FERNANDA RIBEIRO DE MOURA

Ideais algébricos de aplicações multilineares e polinômios homogêneos

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2014

FERNANDA RIBEIRO DE MOURA

Ideais algébricos de aplicações multilineares e polinômios homogêneos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Análise Funcional.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

UBERLÂNDIA - MG
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU , MG, Brasil

M929i Moura, Fernanda Ribeiro de, 1981-
2014 Ideais algébricos de aplicações multilineares e polinômios homogêneos / Fernanda Ribeiro de Moura. - 2014.
113 f. : il.

Orientador: Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia,
Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Inclui bibliografia.

1. Matemática - Teses. 2. Espaços vetoriais - Teses. 3. Polinômios - Teses. I. Botelho, Geraldo Márcio de Azevedo. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO(A): Fernanda Ribeiro de Moura

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11212MAT004.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Análise Funcinal.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Ideais algébricos de aplicações multilineares e polinômios homogêneos.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 28 de maio de 2014, às 10:30 h, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME	ASSINATURA
Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho UFU – Universidade Federal de Uberlândia (Orientador)	
Profa. Dra. Marcela Luciano Vilela de Souza UFTM – Universidade Federal do Triângulo Mineiro	M. Vilela
Prof. Dr. Fábio José Bertoloto UFU – Universidade Federal de Uberlândia	Fabio J. Bertoloto

Uberlândia-MG, 28 de Maio de 2014.

Dedicatória

Dedico este trabalho ao Reinaldo, meu amado marido, pela paciência, compreensão e apoio durante toda a pós-graduação. Agradeço imensamente por todo o amor e carinho.

Aos meus pais, Fernando e Lourdes, responsáveis por toda a minha existência, especialmente pela transmissão dos princípios e valores que orientam minha vida.

À Gabriela, minha filha, por todo carinho, por toda alegria que ela me traz.

Às minhas queridas irmãs, em quem posso confiar e contar sempre.

Aos meus familiares e a todos os meus amigos, pelo carinho, compreensão, e amor sempre presentes.

Agradecimentos

Em um universo de pessoas especiais, muitas me apoiaram; algumas incentivaram e, outras compartilharam com o meu trabalho, contudo não tenho dúvidas que todas torceram pelo meu sucesso. Por isso, deixo aqui registrado o meu "muito obrigada", em especial:

• ao meu orientador Geraldo Botelho, pela excelente orientação. Agradeço também, pela confiança, apoio e paciência, sendo desta forma um dos grandes responsáveis por esta conquista;

• aos professores da pós-graduação, que muito contribuíram para a minha formação;

• aos meus amigos da pós-graduação;

• à minha querida amiga Nathália, pela franca amizade, por ser minha grande companheira de estudos;

• à CAPES, pelo apoio financeiro;

e, acima de tudo, a Deus, que me dá força, sabedoria e coragem para continuar, sempre!

MOURA, F. R., *Ideais algébricos de aplicações multilineares e polinômios homogêneos.* 2014. 100 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

O principal objetivo desta dissertação é estudar os ideais de aplicações multilineares e polinômios homogêneos entre espaços vetoriais. Por um ideal entendemos uma classe de aplicações que é estável através da composição com operadores lineares. Primeiramente estudamos as aplicações multilineares e os espaços de aplicações multilineares. Mostramos também como obter, a partir de uma aplicação multilinear dada, outras aplicações com graus de multilinearidade maiores, iguais ou menores que o da aplicação original. Em seguida estudamos os polinômios homogêneos e os espaços de polinômios homogêneos, e mostramos que, a partir de um polinômio n-homogêneo, também podemos construir novos polinômios homogêneos com graus de homogeneidade maiores, iguais ou menores que n. Posteriormente estudamos os ideais de aplicações multilineares, ou multi-ideais, e os ideais de polinômios homogêneos, exibindo vários exemplos e apresentando métodos para se obter um multi-ideais, ou ideais de polinômios, a partir de ideais de operadores lineares dados. Por fim, definimos e exibimos vários exemplos de multi-ideais coerentes e de ideais coerentes de polinômios.

Palavras-chave: espaço vetorial, aplicações multilineares, polinômios homogêneos, ideais de operadores, multi-ideais, ideais de polinômios homogêneos, ideais coerentes.

Moura, F. R., *Algebraic ideals of multilinear mappings and homogeneous polynomials.* 2014. 100 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

The main purpose of this dissertation is the study of ideals of multilinear mappings and homogeneous polynomials between linear spaces. By an ideal we mean a class that is stable under the composition with linear operators. First we study multilinear mappings and spaces of multilinear mappings. We also show how to obtain, from a given multilinear mapping, other multilinear mappings with degrees of multilinearity greater than, equal to or smaller than the degree of the original multilinear mapping. Next we study homogeneous polynomials and spaces of homogeneous polynomials, and we also show how to obtain, from a given n-homogeneous polynomial, other polynomials with degrees of homogeneity greater than, equal to or smaller than the degree of the original polynomial. Next we study ideals of multilinear mappings, or multi-ideals, and ideals of homogeneous polynomial, or polynomial ideals, giving several examples and presenting methods to generated multi-ideals and polynomial ideals from a given operator ideal. Finally we define and give several examples of coherent multi-ideals and coherent polynomial ideals.

Keywords: linear space, multilinear mappings, homogeneous polynomials, operator ideals, multi-ideals, polynomial ideals, coherent ideals.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	$\{1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^+$	conjunto dos números reais não-negativos
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
X, Y	espaços topológicos
$E_1, \ldots, E_m, E$ e F	espaços vetoriais ou espaços vetoriais normados ou espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$
$Im(f)$	imagem da aplicação f
$ker(f)$	núcleo da aplicação f
$L(E_1, \ldots, E_m; F)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ das aplicações multilineares de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F
E^*	dual topológico do espaço vetorial E
$L(^nE; F)$	$L(E, \overset{(n)}{\ldots}, E; F)$
$L^s(^nE; F)$	subespaço vetorial de $L(^nE; F)$ das aplicações multilineares simétricas
$L_f(E_1, \ldots, E_n; F)$	subespaço vetorial de $L(E_1, \ldots, E_n; F)$ das aplicações n-lineares de tipo finito
$L_{\mathcal{F}}(E_1, \ldots, E_n; F)$	subespaço vetorial de $L(E_1, \ldots, E_n; F)$ das aplicações n-lineares de posto finito

$P(^mE;F)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos polinômios m-homogêneos de E em F
$P_f(^mE;F)$	conjunto dos polinômios m-homogêneos de tipo finito de E em F
$P_{\mathcal{F}}(^mE;F)$	conjunto dos polinômios m-homogêneos de posto finito entre os espaços vetoriais E e F
$E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$	produto tensorial dos espaços de Banach $E_1, \ldots, E_m$, definido como o subespaço de $L(E_1, \ldots, E_m; \mathbb{K})^*$ gerado pelos tensores elementares

SUMÁRIO

Resumo **vii**

Abstract **viii**

Lista de Símbolos **ix**

Introdução **1**

1 Aplicações Multilineares **4**
1.1 Definição e exemplos de aplicações multilineares 4
1.2 Aplicações multilineares simétricas 8
1.3 Aumentando o grau de multilinearidade 15
1.4 Mantendo o grau de multilinearidade 18
1.5 Diminuindo o grau de multilinearidade 21

2 Polinômios Homogêneos **25**
2.1 Definição e exemplos de polinômios homogêneos 25
2.2 Aumentando o grau de homogeneidade 38
2.3 Mantendo o grau de homogeneidade 41
2.4 Diminuindo o grau de homogeneidade 42

3 Ideais Algébricos de Aplicações Multilineares **57**
3.1 Definição e primeiros exemplos 57
3.2 O método da fatoração 62
3.3 Método da linearização 65
3.4 Multi-ideais de composição 69

4 Ideais de Polinômios Homogêneos **73**
4.1 Definição e primeiros exemplos 73
4.2 Ideais de polinômios associados a um multi-ideal 76
4.3 O método da fatoração 78

4.4 O método da linearização 81
4.5 Ideais de composição 83

5 Ideais Coerentes **85**
5.1 Multi-ideais coerentes 85
5.2 Ideais coerentes de polinômios 95

Referências Bibliográficas **100**

INTRODUÇÃO

O objetivo desta dissertação é apresentar, em detalhes, a teoria algébrica subjacente aos estudo de ideais de aplicações multilineares e polinômios homogêneos entre espaços de Banach.

Historicamente, os fatos remontam à década de 1960 com a redescoberta dos trabalhos de A. Grothendieck, quando ficou evidente a importância de se estudar classes especiais de operadores lineares contínuos entre espaços de Banach. Foi apenas no final da década de 1960 que as ideias de Grothendieck da década de 1950 começaram a ser melhor compreendidas e reescritas de forma mais acessível, principalmente com trabalhos de J. Lindenstrauss, A. Pełczyński e A. Pietsch, entre outros. Um dos resultados dessa "redescoberta" foi a formalização, por A. Pietsch, da teoria abstrata de ideais de operadores no livro [14].

Na esteira do sucesso da teoria de ideais de operadores, em 1983 o próprio Pietsch esboçou em [15] uma generalização da teoria para o caso de aplicações multilineares, que rapidamente foi adaptada também para polinômios homogêneos. Nas últimas duas décadas muitos avanços têm sido obtidos na teoria de ideais de polinômios e de aplicações multilineares entre espaços de Banach e muitos caminhos têm sido abertos para futuros trabalhos.

Os objetos de estudo desta teoria são espaços de Banach e aplicações multilineares contínuas e polinômios homogêneos contínuos entre eles. Como pano de fundo que dá sustentação à teoria, estão os espaços vetoriais e as aplicações multilineares e os polinômios homogêneos entre eles. É desse *background* algébrico que trata esta dissertação. A ideia é apresentar, em detalhes, os conceitos, muitos exemplos ilustrativos, os principais resultados, suas demonstrações, tudo isso em relação aos aspectos algébricos da teoria de aplicações multilineares e polinômios homogêneos entre espaços vetoriais. O objetivo central é que o leitor adquira todos os pré-requisitos algébricos necessários para o estudo da teoria de aplicações multilineares contínuas e polinômios homogêneos contínuos entre espaços de Banach.

Passamos agora a descrever os conteúdos desenvolvidos no trabalho. O primeiro capítulo é dividido em cinco seções. Na primeira definimos aplicações multilineares e apresentamos alguns exemplos iniciais, tais como as aplicações multilineares de tipo finito e as aplicações multilineares de posto finito. Ainda nesta seção estudamos os espaços de aplicações multilineares e apresentamos alguns teoremas de isomorfismos, que serão utilizados no decorrer do trabalho. Na segunda seção estudamos a classe das aplicações multilineares simétricas, suas principais propriedades e também o subespaço formado por tais aplicações. Terminamos esta seção provando a Fórmula de Leibniz e a Fórmula de Polarização. As três últimas seções deste primeiro capítulo foram dedicadas a técnicas de manipulação de aplicações multilineares, com o objetivo de, a partir de uma aplicação n-linear, obter novas aplicações k-lineares para $k < n$, $k = n$ e $k > n$.

No segundo capítulo estudamos os polinômios homogêneos. Na Seção 2.1 exibimos alguns exemplos, entre eles os polinômios homogêneos de tipo finito e os polinômios homogêneos de posto finito. Em seguida mostramos que todo polinômio homogêneo definido em um espaço vetorial de dimensão finita é de tipo finito. Posteriormente, verificamos que um mesmo polinômio pode ser gerado por diferentes aplicações multilineares. E, mais ainda, que se nos restringirmos a aplicações multilineares simétricas, vale a unicidade da aplicação multilinear que gera um dado polinômio homogêneo. Mostramos também que o espaço vetorial dos polinômios m-homogêneos de E a valores no espaço dos polinômios n-homogêneos de E em F contém uma cópia isomorfa do espaço dos polinômios $(m+n)$-homogêneos de E em F. À semelhança do que foi feito no Capítulo 1, nas seções 2.2, 2.3 e 2.4 mostramos como construir, a partir de um polinômio n-homogêneo dado, outros polinômios k-homogêneos para $k < n$, $k = n$ e $k > n$. .

No terceiro capítulo estudamos os ideais algébricos das aplicações multilineares, que são classes de aplicações multilineares que são estáveis através da composição por operadores lineares. Mais precisamente, se A é uma aplicação n-linear pertencente à classe, e $u_1, \ldots, u_n$, e t são operadores lineares, então a aplicação n-linear

$$t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n)$$

também pertence à classe, desde que, é claro, os domínios e contra-domínios sejam compatíveis com a composição. Na Seção 3.1 formalizamos esta definição e exibimos alguns exemplos, aproveitando os exemplos estudados no Capítulo 1 e também apresentando novas classes, tal como a classe das aplicações multilineares de posto enumerável. Provamos também que a classe das aplicações de posto menor ou igual a k, onde $k \in \mathbb{N}$, não é um multi-ideal. Nas três últimas seções deste capítulo apresentamos três métodos para gerar multi-ideais a partir de ideais de operadores, a saber, o método da fatoração, o método da linearização e os multi-ideais de composição.

No quarto capítulo estudamos os ideais algébricos de polinômios homogêneos, que são classes de polinômios homogêneos que são estáveis através da composição por operadores lineares. Mais precisamente, se P é um polinômio n-homogêneo pertencente à classe, e u e t são operadores lineares, então o polinômio n-homogêneo

$$t \circ P \circ u$$

também pertence à classe, desde que, é claro, os domínios e contra-domínios sejam compatíveis com a composição. Na seção 4.1 formalizamos esta definição e exibimos alguns exemplos, aproveitando os exemplos estudados no Capítulo 3 e também apresentando novas classes, tal como a classe dos polinômios homogêneos de posto enumerável. Na Seção

4.2 estudamos duas maneiras de se gerar ideais de polinômios a partir de multi-ideais. E nas seções 4.3, 4.4 e 4.5 adaptamos o estudo feito no Capítulo 3 para apresentar três métodos de gerar ideais de polinômios a partir de ideais de operadores, que são os métodos da fatoração, da linearização e os ideais de composição.

O último capítulo tem o objetivo de unificar os conteúdos dos capítulos anteriores. Aplicamos o conteúdo das três últimas seções do Capítulo 1, onde aprendemos aumentar e diminuir o grau de uma aplicação multilinear, aos multi-ideais, estudados no Capítulo 3. A ideia é a seguinte: dado uma aplicação multilinear A pertencente ao multi-ideal $\mathcal{M}$, será que aumentando ou diminiuindo o grau de multilinearidade de A, de acordo com o que fizemos no Capítulo 1, as aplicações multilineares resultantes continuam pertencendo ao multi-ideal $\mathcal{M}$? Os multi-ideais que satisfazem esta propriedade são chamados de multi-ideais *coerentes* e são o objeto de estudo da primeira seção deste último capítulo. Analogamente, aplicamos o conteúdo das três últimas seções do Capítulo 2, onde aprendemos aumentar e diminuir o grau de um polinômio homogêneo, aos ideais de polinômios, estudados no Capítulo 4. A ideia é a seguinte: dado um polinômio homogêneo P pertencente ao ideal de polinômios $\mathcal{Q}$, será que aumentando ou diminiuindo o grau de homogeneidade de P, de acordo com o que fizemos no Capítulo 2, os polinômios homogêneos resultantes continuam pertencendo ao ideal de polinômios $\mathcal{Q}$? Os ideais de polinômios que satisfazem esta propriedade são chamados de ideais *coerentes* de polinômios e são o objeto de estudo da segunda seção deste último capítulo.

Uma característica importante desta dissertação é que apresentamos os detalhes das demonstrações de vários resultados que são tidos como *folclore*, mas cujas demonstrações não aparecem explicitamente na literatura ou são muito difíceis de serem encontradas.

Fernanda Ribeiro de Moura
Uberlândia-MG, 28 de maio de 2014.

CAPÍTULO 1

APLICAÇÕES MULTILINEARES

O intuito deste capítulo é apresentar a teoria básica de aplicações multilineares entre espaços vetoriais, aplicações multilineares simétricas e exibir alguns exemplos ilustrativos. Uma parte importante do capítulo consiste na análise de como é possível se movimentar dentro da classe das aplicações multilineares no sentido de manter, aumentar ou diminuir o grau de multilinearidade.

1.1 Definição e exemplos de aplicações multilineares

Nesta seção as principais referências utilizadas foram as dissertações [1], [2] e [17].

Definição 1.1.1 Sejam $n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n$ e F espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Dizemos que uma aplicação A: $E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ *é n-linear* (ou *multilinear*) se é linear em cada uma das suas variáveis, isto é,

$$A(x_1, \ldots, x_i + \lambda x_i', \ldots, x_n) = A(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + \lambda A(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n),$$

para quaisquer $x_i, x_i' \in E_i$ com $i = 1, \ldots, n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Se $F = \mathbb{K}$ dizemos que A é uma *forma n-linear* (ou *forma multilinear*).

O conjunto de todas as aplicações n-lineares de $E_1 \times \cdots \times E_n$ em F será denotado por $L(E_1, \ldots, E_n; F)$. Se $F = \mathbb{K}$ denotamos $L(E_1, \ldots, E_n; \mathbb{K})$ por $L(E_1, \ldots, E_n)$. No caso em que $E = E_1 = \cdots = E_n$ escrevemos $L(^nE; F)$. E no caso em que $E = E_1 = \cdots = E_n$ e $F = \mathbb{K}$ escrevemos $L(^nE)$. Se $n = 1$ utilizamos a notação usual $L(^1E; F) = L(E; F)$ para o espaço das tranformações lineares de E em F. E no caso em que $n = 1$ e $F = \mathbb{K}$ escrevemos $L(E; \mathbb{K}) = E^*$ e chamamos este espaço de *dual algébrico de E*.

Definimos agora duas operações no conjunto $L(E_1, \ldots, E_n; F)$ que o tornam um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$:

1) A cada par de aplicações n-lineares $A, B \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ fazemos corresponder a aplicação n-linear $A + B \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ definida por:

$$A + B \colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F;$$
$$(A + B)(x_1, \ldots, x_n) = A(x_1, \ldots, x_n) + B(x_1, \ldots, x_n).$$

2) A cada escalar $\lambda \in \mathbb{K}$ e cada aplicação n-linear $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ fazemos corresponder a aplicação n-linear $\lambda A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ definida por:

$$\begin{gathered}\lambda A\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F;\\ (\lambda A)(x_1, \ldots, x_n) = \lambda A(x_1, \ldots, x_n)\end{gathered}$$

Contas elementares mostram que as operações acima estão bem definidas, isto é, $A+B$ e λA pertencem a $L(E_1, \ldots, E_n; F)$, e que este conjunto se torna um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com essas operações.

Agora daremos alguns exemplos iniciais de aplicações multilineares.

Exemplo 1.1.2 Sejam $\varphi_1 \in E_1^*, \ldots, \varphi_n \in E_n^*$ e $b \in F$. Definindo,

$$\begin{gathered}\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F;\\ \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1) \cdot \varphi_2(x_2) \cdots \varphi_n(x_n) \cdot b,\end{gathered}$$

temos $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$.

De fato, dados $x_i, x_i' \in E_i,\ i = 1, \ldots, n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b(x_1, \ldots, x_i + \lambda x_i', \ldots, x_n) &= \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_i(x_i + \lambda x_i') \cdots \varphi_n(x_n) \cdot b\\ &= \varphi_1(x_1) \cdots [\varphi_i(x_i) + \lambda \varphi_i(x_i')] \cdots \varphi_n(x_n) \cdot b\\ &= \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_i(x_i) \cdots \varphi_n(x_n) \cdot b\\ &\quad + \varphi_1(x_1) \cdots \lambda \varphi_i(x_i') \cdots \varphi_n(x_n) \cdot b\\ &= \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_i(x_i) \cdots \varphi_n(x_n) \cdot b\\ &\quad + \lambda \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_i(x_i') \cdots \varphi_n(x_n) \cdot b\\ &= \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)\\ &\quad + \lambda \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_n).\end{aligned}$$

Portanto $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$.

O conjunto de todas as aplicações n-lineares geradas por multilineares deste tipo será denotado por $L_f(E_1, \ldots, E_n; F)$. Seus elementos são chamados de *aplicações multilineares de tipo finito*. Assim, $A \in L_f(E_1, \ldots, E_n; F)$ se, e somente se, existem um número natural $k \in \mathbb{N}$, funcionais lineares $\varphi_{j,i} \in E_j^*$, e vetores $b_i \in F$, $j = 1, \ldots, n$, $i = 1, \ldots, k$ tais que

$$A = \sum_{i=1}^{k} \varphi_{1,i} \otimes \cdots \otimes \varphi_{n,i} \otimes b_i.$$

Como $L_f(E_1, \ldots, E_n; F)$ é o espaço gerado por multililineares de tipo finito, ou seja,

$$L_f(E_1, \ldots, E_n; F) = span\{\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b;\ b \in F \text{ e } \varphi_j \in E_j^*,\ j = 1, \ldots, n\},$$

segue que $L_f(E_1, \ldots, E_n; F)$ é subespaço vetorial de $L(E_1, \ldots, E_n; F)$.

Exemplo 1.1.3 Sejam $A \in L(E_1, \ldots, E_n)$ e $b \in F$. Definindo

$$\begin{gathered}A \otimes b\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F;\\ A \otimes b(x_1, \ldots, x_n) = A(x_1, \ldots, x_n) \cdot b\end{gathered}$$

temos $A \otimes b \in L(E_1, \dots, E_n; F)$.

De fato, dados $x_i,\ x_i' \in E_i,\ i = 1, \dots, n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned} A \otimes b(x_1, \dots, x_i + \lambda x_i', \dots, x_n) &= A(x_1, \dots, x_i + \lambda x_i', \dots, x_n) \cdot b \\ &= [A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + \lambda A(x_1, \dots, x_i', \dots, x_n)] \cdot b \\ &= A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \cdot b + \lambda A(x_1, \dots, x_i', \dots, x_n) \cdot b \\ &= A \otimes b(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + \lambda A \otimes b(x_1, \dots, x_i', \dots, x_n). \end{aligned}$$

Portanto $A \otimes b \in L(E_1, \dots, E_n; F)$.

O conjunto de todas as aplicações n-lineares geradas por multilineares deste tipo será denotado por $L_{\mathcal{F}}(E_1, \dots, E_n; F)$. Seus elementos são chamados de *aplicações multilineares de posto finito*. Assim, $A \in L_{\mathcal{F}}(E_1, \dots, E_n; F)$ se, e somente se, existem um número natural $k \in \mathbb{N}$, formas multilineares $A_1, \dots, A_k \in L(E_1, \dots, E_n)$ e vetores $b_1, \dots, b_k \in F$ tais que

$$A = \sum_{i=1}^{k} A_i \otimes b_i.$$

Como $L_{\mathcal{F}}(E_1, \dots, E_n; F)$ é gerado por multilineares de posto finito, ou seja,

$$L_{\mathcal{F}}(E_1, \dots, E_n; F) = span\{A \otimes b; A \in L(E_1, \dots, E_n) \text{ e } b \in F\},$$

segue que $L_{\mathcal{F}}(E_1, \dots, E_n; F)$ é subespaço vetorial de $L(E_1, \dots, E_n; F)$. É imediato que $L_f(E_1, \dots, E_n; F) \subseteq L_{\mathcal{F}}(E_1, \dots, E_n; F)$.

Denotaremos $\mathcal{F}(E; F)$ o conjunto de todos os operadores lineares de posto finito de E em F.

Observação 1.1.4 Dado uma aplicação $A \in L({}^nE; F)$, é fácil verificar que $A \in L_{\mathcal{F}}({}^nE; F)$ se, e somente se, o subespaço gerado pela imagem de A tem dimensão finita. Isso justifica o termo *aplicação multilinear de posto finito*.

O isomorfismo entre espaços de aplicações multilineares que apresentamos no resultado a seguir será muito útil ao longo desta dissertação.

Teorema 1.1.5 Sejam $E_{1,}, \dots, E_{m+n}, F$ espaços vetoriais com $m, n \in \mathbb{N}$ e $A \in L(E_1, \dots, E_{m+n}; F)$. A aplicação

$$V_{m,n} \colon L(E_1, \dots, E_m, E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F) \longrightarrow L(E_1, \dots, E_m; L(E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F))$$

onde

$$V_{m,n}(A) \colon E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow L(E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F)$$

é definida por

$$V_{m,n}(A)(x_1, \dots, x_m)(x_{m+1}, \dots, x_{m+n}) = A(x_1, \dots, x_{m+n}),$$

e constitui um isomorfismo entre os espaços vetoriais $L(E_1, \dots, E_{m+n}; F)$ e $L(E_1, \dots, E_m; L(E_{m+1}, \dots, E_{m+n}; F))$

Demonstração. Para mostrarmos que $V_{m,n}$ está bem definida, devemos mostrar que $V_{m,n}(A)(x_1, \ldots, x_m) \in L(E_{m+1}, \ldots, E_{m+n}; F)$ para toda aplicação $(m+n)$-linear $A \in L(E_1, \ldots, E_{m+n}; F)$ e todos $x_j \in E_j$, $j = 1, \ldots, m$. Para isso, sejam $j \in 1, \ldots, n$, $x_{m+1} \in E_{m+1}, \ldots, x_{m+j}, y_{m+j} \in E_{m+j}, \ldots, x_{m+n} \in E_{m+n}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então

$$\begin{aligned}
&V_{m,n}(A)(x_1, \ldots, x_m)(x_{m+1}, \ldots, x_{m+j} + \lambda y_{m+j}, \ldots, x_{m+n}) \\
&\qquad = A(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+j} + \lambda y_{m+j}, \ldots, x_{m+n}) \\
&\qquad = A(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+j}, \ldots, x_{m+n}) \\
&\qquad \quad + \lambda A(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, y_{m+j}, \ldots, x_{m+n}) \\
&\qquad = V_{m,n}(A)(x_1, \ldots, x_m)(x_{m+1}, \ldots, x_{m+j}, \ldots, x_{m+n}) \\
&\qquad \quad + \lambda V_{m,n}(A)(x_1, \ldots, x_m)(x_{m+1}, \ldots, y_{m+j}, \ldots, x_{m+n}).
\end{aligned}$$

Portanto, $V_{m,n}(A)(x_1, \ldots, x_m) \in L(E_{m+1}, \ldots, E_{m+n}; F)$.

Vejamos agora que $V_{m,n}(A)$ é m-linear. Para isso, sejam $j = 1, \ldots, m$, $x_1 \in E_1, \ldots, x_j, y_j \in E_j, \ldots, x_m \in E_m$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então

$$\begin{aligned}
&V_{m,n}(A)(x_1, \ldots, x_j + \lambda y_j, \ldots, x_m)(x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) = \\
&\qquad = A(x_1, \ldots, x_j + \lambda y_j, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) \\
&\qquad = A(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) \\
&\qquad \quad + \lambda A(x_1, \ldots, y_j, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) \\
&\qquad = V_{m,n}(A)(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_m)(x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) \\
&\qquad \quad + \lambda V_{m,n}(A)(x_1, \ldots, y_j, \ldots, x_m)(x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}).
\end{aligned}$$

Portanto, $V_{m,n}(A)$ é m-linear.

Vejamos que $V_{m,n}$ é linear. Sejam $A, B \in L(E_1, \ldots, E_{m+n}; F)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x_j \in E_j$, $j = 1, \ldots, m+n$. Então

$$\begin{aligned}
&V_{m,n}(A + \lambda B)(x_1, \ldots, x_m)(x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) = (A + \lambda B)(x_1, \ldots, x_{m+n}) \\
&\qquad = A(x_1, \ldots, x_{m+n}) + \lambda B(x_1, \ldots, x_{m+n}) \\
&\qquad = V_{m,n}(A)(x_1, \ldots, x_m)(x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) \\
&\qquad \quad + \lambda V_{m,n}(B)(x_1, \ldots, x_m)(x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) \\
&\qquad = (V_{m,n}(A) + \lambda V_{m,n}(B))(x_1, \ldots, x_m)(x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}),
\end{aligned}$$

para todos $x_j \in E_j, j = 1, \ldots, m+n.$. Assim $V_{m,n}(A + \lambda B) = V_{m,n}(A) + \lambda V_{m,n}(B)$. Portanto $V_{m,n}$ é linear.

Verifiquemos agora que a transformação linear $V_{m,n}$ é injetora. Para isso seja $A \in L(E_1, \ldots, E_{m+n}; F)$ tal que $V_{m,n}(A) = 0$. Então $V_{m,n}(A)(x_1, \ldots, x_m) = 0$ para todos $x_j \in E_j$, $j = 1, \ldots, m$. Então, $V_{m,n}(A)(x_1, \ldots, x_m)(x_{m+1}, \ldots, x_{m+n}) = 0$ para todos $x_j \in E_j$, $j = 1, \ldots, m+n$. Isso mostra que $A(x_1, \ldots, x_{m+n}) = 0$ para quaisquer $x_j \in E_j$, $j = 1, \ldots, m+n$, e portanto $A = 0$. Segue que $V_{m,n}$ é injetora.

Por fim, provemos que $V_{m,n}$ é sobrejetora. Dada uma aplicação m-linear $B \in L(E_1, \ldots, E_m; L(E_{m+1}, \ldots, E_{m+n}; F))$, defina

$$\begin{gathered}
A \colon E_1 \times \ldots \times E_{m+n} \longrightarrow F; \\
A(x_1, \ldots, x_{m+n}) = B(x_1, \ldots, x_m)(x_{m+1}, \ldots x_{m+n}).
\end{gathered}$$

Da n-linearidade da aplicação $B(x_1, \ldots, x_m)$ para todos $x_j \in E_j, j = 1, \ldots, m$, e da m-linearidade de B segue facilmente que A é $(m+n)$-linear. Além disso, observe que

$$V_{m,n}(A)(x_1, \ldots, x_m)(x_{m+1}, \ldots x_{m+n}) = A(x_1, \ldots, x_{m+n}) = B(x_1, \ldots, x_m)(x_{m+1}, \ldots x_{m+n}),$$

para quaisquer $x_j \in E_j$, $j = 1, \ldots, m+n$. Assim $V_{m,n}(A) = B$. Portanto $V_{m,n}$ é sobrejetora. E, consequentemente, um isomorfismo. ■

1.2 Aplicações multilineares simétricas

Estudaremos nesta seção uma classe de aplicações multilineares que tem interesse em si mesma e que será essencial no estudo dos polinômios homogêneos que será feito a partir do Capítulo 2.

Nesta seção nos inspiramos nas dissertações [1] e [2].

Definição 1.2.1 Denotaremos por S_n o grupo das permutações do conjunto $\{1, \ldots, n\}$, ou seja, o conjunto de todas as bijeções de $\{1, \ldots, n\}$ em $\{1, \ldots, n\}$ munido da operação de composição de funções.

Como o nome já indica, uma aplicação multilinear será simétrica se o valor assumido não depende da ordem em que as variáveis aparecem. Para isso ter sentido é necessário que os espaços do domínio sejam o mesmo, isto é, $E_1 = \cdots = E_n$.

Definição 1.2.2 Uma aplicação multilinear $A \in L(^nE; F)$ é *simétrica* quando

$$A(x_1, \ldots, x_n) = A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

para todos $x_1, \ldots, x_n \in E$ e toda permutação $\sigma \in S_n$. Vamos denotar por $L^s(^nE; F)$ o conjunto de todas as aplicações multilineares $A \in L(^nE; F)$ que são simétricas.

Exemplo 1.2.3 Sejam E e F espaços vetoriais, $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in E^*$ e $b \in F$. Usando a notação do Exemplo 1.1.2, é imediato que a aplicação n-linear $\varphi \otimes \overset{(n)}{\cdots} \otimes \varphi \otimes b$ é simétrica. Por outro lado, é fácil ver que a aplicação

$$A \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \; A((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1 y_2,$$

é bilinear. Mas A não é simétrica:

$$A((1,0),(0,1)) = 1 \neq 0 = A((0,1),(1,0)).$$

Vejamos que é sempre possível simetrizar uma aplicação multilinear:

Definição 1.2.4 Para cada $A \in L(^nE; F)$, definimos $A^s \colon E^n \longrightarrow F$ por

$$A^s(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$$

para todos $x_1, \ldots, x_n \in E$.

Para provar que A^s é simétrica utilizaremos o

Lema 1.2.5 *Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $\sigma \in S_n$. Então $\{\sigma \circ \delta : \delta \in S_n\} = S_n$.*

Demonstração. É claro que $\sigma \circ \delta \in S_n$ para toda permutação $\sigma \in S_n$ uma vez que a composição de funções bijetoras é bijetora. Seja agora $\beta \in S_n$. Como S_n é um grupo, existe $\sigma^{-1} \in S_n$ tal que $\sigma^{-1} \circ \sigma =$ identidade. Logo $\sigma^{-1} \circ \beta \in S_n$ e

$$\beta = \sigma \circ (\sigma^{-1} \circ \beta) \in \{\sigma \circ \delta : \delta \in S_n\}.$$

■

Proposição 1.2.6 *Sejam $A, B \in L(^nE; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então*

(a) $A^s \in L^s(^nE; F)$.

(b) $A^s = A$ *se, e somente se,* $A \in L^s(^nE; F)$.

(c) $(A^s)^s = A^s$.

(d) $A(x, \ldots, x) = A^s(x, \ldots, x)$ *para todo* $x \in E$.

(e) $(A + \lambda B)^s = A^s + \lambda B^s$.

(f) *A transformação*

$$\phi \colon L(^nE; F) \longrightarrow L^s(^nE; F) \ , \ \phi(A) = A^s,$$

está bem definida, é uma projeção linear e $\phi(L(^nE; F)) = L^s(^nE; F)$.

Demonstração.

(a) É fácil verificar que A^s é n-linear. Para cada $\gamma \in S_n$, usando o Lema 1.2.5 temos

$$\begin{aligned} A^s(x_{\gamma(1)}, \ldots, x_{\gamma(n)}) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} A(x_{\sigma(\gamma(1))}, \ldots, x_{\sigma(\gamma(n))}) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\beta \in S_n} A(x_{\beta(1)}, \ldots, x_{\beta(n)}) \\ &= A^s(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

para todos $x_1, \ldots, x_n \in E$. Portanto $A^s \in L^s(^nE; F)$.

(b) Suponha que $A^s = A$. Pelo item (a) temos $A^s \in L^s(^nE; F)$. Logo $A = A^s \in L^s(^nE; F)$.

Reciprocamente, suponha que $A \in L^s(^nE; F)$. Então $A(x_1, \ldots, x_n) = A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ para toda permutação $\sigma \in S_n$. Assim,

$$\begin{aligned} A^s(x_1, \ldots, x_n) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) \\ &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} A(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \frac{n!}{n!} A(x_1, \ldots, x_n) = A(x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

para todos $x_1, \ldots, x_n \in E$. Portanto $A^s = A$.

(c) Por (a) temos $A^s \in L^s({}^nE;F)$, e por (b) segue que $(A^s)^s = A^s$, pois $A^s \in L^s({}^nE;F)$.

(d) Dado $x \in E$, para cada $\sigma \in S_n$ e cada $j \in 1,\ldots,n$, defina $x_{\sigma(j)} = x$. Então

$$\begin{aligned}
A^s(x,\ldots,x) = A^s(x_1,\ldots,x_n) &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} A(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})\\
&= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} A(x,\ldots,x)\\
&= \frac{n!}{n!}A(x,\ldots,x) = A(x,\ldots,x).
\end{aligned}$$

(e) Dados $x_i \in E$, $i = 1,\ldots,n$, tem-se

$$\begin{aligned}
(A+\lambda B)^s(x_1,\ldots,x_n) &= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n}(A+\lambda B)(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})\\
&= \sum_{\sigma\in S_n}\frac{1}{n!}\big[A(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}) + \lambda B(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})\big]\\
&= \sum_{\sigma\in S_n}\frac{1}{n!}A(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}) + \lambda\sum_{\sigma\in S_n}\frac{1}{n!}B(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})\\
&= A^s(x_1,\ldots,x_n) + \lambda B^s(x_1,\ldots,x_n)\\
&= (A^s+\lambda B^s)(x_1,\ldots,x_n).
\end{aligned}$$

Portanto $(A+\lambda B)^s = A^s + \lambda B^s$.

(*f*) ϕ está bem definida pelo item (a), é linear pelo item (e), é uma projeção pelo item (b), a inclusão $\phi(L({}^nE;F)) \subseteq L^s({}^nE;F)$ segue do item (a) e a igualdade $\phi(L({}^nE;F)) = L^s({}^nE;F)$ segue do item (b).

■

Corolário 1.2.7 *$L^s({}^nE;F)$ é subespaço vetorial de $L({}^nE;F)$.*

Demonstração. Segue da Proposição 1.2.6(f) pois a imagem de uma transformação linear é subespaço vetorial do contradomínio. ■

Observe que a definição de aplicação simétrica faz sentido para qualquer função de E^n em F, e não apenas para aplicações multilineares entre espaços vetoriais. Tendo isso em mente, o resultado a seguir facilita, muitas vezes, o trabalho de provar que determinada aplicação é multilinear.

Proposição 1.2.8 *Seja $A\colon E^n \longrightarrow F$ uma aplicação entre espaços vetoriais tal que:*

(i) *A é simétrica.*

(ii) *A é linear na primeira coordenada.*

Então A é n-linear.

Demonstração. Sejam $x_i, y_i \in E, i = 1, \dots, n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então

$$\begin{aligned}
A(x_1, \dots, x_i + \lambda y_i, \dots, x_n) &\overset{\text{(i)}}{=} A(x_i + \lambda y_i, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \\
&\overset{\text{(ii)}}{=} A(x_i, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \\
&\quad + \lambda A(y_i, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \\
&\overset{\text{(i)}}{=} A(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + \lambda A(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n),
\end{aligned}$$

provando que A é n-linear. ■

Terminaremos este estudo inicial das aplicações multilineares provando a Fórmula de Leibniz e a Fórmula de Polarização. Para isso precisamos fixar algumas notações.

Definição 1.2.9 Para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$, definimos

$$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n \text{ e } \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$$

Definição 1.2.10 Seja $A \in L(^mE; F)$. Dados $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ e $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ com $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m$, definimos

$$Ax_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} = A(x_1, \overset{(\alpha_1)}{\dots}, x_1, \dots, x_n, \overset{(\alpha_n)}{\dots}, x_n).$$

Lema 1.2.11 *Sejam $A \in L^s(^{m+1}E; F)$ e $x \in E$. Então a aplicação*

$$\begin{gathered}
B\colon E^m \longrightarrow F; \\
B(y_1, \dots, y_m) = A(x, y_1, \dots, y_m)
\end{gathered}$$

é m-linear e simétrica.

