RENATO TOLENTINO DE SENE

Curvaturas de métricas invariantes em grupos de Lie

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2015

RENATO TOLENTINO DE SENE

Curvaturas de métricas invariantes em grupos de Lie

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Neiton Pereira da Silva.

UBERLÂNDIA - MG
2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

S475c 2015

Sene, Renato Tolentino de, 1985-
Curvaturas de métricas invariantes em Grupos de Lie / Renato Tolentino de Sene. - 2015.
108

Orientador: Neiton Pereira da Silva.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Inclui bibliografia.

1. Matemática - Teses. 2. Geometria diferencial - Teses. 3. Grupos de Lie - Teses. 4. Lie, Álgebra de - Teses. I. Silva, Neiton Pereira da, . II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO(A): Renato Tolentino de Sene.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11312MAT009.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Geometria Diferencial.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Curvaturas de métricas invariantes em grupos de Lie.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Neiton Pereira da Silva.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 27 de março de 2015, às 10h 00min, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME	ASSINATURA
Prof. Dr. Neiton Pereira da Silva UFU - Universidade Federal de Uberlândia	
Prof. Dr. Alexandre José Santana UEM - Universidade Estadual de Maringá	
Prof(a). Dr(a). Luciana Aparecida Alves UFU - Universidade Federal de Uberlândia	

Uberlândia-MG, 27 de março de 2015.

Dedicatória

A Deus por tudo.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela permissão de realizar mais esse sonho e pela presença constante em todos os momentos da minha vida. Ao meu orientador Neiton Pereira da Silva pelo incentivo, disponibilidade, empenho, estímulo e pelas orientações precisas em todos os momentos durante todo trabalho. Ao professor Edson Agustini pelo incentivo e pela disposição em me ajudar em momentos especiais. A todos os professores que contribuiram com minha formação. À minha mãe, Maria Alzira, que sempre me estimulou, e me compreendeu pela ausência em alguns momentos e por torcer sempre pelas minhas conquistas. À minha família e amigos que me deram todo apoio. Enfim, a todos que contribuiram direta ou indiretamente por mais essa conquista, meu sincero e eterno agradecimento.

Sene, Renato T. *Curvaturas de métricas invariantes em grupos de Lie.* 2015. 108 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Neste trabalho estudamos os aspectos geométricos de grupos de Lie, do ponto de vista da geometria Riemanniana, por meio de estruturas geométricas invariantes associadas. Nós apresentamos algumas propriedades de curvaturas com métricas invariante a esquerda e aquelas bi-invariantes em grupos de Lie. Apresentamos também um tratamento das álgebras de Lie unimodulares, incluindo o caso tridimensional. A maioria dos resultados estudados foram retirados do artigo de John Milnor: *Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups.*

Palavras-chave: Geometria diferencial, Grupos de Lie, Álgebras de Lie, Métricas Invariantes.

Sene, Renato T. *Curvatures of invariant metrics on Lie groups.* 2015. 108 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

In this work we study the geometric aspects of Lie groups from the view point of the Riemannian geometry, by means of invariant geometric structures associated. We present some properties on curvatures of metrics left invariants and bi-invariant one on Lie groups. We also present a treatment of the Lie algebras unimodular, including the tridimensional case. Most of the results studied are from the article of John Milnor: *Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups.*

Keywords: Differential Geometry, Lie Groups, Lie algebras, Metrics Invariant.

Sumário

Introdução

Os grupos de Lie representam o maior avanço na teoria das simetrias de objetos e estruturas matemáticas, o que faz dos mesmos uma ferramenta essencial no estudo de diversas áreas da matemática como por exemplo: simetrias de equações diferenciais, análise harmônica, sistemas dinâmicos, entre outros, e da física teórica, mais especificamente, na mecânica quântica.

Os grupos de Lie são objetos não lineares que são estudados por meio de métodos do cálculo diferencial e integral. Outro fato interessante no estudo dos grupos de Lie é que são objetos com características algébricas e geométricas por ser uma combinação da estrutura algébrica de grupo com a estrutura de variedade diferenciável. O estudo dos aspectos geométricos de um grupo de Lie se dá em especial pelas características de sua álgebra de Lie que é o espaço vetorial dos campos invariantes à esquerda ou à direita munido do produto dado pelo colchete de campo de vetores podendo ser identificada com o espaço tangente no elemento neutro do grupo . Dessa forma podemos estudar objetos não lineares, relativos ao grupo de Lie, através do estudo de objetos lineares relacionados com sua álgebra de Lie. Segundo San Martin [9], uma vez tendo a álgebra de Lie de um grupo de Lie a ideia toda consiste em transferir propriedades da álgebra de Lie a propriedades do grupo de Lie. Esse processo de transferência é muito bem sucedido, o que permite descrever os grupos de Lie.

Os aspectos geométricos dos grupos de Lie surgem quando os tratamos como variedade diferenciável. Isso nos permite definir um espaço tangente em cada ponto do grupo e a partir daí termos a noção de vetores tangentes e de campo de vetores. Ao trabalharmos com campos de vetores que são invariantes por translação à esquerda ou à direita, podemos determinar um campo definido num espaço tangente em qualquer ponto do grupo de Lie, através de um campo de vetores definido no espaço tangente do elemento neutro do grupo. Ainda sobre os aspectos geométricos podemos munir um grupo de Lie com uma métrica Riemanniana, o que o torna uma variedade Riemanniana. A partir daí temos uma geometria Riemanniana que nos permite definir a noção de derivação de campo de vetores, como no caso das conexões e definir curvaturas.

Neste trabalho faremos um estudo das estruturas geométricas invariantes associadas aos grupos de Lie. No primeiro capítulo estudaremos as variedades diferenciáveis, bem como funções diferenciáveis definidas na variedade e funções diferenciáveis entre variedades, além da noção de diferencial que continua sendo uma aplicação linear entre espaços tangentes.

Estudaremos também métricas Riemannianas, a conexão afim e sua compatibilidade com a métrica Riemanniana, os conceitos de tensor curvatura, curvatura seccional, curvatura de Ricci e curvatura escalar num ponto da variedade Riemanniana.

No capítulo 2 deste trabalho, introduziremos o estudo dos grupos de Lie e suas álgebras de Lie. Trataremos de alguns exemplos de grupos de matrizes como $SL(n,\mathbb{R})$, $SO(n)$, $O(n)$, $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$ e usaremos o teorema de Cartan que garante que um subgrupo fechado H de um grupo de Lie G é um subgrupo de Lie de G, no sentido de ter uma estrutura de grupo e ser uma subvariedade de G. Ainda neste capítulo, estudaremos a aplicação exponencial que estabelece a relação entre a álgebra e o grupo de Lie. Sua construção se dá pela associação de cada elemento da álgebra de Lie associada a um subgrupo do grupo de Lie. Mais ainda, esta aplicação estabelece o vínculo entre o colchete na álgebra de Lie e o produto no grupo de Lie.

Por fim, no capítulo 3 estudaremos as curvaturas de métricas invariantes em grupos de Lie. Os resultados neste capítulo, foram em sua maioria retirados do artigo de Milnor [7]. Dessa forma, veremos resultados que classificam determinados grupos por meio do sinal da curvatura seccional, de Ricci e escalar. Um exemplo é a classificação dos grupos de Lie que para toda métrica invariante à esquerda possuem curvaturas seccionais constantes negativas, resultado fornecido pelo teorema 3.14. Ainda apresentamos uma classificação das álgebras de Lie tridimensionais, mostrando que a álgebra de Lie é unimodular se, e somente se, existe uma base $\{E_1, E_2, E_3\}$ e números reais λ_1, λ_2, λ_3 tais que

$$[E_2, E_3] = \lambda_1 E_1, \quad [E_3, E_1] = \lambda_2 E_2, \quad [E_1, E_2] = \lambda_3 E_3.$$

E no caso do grupo compacto $SU(2)$ e do grupo solúvel $E(2)$ apresentamos as possíveis assinaturas da forma quadrática de Ricci.

Na seção 3.5.1, apresentamos um estudo sobre grupos de Lie conexos com métricas bi-invariantes. E neste caso apresentamos uma fórmula para a conexão Riemanniana, para o tensor curvatura e para X e Y ortonormais vimos que a curvatura seccional $k(\sigma)$ do grupo de Lie G segundo o plano gerado por X e Y é dada por $k(\sigma) = \dfrac{1}{4}\|[X,Y]\|^2$, concluindo que a curvatura seccional em um grupo de Lie munido de uma métrica bi-invariante é não negativa e é zero se o plano σ é gerado por vetores X, Y tais que $[X,Y] = 0$. Também descrevemos a curvatura de Ricci, através da forma de Killing, que é uma forma bilinear, simétrica, não-degenerada e negativa definida se o grupo de Lie for compacto e semi-simples. Na última seção deste capítulo, citamos alguns problemas em aberto sobre a classificação dos grupos de Lie em relação ao estudo do sinal da curvatura de Ricci e escalar com base em pesquisas realizadas no Mathscinet, Zentralblatt e Google.

Renato Tolentino de Sene
Uberlândia-MG, 27 de Março de 2015.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo estudaremos as variedades diferenciáveis, as funções diferenciáveis entre variedades diferenciáveis, a noção de vetor tangente, espaço tangente num ponto da variedade diferenciálvel e campos de vetores em uma variedade diferenciável. Ainda faremos um estudo sobre alguns elementos da geometria Riemanniana como métrica, conexão Riemanniana e curvatura seccional, de Ricci e escalar que serão os pré requisitos necessários para este texto. As principais referências são Manfredo [3] e Arvanitoyeorgos [1].

1.1 Variedades diferenciáveis

A noção de superfície diferenciável estudada em geometria diferencial ainda que adequada para muitos propósitos, possui dois incovenientes. O primeiro é de caráter estético, pois não se pode pensar na superfície em si mesma, sem fazer referência ao espaço euclidiano que a contém. O segundo inconveniente é de ordem prática, pois existem na natureza objetos importantes, semelhantes a superfícies, que não se apresentam contidos num espaço euclidiano.

A grosso modo, uma variedade diferenciável é como uma superfície, só que não precisa estar contida em um espaço euclidiano.

A noção de variedade diferenciável é necessária para estender os métodos do cálculo diferencial a espaços mais gerais do que o $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.1. *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um espaço topológico M de Hausdorff com uma coleção de pares (U_α, ϕ_α) onde U_α é um subconjunto aberto de M denominado carta e $\phi_\alpha \colon U_\alpha \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que:*

(a) Cada ϕ_α é um homeomorfismo de U_α em um subconjunto aberto V_α do $\mathbb{R}^n$,

(b) $\bigcup_\alpha U_\alpha = M$,

(c) Para cada par α, β as funções de transição $\phi_{\alpha\beta} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} \colon \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ são diferenciáveis, no sentido de funções diferenciáveis entre subconjuntos do $\mathbb{R}^n$. Neste caso as cartas (U_α, ϕ_α) e (U_β, ϕ_β) são compatíveis

(d) *A família $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ é máxima em relação às condições anteriores e constitui uma estrutura diferenciável em M.*

O par (U_α, ϕ_α) com $p \in \phi_\alpha(U_\alpha)$ também é chamado uma *parametrização* ou *sistema de coordenadas* de M em p. A imagem $\phi_\alpha(U_\alpha)$ é então chamada *vizinhança coordenada* em p.

Exemplo 1.1. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é uma variedade n-dimensional.

De fato, basta tomar $U = \mathbb{R}^n$ e $\phi\colon\ U \longrightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $\phi(x) = x$, ou seja, ϕ é a função identidade.

Exemplo 1.2. A esfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}\ ;\ |x| = 1\}$ é uma variedade diferenciável n-dimensional.

Seja $x \in S^n$, onde $x = (x_1, x_2, \cdots, x_{n+1})$. E definimos os seguintes sistemas de coordenadas:
Sejam $U_+ = \{x \in S^n\ :\ x_{n+1} > -1\}$ e $U_- = \{x \in S^n\ :\ x_{n+1} < 1\}$ abertos em S^n, e definimos as aplicações $\phi_+\colon\ U_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\phi_+(x) = \left(\frac{x_1}{1+x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{1+x_{n+1}}\right)$ e $\phi_-\colon\ U_- \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\phi_-(x) = \left(\frac{x_1}{1-x_{n+1}}, \cdots, \frac{x_n}{1-x_{n+1}}\right)$.

As aplicações ϕ_+ e ϕ_- são chamadas projeções estereográficas de S^n em $\mathbb{R}^{n+1}$ relativas ao pólo norte e ao pólo sul, respectivamente.

i) É claro que $U_+ \cup U_- = S^n$,

ii) O conjunto $U_+ \cap U_- = \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in S^n;\ \ x_{n+1} \in (-1, 1)\}$ é aberto, pois pode ser escrito como a interseção da esfera S^n com o conjunto aberto $\{(0, 0, \cdots, 0, 2t-1);\ t \in (-1, 1)\}$ de $\mathbb{R}^n$. Para ver que $\phi_+(U_+ \cap U_-)$ e $\phi_-(U_+ \cap U_-)$ são abertos do $\mathbb{R}^n$ basta ver que as aplicações ϕ_+ e ϕ_- quando consideredas sobre suas imagens são homeomorfismos.
De fato, é claro que ϕ_+ e ϕ_- são contínuas, pois suas funções coordenadas são funções contínuas. Se definirmos $\xi_1\colon \mathbb{R}^n \to U_+$ pondo $\xi_1(y) = x$ onde $y = (y_1, \cdots, y_n)$, $x = (x', x_{n+1})$ sendo $x' = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $x' = \dfrac{2y}{|y|^2+1}$ e $x_{n+1} = \dfrac{|y|^2-1}{|y|^2+1}$. Ou seja,

$$\xi_1(y_1, \cdots, y_n) = \left(\frac{2y_1}{|y|^2+1}, \cdots, \frac{2y_n}{|y|^2+1}, \frac{|y|^2-1}{|y|^2+1}\right).$$

Temos que, ξ_1 é contínua e ainda, pode-se ver que $\xi_1(\phi_+(x)) = x$ e $\phi_+(\xi_1(y)) = y$. Isso prova que a aplicação ϕ_+ é um homeomorfismo e de forma análoga concluímos que a aplicação ϕ_- é um homeomorfirmo. Portanto, os conjuntos $\phi_+(U_+ \cap U_-)$ e $\phi_-(U_+ \cap U_-)$ são abertos do $\mathbb{R}^n$.
Tomemos agora, a aplicação $\phi_- \circ \phi_+^{-1}\colon \phi_+(U_+ \cap U_-) \longrightarrow \phi_-(U_+ \cap U_-)$. Seja $x' =$

$(x_1, \cdots, x_n)$ então

$$\begin{aligned}(\phi_- \circ \phi_+^{-1})(x_1, \cdots, x_n) &= \phi_- \left(\frac{2x_1}{|x'|^2+1}, \cdots, \frac{2x_n}{|x'|^2+1}, \frac{|x'|^2-1}{|x'|^2+1} \right) \\ &= \frac{1}{|x'|^2+1} \left(\frac{2x_1}{1-x_{n+1}}, \cdots, \frac{2x_n}{1-x_{n+1}} \right).\end{aligned}$$

Portanto, concluímos que a aplicação $\phi_- \circ \phi_+^{-1}$ é diferenciável, pois as funções coordenadas são diferenciáveis. Portanto, $\{(U_+, \phi_+), (U_-, \phi_-)\}$ é uma estrutura diferenciável em S^n.

Exemplo 1.3. O espaço projetivo $P^n(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}P^n$ é o conjunto das retas de $\mathbb{R}^{n+1}$ que passam pela origem $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$. Mais precisamente $P^n(\mathbb{R})$ é o espaço quociente de $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ pela relação de equivalência $(x_1, \cdots, x_{n+1}) \sim (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_{n+1})$ com $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ onde cada classe de equivalência é uma reta que passa pela origem.
Cada classe de equivalência é um ponto em $P^n(\mathbb{R})$ denotado por $[x_1, \cdots, x_{n+1}]$.
Mais precisamente,
$P^n(\mathbb{R}) = {}^{(\mathbb{R}^{n+1}-\{0\})}\big/ \sim \; := \{(x_1, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1};\ (x_1, \cdots, x_{n+1}) \sim (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_{n+1})$ com $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}\}$.

Definimos o subconjunto

$$U_i = \{[x_1, \cdots, x_{n+1}] \in P^n(\mathbb{R});\ x_i \neq 0\},$$

o qual é o conjunto de todas as retas que passam pela origem e não pertencem ao hiperplano $x_i = 0$, e as cartas $\phi_i \colon U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\phi_i[x_1, \cdots, x_{n+1}] = \left(\frac{x_1}{x_i}, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \cdots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$.
Assim, o espaço projetivo é coberto pelas cartas $(U_1, \phi_1), \cdots, (U_{n+1}, \phi_{n+1})$.

Vejamos que $\{(U_i, \phi_i)\}$ é uma estrutura diferenciável em $P^n(\mathbb{R})$.

i) É claro que
$$\bigcup_{i=1}^{n+1} U_i = P^n(\mathbb{R}),$$

ii) Para cada par i,j tomemos U_i e U_j com $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ e vejamos que $\phi_i(U_i \cap U_j)$ e $\phi_j(U_i \cap U_j)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$. Seja

$$U_i = \{[x_1, \cdots, x_{n+1}];\ x_i \neq 0\} \text{ e } U_j = \{[x_1, \cdots, x_{n+1}];\ x_j \neq 0\},$$

onde, $U_i \cap U_j = \{[x_1, \cdots, x_{n+1}];\ x_i, x_j \neq 0\}$ e considerando $i < j$, definimos:

$$\begin{array}{rccc} \phi_i \colon & U_i \cap U_j & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & [x_1, \cdots, x_{n+1}] & \longmapsto & \left(\frac{x_1}{x_i}, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \cdots, \frac{x_j}{x_i}, \cdots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccl} \phi_j\colon & U_i \cap U_j & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & [x_1, \cdots, x_{n+1}] & \longmapsto & \left(\frac{x_1}{x_j}, \cdots, \frac{x_i}{x_j}, \cdots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \cdots, \frac{x_{n+1}}{x_j}\right). \end{array}$$

Tomemos a projeção na j-ésima coordenada $\pi_j\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $\pi_j(y_1, \cdots, y_n) = y_j$, onde $y_1 = \frac{x_1}{x_i}, \cdots, y_{i-1} = \frac{x_{i-1}}{x_i}, y_{i+1} = \frac{x_{i+1}}{x_i}, \cdots, y_j = \frac{x_j}{x_i}, \cdots, y_n = \frac{x_{n+1}}{x_i}$ com $y_j \neq 0$.

Dessa forma, $\phi_i(U_i \cap U_j) = \{(y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n\colon y_j \neq 0\} = \pi_j^{-1}\left((-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\right)$ é a imagem inversa de um aberto de $\mathbb{R}$. Como a projeção na j-ésima coordenada é uma aplicação contínua, concluimos que $\phi_i(U_i \cap U_j)$ é um aberto do $\mathbb{R}^n$.

Da mesma forma, fazendo $y_1 = \frac{x_1}{x_j}, \cdots, y_i = \frac{x_i}{x_j}, \cdots, y_{j-1} = \frac{x_{j-1}}{x_j}, y_{j+1} = \frac{x_{j+1}}{x_j}, \cdots, y_n = \frac{x_{n+1}}{x_j}$ com $y_i = \frac{x_i}{x_j} \neq 0$, temos que $\phi_j(U_i \cap U_j) = \{(y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n : y_i \neq 0\}$ de forma que $\phi_j(U_i \cap U_j) = \pi_i^{-1}\left((-\infty, 0) \cup (0, +\infty)\right)$ que é a imagem inversa de um aberto de $\mathbb{R}$ por uma aplicação contínua, portanto um aberto do $\mathbb{R}^n$.

Agora consideremos a aplicação $\phi_i\colon\ U_i\ \cap\ U_j \longrightarrow \mathbb{R}^n$, tal que $\phi_i([x_1, \cdots, x_{n+1}] = (y_1, \cdots, y_n)$, onde $y_1 = \frac{x_1}{x_i}, \cdots, y_n = \frac{x_n}{x_i}$, então $\phi_i^{-1}\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow U_i\ \cap\ U_j$ é definida por

$$\phi_i^{-1}(y_1, \cdots, y_{i-1}, y_{i+1}, \cdots, y_j, \cdots, y_n) = \left[\frac{x_1}{x_i}, \cdots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \cdots, \frac{x_j}{x_i}, \cdots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right].$$

Assim,

$$\begin{aligned} \big(\phi_j(\phi_i^{-1})\big)(y_1, \cdots, y_n) &= \phi_j\big(\phi_i^{-1}(y_1, \cdots, y_n)\big) \\ &= \phi_j\big([x_1, \cdots, x_n]\big) \\ &= \left(\frac{x_1}{x_j}, \cdots, \frac{x_i}{x_j}, \cdots, \frac{x_{j-1}}{x_j}, \frac{x_{j+1}}{x_j}, \cdots, \frac{x_n}{x_j}\right). \end{aligned}$$

Cada coordenada define uma aplicação diferenciável $C\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $C(x_k) = \dfrac{x_k}{x_j}$ onde $k = 1, \cdots, i, \cdots, j-1, j+1, \cdots, n$, concluímos que a aplicação $\phi_j \circ \phi_i^{-1}\colon\ \phi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \phi_j((U_i \cap U_j))$ é diferenciável.

Exemplo 1.4. Qualquer aberto U de uma variedade diferenciável M é em si uma variedade diferenciável. Os subconjuntos abertos dos sistemas de coordenadas de U são as interseções de U com os subconjuntos abertos dos sistemas de coordenadas de M.

Seja $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$ uma estrutura diferenciável em M, assim temos: $M = \bigcup_\alpha U_\alpha$ e como $U \subset M$ podemos dizer que $U = \bigcup_\alpha (U \cap U_\alpha)$. E ainda, para cada par α, β, $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ e $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ são abertos no $\mathbb{R}^n$, logo, $\phi_\alpha\big|_U(U_\alpha \cap U_\beta)$ e $\phi_\beta\big|_U(U_\alpha \cap U_\beta)$ também são abertos no $\mathbb{R}^n$.

A aplicação $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}\colon\ \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \phi_\beta((U_\alpha \cap U_\beta))$ é diferenciável, logo, $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha\big|_U(U_\alpha \cap U_\beta) \longrightarrow \phi_\beta\big|_U(U_\alpha \cap U_\beta)$ também é diferenciável, portanto $\{(U \cap U_\alpha, \phi_\alpha\big|_U)\}$é uma estrutura diferenciável em U.

Exemplo 1.5. Sejam M e N variedades diferenciáveis de dimensão m e n respectivamente, então o produto cartesiano $M \times N$ é uma variedade de dimensão $m+n$.

Definição 1.2. Seja M e N duas variedades diferenciáveis e φ uma aplicação tal que $\varphi\colon M \longrightarrow N$. Então φ é diferenciável se dada duas cartas $\phi\colon U \subset M \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^m$ e $\widetilde{\phi}\colon \widetilde{U} \subset N \longrightarrow \widetilde{V} \subset \mathbb{R}^n$, a aplicação $\widetilde{\phi} \circ \varphi \circ \phi^{-1}\colon \phi(U \cap \varphi^{-1}(\widetilde{U})) \longrightarrow \widetilde{V}$ é diferenciável.

Um difeomorfismo $\varphi\colon M \longrightarrow N$ é uma função diferenciável com inversa φ^{-1} também diferenciável.

A definição de aplicações diferenciáveis independe da escolha das parametrizações.

De fato, sejam $\phi_1\colon U_1 \subset M \longrightarrow V_1 \subset \mathbb{R}^m$ e $\widetilde{\phi}_1 : \widetilde{U}_1 \subset N \longrightarrow \widetilde{V}_1 \subset \mathbb{R}^n$ outras cartas de M e N respectivamente, com $\varphi(U_1 \cap U) \subset \widetilde{U} \cap \widetilde{U}_1$.
Sabemos que $\widetilde{\phi} \circ \varphi \circ \phi^{-1} : \phi\big((U_1 \cap U) \cap \varphi^{-1}(\widetilde{U} \cap U_1)\big) \longrightarrow \widetilde{\phi}(\widetilde{U} \cap \widetilde{U}_1)$ é diferenciável. Seja $\phi_1 \circ \phi^{-1}\colon (U_1 \cap U) \cap \varphi^{-1}(\widetilde{U} \cap \widetilde{U}_1) \longrightarrow \phi_1(U_1 \cap U)$ e $\widetilde{\phi}_1 \circ \widetilde{\phi}^{-1}\colon \widetilde{\phi}(\widetilde{U} \cap \widetilde{U}_1) \longrightarrow \widetilde{\phi}_1(\widetilde{U} \cap \widetilde{U}_1)$ as funções de transição entre as cartas ϕ e ϕ_1, $\widetilde{\phi}$ e $\widetilde{\phi}_1$, logo são diferenciáveis. Assim, $\widetilde{\phi}_1 \circ \varphi \circ \phi_1^{-1} = \widetilde{\phi}_1 \circ \widetilde{\phi}^{-1} \circ (\widetilde{\phi} \circ \varphi \circ \phi^{-1}) \circ \phi \circ \phi_1^{-1}$ é uma composição de funções diferenciáveis.

Definição 1.3. Seja M uma variedade de dimensão n, p um ponto da variedade M e seja $\mathcal{F}(M)$ o anel das funções reais de classe (C^∞) definidas em M. Um vetor tangente a M em p é uma função com valores reais $v\colon \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz:

(a) Dados $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathcal{F}(M)$ então $v(af + bg) = av(f) + bv(g)$, ou seja é linear.

(b) (Regra de Leibniz) $v(fg) = v(f)g + fv(g)$

Em cada ponto $p \in M$ denotamos por T_pM o conjunto formado por todos os vetores tangentes de M em p. Podemos munir T_pM com as operações de soma e multiplicação por escalar:

$$\begin{array}{rccc} +\colon & T_pM \times T_pM & \longrightarrow & T_pM \\ & (v, w) & \longmapsto & v + w, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \cdot\colon & \mathbb{R} \times T_pM & \longrightarrow & T_pM \\ & (a, w) & \longmapsto & a \cdot w = aw. \end{array}$$

E assim, temos que o conjunto T_pM é um espaço vetorial de dimensão igual à dimensão de M, denominado espaço tangente à M em p. Vamos construir uma base para T_pM:

Considere $TM = \bigcup_p T_pM$ união disjunta dos espaços tangentes em cada ponto de M. Um ponto em TM consiste no par (p, v) onde $p \in M$ e $v \in T_PM$. Pode-se mostrar que tal TM é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$, chamada de **fibrado tangente de** M, (ver [3]).

$$TM = \{(p, v); p \in M \ e \ v \in T_pM\}.$$

Este é um espaço natural para trabalhar quando estivermos tratando com questões que envolvem posição e velocidade.

Uma curva em uma variedade diferenciável M é uma aplicação diferenciável $\alpha\colon I \longrightarrow M$ onde I é um intervalo de $\mathbb{R}$. O vetor velocidade de α em t é o vetor $\alpha^{'}(t) \in T_{\alpha(t)}M$ definido por:

$$\begin{aligned} \alpha^{'}(t): \ & \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R} \\ & f \longmapsto \alpha^{'}(t).f = \frac{\mathrm{d}f}{dt}(f \circ \alpha). \end{aligned}$$

Essa definição é motivada pela noção de derivada direcional em cálculo avançado. Seja $\phi: U \subset M \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ uma carta de M tal que dado $p \in M$, $\phi(p) = (x_1, \cdots, x_n) \in V \subset \mathbb{R}^n$. Seja $\alpha: I \longrightarrow M$, dada por $\phi(\alpha(t)) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$, então:

$$\alpha^{'}(0).f = \frac{\mathrm{d}}{dt}(f \circ \alpha)\bigg|_{t=0} = \frac{df}{dt}(x_1(t), \cdots, x_n(t))\bigg|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} x_i^{'}(0)\frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{t=0} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{'}(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0\right).f.$$

Agora dado $v = \alpha^{'}(0) \in T_pM$, pelo que vimos acima $\alpha^{'}(0) = \sum_{i=1}^{n} x_i^{'}(0)\frac{\partial}{\partial x_i}$, o que mostra que os vetores $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ gera T_pM. Por outro lado, se $\alpha^{'}(0) = 0$ então $x_i^{'}(0) = 0$ para $i = 1, \cdots, n$. Daí, segue que esses vetores são L.I. e portanto formam uma base de T_pM, em particular, a dimensão de T_pM é n.

Definição 1.4. Seja $\varphi\colon M \longrightarrow N$ uma função diferenciável. Em cada ponto $p \in M$, a diferencial φ é a função

$$\begin{aligned} d\varphi_p\colon \quad & T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}N \\ & v \longmapsto \ d\varphi_p(v)\colon \quad \mathcal{F}(N) \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad g \ \longmapsto \ d\varphi_p(v)(g) = v(g \circ \varphi) \end{aligned}$$

$\forall v \in T_pM$ e $g \in \mathcal{F}(N)$.

Para cada ponto $p \in M$ a diferencial $d\varphi_p$ é uma aplicação linear entre os espaços tangentes. De fato, dados $a \in \mathbb{R}$, $v, w \in T_pM$, para todo $g \in \mathcal{F}(N)$, temos: $d\varphi_p(av + w)(g) = (av + w)(g \circ \varphi) = av(g \circ \varphi) + w(g \circ \varphi) = a.d\varphi_p(v)(g) + d\varphi_p(w)(g) = (a.d\varphi_p(v) + d\varphi_p(w))(g)$. Logo, concluímos que $d\varphi_p(av + w) = a.d\varphi_p(v) + d\varphi_p(w)$.

Proposição 1.1. *Seja $\varphi\colon M \longrightarrow N$ uma aplicação diferenciável entre duas variedades diferenciáveis e seja $p \in M$ e $v \in T_pM$. Tomemos uma curva diferenciável $\alpha\colon I \longrightarrow M$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha^{'}(0) = v$. Então a diferencial de φ em p é dada por*

$$d\varphi_p(v) = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)\bigg|_{t=0}.$$

E mais ainda, a expressão acima não depende da escolha de α.

Demonstração. Considere $\beta\colon I \longrightarrow N$ uma curva diferenciável com $\beta(0) = 0$ e $\beta^{'}(0) = d\varphi_p(\alpha^{'}(0))$. Como $\beta = \varphi \circ \alpha$, segue que $\beta^{'}(0) = \frac{\mathrm{d}}{dt}(\varphi \circ \alpha)\bigg|_{t=0}$.

Portanto, $d\varphi_p(v) = \dfrac{\mathrm{d}}{dt}(\varphi \circ \alpha)\Big|_{t=0}$.

Vejamos que $\beta'(0)$ independe da escolha de α:
Sejam $\phi_1^{-1}\colon U_1 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$ e $\phi_2^{-1}\colon U_2 \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow N$ sistemas de coordenadas em p e $\varphi(p)$ respectivamente. Sabemos que φ é diferenciável se $\phi_2 \circ \varphi \circ \phi_1^{-1}\colon U_1 \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $\phi_1(p)$. Seja $q = (x_1, \cdots, x_n) \in U_1$ e $(y_1, \cdots, y_m) \in U_2$ então $(\phi_2 \circ \varphi \circ \phi_1^{-1})(q) = (y_1(q), \cdots, y_m(q))$. Exprimindo α na parametrização ϕ_1^{-1} temos $(\phi_1 \circ \alpha)(t) = \phi_1(\alpha(t)) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$ e exprimindo $\varphi \circ \alpha = \beta$ na parametrização ϕ_2^{-1} temos que $\phi_2 \circ \beta = \phi_2 \circ (\varphi \circ \alpha) = (\phi_2 \circ \varphi \circ \phi_1^{-1}) \circ (\phi_1 \circ \alpha)$ que é uma aplicação diferenciável de I em $\mathbb{R}^m$, e portanto,

$$\begin{aligned}
(\phi_2 \circ (\varphi \circ \alpha))(t) &= ((\phi_2 \circ \varphi \circ \phi_1^{-1}) \circ (\phi_1 \circ \alpha)(t)) \\
&= (\phi_2 \circ \varphi \circ \phi_1^{-1})(x_1(t), \cdots, x_n(t)) \\
&= (y_1(x_1(t), \cdots, x_n(t)), \cdots, y_n(x_1(t), \cdots, x_n(t))).
\end{aligned}$$

Logo, para todo $g \in \mathcal{F}(N)$, temos:

$$\begin{aligned}
\beta'(0)g &= \frac{d}{dt}(g \circ \beta)\Big|_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt} g(y_1(x_1(t), \cdots, x_n(t)), \cdots, y_n(x_1(t), \cdots, x_n(t)))\Big|_{t=0} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_i'(0)\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)_0 \left(\frac{\partial g}{\partial y_j}\right)_0 \\
&= \left[\sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\left(\frac{\partial y_j}{\partial x_i}\right)_0 \left(\frac{\partial g}{\partial y_j}\right)_0\right] g, \forall j = 1, \cdots, m.
\end{aligned}$$

Assim, concluimos que a expressão de $\beta'(0)$ na base $\left\{\left(\dfrac{\partial}{\partial y_j}\right)_0\right\}_{j=1}^{m}$ de $T_{\varphi(p)}N$ associada à parametrização ϕ_2 é dada por:

$$\beta'(0) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} x_i'(0), \cdots, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_m}{\partial x_i} x_i'(0)\right).$$

Isso mostra que $\beta'(0)$ não depende da escolha de α. ■

Definição 1.5. Um campo de vetores X de uma variedade diferenciável M é uma aplicação $X\colon M \longrightarrow TM$ que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor tangente $X(p)$ ou X_p de T_pM, onde

$$\begin{aligned}
X_p\colon\ & \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathbb{R} \\
& f \longmapsto X_p(f) = (Xf)(p).
\end{aligned}$$

Se X é um campo de vetores em M e $f \in \mathcal{F}(M)$ então denotamos por (Xf) o valor real da função em M dado por $(Xf)(p) = X_p(f)$ para todo $p \in M$. O campo X é diferenciável se a função Xf acima é diferenciável, para todo $f \in \mathcal{F}(M)$. Denotamos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto de todos os campos vetoriais diferenciáveis de uma variedade diferenciável. A função acima pode ser vista como a aplicação $X\colon \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$ definida por $(Xf)(p) = X_p(f)$. Esta aplicação tem as propriedades de uma derivação, ou seja, são satisfeitas:

i) $X(af + bg) = aX(f) + bX(g)$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathcal{F}(M)$;

ii) $X(fg) = X(f)g + fX(g)$ (Regra de Leibniz).

