MARCOS FABIANO FIRBIDA EDUARDO

Uma dicotomia para fluxos via fluxos seccional Axioma A

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA

2014

MARCOS FABIANO FIRBIDA EDUARDO

Uma dicotomia para fluxos via fluxos seccional Axioma A

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Sistemas Dinâmicos.

Orientador: Prof. Dr. Thiago Aparecido Catalan.

UBERLÂNDIA - MG
2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO: Marcos Fabiano Firbida Eduardo.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11212MAT008.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Sistemas Dinâmicos.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Uma dicotomia para fluxos via fluxos seccional Axioma A.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Thiago Aparecido Catalan.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 30 de Maio de 2014, às 14h00min, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME	ASSINATURA
Prof. Dr. Thiago Aparecido Catalan UFU - Universidade Federal de Uberlândia	
Prof. Dr. Alexander Eduardo Arbieto Mendoza UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro	
Prof. Dr. Juliano Gonçalves Oler UFU - Universidade Federal de Uberlândia	

Uberlândia-MG, 30 de Maio de 2014.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil.

E244d 2014

Eduardo, Marcos Fabiano Firbida, 1989-
Uma dicotomia para fluxos via fluxos seccional Axioma A / Marcos Fabiano Firbida Eduardo. - 2014.
56 f. : il.

Orientador: Thiago Aparecido Catalan.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Inclui bibliografia.

1. Matemática - Teses. 2. Axiomas - Teses. 3. Campos vetoriais - Teses. I. Catalan, Thiago Aparecido. II. Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 517

Dedicatória

Dedico à minha família, em especial aos meus pais pela dedicação, esforço e incentivo que sempre me deram durante toda a minha jornada.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus, por estar sempre presente em minha vida, em todos os momentos, dando força, perseverança, fé, saúde e paz para que eu pudesse concluir este trabalho.

Aos meus pais, Antonio Carlos de Souza Eduardo e Ana Maria Firbida Eduardo, pelo apoio, incentivo, carinho, e esforço que tiveram para que eu pudesse conseguir realizar mais um sonho, mais uma conquista em minha vida acadêmica.

A minha namorada Fernanda Torres, pelo apoio dado nos últimos meses deste trabalho.

Aos meus tios José Oscar de Souza Eduardo e Tanair Andrade Eduardo, pelo apoio e carinho de sempre.

Aos meus amigos, Augusto, Danilo, Cairê, Ianiã, Maykon, Rodrigo e Thiago, pela amizade de sempre, verdadeiros irmãos.

Ao Professor Thiago Aparecido Catalan, pela paciência, dedicação, orientação, amizade e sabedoria que teve para comigo durante esta minha jornada de estudo. E também, pelo aprendizado que me foi passado.

Aos professores Alexander Eduardo Arbieto Mendoza e Juliano Gonçalves Oler por terem aceito o convite de fazer parte desta banca.

Aos professores da Pós-Graduação em Matemática da UFU, em especial aos que ministraram alguma disciplina durante o mestrado.

Aos amigos de mestrado, Davidson Freitas Nogueira, Eduard Rojas Castillo, Nathali Vega Cabrera, pela amizade de sempre e ajuda que destes. Em especial Bruno Andrade Souza, Murilo Rodolfo Candido, Lauro Maykon Ferreira Fernandes e Raildo Santos de Lima, pelas longas conversas produtivas sobre matemática, sobre a vida, e que durante toda minha caminhada acadêmica se fizeram importantes, e se tornaram verdadeiros irmãos.

Aos meus professores de graduação, em especial Antonio Carlos Tamarozzi, Eugenia Brunilda Opazo Uribe, Fernando Pereira Souza, Renato César da Silva, Silvia Lopes e Sena Taglialenha e Sônia Sonia Angelina Garcia Modesto, pela amizade e incentivo que me proporcionaram, além de tudo, a dedicação e sabedoria que proporcionaram aos meus primeiros ensinamentos matemáticos.

EDUARDO, M. F. F. *Uma dicotomia para fluxos via fluxos seccional Axioma A.* 2014. (#56 pág) p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Neste trabalho consideraremos campos vetoriais C^1-genéricos sobre uma variedade Riemanniana compacta, sem bordo, de dimensão finita. Analisaremos estes campos segundo propriedades diferencias locais a fim de tentarmos obter propriedades diferencias para a dinâmica global do fluxo induzido por estes. Mais precisamente, mostraremos que se um campo vetorial C^1-genérico é tal que as únicas singularidades do mesmo acumulado por órbitas periódicas são de codimensão um, então: Ou o campo possui um ponto acumulado por órbitas periódicas hiperbólicas de diferentes índices de Morse, ou o campo é seccional-Axioma A. Mais ainda, mostraremos que o fenômeno de um fluxo possuir pontos sendo acumulados por órbitas de diferentes índices não acontece para campos estrela com decomposição espectral, o que implica que estes devem ser seccional-Axioma A.

Palavras-chave: Fluxo seccional-Axioma A, Fluxo Estrela.

EDUARDO, M. F. F. *A dichotomy for streams via sectional Axiom A flows.* 2014. (#56 pages) p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

In this work we consider $C^1-generic$ vector fields over a compact, boundaryless, compact, of finite dimension Riemann manifold. The idea is to investigate differential local properties of these vector fields in order to obtain global properties for the induced flow. More precisely, we show if a C^1-generic vector field is such that the only singularities accumulated by periodic orbits are co-dimension one singularities then: Either the vector field has a point been accumulated by periodic orbits of different Morse index or the vector field is sectional-Axiom A. Moreover, we show that the existence of points been accumulated by periodic orbits of different indices does not happen for star vector fields having spectral decomposition, which implies these ones should be sectional-Axiom A.

Keywords: Sectional-Axiom A flows, Star flows.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estudamos o artigo de Arbieto e Morales [3], trabalho este que contribuiu muito no avanço da teoria de Sistemas Dinâmicos no que concerne ao entendimento dos sistemas estrelas. Informalmente, tais sistemas são caracterizados por robustamente não possuir pontos críticos não hiperbólicos.

No mundo dos difeomorfismos os sistemas estrelas são muito bem compreendidos. Mais precisamente, Mañé mostrou em dimensão dois que tais sistemas são de fato Axioma A, [24], resultado este que foi estendido para dimensões maiores por Hayashi [17]. Já no mundo dos fluxos o que se têm são apenas resultados parciais nesta direção. Como por exemplo, o caso de fluxos estrelas não singulares para os quais Gan e Wen em [11] mostraram também serem fluxos Axioma A. Agora, na presença de singularidades o mundo estrela é mais amplo do que o mundo Axioma A. Por exemplo, o conhecido atrator geomético de Lorenz, veja [2], [15], [16], o qual sabe-se não ser Axioma A, pelo fato de possuir uma singularidade como ponto de acumulação de órbitas periódicas, é no entanto um sistema estrela. No entanto, inspirado nas propriedades dinâmicas tanto de um fluxo Axioma A, quanto do atrator de Lorenz, Morales, Pacifico e Pujals introduziram a noção de campo singular-Axioma A em [29]. Munido disto, eles obtiveram o seguinte resultado para fluxos em variedades tridimensionais fechadas: Todo fluxo estrela C^1-genérico é singular-Axioma A. Isto é, genericamente temos um bom entendimento dos fluxos estrela tridimensionais.

Em seguida, como haveria de ser, começou-se a busca por resultados em dimensões maiores. Neste sentido, foi introduzido os fluxos seccional-Axioma A, por Metzger e Morales em [26], que na verdade são uma extensão natural dos fluxos singular-Axioma A para dimensões maiores. Dizemos que um campo X é seccional-Axioma A se existe uma decomposição espectral do seu conjunto não-errante, formado por conjuntos transitivos com órbitas periódicas densas, onde cada conjunto ou é hiperbólico para X, ou é seccional-hiperbólico para X ou seccional-hiperbólico pra $-X$. Onde os conjuntos seccionais hiperbólicos são conjuntos com uma estrutura parcialmente hiperbólica muito boa. Munido desta informação foi formulada a seguinte conjectura para $n \geq 3$:

Conjectura 1 *Fluxos estrelas C^1-genéricos em uma n-variedade fechada são seccional-Axioma A.*

Uma obstrução para uma boa regularidade para o campo, seria a presença de pontos na variedade sendo acumulados por ponto periódicos de diferentes índices de Morse. De fato, alguns exemplos conhecidos de fluxos exibindo uma dinâmica muito complexa podem ser obtidos via suspensão de certos difeomorfismos, veja [5], [35] e [25]. Sendo assim, temos a seguinte conjectura:

Conjectura 2 *Campos vetoriais X, C^1-genéricos, satisfazem (apenas) uma das seguintes propriedades:*

(1) X tem um ponto acumulado por órbitas periódicas hiperbólicas de diferentes índices de Morse;

(2) X é seccional-Axioma A.

Observemos que agora que a Conjectura 2 é consequência da conjectura 1, veja Proposição 2.0.24.

O objetivo deste trabalho é exibirmos uma prova para a Conjectura 2 em dimensões altas, porém num caso muito próximo do tridimensional. Isto é, quando as singularidades acumuladas por órbitas periódicas têm codimensão um (ou seja, índice de Morse 1 ou $n-1$). Mais precisamente, vamos mostrar o seguinte resultado:

Teorema A

Um campo vetorial X C^1-genérico para o qual as singularidades acumuladas por órbitas periódicas têm codimensão um satisfaz apenas uma das seguintes propriedades:

(1) *X possui um ponto acumulado por órbitas periódicas hiperbólicas de diferentes índices de Morse;*

(2) *X é seccional-Axioma A.*

Observe que o resultado apresentado implica a dicotomia dada por Morales e Pacifico em [28] desde que em dimensão três as singularidades hiperbólicas possuem codimensão um. Como uma aplicação deste resultado, provaremos a Conjectura 1 para fluxos estrela com decomposição espectral, desde que as singularidades acumuladas por órbitas periódicas sejam de codimensão um. Mais precisamente:

Teorema B

Um fluxo estrela C^1-genérico com decomposição espectral para o qual as singularidades acumuladas por órbitas periódicas tem codimensão 1 é seccional-Axioma A.

Marcos Fabiano Firbida Eduardo

Uberlândia-MG, 25 de fevereiro de 2013.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo abordaremos conceitos básicos e fundamentais para o desenvolvimento da dissertação.

1.1 Variedade Riemanniana

Os objetos de estudo nesta dissertação serão Campos de Vetores sobre Variedades diferencias. Assim sendo, nesta seção vamos definir o que vem a ser uma variedade diferenciável e depois uma variedade Riemanniana.

Definição 1.1.1 *Uma aplicação $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ é diferenciável em $x \in U$ se existe uma transformação linear $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que aproxima f numa vizinhança de x no seguinte sentido:*

$$f(x+v) = f(x) + T \cdot v + R(v)$$

e

$$\lim_{v \to 0} \frac{R(v)}{|v|} = 0$$

para todo $v \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno.

A aplicação T quando existe é única. Ela é chamada de derivada de f em x e denotada por $Df(x)$.

A derivada tem a seguinte interpretação geométrica. Dado $v \in \mathbb{R}^m$ tomemos uma curva diferenciável $\alpha : I \longrightarrow U$ definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ contendo $0 \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Então:

$$Df(p)(v) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\alpha(t)) - f(t)}{t} = \frac{d}{dt} f(\alpha(t)) \mid_{t=0} \tag{1.1}$$

Definição 1.1.2 *Sejam $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação e um ponto $x = (x_1, \ldots, x_m)$. Definimos a derivada parcial de f com respeito a x_i, com $i = 1, \ldots, m$, como sendo*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = Df(x)(e_i)$$

onde $\{e_1, \ldots, e_m\}$ *é a base canônica de* $\mathbb{R}^m$*.*

Como $Df(x)$ é uma transformação linear, e para qualquer vetor $v \in \mathbb{R}$ temos $v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i e_i$, então pela linearidade de $Df(x)$ temos que

$$Df(x)(v) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i Df(x)(e_i) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\alpha_i$$

Dizemos que f é de classe C^1 em U quando todas as derivadas parciais $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x)$ são contínuas como função de $x \in U$, isto é, quando as aplicações

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial X}{\partial x_i}: & U & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\partial X}{\partial x_i}(x) \end{array}$$

forem contínuas para todo $i = 1, \ldots, m$. Procedendo indutivamente em $r \in \mathbb{N}$, f é de classe C^r quando todas as derivadas parciais de f são de classe C^{r-1} em U. Quando f é de classe C^r para todo $r \in \mathbb{N}$, dizemos que f é de classe C^∞.

Definição 1.1.3 *Uma aplicação de classe* C^r, $r \geq 1$, $f : U \longrightarrow V$ *entre abertos* U *e* V *de* $\mathbb{R}^m$ *é chamada de difiomorfismo* C^r *se* f *possui inversa* $f^{-1} : V \longrightarrow U$ *de classe* C^r*.*

Convém lembrarmos que a composta de difeomorfismos é um difeomorfismo, e claramente que a inversa de um difeomorfismo também é um difeomorfismo.

Definição 1.1.4 *Seja* $f : W \longrightarrow \mathbb{R}^m$, W *um aberto de* $\mathbb{R}^m$*. Dizemos que* f *é um difeomorfismo local quando para todo* $p \in W$ *existe um vizinhança* $U \subset W$ *de* p*, tal que* $f\,|_U : U \longrightarrow f(U) \subset \mathbb{R}^m$ *é um difeomorfismo.*

A noção de diferenciabilidade, que até agora foi associada a aplicações definidas em abertos de espaços euclidianos, será estendida a seguir a aplicações definidas em certos espaços topológicos localmente homeomorfos a $\mathbb{R}^m$.

Consideremos agora M um espaço topológico qualquer.

Definição 1.1.5 *Definimos por carta local ou sistema de coordenadas em* M *um par* (U, ϕ) *onde* U *é um aberto de* M *e* $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *é um homeomorfismo de* U *sobre o aberto* $\phi(U)$ *de* $\mathbb{R}^m$*.*

Definição 1.1.6 *Diz-se que* $\mathcal{A}$ *é um atlas, de dimensão* m *e de classe* C^k *sobre* M*, se for uma coleção de cartas locais cujos domínios cobrem* M *e tal que se* (U_1, ϕ), $(U_2, \psi) \in \mathcal{A}$ *e* $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$*, então a aplicação* $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U_1 \cap U_2) \longrightarrow \psi(U_1 \cap U_2)$ *é um difeomorfismo* C^r *entre abertos de* $\mathbb{R}^m$*. Os difeomorfismos* $\psi \circ \phi^{-1}$ *são chamados de mudança de coordenadas.*

O conceito de diferenciabilidade pode ser agora estendido a aplicações entre espaços topológicos que possuem atlas de classe C^r, com $r \geq 1$.

Definição 1.1.7 *Sejam M e N espaços topológicos. Suponha $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ dois atlas de classe C^r em M e N, respectivamente. Dizemos que $f : M \longrightarrow N$ é diferenciável de classe C^k, $k \leq r$, se f é contínua e para cada $x \in M$ existem cartas locais $(U, \phi) \in \mathcal{A}$ e $(V, \psi) \in \mathcal{B}$, com $x \in U$ e $f(x) \in V$, tais que*

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap f^{-1}(V)) \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^m$$

é de classe C^k.

Como as mudanças de variáveis são difeomorfismos de classe C^r, $r \geq k$, esta definição independe das cartas locais (verificar na pag.11 [6]). É claro que nos espaços euclidianos $\mathbb{R}^m$, se considerarmos uma única carta local $(\mathbb{R}^m, Id)$, onde Id é a aplicação identidade, a noção de diferenciabilidade coincide com a usual.

Definição 1.1.8 *Um atlas $\mathcal{A}$ de classe C^r sobre M é chamado máximo quando ele contém todas as cartas locais (V, ψ), cujas mudanças de coordenadas com elementos $(U, \phi) \in \mathcal{A}$*

$$\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V) \tag{1.2}$$

são difeomorfismos C^r.

A vantagem de se considerar um atlas máximo $\mathcal{A}$ é que neste caso os domínios das cartas locais de $\mathcal{A}$ formam uma base da topologia de M. Por outro lado, todo atlas $\mathcal{A}$ está contido em um único atlas máximo $\overline{\mathcal{A}}$ (verificar em [22]).

Um atlas máximo de dimensão m de classe C^r sobre M é chamado também de estrutura diferenciável de dimensão m e classe C^r sobre M.

Definição 1.1.9 *Uma variedade diferenciável de classe C^r e dimensão m é um espaço topológico de Hausdorff M, com base enumerável, munido de uma estrutura diferenciável de dimensão m e classe C^r*

Para denotarmos uma variedade diferenciável de dimensão m, usaremos M^m, ou simplesmente M quando não haver possibilidade de confusão.

Como uma variedade diferenciável é localmente um aberto de um espaço euclidiano, todos os teoremas do Cálculo estendem-se para variedades.

Sejam M^m uma variedade diferenciável de classe C^r e $p \in M$. Indicamos por $\mathcal{C}_p$ o conjunto de todos os caminhos $\lambda : J \longrightarrow M$, definidos em um intervalo aberto J, contendo 0, tais que $\lambda(0) = p$ e λ é diferenciável em 0(ver exmplo 3 em [22]). Se $\lambda \in \mathcal{C}_p$ e $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é um sistemas de coordenadas em M, com $p \in U$, pode acontecer que a imagem $\lambda(J)$ não esteja inteiramente contida em U. Em vista disto, toda vez que escrevemos $\phi \circ \lambda$, estamos admitindo que o domínio de λ foi suficientemente reduzido a um intervalo aberto menor $J^{'}$, contendo 0, tal que $\lambda(J^{'}) \subset U$.

Definição 1.1.10 *Diremos que dois caminhos* λ, $\mu \in \mathcal{C}_p$ *são equivalentes, e escrevemos* $\lambda \sim \mu$, *quando existir um sistema de coordenadas locais* $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *em* M, *com* $p \in U$, *tal que* $\phi \circ \lambda : J \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *e* $\mu : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *têm o mesmo vetor velocidade em* $t = 0$, *isto é,* $(\phi \circ \lambda)'(0) = (\phi \circ \mu)'(0)$.

Note, que neste caso, a igualdade $(\phi \circ \lambda)'(0) = (\phi \circ \mu)'(0)$ será verdadeira para *todo* sistema de coordenadas $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ em M, $p \in U$. Resulta daí que a relação de equivalência $\lambda \sim \mu$ é de fato uma relação de equivalência em $\mathcal{C}_p$.

O *vetor velocidade* $\dot{\lambda}$ de um caminho $\lambda \in \mathcal{C}_p$ é, por definição, a classe de equivalência de λ. Ou seja $\dot{\lambda} = \{\mu \in \mathcal{C}_p;\ \mu \sim \lambda\}$. Portanto, dados λ, $\mu \in \mathcal{C}_p$, tem-se $\dot{\lambda} = \dot{\mu}$ se, e somente se, $(\phi \circ \lambda)'(0) = (\phi \circ \mu)'(0)$ para algum, logo para todo, sistema de coordenadas locais $\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ em M, com $p \in U$.

Definição 1.1.11 *Será indicado por* TM_p *e será chamado de espaço tangente a variedade* M *no ponto* p, *o conjunto quociente* $\mathcal{C}_p/\sim$.

Observação 1.1.12 *Uma propriedade importante satisfeita por* TM_p, *é que pode-se dar a ele uma estrutura natural de espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *(verificar pag.135 em [22]).*

Definição 1.1.13 *Seja* M *uma variedade diferenciável e* p *um ponto de* M. *Seja* $v \in TM_p$ *o vetor tangente a* p *na variedade. Definimos uma geodésica* $\mathcal{Y}_v$ *satisfazendo* $\mathcal{Y}_v(0) = p$ *com vetor tangente* $\mathcal{Y}_v(0) = v$. *Em geral, o mapa exponencial de* p *é definido por* $exp_p : TM_p \longrightarrow M$, *tal que* $exp_p(v) = \mathcal{Y}_v(1)$.

