

ANGELINA CARRIJO DE OLIVEIRA

Comportamento assintótico dos autovalores de operadores integrais positivos via módulos de suavidade na esfera



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2015

ANGELINA CARRIJO DE OLIVEIRA

Comportamento assintótico dos autovalores de operadores integrais positivos via módulos de suavidade na esfera

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.

Linha de Pesquisa: Análise Funcional.

Orientador: Prof. Dr. Mario Henrique de Castro.

UBERLÂNDIA - MG
2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

- O48c
2015 Oliveira, Angelina Carrijo de, 1990-
 Comportamento assintotico dos autovalores de operadores integrais
 positivos via módulos de suavidade na esfera / Angelina Carrijo de
 Oliveira. - 2015.
 71 f. : il.
- Orientador: Mario Henrique de Castro.
 Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia,
 Programa de Pós-Graduação em Matemática.
 Inclui bibliografia.
1. Matemática - Teses. 2. Harmônicos esféricos - Teses. 3. Laplace,
 Transformadas de - Teses. I. Castro, Mario Henrique de. II. Universidade
 Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III.
 Título.

CDU: 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO: Angelina Carrijo de Oliveira.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11312MAT001.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Análise Funcional.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Comportamento assintótico dos autovalores de operadores integrais positivos via módulos de suavidade na esfera.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Mario Henrique de Castro.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade Gestão e Negócios, Bloco 1F223, Campus Santa Mônica, em 24 de fevereiro de 2015, às 10h00min, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME

ASSINATURA

Prof. Dr. José Claudinei Ferreira
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Dr. Mario Henrique de Castro
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Profa. Dra. Thaís Jordão
USP - Universidade de São Paulo

Uberlândia-MG, 24 de fevereiro de 2015.

Àquele que é o Senhor de todas as coisas.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, o verdadeiro responsável por essa conquista. Certamente, sem Ele, eu nada teria alcançado e não teria superado todos os momentos de dificuldade.

À todos os professores que encontrei, em mais de seis anos dedicados a matemática, por todo o incentivo e dedicação proporcionados, em especial àqueles que foram meus orientadores ao longo desse tempo, Antônio Carlos Nogueira, Victor Gonzalo Lopez Neumann, Vinicius Vieira Fávaro e Mario Henrique de Castro. Também a professora Ana Carla Piantella por sua solicitude e contribuição nesse trabalho.

Aos amigos conquistados e todos aqueles que de alguma forma contribuíram para minha formação pessoal e acadêmica até essa etapa de minha vida.

Ao meu namorado Danilo por todo seu amor e paciência.

À minha família por todo o apoio concedido.

À Capes pelo apoio financeiro.

Oliveira, A. C. *Comportamento assintótico dos autovalores de operadores integrais positivos via módulos de suavidade na esfera*. 2015. 71 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Neste trabalho estudamos a taxa de decaimento dos autovalores de operadores integrais positivos gerados por núcleos definidos na esfera unitária S^m centrada na origem do espaço euclidiano \mathbb{R}^{m+1} , $m \geq 2$, que satisfazem certas condições esféricas de suavidade, a saber, condições do tipo Hölder e condições de diferenciabilidade forte no sentido de Laplace-Beltrami.

Palavras-chave: Harmônicos esféricos, núcleos L^2 -positivos definidos, condição de Hölder, derivada forte de Laplace-Beltrami, módulo de suavidade.

Oliveira, A. C. *Asymptotic behavior of the eigenvalues of positive integral operators by means of moduli of smoothness on the sphere*. 2015. 71 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

We study decay rates for eigenvalues of positive integral operators generated by kernels defined on the unit sphere S^m of the euclidean space \mathbb{R}^{m+1} , $m \geq 2$, satisfying certain spherical conditions of smoothness, named Hölder conditions and strong differentiability in the sense of Laplace-Beltrami.

Keywords: Spherical harmonics, L^2 -positive definite kernels, Hölder condition, strong Laplace-Beltrami derivative, moduli of smoothness.

Sumário

Resumo	vii
Abstract	viii
Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Topologia e Teoria da Medida	3
1.2 Análise Funcional	6
2 Análise esférica	11
2.1 Polinômios homogêneos	11
2.2 Harmônicos esféricos	13
2.3 $L^2(S^m)$ e expansões em séries de Fourier	17
2.4 Núcleos de reprodução	18
2.5 Fórmula da Adição	21
3 Operadores esféricos	25
3.1 Sistemas fundamentais em S^m	25
3.2 Projeção esférica	26
3.3 Convolução esférica	29
3.4 Translação esférica	30
3.5 Diferença esférica	34
3.6 Derivada forte de Laplace-Beltrami	35
4 Aproximação na esfera	41
4.1 Módulo de suavidade e equivalências	41
4.2 Estimativas para os coeficientes de Fourier	46
4.3 Resultados auxiliares	52
4.4 Decaimento de autovalores	56
Referências Bibliográficas	60

Introdução

Seja S^m a esfera unitária centrada na origem do espaço euclidiano \mathbb{R}^{m+1} , $m \geq 2$, munida da medida de Lebesgue induzida normalizada σ_m . Consideremos o espaço de Hilbert $L^2(S^m)$ das funções complexas de quadrado integrável sobre S^m com produto interno usual $\langle f, g \rangle_2$ e a norma induzida $\|\cdot\|_2$. Neste trabalho consideramos operadores integrais definidos por

$$\mathcal{L}_K(f) = \int_{S^m} K(\cdot, y) f(y) d\sigma_m(y), \quad (1)$$

onde o núcleo $K: S^m \times S^m \rightarrow \mathbb{C}$ é um elemento de $L^2(S^m \times S^m)$. Neste caso, a equação (1) define um operador compacto sobre $L^2(S^m)$. Se K é L^2 -positivo definido no sentido de que

$$\int_{S^m} \int_{S^m} K(x, y) f(x) \overline{f(y)} d\sigma_m(x) d\sigma_m(y) \geq 0, \quad f \in L^2(S^m),$$

então \mathcal{L}_K é autoadjunto e podemos aplicar o Teorema Espectral para operadores compactos e autoadjuntos para escrever

$$\mathcal{L}_K(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{L}_K) \langle f, f_n \rangle_2 f_n, \quad f \in L^2(S^m),$$

onde $\{\lambda_n(\mathcal{L}_K)\}$ é uma sequência de números reais não negativos (possivelmente finita) decrescente para 0 e $\{f_n\}$ é uma base $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ -ortonormal de $L^2(S^m)$. Os números $\lambda_n(\mathcal{L}_K)$ são os autovalores de \mathcal{L}_K e a sequência $\{\lambda_n(\mathcal{L}_K)\}$ leva em consideração as possíveis repetições geradas pela multiplicidade algébrica de cada autovalor.

Nosso objetivo é estudar taxas de decaimento dos autovalores de operadores integrais gerados por determinados tipos de núcleos esféricos. Pesquisas dessa natureza tiveram sua origem por volta de 1912, quando H. Weyl [42] provou que se $K \in C^\ell([0, 1] \times [0, 1])$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\ell + \frac{1}{2}} \lambda_n(\mathcal{L}_K) = 0,$$

onde $C^\ell([0, 1] \times [0, 1])$ denota o espaço de Banach das funções cujas derivadas parciais de ordem ℓ são contínuas em $[0, 1] \times [0, 1]$. Adicionando positividade definida ao núcleo K , Reade [34, 1983] e Ha [24, 1986] obtiveram uma melhor taxa de decaimento estabelecendo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\ell+1} \lambda_n(\mathcal{L}_K) = 0.$$

No caso esférico, V. Menegatto, C. Oliveira e A. Peron [29, 2010] mostraram o seguinte resultado: “Se $K(\cdot, y) \in C^\ell(S^m)$, $y \in S^m$ e $\sup_{y \in S^m} \|K(\cdot, y)\|_{C^\ell(S^m)} < \infty$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1+\ell/m} \lambda_n(\mathcal{L}_K) < \infty,$$

onde $C^\ell(S^m)$ denota a classe das funções contínuas $\varphi: S^m \rightarrow \mathbb{C}$ tendo a seguinte característica, $\varphi \circ \Phi^{-1} \in C^\ell(\Phi(U))$, onde $\Phi: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ é um gráfico em S^m .”

Ainda no contexto esférico, considerando o espaço W_2^r das funções r vezes diferenciáveis no sentido de Laplace-Beltrami, M. Castro e V. Menegatto [10, 2012] mostraram o seguinte: “Seja K é um núcleo L^2 -positivo definido em W_2^r . Se $\mathcal{L}_{K0,r}$ é nuclear, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1+2r/m} \lambda_n(\mathcal{L}_K) = 0,$$

onde $\mathcal{L}_{K0,r}$ é o operador integral associado ao núcleo $K_{0,r}(x, y) := \mathcal{D}_y^r K(x, y)$, com $\mathcal{D}_y^r K(x, y)$ sendo a r -ésima derivada de Laplace-Beltrami de K com relação à variável y .”

Em um outro artigo, Reade [35, 1983] considera núcleos que satisfazem uma condição de Hölder de suavidade, isto é, núcleos simétricos para o qual existe uma constante C independente de x e y de modo que

$$|K(x, y) - K(x', y')| \leq C(|x - x'|^r + |y - y'|^r),$$

onde $0 < r < 1$ é uma constante fixada. Reade mostrou que, se K satisfaz a desigualdade acima e é positivo definido, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{1+r} \lambda_n(\mathcal{L}_K) < \infty.$$

Algum tempo depois, Kühn [26, 1987] generalizou este resultado da seguinte forma: “Para todo $0 < r < \infty$ e cada núcleo positivo definido $K \in \mathcal{C}^{r,0}(M)$, onde M é uma variedade \mathbb{C}^∞ , compacta e m -dimensional, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{r/m+1} \lambda_n(\mathcal{L}_K) < \infty,$$

onde $\mathcal{C}^{r,0}(M) = \{K : M \times M \rightarrow \mathbb{C} : K(\cdot, y) \in \mathcal{C}^r(M), \text{ para cada } y \in M\}$, $\mathcal{C}^r(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{C} : \text{existe } g \in \mathcal{C}^r(\mathbb{R}^m) \text{ com } f = g|_M\}$ e $\mathcal{C}^r(\mathbb{R}^m) = \{f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C} : \|f\|_{\mathcal{C}^r(\mathbb{R}^m)} < \infty\}$.”

Neste trabalho estudamos problemas similares aos citados anteriormente, em um contexto esférico conforme realizado por T. Jordão, V. Menegatto e X. Sun, em [25, 2014]. Precisamente, usamos duas condições de suavidade para os núcleos, veja equações (3.4) e (4.8). Ao estabelecer essas condições, introduzimos novas ferramentas: módulos de suavidade e K -funcionais. Essas ferramentas já foram bastante utilizadas em Teoria da Aproximação, mas os autores de [25] são pioneiros em utilizá-las na obtenção de taxas de decaimento de autovalores.

O trabalho está dividido da seguinte forma:

No Capítulo 1, apresentamos resultados clássicos e consolidados que são utilizados no trabalho, alguns já adaptados ao contexto esférico.

No Capítulo 2, introduzimos a noção usual de diferenciabilidade de funções definidas em esferas e conceitos como os de homogeneidade e harmonicidade de funções. Introduzimos ainda alguns espaços de polinômios, em especial os espaços de harmônicos esféricos e suas propriedades. Prosseguimos com o estudo de funções de quadrado integrável e de suas expansões de Fourier. Ainda apresentamos propriedades dos polinômios de Legendre, introduzimos os núcleos de reprodução dos espaços de harmônicos esféricos e enunciamos e provamos a conhecida Fórmula da Adição.

No Capítulo 3, mostramos a existência de sistemas fundamentais na esfera e introduzimos os operadores projeção, convolução, translação e diferença esféricas. Por fim, definimos a derivada forte de Laplace-Beltrami e provamos algumas de suas propriedades.

No Capítulo 4, deduzimos algumas propriedades do módulo de suavidade esférico, dentre elas sua equivalência com o K -funcional correspondente. Analisamos o decaimento dos autovalores de operadores integrais associados a núcleos L^2 -positivos definidos satisfazendo as condições relacionadas a suavidade citadas anteriormente.

Capítulo 1

Preliminares

Começamos lembrando alguns conceitos e resultados básicos sobre Topologia, Teoria da Medida e Análise Funcional. Esses resultados serão utilizados nos capítulos subsequentes. Uma discussão mais abrangente desses resultados, incluindo demonstrações e aplicações dos mesmos, pode ser encontrada em várias referências, dentre elas [8, 20, 22, 23, 27, 32, 43].

Denotamos por S^m a esfera unitária centrada na origem do espaço euclidiano \mathbb{R}^{m+1} , $m \geq 2$, munida da medida de Lebesgue induzida normalizada σ_m , por X e Y espaços vetoriais e $C(X)$ o conjunto das funções contínuas no espaço X .

1.1 Topologia e Teoria da Medida

Para sequências numéricas, usamos os seguintes conceitos para tratar da *ordem de convergência*.

Definição 1.1.1 *Dadas duas sequências de números reais $\{x_k\}$ e $\{y_k\}$, escrevemos $x_k = O(y_k)$ quando*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_k|}{|y_k|} < \infty,$$

e escrevemos $x_k = o(y_k)$ quando

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_k|}{|y_k|} = 0.$$

Proposição 1.1.2 *Nas condições da Definição 1.1.1, para que $x_k = O(y_k)$ é necessário e suficiente que exista uma constante $c > 0$ tal que $|x_k| \leq c|y_k|$, para k suficientemente grande.*

O próximo lema está demonstrado em [2]. Por completude optamos por colocar sua demonstração.

Lema 1.1.3 *Seja $\{c_n\}$ uma sequência de números reais positivos decrescente para 0. Se existem inteiros positivos l , m e r tais que*

$$c_{(ln)^m} \leq \frac{C}{n^r}, \quad n \geq n_0, \quad (1.1)$$

para algum $n_0 \in \mathbb{N}$, então

$$c_n \leq \frac{C'}{n^{r/m}} \quad n \geq n_1,$$

para algum $C' > 0$ e algum n_1 .

Demonstração. Sejam l , m e r como no enunciado. A inequação (1.1) implica que

$$c_{n^m} \leq \frac{Cl^r}{n^r}, \quad n \geq ln_0.$$

Defina $C_1 = Cl^r$ e escolha N no conjunto $\{ln_0, ln_0 + 1, \dots\}$. Como $c_{N^m} \leq C_1 N^{-r}$ e a sequência $\{c_n\}$ é decrescente, então

$$c_{N^{m+1}} \leq \frac{C_1}{(N^m)^{r/m}} = \frac{C_1}{(N^m + 1)^{r/m}} \cdot \left(\frac{N^m + 1}{N^m} \right)^{r/m},$$

indutivamente,

$$c_{N^m+j} \leq \frac{C_1}{(N^m + j)^{r/m}} \cdot \left(\frac{N^m + j}{N^m} \right)^{r/m}, \quad j = 1, 2, \dots, (N+1)^m - N^m - 1,$$

contudo, como

$$(N+1)^m - N^m - 1 \leq N^m \left[\left(1 + \frac{1}{N} \right)^m - 1 \right] \leq (2^m - 1)N^m,$$

isso mostra que

$$\frac{N^m + j}{N^m} \leq 2^m.$$

Assim,

$$c_{N^m+j} \leq \frac{C_1 2^r}{(N^m + j)^{r/m}}, \quad j = 1, 2, \dots, (N+1)^m - N^m - 1.$$

Portanto, a desigualdade desejada segue com $C' = C_1 2^r$ e $n_1 = N^m$. ■

Relembramos os espaços L^p e algumas de suas propriedades.

Definição 1.1.4 Sejam (X, μ) um espaço de medida e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos

$$L^p(X, \mu) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é } \mu\text{-mensurável e } \|f\|_p < \infty\},$$

onde

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|f\|_{\text{supess}} := \sup_{x \in X} \{|f(x)|\}.$$

O conjunto $L^p(X, \mu)$, $1 \leq p \leq \infty$, torna-se um espaço vetorial quando identificamos quaisquer duas funções f e g de $L^p(X, \mu)$ que coincidam μ -quase sempre (μ -q.s.) e, nesse caso, escrevemos $f = g$ μ -q.s..

Teorema 1.1.5 Para $p \geq 1$, valem as seguintes propriedades:

i) O espaço $(L^p(X, \mu), \|\cdot\|_p)$ é um espaço de Banach;

ii) $L^2(X, \mu)$ é um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$\langle f, g \rangle_2 := \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu(x), \quad f, g \in L^2(X, \mu).$$

Teorema 1.1.6 (Teorema de Fubini). *Sejam (X, μ) e (Y, ν) espaços com medidas σ -finitas. Se $f \in L^1(X \times Y, \mu \times \nu)$, então $f_x \in L^1(Y, \nu)$ para quase todo $x \in X$, $f^y \in L^1(X, \mu)$ para quase todo $y \in Y$, as funções definidas quase sempre $g(x) = \int f_x d\nu$ e $h(y) = \int f^y d\mu$ estão, respectivamente, em $L^1(X, \mu)$ e $L^1(Y, \nu)$ e*

$$\int f d(\mu \times \nu) = \int \left[\int f(x, y) d\nu(y) \right] d\mu(x) = \int \left[\int f(x, y) d\mu(x) \right] d\nu(y).$$

Teorema 1.1.7 (Desigualdade de Hölder). *Sejam $f \in L^p(X, \mu)$ e $g \in L^q(X, \mu)$, $1 \leq p < \infty$, q o expoente conjugado de p . Então, $f, g \in L^1(X, \mu)$ e*

$$\|fg\| \leq \|f\|_p \|g\|_q.$$

Teorema 1.1.8 (Desigualdade de Minkowsky para Integrais). *Sejam (X, μ) e (Y, ν) espaços com medidas σ -finitas e f uma função $(\mu \times \nu)$ -mensurável sobre $X \times Y$.*

i) *Se $f \geq 0$ e $1 \leq p < \infty$, então*

$$\left[\int_X \left(\int_Y f(x, y) d\nu(y) \right)^p d\mu(x) \right]^{1/p} \leq \int_Y \left[\int_X f(x, y)^p d\mu(x) \right]^{1/p} d\nu(y).$$

ii) *Se $1 \leq p \leq \infty$, $f(\cdot, y) \in L^p(X, \mu)$ μ -q.s. e a função $y \mapsto \|f(\cdot, y)\|_p$ é ν -integrável, então $f(x, \cdot) \in L^1(Y, \nu)$ ν -q.s., a função $x \mapsto \int f(x, y) d\nu(y)$ pertence a $L^p(X, \mu)$ e*

$$\left\| \int_Y f(\cdot, y) d\nu(y) \right\|_p \leq \int_Y \|f(\cdot, y)\|_p d\nu(y).$$

Teorema 1.1.9 *Sejam (X, μ) um espaço de medida e $L^+(X, \mu)$ o espaço de todas as funções mensuráveis de X em $[0, \infty]$. Se $f \in L^+(X, \mu)$, então $\int_X f d\mu = 0$ se, e somente se, $f = 0$ μ -q.s..*

Teorema 1.1.10 (Convergência Dominada). *Seja $\{f_n\}$ uma sequência em $L^1(X, \mu)$ que satisfaz:*

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ μ -q.s.;

ii) *Existe uma função $g \in L^1(X, \mu)$ tal que $|f_n| \leq g$ μ -q.s., $n \in \mathbb{N}$.*

Então, $f \in L^1(X, \mu)$ e

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) d\mu(x).$$

Denotamos por \mathcal{O}_m o conjunto das transformações ortogonais sobre \mathbb{R}^{m+1} . A ação de um elemento ρ de \mathcal{O}_m sobre $x \in \mathbb{R}^{m+1}$ será denotada por ρx . As propriedades básicas dos elementos de \mathcal{O}_m são listadas no lema abaixo.

Lema 1.1.11 *Valem as seguintes propriedades:*

i) *Se $\rho \in \mathcal{O}_m$ e $x, y \in \mathbb{R}^{m+1}$, então $\rho x \cdot \rho y = x \cdot y$;*

ii) *\mathcal{O}_m age transitivamente sobre S^m , isto é, se $\omega \in S^m$ e $\rho \in \mathcal{O}_m$, então existe $\tau \in S^m$ tal que $\rho\tau = \omega$.*

Teorema 1.1.12 *Seja $\rho \in \mathcal{O}_m$. Se $f \in L^1(S^m, \sigma_m)$, então $f \circ \rho \in L^1(S^m, \sigma_m)$ e vale a fórmula*

$$\int_{S^m} f(\rho\omega) d\sigma_m(\omega) = \int_{S^m} f(\omega) d\sigma_m(\omega).$$

Se $f, g \in L^2(S^m, \sigma_m)$, então

$$\int_{S^m} f(\rho\omega) \bar{g}(\rho\omega) d\sigma_m(\omega) = \int_{S^m} f(\omega) \bar{g}(\omega) d\sigma_m(\omega).$$

Teorema 1.1.13 *Seja $f \in L^1(S^m, \sigma_m)$. Se $\int_{S^m} f(\omega) g(\omega) d\sigma_m(\omega) = 0$, $g \in C(S^m)$, então $f = 0$.*

A próxima definição é retirada de [4, p.210].

Definição 1.1.14 *Sejam (X, μ) um espaço de medida, $1 \leq p \leq \infty$ e u um peso positivo, isto é, uma função μ -mensurável positiva μ -q.s.. Definimos o espaço de Lebesgue com peso $L_u^p(\mu)$, como sendo o espaço das funções f que são μ -mensuráveis em X , tais que $fu \in L^p(X, \mu)$. Escrevemos,*

$$\|f\|_{L_u^p(\mu)} := \|fu\|_p = \left(\int_X |f|^p u^p d\mu \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|f\|_{L_u^\infty(\mu)} := \|fu\|_{\sup_{ess} \sup_{ess} X} \{|fu|\}.$$

O próximo teorema fornece uma versão de Stein para o Teorema de Interpolação de Riesz-Thorin, e pode ser encontrado em [4, Teorema 3.6, p.213] e [38, Teorema 2, p.485].

Teorema 1.1.15 *Sejam (R, μ) e (S, ν) espaços de medidas σ -finitas e T um operador linear definido nas funções μ -simples em R e tomando valores nas funções ν -mensurável em S . Suponha que u_i, v_i são pesos positivos em R e S , respectivamente, e que $1 \leq p_i, q_i \leq \infty$, $(i = 0, 1)$. Suponha,*

$$\|(Tf)v_i\|_{q_i} \leq M_i \|fu_i\|_{p_i}, \quad (i = 0, 1)$$

para toda função f μ -simples. Seja $0 \leq \theta \leq 1$ e defina

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

e

$$u = u_0^{1-\theta} u_1^\theta, \quad v = v_0^{1-\theta} v_1^\theta.$$

Então, se $p < \infty$, o operador T tem uma única extensão para um operador linear limitado de L_u^p em L_v^q que satisfaz

$$\|(Tf)v\|_q \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|fu\|_p, \quad f \in L_u^p.$$

1.2 Análise Funcional

O produto interno no espaço X será denotado por $\langle x, y \rangle_X$, $x, y \in X$ e a norma proveniente é definida por $\|\cdot\|_X = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle_X}$. Nesta seção, \mathcal{H} denota um espaço de Hilbert.

Teorema 1.2.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Se X é um espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$, então*

$$|\langle x, y \rangle_X| \leq \|x\|_X \|y\|_X, \quad x, y \in X.$$

Teorema 1.2.2 (Desigualdade de Bessel). *Se \mathcal{H} é um espaço de Hilbert e $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é um subconjunto ortonormal de \mathcal{H} , então*

$$\sum_{\alpha \in A} |\langle y, x_\alpha \rangle_{\mathcal{H}}|^2 \leq \|y\|_{\mathcal{H}}^2, \quad y \in \mathcal{H}.$$

Lembramos que o somatório acima representa de fato a soma de uma série, ou seja, os elementos desta soma podem ser não nulos apenas em um conjunto enumerável de índices. O mesmo se aplica a outros somatórios do texto. Este resultado pode ser melhorado quando o conjunto em questão é uma base ortonormal do espaço.

Teorema 1.2.3 (Identidade de Parseval). *Se \mathcal{H} é um espaço de Hilbert e $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é uma base ortonormal de \mathcal{H} , então*

$$y = \sum_{\alpha \in A} \langle y, x_\alpha \rangle_{\mathcal{H}} x_\alpha, \quad y \in \mathcal{H},$$

e

$$\|y\|_{\mathcal{H}}^2 = \sum_{\alpha \in A} |\langle y, x_\alpha \rangle_{\mathcal{H}}|^2, \quad y \in \mathcal{H}.$$

Além disso, se $\{c_n\}$ é uma sequência de números complexos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$, então $x := \sum_{n=1}^{\infty} c_n x_{\alpha_n}$ é um elemento de \mathcal{H} e $c_n = \langle x, x_{\alpha_n} \rangle_{\mathcal{H}}$. Definimos o número $c_n = \langle x, x_{\alpha_n} \rangle_{\mathcal{H}}$ como sendo o coeficiente de Fourier de x em relação à base $\{x_\alpha\}$.

Recordamos agora alguns resultados sobre transformações lineares. Uma abordagem mais detalhada sobre este assunto pode ser encontrada em [32]. Sejam X e Y espaços vetoriais normados. O espaço $\mathcal{L}(X, Y)$ de todas as transformações lineares de X em Y é um espaço normado com a norma

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)} := \sup\{\|T(x)\|_Y : x \in X, \|x\|_X = 1\}.$$

Denotamos por $\mathcal{B}(X, Y)$ o espaço das transformações lineares limitadas (ou contínuas). Quando $X = Y$, escrevemos $\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{L}(X)$ e $\mathcal{B}(X, Y) = \mathcal{B}(X)$ e chamamos seus elementos de *operadores lineares*.