Reciprocamente, qualquer derivação D em $\mathcal{F}(M)$ vem a ser um campo de vetores diferenciáveis. De fato, para cada ponto $p \in M$ define $X_p\colon \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $X_p(f) = D(f)(p)$. Essa interpretação de campo de vetor como derivação leva a uma importante operação em campos vetoriais.

Seja $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Definimos:

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Esta é uma função de $\mathcal{F}(M)$ em $\mathcal{F}(M)$ em que a cada f associa $X(Yf) - Y(Xf)$, ou seja:

$$\begin{array}{llllll} [X,Y]\colon & \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M) & & & & \\ & \quad f \quad \longmapsto & [X,Y](f)\colon & M \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & & & p \quad \longmapsto & [X,Y](f)(p) = [X,Y]_p(f) & \end{array}$$

onde $[X, Y](f) = (XY - YX)(f) = X(Yf) - Y(Xf)$.
Daí temos que $[X, Y](f)(p)$ é uma derivação em $\mathcal{F}(M)$ e portanto um campo vetorial em M chamado **colchete** de X e Y.

Como visto acima, o colchete atribui a cada $p \in M$ o vetor tangente $[X, Y]_p$ tal que $[X, Y]_p(f) = X_p(Yf) - Y_p(Xf)$. Além disso, o colchete tem as seguintes propriedades:

(a) $[X, Y] = -[Y, X]$ (antissimétrica) ,

(b) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ e $[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]$ ($\mathbb{R}$-bilinearidade) ,

(c) $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ (identidade de Jacobi) .

O conjunto $\mathcal{X}(M)$ com a operação $[\cdot, \cdot]\colon \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ dos campos de vetores é uma álgebra de Lie real. Em geral, uma álgebra de Lie real (ou complexa) é um espaço vetorial real(ou complexo) V com uma operação colchete $[\cdot, \cdot]\colon V \times V \longrightarrow V$ que possui as propriedades (a), (b) e (c) acima.

O próximo resultado é uma versão do teorema da existência e unicidade de equações diferenciais.

Proposição 1.2. *Seja X um campo vetorial diferenciável em uma variedade diferenciável M e $p \in M$. Então existe uma vizinhança aberta U de p, um intervalo I que contém a origem 0 e uma aplicação diferenciável $\phi : I \times U \longrightarrow M$, tal que a curva $\alpha_q \colon I \longrightarrow M$ definida por $\alpha_q(t) = \phi(t, q)$ com $q \in U$ é a única curva que satisfaz $\dfrac{\partial}{\partial t}\phi(t, q) = X_{\alpha_q(t)}$ e $\alpha_q(0) = q$.*

Uma curva com esta propriedade é chamada **curva integral** do campo vetorial X. Se t é constante a seguinte proposição garante que a associação $q \longmapsto \alpha_q(t)$ define a função $\phi_t : U \longrightarrow M$ na vizinhança de U de p. Esta função é um **fluxo local** de X com as seguintes propriedades:

(a) ϕ_0 é a aplicação identidade de U;

(b) $\phi_s \circ \phi_t = \phi_{t+s}$ $\forall s, t \in U$;

(c) Cada fluxo é um difeomorfismo com $\phi_t^{-1} = \phi_{-t}$.

Observação 1.1. O colchete do campo de vetores pode ser interpretado como uma derivação de Y em relação ao campo X, ou ao longo dos fluxos de X.

Proposição 1.3. *Sejam X, Y campos vetoriais diferenciáveis em uma variedade M, $p \in M$ e ϕ_t um fluxo local de X na vizinhança U de p, então:*

$$[X, Y]_p = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[Y_p - d\phi_{-t}(Y_{\phi_t(p)})].$$

A proposição acima é encontrada em [1]. Ela expressa em certo sentido, para cada p em M, a taxa de variação de Y em direção a X, ou seja, ao longo da curva integral do campo vetorial X passando por p.

Definição 1.6. Sejam M e N variedades diferenciáveis de dimensão m e n, respectivamente. Uma aplicação diferenciável $\varphi \colon M \longrightarrow N$ é uma *imersão* se $d\varphi_p \colon T_pM \longrightarrow T_{\varphi(p)}N$ é injetiva para todo $p \in M$. Se, além disto, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset N$, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por N, diz-se que φ é um *mergulho*. Se $M \subset N$ e a inclusão $i \colon M \longrightarrow N$ é um mergulho, diz-se que, M é uma *subvariedade* de N.

Exemplo 1.6. A curva $\alpha \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\alpha(t) = (t^3 - 4t, t^2 - 4)$ é uma imersão que possui auto-interseção no ponto $(0, 0)$, portanto α não é um mergulho.

Exemplo 1.7. Uma superfície regular $S \subset \mathbb{R}^3$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^3$, pois a inclusão $i \colon S \subset \mathbb{R}^3$ é um mergulho. Ver em [3], pág. 13.

1.2 Métricas Riemannianas

Nesta seção veremos uma maneira de obter em cada ponto da variedade, o comprimento de vetores tangentes que variam diferenciavelmente em cada ponto.

Definição 1.7. Uma **métrica Riemanniana** em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto de M um produto interno $g_p = \langle \cdot, \cdot \rangle_p$ (ou seja, uma forma bilinear simétrica, positiva definida) no espaço tangente T_pM, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: Para cada par de campos de vetores diferenciáveis X, Y numa vizinhança de p, a aplicação $p \longmapsto \langle X_p, Y_p \rangle_p$ é diferenciável.

Uma variedade diferenciável M com uma métrica Riemanniana g é chamada uma **variedade Riemanniana** e a denotamos por (M, g).

Seja $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x_i} \right\}_{i=1}^{n}$ uma base de T_pM e sejam $v, w \in T_pM$ com

$$v = \sum_{i=1}^{n} u^i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p, \qquad w = \sum_{i=1}^{n} w^i \frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p.$$

Então $g_p(v, w) = \sum_{i,j} g_{ij}(p) v^i w^j$, onde

$$g_{ij}(p) = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg|_p, \frac{\partial}{\partial x_j}\bigg|_p \right).$$

Observação 1.2. Se estendermos os vetores v e w para seus correspondentes campos de vetores V e W, então $g_p(V, W) = \langle V, W \rangle_p$ é uma função real diferenciável em M.

É usual deixar de indicar o índice p em $\langle , \rangle_p$ sempre que não houver possibilidade de confusão. A métrica Riemanniana g é uma matriz quadrada de ordem $n \times n$, a qual é C^∞ se cada função g_{ij} das entradas de g forem C^∞. E ainda, tais funções g_{ij} são chamadas *expressão da métrica Riemanniana* num sistema de coordenadas de M.

Exemplo 1.8. Seja $M = \mathbb{R}^n$ e tomemos como sistema de coordenadas a aplicação identidade. Dessa forma, $\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ é identificado com $E_i = (0, \cdots, 1, \cdots, 0)$. Considere a métrica definida por $g(E_i, E_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & se\ i = j \\ 0, & se\ i \neq j \end{cases}$. O espaço $\mathbb{R}^n$ com esta métrica é chamado espaço euclidiano.

Vamos ver agora quando duas variedades Riemannianas são "consideredas"as mesmas, ou seja, definiremos uma relação de equivalência entre as variedades Riemannianas.

Definição 1.8. Sejam M, N variedades Riemannianas. Uma isometria é um difeomorfismo $f \colon M \longrightarrow N$ que preserva as métricas, no seguinte sentido

$$\langle u, v \rangle_p = \langle (df)_p(u), (df)_p(v) \rangle_{f(p)} \qquad \text{para todo} \quad p \in M; \ u, v \in T_pM. \tag{1.1}$$

Duas variedades Riemannianas são isométricas se houver uma isometria entre elas.

Definição 1.9. Sejam M e N variedades Riemannianas. Uma aplicação diferenciável $f\colon M \longrightarrow N$ é uma isometria local em $p \in M$ se existe uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $f\colon U \longrightarrow f(U)$ é um difeomorfismo satisfazendo 1.1.

Exemplo 1.9. *(Subvariedades imersas)* Seja $f\colon M \longrightarrow N$ uma imersão (isto é, uma aplicação diferenciável com df_p injetora para todo p em M). Se N possui uma métrica Riemanniana g', então f induz uma métrica Riemanniana g em M definida por

$$g_p(u,v) = g'_{f(p)}((df)_p(u),(df)_p(v)).$$

Esta métrica em M é chamada métrica induzida por f, e f é uma **imersão isométrica**.

Por exemplo, a métrica da esfera $S^{n-1} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ induzida pela métrica do espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ é chamada de métrica canônica em S^{n-1}.

Proposição 1.4. *Toda variedade diferenciável admite uma métrica Riemanniana.*

Demonstração. Ver [3], pág. 47. ∎

1.3 Conexão

A noção de derivada para campos de vetores será muito útil mais adiante para que noções como curvatura por exemplo, fiquem mais claras. Seja $\mathcal{X}(M)$ o conjunto de todos os campos de vetores diferenciáveis (C^∞) na variedade diferenciável M e $\mathcal{F}(M)$ o anel das funções reais de classe (C^∞) definidas em M.

Definição 1.10. Uma **conexão afim** ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\nabla\colon \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M),$$

denotada por $(X,Y) \longmapsto \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

(ii) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

(iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$ (Regra de Leibniz), onde $f, g \in \mathcal{F}(M)$.

Nosso interesse em conexões afins reside no fato que a escolha de uma métrica Riemanniana em uma variedade M determina univocamente uma certa conexão afim de M, como veremos no próximo teorema. Assim, podemos derivar campos de vetores em M. Alguns autores o consideram o "milagre"da geometria Riemanniana.

Teorema 1.3. *(Teorema de Levi-Civita) Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:*

a)

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \qquad X,Y,Z \in \mathcal{X}(M); \tag{1.2}$$

b)

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y] \qquad \textit{para todo } X,Y \in \mathcal{X}(M). \tag{1.3}$$

Demonstração. Veja [3], pág. 61. ■

Definição 1.11. A conexão do teorema anterior é chamada conexão de Levi-Civita ou conexão Riemanniana.

Corolário 1.4. *Dados $X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)$ a conexão Riemanniana é caracterizada pela fórmula de Koszul*

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle &= X\langle Y,Z\rangle + Y\langle X,Z\rangle - Z\langle X,Y\rangle \\ &\quad + \langle [X,Y],Z\rangle + \langle [Z,X],Y\rangle + \langle X,[Z,Y]\rangle. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Demonstração. Pelo teorema de Levi-Civita sabemos que existe uma única conexão ∇ tal que

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \tag{1.5}$$
$$Y\langle X,Z\rangle = \langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle X, \nabla_Y Z\rangle, \tag{1.6}$$
$$Z\langle X,Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle. \tag{1.7}$$

Somando 1.5 e 1.6 e subtraindo 1.7, teremos, usando a simetria de ∇, que

$$\begin{aligned} X\langle Y,Z\rangle + Y\langle X,Z\rangle - Z\langle X,Y\rangle &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle + \langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle X, \nabla_Y Z\rangle \\ &\quad - \langle \nabla_Z X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X\rangle \\ &\quad + \langle X, \nabla_Y Z - \nabla_Z Y\rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle \nabla_Y X, Z\rangle + \langle Y, [X,Z]\rangle + \langle X, [Y,Z]\rangle \\ &= \langle \nabla_X Y, Z\rangle - \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle \nabla_Y X, Z\rangle \\ &\quad + \langle Y, [X,Z]\rangle + \langle X, [Y,Z]\rangle \\ &= 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle [Y,X], Z\rangle + \langle Y, [X,Z]\rangle + \langle X, [Y,Z]\rangle \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle &= X\langle Y, Z\rangle + Y\langle X, Z\rangle - Z\langle X, Y\rangle \\ &\quad + \langle [X,Y], Z\rangle + \langle [Z,X], Y\rangle + \langle X, [Z,Y]\rangle. \end{aligned}$$

■

Um campo de vetores ao longo de uma curva $\alpha : I \longrightarrow M$ é uma aplicação diferenciável que atribui a cada $t \in I$ um vetor tangente $V(t) \in T_{\alpha(t)}M$. Dizer que V é C^∞ significa que para qualquer função diferenciável f em M, a função $t \longmapsto V(t)f$ é uma função C^∞ em I.

Proposição 1.5. *Seja M uma variedade Riemanniana com a conexão Riemanniana ∇, e α uma curva em M. Então existe um único operador que associa um campo de vetores V ao longo da curva α a um outro campo de vetores $V'(t) = \frac{DV}{dt}$ ao longo de α tal que:*

i) $\dfrac{D(aV + bW)}{dt} = a\dfrac{DV}{dt} + b\dfrac{DW}{dt}$ $(a, b \in \mathbb{R})$

ii) $\dfrac{D(fV)}{dt} = \dfrac{df}{dt}V + f\dfrac{DV}{dt}$ $f \in \mathcal{F}(M)$

iii) Se V é induzido pelo campo vetorial $Y \in \mathcal{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y_{\alpha(t)}$ então $\dfrac{DV}{dt} = \nabla_{\alpha'(t)}Y$

iv) $\dfrac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \langle \dfrac{DV}{dt}, W\rangle + \langle V, \dfrac{DW}{dt}\rangle.$

Demonstração. Ver [3], Prop. 2.2. ■

O vetor $V'(t)$ é chamado *a derivada covariante de V ao longo da curva α* ou *derivada covariante induzida*. Em especial, o caso em que $\frac{DV}{dt} = 0$, o campo de vetores V ao longo da curva α é dito ser *paralelo*.

1.4 Curvatura

Nesta seção apresentaremos de forma objetiva algumas definições e resultados sobre curvatura com base em [1] e [3]. A curvatura pode ser vista como uma ferramenta da geometria diferencial que mede o quanto uma variedade Riemanniana deixa de ser euclidiana.

Definição 1.12. A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X,Y)\colon \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]}Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M)$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M.

Proposição 1.6. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana goza das seguintes propriedades:*

(i) *R é bilinear em $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$, isto é,*

$$\begin{aligned} R(fX_1 + gX_2, Y_1) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1) \\ R(X_1, fY_1 + gY_2) &= fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2), \end{aligned}$$

$f, g \in \mathcal{F}(M)$, $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M)$.

(ii) *Para todo par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, o operador curvatura $R(X,Y)\colon \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{X}(M)$ é linear, isto é,*

$$\begin{aligned} R(X,Y)(Z+W) &= R(X,Y)Z + R(X,Y)W \\ R(X,Y)fZ &= fR(X,Y)Z, \end{aligned}$$

$f \in \mathcal{F}(M)$, $Z, W \in \mathcal{X}(M)$.

Demonstração. Ver [3], Prop. 2.2. ■

Podemos escrever, por conveniência, $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = (X,Y,Z,W)$. Vejamos a seguir algumas propriedades importantes da curvatura.

Proposição 1.7. *Sejam $X, Y, Z, W \in \mathcal{X}(M)$. Então*

i) $R(X,Y) = -R(Y,X)$,

ii) $(X,Y,Z,W) = -(X,Y,W,Z)$,

iii) $(X,Y,Z,W) = (Z,W,X,Y)$,

iv) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ *(Primeira Identidade de Bianchi).*

Demonstração. Ver [3], Prop. 2.5. ■

Definição 1.13. Um **tensor** de ordem r (covariante) é uma aplicação $T\colon \mathcal{X}(M) \times \cdots \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ r-linear, onde $C^\infty(M)$ é o conjunto das funções em M com valores reais que são C^∞, tal que

$$T(X_1, \cdots, fX_i, \cdots, X_r) = fT(X_1, \cdots, X_r) \qquad \forall X_i \in \mathcal{X}(M) \text{ e } f \in C^\infty(M).$$

A idéia de tensor é uma generalização natural da idéia de campo de vetores, e analogamente aos campos de vetores, os tensores podem ser derivados covariantemente.

Exemplo 1.10. O **tensor curvatura** de uma variedade Riemanniana M,

$$R\colon \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M),$$

é definido por $R(X,Y,Z,W) = \langle R(X,Y)Z, W\rangle, \quad X,Y,Z,W \in \mathcal{X}(M)$ É um tensor de ordem 4, ou ainda, um 4-tensor.

Dado um espaço vetorial W com produto interno $\langle \cdot,\cdot \rangle$, indicaremos por $|U \wedge V|$ a expressão

$$\sqrt{|U|^2|V|^2 - \langle U,V\rangle^2},$$

que representa a área do paralelogramo bidimensional determinado pelo par de vetores $U,V \in W$.

Proposição 1.8. *Seja M uma variedade Riemanniana e $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bidimensional do espaço tangente T_pM e sejam $U,V \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então*

$$k(U,V) = \frac{\langle R(U,V)U,V\rangle}{|U \wedge V|^2},$$

não depende da escolha dos vetores $U,V \in \sigma$.

Demonstração. Veja [3], Prop. 3.1. ■

Definição 1.14. Dado um ponto p de uma variedade Riemanniana M e um subespaço bidimensional $\sigma \subset T_pM$ o número real $k(U,V) = k(\sigma)$, onde $\{U,V\}$ é uma base qualquer de σ, é chamado curvatura seccional de σ em p.

Como vimos, a curvatura seccional é definida a partir do tensor curvatura. Reciprocamente, o próximo resultado afirma que o tensor curvatura pode ser determinado a partir da curvatura seccional.

Teorema 1.5. *O tensor curvatura em um ponto é unicamente determinado pela curvatura seccional de todos os subespaços bidimensionais σ do espaço tangente T_pM em p.*

Demonstração. Veja [3], Lema 3.3. ■

Uma variedade Riemanniana tem curvatura seccional constante se $k(p)$ é constante para todo plano σ e todo ponto $p \in M$. Se a curvatura seccional é zero em cada ponto, então a variedade Riemanniana é dita flat. O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ é um exemplo.

É fácil ver que se $\{U,V\}$ é uma base ortonormal do subespaço bidimensional σ do espaço tangente T_pM, então a curvatura seccional é dada por

$$k(U,V) = \langle R(U,V)U,V\rangle. \tag{1.8}$$

Definição 1.15. Seja M uma variedade Riemanniana e $p \in M$. Se $\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ é uma base ortonormal do espaço tangente T_pM em cada ponto p, então a curvatura de Ricci é dada por

$$r(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(X,E_i)Y, E_i \rangle.$$

Este é um tensor de ordem 2 tal que:

$$\begin{aligned} r(X,Y) &= \sum_{i=1}^{n} \langle R(X,E_i)Y, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle R(Y,E_i)X, E_i \rangle = r(Y,X), \end{aligned}$$

isto é, r é simétrico. Tomando X unitário tal que o conjunto $\{X, E_2, \cdots, E_n\}$ é uma base ortonormal do espaço tangente, em cada ponto $p \in M$, obtemos a curvatura de Ricci:

$$r(X) = r(X,X) = \sum_{i=2}^{n} \langle R(X,E_i)X, E_i \rangle = \sum_{i=2}^{n} k(X, E_i).$$

Seja $\widehat{r}(X) = \sum\limits_{i=2}^{n} R(E_i, X)E_i$. Pelas propriedades do tensor curvatura, temos:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{r}(X), E_i \rangle &= \left\langle \sum_{i=2}^{n} R(E_i, X)E_i, E_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=2}^{n} \langle R(E_i, X)E_i, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=2}^{n} \langle R(E_i, E_i)E_i, X \rangle \\ &= \left\langle X, \sum_{i=2}^{n} R(E_i, E_i)E_i \right\rangle \\ &= \langle X, \widehat{r}(E_i) \rangle, \end{aligned}$$

ou seja, a transformação $\widehat{r}$, chamada **transformação de Ricci**, é auto-adjunta. Seus autovalores são chamados as **curvaturas principais de Ricci**. Está relacionada com a (forma quadrática) curvatura de Ricci por:

$$\begin{aligned}
r(X) &= \sum_{i=2}^{n} \langle R(X, E_i)X, E_i \rangle \\
&= \sum_{i=2}^{n} \langle R(E_i, X)E_i, X \rangle \\
&= \left\langle \sum_{i=2}^{n} R(E_i, X)E_i, X \right\rangle \\
&= \langle \widehat{r}(X), X \rangle.
\end{aligned}$$

Se escolhermos uma base ortonormal $\{E_1, \cdots, E_n\}$ de autovetores, note que a forma quadrática $r(X) = \langle \widehat{r}(X), X \rangle$ pode ser diagonalizada e

$$\begin{aligned}
r(\xi_1 E_1 + \cdots + \xi_n E_n) &= \langle \widehat{r}(\xi_1 E_1 + \cdots + \xi_n E_n), \xi_1 E_1 + \cdots + \xi_n E_n \rangle \\
&= \langle \xi_1 \widehat{r}(E_1) + \cdots + \xi_n \widehat{r}(E_n), \xi_1 E_1 + \cdots + \xi_n E_n \rangle \\
&= \langle \widehat{r}(E_1), E_1 \rangle \xi_1^2 + \cdots + \langle \widehat{r}(E_n), E_n \rangle \xi_n^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n} r(E_i) \xi_i^2
\end{aligned}$$

Em particular, se λ_i é autovalor associado ao autovetor E_i, como $r(E_i) = \langle \widehat{r}(E_i), E_i \rangle = \langle \lambda_i E_i, E_i \rangle = \lambda_i$, os números $r(E_i)$ podem ser identificados com as curvaturas principais de Ricci e a coleção de sinais $\{sgn(r(E_1)), \cdots, sgn(r(E_n))\}$ pode ser identificada com a assinatura da forma quadrática r.

Definição 1.16. Seja $\{E_1, \cdots, E_n\}$ uma base ortonormal de vetores tangentes à variedade Riemanniana num ponto, o número real

$$\rho = r(E_1) + \cdots + r(E_n),$$

é chamada curvatura escalar no ponto.

Vejamos que podemos obter a curvatura escalar ρ através da curvatura seccional k determinada nos elementos da base ortonormal. A curvatura escalar num ponto p de M é o número real dado por

$$\begin{aligned}
\rho &= \sum_{i=1}^{n} \langle \widehat{r}(E_i), E_i \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} r(E_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} k(E_i, E_j) \quad com \quad i \neq j \\
&= 2 \sum_{i<j} k(E_i, E_j).
\end{aligned}$$

Alternativamente, ρ pode ser escrito como $n(n-1)$ vezes a média de todas as curvaturas seccionais no ponto dado.

Capítulo 2

Grupos de Lie e suas Álgebras de Lie

Neste capítulo, introduziremos os conceitos de grupo de Lie e sua álgebra de Lie. A álgebra de Lie associada à um grupo de Lie é definida como o espaço dos campos de vetores invariantes (à esquerda ou direita) munido de um produto dado pelo colchete de Lie de campo de vetores. O principal elo de ligação entre a álgebra de Lie e o grupo de Lie correspondente é dada pela aplicação exponencial, e veremos adiante que ela é um difeomorfismo local. As principais referências para este capítulo são San Martin [8] e [9], Arvanitoyeorgos [1] e Knapp [5].

2.1 Grupos de Lie

Definição 2.1. Um grupo de Lie G é uma variedade diferenciável com estrutura de grupo tais que as operações $G \times G \longrightarrow G$, $(x, y) \longmapsto xy$ e $G \longrightarrow G$, $x \longmapsto x^{-1}$ são aplicações diferenciáveis.

Observação 2.1. Pode-se definir grupos de Lie como:
Um grupo de Lie é um grupo cujo conjunto subjacente tem uma estrutura de variedade diferenciável de tal forma que a aplicação produto

$$p\colon (g, h) \in G \times G \longmapsto gh \in G,$$

é diferenciável.
A razão disto é que se $p\colon G \times G \longrightarrow G$ é diferenciável então a aplicação inversa $i\colon g \in G \longmapsto g^{-1} \in G$ está bem definida e é diferenciável pelo teorema da função implícita (veja [9], pág. 92).

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.1. Os conjuntos $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathbb{H}^n$ são grupos de Lie com a adição de vetores.

Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, denotados por $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \cdots, y_n)$. A adição em $\mathbb{R}^n$ é a aplicação $+\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $(x, y) \longmapsto x + y = (x_1, \cdots, x_n) + (y_1, \cdots, y_n) =$

$(x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n)$. É fácil ver que $(\mathbb{R}^n, +)$ é um grupo.
Como as entradas da aplicação + são polinômios lineares, concluímos que esta aplicação é diferenciável. Portanto, $\mathbb{R}^n$ é um grupo de Lie com a operação de adição usual.

Exemplo 2.2. Os conjuntos $\mathbb{R} - \{0\}$, $\mathbb{C} - \{0\}$, $\mathbb{H} - \{0\}$ são grupos de Lie com a operação de multiplicação.

Aqui, dados $q_1, q_2 \in \mathbb{H} - \{0\}$ com $q_1 = t_1 + ix_1 + jy_1 + kz_1$ e $q_2 = t_2 + ix_2 + jy_2 + kz_2$, definimos a multiplicação em $\mathbb{H} - \{0\}$ da seguinte forma:

$$
\begin{aligned}
q_1 q_2 &= (t_1 + ix_1 + jy_1 + kz_1)(t_2 + ix_2 + jy_2 + kz_2) \\
&= (t_1t_2 - x_1x_2 - y_1y_2 - z_1z_2) + (t_1x_2 + t_2x_1 + y_1z_2 - z_1y_2)i \\
&\quad +(t_1y_2 + y_1t_2 + z_1x_2 - x_1z_2)j + (t_1z_2 + t_2z_1 + x_1y_2 - y_1x_2)k.
\end{aligned}
$$

Exemplo 2.3. A esfera unitária S^1 é um grupo de Lie.

De fato, sabemos que S^1 é uma variedade diferenciável. Consideremos $S^1 \subset \mathbb{C} - \{0\}$ com a multiplicação induzida de $\mathbb{C} - \{0\}$. Dessa forma S^1 pode ser identificado com o conjunto $\{x + yi \in \mathbb{C} \ : \ x^2 + y^2 = 1\}$. Vejamos que S^1 é um grupo de Lie.

i) Dados $x_1 + iy_1, x_2 + iy_2 \in S^1$, ou seja, $x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = 1$.
Assim, $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_2y_1 + x_1y_2)i$, é tal que

$$
\begin{aligned}
(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_2y_1 + x_1y_2)^2 &= x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + y_1^2y_2^2 + x_2^2y_1^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + x_1^2y_2^2 \\
&= (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) = 1.
\end{aligned}
$$

ii) Dado $x + iy \in S^1$, seja $a + ib$ o inverso de $x + iy$ em S^1, então com um cálculo simples obtemos $a = x$ e $b = -y$, de forma que $a^2 + b^2 = 1$, ou seja, $a + ib \in S^1$.

iii) Agora considere as operações:

$$
\begin{aligned}
f\colon \quad & S^1 \times S^1 \longrightarrow S^1 \\
& (z_1, z_2) \longmapsto z_1.z_2,
\end{aligned}
\quad \text{e} \quad
\begin{aligned}
g\colon \quad & S^1 \longrightarrow S^1 \\
& z \longmapsto z^{-1}.
\end{aligned}
$$

com $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ e $z = x + iy$ onde o produto é o definido no corpo dos complexos. Temos que: $f(z_1, z_2) = f(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) = x_1x_2 - y_2y_1 + i(x_2y_1 + x_1y_2) = (x_1y_2 - y_2y_1, x_2y_1 + x_1y_2)$ e $g(z) = (x, -y)$. Isso mostra que f e g são diferenciáveis, pois suas coordenadas são funções diferenciáveis. Portanto S^1 é um grupo de Lie.

Exemplo 2.4. O produto cartesiano $G \times H$ de dois grupos de Lie é um grupo de Lie com a estrutura da variedade produto e multiplicação definida por: $(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1g_2, h_1h_2)$.

Exemplo 2.5. Em particular, o n-toro $T^n = S^1 \times \cdots \times S^1 (n$ vezes) é um grupo de Lie de dimensão n.

Exemplo 2.6. O grupo linear geral $GL(n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) : detA \neq 0\}$ é um grupo de Lie.

De fato, podemos associar a cada matriz $A = (a_{ij})_{n\times n}$ um ponto $(a_{11}, \cdots, a_{1n}, \cdots, a_{n1}, \cdots, a_{nn})$ com n^2 coordenadas, ou seja, um ponto no espaço euclidiano $\mathbb{R}^{n^2}$. Podemos definir o isomorfismo de espaços vetoriais:

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n^2} \\ & A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} & \longmapsto & \varphi(A) = (a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, \cdots, a_{nn}). \end{array}$$

Mais ainda do ponto de vista topológico, φ é contínua e tem inversa contínua, ou seja, φ é um homeomorfismo. Portanto o espaço das matrizes é uma variedade diferenciável, cuja estrutura diferenciável é dada pela estrutura do espaço euclidiano.
Podemos dizer também que $M_n(\mathbb{R})$ tem a topologia induzida por $\mathbb{R}^{n^2}$.

Considere a aplicação determinante:

$$\begin{array}{rcl} det \; : \; M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ A & \longmapsto & det(A), \end{array}$$

a qual é diferenciável em $M_n(\mathbb{R})$, por ser um polinômio com n variáveis. Assim, temos que $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \; : \; det(A) \; \neq \; 0\} = det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, onde $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}$. Como det é contínua, conclui-se que $GL_n(\mathbb{R})$ é um subconjunto aberto de $M_n(\mathbb{R})$.

Para mostrar que $GL(n, \mathbb{R})$ é um grupo de Lie, basta ver que:

(i) $GL(n, \mathbb{R})$ é um grupo com a operação de multiplicação usual de matrizes.
De fato, dados $A, B \in GL(n, \mathbb{R})$ temos que $det(A \cdot B) = detA.detB \neq 0$. Portanto, $A \cdot B \in GL(n, \mathbb{R})$. E ainda, qualquer que seja $A \in GL(n, \mathbb{R})$, existe $A^{-1} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{detA} \neq 0$. Logo, $A^{-1} \in GL(n, \mathbb{R})$.

(ii) As operações $(A, B) \longmapsto A \cdot B$ e $A \longmapsto A^{-1}$ são diferenciáveis:
De fato, o produto em $GL(n, \mathbb{R})$ é o produto usual de matrizes. Sejam $A = (a_{ij})_{n\times n}, B = (b_{ij})_{n\times n} \in GL(n, \mathbb{R})$ então $C = A \cdot B = (c_{ij})_{n\times n}$ é dado por $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ que é um polinômio de grau 2 nas variáveis a_{ij}, b_{ij}. Portanto, a aplicação é diferenciável.

Definição 2.2. (a) Um subgrupo de Lie H de um grupo de Lie G é um subgrupo e uma subvariedade imersa de G.

(b) Um subgrupo fechado de um grupo de Lie G é um subgrupo e um subconjunto fechado de G.

Teorema 2.2. *(Teorema de Cartan) Se H é um subgrupo fechado de um grupo de Lie G então H é uma subvariedade de G e consequentemente um subgrupo de Lie de G. Em particular, tal subgrupo possui a topologia induzida de G.*

Demonstração. Ver [9], Teo. 6.15. ∎

Exemplo 2.7. O grupo linear especial $SL(n,\mathbb{R}) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \ : \ detA = 1\}$ é um subgrupo de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$.

Vejamos que é um subconjunto fechado de $GL(n,\mathbb{R})$. De fato, $SL(n,\mathbb{R}) = det^{-1}(\{1\})$, portanto é a imagem inversa de um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$ por uma aplicação contínua. Portanto, pelo teorema 2.2, $SL(n,\mathbb{R})$ é um subgrupo de Lie do grupo linear geral.

Exemplo 2.8. O grupo ortogonal $O(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \ : \ A^t = A^{-1}\}$ com a operação usual de multiplicação de matrizes, é um subgrupo de Lie de $GL(n,\mathbb{R})$.

