At}y, \varepsilon),$$

onde $Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$, ou ainda,

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= \varepsilon e^{-At}\left[F(t, e^{At}Y(t)) + \varepsilon R(t, e^{At}Y(t), \varepsilon)\right] \\ &= \varepsilon e^{-At}F(t, e^{At}Y(t) + \varepsilon^2 e^{-At}R(t, e^{At}Y(t), \varepsilon). \end{aligned} \tag{3.19}$$

Das propriedades de $F$ e $G$ segue que (3.19) é $T$-periódica. Temos que

$$\begin{aligned} \Phi(t) = e^{At}Y(t) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\sqrt{a}t & \frac{\operatorname{sen}\sqrt{a}t}{\sqrt{a}} \\ -\sqrt{a}\operatorname{sen}\sqrt{a}t & \cos\sqrt{a}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\sqrt{a}t\, y_1(t) + \frac{\operatorname{sen}\sqrt{a}t}{\sqrt{a}}\, y_2(t) \\ -\sqrt{a}\operatorname{sen}\sqrt{a}t\, y_1(t) + \cos\sqrt{a}t\, y_2(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.20}$$

e também que

$$\begin{aligned} e^{-At}F(t, \Phi_1(t), \Phi_2(t)) &= \begin{pmatrix} \cos\sqrt{a}t & -\frac{\operatorname{sen}\sqrt{a}t}{\sqrt{a}} \\ \sqrt{a}\operatorname{sen}\sqrt{a}t & \cos\sqrt{a}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ g_0(t) + f_1(t)\Phi_1(t) + (f_2(t) - \overline{b})\Phi_2(t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{\operatorname{sen}\sqrt{a}t}{\sqrt{a}}[g_0(t) + f_1(t)\Phi_1(t) + (f_2(t) - \overline{b})\Phi_2(t)] \\ \cos\sqrt{a}t[g_0(t) + f_1(t)\Phi_1(t) + (f_2(t) - \overline{b})\Phi_2(t)] \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Substituindo $\Phi_1(t)$ e $\Phi_2(t)$ de (3.20) em (3.21), obtemos

$$e^{-At}F(t, \Phi_1(t), \Phi_2(t)) = D(t) + E(t)Y(t),$$

onde

$$D(t) = \begin{pmatrix} -\frac{\operatorname{sen}\sqrt{a}t}{\sqrt{a}}g_0(t) \\ \cos\sqrt{a}t g_0(t) \end{pmatrix}$$

e

$$E(t) = \begin{pmatrix} \begin{array}{c} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{a}t}{\sqrt{a}}\Big[ -\cos\sqrt{a}t f_1(t) \\ +\sqrt{a}\operatorname{sen}\sqrt{a}t(f_2(t)-\bar{b})\Big] \end{array} & \begin{array}{c} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{a}t}{\sqrt{a}}\Big[ -\frac{\operatorname{sen}\sqrt{a}t}{\sqrt{a}} f_1(t) \\ -\cos\sqrt{a}t(f_2(t)-\bar{b})\Big] \end{array} \\ \\ \begin{array}{c} \cos\sqrt{a}t\Big[\cos\sqrt{a}f_1(t) \\ -\sqrt{a}\operatorname{sen}\sqrt{a}t(f_2(t)-\bar{b})\Big] \end{array} & \begin{array}{c} \cos\sqrt{a}t\Big[\frac{\operatorname{sen}\sqrt{a}t}{\sqrt{a}} f_1(t) \\ \cos\sqrt{a}t(f_2(t)-\bar{b})\Big] \end{array} \end{pmatrix}.$$

Sendo assim, temos que o sistema médio é da forma

$$\dot{Z} = \varepsilon F^0(Z) = \varepsilon \frac{1}{T}\int_0^T e^{-At}F(t,Z)dt = \varepsilon\left(MZ - V\right), \tag{3.22}$$

onde $M$ é dada por

$$\begin{aligned}
M_{11} &= \frac{\sqrt{a}}{2p\pi}\int_0^{\frac{2p\pi}{\sqrt{a}}} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{a}t}{\sqrt{a}}\Big( -\cos\sqrt{a}f_1(t) + \sqrt{a}\operatorname{sen}\sqrt{a}t(f_2(t)-\bar{b})\Big)dt \\
&= -\frac{\bar{b}}{2} + \frac{\sqrt{a}}{2p\pi}\int_0^{\frac{2p\pi}{\sqrt{a}}} \operatorname{sen}\sqrt{a}t\left(-\frac{\cos\sqrt{a}t}{\sqrt{a}}f_1(t) + \operatorname{sen}\sqrt{a}tf_2(t)\right)dt, \\
M_{12} &= \frac{\sqrt{a}}{2p\pi}\int_0^{\frac{2p\pi}{\sqrt{a}}} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{a}t}{\sqrt{a}}\left(-\frac{\operatorname{sen}\sqrt{a}t}{\sqrt{a}}f_1(t) - \cos\sqrt{a}t(f_2(t)-\bar{b})\right)dt \\
&= \frac{\sqrt{a}}{2p\pi}\int_0^{\frac{2p\pi}{\sqrt{a}}} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{a}t}{a}\Big( -\operatorname{sen}\sqrt{a}tf_1(t) - \sqrt{a}\cos\sqrt{a}tf_2(t)\Big)dt, \\
M_{21} &= \frac{\sqrt{a}}{2p\pi}\int_0^{\frac{2p\pi}{\sqrt{a}}} \cos\sqrt{a}t\left(\cos\sqrt{a}tf_1(t) - \sqrt{a}\operatorname{sen}\sqrt{a}t(f_2(t)-\bar{b})\right)dt \\
&= \frac{\sqrt{a}}{2p\pi}\int_0^{\frac{2p\pi}{\sqrt{a}}} \cos\sqrt{a}t\left(\cos\sqrt{a}tf_1(t) - \sqrt{a}\operatorname{sen}\sqrt{a}tf_2(t)\right)dt, \\
M_{22} &= \frac{\sqrt{a}}{2p\pi}\int_0^{\frac{2p\pi}{\sqrt{a}}} \cos\sqrt{a}t\left(\frac{\operatorname{sen}\sqrt{a}t}{\sqrt{a}}f_1(t) + \cos\sqrt{a}t(f_2(t)-\bar{b})\right)dt \\
&= \frac{\bar{b}}{2} + \frac{\sqrt{a}}{2p\pi}\int_0^{\frac{2p\pi}{\sqrt{a}}} \cos\sqrt{a}t\left(\frac{\operatorname{sen}\sqrt{a}t}{\sqrt{a}}f_1(t) + \cos\sqrt{a}tf_2(t)\right)dt,
\end{aligned}$$

$$V = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{a}}{2p\pi}\int_0^{\frac{2p\pi}{\sqrt{a}}} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{a}t}{\sqrt{a}}g_0(t)dt \\ \frac{\sqrt{a}}{2p\pi}\int_0^{\frac{2p\pi}{\sqrt{a}}} \cos\sqrt{a}tg_0(t)dt \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Como $F^0(Z) = \frac{1}{T}\int_0^T e^{-At}F(t,Z)dt = MZ - V$, então $\frac{\partial F^0}{\partial Z}(Z) = M$ para todo $Z \in \mathbb{R}^2$. Seja $p$ o ponto de equilíbrio de (3.22), isto é, $F^0(p) = 0$ se, e somente se, $Mp - V = 0$.

Por hipótese, $\det M \neq 0$, então $p = M^{-1}V$ e $\det\left(\dfrac{\partial F^0}{\partial Z}(p)\right) = \det M \neq 0$. Dessa forma, pelo Teorema 2.3 existe uma solução $Y(t,\varepsilon)$ de (3.19) que é $T$-periódica e $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} Y(t,\varepsilon) = p$.

