

RAILDO SANTOS DE LIMA

Condições espectral e de Palais-Smale para
injetividade global de difeomorfismos locais
em \mathbb{R}^2



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA

2014

RAILDO SANTOS DE LIMA

Condições espectral e de Palais-Smale para injetividade global de difeomorfismos locais em \mathbb{R}^2

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.

Linha de Pesquisa: Topologia e Sistemas Dinâmicos.

Orientador: Prof. Dr. Jean Venato Santos.

UBERLÂNDIA - MG

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil

L732c Lima, Raildo Santos de, 1988-
2014 Condições espectral e de Palais-Smale para injetividade global
de difeomorfismos locais em \mathbb{R}^2 / Raildo Santos de Lima. - 2014.
50 f. : il.

Orientador: Jean Venato Santos.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia,
Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Inclui bibliografia.

1. Matemática -Teses. 2. Difeomorfismos -Teses. 3. Folheações
(Matemática) - Teses. I. Santos, Jean Venato. II. Universidade Fe-
deral de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática.
III. Título.

CDU: 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO: Raildo Santos de Lima.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11212MAT013.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Topologia e Sistemas Dinâmicos.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Condições espectral e de Palais-Smale para injetividade global de difeomorfismos locais em \mathbb{R}^2 .

ORIENTADOR: Prof. Dr. Jean Venato Santos.

Esta dissertação foi **aprovada** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática 1F119, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em **25** de março de 2014, às 10:00 hs, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME

ASSINATURA

Prof. Dr. Jean Venato Santos

UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Dr. Francisco Braun

UFSCar - Universidade Federal de São Carlos

Prof. Dr. Luis Renato Gonçalves Dias

UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Uberlândia-MG, 25 de março de 2014.

Dedicatória

Dedico a todos os meus familiares, em especial a meus pais pelo exemplo de esforço e superação que são em minha vida e por toda a educação.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pela graça de concluir este trabalho, pela saúde, fé e perseverança que tem me dado.

Aos meus pais, Iraldo Barbosa de Lima e Luzia Campos dos Santos, pela maravilhosa criação e por todo apoio dado ao longo da minha vida acadêmica.

Ao Prof. Dr. Jean Venato Santos pela sabedoria e dedicação com que me orientou durante todo o estudo.

Aos professores Francisco Braun e Luis Renato Gonçalves Dias por terem aceito o convite para fazer parte desta banca.

A todos os professores da Pós-Graduação em Matemática da UFU, em especial aos que ministraram alguma disciplina durante o mestrado.

Aos meus colegas do mestrado, Murilo Rodolfo Cândido, Gregory Duran Cunha, Nathali Vega Cabrera, Eduard Rojas Castillo e Letícia Garcia Polac. Em especial, Marcos Fabiano Firbida Eduardo, Bruno Andrade de Souza e Lauro Maycon Fernandes Ferreira, que durante toda a caminhada acadêmica se tornaram verdadeiros irmãos.

Aos meus professores de graduação, Antonio Carlos Tamarozzi, Eugenia Brunilda Opazo Uribe, Renato César da Silva, Fernando Pereira de Souza, João Paulo Bressan e Silvia Lopes de Sena Taglialha na qual com muita dedicação e sabedoria me proporcionaram os primeiros ensinamentos em Matemática.

A minha família uberlandense, composta por Robson Antônio dos Reis Veiga, Amasilia Romeiro dos Santos Veiga, Luiza Romeiro Veiga e Adriano da Silva Lima, na qual tive inúmeros bons momentos acompanhados de muito companheirismo.

A CAPES pelo apoio financeiro.

LIMA, R. S. *Condições espectral e de Palais-Smale para injetividade global de difeomorfismos locais em \mathbb{R}^2* . 2014. (50 páginas) Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Neste trabalho consideramos duas condições suficientes para que um difeomorfismo local $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, de classe C^1 , seja globalmente injetivo. A primeira baseada no espectro da aplicação X , neste caso basta considerar X diferenciável, e a segunda é a condição de Palais-Smale. De fato, tais condições garantem a trivialidade das folheações em \mathbb{R}^2 induzidas pelas funções coordenadas de X e isto garante a injetividade global da aplicação X . Além de apresentar as demonstrações destes resultados, exibimos uma coleção de exemplos que permitem concluir que tais condições estabelecem classes distintas de aplicações globalmente injetivas.

Palavras-chave: Folheações, injetividade global, difeomorfismo local.

LIMA, R. S. *Spectral and Palais-Smale conditions for global injectivity of local diffeomorphisms in \mathbb{R}^2* . 2014. (50 pages) M. Sc. Dissertation, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

In this work we consider two sufficient conditions for the global injectivity of local diffeomorphisms $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ of class C^1 . The first is based on the spectrum of X , in this case it is enough to consider X differentiable, and the second is known as Palais-Smale Condition. In fact, these conditions ensure the triviality of the foliations in \mathbb{R}^2 induced by the coordinated functions of X and this guarantees the global injectivity of the map X . Besides discussing the proofs of this results, we exhibit a collection of examples showing that such conditions provide different classes of globally injective maps.

Keywords: Foliations, injectivity, local diffeomorphisms.

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Carta local e mudança de coordenadas. | 6 |
| 1.2 | Derivada de aplicações entre variedades. | 7 |
| 1.3 | Placas de \mathcal{F} | 10 |
| 1.4 | Folheação de Reeb no plano. | 12 |
| 1.5 | Folheação de Reeb em \mathbb{R}^3 | 13 |
| 2.1 | Restrição homeomorfa de Černavskii. | 16 |
| 2.2 | Curvas tangente e transversal. | 17 |
| 2.3 | X não é homeomorfismo em qualquer vizinhança de p | 18 |
| 2.4 | Conjunto B | 19 |
| 2.5 | Meia componente de Reeb. | 20 |
| 2.6 | Folhas α_1 e α_2 de $\mathcal{F}(f)$ | 20 |
| 2.7 | Curva Γ intersectando α_1 | 21 |
| 2.8 | Obtenção de um arco sem tangências com $\mathcal{F}(f)$ | 21 |
| 2.9 | Transformação de tangência não-genérica em genérica. | 22 |
| 2.10 | Trajetórias em uma vizinhança de q | 22 |
| 2.11 | Um arco próximo à $[p, T(p)]_f$ que não possui tangências com $\mathcal{F}(f)$ | 24 |
| 2.12 | Função φ preservando os níveis de f | 25 |
| 2.13 | O arco (tracejado) passando por $T(\delta/2)$ | 26 |
| 2.14 | Folhas inseparáveis. | 27 |
| 3.1 | A cada $x > a$ associa-se uma folha α_x | 30 |

| | | |
|-----|---|----|
| 3.2 | Conjunto Ω como subconjunto da região canônica associada às folhas inseparáveis passando por p e q | 36 |
| 3.3 | Curva C | 37 |
| 4.1 | Gráficos de λ_1 e λ_2 | 39 |
| 4.2 | Espectro da aplicação X quando n é par. | 40 |
| 4.3 | Folheações induzidas pela f e g , respectivamente. | 41 |
| 4.4 | Folheação induzida pela h restrita à $I \times I$ | 42 |
| 4.5 | Folheação induzida pela k restrita à $I \times I$ | 43 |
| 4.6 | Diagrama de Venn da coleção de exemplos. | 45 |

SUMÁRIO

| | |
|--|-------------|
| Resumo | vii |
| Abstract | viii |
| Lista de Figuras | x |
| Introdução | 1 |
| 1 Preliminares | 4 |
| 1.1 Definições e resultados clássicos em análise | 4 |
| 1.2 Variedades Diferenciáveis | 5 |
| 1.3 Folheações | 9 |
| 2 Folheações e injetividade global | 15 |
| 2.1 Meia componente de Reeb e injetividade global | 19 |
| 2.2 Folhas inseparáveis e injetividade global | 27 |
| 3 Condições Espectral e de Palais-Smale | 29 |
| 3.1 Injetividade global via condição espectral | 29 |
| 3.2 Injetividade global via condição de Palais-Smale | 34 |
| 4 Exemplos | 38 |
| 4.1 Exemplos em dimensão 2 | 38 |
| 4.2 Exemplos em dimensões maiores que 2 | 46 |

INTRODUÇÃO

Dada uma aplicação $X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferenciável, de classe \mathcal{C}^k com $k \geq 1$, na qual para todo $p \in \mathbb{R}^n$ a derivada $DX(p) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo, do Teorema da Função Inversa temos que a aplicação X é um difeomorfismo local, mas uma questão natural surge: X é um difeomorfismo global de \mathbb{R}^n em $X(\mathbb{R}^n)$? Esta é uma questão global, de natureza topológica, cuja resposta não pode ser dada pelos teoremas do Cálculo Diferencial, que são essencialmente locais ([21] pág. 124). Note que para responder tal pergunta basta estudar a injetividade global de X .

Problemas relacionados à injetividade global aparecem em várias áreas da Matemática e da Física. Com isso, é de interesse dos matemáticos encontrar condições para que uma aplicação, de uma determinada classe, seja injetiva. Nesse sentido, foram formuladas várias conjecturas, na qual a mais famosa delas é a *Conjectura Jacobiana*, enunciada por Ott-Heinrich Keller [20] em 1939, permanecendo em aberto até hoje.

Conjectura Jacobiana: *Seja $X : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ uma aplicação polinomial com $\det DX \equiv c \in \mathbb{C}^*$. Então X é bijetiva e X^{-1} é polinomial.*

Por Białyński-Birula e Rosenlicht em [3], a injetividade de uma aplicação polinomial $X : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ (mesmo $X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$) implica em sua sobrejetividade. Além disto, Cynk e Rusek em [10] mostraram que se uma aplicação polinomial $X : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ é inversível então X^{-1} também é polinomial. Portanto, para se mostrar a Conjectura Jacobiana bastaria estabelecer a injetividade de X . E sendo $\det DX$ um polinômio de n variáveis complexas $\det DX \equiv c \in \mathbb{C}^*$ equivale a $\det DX \neq 0$. Assim pelo Teorema da Função Inversa a Conjectura Jacobiana pode ser enunciada por: “*Todo difeomorfismo local polinomial de \mathbb{C}^n*

em \mathbb{C}^n é um difeomorfismo global”.

Sabemos que esta última afirmação não é verdadeira para difeomorfismos locais polinomiais de classe \mathcal{C}^1 de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n pelo contra-exemplo de Pinchuk [25]. Portanto, a fim de se obter a injetividade global de difeomorfismos locais de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n , deve-se considerar hipóteses adicionais. Vale ressaltar, que neste contexto temos a seguinte versão real da Conjectura acima (veja por exemplo, [12]):

Conjectura Jacobiana Real: *Seja $X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação polinomial com $\det JX \equiv c \in \mathbb{R}^*$. Então X é bijetiva.*

Neste trabalho, apresentaremos duas condições suficientes para que difeomorfismos locais de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 sejam globalmente injetivos.

A primeira, apresentada no artigo [14]: “*Global asymptotic stability for differentiable vector fields of \mathbb{R}^2* ”, de Fernandes, Gutierrez e Rabanal, está relacionada com o espectro de X , denotado por $\text{Spec}(X)$, que consiste no conjunto de todos os autovalores de $DX(p)$ quando p varia em todo \mathbb{R}^2 . A segunda, apresentada no artigo [18]: “*Global injectivity of \mathcal{C}^1 maps of the real plane, inseparable leaves and the Palais-Smale Condition*”, de Gutierrez, Jarque, Llibre e Teixeira, está relacionada com a condição de Palais-Smale dada na Definição 3.1.

Mais precisamente, os principais resultados que apresentaremos são:

Teorema A *Seja $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável (não necessariamente \mathcal{C}^1). Se, para algum $\varepsilon > 0$, $\text{Spec}(X) \cap [0, \varepsilon) = \emptyset$, então X é globalmente injetiva.*

Teorema B *Seja $X = (f, g) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação de classe \mathcal{C}^1 tal que $0 \notin \text{Spec}(X)$. Se f ou g satisfaz a condição de Palais-Smale, então X é globalmente injetiva.*

Devido ao acima observado exemplo de Pinchuk, a hipótese $\text{Spec}(X) \cap [0, \varepsilon) = \emptyset$, para algum $\varepsilon > 0$, no Teorema A não pode ser enfraquecida para apenas $0 \notin \text{Spec}(X)$ nem mesmo para o caso de aplicação polinomial, devido ao contra-exemplo de Pinchuk. Para dimensões maiores, Smith e Xavier em [29], provaram que existem inteiros $n > 2$ e aplicações polinomiais não injetivas $X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tais que $\text{Spec}(X) \cap [0, \infty) = \emptyset$ (veja Exemplo 4.11). Porém, até o presente momento, em \mathbb{R}^3 não se sabe se o resultado é ou não válido.

Problemas relacionados à injetividade global têm forte relação com problemas de esta-

bilidade assintótica global. Sob este ponto de vista, em 1960 foi formulada por Markus e Yamabe a seguinte:

Ex-conjectura de Markus-Yamabe: *Seja $X : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial, de classe \mathcal{C}^1 , tal que todos os autovalores da matriz Jacobiana tem parte real menor do que zero, em todo \mathbb{R}^n . Se $X(0) = 0$ então, a origem é um atrator global para o sistema dinâmico contínuo induzido pelo campo X .*

Em 1963, Olech estabeleceu em [24] que no caso bidimensional, mostrar a estabilidade assintótica global do campo X era equivalente mostrar a injetividade global da aplicação X sob tais hipóteses. Em 1995, a Conjectura de Markus-Yamabe em \mathbb{R}^2 foi provada independentemente, por Gutierrez em [17] e Fessler em [15] e por Glutsyuk em [16], todos provando a injetividade global de X . Em 1997 a conjectura foi totalmente resolvida quando Cima et al, apresentaram em [7] um contra-exemplo polinomial para $n \geq 3$.

Ressaltamos que o Teorema A implica nos resultados de injetividade de Fessler [15], Gutierrez [17] e Glutsyuk [16], os quais requer que X seja de classe \mathcal{C}^1 e que $\text{Spec}(X) \cap [0, \infty) = \emptyset$. Além disso, este teorema generaliza o resultado de injetividade de Cobo, Gutierrez e Llibre [8], no qual exige-se X de classe \mathcal{C}^1 e $\text{Spec}(X) \cap (-\varepsilon, \varepsilon) = \emptyset$, para algum $\varepsilon > 0$.

O Teorema B refere-se à investigação da injetividade global de X fazendo uso da condição de Palais-Smale. Este conceito, aplicado em resultados de injetividade global, aparece em vários trabalhos, veja por exemplo [18, 23, 28] e suas referências.

A estrutura deste trabalho é a que segue: No Capítulo 1 introduzimos alguns conceitos e resultados preliminares no intuito de deixar o texto autossuficiente. No Capítulo 2 são apresentadas as definições de meia componente de Reeb e folhas inseparáveis de uma folheação em \mathbb{R}^2 . Mostramos que tais fenômenos são equivalentes e estabelecemos a relação destes objetos com a não injetividade de difeomorfismos locais em \mathbb{R}^2 . No Capítulo 3 são provados os Teoremas A e B. Finalmente, uma coletânea de exemplos relacionados aos resultados citados neste trabalho é apresentada no Capítulo 4. Com esta coletânea concluiremos que as condições dos Teoremas A e B estabelecem classes distintas de aplicações globalmente injetivas.

Raildo Santos de Lima
Uberlândia-MG, 10 de junho de 2014.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1.1 Definições e resultados clássicos em análise

Nesta seção enunciaremos alguns conceitos e resultados básicos de análise que servirão de apoio ao que será discutido nas seções e capítulos subsequentes. A referência utilizada foi [22].

Definição 1.1 Sejam U e V abertos de \mathbb{R}^n e $X : U \longrightarrow V$ uma bijeção. Diz-se que X é um *difeomorfismo* se X e X^{-1} são diferenciáveis. Diz-se que X é um *difeomorfismo de classe \mathcal{C}^k* se X e X^{-1} são de classe \mathcal{C}^k .

Definição 1.2 Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe \mathcal{C}^k com $k \geq 1$. Diz-se que X é um *difeomorfismo local* se para cada $p \in U$, existe um aberto V_p , contendo p , e um aberto $W_{X(p)}$, contendo $X(p)$, tal que $X : V_p \longrightarrow W_{X(p)}$ é um difeomorfismo de classe \mathcal{C}^k .

Observação 1.1 Um difeomorfismo local $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um difeomorfismo (global) do aberto U sobre o aberto $V = X(U) \subset \mathbb{R}^n$ se, e somente se, é uma aplicação injetiva.

Teorema 1.1 (Função Inversa) *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe \mathcal{C}^k com $k \geq 1$, e $p \in U$. Se $DX(p) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é invertível, então existem abertos V_p contendo p , $W_{X(p)}$ contendo $X(p)$, tal que $X : V_p \longrightarrow W_{X(p)}$ é um difeomorfismo de classe \mathcal{C}^k .*

Observação 1.2 Observe que o Teorema da Função Inversa é um teorema de caráter local. Ou seja, sempre que $X : U \longrightarrow V$ é um difeomorfismo então, para todo $p \in U$, $DX(p) : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo, de fato, pois $X \circ X^{-1}(x) = x$ e derivando tem-se $DX(X^{-1}(x)) \cdot DX^{-1}(x) = I$, ou seja, $DX(p) \cdot DX^{-1}(x) = I$, mas o Teorema da Função Inversa não é uma recíproca completa deste fato. Ele permite apenas concluir que se X é de classe \mathcal{C}^k , com $k \geq 1$, e $DX(p)$ é um isomorfismo para todo $p \in U$ então X é um difeomorfismo local, isto é, cada $p \in U$ tem uma vizinhança aplicada por X difeomorficamente sobre uma vizinhança de $DX(p)$.

Exemplo 1.1 A aplicação $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por,

$$X(x, y) = (e^x \cos(y), e^x \sin(y)),$$

isto é, a exponencial complexa $X(z) = e^z$ de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 , satisfaz o Teorema da Função Inversa, ou seja, é um difeomorfismo local. Porém, tomando $x = 0$ e quaisquer valores de $y = 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$, tem-se que X não é injetiva. Logo X não é um difeomorfismo global.

