

EDUARD ROJAS CASTILLO

**Modelagem da Dinâmica de um Grupo de Indivíduos  
HIV Positivos com Parâmetro Fuzzy do Tipo 2**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE MATEMÁTICA  
2014

EDUARD ROJAS CASTILLO

# Modelagem da Dinâmica de um Grupo de Indivíduos HIV Positivos com Parâmetro Fuzzy do Tipo 2

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

**Área de Concentração:** Matemática.  
**Linha de Pesquisa:** Análise Numérica.

**Orientadora:** Profa. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice.

UBERLÂNDIA - MG  
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil

---

R741m    Rojas Castillo, Eduard, 1983-  
2014        Modelagem da dinâmica de um grupo de indivíduos HIV positivos com parâmetro fuzzy do tipo 2 / Eduard Rojas Castillo. - 2014. 96 f. : il.

Orientadora: Rosana Sueli da Motta Jafelice.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática.  
Inclui bibliografia.

1. Matemática - Teses. 2. Análise numérica - Teses. 3. Teoria dos conjuntos - Teses. 4. HIV (Virus) - Teses. I. Jafelice, Rosana Sueli da Motta. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

---

CDU: 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152  
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

**ALUNO:** Eduard Rojas Castillo.

**NÚMERO DE MATRÍCULA:** 11212MAT015.

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO:** Matemática.

**LINHA DE PESQUISA:** Análise Numérica.

**PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA:** Nível Mestrado.

**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:** Modelagem da Dinâmica de um Grupo de Indivíduos HIV Positivos com Parâmetro Fuzzy do Tipo 2.

**ORIENTADORA:** Profa. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 11 de Abril de 2014, às 9h00min, pela seguinte Banca Examinadora:

**NOME**

**ASSINATURA**

Profa. Dra. Rosana Sueli da Motta Jafelice  
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Dr. Rodney Carlos Bassanezi  
UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas

Profa. Dra. Ana Maria Amarillo Bertone  
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Uberlândia-MG, 11 de Abril de 2014.

## Dedicatória

Dedico este trabalho, a meus pais Eduardo e Marina, pela razão de minha existência e pelos conselhos, a meus irmãos, a minha noiva Nathali pela compreensão e a minha orientadora por seu apoio na realização deste trabalho.

## Agradecimentos

Agradeço:

- à Deus por iluminar meu caminho;
- aos meus pais, Eduardo e Marina;
- aos meus irmãos, Edwin, Kari e Neiser;
- à minha noiva, Nathali a quem amo muito;
- aos meus professores de mestrado da Universidade Federal de Uberlândia;
- à minha orientadora Rosana Sueli da Motta Jafelice, pelos ensinamentos, pela paciência, pela compreensão;
- ao professor Edson Agustini, pela imensa ajuda, a quem agradeço infinitamente;
- aos meus professores de graduação, da Universidade Nacional Pedro Ruiz Gallo, Lambayeque-Perú, em especial, aos professores, Enrique Cárpene Velásquez, Glória Ortiz Basadre e Oscar Santamaría Santisteban;
- ao professor Alessandro Alves Santana, pela ajuda na parte computacional;
- aos meus amigos, José, Nancy, Norbil, Patricia, Manuel, Elard, Leodan, Marina, Janice, Ana Claudia, Keila e Paula;
- aos meus amigos da pós-graduação, em especial a Fabricio;
- à CAPES pelo apoio financeiro.

CASTILLO, E. R. *Modelagem da Dinâmica de um Grupo de Indivíduos HIV Positivos com Parâmetro Fuzzy do Tipo 2*. 2014. 96 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

## Resumo

Neste trabalho estudamos a taxa de retorno de um grupo de indivíduos HIV (Vírus de Imunodeficiência Humana) positivos, de sintomáticos, se o indivíduo apresenta doenças oportunistas, para assintomáticos, caso contrário, com tratamento antirretroviral. Construímos Sistemas Baseados em Regras Fuzzy (SBRF) para conjuntos fuzzy do tipo 1 e do tipo 2, com intuito de modelar a taxa de retorno de indivíduos HIV positivos de sintomáticos para assintomáticos, dependendo da carga viral e do nível do linfócito T do tipo CD4+. O linfócito T do tipo CD4+ é o principal linfócito que o vírus ataca ao atingir a corrente sanguínea. Um dos SBRF do tipo 2 tem como saída um número real e o outro SBRF do tipo 2 utiliza o método de inferência de Mamdani e tem como saída um conjunto fuzzy unitário. A partir de dados laboratoriais do linfócito T do tipo CD4+ e da carga viral de um grupo de indivíduos HIV positivos, obtemos os valores das taxas de retorno obtidos pelo SBRF do tipo 1 e pelos dois SBRF do tipo 2 que são ajustados por superfícies através do método dos mínimos quadrados. As três superfícies são comparadas, verificamos que as duas superfícies que melhor se ajustam aos valores das taxas de retorno de sintomáticos para assintomáticos são as obtidas pelos SBRF do tipo 2.

*Palavras-chave:* Conjuntos Fuzzy do Tipo 2, Algoritmos Karnik-Mendel, Mancha de Incerteza, HIV.

CASTILLO, E. R. *Modeling the Dynamics of a Group of Positive HIV Individuals with Type-2 Fuzzy Parameter*. 2014. 96 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlandia, Uberlandia-MG.

### Abstract

In this work we study the rate of return of a group of positive HIV (Human Immunodeficiency Virus) individuals, from symptomatic, if a person has opportunistic diseases, to asymptomatic, otherwise with antiretroviral treatment. We built a Fuzzy Rule-Based Systems (FRBS) for fuzzy sets of type-1 and type-2, in order to model the rate of return on positive HIV individuals of symptomatic to asymptomatic, depending on the viral load and CD4+ T lymphocyte level. The main lymphocyte attacked by the virus when it reaches the bloodstream is the CD4+ T lymphocyte. One of FRBS type-2 outputs is a real number and the other FRBS type-2 uses the Mamdani inference method and it has as output a singleton fuzzy set. From laboratory data CD4+ T lymphocyte and viral load in a group of positive HIV individuals, we obtain the values of the rates of return obtained by FRBS type-1 and the two FRBS of type-2, which are set by surfaces through the squares least method. The three surfaces are compared and we found that the two surfaces that best fit the values of the rates of return from symptomatic to asymptomatic are obtained by FRBS of type-2.

*Keywords:* Type-2 Fuzzy Sets, Algorithms Karnik-Mendel, Footprint of Uncertainty, HIV.



# Lista de Figuras

1	Estrutura do HIV [11]. . . . .	2
2	Ciclo do HIV [18]. . . . .	3
3	Esquema da história natural da infecção do HIV [6], [22], [27] e [8]. . . . .	4
1.1	Funções de pertinência das operações padrão de conjuntos fuzzy. . . . .	8
1.2	$\alpha$ -níveis: $[A]^\alpha$ e $[A]^0 \neq \mathbb{R}$ . . . . .	9
1.3	Número fuzzy triangular. . . . .	10
1.4	Número fuzzy trapezoidal. . . . .	11
1.5	Número fuzzy em forma de sino [2]. . . . .	11
1.6	Altura, kernel e suporte de um conjunto fuzzy [24]. . . . .	12
1.7	Exemplos de $s$ -normas. . . . .	13
1.8	Exemplos de $t$ -normas. . . . .	14
1.9	Ponto fuzzy ou grânulo em $X \times Y$ [8]. . . . .	15
1.10	Variáveis linguísticas. . . . .	15
1.11	Método de Mamdani com composição max-min [2]. . . . .	17
1.12	Sistemas baseados em regras fuzzy [10]. . . . .	18
2.1	Funções de pertinência para as variáveis de entrada carga viral e nível de CD4+. . . . .	21
2.2	Funções de pertinência de taxa de retorno ( $\gamma$ ). . . . .	22
2.3	Diagramas de dispersão carga viral e nível de CD4+. . . . .	22
2.4	Números fuzzy triangulares. . . . .	23
2.5	Grânulo. . . . .	24
2.6	Os valores da taxa de retorno nos cálculos das cargas virais e nível de CD4+ médios. . . . .	24
2.7	Superfície de ajuste. . . . .	25
3.1	Conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar. . . . .	26
3.2	Conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar. . . . .	27
3.3	Exemplos de conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalares. . . . .	27
3.4	Função de pertinência secundária intervalar em $x=4$ [24]. . . . .	28
3.5	Conjunto fuzzy do tipo 2 [24]. . . . .	28
3.6	Conjunto fuzzy do tipo 1. . . . .	29
3.7	Pertinências primárias de um conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar discreto [34]. . . . .	29
3.8	Sistema baseado em regras fuzzy tipo 2 [24]. . . . .	30
3.9	Pontos switch para calcular $y_L$ e $y_R$ [34]. . . . .	31
3.10	Funções de pertinência de conjuntos fuzzy tipo 2 intervalar [34]. . . . .	34
3.11	Método de Mamdani para conjuntos do tipo 2 utilizando o operador $t$ -norma mínimo e $\gamma$ -norma máximo [24]. . . . .	41
3.12	Exemplo de conjuntos fuzzy do tipo 1 imersos em um conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar [24]. . . . .	42
3.13	Conjunto fuzzy do tipo 1 vermelho imerso na FOU, usado para calcular $X_e(L)$ e $X_e(R)$ [17]. . . . .	43

3.14	Funções de pertinência da temperatura e sensação térmica. . . . .	44
3.15	Conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar resultante das funções de pertinência temperatura e sensação térmica. . . . .	45
3.16	Função de pertinência de um conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar que não tem centroide [28]. . . . .	51
4.1	Funções de pertinência carga viral e nível de CD4+. . . . .	54
4.2	Valores da taxa de retorno nos cálculos da carga viral e nível de CD4+ médios usando algoritmo de KM computacionalmente. . . . .	63
4.3	Superfície de ajuste. . . . .	64
4.4	Funções de pertinência taxa retorno. . . . .	64
4.5	Exemplo do método de Mamdani para as regras $R^1$ e $R^2$ . . . . .	65
4.6	Editor de um SBRF2 [4]. . . . .	67
4.7	Editor funções de pertinência conjuntos fuzzy do tipo 2 trapezoidal [4]. . . . .	68
4.8	Valores de carga viral e nível de CD4+ médios obtidos utilizando o toolbox “it2fuzzy”. . . . .	68
4.9	Superfície de ajuste. . . . .	69
4.10	O ponto em rosa representado no grânulo tem coordenadas: Carga viral igual a 18956 (cópias de RNA/ml), nível de CD4+ igual a 369 (células/ $mm^3$ ) e grau de pertinência igual a 0.39. . . . .	70

# Lista de Tabelas

2.1	Recomendações para início da terapia antirretroviral. . . . .	21
2.2	Base de regras fuzzy. . . . .	22
2.3	Resultados dos exames de carga viral (cópias de RNA/ml) e nível de CD4+ (células/mm <sup>3</sup> ). . . . .	23
3.1	Base de regras fuzzy. . . . .	34
3.2	Consequentes de SBRF2 com saída intervalar. . . . .	34
3.3	Intervalos iniciais das quatro regras. . . . .	35
3.4	Graus de pertinência inferior e superior do conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar $\widetilde{M}$ . . . . .	46
4.1	Base de regras fuzzy da taxa de retorno. . . . .	56
4.2	Consequentes de SBRF2 com saída dada por um número real. . . . .	56
4.3	Intervalos iniciais das quinze regras fuzzy da taxa de retorno. . . . .	59
4.4	Base de regras fuzzy da taxa de retorno. . . . .	60
4.5	Base de regras fuzzy. . . . .	64
4.6	Graus de pertinência inferior e superior de $M$ . . . . .	66

# Lista de Símbolos

$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\chi_A$	Função característica do conjunto $A$ .
$u_{A \cup B}$	Função de pertinência da união de conjuntos fuzzy $A$ e $B$ .
$u_{A \cap B}$	Função de pertinência da interseção de conjuntos fuzzy $A$ e $B$ .
$u_{A'}$	Função de pertinência do complemento do conjunto fuzzy $A$ .
$\overline{supp A}$	Fecho do suporte do conjunto fuzzy $A$ .
$\ker(F)$	Kernel do conjunto fuzzy $F$ .
$x = x(t)$	Proporção de população assintomática.
$y = y(t)$	Proporção de população sintomática.
$\tilde{A}, \tilde{X}$	Conjuntos fuzzy tipo 2 intervalar.
$\mu_{\tilde{A}}(x, u)$	Função de pertinência tipo 2.
$\bar{\mu}_{\tilde{A}}(x)$	Função de pertinência superior do conjunto fuzzy tipo 2 intervalar $\tilde{A}$ .
$\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x)$	Função de pertinência inferior do conjunto fuzzy tipo 2 intervalar $\tilde{A}$ .

# Sumário

Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	x
Lista de Símbolos	xii
Introdução	1
<b>1 Conjuntos Fuzzy Tipo 1</b>	<b>7</b>
1.1 Conjuntos Fuzzy Tipo 1 . . . . .	7
1.2 Operações Padrões entre Conjuntos Fuzzy . . . . .	8
1.3 Níveis de um Conjunto Fuzzy . . . . .	9
1.4 Números Fuzzy . . . . .	10
1.5 Operações Aritméticas com Números Fuzzy . . . . .	12
1.6 Relações Fuzzy . . . . .	12
1.6.1 Regras e Inferência Fuzzy . . . . .	15
1.6.2 Variável Linguística . . . . .	15
1.7 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy . . . . .	16
<b>2 Modelo Fuzzy do Tipo 1</b>	<b>19</b>
2.1 Modelo Fuzzy do Tipo 1 . . . . .	19
2.2 Modelo Fuzzy para um Grupo de Indivíduos HIV Positivos . . . . .	22
2.2.1 Construção dos Grânulos . . . . .	23
2.2.2 Ajuste dos Dados por uma Superfície . . . . .	24
2.3 Conclusão . . . . .	25
<b>3 Conjuntos Fuzzy do Tipo 2</b>	<b>26</b>
3.1 Conjuntos Fuzzy do Tipo 2 . . . . .	26
3.2 Diferenças entre Conjuntos Fuzzy do tipo 1 e Conjuntos Fuzzy do tipo 2 Intervalar	29
3.3 Sistema Baseado em Regras Fuzzy do Tipo 2 (SBRF2) . . . . .	29
3.4 Saída de SBRF2 é um Intervalo . . . . .	30
3.4.1 Algoritmo de KM para calcular $y_L$ . . . . .	32
3.4.2 Algoritmo de KM para calcular $y_R$ . . . . .	33
3.5 Saída de SBRF2 é um Conjunto Fuzzy do Tipo 2 Intervalar . . . . .	40
3.5.1 Versão Discreta do Centroide . . . . .	42
3.6 Versão Contínua do Centroide . . . . .	50
3.6.1 Não existência do centroide . . . . .	51

<b>4</b>	<b>Modelo Fuzzy do Tipo 2 Intervalar</b>	<b>54</b>
4.1	Modelo Fuzzy do Tipo 2 para um Grupo de Indivíduos HIV Positivos com Saída Real . . . . .	55
4.1.1	Ajuste dos Dados por uma Superfície . . . . .	63
4.2	Modelo Fuzzy do Tipo 2 para um Grupo de Indivíduos HIV Positivos com Saída “Singleton” . . . . .	64
4.2.1	Ajuste dos Dados por uma Superfície . . . . .	68
4.3	Comparações das Superfícies obtidas pelo SBRF1 e SBRF2 . . . . .	69
4.4	Um Estudo para os Dados Laboratoriais de um Indivíduo HIV Positivo . . . . .	69
4.5	O Novo Modelo . . . . .	70
4.6	Conclusão . . . . .	71
	<b>Considerações Finais</b>	<b>72</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>73</b>
	<b>Anexos</b>	<b>76</b>

# Introdução

Os princípios de lógica fuzzy foram desenvolvidos primeiramente por Jan Lukasiewicz (1878-1956), que em 1920 desenvolveu e introduziu conjuntos com grau de pertinência. Estes princípios combinados aos conceitos da lógica clássica, desenvolvida por Aristóteles, deu embasamento suficiente para que em 1965, Lotfi Asker Zadeh, professor de Ciências da Computação da Universidade da Califórnia, ser o primeiro autor da publicação sobre lógica fuzzy [32]. Atualmente, a teoria dos conjuntos fuzzy é elemento fundamental em diversos sistemas computacionais, sendo considerada uma técnica de excelência no universo computacional que possui também enorme aceitação na área de controle de processos. O termo fuzzy pode ser entendido como uma situação em que não é possível responder simplesmente “sim” ou “não”. Mesmo conhecendo as informações necessárias sobre a situação, dizer algo entre “sim” e “não”, como “talvez” ou “quase”, torna-se mais apropriado. Zadeh observou que muitas regras presentes no cotidiano da população não podiam ser explicadas pelas pessoas que as usavam. Como por exemplo, podemos olhar para uma pessoa e imaginar que esta tenha 50 anos, porém não se sabe como explicar esse fato. Esta idéia levou a Zadeh a desenvolver o que conhecemos por lógica fuzzy [23].

A lógica fuzzy do tipo 1, também conhecida como lógica nebulosa ou lógica difusa, é capaz de trabalhar com a incerteza relacionada ao significado das palavras, utilizando funções de pertinências precisas. Uma vez que as funções de pertinências do tipo 1 são definidas, toda incerteza relacionada com o significado das palavras desaparece, porque as funções de pertinência do tipo 1 são totalmente precisas [14] e [24]. A lógica fuzzy do tipo 2, por outro lado, modela a incerteza oriunda do significado das palavras. Embora a função de pertinência de tipo 2 também seja precisa, esta é composta por uma “mancha” de incerteza que permite que esta seja trabalhada pelo SBRF do tipo 2 [14] e [24]. A lógica do tipo 2 foi introduzida por Lotfi Zadeh em 1975 [33]. Mendel et al.(2006) afirmam que SBRF do tipo 2 tem potencial para fornecer melhor desempenho do que um SBRF do tipo 1. A lógica fuzzy pode ser uma ferramenta útil na abordagem de problemas em biomedicina. A aplicação dessa teoria na área médica tem demonstrado a sua capacidade para aprimorar e desenvolver, tanto equipamentos quanto modelos, nas mais diversas atividades hospitalares e de pesquisa [20].

Nesta pesquisa, modelamos a taxa de retorno de indivíduos HIV positivos de sintomáticos para assintomáticos, com tratamento antirretroviral. A Síndrome da Imunodeficiência Adquirida (AIDS) foi reconhecida em meados de 1981, nos EUA, como uma nova doença que compromete o sistema imunológico. É uma síndrome proveniente de um processo de imunodeficiência decorrente de infecção pelo HIV (vírus de imunodeficiência humana). Desde o início da epidemia até 2010 foram notificados 592.914 casos de AIDS no Brasil [19]. Após o uso da terapia antirretroviral, a queda da mortalidade foi de aproximadamente 50%, segundo o Ministério da Saúde. Os meios de transmissão cientificamente comprovados são: relações sexuais com portadores de HIV; transfusão de sangue contaminado; uso de seringas ou materiais cirúrgicos contaminados; via placenta, leite materno e pelo contato entre mucosas.

Os medicamentos antirretrovirais surgiram na década de 1980, para impedir a multiplicação do vírus no organismo. Eles não matam o HIV, vírus causador da AIDS, mas ajudam a evitar o enfraquecimento do sistema imunológico. Por isso, seu uso é fundamental para aumentar o

tempo e a qualidade de vida de quem tem AIDS.

Os testes padrão que indicam a contaminação podem ser baseados tanto na presença de anticorpos séricos anti-HIV (anticorpos presentes no soro sanguíneo e são produzidos contra agentes estranhos ao organismo), quanto na detecção direta do vírus. Utiliza-se para diagnóstico da infecção pelo HIV o método de ELISA (Enzyme-linked immunosorbent assay). Contudo, como tal teste é muito sensível, utiliza-se também o teste confirmativo de Western-blot (transferência de proteínas), que também pesquisa anticorpos. Apesar da alta sensibilidade destes testes, indivíduos recém-infectados podem permanecer soronegativos nas primeiras seis semanas [8].

## HIV

O HIV é um retrovírus esférico que contém juntamente com o RNA (ácido ribonucléico), três proteínas importantes: Transcriptase Reversa, a Integrase e a Protease. Causador da AIDS, ataca o sistema imunológico, responsável por defender o organismo de doenças. As células mais atingidas são os linfócitos T do tipo CD4+. E é alterando o DNA dessa célula que o HIV faz cópias de si mesmo. Depois de se multiplicar, rompe os linfócitos em busca de outros para continuar a infecção [19].

A Figura 1, mostra a estrutura do HIV. Este vírus encapsulado tem um envelope proteico, constituído por duas glicoproteínas (gp) principais: uma maior, a gp120, que forma botões na superfície, e outra menor, a gp41; que juntas formam o conjunto gp160. Dentre deste envelope proteico, o vírus possui uma cápsula interna, formada pela proteína p17. No interior desta cápsula interna, existe uma membrana formada pela proteína p24 que envolve o material genético, o RNA. Nesta cápsula interna, encontra-se junto com o RNA, três proteínas importantes: Transcriptase Reversa, Integrase e Protease.

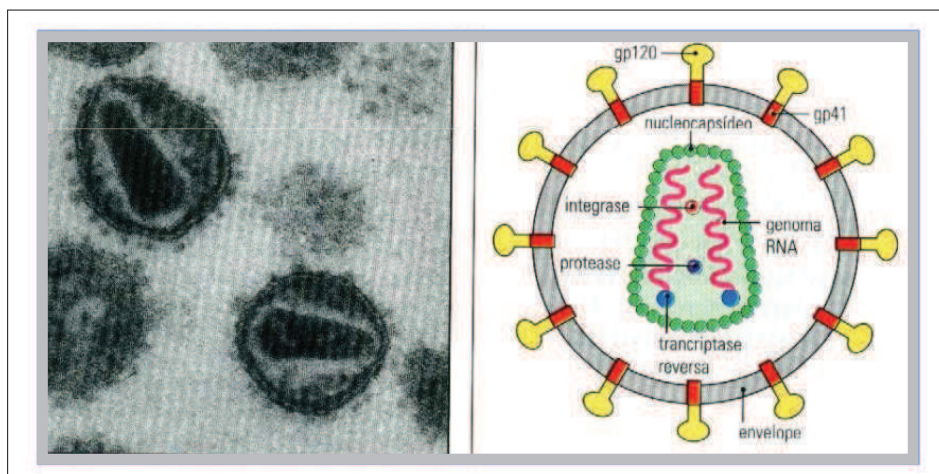


Figura 1: Estrutura do HIV [11].

## Ciclo do HIV

Para multiplicar-se no organismo humano, o HIV utiliza especialmente os linfócitos T do tipo CD4+, responsáveis pelo comando da resposta específica antígeno-anticorpo. Por meio da proteína gp120, o vírus tem a capacidade de se ligar ao receptor CD4+ (componente da membrana dos linfócitos) e penetrar nas células, usando o DNA destas para se multiplicar. Ao completar seu ciclo reprodutivo, rompe a célula, causando sua morte; os novos vírus (vírions) caem na corrente sanguínea, infestando outros linfócitos e continuando, assim, sua replicação.



Progressivamente, o HIV leva à falência do sistema imunológico do indivíduo, trazendo, como consequência, a perda da capacidade de resposta do organismo diante de agentes como vírus, bactérias e outros microrganismos. Vários anos podem se passar entre o momento da infecção pelo HIV até o surgimento dos primeiros sintomas da AIDS. Quando se diz que uma pessoa é portadora do HIV, está se referindo à fase assintomática da doença. Quando se fala em pessoa com AIDS, significa dizer que esta apresenta sintomas que caracterizam a doença, o que geralmente marca o início do tratamento com antirretrovirais [18], veja a Figura 2.