Assim, $\Phi(t,\varepsilon) = e^{At}Y(t,\varepsilon)$ é também $T$-periódica e

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Phi(0,\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} Y(0,\varepsilon) = p.$$

Além disso, $X(t,\varepsilon) = \Phi(t,\varepsilon)$ é solução de (3.17) onde $X(0,\varepsilon) = (x(0,\varepsilon), y(0,\varepsilon))$ e como

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Phi(0,\varepsilon) = p,$$

então

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(x(0,\varepsilon), y(0,\varepsilon)) = p.$$

Como havíamos tomado a mudança de variáveis $\theta(t,\varepsilon) = \varepsilon\phi(t,\varepsilon)$ para escrever (3.8), dessa forma, $(\theta(0,\varepsilon), \dot{\theta}(0,\varepsilon)) = \varepsilon(x(0,\varepsilon), y(0,\varepsilon))$ é $T$-periódica e

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\theta(0,\varepsilon), \dot{\theta}(0,\varepsilon)) = \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon(x(0,\varepsilon), y(0,\varepsilon)) = 0\cdot p = (0,0).$$

■

Para estudar a estabilidade da solução $\theta(t,\varepsilon)$, vejamos o seguinte corolário.

**Corolário 3.1** *Considere (3.4), onde o par $(f,g)$ satisfaz as condições básicas. Além disso, suponhamos que $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}(t,0,0) = f_1(t) = C_1$ e $\dfrac{\partial f}{\partial \dot{\theta}}(t,0,0) = f_2(t) = C_2$ com $(C_1,C_2) \neq (0,\bar{b})$. Então existe uma solução $T$-periódica $\theta(t,\varepsilon)$ de (3.4) tal que $\lim_{\varepsilon\to 0}(\theta(0,\varepsilon), \dot{\theta}(0,\varepsilon)) = (0,0)$.*

**Demonstração:**

Por hipótese, $f_1(t) = C_1$ e $f_2(t) = C_2$. Logo,

$$M_{11} = -\frac{\bar{b}}{2} + \frac{\sqrt{a}}{2p\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{a}}{2p\pi}} \operatorname{sen}\sqrt{a}t\left(-\frac{\cos\sqrt{a}t}{\sqrt{a}}C_1 + \operatorname{sen}\sqrt{a}tC_2\right)dt = \frac{1}{2}C_2 - \frac{\bar{b}}{2},$$

$$M_{12} = \frac{\sqrt{a}}{2p\pi}\int_0^{\frac{2p\pi}{\sqrt{a}}} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{a}t}{a}\left(-\operatorname{sen}\sqrt{a}tC_1 - \sqrt{a}\cos\sqrt{a}tC_2\right)dt = -\frac{1}{2a}C_1,$$

$$M_{21} = \frac{\sqrt{a}}{2p\pi}\int_0^{\frac{2p\pi}{\sqrt{a}}} \cos\sqrt{a}t\left(\cos\sqrt{a}tC_1 - \sqrt{a}\operatorname{sen}\sqrt{a}tC_2\right)dt = \frac{1}{2}C_1 \quad \text{e}$$

$$M_{22} = \frac{\bar{b}}{2} + \frac{\sqrt{a}}{2p\pi}\int_0^{\frac{\sqrt{a}}{2p\pi}} \cos\sqrt{a}t\left(\frac{\operatorname{sen}\sqrt{a}t}{\sqrt{a}}C_1 + \cos\sqrt{a}tC_2\right)dt = \frac{1}{2}C_2 - \frac{\bar{b}}{2}.$$

Portanto,

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(C_2 - \bar{b}\right) & -\frac{1}{2a}C_1 \\ \frac{1}{2}C_1 & \frac{1}{2}\left(C_2 - \bar{b}\right) \end{pmatrix} \Rightarrow \det M = \frac{1}{4}\left((C_2-\bar{b})^2 + \frac{C_1^2}{a}\right)$$

Agora, por hipótese, $(C_1,C_2) \neq (0,\bar{b})$, ou seja, $\det M \neq 0$. Como $p = (0,0)$ é ponto de equilíbrio de (3.4) e $\det M = \det\left(\dfrac{\partial F^0}{\partial Z}(0,0)\right) \neq 0$ segue pelo Teorema 3.1 que existe uma solução $\theta(t,\varepsilon)$ $T$-periódica de (3.4), tal que $\lim_{\varepsilon\to 0}(\theta(0,\varepsilon), \dot{\theta}(0,\varepsilon)) = (0,0)$. Observe também que os autovalores de M são dados por

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \lambda^2 - (C_2-\bar{b})\lambda + \frac{1}{4}\left[(C_2-\bar{b})^2 + \frac{C_1^2}{a}\right] = 0 \\ \Leftrightarrow \lambda &= \frac{(C_2-\bar{b})}{2} \pm i\frac{C_1}{2\sqrt{a}}. \end{aligned}$$

Note que $Re(\lambda) = \dfrac{(C_2 - \overline{b})}{2}$. Dessa forma, se $C_2 - \overline{b} < 0$, pelo item *(i)* do Teorema 2.4, segue que $\theta(t, \varepsilon)$ é assintoticamente estável. E, caso contrário, se $C_2 - \overline{b} > 0$, segue pelo item *(ii)* do Teorema 2.4 que $\theta(t, \varepsilon)$ é instável.

■

**Exemplo 3.1** *Para ilustrar um pouco mais a teoria, considere novamente a equação* (3.4)*, colocando* $a = 1$*,* $b = \varepsilon$*,* $f(t, \theta, \dot{\theta}) = 0$ *e* $g(t, \theta, \dot{\theta}) = \operatorname{sen} t$*. Como* $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}(t, 0, 0) = \dfrac{\partial f}{\partial \dot{\theta}}(t, 0, 0) = 0$*, segue que* $C_1 = C_2 = 0$ *e* $\det M = -\dfrac{1}{4}\overline{b}^2 \neq 0$*, pois* $b = \varepsilon \overline{b}$ *e* $b = \varepsilon$*, ou seja,* $\overline{b} = 1$*. Logo,* $\det M = -\dfrac{1}{4} \neq 0$ *e, pelo Corolário* 3.1*, segue que* (3.4) *admite solução* $T$*-periódica* $\theta(t, \varepsilon)$ *tal que* $\lim_{\varepsilon \to 0} \theta(t, \varepsilon) = 0$*.*

# Capítulo 4

# Aplicação da Teoria da Média ao Problema Lunar de Hill Regularizado

Neste capítulo veremos uma aplicação do Método da Média para caso específico do problema de 3-corpos em que Hill foi o principal contribuinte. Para este caso, se estuda o movimento da Lua considerando a ação exercida pela Terra e pelo Sol. Este estudo foi baseado no artigo [8].

**Definição 4.1** *Um sistema Hamiltoniano é aquele que possui $2n$ equações diferenciais ordinárias da forma*

$$\begin{cases} \dot{q} = & \dfrac{\partial H}{\partial p} \\ \\ \dot{p} = & -\dfrac{\partial H}{\partial q} \end{cases} \tag{4.1}$$

*onde $H(t, q, p)$ é chamado de* **Hamiltoniano** *e é uma função diferenciável no aberto $W \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Além disso, $p = (p_1, \ldots, p_n)$ e $q = (q_1, \ldots, q_n)$ representam respectivamente: posição e momento e são chamadas variáveis conjugadas.*

De forma geral podemos representar um sistema Hamiltoniano como sendo

$$\dot{z} = J\nabla H(z), \tag{4.2}$$

onde,

$$z = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \text{ e } \nabla H = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial z_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial H}{\partial z_{2n}} \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

sendo 0 a matriz nula e $I$ a matriz identidade, ambas de ordem $n$.

O resultado a seguir nos diz que $H$ é sempre constante ao longo de cada solução de seu sistema Hamiltoniano.