Definição 1.3 Seja $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação, de classe \mathcal{C}^k com $k \geq 1$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$. Quando a derivada $DX(p) : \mathbb{R}^{m+n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é sobrejetiva para todo $p \in U$, dizemos que X é uma *submersão*.

Teorema 1.2 (Forma Local das Submersões) *Seja $X : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma submersão, de classe \mathcal{C}^k com $k \geq 1$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$. Para cada ponto $p \in U$ existem abertos $Z \subset U$, contendo p , $W \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^m$ contendo $c = X(p)$ e um difeomorfismo $h : V \times W \longrightarrow Z$, de classe \mathcal{C}^k , tais que $X(h(x, y)) = y$ para todo $x \in V$ e todo $y \in W$, isto é, $X \circ h$ é equivalente à projeção na segunda coordenada.*

1.2 Variedades Diferenciáveis

Nesta seção será introduzido o conceito de variedade diferenciável, que será fundamental para o escopo deste trabalho. Será admitido um conhecimento prévio sobre espaços topológicos. O conteúdo desta seção, com maiores detalhes, pode ser encontrado em [9].

Definição 1.4 Seja M um espaço topológico. Uma *carta local* ou *sistema de coordenadas* no espaço topológico M é um par (U, φ) onde U é um aberto de M e $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é um homeomorfismo de U sobre o aberto $\varphi(U)$ de \mathbb{R}^m .

Definição 1.5 Um Atlas \mathcal{A} de dimensão m e classe \mathcal{C}^r sobre M é uma coleção de cartas locais cujos domínios cobrem M e, tal que se (U, φ) e $(\tilde{U}, \tilde{\varphi})$ são cartas locais de \mathcal{A} tais que $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$, então a aplicação,

$$\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap \tilde{U}) \longrightarrow \tilde{\varphi}(U \cap \tilde{U}),$$

é um difeomorfismo de classe \mathcal{C}^r , entre abertos de \mathbb{R}^m . Os difeomorfismos $\tilde{\varphi} \circ \varphi^{-1}$ são chamados de *mudanças de coordenadas*. Diz-se que um sistema de coordenadas $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ em M é *admissível* relativamente ao atlas \mathcal{A} se, para todo sistema de coordenadas $\psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$, pertencente a \mathcal{A} , com $U \cap V \neq \emptyset$, as mudanças de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1}$ e $\varphi \circ \psi^{-1}$ são de classe \mathcal{C}^r . Em outras palavras, $\mathcal{A} \cup \{\varphi\}$ é ainda uma atlas de classe \mathcal{C}^r . Diz-se que o atlas \mathcal{A} é *maximal* quando contém todos os sistemas de coordenadas locais que são admissíveis em relação a \mathcal{A} .

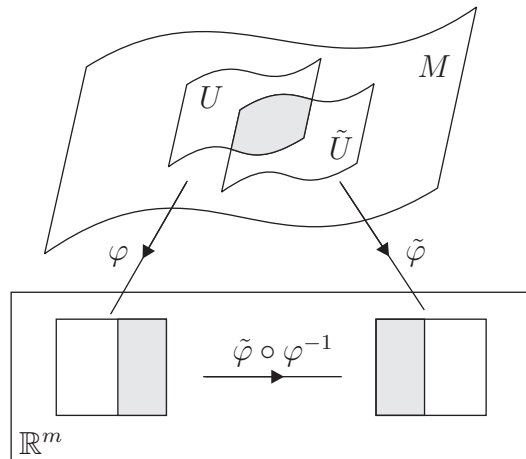


Figura 1.1: Carta local e mudança de coordenadas.

Observação 1.3 Todo atlas pode ser ampliado, de modo único, até se tornar um atlas maximal, basta acrescentar-lhe todos os sistemas de coordenadas admissíveis. Quando temos um atlas maximal, este é chamado de *estrutura diferenciável*.

Definição 1.6 Uma *variedade diferenciável*, de classe \mathcal{C}^r e dimensão m , é um espaço topológico de Hausdorff M , com base enumerável, munido de uma estrutura diferenciável, \mathcal{A} , de dimensão m e classe \mathcal{C}^r . Denota-se por M^m uma variedade diferenciável de dimensão m .

Definição 1.7 Seja M^m uma variedade de dimensão m e classe \mathcal{C}^r , com $r \geq 1$. Um subconjunto $N \subset M^m$ é chamado de *subvariedade* de M de dimensão n e classe \mathcal{C}^r , com

$r \geq 1$, se para todo $p \in N$ existe uma carta local \mathcal{C}^r , (U, φ) , com $\varphi(U) = V \times W$ onde $0 \in V \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in W \subset \mathbb{R}^{m-n}$ são bolas euclidianas, tal que $\varphi(N \cap U) = V \times 0$. Nesta situação dizemos também que a codimensão de N é $m - n = \dim(M) - \dim(N)$.

Segue-se da definição acima que uma subvariedade N de M é em particular uma variedade de classe \mathcal{C}^r .

O conceito de diferenciabilidade entre abertos de espaços euclidianos se estende de modo natural para aplicações entre variedades diferenciáveis, uma vez que, uma variedade diferenciável se comporta localmente como um subconjunto aberto de um espaço euclidiano.

Definição 1.8 Sejam M^m, N^n variedades, de classe \mathcal{C}^r com $r \geq 1$. Diz-se que uma aplicação $X : M \rightarrow N$ é diferenciável no ponto $p \in M$ se existem sistemas de coordenadas $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ em N , com $p \in U$ e $X(U) \subset V$ tais que,

$$\psi \circ X \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V),$$

é diferenciável no ponto $\varphi(p)$.

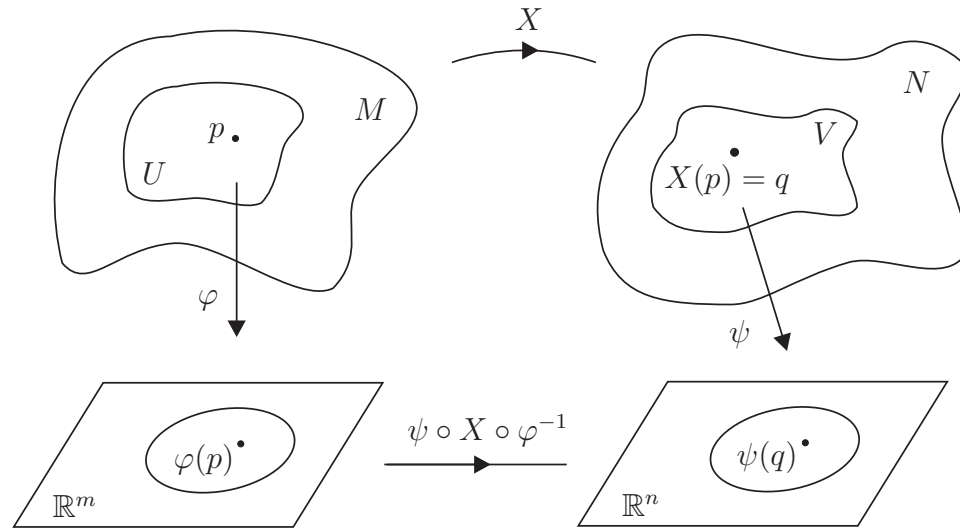


Figura 1.2: Derivada de aplicações entre variedades.

Observação 1.4 Perceba agora que $\varphi(U)$ e $\psi(V)$ são abertos de \mathbb{R}^m e \mathbb{R}^n respectivamente.

A aplicação $X_{\varphi\psi} = \psi \circ X \circ \varphi^{-1}$ é denominada a expressão de X nas cartas locais φ e ψ .

Como as mudanças de coordenadas em M e N são difeomorfismos, de classe \mathcal{C}^r , a definição de diferenciabilidade independe dos sistemas de coordenadas escolhidas. Ou seja, para todo

par de sistemas de coordenadas $\tilde{\varphi} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M e $\tilde{\psi} : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}^n$ em N , com $p \in U$ e $X(\tilde{U}) \subset \tilde{V}$, a aplicação $X_{\tilde{\varphi}\tilde{\psi}} = \tilde{\psi} \circ X \circ (\tilde{\varphi})^{-1}$ será diferenciável no ponto $\tilde{\varphi}(p)$.

Dizemos que $X : M \rightarrow N$ é *diferenciável* se X for diferenciável em todos os pontos de M .

Finalmente dizemos que $X : M \rightarrow N$ é, de classe \mathcal{C}^k com $k \geq r$, se para cada $p \in M$ existem sistemas de coordenadas locais $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ em M , $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ em N , com $p \in U$, e $X(U) \subset V$ tais que $\psi \circ X \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$ é de classe \mathcal{C}^k .

A seguir, introduziremos a noção de derivada de uma aplicação diferenciável entre duas variedades. Sejam M uma variedade diferenciável, de classe \mathcal{C}^∞ , e $p \in M$ um ponto fixado. Considere o conjunto $C_p(M)$ de todas as curvas \mathcal{C}^∞ , $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, com $\varepsilon > 0$ e tais que $\gamma(0) = p$. Dada uma carta local (U, φ) de M com $p \in U$, note que $C_p(M)$ é diferente de vazio, pois os caminhos em U que passam por $\varphi(p)$ com parâmetro zero compostos com a inversa de φ pertencem à $C_p(M)$.

Agora introduza a seguinte relação de equivalência em $C_p(M)$. Dois caminhos α e β em $C_p(M)$ estão na mesma classe de equivalência quando,

$$\frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha)(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\varphi \circ \beta)(t)|_{t=0}$$

onde φ é uma carta local. Neste caso, denota-se por $\alpha \sim \beta$. Tem-se ainda que esta definição de classe de equivalência independe da carta escolhida (ver [9] pág. 11).

Definição 1.9 O quociente de $C_p(M)$ pela relação de equivalência mencionada acima é definido como o *espaço tangente a M no ponto p* , denotado por $T_p M$, $(C_p(M)/\sim = T_p M)$.

Definição 1.10 Sejam M e N variedades diferenciáveis e considere a aplicação $X : M \rightarrow N$. Para cada ponto $p \in M$ a derivada de X é uma aplicação entre os espaços tangentes de M em p e N em $X(p)$. Denotando por $[\alpha]$ a classe de equivalência de uma curva $\alpha \in C_p(M)$, a aplicação $DX(p) : T_p M \rightarrow T_{X(p)} N$ é definida por $DX(p) \cdot [\alpha] = [X \circ \alpha]$.

Observação 1.5 Os teoremas das funções inversa e implícita, as formas locais, os conceitos de imersão, mergulho e submersão se estendem ao contexto das variedades diferenciáveis.

Definição 1.11 Seja $X : M \rightarrow N$, de classe \mathcal{C}^k com $k \geq 1$. Quando $p \in M$ for tal que $DX(p) : T_p M \rightarrow T_q N$, $q = X(p)$, é sobrejetiva diz-se que p é um *ponto regular de X* . Quando $q \in N$ for tal que $X^{-1}(q) = \emptyset$ ou $X^{-1}(q)$ é constituído apenas por pontos regulares,

diz-se que q é um *valor regular* de X . Um ponto $q \in N$ que não é valor regular será chamado de *valor crítico* de X .

1.3 Folheações

Definição 1.12 Seja M uma variedade diferenciável de classe \mathcal{C}^∞ e dimensão m . Uma *folheação* de classe \mathcal{C}^r e dimensão n de M é um atlas máximo \mathcal{F} de classe \mathcal{C}^r , que satisfaz as seguintes condições:

1. Se $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$, então,

$$\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n},$$

sendo $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ e $U_2 \subset \mathbb{R}^{m-n}$ bolas abertas;

2. Se $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{F}$, com $U \cap V \neq \emptyset$, então a mudança de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1}$ satisfaz

$$\psi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)).$$

Dizemos que M é uma variedade folheada por \mathcal{F} , ou que \mathcal{F} é uma estrutura folheada de dimensão n e classe \mathcal{C}^r sobre M .

- Observação 1.6**
1. Na definição acima é dito que M é uma variedade diferenciável de classe \mathcal{C}^∞ . No entanto é exigido que os difeomorfismos do atlas maximal \mathcal{F} sejam apenas de classe \mathcal{C}^r . Não existe qualquer problema com tal exigência pois, de fato, é exigido que M possua um atlas de classe \mathcal{C}^∞ mas que possua um outro atlas bem mais específico e de classe \mathcal{C}^r que precisa satisfazer a segunda condição da definição, que por sinal é bastante restritiva;
 2. Se um atlas \mathcal{A} de M satisfaz as condições da definição acima, então existe um único atlas maximal que contém \mathcal{A} e que também satisfaz as condições da definição (fato que pode ser observado na Definição 1.5). No entanto é preferível que se tenha um atlas maximal, porque neste caso, o conjunto de todos os domínios das cartas locais compõe uma base para a topologia de M .

As cartas (U, φ) de uma folheação \mathcal{F} serão chamadas também de *cartas trivializadoras* de \mathcal{F} .

Definição 1.13 Seja \mathcal{F} uma folheação tal como na definição 1.12. Considere uma carta local (U, φ) de \mathcal{F} tal que $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$. Os conjuntos da forma $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$, onde $c \in U_2$ são chamados *placas de U* , ou ainda, *placas de \mathcal{F}* .

Definição 1.14 Define-se um *caminho de placas* numa folheação \mathcal{F} como sendo uma sequência $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ de placas de \mathcal{F} tal que $\alpha_j \cap \alpha_{j+1} \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, \dots, k-1\}$. Como M é recoberta pelas placas de \mathcal{F} , pode-se definir em M a seguinte relação de equivalência: “ $p \sim q$ se existe uma caminho de placas $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ com $p \in \alpha_1$ e $q \in \alpha_k$ ”. As classes de equivalência decorrentes dessa relação são chamadas de *folhas de \mathcal{F}* .

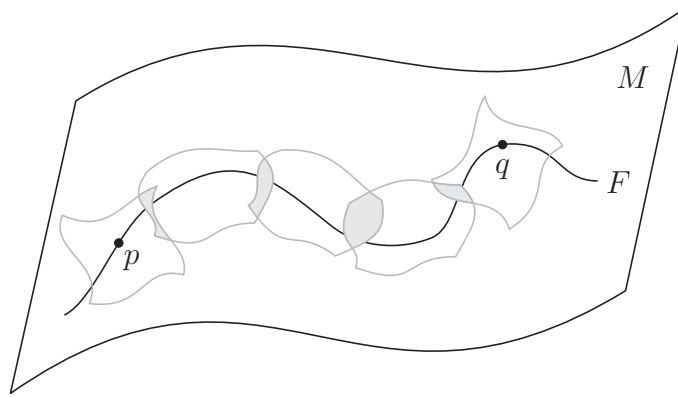


Figura 1.3: Placas de \mathcal{F} .

Definição 1.15 Sejam M e N variedades diferenciáveis e \mathcal{F}_M e \mathcal{F}_N folheações em M e N , respectivamente. Dizemos que \mathcal{F}_M é topologicamente conjugada a \mathcal{F}_N se existe um homeomorfismo de M em N que leva folhas de \mathcal{F}_M em folhas de \mathcal{F}_N .

Exemplo 1.2 (Folheações induzidas por submersões) Seja $f : U \subset \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma submersão de classe \mathcal{C}^r com $r \geq 1$ no aberto U . Então f induz uma folheação \mathcal{F} em seu domínio U , tal que as folhas são as componentes conexas das superfícies de nível $f^{-1}(c)$, com $c \in f(U) \subset \mathbb{R}^m$.

Dem. Pela Forma Local das Submersões, dado $p \in U$ e tomando $c = f(p)$, existem abertos $Z \subset U$ contendo p , $V \subset \mathbb{R}^m$ contendo c , $W \subset \mathbb{R}^n$ e um difeomorfismo $h : W \times V \rightarrow Z$ de classe \mathcal{C}^r , tal que $(f \circ h)(x, y) = y$, onde $x \in W$ e $y \in V$.

Seja $\varphi = h^{-1}$. Então (Z, φ) é uma carta local de dimensão n e classe \mathcal{C}^r .

A coleção de cartas (Z, φ) define uma folheação de classe \mathcal{C}^r e dimensão n de U .

De fato, sejam (Z_1, φ_1) e (Z_2, φ_2) duas cartas dadas como anteriormente com $p \in Z_1 \cap Z_2$.

Deve-se mostrar que, $(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}) : \varphi_1(Z_1 \cap Z_2) \longrightarrow \varphi_2(Z_1 \cap Z_2)$ é da forma,

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y)).$$

Para isto, tome quaisquer $(x, y_1), (\tilde{x}, y_1) \in \varphi_1(Z_1 \cap Z_2)$ e basta mostrar que:

$$(\pi_2 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(x, y_1) = (\pi_2 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(\tilde{x}, y_1),$$

onde π_2 é a projeção na segunda coordenada, ou seja, esta segunda coordenada depende apenas da última variável.

Considere $\varphi_1^{-1}(x, y_1)$ e $\varphi_1^{-1}(\tilde{x}, y_1)$, assim,

$$f(\varphi_1^{-1}(x, y_1)) = y_1 = f(\varphi_1^{-1}(\tilde{x}, y_1)). \quad (1.1)$$

Sejam $(x', y_2) = \varphi_2(\varphi_1^{-1}(x, y_1))$ e $(\tilde{x}', \tilde{y}_2) = \varphi_2(\varphi_1^{-1}(\tilde{x}, y_1))$ tem-se,

$$\varphi_2^{-1}(x', y_2) = \varphi_1^{-1}(x, y_1) \text{ e } \varphi_2^{-1}(\tilde{x}', \tilde{y}_2) = \varphi_1^{-1}(\tilde{x}, y_1),$$

acarretando de (1.1) que:

$$y_2 = (f \circ \varphi_2^{-1})(x', y_2) = f(\varphi_1^{-1}(x, y_1)) = f(\varphi_1^{-1}(\tilde{x}, y_1)) = (f \circ \varphi_2^{-1})(\tilde{x}', \tilde{y}_2) = \tilde{y}_2.$$

Como:

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(x, y_1) = \varphi_2(\varphi_1^{-1}(x, y_1)) = (x', y_2) \text{ e}$$

$$(\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(\tilde{x}, y_1) = \varphi_2(\varphi_1^{-1}(\tilde{x}, y_1)) = (\tilde{x}', \tilde{y}_2),$$

obtem-se o desejado, ou seja,

$$\pi_2((\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(x, y_1)) = y_2 = \tilde{y}_2 = \pi_2((\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1})(\tilde{x}, y_1)).$$

Concluimos também que as folhas de \mathcal{F} são as componentes conexas das superfícies de nível $f^{-1}(c)$, com $c \in f(U) \subset \mathbb{R}^m$, uma vez que o conjunto $\{\varphi^{-1}(x, c); x \in W\} = f^{-1}(c) \cap Z$ é uma placa da folheação obtida. ■

Exemplo 1.3 (Folheação de Reeb) Este exemplo foi fundamental para o desenvolvimento da Teoria de Folheações. Sejam $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação de classe \mathcal{C}^∞ , e $\varepsilon > 0$ tais que:

1. $\alpha(1) = 0$;

2. $\alpha(t) = 1$, se $t \in [0, \varepsilon)$;

3. $\alpha'(t) < 0$, se $t > \varepsilon$.

Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \alpha(x^2)e^y$. Tal aplicação é claramente uma submersão. Portanto as curvas de nível de f formam uma folheação de classe \mathcal{C}^∞ do plano. Perceba que uma folha F contida em $(-1, 1) \times \mathbb{R}$ pode ser parametrizada por,

$$x \in (-1, 1) \mapsto \left(x, \ln \left(\frac{c}{\alpha(x^2)} \right) \right),$$

onde $c > 0$ e $f^{-1}(c) = F$. Além disso, o nível $f^{-1}(0)$ possui duas componentes conexas: $\{-1\} \times \mathbb{R}$ e $\{1\} \times \mathbb{R}$.

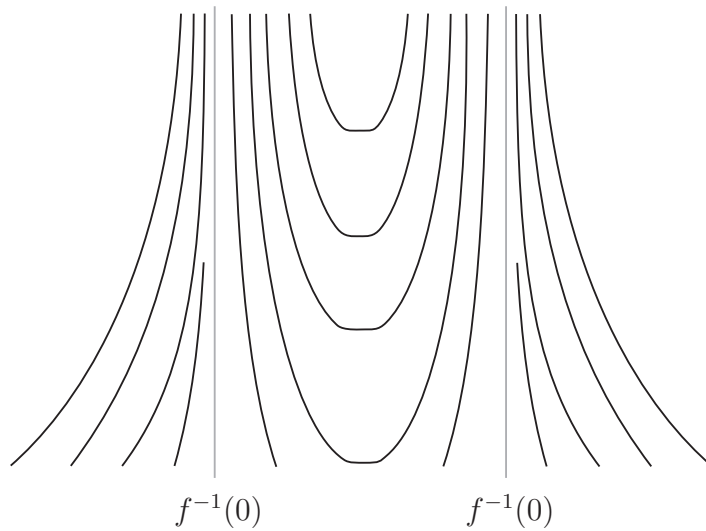
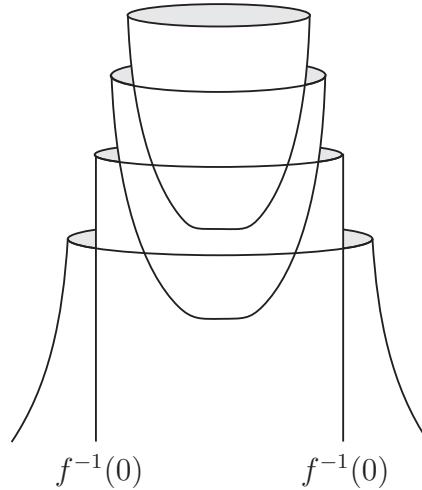


Figura 1.4: Folheação de Reeb no plano.

De modo análogo, podemos obter uma Folheação de Reeb para o cilindro sólido $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ de \mathbb{R}^3 . Basta considerar a função $f(x_1, x_2, x_3) = \alpha(r^2)e^{x_3}$, onde $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. As folhas no interior do cilindro sólido são todas homeomorfas a \mathbb{R}^2 . O bordo do cilindro sólido é também uma folha, fora dele as folhas são todas homeomorfas a cilindros.

Exemplo 1.4 (Campos de vetores sem singularidades) Um campo de vetores numa variedade M é uma aplicação que associa a cada ponto $x \in M$ um vetor do espaço tangente a M em x . A este campo de vetores está associada uma equação diferencial ordinária em M : $\frac{dx}{dt} = X(x)$. Uma solução desta equação é uma curva $\gamma : (a, b) \rightarrow M$ tal que $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$, $t \in (a, b)$. Uma solução γ de X tal que $\gamma(0) = x$ é chamada *órbita* ou *curva integral* de X por x . O teorema da existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias (ver [26], pág. 4) garante que sob certas condições em X passa por todo ponto

Figura 1.5: Folheação de Reeb em \mathbb{R}^3 .

$x \in M$ uma única órbita de X . Quando X não possui singularidades (isto é, $X(x) \neq 0$ para todo $x \in M$), as órbitas de X são as folhas de uma folheação de dimensão 1 em M .

Definição 1.16 Seja $X = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável. Define-se *campo de vetores Hamiltoniano* planar, X_f , associado à f por,

$$X_f = \left(\frac{-\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial x} \right).$$

Analogamente define-se X_g . Geometricamente, $X_f(x, y)$ é a rotação de 90° no sentido anti-horário do vetor gradiente de f no ponto (x, y) .

Observação 1.7 Em geral, $\mathcal{F}(f)$ é um campo de vetores apenas \mathcal{C}^0 , em que as soluções encontram-se nas curvas de níveis de f . Como visto no Exemplo 1.4, um campo de vetores \mathcal{F} em \mathbb{R}^2 define uma folheação planar se \mathcal{F} não possui singularidades. Sempre que o Jacobiano de X for diferente de zero, $\mathcal{F}(f)$ e $\mathcal{F}(g)$ induzirão folheações planares chamadas folheações Hamiltonianas, cujas folhas são órbitas de $\mathcal{F}(f)$ e $\mathcal{F}(g)$, respectivamente. Sabe-se, da teoria geral de folheações planares, que as folhas relevantes no estudo do retrato de fase das folheações, são as folhas inseparáveis e suas acumulações, se tais acumulações existirem.

Teorema 1.3 (Suavização de folheações, [19]) Se \mathcal{F} é uma \mathcal{C}^0 -folheação do plano \mathbb{R}^2 , então \mathcal{F} é topologicamente conjugada a uma \mathcal{C}^∞ -folheação \mathcal{F}' do disco unitário $D^2 \subset \mathbb{R}^2$.

Este teorema nos permite utilizar, em folheações contínuas do plano, resultados estabelecidos para folheações de classe \mathcal{C}^k , $k \geq 1$, como por exemplo, o seguinte lema demonstrado por Camacho e Lins Neto na pág. 69 de [9]:

Lema 1.1 (Lema de trivialização global) *Seja \mathcal{F} uma folheação de classe \mathcal{C}^r com $r \geq 1$, e codimensão n de uma variedade M de dimensão m e D^n o disco unitário em \mathbb{R}^n . Seja $\gamma : I \longrightarrow M$, onde $I = [a, b]$, um caminho contínuo e injetivo cuja imagem está contida numa folha F de \mathcal{F} . Existe uma vizinhança $V \supset \gamma(I)$ e um difeomorfismo de classe \mathcal{C}^r ,*

$$h : D^{m-n} \times D^n \longrightarrow V,$$

que leva as folhas em $D^{m-n} \times D^n$ induzidas pela projeção na segunda coordenada $\pi_2 : D^{m-n} \times D^n \longrightarrow D^n$ nas folhas de \mathcal{F} restritas à V .

Note que, dado um caminho $\gamma : I \longrightarrow M$ cuja imagem está contida numa folha da folheação \mathcal{F} , pelo lema acima é possível construir uma “vizinhança tubular longa” V de $\gamma(I)$, constituída por folhas de \mathcal{F} restritas a V .

CAPÍTULO 2

FOLHEAÇÕES E INJETIVIDADE GLOBAL

Neste capítulo faremos um estudo sobre a relação que folheações têm com injetividade. Mais precisamente, dado um difeomorfismo local $X = (f, g) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, serão estabelecidos os fenômenos que surgem nas folheações induzidas pelas funções coordenadas de X , quando X não é injetiva.

Como já mencionado, dada uma aplicação diferenciável $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, denotaremos por $\text{Spec}(X)$ o conjunto de todos os autovalores (complexos) da derivada $DX(p)$, quando p varia em todo domínio de X .

A sequência dos resultados a seguir mostrará que, dado uma aplicação $X = (f, g) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ diferenciável, tal que para todo $p \in \mathbb{R}^2$, $DX(p)$ é não singular, as folheações $\mathcal{F}(f)$ e $\mathcal{F}(g)$, induzidas pelas componentes de X são transversais. Note que a condição de $DX(p)$ ser não singular, para todo $p \in \mathbb{R}^2$, equivale, pelo Teorema da função inversa a X ser difeomorfismo local, o que ainda é equivalente a $0 \notin \text{Spec}(X)$.

Para isso, faremos uso do Teorema de Černavskii [6, 5], que é de certa forma uma versão do Teorema da Função Inversa para aplicações diferenciáveis não necessariamente de classe \mathcal{C}^1 .

Teorema 2.1 (Černavskii) *Seja U um aberto de \mathbb{R}^2 e $X = (f, g) : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável, tal que para todo $p \in U$, $DX(p)$ é não singular. Então, para todo*

$p \in U$, existem uma vizinhança $V = V(p)$ e $\varepsilon = \varepsilon(p) > 0$ tais que,

$$X|_V : V \longrightarrow (f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon) \times (g(p) - \varepsilon, g(p) + \varepsilon),$$

é um homeomorfismo.

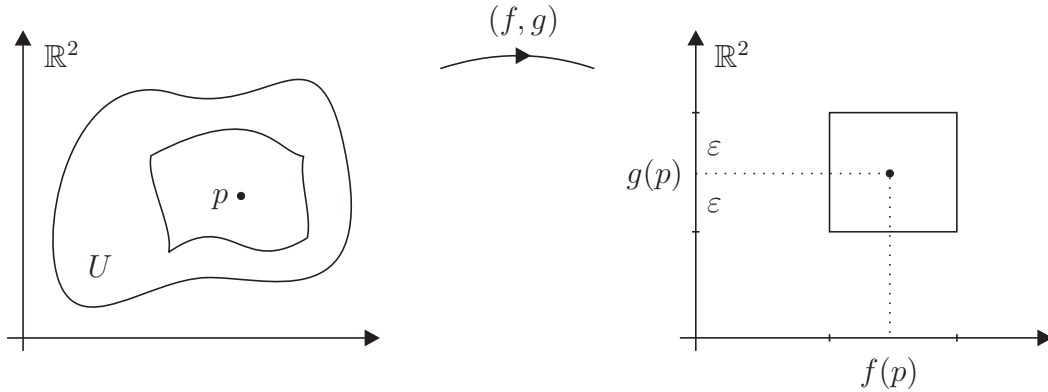


Figura 2.1: Restrição homeomorfa de Černavskii.

Definição 2.1 Sejam $a > 0$ e $\sigma, \gamma : [-a, a) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ curvas injetiva, de classe \mathcal{C}^0 , tais que $\sigma(0) = \gamma(0) = (0, 0)$. Diz-se que γ é *transversal* a σ em $\sigma(0) = \gamma(0)$ se existem $\varepsilon > 0$, vizinhanças V e U de $(0, 0)$ em \mathbb{R}^2 e um homeomorfismo $H : V \longrightarrow U$, tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ com $|t| < \varepsilon$, tem-se,

$$H \circ \sigma(t) = (t, 0) \text{ e } H \circ \gamma(t) = (t, t).$$

Definição 2.2 Sejam $a > 0$ e $\sigma, \gamma : [-a, a) \longrightarrow \mathbb{R}^2$ curvas injetivas de classe \mathcal{C}^0 , tais que $\sigma(0) = \gamma(0) = (0, 0)$. Diz-se que γ é *tangente* a σ em $\sigma(0) = \gamma(0)$ se existem $\varepsilon > 0$, vizinhanças V e U de $(0, 0)$ em \mathbb{R}^2 e um homeomorfismo $H : V \longrightarrow U$, tal que para todo $t \in \mathbb{R}$ com $|t| < \varepsilon$, tem-se,

$$H \circ \sigma(t) = (t, 0) \text{ e } H \circ \gamma(t) = (t, \Phi(t)),$$

onde $\Phi(t) \geq 0$ e $\Phi(0) = 0$. Além disso, se for possível tomar $\Phi(t) = |t|$, diz-se que a tangência é *genérica*.



Figura 2.2: Curvas tangente e transversal.

Como consequência do Teorema 2.1 obtemos:

Corolário 2.1 Seja $X = (f, g) : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável, tal que $U \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto simplesmente conexo e $0 \notin \text{Spec}(X)$. Então as folhas, que são as componentes conexas de $f^{-1}(c)$, constituem uma folheação de classe \mathcal{C}^0 , $\mathcal{F}(f)$, sobre U , tal que se L é uma folha de $\mathcal{F}(f)$, então $g|_L$ é estritamente monótona. Em particular, $\mathcal{F}(f)$ e $\mathcal{F}(g)$ são transversais.

Dem. Tem-se do Teorema 2.1 que para cada ponto $p \in U$, existem vizinhanças U_p e V_p de p e $X(p)$, respectivamente, tais que, $X|_{U_p} : U_p \longrightarrow V_p$ é um homeomorfismo. Assim o conjunto,

$$\{(U_p, X|_{U_p}) : p \in U\},$$

forma um atlas de U .

Tem-se também, que a cada duas cartas trivializadoras, $(U_p, X|_{U_p})$ e $(U_q, X|_{U_q})$, com $U_p \cap U_q \neq \emptyset$, a mudança de coordenada,

$$X|_{U_p} \circ X^{-1}|_{V_q}(x, y) = (x, y), \quad \forall (x, y) \in V_p \cap V_q,$$

é a identidade, portanto, um difeomorfismo com a forma $(h_1(x), h_2(y))$, onde h_1 e h_2 são difeomorfismos.

Assim, $X|_{U_p} \circ X^{-1}|_{V_q}(x, y)$ preserva os níveis de f e de g . Portanto, os níveis de f compõem folhas de uma folheação, $\mathcal{F}(f)$ de U , assim como os níveis de g compõem folhas de uma folheação $\mathcal{F}(g)$. Como esta construção é válida para todo $p \in U$, as folheações não possuem singularidades. Embora este atlas não seja maximal, pela Observação 1.6 item 3, isto não compromete a construção da folheação.

Deve-se mostrar que $g|_L$, com L uma folha de $\mathcal{F}(f)$, é estritamente monótona. Suponha que existam $p_1, p_2 \in L$, com $p_1 \neq p_2$, tais que $g(p_1) = g(p_2) = z$. Com isso, $g|_{[p_1, p_2]}$ possui

um valor de máximo ou mínimo em (p_1, p_2) de L . Sem perda de generalidade, suponha que este ponto seja um ponto de máximo, $p \in (p_1, p_2)$, tal que $g(p) = m$, com isso o Teorema 2.1 falha em p . De fato, dada qualquer vizinhança U_p de p , não existe $\varepsilon > 0$, tal que

$$X|_{U_p} : U_p \longrightarrow (f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon) \times (g(p) - \varepsilon, g(p) + \varepsilon),$$

seja um homeomorfismo, pois a restrição não seria injetiva uma vez que $f|_L$ é constante.

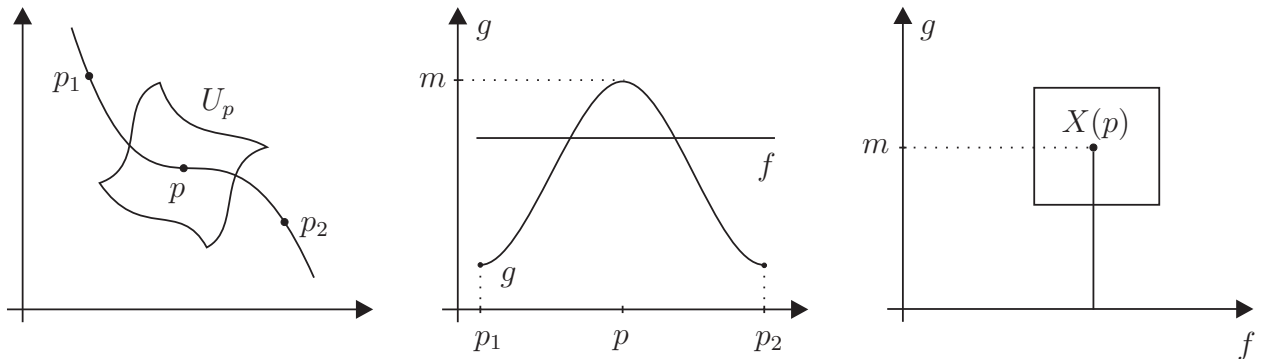


Figura 2.3: X não é homeomorfismo em qualquer vizinhança de p .

Resta-se provar que as folheações $\mathcal{F}(f)$ e $\mathcal{F}(g)$ são transversais.