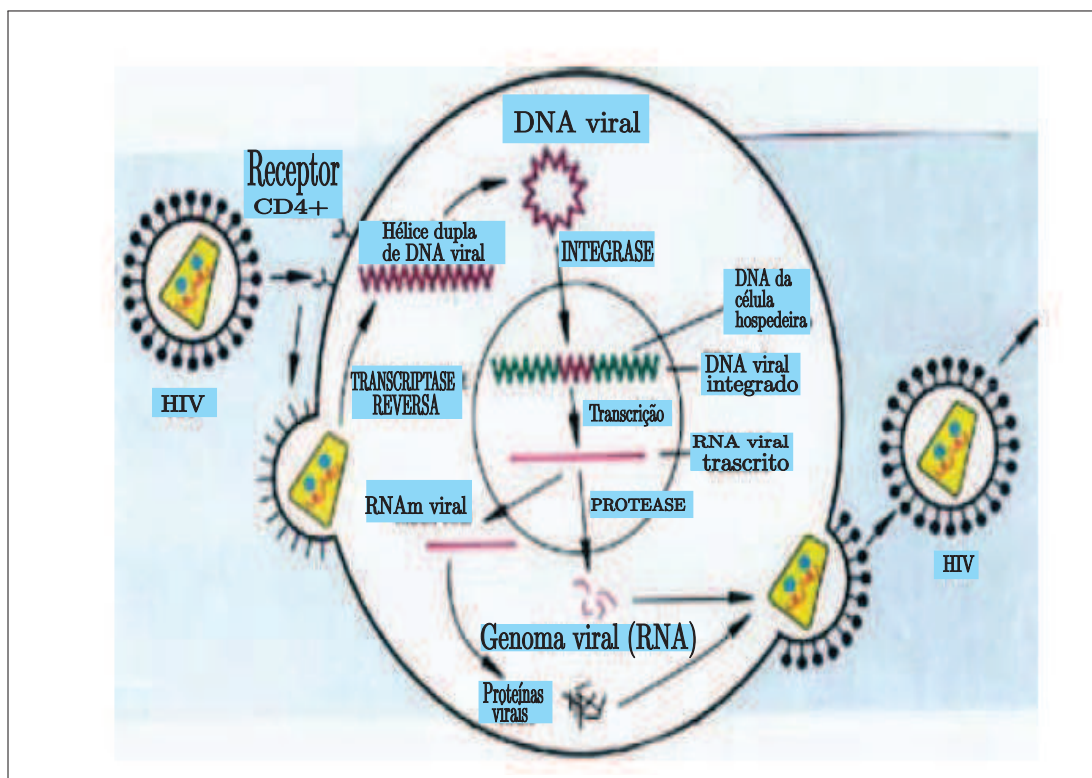


Figura 2: Ciclo do HIV [18].

## Sintomas e Fases da AIDS

Quando ocorre a infecção pelo vírus causador da AIDS, o sistema imunológico começa a ser atacado. É na primeira fase, chamada de infecção aguda, que ocorre a incubação do HIV-tempo da exposição ao vírus até o surgimento dos primeiros sinais da doença. Esse período varia de 3 a 6 semanas. E o organismo leva de 30 a 60 dias após a infecção para produzir anticorpos anti-HIV. Os primeiros sintomas são muito parecidos com os de uma gripe, como febre e mal-estar. Por isso, a maioria dos casos passa despercebido.

A próxima fase é marcada pela forte interação entre as células de defesa e as constantes e rápidas mutações do vírus. Mas que não enfraquece o organismo o suficiente para permitir novas doenças, pois os vírus amadurecem e morrem de forma equilibrada. Esse período, que pode durar muitos anos, é chamado de assintomático.

Com o frequente ataque, as células de defesa começam a funcionar com menos eficiência até serem destruídas. O organismo fica cada vez mais fraco e vulnerável a infecções comuns. A fase sintomática inicial é caracterizada pela alta redução dos linfócitos T do tipo CD4+, em adultos saudáveis, esse valor varia entre 800 a 1.200 unidades. Os sintomas mais comuns são: febre, diarreia, suores noturnos e emagrecimento.

A baixa imunidade permite o aparecimento de doenças oportunistas, que recebem esse nome por se aproveitarem da fraqueza do organismo. Com isso, atinge-se o estágio mais avançado da doença, a AIDS [19].

A Figura 3 mostra o tempo de percurso da infecção do HIV em um adulto infectado, em que podemos observar que o tempo médio de infecção da AIDS é 10 anos, sem tratamento com antirretrovirais.

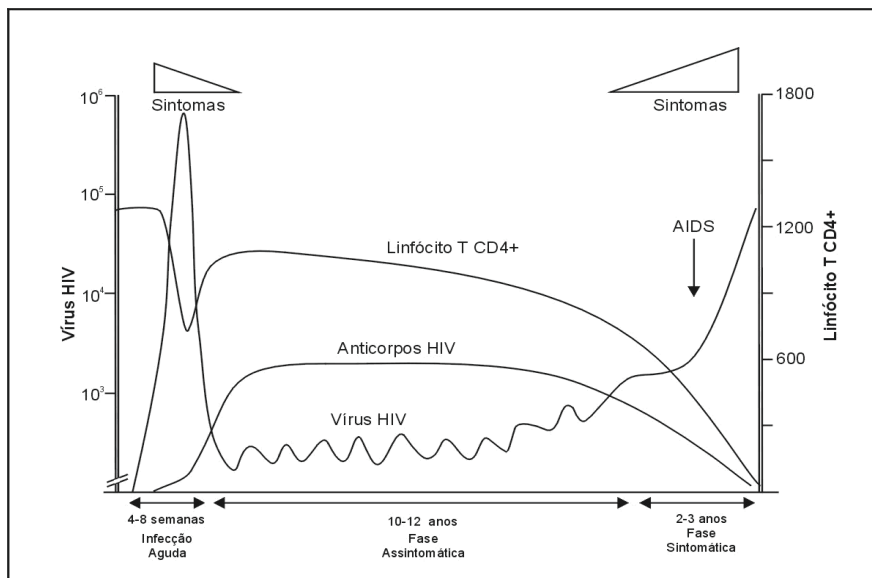


Figura 3: Esquema da história natural da infecção do HIV [6], [22], [27] e [8].

## Tratamento

O tratamento inclui acompanhamento periódico com profissionais de saúde e a realização exames. A pessoa só vai começar a tomar os medicamentos antirretrovirais quando exames clínicos e de laboratório indicarem a necessidade. Esses remédios buscam manter o HIV sob controle o maior tempo possível. A medicação diminui a multiplicação do HIV no corpo, recupera as defesas do organismo e, conseqüentemente, aumenta a qualidade de vida do soropositivo. Para que o tratamento dê certo, o soropositivo não pode se esquecer de tomar os remédios ou abandoná-los. O vírus pode criar resistência e, com isso, as opções de medicamentos diminuem. A adesão ao tratamento é fundamental para a qualidade de vida.

Para combater o HIV é necessário utilizar pelo menos três antirretrovirais combinados, sendo dois medicamentos de classes diferentes, que poderão ser combinados em um só comprimido. Desde 1996, no Brasil, os antirretrovirais são distribuídos gratuitamente. Segundo dados de dezembro de 2012, 313 mil pessoas recebem regularmente os remédios para tratar a doença. Atualmente, existem 21 medicamentos divididos em cinco tipos [19]. Descreveremos cada um deles a seguir:

1. **Inibidores Nucleosídeos da Transcriptase Reversa:** atuam na enzima transcriptase reversa, incorporando-se à cadeia de DNA que o vírus cria. Tornam essa cadeia defeituosa, impedindo que o vírus se reproduza. Os medicamentos inibidores nucleosídeos são: Abacavir, Didanosina, Estavudina, Lamivudina, Tenofovir, Zidovudina e a combinação Lamivudina/Zidovudina.
2. **Inibidores Não Nucleosídeos da Transcriptase Reversa:** bloqueiam diretamente

a ação da enzima e a multiplicação do vírus. Os medicamentos de inibidores não nucleosídeos são: Efavirenz, Nevirapina e Etravirina.

3. **Inibidores de Protease:** atuam na enzima protease, bloqueando sua ação e impedindo a produção de novas cópias de células infectadas com HIV. Os medicamentos inibidores de protease são: Atazanavir, Darunavir, Fosamprenavir, Indinavir, Nelfinavir, Ritonavir, Saquinavir e Tipranavir.
4. **Inibidores de Fusão:** impedem a entrada do vírus na célula e, por isso, ele não pode se reproduzir. O medicamento inibidor de fusão é a Enfuvirtida.
5. **Inibidores da Integrase:** bloqueiam a atividade da enzima integrase, responsável pela inserção do DNA do HIV ao DNA humano (código genético da célula). Assim, inibe a replicação do vírus e sua capacidade de infectar novas células. O medicamento inibidor da integrase é o Raltegravir.

O tratamento é complexo, necessita de acompanhamento médico para avaliar as adaptações do organismo ao tratamento, seus efeitos colaterais e as possíveis dificuldades em seguir corretamente as recomendações médicas, ou seja aderir ao tratamento. Por isso, é fundamental manter o diálogo com os profissionais de saúde, compreender todo o esquema de tratamento e nunca ficar com dúvidas.

## Objetivos e Organização

O objetivo deste trabalho é estudar a taxa de retorno de um grupo de indivíduos HIV positivos de sintomáticos para assintomáticos, utilizamos exames laboratoriais de carga viral e do linfócito T, do tipo  $CD4+$  de dez indivíduos HIV positivos. Estes exames laboratoriais foram realizados em datas e em quantidade diferentes. Existe dificuldade de encontrar pessoas com disciplina para participar regularmente do programa de tratamento com antirretrovirais, devido a efeitos colaterais que os medicamentos provocam. Os resultados de exames laboratoriais de indivíduos que recebem tratamento com antirretrovirais apresentam uma variabilidade muito grande, o que dificulta sua padronização. Para modelar a carga viral e o linfócito T, do tipo  $CD4+$ , para estes indivíduos, construímos números fuzzy triangulares [26]. Em cada número fuzzy triangular consideramos o valor de pertinência 1 como sendo a média aritmética [7] dos valores da carga viral, e do linfócito T do tipo  $CD4+$  para cada instante de tempo, respectivamente. Para os valores da carga viral e do linfócito T do tipo  $CD4+$  médios, obtivemos a taxa de retorno através do SBRF do tipo 1 e através de dois SBRF do tipo 2, um com saída tendo um número real e o outro SBRF do tipo 2 utilizada o método de inferência de Mamdani e tem como saída um conjunto fuzzy unitário. A partir destes valores determinamos três superfícies para a taxa de retorno, através dos método dos mínimos quadrados [25], que poderão fornecer previsões para indivíduos HIV positivos que tenham comportamento semelhante aos dos indivíduos estudados. O trabalho está estruturado da seguinte maneira:

- O primeiro capítulo apresenta à teoria dos conjuntos fuzzy tipo 1 e sistemas baseados em regras fuzzy tipo 1.
- No segundo capítulo, estudamos modelo fuzzy do tipo 1, utilizando equações diferenciais ordinárias e modelo fuzzy tipo 1 para um grupo de indivíduos HIV positivos, utilizando SBRF1, baseados nas informações médicas de carga viral e nível de  $CD4+$  e ajustamos os dados de carga viral e nível de  $CD4+$  por uma superfície.

- No capítulo 3 apresentamos à teoria de conjuntos fuzzy do tipo 2, sistemas baseados em regras fuzzy do tipo 2, quando a saída é um intervalo e um conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar.
- No capítulo 4 apresentamos um modelo fuzzy tipo 2 para um grupo de indivíduos HIV positivos com saída real e singleton, fazemos um ajuste para estes modelos por uma superfície, obtida utilizando o toolbox “sftool” e comparamos as superfícies obtidas por SBRF1 e SBRF2.
- Finalmente, apresentamos as considerações finais do trabalho e no anexo mostramos dois programas utilizados para o desenvolvimento do trabalho.

Eduard Rojas Castillo  
Uberlândia-MG, 11 de abril de 2014.

# Capítulo 1

## Conjuntos Fuzzy Tipo 1

Este capítulo contém a teoria básica dos conjuntos fuzzy, que são necessários para uma correta compreensão do resto deste trabalho.

### 1.1 Conjuntos Fuzzy Tipo 1

Os conjuntos fuzzy são conjuntos que não possuem fronteiras bem definidas e que foram introduzidos devido ao fato de os conjuntos clássicos apresentarem limitações para lidar com problemas onde as transições de uma classe para outra acontecem de forma suave. Sua definição, propriedades e operações são obtidas da generalização da teoria de conjuntos clássicos, recaindo esta em um caso particular da teoria de conjuntos fuzzy. A teoria de conjuntos clássicos está baseada na função característica clássica [20].

**Definição 1.1** *Seja  $\mathcal{U}$  um conjunto e  $A$  um subconjunto clássico de  $\mathcal{U}$ . A função característica de  $A$  é dada por*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \notin A. \end{cases}$$

Desta forma,  $\chi_A$  é uma função cujo domínio é  $\mathcal{U}$  e a imagem está contida no conjunto  $\{0, 1\}$ , com  $\chi_A(x) = 1$  indicando que o elemento  $x$  está em  $A$ , enquanto  $\chi_A(x) = 0$  indica que  $x$  não é elemento de  $A$ . Assim, a função característica descreve completamente o conjunto  $A$  já que tal função indica quais elementos do conjunto universo  $\mathcal{U}$  são elementos também de  $A$ .

**Definição 1.2** *Um subconjunto fuzzy  $F$  do conjunto universo  $\mathcal{U}$  é definido em termos de uma função de pertinência  $u$  que a cada elemento  $x$  de  $\mathcal{U}$  associa um número  $u(x)$ , entre zero e um chamado de grau de pertinência de  $x$  a  $F$ . Assim, o conjunto fuzzy  $F$  é simbolicamente indicado por sua função de pertinência*

$$u_F : \mathcal{U} \longrightarrow [0, 1].$$

Os valores  $u_F(x) = 1$  e  $u_F(x) = 0$  indicam, respectivamente, a pertinência plena e a não pertinência do elemento  $x$  a  $F$ .

**Definição 1.3** *Os subconjuntos fuzzy  $A$  e  $B$  de  $\mathcal{U}$  são iguais se suas funções de pertinência coincidem, isto é, se  $u_A(x) = u_B(x)$  para todo  $x \in \mathcal{U}$ .*

## 1.2 Operações Padrões entre Conjuntos Fuzzy

Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos clássicos de  $\mathcal{U}$  representados pelas funções características  $\chi_A$  e  $\chi_B$ , respectivamente. Os conjuntos

$$A \cup B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \text{ ou } x \in B\},$$

$$A \cap B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \text{ e } x \in B\},$$

$$A' = \{x \in \mathcal{U} : x \notin A\}$$

têm, respectivamente, as funções características

$$\chi_{A \cup B}(x) = \max\{\chi_A(x), \chi_B(x)\},$$

$$\chi_{A \cap B}(x) = \min\{\chi_A(x), \chi_B(x)\},$$

$$\chi_{A'}(x) = 1 - \chi_A(x), \quad \forall x \in \mathcal{U}.$$

Pensando novamente em conjuntos fuzzy, como sendo caracterizados pelas funções de pertinências, que são extensões de funções características, podemos definir união, interseção e complementar de conjuntos fuzzy.

**Definição 1.4** *Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos fuzzy Figura 1.1(a). As funções de pertinência que representam os conjuntos fuzzy união Figura 1.1(b), interseção Figura 1.1(c) e complementar Figura 1.1(d) de conjuntos fuzzy são dados por:*

$$u_{A \cup B}(x) = \max\{u_A(x), u_B(x)\};$$

$$u_{A \cap B}(x) = \min\{u_A(x), u_B(x)\};$$

$$u_{A'}(x) = 1 - u_A(x), \quad \forall x \in \mathcal{U};$$

respectivamente.

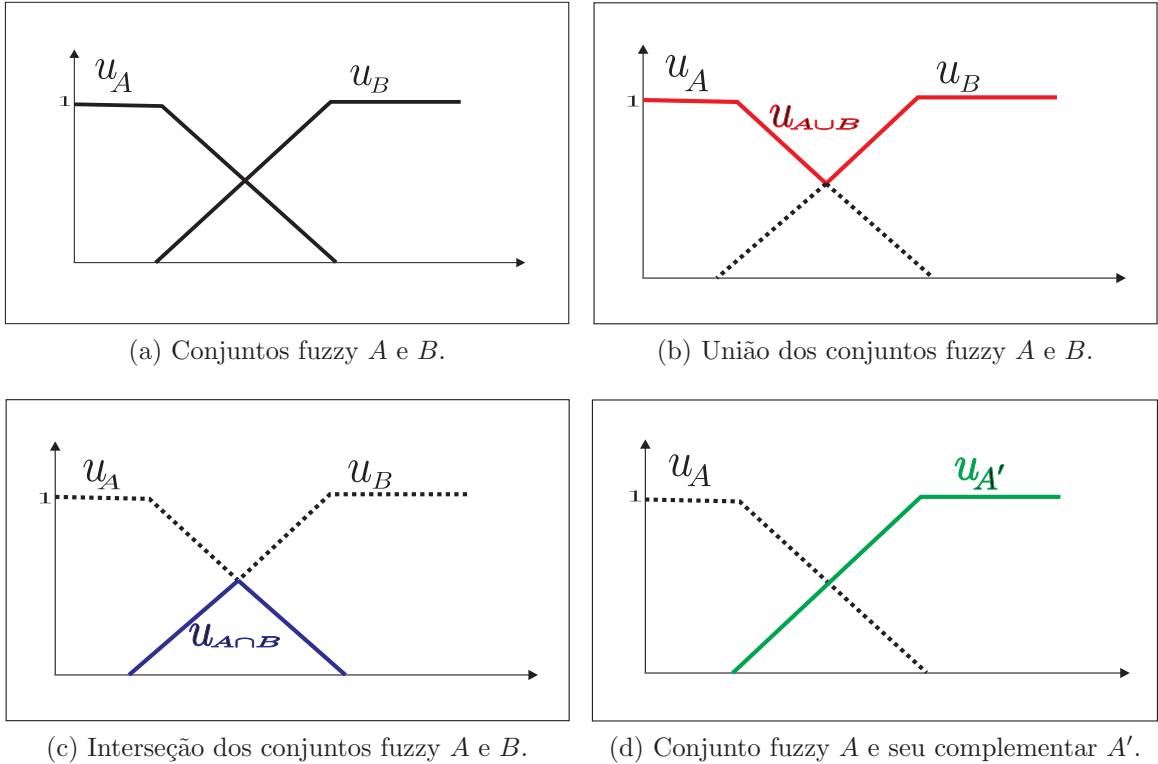


Figura 1.1: Funções de pertinência das operações padrão de conjuntos fuzzy.

**Definição 1.5** Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos fuzzy. Dizemos que  $A$  é um subconjunto de  $B$  se  $u_A(x) \leq u_B(x)$ , para todo  $x \in \mathcal{U}$ , ou seja, todo elemento do universo tem grau de pertinência no conjunto  $A$  menor que no conjunto  $B$ .

Temos ainda que, a função de pertinência do conjunto vazio  $\emptyset$ , é dada por  $u_{\emptyset}(x) = 0$ , para todo  $x \in \mathcal{U}$ , enquanto que o conjunto universo  $\mathcal{U}$ , tem função de pertinência  $u_{\mathcal{U}}(x) = 1$ , para todo  $x \in \mathcal{U}$ .

### 1.3 Níveis de um Conjunto Fuzzy

**Definição 1.6** Sejam  $A$  um conjunto fuzzy e  $\alpha \in (0, 1]$ . Definimos o  $\alpha$ -nível de  $A$  como o conjunto,  $[A]^\alpha = \{x \in \mathcal{U} : u_A(x) \geq \alpha\}$ .

**Definição 1.7** O suporte de um conjunto fuzzy  $A$  são todos os elementos de  $\mathcal{U}$  que têm grau de pertinência diferente de zero em  $A$  e denotamos por  $\text{supp}(A)$ ,

$$\text{supp}(A) = \{x \in \mathcal{U} : u_A(x) > 0\}.$$

**Definição 1.8** O nível zero de um conjunto fuzzy  $A$ , é o fecho do suporte de  $A$ , ou seja;  $[A]^0 = \overline{\text{supp}A}$ .

**Exemplo 1.1** Seja  $\mathcal{U} = \mathbb{R}$  o conjunto dos números reais, e  $A$  um subconjunto fuzzy de  $\mathbb{R}$  com a seguinte função de pertinência

$$u_A(x) = \begin{cases} \frac{x-6}{2} & \text{se } 6 \leq x < 8, \\ \frac{-x+10}{2} & \text{se } 8 < x \leq 10, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determinar  $[A]^\alpha$  e  $[A]^0$ .

Se  $x \in [6, 8)$  então  $u_A(x) = \frac{x-6}{2} \geq \alpha$ . Logo,  $x \geq 2\alpha + 6$ . Analogamente, se  $x \in (8, 10]$ , temos  $x \leq -2\alpha + 10$ . Portanto,  $[A]^\alpha = [2\alpha + 6, 10 - 2\alpha]$ , para todo  $0 \leq \alpha \leq 1$ . Além disso,  $[A]^0 = \overline{[6, 10]} = [6, 10]$ .

A Figura 1.2 está representando  $[A]^\alpha$ , para um determinado valor de  $\alpha$ , em que  $0 \leq \alpha \leq 1$ .

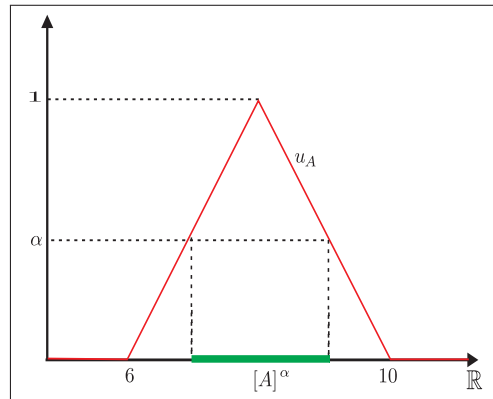


Figura 1.2:  $\alpha$ -níveis:  $[A]^\alpha$  e  $[A]^0 \neq \mathbb{R}$ .

**Teorema 1.1** Sejam  $A$  e  $B$  subconjuntos fuzzy de  $U$ . Uma condição necessária e suficiente para que  $A = B$  é que  $[A]^\alpha = [B]^\alpha$ , para todo  $\alpha \in [0, 1]$ .

**Demonstração:** É claro que  $A = B \Rightarrow [A]^\alpha = [B]^\alpha$ , para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . Suponhamos agora que  $[A]^\alpha = [B]^\alpha$ , para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . Se  $A \neq B$  então existe  $x \in U$  tal que  $\varphi_A(x) \neq \varphi_B(x)$ . Logo, temos que  $\varphi_A(x) > \varphi_B(x)$  ou  $\varphi_A(x) < \varphi_B(x)$ . Supondo  $\varphi_A(x) > \varphi_B(x)$ , podemos concluir que  $x \in [A]^{\varphi_A(x)} \neq [B]^{\varphi_A(x)}$ , o que contradiz a hipótese  $[A]^\alpha = [B]^\alpha$ , para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . De maneira análoga, chegamos a uma contradição se admitirmos que  $\varphi_A(x) < \varphi_B(x)$ . ■

## 1.4 Números Fuzzy

Assim como no caso clássico, também temos o objetivo de fazer ‘contas’. A diferença é que se pretende calcular quantidades imprecisas. Por exemplo, é opinião unânime dizer que o dobro de uma quantidade ‘em torno de 15’ resulta em outra ‘em torno de 30’. Para isto, construíram-se objetos matemáticos que generalizam os números reais. Tais objetos serão chamados de números fuzzy [12].

**Definição 1.9** Um conjunto fuzzy  $F$  é chamado número fuzzy quando o conjunto universo, onde  $F$  está definido, é o conjunto dos números reais  $\mathbb{R}$  e a função de pertinência  $u_F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ , é tal que:

1.  $u_F(x)$  atinge o 1, isto é,  $\sup_{x \in \mathbb{R}} u_F(x) = 1$ .
2.  $[F]^\alpha$  é um intervalo fechado,  $\forall \alpha \in (0, 1]$ .
3. O suporte de  $F$  é limitado.

Os números fuzzy mais comuns são os triangulares, trapezoidais e os em forma de sino.