**Proposição 4.1** *Seja $W \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e $H : W \to \mathbb{R}$ o Hamiltoniano de (4.1). Então $H$ é constante ao longo de cada solução de (4.1).*

**Demonstração:**

Mostremos que a derivada de $H$ é nula qualquer que seja $t \in \mathbb{R}$. De fato,

$$\frac{\partial H}{\partial t}(q(t), p(t)) = \frac{\partial H}{\partial q}\dot{q} + \frac{\partial H}{\partial p}\dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p}\left(-\frac{\partial H}{\partial q}\right) = 0 \tag{4.4}$$

Assim, $H$ é constante para todo $t \in \mathbb{R}$, o que nos permite escrever $H(q(t), p(t)) = H(q(0), p(0))$, já que $H(q(0), p(0))$ é uma constante.

■

Estamos interessados em estudar o seguinte Hamiltoniano que aparece no estudo do problema de 3-corpos em Mecânica Celeste.

$$H_{Hill}(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{2}(x_3^2 + x_4^2) + x_2 x_3 - x_1 x_4 - \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2. \tag{4.5}$$

O sistema Hamiltoniano é dado por

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 + x_2 \\ x_4 - x_1 \\ x_4 - \dfrac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} + 2x_1 \\ -x_3 - \dfrac{x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{\frac{3}{2}}} - x_2 \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Agora consideremos a seguinte mudança de variáveis em (4.5)

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & -y \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix} \tag{4.7}$$

e

$$\begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{2}{r^2} \begin{pmatrix} z & -y \\ y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ u \end{pmatrix}, \tag{4.8}$$

onde $(x_1, x_2)$ e $(x_3, x_4)$ representam posição e momento respectivamente e $r = \sqrt{z^2 + y^2}$. Assim,

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{y} \\ \dot{w} \\ \dot{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{4w + 2y^3 + 2yz^2}{z^2 + y^2} \\ -\dfrac{-4u + 2y^2 z + 2z^3}{z^2 + y^2} \\ \dfrac{2uy^4 + (-8y^6 + 4w^2 + 4u^2 - 2)\, z + 4uy^2 z^2 - 12y^4 z^3 + 2uz^4 + 4z^7}{(y^2 + z^2)^2} \\ -\dfrac{(-4w^2 - 4u^2 + 2)\, y + 2wy^4 - 4y^7 + 4wy^2 z^2 + (12y^3 + 2w)\, z^4 + 8yz^6}{(y^2 + z^2)^2} \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

Por cálculo direto verifica-se que o sistema acima provém do seguinte Hamiltoniano

$$\begin{aligned} H(z,y,w,u) = & - \frac{2\,(wy+uz)\,(z^2-y^2)}{z^2+y^2} + \frac{4yz\,(wz-uy)}{z^2+y^2} + \frac{2u^2+2w^2}{z^2+y^2} - \frac{1}{z^2+y^2} \\ & - \left(z^2-y^2\right)^2 + 2y^2z^2. \end{aligned}$$

**Lema 4.1** *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $f : U \to \mathbb{R}^n$ de classe $C^1$, $\tau : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um difeomorfismo de classe $C^1$ e o seguinte sistema*

$$x'(t) = f(x(t)). \tag{4.10}$$

*Então $y(s) = x(\tau^{-1}(s))$ é solução de*

$$y'(s) = \frac{1}{\tau'(\tau^{-1}(s))} f(y(s)). \tag{4.11}$$

**Demonstração:**

Por hipótese, $\tau$ é um difeomorfismo, portanto, admite inversa $\tau^{-1}$. Seja $s = \tau(t)$, então $t = \tau^{-1}(s)$ e faça essa substituição em (4.10), isto é,

$$x'(\tau^{-1}(s)) = f(x(\tau^{-1}(s))). \tag{4.12}$$

Agora,

$$\tau(\tau^{-1}(s)) = s \Rightarrow \tau'(\tau^{-1}(s))(\tau^{-1})'(s) = 1 \Leftrightarrow (\tau^{-1})'(s) = \frac{1}{\tau'(\tau^{-1}(s))}. \tag{4.13}$$

Por hipótese, $y(s) = x(\tau^{-1}(s))$. Mostremos que $y(s)$ é solução de (4.11). De fato,

$$y'(s) \;=\; x'(\tau^{-1}(s))\tau^{-1}(s).$$

Substituindo (4.12) e (4.13) na equação acima, temos

$$y'(s) = \frac{1}{\tau'(\tau^{-1}(s))} f(x(\tau^{-1}(s))).$$

Como $y(s) = x(\tau^{-1}(s))$, obtemos

$$y'(s) = \frac{1}{\tau'(\tau^{-1}(s))} f(y(s)).$$

$\blacksquare$

Vamos considerar o sistema (4.9) sob a forma $Z'(t) = f(Z(t))$, onde $Z = (z,y,w,u)$. Seja $I \subset \mathbb{R}$ aberto. Vejamos que

$$\tau : I \to \mathbb{R}, \tau(t) = \int_0^t \frac{2du}{z^2(u)+y^2(u)}$$

é um difeomorfismo. De fato, $\tau$ é diferenciável, pois é integral de uma função diferenciável. Além disso, como $\tau'(t) = \dfrac{2}{z^2(u)+y^2(u)} \neq 0$, segue que $\tau$ é monótona e admite inversa em $J = \tau(I)$ com

$$(\tau^{-1})'(y) = \frac{1}{\tau'(t)}$$

para todo $y = \tau(t) \in J$. E como $(\tau^{-1})'(y) = \dfrac{1}{\tau'(t)} = \dfrac{z^2(t) + y^2(t)}{2}$ é diferenciável, temos que $\tau$ é difeomorfismo. Assim, pelo Lema 4.1, temos

$$\overline{Z}'(s) = f(\overline{Z}(s)) \left( \frac{\overline{z}^2(s) + \overline{y}^2(s)}{2} \right). \tag{4.14}$$

Isto é,

$$\begin{pmatrix} \dot{\overline{z}} \\ \\ \dot{\overline{y}} \\ \\ \dot{\overline{w}} \\ \\ \dot{\overline{u}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\overline{w} + \overline{y}^3 + \overline{yz}^2 \\ \\ 2\overline{u} - \overline{y}^2\overline{z} - \overline{z}^3 \\ \\ \dfrac{\overline{uy}^4 + (-4\overline{y}^6 + 2\overline{w}^2 + 2\overline{u}^2 - 1)\,\overline{z} + 2\overline{uy}^2\overline{z}^2 - 6\overline{y}^4\overline{z}^3 + \overline{uz}^4 + 2\overline{z}^7}{\overline{z}^2 + \overline{y}^2} \\ \\ \dfrac{(2\overline{w}^2 + 2\overline{u}^2 - 1)\,\overline{y} - \overline{wy}^4 + 2\overline{y}^7 - 2\overline{wy}^2\overline{z}^2 - (6\overline{y}^3 + \overline{w})\,\overline{z}^4 - 4\overline{yz}^6}{\overline{z}^2 + \overline{y}^2} \end{pmatrix}, \tag{4.15}$$

onde $\overline{z}(s) = z(\tau^{-1}(s))$, $\overline{y}(s) = y(\tau^{-1}(s))$, $\overline{w}(s) = w(\tau^{-1}(s))$ e $\overline{u}(s) = u(\tau^{-1}(s))$.