O mapa exponencial é definido, geralmente, apenas localmente, ou seja, ele leva uma pequena vizinhança da origem em TM_p, a uma vizinhança de p na variedade. Isso é porque ele conta com o teorema de existência e unicidade para equações diferenciais ordinárias , que é de natureza local. Logo o mapa exponencial comporta-se, de maneira local, como uma projeção do plano tangente na variedade.

Definição 1.1.14 *Uma métrica riemanniana numa variedade diferenciável* M *é uma correspondência que associa a cada ponto* $p \in M$ *um produto interno no espaço tangente* TM_p

Seja g uma métrica riemanniana em M. Indicamos por $g_p(u, v)$ ou $g(p; u, v)$ o produto interno dos vetores u, $v \in TM_p$. O *comprimento* ou *norma* do vetor tangente $u \in TM_p$ é definido de maneira óbvia por

$$|u| = |u|_p = \sqrt{g(p; u, u)}.$$

Definição 1.1.15 *Uma variedade diferenciável onde está definida uma métrica riemanniana chama-se um variedade Riemanniana.*

1.2 Equações Diferenciais Ordinárias e Hiperbolicidade de Órbitas Críticas

Nesta seção apresentaremos notações, definições e alguns resultados fundamentais da teoria de Equações Diferenciais Ordinárias.

Consideremos agora, M uma variedade Riemanniana suave, compacta e sem bordo.

Definição 1.2.1 *Seja M^m uma variedade diferenciável. Definimos por campo de vetores de classe C^r em M a aplicação de classe C^r $X : M \longrightarrow TM$ que, a cada ponto $p \in M$, associa um vetor $X(p) \in TM_p$.*

Denotamos por $\mathcal{X}^r(M)$ o conjunto de todos os campos de vetores de classe C^r em M.

Definição 1.2.2 *Uma curva integral de $X \in \mathcal{X}^r(M)$ passando por um ponto $p \in M$ é uma aplicação C^{r+1}, $\alpha : I \longrightarrow M$, onde I é um intervalo contendo 0, tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$, para todo $t \in I$. A imagem da curva integral é chamada de órbita ou trajetória.*

Agora, se $f : M \longrightarrow N$ é um difeomorfismo de classe C^{r+1} e $X \in \mathcal{X}^r(M)$, então definimos $Y = f_*X$, definido por $Y(q) = Df_p \cdot X(p)$ com $q = f(p)$, é um campo de classe C^r em N.

Se $\alpha : I \longrightarrow M$ é uma curva integral de X, então $f \circ \alpha : I \longrightarrow N$ é uma curva integral para Y. Em particular, f leva trajetórias de X em trajetórias de Y. Assim, se $\phi : U \subset M \longrightarrow U_0 \subset \mathbb{R}^m$ é uma carta local, $Y = \phi_*X$ é um campo de classe C^r em U_0; dizemos que Y é a expressão de X na carta local (U, ϕ).

Com isto, toda teoria de Equações Diferenciais Ordinárias desenvolvidas para $\mathbb{R}^n$, como por exemplo os teoremas de existência e unicidade de soluções (Picard e Peano em [37]), diferenciabilidade de soluções, estendem-se a campos de vetores definidos em variedades.

Definição 1.2.3 *Dizemos que uma aplicação $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 é um fluxo se:*

(1) $\varphi(0, x) = x$

(2) $\varphi(t + s, x) = \varphi(t, \varphi(s, x))$, *com* t, $s \in \mathbb{R}$.

O seguinte resultado vem por definir um fluxo global induzido por um campo $X \in \mathcal{X}^r(M)$.

Proposição 1.2.4 *Sejam M uma variedade compacta e $X \in \mathcal{X}^r(M)$. Existe em M um fluxo global de classe C^r para X. Isto é, uma aplicação $\varphi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ tal que $\varphi(0, p) = p$ e $\dfrac{\partial}{\partial t}\varphi(t, p) = X(\varphi(t, p))$.*

Para a demonstração deste resultado basta verificar Proposição 1.3, pág.12 em [30]

Dado um campo de vetor $X \in \mathcal{X}^r(M)$ e $\varphi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$ o fluxo induzido por X, para cada $t \in \mathbb{R}$ podemos definir a aplicação $X_t : M \longrightarrow M$, tal que $X_t(p) = \varphi(t, p)$.

Corolário 1.2.5 *A aplicação X_t, com $t \in \mathbb{R}$, é um difeomorfismo de classe C^r. Além disso, $X_0 = Id$, $X_{t+s} = X_t \circ X_s$ para todo t, $s \in \mathbb{R}$.*

No caso de campos de vetores lineares, isto é, $x^{'} = f(x)$, onde $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ é linear, ou seja, $f(x) = Ax$, temos um bom entendimento do fluxo, dependendo dos autovalores da matriz A como segue abaixo. Observemos que, no caso de campos lineares, digamos $x^{'} = Ax$, o fluxo é dado por $e^{tA}x$.

Definição 1.2.6 *Um sistema linear $x^{'} = Ax$ chama-se atrator se para todo $x \in \mathbb{R}^m$, $e^{tA}x \longrightarrow 0$, quando $t \longrightarrow +\infty$.*

Observemos que e^A é a matriz exponencial de A.

Teorema 1.2.7 *[Teorema 10 [37], p.73] As seguintes proposições são equivalentes:*

(1) O sistema $x^{'} = Ax$ é um atrator;

(2) Todos os autovalores de A têm parte real negativa;

(3) Existem $\mu > 0$ e $K \geq 1$ tais que $|e^{tA}x| \leq Ke^{-\mu t}|x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$ e $t \geq 0$;

(4) O sistema $x^{'} = Ax$ é topologicamente conjugado a $x^{'} = -x$.

Definição 1.2.8 *Um sistema linear $x^{'} = Ax$ chama-se fonte se para todo $x \in \mathbb{R}^m$, $x \neq 0$, $|e^{tA}x| \longrightarrow +\infty$, quando $t \longrightarrow +\infty$.*

Teorema 1.2.9 *[Teorema 12 [37], p.76]*
As seguintes proposições são equivalentes:

(1) O sistema $x^{'} = Ax$ é uma fonte;

(2) Todos os autovalores de A têm parte real negativa;

(3) Existem $\mu > 0$ e $K \geq 1$ tais que $|e^{tA}x| \geq K^{-1}e^{\mu t}|x|$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$ e $t \geq 0$;

(4) O sistema $x^{'} = Ax$ é topologicamente conjugado a $x^{'} = x$.

Em geral, usaremos as letras X, Y, Z para denotar um campo.
Fixemos agora $X \in \mathcal{X}^r(M)$ e X_t seu respectivo fluxo.

Definição 1.2.10 *Consideremos $X \in \mathcal{X}^r(M)$. Seja $x \in M$. Definimos a órbita de x pelo fluxo X_t, o conjunto $\{X_t(x); t \in \mathbb{R}\}$, denotado por $O(x)$. Denotaremos por $O^+(x)$ e $O^-(x)$ as órbitas futura e passada de x, respectivamente, isto é $O^+(x) = \{X_t; t > 0\}$ e $\{X_t; t < 0\}$.*

Para denotarmos uma corda, ou pedaço de órbita usamos $(x, X_t(x)) = X_{[o,t]}(x) = \{X_s(x)\}_{s=0}^{t}$.

Definição 1.2.11 *Seja $\sigma \in M$. Dizemos que σ é uma singularidade para um campo $X \in \mathcal{X}^r(M)$ se $X(\sigma) = 0$. O conjunto dos pontos de singularidades de X será denotado por $Sing(X)$.*

Definição 1.2.12 *Seja $x \in M$. Dizemos que a órbita $O(x)$ é periódica se existe $p \in O(x)$ e $T > 0$ tal que $X_T(p) = p$. Neste caso temos que $O(x) = \{X_t(p); 0 \leq t \leq T\}$ e dizemos que p é um ponto periódico.*

O menor $T > 0$ que satisfaz $X_T(p) = p$ é chamado de período de p e é denotado por $\pi(p)$. O conjunto de todos os pontos periódicos é denotado por $Per(X)$.

Definição 1.2.13 *Seja $X \in \mathcal{X}^r(M)$. Definimos o conjunto de elementos críticos com respeito ao fluxo X_t como*

$$Crit(X) = Per(X) \cup Sing(X).$$

Definição 1.2.14 *Seja $\sigma \in M$ uma singularidade. Dizemos que σ é uma singularidade hiperbólica se qualquer autovalor λ de $DX(\sigma)$ possui parte real não nula, ou seja, $Re(\lambda) \neq 0$.*

Para definirmos a hiperbolicidade de uma órbita periódica precisamos do conceito de mapa de *Poincaré* associado a tal órbita.

Definição 1.2.15 *Sejam $X \in \mathcal{X}^r(M^m)$ e $U \subset \mathbb{R}^{m-1}$ um aberto. Uma aplicação $f : U \longrightarrow M$ de classe C^r chama-se seção transversal local de X, quando, para todo $x \in U$, o subespaço $Df(s)(\mathbb{R}^{m-1})$ e o gerrado por $X(f(x))$, geram todo o espaço vetorial $T_{f(x)}M$. Considerando $\Sigma = f(U)$ munido da topologia induzida, se $f : U \longrightarrow \Sigma$ for um homeomorfismo, dizemos que Σ é uma seção transversal de X.*

Observemos que dado um ponto x não singular de um campo, sempre é possível obter uma seção transversal local ao campo contendo o ponto x.

Definição 1.2.16 *Seja $O(p)$, $p \in M$, uma órbita periódica, com período $\pi(p)$, de um campo $X \in \mathcal{X}^1(M)$. Pelo ponto p consideremos uma seção transversal Σ ao campo X, e observemos que a órbita de p volta a intersectar Σ no tempo $\pi(p)$. Assim, podemos tomar $V \subset \Sigma$ uma vizinhança de p suficientemente pequena, tal que fica bem definido a aplicação $P : V \longrightarrow \Sigma$ que a cada poto $x \in V$ associa $P(x)$, sendo $P(x)$ o primeiro ponto onde a órbita de x volta a intersectar Σ. Esta aplicação é denominada Mapa de Poincaré, associada à órbita $O(x)$ e à seção Σ.*

Observação 1.2.17 *Um fato importante é que podemos definir, também, mapa de Poincaré para órbitas que não são periódicas. Seja $x \in M \setminus Sing(X)$, e fixe $t \in \mathbb{R}$ tal que $X_t(x) \neq x$. Considere Σ_x e $\Sigma_{X_t(x)}$ seções transversais, suficientemente pequenas em x e $X_t(x)$, respectivamente. Pelo Teorema do Fluxo Tubular Longo, a aplicação $P : \Sigma_x \longrightarrow \Sigma_{X_t(x)}$, que a cada $y \in \Sigma_x$ associa o primeiro ponto em que a órbita de y intersecta $\Sigma_{X_t(x)}$ é um difeomorfismo de mesma classe de diferenciabilidade que o campo. Chamamos esta aplicação de mapa de Poincaré de x a $X_t(x)$. Para maiores detalhes conferir [30].*

Agora definiremos o *fluxo linear de Poincaré*, que é muito útil no estudo de propriedades hiperbólicas de fluxos sem singularidades.

Pelo fato de M^m ser uma variedade *Riemanniana* podemos definir o seguinte conjunto.

Definição 1.2.18 *Seja x um ponto não singular. Definimos então $N_x := \langle X(x)\rangle^{\perp}$ como sendo o subespaço $m-1$-dimensional ortogonal a reta gerada por $X(x)$ em TM_x. Isto gera o fibrado normal N sobre o conjunto $M^* = M \setminus Sing(X)$.*

Definição 1.2.19 *Seja $x \in M$ um ponto não singular para $X \in \mathcal{X}^r(M)$. Seja $\pi_x : TM_x \longrightarrow N_x$ a projeção ortogonal de TM_x sobre N_x. Definimos por fluxo linear de Poincaré do campo X a seguinte aplicação*

$$P_X^t(x) : N_x \longrightarrow N_{X_t(x)}$$

onde $P_X^t(x) = \pi_{X_t(x)} \circ DX_t(x)$.

Agora, relacionaremos o fluxo linear de *Poincaré* com o mapa de *Poincaré*.

Proposição 1.2.20 *[[4]]*

Sejam $x \in M \setminus Sing(X)$ e $y = X_t(x)$. Definindo $N_x(\delta) = B(0,\delta) \cap N_x$, temos seções transversais $\Sigma_x = exp(N_x(\delta))$ e $\Sigma_y = exp(N_y(\delta))$. Então, se $P : \Sigma_x \longrightarrow \Sigma_y$ é o mapa de Poincaré e $P_X^t(x) : N_x \longrightarrow N_y$ é o fluxo linear de Poincaré, então temos

$$DP(x) = P_X^t(x).$$

Definição 1.2.21 *Seja $p \in M$ um ponto periódico para X_t. Dizemos que p é hiperbólico se qualquer autovalor λ de $DP(p)$, onde $DP(p)$ é a derivada de um mapa de Poincaré no ponto p, tem-se $|\lambda| \neq 1$.*

Antes de definirmos os conjuntos, que num sentido informal suportam a dinâmica assintótica do sistema, definimos a seguinte relação: $x \succ y$ se para toda vizinhança U de x e V de y existe $T > 0$ tal que para todo $\tilde{T} > T X_{\tilde{T}(U)} \cap V \neq \emptyset$.

Definição 1.2.22 *Seja $x \in M$. Definimos $\Omega(X) = \{x : x \succ x\}$ que é o conjunto que carrega a informação assintótica do sistema. Chamamos $\Omega(X)$ de conjunto não errante do campo X.*

Podemos também, obter conjuntos invariantes a partir da informação assintótica de um único ponto, como veremos a seguir.

Definição 1.2.23 *Sejam $x \in M$ e $X \in \mathcal{X}^1(M)$. Definimos o conjunto ω-limite de x por*

$$\omega(x) = \{y \in M;\ existe\ \ t_n \longrightarrow +\infty\ \ tal\ \ que\ \ X_{t_n}(x) \longrightarrow y\}.$$

Analogamente definimos o conjunto α-limite de x por

$$\alpha(x) = \{y \in M;\ existe\ \ t_n \longrightarrow -\infty\ \ tal\ \ que\ \ X_{t_n} \longrightarrow y\}.$$

Sejam X, $Y \in \mathcal{X}^1(M)$, defina

$$d(X,Y) = \sup_{x \in M} \|X(x) - Y(x)\|$$

e

$$d(DX, DY) = \sup_{x \in M} \|DX(x) - DY(x)\|.$$

A definição acima usa cartas locais, pra maiores informações verifique [30].

Definição 1.2.24 *Sejam $X, Y \in \mathcal{X}^1(M)$. Dizemos que X e Y são campos $\epsilon - C^1$ próximos se*

$$\max\{d(X, Y),\, d(DX, DY)\} < \epsilon.$$

Como vimos na introdução os resultados obtidos neste trabalho não são para todos os Campos C^1 sobre uma variedade. De fato, os resultados valem genericamente. Por genericamente, entendemos conjuntos topologicamente grandes. Mais precisamente, dizemos que uma propriedade é genérica se ela é satisfeita para um conjunto residual.

Definição 1.2.25 *Seja $\mathcal{R} \subset M$. Dizemos que $\mathcal{R}$ é um conjunto residual se é a interseção enumerável de subconjuntos abertos e densos de M.*

Os conjuntos residuais são ainda mais interessantes quando estamos num espaço topológico de *Baire* onde todo subconjunto residual é denso. Agora, considere os espaços $C^1(M, \mathbb{R}^n)$ formado pelas aplicações de classe C^1 definidas numa variedade compacta M. Como $C^1(M, \mathbb{R}^n)$ é um espaço métrico completo, temos que este é um espaço de *Baire*. Mais ainda, $C^1(M, \mathbb{R}^n)$ é separável, isto é, possui uma base enumerável de abertos [30].

Considerando $\pi : TM \longrightarrow M$ a projeção natural do fibrado tangente na variedade, um campo C^1 é uma aplicação $X : M \longrightarrow TM$ tal que $\pi \circ X$ é a identidade em M. A partir disto, vemos que $\mathcal{X}^1(M)$ é um subconjunto fechado de $C^1(M, \mathbb{R}^n)$, pois M está imersa em algum $\mathbb{R}^n$, logo $TM_p \subset \mathbb{R}^n$. Assim $\mathcal{X}^r(M)$ é um espaço de *Baire* separável, ou seja, todo residual neste espaço é denso, e o mesmo possui base enumerável de abertos.

E portanto, formalmente dizemos que um campo de vetor $X \in \mathcal{X}^1(M)$ é C^1-genérico se X está em um subconjunto residual de $\mathcal{X}^1(M)$.

Logo abaixo mostramos exemplo da existência de um conjunto residual muito importante para um conjunto sob o ponto de vista de continuidade de funções.

Seja $M \in \mathcal{X}^r(M)$. Defina $\mathcal{K}(M)$ como sendo o conjunto de todos os subconjuntos compactos de M munido com a métrica de Hausdorff:

$$d_H(A, B) = \max\{\sup_{x \in A} d(x, B),\, \sup_{y \in B} d(y, A)\},$$

$A,\, B \subset M$.

Agora, dado dois espaços métricos N e L. Lembremos que uma aplicação $F : N \longrightarrow \mathcal{K}(L)$, é semicontínua inferiormente em $x \in N$ se, para todo aberto V de L intersectando $F(x)$, podemos encontrar uma vizinhança U de x em N tal que $V \cap F(y) \neq \emptyset$ para todo $y \in U$. Dizemos que F é semicontínua inferiormente se F é semicontínua inferiormente em todo $x \in N$.

E assim, funções deste tipo possuem um conjunto grande de pontos de continuidade:

Teorema 1.2.26 *[Continuidade Genérica]*

Sejam N e L dois espaços métricos completos e uma aplicação $F : N \longrightarrow \mathcal{K}(L)$. Se F é semicontínua inferiormente então existe um residual $\mathcal{R}$ de N tal que todo ponto em $\mathcal{R}$ é ponto de continuidade para F.

1.3 Dinâmica Hiperbólica

Nesta seção iremos abordar alguns resultados clássicos da teoria hiperbólica. Assim como anteriormente consideramos M como sendo uma variedade *Riemanniana* compacta, conexa e sem o bordo.

Definição 1.3.1 *Sejam $X, Y \in \mathcal{X}^r(M)$. Dizemos que X e Y são topologicamente equivalentes se existe um homeomorfismo $h : M \longrightarrow M$ que leva órbitas de X em órbitas de Y preservando a orientação das trajetórias. Isto é, dado $p \in M$ e $\delta > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que, para $0 < t < \delta$,*

$$h(X_t(p)) = Y_{\tilde{t}}(h(p))$$

para algum $0 < \tilde{t} < \epsilon$. Dizemos que h é uma equivalência topológica entre X e Y.

Temos assim definida uma relação de equivalência em $\mathcal{X}^r(M)$.

A próxima definição é um caso especial de equivalência entre campos.

Definição 1.3.2 *Dados $X, Y \in \mathcal{X}^r(M)$. Dizemos que X e Y são conjugados se existe uma equivalência topológica h que preserva o parâmetro t, isto é,*

$$h(X_t(p)) = Y_t(h(p))$$

para todo $p \in M$ e $t \in \mathbb{R}$. Chamamos, agora, h de conjugação entre X e Y.

A dinâmica local próxima a um elemento crítico hiperbólico é conjugado a um sistema linear. Isto vem facilitar o estudo, uma vez que a dinâmica de um elemento crítico hiperbólico em um sistema linear tem um comportamento bem entendido. O resultado que segue mostra esta relação.

