

NATHALI VEGA CABRERA

Aplicação da Extensão de Zadeh para Conjuntos Fuzzy Tipo 2 Intervalar



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2014

NATHALI VEGA CABRERA

Aplicação da Extensão de Zadeh para Conjuntos Fuzzy Tipo 2 Intervalar

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Análise Numérica.

Orientadora: Profa. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice.

UBERLÂNDIA - MG
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil

O48c Cabrera, Nathali Vega, 1984-
2014 Aplicação da extensão de Zadeh para conjuntos fuzzy tipo 2
intervalar / Nathali Vega Cabrera. - 2014.
86 f. : il.

Orientadora: Rosana Sueli da Motta Jafelice.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia,
Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Inclui bibliografia.

1. Matemática - Teses. 2. Teoria dos conjuntos - Teses. 3. Números difusos - Teses. 4. Peru - População - Teses. I. Jafelice, Rosana Sueli da Motta. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNA: Nathali Vega Cabrera.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11212MAT014.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Análise Numérica.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Aplicação da Extensão de Zadeh para Conjuntos Fuzzy Tipo 2 Intervalar.

ORIENTADORA: Profa. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 08 de Abril de 2014, às 9h00min, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME

ASSINATURA

Profa. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Dr. Fernando Antonio Campos Gomide
UNICAMP - Universidade Federal de Campinas

Prof. Dr. Cesar Guilherme De Almeida
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Uberlândia-MG, 08 de Abril de 2014.

Dedicatória

Quero dedicar este trabalho as pessoas que são o maior motivo de minha vida, meus pais Héctor e Nora, pelo amor, esforço e dedicação que sempre tiveram e que apesar da distância, continuam tendo.

A meu irmão Bedher, por me dar forças para sair vitoriosa de qualquer obstáculo.

Agradecimentos

Agradeço:

Em primeiro lugar a Deus por me permitir estudar fora do meu país, vencendo qualquer medo e obstáculo pelo caminho.

Aos meus pais Héctor e Nora, a meu irmão Bedher, por sempre me darem seu amor e confiança para poder conseguir minhas metas.

Ao amor de minha vida, Eduard, por permitir que continuemos juntos na luta para conseguirmos sermos melhores profissionais, pelo seu amor, seu tempo e paciência,

Sem dúvida alguma, agradeço de todo coração ao professor Edson Agustini porque graças a sua ajuda foi possível a minha permanência no Brasil, você sempre será meu anjo Edson!.

À minha amiga incondicional Marina, que mesmo estando no Peru sempre está demonstrando que o tempo nem a distância importam para uma verdadeira amiga.

À minha família em geral, por sempre estar do meu lado quando preciso deles.

À família Rojas Castillo, por seu imenso carinho.

À CAPES pela bolsa de mestrado concedida.

À minha orientadora Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice, por sua dedicação, pela paciência, por seus conselhos e por seus conhecimentos transmitidos durante este período de mestrado.

Aos professores Dra. Ana Maria Amarillo Bertone e Dr. Cesar Guilherme De Almeida pelos conhecimentos compartilhados durante os “Seminários de Conjuntos Fuzzy”.

Ao professor Dr. Fernando Antonio Campos Gomide, por aceitar ser membro da minha banca.

Aos professores da Faculdade de Matemática da UFU: Dr. Geraldo Marcio De Azevedo Botelho, Dr. Cicero Fernandes De Carvalho, Dr. Vinícius Vieira Fávaro, Dr. Marcio Jose Horta Dantas, Dr. Santos Alberto Enriquez Remigio pela compreensão e sua ajuda.

Aos meus professores de graduação da Universidade Nacional Pedro Ruiz Gallo, Lambayeque-Peru, Dra. Gloria Ortiz Basauri, Mg. Enrique Cárpena Velásquez, Mg. Oscar Santamaría Santisteban por seu constante apoio na minha decisão de cursar o mestrado no Brasil.

Aos meus amigos residentes no Brasil: Nancy, José, Manuel, Elard, Patricia, Norbil, Sabrina, Álvaro, Cecilia, Henry, Roxana, Irene, Christian, Katherine, por dar-me sua ajuda quando preciso de vocês e por se tornarem como membros de minha família.

Aos meus amigos de sempre: Yrina, Danny, Jimmy, Vismar, Deysi, José, Carlos e Leodan, por estarem sempre presentes na minha vida.

Aos meus amigos de mestrado da UFU: Raildo, Rafaela, Grégory, Nathália, Marcos, Fernanda, Murilo, Bruno, Letícia e Alexandre, graças por seu apoio e por torcer sempre por mim.

As pessoas que me consideram parte de sua família no Brasil: Janice, Fabricio, Sirlene, Ana Cláudia, Keila e Paula, sem dúvida ganhei uma nova familia apesar de não ter o mesmo sangue.

Sei que ainda estou esquecendo de muita gente, mas quero agradecer de coração a todos os que dia-a-dia me apoiam e dão forças para alcançar o que me proponho. Muito Obrigada!!!

CABRERA, N. V. *Aplicação da Extensão de Zadeh para Conjuntos Fuzzy Tipo 2 Intervalar*. 2014. 86 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar o modelo de Montroll clássico e com parâmetro fuzzy tipo 1 e tipo 2 para dados da população do Peru, de 1961 a 2013. Para modelar a dinâmica populacional com parâmetro fuzzy tipo 1, utilizamos duas técnicas: a primeira através de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF), onde as variáveis de entrada são a taxa de fertilidade e a taxa de crescimento econômico do país, e a variável de saída é a taxa de crescimento populacional. A segunda técnica é realizada considerando a taxa de crescimento populacional como um número fuzzy triangular e utilizamos o Princípio da Extensão de Zadeh para obter a solução fuzzy tipo 1 do modelo de Montroll em função do tempo. Posteriormente, comparamos as aproximações do modelo de Montroll clássico e dos modelos obtidos através das duas técnicas estudadas com os dados populacionais, utilizando como método de comparação, o máximo do erro relativo. Para modelar a dinâmica populacional com parâmetro fuzzy tipo 2, utilizamos também duas técnicas: a primeira através de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy tipo 2 (SBRF2), onde as variáveis de entrada são a taxa de fertilidade e a taxa de crescimento econômico do país, e a variável de saída é a taxa de crescimento populacional. A segunda técnica é realizada considerando a taxa de crescimento populacional como um conjunto fuzzy triangular tipo 2 intervalar e utilizamos o Princípio da Extensão de Zadeh para as funções de pertinência superior e inferior deste conjunto em cada instante. Assim, obtemos a solução fuzzy tipo 2 do modelo de Montroll em função do tempo. Posteriormente comparamos as aproximações destes modelos com os dados populacionais, utilizando o máximo dos erros relativos. Finalmente comparamos os resultados obtidos a partir dos conjuntos fuzzy tipo 1 e tipo 2.

Palavras-chave: Modelo de Montroll; Sistema Baseado em Regras Fuzzy; Centro de Gravidade; Conjuntos Fuzzy Tipo 2 Intervalar; Mancha de Incerteza; Algoritmo de Karnik-Mendel.

CABRERA, N. V. *Application of the Zadeh's Extension for Interval Type 2 Fuzzy Sets*. 2014. 86 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

The objective of this study is to present the classical Montroll's model and with type-1 and type-2 fuzzy parameter for the population of Peru, of 1961-2013. To model the population dynamics with type-1 fuzzy parameter, we use two techniques: the first through a Fuzzy Rule-Based System (FRBS), where the input variables are the fertility rate and the rate of economic growth of the country, and the output variable is the rate of population growth. The second technique is performed considering the rate of increase as a triangular fuzzy number and using the Zadeh's Extension Principle, to obtain the type-1 fuzzy solution of Montroll's model in function of time. Subsequently, we compare the approaches of Montroll classic model and the models obtained by the two techniques studied with population data, using as comparison method, the maximum relative error. To model the population dynamics with type-2 fuzzy parameter, we also used two techniques: the first through a type-2 Fuzzy Rule Based System (FRBS2), where the input variables are the fertility rate and the rate of economic growth of the country, and the output variable is the rate of population growth. The second technique is performed by considering the rate of population growth as an interval type-2 triangular fuzzy set and we using the Zadeh's Extension Principle for upper and lower membership functions of this set in each instant. Thus, we obtain the solution type-2 fuzzy of Montroll's model in function of time, subsequently, compare the approaches of these models with population data, using the maximum relative error. Finally, we compare the results obtained from the type-1 and type-2 fuzzy sets.

Keywords: Montroll's Model; Fuzzy Rule-Based System; Center of Gravity; Interval Type-2 Fuzzy Set; Footprint of Uncertainty; Karnik-Mendel Algorithm.

Lista de Figuras

1.1	Função de pertinência de pessoas de meia idade.	8
1.2	Conjunto fuzzy dos números reais positivos “em torno de 4”.	8
1.3	Exemplos de funções de pertinência do MATLAB.	9
1.4	Função de pertinência dos conjuntos fuzzy A e B	11
1.5	Função de pertinência da união dos conjuntos fuzzy A e B	11
1.6	Função de pertinência da intersecção dos conjuntos fuzzy A e B	11
1.7	Funções de pertinência dos conjuntos fuzzy A e seu complementar A'	11
1.8	Princípio de extensão de Zadeh [24].	14
1.9	Variável linguística.	14
1.10	Sistema Baseado em Regras Fuzzy.	15
1.11	Método de Mamdani com composição max – min [9].	16
2.1	Função de pertinência de um conjunto fuzzy triangular tipo 2, representado bidimensionalmente.	19
2.2	Função de pertinência de um conjunto fuzzy trapezoidal tipo 2, representado tridimensionalmente [20].	19
2.3	Corte vertical para $x' = 5$ [20].	19
2.4	Grau de pertinência secundária, funções de pertinência primária e secundária de um conjunto fuzzy tipo 2 [39].	20
2.5	FOU, as funções de pertinência superior e inferior de um conjunto fuzzy triangular tipo 2.	21
2.6	Função de pertinência de um conjunto fuzzy triangular tipo 2 intervalar.	21
2.7	Função de pertinência de um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar.	21
2.8	Diversas funções de pertinência de conjuntos fuzzy tipo 2.	22
2.9	Sistema Baseado em Regras Fuzzy Tipo 2 [27].	23
2.10	Método de Mamdani para conjuntos fuzzy tipo 2 utilizando a t –norma mínimo e a s –norma máximo [27].	25
2.11	Conjuntos fuzzy tipo 1 imersos no \tilde{A} [18].	26
2.12	Funções de pertinência de um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar.	27
2.13	Interpretações dos pontos switch, L e R para a versão contínua do centroide.	28
2.14	Interpretações dos pontos switch, L e R para a versão discreta do centroide.	29
2.15	Permutação $y_j = x_{N+1-j}$ ($1 \leq j \leq N$) que inverte a ordem no qual os valores de x são indexados.	31
2.16	Conjunto fuzzy \tilde{A} tipo 2 intervalar.	33
2.17	Conjunto fuzzy \tilde{A} tipo 2 intervalar e a representação dos pontos c_L , C e c_R respectivamente.	35
3.1	Curva logística.	37
3.2	Variação de $P(t)$	38
3.3	Taxa do modelo de Montroll com α fixo.	40
3.4	Soluções do modelo de Montroll para diversos valores de α	41

3.5	Modelo de Verhulst para $r = 0.04134$ e $P_\infty = 41.405.421$	43
3.6	Modelo de Montroll clássico para $\alpha = 0.1$, $\lambda = 0.214$ e $P_\infty = 53.587.774$	44
3.7	Funções de pertinência das variáveis de entrada.	45
3.8	Funções de pertinência da variável de saída: Taxa de crescimento populacional. .	45
3.9	Modelo de Montroll obtido através do SBRF.	46
3.10	Cálculo de $\lambda = 0.214$ no SBRF.	47
3.11	Número fuzzy triangular. O parâmetro $\bar{\lambda}$ é o valor modal e $\delta_i, i = 1, 2$ são as dispersões do conjunto fuzzy Λ	48
3.12	Modelo de Montroll com parâmetro fuzzy triangular.	49
3.13	Defuzzificação do modelo de Montroll pelo CG.	49
3.14	Comparação dos modelos.	50
4.1	Funções de pertinência das variáveis de entrada.	52
4.2	Funções de pertinência da variável de saída: Taxa de crescimento populacional. .	52
4.3	Modelo de Montroll obtida através do SBRF2.	52
4.4	Cálculo de $\lambda = 0.214$ no SBRF2.	53
4.5	Conjunto fuzzy tipo 2 triangular. O parâmetro $\bar{\lambda}$ é um valor modal, δ_i e $\theta_i, i = 1, 2$, são as dispersões do conjunto fuzzy tipo 2 intervalar \tilde{A}	54
4.6	Princípio de Extensão de Zadeh para a função de pertinência superior e inferior de um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar.	55
4.7	Evolução da função de pertinência superior e inferior para a população do Peru no instante t	56
4.8	Cálculo do centroide “C” para a população do Peru em $t=5$	56
4.9	Comparação dos modelos.	57

Lista de Tabelas

1.1	<i>Cidades e graus de qualidade de vida.</i>	7
1.2	<i>União, intersecção e complementar dos conjuntos A e B.</i>	11
2.1	Resumo para calcular c_L e c_R usando (2.16), com base nas equações (2.11) e (2.13).	32
2.2	<i>Valores de c_i e c'_i.</i>	34
3.1	<i>População total do Peru.</i>	42
3.2	Base de regras.	46

Lista de Símbolos

\mathbb{R}	Conjunto dos números reais.
\mathcal{U}	Conjunto universo.
$\{0, 1\}$	Conjunto contendo os elementos 0 e 1.
\mathcal{X}_A	Função característica do conjunto A .
μ_F	Função de pertinência do conjunto fuzzy F .
$[0, 1]$	Intervalo fechado com extremos 0 e 1.
$\mu_{A \cup B}$	Função de pertinência da união de conjuntos fuzzy A e B .
$\mu_{A \cap B}$	Função de pertinência da interseção de conjuntos fuzzy A e B .
$\mu_{A'}$	Função de pertinência do complemento do conjunto fuzzy A .
$\max \mu_A$	Máximo da função de pertinência do conjunto fuzzy A .
$\min \mu_A$	Mínimo da função de pertinência do conjunto fuzzy A .
$[A]^\alpha$	α – nível do conjunto fuzzy A .
$[A]^0$	Nível zero do conjunto fuzzy A .
$\text{supp}(A)$	Suporte do conjunto fuzzy A .
$\overline{\text{supp}(A)}$	Fecho do suporte do conjunto fuzzy A .
$\sup_x \mu_A(x)$	Supremo da função de pertinência de um conjunto fuzzy A , para todo x .
$\sup_x \min \{\mu_A(x)\}$	Supremo do mínimo da função de pertinência de um conjunto fuzzy A , para todo x .
\tilde{A}	Conjuntos fuzzy tipo 2 intervalar.
$\mu_{\tilde{A}}$	Função de pertinência do conjunto fuzzy tipo 2 intervalar \tilde{A} .
$\mu_{\tilde{A}}(x, u)$	Função de pertinência do conjunto fuzzy tipo 2 intervalar \tilde{A} , dependendo de x e u .
$\overline{\mu}_{\tilde{A}}$	Função de pertinência superior do conjunto fuzzy tipo 2 intervalar \tilde{A} .
$\underline{\mu}_{\tilde{A}}$	Função de pertinência inferior do conjunto fuzzy tipo 2 intervalar \tilde{A} .

Sumário

Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	x
Lista de Símbolos	xii
Introdução	1
1 Conjuntos Fuzzy Tipo 1	4
1.1 Conjuntos Fuzzy	4
1.1.1 Um Breve Histórico	5
1.1.2 A Teoria de Conjuntos Fuzzy e a Teoria de Probabilidade	6
1.2 Alguns Conceitos da Teoria de Conjuntos Fuzzy	6
1.2.1 Representação de Conjuntos Fuzzy	7
1.2.2 Operações Padrões entre Conjuntos Fuzzy	10
1.2.3 Normas Triangulares	11
1.2.4 Níveis de um Conjunto Fuzzy	13
1.2.5 Números Fuzzy	13
1.2.6 Princípio de Extensão de Zadeh	13
1.3 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy	15
2 Conjuntos Fuzzy Tipo 2	18
2.1 Um Breve Histórico	18
2.2 Algumas Definições da Teoria de Conjuntos Fuzzy Tipo 2	19
2.3 Sistema Baseado em Regras Fuzzy Tipo 2 (SBRF2)	23
2.4 Método de Mamdani para Conjuntos Fuzzy Tipo 2 Intervalar	24
2.5 Centroide de um Conjunto Fuzzy Tipo 2 Intervalar	26
2.5.1 Versão Contínua do Centroide	26
2.5.2 Versão Contínua do Algoritmo KM	28
2.5.3 Versão Discreta do Centroide	29
2.5.4 Versão Discreta do Algoritmo KM	30
2.5.5 Uma Propriedade Especial da Versão Discreta	30
2.5.6 A Expressão mais Geral	32
3 Modelos Populacionais	36
3.1 Modelo Logístico Contínuo (Verhulst)	37
3.2 Modelo de Montroll Clássico	39
3.3 Dados da População do Peru	41

3.4	Modelo de Verhulst e o Modelo de Montroll para a População do Peru	42
3.4.1	Modelo de Verhulst para a População do Peru	42
3.4.2	Modelo de Montroll Clássico para a População do Peru	43
3.5	Modelo de Montroll com Parâmetro Fuzzy	44
3.5.1	Modelo de Montroll com Parâmetro Fuzzy via Sistema Baseado de Regras Fuzzy (SBRF)	44
3.5.2	Cálculo de $\lambda(f, ce)$ através do SBRF	45
3.5.3	Modelo de Montroll com Parâmetro Fuzzy Triangular	47
3.6	Comparação dos Modelos	49
3.7	Algumas Considerações	50
4	Modelo de Montroll para Conjuntos Fuzzy Tipo 2 Intervalar	51
4.1	Modelo de Montroll com Parâmetro Fuzzy Tipo 2 Intervalar para a População do Peru via SBRF2	51
4.1.1	Cálculo de $\lambda(f, ce)$ através do SBRF2	51
4.2	Modelo de Montroll com Parâmetro Fuzzy Triangular Tipo 2 Intervalar	53
4.3	Princípio de Extensão de Zadeh para Conjuntos Fuzzy Tipo 2 Intervalar	54
4.4	Comparação dos Modelos	57
4.5	Algumas Considerações	58
	Conclusões	59
	Referências Bibliográficas	60
	Anexos	63

Introdução

Neste trabalho, estudamos a dinâmica populacional do Peru, através de modelos populacionais que levam em consideração a variação do tamanho da população. O Peru está localizado na América do Sul, ao oeste do Brasil, tem uma superfície continental de $1.285.215,6 \text{ km}^2$ que, somados aos $991.194,97 \text{ km}^2$ de mar peruano, totalizam $2.276.410,57 \text{ km}^2$ e um perímetro de $10.796,50 \text{ km}$, incluindo o Oceano Pacífico e os limites das 200 milhas em cada fronteira, norte e sul [35]. A população do país é de aproximadamente 30 milhões e 475 mil pessoas, um aumento de 1.13% em relação ao ano 2012, de acordo com o Instituto Nacional de Estatística e Informática (INEI). Estes dados populacionais foram quadruplicados desde 1950 e agora é o quarto país mais populoso da América do Sul (depois de Brasil, Colômbia e Argentina). A idade média dos peruanos é de 25.5 anos. Cerca de 3.5 milhões de peruanos deixaram sua terra natal para viver em outros países. Destes, 2.4 milhões tomaram a decisão de migrar nos últimos 22 anos. Desde o 1994-2010 os principais países de destino são: Chile (29%), Estados Unidos (16.3%), Bolívia (16.1%), Equador (12,6%), Espanha (8.2%), Argentina (3.7%), Venezuela (2.1%), Brasil (1.6%) e Colômbia (1.6%). Quando o Peru celebrar o bicentenário da independência, em 28 de Julho de 2021, haverá três milhões de peruanos a mais. Segundo as projeções do INEI, serão 33 milhões e 149 mil habitantes. A expectativa é de chegar a 40 milhões e 111 mil habitantes em 2050. Os peruanos representam apenas 0.43% da população mundial [38].

Os cientistas desde há muito tempo atrás procuram ferramentas matemáticas para estimar, por exemplo, o crescimento de uma população [9]. O economista e demógrafo inglês Thomas Robert Malthus (1798) foi responsável pela primeira tentativa de estimar o crescimento da população mundial. Seu trabalho, “An Essay on the Principle of Population as it Affects the Future Improvement of Society”, publicado anonimamente em 1798, previa um crescimento em progressão geométrica para a população e em progressão aritmética para os meios de sobrevivência. O modelo de Malthus assume que o crescimento de uma população é proporcional à população em cada instante. Assim, a população deveria crescer sem nenhuma inibição.

A modelagem matemática para descrever o crescimento populacional evoluiu, passando por várias modificações após Malthus. Um dos modelos mais importantes e conhecido é do sociólogo belga P. F. Verhulst (1838), que supõe que toda população é predisposta a sofrer inibições naturais em seu crescimento, devendo tender a um valor limite constante quando o tempo aumenta. É um modelo de crescimento mais significativo, do ponto de vista biológico [2].

Podemos também destacar o Modelo de Montroll, que propôs um modelo geral para traduzir o crescimento assintótico de uma variável, levando em conta o posicionamento do ponto de inflexão da curva [15].

Neste trabalho, utilizamos modelos populacionais com parâmetros fuzzy. A teoria dos conjuntos fuzzy fornece um quadro conceitual no qual as fronteiras rígidas e as verdades ou negações absolutas são vistas, quando justificável, como casos particulares ao invés de únicas possibilidades. O processo de modelagem fuzzy permite expressar incertezas e subjetividades, já que podem ser usadas informações qualitativas (linguísticas) e quantitativas. É caracterizado como um procedimento de fácil compreensão, apropriado para descrever sistemas com razoáveis

quantidades de conhecimento, além de ser baseado em linguagem natural, o que permite maior facilidade na comunicação dos modelos [7].

Com o advento da teoria de conjuntos fuzzy, introduzida por Lotfi A. Zadeh (1965), houve uma grande quebra de paradigma, quando o pensar em termos absolutos é substituído pelo pensar relativo. Essa mudança na forma de pensar, abre novas e refinadas formas de olhar antigas questões, particularmente constituiu-se uma nova abordagem para o estudo da dinâmica populacional [28]. Também, neste trabalho, introduzimos alguns conceitos dos conjuntos fuzzy do tipo 2.

A teoria de conjuntos fuzzy do tipo 2 tem sido uma área muito pesquisada nos últimos anos. Este crescimento vem acompanhado de uma potencialidade desta estratégia no tratamento de incertezas em modelos e/ou informações provenientes de especialistas. Pode-se encontrar trabalhos nas áreas de Engenharia, Ciência da Computação, Medicina, Biologia, Economia, Matemática, entre outras, evidenciando-se a potencialidade, diversidade e amplitude de aplicação desta metodologia e a eficácia desta extensão em relação aos conjuntos fuzzy tipo 1. Na maioria dos trabalhos pesquisados, a teoria de conjuntos fuzzy tipo 2, consegue superar os resultados que a teoria de conjuntos fuzzy tradicional ou outra técnica não conseguia resolver satisfatoriamente, caracterizando assim, um caminho promissor principalmente na identificação de modelos a partir de informações obtidas de um especialista [14]. Os conjuntos fuzzy tipo 2 trata as incertezas associadas aos conjuntos fuzzy, o que não é contemplado na teoria de conjuntos fuzzy tipo 1, viabilizando, portanto, a manipulação de termos imprecisos em toda sua extensão, inclusive na definição das funções de pertinência [14].

Diferentemente dos conjuntos fuzzy tipo 1, que possuem duas dimensões, os conjuntos fuzzy tipo 2 possuem três dimensões; essa terceira dimensão proporciona um grau de incerteza adicional. Além disso, as funções de pertinência tipo 2 incluem uma mancha de incerteza, de forma a tornar possível a modelagem de incertezas tanto numéricas como linguísticas [39].

O objetivo deste trabalho é determinar o modelo conveniente entre Verhulst e Montroll com parâmetros reais que melhor ajusta-se aos dados da população do Peru de 1961 a 2013; em seguida, utilizamos parâmetros fuzzy tipo 1 e tipo 2 para o modelo que melhor se aproxima a esses dados. Inicialmente, determinamos os parâmetros reais para o modelo de Verhulst e Montroll convenientes, sendo que o modelo de Montroll é o que mais se aproxima dos dados do Peru. Esta aproximação é calculada utilizando como método de comparação, o máximo do erro relativo. O modelo de Montroll com parâmetro fuzzy é modelado utilizando duas técnicas: a primeira através de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF) tipo 1 onde as variáveis de entrada são a taxa de fertilidade e a taxa de crescimento econômico e a variável de saída é a taxa de crescimento populacional do país. A segunda técnica considera a taxa de crescimento populacional como um número fuzzy triangular e utiliza o Princípio da Extensão de Zadeh para obter a solução fuzzy do modelo de Montroll em função do tempo. Finalmente, comparamos as aproximações do modelo de Montroll clássico e dos modelos obtidos através das duas técnicas estudadas com os obtidos com o modelo de Montroll com parâmetro fuzzy tipo 2, utilizando o máximo do erro relativo para os dados da população do Peru.

A organização do presente trabalho é a seguinte:

No Capítulo 1, apresentamos conceitos principais da teoria de conjuntos fuzzy tipo 1.

No Capítulo 2, apresentamos alguns conceitos da teoria de conjuntos fuzzy tipo 2 e mostramos como calcular o centroide de um conjunto fuzzy tipo 2 mediante o algoritmo de Karnik-Mendel (KM).

No Capítulo 3, apresentamos uma revisão de dois modelos da literatura. Iniciamos destacando o modelo de Verhulst (1837) que, baseado em Malthus, propõe a alteração na taxa de crescimento de modo que a população tendesse à estabilidade. O último modelo apresentado é o de Montroll (1971) que apresenta diferentes formas possíveis de crescimento das taxas de variação populacional. Apresentamos também os dados da população do Peru obtidos de 1961

a 2013 e fazemos uma comparação entre o modelo de Verhulst e o modelo de Montroll, que é o melhor modelo que ajusta-se aos dados da população do Peru.

No Capítulo 4, estudamos o modelo de Montroll com parâmetro fuzzy tipo 2, utilizamos os dados do Peru e o Princípio de Extensão de Zadeh para conjuntos fuzzy tipo 2.

Finalmente, apresentamos as conclusões do trabalho.

Nathali Vega Cabrera
Uberlândia-MG, 08 de Abril de 2014.

Capítulo 1

Conjuntos Fuzzy Tipo 1

Neste capítulo, serão apresentados conceitos e ferramentas básicas dos conjuntos fuzzy tipo 1, que são usados no desenvolvimento do trabalho.

1.1 Conjuntos Fuzzy

O termo *fuzzy* em língua inglesa pode ter vários significados, que variam de acordo com o contexto de interesse, mas o conceito básico deste adjetivo passa sempre pelo vago, incerto. As tentativas de tradução para o português ainda não são unânimes sendo “nebuloso” e “difuso” os termos mais populares de tradução de fuzzy.