Suponha que em um dado ponto $q \in U$ existam folhas $L_1 \in \mathcal{F}(f)$ e $L_2 \in \mathcal{F}(g)$ se tangenciando no ponto q . Como L_1 está contida em um nível de f e L_2 está contida em um nível da g , e tais funções são diferenciáveis, conclui-se que o vetor ∇f é paralelo ao vetor ∇g no ponto q . Com isso,

$$\det(DX(q)) = \det \begin{pmatrix} \nabla f(q) \\ \nabla g(q) \end{pmatrix} = 0.$$

Absurdo, logo as folheações $\mathcal{F}(f)$ e $\mathcal{F}(g)$ são transversais. ■

A seguir apresentaremos uma importante consequência do resultado anterior:

Corolário 2.2 *Seja $X = (f, g) : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um difeomorfismo local de classe \mathcal{C}^1 , onde $U \subset \mathbb{R}^2$ é um aberto simplesmente conexo. Suponha que existam dois pontos $p, q \in \mathbb{R}^2$ com $p \neq q$, tais que $X(p) = X(q) = (c, d)$. Então p e q pertencem à diferentes componentes conexas de ambas $f^{-1}(c)$ e $g^{-1}(d)$.*

Dem. Suponha, por absurdo, que p e q pertencem à mesma componente conexa L de $f^{-1}(c)$ (o caso de g^{-1} é análogo). Então, como $g|_L$ é estritamente monótona, não devemos ter $g(p) = g(q) = d$. ■

2.1 Meia componente de Reeb e injetividade global

Nesta seção introduziremos a definição de meia componente de Reeb assim como a relação entre este conceito e a não injetividade de um difeomorfismo local $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Tal relação e conceito encontram-se em [14].

A fim de introduzir o conceito de meia componente de Reeb, considere a aplicação $h_0 : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $h_0(x, y) = xy$ e o conjunto,

$$B = \{(x, y) \in [0, 2] \times [0, 2]; 0 < x + y \leq 2\}.$$

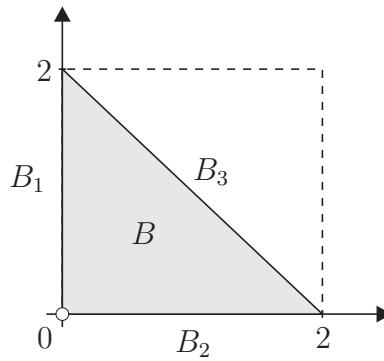


Figura 2.4: Conjunto B .

Definição 2.3 Considere $X = (f, g) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável, tal que $0 \notin \text{Spec}(X)$. Dado $h \in \{f, g\}$, diz-se que $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ é uma *meia componente de Reeb*, ou simplesmente uma *mcR*, de $\mathcal{F}(h)$ se existe um homeomorfismo $H : B \longrightarrow \mathcal{A}$ entre $\mathcal{F}(h)|_{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{F}(h_0)|_B$ e ainda que,

1. O segmento B_3 é levado por H em uma seção transversal à folheação $\mathcal{F}(h)$ no complemento de $H(1,1)$. Tal seção é chamada de *face compacta* de \mathcal{A} ;
2. Os segmentos B_1 e B_2 são levados em meias trajetórias de $\mathcal{F}(h)$, chamadas de *faces não compactas* de \mathcal{A} .

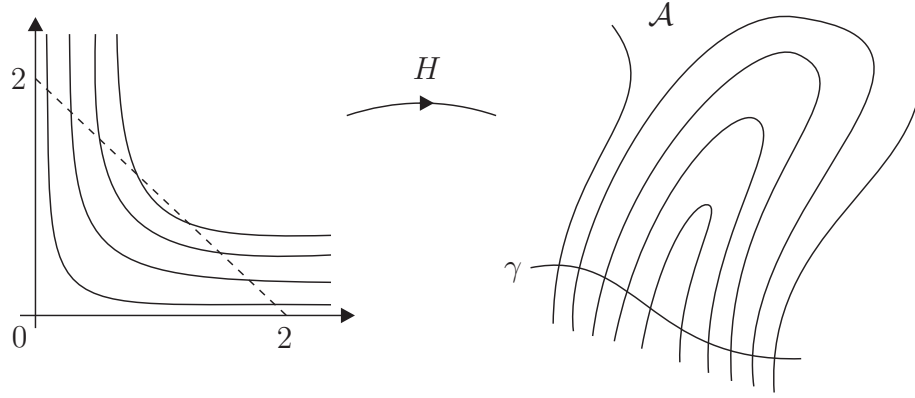
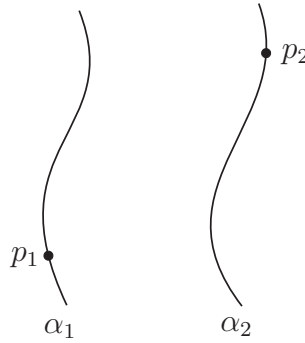


Figura 2.5: Meia componente de Reeb.

Proposição 2.1 *Seja $X = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável tal que $0 \notin \text{Spec}(X)$. Se X não é injetiva, então tanto $\mathcal{F}(f)$ quanto $\mathcal{F}(g)$ possuem meias componentes de Reeb.*

Dem. Suponha, por absurdo, que $\mathcal{F}(f)$ não tenha *mcR* e que X não seja injetiva. Sem perda de generalidade, suponha que existam pontos distintos $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$ tais que $X(p_1) = X(p_2) = 0$. Seja α_i , para $i \in \{1, 2\}$, a folha de $\mathcal{F}(f)$ passando por p_i . Pelo Corolário 2.2, α_1 e α_2 são folhas distintas do mesmo nível.

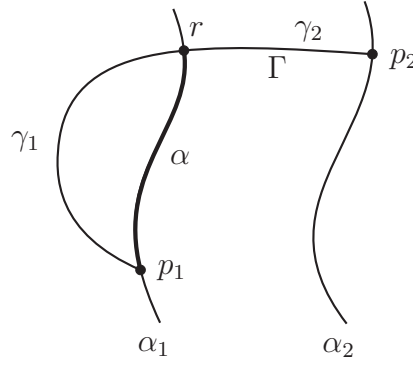
Figura 2.6: Folhas α_1 e α_2 de $\mathcal{F}(f)$.

Seja $\Omega(p_1, p_2)$ o conjunto dos arcos compactos de \mathbb{R}^2 cujos pontos extremos são p_1 e p_2 e que sejam transversais a $\mathcal{F}(f)$ em $\{p_1, p_2\}$.

Seja $\Gamma \in \Omega(p_1, p_2)$ um elemento que minimiza o número de tangências com $\mathcal{F}(f)$.

Afirmção 2.1 $\alpha_i \cap \Gamma = \{p_i\}$, com $i \in \{1, 2\}$.

Se fosse suposto, por contradição, que $\alpha_1 \cap \Gamma$ contém $\{p_1\}$ propriamente, seria possível encontrar $r \in \Gamma \setminus \{p_1, p_2\}$ e um subintervalo fechado α de α_1 , com extremos p_1 e r tal que $\alpha \cap \Gamma = \{p_1, r\}$. Pode-se assumir que Γ é transversal à α em r .

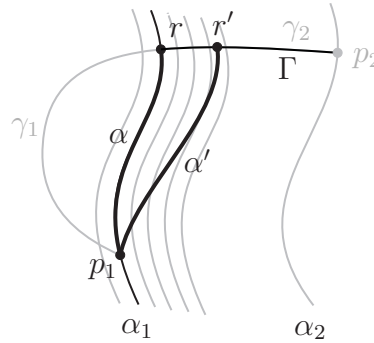
Figura 2.7: Curva Γ intersectando α_1 .

Seja γ_1 a componente conexa de $\Gamma \setminus \{r\}$ que contém p_1 e γ_2 a componente conexa de $\Gamma \setminus \{r\}$ que contém p_2 . Assim, $\alpha \cup \gamma_2$ é um arco conectando p_1 e p_2 . Note ainda que γ_1 tem algum ponto de tangência com $\mathcal{F}(f)$. Basta observar que, como γ_1 é transversal à α_1 em $\{p_1\}$, existe algum ponto r_0 de γ_1 onde $f(r_0)$ é diferente de $f(p_1) = f(r)$. Suponha que $f(r_0) > f(r)$ (o caso contrário seria análogo). Sendo assim, $f|_{\gamma_1 \cup \{r\}}$ teria um ponto de máximo no interior de γ_1 . Neste ponto, γ_1 seria tangente à $\mathcal{F}(f)$.

Vamos iniciar outra afirmação para concluir a demonstração da Afirmação 2.1.

Afirmação 2.2 É possível obter de $\alpha \cup \gamma_2$ um novo arco, de forma que tal arco possua menos tangências com $\mathcal{F}(f)$ do que Γ e este arco pertence a $\Omega(p_1, p_2)$.

Para isto, tome uma vizinhança tubular longa V de α , a qual existe pelo Lema 1.1 (veja figura 2.8). Agora, note que dado um ponto $r' \in \gamma_2 \cap V$, é possível tomar um caminho α' ligando p_1 a r' transversal a \mathcal{F} . Assim, a curva composta por α' unida com a porção $[r', p_2]$ de γ_2 , consiste num novo arco, obtido de $\alpha \cup \gamma_2$, que possui menos tangências com $\mathcal{F}(f)$ de que Γ .

Figura 2.8: Obtenção de um arco sem tangências com $\mathcal{F}(f)$.

A Afirmação 2.2 contradiz a definição de Γ , o que prova a Afirmação 2.1 quando $i = 1$. Para $i = 2$ o argumento é o mesmo.

Como $f(p_1) = f(p_2) = 0$, $\mathcal{F}(f)$ é tangente à Γ em algum ponto $q \notin \{p_1, p_2\}$. Usando o fato de que Γ minimiza o número de tangências com $\mathcal{F}(f)$, pode-se considerar que todas estas tangências sejam genéricas.

De fato, se Γ possui alguma tangência não-genérica e minimiza o número de tangências com $\mathcal{F}(f)$, como na Figura 2.9, pode-se deformar Γ de maneira a se obter uma outra curva $\tilde{\Gamma}$ que também minimiza o número de tangências com $\mathcal{F}(f)$, mas que possua todas as tangências genéricas.

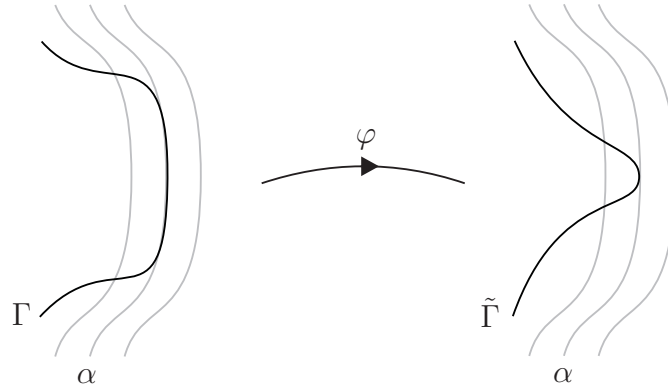


Figura 2.9: Transformação de tangência não-genérica em genérica.

Analisando as trajetórias de $\mathcal{F}(f)$ em torno de q , é possível ver que existem subintervalos fechados $[p, q]$, $[q, T(p)]$ de Γ , com $[p, q] \cap [q, T(p)] = \{q\}$ e um homeomorfismo $T : [p, q] \rightarrow [q, T(p)]$ tal que,

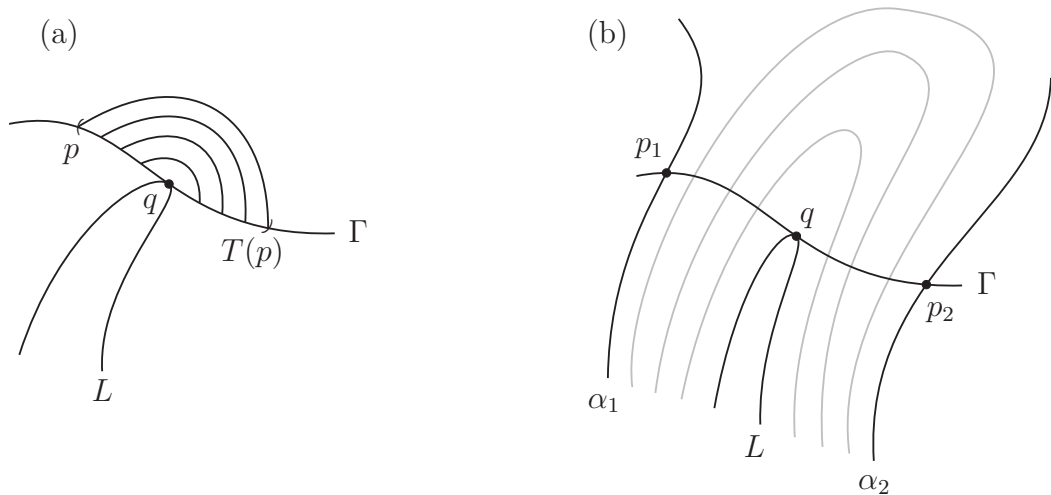


Figura 2.10: Trajetórias em uma vizinhança de q .

(a₁) $T(q) = q$ e para todo $x \in (p, q)$, existem arcos de trajetórias $[x, T(x)]_f$ de $\mathcal{F}(f)$ começando em x , terminando em $T(x)$ e intersectando transversalmente Γ exatamente em $\{x, T(x)\}$ (veja Figura 2.10 (a));

(a₂) A família $\{[x, T(x)]_f; x \in (p, q)\}$ depende continuamente de x e tende à $\{q\}$ quando $x \rightarrow q$.

De agora em diante, suponha que $[p, q]$ seja maximal com respeito à (a₁) e (a₂).

Afirmção 2.3 $\{p, T(p)\} \cap \{p_1, p_2\} = \emptyset$.

É claro que se $\{p, T(p)\} \cap \{p_1, p_2\} = \{p, T(p)\}$ então α_1 e α_2 seriam faces não compactas de uma meia componente de Reeb da qual Γ seria a face compacta (veja Figura 2.10 (b)). Assim, basta mostrar que não podemos ter $\{p, T(p)\} \cap \{p_1, p_2\} = \{p\}$, ou ainda, sem perda de generalidade, mostrar que não se pode ter $p = p_1$.

Suponha, por absurdo, que $p = p_1$. Considere a folha $\alpha_3 \subset \mathcal{F}(f)$ que contém o ponto $T(p)$. Como $f(p_1) = f(p) = f(T(p))$, tem-se da Afirmção 2.1 que, $\alpha_3 \cap \alpha_2 = \emptyset$ e $\alpha_3 \cap \alpha_1 = \emptyset$.

Vejamos agora que α_3 , α_1 e uma porção adequada de Γ , compõem faces de uma meia componente de Reeb. É claro que $\alpha_3 \cap (p, q) = \emptyset$. Também, se $\alpha_3 \cap [q, T(p)) \neq \emptyset$, então existiria alguma folha de $\mathcal{F}(f)$ tangente à Γ em $(q, T(p))$ o que violaria a definição do intervalo $[p, q]$.

Logo, tem-se que α_3 e α_1 são as faces não compactas de uma meia componente de Reeb cuja face compacta é a porção da curva Γ compreendida entre as mesmas. Absurdo.

Afirmção 2.4 Não existe arco de trajetória $[p, T(p)]_f$ de $\mathcal{F}(f)$ conectando p e $T(p)$ tal que a família $\{[x, T(x)]_f; x \in (p, q)\}$ se aproxima continuamente de $[p, T(p)]_f$ quando $x \rightarrow p$.

Suponha que a Afirmção seja falsa. Então, usando o fato de $[p, q]$ ser maximal, conclui-se que $[p, T(p)]_f$ é tangente à Γ pelo menos em p ou $T(p)$. Pois, caso o arco $[p, T(p)]_f$ fosse transversal à Γ nos dois extremos existiriam vizinhanças destes pontos tais que o domínio e o contra domínio de T pudessem ser estendidos, violando assim a maximalidade do intervalo $[p, q]$.

Neste ponto é possível aproximar a curva que é união de $[p, T(p)]_f$ com $\Gamma \setminus \{(p, q] \cup [q, T(p))\}$ por uma curva $\Gamma_1 \in \Omega(p_1, p_2)$ que tem menos tangências com $\mathcal{F}(f)$ que Γ . Para isso, observe na Figura 2.11, que a tangência em q é eliminada substituindo o trecho de Γ entre p e $T(p)$ pela curva em destaque que não possui tangências com $\mathcal{F}(f)$. Com isso, podemos tomar Γ_1 como a união da curva em destaque com $\Gamma \setminus [\tilde{p}, \tilde{q}]$.

Portanto o subintervalo $[p, q] \cup [q, T(p)]$ é a face compacta de uma meia componente de Reeb de $\mathcal{F}(f)$ constituída de duas trajetórias de $\mathcal{F}(f)$ começando em p e $T(p)$, respectivamente, juntamente com a união dos arcos $[x, T(x)]_f$ com $x \in (p, q]$. Este absurdo completa a demonstração. ■

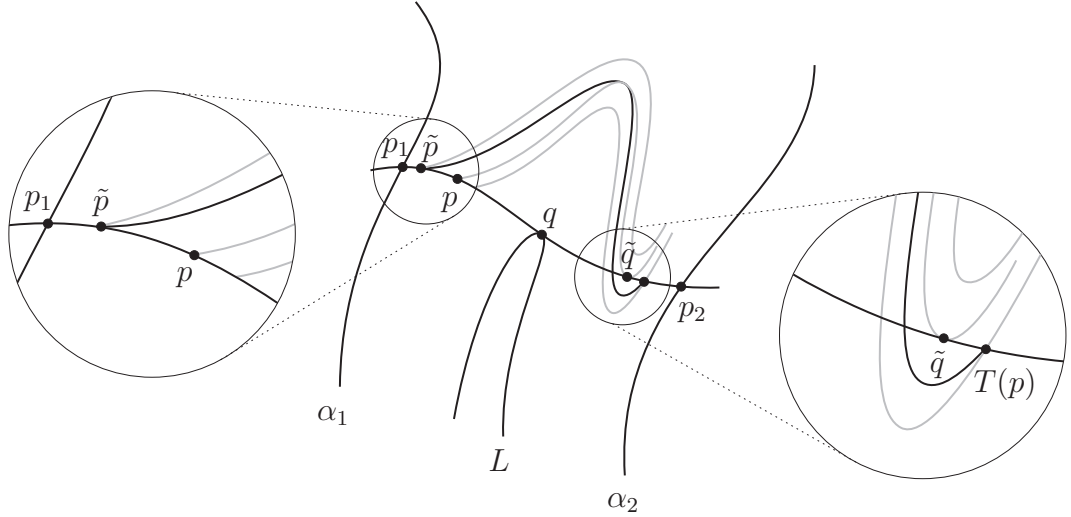


Figura 2.11: Um arco próximo à $[p, T(p)]_f$ que não possui tangências com $\mathcal{F}(f)$.