Teorema 1.3.3 *[Hartman-Grobman para singularidades]*

Seja $\sigma \in M$ uma singularidade hiperbólica de um campo $X \in \mathcal{X}^1(M)$. Seja $Y = DX(\sigma)$ campo linear em TM_σ. Então existe uma vizinhança U de σ em M, uma vizinhança V de 0 em TM_σ e uma conjugação $h : U \longrightarrow V$, entre $X|_U$ e $Y|_V$.

A seguir enunciaremos um resultado análogo para órbitas periódicas. Porém, antes disso, necessitamos de algumas definições.

Definição 1.3.4 *Seja $O(p)$ uma órbita periódica hiperbólica de $X \in \mathcal{X}^1(M)$, com período π, e considere uma aplicação de Poincaré P definida numa seção transversal Σ em p. Consideremos E^s_p e E^u_p os espaços estável e instável do mapa de Poincaré $DP(p)$. Definamos a decomposição ao longo da órbita de p por $E^r_{X_t(p)} = DX_t(p)(E^r_p)$ para $r = s,\, u$. Isto gera o fibrado*

$$\mathcal{N} = \{(q, \nu) : q \in O(p) \;\; e \;\; \nu \in E^s_q \oplus E^u_q\}.$$

Existe um fluxo Ψ_t em $\mathcal{N}$ que é linear nas fibras de $E^s_q \oplus E^u_q$ dado por

$$\Psi_t(q, \nu) = (X_t(q), DX_t(q)\nu).$$

Teorema 1.3.5 *[Hartman-Grobman para órbitas periódicas]*

Seja $O(p)$ uma órbita periódica hiperbólica para um campo X. Então o fluxo X_t é conjugado em uma vizinhança de $O(p)$ em M ao fluxo Ψ_t numa vizinhança de $O(p) \times \{0\}$ em $\mathcal{N}$.

Definição 1.3.6 *Seja $\sigma \in M$ uma singularidade hiperbólica para X. Os seguintes conjuntos*

$$W^s_\beta(\sigma) = \{q \in M;\, d(X_t(q), X_t(\sigma)) \leq \beta \;\; \forall t > 0\}$$

e

$$W^u_\beta(\sigma) = \{q \in M;\, d(X_{-t}(q), X_{-t}(\sigma)) \leq \beta \;\; \forall t > 0\}$$

são chamados de variedade estável e instável fortes locais, respectivamente, de tamanho β de σ.

Teorema 1.3.7 (Variedade Estável) *Sejam $X \in \mathcal{X}^r(M)$ e σ uma singularidade hiperbólica para X. Então:*

1 - W^s_β é um disco C^r mergulhado com dimensão $Ind(\sigma)$

2 - O conjunto $W^s(\sigma) = \bigcup_{t \geq 0} X_{-t}(W^s_\beta(\sigma))$ é uma C^r-subvariedade imersa.

3 - $T_\sigma W^s(\sigma) = E^s_\sigma$.

4 - Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se Y é $\delta - C^r$-próximo de X e $D \subset W^s(\sigma)$ é um disco compacto mergulhado contendo σ, então existe um disco $D_Y \subset W^s(\sigma_Y)$ $\epsilon - C^r$-próximo de D onde σ_Y é a continuação de σ, isto é, σ_Y mantem-se um elemento crítico hiperbólico para Y.

Uma órbita periódico hiperbólico, pode ser vista como um conjunto. Assim sendo, o que segue é uma generalização para se definir o que seria um conjunto hiperbólico. Em particular, a teoria obtida para tais conjuntos, a saber existência de variedades estável e instável, também se aplicará a uma órbita periódica hiperbólica.

Definição 1.3.8 *Um conjunto Λ compacto e invariante para o fluxo X_t induzido por um campo $X \in \mathcal{X}^1(M)$ é dito hiperbólico se existe uma decomposição $T_\Lambda M = E \oplus \langle X \rangle \oplus F$ e constantes $k,\, \lambda > 0$ tais que para todo $x \in \Lambda$ e $t \geq 0$ temos que*

$$\|DX_t|_{E_x}\| \leq k e^{-\lambda t}$$

e

$$\|DX_{-t}|_{F_x}\| \leq ke^{-\lambda t}.$$

Existe também um Teorema que nos dá a existência de variedades estáveis e instáveis para conjuntos hiperbólicos. Mais precisamente, existem variedades invariantes que integram as direções E^s e E^u, as quais denotamos por W^{ss} e W^{uu}, respectivamente. Mais ainda, é possível mostrar que

$$W^{ss}(x) = \{y;\, d(X_t(y), X_t(x)) \longrightarrow 0 \ \textit{quando} \ t \longrightarrow +\infty\},$$

Definimos também, $W^s(\Lambda) = \bigcup_{x\in\Lambda} W^{ss}(x)$. Procedemos analogamente, para a existência da variedade instável. Maiores informações verifique [4].

Teorema 1.3.9 *[Robustez]*

Seja Λ um conjunto hiperbólico para um fluxo X_t, então existe uma vizinhança U de Λ e uma vizinhança $\mathcal{U}$ de X tal que se $Y \in \mathcal{U}$ e $K \subset U$ é um conjunto compacto Y_t-invariante, então K é hiperbólico para Y_t.

Definição 1.3.10 *Seja Λ um conjunto. Se existe uma vizinhança compacta U de Λ tal que*

$$\Lambda = \bigcap_{t\in\mathbb{R}} X_t(U)$$

então dizemos que Λ é um conjunto isolado.

Observação 1.3.11 *No caso em que Λ é um conjunto hiperbólico, a propriedade de isolamento é equivalente a de que o conjunto tenha uma estrutura de produto local, isto é, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tais que se $x,\, y \in \Lambda$ e $d(x,y) < \delta$ então $W^s_\epsilon(x) \cap W^u_\epsilon(y) = \{z\} \subset \Lambda$.*

Teorema 1.3.12 (Estabilidade) *Se Λ é um conjunto hiperbólico isolado para o fluxo X_t então dada uma vizinhança U de Λ existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de $X \in \mathcal{X}^1(M)$ tal que se $Y \in \mathcal{U}$ então existe $\Lambda_Y \subset U$ hiperbólico para Y_t tal que $Y_t|_{\Lambda_Y}$ é conjugado a $X_t|_\Lambda$.*

Sendo assim, dado um conjunto Λ hiperbólico e isolado para X_t, chamaremos de continuação do conjunto Λ para Y o conjunto Λ_Y. Em particular usamos também o termo continuidade de órbitas periódicas ou singularidades, hiperbólicas, considerando estes como conjuntos.

Definição 1.3.13 *Sejam $p,\, q \in M$ dois pontos periódicos hiperbólicos. Dizemos que p e q estão homoclinicamente relacionados se $W^s(O(p)) \cap W^u(O(q)) \neq \emptyset$ e $W^u(O(p)) \cap W^s(O(q)) \neq \emptyset$, e estas interseções são transversais.*

Definição 1.3.14 *Um conjunto Λ invariante pelo fluxo é dito transitivo se possui um ponto cuja órbita futura é densa em Λ.*

Teorema 1.3.15 *Se Λ é um conjunto hiperbólico isolado, possuindo órbitas periódicas densas então o mesmo se escreve como união disjunta finita $\Lambda = \Lambda_1 \cup \Lambda_2 \cup \ldots \cup \Lambda_k$ onde cada Λ_i é um conjunto compacto invariante, transitivo e isolado. Mais ainda, Λ_i é uma classe homoclínica, isto é, existe um ponto periódico $p \in \Lambda_i$ tal que Λ_i é o fecho do conjunto dos pontos periódicos que são homoclinicamente relacionados a p.*

Definição 1.3.16 *Seja $X \in \mathcal{X}^1(M)$. Se $\Omega(X)$ é um conjunto hiperbólico e possui órbitas críticas densas, isto é $\Omega(X) = \overline{Crit(X)}$, dizemos que X é um campo Axioma A.*

Definição 1.3.17 ([1]) *Dizemos que $X \in \mathcal{X}^1(M)$ possui decomposição espectral se houver uma partição finita $\Omega(X) = \Lambda_1 \cup \ldots \cup \Lambda_l$, onde $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_l$ são conjuntos transitivos.*

Dizemos que $\Lambda_i > \Lambda_j$ se

$$(W^u(\Lambda_i) \setminus \Lambda_i) \cap (W^s(\Lambda_j) \setminus \Lambda_j) \neq \emptyset.$$

Um r-ciclo é $\Lambda_{i_0} > \Lambda_{i_1} > \ldots > \Lambda_{i_r} = \Lambda_{i_0}$. Assim, dizemos que um campo é Axioma A sem ciclos quando não há ciclos estre as peças básicas

Definição 1.3.18 *Seja $\Lambda \subset M$ um conjunto invariante para o fluxo X_t. Dizemos que Λ admite uma decomposição dominada se $T_\Lambda M = E_\Lambda \oplus F_\Lambda$, se existem constantes K, $\lambda > 0$ tais que*

$$\frac{\|DX_t(x)|_{E_x}\|}{m(DX_t(x)|_{F_x})} \leq Ke^{-\lambda t}, \qquad \forall\, x \in \Lambda \;\; e \;\; t \geq 0.$$

Definição 1.3.19 *Seja Λ um conjunto compacto invariante para o fluxo X_t. Dizemos que Λ é um conjunto parcialmente hiperbólico se admite uma decomposição dominada $T_\Lambda M = E^s_\Lambda \oplus E^c_\Lambda$ com contração no subfibrado E^s_Λ, ou seja*

$$\|DX_t(x)|_{E^s_\Lambda}\| \leq Ke^{-\lambda t}$$

para todo $x \in \Lambda$ e $t \geq 0$. Além disso, dizemos que o subfibrado E^c_Λ é seccional expansor se $dim(E^c_\Lambda) \geq 2$ e

$$|Det(DX_t(x)|L_x)| \geq K^{-1}e^{\lambda t}$$

para todo $x \in \Lambda$ e $t \geq 0$ e todo subespaço bidimensional L_x de E^c_x.

Definição 1.3.20 *Dizemos que um conjunto Λ é seccional-hiperbólico, ou singular-hiperbólico, se é um conjunto parcialmente hiperbólico, possuindo um subfibrado central seccional expansor, e se possui todas as singularidades hiperbólicas.*

Definição 1.3.21 *Um campo vetorial $X \in \mathcal{X}^1(M)$ é chamado de fluxo seccional-Axioma A se existir uma decomposição finita disjunta $\Omega(X) = \Omega_1 \cup \ldots \cup \Omega_k$ formada por conjuntos transitivos com órbitas periódicas densas $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ tais que, para todo $1 \leq i \leq k$, Ω_i ou é um conjunto hiperbólico para X ou um conjunto seccional-hiperbólico para X ou um conjunto seccional-hiperbólico para $-X$.*

O conceito de índices de elementos críticos é um dos objetos que aparecem no estudo de propriedades hiperbólicas de sistemas dinâmicos.

Definição 1.3.22 *Seja $p \in M$ um ponto periódico hiperbólico para um fluxo X_t. Considerando um mapa de poincaré definido numa seção transversal contendo p, definimos o índice de p como sendo a dimensão do espaço estável de p com respeito a $DP(p)$.*

Notemos que da definição acima, segue que todo ponto $q \in O(p)$ possui mesmo índice de que p.

Agora, podemos observar que em uma peça básica, devido a variação contínua da decomposição hiperbólica, e a conexidade do conjunto, temos que a dimensão das direções estável e instável são as mesmas em todo ponto da peça. Assim sendo, definimos como sendo o índice de uma peça básica a dimensão da direção estável da decomposição hiperbólica do mesmo. Mais ainda, pelo Teorema 1.3.12 e Teorema 1.3.9 temos que o índice é constante numa vizinhança do conjunto e do campo.

Fixamos a seguir algumas notações para índice. Seja O uma órbita fechada hiperbólica, denotaremos o índice de *Morse* da órbita O por $I(O) = dim(E^s_O)$. Analogamente, denotamos por $I(\sigma) = dim(E^s_\sigma)$ o índice de uma singularidade σ.

Definição 1.3.23 *Seja $\sigma \in M$ uma singularidade hiperbólica. Diremos que σ tem codimensão um se $I(\sigma) = 1$ ou $I(\sigma) = n - 1$.*

Chamamos uma órbita periódica hiperbólica O de poço (respect. fonte) quando o índice Morse é $I(O) = 1$ (respct. $I(O) = n - 1$)).

No caso em que $\sigma \in M$ é uma singularidade hiperbólica. Dizemos que σ é um poço, isto é, uma singularidade atratora, se $DX(\sigma) < 0$. Caso $DX(\sigma) > 0$ dizemos que σ é uma fonte, isto é, uma singularidade repulsora.

1.4 Lema de Franks e Aplicações

Nesta seção apresentaremos alguns resultados perturbativos para fluxos e algumas aplicações.

Definição 1.4.1 *Seja $X \in \mathcal{X}^1(M)$. Dizemos que X é um campo Kupka-Smale se todo elemento crítico é hiperbólico e além disso dados σ_1 e σ_2 pontos críticos quaisquer de X_t, então $W^s(O(\sigma_1))$ é transversal a $W^u(O(\sigma_2))$.*

Tais fluxos são abundantes, como segue no próximo resultado.

Teorema 1.4.2 *[Teorema de Kupka-Smale (teorema 3.1 de [30], p.118)]*
Existe um residual KS de $\mathcal{X}^1(M)$ tal que para todo $X \in KS$ é um campo Kupka-Smale.

O Teorema de *Kupka-Smale* diz que genericamente os ponto críticos são hiperbólicos. Lembremos agora, que o foco principal deste texto é exatamente obter propriedades diferenciais de um fluxo que robustamente os pontos críticos são todos hiperbólicos.

Uma das principais noções em sistemas dinâmicos é a de estabilidade. A grosso modo, dizer que um sistema é estável é dizer que qualquer sistema suficientemente próximo deste tem a mesma dinâmica, ou estruturas de órbitas, que o sistema original. Em particular, o estudo da dinâmica de um implica o estudo da dinâmica do outro.Formalmente, o significado preciso de estabilidade, do ponto de vista topológico, é dado por:

Definição 1.4.3 *Um campo de vetores X é estruturalmente estável se existe uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}^1(M)$ de X tal que para todo $Y \in \mathcal{U}$ existe um homeomorfismo $h : M \longrightarrow M$ que leva órbitas de X em órbitas de Y preservando as orientações das trajetórias, da seguinte maneira, se $x \in M$ e $\delta > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que, para $0 < t < \delta$, $h(X_t(x)) = Y_{\tilde{t}}(h(x))$ para algum $0 < \tilde{t} < \epsilon$.*

Definição 1.4.4 *Dizemos que um campo $X \in \mathcal{X}^1(M)$ é estrela se existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de X tal que se $Y \in \mathcal{U}$ e $y \in Crit(Y)$ então y é hiperbólico.*

Os campos Axioma A formam uma classe de exemplos de campos estrela se adicionarmos a condição de não-ciclos.

O que vemos a seguir é que o estudo de fluxos estrela está intimamente ligado com a estabilidade do fluxo. Para tal usaremos o lema de *Lema de Franks*

O conjunto $B_r(x) = \{y \in M;\, d(x, y) < r\}$ denotará a bola de centro em x e raio r, onde d é a métrica induzida pela métrica Riemanniana de M.

Por compacidade, podemos assumir que a aplicação exponencial $exp : TM_p(1) \longrightarrow M$ está bem definida para todo $p \in M$, verifique em [9], onde

$$TM_p(1) = \{\nu \in TM_p : \|\nu\| \leq 1\}.$$

Franks conseguiu perturbar um difeomorfismo a partir de uma perturbação da sua derivada, mas ainda isto é feito de uma maneira especial, a perturbação obtida é localmente linear nas coordenadas locais de M.

Lema 1.4.5 *[Lema de Franks para singularidades [4]]*

Sejam $X \in \mathcal{X}^1(M)$ e $\sigma \in Sing(X)$. Então para todo $\epsilon > 0$ e toda C^1-vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}^1(M)$ de X, existe $\delta > 0$ tal que se $L : TM_\sigma \longrightarrow TM_\sigma$ é uma aplicação linear satisfazendo $\|L - DX(\sigma)\| < \delta$, então existe $Y \in \mathcal{U}$ de modo que

$$Y(x) = (D_{exp_\sigma^{-1}(x)} exp_\sigma) \circ L \circ exp_\sigma^{-1}(x)$$

se $x \in B_\epsilon(\sigma)$ e $Y(x) = X(x)$ no complementar de $B_r(\sigma)$ para algum $r > \epsilon$.

No resultado a seguir que é a versão do Lema de Franks para órbitas periódicas vamos usar a seguinte linguagem: dado um ponto $p \in M \setminus Sing(X)$, chamamos de *tubo de raio ϵ centrado na órbita de p* a imagem de $B_\epsilon(p) \cap \Sigma$ pelo fluxo, onde Σ é uma seção transversal em p. O objeto possui bem o significado que o nome sugere. Pegamos a bola de raio ϵ ao redor de p contida na seção transversal e a levamos pelo fluxo, gerando assim um tubo.

Lema 1.4.6 *[Lema de Franks para órbitas periódicas([4] p.145)]*

Sejam $X \in \mathcal{X}^1(M)$, $p \in Per(X)$ e Σ uma seção transversal a X contendo p. Assim consideremos $P : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ a correspondente aplicação de Poincaré, e $\mathcal{U}$ uma C^1-vizinhança de X. Então, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ com a seguinte propriedade: Se $L : N_p \longrightarrow N_p$ é um isomorfismo linear com $\|L - DP(p)\| < \delta$, então existe um campo $Y \in \mathcal{U}$ que satisfaz:

1 - $Y(x) = X(x)$, se x não pertence ao tubo de raio ϵ centrado na órbita de p;

2 - $p \in Per(Y)$;

3 - se $P_Y : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ é o mapa de Poincaré para Y, então

$$P_Y(x) = exp_p \circ L \circ exp_p^{-1}(x)$$

se $x \in B_\epsilon(p) \cap \Sigma$ e $P_Y(x) = P(x)$ se $x \notin B_r(p) \cap \Sigma$, para algum $r > \epsilon$ tão próximo quanto queiramos.

A versão para órbitas periódicas de fluxos do *Lema de Franks* diz que dada uma pertubação linear da derivada do mapa de *Poincaré* da órbita, existe um campo próximo que realiza este isomorfismo linear como mapa de *Poincaré*, em coordenadas exponenciais de M. Além disso o campo coincide com o original fora do tubo centrado na órbita periódica.

Na verdade, o *Lema de Franks* é uma coleção de vários resultados diferentes com a mesma filosofia: produzir perturbações não-lineares de um dado sistema, a partir de perturbações da sua derivada. Estas versões podem ser encontrada em [4], sendo a original encontrada em [10].

Como aplicação dos *Lemas de Franks* acima podemos mostrar o seguinte interessante resultado.

Teorema 1.4.7 *Se X é estruturalmente estável, então ele é estrela.*

Demonstração.

Suponhamos que X não seja estrela. Logo para toda vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}^1(M)$ de X, existe $Y \in \mathcal{U}$ possuindo um ponto crítico não hiperbólico.

Provemos o caso em que o elemento crítico é uma órbita periódica. O caso singular é análogo.

Sejam $p \in Per(Y)$ não hiperbólico com período π, e $\epsilon > 0$. Considere $\delta > 0$ dado pelo lema 1.4.6. Consideremos o mapa de *Poincaré* $P : \Sigma \longrightarrow \Sigma$, onde Σ é a seção transversal de p para Y, tal que $T\Sigma_p = N_p$. Assim, temos que $DY_\pi(p)|_{N_p} = DP(p) : N_p \longrightarrow N_p$.