Em nosso caso, perceba que as equações 3 e 4 do sistema acima ainda possuem singularidades em $\overline{z} = \overline{y} = 0$. Devido a isto, consideremos o seguinte Hamiltoniano

$$\begin{aligned} H^*(z, y, w, u) = {} & \frac{z^2 + y^2}{4}(H(z, y, w, u) + p_0) + \frac{1}{4} \\ = {} & -\frac{y^6 - 3y^4z^2 - 3y^2z^4 + z^6}{4} + \frac{(wy - uz)\,(y^2 + z^2)}{2} + \frac{p_0\,(y^2 + z^2)}{4} \\ & + \frac{u^2 + w^2}{2}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Fazendo $\dfrac{p_0}{2} = c$ em (4.16), temos

$$H^*(z, y, w, u) = -\frac{y^6 - 3y^4z^2 - 3y^2z^4 + z^6}{4} + \frac{(wy - uz)\,(y^2 + z^2)}{2} + \frac{c\,(y^2 + z^2)}{2} + \frac{u^2 + w^2}{2}$$

Observe que o sistema Hamiltoniano determinado por $H^*$ não possui singularidades, então dizemos que este sistema está regularizado.

Agora, tomemos a seguinte mudança de variáveis na equação acima

$$z = 2c^{1/4}x_1,\ y = 2c^{1/4}x_2,\ w = 2c^{3/4}x_3 \text{ e } u = 2c^{1/4}x_4.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned} H^*(x_1, x_2, x_3, x_4) = {} & 2\ \Big(x_4^2 - 4x_1x_2^2x_4 - 4x_1^3x_4 + x_3^2 + 4x_2^3x_3 + 4x_1^2x_2x_3 - 8x_2^6 \\ & + 24x_1^2x_2^4 + 24x_1^4x_2^2 + x_2^2 - 8x_1^6 + x_1^2\Big)c^{\frac{3}{2}} \end{aligned} \tag{4.17}$$

e tomemos o Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} H_{reg}(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \frac{1}{4c^{3/2}}H^*(x_1,x_2,x_3,x_4) \\ &= \frac{x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2}{2} + 2\Big(4x_1^2x_2x_3 + 4x_2^3x_3 - 4x_1^3x_4 - 4x_1x_2^2x_4\Big) \\ &- \;4\Big(x_1^6 - 3x_1^4x_2^2 - 3x_1^2x_2^4 + x_2^6\Big) \end{aligned} \tag{4.18}$$

e seu sistema Hamiltoniano

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 + 2x_2\left(x_1^2+x_2^2\right) \\ x_4 - 2x_1\left(x_1^2+x_2^2\right) \\ -4x_1\left(x_2x_3 - x_1x_4\right) + 2\left(x_1^2+x_2^2\right)x_4 + 4\left(6x_1^5 - 12x_1^3x_2^2 - 6x_1x_2^4\right) - x_1 \\ -4x_2\left(x_2x_3 - x_1x_4\right) - 2\left(x_1^2+x_2^2\right)x_3 + 4\left(-6x_1^4x_2 - 12x_1^2x_2^3 + 6x_2^5\right) - x_2 \end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

**Teorema 4.1** *O sistema (4.19) possui duas órbitas $T(\varepsilon)$ periódicas.*

**Demonstração:**

Aplique seguinte mudança de variáveis no sistema (4.19)

$$x_1 = \sqrt{\varepsilon}X_1,\; x_2 = \sqrt{\varepsilon}X_2,\; x_3 = \sqrt{\varepsilon}X_3 \text{ e } x_4 = \sqrt{\varepsilon}X_4. \tag{4.20}$$

Dessa forma, obtemos

$$\begin{pmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \\ \dot{X}_3 \\ \dot{X}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_3 + 2\varepsilon X_2(X_1^2+X_2^2) \\ X_4 - 2\varepsilon X_2(X_1^2+X_2^2) \\ -X_1 + 2\varepsilon\left(X_2^2X_4 + 3X_1^2X_4 - 2X_1X_2X_3\right) \\ +24\varepsilon^2X_1\left(-X_2^4 - 2X_1^2X_2^2 + X_1^4\right) \\ -X_2 - 2\varepsilon\left(-2X_1X_2X_4 + 3X_2^2X_3 + X_1^2X_3\right) \\ -24X_2\varepsilon^2\left(-X_2^4 + 2X_1^2X_2^2 + X_1^4\right) \end{pmatrix}, \tag{4.21}$$

cujo Hamiltoniano é

$$\begin{aligned} H(X_1,X_2,X_3,X_4) = &\frac{1}{2}(X_1^2+X_2^2+X_3^2+X_4^2) - 2\varepsilon(X_1^2+X_2^2)(X_1X_4 - X_2X_3) \\ - &\;4\varepsilon^2(X_1^2+X_2^2)(X_1^4 - 4X_1^2X_2^2 + X_2^4). \end{aligned} \tag{4.22}$$

Agora tome a seguinte mudança de variáveis em (4.21)

$$X_1 = r\cos\theta,\; X_2 = \rho\cos(\theta+\alpha),\; X_3 = r\,\mathrm{sen}\,\theta \text{ e } X_4 = \rho\,\mathrm{sen}\,(\theta+\alpha), \tag{4.23}$$

onde $r > 0$ e $\rho > 0$. Assim obtemos

$$\begin{array}{rcl} \dot{r}(t) & = & \varepsilon\Big\{2\rho\Big[\rho^2\cos\alpha\cos^2(\theta+\alpha)+r^2\cos\theta\Big(3\cos\theta\cos\alpha-2\cos(\theta+\alpha)\Big)\Big] \\ & & -24\varepsilon r\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\Big(\rho^4\cos^4(\theta+\alpha)+2r^2\rho^2\cos^2(\theta+\alpha)\cos^2\theta-r^4\cos^4\theta\Big)\Big\} \\ \dot{\theta}(t) & = & -1+\varepsilon\Big[\dfrac{2\rho}{r}\Big(\rho^2\cos^2(\theta+\alpha)\,\mathrm{sen}\,\alpha+3r^2\cos^2\theta\,\mathrm{sen}\,\alpha\Big) \\ & & -24\varepsilon\cos^2\theta\Big(\rho^4\cos^4(\theta+\alpha)+2\rho^2r^2\cos^2\theta\cos^2(\theta+\alpha)-r^4\cos^4\theta\Big)\Big] \\ \dot{\rho}(t) & = & \varepsilon\Big[-2\rho r\Big(3\rho\cos^2(\theta+\alpha)\cos\alpha-2\rho\cos\theta\cos(\theta+\alpha)+r^2\cos^2\theta\cos\alpha\Big) \\ & & +24\varepsilon\rho\cos(\theta+\alpha)\ \mathrm{sen}\ (\theta+\alpha)\,(\rho^4\cos^4(\theta+\alpha)-2\rho^2r^2\cos^2\theta\cos^2(\theta+\alpha) \\ & & -r^4\cos^4\theta)\Big] \\ \dot{\alpha}(t) & = & \varepsilon\Big\{\dfrac{2\,\mathrm{sen}\,\alpha}{\rho r}\Big[-\rho^4cos^2(\theta+\alpha)+3\rho^2r^2\Big(\cos^2(\theta+\alpha)-cos^2\theta\Big)+r^4\cos^2\theta\Big] \\ & & +24\varepsilon\Big[\Big(\cos^2\theta+\cos^2(\theta+\alpha)\Big)\Big(\rho^4\cos^4(\theta+\alpha)-r^4\cos^4\theta\Big) \\ & & +\Big(2\rho^2r^2\cos^2\theta\cos^2(\theta+\alpha)\Big)\Big(\cos^2\theta-\cos^2(\theta+\alpha)\Big)\Big]\Big\}. \end{array} \tag{4.24}$$