(a) Vejamos que $O(n)$ é um subgrupo de $GL(n,\mathbb{R})$:

(i) Dados $A, B \in O(n)$ então $(A \cdot B)^t = (AB)^t = B^t A^t = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1} = (A \cdot B)^{-1}$, logo $A \cdot B \in O(n)$,

(ii) Seja $A \in O(n)$ então $(A^{-1})^t = (A^t)^t = A = (A^{-1})^{-1}$, ou seja, $A^{-1} \in O(n)$,

(b) $O(n)$ é um subconjunto fechado de $GL(n,\mathbb{R})$:

De fato, defina a função

$$\begin{array}{rccc} f\colon & GL(n,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \\ & A & \longmapsto & AA^t, \end{array}$$

Note que f está bem definida. Considere $A = (a_{ij})_{n\times n}$ e a projeção na coordenada ij, $\pi_{ij}\colon \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $\pi(A) = a_{ij}$. Dessa forma, temos que $A^t = (a_{ji})_{n\times n}$ e

$$AA^t = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}\right)_{n\times n} = \left(\sum_{k=1}^{n} \pi_{ik}(A)\pi_{jk}(A)\right)_{n\times n}.$$

Isso prova que f é contínua, pois cada coordenada é soma de funções contínuas em $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Como } f^{-1}(\{I\}) &= \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \ : \ f(A) \in \{I\}\} \\ &= \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \ : \ f(A) = I\} \\ &= \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \ : \ AA^t = I\} \\ &= O(n), \end{aligned}$$

segue que $O(n)$ é fechado em $GL(n,\mathbb{R})$ pois é a imagem inversa de um fechado em $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e f é contínua. Pelo teorema 2.2, $O(n)$ é um subgrupo de Lie do grupo linear geral.

Observação 2.3. De modo análogo ao exemplo 2.8, pode-se verificar que $GL(n,\mathbb{C})$ e $GL(n,\mathbb{H})$, munidos do produto usual de matrizes, são grupo de Lie.

Exemplo 2.9. O grupo unitário $U(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) \ : \ A\bar{A}^t = I\}$ é um subgrupo de Lie de $GL(n,\mathbb{C})$.

(a) Vejamos que $U(n)$ é um subgrupo de $GL(n,\mathbb{C})$:

  (i) Se $A, B \in U(n)$ então $A\bar{A}^t = B\bar{B}^t = I$. Assim, $(AB)(\overline{AB})^t = (AB)(\bar{A}\bar{B})^t = AB\bar{B}^t\bar{A}^t = A\bar{A}^t = I$. Portanto, $AB \in U(n)$.

  (ii) Seja $A \in U(n)$, então $A^{-1} = \bar{A}^t$. Assim, $(A^{-1})(\overline{A^{-1}})^t = (\bar{A})^t(\overline{A^{-1}})^t = (\overline{A^{-1}}\bar{A})^t = (\overline{A^{-1}A})^t = I^t = I$, concluindo que $A^{-1} \in U(n)$.

(b) $U(n)$ é um subgrupo fechado de $GL(n,\mathbb{C})$:

De fato, consideremos a função

$$\begin{array}{rccc} f\colon & GL(n,\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \\ & A & \longmapsto & A\bar{A}^t, \end{array}$$

É claro que f está bem definida. Seja $A = (a_{ij} + ib_{ij})_{n\times n} \in GL(n,\mathbb{C})$, daí determinamos $A\overline{A}^t = (\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}a_{jk} + b_{ik}b_{jk} + i(b_{ik}a_{jk} - b_{jk}a_{ik}))_{n\times n}$. Assim, temos que as funções coordenadas de f são contínuas, logo f é contínua. Agora, $f^{-1}(\{I\}) = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) \ : \ f(A) \in \{I\}\} = \{A \in GL(n,\mathbb{C}) \ : \ A\overline{A}^t = I\} = U(n)$. Então, $U(n)$ é a imagem inversa de um conjunto fechado, onde a funçao f é contínua. Pelo Teorema 2.2, $U(n)$ é um subgrupo de Lie de $GL(n,\mathbb{C})$.

Exemplo 2.10. Considere o grupo simplético $Sp(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{H}) \ : \ A\bar{A}^t = I\}$.

Aqui, dado um quatérnio $q = t + ix + jy + kz$, seu conjugado pode ser escrito como $\overline{q} = t - ix - jy - kz$.

Às vezes, é mais conveniente usar a definição equivalente:

$$Sp(n) = \{A \in U(2n) \ : \ A^tJ = JA^{-1}\},$$

onde

$$J = \begin{pmatrix} 0_{n\times n} & -I_{n\times n} \\ I_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{pmatrix}.$$

Vejamos que $Sp(n)$ é um subgrupo de $U(2n)$:

(i) Dados $A, B \in Sp(n)$ então $A^tJ = JA^{-1}$ e $B^tJ = JB^{-1}$. Dessa forma: $(AB)^tJ = B^tA^tJ = B^tJA^{-1} = JB^{-1}A^{-1} = J(AB)^{-1}$. Portanto, $AB \in Sp(n)$.

(ii) Seja $A \in Sp(n)$ então $A^tJ = JA^{-1}$ donde $J = A^tJA$. Assim, $(A^{-1})^tJ = (A^{-1})^tA^tJA = (AA^{-1})^tJA = JA$, portanto, $(A^{-1})^tJA^{-1} = JAA^{-1} = J$, ou seja, $A^{-1} \in Sp(n)$. Isso conclui que $Sp(n)$ é um subgrupo de $U(2n)$.

Considere a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \phi\colon & U(2n) & \longrightarrow & \mathbb{M}_{2n}(\mathbb{R}) \\ & A & \longmapsto & A^tJA. \end{array}$$

Tal aplicação é contínua e $Sp(n) = \phi^{-1}(\{J\})$, que é a imagem inversa de um fechado em $\mathbb{M}_{2n}(\mathbb{R})$ por uma aplicação contínua, portanto um conjunto fechado.

Exemplo 2.11. O grupo $SO(n) = \{A \in O(n) \ : \ detA = 1\}$ é um subgrupo de $GL(n, \mathbb{R})$.

O grupo $SO(n)$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} SO(n) = & \ \{A \in O(n) \ : \ detA = 1\} \\ = & \ \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \ : \ AA^t = I \ e \ detA = 1\} \\ = & \ \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \ : \ AA^t = I\} \cap \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \ ; \ detA = 1\} \\ = & \ O(n) \cap SL(n, \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Portanto, $SO(n)$ é um subgrupo fechado de $GL(n, \mathbb{R})$, pois é a interseção de dois subgrupos fechados em $GL(n, \mathbb{R})$. Pelo teorema 2.2, segue que $SO(n)$ é um subgrupo de Lie.

Exemplo 2.12. Considere o grupo especial unitário $SU(n) = \{A \in U(n) \ : \ detA = 1\}$.

Procedendo da mesma forma do exemplo anterior, temos:

$$\begin{aligned} SU(n) = & \ \{A \in U(n) \ : \ detA = 1\} \\ = & \ \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \ : \ A\overline{A}^t = I \ e \ detA = 1\} \\ = & \ \{A \in GL(n, \mathbb{C}) \ : \ A\overline{A}^t = I\} \cap \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \ : \ detA = 1\} \\ = & \ U(n) \cap SL(n, \mathbb{C}). \end{aligned}$$

Portanto, $SU(n)$ é a interseção de dois subgrupos fechados de $GL(n, \mathbb{C})$. Pelo teorema 2.2, é um subgrupo de Lie.

Os grupos de Lie $O(n)$, $U(n)$ e $Sp(n)$ também são definidos como grupos lineares de isometria de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{H}^n$, respectivamente, da seguinte forma:

Indicaremos por $\mathbb{K}$ os corpos $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{H}$. Vamos definir um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathbb{K}^n$ por:

Seja $x = (x_1, \cdots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ tal que

$$\langle x, y \rangle \ = \ x_1\overline{y}_1 + \cdots + x_n\overline{y}_n.$$

Agora, seja $O(n,\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \ : \ \langle xA, yA\rangle = \langle x, y\rangle \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n\}$ o grupo das isometrias de $\mathbb{R}^n$. Vejamos que $O(n,\mathbb{R}) = O(n)$:

Seja $A = (a_{ij})_{n\times n} \in O(n)$, ou seja, $I = AA^t$. Assim, $\delta_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}$. Podemos escrever:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} &= 1, \text{ se } i = j, \\ \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk} &= 0, \text{ se } i \neq j. \end{aligned}$$

Representando x e y como vetores em $\mathbb{M}_{1\times n} \cong \mathbb{R}^n$, temos:

$$\begin{aligned} \langle xA, yA\rangle &= \left\langle (x_1 \cdots x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ (y_1 \cdots y_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}\right\rangle \\ &= \langle (x_1a_{11} + \cdots + x_na_{n1}, \cdots, x_1a_{1n} + \cdots + x_na_{nn}), \\ &\qquad (y_1a_{11} + \cdots + y_na_{n1}, \cdots, y_1a_{1n} + \cdots + y_na_{nn})\rangle \\ &= (x_1a_{11} + \cdots + x_na_{n1})(y_1a_{11} + \cdots + y_na_{n1}) + \\ &\qquad \cdots + (x_1a_{1n} + \cdots + x_na_{nn})(y_1a_{1n} + \cdots + y_na_{nn}) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n}\left(x_iy_j \sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{jk}\right) \\ &= x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = \langle x, y\rangle. \end{aligned}$$

Dessa forma, $A \in O(n)$ se, e somente se, $A \in O(n,\mathbb{R})$. Logo, $O(n) = O(n,\mathbb{R})$. De forma análoga, mostra-se que $U(n)$ e $Sp(n)$ são grupos lineares de isometrias de $\mathbb{C}^n$ e $\mathbb{H}^n$, respectivamente.

Vejamos alguns isomorfismos entre grupos de Lie conhecidos e certos grupos de Lie matriciais:

Proposição 2.1. *Seja* $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \|x\| = 1\}$*, então:*

(a) $SO(1) \cong SU(1) \cong \{e\}$,

(b) $O(1) \cong S^0$,

(c) $SO(2) \cong U(1) \cong S^1$,

(d) $SU(2) \cong S^3$.

Demonstração. Os itens (a) e (b) são triviais.

(c) Temos que $SO(2) = \{A \in O(2) \ : \ detA = 1\}$. Considere $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ tal que $detA = 1$, ou seja, $ad - bc = 1$. Temos também que $AA^t = I$, dessa forma:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Daí temos:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \ \ \text{(I)} \\ ac + bd = 0 \ \ \text{(II)} \\ ad - bc = 1 \ \ \text{(III)} \\ c^2 + d^2 = 1 \ \ \text{(IV)} \end{cases}$$

Multiplicando (III) por c, teremos $acd - bc^2 = c$ (V). Substituindo (IV) e (II) em (V), temos: $-bd^2 - b(1 - d^2) = c \Rightarrow -bd^2 - b + bd^2 = c \Rightarrow c = -b$.

Substituindo (V) em (II) temos: $ac = -bd \Rightarrow a(-b) = -bd \Rightarrow a = d$.

Portando, $SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \ : \ a, b \in \mathbb{R} \text{ tal que } a^2 + b^2 = 1 \right\}$.

E ainda, $U(1) = \{A \in GL(1, \mathbb{C}) \ : \ A\overline{A}^t = I\} = \{(a + bi) \ : \ a^2 + b^2 = 1\}$ pode ser identificado com $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = 1\}$.

Dessa forma, definimos a aplicação:

$$\begin{aligned} \phi \ \ &: U(1) \longrightarrow SO(2) \\ &(a + bi) \longmapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

É claro que ϕ está bem definida. Considere a operação de multiplicação usual de matrizes com entradas complexas. Dadas $(a + bi), \ (c + di) \in U(1)$ temos:

$\phi((a + bi)(c + di)) = \phi((ac - bd + (bc + ad)i)) = \begin{pmatrix} ac - bd & -bc - ad \\ bc + ad & ac - bd \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \phi((a + bi))\phi((c + di))$.

Logo ϕ é um homomorfismo de grupos.

É fácil ver que ϕ é injetora e sobrejetora, e concluímos que ϕ é um isomorfismo, ou seja, $U(1) \cong SO(2)$.

Consideremos agora a aplicação:

$$\begin{aligned}\widetilde{\phi} \quad &: SO(2) \longrightarrow S^1\\ &\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \longmapsto a+bi.\end{aligned}$$

É claro que $\widetilde{\phi}$ está bem definida, pois, $a^2+b^2=1$. É fácil ver que $\widetilde{\phi}$ é um homomorfismo bijetor, portanto um isomorfismo de grupos, ou seja, $SO(2) \cong S^1$.

Fazendo a composição $\widetilde{\phi} \circ \phi$, temos um isomorfismo entre $U(1)$ e S^1, isso prova que $U(1) \cong SO(2) \cong S^1$.

(d) Temos que $SU(2) = \{A \in U(2) \ : \ detA = 1\}$. Fazendo alguns cálculos obtemos:

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 & z_2 \\ -\overline{z}_2 & \overline{z}_1 \end{pmatrix} \ ; \ z_1, z_2 \in \mathbb{C} \ e \ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \right\}.$$

Seja $q = t + ix + jy + kz \in \mathbb{H}$. Identificamos $q \in \mathbb{H}$ com o ponto $(t, x, y, z) \in \mathbb{R}^4$, ou o ponto $(v_1, v_2) \in \mathbb{C}^2$, onde $v_1 = t + ix$ e $v_2 = y + iz$ tal que $v_1, \ v_2 \in \mathbb{C}$. Assim podemos definir a aplicação:

$$\begin{aligned}\phi \quad &: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{M}_2(\mathbb{C})\\ q &\longmapsto \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ -\overline{v}_2 & \overline{v}_1 \end{pmatrix},\end{aligned}$$

A aplicação ϕ está bem definida e é fácil ver que é bijetora.
Considerando a norma em $\mathbb{H}$ induzida pelo produto escalar canônico de $\mathbb{R}^4$, ou seja, dado $q \in \mathbb{H}$:

$$\|q\| = \langle q, q\rangle^{\frac{1}{2}} = (t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Dessa forma, podemos identificar S^3 com o conjunto $\{q \in \mathbb{H} \ : \ \|q\| = 1\}$.

Definindo a aplicação:

$$\begin{aligned}\varphi \quad &: S^3 \longrightarrow SU(2)\\ q &\longmapsto \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ -\overline{v}_2 & \overline{v}_1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

onde $v_1 = t + ix$ e $v_2 = y + iz$, $v_1, \ v_2 \in \mathbb{C}$.
A aplicação φ está bem definida, pois, $\det(\varphi(q)) = t^2+x^2+y^2+z^2 = \|t+ix+jy+kz\| = 1$.

Logo, $\varphi(q) \in SU(2)$. O conjunto $\{q \in \mathbb{H} \ : \ \|q\| = 1\}$ identificado com S^3 é um grupo não abeliano com a operação de multiplicação de quatérnios. Pode-se mostrar que φ é um homomorfismo de grupos, e ainda, φ é bijetora, por ser a restrição de ϕ sobre S^3. Daí, concluímos que φ é um isomorfismo de grupos.

■

2.2 O espaço tangente a um grupo de Lie: Álgebras de Lie

Grupos de Lie são objetos não lineares e seu estudo requer um grande esforço. Por outro lado um dos mais simples objetos algébricos é o espaço vetorial. Nessa seção, veremos a possibilidade de associar a cada ponto do grupo de Lie G um espaço vetorial, e este será o espaço tangente do grupo de Lie num ponto. Com o uso de certos difeomorfismos no grupo de Lie (translação à direita ou à esquerda) veremos que para estudar os espaços tangentes de um grupo de Lie em qualquer ponto, basta analisar apenas o espaço tangente no elemento identidade e do grupo.

Definição 2.3. Uma *álgebra de Lie* consiste de um espaço vetorial V munido de um produto (colchete) $[\cdot,\cdot]\colon V \times V \longrightarrow V$ que satisfaz as propriedades:

1. O colchete $[\cdot,\cdot]$ é bilinear, isto é, linear em cada uma das variáveis,
2. Antissimétrica, isto é, $[X,Y] = -[Y,X]$, para $X, Y \in V$,
3. Identidade de Jacobi: para $X, Y, Z \in V$,

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.$$

Exemplo 2.13. O espaço das matrizes quadradas $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é uma álgebra de Lie se estabelecermos $[A,B] = AB - BA$, com $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e AB a multiplicação usual de matrizes. Basta verificar as propriedades do colchete. Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $A, B, C \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, temos:

(i) Antissimétrica: $[A,B] = AB - BA = -(BA - AB) = -[B,A]$,

(ii) Bilinearidade:

$$\begin{aligned} [\alpha A + \beta B, C] &= (\alpha A + \beta B)C - C(\alpha A + \beta B) \\ &= \alpha AC + \beta BC - \alpha CA - \beta CB \\ &= \alpha(AC - CA) + \beta(BC - CB) \\ &= \alpha[A,C] + \beta[B,C] \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
[A, \alpha B + \beta C] &= A(\alpha B + \beta C) - (\alpha B + \beta C)A \\
&= \alpha AB + \beta AC - \alpha BA - \beta CA \\
&= \alpha(AB - BA) + \beta(AC - CA) \\
&= \alpha[A, B] + \beta[A, C].
\end{aligned}
$$

(iii) Identidade de Jacobi:

$$
\begin{aligned}
[A, [B, C]] &= [A, BC - CB] = A(BC - CB) - (BC - CB)A \\
&= ABC - ACB - BCA + CBA, \\
[B, [C, A]] &= [B, CA - AC] = B(CA - AC) - (CA - AC)B \\
&= BCA - BAC - CAB + ACB, \\
[C, [A, B]] &= [C, AB - BA] = C(AB - BA) - (AB - BA)C \\
&= CAB - CBA - ABC + BAC.
\end{aligned}
$$

Portanto, $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$.

O espaço tangente em um ponto não é apenas um espaço vetorial, mas como veremos é isomorfo ao que definiremos como álgebra de Lie de um grupo de Lie. Este é um dos objetos mais importantes para o estudo dos grupos de Lie e sua geometria.

Seja G um grupo de Lie e $a \in G$. Definimos as aplicações:

$$
\begin{aligned}
L_a \colon \quad & G \longrightarrow G \\
& g \longmapsto L_a(g) = ag,
\end{aligned}
\qquad e \qquad
\begin{aligned}
R_a \colon \quad & G \longrightarrow G \\
& g \longmapsto R_a(g) = ga,
\end{aligned}
$$

onde a aplicação L_a é chamada translação à esquerda e R_a é a translação à direita. Vejamos que L_a e R_a são aplicações diferenciáveis. De fato:
Seja $p \colon G \times G \longrightarrow G$ o produto em G, portanto uma aplicação diferenciável, então $L_a = p\big|_{\{a\} \times G}$ e $R_a = p\big|_{G \times \{a\}}$. Logo são diferenciáveis.

Dada $L_a^{-1} \colon G \longrightarrow G$, temos que $L_a^{-1}(ag) = g = a^{-1}(ag) = L_{a^{-1}}(ag)$. Assim, $L_a^{-1} = L_{a^{-1}}$. De forma análoga, $R_a^{-1} = R_{a^{-1}}$ e, portanto, são aplicações diferenciáveis. Daí, concluímos que a translação à direita R_a e a translação à esquerda L_a são difeomorfismos. Com isto, as aplicações $dL_{g^{-1}} \colon T_g G \longrightarrow T_e G$ e $dR_{g^{-1}} \colon T_g G \longrightarrow T_e G$ são aplicações lineares bijetoras, ou seja, são isomorfismo entre espaços vetoriais.

Definição 2.4. (a) Um campo X de vetores tangentes a um grupo de Lie G é uma aplicação que a cada ponto $g \in G$ corresponde um vetor $X_g \in T_g G$.

(b) Um campo X de vetores tangentes a um grupo de Lie G é **invariante à esquerda** quando $X \circ L_a = dL_a(X)$ para todo $a \in G$, mais explicitamente, $X_{ag} = (dL_a)_g(X_g)$, para todo $a, g \in G$.

Analogamente, X é **invariante à direita**, se para todo $g \in G$, $(X \circ R_a)_g = X_{ga} = (dR_a)_g(X_g)$.

Observação 2.4. Um campo invariante à esquerda X fica completamente determinado quando se conhece X_e. De fato, fixe $a \in G$ então $X_a = X_{ae} = (dL_a)_e(X_e)$. Assim $(dL_a)_e$ leva um vetor $X_e \in T_eG$ em um vetor $X_a \in T_aG$ com $a \in G$.
Denotaremos por $\mathfrak{g}$ o espaço vetorial dos campos invariantes à esquerda.

Vejamos que $\mathfrak{g}$ é fechado em relação à operação colchete de campo de vetores. De fato, dados $X, Y \in \mathfrak{g}$, $a, p \in G$ e f uma função diferenciável em G, temos:

$$\begin{aligned}
(dL_a)_e([X,Y]_e(f)) &= (dL_a)_e(X_e(Yf) - Y_e(Xf)),\\
&= (dL_a)_e(X_e)(Yf) - (dL_a)_e(Y_e)(Xf),\\
&= X_a(Yf) - Y_a(Xf),\\
&= [X,Y]_a(f)
\end{aligned}$$

Dessa forma, temos que $(\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot])$ é uma álgebra de Lie de G. A dimensão desta álgebra de Lie é igual à dimensão de G por causa do resultado seguinte:

Proposição 2.2. *A aplicação $\alpha\colon \mathfrak{g} \longrightarrow T_eG$ tal que $\alpha(X) = X_e$, onde T_eG indica o espaço tangente a G no ponto e, é um isomorfismo entre espaços vetoriais. Se $X \in \mathfrak{g}$ então X é diferenciável.*

Demonstração. Vejamos que α é linear e bijetora.

(i) α é linear;

Sejam $X,\ Y \in \mathfrak{g}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ então:

$\alpha(X+\lambda Y) = (X+\lambda Y)_e = (X+\lambda Y)(e) = X(e)+\lambda Y(e) = X_e+\lambda Y_e = \alpha(X)+\lambda\alpha(Y)$.

(ii) α é injetora;

De fato, sejam $X, Y \in \mathfrak{g}$ com $\alpha(X) = \alpha(Y)$, temos que $X_e = Y_e$. Dado $g \in G$ então: $X_g = X_{ge} = (dL_g)_e(X_e) = (dL_g)_e(Y_e) = Y_{ge} = Y_g$, para todo $g \in G$, portanto $X = Y$.

(iii) α é sobrejetora.

Tome $W \in T_eG$. Queremos mostrar que existe $X \in \mathfrak{g}$ tal que $\alpha(X) = W$, ou seja, $X_e = W$. Seja $(dL_a)_e\colon T_eG \longrightarrow T_{L_a(e)}G$ tal que $(dL_a)_e(X_e) = X_{L_a(e)} = X_{ae} = X_a$. Portanto, basta definir um campo X em G por $X_a = (dL_a)_e(W)$. Vejamos que $X \in \mathfrak{g}$ e que $\alpha(X) = W$:
Seja $a \in G$, logo, para todo $g \in G$,

$$X_{ag} = (dL_{ag})_e(W) = (dL_a \circ dL_g)_e(W) = (dL_a)_g(dL_g)_e(W) = (dL_a)_g(X_g),$$

Portanto, $X \in \mathfrak{g}$. E ainda, $\alpha(X) = X_e = (dL_e)_e(W) = Id(W) = W$.

Assim, concluimos que α é um isomorfismo entre espaços vetoriais.

$\blacksquare$

Dados $Z \in T_eG$, denotaremos por X^Z o único campo invariante à esquerda tal que $X^Z_e = Z$. Através deste isomorfismo definimos o colchete de lie no espaço tangente T_eG por: Para $U, V \in \mathfrak{g}$ então $U = X^U_e$ e $V = X^V_e$, logo $[U, V] = [X^U_e, X^V_e] = [X^U, X^V]_e$. Note que assim o isomorfismo entre $\mathfrak{g}$ e T_eG torna-se um isomorfismo entre álgebras de Lie.

Exemplo 2.14. A álgebra de Lie do grupo linear geral $GL(n, \mathbb{R})$ é a álgebra $(\mathbb{M}_n(\mathbb{R}), [\cdot, \cdot])$.

O grupo $GL(n, \mathbb{R})$ herda sua estrutura de variedade como uma subvariedade aberta de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Assim, da proposição (2.2) obtemos os isomorfismos canônicos entre espaços vetoriais:

$$(\text{A álgebra de Lie de } GL(n, \mathbb{R})) \cong T_e(GL(n, \mathbb{R})) \cong T_e(\mathbb{M}_n(\mathbb{R})) \cong \mathbb{M}_n(\mathbb{R}),$$

onde $e = Id_{n \times n}$ (matriz identidade). O primeiro isomorfismo é obtido do fato de que $\mathfrak{g}$ e T_eG são isomorfos. O segundo é obtido pela identificação entre subvariedade aberta de uma variedade diferenciável. Por fim, o terceiro isomorfismo é dado pela identificação canônica entre espaços vetoriais.

Exemplo 2.15. Considere as aplicações $L_a \colon \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e $R_a \colon \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, com $a \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, as translações à esquerda e à direita no espaço vetorial das matrizes. As translações L_a e R_a são transformações lineares. De fato, dados $\lambda \in \mathbb{R}$ e $g_1, g_2 \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ temos:

$$L_a(g_1 + \lambda g_2) = a(g_1 + \lambda g_2) = ag_1 + \lambda a g_2 = L_a(g_1) + \lambda L_a(g_2),$$

e

$$R_a(g_1 + \lambda g_2) = (g_1 + \lambda g_2)a = g_1 a + \lambda g_2 a = R_a(g_1) + \lambda R_a(g_2).$$

Portanto, as aplicações L_a e R_a são diferenciáveis e $(dL_a)_X = L_a$ e $(dR_a)_X = R_a$, para todo $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Vamos descrever os campos invariantes em $GL(n, \mathbb{R})$.
Seja $X \colon GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e $g \in GL(n, \mathbb{R})$ um campo invariante à esquerda, então: $X_g = X_{ge} = (dL_g)_e(X_e) = L_g(X_e) = gX_e$, onde e é a matriz identidade. Assim, podemos dizer que, para todo $g \in GL(n, \mathbb{R})$ e $A \in T_e(GL(n, \mathbb{R}))$, temos que:

$$X_g = gA.$$

Analogamente, os campos invariantes à direita são da forma:

$$X_g = Ag.$$

No caso das matrizes de ordem 1, teremos que $L_a = R_a$.

2.2.1 Álgebras Nilpotentes e álgebras solúveis

Para uso posterior, vamos definir álgebras de Lie nilpotentes e solúveis.

Definição 2.5. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie e $\mathfrak{h}$ um subespaço vetorial de $\mathfrak{g}$, então:

(a) $\mathfrak{h}$ é chamado uma *subálgebra de Lie* de $\mathfrak{g}$, se $[X,Y] \in \mathfrak{h}$, para todo $X, Y \in \mathfrak{h}$.

(b) $\mathfrak{h}$ é chamado um *ideal* em $\mathfrak{g}$, se $[A,X] \in \mathfrak{h}$, para todo $X \in \mathfrak{h}$ e $A \in \mathfrak{g}$.

Definição 2.6. *Uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é **abeliana** se, $[X,Y] = 0$ para todo X, Y em $\mathfrak{g}$.*

Sejam $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie, $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ subconjuntos de $\mathfrak{g}$. Usaremos a notação $[\mathfrak{a},\mathfrak{b}]$ para indicar o subespaço gerado por

$$\{[A,B]\ ;\ A \in \mathfrak{a}, B \in \mathfrak{b}\}.$$

Define-se, por indução, os seguintes subespaços de $\mathfrak{g}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^{(0)} &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}' &= [\mathfrak{g},\mathfrak{g}] \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^{(k)} &= [\mathfrak{g}^{(k-1)},\mathfrak{g}^{(k-1)}]. \end{aligned}$$

Não é difícil ver que esses subespaços são ideais de $\mathfrak{g}$ (veja [8], pág. 39). Essa sequência de ideais é conhecida por **série derivada** de $\mathfrak{g}$ e suas componentes são as álgebras derivadas de $\mathfrak{g}$. Tal sequência é decrescente, isto é,

$$\mathfrak{g}^{(k+1)} \subset \mathfrak{g}^{(k)}.$$

Definição 2.7. Uma álgebra de Lie é solúvel se alguma de suas álgebras derivadas se anula, isto é,

$$\mathfrak{g}^{(k_0)} = 0$$

para algum $k_0 \geq 1$ (e, portanto, $\mathfrak{g}^{(k)} = 0$ para todo $k \geq k_0$).

Exemplo 2.16. $\mathfrak{g}$ é abeliana se, e somente se, $\mathfrak{g}' = 0$.

Exemplo 2.17. As álgebras de matrizes triangulares superiores

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & * \end{pmatrix}_{n\times n} \right\}$$

são solúveis.

A **série central descendente** da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é definida, por indução, como:

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}^1 &= \mathfrak{g} \\ \mathfrak{g}^2 &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \\ &\vdots \\ \mathfrak{g}^k &= [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}]. \end{aligned}$$

Como produto de ideais é ideal, segue da definição que $\mathfrak{g}^k$ é um ideal para $k \geq 1$. Daí que $\mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] \subset \mathfrak{g}^k$ e a série central descendente é, de fato, descendente:

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}^2 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}^k \supset \ldots.$$

Definição 2.8. Uma álgebra de Lie é nilpotente se sua série central descendente se anula em algum momento, isto é,

$$\mathfrak{g}^{k_0} = 0$$

para algum $k_0 \geq 1$ (e, portanto, $\mathfrak{g}^k = 0$ para todo $k \geq k_0$).

Exemplo 2.18. A álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \ldots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}_{n \times n} \right\}$ é nilpotente.

Definição 2.9. Dizemos que um grupo de Lie G é solúvel (respectivamente nilpotente) se sua álgebra de Lie é solúvel (respectivamente nilpotente).

2.3 Subgrupos a 1-parâmetro e a aplicação exponencial

Nesta seção vamos estudar a descrição infinitesimal de um grupo de Lie G, a qual consiste no conjunto dos subgrupos a 1-parâmetro de G. O matemático Sophus Lie (1842 – 1899) chamou esta descrição de grupo infinitesimal.

Definição 2.10. Um subgrupo a 1-parâmetro de um grupo de Lie G é um homomorfismo C^∞, $\phi\colon (\mathbb{R}, +) \longrightarrow G$.

Note que $\phi\colon \mathbb{R} \longrightarrow G$ é a curva em G tal que $\phi(0) = e$, $\phi(t+s) = \phi(t)\phi(s)$ e $\phi(-t) = \phi(t)^{-1}$.

De fato, pela definição de homomorfismo é claro que $\phi(t+s) = \phi(t)\phi(s)$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$. Em particular, $\phi(0) = \phi(0+0) = \phi(0)\phi(0)$, logo $\phi(0) = e$. E ainda, $e = \phi(0) = \phi(t-t) = \phi(t+(-t)) = \phi(t)\phi(-t)$, ou seja, $\phi(-t) = \phi(t)^{-1}$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Exemplo 2.19. A aplicação $\phi\colon (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R}\backslash\{0\}, \cdot)$, definida por $\phi(t) = e^t$ é um subgrupo a 1-parâmetro do grupo de Lie multiplicativo $(\mathbb{R}, \cdot)$, com o produto usual.

Exemplo 2.20. A aplicação $\phi\colon \mathbb{R} \longrightarrow S^1 \cong U(1)$ definida por $\phi(t) = e^{it}$ é um subgrupo a 1-parâmetro de S^1.

De fato, dados $t, s \in \mathbb{R}$,

$$\phi(t+s) = e^{i(t+s)} = e^{it+is} = e^{it}e^{is} = \phi(t)\phi(s).$$

Portanto, ϕ é um homomorfismo de grupos.

Exemplo 2.21. A aplicação $\phi\colon \mathbb{R} \longrightarrow GL(3,\mathbb{R})$ definida por

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} cos(t) & sen(t) & 0 \\ -sen(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}$$

é um subgrupo a 1-parâmetro do grupo de Lie $GL(3,\mathbb{R})$.

De fato, dados $t, s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\phi(t+s) &= \begin{pmatrix} \cos(t+s) & sen(t+s) & 0 \\ -sen(t+s) & \cos(t+s) & 0 \\ 0 & 0 & e^{t+s} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(t)\cos(s) - sen(t)sen(s) & sen(s)\cos(t) + sen(t)\cos(s) & 0 \\ -sen(t)\cos(s) - sen(s)\cos(t) & \cos(t)\cos(s) - sen(t)sen(s) & 0 \\ 0 & 0 & e^t e^s \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(t) & sen(t) & 0 \\ -sen(t) & \cos(t) & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(s) & sen(s) & 0 \\ -sen(s) & \cos(s) & 0 \\ 0 & 0 & e^s \end{pmatrix} \\
&= \phi(t)\phi(s),
\end{aligned}$$

portanto, a aplicação ϕ é um homomorfismo de grupos. Além disso, é claro que ϕ é C^∞, pois cada entrada de ϕ são funções C^∞.

Exemplo 2.22. A aplicação $\phi\colon \mathbb{R} \longrightarrow SO(2)$ dada por $\phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & sen(t) \\ -sen(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$ é um subgrupo a 1-parâmetro de $SO(2)$.

De fato, dados $t, s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\phi(t+s) &= \begin{pmatrix} \cos(t+s) & sen(t+s) \\ -sen(t+s) & \cos(t+s) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(t)\cos(s) - sen(t)sen(s) & sen(s)\cos(t) + sen(t)\cos(s) \\ -sen(t)\cos(s) - sen(s)\cos(t) & \cos(t)\cos(s) - sen(t)sen(s) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(t) & sen(t) \\ -sen(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(s) & sen(s) \\ -sen(s) & \cos(s) \end{pmatrix} \\
&= \phi(t)\phi(s),
\end{aligned}$$

logo a aplicação ϕ é um homomorfismo de grupos.
É claro que tal aplicação é C^∞, pois suas entradas são funções C^∞.