Teorema 1.2.4 *Sejam X um espaço vetorial normado e Y um espaço de Banach. Então, $\mathcal{B}(X, Y)$ é um espaço de Banach.*

Por simplicidade, denotamos $\|T\| := \|T\|_{\mathcal{L}(X, Y)}$. No caso em que X é um espaço de Hilbert e Y é \mathbb{R} ou \mathbb{C} , o teorema anterior pode ser melhorado pelo Teorema da Representação de Riesz, ver em [7], que garante a existência de um elemento $y = y(T) \in X$ tal que

$$T(x) = \langle x, y \rangle_X, \quad x \in X,$$

para cada $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Logo $\mathcal{L}(X, Y)$ é isomorfo a X quando Y é igual a \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Uma importante classe de transformações segue do seguinte teorema.

Teorema 1.2.5 *Sejam \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 espaços de Hilbert. Se $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2)$, então existe uma única transformação linear $T^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$ tal que*

$$\langle T(x), y \rangle_{\mathcal{H}_2} = \langle x, T^*(y) \rangle_{\mathcal{H}_1}, \quad x \in \mathcal{H}_1, \quad y \in \mathcal{H}_2.$$

A transformação T^* é denominada *transformação adjunta* de T . Um operador T é *autoadjunto* quando $T = T^*$.

Definição 1.2.6 *Seja X um espaço de Banach. Um operador $T \in \mathcal{B}(X)$ é compacto se a imagem de cada sequência limitada de X possui uma subsequência convergente. Denotamos o espaço dos operadores compactos por $\mathcal{B}_0(X)$.*

Definição 1.2.7 *Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert. Um operador $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é positivo quando*

$$\langle T(x), x \rangle_{\mathcal{H}} \geq 0, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ é positivo, escrevemos $T \geq 0$. Se $T_1, T_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, escrevemos $T_1 \geq T_2$ para indicar que $T_1 - T_2 \geq 0$. Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, então $T^*T \geq 0$, uma vez que

$$\langle T^*T(x), x \rangle_{\mathcal{H}} = \langle T(x), T(x) \rangle_{\mathcal{H}} = \|T(x)\|_{\mathcal{H}}^2 \geq 0, \quad x \in \mathcal{H}.$$

Além disso, T^*T é autoadjunto. O próximo resultado apresenta este fato de forma mais geral.

Teorema 1.2.8 *Sejam \mathcal{H} um espaço de Hilbert complexo e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Se T é positivo, então T é autoadjunto.*

Outra importante característica dos operadores positivos é dada a seguir. Mais detalhes podem ser encontrados em [18].

Teorema 1.2.9 (Lema da Raiz n -ésima). *Sejam \mathcal{H} um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Se T é positivo e n é um inteiro maior que 0, então existe um único operador positivo S em $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ tal que $S^n = T$.*

O operador S descrito acima é usualmente denotado por $\sqrt[n]{T}$ ou $T^{1/n}$ e chamado de *raiz n -ésima de T* . Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, definimos $|T| := \sqrt{T^*T}$. Observe que $|T| = T$ quando este é autoadjunto e positivo.

Corolário 1.2.10 *Sejam \mathcal{H} um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Se $T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n \rangle_{\mathcal{H}} x_n$, $x \in \mathcal{H}$, onde $\{x_n\}$ é um subconjunto ortonormal de \mathcal{H} e $\{\lambda_n\}$ uma sequência limitada de números reais não negativos, então $T \geq 0$ e $T^{1/j}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1/j} \langle x, x_n \rangle_{\mathcal{H}} x_n$, $x \in \mathcal{H}$, $j = 1, 2, \dots$.*

Teorema 1.2.11 *Sejam \mathcal{H} um espaço de Hilbert e $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$. Então, T é compacto se, e somente se, $|T|$ é compacto.*

No caso de operadores compactos sobre espaços de Hilbert, o resultado mais básico é o teorema seguinte.

Teorema 1.2.12 (Hilbert-Schmidt). *Seja $T \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H})$. Se T é autoadjunto, então existem um subconjunto ortonormal $\{x_n\}$ de \mathcal{H} e $\{\lambda_n(T)\} \subset \mathbb{R}$ tais que*

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T) \langle x, x_n \rangle_{\mathcal{H}} x_n, \quad x \in \mathcal{H},$$

com $|\lambda_1(T)| \geq |\lambda_2(T)| \geq \dots \geq 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(T) = 0$.

No teorema anterior, quando $\{x_n\}$ é uma base, o símbolo $\lambda_n(T)$ representa os autovalores do operador T e a sequência $\{\lambda_n(T)\}$ leva em consideração possíveis repetições geradas pela multiplicidade algébrica de tais autovalores.

Corolário 1.2.13 *Nas condições do Teorema de Hilbert-Schmidt:*

- i) Se $T \geq 0$, então $\lambda_n(T) \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$;
- ii) Se \mathcal{H} é separável, então $\{x_n\}$ é uma base ortonormal de \mathcal{H} .

Se T é um operador compacto sobre um espaço de Hilbert, já sabemos que $|T|$ é autoadjunto, compacto e positivo. Logo, o Teorema de Hilbert-Schmidt é aplicável para este operador.

Outra classe de operadores que utilizamos é a classe formada pelos operadores nucleares descritos a seguir, que podem ser vistos com mais detalhes em [18].

Definição 1.2.14 *Sejam \mathcal{H} um espaço de Hilbert e $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ uma base ortonormal de \mathcal{H} . Se $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, o traço de T é definido por*

$$\text{tr}(T) := \sum_{\alpha \in A} \langle T^*T(x_\alpha), x_\alpha \rangle_{\mathcal{H}}^{1/2}.$$

Pode-se provar que o traço de um operador independe da escolha da base de \mathcal{H} , ver [9, p.88].

Definição 1.2.15 *Seja \mathcal{H} espaço de Hilbert. Um operador $T \in \mathcal{B}_0(\mathcal{H})$ é nuclear quando $\text{tr}(|T|) < \infty$. O espaço dos operadores nucleares é denotado por $\mathcal{B}_1(\mathcal{H})$.*

Definição 1.2.16 *Considere um operador linear $T : L^2(X, \mu) \rightarrow L^2(X, \mu)$. Se existir uma aplicação $K : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ para a qual*

$$T(f)(x) = \int_X K(x, y) f(y) d\mu(y), \quad f \in L^2(X, \mu), \quad x \in X \quad \mu\text{-q.s.},$$

dizemos que T é um operador integral sobre $L^2(X, \mu)$. Neste caso, escrevemos $T = \mathcal{L}_K$ e dizemos que K é o núcleo gerador deste operador ou que \mathcal{L}_K é gerado por K .

Vejamos algumas propriedades destes operadores.

Teorema 1.2.17 *Se K é um núcleo em $L^2(X \times X, \mu \times \mu)$, então \mathcal{L}_K é compacto.*

Lembramos que um núcleo K é hermitiano quando $K(x, y) = \overline{K(y, x)}$, $x, y \in X$.

Teorema 1.2.18 *Seja K um núcleo hermitiano em $L^2(X \times X, \mu \times \mu)$. Suponha que toda base ortonormal $\{\phi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ de $L^2(X, \mu)$ é tal que $\{\phi_\alpha \otimes \phi_\beta\}_{\alpha, \beta \in A}$ é base ortonormal de $L^2(X \times X, \mu \times \mu)$. Então, existe uma sequência $\{\lambda_n(\mathcal{L}_K)\} \subset \mathbb{R}$ e um conjunto ortonormal $\{\phi_n\}$ de $L^2(X, \mu)$ tais que*

$$K = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(\mathcal{L}_K) \phi_n \otimes \overline{\phi_n},$$

com convergência em $L^2(X \times X, \mu \times \mu)$.

Definição 1.2.19 *Dizemos que um núcleo $K \in L^2(X \times X, \mu \times \mu)$ é L^2 -positivo definido se*

$$\int_X \int_X K(x, y) f(x) \overline{f(y)} d\mu(x) d\mu(y) \geq 0, \quad f \in L^2(X, \mu).$$

Em outras palavras, K é L^2 -positivo definido quando o operador integral gerado por K é positivo. Neste caso, segue do Teorema 1.2.8 que \mathcal{L}_K é autoadjunto.

Observação 1.2.20 O conceito de núcleo L^2 -positivo definido está intimamente ligado ao conceito usual de núcleo positivo definido. Lembramos que $K: X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ é um núcleo *positivo definido* quando

$$\sum_{i,j=1}^n \bar{c}_i c_j K(x_i, x_j) \geq 0,$$

para quaisquer $n \geq 1$, $x_1, \dots, x_n \in X$ e $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{C}$. Para núcleos contínuos, as duas propriedades são equivalentes. Mais detalhes ver em [18, Teo. 2.15 e Teo. 2.17].

O próximo teorema é uma versão esférica de [11, Teorema 4.1].

Teorema 1.2.21 *Seja $K: S^m \times S^m \rightarrow \mathbb{C}$ contínuo e L^2 -positivo definido com $x \in S^m \mapsto K(x, x)$ integrável. Então, \mathcal{L}_K é nuclear e*

$$\text{tr}(\mathcal{L}_K) = \int_{S^m} K(x, x) d\sigma_m(x).$$

Teorema 1.2.22 (Teorema de Schwarz). *Sejam U um aberto de \mathbb{R}^n e $f: U \rightarrow \mathbb{C}$ uma função duas vezes diferenciável no ponto $c \in U$. Então,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(c) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(c), \quad i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

A seguir enunciamos a versão complexificada do Teorema da Aproximação de Weierstrass.

Teorema 1.2.23 (Teorema da Aproximação de Weierstrass.) *Seja \mathcal{A} uma álgebra de funções contínuas a valores complexos sobre um conjunto compacto F . Assuma que*

- i) \mathcal{A} é autoadjunto, isto é, se $f \in \mathcal{A}$ então $\bar{f} \in \mathcal{A}$;*
- ii) \mathcal{A} separa pontos sobre F , isto é, se $x_1, x_2 \in F$, existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x_1) \neq f(x_2)$;*
- iii) \mathcal{A} não se anula em pontos de F , isto é, se $x \in F$, existe $f \in \mathcal{A}$ tal que $f(x) \neq 0$.*

Então, o fecho uniforme de \mathcal{A} é o espaço das funções contínuas a valores complexos sobre F . Em outras palavras, \mathcal{A} é denso em $C(F)$ quando este está munido de sua topologia da convergência uniforme.

O lema abaixo é um resultado clássico de Análise Funcional.

Lema 1.2.24 *Seja M um subespaço vetorial de um espaço de Hilbert \mathcal{H} . São equivalentes:*

- i) M é um subespaço denso de \mathcal{H} ;*
- ii) O complemento ortogonal de M em \mathcal{H} é trivial.*

O próximo teorema pode ser encontrado em [39, p.175].

Teorema 1.2.25 *Sejam X e Y espaços métricos. Uma aplicação f com domínio $D \subset X$ e imagem $R \subset Y$ é fechada se, vale a seguinte implicação: se $\{a_k\} \subset D$, $a_k \rightarrow a$ e $f(a_k) \rightarrow b$, então $a \in D$ e $f(a) = b$.*

Capítulo 2

Análise esférica

Neste capítulo apresentamos alguns resultados básicos sobre análise na esfera. Em todo o trabalho consideramos S^m a esfera unitária centrada na origem de \mathbb{R}^{m+1} , com $m \geq 2$, munida da medida de Lebesgue induzida normalizada σ_m . Utilizamos a seguinte notação conveniente

$$\int_{S^m} d\sigma_m = 1.$$

Além disso, denotaremos por $\mathbb{R}_0^{m+1} := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| \neq 0\}$. Se $x \in \mathbb{R}_0^{m+1}$, escrevemos $x' := x/\|x\|$. Se U é um conjunto aberto e r é um inteiro não negativo, denotamos por $C^r(U)$ o conjunto de todas as funções definidas em U que são r vezes continuamente diferenciáveis. Por simplicidade usamos a notação $L^p(S^m) := L^p(S^m, \sigma_m)$, $1 \leq p \leq \infty$.

2.1 Polinômios homogêneos

Nesta seção vemos uma classe de polinômios muito importantes no decorrer do trabalho, os polinômios homogêneos. Além disso, apresentamos algumas propriedades importantes do operador de Laplace-Beltrami. Algumas demonstrações são ocultadas por serem muito técnicas, e podem ser encontradas em [13, 30].

Definição 2.1.1 *Dado um multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n := \{0, 1, \dots\}^n$, definimos o operador diferencial D^α por*

$$D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad x = (x_1, \dots, x_n).$$

Representamos por Δ o operador de Laplace em \mathbb{R}^{m+1} e por ∇ o gradiente de uma função diferenciável em $m+1$ variáveis. Em símbolos,

$$\Delta = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \quad \text{e} \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{m+1}} \right).$$

Definimos o operador de Laplace-Beltrami $\tilde{\Delta}$ como sendo a restrição do operador de Laplace à esfera, isto é, $\tilde{\Delta} = \Delta|_{S^m}$.

Definição 2.1.2 *Uma função $f : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita ser homogênea de grau k quando*

$$f(\lambda x) = \lambda^k f(x), \quad \lambda > 0, \quad x \in \mathbb{R}^{m+1}.$$

O próximo resultado é conhecido e pode ser encontrado em [19, p. 437].

Teorema 2.1.3 (Fórmula de Euler para funções homogêneas). *Seja $f : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e homogênea de grau k . Então, $x \cdot \nabla f(x) = kf(x)$, $x \in \mathbb{R}^{m+1}$.*

Observação 2.1.4 Se f é uma função homogênea de grau k e existe $\partial f / \partial x_j$, para algum $j \in \{1, \dots, n\}$, então esta última é homogênea de grau $k - 1$, pois

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\lambda x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\lambda x + hx_j) - f(\lambda x)}{h} \\ &= \lim_{(h/\lambda) \rightarrow 0} \frac{f(\lambda[x + (h/\lambda)x_j]) - f(\lambda x)}{\lambda h / \lambda} \\ &= \lambda^{k-1} \lim_{(h/\lambda) \rightarrow 0} \frac{f(x + (h/\lambda)x_j) - f(x)}{h/\lambda} \\ &= \lambda^{k-1} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x), \quad \lambda > 0, \quad x \in \mathbb{R}_0^{m+1}. \end{aligned}$$

Teorema 2.1.5 Se $f, g \in C^2(S^m)$, então

$$\int_{S^m} f(\omega) \tilde{\Delta} g(\omega) d\sigma_m(\omega) = \int_{S^m} \tilde{\Delta} f(\omega) g(\omega) d\sigma_m(\omega).$$

Demonstração. Ver em [30]. ■

Vejamos uma caracterização alternativa para o conceito de homogeneidade.

Proposição 2.1.6 Sejam $F : \mathbb{R}^{m+1} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função, f sua restrição a S^m e $k \in \mathbb{Z}$. Então, são equivalentes

- i) F é homogênea de grau k ;
- ii) $F(x) = \|x\|^k f(x')$, $x \in \mathbb{R}_0^{m+1}$.

Demonstração. Se F é homogênea de grau k , então

$$F(x) = F(\|x\|x') = \|x\|^k F(x') = \|x\|^k f(x'), \quad x \neq 0.$$

Se vale a igualdade, então

$$F(\lambda x) = \|\lambda x\|^k f\left(\frac{\lambda x}{\|\lambda x\|}\right) = \lambda^k \|x\|^k f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \lambda^k F(x), \quad \lambda > 0, \quad x \neq 0. \quad \blacksquare$$

Lema 2.1.7 Se $k \in \mathbb{Z}$, então $\Delta(\|x\|^k) = k(k + m - 1)\|x\|^{k-2}$.

Demonstração. Como

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \|x\|^k = \frac{\partial}{\partial x_j} (x_1^2 + \dots + x_{m+1}^2)^{k/2} = k \|x\|^{k-2} x_j, \quad j \in \{1, \dots, m+1\},$$

vemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \|x\|^k &= k \frac{\partial}{\partial x_j} (\|x\|^{k-2} x_j) \\ &= k \left(\|x\|^{k-2} + x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \|x\|^{k-2} \right) \\ &= k \left[\|x\|^{k-2} + (k-2) \|x\|^{k-4} x_j^2 \right], \quad j \in \{1, \dots, m+1\}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\Delta(\|x\|^k) &= \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \|x\|^k \\
&= k \sum_{j=1}^{m+1} [\|x\|^{k-2} + (k-2)\|x\|^{k-4}x_j^2] \\
&= k[(m+1)\|x\|^{k-2} + (k-2)\|x\|^{k-4}\|x\|^2] \\
&= k(k+m-1)\|x\|^{k-2}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Notação: Denotamos por $\lambda_{k,m}$ o número $k(k+m-1)$.

Proposição 2.1.8 *Sejam $F \in C^2(\mathbb{R}^{m+1})$, f sua restrição a S^m e $k \in \mathbb{Z}$. Se F é homogênea de grau k , então*

$$\Delta F(x) = \lambda_{k,m}\|x\|^{k-2}f(x') + \|x\|^{k-2}\tilde{\Delta}f(x'), \quad x \in \mathbb{R}_0^{m+1}.$$

Demonstração. Ver em [30]. \blacksquare

2.2 Harmônicos esféricos

Os harmônicos esféricos $(m+1)$ -dimensionais desempenham em S^m , $m \geq 2$, o mesmo papel que as funções seno e cosseno desempenham no estudo de funções periódicas no círculo S^1 . Vamos introduzir alguns espaços polinomiais e algumas de suas propriedades. Além disso, vamos formalizar o conceito de harmônicos esféricos.

Definição 2.2.1 *Uma função $f \in C^2(\mathbb{R}^{m+1})$ é harmônica quando $\Delta(f) = 0$.*

Denotamos por $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{m+1})$ o conjunto dos polinômios em $m+1$ variáveis, $\mathcal{P}^l(\mathbb{R}^{m+1})$ o subconjunto de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{m+1})$ formado pelos polinômios de grau menor ou igual a l , $\mathcal{P}_h^k(\mathbb{R}^{m+1})$ o subconjunto de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{m+1})$ formado pelos polinômios que são homogêneos de grau k e $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^{m+1})$ o subconjunto de $\mathcal{P}_h^k(\mathbb{R}^{m+1})$ formado pelos polinômios que são harmônicos.

Notação: Se $X(\mathbb{R}^{m+1})$ é um dos espaços definidos acima, escrevemos

$$X(S^m) := \{p|_{S^m} : p \in X(\mathbb{R}^{m+1})\}.$$

Vejamos uma condição suficiente para que um polinômio homogêneo seja harmônico.

Lema 2.2.2 *Seja $p \in \mathcal{P}_h^k(\mathbb{R}^{m+1})$. Uma condição suficiente para que $p \in \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^{m+1})$ é*

$$\int_{S^m} p(\omega)\bar{q}(\omega) d\sigma_m(\omega) = 0, \quad q \in \mathcal{P}_h^{k-2}(\mathbb{R}^{m+1}).$$

Demonstração. Assuma que a condição vale e seja $q \in \mathcal{P}_h^{k-2}(\mathbb{R}^{m+1})$. Aplicando a Proposição 2.1.8 temos

$$\begin{aligned}
\int_{S^m} \Delta p(\omega)\bar{q}(\omega) d\sigma_m(\omega) &= \lambda_{k,m} \int_{S^m} p(\omega)\bar{q}(\omega) d\sigma_m(\omega) + \int_{S^m} \tilde{\Delta}p(\omega)\bar{q}(\omega) d\sigma_m(\omega) \\
&= \int_{S^m} \tilde{\Delta}p(\omega)\bar{q}(\omega) d\sigma_m(\omega).
\end{aligned}$$

Analogamente, e lembrando o Teorema 2.1.5, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{S^m} \tilde{\Delta} p(\omega) \bar{q}(\omega) d\sigma_m(\omega) &= \int_{S^m} p(\omega) \tilde{\Delta} \bar{q}(\omega) d\sigma_m(\omega) \\
&= \int_{S^m} p(\omega) \Delta \bar{q}(\omega) d\sigma_m(\omega) - \lambda_{k-2,m} \int_{S^m} p(\omega) \bar{q}(\omega) d\sigma_m(\omega) \\
&= \int_{S^m} p(\omega) \Delta \bar{q}(\omega) d\sigma_m(\omega).
\end{aligned}$$

Além disso, $\|\cdot\|^2 \Delta \bar{q} \in \mathcal{P}_h^k(\mathbb{R}^{m+1})$, pois

$$\|tx\|^2 \Delta \bar{q}(tx) = t^2 \|x\|^2 t^{k-2} \Delta \bar{q}(x) = t^k \|x\|^2 \Delta \bar{q}(x), \quad t > 0.$$

Assim, concluimos que

$$\int_{S^m} \Delta p(\omega) \bar{q}(\omega) d\sigma_m(\omega) = \int_{S^m} p(\omega) \Delta \bar{q}(\omega) d\sigma_m(\omega) = \int_{S^m} p(\omega) \|\omega\|^2 \Delta \bar{q}(\omega) d\sigma_m(\omega) = 0.$$

Como q é arbitrário, tomando $q = \Delta p$ e usando o Teorema 1.1.9, deduzimos que $\Delta p = 0$ σ_m -q.s. em S^m . Como $p \in C^\infty(\mathbb{R}^{m+1})$, então $\Delta p = 0$ em S^m . Portanto, pela homogeneidade de p temos que $\Delta p = 0$ em \mathbb{R}^{m+1} , ou seja, $p \in \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^{m+1})$. ■

Definição 2.2.3 Um harmônico esférico de grau k e dimensão $m+1$ é a restrição de um polinômio de $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^{m+1})$ à S^m . Denotaremos o espaço $\mathcal{H}^k(S^m)$ dos harmônicos esféricos de grau k e dimensão $m+1$ por \mathcal{H}_k^m .

Vejamos que \mathcal{H}_k^m está contido no autoespaço de $\tilde{\Delta}$ associado ao autovalor $-\lambda_{k,m}$.

Teorema 2.2.4 Se $p \in \mathcal{H}_k^m$, então $\tilde{\Delta} p = -\lambda_{k,m} p$.

Demonstração. Seja $p \in \mathcal{H}_k^m$. Então $\Delta p = 0$. Assim, da Proposição 2.1.8 temos

$$0 = \Delta p = \lambda_{k,m} p + \tilde{\Delta} p,$$

o que conclui a demonstração. ■

Teorema 2.2.5 Se $l \neq k$, então

$$\int_{S^m} p(\omega) \bar{q}(\omega) d\sigma_m(\omega) = 0, \quad p \in \mathcal{H}_l^m, \quad q \in \mathcal{H}_k^m.$$

Demonstração. Sejam $p \in \mathcal{H}_l^m$ e $q \in \mathcal{H}_k^m$, $l \neq k$. Aplicando seguidamente os Teoremas 2.1.5 e 2.2.4, temos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{S^m} \tilde{\Delta} p(\omega) \bar{q}(\omega) d\sigma_m(\omega) - \int_{S^m} p(\omega) \tilde{\Delta} \bar{q}(\omega) d\sigma_m(\omega) \\
&= -\lambda_{l,m} \int_{S^m} p(\omega) \bar{q}(\omega) d\sigma_m(\omega) + \lambda_{k,m} \int_{S^m} p(\omega) \bar{q}(\omega) d\sigma_m(\omega) \\
&= (\lambda_{k,m} - \lambda_{l,m}) \int_{S^m} p(\omega) \bar{q}(\omega) d\sigma_m(\omega).
\end{aligned}$$

Como $l \neq k$, segue o resultado. ■

Queremos mostrar que qualquer polinômio sobre \mathbb{R}^{m+1} , quando restrito à S^m , pode ser escrito como soma de harmônicos esféricos. Para isso, definimos um produto interno em $\mathcal{P}_h^k(\mathbb{R}^{m+1})$. Um polinômio $p(x)$ de $\mathcal{P}_h^k(\mathbb{R}^{m+1})$ pode ser escrito na forma

$$p(x) = \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha x^\alpha, \quad a_\alpha \in \mathbb{R}, \quad x = (x_1, \dots, x_{m+1}),$$

onde $x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_{m+1}^{\alpha_{m+1}}$ e $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_{m+1}$. O operador diferencial associado a p é o operador $p(D)$ dado por

$$p(D) := \sum_{|\alpha|=k} a_\alpha D^\alpha, \quad D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_{m+1}}}{\partial x_{m+1}^{\alpha_{m+1}}}.$$

Podemos definir o seguinte produto interno em $\mathcal{P}_h^k(\mathbb{R}^{m+1})$,

$$\langle p, q \rangle_k := p(D)(q), \quad p, q \in \mathcal{P}_h^k(\mathbb{R}^{m+1}).$$

Se p tem a representação acima e $q(x) = \sum_{|\beta|=k} b_\beta x^\beta$, podemos usar a fórmula

$$D^\alpha(x^\beta) := \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha \neq \beta \text{ e } |\alpha| = |\beta| \\ \alpha!, & \text{se } \alpha = \beta \end{cases},$$

onde $\alpha! := \alpha_{m+1}! \cdots \alpha_1!$, para concluir que

$$\langle p, q \rangle_k = p(D)(q) = \sum_{|\alpha|=k} \sum_{|\beta|=k} a_\alpha b_\beta D^\alpha(x^\beta) = \sum_{|\alpha|=k} \alpha! a_\alpha b_\alpha.$$

Teorema 2.2.6 *Cada $p \in \mathcal{P}_h^k(\mathbb{R}^{m+1})$ possui uma única decomposição na forma*

$$p(x) = \sum_{j=0}^l \|x\|^{2j} p_{k-2j}(x), \quad x \in \mathbb{R}^{m+1},$$

onde $l = \lfloor k/2 \rfloor$ e $p_{k-2j} \in \mathcal{H}^{k-2j}(\mathbb{R}^{m+1})$, $j \in \{0, \dots, l\}$.