Como a mudança de variáveis aplicada anteriormente não é canônica, então perdemos a estrutura do Hamiltoniano. No entanto, ainda é possível considerar

$$H_1(r,\theta,\rho,\alpha)=H(r\cos\theta,\rho\cos(\theta+\alpha),r\,\mathrm{sen}\,\theta,\rho\,\mathrm{sen}\,(\theta+\alpha)),$$

já que $H_1$ é uma integral primeira de (4.24) como foi definido anteriormente (ver Definição 1.21). Assim,

$$\begin{aligned} H_1(r,\rho,\alpha,\theta,\varepsilon) = {} & \frac{1}{2}(r^2+\rho^2)-\varepsilon r\rho\,\mathrm{sen}\,\alpha(r^2\cos 2\theta+r^2+\rho^2\cos 2(\alpha+\theta)+\rho^2)-4\varepsilon^2(r^2\cos^2\theta \\ & +\rho^2\cos^2(\alpha+\theta))(r^4\cos^4\theta-4r^2\rho^2\cos^2\theta\cos^2(\alpha+\theta)+\rho^4\cos^4(\alpha+\theta)). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Considere (4.24) reescrito como segue

$$\begin{array}{rcl} \dot{r}(t) & = & \varepsilon f_1(r,\rho,\alpha,\theta,\varepsilon) \\ \dot{\rho}(t) & = & \varepsilon f_2(r,\rho,\alpha,\theta,\varepsilon) \\ \dot{\alpha}(t) & = & \varepsilon f_3(r,\rho,\alpha,\theta,\varepsilon) \\ \dot{\theta}(t) & = & -1+\varepsilon g(r,\rho,\alpha,\theta,\varepsilon). \end{array} \tag{4.26}$$

Note que (4.26) está na forma (1.40) do Teorema 1.17. Assim, consideremos

$$\begin{aligned}
\dot{r}(\theta) &= \frac{\varepsilon f_1(r,\rho,\alpha,\theta,\varepsilon)}{-1+\varepsilon g(r,\rho,\alpha,\theta,\varepsilon)} \\
\dot{\rho}(\theta) &= \frac{\varepsilon f_2(r,\rho,\alpha,\theta,\varepsilon)}{-1+\varepsilon g(r,\rho,\alpha,\theta,\varepsilon)} \\
\dot{\alpha}(\theta) &= \frac{\varepsilon f_3(r,\rho,\alpha,\theta,\varepsilon)}{-1+\varepsilon g(r,\rho,\alpha,\theta,\varepsilon)}.
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Como $\dfrac{1}{-1+\varepsilon g(r,\rho,\alpha,\theta,\varepsilon)} = -1-\varepsilon g(r,\rho,\alpha,\theta,\varepsilon)+O(\varepsilon^2)$, reescrevemos (4.27) da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\dot{\overline{r}}(\theta) &= \varepsilon f_1(\overline{r},\overline{\rho},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon)\left(-1-\varepsilon g(\overline{r},\overline{\rho},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon)+O(\varepsilon^2)\right) \\
\dot{\overline{\rho}}(\theta) &= \varepsilon f_2(\overline{r},\overline{\rho},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon)\left(-1-\varepsilon g(\overline{r},\overline{\rho},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon)+O(\varepsilon^2)\right) \ . \\
\dot{\overline{\alpha}}(\theta) &= \varepsilon f_3(\overline{r},\overline{\rho},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon)\left(-1-\varepsilon g(\overline{r},\overline{\rho},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon)+O(\varepsilon^2)\right)
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\dot{\overline{r}}(\theta) &= -\varepsilon f_1(\overline{r},\overline{\rho},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon)+O(\varepsilon^2) \\
\dot{\overline{\rho}}(\theta) &= -\varepsilon f_2(\overline{r},\overline{\rho},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon)+O(\varepsilon^2) \\
\dot{\overline{\alpha}}(\theta) &= -\varepsilon f_3(\overline{r},\overline{\rho},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon)+O(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

Logo, (4.27) reescreve-se como

$$\begin{aligned}
\dot{\overline{r}}(\theta) &= -\varepsilon\Big\{2\overline{\rho}\Big[\overline{\rho}^2\cos\overline{\alpha}\cos^2(\theta+\overline{\alpha})+\overline{r}^2\cos\theta\Big(3\cos\theta\cos\overline{\alpha}-2\cos(\theta+\overline{\alpha})\Big)\Big] \\
&\quad -24\varepsilon\overline{r}\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta\Big(\overline{\rho}^4\cos^4\theta+\overline{\alpha}+2\overline{r}^2\overline{\rho}^2\cos^2(\theta+\overline{\alpha})\cos^2\theta-\overline{r}^4\cos^4\theta\Big)\Big\} \\
&\quad +O(\varepsilon^2) \\
\dot{\overline{\rho}}(\theta) &= -\varepsilon\Big[-2\overline{\rho}\overline{r}\Big(3\overline{\rho}\cos^2(\theta+\overline{\alpha}\cos\overline{\alpha}-2\overline{\rho}\cos\theta\cos(\theta+\overline{\alpha})+\overline{r}^2\cos^2\theta\cos\overline{\alpha}\Big) \\
&\quad +24\varepsilon\overline{\rho}\cos(\theta+\overline{\alpha})\,\mathrm{sen}\,(\theta+\overline{\alpha})(\overline{\rho}^4\cos^4(\theta+\overline{\alpha})-2\overline{\rho}^2\overline{r}^2\cos^2\theta\cos^2(\theta+\overline{\alpha}) \\
&\quad -\overline{r}^4\cos^4\theta)\Big]+O(\varepsilon^2) \\
\dot{\overline{\alpha}}(\theta) &= -\varepsilon\Big\{\frac{2\,\mathrm{sen}\,\overline{\alpha}}{\overline{\rho}\,\overline{r}}\Big[-\overline{\rho}^4cos^2(\theta+\overline{\alpha})+3\overline{\rho}^2r^2\Big(\cos^2(\theta+\overline{\alpha})-cos^2\theta\Big)+\overline{r}^4\cos^2\theta\Big] \\
&\quad +24\varepsilon\Big[\Big(\cos^2\theta+\cos^2(\theta+\overline{\alpha})\Big)\Big(\overline{\rho}^4\cos^4(\theta+\overline{\alpha})-\overline{r}^4\cos^4\theta\Big) \\
&\quad +\Big(2\overline{\rho}^2\overline{r}^2\cos^2\theta\cos^2(\theta+\overline{\alpha})\Big)\Big(\cos^2\theta-\cos^2(\theta+\overline{\alpha})\Big)\Big]\Big\}+O(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{4.28}$$

Agora defina

$$\varphi:(r_0,r_1)\times(\rho_0,\rho_1)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)\to\mathbb{R},\ \text{ por:}$$

$$\varphi(\overline{r},\overline{\rho},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon) = H_1(\overline{r},\overline{\rho},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon) - h = \frac{1}{2}(\overline{r}^2+\overline{\rho}^2) - \varepsilon F(\overline{r},\overline{\rho},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon),$$

onde $0 < r_0 < r_1 = \sqrt{2h}$, $0 < \rho_0 < \rho_1 = \sqrt{2h+1}$, $0 < \varepsilon_0 \leq \max\left\{\frac{1}{2M}, \frac{9h}{16M}\right\}$ e

$$\begin{aligned} F(\overline{r},\overline{\rho},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon) = & \ \overline{r}\,\overline{\rho}\operatorname{sen}\overline{\alpha}(\overline{r}^2\cos 2\theta + \overline{r}^2 + \overline{\rho}^2\cos 2(\overline{\alpha}+\theta) + \overline{\rho}^2) \\ & - \ 4\varepsilon\Big(\overline{r}^2\cos^2\theta + \overline{\rho}^2\cos^2(\overline{\alpha}+\theta)\Big)\Big(\overline{r}^4\cos^4\theta - 4\overline{r}^2\overline{\rho}^2\cos^2\theta\cos^2(\overline{\alpha}+\theta) \\ & + \ \overline{\rho}^4\cos^4(\overline{\alpha}+\theta)\Big). \end{aligned}$$

Vamos aplicar o Teorema 1.9. Note que

(a) $F$ é limitada, digamos por $M > 0$, pois $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, $r \in (r_0, r_1)$, $\rho \in (\rho_0, \rho_1)$ e $F$ depende de seno e cosseno que são limitadas.