Teorema 2.5. *A aplicação $\phi \longmapsto d\phi_0(1)$ define uma correspondência um-a-um entre os subgrupos a 1-parâmetro de G e o espaço T_eG.*

Demonstração. Seja $V \in T_eG$ e $X_g^V = (dL_g)_e(V)$ o campo de vetores invariantes à esquerda correspondente. Precisamos obter um homomorfismo, C^∞, $\phi_V : \mathbb{R} \longrightarrow G$. Pela proposição 1.2, $\phi \colon I \longrightarrow G$ é a única curva integral de X^V tal que $\phi(0) = e$ e $d\phi_t = X^V_{\phi(t)}$. Esta curva é um homomorfismo, pois se fixarmos $s \in I$ tal que $s + t \in I$ para todo $t \in I$, então as curvas $t \mapsto \phi(t+s)$ e $t \mapsto \phi(t)\phi(s)$ satisfazem a equação anterior e leva 0 em $\phi(s)$. Pela unicidade de soluções obtemos que

$$\phi(t+s) = \phi(t)\phi(s) \quad (t, s \in I).$$

Agora, para estender ϕ para todo $\mathbb{R}$, definimos $\phi_V(t) = \phi\left(\dfrac{t}{n}\right)^n$ para n suficientemente grande, e este é o homomorfismo desejado. De fato,

$$\begin{aligned}
\phi_V(t+s) &= \phi\left(\frac{t+s}{n}\right)^n = \left(\phi\left(\frac{t}{n} + \frac{s}{n}\right)\right)^n \\
&= \left(\phi\left(\frac{t}{n}\right)\phi\left(\frac{s}{n}\right)\right)^n = \phi\left(\frac{t}{n}\right)^n \phi\left(\frac{s}{n}\right)^n = \phi_V(t)\phi_V(s).
\end{aligned}$$

A aplicação $V \mapsto \phi_V$ é a inversa de $\phi \mapsto d\phi_0(1)$, portanto, $\phi \mapsto d\phi_0(1)$ é uma correspondência um-a-um entre os subgrupos a 1-parâmetro de G e o espaço T_eG. ■

Usando a identificação do espaço tangente T_eG com o conjunto de todos os campos invariantes à esquerda $\mathfrak{g}$ de G obtém-se o seguinte resultado:

Corolário 2.6. *Para cada $X \in \mathfrak{g}$, existe um único subgrupo a 1-parâmetro $\phi_X : \mathbb{R} \longrightarrow G$ tal que $\phi_X'(0) = X_e$.*

Demonstração. Segue da proposição 2.2 e do teorema 2.5. ■

Definição 2.11. A aplicação exponencial $exp\colon \mathfrak{g} \longrightarrow G$ é definida por $exp(X) = \phi_X(1)$, onde ϕ_X é o único subgrupo a 1-parâmetro de X.

Conforme [9], pág. 102, a aplicação exponencial $exp\colon \mathfrak{g} \longrightarrow G$ é o objeto central usado para transferir ao grupo de Lie G propriedades de sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. A idéia básica de sua construção é que por definição os elementos de $\mathfrak{g}$ são EDO's em G, ou seja, campos invariantes, que possuem fluxos, os quais são formados por difeomorfismos locais de G. Os elementos formadores desses fluxos se identificam naturalmente a elementos de G, permitindo construir a partir de X um subgrupo de G parametrizado por $t \in \mathbb{R}$.

Agora, precisamos de uma relação entre ϕ_X e ϕ_{sX} com $s \in \mathbb{R}$.
Considere a aplicação $h(t) = \phi_X(st)$, onde h é um subgrupo a 1-parâmetro com $h'(t) = s\phi'_X(st)$, ou seja, $h'(0) = s\phi'_X(0) = sX_e$.

Por outro lado, pelo corolário 2.6, $\phi'_{sX}(0) = sX$. Portanto, $\phi_X(st) = \phi_{sX}(t)$.

Corolário 2.7. *A curva $\gamma(t) = exp(tX)$ é o único homomorfismo em G com $\gamma'(0) = X$. Sendo ϕ_X um homomorfismo, segue que $exp(s+t)X = exp(sX)exp(tX)$ e $(exp(tX))^{-1} = exp(-tX)$.*

Demonstração. A exponencial $\exp\colon \mathfrak{g} \longrightarrow G$ definida por $\exp(tX) = \phi_{tX}(1)$ é tal que $\phi_{tX}(1)$ é o único subgrupo a 1-parâmetro determinado por X, logo $\gamma(t) = \exp(tX)$ com $X \in \mathfrak{g}$, é o único homomorfismo em G. Sendo ϕ_X um homomorfismo, temos:

$$\exp(s+t)X = \phi_{(s+t)X}(1) = \phi_X(s+t) = \phi_X(s)\phi_X(t) = \phi_{sX}(1)\phi_{tX}(1) = \exp(sX)\exp(tX),$$

e ainda,

$$\exp(-tX) = \phi_{-tX}(1) = \phi_X(-t) = \phi_X(t)^{-1} = \phi_{tX}(1)^{-1} = \exp(tX)^{-1}.$$

Agora vejamos que $\gamma^{'}(0) = X$. Vamos calcular a diferencial $(d\exp)_o\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ da aplicação exponencial na origem $o \in \mathfrak{g}$. Tome a curva $\alpha(t) = tX$ em $\mathfrak{g}$ com $\alpha(0) = o$ e $\alpha'(0) = X \in \mathfrak{g}$, então:

$$(d\exp)_o(X) = \frac{d}{dt}(\exp \circ \alpha)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\exp(tX))\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\phi_X(t)\Big|_{t=0} = \phi'_X(0) = X.$$

Portanto, $\gamma'(0) = (d\exp)_0(X) = X$. ■

Na demonstração anterior vimos que $(d\exp)_o = Id$, onde Id é a aplicação identidade, logo pelo Teorema da Função Inversa vale o seguinte resultado:

Proposição 2.3. *Existe uma vizinhança V de $o \in \mathfrak{g}$ que é difeomorfa a uma vizinhança U da identidade $e \in G$, tal que $U = exp(V)$.*

Observação 2.8. A vizinhança U é chamada de vizinhança normal.

A próxima observação será útil para apresentarmos alguns exemplos.

Observação 2.9. Se $\phi(t)$ é um subgrupo a 1-parâmetro de G, então podemos expressar as derivadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\phi'(t) &= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\phi(t+h) - \phi(t)\right) \\
&= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\phi(t)\phi(h) - \phi(t)\right) \\
&= \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\phi(h) - e\right) \phi(t) \\
&= \left(\lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h}(\phi(h) - e)\right) \phi(t) \\
&= A\phi(t),
\end{aligned}$$

onde $A = \lim_{h \longrightarrow 0} \frac{1}{h}(\phi(h) - e)$. Portanto, $\phi'(t) = A\phi(t)$.
Este limite existe porque o grupo G é uma variedade diferenciável e as funções coordenadas são funções diferenciáveis.

Exemplo 2.23. Seja $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, veremos que a curva $\phi(t) = e^{tA}$ é bem definida. Ela é a única solução do sistema

$$\begin{cases} \phi'(t) = A\phi(t) \\ \phi(0) = Id \end{cases}.$$

A matriz A será chamada de gerador infinitesimal do subgrupo $\phi(t)$.

Por exemplo, considere

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} cos(t) & sen(t) \\ -sen(t) & cos(t) \end{pmatrix} \in SO(2).$$

Assim,

$$\phi'(t) = \begin{pmatrix} -sen(t) & cos(t) \\ -cos(t) & -sen(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(t) & sen(t) \\ -sen(t) & cos(t) \end{pmatrix}.$$

Neste caso o gerador infinitesimal de

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} cos(t) & sen(t) \\ -sen(t) & cos(t) \end{pmatrix},$$

é a matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ no sentido que $\phi(t) = e^{tA}$. Aqui e^{tA} representa a exponencial de matrizes, a qual veremos a seguir.

Definição 2.12. Seja A uma matriz $n \times n$ (real ou complexa), definimos:

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \cdots .$$

Proposição 2.4. *Para toda matriz A (complexa) de ordem n, a exponencial e^A é dada por uma série convergente. Além disso,*

(i) $e^X e^Y = e^{X+Y}$ *se X e Y comutam;*

(ii) e^X *é não singular;*

(iii) $t \mapsto e^{tX}$ *é uma curva diferenciável em $GL(n, \mathbb{C})$ que é igual a Id quando $t = 0$;*

(iv) $\dfrac{d}{dt}\left(e^{tX}\right) = Xe^{tX}$*;*

(v) $det(e^X) = e^{tr(X)}$*;*

(vi) $X \mapsto e^X$ *é uma aplicação C^∞ no espaço das matrizes de ordem n em si mesmo.*

Demonstração. Defina a norma $\|\cdot\|$ em $M_n(\mathbb{R})$ por $\|A\| = \max\limits_{0 \leq i \leq n} |A|_i$, onde $|A|_i$ é a soma dos valores da i-ésima linha de A. Então, pode-se verificar que $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ e $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$. Assim,

$$\|e^A\| \leq 1 + \|A\| + \frac{\|A\|^2}{2!} + \frac{\|A\|^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^k}{k!} = e^{\|A\|}$$

Logo, a série é absolutamente convergente, portanto convergente. Para (i) temos

$$\begin{aligned} e^X e^Y &= \left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r!} X^r\right)\left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{1}{s!} Y^s\right) = \sum_{r,s} \frac{1}{r!s!} X^r Y^s \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{X^k Y^{N-k}}{k!(N-k)!} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} X^k Y^{N-k} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!}(X+Y)^N = e^{X+Y}. \end{aligned}$$

Para vermos (ii) basta usar o item (i) fazendo $Y = -X$, então obtemos $e^X e^{-X} = e^{X+(-X)} =$

$e^0 = 1$, logo, $e^{-X} = \left(e^X\right)^{-1}$, daí concluimos que e^X é não-singular. Para (iii) e (iv) temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(e^{tX}\right) &= \frac{d}{dt}\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!}\left(tX\right)^N = \sum_{N=0}^{\infty}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{N!}\left(tX\right)^N\right] \\
&= \sum_{N=1}^{\infty}\frac{N}{N!}t^{N-1}X^N = X\sum_{N=1}^{\infty}\frac{1}{(N-1)!}\left(tX\right)^{N-1} = Xe^{tX}.
\end{aligned}$$

Em (v), se X é uma matriz triangular superior, então e^X também é triangular superior. E ainda, $det(e^X)$ depende unicamente das entradas da diagonal de e^X, que depende unicamente das entradas da diagonal de X. Neste caso, $det(e^X) = e^{tr(X)}$. Uma matriz complexa geral é da forma gXg^{-1}, onde X é uma matriz triangular superior, e então temos

$$det(e^{gXg^{-1}}) = det(ge^X g^{-1}) = det(e^X) = e^{tr(X)} = e^{tr(gXg_{-1})}.$$

Por fim em (vi), temos que a aplicação $X \longmapsto e^X$ é definida pela soma de uma série onde cada termo é uma função C^∞. Portanto, a aplicação é C^∞. ■

Exemplo 2.24. Como vimos no exemplo 2.14 a álgebra de Lie do grupo linear geral $GL(n,\mathbb{R})$ é o espaço $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Neste caso os termos da aplicação exponencial coincidem com a aplicação exponencial de matrizes.

A aplicação $\phi\colon \mathbb{R} \longrightarrow GL(n,\mathbb{R})$ dada por $\phi(t) = e^{tA}$ é um subgrupo a 1-parâmetro em $GL(n,\mathbb{R})$, ou seja, ϕ é um homomorfismo tal que $\phi(0) = Id$ e

$$\phi'(t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kA^k}{k!}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}A^k}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{k-1}A^{k-1}A}{(k-1)!} = A\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kA^k}{k!} = A\phi(t).$$

Logo, $\phi'(0) = A\phi(0) = A$. Dessa forma, a aplicação exponencial $\exp\colon \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow GL(n,\mathbb{R})$ é dada por $\exp A = e^A = \phi_A(1)$, onde ϕ_A é o único subgrupo a 1-parâmetro associado ao campo A.

O próximo resultado será útil para determinar o colchete das álgebras de Lie de certos grupos de Lie. Tal resultado é encontrado em [1].

Lema 2.10. *Para quaisquer dois campos de vetores X, Y na variedade M com seus fluxos correspondentes α_t e β_t sobre o ponto $p \in M$ que estão próximos de um ponto fixo $o \in M$, o colchete é dado por*

$$[X,Y]_o = \lim_{t\longrightarrow 0}\gamma'(t),$$

onde $\gamma(t) = \beta_{-\sqrt{t}}\left(\alpha_{-\sqrt{t}}\left(\beta_{\sqrt{t}}\left(\alpha_{\sqrt{t}}(o)\right)\right)\right)$.

Exemplo 2.25. Vamos mostrar que o colchete em $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ é dado por $[A,B] = AB - BA$. Sejam X^A e X^B, campos invariantes à esquerda correspondentes às matrizes $A, B \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, então $[A,B] = [X^A, X^B]_{Id}$.

Sejam α_t e β_t os fluxos associados aos campos A e B, onde $\alpha, \beta \colon U \times I \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$ com U aberto em $GL(n, \mathbb{R})$ e $I \subset \mathbb{R}$. Assim a curva integral do campo X^A em um ponto $g \in GL(n, \mathbb{R})$ é dada por $\alpha(g, t) = \alpha_t(g) = g\exp(tA)$. Analogamente, a curva integral para o campo X^B num ponto g é dada por $\beta_t(g) = g\exp(tB)$. Tomando como ponto fixo em $GL(n, \mathbb{R})$ a matriz identidade Id, podemos escrever a curva γ da seguinte forma:

$$\gamma(t) = \exp(\sqrt{t}A)\exp(\sqrt{t}B)\exp(-\sqrt{t}A)\exp(-\sqrt{t}B),$$

que também pode ser expressa por:

$$\gamma(t) = e^{\sqrt{t}A}e^{\sqrt{t}B}e^{-\sqrt{t}A}e^{-\sqrt{t}B}.$$

Daí, temos que:

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= e^{\sqrt{t}A}\frac{A}{2\sqrt{t}}e^{\sqrt{t}B}e^{-\sqrt{t}A}e^{-\sqrt{t}B} + e^{\sqrt{t}A}e^{\sqrt{t}B}\frac{B}{2\sqrt{t}}e^{-\sqrt{t}A}e^{-\sqrt{t}B} + e^{\sqrt{t}A}e^{\sqrt{t}B}e^{-\sqrt{t}A}\left(-\frac{A}{2\sqrt{t}}\right)e^{-\sqrt{t}B} \\
&\quad + e^{\sqrt{t}A}e^{\sqrt{t}B}e^{-\sqrt{t}A}e^{-\sqrt{t}B}\left(-\frac{B}{2\sqrt{t}}\right).
\end{aligned}$$

Usando a exponencial de matrizes $e^X = I + X + \dfrac{X^2}{2!} + \cdots$, podemos escrever $\gamma'(t)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
\gamma'(t) &= e^{\sqrt{t}A}\frac{A}{2\sqrt{t}}\left(I + \sqrt{t}B + S_B(t)\right)e^{-\sqrt{t}A}e^{-\sqrt{t}B} + e^{\sqrt{t}A}e^{\sqrt{t}B}\frac{B}{2\sqrt{t}}\left(I - \sqrt{t}A + S_A(t)\right)e^{-\sqrt{t}B} \\
&\quad + e^{\sqrt{t}A}\left(I + \sqrt{t}B + S_B(t)\right)e^{-\sqrt{t}A}\left(-\frac{A}{2\sqrt{t}}\right)e^{-\sqrt{t}B} \\
&\quad + e^{\sqrt{t}A}e^{\sqrt{t}B}\left(I - \sqrt{t}A + S_A(t)\right)e^{-\sqrt{t}B}\left(-\frac{B}{2\sqrt{t}}\right),
\end{aligned}$$

onde $S_A(t) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{(-\sqrt{t}A)^k}{k!}$ e $S_B(t) = \sum\limits_{k=2}^{\infty} \dfrac{(\sqrt{t}B)^k}{k!}$.

Logo, $\lim\limits_{t \longrightarrow 0} \gamma'(t) = \dfrac{AB}{2} - \dfrac{BA}{2} - \dfrac{BA}{2} + \dfrac{AB}{2} = AB - BA = [A, B] = [X^A, X^B]_{Id}$.

Exemplo 2.26. A álgebra de Lie do grupo ortogonal $O(n)$ é o espaço

$$\mathfrak{o}(n) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \ : \ A^t = -A\}$$

das matrizes reais antissimétricas. Por isso, $\dim O(n) = \frac{1}{2}n(n-1)$. Vamos provar que $T_{Id}\left(O(n)\right) = \mathfrak{o}(n)$.

Seja $\gamma(s)$ uma curva em $O(n)$ tal que $\gamma(0) = Id$. Então

$$\gamma(s)(\gamma(s))^t = Id.$$

Derivando esta equação obtemos:

$$\gamma'(s)(\gamma(s))^t + \gamma(s)(\gamma'(s))^t = 0,$$

como $\gamma(0) = Id$, em $s = 0$, temos:

$$\gamma'(0) + (\gamma'(0))^t = 0.$$

Logo, $T_{Id}\left(O(n)\right) \subset \mathfrak{o}(n)$.

Por outro lado, se $A \in \mathfrak{o}(n)$, a curva $\gamma(s) = e^{sA}$ satisfaz $\gamma(0) = Id$ e $\gamma'(0) = A$. Além disso, pela proposição 2.4, temos:

$$(\gamma(s))^t = (e^{sA})^t = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(sA)^k}{k!}\right)^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(sA^t)^k}{k!} = e^{sA^t} = e^{s(-A)} = \left(e^{sA}\right)^{-1} = (\gamma(s))^{-1},$$

então $\gamma(s) \in O(n)$ e $\mathfrak{o}(n) \subset T_{Id}\left(O(n)\right)$. Portanto, $T_{Id}\left(O(n)\right) = \mathfrak{o}(n)$.

Exemplo 2.27. A álgebra de Lie do grupo unitário $U(n)$ é o espaço

$$\mathfrak{u}(n) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \ : \ \overline{A}^t = -A\}$$

das matrizes hermitianas complexas. As entradas da diagonal são todas imaginários puros e $\dim_{\mathbb{C}} U(n) = n^2$. Vamos provar que $T_{Id}(U(n)) = \mathfrak{u}(n)$.

Seja $\gamma(s)$ uma curva em $U(n)$ tal que $\gamma(0) = Id$. Então,

$$\gamma(s)(\overline{\gamma(s)})^t = Id.$$

Derivando ambos os membros da equação, obtemos:

$$\gamma'(s)(\overline{\gamma(s)})^t + \gamma(s)(\overline{\gamma'(s)})^t = 0,$$

como, $\gamma(0) = Id$, em $s = 0$, temos:

$$\gamma'(0) + (\overline{\gamma'(0)})^t = 0.$$

Logo, $T_{Id}(U(n)) \subset \mathfrak{u}(n)$.

Por outro lado, se $A \in \mathfrak{u}(n)$, a curva $\gamma(s) = e^{sA}$ satisfaz $\gamma(0) = Id$ e $\gamma'(0) = A$. Além disso, usando a proposição 2.4, temos:

$$(\overline{\gamma(s)})^t = (\overline{e^{sA}})^t = \left(\overline{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(sA)^k}{k!}}\right)^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(s\overline{A}^t)^k}{k!} = e^{s\overline{A}^t} = e^{s(-A)} = \left(e^{sA}\right)^{-1} = (\gamma(s))^{-1},$$

então $\gamma(s) \in U(n)$ e $\mathfrak{u}(n) \subset T_{Id}(U(n))$.

Exemplo 2.28. A álgebra de Lie do grupo unitário especial $SU(n)$ é o conjunto

$$\mathfrak{su}(n) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}); \overline{A}^t = -A \ e \ \mathrm{tr}(A) = 0\}$$

. E ainda, $\dim SU(n) = n^2 - 1$. Basta ver que $A \in \mathfrak{su}(n)$ se, e somente se, $e^{sA} \in SU(n)$.

Se $A \in \mathfrak{su}(n)$ então,

$$\left(\overline{e^{sA}}\right)^t = e^{s\overline{A}^t} = e^{s(-A)} = \left(e^{sA}\right)^{-1}.$$

E ainda,

$$det(e^{sA}) = e^{tr(sA)} = e^{s\mathrm{tr}(A)} = e^{s0} = 1,$$

portanto, $e^{sA} \in SU(n)$.

Por outro lado, se $e^{sA} \in SU(n)$ então,

$$\begin{aligned} e^{sA}\left(\overline{e^{sA}}\right)^t &= Id \\ \left(\overline{e^{sA}}\right)^t &= \left(e^{sA}\right)^{-1} \\ e^{s\overline{A}^t} &= e^{s(-A)}. \end{aligned}$$

Como a aplicação exponencial é difeomorfismo numa vizinhança do 0, segue que $\overline{A}^t = -A$. E ainda,

$$e^{s0} = 1 = det(e^{sA}) = e^{tr(sA)} = e^{s\mathrm{tr}(A)},$$

logo, $\mathrm{tr}(A) = 0$ e, portanto, $A \in \mathfrak{su}(n)$.

Exemplo 2.29. A álgebra de Lie do grupo linear especial $SL(n, \mathbb{R})$ é o conjunto

$$\mathfrak{sl}(n) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R}); \mathrm{tr}(A) = 0\}$$

e sua dimensão é $n^2 - 1$. Vejamos que $A \in \mathfrak{sl}(n)$ se, e somente se, $e^{sA} \in SL(n, \mathbb{R})$.

Se $A \in \mathfrak{sl}(n)$ então $\mathrm{tr}(A) = 0$. Assim,

$$det(e^{sA}) = e^{\mathrm{tr}(sA)} = e^{s\mathrm{tr}(A)} = e^{s0} = 1,$$

logo, $e^{sA} \in SL(n, \mathbb{R})$.

Por outro lado, se $e^{sA} \in SL(n, \mathbb{R})$ então,

$$e^{s0} = 1 = det(e^{sA}) = e^{\mathrm{tr}(sA)} = e^{s\mathrm{tr}(A)}.$$

Da proposição 2.3, a aplicação exponencial é um difeomorfismo numa vizinhança de 0, portanto, $\mathrm{tr}(A) = 0$, ou seja, $A \in \mathfrak{sl}(n)$.

Exemplo 2.30. A álgebra de Lie do grupo ortogonal especial $SO(n)$ é a mesma álgebra de Lie de $O(n)$, isto é, $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n)$ e portanto a dimensão de $SO(n)$ é $\frac{1}{2}n(n-1)$. Vamos provar que $T_{Id}(SO(n)) = \mathfrak{o}(n)$.

Seja $\gamma(s)$ uma curva de $SO(n)$ tal que $\gamma(0) = Id$. Então,

$$\gamma(s)(\gamma(s))^t = Id.$$

Derivando ambos os membros da equação acima:

$$\gamma'(s)(\gamma(s))^t + \gamma(s)(\gamma'(s))^t = 0.$$

Como $\gamma(0) = Id$, em $s = 0$, temos:

$$\gamma'(0) + (\gamma'(0))^t = 0,$$

logo, $T_{Id}(SO(n)) \subset \mathfrak{o}(n)$.

Por outro lado, se $A \in \mathfrak{o}(n)$, a curva $\gamma(s) = e^{sA}$ satisfaz $\gamma(0) = Id$ e $\gamma'(0) = A$. Além disso,

$$(\gamma(s))^t = (e^{sA})^t = e^{sA^t} = e^{s(-A)} = (e^{sA})^{-1} = (\gamma(s))^{-1}.$$

E ainda,

$$det(\gamma(s)) = det(e^{sA}) = e^{\mathrm{tr}(sA)} = e^{s\mathrm{tr}(A)} = e^{s0} = 1.$$

Então $\gamma(s) \in SO(n)$ e $\mathfrak{o}(n) \subset T_{Id}(SO(n))$. Portanto, $\mathfrak{o}(n) = T_{Id}(SO(n))$, ou seja, $\mathfrak{so}(n) = \mathfrak{o}(n)$.

Exemplo 2.31. A álgebra de Lie do grupo simplético $Sp(n)$ é o conjunto

$$\mathfrak{sp}(n) = \{A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{H}); \overline{A}^t = -A\}.$$

Vejamos que $A \in \mathfrak{sp}(n)$ se, e somente se, $e^{sA} \in Sp(n)$.

Se $A \in \mathfrak{sp}(n)$, então,

$$(\overline{e^{sA}})^t = e^{s\overline{A}^t} = e^{s(-A)} = (e^{sA})^{-1},$$

portanto, $e^{sA} \in Sp(n)$. Por outro lado, se $e^{sA} \in Sp(n)$ então $(\overline{e^{sA}})^t = (e^{sA})^{-1}$, ou seja,

$e^{s\overline{A}^t} = e^{s(-A)}$. Pelo fato da aplicação exponencial ser um difeomorfismo numa vizinhança da origem, segue que $\overline{A}^t = -A$. Portanto, $A \in \mathfrak{sp}(n)$.

No que diz respeito à topologia dos grupos temos que $SO(n)$, $O(n)$, $SU(n)$, $U(n)$ e $Sp(n)$ são compactos (são subconjuntos fechados e limitados do grupo linear geral). Os grupos $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$, e $Sp(n)$ são conexos. A condição de ortogonalidade para $O(n)$ implica que se $A \in O(n)$ então $det(A) = \pm 1$, ou seja, $O(n)$ tem duas componentes conexas, onde uma delas é $SO(n)$ (veja [1], pág. 19).

Exemplo 2.32. *(Grupo de Heisenberg)* O grupo de Heisenberg, que denotaremos por H é descrito por todas as matrizes de ordem 3 da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$. Seja $\mathfrak{h}$ a álgebra de Lie do grupo de Heisenberg, então tome $v \in \mathfrak{h}$ e uma curva $\gamma \colon I \longrightarrow H$ tal que

$$\gamma(s) = \begin{pmatrix} 1 & a(s) & b(s) \\ 0 & 1 & c(s) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\gamma(0) = Id$ e $\gamma'(0) = v$. Assim,

$$\gamma^{'}(s) = \begin{pmatrix} 0 & a'(s) & b'(s) \\ 0 & 0 & c'(s) \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \gamma^{'}(0) = \begin{pmatrix} 0 & x) & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

com $x = a'(0)$, $y = b'(0)$ e $z = c'(0)$. Logo,

$$\mathfrak{h} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

é a álgebra de Lie do grupo de Heisenberg, que é conhecido como o conjunto das matrizes triangulares superiores.

Teorema 2.11. *(Teorema de Lie)*

(1) Para cada álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ existe um grupo de Lie G (não necessariamente único) cuja álgebra de Lie associada é $\mathfrak{g}$.

(2) Seja G um grupo de Lie com a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Se H é um subgrupo de G com álgebra de Lie $\mathfrak{h}$, então $\mathfrak{h}$ é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$. Por outro lado, para cada subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, existe um único subgrupo de Lie conexo H de G que tem $\mathfrak{h}$ como álgebra de Lie. Além disso, os subgrupos normais de G correspondem aos ideais em $\mathfrak{g}$.

(3) Sejam G_1 e G_2 grupos de Lie com suas correspondentes álgebras de Lie $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_2$. Se $\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_2$ (isomorfismo de álgebras de Lie), então G_1 e G_2 são localmente isomorfos. Se os grupos de Lie G_1 e G_2 são simplesmente conexos, então G_1 é isomorfo a G_2.

Demonstração. Ver em [1], Teo. 1.14. ■

2.4 Uma introdução à Teoria da Representação

Há vários motivos para olhar para representações. Por exemplo, uma representação é muito útil para a compreensão do grupo e seus possíveis invariantes. Um outro importante conceito a ser desenvolvido será o de representação adjunta de um grupo de Lie que, a grosso modo, é uma medida da não-comutatividade do grupo.

Definição 2.13. Uma representação (dimensão finita) de um grupo de Lie G em um espaço vetorial V de dimensão finita é um homomorfismo $\phi\colon G \longrightarrow Aut(V)$, onde $Aut(V)$ é o espaço dos automorfismos de V.

A dimensão da representação é a dimensão do espaço vetorial V.

Denotemos por (G, V) a representação de G em V ou simplesmente por V.
A aplicação ϕ é necessariamente contínua.

Definição 2.14. Se (G, V) é uma representação de G e $g \in G$, $v \in V$ então definimos uma *ação* de G em V como sendo a aplicação $\Phi\colon G \times V \longrightarrow V$ tal que $\Phi(g, v) = \phi(g)(v)$. Vamos denotar $\Phi(g, v)$ simplesmente por $g \cdot v$.

Dessa forma, obtemos $e \cdot v = v$, ou seja, $\Phi(e, v) = v$ e, dados $g_1, g_2 \in G$, então $g_1 \cdot (g_2 \cdot v) = (g_1 g_2 \cdot v)$, ou ainda, $\Phi(g_1, \Phi(g_2, v)) = \Phi(g_1 g_2, v)$.

Observação 2.12. Se V é um espaço vetorial real (complexo ou quaterniônico) e se, para todo g em G, as aplicações definidas por $\Phi\colon v \in V \longmapsto \Phi(g, v) \in V$ são lineares, a correspondente representação é chamada real (complexa ou quaterniônica).

Definição 2.15. Seja (G, V) uma representação. Um subespaço U de V é chamado invariante ou G-invariante se $g \cdot U \subset U$, para todo $g \in G$.

Observação 2.13. Toda representação (G, V) tem sempre pelo menos dois subespaços invariantes, que são $\{0\}$ e V.

Definição 2.16. Uma representação é chamada **irredutível** se os únicos subespaços invariantes são $\{0\}$ e V.

Definição 2.17. Duas representações $\phi_1\colon G \longrightarrow Aut(V_1)$ e $\phi_2\colon G \longrightarrow Aut(V_2)$ são **equivalentes** ($\phi_1 \cong \phi_2$) se os espaços vetoriais V_1 e V_2 são G-**isomorfos**, isto é, existe um isomorfismo linear $A\colon V_1 \longrightarrow V_2$ tal que

$$A(\phi_1(g)(v)) = \phi_2(g)(A(v)), \qquad \forall\, g \in G \quad e \quad v \in V_1$$

Mais precisamente,

$$\begin{array}{ccc} V_1 & \xrightarrow{\phi_1(g)} & V_1 \\ A\big\downarrow & & \big\downarrow A \\ V_2 & \xrightarrow{\phi_2(g)} & V_2 \end{array}$$

o diagrama acima é comutativo.

Definição 2.18. Sejam (G, V) e (G, W) duas representações. A aplicação linear $f\colon V \longrightarrow W$ é dita G-equivariante se $f(g \cdot v) = g \cdot f(v)$, para todo $g \in G$ e $v \in V$.

Lema 2.14. *(Lema de Schur - 1ª versão) Sejam V e W duas representações irredutíveis de G, e $f\colon V \longrightarrow W$ uma aplicação G-equivariante, então f é invertível ou $f \equiv 0$.*

Demonstração. Considere os subespaços $Ker(f)$ e $Im(f)$ de V e W, respectivamente. Vejamos que são invariantes. De fato, se (G, V) e (G, W) são representações, então dado $g \cdot v \in g \cdot Ker(f)$, tem-se $f(g \cdot v) = g \cdot f(v) = 0$, portanto, $g \cdot v \in Ker(f)$, para qualquer $g \in G$. Da mesma forma, se tomarmos $g \cdot w \in g \cdot Im(f)$, então existe $v \in V$ tal que $f(v) = w$. Assim, $g \cdot w = g \cdot f(v) = f(g \cdot v)$. Isso conclui que $g \cdot w \in Im(f)$.
Pela irredutibilidade de (G, V) e (G, W) as únicas possibilidades para $Ker(f)$ e $Im(f)$ são $\{0\}$ e V, ou $\{0\}$ e W, respectivamente. Assim, se $Ker(f) = \{0\}$ e $Im(f) = W$, temos que f é injetora e sobrejetora, portanto invertível. Por outro lado, se $Ker(f) = V$ e $Im(f) = \{0\}$ então teríamos que, para todo $v \in V$, ocorreria $f(v) = 0$, ou seja, $f \equiv 0$. ■

Lema 2.15. *(Lema de Schur - 2ª versão) Se V é uma representação complexa irredutível e $f \in Hom(V, V)$ uma aplicação G-equivariante, então $f = cId$, para algum c em $\mathbb{C}$.*

Demonstração. Como $\mathbb{C}$ é um corpo algebricamente fechado, f possui um valor próprio, digamos $c \in \mathbb{C}$. Então a aplicação $f - cId$ é tal que para todo v em V e g em G, $(f - cId)(g \cdot v) = f(g \cdot v) - c(g \cdot v) = g \cdot f(v) - cg(v) = g \cdot (f - cId)(v)$. Logo, $f - cId$ é G-equivariante. Como V é irredutível, pela primeira versão do Lema de Schur, $f - cId = 0$ ou $f - cId$ é invertível. Se $f - cId$ é invertível então $Ker(f - cId) = \{0\}$, ou seja, não existe um vetor não nulo u de forma que $(f - cId)(u) = 0$, ou ainda, f não possui vetor próprio, consequentemente não possui valor próprio, temos aí uma contradição, portanto, concluímos que $f - Id = 0$, ou ainda, $f = cId$, para algum $c \in \mathbb{C}$. ■

Corolário 2.16. *Se G é um grupo de Lie abeliano então qualquer representação complexa irredutível é unidimensional.*

Demonstração. Considere $\phi\colon G \longrightarrow Aut(V)$ uma representação complexa e irredutível qualquer. Como G é abeliano, podemos mostrar que a aplicação $\phi(g)\colon V \longrightarrow V$ é G-equivariante. De fato, dado $g_1 \in G$ temos: $\phi(g)(g_1 \cdot v) = g \cdot (g_1 \cdot v) = (g \cdot g_1) \cdot v = (g_1 \cdot g) \cdot v = g_1\phi(g)(v)$. Pela segunda versão do Lema de Schur, $\phi(g) = c(g)Id$ para algum escalar complexo $c(g)$. Como g é um elemento arbitrário de G, $Im(\phi) \subset \mathbb{C}^*Id$, portanto qualquer subespaço de V

é G-equivariante, de fato, dado $g \cdot v \in g \cdot V$, $g \cdot v = \phi(g)(v) = c(g)Id(v) = c(g)(v)$, logo $g \cdot v \in V$. Assim, qualquer subespaço de V ou é $\{0\}$ ou é V. E,

$$\begin{aligned} Im(\phi) &= \{\phi(g)(v) : \ g \in G \ e \ v \in V\} \\ &= \{c(g)Id(v) : \ g \in G, \ v \in V \ e \ c(g) \in \mathbb{C}^*\} \\ &= \{c(g)v : \ g \in G, \ v \in V \ e \ c(g) \in \mathbb{C}^*\} \\ &= [v]. \end{aligned}$$

Como $Im(\phi)$ é um subespaço G-invariante e (G, V) é irredutível, segue que $Im(\phi) = V$, ou seja, $V = [v]$. Portanto, $dim_{\mathbb{C}} V = 1$. ■

Teorema 2.17. *Qualquer representação de dimensão finita de um grupo compacto é uma soma direta de representações irredutíveis.*

Demonstração. Veja em [1], Teo. 2.6. ■

A Representação Adjunta

Um automorfismo de grupos de Lie é uma aplicação $\phi\colon G \longrightarrow G$ tal que ϕ é um difeomorfismo e um isomorfismo de grupos. Então a aplicação $C_x\colon G \longrightarrow G$ que associa cada g de G em xgx^{-1} com $x \in G$ fixo, é um homomorfismo, e ainda $C_x = R_{x^{-1}} \circ L_x$ é um difeomorfismo, e portanto C_x é chamado automorfismo interno de G.