Demonstração. Primeiro, observamos que, qualquer polinômio com grau de homogeneidade menor que 2 é harmônico. Logo, consideremos os casos em que $k \geq 2$. Definimos o conjunto

$$B_k^m := \|x\|^2 \mathcal{P}_h^{k-2}(\mathbb{R}^{m+1}) := \{\|x\|^2 q(x) : q \in \mathcal{P}_h^{k-2}(\mathbb{R}^{m+1})\}.$$

Vamos provar que $\mathcal{P}_h^k(\mathbb{R}^{m+1}) = \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^{m+1}) \oplus B_k^m$. Sejam $r(x) = \|x\|^2 q(x) \in B_k^m$ e $p \in \mathcal{P}_h^k(\mathbb{R}^{m+1})$ não nulo. Então,

$$r(D) = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} q(D) = \Delta q(D).$$

Pelo Teorema de Schwarz, obtemos

$$\langle r, p \rangle_k = \Delta q(D) \bar{p} = q(D) \Delta \bar{p} = q(D) \overline{\Delta p} = \langle q, \Delta p \rangle_{k-2}.$$

Em particular, podemos concluir que $\langle r, p \rangle_k = 0$, $r \in B_k^m$ se, e somente se, $\langle q, \Delta p \rangle_{k-2} = 0$, $q \in \mathcal{P}_h^{k-2}(\mathbb{R}^{m+1})$. Mas a última condição equivale a $\Delta p = 0$, isto é, $p \in \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^{m+1})$. Repetindo a prova para $k-2$, obtemos

$$\begin{aligned} B_k^m = \|x\|^2 \mathcal{P}_h^{k-2}(\mathbb{R}^{m+1}) &= \|x\|^2 (\mathcal{H}^{k-2}(\mathbb{R}^{m+1}) \oplus B_{k-2}^m) \\ &= \|x\|^2 \mathcal{H}^{k-2}(\mathbb{R}^{m+1}) \oplus \|x\|^4 \mathcal{P}_h^{k-4}(\mathbb{R}^{m+1}). \end{aligned}$$

O resultado segue por recorrência. \blacksquare

Corolário 2.2.7 Se $p \in \mathcal{P}^k(\mathbb{R}^{m+1})$, então $p|_{S^m}$ pode ser escrito como soma de harmônicos esféricos de grau no máximo k .

Corolário 2.2.8 $\mathcal{P}(S^m) = [\cup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_k^m]$.

Proposição 2.2.9 Seja k um inteiro não negativo. Então,

$$a_k^{(m)} := \dim \mathcal{P}_h^k(\mathbb{R}^{m+1}) = \binom{m+k}{k} = \frac{(m+k)!}{k!m!}.$$

Demonstração. Claramente, $a_k^{(m)}$ é igual a quantidade de monômios x^α , com $|\alpha| = k$. Vamos então calcular essa quantidade. Para isso, consideramos $h(t) = (1-t)^{-1}$, $|t| < 1$, cuja representação em série de Taylor centrada na origem é $h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} t^k$. Usando tal expansão, deduzimos que

$$\prod_{j=1}^{m+1} (1 - x_j t)^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{|\alpha|=k} x^\alpha \right) t^k, \quad \|x\| < 1.$$

Por outro lado, a expansão de $g(t) = (1-t)^{-(m+1)}$, $|t| < 1$, é da forma

$$g(t) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{m+k}{k} t^k.$$

Comparando-se convenientemente as séries acima, vemos que a quantidade de monômios da forma x^α coincide com $(m+k)!(k!m!)^{-1}$. ■

Proposição 2.2.10 Se B_k^m é o conjunto introduzido na prova do Teorema 2.2.6, então

$$\dim B_k^m = a_{k-2}^{(m)}.$$

Demonstração. Seja $\psi : \mathcal{P}_h^{k-2}(\mathbb{R}^{m+1}) \rightarrow B_k^m$ dada por $\psi(p)(x) = \|x\|^2 p$, $p \in \mathcal{P}_h^{k-2}(\mathbb{R}^{m+1})$, $x \in \mathbb{R}^{m+1}$. Pela definição de B_k^m segue que ψ é sobrejetora. Por outro lado, se $p, q \in \mathcal{P}_h^{k-2}(\mathbb{R}^{m+1})$ e $\|x\|^2 p(x) = \|x\|^2 q(x)$, $x \in \mathbb{R}^{m+1}$, claro que $p(x) = q(x)$, $x \in \mathbb{R}_0^{m+1}$. Por continuidade, $p = q$ e ψ é injetora. Assim, ψ é um isomorfismo e segue o resultado. ■

Proposição 2.2.11 O operador $\phi : \mathcal{P}_h^k(\mathbb{R}^{m+1}) \rightarrow \mathcal{P}_h^k(S^m)$, definido por $\phi(p) = p|_{S^m}$, é um isomorfismo.

Demonstração. Seja ϕ como no enunciado. Como ϕ é linear e sobrejetora, basta provarmos que ϕ é injetora. Entretanto, a injetividade segue da igualdade $p(x) = \|x\|^k q(x')$, $x \in \mathbb{R}_0^{m+1}$, dada pela Proposição 2.1.6, onde q é a restrição de p à S^m . ■

Teorema 2.2.12 A dimensão $d_k^{(m)}$ de \mathcal{H}_k^m é dada por

$$d_k^{(m)} = \frac{(2k+m-1)(m+k-2)!}{k!(m-1)!},$$

a menos que $m+k < 2$.

Demonstração. Combinando-se a decomposição em soma direta descrita na prova do Teorema 2.2.6 e a Proposição 2.2.10, obtemos imediatamente que $\dim \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^{m+1}) = a_k^{(m)} - a_{k-2}^{(m)}$. O restante segue da Proposição 2.2.9. ■

O próximo teorema pode ser encontrado em [30, p.18].

Teorema 2.2.13 *Seja k inteiro não negativo. Então, $d_k^{(m+1)} = \sum_{n=0}^k d_n^{(m)}$.*

Corolário 2.2.14 *Seja k inteiro não negativo. Então, $d_k^{(m)} = O(k^{m-1})$, $m \geq 1$.*

Demonstração. É fácil ver que

$$\frac{(2k+m-1)(m+k-2)!}{k!(m-1)!} = \frac{(2k+m-1)(m-1+k) \cdots (k+1)}{(k+m-1)(m-1)!}.$$

Logo,

$$\frac{(2k+m-1)(m+k-2)!}{k!(m-1)!} = \frac{2k^m + \Gamma_k^{m+1}}{(k+m-1)(m-1)!} = \frac{2k^{m-1} + (\Gamma_k^{m+1}/k)}{[1 + (\frac{m-1}{k})](m-1)!},$$

onde Γ_k^{m+1} é um polinômio em k e m , cuja maior potência de k é $m-1$. Segue que

$$\frac{d_k^{(m)}}{k^{m-1}} = \frac{2 + (\Gamma_k^{m+1}/k^m)}{[1 + (\frac{m-1}{k})](m-1)!} \rightarrow \frac{2}{(m-1)!} < \infty,$$

com $k \rightarrow \infty$, o que conclui a prova. ■

Observação 2.2.15 Do Corolário anterior, podemos escrever

$$d_k^{(m)} \leq 2k^{m-1}, \quad m \geq 1.$$

2.3 $L^2(S^m)$ e expansões em séries de Fourier

Lembramos o espaço de Hilbert $L^2(S^m)$ o espaço de todas as funções $f : S^m \rightarrow \mathbb{C}$ tais que $\int_{S^m} |f(x)|^2 d\sigma_m(x) < \infty$, munido de seu produto interno usual

$$\langle f, g \rangle_2 = \int_{S^m} f(x) \overline{g(x)} d\sigma_m(x), \quad f, g \in L^2(S^m),$$

e da norma induzida, $\|x\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle_2}$, $f \in L^2(S^m)$. Cada \mathcal{H}_k^m , $k \in \mathbb{N}$, é um subespaço vetorial de $L^2(S^m)$. Além disso, o Teorema 2.2.5 revela que \mathcal{H}_k^m e \mathcal{H}_l^m são \langle, \rangle_2 -ortogonais quando $k \neq l$.

O primeiro resultado desta seção mostra que qualquer função contínua sobre S^m pode ser aproximada, de forma uniforme, por polinômios de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{m+1})$. Sempre assumimos que $C(S^m)$ está munido de sua norma do supremo $\|\cdot\|_\infty$.

Lema 2.3.1 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{m+1})$ é um subespaço denso de $C(S^m)$.

Demonstração. É uma consequência do Teorema da Aproximação de Weierstrass. ■

Em seguida veremos que toda função de $L^2(S^m)$ pode ser aproximada por polinômios sobre S^m , na topologia de $L^2(S^m)$.

Lema 2.3.2 $\mathcal{P}(\mathbb{R}^{m+1})$ um subespaço denso de $L^2(S^m)$.

Demonstração. É consequência imediata do fato de $C(S^m)$ ser um subespaço denso de $L^2(S^m)$. ■

Teorema 2.3.3 $L^2(S^m) = \overline{\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_k^m} = \overline{\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_k^m}$.

Demonstração. Segue do Lema 2.3.2, Lema 1.2.24 e Corolário 2.2.8. ■

O teorema anterior mostra que se $\{Y_{k,j} : j = 1, \dots, d_k^{(m)}\}$ é uma base ortonormal de \mathcal{H}_k^m , $k = 0, 1, \dots$, então $\{Y_{k,j} : j = 1, \dots, d_k^{(m)}, k = 0, 1, \dots\}$ é um subconjunto ortonormal completo de $L^2(S^m)$. Logo, se $f \in L^2(S^m)$, existe uma expansão de Fourier associada

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \widehat{c}_{k,j}(f) Y_{k,j},$$

onde $\widehat{c}_{k,j}(f) := \langle f, Y_{k,j} \rangle_2$, $j \in \{1, \dots, d_k^{(m)}\}$, $k = 0, 1, \dots$.

Notação: No restante do trabalho, os conjuntos $\{Y_{k,j} : j = 1, \dots, d_k^{(m)}\}$ e $\{Y_{k,j} : j = 1, \dots, d_k^{(m)}, k = 0, 1, \dots\}$ representam bases ortonormais de \mathcal{H}_k^m e de $L^2(S^m)$, respectivamente, em relação ao produto interno de $L^2(S^m)$.

Teorema 2.3.4 *Sejam $f, g \in L^2(S^m)$. Se*

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \widehat{c}_{k,j}(f) Y_{k,j},$$

então $f = g$ σ_m -q.s..

Demonstração. Nas condições do teorema, temos que $\widehat{c}_{k,j}(g) = \widehat{c}_{k,j}(f)$, ou seja,

$$\langle f - g, Y_{k,j} \rangle_2 = 0, \quad j \in \{1, \dots, d_k^{(m)}\}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Portanto, a conclusão segue do Teorema 2.3.3 e do Lema 1.2.24. ■

2.4 Núcleos de reprodução

O termo núcleo de reprodução geralmente refere-se a espaços de Hilbert construídos a partir de funções positivas definidas ou afins. Utilizamos a idéia de núcleo de reprodução para demonstrar, na próxima seção, um importante resultado conhecido por Fórmula da Adição. Para mais detalhes sobre este assunto, veja [1].

Definição 2.4.1 *Seja \mathcal{H} um espaço de Hilbert de funções com domínio U . Uma função $\phi : U \times U \rightarrow \mathbb{R}$ é um núcleo de reprodução de \mathcal{H} se:*

- i) Fixado $y \in U$, a função $x \in U \mapsto \phi(x, y)$ é um elemento de \mathcal{H} ;*
- ii) (Propriedade reprodutora) Fixado $y \in U$, $f(y) = \langle f, \phi(\cdot, y) \rangle$, $f \in \mathcal{H}$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno de \mathcal{H} .*

Fixado k (e ainda m), vamos estudar algumas propriedades da função $F_k : S^m \times S^m \rightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$F_k(\omega, \tau) = \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} Y_{k,j}(\omega) \overline{Y_{k,j}(\tau)}.$$

Nosso objetivo é provar que F_k é um núcleo de reprodução de \mathcal{H}_k^m .

Lema 2.4.2 A função F_k independe da escolha da base ortonormal de \mathcal{H}_k^m .

Demonstração. Suponhamos que $\{T_{k,1}, \dots, T_{k,d_k^{(m)}}\}$ é uma outra base ortonormal de \mathcal{H}_k^m . Podemos escrever

$$T_{k,j} = \sum_{i=1}^{d_k^{(m)}} a_{i,j} Y_{k,i}, \quad a_{i,j} \in \mathbb{C}.$$

Note que, por esta última igualdade,

$$\delta_{j,j'} = \langle T_{k,j}, T_{k,j'} \rangle_2 = \sum_{i,i'=1}^{d_k^{(m)}} a_{i,j} \overline{a_{i',j'}} \langle Y_{k,i}, Y_{k,i'} \rangle_2 = \sum_{i,i'=1}^{d_k^{(m)}} a_{i,j} \overline{a_{i',j'}} \delta_{i,i'} = \sum_{i=1}^{d_k^{(m)}} a_{i,j} \overline{a_{i,j'}},$$

o que mostra que a matriz com entradas $a_{i,j}$ é unitária. Agora,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} T_{k,j}(\omega) \overline{T_{k,j}}(\tau) &= \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \left(\sum_{i=1}^{d_k^{(m)}} a_{i,j} Y_{k,i}(\omega) \right) \left(\sum_{i'=1}^{d_k^{(m)}} \overline{a_{i',j}} \overline{Y_{k,i'}}(\tau) \right) \\ &= \sum_{j,i,i'=1}^{d_k^{(m)}} a_{i,j} \overline{a_{i',j}} Y_{k,i}(\omega) \overline{Y_{k,i'}}(\tau) \\ &= \sum_{i,i'=1}^{d_k^{(m)}} \left(\sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} a_{i,j} \overline{a_{i',j}} \right) Y_{k,i}(\omega) \overline{Y_{k,i'}}(\tau). \end{aligned}$$

Juntando as informações acima, obtemos

$$\sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} T_{k,j}(\omega) \overline{T_{k,j}}(\tau) = \sum_{i,i'=1}^{d_k^{(m)}} \delta_{i,i'} Y_{k,i}(\omega) \overline{Y_{k,i'}}(\tau) = \sum_{i=1}^{d_k^{(m)}} Y_{k,i}(\omega) \overline{Y_{k,i}}(\tau),$$

e isso conclui a prova. ■

Lema 2.4.3 $F_k(\rho\omega, \rho\tau) = F_k(\omega, \tau)$, $\rho \in \mathcal{O}_m$, $\omega, \tau \in S^m$.

Demonstração. Provaremos que se $\rho \in \mathcal{O}_m$, então $\{Y_{k,j} \circ \rho_m : j = 1, \dots, d_k^{(m)}\}$, com $\rho_m := \rho|_{S^m}$, é uma base ortonormal de \mathcal{H}_k^m . Assim, o resultado seguirá do lema anterior. Para $k = 0$, não há o que mostrar. Assuma que $k > 0$ e fixe $j \in \{1, \dots, d_k^{(m)}\}$. Pela definição de \mathcal{H}_k^m temos que existe $p \in \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^{m+1})$ tal que $p|_{S^m} = Y_{k,j}$. Como

$$p(\rho x) = \|\rho x\|^k p((\rho x)') = \|x\|^k p(\rho x'), \quad x \in \mathbb{R}_0^{m+1},$$

e $p(\rho 0) = 0$, segue da Proposição 2.1.6 que $p \circ \rho \in \mathcal{P}_h^k(\mathbb{R}^{m+1})$, $\rho \in \mathcal{O}_m$.

Agora, como $\Delta(p \circ \rho) = \Delta p \circ \rho$, $\rho \in \mathcal{O}_m$, vemos que $p \circ \rho \in \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^{m+1})$. Como ρ aplica S^m sobre S^m , segue que

$$(p \circ \rho)|_{S^m} = (p|_{S^m}) \circ \rho_m = Y_{k,j} \circ \rho_m.$$

Logo, $Y_{k,j} \circ \rho_m \in \mathcal{H}_k^m$. A ortonormalidade de $\{Y_{k,j} \circ \rho_m : j = 1, \dots, d_k^{(m)}\}$ é consequência do Teorema 1.1.12. ■

No próximo resultado, utilizamos o símbolo “ $'$ ” somente para distinguir os pontos. Também usamos o símbolo “ \cdot ” para denotar o produto interno usual de \mathbb{R}^{m+1} .

Lema 2.4.4 *Sejam $\omega, \omega', \tau, \tau' \in S^m$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- i) *Existe $\rho \in \mathcal{O}_m$ tal que $\rho\omega = \omega'$ e $\rho\tau = \tau'$;*
- ii) *$\omega \cdot \tau = \omega' \cdot \tau'$.*

Demonstração. Se (i) é verdadeira, podemos usar a invariância do produto escalar usual de \mathbb{R}^{m+1} por \mathcal{O}_m , Lema 1.1.11, para concluir que

$$\omega \cdot \tau = \rho\omega \cdot \rho\tau = \omega' \cdot \tau'.$$

Reciprocamente, suponha (ii) é verdadeira. Como \mathcal{O}_m age transitivamente sobre S^m , Lema 1.1.11, existe $\rho_1 \in \mathcal{O}_m$ tal que $\rho_1\omega = \omega'$. Logo,

$$\omega' \cdot \tau' = \omega \cdot \tau = \rho_1\omega \cdot \rho_1\tau = \omega' \cdot \rho_1\tau.$$

Da mesma forma, existe $\rho_2 \in \mathcal{O}_m$ tal que $\rho_2\omega' = \omega'$ e

$$\omega' \cdot \tau' = \omega' \cdot \rho_1\tau = \rho_2\omega' \cdot \rho_2\rho_1\tau = \omega' \cdot \rho_2\rho_1\tau.$$

Tomando $\rho = \rho_2\rho_1 \in \mathcal{O}_m$ obtemos

$$\rho\omega = \rho_2\rho_1\omega = \rho_2\omega' = \omega' \quad \text{e} \quad \rho\tau = \rho_2\rho_1\tau = \tau',$$

portanto vale (i). ■

Lema 2.4.5 *Existe uma função φ_k de uma variável tal que $F_k(\omega, \tau) = \varphi_k(\omega \cdot \tau)$, ou seja, F_k é uma função de $\omega \cdot \tau$.*

Demonstração. Basta provar que a função φ_k está bem definida. Assuma que $\omega \cdot \tau = \omega' \cdot \tau'$. Segue do Lema 2.4.4 que existe $\rho \in \mathcal{O}_m$ tal que $\rho\omega = \omega'$ e $\rho\tau = \tau'$. Portanto, pelo Lema 2.4.3 temos

$$\varphi_k(\omega \cdot \tau) = F_k(\omega, \tau) = F_k(\rho\omega, \rho\tau) = F_k(\omega', \tau') = \varphi_k(\omega' \cdot \tau'),$$

e o lema está provado. ■

O próximo resultado garante a propriedade reprodutora de F_k .

Lema 2.4.6 *Seja $p_l \in \mathcal{H}_l^m$. Então,*

$$\int_{S^m} p_l(\omega) F_k(\tau, \omega) d\sigma_m(\omega) = \delta_{l,k} p_k(\tau).$$

Demonstração. Pela definição de F_k e pela linearidade da integral temos

$$\int_{S^m} p_l(\omega) F_k(\tau, \omega) d\sigma_m(\omega) = \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} Y_{k,j}(\tau) \int_{S^m} p_l(\omega) \overline{Y_{k,j}}(\omega) d\sigma_m(\omega) = \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} Y_{k,j}(\tau) \langle p_l, Y_{k,j} \rangle_2^2.$$

Por outro lado, o Teorema 2.2.5 implica que

$$\sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} Y_{k,j}(\tau) \langle p_l, Y_{k,j} \rangle_2^2 = \begin{cases} 0, & l \neq k \\ p_k(\tau), & l = k \end{cases}.$$

Portanto,

$$\int_{S^m} p_l(\omega) F_k(\tau, \omega) d\sigma_m(\omega) = \delta_{l,k} p_k(\tau). \quad \blacksquare$$

Corolário 2.4.7 *A função F_k é um núcleo de reprodução de \mathcal{H}_k^m .*

2.5 Fórmula da Adição

Nesta seção provamos a Fórmula da Adição para harmônicos esféricos e deduzimos algumas de suas consequências básicas. Este é um resultado insubstituível na análise de vários problemas de natureza esférica.

Teorema 2.5.1 *Sejam $\tau \in S^m$, $\ell_k \in \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^{m+1})$ e assumamos que:*

$$i) \ell_k(\tau) = 1;$$

$$ii) \ell_k \text{ é uma função } \tau\text{-zonal, ou seja, se } \rho \in \mathcal{O}_m \text{ satisfaz } \rho\tau = \tau, \text{ então } \ell_k(\rho x) = \ell_k(x), \\ x \in \mathbb{R}_0^{m+1}.$$

Então, ℓ_k é unicamente determinada por

$$\ell_k(x) = \|x\|^k P_k^m(x' \cdot \tau), \quad x \in \mathbb{R}_0^{m+1},$$

onde P_k^m é um polinômio em uma variável.

Demonstração. Podemos tomar $\tau = e_{m+1} = (0, \dots, 0, 1)$ sem perder a generalidade. De fato, seja $\rho \in \mathcal{O}_m$ tal que $\rho^{-1}\tau = e_{m+1}$ e considere a função $\ell_k \circ \rho$. Assim, $\ell_k(\rho e_{m+1}) = \ell_k(\tau) = 1$ e, se $\rho_1 \in \mathcal{O}_m$ é tal que $\rho_1 e_{m+1} = e_{m+1}$, então $\rho\rho_1\rho^{-1}\tau = \rho\rho_1 e_{m+1} = \rho e_{m+1} = \tau$. Agora, segue de (ii) que $\ell_k(\rho\rho_1 x) = \ell_k(\rho\rho_1\rho^{-1}\rho x) = \ell_k(\rho x)$, $x \in \mathbb{R}^{m+1}$, o que prova que $\ell_k \circ \rho$ satisfaz (i) e (ii) com $\tau = e_{m+1}$. No que segue, assumimos que $\tau = e_{m+1}$. Expandindo $\ell_k(x)$ em relação a $x_{(m)} := (x_1, \dots, x_m)$, obtemos

$$\ell_k(x) = \sum_{j=0}^k x_{m+1}^j r_{k-j}(x_{(m)}),$$

onde $r_{k-j} \in \mathcal{P}_h^{k-j}(\mathbb{R}^m)$, $j = 1, \dots, k$. Seja $\rho \in \mathcal{O}_{m-1}$ tal que $\rho\tau = \tau$. Se $\rho' = \rho|_{\mathbb{R}^m}$, onde identificamos \mathbb{R}^m como o subespaço de \mathbb{R}^{m+1} ortogonal a e_{m+1} , então $\rho' \in \mathcal{O}_{m-1}$ e, por (ii),

$$\sum_{j=0}^k x_{m+1}^j r_{k-j}(\rho' x_{(m)}) = \sum_{j=0}^k x_{m+1}^j r_{k-j}(x_{(m)}),$$

isto é, cada r_{k-j} é invariante por $\rho' \in \mathcal{O}_{m-1}$. Logo, cada r_{k-j} é constante em S^{m-1} (visto como a interseção de S^m com \mathbb{R}^m). Se $x_{(m)} \neq 0$, concluímos então que

$$r_{k-j}(x_{(m)}) = \|x_{(m)}\|^{k-j} r_{k-j} \left(\frac{x_{(m)}}{\|x_{(m)}\|} \right) = \|x_{(m)}\|^{k-j} c_{k-j},$$

onde cada c_{k-j} é constante. Como cada r_{k-j} é um polinômio, segue que $c_{k-j} = 0$ se $k-j$ é ímpar. Vejamos então, o que ocorre quando $k-j$ é par. Podemos escrever o Laplaciano na forma

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_{m+1}^2} + \Delta', \quad \Delta' = \frac{\partial^2}{\partial x_m^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}.$$

Como $\ell_k \in \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^{m+1})$, então

$$\begin{aligned} 0 = \Delta \ell_k(x) &= \sum_{j=0}^k \Delta (x_{m+1}^j r_{k-j}(x_{(m)})) \\ &= \sum_{j=0}^k \left(r_{k-j}(x_{(m)}) \frac{\partial^2}{\partial x_{m+1}^2} x_{m+1}^j + x_{m+1}^j \Delta' r_{k-j}(x_{(m)}) \right) \\ &= \sum_{j=0}^k j(j-1) r_{k-j}(x_{(m)}) x_{m+1}^{j-2} + \sum_{j=0}^k x_{m+1}^j \Delta' r_{k-j}(x_{(m)}). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^k x_{m+1}^j \Delta' r_{k-j}(x_{(m)}) &= - \sum_{j=0}^k j(j-1) r_{k-j}(x_{(m)}) x_{m+1}^{j-2} \\ &= - \sum_{j=0}^{k-2} (j+1)(j+2) r_{k-j-2}(x_{(m)}) x_{m+1}^j, \end{aligned}$$

e temos

$$\Delta' r_{k-j}(x_{(m)}) = -(j+1)(j+2) r_{k-j-2}(x_{(m)}).$$

Juntando as informações anteriores,

$$\begin{aligned} -(j+1)(j+2) \|x_{(m)}\|^{k-j-2} c_{k-j-2} &= -(j+1)(j+2) r_{k-j-2}(x_{(m)}) \\ &= \Delta' r_{k-j}(x_{(m)}). \end{aligned}$$

Como $r_{k-j}(x_{(m)}) = c_{k-j} \|x_{(m)}\|^{k-j}$, segue do Lema 2.1.7 que

$$\begin{aligned} -(j+1)(j+2) \|x_{(m)}\|^{k-j-2} c_{k-j-2} &= c_{k-j} \Delta' \|x_{(m)}\|^{k-j} \\ &= c_{k-j} (k-j) [(k-j) + m - 2] \|x_{(m)}\|^{k-j-2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$-(j+1)(j+2) c_{k-j-2} = c_{k-j} (k-j) [(k-j) + m - 2], \quad j \in \{0, \dots, k-2\}. \quad (2.1)$$

Lembrando a condição (i) e usando a homogeneidade dos polinômios r_{k-j} , temos

$$1 = \ell_k(\tau) = r_0(\tau_{(m)}) + \sum_{j=0}^{k-1} r_{k-j}(\tau_{(m)}) = r_0(\tau_{(m)}).$$

Como r_0 é constante, $c_0 = r_0 = 1$. Desta forma, usando a fórmula (2.1), obtemos os valores de c_{k-j} para $k-j$ par e maior que 0. Finalmente, para $\omega \in S^m$,

$$\begin{aligned} \ell_k(\omega) &= \sum_{j=0}^k {}' \omega_{m+1}^j r_{k-j}(\omega_{(m)}) \\ &= \sum_{j=0}^k {}' \omega_{m+1}^j c_{k-j} (\omega_1^2 + \dots + \omega_m^2)^{(k-j)/2} \\ &= \sum_{j=0}^k {}' c_{k-j} t^j (1-t^2)^{(k-j)/2}, \end{aligned}$$

onde $t = \omega_{m+1}$, $\omega_1^2 + \dots + \omega_m^2 = 1 - t^2$. A soma \sum' inclui apenas os $j \in \{0, \dots, k\}$ para os quais $k-j$ é par. Agora, dado $x \in \mathbb{R}^{m+1}$, como ℓ_k é homogêneo de grau $k > 0$, segue da Proposição 2.1.6 que

$$\ell_k(x) = \|x\|^k \ell_k(x') = \|x\|^k P_k^m(x' \cdot \tau), \quad x \in \mathbb{R}_0^{m+1},$$

onde

$$P_k^m(t) = \sum_{j=0}^k {}' c_{k-j} t^j (1-t^2)^{(k-j)/2}.$$

E isso conclui a prova. \blacksquare

Definição 2.5.2 O polinômio P_k^m de grau k definido no teorema anterior é chamado de polinômio de Legendre de grau k e dimensão $m + 1$.