O seguinte resultado será necessário para demonstrar o resultado de injetividade via condição espectral no Capítulo 3. No que segue, para cada $\theta \in \mathbb{R}$, considere a seguinte rotação linear,

$$\mathcal{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Proposição 2.2 *Seja $X = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável não injetiva tal que $0 \notin \text{Spec}(X)$. Seja \mathcal{A} uma mcR de $\mathcal{F}(f)$ e considere a aplicação,*

$$(f_\theta, g_\theta) = \mathcal{R}_\theta \circ X \circ \mathcal{R}_{-\theta}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Se $\pi_1(\mathcal{A})$ é limitada, onde $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é a projeção na primeira coordenada, então existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\theta \in (-\varepsilon, \varepsilon) \setminus \{0\}$, $\mathcal{F}(f_\theta)$ tem uma mcR, denotada por \mathcal{A}_θ , tal que $\pi_1(\mathcal{A}_\theta)$ é um intervalo de comprimento infinito.

Dem. Inicialmente vamos mostrar que:

Afirmção 2.5 Dado $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\theta \neq \frac{m\pi}{2}$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. A folheação $\mathcal{F}(f_\theta)$ é transversal a $\mathcal{R}_\theta(\mathcal{F}(f))$.

Se $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma curva injetiva contida numa folha de $\mathcal{F}(f)$, então,

$$f_\theta(\mathcal{R}_\theta \circ \alpha(t)) = \cos(\theta)f(\alpha(t)) - \sin(\theta)g(\alpha(t)),$$

que é estritamente monótona pois, $f(\alpha(t))$ é uma função constante, $g(\alpha(t))$ é estritamente monótona e $\sin(\theta) \neq 0$. Isto é, $\mathcal{R}_\theta(\alpha(t))$ é transversal aos níveis de f_θ .

Um procedimento análogo nos permite concluir que $\mathcal{F}(g_\theta)$ é transversal à $\mathcal{R}_\theta(\mathcal{F}(g))$.

Sem perda de generalidade, pode-se assumir que, próximo à seus pontos extremos, a face compacta de \mathcal{A} é composta de arcos de $\mathcal{F}(g)$. Assim, existe $a > 0$ e uma curva contínua e injetiva $\gamma : (-a, 1 + a) \rightarrow \mathcal{A}$, tal que

(b₁) $\gamma[0, 1]$ é a face compacta de \mathcal{A} ;

(b₂) $\gamma|_{(-a, 0)}$ e $\gamma|_{(1, 1+a)}$ estão contidas em folhas de $\mathcal{F}(g)$;

(b₃) Para algum $a \in \mathbb{R}$ e algum $\delta \in (0, a)$, existe uma função injetiva que reverte orientação,

$$\varphi_0 : [-\delta, \delta] \rightarrow (1 - a, 1 + a),$$

com $\varphi_0(0) = 1$, tal que $f(\gamma(s)) = f(\gamma(\varphi_0(s)))$. Portanto, se $s \in [0, \delta]$ então, $\varphi_0(s) \in (1 - a, 1]$ e existe um arco de trajetória $T_0(s) \subset \mathcal{A}$ de $\mathcal{F}(f)$ conectando $\gamma(s)$ com $\gamma(\varphi_0(s))$.

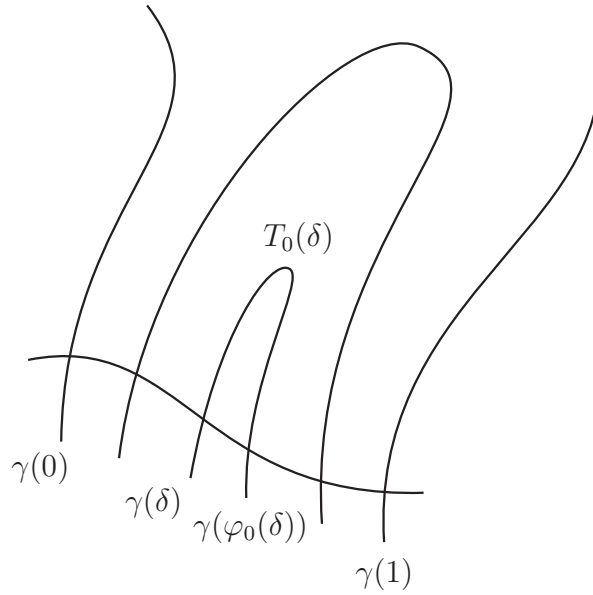


Figura 2.12: Função φ preservando os níveis de f .

Pode-se construir, de maneira análoga a (b₁), (b₂) e (b₃), uma família de arcos de trajetória com trajetórias de $\mathcal{F}(f_\theta)$ intersectando $\mathcal{R}_\theta(\mathcal{A})$, começando e terminando nos pontos de $\mathcal{R}_\theta \circ \gamma((-a, 1 + a))$.

Se ε é suficientemente pequeno, então para cada $\theta \in \mathbb{R}$, com $|\theta| < \varepsilon$, existe uma função contínua, injetiva e que reverte orientação,

$$\varphi_\theta : [-\delta, \delta] \rightarrow (1 - a, 1 + a),$$

e o número real $\sigma_\theta \in [-\delta, \delta/2]$ tais que,

(c₁) $f_\theta(\mathcal{R}_\theta(\gamma(s))) = f_\theta(\mathcal{R}_\theta(\gamma(\varphi_\theta(s))))$, para todo $s \in [-\delta, \delta]$. Em outras palavras, a aplicação φ_θ leva pontos de $\mathcal{R}_\theta(\gamma([-\delta, \delta]))$ em pontos de $\mathcal{R}_\theta(\gamma([1-a, 1+a]))$ preservando os níveis de f_θ ;

(c₂) Para todo $s \in (\sigma_\theta, \delta/2]$, existe um arco de trajetória $T_\theta(s)$ de $\mathcal{F}(f_\theta)$ o qual toca $\mathcal{R}_\theta(\gamma([-\delta, 1+a]))$ exatamente nos seus pontos extremos, que são $\mathcal{R}_\theta(\gamma(s))$ e $\mathcal{R}_\theta(\gamma(\varphi_\theta(s)))$.

Após a perturbação pela rotação, nota-se que alguns arcos de trajetórias podem não estar bem definidos para s próximo de zero, por isso é introduzido o número real σ_θ para restringir o domínio da aplicação φ_θ ;

(c₃) $T_\theta(\delta/2) \subset \mathcal{R}(\mathcal{A})$ e σ_θ é ínfimo do conjunto dos $\sigma \in [-\delta, \delta/2]$ para os quais os arcos da família $\{T_\theta(s); \sigma < s \leq \delta/2\}$ estejam bem definidos dependendo continuamente de s .

Se θ é suficientemente pequeno, nota-se que o arco $T_\theta(\delta/2)$ ainda permanece no interior da região delimitada por $T(\xi)$, $T(\delta)$ e $\mathcal{R}_\theta \circ \gamma$, onde $\xi > 0$ é tomado menor que $\delta/2$.

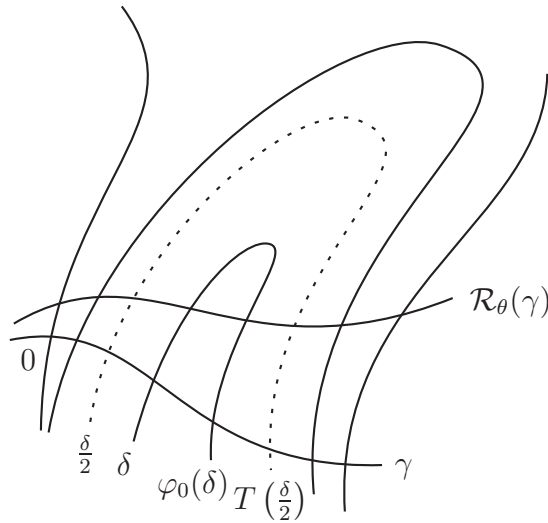


Figura 2.13: O arco (tracejado) passando por $T(\delta/2)$.

Assim, o conjunto dos arcos da família $\{T_\theta(s); \sigma < s \leq \delta/2\}$ é não vazio e o ínfimo σ_θ fica bem definido;

(c₄) $\varphi_\theta(-\delta) > 1$.

A família $\{T_\theta(s)\}$ não pode ser estendida continuamente a $s = -\delta$, pois $\varphi_\theta(-\delta) > 1$ e como pode-se observar, se tal arco existisse, ele deveria possuir uma tangência com $\mathcal{R}_\theta(\mathcal{F}(f))$ num ponto de $\mathcal{R}_\theta(\mathcal{A})$, violando a Afirmação 2.5.

Assim, o conjunto,

$$\overline{\bigcup_{\sigma_\theta < s \leq \delta/2} T_\theta(s)},$$

contém uma mcR , \mathcal{A}_θ , de $\mathcal{F}(f_\theta)$.

Nota-se portanto, que uma das faces não compactas de \mathcal{A}_θ deve estar contida em $\mathcal{R}_\theta(\mathcal{A})$, o que implica que $\pi_1(\mathcal{A}_\theta)$ é um intervalo de comprimento infinito.

De fato, se nenhuma das faces não compactas de \mathcal{A}_θ estivessem contidas em $\mathcal{R}_\theta(\mathcal{A})$, alguma folha de $\mathcal{F}(f_\theta)$ teria uma tangência com alguma folha de $\mathcal{R}_\theta(\mathcal{A})$, o que violaria a Afirmação 2.5. ■

2.2 Folhas inseparáveis e injetividade global

Nesta seção, apresentamos o conceito de folhas inseparáveis e sua relação com injetividade. Tal relação e conceito encontram-se em [18].

Definição 2.4 Duas folhas distintas, L_1 e L_2 , de uma folheação \mathcal{F} são *inseparáveis* se, para quaisquer arcos T_1 e T_2 para os quais \mathcal{F} não é tangente em qualquer parte e tais que L_i tem interseção não vazia com T_i , para $i \in \{1, 2\}$, existe uma terceira folha L , distinta de L_1 e L_2 , que intersecta ambos os arcos T_1 e T_2 .

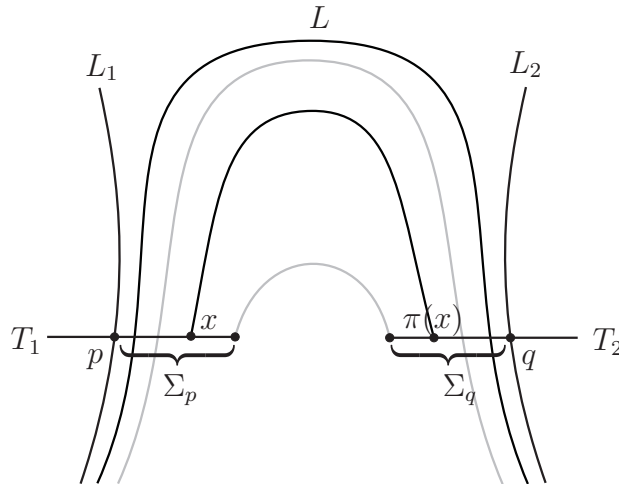


Figura 2.14: Folhas inseparáveis.

Em outras palavras, as órbitas distintas através dos pontos p e q de \mathbb{R}^2 , são ditas *inseparáveis* se existem seções compactas unilaterais Σ_p de p e Σ_q de q tais que, a aplicação de Poincaré $\pi : \Sigma_p \setminus \{p\} \longrightarrow \Sigma_q \setminus \{q\}$ possa ser bem definida e satisfazendo $\lim_{x \rightarrow p} \pi(x) = q$, com $x \in \Sigma_p$.

Proposição 2.3 *Seja $X = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ diferenciável com $0 \notin \text{Spec}(X)$ e considere $h \in \{f, g\}$. A folheação $\mathcal{F}(h)$ possui mcR se, e somente se, possui folhas inseparáveis.*

Dem. Supondo que $\mathcal{F}(f)$ possui uma mcR \mathcal{A} , usando devidamente o Lema 1.1 pode-se concluir que as faces não compactas de \mathcal{A} estão contidas em folhas inseparáveis de $\mathcal{F}(f)$.

Reciprocamente, dadas folhas inseparáveis L_1 e L_2 de $\mathcal{F}(f)$, seguindo o raciocínio da Proposição 2.1 é possível construir uma mcR , tal que as suas faces não compactas estão contidas em L_1 e L_2 . ■

Como a Proposição 2.3 mostra que mcR é equivalente à existência de folhas inseparáveis, temos a seguinte consequência da Proposição 2.1.

Corolário 2.3 *Seja $X = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável tal que $0 \notin \text{Spec}(X)$. Se X não é injetiva, então tanto $\mathcal{F}(f)$ quanto $\mathcal{F}(g)$ possuem folhas inseparáveis.*

Em seguida, transcrevemos o resultado apresentado em [18] que relaciona a injetividade global de X com a existência de folhas inseparáveis nas folheações induzidas por f e g .

Teorema 2.2 *Seja $X = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação de classe \mathcal{C}^1 tal que $0 \notin \text{Spec}(X)$.*

- (i) *Se $\mathcal{F}(f)$ ou $\mathcal{F}(g)$ não possuem folhas inseparáveis, então X é globalmente injetiva;*
- (ii) *Existem aplicações X globalmente injetivas tais que, tanto $\mathcal{F}(f)$ quanto $\mathcal{F}(g)$ não possuem folhas inseparáveis;*
- (iii) *Existem aplicações X globalmente injetivas tais que, uma e somente uma das folheações $\mathcal{F}(f)$ e $\mathcal{F}(g)$ possuem folhas inseparáveis;*
- (iv) *A recíproca do item (i) não é verdadeira, ou seja, existem aplicações X globalmente injetivas tais que, tanto $\mathcal{F}(f)$ quanto $\mathcal{F}(g)$ possuem folhas inseparáveis.*

Observação 2.1 Em [18], observa-se que o item (i) do Teorema 2.2 foi provado por Cobo, Llibre e Gutierrez em [8]. Aqui observamos também que tal item é consequência do Corolário 2.3. O item (ii) é trivial, basta considerar a aplicação identidade de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 . Os itens (iii) e (iv) serão provados nos Exemplos 4.2 e 4.4 do Capítulo 4.

CAPÍTULO 3

CONDIÇÕES ESPECTRAL E DE PALAIS-SMALE

Neste capítulo apresentaremos duas condições analíticas suficientes para a injetividade global de um difeomorfismo local $X : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, uma associada ao espectro de X e a outra associada ao gradiente de uma das componentes de X .

3.1 Injetividade global via condição espectral

Nesta seção, apresentaremos a demonstração do resultado de injetividade global via condição espectral (Teorema A) encontrada no artigo [14].

Antes de apresentar a demonstração do Teorema A, precisamos do seguinte resultado mais fraco de injetividade.

Teorema 3.1 *Seja $X = (f, g) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável. Se para algum $\varepsilon > 0$, $\text{Spec}(X) \cap (-\varepsilon, \varepsilon) = \emptyset$, então X é injetiva.*

Os seguintes resultados técnicos serão necessários.

A demonstração do lema a seguir pode ser encontrada em [1].

Lema 3.1 *Seja I um intervalo limitado de \mathbb{R} e $H : I \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável e limitada. Se A denota o conjunto dos $x \in I$ tais que,*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|H(x+h) - H(x)|}{|h|} = \infty,$$

então, A tem medida de Lebesgue nula.

A demonstração do lema a seguir pode ser encontrada em [13] pág. 154.

Lema 3.2 *Toda função não-decrescente, ϕ , num intervalo $[a, b]$ é derivável em quase todo ponto. Se ϕ' denota sua derivada, então ϕ' é mensurável,*

$$\int_a^b |\phi'(x)| dx < \infty \quad e \quad \int_a^b \phi'(x) dx \leq \phi(b) - \phi(a).$$

Prova do Teorema 3.1 Suponha por absurdo, que $X = (f, g)$ não seja injetiva. Pela Proposição 2.1, a folheação $\mathcal{F}(f)$ possui uma mcR \mathcal{A} .

Seja $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a projeção ortogonal na primeira coordenada. Pode ser assumido que $\pi_1(\mathcal{A})$ seja um intervalo ilimitado. Caso contrário, pela Proposição 2.2 podemos conjugar X com uma rotação rígida (lembrando que dessa forma as hipóteses ainda são mantidas).

Para simplificar, suponha que $[b, \infty) \subset \pi_1(\mathcal{A})$. Assim, se $a > b$ é suficientemente grande:

- (a) Para qualquer $x \geq a$, a reta vertical $\pi_1^{-1}(x)$ intersecta exatamente uma trajetória $\alpha_x \subset \mathcal{A}$ tal que $\pi_1(\alpha_x) \cap (x, \infty) = \emptyset$.

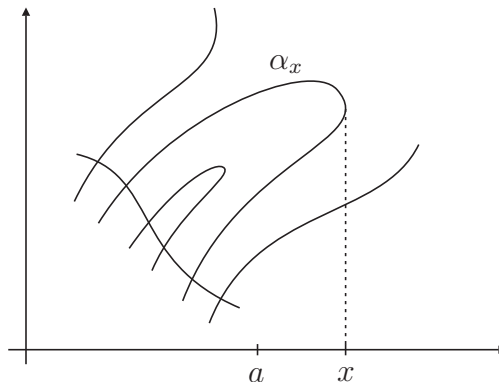


Figura 3.1: A cada $x > a$ associa-se uma folha α_x .

Em outras palavras, x é o máximo do conjunto $\pi_1(\alpha_x)$. Como α_x é uma curva contínua, segue que;

- (b) Se $x \geq a$, $\alpha_x \cap \pi_1^{-1}(x)$ é um subconjunto compacto de \mathcal{A} .

Seja $H : (a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por,

$$H(x) = \sup \{y \in \mathbb{R}; (x, y) \in \alpha_x \cap \pi_1^{-1}(x)\}.$$

Como $\mathcal{F}(f)$ é uma folheação, obtém-se que;

(c) $\varphi(x) = f(x, H(x))$ é uma função contínua estritamente monótona e limitada.