**Definição 1.10** Um número fuzzy  $F$  é dito triangular se sua função de pertinência é da forma

$$u_F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a, \\ \frac{x-a}{m-a} & \text{se } a < x \leq m, \\ \frac{x-b}{m-b} & \text{se } m < x \leq b, \\ 0 & \text{se } x \geq b. \end{cases}$$

O gráfico da função de pertinência de um número fuzzy triangular tem a forma de um triângulo, tendo como base o intervalo  $[a, b]$  e, como único vértice fora desta base, o ponto  $(m, 1)$ . Deste modo, os números reais  $a$ ,  $m$  e  $b$  definem o número fuzzy triangular  $F$ , como mostra a Figura 1.3.

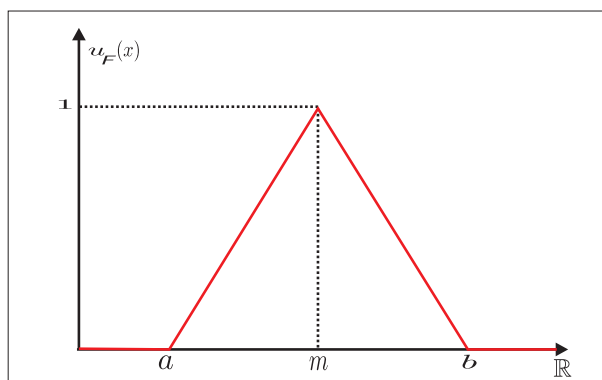


Figura 1.3: Número fuzzy triangular.



**Definição 1.11** Um número fuzzy  $F$  é dito trapezoidal se sua função de pertinência tem a forma de um trapézio e é dada por, como mostra a Figura 1.4.

$$u_F(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a} & \text{se } a \leq x < b, \\ 1 & \text{se } b \leq x \leq c, \\ \frac{d-x}{d-c} & \text{se } c < x \leq d, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

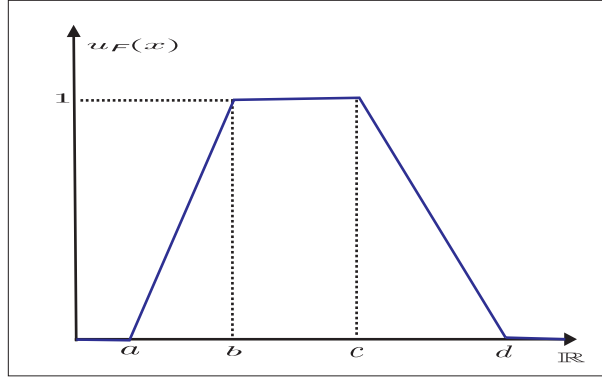


Figura 1.4: Número fuzzy trapezoidal.

**Definição 1.12** Um número fuzzy tem forma se sino se a função de pertinência for suave e simétrica em relação a um número real. A seguinte função de pertinência tem estas propriedades para  $n$ ,  $a$  e  $\delta$  dados, veja Figura 1.5

$$u_F(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(\frac{x-n}{a}\right)^2\right) & \text{se } n-\delta \leq x \leq n+\delta, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

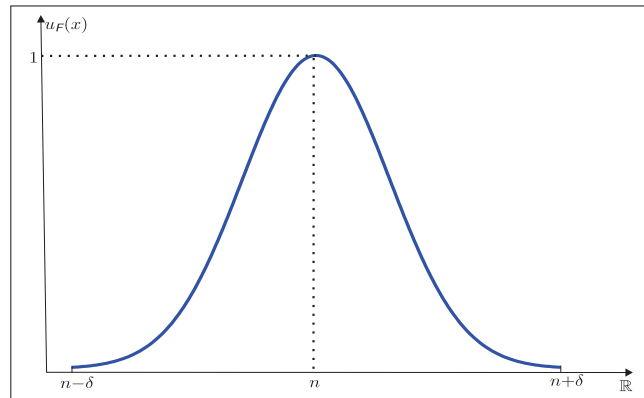


Figura 1.5: Número fuzzy em forma de sino [2].

**Definição 1.13** Seja  $F$  um conjunto fuzzy, o Kernel de  $F$  é o conjunto de todos os elementos  $x \in \mathcal{U}$  cujo grau de pertinência é 1; isto é,  $\ker(F) = \{x \in \mathcal{U} : u_F(x) = 1\}$ .

**Definição 1.14** Um elemento  $x \in \mathcal{U}$ , no qual  $u_F(x) = 0.5$  é denominado, ponto de crossover.

**Definição 1.15** Um conjunto  $F$  cujo suporte é um único ponto em  $\mathcal{U}$ , com  $u_F(x) = 1$ , é denominado, singleton fuzzy.

**Definição 1.16** A altura de um conjunto fuzzy  $F$  é o valor máximo da pertinência de  $x$  em  $\mathcal{U}$ , isto é,  $\text{hgt}(F) = \sup_{x \in \mathcal{U}} u_F(x)$ .

A Figura 1.6 apresenta a identificação da altura, kernel e suporte de um conjunto fuzzy.

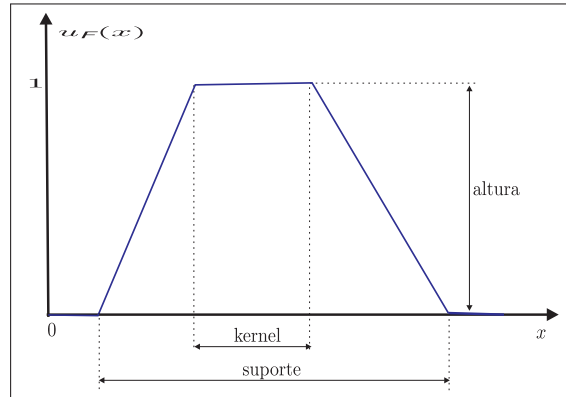


Figura 1.6: Altura, kernel e suporte de um conjunto fuzzy [24].

## 1.5 Operações Aritméticas com Números Fuzzy

As operações aritméticas envolvendo números fuzzy estão estreitamente ligadas às operações aritméticas intervalares. Serão listadas algumas destas operações para intervalos fechados da reta real  $\mathbb{R}$ .

**Definição 1.17** Sejam  $\lambda$  um número real,  $A = [a_1, a_2]$  e  $B = [b_1, b_2]$  dois intervalos fechados da reta. As operações aritméticas entre intervalos podem ser definidos como [2]:

- (a)  $A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$ .
- (b)  $A - B = [a_1 - b_2, a_2 - b_1]$ .
- (c)  $\lambda A = [\lambda a_1, \lambda a_2]$ , se  $\lambda \geq 0$  e  $\lambda A = [\lambda a_2, \lambda a_1]$ , se  $\lambda < 0$ .
- (d)  $A \cdot B = [\min P, \max P]$ , onde  $P = \{a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2\}$ .
- (e)  $A/B = [a_1, a_2] \cdot \left[ \frac{1}{b_2}, \frac{1}{b_1} \right]$ , se  $0 \notin B$ .

## 1.6 Relações Fuzzy

Estudos de associações, relações ou interações, entre os elementos de diversas classes é de grande interesse na análise e compreensão de muitos fenômenos do mundo real. Matematicamente, o conceito de relação é formalizado a partir da teoria de conjuntos. Desta forma, intuitivamente pode-se dizer que a relação será fuzzy quando optamos pela teoria dos conjuntos fuzzy e será clássica quando optamos pela teoria clássica de conjuntos para conceituar a relação em estudo. Qual dos modelos adotar, entre estes dois, depende muito do fenômeno estudado. Porém, a opção pela teoria de conjuntos fuzzy sempre tem maior robustez no sentido de que esta inclui a teoria clássica de conjuntos [1]. Definimos a seguir dois conceitos importantes, em especial a Definição 1.19 para relações fuzzy.

**Definição 1.18** Uma co-norma triangular (*s-norma*) é uma operação binária  $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  satisfazendo as seguintes condições:

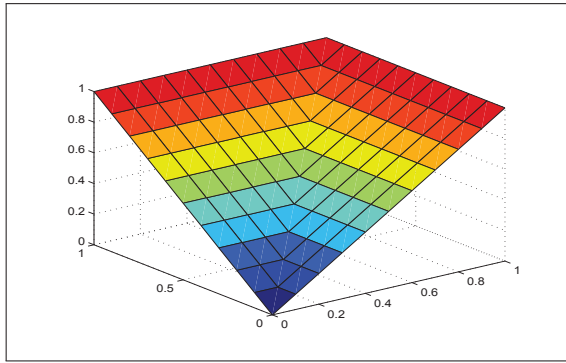
- *Comutatividade*:  $x s y = y s x$ .
- *Associatividade*:  $x s (y s z) = (x s y) s z$ .
- *Monotonicidade*: Se  $x \leq y$  e  $w \leq z$  então  $x s w \leq y s z$ .
- *Condições de fronteira*:  $x s 0 = x$ ,  $x s 1 = 1$ .

**Exemplo 1.2 :**

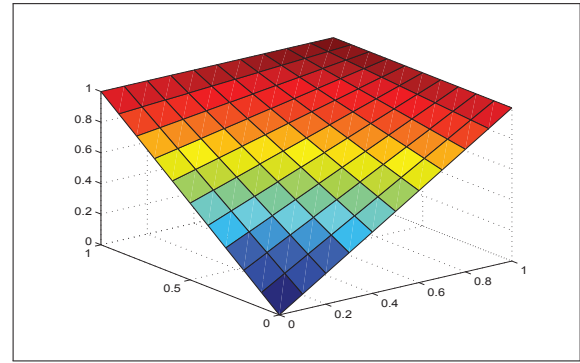
1. **União Padrão**:  $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  com  $x s y = \max(x, y)$ .
2. **Soma Algébrica**:  $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  com  $x s y = x + y - xy$ .
3. **Soma Limitada**:  $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  com  $x s y = \min(1, x + y)$ .
4. **União Drástica**:  $s : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  com:

$$x s y = \begin{cases} x & \text{se } y = 0, \\ y & \text{se } x = 0, \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

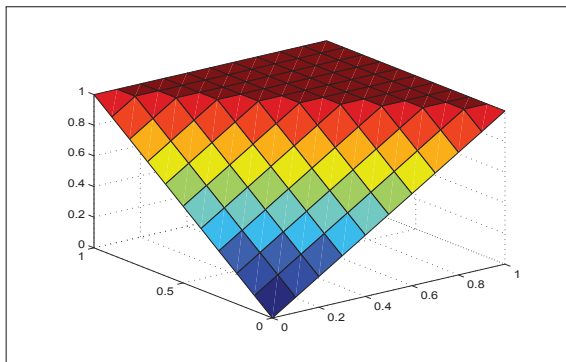
As Figuras 1.7(a), 1.7(b), 1.7(c) e 1.7(d), apresentam a união padrão, soma algébrica, soma limitada e união drástica, respectivamente.



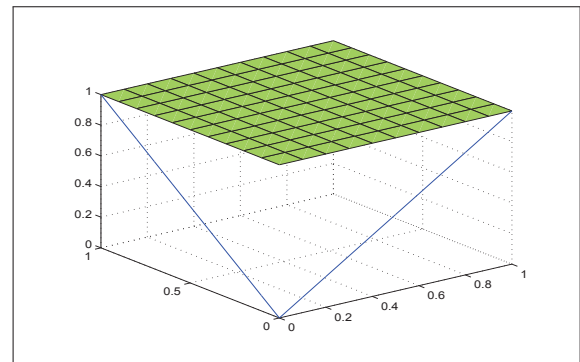
(a) União Padrão.



(b) Soma Algébrica.



(c) Soma Limitada.



(d) União Drástica.

Figura 1.7: Exemplos de *s*-normas.

**Definição 1.19** Uma norma triangular ( $t$ -norma) é uma operação binária  $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  satisfazendo as seguintes condições:

- *Comutatividade:*  $x t y = y t x$ .
- *Associatividade:*  $x t (y t z) = (x t y) t z$ .
- *Monotonicidade:* Se  $x \leq y$  e  $w \leq z$  então  $x t w \leq y t z$ .
- *Condições de fronteira:*  $0 t x = 0$ ,  $1 t x = x$ .

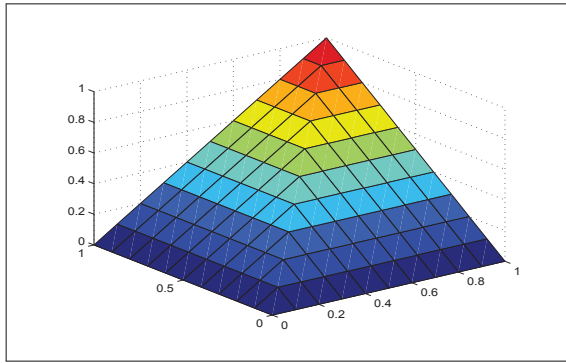
**Exemplo 1.3 :**

1. **Interseção Padrão:**  $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  com  $x t y = \min(x, y)$ .
2. **Produto Algébrico:**  $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  com  $x t y = xy$ .
3. **Diferença Limitada:**  $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  com  $x t y = \max(0, x + y - 1)$ .
4. **Interseção Drástica:**  $t : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  com:

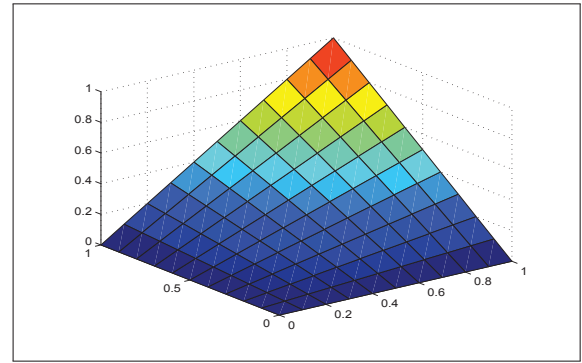
$$x t y = \begin{cases} x & \text{se } y = 1, \\ y & \text{se } x = 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

As Figuras 1.8(a), 1.8(b), 1.8(c) e 1.8(d), apresentam a interseção padrão, produto algébrico, diferença limitada e interseção drástica, respectivamente.

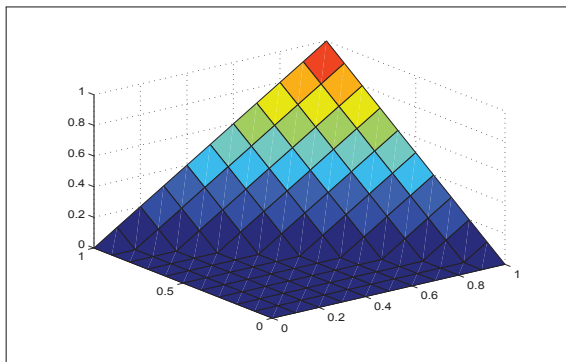
Claramente, o operador  $\max$  é uma  $s$ -norma e o operador  $\min$  é uma  $t$ -norma.



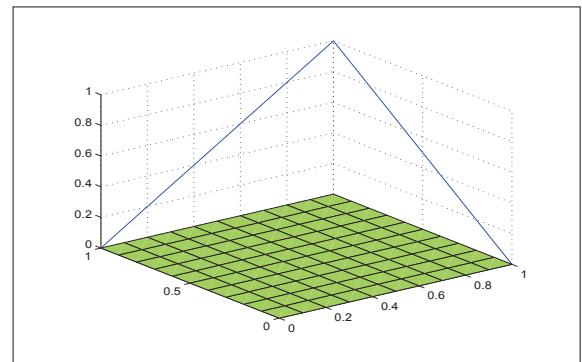
(a) Interseção Padrão.



(b) Produto Algébrico.



(c) Diferença Limitada.



(d) Interseção Drástica.

Figura 1.8: Exemplos de  $t$ -normas.

### 1.6.1 Regras e Inferência Fuzzy

Sejam  $X$  e  $Y$  dois conjuntos não vazios. Um grânulo fuzzy é um subconjunto fuzzy de  $X \times Y$  com grau de pertinência dado por:

$$u_{A \times B}(x, y) = u_A(x)tu_B(y), \forall (x, y) \in A \times B,$$

onde,  $A \subset X$ ,  $B \subset Y$  e  $t$ -norma [21], como mostra a Figura 1.9. Neste trabalho, utilizamos o operador  $\min$  que é uma  $t$ -norma.

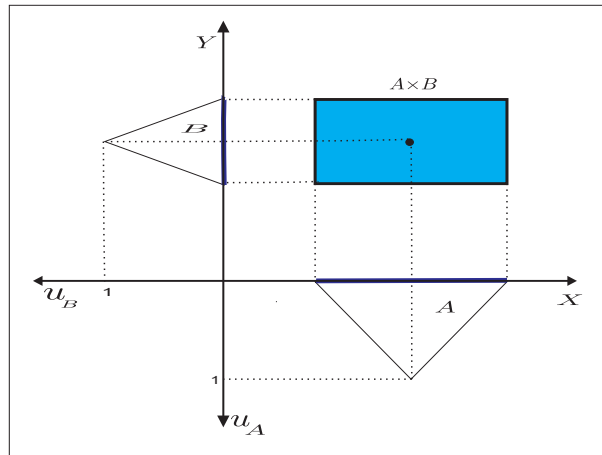


Figura 1.9: Ponto fuzzy ou grânulo em  $X \times Y$  [8].

### 1.6.2 Variável Linguística

Uma variável linguística é uma variável cujo valor é expresso qualitativamente por termos linguísticos (que fornece um conceito à variável) e quantitativamente por uma função de pertinência, a qual expressa numericamente conceitos associados a um dado problema. Por exemplo a Figura 1.10 mostra a variável linguística Nível de CD4+ e os termos linguísticos: muito baixo, baixo, médio, médio alto e alto.

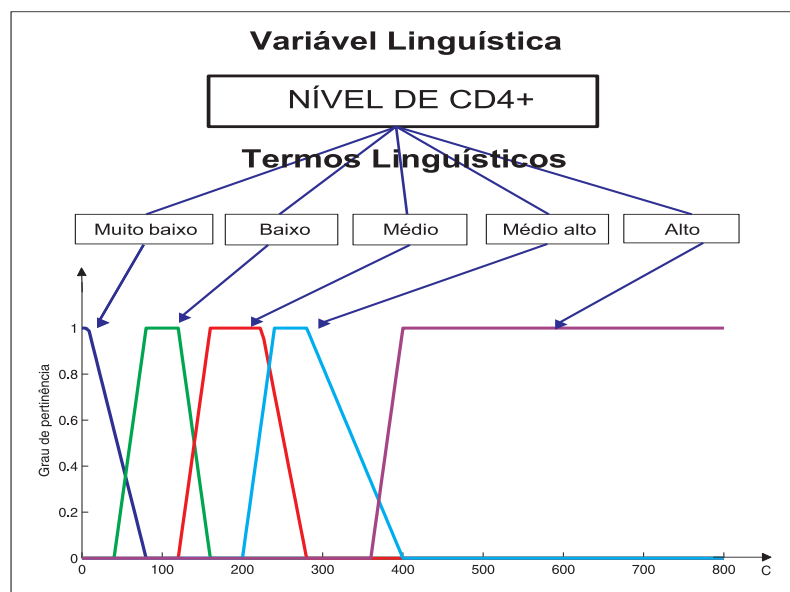


Figura 1.10: Variáveis linguísticas.

## 1.7 Sistemas Baseados em Regras Fuzzy

Em nosso cotidiano, as ações humanas controlam os mais diversos sistemas do mundo real por meio de informações imprecisas. Cada indivíduo funciona como uma ‘caixa preta’: recebe informações que são interpretadas segundo seus parâmetros e então decide qual atitude tomar. O controle e a execução de tarefas devem seguir uma sequência de “ordens” linguísticas, traduzidas por um conjunto de regras, capazes de serem decodificadas pelo controlador. Uma tentativa de reproduzir a estratégia de um controlador humano, na execução de suas tarefas, é dada pelos controladores fuzzy, considerados como um caso típico de um Sistema Baseado em Regras Fuzzy (SBRF), isto é, um sistema que se utiliza da lógica fuzzy para produzir saídas para cada entrada fuzzy [2].

Sistemas baseados em regras fuzzy (SBRF) contêm quatro componentes: um processador de entrada que realiza a fuzzificação dos dados de entrada, uma coleção de regras nebulosas chamada base de regras, uma máquina de inferência fuzzy e um processador de saída que fornece um número real como saída.

1. **Processador de Entrada (Fuzzificação):** neste componente, as entradas do sistema são traduzidas em conjuntos fuzzy, em seus respectivos domínios. A atuação de um especialista na área do fenômeno a ser modelado é de fundamental importância para colaborar na construção das funções de pertinências para a descrição das entradas.
2. **Base de Regras:** este componente, juntamente com a máquina de inferência (processo de dedução quantitativa), pode ser considerado o núcleo dos sistemas baseados em regras fuzzy. Ele é composto por uma coleção de proposições fuzzy na forma **Se...então...**. Cada uma destas proposições pode ser descrita linguisticamente de acordo com o conhecimento de um especialista. Por exemplo, **Se** o nível de CD4+ é muito baixo e a carga viral é baixa **então** a taxa de retorno é fraca.
3. **Máquina de Inferência Fuzzy:** a máquina de inferência fuzzy é de fundamental importância para o sucesso do sistema fuzzy, já que fornece a saída a partir de cada entrada fuzzy e da relação definida pela base de regras. O método de inferência fuzzy mais comum é o de Mamdani.

- **Método de Mamdani**

Uma regra **Se** (antecedente) **então** (consequente) é definida pelo produto cartesiano fuzzy dos conjuntos fuzzy que compõem o antecedente e o consequente da regra. O método de Mamdani agrega as regras através do operador lógico OU, que é modelado pelo operador máximo e, em cada regra, o operador lógico E é modelado pelo operador mínimo.

**Regra 1:** **Se** ( $x$  é  $A_1$  e  $y$  é  $B_1$ ) **então** ( $z$  é  $C_1$ ).

**Regra 2:** **Se** ( $x$  é  $A_2$  e  $y$  é  $B_2$ ) **então** ( $z$  é  $C_2$ ).

A Figura 1.11 ilustra como a saída real  $z$  de um sistema de inferência do tipo Mamdani é gerada a partir das entradas  $x$  e  $y$  reais e a regra de composição max-min.

A saída  $z \in \mathbb{R}$  é obtida pela defuzzificação do conjunto fuzzy de saída  $C = C'_1 \cup C'_2$  da Figura 1.11.

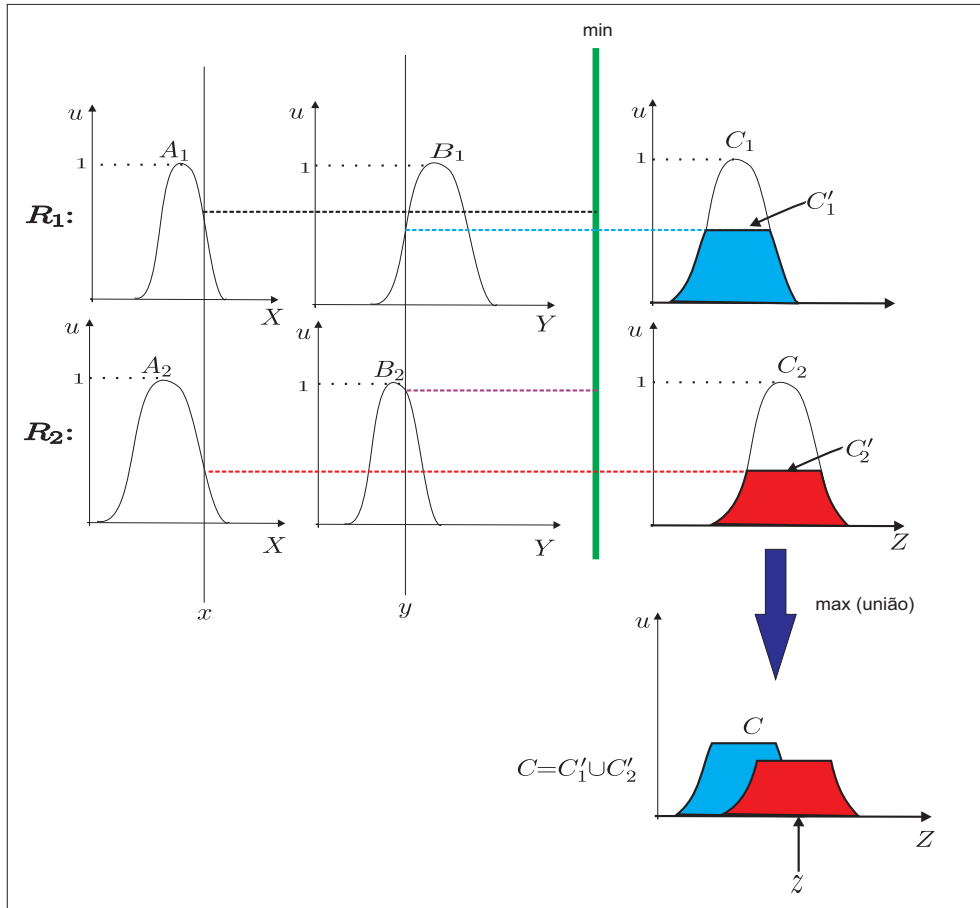


Figura 1.11: Método de Mamdani com composição max-min [2].