A Lógica Fuzzy (também chamada de lógica multivariada) foi primeiramente introduzida em 1930 pelo filósofo e lógico polonês Jan Lukasiewicz. Através do estudo de termos do tipo alto, velho e quente, Lukasiewicz propôs a utilização do intervalo $[0, 1]$ para indicar o grau de veracidade de uma proposição. Em 1937, o filósofo Max Black definiu o primeiro conjunto fuzzy e descreveu algumas ideias básicas de operações com conjuntos fuzzy. Em 1965, Lotfi Zadeh publicou o artigo Fuzzy Sets, que ficou conhecido como a origem da Teoria de Conjuntos Fuzzy. Na realidade, Zadeh redescobriu a ideia de fuzzificação, identificou e explorou tal conceito, assim como lutou por ele. Portanto, Zadeh ficou e ainda é conhecido como o “mestre” da Teoria de Conjuntos Fuzzy [16].

Conjuntos fuzzy são conjuntos que não possuem fronteiras bem definidas. Foram introduzidos devido ao fato de os conjuntos clássicos apresentarem limitações para lidar com problemas onde as transições de um estado para outro acontecem de forma suave. Sua definição, propriedades e operações são obtidas da generalização da teoria de conjuntos clássicos, recaindo esta em um caso particular da teoria de conjuntos fuzzy [4].

1.1.1 Um Breve Histórico

A teoria dos conjuntos fuzzy enfrentou forte resistência por parte da comunidade científica no seu início, principalmente por parte dos estatísticos norte americanos. Entretanto, a despeito de todo preconceito, muitos pesquisadores vislumbraram as possibilidades que esta teoria oferecia e trabalhos surgiram em todo o mundo, particularmente no Japão, onde os conjuntos fuzzy encontrou um solo fértil para desenvolver-se rapidamente.

Já na primeira década (1965-1975) os pesquisadores se esforçaram por estender os fundamentos da lógica fuzzy, introduzindo conceitos novos e desenvolvendo outras abordagens da teoria, bem como as relações fuzzy, as variáveis linguísticas, os processos de decisão fuzzy, a medida fuzzy, sistemas topológicos, álgebra com números fuzzy, fuzzy clustering, entre outros. Em 1972 formou-se no Japão o primeiro grupo de pesquisas em sistemas fuzzy, coordenado pelo professor Toshiro Terano. Em 1974 iniciou-se um importante capítulo no desenvolvimento desta teoria com a apresentação do primeiro controlador fuzzy criado por E. Mamdani, no Reino Unido. A partir de então vários foram os pesquisadores que buscaram aplicar a teoria de conjuntos fuzzy para controle de sistemas. Em 1976 temos a primeira aplicação industrial da lógica fuzzy, desenvolvido pelo Circle Cement e SIRA, na Dinamarca, que consistiu de um controlador fuzzy que incorporava o conhecimento e a experiência de operadores para controlar os fornos das fábricas [26]. Em 1977, Didier Dubois aplicou os conjuntos fuzzy em um estudo sobre condições de tráfego e neste mesmo ano surgiu o primeiro sistema especialista fuzzy [41].

Em 1985 foi desenvolvido o primeiro chip fuzzy por Masaki Togai e Hiroyuke Watanabe, no laboratório Bell (EUA). Em 1987 foi inaugurado com sucesso o primeiro trem com controlador fuzzy, no sistema do metrô de Sendai, no Japão. Foi também neste ano que a Yamaha desenvolveu seu helicóptero não tripulado, Yamaha-50, totalmente controlado por um controlador fuzzy, dando origem a era do desenvolvimento tecnológico proporcionado por esta teoria. Em 1988 começou a operar no Yamaichi Fuzzy Fund o primeiro sistema especialista fuzzy. Mas foi em 1990 que esta teoria atingiu a popularidade com o lançamento no mercado da primeira máquina de lavar roupas fuzzy, da Matsushita Electric Industrial Co., marcando o início do desenvolvimento de produtos de consumo [26]. Hoje é possível encontrar, principalmente no Japão, toda a sorte de eletrodomésticos cuja operação inclui controles fuzzy (televisão, câmera fotográfica, panela para cozimento de arroz, vídeos, entre outros) e existem atualmente várias empresas (Siemens, Daimler-Benz, Klockner-Moeller, SGS-Thomson, General Motors, Motorola, Hewlett-Packard e muitas outras mais) que possuem laboratórios de pesquisa em lógica fuzzy para desenvolvimento de seus produtos.

O objetivo desse breve histórico é ilustrar quão rápido se deu o desenvolvimento da teoria de conjuntos fuzzy e quão abrangente tem sido suas aplicações. Esta teoria tem mostrado possuir um enorme potencial de desenvolvimento na área de Soft Computing. Em verdade, podemos notar um interesse por esta teoria cada vez mais crescente por profissionais e pesquisadores das mais diversas áreas dada a sua capacidade de explorar variáveis linguísticas, da possibilidade de desenvolver raciocínios mais próximos do humano, da sua diversidade de operações e da sua potencialidade em aplicações [23].

1.1.2 A Teoria de Conjuntos Fuzzy e a Teoria de Probabilidade

Ortega (2001) afirma que:

“É muito comum quando somos apresentados à teoria de conjuntos fuzzy confundirmos esta com a teoria de probabilidades. Frequentemente trocamos grau de pertinência por probabilidade e pensamos na função de pertinência como sendo uma função de distribuição estatística. Esta confusão surge por haver uma estreita relação entre as duas teorias e, sob certos aspectos a teoria fuzzy se apresenta muito similar a teoria de probabilidades.

A teoria de probabilidades e a teoria de conjuntos fuzzy lidam, em geral, com tipos de incertezas distintos. Na teoria de probabilidades temos o evento muito bem definido e a dúvida paira sobre a ocorrência do evento. No entanto, uma vez que o evento ocorreu não existirá mais dúvida alguma. Podemos calcular qual a probabilidade de, em uma urna contendo n_b bolas brancas e n_v bolas vermelhas, sortearmos uma bola vermelha. Todavia, uma vez sorteada a bola não há nada mais a fazer, a bola será branca ou vermelha, e a incerteza desaparecerá. No entanto, supomos que haja em uma urna várias bolas com diversos tons de rosa, variando do vermelho ao branco. Neste caso não poderemos simplesmente perguntar qual a chance de sortearmos uma bola branca, pois teríamos dificuldades para decidir sobre as bolas rosas. Na verdade, não poderemos fazer uma pergunta de caráter ‘puramente estatístico’ pois o evento não está bem definido, existirão bolas quase vermelhas, bolas quase brancas e bolas com diversos tons de rosa (o que configura uma situação de imprecisão). Precisamos saber nestes casos qual é a pergunta a ser realizada e como respondê-la.

Um outro aspecto que diferencia as duas teorias é o fato da teoria de probabilidades não considerar subjetividades, como por exemplo características psicológicas dos indivíduos. É muito comum as pessoas jogarem na Loto ou na Sena, inclusive profissionais da área de estatística. É conhecido também que raramente as pessoas apostam um conjunto de números sequenciados como 1, 2, 3, 4, 5 e 6. As pessoas, de uma forma geral, têm a sensação de que um jogo assim é muito menos provável de acontecer do que um conjunto de números sortidos. E estranhamente elas têm razão em sentir-se assim, uma vez que este evento dificilmente é verificado (quase nunca ocorre um sorteio de números sequenciados). No entanto, sabemos que a probabilidade de ocorrer qualquer combinação de números é a mesma. E se perguntarmos a um estatístico que joga na Sena ou na Loto que tipo de jogo ele faz, dificilmente obteremos uma sequência ordenada de números! Ou seja, mesmo sabendo que a probabilidade deste jogo é a mesma que a de qualquer outro ele não se sente confortável em jogá-lo, ainda que se jogasse teria grande chance de ganhar sozinho!. Sendo assim, a depender do objeto que estamos analisando a teoria de probabilidades pode não ser suficiente, havendo a necessidade de utilizarmos outras técnicas para abordar as incertezas envolvidas no processo”.

1.2 Alguns Conceitos da Teoria de Conjuntos Fuzzy

Definição 1.1. *Seja \mathcal{U} um conjunto não vazio e A um subconjunto clássico de \mathcal{U} . A aplicação,*

$$\mathcal{X}_A : \mathcal{U} \longrightarrow \{0, 1\},$$

tal que

$$\mathcal{X}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A, \end{cases}$$

é chamada de função característica de A [1].

Definição 1.2. Um subconjunto fuzzy F do universo \mathcal{U} é definido por uma função de pertinência μ que a cada elemento x de \mathcal{U} , associa um número $\mu(x)$, entre zero e um, chamado de grau de pertinência de x a F . Assim, o conjunto fuzzy F é sinônimo de função de pertinência,

$$\mu_F : \mathcal{U} \longrightarrow [0, 1].$$

Os valores $\mu_F(x) = 1$ e $\mu_F(x) = 0$ indicam, respectivamente, a pertinência plena e a não pertinência do elemento x a F .

1.2.1 Representação de Conjuntos Fuzzy

As representações das funções que definem os elementos de um conjunto fuzzy facilitam a visualização deste conjunto, e podem ser feitas na forma tabular (ou de lista), graficamente e na forma analítica.

Para conjuntos finitos, as funções podem ser representadas por tabelas. A tabela representando um conjunto fuzzy lista todos os elementos do conjunto com seus respectivos graus de pertinência [9]. No exemplo a seguir temos uma ilustração deste caso.

Exemplo 1.1. Seja A o conjunto das cinco primeiras “cidades com melhor qualidade de vida no Peru” e sejam estas cidades: Lima, Arequipa, Trujillo, Ilo e Chiclayo [37]. Este conjunto A é um subconjunto do universo X de todas as cidades do Peru. Nem todas as cidades do conjunto A tem a mesma qualidade de vida, logo alguns têm um grau de **melhor qualidade de vida**, outros de **menos qualidade de vida** variando entre os valores 0 e 1.

Para as cidades citadas tem-se a representação na Tabela 1.1.

Cidades	Grau de qualidade de vida
Lima	1
Arequipa	0.89
Trujillo	0.75
Ilo	0.7
Chiclayo	0.68

Tabela 1.1: Cidades e graus de qualidade de vida.

Alternativamente à Tabela 1.1, pode-se listar os pares consistindo de cada elemento com seu grau de qualidade de vida, da seguinte forma:

$$A = 1/Lima + 0.89/Arequipa + 0.75/Trujillo + 0.7/Ilo + 0.68/Chiclayo.$$

Aqui o símbolo “/” é apenas usado para associar o elemento do conjunto universo X e seu grau de pertinência ao conjunto fuzzy A . Assim, também o sinal de $+$ não significa soma; simplesmente conecta os elementos do grupo. A forma geral para representar o conjunto fuzzy A quando X é finito tem a forma:

$$A = \sum \mu_A(x)/x,$$

onde \sum representa a união.

Uma outra forma de se representar um conjunto fuzzy é feita graficamente. A representação gráfica é a mais usada na literatura fuzzy por ter uma interpretação mais intuitiva. No caso de uma representação em duas dimensões, o eixo vertical representa o grau de pertinência no intervalo $[0,1]$, e o eixo horizontal o universo.

Exemplo 1.2. O conjunto fuzzy de pessoas de “meia idade” no universo $\mathcal{U} = [0, 90]$, poderia ser representado pela função $\mu_M(x)$ ilustrada na Figura 1.1.

Neste exemplo, a curva tem a forma de sino, crescendo da esquerda para a direita até uma certa idade, e depois decrescendo com a idade. Que a curva deva ter esta forma acreditamos que é consenso. As controvérsias talvez apareçam a respeito da idade, onde há mudança do crescimento da curva.

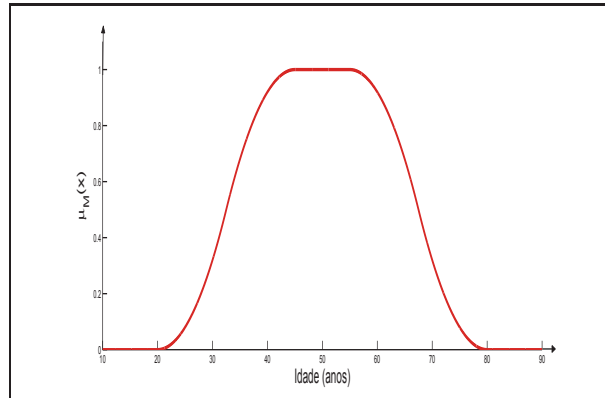


Figura 1.1: Função de pertinência de pessoas de meia idade.

A representação analítica é também bastante utilizada em teoria dos conjuntos fuzzy.

Exemplo 1.3. O conjunto fuzzy A dos números reais positivos em torno de 4 do universo \mathbb{R}^+ , (Figura 1.2), pode ser representado analiticamente da seguinte forma,

$$\mu_A(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{se } 3 \leq x < 4, \\ 5 - x & \text{se } 4 \leq x \leq 5, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1.1)$$

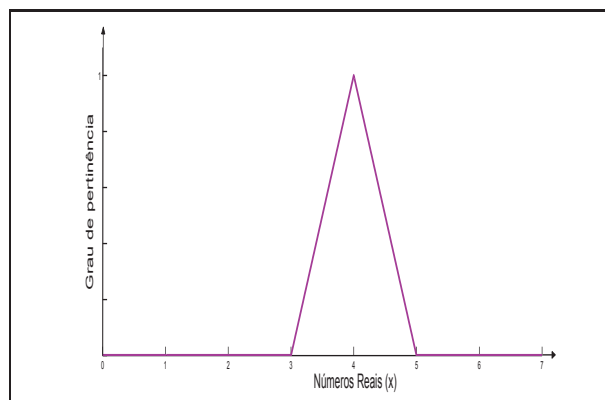


Figura 1.2: Conjunto fuzzy dos números reais positivos “em torno de 4”.

Apresentamos os diversos tipos de funções de pertinência de um conjunto fuzzy que podem ser utilizados no toolbox fuzzy do MATLAB [33], Figura 1.3.

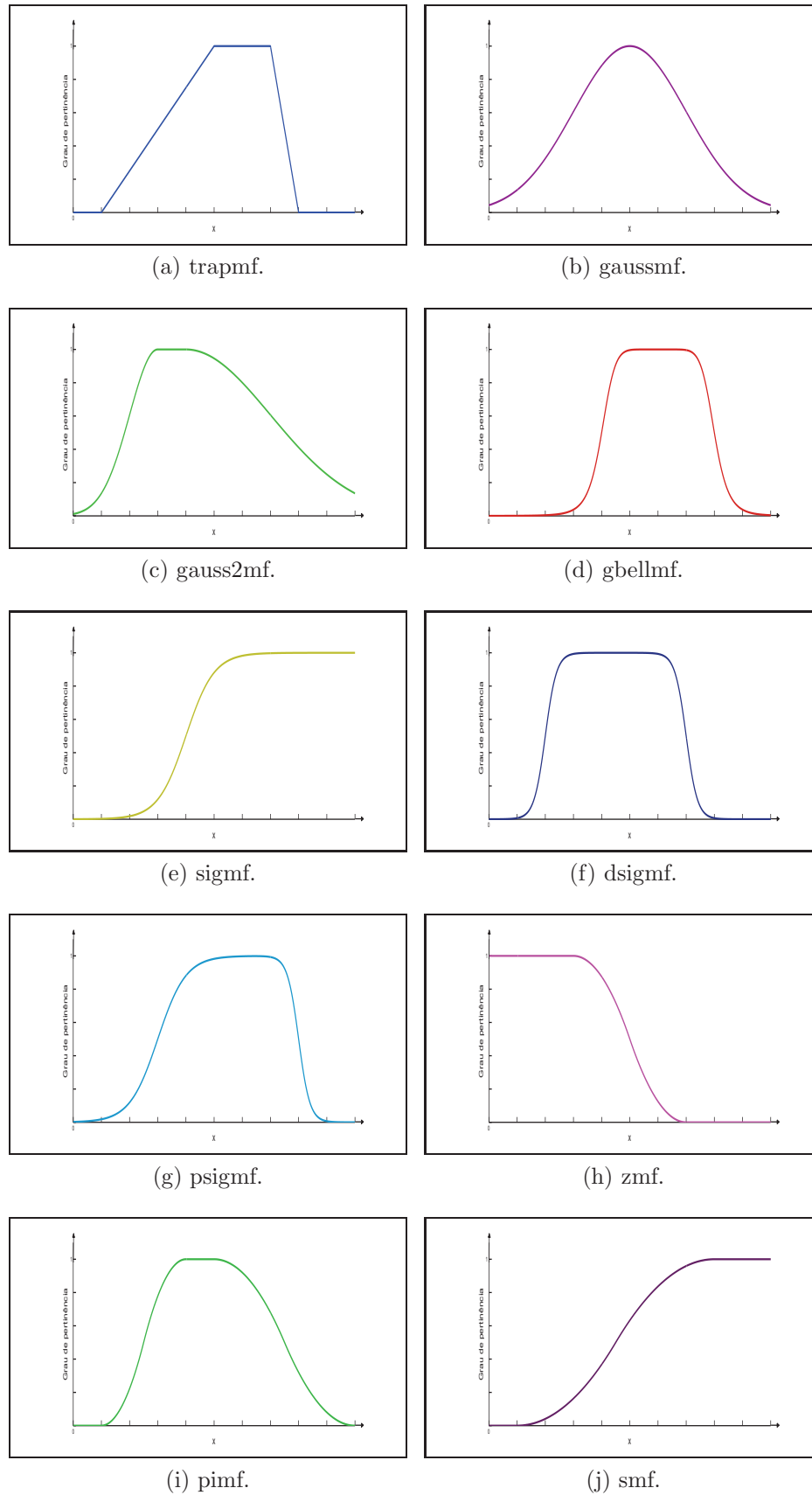


Figura 1.3: Exemplos de funções de pertinência do MATLAB.

Onde:

- **trapmf** é a função de pertinência trapezoidal.
- **gaussmf** é a função de pertinência Gaussiana.
- **gauss2mf** é a função de pertinência de dois lados composto de duas curvas Gaussianas diferentes.
- **gbellmf** é a função de pertinência generalizada e é especificada por três parâmetros. As funções de pertinência de Gauss e Bell são métodos populares para especificar conjuntos fuzzy. Ambas curvas têm a vantagem de ser diferente de zero em todos os pontos.
- **sigmf** é a função de pertinência sigmoidal, que pode ser aberto a esquerda ou direita.
- **dsigmf** é a função de pertinência da diferencia entre duas funções sigmoidais.
- **psigmf** é a função de pertinência do produto entre duas funções sigmoidais.
- **zmf** é a função de pertinência assimétrica da curva polinomial aberto para a esquerda.
- **pimf** é a função de pertinência que é zero em ambos os extremos, com um aumento no meio.
- **smf** é a função de pertinência de espelhamento que abre para a direita.

1.2.2 Operações Padrões entre Conjuntos Fuzzy

Sejam A e B subconjuntos clássicos de \mathcal{U} representados pelas funções características \mathcal{X}_A e \mathcal{X}_B , respectivamente. Os conjuntos

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{x \in \mathcal{U} : x \in A \text{ ou } x \in B\}, \\ A \cap B &= \{x \in \mathcal{U} : x \in A \text{ e } x \in B\}, \\ A' &= \{x \in \mathcal{U} : x \notin A\}, \end{aligned}$$

têm, respectivamente, as funções características, $\forall x \in \mathcal{U}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{A \cup B}(x) &= \max\{\mathcal{X}_A(x), \mathcal{X}_B(x)\}, \\ \mathcal{X}_{A \cap B}(x) &= \min\{\mathcal{X}_A(x), \mathcal{X}_B(x)\}, \\ \mathcal{X}_{A'}(x) &= 1 - \mathcal{X}_A(x). \end{aligned}$$

Definição 1.3. *Sejam A e B conjuntos fuzzy (Figura 1.4). As funções de pertinência que representam os conjuntos fuzzy união (Figura 1.5), intersecção (Figura 1.6) e complementar (Figura 1.7) de conjuntos fuzzy $\forall x \in \mathcal{U}$, são dadas por,*

$$\begin{aligned} \mu_{A \cup B}(x) &= \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \\ \mu_{A \cap B}(x) &= \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}, \\ \mu_{A'}(x) &= 1 - \mu_A(x), \end{aligned}$$

respectivamente.

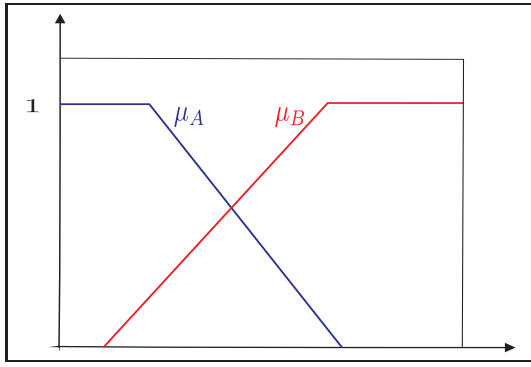


Figura 1.4: Função de pertinência dos conjuntos fuzzy A e B .

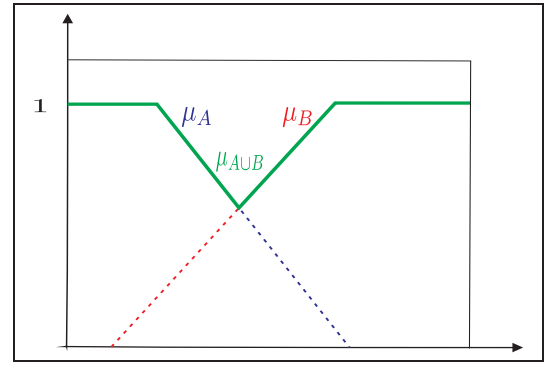


Figura 1.5: Função de pertinência da união dos conjuntos fuzzy A e B .

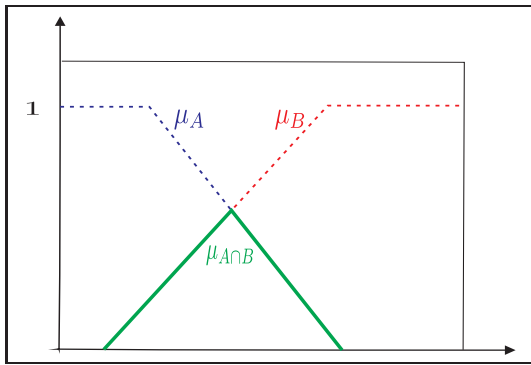


Figura 1.6: Função de pertinência da intersecção dos conjuntos fuzzy A e B .

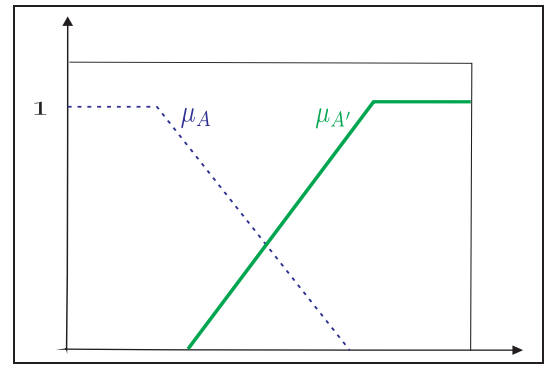


Figura 1.7: Funções de pertinência dos conjuntos fuzzy A e seu complementar A' .

Exemplo 1.4. Suponha que o conjunto universo \mathcal{U} seja composto pelas Províncias de Peru, identificados pelos números 1, 2, 3, 4 e 5. Sejam A e B os conjuntos fuzzy que representam as sensações de frio e calor, respectivamente. A Tabela 1.2 ilustra a união, intersecção e o complemento.

Província	Frio (μ_A)	Calor (μ_B)	$\mu_{A \cup B}$	$\mu_{A \cap B}$	$\mu_{A'}$	$\mu_{A \cap A'}$
1	0.8	0.5	0.8	0.5	0.2	0.2
2	0.6	0.9	0.9	0.6	0.4	0.4
3	1.0	1.0	1.0	1.0	0.0	0.0
4	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
5	1.0	0.3	1.0	0.3	0.0	0.0

Tabela 1.2: União, intersecção e complementar dos conjuntos A e B .

1.2.3 Normas Triangulares

As normas triangulares generalizam os operadores união e intersecção. Formalmente, temos a definição:

Definição 1.4. Uma co-norma triangular (s -norma) é uma operação binária

$$s : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1],$$

satisfazendo as seguintes condições:

- *Comutatividade:* $xsy = ysx$;
- *Associatividade:* $xs(ysz) = (xsy)sz$;
- *Monotonicidade:* Se $x \leq y$ e $w \leq z$ então $xsw \leq ysz$;
- *Condições de fronteira:* $xs0 = x$, $xs1 = 1$.

Exemplo 1.5. *Apresentamos alguns exemplos.*

1. *União Padrão:* $s : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ com $xsy = \max(x, y)$;
2. *Soma Algébrica:* $s : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ com $xsy = x + y - xy$;
3. *Soma Limitada:* $s : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ com $xsy = \min(1, x + y)$;
4. *União Drástica:* $s : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ com,

$$\mu_r(x) = \begin{cases} x & \text{se } y = 0, \\ y & \text{se } x = 0, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definição 1.5. *Uma norma triangular (t -norma) é uma operação binária,*

$$t : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1],$$

satisfazendo as seguintes condições:

- *Comutatividade:* $xty = ytx$;
- *Associatividade:* $xt(ytz) = (xty)tz$;
- *Monotonicidade:* Se $x \leq y$ e $w \leq z$ então $xw \leq yz$;
- *Condições de fronteira:* $0tx = 0$, $1tx = x$.

Exemplo 1.6. *Apresentamos alguns exemplos.*

1. *Intersecção Padrão:* $t : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ com $xty = \min(x, y)$;
2. *Produto Algébrico:* $t : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ com $xty = xy$;
3. *Diferença Limitada:* $t : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ com $xty = \max(0, x + y - 1)$;
4. *Intersecção Drástica:* $t : [0, 1] \times [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ com,

$$\mu_r(x) = \begin{cases} x & \text{se } y = 1, \\ y & \text{se } x = 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

1.2.4 Níveis de um Conjunto Fuzzy

Definição 1.6. *Seja A um conjunto fuzzy e $\alpha \in (0, 1]$. Definimos como α -**nível** de A o conjunto,*

$$[A]^\alpha = \{x \in \mathcal{U} : \mu_A(x) \geq \alpha\}.$$

Definição 1.7. ***Suporte** de um conjunto fuzzy A são todos os elementos de \mathcal{U} que têm grau de pertinência diferente de zero em A e denotamos por $\text{supp}(A)$.*

$$\text{supp}(A) = \{x \in \mathcal{U} : \mu_A(x) > 0\}.$$

Observação 1.1. *Definimos o nível zero de um conjunto fuzzy A , como o fecho do suporte de A , isto é,*

$$[A]^0 = \overline{\text{supp}(A)}.$$

1.2.5 Números Fuzzy

Definição 1.8. *Seja A um subconjunto não vazio de um conjunto parcialmente ordenado E . Ao menor dos limites superiores de A dá-se o nome de supremo de A que é indicado por $\sup A$.*

Definição 1.9. *Um conjunto fuzzy N é chamado **número fuzzy** quando o universo, onde N está definido, é o conjunto dos números reais \mathbb{R} e a função de pertinência,*

$$\mu_N : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1],$$

é tal que:

1. $\mu_N(x)$ atinge o 1, isto é, $\mu_N(x_0) = 1$ para algum x_0 .
2. $[N]^\alpha$ é um intervalo fechado, $\forall \alpha \in (0, 1]$.
3. O suporte de N é limitado.