Observação 2.5.3 É claro que $P_k^m(1) = 1$. Mais ainda, se k é par, então $k - j$ par implica que j também é par. Logo,

$$\begin{aligned} P_k^m(-t) &= \sum_{j=0}^k {}'c_{k-j}(-t)^j(1 - (-t)^2)^{(k-j)/2} \\ &= \sum_{j=0}^k {}'c_{k-j}t^j(1 - t^2)^{(k-j)/2} \\ &= P_k^m(t). \end{aligned}$$

Analogamente, se k é ímpar, então $P_k^m(-t) = -P_k^m(t)$. Portanto,

$$P_k^m(-t) = (-1)^k P_k^m(t).$$

Teorema 2.5.4 Vale a fórmula $F_k(\omega, \tau) = d_k^{(m)} P_k^m(\omega \cdot \tau)$.

Demonstração. Pelo Lema 2.4.5, segue que $F_k(\tau, \tau)$, $\tau \in S^m$, é constante. Logo,

$$\begin{aligned} d_k^{(m)} &= \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \int_{S^m} Y_{k,j}(\omega) \overline{Y_{k,j}}(\omega) d\sigma_m(\omega) \\ &= \int_{S^m} \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} Y_{k,j}(\omega) \overline{Y_{k,j}}(\omega) d\sigma_m(\omega) \\ &= \int_{S^m} F_k(\omega, \omega) d\sigma_m(\omega) \\ &= F_k(\tau, \tau). \end{aligned}$$

Agora, fixando $\tau \in S^m$, segue da definição que $(d_k^{(m)})^{-1} F_k(\cdot, \tau) \in \mathcal{H}_k^m$. Além disso, essa função satisfaz as condições do Teorema 2.5.1. Portanto,

$$P_k^m(\omega \cdot \tau) = \frac{1}{d_k^{(m)}} F_k(\omega, \tau),$$

e isso prova o teorema. ■

O próximo corolário é a Fórmula da Adição para harmônicos esféricos. Sua demonstração segue diretamente da definição de F_k e do teorema anterior.

Corolário 2.5.5 (Fórmula da Adição). Vale a igualdade

$$\sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} Y_{k,j}(\omega) \overline{Y_{k,j}}(\tau) = d_k^{(m)} P_k^m(\omega \cdot \tau), \quad \tau, \omega \in S^m.$$

Agumas consequências, mais utilizadas, da Fórmula da Adição são listadas a seguir.

Corolário 2.5.6 Seja $k \in \mathbb{N}$. Então, os coeficientes de P_k^m são reais, isto é, $\overline{P_k^m(\omega \cdot \tau)} = P_k^m(\omega \cdot \tau)$, $\tau, \omega \in S^m$.

Demonstração. Pela Fórmula da Adição,

$$\overline{P_k^m}(\omega \cdot \tau) = \frac{1}{d_k^{(m)}} \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \overline{Y_{k,j}(\omega)} Y_{k,j}(\tau) = P_k^m(\tau \cdot \omega) = P_k^m(\omega \cdot \tau). \quad \blacksquare$$

Corolário 2.5.7 *Vale a igualdade*

$$\sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} |Y_{k,j}(\omega)|^2 = d_k^{(m)}, \quad \omega \in S^m, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Pela demonstração do Teorema 2.5.4 temos que $P_k^m(1) = 1$. Portanto, para qualquer $\omega \in S^m$ temos, pela Fórmula da Adição, que

$$\sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} |Y_{k,j}(\omega)|^2 = d_k^{(m)} P_k^m(\omega \cdot \omega) = d_k^{(m)} P_k^m(1) = d_k^{(m)}. \quad \blacksquare$$

Corolário 2.5.8 *Valem as estimativas $-1 \leq P_k^m(\omega \cdot \tau) \leq 1$, $\omega, \tau \in S^m$.*

Demonstração. Segue da Fórmula da Adição e da Desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$|P_k^m(\omega \cdot \tau)|^2 = \left| \frac{1}{d_k^{(m)}} \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} Y_{k,j}(\omega) \overline{Y_{k,j}(\tau)} \right|^2 \leq \left[\frac{1}{d_k^{(m)}} \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} |Y_{k,j}(\omega)|^2 \right] \left[\frac{1}{d_k^{(m)}} \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} |Y_{k,j}(\tau)|^2 \right].$$

Assim, o resultado segue do Corolário 2.5.7. \blacksquare

Capítulo 3

Operadores esféricos

Neste capítulo apresentamos alguns operadores esféricos, bem como algumas de suas propriedades. Usaremos a letra \mathbb{X} para representar $C(S^m)$ ou $L^p(S^m)$, $1 \leq p < \infty$.

3.1 Sistemas fundamentais em S^m

Nesta seção mostramos que a integral na fórmula reprodutora do Lema 2.4.6 pode ser escrita como uma soma finita.

Definição 3.1.1 *Um conjunto $\{\omega_1, \dots, \omega_{d_k^{(m)}}\} \subset S^m$ é chamado de sistema fundamental de ordem k se o determinante da matriz de ordem $d_k^{(m)}$ com entradas $P_k^m(\omega_i \cdot \omega_j)$ é positivo.*

No que segue, vamos provar a existência de sistemas fundamentais em S^m .

Lema 3.1.2 *Sejam $h \in \{1, \dots, d_k^{(m)}\}$ e $\{p_k^{(h)} : h = 1, \dots, d_k^{(m)}\}$ um conjunto linearmente independente de \mathcal{H}_k^m . Então, existem pontos $\omega_1, \dots, \omega_h$ em S^m para os quais o determinante da matriz $h \times h$ com entradas $p_k^{(h)}(\omega_j)$ é positivo.*

Demonstração. Primeiro, escolhemos $\omega_1 \in S^m$ tal que $p_k^{(1)}(\omega_1) \neq 0$. Como $\{p_k^{(1)}, p_k^{(2)}\}$ é linearmente independente, o harmônico esférico de grau k e dimensão $m+1$

$$p(\omega) := p_k^{(1)}(\omega_1)p_k^{(2)}(\omega) - p_k^{(2)}(\omega_1)p_k^{(1)}(\omega), \quad \omega \in S^m,$$

não é identicamente nulo. Logo, existe $\omega_2 \in S^m$ tal que $p(\omega_2) \neq 0$. Portanto,

$$\det(p_k^{(h)}(\omega_j))_{2 \times 2} \neq 0.$$

O resultado segue por indução. ■

Teorema 3.1.3 *Para cada $k \in \mathbb{N}$, existe pelo menos um sistema fundamental de ordem k em S^m .*

Demonstração. Vamos aplicar o lema anterior para $h = d_k^{(m)}$. Pela Fórmula da Adição segue que

$$P_k^m(\omega_i \cdot \omega_j) = \frac{1}{d_k^{(m)}} \sum_{h=1}^{d_k^{(m)}} Y_{k,h}(\omega_i) \overline{Y_{k,h}}(\omega_j),$$

e temos a seguinte igualdade de matrizes

$$(P_k^m(\omega_i \cdot \omega_j)) = \frac{1}{d_k^{(m)}} (\overline{Y_{k,h}}(\omega_j))_{j \times h}^T (Y_{k,h}(\omega_i))_{h \times i},$$

onde $(\cdot)^T$ denota a matriz transposta. Assim,

$$\det(P_k^m(\omega_i \cdot \omega_j)) = \left(\frac{1}{d_k^{(m)}} \right) [\det(Y_{k,h}(\omega_i))]^2 > 0,$$

e isso prova o teorema. ■

Teorema 3.1.4 *Sejam $\{\omega_1, \dots, \omega_{d_k^{(m)}}\} \subset S^m$ um sistema fundamental de ordem k e $p \in \mathcal{H}_k^m$. Então,*

$$p(\omega) = \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} a_j P_k^m(\omega_j \cdot \omega), \quad a_j \in \mathbb{C}, \quad \omega \in S^m.$$

Demonstração. Os cálculos feitos na demonstração anterior mostram que o determinante da matriz $(Y_{k,h}(\omega_j))$ é não nulo. Agora, pela Fórmula da Adição,

$$P_k^m(\omega_j \cdot \omega) = \frac{1}{d_k^{(m)}} \sum_{h=1}^{d_k^{(m)}} Y_{k,h}(\omega) \overline{Y_{k,h}(\omega_j)}, \quad j \in \{1, \dots, d_k^{(m)}\}, \quad \omega \in S^m.$$

Como o determinante da matriz dos coeficientes do sistema linear acima não se anula, podemos resolvê-lo e expressar $Y_{k,h}$ como combinação linear de $P_k^m(\omega_j \cdot \star)$, $j \in \{1, \dots, d_k^{(m)}\}$. O mesmo vale para um elemento genérico de \mathcal{H}_k^m . ■

Corolário 3.1.5 *Seja $p \in \mathcal{H}_k^m$. Então, existem constantes $a_j \in \mathbb{C}$, $j \in \{1, \dots, d_k^{(m)}\}$, tais que*

$$\int_{S^m} P_k^m(\omega \cdot \tau) p(\tau) d\sigma_m(\tau) = \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} a_j P_k^m(\omega_j \cdot \omega),$$

onde $\{\omega_1, \dots, \omega_{d_k^{(m)}}\} \subset S^m$ é um sistema fundamental de ordem k .

Demonstração. Segue do teorema anterior e do Lema 2.4.6. ■

3.2 Projção esférica

Nesta seção, apresentamos algumas propriedades básicas do operador projeção de \mathbb{X} sobre \mathcal{H}_k^m , cuja definição é motivada pela propriedade reprodutora do núcleo de reprodução e a estreita relação deste com os polinômios de Legendre (veja o Teorema 2.5.4).

Definição 3.2.1 *O operador projeção esférica é a aplicação $\mathcal{Y}_k : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ dada por*

$$\mathcal{Y}_k(f)(\omega) := d_k^{(m)} \int_{S^m} P_k^m(\omega \cdot \tau) f(\tau) d\sigma_m(\tau), \quad k \in \mathbb{N}, \quad \omega \in S^m, \quad f \in \mathbb{X}.$$

O fato de \mathcal{Y}_k ser uma projeção segue dos seguintes resultados.

Proposição 3.2.2 *Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $f \in \mathbb{X}$. Então, $\mathcal{Y}_k(f) \in \mathcal{H}_k^m$.*

Demonstração. De fato, aplicando a Fórmula da Adição na definição acima vemos que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Y}_k(f)(\omega) &= d_k^{(m)} \int_{S^m} P_k^m(\omega \cdot \tau) f(\tau) d\sigma_m(\tau) \\
 &= \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} Y_{k,j}(\omega) \int_{S^m} f(\tau) \overline{Y_{k,j}}(\tau) d\sigma_m(\tau) \\
 &= \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \widehat{c}_{k,j}(f) Y_{k,j}(\omega), \quad \omega \in S^m. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Proposição 3.2.3 *Sejam $k, l \in \mathbb{N}$. Então, $\mathcal{Y}_k \circ \mathcal{Y}_l = \delta_{k,l} \mathcal{Y}_k$.*

Demonstração. Aplicando duas vezes a proposição anterior obtemos, para todo $f \in \mathbb{X}$,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Y}_k(\mathcal{Y}_l(f)) &= \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \widehat{c}_{k,j}(\mathcal{Y}_l(f)) Y_{k,j} \\
 &= \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \left(\int_{S^m} \mathcal{Y}_l(f)(\omega) \overline{Y_{k,j}}(\omega) d\sigma_m(\omega) \right) Y_{k,j} \\
 &= \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \sum_{i=1}^{d_l^{(m)}} \widehat{c}_{l,i}(f) \left(\int_{S^m} Y_{l,i}(\omega) \overline{Y_{k,j}}(\omega) d\sigma_m(\omega) \right) Y_{k,j} \\
 &= \delta_{k,l} \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \widehat{c}_{k,j}(f) Y_{k,j} \\
 &= \delta_{k,l} \mathcal{Y}_k(f). \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Teorema 3.2.4 *Seja $f \in \mathbb{X}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\mathcal{Y}_k(f) = 0$ em \mathbb{X} , $k \in \mathbb{N}$;

ii) $f = 0$ em \mathbb{X} .

Demonstração. Se $f = 0$ em \mathbb{X} , está claro que $\mathcal{Y}_k(f) = 0$ em \mathbb{X} , $k \in \mathbb{N}$. Reciprocamente, suponhamos que $\mathcal{Y}_k(f) = 0$ em \mathbb{X} , $k \in \mathbb{N}$. Consideramos primeiramente os casos $\mathbb{X} = C(S^m)$ e $\mathbb{X} = L^2(S^m)$. Fixamos $k \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \dots, d_k^{(m)}\}$ e escolhemos um sistema fundamental $\{\omega_1, \dots, \omega_{d_k^{(m)}}\}$ de ordem k em S^m . Pelo Teorema 3.1.4, existem constantes $a_{k,i} \in \mathbb{C}$ tais que

$$Y_{k,j}(\omega) = \sum_{i=1}^{d_k^{(m)}} a_{k,i} P_k^m(\omega_i \cdot \omega), \quad \omega \in S^m.$$

Logo,

$$\int_{S^m} Y_{k,j}(\omega) f(\omega) d\sigma_m(\omega) = \sum_{i=1}^{d_k^{(m)}} a_{k,i} \int_{S^m} f(\omega) P_k^m(\omega_i \cdot \omega) d\sigma_m(\omega) = \sum_{i=1}^{d_k^{(m)}} a_{k,i} \mathcal{Y}_k(f)(\omega_i) = 0.$$

Como $\{Y_{k,j} : j = 1, \dots, d_k^{(m)}, k \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto ortonormal completo de $L^2(S^m)$, segue que $f = 0$ em \mathbb{X} . Se $f \in L^1(S^m) \setminus L^2(S^m)$, procedendo como antes encontramos

$$\int_{S^m} Y_{k,j}(\omega) f(\omega) d\sigma_m(\omega) = 0, \quad j \in \{1, \dots, d_k^{(m)}\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Para terminar a prova, pelo Teorema 1.1.13, basta mostrar que

$$\int_{S^m} f(\omega)h(\omega) d\sigma_m(\omega) = 0, \quad h \in C(S^m).$$

Seja $p \in \mathcal{P}(S^m)$. Pelo Corolário 2.2.8, p pode ser escrito como combinação linear de harmônicos esféricos. Logo,

$$\int_{S^m} f(\omega)p(\omega) d\sigma_m(\omega) = 0, \quad p \in \mathcal{P}(S^m).$$

Se $h \in C(S^m)$, segue do Teorema da Aproximação de Weierstrass que existe uma sequência $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}(S^m)$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|h - p_n\|_\infty = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left| \int_{S^m} f(\omega)h(\omega) d\sigma_m(\omega) \right| &\leq \left| \int_{S^m} f(\omega)(h - p_n)(\omega) d\sigma_m(\omega) \right| + \left| \int_{S^m} f(\omega)p_n(\omega) d\sigma_m(\omega) \right| \\ &\leq \int_{S^m} |f(\omega)| |(h - p_n)(\omega)| d\sigma_m(\omega) \\ &\leq \|h - p_n\|_\infty \int_{S^m} |f(\omega)| d\sigma_m(\omega). \end{aligned}$$

Tomando o limite quando $n \rightarrow \infty$ na última desigualdade obtemos

$$\int_{S^m} f(\omega)h(\omega) d\sigma_m(\omega) = 0,$$

o que prova o teorema. ■

Proposição 3.2.5 *Seja $k \in \mathbb{N}$. Valem as seguintes propriedades:*

- i) $\mathcal{Y}_k(Y_{l,j}) = \delta_{k,l} Y_{k,j}$, $j \in \{1, \dots, d_l^{(m)}\}$;
- ii) $|\mathcal{Y}_k(f)(\omega)| \leq d_k^{(m)} \|f\|_{\mathbb{X}}$, $f \in \mathbb{X}$, $\omega \in S^m$;
- iii) $\|\mathcal{Y}_k(f)\|_{\mathbb{X}} \leq d_k^{(m)} \|f\|_{\mathbb{X}}$, $f \in \mathbb{X}$.

Demonstração. Se $j \in \{1, \dots, d_l^{(m)}\}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_k(Y_{l,j})(\omega) &= d_k^{(m)} \int_{S^m} Y_{l,j}(\tau) P_k^m(\omega \cdot \tau) d\sigma_m(\tau) \\ &= \sum_{i=1}^{d_k^{(m)}} Y_{k,i}(\omega) \int_{S^m} Y_{l,j}(\tau) \overline{Y_{k,i}}(\tau) d\sigma_m(\tau) \\ &= \delta_{k,l} Y_{k,j}(\omega), \quad \omega \in S^m. \end{aligned}$$

Isso prova (i). Para provar (ii), consideremos primeiramente os casos em que $\mathbb{X} = C(S^m)$ e $\mathbb{X} = L^1(S^m)$. Se $f \in \mathbb{X}$, então segue do Corolário 2.5.8 que

$$\begin{aligned} |\mathcal{Y}_k(f)(\omega)| &\leq d_k^{(m)} \int_{S^m} |P_k^m(\omega \cdot \tau)| |f(\tau)| d\sigma_m(\tau) \\ &\leq d_k^{(m)} \|f\|_{\mathbb{X}}, \quad \omega \in S^m. \end{aligned}$$

Para o caso em que $\mathbb{X} = L^p(S^m)$, $1 < p < \infty$, sejam $f \in \mathbb{X}$ e q o expoente conjugado de p . Como $P_k^m(\omega \cdot \star) \in L^q(S^m)$, $\omega \in S^m$, a Desigualdade de Hölder e, novamente, o Corolário 2.5.8 implicam que

$$\begin{aligned} |\mathcal{Y}_k(f)(\omega)| &\leq d_k^{(m)} \int_{S^m} |P_k^m(\omega \cdot \tau)| |f(\tau)| d\sigma_m(\tau) \\ &\leq d_k^{(m)} \|P_k^m(\omega \cdot \star)\|_q \|f\|_p \\ &\leq d_k^{(m)} \|f\|_p, \quad \omega \in S^m. \end{aligned}$$

O item (iii) segue diretamente de (ii). ■

3.3 Convolução esférica

Introduzimos nesta seção o conceito de convolução para funções definidas em S^m . Para um estudo mais aprofundado sobre esse assunto sugerimos [21, 28, 40].

Consideremos o espaço $L^{1,m} := L^1([-1, 1], d\omega_m(t))$, onde $d\omega_m(t) := (1 - t^2)^{(m-\frac{1}{2})} dt$, ver [17], e onde definimos a norma

$$\|K\|_{1,m} := \int_{-1}^1 |K(t)| d\omega_m(t), \quad K \in L^{1,m}.$$

Definição 3.3.1 *Sejam $f \in L^p(S^m)$, $1 \leq p \leq \infty$ e $K \in L^{1,m}$. A convolução esférica de f com K é a função $K * f$, dada por*

$$(K * f)(\omega) := \int_{S^m} f(\tau) K(\omega \cdot \tau) d\sigma_m(\tau).$$

A convolução esférica satisfaz a seguinte desigualdade.

Teorema 3.3.2 (Desigualdade de Young). *Sejam $f \in \mathbb{X}$ e $K \in L^{1,m}$. Então,*

$$\|K * f\|_{\mathbb{X}} \leq \|K\|_{1,m} \|f\|_{\mathbb{X}}. \quad (3.1)$$

Demonstração. Ver [13, p.30]. ■

Em particular, (3.1) mostra que $K * f$ está bem definida.

Proposição 3.3.3 *Sejam $f, g \in \mathbb{X}$ e $K \in L^{1,m}$. Então,*

$$\int_{S^m} (K * f)(\omega) g(\omega) d\sigma_m(\omega) = \int_{S^m} f(\omega) (K * g)(\omega) d\sigma_m(\omega).$$

Demonstração. Usando o Teorema de Fubini obtemos

$$\begin{aligned} \int_{S^m} (K * f)(\omega) g(\omega) d\sigma_m(\omega) &= \int_{S^m} \left(\int_{S^m} K(\omega \cdot \tau) f(\tau) d\sigma_m(\tau) \right) g(\omega) d\sigma_m(\omega) \\ &= \int_{S^m} f(\tau) \left(\int_{S^m} K(\omega \cdot \tau) g(\omega) d\sigma_m(\omega) \right) d\sigma_m(\tau) \\ &= \int_{S^m} f(\tau) (K * g)(\tau) d\sigma_m(\tau). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Lembremos agora o Teorema de Funk-Hecke, o qual relaciona integração em S^m com integração no intervalo $[-1, 1]$. Sua demonstração pode ser encontrada em [23, 31].

Teorema 3.3.4 (Funk-Hecke). *Sejam $p \in \mathcal{H}_k^m$ e $K \in L^{1,m}$. Então,*

$$\int_{S^m} K(\tau \cdot \omega) p(\omega) d\sigma_m(\omega) = p(\tau) \int_{-1}^1 K(t) P_k^m(t) d\omega_m(t).$$

Vejamos como se comporta a convolução esférica sob a ação do operador projeção.

Proposição 3.3.5 *Sejam $f \in \mathbb{X}$ e $K \in L^{1,m}$. Então,*

$$\mathcal{Y}_k(K * f) = \widehat{K}(k) \mathcal{Y}_k(f), \quad k \in \mathbb{N},$$

onde

$$\widehat{K}(k) = \int_{-1}^1 K(t) P_k^m(t) d\omega_m(t).$$

Demonstração. Usando a Fórmula da Adição obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_k(K * f)(\omega) &= d_k^{(m)} \int_{S^m} P_k^m(\omega \cdot \tau) (K * f)(\tau) d\sigma_m(\tau) \\ &= \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} Y_{k,j}(\omega) \int_{S^m} \overline{Y_{k,j}}(\tau) (K * f)(\tau) d\sigma_m(\tau) \\ &= \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} Y_{k,j}(\omega) \int_{S^m} \overline{Y_{k,j}}(\tau) \left(\int_{S^m} f(\varsigma) K(\tau \cdot \varsigma) d\sigma_m(\varsigma) \right) d\sigma_m(\tau), \quad \omega \in S^m. \end{aligned}$$

Agora, segue dos Teoremas de Fubini e Funk-Hecke que,

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_k(K * f)(\omega) &= \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} Y_{k,j}(\omega) \int_{S^m} f(\varsigma) \left(\int_{S^m} K(\tau \cdot \varsigma) \overline{Y_{k,j}}(\tau) d\sigma_m(\tau) \right) d\sigma_m(\varsigma) \\ &= \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} Y_{k,j}(\omega) \int_{S^m} f(\varsigma) \left(\int_{-1}^1 K(t) P_k^m(t) d\omega_m(t) \right) \overline{Y_{k,j}}(\varsigma) d\sigma_m(\varsigma) \\ &= \widehat{K}(k) \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \widehat{c}_{k,j}(f) Y_{k,j}(\omega), \quad \omega \in S^m. \end{aligned}$$

Logo, pela demonstração da Proposição 3.2.2, obtemos

$$\mathcal{Y}_k(K * f)(\omega) = \widehat{K}(k) \mathcal{Y}_k(f)(\omega), \quad \omega \in S^m.$$

Isto conclui a prova. ■

3.4 Translação esférica

A translação esférica foi introduzida por Rudin em seu famoso artigo [36], onde apenas o caso tri-dimensional foi considerado. Mais tarde, este conceito foi explorado um pouco mais em [5], visando a aplicação do mesmo no estudo de problemas de saturação em esferas. Depois, tal conceito reapareceu como um importante ingrediente na definição de vários módulos de suavidade para funções definidas em esferas [6].