Definição 2.19. A representação adjunta de um grupo de Lie G é um homomorfismo $Ad\colon G \longrightarrow Aut(\mathfrak{g})$, definida por $Ad(g) = (dC_g)_e$.

Pelo fato de $C_{xy} = C_x \circ C_y$, é fácil ver que $Ad(xy) = Ad(x) \circ Ad(y)$.

Tomando a derivada da representação adjunta de G obtemos a representação adjunta da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ associada.

Definição 2.20. A representação adjunta da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ associada ao grupo de Lie G é o homomorfismo $ad\colon \mathfrak{g} \longrightarrow End(\mathfrak{g})$ definida por $ad(X) = (d\ Ad)_e(X)$, onde $End(\mathfrak{g})$ é o espaço dos endomorfismos de $\mathfrak{g}$.

O seguinte resultado é um teorema importante que nos permite determinar a representação adjunta de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de um grupo de Lie G.

Teorema 2.18. *A representação adjunta de $\mathfrak{g}$ satisfaz $ad(X)(Y) = [X, Y]$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.*

Demonstração. Por definição $Ad(g)(Y) = (dC_g)_e(Y) = (d(R_{g^{-1}} \circ L_g))_e(Y) = (dR_{g^{-1}})_g(dL_g)_e(Y_e) = (dR_{g^{-1}})_g(Y_g)$, para todo $g \in G$ e $Y \in \mathfrak{g}$. Considere $\alpha_t = \exp(tX)$ o fluxo de $X \in \mathfrak{g}$. Como X é invariante por translação à esquerda, $L_a \circ \alpha_t = \alpha_t \circ L_a$, para todo $a \in G$ e assim obtemos

$$\alpha_t(a) = \alpha_t(L_a(e)) = L_a(\alpha_t(e)) = a\alpha_t(e) = R_{\alpha_t(e)}(a)$$

por conseguinte $d\alpha_t = dR_{\alpha_t(e)}$. Pela proposição 1.3 calculemos

$$\begin{aligned}
[X, Y] &= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(Y - d\alpha_t(Y)) \\
&= -\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(dR_{\alpha_t(e)}(Y) - Y) \\
&= -\lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(Ad(\alpha_t^{-1}(e))(Y) - Y) \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(Ad(\alpha_t(e))(Y) - Y) \\
&= (d\ Ad)_e(X)(Y) \\
&= ad(X)(Y).
\end{aligned}$$

■

Este teorema indica que a operação colchete em $\mathfrak{g}$ mede o quanto G deixa de ser comutativo. Com efeito, se G é abeliano então $C_g = Id$ e consequentemente $Ad(g) = Id$ para todo $g \in G$.

Se a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ associada a um grupo de Lie G é abeliana, segue do teorema anterior, que $ad(X)(Y) = 0$ para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$.

A próxima proposição relaciona a representação adjunta de um grupo de Lie G com a representação adjunta da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ associada ao grupo de Lie G.

Proposição 2.5. *O diagrama abaixo é comutativo:*

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{g} & \xrightarrow{ad} & End(\mathfrak{g}) \\
{\scriptstyle exp}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle exp} \\
G & \xrightarrow{Ad} & Aut(\mathfrak{g}),
\end{array}$$

isto é, $Ad \circ exp = exp \circ ad$.

Demonstração. Veja em [4], Prop. 3.10. ■

Para o caso de um grupo de matrizes, a representação adjunta tem uma simples expressão, como veremos na proposição abaixo:

Proposição 2.6. *Se G é um grupo de matrizes então $Ad(g)X = gXg^{-1}$ para todo $g \in G$ e $X \in \mathfrak{g}$, com o produto sendo a multiplicação de matrizes.*

Demonstração. Seja $t \mapsto \exp(tX)$ o subgrupo a 1-parâmetro de X. Neste caso a exponencial coincide com a exponencial de matrizes, logo

$$\begin{aligned} Ad(g)X &= (dC_g)_e(X) \\ &= \frac{d}{dt}C_g(\exp(tX))\Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}g(\exp(tX))g^{-1}\Big|_{t=0} \\ &= g\frac{d}{dt}(\exp(tX))\Big|_{t=0}g^{-1} \\ &= gXg^{-1}. \end{aligned}$$

■

Observação 2.19. Seja $Z(G) = \{g \in G \ : \ gh = hg, \ \forall\ h \in G\}$ e $Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \ : [X,Y] = 0, \ \forall\ Y \in \mathfrak{g}\}$ são denotados centros de G e $\mathfrak{g}$ respectivamente.

2.4.1 Forma de Killing

Sabemos que para uma representação (G, V) de um grupo de Lie compacto G, existe um produto interno G-invariante em V. Em particular, isso acontece para a representação adjunta de $(G, \mathfrak{g})$, onde $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie associada ao grupo de Lie G. Vamos introduzir um produto interno explícito em $\mathfrak{g}$.

Definição 2.21. A *forma de Killing* de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é a aplicação $B\colon \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ dada por $B(X,Y) = \mathrm{tr}(ad(X) \circ ad(Y))$.

A seguinte proposição nos apresenta algumas propriedades da forma de Killing B.

Proposição 2.7. *A forma de Killing tem as seguintes propriedades:*

(a) Ela é uma forma bilinear simétrica em $\mathfrak{g}$*;*

(b) Se $\mathfrak{g}$ *é a álgebra de Lie de* G*, então* B *é Ad-invariante, isto é,* $B(X,Y) = B(Ad(g)(X), Ad(g)(Y))$ *para todo* $g \in G$ *e* $X, Y \in \mathfrak{g}$*;*

(c) Cada $ad(Z)$ *é antissimétrica com relação a* B*, isto é,* $B(ad(Z)(X), Y) = -B(X, ad(Z)(Y))$ *ou* $B([Z,X],Y) = -B(X,[Z,Y])$*.*

Demonstração. (a) Dados $\alpha \in \mathbb{R}$, $X_1, X_2, Y \in \mathfrak{g}$, então

$$\begin{aligned} B(\alpha X_1 + X_2, Y) &= \mathrm{tr}(ad(\alpha X_1 + X_2) \circ ad(Y)) \\ &= \mathrm{tr}((\alpha ad(X_1) + ad(X_2)) \circ ad(Y)) \\ &= \mathrm{tr}(\alpha ad(X_1)(ad(Y)) + ad(X_2)(ad(Y)) \\ &= \mathrm{tr}(\alpha ad(X_1) \circ ad(Y)) + \mathrm{tr}(ad(X_2) \circ ad(Y)) \\ &= \alpha \mathrm{tr}(ad(X_1) \circ ad(Y)) + \mathrm{tr}(ad(X_2) \circ ad(Y)) \\ &= \alpha B(X_1, Y) + B(X_2, Y). \end{aligned}$$

(b) Se $\sigma \colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ é um automorfismo de $\mathfrak{g}$, isto é, um isomorfismo linear com $\sigma([X,Y]) = [\sigma(X), \sigma(Y)]$, então, $\sigma(ad(X)(Y)) = ad(\sigma(X))(\sigma(Y))$. Como Y é arbitrário, segue que

$$\sigma \circ ad(X) = ad(\sigma(X)) \circ \sigma,$$

ou ainda,

$$\sigma \circ ad(X) \circ \sigma^{-1} = ad(\sigma(X)).$$

Tome $\sigma = Ad(g)$ com $g \in G$, e temos:

$$\begin{aligned} B(Ad(g)(X), Ad(g)(Y)) &= \mathrm{tr}\left(ad(Ad(g)(X)) \circ ad(Ad(g)(Y))\right) \\ &= \mathrm{tr}\left(Ad(g) \circ ad(X) \circ Ad^{-1}(g) \circ Ad(g) \circ ad(Y) \circ Ad^{-1}(g)\right) \\ &= \mathrm{tr}\left(Ad(g) \circ ad(X) circad(Y) \circ Ad^{-1}(g)\right) \\ &= \mathrm{tr}\left(ad(X) \circ ad(Y)\right) \\ &= B(X,Y). \end{aligned}$$

A penúltima igualdade segue do fato que as matrizes de $Ad(g) \circ (ad(X) \circ ad(Y)) \circ Ad^{-1}(g)$ e $ad(X) \circ ad(Y)$ são semelhantes portanto tem o mesmo traço.

(c) Vejamos agora que cada $ad(Z)$ é antissimétrica com relação a B, isto é,

$$B(ad(Z)(X), Y) = -B(X, ad(Z)(Y)).$$

Pela identidade de Jacobi, obtemos:

$$[Z,[X,[Y,W]]] + [X,[[Y,W],Z]] + [[Y,W],[Z,X]] = 0,$$

ou,

$$[Z,[X,[Y,W]]] = [X,[Z,[Y,W]]] + [[Z,X],[Y,W]].$$

Assim,

$$\begin{aligned}
ad(Z)\left(ad(X)\left(ad(Y)(W)\right)\right) &= ad\left(ad(Z)(X)\right)\left(ad(Y)(W)\right) + ad(X)\left(ad(Y)\left(ad(Z)(W)\right)\right)\\
&\quad + ad(X)\left(ad\left(ad(Z)(Y)\right)(W)\right),
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
ad(Z)\circ ad(X)\circ ad(Y) &= ad\left(ad(Z)(X)\right)\circ ad(Y) + ad(X)\circ ad\left(ad(Z)(Y)\right)\\
&\quad + ad(X)\circ ad(Y)\circ ad(Z),
\end{aligned}$$

Daí temos,

$$ad(ad(Z)(X))\circ ad(Y) = -ad(X)\circ ad(ad(Z)(Y)).$$

Determinando o traço em ambos os lados da identidade acima, temos

$$\operatorname{tr}\big(ad(ad(Z)(X))\circ ad(Y)\big) = -\operatorname{tr}\big(ad(X)\circ ad(ad(Z)(Y))\big),$$

e portanto,

$$B\big(ad(Z)(X), Y\big) = -B\big(X, ad(Z)(Y)\big).$$

■

Exemplo 2.33. Vamos calcular a forma de Killing do grupo de Lie $SU(2)$. Sua álgebra de Lie é dada por

$$\mathfrak{su}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} ai & b+ci \\ -b+ci & -ai \end{pmatrix};\ a,b,c\in\mathbb{R} \right\}.$$

Dados $X, Y \in \mathfrak{su}(2)$ então:

$$X = \begin{pmatrix} ui & y+zi \\ -y+zi & -ui \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad Y = \begin{pmatrix} vi & t+wi \\ -t+wi & -vi \end{pmatrix},$$

onde $u, y, z, v, t, w \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(XY) &= -uv + (y+zi)(-t+wi) + (-y+zi)(t+wi) - uv\\
&= -2uv - 2yt - 2zw.
\end{aligned}$$

Considere a seguinte base da álgebra de Lie $\mathfrak{su}(2)$:

$$E_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Então,

$$ad(E_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad ad(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad ad(E_3) = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Escrevendo $X = uE_1 + yE_2 + zE_3$ e $Y = vE_1 + tE_2 + wE_3$ temos:

$$\begin{aligned} ad(X) &= u(ad(E_1)) + y(ad(E_2)) + z(ad(E_3)) \\ &= u\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -2z & 2y \\ 2z & 0 & -2u \\ -2y & 2u & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da mesma forma temos:

$$ad(Y) = \begin{pmatrix} 0 & -2w & 2t \\ 2w & 0 & -2v \\ -2t & 2v & 0 \end{pmatrix}.$$

Sabemos que a forma de Killing é determinada por $B(X,Y) = \mathrm{tr}(ad(X)ad(Y))$, então:

$$\begin{aligned} B(X,Y) &= \mathrm{tr}(ad(X)ad(Y)) \\ &= -4zw - 4yt - 4zw - 4uv - 4yt - 4uv \\ &= -8uv - 8yt - 8zw \\ &= 4(-2uv - 2yt - 2zw) \\ &= 4\mathrm{tr}(XY). \end{aligned}$$

Capítulo 3

Curvaturas de métricas invariantes à esquerda em grupos de Lie

3.1 Métricas invariantes à esquerda em grupos de Lie

Neste capítulo, vamos ver que a geometria de um grupo de Lie G, munido de uma métrica invariante à esquerda, está diretamente relacionada à sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Na verdade, cada métrica Riemanniana invariante à esquerda em G pode ser determinada por um produto interno no espaço tangente T_eG isomorfo à álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.
Os resultados deste capítulo foram retirados do artigo de Milnor [7].

Definição 3.1. Uma métrica Riemanniana em um grupo de Lie G é invariante à esquerda se $\langle u, v\rangle_p = \langle (dL_a)_p u, (dL_a)_p v\rangle_{L_a(p)}$, para todo $a, p \in G$ e $u, v \in T_pG$. Ou seja, se a translação à esquerda $L_a \colon G \longrightarrow G$ for uma isometria, para todo $a \in G$.

Similarmente, uma métrica Riemanniana é invariante à direita se cada translação à direita $R_a \colon G \longrightarrow G$ é uma isometria. Uma vez que o espaço tangente em cada ponto pode ser transladado para o espaço tangente no elemento identidade do grupo, a relação acima pode ser escrita simplesmente por $\langle u, v\rangle = \langle dL_a(u), dL_a(v)\rangle$.

Proposição 3.1. *Existe uma correspondência biunívoca entre o conjunto das métricas invariantes à esquerda em um grupo de Lie G e o conjunto de produtos escalares na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G.*

Demonstração. Sejam $\langle \cdot, \cdot\rangle$ uma métrica invariante à esquerda em G e $X, Y \in \mathfrak{g}$. A função $\langle X, Y\rangle \colon G \longrightarrow \mathbb{R}$ é constante em G. De fato, como X e Y são campos de vetores invariantes à esquerda, temos que para todo $a \in G$,

$$\langle X, Y\rangle(a) = \langle X, Y\rangle_a = \langle X_a, Y_a\rangle = \langle (dL_a)_e(X_e), (dL_a)_e(Y_e)\rangle = \langle X_e, Y_e\rangle = \langle X, Y\rangle_e.$$

Dessa forma, a métrica $\langle \cdot, \cdot\rangle$ define um produto escalar em $\mathfrak{g}$. Reciprocamente, dado um produto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle_e$ em $\mathfrak{g}$, podemos definir uma métrica invariante à esquerda em G por:

$$\langle U,V\rangle_a = \langle (dL_{a^{-1}})_a(U), (dL_{a^{-1}})_a(V)\rangle_e,$$

com $a \in G$, $U, V \in T_aG$.

$\blacksquare$

Definição 3.2. Uma métrica em G que é invariante à esquerda e invariante à direita por translações é chamada métrica bi-invariante em G.

Proposição 3.2. *Existe uma correspondência um-a-um entre as métricas bi-invariantes em G e os produtos escalares Ad-invariantes em $\mathfrak{g}$, isto é, $\langle Ad(g)X, Ad(g)Y\rangle = \langle X,Y\rangle$ para todo $g \in G$, $X, Y \in \mathfrak{g}$. E ainda, a última condição é equivalente à seguinte relação*

$$\langle [X,Y], Z\rangle = \langle X, [Y,Z]\rangle.$$

Demonstração. Da demonstração do Teorema 2.18, obtemos que $Ad(g)X = (dR_{a^{-1}})_aX$ para todo $a \in G$, $X \in \mathfrak{g}$. Usando uma métrica invariante à direita, temos:

$$\langle Ad(g)X, Ad(g)Y\rangle = \langle (dR_{a^{-1}})_aX, (dR_{a^{-1}})_aY\rangle = \langle X,Y\rangle.$$

Para mostrar a próxima relação, considere $\exp(tY)$ o fluxo de Y, então:

$$\begin{aligned}
\langle X,[Y,Z]\rangle &= \langle X, ad(Y)(Z)\rangle = \left\langle X, \frac{d}{dt}Ad(\exp(tY))Z\bigg|_{t=0}\right\rangle \\
&= \frac{d}{dt}\langle X, Ad(\exp(tY))Z\rangle\bigg|_{t=0} = \frac{d}{dt}\langle Ad(\exp(-tY))X, Z\rangle\bigg|_{t=0} \\
&= \left\langle \frac{d}{dt}Ad(\exp(-tY))X\bigg|_{t=0}, Z\right\rangle = -\langle ad(Y)(X), Z\rangle \\
&= -\langle [Y,X], Z\rangle = \langle [X,Y], Z\rangle.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Observação 3.1. Dizer que o produto escalar $\langle\cdot,\cdot\rangle$ em $\mathfrak{g}$ é Ad-invariante é equivalente a dizer que a aplicação linear $Ad(g)$ é ortogonal em relação à $\langle\cdot,\cdot\rangle$, ou ainda, a aplicação $Ad(g)$ é uma isometria.

Exemplo 3.1. Considere o grupo de Lie $SU(n)$. Defina $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon \mathfrak{su}(n)\times\mathfrak{su}(n) \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\langle X,Y\rangle = -\mathrm{tr}(ad(X)\circ ad(Y))$. Como vimos na Proposição 2.7 e proposição 3.2 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é uma forma bilinear simétrica, não degenerada e bi-invariante.

Observação 3.2. É sabido que se G é um grupo de Lie compacto e semissimples (por exemplo $SO(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$) então a negativa da forma de Killing $-B(\cdot,\cdot)$ é uma métrica Riemanniana bi-invariante (veja [1], Prop. 3.12).

Seja G um grupo de Lie n-dimensional e $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie associada. Escolhendo uma base $\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ do espaço vetorial $\mathfrak{g}$ pode-se verificar que há uma e somente uma métrica Riemanniana em G de modo que estes campos de vetores $\{E_1, \cdots, E_n\}$ sejam ortogonais em todos os pontos. Mais precisamente, dada qualquer matriz simétrica positiva definida $(\beta_{ij})_{n\times n}$ de números reais, pela demonstração da proposição 3.2 existe uma métrica Riemanniana tal que o produto escalar $\langle E_i, E_j\rangle$ seja uma função constante. Ainda mais, esta construção fornece uma métrica Riemanniana em G que é invariante à esquerda. Assim, cada grupo de Lie n-dimensional possui uma família $\frac{n}{2}(n+1)$-dimensional de métricas invariantes à esquerda.

Proposição 3.3. *Um grupo de Lie G munido de uma métrica invariante à esquerda é uma variedade Riemanniana completa.*

Demonstração. Note que fixando uma métrica invariante à esquerda em G, o grupo de Lie G se torna uma variedade Riemanniana homogênea. Isto é, dados a, b em G a isometria $L_{ba^{-1}}$ leva a em b.

Agora, seja $\epsilon > 0$ tal que a bola fechada $B[e,\epsilon]$ de centro na identidade e raio ϵ seja compacta. Então como $B[a,\epsilon] = L_a(B[e,\epsilon])$ segue que qualquer bola fechada $B[a,\epsilon]$, de centro em a e raio ϵ, é compacta.

Assim dada uma sequência de Cauchy $(x_n) \subset G$, existe n_0 tal que $x_n \in B[a,\epsilon]$ para todo $n \geq n_0$ e para algum $a \in G$. Como a bola fechada $B[a,\epsilon]$ é compacta, segue-se que ela é completa, conforme [6], Cor. 4.4. Portanto, G é uma variedade Riemanniana completa. ∎

3.2 Curvatura seccional de grupos de Lie

Nesta seção vamos descrever a curvatura seccional de grupos de Lie munidos de métricas invariante à esquerda, seguindo [7]. Vamos também ver que a curvatura seccional está intimamente relacionada às características algébricas da álgebra de Lie associada.

Seja $(G, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um grupo de Lie com uma métrica invariante à esquerda e com uma conexão Riemanniana ∇. Lembre-se, dados X, Y, Z em $\mathfrak{g}$, a conexão ∇ satisfaz:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y],$$

e que a identidade

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle = 0,$$

é satisfeita, pois vimos na demonstração da Proposição 3.1 que, dados X, Y campos de vetores em $\mathfrak{g}$ tal que a métrica em G seja invariante à esquerda, então a função que associa cada ponto g de G em $\langle X, Y\rangle$ de $\mathbb{R}$ é constante. Assim, a fórmula de Koszul (Corolário 1.4), pode ser escrita da seguinte forma:

$$\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}(\langle [X,Y], Z\rangle - \langle [Y,Z], X\rangle + \langle [Z,X], Y\rangle). \tag{3.1}$$

Observação 3.3. Se X e Y são campos de vetores invariantes à esquerda em G, então $\nabla_X Y$ também é um campo de vetores invariante à esquerda em G.
De fato, seja Z um campo de vetores invariante à esquerda e sejam $a, g \in G$. Temos:

$$\begin{aligned}
\langle (\nabla_X Y)_{ag} - (dL_a)_g(\nabla_X Y)_g, Z_{ag}\rangle &= \langle (\nabla_X Y)_{ag}, Z_{ag}\rangle - \langle (dL_a)_g(\nabla_X Y)_g, Z_{ag}\rangle \\
&= \langle (\nabla_X Y)_{ag}, Z_{ag}\rangle - \langle (\nabla_X Y)_g, (dL_{a^{-1}})_{ag}(Z_{ag})\rangle \\
&= \langle (\nabla_X Y)_{ag}, Z_{ag}\rangle - \langle (\nabla_X Y)_g, Z_g\rangle \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue do fato da métrica ser invariante e de $(dL_a)_g^{-1} = (dL_{a^{-1}})_{ag}$; a terceira igualdade vem do fato de Z ser invariante à esquerda, para a última igualdade basta aplicar a fórmula de Koszul (3.1). Portanto,

$$(\nabla_X Y)_{ag} = (dL_a)_g(\nabla_X Y)_g,$$

em particular,

$$(\nabla_X Y)_a = (dL_a)_e(\nabla_X Y)_e.$$

Agora, seja $\{E_1, \cdots, E_n\}$ uma base ortonormal (com relação a $\langle \cdot, \cdot \rangle$) da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G. Então $[E_i, E_j] = \sum_k \alpha_{ijk} E_k$, onde $\alpha_{ijk} = \langle [E_i, E_j], E_k\rangle$. As constantes α_{ijk} são chamadas *constantes de estrutura* da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. É fácil ver que qualquer colchete $[U, V]$, com $U, V \in \mathfrak{g}$, pode ser determinado conhecendo as constantes α_{ijk}. Além disso, como $[E_i, E_j] = -[E_j, E_i]$, segue-se que $\alpha_{ijk} = -\alpha_{jik}$.
A conexão Riemanniana na base $\{E_1, \cdots, E_n\}$ é dada por:

$$\langle \nabla_{E_i} E_j, E_k\rangle = \frac{1}{2}(\langle [E_i, E_j], E_k\rangle - \langle [E_j, E_k], E_i\rangle + \langle [E_k, E_i], E_j\rangle).$$

Em termos das constantes de estrutura, temos:

$$\langle \nabla_{E_i} E_j, E_k\rangle = \frac{1}{2}(\alpha_{ijk} - \alpha_{jki} + \alpha_{kij}), \tag{3.2}$$

donde

$$\nabla_{E_i} E_j = \frac{1}{2}\sum_k (\alpha_{ijk} - \alpha_{jki} + \alpha_{kij}) E_k. \tag{3.3}$$

Proposição 3.4. *Com as constantes de estrutura α_{ijk} a curvatura seccional $k(E_1, E_2)$ é* *dada pela fórmula*

$$\begin{aligned} k(E_1,E_2) &= \sum_k \left[\frac{1}{2}\alpha_{12k}(-\alpha_{12k}+\alpha_{2k1}+\alpha_{k12}) - \frac{1}{4}(\alpha_{12k}-\alpha_{2k1}+\alpha_{k12})(\alpha_{12k}\right. \\ &\quad \left. + \alpha_{2k1}-\alpha_{k12}) - \alpha_{k11}\alpha_{k22}\right]. \end{aligned}$$

Demonstração. Seja $\{E_1, E_2\}$ uma base ortonormal de campo de vetores invariantes à esquerda em G então

$$k(E_1,E_2) = \langle R(E_1,E_2)E_1, E_2\rangle = \langle \nabla_{[E_1,E_2]}E_1 - \nabla_{E_1}\nabla_{E_2}E_1 + \nabla_{E_2}\nabla_{E_1}E_1, E_2\rangle,$$

$$k(E_1,E_2) = \langle \nabla_{[E_1,E_2]}E_1, E_2\rangle - \langle \nabla_{E_1}\nabla_{E_2}E_1, E_2\rangle + \langle \nabla_{E_2}\nabla_{E_1}E_1, E_2\rangle. \tag{3.4}$$

Para determinar a curvatura seccional em termos das constantes de estrutura usaremos as fórmulas (3.2) e (3.3), em cada caso a seguir:

(i) $\nabla_{[E_1,E_2]}E_1 = \nabla_{\sum\limits_k \alpha_{12k}E_k}E_1 = \sum\limits_k \alpha_{12k}\nabla_{E_k}E_1$;

(ii) De (i) obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{[E_1,E_2]}E_1, E_2\rangle &= \left\langle \sum_k \alpha_{12k}\nabla_{E_k}E_1, E_2\right\rangle \\ &= \sum_k \alpha_{12k}\langle \nabla_{E_k}E_1, E_2\rangle \\ &= \frac{1}{2}\sum_k \alpha_{12k}(\alpha_{k12}-\alpha_{12k}+\alpha_{2k1}), \end{aligned}$$

(iii) $\nabla_{E_2}E_1 = \dfrac{1}{2}\sum\limits_k(\alpha_{21k}-\alpha_{1k2}+\alpha_{k21})E_k$;

(iv) De (iii) obtemos:

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{E_1}\nabla_{E_2}E_1, E_2\rangle &= \left\langle \nabla_{E_1}\left(\frac{1}{2}\sum_k(\alpha_{21k}-\alpha_{1k2}+\alpha_{k21})E_k\right), E_2\right\rangle \\ &= \frac{1}{2}\sum_k(\alpha_{21k}-\alpha_{1k2}+\alpha_{k21})\langle \nabla_{E_1}E_k, E_2\rangle \\ &= \frac{1}{4}\sum_k(\alpha_{21k}-\alpha_{1k2}+\alpha_{k21})(\alpha_{1k2}-\alpha_{k21}+\alpha_{21k}) \\ &= \frac{1}{4}\sum_k(\alpha_{12k}-\alpha_{k12}+\alpha_{2k1})(\alpha_{k12}-\alpha_{2k1}+\alpha_{12k}), \end{aligned}$$

(v) $\nabla_{E_1} E_1 = \dfrac{1}{2}\sum_k (\alpha_{11k} - \alpha_{1k1} + \alpha_{k11})E_k = \sum_k \alpha_{k11} E_k,$

(vi) De (v) obtemos:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_2}\nabla_{E_1}E_1, E_2\rangle &= \left\langle \nabla_{E_2}\left(\sum_k \alpha_{k11}E_k\right), E_2\right\rangle \\
&= \sum_k \alpha_{k11}\langle \nabla_{E_2}E_k, E_2\rangle = \sum_k \alpha_{k11}(-\alpha_{k22}) \\
&= -\sum_k \alpha_{k11}\alpha_{k22},
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo (ii), (iv) e (vi) em (3.4), concluímos que:

$$\begin{aligned}
k(E_1, E_2) &= \sum_k \left[\frac{1}{2}\alpha_{12k}(-\alpha_{12k} + \alpha_{2k1} + \alpha_{k12}) - \frac{1}{4}(\alpha_{12k} - \alpha_{2k1} + \alpha_{k12})(\alpha_{12k}\right. \\
&\qquad \left. + \,\alpha_{2k1} - \alpha_{k12}) - \alpha_{k11}\alpha_{k22}\right].
\end{aligned}$$

■

Vimos que a curvatura seccional pode ser calculada completamente conhecendo as constantes de estruturas da álgebra de Lie juntamente com sua métrica. Além disso, a curvatura depende continuamente das constantes de estrutura α_{ijk} e se anula quando elas se anulam.

A seguir, veremos uma importante aplicação desta proposição. Dado um grupo de Lie G com uma métrica invariante à esquerda e U um vetor da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ associada:

Lema 3.4. *Se $ad(U)$ é uma transformação linear antissimétrica, então $k(U,V) \geq 0$ para todo $V \in \mathfrak{g}$, onde vale a igualdade se, e só se, U é ortogonal à imagem $[V,\mathfrak{g}]$.*

Demonstração. Por hipótese, temos que $ad(U)$ é uma transformação linear antissimétrica, ou seja: $\langle ad(U)(V), W\rangle = \langle V, ad(U)^*(W)\rangle = -\langle V, ad(U)(W)\rangle$.

Como $ad(U)(V) = [U,V]$, segue que:

$$\langle [U,V], W\rangle = -\langle V, [U,W]\rangle = -\langle [U,W], V\rangle$$

Tomando a base ortonormal $\{E_1, \cdots, E_n\}$ de $\mathfrak{g}$, a identidade acima pode ser escrita em termos das constantes de estrutura α_{ijk}:

$$\langle [E_i, E_j], E_k\rangle = -\langle [E_i, E_k], E_j\rangle,$$

ou ainda, $\alpha_{ijk} = -\alpha_{ikj}$. Considerando, sem perda de generalidade, que U e V são ortogonais, ou seja $U = E_1$ e $V = E_2$, pela proposição 3.4, temos:

$$
\begin{aligned}
k(U,V) &= \sum_k \left[\frac{1}{2}\alpha_{12k}(-\alpha_{12k}+\alpha_{2k1}+\alpha_{k12}) - \frac{1}{4}(\alpha_{12k}-\alpha_{2k1}+\alpha_{k12})(\alpha_{12k}\right. \\
&\qquad \left. +\alpha_{2k1}-\alpha_{k12}) - \alpha_{k11}\alpha_{k22}\right] \\
&= \sum_k \left[\frac{1}{2}(\alpha_{2k1})(-\alpha_{12k}+\alpha_{12k}+\alpha_{2k1}) - \frac{1}{4}(\alpha_{2k1}+\alpha_{12k}-\alpha_{12k})(\alpha_{2k1}\right. \\
&\qquad \left. +\alpha_{k12}-\alpha_{k12}) - \alpha_{k11}\alpha_{22k}\right] \\
&= \sum_k \left[\frac{1}{2}\alpha_{2k1}\alpha_{2k1} - \frac{1}{4}\alpha_{2k1}\alpha_{2k1}\right] \\
&= \frac{1}{4}\sum_k (\alpha_{2k1})^2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

A soma é zero, se, e somente se, $\alpha_{2k1} = 0$, ou seja, $\langle [V, E_k], U\rangle = \langle [E_2, E_k], E_1\rangle = \alpha_{2k1} = 0$. Isto é, $k(U,V) = 0$ se, e somente se, U for ortogonal a $[V, E_k]$, para qualquer $E_k \in \mathfrak{g}$. Logo, $k(U,V) = 0$ se, e somente se, U é ortogonal à imagem $[V, \mathfrak{g}]$.

■

Corolário 3.5. *Se U pertence ao centro da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, então para qualquer métrica invariante à esquerda a desigualdade $k(U,V) \geq 0$ é satisfeita, para todo $V \in \mathfrak{g}$.*

Demonstração. Se $U \in Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \ : \ [X,Y] = 0, \ \forall \ Y \in \mathfrak{g}\}$, então temos que $ad(U)(V) = [U,V] = 0$ para todo $V \in \mathfrak{g}$, ou seja, $ad(U) \equiv 0$. Como a transformação nula é certamente antissimétrica, pelo Lema anterior, concluímos que para qualquer métrica invariante à esquerda $k(U,V) \geq 0$. ■

Exemplo 3.2. Se G é um grupo de Lie abeliano, então G não admite métrica invariante à esquerda com curvatura seccional negativa.