Demonstração. Vejamos que B é linear na primeira coordenada. Para isso sejam $y_1, y_1', y_2, \dots, y_m \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Como A é multilinear , temos

$$\begin{aligned}
B(y_1 + \lambda y_1', y_2, \dots y_m) &= A(x, y_1 + \lambda y_1', y_2, \dots, y_m) \\
&= A(x, y_1, y_2 \dots, y_m) + \lambda A(x, y_1', y_2, \dots, y_m) \\
&= B(y_1, y_2, \dots y_m) + \lambda B(y_1', y_2, \dots, y_m).
\end{aligned}$$

Vejamos agora que B é simétrica. Dada uma permutação $\sigma \in S_m$, para todos $y_1, \dots, y_m \in E$, $(x, y_1, \dots, y_m)$ é uma reordenação de $(x, y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(m)})$. Como A é simétrica, temos

$$B(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(m)}) = A(x, y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(m)}) = A(x, y_1, \dots, y_m) = B(y_1, \dots, y_m),$$

o que prova que B é simétrica. Da Proposição 1.2.8 segue que B é m-linear. ■

Teorema 1.2.12 (Fórmula de Leibniz) Sejam E, F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $A \in L^s(^mE; F)$. Então

$$A(x_1 + \cdots + x_n)^m = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n,\, |\alpha| = m} \frac{m!}{\alpha!} Ax_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

para todos $n \in \mathbb{N}$ e quaisquer $x_1, \dots, x_n \in E$

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre $m \in \mathbb{N}$. Vejamos que a fórmula desejada vale para para $m = 1$. Neste caso A é linear e, dados $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_n \in E$, os únicos $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tais que $|\alpha| = 1$ são $(1, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$. Dessa forma,

$$A(x_1 + \cdots + x_n) = A(x_1) + \cdots + A(x_n) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n,\, |\alpha|=1} \frac{1!}{\alpha!} A x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Suponhamos agora que a fórmula desejada seja válida para um certo $m \in \mathbb{N}$, ou seja, para toda aplicação m-linear simétrica $B \in \mathcal{L}^s({}^mE; F)$ vale que

$$B(x_1 + \cdots + x_n)^m = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^n,\, |\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} B x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

para todos $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_n \in E$. Provemos que a fórmula vale para $m + 1$. Para isso sejam $A \in \mathcal{L}^s({}^{m+1}E; F)$, $m \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_n \in E$. Como $x_1 + \cdots + x_n \in E$, podemos definir

$$A(x_1 + \cdots + x_n) \colon E^m \longrightarrow F;$$
$$A(x_1 + \cdots + x_n)(y_1, \ldots, y_m) = A(x_1 + \cdots + x_n, y_1, \ldots, y_m).$$

Pelo Lema 1.2.11 temos que $A(x_1 + \cdots + x_n)$ é m-linear e simétrica. Além disso,

$$A(x_1+\cdots+x_n)^{m+1} = A(x_1+\cdots+x_n, \overset{(m+1)}{\ldots}, x_1+\cdots+x_n) = A(x_1+\cdots+x_n)(x_1+\cdots+x_n)^m.$$

Como $A(x_1 + \cdots + x_n) \in \mathcal{L}^s({}^mE; F)$, pela hipótese de indução temos (para simplificar, escrevemos $|\alpha| = m$ no lugar de $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $|\alpha| = m$)

$$\begin{aligned}
A(x_1 + &\cdots + x_n)^{m+1} = A(x_1 + \cdots + x_n)(x_1 + \cdots + x_n)^m \\
&= \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} A(x_1 + \cdots + x_n) x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \\
&= \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} A(x_1 + \cdots + x_n)(x_1, \overset{(\alpha_1)}{\ldots}, x_1, \ldots, x_n, \overset{(\alpha_n)}{\ldots}, x_n) \\
&= \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} A(x_1 + \cdots + x_n, x_1, \overset{(\alpha_1)}{\ldots}, x_1, \ldots, x_n, \overset{(\alpha_n)}{\ldots}, x_n) \\
&= \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} [A(x_1, x_1, \overset{(\alpha_1)}{\ldots}, x_1, x_2, \overset{(\alpha_2)}{\ldots}, x_2, \ldots, x_n, \overset{(\alpha_n)}{\ldots}, x_n) \\
&\qquad + \cdots + A(x_n, x_1, \overset{(\alpha_1)}{\ldots}, x_1, x_2, \overset{(\alpha_2)}{\ldots}, x_2, \ldots, x_n, \overset{(\alpha_n)}{\ldots}, x_n)] \\
&= \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \left(A x_1^{\alpha_1+1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} + A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2+1} \cdots x_n^{\alpha_n} + \cdots + A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^{\alpha_n+1} \right) \\
&= \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} A x_1^{\alpha_1+1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n} + \cdots + \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} A x_1^{\alpha_1} \cdots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} x_n^{\alpha_n+1}.
\end{aligned}$$

Para cada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ com $|\alpha| = m$, defina $\beta^{(i)} = (\beta_1^{(i)}, \ldots, \beta_n^{(i)}) \in \mathbb{N}_0^n$ onde $\beta_j^{(i)} = \alpha_i + 1$ se $i = j$ e $\beta_j^{(i)} = \alpha_j$ se $i \neq j$, para todos $i, j = 1, \ldots, n$. Assim,

$$\begin{aligned}
|\beta^{(i)}| &= \beta_1^{(i)} + \cdots + \beta_{i-1}^{(i)} + \beta_i^{(i)} + \beta_{i+1}^{(i)} + \cdots + \beta_n^{(i)} \\
&= \alpha_1 + \cdots + \alpha_{i-1} + \alpha_i + 1 + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_n \\
&= (\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) + 1 = m + 1.
\end{aligned}$$

Logo, mantendo a notação simplificada $|\beta| = m+1$ no lugar de $\beta \in \mathbb{N}_0^{n+1}$, $|\beta| = m+1$, segue que

$$\begin{aligned}
A(x_1 + \cdots + x_n)^{m+1} &= \sum_{|\beta^{(1)}|=m+1} \frac{m!}{(\beta_1^{(1)} - 1)!\beta_2^{(1)}! \cdots \beta_n^{(1)}!} Ax_1^{\beta_1^{(1)}} \cdots x_n^{\beta_n^{(1)}} + \\
&\quad + \sum_{|\beta^{(2)}|=m+1} \frac{m!}{\beta_1^{(2)}!(\beta_2^{(2)} - 1)! \cdots \beta_n^{(2)}!} Ax_1^{\beta_1^{(2)}} x_2^{\beta_2^{(2)}} \cdots x_n^{\beta_n^{(2)}} + \cdots \\
&\quad + \sum_{|\beta^{(n)}|=m+1} \frac{m!}{\beta_1^{(n)}! \cdots \beta_{n-1}^{(n)}!(\beta_n^{(n)} - 1)!} Ax_1^{\beta_1^{(n)}} \cdots x_n^{\beta_n^{(n)}} \\
&= \sum_{\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n),|\beta|=m+1 \text{ e } \beta_1 \geq 1} \frac{m!}{(\beta_1 - 1)!\beta_2! \cdots \beta_n!} Ax_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n} \\
&\quad + \sum_{\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n),|\beta|=m+1 \text{ e } \beta_2 \geq 1} \frac{m!}{\beta_1!(\beta_2 - 1)! \cdots \beta_n!} Ax_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n} + \cdots \\
&\quad + \sum_{\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_n),|\beta|=m+1 \text{ e } \beta_n \geq 1} \frac{m!}{\beta_1! \cdots \beta_{n-1}!(\beta_n - 1)!} Ax_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n} \\
&= \sum_{|\beta|=m+1 \text{ e } \beta_1 \geq 1} \frac{\beta_1 m!}{\beta_1!\beta_2! \cdots \beta_n!} Ax_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n} \\
&\quad + \sum_{|\beta|=m+1 \text{ e } \beta_2 \geq 1} \frac{\beta_2 m!}{\beta_1!\beta_2! \cdots \beta_n!} Ax_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n} + \ldots \\
&\quad + \sum_{|\beta|=m+1 \text{ e } \beta_n \geq 1} \frac{\beta_n m!}{\beta_1! \cdots \beta_{n-1}!\beta_n!} Ax_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}.
\end{aligned}$$

Note que

$$\sum_{|\beta|=m+1 \text{ e } \beta_1=0} \frac{\beta_1 m!}{\beta_1! \cdots \beta_n!} Ax_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n} = \cdots = \sum_{|\beta|=m+1 \text{ e } \beta_n=0} \frac{\beta_n m!}{\beta_1! \cdots \beta_n!} Ax_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n} = 0.$$

Portanto podemos considerar as somas incluindo os casos $\beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} A(x_1 + \cdots + x_n)^{m+1} &= \sum_{|\beta|=m+1} \frac{\beta_1 m!}{\beta_1! \cdots \beta_n!} A x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n} + \cdots \\ &\quad + \sum_{|\beta|=m+1} \frac{\beta_n m!}{\beta_1! \cdots \beta_n!} A x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n} \\ &= \sum_{|\beta|=m+1} \frac{(\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n) m!}{\beta_1! \beta_2! \cdots \beta_n!} A x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n} \\ &= \sum_{|\beta|=m+1} \frac{(m+1)!}{\beta_1! \cdots \beta_n!} A x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}. \end{aligned}$$

■

Proposição 1.2.13 (Fórmula de Polarização) Sejam $E,\ F$ espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $A \in L^s({}^mE; F)$. Então

$$A(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{m! 2^m} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m A(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)^m$$

para quaisquer $x_j \in E$, com $j = 0, 1, \ldots, m$.

Demonstração. Pela Fórmula de Leibniz, temos

$$\begin{aligned} A(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)^m &= \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha_0! \alpha_1! \cdots \alpha_m!} A x_0^{\alpha_0} (\varepsilon_1 x_1)^{\alpha_1} \cdots (\varepsilon_m x_m)^{\alpha_m} \\ &= \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha_0! \alpha_1! \cdots \alpha_m!} \varepsilon_1^{\alpha_1} \cdots \varepsilon_m^{\alpha_m} A x_0^{\alpha_0} \cdots x_m^{\alpha_m}, \end{aligned}$$

onde a soma é feita sobre todos $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}_0^{m+1}$ tais que $|\alpha| = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots + \alpha_m = m$ e $\alpha! = \alpha_0! \alpha_1! \cdots \alpha_m!$ Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m A(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)^m &= \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m \cdot \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} \varepsilon_1^{\alpha_1} \cdots \varepsilon_m^{\alpha_m} A x_0^{\alpha_0} \cdots x_m^{\alpha_m} \\ &= \sum_{|\alpha|=m} \frac{m!}{\alpha!} A x_0^{\alpha_0} \cdots x_m^{\alpha_m} \cdot \left(\sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1^{\alpha_1 + 1} \cdots \varepsilon_m^{\alpha_m + 1} \right). \end{aligned}$$

Se $\alpha_i = 0$ para algum $i = 1, \ldots, m$, temos $\varepsilon_i^{\alpha_i + 1} = \varepsilon_i = \pm 1$. Daí,

$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon_k = \pm 1} \varepsilon_1^{\alpha_1 + 1} \cdots \varepsilon_m^{\alpha_m + 1} &= \sum_{\varepsilon_k = \pm 1; k \neq i} \varepsilon_1^{\alpha_1 + 1} \cdots \varepsilon_{i-1}^{\alpha_{i-1} + 1} \cdot (1) \cdot \varepsilon_{i+1}^{\alpha_{i+1} + 1} \cdots \varepsilon_m^{\alpha_m + 1} \\ &\quad + \sum_{\varepsilon_k = \pm 1; k \neq i} \varepsilon_1^{\alpha_1 + 1} \cdots \varepsilon_{i-1}^{\alpha_{i-1} + 1} \cdot (-1) \cdot \varepsilon_{i+1}^{\alpha_{i+1} + 1} \cdots \varepsilon_m^{\alpha_m + 1} = 0. \end{aligned}$$

Logo, para cada $i = 1, \ldots, m$, se $\sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1^{\alpha_1+1} \cdots \varepsilon_m^{\alpha_m+1} \neq 0$ então $\alpha_i \neq 0$. Note que se $\alpha_i \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$, segue que $\alpha_i = 1$ para todo $i = 1, \ldots, m$ e $\alpha_0 = 0$. Logo

$$\sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1^{\alpha_1+1} \cdots \varepsilon_m^{\alpha_m+1} = \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1^2 \cdots \varepsilon_m^2 = 2^m.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
&\sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m A\big(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m\big)^m = \\
&\qquad = \sum_{|\alpha| = m; \exists i \text{ tal que } \alpha_i = 0} \frac{m!}{\alpha_0! \alpha_1! \cdots \alpha_m!} A x_0^{\alpha_0} \cdots x_m^{\alpha_m} \cdot \left(\sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1^{\alpha_1+1} \cdots \varepsilon_m^{\alpha_m+1} \right) \\
&\qquad + \sum_{|\alpha| = m; \alpha_1, \ldots, \alpha_m \neq 0} \frac{m!}{\alpha_0! \alpha_1! \cdots \alpha_m!} A x_0^{\alpha_0} \cdots x_m^{\alpha_m} \cdot \left(\sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1^{\alpha_1+1} \cdots \varepsilon_m^{\alpha_m+1} \right) \\
&\qquad = \sum_{|\alpha| = m; \alpha_1, \ldots, \alpha_m \neq 0} \frac{m!}{\alpha_0! \alpha_1! \cdots \alpha_m!} A x_0^{\alpha_0} \cdots x_m^{\alpha_m} \cdot \left(\sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1^{\alpha_1+1} \cdots \varepsilon_m^{\alpha_m+1} \right) \\
&\qquad = m! A(x_1, \ldots, x_m) 2^m.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$A(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{m! 2^m} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m A(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)^m.$$

■

1.3 Aumentando o grau de multilinearidade

Veremos nesta seção como obter, a partir de uma aplicação multilinear

$$A \colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F,$$

aplicações com graus de multilineares maiores que o grau de multilinearidade de A. Veremos também que essa operação de aumentar o grau de multilinearidade preserva as operações de espaços vetoriais, ou seja, é linear.

A construção geral (veja Teorema 1.3.2) tem um enunciado muito técnico, que pode esconder a idéia central. Para ficar claro o que estamos fazendo, começamos com um exemplo bem simples, cuja verificação será um caso particular do caso geral demonstrado em seguida.

Exemplo 1.3.1 Sejam E_1, E_2, F espaços vetoriais, $\varphi \in E_1^*$ e $u \in L(E_2; F)$. Definindo

$$\begin{gathered}
\varphi \otimes u \colon E_1 \times E_2 \longrightarrow F; \\
\varphi \otimes u(x, y) = \varphi(x) \cdot u(y)
\end{gathered}$$

temos $\varphi \otimes u \in L(E_1, E_2; F)$. Isto é, multiplicando um operador linear por um funcional linear obtemos uma aplicação bilinear.

Mais geralmente, multiplicando formas multilineares por uma aplicação multilinear obtemos uma aplicação multilinear cujo grau de multilinearidade é a soma dos graus das formas e da aplicação que foram multiplicadas:

Teorema 1.3.2 *Sejam $m \in \mathbb{N}$, $k_1, \ldots, k_m \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_{k_1+\cdots+k_m}, F$ espaços vetoriais. Considere uma partição do conjunto $\{1, 2, \ldots, k_1 + \cdots + k_m\}$:*

$$\{1, \ldots, k_1 + \cdots + k_m\} = \{j_1^{(1)}, \ldots, j_{k_1}^{(1)}\} \cup \{j_1^{(2)}, \ldots, j_{k_2}^{(2)}\} \cup \cdots \cup \{j_1^{(m)}, \ldots, j_{k_m}^{(m)}\}$$

formada por conjuntos disjuntos 2 a 2 com $j_1^t < j_2^t < \cdots < j_{k_t}^t$ para todo $t = 1, \ldots, m$. Sejam $A_i \in L(E_{j_1^{(i)}}, \ldots, E_{j_{k_i}^{(i)}}; F)$ para algum $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $A_p \in L(E_{j_1^{(p)}}, \ldots, E_{j_{k_p}^{(p)}})$ para cada $p = 1, \ldots, m,\ p \neq i$. Então a aplicação

$$\begin{gathered} A_1 \otimes \cdots \otimes A_m \colon E_1 \times \cdots \times E_{k_1+\cdots+k_m} \longrightarrow F; \\ A_1 \otimes \cdots \otimes A_m(x_1, \ldots, x_{k_1+\cdots+k_m}) = A_1(x_{j_1^{(1)}}, \ldots, x_{j_{k_1}^{(1)}}) \cdots A_i(x_{j_1^{(i)}}, \ldots, x_{j_{k_i}^{(i)}}) \cdots \\ A_m(x_{j_1^{(m)}}, \ldots, x_{j_{k_m}^{(m)}}), \end{gathered}$$

é $(k_1 + \cdots + k_m)$-linear. Mais ainda, a correspondência

$$\begin{gathered} T_{A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_m} \colon L(E_{j_1^{(i)}}, \ldots, E_{j_{k_i}^{(i)}}; F) \longrightarrow L(E_1, \ldots, E_{k_1+\cdots+k_m}; F); \\ T_{A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_m}(A) = A_1 \otimes \cdots \otimes A_{i-1} \otimes A \otimes A_{i+1} \cdots \otimes A_m \end{gathered}$$

é linear. E se $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_m$ são aplicações não-nulas, então esta correspondência é injetora.

Demonstração. Sejam $s \in \{1, \ldots, k_1 + \cdots + k_m\}$ e $x_s, y_s \in E_s$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $x_j \in E_j$, $j = 1, \ldots, k_1 + \cdots + k_m, j \neq s$. Tome $n \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $s \in \{j_1^{(n)}, \ldots, j_{k_n}^{(n)}\}$ e $t \in \{1, \ldots, k_n\}$ tais que $s = j_t^n$ (note que tais s e t existem e são únicos). Então

$$\begin{aligned} &A_1 \otimes \cdots \otimes A_m(x_1, \ldots, x_s + \lambda y_s, \ldots, x_{k_1+\cdots+k_m}) = \\ &\quad = A_1(x_{j_1^{(1)}}, \ldots, x_{j_{k_1}^{(1)}}) \cdots A_n(x_{j_1^{(n)}}, \ldots, x_s + \lambda y_s, \ldots, x_{j_{k_n}^{(n)}}) \cdots A_m(x_{j_1^{(m)}}, \ldots, x_{j_{k_m}^{(m)}}) \\ &\quad = A_1(x_{j_1^{(1)}}, \ldots, x_{j_{k_1}^{(1)}}) \cdots [A_n(x_{j_1^{(n)}}, \ldots, x_s, \ldots, x_{j_{k_n}^{(n)}}) + \\ &\qquad + \lambda A_n(x_{j_1^{(n)}}, \ldots, y_s, \ldots, x_{j_{k_n}^{(n)}})] \cdots A_m(x_{j_1^{(m)}}, \ldots, x_{j_{k_m}^{(m)}}) \\ &\quad = A_1(x_{j_1^{(1)}}, \ldots, x_{j_{k_1}^{(1)}}) \cdots A_n(x_{j_1^{(n)}}, \ldots, x_s, \ldots, x_{j_{k_n}^{(n)}}) \cdots A_m(x_{j_1^{(m)}}, \ldots, x_{j_{k_m}^{(m)}}) \\ &\qquad + \lambda A_1(x_{j_1^{(1)}}, \ldots, x_{j_{k_1}^{(1)}}) \cdots A_n(x_{j_1^{(n)}}, \ldots, y_s, \ldots, x_{j_{k_n}^{(n)}}) \cdots A_m(x_{j_1^{(m)}}, \ldots, x_{j_{k_m}^{(m)}}) \\ &\quad = A_1 \otimes \cdots \otimes A_m(x_1, \ldots, x_s, \ldots, x_{k_1+\cdots+k_m}) \\ &\qquad + \lambda A_1 \otimes \cdots \otimes A_m(x_1, \ldots, y_s, \ldots, x_{k_1+\cdots+k_m}). \end{aligned}$$

Portanto $A_1 \otimes \cdots \otimes A_m$ é $(k_1 + \cdots + k_m)$-linear.

Vejamos agora que $T_{A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_m}$ é linear. De fato, dados $A, B \in L(E_{j_1^{(i)}}, \ldots, E_{j_{k_i}^{(i)}}; F)$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $x_s \in E_s$, $s = 1, \ldots, k_1 + \cdots + k_m$, temos

$$\begin{aligned}
&T_{A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_m}(A + \lambda B)(x_1, \ldots, x_{k_1+\cdots+k_m}) = \\
&= A_1 \otimes \cdots \otimes A_{i-1} \otimes (A + \lambda B) \otimes A_{i+1} \cdots \otimes A_m(x_1, \ldots, x_{k_1+\cdots+k_m}) \\
&= A_1(x_{j_1^{(1)}}, \ldots, x_{j_{k_1}^{(1)}}) \cdots (A + \lambda B)(x_{j_1^{(i)}}, \ldots, x_{j_{k_i}^{(i)}}) \cdots A_m(x_{j_1^{(m)}}, \ldots, x_{j_{k_m}^{(m)}}) \\
&= A_1(x_{j_1^{(1)}}, \ldots, x_{j_{k_1}^{(1)}}) \cdots [A(x_{j_1^{(i)}}, \ldots, x_{j_{k_i}^{(i)}}) + \lambda B(x_{j_1^{(i)}}, \ldots, x_{j_{k_i}^{(i)}})] \cdots A_m(x_{j_1^{(m)}}, \ldots, x_{j_{k_m}^{(m)}}) \\
&= A_1(x_{j_1^{(1)}}, \ldots, x_{j_{k_1}^{(1)}}) \cdots A(x_{j_1^{(i)}}, \ldots, x_{j_{k_i}^{(i)}}) \cdots A_m(x_{j_1^{(m)}}, \ldots, x_{j_{k_m}^{(m)}}) \\
&\quad + \lambda A_1(x_{j_1^{(1)}}, \ldots, x_{j_{k_1}^{(1)}}) \cdots B(x_{j_1^{(i)}}, \ldots, x_{j_{k_i}^{(i)}}) \cdots A_m(x_{j_1^{(m)}}, \ldots, x_{j_{k_m}^{(m)}}) \\
&= A_1 \otimes \cdots \otimes A_{i-1} \otimes A \otimes A_{i+1} \cdots \otimes A_m(x_1, \ldots, x_{k_1+\cdots+k_m}) \\
&\quad + \lambda A_1 \otimes \cdots \otimes A_{i-1} \otimes B \otimes A_{i+1} \cdots \otimes A_m(x_1, \ldots, x_{k_1+\cdots+k_m}) \\
&= T_{A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_m}(A)(x_1, \ldots, x_{k_1+\cdots+k_m}) + \lambda T_{A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_m}(B)(x_1, \ldots, x_{k_1+\cdots+k_m}) \\
&= (T_{A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_m}(A) + \lambda T_{A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_m}(B))(x_1, \ldots, x_{k_1+\cdots+k_m}).
\end{aligned}$$

Isso prova que

$$T_{A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_m}(A + \lambda B) = T_{A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_m}(A) + \lambda T_{A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_m}(B),$$

e portanto $T_{A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_m}$ é linear.

Vejamos agora que $T_{A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_m}$ é injetora no caso em que $A_1, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_m$ são aplicações não-nulas. Para isso seja $A \in L(E_{j_1^{(i)}}, \ldots, E_{j_{k_i}^{(i)}}; F)$ tal que

$$T_{A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_m}(A) = 0.$$

Devemos provar que $A = 0$. Sejam $x_{j_1^{(i)}} \in E_{j_1^{(i)}}, \ldots, x_{j_{k_1}^{(i)}} \in E_{j_{k_i}^{(i)}}$. Como $A_p \neq 0$ para $p \neq i$, existem $x_{j_1^{(p)}} \in E_{j_1^{(p)}}, \ldots, x_{j_{k_p}^{(p)}} \in E_{j_{k_p}^{(p)}}$ tais que $A_p(x_{j_1^{(p)}}, \ldots, x_{j_{k_p}^{(p)}}) \neq 0$. Então

$$\begin{aligned}
0 &= T_{A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_m}(A)(x_1, \ldots, x_{k_1+\cdots+k_m}) \\
&= A_1 \otimes \cdots \otimes A_{i-1} \otimes A \otimes A_{i+1} \cdots \otimes A_m(x_1, \ldots, x_{k_1+\cdots+k_m}) \\
&= A_1(x_{j_1^{(1)}}, \ldots, x_{j_{k_1}^{(1)}}) \cdots A(x_{j_1^{(i)}}, \ldots, x_{j_{k_i}^{(i)}}) \cdots A_m(x_{j_1^{(m)}}, \ldots, x_{j_{k_m}^{(m)}}).
\end{aligned}$$

Como $A_p(x_{j_1^{(p)}}, \ldots, x_{j_{k_p}^{(p)}}) \neq 0$ para $p \neq i$ segue que $A(x_{j_1^{(i)}}, \ldots, x_{j_{k_i}^{(i)}}) = 0$ para todos $x_{j_t^{(i)}} \in E_{j_t^{(i)}}$, $t = 1, \ldots, k_i$. Logo $A = 0$, o que nos permite concluir que $T_{A_1,\ldots,A_{i-1},A_{i+1},\ldots,A_m}$ é injetora. ■

Como funcionais lineares são formas 1-lineares, obtemos a seguinte consequência, que muito útil nos será mais adiante.

Corolário 1.3.3 *Sejam* $m, n \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_n, E_{n+1}, \ldots, E_{n+m}, F$ *espaços vetoriais,* $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$, $\varphi_j \in E_{n+j}^*$, $j = 1, \ldots, m$. *Definindo*

$$\begin{gathered}
\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_m \otimes A \colon E_1 \times \cdots \times E_{m+n} \longrightarrow F; \\
\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_m \otimes A(x_1, \ldots, x_{n+m}) = \varphi_1(x_{n+1}) \cdots \varphi_m(x_{n+m}) A(x_1, \ldots, x_n)
\end{gathered}$$

temos $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_m \otimes A \in L(E_1, \ldots, E_{m+n}; F)$.

Demonstração. Segue do Teorema 1.3.2 tomando

$$\{1, \ldots, m+n\} = \{1, \ldots, n\} \cup \{n+1\} \cup \cdots \cup \{n+m\}.$$

∎

1.4 Mantendo o grau de multilinearidade

Uma maneira elementar de criar aplicações multilineares mantendo o grau de multilinearidade é através de combinações lineares de aplicações multilineares de mesmo grau de multilinearidade. Uma outra maneira é considerar composições da seguinte forma: dadas uma aplicação n-linear $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$, operadores lineares $u_j \in L(G_j; E_j),\ j = 1, \ldots, n$, e $t \in L(F; H)$, definimos

$$\begin{gathered} t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n) \colon G_1 \times \cdots \times G_n \longrightarrow H; \\ t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n)(x_1, \ldots, x_n) = t(A(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n))). \end{gathered}$$

Nesta seção provaremos que $t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n)$ é n-linear, isto é, $t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n) \in L(G_1, \ldots, G_n; H)$. Estudaremos também a correspondência

$$A \in L(E_1, \ldots, E_n; F) \longrightarrow t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n) \in L(G_1, \ldots, G_n; H).$$

Provemos primeiro o seguinte resultado, que também pode ser interpretado como uma maneira a mais de aumentar o grau de multilinearidade:

Proposição 1.4.1 *Sejam* $n, k_1 < k_2 < \cdots < k_n \in \mathbb{N}$, $B_1 \in L(G_1, \ldots, G_{k_1}; E_1)$, $B_2 \in L(G_{1+k_1}, \ldots, G_{k_2}; E_2), \ldots, B_n \in L(G_{1+k_{n-1}}, \ldots, G_{k_n}; E_n)$, $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ *e* $t \in L(F; H)$. *Definindo*

$$\begin{gathered} t \circ A \circ (B_1, \ldots, B_n) \colon G_1 \times \cdots \times G_{k_n} \longrightarrow H; \\ t \circ A \circ (B_1, \ldots, B_n)(x_1, \ldots, x_{k_n}) = t(A(B_1(x_1, \ldots, x_{k_1}), \ldots, B_n(x_{1+k_{n-1}}, \ldots, x_{k_n}))), \end{gathered}$$

temos $t \circ A \circ (B_1, \ldots, B_n) \in L(G_1, \ldots, G_{k_n}; H)$. *Além disso, a correspondência*

$$\begin{gathered} T_{t,B_1,\ldots,B_n} \colon L(E_1, \ldots, E_n; F) \longrightarrow L(G_1, \ldots, G_{k_n}; H); \\ T_{t,B_1,\ldots,B_n}(A) = t \circ A \circ (B_1, \ldots, B_n) \end{gathered}$$

é um operador linear.

$$\begin{tikzcd}
(G_1 \times \cdots \times G_{k_1}) \arrow[d, "B_1"'] & (G_{1+k_1} \times \cdots \times G_{k_2}) \arrow[d, "B_2"] & \cdots & (G_{1+k_{n-1}} \times \cdots \times G_{k_n}) \arrow[d, "B_n"] \arrow[drr, "t\circ A\circ(B_1,\ldots,B_n)"] & & \\
E_1 \times & E_2 \times & \cdots & \times E_n \arrow[r, "A"'] & F \arrow[r, "t"'] & H
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Chame $k_0 = 0$. Dado $m \in \{1, 2, \ldots, k_n\}$, existem $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $j \in \{1, \ldots, k_{i+1} - k_i\}$ tais que $m = j + k_i$. Dados $x_m,\ x_m^{'} \in G_m$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
&t \circ A \circ (B_1, \ldots, B_{i+1}, \ldots, B_n)(x_1, \ldots, x_m + \lambda x_m^{'}, \ldots, x_{k_n}) = \\
&\ = t(A(B_1(x_1, \ldots, x_{k_1}), B_2(x_{1+k_1}, \ldots, x_{k_2}), \ldots, B_{i+1}(x_{1+k_i}, \ldots, x_m + \lambda x_m^{'}, \ldots, x_{k_{i+1}}), \\
&\ \ldots, B_n(x_{1+k_{n-1}}, \ldots, x_{k_n}))) \\
&\ = t(A(B_1(x_1, \ldots, x_{k_1}), \ldots, B_{i+1}(x_{1+k_i}, \ldots, x_m, \ldots, x_{k_{i+1}}) \\
&\quad + \lambda B_{i+1}(x_{1+k_i}, \ldots, x_m^{'}, \ldots, x_{k_{i+1}}), \ldots, B_n(x_{1+k_{n-1}}, \ldots, x_{k_n}))) \\
&\ = t(A(B_1(x_1, \ldots, x_{k_1}), \ldots, B_{i+1}(x_{1+k_i}, \ldots, x_m, \ldots, x_{k_{i+1}}), \ldots, B_n(x_{1+k_{n-1}}, \ldots, x_{k_n}))) \\
&\quad + \lambda A(B_1(x_1, \ldots, x_{k_1}), \ldots, B_{i+1}(x_{1+k_i}, \ldots, x_m^{'}, \ldots, x_{k_{i+1}}), \ldots, B_n(x_{1+k_{n-1}}, \ldots, x_{k_n}))) \\
&\ = t(A(B_1(x_1, \ldots, x_{k_1}), \ldots, B_{i+1}(x_{1+k_i}, \ldots, x_m, \ldots, x_{k_{i+1}}), \ldots, B_n(x_{1+k_{n-1}}, \ldots, x_{k_n}))) \\
&\quad + \lambda t(A(B_1(x_1, \ldots, x_{k_1}), \ldots, B_{i+1}(x_{1+k_i}, \ldots, x_m^{'}, \ldots, x_{k_{i+1}}), \ldots, B_n(x_{1+k_{n-1}}, \ldots, x_{k_n}))) \\
&\ = t \circ A \circ (B_1, \ldots, B_n)(x_1, \ldots, x_m, \ldots, x_{k_n}) + \lambda t \circ A \circ (B_1, \ldots, B_n)(x_1, \ldots, x_m^{'}, \ldots, x_{k_n}).
\end{aligned}$$

Portanto $t \circ A \circ (B_1, \ldots, B_n) \in L(G_1, \ldots, G_{k_n}; H)$.

Vejamos agora que a correspondência

$$T_{t,B_1,\ldots,B_n} \colon L(E_1, \ldots, E_n; F) \longrightarrow L(G_1, \ldots, G_{k_n}; H)$$

é linear: dados $A, C \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned}
T_{t,B_1,\ldots,B_n}(A + \lambda C)(x_1, \ldots, x_{k_n}) &= t \circ (A + \lambda C) \circ (B_1, \ldots, B_n)(x_1, \ldots, x_{k_n}) \\
&= t((A + \lambda C)(B_1(x_1, \ldots, x_{k_1}), \ldots, B_n(x_{1+k_{n-1}}, \ldots, x_{k_n}))) \\
&= t(A(B_1(x_1, \ldots, x_{k_1}), \ldots, B_n(x_{1+k_{n-1}}, \ldots, x_{k_n})) \\
&\quad + \lambda C(B_1(x_1, \ldots, x_{k_1}), \ldots, B_n(x_{1+k_{n-1}}, \ldots, x_{k_n}))) \\
&= t(A(B_1(x_1, \ldots, x_{k_1}), \ldots, B_n(x_{1+k_{n-1}}, \ldots, x_{k_n}))) \\
&= \lambda t(C(B_1(x_1, \ldots, x_{k_1}), \ldots, B_n(x_{1+k_{n-1}}, \ldots, x_{k_n}))) \\
&= t \circ A \circ (B_1, \ldots, B_n)(x_1, \ldots, x_{k_n}) \\
&\quad + \lambda t \circ C \circ (B_1, \ldots, B_n)(x_1, \ldots, x_{k_n}) \\
&= T_{t,B_1,\ldots,B_n}(A)(x_1, \ldots, x_{k_n}) + \lambda T_{t,B_1,\ldots,B_n}(C)(x_1, \ldots, x_{k_n}) \\
&= (T_{t,B_1,\ldots,B_n}(A) + \lambda T_{t,B_1,\ldots,B_n}(C))(x_1, \ldots, x_{k_n})
\end{aligned}$$

para todos $x_j \in G_j,\ j = 1, \ldots, k_n$. Assim, $T_{t,B_1,\ldots,B_n}(A + \lambda C) = T_{t,B_1,\ldots,B_n}(A) + \lambda T_{t,B_1,\ldots,B_n}(C)$, o que prova a linearidade de $T_{t,B_1,\ldots,B_n}$. ∎

Agora sim obtemos o resultado anunciado no início desta seção:

Teorema 1.4.2 *Sejam $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$, $u_j \in L(G_j; E_j),\ j = 1, \ldots, n$, $t \in L(F; H)$. Definindo*

$$\begin{gathered}
t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n) \colon G_1 \times \ldots \times G_n \longrightarrow H; \\
t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n)(x_1, \ldots, x_n) = t(A(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n))),
\end{gathered}$$

temos $t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n) \in L(G_1, \ldots, G_n; H)$*. Mais ainda, a correspondência*

$$T_{t,u_1,\ldots,u_n} \colon L(E_1, \ldots, E_n; F) \longrightarrow L(G_1, \ldots, G_n; H);$$
$$T_{t,u_1,\ldots,u_n}(A) = t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n)$$

é um operador linear. Além disso, se t *é injetor e* $u_1, \ldots, u_n$ *são sobrejetores, então* $T_{t,u_1,\ldots,u_n}$ *é injetor. E se* $t, u_1, \ldots, u_n$ *são isomorfismos, então* $T_{t,u_1,\ldots,u_n}$ *é também um isomorfismo.*

$$\begin{tikzcd}
G_1 \times \cdots \times G_n \arrow[d, "u_1"] \arrow[d, "u_n"'] \arrow[drr, "t\circ A\circ(u_1,\ldots,u_n)"] & & \\
E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[r, "A"'] & F \arrow[r, "t"'] & H
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Tomando $k_1 = 1, k_2 = 2, \ldots, k_n = n$ na proposição anterior, obtemos que

$$t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n) \in L(G_1, \ldots, G_n; H)$$

e que a correspondência

$$T_{t,u_1,\ldots,u_n} \colon L(E_1, \ldots, E_n; F) \longrightarrow L(G_1, \ldots, G_n; H);$$
$$T_{t,u_1,\ldots,u_n}(A) = t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n)$$

é um operador linear.

Vejamos agora que $T_{t,u_1,\ldots,u_n}$ é injetor no caso em que t é injetor e $u_1, \ldots, u_n$ são sobrejetores. Tome $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ tal que $T_{t,u_1,\ldots,u_n}(A) = 0$. Então, para todos $x_i \in G_i,\ i = 1, \ldots, n$,

$$\begin{aligned} t(A(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n))) &= t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n)(x_1, \ldots, x_n) \\ &= T_{t,u_1,\ldots,u_n}(A)(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{aligned}$$

Como t é injetor, temos $A(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n)) = 0$ para todos $x_i \in G_i,\ i = 1, \ldots, n$. Sejam $y_i \in E_i,\ i = 1, \ldots, n$. Como $u_i,\ i = 1, \ldots, n$, são sobrejetores, existem $x_i \in G_i$ tais que $u_i(x_i) = y_i$, $i = 1, \ldots, n$. Então

$$A(y_1, \ldots, y_n) = A(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n)) = 0$$

para todos $y_i \in E_i$. Assim, $A = 0$, o que prova que $T_{t,u_1,\ldots,u_n}$ é injetor.

Vejamos agora que $T_{t,u_1,\ldots,u_n}$ é um isomorfismo no caso em que $t, u_1, \ldots, u_n$ são isomorfismos. Pelo que acabamos de fazer, basta mostrar que, neste caso, $T_{t,u_1,\ldots,u_n}$ é sobrejetor. Para isso seja $B \in L(G_1, \ldots, G_n; H)$. Queremos definir $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ tal que $T_{t,u_1,\ldots,u_n}(A) = B$. Como $u_1, \ldots, u_n$ e t são bijetores, então $u_i^{-1} \colon E_i \longrightarrow G_i, i = 1, \ldots, n$, e $t^{-1} \colon H \longrightarrow F$ existem e são operadores lineares. Pela primeira parte do teorema sabemos que

$$A := t^{-1} \circ B \circ (u_1^{-1}, \ldots, u_n^{-1}) \in L(E_1, \ldots, E_n; F).$$

$$\begin{tikzcd}
G_1 \times \cdots \times G_n \arrow[drr, "B"] & & \\
E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[u, "u_1^{-1}"] \arrow[u, "u_n^{-1}"'] \arrow[r, "A"'] & F & H \arrow[l, "t^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Por fim,

$$\begin{aligned}
T_{t,u_1,\ldots,u_n}(A)(x_1,\ldots,x_n) &= t\circ A\circ(u_1,\ldots,u_n)(x_1,\ldots,x_n)\\
&= t(A(u_1(x_1),\ldots,u_n(x_n)))\\
&= t([t^{-1}\circ B\circ(u_1^{-1},\ldots,u_n^{-1})](u_1(x_1),\ldots,u_n(x_n))\\
&= t(t^{-1}(B(u_1^{-1}(u_1(x_1)),\ldots,u_n^{-1}(u_n(x_1)))))\\
&= t(t^{-1}(B(x_1,\ldots,x_n)))\\
&= B(x_1,\ldots,x_n)
\end{aligned}$$

para todos $x_i \in G_i,\ i = 1,\ldots,n$. Então $T_{t,u_1,\ldots,u_n}(A) = B$, e disso segue que $T_{t,u_1,\ldots,u_n}$ é sobrejetor. Logo $T_{t,u_1,\ldots,u_n}$ é um isomorfismo. ■

1.5 Diminuindo o grau de multilinearidade

Aprenderemos nesta seção que cada aplicação n-linear dá origens a várias aplicações k-lineares para todos $k < n$. Novamente, para que a ideia geral não fique obscurecida pela complexidade do enunciado do caso geral, vejamos um caso mais simples em primeiro lugar.

Proposição 1.5.1 *Sejam $A \in L(E_1, E_2; F)$ e $a \in E_1$. Definindo*

$$A_a\colon E_2 \longrightarrow F;\quad A_a(y) = A(a,y),$$

temos $A_a \in L(E_2; F)$. Mais ainda, a correspondência

$$T_a\colon L(E_1,E_2;F) \longrightarrow L(E_2;F);\quad T_a(A) = A_a$$

é linear, sobrejetora no caso em que $a \neq 0$ mas não é injetora em geral.

Demonstração. Os fatos de que $A_a \in L(E_2; F)$ e de que T_a é linear são imediatos, e, de toda forma, serão demonstrados no caso geral.

Vejamos que T_a é sobrejetora no caso em que $a \neq 0$. Seja $u \in L(E_2; F)$. Como $a \neq 0$, podemos tomar $\varphi \in E_1^*$ tal que $\varphi(a) = 1$. Definindo

$$A\colon E_1 \times E_2 \longrightarrow F;\quad A(x,y) = \varphi(x)\cdot u(y),$$

sabemos pelo Exemplo 1.3.1 que A é bilinear. Além disso,

$$A_a(y) = A(a,y) = \varphi(a)\cdot u(y) = u(y)$$

para todo $y \in E_2$. Assim, $u = A_a = T_a$. Portanto T_a é sobrejetora.

Vejamos que T_a não é injetora em geral. Para isso tome $\varphi \in E_1^*$ tal que $\varphi \neq 0,\ \varphi(a) = 0$. Novamente pelo Exemplo 1.3.1 sabemos que a aplicação

$$B\colon E_1^2 \longrightarrow E_1\ ,\ B(x,y) = \varphi(x)y,$$

é bilinear. Como $\varphi \neq 0$, existe $b \in E_1$ tal que $\varphi(b) \neq 0$, em particular $b \neq 0$. De $B(b,b) = \varphi(b) \cdot b \neq 0$ concluímos que $B \neq 0$. Mas

$$T_a(B)(y) = B_a(y) = B(a,y) = \varphi(a) \cdot y = 0$$

para todo $y \in E_1$. Então $T_a(B) = 0$, provando que T_a não é injetora. ■

Uma aplicação n-linear $A\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F$ dá origem a várias outras aplicações k-lineares para $k < n$ por meio da estratégia de fixar variáveis, a qual descrevemos a seguir:

Fixado $a_1 \in E_1$, definindo

$$A_{a_1}\colon E_2 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F \ , \ A_{a_1}(x_2, \ldots, x_n) = A(a_1, x_2, \ldots, x_n),$$

de maneira totalmente análoga ao que fizemos na Proposição 1.5.1, obtemos que A_{a_1} é uma aplicação $(n-1)$-linear e que a correspondência

$$T_{a_1}\colon L(E_1, \ldots, E_n; F) \longrightarrow L(E_2, \ldots, E_n; F) \ , \ T_{a_1}(A) = A_{a_1},$$

é um operador linear, sobrejetor no caso em que $a \neq 0$ mas não é injetor.

Podemos fixar duas variáveis: fixando $a_1 \in E_1$ e $a_2 \in E_2$, veremos no teorema a seguir que a aplicação

$$A_{a_1,a_2}\colon E_3 \times \cdots \times E_n \longrightarrow F \ , \ A_{a_1,a_2}(x_3, \ldots, x_n) = A(a_1, a_2, x_3, \ldots, x_n),$$

é $(n-2)$-linear e que a correspondência

$$T_{a_1,a_2}\colon L(E_1, \ldots, E_n; F) \longrightarrow L(E_3, \ldots, E_n; F) \ , \ T_{a_1,a_2}(A) = A_{a_1,a_2},$$

é um operador linear, sobrejetor no caso em que $a_1 \neq 0 \neq a_2$, mas não é injetor.

Em geral, para todo $k < n$ podemos fixar k variáveis de uma aplicação n-linear para obter uma aplicação $(n-k)$-linear:

Teorema 1.5.2 *Sejam $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços vetoriais, $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$, $a_{j_1} \in E_{j_1}, \ldots, a_{j_k} \in E_{j_k}$ e $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$. Então se $\{j_1, j_2, \ldots, j_k\} \cup \{i_1, i_2, \ldots, i_{n-k}\} = \{1, \ldots, n\}$ com $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-k}$, definindo*

$$A_{a_{j_1},\ldots,a_{j_k}}\colon E_{i_1} \times \cdots \times E_{i_{n-k}} \longrightarrow F;$$
$$A_{a_{j_1},\ldots,a_{j_k}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}) = A(y_1, \ldots, y_n)$$

onde

$$y_m = \begin{cases} x_{i_p} & se \quad m = i_p \\ a_{j_l} & se \quad m = j_l \end{cases}$$

em que $m = 1, \ldots, n$, $l = 1, \ldots, k$ e $p = 1, \ldots, n-k$, temos $A_{a_{j_1},\ldots,a_{j_k}} \in L(E_{i_1}, \ldots, E_{i_{n-k}}; F)$. Mais ainda, a correspondência

$$T_{a_{j_1},\ldots,a_{j_k}}\colon L(E_1, \ldots, E_n; F) \longrightarrow L(E_{i_1}, \ldots, E_{i_{n-k}}; F);$$
$$T_{a_{j_1},\ldots,a_{j_k}}(A) = A_{a_{j_1},\ldots,a_{j_k}}$$

é um operador linear, sobrejetor no caso em que os vetores $a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}$ são não-nulos, mas não é injetor em geral.

Demonstração. Provemos que $A_{a_{j_1},\ldots,a_{j_k}}$ é $(n-k)$-linear. Para isso sejam $1 \leq s \leq n-k$, $x_{i_1} \in E_{i_1}, \ldots, x_{i_s}, z_{i_s} \in E_{i_s}, \ldots, x_{i_{n-k}} \in E_{i_{n-k}}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Para cada $m = 1, \ldots, n$, chame

$$y_m = \begin{cases} x_{i_p} & \text{se} \quad m = i_p \quad \text{e} \quad p \neq s \\ x_{i_s} + \lambda z_{i_s} & \text{se} \quad m = i_s \\ a_{j_l} & \text{se} \quad m = j_l \end{cases}$$

$$w_m = \begin{cases} x_{i_p} & \text{se} \quad m = i_p \quad \text{e} \quad p \neq s \\ x_{i_s} & \text{se} \quad m = i_s \\ a_{j_l} & \text{se} \quad m = j_l \end{cases}$$

e

$$t_m = \begin{cases} x_{i_p} & \text{se} \quad m = i_p \quad \text{e} \quad p \neq s \\ z_{i_s} & \text{se} \quad m = i_s \\ a_{j_l} & \text{se} \quad m = j_l \end{cases}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} A_{a_{j_1},\ldots,a_{j_k}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s} + \lambda z_{i_s}, \ldots, x_{i_{n-k}}) &= A(y_1, \ldots, y_n) \\ &= A(w_1, \ldots, w_n) + \lambda A(t_1, \ldots, t_n) \\ &= A_{a_{j_1},\ldots,a_{j_k}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}, \ldots, x_{i_{n-k}}) \\ &\quad + \lambda A_{a_{j_1},\ldots,a_{j_k}}(x_{i_1}, \ldots, z_{i_s}, \ldots, x_{i_{n-k}}). \end{aligned}$$

Vejamos agora que $T_{a_{j_1},\ldots,a_{j_k}}$ é linear: dadas aplicações n-lineares $A, B \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ e um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned} T_{a_{j_1},\ldots,a_{j_k}}(A + \lambda B)(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}) &= (A + \lambda B)_{a_{j_1},\ldots,a_{j_k}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}) \\ &= (A + \lambda B)(y_1, \ldots, y_n) \\ &= A(y_1, \ldots, y_n) + \lambda B(y_1, \ldots, y_n) \\ &= A_{a_{j_1},\ldots,a_{j_k}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}) + \lambda B_{a_{j_1},\ldots,a_{j_k}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}) \\ &= T_{a_{j_1},\ldots,a_{j_k}}(A)(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}) + \lambda T_{a_{j_1},\ldots,a_{j_k}}(B)(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}) \\ &= (T_{a_{j_1},\ldots,a_{j_k}}(A) + \lambda T_{a_{j_1},\ldots,a_{j_k}}(B))(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}), \end{aligned}$$

para todos $x_{i_1} \in E_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}} \in E_{i_{n-k}}$, onde

$$y_m = \begin{cases} x_{i_p} & \text{se} \quad m = i_p \\ a_{j_l} & \text{se} \quad m = j_l \end{cases}$$

para $m = 1, \ldots, n$, $l = 1, \ldots, k$ e $p = 1, \ldots, n-k$. Assim $T_{a_{j_1},\ldots,a_{j_k}}(A+\lambda B) = T_{a_{j_1},\ldots,a_{j_k}}(A) + \lambda T_{a_{j_1},\ldots,a_{j_k}}(B)$, provando que $T_{a_{j_1},\ldots,a_{j_k}}$ é linear.