Como p é não hiperbólico, temos que $DP(p)$ possui autovalor no círculo unitário no plano complexo. Neste caso, existe $L : N_p \longrightarrow N_p$ linear, δ-próxima de P^π possuindo autovalor λ que é uma j-ésima raiz da unidade, com $j \in \mathbb{N}$.

Assim, pelo Lema 1.4.6, existe $Z \in \mathcal{U}$ tal que $p \in Per(Z)$, cujo mapa de Poincaré, $P_Z : \Sigma \longrightarrow \Sigma$ é conjugado ao mapa linear L pela aplicação exponencial numa pequena vizinhança de p em Σ.

Sejam v o autovetor associado a λ, e s tal que $|s|$ seja suficientemente pequeno de forma que $exp_p(sv)$ esteja na vizinhança de p onde vale a conjugação, temos que

$$
\begin{aligned}
P_Z^j(exp_p(sv)) &= exp_p \circ L^j \circ exp_p^{-1}(exp_p(sv)) \\
&= exp_p \circ L^j(sv) \\
&= exp_p(L^j(sv)) \\
&= exp_p(\lambda^j(sv)) \\
&= exp_p(sv)
\end{aligned}
$$

Desta forma, segue que o fluxo Z_t possui uma curva de pontos periódicos de período j em órbitas distintas. Em particular, Z possui infinitas órbitas periódicas de período j.

Por outro lado, como consequência do Teorema 1.4.2 e do Teorema de Hartman Grobman para difeomorfismos existe um campo W próximo de Z com finitas órbitas periódicas de período período limitado; assim os campos Y e Z não podem ser conjugados. Como a vizinhança $\mathcal{U}$ era qualquer temos que o campo X não é estruturalmente estável.

■

Agora vamos enunciar um resultado importante de perturbação de campos de vetores a partir de perturbações de um mapa de *Poincaré*, o qual nos auxiliará no próximo capítulo.

Vamos denotar por $Tub(x, r, t)$ o tubo ao longo da órbita de x de raio r e tamanho t, $Emb^1(\Sigma_{x,r}, \Sigma_y)$ como sendo o conjunto de todos mergulhos C^1 entre $\Sigma_{x,r}$ e Σ_y, onde $\Sigma_{x,r} = exp(N_{x,r})$, com $N_{x,r} = \{\nu \in N_x;\ \|\nu\| < r\}$, $r > 0$ e $x \in M \setminus Sing(X)$, e considerar neste espaço a topologia C^1. Por último, denotaremos por $\mathcal{I}_\epsilon(\Sigma_{x,r}$ o conjunto de difeomorfismos $\varphi : \Sigma_{x,r} \longrightarrow \Sigma_{x,r}$ ϵ-próximos de identidade na topologia C^1.

Lema 1.4.8 *[[34] remark 2, p.296]*

Sejam $X \in \mathcal{X}^1(M)$ e $x \in M \setminus Sing(X)$. Suponha que $X_s(x) \neq x$, para todo $0 < s \leq t$ e considere $P : \Sigma_{x,r_0} \longrightarrow \Sigma_y$ o mapa de Poincaré, com $r_0 > 0$ suficientemente pequeno. Então, para toda $\mathcal{U}$ vizinhança C^1 de X, e todo $0 < r \leq r_0$, existe um $\epsilon > 0$ com a seguinte propriedade: para todo $\varphi \in \mathcal{I}_\epsilon(\Sigma_{x,r})$ existe $Y \in \mathcal{U}$ satisfazendo

1 - $Y(z) = X(z)$ se $z \notin Tub(x, r, t)$;

2 - $P_Y(z) = P \circ \varphi(z)$, se $z \in \Sigma_{x,r}$.

1.5 Poços, Singularidades, Conecting Lemma de Hayashi e Aplicações

Por decomposição espectral, uma obstrução para o campo ser *Axioma A* é o mesmo possuir infinitos poços ou fontes. Como visto na seção 1.3, um campo *Axioma A* possui variedades estáveis e/ou instáveis dos pontos em $\Omega(X)$ com tamanho local suficientemente grande para todos os pontos. Desta maneira, temos obrigatoriamente a existência de finitos poços e fontes para campos *Axioma A*. Mais ainda, vamos ver nesta seção um resultado dado por Pliss, em [32], que nos diz que um campo estrela também dever possuir finitos poços e fontes.

Teorema 1.5.1 *Se X é um campo estrela, então X tem finitos poços e fontes.*

O resultado é intuitivo. De fato, caso um campo possua infinitos poços podemos intuir que estes poços vão perdendo hiperbolicidade, isto é, há poços com autovalores, dos respectivos mapas de Poincaré (no caso de orbitas críticas fechadas), que vão se aproximando do círculo unitário. Então, pelo Lema de Franks, seria possível obter um campo Y próximo do campo original com um ponto periódico não-hiperbólico, e isto violaria a propriedade estrela.

Introduziremos agora o *Connecting Lemma de Hayashi*. Versões mais gerais do *Connecting Lemma* aparecem em [39] e [40].

Seja Λ um conjunto hiperbólico isolado, isto é se Λ possui singularidades, elas estão isoladas. Tome U uma vizinhança isoladora de Λ. Lembremos agora que

$$W^r_\epsilon(\Lambda) = \bigcup_{p\in\Lambda} W^r_\epsilon(p)$$

onde $r = s,\ u$, são as variedades estável e instável locais de Λ. Assim, consideremos os seguintes domínios fundamentais

$$D^s = \overline{W^s_\epsilon(\Lambda) \setminus X_1(W^s_\epsilon(\Lambda))}$$

e

$$D^u = \overline{W^u_\epsilon(\Lambda) \setminus X_{-1}(W^u_\epsilon(\Lambda))}.$$

Definição 1.5.2 *Uma sequência de órbitas finitas $\{\gamma_k\}$ de X é chamada uma sequência quase-homoclínica associada a Λ se γ_k acumula em D^s e D^u, e $\gamma_k \cap U^C \neq \emptyset$ para todo k, onde U é uma vizinhança de Λ.*

Teorema 1.5.3 *[Connecting Lemma de Hayashi. [18]]*

Dados $X \in \mathcal{X}^1(M)$, uma C^1-vizinhança $\mathcal{U}$ de X e um conjunto hiperbólico isolado Λ. Se X tem uma sequência quase-homoclínica associada a Λ então existe $Y \in \mathcal{U}$ que coincide com X em uma vizinhança de Λ e que possui um ponto homoclínico associado a Λ.

O connecting lemma trata da criação de um ponto homoclínico por uma pequena perturbação do campo, na presença de uma sequência quase-homoclínica. Este resultado é uma consequência da seguinte proposição um pouco mais técnica.

Proposição 1.5.4 *[Connecting Lemma Parte Técnica [14]].*

Seja $X \in \mathcal{X}^1(M)$, e $z \in M \setminus Crit(X)$. Então para qualquer $\mathcal{U}$ vizinhança de X, existem constantes $\rho > 1$, $T > t$ e $\delta_0 > 0$ tais que para qualquer $0 < \delta \geq \delta_0$ e qualquer par de pontos x, y que estão fora de um tubo $\Delta(\delta) = \bigcup_{t\in[0,T]} B(X_t(z), \delta)$. Se a órbita positiva de x e a órbita negativa de y ambas atingem $B(z, \dfrac{\delta}{\rho})$, então existe $Y \in \mathcal{U}$ tal que $Y \equiv X$ fora de $\Delta(\delta)$, y está na órbita positiva de x e a Y-órbita de x até y atinge $B(z, \delta)$.

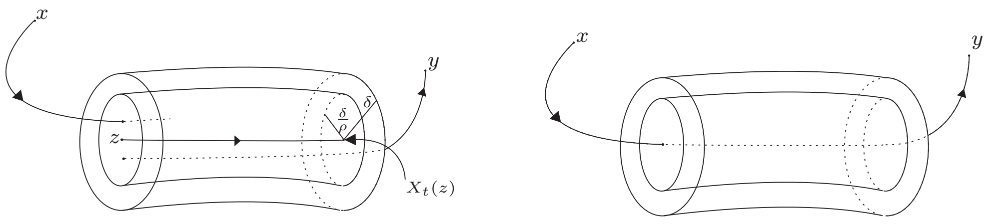

Figura 1.1: Antes e depois da perturbação.

Agora vamos dar uma ideia de como obter o Teorema 1.5.3 a partir da Proposição 1.5.4 no caso que Λ é apenas uma singularidade. Assim, sejam $X \in \mathcal{X}^1(M)$ e $\mathcal{U}$ uma C^1 vizinhança de X. Supondo $\Lambda = \{\sigma\}$, onde σ é uma singularidade hiperbólica, no Teorema 1.5.3, temos que por hipótese que X possui uma sequência quase homoclínica, $\{\gamma_k\}$, associada a Λ. Desta forma, tomando k suficientemente grande, consideremos a órbita $O(q_k) = \gamma_k$, tal que $X_{-t}(q_k)$ converge para $z_u \in W^u(\sigma)$ e $X_t(q_k)$ converge para $z_s \in W^s(\sigma)$.

Tomemos $\delta > 0$, como na Proposição 1.5.4, tal que os tubos $\Delta_u(\delta) = \bigcup_{-t\in[0,T_u]} B(X_{-t}(z_u), \delta)$ e $\Delta_s(\delta) = \bigcup_{t\in[0,T_s]} B(X_t(z_s), \delta)$ sejam disjuntos, e não intersectam uma vizinhança da singularidade σ. Como a órbita positiva de q_k e a órbita negativa de $\tilde{z}_s = X_T(z_s)$, para $T > T_s$, ambas atingem $B(z_s, \frac{\delta}{\rho})$, então existe $Y \in \mathcal{U}$ tal que $Y \equiv X$ fora de $\Delta_s(\delta)$, e $\tilde{z}_s$ está na órbita positiva de q_k. Da mesma forma, por escolha de δ, e portanto dos tubos, como $Y \equiv X$ foda de $\Delta_s(\delta)$, temos que a órbita negativa de q_k e a órbita positiva de z_u para o campo Y é a mesma do campo X. Assim, a órbita negativa de q_k e a órbita positiva de z_u atingem $B(z_u, \frac{\delta}{\rho})$, então, aplicando novamente a Proposição 1.5.4, exite $Z \in \mathcal{U}$ tal que $Z \equiv Y$ fora de $\Delta_u(\delta)$, e q_k está na órbita positiva de z_u e a $Z-$órbita de z_u até q_k atinge $B(z_u, \delta)$. Assim, como $Z \equiv X$ numa vizinhança de σ que contêm z_s e $\tilde{z}_u$, temos que estes pontos ainda pertencem a variedades estável e instável, respectivamente, logo criamos uma conexão homoclínica (loop) entre $W^s(\sigma)$ e $W^u(\sigma)$.

Pelo que vimos até agora, podemos observar que as órbitas periódicas são muito importantes na descrição da dinâmica de um sistema. Também serão importantes as órbitas que são 'quase'-periódicas. Para isto iremos definir o conjunto chamado *Pré-periódico.* No próximo capítulo ficará mais claro a importância de tais órbitas e a relação delas com os fluxos estrelas.

Definição 1.5.5 *Dizemos que um ponto p é Pré-periódico para um fluxo X_t se existem sequências $X_n \longrightarrow X$, $X, X_n \in \mathcal{X}^1(M)$, e pontos periódicos $p_n \in Per(X_n)$ tais que $p_n \longrightarrow p$. Se além disso, todos os pontos periódicos p_n possuírem índice i, então dizemos que p é um ponto i-pré-periódico. Denotaremos por $Per^*(X)$ o conjunto dos pontos pré-periódicos de X, e por $Per_i^*(X)$ o conjunto dos pontos pré-periódicos de índice i de X.*

Pela definição podemos observar que $\overline{Per(X)} \subset Per^*(X)$. Notemos também que $Per^*(X)$ é um conjunto invariante pelo fluxo. De fato, se $x \in Per^*(X)$ e $T \in \mathbb{R}$ fixo, então, por continuidade, dada V uma vizinhança de $X_T(x)$ existem U uma vizinhança de x e $\mathcal{U}$ uma vizinhança de X tais que se $Y \in \mathcal{U}$ e $y \in U$ então $Y_T(y) \in V$. Assim, temos que $X_T(x)$ também pertence a $Per^*(X)$.

No caso em que o campo X seja Axioma A, teríamos por definição que $\Omega(X) \subset Per^*(X)$. Uma pergunta natural é se isto ocorre com alguma generalidade. A resposta foi dada por Pugh em [34], mais precisamente:

Teorema 1.5.6 (Teorema de Densidade Geral [33]) *Seja $X \in \mathcal{X}^1(M)$. Então o conjunto $\mathcal{R}$ dos $X \in \mathcal{X}^1(M)$ tal que são satisfeitas as condições (1)-(4), garantem que $\mathcal{R}$ é um residual em $\mathcal{X}^1(M)$.*

(1) Cada singularidade de X é genérica;

(2) Cada órbita fechada de X é genérica;

(3) Todas as variedades estáveis ??e instáveis ??dos pontos periódicos de X se encontram em posição geral;

(4) $\alpha(p) \cup \omega(p) \subset \Omega(X)$ para todo $p \in M$.

Tal resultado é uma consequência do Closing Lema de Pugh, o qual segue:

Teorema 1.5.7 *[Closing Lemma]*

Seja X um campo e $p \in \Omega(X)$. Então para cada C^1-vizinhança $\mathcal{U}$ de X e U uma vizinhança de p, existe $Y \in \mathcal{U}$ e um ponto periódico $q \in Per(Y) \cap U$.

Capítulo 2

Uma Dicotomia para Fluxos em Dimensões Altas

Neste capítulo iremos demonstrar os dois principais resultados desta dissertação, Teorema A e Teorema B, que são os principais resultados em [3]. Tais resultados são casos particulares na direção das Conjecturas 1 e 2.

Relembremos o Teorema A:

Teorema A

Um campo vetorial X C^1-genérico para o qual as singularidades acumuladas por órbitas periódicas têm codimensão um satisfaz apenas uma das seguintes propriedades:

(1) *X possui um ponto acumulado por órbitas periódicas hiperbólicas de diferentes índices de Morse;*

(2) *X é seccional-Axioma A.*

Para demonstrarmos este resultado iremos precisar do auxílio de alguns lemas e proposições que seguem.

A partir de agora vamos considerar fixado M uma n-variedade compacta, conexa e sem bordo, $n \geq 3$, $X \in \mathcal{X}^1(M)$ um campo de vetores C^1 e dadoΛ um conjunto compacto e invariante para o fluxo X_t induzido por X, denotemos por $Sing(X, \Lambda)$ o conjunto das singularidade de X em Λ.

Definição 2.0.8 *Um conjunto Λ invariante por X_t é chamado de fortemente homogêneo de índice Ind, onde $0 \leq Ind \leq d-1$ é um inteiro, se exite uma C^1 vizinhança $\mathcal{U}$ de X e uma vizinhança U de Λ tais que, se O é uma órbita periódica para um campo de vetor $Y \in \mathcal{U}$ inteiramente contida em U, então a órbita O é hiperbólica para Y e tem índice Ind.*

Observação 2.0.9 *Seja Λ um conjunto transitivo não-trivial e fortemente homogêneo de índice i. Pelo Closing Lemma podemos verificar que Λ está contido em um conjunto pré-periódico de índice i.*

Acontece que a propriedade de um campo ser fortemente homogêneo impõe certas restrições sobre os índices de Morse das singularidades. Na sequência vamos investigar tais restrições usando a teoria clássica de bifurcações de uma órbita homoclínica de uma singularidade hiperbólica do tipo sela. Isto foi estudado por Gan, Wen e Zhu em [13]. Convém destacar que o estudo de bifurcações de uma órbita homoclínica para uma singularidade foi primeiramente estudado por Andronov Leontovich nos anos trinta do século passado, que resolveu o problema do surgimento de um ciclo limite a partir de uma órbita homoclínica para uma sela no caso bidimensional. Para o caso de dimensões superiores, o entendimento de tais bifurcações são mais complicadas, e o mesmo foi resolvido por L. Shilinikov nos anos sessenta. A teoria ficou conhecida como bifurcação de Shilinikov. Em [36], Shilinikov provou dois resultados importantes sobre esta teoria, que iremos enunciar a seguir. Antes disto precisamos de algumas terminologias.

Seja σ uma singularidade hiperbólica de um campo vetorial X com uma órbita homoclínica Γ, e vamos assumir que os autovalores de $DX(\sigma)$ satisfazem:

$$Re(\lambda_l) \leq \ldots \leq Re(\lambda 2) \leq Re(\lambda 1) < 0 < Re(\gamma_1) \leq Re(\gamma_2) \leq \ldots \leq Re(\gamma_r) \tag{2.1}$$

com $l + r = n$. Denotemos por

$$\Delta(\sigma) = Re(\lambda_1) + Re(\gamma_1)$$

o *valor de sela* de σ. A menos de uma perturbação, podemos assumir $\Delta(\sigma) \neq 0$, mais ainda vamos supor que $\Delta(\sigma) < 0$. Alterando X para $-X$, o caso $\Delta(\sigma) > 0$ se torna análogo. Genericamente, podemos supor que, se o primeiro autovalor γ_1 é real, então

$$\gamma_1 < Re(\gamma_i) \ \ (i = 2, \ldots, n),$$

e se γ_1 é complexo, então

$$Re(\gamma_1) = Re(\gamma_2) < Re(\gamma_i) \ \ (i = 3, \ldots, n).$$

Para distinguirmos estes dois casos, vamos chamar σ de *sela* no primeiro, e de *sela-foco* no segundo caso.

Iremos precisar também, das duas hipóteses de não-degeneracidade que seguem:

(1) Γ não pertence a $W^{uu}(\sigma)$, onde $W^{uu}(\sigma)$ é a variedade instável forte de σ, que é uma variedade invariante tangente em σ ao auto-espaço da matriz de linearização que corresponde aos autovalores não-principais $\gamma_2, \ldots, \gamma_n$ no caso que γ_1 é real, ou $\gamma_3, \ldots, \gamma_n$ no caso que γ_1 é complexo.

(2) A variedade estendida $W^{sE}(\sigma)$ é transversal à variedade instável $W^u(\sigma)$ em cada ponto situado em Λ, onde a variedade estável estendida $W^{sE}(\sigma)$ é tangente em σ ao auto-espaço da matriz de linearização que corresponde aos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_l$ e γ_1 o autovalor

instável fraco no caso sela, ou $\gamma_{1,2}$ no caso foco-sela, respectivamente.

Como podemos ver na sequência as condições acima são satisfeitas genericamente.

Lema 2.0.10 *Seja $X \in \mathcal{X}^1(M)$ possuindo uma conexão homoclínica Γ para uma singularidade hiperbólica σ de X. Dado uma vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}^1(M)$ de X, existe $Y \in \mathcal{U}$ tal que σ ainda é uma singularidade para Y, e existe uma conexão homoclínica $\tilde{\Gamma}$ próxima de Γ para Y e σ satisfazendo as duas condições de não-degeneracidade.*

Demonstração.

Seja σ uma singularidade hiperbólica para o campo X tal que os autovalores de $DX(\sigma)$ satisfazem a equação 2.1. Seja $\mathcal{U} \in \mathcal{X}^1(M)$ uma vizinhança qualquer de X e Γ uma conexão homoclínica para σ.

Vamos supor γ_1 real, com $0 < \gamma_1 \leq Re(\gamma_i)$, com $i = 2, \ldots, n$. A demonstranção no caso em que γ_1 é complexo é similar.

Seja $q \in \Gamma$ com $q \neq \sigma$ e assim, notemos que $T_q W^s_\sigma \cap T_q W^u_\sigma \neq \{0\}$, ou seja, temos uma interseção no ponto q das direções estável e instável das respectivas variedades de σ. Agora, a menos de um perturbação do campo usando o Lema de Franks, Teorema 1.4.6, podemos assumir que esta interseção contém apenas o vetor direção do campo.