Observamos que, com a Definição 1.9, todo número real r é um caso particular de número fuzzy cuja função de pertinência é sua função característica:

$$\mu_r(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = r, \\ 0 & \text{se } x \neq r. \end{cases} \quad (1.2)$$

1.2.6 Princípio de Extensão de Zadeh

Essencialmente, o Princípio da Extensão de Zadeh é utilizado para obter a imagem de conjuntos fuzzy através de uma função clássica.

Definição 1.10. *O Princípio da Extensão de Zadeh de uma função $f : X \longrightarrow Y$, onde X e Y são espaços métricos não vazios, é uma função \hat{f} que quando aplicado a um conjunto fuzzy $D \in X$, retorna um conjunto fuzzy $\hat{f}(D) \in Y$, cuja função de pertinência é dada por:*

$$\mu_{\hat{f}(D)}(y) = \begin{cases} \sup_{\{x: f(x)=y\}} \mu_D(x) & \text{se } \{x : f(x) = y\} \neq \emptyset, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que $\hat{f}(D) = f(D)$ se D é um conjunto clássico de X .

A Figura 1.8 ilustra o princípio.

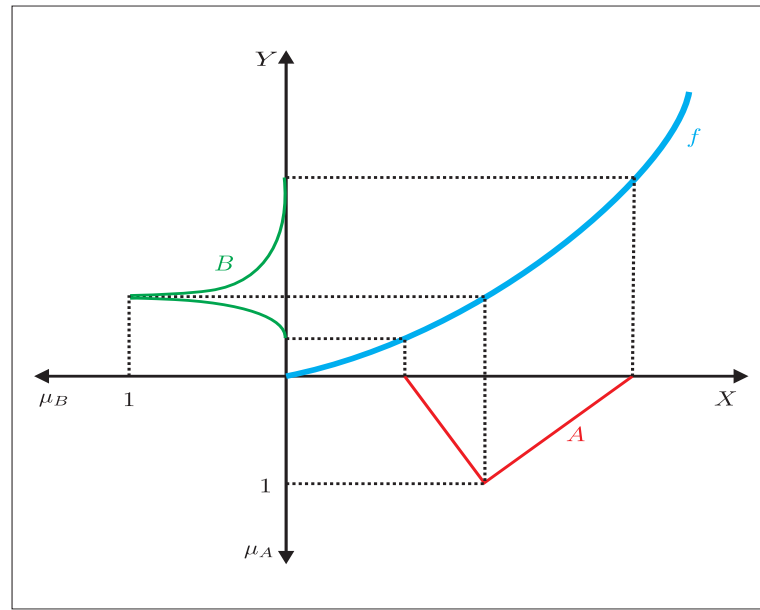


Figura 1.8: Princípio de extensão de Zadeh [24].

Proposição 1.1. *Seja X e Y espaços métricos não vazios, seja D um conjunto fuzzy de X e seja $f : X \rightarrow Y$ contínua. Então para cada $0 \leq \alpha \leq 1$, $[\hat{f}(D)]^\alpha = f([D]^\alpha)$ [1].*

Este resultado indica que os α -níveis do conjunto fuzzy, obtidos pelo Princípio de Extensão de Zadeh, coincidem com as imagens dos α -níveis pela função f .

A seguir definimos uma variável linguística.

Definição 1.11. *Uma variável linguística é uma variável cujo valor é expresso qualitativamente por termos linguísticos (que fornece um conceito à variável) e quantitativamente por uma função de pertinência, Figura 1.9.*

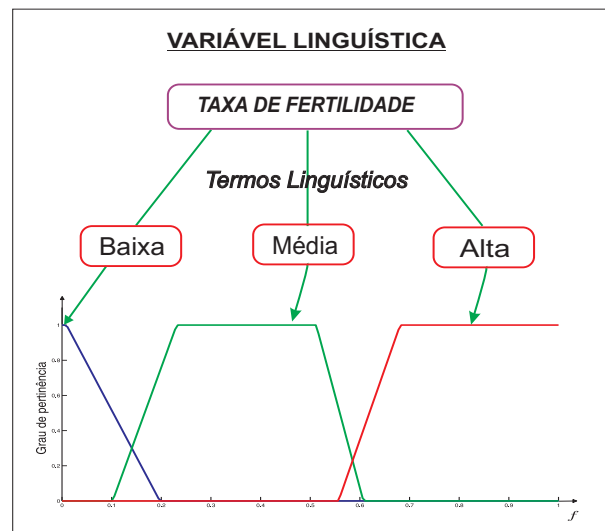


Figura 1.9: Variável linguística.

1.3 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy

Sistemas Baseados em Regras Fuzzy (SBRF) contém quatro componentes: um processador de entrada que realiza a fuzzificação dos dados de entrada, uma coleção de regras fuzzy chamada de base de regras, uma máquina de inferência fuzzy e um processador de saída que fornece um vetor como saída. Estes componentes estão conectados conforme indica a Figura 1.10.

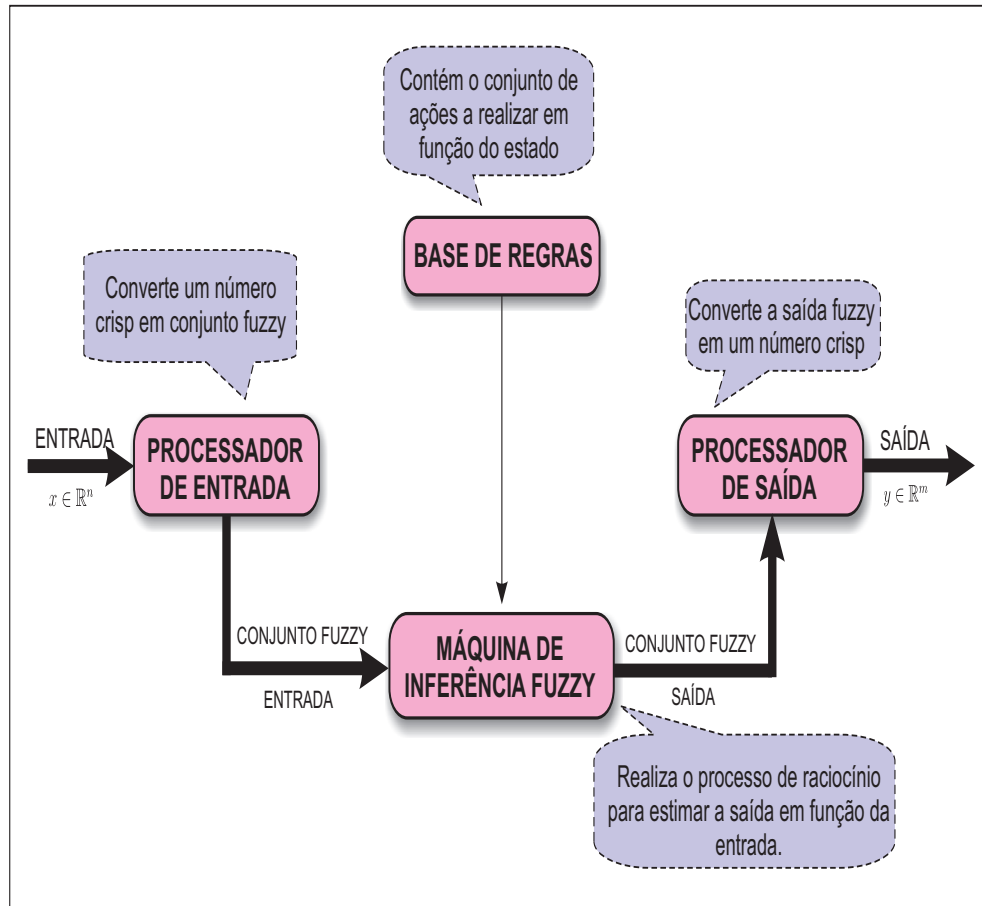


Figura 1.10: Sistema Baseado em Regras Fuzzy.

1. Processador de Entrada (Fuzzificação):

Essa etapa obtém o grau de pertinência com que cada entrada pertence a cada conjunto fuzzy. Cada uma dessas entradas é um elemento do universo de discurso em questão e associada a um grau de pertinência em cada conjunto fuzzy sobre o respectivo universo [16].

2. Base de Regras:

Este componente é composto por sentenças da forma: *Se ... então ...*. A base de regras descreve relações entre as variáveis linguísticas e são processadas pela máquina de inferência.

3. Máquina de Inferência Fuzzy

É neste componente que cada proposição fuzzy é processada matematicamente por meio das técnicas de raciocínio aproximado. Os operadores matemáticos serão selecionados para definir a relação fuzzy que modela a base de regras. Desta forma, a máquina de inferência fuzzy é de fundamental importância para o sucesso do sistema fuzzy, já que fornece a saída a partir de cada entrada fuzzy e da relação definida pela base de regras.

Apresentamos um método particular de Inferência Fuzzy: O Método de Mamdani.

- **Método de Mamdani**

O método de inferência Mamdani foi criado pelo professor Ebrahim Mamdani da Universidade de Londres (Reino Unido) em 1975 no contexto do desenvolvimento de sistemas fuzzy baseando-se em regras de conjuntos fuzzy no intuito de representar experiências da vida real [16].

Uma regra: *Se* (antecedente) *então* (consequente) é definida pelo produto cartesiano fuzzy dos conjuntos fuzzy que compõem o antecedente e o consequente da regra. O método de Mamdani agrega as regras através do operador OU, que é modelado pelo operador máximo e, em cada regra, o operador lógico E é modelado pelo operador mínimo. Veja as regras a seguir:

Regra 1: *Se* x é A_1 e y é B_1 *então* (z é C_1);

Regra 2: *Se* x é A_2 e y é B_2 *então* (z é C_2).

A Figura 1.11, ilustra como uma saída real z de um sistema de inferência do tipo Mamdani é gerada a partir das entradas x e y reais e a regra de composição $\max - \min$.

A saída $z \in \mathbb{R}$, é obtida pela defuzzificação do conjunto fuzzy de saída $C = C'_1 \cup C'_2$ da Figura 1.11.

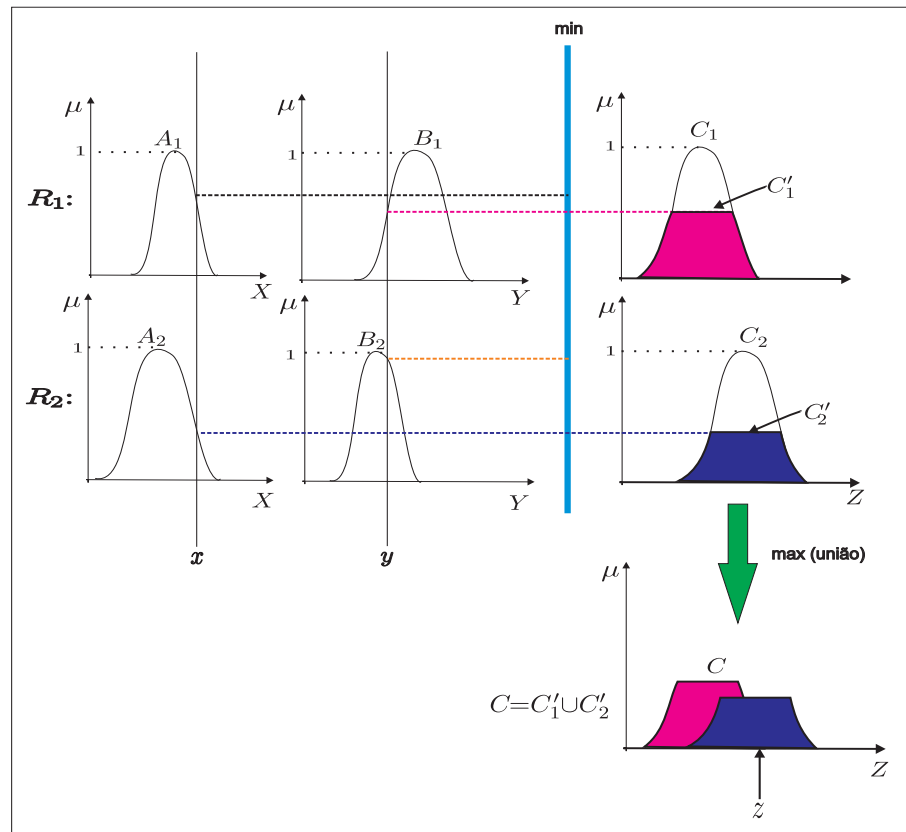


Figura 1.11: Método de Mamdani com composição $\max - \min$ [9].

4. Processador de Saída:

Na teoria dos conjuntos fuzzy pode-se dizer que a defuzzificação é um processo de se representar um conjunto fuzzy por um número real. Em sistemas fuzzy, em geral a saída é um conjunto fuzzy. Assim, devemos escolher um método para defuzzificar a saída e obter um número real que a represente. O método de defuzzificação mais comum é a técnica do *Centroide* ou chamado também *Centro de Gravidade*(CG):

Para um domínio discreto, tem-se:

$$CG = \frac{\sum_{i=0}^n \mu(z_i) z_i}{\sum_{i=0}^n \mu(z_i)},$$

onde n é o número de pontos na qual o domínio é discretizado.

Para um domínio contínuo, tem-se:

$$CG = \frac{\int_R \mu(z) z dz}{\int_R \mu(z) dz},$$

onde R é a região de integração e $z, z_i \in R$.

No próximo capítulo, apresentamos os Conjuntos Fuzzy Tipo 2.

Capítulo 2

Conjuntos Fuzzy Tipo 2

A teoria de conjuntos fuzzy tipo 2 foi introduzida por Lotfi Zadeh em 1975 como uma extensão do conjunto fuzzy tradicional. Seu surgimento está relacionado com a insuficiência da teoria de conjunto fuzzy tradicional em modelar as incertezas inerentes à definição das funções de pertinência dos antecedentes e consequentes em um sistema de inferência fuzzy.

Conjuntos fuzzy tipo 2 são conjuntos fuzzy cujos graus de pertinência são conjuntos fuzzy tipo 1 e não um único valor. Tais conjuntos podem ser usados em situações onde existe incerteza a respeito dos graus de pertinência, incerteza do formato das funções de pertinência ou incerteza em alguns dos parâmetros das funções de pertinência [12].

A teoria de conjuntos fuzzy tipo 2, modela a incerteza oriunda do significado das palavras. Embora a função de pertinência tipo 2 também seja totalmente precisa, esta é composta por uma “mancha” de incerteza (FOU-*Footprint of Uncertainty*) que permite que a incerteza seja trabalhada pelo Sistema Baseado em Regras Fuzzy tipo 2 (SBRF2) [27].

2.1 Um Breve Histórico

Em 1975, Zadeh introduziu o conceito de conjuntos fuzzy tipo 2. Em 1976, Mizumoto e Tanaka apresentaram estudos sobre as operações dos conjuntos fuzzy tipo 2 e suas funções de pertinência. E, em 1977, Niemien apresentou a estrutura algébrica dos conjuntos fuzzy tipo 2 com mais detalhes.

Nos anos seguintes não foram encontrados trabalhos relevantes envolvendo os conjuntos fuzzy tipo 2. Mas, voltou a ser abordada pela comunidade científica no final dos anos 90 com os trabalhos de Karnik e Mendel. Nestes trabalhos, foi apresentada a teoria completa do SBRF2, incluindo as operações, o tipo redutor e os métodos de defuzzificação. Em 2000 Liang e Mendel desenvolveram a teoria do SBRF2 intervalar e mostraram como o SBRF2 intervalar pode ser projetado. Além disso, apresentaram diversas aplicações mostrando a superioridade de desempenho do SBRF2 intervalar e sua capacidade de trabalhar com incerteza. Mas a execução do módulo tipo redutor do SBRF2 intervalar era o “gargalo” do sistema, por causa da grande carga computacional necessária para executá-lo. Para solucionar este problema, Wu e Mendel desenvolveram o método dos limites incertos, que permitiu a execução rápida do SBRF2 e sua aplicação na área de controle, de sistemas de tempo real e na indústria. O SBRF2 também é utilizado em aplicações na área de ciências da computação, diagnose médica, reconhecimento de padrões, matemática, entre outras [27].

2.2 Algumas Definições da Teoria de Conjuntos Fuzzy Tipo 2

Definição 2.1. Um conjunto fuzzy tipo 2, \tilde{A} sobre X , é caracterizado por uma função de pertinência tipo 2, $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$, onde $x \in X$ e $u \in J_x \subseteq [0, 1]$, ou seja,

$$\tilde{A} = \{((x, u), \mu_{\tilde{A}}(x, u)) \mid \forall x \in X, \forall u \in J_x \subseteq [0, 1]\}, \quad (2.1)$$

onde $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x, u) \leq 1$ [27].

Um meio de representar conjuntos fuzzy tipo 2 é através da forma geométrica de sua função de pertinência. As Figuras 2.1 e 2.2, mostram dois conjuntos fuzzy tipo 2 diferentes. O primeiro é representado por uma função triangular em duas dimensões, onde a área entre as curvas é denominada “Footprint of Uncertainty” (FOU).

Na Figura 2.2 há o recurso da terceira dimensão para possibilitar a representação da incerteza (eixo vertical), onde a área de cor verde representa o FOU.

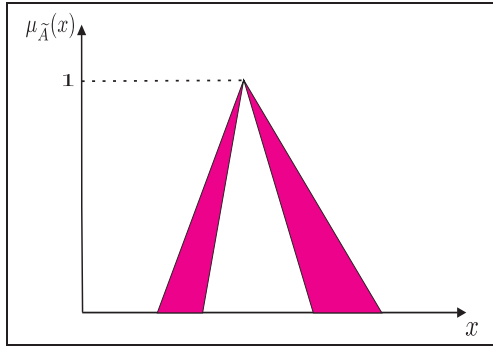


Figura 2.1: Função de pertinência de um conjunto fuzzy triangular tipo 2, representado bidimensionalmente.

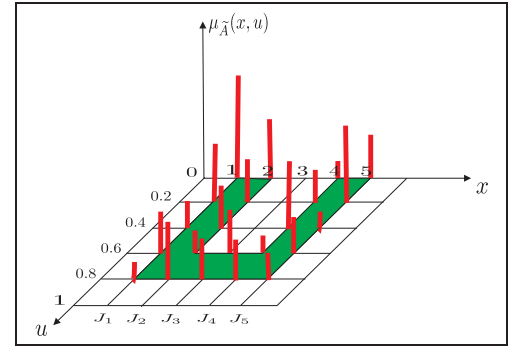


Figura 2.2: Função de pertinência de um conjunto fuzzy trapezoidal tipo 2, representado tridimensionalmente [20].

Definição 2.2. Define-se um **corte vertical** de $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$ como sendo o plano bidimensional em um dado $x = x'$, cujos eixos são u e $\mu_{\tilde{A}}(x', u)$. Mostramos na Figura 2.3 o corte vertical para $x' = 5$ [20].

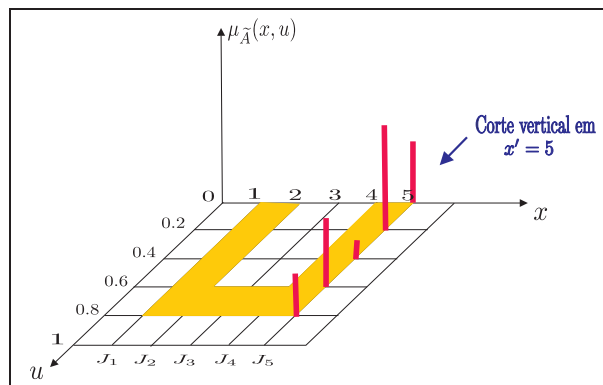


Figura 2.3: Corte vertical para $x' = 5$ [20].

Definição 2.3. A função de **pertinência secundária** é o corte vertical $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$ em um determinado valor de $x = x'$, isto é, $\mu_{\tilde{A}}(x = x', u)$ [27].

Definição 2.4. A **pertinência primária** de X (J_X) é definida como o domínio da função de pertinência secundária para um valor de x , com $J_x \subseteq [0, 1]$, $\forall x \in X$, onde $J_x = [\underline{J}_x, \overline{J}_x]$.

Definição 2.5. O valor do domínio $u_x \in [0, 1]$ é chamado de **Grau Primário (GP)**.

Definição 2.6. A amplitude de uma função de pertinência secundária é definida como **Grau Secundário (GS)**, i.e., $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$ é o grau de pertinência chamado de grau secundário.

A Figura 2.4 apresenta o grau de pertinência secundária, funções de pertinência primária e secundária de um conjunto fuzzy tipo 2 [39].

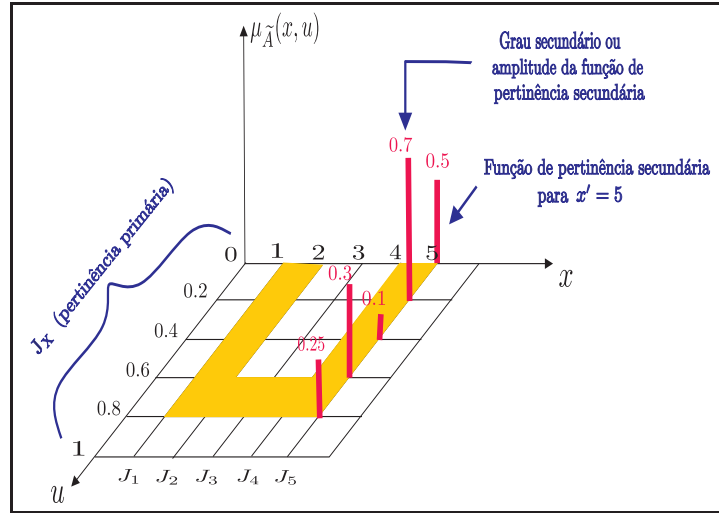


Figura 2.4: Grau de pertinência secundária, funções de pertinência primária e secundária de um conjunto fuzzy tipo 2 [39].

Definição 2.7. “Mancha” de Incerteza (FOU): A incerteza das funções de pertinências primárias de um conjunto fuzzy tipo 2 é representada pela “mancha” de incerteza ou FOU. Quando a incerteza desaparece, o conjunto fuzzy tipo 2 se torna um conjunto fuzzy tipo 1. A “mancha” de incerteza (FOU) é definido como a união de todas as pertinências primárias,

$$FOU(\tilde{A}) = \bigcup_{x \in X} (x, J_x). \quad (2.2)$$

Definição 2.8. Função de Pertinência Superior e Inferior: A FOU de um conjunto fuzzy tipo 2 é delimitada por uma função de pertinência tipo 1 superior e uma inferior [20]. A função de pertinência superior é representada na forma $\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x), \forall x \in X$ e a função de pertinência inferior é a função mais interna que limita a $FOU(\tilde{A})$ e é representada na forma de $\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x), \forall x \in X$, dadas por

$$\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x) = \bigcup_{x \in X} (x, \overline{J}_x), \quad (2.3)$$

$$\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) = \bigcup_{x \in X} (x, \underline{J}_x), \quad (2.4)$$

onde \bigcup representa a união.

A Figura 2.5, mostra a FOU e as funções de pertinência superior e inferior de um conjunto fuzzy triangular tipo 2.

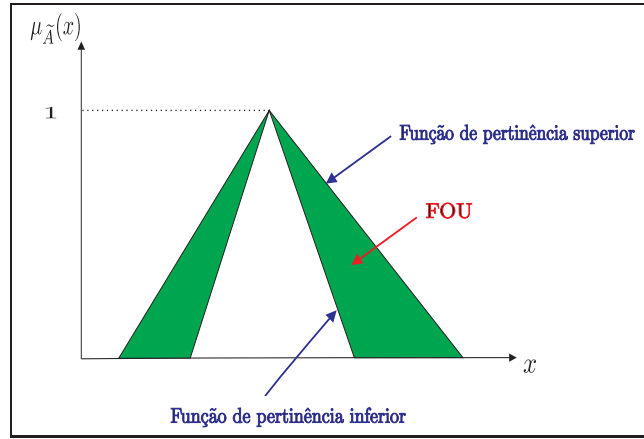


Figura 2.5: FOU, as funções de pertinência superior e inferior de um conjunto fuzzy triangular tipo 2.

Definição 2.9. *Conjunto fuzzy tipo 2 intervalar*, é um conjunto fuzzy tipo 2 onde todos os graus secundários são 1, isto é,

$$\mu_{\tilde{A}}(x, u) = 1, \quad \forall u \in J_x, \quad \forall x \in X.$$

A Figura 2.6 mostra a função de pertinência de um conjunto fuzzy triangular tipo 2 intervalar e a Figura 2.7 mostra a função de pertinência de um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar.

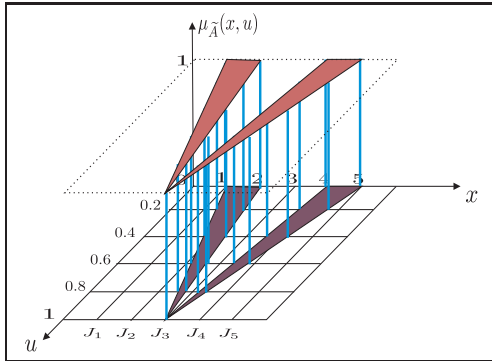


Figura 2.6: Função de pertinência de um conjunto fuzzy triangular tipo 2 intervalar.

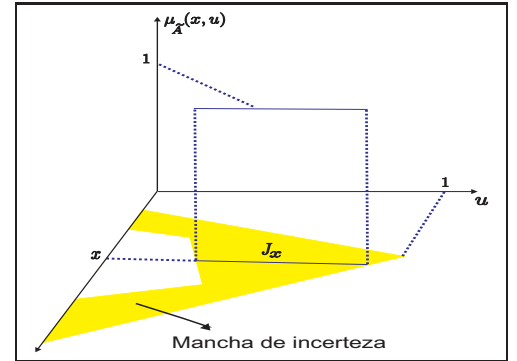


Figura 2.7: Função de pertinência de um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar.

Apresentamos os diversos tipos de funções de pertinência de um conjunto fuzzy tipo 2 que podem ser utilizados no toolbox fuzzy do MATLAB [34], Figura 2.8.