Definição 3.4.1 Para $t \in (0, \pi)$, a translação esférica por t de f sobre S^m é definida por

$$S_t(f)(\omega) := \frac{1}{R_m(t)} \int_{R_\omega^t} f(\tau) d\sigma(\tau), \quad \omega \in S^m. \quad (3.2)$$

onde $d\sigma(\tau)$ é o elemento de volume no anel $R_\omega^t := \{\tau \in S^m : \omega \cdot \tau = \cos t\}$ e $R_m(t)$ é seu volume total. A r -ésima translação esférica é definida por

$$S_t^r := S_t \circ S_t^{r-1}, \quad r \in \{2, 3, \dots\}.$$

A função $S_t(f)$ pode ser interpretada como a média de f sobre o anel R_ω^t . O próximo resultado pode ser encontrada em [31].

Lema 3.4.2 Sejam $t \in (0, \pi)$ e $\omega \in S^m$. Então,

$$\int_{R_\omega^t} p(\tau) d\sigma(\tau) = R_m(t) P_k^m(\cos t) p(\omega), \quad p \in \mathcal{H}_k^m.$$

Proposição 3.4.3 Para cada $t \in (0, \pi)$, $S_t(f)$ é um operador linear definido em \mathbb{X} . Além disso, valem as seguintes propriedades:

- i) Se $f \in \mathbb{X}$, então $\lim_{t \rightarrow 0} \|f - S_t(f)\|_{\mathbb{X}} = 0$;
- ii) $S_t(p) = P_k^m(\cos t)p$, $p \in \mathcal{H}_k^m$, $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Seja $f \in \mathbb{X}$. Para provar (i), escrevemos

$$\begin{aligned} |f(\omega) - S_t(f)(\omega)| &= \left| \frac{1}{R_m(t)} \int_{R_\omega^t} (f(\omega) - f(\tau)) d\sigma(\tau) \right| \\ &= \frac{1}{R_m(t)} \left| \int_{R_\omega^t} (f(\omega) - f(\tau)) d\sigma(\tau) \right| \\ &\leq \frac{1}{R_m(t)} \int_{R_\omega^t} |f(\omega) - f(\tau)| d\sigma(\tau), \quad \omega \in S^m. \end{aligned}$$

No caso contínuo a desigualdade acima implica que

$$\|f - S_t(f)\|_\infty \leq \sup_{\omega \in S^m} \sup_{\tau \in R_\omega^t} |f(\omega) - f(\tau)|.$$

Se $t \rightarrow 0$, então $\|\omega - \tau\| \rightarrow 0$, o que implica que $\tau \rightarrow \omega$. Assim, a continuidade de f garante que $\lim_{t \rightarrow 0} \|f - S_t(f)\|_\infty = 0$. No caso $L^p(S^m)$, $1 \leq p < \infty$, usamos o Teorema 1.1.8-(ii) para obter

$$\|f - S_t(f)\|_p \leq \frac{1}{R_m(t)} \int_{R_\omega^t} \|f(\cdot) - f(\tau)\|_p d\sigma(\tau).$$

Como a integral de uma função de $L^1(S^m)$ é absolutamente contínua, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|f(\cdot) - f(\tau)\|_p < \epsilon, \quad |R_\omega^t| < \delta.$$

Portanto,

$$\|f(\cdot) - f(\tau)\|_p < \epsilon, \quad R_m(t) < \delta.$$

Logo, a condição (i) segue. Se $p \in \mathcal{H}_k^m$, então o Lema 3.4.2 implica que

$$S_t(p)(\omega) = \frac{1}{R_m(t)} \int_{R_\omega^t} p(\tau) d\sigma(\tau) = P_k^m(\cos t)p(\omega), \quad \omega \in S^m.$$

Isso prova o item (ii). ■

Proposição 3.4.4 *Sejam $f \in L^2(S^m)$, $t \in (0, \pi)$ e $\omega \in S^m$. Valem as seguintes igualdades:*

i) *Seja $S_\omega^\perp := \{\tau \in S^m : \langle \omega, \tau \rangle = 0\}$ o equador em S^m relativo a ω . Então,*

$$S_t(f)(\omega) = \int_{S_\omega^\perp} f(\omega \cos t + u \sin t) d\sigma_{m-1}(u).$$

Em particular, se $f_0(\omega) := 1$, então $S_t(f_0)(\omega) = 1$.

ii) *Para $g \in L^{1,m}$,*

$$(g * f)(\omega) = \int_0^\pi g(\cos t) S_t(f)(\omega) (\sin t)^{m-1} dt. \quad (3.3)$$

Demonstração. O primeiro item segue da mudança de variável $\tau \mapsto \omega \cos t + u \sin t$. O caso $S_t(f_0)(\omega) = 1$ para $f_0(\omega) := 1$, segue do fato da medida σ_{m-1} ser normalizada em S^{m-1} . Para o segundo item, escolhamos um sistema de coordenadas tal que ω torna-se o pólo norte e definimos novamente $\tau = \omega \cos t + u \sin t$ ([30]), para obter

$$\begin{aligned} (g * f)(\omega) &= \int_{S^m} g(\omega \cdot \tau) f(\tau) d\sigma_m(\tau) \\ &= \int_{S_\omega^\perp} f(\omega \cos t + u \sin t) \int_0^\pi g(\cos t) (\sin t)^{m-1} dt d\sigma_{m-1}(u) \\ &= \int_0^\pi g(\cos t) \int_{S_\omega^\perp} f(\omega \cos t + u \sin t) d\sigma_{m-1}(u) (\sin t)^{m-1} dt \\ &= \int_0^\pi g(\cos t) S_t(f)(\omega) (\sin t)^{m-1} dt. \end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração. ■

A ação da projeção esférica sobre a translação esférica é dada pelo seguinte resultado.

Proposição 3.4.5 *Sejam $f \in \mathbb{X}$, $t \in (0, \pi)$ e $k \in \mathbb{N}$. Então,*

$$\mathcal{Y}_k \circ S_t = P_k^m(\cos t) \mathcal{Y}_k.$$

Demonstração. Sejam $p \in \mathcal{H}_k^m$, $g \in L^{1,m}$. Aplicando o Teorema de Fubini e o Teorema de Funk-Hecke, temos

$$\begin{aligned} \langle g * f, p \rangle_2 &= \int_{S^m} (g * f)(\omega) p(\omega) d\sigma_m(\omega) \\ &= \int_{S^m} \left(\int_{S^m} g(\omega \cdot \tau) f(\tau) d\sigma_m(\tau) \right) p(\omega) d\sigma_m(\omega) \\ &= \int_{S^m} \left(\int_{S^m} g(\omega \cdot \tau) p(\omega) d\sigma_m(\omega) \right) f(\tau) d\sigma_m(\tau) \\ &= \int_{S^m} \left(p(\tau) \int_0^\pi g(\cos t) P_k^m(\cos t) (\sin t)^{m-1} dt \right) f(\tau) d\sigma_m(\tau) \\ &= \int_0^\pi g(\cos t) P_k^m(\cos t) (\sin t)^{m-1} dt \int_{S^m} p(\tau) f(\tau) d\sigma_m(\tau) \\ &= \langle f, p \rangle_2 \int_0^\pi g(\cos t) P_k^m(\cos t) (\sin t)^{m-1} dt. \end{aligned}$$

Por outro lado, aplicando a equação (3.3) e, novamente, o Teorema de Fubini, temos

$$\begin{aligned}
\langle g * f, p \rangle_2 &= \int_{S^m} (g * f)(\omega) p(\omega) d\sigma_m(\omega) \\
&= \int_{S^m} p(\omega) \left(\int_0^\pi g(\cos t) S_t(f)(\omega) (\sin t)^{m-1} dt \right) d\sigma_m(\omega) \\
&= \int_0^\pi g(\cos t) \left(\int_{S^m} S_t(f)(\omega) p(\omega) d\sigma_m(\omega) \right) (\sin t)^{m-1} dt \\
&= \int_0^\pi g(\cos t) \langle S_t(f), p \rangle_2 (\sin t)^{m-1} dt.
\end{aligned}$$

Uma vez que a igualdade acima vale para qualquer $g \in L^{1,m}$, segue do Teorema 1.1.13 que

$$\langle S_t(f), p \rangle_2 = \langle f, p \rangle_2 P_k^m(\cos t),$$

e isso prova a fórmula. ■

Corolário 3.4.6 *Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $t \in (0, \pi)$. Então,*

$$\mathcal{Y}_k \circ S_t = S_t \circ \mathcal{Y}_k.$$

Demonstração. Segue da Proposição 3.4.5 e do Teorema 3.4.3-(ii). ■

Proposição 3.4.7 *Se $t, l \in (0, \pi)$, então*

$$S_l \circ S_t = S_t \circ S_l.$$

Demonstração. Seja $f \in \mathbb{X}$. A Proposição 3.4.5 implica que

$$\begin{aligned}
\mathcal{Y}_k(S_t \circ S_l(f)) &= P_k^m(\cos t) \mathcal{Y}_k(S_l f) \\
&= P_k^m(\cos t) P_k^m(\cos l) \mathcal{Y}_k(f) \\
&= P_k^m(\cos l) \mathcal{Y}_k(S_t(f)) \\
&= \mathcal{Y}_k(S_l \circ S_t(f)).
\end{aligned}$$

Logo, o Teorema 3.2.4 garante que $S_l \circ S_t = S_t \circ S_l$. ■

O próximo corolário mostra que a translação esférica é uma contração.

Corolário 3.4.8 *Seja $f \in \mathbb{X}$. Então,*

$$\|S_t(f)\|_{\mathbb{X}} \leq \|f\|_{\mathbb{X}}.$$

Demonstração. Para $f \in L^1(S^m)$ temos pela Proposição 3.4.5,

$$\begin{aligned}
\|S_t(f)\|_1 &\leq \int_{S^m} S_t(|f|)(\tau) d\sigma_m(\tau) \\
&= \mathcal{Y}_0(S_t(|f|)) \\
&= P_0^m(t) \mathcal{Y}_0(|f|) \\
&= \int_{S^m} |f(\tau)| d\sigma_m(\tau) \\
&= \|f\|_1.
\end{aligned}$$

Por outro lado, segue direto da definição que

$$\|S_t(f)\|_{supess} \leq \|f\|_{supess}.$$

Assim, usando o Teorema da Interpolação de Riesz-Thorin com $p_0 = p_1 = 1$, $q_0 = q_1 = \infty$ e $u_0 = u_1 = v_0 = v_1 = 1$, obtemos $\|S_t(f)\|_p \leq \|f\|_p$ para $1 \leq p \leq \infty$. ■

Corolário 3.4.9 *Sejam $f \in \mathbb{X}$ e r um inteiro positivo. Então,*

$$\|f - S_t^r(f)\|_p \leq r\|f - S_t(f)\|_p, \quad t \in (0, \pi).$$

Demonstração. De fato, segue do corolário anterior que

$$\begin{aligned} \|f - S_t^r(f)\|_p &\leq \|f - S_t(f)\|_p + \|S_t(f - S_t^{r-1}(f))\|_p \\ &\leq \|f - S_t(f)\|_p + \|f - S_t^{r-1}(f)\|_p \\ &\vdots \\ &\leq r\|f - S_t(f)\|_p, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

3.5 Diferença esférica

Introduzimos nesta seção a diferença esférica que será utilizada na definição de diferenciabilidade que vamos abordar no decorrer do trabalho. Como no caso da translação, a diferença esférica foi introduzida por Rudin em [36] e ressurgiu em [5] para os mesmos motivos citados anteriormente.

Definição 3.5.1 *Para $t \in (0, \pi)$, definimos o operador diferença esférica por*

$$\Delta_t := I - S_t,$$

onde $I : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ é o operador identidade. A r -ésima diferença esférica é definida por

$$\Delta_t^r := \Delta_t \circ \Delta_t^{r-1}, \quad r \in \{2, 3, \dots\},$$

e identificamos $\Delta_t^1 = \Delta_t$.

Proposição 3.5.2 *Sejam r um inteiro positivo e $t \in (0, \pi)$. Então, o operador Δ_t^r é linear e valem as seguintes propriedades:*

- i) $\|\Delta_t^r(f)\|_{\mathbb{X}} \leq 2^r\|f\|_{\mathbb{X}}, \quad f \in \mathbb{X};$
- ii) $\lim_{t \rightarrow 0} \|\Delta_t^r(f)\|_{\mathbb{X}} = 0, \quad f \in \mathbb{X};$
- iii) $\mathcal{Y}_k \circ \Delta_t^r = (1 - P_k^m(\cos t))^r \mathcal{Y}_k, \quad k = 0, 1, \dots$

Demonstração. Da linearidade da translação esférica segue que o operador Δ_t^r é linear. Agora, segue do Corolário 3.4.8 que

$$\|\Delta_t(f)\|_{\mathbb{X}} = \|f - S_t(f)\|_{\mathbb{X}} \leq \|f\|_{\mathbb{X}} + \|S_t(f)\|_{\mathbb{X}} \leq 2\|f\|_{\mathbb{X}}, \quad f \in \mathbb{X},$$

de modo que

$$\|\Delta_t^r(f)\|_{\mathbb{X}} = \|\Delta_t(\Delta_t^{r-1}(f))\|_{\mathbb{X}} \leq 2\|\Delta_t^{r-1}(f)\|_{\mathbb{X}} \leq \dots \leq 2^r\|f\|_{\mathbb{X}}, \quad f \in \mathbb{X}.$$

Logo, (i) está provado. Segue do item (i) e da Proposição 3.4.3-(i) que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\Delta_t^r(f)\|_{\mathbb{X}} \leq 2^{r-1} \lim_{t \rightarrow 0} \|\Delta_t(f)\|_{\mathbb{X}} = 0, \quad f \in \mathbb{X}.$$

Assim, $\lim_{t \rightarrow 0} \|\Delta_t^r(f)\|_{\mathbb{X}} = 0$, $f \in \mathbb{X}$, e provamos (ii). Para provar (iii), consideremos primeiramente o caso $r = 1$. A linearidade de \mathcal{Y}_k e a Proposição 3.4.5 implicam que

$$\mathcal{Y}_k(\Delta_t(f)) = \mathcal{Y}_k(f) - \mathcal{Y}_k(S_t(f)) = (1 - P_k^m(\cos t))\mathcal{Y}_k(f), \quad f \in \mathbb{X}, \quad t \in (0, \pi), \quad k = 0, 1, \dots$$

Portanto, para $r > 1$ temos

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_k(\Delta_t^r(f)) &= \mathcal{Y}_k(\Delta_t(\Delta_t^{r-1}(f))) \\ &= (1 - P_k^m(\cos t))\mathcal{Y}_k(\Delta_t^{r-1}(f)) \\ &= (1 - P_k^m(\cos t))^r \mathcal{Y}_k(f), \quad f \in \mathbb{X}, \quad k = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Isto conclui a prova. ■

3.6 Derivada forte de Laplace-Beltrami

Nesta seção introduzimos o conceito de diferenciabilidade forte de Laplace-Beltrami e deduzimos suas propriedades básicas. Este conceito foi primeiramente utilizado em [41] e é citado em [40, p.164]. O termo forte é utilizado para diferenciar este conceito (global) do conceito pontual introduzido por Rudin em [36].

Definição 3.6.1 Dizemos que uma função $f \in \mathbb{X}$ é fortemente diferenciável no sentido de Laplace-Beltrami quando existir uma função $\mathcal{D}(f) \in \mathbb{X}$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{\Delta_t(f)}{1 - \cos t} - \mathcal{D}(f) \right\|_{\mathbb{X}} = 0. \quad (3.4)$$

A função $\mathcal{D}(f)$ é chamada de primeira derivada forte de Laplace-Beltrami de f . Derivadas de ordem superior são definidas indutivamente por

$$\mathcal{D}^r := \mathcal{D} \circ \mathcal{D}^{r-1}, \quad r \in \{2, 3, \dots\},$$

e identificamos $\mathcal{D}^1 = \mathcal{D}$.

Notação: Denotamos o conjunto das funções diferenciáveis nesse sentido por $W_{\mathbb{X}}^r(S^m)$, isto é,

$$W_{\mathbb{X}}^r(S^m) = \{f \in \mathbb{X} : \mathcal{D}^r(f) \in \mathbb{X}\}, \quad r \in \{1, 2, \dots\}.$$

Observamos que $0 \in W_{\mathbb{X}}^r(S^m)$ e que $\mathcal{D}^r(0) = 0$, $r \in \{1, 2, \dots\}$.

O próximo resultado pode ser encontrado em [23].

Lema 3.6.2 Se $k = 0, 1, \dots$, então $\frac{d}{dt}P_k^m = (\lambda_{k,m}/m)P_{k-1}^{m+3}$.

Proposição 3.6.3 Sejam $k \in \mathbb{N}$ e r um inteiro positivo. Valem as seguintes propriedades:

- i) $\mathcal{H}_k^m \subset W_{\mathbb{X}}^r(S^m)$;
- ii) $\mathcal{D}^r(p) = m^{-r}\lambda_{k,m}^r p$, $p \in \mathcal{H}_k^m$.

Demonstração. Consideremos o caso $r = 1$. Se $p \in \mathcal{H}_k^m$, usando a Proposição 3.4.3-(ii) obtemos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\Delta_t(p)}{1 - \cos t} - \frac{\lambda_{k,m}}{m} p \right\|_{\mathbb{X}} &= \left\| \frac{(1 - P_k^m(\cos t))p}{1 - \cos t} - \frac{\lambda_{k,m}}{m} p \right\|_{\mathbb{X}} \\ &= \left| \frac{1 - P_k^m(\cos t)}{1 - \cos t} - \frac{\lambda_{k,m}}{m} \right| \|p\|_{\mathbb{X}}, \quad t \in (0, \pi). \end{aligned}$$

Aplicando a Regra de L'Hospital e usando o Lema 3.6.2 encontramos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - P_k^m(\cos t)}{1 - \cos t} = \frac{\lambda_{k,m}}{m} \lim_{t \rightarrow 0} P_{k-1}^{m+3}(\cos t) = \frac{\lambda_{k,m}}{m}. \quad (3.5)$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{\Delta_t(p)}{1 - \cos t} - \frac{\lambda_{k,m}}{m} p \right\|_{\mathbb{X}} = 0.$$

Portanto, $p \in W_{\mathbb{X}}^1(S^m)$ e

$$\mathcal{D}(p) = \frac{\lambda_{k,m}}{m} p.$$

Suponhamos agora que o resultado é verdadeiro para $r \in \{1, \dots, l-1\}$. Usando a hipótese de indução para $r = l-1$, segue que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{\Delta_t(\mathcal{D}^{l-1}(p))}{1 - \cos t} - \left(\frac{\lambda_{k,m}}{m} \right)^l p \right\|_{\mathbb{X}} = \left(\frac{\lambda_{k,m}}{m} \right)^{l-1} \lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{\Delta_t(p)}{1 - \cos t} - \mathcal{D}(p) \right\|_{\mathbb{X}}.$$

Assim, usando a hipótese de indução para $r = 1$, temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{\Delta_t(\mathcal{D}^{l-1}(p))}{1 - \cos t} - \left(\frac{\lambda_{k,m}}{m} \right)^l p \right\|_{\mathbb{X}} = 0.$$

Portanto, $\mathcal{D}^{l-1}(p) \in W_{\mathbb{X}}^1(S^m)$, o que implica que $\mathcal{D}^l(p) = \mathcal{D}(\mathcal{D}^{l-1}(p)) \in \mathbb{X}$, ou seja, $p \in W_{\mathbb{X}}^l(S^m)$. Além disso,

$$\mathcal{D}^l(p) = \left(\frac{\lambda_{k,m}}{m} \right)^l p.$$

Isto conclui a prova. ■

Proposição 3.6.4 *Seja r um inteiro positivo. Então, o conjunto $W_{\mathbb{X}}^r(S^m)$ é um subespaço vetorial de \mathbb{X} .*

Demonstração. Já sabemos que $0 \in W_{\mathbb{X}}^r(S^m)$. Para provar a outra condição de subespaço vetorial consideremos primeiramente o caso $r = 1$. Sejam $f, g \in W_{\mathbb{X}}^1(S^m)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Usando a linearidade de Δ_t e a desigualdade triangular segue que

$$\left\| \frac{\Delta_t(\alpha f + g)}{1 - \cos t} - (\alpha \mathcal{D}(f) + \mathcal{D}(g)) \right\|_{\mathbb{X}} \leq |\alpha| \left\| \frac{\Delta_t(f)}{1 - \cos t} - \mathcal{D}(f) \right\|_{\mathbb{X}} + \left\| \frac{\Delta_t(g)}{1 - \cos t} - \mathcal{D}(g) \right\|_{\mathbb{X}}.$$

Tomando o limite quando $t \rightarrow 0$, concluímos que $\mathcal{D}(\alpha f + g) = \alpha \mathcal{D}(f) + \mathcal{D}(g)$ e que, obviamente, $\alpha f + g \in W_{\mathbb{X}}^1(S^m)$. Agora, suponhamos que o resultado vale para $r \in \{1, 2, \dots, l-1\}$ e sejam $f, g \in W_{\mathbb{X}}^l(S^m)$ e $\alpha \in \mathbb{C}$. Então, procedendo como acima temos

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\Delta_t(\mathcal{D}^{l-1}(\alpha f + g))}{1 - \cos t} - (\alpha \mathcal{D}^l(f) + \mathcal{D}^l(g)) \right\|_{\mathbb{X}} &\leq |\alpha| \left\| \frac{\Delta_t(\mathcal{D}^{l-1}(f))}{1 - \cos t} - \mathcal{D}^l(f) \right\|_{\mathbb{X}} \\ &\quad + \left\| \frac{\Delta_t(\mathcal{D}^{l-1}(g))}{1 - \cos t} - \mathcal{D}^l(g) \right\|_{\mathbb{X}}. \end{aligned}$$

Tomando o limite na desigualdade acima quando $t \rightarrow 0$, obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{\Delta_t(\mathcal{D}^{l-1}(\alpha f + g))}{1 - \cos t} - (\alpha \mathcal{D}^l(f) + \mathcal{D}^l(g)) \right\|_{\mathbb{X}} = 0.$$

Portanto, $\mathcal{D}^l(\alpha f + g) = (\alpha \mathcal{D}^l(f) + \mathcal{D}^l(g))$ e $\alpha f + g \in W_{\mathbb{X}}^l(S^m)$. ■

Corolário 3.6.5 *Seja r um inteiro positivo. Então, o operador $\mathcal{D}^r : W_{\mathbb{X}}^r(S^m) \rightarrow \mathbb{X}$ é linear.*

Teorema 3.6.6 *Seja r um inteiro positivo. Então, o conjunto $W_{\mathbb{X}}^r(S^m)$ é denso em \mathbb{X} .*

Demonstração. Isto segue das inclusões $\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k^m \subset W_{\mathbb{X}}^r(S^m) \subset \mathbb{X}$ e do fato do conjunto $\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{H}_k^m$ ser fundamental em \mathbb{X} . ■

O espaço $W_{\mathbb{X}}^r(S^m)$ é usualmente chamado de espaço de Sobolev. Uma maneira natural de gerar uma topologia para este espaço é considerar a norma $\|\cdot\|_{W_{\mathbb{X}}^r}$ dada por

$$\|f\|_{W_{\mathbb{X}}^r} := \|f\|_{\mathbb{X}} + \|\mathcal{D}^r(f)\|_{\mathbb{X}}, \quad f \in W_{\mathbb{X}}^r(S^m).$$

Com essa norma, $(W_{\mathbb{X}}^r(S^m), \|\cdot\|_{W_{\mathbb{X}}^r})$ é um espaço de Banach, como veremos no fim dessa seção. No caso em que $\mathbb{X} = L^p(S^m)$, $1 \leq p \leq \infty$, denotamos este espaço por $W_p^r(S^m)$ e sua norma por $\|\cdot\|_{W_p^r}$. A ação do operador projeção sobre a derivada forte de Laplace-Beltrami é explicada a seguir.