Para se convencer de que φ é monótona, observe que caso contrário, deveriam existir folhas distintas dentro de \mathcal{A} pertencentes ao mesmo nível de f . Com isso, decorreria a existência de uma folha composta por mínimos ou máximos locais, sob a qual $\nabla f(x, y) = 0$ tornando $\det JF(x, y) = 0$ em todo (x, y) nesta folha. Do item (c) e do Lema 3.2, podemos concluir que φ é diferenciável em quase todo ponto de $(a, d]$.

Para ver que φ é uma função contínua num ponto x_0 , tome $\varepsilon > 0$ e vejamos que existe $\delta > 0$ de forma que a imagem de $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ está contida em $(\varphi(x_0) - \varepsilon, \varphi(x_0) + \varepsilon)$.

Pela continuidade de f , existe $\xi > 0$ de tal forma que, qualquer folha cuja distância de α_{x_0} dentro da meia componente de Reeb, seja menor que ξ , pertence a um nível entre $f(\alpha_{x_0}) - \varepsilon$ e $f(\alpha_{x_0}) + \varepsilon$.

Em seguida, tome duas folhas, α_y e α_z que estejam inteiramente contidas nesta vizinhança, mas que sejam diferentes de α_{x_0} .

Agora, tomando $\delta = \min\{|x_0 - y|, |x_0 - z|\}$ tem-se que, qualquer outra folha α_ζ , com $\zeta \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ estará compreendida entre as folhas α_y e α_z e portanto, $\varphi(\zeta) = f(\zeta, H(\zeta))$ estará em $(\varphi(x_0) - \varepsilon, \varphi(x_0) + \varepsilon)$.

Afirmção 3.1 H é semicontínua superiormente. Em particular, H é uma função mensurável.

De fato, suponha por contradição que H não seja semicontínua superiormente em $x_0 > a$. Como H restrita a $(a, x_0 + 1)$ é limitada, existe $c \in \mathbb{R}$ e uma sequência $x_n \rightarrow x_0$ tal que $H(x_0) < c$ e $H(x_n) \rightarrow c$. Por (c), φ é contínua, donde,

$$f(x_0, c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, H(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = \varphi(x_0) = f(x_0, H(x_0)).$$

Mas $H(x_0) = \sup\{y; (x, y) \in \alpha_x\}$. Então $(x_0, c) \notin \alpha_x \cap \pi_1^{-1}(x)$. Sendo assim, o ponto (x_0, c) deve pertencer a outra folha β de $\mathcal{F}(f)$ tal que $f(\beta) = f(\alpha_x)$, mas isto contradiz o fato de φ ser monótona. Tal contradição prova a Afirmção 3.1.

Em seguida, será aplicado o Lema 3.1 à função H , mas deve-se observar que o intervalo (a, ∞) é uma união enumerável de intervalos limitados. Em cada um destes intervalos pode ser aplicado o Lema 3.1. Finalmente, uma vez que, união enumerável de conjuntos de medida nula ainda tem medida nula, obtém-se a mesma conclusão para H em todo seu domínio.

Pela Afirmção 3.1 e pelo Lema 3.1, se $a > 0$ é suficientemente grande, existe um subconjunto $M \subset (a, \infty)$ de forma que seu complementar tenha medida nula, tal que,

(d) Se $x \in M$, então φ é diferenciável em x e,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \inf \frac{|H(x+h) - H(x)|}{|h|} < \infty.$$

Para prosseguir, vai-se considerar o caso onde φ é estritamente crescente. Neste caso tem-se a seguinte afirmação.

Afirmção 3.2 Se $x \in M$, então $\varphi'(x) = f_x(x, H(x)) \geq \varepsilon$.

De fato, se $x \in M$, existe uma sequência $h_n \rightarrow 0$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{h_n} = \sigma \in \mathbb{R},$$

onde $k_n = H(x_0 + h_n) - H(x)$. Assim, pela estrutura das curvas de nível de $f|_{\mathcal{A}}$ e pela hipótese de que φ seja estritamente crescente,

$$f(x, H(x)) = \inf \{f(x, y); y \in \pi_1^{-1}(x) \cap \mathcal{A}\}.$$

Isso implica que, $f_y(x, H(x)) = 0$, ou seja, o gradiente de f no ponto $(x, H(x))$ é paralelo ao eixo x . Como f é diferenciável em $(x, H(x))$ segue que existem funções ε_1 e ε_2 definidas numa vizinhança de $(0, 0)$ a valores reais tais que,

$$f(x + h_n, H(x) + k_n) = f(x, H(x)) + f_x(x, H(x)) h_n + \varepsilon_1(h_n, k_n) h_n + \varepsilon_2(h_n, k_n) k_n,$$

e com,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_1(h_n, k_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_2(h_n, k_n) = 0.$$

Portanto, para n suficientemente grande,

$$\frac{\varphi(x + h_n) - \varphi(x)}{h_n} = f_x(x, H(x)) + \varepsilon_1(h_n, k_n) h_n + \varepsilon_2(h_n, k_n) \frac{k_n}{h_n},$$

o que implica que,

$$\varphi'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(x + h_n) - \varphi(x)}{h_n} = f_x(x, H(x)).$$

Note que a escolha da sequência particular k_n/h_n não é restritiva, pois φ é diferenciável em x .

Portanto, segue que,

$$DX(x, H(x)) = \begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 \\ g_x(x, H(x)) & g_y(x, H(x)) \end{pmatrix},$$

donde se conclui que $\varphi'(x)$ é autovalor de $DX(x, H(x))$.

Pelas hipóteses: $\text{Spec}(X) \cap (-\varepsilon, \varepsilon) = \emptyset$ e φ ser estritamente crescente, tem-se que $\varphi'(x) \geq \varepsilon$. Se φ fosse estritamente decrescente, teríamos $\varphi'(x) \leq -\varepsilon$.

Provando assim a Afirmação 3.2.

Como $f|_{\mathcal{A}}$ é limitada, então φ é limitada. Assim, existe uma constante $K > 0$ tal que para todo $x > a$, $\varphi(x) - \varphi(a) < K$. Tome $c > a$ de forma que $(c - a)\varepsilon > K$.

Finalmente, usando o Lema 3.2 tem-se que,

$$K > \varphi(c) - \varphi(a) \geq \int_a^c \varphi'(x) dx \geq \int_a^c \varepsilon dx = (c - a)\varepsilon > K.$$

Esta contradição prova o teorema. ■

Ainda para provar o Teorema A será necessário o seguinte resultado.

Lema 3.3 *Seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação diferenciável tal que $0 \notin \text{Spec}(X)$. Dado $t \in \mathbb{R}$, considere $X_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ a aplicação definida por, $X_t(p) = X(p) - tp$. Se existir uma sequência $\{t_m\}$ de números reais convergindo para zero tal que todas as aplicações $X_{t_m} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ sejam injetivas, então X é injetiva.*

Dem. Escolha $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^2$ tais que $X(p_1) = X(p_2) = q$. Deve-se mostrar que $p_1 = p_2$. Pelo Teorema de Černavskii, pode-se encontrar vizinhanças U_1, U_2 e V de p_1, p_2 e q , respectivamente, tais que, para $i \in \{1, 2\}$, $X|_{U_i} : U_i \rightarrow V$ seja um homeomorfismo e $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Se m é suficientemente grande, então $X_{t_m}|_{(U_1)} \cap X_{t_m}|_{(U_2)}$ conterá uma vizinhança W de q . Desse modo, para todo $\omega \in W$, $\#X_{t_m}^{-1}(\omega) \geq 2$. De acordo com as hipóteses, esta contradição prova o lema. ■

Demostração do Teorema A: Afirma-se que para todo $t \in (0, \varepsilon)$, a aplicação $X_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $X_t(x) = X(x) - tx$, é injetiva.

De fato, como $DX_t(p) = DX(p) - tI$, onde I denota a aplicação identidade em \mathbb{R}^2 , obtém-se que o polinômio característico de $DX_t(p)$ é dado por $P_t(\lambda) = \det(DX(p) - (t + \lambda)I) = P(t + \lambda)$, onde P é o polinômio característico de $DX(p)$. Assim, fazendo $0 < a < \min\{t, \varepsilon - t\}$ temos:

- Se $t + \lambda > \varepsilon$, então $\lambda > \varepsilon - t > a$;
- Se $t + \lambda < 0$, então $\lambda < -t < -a$.

Ou seja, $\text{Spec}(X_t) \cap (-a, a) = \emptyset$. Logo, o resultado segue diretamente do Lema 3.3 e do Teorema 3.1. ■

3.2 Injetividade global via condição de Palais-Smale

Nesta seção daremos a definição de condição de Palais-Smale e abordaremos sua relação com a injetividade global de difeomorfismos locais, segundo o artigo [18].

Definição 3.1 (Condição de Palais-Smale) Sejam $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação de classe \mathcal{C}^1 e $c \in \mathbb{R}$. Dizemos que f satisfaz a *condição de Palais-Smale* (ou simplesmente, satisfaz (PS)) no nível c se toda sequência $\{p_n\}$ em \mathbb{R}^2 satisfazendo,

$$(P_1) \quad f(p_n) \rightarrow c;$$

$$(P_2) \quad \|\nabla f(p_n)\| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty,$$

possui uma subsequência convergente.

Se f satisfaz (PS) para todo $c \in \mathbb{R}$, então dizemos simplesmente que f satisfaz (PS). Nota-se que quando f é uma submersão (isto é, $\nabla f \neq (0, 0)$ em todo \mathbb{R}^2), a condição de Palais-Smale pode ser definida da seguinte forma: Para toda sequência $p_n \rightarrow \infty$ em \mathbb{R}^2 satisfazendo $f(p_n) \rightarrow c$, com $c \in \mathbb{R}$, tem-se que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|\nabla f(p_n)\| > \varepsilon$ para todo n . De fato, dada uma sequência $p_n \rightarrow \infty$ em \mathbb{R}^2 tal que $f(p_n) \rightarrow c$ e $\|\nabla f(p_n)\| \rightarrow 0$, pela primeira definição, tal sequência possuiria uma subsequência $\{p_{n_k}\}$ convergente para algum ponto de $p \in \mathbb{R}^2$ donde teríamos $\nabla f(p) = (0, 0)$, que é um absurdo.

Reciprocamente, dada uma sequência $\{p_n\}$ em \mathbb{R}^2 tal que $f(p_n) \rightarrow c$, como $\|\nabla f(p_n)\| > \varepsilon$, para algum $\varepsilon > 0$, temos que (P_2) não ocorre. Logo, a condição (P_2) é satisfeita por vacuidade.

O principal resultado desta seção é o seguinte teorema.

Teorema B *Seja $X = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma aplicação de classe \mathcal{C}^1 , tal que $0 \notin \text{Spec}(X)$. Se f ou g satisfaz a condição de Palais-Smale, então X é globalmente injetiva.*

- Observação 3.1** 1. A recíproca do Teorema B não é verdadeira, ou seja, existem aplicações X globalmente injetivas tais que, nem f e nem g satisfazem (PS), como pode ser visto no Exemplo 4.5 do Capítulo 4;
2. O Teorema B, também foi provado por Silva e Teixeira em [27].

O Teorema B ficará estabelecido com o seguinte resultado aliado ao Corolário 2.3.

Teorema 3.2 *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação de classe \mathcal{C}^1 com gradiente diferente de zero em todo ponto de \mathbb{R}^2 . Se f satisfaz (PS), então $\mathcal{F}(f)$ não possui folhas inseparáveis.*

Observação 3.2 A recíproca do Teorema 3.2 não é verdadeira, como pode ser visto no Exemplo 4.4 do Capítulo 4.

Apresentaremos aqui duas demonstrações do Teorema 3.2. A primeira usa um resultado prévio de Silva e Teixeira [28] chamado de teorema da superfície de nível. E na segunda será provado diretamente que se $\mathcal{F}(f)$ possui folhas inseparáveis, então $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ não satisfaz (PS).

Definição 3.2 Dado uma aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 e $c \in \mathbb{R}$, definimos os conjuntos $S_c(f) = \{u \in \mathbb{R}^2 : f(u) = c\}$ e $K_c = \{u \in \mathbb{R}^2 : f(u) = c, \nabla f(u) = 0\}$, respectivamente. Dizemos que c é um *nível admissível* de f se, c é um valor regular de f ou cada componente de K_c é apenas um ponto e c é um valor crítico isolado de f .

Teorema 3.3 *Suponha que a aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 satisfaz (PS). Assuma que c é um nível admissível de f e que u e v são dois pontos distintos de $S_c(f)$. Então, ou u e v estão na mesma componente conexa de $S_c(f)$, ou f tem um valor crítico $d \neq c$.*

Primeira demonstração do Teorema 3.2: Sendo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação de classe \mathcal{C}^1 cujo gradiente não é nulo em todo \mathbb{R}^2 , temos que f induz uma folheação $\mathcal{F}(f)$ em \mathbb{R}^2 e que todos os níveis de f são admissíveis. Como f satisfaz (PS), pelo Teorema 3.3, todo nível de f tem uma única componente conexa, o que é incompatível com ter duas folhas (diferentes) inseparáveis, uma vez que cada uma delas é uma componente conexa distinta de um nível de f . ■

Segunda demonstração do Teorema 3.2: A partir da definição, é suficiente ver que se f tem gradiente diferente de zero em todo ponto de \mathbb{R}^2 e $\mathcal{F}(f)$ possui folhas inseparáveis,

então existe uma sequência de pontos $\{p_n\}$ tal que as condições da definição (PS) não são satisfeitas.

Assim, assumamos que $\mathcal{F}(f)$ possui folhas inseparáveis (e $\nabla f(p) \neq 0$ para todo $p \in \mathbb{R}^2$).

Denote por Ω_0 a região canônica parcialmente preenchida pelas órbitas passando pelas seções transversais unilaterais Σ_p de p e Σ_q de q , associadas às folhas inseparáveis. Denote por Ω o subconjunto de Ω_0 determinado pelos seguimentos das duas seções transversais unilaterais Σ_p de p e Σ_q de q unindo p com p_1 e q com q_1 , o seguimento de folha unindo p_1 e q_1 e as folhas inseparáveis que passam por p e q .

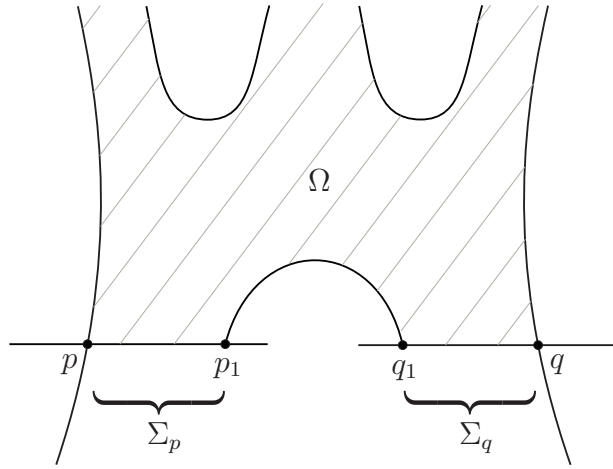


Figura 3.2: Conjunto Ω como subconjunto da região canônica associada às folhas inseparáveis passando por p e q .

Note que Ω é um conjunto ilimitado e aberto. Além disso, pode ser assumido que f toma valores estritamente menores do que c em Ω . Observe que f assume o valor c somente nas órbitas passando por p e q , ou seja, nas folhas inseparáveis, e talvez em outras componentes diferentes de Ω_0 .

Considere uma sequência crescente de raios $\{\delta_i\}$, com $\delta_i \in \mathbb{R}$, e a correspondente sequência de bolas $B_{\delta_i}(0)$ centradas na origem. É claro que pode-se escolher uma sequência de tal forma que para cada bola, pode-se escolher um ponto r_i em $\Omega \cap (B_{\delta_i}(0) \setminus B_{\delta_{i-1}}(0))$ e sendo $f(r_i)$ uma sequência estritamente crescente. É claro que $f(r_i) \rightarrow c$ quando $i \rightarrow \infty$.

Para cada ponto r_i considere a trajetória $\phi_t(r_i)$ do campo gradiente passando por r_i quando $t \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Se tal curva não estiver inteiramente contida em Ω , pode-se mudar o ponto r_i por $\phi_{-\frac{1}{4}}(r_i)$, que certamente encontra-se em Ω . Neste caso, por construção, a trajetória do campo gradiente passando por tal ponto está contida em Ω , para todo $t \in (-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Por simplicidade, denotamos tais pontos novamente por r_i .

Considere uma curva parametrizada C de classe \mathcal{C}^1 em Ω , passando através de todos os pontos r'_i s e que coincida com a curva gradiente em todos estes pontos. Consequentemente C pode ser estendido como imagem de uma função $g : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ tal que $\|g'(t)\| = 1$ (parametrizada por comprimento de arco). É claro que, C tem que cruzar todas as curvas de nível $f = \{\text{constante}\}$ em Ω . Além disso, pode-se assumir que $r_i = g(i)$, com $i \geq 0$.

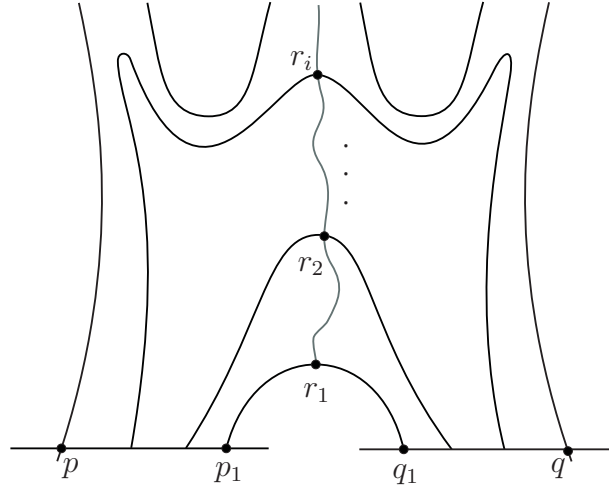


Figura 3.3: Curva C .