Agora, iremos verificar se a condição (1) de não-degeneracidade é satisfeita para σ e Γ. Suponhamos que Γ pertença a variedade instável forte $W^{uu}(\sigma)$ de σ (ver figura 2.1 abaixo), pois caso contrario a condição (1) já estaria satisfeita. Fixando t, suponha que $X_s(q) \neq q$ para todo $0 < s \leq t$. Tomemos também seções transversais em q e $X_t(q)$, sejam elas Σ_q e $\Sigma_{X_t(q)}$, respectivamente. Claramente temos que existe $\tilde{q} \in (\Sigma_{X_t(q)} \cap W^u(\sigma))$, tal que $\tilde{q} \notin W^{uu}(\sigma)$. Podemos escolher $\tilde{q}$ tão próximo quanto quisermos de q. Assim, consideremos o mapa de *Poincaré* $P : \Sigma_q \longrightarrow \Sigma_{X_t(q)}$. Tomemos U_0 uma vizinhança de q em Σ_q, de raio $r_0 > 0$ dado pelo Lema 1.4.8.

Desta forma, podemos encontrar um difeomorfismo $L : \Sigma_{X_t(q),r} \longrightarrow \Sigma_{X_t(q),r}$ ϵ-próximo da identidade, para algum $\epsilon > 0$ e $0 < r \leq r_0$ pequenos, tal que $L(\tilde{q}) = q$. Logo, pelo Lema 1.4.8, existe um campo $Y \in \mathcal{U}$ tal que

$$Y(z) = X(z)$$

para todo $z \in T(q, z, t)$, e

$$P_Y(z) = P \circ L(z)$$

para todo $z \in \Sigma_{q,r}$.

Assim, note que $P_Y(\tilde{q}) = P \circ L(\tilde{q}) = X_t(q)$. Mais ainda, como $Y \equiv X$ em $(T(q, z, t))^C$, temos que $O(\tilde{q}) = \tilde{\Gamma}$ é a nova conexão homoclínica para Y com $\tilde{\Gamma} \cap W^{uu}(\sigma) = \emptyset$ (ver figura 2.1 abaixo), pois $\tilde{q} \in W^u(\sigma) \setminus W^{uu}(\sigma)$, por escolha. Com isto garantimos que a condição (1) de não-degeneracidade seja satisfeita para Y.

Vamos, agora, verificar se a condição (2) de não-degeneracidade é satisfeita por $\tilde{\Gamma}$ e σ. Para isto vamos tomar $u_1 \in Aut(\gamma_1)$, onde $Aut(\gamma_1)$ é o autoespaço associado ao auto valor γ_1. Em coordenadas locais, numa vizinhança U de σ, podemos assumir que $W^{Es}_{loc}(\sigma) = E^s \oplus \langle u_1 \rangle \cap U$.

Vamos supor que $W^{Es}(\sigma)$ não seja transversal a $W^u(\sigma)$, para algum $q \in \tilde{\Gamma}$. Seja $T \in \mathbb{R}$ tal que $Y_T(q) \in W^{Es}_{loc}(\sigma)$. Como acima podemos supor que $T_qW^s(\sigma) \cap T_qW^u(\sigma)$ contêm apenas o vetor direção do campo, logo para que $W^{Es}(\sigma)$ não seja transversal a $W^u(\sigma)$ no ponto q devemos ter que

$$DY_{-T}(q)|_{\langle u_1 \rangle} \subset T_qW^u(\sigma).$$

Agora, usando *Franks Lema* novamente, podemos perturbar o campo a fim de que $DY_{-T}(q)|_{\langle u_1 \rangle} \not\subseteq T_qW^u(\sigma)$, e assim teremos que $T_qW^{Es}(\sigma)$ intesecte transversalmente $T_qW^u(\sigma)$ desde que a conexão homoclínica foi preservada pela perturbação. Como a conexão homoclínica $\tilde{\Gamma}$ coincide com a órbita do ponto q, temos portanto que a condição (2) de não-degeneracidade é satisfeita. E assim, segue o resultado.

■

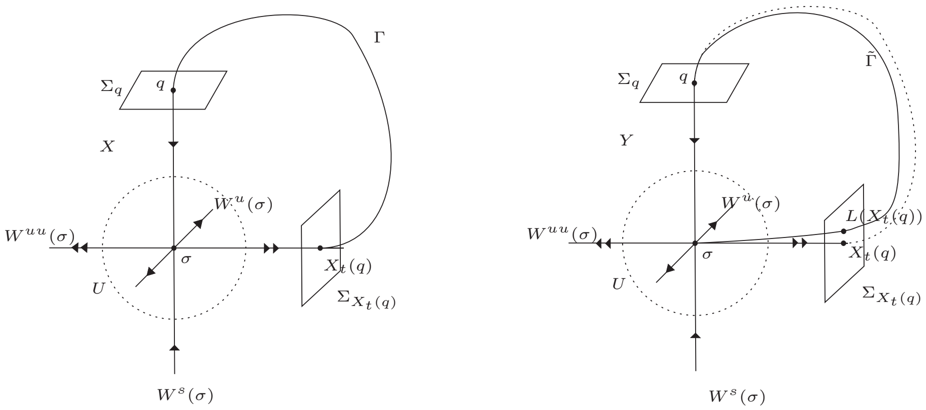

Figura 2.1: Antes e depois da perturbação.

Agora enunciaremos dois resultados importantes de bifurcação homoclínica dados por Shilinikov.

Teorema 2.0.11 *[[36]]*
Seja $X \in \mathcal{X}^1(M)$ e σ uma sela com valor de sela $\Delta(\sigma) < 0$. Suponha que os autovalores de $DX(\sigma)$ satisfazem a suposição genérica na equação 2.1. Além disso, seja Γ uma órbita homoclínica de σ que satisfaz as condições de não-degeneracidade (1) e (2). Então, existe uma pequena perturbação arbitrária Y de X tal que Y possui uma órbita periódica com índice $Ind(\sigma)$, que está próximo da órbita homoclínica Γ.

Teorema 2.0.12 *[[36]]*
Seja $X \in \chi^1(M)$ e σ é um foco-sela com valor de sela $\Delta(\sigma) < 0$. Suponha que os autovalores de $DX(\sigma)$ satisfazem a suposição genérica na equação 2.1. Além disso, seja Γ uma órbita homoclínica de σ que satisfaz as condições de não-degeneracidade (1) e (2). Então em uma pequena vizinhança arbitrária de Γ existem infinitas selas de órbitas periódicas com índice $Ind(\sigma)$.

Com auxílio do *connecting lemma de Hayashi*, Gan, Wen e Zhu provaram em [13] que, se Λ é um conjunto robustamente transitivo, fortemente homogêneo e possuindo apenas singularidades hiperbólicas, então $\Delta(\sigma) \neq 0$, além disso, $I(\sigma) = Ind(\Lambda)$ ou $Ind(\Lambda) + 1$, dependendo se $\Delta(\sigma) > 0$ ou $\Delta(\sigma) < 0$, para todo $\sigma \in Sing(X, \Lambda)$. No entanto, o que vamos demonstrar abaixo é que o mesmo ainda é verdadeiro para conjuntos transitivos não triviais, em vez de conjuntos robustamente transitivos. Mais precisamente:

Lema 2.0.13 *Seja Λ um conjunto transitivo não-trivial que é fortemente homogêneo, com todas singularidades hiperbólicas de X. Então, cada $\sigma \in Sing(X, \Lambda)$ satisfaz $\Delta(\sigma) \neq 0$ e uma das seguintes propriedades:*

(1) Se $\Delta(\sigma) < 0$, então $I(\sigma) = Ind$;

(2) Se $\Delta(\sigma) > 0$, então $I(\sigma) = Ind + 1$.

Demonstração.

A demonstração do Lema seguirá em três passos:

Passo 1: A partir da transitividade de X em Λ tentar usar o *connecting lemma de Hayashi* (Teorema 1.5.3) para construir uma interseção homoclínica associada a uma singularidade qualquer de X;

Passo 2: Usando o Passo 1 e os Teoremas de bifurcações, Teoremas 2.0.11 e 2.0.12, concluir que se $\Delta(\sigma) \neq 0$, onde σ é uma singularidade para o campo X, então vale (1) ou (2) como enunciado no Lema;

Passo 3: Mostrar que de fato $\Delta(\sigma) \neq 0$ para qualquer $\sigma \in Sing(X, \Lambda)$.

Prova Passo 1:

Para tal vamos primeiro fazer uma análise local numa vizinhança de uma singularidade, seja ela qualquer, para o campo X, a fim de encontrarmos uma sequencia quase homoclínica convergindo para σ. Para isto, vamos usar o fato de a dinâmica numa vizinhança da singularidade ser conjugada a uma dinâmica linear. Mais precisamente, seja σ uma singularidade para o campo X. Por hipótese temos que σ é hiperbólica, assim pelo teorema de *Hartman-Grobman* 1.3.3, existe uma vizinhança U de σ tal que o campo X é conjugado por $h : U \longrightarrow V$, V uma vizinhança de 0 em TM_σ, ao campo linear $x^{'} = DX(\sigma)x$. Sem perda de generalidade, tomemos $V = B(0, 1)$.

Observemos primeiramente que $DX(\sigma)$ é uma matriz hiperbólica pelo fato de σ ser uma singularidade hiperbólica. Para facilitar a notação chamemos $A = DX(\sigma)$. Consideremos a seguinte decomposição hiperbólica $TM_\sigma = E^s \oplus E^u$, onde E^s e E^u são os subespaços estável e instável com respeito a matriz A, respectivamente.

Dado $x \in TM_\sigma$ qualquer com $|x| < \dfrac{1}{n}$, n um número natural, consideremos $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow TM_\sigma$ tal que $\varphi(\tilde{t}) = e^{\tilde{t}A}x$ uma solução para o problema $x^{'} = Ax$. Tome $x \in E^s \oplus E^u$, então $x = v^s + v^u$ com $v^s \in E^s$ e $v^u \in E^u$. Note que

Para $A|_{E^s} : E^s \longrightarrow E^s$, o sistema é um atrator. Logo pelo Teorema 1.2.7 existem $\mu > 0$ e $K_0 > 1$ tais que

$$|e^{\tilde{t}A}| \leq K_0 e^{-\mu \tilde{t}} |v^s| \tag{2.2}$$

Para $A|_{E^u} : E^u \longrightarrow E^u$, o sistema é uma fonte. Logo pelo Teorema 1.2.9 existem $\lambda_1,\ \lambda_2 > 0$ e $K_1,\ K_2 > 1$ tais que

$$K_1 e^{\lambda_1 \tilde{t}} |v^u| \geq |e^{\tilde{t}A}| \geq K_2 e^{\lambda_2 \tilde{t}} |v^u| \tag{2.3}$$

Agora, das equações 2.2 e 2.3 temos que, para todo $\tilde{t}$ positivo,

$$\begin{aligned} \Rightarrow |\varphi(\tilde{t})| &= |e^{\tilde{t}A} x| \\ &\leq |e^{\tilde{t}A}||x| \\ &\leq K_0 e^{-\mu\tilde{t}}|v^s| + K_1 e^{\lambda_1 \tilde{t}}|v^u| \\ &\leq K_0 e^{\lambda_1\tilde{t}}|v^s| + K_1 e^{\lambda_1 \tilde{t}}|v^u| \\ &\leq K_0 e^{\lambda_1\tilde{t}}\frac{1}{n} + K_1 e^{\lambda_1 \tilde{t}}\frac{1}{n} \\ &\leq K e^{\lambda_1\tilde{t}}\frac{1}{n} \end{aligned}$$

onde $K = K_0 + K_1$.

Usando as estimativas acima para $\varphi(\tilde{t})$ tomando $\tilde{t}_0^n = \dfrac{ln\left(\frac{n}{K}\right)}{\lambda_1}$ temos que $|\varphi(t\tilde{t})| < 1$ para todo $0 < \tilde{t} < \tilde{t}_n^0$. Notemos agora que $\tilde{t}_0^n \longrightarrow +\infty$ quando $n \longrightarrow +\infty$.

Usando isto vamos agora construir uma sequencia quase homoclínica boa. Como Λ é transitivo, temos que existe uma órbita futura densa em Λ, seja ela $O^+(x)$, $x \in \Lambda$.

Tomemos então $U_1 = h^{-1}(B(0,1)) \subset U$, com $\sigma \in U_1$. Pelo fato de $O^+(x)$ ser densa em Λ, existe T_1 tal que $X_{T_1}(x) \in U_1$. Logo existem $t_1 < T_1 < s_1$ tais que

$$X_{t_1}(x) \in \partial U \ \ e \ \ X_{s_1}(x) \in \partial U.$$

Agora tomemos $U_2 \subset h^{-1}\left(B\left(0, \dfrac{1}{2}\right)\right) \subset U_1$, tal que $\sigma \in U_2$, $U_2 \subset B\left(\sigma, \dfrac{1}{2}\right)$. E ainda tal que $\{X_t(x) : t \in [t_1, s_1]\} \nsubseteq U_2$. Novamente, como $O^+(x)$ é densa em Λ, exite $T_2 > T_1, t_1, s_1$ tal que $X_{T_2}(x) \in U_2$. Logo existem $s_1 < t_2 < T_2 < s_2$ tais que

$$X_{t_2}(x) \in \partial U \ \ e \ \ X_{s_2}(x) \in \partial U.$$

Seguindo este raciocínio, tomemos $U_n \subset h^{-1}\left(B\left(0, \dfrac{1}{n}\right)\right) \subseteq U_{n-1} \subseteq \ldots \subseteq U_1$ tal que, $\sigma \in U_n$, $U_n \subseteq B\left(\sigma, \dfrac{1}{n}\right)$ e $\{X_t(x) : t \in [t_{n-1}, s_{n-1}]\} \nsubseteq U_n$. Como $O^+(x)$ é densa em Λ, exite $T_n > T_{n-1}, \ldots, t_1, s_{n-1}, \ldots$, tal que $X_{T_n}(x) \in U_n$. Logo existem $s_{n-1} < t_n < T_n < s_n$ tais que

$$X_{t_n}(x) \in \partial U \ \ e \ \ X_{s_n}(x) \in \partial U.$$

Desta forma construímos duas sequências $(X_{t_n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ e $(X_{s_n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Como U está contido em um compacto temos que, a menos de uma subsequência existem y, $z \in M$ tais que

$$X_{t_n}(x) \longrightarrow y \ \ e \ \ X_{s_n}(x) \longrightarrow z.$$

O que vamos mostrar na sequencia é que y e z pertencem as variedades estável e instável respectivamente, mostrando assim que os pedaços de órbitas formam uma sequencia quase homoclínica associada a σ.

Afirmação:

(1) $X_t(y) \in U$, para todo $t \geq 0$. Em particular $y \in W^s_X(\sigma)$.

(2) $X_s(z) \in U$, para todo $s \leq 0$. Em particular $z \in W^u_X(\sigma)$

Demonstraremos o item (1), o item (2) segue analogamente.

Temos que $X_{t_n}(x) \in \partial U_n$ e $U_n \subset h^{-1}\left(B\left(0, \dfrac{1}{n}\right)\right)$, isto implica que $h(X_{t_n}(x)) \in B\left(0, \dfrac{1}{n}\right)$, em particular $|h(X_{t_n}(x))| < \dfrac{1}{n}$. Como h é conjugação, temos que existe $\tilde{t}_n$ próximo de t_n, para todo n, tal que

$$Y_{\tilde{t}_n}(h(x)) = h(X_{t_n}(x)) \in h(U_n) \subset B\left(\sigma, \frac{1}{n}\right).$$

onde Y é o campo linear em $B(0,1)$. Logo, pela primeira análise feita neste passo, temos que $Y_{\tilde{t}}(h(X_{t_n}(x))) \in B(0,1)$, para todo $0 < \tilde{t} < \tilde{t}^n_0$. Fixemos agora $\tilde{t} > 0$. Como $\tilde{t}_n \longrightarrow +\infty$, então existe n_0 tal que $\tilde{t}_{n_0} > \tilde{t}$, para todo $n \geq n_0$. Desta maneia temos que $Y_{\tilde{t}}(h(X_{t_n}(x))) \in B(0,1)$ para todo $n \geq n_0$.

Por fim, pela continuidade de $Y_{\tilde{t}}$ e h temos

$$Y_{\tilde{t}+\tilde{t}_n}(h(x)) \longrightarrow Y_{\tilde{t}}(h(y))$$

o que implica que

$$Y_{\tilde{t}}(h(y)) \in B(0,1).$$

para todo $\tilde{t} > 0$, o que implica, por h ser conjugação, que $X_t(y) \in U = h^{-1}(B(0,1))$, para todo $t \geq 0$.

Agora tomando V uma vizinhança qualquer de Λ, como $O^+(x) \subset \Lambda$, a sequência quase homoclínica $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\gamma_n = \{X_t(x) : t \in [s_{n-1}, t_n]\}$ pode ser tomada em V. Assim, como estamos nas hipóteses do *Connecting Lemma de Hayashi* 1.5.3, por uma pequena perturbação do campo X, obtemos em V uma órbita homoclínica associada a σ, seja ela $\Gamma \subseteq V$.

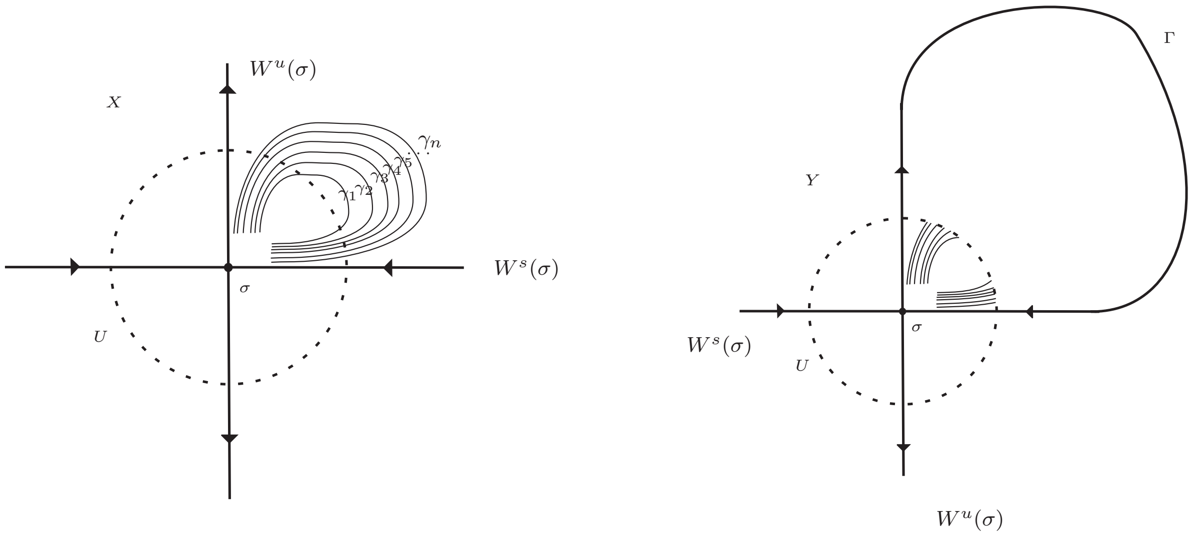

Figura 2.2: Antes e depois da perturbação.

Prova Passo 2:

Pelo Passo 1, a menos de uma pequena perturbação, podemos considerar X um campo possuindo uma conexão homoclínica Γ para uma singularidade $\sigma \in Sing(X, \Lambda)$. Agora, pelo Lema 2.0.10, podemos assumir a menos de uma pequena perturbação que a conexão homoclínica Γ satisfaz as condições (1) e (2) de não-degeneracidade.

Primeiramente vamos supor que $\Delta(\sigma) < 0$, e mostrar que a condição (1) do Lema é satisfeita.