Para provar que T é sobrejetor no caso em que os vetores $a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}$ são não-nulos, seja $B \in L(E_{i_1}, \ldots, E_{i_{n-k}}; F)$. Como $a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}$ são não nulos, existem $\varphi_{j_1} \in E_{j_1}^*, \ldots, \varphi_{j_k} \in E_{j_k}^*$ tais que $\varphi_{j_1}(a_{j_1}) = \ldots = \varphi_{j_k}(a_{j_k}) = 1$. Definindo,

$$\begin{gathered} A \colon E_1 \times \ldots \times E_n \longrightarrow F; \\ A(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_{j_1}(x_{j_1}) \cdots \varphi_{j_k}(x_{j_k}) \cdot B(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}), \end{gathered}$$

pelo Corolário 1.3.3 sabemos que $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$. Dados $x_{i_1} \in E_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}} \in E_{i_{n-k}}$ chame

$$y_m = \begin{cases} x_{i_p} & \text{se} \quad m = i_p \\ a_{j_l} & \text{se} \quad m = j_l \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned} T_{a_{j_1},\ldots,a_{j_k}}(A)(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}) &= A_{a_{j_1},\ldots,a_{j_k}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}) = A(y_1, \ldots, y_n) = \\ &= \varphi_{j_1}(x_{j_1}) \cdots \varphi_{j_k}(x_{j_k}) \cdot B(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}) \\ &= B(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}), \end{aligned}$$

provando que $T_{a_{j_1},\ldots,a_{j_k}}(A) = B$. Segue que $T_{a_{j_1},\ldots,a_{j_k}}$ é sobrejetor.

Na Proposição 1.5.1 vimos que a injetividade não vale em geral. ■

CAPÍTULO 2

POLINÔMIOS HOMOGÊNEOS

É notório em matemática que as funções

$$P_n\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}\ ,\ \ P_n(x) = x^n,$$

onde n é um número natural e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, são muito importantes. É claro que cada P_n é um polinômio, e a propriedade

$$P_n(\lambda x) = \lambda^n P_n(x), \tag{2.1}$$

para todos $\lambda, x \in \mathbb{K}$, nos leva a dizer que P_n é um *polinômio n-homogêneo*.

Quando trabalhamos com funções entre espaços vetoriais, não faz sentido fazer o produto de vetores, assim as funções P_n não têm análogos óbvios no contexto de espaços vetoriais. O que se faz é tentar descobrir funções que satisfazem a propriedade (2.1), e estas funções são, logicamente, chamadas de polinômios n-homogêneos.

2.1 Definição e exemplos de polinômios homogêneos

Na busca de funções entre espaços vetoriais que satisfazem a condição (2.1), temos a seguinte definição. Lembre-se que para $A \in L(^nE; F)$ e $x \in E$, estamos usando a notação Ax^n para denotar o vetor $A(x, \overset{(n)}{\ldots}, x) \in F$.

Nesta seção as principais referências utilizadas foram as dissertações [1] e [16].

Definição 2.1.1 Sejam E e F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $n \in \mathbb{N}$. Uma aplicação $P\colon E \longrightarrow F$ é um *polinômio homogêneo de grau n* ou *polinômio n-homogêneo*, se existe uma aplicação $A \in L(^nE; F)$ tal que $P(x) = Ax^n$ para todo vetor $x \in E$. Neste caso dizemos que P é o polinômio n-homogêneo associado à aplicação n-linear A e denotaremos este fato por $P = \widehat{A}$.

De acordo com a definição acima, para todos $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in E$, da n-linearidade de A obtemos

$$P(\lambda x) = A(\lambda x)^n = A(\lambda x, \overset{(n)}{\ldots}, \lambda x) = \lambda^n Ax^n = \lambda^n P(x).$$

Isso mostra que P satisfaz a propriedade (2.1), o que justifica chamar tais funções de polinômios n-homogêneos.

É fácil ver que o conjunto constituído pelos polinômios n-homogêneos $P\colon E \longrightarrow F$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações usuais de aplicações. Denotaremos esse espaço por $P(^nE;F)$. Em particular, se $F = \mathbb{K}$ denotaremos $P(^nE;\mathbb{K}) = P(^nE)$.

Veremos agora alguns exemplos de polinômios n-homogêneos. Cabe antes uma palavra sobre a notação que utilizaremos. Dados $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in E^*$ e $b \in F$, no Exemplo 1.1.2 consideramos a aplicaçao n-linear de tipo finito $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b$ que opera da seguinte forma:

$$(x_1, \dots, x_n) \in E^n \mapsto \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n) b \in F.$$

Por outro lado, podemos também considerar a aplicação

$$x \in E \mapsto \varphi_1(x) \cdots \varphi_n(x) b \in F,$$

que, como veremos a seguir, é um polinômio n-homogêneo. Por coerência com a literatura na área, denotaremos esta última aplicação também por $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b$ ($\varphi^n \otimes b$ no caso em que $\varphi = \varphi_1 = \cdots = \varphi_n$), e não haverá perigo de ambiguidade pois sempre estará claro se estamos tratando de aplicação multilinear ou de polinômio homogêneo.

Proposição 2.1.2 *Seja $P \in P(^nE;F)$. São equivalentes:*
(a) *Existe $A \in L_f(^nE;F)$ tal que $\widehat{A} = P$.*
(b) *Existem $m \in \mathbb{N}$, $\varphi_1, \dots, \varphi_m \in E^*$ e $b_1, \dots, b_m \in F$ tais que $P = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j^n \otimes b_j$.*
(c) *Existem $m \in \mathbb{N}$, $\varphi_{k,j} \in E^*$, $j = 1, \dots, m$, $k = 1, \dots, n$ tais que*

$$P = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{1,j} \otimes \cdots \otimes \varphi_{n,j} \otimes b_j.$$

Demonstração. (b) $\Longrightarrow$ (a) Seja $x \in E$. Por (b) temos $P(x) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x)^n \cdot b_j$. Do Exemplo 1.1.2 sabemos que definindo

$$A\colon E^n \longrightarrow F \ , \ A(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x_1) \cdots \varphi_j(x_n) b_j,$$

temos $A = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j \otimes \cdots \otimes \varphi_j \otimes b_j \in L_f(^nE;F)$. Assim,

$$\widehat{A}(x) = Ax^n = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x)^n b_j = P(x)$$

para todo $x \in E$. Portanto $\widehat{A} = P$.

(a) $\Longrightarrow$ (c) Como $A \in L_f(^nE;F)$, podemos tomar $m \in \mathbb{N}$, $\varphi_{k,j} \in E^*$, $b_j \in F$, $j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$, tais que $A = \sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_{1,j} \otimes \cdots \otimes \varphi_{n,j} \otimes b_j$. Então,

$$P(x) = \widehat{A}(x) = Ax^n = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{1,j}(x) \cdots \varphi_{n,j}(x) b_j$$

para todo $x \in E$. Segue que $P = \sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_{1,j} \otimes \cdots \otimes \varphi_{n,j} \otimes b_j$.

(c) $\Longrightarrow$(b) Por hipótese existem $m \in \mathbb{N}$, $\varphi_{k,j} \in E^*$; $j = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$, tais que $P = \sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_{1,j} \otimes \cdots \otimes \varphi_{n,j} \otimes b_j$. Queremos mostrar que existem $m \in \mathbb{N}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in E^*$ e $b_1, \ldots, b_m \in F$ tais que $P = \sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_j^n \otimes b_j$. Vejamos alguns casos particulares.

Caso $n = 2$ e $m = 2$: Neste caso $P(x) = \sum\limits_{j=1}^{2} \varphi_j(x)\psi_j(x)b_j$ para todo $x \in E$, onde $\varphi_j, \psi_j \in E^*, b_j \in F, j = 1, 2$. Observe que

$$(\varphi_1 + \psi_1)^2(x)b_1 = \varphi_1^2(x)b_1 + 2\varphi_1(x)\psi_1(x)b_1 + \psi_1^2(x)b_1,$$

$$(\varphi_2 + \psi_2)^2(x)b_2 = \varphi_2^2(x)b_2 + 2\varphi_2(x)\psi_2(x)b_2 + \psi_2^2(x)b_2.$$

Então

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{j=1}^{2} \varphi_j(x)\psi_j(x)b_j = \varphi_1(x)\psi_1(x)b_1 + \varphi_2(x)\psi_2(x)b_2 \\ &= (\varphi_1 + \psi_1)^2(x)\frac{b_1}{2} + (\varphi_2 + \psi_2)^2(x)\frac{b_2}{2} - \varphi_1^2(x)\frac{b_1}{2} - \varphi_2^2(x)\frac{b_2}{2} - \psi_1^2(x)\frac{b_1}{2} - \psi_2^2(x)\frac{b_2}{2}. \end{aligned}$$

Neste caso, tomando os funcionais lineares

$$\lambda_1 = \varphi_1 + \psi_1,\ \lambda_2 = \varphi_2 + \psi_2,\ \lambda_3 = \varphi_1,\ \lambda_4 = \varphi_2,\ \lambda_5 = \psi_1,\ \lambda_6 = \psi_2,$$

e os vetores

$$c_1 = \frac{b_1}{2},\ c_2 = \frac{b_2}{2},\ c_3 = -\frac{b_1}{2},\ c_4 = -\frac{b_2}{2},\ c_5 = -\frac{b_1}{2},\ c_6 = -\frac{b_2}{2},$$

obtemos $P = \sum\limits_{j=1}^{6} \lambda_j^2 \otimes c_j$ escrito na forma desejada.

Caso $n = 2$ e $m = 3$. Neste caso $P = \sum\limits_{j=1}^{3} \varphi_j \otimes \psi_j \otimes b_j$, onde $\varphi_j, \psi_j \in E^*, b_j \in F$ $j = 1, 2, 3$. Observe que

$$(\varphi_1 + \psi_1)^2 b_1 = \varphi_1^2 b_1 + 2\varphi_1\psi_1 b_1 + \psi_1^2 b_1,$$

$$(\varphi_2 + \psi_2)^2 b_2 = \varphi_2^2 b_2 + 2\varphi_2\psi_2 b_2 + \psi_2^2 b_2,$$

$$(\varphi_3+\psi_3)^2 b_3 = \varphi_3^2 b_3 + 2\varphi_3\psi_3 b_3 + \psi_3^2 b_3.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
P &= \sum_{j=1}^{3} \varphi_j \otimes \psi_j \otimes b_j = \varphi_1\psi_1 b_1 + \varphi_2\psi_2 b_2 + \varphi_3\psi_3 b_3 \\
&= \frac{1}{2}\Big[(\varphi_1+\psi_1)^2 b_1 + (\varphi_2+\psi_2)^2 b_2 + (\varphi_3+\psi_3)^2 b_3 - \varphi_1^2 b_1 - \psi_1^2 b_1 - \varphi_2^2 b_2 - \psi_2^2 b_2 - \varphi_3^2 b_3 \\
&\quad - \psi_3^2 b_3\Big] \\
&= (\varphi_1+\psi_1)^2 \frac{b_1}{2} - \varphi_1^2 \frac{b_1}{2} - \psi_1^2 \frac{b_1}{2} + (\varphi_2+\psi_2)^2 \frac{b_2}{2} - \varphi_2^2 \frac{b_2}{2} - \psi_2^2 \frac{b_2}{2} + (\varphi_3+\psi_3)^2 \frac{b_3}{2} - \varphi_3^2 \frac{b_3}{2} \\
&\quad - \psi_3^2 \frac{b_3}{2}.
\end{aligned}$$

Tomando os funcionais lineares

$$\lambda_1 = (\varphi_1+\psi_1),\ \lambda_2 = \varphi_1,\ \lambda_3 = \psi_1,\ \lambda_4 = (\varphi_2+\psi_2),\ \lambda_5 = \varphi_2,\ \lambda_6 = \psi_2, \lambda_7 = (\varphi_3+\psi_3),$$
$$\lambda_8 = \varphi_3,\ \lambda_9 = \psi_3,$$

e os vetores

$$c_1 = \frac{b_1}{2},\ c_2 = c_3 = -\frac{b_1}{2},\ c_4 = \frac{b_2}{2},\ c_5 = c_6 = -\frac{b_2}{2},\ c_7 = \frac{b_3}{2},\ c_8 = c_9 = -\frac{b_3}{2},$$

obtemos $P = \sum_{j=1}^{9} \lambda_j^2 \otimes c_j$ escrito na forma desejada.

Caso $n = 3$ e $m = 2$. Neste caso

$$P = \sum_{j=1}^{2} \varphi_j \otimes \psi_j \otimes \gamma_j \otimes b_j = \varphi_1 \otimes \psi_1 \otimes \gamma_1 \otimes b_1 + \varphi_2 \otimes \psi_2 \otimes \gamma_2 \otimes b_2,$$

onde $\varphi_j, \psi_j, \gamma_j \in E^*, b_j \in F, j = 1, 2$. Observe que, para $k = 1, 2$, temos

$$(\varphi_k+\psi_k+\gamma_k)^3 = \varphi_k^3+\psi_k^3+\gamma_k^3+3\varphi_k^2\psi_k+3\varphi_k^2\gamma_k+3\varphi_k\psi_k^2+3\varphi_k\gamma_k^2+3\psi_k^2\gamma_k+3\psi_k\gamma_k^2+6\varphi_k\psi_k\gamma_k.$$

Mas

$$\begin{aligned}
(\varphi_k+\psi_k)^3 &= \varphi_k^3 + \psi_k^3 + 3\varphi_k^2\psi_k + 3\varphi_k\psi_k^2, \\
(\varphi_k+\gamma_k)^3 &= \varphi_k^3 + \gamma_k^3 + 3\varphi_k^2\gamma_k + 3\varphi_k\gamma_k^2, \\
(\gamma_k+\psi_k)^3 &= \gamma_k^3 + \psi_k^3 + 3\gamma_k^2\psi_k + 3\gamma_k\psi_k^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
3\varphi_k^2\psi_k + 3\varphi_k\psi_k^2 &= (\varphi_k+\psi_k)^3 - \varphi_k^3 - \psi_k^3, \\
3\varphi_k^2\gamma_k + 3\varphi_k\gamma_k^2 &= (\varphi_k+\gamma_k)^3 - \varphi_k^3 - \gamma_k^3, \\
3\gamma_k^2\psi_k + 3\gamma_k\psi_k^2 &= (\gamma_k+\psi_k)^3 - \gamma_k^3 - \psi_k^3.
\end{aligned}$$

Assim,

$$(\varphi_k+\psi_k+\gamma_k)^3 = \varphi_k^3+\psi_k^3+\gamma_k^3+(\varphi_k+\psi_k)^3-\varphi_k^3-\psi_k^3+(\varphi_k+\gamma_k)^3-\varphi_k^3-\gamma_k^3+(\gamma_k+\psi_k)^3 \\ -\gamma_k^3-\psi_k^3+6\varphi_k\psi_k\gamma_k.$$

Daí,

$$\varphi_k\psi_k\gamma_k = \frac{1}{6}\left[(\varphi_k+\psi_k+\gamma_k)^3-(\varphi_k+\psi_k)^3-(\varphi_k+\gamma_k)^3-(\gamma_k+\psi_k)^3+\varphi_k^3+\gamma_k^3+\psi_k^3\right],$$

e portanto

$$P=\sum_{j=1}^{2}\varphi_j\otimes\psi_j\otimes\gamma_j\otimes b_j = \varphi_1\otimes\psi_1\otimes\gamma_1\otimes b_1+\varphi_2\otimes\psi_2\otimes\gamma_2\otimes b_2$$

$$=(\varphi_1+\psi_1+\gamma_1)^3\frac{b_1}{6}-(\varphi_1+\psi_1)^3\frac{b_1}{6}-(\varphi_1+\gamma_1)^3\frac{b_1}{6}-(\gamma_1+\psi_1)^3\frac{b_1}{6}+\varphi_1^3\frac{b_1}{6}+\gamma_1^3\frac{b_1}{6}+\psi_1^3\frac{b_1}{6}$$

$$+(\varphi_2+\psi_2+\gamma_2)^3\frac{b_2}{6}-(\varphi_2+\psi_2)^3\frac{b_2}{6}-(\varphi_2+\gamma_2)^3\frac{b_2}{6}-(\gamma_2+\psi_2)^3\frac{b_2}{6}+\varphi_2^3\frac{b_2}{6}+\gamma_2^3\frac{b_2}{6}+\psi_2^3\frac{b_2}{6}.$$

Tomando os funcionais lineares

$$\lambda_1=(\varphi_1+\psi_1+\gamma_1),\ \lambda_2=-(\varphi_1+\psi_1),\ \lambda_3=-(\varphi_1+\gamma_1),\ \lambda_4=-(\gamma_1+\psi_1),\ \lambda_5=\varphi_1,$$

$$\lambda_6=\gamma_1,\ \lambda_7=\psi_1,\ \lambda_8=(\varphi_2+\psi_2+\gamma_2),\ \lambda_9=-(\gamma_2+\psi_2),\ \lambda_{10}=-(\varphi_2+\gamma_2),$$

$$\lambda_{11}=-(\gamma_2+\psi_2),\ \lambda_{12}=\varphi_2,\ \lambda_{13}=\gamma_2,\ \lambda_{14}=\psi_2,$$

e os vetores

$$c_1=c_2=c_3=c_4=c_5=c_6=\frac{b_1}{6}, c_7=\frac{b_1}{6},\ c_8=c_9=c_{10}=c_{11}=c_{12}=c_{13}=c_{14}=\frac{b_2}{6},$$

obtemos $P=\sum_{j=1}^{14}\lambda_j^3\otimes c_j$ escrito na forma desejada.

Estes casos ilustram o argumento para o caso geral para $n,m\in\mathbb{N}$. ∎

Definição 2.1.3 Os polinômios n-homogêneos que satisfazem as condições equivalentes da Proposição 2.1.2 são chamados de *polinômios n-homogêneos de tipo finito*. Denotaremos o conjunto dos polinômios n-homogêneos de tipo finito de E em F por $P_f(^nE;F)$. Quando $F=\mathbb{K}$ escrevemos $P_f(^nE;\mathbb{K})=P_f(^nE)$.

Estudaremos agora uma segunda classe de polinômios homogêneos. Dados $P\in P(^nE)$ e $b\in F$, por $P\otimes b$ denotamos a aplicação de E em F que atua da forma

$$x\in E\mapsto P(x)b\in F.$$

Proposição 2.1.4 *Seja $P\in P(^nE;F)$. São equivalentes:*
(a) *Existe $A\in L_{\mathcal{F}}(^nE;F)$ tal que $\widehat{A}=P$.*
(b) *Existem $m\in\mathbb{N}$, $P_1,\dots,P_m\in P(^nE)$ e $b_1,\dots,b_m\in F$ tais que $P=\sum_{j=1}^{m}P_j\otimes b_j$.*

Demonstração. (a) $\Longrightarrow$ (b) Como $A \in L_{\mathcal{F}}(^nE; F)$, existem $m \in \mathbb{N}$, $A_1, \ldots, A_m \in L(^nE)$ e $b_1, \ldots, b_m \in F$ tais que $A = \sum\limits_{j=1}^{m} A_j \otimes b_j$. Então,

$$\begin{aligned} P(x) = \widehat{A}(x) = Ax^n &= \left(\sum_{j=1}^{m} A_j \otimes b_j\right) x^n = \sum_{j=1}^{m} A_j x^n b_j \\ &= \sum_{j=1}^{m} \widehat{A}_j(x) b_j = \left(\sum_{j=1}^{m} \widehat{A}_j \otimes b_j\right)(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in E$. Isso prova que $P = \sum\limits_{j=1}^{m} \widehat{A}_j \otimes b_j$ com $\widehat{A}_1, \ldots, \widehat{A}_m \in P(^nE)$.
(b) $\Longrightarrow$ (a) Como $P_j \in P(^nE)$, $j = 1 \ldots, m$, existem formas n-lineares $A_j \in L(^nE)$ tais que $P_j = \widehat{A}_j$ para $j = 1, \ldots, m$. Assim,

$$P(x) = \sum_{j=1}^{m} P_j(x) b_j = \sum_{j=1}^{m} \widehat{A}_j(x) b_j = \sum_{j=1}^{m} A_j x^n b_j$$

para todo $x \in E$. Definindo

$$A \colon E^n \longrightarrow F \ , \ A(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{m} A_j(x_1, \ldots, x_n) b_j,$$

temos $A \in L_{\mathcal{F}}(^nE; F)$ e

$$\widehat{A}(x) = Ax^n = \sum_{j=1}^{m} A_j x^n b_j = P(x)$$

para todo $x \in E$, isto é, $\widehat{A} = P$. ■

Definição 2.1.5 Os polinômios n-homogêneos que satisfazem as condições equivalentes da Proposição 2.1.4 são chamados de *polinômios n-homogêneos de posto finito.* Denotaremos o conjunto dos polinômios n-homogêneos de posto finito de E em F por $P_{\mathcal{F}}(^nE; F)$. Quando $F = \mathbb{K}$ escrevemos $P_{\mathcal{F}}(^nE; \mathbb{K}) = P_{\mathcal{F}}(^nE)$.

Observação 2.1.6 (a) Dado um polinômio $P \in P(^nE; F)$, é fácil verificar que $P \in P_{\mathcal{F}}(^nE; F)$ se, e somente se, o subespaço gerado pela imagem de P tem dimensão finita. Isso justifica o termo *polinômio de posto finito.*
(b) Das inclusões $L_f \subseteq L_{\mathcal{F}} \subseteq L(E_1, \ldots, E_n; F)$ segue que $P_f \subseteq P_{\mathcal{F}} \subseteq P(^nE; F)$.

Para verificar que as inclusões do item (b) são igualdades quando os espaços do domínio têm dimensão finita, precisaremos do seguinte resultado auxiliar da Álgebra Linear:

Lema 2.1.7 *Dada uma base $\beta = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ do espaço vetorial E, então existe uma base $\beta^* = \{\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*\}$ de E^*, chamada base dual de β, tal que*

$$\alpha_j^*(\alpha_i) = \begin{cases} 1 & se, i = j, \\ 0 & se, i \neq j. \end{cases}$$

Demonstração. Veja [11, página 108]. ∎

Proposição 2.1.8 (a) *Se $E_1, \ldots, E_n$ têm dimensão finita, então*

$$L_f(E_1, \ldots, E_n; F) = L_{\mathcal{F}}(E_1, \ldots, E_n; F) = L(E_1, \ldots, E_n; F)$$

para todo espaço vetorial F.
(b) *Se E tem dimensão finita, então*

$$P_f(^nE; F) = P_{\mathcal{F}}(^nE; F) = P(^nE; F)$$

para todo espaço vetorial F.

Demonstração.

a) Façamos um caso mais simples primeiro: suponha $E_1 = E_2 = E$, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ base de E, $\{\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*\}$ a base dual dada pelo Lema 2.1.7 e $A \in L(E^2; F)$. Então,

$$\begin{aligned}
A(x, y) &= A\left(\sum_{j=1}^{n} a_j \alpha_j, \sum_{k=1}^{n} b_k \alpha_k\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_j b_k A(\alpha_j, \alpha_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_j^*(x) \cdot \alpha_k^*(y) \cdot A(\alpha_j, \alpha_k) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_j^* \otimes \alpha_k^* \otimes A(\alpha_j, \alpha_k)(x, y)
\end{aligned}$$

para todos $x, y \in E$. Portanto $A = \sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_j^* \otimes \alpha_k^* \otimes A(\alpha_j, \alpha_k) \in L_f(E^2; F)$.

Para o caso geral, sejam $\beta_1 = \{\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \ldots, \alpha_{1,k_1}\}$ base de E_1, $\beta_2 = \{\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2} \ldots, \alpha_{2,k_2}\}$ base de E_2, …, $\beta_n = \{\alpha_{n,1}, \alpha_{n,2} \ldots, \alpha_{n,k_n}\}$ base de E_n, $\{\alpha_{1,1}^*, \alpha_{1,2}^*, \ldots, \alpha_{1,k_1}^*\}$ a base dual de β_1,…, $\{\alpha_{n,1}^*, \alpha_{n,2}^*, \ldots, \alpha_{n,k_n}^*\}$ a base dual de β_n. Para toda aplicação n-linear $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$, temos

$$\begin{aligned}
A(x_1, \ldots, x_n) &= A\left(\sum_{j_1=1}^{k_1} a_{1,j_1} \alpha_{1,j_1}, \ldots, \sum_{j_n=1}^{k_n} a_{n,j_n} \alpha_{n,j_n}\right) \\
&= \sum_{j_1=1}^{k_1} \ldots \sum_{j_n=1}^{k_n} a_{1,j_1} \cdots a_{n,j_n} A(\alpha_{1,j_1}, \ldots, \alpha_{n,j_n}) \\
&= \sum_{j_1=1}^{k_1} \ldots \sum_{j_n=1}^{k_n} \alpha_{1,j_1}^*(x_1) \cdots \alpha_{n,j_n}^*(x_n) A(\alpha_{1,j_1}, \ldots, \alpha_{n,j_n}) \\
&= \sum_{j_1=1}^{k_1} \ldots \sum_{j_n=1}^{k_n} \alpha_{1,j_1}^* \otimes \cdots \otimes \alpha_{n,j_n}^* \otimes A(\alpha_{1,j_1}, \ldots, \alpha_{n,j_n})(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

para todos $x_i \in E_i,\ i = 1, \ldots, n$. Isso prova que

$$A = \sum_{j_1=1}^{k_1} \ldots \sum_{j_n=1}^{k_n} \alpha_{1,j_1}^* \otimes \cdots \otimes \alpha_{n,j_n}^* \otimes A(\alpha_{1,j_1}, \ldots, \alpha_{n,j_n}) \in L_f(E_1, \ldots E_n; F),$$

e portanto $L(E_1, \ldots, E_n; F) = L_f(E_1, \ldots, E_n; F)$. A outra igualdade segue agora da Observação 2.1.6(b).

b) Dado $P \in P(^nE; F)$, existe $A \in L(^nE; F)$ tal que $P = \widehat{A}$. Como E tem dimensão finita então $A \in L_f(^nE; F)$ pelo item (a). Pela Proposição 2.1.2 segue que $P \in P_f(^nE; F)$. Isso prova que $P_f(^nE; F) = P(^nE; F)$ e a outra igualdade segue agora da Observação 2.1.6(b).

■

Em dimensão infinita nem toda aplicação multilinear é de tipo finito:

Exemplo 2.1.9 Seja c_0 o espaço vetorial das sequências de escalares que convergem para zero, isto é,

$$c_0 = \{(x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in \mathbb{K} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } x_n \longrightarrow 0\},$$

com as operações usuais de sequências. Defina

$$A\colon c_0 \times c_0 \longrightarrow c_0;\ A((x_n)_n, (y_n)_n) = (x_n y_n)_{n=1}^{\infty},$$

temos que A é bilinear, $A \notin L_f$ e $A \notin L_{\mathcal{F}}$. Vejamos que:
• A está bem definida: dadas sequências $x_n, y_n \in c_0$, temos $x_n \longrightarrow 0$ e $y_n \longrightarrow 0$, e portanto $x_n \cdot y_n \longrightarrow 0 \cdot 0 = 0$, ou seja, $(x_n \cdot y_n)_n \in c_0$.
• A é bilinear: dados $(x_n)_n, (x_n^{'})_n, (y_n)_n \in c_0$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$A((x_n)_n + \lambda(x_n^{'})_n, (y_n)_n) = A((x_n + \lambda x_n^{'})_n, (y_n)_n) = ((x_n + \lambda x_n^{'})y_n)_n = (x_n y_n + \lambda x_n^{'} y_n)_n =$$

$$= (x_n y_n)_n + \lambda(x_n^{'} y_n)_n = A((x_n)_n, (y_n)_n) + \lambda A((x_n^{'})_n, (y_n)_n).$$

A linearidade na segunda coordenada é análoga, ou então veja que A é simétrica e aplique a Proposição 1.2.8.
• $A \notin L_{\mathcal{F}}(^2c_0; c_0)$ (e, portanto, $A \notin L_f(^2c_0; c_0)$): sejam $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots), \ldots,$ os vetores básicos canônicos de c_0. Note que

$$A(e_1, e_1) = e_1, A(e_2, e_2) = e_2,\ \ldots,\ A(e_j, e_j) = e_j \text{ para todo } j.$$

Temos desta forma que a imagem de A contém todos os vetores $(e_n)_n$. Como estes formam uma quantidade infinita de vetores linearmente independentes, segue que o subespaço gerado pela imagem de A contém o subespaço gerado pelos vetores $(e_n)_n$, e portanto o subespaço gerado pela imagem de A tem dimensão infinita. Isso garante que A não é de posto finito.

Vejamos que um mesmo polinômio homogêneo pode ser gerado por diferentes aplicações multilineares:

Exemplo 2.1.10 A forma

$$A\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ A((x,y),(z,w)) = xw + 2yz,$$

é claramente bilinear, e o polinômio 2-homogêneo gerado por ela é

$$\widehat{A}\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow; \mathbb{R}\ ,\ \widehat{A}(x,y) = A((x,y),(x,y)) = xy + 2yx = 3xy.$$

Mas a aplicação

$$B\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ B((x,y),(z,w)) = 2xw + yz$$

também é bilinear e gera o mesmo polinômio 2-homogêneo, pois

$$\widehat{B}(x,y) = B((x,y),(x,y)) = 2xy + yx = 3xy = \widehat{A}(x,y)$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Entretanto, $B \neq A$, uma vez que

$$A((1,0),(0,1)) = 1 + 0 = 1 \text{ e}$$

$$B((1,0),(0,1)) = 2 + 0 = 2.$$

Um fato central na teoria de polinômios homogêneos é que, se nos restringirmos às aplicações multilineares simétricas, aí sim vale a unicidade da aplicação multilinear que gera um polinômio:

Teorema 2.1.11 *Para cada polinômio n-homogêneo $P \in P(^nE;F)$ existe uma única aplicação n-linear simétrica $\check{P} \in L^s(^nE;F)$ tal que $\check{P}x^n = P(x)$ para todo $x \in E$. Mais ainda, $\check{P} = A^s$ para toda $A \in L(^nE;F)$ tal que $P = \widehat{A}$.*

Demonstração. Como $P \in P(^nE;F)$, existe $A \in L(^nE;F)$ tal que $P(x) = Ax^n$ para todo $x \in E$. Defina $A^s\colon E^n \longrightarrow F$ por

$$A^s(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{n!}\sum_{\sigma \in S_n} A(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}).$$

Sabemos da Proposição 1.2.6(a) que $A^s \in L^s(^nE;F)$, e do item (d) da mesma proposição sabemos que $\widehat{A^s} = P$. Tomando $\check{P} := A^s$ provamos a primeira afirmação do enunciado.

Por outro lado, se existir $B \in L^s(^nE;F)$ tal que $\widehat{B} = P$, teríamos

$$Bx^n - \check{P}x^n = \widehat{B}(x) - P(x) = 0$$

para todo $x \in E$. Tomando $C := B - \check{P} \in L^s(^nE;F)$, segue que $Cx^n = 0$ para todo $x \in E$. Desse modo, pela Fórmula de Polarização (Proposição 1.2.13), tomando $x_0 = 0$, temos

$$C(x_1,\ldots,x_n) = \frac{1}{n!2^n}\sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n C\big(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n\big)^n = 0$$

para quaisquer $x_j \in E$, com $j = 1,\ldots,n$. Portanto $C = 0$, e consequentemente $B = \check{P}$. ∎

Teorema 2.1.12 *Para todos espaços vetoriais E e F e todo número natural $n \in \mathbb{N}$, a correspondência*

$$P \in P(^nE; F) \longrightarrow \check{P} \in L^s(^nE; F)$$

é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Demonstração. A correspondência está bem definida pois sabemos, pelo teorema anterior, que $\check{P} \in L^s(^nE; F)$. Vejamos que a correspondência é linear. Usaremos para isso que, pela Proposição 1.2.6(e), a correspondência $A \mapsto A^s$ é linear. Dados $P, Q \in P(^nE; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, pelo teorema anterior existem únicas aplicações n-lineares simétricas $\check{P}, \check{Q} \in L^s(^nE; F)$ tais que $\check{P}x^n = P(x)$ e $\check{Q}x^n = Q(x)$ para todo $x \in E$; e que $\check{P} = A^s$ e $\check{Q} = B^s$, sendo que $Ax^n = P(x)$ e $Bx^n = Q(x)$ para todo $x \in E$. Do teorema anterior temos também que $(P + \lambda Q)^\vee$ é a única aplicação n-linear simétrica tal que $(P + \lambda Q)^\vee x^n = (P + \lambda Q)(x)$ para todo $x \in E$. Vejamos que $(A + \lambda B)^s x^n = (P + \lambda Q)(x)$ para todo $x \in E$. De fato:

$$(A + \lambda B)^s x^n = A^s x^n + \lambda B^s x^n = Ax^n + \lambda Bx^n = P(x) + \lambda Q(x) = (P + \lambda Q)(x)$$

para todo $x \in E$. Pelo teorema anterior segue que $(P + \lambda Q)^\vee = (A + \lambda B)^s$. Daí,

$$\begin{aligned}(P + \lambda Q)^\vee(x_1, \ldots, x_n) &= (A + \lambda B)^s(x_1, \ldots, x_n)\\ &= (A^s + \lambda B^s)(x_1, \ldots, x_n)\\ &= A^s(x_1, \ldots, x_n) + \lambda B^s(x_1, \ldots, x_n)\\ &= \check{P}(x_1, \ldots, x_n) + \lambda \check{Q}(x_1, \ldots, x_n)\end{aligned}$$

para todos $x_j \in E$, com $j = 1, \ldots, n$. Portanto $(P + \lambda Q)^\vee = \check{P} + \lambda \check{Q}$.

Suponhamos que $\check{P} = 0$. Então $A^s = 0$. Pela Proposição 1.2.6(d) temos

$$0 = A^s x^n = Ax^n = P(x)$$

para todo $x \in E$. Segue que $P = 0$ e portanto a correspondência $P \longrightarrow \check{P}$ é injetora.

Dada uma aplicação n-linear simétrica $A \in L^s(^nE; F)$, tome $P := \widehat{A}$. Assim $P \in P(^nE; F)$ e da Proposição 1.2.6(b) e do teorema anterior temos que $\check{P} = A^s = A$. Portanto $P \longrightarrow \check{P}$ é sobrejetora. ■

Do Teorema 1.1.5 sabemos que os espaços de aplicações multilineares $L(^{m+n}E; F)$ e $L(^mE; L(^nE; F))$ são isomorfos através de um isomorfismo canônico. Isso nos leva a questionar se os espaços de polinômios $P(^{m+n}E; F)$ e $P(^mE; P(^nE; F))$ são igualmente canonicamente isomorfos. Passamos a seguir a trabalhar no sentido de resolver esta questão.

Definição 2.1.13 Dizemos que o espaço vetorial F tem uma cópia isomorfa do espaço E se existe um subespaço G de F que é isomorfo a E.

Proposição 2.1.14 *Sejam E e F espaços vetoriais. Então o espaço vetorial $P(^mE; P(^nE; F))$ contém uma cópia isomorfa do espaço $P(^{m+n}E; F)$.*

Demonstração. Considere a aplicação

$$\phi\colon P(^{m+n}E;F) \quad\longrightarrow\quad P(^{m}E;P(^{n}E;F))$$

onde

$$\phi(P)\colon E \quad\longrightarrow\quad P(^{n}E;F)$$

é definida por

$$\phi(P)(x)(y) = \check{P}x^m y^n.$$

Primeiro mostraremos que ϕ está bem definida. Para isso deve-se ter $\phi(P)(x) \in P(^{n}E;F)$ e $\phi(P) \in P(^{m}E;P(^{n}E;F))$ para todos $P \in P(^{m+n}E;F)$ e $x \in E$. Com efeito, dados $P \in P(^{m+n}E;F)$ e $x \in E$, defina:

$$A\colon E^n \longrightarrow F\ ,\ A(x_1,\ldots,x_n) = \check{P}(x^m, x_1,\ldots,x_n).$$

Da multilinearidade de $\check{P}$ segue que $A \in L(^{n}E;F)$. Além disso,

$$\phi(P)(x)(y) = \check{P}x^m y^n = Ay^n.$$

para todo $y \in E$. Isso prova que $\widehat{A} = \phi(P)(x)$, e consequentemente $\phi(P)(x) \in P(^{n}E;F)$. Por outro lado, definimos

$$B\colon E^m \longrightarrow P(^{n}E;F)$$

onde

$$B(x_1,\ldots,x_m)\colon E \longrightarrow F$$

é dada por

$$B(x_1,\ldots,x_m)(y) = \check{P}(x_1,\ldots,x_m,y^n).$$

Vejamos que B está bem definidia, isto é, $B(x_1,\ldots,x_m) \in P(^{n}E;F)$. Para isso tome

$$C\colon E^n \longrightarrow F\ ,\ C(y_1,\ldots,y_n) = \check{P}(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n).$$

Mais uma vez, usando a multilinearidade de $\check{P}$ concluímos que C é n-linear. Além disso,

$$Cy^n = \check{P}(x_1,\ldots,x_m,y^n) = B(x_1,\ldots,x_m)(y)$$

para todo $y \in E$, ou seja, $\widehat{C} = B(x_1,\ldots,x_n)$, e consequentemente $B(x_1,\ldots,x_m) \in P(^{n}E;F)$. Vejamos que $Bx^m = \phi(P)(x)$. De fato,

$$Bx^m(y) = \check{P}x^m y^n = \phi(P)(x)(y)$$

para todo $y \in E$. Desse modo $\widehat{B} = \phi(P)$, o que prova que $\phi(P) \in P(^{m}E;P(^{n}E;F))$, pois já vimos que a imagem de $\phi(P)$ está contida em $P(^{n}E;F)$. Assim, ϕ está bem definida.

Provemos agora que ϕ é linear. Dados $P_1, P_2 \in P(^{m+n}E;F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, usando a linearidade da correspondência $P \mapsto \check{P}$ (Teorema 2.1.12), temos

$$\begin{aligned}
\phi(\lambda P_1 + P_2)(x)(y) &= (\lambda P_1 + P_2)^{\vee} x^m y^n \\
&= \lambda \check{P}_1 x^m y^n + \check{P}_2 x^m y^n \\
&= \lambda\phi(P_1)(x)(y) + \phi(P_2)(x)(y) \\
&= (\lambda\phi(P_1) + \phi(P_2))(x)(y)
\end{aligned}$$

para quaisquer $x, y \in E$. Portanto, $\phi(\lambda P_1 + P_2) = \lambda\phi(P_1) + \phi(P_2)$, e, consequentemente, ϕ é linear.

Verifiquemos que ϕ é injetora. Seja $P \in P(^{m+n}E; F)$ com $P \in \ker\phi$. Então

$$\begin{aligned}
\phi(P) = 0 &\Longrightarrow \phi(P)(x) = 0 \text{ para todo } x \in E \\
&\Longrightarrow \phi(P)(x)(y) = 0 \text{ para todos } x, y \in E \\
&\Longrightarrow \check{P}x^m y^n = 0 \text{ para todos } x, y \in E \\
&\Longrightarrow \check{P}x^m x^n = 0 \text{ para todo } x \in E \\
&\Longrightarrow P(x) = \check{P}x^{m+n} = 0 \text{ para todo } x \in E \\
&\Longrightarrow P = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, ϕ é injetora. Desta maneira, ϕ é um isomorfismo linear entre o subespaço $Im\phi$ de $P(^mE; P(^nE; F))$ e o espaço vetorial $P(^{m+n}E; F)$. ■

Observação 2.1.15 O operador ϕ da demonstração não é sobrejetor em geral. Para nos convencermos disso, consideremos o caso $m = n = 1$, isto é,

$$\begin{array}{rccc}
\phi & : P(^2E; F) & \longrightarrow & L(E; L(E; F)) \\
& P & \longmapsto & \phi(P)(x)(y) = \check{P}(x, y)
\end{array}$$

Como $\check{P}$ é uma aplicação bilinear simétrica, temos

$$\phi(P)(x)(y) = \check{P}(x, y) = \check{P}(y, x) = \phi(P)(y)(x)$$

para todos $x, y \in E$. Isso quer dizer que todo operador linear na imagem de ϕ é simétrico. Basta então mostrar a existência de um operador $T \in L(E; L(E; F))$ que não seja simétrico, isto é, para o qual existem $x, y \in E$ tais que $T(x)(y) \neq T(y)(x)$. Exibiremos um tal exemplo no caso em que $E = \ell_2 =$ espaço das sequências de escalares com quadrado somável, $F = \mathbb{K}$ e sendo o operador

$$T \colon \ell_2 \longrightarrow (\ell_2)^* = L(\ell_2; \mathbb{K})$$

onde

$$T((x_j)_{j=1}^{\infty}) \colon \ell_2 \longrightarrow \mathbb{K}$$

é definido por

$$T((x_j)_{j=1}^{\infty})((y_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_{j+1},$$

para todas as sequências $(x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2$. Vejamos que T está bem definido, ou seja, $T((x_j)_{j=1}^{\infty})) \in L(\ell_2, \mathbb{K})$ e que $T((x_j)_{j=1}^{\infty})((y_j)_{j=1}^{\infty})) \in \mathbb{K}$. Vejamos primeiramente que a série $\sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j y_{j+1}$ é convergente. Para isto usaremos o seguinte resultado da Análise Funcional:

Proposição 2.1.16 (Desigualdade de Cauchy Schwarz). *Se* $(a_j)_{j=1}^{\infty}, (b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2$, *então* $(a_j b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$ *e*

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j b_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração. Basta tomar $p = q = 2$ em [7, Proposição 1.4.1]. ■

Sabemos que $\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2 < \infty$ e $\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^2 < \infty$. Assim, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_{j+1}| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_{j+1}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{j=2}^{\infty} |y_j|^2\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Isso prova que a série $\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_{j+1}$ é absolutamente convergente, portanto a série $\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_{j+1}$ é convergente.