Agora vamos aplicar o teorema do valor médio na função $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(t) = f(g(t))$, ao redor de cada i nos intervalos $I_i = \left(i - \frac{1}{4}, i + \frac{1}{4}\right)$ para $i = 1, 2, \dots$. Consequentemente, para cada i tem-se que,

$$h\left(i + \frac{1}{4}\right) = h\left(i - \frac{1}{4}\right) + h'(c_i) \frac{1}{8} = h\left(i - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} \nabla f(g(c_i)) g'(c_i).$$

Como $h'(c_i) \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow \infty$, tem-se que $\|h'(c_i)\| \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow \infty$. Desde que,

$$\nabla f(g(c_i)) g'(c_i) = \|\nabla f(g(c_i))\| \|g'(c_i)\| \cos \theta,$$

e $\|g'(c_i)\| = 1$, temos que a sequência, $g(c_i)$, para $i > 0$ satisfaz $f(g(c_i)) \rightarrow c$ (desde que $g(c_i)$ pertence à curva ilimitada C), e $\|\nabla f(g(c_i))\| \rightarrow 0$, contradizendo o fato de f satisfazer (PS). Tal contradição prova o teorema. ■

CAPÍTULO 4

EXEMPLOS

Neste capítulo, exibimos uma coleção de exemplos relacionados aos resultados apresentados neste trabalho.

4.1 Exemplos em dimensão 2

O primeiro exemplo, dado em [14], mostra que o Teorema A não implica na Conjectura Jacobiana em \mathbb{R}^2 . Além disso, X satisfaz as condições do Teorema B, de fato, tanto f quanto g satisfazem (PS), mas não satisfaz a hipótese espectral $\text{Spec}(X) \cap [0, \varepsilon)$ (do Teorema A).

Exemplo 4.1 Seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $X(x, y) = (-y, x + y^n)$.

Note que X tem derivada,

$$DX(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & ny^{n-1} \end{pmatrix},$$

com Jacobiano constante igual a 1. Além disso, considerando $n = 2$, as funções coordenadas $f(x, y) = -y$ e $g(x, y) = x + y^2$ satisfazem (PS). De fato, $\|\nabla f(x, y)\| \equiv 1$ e $\|\nabla g(x, y)\| = 1 + 4y^2$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Vejamos que X é tal que $\text{Spec}(X) = S^1 \cup (\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Seu polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 - ny^{n-1}\lambda + 1$ de onde o produto de seus autovalores é igual a 1. No caso em que as raízes são complexas, se $\lambda_1 = a + ib$ é raiz de $p(\lambda)$

então seu conjugado $\overline{\lambda_1} = a - ib$ também é raiz. Assim, $(a + ib)(a - ib) = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$ e $|\lambda_1| = |\overline{\lambda_1}| = 1$. Conclui-se que λ_1 e $\overline{\lambda_1}$ pertencem à S^1 . Portanto, em qualquer caso, $\text{Spec}(X) \subset S^1 \cup (\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

O discriminante do polinômio característico $p(\lambda)$ é $\Delta = n^2 y^{2(n-1)} - 4$. No caso em que $\Delta \geq 0$ suas raízes são imagens das funções $\lambda_1, \lambda_2 : \mathbb{R} \setminus I \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$, em que $I = \left(-\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}\right)$, dadas por,

$$\lambda_1(y) = \frac{ny^{n-1}}{2} + \sqrt{\frac{n^2 y^{2(n-1)}}{4} - 1} \quad \text{e} \quad \lambda_2(y) = \frac{ny^{n-1}}{2} - \sqrt{\frac{n^2 y^{2(n-1)}}{4} - 1}.$$

Observe os seguintes limites:

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow +\infty} \lambda_1(y) &= +\infty, & \lim_{y \rightarrow -\infty} \lambda_1(y) &= 0 \\ \lim_{y \rightarrow +\infty} \lambda_2(y) &= 0, & \lim_{y \rightarrow -\infty} \lambda_2(y) &= -\infty. \end{aligned}$$

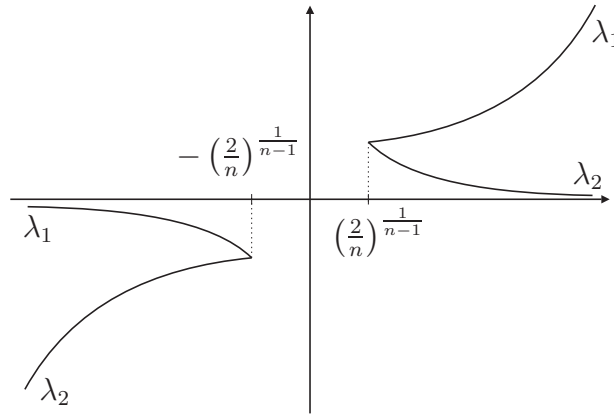


Figura 4.1: Gráficos de λ_1 e λ_2 .

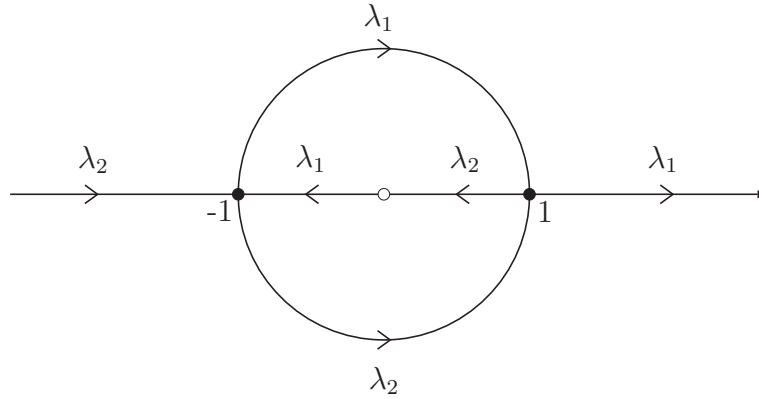
Sendo assim, as funções λ_1 e λ_2 são somas de funções contínuas, logo contínuas. Assim, do teorema do valor intermediário, qualquer $M \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ está na imagem de λ_1 ou λ_2 . Portanto, conclui-se que $\mathbb{R} \setminus \{0\} \subset \text{Spec}(X)$.

Por fim, resta provar que $S^1 \subset \text{Spec}(X)$. Para isso, suponha $\Delta < 0$. Perceba agora que $\lambda_1, \lambda_2 : I \rightarrow \mathbb{C}$.

Sejam $\lambda_1(y) = A + iB$ e $\lambda_2(y) = A - iB$, com $A = \frac{ny^{n-1}}{2}$ e $B = \sqrt{1 - \frac{n^2 y^{2(n-1)}}{4}}$.

Perceba que $\sqrt{\frac{n^2 y^{2(n-1)}}{4} - 1} = \sqrt{(-1) \left(1 - \frac{n^2 y^{2(n-1)}}{4}\right)} = iB$.

Tomando $y = \left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$ tem-se que, $\lambda_1(y) = \lambda_2(y) = 1$ e $\lambda_1(-y) = \lambda_2(-y) = -1$. Sendo os gráficos de λ_1 e λ_2 (em I) conexos e usando o fato de serem conjugados, conclui-se então que $S^1 \subset \text{Spec}(X)$.

Figura 4.2: Espectro da aplicação X quando n é par.

Portanto $\text{Spec}(X) = S^1 \cup (\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

■

No Corolário 2.3, vimos que se um difeomorfismo local $X = (f, g) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ não é injetivo então tanto $\mathcal{F}(f)$ quanto $\mathcal{F}(g)$ possuirão mcR . O próximo exemplo, exibido em [18], mostra que X pode ser injetiva e ainda assim $\mathcal{F}(f)$ ou $\mathcal{F}(g)$ possuir mcR . Veremos que este exemplo não satisfaz as hipóteses do Teorema A nem do Teorema B.

Exemplo 4.2 Considere a aplicação analítica $X = (f, g) : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por,

$$f(x, y) = e^y(1 - x^2) \quad \text{e} \quad g(x, y) = -e^y x.$$

A matriz Jacobiana de X é dada por,

$$DX(x, y) = \begin{pmatrix} -2xe^y & e^y(1 - x^2) \\ -e^y & -xe^y \end{pmatrix},$$

na qual $\det DX(x, y) = x^2 e^{2y} + e^{2y} > 0$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Olhando para as folhas da folheação $\mathcal{F}(f)$, ou seja, para os níveis de f , tem-se que as retas $x = \pm 1$ são folhas inseparáveis do nível $f = 0$, donde $\mathcal{F}(f)$ possui mcR . De fato, dado $c \in \mathbb{R}$ com $c \neq 0$ temos,

$$f(x, y) = c \Rightarrow e^y(1 - x^2) = c \Rightarrow y = \ln \left(\frac{c}{1 - x^2} \right).$$

Para $c > 0$ tem-se $x \in (-1, 1)$, para $c = 0$ tem-se $x = \pm 1$ e para $c < 0$ tem-se $x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$. Note que, os níveis associados a $c > 0$ são conexos e se aproximam assintoticamente às retas $x = \pm 1$.

Por outro lado, as folhas da folheação $\mathcal{F}(g)$, são descritos por $y = \ln \left(-\frac{c}{x} \right)$, donde se conclui que os níveis de g , não possuem folhas inseparáveis, ou de forma equivalente, $\mathcal{F}(g)$ não possui mcR . Logo pelo item (i) do Teorema 2.2, a aplicação X é globalmente injetiva.

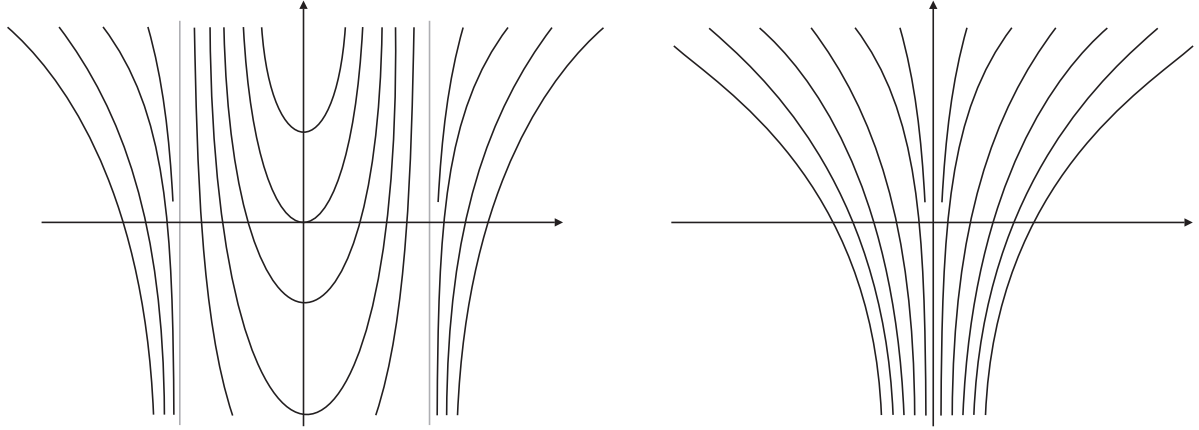


Figura 4.3: Folheações induzidas pela f e g , respectivamente.

Além disso, tem-se que f e g não satisfazem (PS). De fato, perceba que para a sequência $p_n = (1, -n)$, que não possui subsequência convergente, $f(p_n) \rightarrow 0$, $g(p_n) \rightarrow 0$, $\|\nabla f(p_n)\| \rightarrow 0$ e $\|\nabla g(p_n)\| \rightarrow 0$. Isso prova o item (iii) do Teorema 2.2.

Tem-se também que $\text{Spec}(X) \supset \mathbb{R} \setminus \{0\}$. De fato, o polinômio característico de $JX(x, y)$ é $P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda(3xe^y) + x^2e^{2y} + e^{2y}$ com discriminante $\Delta = 5x^2e^{2y} - 4e^{2y}$. Assim, as raízes são dadas por $\lambda_{1,2}(x, y) = \frac{e^y}{2} (-3x \pm \sqrt{5x^2 - 4})$. Quando $x = -2/\sqrt{5}$ e $y \rightarrow -\infty$ tem-se $\lambda_{1,2}(x, y) \rightarrow 0^-$. Quando $x = 2/\sqrt{5}$ e $y \rightarrow -\infty$ tem-se $\lambda_{1,2}(x, y) \rightarrow 0^+$. ■

No seguinte exemplo, exibido em [18], veremos que a recíproca do Teorema 2.2, de fato, não é verdadeira. Ou seja, existem difeomorfismos locais $X = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ globalmente injetivos tais que, tanto $\mathcal{F}(f)$ quanto $\mathcal{F}(g)$ possuem mcR .

Exemplo 4.3 Sejam $I = (0, 1)$ e $\Phi : I \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$ o difeomorfismo dado por,

$$\Phi(x, y) = (\tan(\pi x - \pi/2), \tan(\pi y - \pi/2)).$$

Dado $\varepsilon = 0.1$, seja $Y = (h, k) : I \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por,

$$h(x, y) = (y - \varepsilon)^2 - \varepsilon^2 x^2 \quad \text{e} \quad k(x, y) = (y - 1 + \varepsilon)^2 - \varepsilon^2 x^2.$$

Afirmamos que a aplicação analítica $X = Y \circ \Phi^{-1} = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um difeomorfismo local globalmente injetivo tal que $\mathcal{F}(f)$ e $\mathcal{F}(g)$ possuem mcR .

Notamos que o único papel de Φ é estender o comportamento $I \times I$ para \mathbb{R}^2 . Vamos provar esta afirmação em três passos.

Primeiro, deve-se mostrar que $\det JY(x, y) \neq 0$ em todo $I \times I$. De fato, Y tem matriz Jacobiana dada por,

$$DY(x, y) = \begin{pmatrix} -2x\varepsilon^2 & 2(y - \varepsilon) \\ -2x\varepsilon^2 & 2(y - 1 + \varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Assim, $\det DY(x, y) = -2x\varepsilon^2(2y - 2 + 2\varepsilon) + 2x\varepsilon^2(2y - 2\varepsilon) = 4x\varepsilon^2(1 - 2\varepsilon)$, que é diferente de zero em todo $I \times I$. Logo Y e X são difeomorfismos locais.

Segundo, deve-se mostrar que Y é globalmente injetiva. Pelo Corolário 2.2, basta mostrar que os conjuntos de nível de h e k se intersectam no máximo em uma componente conexa. Seja $c \in h(I \times I) \cap k(I \times I)$, olhando para as expressões de h e k , pode-se ver que $h^{-1}(c)$ (resp. $k^{-1}(c)$) tem no máximo duas componentes conexas, e além disso, eles têm exatamente duas se, e somente se, $0 \leq c < \varepsilon^2$. De fato, $c = 0$ corresponde a dois pares de linhas retas (um par para $h^{-1}(c)$ e outro par para $k^{-1}(c)$). Acima do valor $c = \varepsilon^2$ cada conjunto de nível é dado por uma componente conexa. Pode-se verificar que $h^{-1}([0, \varepsilon^2)) \cap k^{-1}([0, \varepsilon^2)) \neq \emptyset$. Tais conjuntos de nível estão ilustrados na Figura 4.4.

Terceiro, vejamos que no quadrado $I \times I$ as folheações $\mathcal{F}(h)$ e $\mathcal{F}(k)$ têm ambas folhas inseparáveis em $A = \{(x, y) \in I \times I : \varepsilon^2 x^2 \geq (y - \varepsilon)^2\}$ e $B = \{(x, y) \in I \times I : \varepsilon^2 x^2 \geq (y - 1 + \varepsilon)^2\}$ respectivamente. Assim, as folheações definidas por $\mathcal{F}(f)$ e $\mathcal{F}(g)$ têm ambas folhas inseparáveis em $\Phi(A)$ e $\Phi(B)$, respectivamente.

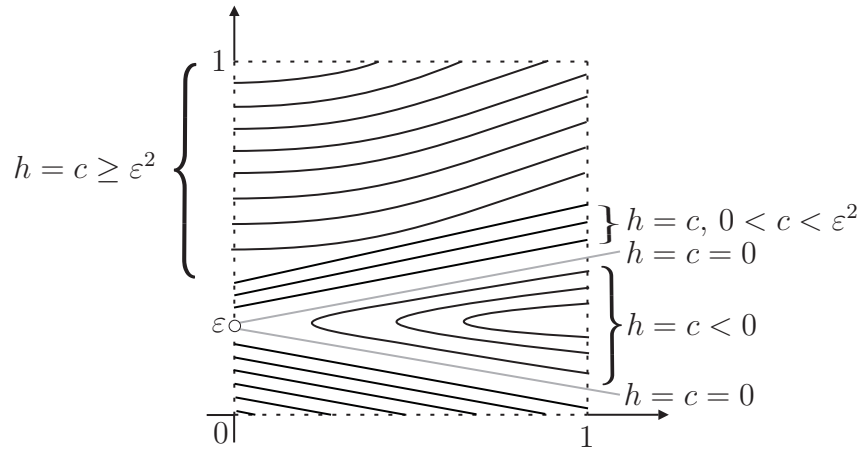


Figura 4.4: Folheação induzida pela h restrita à $I \times I$.

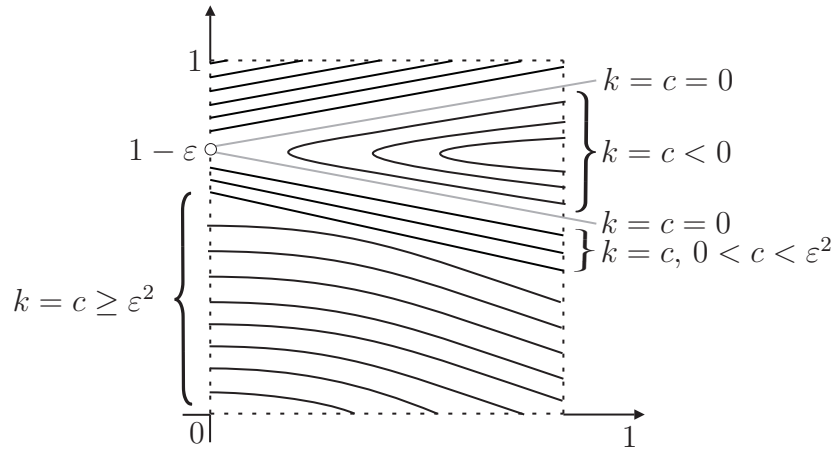


Figura 4.5: Folheação induzida pela k restrita à $I \times I$.