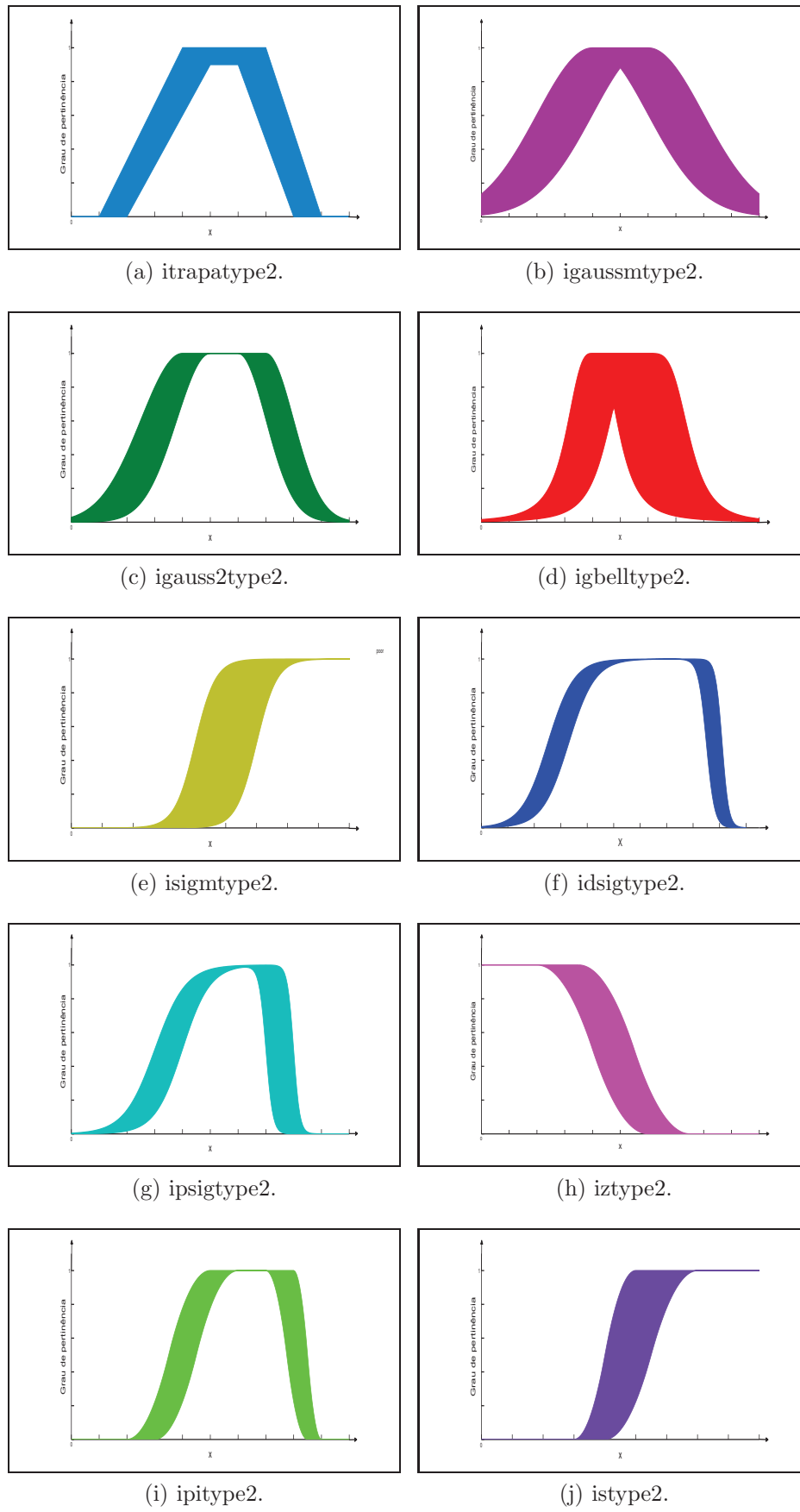


Figura 2.8: Diversas funções de pertinência de conjuntos fuzzy tipo 2.

Onde:

- *itrapatype2* é a função de pertinência trapezoidal.
- *igaussmtype2* é a função de pertinência Gaussiana.
- *igauss2type2* é a função de pertinência de dois lados composto de dois curvas Gaussianas diferentes.
- *igbelltype2* é a função de pertinência generalizada e é especificada por seis parâmetros.
- *isigmtype2* é a função de pertinência sigmoidal, que pode ser aberto a esquerda ou direita.
- *idsigtype2* é a função de pertinência da diferencia entre duas funções sigmoidais.
- *ipsigtype2* é a função de pertinência do produto entre duas funções sigmoidais.
- *iztype2* é a função de pertinência assimétrica da curva polinomial aberto para a esquerda.
- *ipitype2* é a função de pertinência que é zero em ambos os extremos, com um aumento no meio.
- *istype2* é a função de pertinência de espelhamento que abre para a direita.

Na próxima seção apresentamos um breve estudo do SBRF2.

2.3 Sistema Baseado em Regras Fuzzy Tipo 2 (SBRF2)

Sistema Baseado em Regras Fuzzy Tipo 2 (SBRF2) é um sistema fuzzy em que pelo menos um dos seus conjuntos fuzzy presentes no antecedente ou consequente de uma regra são conjuntos fuzzy tipo 2 [13]. O SBRF2 é composto por cinco componentes: fuzzificador, inferência, base de regras, redutor tipo 1 e defuzzificador. A Figura 2.9 mostra a estrutura genérica deste tipo de sistema.

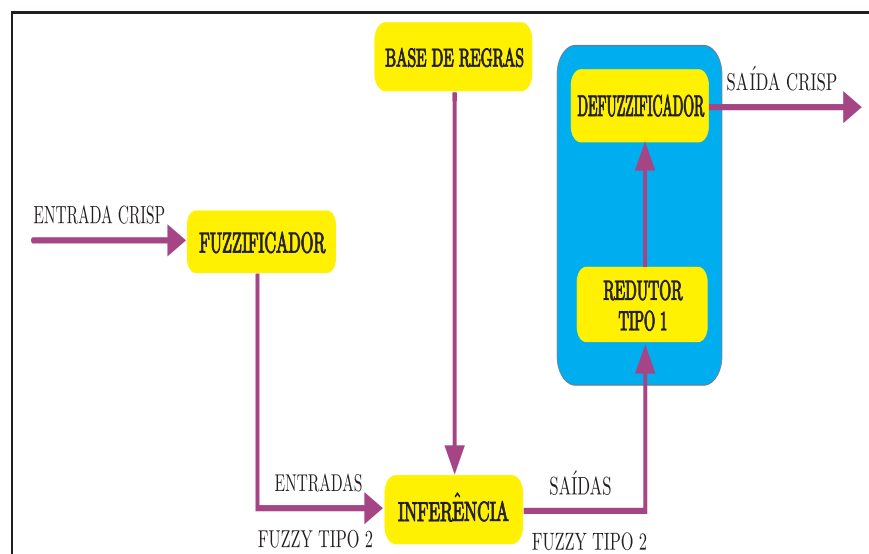


Figura 2.9: Sistema Baseado em Regras Fuzzy Tipo 2 [27].

1. **Fuzzificador:** O bloco fuzzificador transforma o vetor de entrada $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_I)$, do SBRF2 em conjuntos fuzzy tipo 2.
2. **Base de regras:** A base de regras do SBRF2 tem a mesma forma do tipo 1. A diferença entre o SBRF (tipo 1) e SBRF2 está na natureza das funções de pertinência. Por exemplo,

Regra 1: Se x_1 é \tilde{A}_1 e x_2 é \tilde{B}_1 , então y é \tilde{C}_1 ;

Regra 2: Se x_1 é \tilde{A}_2 e x_2 é \tilde{B}_2 , então y é \tilde{C}_2 .
3. **Inferência:** O bloco de inferência processa a base de regras fuzzy.
4. **Redutor do tipo 1:** O bloco redutor tipo 1 tem função de transformar um conjunto fuzzy tipo 2 em conjunto fuzzy tipo 1, ou seja, procura o conjunto fuzzy tipo 1 que melhor representa o conjunto fuzzy tipo 2 e que deve satisfazer a seguinte premissa: Quando toda incerteza desaparecer, o resultado do SBRF2 é reduzido ao SBRF [19].
5. **Defuzzificador:** Utiliza um método convencional de defuzzificação como por exemplo o *Centroide*:

$$C = \frac{c_L + c_R}{2}.$$

onde c_L e c_R são pontos switch definidos mais adiante.

2.4 Método de Mamdani para Conjuntos Fuzzy Tipo 2 Intervalar

A Figura 2.10 apresenta o método de Mamdani com entrada $x' = (x'_1, x'_2)$. Consideramos duas regras R_1 e R_2 , com dois antecedentes e um consequente dados por conjuntos fuzzy tipo 2 intervalar, cada uma das regras são dadas por:

$$\begin{aligned} R_1: & \text{ Se } x_1 \text{ é } \tilde{A}_1 \text{ e } x_2 \text{ é } \tilde{B}_1 \text{ então } y \text{ é } \tilde{C}_1; \\ R_2: & \text{ Se } x_1 \text{ é } \tilde{A}_2 \text{ e } x_2 \text{ é } \tilde{B}_2 \text{ então } y \text{ é } \tilde{C}_2. \end{aligned}$$

Primeiro calculamos o grau de ativação inferior e superior das regras, R_1 e R_2 , da seguinte forma:

$$\underline{f}_n = \underline{\mu}_{\tilde{A}_n}(x'_1) \tau \underline{\mu}_{\tilde{B}_n}(x'_2) \text{ e } \overline{f}_n = \overline{\mu}_{\tilde{A}_n}(x'_1) \tau \overline{\mu}_{\tilde{B}_n}(x'_2), \quad n = 1, 2.$$

onde, as funções de pertinência inferior ($\underline{\mu}_{\tilde{A}_n}(x'_1)$) e superior ($\overline{\mu}_{\tilde{A}_n}(x'_1)$), em x'_1 , $n = 1, 2$, são obtidas por meio da interseção entre a linha vertical do antecedente x'_1 com a função de pertinência inferior $\underline{\mu}_{\tilde{A}_n}(x'_1)$ e superior $\overline{\mu}_{\tilde{A}_n}(x'_1)$ respectivamente. As funções de pertinência em x'_2 e da regra R_2 são obtidas de forma análoga, onde τ é uma t -norma e γ é uma s -norma. Neste trabalho utilizamos a t -norma mínimo e a s -norma máximo, Figura 2.10.

Em seguida calculamos a função resultante da seguinte maneira:

$$\mu_{\tilde{S}}(y) = [\underline{s}_1(y) \gamma \underline{s}_2(y), \overline{s}_1(y) \gamma \overline{s}_2(y)],$$

onde,

$$\underline{s}_n = \underline{f}_n \tau \underline{\mu}_{C_n}(y) \text{ e } \overline{s}_n = \overline{f}_n \tau \overline{\mu}_{C_n}(y), \quad n = 1, 2.$$

Ou seja, \underline{s}_n é calculado utilizando o grau de ativação inferior resultante da regra \underline{f}_n e a função de pertinência inferior do consequente da mesma regra $\underline{\mu}_{C_n}(y)$ analogamente é obtido \overline{s}_n , $n = 1, 2$.

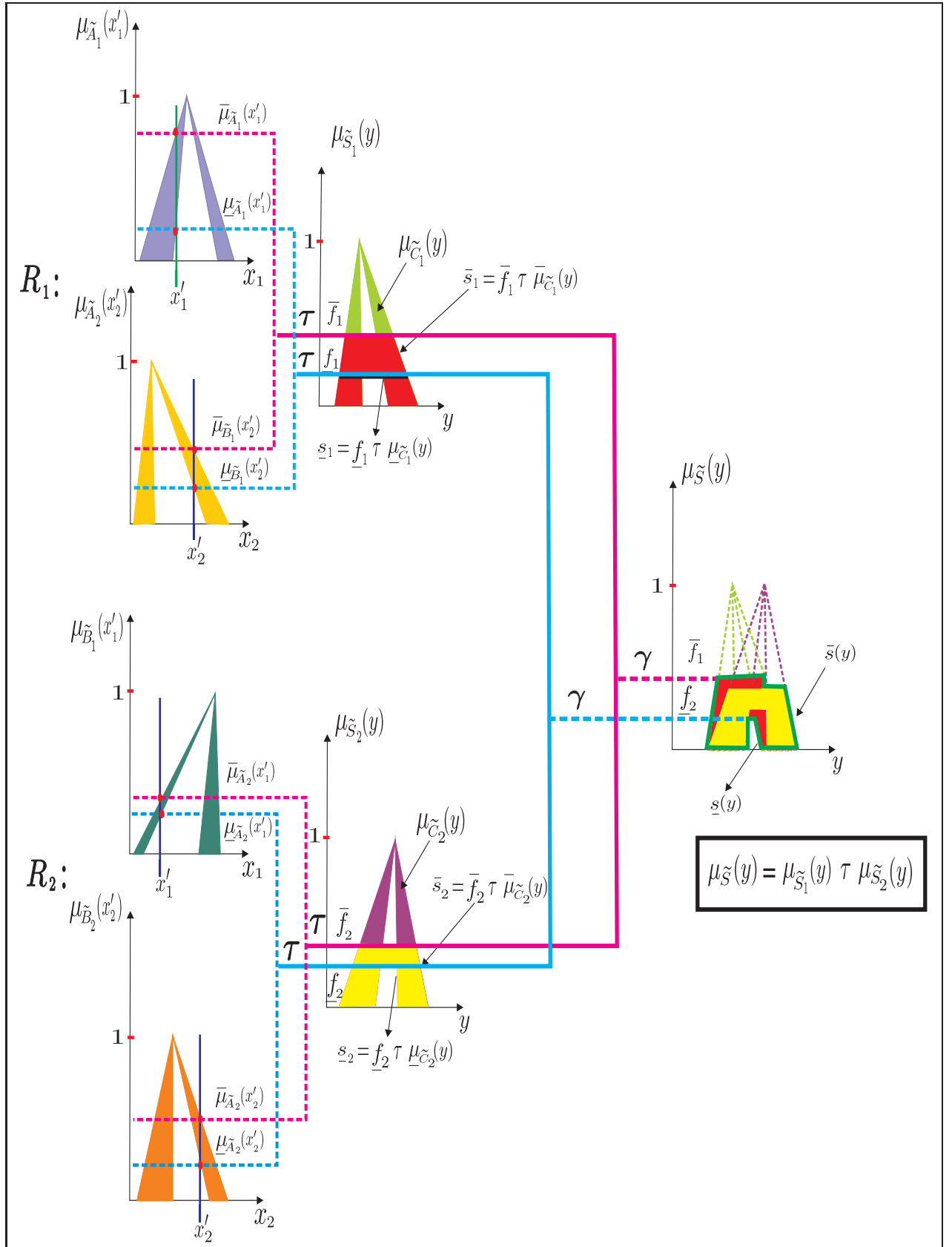


Figura 2.10: Método de Mamdani para conjuntos fuzzy tipo 2 utilizando a t -norma mínimo e a s -norma máximo [27].

A partir da próxima seção, tomamos \tilde{A} como sendo um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar.

Para defuzzificar um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar é necessário apresentar algumas definições importantes que são apresentadas na próxima seção.

2.5 Centroide de um Conjunto Fuzzy Tipo 2 Intervalar

O cálculo do centroide de um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar é muito importante, pois, fornece uma medida da incerteza desses conjuntos fuzzy, para isso, estudaremos o algoritmo de Karnik-Mendel (KM), que apresenta dois processos independentes para calcular o centroide de um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar, a primeira para calcular o ponto de extremidade esquerda do intervalo (designado por c_L), e o segundo para calcular sua extremidade direita (designado por c_R).

O algoritmo KM foi proposto para calcular o tipo redutor de conjuntos fuzzy tipo 2 intervalar [11]. Este algoritmo foi estudado teórico e experimentalmente, a fim de melhorar o seu desempenho em aplicações e dar uma maneira exata para obter o centroide (se existir), que é um intervalo fechado, de um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar. O algoritmo KM tem duas versões: contínuo e discreto [30].

Definição 2.10. *Seja A_e um conjunto fuzzy tipo 1, dizemos que A_e é **imerso** no conjunto \tilde{A} se,*

$$\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{A_e}(x) \leq \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x).$$

Na Figura 2.11 vemos exemplos de conjuntos fuzzy tipo 1, A_e , imersos no conjunto fuzzy tipo 2 intervalar \tilde{A} .

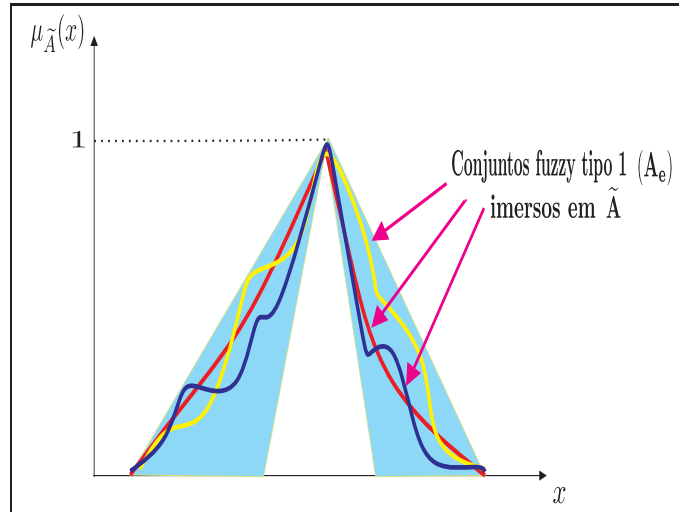


Figura 2.11: Conjuntos fuzzy tipo 1 imersos no \tilde{A} [18].

2.5.1 Versão Contínua do Centroide

Dado um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar, \tilde{A} , que é definido em um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$, com função de pertinência $\mu_{\tilde{A}}(x)$, seu centroide (se existir), $C(\tilde{A})$, é um intervalo fechado $[c_L, c_R]$ no sentido clássico da matemática, isto é,

$$C(\tilde{A}) = [c_L, c_R],$$

onde c_L e c_R são, respectivamente, o mínimo e o máximo de todos os centroides dos conjuntos fuzzy tipo 1 imersos na mancha de incerteza (FOU) de \tilde{A} , Figura 2.12.

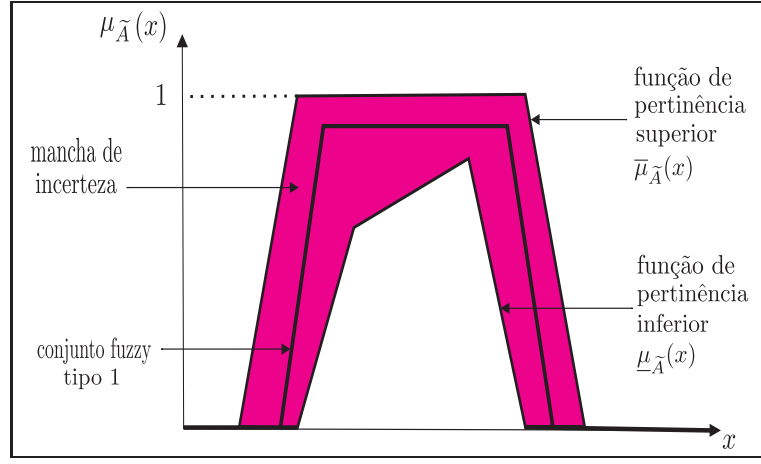


Figura 2.12: Funções de pertinência de um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar.

Mendel et al, em alguns trabalhos [21], [22], definem a versão contínua de c_L e c_R de um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar, \tilde{A} , como:

$$c_L = \min_{L \in \mathbb{R}} \text{centroid}(A_e(L)), \quad (2.5)$$

$$c_R = \max_{R \in \mathbb{R}} \text{centroid}(A_e(R)), \quad (2.6)$$

onde:

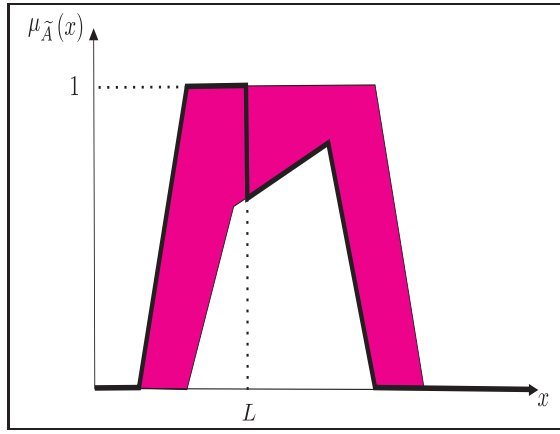
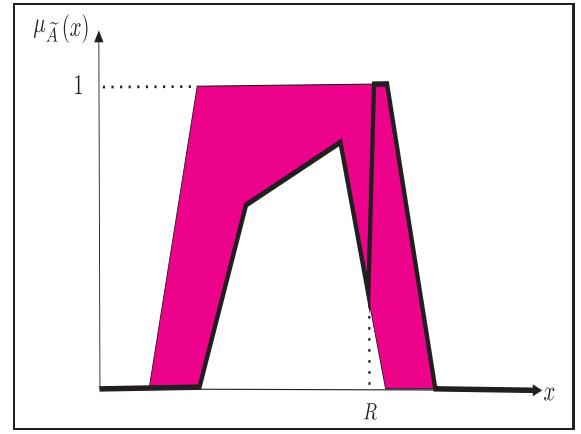
$$\text{centroid}(A_e(L)) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x \mu_{A_e(L)}(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{A_e(L)}(x) dx} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\int_{-\infty}^L x \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x) dx + \int_L^{+\infty} x \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) dx}{\int_{-\infty}^L \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x) dx + \int_L^{+\infty} \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) dx} \\ \text{centroid}(A_e(R)) &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x \mu_{A_e(R)}(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{A_e(R)}(x) dx} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^R x \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) dx + \int_R^{+\infty} x \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x) dx}{\int_{-\infty}^R \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) dx + \int_R^{+\infty} \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x) dx}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

e onde, $A_e(L)$ e $A_e(R)$, denotam conjuntos fuzzy tipo 1, para os quais,

$$\mu_{A_e(L)}(x) = \begin{cases} \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x) & \text{se } x \leq L, \\ \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) & \text{se } x > L. \end{cases} \quad \mu_{A_e(R)}(x) = \begin{cases} \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) & \text{se } x \leq R, \\ \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x) & \text{se } x > R. \end{cases}$$

De acordo com Mendel, $L, R \in X$ são os pontos switch, ou seja, os valores de x em que $\mu_{A_e(L)}$ e $\mu_{A_e(R)}$ mudam de $\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x)$ para $\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x)$ (ou vice-versa). $\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x)$ é a função de pertinência superior (Figura 2.13 (a)) e $\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x)$ é a função de pertinência inferior de \tilde{A} (Figura 2.13 (b)).

(a) Interpretação do ponto switch L .(b) Interpretação do ponto switch R .Figura 2.13: Interpretações dos pontos switch, L e R para a versão contínua do centroide.

2.5.2 Versão Contínua do Algoritmo KM

O algoritmo de Karnik-Mendel (KM) para calcular c_L e c_R são semelhantes, vamos nos concentrar apenas no procedimento c_L (para mais detalhes, ver [21]).

1. Calcule o valor inicial, c_0 , para c_L , como:

$$c_0 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x) + \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x)}{2} dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x) + \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x)}{2} dx}$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x (\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x) + \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x)) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x) + \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x)) dx},$$

defina $j = 1$ e

$$L_1 = c_0.$$

2. Calcule o centroide $A_e(L_j)$ como:

$$centroid(A_e(L_j)) = \frac{\int_{-\infty}^{L_j} x \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x) dx + \int_{L_j}^{+\infty} x \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) dx}{\int_{-\infty}^{L_j} \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x) dx + \int_{L_j}^{+\infty} \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) dx}.$$

3. Se tiver ocorrido convergência, pare, caso contrário, vá para o passo 4.
4. Defina

$$L_{j+1} = centroid(A_e(L_j)).$$

5. Defina $j = j + 1$ e vá para o passo 2.

E assim, determinamos c_L . A seguir, apresentamos a versão discreta do centroide.

2.5.3 Versão Discreta do Centroide

Karnik e Mendel [11], demonstraram que c_L e c_R podem ser calculados a partir das funções de pertinência superior e inferior de \tilde{A} da seguinte forma:

$$c_L = \min_{L \in \mathbb{N}} \text{centroid}(A_e(L)), \quad (2.9)$$

$$c_R = \max_{R \in \mathbb{N}} \text{centroid}(A_e(R)), \quad (2.10)$$

onde:

$$\text{centroid}(A_e(L)) = \frac{\sum_{i=1}^L x_i \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x_i) + \sum_{i=L+1}^N x_i \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i)}{\sum_{i=1}^L \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x_i) + \sum_{i=L+1}^N \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i)}, \quad (2.11)$$

$$\text{centroid}(A_e(R)) = \frac{\sum_{i=1}^R x_i \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i) + \sum_{i=R+1}^N x_i \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x_i)}{\sum_{i=1}^R \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i) + \sum_{i=R+1}^N \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x_i)}, \quad (2.12)$$

onde $L \in \mathbb{N}$ é o ponto switch que marca a mudança de $\bar{\mu}_{\tilde{A}}$ para $\underline{\mu}_{\tilde{A}}$ (Figura 2.14 (a)), e $R \in \mathbb{N}$ é o ponto switch que marca a mudança de $\underline{\mu}_{\tilde{A}}$ para $\bar{\mu}_{\tilde{A}}$ (Figura 2.14 (b)), $N \in \mathbb{N}$ é o número de pontos discretos na qual o domínio x de \tilde{A} foi discretizado.

Considere em (2.11) e (2.12) que x_1 indica o menor valor de x e x_N o maior valor de x , como mostra na Figura 2.14, isto é, $x_1 < x_2 < \dots < x_N$ [17].

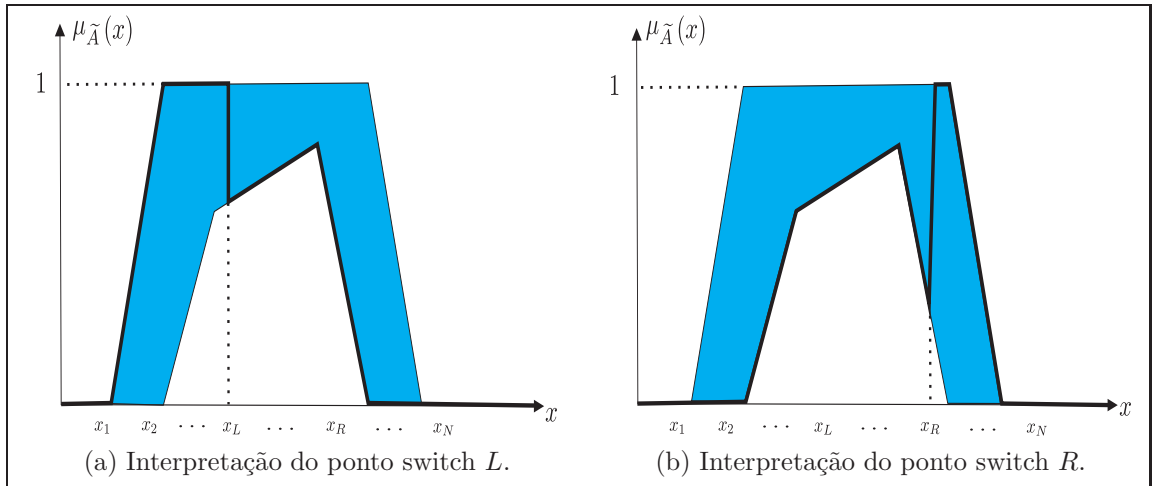


Figura 2.14: Interpretações dos pontos switch, L e R para a versão discreta do centroide.