De fato, seja $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie abeliana de G então dado $U \in \mathfrak{g}$, temos que $ad(U) \equiv 0$. Portanto é antissimétrica, logo pelo Lema 3.4 segue que $k(U,V) \geq 0$, para todo $V \in \mathfrak{g}$. Em particular, qualquer álgebra de Lie de dimensão 1 não possui métricas invariantes à esquerda com curvatura seccional estritamente negativa.

Exemplo 3.3. A álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} ; a_i \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, n \right\}$ das matrizes diagonais é uma álgebra de Lie abeliana e pelo exemplo anterior não possui métricas invariantes à esquerda com curvatura seccional estritamente negativa.

Observação 3.6. Pela aplicação exponencial, temos que:
Dado $A \in \mathfrak{g}$ então o grupo de Lie G tal que $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie das matrizes diagonais

associada é dado por

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} e^{a_1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{a_n} \end{pmatrix} ; a_i \in \mathbb{K}, i = 1, \dots, n \right\}.$$

Considerando o corpo dos complexos onde $a_j = iB_j$ teremos que

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} e^{iB_1} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{ib_n} \end{pmatrix} ; B_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, n \right\}.$$

que é isomorfo a $S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1 = T^n$. Dessa forma, concluímos que o n-toro é um grupo de Lie que não possui métricas invariantes à esquerda com curvatura seccional estritamente negativa.

Proposição 3.5. *Uma métrica em um grupo de Lie G conexo é bi-invariante se, e somente se, $ad(X)$ é antissimétrica, para todo X em $\mathfrak{g}$.*

Demonstração. Se $g \in G$ é suficientemente próximo da identidade do grupo de Lie G, então podemos considerar $g = \exp(X)$ para X próximo do zero na álgebra de Lie associada.

Da Proposição 2.5, segue a identidade:

$$Ad(g) = Ad(\exp(X)) = e^{ad(X)}.$$

Temos que $Ad(g)$ é ortogonal se e somente se

$$Ad(g)^{-1} = Ad(g)^t.$$

Assim, temos:

$$\left(e^{ad(X)}\right)^{-1} = \left(e^{ad(X)}\right)^t,$$

ou seja,

$$e^{-ad(X)} = e^{ad(X)^t}.$$

Esta condição é satisfeita se, e somente se, $-ad(X) = ad(X)^t$. Portanto, $ad(X)$ é antissimétrica. Uma vez que um grupo de Lie conexo é gerado por qualquer vizinhança da identidade, e que o produto de transformações ortogonais é ortogonal, segue o resultado. ∎

O próximo resultado classifica os grupos de Lie conexos que admitem tal métrica. Sua demonstração não será feita aqui por envolver conceitos que estão além dos objetivos deste trabalho, mas pode ser encontrada em [7], Lema 7.5.

Lema 3.7. *Um grupo de Lie conexo admite uma métrica bi-invariante se, e somente se, é isomorfo ao produto cartesiano de um grupo compacto e um grupo comutativo.*

Corolário 3.8. *Todo grupo Lie compacto admite uma métrica bi-invariante tal que toda curvatura seccional satisfaz $k \geq 0$.*

Demonstração. Seja G um grupo de Lie compacto com métrica bi-invariante. Logo, pela Proposição 3.5, a transformação linear $ad(U)$ é antissimétrica, para todo $U \in \mathfrak{g}$. Daí segue pelo Lema 3.4 que $k(U, V) \geq 0$, para todo $U, V \in \mathfrak{g}$. ■

O caso em que a curvatura seccional é estritamente positiva é bastante restrito, de acordo com o próximo teorema cuja demostração envolve conceitos não desenvolvidos neste trabalho.

Teorema 3.9. *(Teorema de Wallach) O grupo de Lie $SU(2)$ é o único grupo de Lie simplesmente conexo que admite uma métrica invariante à esquerda com curvatura seccional estritamente positiva.*

As variedades Riemannianas mais fáceis de entender são aquelas que são "flats"no sentido de que a curvatura seccional k é identicamente nula.

Pelo Teorema de Hadamard (veja [3], Teo. 3.1) uma variedade Riemanniana completa e simplesmente conexa M é flat se, e somente se, é difeomorfa a $\mathbb{R}^n$, $n = \dim M$.

Exemplo 3.4. Seja G um grupo de Lie cuja álgebra de Lie associada $\mathfrak{g}$ é comutativa. Pela Proposição 3.4 segue que $k \equiv 0$, ou seja, G é uma variedade flat.

O próximo exemplo foi retirado de Vinícius [11], e se trata de um grupo de Lie flat que não é comutativo.

Exemplo 3.5. Consideremos $\mathbb{R}^2 = \{(x, y, 1) \in \mathbb{R}^3\}$. O grupo $E(2)$ é dado por:

$$E(2) = \left\{ \begin{bmatrix} cos(t) & sen(t) & x \\ -sen(t) & cos(t) & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : \ t, x, y \in \mathbb{R} \right\},$$

com o produto usual de matrizes.

Se $\mathfrak{e}(2)$ é a álgebra de Lie de $E(2)$ então $\mathfrak{e}(2) \cong T_{Id}(E(2))$. Para encontrá-la, considere $v \in T_{Id}(E(2))$ e $\alpha \colon (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow E(2)$ tal que $\alpha(0) = Id$ e $\alpha^{'}(0) = v$. Dessa forma, temos que:

$$\alpha(s) = \begin{bmatrix} cos(t(s)) & sen(t(s)) & x(s) \\ -sen(t(s)) & cos(t(s)) & y(s) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde $t(0) = 0$, $x(0) = 0$ e $y(0) = 0$. Então:

$$\alpha'(s) = \begin{bmatrix} -t'(s)sen(t(s)) & t'(s)cos(t(s)) & x'(s) \\ -t'(s)cos(t(s)) & -t'(s)sen(t(s)) & y'(s) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Daí temos que:

$$v = \alpha'(0) = \begin{bmatrix} 0 & t'(0) & x'(0) \\ -t'(0) & 0 & y'(0) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Fazendo $t'(0) = a$, $x'(0) = x$ e $y'(0) = y$ podemos escrever a álgebra de Lie $\mathfrak{e}(2)$ do grupo $E(2)$ da seguinte forma:

$$\mathfrak{e}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & x \\ -a & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \ a, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Considere a seguinte base para $\mathfrak{e}(2)$:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, podemos calcular $[E_1, E_2] = 0$, $[E_2, E_3] = E_1$ e $[E_3, E_1] = E_2$. Logo, $\mathfrak{e}(2)$ não é uma álgebra de Lie comutativa.

Considere a métrica $\langle , \rangle : \mathfrak{e}(2) \times \mathfrak{e}(2) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\left\langle \begin{bmatrix} 0 & a & x \\ -a & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & b & u \\ -b & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\rangle = ab + xu + yv.$$

Pode-se ver que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma métrica em $\mathfrak{e}(2)$ invariante à esquerda.

Vamos obter as constantes de estrutura α_{ijk} da álgebra de Lie $\mathfrak{e}(2)$:

$$\begin{aligned}
\alpha_{123} &= \langle [E_1, E_2], E_3 \rangle = 0, \\
\alpha_{132} &= \langle [E_1, E_3], E_2 \rangle = -\langle E_2, E_2 \rangle = -1, \\
\alpha_{231} &= \langle [E_2, E_3], E_1 \rangle = \langle E_1, E_1 \rangle = 1, \\
\alpha_{321} &= \langle [E_3, E_2], E_1 \rangle = -\langle E_1, E_1 \rangle = -1, \\
\alpha_{213} &= \langle [E_2, E_1], E_3 \rangle = 0, \\
\alpha_{312} &= \langle [E_3, E_1], E_2 \rangle = \langle E_2, E_2 \rangle = 1.
\end{aligned}$$

Portanto, pela Proposição 3.4 e usando a antissimetria do colchete, obtemos:

$$k(E_1, E_2) = \frac{1}{2}(0)(1+1) - \frac{1}{4}(-1+1)(1-1) = 0.$$
$$k(E_1, E_3) = \frac{1}{2}(-1)(1-1) - \frac{1}{4}(-1+1)(-1-1) = 0.$$
$$k(E_2, E_3) = \frac{1}{2}(1)(-1+1) - \frac{1}{4}(1-1)(1+1) = 0.$$

Isso mostra que $E(2)$ é flat.

O próximo resultado classifica os grupos de Lie flat, sua demonstração pode ser encontrada em [7].

Teorema 3.10. *Um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda é flat se, e somente se, a álgebra de Lie associada decompõe-se em uma soma direta ortogonal $\mathfrak{b} \oplus \mathfrak{u}$ onde $\mathfrak{b}$ é uma subálgebra comutativa, $\mathfrak{u}$ é um ideal comutativo e a transformação linear $ad(B)$ é antissimétrica para todo $B \in \mathfrak{b}$.*

Exemplo 3.6. Vamos verificar o teorema acima para o grupo de Lie $E(2)$, pois como vimos no exemplo (3.5), $E(2)$ é um grupo com métrica invariante à esquerda flat.

Considere

$$\mathfrak{u} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & v \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : u, v \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{e} \quad \mathfrak{b} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ -b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{R} \right\}.$$

É fácil ver que $\mathfrak{u}$ é um ideal comutativo e $\mathfrak{b}$ é uma subálgebra comutativa de $\mathfrak{e}(2)$. Mais ainda $\mathfrak{b} \cap \mathfrak{u} = \emptyset$ e dado

$$\begin{pmatrix} 0 & a & x \\ -a & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{e}(2)$$

temos que

$$\begin{pmatrix} 0 & a & x \\ -a & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{b} \quad \textbf{e} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{u}.$$

Daí concluímos que $\mathfrak{e}(2) = \mathfrak{b} \oplus \mathfrak{u}$. Considere a base do exemplo anterior $\{E_1, E_2, E_3\}$ da álgebra de Lie $\mathfrak{e}(2)$ e $B \in \mathfrak{b}$ então a matriz

$$ad(B) = \begin{pmatrix} 0 & -b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é antissimétrica.

Observação 3.11. Conforme [7], os grupos de Lie que admitem métricas invariantes à esquerda com curvatura seccional estritamente negativa foram classificados por Heintze e aqueles grupos com $k \leq 0$ são classificados por Azencott e Wilson.

Curvatura seccional de grupos de Lie unimodulares

Lembre-se que cada elemento do grupo $g \in G$ determina um automorfismo interno $C_g \colon G \longrightarrow G$ do grupo G definido por $C_g(h) = ghg^{-1}$, $\forall h \in G$. O automorfismo induzido na álgebra de Lie é chamado $Ad(g)$, dado por:

$$\begin{aligned} Ad\colon \quad G &\longrightarrow Aut(\mathfrak{g}) \\ g &\longmapsto Ad(g) = (dC_g)_e. \end{aligned}$$

Definição 3.3. O grupo de Lie G é unimodular se, e somente se, a transformação linear $Ad(g)$ tem determinante ± 1 para todo $g \in G$. (Isto é equivalente a dizer que a medida de Haar invariante à esquerda de G é também invariante à direita. Neste trabalho não trataremos da medida de Haar.)

Lema 3.12. *Um grupo de Lie conexo G é unimodular se, e somente se a transformação linear $ad(X)$ tem traço zero para todo X na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ associada.*

Demonstração. Da Proposição 2.5, temos a identidade:

$$Ad(\exp(X)) = e^{ad(X)} \quad \text{para todo} \quad X \in \mathfrak{g}.$$

Agora, se G é unimodular temos que $|detAd(g)| = 1$ para todo $g \in G$. Assim temos que

$$1 = detAd(\exp(X)) = det\ e^{ad(X)} = e^{tr(adX)}.$$

Portanto, $\mathrm{tr}(ad(X)) = 0$. Reciprocamente, se $\mathrm{tr}(ad(X)) = 0$, temos que $detAd(g) = 1$, para todo $g \in Im(\exp)$. Usando o Teorema da Função Inversa, pode-se mostrar que existe uma vizinhança da identidade de G contida na imagem $Im(\exp)$ de exp. Da conexidade segue que G é gerado por qualquer vizinhança da identidade. Portanto, $|det(Ad(g))| = 1$ para todo $g \in G$, ou seja, G é unimodular. ∎

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie arbitrária. Usando a identidade de Jacobi temos

$$ad([X,Y]) = ad(X) \circ ad(Y) - ad(Y) \circ ad(X). \tag{3.5}$$

Vemos que $ad[X,Y]$ tem traço zero.

Uma aplicação $X \longmapsto \operatorname{tr}(ad(X))$ de uma álgebra de Lie comutativa $\mathfrak{g}$ no conjunto dos números reais é um homomorfismo de álgebras de Lie. Em particular, $\mathfrak{u} = \{X \in \mathfrak{g} : \operatorname{tr}(ad(X)) = 0\}$ é o núcleo do homomorfismo acima e é um ideal contendo o comutador $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$. Chamamos $\mathfrak{u}$ de núcleo unimodular de $\mathfrak{g}$. É fácil ver que $\mathfrak{u}$ é unimodular, de fato: Seja $U \in \mathfrak{u}$, então $\operatorname{tr}(ad(U)) = 0$, ou seja, $e^{\operatorname{tr}(ad(U))} = 1$. Assim, $detAd(\exp(U)) = e^{\operatorname{tr}(ad(U))} = 1$, logo, $|detAd(\exp(U))| = 1$.

Para um exemplo, basta tomar um grupo de Lie G cuja uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ associada seja nilpotente, então $ad(X)$ é nilpotente, e portanto tem traço zero. Pelo Lema anterior, segue que G é unimodular.

O próximo resultado afirma que toda métrica invariante à esquerda em um grupo de Lie unimodular, deve ter alguma curvatura seccional positiva a menos que G seja flat como no Teorema 3.10.

Teorema 3.13. *(Azencott-Wilson) Se um grupo de Lie conexo tem todas as métricas invariantes à esquerda com curvatura seccional, $k \leq 0$, então este é solúvel. Se G é unimodular, então qualquer métrica com $k \leq 0$ deve ser flat ($k \equiv 0$).*

Demonstração. Ver [7]. ■

Exemplo Especial

Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie com uma métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ invariante à esquerda. Suponha que a álgebra de lie $\mathfrak{g}$ contém um ideal $\mathfrak{u}$ de codimensão 1, isto é, existe $v_0 \in \mathfrak{g}$ tal que $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \oplus \langle v_0 \rangle$. Escolhendo um vetor unitário B ortogonal a $\mathfrak{u}$, seja

$$L \colon \mathfrak{u} \longrightarrow \mathfrak{u}$$

a transformação linear $ad(B)$ restrita a $\mathfrak{u}$, isto é, $L(U) = ad(B)(U) = [B,U]$, onde $U \in \mathfrak{u}$. Seja L^* a transformação linear adjunta, ou seja, $\langle L(X), Y \rangle = \langle X, L^*(Y) \rangle$, com $X, Y \in \mathfrak{u}$ e seja $S = \dfrac{1}{2}(L + L^*)$ a parte autoadjunta de L. De fato, dados $U, V \in \mathfrak{u}$ então

$$\begin{aligned}
\langle S(U), V \rangle &= \langle \frac{1}{2}(L + L^*)(U), V \rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle L(U), V \rangle + \frac{1}{2}\langle L^*(U), V \rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle U, L^*(V) \rangle + \frac{1}{2}\langle U, L(V) \rangle \\
&= \langle U, \frac{1}{2}\left(L(V) + L^*(V)\right) \rangle = \langle U, S(V) \rangle.
\end{aligned}$$

Além disso, podemos pensar no ideal $\mathfrak{u}$ como uma álgebra de Lie com uma métrica particular induzida de $\mathfrak{g}$. Seja $\overline{\nabla}$ a conexão para esta métrica em $\mathfrak{u}$ e usaremos ∇ para a conexão Riemanniana da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Nestas condições temos a seguinte proposição:

Proposição 3.6. *O operador derivada ∇_B satisfaz*

$$\nabla_B B = 0 \quad e \quad \nabla_B U = \frac{1}{2}(L - L^*)(U),$$

para cada $U \in \mathfrak{u}$. Da mesma forma, o operador ∇_U satisfaz

$$\nabla_U B = -S(U) \quad e \quad \nabla_U V = \overline{\nabla}_U V + \langle S(U), V\rangle B,$$

para cada $U, V \in \mathfrak{u}$.

Demonstração. Seja $U \in \mathfrak{u}$ e $B \in \mathfrak{u}^\perp$. Como $\mathfrak{u}$ é ideal de $\mathfrak{g}$ temos que $[V, U] \in \mathfrak{u}$, para todo $V \in \mathfrak{g}$ e $U \in \mathfrak{u}$.

(i) Vamos calcular as componentes de $\nabla_B B$ na direção de B e na direção de U:

$$\langle \nabla_B B, B\rangle = \frac{1}{2}(\langle [B, B], B\rangle - \langle [B, B], B\rangle + \langle [B, B], B\rangle) = 0,$$

e

$$\langle \nabla_B B, U\rangle = \frac{1}{2}(\langle [B, B], U\rangle - \langle [B, U], B\rangle + \langle [U, B], B\rangle) = 0.$$

Portanto, $\nabla_B \equiv 0$.

(ii) Tomando $W \in \mathfrak{u}$ arbitrário, calculemos as componentes de $\nabla_B U$ na direção de B e na direção de W,

$$\langle \nabla_B U, B\rangle = \frac{1}{2}(\langle [B, U], B\rangle - \langle [U, B], B\rangle + \langle [B, B], U\rangle) = 0,$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_B U, W\rangle &= \frac{1}{2}(\langle [B, U], W\rangle - \langle [U, W], B\rangle + \langle [W, B], U\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\langle [B, U], W\rangle - \langle [B, W], U\rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\langle L(U), W\rangle - \langle L^*(U), W\rangle) \\
&= \frac{1}{2}\langle (L - L^*)(U), W\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, $\nabla_B U = \dfrac{1}{2}(L - L^*)(U)$.

(iii) Ainda com $W \in \mathfrak{u}$ qualquer, vamos calcular as componentes de $\nabla_U B$ na direção de B

e na direção de W:

$$\langle \nabla_U B, B\rangle = \frac{1}{2}(\langle [U,B],B\rangle - \langle [B,B],U\rangle + \langle [B,U],B\rangle) = 0,$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_U B, W\rangle &= \frac{1}{2}(\langle [U,B],W\rangle - \langle [B,W],U\rangle + \langle [W,U],B\rangle)\\
&= \frac{1}{2}(-\langle [B,U],W\rangle - \langle [B,W],U\rangle)\\
&= -\frac{1}{2}(\langle L(U),W\rangle + \langle L^*(U),W\rangle) = -\frac{1}{2}\langle (L+L^*)(U),W\rangle\\
&= \langle -S(U),W\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, $\nabla_U B = -S(U)$.

(iv) Por fim, para $U, V \in \mathfrak{u}$, calculemos as componentes de $\nabla_U V$ na direção de B e de W:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_U V, B\rangle &= \frac{1}{2}(\langle [U,V],B\rangle - \langle [V,B],U\rangle + \langle [B,U],V\rangle)\\
&= \frac{1}{2}(\langle [B,V],U\rangle + \langle [B,U],V\rangle)\\
&= \frac{1}{2}(\langle L^*(U),V\rangle + \langle L(U),V\rangle)\\
&= \frac{1}{2}\langle (L+L^*)(U),V\rangle\\
&= \langle S(U),V\rangle,
\end{aligned}$$

e

$$\langle \nabla_U V, W\rangle = \frac{1}{2}(\langle [U,V],W\rangle - \langle [V,W],U\rangle + \langle [W,U],V\rangle) = \langle \overline{\nabla}_U V, W\rangle.$$

Assim, concluimos que $\nabla_U V = \overline{\nabla}_U V + \langle S(U),V\rangle(B)$.

■

Teorema 3.14. *Suponha que a álgebra de lie $\mathfrak{g}$ tenha a propriedade de que o colchete $[X,Y]$ é uma combinação linear de X e Y. Considere $dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{g} \geq 2$, com $[X,Y] = l(X)Y - l(Y)X$ onde l é uma aplicação linear bem definida de $\mathfrak{g}$ no conjunto dos números reais. Escolhendo qualquer métrica em $\mathfrak{g}$, as curvaturas seccionais são constantes.*

$$k(X,Y) = -\|l\|^2.$$

No caso, não comutativo ($l \neq 0$), para qualquer métrica, o grupo de Lie cuja álgebra de Lie é g possui curvatura seccional constante negativa.

Demonstração. Para cada elemento X e Y na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, suponhamos que $[X,Y]$ é uma combinação linear de X e Y. Fixando X, note que $ad(X)$ induz uma aplicação linear $ad(X)\colon \mathfrak{g}/\mathbb{R}X \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathbb{R}X$ definida por $ad(X)(Y) \equiv l(X,Y)Y \ \ mod\, \mathbb{R}X$, onde $l\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \longrightarrow \mathbb{R}$ é bilinear.

Vejamos que $l(X,Y)$ depende unicamente de X:

Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ com $\alpha \neq 0$, temos:

$$ad(X)(\alpha Y) = l(X,\alpha Y)\alpha Y = \alpha l(X,\alpha Y)Y.$$

Por outro lado,

$$ad(X)(\alpha Y) = [X,\alpha Y] = \alpha[X,Y] = \alpha l(X,Y)Y.$$

Portanto, $l(X,\alpha Y) = l(X,Y)$, para todo $\alpha \neq 0$.

Tomando uma sequência $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\alpha_n \longrightarrow 0$, temos que $l(X,Y) = \lim\limits_{n\to\infty} l(X,Y) = \lim\limits_{n\to\infty} l(X,\alpha_n Y) = l(X,0) := l(X)$.

Daí temos que $[X,Y] \equiv l(X)Y \ \ mod\, \mathbb{R}X$.

Analogamente, fixando Y e considerando $ad(Y)\colon \mathfrak{g}/\mathbb{R}Y \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathbb{R}Y$ dada por $ad(Y)(X) \equiv l(X,Y)X \ \ mod\, \mathbb{R}Y$, temos que $l(X,Y)$ depende apenas de Y, logo

$$[Y,X] \equiv l(Y)X \ \ mod\, \mathbb{R}Y.$$

Assim,

$$[X,Y] = -[Y,X] \equiv -l(Y)X \ \ mod\, \mathbb{R}Y.$$

Se X e Y são linearmente independentes, dos cálculos acima temos que

$$[X,Y] = l(X)Y - l(Y)X.$$

Se X e Y são linearmente dependentes, a identidade acima é evidentenmente satisfeita. O caso comutativo, ou seja, em que $l = 0$ não é interessante, por isso vamos supor $l \neq 0$.

Denotemos por $\mathfrak{u}$ o núcleo do funcional linear l, então vejamos que $\mathfrak{u}$ é um ideal comutativo de codimensão 1. De fato, seja $V \in \mathfrak{g}$ e $U \in \mathfrak{u}$ então

$$[V,U] = l(V)U - l(U)V = l(V)U \in \mathfrak{u}.$$

Logo $\mathfrak{u}$ é um ideal.

É claro que $\mathfrak{u}$ é comutativo, ou seja, dados $U', U'' \in \mathfrak{u}$, temos que $[U',U''] = 0$. Se $dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{g} = n$, como $dim_{\mathbb{R}} Im(l) = dim_{\mathbb{R}}\mathbb{R} = 1$, pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, segue que $dim_{\mathbb{R}} Ker(l) = dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{u} = n-1$, ou seja, $\mathfrak{u}$ tem codimensão 1.

Escolhendo um vetor unitário B ortogonal a $\mathfrak{u}$, com $l(B) = \lambda$ (λ pode ser identificado com a norma $\|l\|$ do funcional linear l) podemos escrever $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \oplus \langle B \rangle$, onde $\mathfrak{u}$ é um ideal comutativo de codimensão 1. Dessa forma, estamos nas hipóteses da proposição 3.6. Logo a aplicação $L(U) = [B, U]$ é dada por:

$$L(U) = [B, U] = l(B)U - l(U)B = l(B)U = \lambda U.$$

Neste caso, L é autoadjunta, pois dados $U, V \in \mathfrak{u}$,

$$\langle L(U), V \rangle = \langle \lambda U, V \rangle = \langle U, \lambda V \rangle = \langle U, L(V) \rangle.$$

Então, seguindo a Proposição 3.6, neste caso $S = L$. Daí temos que:

$$\nabla_B \equiv 0 \text{ e } \overline{\nabla}_U = 0.$$

Logo, $\nabla_U V = \langle S(U), V \rangle B = \langle L(U), V \rangle B = \langle \lambda U, V \rangle B = \lambda \langle U, V \rangle B$ e $\nabla_U B = -L(U) = -\lambda U$. Dado $Z \in \mathfrak{g}$, podemos escrever $Z = a\widetilde{U} + cB$, com $\widetilde{U} \in \mathfrak{u}$, $\|\widetilde{U}\| = 1$ e $a, c \in \mathbb{R}$. Dessa forma,

$$\langle Z, \widetilde{U} \rangle = \langle a\widetilde{U} + cB, \widetilde{U} \rangle = a\langle \widetilde{U}, \widetilde{U} \rangle + c\langle B, \widetilde{U} \rangle = a,$$

e

$$\langle Z, B \rangle = \langle a\widetilde{U} + cB, B \rangle = a\langle \widetilde{U}, B \rangle + c\langle B, B \rangle = c.$$

Portanto, $Z = \langle Z, \widetilde{U} \rangle \widetilde{U} + \langle Z, B \rangle B$. Então:

$$\begin{aligned}
\nabla_{\widetilde{U}} Z &= \nabla_{\widetilde{U}} (\langle Z, \widetilde{U} \rangle \widetilde{U} + \langle Z, B \rangle B) \\
&= \langle Z, \widetilde{U} \rangle \nabla_{\widetilde{U}} \widetilde{U} + \langle Z, B \rangle \nabla_{\widetilde{U}} B \\
&= \langle Z, \widetilde{U} \rangle \lambda \langle \widetilde{U}, \widetilde{U} \rangle B + \langle Z, B \rangle (-\lambda \widetilde{U}) \\
&= \lambda(\langle Z, \widetilde{U} \rangle B - \langle Z, B \rangle \widetilde{U}).
\end{aligned}$$

Tome $U \in \mathfrak{u}$ não nulo e considere $\widetilde{U} = \dfrac{U}{\|U\|}$ então

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{U}{\|U\|}} Z &= \lambda \left(\langle Z, \tfrac{U}{\|U\|} \rangle B - \langle Z, B \rangle \tfrac{U}{\|U\|} \right) \\
\tfrac{1}{\|U\|} \nabla_U Z &= \tfrac{1}{\|U\|} \lambda(\langle Z, U \rangle B - \langle Z, B \rangle U) \\
\nabla_U Z &= \lambda(\langle Z, U \rangle B - \langle Z, B \rangle U).
\end{aligned}$$

Agora podemos determinar uma fórmula para $R(X, Y)$, onde $X, Y \in \mathfrak{g}$. Dados $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, considere os seguintes casos:

(CASO 1) Se $X, Y \in \mathfrak{u}$ e $Z \in \mathfrak{g}$:

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z \\
&= \nabla_Y (\lambda B \langle X, Z\rangle - \lambda X \langle B, Z\rangle) - \nabla_X (\lambda B \langle Y, Z\rangle - \lambda Y \langle B, Z\rangle) \\
&= \lambda \langle X, Z\rangle \nabla_Y B - \lambda \langle B, Z\rangle \nabla_Y X - \lambda \langle Y, Z\rangle \nabla_X B + \lambda \langle B, Z\rangle \nabla_X Y \\
&= \lambda \langle X, Z\rangle (-\lambda Y) - \lambda \langle Y, Z\rangle (-\lambda X) + \lambda \langle B, Z\rangle (\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\
&= \lambda^2 \langle Y, Z\rangle X - \lambda^2 \langle X, Z\rangle Y + \lambda \langle B, Z\rangle [X, Y] \\
&= \lambda^2 (\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y).
\end{aligned}
$$

(CASO 2) Se $X = B$ e $Y \in \mathfrak{u}$ temos

$$
\begin{aligned}
R(B,Y)Z &= \nabla_Y \nabla_B Z - \nabla_B \nabla_Y Z + \nabla_{[B,Y]} Z \\
&= 0 - 0 + \nabla_{l(B)Y - l(Y)B} Z \\
&= \nabla_{\lambda Y} Z \\
&= \lambda \nabla_Y Z \\
&= \lambda (\lambda B \langle Y, Z\rangle - Y \langle B, Z\rangle) \\
&= \lambda^2 (X \langle Y, Z\rangle - Y \langle X, Z\rangle).
\end{aligned}
$$

Os demais casos seguem por bilinearidade.

Usando este resultado na definição da curvatura seccional, para X e Y unitários, obtemos:

$$
\begin{aligned}
k(X,Y) &= \langle R(X,Y)X, Y\rangle \\
&= \langle \lambda^2 (X \langle Y, X\rangle - Y \langle X, X\rangle), Y\rangle \\
&= \lambda^2 \langle Y, X\rangle \langle X, Y\rangle - \lambda^2 \langle X, X\rangle \langle Y, Y\rangle \\
&= \lambda^2 (\langle X, Y\rangle^2 - \langle X, X\rangle \langle Y, Y\rangle).
\end{aligned}
$$

Se X e Y são ortonormais segue que $k(X, Y) = -\lambda^2 = -\|l\|^2$. Portanto, para toda métrica em $\mathfrak{g}$, a curvatura seccional é uma constante. No caso não comutativo ($l \neq 0$), toda métrica em $\mathfrak{g}$ possui curvatura seccional constante estritamente negativa. ∎

3.3 Curvatura de Ricci de um grupo de Lie

A curvatura de Ricci de uma variedade Riemanniana M^n em um ponto $p \in M$ segundo a direção $X \in T_pM$ pode ser interpretada como a média das curvaturas seccionais segundo planos tangentes contendo X, no seguinte sentido:

Tome X unitário e $\{X, E_2, \cdots, E_n\}$ uma base ortonormal de T_pM.

$$r(X) = \sum_{i=2}^{n} k(X, E_i) = \sum_{i=2}^{n} \langle R(X, E_i)X, E_i \rangle$$

onde k é a função de curvatura seccional. Da fórmula acima, vemos que $r(X)$ pode ser calculado pelo traço da transformação linear $Y \mapsto R(X, Y)X$.

Observação 3.15. A curvatura de Ricci $r(X)$ pode ser calculada tomando-se $(n-1)$ vezes a média das curvaturas seccionais de todos os subespaços bi-dimensionais do plano tangente contendo X, veja [3]

Como vimos na seção 1.4, a transformação de Ricci $\widehat{r}$ dada por $\widehat{r}(X) = \sum\limits_{i=2}^{n} R(E_i, X)E_i$ é auto adjunta e está associada com a curvatura de Ricci pela forma quadrática
$r(X) = \langle \widehat{r}(X), X \rangle$. Vimos também que escolhendo uma base ortonormal $\{E_1, \cdots, E_n\}$ de autovetores, a forma quadrática pode ser diagonalizada e

$$r(\xi_1 E_1 + \cdots + \xi_n E_n) = \sum_{i=1}^{n} r(E_i)\xi_i^2$$

O próximo resultado fornece um critério para obtermos uma direção não negativa da curvatura de Ricci.

Lema 3.16. *Se a transformação $ad(U)$ é antissimétrica, então $r(U) \geq 0$, onde a igualdade ocorre se, e só se, U for ortogonal ao ideal comutador $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Em particular, se a métrica em $\mathfrak{g}$ é bi-invariante então a curvatura de Ricci é sempre não negativa*

Demonstração. Pelo Lema 3.4 se $ad(U)$ é antissimétrica então $k(U, V) \geq 0$ para todo $V \in \mathfrak{g}$ em particular para uma base ortonormal $\{U, \cdots, E_n\}$. Portanto $r(U) = \sum\limits_{i=2}^{n} k(U, E_i) \geq 0$.
Ainda pelo Lema 3.4, tínhamos $k = 0$ se, e somente se, U é ortogonal a $[E_i, \mathfrak{g}]$ com $i = 1, \cdots, n$. Como $\{U, \cdots, E_n\}$ é base de $\mathfrak{g}$ temos que U é ortogonal a $[V, \mathfrak{g}]$ qualquer que seja $V \in \mathfrak{g}$ por causa da linearidade no primeiro termo, ou seja, U é ortogonal a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. A última parte do enunciado segue do fato que a métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em $\mathfrak{g}$ é bi-invariante se, e somente se, $ad(U)$ é antisimétrica, para todo $U \in \mathfrak{g}$.

$\blacksquare$

Exemplo 3.7. Se U pertence ao centro de $\mathfrak{g}$ então é claro que $ad(U)$ é antissimétrica e portanto $r(U) \geq 0$ para toda métrica invariante à esquerda de $\mathfrak{g}$.

O próximo resultado classifica os grupos de Lie conexos que admitem métricas invariantes à esquerda com curvatura de Ricci estritamente positiva. Sua demonstração não será dada aqui pois ela envolve conceitos e resultados que não estão no foco deste trabalho, para uma demonstração veja [7].