A aplicação a seguir é um contra-exemplo para a recíproca do Teorema 3.2, ou seja, é uma submersão $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 , tal que $\mathcal{F}(f)$ não possui folhas inseparáveis e f não satisfaz (PS).

Exemplo 4.4 A aplicação $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \arctan x$, onde $\arctan x$ assume valores no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. Como $\nabla f(x, y) = \left(\frac{1}{1+x^2}, 0 \right)$, temos a sequência $p_n = (n, 0) \rightarrow \infty$, com $f(p_n) = \arctan n \rightarrow \pi/2$ e $\nabla f(p_n) \rightarrow (0, 0)$, quando $n \rightarrow \infty$. Ou seja, f não satisfaz (PS). Porém, é fácil ver que a folheação $\mathcal{F}(f)$ é trivial, em particular, que $\mathcal{F}(f)$ não possui folhas inseparáveis.

A seguir, apresentamos um contra-exemplo para a recíproca do Teorema B. Ou seja, um difeomorfismo local $X = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe \mathcal{C}^1 globalmente injetivo, tal que nem f nem g satisfazem (PS). Note também, que tal exemplo satisfaz as condições do Teorema A.

Exemplo 4.5 Seja $X = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por, $X(x, y) = (-\arctan x, -\arctan y)$. É trivial que X é injetiva. Sua matriz Jacobiana é dada por,

$$DX(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{1+x^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1+y^2} \end{pmatrix}.$$

Analogamente ao Exemplo 4.4, mostra-se que f e g não satisfazem (PS), por outro lado, como os autovalores de $JX(x, y)$ são $-\frac{1}{1+x^2}$ e $-\frac{1}{1+y^2}$ temos que, $\text{Spec}(X) \cap [0, \infty) = \emptyset$. ■

O exemplo a seguir mostra que existem difeomorfismos locais $X = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ globalmente injetivos tais que uma, e somente uma, das funções f ou g satisfazem (PS).

Exemplo 4.6 Considere a aplicação analítica dada por $X(x, y) = (-\arctan x, -y)$, em que $f(x, y) = -\arctan x$ e $g(x, y) = -y$, e considere $\arctan x$ assumindo valores no intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$. O determinante Jacobiano de X em todo ponto de \mathbb{R}^2 é igual à $\frac{1}{1+x^2} > 0$.

Além disso, analogamente ao Exemplo 4.4 tem-se que f não satisfaz (PS). Por outro lado, as folhas da folheação $\mathcal{F}(g)$ são formadas por retas $y = \text{constante}$ e $\|\nabla g(x, y)\| \equiv 1$ satisfazendo (PS). ■

No seguinte exemplo, apresentamos uma aplicação X que satisfaz a condição espectral mais forte, que aparece no Teorema 3.1, porém não satisfaz as hipóteses do Teorema B.

Exemplo 4.7 A aplicação $X = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $X(x, y) = (-\arctan y, \arctan x)$ é tal que f e g não satisfazem (PS) (análogo ao Exemplo 4.4) mas satisfaz $\text{Spec}(X) \cap (-\varepsilon, \varepsilon) = \emptyset$, pois neste caso, $\text{Spec}(X) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. ■

Exemplo 4.8 Considere a aplicação $X = (f, g) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por,

$$X(x, y) = (\arctan x + \arctan y + y, -\arctan y).$$

O determinante Jacobiano de X em todo ponto de \mathbb{R}^2 é igual à $-\frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)} < 0$.

Além disso, f satisfaz (PS) e g não satisfaz (PS) (pelo Exemplo 4.4). De fato, perceba que $\|\nabla f(x, y)\| = \left\| \left(\frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{1+y^2} + 1 \right) \right\| > 1$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Tem-se também que X não satisfaz a hipótese espectral do Teorema A ($\text{Spec}(X) \cap [0, \varepsilon) = \emptyset$), pois os autovalores do Jacobiano de X são $\frac{1}{1+x^2}$ e $-\frac{1}{1+y^2}$. ■

Os próximos dois exemplos nos foram comunicados por F. Braun e B. Pires em comunicação privada e estabelecem que a condição espectral do Teorema A não obstrui a existência de mcR nas folheações coordenadas.

Exemplo 4.9 Seja $X = (f, g) = (-e^x(1 - y^2e^{-2x}), -y)$. Observe que,

$$DX(x, y) = \begin{pmatrix} -e^x(1 + y^2e^{-2x}) & 2ye^{-x} \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Seu determinante é $e^x(1 + y^2e^{-2x}) > 0$. Seus autovalores são -1 e $-e^x(1 + y^2e^{-2x})$. Perceba que no autovalor $-e^x(1 + y^2e^{-2x})$:

1. Para $x = 0$ e $y \rightarrow \infty$, $-(1 + y^2) \rightarrow -\infty$;
2. Para $y = 0$ e $x \rightarrow -\infty$, $-e^x \rightarrow 0^-$.

Assim $\text{Spec}(X) = (-\infty, 0)$.

Olhando para a folheação $\mathcal{F}(f)$, ou seja, para os níveis de f , tem-se que as folhas são dadas por $y = \pm e^x \sqrt{1 + ce^{-x}}$, com $c \in \mathbb{R}$. Veja que:

1. Para $c \geq 0$ tem-se $1 + ce^{-x} > 0$. Neste caso as folhas de $\mathcal{F}(f)$ não são conexas;
2. Para $c < 0$ tem-se $e^{-x} \geq -\frac{1}{c}$. Neste caso as folhas de $\mathcal{F}(f)$ são conexas.

Assim, concluímos que $\mathcal{F}(f)$ possui mcR .

Olhando para a folheação $\mathcal{F}(g)$, ou seja, para os níveis de g , tem-se que as folhas são dadas por $y = \text{constante}$, donde conclui-se que $\mathcal{F}(g)$ não possui mcR .

Desta coleção de exemplos obtemos o seguinte diagrama, no qual I denota a aplicação identidade de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^2 .

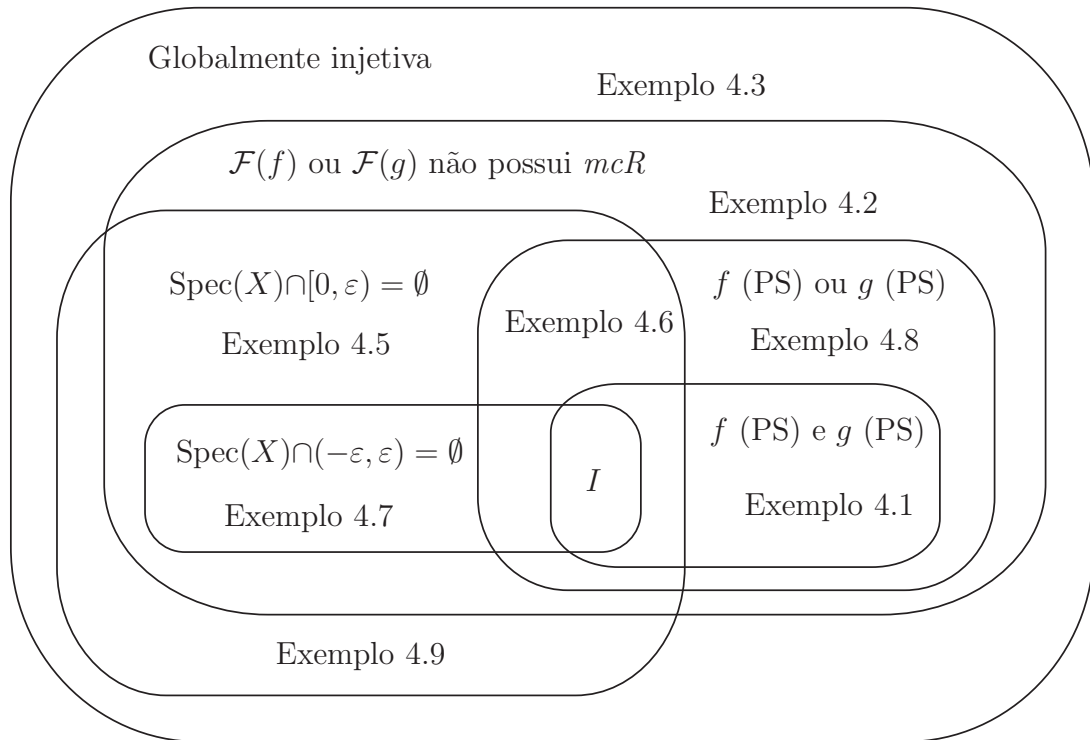


Figura 4.6: Diagrama de Venn da coleção de exemplos.

4.2 Exemplos em dimensões maiores que 2

O seguinte exemplo mostra que a condição (PS) em cada função coordenada não é suficiente para a injetividade global de difeomorfismos locais em \mathbb{R}^3 .

Exemplo 4.10 (Braun e Venato-Santos, [4]) Seja $X = (f, g, h) : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação dada por,

$$X(x, y, z) = (z - e^x \cos y, z - e^x \sin y, z).$$

Temos que $\det DX(x, y, z) = e^{2x} > 0$ e f, g e h satisfazem (PS) pois,

- $\nabla f(x, y, z) = (-e^x \cos y, e^x \sin y, 1) \Rightarrow \|\nabla f(x, y, z)\| = \sqrt{e^{2x} + 1} > 1;$
- $\nabla g(x, y, z) = (-e^x \cos y, -e^x \sin y, 1) \Rightarrow \|\nabla g(x, y, z)\| = \sqrt{e^{2x} + 1} > 1;$
- $\nabla h(x, y, z) = (0, 0, 1) \Rightarrow \|\nabla h\| \equiv 1.$

Porém, X não é injetiva pois, $X(0, 0, 0) = X(0, 2k\pi, 0)$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. ■

Em relação à hipótese espectral para difeomorfismos locais de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n , para $n > 2$, temos o seguinte resultado de existência:

Exemplo 4.11 (Smyth e Xavier [29]) Existem inteiros $n > 2$ e aplicações polinomiais não injetivas $X : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que, $\text{Spec}(X) \cap [0, \varepsilon) = \emptyset$. Ou seja, a condição espectral do Teorema A não é suficiente para a injetividade de X para certos inteiros $n > 2$.

Para demonstrar este exemplo, se faz necessário o conceito de aplicação homogênea e um resultado chamado de Teorema da Redução que passamos a apresentar.

Uma aplicação $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe \mathcal{C}^1 é dita *homogênea de grau r* , com $r > 1$, quando $H(\tau x) = \tau^r H(x)$ para todo $\tau > 0$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$. Tais aplicações têm a seguinte propriedade:

Lema 4.1 Se $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação homogênea e $F = I - H$ então F ser um difeomorfismo local é equivalente a $\text{Spec}(H) \cap [0, \infty) = \emptyset$.

Dem. De fato, F não ser difeomorfismo local é equivalente a, $0 \in \text{Spec}(F) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^n$, tal que $DF(x)(v) = (I - DH(x))(v) = v - DH(x)(v) = 0 \Leftrightarrow DH(x)(v) = v \Leftrightarrow 1 \in \text{Spec}(H)$.

Por outro lado, $1 \in \text{Spec}(H)$ equivale a $\text{Spec}(H) \supset (0, \infty)$. Com efeito, sendo $H(\tau x) = \tau^r H(x)$ e x, v como acima, temos que $DH(\tau x)(v) = \tau^{r-1} DH(x)(v) = \tau^{r-1} v \Leftrightarrow \tau^r \in \text{Spec}(H), \forall \tau > 0 \Leftrightarrow \text{Spec}(H) \supset (0, \infty)$. ■

Teorema 4.1 (Teorema da Redução, [2, 11]) *Seja $p : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação polinomial. Então é possível construir outra aplicação polinomial $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (para algum $n = n(p) > m$) com as seguintes propriedades.*

- (i) $F = I - H$, para alguma aplicação homogênea de grau ≤ 3 ;
- (ii) p é um difeomorfismo local se, e somente se, F também é. $\det Dp \equiv 1$ se, e somente se, $\det DF \equiv 1$;
- (iii) p é injetiva se, e somente se, F também é.

O Teorema da Redução reduz a prova da Conjectura Jacobiana em \mathbb{R}^n para o estabelecimento da injetividade para essas aplicações polinomiais de determinante Jacobiano constante diferente de zero que são da forma $F = I - H$ para aplicações homogêneas de grau 3, ao custo de aumentar a dimensão.

Demonstração do Exemplo 4.11: Seja $X : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um difeomorfismo local, polinomial e não injetivo (por Pinchuk [25], uma tal aplicação existe) e $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação associada a X pelo Teorema da Redução. Então F é um difeomorfismo local, não injetivo na forma $F = I - H$, onde H é uma aplicação homogênea. Mostraremos que a aplicação não injetiva $f = -F$ também satisfaz o exemplo. De fato, se $Df(x)(v) = \lambda v$, com $\lambda \geq 0$ para algum $v \in S^{n-1}$ então,

$$f = H - I \Rightarrow Df(x) = DH(x) - I \Rightarrow Df(x)(v) = DH(x)(v) - v \Rightarrow DH(x)(v) = (\lambda + 1)v.$$

Pelo Lema 4.1 esse fato entra em contradição com F ser difeomorfismo local. Logo $\text{Spec}(f) \cap [0, \infty) = \emptyset$. ■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] H. Blumberg - *The measurable boundaries of an arbitrary function*. Acta Math. 65 (1935) 263-282.
- [2] H. Bass, E. Connell e D. Wright - *The Jacobian Conjecture: Reduction of the degree and formal expansion of the inverse*. Bull. Amer. Math. Soc. 7 (1982) 287-330.
- [3] A. Białynicki-Birula e M. Rosenlicht - *Injective morphisms of real varieties*. Proc. Am. Math. Soc. 13 (1962) 200-203.
- [4] F. Braun e J. Venato-Santos - *Half-Reeb components, Palais-Smale conditions and global injectivity of local diffeomorphisms in \mathbb{R}^3* . Proc. of New Trends in Dynamical Systems. Salou, 2012. Publ. Mat. (2014) 63-79.
- [5] A. V. Černavskii - *Finite-to-one open mappings of manifolds*. Mat. Sbornik 65 (1964) 357-369.
- [6] A. V. Černavskii - *Addendum to the paper Finite-to-one open mappings os manifolds*. Mat. Sbornik 66 (1965) 471-472.
- [7] A. Cima, A. van de Essen, A. Gasull, E. Hubbers e F. Mañosas - *A polynomial counterexample to the Markus-Yamabe Conjecture*. Adv. Math. 131 (1997) 453-457.
- [8] M. Cobo, C. Gutierrez e J. Llibre - *On the injectivity of \mathcal{C}^1 maps on the real plane*. Canad. J. Math. no. 6, 54 (2001) 1187-1201.
- [9] C. Camacho e A. L. Neto - *Teoria Geométrica das Folheações*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA (1979).

- [10] S. Cynk e K. Rusek - *Injective endomorphisms of algebraic and analytic sets*. Ann. Polinici Math. no. 1, 56 (1991) 29-35.
- [11] L. Druzkowski - *An effective approach to Keller's Jacobian conjecture*. Math. Ann. 264 (1983) 303-313.
- [12] A. van de Essen - *Conjectures and problems surrounding the Jacobian Conjecture*. University of Nijmegen. 1993.
- [13] P. Fernandes - *Medida e Integração*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA (2002).
- [14] A. Fernandes, C. Gutierrez e R. Rabanal - *Global asymptotic stability for differentiable vector fields of \mathbb{R}^2* . J. Differential Equations. Vol. 206 (2004) 470-482.
- [15] R. Fessler - *A proof the two dimensional Markus-Yamabe stability conjecture and generalization*. Ann. Polon. Math. LXII (1995) 45-74.
- [16] A. A. Glutsyuk - *The complete solution of the Jacobian problem for vector fields on the plane*. Russian Math. Surveys 49 (1995).
- [17] C. Gutierrez - *A solution to the bidimensional global asymptotic stability conjecture*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Lineaire 12 (1995) 627-671.
- [18] C. Gutierrez, X. Jarque, J. Llibre e M. A. Teixeira - *Global Injectivity of \mathcal{C}^1 Maps of the Real Plane, Inseparable Leaves and the Palais-Smale Condition*. Canad. Math. Bull. Vol. 50 (3) (2007) 377-389.
- [19] W. Kaplan - *Topology of level curves of harmonic functions*. Trans. Amer. Math. Soc. 63 (1948) 514-522.
- [20] O. H. Keller - *Ganze cremona-transformationen*. Monatsh. Math. Phys. 47 (1939) 299-306.
- [21] E. L. Lima - *Fundamental Groups and Covering Spaces*. A K Peters. Massachusetts (2003).
- [22] E. L. Lima - *Um curso de Análise*. Vol. 2. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA (2012).

-
- [23] S. Nollé e F. Xavier - *Global inversion via the Palais-Smale conditions*. Discrete and Continuous Dynamical Systems. 8 (2002) 17-28.
- [24] C. Olech - *On the global stability of an autonomous system on the plane*. Contributions to Differential Equations. 1 (1963) 389-400.
- [25] S. Pinchuk - *Counterexample to the Strong Real Jacobian Conjecture*. Math. Z. 217 (1994) 1-4.
- [26] J. Palais e W. de Melo - *Introdução aos sistemas Dinâmicos*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA (1977).
- [27] E. A. de B. e Silva e M. A. Teixeira - *A version of Rolle's Theorem and applications*. Bol. Soc. Brasil. Mat. no. 2, 29 (1998) 301-328.
- [28] E. A. de B. e Silva e M. A. Teixeira - *Global injectivity and asymptotic stability via minimax method*. In: Progress in Nonlinear Analysis Nankai Ser. Pure Appl. Math. Theoret. Phys. 6, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, (2000) 339-358.
- [29] B. Smyth e F. Xavier - *Injectivity of Local Diffeomorphisms from Nearly Spectral Conditions*. J. Differential Equations. vol. 130, no. 2, (1996) 406-414.