2.5.4 Versão Discreta do Algoritmo KM

A fim de encontrar o valor de L e consequentemente c_L , o algoritmo KM [21] é como segue:

1. Iniciar a pesquisa calculando o ponto inicial c' :

$$c' = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^N \theta_i},$$

com

$$\theta_i = \frac{\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i) + \overline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i)}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

2. Encontre k ($1 \leq k \leq N-1$) tal que $x_k \leq c' \leq x_{k+1}$.
3. Defina

$$\theta_i = \begin{cases} \overline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i) & \text{se } i \leq k, \\ \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i) & \text{se } i > k, \end{cases}$$

e calcule,

$$c'' = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^N \theta_i}.$$

4. Se $c' = c''$, então pare e defina $c_L = c''$, $L = k$. Se não vá para o passo 5.
5. Defina $c' = c''$ e vá para o passo 2.

E assim, determinamos c_L . A seguir mostramos uma propriedade especial da versão discreta.

2.5.5 Uma Propriedade Especial da Versão Discreta

A propriedade a seguir, foi observada pela primeira vez em [31]. Vamos reescrever a expressão (2.12). Se deixarmos que $j = N + 1 - i$, em seguida, teremos o seguinte:

1. Se $1 \leq i \leq R$, então $N + 1 - j \leq R$, e portanto, $N - R + 1 \leq j \leq N$.
2. Se $R + 1 \leq i \leq N$, então $R + 1 \leq N + 1 - j \leq N$, e por conseguinte, $1 \leq j \leq N - R$; portanto, (2.12) pode ser escrita como (por propriedades de somas),

$$\begin{aligned} \text{centroid}(A_e(R)) &= \frac{\sum_{j=N-R+1}^N y_j \underline{\mu}_{\tilde{A}}(y_j) + \sum_{j=1}^{N-R} y_j \overline{\mu}_{\tilde{A}}(y_j)}{\sum_{j=N-R+1}^N \underline{\mu}_{\tilde{A}}(y_j) + \sum_{j=1}^{N-R} \overline{\mu}_{\tilde{A}}(y_j)} \\ &= \frac{\sum_{j=1}^{N-R} y_j \overline{\mu}_{\tilde{A}}(y_j) + \sum_{j=N-R+1}^N y_j \underline{\mu}_{\tilde{A}}(y_j)}{\sum_{j=1}^{N-R} \overline{\mu}_{\tilde{A}}(y_j) + \sum_{j=N-R+1}^N \underline{\mu}_{\tilde{A}}(y_j)}. \end{aligned}$$

Tomando $L' = N - R$, temos:

$$\text{centroid}(A_e(R)) = \frac{\sum_{j=1}^{L'} y_j \bar{\mu}_{\tilde{A}}(y_j) + \sum_{j=L'+1}^N y_j \underline{\mu}_{\tilde{A}}(y_j)}{\sum_{j=1}^{L'} \bar{\mu}_{\tilde{A}}(y_j) + \sum_{j=L'+1}^N \underline{\mu}_{\tilde{A}}(y_j)}. \quad (2.13)$$

Onde,

$$y_j = x_{N+1-j}, \quad 1 \leq j \leq N. \quad (2.14)$$

As equações (2.11) e (2.13) têm a mesma forma. Podemos obter um do outro apenas com as substituições x_i por y_j e L por L' (ou vice-versa). As equações (2.11) e (2.13) diferem em L e L' (pontos switch) em que os valores de x são indexados pela ordem inversa, como estabelece (2.14). A equação (2.14) significa que:

$$y_1 = x_N, \quad y_2 = x_{N-1}, \quad \dots, \quad y_N = x_1,$$

como mostra a Figura 2.15.

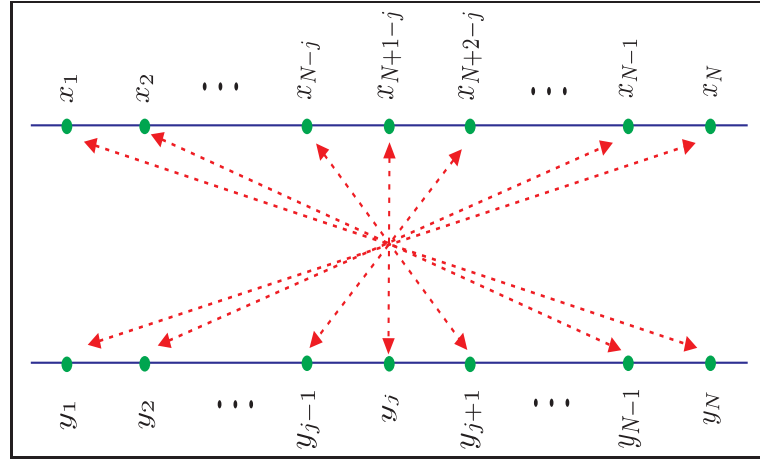


Figura 2.15: Permutação $y_j = x_{N+1-j}$ ($1 \leq j \leq N$) que inverte a ordem no qual os valores de x são indexados.

O problema para o cálculo de c_L e c_R pode ser reduzido para um único procedimento. É apenas necessário inverter a ordem em que os valores de x são indexados, e se estamos calculando c_L então teremos que encontrar um mínimo, e se formos calcular c_R então teremos que encontrar um máximo.

Se iniciar a forma (2.11) por meio de um argumento similar, em seguida, vamos obter uma expressão análoga à (2.12), isto é,

$$\text{centroid}(A_e(L)) = \frac{\sum_{j=1}^{R'} z_j \underline{\mu}_{\tilde{A}}(z_j) + \sum_{j=R'+1}^N z_j \bar{\mu}_{\tilde{A}}(z_j)}{\sum_{j=1}^{R'} \underline{\mu}_{\tilde{A}}(z_j) + \sum_{j=R'+1}^N \bar{\mu}_{\tilde{A}}(z_j)}. \quad (2.15)$$

2.5.6 A Expressão mais Geral

Definimos uma expressão geral (2.16) para calcular o centroide (c_L ou c_R) por causa da dualidade entre (2.11) e (2.13). É apenas necessário substituir os valores apropriados a fim de encontrar c_L ou c_R como mostra a Tabela 2.1.

$$centroid(A_e(M)) = \frac{\sum_{i=1}^M w_i \bar{\mu}_{\tilde{A}}(w_i) + \sum_{i=M+1}^N w_i \underline{\mu}_{\tilde{A}}(w_i)}{\sum_{i=1}^M \bar{\mu}_{\tilde{A}}(w_i) + \sum_{i=M+1}^N \underline{\mu}_{\tilde{A}}(w_i)}. \quad (2.16)$$

A substituição de M e w_i em (2.16) por L e x_i respectivamente, obtemos a expressão (2.11), e a substituição de M e w_i em (2.16) por $L' (= N - R)$ e $y_i (= x_{N+1-i})$ respectivamente, obtemos a expressão (2.13) (que é a mesma equação (2.12) que se mostrou anteriormente).

c	M	W_i $1 \leq i \leq N$	Observação
c_L	L	x_i	Se estamos encontrando c_L , teremos que encontrar L tal que (2.16) seja mínimo, usando x_i .
c_R	R	y_i	Se estamos encontrando c_R , teremos que encontrar $L' (= N - R)$ tal que (2.16) seja máximo, usando $y_i (= x_{N+1-i})$.

Tabela 2.1: Resumo para calcular c_L e c_R usando (2.16), com base nas equações (2.11) e (2.13).

Apresentamos o cálculo do centroide no Exemplo 2.1 utilizando a equação (2.16), pois computacionalmente as funções podem ser consideradas discretas.

Exemplo 2.1. Considere \tilde{A} , um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar do universo $\mathcal{U} = [1, 3]$, definido pelas seguintes funções:

$$\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 5(x-1) & \text{se } 1 \leq x < 1.2, \\ 1 & \text{se } 1.2 \leq x < 2, \\ 3-x & \text{se } 2 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 2.5x - 3.25 & \text{se } 1.3 \leq x < 1.5, \\ 0.5 & \text{se } 1.5 \leq x < 1.8, \\ \frac{10}{7}(1.25 - 0.5x) & \text{se } 1.8 \leq x \leq 2.5, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

como mostra a Figura 2.16.

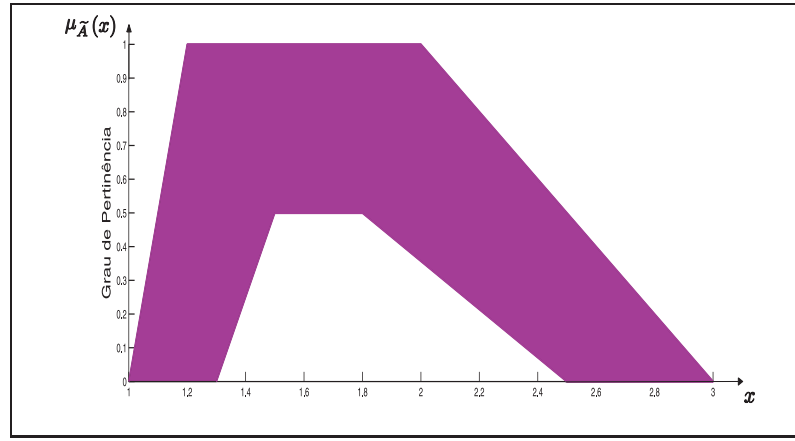


Figura 2.16: Conjunto fuzzy \tilde{A} tipo 2 intervalar.

O domínio de \tilde{A} é discretizado em $N = 9$ pontos, então $\Delta x = \frac{(3-1)}{N-1} = \frac{2}{8} = 0.25$.

Assim, $x_i = 1 + (i-1) \cdot \Delta x = 1 + 0.25(i-1)$, onde $1 \leq i \leq 9$.

Por (2.14), temos que:

$$\begin{array}{lll} x_1 & = & 1 = y_9 \\ x_2 & = & 1.25 = y_8 \\ x_3 & = & 1.50 = y_7 \\ x_4 & = & 1.75 = y_6 \\ x_5 & = & 2 = y_5 \\ x_6 & = & 2.25 = y_4 \\ x_7 & = & 2.50 = y_3 \\ x_8 & = & 2.75 = y_2 \\ x_9 & = & 3 = y_1 \end{array}$$

Neste exemplo, denotamos o $\text{centroid}(A_e(L))$ por c_i e $\text{centroid}(A_e(R))$ por c'_i , os quais devem ser encontrados. Vamos substituir os valores de x_i e y_i e seus respectivos graus de pertinência nas seguintes equações:

$$c_i = \frac{\sum_{j=1}^i x_j \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x_j) + \sum_{j=i+1}^9 x_j \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x_j)}{\sum_{j=1}^i \bar{\mu}_{\tilde{A}}(x_j) + \sum_{j=i+1}^9 \underline{\mu}_{\tilde{A}}(x_j)}, \quad (2.17)$$

e

$$c'_i = \frac{\sum_{j=1}^i y_j \bar{\mu}_{\tilde{A}}(y_j) + \sum_{j=i+1}^9 y_j \underline{\mu}_{\tilde{A}}(y_j)}{\sum_{j=1}^i \bar{\mu}_{\tilde{A}}(y_j) + \sum_{j=i+1}^9 \underline{\mu}_{\tilde{A}}(y_j)}, \quad (2.18)$$

onde $i = 1, \dots, 9$.

A Tabela 2.2 mostra todos os cálculos obtidos:

i	x_i	$\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i)$	$\overline{\mu}_{\tilde{A}}(x_i)$	c_i	y_i	$\underline{\mu}_{\tilde{A}}(y_i)$	$\overline{\mu}_{\tilde{A}}(y_i)$	c'_i
1	1	0	0	1.784883721	3	0	0	1.784883721
2	1.25	0	1	2.598837235	2.75	0	0.25	1.92
3	1.50	0.5	1	1.561764706	2.50	0	0.5	2.046875
4	1.75	0.5	1	1.588383838	2.25	0.178571428	0.75	2.0875
5	2	0.357142857	1	1.651709402	2	0.357142857	1	2.071428571
6	2.25	0.178571428	0.75	1.723684211	1.75	0.5	1	2.03125
7	2.50	0	0.5	1.797619048	1.50	0.5	1	1.972222222
8	2.75	0	0.25	1.840909091	1.25	0	1	1.840909091
9	3	0	0	1.840909091	1	0	0	1.840909091

Tabela 2.2: Valores de c_i e c'_i .

Continuando com o processo do algoritmo de KM, temos,

$$c_L = \min\{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7, c_8, c_9\} = c_3 = 1.561764706.$$

Portanto,

$$c_L = 1.561764706.$$

Assim, também temos que,

$$c_R = \max\{c'_1, c'_2, c'_3, c'_4, c'_5, c'_6, c'_7, c'_8, c'_9\} = c'_4 = 2.0875.$$

Portanto,

$$c_R = 2.0875.$$

Finalmente, calculamos o centroide “C”,

$$C = \frac{c_L + c_R}{2} = 1.824632353.$$

Observação 2.1. Estes dados foram testados no software MATLAB, mediante o programa de KM, tendo como respostas:

$$c_L = 1.561764705882353, \quad c_R = 2.0875 \quad e \quad C = 1.824632352941177.$$

A Figura 2.17 apresenta os pontos c_L, C e c_R .

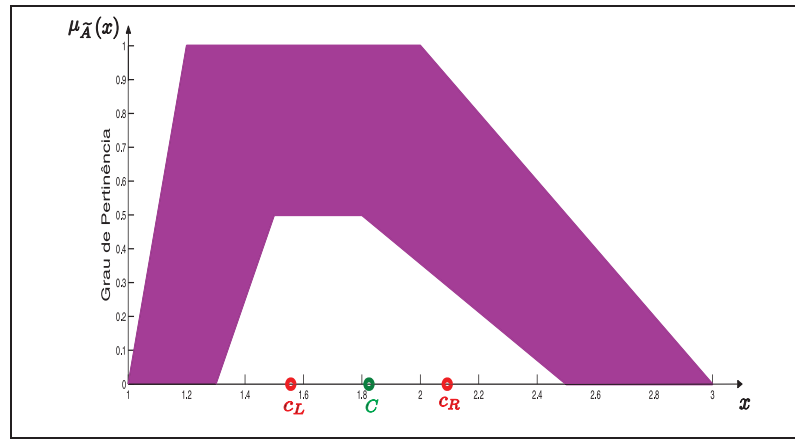


Figura 2.17: Conjunto fuzzy \tilde{A} tipo 2 intervalar e a representação dos pontos c_L , C e c_R respectivamente.

Os programas para realizar estes cálculos estão no anexo 1 no final deste trabalho [40].

No próximo capítulo apresentamos os modelos populacionais de Verhulst e Montroll; e os dados da população do Peru de 1961 a 2013.

Capítulo 3

Modelos Populacionais

O estudo matemático de dinâmica de populações surgiu em 1798, quando foi publicado o artigo “An Essay on the Principle of Population as it Affects the Future Improvement of Society” do economista e demógrafo britânico Thomas Robert Malthus. Seu trabalho previa um crescimento em progressão geométrica para a população e em progressão aritmética para os meios de sobrevivência. Porém Malthus não considerou em seus modelos que vivemos em um sistema ecológico fechado e por isso, mais cedo ou mais tarde, toda a população seria forçada a encontrar limitações de alimento, água, ar ou espaço físico e por isso, manteria-se estável em um limite máximo de sobrevivência. Apesar disso, seu trabalho serviu como um alerta às autoridades e a população em geral sobre o problema que poderia ocorrer se as taxas de natalidade não fossem controladas, ou seja, não houvesse alimento suficiente para toda a população, resultando em guerra, fome e miséria. Um pouco mais tarde, por volta de 1838, a limitação dos recursos foi estudada por Pierre Verhulst, a pedido do governo da Bélgica que estava preocupado com o crescimento populacional. Verhulst incorporou essa limitação ao modelo de Malthus e apresentou a equação do crescimento populacional. A dinâmica populacional só tornou-se mais conhecida na década 20 do século XX, interessando a muitos cientistas, entre eles o químico Lotka e o matemático Volterra, que focalizaram a interação entre duas espécies num modelo que hoje é chamado de Lotka-Volterra. Este modelo foi aperfeiçoado por vários cientistas, como Gause, Holling, Rosenzweig, MacArthur, entre outros. Nos últimos anos surgiu um grande número de modelos populacionais, aplicados às áreas de biologia, ecologia, epidemiologia, imunologia, genética, bioquímica, engenharias biomédica e sanitária, entre outras. Estes modelos descrevem a dinâmica de populações cujos indivíduos podem ser moléculas bioquímicas, bactérias, neurônios, células, insetos, indivíduos infectados, colônias de formigas ou abelhas, entre muitas outras populações [25].

Na evolução dos modelos de dinâmica populacional, podemos destacar o modelo de Montroll (1971), que propôs um modelo geral para traduzir o crescimento assintótico de uma variável, levando em conta que o posicionamento da variação máxima pode ser qualquer valor entre valor inicial de uma população e o valor limite finito de uma população [15].

3.1 Modelo Logístico Contínuo (Verhulst)

O Modelo de Verhulst, também chamado de Modelo Logístico, é devido ao belga Pierre François Verhulst (1804-1849), matemático e doutor em teoria dos números. O Modelo de Verhulst supõe que uma população, vivendo num determinado meio, deverá crescer até um limite sustentável, isto é, ela tende a se estabilizar.

É essencialmente, o modelo de Malthus modificado, considerando a taxa de crescimento como sendo proporcional à população em cada instante. Assim,

$$\frac{dP}{dt} = r \left(\frac{P_\infty - P}{P_\infty} \right) P, \quad (3.1)$$

com $r > 0$ e P_∞ sendo o valor limite da população. Desta forma $r \left(\frac{P_\infty - P}{P_\infty} \right)$ tende para zero quando $P \rightarrow P_\infty$.

Supondo que $P(0) = P_0$ seja dado, temos o modelo clássico de Verhulst ou modelo logístico:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{P_\infty} \right), & r > 0, \\ P(0) = P_0. \end{cases} \quad (3.2)$$

A solução analítica de (3.2) é obtida por integração após a separação das variáveis.

Assim, temos que:

$$P(t) = \frac{P_0 P_\infty}{(P_\infty - P_0)e^{-rt} + P_0}. \quad (3.3)$$

A curva $P(t)$ é denominada de curva logística.

Na Figura 3.1, consideramos $P_0 = 250$ para a curva de cor azul, a linha de cor verde representa o $P_\infty = 130$ e para a curva de cor vermelha, consideramos $P_0 = 50$, onde $r = 0.5$.

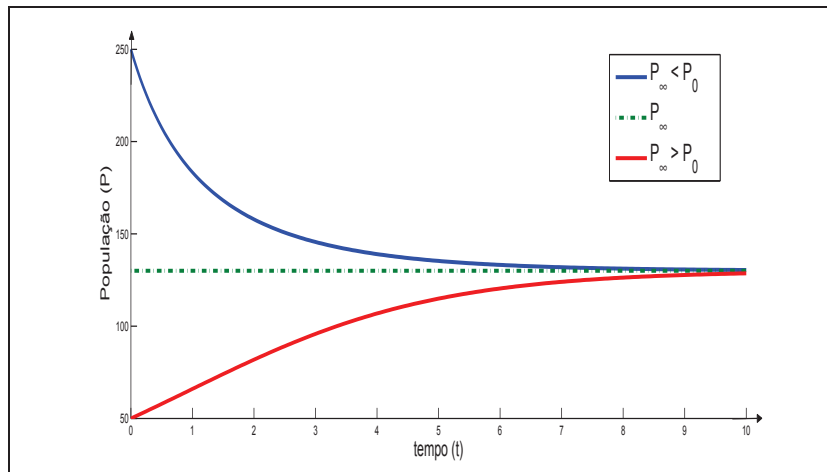


Figura 3.1: *Curva logística.*

Da expressão (3.3), podemos observar que:

1. Se $P_0 < P_\infty$ então $P_0 \leq P(t) < P_\infty$ e $P(t)$ tende a P_∞ , crescendo. Neste caso a equação (3.2) mostra claramente que $\frac{dP}{dt} > 0$.

2. Se $P_0 > P_\infty$ então $P(t)$ tende a P_∞ , decrescendo (verifique que, neste caso $\frac{dP}{dt} < 0$).
3. Da equação (3.2), temos que,

$$\frac{dP}{dt} = rP - r\frac{P^2}{P_\infty}. \quad (3.4)$$

Ou seja, $\frac{dP}{dt}$, como função de P , é uma parábola com concavidade voltada para baixo (Figura 3.2) e cujas raízes $P = 0$ e P_∞ são pontos de equilíbrio ou soluções de equilíbrio da equação diferencial (3.2), pois $\frac{dP}{dt} = 0$ nestes pontos.

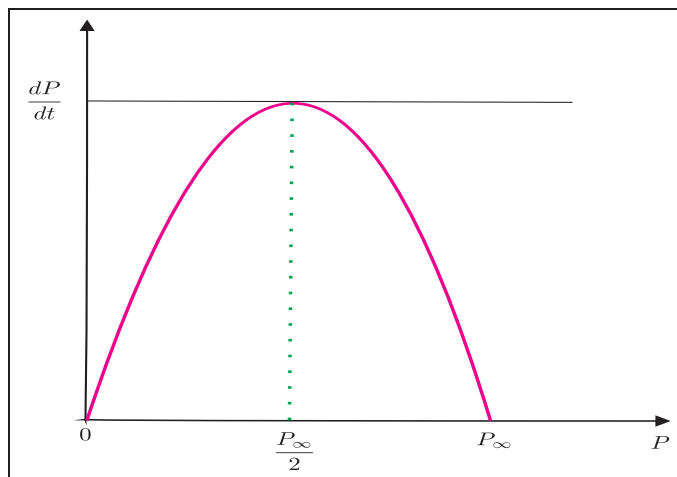


Figura 3.2: Variação de $P(t)$.

4. Como $r > 0$, temos que $\frac{dP}{dt}$ é crescente se $0 < P(t) < \frac{P_\infty}{2}$ e decrescente se $\frac{P_\infty}{2} < P(t) < P_\infty$, assim $x = \frac{P_\infty}{2}$ é ponto de máximo de $\frac{dP}{dt}$. O valor máximo de $\frac{dP}{dt}$, relativamente a P , é atingido quando $P = \frac{P_\infty}{2}$, isto é, quando a população for igual à metade da população limite.
5. Considerando em (3.3), $P(t) = \frac{P_\infty}{2}$, podemos determinar o instante t_m em que a população atinge a máxima variação:

$$\frac{P_\infty}{2} = \frac{P_\infty P_0}{(P_\infty - P_0)e^{-rt} + P_0} \implies e^{rt} = \frac{P_\infty - P_0}{P_0}$$

e portanto,

$$t_m = \frac{1}{r} \ln \left(\frac{P_\infty - P_0}{P_0} \right), \quad (3.5)$$

se $P_\infty - P_0 > 0$, logo $P_0 < P_\infty$. Considerando que $P_0 < \frac{P_\infty}{2}$ e $t = t_m$, temos:

1. $P(t_m) = \frac{P_\infty}{2}$.

$$\begin{aligned}
2. \quad \frac{dP(t_m)}{dt} &= r \frac{P_\infty}{2} \left(1 - \frac{\frac{P_\infty}{2}}{P_\infty} \right) = \frac{r}{4} P_\infty > 0. \\
3. \quad \frac{d^2P(t_m)}{dt^2} &= r \frac{dP}{dt} - \frac{2r}{P_\infty} P \frac{dP}{dt} = r \frac{dP}{dt} \left(1 - 2 \frac{P}{P_\infty} \right) \Big|_{P=\frac{P_\infty}{2}} = 0.
\end{aligned}$$

Como há uma mudança de sinal em $\frac{d^2P(t_m)}{dt^2}$, temos que $t = t_m$ é um ponto de inflexão de $P(t)$. Desta forma,

- Se $P_0 = \frac{P_\infty}{2}$ então $t_m = 0$.
- Se $\frac{P_\infty}{2} < P_0 < P_\infty$ então a curva não tem ponto de inflexão.

Assim, concluímos que pode existir ponto de inflexão na curva logística quando $P_0 < P_\infty$ e caso contrário, o estudo do ponto de inflexão não pode ser realizado. Na Figura 3.1, temos que para a curva de cor azul, o ponto de inflexão não pode ser estudado e para a curva de cor vermelha, o ponto de inflexão é $t_m = 0.94$ e $P(t_m) = 65$.

3.2 Modelo de Montroll Clássico

Seja $P(t)$, o valor da população em um instante t ; P_∞ , o valor limite finito de $P = P(t)$; λ , a taxa de crescimento da população e o parâmetro $\alpha > 0$, o indicador da posição de ponto de inflexão da curva. O modelo de Montroll é dado pela equação diferencial não linear:

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P \left[1 - \left(\frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right], \quad \lambda > 0, \quad \alpha > 0. \quad (3.6)$$

Quando $\alpha = 1$, a equação (3.6) é simplesmente o modelo de Verhulst. O ponto de inflexão do modelo de Montroll é dado por $P_m = P_\infty \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right)^{1/\alpha}$.

Vamos encontrar a solução analítica de (3.6).

Temos que

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P \left[1 - \left(\frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right] = \lambda P - \frac{\lambda}{P_\infty^\alpha} P^{\alpha+1},$$

onde $\lambda > 0$, $\alpha > 0$ e $P(0) = P_0$.

Chamando de $\alpha + 1 = n$ e $\frac{\lambda}{P_\infty^\alpha} = m$, temos,

$$\frac{dP}{dt} - \lambda P = -m P^n.$$

Considerando $w(t) = P^{1-n}(t) = P^{-\alpha}(t)$ e substituindo m e n , temos que,

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dt} &= (-\alpha) P^{-(\alpha+1)} \left(\lambda P - \frac{\lambda}{P_\infty^\alpha P^{\alpha+1}} \right) \\
&= \alpha (m - \lambda w).
\end{aligned} \quad (3.7)$$

Resolvendo a equação (3.7) utilizando o fator de integração $u(t) = e^{\alpha \lambda t}$ e aplicando a condição inicial $t = 0$, obtemos que,

$$w(t) = \left(w(0) - \frac{m}{\lambda} \right) e^{-\alpha \lambda t} + \frac{m}{\lambda}.$$

Como $w(0) = P_0^{-\alpha}$, então

$$w(t) = \left(P_0^{-\alpha} - \frac{m}{\lambda}\right) e^{-\alpha\lambda t} + \frac{m}{\lambda}.$$

Mas $w(t) = P^{-\alpha}(t)$ e $\frac{m}{\lambda} = P_\infty^{-\alpha}$, então,

$$P^{-\alpha}(t) = (P_0^{-\alpha} - P_\infty^{-\alpha}) e^{-\alpha\lambda t} + P_\infty^{-\alpha}. \quad (3.8)$$

Resolvendo a equação (3.8), obtemos a solução do modelo de Montroll que é dada como segue:

$$P(t) = P_0 \left[\frac{e^{\alpha\lambda t}}{\left(\frac{P_\infty}{P_0}\right)^\alpha + e^{\alpha\lambda t} - 1} \right]^{1/\alpha}. \quad (3.9)$$

O objetivo principal deste modelo é propor diferentes formas possíveis de crescimento das taxas de variação. Podemos considerar estas taxas como sendo dadas pela expressão:

$$r = f(P, \alpha) = \lambda \left[1 - \left(\frac{P}{P_\infty} \right) \right]^\alpha. \quad (3.10)$$

A Figura 3.3 apresenta o modelo de Montroll com α fixo.