Teorema 3.6.7 *Sejam $f \in W_{\mathbb{X}}^r(S^m)$ e r um inteiro positivo. Então,*

$$\mathcal{Y}_k(\mathcal{D}^r(f)) = \left(\frac{\lambda_{k,m}}{m} \right)^r \mathcal{Y}_k(f), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Fixemos $k \in \mathbb{N}$. No caso $r = 1$, usamos (3.5) para deduzir que, para $\omega \in S^m$ e $f \in W_{\mathbb{X}}^1(S^m)$, temos

$$\left| \frac{\lambda_{k,m}}{m} \mathcal{Y}_k(f)(\omega) - \mathcal{Y}_k(\mathcal{D}(f))(\omega) \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \left| \frac{1 - P_k^m(\cos t)}{1 - \cos t} \mathcal{Y}_k(f)(\omega) - \mathcal{Y}_k(\mathcal{D}(f))(\omega) \right|.$$

Dado $t \in (0, \pi)$ segue da Proposição 3.4.5 e da linearidade do operador projeção que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1 - P_k^m(\cos t)}{1 - \cos t} \mathcal{Y}_k(f)(\omega) - \mathcal{Y}_k(\mathcal{D}(f))(\omega) \right| &= \left| \frac{\mathcal{Y}_k(f)(\omega) - \mathcal{Y}_k(S_t(f))(\omega)}{1 - \cos t} - \mathcal{Y}_k(\mathcal{D}(f))(\omega) \right| \\ &= \left| \mathcal{Y}_k \left(\frac{f - S_t(f)}{1 - \cos t} - \mathcal{D}(f) \right) (\omega) \right|. \end{aligned}$$

Por outro lado, a Proposição 3.2.5-(ii) implica que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left| \mathcal{Y}_k \left(\frac{f - S_t(f)}{1 - \cos t} - \mathcal{D}(f) \right) (\omega) \right| \leq d_k^{(m)} \lim_{t \rightarrow 0} \left\| \frac{f - S_t(f)}{1 - \cos t} - \mathcal{D}(f) \right\|_{\mathbb{X}} = 0.$$

Combinando as três informações anteriores, concluímos que

$$\mathcal{Y}_k(\mathcal{D}(f)) = \frac{\lambda_{k,m}}{m} \mathcal{Y}_k(f).$$

Agora, suponhamos que o resultado vale para $r \in \{1, \dots, l-1\}$. Assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}_k(\mathcal{D}^l(f)) &= \mathcal{Y}_k(\mathcal{D}(\mathcal{D}^{l-1}(f))) \\ &= \frac{\lambda_{k,m}}{m} \mathcal{Y}_k(\mathcal{D}^{l-1}(f)) \\ &\vdots \\ &= \left(\frac{\lambda_{k,m}}{m}\right)^l \mathcal{Y}_k(f), \quad f \in W_{\mathbb{X}}^l(S^m). \end{aligned}$$

Isto conclui a demonstração. ■

Observação 3.6.8 A expansão em série de Fourier da r -ésima derivada forte de Laplace-Beltrami de $f \in \mathbb{X}$ é dada por

$$\mathcal{D}^r(f) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k(k+m-1))^r}{m^r} \mathcal{Y}_k(f).$$

Teorema 3.6.9 *Sejam $f \in \mathbb{X}$ e r um inteiro positivo. Então, são equivalentes*

i) $f \in W_{\mathbb{X}}^r(S^m)$;

ii) Existe $g \in \mathbb{X}$ tal que

$$\mathcal{Y}_k(g) = \left(\frac{\lambda_{k,m}}{m}\right)^r \mathcal{Y}_k(f), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Demonstração. Se $f \in W_{\mathbb{X}}^r(S^m)$, então $\mathcal{D}^r(f) \in \mathbb{X}$ e segue do Teorema 3.6.7 que

$$\mathcal{Y}_k(\mathcal{D}^r(f)) = \left(\frac{\lambda_{k,m}}{m}\right)^r \mathcal{Y}_k(f), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Assim, pelo Teorema 3.2.4, basta tomar $g = \mathcal{D}^r(f)$. A recíproca exige o uso de ferramentas das quais não dispomos neste texto, sua demonstração pode ser encontrada em [33]. ■

Teorema 3.6.10 *Sejam r um inteiro positivo. Então, o operador $\mathcal{D}^r : W_{\mathbb{X}}^r(S^m) \rightarrow \mathbb{X}$ é fechado.*

Demonstração. Sejam $f, g \in \mathbb{X}$ e $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset W_{\mathbb{X}}^r(S^m)$ uma sequência tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\mathbb{X}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{D}^r(f_n) - g\|_{\mathbb{X}} = 0.$$

Usando a Proposição 3.2.5-(ii) encontramos

$$\begin{aligned} \left\| \left(\frac{\lambda_{k,m}}{m}\right)^r \mathcal{Y}_k(f_n) - \mathcal{Y}_k(g) \right\|_{\mathbb{X}} &= \|\mathcal{Y}_k(\mathcal{D}^r(f_n)) - \mathcal{Y}_k(g)\|_{\mathbb{X}} \\ &= \|\mathcal{Y}_k(\mathcal{D}^r(f_n) - g)\|_{\mathbb{X}} \\ &\leq d_k^{(m)} \|\mathcal{D}^r(f_n) - g\|_{\mathbb{X}}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{D}^r(f_n) - g\|_{\mathbb{X}} = 0$, então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_{k,m}}{m}\right)^r \mathcal{Y}_k(f_n) = \mathcal{Y}_k(g), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Por outro lado, como

$$\|\mathcal{Y}_k(f_n) - \mathcal{Y}_k(f)\|_{\mathbb{X}} = \|\mathcal{Y}_k(f_n - f)\|_{\mathbb{X}} \leq d_k^{(m)} \|f_n - f\|_{\mathbb{X}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

e $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\mathbb{X}} = 0$, vemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{Y}_k(f_n) = \mathcal{Y}_k(f)$, $k \in \mathbb{N}$. Segue que

$$\left(\frac{\lambda_{k,m}}{m}\right)^r \mathcal{Y}_k(f) = \mathcal{Y}_k(g), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Portanto, segue do Teorema 3.6.9 que $f \in W_{\mathbb{X}}^r(S^m)$ e, pelos Teoremas 3.6.7 e 3.2.4, obtemos $\mathcal{D}^r(f) = g$. Portanto, o Teorema 1.2.25 garante que \mathcal{D}^r é fechado. ■

Teorema 3.6.11 *Seja r um inteiro positivo. Então, o espaço $(W_{\mathbb{X}}^r(S^m), \|\cdot\|_{W_{\mathbb{X}}^r})$ é completo.*

Demonstração. Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $W_{\mathbb{X}}^r(S^m)$. Então dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|f_n - f_j\|_{\mathbb{X}} + \|\mathcal{D}^r(f_n) - \mathcal{D}^r(f_j)\|_{\mathbb{X}} = \|f_n - f_j\|_{W_{\mathbb{X}}^r} \leq \epsilon, \quad n, j \geq N.$$

Logo, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{\mathcal{D}^r(f_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy em \mathbb{X} . Como \mathbb{X} é completo, existem funções $f, g \in \mathbb{X}$ tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\mathbb{X}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{D}^r(f_n) - g\|_{\mathbb{X}} = 0.$$

Portanto, pelo teorema anterior temos que $f \in W_{\mathbb{X}}^r(S^m)$ e $\mathcal{D}^r(f) = g$. Assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{W_{\mathbb{X}}^r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\mathbb{X}} + \|\mathcal{D}^r(f_n) - \mathcal{D}^r(f)\|_{\mathbb{X}} = 0,$$

o que prova o teorema. ■

Teorema 3.6.12 *Sejam $f \in L^2(S^m)$ e r um inteiro positivo. Se existir $g \in C^{2r}(S^m)$ tal que $f = g$ σ_m -q.s., então $\mathcal{D}^r(f) = m^{-r}(-\tilde{\Delta})^r g$.*

Demonstração. Sejam $g \in C^{2r}(S^m)$ e $f = g$ σ_m -q.s.. Definimos

$$g_n := \sum_{k=1}^n \mathcal{Y}_k(g), \quad n = 1, 2, \dots$$

Como o espaço $W_{\mathbb{X}}^1(S^m)$ contém todos os espaços \mathcal{H}_k^m , segue que $\{g_n\} \subset W_{\mathbb{X}}^1(S^m)$. Além disso, vemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - g\|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(-\tilde{\Delta})^r g_n - (-\tilde{\Delta})^r g\|_2 = 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n (-\tilde{\Delta})^r \mathcal{Y}_k(g) &= m^r \sum_{k=1}^n \mathcal{D}^r(\mathcal{Y}_k(g)) \\ &= m^r \mathcal{D}^r \left(\sum_{k=1}^n \mathcal{Y}_k(g) \right) \\ &= m^r \mathcal{D}^r(g_n). \end{aligned}$$

Dessa forma, deduzimos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{D}^r(g_n) - m^{-r}(-\tilde{\Delta})^r g\|_2 = 0.$$

Como \mathcal{D}^r é um operador fechado, concluímos que $g \in W_2^r(S^m)$ e $\mathcal{D}^r(g) = m^{-r}(-\tilde{\Delta})^r g$. Finalmente, podemos afirmar que $\mathcal{D}^r(f)$ existe e $\mathcal{D}^r(f) = \mathcal{D}^r(g)$ em $L^2(S^m)$. ■

Os próximos resultados relacionam a derivada forte de Laplace-Beltrami com a translação esférica.

Teorema 3.6.13 *Sejam $f \in W_{\mathbb{X}}^r(S^m)$, r um inteiro positivo. Então, $S_t(f) \in W_{\mathbb{X}}^r(S^m)$ e*

$$\mathcal{D}^r(S_t(f)) = S_t(\mathcal{D}^r(f)), \quad t \in (0, \pi).$$

Demonstração. É suficiente provar que $S_t(f) \in W_{\mathbb{X}}^1(S^m)$ e que $\mathcal{D}^1(S_t(f)) = S_t(\mathcal{D}^1(f))$, quando $f \in W_{\mathbb{X}}^1(S^m)$. Usamos a Proposição 3.4.7 e a linearidade de S_t para obter

$$\begin{aligned} \Delta_l(S_t(f)) &= S_t(f) - S_l(S_t(f)) \\ &= S_t(f) - S_t(S_l(f)) \\ &= S_t(\Delta_l f), \quad l \in (0, \pi). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_l(S_t(f))}{1-l} - S_t(\mathcal{D}^1(f)) &= \frac{S_t(\Delta_l f)}{1-l} - S_t(\mathcal{D}^1(f)) \\ &= S_t\left(\frac{\Delta_l f}{1-l} - \mathcal{D}^1(f)\right), \quad l \in (0, \pi). \end{aligned}$$

Como $f \in W_{\mathbb{X}}^1(S^m)$, segue que

$$\lim_{l \rightarrow 0} \left\| \frac{\Delta_l(S_t(f))}{1-l} - S_t(\mathcal{D}^1(f)) \right\|_{\mathbb{X}} \leq \|S_t\|_{\mathbb{X}} \lim_{l \rightarrow 0} \left\| \frac{\Delta_l f}{1-l} - \mathcal{D}^1(f) \right\|_{\mathbb{X}} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{l \rightarrow 0} \left\| \frac{\Delta_l(S_t(f))}{1-l} - S_t(\mathcal{D}^1(f)) \right\|_{\mathbb{X}} = 0.$$

Assim, $S_t(f) \in W_{\mathbb{X}}^1(S^m)$ e $\mathcal{D}^1(S_t(f)) = S_t(\mathcal{D}^1(f))$. ■

Corolário 3.6.14 *Sejam $f \in W_{\mathbb{X}}^r(S^m)$, r um inteiro positivo. Então,*

$$\tilde{\Delta}^r S_t(f) = S_t \tilde{\Delta}^r(f), \quad t \in (0, \pi).$$

Demonstração. Segue dos dois teoremas anteriores. ■

Capítulo 4

Aproximação na esfera

Neste capítulo apresentamos os dois teoremas principais que mostram as taxas desejadas de decaimento para núcleos esféricos satisfazendo certas condições de suavidade. Para apresentar as demonstrações de uma forma mais fácil de ser seguida, primeiro introduzimos os conceitos necessários, detalhando algumas propriedades e demonstramos alguns resultados técnicos adicionais.

4.1 Módulo de suavidade e equivalências

Nesta seção introduzimos o módulo de suavidade esférico de uma função e deduzimos algumas estimativas associadas. A dedução de tais propriedades passa pela equivalência entre o módulo de suavidade e o K -funcional associado aos espaços $W_p^r(S^m)$.

Definição 4.1.1 *Sejam $f \in L^p(S^m)$, $1 \leq p \leq \infty$ e r um inteiro positivo. O r -ésimo módulo de suavidade esférico de f é definido por*

$$\omega_r(f; \tau)_p := \sup_{0 < t \leq \tau} \|\Delta_t^r f\|_p, \quad \tau \in (0, \pi).$$

A proposição abaixo lista algumas propriedades básicas do módulo de suavidade.

Proposição 4.1.2 *Sejam $f, g \in L^p(S^m)$, $1 \leq p \leq \infty$ e r um inteiro positivo. Então, valem as seguintes propriedades.*

- i) $\omega_r(f; \tau)_p \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$;
- ii) $\omega_r(f; \tau)_p$ é monótono não decrescente em $(0, \pi)$;
- iii) $\omega_r(f + g; \tau)_p \leq \omega_r(f; \tau)_p + \omega_r(g; \tau)_p$;
- iv) se s é um inteiro positivo menor que r , então

$$\omega_r(f; \tau)_p \leq 2^{(r-s)} \omega_s(f; \tau)_p.$$

Demonstração. O item (i) segue diretamente da Proposição 3.5.2-(ii).

O item (ii) é óbvio, pois se $0 < \tau_1 \leq \tau_2 \leq \pi$, então

$$\sup_{0 < t \leq \tau_1} \|\Delta_t^r f\|_p \leq \sup_{0 < t \leq \tau_2} \|\Delta_t^r f\|_p.$$

Para o item (iii), como $\Delta_t^r(f + g) = \Delta_t^r f + \Delta_t^r g$, segue da Desigualdade Triangular que

$$\|\Delta_t^r(f + g)\|_p \leq \|\Delta_t^r f\|_p + \|\Delta_t^r g\|_p.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sup_{0 < t \leq \tau} \|\Delta_t^r(f+g)\|_p &\leq \sup_{0 < t \leq \tau} (\|\Delta_t^r f\|_p + \|\Delta_t^r g\|_p) \\ &= \sup_{0 < t \leq \tau} \|\Delta_t^r f\|_p + \sup_{0 < t \leq \tau} \|\Delta_t^r g\|_p. \end{aligned}$$

Para provar (iv), tomamos $0 < s < r$ inteiro. Da Proposição 3.5.2-(i) segue que

$$\|\Delta_t^r f\|_p = \|\Delta_t^{r-s}(\Delta_t^s(f))\|_p \leq 2^{r-s} \|\Delta_t^s f\|_p.$$

Assim,

$$\sup_{0 < t \leq \tau} \|\Delta_t^r f\|_p \leq 2^{r-s} \sup_{0 < t \leq \tau} \|\Delta_t^s f\|_p.$$

Isso termina a prova. ■

A seguir definimos a melhor aproximação de uma função f por harmônicos esféricos. Mais detalhes e propriedades sobre este assunto podem ser encontrados em [13, 14].

Definição 4.1.3 *Seja $f \in L^p(S^m)$, $1 \leq p \leq \infty$. Definimos a melhor aproximação de f por harmônicos esféricos de grau menor ou igual a k , por*

$$E_\ell(f)_p := \inf \left\{ \|f - T\|_p : T \in \bigoplus_{k=0}^{\ell} \mathcal{H}_k^m \right\}, \quad \ell = 0, 1, \dots$$

A melhor aproximação $E_\ell(f)_p$ existe, pois $\bigoplus_{k=0}^{\ell} \mathcal{H}_k^m$ tem dimensão finita [15]. A sequência $\{E_\ell(f)_p\}_{\ell=0}^{\infty}$ decresce monotonicamente para zero, quando $\ell \rightarrow \infty$. Uma relação entre o módulo de suavidade e a melhor aproximação é dada pelo teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [37].

Teorema 4.1.4 *Sejam $f \in L^p(S^m)$, $1 \leq p \leq \infty$. Então,*

$$E_\ell(f)_p \leq c \omega_r \left(f; \frac{\pi}{\ell+1} \right), \quad \ell = 0, 1, \dots \quad (4.1)$$

A seguir, introduzimos o K -funcional de uma função de $L^p(S^m)$ relativo ao espaço $W_p^r(S^m)$. Assim como o módulo de suavidade esférico, o K -funcional fornece informações sobre a suavidade de uma função.

Definição 4.1.5 *Sejam $f \in L^p(S^m)$, $1 \leq p \leq \infty$, r um inteiro positivo e $\tau > 0$. O K -funcional de f relativo a $W_p^r(S^m)$ é definido por*

$$K_r(f, \tau)_p := \inf \{ \|f - g\|_p + \tau^r \|g\|_{W_p^r} : g \in W_p^r(S^m) \}.$$

Vamos usar o símbolo “ \approx ” para nos referir à seguinte relação:

$$A(x) \approx B(x), \quad x \in V \Leftrightarrow \exists c_1, c_2 > 0 : c_1 B(x) \leq A(x) \leq c_2 B(x), \quad x \in V.$$

Queremos estabelecer esta relação entre o módulo de suavidade e o K -funcional. Para isto, precisamos de alguns resultados auxiliares que são descritos a seguir. Definimos o operador multiplicador $\eta_\ell : L^p(S^m) \rightarrow L^p(S^m)$, $1 \leq p < \infty$, dependendo de uma função fixa $\eta \in C^\infty[0, \infty)$ que satisfaz as seguintes condições,

$$\begin{cases} \eta(x) = 1, & \text{se } x \in [0, 1] \\ 0 \leq \eta(x) \leq 1, & \text{se } x \in (1, 2) \\ \eta(x) = 0, & \text{se } x \in [2, \infty). \end{cases}$$

A ação do operador η_ℓ é definida pela fórmula

$$\eta_\ell f = \sum_{k=1}^{\infty} \eta(k/\ell) \mathcal{Y}_k(f), \quad f \in L^p(S^m).$$

O operador multiplicador satisfaz as seguintes propriedades.

Lema 4.1.6 *Seja $f \in L^p(S^m)$, $1 \leq p \leq \infty$. Então,*

- i) $\eta_\ell f$ é uma soma de harmônicos esféricos de grau no máximo $2\ell - 1$;*
- ii) se $p \in \mathcal{H}_j^m$, $j \leq \ell$, então $\eta_\ell p = p$;*
- iii) para $\ell = 1, 2, \dots$, existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\|\eta_\ell f\|_p \leq c \|f\|_p;$$

- iv) para $\ell = 1, 2, \dots$, existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\|f - \eta_\ell f\|_p \leq c E_\ell(f)_p.$$

Demonstração. (i) De fato, quando $k \geq 2\ell$, temos $\eta(k/\ell) = 0$.

- (ii) Seja $p_j \in \mathcal{H}_j^m$, $j \leq \ell$. De 3.2.5-(i) temos,

$$\begin{aligned} \eta_\ell p_j &= \sum_{k=1}^{\infty} \eta(k/\ell) \mathcal{Y}_k(p_j) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \eta(k/\ell) \delta_{k,j} p_j \\ &= \eta(j/\ell) p_j. \end{aligned}$$

Como $j \leq \ell$, então $\eta(j/\ell) p_j = p_j$, isto é, $\eta_\ell p_j = p_j$.

- (iii) Segue do item (i) e da Proposição 3.2.5-(iii), que

$$\begin{aligned} \|\eta_\ell f\|_p &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \eta(k/\ell) \mathcal{Y}_k(f) \right\|_p \\ &\leq \sum_{k=1}^{2\ell-1} \|\eta(k/\ell) \mathcal{Y}_k(f)\|_p \\ &\leq \sum_{k=1}^{2\ell-1} \eta(k/\ell) \|\mathcal{Y}_k(f)\|_p \\ &\leq (2\ell - 1) d_k^{(m)} \|f\|_p. \end{aligned}$$

- (iv) Dado $\varepsilon > 0$, existe $T \in \bigoplus_{k=1}^{\ell} \mathcal{H}_k^m$ tal que $\|f - T\|_p \leq E_\ell(f)_p + \varepsilon$. Aplicando os itens (ii) e (iii), temos

$$\begin{aligned} \|f - \eta_\ell f\|_p &\leq \|f - T\|_p + \|T - \eta_\ell f\|_p \\ &\leq \|f - T\|_p + \|\eta_\ell T - \eta_\ell f\|_p \\ &\leq \|f - T\|_p + \|\eta_\ell(T - f)\|_p \\ &\leq \|f - T\|_p + c \|f - T\|_p \\ &= (1 + c) \|f - T\|_p \\ &\leq (1 + c)(E_\ell(f)_p + \varepsilon). \end{aligned}$$

Passando ao limite quando ε tende a 0, obtemos $\|f - \eta_\ell f\|_p \leq (1 + c)E_\ell(f)_p$. ■

Lema 4.1.7 *Sejam $f \in L^p(S^m)$, $g \in W_p^r(S^m)$, $1 \leq p \leq \infty$ e r um inteiro positivo. Então,*

$$\omega_r(f; \tau)_p \leq 2^r \|f - g\|_p + \omega_r(g; \tau)_p.$$

Demonstração. Pelos itens (iii) e (iv) da Proposição 4.1.2, temos

$$\begin{aligned} \omega_r(f; \tau)_p &= \omega_r(f - g + g; \tau)_p \\ &\leq \omega_r(f - g; \tau)_p + \omega_r(g; \tau)_p \\ &\leq 2^r \|f - g\|_p + \omega_r(g; \tau)_p. \end{aligned}$$

Isto prova o lema. ■

Lema 4.1.8 *Sejam $f \in L^p(S^m)$, $1 \leq p \leq \infty$ e r um inteiro positivo. Então,*

$$\|\mathcal{D}^r(\eta_\ell f)\|_p \leq ct^{-r} \|\Delta_t^r f\|_p, \quad t \in \left(0, \frac{\pi}{2(\ell + m - 1)}\right).$$

Demonstração. Ver [37, Lema 3.6]. ■

Lema 4.1.9 *Sejam $f \in W_p^r(S^m)$, $1 \leq p \leq \infty$ e r um inteiro positivo. Então,*

$$\omega_r(f; \tau)_p \leq c\tau^r \|\mathcal{D}^r(f)\|_p, \quad \tau \in (0, \pi).$$

Demonstração. Ver [37, Lema 3.8]. ■

Lema 4.1.10 *Sejam $f \in L^p(S^m)$, $1 \leq p \leq \infty$ e r um inteiro positivo. Então,*

$$\|\eta_\ell f\|_p \leq c \|\mathcal{D}^r(\eta_\ell f)\|_p, \quad c > 0.$$

Demonstração. Pela Proposição 3.6.3-(ii) e Proposição 3.2.5-(iii) temos

$$\begin{aligned} \|\eta_\ell f\|_p &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|\mathcal{Y}_k(\eta_\ell f)\|_p \\ &\leq \sum_{k=1}^{2\ell-1} \left\| \frac{m^r}{\lambda_{k,m}^r} \mathcal{D}^r(\mathcal{Y}_k(\eta_\ell f)) \right\|_p \\ &\leq \frac{m^r}{\lambda_{1,m}^r} \sum_{k=1}^{2\ell-1} \|\mathcal{Y}_k(\mathcal{D}^r(\eta_\ell f))\|_p \\ &\leq \frac{m^r}{\lambda_{1,m}^r} 2\ell d_k^{(m)} \|\mathcal{D}^r(\eta_\ell f)\|_p. \end{aligned}$$

O lema segue tomando $c = (m^r / \lambda_{1,m}^r) 2\ell d_k^{(m)}$. ■

O teorema a seguir mostra a equivalência entre o K -funcional e o módulo de suavidade esférico.

Teorema 4.1.11 *Sejam $f \in L^p(S^m)$, $1 \leq p \leq \infty$ e r um inteiro positivo. Então,*

$$\omega_r(f; \tau)_p \approx K_r(f, \tau)_p, \quad \tau \in (0, \pi). \quad (4.2)$$

Demonstração. Seja $g \in W_p^r(S^m)$. Pelo Lema 4.1.7 e Lema 4.1.9, temos

$$\begin{aligned}
 \omega_r(f; \tau)_p &\leq 2^r \|f - g\|_p + \omega_r(g; \tau)_p \\
 &\leq 2^r \|f - g\|_p + c_1 \tau^r \|\mathcal{D}^r(g)\|_p \\
 &\leq 2^r \|f - g\|_p + c_1 \tau^r \|g\|_p + c \tau^r \|\mathcal{D}^r(g)\|_p \\
 &= 2^r \|f - g\|_p + c_1 \tau^r \|g\|_{W_p^r} \\
 &\leq c_2 (\|f - g\|_p + \tau^r \|g\|_{W_p^r}).
 \end{aligned}$$

Como o lado esquerdo não depende de $g \in W_p^r(S^m)$, podemos tomar o ínfimo em relação a $g \in W_p^r(S^m)$ do lado direito. Assim temos,

$$\omega_r(f; \tau)_p \leq c K_r(f, \tau)_p.$$

Para a outra desigualdade, como $\eta_\ell f \in W_p^r(S^m)$ temos,

$$\begin{aligned}
 K_r(f, \tau)_p &= \inf\{\|f - g\|_p + \tau^r \|g\|_{W_p^r} : g \in W_p^r(S^m)\} \\
 &\leq \|f - \eta_\ell f\|_p + \tau^r \|\eta_\ell f\|_{W_p^r} \\
 &= \|f - \eta_\ell f\|_p + \tau^r (\|\eta_\ell f\|_p + \|\mathcal{D}^r(\eta_\ell f)\|_p).
 \end{aligned}$$

Agora, pelo Lema 4.1.10, segue que

$$\begin{aligned}
 K_r(f, \tau)_p &\leq \|f - \eta_\ell f\|_p + \tau^r (c_1 \|\mathcal{D}^r(\eta_\ell f)\|_p + \|\mathcal{D}^r(\eta_\ell f)\|_p) \\
 &= \|f - \eta_\ell f\|_p + (c_1 + 1) \tau^r \|\mathcal{D}^r(\eta_\ell f)\|_p.
 \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 4.1.6-(iv) e o Teorema 4.1.4, respectivamente, temos

$$\begin{aligned}
 K_r(f, \tau)_p &\leq c_2 E_\ell(f)_p + (c_1 + 1) \tau^r \|\mathcal{D}^r(\eta_\ell f)\|_p \\
 &\leq c_3 \omega_r\left(f; \frac{\pi}{\ell + 1}\right)_p + (c_1 + 1) \tau^r \|\mathcal{D}^r(\eta_\ell f)\|_p,
 \end{aligned}$$

e tomando ℓ suficientemente grande de modo que $\frac{\pi}{2(\ell+m-1)} \leq \tau$, podemos aplicar o Lema 4.1.8 para obter

$$\begin{aligned}
 K_r(f, \tau)_p &\leq c_3 \omega_r\left(f; \frac{\pi}{\ell + 1}\right)_p + c_4 \tau^r t^{-r} \|\Delta_t^r f\|_p \\
 &\leq c_5 \left[\omega_r\left(f; \frac{\pi}{\ell + 1}\right)_p + \tau^r \left(\frac{\pi}{2(\ell + m - 1)}\right)^{-r} \omega_r\left(f; \frac{\pi}{2(\ell + m - 1)}\right)_p \right].
 \end{aligned}$$

Pela monotonicidade do módulo de suavidade segue que $K_r(f, \tau)_p \leq c \omega_r(f; \tau)_p$. ■

Concluimos a seção como o seguinte resultado enunciado em [25] e demonstrado em [12].