(b) Note que:

$$\begin{aligned} |\varphi(\overline{r},\overline{\rho},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon)| &= \left|\frac{1}{2}(\overline{r}^2+\overline{\rho}^2) - h - \varepsilon F(\overline{r},\overline{\rho},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon)\right| \\ &\geq \left|\frac{1}{2}(\overline{r}^2+\overline{\rho}^2) - h\right| - \left|\varepsilon F(\overline{r},\overline{\rho},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon)\right| \\ &\geq \left|\frac{1}{2}(\overline{r}^2+\overline{\rho}^2) - h\right| - \varepsilon_0 M \\ &\geq \frac{1}{2}(r_0^2+\overline{\rho}^2) - h - \varepsilon_0 M. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned} \limsup_{\overline{\rho}\to\rho_1^-}\left|\varphi(\overline{r},\overline{\rho},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon)\right| &\geq \limsup_{\overline{\rho}\to\rho_1^-}\left|\frac{1}{2}(r_0^2+\overline{\rho}^2) - h\right| \\ &\geq \frac{1}{2}(r_0^2+\rho_1^2) - h - \varepsilon_0 M \\ &\geq \frac{1}{2}\rho_1^2 - h - \varepsilon_0 M. \end{aligned}$$

Tomando $\rho_1 = \sqrt{2h+1}$, temos

$$\limsup_{\overline{\rho}\to\rho_1^-}\left|\varphi(\overline{r},\overline{\rho},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon)\right| \geq \frac{1}{2} - \varepsilon_0 M > 0,$$

onde $0 < \varepsilon_0 \leq \dfrac{1}{2M}$.

(c) Por outro lado,

$$\begin{aligned} |\varphi(\overline{r},\overline{\rho},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon)| &= \left|\frac{1}{2}(\overline{r}^2+\overline{\rho}^2) - h - \varepsilon F(\overline{r},\overline{\rho},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon)\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{2}(\overline{r}^2+\overline{\rho}^2) - h\right| + \left|\varepsilon F(\overline{r},\overline{\rho},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon)\right| \\ &\leq \frac{1}{2}(r_1^2+\overline{\rho}^2) - h + \varepsilon_0 M. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}\liminf_{\overline{\rho}\to\rho_0^+}|\varphi(\overline{r},\overline{\rho},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon)| &\leq \liminf_{\overline{\rho}\to\rho_0^+}\left|\frac{1}{2}(r_1^2+\overline{\rho}^2)-h\right|+\varepsilon_0 M\\ &= \frac{1}{2}(r_1^2+\rho_0^2)-h+\varepsilon_0 M.\end{aligned}$$

Tomando $r_1=\dfrac{\sqrt{2h}}{2}$ e $\rho_0=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{3h}{2}}$, temos

$$\liminf_{\overline{\rho}\to\rho_0^+}|\varphi(\overline{r},\overline{\rho},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon)|\leq -\frac{9h}{16}+\varepsilon_0 M<0,$$

onde $0<\varepsilon_0\leq\dfrac{9h}{16M}$.

(d) Além disso, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\overline{\rho}}(\overline{r},\overline{\rho},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon)=\overline{\rho}-\varepsilon\dfrac{\partial F}{\partial\overline{\rho}}(\overline{r},\overline{\rho},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon)\neq 0$, pois

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial F}{\partial\overline{\rho}}(\overline{r},\overline{\rho},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon)\right| &= \Big|-\operatorname{sen}\overline{\alpha}\epsilon\overline{r}(\overline{r}^2+\overline{\rho}^2+\overline{r}^2\cos 2\theta+\overline{\rho}^2\cos 2(\theta+\overline{\alpha}))\\ &- \operatorname{sen}\overline{\alpha}\epsilon\overline{r}\overline{\rho}(2\overline{\rho}+2\overline{\rho}\cos 2(\theta+\overline{\alpha})-8\epsilon^2\overline{\rho}\cos^2(\theta+\overline{\alpha})\Big(\overline{r}^4\cos^4\theta\\ &- 4\overline{r}^2\overline{\rho}^2\cos^2\theta\cos^2(\theta+\overline{\alpha})+\overline{\rho}^4\cos^4(\theta+\overline{\alpha})\Big)-4\epsilon^2\Big(\overline{r}^2\cos^2\theta\\ &+ \overline{\rho}^2\cos^2(\theta+\overline{\alpha})\Big)\Big(4\overline{\rho}^3\cos^4(\theta+\overline{\alpha})-8\overline{r}^2\overline{\rho}\cos^2\theta\cos^2(\theta+\overline{\alpha})\Big)+\overline{\rho}\Big|.\end{aligned}$$

Agora, como $\overline{\rho}\in(\rho_0,\rho_1)$, $\varepsilon\in(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)$ e seno e cosseno são limitadas, segue que

$$\exists K>0;\left|\frac{\partial F}{\partial\overline{\rho}}(\overline{r},\overline{\rho},\overline{\alpha},\overline{\theta},\varepsilon)\right|\leq K.$$

Assim,

$$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{\rho}}(\overline{r},\overline{\rho},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon)\right|=\left|\overline{\rho}-\varepsilon\frac{\partial F}{\partial\overline{\rho}}(\overline{r},\overline{\rho},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon)\right|\geq|\ \overline{\rho}|-|\varepsilon_0 K=\rho_0-\varepsilon_0 K|>0$$

Portanto, $\left|\dfrac{\partial\varphi}{\partial\overline{\rho}}(\overline{r},\overline{\rho},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon)\right|\neq 0$.

Dos itens (a) a (d), estamos sob as hipóteses do Teorema 1.9 que nos garante que existe

$$\widehat{\rho}:(r_0,r_1)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times(-\varepsilon_0,\varepsilon_0)\to(\rho_0,\rho_1),$$

de classe $C^1$ tal que

$$\varphi(\overline{r},\widehat{\rho}(\overline{r},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon),\overline{\alpha},\theta,\varepsilon)=0. \tag{4.29}$$

Além disso, note que $\varphi$ é $2\pi$-periódica na variável $\theta$ pois cosseno é $2\pi$-periódica, isto é,

$$\varphi(\overline{r},\widehat{\rho}(\overline{r},\overline{\alpha},\theta+2\pi,\varepsilon),\theta+2\pi,\overline{\alpha},\varepsilon)=\varphi(\overline{r},\widehat{\rho}(\overline{r},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon),\theta,\overline{\alpha},\varepsilon). \tag{4.30}$$

Como é único $\widehat{\rho}(\overline{r},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon)\in(\rho_0,\rho_1)$ tal que ocorre (4.29) e (4.30), segue que

$$\widehat{\rho}(\overline{r},\overline{\alpha},\theta+2\pi,\varepsilon)=\widehat{\rho}(\overline{r},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon), \tag{4.31}$$

ou seja, $\widehat{\rho}$ é $2\pi$-periódica na variável $\theta$ e, pela Fórmula de Taylor em torno de $\varepsilon = 0$, temos

$$\widehat{\rho}(\overline{r},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon) \;=\; \widehat{\rho}_0(\overline{r},\overline{\alpha},\theta,0)+\varepsilon\widehat{\rho}_1(\overline{r},\overline{\alpha},\theta,0)+O(\varepsilon^2). \tag{4.32}$$