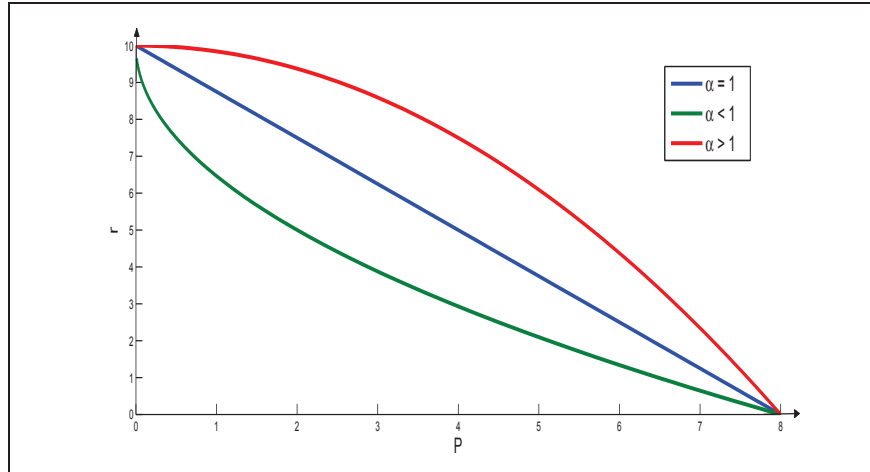


Figura 3.3: Taxa do modelo de Montroll com α fixo.

Observamos de (3.10) que, quando $0 < \alpha$ decresce, o ponto de inflexão P_m também decresce e tende a um valor positivo igual a $\frac{P_\infty}{e} \cong 0.3679P_\infty$. De fato, tomando $\alpha \rightarrow 0$, por valores positivos, temos

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} P_m = P_\infty \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right)^{1/\alpha}. \quad (3.11)$$

Resolvendo o limite, podemos escrever da seguinte forma:

$$\ln \left[\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right)^{1/\alpha} \right] = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left[\ln \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right)^{1/\alpha} \right] = - \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \alpha)}{\alpha}. \quad (3.12)$$

Aplicando a regra de L'Hôspital, temos:

$$- \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + \alpha)}{\alpha} = - \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + \alpha} = -1. \quad (3.13)$$

Logo,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right)^{1/\alpha} = e^{-1} = \frac{1}{e} \cong 0.3679. \quad (3.14)$$

Por outro lado, quando α cresce, o valor de P_m tende ao próprio P_∞ . Da mesma maneira que o limite anterior, podemos mostrar que:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty^+} \left(\frac{1}{1 + \alpha} \right)^{1/\alpha} = 1. \quad (3.15)$$

Os pontos de estabilidade do modelo geral de Montroll são obtidos considerando $\frac{dP}{dt} = 0$ na equação (3.6), isto é,

$$\lambda P \left[1 - \left(\frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right] = 0 \iff P = 0 \quad \text{ou} \quad P = P_\infty. \quad (3.16)$$

Um esboço das soluções da equação (3.6) é dado na Figura 3.4.

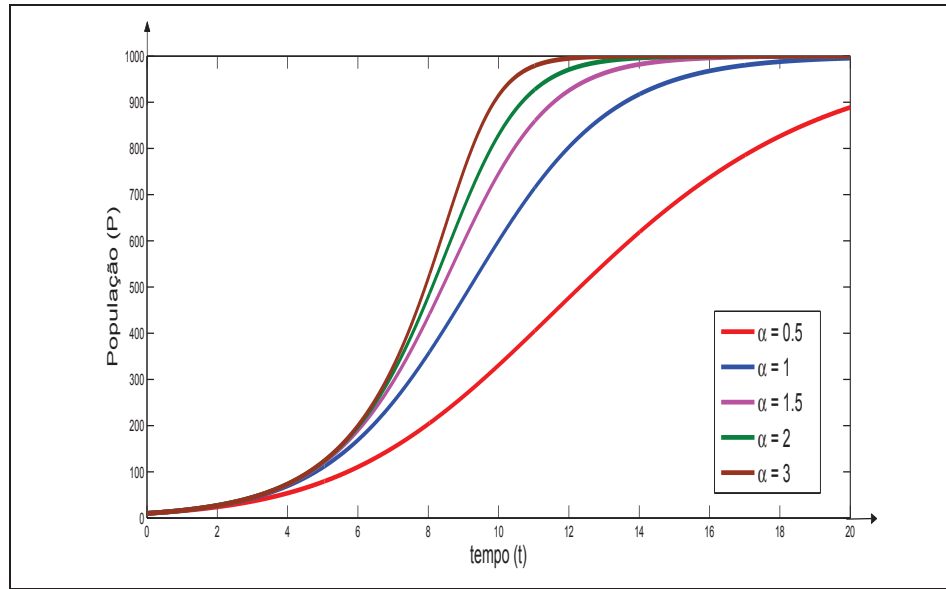


Figura 3.4: Soluções do modelo de Montroll para diversos valores de α .

3.3 Dados da População do Peru

As duas primeiras colunas da Tabela 3.1 são dados obtidos nos últimos censos da população do Peru em 1961 a 2013 [35]. A terceira coluna, apresenta uma aproximação de $\frac{dP}{dt} \frac{1}{P}$ por $\frac{\Delta P}{\Delta t} \frac{1}{P}$.

Ano	Total	$\frac{\Delta P}{\Delta t} \frac{1}{P}$
1961	10.420.357	0.032
1972	14.121.564	0.028
1981	17.762.231	0.022
1993	22.639.443	0.017
2007	28.220.764	0.0133
2013	30.475.000	0.0123

Tabela 3.1: *População total do Peru.*

3.4 Modelo de Verhulst e o Modelo de Montroll para a População do Peru

Na continuação, apresentamos as aplicações dos modelos de Verhulst e de Montroll para a população do Peru utilizando os dados da Tabela 3.1.

3.4.1 Modelo de Verhulst para a População do Peru

De (3.1), temos:

$$\frac{dP}{dt} \frac{1}{P} = a - bP = a \left(1 - \frac{P}{\frac{a}{b}}\right) = r \left(1 - \frac{P}{P_{\infty}}\right),$$

então:

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} \frac{1}{P} \cong r \left(1 - \frac{P}{P_{\infty}}\right). \quad (3.17)$$

MATLAB tem uma caixa de ferramentas de ajuste de curva, chamado cftool (Curve Fitting Tool), que pode ser utilizada para ajustar qualquer curva aos dados, mediante o método dos mínimos quadrados. Assim, utilizando esta ferramenta, ajustamos os dados da Tabela 3.1 pela curva (3.17) utilizando o método dos mínimos quadrados [29], obtivemos que o maior coeficiente de determinação (r^2) é igual a 0.9713, onde:

$$r = a = 0.04134, \quad b = 0.00000000099842.$$

Pelos dados da Tabela 3.1, temos que $P_0 = 10.420.357$ e P_{∞} é calculado da seguinte forma:

$$P_{\infty} = \frac{a}{b} \approx 41.405.421.$$

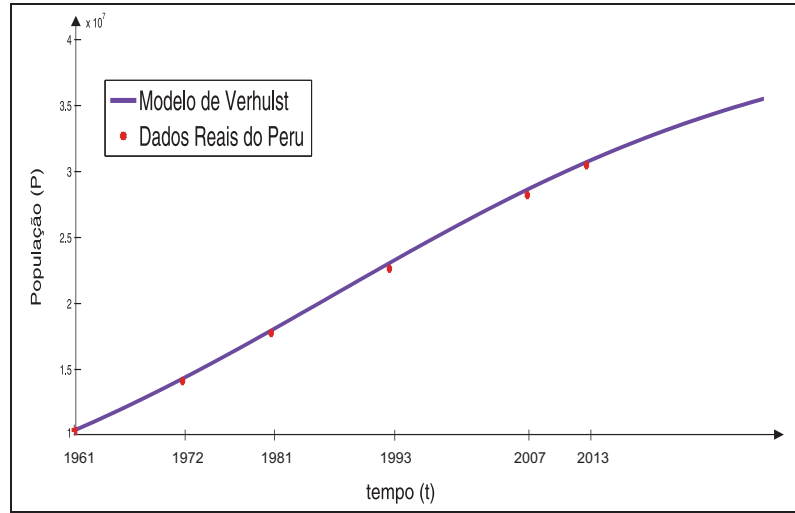


Figura 3.5: Modelo de Verhulst para $r = 0.04134$ e $P_{\infty} = 41.405.421$.

3.4.2 Modelo de Montroll Clássico para a População do Peru

De (3.6), temos:

$$\frac{dP}{dt} \frac{1}{P} \cong \frac{\Delta P}{\Delta t} \frac{1}{P} = \lambda \left[1 - \left(\frac{P}{P_{\infty}} \right)^{\alpha} \right] = \lambda - \lambda \frac{P^{\alpha}}{P_{\infty}^{\alpha}} = \lambda + \left(-\frac{\lambda}{P_{\infty}^{\alpha}} \right) P^{\alpha} = c + aP^{\alpha},$$

então:

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} \frac{1}{P} = c + aP^{\alpha}, \quad (3.18)$$

onde,

$$c = \lambda \text{ e } a = -\frac{\lambda}{P_{\infty}^{\alpha}}.$$

Utilizando o programa do MATLAB e o toolbox “cftool”, ajustamos os dados da Tabela 3.1 pela curva (3.18) através do método dos mínimos quadrados, para valores de α entre $0.1 \leq \alpha \leq 1.5$ com espaçamento de 0.1.

Mostramos alguns testes para α :

- Para $\alpha = 1.5$, temos $r^2 = 0.9467$;
- Para $\alpha = 1$, temos $r^2 = 0.9713$;
- Para $\alpha = 0.5$, temos $r^2 = 0.9872$;
- Para $\alpha = 0.1$, temos $r^2 = 0.9919$.

Observamos que o maior coeficiente de determinação (r^2) é igual a 0.9919 para $\alpha = 0.1$. Assim, para $\alpha = 0.1$, temos:

$$r^2 = 0.9919, \quad \lambda = c = 0.214 \quad \text{e} \quad a = -0.0361.$$

Como $a = -\frac{\lambda}{P_{\infty}^{\alpha}}$, então, substituindo λ e α temos:

$$P_{\infty} \approx 53.587.774.$$

A Figura 3.6, apresenta o gráfico do modelo de Montroll clássico e os dados do Peru. O instante de tempo $t = 0$ representa a população do ano de 1961, a população do ano 1972 é calculado em $t = 11$, e assim prosseguimos fazendo cálculos similares para os próximos anos da Tabela 3.1.

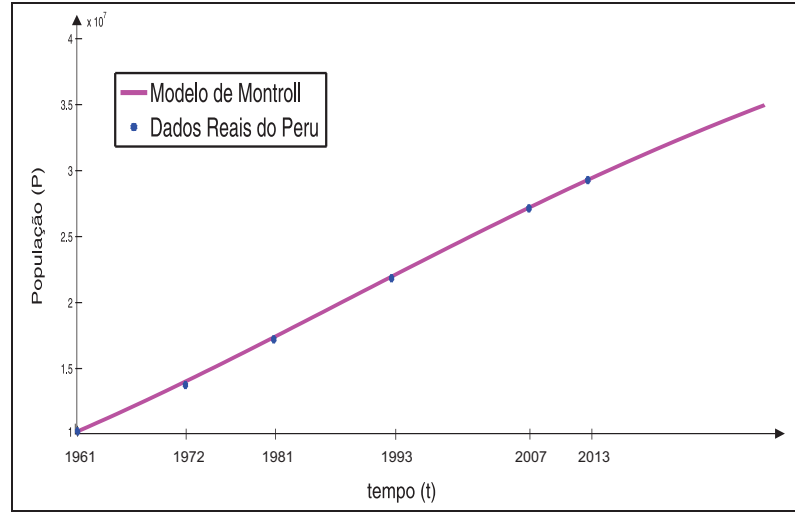


Figura 3.6: Modelo de Montroll clássico para $\alpha = 0.1$, $\lambda = 0.214$ e $P_\infty = 53.587.774$.

A partir dos cálculos anteriores, fazemos uma breve comparação entre os modelos de Verhulst e Montroll para os dados da população do Peru obtidos de 1961 a 2013, evidenciando que o modelo de Montroll é o melhor modelo que ajusta-se aos dados da população do país, pois tem um maior coeficiente de determinação ($r^2 = 0.9919$ para $\alpha = 0.1$).

Na próxima seção, apresentamos o modelo de Montroll com parâmetro fuzzy.

3.5 Modelo de Montroll com Parâmetro Fuzzy

A Teoria de Conjuntos Fuzzy foi introduzida por L.A. Zadeh com o objetivo de fornecer um ferramental matemático para o tratamento de informações de caráter impreciso ou vago. A Lógica Fuzzy, baseada nessa teoria, foi inicialmente construída a partir dos conceitos já estabelecidos de lógica clássica; operadores foram definidos à semelhança dos tradicionalmente utilizados e outros foram introduzidos ao longo do tempo, muitas vezes por necessidades de caráter eminentemente prático [32].

Inicialmente apresentamos a primeira técnica utilizada no trabalho para conjuntos fuzzy tipo 1.

3.5.1 Modelo de Montroll com Parâmetro Fuzzy via Sistema Baseado de Regras Fuzzy (SBRF)

Seja $P = P(t)$, o valor da população em um instante t ; $\lambda = \lambda(f, ce)$, a taxa de crescimento da população dependendo das variáveis: taxa de fertilidade (f) e taxa de crescimento econômico (ce). O modelo de Montroll para a população do Peru com parâmetro fuzzy λ via SBRF é dado pela equação diferencial não linear:

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P \left[1 - \left(\frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right], \quad (3.19)$$

onde $\alpha = 0.1$ e $P_\infty = 53.587.774$.

A solução do modelo de Montroll é dada por:

$$P(t) = P_\infty \left[\frac{e^{\alpha \lambda t}}{\left(\frac{P_\infty}{P_0} \right)^\alpha + e^{\alpha \lambda t} - 1} \right]^{1/\alpha}, \quad (3.20)$$

onde $\lambda = \lambda(f, ce)$.

A seguir, apresentamos os conceitos utilizados no SBRF [5].

3.5.2 Cálculo de $\lambda(f, ce)$ através do SBRF

As Figuras 3.7 e 3.8 apresentam as funções de pertinência para obter as variáveis de entrada e a variável de saída do SBRF respectivamente.

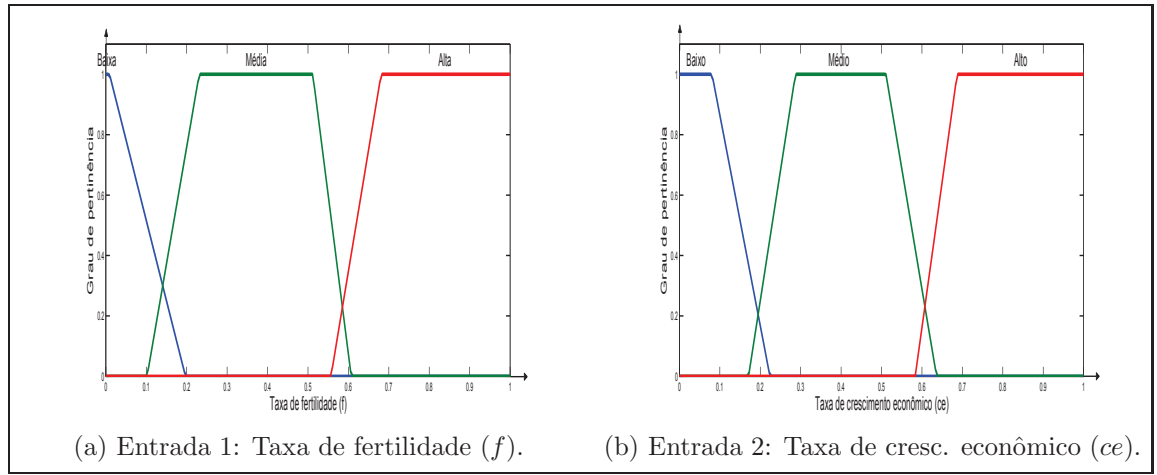


Figura 3.7: Funções de pertinência das variáveis de entrada.

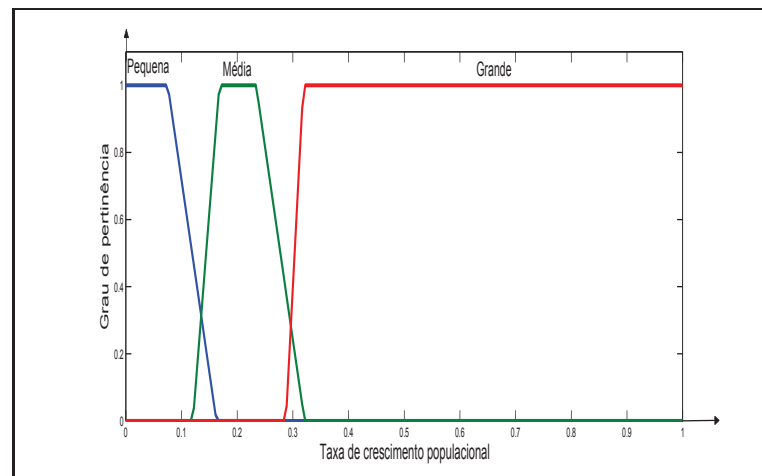


Figura 3.8: Funções de pertinência da variável de saída: Taxa de crescimento populacional.

Na Tabela 3.2, mostramos a base de regras utilizada no SBRF.

Taxa de Fertilidade (f)	Taxa de Crescimento Econômico (ce)		
	Baixo	Médio	Alto
Baixa	Média	Média	Pequena
Média	Média	Média	Pequena
Alta	Grande	Grande	Média

Tabela 3.2: Base de regras.

Por exemplo, vamos interpretar algumas das regras da Tabela 3.2, as demais regras podem ser interpretadas de forma análoga.

- Se a taxa de fertilidade é média e a taxa de crescimento econômico é alto, então a taxa de crescimento populacional é pequena.
- Se a taxa de fertilidade é alta e a taxa de crescimento econômico é baixo, então a taxa de crescimento populacional é grande.

A Figura 3.9 apresenta o modelo de Montroll com a taxa de crescimento populacional obtida através do SBRF e os dados do Peru. Para construir as funções de pertinência do SBRF, utilizamos as informações da Tabela 3.1. As informações contidas em [36] sobre a população do Peru, nos levam a considerar para esta população a taxa de fertilidade igual a 0.5 e a taxa de crescimento econômico igual a 0.5. Assim, obtemos $\lambda = 0.214$, Figura 3.10.

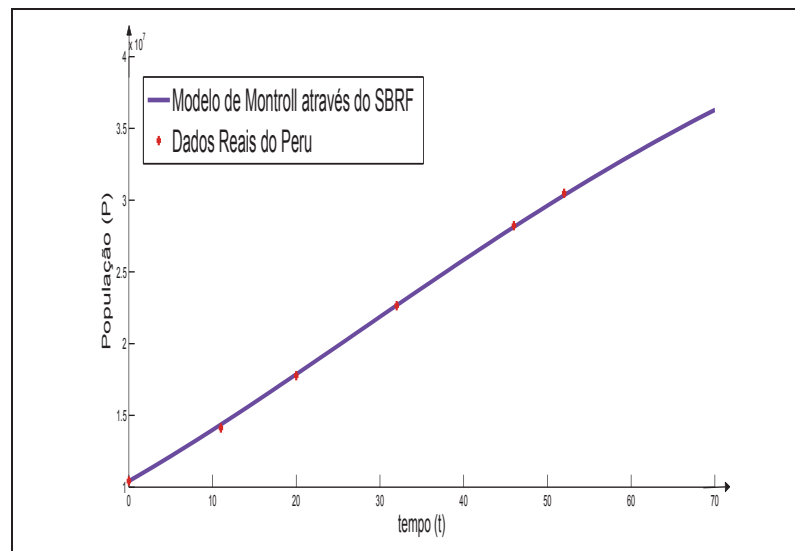


Figura 3.9: Modelo de Montroll obtido através do SBRF.

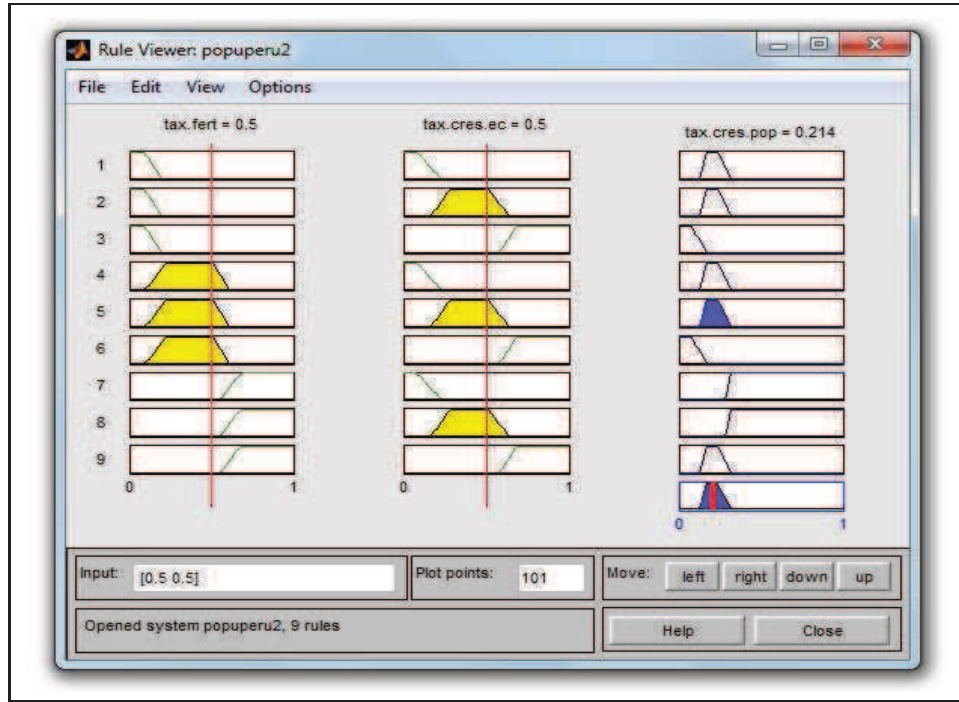


Figura 3.10: Cálculo de $\lambda = 0.214$ no SBRF.

3.5.3 Modelo de Montroll com Parâmetro Fuzzy Triangular

Seja $P = P(t)$, o valor da população em um instante t . O modelo de Montroll para a população do Peru com parâmetro fuzzy triangular é dado pela equação diferencial não linear:

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P \left[1 - \left(\frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right]. \quad (3.21)$$

A solução do modelo de Montroll é dada por:

$$P(t) = P_\infty \left[\frac{e^{\alpha \lambda t}}{\left(\frac{P_\infty}{P_0} \right)^\alpha + e^{\alpha \lambda t} - 1} \right]^{1/\alpha}, \quad (3.22)$$

onde $\lambda \in [\Lambda]^0$ sendo Λ um conjunto fuzzy triangular, Figura 3.11.

Para obter uma solução fuzzy da equação (3.22) com parâmetro fuzzy, consideramos o número fuzzy Λ com nível 0, $[\Lambda]^0$, um ponto do domínio de (3.22), e a função $S_t : [\Lambda]^0 \rightarrow \mathbb{R}$ que atribui o valor, $S_t(\lambda)$, da solução determinística de (3.22) no t correspondente ao parâmetro $\lambda \in [\Lambda]^0$. Seja $\hat{S}_t(\Lambda)$ obtida de $S_t(\lambda)$ pelo princípio da extensão de Zadeh e construímos a solução de alguns α -níveis usando a continuidade de $S_t(\cdot)$ com respeito ao parâmetro λ em cada ponto fixo t do domínio de (3.22) (Ver Observação 3.1).

A seguir, consideramos Λ como um número fuzzy triangular como mostra a Figura 3.11. A forma analítica da função de pertinência de Λ é:

$$\mu_{\Lambda} = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda \leq \bar{\lambda} - \delta_1, \\ \frac{1}{\delta_1}(\lambda - \bar{\lambda} + \delta_1) & \text{se } \bar{\lambda} - \delta_1 < \lambda \leq \bar{\lambda}, \\ -\frac{1}{\delta_2}(\lambda - \bar{\lambda} - \delta_2) & \text{se } \bar{\lambda} < \lambda \leq \bar{\lambda} + \delta_2, \\ 0 & \text{se } \lambda > \bar{\lambda} + \delta_2. \end{cases} \quad (3.23)$$

A solução fuzzy é definida como $\bigcup_t \hat{S}_t(\Lambda)$ que é uma fuzzificação da solução determinística através do Princípio de Extensão de Zadeh. A simulação da solução fuzzy foi realizada usando métodos numéricos para a solução determinística, conjuntamente com o Princípio da Extensão de Zadeh. Utilizou-se o fato da continuidade de $S_t(\lambda)$ com respeito a λ que é uma hipótese necessária da Proposição 1.1, para uma construção baseada unicamente nos α -níveis [3].

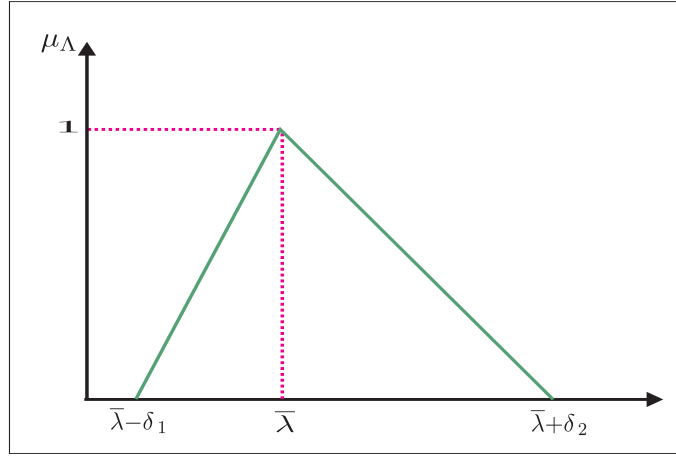


Figura 3.11: Número fuzzy triangular. O parâmetro $\bar{\lambda}$ é o valor modal e $\delta_i, i = 1, 2$ são as dispersões do conjunto fuzzy Λ .

Observação 3.1. *Demonstração da Continuidade de $S_t(\lambda) = P_{\infty} \left[\frac{e^{\alpha\lambda t}}{\left(\frac{P_{\infty}}{P_0}\right)^{\alpha} + e^{\alpha\lambda t} - 1} \right]^{1/\alpha}$,*

com t fixo.

Defina $b = \left(\frac{P_{\infty}}{P_0}\right)^{\alpha} - 1$. Considere a função $R(c_1, c_2)(\lambda) = c_1 + e^{c_2\lambda}$, para c_1 e c_2 constantes dadas.