Teorema 3.17. *Um grupo de Lie conexo admite métrica invariante à esquerda com todas as curvaturas de Ricci estritamente positivas se, e somente se, é compacto com grupo fundamental finito.*

Variedades diferenciáveis com curvatura de Ricci constante são frequentemente chamadas de **Variedades Einstein**.

Vejamos um critério para obtenção de uma direção com curvatura de Ricci não positiva.

Lema 3.18. *Se B é ortogonal ao ideal comutador $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ então $r(B) \leq 0$, onde a igualdade ocorre se, e somente se $ad(B)$ é antissimétrica.*

Demonstração. Por hipótese temos que $B \in \mathfrak{g}$ é um vetor unitário ortogonal ao ideal comutador $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, isto é, $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ não tem componentes em $\langle B \rangle$. Denotando por $\mathfrak{u}$ o complemento ortogonal de $\langle B \rangle$ temos que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{u}$. Como, $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} \oplus \langle B \rangle$, vejamos que $\mathfrak{u}$ é um ideal de codimensão 1.
Sejam $V \in \mathfrak{g}$ e $U \in \mathfrak{u}$ então $[V, U] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{u}$, portanto $\mathfrak{u}$ é um ideal de $\mathfrak{g}$. Que $\mathfrak{u}$ tem codimensão 1 segue direto do fato de $\mathfrak{g}$ ser a soma direta de $\mathfrak{u}$ com um espaço de dimensão 1.

Assim estamos nas hipóteses da Proposição 3.6. Calculemos a curvatura de Ricci $r(B)$:

$$r(B) = k(B, U_1) + \cdots + k(B, U_{n-1}),$$

onde $\{U_1, \cdots, U_{n-1}\}$ é qualquer base ortonormal de $\mathfrak{u}$. Vamos trabalhar com uma base $\{U_i\}$ ortonormal de autovetores do operador autoadjunto S, dado por $\nabla_U B = -S(U)$, na Proposição 3.6, ou seja, $S(U_i) = \lambda_i U_i$.

Para cada vetor unitário em $\mathfrak{u}$ a curvatura seccional pode ser calculada

$$\begin{aligned} k(B, U) &= \langle R(B, U)B, U \rangle \\ &= \langle \nabla_{[B,U]} B, U \rangle - \langle \nabla_B \nabla_U B, U \rangle + \langle \nabla_U \nabla_B B, U \rangle \\ &= \langle \nabla_{L(U)} B, U \rangle - \langle \nabla_B (-S(U)), U \rangle \\ &= \langle -S(L(U)), U \rangle + \langle \frac{1}{2}(L - L^*)(S(U)), U \rangle. \end{aligned}$$

Agora, tomando U_i como sendo autovetor de S temos que

$$
\begin{aligned}
\lambda_i &= \langle S(U_i), U_i\rangle \\
&= \langle \frac{1}{2}(L+L^*)(U_i), U_i\rangle \\
&= \langle \frac{1}{2}L(U_i), U_i\rangle + \langle \frac{1}{2}L^*(U_i), U_i\rangle \\
&= \langle \frac{1}{2}L(U_i), U_i\rangle + \langle U_i, \frac{1}{2}L(U_i)\rangle \\
&= \langle L(U_i), U_i\rangle.
\end{aligned}
$$

De forma análoga, obtemos que $\lambda_i = \langle L^*(U_i), U_i\rangle$, ou seja, $\langle L(U_i), U_i\rangle = \langle L^*(U_i), U_i\rangle = \lambda_i$.

Então, para cada U_i temos:

$$
\begin{aligned}
k(B, U_i) &= \langle -S(L(U_i)), U_i\rangle + \langle \tfrac{1}{2}(L-L^*)(S(U_i)), U_i\rangle \\
&= \langle L(U_i), -S(U_i)\rangle + \langle \tfrac{1}{2}L(S(U_i)), U_i\rangle - \langle \tfrac{1}{2}L^*(S(U_i)), U_i\rangle \\
&= \langle L(U_i), -S(U_i)\rangle + \tfrac{1}{2}\langle L(S(U_i)), U_i\rangle - \tfrac{1}{2}\langle S(U_i), L(U_i)\rangle \\
&= -\tfrac{3}{2}\langle S(U_i), L(U_i)\rangle + \tfrac{1}{2}\langle S(U_i), L^*(U_i)\rangle \\
&= -\tfrac{3}{2}\langle \lambda_i U_i, L(U_i)\rangle + \tfrac{1}{2}\langle \lambda_i U_i, L^*(U_i)\rangle \\
&= -\tfrac{3}{2}\lambda_i\langle U_i, L(U_i)\rangle + \tfrac{1}{2}\lambda_i\langle U_i, L^*(U_i)\rangle \\
&= -\tfrac{3}{2}\lambda_i^2 + \tfrac{1}{2}\lambda_i^2 \\
&= -\lambda_i^2.
\end{aligned}
$$

Assim, $r(B) = -{\lambda_1}^2 - {\lambda_2}^2 - \cdots - {\lambda_{n-1}}^2 = -tr(S^2)$. Portanto, $r(B) \leq 0$ e, a igualdade ocorre se, e somente se, $S \equiv 0$, ou seja, $L = -L^*$, ou ainda, $ad(B) = L$ é antissimétrica. ■

Observação 3.19. Não é verdade que $k(B, U) \leq 0$, para todo $U \in \mathfrak{u}$. Pode acontecer que para uma escolha particular de U (U não autovetor de S), se tenha $k(B, U) > 0$. Conforme [7], isto acontece, por exemplo, no grupo de Heisenberg, como veremos no exemplo (3.8) adiante.

Lema 3.20. *Seja V um espaço vetorial n-dimensional, munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Se $L\colon V \longrightarrow V$ é uma transformação linear não nula e nilpotente, então L não é* *antissimétrica.*

Demonstração. De fato, seja $(k + 1)$ o índice de nilpotência da transformação L, então podemos tomar $X \in V$ tal que $LX \neq 0$ e $L^k X \neq 0$. Se L for antissimétrica, então

$$\begin{aligned} \langle L^{2k}X, X\rangle &= \langle L^k(l^k X), X\rangle \\ &= -\langle L^k X, L^k X\rangle \\ &= -\|L^k X\|^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Assim, $L^{2k}X \neq 0$, portanto, L não seria nilpotente, o que contradiz a hipótese. Logo, concluímos que L não pode ser antissimétrica. ■

Teorema 3.21. *Suponha que a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é nilpotente mas não comutativa. Então para qualquer métrica invariante à esquerda existe uma direção de curvatura de Ricci estritamente negativa e uma direção de curvatura de Ricci estritamente positiva.*

Demonstração. Seja $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de G. Como $\mathfrak{g}$ é nilpotente, a série central descendente se anula, ou seja, $\mathfrak{g}^{k_0} = 0$, para algum $k_0 > 1$. Ainda temos que

$$\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \supset \mathfrak{g}^3 = [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] \supset \cdots .$$

Escolhendo um vetor unitário $U \in \mathfrak{g}^{k_0-1}$, segue que $U \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k_0-2}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Isso mostra que U não é ortogonal a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, logo do Lema 3.20 segue que $r(U) > 0$, pois neste caso $ad(U)$ é antissimétrica, já que $ad(U) \equiv 0$.
Por outro lado, note que o espaço vetorial $\mathfrak{g}$ não pode ser gerado por $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + Z$ onde Z é o centro de $\mathfrak{g}$. De fato, suponha que $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + Z$, então $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] + Z] = [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]] + [\mathfrak{g}, Z] = [\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]]$, isto é, $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}^3$. Isso significa que a série central descentente estabilizaria, o que é uma contradição.

Logo, existe um vetor unitário V ortogonal a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ que não pertence a Z. Considere $ad(V) = L$, uma aplicação linear não nula de $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ em $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$, tal que $L(X) = ad(V)(X) = [V, X]$ com $L(X) \neq 0$. Como L é nilpotente, pelo Lema 3.20, temos que L não é antissimétrica. Assim, temos que V é ortogonal a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ e que $ad(V)$ não é antissimétrica, logo do Lema 3.18 segue que $r(V) < 0$. ■

Teorema 3.22. *Se a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ associada ao grupo de Lie G contém vetores linearmente independentes X, Y, Z tais que $[X, Y] = Z$ então existe uma métrica invariante à esquerda tal que $r(X) < 0$ e $r(Z) > 0$.*

Demonstração. Dados X, Y e $z = [X, Y]$, formemos uma base ortonormal de $\mathfrak{g}$, $\{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$ onde $B_1 = X$, $B_2 = Y$ e $B_3 = Z$. Dado um número real $\epsilon > 0$ qualquer, consideremos uma base auxiliar $\{E_1, \cdots, E_n\}$ definida por $E_1 = \epsilon B_1$, $E_2 = \epsilon B_2$ e $E_i = \epsilon^2 B_i$, com $i \geq 3$. Defina a métrica invariante à esquerda que torna a base auxiliar uma base ortonormal. Seja $\mathfrak{g}_\epsilon$ a álgebra de Lie obtida de $\mathfrak{g}$ com essa métrica particular e com essa base particular.

Denotemos por α_{ijk} as constantes de estrutura de $\mathfrak{g}$ e por β_{ijk} as constantes de estrutura de $\mathfrak{g}_\epsilon$. Daí podemos observar que:

$$\alpha_{123} = \langle [B_1, B_2], B_3 \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle = \langle Z, Z \rangle = 1,$$

$$\alpha_{213} = \langle [B_2, B_1], B_3 \rangle = \langle [Y, X], Z \rangle = \langle -Z, Z \rangle = -1.$$

Por outro lado, $[E_1, E_2] = [\epsilon B_1, \epsilon B_2] = \epsilon^2 [B_1, B_2] = \epsilon^2 B_3 = E_3$ e

$$\beta_{123} = \langle [E_1, E_2], E_3 \rangle = \langle E_3, E_3 \rangle = 1$$

$$\beta_{213} = \langle [E_2, E_1], E_3 \rangle = \langle -E_3, E_3 \rangle = -1.$$

As demais constantes de estrutura dependem de ϵ, ou seja:

i) $[E_i, E_j] = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_{ijk} E_k, \quad i, j \geq 3$

ii) $[E_i, E_j] = [\epsilon^2 B_i, \epsilon^2 B_j] = \epsilon^4 [B_i, B_j] = \epsilon^4 \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_{ijk} B_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \epsilon^4 \alpha_{ijk} B_k.$

De (i) e (ii), temos que $\beta_{ijk} = \epsilon^2 \alpha_{ijk}$ para $k \leq 3$ e que $\lim\limits_{\epsilon \longrightarrow 0} \beta_{ijk} = 0$.

Daí obtemos uma álgebra de Lie limite $\mathfrak{g}_0$ com métrica e uma base definidas. E ainda o colchete é dado por

$$[E_1, E_2] = -[E_2, E_1] = E_3$$

com $[E_i, E_j] = 0$ nos demais casos. Portanto, $[\mathfrak{g}_\epsilon, \mathfrak{g}_\epsilon] = \langle E_3 \rangle$. Calculando explicitamente $r(E_1)$ e $r(E_3)$ temos:

$$\begin{aligned}
k(E_1, E_2) &= \frac{1}{2}(\alpha_{123})(-\alpha_{123}) - \frac{1}{4}(\alpha_{123})(\alpha_{123}) \\
&= -\frac{3}{4}(\alpha_{123})^2 \\
&= -\frac{3}{4}, \\
k(E_1, E_3) &= -\frac{1}{4}(\alpha_{231})(-\alpha_{231}) \\
&= \frac{1}{4}, \\
k(E_1, E_j) &= 0, \quad j > 3
\end{aligned}$$

Portanto, $r(E_1) = -\dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{2}$.

Calculando $r(E_3)$:

$$\begin{aligned} k(E_3, E_1) &= -\frac{1}{4}(\alpha_{213})(-\alpha_{213}) \\ &= \frac{1}{4}, \\ k(E_3, E_2) &= -\frac{1}{4}(-\alpha_{213})(\alpha_{213}) \\ &= \frac{1}{4}, \\ k(E_3, E_j) &= 0, \quad j > 3 \end{aligned}$$

Portanto, $r(E_3) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Isso garante o enunciado para $\mathfrak{g}_\epsilon$.

Como as curvaturas de Ricci variam continuamente em relação à ϵ, segue que

$$\lim_{\epsilon \longrightarrow 0} r(E_1) < 0 < \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} r(E_3).$$

Logo, para todo ϵ suficientemente próximo de zero vale que $r(E_1) < 0 < r(E_3)$. ∎

A seguir vamos apresentar uma condição suficiente para um grupo de Lie G ser unimodular, em termo da curvatura de Ricci. Defina o conjunto

$$\mathfrak{u} = \{X \in \mathfrak{g} \quad : \quad \mathrm{tr}(ad(X)) = 0\},$$

temos que $\mathfrak{u}$ é um ideal contendo o comutador $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.

De fato, sejam $X \in \mathfrak{u}$ e $Y \in \mathfrak{g}$, então $\mathrm{tr}(ad[X,Y]) = \mathrm{tr}(ad(X) \circ ad(Y)) - \mathrm{tr}(ad(Y) \circ ad(X)) = 0$. Portanto, $[X,Y] \in \mathfrak{u}$.

É claro que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{u}$ pois, para todo $U, V \in \mathfrak{g}$, segue que $\mathrm{tr}(ad([U,V])) = 0$, portanto, $[U,V] \in \mathfrak{u}$.

Dizemos que $\mathfrak{u}$ é o kernel unimodular de $\mathfrak{g}$.

Lema 3.23. *Se o grupo de Lie G conexo tem uma métrica invariante à esquerda com todas as curvaturas de Ricci não negativas, então G é unimodular.*

Demonstração. Suponha que G não seja unimodular. Escolhendo um vetor B ortonormal ao kernel unimodular $\mathfrak{u}$, teríamos que $tr(ad(B)) \neq 0$. Como $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{u}$, tem-se que B é ortogonal a $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Da demonstração do Lema 3.18 temos que

$$r(B) = -\mathrm{tr}(ad(B))^2 \neq 0$$

Daí, pelo mesmo Lema, concluímos que $r(B) < 0$, que contradiz a hipótese. Portanto, G é unimodular. ∎

3.4 Curvatura Escalar de um grupo de Lie

Seja M uma variedade Riemanniana, considere a base ortonormal $\{E_1, \cdots, E_n\}$ do espaço T_pM. Vimos na seção 1.4 que o número:

$$\rho = r(E_1) + \cdots + r(E_n) = 2\sum_{i<j} k(E_i, E_j)$$

é chamado de **curvatura escalar** no ponto p.

Agora, sejam G um grupo de Lie com uma métrica invariante à esquerda e $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie. Suponha que a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ contém um ideal $\mathfrak{u}$ de codimensão 1 que contém o comutador $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$. Seja $B \in \mathfrak{u}^\perp$ e considere a aplicação $L\colon \mathfrak{u} \longrightarrow \mathfrak{u}$, dada por $L = ad(B)$, e sua parte auto-adjunta $S = \dfrac{1}{2}(L + L^*)$.

Lema 3.24. *Com as notações anteriores, a curvatura escalar $\rho(\mathfrak{g})$ associada com a métrica da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é igual a*

$$\rho(\mathfrak{g}) = \rho(\mathfrak{u}) - tr(S^2) - (tr(S))^2.$$

Demonstração. Dados $U, V \in \mathfrak{u}$ vetores ortonormais, temos que a curvatura seccional é dada por

$$\begin{aligned} k(U,V) &= \langle R(U,V)U, V\rangle \\ &= \langle \nabla_{[U,V]}U, V\rangle - \langle \nabla_U\nabla_V U, V\rangle + \langle \nabla_V\nabla_U U, V\rangle. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Como a conexão Riemanniana em $\mathfrak{u}$ é denotada por $\overline{\nabla}$, definimos a curvatura seccional em $\mathfrak{u}$ por

$$\overline{k}(U,V) = \langle \overline{\nabla}_{[U,V]}U, V\rangle - \langle \overline{\nabla}_U\overline{\nabla}_V U, V\rangle + \langle \overline{\nabla}_V\overline{\nabla}_U U, V\rangle.$$

Dessa forma, usando a proposição 3.6, temos que:

$$\begin{aligned}
k(U,V) &= \langle \nabla_{[U,V]}U, V\rangle - \langle \nabla_U\nabla_V U, V\rangle + \langle \nabla_V\nabla_U U, V\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_{[U,V]}U + \langle S([U,V]),U\rangle B, V\rangle - \langle \nabla_U(\overline{\nabla}_V U + \langle S(V),U\rangle B), V\rangle \\
&\quad + \langle \nabla_V(\overline{\nabla}_U U + \langle S(U),U\rangle B), V\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_{[U,V]}U, V\rangle + \langle S([U,V]),U\rangle\langle B,V\rangle - \langle \nabla_U\overline{\nabla}_V U, V\rangle - \langle S(V),U\rangle\langle \nabla_U B, V\rangle \\
&\quad + \langle \nabla_V\overline{\nabla}_U U, V\rangle + \langle S(U),U\rangle\langle \nabla_V B, V\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_{[U,V]}U, V\rangle - \langle \overline{\nabla}_U\overline{\nabla}_V U + \langle S(U),\overline{\nabla}_V U\rangle B, V\rangle - \langle S(V),U\rangle\langle -S(U), V\rangle \\
&\quad + \langle \overline{\nabla}_V\overline{\nabla}_U U + \langle S(V),\overline{\nabla}_U U\rangle B, V\rangle + \langle S(U),U\rangle\langle -S(V), V\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_{[U,V]}U, V\rangle - \langle \overline{\nabla}_U\overline{\nabla}_V U, V\rangle - \langle S(U),\overline{\nabla}_V U\rangle\langle B,V\rangle - \langle S(U),V\rangle\langle S(U),V\rangle \\
&\quad + \langle \overline{\nabla}_V\overline{\nabla}_U U, V\rangle + \langle S(V),\overline{\nabla}_U U\rangle\langle B,V\rangle - \langle S(U),U\rangle\langle S(V),V\rangle \\
&= \langle \overline{\nabla}_{[U,V]}U - \overline{\nabla}_U\overline{\nabla}_V U + \overline{\nabla}_V\overline{\nabla}_U U, V\rangle - \langle S(U),V\rangle^2 - \langle S(U),U\rangle\langle S(V),V\rangle \\
&= \overline{k}(U,V) - \langle S(U),V\rangle^2 - \langle S(U),U\rangle\langle S(V),V\rangle.
\end{aligned}$$

Escolhendo uma base ortonormal formada por autovetores de S, isto é, $S(U_i) = \lambda_i U_i$, obtemos

$$\begin{aligned}
k(U_i,U_j) &= \overline{k}(U_i,U_j) - \langle S(U_i),U_j\rangle^2 - \langle S(U_i),U_i\rangle\langle S(U_j),U_j\rangle \\
&= \overline{k}(U_i,U_j) - \lambda_i^2\langle U_i,U_j\rangle^2 - \lambda_i\lambda_j\langle U_i,U_i\rangle\langle U_j,U_j\rangle \\
&= \overline{k}(U_i,U_j) - \lambda_i\lambda_j, \qquad \textit{para } i \neq j
\end{aligned}$$

Da Proposição 3.6 também temos que $k(B,U_i) = -\lambda_i^2$ com $B \in \mathfrak{u}^\perp$. De fato,

$$\begin{aligned}
k(B,U_i) &= \langle \nabla_{[B,U_i]}B, U_i\rangle - \langle \nabla_B\nabla_{U_i}B, U_i\rangle + \langle \nabla_{U_i}\nabla_B B, U_i\rangle \\
&= \langle -S([B,U_i]), U_i\rangle - \langle \nabla_B(-S(U_i)), U_i\rangle \\
&= \langle -S(L(U_i)), U_i\rangle + \langle \nabla_B(\lambda U_i), U_i\rangle \\
&= \lambda_i\langle \nabla_B U_i, U_i\rangle - \langle L(U_i), S(U_i)\rangle \\
&= \lambda_i\langle \frac{1}{2}(L-L^*)(U_i), U_i\rangle - \langle L(U_i), \lambda_i U_i\rangle \\
&= \frac{\lambda_i}{2}\langle L(U_i),U_i\rangle - \frac{\lambda_i}{2}\langle L^*(U_i),U_i\rangle - \lambda_i\langle L(U_i),U_i\rangle \\
&= -\lambda_i\langle L(U_i),U_i)\rangle \\
&= -\lambda_i^2
\end{aligned}$$

Assim, a curvatura de Ricci na direção de U_i é dada por

$$\begin{aligned} r(U_i) &= \sum_j k(U_j, U_i) \\ &= \sum_j (\overline{k}(U_j, U_i) - \lambda_j \lambda_i) \\ &= \overline{r}(U_i) - \lambda_i tr(S). \end{aligned}$$

Para obtermos a curvatura escalar basta somarmos a identidade acima sobre i e acrescentar $r(B) = -tr(S^2)$ calculada na demonstração do Lema 3.18

$$\begin{aligned} \rho(\mathfrak{g}) &= \sum_i (\overline{r}(U_i) - \lambda_i tr(S)) + r(B) \\ &= \sum_i \overline{r}(U_i) - tr(S) \sum_i \lambda_i + r(B) \\ &= \rho(\mathfrak{u}) - (tr(S))^2 - tr(S^2). \end{aligned}$$

■

Lema 3.25. *Toda álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ solúvel, possui um ideal de codimensão* 1.

Demonstração. Digamos que $\dim \mathfrak{g} = n$.
Suponha que $\dim[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = k$ ($k < n$, pois $\mathfrak{g}' \neq \mathfrak{g}$). Seja $\{E_1, \cdots, E_k\}$ uma base de $\mathfrak{g}'$. Completando esta base, podemos considerar uma base $\{E_1, \cdots, E_k, E_{k+1}, \cdots, E_n\}$ de $\mathfrak{g}$. Seja $\mathfrak{h}$ o subespaço de $\mathfrak{g}$ gerado pela base $\{E_1, \cdots, E_k, E_{k+1}, \cdots, E_{n-1}\}$. Então é claro que $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$ e $\dim \mathfrak{h} = n - 1$. Daí segue que $\mathfrak{h}$ é ideal de $\mathfrak{g}$, pois dado $X \in \mathfrak{g}$ e $Y \in \mathfrak{h}$ temos que $[X, Y] \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{h}$. Portanto $\mathfrak{h}$ é um ideal de codimensão 1. ■

Teorema 3.26. *Se o grupo de Lie é solúvel, então cada métrica invariante à esquerda em G é flat ou então tem curvatura escalar estritamente negativa.*

Demonstração. Se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie solúvel n-dimensional, usaremos indução sobre n para provar que $\rho(\mathfrak{g}) \leq 0$. Se $n = 1$, pelo Teorema 3.10 segue que o grupo de Lie G é flat.

Seja $\mathfrak{u}$ um ideal de $\mathfrak{g}$ de codimensão 1. Assumiremos, por hipótese de indução, que $\rho(\mathfrak{u}) \leq 0$. Mais ainda $\mathfrak{u}$ é solúvel e

$$\rho(\mathfrak{g}) = \rho(\mathfrak{u}) - tr(S^2) - (tr(S))^2 \leq -tr(S^2) - (tr(S))^2 \leq 0,$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se, $S \equiv 0$ *e* $\rho(\mathfrak{u}) = 0$.

Vamos mostrar que $\rho(\mathfrak{g}) = 0 \Leftrightarrow R \equiv 0$:

Se $S = 0$ então as fórmulas da Proposição 3.6 implicam em $\nabla_U V = \overline{\nabla}_U V$. Para quaisquer $U, V \in \mathfrak{u}$, segue imediatamente que $R(U, V)W = \overline{R}(U, V)W$ com $W \in \mathfrak{u}$.

■

Corolário 3.27. *Se G é solúvel e unimodular então toda métrica invariante à esquerda sobre G é flat, ou possui curvaturas seccionais positivas e negativas.*

Demonstração. Se G é unimodular e a métrica sobre G não é flat então pelo Teorema 3.13 existe uma métrica com curvatura seccional positiva. Por outro lado sendo G solúvel, se a métrica sobre G não é flat, então, pelo Teorema 3.26, cada métrica invariante à esquerda tem curvatura escalar negativa e consequentemente, tem curvatura seccional negativa. ∎

Teorema 3.28. *Se a álgebra de Lie de G é não comutativa, então G possui uma métrica invariante à esquerda com curvatura escalar estritamente negativa.*

Demonstração. Suponha que existam vetores linearmente independentes X, Y, Z na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ tais que $[X, Y] = Z$. Da demonstração do Teorema 3.22 podemos escolher uma base $\{B_1, \cdots, B_n\}$ de modo que $B_1 = X$, $B_2 = Y$ e $B_3 = Z$ e para $\epsilon > 0$ real podemos escolher uma métrica invariante à esquerda tal que os vetores $\{B_1^\epsilon, \cdots, B_n^\epsilon\}$ formam uma base ortonormal, onde $B_1^\epsilon = \epsilon B_1$, $B_2^\epsilon = \epsilon B_2$, $B_3^\epsilon = \epsilon^2 B_3$, $B_i^\epsilon = \epsilon^2 B_i$ para todo $i \geq 3$.

Denote $\mathfrak{g}_\epsilon$ esta álgebra com a métrica e a base dadas acima. Afirmamos que quando ϵ tende a zero, $\mathfrak{g}_\epsilon$ tende a uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0$ bem definida, nilpotente, mas não comutativa.

De fato, verifiquemos como se comportam as constantes de estruturas α_{ijk}^ϵ da álgebra $\mathfrak{g}_\epsilon$, em relação às constantes α_{ijk} da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ quando $\epsilon \longrightarrow 0$. Como foi feito na demonstração do teorema 3.22. Para qualquer $\epsilon > 0$, temos $\alpha_{123}^\epsilon = 1 = -\alpha_{213}^\epsilon$.

Por outro lado, as demais constantes tenderão a zero quando $\epsilon \longrightarrow 0$, por exemplo, para $j \geq 3$

$$\begin{aligned}
[B_1^\epsilon, B_j^\epsilon] &= \sum_{k=1}^{n} \alpha_{1jk}^\epsilon B_k^\epsilon \\
&= \alpha_{1j2}^\epsilon B_2^\epsilon + \sum_{k=3}^{n} \alpha_{1jk} B_k^\epsilon \\
&= \epsilon \alpha_{1j2}^\epsilon B_2 + \sum_{k=3}^{n} \epsilon^2 \alpha_{1jk} B_k \\
&= \epsilon^3 \alpha_{1j2} B_2 + \sum_{k=3}^{n} \epsilon^3 \alpha_{1jk} B_k,
\end{aligned}$$

Como $[B_1{}^\epsilon, B_j{}^\epsilon] = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{1jk}^\epsilon B_k^\epsilon$ segue que $\alpha_{1j2}^\epsilon = \epsilon^2 \alpha_{1j2}$ e $\alpha_{1jk}^\epsilon = \epsilon \alpha_{1jk}$, para todo $k \geq 3$. Considerando α_{ijk}^0 as constantes de estrutura da álgebra de Lie $\mathfrak{g}_0$ e a base $\{B_1^0, \cdots, B_n^0\}$ de $\mathfrak{g}_0$, teremos que $\alpha_{ijk}^0 = 0$ exceto nos casos $\alpha_{123}^0 = 1$ e $\alpha_{213}^0 = -1$.

Daí segue que $[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0]$ tem dimensão 1 e, portanto, é comutativo, logo, $[[\mathfrak{g}_0, \mathfrak{g}_0], \mathfrak{g}_0] = 0$. Fazendo o cálculo explícito das curvaturas seccionais, usando a Proposição 3.4, temos:

$$k(B_1^0, B_2^0) = -\frac{1}{2}(\alpha_{123}^0)^2 - \frac{1}{4}(\alpha_{123}^0)^2 = -\frac{3}{4}$$

$$k(B_2^0, B_3^0) = -\frac{1}{4}(\alpha_{123}^0)(-\alpha_{123}^0) = \frac{1}{4}$$

$$k(B_1^0, B_3^0) = -\frac{1}{4}(\alpha_{213}^0)(-\alpha_{213}^0) = \frac{1}{4}$$

$k(B_i^0, B_j^0) = 0$ nos demais casos.

Assim, $\rho(\mathfrak{g}_0) = 2\sum_{i<j} k(B_i^0, B_j^0) = 2\left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2} < 0.$

Por continuidade, segue que $\rho(\mathfrak{g}_\epsilon) < 0$ para todo ϵ suficientemente próximo de zero onde a métrica está bem definida.
Por outro lado, se não existir $X, Y \in \mathfrak{g}$ tais que X, Y e $[X, Y]$ sejam linearmente independentes então $\mathfrak{g}$ é isomorfa à álgebra do exemplo especial 3.14, e portanto para qualquer escolha da métrica, possui curvatura escalar estritamente negativa.

■

Resta ainda saber em quais condições um grupo de Lie admite métrica invariante à esquerda de curvatura escalar estritamente positiva. O teorema a seguir nos dá uma condição suficiente para esse fato.

Teorema 3.29. *(Wallach) Seja G um grupo de Lie conexo. Se o recobrimento universal de G não é homeomorfo ao espaço euclidiano (ou equivalentemente se G possui um subgrupo compacto não comutativo) então a álgebra de Lie associada a G admite uma métrica invariante à esquerda com curvatura escalar estritamente positiva.*

Demonstração. Veja [7]. ■

3.5 O Caso tridimensional

A fim de estudar álgebras de Lie tridimensionais, iremos usar a operação **produto vetorial**. Se U e V são elementos de um espaço tridimensional, o qual é munido com uma métrica positiva definida e com uma orientação pré-definida, o produto vetorial $U \times V$ é bem definido. Este produto é bilinear e simétrico como função de U e V. O vetor $U \times V$ é ortogonal a U e V simultaneamente, e tem comprimento igual a raiz quadrada do determinante $\langle U, U\rangle\langle V, V\rangle - \langle U, V\rangle^2$.

A orientação é determinada pela exigência de que U, U e $U \times V$ são orientados de forma positiva, sempre que U e V forem linearmente independentes.

Seja G um grupo de Lie conexo tridimensional com métrica invariante à esquerda. Escolha uma orientação para a álgebra de Lie de G de modo que o produto vetorial esteja definido.

Proposição 3.7. *A operação colchete na álgebra de Lie está relacionada com o produto vetorial pela fórmula*

$$[U, V] = L(U \times V),$$

onde L é uma aplicação linear definida em $\mathfrak{g}$. O grupo de Lie G é unimodular se, e somente se, a aplicação L é auto-adjunta.

Demonstração. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie tridimensional com uma métrica positiva definida e orientação fixada. Escolhendo uma base ortonormal orientada $\{E_1, E_2, E_3\}$, definimos o operador linear $L\colon \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$ por $L(E_1) = [E_2, E_3]$, $L(E_2) = [E_3, E_1]$ e $L(E_3) = [E_1, E_2]$. Assim a identidade $L(E_i \times E_j) = [E_i, E_j]$ é verdadeira para todos os elementos da base e, consequentemente, $L(U \times V) = [U, V]$ para todo U e V em $\mathfrak{g}$. Escrevendo $L(E_i) = \sum_j \alpha_{ij} E_j$, onde α_{ij} são entradas da matrizes de L na base escolhida, podemos calcular o traço de $ad(E_i)$ com $i = 1, 2, 3$.

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}(ad(E_1)) &= \langle ad(E_1)(E_1), E_1\rangle + \langle ad(E_1)(E_2), E_2\rangle + \langle ad(E_1)(E_3), E_3\rangle \\
&= \langle [E_1, E_1], E_1\rangle + \langle [E_1, E_2], E_2\rangle + \langle [E_1, E_3], E_3\rangle \\
&= \langle L(E_3), E_2\rangle + \langle -L(E_2), E_3\rangle \\
&= \left\langle \sum_j \alpha_{3j} E_j, E_2 \right\rangle + \left\langle -\sum_j \alpha_{2j} E_j, E_3 \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{3} \left(\alpha_{3j}\langle E_j, E_2\rangle - \alpha_{2j}\langle E_j, E_3\rangle\right) \\
&= \alpha_{32} - \alpha_{23};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}(ad(E_2)) &= \langle ad(E_2)(E_1), E_1\rangle + \langle ad(E_2)(E_2), E_2\rangle + \langle ad(E_2)(E_3), E_3\rangle \\
&= \langle [E_2, E_1], E_1\rangle + \langle [E_2, E_2], E_2\rangle + \langle [E_2, E_3], E_3\rangle \\
&= \langle -L(E_3), E_1\rangle + \langle L(E_1), E_3\rangle \\
&= \left\langle \sum_j \alpha_{3j} E_j, E_1 \right\rangle + \left\langle \sum_j \alpha_{1j} E_j, E_3 \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{3} \left(-\alpha_{3j}\langle E_j, E_1\rangle + \alpha_{1j}\langle E_j, E_3\rangle\right) \\
&= -\alpha_{31} + \alpha_{13};
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}(ad(E_3)) &= \langle ad(E_3)(E_1), E_1\rangle + \langle ad(E_3)(E_2), E_2\rangle + \langle ad(E_3)(E_3), E_3\rangle \\
&= \langle [E_3, E_1], E_1\rangle + \langle [E_3, E_2], E_2\rangle + \langle [E_3, E_3], E_3\rangle \\
&= \langle L(E_2), E_1\rangle + \langle -L(E_1), E_2\rangle \\
&= \left\langle \sum_j \alpha_{2j} E_j, E_1 \right\rangle + \left\langle -\sum_j \alpha_{1j} E_j, E_2 \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{3} (\alpha_{2j}\langle E_j, E_1\rangle - \alpha_{1j}\langle E_j, E_2\rangle) \\
&= \alpha_{21} - \alpha_{12}.
\end{aligned}
$$

Assim, G é unimodular, se e somente se, $\operatorname{tr}(ad(X)) = 0$, para todo X em $\mathfrak{g}$, ou seja, se e só se, $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$, ou seja, L é auto-adjunta. ■

Agora analisaremos o caso unimodular. Vimos que um grupo de Lie G é unimodular se, e só se, o operador linear L é auto-adjunto. Agora, se L é auto-adjunto, então existe uma base ortonormal $\{E_1, E_2, E_3\}$ de autovetores, ou seja, $L(E_i) = \lambda_i E_i$. Substituindo E_1 por $-E_1$ se necessário, podemos supor que a base é orientada de forma positiva. A operação colchete na álgebra de Lie unimodular tridimensional é dada por

$$[E_1, E_2] = L(E_1 \times E_2) = L(E_3) = \lambda_3 E_3;$$

$$[E_2, E_3] = L(E_2 \times E_3) = L(E_1) = \lambda_1 E_1;$$

$$[E_3, E_1] = L(E_3 \times E_1) = L(E_2) = \lambda_2 E_2.$$

Os autovalores λ_1, λ_2, λ_3, a menos de ordem, dependem de uma escolha da orientação. Se invertermos a orientação da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, a operação colchete muda de sinal.