4. **Processador de Saída (Defuzzificação):** na teoria dos conjuntos fuzzy pode-se dizer que a defuzzificação é um processo de se representar um número real por um conjunto fuzzy. Em sistemas fuzzy, em geral, a saída é um conjunto fuzzy. Assim, devemos escolher um método para defuzzificar a saída e obter um número real que a represente. A seguir, relacionamos o método mais comum de defuzzificação.

- **Centro de gravidade**

Este método de defuzzificação é semelhante à média ponderada para distribuição de dados, com a diferença que os pesos são os valores  $u(z_i)$  que indicam o grau de compatibilidade do valor  $z_i$  com o conceito modelado pelo conjunto fuzzy  $C$ .

\* Para um domínio discreto, tem-se

$$CG = \frac{\sum_{i=0}^n z_i u(z_i)}{\sum_{i=0}^n u(z_i)} .$$

\* Para um domínio contínuo, tem-se

$$CG = \frac{\int_C z u(z) dz}{\int_C u(z) dz} ,$$

onde,  $C$  é a região de integração e  $z, z_i \in C$ .

Estes componentes estão conectados conforme indicado na Figura 1.12, supondo  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $y \in \mathbb{R}^m$ .

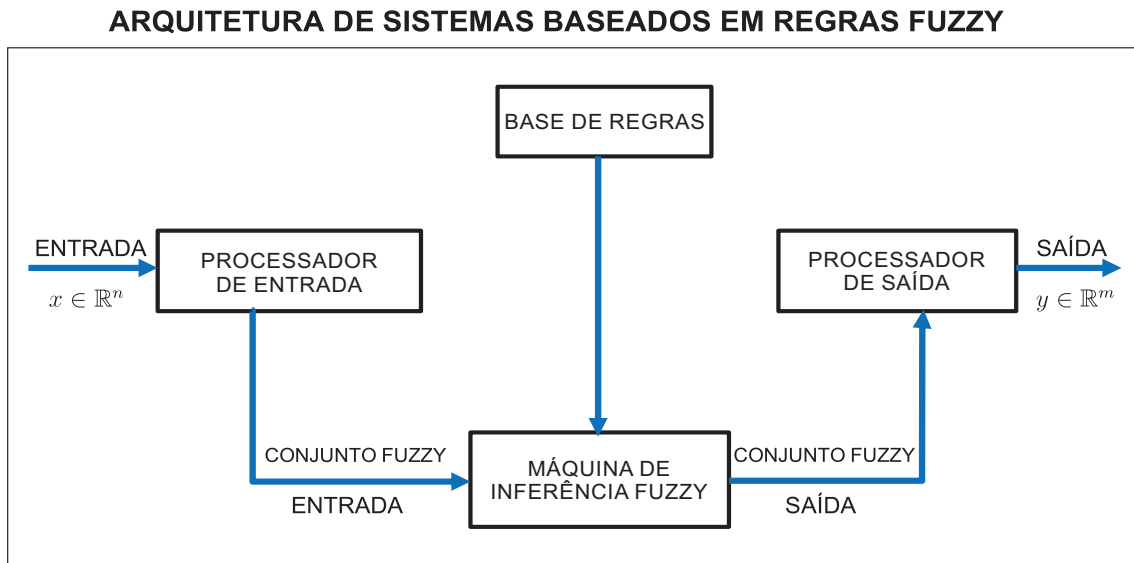


Figura 1.12: Sistemas baseados em regras fuzzy [10].

No próximo capítulo, apresentamos modelo fuzzy do tipo 1 para um grupo de indivíduos HIV positivos.



# Capítulo 2

## Modelo Fuzzy do Tipo 1

Os especialistas da área da saúde têm dificuldades em fazer previsões para os indivíduos HIV positivos, devido às incertezas da dinâmica do HIV ao receber terapia antirretroviral. Devido à possibilidade de lidar com incertezas e ao caráter interdisciplinar, é que temos optado pela teoria dos conjuntos fuzzy introduzida por Zadeh em 1965, no estudo de fenômenos epidemiológicos [9].

### 2.1 Modelo Fuzzy do Tipo 1

O conteúdo deste capítulo, foi apresentado no IV Semana da Matemática do Pontal e III Workshop de Geogebra do Pontal [3]. Para avaliar a eficiência do tratamento, os especialistas da área médica têm grande interesse em quantificar a taxa de retorno à classe dos indivíduos sintomáticos para os indivíduos assintomáticos. Assim, em [9] sugere as seguintes equações diferenciais para representar matematicamente a evolução da população sintomática para a população assintomática com adesão regular ao tratamento:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \gamma(v, c)y = \gamma(v, c)(1 - x) & x(0) = 0, \\ \frac{dy}{dt} = -\gamma(v, c)y & y(0) = 1, \end{cases} \quad (2.1)$$

em que  $x = x(t)$  é a proporção da população assintomática, no instante  $t$ ,  $y = y(t)$  é a proporção da população sintomática, no instante  $t$  e  $\gamma$  é a taxa de retorno da população sintomática para assintomática, que depende das variáveis carga viral ( $v$ ) e nível de  $CD4 + (c)$ , que é obtida através de um SBRF do tipo 1. Assumimos que  $x + y = 1$ , e, portanto, uma vez resolvida a equação para  $y$ , podemos encontrar  $x = 1 - y$ . A quantificação da carga viral e a contagem de  $CD4+$  são utilizadas para iniciar ou alterar terapia antirretroviral. A ideia em (2.1) é construir um modelo fuzzy que mensure  $\gamma$  dependendo de  $v$  e  $c$ . Assim, parece razoável que o controle de  $\gamma$ , e, consequentemente, da população  $y$  (sintomática), pode ser feito a partir de  $v$  e  $c$ , que são exames laboratoriais realizados para indivíduos HIV positivos. Resolvendo (2.1), temos que:

$$y(t) = y_0 e^{-\gamma(v, c)t}. \quad (2.2)$$

Com a condição inicial  $y_0 = y(0) = 1$ , temos:

$$\begin{cases} x(t) = 1 - e^{-\gamma(v, c)t}, \\ y(t) = e^{-\gamma(v, c)t}, \quad t > 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Vamos estimar a taxa de retorno  $\gamma(v, c)$  baseada nas informações médicas. A Saúde Pública considera importante para o controle da população HIV positivos a contagem de células CD4+ e da carga viral. A contagem de células CD4+ em sangue periférico tem implicações prognósticas na evolução da infecção pelo HIV, pois é a marca registrada de déficit imunológico e pode ser associada a certos parâmetros clínicos. É a medida de imunocompetência celular mais útil clinicamente no acompanhamento de pacientes infectados pelo HIV e a mais amplamente aceita, embora não seja única. De maneira didática, pode-se dividir a contagem de células CD4+ por mililitro do sangue periférico em quatro faixas [19]:

- **CD4+ > 0.5 células/ml:** Estágio da infecção pelo HIV com baixo risco de doença. Neste estágio, há boa resposta às imunizações de rotina e boa confiabilidade nos testes cutâneos de hipersensibilidade tardia como (PPD (Derivado Proteico Purificado) :teste recomendado de rotina anual para avaliação da necessidade de quimioprofilaxia para tuberculose). Casos de infecção aguda podem ter estes níveis de CD4+, embora de modo geral, esses pacientes tenham níveis mais baixos;
- **CD4+ entre 0.2 e 0.5 células/ml:** Estágio caracterizado por surgimento de sinais e sintomas menores ou alterações constitucionais. Risco moderado de desenvolvimento de doenças oportunistas. Nesta fase podem aparecer candidíase oral, herpes simples recorrente, herpes zóster, tuberculose, leucoplasia pilosa oral, pneumonia bacteriana;
- **CD4+ entre 0.05 e 0.2 células/ml:** Estágio com alta probabilidade de surgimento de doenças oportunistas como pneumocistose, neurocriptococose, histoplasmose, citomegalovirose localizada. Está associado à síndrome consumptiva, leucoencefalopatia multifocal, progressiva, candidíase esofagiana, entre outras;
- **CD4+ < 0.05 células/ml:** Estágio com grave comprometimento de resposta imunitária. Alto risco de surgimento de doenças oportunistas como citomegalovirose disseminada, sarcoma de Kaposi, linfoma não-Hodgkin e infecção por microbactérias do complexo Avium-Intracellulare. Alto risco de morte com baixa sobrevivência.

A quantificação da carga viral e a contagem de CD4+ são utilizados para iniciar ou alterar a terapêutica antirretroviral. Quando não há disponibilidade de quantificação da carga viral pode-se basear na contagem de células CD4+.

Em caso de início ou mudança de terapia antirretroviral, alguns autores recomendam uma medida de acompanhamento da carga viral após 1 a 2 meses para avaliar o tratamento. Os resultados devem ser interpretados da seguinte maneira:

- **Carga viral abaixo de 10.000 cópias de RNA por ml:** baixo risco de progressão ou piora da doença;
- **Carga viral entre 10.000 e 100.000 cópias de RNA por ml:** risco moderado de progressão ou piora da doença;
- **Carga viral acima de 100.000 cópias de RNA por ml:** alto risco de progressão ou piora da doença.

Em 2000 o Ministério da Saúde organizou um documento com o título: Recomendações para terapia antirretroviral em adultos e adolescentes infectados pelo HIV, que contém a Tabela 2.1. A conversão do portador assintomático para portador sintomático depende das características individuais, conforme a contagem da carga viral e do nível de CD4+.

Situação clínica	Contagem de CD4+ (células/ml)	Carga viral (cópias/ml)	Recomendações
Assintomático	Contagem de CD4+ não disponível	Carga viral não disponível	Não tratar
Assintomático	$\geq 0.5$	Independente da carga viral	Não tratar
Assintomático	$\geq 0.35 < 0.5$	$< 30000$	Considerar tratamento
		$\geq 30000$	Considerar tratamento
Assintomático	$\geq 0.2 < 0.35$	Independente da carga viral	Tratamento antirretroviral
Assintomático	$< 0.2$	Independente da carga viral	Tratar e iniciar profilaxia para infecções oportunistas
Sintomático	Independente da contagem de CD4+	Independente da carga viral	Tratar e iniciar profilaxia para infecções oportunistas

Tabela 2.1: Recomendações para início da terapia antirretroviral.

Os termos linguísticos para carga viral são baixa, média e alta e para o nível de CD4+ são muito baixo, baixo, médio, médio alto e alto. Para a taxa de retorno são fraca, média fraca, média e forte. As Figuras 2.1 e 2.2 mostram a carga viral, nível de CD4+ e taxa de retorno, respectivamente. O método de inferência utilizado é o de Mamdani. A Tabela 2.2 foi construída levando em consideração as informações do especialista da área.

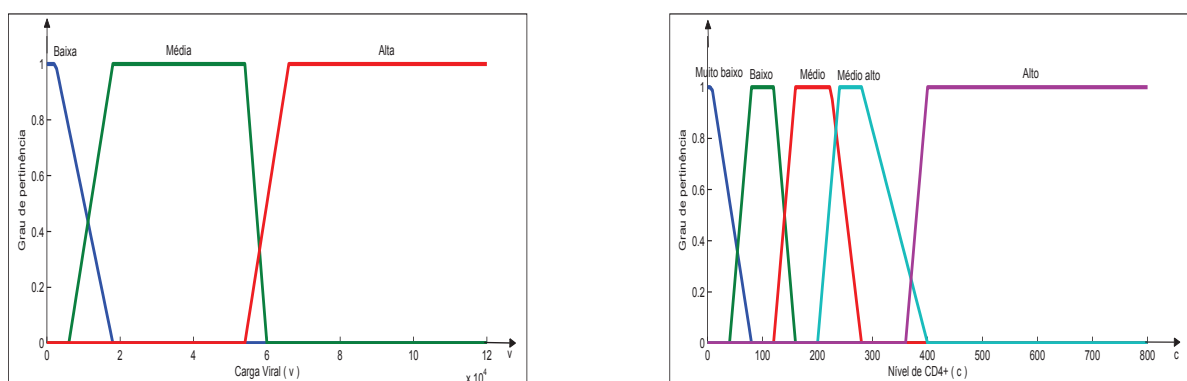


Figura 2.1: Funções de pertinência para as variáveis de entrada carga viral e nível de CD4+.

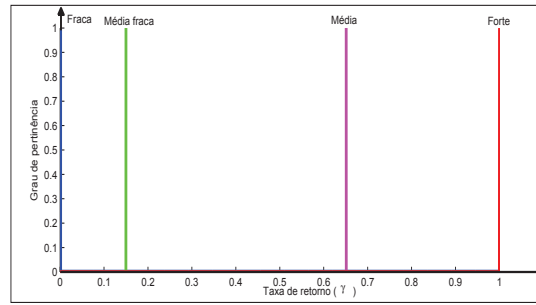


Figura 2.2: Funções de pertinência de taxa de retorno ( $\gamma$ ).

CV \ CD4+	Baixa	Média	Alta
Muito Baixo	Fraca	Fraca	Fraca
Baixo	Média fraca	Fraca	Fraca
Médio	Média fraca	Média fraca	Média fraca
Médio Alto	Média	Média	Média fraca
Alto	Forte	Fraca	Fraca

Tabela 2.2: Base de regras fuzzy.

Na próxima seção apresentamos um modelo fuzzy para dados de um grupo de indivíduos HIV positivos e podemos observar que a carga viral e o nível de CD4+ variam com o tempo.

## 2.2 Modelo Fuzzy para um Grupo de Indivíduos HIV Positivos

Realizamos o estudo a partir de dados de exames laboratoriais do linfócito T, do tipo CD4+, e da carga viral de dez pacientes do Ambulatório Herbert de Souza em Uberlândia-MG. Consideramos o primeiro exame do linfócito T, do tipo CD4+ e da carga viral, de cada indivíduo, como sendo o tempo inicial  $t = 0$  (meses) e, em seguida, somamos o número de meses para o próximo exame, e assim sucessivamente. Então, construímos os dados para os exames laboratoriais do nível de CD4+ e para os exames da carga viral para cada indivíduo variando no tempo [9].

Como podemos observar na Figura 2.3, que os dados laboratoriais apresentam muita variabilidade.

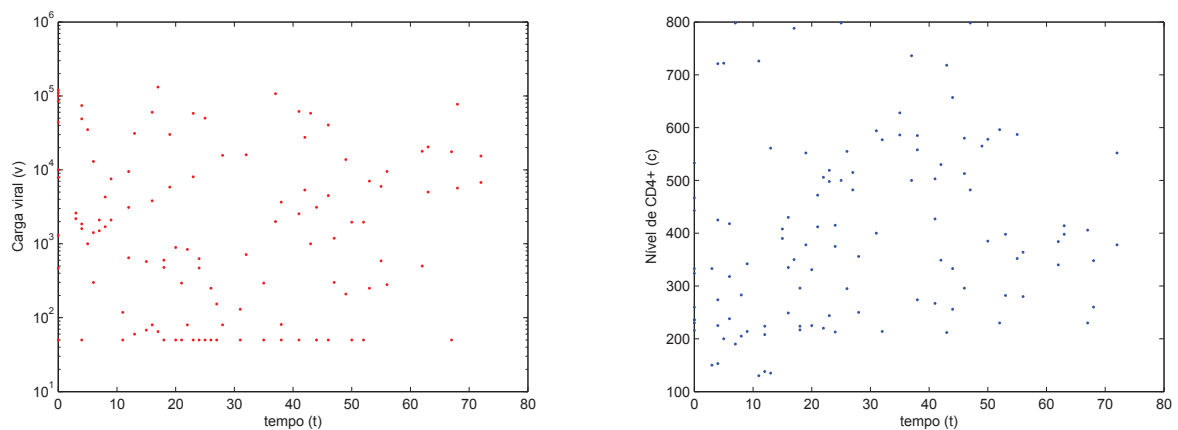


Figura 2.3: Diagramas de dispersão carga viral e nível de CD4+.

Assim, optamos por calcular a média aritmética [7] em cada instante  $t$  para a carga viral e o linfócito T, do tipo CD4+. Por exemplo: em  $t = 0$  meses, na Tabela 2.3 temos os dados de dez indivíduos HIV positivos (Ind) dos exames de carga viral ( $v$ ) e do nível de CD4+ ( $c$ ); e a média aritmética (MA) de  $v$  e  $c$  para estes indivíduos. Este procedimento é realizado 47 vezes para exames laboratoriais da carga viral ( $v$ ) e do nível de CD4+ ( $c$ ) destes indivíduos, em um intervalo de tempo entre 0 e 72 meses. Esses exames laboratoriais nem sempre são realizados com o mesmo intervalo de tempo.

	$Ind_1$	$Ind_2$	$Ind_3$	$Ind_4$	$Ind_5$	$Ind_6$	$Ind_7$	$Ind_8$	$Ind_9$	$Ind_{10}$	MA
$v$	50	1304	120000	466	110000	86000	44000	7900	100000	10000	47972
$c$	324	333	533	236	216	236	260	443	467	230	327.8

Tabela 2.3: Resultados dos exames de carga viral (cópias de RNA/ml) e nível de CD4+ (células/ $mm^3$ ).

### 2.2.1 Construção dos Grânulos

Construímos os números fuzzy triangulares [26], da seguinte maneira, como mostra a Figura 2.4:

- assumindo grau de pertinência zero no valor mínimo e máximo da carga viral e do nível de CD4+;
- assumindo grau de pertinência um na média aritmética dos dados  $v$  e  $c$ , em cada instante de tempo [7].

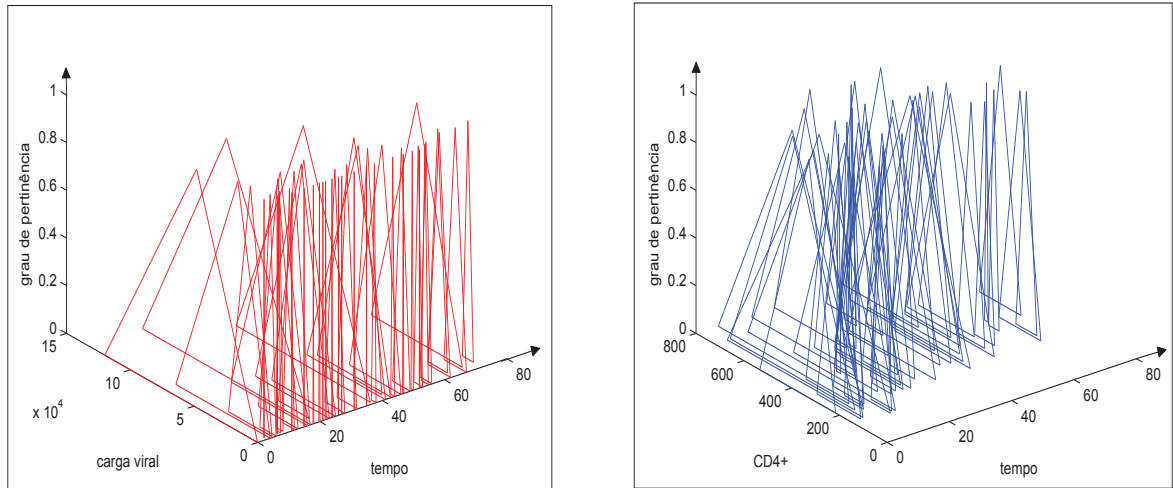


Figura 2.4: Números fuzzy triangulares.

Para construir o grânulo, tomamos o número fuzzy triangular no eixo  $x$  (Carga viral) e no eixo  $y$  (Nível de CD4+) para cada  $t$  fixo. Por exemplo, a Figura 2.5 mostra o grânulo no tempo  $t = 0$  meses.

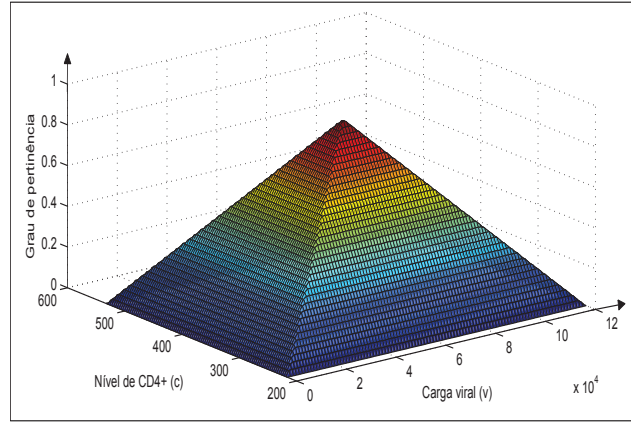


Figura 2.5: Grânulo.

Utilizamos o SBRF construído anteriormente e obtivemos a taxa de retorno de sintomático para assintomático para a média dos exames laboratoriais da carga viral e do nível de CD4+ do grupo de indivíduos estudado, como mostra a Figura 2.6.

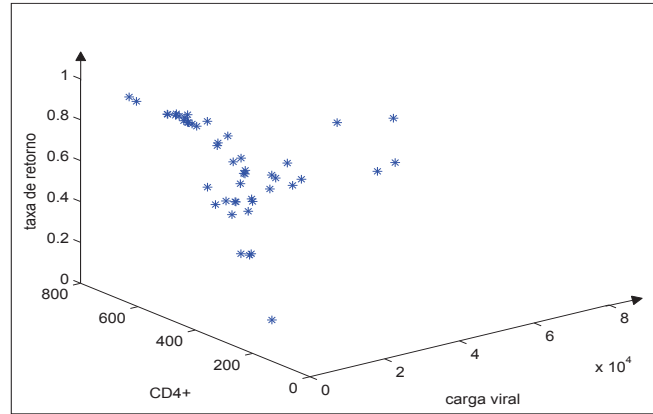


Figura 2.6: Os valores da taxa de retorno nos cálculos das cargas virais e nível de CD4+ médios.

### 2.2.2 Ajuste dos Dados por uma Superfície

Utilizamos o Método dos Mínimos Quadrados para ajustar os dados da carga viral ( $v$ ) e do nível de CD4+ ( $c$ ) médios do grupo de indivíduos por uma superfície [25]. A construção do gráfico da Figura 2.7 foi baseada em informações de um especialista na área da saúde, e com os dados da Tabela 2.3, utilizando estas informações e observando que o valor do coeficiente de determinação  $r^2$  [29] deve estar próximo de 1. Depois de vários testes, encontramos a função da superfície de ajuste dada por (2.4), que tem um comportamento compatível com o que ocorre, em geral, isto é quando a carga viral está alta e o nível de CD4+ está baixo, então a taxa de retorno de sintomático para assintomático está próxima de zero. E quando a carga viral é baixa e o nível de CD4+ é alto então a taxa de retorno está próxima de 1. A superfície de ajuste é dada por:

$$\gamma_1(v, c) = a_1 \exp(-v^4) - b_1 c^2 + c_1 v + d_1 c - e_1 v c - f_1 c^{0.1}, \quad (2.4)$$

onde,  $a_1 = 0.2568$ ,  $b_1 = 0.00000533$ ,  $c_1 = 0.000001684$ ,  $d_1 = 0.006225$ ,  $e_1 = 0.00000001572$ ,  $f_1 = 0.4293$  e o coeficiente de determinação é  $r_1^2 = 0.793$ . Esta superfície foi obtida no Matlab usando o toolbox “sftool”.