Vejamos que $T((x_j)_{j=1}^{\infty})$ é linear: dados $(y_j)_{j=1}^{\infty}, (z_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned} T((x_j)_{j=1}^{\infty})((y_j)_{j=1}^{\infty} + \lambda(z_j)_{j=1}^{\infty}) &= T((x_j)_{j=1}^{\infty})((y_j + \lambda z_j)_{j=1}^{\infty}) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} x_j(y_{j+1} + \lambda z_{j+1}) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}(x_j y_{j+1} + \lambda x_j z_{j+1}) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_{j+1} + \lambda \sum_{j=1}^{\infty} x_j z_{j+1} \\ &= T((x_j)_{j=1}^{\infty})((y_j)_{j=1}^{\infty}) + \lambda T((x_j)_{j=1}^{\infty})((z_j)_{j=1}^{\infty}), \end{aligned}$$

o que comprova a linearidade de $T((x_j)_{j=1}^{\infty})$.

Provemos agora que T é linear: dados $(x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty}, (z_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned} T((x_j)_{j=1}^{\infty} + \lambda(y_j)_{j=1}^{\infty})((z_j)_{j=1}^{\infty}) &= T((x_j + \lambda y_j)_{j=1}^{\infty})((z_j)_{j=1}^{\infty}) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}(x_j + \lambda y_j) \cdot z_{j+1} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty}(x_j z_{j+1} + \lambda y_j z_{j+1}) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} x_j z_{j+1} + \lambda \sum_{j=1}^{\infty} y_j z_{j+1} \\ &= T((x_j)_{j=1}^{\infty})((z_j)_{j=1}^{\infty}) + \lambda T((y_j)_{j=1}^{\infty})((z_j)_{j=1}^{\infty}) \\ &= (T((x_j)_{j=1}^{\infty}) + \lambda T((y_j)_{j=1}^{\infty}))((z_j)_{j=1}^{\infty}) \end{aligned}$$

para qualquer $(z_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_2$. Isso prova que

$$T((x_j)_{j=1}^{\infty} + \lambda(y_j)_{j=1}^{\infty}) = (T((x_j)_{j=1}^{\infty}) + \lambda T((y_j)_{j=1}^{\infty})),$$

ou seja, T é linear.

Vejamos que existem $x, y \in \ell_2$ tais que $T(x)(y) \neq T(y)(x)$. De fato, tomando $e_1 = (1, 0, 0, \dots) \in \ell_2$ e $e_2 = (0, 1, 0, \dots) \in \ell_2$, temos

$$T(e_1)(e_2) = 1 \neq 0 = T(e_2)(e_1).$$

Como vimos antes, todo operador na imagem de ϕ é simétrico, portanto T não pertence à imagem de ϕ, provando que T não é sobrejetor.

2.2 Aumentando o grau de homogeneidade

Assim como fizemos na Seção 1.3 para aplicações multilineares, veremos nesta seção como usar um polinômio n-homogêneo para obter polinômios homogêneos de graus arbitrariamente maiores que n.

Também como antes, comecemos com um caso mais simples, cuja demonstração será caso particular do caso geral que vem a seguir:

Proposição 2.2.1 Sejam E e F espaços vetoriais, $P \in P(^nE; F)$ e $\varphi \in E^*$. Então a aplicação

$$x \in E \mapsto \varphi(x)^m P(x) \in F,$$

é um polinômio $(m+n)$-homogêneo.

Bem mais geralmente, temos:

Teorema 2.2.2 Sejam E e F espaços vetoriais. Se $P \in P(^nE; F)$ e $Q \in P(^mE)$, então a aplicação

$$Q \otimes P \colon E \longrightarrow F \ , \ (Q \otimes P)(x) = Q(x) \cdot P(x),$$

é um polinômio $(m+n)$-homogêneo, isto é $Q \otimes P \in P(^{m+n}E; F)$. Mais ainda, a correspondência

$$T_Q \colon P(^nE; F) \longrightarrow P(^{m+n}E; F) \ , \ T_Q(P) = Q \otimes P,$$

é um operador linear.

Demonstração. Como $P \in P(^nE; F)$, existe uma única $\check{P} \in L^s(^nE; F)$ tal que $(\check{P})^\wedge = P$. E, como $Q \in P(^mE)$, existe uma única $\check{Q} \in L^s(^mE)$ tal que $(\check{Q})^\wedge = Q$. Pelo Teorema 1.3.2 temos $\check{Q} \otimes \check{P} \in L(^{m+n}E; F)$ e

$$\begin{aligned}(\check{Q} \otimes \check{P})^\wedge(x) &= (\check{Q} \otimes \check{P})x^{m+n} = \check{Q}x^m \cdot \check{P}x^n = (\check{Q})^\wedge(x) \cdot (\check{P})^\wedge(x) \\ &= Q(x) \cdot P(x) = (Q \otimes P)(x),\end{aligned}$$

para qualquer $x \in E$. Assim, $(\check{Q} \otimes \check{P})^\wedge = Q \otimes P$. E, portanto, $Q \otimes P \in P(^{m+n}E; F)$.

Dados $P, R \in P(^nE; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned}T_Q(P + \lambda R)(x) &= Q \otimes (P + \lambda R)(x) \\ &= Q(x) \cdot (P + \lambda R)(x) \\ &= Q(x) \cdot [P(x) + \lambda R(x)] \\ &= Q(x) \cdot P(x) + \lambda Q(x) \cdot R(x) \\ &= (Q \otimes P)(x) + \lambda (Q \otimes R)(x) \\ &= (Q \otimes P + \lambda Q \otimes R)(x) \\ &= (T_Q(P) + \lambda T_Q(R))(x)\end{aligned}$$

para todo $x \in E$. Assim $T_Q(P + \lambda R) = T_Q(P) + \lambda T_Q(R)$, o que prova a linearidade de T_Q. ■

Não sabemos se, em geral, $Q \neq 0$ implica que T_Q seja injetora. Ou seja, não sabemos se a informação que vimos no Teorema 1.3.2 para aplicações multilineares continua verdadeira para polinômios homogêneos. Para não deixar o assunto intocado, vejamos alguns casos em que isso é verdade:

Proposição 2.2.3 *Seja* $Q \in P(^mE)$ *tal que* $\ker(Q) = \{0\}$. *Então o operador linear*

$$T_Q \colon P(^nE; F) \longrightarrow P(^{n+m}E; F) \ , \ T_Q(P) = Q \otimes P$$

é injetor.

Demonstração. Seja $P \in \ker(T_Q)$. Como $\ker(Q) = \{0\}$, temos

$$\begin{aligned} T_Q(P) = 0 &\Longrightarrow Q \otimes P = 0 \Longrightarrow Q(x) \cdot P(x) = 0 \text{ para todo } x \in E \\ &\Longrightarrow \text{para todo } x \in E, \ Q(x) = 0 \text{ ou } P(x) = 0 \\ &\Longrightarrow \text{para todo } x \in E, \ x \in \ker(Q) \text{ ou } x \in \ker(P) \\ &\Longrightarrow E = \ker(Q) \cup \ker(P) \\ &\Longrightarrow E = \ker(P) \Longrightarrow P = 0. \end{aligned}$$

■

Vejamos exemplos que mostram que a condição $\ker(Q) = \{0\}$ é verificada às vezes, mas nem sempre:

Exemplo 2.2.4 (a) Para todo $n \in \mathbb{N}$, o polinômio n-homogêneo canônico

$$\lambda \in \mathbb{K} \mapsto \lambda^n \in \mathbb{K},$$

claramente tem núcleo trivial.
(b) Consideremos a aplicação

$$Q \colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ Q((x, y)) = x(x + y).$$

Definindo

$$A \colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \ , \ A((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_1(x_2 + y_2),$$

temos que A é bilinear: de fato, dados $(x_1, y_1), (x_1', y_1'), (x_2, y_2), (x_2', y_2') \in \mathbb{R}^2$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} A((x_1, y_1) + \lambda(x_1', y_1'), (x_2, y_2)) &= A((x_1 + \lambda x_1', y_1 + \lambda y_1'), (x_2, y_2)) \\ &= (x_1 + \lambda x_1') \cdot (x_2 + y_2) \\ &= x_1(x_2 + y_2) + \lambda x_1'(x_2 + y_2) \\ &= A((x_1, y_1), (x_2, y_2)) + \lambda A((x_1', y_1'), (x_2, y_2)), \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
A((x_1,y_1),(x_2,y_2)+\lambda(x_2',y_2')) &= A((x_1,y_1),(x_2+\lambda x_2', y_2+\lambda y_2'))\\
&= x_1(x_2+\lambda x_2' + y_2 + \lambda y_2'))\\
&= x_1(x_2+y_2)+\lambda x_1(x_2'+y_2')\\
&= A((x_1,y_1),(x_2,y_2))+\lambda A((x_1,y_1),(x_2',y_2')).
\end{aligned}
$$

De

$$\widehat{A}(x,y) = A((x,y),(x,y)) = x(x+y) = Q(x,y)$$

para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, concluímos que $\widehat{A}=Q$. Portanto $Q\in P(^2\mathbb{R}^2)$. Mas $Q((1,-1)=0$, o que mostra que $\ker(Q)\neq\{0\}$.

Vejamos uma outra situação em que o operador linear T_Q é injetor. Para isto vejamos primeiramente o seguinte lema.

Lema 2.2.5 *Sejam V e W subespaços vetoriais do espaço vetorial E. Então $V\cup W$ é subespaço vetorial se, e somente se, $V\subseteq W$ ou $W\subseteq V$.*

Demonstração. Suponha que $V\cup W$ seja subespaço vetorial. Suponha agora, por absurdo, que $V\nsubseteq W$ e $W\nsubseteq V$. Neste caso existe $x\in V$ tal que $x\notin W$ e existe $y\in W$ tal que $Y\notin V$. Então, $x,y\in V\cup W$, e disso segue, por hipótese, que $x+y\in V\cup W$. Então $x+y\in V$ ou $x+y\in W$. Se $x+y\in V$, então $y=(x+y)-x\in V$, o que não ocorre. Logo $x+y\in W$, mas neste caso teríamos $x=(x+y)-y\in W$, o que também não ocorre. Essa contradição nos permite concluir que $V\subseteq W$ ou $W\subseteq V$.

A recíproca é trivial. ■

Proposição 2.2.6 *Seja $0\neq Q\in P(^mE)$ tal que $\ker(Q)$ é subespaço vetorial de E. Então o operador linear*

$$T_Q\colon L(E;F)\longrightarrow P(^{m+1}E;F)\ ,\ T_Q(u)=Q\otimes u,$$

é injetor.

Demonstração. Seja $u\in\ker(T_Q)$. Como $Q\neq 0$, é verdade $\ker(Q)\neq E$. Então, pelo Lema 2.2.5 temos

$$
\begin{aligned}
T_Q(u)=0 &\Longrightarrow Q\otimes u = 0 \Longrightarrow Q(x)\cdot u(x)=0 \text{ para todo } x\in E\\
&\Longrightarrow Q(x)=0 \text{ ou } u(x)=0 \text{ para todo } x\in E\\
&\Longrightarrow \text{para todo } x\in E,\ x\in\ker(Q) \text{ ou } x\in\ker(u)\\
&\Longrightarrow E=\ker(Q)\cup\ker(u)\\
&\Longrightarrow \ker(Q)\subseteq\ker(u) \text{ ou } \ker(u)\subseteq\ker(Q).\\
&\Longrightarrow \ker(u)=E \text{ ou } \ker(Q)=E\\
&\Longrightarrow \ker(u)=E\Longrightarrow u=0.
\end{aligned}
$$

■

A hipótese do núcleo ser subespaço vetorial é verificada sempre que Q for um operador linear, pois núcleos de operadores lineares são sempre subespaços vetoriais do domínio. Mas para polinômios n-homogêneos com $n\geq 2$ isso nem sempre é verdade:

Exemplo 2.2.7 Seja $Q \in P(^2\mathbb{R}^2)$ o polinômio do Exemplo 2.2.4. Temos $(0,1) \in \ker(Q)$ e $(1,-1) \in \ker(Q)$. Mas, $(0,1)+(1,-1) = (1,0) \notin \ker(Q)$. Portanto $\ker(Q)$ não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$.

Mas em alguns casos a condição é satisfeita:

Corolário 2.2.8 *Sejam E um espaço vetorial e $0 \neq \varphi \in E^*$. Então, para qualquer m, o operador linear*

$$T_{\varphi^m} \colon L(E;F) \longrightarrow P(^{m+1}E;F);\ T_{\varphi^m}(u) = \varphi^m \otimes u,$$

é injetor.

Demonstração. Note que

$$\varphi^m(x) = 0 \Longleftrightarrow \varphi(x)^m = 0 \Longleftrightarrow \varphi(x) = 0,$$

ou seja, $\ker(\varphi^m) = \ker(\varphi)$ que é subespaço vetorial de E. Pela Proposição 2.2.6 segue que T_{φ^m} é operador linear injetor. ■

2.3 Mantendo o grau de homogeneidade

De maneira análoga ao que fizemos na Seção 1.4, veremos nesta seção como usar a composição de funções para criar novos polinômios n-homogêneos a partir de um polinômio n-homogêneo dado.

Teorema 2.3.1 *Sejam E, F, G e H espaços vetoriais, $P \in P(^nE;F)$, $u \in L(G;E)$ e $t \in L(F;H)$. Então $t \circ P \circ u \in P(^nG;H)$. Além disso, a correspondência*

$$T_{t,u} \colon P(^nE;F) \longrightarrow P(^nG;H)\ ,\ T_{t,u}(P) = t \circ P \circ u,$$

é linear. Se t é injetor e u é sobrejetor, então $T_{t,u}$ é injetor. E se t e u são isomorfismos, então $T_{t,u}$ é isomorfismo.

Demonstração. Como $P \in P(^nE;F)$, existe $A \in L(^nE;F)$ tal que $P(x) = Ax^n$ para todo $x \in E$. Temos que $u \in L(G;E)$ e $t \in L(F;H)$. Como u e t são operadores lineares, pelo Teorema 1.4.2 temos $t \circ A \circ (u, \ldots, u) \in L(^nG;H)$. Veja que

$$\begin{aligned}[t \circ A \circ (u, \ldots, u)]^\wedge(x) &= t \circ A \circ u^n(x^n) = t(A(u(x), \ldots, u(x))\\ &= t(P(u(x)) = t \circ P \circ u(x)\end{aligned}$$

para qualquer $x \in G$. Isso prova que $[t \circ A \circ (u, \ldots, u)]^\wedge = t \circ P \circ u$, e portanto $t \circ P \circ u \in P(^nG;H)$.

Vejamos que $T_{t,u}$ é linear. Dados $P,\ Q \in P(^nE;F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned} T_{t,u}(P+\lambda Q)(x) &= [t\circ(P+\lambda Q)\circ u](x) \\ &= t((P+\lambda Q)(u(x))) \\ &= t(P(u(x))+\lambda Q(u(x))) \\ &= t(P(u(x)))+\lambda t(Q(u(x))) \\ &= t\circ P\circ u(x)+\lambda t\circ Q\circ u(x) \\ &= (t\circ P\circ u+\lambda t\circ Q\circ u)(x) \\ &= (T_{t,u}(P)+\lambda T_{t,u}(Q))(x) \end{aligned}$$

para qualquer $x \in G$. Assim, $T_{t,u}(P+\lambda Q) = T_{t,u}(P)+\lambda T_{t,u}(Q)$, provando que $T_{t,u}$ é linear.

Verifiquemos agora que se t é injetor e u é sobrejetor, então $T_{t,u}$ é injetor. Para isso, seja $P \in P(^nE;F)$ tal que $T_{t,u}(P) = 0$. Seja $x \in G$. De

$$t(P(u(x))) = t\circ P\circ u(x) = T_{t,u}(P)(x) = 0$$

e da injetividade de t segue que $P(u(x)) = 0$. Dado $y \in E$, como u é sobrejetor existe $x \in G$ tal que $u(x) = y$. Então $P(y) = P(u(x)) = 0$. Como isso vale para todo $y \in E$, segue que $P = 0$. Isso prova que $T_{t,u}$ é injetor.

Vejamos agora que sendo t, u isomorfismos, então $T_{t,u}$ é isomorfismo. Pelo que acabamos de fazer, basta provar que $T_{t,u}$ é sobrejetor. Seja $Q \in P(^nG;H)$. Queremos definir $P \in P(^nE;F)$ tal que $T_{t,u}(P) = Q$. Como u e t são bijetores, então $u^{-1}\colon E \longrightarrow G$ e $t^{-1}\colon H \longrightarrow F$ existem e são operadores lineares. Pela primeira parte da demonstração sabemos que $P := t^{-1}\circ Q\circ u^{-1} \in P(^nE;F)$. Por fim,

$$T_{t,u}(P) = t\circ P\circ u = t\circ(t^{-1}\circ Q\circ u^{-1})\circ u = Q.$$

De $T_{t,u}(P) = Q$ segue que $T_{t,u}$ é sobrejetor. E, portanto, um isomorfismo. ■

2.4 Diminuindo o grau de homogeneidade

Completando o paralelo com o Capítulo 1, nesta seção nos espelharemos na Seção 1.5 para mostrar como gerar polinômios homogêneos de grau menor que n a partir de um polinômio de grau n. A estratégia será a mesma, ou seja, fixar variáveis. Entretanto, há uma forte diferença neste caso, pois fixando uma variável em uma aplicação multilinear, as outras estão livres para variar, enquanto que num polinômio homogêneo não há variável a ser fixada de forma a manter as demais livres. Isso acrescenta uma dificuldade adicional, o que fará com que os argumentos desta seção sejam mais delicados. Como sempre, começamos com um caso mais simples. Para isso, precisaremos do seguinte lema:

Lema 2.4.1 *Sejam E e F espaços vetoriais, $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in E^*$ e $b \in F$. Então*

$$(\varphi^n \otimes b)^\vee(x_1,\ldots,x_n) = \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\cdot b,$$

para todos $x_1,\ldots,x_n \in E$.

Demonstração. Definindo

$$A\colon E^n \longrightarrow F \ , \ A(x_1,\ldots,x_n) = \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\cdot b,$$

pelo Exemplo 1.1.2 sabemos que $A \in L_f(^nE;F)$. Em particular, $A \in L(^nE;F)$.

Vejamos que A é simétrica: dada uma permutação σ do conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$, temos

$$A(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}) = \varphi(x_{\sigma(1)})\cdots\varphi(x_{\sigma(n)})\cdot b = \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\cdot b = A(x_1,\ldots,x_n),$$

para todos $x_1,\ldots,x_n \in E$, portanto A é simétrica.

Provemos agora que $\widehat{A} = \varphi^n \otimes b$: de fato,

$$\widehat{A}(x) = Ax^n = \varphi(x) \overset{(n)}{\cdots} \varphi(x)\cdot b = \varphi(x)^n \cdot b = (\varphi^n \otimes b)(x),$$

para todo $x \in E$. Como a aplicação n-linear simétrica que gera um polinômio é única (Teorema 2.1.11), segue que $A = (\varphi^n \otimes b)^\vee$, de onde segue a fórmula desejada. ■

Agora sim podemos provar o caso mais simples da diminuição do grau de um polinômio homogêneo. Para evitar trivialidades, estaremos sempre supondo que os espaços vetoriais envolvidos são diferentes de $\{0\}$.

Proposição 2.4.2 *Sejam E, F espaços vetoriais, $P \in P(^nE;F)$ e $a \in E$. Definindo*

$$P_a\colon E \longrightarrow F \ , \ P_a(x) = \check{P}(a, x^{n-1}),$$

temos $P_a \in P(^{n-1}E;F)$. Além disso, a correspondência

$$T_a\colon P(^nE;F) \longrightarrow P(^{n-1}E;F) \ , \ T_a(P) = P_a,$$

é linear. Se $a \neq 0$ e $\dim E \geq 2$, então T_a é sobrejetora e não injetora.

Demonstração. Como $P \in P(^nE;F)$, existe uma única aplicação n-linear simétrica $\check{P} \in L^s(^nE;F)$ tal que $(\check{P})^\wedge = P$. Definindo

$$A\colon E^{n-1} \longrightarrow F \ , \ A(x_2,\ldots,x_n) = \check{P}(a, x_2,\ldots,x_n),$$

sabemos pelo Teorema 1.5.2 que $A \in L^s(^{n-1}E;F)$.

Vejamos que $\widehat{A} = P_a$: de fato,

$$\widehat{A}(x) = \check{P}(a, x^{n-1}) = P_a(x)$$

para todo $x \in E$. Segue que $P_a \in P(^{n-1}E;F)$.

Vejamos que T_a é linear: dados P, $Q \in P(^nE;F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, pelo Teorema 2.1.12 temos

$$\begin{aligned}
T_a(P+\lambda Q)(x) &= (P+\lambda Q)_a(x) \\
&= (P+\lambda Q)^\vee(a, x^{n-1}) \\
&= \check{P}(a, x^{n-1}) + \lambda\check{Q}(a, x^{n-1}) \\
&= P_a(x) + \lambda Q_a(x) \\
&= T_a(P)(x) + \lambda T_a(Q)(x) \\
&= \left(T_a(P) + \lambda T_a(Q)\right)(x)
\end{aligned}$$

para qualquer $x \in E$. Assim, $T_a(P + \lambda Q) = T_a(P) + \lambda T_a(Q)$.

Vejamos agora que T_a não é injetor. Como $\dim E \geq 2$, existe $\varphi \in E^*$ tal que $\varphi \neq 0$ e $\varphi(a) = 0$. Tome

$$Q\colon E \longrightarrow F \ , \ Q = \varphi^2 \otimes a.$$

Pela Proposição 2.2.1, temos $Q \in P(^2E; F)$. Como $\varphi \neq 0$, existe $b \in E$ tal que $\varphi(b) \neq 0$. Assim, $b \neq 0$ e

$$Q(b) = \varphi(b)^2 \cdot a \neq 0,$$

o que implica que $Q \neq 0$. Por outro lado, pelo Lema 2.4.1 temos

$$T_a(Q)(x) = Q_a(x) = \check{Q}(a, x) = \varphi(a)\varphi(x)a = 0$$

para todo $x \in E$. Assim, $T_a(Q) = 0$. Portanto T_a não é injetor.

Provaremos a sobrejetividade mais adiante nesta mesma seção. ■

Vejamos agora o caso geral:

Teorema 2.4.3 *Sejam E, F espaços vetoriais, $P \in P(^nE; F)$, $a \in E$, $a \neq 0$, e $1 \leq j \leq n - 1$. Definindo*

$$P_{a^j}\colon E \longrightarrow F \ , \ P_{a^j}(x) = \check{P}(a^j, x^{n-j}),$$

temos $P_{a^j} \in P(^{n-j}E; F)$. Além disso, a correspondência

$$T_{a^j}\colon P(^nE; F) \longrightarrow P(^{n-j}E; F) \ , \ T_{a^j}(P) = P_{a^j},$$

é linear, sobrejetora e não injetora se $\dim E \geq 2$.

Demonstração. Como $P \in P(^nE; F)$, existe uma única aplicação n-linear simétrica $\check{P} \in L^s(^nE; F)$ tal que $(\check{P})^\wedge = P$. Pelo Teorema 1.5.2, definindo

$$A\colon E^{n-j} \longrightarrow F \ , \ A(x_1, \ldots, x_{n-j}) = \check{P}(a^j, x_1, \ldots, x_{n-j})$$

temos $A \in L^s(^{n-j}E; F)$ e

$$\widehat{A}(x) = \check{P}(a^j, x^{n-j}) = P_{a^j}(x),$$

para qualquer $x \in E$. Logo, $\widehat{A} = P_{a^j}$. Portanto $P_{a^j} \in P(^{n-j}E; F)$.

Vejamos que T_{a^j} é linear. Sejam P, $Q \in P(^nE; F), \lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in E$. Então, pelo Teorema 2.1.12, temos

$$\begin{aligned}
T_{a^j}(P + \lambda Q)(x) &= (P + \lambda Q)_{a^j}(x) \\
&= (P + \lambda Q)^\vee(a^j, x^{n-j}) \\
&= \check{P}(a^j, x^{n-j}) + \lambda \check{Q}(a^j, x^{n-j}) \\
&= P_{a^j}(x) + \lambda Q_{a^j}(x) \\
&= T_{a^j}(P)(x) + \lambda T_{a^j}(Q)(x) \\
&= (T_{a^j}(P) + \lambda T_{a^j}(Q))(x),
\end{aligned}$$

para qualquer $x \in E$. Assim, $T_{a^j}(P + \lambda Q) = T_{a^j}(P) + \lambda T_{a^j}(Q)$, provando que T_{a^j} é linear.

Vejamos que T_{a^j} não é injetora. Como $\dim E \geq 2$, existe um funcional $\varphi \in E^*$ tal que $\varphi \neq 0$ e $\varphi(a) = 0$. Tome

$$Q\colon E \longrightarrow F \ , \ Q = \varphi^n \otimes a.$$

Pela Proposição 2.2.1, temos $Q \in P(^nE; F)$. E como $\varphi \neq 0$, existe $b \in E$ tal que $\varphi(b) \neq 0$, em particular $b \neq 0$. De

$$Q(b) = (\varphi^n \otimes a)(b) = \varphi(b)^n a \neq 0,$$

concluímos que $Q \neq 0$. Mas, pelo Lema 2.4.1 sabemos que

$$T_{a^j}(Q)(x) = Q_{a^j}(x) = \check{Q}(a^j, x^{n-j}) = (\varphi^n \otimes a)^\vee(a^j, x^{n-j}) = \varphi(a)^j \varphi(x)^{n-j} a = 0$$

para todo $x \in E$. Assim, $T_{a^j}(Q) = 0$, o que implica que T_{a^j} não é injetor.

Provaremos a sobrejetividade mais adiante nesta mesma seção. ■

O objetivo agora é provar a sobrejetividade do operador T_{a^j} para completar a demonstração do Teorema 2.4.3 (e da Proposição 2.4.2). Para isso precisamos de algumas definições e resultados auxiliares.

Definição 2.4.4 Seja E um espaço vetorial. Dados $n \in \mathbb{N}$, $k = 1, \ldots, n$, e $x_1, \ldots, x_n \in E$, definimos o conjunto

$$\begin{aligned} C_k(x_1, \ldots, x_n) &= \{\text{possíveis escolhas de } k \text{ elementos dentre } \{x_1, \ldots, x_n\}\} \\ &= \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}, \{x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_{k+1}\}, \ldots, \{x_{n-k+1}, \ldots, x_n\}\}. \end{aligned}$$

Dados um vetor $a \in E$, um polinômio $Q \in P(^{n-1}E; F)$ e uma escolha $A \in C_k(x_1, \ldots, x_n)$, definimos $A^c = \{x_1, \ldots, x_n\} - A$ e

$$\check{Q}(a^{k-1}, A^c) = \check{Q}(a^{k-1}, y_1, \ldots, y_{n-k}), \text{ onde } A^c = \{y_1, \ldots, y_{n-k}).$$

Lema 2.4.5 (a) *Sejam $\varphi \in E^*$ e $Q \in P(^{n-1}E; F)$. Então*

$$(\varphi \otimes Q)^\vee(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n} \varphi(x_j)\check{Q}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)\right]$$

para todos $x_1, \ldots, x_n \in E$.
(b) *Sejam $\varphi \in E^*$, $a \in E$, $Q \in P(^{n-1}E; F)$ e $k \in \{1, \ldots, n\}$. Definindo*

$$R_k\colon E \longrightarrow F \ , \ R_k(x) = \varphi(x)^k \check{Q}(a^{k-1}, x^{n-k})$$

temos $R_k \in P(^nE; F)$ e

$$(R_k)^\vee(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\binom{n}{k}}\left[\sum_{A \in C_k(x_1, \ldots, x_n)} \left(\prod_{x \in A} \varphi(x)\right) \check{Q}(a^{k-1}, A^c)\right]$$

para todos $x_1, \ldots, x_n \in E$.

Demonstração. (a) Defina $B\colon E^n \longrightarrow F$ por

$$B(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}[\varphi(x_1)\check{Q}(x_2, \ldots, x_n) + \varphi(x_2)\check{Q}(x_1, x_3, \ldots, x_n) + \cdots \\ + \varphi(x_n)\check{Q}(x_1, \ldots, x_{n-1})].$$

Vejamos que B é n-linear: dados $x_i, y_i \in E,\ i = 1, \ldots, n$, e $\lambda \in \mathbb{K}$, como $\check{Q} \in L^s({}^{n-1}E; F)$ temos

$$\begin{aligned}
&B(x_1, \ldots, x_i + \lambda y_i, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}[\varphi(x_1)\check{Q}(x_2, \ldots, x_i + \lambda y_i, \ldots, x_n) + \cdots \\
&\quad + \varphi(x_i + \lambda y_i)\check{Q}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) + \cdots + \varphi(x_n)\check{Q}(x_1, \ldots, x_i + \lambda y_i, \ldots, x_{n-1})] \\
&= \frac{1}{n}\{\varphi(x_1)[\check{Q}(x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + \lambda\check{Q}(x_2, \ldots, y_i, \ldots, x_n)] + \cdots \\
&\quad + [\varphi(x_i) + \lambda\varphi(y_i)]\check{Q}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) + \cdots \\
&\quad + \varphi(x_n)[\check{Q}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}) + \lambda\check{Q}(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_{n-1})]\} \\
&= \frac{1}{n}[\varphi(x_1)\check{Q}(x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + \lambda\varphi(x_1)\check{Q}(x_2, \ldots, y_i, \ldots, x_n) + \cdots \\
&\quad + \varphi(x_i)\check{Q}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) + \lambda\varphi(y_i)\check{Q}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) + \cdots \\
&\quad + \varphi(x_n)\check{Q}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}) + \lambda\varphi(x_n)\check{Q}(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_{n-1})] \\
&= \frac{1}{n}[\varphi(x_1)\check{Q}(x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + \cdots + \varphi(x_i)\check{Q}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) + \cdots \\
&\quad + \varphi(x_n)\check{Q}(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1})] \\
&+ \frac{\lambda}{n}[\varphi(x_1)\check{Q}(x_2, \ldots, y_i, \ldots, x_n) + \cdots + \varphi(y_i)\check{Q}(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) + \cdots \\
&\quad + \varphi(x_n)\check{Q}(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_{n-1})] \\
&= B(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) + \lambda B(x_1, \ldots, y_i, \ldots, x_n).
\end{aligned}$$

provando que B é n-linear.

Vejamos que B é simétrica. Para isso seja σ uma permutação de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Note que $(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ é uma permutação de $(x_1, \ldots, x_n)$, onde, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, existe um único $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que $x_i = x_{\sigma(j)}$. Assim, $\varphi(x_i) = \varphi(x_{\sigma(j)})$. Daí,

$$\begin{aligned}
&B(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n} \varphi(x_{\sigma(j)})\check{Q}(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(j-1)}, x_{\sigma(j+1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})\right] \\
&= \frac{1}{n}[\varphi(x_{\sigma(1)})\check{Q}(x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) + \cdots + \varphi(x_{\sigma(j)})\check{Q}(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(j-1)}, x_{\sigma(j+1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) + \cdots \\
&\quad + \varphi(x_{\sigma(n)})\check{Q}(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n-1)})] \\
&= \frac{1}{n}[\varphi(x_1)\check{Q}(x_2, \ldots, x_n) + \cdots + \varphi(x_j)\check{Q}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) + \cdots \\
&\quad + \varphi(x_n)\check{Q}(x_1, \ldots, x_{n-1})] \\
&= B(x_1, \ldots, x_n),
\end{aligned}$$

provando que B é simétrica.

Vejamos que $\widehat{B} = \varphi \otimes Q$: de fato,

$$\begin{aligned}\widehat{B}(x) = Bx^n &= \frac{1}{n}\left[\varphi(x)\check{Q}x^{n-1} + \overset{n}{\cdots} + \varphi(x)\check{Q}x^{n-1}\right] = \frac{1}{n}\left[n \cdot \varphi(x)\check{Q}x^{n-1}\right] \\ &= \varphi(x)\check{Q}x^{n-1} = \varphi(x) \cdot Q(x) = (\varphi \otimes Q)(x),\end{aligned}$$

para todo $x \in E$. Como $\widehat{B} = \varphi \otimes Q$ e B é simétrica segue que $B = (\varphi \otimes Q)^\vee$. E, portanto,

$$(\varphi \otimes Q)^\vee(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n} \varphi(x_j)\check{Q}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)\right],$$

para todos $x_1, \ldots, x_n \in E$.

(b) Pelo Teorema 2.4.3 sabemos que $\check{Q}(a^{k-1}, x^{n-k}) \in P(^{n-k}E; F)$, e pelo Teorema 2.2.2 segue que $R_k \in P(^nE; F)$. Definimos

$$B_k \colon E^n \longrightarrow F \ , \ B_k(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\binom{n}{k}}\left[\sum_{A \in C_k(x_1, \ldots, x_n)} \left(\prod_{x \in A} \varphi(x)\right) \check{Q}(a^{k-1}, A^c)\right].$$

Vejamos que B_k é simétrica. Seja σ uma permutação de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Note que $(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ é uma permutação de $(x_1, \ldots, x_n)$, então para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, existe um único $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tal que $x_i = x_{\sigma(j)}$. Assim, $\varphi(x_i) = \varphi(x_{\sigma(j)})$. Note também que

$$\begin{aligned}C_k(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) &= \{\text{possíveis escolhas de } k \text{ elementos dentre } \{x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\}\} \\ &= \{\text{possíveis escolhas de } k \text{ elementos dentre } \{x_1, \ldots, x_n\}\}.\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}B_k(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) &= \frac{1}{\binom{n}{k}}\left[\sum_{A \in C_k(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})} \left(\prod_{x_\sigma \in A} \varphi(x_\sigma)\right) \check{Q}(a^{k-1}, A^c)\right] \\ &= B_k(x_1, \ldots, x_n),\end{aligned}$$

para todos $x_1, \ldots, x_n \in E$, provando que B_k é simétrica.

Vejamos que B_k é linear na primeira coordenada: dados $y, x_i \in E$, $i = 1, \ldots, n$, e $\lambda \in \mathbb{K}$, nas contas a seguir denotamos por A os elementos do conjunto

$$C_k(x_1 + \lambda y, \ldots, x_n) = \{\text{possíveis escolhas de } k \text{ elementos dentre } \{x_1 + \lambda y, x_2, \ldots, x_n\}\},$$

por A' os elementos do conjunto

$$C_k(x_1, \ldots, x_n) = \{\text{possíveis escolhas de } k \text{ elementos dentre } \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}\},$$

e por A'' os elementos do conjunto

$$C_k(y, x_2, \ldots, x_n) = \{\text{possíveis escolhas de } k \text{ elementos dentre } \{y, x_2, \ldots, x_n\}\}.$$

Dessa forma,

$$B_k(x_1+\lambda y, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{\binom{n}{k}} \left[\sum_{\substack{A\in C_k(x_1+\lambda y, x_2,\ldots,x_n)\\ x_1+\lambda y\ \in A}} \left(\prod_{x\in A}\varphi(x)\right)\check{Q}(a^{k-1}, A^c) \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{A\in C_k(x_1+\lambda y, x_2,\ldots,x_n)\\ x_1+\lambda y\ \notin A}} \left(\prod_{x\in A}\varphi(x)\right)\check{Q}(a^{k-1}, A^c) \right]$$

$$= \frac{1}{\binom{n}{k}} \left[\sum_{\substack{A\in C_k(x_1+\lambda y, x_2,\ldots,x_n)\\ x_1+\lambda y\ \in A}} \varphi(x_1+\lambda y) \left(\prod_{\substack{x\in A\\ x\neq\ x_1+\lambda y}}\varphi(x)\right)\check{Q}(a^{k-1}, A^c) \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{A\in C_k(x_1+\lambda y, x_2,\ldots,x_n)\\ x_1+\lambda y\ \notin A}} \left(\prod_{x\in A}\varphi(x)\right)\check{Q}(a^{k-1}, x_1+\lambda y, A^c-\{x_1+\lambda y\}) \right]$$

$$= \frac{1}{\binom{n}{k}} \left[\sum_{\substack{A\in C_k(x_1+\lambda y, x_2,\ldots,x_n)\\ x_1+\lambda y\ \in A}} [\varphi(x_1)+\lambda\varphi(y)] \left(\prod_{\substack{x\in A\\ x\neq\ x_1+\lambda y}}\varphi(x)\right)\check{Q}(a^{k-1}, A^c) \right.$$

$$\left. + \sum_{\substack{A\in C_k(x_1+\lambda y, x_2,\ldots,x_n)\\ x_1+\lambda y\ \notin A}} \left(\prod_{x\in A}\varphi(x)\right)[\check{Q}(a^{k-1}, x_1, A^c-\{x_1+\lambda y\})+\lambda\check{Q}(a^{k-1}, y, A^c-\{x_1+\lambda y\})] \right]$$

$$= \frac{1}{\binom{n}{k}} \left[\sum_{\substack{A\in C_k(x_1+\lambda y, x_2,\ldots,x_n)\\ x_1+\lambda y\ \in A}} \varphi(x_1) \left(\prod_{\substack{x\in A\\ x\neq\ x_1+\lambda y}}\varphi(x)\right)\check{Q}(a^{k-1}, A^c) \right.$$

$$+ \lambda \sum_{\substack{A\in C_k(x_1+\lambda y, x_2,\ldots,x_n)\\ x_1+\lambda y\ \in A}} \varphi(y) \left(\prod_{\substack{x\in A\\ x\neq\ x_1+\lambda y}}\varphi(x)\right)\check{Q}(a^{k-1}, A^c)$$

$$+ \sum_{\substack{A\in C_k(x_1+\lambda y, x_2,\ldots,x_n)\\ x_1+\lambda y\ \notin A}} \left(\prod_{x\in A}\varphi(x)\right)\check{Q}(a^{k-1}, x_1, A^c-\{x_1+\lambda y\})$$

$$\left. + \lambda \sum_{\substack{A\in C_k(x_1+\lambda y, x_2,\ldots,x_n)\\ x_1+\lambda y\ \notin A}} \left(\prod_{x\in A}\varphi(x)\right)\check{Q}(a^{k-1}, y, A^c-\{x_1+\lambda y\}) \right]$$

$$= \frac{1}{\binom{n}{k}} \left[\sum_{\substack{A\in C_k(x_1+\lambda y, x_2,\ldots,x_n)\\ x_1+\lambda y\ \in A}} \varphi(x_1) \left(\prod_{\substack{x\in A\\ x\neq\ x_1+\lambda y}}\varphi(x)\right)\check{Q}(a^{k-1}, A^c) \right.$$

$$+\sum_{\substack{A\in C_k(x_1+\lambda y,x_2,\ldots,x_n)\\ x_1+\lambda y\ \notin A}}\left(\prod_{x\in A}\varphi(x)\right)\check{Q}(a^{k-1},x_1,A^c-\{x_1+\lambda y\})\Bigg]$$

$$+\frac{\lambda}{\binom{n}{k}}\Bigg[\sum_{\substack{A\in C_k(x_1+\lambda y,x_2,\ldots,x_n)\\ x_1+\lambda y\ \in A}}\varphi(y)\left(\prod_{\substack{x\in A\\ x\neq\ x_1+\lambda y}}\varphi(x)\right)\check{Q}(a^{k-1},A^c)$$

$$+\sum_{\substack{A\in C_k(x_1+\lambda y,x_2,\ldots,x_n)\\ x_1+\lambda y\ \notin A}}\left(\prod_{x\in A}\varphi(x)\right)\check{Q}(a^{k-1},y,A^c-\{x_1+\lambda y\})\Bigg]$$

$$=\frac{1}{\binom{n}{k}}\Bigg[\sum_{\substack{A'\in C_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)\\ x_1\ \in A'}}\varphi(x_1)\left(\prod_{\substack{x\in A'\\ x\neq\ x_1}}\varphi(x)\right)\check{Q}(a^{k-1},(A')^c)$$

$$+\sum_{\substack{A'\in C_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)\\ x_1\ \notin A'}}\left(\prod_{x\in A'}\varphi(x)\right)\check{Q}(a^{k-1},x_1,(A')^c-\{x_1\})\Bigg]$$

$$+\frac{\lambda}{\binom{n}{k}}\Bigg[\sum_{\substack{A''\in C_k(y,x_2,\ldots,x_n)\\ y\in A''}}\varphi(y)\left(\prod_{\substack{x\in A''\\ x\neq y}}\varphi(x)\right)\check{Q}(a^{k-1},(A'')^c)$$

$$+\sum_{\substack{A''\in C_k(y,x_2,\ldots,x_n)\\ y\notin A''}}\left(\prod_{x\in A''}\varphi(x)\right)\check{Q}(a^{k-1},y,(A'')^c-\{y\})\Bigg]$$

$$=\frac{1}{\binom{n}{k}}\Bigg[\sum_{\substack{A'\in C_k(x_1,\ldots,x_n)\\ x_1\ \in A'}}\left(\prod_{x\in A'}\varphi(x)\right)\check{Q}(a^{k-1},(A')^c)$$

$$+\sum_{\substack{A'\in C_k(x_1,\ldots,x_n)\\ x_1\ \notin A'}}\left(\prod_{x\in A'}\varphi(x)\right)\check{Q}(a^{k-1},(A')^c)\Bigg]$$

$$+\frac{\lambda}{\binom{n}{k}}\Bigg[\sum_{\substack{A''\in C_k(y,x_2,\ldots,x_n)\\ y\in A''}}\left(\prod_{x\in A''}\varphi(x)\right)\check{Q}(a^{k-1},(A'')^c)$$

$$+\sum_{\substack{A''\in C_k(y,x_2,\ldots,x_n)\\ y\ \notin A''}}\left(\prod_{x\in A''}\varphi(x)\right)\check{Q}(a^{k-1},(A'')^c)\Bigg]$$

$$= \frac{1}{\binom{n}{k}} \left[\sum_{A' \in C_k(x_1,\dots,x_n)} \left(\prod_{x \in A'} \varphi(x) \right) \check{Q}(a^{k-1}, (A')^c) \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda}{\binom{n}{k}} \left[\sum_{A'' \in C_k(y,x_2,\dots,x_n)} \left(\prod_{x \in A''} \varphi(x) \right) \check{Q}(a^{k-1}, (A'')^c) \right] \right.$$

$$= B_k(x_1, \dots, x_n) + \lambda B_k(y, x_2, \dots, x_n).$$

Isso prova que B_k é linear na primeira coordenada. Como já provamos que B_k é simétrica, pela Proposição 1.2.8 concluímos que B_k é n-linear.