Vamos supor γ_1, como na equação 2.1, complexo. Então pelo Teorema 2.0.12 existe infinitas órbitas periódicas hiperbólicas próximas de Γ com índice igual a $I(\sigma)$. Em particular, seja $p \in M$ tal que $O(p)$ é uma órbita periódica hiperbólica de $I(O(p)) = I(\sigma)$, com $O(p)$ próxima de Γ.

Como pelo Passo 1, Γ está numa vizinhança V de Λ suficientemente pequena, e pelo fato de Λ ser fortemente homogêneo temos que $I(O(p)) = Ind\Lambda$, e portanto $I(\sigma) = Ind\Lambda$.

No caso em que γ_1 é real, usando o Teorema 2.0.11 ao invés do Teorema 2.0.12, a propriedade de Λ ser fortemente homogêneo nos leva também a concluir que $I(\sigma) = Ind\Lambda$.

Observemos que o item (2) do Lema sai a partir de (1). Suponha que $\Delta(\sigma) > 0$, tomemos então $Y = -X$, logo $\Delta_X(\sigma) = -\Delta_Y(\sigma)$. Assim, temos que $\Delta_Y(\sigma) < 0$. Usando o item (1) do Lema para Y temos que $I_Y(\sigma) = Ind_Y$, onde Ind_Y é neste caso exatamente igual a dimensão da direção instável de $p \in M$, $p \notin Sing(X)$, para o campo X, assim

$$Ind_Y + Ind_X + 1 = d. \tag{2.4}$$

Agora para σ temos que,

$$I_Y(\sigma) + I_X(\sigma) = d \tag{2.5}$$

e portanto, de 2.4 e 2.5 temos que

$$I_X(\sigma) = Ind_X + 1.$$

Prova Passo 3:

Suponha que $\Delta(\sigma) = 0$ e $Re(\lambda_1) < 0 < Re(\gamma_1)$. Seja $\mathcal{U}$ uma vizinhança de X e V uma vizinhança de Λ escolhidas de acordo com o fato de Λ ser fortemente homogêneo. Pelo Passo 1, podemos assumir que X possui uma conexão homoclínica Γ em V, a menos de uma perturbação. Tomemos $x \in \Gamma$, então temos que $X_s(x) \neq x$ para todo $0 < s \leq t$, e consideremos as seções transversais Σ_{x,r_0} e $\Sigma_{X_t(x)}$, com $r_0 > 0$ suficientemente pequeno e $\epsilon > 0$ dados pelo Lema 1.4.8.

Tomemos agora W_1 uma vizinhança do pedaço de órbita criado acima, e W_2 uma vizinhança de σ tal que $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Usando *Franks Lemma* em uma vizinhança $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$ de X, obtemos $Y \in \mathcal{W}$ tal que $\Delta(\sigma) < 0$ para este campo, e ainda pela continuidade das variedades estável e instável de σ, existem $y \in \Sigma_{x,r_0} \cap W^u(\sigma)$ e $z \in \Sigma_{x,r_0} \cap W^s(\sigma)$, com $d(y,z) < \epsilon$. Observemos que tal perturbação pode ser feita tal que $Y = X$ em $(W_2)^c$, em particular $Y = X$ em W_1.

Esta pequena perturbação pode ocasionar o rompimento do loop Γ. Porem podemos consertar este problema. Mais precisamente, podemos escolher $0 < r \leq r_0$ e um difeomorfismo $L : \Sigma_{x,r} \longrightarrow \Sigma_{x,r}$, próximo da identidade, tal que $L(z) = y$. Assim, pelo Lema 1.4.8, existe Z suficientemente próximo de Y em $\mathcal{W}$ tal que $P_Z = P_Y \circ L$, o que implica que $z \in W^s(\sigma)$. Portanto obtemos um conexão homoclínica para σ, e com σ tal que $\Delta(\sigma) < 0$. Assim, pelo Passo 2, temos que $I(\sigma) = Ind\Lambda$.

Similarmente ao feito acima, podemos encontrar também um campo $\tilde{Z}$, C^1 próximo de X, tal que para Z tenhamos $I(\sigma) = Ind\Lambda + 1$.

Logo, chegamos a uma contradição, visto que o fato de σ ser hiperbólica para o campo X implica a existência de uma vizinhança do campo X para a qual as continuações de σ possuem mesmo índice.

E assim, concluímos que para toda singularidade $\sigma \in Sing(X, \Lambda)$, $\Delta(\sigma) \neq 0$.

■

Em [12], Gan, Li e Wen, mostraram que as condições do Lema anterior quando satisfeitas para conjuntos fortemente homogêneos de uma maneira "uniforme"para todas as singularidades de Λ, podem ser usadas a fim de se obter propriedades diferenciais (decomposição dominada) para tal conjunto. O próximo resultado vem na direção de obter tal uniformidade em dimensões altas, porém num caso particular.

Proposição 2.0.14 *Seja Λ um conjunto transitivo não-trivial que é fortemente homogêneo possuindo apenas singularidades todas hiperbólicas de codimensão 1, de X. Se $n \geq 4$, então Λ satisfaz uma das seguintes propriedades:*

(1) $I(\sigma) > Ind(\Lambda)$, para toda $\sigma \in Sing(X, \Lambda)$;

(2) $I(\sigma) \leq Ind(\Lambda)$, para toda $\sigma \in Sing(X, \Lambda)$.

Demonstração.

Suponha que exista $\sigma_0, \sigma_1 \in Sing(X, \Lambda)$ satisfazendo $I(\sigma_0) \leq Ind(\Lambda) < I(\sigma_1)$. Uma vez que σ_0 e σ_1 tem codimensão 1 e as mesmas por hipótese são singularidades com índices diferentes obtemos $I(\sigma_0) = 1$ e $I(\sigma_1) = n-1$, e logo $1 \leq Ind(\Lambda) < n-1$. Pelo Lema 2.0.13 sabemos que $\Delta(\sigma_0)$ e $\Delta(\sigma_1)$ são não nulos. Mais ainda, se $\Delta(\sigma_0) > 0$ então o Lema 2.0.13 nos dá que $I(\sigma_0) = Ind(\Lambda) + 1$, o que implica $Ind(\Lambda) = 0$, o que contradiz o fato de $Ind(\Lambda) \geq 1$. Então $\Delta(\sigma_0) < 0$ e assim também pelo Lema 2.0.13 concluímos que $Ind(\Lambda) = I(\sigma_0) = 1$.

Por outro lado, se $\Delta(\sigma_1) < 0$ então $Ind(\Lambda) = I(\sigma_1) = n-1$. Como $Ind(\Lambda) = 1$, obteríamos $n = 2$, contradição, pois $n = 4$. Então $\Delta(\sigma_1) < 0$ e assim $I(\sigma_1) = Ind(\Lambda) + 1$, o que implica $n = 3$, contradizendo $n \geq 4$. Desta forma, não podemos ter singularidades σ_0 e σ_1 em Λ satisfazendo as condições acima. E assim, temos provado a proposição. ■

A importância das condições (1) e (2) na Proposição 2.0.14 baseia-se no seguinte resultado provado por Gan e Wen em [12],Gan,Wen e Zhu em [13] e Metzger em [26].

"Um conjunto Λ C^1 *robustamente transitivo* com singularidades, todas hiperbólicas, que é *fortemente homogêneo* satisfazendo $I(\sigma) > Ind(\Lambda)$, para todo $\sigma \in Sing(X,\Lambda)$ (respc. $I(\sigma) \leq Ind(\Lambda)$, para todo $\sigma \in Sing(X,\Lambda)$) é *seccionalmente hiperbólico* para X (respc. para $-X$)"

No entanto, podemos observar que o mesmo é verdadeiro para conjuntos transitivos *não triviais*, em vez de conjuntos transitivos robustos. A prova é similar a [11][12][26], usando os chamados *conjuntos pré-periódicos* [38], em vez da continuação natural de um conjunto robustamente transitivo.

Pela definição de conjuntos pré-periódicos dada na Seção 1.5, podemos definir $(Per_i^*(X), U)$ o conjunto dos pontos *Pré-periódicos de índice i restritos a U*, onde U é um aberto em M. Isto é, existe uma sequência pré-periódica (p_n, X_n) de índice i convergindo para x, tal que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset U$.

Lembremos agora, que a definição de campo estrela dada na Seção 3 pode também ser considerada localmente. Mais precisamente, definimos $X^*(U)$ como sendo o conjunto de campos tais que robustamente as órbitas críticas contidas inteiramente em U são todas hiperbólicas.

Liao, mostrou que se $X \in \mathcal{X}^*(U)$ as órbitas periódicas contidas em U possuem uma certa uniformidade de tempo de contração e expansão nas direções estável e instável, respectivamente.(Ver Teorema 2.6 em [12]).

Usando tal resultado, e através de uma esperta expansão do *Fluxo Linear de Poincaré*, Gan, Li e Wen conseguiram obter uma decomposição parcialmente hiperbólica para conjuntos transitivos singulares fortemente homogêneos, possuindo apenas singularidades hiperbólicas com o índice destas maior que o índice do conjunto.

No entanto, a extensão do *Fluxo Linear de Poincaré* criada pelos mesmos, e as técnicas usadas em [12], podem ser usadas exatamente da mesma maneira para concluir tal resultado para conjuntos *Pré-periódicos.* Mais precisamente, vale o seguinte:

Teorema 2.0.15 *Seja $X \in \mathcal{X}^1(M)$ e $\Lambda \subset (Per_i^*(X), U)$ um conjunto fechado, invariante e singular fortemente homogêneo. Então:*

(a) Se toda singularidade $\sigma \in \Lambda$ é hiperbólica com $I(\sigma) > i$, então Λ é parcialmente hiperbólico, com $TM_\Lambda = E^s \oplus E^{cu}$ e direção estável possuindo dimensão i.

(b) Se toda singularidade $\sigma \in \Lambda$ é hiperbólica com $I(\sigma) < i$, então Λ é parcialmente hiperbólico, com $TM_\Lambda = E^{cs} \oplus E^u$ e direção instável possuindo dimensão $m-1-i$. Onde m é a dimensão da variedade M.

Combinando a Proposição 2.0.14 com o Teorema acima obtêm-se o seguinte corolário, a menos de uma reversão do fluxo, ou seja, para X ou $-X$.

Corolário 2.0.16 *Seja Λ um conjunto invariante transitivo não-trivial para X, que seja fortemente homogêneo possuindo apenas singularidades hiperbólicas de codimensão 1. Se $n \geq 4$, então Λ é seccional-hiperbólico a menos de reverter o fluxo.*

Demonstração.

Pelas hipóteses temos que as singularidades de Λ satisfazem ou o item (1) ou o item (2) da Proposição 2.0.14. Isto é, todas as singularidades possuem o mesmo índice. Mais ainda, pelo Lema 2.0.13 devemos ter portanto que, para toda singularidade $\sigma \in Sing(X)$,

$$I(\sigma) = Ind\Lambda$$

ou

$$I(\sigma) = Ind\Lambda + 1.$$

Suponha que $I(\sigma) = Ind\Lambda + 1$ para toda singularidade $\sigma \in Sing(X)$, isto é $I(\sigma) > Ind\Lambda$.

Desta maneira, podemos usar o Teorema 2.0.15 para Λ, e pela observação 2.0.9 temos que existe decomposição parcialmente hiperbólica

$$TM_\Lambda = E^s \oplus E^{cu}.$$

Afirmação: $DX|_{E^{cu}}$ é seccional expansor em Λ.

Direto da Afirmação temos que Λ é seccionalmente hiperbólico para X. Observemos agora que se tivéssemos que para toda singularidade $\sigma \in \Lambda$, $I(\sigma) = Ind\Lambda$, tomando $Y = -X$, teríamos que para toda singularidade $\sigma \in \Lambda$, $I(\sigma) = Ind\Lambda + 1$ para Y. Assim, pela parte anterior teríamos portanto Λ seccionalmente hiperbólico para $-X$. O que implica que o resultado segue da Afirmação.

Demonstração da Afirmação:

Como Λ é fortemente homogêneo, dado $p \in \Lambda$, temos $E^{cu}_p = \langle X(p) \rangle \oplus E^u_p$. Pelo fato de X ser estrela, numa vizinhança de Λ, pelo Teorema 2.6 em [12], podemos garantir que existe $T > 0$ tal que DX_T expande E^u_p para todo p periódico de X. Como $\inf_{q \in O(p)} \|X(q)\| = K > 0$, temos que DX expande $E^{cu}|_{O(p)}$.

No caso de uma singularidade, seja ela σ, temos que $E^{cu}_\sigma = E^c_\sigma \oplus E^u_\sigma$. Vejamos isto: consideremos a seguinte decomposição hiperbólica dada pelos autoespaços de $DX_t(\sigma)$, $TM_\sigma = \mathbb{E}^s_\sigma \oplus \mathbb{E}^u_\sigma$. Como Λ fortemente homogêneo, temos que $dim(\mathbb{E}^s_\sigma) = dim(E^s_\Lambda) + 1$. Agora, da existência da decomposição parcialmente hiperbólica $TM_\Lambda = E^s \oplus E^{cu}$, temos que $DX|_{E^s}$ contrai, o que implica E^s estar contido no autoespaço estável de σ, isto é

$$E^s_\sigma \subset \mathbb{E}^s(\sigma).$$

Como $dim(\mathbb{E}^s(\sigma)) = dim(E^s_\Lambda) + 1$, existe $u \in \mathbb{E}^s_\sigma$ tal que $DX(\sigma)\langle u\rangle = \langle u\rangle$, porém $u \notin E^s_\sigma$. Isto implica que $u \in E^{cu}$.

Similarmente, podemos concluir que $\mathbb{E}^u(\sigma) \subset E^{cu}_\sigma$. Como $\mathbb{E}^u(\sigma) \cap \langle u\rangle = \{0\}$ temos que

$$E^u_\sigma = \mathbb{E}^c(\sigma) \oplus \mathbb{E}^u(\sigma).$$

Assim, $E^c(\sigma)$ é o autoespaço de TM_Λ com relação ao autovalor mais fraco de $\mathbb{E}^s_\sigma$. Pelo Lema 2.0.13 temos que $\Delta(\sigma) > 0$ e portanto $DX|_{E^{cu}_\sigma}$ expande seccionalmente também.

Notemos portanto, que com os argumentos anteriores, podemos de fato mostrar que nos pontos críticos em U tem-se expansão de E^{cu} para qualquer campo $Y \in \mathcal{U}, \mathcal{U}$ uma C^1 vizinhança de X.

Por fim, supondo que $DX|_{E^{cu}_q}$ não seja secional expansiva pra algum $q \in \Lambda$, usando o fato de Λ ser transitivo, podemos usar o *Ergodic Closing Lemma* de Mañé em [18], e o Lema de Franks para encontrarmos um ponto periódico $p_q \in U$ para algum campo $Y \in \mathcal{U}$ que não expanda seccionalmente $E^{cu}_{p_q}$, o que contradiria a primeira parte. Sendo assim, tal ponto q não existe, e portanto concluímos a demonstração.

■

No caso de Λ ser *Lyapunov estável*, além das hipóteses do corolário acima, de fato podemos garantir que Λ é seccional hiperbólico para X. Lembremos que um conjunto Λ é *Lyapunov estável* para X se para cada vizinhança U de Λ existe uma vizinhança $W \subseteq U$ tal que $X_t(x) \in U$ para todo $t \geq 0$ e $x \in W$. Mais precisamente, vale o seguinte:

Corolário 2.0.17 *Seja Λ um conjunto transitivo não-trivial, que é fortemente homogêneo com singularidades, todas elas hiperbólicas com codimensão 1, de X. Se $n \geq 4$, e o conjunto Λ é Lyapunov estável, então Λ é seccional-hiperbólico para X.*

Observemos que o resultado acima vale também em dimensão 3, provado por Morales e Pacifico no Teorema C em [28].

Para mostramos tal corolário precisamos do seguinte resultado, que é uma das propriedades muito boas satisfeitas por conjuntos seccional-hiperbólicos.

Teorema 2.0.18 *(Resultado em [27] p.556). Seja Λ um conjunto transitivo seccional-hiperbólico para X_t. Se $\sigma \in \Lambda \cap Sing(X)$, então $\Lambda \cap W^{ss}(\sigma) = \sigma$. Onde $W^{ss}(\sigma)$ é a variedade estável forte de σ com respeito a decomposição seccional-hiperbólica de Λ.*

Usando este, podemos então provar o seguinte:

Demonstração Corolário 2.0.17:

Pelo Corolário 2.0.16 é suficiente provar que Λ não pode ser seccional-hiperbólico para $-X$. Suponha por absurdo que Λ é seccional-hiperbólico para $-X$. Consideremos agora a variedade forte $W^{ss}_{-X}(\sigma)$ que integra a direção estável da decomposição parcialmente hiperbólica de Λ com respeito a $-X$ para alguma singularidade σ de Λ.

Afirmação: $W^{ss}_{-X}(\sigma) \subset \Lambda$.

Demonstração Afirmação: Note que como Λ é Lyapunov estável para X, isto implica que dado V uma vizinhança de Λ, existe uma vizinhança $W \subset V$, contendo Λ, tal que para todo $x \in W$ temos que $X_{-t}(x) \in V$ pata todo $t \geq 0$. Agora, seja $W^{ss}_{loc}(x)$ a variedade estável forte de σ local contida em W. Lembremos que $W^{ss}_{-X}(\sigma) = \bigcup_{t\geq 0} X_{-t}(W^{ss}_{loc})(\sigma)$ e portanto deve estar contida em V. Mas como V é qualquer, isto implica que $W^{ss}_{-X}(\sigma) \subset \Lambda$.

Agora, note que a Afirmação contradiz o Teorema 2.0.18. Então Λ não é seccional-hiperbólico para $-X$. Portanto, Λ é seccional-hiperbólico para X.

$\blacksquare$

Faremos uso do Lema 2.0.13 também para provar a seguinte proposição.

Proposição 2.0.19 *Cada conjunto Λ transitivo não-trivial, seccional-hiperbólico de um campo X em uma n-variedade fechada, $n \geq 3$, é fortemente homogêneo e satisfaz $I(\sigma) = Ind(\Lambda) + 1$, para todo $\sigma \in Sing(X, \Lambda)$.*

Demonstração.

Como Λ é transitivo, portanto conexo, e o subfibrado E^s_Λ varia continuamente em Λ, temos que a dimensão de E^s_x é constante para todo $x \in \Lambda$.

Por hipótese temos que Λ é seccional-hiperbólico, isto é todas suas singularidades são hiperbólicas, e Λ admite decomposição dominada $TM_\Lambda = E^s \oplus E^{cu}$, onde E^{cu} expande área.

Desta forma, temos que existe V vizinhança de Λ e $\mathcal{U}$ vizinhança de X tais que $\Lambda_Y = \bigcap_{t\in\mathbb{Z}} Y_t(V)$ para todo $Y \in \mathcal{U}$ admite decomposição secional-hiperbólica.

Afirmação: Toda órbita periódica $O \subset V$, para qualquer campo $Y \in \mathcal{U}$ é hiperbólica com $Ind(O) = dim(E^s_{\Lambda_Y})$.

Demonstração da Afirmação: Temos que $TM_{\Lambda_Y} = E^s_{\Lambda_Y} \oplus E^{cu}_{\Lambda_Y}$.

Primeiramente, vamos supor que exista $O \in Per(Y)$ para todo $Y \in \mathcal{U}$ com $I(O) > dim(E^s_{\Lambda_Y})$.