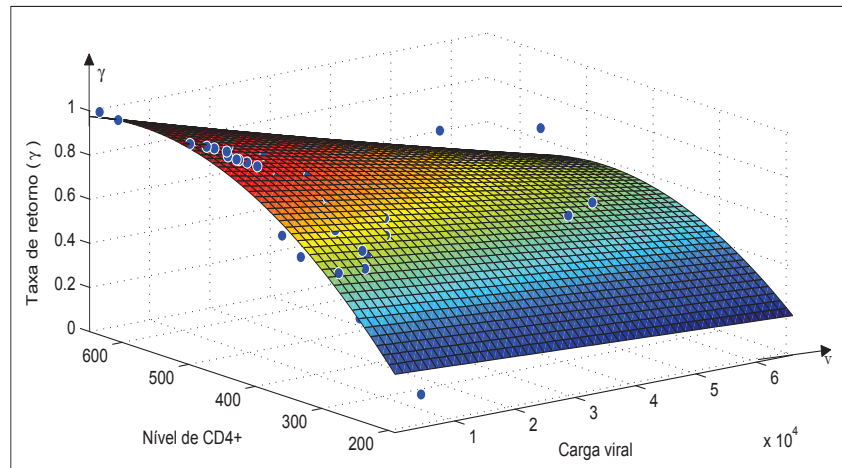


Figura 2.7: Superfície de ajuste.

## 2.3 Conclusão

A aplicação da teoria dos conjuntos fuzzy em dados com alta variabilidade como os exames laboratoriais de carga viral e nível de CD4+ foi fundamental, pois possibilitou a construção de números fuzzy triangulares e a obtenção da taxa de retorno para o grupo estudado. Esta taxa pode ser obtida para outros grupos de indivíduos que tenham adesão regular ao tratamento com antirretrovirais.

No próximo capítulo, estudamos conjuntos fuzzy do tipo 2.

# Capítulo 3

## Conjuntos Fuzzy do Tipo 2

A lógica fuzzy do tipo 2 tem sido uma área muito pesquisada nos últimos anos. Este crescimento vem acompanhado de uma potencialidade desta estratégia no tratamento de incertezas em modelos e/ou informações provenientes de especialistas. Pode-se encontrar trabalhos nas áreas de Engenharia, Ciência da Computação, Medicina, Biologia, Economia, Matemática, dentre outras, evidenciando-se a potencialidade, diversidade e amplitude de aplicação desta metodologia e a eficácia desta extensão em relação à lógica fuzzy do tipo 1 [13].

A lógica fuzzy do tipo 2 trata as incertezas associadas aos conjuntos fuzzy, o que não é contemplado na lógica do fuzzy tipo 1, viabilizando, portanto, a manipulação de termos imprecisos em toda sua extensão, inclusive na definição das funções de pertinência [16].

### 3.1 Conjuntos Fuzzy do Tipo 2

**Definição 3.1** Um conjunto fuzzy  $\tilde{A}$  do tipo 2, é caracterizado por uma função de pertinência  $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$  do tipo 2, onde  $x \in X$  e  $u \in J_x \subseteq [0, 1]$ , ou seja:

$$\tilde{A} = \{((x, u), \mu_{\tilde{A}}(x, u)) : \forall x \in X, \forall u \in J_x \subseteq [0, 1]\}, \quad (3.1)$$

onde,  $0 \leq \mu_{\tilde{A}}(x, u) \leq 1$ .

**Definição 3.2** Um conjunto fuzzy do tipo 2 é intervalar, quando todos os valores de  $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$  são unitários, ou seja,  $\mu_{\tilde{A}}(x, u) = 1$ .

Um meio de representar conjuntos fuzzy do tipo 2 é através da forma geométrica de sua função de pertinência. As Figuras 3.1 e 3.2 mostram conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar e suas respectivas áreas coloridas em azul representam, a “Footprint of Uncertainty” (FOU).

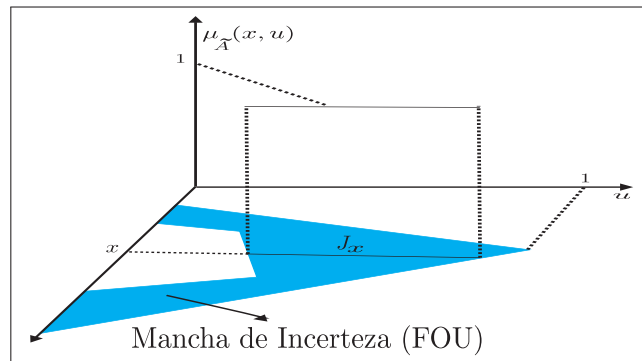


Figura 3.1: Conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar.



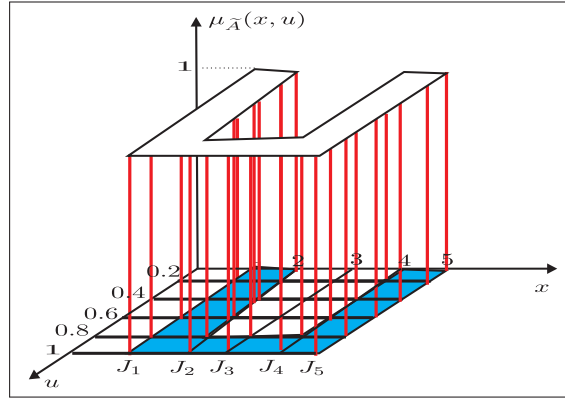
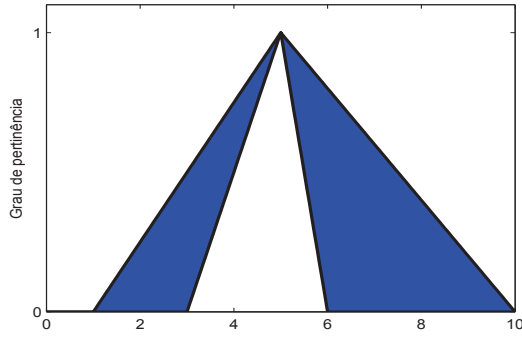


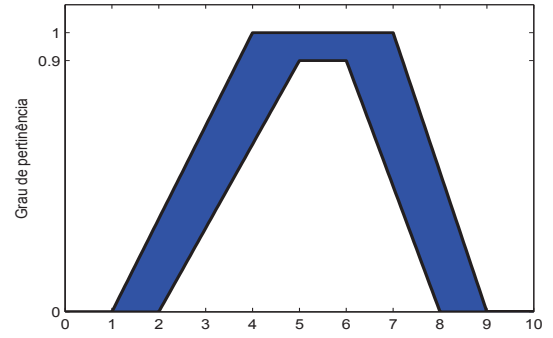
Figura 3.2: Conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar.

Devido ao fato de que o grau secundário dos conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalares ser sempre igual a 1, a terceira dimensão acaba não mostrando nenhuma informação adicional; desta forma, o conjunto do tipo 2 intervalar pode ser representada apenas por sua FOU a ser definida. Neste trabalho o interesse é o estudo de conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar.

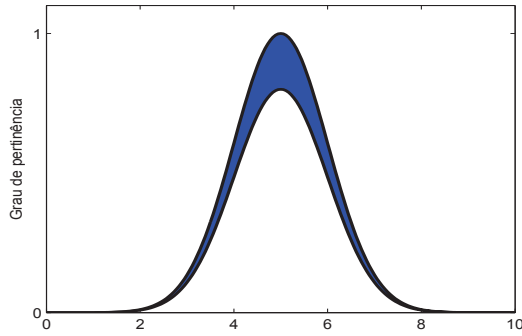
As Figuras 3.3(a), 3.3(b), 3.3(c) e 3.3(d), apresentam conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar; triangular, trapezoidal, gaussiano e “singleton”, respectivamente [30].



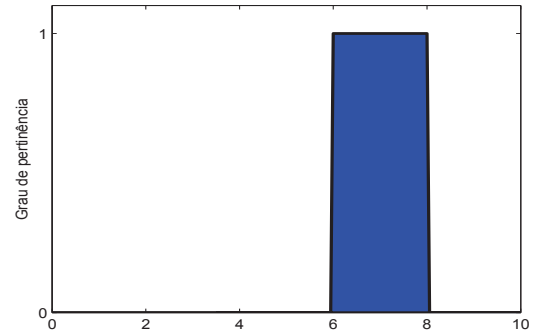
(a) Triangular.



(b) Trapezoidal.



(c) Gaussiano.



(d) “Singleton”.

Figura 3.3: Exemplos de conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalares.

**Definição 3.3** O corte vertical de  $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$  é definido como sendo o plano bidimensional em um dado  $x = x'$ , cujos eixos são  $u$  e  $\mu_{\tilde{A}}(x', u)$ .

**Definição 3.4** A função de pertinência secundária é o corte vertical de  $\mu_{\tilde{A}}(x, u)$  em um determinado valor de  $x = x'$ . Como mostra, a Figura 3.4.

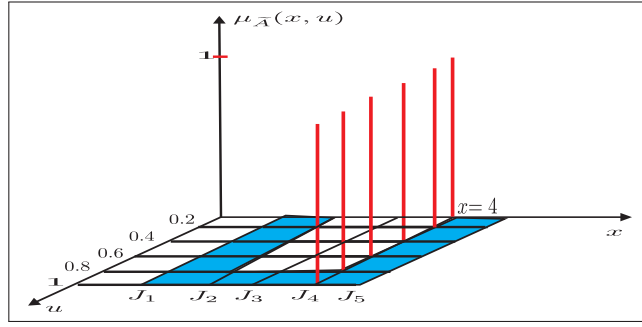


Figura 3.4: Função de pertinência secundária intervalar em  $x=4$  [24].

**Definição 3.5** A pertinência primária  $J_x$  de  $x$ , é definida como o domínio da função de pertinência secundária para um valor de  $x$ , com  $J_x = [\underline{J}_x, \overline{J}_x] \subseteq [0, 1]$ , para todo  $x \in X$ .

**Definição 3.6** A “mancha” de incerteza (FOU) é definida como a união de todas as pertinências primárias, isto é,

$$FOU(\tilde{A}) = \bigcup_{x \in X} (x, J_x). \quad (3.2)$$

A FOU de um conjunto fuzzy do tipo 2 é delimitada por uma função de pertinência do tipo 1 superior e uma inferior [24].

**Definição 3.7** Função de pertinência superior e inferior: A FOU de um conjunto fuzzy do tipo 2 é delimitada por uma função de pertinência do tipo 1 superior e uma inferior. A função de pertinência superior é representada na forma  $\overline{\mu}_{\tilde{A}}(x), \forall x \in X$  e a função de pertinência inferior é a função mais interna que limita a  $FOU(\tilde{A})$  e é representada na forma de  $\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x), \forall x \in X$ , dadas por:

$$\overline{\mu}_{\tilde{A}}(x) = \bigcup_{x \in X} (x, \overline{J}_x), \quad (3.3)$$

$$\underline{\mu}_{\tilde{A}}(x) = \bigcup_{x \in X} (x, \underline{J}_x), \quad (3.4)$$

onde,  $\bigcup$  representa a união.

A Figura 3.5 mostra, o exemplo de uma FOU com suas funções de pertinência inferior e superior.

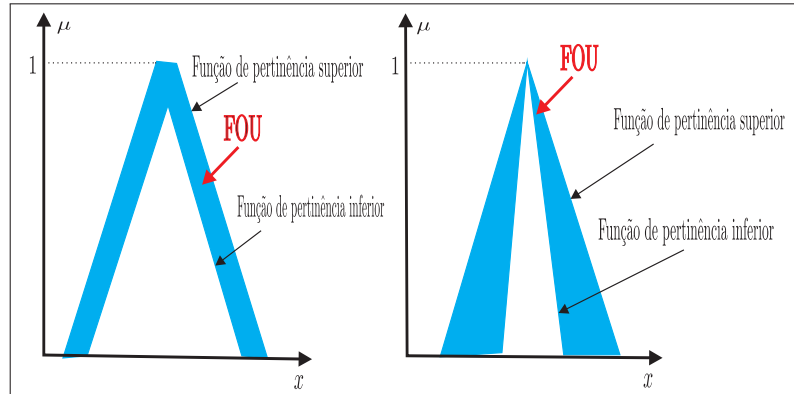


Figura 3.5: Conjunto fuzzy do tipo 2 [24].

## 3.2 Diferenças entre Conjuntos Fuzzy do tipo 1 e Conjuntos Fuzzy do tipo 2 Intervalar

Um exemplo de um conjunto fuzzy do tipo 1, é mostrado na Figura 3.6. Quando apenas os números inteiros são considerados no domínio  $x$ , o conjunto fuzzy do tipo 1 pode ser representado como  $\{0/2, 0.5/3, 1/4, 1/5, 0.67/6, 0.33/7, 0/8\}$ , em que  $0/2$  significa que o número 2 possui grau de pertinência 0 no conjunto fuzzy do tipo 1.

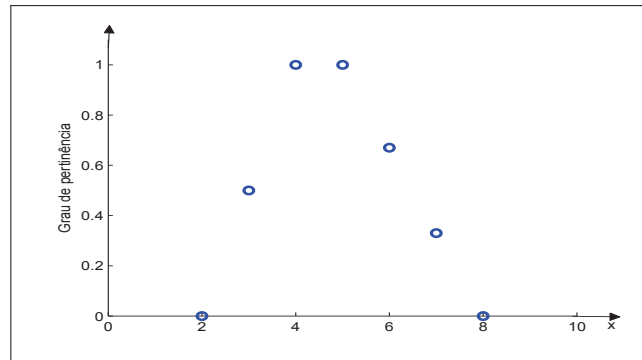


Figura 3.6: Conjunto fuzzy do tipo 1.

Um exemplo das pertinências primárias de um conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar discreto, é mostrado na Figura 3.7.

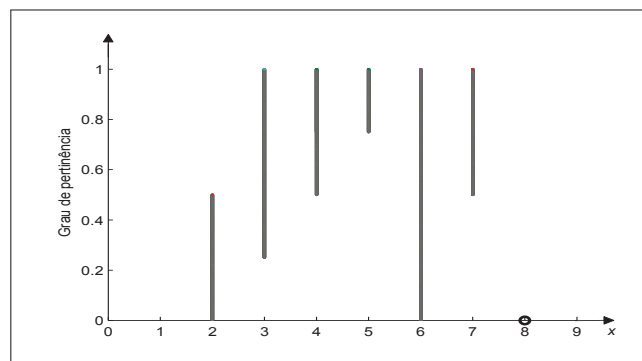


Figura 3.7: Pertinências primárias de um conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar discreto [34].

Observe que ao contrário de um conjunto fuzzy do tipo 1, cujas pertinências para cada  $x$  é um número, as pertinências de um conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar é um intervalo. Por exemplo, as pertinências primárias dos números 2, 3, 4, 5, 6 e 7 são os intervalos  $[0, 0.5]$ ,  $[0.25, 1]$ ,  $[0.5, 1]$ ,  $[0.75, 1]$ ,  $[0, 1]$  e  $[0, 0.5]$ , respectivamente; e o grau de pertinência primária do número 8 é 0.

## 3.3 Sistema Baseado em Regras Fuzzy do Tipo 2 (SBRF2)

O SBRF2 é utilizado, em aplicações onde existe incerteza na determinação exata do grau de pertinência e em aplicações onde não existe alta confiança no modelo [24].

O diagrama de blocos do SBRF2, também denominado controlador fuzzy do tipo 2, é apresentado na Figura 3.8. O SBRF2 é composto por cinco componentes: fuzzificador, inferência, base de regras, redutor do tipo 1 e defuzzificador. Este sistema é composto por, no mínimo,

um conjunto fuzzy do tipo 2 presente em um dos antecedentes ou no consequente que compõem uma das regras que formam o sistema. A descrição de cada bloco do SBRF2 é apresentada na Figura 3.8:

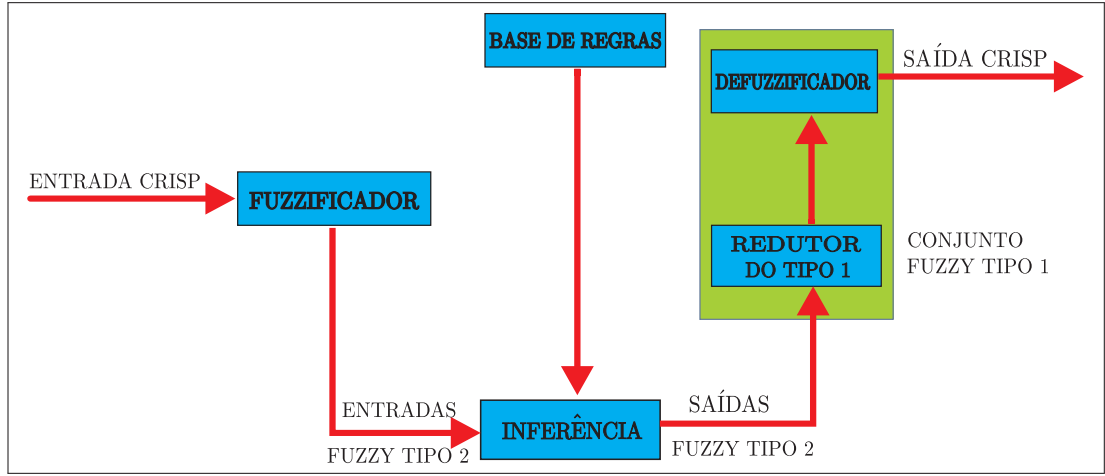


Figura 3.8: Sistema baseado em regras fuzzy tipo 2 [24].

1. **Fuzzificador:** o bloco fuzzificador transforma o vetor de entrada  $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_I), i = 1, 2, \dots, I$ , do SBRF2 em conjuntos fuzzy do tipo 2;
2. **Base de Regras:** a base de regras do SBRF2 permanece da mesma forma do tipo 1. A diferença entre o SBRF1 e SBRF2 está na natureza das funções de pertinência;  
**Regra 1:** Se  $x_1$  é  $\tilde{X}_1^1$  e  $x_2$  é  $\tilde{X}_2^1$  então  $y$  é  $Y^1$ ;  
**Regra 2:** Se  $x_1$  é  $\tilde{X}_1^2$  e  $x_2$  é  $\tilde{X}_2^2$  então  $y$  é  $Y^2$ ;
3. **Inferência:** o bloco de inferência realiza o cálculo do SBRF2 com base nas regras fuzzy;
4. **Redutor do Tipo 1:** o bloco redutor do tipo 1 tem função de transformar um conjunto fuzzy do tipo 2 em conjunto fuzzy do tipo 1; ou seja, procura o melhor conjunto fuzzy do tipo 1 que representa o conjunto fuzzy do tipo 2 e que deve satisfazer a seguinte premissa: Quando toda a incerteza desaparecer, o resultado do SBRF2 é reduzido em um SBRF1 [15];
5. **Defuzzificador:** a saída defuzzificada do SBRF2 é dada pela média dos pontos limites  $y_L$  e  $y_R$ , ou seja;

$$y(x') = \frac{y_L + y_R}{2}. \quad (3.5)$$

### 3.4 Saída de SBRF2 é um Intervalo

Na prática, os cálculos de SBRF2 intervalar podem ser significativamente simplificados. Considere a base de regras de um SBRF2 intervalar, consistindo de regras assumindo a seguinte forma:

$R^n$  : Se  $x_1$  é  $\tilde{X}_1^n$  e  $x_2$  é  $\tilde{X}_2^n$  e  $\dots$  e  $x_I$  é  $\tilde{X}_I^n$  então  $y$  é  $Y^n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , onde:

- $\tilde{X}_i^n$ ; são conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar,  $i = 1, 2, \dots, I$ ;
- $Y^n = [\underline{y}^n, \bar{y}^n]$  é um intervalo o que pode ser entendido como o centroide, de um consequente.

Quando  $\underline{y}^n = \bar{y}^n$ , ou seja, cada regra consequente é um número crisp.

Suponha que o vetor de entrada é  $x' = (x'_1, x'_2, \dots, x'_I)$ . Cálculos típicos em um SBRF2 intervalar, envolvem os seguintes passos:

- 1) Calcule a pertinência  $x'_i$  em cada  $\tilde{X}_i^n$ ,  $[\underline{\mu}_{\tilde{X}_i^n}(x'_i), \bar{\mu}_{\tilde{X}_i^n}(x'_i)]$ ,  $i = 1, 2, \dots, I$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ;
- 2) Calcule o intervalo inicial da  $n$ -ésima regra,  $F^n(x')$ :  
 $F^n(x') : [\underline{\mu}_{\tilde{X}_1^n}(x'_1) t \cdots t \underline{\mu}_{\tilde{X}_I^n}(x'_I), \bar{\mu}_{\tilde{X}_1^n}(x'_1) t \cdots t \bar{\mu}_{\tilde{X}_I^n}(x'_I)] \equiv [\underline{f}^n, \bar{f}^n]$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ;  
 onde:
  - $t$  é o operador  $t$ -norma;
  - $F^n(x')$  é o conjunto intervalar ativado;
  - $\underline{f}^n, \bar{f}^n$  são os graus de ativação inferior e superior respectivamente, resultante da operação de entrada e antecedente da regra;
  - $\underline{\mu}_{\tilde{X}_i^n}(x'_i), \bar{\mu}_{\tilde{X}_i^n}(x'_i)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ ,  $i = 1, 2, \dots, I$ , é o grau de pertinência de  $x'_i$ , na função de pertinência inferior  $\underline{\mu}_{\tilde{X}_i^n}$  e superior  $\bar{\mu}_{\tilde{X}_i^n}$  respectivamente.
- 3) O redutor do tipo 1 combina  $F^n(x')$  e as regras consequentes correspondentes. Existem muitos desses métodos, o mais comumente utilizado é dado por:

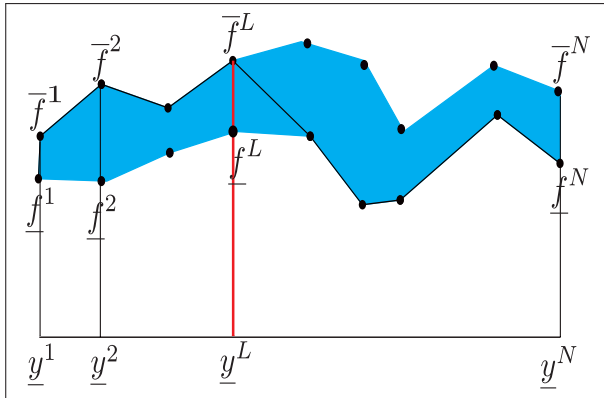
$$Y(x') = [y_L, y_R], \quad (3.6)$$

onde:

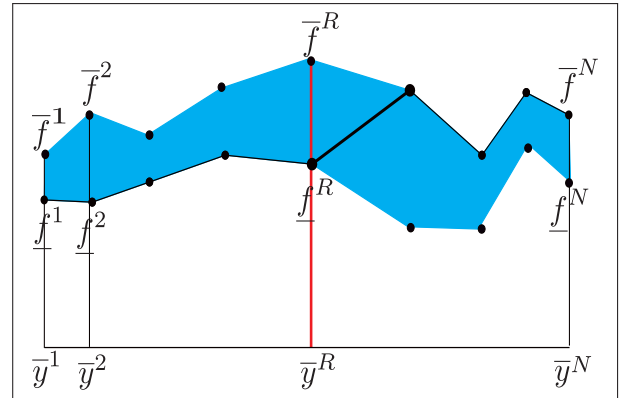
$$y_L = \min_{k \in [1, N-1]} \frac{\sum_{n=1}^k \bar{f}^n \underline{y}^n + \sum_{n=k+1}^N \underline{f}^n \underline{y}^n}{\sum_{n=1}^k \bar{f}^n + \sum_{n=k+1}^N \underline{f}^n} \equiv \frac{\sum_{n=1}^L \bar{f}^n \underline{y}^n + \sum_{n=L+1}^N \underline{f}^n \underline{y}^n}{\sum_{n=1}^L \bar{f}^n + \sum_{n=L+1}^N \underline{f}^n}, \quad (3.7)$$

$$y_R = \max_{k \in [1, N-1]} \frac{\sum_{n=1}^k \underline{f}^n \bar{y}^n + \sum_{n=k+1}^N \bar{f}^n \bar{y}^n}{\sum_{n=1}^k \underline{f}^n + \sum_{n=k+1}^N \bar{f}^n} \equiv \frac{\sum_{n=1}^R \underline{f}^n \bar{y}^n + \sum_{n=R+1}^N \bar{f}^n \bar{y}^n}{\sum_{n=1}^R \underline{f}^n + \sum_{n=R+1}^N \bar{f}^n}, \quad (3.8)$$

e  $L, R$  são os pontos switch. A Figura 3.9 mostra, os pontos switch  $L$  e  $R$ .