Vejamos que $\widehat{B_k} = R_k$: de fato,

$$\widehat{B_k}(x) = B_k x^n = \frac{1}{\binom{n}{k}} \left[\sum_{A \in C_k(x_1,\dots,x_n)} \left(\prod_{x \in A} \varphi(x) \right) \check{Q}(a^{k-1}, A^c) \right]$$

$$= \frac{1}{\binom{n}{k}} \left[\binom{n}{k} \varphi(x)^k \check{Q}(a^{k-1}, x^{n-k}) \right] = \varphi(x)^k \check{Q}(a^{k-1}, x^{n-k}) = R_k(x)$$

para todo $x \in E$. Como B_k é simétrica e $\widehat{B_k} = R_k$, segue que $B_k = (R_k)^\vee$. ■

Voltando ao que falta da demonstração do Teorema 2.4.3, relembre que ainda devemos provar que o operador linear T_{a^j} é sobrejetor. Façamos primeiramente alguns casos particulares, a saber, quando $j = 1$ e $n = 2, 3, 4$. Em todos esses casos tome $\varphi \in E^*$ tal que $\varphi(a) = 1$, o que não tira a generalidade dos resultados.

<u>Caso $n = 2$</u>. Devemos provar que $T_a \colon P(^2E; F) \longrightarrow L(E; F)$ é sobrejetor. Dado $T \in L(E; F)$, tome

$$P \colon E \longrightarrow F \ , \ P = 2\varphi \otimes T - \varphi^2 \otimes T(a).$$

Pelo Teorema 2.2.2 temos $\varphi \otimes T \in P(^2E; F)$. Como $\varphi^2 \otimes T(a) \in P_f(^2E; F)$, segue que $P \in P(^2E; F)$. E pelo Teorema 2.1.12 temos

$$\begin{aligned} T_a(P)(x) = P_a(x) = \check{P}(a, x) &= (2\varphi \otimes T - \varphi^2 \otimes T(a))^\vee(a, x) \\ &= 2(\varphi \otimes T)^\vee(a, x) - (\varphi^2 \otimes T(a))^\vee(a, x) \\ &\overset{(*)}{=} 2\left(\frac{1}{2}(\varphi(a)T(x) + \varphi(x)T(a)) \right) - \varphi(a)\varphi(x)T(a) \\ &= T(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in E$. Assim $T_a(P) = T$, provando que T_a é sobrejetora.

Em $(*)$ usamos o Lema 2.4.1, segundo o qual $(\varphi^2 \otimes T(a))^\vee(x_1, x_2) = \varphi(x_1)\varphi(x_2)T(a)$; e também o Lema 2.4.5(a) para $n = 2$ e $j = 1$, segundo o qual $(\varphi \otimes T)^\vee(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x_1)T(x_2) + \varphi(x_2)T(x_1)\right]$.

<u>Caso $n = 3$</u>. Vejamos que $T_a \colon P(^3E; F) \longrightarrow P(^2E; F)$ é sobrejetora. Dado $Q \in P(^2E; F)$, tome

$$P \colon E \longrightarrow F \ , \ P(x) = 3\varphi \otimes Q(x) - 3\varphi(x)^2 \check{Q}(a, x) + \varphi(x)^3 Q(a).$$

Pelo Teorema 2.2.2 temos $\varphi \otimes Q \in P(^3E;F)$. Como $\varphi(\cdot)^2\check{Q}(a,\cdot)$ é um caso coberto pelo Lema 2.4.5(b) para $n = 3$ e $k = 2$, temos $\varphi(\cdot)^2\check{Q}(a,\cdot) \in P(^3E;F)$. E como $\varphi(\cdot)^3Q(a) \in P_f(^3E;F)$, segue que $P \in P(^3E;F)$.

Pelo Lema 2.4.5(a) temos

$$(\varphi \otimes Q)^\vee(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{3}\left[\varphi(x_1)\check{Q}(x_2,x_3) + \varphi(x_2)\check{Q}(x_1,x_3) + \varphi(x_3)\check{Q}(x_1,x_2)\right],$$

pelo Lema 2.4.5(b) temos

$$\begin{aligned}(\varphi(\cdot)^2\check{Q}(a,\cdot))^\vee(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{3}\big[&\varphi(x_1)\varphi(x_2)\check{Q}(a,x_3) + \varphi(x_1)\varphi(x_3)\check{Q}(a,x_2)\\ &+ \varphi(x_2)\varphi(x_3)\check{Q}(a,x_1)\big],\end{aligned}$$

e pelo Lema 2.4.1 temos

$$(\varphi(\cdot)^3Q(a))^\vee(x_1,x_2,x_3) = \varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)Q(a),$$

para todos $x_1,x_2,x_3 \in E$. Assim, pelo Teorema 2.1.12 e pelos Lemas 2.4.1 e 2.4.5, substituindo (x_1,x_2,x_3) por (a,x,x), temos

$$\begin{aligned}T_a(P)(x) &= P_a(x) = \check{P}(a,x^2)\\ &= 3(\varphi\otimes Q)^\vee(a,x^2) - 3(\varphi(x)^2\check{Q}(a,x))^\vee(a,x^2) + (\varphi^3\otimes Q(a))^\vee(a,x^2)\\ &= 3\left[\frac{1}{3}(\varphi(a)\check{Q}(x^2) + 2\varphi(x)\check{Q}(a,x))\right] - 3\left[\frac{1}{3}(2\varphi(a)\varphi(x)\check{Q}(a,x) + \varphi(x)^2\check{Q}(a^2)\right]\\ &\quad + \varphi(a)\varphi(x)^2Q(a)\\ &\overset{(*)}{=} Q(x) + 2\varphi(x)\check{Q}(a,x) - 2\varphi(x)\check{Q}(a,x) - \varphi(x)^2Q(a) + \varphi(x)^2Q(a)\\ &= Q(x),\end{aligned}$$

para todo $x \in E$. Assim, $T_a(P) = Q$, provando que T_a é sobrejetora.

Em $(*)$ usamos que $\varphi(a) = 1, \check{Q}(a^2) = Q(a)$ e $\check{Q}(x^2) = Q(x)$.

<u>Caso $n = 4$</u>. Vejamos que $T_a\colon P(^4E;F) \longrightarrow P(^3E;F)$ é sobrejetora. Dado $Q \in P(^3E;F)$, tome

$$P\colon E \longrightarrow F\ ,\ P(x) = 4\varphi\otimes Q(x) - 6\varphi(x)^2\check{Q}(a,x^2) + 4\varphi(x)^3\check{Q}(a^2,x) - \varphi^4\otimes Q(a)(x).$$

Pelo Teorema 2.2.2 temos $\varphi\otimes Q \in P(^4E;F)$. Como $\varphi(\cdot)^2\check{Q}(a,\cdot,\cdot))$ é um caso coberto pelo Lema 2.4.5 (b) para $n = 4$ e $k = 2$ e $\varphi(\cdot)^3\check{Q}(a^2,\cdot)$ também é um caso coberto pelo Lema 2.4.5 (b) para $n = 4$ e $k = 3$, temos $\varphi(\cdot)^2\check{Q}(a,\cdot,\cdot)$ e $\varphi(\cdot)^3\check{Q}(a^2,\cdot) \in P(^4E;F)$. E como $\varphi^4\otimes Q(a) \in P_f(^4E;F)$, segue que $P \in P(^4E;F)$.

Pelo Lema 2.4.5 (a) temos

$$\begin{aligned}(\varphi\otimes Q)^\vee(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{4}\big[&\varphi(x_1)\check{Q}(x_2,x_3,x_4) + \varphi(x_2)\check{Q}(x_1,x_3,x_4)\\ &+ \varphi(x_3)\check{Q}(x_1,x_2,x_4) + \varphi(x_4)\check{Q}(x_1,x_2,x_3)\big],\end{aligned}$$

pelo Lema 2.4.5(b) para $n = 4$ e $k = 2$ temos

$$\begin{aligned}(\varphi(\cdot)^2\check{Q}(a,\cdot,\cdot))^\vee(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{6}[&\varphi(x_1)\varphi(x_2)\check{Q}(a,x_3,x_4) + \varphi(x_1)\varphi(x_3)\check{Q}(a,x_2,x_4)\\ &+ \varphi(x_1)\varphi(x_4)\check{Q}(a,x_2,x_3) + \varphi(x_2)\varphi(x_3)\check{Q}(a,x_1,x_4)\\ &+ \varphi(x_2)\varphi(x_4)\check{Q}(a,x_1,x_3) + \varphi(x_3)\varphi(x_4)\check{Q}(a,x_1,x_2)],\end{aligned}$$

e para $n = 4$ e $k = 3$,

$$\begin{aligned}(\varphi(\cdot)^3\check{Q}(a^2,\cdot))^\vee(x_1,x_2,x_3,x_4) = \frac{1}{4}[&\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)\check{Q}(a^2,x_1) + \varphi(x_1)\varphi(x_3)\varphi(x_4)\check{Q}(a^2,x_2)\\ &+ \varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_4)\check{Q}(a^2,x_3) + \varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\check{Q}(a^2,x_4)],\end{aligned}$$

e, finalmente, pelo Lema 2.4.1,

$$(\varphi^4 \otimes Q(a))^\vee(x_1,x_2,x_3,x_4) = \varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)Q(a).$$

Assim, pelo Teorema 2.1.12 e pelos Lemas 2.4.1 e 2.4.5 (substituindo (x_1,x_2,x_3,x_4) por (a,x^3)), temos

$$\begin{aligned}T_a(P)(x) &= P_a(x) = \check{P}(a,x^3)\\ &= 4(\varphi\otimes Q)^\vee(a,x^3) - 6(\varphi(x)^2\check{Q}(a,x^2))^\vee(a,x^3) + 4(\varphi(x)^3\check{Q}(a^2,x))^\vee(a,x^3)\\ &- (\varphi^4\otimes Q(a))^\vee(a,x^3)\\ &= 4\left[\frac{1}{4}(\varphi(a)\check{Q}(x^3) + 3\varphi(x)\check{Q}(a,x^2))\right] - 6\left[\frac{1}{6}(3\varphi(a)\varphi(x)\check{Q}(a,x^2) + 3\varphi(x)^2\check{Q}(a^2,x)\right]\\ &\quad + 4\left[\frac{1}{4}(\varphi(x)^3Q(a) + 3\varphi(a)\varphi(x)^2\check{Q}(a^2,x))\right] - \varphi(a)\varphi(x)^3Q(a)\\ &= \varphi(a)Q(x) + 3\varphi(x)\check{Q}(a,x^2) - 3\varphi(a)\varphi(x)\check{Q}(a,x^2) - 3\varphi(x)^2\check{Q}(a^2,x) + \varphi(x)^3Q(a)\\ &\quad + 3\varphi(a)\varphi(x)^2\check{Q}(a^2,x) - \varphi(a)\varphi(x)^3Q(a)\\ &\overset{(*)}{=} Q(x),\end{aligned}$$

para todo $x \in E$. Assim, $T_a(P) = Q$. Portanto T_a é sobrejetora.

Em $(*)$ usamos que $\varphi(a) = 1, \check{Q}(a^3) = Q(a)$ e $\check{Q}(x^3) = Q(x)$.

Continuando, façamos o caso $j = 1$ para n arbitrário, isto é, mostraremos que o operador linear

$$T_a\colon P(^nE;F) \longrightarrow P(^{n-1}E;F)$$

é sobrejetor. Continuamos com $\varphi \in E^*$ e $a \in E$ tal que $\varphi(a) = 1$. Por R_k continuamos denotando os polinômios do Lema 2.4.5(b). Dado, $Q \in P(^{n-1}E;F)$, definimos

$$P\colon E \longrightarrow F\ ,\ P = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\binom{n}{k}R_k.$$

Pelo Lema 2.4.5(b) sabemos que $P \in P(^nE;F)$. Para provar que $T_a(P) = Q$, usaremos a Relação de Stifel

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

Segue que,

$$
\begin{aligned}
T_a(P)(x) &= P_a(x) = \check{P}(a, x^{n-1}) \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} R_k \right)^{\vee} (a, x^{n-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \check{R}_k(a, x^{n-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \left\{ \frac{1}{\binom{n}{k}} \left[\left(\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} \right) \varphi(a)\varphi(x)^{k-1} \check{Q}(a^{k-1}, x^{n-k}) \right.\right. \\
&+ \left.\left. \binom{n-1}{k} \varphi(x)^k \check{Q}\left(a^k, x^{n-(k+1)}\right) \right] \right\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \left[\left(\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} \right) \varphi(x)^{k-1} \check{Q}(a^{k-1}, x^{n-k}) \right. \\
&+ \left. \binom{n-1}{k} \varphi(x)^k \check{Q}\left(a^k, x^{n-(k+1)}\right) \right]
\end{aligned}
$$

para todo $x \in E$. Note que, para cada k, o segundo termo da k-ésima parcela da soma acima coincide com o primeiro termo da $(k+1)$-ésima parcela, pois ambos são iguais, pela relação de Stiefel, a:

$$\binom{n-1}{k} \varphi(x)^k \check{Q}(a^k, x^{n-(k+1)}).$$

Pela alternância dos sinais, eles se cancelam. Observe também que a última parcela só tem o primeiro termo, pois $\binom{n-1}{n} = 0$. Resta, então, apenas o primeiro termo da primeira parcela, que é igual a

$$\binom{n-1}{0} \varphi^0 \check{Q}(a^0, x^{n-1}) = \check{Q}x^{n-1} = Q(x).$$

Assim $T_a(P)(x) = Q(x)$ para todo $x \in E$, o que prova que $T_a(P) = Q$ e nos permite concluir que T_a é sobrejetora.

O que acabamos de fazer completa a demonstração da Proposição 2.4.2 e, além disso, nos será útil para demonstrar o caso geral.

Passando para o caso $j = 2$, para mostrar que o operador linear

$$T_{a^2} \colon P({}^nE; F) \longrightarrow P({}^{n-2}E; F)$$

é sobrejetor, precisamos do seguinte Lema:

Lema 2.4.6 *Sejam $P \in P({}^nE; F)$ e $a \in E$. Então*

$$(P_a)^{\vee}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \check{P}(a, x_1, \ldots, x_{n-1})$$

para todos $x_1, \ldots, x_{n-1} \in E$.

Demonstração. Defina

$$R\colon E^{n-1} \longrightarrow F,$$

$$R(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \check{P}(a, x_1, \ldots, x_{n-1}).$$

Vejamos que R é $(n-1)$-linear. Dados $x_j, x_j' \in E$, $j = 1, \ldots, n-1$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, como $\check{P} \in L^s({}^nE; F)$, temos

$$\begin{aligned} R(x_1, \ldots, x_j + \lambda x_j', \ldots, x_{n-1}) &= \check{P}(a, x_1, \ldots, x_j + \lambda x_j', \ldots, x_{n-1}) \\ &= \check{P}(a, x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_{n-1}) + \lambda \check{P}(a, x_1, \ldots, x_j', \ldots, x_{n-1}) \\ &= R(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_{n-1}) + \lambda R(x_1, \ldots, x_j', \ldots, x_{n-1}), \end{aligned}$$

provando que R é $(n-1)$-linear.

Seja agora σ uma permutação de $\{1, \ldots, n-1\}$. Como $\check{P}$ é uma aplicação simétrica, temos

$$\begin{aligned} R(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n-1)}) &= \check{P}(a, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n-1)}) \\ &= \check{P}(a, x_1, \ldots, x_{n-1}) \\ &= R(x_1, \ldots, x_{n-1}), \end{aligned}$$

para todos $x_1, \ldots, x_{n-1} \in E$. Segue que R é simétrica. Vejamos que $\widehat{R} = P_a$: com efeito,

$$\widehat{R}(x) = Rx^{n-1} = \check{P}(a, x^{n-1}) = P_a(x)$$

para todo $x \in E$. Assim, $\widehat{R} = P_a$, e portanto $(P_a)^\vee = R$ ■

Agora sim estamos em condições de provar que o operador linear

$$T_{a^2}\colon P({}^nE; F) \longrightarrow P({}^{n-2}E; F),$$

é sobrejetor. Pelo que fizemos anteriormente, e alterando os nomes dos operadores para não causar confusão, sabemos que os operadores

$$T_a^n\colon P({}^nE; F) \longrightarrow P({}^{n-1}E; F)\ ,\ T_a^n(P) = P_a,$$

e

$$T_a^{n-1}\colon P({}^{n-1}E; F) \longrightarrow P({}^{n-2}E; F)\ ,\ T_a^{n-1}(Q) = Q_a,$$

são sobrejetores. Considere a cadeia

$$P({}^nE; F) \xrightarrow{T_a^n} P({}^{n-1}E; F) \xrightarrow{T_a^{n-1}} P({}^{n-2}E; F)$$

$$P \longrightarrow T_a^n(P) = P_a \longrightarrow T_a^{n-1}(P_a) = (P_a)_a$$

Vejamos que $T_a^{n-1} \circ T_a^n = T_{a^2}$. Para isso, sejam $P \in P({}^nE; F)$ e $x \in E$. Pelo Lema 2.4.6 temos

$$\begin{aligned} T_a^{n-1} \circ T_a^n(P)(x) &= T_a^{n-1}(T_a^n(P))(x) \\ &= (T_a^{n-1}(P_a))(x) \\ &= (P_a)_a(x) \\ &= (P_a)^\vee(a, x^{n-2}) \\ &= \check{P}(a, a, x^{n-2}) \\ &= \check{P}(a^2, x^{n-2}) \\ &= P_{a^2}(x) \\ &= T_{a^2}(P)(x), \end{aligned}$$

Portanto $T_a^{n-1} \circ T_a^n = T_{a^2}$. Como a composta de aplicações sobrejetoras é sobrejetora, segue que T_{a^2} é sobrejetora.

Note que, entre outras coisas, provamos que $(P_a)_a = P_{a^2}$.

Vejamos agora que

$$T_{a^3} \colon P({}^nE; F) \longrightarrow P({}^{n-3}E; F)$$

é sobrejetora. Considere a seguinte cadeia, na qual o operador T_a^{n-2} está definido da maneira óbvia:

$$P({}^nE; F) \xrightarrow{T_a^n} P({}^{n-1}E; F) \xrightarrow{T_a^{n-1}} P({}^{n-2}E; F) \xrightarrow{T_a^{n-2}} P({}^{n-3}E; F)$$

Pelo que provamos anteriormente, sabemos que $T_a^{n-2} \colon P({}^{n-2}E; F) \longrightarrow P({}^{n-3}E; F)$ é sobrejetora; e, pelo que acabamos de provar, sabemos que $T_{a^2} \colon P({}^nE; F) \longrightarrow P({}^{n-2}E; F)$ também é sobrejetora.

Vejamos que $T_a^{n-2} \circ T_{a^2} = T_{a^3}$: como antes, dados $P \in P({}^nE; F)$ e $x \in E$, pelo Lema 2.4.6 temos

$$\begin{aligned} T_a^{n-2} \circ T_{a^2}(P)(x) &= T_a^{n-2}(T_{a^2}(P))(x) \\ &= (T_{a^2}(P))_a(x) \\ &= (P_{a^2})_a(x) \\ &= (P_{a^2})^\vee(a, x^{n-3}) \\ &= [(P_a)_a]^\vee(a, x^{n-3}) \\ &= (P_a)^\vee(a, a, x^{n-3}) \\ &= \check{P}(a, a, a, x^{n-3}) \\ &= \check{P}(a^3, x^{n-3}) \\ &= P_{a^3}(x) \\ &= T_{a^3}(P)(x). \end{aligned}$$

Isso prova que $T_a^{n-2} \circ T_{a^2} = T_{a^3}$. Como a composta de aplicações sobrejetoras é sobrejetora, concluímos que T_{a^3} é sobrejetora.

Um argumento de indução comprova que $T_{a^j} = T_a^{n-j+1} \circ T_{a^{j-1}}$ é sobrejetora, para todo $j = 1, \ldots, n-1$. De fato, por hipótese de indução temos que $T_{a^{j-1}}$ é sobrejetora;

e sabemos que T_a^{n-j+1} é sobrejetora pelo primeiro caso. Como a composta de aplicações sobrejetoras é sobrejetora, segue que T_{a^j} é sobrejetora. Isto completa a demonstração do Teorema 2.4.3.

CAPÍTULO 3

IDEAIS ALGÉBRICOS DE APLICAÇÕES MULTILINEARES

Como vimos na Seção 1.4, a composição de uma aplicação multilinear com operadores lineares gera uma nova aplicação multilinear de mesmo grau de multilinearidade. Isso gera a seguinte pergunta: se a aplicação multilinear pertence a uma determinada classe de aplicações multilineares, será que a multilinear gerada pela composição com operadores lineares também pertence a essa mesma classe? Chamaremos de *ideais de aplicações multilineares* (ou *multi-ideais*) as classes de aplicações multilineares que satisfazem essa propriedade.

O estudo de ideais de aplicações multilineares foi iniciado por A. Pietsch [15] em 1983.

A principal referência utilizada neste capítulo é a dissertação [2].

3.1 Definição e primeiros exemplos

Definição 3.1.1 Um *ideal algébrico de aplicações multilineares* (ou *multi-ideal*) é uma subclasse $\mathcal{M}$ da classe L de todas as aplicações multilineares,

$$L = \bigcup_{n \in \mathbb{N}, E_1, \ldots, E_n, F} L(E_1, \ldots, E_n; F),$$

tal que para todos $n \in \mathbb{N}$ e espaços vetoriais $E_1, \ldots, E_n, F$, a componente

$$\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F) := L(E_1, \ldots, E_n; F) \cap \mathcal{M}$$

satisfaz as seguintes condições:
(i) $\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é subespaço vetorial de $L(E_1, \ldots, E_n; F)$,
(ii) $L_f(E_1, \ldots, E_n; F) \subseteq \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$,
(iii) (Propriedade de Ideal): Se $A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$, $u_j \in L(G_j; E_j)$, $j = 1, \ldots, n$, e $t \in L(F; H)$, então $t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{M}(G_1, \ldots, G_n; H)$.

$$
\begin{tikzcd}
G_1 \times \cdots \times G_n \arrow[d, "u_1"] \arrow[d, shift left=8em, "u_n"] \arrow[drr, "t\circ A\circ(u_1,\ldots,u_n)"] & & \\
E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[r, "A"'] & F \arrow[r, "t"'] & H
\end{tikzcd}
$$

Exemplo 3.1.2 A classe L de todas as aplicações multilineares é um multi-ideal. De fato, as condições (i) e (ii) são óbvias e a condição (iii) segue do Teorema 1.4.2.

Exemplo 3.1.3 A classe L_f das aplicações multilineares de tipo finito é multi-ideal.

Pelo Exemplo 1.1.2 sabemos que $L_f(E_1,\ldots,E_n;F)$ é subespaço vetorial de $L(E_1,\ldots,E_n;F)$. A condição (ii) é óbvia. Vejamos agora que $L_f(E_1,\ldots,E_n;F)$ satisfaz a propriedade de ideal. Sejam $A \in L_f(E_1,\ldots,E_n;F)$, $u_j \in L(G_j;E_j), j = 1,\ldots,n$ e $t \in L(F;H)$. Então existem $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_{j,i} \in E_j^*$, $b_i \in F$, $j = 1,\ldots,n$, $i = 1,\ldots,k$, tais que $A = \sum_{i=1}^{k} \varphi_{1,i} \otimes \cdots \otimes \varphi_{n,i} \otimes b_i$. Para todos $x_i \in G_i,\ i = 1,\ldots,n$, temos

$$
\begin{aligned}
t \circ A \circ (u_1,\ldots,u_n)(x_1,\ldots,x_n) &= t \circ \left(\sum_{i=1}^{k} \varphi_{1,i} \otimes \cdots \otimes \varphi_{n,i} \otimes b_i\right) \circ (u_1,\ldots,u_n)(x_1,\ldots,x_n) \\
&= t\left(\sum_{i=1}^{k} \varphi_{1,i} \otimes \cdots \otimes \varphi_{n,i} \otimes b_i(u_1(x_1),\ldots,u_n(x_n))\right) \\
&= t\left(\sum_{i=1}^{k} \varphi_{1,i}(u_1(x_1)) \cdots \varphi_{n,i}(u_n(x_n)) b_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} t(\varphi_{1,i}(u_1(x_1)) \cdots \varphi_{n,i}(u_n(x_n)) b_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} (\varphi_{1,i}(u_1(x_1)) \cdots \varphi_{n,i}(u_n(x_n)) t(b_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} (\varphi_{1,i} \circ u_1)(x_1) \cdots (\varphi_{n,i} \circ u_n)(x_n) t(b_i) \\
&= \left(\sum_{i=1}^{k} (\varphi_{1,i} \circ u_1) \otimes \cdots \otimes (\varphi_{n,i} \circ u_n) \otimes t(b_i)\right)(x_1,\ldots,x_n),
\end{aligned}
$$

com $\varphi_{j,i} \circ u_j \in G_j^*$ e $t(b_i) \in H$ para todos $j = 1\ldots,n$ e $i = 1,\ldots,k$. Logo $t \circ A \circ (u_1,\ldots,u_n) \in L_f(G_1,\ldots,G_n;H)$, e isso prova que L_f é um multi-ideal.

Observação 3.1.4 Dos Exemplos 3.1.2 e 3.1.3 segue que L é o maior multi-ideal e que L_f é o menor multi-ideal, isto é, para todo multi-ideal $\mathcal{M}$ vale que

$$L_f \subseteq \mathcal{M} \subseteq L.$$

Exemplo 3.1.5 A classe $L_{\mathcal{F}}$ das aplicações multilineares de posto finito é um multi-ideal.

Pelo Exemplo 1.1.3 sabemos que $L_{\mathcal{F}}(E_1,\ldots,E_n;F)$ é subespaço vetorial de $L(E_1,\ldots,E_n;F)$ e que $L_f(E_1,\ldots,E_n;F)\subseteq L_{\mathcal{F}}(E_1,\ldots,E_n;F)$.

Vejamos agora que $L_{\mathcal{F}}(E_1,\ldots,E_n;F)$ satisfaz a propriedade de ideal. Para isso sejam $A\in L_{\mathcal{F}}(E_1,\ldots,E_n;F)$, $u_j\in L(G_j;E_j), j=1,\ldots,n$, e $t\in L(F;H)$. Então existem $k\in\mathbb{N}$, $A_1,\ldots,A_k\in L(E_1,\ldots,E_n)$ e $b_1,\ldots,b_k\in F$ tais que $A=\sum_{i=1}^k A_i\otimes b_i$. Para todos $x_j\in G_j,\ j=1,\ldots,n$, temos

$$\begin{aligned} t\circ A\circ(u_1,\ldots,u_n)(x_1\ldots,x_n) &= t(A(u_1(x_1),\ldots,u_n(x_n)))\\ &= t\left(\sum_{i=1}^k A_i\otimes b_i(u_1(x_1),\ldots,u_n(x_n))\right)\\ &= \sum_{i=1}^k t(A_i(u_1(x_1),\ldots,u_n(x_n))b_i)\\ &= \sum_{i=1}^k A_i(u_1(x_1),\ldots,u_n(x_n))t(b_i)\\ &= \left(\sum_{i=1}^k A_i\circ(u_1,\ldots,u_n)\otimes t(b_i)\right)(x_1\ldots,x_n), \end{aligned}$$

com $A_i\circ(u_1,\ldots,u_n)\in L(G_1,\ldots,G_n)$ e $t(b_i)\in H$ para todos $i=1,\ldots,k$. Logo $t\circ A\circ(u_1,\ldots,u_n)\in L_{\mathcal{F}}(G_1,\ldots,G_n;H)$, provando que $L_{\mathcal{F}}$ é um multi-ideal.

Para um exemplo de uma classe natural que não é multi-ideal precisamos do seguinte lema:

Lema 3.1.6 *Sejam $\varphi_1,\ldots,\varphi_{k+1}$ funcionais lineares linearmente independentes no espaço vetorial E. Então para qualquer $j=1,\ldots,k+1$, temos*

$$\bigcap_{i=1,\, i\neq j}^{k+1}\ker(\varphi_i)\nsubseteq\ker(\varphi_j).$$

Demonstração. Veja [7, Lema 6.3.5]. ∎

Exemplo 3.1.7 Seja $k\in\mathbb{N}$ um número natural fixado. Vejamos que a classe L_k das aplicações multilineares de posto menor ou igual a k, isto é,

$$L_k(E_1,\ldots,E_n;F)=\{A\in L(E_1,\ldots,E_n;F):\dim[\mathrm{Im}(A)]\leqslant k\},$$

não é um multi-ideal.

Por definição, é claro que $L_k\subseteq L_{\mathcal{F}}$. Vejamos que $L_f\nsubseteq L_k$. Sejam E e F espaços vetoriais de dimensão $\geqslant k+1$. Podemos tomar vetores linearmente independentes $b_1,\ldots,b_{k+1}\in F$ e funcionais lineares independentes $\varphi_1,\ldots,\varphi_{k+1}\in E^*$. Tome $A=\varphi_1^n\otimes b_1+\cdots+\varphi_{k+1}^n\otimes b_{k+1}$. Temos $A\in L_f({}^nE;F)$ pela definição de aplicação multilinear de tipo finito. Vejamos que $A\notin L_k({}^nE;F)$. Pelo Lema 3.1.6 sabemos que

$$\bigcap_{i=1,\ i\neq j}^{k+1}\ker(\varphi_i)\nsubseteq\ker(\varphi_j),$$

para todo $j = 1, \ldots, k+1$. Existem então $x_j \in E$, $j = 1, \ldots, k+1$, tais que $\varphi_i(x_j) = 0$ para todo $i \neq j$ e $\varphi_j(x_j) \neq 0$. Assim,

$$Ax_j^n = \left(\sum_{i=1}^{k+1} \varphi_i^n \otimes b_i \right) x_j^n = \sum_{i=1}^{k+1} \varphi_i(x_j)^n b_i = \varphi_j(x_j)^n b_j \in \mathrm{Im}(A)$$

para todo $j = 1, \ldots, k+1$. Portanto $\{\varphi_1(x_1)^n b_1, \ldots, \varphi_{k+1}(x_{k+1})^n b_{k+1}\}$ é um conjunto linearmente independente contido na imagem de A. Segue que $\dim[\mathrm{Im}(A)] = k+1 > k$, provando que $A \notin L_k(^nE; F)$. Logo L_k não é multi-ideal.

Estudaremos na sequência um multi-ideal formado por uma classe de aplicações multilineares que não havíamos considerado ainda nesta dissertação. Para isso precisamos do seguinte resultado:

Proposição 3.1.8 *Se A é um gerador de um espaço vetorial $V \neq 0$, então existe uma base de V contida em A.*

Demonstração. Veja, por exemplo, [7, Proposição A.4]. ■

Exemplo 3.1.9 Estudaremos neste exemplo as aplicações multilineares de posto enumerável. Denotamos por $\aleph_0$ o cardinal do conjunto dos números naturais. Dados espaços vetoriais $E_1, \ldots, E_n, F$, definimos

$$\begin{aligned} L_{enum}(E_1, \ldots, E_n; F) &= \{A \in L(E_1, \ldots, E_n; F) : \dim[\mathrm{Im}(A)] \leq \aleph_0\} \\ &= \{A \in L(E_1, \ldots, E_n; F) : [\mathrm{Im}(A)] \text{ tem base finita ou enumerável}\}. \end{aligned}$$

O objetivo é verificar que L_{enum} é um multi-ideal.

Comecemos verificando que $L_{enum}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é subespaço vetorial de $L(E_1, \ldots, E_n; F)$. Como $0 \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\dim[\mathrm{Im}(0)] = 0$, segue que $0 \in L_{enum}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Sejam $A,\ B \in L_{enum}(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então $A,\ B \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ e os subespaços [Im(A)] e [Im(B)] têm base finita ou enumerável. Como $A,\ B \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$, então $A + \lambda B \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$. Devemos verificar que $[\mathrm{Im}(\mathrm{A} + \lambda\mathrm{B})]$ tem base finita ou enumerável. Sejam

$$(y_j)_{j=1}^{N_1} \text{ base de } [\mathrm{Im(A)}], \text{ onde } \mathrm{N}_1 \in \mathbb{N} \text{ ou } \mathrm{N}_1 = +\infty,$$

$$(z_j)_{j=1}^{N_2} \text{ base de } [\mathrm{Im(B)}], \text{ onde } \mathrm{N}_2 \in \mathbb{N} \text{ ou } \mathrm{N}_2 = +\infty.$$

Dado $w \in [\mathrm{Im}(\mathrm{A} + \lambda\mathrm{B})]$, existem $k \in \mathbb{N}$, vetores $w_1, \ldots, w_k \in \mathrm{Im}(\mathrm{A} + \lambda\mathrm{B})$ e escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tais que $w = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j w_j$. Para cada $j = 1, \ldots, k$, existe $x_j \in E_1 \times \cdots \times E_n$ tal que

$$w_j = (A + \lambda B)(x_j) = A(x_j) + \lambda B(x_j).$$

Para cada $j = 1, \ldots, k$, como

$$A(x_j) \in \mathrm{Im}(A) \subseteq [\mathrm{Im}(A)] = \left[(y_j)_{j=1}^{N_1} \right],$$

existem $m_j \in \mathbb{N},\ \alpha_1, \ldots, \alpha_{m_j} \in \mathbb{K}$ tais que $A(x_j) = \sum\limits_{i=1}^{m_j} \alpha_i y_i$. E como

$$B(x_j) \in \operatorname{Im}(B) \subseteq [\operatorname{Im}(B)] = \left[(z_j)_{j=1}^{N_2}\right],$$

existem $p_j \in \mathbb{N},\ \beta_1, \ldots, \beta_{p_j} \in \mathbb{K}$ tais que $B(x_j) = \sum\limits_{l=1}^{p_j} \beta_l z_l$. Assim,

$$\begin{aligned} w = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j w_j &= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (A(x_j) + \lambda B(x_j)) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{m_j} \alpha_i y_i + \lambda \left(\sum_{l=1}^{p_j} \beta_l z_l \right) \right) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{m_j} \lambda_j \alpha_i y_i + \sum_{l=1}^{p_j} \lambda \lambda_j \beta_l z_l \right) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{m_j} \lambda_j \alpha_i y_i + \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{p_j} \lambda \lambda_j \beta_l z_l \in [(y_j)_{j=1}^{N_1}, (z_j)_{j=1}^{N_2}]. \end{aligned}$$

Isso prova que o conjunto

$$X = \{y_i, z_l : i = 1, \ldots, N_1,\ l = 1, \ldots, N_2\}$$

gera $[\operatorname{Im}(A + \lambda B)]$. Pela Proposição 3.1.8 concluímos que $[\operatorname{Im}(A + \lambda B)]$ tem uma base contida em X. Como X é finito ou enumerável, segue que $[\operatorname{Im}(A + \lambda B)]$ tem base finita ou enumerável, ou seja, $A + \lambda B \in L_{enum}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

Vejamos que $L_f(E_1, \ldots, E_n; F) \subseteq L_{enum}(E_1, \ldots, E_n; F)$. Seja $A \in L_f(E_1, \ldots, E_n; F)$. É claro que $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$. Vimos na observação 1.1.4 que toda aplicação multilinear de tipo finito tem imagem contida em um subespaço de dimensão finita. Isso nos permite concluir que $A \in L_{enum}(E_1, \ldots, E_n; F)$, e portanto $L_f(E_1, \ldots, E_n; F) \subseteq L_{enum}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

Verifiquemos a propriedade de ideal: dados $A \in L_{enum}(E_1, \ldots, E_n; F)$, $u_j \in L(G_j; E_j)$, $j = 1, \ldots, n$, e $t \in L(F; H)$, temos $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $[\operatorname{Im}(A)]$ tem base finita ou enumerável. Segue pelo Teorema 1.4.2 que $t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n) \in L(G_1, \ldots, G_n; H)$. Vejamos agora que $[\operatorname{Im}(t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n))]$ tem base finita ou enumerável. Por $t|_{[\operatorname{Im}(A)]}$ denotamos a restrição do operador t ao subespaço gerado pela imagem de A. Note que $t|_{[\operatorname{Im}(A)]}$ é um operador linear. Para todos $x_i \in G_i,\ i = 1, \ldots, n$, temos

$$t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n)(x_1, \ldots, x_n) = t(A(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n))) \in \operatorname{Im}(t|_{[\operatorname{Im}(A)]}).$$

Isso implica que $\operatorname{Im}(t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n)) \subseteq \operatorname{Im}(t|_{[Im(A)]})$, o que por sua vez implica que

$$[\operatorname{Im}(t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n))] \subseteq [\operatorname{Im}(t|_{[Im(A)]})] = \operatorname{Im}(t|_{[\operatorname{Im}(A)]}).$$

É claro que o operador linear $t|_{[\operatorname{Im}(A)]} \colon [\operatorname{Im}(A)] \longrightarrow \operatorname{Im}(t|_{[\operatorname{Im}(A)]})$ é sobrejetor. Então

$$\dim[\operatorname{Im}(t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n))] \leq \dim(\operatorname{Im}(t|_{[\operatorname{Im}(A)]})) \leq \dim[\operatorname{Im}(A)].$$

Logo $[\operatorname{Im}(t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n))]$ tem base finita ou enumerável, provando que $t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n) \in L_{enum}(G_1, \ldots, G_n; H)$. Segue que $L_{enum}(E_1, \ldots, E_n; F)$ é um multi-ideal.

3.2 O método da fatoração

Aprenderemos nesta seção, inspirada na dissertação [2], e nas duas seguintes, como gerar multi-ideais a partir de ideais de transformações lineares.

Definição 3.2.1 Seja $\mathcal{M}$ um multi-ideal. No caso em que $n = 1$, para cada par de espaços vetoriais E e F, podemos considerar a componente $\mathcal{M}(E;F)$ que é subespaço vetorial de $L(E;F)$. A subclasse $\bigcup\limits_{E,F} \mathcal{M}(E;F)$ da classe das transformações lineares é chamada de *ideal de transformações lineares*, ou simplesmente *ideal de operadores.*

Por conveniência, denotaremos um ideal de operadores pela letra $\mathcal{I}$. Assim, um ideal de operadores é uma subclasse $\mathcal{I}$ da classe de todas as transformações lineares entre espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ tal que, definindo

$$\mathcal{I}(E;F) := \mathcal{I} \cap L(E;F),$$

para todos espaços vetoriais E e F, tem-se:
(i) $\mathcal{I}(E;F)$ é subespaço vetorial de $L(E;F)$ que contém $\mathcal{F}(E;F)$.
(ii)(Propriedade de ideal) Se $u \in L(E;F)$, $v \in \mathcal{I}(F;G)$ e $t \in L(G;H)$, então $t \circ v \circ u \in \mathcal{I}(E;H)$.
A teoria de ideais de operadores entre espaços de Banach foi sistematizada por A. Pietsch em [14].

Exemplo 3.2.2 Basta tomar as componentes lineares de um multi-ideal qualquer para se obter um ideal de operadores. Por exemplo $\mathcal{F}$:= transformações lineares de posto finito (= transformaçoes lineares de tipo finito) e L_{enum} =: transformações lineares de posto finito ou enumerável são ideais de operadores.

O primeiro método de gerar multi-ideais a partir de ideais de operadores é chamado de *método da fatoração*:

Definição 3.2.3 Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores. Dizemos que uma aplicação multilinear $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ pertence à classe $L(\mathcal{I})$, e neste caso escrevemos $A \in L(\mathcal{I})(E_1, \ldots, E_n; F)$, se existem espaços vetoriais $G_1, \ldots, G_n$, transformações lineares $u_1 \in \mathcal{I}(E_1; G_1), \ldots, u_n \in \mathcal{I}(E_n; G_n)$ e $B \in L(G_1, \ldots, G_n; F)$ tais que $A = B \circ (u_1, \ldots, u_n)$, isto é, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[rr, "A"] \arrow[d, "u_1"] \arrow[d, shift left=8em, "u_n"] & & F \\ G_1 \times \cdots \times G_n \arrow[urr, "B"'] & & \end{tikzcd}$$

Teorema 3.2.4 *Para todo ideal de operadores $\mathcal{I}$, $L(\mathcal{I})$ é um multi-ideal.*

Demonstração. Vejamos que $L(\mathcal{I})(E_1,\ldots,E_n;F)$ é um subespaço de $L(E_1,\ldots,E_n;F)$. Dadas aplicações multilineares $A,B\in L(\mathcal{I})(E_1,\ldots,E_n;F)$ e um escalar $\lambda\in\mathbb{K}$, existem espaços vetoriais $G_1,\ldots,G_n,\ H_1,\ldots,H_n$, transformações lineares $u_j\in\mathcal{I}(E_j;G_j),\ v_j\in\mathcal{I}(E_j;H_j),\ j=1,\ldots,n$, e aplicações multilineares $A'\in L(G_1,\ldots,G_n;F)$ e
$B'\in L(H_1,\ldots,H_n;F)$, tais que $A=A'\circ(u_1,\ldots,u_n)$ e $B=B'\circ(v_1,\ldots,v_n)$.