Lema 4.1.12 *Sejam $f \in L^p(S^m)$, $1 \leq p \leq \infty$ e r um inteiro positivo. Então, para ℓ suficientemente grande,*

$$\|f - \eta_\ell f\|_p + \tau^r \|\eta_\ell f\|_{W_p^r} \approx K_r(f, \tau)_p, \quad \tau \in (0, \pi).$$

4.2 Estimativas para os coeficientes de Fourier

Já vimos que os coeficientes de Fourier da função $f \in L^p(S^m)$, $1 \leq p \leq \infty$, com relação a base $\{Y_{k,j} : j = 1, 2, \dots, d_k^{(m)}; k = 0, 1, \dots\}$ de $L^2(S^m)$, são definidos por

$$\widehat{c}_{k,j}(f) := \int_{S^m} f(y) \overline{Y_{k,j}(y)} d\sigma_m(y), \quad j = 1, 2, \dots, d_k^{(m)}; \quad k = 0, 1, \dots$$

Nesta seção, apresentamos resultados que fornecem estimativas para a soma

$$s_k(f) := \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} |\widehat{c}_{k,j}(f)|^2, \quad k = 0, 1, \dots$$

Lema 4.2.1 *Sejam $f \in L^p(S^m)$, $1 \leq p \leq 2$ e q o expoente conjugado de p . Então,*

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (d_k^{(m)})^{(2-q)/2q} [s_k(f)]^{q/2} \right\}^{1/q} \leq a(p) \|f\|_p, \quad (4.3)$$

onde $a(p)$ é uma constante positiva dependendo de p (e m).

Demonstração. Para $p = q = 2$, temos que (4.3) é a identidade de Parseval

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} |\widehat{c}_{k,j}(f)|^2 = \|f\|_2^2.$$

Agora, note que, para $p = 1$ e $q = \infty$,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} |\widehat{c}_{k,j}(f)|^2 \right) &= \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \widehat{c}_{k,j}(f) \overline{\widehat{c}_{k,j}(f)} \\ &= \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \int_{S^m} f(y) \overline{Y_{k,j}(y)} d\sigma_m(y) \overline{\widehat{c}_{k,j}(f)} \\ &= \int_{S^m} f(y) \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \overline{\widehat{c}_{k,j}(f)} Y_{k,j}(y) d\sigma_m(y) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} |\widehat{c}_{k,j}(f)|^2 \right)^{1/2} \int_{S^m} f(y) \overline{Y_k(y)} d\sigma_m(y), \end{aligned}$$

onde

$$Y_k(y) = \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \widehat{c}_{k,j}(f) \left(\sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} |\widehat{c}_{k,j}(f)|^2 \right)^{-1/2} Y_{k,j}(y),$$

e assim $Y_k(y)$ é um elemento de \mathcal{H}_k^m satisfazendo $\|Y_k\|_2 = 1$. Portanto, $Y_k \equiv Y_{k,j}^*$ é parte de uma base ortonormal de \mathcal{H}_k^m , $\{Y_{k,j}^*\}$ e assim, pelo Lema 2.5.7, satisfaz

$$|Y_k(y)|^2 \leq \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} |Y_{k,j}^*(y)|^2 = d_k^{(m)},$$

e isso implica em

$$\left(\sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} |\widehat{c}_{k,j}(f)|^2 \right)^{1/2} \leq \|f\|_1 (d_k^{(m)})^{1/2}.$$

Agora, consideremos o Teorema da Interpolação de Riesz-Thorin. Chamando $p_0 = q_0 = 2$ temos,

$$\|s_k^{1/2}(f)\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (s_k^{1/2}(f))^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} s_k(f) \right)^{1/2} = \|f\|_2,$$

e assim $f = s_k^{1/2}(f)$, $v_0 = 1$, $u_0 = 1$ e $M_0 = 1$. Para $p_1 = 1$, $q_1 = \infty$ temos,

$$d_k^{(m)-1/2} s_k^{1/2}(f) \leq a \|f\|_1,$$

com a constante. Logo,

$$\|(d_k^{(m)})^{-1/2} s_k^{1/2}(f)\|_{supess} = \sup_k \{(d_k^{(m)})^{-1/2} s_k^{1/2}(f)\} \leq a \|f\|_1,$$

e portanto $f = s_k^{1/2}(f)$, $v_1 = (d_k^{(m)})^{-1/2}$, $u_1 = 1$ e $M_1 = 1$. Tomando $\theta = \frac{2}{pq} - \frac{1}{q}$, note que $0 \leq \theta \leq 1$, e ainda $T = I$, onde I é o operador identidade. Logo, $u = 1$, $v = (d_k^{(m)})^{\frac{2-q}{2q^2}}$ e $M_0^{1-\theta} M_1^\theta = a^\theta$ e portanto,

$$\|(d_k^{(m)})^{\frac{2-q}{2q^2}} s_k^{1/2}(f)\|_q \leq a^\theta \|f\|_p.$$

Concluimos assim que

$$\begin{aligned} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (d_k^{(m)})^{\frac{2-q}{2q}} \left(\sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} |\widehat{c}_{k,j}(f)|^2 \right)^{q/2} \right\}^{1/q} &= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left((d_k^{(m)})^{\frac{2-q}{2q^2}} \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} |\widehat{c}_{k,j}(f)|^2 \right)^{q/2} \right\}^{1/q} \\ &= \|(d_k^{(m)})^{\frac{2-q}{2q^2}} s_k^{1/2}(f)\|_q \\ &\leq a(p) \|f\|_p \end{aligned}$$

onde $a(p) = a^\theta$. ■

Lema 4.2.2 *Sejam $f \in L^p(S^m)$, $1 \leq p \leq 2$ e r um inteiro positivo. Então,*

$$s_k(\mathcal{D}^r(\eta_\ell f)) = c s_k(\eta_\ell f).$$

Demonstração. Temos pela Proposição 3.6.3-(ii),

$$\begin{aligned} s_k(\mathcal{D}^r(\eta_\ell f)) &= \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} |\widehat{c}_{k,j}(\mathcal{D}^r(\eta_\ell f))|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \left| \int_{S^m} \mathcal{D}^r(\eta_\ell f)(y) \overline{Y_{k,j}}(y) d\sigma_m(y) \right|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \left| \int_{S^m} \eta_\ell f(y) \overline{\mathcal{D}^r(Y_{k,j})}(y) d\sigma_m(y) \right|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \frac{k^r (k+m-1)^r}{m^r} |\widehat{c}_{k,j}(\eta_\ell f)|^2 \\ &= \frac{k^r (k+m-1)^r}{m^r} s_k(\eta_\ell f). \end{aligned}$$

Isso termina a prova. ■

Teorema 4.2.3 *Sejam $f \in L^p(S^m)$, $1 \leq p \leq 2$ e q o expoente conjugado de p . Então, para cada r inteiro positivo fixado, existe uma constante c_p tal que*

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (d_k^{(m)})^{(2-q)/2q} (\min\{1, tk\})^{rq} [s_k(f)]^{q/2} \right\}^{1/q} \leq c_p \omega_r(f; t)_p, \quad t \in (0, \pi). \quad (4.4)$$

Demonstração. Da equivalência (4.2) e Lema 4.1.12, é suficiente provar que

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (d_k^{(m)})^{(2-q)/2q} (\min\{1, tk\})^{rq} [s_k(f)]^{q/2} \right\}^{1/q} \leq c_p (\|f - \eta_\ell f\|_p + t^r \|\eta_\ell f\|_{W_p^r}),$$

onde c_p é uma constante dependendo de p . Temos que

$$\begin{aligned} s_k(f) &= \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} |\widehat{c}_{k,j}(f - \eta_\ell f) + \widehat{c}_{k,j}(\eta_\ell f)|^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} 2^2 [|\widehat{c}_{k,j}(f - \eta_\ell f)|^2 + |\widehat{c}_{k,j}(\eta_\ell f)|^2] \\ &= 2^2 \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} |\widehat{c}_{k,j}(f - \eta_\ell f)|^2 + 2^2 \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} |\widehat{c}_{k,j}(\eta_\ell f)|^2 \\ &= 2^2 s_k(f - \eta_\ell f) + 2^2 s_k(\eta_\ell f). \end{aligned}$$

Escrevendo $S_{t,r,q}(f)$ para denotar o lado esquerdo de (4.4), temos

$$\begin{aligned} S_{t,r,q}(f) &\leq 2 \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (d_k^{(m)})^{(2-q)/2q} (\min\{1, tk\})^{rq} [s_k(f - \eta_\ell f)]^{q/2} \right\}^{1/q} \\ &\quad + 2 \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (d_k^{(m)})^{(2-q)/2q} (\min\{1, tk\})^{rq} [s_k(\eta_\ell f)]^{q/2} \right\}^{1/q}. \end{aligned}$$

Denotamos por S_1 e S_2 , respectivamente, os termos do lado direito da inequação acima. Temos que

$$S_1 \leq 2 \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (d_k^{(m)})^{(2-q)/2q} [s_k(f - \eta_\ell f)]^{q/2} \right\}^{1/q}.$$

Aplicando o Lema 4.2.1 obtemos

$$S_1 \leq 2c_p \|f - \eta_\ell f\|_p.$$

Analogamente, e aplicando o Lema 4.2.2, estimamos S_2 ,

$$\begin{aligned}
S_2 &\leq 2 \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (d_k^{(m)})^{(2-q)/2q} (tk)^{rq} [s_k(\eta_\ell f)]^{q/2} \right\}^{1/q} \\
&\leq 2t^r \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (d_k^{(m)})^{(2-q)/2q} k^{rq} [s_k(\eta_\ell f)]^{q/2} \right\}^{1/q} \\
&\leq 2t^r \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (d_k^{(m)})^{(2-q)/2q} \left[\frac{(k(k+m-1))^r}{m^r} s_k(\eta_\ell f) \right]^{q/2} \right\}^{1/q} \\
&= 2t^r \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (d_k^{(m)})^{(2-q)/2q} [s_k(\mathcal{D}^r(\eta_\ell f))]^{q/2} \right\}^{1/q}.
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 4.2.1 novamente, obtemos

$$S_2 \leq 2t^r \|\mathcal{D}^r(\eta_\ell f)\|_p \leq 2c_p t^r \|\eta_\ell f\|_{W_p^r}.$$

Portanto,

$$S_{t,r,q}(f) \leq 2c_p [\|f - \eta_\ell f\|_p + t^r \|\eta_\ell f\|_{W_p^r}],$$

e isso completa a demonstração. ■

Lema 4.2.4 *Sejam $f \in C^2(S^m)$. Então,*

$$\|S_t(f) - f\|_p \leq ct^2 \|\tilde{\Delta}f\|_p, \quad t \in (0, \pi/2).$$

Demonstração. Ver [16] ou [33, p. 53]. ■

Lema 4.2.5 *Seja $f \in L^p(S^m)$, $1 \leq p \leq \infty$. Então, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\|S_t(f) - f\|_p \leq c\omega_2(f; t)_p, \quad t \in (0, \pi/2).$$

Demonstração. Pelo Teorema 4.1.11, basta mostrar que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\|S_t(f) - f\|_p \leq cK_2(f, t)_p$. Para g em $W_p^r(S^m)$ ou em $W_{C(S^m)}^r(S^m)$ temos pelo Lema 4.2.4 que

$$\|S_t(g) - g\|_p \leq ct^2 \|\tilde{\Delta}g\|_p.$$

Pelo Corolário 3.4.8 e Teorema 3.6.12, temos

$$\begin{aligned}
\|S_t(f) - f\|_p &\leq \|S_t(f) - S_t(g)\|_p + \|S_t(g) - g\|_p + \|f - g\|_p \\
&\leq 2\|f - g\|_p + \|S_t(g) - g\|_p \\
&\leq 2\|f - g\|_p + ct^2 \|\tilde{\Delta}g\|_p \\
&\leq 2\|f - g\|_p + cm t^2 \|\mathcal{D}(g)\|_p \\
&\leq 2\|f - g\|_p + cm t^2 \|g\|_p + cm t^2 \|\mathcal{D}(g)\|_p \\
&\leq 2\|f - g\|_p + cm t^2 \|g\|_{W_p^1} \\
&\leq 2\|f - g\|_p + cm t^2 \|g\|_{W_p^2} \\
&\leq c' \{\|f - g\|_p + t^2 \|g\|_{W_p^2}\}.
\end{aligned}$$

O resultado segue tomando o ínfimo sobre g em ambos os lados da desigualdade acima. ■

Para provar a desigualdade inversa precisamos dos próximos três lemas, cujas demonstrações podem ser encontradas em [3].

Lema 4.2.6 *Sejam $f \in L^p(S^m)$, $1 \leq p \leq \infty$ e r um inteiro positivo tal que $r > \frac{2(\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor + 3)}{m-1}$. Então,*

$$\|\tilde{\Delta} S_t^r(f)\|_p \leq c \max \left\{ \frac{1}{t^2}, \frac{1}{(\pi-t)^2} \right\} \|f\|_p, \quad t \in (0, \pi).$$

Lema 4.2.7 *Sejam $f \in L^p(S^m)$, $1 \leq p \leq \infty$ e r um inteiro positivo suficientemente grande. Então,*

$$\|\tilde{\Delta} S_t^r(f)\|_p \leq \epsilon(r) \max \left\{ \frac{1}{t^2}, \frac{1}{(\pi-t)^2} \right\} \|f\|_p, \quad t \in (0, \pi),$$

onde $\epsilon(r) \rightarrow 0$ quando $r \rightarrow \infty$.

Lema 4.2.8 *Sejam $r = 0, 1, 2$ e $g \in L^p(S^m)$, $1 \leq p \leq \infty$, satisfazendo uma das seguintes condições:*

- i) $\tilde{\Delta}^r g \in L^p(S^m)$, $1 \leq p < \infty$;
- ii) $\tilde{\Delta}^r g \in C(S^m)$ para $p = \infty$.

Então, existem $A, B, C \in \mathbb{R}$ tais que

$$\|S_t(g) - g - \alpha(t)\tilde{\Delta}g\|_p \leq Ct^4 \|\tilde{\Delta}^2 g\|_p, \quad t \in (0, \pi/2),$$

com $0 < At^2 \leq \alpha(t) \leq Bt^2$.

Lema 4.2.9 *Sejam $f \in L^p(S^m)$, $1 \leq p \leq \infty$ e r um inteiro positivo suficientemente grande. Então, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$t^2 \|\tilde{\Delta} S_t^r(f)\|_p \leq c \|f - S_t(f)\|_p. \quad (4.5)$$

Demonstração. O Lema 4.2.6 garante que

- se $r > \frac{4(\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor + 3)}{m-1}$, então $\tilde{\Delta} S_t^r(f)$ e $\tilde{\Delta}^2 S_t^r(f)$ estão em $L^p(S^m)$, $1 \leq p < \infty$;
- se $r > \frac{6(\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor + 3)}{m-1}$ e $f \in L^\infty(S^m)$, então $\tilde{\Delta}^3 S_t^r(f) \in L^\infty(S^m)$, o que implica que $\tilde{\Delta}^2 S_t^r(f)$ é contínua.

Pelo Lema 4.2.7, podemos escolher $r_1 \geq 2(\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor + 3)/(m-1)$ tal que

$$\|\tilde{\Delta} S_t^{r_1}(f)\|_p \leq \frac{A}{2C} \frac{1}{t^2} \|f\|_p, \quad (4.6)$$

onde A e C são as constantes do Lema 4.2.8. Agora, tomando $r > 4(\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor + 3)/(m-1) + r_1$, segue do Lema 4.2.8 e da desigualdade triangular invertida que

$$\|\alpha(t)\tilde{\Delta} S_t^r(f)\|_p \leq \|S_t S_t^r(f) - S_t^r(f)\|_p + Ct^4 \|\tilde{\Delta}^2 S_t^r(f)\|_p.$$

Em seguida, aplicando os Corolários 3.4.8 e 3.6.14 e inequação (4.6),

$$\begin{aligned} \|\alpha(t)\tilde{\Delta} S_t^r(f)\|_p &\leq \|S_t(f) - f\|_p + Ct^4 \|\tilde{\Delta} S_t^{r_1}(\tilde{\Delta} S_t^{r-r_1}(f))\|_p \\ &\leq \|S_t(f) - f\|_p + Ct^4 \frac{A}{2C} \frac{1}{t^2} \|\tilde{\Delta} S_t^{r-r_1}(f)\|_p, \end{aligned}$$

e pela desigualdade triangular

$$\begin{aligned}
\|\alpha(t)\tilde{\Delta}S_t^r(f)\|_p &\leq \|S_t(f) - f\|_p + t^2\frac{A}{2}\|-\tilde{\Delta}S_t^{r-r_1}(f) + \tilde{\Delta}S_t^r(f) - \tilde{\Delta}S_t^r(f)\|_p \\
&\leq \|S_t(f) - f\|_p + t^2\frac{A}{2}\|-\tilde{\Delta}S_t^r(f) + \tilde{\Delta}S_t^{r-r_1}(S_t^{r_1} - I)(f)\|_p \\
&\leq \|S_t(f) - f\|_p + t^2\frac{A}{2}\|\tilde{\Delta}S_t^r(f)\|_p + t^2\frac{A}{2}\|\tilde{\Delta}S_t^{r-r_1}(S_t^{r_1} - I)(f)\|_p.
\end{aligned}$$

Pela da inequação (4.6) e Corolário 3.4.9, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\alpha(t)\tilde{\Delta}S_t^r(f)\|_p &\leq \|S_t(f) - f\|_p + t^2\frac{A}{2}\|\tilde{\Delta}S_t^r(f)\|_p + \frac{A}{2C}\|(S_t^{r_1} - I)(f)\|_p \\
&\leq \|S_t(f) - f\|_p + t^2\frac{A}{2}\|\tilde{\Delta}S_t^r(f)\|_p + \frac{A}{2C}r_1\|S_t(f) - f\|_p.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\left(\frac{\alpha(t)}{t^2} - \frac{A}{2}\right)t^2\|\tilde{\Delta}S_t^r(f)\|_p \leq \left(1 + \frac{A}{2C}r_1\right)\|S_t(f) - f\|_p,$$

isto é,

$$t^2\|\tilde{\Delta}S_t^r(f)\|_p \leq c_2\|S_t(f) - f\|_p,$$

o que conclui a demonstração. ■

Lema 4.2.10 *Seja $f \in L^p(S^m)$, $1 \leq p \leq \infty$. Então, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\omega_2(f; t)_p \leq c\|S_t(f) - f\|_p, \quad t \in (0, \pi).$$

Demonstração. Seja $g \in L^p(S^m)$ satisfazendo as condições do Lema 4.2.8. Pela Proposição 4.1.2-(iv), Lema 4.1.9 e Teorema 3.6.12, respectivamente, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\omega_2(f; t)_p &\leq 2\omega_1(f; t)_p \\
&\leq c_1t\|\mathcal{D}(f)\|_p \\
&\leq c_1m^{-1}t\|\tilde{\Delta}g\|_p \\
&\leq \|f - g\|_p + c_2t^2\|\tilde{\Delta}g\|_p.
\end{aligned}$$

Tomando $g = S_t^r(f)$ com r um inteiro positivo suficientemente grande e aplicando o Corolário 3.4.9 e a inequação (4.5), segue que

$$\begin{aligned}
\omega_2(f; t)_p &\leq \|f - S_t^r(f)\|_p + c_2t^2\|\tilde{\Delta}S_t^r(f)\|_p \\
&\leq r\|f - S_t(f)\|_p + c_3\|f - S_t(f)\|_p \\
&\leq c_4\|f - S_t(f)\|_p,
\end{aligned}$$

e isso prova o lema. ■

Teorema 4.2.11 *Seja $f \in L^p(S^m)$, $1 \leq p \leq \infty$. Então,*

$$\|S_t(f) - f\|_p \approx \omega_2(f; t)_p, \quad t \in (0, \pi/2).$$

Demonstração. Segue dos Lemas 4.2.5 e 4.2.10. ■

Corolário 4.2.12 *Sejam $f \in L^p(S^m)$, $1 \leq p \leq 2$, e q o expoente conjugado de p . Então, existe uma constante c_p tal que*

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (d_k^{(m)})^{(2-q)/2q} (\min\{1, tk\})^{2q} [s_k(f)]^{q/2} \right\}^{1/q} \leq c_p \|S_t(f) - f\|_p \quad t \in (0, \pi/2).$$

4.3 Resultados auxiliares

Nesta seção apresentamos algumas hipóteses básicas e resultados auxiliares que serão utilizados nas demonstrações dos principais resultados deste trabalho.

Sejam $K \in L^2(S^m \times S^m, \sigma_m \times \sigma_m)$ e $z \in S^m$ fixo. Denotamos $K^z : S^m \rightarrow \mathbb{C}$ por $K^z(\cdot) = K(\cdot, z)$. Usamos o símbolo $\mathcal{D}^{r,0}K$ para representar a ação da r -ésima derivada forte de Laplace-Beltrami aplicada a primeira variável.

Definição 4.3.1 Dizemos que o núcleo $K \in L^2(S^m \times S^m, \sigma_m \times \sigma_m)$ pertence ao conjunto $\mathcal{A}(S^m)$ se possui uma expansão em $L^2(S^m)$ da forma

$$K(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \alpha_{k,j} Y_{k,j}(x) Y_{k,j}(y), \quad \sum_{k=0}^{\infty} d_k^{(m)} \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \alpha_{k,j} < \infty,$$

e satisfaz as seguintes condições

(A) (Positividade) Os coeficientes da expansão são não negativos, isto é, $\alpha_{k,j} \geq 0$.

(B) (Monotonicidade) Os coeficientes da expansão decrescem monotonicamente com relação à k , isto é, $\alpha_{k+1,j} \leq \alpha_{k,j'}$, $1 \leq j \leq d_{k+1}^{(m)}$, $1 \leq j' \leq d_k^{(m)}$.

Se $K \in \mathcal{A}(S^m)$, então o operador integral \mathcal{L}_K é positivo e tem operador raiz quadrada $\mathcal{L}_{K_{1/2}}$ unicamente definido (Teorema 1.2.9) por

$$K_{1/2}(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \alpha_{k,j}^{1/2} Y_{k,j}(x) Y_{k,j}(y).$$

Ambos, \mathcal{L}_K e $\mathcal{L}_{K_{1/2}}$, são operadores positivos e autoadjuntos. O núcleo K do operador original \mathcal{L}_K pode ser recuperado a partir do núcleo $K_{1/2}$ do operador raiz quadrada $\mathcal{L}_{K_{1/2}}$ pela relação integral,

$$\int_{S^m} K_{1/2}(x, y) K_{1/2}(\omega, x) d\sigma_m(x) = K(\omega, y), \quad y, \omega \in S^m. \quad (4.7)$$

Além disso para cada $z \in S^m$, os coeficientes de Fourier da função K^z e $K_{1/2}^z$ são, respectivamente,

$$\widehat{c}_{k,j}(K^z) = \alpha_{k,j} \overline{Y_{k,j}(z)}, \quad j = 1, 2, \dots, d_k^{(m)}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

e

$$\widehat{c}_{k,j}(K_{1/2}^z) = \alpha_{k,j}^{1/2} \overline{Y_{k,j}(z)} \quad j = 1, 2, \dots, d_k^{(m)}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

o que implica em

$$s_k(K_{1/2}^z) = \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \alpha_{k,j} |Y_{k,j}(z)|^2, \quad z \in S^m, \quad k = 0, 1, \dots$$

Integrando ambos os lados da equação acima, temos o seguinte resultado.

Lema 4.3.2 Seja $K \in \mathcal{A}(S^m)$. Então,

$$\int_{S^m} s_k(K_{1/2}^z) d\sigma_m(z) = \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \alpha_{k,j}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Demonstração. De fato, temos

$$\begin{aligned}
\int_{S^m} s_k(K_{1/2}^z) d\sigma_m(z) &= \int_{S^m} \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \alpha_{k,j} |Y_{k,j}(z)|^2 d\sigma_m(z) \\
&= \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \alpha_{k,j} \int_{S^m} |Y_{k,j}(z)|^2 d\sigma_m(z) \\
&= \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \alpha_{k,j}. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Lema 4.3.3 *Sejam $K \in \mathcal{A}(S^m)$ e r um inteiro positivo. Então,*

$$\|\mathcal{D}^r(K_{1/2}^z)\|_2^2 = \mathcal{D}^{2r}(K^z(z)) = \mathcal{D}^{2r,0}(K(z, z)), \quad z \in S^m.$$

Demonstração. A ação da derivada forte sobre $K_{1/2}^z$ pode ser expressa por

$$\mathcal{D}^r(K_{1/2}^z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \alpha_{k,j}^{1/2} \frac{(k(k+m-1))^r}{m^r} \overline{Y_{k,j}(z)} Y_{k,j}.$$

Disso temos

$$\begin{aligned}
|\mathcal{D}^r(K_{1/2}^z)|^2 &= \mathcal{D}^r(K_{1/2}^z) \overline{\mathcal{D}^r(K_{1/2}^z)} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \alpha_{k,j}^{1/2} \frac{(k(k+m-1))^r}{m^r} \overline{Y_{k,j}(z)} Y_{k,j} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{d_l^{(m)}} \alpha_{l,i}^{1/2} \frac{(l(l+m-1))^r}{m^r} \overline{Y_{l,i}(z)} Y_{l,i} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \alpha_{k,j}^{1/2} \frac{(k(k+m-1))^r}{m^r} \overline{Y_{k,j}(z)} Y_{k,j} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{d_l^{(m)}} \alpha_{l,i}^{1/2} \frac{(l(l+m-1))^r}{m^r} Y_{l,i}(z) \overline{Y_{l,i}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \sum_{i=1}^{d_l^{(m)}} \alpha_{k,j}^{1/2} \alpha_{l,i}^{1/2} \frac{(k(k+m-1))^r}{m^r} \frac{(l(l+m-1))^r}{m^r} \overline{Y_{k,j}(z)} Y_{l,i}(z) Y_{k,j} \otimes \overline{Y_{l,i}}.
\end{aligned}$$

Como o conjunto dos harmônicos esféricos forma uma base ortonormal de $L^2(S^m)$, temos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{D}^r(K_{1/2}^z)\|_2^2 &= \langle \mathcal{D}^r(K_{1/2}^z), \overline{\mathcal{D}^r(K_{1/2}^z)} \rangle_2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \sum_{i=1}^{d_l^{(m)}} \alpha_{k,j}^{1/2} \alpha_{l,i}^{1/2} \frac{(k(k+m-1))^r}{m^r} \frac{(l(l+m-1))^r}{m^r} \overline{Y_{k,j}(z)} Y_{l,i}(z) (Y_{k,j}, \overline{Y_{l,i}})_2 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \alpha_{k,j} \frac{(k(k+m-1))^{2r}}{m^{2r}} |Y_{k,j}(z)|^2. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Definição 4.3.4 *Dizemos que o núcleo K satisfaz a condição de (B, β) -Hölder se existirem $\beta \in (0, 2]$ e $B \in L^1(S^m)$ tais que*

$$|S_t(K(y, \cdot))(x) - K(y, x)| \leq B(y)t^\beta, \quad x, y \in S^m, \quad t \in (0, \pi). \quad (4.8)$$

A seguir, obtemos uma estimativa para $\|S_t(K_{1/2}^z) - K_{1/2}^z\|_2^2$, onde K satisfaz a condição de (B, β) -Hölder.