(a) Cálculo de  $y_L$ : Mudança do intervalo inicial superior ao inferior.



(b) Cálculo de  $y_R$ : Mudança do intervalo inicial inferior ao superior.

Figura 3.9: Pontos switch para calcular  $y_L$  e  $y_R$  [34].

Os valores  $y_L$  e  $y_R$ , podem ser calculados utilizando o método iterativo Karnik e Mendel ou algoritmo KM [24]. Este algoritmo é utilizado em todos os métodos de redutor do tipo 1 com conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalares. A ideia principal do algoritmo KM é encontrar os pontos switch para  $y_L$  e  $y_R$ . Por exemplo, tome  $y_L$ , de fato  $y_L$  é o mínimo de  $Y(x')$ ,  $\underline{y}^n$  aumenta da esquerda para a direita ao longo do eixo horizontal como mostra a Figura 3.9(a), devemos escolher o maior grau de pertinência para  $\underline{y}^n$  à esquerda e o menor grau de pertinência para  $\underline{y}^n$  à direita. O algoritmo KM encontra o ponto switch  $L$ . Para  $n \leq L$ , os maiores graus de pertinência são usados para calcular  $y_L$ ; para  $n > L$ , são usados os menores graus de pertinência. Isso vai garantir que  $y_L$  seja o mínimo.

### 3.4.1 Algoritmo de KM para calcular $y_L$

- a) Ordene  $\underline{y}^n (n = 1, \dots, N)$  em ordem crescente e chamar as classificadas  $\underline{y}^n$  com o mesmo nome, mas agora  $\underline{y}_1 \leq \underline{y}_2 \leq \dots \leq \underline{y}_N$ . Combine  $F^n(x')$ , com seus respectivos  $\underline{y}^n$  e renumera-los para que seu índice corresponda aos  $\underline{y}_n$  renumerados. A seguir, um exemplo. Sejam  $\underline{y}^1 = 2$ ,  $\underline{y}^2 = 1$ ,  $\underline{y}^3 = 0$ ,  $\underline{y}^4 = 5$ ,  $\underline{y}^5 = 0$  e  $\underline{y}^6 = 3$ , ordene em ordem crescente, temos que:  $\underline{y}^3 \leq \underline{y}^5 < \underline{y}^2 < \underline{y}^1 < \underline{y}^6 < \underline{y}^4$ . Logo, renome os  $\underline{y}^i, i = 1, \dots, 6$ , já ordenados anteriormente por  $\underline{y}_i, i = 1, \dots, 6$ , assim,  $\underline{y}_1 = \underline{y}^3 = 0$ ,  $\underline{y}_2 = \underline{y}^5 = 0$ ,  $\underline{y}_3 = \underline{y}^2 = 1$ ,  $\underline{y}_4 = \underline{y}^1 = 2$ ,  $\underline{y}_5 = \underline{y}^6 = 3$  e  $\underline{y}_6 = \underline{y}^4 = 4$ .

- b) Inicialize  $f^n$  definindo,

$$f^n = \frac{f^n + \bar{f}^n}{2}, n = 1, 2, \dots, N, \quad (3.9)$$

e calcule

$$y = \frac{\sum_{n=1}^N \underline{y}^n f^n}{\sum_{n=1}^N f^n}. \quad (3.10)$$

- c) Encontre o ponto switch  $k$  ( $1 \leq k \leq N - 1$ ), tal que

$$\underline{y}^k \leq y \leq \underline{y}^{k+1}. \quad (3.11)$$

- d) Defina

$$f^n = \begin{cases} \bar{f}^n & \text{se } n \leq k, \\ \underline{f}^n & \text{se } n > k, \end{cases} \quad (3.12)$$

e calcule

$$y' = \frac{\sum_{n=1}^N \underline{y}^n f^n}{\sum_{n=1}^N f^n}. \quad (3.13)$$

- e) Verifique se  $y' = y$ . Se sim, pare e definir  $y_L = y$  e  $L = k$ . Se não, vá para a etapa seguinte.
- f) Defina  $y = y'$  e vá para item c).

### 3.4.2 Algoritmo de KM para calcular $y_R$

- a) Ordene  $\bar{y}^n (n = 1, \dots, N)$  em ordem crescente e chamar as classificadas  $\bar{y}^n$  com o mesmo nome, mas agora  $\bar{y}_1 \leq \bar{y}_2 \leq \dots \leq \bar{y}_N$ . Combine  $F^n(x')$ , com seus respectivos  $\bar{y}^n$  e renumera-los para que seu índice corresponda aos  $\bar{y}_n$  renumerados.

Por exemplo, sejam  $\bar{y}^1 = 2$ ,  $\bar{y}^2 = 1$ ,  $\bar{y}^3 = 0$ ,  $\bar{y}^4 = 5$ ,  $\bar{y}^5 = 0$  e  $\bar{y}^6 = 3$ , ordenando em ordem crescente, temos que,  $\bar{y}^3 \leq \bar{y}^5 < \bar{y}^2 < \bar{y}^1 < \bar{y}^6 < \bar{y}^4$ . Logo, renomear os  $\bar{y}^i, i = 1, \dots, 6$ , já ordenados anteriormente por  $\bar{y}_i, i = 1, \dots, 6$ , onde,  $\bar{y}_1 = \bar{y}^3 = 0$ ,  $\bar{y}_2 = \bar{y}^5 = 0$ ,  $\bar{y}_3 = \bar{y}^2 = 1$ ,  $\bar{y}_4 = \bar{y}^1 = 2$ ,  $\bar{y}_5 = \bar{y}^6 = 3$  e  $\bar{y}_6 = \bar{y}^4 = 5$ .

- b) Inicialize  $f^n$  definindo:

$$f^n = \frac{f^n + \bar{f}^n}{2}, n = 1, 2, \dots, N, \quad (3.14)$$

e calcule,

$$y = \frac{\sum_{n=1}^N \bar{y}^n f^n}{\sum_{n=1}^N f^n}. \quad (3.15)$$

- c) Encontre o ponto switch  $k$  ( $1 \leq k \leq N - 1$ ) tal que,

$$\bar{y}^k \leq y \leq \bar{y}^{k+1}. \quad (3.16)$$

- d) Defina

$$f^n = \begin{cases} f^n & \text{se } n \leq k, \\ \bar{f}^n & \text{se } n > k, \end{cases} \quad (3.17)$$

e calcule

$$y' = \frac{\sum_{n=1}^N \bar{y}^n f^n}{\sum_{n=1}^N f^n}. \quad (3.18)$$

- e) Verifique se  $y' = y$ . Se sim, pare e definir  $y_R = y$  e  $R = k$ . Se não, vá para a seguinte etapa.

- f) Defina  $y = y'$  e vá para item c).

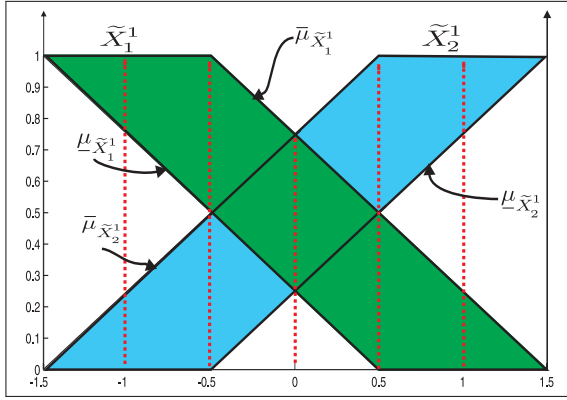
- 4) Calcule a saída defuzzificada como:

$$y = \frac{y_L + y_R}{2}. \quad (3.19)$$

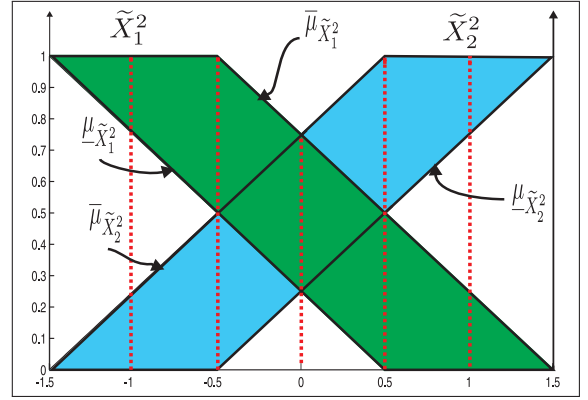
Para um melhor, entendimento do algoritmo de KM apresentamos o seguinte exemplo:

**Exemplo 3.1** Considere um SBRF2 intervalar que tem duas entradas  $x'_1$  e  $x'_2$  e uma saída  $y$ . Cada domínio de entrada é constituído por dois conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar, mostrados como as áreas sombreadas na Figura 3.10. A Figura 3.10(a) mostra as funções de pertinência de entrada  $x'_1$  e a Figura 3.10(b) mostra as funções de pertinência de entrada  $x'_2$  [34].

Considere um vetor de entrada,  $x' = (x'_1, x'_2) = (-0.3, 0.6)$ .



(a) Funções de pertinência da entrada  $x'_1$ .



(b) Funções de pertinência da entrada  $x'_2$ .

Figura 3.10: Funções de pertinência de conjuntos fuzzy tipo 2 intervalar [34].

A base de regras fuzzy e os consequentes correspondentes, são apresentados nas Tabelas 3.1 e 3.2, respectivamente.

$R^1$ :	Se $x'_1$ é $\tilde{X}_1^1$ e $x'_2$ é $\tilde{X}_1^2$ , então $y$ é $Y^1$ .
$R^2$ :	Se $x'_1$ é $\tilde{X}_1^1$ e $x'_2$ é $\tilde{X}_2^2$ , então $y$ é $Y^2$ .
$R^3$ :	Se $x'_1$ é $\tilde{X}_2^1$ e $x'_2$ é $\tilde{X}_1^2$ , então $y$ é $Y^3$ .
$R^4$ :	Se $x'_1$ é $\tilde{X}_2^1$ e $x'_2$ é $\tilde{X}_2^2$ , então $y$ é $Y^4$ .

Tabela 3.1: Base de regras fuzzy.

$x'_1 \backslash x'_2$	$\tilde{X}_1^2$	$\tilde{X}_2^2$
$\tilde{X}_1^1$	$Y^1 = [\underline{y}^1, \bar{y}^1] = [-1, -0.9]$	$Y^2 = [\underline{y}^2, \bar{y}^2] = [-0.6, -0.4]$
$\tilde{X}_2^1$	$Y^3 = [\underline{y}^3, \bar{y}^3] = [0.4, 0.6]$	$Y^4 = [\underline{y}^4, \bar{y}^4] = [0.9, 1]$

Tabela 3.2: Consequentes de SBRF2 com saída intervalar.

1) Calcule as funções de pertinência superior e inferior de  $\tilde{X}_1^1, \tilde{X}_2^1, \tilde{X}_1^2$  e  $\tilde{X}_2^2$ .

$$\bar{\mu}_{\tilde{X}_1^1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -1.5 \leq x < -0.5, \\ -0.5x + 0.75 & \text{se } -0.5 \leq x \leq 1.5, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\underline{\mu}_{\tilde{X}_1^1}(x) = \begin{cases} -0.5x + 0.25 & \text{se } -1.5 \leq x < 0.5, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

$$\bar{\mu}_{\tilde{X}_2^1}(x) = \begin{cases} 0.5x + 0.75 & \text{se } -1.5 \leq x < 0.5, \\ 1 & \text{se } 0.5 \leq x \leq 1.5, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



$$\begin{aligned}\underline{\mu}_{\tilde{X}_2^1}(x) &= \begin{cases} 0.5x + 0.25 & \text{se } -0.5 \leq x < 1.5, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \\ \bar{\mu}_{\tilde{X}_1^2}(x) &= \begin{cases} -0.5x + 0.25 & \text{se } -1.5 \leq x \leq 0.5, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \\ \underline{\mu}_{\tilde{X}_1^2}(x) &= \begin{cases} 1 & \text{se } -1.5 \leq x \leq -0.5, \\ -0.5x + 0.75 & \text{se } -0.5 \leq x \leq 1.5, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \\ \bar{\mu}_{\tilde{X}_2^2}(x) &= \begin{cases} 0.5x + 0.25 & \text{se } -0.5 \leq x \leq 1.5, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \\ \underline{\mu}_{\tilde{X}_2^2}(x) &= \begin{cases} -0.5x + 0.75 & \text{se } -1.5 \leq x < 0.5, \\ 1 & \text{se } 0.5 \leq x \leq 1.5, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}\end{aligned}$$

- 2) Calcule os intervalos iniciais, dos quatro conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar. A Tabela 3.3, apresenta os intervalos iniciais das quatro regras fuzzy.

$$[\underline{\mu}_{\tilde{X}_1^1}(x'_1), \bar{\mu}_{\tilde{X}_1^1}(x'_1)] = [-0.5(-0.3) + 0.25, -0.5(-0.3) + 0.75] = [0.4, 0.9];$$

$$[\underline{\mu}_{\tilde{X}_2^1}(x'_1), \bar{\mu}_{\tilde{X}_2^1}(x'_1)] = [0.5(-0.3) + 0.25, 0.5(-0.3) + 0.75] = [0.1, 0.6];$$

$$[\underline{\mu}_{\tilde{X}_1^2}(x'_2), \bar{\mu}_{\tilde{X}_1^2}(x'_2)] = [0, -0.5(0.6) + 0.75] = [0, 0.45];$$

$$[\underline{\mu}_{\tilde{X}_2^2}(x'_2), \bar{\mu}_{\tilde{X}_2^2}(x'_2)] = [0.5(0.6) + 0.25, 1] = [0.55, 1].$$

Regra n°	Intervalo inicial	→	Consequente
$R^1 :$	$[\underline{f}^1, \bar{f}^1] = [\underline{\mu}_{\tilde{X}_1^1}(x'_1) \cdot \underline{\mu}_{\tilde{X}_1^2}(x'_2), \bar{\mu}_{\tilde{X}_1^1}(x'_1) \cdot \bar{\mu}_{\tilde{X}_1^2}(x'_2)]$ $= [0.4 \times 0, 0.9 \times 0.45] = [0, 0.405]$	→	$[\underline{y}^1, \bar{y}^1] = [-1, -0.9]$
$R^2 :$	$[\underline{f}^2, \bar{f}^2] = [\underline{\mu}_{\tilde{X}_1^1}(x'_1) \cdot \underline{\mu}_{\tilde{X}_2^2}(x'_2), \bar{\mu}_{\tilde{X}_1^1}(x'_1) \cdot \bar{\mu}_{\tilde{X}_2^2}(x'_2)]$ $= [0.4 \times 0.55, 0.9 \times 1] = [0.22, 0.9]$	→	$[\underline{y}^2, \bar{y}^2] = [-0.6, -0.4]$
$R^3 :$	$[\underline{f}^3, \bar{f}^3] = [\underline{\mu}_{\tilde{X}_2^1}(x'_1) \cdot \underline{\mu}_{\tilde{X}_1^2}(x'_2), \bar{\mu}_{\tilde{X}_2^1}(x'_1) \cdot \bar{\mu}_{\tilde{X}_1^2}(x'_2)]$ $= [0.1 \times 0, 0.6 \times 0.45] = [0, 0.27]$	→	$[\underline{y}^3, \bar{y}^3] = [0.4, 0.6]$
$R^4 :$	$[\underline{f}^4, \bar{f}^4] = [\underline{\mu}_{\tilde{X}_2^1}(x'_1) \cdot \underline{\mu}_{\tilde{X}_2^2}(x'_2), \bar{\mu}_{\tilde{X}_2^1}(x'_1) \cdot \bar{\mu}_{\tilde{X}_2^2}(x'_2)]$ $= [0.1 \times 0.55, 0.6 \times 1] = [0.055, 0.6]$	→	$[\underline{y}^4, \bar{y}^4] = [0.9, 1]$

Tabela 3.3: Intervalos iniciais das quatro regras.

Aplique o **algoritmo de KM** para encontrar,  $y_L$ .

- a) Ordene em forma crescente os  $\underline{y}^n, n = 1, 2, 3, 4$ .

Assim,  $\underline{y}^1 \leq \underline{y}^2 \leq \underline{y}^3 \leq \underline{y}^4$ , isto é,  $(-1 \leq -0.6 \leq 0.4 \leq 0.9)$ .

- b) Encontre  $f^n$  definido por,  $f^n = \frac{f^n + \bar{f}^n}{2}$ ,  $n = 1, \dots, 4$ .

$$\bullet f^1 = \frac{f^1 + \bar{f}^1}{2} = \frac{0 + 0.405}{2} = 0.2025;$$

$$\bullet f^2 = \frac{f^2 + \bar{f}^2}{2} = \frac{0.22 + 0.9}{2} = 0.56;$$

$$\bullet f^3 = \frac{f^3 + \bar{f}^3}{2} = \frac{0 + 0.27}{2} = 0.135;$$

$$\bullet f^4 = \frac{f^4 + \bar{f}^4}{2} = \frac{0.055 + 0.26}{2} = 0.3275.$$

Agora calcule,  $y = \frac{\sum_{n=1}^4 \underline{y}^n f^n}{\sum_{n=1}^4 f^n}$ . Então,

$$\begin{aligned} y &= \frac{\underline{y}^1 f^1 + \underline{y}^2 f^2 + \underline{y}^3 f^3 + \underline{y}^4 f^4}{f^1 + f^2 + f^3 + f^4} \\ &= \frac{(-1)(0.2025) + (-0.6)(0.56) + (0.4)(0.135) + (0.9)(0.3275)}{0.2025 + 0.56 + 0.135 + 0.3275} \\ &= \frac{-0.2025 - 0.336 + 0.054 + 0.29475}{1.225} \\ &= \frac{-0.18975}{1.225} \\ &= -0.154897959 \end{aligned}$$

Portanto,  $y = -0.154897959$ .

- c) Encontre o ponto **switch**  $k$  ( $1 \leq k \leq 3$ ) tal que  $\underline{y}^k \leq y \leq \underline{y}^{k+1}$ .  
Note que,  $\underline{y}^2 \leq y \leq \underline{y}^3$ , isto é,  $(-0.6 \leq -0.154897959 \leq 0.4)$ . Assim,  $k = 2$ .

- d) Defina  $f^n = \begin{cases} \bar{f}^n & \text{se } n \leq 2, \\ \underline{f}^n & \text{se } n > 2. \end{cases}$

Agora calcule,  $y' = \frac{\sum_{n=1}^4 \underline{y}^n f^n}{\sum_{n=1}^4 f^n} = \frac{\underline{y}^1 f^1 + \underline{y}^2 f^2 + \underline{y}^3 f^3 + \underline{y}^4 f^4}{f^1 + f^2 + f^3 + f^4}$ . Então,

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{\underline{y}^1 \overline{f}^1 + \underline{y}^2 \overline{f}^2 + \underline{y}^3 \underline{f}^3 + \underline{y}^4 \underline{f}^4}{\overline{f}^1 + \overline{f}^2 + \underline{f}^3 + \underline{f}^4} \\
&= \frac{(-1)(0.405) + (-0.6)(0.9) + (0.4)(0) + (0.9)(0.055)}{0.405 + 0.9 + 0 + 0.055} \\
&= \frac{-0.2025 - 0.336 + 0.054 + 0.29475}{1.225} \\
&= \frac{-0.405 - 0.54 + 0 + 0.0495}{1.36} \\
&= \frac{-0.8955}{1.36} \\
&= -0.658455882
\end{aligned}$$

Portanto,  $y' = -0.658455882$ .

e) Como  $y \neq y'$ , então continue o processo.

f) Defina  $y = y'$ , e encontre o ponto **switch**  $k$  ( $1 \leq k \leq 3$ ) tal que  $\underline{y}^k \leq y \leq \underline{y}^{k+1}$ . Note que,  $\underline{y}^1 \leq y \leq \underline{y}^2$ , isto é,  $(-1 \leq -0.658455882 \leq -0.6)$ . Assim,  $k = 1$ .

Defina,  $f^n = \begin{cases} \overline{f}^n & \text{se } n \leq 1, \\ \underline{f}^n & \text{se } n > 1. \end{cases}$

Agora calcule,  $y'' = \frac{\sum_{n=1}^4 \underline{y}^n f^n}{\sum_{n=1}^4 f^n} = \frac{\underline{y}^1 \overline{f}^1 + \underline{y}^2 \underline{f}^2 + \underline{y}^3 \underline{f}^3 + \underline{y}^4 \underline{f}^4}{\overline{f}^1 + \underline{f}^2 + \underline{f}^3 + \underline{f}^4}$ . Então,

$$\begin{aligned}
y'' &= \frac{\underline{y}^1 \overline{f}^1 + \underline{y}^2 \underline{f}^2 + \underline{y}^3 \underline{f}^3 + \underline{y}^4 \underline{f}^4}{\overline{f}^1 + \underline{f}^2 + \underline{f}^3 + \underline{f}^4} \\
&= \frac{(-1)(0.405) + (-0.6)(0.22) + (0.4)(0) + (0.9)(0.055)}{0.405 + 0.22 + 0 + 0.055} \\
&= \frac{-0.405 - 0.132 + 0 + 0.0495}{0.68} \\
&= \frac{-0.4855}{0.68} \\
&= -0.716911764
\end{aligned}$$

Portanto,  $y'' = -0.716911764$ .

Como  $y \neq y''$  então, continue o processo. Defina  $y = y''$ .

O objetivo é encontrar o ponto **switch**  $k$  ( $1 \leq k \leq 3$ ) tal que  $\underline{y}^k \leq y \leq \underline{y}^{k+1}$ . Note que,  $\underline{y}^1 \leq y \leq \underline{y}^2$ , isto é,  $(-1 \leq -0.716911764 \leq -0.6)$ . Assim,  $k = 1$ .

Defina,  $f^n = \begin{cases} \overline{f}^n & \text{se } n \leq 1, \\ \underline{f}^n & \text{se } n > 1. \end{cases}$

Agora calcule,  $y''' = \frac{\sum_{n=1}^4 \underline{y}^n f^n}{\sum_{n=1}^4 f^n} = \frac{\underline{y}^1 f^1 + \underline{y}^2 f^2 + \underline{y}^3 f^3 + \underline{y}^4 f^4}{f^1 + f^2 + f^3 + f^4} = -0.716911764$ .

Note que,  $y''' = y''$ , e como  $y = y'''$ , então  $y_L = y = y''' = -0.716911764$  e  $L = 1$ .

Assim,  $y_L = \frac{\underline{y}^1 \underline{f}^1 + \underline{y}^2 \underline{f}^2 + \underline{y}^3 \underline{f}^3 + \underline{y}^4 \underline{f}^4}{\underline{f}^1 + \underline{f}^2 + \underline{f}^3 + \underline{f}^4} = -0.716911764$ .

Portanto,  $y_L = -0.716911764$ .

Aplicamos o **algoritmo de KM para calcular**,  $y_R$

a) Ordene em forma crescente os  $\bar{y}^n, n = 1, 2, 3, 4$ .

Assim,  $\bar{y}^1 \leq \bar{y}^2 \leq \bar{y}^3 \leq \bar{y}^4$ , isto é,  $(-1 \leq -0.6 \leq 0.4 \leq 0.9)$ .

b) Encontre  $f^n$  definido por,  $f^n = \frac{f^n + \bar{f}^n}{2}$ ,  $n = 1, \dots, 4$ .

De fato,  $f^1 = 0.2025, f^2 = 0.56, f^3 = 0.135, f^4 = 0.3275$ .