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[d, "u_1"] & \times\cdots\times & E_n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "u_n"] & F \\
G_1 & \times\cdots\times & G_n \arrow[ur, "A'"'] &
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
E_1 \arrow[d, "v_1"] & \times\cdots\times & E_n \arrow[r, "B"] \arrow[d, "v_n"] & F \\
H_1 & \times\cdots\times & H_n \arrow[ur, "B'"'] &
\end{tikzcd}$$

Como $G_j\times H_j$ é espaço vetorial com as operações usuais de pares ordenados, definindo, para $j=1,\ldots,n$,

$$i_j\colon G_j\longrightarrow G_j\times H_j\ ,\ i_j(x)=(x,0),$$

e

$$t_j\colon H_j\longrightarrow G_j\times H_j\ ,\ t_j(y)=(0,y),$$

temos que i_j e t_j são operadores lineares. Considere, para $j=1,\ldots,n$,

$$w_j\colon E_j\longrightarrow G_j\times H_j\ ;\ w_j(x)=i_j\circ u_j(x)+t_j\circ v_j(x).$$

Como composta de aplicações lineares é linear e, também, a soma de aplicações lineares também é linear, segue que cada w_j é linear. Como $u_j\in\mathcal{I}(E_j;G_j)$ e $v_j\in\mathcal{I}(E_j;H_j)$, temos pela propriedade de ideal de operadores que $i_j\circ u_j,\ t_j\circ v_j\in\mathcal{I}(E_j;G_j\times H_j)$. E como $\mathcal{I}(E_j;G_j\times H_j)$ é subespaço vetorial de $L(E_j;G_j\times H_j)$, segue que

$$w_j=i_j\circ u_j+t_j\circ v_j\in\mathcal{I}(E_j;G_j\times H_j)$$

para todo $j=1,\ldots,n$. Defina, novamente para $j=1,\ldots,n$,

$$\pi_j\colon G_j\times H_j\longrightarrow G_j;\ \pi_j(x,y)=x$$

e

$$\pi_j^{'}\colon G_j\times H_j\longrightarrow H_j;\ \pi_j^{'}(x,y)=y,$$

e veja que as seguintes composições estão bem definidas:

$$\begin{tikzcd}
(G_1\times H_1) \arrow[d, "\pi_1"] & \times\cdots\times & (G_n\times H_n) \arrow[d, "\pi_n"] & \\
G_1 & \times\cdots\times & G_n \arrow[r, "A'"'] & F
\end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd}
(G_1 \times H_1) \times \cdots \times (G_n \times H_n) \arrow[d, "\pi_1'"] \arrow[d, shift left=20ex, "\pi_n'"] & \\
H_1 \quad \times \cdots \times \quad H_n \arrow[r, "B'"'] & F
\end{tikzcd}$$

Podemos assim definir

$$C \colon (G_1 \times H_1) \times \cdots \times (G_n \times H_n) \longrightarrow F \ , \ C := A' \circ (\pi_1, \ldots, \pi_n) + \lambda B' \circ (\pi_1', \ldots, \pi_n').$$

Como A' e B' são aplicações n-lineares e π_j e π_j' são transformações lineares, segue pelo Teorema 1.4.2 que $A' \circ (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ e $B' \circ (\pi_1', \ldots, \pi_n')$ são n-lineares. Como a adição de aplicações n-lineares é n-linear, segue que C é n-linear. Para todos $x_i \in E_i, \ i = 1, \ldots, n$, temos

$$\begin{aligned}
C \circ (w_1, \ldots, w_n)(x_1, \ldots, x_n) &= C(w_1(x_1), \ldots, w_n(x_n)) \\
&= A'(\pi_1(w_1(x_1)), \ldots, \pi_n(w_n(x_n))) + \lambda B' \circ (\pi_1'(w_1(x_1)), \ldots, \pi_n'(w_n(x_n))) \\
&= A'(\pi_1(i_1(u_1(x_1)) + t_1(v_1(x_1))), \ldots, \pi_n(i_n(u_n(x_n)) + t_n(v_n(x_n)))) \\
&\quad + \lambda B'(\pi_1'(i_1(u_1(x_1)) + t_1(v_1(x_1))), \ldots, \pi_n'(i_n(u_n(x_n)) + t_n(v_n(x_n)))) \\
&= A'(\pi_1((u_1(x_1), 0) + (0, v_1(x_1))), \ldots, \pi_n((u_n(x_n), 0) + (0, v_n(x_n)))) \\
&\quad + \lambda B'(\pi_1'((u_1(x_1), 0) + (0, v_1(x_1))), \ldots, \pi_n'((u_n(x_n), 0) + (0, v_n(x_n)))) \\
&= A'(\pi_1(u_1(x_1), v_1(x_1)), \ldots, \pi_n(u_n(x_n), v_n(x_n))) \\
&\quad + \lambda B'(\pi_1'(u_1(x_1), v_1(x_1)), \ldots, \pi_n'(u_n(x_n), v_n(x_n))) \\
&= A'(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n)) + \lambda B'(v_1(x_1), \ldots, v_n(x_n)) \\
&= A' \circ (u_1, \ldots, u_n)(x_1, \ldots, x_n) + \lambda B' \circ (v_1, \ldots, v_n)(x_1, \ldots, x_n) \\
&= A(x_1, \ldots, x_n) + \lambda B(x_1, \ldots, x_n) \\
&= (A + \lambda B)(x_1, \ldots, x_n),
\end{aligned}$$

o que prova que $A + \lambda B = C \circ (w_1, \ldots, w_n)$. Como $w_j \in \mathcal{I}(E_j; G_j \times H_j)$ para todo $j = 1, \ldots, n$, e $C \in L((G_1 \times H_1), \ldots, (G_n \times H_n); F)$, segue que

$$A + \lambda B \in L(\mathcal{I})(E_1, \ldots, E_n; F).$$

Portanto $L(\mathcal{I})(E_1, \ldots, E_n; F)$ é subespaço vetorial de $L(E_1, \ldots, E_n; F)$.

Vejamos que $L_f \subseteq L(\mathcal{I})$. Considere a aplicação multilinear de tipo finito $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b$, onde $\varphi_j \in E_j^*$, $j = 1 \ldots, n$, e $b \in F$. Defina

$$B \colon \mathbb{K}^n \longrightarrow F \ , \ B(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n b.$$

Claramente B é n-linear. E, dados $x_j \in E_j, j = 1, \ldots, n$, temos

$$\begin{aligned}
B \circ (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(x_1, \ldots, x_n) &= B(\varphi_1(x_1), \ldots, \varphi_n(x_n)) \\
&= \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n) b \\
&= \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b(x_1, \ldots, x_n).
\end{aligned}$$

Isso prova que

$$\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b = B \circ (\varphi_1, \ldots, \varphi_n).$$

Como $\varphi_j \in \mathcal{I}(E_j; \mathbb{K}),\ j = 1, \ldots, n$ e $B \in L(^n\mathbb{K}; F)$, temos

$$\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b \in L(\mathcal{I})(E_1, \ldots, E_n; F).$$

Dada uma aplicação n-linear de tipo finito arbitrária $A \in L_f(E_1, \ldots, E_n; F)$, A é soma finita de aplicações do tipo $\varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b$. Como $L(\mathcal{I})(E_1, \ldots, E_n; F)$ é subespaço vetorial e, como acabamos de provar, contém cada uma das parcelas de A, segue que $A \in L(\mathcal{I})(E_1, \ldots, E_n; F)$. Portanto $L_f \subseteq L(\mathcal{I})$.

Vejamos que $L(\mathcal{I})$ satisfaz a propriedade de ideal. Dados $A \in L(\mathcal{I})(E_1, \ldots, E_n; F)$, $u_j \in L(G_j; E_j),\ j = 1, \ldots, n$ e $t \in L(F; H)$, existem espaços vetoriais $M_1, \ldots, M_n$, transformações lineares $v_j \in \mathcal{I}(E_j; M_j),\ j = 1, \ldots, n$, e $B \in L(M_1, \ldots, M_n; F)$ tais que $A = B \circ (v_1, \ldots, v_n)$. O diagrama

$$\begin{tikzcd}
G_1 \times \cdots \times G_n \arrow[d, "u_1" ', start anchor=west, end anchor=west] \arrow[d, "u_n", start anchor=east, end anchor=east] \arrow[rrd, "t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n)"] & & \\
E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[r, "A" '] \arrow[d, "v_1", start anchor=west, end anchor=west] \arrow[d, "v_n", start anchor=east, end anchor=east] & F \arrow[r, "t" '] & H \\
M_1 \times \cdots \times M_n \arrow[ru, "B" '] & &
\end{tikzcd}$$

mostra que as seguintes composições estão bem definidas:

$$C := t \circ B \in L(M_1, \ldots, M_n; H) \text{ e } w_j := v_j \circ u_j \in \mathcal{I}(G_j; M_j).$$

De

$$\begin{aligned}
t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n) &= t \circ (B \circ (v_1, \ldots, v_n)) \circ (u_1, \ldots, u_n) \\
&= t \circ (B \circ (v_1 \circ u_1, \ldots, v_n \circ u_n)) \\
&= C(w_1, \ldots, w_n),
\end{aligned}$$

segue que $t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n) \in L(\mathcal{I})(G_1, \ldots, G_n; H)$. Portanto, $L(\mathcal{I})$ é um multi-ideal. ■

3.3 Método da linearização

Nesta seção, cuja principal referência utilizada foi a dissertação [2], estudaremos um método de gerar multi-ideais, a partir de ideais de operadores, que se aproveita dos isomorfismos entre espaços de aplicações multilineares que vimos no Teorema 1.1.5, os quais recordamos agora.

Sejam $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços vetoriais. Para cada $j = 1, \ldots, n$, e dados $x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n$, escreveremos

$$E_1, \overset{(j)}{\ldots}, E_n = E_1, \ldots, E_{j-1}, E_{j+1}, \ldots, E_n \text{ e}$$

$$x_1, \overset{(j)}{\ldots}, x_n = x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n.$$

A aplicação

$$V_{j,n-1} : L(E_1,\dots,E_n;F) \longrightarrow L(E_j; L(E_1, \overset{(j)}{\dots}, E_n; F))$$

onde

$$V_{j,n-1}(A)\colon E_j \longrightarrow L(E_1, \overset{(j)}{\dots}, E_n; F)$$

é definida por

$$V_{j,n-1}(A)(x_j)(x_1, \overset{(j)}{\dots}, x_n) = A(x_1,\dots,x_n),$$

é um isomorfismo entre os espaços vetoriais $L(E_1,\dots,E_n;F)$ e $L(E_j; L(E_1, \overset{(j)}{\dots}, E_n; F))$ pelo Teorema 1.1.5.

Definição 3.3.1 Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores. Dizemos que uma aplicação multilinear $A \in L(E_1,\dots,E_n;F)$ pertence à classe $[\mathcal{I}]$, e neste caso escrevemos $A \in [\mathcal{I}](E_1,\dots,E_n;F)$, se $V_{j,n-1}(A) \in \mathcal{I}(E_j; L(E_1, \overset{(j)}{\dots}, E_n; F))$ para todo $j = 1,\dots,n$.

Teorema 3.3.2 *Para todo ideal de operadores $\mathcal{I}$, $[\mathcal{I}]$ é um multi-ideal.*

Demonstração. Vejamos que $[\mathcal{I}](E_1,\dots,E_n;F)$ é subespaço vetorial de $L(E_1,\dots,E_n;F)$. Dados $A,\ B \in [\mathcal{I}](E_1,\dots,E_n;F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$V_{j,n-1}(A),\ V_{j,n-1}(B) \in \mathcal{I}(E_j; L(E_1, \overset{(j)}{\dots}, E_n; F))$$

para todo $j = 1,\dots,n$. Como $\mathcal{I}(E_j, L(E_1, \overset{(j)}{\dots}, E_n; F))$ é subespaço vetorial de $L(E_j; (L(E_1, \overset{(j)}{\dots}, E_n; F))$ e $V_{j,n-1}$ é linear, segue que

$$V_{j,n-1}(A + \lambda B) = V_{j,n-1}(A) + \lambda V_{j,n-1}(B) \in \mathcal{I}(E_j; L(E_1, \overset{(j)}{\dots}, E_n; F))$$

para todo $j = 1,\dots,n$. Logo, $A + \lambda B \in [\mathcal{I}](E_1,\dots,E_n;F)$. Portanto, $[\mathcal{I}](E_1,\dots,E_n;F)$ é subespaço vetorial.

Vejamos agora que $L_f \subseteq [\mathcal{I}]$. Seja $A = \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b$ com $\varphi_i \in E_i^*$, $i = 1,\dots,n$, e $b \in F$. Note que para cada $j = 1,\dots,n$, temos

$$\begin{aligned} V_{j,n-1}(A)(x)(x_1, \overset{(j)}{\dots}, x_n) &= \varphi_j(x)\varphi_1(x_1) \overset{(j)}{\cdots} \varphi_n(x_n)b \\ &= [\varphi_j(x) \cdot (\varphi_1 \otimes \overset{(j)}{\cdots} \otimes \varphi_n \otimes b)](x_1, \overset{(j)}{\dots}, x_n) \end{aligned}$$

para quaisquer $x \in E_j$ e $x_i \in E_i,\ i = 1,\dots,n$ e $i \neq j$. Então

$$V_{j,n-1}(A)(x) = \varphi_j(x) \cdot (\varphi_1 \otimes \overset{(j)}{\cdots} \otimes \varphi_n \otimes b) = \varphi_j \otimes [\varphi_1 \otimes \overset{(j)}{\cdots} \otimes \varphi_n \otimes b](x)$$

para todo $x \in E_j$. Logo

$$\begin{aligned} V_{j,n-1}(A) = \varphi_j \otimes [\varphi_1 \otimes \overset{(j)}{\cdots} \otimes \varphi_n \otimes b] &\in \mathcal{F}(E_j; L(E_1, \overset{(j)}{\dots}, E_n; F)) \\ &\subseteq \mathcal{I}(E_j; L(E_1, \overset{(j)}{\dots}, E_n; F)), \end{aligned}$$

provando que $A \in [\mathcal{I}](E_1, \ldots, E_n; F)$. Como toda aplicação de tipo finito é uma soma finita de aplicações do tipo A, e como $[\mathcal{I}](E_1, \ldots, E_n; F)$ é subespaço vetorial, segue que toda aplicação de tipo finito pertence $[\mathcal{I}](E_1, \ldots, E_n; F)$. Portanto,

$$L_f(E_1, \ldots, E_n; F) \subseteq [\mathcal{I}](E_1, \ldots, E_n; F).$$

Propriedade de Ideal: Sejam $A \in [\mathcal{I}](E_1, \ldots, E_n; F)$, $u_j \in L(G_j; E_j)$, $j = 1, \ldots, n$, e $t \in L(F; H)$. Seja $j \in \{1, \ldots, n\}$. Sabemos que

$$V_{j,n-1}(A) \in \mathcal{I}(E_j; L(E_1, \overset{(j)}{\ldots}, E_n; F)),$$

e definimos

$$\begin{gathered} T_j \colon L(E_1, \overset{(j)}{\ldots}, E_n; F) \longrightarrow L(G_1, \overset{(j)}{\ldots}, G_n; H); \\ T_j(B) = t \circ B \circ (u_1, \overset{(j)}{\ldots}, u_n) \end{gathered}$$

Vejamos que T_j é linear: para isso sejam aplicações $(n-1)$-lineares $B,\ C \in L(E_1, \overset{(j)}{\ldots}, E_n; F)$ e um escalar $\lambda \in \mathbb{K}$. Então

$$\begin{aligned} T_j(B + \lambda C)(x_1, \overset{(j)}{\ldots}, x_n) &= t \circ (B + \lambda C) \circ (u_1, \overset{(j)}{\ldots}, u_n)(x_1, \overset{(j)}{\ldots}, x_n) \\ &= t((B + \lambda C)(u_1(x_1), \overset{(j)}{\ldots}, u_n(x_n))) \\ &= t(B(u_1(x_1), \overset{(j)}{\ldots}, u_n(x_n)) + \lambda C(u_1(x_1), \overset{(j)}{\ldots}, u_n(x_n))) \\ &= t(B(u_1(x_1), \overset{(j)}{\ldots}, u_n(x_n))) + \lambda t(C(u_1(x_1), \overset{(j)}{\ldots}, u_n(x_n))) \\ &= t \circ B \circ (u_1, \overset{(j)}{\ldots}, u_n)(x_1, \overset{(j)}{\ldots}, x_n) + \lambda t \circ C \circ (u_1, \overset{(j)}{\ldots}, u_n)(x_1, \overset{(j)}{\ldots}, x_n) \\ &= T_j(B)(x_1, \overset{(j)}{\ldots}, x_n) + \lambda T_j(C)(x_1, \overset{(j)}{\ldots}, x_n) \\ &= (T_j(B) + \lambda T_j(C))(x_1, \overset{(j)}{\ldots}, x_n) \end{aligned}$$

para quaisquer $x_i \in G_i,\ i = 1, \ldots, n,\ i \neq j$. Portanto, T_j é linear. Para cada $j = 1, \ldots, n$, considerando a composta

$$G_j \xrightarrow{u_j} E_j \xrightarrow{V_{j,n-1}(A)} L(E_1, \ldots, E_n; F) \xrightarrow{T_j} L(G_1, \ldots, G_n; H),$$

temos

$$\begin{aligned} (T_j \circ V_{j,n-1}(A) \circ u_j)(x_j)(x_1, \overset{(j)}{\ldots}, x_n) &= T_j(V_{j,n-1}(A)(u_j(x_j)))(x_1, \overset{(j)}{\ldots}, x_n) \\ &= t \circ (V_{j,n-1}(A)(u_j(x_j))) \circ (u_1, \overset{(j)}{\ldots}, u_n)(x_1, \overset{(j)}{\ldots}, x_n) \\ &= t(V_{j,n-1}(A)(u_j(x_j))(u_1(x_1), \overset{(j)}{\ldots}, u_n(x_n))) \\ &= t(A(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n))) \\ &= t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n)(x_1, \ldots, x_n) \\ &= V_{j,n-1}(t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n))(x_j)(x_1, \overset{(j)}{\ldots}, x_n), \end{aligned}$$

para quaisquer $x_i \in G_i,\ i = 1, \ldots, n$. Logo,

$$V_{j,n-1}(t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n)) = T_j \circ V_{j,n-1}(A) \circ u_j \in \mathcal{I}(G_j; L(G_1, \overset{(j)}{\ldots}, G_n; H))$$

para todo $j = 1, \ldots, n$. Portanto, $t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n) \in [\mathcal{I}](G_1, \ldots, G_n; H)$, provando assim que $[\mathcal{I}]$ é um multi-ideal. ■

Um fato importante, que é bem conhecido desde o início da teoria, é que o método da linearização gera um multi-ideal que contém o multi-ideal gerado pelo método da fatoração:

Proposição 3.3.3 *Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores. Então $L(\mathcal{I}) \subseteq [\mathcal{I}]$.*

Demonstração. Dada $A \in L(\mathcal{I})(E_1, \ldots, E_n; F)$, existem espaços vetoriais $G_1, \ldots, G_n$, transformações lineares, $u_j \in \mathcal{I}(E_j; G_j)$, $j = 1, \ldots, n$, e $B \in L(G_1, \ldots, G_n; F)$ tais que $A = B \circ (u_1, \ldots, u_n)$:

$$\begin{tikzcd} E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "u_1 \,\cdots\, u_n"'] & F \\ G_1 \times \cdots \times G_n \arrow[ur, "B"'] & \end{tikzcd}$$

Defina, para cada $j = 1, \ldots, n$,

$$U_j \colon G_j \longrightarrow L(E_1, \overset{(j)}{\ldots}, E_n; F) \ ,$$
$$U_j(y)(x_1, \overset{(j)}{\ldots}, x_n) = B(u_1(x_1), \ldots, y, \ldots, u_n(x_n))$$

É fácil verificar que U_j está bem definido, isto é,

$$U_j(y) \in L(E_1, \overset{(j)}{\ldots}, E_n; F)$$

para todo $y \in G_j$ e que U_j é linear. Considerando a composta

$$E_j \xrightarrow{u_j} G_j \xrightarrow{U_j} L(E_1, \overset{(j)}{\ldots}, E_n; F)$$

temos

$$\begin{aligned} (U_j \circ u_j)(x_j)(x_1, \overset{(j)}{\ldots}, x_n) &= U_j(u_j(x_j))(x_1, \overset{(j)}{\ldots}, x_n) \\ &= B \circ (u_1(x_1), \ldots, u_j(x_j), \ldots, u_n(x_n)) \\ &= B \circ (u_1, \ldots, u_n)(x_1, \ldots, x_n) \\ &= A(x_1, \ldots, x_n) \\ &= V_{j,n-1}(A)(x_j)(x_1, \overset{(j)}{\ldots}, x_n), \end{aligned}$$

para quaisquer $x_i \in E_i$, $i = 1, \ldots, n$. Assim, $V_{j,n-1}(A) = U_j \circ u_j$. Como $u_j \in \mathcal{I}(E_j, G_j)$ para todo $j = 1, \ldots, n$, segue que $V_{j,n-1}(A) \in \mathcal{I}(E_j; L(E_1, \overset{(j)}{\ldots}, E_n; F))$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Portanto, $A \in [\mathcal{I}](E_1, \ldots, E_n; F)$. ■

3.4 Multi-ideais de composição

Na Seção 3.2 consideramos a composição de uma aplicação multilinear com operadores lineares pertencentes a um ideal de operadores fazendo primeiro os operadores lineares e depois a aplicação multilinear. Veremos nesta seção que, invertendo o processo, isto é, compondo um operador linear pertencente a um ideal de operadores *depois* de uma aplicação multilinear, também obtemos um método de geração de multi-ideais, chamado de *multi-ideal de composição.*

Os multi-ideais de composição, que são uma generalização dos ideais de operadores de composição, remontam ao artigo de Pietsch [15] em 1983 e foram estudados em detalhes em, por exemplo, Botelho-Pellegrino-Rueda [6].

Para compor esta seção nos inspiramos principalmente na dissertação [17].

Definição 3.4.1 Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores. Dizemos que uma aplicação multilinear $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ pertence à classe $\mathcal{I} \circ L$, e neste caso escrevemos, $A \in \mathcal{I} \circ L(E_1, \ldots, E_n; F)$, se existem um espaço vetorial G, uma aplicação n-linear $B \in L(E_1, \ldots, E_n; G)$ e uma transformação linear $u \in \mathcal{I}(G; F)$ tais que $A = u \circ B$, isto é, o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{tikzcd} E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "B"] & F \\ G \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

Teorema 3.4.2 *Para todo ideal de operadores $\mathcal{I}$, $\mathcal{I} \circ L$ é um multi-ideal, chamado de multi-ideal de composição.*

Demonstração. Vejamos que $\mathcal{I} \circ L(E_1, \ldots, E_n; F)$ é subespaço de $L(E_1, \ldots, E_n; F)$. Dadas $A,\ B \in \mathcal{I} \circ L(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, existem espaços vetoriais $G,\ H$, aplicações n-lineares $A' \in L(E_1, \ldots, E_n; G)$ e $B' \in L(E_1, \ldots, E_n; H)$ e transformações lineares $u \in \mathcal{I}(G; F)$ e $v \in \mathcal{I}(H; F)$ tais que $A = u \circ A'$ e $B = v \circ B'$, isto é, os diagramas a seguir são comutativos:

$$\begin{tikzcd} E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[r, "A"] \arrow[d, "A'"] & F \\ G \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

e

$$\begin{tikzcd} E_1 \times \cdots \times E_n \arrow[r, "B"] \arrow[d, "B'"] & F \\ H \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

Como o produto cartesiano $G \times H$ é espaço vetorial com as operações usuais de pares ordenados, definindo

$$i \colon G \longrightarrow G \times H;\ i(x) = (x, 0) \text{ e}$$

$$t\colon H \longrightarrow G \times H;\ t(y) = (0, y),$$

temos claramente que i e t são operadores lineares. Podemos também considerar a aplicação

$$C\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow G \times H\ ,$$
$$C(x_1, \ldots, x_n) = i \circ A'(x_1, \ldots, x_n) + \lambda t \circ B'(x_1, \ldots, x_n).$$

Como A' e B' são n-lineares e i e t são lineares, segue que $i \circ A'$ e $t \circ B'$ são n-lineares. E, como adição de aplicações n-lineares é n-linear, segue que C é n-linear. É claro que as aplicações

$$\pi\colon G \times H \longrightarrow G;\ \pi(x, y) = x \text{ e}$$

$$\pi'\colon G \times H \longrightarrow H;\ \pi'(x, y) = y,$$

são operadores lineares. Considere ainda a aplicação

$$s\colon G \times H \longrightarrow F;\ s = u \circ \pi + v \circ \pi'.$$

Como $u \in \mathcal{I}(G; F)$ e $v \in \mathcal{I}(H; F)$, segue da propriedade de ideal que $u \circ \pi$ e $v \circ \pi'$ pertencem a $\mathcal{I}(G \times H; F)$; e como $\mathcal{I}(G \times H; F)$ é subespaço vetorial de $L(G \times H; F)$, segue que

$$s = u \circ \pi + v \circ \pi' \in \mathcal{I}(G \times H; F).$$

Vejamos agora que $s \circ C = A + \lambda B$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
s \circ C(x_1, \ldots, x_n) &= s(C(x_1, \ldots, x_n)) \\
&= u \circ \pi(C(x_1, \ldots, x_n)) + v \circ \pi'(C(x_1, \ldots, x_n)) \\
&= u(\pi(C(x_1, \ldots, x_n))) + v(\pi'(C(x_1, \ldots, x_n))) \\
&= u(\pi(i \circ A'(x_1, \ldots, x_n) + \lambda t \circ B'(x_1, \ldots, x_n))) \\
&\quad + v(\pi'(i \circ A'(x_1, \ldots, x_n) + \lambda t \circ B'(x_1, \ldots, x_n))) \\
&= u(\pi(i(A'(x_1, \ldots, x_n)) + \lambda t(B'(x_1, \ldots, x_n)))) \\
&\quad + v(\pi'(i(A'(x_1, \ldots, x_n)) + \lambda t(B'(x_1, \ldots, x_n)))) \\
&= u(\pi((A'(x_1, \ldots, x_n), 0) + \lambda(0, B'(x_1, \ldots, x_n)))) \\
&\quad + v(\pi'((A'(x_1, \ldots, x_n), 0) + \lambda(0, B'(x_1, \ldots, x_n)))) \\
&= u(\pi(A'(x_1, \ldots, x_n), \lambda B'(x_1, \ldots, x_n))) \\
&\quad + v(\pi'(A'(x_1, \ldots, x_n), \lambda B'(x_1, \ldots, x_n))) \\
&= u(A'(x_1, \ldots, x_n)) + v(\lambda B'(x_1, \ldots, x_n)) \\
&= u \circ A'(x_1, \ldots, x_n) + \lambda v \circ B'(x_1, \ldots, x_n) \\
&= A(x_1, \ldots, x_n) + \lambda B(x_1, \ldots, x_n) \\
&= (A + \lambda B)(x_1, \ldots, x_n),
\end{aligned}$$

para quaisquer $x_i \in E_i$. Logo $A + \lambda B = s \circ C$ com $C \in L(E_1, \ldots, E_n; G \times H)$ e $s \in \mathcal{I}(G \times H; F)$. Assim,

$$A + \lambda B \in \mathcal{I} \circ L(E_1, \ldots, E_n; F),$$

o que é suficiente para concluir que $\mathcal{I} \circ L(E_1, \ldots, E_n; F)$ é subespaço vetorial de $L(E_1, \ldots, E_n; F)$.

Vejamos agora que $L_f \subseteq \mathcal{I} \circ L$. Para isso, seja

$$A = \varphi_1 \otimes \cdots \otimes \varphi_n \otimes b \in L_f(E_1, \ldots, E_n; F),$$

onde $\varphi_j \in E_j^*$, $j = 1, \ldots, n$, e $b \in F$. Pelo Exemplo 1.3.1 sabemos que a aplicação

$$\begin{gathered} B\colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow E_n \ , \\ B(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_{n-1}(x_{n-1}) x_n \end{gathered}$$

é n-linear. Considere a transformação linear $\varphi_n \otimes b \in L(E_n; F)$. É claro que $\varphi_n \otimes b$ é de posto finito pois $\varphi_n \in E_n^*$ e $b \in F$, portanto pertence a $\mathcal{I}(E_n; F)$. Para todos $x_i \in E_i,\ i = 1, \ldots, n$, temos

$$\begin{aligned} ((\varphi_n \otimes b) \circ B)(x_1, \ldots, x_n) &= (\varphi_n \otimes b)(B(x_1, \ldots, x_n)) \\ &= (\varphi_n \otimes b)(\varphi_1(x_1) \cdots \varphi_{n-1}(x_{n-1}) x_n) \\ &= \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_{n-1}(x_{n-1}) \varphi_n(x_n) b \\ &= A(x_1, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Assim, $A = (\varphi_n \otimes b) \circ B$ com $\varphi_n \otimes b \in \mathcal{I}(E_n; F)$ e $B \in L(E_1, \ldots, E_n; E_n)$. Portanto, $A \in \mathcal{I} \circ L(E_1, \ldots, E_n; F)$. Como toda aplicação multilinear de tipo finito é uma soma finita de aplicações do tipo A, e como $\mathcal{I} \circ L(E_1, \ldots, E_n; F)$ é subespaço vetorial de $L(E_1, \ldots, E_n; F)$, segue que toda aplicação de tipo finito pertence $\mathcal{I} \circ L(E_1, \ldots, E_n; F)$. Portanto,

$$L_f(E_1, \ldots, E_n; F) \subseteq \mathcal{I} \circ L(E_1, \ldots, E_n; F).$$

Propriedade de ideal: dados uma aplicação multilinear $A \in \mathcal{I} \circ L(E_1, \ldots, E_n; F)$ e operadores lineares $u_j \in L(G_j; E_j),\ j = 1, \ldots, n$ e $t \in L(F; H)$, existem um espaço vetorial J, uma aplicação n-linear $B \in L(E_1, \ldots, E_n; J)$ e uma transformação linear $v \in \mathcal{I}(J; F)$ tais que $A = v \circ B$. De acordo com o diagrama abaixo,

$$\begin{tikzcd} G_1 \arrow[d, "u_1"] & \times \cdots \times & G_n \arrow[d, "u_n"] \arrow[drr, "t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n)"] & & \\ E_1 & \times \cdots \times \arrow[d, "B"] & E_n \arrow[r, "A"] & F \arrow[r, "t"'] & H \\ & J \arrow[urr, "v"'] & & & \end{tikzcd}$$

podemos considerar as compostas

$$w := t \circ v \in \mathcal{I}(J; H)$$

e

$$C := B \circ (u_1, \ldots, u_n) \in L(G_1, \ldots, G_n; J).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n)(x_1, \ldots, x_n) &= t(A(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n))) \\ &= t((v \circ B)(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n))) \\ &= t(v(B(u_1(x_1), \ldots, u_n(x_n)))) \\ &= t \circ v \circ B \circ (u_1, \ldots, u_n)(x_1, \ldots, x_n) \\ &= w \circ C(x_1, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

para quaisquer $x_i \in G_i,\ i = 1, \ldots, n$. Assim, $t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n) = w \circ C$. Logo,

$$t \circ A \circ (u_1, \ldots, u_n) \in \mathcal{I} \circ L(G_1, \ldots, G_n; H),$$

o que prova que $\mathcal{I} \circ L$ é um multi-ideal. ■

CAPÍTULO 4

IDEAIS DE POLINÔMIOS HOMOGÊNEOS

De forma análoga ao que fizemos no Capítulo 3 para aplicações multilineares, podemos considerar classes de polinômios homogêneos que são estáveis por composição com transformações lineares. Tais classes são chamadas de *ideais de polinômios homogêneos*, ou simplesmente *ideais de polinômios*.

O estudo de ideais de polinômios é uma consequência imediata do estudo de multi-ideais, e, de fato, os ideais de polinômios passaram a ser estudados imediatamente após a publicação de [15]. Tanto quanto sabemos, ideais de polinômios foram tratados pela primeira vez em [8].

4.1 Definição e primeiros exemplos

A principal referência utilizada nesta seção foi a dissertação [2].

Definição 4.1.1 Um *ideal de polinômios n-homogêneos* (ou *ideal de polinômios*) é uma subclasse $\mathcal{Q}$ da classe de todos os polinômios n-homogêneos entre espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ tal que, definindo

$$\mathcal{Q}(^nE;F) := P(^nE;F) \cap \mathcal{Q},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todos espaços vetoriais E e F, tem-se:
(i) $\mathcal{Q}(^nE;F)$ é subespaço vetorial de $P(^nE;F)$.
(ii) $P_f(^nE;F) \subseteq \mathcal{Q}(^nE;F)$.
(iii) Propriedade de Ideal: Se $P \in \mathcal{Q}(^nE;F),\ u \in L(G;E)$ e $v \in L(F;H)$, então $v \circ P \circ u \in \mathcal{Q}(^nG;H)$.

$$G \xrightarrow{u} E \xrightarrow{P} F \xrightarrow{v} H$$

Exemplo 4.1.2 Vejamos que a classe P_f dos polinômios homogêneos de tipo finito é um ideal de polinômios.

Usaremos a Proposição 2.1.2(a), que diz que $P \in P_f(^nE;F)$ se existe $A \in L_f(^nE;F)$ tal que $\widehat{A} = P$.
(i) Dados $P,\ Q \in P_f(^nE;F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, existem $A,\ B \in L_f(^nE;F)$ tais que $\widehat{A} = P$ e $\widehat{B} = Q$.

Como $L_f(^nE;F)$ é subespaço vetorial, pelo Exemplo 1.1.2 temos $A+\lambda B \in L_f(^nE;F)$. Mais ainda,

$$P+\lambda Q = \widehat{A}+\lambda\widehat{B} = (A+\lambda B)^\wedge.$$

Logo $(A+\lambda B)^\wedge = P+\lambda Q$. Assim, pela Proposição 2.1.2, $P+\lambda Q \in P_f(^nE;F)$, provando que $P_f(^nE;F)$ é subespaço vetorial.

(ii) Nada a demonstrar.

(iii) (Propriedade de ideal) Sejam $P \in P_f(^nE;F)$, $u \in L(G;E)$ e $v \in L(F;H)$. Então existe $A \in L_f(^nE;F)$ tal que $\widehat{A} = P$. Então

$$\begin{aligned} v\circ P\circ u(x) &= v(P(u(x))) = v(\widehat{A}(u(x))) \\ &= v(A(u(x)^n)) = v\circ A\circ(u,\ldots,u)x^n \\ &= (v\circ A\circ(u,\ldots,u))^\wedge(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in G$. Logo $v\circ P\circ u = (v\circ A\circ(u,\ldots,u))^\wedge$. Pelo exemplo 3.1.3, temos que $v\circ A\circ(u,\ldots,u) \in L_f(^nG;H)$. Pela Proposição 2.1.2(a) segue que $v\circ P\circ u \in P_f(^nG;H)$. E, portanto, $P_f(^nE;F)$ é um ideal de polinômios.

Exemplo 4.1.3 Vejamos que a classe $P_{\mathcal{F}}$ dos polinômios homogêneos de posto finito é um ideal de polinômios.

Usaremos a Proposição 2.1.4(a), que diz que $P \in P_{\mathcal{F}}(^nE;F)$ se existe $A \in L_{\mathcal{F}}(^nE;F)$ tal que $\widehat{A} = P$.

(i) Sejam $P,\ Q \in P_{\mathcal{F}}(^nE;F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então existem $A,\ B \in L_{\mathcal{F}}(^nE;F)$ tais que $\widehat{A} = P$ e $\widehat{B} = Q$. Como $L_{\mathcal{F}}(^nE;F)$ é subespaço vetorial, pelo Exemplo 1.1.3, temos que $A+\lambda B \in L_{\mathcal{F}}(^nE;F)$. Além disso,

$$P+\lambda Q = \widehat{A}+\lambda\widehat{B} = (A+\lambda B)^\wedge.$$

Logo $(A+\lambda B)^\wedge = P+\lambda Q$. Assim, pela Proposição 2.1.4, $P+\lambda Q \in P_{\mathcal{F}}(^nE;F)$. Portanto $P_{\mathcal{F}}(^nE;F)$ é subespaço vetorial.

(ii) Pelo Exemplo 1.1.3 sabemos que $L_f \subseteq L_{\mathcal{F}}$, e consequentemente, pela Proposição 2.1.4, temos $P_f \subseteq P_{\mathcal{F}}$.

(iii) (Propriedade de ideal) Sejam $P \in P_{\mathcal{F}}(^nE;F)$, $u \in L(G;E)$ e $v \in L(F;H)$. Então existe $A \in L_{\mathcal{F}}(^nE;F)$ tal que $\widehat{A} = P$. Disto,

$$\begin{aligned} v\circ P\circ u(x) &= v(P(u(x))) = v(\widehat{A}(u(x))) \\ &= v(A(u(x)^n)) = v\circ A\circ(u,\ldots,u)x^n \\ &= (v\circ A\circ(u,\ldots,u))^\wedge(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in G$. Logo $v\circ P\circ u = (v\circ A\circ(u,\ldots,u))^\wedge$. Pelo Exemplo 3.1.5 sabemos que $v\circ A\circ(u,\ldots,u) \in L_{\mathcal{F}}(^nG;H)$, e pela Proposição 2.1.4(a) segue que $v\circ P\circ u \in P_{\mathcal{F}}(^nG;H)$. Portanto, $P_{\mathcal{F}}(^nE;F)$ é um ideal de polinômios.

Exemplo 4.1.4 A exemplo do que fizemos no Exemplo 3.1.9 para aplicações multilineares, definimos agora a classe dos polinômios homogêneos de posto enumerável. Dados $n \in \mathbb{N}$ e espaços vetoriais E e F, definimos

$$P_{enum}(^nE;F) = \{P \in P(^nE;F) : [\mathrm{Im}(P)] \text{ tem base finita ou enumerável}\}.$$

Vejamos que P_{enum} é um ideal de polinômios.

Verifiquemos primeiramente que $P_{enum}(^nE;F)$ é subespaço vetorial de $P(^nE;F)$. É evidente que o polinômio nulo pertence a $P_{enum}(^nE;F)$. Sejam $P,\ Q \in P_{enum}(^nE;F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então $P,\ Q \in P(^nE;F)$ e $[\mathrm{Im}(P)]$ e $[\mathrm{Im}(Q)]$ têm base finita ou enumerável. É claro que que $P + \lambda Q \in P(^nE;F)$. Devemos provar que $[\mathrm{Im}(A + \lambda B)]$ tem base finita ou enumerável. Para isso sejam

$$(y_j)_{j=1}^{N_1} \text{ base de } [\mathrm{Im}(P)],\ \text{ onde } N_1 \in \mathbb{N} \text{ ou } N_1 = +\infty,$$

$$(z_j)_{j=1}^{N_2} \text{ base de } [\mathrm{Im}(Q)],\ \text{ onde } N_2 \in \mathbb{N} \text{ ou } N_2 = +\infty.$$

Dado $w \in [\mathrm{Im}(P+\lambda Q)]$, existem um número natural $k \in \mathbb{N}$, vetores $w_1, \ldots, w_k \in \mathrm{Im}(P + \lambda Q)$ e escalares $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tais que $w = \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j w_j$. Assim, para cada $j = 1, \ldots, k$, existe $x_j \in E$ tal que

$$w_j = (P + \lambda Q)(x_j) = P(x_j) + \lambda Q(x_j).$$

Como $P(x_j) \in \mathrm{Im}(P) \subseteq [\mathrm{Im}(P)]$, existem um número natural $m_j \in \mathbb{N}$ e escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_j} \in \mathbb{K}$ tais que $P(x_j) = \sum\limits_{i=1}^{m_j} \alpha_i y_i$. E como $Q(x_j) \in \mathrm{Im}(Q) \subseteq [\mathrm{Im}(Q)]$, existem um número natural $r_j \in \mathbb{N}$ e escalares $\beta_1, \ldots, \beta_{r_j} \in \mathbb{K}$ tais que $Q(x_j) = \sum\limits_{l=1}^{r_j} \beta_l z_l$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
w = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j w_j &= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j (P(x_j) + \lambda Q(x_j)) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{m_j} \alpha_i y_i + \lambda \left(\sum_{l=1}^{r_j} \beta_l z_l \right) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{m_j} \lambda_j \alpha_i y_i + \sum_{l=1}^{r_j} \lambda \lambda_j \beta_l z_l \right) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{m_j} \lambda_j \alpha_i y_i + \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{r_j} \lambda \lambda_j \beta_l z_l,
\end{aligned}$$

provando que $w \in [(y_j)_{j=1}^{N_1}, (z_j)_{j=1}^{N_2}]$. Assim, o conjunto

$$X = \{y_i, z_l : i = 1, \ldots, N_1,\ l = 1, \ldots, N_2\}$$

gera $[\mathrm{Im}(P + \lambda Q)]$. Pela Proposição 3.1.8, $[\mathrm{Im}(P + \lambda Q)]$ tem uma base contida em X. Como X é finito ou enumerável, $[\mathrm{Im}(P + \lambda Q)]$ tem base finita ou enumerável. Portanto $P + \lambda Q \in P_{enum}(^nE;F)$.

Vejamos que $P_f \subseteq P_{enum}$. Dado $P \in P_f(^nE;F)$, existem $m \in \mathbb{N}$, $\varphi_1,\ldots,\varphi_m \in E^*$ e $b_1,\ldots,b_m \in F$ tais que $P = \sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_j^n \otimes b_j$, ou seja,

$$P(x) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x)^n b_j \in [b_1,\ldots,b_m]$$

para todo $x \in E$. Temos assim que $\mathrm{Im}(P) \subseteq [b_1,\ldots,b_m]$. Como $[\mathrm{Im}(P)]$ é o menor subespaço vetorial de F contendo $\mathrm{Im}(P)$, segue que $[\mathrm{Im}(P)] \subseteq [b_1,\ldots,b_m]$. Logo, todo polinômio n-homogêneo de tipo finito tem imagem contida em um subespaço de dimensão finita. Pelo Exemplo 4.1.2, sabemos que $P_f(^nE;F)$ é subespaço vetorial de $P(^nE;F)$. Assim, $P \in P(^nE;F)$. Portanto, $P \in P_{enum}(^nE;F)$.

Verifiquemos, finalmente, a propriedade de ideal. Dados $P \in P_{enum}(^nE;F)$, $u \in L(G;E)$ e $t \in L(F;H)$, temos $P \in P(^nE;F)$ e $[\mathrm{Im}(P)]$ tem base finita ou enumerável. Segue pelo Teorema 2.3.1 que $t \circ P \circ u \in P(^nG;H)$. Resta verificar que $[\mathrm{Im}(t \circ P \circ u)]$ tem base finita ou enumerável. Para todo $x \in G$,

$$t \circ P \circ u(x) = t(P(u(x))) \in \mathrm{Im}(t|_{[\mathrm{Im}(P)]}),$$

e isso prova que $\mathrm{Im}(t \circ P \circ u) \subseteq \mathrm{Im}(t|_{[\mathrm{Im}(P)]})$, o que, por sua vez, implica que

$$[\mathrm{Im}(t \circ P \circ u)] \subseteq [\mathrm{Im}(t|_{[\mathrm{Im}(P)]})] = \mathrm{Im}(t|_{[\mathrm{Im}(P)]}).$$

É claro que o operador linear $t|_{[\mathrm{Im}(P)]} \colon [\mathrm{Im}(P)] \longrightarrow \mathrm{Im}(t|_{[\mathrm{Im}(P)]})$ é sobrejetor, e disso segue que

$$\dim[\mathrm{Im}(t \circ P \circ u)] \leq \dim(\mathrm{Im}(t|_{[\mathrm{Im}(P)]})) \leq \dim[\mathrm{Im}(P)].$$

Logo $[\mathrm{Im}(t \circ P \circ u)]$ tem base finita ou enumerável, e portanto $t \circ P \circ u \in P_{enum}(^nG;H)$, provando assim que $P_{enum}(^nE;F)$ é um ideal de polinômios.

4.2 Ideais de polinômios associados a um multi-ideal

À luz do fato de que polinômios são gerados por aplicações multilineares, é natural que multi-ideais gerem ideais de polinômios. Veremos nesta seção duas formas de se fazer isso.

A principal referência utilizada foi a dissertação [2].

Inspirados pelos Exemplos 4.1.2 e 4.1.3, definimos:

Definição 4.2.1 Seja $\mathcal{M}$ um multi-ideal. Dizemos que um polinômio $P \in P(^nE;F)$ pertence a $P_{\mathcal{M}}$, e neste caso escrevemos $P \in P_{\mathcal{M}}(^nE;F)$, se existe $A \in \mathcal{M}(^nE;F)$ tal que $\widehat{A} = P$.