Temos claramente que $R(c_1, c_2)$ é contínua em λ para o par (c_1, c_2) fixado.

Como consequência, a função:

$$U_t = \frac{R(0, \alpha t)(\lambda)}{R(b, \alpha t)(\lambda)},$$

é contínua por ser quociente de funções contínuas.

Finalmente, do fato que $V(z) = P_{\infty} \cdot z^{1/\alpha}$ com $P_0 > 0$, é uma função contínua em z e usando

a regra da cadeia, obtemos que:

$$S_t(\lambda) = P_\infty [U_t(\lambda)]^{1/\alpha},$$

é uma função contínua para todo λ real e t fixo, em particular, para $[\Lambda]^0$.

A Figura 3.12 apresenta a solução fuzzy do modelo de Montroll com parâmetro fuzzy triangular para a população do Peru, considerando $\alpha = 0.1$, $P_\infty = 53.587.774$, $\bar{\lambda} = 0.214$, $\delta_1 = 0.003$ e $\delta_2 = 0.001$. Neste gráfico, a cor vermelha, representa o maior grau de pertinência, isto é, 1 e o azul representa o menor grau de pertinência igual a 0.

A Figura 3.13 apresenta a defuzzificação da solução fuzzy pelo centro de gravidade (CG) em cada instante t e os dados da população do Peru.

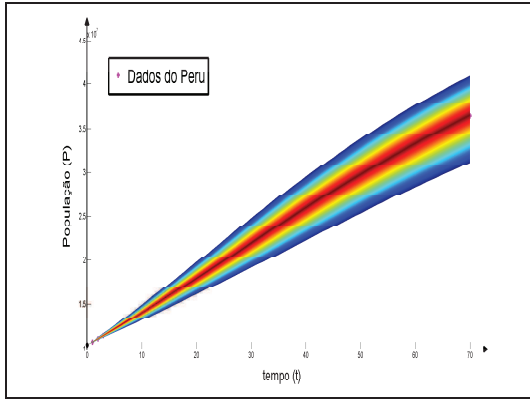


Figura 3.12: Modelo de Montroll com parâmetro fuzzy triangular.

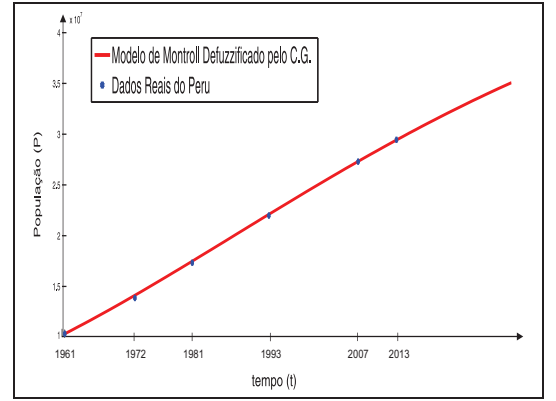


Figura 3.13: Defuzzificação do modelo de Montroll pelo CG.

Na próxima seção mostramos as comparações dos modelos estudados nesta primeira parte do trabalho.

3.6 Comparação dos Modelos

A Figura 3.14 mostra uma comparação dos dados da população do Peru nos anos que ocorreram os censos com os modelos estudados. A comparação destes dados com os modelos foi feita utilizando o máximo dos erros relativos, dados por:

$$R_i = \max_{1 \leq j \leq 6} \left(\frac{|d_j - m_{ij}|}{|d_j|} \right), \quad i = 1, 2, 3,$$

$\forall d_j \in D$ e $\forall m_{ij} \in M_i$, com $j = 1, \dots, 6$, onde,

- D é o conjunto dos dados da população do Peru;
- M_1 é o conjunto dos valores da população para o modelo de Montroll clássico;
- M_2 é o conjunto dos valores da população para o modelo de Montroll utilizando o SBRF;
- M_3 é o conjunto dos valores da população defuzzificados para o modelo de Montroll com parâmetro fuzzy triangular.

Assim, determinamos:

$$R_1 = 0.018170862 \text{ e } R_2 = 0.018170862.$$

Realizamos alguns testes para o cálculo de R_3 e observamos que:

- Se $\bar{\lambda} = 0.214$, $\delta_1 = 0.001$ e $\delta_2 = 0.003$ então $R_3 = 0.01863121$;
- Se $\bar{\lambda} = 0.214$, $\delta_1 = 0.001$ e $\delta_2 = 0.001$ então $R_3 = 0.01817091$;
- Se $\bar{\lambda} = 0.214$, $\delta_1 = 0.003$ e $\delta_2 = 0.001$ então $R_3 = 0.01771091$.

Para os testes realizados, verificamos que o menor R_3 ocorre no caso em que $\delta_1 > \delta_2$. É interessante salientar que o modelo de Montroll com parâmetro fuzzy triangular e defuzzificação com centro de gravidade (CG) é o modelo mais próximo dos dados da população do Peru. Neste método, as incertezas evoluem e a fuzzificação ocorre quando for necessária, enquanto no modelo de Montroll clássico, todas as incertezas são excluídas no início (defuzzificada em $t = 0$ e resolvida) [10]. O modelo de Montroll obtido através do SBRF foi construído levando-se em consideração o cálculo da taxa de crescimento da população do Peru obtida pelo ajuste dos dados e posteriormente, construir o gráfico da população em função do tempo.

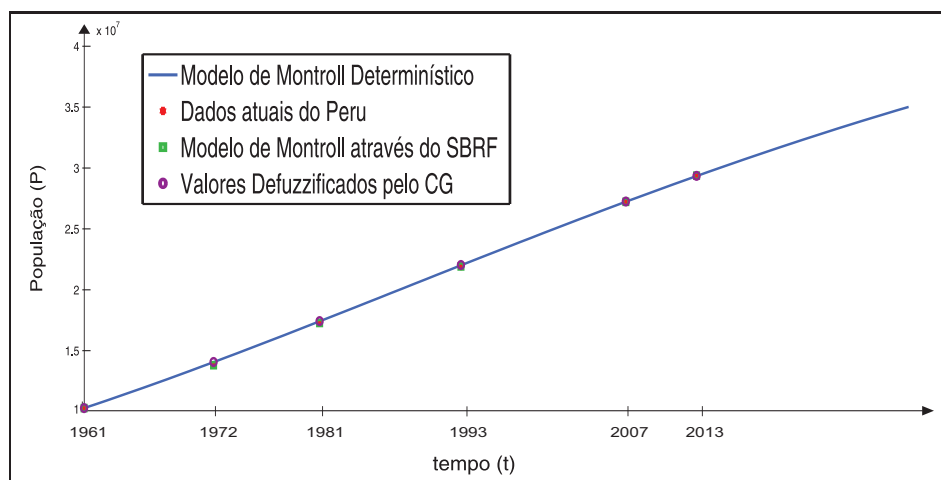


Figura 3.14: Comparação dos modelos.

3.7 Algumas Considerações

Esta primeira parte do trabalho, apresenta um estudo do modelo de Montroll clássico e dos modelos obtidos através das duas técnicas estudadas com os dados populacionais do Peru; concluímos que o que melhor se aproxima dos dados do Peru é o modelo de Montroll com parâmetro fuzzy triangular com $\delta_1 > \delta_2$, utilizando o máximo do erro relativo para a população nos anos que ocorreram os censos nesse país.

Para validar os modelos estudados, determinamos a população através do modelo de Montroll clássico para 2021 e 2050, que são aproximadamente 33.126.956 habitantes e 41.258.926 habitantes, respectivamente; que são previsões razoáveis, pois as estimativas do INEI para estes anos são 33 milhões e 149 mil habitantes, e 40 milhões e 111 mil habitantes, respectivamente.

No próximo capítulo estudamos o modelo de Montroll com parâmetro fuzzy via Sistema Baseado em Regras Fuzzy Tipo 2 Intervalar (SBRF2) e o modelo de Montroll com parâmetro fuzzy triangular tipo 2 intervalar.

Capítulo 4

Modelo de Montroll para Conjuntos Fuzzy Tipo 2 Intervalar

No capítulo anterior, foi estudado o modelo de Montroll para a população do Peru, utilizando parâmetros fuzzy via SBRF e com parâmetro fuzzy triangular. Neste capítulo vamos estudar o modelo de Montroll com parâmetro fuzzy tipo 2 intervalar para a população desse país via Sistema Baseado em Regras Fuzzy Tipo 2 (SBRF2) e com parâmetro fuzzy triangular tipo 2.

4.1 Modelo de Montroll com Parâmetro Fuzzy Tipo 2 Intervalar para a População do Peru via SBRF2

Seja $P = P(t)$, o valor da população em um instante t ; $\lambda = \lambda(f, ce)$, a taxa de crescimento da população dependendo das variáveis: taxa de fertilidade (f) e taxa de crescimento econômico (ce). O modelo de Montroll para a população do Peru com parâmetro fuzzy tipo 2 intervalar via SBRF2 é dado pela equação diferencial não linear,

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P \left[1 - \left(\frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right], \quad (4.1)$$

onde $\alpha = 0.1$ e $P_\infty = 53.587.774$.

A solução do modelo de Montroll é dada por:

$$P(t) = P_\infty \left[\frac{e^{\alpha \lambda t}}{\left(\frac{P_\infty}{P_0} \right)^\alpha + e^{\alpha \lambda t} - 1} \right]^{1/\alpha}, \quad (4.2)$$

onde $\lambda = \lambda(f, ce)$.

4.1.1 Cálculo de $\lambda(f, ce)$ através do SBRF2

As Figuras 4.1 e 4.2 apresentam as funções de pertinência para obter as variáveis de entrada e a variável de saída do SBRF2 respectivamente.

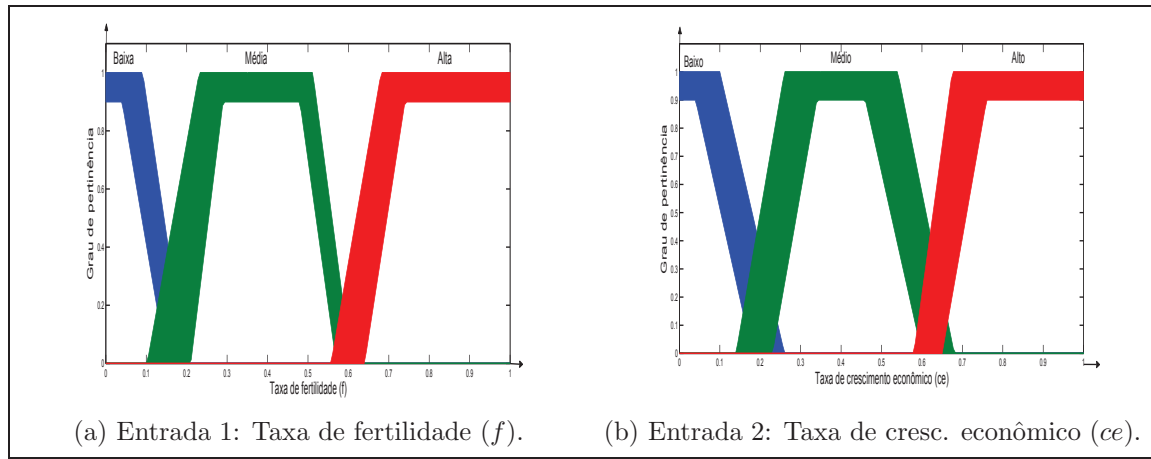


Figura 4.1: Funções de pertinência das variáveis de entrada.

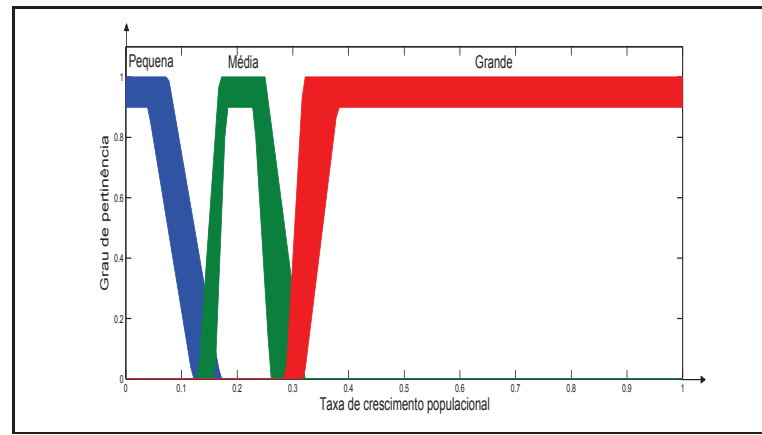


Figura 4.2: Funções de pertinência da variável de saída: Taxa de crescimento populacional.

Utilizamos a Tabela 3.2 para a base de regras do SBRF2, que é a mesma do SBRF. A Figura 4.3 apresenta o modelo de Montroll com a taxa de crescimento populacional obtida através do SBRF2 e os dados do Peru.

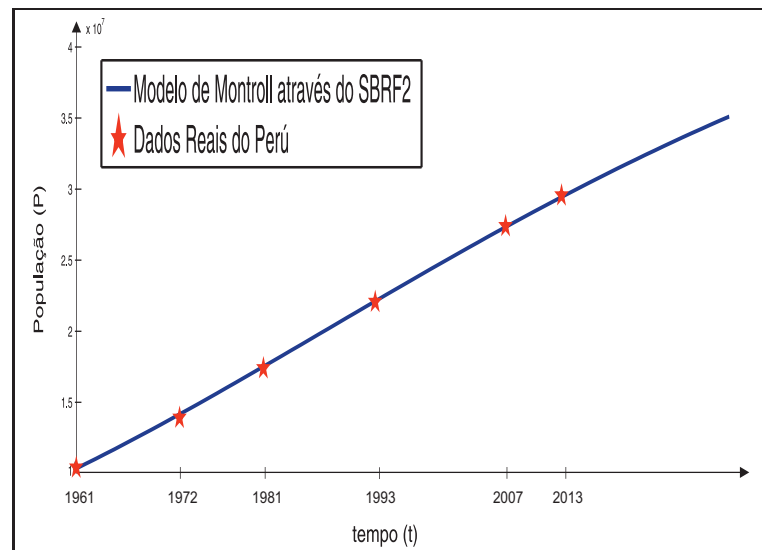


Figura 4.3: Modelo de Montroll obtida através do SBRF2.

As informações contidas em [36] sobre a população do Peru, levam a considerar para esta população a taxa de fertilidade igual a 0.5 e a taxa de crescimento econômico igual a 0.5. Assim, obtemos $\lambda = 0.214$, Figura 4.4.

O toolbox da Figura 4.4 foi fornecido pelo Prof. O. Castillo [6].

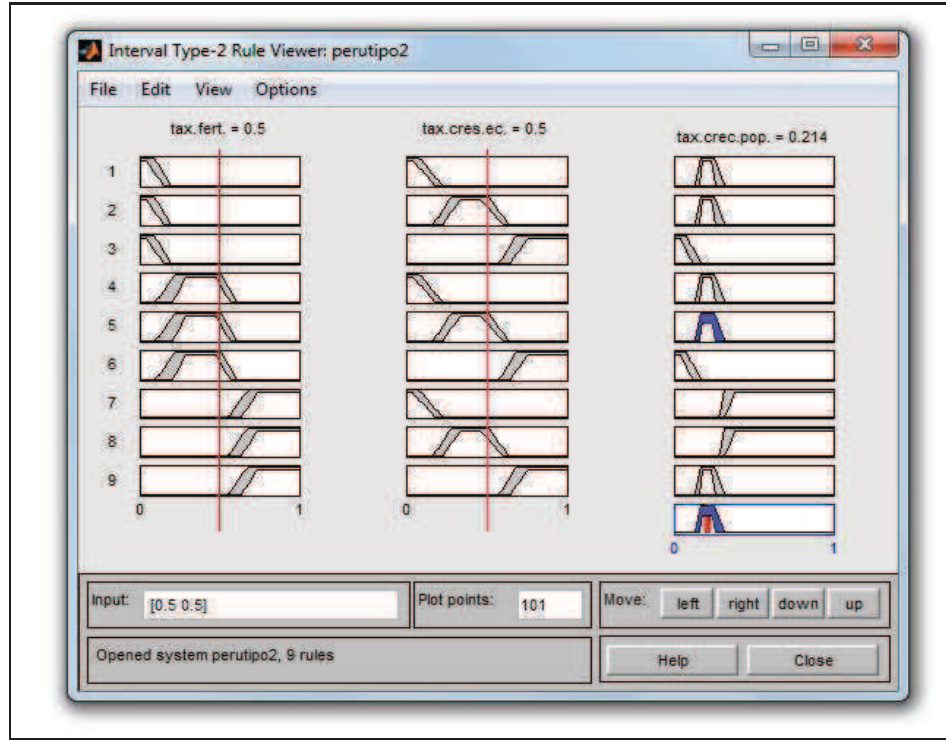


Figura 4.4: Cálculo de $\lambda = 0.214$ no SBRF2.

4.2 Modelo de Montroll com Parâmetro Fuzzy Triangular Tipo 2 Intervalar

Seja $P = P(t)$, o valor da população em um instante t . O modelo de Montroll para a população do Peru com parâmetro fuzzy triangular é dado pela equação diferencial não linear:

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P \left[1 - \left(\frac{P}{P_\infty} \right)^\alpha \right]. \quad (4.3)$$

A solução do modelo de Montroll é dada por:

$$P(t) = P_\infty \left[\frac{e^{\alpha \lambda t}}{\left(\frac{P_\infty}{P_0} \right)^\alpha + e^{\alpha \lambda t} - 1} \right]^{1/\alpha}, \quad (4.4)$$

onde $\lambda \in [\tilde{A}]^0$, sendo \tilde{A} um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar.

A Figura 4.5 apresenta um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar com parâmetro fuzzy triangular. A forma analítica do grau de pertinência superior e inferior de \tilde{A} é:

$$\overline{\mu}_{\tilde{A}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda \leq \bar{\lambda} - \theta_1, \\ \frac{1}{\theta_1}(\lambda - \bar{\lambda} + \theta_1) & \text{se } \bar{\lambda} - \theta_1 < \lambda \leq \bar{\lambda}, \\ -\frac{1}{\theta_2}(\lambda - \bar{\lambda} - \theta_2) & \text{se } \bar{\lambda} < \lambda \leq \bar{\lambda} + \theta_2, \\ 0 & \text{se } \lambda > \bar{\lambda} + \theta_2. \end{cases} \quad (4.5)$$

$$\underline{\mu}_{\tilde{A}} = \begin{cases} 0 & \text{se } \lambda \leq \bar{\lambda} - \delta_1, \\ \frac{1}{\delta_1}(\lambda - \bar{\lambda} + \delta_1) & \text{se } \bar{\lambda} - \delta_1 < \lambda \leq \bar{\lambda}, \\ -\frac{1}{\delta_2}(\lambda - \bar{\lambda} - \delta_2) & \text{se } \bar{\lambda} < \lambda \leq \bar{\lambda} + \delta_2, \\ 0 & \text{se } \lambda > \bar{\lambda} + \delta_2. \end{cases} \quad (4.6)$$

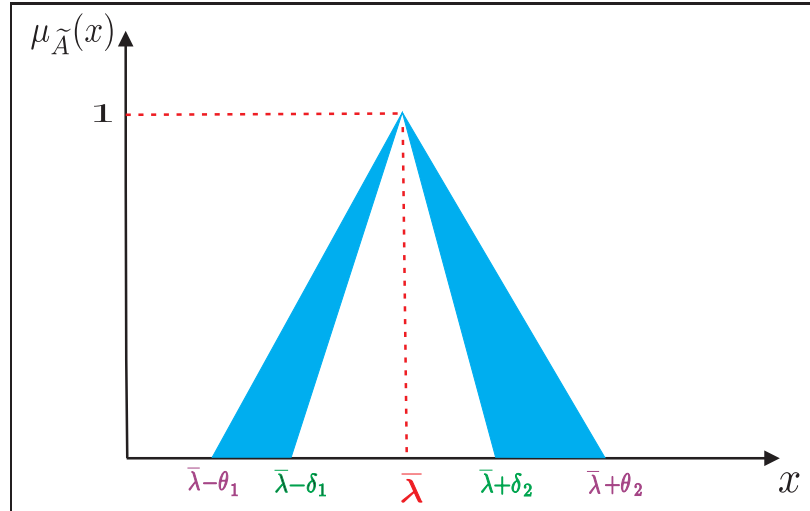


Figura 4.5: Conjunto fuzzy tipo 2 triangular. O parâmetro $\bar{\lambda}$ é um valor modal, δ_i e $\theta_i, i = 1, 2$, são as dispersões do conjunto fuzzy tipo 2 intervalar \tilde{A} .

4.3 Princípio de Extensão de Zadeh para Conjuntos Fuzzy Tipo 2 Intervalar

Nesta seção, apresentamos o Princípio de Extensão de Zadeh para conjuntos fuzzy tipo 2 intervalar adaptados a partir de [8]. Utilizamos este princípio para as funções de pertinência superior e inferior de um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar.

Princípio de Extensão de Zadeh Tipo 2 Intervalar

Seja, $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ o produto cartesiano de X_i , $i = 1, \dots, n$ e sejam \tilde{A}_i , conjuntos fuzzy tipo 2 intervalar, em cada X_i , $i = 1, \dots, n$ respectivamente. Além disto, seja Y um outro conjunto e seja $\tilde{B} \in Y$, um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar tal que $\tilde{B} = f(\tilde{A}_1, \dots, \tilde{A}_n)$, onde $f : X \rightarrow Y$ é uma aplicação monótona. Então o Princípio de Extensão de Zadeh para conjuntos fuzzy tipo 2 intervalar, é como segue:

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \left[\sup_{(x_1, \dots, x_n) = f^{-1}(y)} \min \{ \underline{\mu}_{\tilde{A}_1}(x_1), \dots, \underline{\mu}_{\tilde{A}_n}(x_n) \}, \sup_{(x_1, \dots, x_n) = f^{-1}(y)} \min \{ \overline{\mu}_{\tilde{A}_1}(x_1), \dots, \overline{\mu}_{\tilde{A}_n}(x_n) \} \right],$$

onde $y = f(x_1, \dots, x_n)$ [8].

A Figura 4.6 representa o Princípio de Extensão de Zadeh para a função de pertinência superior e inferior de um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar, onde f é uma função monótona.

Nesta seção utilizamos a Proposição 1.1 para as funções de pertinência superior ($\overline{\mu}_{\tilde{A}}$) e inferior ($\underline{\mu}_{\tilde{A}}$) de um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar \tilde{A} com parâmetro fuzzy triangular.

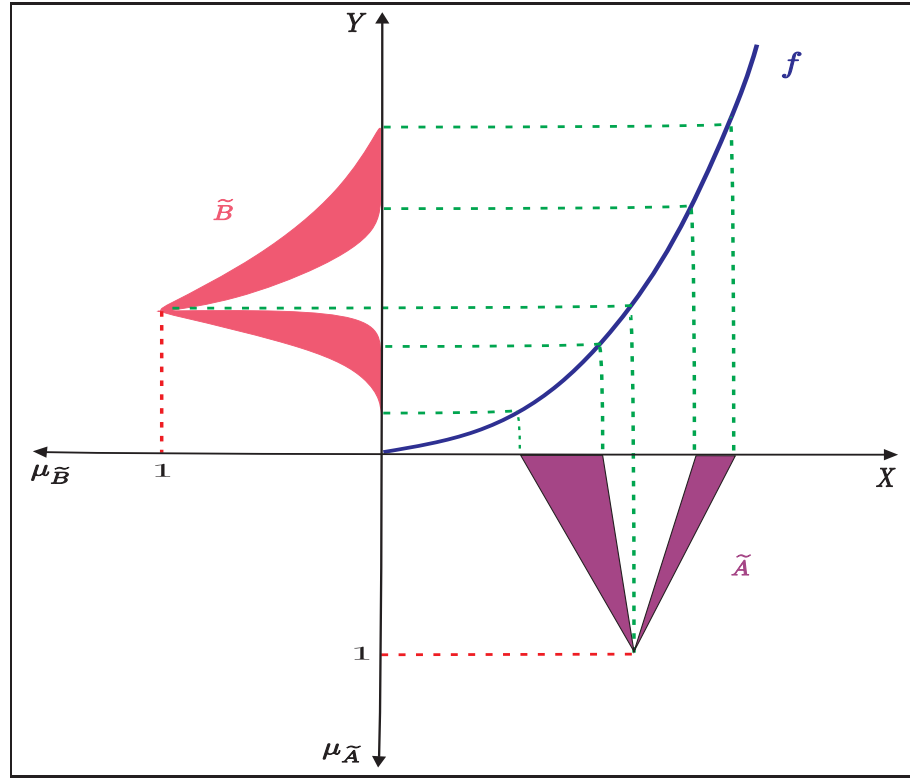


Figura 4.6: Princípio de Extensão de Zadeh para a função de pertinência superior e inferior de um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar.

A Figura 4.7 apresenta a evolução da função de pertinência superior e inferior para a população do Peru no instante t com parâmetro fuzzy triangular, considerando $\alpha = 0.1$, $P_\infty = 53.587.774$, $\bar{\lambda} = 0.214$, $\theta_1 = 0.035$, $\delta_1 = 0.003$, $\theta_2 = 0.025$ e $\delta_2 = 0.001$. Neste gráfico, a cor vermelha, representa o maior grau de pertinência, isto é, 1, e o azul representa o menor grau de pertinência igual a 0.

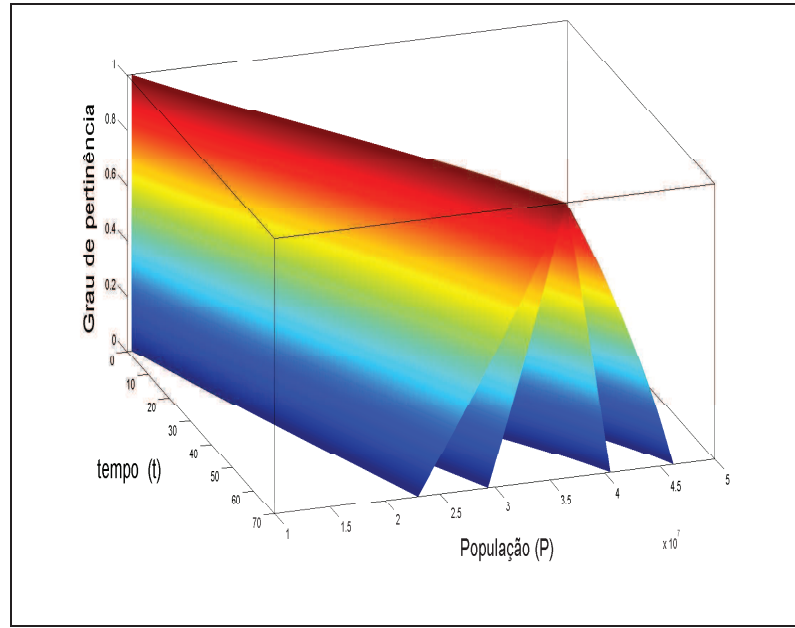


Figura 4.7: Evolução da função de pertinência superior e inferior para a população do Peru no instante t .