Agora calcule,  $y = \frac{\sum_{n=1}^4 \bar{y}^n f^n}{\sum_{n=1}^4 f^n}$ . Então,

$$\begin{aligned} y &= \frac{\bar{y}^1 f^1 + \bar{y}^2 f^2 + \bar{y}^3 f^3 + \bar{y}^4 f^4}{f^1 + f^2 + f^3 + f^4} \\ &= \frac{(-0.9)(0.2025) + (-0.4)(0.56) + (0.6)(0.135) + (1)(0.3275)}{0.2025 + 0.56 + 0.135 + 0.3275} \\ &= \frac{-0.18225 - 0.224 + 0.081 + 0.3275}{1.225} \\ &= \frac{0.00225}{1.225} \\ &= 0.001836734694 \end{aligned}$$

Portanto,  $y = 0.001836734694$ .

c) Encontre o ponto **switch**  $k$  ( $1 \leq k \leq 3$ ) tal que  $\bar{y}^k \leq y \leq \bar{y}^{k+1}$ .  
Note que,  $\bar{y}^2 \leq y \leq \bar{y}^3$ , isto é,  $(-0.4 \leq 0.001836734694 \leq 0.6)$ . Assim,  $k = 2$ .

d) Defina  $f^n = \begin{cases} f^n & \text{se } n \leq 2, \\ \bar{f}^n & \text{se } n > 2. \end{cases}$

Agora calcule,  $y' = \frac{\sum_{n=1}^4 \bar{y}^n f^n}{\sum_{n=1}^4 f^n} = \frac{\bar{y}^1 f^1 + \bar{y}^2 f^2 + \bar{y}^3 f^3 + \bar{y}^4 f^4}{f^1 + f^2 + f^3 + f^4}$ . Então,

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{\bar{y}^1 \underline{f}^1 + \bar{y}^2 \underline{f}^2 + \bar{y}^3 \bar{f}^3 + \bar{y}^4 \bar{f}^4}{\underline{f}^1 + \underline{f}^2 + \bar{f}^3 + \bar{f}^4} \\
&= \frac{(-0.9)(0) + (-0.4)(0.22) + (0.6)(0.27) + (1)(0.6)}{0 + 0.22 + 0.27 + 0.6} \\
&= \frac{0 - 0.088 + 0.162 + 0.6}{1.09} \\
&= \frac{0.674}{1.09} \\
&= 0.618348623
\end{aligned}$$

Portanto,  $y' = 0.618348623$ .

e) Como  $y \neq y'$ , então continue o processo.

f) Defina  $y = y'$  e encontre o ponto **switch**  $k$  ( $1 \leq k \leq 3$ ) tal que  $\bar{y}^k \leq y \leq \bar{y}^{k+1}$ . Note que,  $\bar{y}^3 \leq y \leq \bar{y}^4$ , isto é,  $(0.6 \leq 0.618348623 \leq 1)$ . Assim,  $k = 3$ .

$$\text{Defina, } f^n = \begin{cases} \underline{f}^n & \text{se } n \leq 3, \\ \bar{f}^n & \text{se } n > 3. \end{cases}$$

$$\text{Agora calcule, } y'' = \frac{\sum_{n=1}^4 \bar{y}^n f^n}{\sum_{n=1}^4 f^n} = \frac{\bar{y}^1 f^1 + \bar{y}^2 f^2 + \bar{y}^3 f^3 + \bar{y}^4 f^4}{f^1 + f^2 + f^3 + f^4}. \text{ Ent\~ao,}$$

$$\begin{aligned}
y'' &= \frac{\bar{y}^1 \underline{f}^1 + \bar{y}^2 \underline{f}^2 + \bar{y}^3 \underline{f}^3 + \bar{y}^4 \bar{f}^4}{\underline{f}^1 + \underline{f}^2 + \underline{f}^3 + \bar{f}^4} \\
&= \frac{(-0.9)(0) + (-0.4)(0.22) + (0.6)(0) + (1)(0.6)}{0 + 0.22 + 0 + 0.6} \\
&= \frac{0 - 0.088 + 0 + 0.6}{0.82} \\
&= \frac{0.512}{0.82} \\
&= 0.624390243
\end{aligned}$$

Portanto,  $y'' = 0.624390243$ .

Como  $y \neq y''$ , então continue o processo. Defina,  $y = y''$  e encontre o ponto **switch**  $k$  ( $1 \leq k \leq 3$ ) tal que  $\bar{y}^k \leq y \leq \bar{y}^{k+1}$ .

Note que,  $\bar{y}^3 \leq y \leq \bar{y}^4$ , isto é,  $(0.6 \leq 0.624390243 \leq 1)$ .

$$\text{Defina, } f^n = \begin{cases} \underline{f}^n & \text{se } n \leq 3, \\ \bar{f}^n & \text{se } n > 3. \end{cases}$$

Agora calcule,  $y''' = \frac{\sum_{n=1}^4 \bar{y}_n f^n}{\sum_{n=1}^4 f^n} = 0.624390243$ .

Note que,  $y''' = y''$  e como  $y = y'''$ , então temos  $y_R = y = y''' = 0.624390243$  e  $R = 3$ .

Assim,  $y_R = \frac{\bar{y}^1 \underline{f}^1 + \bar{y}^2 \underline{f}^2 + \bar{y}^3 \underline{f}^3 + \bar{y}^4 \underline{f}^4}{\underline{f}^1 + \underline{f}^2 + \underline{f}^3 + \underline{f}^4} = 0.624390243$ .

Portanto,  $y_R = 0.624390243$ .

Finalmente, a saída defuzzificada, é:

$$y = \frac{y_L + y_R}{2} = \frac{-0.716911764 + 0.624390243}{2} = \frac{-0.092587521}{2} = -0.04629376.$$

Portanto,  $y = -0.04629376$ .

Os cálculos foram baseados em [34].

### 3.5 Saída de SBRF2 é um Conjunto Fuzzy do Tipo 2 Intervalar

A Figura 3.11 apresenta o método de Mamdani com entrada  $x' = (x'_1, x'_2)$ . Consideramos duas regras  $R^1$  e  $R^2$ , com dois antecedentes e um consequente dados por conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar, cada uma das regras dadas por:

$$\begin{aligned} R^1: & \text{ Se } x_1 \text{ é } \tilde{X}_1^1 \text{ e } x_2 \text{ é } \tilde{X}_2^1 \text{ então } y \text{ é } Y^1; \\ R^2: & \text{ Se } x_1 \text{ é } \tilde{X}_1^2 \text{ e } x_2 \text{ é } \tilde{X}_2^2 \text{ então } y \text{ é } Y^2. \end{aligned}$$

Primeiro calculamos o grau de ativação inferior e superior das regras,  $R^1$  e  $R^2$ , da seguinte forma:

$$\underline{f}^n = \underline{\mu}_{\tilde{X}_1^n}(x'_1) \tau \underline{\mu}_{\tilde{X}_2^n}(x'_2) \text{ e } \bar{f}^n = \bar{\mu}_{\tilde{X}_1^n}(x'_1) \tau \bar{\mu}_{\tilde{X}_2^n}(x'_2), n = 1, 2.$$

onde, as funções de pertinência inferior e superior de  $\underline{\mu}_{\tilde{X}_1^n}(x'_1)$  e  $\bar{\mu}_{\tilde{X}_1^n}(x'_1)$ , em  $x'_1$ ,  $n = 1, 2$ , são obtidas por meio da interseção entre a linha vertical do antecedente  $x'_1$  com a função de pertinência inferior  $\underline{\mu}_{\tilde{X}_1^n}(x'_1)$  e superior  $\bar{\mu}_{\tilde{X}_1^n}(x'_1)$ , respectivamente. As funções de pertinência em  $x'_2$  e da regra  $R^2$  são obtidas de forma análoga onde,  $\tau$  é o operador  $t$ -norma (mínimo) e  $\gamma$  representa o operador  $s$ -norma (máximo), Figura 3.11. Em seguida, calculamos a função resultante, da seguinte maneira:

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = [\underline{b}^1(y) \gamma \underline{b}^2(y), \bar{b}^1(y) \gamma \bar{b}^2(y)],$$

onde,

$$\underline{b}^n = \underline{f}^n \tau \underline{\mu}_{Y^n}(y) \text{ e } \bar{b}^n = \bar{f}^n \tau \bar{\mu}_{Y^n}(y), n = 1, 2.$$

Ou seja,  $\underline{b}^n$  é calculado utilizando o grau de ativação inferior resultante da regra  $\underline{f}^n$  e a função de pertinência inferior do consequente da mesma regra  $\underline{\mu}_{Y^n}(y)$  analogamente é obtido  $\bar{b}^n, n = 1, 2$ .

Na Figura 3.11 podemos observar que a saída obtida é um conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar, para defuzzificar este conjunto utilizamos o algoritmo de Karnik e Mendel [28].

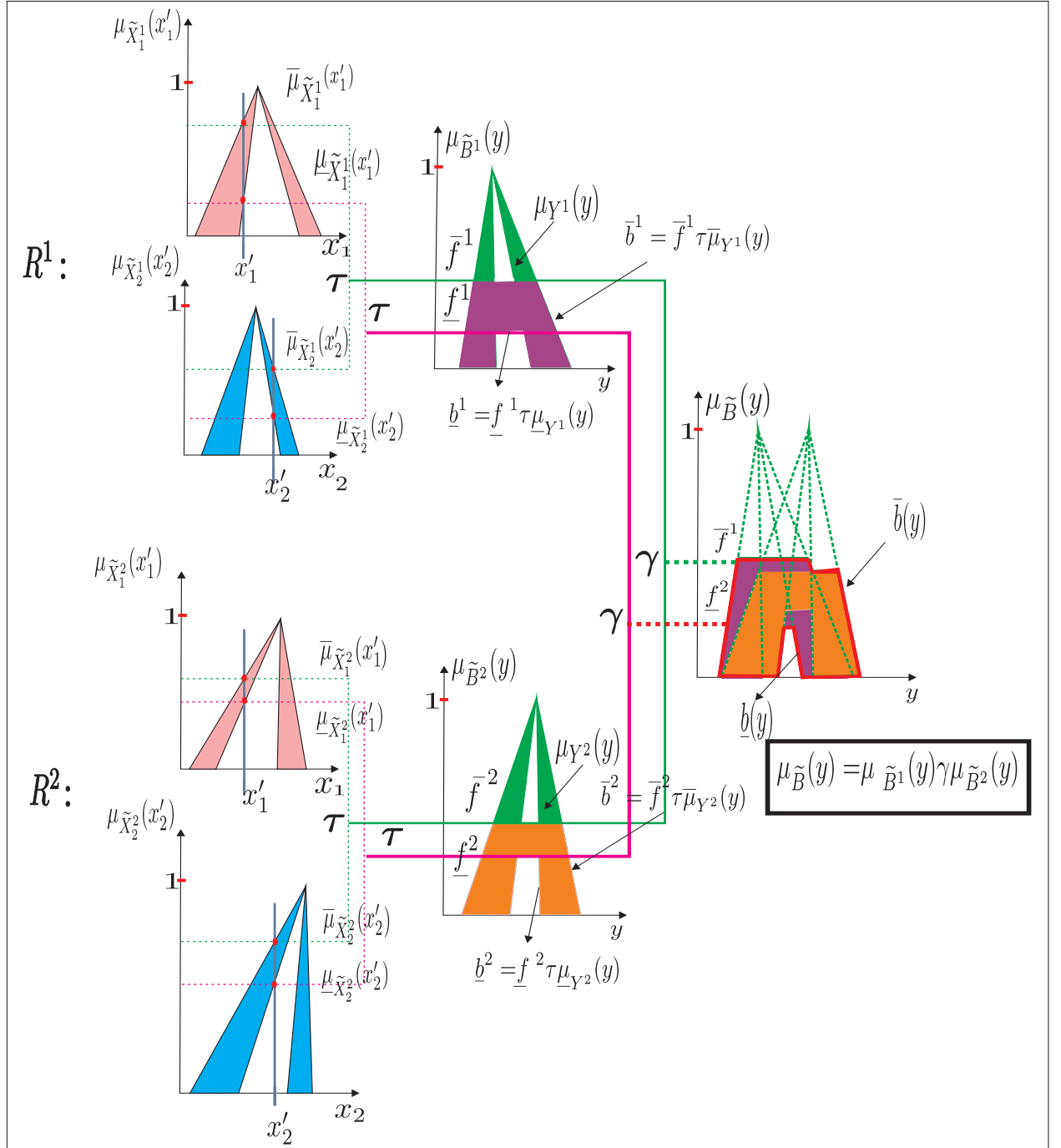


Figura 3.11: Método de Mamdani para conjuntos do tipo 2 utilizando o operador  $t$ -norma mínimo e  $\gamma$ -norma máximo [24].

Na próxima seção, apresentamos alguns conceitos importantes que são necessários para a defuzzificação.

### 3.5.1 Versão Discreta do Centroide

**Definição 3.8** *Seja  $X_e$  um conjunto fuzzy do tipo 1, dizemos que  $X_e$  é imerso no conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar  $\tilde{X}$  se,  $\underline{\mu}_{\tilde{X}}(x) \leq \mu_{X_e}(x) \leq \bar{\mu}_{\tilde{X}}(x)$ . Como mostra a Figura 3.12*

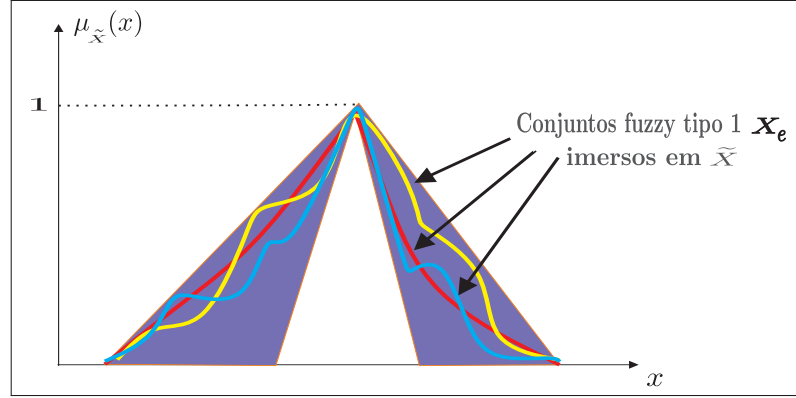


Figura 3.12: Exemplo de conjuntos fuzzy do tipo 1 imersos em um conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar [24].

Karnik e Mendel demonstraram que  $y_L$  e  $y_R$  podem ser calculados a partir das funções de pertinência superior e inferior de  $\tilde{X}$  da seguinte forma:

$$y_L = \min_{L \in \mathbb{N}} \text{centroid}(X_e(L)), \quad (3.20)$$

$$y_R = \max_{R \in \mathbb{N}} \text{centroid}(X_e(R)), \quad (3.21)$$

onde,

$$\text{centroid}(X_e(L)) = \frac{\sum_{i=1}^L x_i \bar{\mu}_{\tilde{X}}(x_i) + \sum_{i=L+1}^N x_i \underline{\mu}_{\tilde{X}}(x_i)}{\sum_{i=1}^L \bar{\mu}_{\tilde{X}}(x_i) + \sum_{i=L+1}^N \underline{\mu}_{\tilde{X}}(x_i)}, \quad (3.22)$$

$$\text{centroid}(X_e(R)) = \frac{\sum_{i=1}^R x_i \underline{\mu}_{\tilde{X}}(x_i) + \sum_{i=R+1}^N x_i \bar{\mu}_{\tilde{X}}(x_i)}{\sum_{i=1}^R \underline{\mu}_{\tilde{X}}(x_i) + \sum_{i=R+1}^N \bar{\mu}_{\tilde{X}}(x_i)}, \quad (3.23)$$

$L \in \mathbb{N}$  é o ponto switch que marca a mudança de  $\bar{\mu}_{\tilde{X}}$  para  $\underline{\mu}_{\tilde{X}}$  e  $R \in \mathbb{N}$  é o ponto switch que marca a mudança de  $\underline{\mu}_{\tilde{X}}$  para  $\bar{\mu}_{\tilde{X}}$ ,  $N \in \mathbb{N}$  é o número de pontos discretos na qual o domínio de  $\tilde{X}$  foi discretizado, como mostra a Figura 3.13.



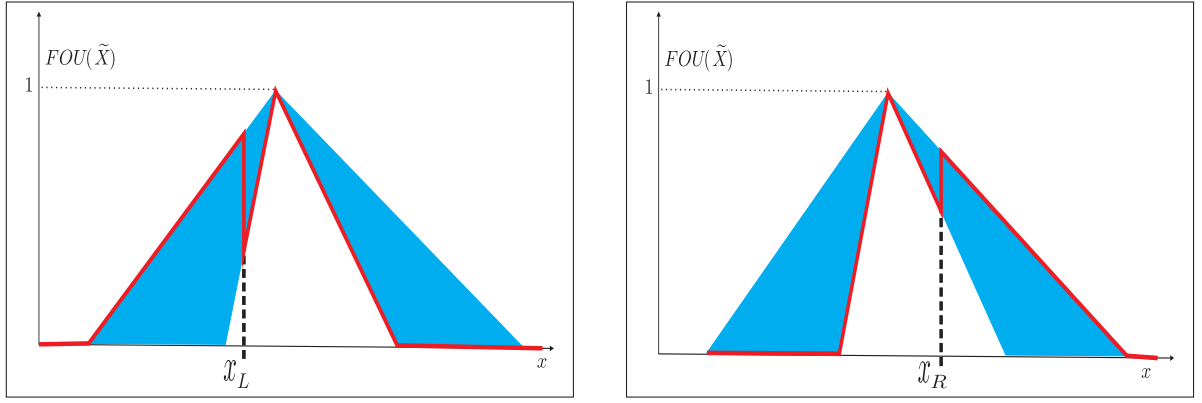


Figura 3.13: Conjunto fuzzy do tipo 1 vermelho imerso na FOU, usado para calcular  $X_e(L)$  e  $X_e(R)$  [17].

#### Algoritmo KM para calcular $y_L$

1. Calcule o ponto inicial  $y'$ :

$$y' = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^N \theta_i},$$

com

$$\theta_i = \frac{\underline{\mu}_{\tilde{X}}(x_i) + \overline{\mu}_{\tilde{X}}(x_i)}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

2. Encontre  $k$  ( $1 \leq k \leq N-1$ ) tal que  $x_k \leq y' \leq x_{k+1}$ .
3. Defina

$$\theta_i = \begin{cases} \overline{\mu}_{\tilde{X}}(x_i) & \text{se } i \leq k, \\ \underline{\mu}_{\tilde{X}}(x_i) & \text{se } i > k, \end{cases}$$

e calcule,

$$y'' = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^N \theta_i}.$$

4. Se  $y' = y''$ , então pare e defina  $y_L = y''$ ,  $L = k$ . Se não, vá para o passo 5.
5. Defina  $y' = y''$  e vá para o passo 2.

#### Algoritmo KM para calcular $y_R$

1. Calcule o ponto inicial  $y'$ :

$$y' = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^N \theta_i},$$

com

$$\theta_i = \frac{\underline{\mu}_{\tilde{X}}(x_i) + \overline{\mu}_{\tilde{X}}(x_i)}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

2. Encontre  $k$  ( $1 \leq k \leq N - 1$ ) tal que  $x_k \leq y' \leq x_{k+1}$ .
3. Defina

$$\theta_i = \begin{cases} \frac{\mu_{\tilde{X}}(x_i)}{\mu_{\tilde{X}}(x_k)} & \text{se } i \leq k, \\ \frac{\mu_{\tilde{X}}(x_i)}{\mu_{\tilde{X}}(x_{k+1})} & \text{se } i > k, \end{cases}$$

e calcule,

$$y'' = \frac{\sum_{i=1}^N x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^N \theta_i}.$$

4. Se  $y' = y''$ , então pare e defina  $y_R = y''$ ,  $R = k$ . Se não, vá para o passo 5.
5. Defina  $y' = y''$  e vá para o passo 2.

Apresentamos o seguinte exemplo, para um melhor entendimento do método de Mamdani para conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar e do Algoritmo de Karnik e Mendel versão discreta.

**Exemplo 3.2** Considere os conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalares, temperatura baixa, alta e os conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalares sensação térmica baixa e alta, como mostra a Figura 3.14. Na Figura 3.14,  $\tilde{X}_1^1$ ,  $\tilde{X}_2^1$ ,  $\tilde{Y}^1$  e  $\tilde{Y}^2$ , representam os conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalares, temperatura baixa, temperatura alta, sensação térmica frio e sensação térmica calor, respectivamente. Considere a regra fuzzy  $R^1$  dada por:

$R^1$  : **Se** a temperatura é alta **então** a sensação térmica é calor.

Seja  $x_1 = 19$  graus centígrados o ponto de entrada, observamos que este ponto intercepta ao conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar temperatura alta em um grau de pertinência inferior e superior que são 0.25 e 1, respectivamente. Como a sensação térmica é calor e os intervalos de ativação inferior e superior são 0.25 e 1, respectivamente, então utilizando o operador  $s$ -norma máximo obtemos a saída como mostra a Figura 3.15.

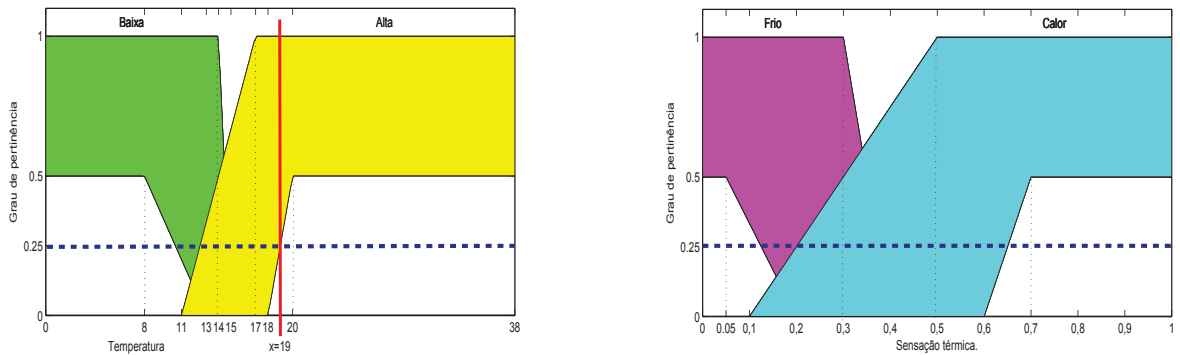


Figura 3.14: Funções de pertinência da temperatura e sensação térmica.

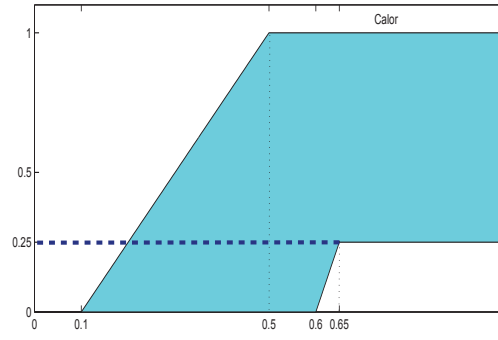


Figura 3.15: Conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar resultante das funções de pertinência temperatura e sensação térmica.

Denomine  $\widetilde{M}$ , o conjunto de saída obtido utilizando SBRF2 Mamdani. Para defuzzificar, este conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar  $\widetilde{M}$ , utilizamos o algoritmo de KM.