Exemplo 4.2.2 (a) $P_f = P_{L_f}$, pela Proposição 2.1.2.
(b) $P_{\mathcal{F}} = P_{L_{\mathcal{F}}}$, pela Proposição 2.1.4.

Teorema 4.2.3 *Para todo multi-ideal $\mathcal{M}$, $P_{\mathcal{M}}$ é ideal de polinômios.*

Demonstração. Vejamos que $P_{\mathcal{M}}(^nE;F)$ é subespaço vetorial. Dados $P,\ Q \in P_{\mathcal{M}}(^nE;F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, existem $A,\ B \in \mathcal{M}(^nE;F)$ tais que $\widehat{A} = P$ e $\widehat{B} = Q$. Como $\mathcal{M}$ é multi-ideal, temos que $\mathcal{M}(^nE;F)$ é subespaço vetorial de $L(^nE;F)$, e disso segue que $A + \lambda B \in \mathcal{M}(^nE;F)$. Temos

$$P + \lambda Q = \widehat{A} + \lambda \widehat{B} = (A + \lambda B)^{\wedge}.$$

Assim existe $A + \lambda B \in \mathcal{M}(^nE;F)$ tal que $(A + \lambda B)^{\wedge} = P + \lambda Q$, o que prova que $P + \lambda Q \in P_{\mathcal{M}}(^nE;F)$. Portanto, $P_{\mathcal{M}}(^nE;F)$ é subespaço vetorial.

Vejamos que $P_f \subseteq P_{\mathcal{M}}$. Seja $P \in P_f(^nE;F)$. Pela Proposição 2.1.2 existe $A \in L_f(^nE;F)$ tal que $\widehat{A} = P$. Como $\mathcal{M}$ é multi-ideal, temos $L_f \subseteq \mathcal{M}$, logo $A \in \mathcal{M}(^nE;F)$ e $\widehat{A} = P$. Segue que $P \in P_{\mathcal{M}}(^nE;F)$.

Propriedade de ideal: dados $P \in P_{\mathcal{M}}(^nE;F)$, $u \in L(G;E)$ e $v \in L(F;H)$, existe $A \in \mathcal{M}(^nE;F)$ tal que $\widehat{A} = P$. Como $\mathcal{M}$ é multi-ideal, é verdade que $v \circ A \circ (u, \ldots, u) \in \mathcal{M}(^nG;H)$. Para todo $x \in G$,

$$\begin{aligned}(v \circ P \circ u)(x) =& v(P(u(x))) \\ &= v(\widehat{A}(u(x))) \\ &= v(A(u(x)^n)) \\ &= v \circ A \circ (u, \ldots, u)x^n \\ &= (v \circ A \circ (u, \ldots, u))^{\wedge}(x),\end{aligned}$$

ou seja, $v \circ P \circ u = (v \circ A \circ (u, \ldots, u))^{\wedge}$. Portanto $v \circ P \circ u \in P_{\mathcal{M}}(^nG;H)$, completando a demonstração de que $P_{\mathcal{M}}$ é ideal de polinômios. ■

A segunda forma de gerar ideais de polinômios a partir de multi-ideais também é muito natural:

Definição 4.2.4 Dado um multi-ideal $\mathcal{M}$, podemos também definir $P^{\mathcal{M}}$ por

$$P^{\mathcal{M}}(^nE;F) = \{P \in P(^nE;F) \colon \check{P} \in \mathcal{M}(^nE;F)\},$$

para todos $n \in \mathbb{N}$ e E e F espaços vetoriais.

Veja que, claramente, $P^{\mathcal{M}} \subseteq P_{\mathcal{M}}$.

Teorema 4.2.5 *Para todo multi-ideal $\mathcal{M}$, $P^{\mathcal{M}}$ é ideal de polinômios.*

Demonstração. Dados $P,\ Q \in P^{\mathcal{M}}(^nE;F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, por definição $\check{P},\ \check{Q} \in \mathcal{M}(^nE;F)$. Como $\mathcal{M}(^nE;F)$ é subespaço vetorial de $L(^nE;F)$, segue que

$$(P + \lambda Q)^{\vee} = \check{P} + \lambda \check{Q} \in \mathcal{M}(^nE;F),$$

o que prova que $P + \lambda Q \in P^{\mathcal{M}}(^nE;F)$. Portanto $P^{\mathcal{M}}(^nE;F)$ é subespaço vetorial de $P(^nE;F)$.

Sejam $\varphi \in E^*$, $b \in F$ e $n \in \mathbb{N}$. Então a aplicação

$$A \colon E^n \longrightarrow F \ , \ A(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n) \cdot b,$$

é n-linear de tipo finito, logo $A \in \mathcal{M}(^nE;F)$. É claro que A é simétrica e

$$\widehat{A}(x) = Ax^n = \varphi(x)^n \cdot b = (\varphi^n \otimes b)(x)$$

para todo $x \in E$. Assim, $(\varphi^n \otimes b)^\vee = A \in \mathcal{M}(^nE;F)$, provando que $(\varphi^n \otimes b) \in P^{\mathcal{M}}(^nE;F)$. Como os elementos de $P_f(^nE;F)$ são somas finitas de polinômios da forma $\varphi^n \otimes b$ e $P^{\mathcal{M}}(^nE;F)$ é subespaço vetorial, segue que $P_f \subseteq P^{\mathcal{M}}$.

Propriedade de ideal: sejam $P \in P^{\mathcal{M}}(^nE;F)$, $u \in L(G;E)$ e $v \in L(F;H)$. Note que dados $x_i \in G$, $i = 1, \ldots, n$ temos $v \circ \check{P} \circ (u, \ldots, u)(x_1, \ldots, x_n) = v(\check{P}(u(x_1), \ldots, u(x_n)))$. Logo $v \circ \check{P} \circ (u, \ldots, u) \in L^s(^nG;H)$. E de

$$\begin{aligned}(v \circ \check{P} \circ (u, \ldots, u))^\wedge(x) &= v \circ \check{P} \circ (u, \ldots, u)x^n \\ &= v(\check{P}(u(x))^n) \\ &= v(P(u(x))) \\ &= (v \circ P \circ u)(x),\end{aligned}$$

para qualquer $x \in G$, segue que $(v \circ P \circ u) = (v \circ \check{P} \circ (u, \ldots, u))^\wedge$. Como $\check{P} \in \mathcal{M}(^nE;F)$ e $\mathcal{M}$ é multi-ideal, temos $(v \circ P \circ u)^\vee = v \circ \check{P} \circ (u, \ldots, u) \in \mathcal{M}(^nG;H)$, provando que $v \circ P \circ u \in P^{\mathcal{M}}(^nG;H)$. ■

4.3 O método da fatoração

Nesta seção e nas próximas duas, adaptamos para ideais de polinômios as construções que fizemos nas Seções 3.2, 3.3 e 3.4 para aplicações multilineares.

Nesta seção a principal fonte de referência foi a dissertação [2].

Definição 4.3.1 Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores. Dizemos que um polinômio $P \in P(^nE;F)$ pertence à classe $P(\mathcal{I})$, e neste caso escrevemos $P \in P(\mathcal{I})(^nE;F)$, se existem um espaço vetorial G, um operador $u \in \mathcal{I}(E;G)$ e um polinômio $Q \in P(^nG;F)$ tais que $P = Q \circ u$, isto é, tal que o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "P"] \arrow[d, "u"'] & F \\ G \arrow[ur, "Q"'] & \end{tikzcd}$$

As seguintes caracterizações são importantes:

Proposição 4.3.2 *Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores. As seguintes afirmações são equivalentes para um polinômio $P \in P(^nE;F)$:*
(a) $P \in P(\mathcal{I})(^nE;F)$.
(b) *Existe $A \in L(\mathcal{I})(^nE;F)$ tal que $\widehat{A} = P$.*
(c) $\check{P} \in L(\mathcal{I})(^nE;F)$.

Demonstração. (a) $\Longrightarrow$ (b) Por hipótese, $P \in P(\mathcal{I})({}^nE;F)$, logo existem um espaço vetorial G, um operador $u \in \mathcal{I}(E;G)$ e um polinômio $Q \in P({}^nG;H)$ tais que $P = Q \circ u$. Note que

$$\check{Q} \circ (u, \dots, u)(x_1, \dots, x_n) = \check{Q}(u(x_1), \dots, u(x_n))$$

para todos $x_1, \dots, x_n \in E$, e então $\check{Q} \circ (u, \dots, u) \in L^s({}^nE;F)$ e

$$(\check{Q} \circ (u, \dots, u))^\wedge(x) = \check{Q} \circ (u, \dots, u)x^n = \check{Q}(u(x), \dots, u(x)) = Q(u(x)) = P(x),$$

para todo $x \in E$. Logo $\check{P} = \check{Q} \circ (u, \dots, u)$. Como $u \in \mathcal{I}(E;G)$, então $\check{P} = \check{Q} \circ (u, \dots, u) \in L(\mathcal{I})({}^nE;F)$. Portanto $\check{P} \in L(\mathcal{I})({}^nE;F)$ e $(\check{P})^\wedge = P$.

(b) $\Longrightarrow$ (c) Por hipótese existe $A \in L(\mathcal{I})({}^nE;F)$ tal que $\widehat{A} = P$. Então existem espaços vetoriais $G_1, \dots, G_n$, transformações lineares $u_1 \in \mathcal{I}(E;G_1), \dots, u_n \in \mathcal{I}(E;G_n)$ e $B \in L(G_1, \dots, G_n;F)$ tais que $A = B \circ (u_1, \dots, u_n)$. Seja $\sigma \in S_n$ e tome $A_\sigma \in L({}^nE;F)$ definida por

$$A_\sigma(x_1, \dots, x_n) = A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

para todos $x_1, \dots, x_n \in E$. Note que $\sigma^{-1} \in S_n$. Defina agora

$$\begin{gathered} B_\sigma \colon G_1 \times \cdots \times G_n \longrightarrow F \ , \\ B_\sigma(y_1, \dots, y_n) = B(y_{\sigma(1)}, \dots, y_{\sigma(n)}). \end{gathered}$$

É claro que $B_\sigma \in L(G_1, \dots, G_n;F)$ para todo $\sigma \in S_n$. De

$$\begin{aligned} A_\sigma(x_1, \dots, x_n) &= A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \\ &= B(u_1(x_{\sigma(1)}), \dots, u_n(x_{\sigma(n)})) \\ &= B(u_{\sigma(\sigma^{-1}(1))}(x_{\sigma(1)}), \dots, u_{\sigma(\sigma^{-1}(n))}(x_{\sigma(n)})) \\ &= B_{\sigma^2}(u_{\sigma^{-1}(1)}(x_1), \dots, u_{\sigma^{-1}(n)}(x_n)) \\ &= B_{\sigma^2} \circ (u_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, u_{\sigma^{-1}(n)})(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

para quaisquer $x_i \in E$, $i = 1, \dots, n$, segue que $A_\sigma = B_{\sigma^2} \circ (u_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, u_{\sigma^{-1}(n)})$. Como $B_{\sigma^2} \in L(G_1, \dots, G_n;F)$ e $u_{\sigma^{-1}(1)} \in \mathcal{I}(E;G_1), \dots, u_{\sigma^{-1}(n)} \in \mathcal{I}(E;G_n)$, concluímos que $A_\sigma \in L(\mathcal{I})({}^nE;F)$ para toda permutação $\sigma \in S_n$. Como $L(\mathcal{I})({}^nE;F)$ é subespaço vetorial, segue, pelo Teorema 2.1.11, que

$$\check{P} = A^s = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in S_n} A_\sigma \in L(\mathcal{I})({}^nE;F).$$

(c) $\Longrightarrow$ (a) Por hipótese, $\check{P} \in L(\mathcal{I})({}^nE;F)$, logo existem espaços vetoriais $G_1, \dots, G_n$, transformações lineares $u_j \in \mathcal{I}(E;G_j)$, $j = 1, \dots, n$ e $B \in L(G_1, \dots, G_n;F)$ tais que $\check{P} = B \circ (u_1, \dots, u_n)$:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "u_1"] & \times \cdots \times & E \arrow[r, "\check{P}"] \arrow[d, "u_n"] & F \\ G_1 & \times \cdots \times & G_n \arrow[ur, "B"'] & \end{tikzcd}$$

Sabendo que $G = G_1 \times \cdots \times G_n$ munido com as operações usuais de n-uplas é um espaço vetorial, é imediato que os operadores

$$\begin{gathered} u\colon E \longrightarrow G \ , \\ u(x) = (u_1(x), \ldots, u_n(x)), \end{gathered}$$

e

$$\begin{gathered} i_j\colon G_j \longrightarrow G \ , \\ i_j(x) = (0, \ldots, 0, x, 0, \ldots, 0), \end{gathered}$$

$j = 1, \ldots, n$, onde o x aparece na j-ésima entrada, são lineares. Estamos na seguinte situação:

$$\begin{tikzcd} E \times \cdots \times E \arrow[r, "\check{P}"] \arrow[d, "u_1"'] & F \\ G_1 \times \cdots \times G_n \arrow[ur, "B"'] \arrow[d, "i_1"'] & \\ G \times \cdots \times G & \end{tikzcd}$$

De

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{n} i_j \circ u_j \right)(x) &= \sum_{j=1}^{n} i_j(u_j(x)) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (0, \ldots, 0, u_j(x), 0, \ldots, 0) \\ &= (u_1(x), \ldots, u_n(x)) \\ &= u(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in E$, segue que $\sum\limits_{j=1}^{n} i_j \circ u_j = u$. Como $u_j \in \mathcal{I}(E; G_j)$ para todo $j = 1, \ldots, n$, então $i_j \circ u_j \in \mathcal{I}(E; G)$ para todo $j = 1, \ldots, n$. Temos também que $\mathcal{I}(E; G)$ é subespaço vetorial de $L(E; G)$, e portanto $u = \sum\limits_{j=1}^{n} i_j \circ u_j \in \mathcal{I}(E; G)$. Defina

$$\begin{gathered} Q\colon G \longrightarrow F \ , \\ Q((y_1, \ldots, y_n)) = B(y_1, \ldots, y_n). \end{gathered}$$

Para verificar que $Q \in P(^nG; F)$, defina

$$\begin{gathered} C\colon G^n \longrightarrow F \ , \\ C((y_1^1, \ldots, y_n^1), \ldots, (y_1^n, \ldots, y_n^n)) = B(y_1^1, y_2^2 \ldots, y_n^n). \end{gathered}$$

Vejamos que C é n-linear: dados $(x_1^i, \ldots, x_n^i), (y_1^i, \ldots, y_n^i) \in G, \ i = 1, \ldots, n$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned}
&C((y_1^1,\ldots,y_n^1),\ldots,(x_1^i,\ldots,x_n^i)+\lambda(y_1^i,\ldots,y_n^i),\ldots,(y_1^n,\ldots,y_n^n))\\
&\quad= C((y_1^1,\ldots,y_n^1),\ldots,(x_1^i+\lambda y_1^i,\ldots,x_n^i+\lambda y_n^i),\ldots,(y_1^n,\ldots,y_n^n))\\
&\quad= B(y_1^1,\ldots,x_i^i+\lambda y_i^i,\ldots,y_n^n)\\
&\quad= B(y_1^1,\ldots,x_i^i,\ldots,y_n^n)+\lambda B(y_1^1,\ldots,y_i^i,\ldots,y_n^n)\\
&\quad= C((y_1^1,\ldots,y_n^1),\ldots,(x_1^i,\ldots,x_n^i),\ldots,(y_1^n,\ldots,y_n^n))\\
&\qquad+\lambda C((y_1^1,\ldots,y_n^1),\ldots,(y_1^i,\ldots,y_n^i),\ldots,(y_1^n,\ldots,y_n^n)),
\end{aligned}$$

o que prova que $C \in L(^nG;E)$. E de

$$\widehat{C}((y_1,\ldots,y_n)) = C(y_1,\ldots,y_n)^n = B(y_1,y_2,\ldots,y_n) = Q((y_1,\ldots,y_n)),$$

para quaisquer $(y_1,\ldots,y_n) \in G$, segue que $\widehat{C} = Q$. Portanto, $Q \in P(^nG;F)$. Mais ainda,

$$\begin{aligned}
P(x) &= \check{P}x^n = B\circ(u_1,\ldots,u_n)x^n\\
&= B(u_1(x),\ldots,u_n(x))\\
&= Q((u_1(x),\ldots,u_n(x)))\\
&= Q(u(x))\\
&= Q\circ u(x)
\end{aligned}$$

para qualquer $x \in E$. Logo $P = Q\circ u$ com $Q \in P(^nG;F)$ e $u \in \mathcal{I}(E;G)$. Portanto, $P \in P(\mathcal{I})(^nE;F)$. ■

Corolário 4.3.3 *Para todo ideal de operadores* $\mathcal{I}$, $P(\mathcal{I}) = P_{L(\mathcal{I})} = P^{L(\mathcal{I})}$ *e portanto* $P(\mathcal{I})$ *é ideal de polinômios.*

Demonstração. A equivalência (a) $\Longleftrightarrow$ (b) da Proposição 4.3.2 prova que $P(\mathcal{I}) = P_{L(\mathcal{I})}$, e a equivalência (a) $\Longleftrightarrow$ (c) do mesmo resultado prova que $P(\mathcal{I}) = P^{L(\mathcal{I})}$. Do Teorema 4.2.3 ou do Teorema 4.2.5 segue que $P(\mathcal{I})$ é um ideal de polinômios. ■

4.4 O método da linearização

Assim como fizemos na Seção 3.3 para multi-ideais, definimos:

Definição 4.4.1 Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores. Dizemos que um polinômio $P \in P(^nE;F)$ pertence à classe $P[\mathcal{I}]$, e neste caso escrevemos $P \in P[\mathcal{I}](^nE;F)$, se $\check{P} \in [\mathcal{I}](^nE;F)$.

Relembre da Proposição 2.1.14 que se $P \in P(^nE;F)$, então

$$\phi\colon P(^nE;F) \longrightarrow L(E;P(^{n-1}E;F)),$$

onde

$$\phi(P)\colon E \longrightarrow P(^{n-1}E;F)$$

é definida por

$$\phi(P)(x)(y) = \check{P}(x,y^{n-1}),$$

é operador linear.

Também neste caso temos caracterizações importantes e úteis:

Proposição 4.4.2 *Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores. As seguintes afirmações são equivalentes para um polinômio $P \in P(^nE;F)$:*
(a) $P \in P[\mathcal{I}](^nE;F)$
(b) *Existe* $A \in [\mathcal{I}](^nE;F)$ *tal que* $\widehat{A} = P$.
(c) $\phi(P) \in [\mathcal{I}](E;P(^{n-1}E;F))$.

Demonstração. (a) $\Longrightarrow$ (b) Por hipótese $P \in P[\mathcal{I}](^nE;F)$, logo $\check{P} \in [\mathcal{I}](^nE;F)$. Basta tomar $A = \check{P}$ para comprovar (b).

(b) $\Longrightarrow$ (a) A demonstração desta equivalência pode ser encontrada em [5, Theorem 5.2].

(a) $\Longrightarrow$ (c) Note que

$$V_{j,n-1}(\check{P})(x_j)(x_1,\overset{(j)}{\ldots},x_n) = \check{P}(x_1,\ldots,x_n) = V_{i,n-1}(\check{P})(x_i)(x_1,\overset{(i)}{\ldots},x_n)$$

para todos $i,\ j \in 1,\ldots,n$ e $x_1,\ldots,x_n \in E$.

Por hipótese temos $\check{P} \in [\mathcal{I}](^nE;F)$, então $V_{1,n-1}(\check{P}) \in \mathcal{I}(E;L(^{n-1}E;F))$. Defina:

$$\begin{aligned} v\colon L(^{n-1}E;F) &\longrightarrow P(^{n-1}E;F)\ , \\ v(A) &= \widehat{A}. \end{aligned}$$

Temos claramente que v é linear. E,

$$v \circ V_{1,n-1}(\check{P})\colon E \longrightarrow P(^{n-1}E;F)$$

é tal que

$$\begin{aligned} v \circ V_{1,n-1}(\check{P})(x)(y) &= v((V_{1,n-1}(\check{P})(x)))(y) \\ &= (V_{1,n-1}(\check{P})(x))^\wedge(y) \\ &= V_{1,n-1}(\check{P})(x)y^{n-1} \\ &= \check{P}(x,y^{n-1}) \\ &= \phi(P)(x)(y) \end{aligned}$$

para quaisquer $x,\ y \in E$. Então

$$\phi(P) = v \circ V_{1,n-1}(\check{P}) \in \mathcal{I}(E;P(^{n-1}E;F)),$$

pois $V_{1,n-1}(\check{P}) \in \mathcal{I}(E;L(^{n-1}E;F))$.

(c) $\Longrightarrow$ (a) Considere o operador

$$\begin{aligned} u\colon P(^{n-1}E;F) &\longrightarrow L(^{n-1}E;F)\ , \\ u(P) &= \check{P}, \end{aligned}$$

que já sabemos ser linear. Note que o operador

$$u \circ \phi(P)\colon E \longrightarrow L(^{n-1}E;F),$$

é tal que

$$u \circ \phi(P)(x_j)(x_1,\overset{(j)}{\ldots},x_n) = u \circ \phi(P)(x_n)(x_1,\ldots,x_{n-1})$$

para todos $x_i \in E, i = 1, \ldots, n$. De

$$\begin{aligned} u \circ \phi(P)(x_n)(x_1, \ldots, x_{n-1}) &= u(\phi(P)(x_n))(x_1, \ldots, x_{n-1}) \\ &= (\phi(P)(x_n))^{\vee}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \sum_{\sigma \in S_n} \check{P}(x_n, x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n-1)}) \\ &= \check{P}(x_n, x_1, \ldots, x_{n-1}) \\ &= \check{P}(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \\ &= V_{n,n-1}(\check{P})(x_n)(x_1, \ldots, x_{n-1}), \end{aligned}$$

para quaisquer $x_i \in E,\ i = 1, \ldots, n$, podemos concluir que $V_{n,n-1}(\check{P}) = u \circ \phi(P)$. Como $\phi(P) \in \mathcal{I}(E; P(^{n-1}E; F))$ por hipótese, segue que $V_{n,n-1}(\check{P}) = u \circ \phi(P) \in \mathcal{I}(E; L(^{n-1}E; F))$. Logo, $\check{P} \in [\mathcal{I}](^nE; F)$. E, portanto, $P \in P[\mathcal{I}](^nE; F)$. ■

Corolário 4.4.3 *Para todo ideal de operadores, $P[\mathcal{I}] = P_{[\mathcal{I}]} = P^{[\mathcal{I}]}$ e portanto $P[\mathcal{I}]$ é ideal de polinômios.*

Demonstração. Por definição $P[\mathcal{I}] = P^{[\mathcal{I}]}$, e pela equivalência (a) $\Longleftrightarrow$ (b) da Proposição 4.4.2 temos $P[\mathcal{I}] = P_{[\mathcal{I}]}$. Do Teorema 4.2.3 ou do Teorema 4.2.5 segue que $P[\mathcal{I}]$ é um ideal de polinômios. ■

4.5 Ideais de composição

Por fim, adaptamos para polinômios o que fizemos na Seção 3.4 para aplicações multilineares.

Definição 4.5.1 Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores. Dizemos que um polinômio $P \in P(^nE; F)$ pertence à clase $\mathcal{I} \circ P$, e neste caso escrevemos $P \in \mathcal{I} \circ P(^nE; F)$, se existem um espaço vetorial G, um operador $u \in \mathcal{I}(G; F)$ e um polinômio $Q \in P(^nE; G)$ tais que $P = u \circ Q$, ou seja, tais que o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "P"] \arrow[d, "Q"'] & F \\ G \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

Uma vez mais temos caracterizações que nos ajudarão a estudar esta classe:

Proposição 4.5.2 *Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores. As seguintes afirmações são equivalentes para um polinômio $P \in P(^nE; F)$:*
(a) $P \in \mathcal{I} \circ P(^nE; F)$
(b) *Existe $A \in \mathcal{I} \circ L(^nE; F)$ tal que $\widehat{A} = P$.*
(c) $\check{P} \in \mathcal{I} \circ L(^nE; F)$.

Demonstração. (a) $\Longrightarrow$ (c) Por hipótese $P \in \mathcal{I} \circ P(^nE;F)$, logo existem um espaço vetorial G, um operador $u \in \mathcal{I}(G;F)$ e um polinômio $Q \in P(^nE;G)$ tais que $P = u \circ Q$. Note que $u \circ \check{Q}(x_1,\ldots,x_n) = u(\check{Q}(x_1,\ldots,x_n))$ para todos $x_1,\ldots,x_n \in E$. Como u é linear e $\check{Q} \in L^s(^nE;F)$, segue que $u \circ \check{Q} \in L^s(^nE;F)$. E de

$$(u \circ \check{Q})^\wedge(x) = (u \circ \check{Q})x^n = u(\check{Q}x^n) = u(Q(x)) = u \circ Q(x) = P(x)$$

para todo $x \in E$, concluímos que $\check{P} = u \circ \check{Q}$. Como $u \in \mathcal{I}(G;F)$ e $\check{Q} \in L(^nE;G)$, então $\check{P} = u \circ \check{Q} \in \mathcal{I} \circ L(^nE;F)$.

(c) $\Longrightarrow$ (b) Basta tomar $A = \check{P}$.

(b) $\Longrightarrow$ (a) Por hipótese existe $A \in \mathcal{I} \circ L(^nE;F)$ tal que $\widehat{A} = P$. Existem então um espaço vetorial G, uma aplicação n-linear $B \in L(^nE;G)$ e uma transformação linear $u \in \mathcal{I}(G;F)$ tais que $A = u \circ B$. Neste caso,

$$P(x) = \widehat{A}(x) = Ax^n = (u \circ B)x^n = u(Bx^n) = u(\widehat{B}(x)) = u \circ \widehat{B}(x),$$

para todo $x \in E$. Isso prova que $P = u \circ \widehat{B}$. Como $\widehat{B} \in P(^nE;G)$ e $u \in \mathcal{I}(G;F)$, temos $P = u \circ \widehat{B} \in \mathcal{I} \circ P(^nE;F)$. ■

Corolário 4.5.3 *Para todo ideal de operadores $\mathcal{I}$, $\mathcal{I} \circ P = P_{\mathcal{I} \circ L} = P^{\mathcal{I} \circ L}$ e portanto $\mathcal{I} \circ P$ é ideal de polinômios.*

Demonstração. A equivalência (a) $\Longleftrightarrow$ (b) da Proposição 4.5.2 prova que $\mathcal{I} \circ P = P_{\mathcal{I} \circ L}$, e a equivalência (a) $\Longleftrightarrow$ (c) do mesmo resultado prova que $\mathcal{I} \circ P = P^{\mathcal{I} \circ L}$. Do Teorema 4.2.3 ou do Teorema 4.2.5 segue que $\mathcal{I} \circ P$ é um ideal de polinômios. ■

CAPÍTULO 5

IDEAIS COERENTES

Uma característica central dos multi-ideais é que, para cada $n \in \mathbb{N}$, todo multi-ideal $\mathcal{M}$ abriga uma classe de aplicações n-lineares, a saber

$$\bigcup_{E_1,\ldots,E_n,F} \mathcal{M}(E_1,\ldots,E_n;F).$$

Podemos então, usando as técnicas de aumentar e diminuir o grau de multilinearidade, aprendidos nas seções 1.3 e 1.5, nos mover dentro de um multi-ideal passando de um grau de multilinearidade para outro. Certamente não há interesse em estudar multi-ideais nos quais as aplicações de um determinado grau de multilinearidade nada têm a ver com as aplicações de um outro grau. Por isso os multi-ideais mais importantes são aqueles que são estáveis por aumento ou diminuição do grau de multilinearidade. Mais especificamente, estamos interessados em multi-ideais $\mathcal{M}$ tais que se uma aplicação multilinear A pertence a $\mathcal{M}$, então as aplicações multilineares obtidas a partir de A, tanto aumentando quanto diminuindo o grau de multilinearidade, continuam pertencendo a $\mathcal{M}$. Tais multi-ideais são chamados de *coerentes* e serão o objeto de estudo da primeira seção deste capítulo.

As propriedades de estabilidade de um multi-ideal foram estudadas pela primeira vez em [4], e depois foram fartamente exploradas. Veja, por exemplo, [3, 9, 10, 12, 13].

Toda discussão anterior faz sentido também para ideais de polinômios, pois para estes também aprendemos como aumentar e diminuir o grau de homogeneidade. Por isso privilegiamos também o estudo de ideais coerentes de polinômios, o qual será feito na segunda seção do capítulo.

5.1 Multi-ideais coerentes

Utilizaremos na definição a seguir a notação estabelecida no Corolário 1.3.3 e no Teorema 1.5.2.

Definição 5.1.1 Dizemos que um multi-ideal $\mathcal{M}$ é *coerente* se satisfaz as seguintes condições:
(i) Dados os espaços vetoriais $E_1,\ldots,E_n,F$ e número naturais $j_1 < j_2 < \ldots < j_{n_1},\ k_1 <$

$k_2 < \ldots < k_{n_2}$ tais que

$$\{j_1, \ldots, j_{n_1}\} \cup \{k_1, \ldots, k_{n_2}\} = \{1, \ldots, n\},$$

se $A \in \mathcal{M}(E_{j_1}, \ldots, E_{j_{n_1}}; F)$ e $\varphi_{k_i} \in E^*_{k_i}$, $i = 1, \ldots, n_2$, então $\varphi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$, onde

$$\varphi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes A(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_{k_1}(x_{k_1}) \cdots \varphi_{k_{n_2}}(x_{k_{n_2}}) A(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n_1}}).$$

(ii) Dados uma aplicação $A \in \mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F)$, números naturais $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}$ com $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$, e vetores $a_{j_1} \in E_{j_1}, \ldots, a_{j_k} \in E_{j_k}$, então

$$A_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}} \in \mathcal{M}(E_{i_1}, \ldots, E_{i_{n-k}}; F),$$

onde $\{j_1, \ldots, j_k\} \cup \{i_1, \ldots, i_{n-k}\} = \{1, \ldots, n\}$ e $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-k}$.

Exemplo 5.1.2 (Um multi-ideal não coerente). Apresentamos a seguir um exemplo de um multi-ideal do tipo que, de acordo com a introdução deste capítulo, não estamos interessados.

Considere o multi-ideal $\mathcal{M}$ definido da seguinte forma: para todos espaços vetoriais $E, E_1, \ldots, E_n, F$,

$\mathcal{M}(^1E; F) := \mathcal{F}(E; F)$,
$\mathcal{M}(E_1, \ldots, E_n; F) \colon = L_{enum}(E_1, \ldots, E_n; F)$, para todo $n \geq 2$.

Vejamos que $\mathcal{M}$ não é coerente. Para isso considere E um espaço vetorial com base enumerável, por exemplo $\{f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \text{ é polinômio}\}$, com as operações usuais de funções. Sejam também $\varphi \in E^*$ e $a \in E$ tais que $\varphi(a) = 1$. Já sabemos que $\varphi \otimes Id_E \in L(^2E; E)$, e é claro que $[\mathrm{Im}(\varphi \otimes Id_E)] \subseteq E$. Logo

$$\varphi \otimes Id_E \in L_{enum}(^2E; F) = \mathcal{M}(^2E; F).$$

Por outro lado temos $(\varphi \otimes Id_E)_a \colon E \longrightarrow F$,

$$(\varphi \otimes Id_E)_a(x) = \varphi \otimes Id_E(a, x) = \varphi(a) \cdot x = x,$$

para todo $x \in E$. Então $(\varphi \otimes Id_E)_a = Id_E \notin \mathcal{F}(E; F) = \mathcal{M}(E; F)$, pois E tem dimensão infinita. Portanto, $\mathcal{M}$ não é coerente.

É para evitar multi-ideais deste tipo que definimos ideais coerentes. Passamos agora a verificar que os ideais com os quais temos trabalhado nesta dissertação são coerentes, e também que as técnicas que vimos para gerar multi-ideais a partir de ideais de operadores geram multi-ideais coerentes.

Proposição 5.1.3 *O multi-ideal L_f das aplicações multilineares de tipo finito é coerente.*

Demonstração. (i) Sejam $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços vetoriais, $j_1 < j_2 < \ldots < j_{n_1},\ k_1 < k_2 < \ldots < k_{n_2}$ tais que $\{j_1, \ldots, j_{n_1}\} \cup \{k_1, \ldots, k_{n_2}\} = \{1, \ldots, n\},\ A \in L_f(E_{j_1}, \ldots, E_{j_{n_1}}; F)$ e $\varphi_{k_i} \in E_{k_i}^*,\ i = 1, \ldots, n_2$. Da definição de aplicações multilineares de tipo finito existem um número natural $m \in \mathbb{N}$, funcionais lineares $\psi_{j_l,s} \in E_{j_l}^*$ e vetores $b_s \in F,\ l = 1, \ldots, n_1,\ s = 1, \ldots, m$ tais que

$$A = \sum_{s=1}^{m} \psi_{j_1,s} \otimes \cdots \otimes \psi_{j_{n_1},s} \otimes b_s.$$

Então

$$\begin{aligned}
\varphi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_{n2}} \otimes A(x_1, \ldots, x_n) &= \varphi_{k_1}(x_{k_1}) \cdots \varphi_{k_{n_2}}(x_{k_{n_2}}) A(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n_1}}) \\
&= \varphi_{k_1}(x_{k_1}) \cdots \varphi_{k_{n_2}}(x_{k_{n_2}}) \left(\sum_{s=1}^{m} \psi_{j_1,s} \otimes \cdots \otimes \psi_{j_{n_1},s} \otimes b_s(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n_1}}) \right) \\
&= \varphi_{k_1}(x_{k_1}) \cdots \varphi_{k_{n_2}}(x_{k_{n_2}}) \left(\sum_{s=1}^{m} \psi_{j_1,s}(x_{j_1}) \cdots \psi_{j_{n_1},s}(x_{j_{n_1}}) b_s \right) \\
&= \sum_{s=1}^{m} \psi_{j_1,s}(x_{j_1}) \cdots \psi_{j_{n_1},s}(x_{j_{n_1}}) \varphi_{k_1}(x_{k_1}) \cdots \varphi_{k_{n_2}}(x_{k_{n_2}}) b_s \\
&= \left(\sum_{s=1}^{m} \psi_{j_1,s} \otimes \cdots \otimes \psi_{j_{n_1},s} \otimes \varphi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes b_s \right) (x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

para quaisquer $x_t \in E_t,\ t = 1, \ldots, n$. Isso prova que

$$\varphi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes A = \sum_{s=1}^{m} \psi_{j_1,s} \otimes \cdots \otimes \psi_{j_{n_1},s} \otimes \varphi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes b_s,$$

que é, por definição, uma aplicação multilinear de tipo finito, ou seja $\varphi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_{n2}} \otimes A \in L_f(E_1, \ldots, E_n; F)$.

(ii) Sejam $A \in L_f(E_1, \ldots, E_n; F),\ j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\},\ j_1 < j_2 < \ldots < j_k,\ a_{j_1} \in E_{j_1}, \ldots, a_{j_k} \in E_{j_k}$, onde $\{j_1, \ldots, j_k\} \cup \{i_1, \ldots, i_{n-k}\} = \{1, \ldots, n\}$ e $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-k}$. Então existem um número natural $s \in \mathbb{N}$, funcionais lineares $\varphi_{l,m} \in E_l^*$ e vetores $b_m \in F,\ l = 1, \ldots, n,\ m = 1, \ldots, s$ tais que

$$A = \sum_{m=1}^{s} \varphi_{1,m} \otimes \cdots \otimes \varphi_{n,m} \otimes b_m.$$

Dados $x_{i_1} \in E_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}} \in E_{i_{n-k}}$, chamando

$$y_r = \begin{cases} x_{i_v} & \text{se} \quad r = i_v \\ a_{j_t} & \text{se} \quad r = j_t, \end{cases}$$

em que $t = 1, \ldots, k,\ v = 1, \ldots, n-k$ e $r = 1, \ldots, n$, da mesma forma como fizemos no Teorema 1.5.2, temos

$$
\begin{aligned}
A_{a_{j_1},\dots,a_{j_k}}(x_{i_1},\dots,x_{i_{n-k}}) &= A(y_1,\dots,y_n)\\
&= \left(\sum_{m=1}^{s}\varphi_{1,m}\otimes\cdots\otimes\varphi_{n,m}\otimes b_m\right)(y_1,\dots,y_n)\\
&= \sum_{m=1}^{s}\varphi_{1,m}(y_1)\cdots\varphi_{n,m}(y_n)\cdot b_m\\
&= \sum_{m=1}^{s}\varphi_{j_1,m}(a_{j_1})\cdots\varphi_{j_k,m}(a_{j_k})\varphi_{i_1,m}(x_{i_1})\cdots\varphi_{i_{n-k},m}(x_{i_{n-k}})\cdot b_m\\
&= \sum_{m=1}^{s}\varphi_{i_1,m}(x_{i_1})\cdots\varphi_{i_{n-k},m}(x_{i_{n-k}})\left[\varphi_{j_1,m}(a_{j_1})\cdots\varphi_{j_k,m}(a_{j_k})\cdot b_m\right]\\
&= \sum_{m=1}^{s}\varphi_{i_1,m}\otimes\cdots\otimes\varphi_{i_{n-k},m}\otimes\left[\varphi_{j_1,m}(a_{j_1})\cdots\varphi_{j_k,m}(a_{j_k})\cdot b_m\right](x_{i_1},\dots,x_{i_{n-k}})
\end{aligned}
$$

para quaisquer $x_{i_1}\in E_{i_1},\dots,x_{i_{n-k}}\in E_{i_{n-k}}$. Isso prova que

$$
A_{a_{j_1},\dots,a_{j_k}} = \sum_{m=1}^{s}\varphi_{i_1,m}\otimes\cdots\otimes\varphi_{i_{n-k},m}\otimes\left[\varphi_{j_1,m}(a_{j_1})\cdots\varphi_{j_k,m}(a_{j_k})\cdot b_m\right],
$$

onde $\varphi_{i_1,m}\in E_{i_1}^*,\dots,\varphi_{i_{n-k},m}\in E_{i_{n-k}}^*$ e $\varphi_{j_1,m}(a_{j_1})\cdots\varphi_{j_k,m}(a_{j_k})\cdot b_m\in F$. Assim, $A_{a_{j_1},\dots,a_{j_k}}\in L_f(E_{i_1},\dots,E_{i_{n-k}};F)$. Portanto, L_f é multi-ideal coerente. ■

Proposição 5.1.4 *O multi-ideal $L_{\mathcal{F}}$ das aplicações multilineares de posto finito é coerente.*

Demonstração. (i) Sejam $E_1,\dots,E_n,F$ espaços vetoriais, $j_1<j_2<\dots<j_{n_1}$, $k_1<k_2<\dots<k_{n_2}$ tais que $\{j_1,\dots,j_{n_1}\}\cup\{k_1,\dots,k_{n_2}\}=\{1,\dots,n\}$, $A\in L_{\mathcal{F}}(E_{j_1},\dots,E_{j_{n_1}};F)$ e $\varphi_{k_i}\in E_{k_i}^*$, $i=1,\dots,n_2$. Por definição existem um número natural $m\in\mathbb{N}$, formas multilineares $A_1,\dots,A_m\in L(E_{j_1},\dots,E_{j_{n_1}})$ e vetores $b_1,\dots,b_m\in F$ tais que $A=\sum\limits_{s=1}^{m}A_s\otimes b_s$. Então

$$
\begin{aligned}
\varphi_{k_1}\otimes\cdots\otimes\varphi_{k_{n_2}}\otimes A(x_1,\dots,x_n) &= \varphi_{k_1}(x_{k_1})\cdots\varphi_{k_{n_2}}(x_{k_{n_2}})A(x_{j_1},\dots,x_{j_{n_1}})\\
&= \varphi_{k_1}(x_{k_1})\cdots\varphi_{k_{n_2}}(x_{k_{n_2}})\left(\sum_{s=1}^{m}A_s\otimes b_s(x_{j_1},\dots,x_{j_{n_1}})\right)\\
&= \varphi_{k_1}(x_{k_1})\cdots\varphi_{k_{n_2}}(x_{k_{n_2}})\left(\sum_{s=1}^{m}A_s(x_{j_1},\dots,x_{j_{n_1}})\cdot b_s\right)\\
&= \sum_{s=1}^{m}A_s(x_{j_1},\dots,x_{j_{n_1}})\varphi_{k_1}(x_{k_1})\cdots\varphi_{k_{n_2}}(x_{k_{n_2}})\cdot b_s\\
&= \sum_{s=1}^{m}A_s\otimes\varphi_{k_1}\otimes\cdots\otimes\varphi_{k_{n_2}}\otimes b_s(x_1,\dots,x_n)
\end{aligned}
$$

para quaisquer $x_t \in E_t,\ t = 1, \ldots, n$. Isso prova que

$$\varphi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes A = \sum_{s=1}^{m} A_s \otimes \varphi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes b_s.$$

Como $A_s \otimes \varphi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \in L(E_1, \ldots, E_n)$ pelo Corolário 1.3.3, e $b_s \in F,\ s = 1, \ldots, m$, temos

$$\varphi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes A = \sum_{s=1}^{m} A_s \otimes \varphi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes b_s \in L_{\mathcal{F}}(E_1, \ldots, E_n; F).$$

(ii) Sejam $A \in L_{\mathcal{F}}(E_1, \ldots, E_n; F),\ j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\},\ j_1 < j_2 < \ldots < j_k,\ a_{j_1} \in E_{j_1}, \ldots, a_{j_k} \in E_{j_k}$, onde $\{j_1, \ldots, j_k\} \cup \{i_1, \ldots, i_{n-k}\} = \{1, \ldots, n\}$ e $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-k}$. Por definição podemos tomar $s \in \mathbb{N},\ A_1, \ldots, A_s \in L(E_1, \ldots, E_n)$ e $b_1, \ldots, b_s \in F$ tais que $A = \sum\limits_{l=1}^{s} A_l \otimes b_l$. Dados $x_{i_1} \in E_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}} \in E_{i_{n-k}}$, chamando

$$y_r = \begin{cases} x_{i_v} & \text{se} \quad r = i_v \\ a_{j_t} & \text{se} \quad r = j_t, \end{cases}$$

em que $t = 1, \ldots, k,\ v = 1, \ldots, n-k$ e $r = 1, \ldots, n$, como fizemos no Teorema 1.5.2, temos

$$\begin{aligned} A_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}) &= A(y_1, \ldots, y_n) \\ &= \left(\sum_{l=1}^{s} A_l \otimes b_l \right)(y_1, \ldots, y_n) \\ &= \sum_{l=1}^{s} A_l(y_1, \ldots, y_n) \cdot b_l \\ &= \sum_{l=1}^{s} (A_l)_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}) \cdot b_l \\ &= \left(\sum_{l=1}^{s} (A_l)_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}} \otimes b_l \right)(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}) \end{aligned}$$

para quaisquer $x_{i_1} \in E_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}} \in E_{i_{n-k}}$. Isso prova que

$$A_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}} = \sum_{l=1}^{s} (A_l)_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}} \otimes b_l.$$

Pelo Teorema 1.5.2 sabemos que $(A_l)_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}} \in L(E_{i_1}, \ldots, E_{i_{n-k}})$, e como $b_l \in F,\ l = 1, \ldots, s$, segue que

$$A_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}} = \sum_{l=1}^{s} (A_l)_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}} \otimes b_l \in L_{\mathcal{F}}(E_{i_1}, \ldots, E_{i_{n-k}}; F).$$

Portanto, $L_{\mathcal{F}}$ é coerente. ■

Proposição 5.1.5 *O multi-ideal L_{enum} das aplicações multilineares de posto enumerável é coerente.*

Demonstração. (i) Sejam $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços vetoriais, $j_1 < j_2 < \ldots < j_{n_1},\ k_1 < k_2 < \ldots < k_{n_2}$ tais que $\{j_1, \ldots, j_{n_1}\} \cup \{k_1, \ldots, k_{n_2}\} = \{1, \ldots, n\},\ A \in L_{enum}(E_{j_1}, \ldots, E_{j_{n_1}}; F)$ e $\varphi_{k_i} \in E^*_{k_i},\ i = 1, \ldots, n_2$. Por definição $A \in L(E_{j_1}, \ldots, E_{j_{n_1}}; F)$ e $[\mathrm{Im}(A)]$ tem base finita ou enumerável. Para todos $x_t \in E_t,\ t = 1, \ldots, n$, temos

$$\begin{aligned}\varphi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes A(x_1, \ldots, x_n) &= \varphi_{k_1}(x_{k_1}) \cdots \varphi_{k_{n_2}}(x_{k_{n_2}}) A(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n_1}}) \\ &= A(\varphi_{k_1}(x_{k_1}) \cdots \varphi_{k_{n_2}}(x_{k_{n_2}}) \cdot x_{j_1}, x_{j_2} \ldots, x_{j_{n_1}}) \in \mathrm{Im}(A)\end{aligned}$$

Provamos que

$$\mathrm{Im}(\varphi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes A) \subseteq \mathrm{Im}(A),$$

e disso segue imediatamente que

$$[\mathrm{Im}(\varphi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes A)] \subseteq [\mathrm{Im}(A)].$$

Como $[\mathrm{Im}(A)]$ tem base finita ou enumerável, decorre que $[\mathrm{Im}(\varphi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes A)]$ também tem base finita ou enumerável, ou seja, $\varphi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes A \in L_{enum}(E_1, \ldots, E_n; F)$.