Como O é uma órbita periódica hiperbólica para Y, temos então a seguinte decomposição hiperbólica em $TM_O = \mathbb{E}^s_O \oplus \langle Y \rangle \oplus \mathbb{E}^u$, dada pela hipebolicidade da órbita O, com $I(O) = dim(\mathbb{E}^s_O)$. Assim, como a direção E^s contrai pela derivada do fluxo em Λ_Y, devemos ter que $E^s_{\Lambda_Y} \subset \mathbb{E}^s_O$. Porém, como

$$dim(\mathbb{E}^s_O) > dim(E^s_{\Lambda_Y}),$$

deve existir $v \in \mathbb{E}^s_O \setminus E^s_{\Lambda_Y}$ tal que $v \in E^{cu}_{\Lambda_Y}$.

Como a direção E^s contrai pela derivada do fluxo, devemos ter também que $Y(p) \in E^{cu}_{\Lambda_Y}$. Tomemos o plano $\pi = [v, Y(p)]$, desta forma temos que $det(DY_{\tau_t}\pi) < 1$, porem π é um plano em $E^{cu}_{\Lambda_Y}$ e isto contradiz o fato de Y admitir uma decomposição seccional-hiperbólica em Λ_Y. Logo $I(O) = dim(E^s_{\Lambda_Y})$.

Portanto, temos que toda órbita periódica hiperbólica possui mesmo índice em uma vizinhança de X, ou seja temos que Λ é um conjunto fortemente homogêneo.

Agora seja $\sigma \in Sing(X, \Lambda)$. Como estamos na condições do Lema 2.0.13, temos que $\Delta(\sigma) \neq 0$, assim, se $\Delta(\sigma) > 0$, temos que $I(\sigma) = Ind\Lambda + 1$, e o resultado segue.

Vamos supor que $I(\sigma) < 0$. Então temos que $I(\sigma) = Ind\Lambda$. Como σ é hiperbólica, temos que ela admite decomposição hiperbólica $TM_\sigma = \mathbb{E}^s \oplus \mathbb{E}^{cu}$. Por outro lado temos que como $\sigma \in \Lambda$ que tem decomposição seccional-hiperbólica $TM_\Lambda = E^s_\Lambda \oplus E^{cu}_\Lambda$ invariante.

Como $DX_t|_{E^s_\Lambda}$ contrai, temos que $E^s_\Lambda \subset \mathbb{E}^s_\sigma$, isto implica que $E^s_\Lambda = \mathbb{E}^s_\sigma$, pois temos que $I(\sigma) = Ind\Lambda$. Disto temos que $W^{ss}(\sigma)$ dada pela decomposição $E^s_\Lambda \oplus E^{cu}_\Lambda$ é exatamente $W^s(\sigma)$.

Mas Λ é transitivo não-trivial, assim alguma órbita densa que acumula em algum ponto de $W^s(\sigma) \setminus \{\sigma\}$. Assim, como $W^{ss}(\sigma) = W^s(\sigma)$ tal ponto deve pertencer a $(\Lambda \cap W^{ss}(\sigma)) \setminus \{\sigma\}$. Por outro lado, pelo Teorema 2.0.18, sabemos que $\Lambda \cap W^{ss}(\sigma) = \{\sigma\}$, assim obtemos uma contradição. Segue o resultado.

■

Definição 2.0.20 *Diz-se que Λ é um conjunto atrator se existe uma vizinhança U da mesmo, tal que*

$$\Lambda = \bigcap_{t \geq 0} X_t(U).$$

Por outro lado, chamamos Λ de atrator seccional-hiperbólico, quando este conjunto também for transitivo, além de ser atrator e seccional-hiperbólico.

Definição 2.0.21 *Um fibrado instável de uma singularidade hiperbólica σ para o campo é uma órbita em $W^u(\sigma) \setminus \{\sigma\}$. Dizemos que Λ tem fibrados instáveis singulares densos se cada fibrado instável de cada singularidade hiperbólica sobre ele é denso em Λ.*

O seguinte resultado é uma extensão direta do Teorema D em [21] para dimensões maiores (com prova similar).

Proposição 2.0.22 *Seja Λ um conjunto Lyapunov estável seccional-hiperbólico para um campo vetorial X em uma n-variedade fechada, $n \geq 3$. Se Λ tem apenas singularidades com índice de Morse $n-1$, e fibrados instáveis singular densos, então Λ é um atrator seccional-hiperbólico de X.*

Para a sequência do texto vamos enumerar abaixo algumas propriedades genéricas válidas para fluxos.

a) $Cl(W^u_X(\sigma))$ é Lyapunov estável para X, para toda singularidade $\sigma \in Sing(X)$. (Veja [8])

b) $Cl(W^s_X(\sigma))$ é Lyapunov estável para $-X$, para toda singularidade $\sigma \in Sing(X)$. (Veja [8])

c) Se $\sigma \in Sing(X)$ e $dim(W^u_X(\sigma)) = 1$ então $\omega_X(q)$ é Lyapunov estável para X, para todo $q \in W^u_X(\sigma) - \{\sigma\}$. (Veja [8])

d) Se $\sigma \in Sing(X)$ e $dim(W^s_X(\sigma)) = 1$ então $\alpha_X(q)$ é Lyapunov estável para $-X$, para todo $q \in W^s_X(\sigma) - \{\sigma\}$. (Veja [8])

Agora lembraremos a terminologia de fluxo estrela dada por Wen em [38].

Definição 2.0.23 *Um fluxo estrela é um campo vetorial C^1 que não pode ser C^1-aproximado por aqueles que apresentam órbitas críticas não-hiperbólicas.*

O resultado que segue relaciona fluxo estrela com a condição de não existência de pontos na variedade sendo acumulado por órbitas fechadas de diferentes índices.

Proposição 2.0.24 *Um campo vetorial X C^1-genérico em uma n-variedade, $n \geq 3$, sem pontos acumulados por órbitas periódicas hiperbólicas de diferentes índices de Morse é um fluxo estrela. Se, além disso, $n \geq 4$, então as singularidades de codimensão 1 de X acumuladas por órbitas periódicas pertencem a um atrator seccional-hiperbólico para X ou $-X$.*

Demonstração.

Vamos usar a seguinte notação. Dado $Z \in \mathcal{X}^1(M)$ e $0 \leq i \leq n-1$, denotemos por $Per_i(Z)$ a união das órbitas periódicas hiperbólicas de índice de Morse i. A operação de 'fechamento' será denotada por $Cl(\cdot)$.

Definimos então a seguinte aplicação

$$h_i : \mathcal{X}^1(M) \longrightarrow \mathcal{K}(M),$$

tal que para cada $X \in \mathcal{X}^1(M)$, $h_i(X) = Cl(Per_i(X)$.

Afirmação 1: h_i é semicontínua inferior.

Demonstração da Afirmação 1: Tomemos $X_0 \in \mathcal{X}^1(M)$ e U uma vizinhança de $Cl(Per_i(X_0))$ tal que $Cl(Per_i(X_0)) \cap U \neq \emptyset$. Seja $x \in Cl(Per_i(X_0)) \cap U$, em particular temos que existem $p_n \in Per_i(X_0)$ tais que $p_n \longrightarrow x$. Para n suficientemente grande, temos que $p_n \in U$.

Agora, pela hiperbolicidade de p_n temos que existe uma vizinhança $\mathcal{U}$ de X_0 tal que para todo $X \in \mathcal{U}$ os pontos $p_n(X)$ ainda estão contidos em U, e são hiperbólicos de índice de Morse igual a i. Isto implica que $Per_i(X) \cap U \neq \emptyset$. Assim segue que h_i é semicontínua inferior.

Agora, pelo Lema 1.2.26, como h_i é semicontínua inferiormente para cada i, temos que existe um residual $\mathcal{R}_i$ tal que h_i é contínua neste residual. Tomemos $\tilde{\mathcal{R}}_1 = \bigcap_{i=0}^{n-1} \mathcal{R}_i$ que também é um residual, pois é a interseção finita de residuais.

Tomemos agora, $\mathcal{R} = \tilde{\mathcal{R}}_1 \cap \tilde{\mathcal{R}}_2 \cap \tilde{\mathcal{R}}_3 \cap \tilde{\mathcal{R}}_4$ residual que condiciona bem a demonstração, onde $\tilde{\mathcal{R}}_2$ é o residual dado pelo teorema de *Kupka-Smale*, $\tilde{\mathcal{R}}_3$ é o residual dado pelo Teorema da Densidade Geral, Teorema 1.5.6, $\tilde{\mathcal{R}}_4$ o residual que satisfaz as condições genéricas (a), (b), (c) e (d) dadas acima.

Assim, seja $X \in \mathcal{R}$ tal que X não possua nenhum pondo acumulado por órbitas periódicas de diferentes índices de Morse, ou seja, tem-se

$$Cl(Per_i(X)) \cap Cl(Per_j(X)) = \emptyset \tag{2.6}$$

para todo $i,\, j \in \{0, \ldots, n-1\}$, $i \neq j$.

Podemos tomar então

$$\delta_{ij} = d(\overline{Per_i(X)},\, \overline{Per_j(X)}) = \inf_{x \in \overline{Per_i(X)}, y \in \overline{Per_j(X)}} d(x, y) > 0.$$

Assim, considerando $\delta = min_{1 \leq i,j \leq n-1}\{\delta_{i,j}\}$, tome $U_i = \bigcup_{x \in Cl(Per_i(X))} B_{\frac{\delta}{2}}(x)$, onde $B_{\frac{\delta}{2}}(x)$ é a bola aberta centrada em x de raio $\frac{\delta}{2}$. Logo, pela escolha δ, temos que $U_i \cap U_j = \emptyset$, para todo $i \neq j$.

Agora, por X ser ponto de continuidade das funções h_i, podemos escolher $\mathcal{U}$ vizinhança de X, tal que para todo mundo $Y \in \mathcal{U}$, $Cl(Per_i(Y)) \subset U_i$.

Na sequência, vamos provar que X é um fluxo estrela. Quando necessário usaremos a notação $I_X(O)$ para denotar o índice da órbita O, com respeito a X_t.

Por contradição, assuma que X não é estrela. Então existe uma um campo vetorial $Y \in \mathcal{U}$ exibindo uma órbita crítica, não hiperbólica, O. Por Kupka-Smale, reduzindo a vizinhança $\mathcal{U}$, se necessário, temos que todas as singularidades de qualquer campo $Y \in \mathcal{U}$ são hiperbólicas, e portanto O deverá ser uma órbita periódica.

Seja $q \in O$, que é um ponto periódico, então podemos tomar uma seção transversal Σ em q e definir o mapa de Poincaré, $P : \Sigma \longrightarrow \Sigma$. Como q não é hiperbólico, temos que $DP(q)$ não é hiperbólica, ou seja, $DP(q)$ irá possuir pelo menos um autovalor λ tal que $|\lambda| = 1$. Assim, a partir de uma perturbação de $DP(q)$, usando *Franks Lema*, existirá campos $Z_1,\, Z_2 \in \mathcal{U}$ tais que $I_{Z_1}(O) \neq I_{Z_2}(O)$, $1 \leq I_{Z_1}(O),\, I_{Z_2}(O) \leq n-1$. Consequentemente, $O \in U_i \cap U_j$, com $i = I_{Z_1}(O)$ e $j = I_{Z_2}(O)$, o que contradiz o fato dos abertos U_i serem disjuntos. Portanto X é fluxo estrela.

Para mostrarmos a segunda parte da proposição, ainda considerando o mesmo X fixado acima, mostremos que $Cl(Per_i(X))$ é um conjunto fortemente homogêneo de índice i, para todo $0 \leq i \leq n-1$.

De fato, considerando $\mathcal{U}$ e os U_i como fixados acima, tomemos $Y \in \mathcal{U}$ e uma órbita periódica hiperbólica $O \subset U_i$ tal que o índice de Morse seja $I_Y(O) = j$. Então $O \subset Cl(Per_j(Y))$ e assim, $O \subset (U_i \cap U_j)$. Como a coleção $\{U_i, 0 \leq i \leq n-1\}$ é disjunta, concluímos que $i = j$, e portanto para cada campo $Y \in \mathcal{U}$, temos que para cada órbita periódica hiperbólica $O \subset U_i$, tem-se $I_Y(O) = i$. Portanto $Cl(Per_i(X))$ é fortemente homogêneo.

Agora provemos que cada singularidade σ de codimensão 1, acumulada por órbitas periódicas pertence a um atrator seccional-hiperbólico, para X ou $-X$. Mais precisamente, provemos que se $I(\sigma) = n-1$ (respect. $I(\sigma) = 1$), então σ pertence a um atrator seccional-hiperbólico de X (respect. $-X$). Consideremos apenas o caso $I(\sigma) = n-1$, o caso $I(\sigma) = 1$ pode ser tratado de um modo análogo substituindo X por $-X$.

Uma vez que σ é um singularidade hiperbólica e $I(\sigma) = n-1$, tem-se que $dim(W^u(\sigma)) = 1$. Por escolha do residual $\mathcal{R}$, temos que $Cl(W^u(\sigma))$ e $\omega(q)$, $q \in W^u(\sigma) \setminus \{\sigma\}$, são conjuntos Lyapunov estáveis para X.

Afirmação 2: Se σ é uma singularidade acumulada por órbitas periódicas, então $Cl(W^u(\sigma))$ é um conjunto transitivo.

Demonstração: Temos que σ é acumulada por órbitas periódicas. Sejam U uma vizinhança de σ e $p_n \in O_n$, onde $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequencia de órbitas periódicas que acumulam em σ, com $p_n \longrightarrow \sigma$.

Pelos mesmos argumentos da demonstração do Passo 1 do Lema 2.0.13, temos que existe $T > 0$ tal que para n suficientemente grande $X_T(p_n) \longrightarrow q$, com $q \in Cl(W^u(\sigma) \setminus \{\sigma\}$. Assim, temos que $q \in Cl(\cup O_n)$, o que implica que $O(q) \subset Cl(\cup O_n)$, e portanto $\omega(q) \subset Cl(\cup O_n)$.

Sabemos que $\omega(q)$ é Lyapunov estável. Usando isto, vamos mostrar que $\sigma \in \omega(q)$.

Vamos supor que $\sigma \notin \omega(q)$. Assim, sejam V_1 vizinhança de σ e V_2 vizinhança de $\omega(q)$ tais que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Pelo fato de $\omega(q)$ ser Lyapunov estável, temos que existe V vizinhança de $\omega(q)$, com $V \subset V_2$, tal que para todo $x \in V$, $X_t(x) \in V_2$, para todo $t \geq 0$. Agora, como $\omega(q) \subset Cl(\cup O_n)$, temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $O_n \cap V \neq \emptyset$, o que implica portanto que $O_n \subset V_2$ para $n \geq n_0$, pois O_n é órbita fechada.

Mas por escolha de O_n, temos que O_n também intersecta V_1, para todo n, o que implica que $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ para todo $n \geq n_0$. Absurdo. Portando $\sigma \in \omega(q)$.

Usando isto, vamos mostrar o que queremos que é $Cl(W^u(\sigma))$ ser transitivo.

Como, por escolha, $\omega(q)$ é um conjunto Lyapunov estável, então para toda vizinhança U de $\omega(q)$, existe uma vizinhança V de $\omega(q)$ com $V \subset U$, tal que $X_t(x)$ pertence a U para todo $x \in V$ e $t \geq 0$. Como sabemos agora que $\sigma \in \omega(q)$, logo $W^u_{loc}(\sigma) \subset V$, o que implica pela fato de $\omega(q)$ ser Lyapunov estável que $W^u(\sigma) = \bigcup_{t\geq 0} X_t(W^u_{loc}(\sigma)) \subset U$. Como U é uma vizinhança qualquer de $\omega(q)$ temos que $W^u(\sigma) \subset \omega(q)$, e portanto $Cl(W^u(\sigma)) \subset \omega(q)$.

Por outro lado, como $q \in W^u(\sigma)$, então $O(q) \subset W^u(\sigma)$ e assim temos que $\omega(q) \subset Cl(W^u(\sigma))$. Logo, temos que $Cl(W^u(\sigma)) = \omega(q)$, e como $\omega(q)$ é um conjunto transitivo, temos que $Cl(W^u(\sigma))$ é também um conjunto trasitivo.

Afirmação 3: Se σ é uma singularidade acumulada por órbitas periódicas, então $Cl(W^u(\sigma))$ é um conjunto fortemente homogêneo.

Demonstração: Novamente pela escolha de $\mathcal{R}$, pelo Teorema da Densidade Geral [33] temos que

$$\Omega(X) = Cl(Per(X) \cup Sing(X)).$$

Denote por $Sing^*(X)$ o conjunto de todas as singularidades acumuladas por órbitas periódicas.

Então há uma decomposição

$$\Omega(X) = \left(\bigcup_{0 \leq i \leq n-1} Cl(Per_i(X)) \right) \cup \left(\bigcup_{\sigma' \in Sing(X) \setminus Sing^*(X)} \{\sigma'\} \right)$$

que são conjutnos disjuntos por hipótese, desde que não temos pontos acumulados por órbitas periódicas de índices diferentes. Mais precisamente temos uma cisão de $\Omega(X)$. Além disso, da Afirmação 2, se σ é uma singularidade acumulada por órbitas periódicas, isto é $\sigma \in Sing^*(X)$ então temos que $Cl(W^u(\sigma))$ é transitivo, logo é conexo, e portanto $Cl(W^u(\sigma)) \subset Cl(Per_{i_0}(X))$ para algum $1 \leq i_0 \leq n-1$. Mas como mostramos que $Cl(Per_{i_0}(X))$ é fortemente homogêneo de índice i_0, temos que $Cl(W^u(\sigma))$ é também fortemente homogêneo de índice i_0.

Agora, temos pela Afirmação 2 que $Cl(W^u(\sigma))$ é um conjunto transitivo, com singularidades todas hiperbólicas de codimensão 1 (hipótese), e ainda pela Afirmação 3 tal conjunto é fortemente homogêneo. Como por escolha de X, $Cl(W^u(\sigma))$ é Lyapunov estável e certamente não-trivial, aplicando o Corolário 2.0.17 para $\Lambda = Cl(W^u(\sigma))$, temos que $Cl(W^u(\sigma))$ é seccional-hiperbólico.

Uma vez que $Cl(W^u(\sigma))$ é seccional-hiperbólico, pela Proposição 2.0.19 temos $I(\sigma') = 1 + i_0$, para todo $\sigma' \in Sing(X, Cl(W^u(\sigma)))$. Mas $\sigma \in Cl(W^u(\sigma))$ e $I(\sigma) = n-1$, assim $i_0 = n-2$. Consequentemente, $I(\sigma) = n-1$ e assim $dim(W^u(\sigma')) = 1$, para todo $\sigma' \in Cl(W^u(\sigma))$. Portanto, cada singularidade $\sigma' \in Cl(W^u(\sigma))$ tem índice de Morse $n-1$, e uma vez que escolhemos $X \in \mathcal{R}$, temos por escolha que $Cl(W^u(\sigma))$ tem fibrados instáveis densos. Assim, pela Proposição 2.0.22 $Cl(W^u(\sigma))$ é um atrator seccional-hiperbólico.

■

Teorema 2.0.25 *[Teorema B de [6]]*

Seja $X \in \chi^*(M)$, $\chi^*(M)$ conjunto dos campos vetoriais estrelas em M. Seja $\Gamma \subseteq Cl(Per(X))$, um conjunto compacto invariante para X tal que $\Gamma \cap Sing(X) = \emptyset$. Então Γ é hiperbólico.

Teorema 2.0.26 *(Teorema B de [28]). Genericamente em uma variedade tridimensional campos vetoriais estrelas são seccional-Axioma-A sem ciclos.*

O último ingrediente é a proposição abaixo cuja prova segue do Teorema 2.0.25, como na demonstração do Teorema 2.0.26, que está demonstrado no Teorema B p. 1582 de [28].

Proposição 2.0.27 *Se $n \geq 3$, um fluxo estrela C^1-genérico cujas singularidades que são acumuladas por órbitas periódicas pertencem a um atrator seccional-hiperbólico, para X ou $-X$, é um fluxo seccional-Axioma A.*

Demonstração.