Para descrevermos as propriedades de curvatura de uma métrica da álgebra de Lie, será conveniente definirmos os números:

$$\mu_i = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - \lambda_i \qquad i = 1, 2, 3.$$

Teorema 3.30. *A base $\{E_1, E_2, E_3\}$ ortonormal escolhida diagonaliza a forma quadrática* *de Ricci, onde as curvaturas de Ricci principais são dadas por*

$$r(E_1) = 2\mu_2\mu_3$$

$$r(E_2) = 2\mu_1\mu_3$$

$$r(E_3) = 2\mu_1\mu_2.$$

Demonstração. Seja $\{E_1, E_2, E_3\}$ uma base ortonormal em $\mathfrak{g}$ tal que $[E_2, E_3] = \lambda_1 E_1$, $[E_3, E_1] = \lambda_2 E_2$ e $[E_1, E_2] = \lambda_3 E_3$. Da seguinte fórmula $\langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}(\langle [X, Y], Z\rangle - \langle [Y, Z], X\rangle + \langle [Z, X], Y\rangle)$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_1} E_2, E_3\rangle &= \frac{1}{2}(\langle [E_1, E_2], E_3\rangle - \langle [E_2, E_3], E_1\rangle + \langle [E_3, E_1], E_2\rangle)\\
&= \frac{1}{2}(\langle L(E_3), E_3\rangle - \langle L(E_1), E_1\rangle + \langle L(E_2), E_2\rangle\\
&= \frac{1}{2}(\lambda_3 - \lambda_1 + \lambda_2)\\
&= \mu_1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_1} E_3, E_2\rangle &= \frac{1}{2}(\langle [E_1, E_3], E_2\rangle - \langle [E_3, E_2], E_1\rangle + \langle [E_2, E_1], E_3\rangle)\\
&= \frac{1}{2}(\langle -L(E_2), E_2\rangle - \langle -L(E_1), E_1\rangle + \langle -L(E_3), E_3\rangle\\
&= \frac{1}{2}(-\lambda_2 + \lambda_1 - \lambda_3)\\
&= -\mu_1;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_1} E_1, E_j\rangle &= \frac{1}{2}(\langle [E_1, E_1], E_j\rangle - \langle [E_1, E_j], E_1\rangle + \langle [E_j, E_1], E_1\rangle)\\
&= -\langle [E_1, E_j], E_1\rangle\\
&= 0, \qquad \forall j = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_2} E_1, E_3\rangle &= \frac{1}{2}(\langle [E_2, E_1], E_3\rangle - \langle [E_1, E_3], E_2\rangle + \langle [E_3, E_2], E_1\rangle)\\
&= \frac{1}{2}(\langle -L(E_3), E_3\rangle - \langle -L(E_2), E_2\rangle + \langle -L(E_1), E_1\rangle\\
&= \frac{1}{2}(-\lambda_3 + \lambda_2 - \lambda_1)\\
&= -\mu_2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_2} E_3, E_1 \rangle &= \frac{1}{2}(\langle [E_2, E_3], E_1 \rangle - \langle [E_3, E_1], E_2 \rangle + \langle [E_1, E_2], E_3 \rangle) \\
&= \frac{1}{2}(\langle L(E_1), E_1 \rangle - \langle L(E_2), E_2 \rangle + \langle L(E_3), E_3 \rangle \\
&= \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) \\
&= \mu_2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_2} E_1, E_j \rangle &= \frac{1}{2}(\langle [E_2, E_1], E_j \rangle - \langle [E_1, E_j], E_2 \rangle + \langle [E_j, E_2], E_1 \rangle) \\
&= \langle [E_1, E_j], E_1 \rangle \\
&= 0, \qquad \forall j = 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

De forma análoga obtemos,

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_3} E_1, E_2 \rangle &= \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_1) \\
&= \mu_3;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_{E_3} E_2, E_1 \rangle &= \frac{1}{2}(-\lambda_1 + \lambda_3 - \lambda_2) \\
&= -\mu_3;
\end{aligned}$$

$$\langle \nabla_{E_3} E_1, E_j \rangle = 0, \quad \forall j = 1, 2, 3.$$

Assim temos,

$$\begin{gathered}
\nabla_{E_1} E_1 = 0,\ \nabla_{E_1} E_2 = \mu_1 E_3,\ \nabla_{E_1} E_3 = -\mu_1 E_2, \\
\nabla_{E_2} E_1 = -\mu_2 E_3,\ \nabla_{E_2} E_2 = 0,\ \nabla_{E_2} E_3 = \mu_2 E_1, \\
\nabla_{E_3} E_1 = \mu_3 E_2,\ \nabla_{E_3} E_2 = -\mu_3 E_1,\ \nabla_{E_3} E_3 = 0.
\end{gathered}$$

Seja $V = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i E_i$, teremos

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_1} V &= \alpha_1 \nabla_{E_1} E_1 + \alpha_2 \nabla_{E_1} E_2 + \alpha_3 \nabla_{E_1} E_3 \\
&= \alpha_2 \mu_1 E_3 - \alpha_3 \mu_1 E_2 \\
&= \mu_1(\alpha_2 E_3 - \alpha_3 E_2).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\mu_1 E_1 \times V &= \mu_1 E_1 \times (\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3)\\
&= \mu_1 E_1 \times \alpha_1 E_1 + \mu_1 E_1 \times \alpha_2 E_2 + \mu_1 E_1 \times \alpha_3 E_3\\
&= \mu_1 \alpha_1 (E_1 \times E_1) + \mu_1 \alpha_2 (E_1 \times E_2) + \mu_1 \alpha_3 (E_1 \times E_3)\\
&= \mu_1 \alpha_2 E_3 - \mu_1 \alpha_3 E_2\\
&= \mu_1 (\alpha_2 E_3 - \alpha_3 E_2).
\end{aligned}$$

Daí concluímos que

$$\nabla_{E_1} V = \mu_1 E_1 \times V,$$

para todo V na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. De forma análoga, obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla_{E_2} V &= \mu_2 E_2 \times V,\\
\nabla_{E_3} V &= \mu_3 E_3 \times V.
\end{aligned}$$

Em geral podemos escrever

$$\nabla_{E_i} \cdot = \mu_i E_i \times \cdot.$$

Por exemplo, $\nabla_{E_1} = \mu_1 E_1 \times$ é uma transformação linear autoadjunta definida por

$$E_1 \longmapsto \nabla_{E_1} E_1 = 0, \qquad E_2 \longmapsto \nabla_{E_1} E_2 = \mu_1 E_3, \qquad E_3 \longmapsto \nabla_{E_1} E_3 = -\mu_1 E_2.$$

Pela identidade de Jacobi, temos

- $E_1 \times (E_2 \times E_1) + E_2 \times (E_1 \times E_1) + E_1 \times (E_1 \times E_2) = E_1 \times (-E_3) + E_1 \times E_3 = 0,$
- $E_1 \times (E_2 \times E_2) + E_2 \times (E_2 \times E_1) + E_2 \times (E_1 \times E_2) = E_2 \times (-E_3) + E_2 \times E_3 = 0,$
- $E_1 \times (E_2 \times E_3) + E_2 \times (E_3 \times E_1) + E_3 \times (E_1 \times E_2) = E_1 \times E_1 + E_2 \times E_2 + E_3 \times E_3 = 0.$

Por linearidade, podemos concluir que

$$E_1 \times (E_2 \times V) + E_2 \times (V \times E_1) + V \times (E_1 \times E_2) = 0,$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
(E_1 \times E_2) \times V &= E_1 \times (E_2 \times V) + E_2 \times (V \times E_1)\\
&= E_1 \times (E_2 \times V) - E_2 \times (E_1 \times V).
\end{aligned}$$

Agora obteremos o tensor curvatura,

$$
\begin{aligned}
R(E_1,E_2) &= \nabla_{[E_1,E_2]} - \nabla_{E_1}\nabla_{E_2} + \nabla_{E_2}\nabla_{E_1}\\
&= \nabla_{\lambda_3 E_3} - \nabla_{E_1}(\mu_2 E_2 \times \cdot) + \nabla_{E_2}(\mu_1 E_1 \times \cdot)\\
&= \lambda_3 \nabla_{E_3} - \mu_1 E_1 \times (\mu_2 E_2 \times \cdot) + \mu_2 E_2 \times (\mu_1 E_1 \times \cdot)\\
&= \lambda_3(\mu_3 E_3 \times \cdot) - \mu_1\mu_2(E_1 \times (E_2 \times \cdot)) + \mu_2\mu_1(E_2 \times (E_1 \times \cdot))\\
&= \lambda_3\mu_3(E_3 \times \cdot) - \mu_1\mu_2((E_1 \times E_2) \times \cdot)\\
&= \lambda_3\mu_3(E_3 \times \cdot) - \mu_1\mu_2(E_3 \times \cdot)\\
&= (\lambda_3\mu_3 - \mu_1\mu_2)(E_3 \times \cdot),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R(E_2,E_1) &= -R(E_1,E_2)\\
&= (-\lambda_3\mu_3 + \mu_1\mu_2)(E_3 \times \cdot),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R(E_1,E_3) &= \nabla_{[E_1,E_3]} - \nabla_{E_1}\nabla_{E_3} + \nabla_{E_3}\nabla_{E_1}\\
&= \nabla_{-\lambda_2 E_2} - \nabla_{E_1}(\mu_3 E_3 \times \cdot) + \nabla_{E_3}(\mu_1 E_1 \times \cdot)\\
&= -\lambda_2 \nabla_{E_2} - \mu_1 E_1 \times (\mu_3 E_3 \times \cdot) + \mu_3 E_3 \times (\mu_1 E_1 \times \cdot)\\
&= -\lambda_2(\mu_2 E_2 \times \cdot) - \mu_1\mu_3(E_1 \times (E_3 \times \cdot)) + \mu_3\mu_1(E_3 \times (E_1 \times \cdot))\\
&= -\lambda_2\mu_2(E_2 \times \cdot) - \mu_1\mu_3((E_1 \times E_3) \times \cdot)\\
&= -\lambda_2\mu_2(E_2 \times \cdot) - \mu_1\mu_3(-E_2 \times \cdot)\\
&= (-\lambda_2\mu_2 + \mu_1\mu_3)(E_2 \times \cdot),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R(E_3,E_1) &= -R(E_1,E_3)\\
&= (\lambda_2\mu_2 - \mu_1\mu_3)(E_2 \times \cdot),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R(E_2,E_3) &= \nabla_{[E_2,E_3]} - \nabla_{E_2}\nabla_{E_3} + \nabla_{E_3}\nabla_{E_2}\\
&= \nabla_{\lambda_1 E_1} - \nabla_{E_2}(\mu_3 E_3 \times \cdot) + \nabla_{E_3}(\mu_2 E_2 \times \cdot)\\
&= \lambda_1 \nabla_{E_1} - \mu_2 E_2 \times (\mu_3 E_3 \times \cdot) + \mu_3 E_3 \times (\mu_2 E_2 \times \cdot)\\
&= \lambda_1(\mu_1 E_1 \times \cdot) - \mu_2\mu_3(E_2 \times (E_3 \times \cdot) + \mu_3\mu_2(E_3 \times (E_2 \times \cdot)\\
&= \lambda_1\mu_1(E_1 \times \cdot) - \mu_2\mu_3((E_2 \times E_3) \times \cdot)\\
&= \lambda_1\mu_1(E_1 \times \cdot) - \mu_2\mu_3(E_1 \times \cdot)\\
&= (\lambda_1\mu_1 - \mu_2\mu_3)(E_1 \times \cdot),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R(E_3,E_2) &= -R(E_2,E_3)\\
&= (-\lambda_1\mu_1 + \mu_2\mu_3)(E_1 \times \cdot).
\end{aligned}
$$

Portanto, temos

$$
\begin{aligned}
R(E_1,E_2)E_1 &= (\lambda_3\mu_3 - \mu_1\mu_2)(E_3 \times E_1)\\
&= (\lambda_3\mu_3 - \mu_1\mu_2)E_2,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
R(E_1,E_2)E_2 &= (\lambda_3\mu_3 - \mu_1\mu_2)(E_3 \times E_2) \\
&= (\lambda_3\mu_3 - \mu_1\mu_2)(-E_1) \\
&= (-\lambda_3\mu_3 + \mu_1\mu_2)E_1,
\end{aligned}$$

$$R(E_1,E_2)E_3 = 0,$$

$$\begin{aligned}
R(E_3,E_1)E_1 &= (\lambda_2\mu_2 - \mu_1\mu_3)(E_2 \times E_1) \\
&= (-\lambda_2\mu_2 + \mu_1\mu_3)E_3,
\end{aligned}$$

$$R(E_3,E_1)E_2 = 0,$$

$$\begin{aligned}
R(E_3,E_1)E_3 &= (\lambda_2\mu_2 - \mu_1\mu_3)(E_2 \times E_3) \\
&= (\lambda_2\mu_2 - \mu_1\mu_3)E_1,
\end{aligned}$$

$$R(E_2,E_3)E_1 = 0,$$

$$\begin{aligned}
R(E_2,E_3)E_2 &= (\lambda_1\mu_1 - \mu_2\mu_3)(E_1 \times E_2) \\
&= (\lambda_1\mu_1 - \mu_2\mu_3)E_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(E_2,E_3)E_3 &= (\lambda_1\mu_1 - \mu_2\mu_3)(E_1 \times E_3) \\
&= (-\lambda_1\mu_1 + \mu_2\mu_3)E_2.
\end{aligned}$$

Sabe-se que a forma quadrática de Ricci é dada por

$$\widehat{r}(X) = \sum_{i=1}^{3} R(E_i, X)E_i.$$

Daí obtemos,

$$
\begin{aligned}
\widehat{r}(E_2) &= R(E_1,E_2)E_1 + R(E_2,E_2)E_2 + R(E_3,E_2)E_3 \\
&= (\lambda_3\mu_3 - \mu_1\mu_2)E_2 + 0 + (\lambda_1\mu_1 - \mu_2\mu_3)E_2 \\
&= (\lambda_3\mu_3 - \mu_1\mu_2 + \lambda_1\mu_1 - \mu_2\mu_3)E_2 \\
&= (\lambda_3\mu_3 + \lambda_1\mu_1 - \mu_2(\mu_1+\mu_3))E_2 \\
&= \frac{1}{2}\left[\lambda_3(\lambda_1+\lambda_2-\lambda_3) + \lambda_1(-\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3) - \lambda_2(\lambda_1-\lambda_2+\lambda_3)\right]E_2 \\
&= \frac{1}{2}\left(\lambda_1\lambda_3 + \lambda_3\lambda_2 - \lambda_3\lambda_3 - \lambda_1\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_2 - \lambda_2\lambda_3\right)E_2 \\
&= \frac{1}{2}\left(2\lambda_1\lambda_3 - \lambda_3\lambda_3 - \lambda_1\lambda_1 + \lambda_2\lambda_2\right)E_2 \\
&= 2\mu_1\mu_3E_2.
\end{aligned}
$$

Analogamente, obtemos

$$
\widehat{r}(E_1) = 2\mu_2\mu_3E_1, \qquad \widehat{r}(E_3) = 2\mu_1\mu_2E_3.
$$

Assim, temos que E_1, E_2, e E_3 são autovetores da transformação de Ricci $\widehat{r}$, cujos autovalores são $2\mu_2\mu_3$, $2\mu_1\mu_3$ e $2\mu_1\mu_2$, respectivamente. ■

Em particular, temos uma fórmula para a curvatura escalar

$$
\begin{aligned}
\rho &= \widehat{r}(E_1) + \widehat{r}(E_2) + \widehat{r}(E_3) \\
&= 2(\mu_2\mu_3 + \mu_1\mu_3 + \mu_1\mu_2).
\end{aligned}
$$

Usando a descrição da curvatura de Ricci, podemos calcular a curvatura seccional. Podemos tomar uma base $\{U,V,W\}$ de $\mathfrak{g}$, ortonormal e orientada , onde $U \times V = W$ e

$$
\begin{aligned}
r(U) &= k(U,U) + k(U,V) + k(U,W) \\
r(V) &= k(V,U) + k(V,V) + k(V,W) \\
r(W) &= k(W,U) + k(W,V) + k(W,W).
\end{aligned}
$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\rho(\mathfrak{g}) &= r(U) + r(V) + r(W) \\
&= 2(k(U,V) + k(U,W) + k(V,W)).
\end{aligned}
$$

Daí, obtemos a relação

$$\begin{aligned}
k(U,V) &= \frac{\rho}{2} - k(U,W) - k(V,W) \\
&= \frac{\rho}{2} - r(W) \\
&= \frac{\rho}{2} - r(U \times V).
\end{aligned}$$

Corolário 3.31. *No caso unimodular de dimensão 3, o determinante $r(E_1)r(E_2)r(E_3)$ da forma quadrática de Ricci é sempre não negativo. Se este determinante é zero, então pelo menos duas das curvaturas devem ser nulas.*

Demonstração. Do Teorema 3.30 temos que $r(E_1) = 2\mu_2\mu_3$, $r(E_2) = 2\mu_1\mu_3$ e $r(E_3) = 2\mu_1\mu_2$. Assim, o determinante da forma quadrática de Ricci é dado por

$$\begin{aligned}
r(E_1)r(E_2)r(E_3) &= (2\mu_2\mu_3)(2\mu_1\mu_3)(2\mu_1\mu_2) \\
&= 8\mu_1^2\mu_2^2\mu_3^2 \geq 0
\end{aligned}$$

A igualdade ocorre se $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$ ou $\mu_3 = 0$. Supondo, sem perda de generalidade, que $\mu_2 = 0$, então $r(E_1) = r(E_3) = 0$, ou seja, pelo menos duas das curvaturas devem ser nula. ∎

Suponha que alteremos a métrica mantendo a operação colchete fixada. Se escolhermos uma nova métrica tal que a base $\{\eta\alpha E_1, \xi\alpha E_2, \xi\eta E_3\}$ seja ortonormal, então as novas constantes de estruturas são

$$\begin{aligned}
[\eta\alpha E_1, \xi\alpha E_2] &= \eta\alpha^2\xi[E_1, E_2] \\
&= \eta\alpha^2\xi\lambda_3 E_3 \\
&= \alpha^2\lambda_3\eta\xi E_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\xi\alpha E_2, \xi\eta E_3] &= \xi^2\alpha\eta[E_2, E_3] \\
&= \xi^2\alpha\eta\lambda_1 E_1 \\
&= \xi^2\lambda_1\alpha\eta E_1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[\xi\eta E_3, \eta\alpha E_1] &= \xi\eta^2\alpha[E_3, E_1] \\
&= \eta^2\lambda_2\xi\alpha E_2.
\end{aligned}$$

Assim as novas constantes de estruturas são $\xi^2\lambda_1$, $\eta^2\lambda_2$ e $\alpha^2\lambda_3$. Dessa forma, podemos multiplicar λ_1, λ_2, λ_3 por constantes positivas sem alterar a álgebra de Lie subjacente.

Exemplo 3.8. Considere o grupo de Heisenberg, o qual é constituido pelas matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sua álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é formada pelas matrizes triangulares superiores, da forma

$$\begin{bmatrix} 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $\mathfrak{g}$ é nilpotente, segue-se que $ad(X)$ é nilpotente, para todo $X \in \mathfrak{g}$, e portanto tem traço zero. Daí pelo Lema 3.12, concluímos que o grupo de Heisenberg é unimodular.

Agora considere a seguinte base de $\mathfrak{g}$:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então:

$$[E_1, E_2] = 0, \quad [E_2, E_3] = E_1, \quad [E_3, E_1] = 0.$$

Assim, a menos de um múltiplo escalar, concluímos que as constantes de estrutura λ_1, λ_2 e λ_3 são 1, 0, 0, respectivamente. Então:

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{1}{2}\lambda_1 - \lambda_1 = -\frac{1}{2}\lambda_1 \\ \mu_2 &= \frac{1}{2}\lambda_1 \\ \mu_3 &= \frac{1}{2}\lambda_1. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema 3.30, segue-se que:

$$\begin{aligned} r(E_1) &= 2\mu_2\mu_3 = \frac{\lambda_1^2}{2} \\ r(E_2) &= 2\mu_1\mu_3 = -\frac{\lambda_1^2}{2} \\ r(E_3) &= 2\mu_1\mu_2 = -\frac{\lambda_1^2}{2}. \end{aligned}$$

Assim a curvatura escalar é dada por:

$$\rho = \frac{\lambda_1^2}{2} - \frac{\lambda_1^2}{2} - \frac{\lambda_1^2}{2} = -\frac{\lambda_1^2}{2} < 0.$$

Além disso, $|\rho| = |r(E_1)| = |r(E_2)| = |r(E_3)|$.
Assim provamos o seguinte resultado:

Corolário 3.32. *Para qualquer métrica invariante à esquerda no grupo de Heisenberg, a forma quadrática tem assinatura (+, -, -) e a curvatura escalar ρ é estritamente negativa. Além disso, as curvaturas principais de Ricci, satisfazem*

$$|r(E_1)| = |r(E_2)| = |r(E_3)| = |\rho|.$$

Exemplo 3.9. Considere o grupo de Lie $E(2) = \left\{ \begin{bmatrix} cos(t) & sen(t) & x \\ sen(t) & cos(t) & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;\ t, x, y \in \mathbb{R} \right\}$ dos movimentos rígidos do plano. A álgebra de Lie $\mathfrak{e}(2)$ de $E(2)$ é dada por

$$\mathfrak{e}(2) = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a & x \\ -a & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ;\ a, x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Considere a seguinte base de $\mathfrak{e}(2)$ formada por:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \ e \ E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Então:

$$[E_1, E_2] = 0, \quad [E_2, E_3] = E_1, \quad [E_3, E_1] = E_2.$$

Daí temos que:

$$ad(E_1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad ad(E_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad ad(E_3) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como a representação adjunta de $\mathfrak{e}(2)$ é uma transformação linear, segue que $\mathrm{tr}(ad(X)) = 0$ para todo $X \in \mathfrak{e}(2)$. Portanto, pelo Lema 3.12, o grupo de Lie $E(2)$ é unimodular. Assim, a menos de um múltiplo escalar, podemos dizer que as constantes de estrutura λ_1, λ_2 e λ_3 são 1, 1, 0, respectivamente. Então:

$$\mu_1 = \frac{1}{2}(-\lambda_1 + \lambda_2), \quad \mu_2 = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2), \quad \mu_3 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2).$$

Logo, pelo Teorema 3.30, temos:

$$\begin{aligned} r(E_1) &= 2\mu 2\mu_3 = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 - \lambda_2^2), \\ r(E_2) &= 2\mu_1\mu_3 = \frac{1}{2}(\lambda_2^2 - \lambda_1^2), \\ r(E_3) &= 2\mu_1\mu_2 = -\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)^2, \end{aligned}$$

Se $\lambda_1^2 > \lambda_2^2$ então $r(E_1) > 0$, $r(E_2) < 0$ e $r(E_3) < 0$. Por outro lado, pode ocorrer de $\lambda_2^2 > \lambda_1^2$ e neste caso teremos $r(E_1) < 0$, $r(E_2) > 0$ e $r(E_3) < 0$. Portanto, em todos os casos a assinatura da curvatura de Ricci é (+, -, -). E ainda,

$$\rho = -\frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)^2 \leq 0.$$

A igualdade vale se, e somente se $\lambda_1 = \lambda_2$. Assim temos:

$$\mu_1 = \mu_2 = 0,$$

logo, $r(E_1) = r(E_2) = \rho = 0$. As curvaturas seccionais dadas por $k(U, V) = \frac{\rho}{2} - r(U \times V) = 0$, portanto, $E(2)$ será flat. Assim, provamos o seguinte resultado:

Corolário 3.33. *O grupo de Lie $E(2)$ admite uma métrica invariante à esquerda flat. Para toda métrica invariante à esquerda não flat a curvatura de Ricci possui assinatura (+, -, -) e a curvatura escalar é estritamente negativa.*

3.6 Curvaturas de métricas bi-invariantes

Sabemos que uma métrica Riemanniana no grupo de Lie G é bi-invariante se é invariante tanto à esquerda quanto à direita.

Definição 3.4. Uma métrica no grupo de Lie G é bi-invariante se a representação adjunta da álgebra de Lie associada $\mathfrak{g}$ é antissimétrica, ou seja, se $ad(X)$ é antissimétrica, para X em $\mathfrak{g}$.

Vamos calcular a conexão Riemanniana para um grupo de Lie G com métrica bi-invariante. Pela fórmula 3.1os

$$\begin{aligned} \langle \nabla_X Y, Z \rangle &= \frac{1}{2}(\langle ad(X)(Y), Z \rangle - \langle ad(Y)(Z), X \rangle + \langle ad(Z)(X), Y \rangle) \\ &= \frac{1}{2}(\langle ad(X)(Y), Z \rangle - \langle ad(Y)(Z), X \rangle - \langle X, ad(Z)(Y) \rangle) \\ &= \frac{1}{2}(\langle ad(X)(Y), Z \rangle - \langle ad(Y)(Z), X \rangle + \langle X, ad(Y)(Z) \rangle) \\ &= \frac{1}{2}(\langle ad(X)(Y), Z \rangle). \end{aligned}$$

Portanto, $\nabla_X Y = \dfrac{1}{2}ad(X)(Y)$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$. Assim o tensor curvatura $R(X,Y)$, com $X, Y \in \mathfrak{g}$, é dado por:

$$\begin{aligned}
\langle R(X,Y)Z, W\rangle &= \langle \nabla_{[X,Y]}Z, W\rangle - \langle \nabla_X\nabla_Y Z, W\rangle + \langle \nabla_Y\nabla_X Z, W\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle ad([X,Y])(Z), W\rangle - \left\langle \nabla_X\left(\frac{1}{2}ad(Y)(Z)\right), W\right\rangle \\
&\quad + \left\langle \nabla_Y\left(\frac{1}{2}ad(X)(Z)\right), W\right\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle ad([X,Y])(Z), W\rangle - \frac{1}{4}\langle ad(X)\left(ad(Y)(Z)\right), W\rangle \\
&\quad + \frac{1}{4}\langle ad(Y)\left(ad(X)(Z)\right), W\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{2}ad([X,Y])(Z) - \frac{1}{4}ad(X)(ad(Y))(Z) + \frac{1}{4}ad(Y)(ad(X))(Z), W\right\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto, $R(X,Y) = \dfrac{1}{2}ad([X,Y]) - \dfrac{1}{4}ad(X)ad(Y) + \dfrac{1}{4}ad(Y)ad(X)$.

Usando a identidade de Jacobi dada em (3.5):

$$ad([X,Y]) = ad(X)ad(Y) - ad(Y)ad(X),$$

a fórmula do tensor curvatura acima se reduz:

$$R(X,Y) = \frac{1}{4}ad([X,Y]).$$

Agora, vamos calcular a função curvatura seccional k. Sejam X e Y ortonormais, então: assim,

$$\begin{aligned}
k(X,Y) &= \langle R(X,Y)X, Y\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{4}ad([X,Y])(X), Y\right\rangle \\
&= -\frac{1}{4}\langle ad(X)([X,Y]), Y\rangle \\
&= \frac{1}{4}\langle [X,Y], ad(X)(Y)\rangle \\
&= \frac{1}{4}\langle [X,Y], [X,Y]\rangle \\
&= \frac{1}{4}\|[X,Y]\|^2.
\end{aligned}$$

Da fórmula, acima concluímos que $k(X,Y) \geq 0$, cuja igualdade ocorre se, e somente se, $[X,Y] = 0$. Como vimos na seção 3.3, a curvatura de Ricci $r(X)$ pode ser obtida pelo traço da transformação linear

$$Y \longmapsto R(X,Y)X.$$

Sabe-se, veja [1] ou [5], que se G é um grupo de Lie conexo, simplesmente conexo e compacto, então a forma de Killing, dada por $B(X,Y) = tr(ad(X) \circ ad(Y))$ é bilinear, simétrica e negativa definida. Assim, $-B(\cdot,\cdot)$ define uma métrica em G. Agora vamos calcular a curvatura de Ricci de um grupo de Lie munido desta métrica.

Considere a negativa da forma de Killing $-B(X,Y) = -\mathrm{tr}(ad(X) \circ ad(Y))$, com $X, Y \in \mathfrak{g}$ e uma base ortonormal $\{E_1, \cdots, E_n\}$ de $\mathfrak{g}$. Então,

$$\begin{aligned} B(X,Y) &= \sum_{i=1}^{n} \langle ad(X)(ad(Y)(E_i)), E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle [X,[Y,E_i]], E_i \rangle. \end{aligned}$$

Assim, $B(X,X) = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle [X,[X,E_i]], E_i \rangle$.
Por outro lado, seja a aplicação linear

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ Y &\longmapsto R(X,Y)X. \end{aligned}$$

Logo, a curvatura de Ricci $r(X)$ é dada pelo traço da φ, ou seja

$$\begin{aligned} r(X) &= \sum_{i=1}^{n} \langle R(X,E_i)X, E_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{1}{4} ad([X,E_i])X, E_i \right\rangle \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \langle ad(X)([X,E_i]), E_i \rangle \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n} \langle [X,[X,E_i]], E_i \rangle \\ &= -\frac{1}{4} B(X,X). \end{aligned}$$

Definição 3.5. Uma variedade Riemanniana (M,g) é chamada *variedade Einstein* se a curvatura de Ricci satisfaz a equação $r(X) = cg(X,X)$ para qualquer constante c. A métrica g é chamada *métrica Einstein.*

Observação 3.34. Do caso acima, podemos concluir que se G é um grupo de Lie conexo ou simplesmente conexo, compacto e semissimples então

$$r(X) = -\frac{1}{4}B(X, X),$$

ou seja, a negativa da forma de Killing é uma métrica Einstein em G.

3.7 Problemas em aberto

Os problemas abaixo, com exceção do último, são retirados do artigo [7]. Constatamos que os seguintes problemas ainda não foram resolvidos, com base em uma busca realizada no Mathscinet, Zentralblatt e Google.

- Caracterizar os grupos de Lie conexos que admitem métricas invariantes à esquerda com todas as curvaturas de Ricci não negativas.
- Outro fato interessante é saber quais grupos de Lie admitem métricas invariantes à esquerda com curvatura de Ricci não positivas.
- Saber quais grupos admitem métricas invariantes à esquerda com curvatura de Ricci identicamente nula, ou curvatura de Ricci estritamente negativa (constante ou não constante).
- Saber em quais condições um grupo de Lie admite métrica invariante à esquerda com curvatura escalar estritamente positiva.
- Caracterizar os grupos de Lie que admitem métricas invariante à esquerda Einstein.

Referências Bibliográficas

[1] Arvanitoyeorgos, A., *An Introduction to Lie Groups and the Geometry of Homogeneous Spaces*, Student Mathematical Library, v. 22, 2003.

[2] Barros, C. J. B., Santana, A. J., *Estruturas Algébricas: com ênfase em elementos da teoria de Lie*, EDUEM, Maringá, 2011.

[3] Do Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides - IMPA, 2008.

[4] Do Carmo, M. P., *Notas de um curso de Grupos de Lie*, IMPA, Rio de Janeiro, 1974.

[5] Knapp, A. W., *Lie Groups Beyond an Introduction*, Progress in Mathematics, v. 140, 2nd edition, 2002.

[6] Kobayashi S., Nomizu K., *Foundations of Differential Geometry*, Intersciences Publishers, 1969 v. 1 e 2.

[7] Milnor, *J., Curvatures of Left Invariant Metrics on Lie Groups*, Advances in Mathematics, 21, 1976.

[8] San Martin, L. A. B., *Álgebras de Lie*, Editora Unicamp, 1999.

[9] San Martin, L. A. B., *Grupos de Lie*, Unicamp, 2014.(Não publicado)

[10] Helgasson, S., *Diferential Geometry and Simmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1962.

[11] Vinícius, G., *Curvatura Seccional Não Negativa em grupos de Lie com métrica Invariante*, Dissertação de mestrado, UFGRS, 2012.

[12] Warner, F. W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, 1983.