(ii) Sejam $A \in L_{enum}(E_1, \ldots, E_n; F),\ j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\},\ j_1 < j_2 < \ldots < j_k$, $a_{j_1} \in E_{j_1}, \ldots, a_{j_k} \in E_{j_k}$, onde $\{j_1, \ldots, j_k\} \cup \{i_1, \ldots, i_{n-k}\} = \{1, \ldots, n\}$ e $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-k}$. Então $A \in L(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $[\mathrm{Im}(A)]$ tem base finita ou enumerável. Dados $x_{i_1} \in E_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}} \in E_{i_{n-k}}$, chamando

$$y_r = \begin{cases} x_{i_v} & \text{se} \quad r = i_v \\ a_{j_t} & \text{se} \quad r = j_t, \end{cases}$$

em que $t = 1, \ldots, k,\ v = 1, \ldots, n-k$ e $r = 1, \ldots, n$, como no Teorema 1.5.2, temos

$$A_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}) = A(y_1, \ldots, y_n) \in \mathrm{Im}(A).$$

Provamos que $\mathrm{Im}(A_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}}) \subseteq \mathrm{Im}(A)$, e disso decorre imediatamente que $[\mathrm{Im}(A_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}})] \subseteq [\mathrm{Im}(A)]$. Como $[\mathrm{Im}(A)]$ tem base finita ou enumerável, segue que $[\mathrm{Im}(A_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}})]$ também tem base finita ou enumerável, ou seja, $A_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}} \in L_{enum}(E_{i_1}, \ldots, E_{i_{n-k}}; F)$. Portanto o multi-ideal L_{enum} é coerente. ■

Proposição 5.1.6 *Para todo ideal de operadores $\mathcal{I}$, o multi-ideal $L(\mathcal{I})$ gerado pelo método da fatoração é coerente.*

Demonstração. (i) Sejam $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços vetoriais, $j_1 < j_2 < \ldots < j_{n_1},\ k_1 < k_2 < \ldots < k_{n_2}$ tais que $\{j_1, \ldots, j_{n_1}\} \cup \{k_1, \ldots, k_{n_2}\} = \{1, \ldots, n\},\ A \in L(\mathcal{I})(E_{j_1}, \ldots, E_{j_{n_1}}; F)$ e $\varphi_{k_i} \in E^*_{k_i},\ i = 1, \ldots, n_2$. Pela definição de $L(\mathcal{I})$ existem espaços vetoriais $G_{j_1}, \ldots, G_{j_{n_1}}$, operadores lineares $u_{j_1} \in \mathcal{I}(E_{j_1}; G_{j_1}), \ldots, u_{j_{n_1}} \in \mathcal{I}(E_{j_{n_1}}; G_{j_{n_1}})$ e uma aplicação multilinear $B \in L(G_{j_1}, \ldots, G_{j_{n_1}}; F)$ tais que $A = B \circ (u_{j_1}, \ldots, u_{j_{n_1}})$. Defina

$$\begin{gathered} B' \colon G_{j_1} \times \cdots \times G_{j_{n_1}} \times \mathbb{K} \times \overset{k_{n_2}}{\cdots} \times \mathbb{K} \longrightarrow F; \\ B'(y_{j_1}, \ldots, y_{j_{n_1}}, \lambda_{k_1}, \ldots, \lambda_{k_{n_2}}) = \lambda_{k_1} \cdots \lambda_{k_{n_2}} B(y_{j_1}, \ldots, y_{j_{n_1}}). \end{gathered}$$

A n-linearidade de B' é clara. De

$$\begin{aligned}
B' \circ (u_{j_1}, \ldots, u_{j_{n_1}}, &\varphi_{k_1}, \ldots, \varphi_{k_{n_2}})(x_1, \ldots, x_n) \\
&= B'(u_{j_1}(x_{j_1}), \ldots, u_{j_{n_1}}(x_{j_{n_1}}), \varphi_{k_1}(x_{k_1}), \ldots, \varphi_{k_{n_2}}(x_{k_{n_2}})) \\
&= \varphi_{k_1}(x_{k_1}) \cdots \varphi_{k_{n_2}}(x_{k_{n_2}}) B(u_{j_1}(x_{j_1}), \ldots, u_{j_{n_1}}(x_{j_{n_1}})) \\
&= \varphi_{k_1}(x_{k_1}) \cdots \varphi_{k_{n_2}}(x_{k_{n_2}}) A(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n_1}}) \\
&= \varphi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes A(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

para quaisquer $x_t \in E_t,\ t = 1, \ldots, n$, concluímos que

$$\varphi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes A = B' \circ (u_{j_1}, \ldots, u_{j_{n_1}}, \varphi_{k_1}, \ldots, \varphi_{k_{n_2}}).$$

Como B' é n-linear e $u_{j_1}, \ldots, u_{j_{n_1}}, \varphi_{k_1}, \ldots, \varphi_{k_{n_2}} \in \mathcal{I}$, então $\varphi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes A \in L(\mathcal{I})(E_1, \ldots, E_n; F)$.

(ii) Sejam $A \in L(\mathcal{I})(E_1, \ldots, E_n; F),\ j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\},\ j_1 < j_2 < \ldots < j_k,\ a_{j_1} \in E_{j_1}, \ldots, a_{j_k} \in E_{j_k}$, onde $\{j_1, \ldots, j_k\} \cup \{i_1, \ldots, i_{n-k}\} = \{1, \ldots, n\}$ e $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-k}$. Então existem espaços vetoriais $G_1, \ldots, G_n$, operadores lineares $u_1 \in \mathcal{I}(E_1; G_1), \ldots, u_n \in \mathcal{I}(E_n; G_n)$ e uma aplicação multilinear $B \in L(G_1, \ldots, G_n; F)$ tais que $A = B \circ (u_1, \ldots, u_n)$. Dados $x_{i_1} \in E_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}} \in E_{i_{n-k}}$, chamando

$$y_r = \begin{cases} x_{i_v} & \text{se} \quad r = i_v \\ a_{j_t} & \text{se} \quad r = j_t, \end{cases}$$

em que $t = 1, \ldots, k,\ v = 1, \ldots, n-k$ e $r = 1, \ldots, n$, como no Teorema 1.5.2, temos

$$\begin{aligned}
A_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}) &= A(y_1, \ldots, y_n) \\
&= B \circ (u_1, \ldots, u_n)(y_1, \ldots, y_n) \\
&= B \circ (u_1(y_1), \ldots, u_n(y_n)) \\
&= B_{u_{j_1}(a_{j_1}), \ldots, u_{j_k}(a_{j_k})}(u_{i_1}(x_{i_1}), \ldots, u_{i_{n-k}}(x_{i_{n-k}})) \\
&= B_{u_{j_1}(a_{j_1}), \ldots, u_{j_k}(a_{j_k})} \circ (u_{i_1}, \ldots, u_{i_{n-k}})(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}})
\end{aligned}$$

para quaisquer $x_{i_1} \in E_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}} \in E_{i_{n-k}}$. Isso prova que

$$A_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}} = B_{u_{j_1}(a_{j_1}), \ldots, u_{j_k}(a_{j_k})} \circ (u_{i_1}, \ldots, u_{i_{n-k}}).$$

Pelo Teorema 1.5.2, temos $B_{u_{j_1}(a_{j_1}), \ldots, u_{j_k}(a_{j_k})} \in L(G_{i_1}, \ldots, G_{i_{n-k}}; F)$. Disso e de $u_{i_1} \in \mathcal{I}(E_{i_1}; G_{i_1}), \ldots, u_{i_{n-k}} \in \mathcal{I}(E_{i_{n-k}}; G_{i_{n-k}})$, segue que

$$A_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}} = B_{u_{j_1}(a_{j_1}), \ldots, u_{j_k}(a_{j_k})} \circ (u_{i_1}, \ldots, u_{i_{n-k}}) \in L(\mathcal{I})(E_{i_1}, \ldots, E_{i_{n-k}}; F).$$

Portanto $L(\mathcal{I})$ é um multi-ideal coerente. ■

É oportuno neste momento relembrar o conteúdo do Teorema 1.1.5: dados $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços vetoriais, para cada $j = 1, \ldots, n$, denotamos

$$E_1, \overset{(j)}{\ldots}, E_n = E_1, \ldots, E_{j-1}, E_{j+1}, \ldots, E_n.$$

Então a aplicação

$$V_{j,n-1} \quad : L(E_1, \ldots, E_n; F) \ \longrightarrow L(E_j; L(E_1, \overset{(j)}{\ldots}, E_n; F))$$

onde

$$V_{j,n-1}(A) \quad : E_j \quad \longrightarrow \quad L(E_1, \overset{(j)}{\ldots}, E_n; F)$$

é definida por

$$V_{j,n-1}(A)(x_j)(x_1, \overset{(j)}{\ldots}, x_n) = A(x_1, \ldots, x_n),$$

é um isomorfismo entre os espaços vetoriais $L(E_1, \ldots, E_n; F)$ e $L(E_j; L(E_1, \overset{(j)}{\ldots}, E_n; F))$.

Proposição 5.1.7 *Para todo ideal de operadores $\mathcal{I}$, o multi-ideal $[\mathcal{I}]$ gerado pelo método da linearização é coerente.*

Demonstração. (i) Sejam $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços vetoriais, $j_1 < j_2 < \ldots < j_{n_1},\ k_1 < k_2 < \ldots < k_{n_2}$ tais que $\{j_1, \ldots, j_{n_1}\} \cup \{k_1, \ldots, k_{n_2}\} = \{1, \ldots, n\},\ A \in [\mathcal{I}](E_{j_1}, \ldots, E_{j_{n_1}}; F)$ e $\varphi_{k_i} \in E_{k_i}^*,\ i = 1, \ldots, n_2$. Pela definição do multi-ideal $[\mathcal{I}]$,

$$V_{j_t, n_1-1}(A) \in \mathcal{I}(E_{j_t}; L(E_{j_1}, \overset{(j_t)}{\ldots}, E_{j_{n_1}}; F))$$

para todo $t = 1, \ldots, n_1$. Sabemos do Teorema 1.3.2 que a aplicação

$$T_{\varphi_{k_1}, \ldots, \varphi_{k_{n_2}}} : L(E_{j_1}, \overset{(j_t)}{\ldots}, E_{j_{n_1}}; F) \longrightarrow L(E_1, \overset{(j_t)}{\ldots}, E_n; F);$$
$$T_{\varphi_{k_1}, \ldots, \varphi_{k_{n_2}}}(B)(x_1, \overset{(j_t)}{\ldots}, x_n) = \varphi_{k_1}(x_{k_1}) \cdots \varphi_{k_{n_2}}(x_{k_{n_2}}) B(x_{j_1}, \overset{(j_t)}{\ldots}, x_{j_{n_1}}),$$

é linear. Considerando a seguinte composição

$$E_{j_t} \xrightarrow{V_{j_t, n_1-1}(A)} L(E_{j_1}, \overset{(j_t)}{\ldots}, E_{j_{n_1}}; F) \xrightarrow{T_{\varphi_{k_1}, \ldots, \varphi_{k_{n_2}}}} L(E_1, \overset{(j_t)}{\ldots}, E_n; F)$$

temos

$$\begin{aligned}
((T_{\varphi_{k_1}, \ldots, \varphi_{k_{n_2}}} \circ V_{j_t, n_1-1}(A))(x_{j_t}))(x_1, \overset{(j_t)}{\ldots}, x_n) &= (T_{\varphi_{k_1}, \ldots, \varphi_{k_{n_2}}}(V_{j_t, n_1-1}(A)(x_{j_t})))(x_1, \overset{(j_t)}{\ldots}, x_n) \\
&= \varphi_{k_1}(x_{k_1}) \cdots \varphi_{k_{n_2}}(x_{k_{n_2}}) V_{j_t, n_1-1}(A)(x_{j_t})(x_{j_1}, \overset{(j_t)}{\ldots}, x_{j_{n_1}}) \\
&= \varphi_{k_1}(x_{k_1}) \cdots \varphi_{k_{n_2}}(x_{k_{n_2}}) A(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n_1}}) \\
&= \varphi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes A(x_1, \ldots, x_n) \\
&= V_{j_t, n-1}(\varphi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes A)(x_{j_t})(x_1, \overset{(j_t)}{\ldots}, x_n)
\end{aligned}$$

para quaisquer $x_s \in E_s,\ s = 1, \ldots, n$. Isso prova que

$$V_{j_t, n-1}(\varphi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes A) = T_{\varphi_{k_1}, \ldots, \varphi_{k_{n_2}}} \circ V_{j_t, n_1-1}(A).$$

Como $T_{\varphi_{k_1}, \ldots, \varphi_{k_{n_2}}}$ é um operador linear e $V_{j_t, n-1}(A) \in \mathcal{I}(E_{j_t}; L(E_{j_1}, \overset{(j_t)}{\ldots}, E_{j_{n_1}}; F))$, temos pela propriedade de ideal que

$$V_{j_t, n-1}(\varphi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes A) = T_{\varphi_{k_1}, \ldots, \varphi_{k_{n_2}}} \circ V_{j_t, n_1-1}(A) \in \mathcal{I}(E_{j_t}; L(E_1, \overset{(j_t)}{\ldots}, E_n; F)).$$

Portanto $\varphi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes A \in [\mathcal{I}](E_1, \ldots, E_n; F)$.

(ii) Sejam $A \in [\mathcal{I}](E_1, \ldots, E_n; F)$, $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$, $a_{j_1} \in E_{j_1}, \ldots, a_{j_k} \in E_{j_k}$, onde $\{j_1, \ldots, j_k\} \cup \{i_1, \ldots, i_{n-k}\} = \{1, \ldots, n\}$ e $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-k}$. Dado $l \in \{1, \ldots, n\}$, novamente pela definição de $[\mathcal{I}]$ sabemos que

$$V_{i_l, n-1}(A) \in \mathcal{I}(E_{i_l}; L(E_1, \overset{(i_l)}{\ldots}, E_n; F)),$$

para todo $l = 1, \ldots, n$. Sabemos pelo Teorema 1.5.2 que a correspondência

$$T_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}} : L(E_1, \overset{(i_l)}{\ldots}, E_n; F) \longrightarrow L(E_{i_1}, \overset{(i_l)}{\ldots}, E_{i_{n-k}}; F);$$
$$T_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}}(B)(x_{i_1}, \overset{(i_l)}{\ldots}, x_{i_{n-k}}) = B_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}}(x_{i_1}, \overset{(i_l)}{\ldots}, x_{i_{n-k}}),$$

é um operador linear. Consideraremos a seguinte composição:

$$E_{i_l} \xrightarrow{V_{i_l, n-1}(A)} L(E_1, \overset{(i_l)}{\ldots}, E_n; F) \xrightarrow{T_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}}} L(E_{i_1}, \overset{(i_l)}{\ldots}, E_{i_{n-k}}; F)$$

Dados $x_{i_1} \in E_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}} \in E_{i_{n-k}}$, $x_{i_l} \in E_{i_l}$ chamando

$$y_r = \begin{cases} x_{i_v} & \text{se} \quad r = i_v, r \neq i_l \\ a_{j_t} & \text{se} \quad r = j_t \\ x_{i_l} & \text{se} \quad r = i_l, \end{cases}$$

em que $t = 1, \ldots, k$, $v = 1, \ldots, n-k$ e $r = 1, \ldots, n$, como no Teorema 1.5.2, temos

$$\begin{aligned} ((T_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}} \circ V_{i_l, n-1}(A))(x_{i_l}))(x_{i_1}, \overset{(i_l)}{\ldots}, x_{i_{n-k}}) &= (T_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}}(V_{i_l, n-1}(A)(x_{i_l})))(x_{i_1}, \overset{(i_l)}{\ldots}, x_{i_{n-k}}) \\ &= (V_{i_l, n-1}(A)(x_{i_l}))_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}}(x_{i_1}, \overset{(i_l)}{\ldots}, x_{i_{n-k}}) \\ &= V_{i_l, n-1}(A)(x_{i_l})(y_1, \overset{(i_l)}{\ldots}, y_n) \\ &= A(y_1, \ldots, y_n) \\ &= A_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}}(x_{i_1}, \overset{(i_l)}{\ldots}, x_{i_{n-k}}) \\ &= V_{i_l, n-k-1}(A_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}})(x_{i_l})(x_{i_1}, \overset{(i_l)}{\ldots}, x_{i_{n-k}}) \end{aligned}$$

Portanto

$$V_{i_l, n-k-1}(A_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}}) = T_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}} \circ V_{i_l, n-1}(A).$$

Como $T_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}}$ é um operador linear e $V_{i_l, n-1}(A) \in \mathcal{I}(E_{i_l}; L(E_1, \overset{(i_l)}{\ldots}, E_n; F))$, segue que

$$V_{i_l, n-k-1}(A_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}}) = T_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}} \circ V_{i_l, n-1}(A) \in \mathcal{I}(E_{i_l}; L(E_{i_1}, \overset{(i_l)}{\ldots}, E_{i_{n-k}}; F)),$$

provando que $A_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}} \in [\mathcal{I}](E_{i_1}, \ldots, E_{i_{n-k}}; F)$. Isso completa a demonstração de que $[\mathcal{I}]$ é um multi-ideal coerente. ■

Proposição 5.1.8 *Para todo ideal de operadores $\mathcal{I}$, o multi-ideal de composição $\mathcal{I} \circ L$ é coerente.*

Demonstração. (i) Sejam $E_1, \ldots, E_n, F$ espaços vetoriais, $j_1 < j_2 < \ldots < j_{n_1},\ k_1 < k_2 < \ldots < k_{n_2}$ tais que $\{j_1, \ldots, j_{n_1}\} \cup \{k_1, \ldots, k_{n_2}\} = \{1, \ldots, n\},\ A \in \mathcal{I} \circ L(E_{j_1}, \ldots, E_{j_{n_1}}; F)$ e $\varphi_{k_i} \in E_{k_i}^*,\ i = 1, \ldots, n_2$. Pela definição de $\mathcal{I} \circ L$ existem um espaço vetorial G, uma aplicação n-linear $B \in L(E_{j_1}, \ldots E_{j_{n_1}}; G)$ e um operador linear $u \in \mathcal{I}(G; F)$ tais que $A = u \circ B$. Defina

$$B' \colon E_1 \times \cdots \times E_n \longrightarrow G;$$
$$B'(y_1, \ldots, y_n) = B(y_{j_1}, \ldots, y_{j_{n_1}}) \varphi_{k_1}(y_{k_1}) \cdots \varphi_{k_{n_2}}(y_{k_{n_2}}).$$

Decorre do Corolário 1.3.3 que B' é n-linear. De

$$\begin{aligned}
u \circ B'(x_1, \ldots, x_n) &= u(B'(x_1, \ldots, x_n)) \\
&= u(B(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n_1}}) \varphi_{k_1}(x_{k_1}) \cdots \varphi_{k_{n_2}}(x_{k_{n_2}})) \\
&= \varphi_{k_1}(x_{k_1}) \cdots \varphi_{k_{n_2}}(x_{k_{n_2}}) u(B(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n_1}})) \\
&= \varphi_{k_1}(x_{k_1}) \ldots \varphi_{k_{n_2}}(x_{k_{n_2}}) A(x_{j_1}, \ldots, x_{j_{n_1}}) \\
&= \varphi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes A(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

para quaisquer $x_s \in E_s,\ s = 1, \ldots, n$, concluímos que

$$\varphi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes A = u \circ B'.$$

Como $B' \in L(E_1, \ldots, E_n; G)$ e $u \in \mathcal{I}(G; F)$, decorre da definição que

$$\varphi_{k_1} \otimes \cdots \otimes \varphi_{k_{n_2}} \otimes A \in \mathcal{I} \circ L(E_1, \ldots, E_n; F).$$

(ii) Sejam $A \in \mathcal{I} \circ L(E_1, \ldots, E_n; F),\ j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\},\ j_1 < j_2 < \ldots < j_k,\ a_{j_1} \in E_{j_1}, \ldots, a_{j_k} \in E_{j_k}$, onde $\{j_1, \ldots, j_k\} \cup \{i_1, \ldots, i_{n-k}\} = \{1, \ldots, n\}$ e $i_1 < i_2 < \ldots < i_{n-k}$. Então existem um espaço vetorial G, uma aplicação n-linear $B \in L(E_1, \ldots E_n; G)$ e um operador linear, $u \in \mathcal{I}(G; F)$ tais que $A = u \circ B$. Dados $x_{i_1} \in E_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}} \in E_{i_{n-k}}$, chamando

$$y_r = \begin{cases} x_{i_v} & \text{se} \quad r = i_v \\ a_{j_t} & \text{se} \quad r = j_t, \end{cases}$$

em que $t = 1, \ldots, k,\ v = 1, \ldots, n-k$ e $r = 1, \ldots, n$, como no Teorema 1.5.2, temos

$$\begin{aligned}
A_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}}) &= A(y_1, \ldots, y_n) \\
&= u \circ B(y_1, \ldots, y_n) \\
&= u(B(y_1, \ldots, y_n)) \\
&= u\left(B_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}})\right) \\
&= u \circ B_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}})
\end{aligned}$$

para quaisquer $x_{i_1} \in E_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k}} \in E_{i_{n-k}}$. Isso prova que

$$A_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}} = u \circ B_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}}.$$

Pelo Teorema 1.5.2, temos $B_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}} \in L(E_{i_1}, \ldots, E_{i_{n-k}}; G)$. E como operador linear $u \in \mathcal{I}(G; F)$, segue que

$$A_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}} = u \circ B_{a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}} \in \mathcal{I} \circ L(E_{i_1}, \ldots, E_{i_{n-k}}; F).$$

Logo $\mathcal{I} \circ L$ é um multi-ideal coerente. ■

5.2 Ideais coerentes de polinômios

De forma análoga ao que acabamos de fazer para multi-ideais, consideraremos nesta seção ideais de polinômios que permitem *navegar* entre seus diferentes graus de homogeneidade sem sair do ideal. Ou seja, diminuindo ou aumentando o grau de homogeneidade de um polinômio pertencente ao ideal, nos mantemos no ideal.

Utilizaremos a notação estabelecida na Proposição 2.2.1 e no Teorema 2.4.3.

Definição 5.2.1 Dizemos que um ideal $\mathcal{Q}$ de polinômios homogêneos é *coerente* se satisfaz as seguintes condições:

(i) Dados um polinômio $P \in \mathcal{Q}(^nE;F)$, um funcional linear $\varphi \in E^*$ e $m \in \mathbb{N}$, então $\varphi^m \otimes P \in \mathcal{Q}(^{m+n}E;F)$.

(ii) Dados um polinômio $P \in \mathcal{Q}(^nE;F)$ um vetor $0 \neq a \in E$ e $1 \leq j \leq n-1$, então $P_{a^j} \in \mathcal{Q}(^{n-j}E;F)$.

Exemplo 5.2.2 Um ideal de polinômios não coerente.

Considere o ideal de polinômios homogêneos $\mathcal{Q}$ definido da seguinte forma: dados espaços vetoriais E e F, defina:

$\mathcal{Q}(^1E;F) := \mathcal{F}(E;F)$.
$\mathcal{Q}(^nE;F) \colon = P_{enum}(^nE;F)$ para todo $n \geq 2$.

Pelos Exemplos 4.1.3 e 4.1.4 sabemos que $\mathcal{Q}$ é um ideal de polinômios homogêneos. Neste caso teremos um pouco mais de trabalho para provar a não coerência. Para isso seja E um espaço vetorial com base enumerável. Sejam também $\varphi \in E^*$ e $a \in E$ tais que $\varphi(a) = 1$. Tome

$$P \colon E \longrightarrow E \ , \ P = \varphi \otimes Id_E.$$

Então $\varphi \otimes Id_E \in P(^2E;E)$. Como $[\mathrm{Im}(P)] \subseteq E$, segue que $P \in P_{enum}(^2E;E)$. Por outro lado, $P_a \colon E \longrightarrow E$ é tal que

$$P_a(x) = \check{P}(a,x) = (\varphi \otimes Id_E)^{\vee}(a,x) = \frac{1}{2}\left(\varphi(a)Id_E(x) + \varphi(x)Id_E(a)\right) = \frac{1}{2}\left(x + \varphi(x)a\right)$$

para todo $x \in E$. É claro que o conjunto $\{a\}$ é linearmente independente. Então existe uma base de E da forma $\{a, x_1, x_2, \ldots\}$ (lembre-se que, como E tem base enumerável, toda base de E é enumerável). Em particular, os vetores $\{a, x_1, x_2, \ldots\}$ são linearmente independentes. Vejamos que os vetores $P_a(x_1), P_a(x_2), \ldots$ também são linearmente independentes. Para isso sejam $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, k$ escalares tais que $\lambda_1 P_a(x_1) + \cdots + \lambda_k P_a(x_k) = 0$. Como os vetores $a, x_1, \ldots, x_k$, são linearmente independentes, temos

$$\begin{aligned}
\lambda_1 P_a(x_1) + \cdots + \lambda_k P_a(x_k) = 0 &\Longrightarrow \lambda_1 \cdot \frac{1}{2}\left(x_1 + \varphi(x_1)a\right) + \cdots + \lambda_k \frac{1}{2}\left(x_k + \varphi(x_k)a\right) = 0 \\
&\Longrightarrow \frac{\lambda_1}{2}x_1 + \cdots + \frac{\lambda_k}{2}x_k + \left(\frac{\lambda_1}{2}\varphi(x_1) + \cdots + \frac{\lambda_k}{2}\varphi(x_k)\right) \cdot a = 0 \\
&\Longrightarrow \frac{\lambda_1}{2} = \cdots = \frac{\lambda_k}{2} = 0 \\
&\Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0.
\end{aligned}$$

Assim, $\{P_a(x_1), P_a(x_2), \ldots\}$ é um conjunto infinito linearmente independente contido em $\mathrm{Im}(P_a)$, o que é suficiente para concluirmos que $\mathrm{Im}(P_a)$ tem dimensão infinita. Assim, $P_a \notin \mathcal{F}(E;E) = \mathcal{Q}(^1E;E)$, e portanto está provado que $\mathcal{Q}$ não é ideal coerente de polinômios.

É para evitar ideais de polinômios deste tipo que nos concentraremos no estudo de ideais coerentes de polinômios.

Terminaremos a dissertação provando que os ideais de polinômios com os quais temos trabalhado são coerentes, e também que os métodos de gerar ideais de polinômios a partir de ideais de operadores geram ideais coerentes.

Começamos provando que uma das maneiras de gerar um ideal de polinômios a partir de um multi-ideal leva multi-ideal coerente em ideal de polinômios coerente:

Teorema 5.2.3 *Se $\mathcal{M}$ é um multi-ideal coerente, então o ideal de polinômios $P^{\mathcal{M}}$ também é coerente.*

Demonstração. Do Teorema 4.2.5 já sabemos que $P^{\mathcal{M}}$ é ideal de polinômios homogêneos.

(i) Sejam $P \in P^{\mathcal{M}}(^nE;F)$, $\varphi \in E^*$ e $m \in \mathbb{N}$. Por definição, $\check{P} \in \mathcal{M}(^nE;F)$. Considere o conjunto

$$C_m(1,\ldots,m+n) = \{\text{possíveis escolhas de } m \text{ elementos dentre } \{1,\ldots,m+n\}\}.$$

Para cada $A \in C_m$, chamemos

$$\{1,\ldots,m+n\} = \{a_1,\ldots,a_m\} \cup \{b_1,\ldots,b_n\},$$

onde $\{a_1,\ldots,a_m\} = A$ e $\{b_1,\ldots,b_n\} = A^c$. Defina:

$$(\varphi^m \otimes \check{P})_A \colon E^{m+n} \longrightarrow F;$$
$$(\varphi^m \otimes \check{P})_A(x_1,\ldots,x_{m+n}) = \varphi(x_{a_1})\cdots\varphi(x_{a_m})\check{P}(x_{b_1},\ldots,x_{b_n}).$$

Pelo Corolário 1.3.3 sabemos que $(\varphi^m \otimes \check{P})_A$ é aplicação $(m+n)$-linear. Como $\mathcal{M}$ é multi-ideal coerente por hipótese e $\check{P} \in \mathcal{M}(^nE;F)$, concluímos que $(\varphi^m \otimes \check{P})_A \in \mathcal{M}(^{m+n}E;F)$ para todo conjunto $A \in C_m(1,\ldots,m+n)$. Procedendo da mesma forma que fizemos no Lema 2.4.5 e usando que $\mathcal{M}(^{m+n}E;F)$ é subespaço vetorial de $L(^{m+n}E;F)$, podemos concluir que

$$(\varphi^m \otimes P)^{\vee} = \frac{1}{\binom{m+n}{m}} \sum_{A \in C_m(1,\ldots,m+n)} (\varphi^m \otimes \check{P})_A \in \mathcal{M}(^{m+n}E;F),$$

e portanto $\varphi^m \otimes P \in P^{\mathcal{M}}(^{m+n}E;F)$.

(ii) Sejam $P \in P^{\mathcal{M}}$, $a \neq 0$, $a \in E, 1 \leq j \leq n-1$. Então $\check{P} \in \mathcal{M}(^nE;F)$. Como $\mathcal{M}$ é multi-ideal coerente, temos

$$\check{P}_{a^j} = \check{P}_{a,\overset{j}{\ldots},a} \in \mathcal{M}(^{n-j}E;F)$$

e

$$(\check{P}_{a^j})^\wedge(x) = \check{P}_{a^j}x^{n-j} = \check{P}(a^j, x^{n-j}) = P_{a^j}(x)$$

para todo $x \in E$. Portanto, $P_{a^j} \in P^{\mathcal{M}}({}^{n-j}E;F)$, completando a demonstração de que $P^{\mathcal{M}}$ é ideal coerente de polinômios. ■

Observação 5.2.4 Em relação ao outro método de gerar ideais de polinômios a partir de multi-ideais, vejamos que se $\mathcal{M}$ é um multi-ideal coerente, então o ideal de polinômios $P_{\mathcal{M}}$ satisfaz a condição (i) da Definição 5.2.1:

De fato, dados $P \in P_{\mathcal{M}}({}^nE;F)$, $\varphi \in E^*$ e $m \in \mathbb{N}$, existe $A \in \mathcal{M}({}^nE;F)$ tal que $\widehat{A} = P$. Como $\mathcal{M}$ é multi-ideal coerente, então $\varphi^m \otimes A \in \mathcal{M}({}^{n+m}E;F)$. Dado $x \in E$, temos

$$(\varphi^m \otimes A)^\wedge(x) = (\varphi^m \otimes A)x^{n+m} = \varphi(x)^m \cdot Ax^n = \varphi(x)^m \cdot P(x) = (\varphi^m \otimes P)(x).$$

Decorre que $(\varphi^m \otimes A)^\wedge = \varphi^m \otimes P$, e portanto $\varphi^m \otimes P \in P_{\mathcal{M}}({}^{n+m}E;F)$.

Se o multi-ideal coerente $\mathcal{M}$ não for simétrico no sentido de [5], então nem sempre o ideal de polinômios $P_{\mathcal{M}}$ é coerente.

Para provar que o ideal P_f dos polinômios de tipo finito é coerente, precisamos de uma equivalência a mais na Proposição 2.1.2:

Lema 5.2.5 *Seja $P \in P({}^nE;F)$. Então $P \in P_f({}^nE;F)$ se, e somente se, $\check{P} \in L_f({}^nE;F)$.*

Demonstração. Suponha primeiramente que $P \in P_f({}^nE;F)$. Pela Proposição 2.1.2(b) existem um número natural $m \in \mathbb{N}$, funcionais lineares $\varphi_1, \ldots, \varphi_m \in E^*$ e vetores $b_1, \ldots, b_m \in F$ tais que $P = \sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_j^n \otimes b_j$. Definindo

$$A\colon E^n \longrightarrow F \ , \ A(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j(x_1) \cdots \varphi_j(x_n) b_j,$$

temos que $A = \sum\limits_{j=1}^{m} \varphi_j \otimes \cdots \otimes \varphi_j \otimes b_j \in L_f({}^nE;F)$. E, no Lema 2.4.1, demonstramos que $A = \check{P}$. Portanto, $\check{P} \in L_f({}^nE;F)$.

A recíproca segue da Proposição 2.1.2. ■

Proposição 5.2.6 *O ideal P_f dos polinômios homogêneos de tipo finito é coerente.*

Demonstração. Do Lema 5.2.5 decorre que $P_f = P^{L_f}$. Pela Proposição 5.1.3 sabemos que L_f é multi-ideal coerente. Pelo Teorema 5.2.3 segue que $P_f = P^{L_f}$ é ideal coerente de polinômios. ■

Para provar que o ideal $P_{\mathcal{F}}$ dos polinômios de posto finito é coerente, precisamos de uma equivalência a mais na Proposição 2.1.4:

Lema 5.2.7 *Seja $P \in P(^nE;F)$. Então $P \in P_{\mathcal{F}}(^nE;F)$ se, e somente se, $\check{P} \in L_{\mathcal{F}}(^nE;F)$.*

Demonstração. Supondo que $P \in P_{\mathcal{F}}(^nE;F)$, pela Proposição 2.1.4 existem um natural $m \in \mathbb{N}$, polinômios escalares $P_1, \ldots, P_m \in P(^nE)$ e vetores $b_1, \ldots, b_m \in F$ tais que $P = \sum\limits_{j=1}^{m} P_j \otimes b_j$. Definindo

$$A\colon E^n \longrightarrow F \ , \ A(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{m} \check{P}_j(x_1, \ldots, x_n) b_j,$$

temos $A \in L_{\mathcal{F}}(^nE;F)$. Como cada $\check{P}_j$ é simétrica, segue que A é simétrica. É claro que $\widehat{A} = P$. Logo $A = \check{P}$, e portanto $\check{P} \in L_{\mathcal{F}}(^nE;F)$.

A recíproca segue da Proposição 2.1.4. ∎

Proposição 5.2.8 *O ideal $P_{\mathcal{F}}$ dos polinômios homogêneos de posto finito é coerente.*

Demonstração. Pelo Lema 5.2.7 sabemos que $P_{\mathcal{F}} = P^{L_{\mathcal{F}}}$, e pela Proposição 5.1.4 que $L_{\mathcal{F}}$ é multi-ideal coerente. Uma nova aplicação do Teorema 5.2.3 nos garante que $P_{\mathcal{F}} = P^{L_{\mathcal{F}}}$ é ideal coerente de polinômios. ∎

Para provar que o ideal P_{enum} dos polinômios de posto enumerável é coerente, precisamos do seguinte lema:

Lema 5.2.9 *Seja $P \in P(^nE;F)$. Então $[\mathrm{Im}(P)] = [\mathrm{Im}(\check{P})]$. Em particular, $P \in P_{enum}(^nE;F)$ se, e somente se, $\check{P} \in L_{enum}(^nE;F)$.*

Demonstração. Para todo $x \in E$,

$$P(x) = \check{P}x^n \in \mathrm{Im}(\check{P}),$$

de onde segue que $\mathrm{Im}(P) \subseteq \mathrm{Im}(\check{P})$, e consequentemente $[\mathrm{Im}(P)] \subseteq [\mathrm{Im}(\check{P})]$.

Por outro lado, para todos $x_1, \ldots, x_n \in E$, da Fórmula de Polarização temos

$$\check{P}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!2^n} \sum_{\varepsilon_i = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n P(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n) \in [\mathrm{Im}(P)].$$

Decorre então que $\mathrm{Im}(\check{P}) \subseteq [\mathrm{Im}(P)]$. Assim, $[\mathrm{Im}(\check{P})] \subseteq [\mathrm{Im}(P)]$, provando assim que $[\mathrm{Im}(\check{P})] = [\mathrm{Im}(P)]$. ∎

Proposição 5.2.10 *O ideal P_{enum} dos polinômios homogêneos de posto enumerável é coerente.*

Demonstração. Pelo Lema 5.2.9 sabemos que $P_{enum} = P^{L_{enum}}$, e pela Proposição 5.1.5 sabemos que L_{enum} é multi-ideal coerente. Pelo Teorema 5.2.3 segue que $P_{enum} = P^{L_{enum}}$ é ideal coerente de polinômios homogêneos. ∎

Teorema 5.2.11 *Para todo ideal de operadores $\mathcal{I}$, $P(\mathcal{I})$, $\mathcal{P}[\mathcal{I}]$ e $\mathcal{I} \circ P$ são ideais coerentes de polinômios homogêneos.*

Demonstração. Pela Proposição 4.3.2 sabemos que $P(\mathcal{I}) = P^{L(\mathcal{I})}$, e pela Proposição 5.1.6 sabemos que $L(\mathcal{I})$ é multi-ideal coerente. Pelo Teorema 5.2.3 segue que $P(\mathcal{I}) = P^{L(\mathcal{I})}$ é ideal coerente de polinômios homogêneos.

Pela Proposição 4.4.2 sabemos que $P[\mathcal{I}] = P^{[\mathcal{I}]}$, e pela Proposição 5.1.7 sabemos que $[\mathcal{I}]$ é multi-ideal coerente. Pelo Teorema 5.2.3 segue que $P[\mathcal{I}] = P^{[\mathcal{I}]}$ é ideal coerente de polinômios homogêneos.

Pela Proposição 4.5.2 sabemos que $\mathcal{I} \circ P = P^{\mathcal{I} \circ L}$, e pela Proposição 5.1.8 sabemos que $\mathcal{I} \circ L$ é multi-ideal coerente. Pelo Teorema 5.2.3 segue que $\mathcal{I} \circ P = P^{\mathcal{I} \circ L}$ é ideal coerente de polinômios homogêneos. ■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] T. R. ALVES, *Polinômios dominados entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, UFU, 2011.

[2] A. T. L. BERNARDINO, *Ideais de Aplicações Multilineares e Polinômios entre Espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, UFPB, 2008.

[3] G. BOTELHO, H. A. BRAUNSS, H. JUNEK E D. PELLEGRINO, *Holomorphy types and ideals of multilinear mappings*, Studia Math. **177** (2006), 43–65.

[4] G. BOTELHO E D. PELLEGRINO, *Two new properties of ideals of polynomials and applications*, Indag. Math. (N.S.) **16** (2005), 157–169.

[5] G. BOTELHO E D. PELLEGRINO, *On symmetric ideals of multilinear mappings between Banach spaces*, J. Aust. Math. Soc. **81** (2006), 141–148.

[6] G. BOTELHO, D. PELLEGRINO E R. RUEDA, *On composition ideals of multilinear mappings and homogeneous polynomials*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **43** (2007), 1139–1155.

[7] G. BOTELHO, D. PELLEGRINO E E. TEIXEIRA, *Fundamentos de Análise Funcional*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[8] H. A. BRAUNSS, *Ideale multilinearer Abbildungen und Râume holomorpher Funktionen*, Dissertation, Potsdam, 1984.

[9] D. CARANDO, V. DIMANT E S. MURO, *Coherent sequences of polynomial ideals on Banach spaces*, Math. Nachr. **282** (2009), 1111–1133.

[10] D. CARANDO, V. DIMANT E S. MURO, *Every Banach ideal of polynomials is compatible with an operator ideal*, Monaths. Math. **165** (2012), 1–14.

[11] F. U. COELHO E M. L. LOURENÇO, *Um curso de Álgebra Linear*, EDUSP, 2001.

[12] D. PELLEGRINO E J. RIBEIRO, *On almost summing polynomials and multilinear mappings*, Linear and Multilinear Algebra **60** (2012), 397–413.

[13] D. Pellegrino e J. Ribeiro, *On multi-ideals and polynomial ideals of Banach spaces: a new approach to coherence and compatibility*, Monatsh. Math. **173** (2014), 379–415.

[14] A. Pietsch, *Operator Ideals*, North-Holland, 1980.

[15] A. Pietsch, *Ideals of multilinear functionals*, Proceedings of the Second International Conference on Operator Algebras, Ideals and Their Applications in Theoretical Physics, 185-199, Teubner-Texte, Leipzig, 1983.

[16] L. G. Polac, *O adjunto de um polinômio homogêneo contínuo entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, UFU, 2013.

[17] A. R. Silva, *Linearização de aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach e ideais de composição*, Dissertação de Mestrado, UFU, 2010.