E ainda pelo Teorema da Função Implícita 1.4, temos

$$\begin{aligned}
\widehat{\rho}_1(\overline{r},\overline{\alpha},\theta,0) &= -\left[\frac{\partial\varphi}{\partial(\overline{r},\overline{\alpha},\theta)}(0,\widehat{\rho}(\overline{r},\overline{\alpha},\theta,0))\right]^{-1}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}(0,\widehat{\rho}(\overline{r},\overline{\alpha},\theta,0))\right]\\
&= -\frac{1}{\sqrt{2h-\overline{r}^2}}\left[-\overline{r}\sqrt{2h-\overline{r}^2}\operatorname{sen}\overline{\alpha}\left(2h+cos2(\theta+\overline{\alpha})(2h-\overline{r}^2)+\overline{r}^2\cos 2\theta\right)\right]+O(\varepsilon^2)\\
&= 2hr\operatorname{sen}\overline{\alpha}\cos 2(\overline{\alpha}+\theta)+2h\overline{r}\operatorname{sen}\overline{\alpha}+\overline{r}^3\operatorname{sen}\overline{\alpha}\cos 2\theta-\overline{r}^3\operatorname{sen}\overline{\alpha}\cos 2(\theta+\overline{\alpha})+O(\varepsilon^2).
\end{aligned}$$

Logo, substituindo $\widehat{\rho}_1(\overline{r},\overline{\alpha},\theta,0)$ em (4.32), temos

$$\begin{aligned}
\widehat{\rho}(\overline{r},\overline{\alpha},\theta,\varepsilon) &= \sqrt{2h-\overline{r}^2}+\varepsilon\Big(2h\overline{r}\operatorname{sen}\overline{\alpha}\cos 2(\overline{\alpha}+\theta)+2h\overline{r}\operatorname{sen}\overline{\alpha}+\overline{r}^3\operatorname{sen}\overline{\alpha}\cos 2\theta\\
&- \overline{r}^3\operatorname{sen}\overline{\alpha}\cos 2(\theta+\overline{\alpha})\Big)+O(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{4.33}$$

E por fim, substituindo $\widehat{\rho}$ em (4.28), obtemos

$$\begin{aligned}
\dot{\overline{r}}(\theta) &= \varepsilon\sqrt{-\overline{r}^2+2h}\Big(\Big(-6\cos\overline{\alpha}\cos^2\theta+4\cos(\theta+\overline{\alpha})\cos\theta+2\cos^2(\theta+\overline{\alpha})\cos\overline{\alpha}\Big)\overline{r}^2\\
&-4h\cos^2(\theta+\overline{\alpha})\cos\overline{\alpha}\Big)+O(\varepsilon^2)\\
\dot{\overline{\alpha}}(\theta) &= \frac{\varepsilon\sqrt{-\overline{r}^2+2h}}{\overline{r}^3-2h\overline{r}}\Big(-8\operatorname{sen}\overline{\alpha}h^2\cos^2(\theta+\overline{\alpha})+\Big(20\operatorname{sen}\overline{\alpha}h\cos^2(\theta+\overline{\alpha})\\
&-12\operatorname{sen}\overline{\alpha}h\cdot\cos^2\theta\Big)\overline{r}^2+\Big(8\operatorname{sen}\overline{\alpha}\cos^2\theta-8\operatorname{sen}\overline{\alpha}\cos^2(\theta+\overline{\alpha})\Big)\overline{r}^4\Big)+O(\varepsilon^2).
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Note que o sistema acima está sob a forma canônica e seu sistema médio é dado por

$$\dot{y}=\varepsilon f^0(y), \tag{4.35}$$

onde $y=(\overline{r},\overline{\alpha})$ e considerando $f_1^0(y), f_2^0(y)$ como sendo lado direito das respectivas equações do sistema (4.34) sem o termo $O(\varepsilon^2)$, temos

$$f^0(y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix} f_1^0(y)\\ f_2^0(y)\end{pmatrix}d\theta=\begin{pmatrix} -2\cos\overline{\alpha}h\sqrt{2h-\overline{r}^2}\\ \dfrac{4h\operatorname{sen}\overline{\alpha}(h-\overline{r}^2)}{\overline{r}\sqrt{2h-\overline{r}^2}}\end{pmatrix}. \tag{4.36}$$

Onde os pontos de equilíbrio de (4.35) são obtidos como segue

$$\begin{cases} -2h\sqrt{(2h-\overline{r}^2)}\cos\overline{\alpha}=0\\ \dfrac{4\operatorname{sen}\overline{\alpha}h(h-\overline{r}^2)}{\overline{r}\sqrt{2h-\overline{r}^2}}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2h-\overline{r}^2=0 \text{ ou } \cos\overline{\alpha}=0\\ h-\overline{r}^2=0 \text{ ou } \operatorname{sen}\overline{\alpha}=0\end{cases}.$$

Como $\overline{r},h>0$, $\overline{r}\neq\sqrt{2h}$ segue que $\overline{\alpha}=\pm\dfrac{\pi}{2}$ e $\overline{r}=\sqrt{h}$. Sejam $p_1=\left(\sqrt{h},\dfrac{\pi}{2}\right)$ e $p_2=\left(\sqrt{h},-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Note que

$$Jf^0(\overline{r},\overline{\alpha}) = \begin{pmatrix} \dfrac{2h\overline{r}\cos\overline{\alpha}}{\sqrt{2h-\overline{r}^2}} & 2h\,\mathrm{sen}\,\overline{\alpha}\sqrt{2h-\overline{r}^2} \\ \dfrac{8\,\mathrm{sen}\,\overline{\alpha}h^3}{\sqrt{2h-\overline{r}^2}\,(\overline{r}^4-2h\overline{r}^2)} & \dfrac{\sqrt{2h-\overline{r}^2}\,(4\cos\overline{\alpha}h\overline{r}^2-4\cos\overline{\alpha}h^2)}{\overline{r}^3-2h\overline{r}} \end{pmatrix},$$

$$Jf^0(p_1) = \begin{pmatrix} 0 & 2h^{\frac{3}{2}} \\ -8\sqrt{h} & 0 \end{pmatrix} \text{ e } Jf^0(p_2) = \begin{pmatrix} 0 & -2h^{\frac{3}{2}} \\ 8\sqrt{h} & 0 \end{pmatrix}.$$

Além disso,

$$\det Jf^0(p_1) = Jf^0(p_2) = 16h^2 \neq 0.$$

Logo, pelo Teorema 2.3, segue que existem soluções $(\overline{r_1}(\theta,\varepsilon),\overline{\alpha_1}(\theta,\varepsilon))$ e $(\overline{r_2}(\theta,\varepsilon),\overline{\alpha_2}(\theta,\varepsilon))$ de (4.34) $2\pi$-periódicas tais que $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\overline{r_1}(\theta,\varepsilon),\overline{\alpha_1}(\theta,\varepsilon)) = p_1$ e $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(\overline{r_2}(\theta,\varepsilon),\overline{\alpha_2}(\theta,\varepsilon)) = p_2$. Defina:

$$\overline{\rho}(\theta,\varepsilon) = \widehat{\rho}(\overline{r}(\theta,\varepsilon),\overline{\alpha}(\theta,\varepsilon),\theta,\varepsilon).$$