Lema 4.3.5 *Seja $K \in \mathcal{A}(S^m)$ um núcleo (B, β) -Hölder. Então,*

$$\int_{S^m} \|S_t(K_{1/2}^z) - K_{1/2}^z\|_2^2 d\sigma_m(z) \leq 2\|B\|_1 t^\beta, \quad z \in S^m, \quad t \in (0, \pi).$$

Demonstração. Fixando z e t , vemos que

$$\begin{aligned} \|S_t(K_{1/2}^z) - K_{1/2}^z\|_2^2 &= \int_{S^m} [S_t(K_{1/2}^z)(y) - K_{1/2}^z(y)]^2 d\sigma_m(y) \\ &= \int_{S^m} S_t(K_{1/2}(\cdot, z))(y) S_t(K_{1/2}(z, \cdot))(y) d\sigma_m(y) \\ &\quad - \int_{S^m} S_t(K_{1/2}(\cdot, z))(y) K_{1/2}(z, y) d\sigma_m(y) \\ &\quad - \int_{S^m} S_t(K_{1/2}(z, \cdot))(y) K_{1/2}(y, z) d\sigma_m(y) \\ &\quad + \int_{S^m} K_{1/2}(y, z) K_{1/2}(z, y) d\sigma_m(y) \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Vamos estimar cada um dos termos do lado direito da expressão. Para I_1 , temos

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{S^m} S_t(K_{1/2}(\cdot, z))(y) S_t(K_{1/2}(z, \cdot))(y) d\sigma_m(y) \\ &= \int_{S^m} \left(\frac{1}{R_m(t)} \int_{R_y^t} K_{1/2}(x, z) d\sigma(x) \right) \left(\frac{1}{R_m(t)} \int_{R_y^t} K_{1/2}(z, \omega) d\sigma(\omega) \right) d\sigma_m(y) \\ &= \int_{S^m} \left(\frac{1}{R_m(t)} \right)^2 \int_{R_y^t} \int_{R_y^t} K_{1/2}(x, z) K_{1/2}(z, \omega) d\sigma(x) d\sigma(\omega) d\sigma_m(y). \end{aligned}$$

Integrando e aplicando (4.7), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{S^m} I_1 d\sigma_m(z) &= \int_{S^m} \int_{S^m} S_t(K_{1/2}(\cdot, z))(y) S_t(K_{1/2}(z, \cdot))(y) d\sigma_m(y) d\sigma_m(z) \\ &= \int_{S^m} \left(\frac{1}{R_m(t)} \right)^2 \int_{R_y^t} \int_{R_y^t} \int_{S^m} K_{1/2}(x, z) K_{1/2}(z, \omega) d\sigma_m(z) d\sigma(x) d\sigma(\omega) d\sigma_m(y) \\ &= \int_{S^m} \frac{1}{R_m(t)} \int_{R_y^t} \frac{1}{R_m(t)} \int_{R_y^t} K(x, \omega) d\sigma(\omega) d\sigma(x) d\sigma_m(y) \\ &= \int_{S^m} \frac{1}{R_m(t)} \int_{R_y^t} S_t(K(x, \cdot))(y) d\sigma(x) d\sigma_m(y). \end{aligned}$$

Para I_2 , temos

$$\begin{aligned} I_2 &= - \int_{S^m} S_t(K_{1/2}(\cdot, z))(y) K_{1/2}(z, y) d\sigma_m(y) \\ &= - \int_{S^m} \frac{1}{R_m(t)} \int_{R_y^t} K_{1/2}(x, z) d\sigma(x) K_{1/2}(z, y) d\sigma_m(y) \\ &= - \int_{S^m} \frac{1}{R_m(t)} \int_{R_y^t} K_{1/2}(x, z) K_{1/2}(z, y) d\sigma(x) d\sigma_m(y). \end{aligned}$$

Integrando e aplicando (4.7), encontramos

$$\begin{aligned}
\int_{S^m} I_2 d\sigma_m(z) &= \int_{S^m} - \int_{S^m} S_t(K_{1/2}(\cdot, z))(y) K_{1/2}(z, y) d\sigma_m(y) d\sigma_m(z) \\
&= - \int_{S^m} \frac{1}{R_m(t)} \int_{R_y^t} \int_{S^m} K_{1/2}(x, z) K_{1/2}(z, y) d\sigma_m(z) d\sigma(x) d\sigma_m(y) \\
&= - \int_{S^m} \frac{1}{R_m(t)} \int_{R_y^t} K(x, y) d\sigma(x) d\sigma_m(y).
\end{aligned}$$

Para I_3 , temos

$$\begin{aligned}
I_3 &= - \int_{S^m} S_t(K_{1/2}(z, \cdot))(y) K_{1/2}(y, z) d\sigma_m(y) \\
&= - \int_{S^m} \frac{1}{R_m(t)} \int_{R_y^t} K_{1/2}(z, x) d\sigma(x) K_{1/2}(y, z) d\sigma_m(y) \\
&= - \int_{S^m} \frac{1}{R_m(t)} \int_{R_y^t} K_{1/2}(z, x) K_{1/2}(y, z) d\sigma(x) d\sigma_m(y),
\end{aligned}$$

e como anteriormente, segue que

$$\begin{aligned}
\int_{S^m} I_3 d\sigma_m(z) &= \int_{S^m} - \int_{S^m} S_t(K_{1/2}(z, \cdot))(y) K_{1/2}(y, z) d\sigma_m(y) d\sigma_m(z) \\
&= - \int_{S^m} \frac{1}{R_m(t)} \int_{R_y^t} \int_{S^m} K_{1/2}(z, x) K_{1/2}(y, z) d\sigma_m(z) d\sigma(x) d\sigma_m(y) \\
&= - \int_{S^m} \frac{1}{R_m(t)} \int_{R_y^t} K(y, x) d\sigma(x) d\sigma_m(y) \\
&= - \int_{S^m} S_t(K(y, \cdot))(y) d\sigma_m(y)
\end{aligned}$$

Finalmente, da mesma forma, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{S^m} I_4 d\sigma_m(z) &= \int_{S^m} \int_{S^m} K_{1/2}(y, z) K_{1/2}(z, y) d\sigma_m(z) d\sigma_m(y) \\
&= \int_{S^m} K(y, y) d\sigma_m(y).
\end{aligned}$$

Assim, denotando $I_t^z = \int_{S^m} \|S_t(K_{1/2}^z) - K_{1/2}^z\|_2^2 d\sigma_m(z)$, chegamos a

$$\begin{aligned}
I_t^z &= \int_{S^m} \frac{1}{R_m(t)} \int_{R_y^t} [S_t(K(x, \cdot))(y) - K(x, y)] d\sigma(x) d\sigma_m(y) \\
&\quad + \int_{S^m} [K(y, y) - S_t(K(y, \cdot))(y)] d\sigma_m(y).
\end{aligned}$$

Portanto, como K satisfaz a condição de (B, β) -Hölder, segue de (4.8), que

$$\begin{aligned}
I_t^z &\leq \int_{S^m} \frac{1}{R_m(t)} \int_{R_y^t} B(x) t^\beta d\sigma(x) d\sigma_m(y) + \int_{S^m} B(y) t^\beta d\sigma_m(y) \\
&= \int_{S^m} S_t(B)(y) t^\beta d\sigma_m(y) + \int_{S^m} B(y) t^\beta d\sigma_m(y) \\
&= t^\beta (\|S_t(B)\|_1 + \|B\|_1) \\
&\leq t^\beta (\|B\|_1 + \|B\|_1) \\
&= 2t^\beta \|B\|_1,
\end{aligned}$$

e isso completa a demonstração. ■

4.4 Decaimento de autovalores

Nesta seção as demonstramos os resultados principais deste trabalho relacionados ao decaimento de autovalores.

Teorema 4.4.1 *Sejam $K \in \mathcal{A}(S^m)$ e r um inteiro positivo tais que $K^z \in W_2^{2r}(S^m)$. Se o operador integral gerado por $\mathcal{D}^{2r,0}(K)$ é nuclear, então*

$$\lambda_n(\mathcal{L}_K) = O(n^{-1-2r/m}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Demonstração. Aplicando o Teorema 4.2.3 sobre a função $K_{1/2}^z$, com $p = q = 2$, temos

$$\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\min\{1, tk\})^{2r} s_k(K_{1/2}^z) \right\}^{1/2} \leq c_1^{1/2} \omega_r(K_{1/2}^z; t)_2, \quad t \in (0, \pi), \quad z \in S^m,$$

isto é,

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\min\{1, tk\})^{2r} s_k(K_{1/2}^z) \leq c_1 [\omega_r(K_{1/2}^z; t)_2]^2, \quad t \in (0, \pi), \quad z \in S^m.$$

Como $K_{1/2}^z \in W_2^r(S^m)$, o Lema 4.1.9, garante a existência de uma constante $c_2 > 0$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\min\{1, tk\})^{2r} s_k(K_{1/2}^z) \leq c_2 t^{2r} \|\mathcal{D}^r(K_{1/2}^z)\|_2^2, \quad t \in (0, \pi), \quad z \in S^m.$$

Integrando com relação à z , ambos os lados da inequação acima e usando o Teorema da Convergência Dominada, encontramos

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\min\{1, tk\})^{2r} \left(\int_{S^m} s_k(K_{1/2}^z) d\sigma_m(z) \right) \leq c_2 t^{2r} \int_{S^m} \|\mathcal{D}^r(K_{1/2}^z)\|_2^2 d\sigma_m(z), \quad t \in (0, \pi).$$

Agora, segue do Lema 4.3.3 e da hipótese de nuclearidade que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (\min\{1, tk\})^{2r} \left(\int_{S^m} s_k(K_{1/2}^z) d\sigma_m(z) \right) &\leq c_2 t^{2r} \int_{S^m} \mathcal{D}^{2r,0}(K(z, z)) d\sigma_m(z) \\ &= c_3 t^{2r}, \quad t \in (0, \pi). \end{aligned}$$

Lembrando o Lema 4.3.2, vemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\min\{1, tk\})^{2r} \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \alpha_{k,j} \leq c_3 t^{2r}, \quad t \in (0, \pi).$$

Escrevendo $t = 1/n$ na inequação acima, temos

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\min\{1, k/n\})^{2r} \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \alpha_{k,j} \leq c_3 n^{-2r}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Todas as parcelas do somatório do lado esquerdo da inequação acima são não negativas. Desprezando os termos de índice $k < n$, obtemos a seguinte inequação:

$$\sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \alpha_{k,j} \leq c_3 n^{-2r}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Definindo $\alpha_k := \min\{\alpha_{k,j} : j = 1, 2, \dots, d_k^{(m)}\}$, $k = 0, 1, \dots$, obtemos

$$d_n^{(m)} \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k \leq \sum_{k=n}^{\infty} d_k^{(m)} \alpha_k \leq c_3 n^{-2r}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Usando a ordem de convergência $d_n^{(m)} = O(n^{m-1})$, para $n \rightarrow \infty$, chegamos a

$$n^{m-1} \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k \leq c_4 n^{-2r} \quad n = 1, 2, \dots,$$

para algum $c_4 > 0$, isto é,

$$n^{2r+m-1} \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k \leq c_4 \quad n = 1, 2, \dots$$

A seguir, lembrando que a sequência $\{\alpha_k\}$ é não negativa, observamos que

$$n^{2r+m} \alpha_n = n^{2r+m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} \alpha_k \leq n^{2r+m-1} \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k \leq c_4 \quad n = 1, 2, \dots$$

Retomando a notação original dos autovalores de \mathcal{L}_K , 1.2.18, e recordando que $\{\lambda_n(\mathcal{L}_K)\}$ decresce para 0, temos que $\alpha_n = \lambda_{d_n^{(m+1)}}(\mathcal{L}_K)$, $n = 1, 2, \dots$. Logo,

$$n^{2r+m} \lambda_{d_n^{(m+1)}}(\mathcal{L}_K) \leq c_4, \quad n = 1, 2, \dots$$

Como $d_n^{(m+1)} \leq 2n^m \leq (2n)^m$, então $\lambda_{(2n)^m}(\mathcal{L}_K) \leq \lambda_{d_n^{(m+1)}}(\mathcal{L}_K)$, e segue que

$$\lambda_{(2n)^m}(\mathcal{L}_K) \leq \frac{c_4}{n^{2r+m}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Portanto, segue do Lema 1.1.3 que

$$\lambda_n(\mathcal{L}_K) \leq \frac{c}{n^{\frac{2r+m}{m}}} = \frac{c}{n^{1+2r/m}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

para algum $c > 0$, isto é,

$$\lambda_n(\mathcal{L}_K) = O(n^{-1-2r/m}), \quad n \rightarrow \infty$$

e isto prova o teorema. ■

Teorema 4.4.2 *Se \mathcal{L}_K é um operador integral positivo induzido pelo núcleo $K \in \mathcal{A}(S^m)$ que satisfaz a condição de (B, β) -Hölder, então*

$$\lambda_n(\mathcal{L}_K) = O(n^{-1-\beta/m}), \quad n \rightarrow \infty.$$

Demonstração. Aplicando a inequação do Corolário 4.2.12 para a função $K_{1/2}^z$ no caso $p = q = 2$ e $r = 2$, obtemos

$$\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} (\min\{1, tk\})^4 s_k(K_{1/2}^z) \right\}^{1/2} \leq c_1^{1/2} \|S_t(K_{1/2}^z) - K_{1/2}^z\|_2, \quad z \in S^m, \quad t \in (0, \pi/2),$$

isto é,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\min\{1, tk\})^4 s_k(K_{1/2}^z) \leq c_1 \|S_t(K_{1/2}^z) - K_{1/2}^z\|_2^2, \quad z \in S^m, \quad t \in (0, \pi/2).$$

Integrando ambos os lados da inequação acima com relação à z e usando o Teorema da Convergência Dominada, encontramos

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\min\{1, tk\})^4 \int_{S^m} s_k(K_{1/2}^z) d\sigma_m(z) \leq c_1 \int_{S^m} \|S_t(K_{1/2}^z) - K_{1/2}^z\|_2^2 d\sigma_m(z), \quad t \in (0, \pi/2),$$

e aplicando o Lema 4.3.2, obtemos

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\min\{1, tk\})^4 \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \alpha_{k,j} \leq c_1 \int_{S^m} \|S_t(K_{1/2}^z) - K_{1/2}^z\|_2^2 d\sigma_m(z), \quad t \in (0, \pi/2).$$

Como K satisfaz a condição de (B, β) -Hölder, o resultado do Lema 4.3.5 garante que

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\min\{1, tk\})^4 \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \alpha_{k,j} \leq 2c_1 \|B\|_1 t^\beta, \quad t \in (0, \pi/2).$$

Escrevendo $t = 1/n$ na inequação acima, temos

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\min\{1, k/n\})^4 \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \alpha_{k,j} \leq 2c_1 \|B\|_1 n^{-\beta}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Como todas as parcelas do somatório do lado esquerdo da inequação acima são não negativas, então podemos desprezar os termos de índice $k < n$, para obter

$$\sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \alpha_{k,j} \leq 2c_1 \|B\|_1 n^{-\beta}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Escrevendo $c_2 = 2c_1 \|B\|_1$, vemos que

$$\sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_k^{(m)}} \alpha_{k,j} \leq c_2 n^{-\beta}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

e definindo $\alpha_k := \min\{\alpha_{k,j} : j = 1, 2, \dots, d_k^{(m)}\}$, $k = 0, 1, \dots$, chegamos a

$$d_n^{(m)} \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k \leq \sum_{k=n}^{\infty} d_k^{(m)} \alpha_k \leq c_2 n^{-\beta}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Usando a ordem de convergência $d_n^{(m)} = O(n^{m-1})$, para $n \rightarrow \infty$, podemos escrever

$$n^{m-1} \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k \leq c_3 n^{-\beta}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

para algum $c_3 > 0$, isto é,

$$n^{\beta+m-1} \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k \leq c_3, \quad n = 1, 2, \dots$$

Agora, como $\{\alpha_k\}$ é não negativa, observamos que

$$n^{\beta+m} \alpha_n = n^{\beta+m-1} \sum_{k=n}^{2n-1} \alpha_k \leq n^{\beta+m-1} \sum_{k=n}^{\infty} \alpha_k \leq c_3, \quad n = 1, 2, \dots$$

Retomando a notação original dos autovalores de \mathcal{L}_K , 1.2.18, e recordando que $\{\lambda_n(\mathcal{L}_K)\}$ decresce para 0, temos que $\alpha_n = \lambda_{d_n^{(m+1)}}(\mathcal{L}_K)$, $n = 1, 2, \dots$. Logo,

$$n^{\beta+m} \lambda_{d_n^{(m+1)}}(\mathcal{L}_K) \leq c_3, \quad n = 1, 2, \dots$$

Como $d_n^{(m+1)} \leq 2n^m \leq (2n)^m$, então $\lambda_{(2n)^m}(\mathcal{L}_K) \leq \lambda_{d_n^{(m+1)}}(\mathcal{L}_K)$, e segue que

$$\lambda_{(2n)^m}(\mathcal{L}_K) \leq \frac{c_3}{n^{\beta+m}}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Portanto, segue do Lema 1.1.3 que

$$\lambda_n(\mathcal{L}_K) \leq \frac{c}{n^{\frac{\beta+m}{m}}} = \frac{c}{n^{1+\beta/m}},$$

para algum $c > 0$, isto é,

$$\lambda_n(\mathcal{L}_K) = O(n^{-1-\beta/m}), \quad n \rightarrow \infty,$$

e isso prova o teorema. ■

Referências Bibliográficas

- [1] Aronszajn, N.: *Theory of reproducing kernels*. Trans. Amer. Math. Soc. 68, 337-404 (1950).
- [2] Azevedo, D., Menegatto, V. A.: *Eigenvalue decay of integral operators generated by power series-like kernels*. Mathematical Inequalities and Applications, Zagreb, 17(2), 693-705, (2014).
- [3] Belinsky, E., Dai, F., Ditzian, Z.: *Multivariate approximating averages*. J. Approx. Theory 125, 85-105 (2003).
- [4] Bennett, C., Sharpley, R.: *Interpolation of Operators*. Academic Press (1988).
- [5] Berens, H., Butzer, P.L., Pawelke, S.: *Limitierungsverfahren von Reihen mehrdimensionaler Kugelfunktionen und deren Saturationsverhalten*. Publ. Res. Inst. Math. Sci. Ser. A 4, 201-268 (1968/1969)(German).
- [6] Berens, H., Li, L. Q.: *On the de la Vallée-Poussin means on the sphere*. Results Math. 24(1-2), 12-26 (1993).
- [7] Botelho, G., Pellegrino, D., Teixeira, E.: *Fundamentos de Análise Funcional*. Coleção Textos Universitários 13, SBM - Rio de Janeiro (2012).
- [8] Brezis, H.: *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris (1983).
- [9] Conway, J. B.: *A Course in Operator Theory*. Graduate Studies in Mathematics, 21. American Mathematical Society, Providence, RI, (2000).
- [10] Castro, M.H., Menegatto, V. A.: *Eigenvalue decay of positive integral operators on the sphere*. Math. Comput. 81(280), 2303-2317 (2012).
- [11] Castro, M.H., Menegatto, V.A., Peron, A.P.: *Integral operators generated by Mercer-like kernels on topological spaces*. Colloq. Math. 126, 125-138 (2012).
- [12] Dai, F., Ditzian, Z.: *Combinations of multivariate averages*. Journal of Approximation Theory 131, 268-283 (2004).
- [13] Dai, F., Xu, Y.: *Approximation theory and harmonic analysis on spheres and balls*. In: Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York (2013).
- [14] Daugavet, I. K.: *Introduction to the theory of approximation of functions*. Izdat. Leningrad. Gos. Univ., Leningrad (1977)(Russian).
- [15] DeVore, R. A., Lorentz, G. G.: *Constructive Approximation*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 303, Springer Science & Business Media (1993).

- [16] Ditzian, Z., Runovskii, K.: *Averages on caps of S^{d-1}* . J. Math. Anal. Appl. 248, 260-274 (2000).
- [17] Dunkl, C. F.: *Operators and harmonic analysis on the sphere*. Transactions of the american mathematical society. 125(2), 250-263 (1966).
- [18] Ferreira, J. C.: *Operadores integrais positivos e espaços de Hilbert de reprodução*. Tese de doutorado, ICMC-USP (2010) [<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55135/tde-17082010-100716/pt-br.php>].
- [19] Flanigan, F. J., Kazdan, J. L., *Calculus two. Linear and nonlinear functions*. Undergraduate texts in mathematics. Springer-Verlag. New York (1990).
- [20] Folland, G. B.: *Real analysis. Modern techniques and their applications*. Second edition. Pure and Applied Mathematics. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York (1999).
- [21] Freedden, W., Gervens, T., Schreiner, M.: *Constructive approximation on the sphere*. With applications to geomathematics. Numerical Mathematics and Scientific Computation. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York (1998).
- [22] Gohberg, I., Gohberg, S., Krupnik, N.: *Traces and determinants of linear operators*. Operator Theory: Advances and Applications, 116, Birkhäuser Verlag, Basel (2000).
- [23] Groemer, H.: *Geometric applications of Fourier series and spherical harmonics*. Encyclopedia of Mathematkuhnics and its Applications, 61. Cambridge University Press, Cambridge (1996).
- [24] Ha, C. W.: *Eigenvalues of differentiable positive definite kernels*. SIAM J. Math. Anal. 17(2), 415-419 (1986).
- [25] Jordão, T.; Menegatto, V. A. and Sun, X.: *Eigenvalue Sequences of Positive Integral Operators and Moduli of Smoothness*. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics 83, 239-254 (2014).
- [26] Kühn, T.: *Eigenvalues of integral operators with smooth positive definite kernels*. Arch. Math. (Basel) 49(6), 525-534 (1987).
- [27] Lima, E. L.: *Curso de análise*. Vol. 2. Projeto Euclides, 13. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro (2000).
- [28] Menegatto, V. A.: *Approximation by spherical convolution*. Numer. Funct. Anal. Optim. 18(9-10), 995-1012 (1997).
- [29] Menegatto, V.A., Oliveira, C. P. and Peron, A. P.: *Defferentiable positive definite kernels on spheres*. Journal of Applied Analysis. 15, 101-117, 1425-6908 (2010).
- [30] Morimoto, M., *Analytic functionals on the sphere*. Translations of Mathematical Monographs, 178. American Mathematical Society, Providence, RI (1998).
- [31] Müller, C.: *Analysis of spherical symmetries in Euclidean spaces*. Applied Mathematical Sciences, 129. Springer-Verlag, New York (1998).
- [32] Oliveira, C. R.: *Introdução à análise funcional*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro (2007).

- [33] Piantella, A. C.: *Aproximação na Esfera por Uma Soma com Pesos de Harmônicos Esféricos*. Tese de doutorado, ICMC-USP (2007) [<http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/55/55135/tde-08052007-164553/pt-br.php>].
- [34] Reade, J. B.: *Eigenvalues of Lipschitz kernels*. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 93(1), 135-140 (1983a).
- [35] Reade, J. B.: *Eigenvalues of positive definite kernels*. SIAM J. Math. Anal. 14(1), 152-157 (1983).
- [36] Rudin, W.: *Uniqueness theory for Laplace series*. Trans. Amer. Math. Soc. 68, 287-303 (1950).
- [37] Rustamov, Kh.P.: *On the approximation of functions on a sphere*. Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 57(5), 127-148 (1993) (translation in Russian Acad. Sci. Izv. Math. 43(2), 311-329 (1994)).
- [38] Stein, E.: *Interpolation of linear operators*. Trans. Amer. Math. Soc. 83, 482-492 (1956).
- [39] Taylor, A. E.: *Introduction to functional analysis*. John Wiley & Sons, Inc., New York; Chapman & Hall, Ltd., London (1958).
- [40] Wang, K., Li, L.: *Harmonic analysis and approximation on the unit sphere*. Science Press, Beijing (2000).
- [41] Wehrens, M.: *Best approximation on the unit sphere in R^k* . Functional analysis and approximation (Oberwolfach, 1980), pp. 233-245, Internat. Ser. Numer. Math., 60, Birkhäuser, Basel-Boston, Mass. (1981).
- [42] Weyl, H.: *Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung)*. Math. Ann. 71(4), 441-479 (1912)(German).
- [43] Young, N.: *An introduction to Hilbert space*. Cambridge University Press (1988).