Na Figura 4.8 calculamos o centroide para a população do Peru no instante $t = 5$ com $\alpha = 0.1$, $P_{\infty} = 53.587.774$, $\bar{\lambda} = 0.214$, $\theta_1 = 0.035$, $\delta_1 = 0.003$, $\theta_2 = 0.025$ e $\delta_2 = 0.001$, obtendo os seguintes resultados:

$$c_L = 11.696.627 \text{ e } c_R = 11.872.051,$$

assim,

$$C = \frac{c_L + c_R}{2} = 11.784.339.$$

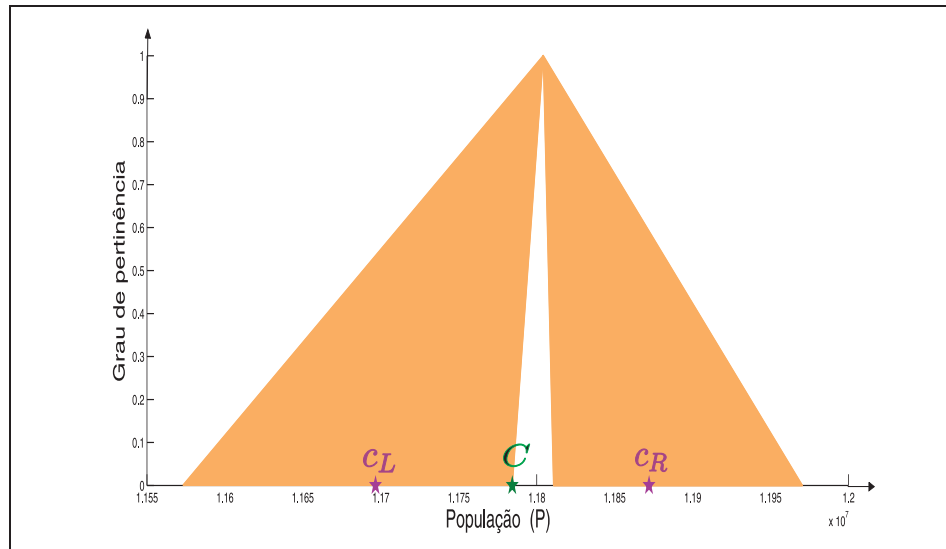


Figura 4.8: Cálculo do centroide “C” para a população do Peru em $t=5$.

Os programas para realizar estes cálculos estão no anexo 2 no final deste trabalho [40].

Na próxima seção mostramos uma comparação entre o modelo de Montroll via SBRF2 e o modelo de Montroll com parâmetro fuzzy triangular tipo 2 intervalar.

4.4 Comparação dos Modelos

A comparação dos modelos foi feita utilizando o máximo dos erros relativos, dados por:

$$S_i = \max \left(\frac{|d_j - n_{ij}|}{|d_j|} \right), \quad i = 1, 2,$$

$\forall d_j \in D$ e $\forall n_{ij} \in N_i$, com $j = 1, \dots, 6$, onde,

- D é o conjunto dos dados da população do Peru.
- N_1 é o conjunto dos valores da população para o modelo de Montroll utilizando o SBRF2.
- N_2 é o conjunto dos valores da população para o modelo de Montroll com parâmetro fuzzy triangular tipo 2 intervalar.

Assim, determinamos:

$$S_1 = 0.018170862.$$

Calculamos alguns valores de S_2 com θ_1 e θ_2 fixos ($\theta_1 = 0.035$ e $\theta_2 = 0.025$) e observamos que:

- Se $\bar{\lambda} = 0.214$, $\delta_1 = 0.001$, $\theta_1 = 0.035$, $\delta_2 = 0.003$ e $\theta_2 = 0.025$ então $R_3 = 0.01465$.
- Se $\bar{\lambda} = 0.214$, $\delta_1 = 0.001$, $\theta_1 = 0.035$, $\delta_2 = 0.001$ e $\theta_2 = 0.025$ então $R_3 = 0.01482$.
- Se $\bar{\lambda} = 0.214$, $\delta_1 = 0.003$, $\theta_1 = 0.035$, $\delta_2 = 0.001$ e $\theta_2 = 0.025$ então $R_3 = 0.01409$.

Para os testes realizados, verificamos que o menor S_2 ocorre no caso em que $\theta_1 > \theta_2$ fixos e $\delta_1 > \delta_2$. É interessante salientar que o modelo de Montroll com parâmetro fuzzy triangular e defuzzificação pelo centroide (C') é o modelo que está mais próximo dos dados da população do Peru. Neste método, a defuzzificação do conjunto fuzzy tipo 2 no final do processo, apresenta melhores resultados.

Na Figura 4.9 apresentamos a comparação dos modelos.

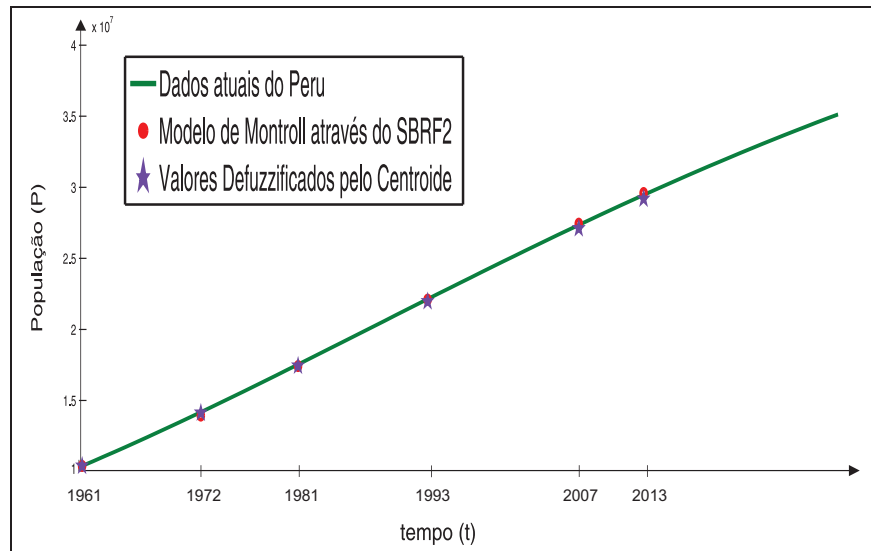


Figura 4.9: Comparação dos modelos.

4.5 Algumas Considerações

Analogamente ao capítulo anterior, neste capítulo, apresentamos um estudo de duas técnicas do modelos de Montroll para conjuntos fuzzy tipo 2 para a população do Peru. O modelo de Montroll obtido através do SBRF2 foi construído levando-se em consideração o cálculo da taxa de crescimento da população do Peru obtida pelo ajuste dos dados. Posteriormente, concluímos que o que melhor se aproxima dos dados do Peru é o modelo de Montroll com parâmetro fuzzy triangular (intervalar) com $\theta_1 > \theta_2$ fixos ($\theta_1 = 0.035$ e $\theta_2 = 0.025$) e $\delta_1 > \delta_2$, utilizando o máximo do erro relativo para a população nos anos que ocorreram os censos nesse país.

Finalmente, a seguir, apresentamos as conclusões do trabalho.

Conclusões

Neste trabalho fizemos um estudo da Teoria dos Conjuntos Fuzzy Tipo 1 e Tipo 2. Realizamos um estudo detalhado do SBRF2 em especial as componentes: Redutor tipo 1 e Defuzzificação. Para desenvolver estes cálculos utilizamos o algoritmo de Karnik-Mendel e o Centroide.

No capítulo 3 realizamos um estudo do modelo de Montroll considerando a taxa de crescimento da população do Peru através do SBRF tipo 1 e também como um parâmetro fuzzy triangular. Fizemos uma comparação desses modelos com os dados da população do Peru de 1961 a 2013 e concluimos que o modelo com parâmetro fuzzy tipo 1 está mais próximos dos dados do que o modelo clássico. Esta comparação foi realizada utilizando o máximo dos erros relativos. Os resultados foram importantes para mostrar como duas ferramentas matemáticas, as equações diferenciais ordinárias e a teoria dos conjuntos fuzzy contribuem para a modelagem de fenômenos biológicos.

No capítulo 4 utilizamos os conjuntos fuzzy tipo 2 para realizar o estudo do modelo de Montroll para a população do Peru de 1961 a 2013. Neste capítulo concluimos que este modelo com parâmetro fuzzy triangular tipo 2 se aproxima melhor dos dados da população do que o modelo clássico e o modelo de Montroll com parâmetro fuzzy triangular tipo 1, utilizando o máximo do erro relativo. Podemos concluir que defuzzificar o conjunto fuzzy tipo 2 no final do processo apresenta melhores resultados. Este trabalho colaborou para justificar as afirmações de vários autores como Mendel et al (2006), Lima et al (2007) e outros; que asseguram que os conjuntos fuzzy tipo 2 fornecem melhor desempenho do que os do tipo 1. As simulações computacionais foram realizadas com o software MATLAB.

Outra conclusão interessante é que o modelo clássico de Montroll apresenta previsões razoáveis para a população do Peru para 2021 e 2050 que foram de 33.126.956 habitantes e 41.258.926 habitantes, pois as estimativas do INEI para estes anos são 33 milhões e 149 mil habitantes, e 40 milhões e 111 mil habitantes, respectivamente.

Como trabalhos futuros pretendemos utilizar os parâmetros fuzzy tipo 2 em outros modelos de fenômenos biológicos envolvendo equações diferenciais ordinárias e parciais. Estes estudos podem ser desenvolvidos através das duas técnicas: SBRF2 e o Princípio de Extensão de Zadeh determinando a solução fuzzy do modelo.

Referências Bibliográficas

- [1] Barros, L.C. e Bassanezi, R.C., *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*, Grupo de Biomatemática, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, UNICAMP/IMECC, 2ª ed., 2010.
- [2] Bassanezi, R.C., *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática*, Editora Contexto, São Paulo-SP, 2002.
- [3] Bertone, A.M.A., Jafelice, R.S.M. e Barros, L.C., Bassanezi, R.C., *On Fuzzy Solutions for Partial Differential Equations*, Fuzzy Set and System 219, pp. 68-80, 2013.
- [4] Brandão, F.G., *Estimativa do Crescimento de Povoamentos de Eucalyptus Baseada em Modelos Implementados com Lógica Fuzzy e Neurofuzzy*, Monografia de Graduação, Lavras, Minas Gerais, 2007.
- [5] Cabrera, N.V., Jafelice, R.S.M. e Bertone, A.M.A., *Modelo de Montroll com Parâmetro Fuzzy para a População do Peru*, IV Semana da Matemática do Pontal, III Workshop de Geogebra do Pontal, Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Ciências Integradas do Pontal, 2013.
- [6] Castillo O. e Melin P., *Type-2 fuzzy logic: Theory and Applications*, Springer, Heidelberg, Alemanha, 2008.
- [7] Gomide, F.A.C. e Gudwin, R.R., *Modelagem, Controle, Sistemas e Lógica Fuzzy*, SBA Controle e Automação, pp. 4:97-115, 1994.
- [8] Hamrawi H., Coupland S. e John R., *A Novel Alpha-cut Representation for Type-2 Fuzzy Sets*, Proc. of IEEE World Congress on Computational Intelligence, Barcelona, Spain, pp. 351-358, 2010.
- [9] Jafelice, R.S.M., *Usando a Teoria dos Conjuntos Fuzzy na Modelagem de Fenômenos Biológicos*, II Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy, Natal-RN, 2012.
- [10] Jafelice, R.S.M., Barros, L.C., Bassanezi, R.C. e Gomide, F., *Methodology to Determine the Evolution of Asymptomatic HIV Population using Fuzzy Set Theory*, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, vol. 13, No. 1, pp. 39-58, 2005.
- [11] Karnik, N. N. e Mendel, J.M., *Centroid of a Type-2 Fuzzy Set*, Information Sciences, vol. 132, pp. 195-220, 2001.
- [12] Karnik, N. N. e Mendel, J.M., *Introduction to Type-2 Fuzzy Logic Systems. Fuzzy Systems Proceedings*, IEEE World Congress on Computational Intelligence, vol. 2, Anchorage, AK, pp. 915-920, 1998.
- [13] Karnik, N. N., Mendel, J. M. e Liang, Q., *Type-2 Fuzzy Logic Systems*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 7, No. 6, pp. 643-658, 1999.

- [14] Lima, M.P., Fontes, C.H.O. e Schnitman L.A., *Lógica Fuzzy do Tipo 2 e um Estudo de Caso Aplicado ao Controle de Tráfego Aéreo*, Universidade Federal da Bahia-UFBA, 2007. Disponível em: www.sba.org.br/rsv/SBAI/SBAI2007/docs/60100007.pdf. Acesso: 27 de Janeiro, 2014.
- [15] Magalhães, M.L.A. e Leite, N.M.G., *Equações Diferenciais Aplicadas à Dinâmica Populacional*, Anais do Congresso de Matemática Aplicada e Computacional, CMAC Nordeste, IFNMG-Campus Januária, 2012.
- [16] Marro, A.A., Souza, A.M., Cavalcante, E.R., Bezerra, G. e Nunes, R., *Lógica Fuzzy: Conceitos e Aplicações*, Departamento de Informática e Matemática Aplicada-Universidade Federal do Rio Grande do Norte-Natal-RN. Disponível em: aquilesburlamaqui.wdfiles.com/local-files/logica-aplicada-a-computacao/texto_fuzzy.pdf. Acesso: 28 de Outubro de 2013.
- [17] Mendel, J., *On Centroid Calculations for Type-2 Fuzzy Sets*, Appl. Comput. Math., vol. 10, No. 1, pp. 88-96, 2011.
- [18] Mendel, J. M., *A Reprint "Type-2 Set and Systems: An Overview"*, Supplement to IEEE Computational Intelligence Magazine, vol. 2, No. 1, pp. 20-29, 2007.
- [19] Mendel, J., *Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems: Introduction and New Directions*, Prentice-Hall, Upper-Saddle River, NJ, 2001.
- [20] Mendel, J., John, R. e Liu, F.T., *Interval Type-2 Fuzzy Logic Systems Made Simple*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 14, No. 6, pp. 808-821, 2006.
- [21] Mendel, J. e Liu, F.T., *Super-exponential Convergence of the Karnik-Mendel Algorithms for Computing the Centroid of Computing the Centroid of an Interval Type-2 Fuzzy Set*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 15, No. 2, pp. 309-320, 2007.
- [22] Mendel, J. e Wu, H., *New Results about the Centroid of a n Interval Type-2 Fuzzy Set, including the Centroid of a Fuzzy Granule*, Information Sciences, vol. 177, pp. 360-377, 2007.
- [23] Ortega, N.R.S., *Aplicação da Teoria de Conjuntos Fuzzy a Problemas da Biomedicina*, Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo-Instituto de Física, 2001.
- [24] Pedrycz, W. e Gomide, F., *An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design*, MIT Press, Cambridge, EUA, 1998.
- [25] Rafikov, M., *Notas do Minicurso: Aplicação dos Modelos Matemáticos no Controle de Populações*, Minicurso da Escola de Verão 2003, Departamento de Matemática/ UFSC, 2003.
- [26] Reznik L., *Fuzzy Controllers*, Newnes, Reino Unido, 1997.
- [27] Rizol, P.M.S. Rocha, Mesquita, L. e Saotome, O., *Lógica Fuzzy Tipo-2*, Revista SODEBRAS, vol. 6, pp. 27-46, 2011.
- [28] Roveda, J.A.F., Roveda S.R.M.M. e Martins, A.C.G., *Dinâmica Populacional com Sistemas p -Fuzzy: Um Estudo de Caso para a Cidade de Sorocaba*, Biomatemática 19, pp. 69-80, ISSN 1679-365X. Uma Publicação do Grupo de Biomatemática IMECC - UNICAMP. Engenharia Ambiental - Campus Experimental de Sorocaba - Unesp, 18.087-180, Sorocaba-SP, 2009.

- [29] Ruggiero, M. A. G. e Lopes, V. L. R., *Cálculo Numérico Aspectos Teóricos e Computacionais*, Departamento de Matemática Aplicada IMECC - UNICAMP, 2^a ed., 2006.
- [30] Salazar, O., Serrano, H. e Soriano, J., *Centroid of an Interval Type-2 Fuzzy Set: Continuous vs. Discrete*, Ingeniería, vol. 16, No. 2, pp. 67-78, 2011.
- [31] Salazar, O., Soriano, J. e Serrano, H., *A short Note on the Centroid of an Interval Type-2 Fuzzy Set*, Proceedings of Workshop on Engineering Applications (WEA), Bogotá, Colombia, 2011.
- [32] Tanscheit, R., *Sistemas Fuzzy*, Rio de Janeiro-RJ, 2010. Disponível em: api.adm.br/evalforum/wp-content/uploads/2010/01/ok_sistemas-fuzzy1.pdf. Acesso: 12 de Dezembro, 2013
- [33] The MathWorks, Inc., *Fuzzy Logic Toolbox User's Guide*, 1995-1999.
- [34] Tijuana Institute of Technology and Baja California Autonomous University, Tijuana Campus, Mexico, *Interval Type-2 Fuzzy Logic Toolbox For Use with MATLAB*, 2005-2008.
- [35] www.inei.gob.pe. Acesso: 28 de Agosto, 2013.
- [36] www.justomedia.com/97680/la-tasa-de-fecundidad-en-el-peru-cayo-en-395-en-los-ultimos-26-anos. Acesso: 29 de Abril, 2013.
- [37] www.perueconomico.com/ediciones/74/articulos/1337, ed. de 2012. Acesso: 19 de Junho, 2013
- [38] www.publimetro.pe/actualidad/15090/noticia-ocho-datos-poblacion-peruana. Acesso: 11 de Julho, 2013.
- [39] www2.dbd.puc-rio.br/pergamum/tesesabertas/0220898_07_cap_02.pdf. Acesso, 15 de Outubro, 2013.
- [40] Wu, D. e Nie, M., *Comparison and Practical Implementation of Type-reduction Algorithms for Type-2 Fuzzy Sets and Systems*, Proc. IEEE International Conference on Fuzzy Systems, pp. 2131-2138, Taipei, Taiwan, 2011.
- [41] Yen J. e Langari R., *Fuzzy Logic: Intelligence, Control, and Information*, Prentice Hall, EUA, 1999.

Anexos

Anexo 1

A continuação apresentamos os programas utilizados para calcular o Centroide através do algoritmo de Karnik-Mendel.

As simulações numéricas são realizadas utilizando o código em Matlab cedido pelo autor de Wu e Nie (2011), Dongrui Wu (Professor no Machine Learning Lab, GE Global Research, Niskayuna, NY 12309 USA).

Algoritmo de Karnik-Mendel

%Defina um conjunto fuzzy tipo 2 por 9 pontos: 4 da mf superior 4 inferior e por último a altura máxima da mf inferior.

```
A = [1 1.2 2 3 1.3 1.5 1.8 2.5 0.5]
```

%Calculando o centroid de A como vetor de componente CAL =centroide menor.

% CAr =centroide maior e $CA = (CAL + CAr)/2$

```
[CA CAL CAr] = centroidIT2(A)
```

%plotando o conjunto fuzzy com preenchimento e seu centroide (intervalo)

```
fill(A(1,[1:4 8:-1:5]),[0 1 1 0 0 A(1,[9 9]) 0],[1 0.78 0.8]);
```

hold on

```
plot(A(1,[1:4 8:-1:5]),[0 1 1 0 0 A(1,[9 9]) 0],'color',[0.9 0.9 0.9],'linewidth',2);
```

hold on

```
plot(CA,0,'g*')
```

hold on

```
plot(CAL,0,'r*')
```

hold on

```
plot(CAr,0,'r*')
```

Programa do centroidIT2(A):

```

function [CA, CAI, CAr] = centroidIT2(A)

% CA: center of centroid of A

% CAI: left bound of the centroid

% CAr: right bound of the centroid

if length(A) ~= 9

    error('The input vector must be a 9 – point representation of an IT2FS.');
```

end

% No *linspace* utilize 9 divisões para conferir os cálculos manuais.

```

Xs = linspace(A(1), A(4), 9);

UMF = mg(Xs, A(1 : 4), [0 1 1 0]);

LMF = mg(Xs, A(5 : 8), [0 A(9) A(9) 0]);

CAI = EKM(Xs, LMF, UMF, -1);

CAr = EKM(Xs, LMF, UMF, 1);

CA = (CAI + CAr)/2;
```

Programa para o mg:

```

function u = mg(x, xMF, uMF)

% f = mg(x, xMF, uMF)

% function to compute the membership grades of x on a T1 FS

% xMF : x-coordinates of the T1 FS.

% uMF : u-coordinates of the T1 FS; default to be [0 1 1 0].

% u : membership of x on the T1 FS.

if nargin == 2

    uMF = [0111];

elseif length(xMF) ~= length(uMF)

    error('xMF and uMF must have the same length.');
```

end

```

[xMF, index] = sort(xMF);

uMF = uMF(index);

u = zeros(size(x));

for i = 1 : length(x)

    if x(i) <= xMF(1) | x(i) >= xMF(end)

        u(i) = 0;

    else

        left = find(xMF < x(i), 1, 'last');

        right = left + 1;

        u(i) = uMF(left) + (uMF(right) - uMF(left)) * (x(i) - xMF(left)) / (xMF(right) - xMF(left));

    end

end

end

```

Programa para EKM:

```

function y = EKM(xPoint, wLower, wUpper, maxFlag)

% y = EKM(xPoint, wLower, wUpper, maxFlag)

% function to implement the EKM algorithm

% xPoint :  $x_i$ 

% [wLower, wUpper] : range of  $w_i$ 

% maxFlag : 1, if to output the maximum; -1, if to output the minimum

% xPoint, wLower and wUpper must have the same length.

if max(wUpper) == 0 | max(xPoint) == 0

    y = 0;

    return;

end

if max(wLower) == 0

    if maxFlag > 0

        y = max(xPoint);

    else

        y = min(xPoint);

    end

    return;

end

if length(xPoint) == 1

    y = xPoint;

    return;

end

% combine zero firing intervals.

```

```

I = find(wUpper == 0);

xPoint(I) = [ ];

wLower(I) = [ ];

wUpper(I) = [ ];

% combine zero xs.

[xSort, xIndex] = sort(xPoint);

lowerSort = wLower(xIndex);

upperSort = wUpper(xIndex);

k = find(xSort == 0, 1, 'last');

if k > 1

    xSort(1) = 0;

    xSort(2 : k) = [ ];

    lowerSort(1) = sum(lowerSort(1 : k));

    lowerSort(2 : k) = [ ];

    upperSort(1) = sum(upperSort(1 : k));

    upperSort(2 : k) = [ ];

end

% Change column vector into row vector.

if size(xSort, 1) > 1

    xSort = xSort';

end

if size(lowerSort, 1) > 1

    lowerSort = lowerSort';

end

if size(upperSort, 1) > 1

```

```

    upperSort = upperSort';

end

ly = length(xSort);

if maxFlag < 0

    k = round(ly/2.4);

    temp = [upperSort(1 : k)lowerSort(k + 1 : ly)];

else

    k = round(ly/1.7);

    temp = [lowerSort(1 : k)upperSort(k + 1 : ly)];

end

a = sum(temp.*xSort);

b = sum(temp);

y = a/b;

kNew = find(xSort > y, 1) - 1;

while k ~ = kNew

    mink = min(k, kNew);

    maxk = max(k, kNew);

    temp = upperSort(mink + 1 : maxk) - lowerSort(mink + 1 : maxk);

    b = b - sign(kNew - k) * sign(maxFlag) * sum(temp);

    a = a - sign(kNew - k) * sign(maxFlag) * sum(temp.*xSort(mink + 1 : maxk));

    y = a/b;

    k = kNew;

    kNew = find(xSort > y, 1) - 1;

end

```

Anexo 2

A continuação apresentamos os programas utilizados para calcular o Centroide através do algoritmo de Karnik-Mendel com parâmetro fuzzy triangular para a população do Peru. Para este algoritmo, fizemos algumas modificações ao algoritmo que foi apresentado no Anexo 1.

Algoritmo de Karnik-Mendel com parâmetro fuzzy triangular

`%n = número de pontos`

`n = 70;`

`%Pontos do triangulo superior e inferior, g é a altura do triangulo inferior`

`a = 0.179;`

`b = 0.211;`

`c = 0.214;`

`d = 0.215;`

`e = 0.239;`

`g = 1;`

`%tempo`

`t = linspace(0, 70, n + 1);`

`%P0 = População inicial, Pf = População final, q = 0.1.`

`P0 = 10420357;`

`Pf = 53587774;`

`q = 0.1;`

`%defina um conjunto fuzzy tipo 2 por 7 pontos: 3 da mf superior 3 inferior e ultimo a altura maxima da mf inferior`

`A = [Pf*(exp(q*t(5)*a)/(exp(q*t(5)*a)+((Pf/P0)^q)-1))^(1/q) Pf*(exp(q*t(5)*c)/(exp(q*t(5)*c)+((Pf/P0)^q)-1))^(1/q) Pf*(exp(q*t(5)*e)/(exp(q*t(5)*e)+((Pf/P0)^q)-1))^(1/q) Pf*(exp(q*t(5)*b)/(exp(q*t(5)*b)+((Pf/P0)^q)-1))^(1/q) Pf*(exp(q*t(5)*c)/(exp(q*t(5)*c)+((Pf/P0)^q)-1))^(1/q) Pf*(exp(q*t(5)*d)/(exp(q*t(5)*d)+((Pf/P0)^q)-1))^(1/q) g]`
`%Calculando o centroid de A, CA = (CAI + CAr)/2`

`[CA CAI CAr] = centroidIT2tri(A)`

`%plotando o conjunto fuzzy com preenchimento e seu centroide (intervalo)`


```
fill(A(1,[1:3 6:-1:4]),[0 1 0 0 A(1,7) 0],[0.9 0.9 0.9]);
```

```
hold on
```

```
plot(A(1,[1:3 6:-1:4]),[0 1 0 0 A(1,7) 0],'color',[0.9 0.9 0.9],'linewidth',1.5);
```

```
hold on
```

```
plot(CA,0,'g*')

```

```
hold on
```

```
plot(CAl,0,'r*')

```

```
hold on
```

```
plot(CAr,0,'r*')

```

Programa para o centroidIT2tri(A) :

```
function[CA,CAI,CAr] = centroidIT2tri(A)

% [CA, CAI, CAr]=centroidIT2(A).
% A: an IT2 FS represented by 7 parameters.
% CA: center of centroid of A.
% CAI: left bound of the centroid.
% CAr: right bound of the centroid.

iflength(A) ~= 7

error('Theinputvectormustbea7 - pointrepresentationofanIT2FS.');
```

end

```

Xs = linspace(A(1), A(3), 100);

UMF = mgtri(Xs, A(1 : 3), [0 1 0]);

LMF = mgtri(Xs, A(4 : 6), [0 A(7) 0]);

CAI = EKM(Xs, LMF, UMF, -1);

CAr = EKM(Xs, LMF, UMF, 1);

CA = (CAI + CAr)/2;
```

A programação de **mg** e **EKM** são os mesmos do Anexo 1.