Por hipótese temos que X é um fluxo estrela C^1-genérico. Como temos apenas singularidades hiperbólicas pelo Teorema de Hartmann Grobman, temos apenas um número finito de singularidades, em particular um número finito de singularidades que são acumuladas por órbitas periódicas. Denotemos assim

$$Sing^*(X) = Sing(X) \cap Cl(Per(X)) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}.$$

Temos por hipótese que, para cada $i = 1, \ldots, k$ existe um conjunto invariante compacto Λ_i de X tal que $\sigma \in \Lambda_i$ e Λ_i é um atrator seccional-hiperbólico para X ou $-X$. Denote

$$H^* = \Omega(X) \backslash \bigcup_{i=1}^{k} \Lambda_i.$$

Afirmação: H^* divide-se em uma união disjunta finita de conjuntos básicos hiperbólicos.

Demonstração: De fato, tem-se que $H^* \backslash Sing(X)$ é fechado em M, caso contrário, existiria $\sigma \in Sing(X)$ e uma sequência $x_n \in H^* \backslash Sing(X)$ convergindo para σ. Como temos que X é genérico, podemos assumir que $\Omega(X) = Cl(Per(X) \cup Sing(X))$, e assim teríamos que para todo n, $x_n \in Cl(Per(X))$, desde que $Sing(X)$ é um conjunto finito. Desta forma, repassando para outra sequência se necessário podemos assumir que os x_n são de fato pontos periódicos. Assim, teríamos então que $\sigma \in Cl(Per(X))$, e portanto $\sigma \in Sing^*(X)$.

Logo, $\sigma \in \Lambda_i$, para algum $i = 1, \ldots, k$. Como Λ_i é um atrator para X, temos que $x_n \in \Lambda_i$, para todo n suficientemente grande. De fato, como Λ_i é atrator para X, temos que existe uma vizinhança U da mesma, tal que $X_t(U) \subseteq U$, para todo $t > 0$, e ainda $\Lambda_i = \bigcap_{t \geq 0} X_t(U)$, assim para n suficientemente grande $x_n \in U$, o que implica que $X_t(x_n) \in U$, para todo $t > 0$, e portanto como x_n é periódico, $O(x_n) \in U$, daí $O(x_n) \in \Lambda_i$. Isto contradiz o fato de $x_n \in H^* = \Omega(X) \backslash \bigcup_{i=1}^{k} \Lambda_i$. O que prova que $H^* \backslash Sing(X)$ é fechado em M, logo compacto pois M também o é, e invariante pois $\Omega(X)$ é invariante. Como $H^* \backslash Sing(X) \subseteq Cl(P(X))$ e por definição não contém singularidades, o Teorema 2.0.25 implica que $H^* \backslash Sing(X)$ é um conjunto hiperbólico para X, logo, pelo teorema da decomposição espectral, pode ser decomposto em uma união finita de peças básicas, ou seja, $H^* \backslash Sing(X) = \bigcup_{j=1}^{r} \Gamma_j$. Assim temos que

$$\Omega(X) = \bigcup_{i=1}^{k} \Lambda_i \bigcup H^* = \bigcup_{i=1}^{k} \Lambda_i \bigcup (H^* \backslash Sing(X)) \bigcup \{q_1, \ldots, q_m\} = \bigcup_{i=1}^{k} \Lambda_i \bigcup_{j=1}^{r} \Gamma_j \bigcup \{q_1, \ldots, q_m\}$$

onde $\{q_1, \ldots, q_m\}$ são as singularidades isoladas para X, que são hiperbólicas, logo temos um conjunto hiperbólico. Assim Ω divide-se em uma união disjunta finita de conjuntos compactos invariantes hiperbólicos, sendo Λ_i atratorres seccional-hiperbólico para X ou $-X$ para todo i, e portanto concluímos que X é seccional-Axioma A.

■

Agora temos ferramentas suficientes para demonstrarmos o Teorema A.

Demonstração do Teorema A:

Seja X um campo vetorial C^1-genérico em uma n-variedade fechada, $n \geq 3$, cujas singularidades acumuladas por órbitas periódicas têm codimensão 1. Suponhamos agora que X seja tal que não haja nenhum ponto acumulado por órbitas periódicas hiperbólicas de diferentes índices de Morse, desde que X é C^1-genérico, pela Proposição 2.0.24 temos que X é um fluxo estrela.

Se $n = 3$, o Teorema 2.0.26 nos dá que X é, de fato, seccional-Axioma A.

Se $n \geq 4$, pela Proposição 2.0.24, desde que as singularidades acumuladas por órbitas periódicas tenham codimensão 1, temos que todas singularidades pertencem a um atrator seccional-hiperbólico para X ou $-X$. Então, pela Proposição 2.0.27, temos que X é também seccional-Axioma A.

$\blacksquare$

Para a demonstração do Teorema B precisamos de mais alguns resultados.

A seguir denotamos por $W^s_X(\cdot)$ e $W^u_X(\cdot)$ as variedades estável e instável de um ponto $p \in M$ com respeito ao campo vetorial $X \in \mathcal{X}^1(M)$. A notação $O_X(p)$ irá indicar a órbita de p com respeito a X. Como de costume a notação $\pitchfork$ irá indicar a operação de interseção transversal.

Lema 2.0.28 *Existe um conjunto residual $\mathcal{R} \subset \mathcal{X}^1(M)$ com a seguinte propriedade: Se $X \in \mathcal{R}$ tem dois pontos periódicos q_0 e p_0 tais que para qualquer vizinhança $\mathcal{U}$ de X existe $Y \in \mathcal{U}$ tal que os as continuações $q(Y)$ e $p(Y)$ de q_0 e p_0, respectivamente, estejam definidas e satisfaçam $W^s_Y(O(q(Y))) \pitchfork W^u_Y(O(p(Y))) \neq \emptyset$. Então X satisfaz*

$$W^s_X(O(q_0)) \pitchfork W^u_X(O(p_0)) \neq \emptyset.$$

Demonstração.

De fato, seja $\{U_n\}$ uma base enumerável da topologia de M. Agora, definimos o conjunto A_{n,m,T_1,T_2} como sendo o conjunto dos campos vetoriais tais que existam $p \in U_n$ e $q \in U_m$ pontos periódicos hiperbólicos tais que $\tau(O(p)) \leq T_1$ e $\tau(O(q)) \leq T_2$, $T_1, T_2 \in \mathbb{N}$, e $W^s(O(p)) \pitchfork W^u(O(q)) \neq \emptyset$.

Afirmação 1: A_{n,m,T_1,T_2} é um conjunto aberto.

Demonstração: De fato, tome $X \in A_{n,m,T_1,T_2}$, então existem $p \in U_n$ e $q \in U_m$ tais que p, q são periódicos hiperbólicos, com $\tau(O(p)) \leq T_1$ e $\tau(O(q)) \leq T_2$ e $W^s(O(p)) \pitchfork W^u(O(q)) \neq \emptyset$. Pela hiperbolicidade de p e q temos que vai existir uma vizinhança $\mathcal{U}$ de X tal que para todo $Y \in \mathcal{U}$ $O(p(Y))$ e $O(q(Y))$ são órbitas periódicos hiperbólicos para Y_t. Como as variedades estável e instável variam continuamente, e por $p(Y) \in U_n$ e $q(Y) \in U_m$, temos ainda que $W^s_Y(O(p(Y))) \pitchfork W^u_Y(O(q(Y))) \neq \emptyset$. Logo $\mathcal{U} \subset A_{n,m,T_1,T_2}$, e portanto A_{n,m,T_1,T_2} é aberto.

Agora defina $B_{n,m,T_1,T_2} = \mathcal{X}^1 \setminus Cl(A_{n,m,T_1,T_2})$, que é aberto. Tome $C_{n,m,T_1,T_2} = A_{n,m,T_1,T_2} \cup B_{n,m,T_1,T_2}$.

Afirmação 2: C_{n,m,T_1,T_2} é aberto e denso para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Demonstração: De fato, fixando n, m, temos que $\mathcal{X}^1(M) = Cl(A_{n,m,T_1,T_2}) \cup B_{n,m,T_1,T_2}$, assim basta verificar que $Cl(A_{n,m,T_1,T_2}) \cup B_{n,m,T_1,T_2} \subset Cl(A_{n,m,T_1,T_2} \cup B_{n,m,T_1,T_2})$. Suponha que

$X \notin B_{n,m,T_1,T_2}$, logo $X \in Cl(A_{n,m,T_1,T_2})$, o que implica que $X \in Cl(A_{n,m,T_1,T_2} \cup B_{n,m,T_1,T_2})$.

Definamos o conjunto

$$\mathcal{R}_1 = \bigcap_{n,m,T_1,T_2 \in \mathbb{N}} C_{n,m,T_1,T_2}$$

que é residual em $\mathcal{X}^1(M)$, pois é a interseção de abertos e densos.

Tomemos agora, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$, onde $\mathcal{R}_2$ é um residual dado pelo Teorema de Kupka-Smale.

Vamos mostrar que para este residual $\mathcal{R}$ são satisteitas as condições do Lema.

Sejam $X \in \mathcal{R}$ e p_0, $q_0 \in Per(X)$. Suponha que exista $(Y_r)_{r\in\mathbb{N}}$ tal que $Y_r \longrightarrow X$ com

$$W^s_{Y_r}(p_0(Y_r)) \pitchfork W^u_{Y_r}(q_0(Y_r)) \neq \emptyset.$$

Como X é Kupka-Smale, podemos supor que temos finitas órbitas periódicas hiperbólicas com período limitado. Seja K tal que $\tau(O(p_0))$, $\tau(O(q_0)) < K$. Assim, podemos escolher U_{n_0} e U_{m_0} vizinhanças pequenas de p_0 e q_0, respectivamente, tais que, $O(p_0)$ é a unica órbita de período menor que K passando por U_{n_0}, e $O(q_0)$ é a única órbita de período menor que K passando por U_{m_0}.

Desta forma, temos que $Y_r \in A_{n_0,m_0,K,K}$, o que implica que $X \in Cl(A_{n_0,m_0,K,K})$. Logo, $X \notin B_{n_0,m_0,T_1,T_2}$. Porém, como $X \in \mathcal{R}$, então $X \in A_{n_0,m_0,K,K} \cup B_{n_0,m_0,K,K}$, o que implica $X \in A_{n_0,m_0,K,K}$.

Agora, como p_0, q_0 são as únicas órbitas em U_{n_0} e U_{m_0}, respectivamente, de período menor do que K temos que

$$W^s_X(p_0) \pitchfork W^u_X(q_0) \neq \emptyset.$$

Portanto $\mathcal{R}$ satisfaz as condições de Lema e assim, segue o resultado.

$\blacksquare$

Teorema 2.0.29 *(Teorema 4.1 em [11])Seja X um fluxo estrela. Então X não exibe ciclos heterodimensionais.*

Lema 2.0.30 *Um fluxo estrela C^1-genérico com decomposição espectral não tem pontos acumulados por órbitas periódicas hiperbólicas de diferentes índices de Morse.*

Demonstração.

Seja $\mathcal{R}$ o subconjunto residual do Lema 2.0.28. Suponha que $X \in \mathcal{R}$ tenha decomposição espectral e ainda tenha pontos acumulados por órbitas periódicas de diferentes índices de Morse. Então existem $i \neq j$ tais que $Cl(Per_i(X)) \cap Cl(Per_j(X) \neq \emptyset$. Sem perda de generalidade podemos supor $i < j$. Tome $x \in Cl(Per_i(X)) \cap Cl(Per_j(X))$ assim existem órbitas periódicas $O(p_0)$, de índice i, e $O(q_0)$, de índice j, arbitrariamente próximas de x. Claramente $x \in \Omega(X)$, e por isto existe um conjunto básico Λ na decomposição espectral de X tal que $x \in \Lambda$. Como os conjuntos básicos da decomposição espectral são disjuntos e as órbitas $O(p_0) \neq O(q_0)$ estão próximas de x (e pertencem a $\Omega(X)$) podemos concluir que $O(p_0) \cup O(q_0) \subset \Lambda$.

Desde que Λ é transitivo, podemos usar o *connecting lemma* para encontrarmos Y arbitrariamente próximo de X tal que $W^s_Y(O(q_0(Y))) \cap W^u_Y(O(p_0(Y))) \neq \emptyset$. Por outro lado, como $j-i>0$, uma vez que $j>i$, e ainda $dim(W^s_Y(O(q(Y)))) = j+1$ e $dim(W^u_Y(O(p(Y)))) = m-i$ (onde m é a dimensão de M), desde que $Ind(O(q_0(Y))) = j$ e $Ind(O(p_0(Y))) = i$, respectivamente; temos que $dim(W^s_Y(O(q_0(Y)))) + dim(W^u_Y(O(p_0(Y)))) = j+1+m-i > m$. Portanto, a menos de uma perturbação, podemos supor que a interseção acima é transversal. E assim, como $X \in \mathcal{R}$ podemos concluir que

$$W^s_X(O(q_0)) \pitchfork W^u_X(O(p_0)) \neq \emptyset.$$

Agora, usando o *connecting lemma* novamente, como acima, podemos agora peturbar o campo X para conectarmos as variedades $W^u(O(q_0))$ e $W^x(O(p_0))$, e assim temos um ciclo heterodimensional. Mas isto contradiz a não existência de ciclos heteroclínicos para fluxos estrelas no Teorema 2.0.29. Segue o resultado.

■

Agora demonstremos o Teorema B.

Demonstração B:

Seja X um fluxo estrela C^1-genérico, com decomposição espectral, cujas singularidades acumuladas por órbitas periódicas tem codimensão 1. Pelo Lema 2.0.30 temos que X não possui nenhum ponto acumulado por órbitas periódicas hiperbólicas de diferentes índices de Morse, logo pelo Teorema A X é seccional-Axioma A.

■

Referências Bibliográficas

[1] Abdneur, F., *Generic robustness os spectral decompositions*, Ann. Sci. École Norm. Sup (4) 36 (2003), no. 2, 213-224.

[2] Afraimovich, V., S., Bykov, V., V., Shilnikov, L., P., *On attracting structurally unstable limit sets of Lorenz attractor type*, (Russian) Trudy Moskov. Mat. Obshch. 44 (1982), 150-212.

[3] Arbieto, A., Morales, C., *A dichotomy for higher-dimensional flows*. Proc. Amer. Math. Soc. 141 (2013), 2817-2827.

[4] Arbieto, A., Santiago, B., Sodero, T., *Fluxo Estrela*. Publicação IMPA, (2011).

[5] Bonatti, Ch., Viana, M., *SBR meansures for partially hyperbolic systems whose central direction is mostly contracting*, Israel J. Math. 115 (2000), 157-193.

[6] Camacho, C., Neto, A.L. *Teoria Geométrica das Folheações*. Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979.

[7] Carballo, C., Morales, C., Pacifico, M., J., *Homoclinic classes for generic C^1 vector fields*, Ergodic Theory Dynam. Systems 23 (2003), no. 2, 403-415.

[8] Carballo, C., Morales, C., Pacifico, M., J., *Maximal transitive sets with singularities for generic C^1 vector fields*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 31 (2000), no. 3, 287-303.

[9] Carmo, M., *Geometria Riemanniana*. Publicação IMPA, Projeto Euclides, (2008).

[10] Franks, J., *Necessary conditions for stability of diffeomorphisms*, Trans. Amer. Math. Soc. 158, (1971), 301-308.

[11] Gan, S., Wen, L., *Nonsingular star flows satisfy Axiom A and the no-cycle condition*, Invent. Math. 164 (2006), no. 2, 279Ű315.

[12] Gan, S., Li, M., Wen, L., *Robustly transitive singular sets via approach of an extended linear Poincaré flow*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 13 (2005), no. 2, 239Ű269.

[13] Gan, S., Wen, L., Zhu, S., *Indices of singularities of robustly transitive sets*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 21 (2008), no. 3, 945Ű957.

[14] Gan, S. Wen, L., *Nonsingular star flows satisfy Axiom A and the no-cycle condition*. Invent. Math. 164 (2006), no. 2, 279-315.

[15] Guckenheimer, J., *A strange, strange attractor, The Hopf bifurcation and its applications*, Applied Mathematical Series 19 (1976), Springer-Verlag.

[16] Guckenheimer, J., Williams, R., *Structural stability of Lorenz attractors*, Publ. Math. IHES 50 (1979), 59Ű72.

[17] Hayashi, S., *Diffeomorphisms in $\mathcal{F}^1(M)$ satisfy Axiom A*, Ergodic Theory Dynam. Systems 12 (1992), no. 2, 233Ű253.

[18] Hayashi, S., *Connecting invariant manifolds and the solution of the C^1-stability and Ω-stability conjectures for flows*, Ann. of Math. (2) 145 (1997), no. 1, 81Ű137.

[19] Hasselblatt, B., Katok, A., *Introduction to the modern theory of dynamical systems. With a supplementary chapter by Katok and Leonardo Mendoza*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 54. Cambridge University Press, Cambridge (1995).

[20] Hirsch, M., Pugh, C., Shub, M., *Invariant manifolds, Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 583. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.

[21] Liao, S., *Qualitative theory of differentiable dynamical systems*. Translated from the Chinese. With a preface by Min-de Cheng. Science Press, Beijing; distributed by American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[22] Lima, E. L. *Variedades Diferenciáveis*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 2007.

[23] Mañé, R., *A proof of the C^1 stability conjecture*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 66 (1988), 161Ű210.

[24] Mañé, R., *An ergodic closing lemma*, Ann. of Math. (2) 116 (1982), no. 3, 503Ű540.

[25] Mañé, R., *Contributions to the stability conjecture*, Topology 17 (1978), no. 4, 383396.

[26] Metzger, R., Morales, C., *Sectional-hyperbolic systems*, Ergodic Theory Dynam. Systems 28 (2008), no. 5, 1587Ű1597.

[27] Morales, C., A., *Strong stable manifolds for sectional-hyperbolic sets*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 17 (2007), no. 3, 553Ű560.

[28] Morales, C., Pacifico, M., J., *A dichotomy for three-dimensional vector fields*, Ergodic Theory Dynam. Systems 23 (2003), no. 5, 1575Ű1600.

[29] Morales, C.., Pacifico, M., J., Pujals, E., R., *Singular-hyperbolic systems*, Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999), no. 11, 3393Ű3401.

[30] Palis, J., Melo, W. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos.* Projeto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1978.

[31] Pliss, V., A., *A hypothesis due to Smale*, DifferencialŠnye Uravnenija 8 (1972), 268Ű282.

[32] Pliss, V., A., *On a conjecture due to Smale*, Diff. Uravnenija 8 (1972), 268Ű282.

[33] Pugh, C., *An improved closing lemma and a general density theorem*, Amer. J. Math. 89 (1967), 1010Ű1021.

[34] Pugh, C., Robinson, C., *The C^1 closing lemma, including Hamiltonians*, Ergodic Theory and Dunam. Systems 3 (1983), no.2, 261-313

[35] Shilinikov, L., P., Turaev, D., V., *An example of a wild strange attractor*, Sb. Math. 189 (1998), no. 1-2, 291Ű314.

[36] Shilinikov, L., P., Shilnikov, A., L., Turaev, D, Chua, L, *Methods of qualitative theory in non-linear dynamics.* Part II, World Scientific Series on Nonlinear Science. Series A: Monographs and Treatises, 5. World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2001.

[37] Sotomayor, J. M. T., *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq (1979).

[38] Wen, L., *On the preperiodic set*, Discrete Contin. Dynam. Systems 6 (2000), no. 1, 237-241.

[39] Wen, L. *A uniform C^1 connecting lemma.* Discrete Contin. Dyn. Syst. 8 (2002), no. 1, 257-265

[40] Wen, L. Xia, Z. *C^1 connecting lemmas.* Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000), no. 11, 5213-5230.