Note que, pela $2\pi$-periodicidade de $\widehat{\rho}$, $\overline{r}(\theta,\varepsilon)$ e $\overline{\alpha}(\theta,\varepsilon)$ na variável $\theta$, temos

$$\overline{\rho}(\theta+2\pi,\varepsilon) = \widehat{\rho}(\overline{r}(\theta+2\pi,\varepsilon),\overline{\alpha}(\theta+2\pi,\varepsilon),\theta+2\pi,\varepsilon) = \widehat{\rho}(\overline{r}(\theta,\varepsilon),\overline{\alpha}(\theta,\varepsilon),\theta,\varepsilon) = \overline{\rho}(\theta,\varepsilon),$$

ou seja, $\overline{\rho}(\theta,\varepsilon)$ também é $2\pi$-periódica. Portanto, $(\overline{r_1}(\theta,\varepsilon),\overline{\alpha_1}(\theta,\varepsilon),\overline{\rho}(\theta,\varepsilon))$ e $(\overline{r_2}(\theta,\varepsilon),\overline{\alpha_2}(\theta,\varepsilon),\overline{\rho}(\theta,\varepsilon))$ são soluções $2\pi$-periódicas de (4.28). Assim, pelo Teorema 1.17, segue que (4.24) admite soluções $(r_1(t,\varepsilon),\rho(t,\varepsilon),\alpha_1(t,\varepsilon),\theta(t,\varepsilon))$ e $(r_2(t,\varepsilon),\rho(t,\varepsilon),\alpha_2(t,\varepsilon),\theta(t,\varepsilon))$ tais que

$$\begin{aligned} r_1\Big(t+T(\varepsilon),\varepsilon\Big) &= r_1(t,\varepsilon) \\ \rho\Big(t+T(\varepsilon),\varepsilon\Big) &= \rho(t,\varepsilon) \\ \alpha_1\Big(t+T(\varepsilon),\varepsilon\Big) &= \alpha_1(t,\varepsilon) \\ \theta\Big(t+T(\varepsilon),\varepsilon\Big) &= \theta(t,\varepsilon)+2\pi. \end{aligned} \qquad \begin{aligned} r_2\Big(t+T(\varepsilon),\varepsilon\Big) &= r_2(t,\varepsilon) \\ \rho\Big(t+T(\varepsilon),\varepsilon\Big) &= \rho(t,\varepsilon) \\ \alpha_2\Big(t+T(\varepsilon),\varepsilon\Big) &= \alpha_2(t,\varepsilon) \\ \theta\Big(t+T(\varepsilon),\varepsilon\Big) &= \theta(t,\varepsilon)+2\pi. \end{aligned}$$

Substituindo em (4.23), temos

$$\begin{aligned} X_1^1(t+T(\varepsilon),\varepsilon) &= r_1(t+T(\varepsilon),\varepsilon)\cos(\theta(t+T(\varepsilon),\varepsilon)) \\ &= r_1(t,\varepsilon)\cos(\theta(t,\varepsilon)+2\pi) \\ &= r_1(t,\varepsilon)\cos(\theta(t,\varepsilon)) \\ &= X_1^1(t,\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_2^1(t+T(\varepsilon),\varepsilon) &= \rho(t+T(\varepsilon),\varepsilon)\cos(\theta(t+T(\varepsilon),\varepsilon)+\alpha_1(t+T(\varepsilon),\varepsilon)) \\ &= \rho(t,\varepsilon)\cos(\theta(t,\varepsilon)+2\pi+\alpha_1(t,\varepsilon)) \\ &= \rho(t,\varepsilon)\cos(\theta(t,\varepsilon)+\alpha_1(t,\varepsilon)) \\ &= X_2^1(t,\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_3^1(t+T(\varepsilon),\varepsilon) &= r_1(t+T(\varepsilon),\varepsilon)\,\mathrm{sen}\,(\theta(t+T(\varepsilon),\varepsilon)) \\ &= r_1(t,\varepsilon)\,\mathrm{sen}\,(\theta(t,\varepsilon)+2\pi) \\ &= r_1(t,\varepsilon)\,\mathrm{sen}\,(\theta(t,\varepsilon)) \\ &= X_3^1(t,\varepsilon) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_4^1(t+T(\varepsilon),\varepsilon) &= \rho(t+T(\varepsilon),\varepsilon)\,\mathrm{sen}\,(\theta(t+T(\varepsilon),\varepsilon)+\alpha_1(t+T(\varepsilon),\varepsilon)) \\ &= \rho(t,\varepsilon)\,\mathrm{sen}\,(\theta(t,\varepsilon)+2\pi+\alpha_1(t,\varepsilon)) \\ &= \rho(t,\varepsilon)\,\mathrm{sen}\,(\theta(t,\varepsilon)+\alpha_1(t,\varepsilon)) \\ &= X_4^1(t,\varepsilon), \end{aligned}$$

Assim, a solução $\Big(X_1^1(t,\varepsilon), X_2^1(t,\varepsilon), X_3^1(t,\varepsilon), X_4^1(t,\varepsilon)\Big)$ de (4.19) é $T(\varepsilon)$-periódica. Analogamente, obtemos as mesmas relações descritas acima tomando $r_2(t,\varepsilon)$ e $\alpha_2(t,\varepsilon)$ no lugar de $r_1(t,\varepsilon)$ e $\alpha_1(t,\varepsilon)$, respectivamente. Isto é, obtemos uma segunda órbita $\Big(X_1^2(t,\varepsilon), X_2^2(t,\varepsilon), X_3^2(t,\varepsilon), X_4^2(t,\varepsilon)\Big)$ para (4.19) que, assim como a primeira, também será $T(\varepsilon)$-periódica. Pelo Teorema 1.17, vimos $T(\varepsilon) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{du}{-1+\varepsilon g\Big(u, y_0(u,\varepsilon),\varepsilon\Big)}$ e $T(0) = -2\pi$, ou seja, tomando a Fórmula de Taylor em $\varepsilon = 0$, segue que $T(\varepsilon) = -2\pi + O(\varepsilon)$. Note que tanto $T(\varepsilon)$ quanto $-T(\varepsilon)$ representam o mesmo período para $\Big(X_1^i(t,\varepsilon), X_2^i(t,\varepsilon), X_3^i(t,\varepsilon), X_4^i(t,\varepsilon)\Big)$, $i = 1, 2$.

# Referências Bibliográficas


[1] J. Cronin, *Ordinary Differential Equations: Introduction and Qualitative Theory*, Chapman & Hall/CRC, Third edition, New York, 2008.

[2] C. I. Doering e A. O. Lopes, *Equações Diferenciais Ordinárias*, Coleção Universitária, Ed 3, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008.

[3] J. K. Hale, *Differential Equations*, Krieger Publishing Company Malabar, Second edition, Wiley-Interscience, New York, Florida, 1980.

[4] M. Hirsch and S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New York, 1974.

[5] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis With Aplications*, John Wiley & Sons. Inc.Springer, New York, 1978.

[6] E. L. Lima, *Curso de Análise*, Vol 2, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1981 (Projeto Euclides).

[7] E. L. Lima, *Análise Real: Funções de n Variáveis*, Vol 2, Rio de Janeiro, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 4 ed, 2009 (Coleção matemática universitária).

[8] J. Llibre e L. A. Roberto, *On the periodic orbits and the integrability of the regularized Hill lunar problem*, Journal of Mathematical Physics 52, AIP, 2011.

[9] J. R. Munkres, *Analysis on manifolds*, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Addison Wesley Publishing Company, 1991.

[10] D. D. Novaes, *Perturbed damped pendulum: finding periodic solutios via averaging method*, Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 35, n. 1, 1314, 2013.

[11] R. E. O'Malley Jr.; Williams, D. B., *Deriving amplitude equations for weakly-nonlinear oscillators and their generalizations*, Journal of Computational and Ap- plied Mathematics 190 (2006) 3 - 21.

[12] L. Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Ed 3, Springer, 2000.

[13] L. Pontryagin. *Ordinary Differential Equations: Y L. S. Pontryagin* ; Translated from the Russian by Leonas Kacinskas and Walter B. Counts. Adiwes International Series in Mathematics. Addison - Wesley Publishing Company, 1962.

[14] J. A. Sanders, F. Verhulst e J. Murdock, *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, vol 59, Applied Mathematical Sciences, ed 2, Springer, 2000.

[15] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, Ed 2, Universitext, Springer, 1996.

[16] W. ZHANG E S. G SAM, *A global Implicit Function Theorem without initial point and its applications to control of non-affine systems of high dimensions*, Journal of mathematical Analysis and Aplications, 313(2006), 251-261.