- Funções de pertinência para o conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar, temperatura baixa  $\widetilde{X}_1^1$ .

$$\bar{\mu}_{\widetilde{X}_1^1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < 14, \\ 15 - x & \text{se } 14 \leq x < 15, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad \text{e} \quad \underline{\mu}_{\widetilde{X}_1^1}(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{se } 0 \leq x < 8, \\ 1.3 - 0.1x & \text{se } 8 \leq x < 13, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Funções de pertinência para o conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar, temperatura alta  $\widetilde{X}_2^1$ .

$$\bar{\mu}_{\widetilde{X}_2^1}(x) = \begin{cases} \frac{x-11}{6} & \text{se } 11 \leq x < 17, \\ 1 & \text{se } 17 \leq x < 38, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad \text{e} \quad \underline{\mu}_{\widetilde{X}_2^1}(x) = \begin{cases} 0.25(x-18) & \text{se } 18 \leq x < 20, \\ 0.5 & \text{se } 20 \leq x < 38, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Funções de pertinência para o conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar, sensação térmica frio  $\widetilde{Y}^1$ .

$$\bar{\mu}_{\widetilde{Y}^1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < 0.3, \\ 4 - 10x & \text{se } 0.3 \leq x < 0.4, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad \text{e} \quad \underline{\mu}_{\widetilde{Y}^1}(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{se } 0 \leq x < 0.05, \\ \frac{0.1-0.5x}{0.15} & \text{se } 0.05 \leq x < 0.2, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Funções de pertinência para o conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar, sensação térmica calor  $\widetilde{Y}^2$ .

$$\bar{\mu}_{\widetilde{Y}^2}(x) = \begin{cases} 2.5(x-0.1) & \text{se } 0.1 \leq x < 0.5, \\ 1 & \text{se } 0.5 \leq x < 1, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad \text{e} \quad \underline{\mu}_{\widetilde{Y}^2}(x) = \begin{cases} 5x - 3 & \text{se } 0.6 \leq x < 0.7, \\ 0.5 & \text{se } 0.7 \leq x < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para  $x = 19$ , temos:  $\bar{\mu}_{\tilde{X}_2^1}(19) = 1$  e  $\underline{\mu}_{\tilde{X}_2^1}(19) = 0.25$ .

Além disso,  $0.25 = 5x - 3 \Rightarrow 5x = 3.25 \Rightarrow x = 0.65$ .

Assim,

$$\bar{\mu}_{\tilde{M}}(x) = \begin{cases} 2.5(x - 0.1) & \text{se } 0.1 \leq x < 0.5, \\ 1 & \text{se } 0.5 \leq x < 1, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad \text{e} \quad \underline{\mu}_{\tilde{M}}(x) = \begin{cases} 5x - 3 & \text{se } 0.6 \leq x < 0.65, \\ 0.25 & \text{se } 0.65 \leq x < 1, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Discretizando o domínio  $[0.1, 1]$  em  $N = 10$  pontos, tem-se  $\Delta x = \frac{1 - 0.1}{10 - 1} = \frac{0.9}{9} = 0.1$ .

A Tabela 3.4, apresenta os graus de pertinência inferior e superior do conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar  $\tilde{M}$ .

i	$x_i$	$\underline{\mu}_{\tilde{M}}(x_i)$	$\bar{\mu}_{\tilde{M}}(x_i)$
1	0.1	0	0
2	0.2	0	0.25
3	0.3	0	0.5
4	0.4	0	0.75
5	0.5	0	1
6	0.6	0	1
7	0.7	0.25	1
8	0.8	0.25	1
9	0.9	0.25	1
10	1	0.25	1

Tabela 3.4: Graus de pertinência inferior e superior do conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar  $\tilde{M}$ .

Aplicando o **Algoritmo de KM para calcular**,  $y_L$ .

a) Defina,  $\theta_i = \frac{\underline{\mu}_{\tilde{M}}(x_i) + \bar{\mu}_{\tilde{M}}(x_i)}{2}$ ,  $i = 1, \dots, 10$ . Então,

- $\theta_1 = \frac{\underline{\mu}_{\tilde{M}}(x_1) + \bar{\mu}_{\tilde{M}}(x_1)}{2} = \frac{0 + 0}{2} = 0;$
- $\theta_2 = \frac{\underline{\mu}_{\tilde{M}}(x_2) + \bar{\mu}_{\tilde{M}}(x_2)}{2} = \frac{0 + 0.25}{2} = \frac{0.25}{2} = 0.125;$
- $\theta_3 = \frac{\underline{\mu}_{\tilde{M}}(x_3) + \bar{\mu}_{\tilde{M}}(x_3)}{2} = \frac{0 + 0.5}{2} = \frac{0.5}{2} = 0.25;$
- $\theta_4 = \frac{\underline{\mu}_{\tilde{M}}(x_4) + \bar{\mu}_{\tilde{M}}(x_4)}{2} = \frac{0 + 0.75}{2} = \frac{0.75}{2} = 0.375;$
- $\theta_5 = \frac{\underline{\mu}_{\tilde{M}}(x_5) + \bar{\mu}_{\tilde{M}}(x_5)}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2} = 0.5;$
- $\theta_6 = \frac{\underline{\mu}_{\tilde{M}}(x_6) + \bar{\mu}_{\tilde{M}}(x_6)}{2} = \frac{0 + 1}{2} = \frac{1}{2} = 0.5;$
- $\theta_7 = \frac{\underline{\mu}_{\tilde{M}}(x_7) + \bar{\mu}_{\tilde{M}}(x_7)}{2} = \frac{0.25 + 1}{2} = \frac{1.25}{2} = 0.625;$

- $\theta_8 = \frac{\mu_{\widetilde{M}}(x_8) + \bar{\mu}_{\widetilde{M}}(x_8)}{2} = \frac{0.25 + 1}{2} = \frac{1.25}{2} = 0.625;$
- $\theta_9 = \frac{\mu_{\widetilde{M}}(x_9) + \bar{\mu}_{\widetilde{M}}(x_9)}{2} = \frac{0.25 + 1}{2} = \frac{1.25}{2} = 0.625;$
- $\theta_{10} = \frac{\mu_{\widetilde{M}}(x_{10}) + \bar{\mu}_{\widetilde{M}}(x_{10})}{2} = \frac{0.25 + 1}{2} = \frac{1.25}{2} = 0.625.$

b) Calcule o ponto inicial,  $c^1 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^{10} \theta_i}$ , ou seja,

- $\sum_{i=1}^{10} x_i \theta_i = 0.1(0) + 0.2(0.125) + 0.3(0.25) + 0.4(0.375) + 0.5(0.5) + 0.6(0.5) +$   
 $0.7(0.625) + 0.9(0.625) + 1(0.625) = 2.925,$

- $\sum_{i=1}^{10} \theta_i = 4.25.$

$$\text{Então, } c^1 = \frac{2.925}{4.25} = 0.688235294.$$

c) Encontre  $k$  ( $1 \leq k \leq 9$ ) tal que  $x_k \leq c^1 \leq x_{k+1}$ . Para  $k = 6$ , tem-se que  $x_6 < c^1 < x_7$ , isto é,  $(0.6 < c^1 < 0.7)$ .

d) Defina  $\theta_i = \begin{cases} \bar{\mu}_{\widetilde{M}}(x_i) & \text{se } i \leq 6, \\ \mu_{\widetilde{M}}(x_i) & \text{se } i > 6, \end{cases}$

e calcule,  $c^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^{10} \theta_i}$ , ou seja,

- $\sum_{i=1}^{10} x_i \theta_i = 0.1(0) + 0.2(0.25) + 0.3(0.5) + 0.4(0.75) + 0.5(1) + 0.6(1) + 0.7(0.25) +$   
 $0.8(0.25) + 0.9(0.25) + 1(0.25) = 2.45,$

- $\sum_{i=1}^{10} \theta_i = 4.5.$

$$\text{Então, } c^2 = \frac{2.45}{4.5} = 0.544.$$

e) Como  $c^2 \neq c^1$  então continue o processo.

f) Encontre  $k$  ( $1 \leq k \leq 9$ ) tal que  $x_k \leq c^2 \leq x_{k+1}$ . Para  $k = 5$ , tem-se que  $x_5 < c^2 < x_6$ , isto é,  $(0.5 < c^2 < 0.6)$ .

Defina  $\theta_i = \begin{cases} \bar{\mu}_{\widetilde{M}}(x_i) & \text{se } i \leq 5, \\ \mu_{\widetilde{M}}(x_i) & \text{se } i > 5, \end{cases}$

e calcule,  $c^3 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^{10} \theta_i}$ , ou seja,

- $\sum_{i=1}^{10} x_i \theta_i = 0.1(0) + 0.2(0.25) + 0.3(0.5) + 0.4(0.75) + 0.5(1) + 0.6(0) + 0.7(0.25) + 0.8(0.25) + 0.9(0.25) + 1(0.25) = 1.85,$
  - $\sum_{i=1}^{10} \theta_i = 3.5.$
- Então,  $c^3 = \frac{1.85}{3.5} = 0.528571428.$

Como  $c^3 \neq c^2$  então continue o processo. Defina  $c^2 = c^3.$

Encontre  $k$  ( $1 \leq k \leq 9$ ) tal que  $x_k \leq c^3 \leq x_{k+1}$ . Para  $k = 5$ , tem-se que  $x_5 < c^3 < x_6$ , isto é,  $(0.5 < c^3 < 0.6).$

Defina,  $\theta_i = \begin{cases} \bar{\mu}_{\widetilde{M}}(x_i) & \text{se } i \leq 5, \\ \underline{\mu}_{\widetilde{M}}(x_i) & \text{se } i > 5, \end{cases}$

e calcule,  $c^4 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^{10} \theta_i}$ , ou seja,

- $\sum_{i=1}^{10} x_i \theta_i = 1.85,$
  - $\sum_{i=1}^{10} \theta_i = 3.5.$
- Então,  $c^4 = \frac{1.85}{3.5} = 0.528571428.$

Como  $c^3 = c^4$ , pare o processo.

Portanto,  $y_L = 0.528571428$  e  $L = 5.$

Agora aplique o **algoritmo KM para calcular**  $y_R.$

a) Defina,  $\theta_i = \frac{\mu_{\widetilde{M}}(x_i) + \bar{\mu}_{\widetilde{M}}(x_i)}{2}$ ,  $i = 1, \dots, 10$ . Os valores  $\theta_i, i = 1, \dots, 10$ , foram encontrados anteriormente.

b) Calcule o ponto inicial,  $c^1 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^{10} \theta_i}.$

Este valor foi calculado anteriormente,  $c^1 = 0.688235294.$

c) Encontre  $k$  ( $1 \leq k \leq 9$ ) tal que  $x_k \leq c^1 \leq x_{k+1}$ . Para  $k = 6$ , tem-se que  $x_6 < c^1 < x_7$ , isto é,  $(0.6 < c^1 < 0.7)$

d) Defina  $\theta_i = \begin{cases} \mu_{\widetilde{M}}(x_i) & \text{se } i \leq 6, \\ \bar{\mu}_{\widetilde{M}}(x_i) & \text{se } i > 6, \end{cases}$

e calcule,  $c^2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^{10} \theta_i}$ , ou seja,

- $\sum_{i=1}^{10} x_i \theta_i = 0.7(1) + 0.8(1) + 0.9(1) + 1(1) = 3.4,$
- $\sum_{i=1}^{10} \theta_i = 4.$

Então,  $c^2 = \frac{3.4}{4} = 0.85.$

e) Como  $c^2 \neq c^1$  então continue o processo. Defina,  $c^1 = c^2.$

f) Encontre  $k$  ( $1 \leq k \leq 9$ ) tal que  $x_k \leq c^2 \leq x_{k+1}$ . Para  $k = 8$ , tem-se que  $x_8 < c^2 < x_9$ , isto é,  $(0.8 < c^2 < 0.9)$

Defina  $\theta_i = \begin{cases} \underline{\mu}_{\widetilde{M}}(x_i) & \text{se } i \leq 8, \\ \underline{\mu}_{\widetilde{M}}(x_i) & \text{se } i > 8, \end{cases}$

e calcule,  $c^3 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^{10} \theta_i}$ , ou seja,

- $\sum_{i=1}^{10} x_i \theta_i = 0.7(0.25) + 0.8(0.25) + 0.9(1) + 1(1) = 2.275,$
- $\sum_{i=1}^{10} \theta_i = 2.5.$

Então,  $c^3 = \frac{2.275}{2.5} = 0.91.$

Como  $c^3 \neq c^2$ , então continue o processo. Defina  $c^2 = c^3.$

Encontre  $k$  ( $1 \leq k \leq 9$ ) tal que  $x_k \leq c^3 \leq x_{k+1}$ . Para  $k = 9$ , tem-se que  $x_9 < c^3 < x_{10}$ , isto é,  $(0.9 < c^3 < 1).$

Defina,  $\theta_i = \begin{cases} \underline{\mu}_{\widetilde{M}}(x_i) & \text{se } i \leq 9, \\ \underline{\mu}_{\widetilde{M}}(x_i) & \text{se } i > 9, \end{cases}$

e calcule,  $c^4 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^{10} \theta_i}$ , ou seja,

- $\sum_{i=1}^{10} x_i \theta_i = 0.7(0.25) + 0.8(0.25) + 0.9(0.25) + 1(1) = 1.6,$
- $\sum_{i=1}^{10} \theta_i = 1.75.$

Então,  $c^4 = \frac{1.6}{1.75} = 0.914285714.$

Como  $c^4 \neq c^3$  então continue o processo. Defina  $c^3 = c^4$ .

Encontre  $k$  ( $1 \leq k \leq 9$ ) tal que  $x_k \leq c^4 \leq x_{k+1}$ . Para  $k = 9$ , tem-se que  $x_9 < c^4 < x_{10}$ , isto é,  $0.9 < c^3 < 1$ .

Defina  $\theta_i = \begin{cases} \underline{\mu}_{\widetilde{M}}(x_i) & \text{se } i \leq 9, \\ \overline{\mu}_{\widetilde{M}}(x_i) & \text{se } i > 9, \end{cases}$

e calcule,  $c^5 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^{10} \theta_i}$ , ou seja,

- $\sum_{i=1}^{10} x_i \theta_i = 1.6$ ,
- $\sum_{i=1}^{10} \theta_i = 1.75$ .

Então,  $c^5 = \frac{1.6}{1.75} = 0.914285714$ .

Como  $c^4 = c^5$ , pare o processo.

Assim,  $y_R = 0.914285714$  e  $R = 9$ .

Portanto, o valor defuzzificado é dado por:

$$y(x) = \frac{y_L + y_R}{2} = \frac{0.528571428 + 0.914285714}{2} = 0.721428571.$$

Os valores obtidos, para  $y_L$ ,  $y_R$  e  $y$  são iguais aos valores obtidos pelo programa computacional apresentados no Anexo 1 [5].

O algoritmo de KM foi estudado em forma teórica e experimental, a fim de melhorar o seu desempenho em aplicações [5]. Este algoritmo permite calcular o centroide (se existir), que é um intervalo fechado, de um conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar. Apresentamos na próxima seção a versão contínua do centroide de um conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar.

### 3.6 Versão Contínua do Centróide

Dado um conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar  $\widetilde{X}$ , seu centroide (se existir) é um intervalo fechado, isto é,

$$c(\widetilde{X}) = [y_L, y_R],$$

onde,  $y_L$  e  $y_R$  são o mínimo e o máximo respectivamente de todos os centroides dos conjuntos fuzzy tipo 1 incorporados na mancha de incerteza FOU de  $\widetilde{X}$ .

Mendel, em alguns trabalhos define versão contínua de  $y_L$  e  $y_R$  de um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar  $\widetilde{X}$  como:

$$y_L = \min_{L \in \mathbb{R}} \text{centroid}(X_e(L)), \quad (3.24)$$

$$y_R = \max_{R \in \mathbb{R}} \text{centroid}(X_e(R)), \quad (3.25)$$



onde:

$$\begin{aligned} centroid(X_e(L)) &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x \mu_{X_e(L)}(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{X_e(L)}(x) dx} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^L x \bar{\mu}_{\tilde{X}}(x) dx + \int_L^{+\infty} x \underline{\mu}_{\tilde{X}}(x) dx}{\int_{-\infty}^L \bar{\mu}_{\tilde{X}}(x) dx + \int_L^{+\infty} \underline{\mu}_{\tilde{X}}(x) dx}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} centroid(X_e(R)) &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x \mu_{X_e(R)}(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_{X_e(R)}(x) dx} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^R x \underline{\mu}_{\tilde{X}}(x) dx + \int_R^{+\infty} x \bar{\mu}_{\tilde{X}}(x) dx}{\int_{-\infty}^R \underline{\mu}_{\tilde{X}}(x) dx + \int_R^{+\infty} \bar{\mu}_{\tilde{X}}(x) dx}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

onde,  $X_e(L)$  e  $X_e(R)$  denotam conjuntos fuzzy do tipo 1 para os quais:

$$\mu_{X_e(L)}(x) = \begin{cases} \bar{\mu}_{\tilde{X}}(x) & \text{se } x \leq L, \\ \underline{\mu}_{\tilde{X}}(x) & \text{se } x > L, \end{cases} \quad e \quad \mu_{X_e(R)}(x) = \begin{cases} \underline{\mu}_{\tilde{X}}(x) & \text{se } x \leq R, \\ \bar{\mu}_{\tilde{X}}(x) & \text{se } x > R. \end{cases}$$

De acordo com Mendel,  $L, R \in X$  são os pontos switch, ou seja, os valores de  $x$  em que  $\mu_{X_e(L)}$  e  $\mu_{X_e(R)}$  mudam de  $\bar{\mu}_{\tilde{X}}(x)$  para  $\underline{\mu}_{\tilde{X}}(x)$  (ou vice-versa).

### 3.6.1 Não existência do centroide

Existem alguns conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalares, para os quais (3.26) e (3.27) não existem no sentido de que os valores não são finitos. Um exemplo é o seguinte:

**Exemplo 3.3** *Seja  $\tilde{X}$  um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar, definida sobre os números reais  $\mathbb{R}$ , com funções de pertinência inferior e superior definidas por:*

$$\underline{\mu}_{\tilde{X}}(x) = \frac{1}{2(1+x^2)} \quad e \quad \bar{\mu}_{\tilde{X}}(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

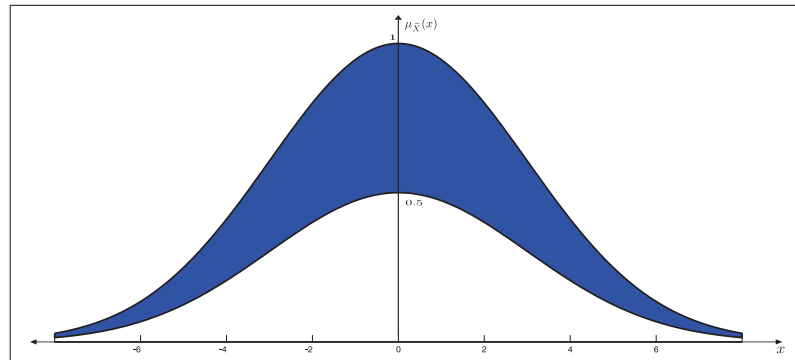


Figura 3.16: Função de pertinência de um conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar que não tem centroide [28].

Dado  $L$ , temos que

$$\begin{aligned}
 centroid(X_e(L)) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-t}^L x \bar{\mu}_{\tilde{X}}(x) dx + \int_L^t x \underline{\mu}_{\tilde{X}}(x) dx}{\int_{-t}^L \bar{\mu}_{\tilde{X}}(x) dx + \int_L^t \underline{\mu}_{\tilde{X}}(x) dx} \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-t}^L \frac{x}{1+x^2} dx + \frac{1}{2} \int_L^t \frac{x}{1+x^2} dx}{\int_{-t}^L \frac{1}{1+x^2} dx + \frac{1}{2} \int_L^t \frac{1}{1+x^2} dx}.
 \end{aligned}$$

Por outro lado;

$$\begin{aligned}
 \bullet \int_{-t}^L \frac{1}{1+x^2} dx + \frac{1}{2} \int_L^t \frac{1}{1+x^2} dx &= [\arctan x]_{-t}^L + \frac{1}{2} [\arctan x]_L^t = \frac{1}{2} \arctan L + \frac{3}{2} \arctan t. \\
 \bullet \int_{-t}^L \frac{x}{1+x^2} dx + \frac{1}{2} \int_L^t \frac{x}{1+x^2} dx &= \frac{1}{4} \ln \left( \frac{1+L^2}{1+t^2} \right).
 \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } centroid(X_e(L)) = \frac{\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \ln \left( \frac{1+L^2}{1+t^2} \right)}{\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \arctan L + \frac{3}{2} \arctan t} = -\infty.$$

Dado  $R$ , temos que;

$$\begin{aligned}
 centroid(X_e(R)) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\int_{-t}^R x \underline{\mu}_{\tilde{X}}(x) dx + \int_R^t x \bar{\mu}_{\tilde{X}}(x) dx}{\int_{-t}^R \underline{\mu}_{\tilde{X}}(x) dx + \int_R^t \bar{\mu}_{\tilde{X}}(x) dx} \\
 &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2} \int_{-t}^R \frac{x}{1+x^2} dx + \int_R^t \frac{x}{1+x^2} dx}{\frac{1}{2} \int_{-t}^R \frac{1}{1+x^2} dx + \int_R^t \frac{1}{1+x^2} dx}.
 \end{aligned}$$

Por outro lado;

$$\bullet \frac{1}{2} \int_{-t}^R \frac{1}{1+x^2} dx + \int_R^t \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} [\arctan x]_{-t}^R + [\arctan x]_R^t = -\frac{1}{2} \arctan R + \frac{3}{2} \arctan t.$$

$$\bullet \quad \frac{1}{2} \int_{-t}^R \frac{x}{1+x^2} dx + \int_R^t \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{4} \ln \left( \frac{1+t^2}{1+R^2} \right).$$

$$\text{Assim, } centroid(X_e(R)) = \frac{\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{4} \ln \left( \frac{1+t^2}{1+R^2} \right)}{\lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2} \arctan R + \frac{3}{2} \arctan t} = +\infty.$$

Como  $centroid(X_e(L))$  e  $centroid(X_e(R))$  não são finitos, pois as integrais impróprias são divergentes, então o centroide do conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar não existe.

### Algoritmo de KM para calcular $y_L$ .

1. Calcule o valor inicial  $y_0$ , para  $y_L$  como:

$$\begin{aligned} y_0 &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x \left( \frac{\bar{\mu}_{\tilde{X}}(x) + \underline{\mu}_{\tilde{X}}(x)}{2} \right) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{\mu}_{\tilde{X}}(x) + \underline{\mu}_{\tilde{X}}(x)}{2} dx} \\ &= \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x (\bar{\mu}_{\tilde{X}}(x) + \underline{\mu}_{\tilde{X}}(x)) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} (\bar{\mu}_{\tilde{X}}(x) + \underline{\mu}_{\tilde{X}}(x)) dx}, \end{aligned}$$

defina  $j = 1$  e  $L_1 = y_0$ .

2. Calcule o centroide  $X_e(L)$ , da seguinte forma:

$$centroid(X_e(L_j)) = \frac{\int_{-\infty}^{L_j} x \bar{\mu}_{\tilde{X}}(x) dx + \int_{L_j}^{+\infty} x \underline{\mu}_{\tilde{X}}(x) dx}{\int_{-\infty}^{L_j} \bar{\mu}_{\tilde{X}}(x) dx + \int_{L_j}^{+\infty} \underline{\mu}_{\tilde{X}}(x) dx}.$$

3. Se tiver ocorrido convergência, pare. Caso contrário, vá para o passo 4.

4. Defina

$$L_{j+1} = centroid(X_e(L_j)).$$

5. Defina  $j = j + 1$  e vá para o passo 2.

No próximo capítulo, estudamos a taxa de retorno de um grupo de indivíduos HIV positivos sintomáticos para assintomáticos, utilizando conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar.

## Capítulo 4

### Modelo Fuzzy do Tipo 2 Intervalar

No capítulo 2 estimamos a taxa de retorno de um grupo de indivíduos HIV positivos sintomáticos para assintomáticos, utilizando o sistema de equações diferenciais (2.1) com a taxa de retorno obtida através de um SBRF do tipo 1. Neste capítulo a taxa de retorno de um grupo de indivíduos HIV positivos sintomáticos para assintomáticos é obtida através de um SBRF do tipo 2. A equação é dada por:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \gamma(v, c)y = \gamma(v, c)(1 - x) & x(0) = 0, \\ \frac{dy}{dt} = -\gamma(v, c)y & y(0) = 1, \end{cases} \quad (4.1)$$

onde,  $x = x(t)$  é a proporção da população assintomática, no instante  $t$ ,  $y = y(t)$  é a proporção da população sintomática, no instante  $t$  e  $\gamma$  é a taxa de retorno da população sintomática para assintomática, que depende das variáveis carga viral ( $v$ ) e nível de CD4+ ( $c$ ), obtida através do SBRF2.

Na seção 4.1 apresentamos os cálculos da taxa de retorno quando as variáveis de entrada carga viral e nível de CD4+ são conjuntos fuzzy do tipo 2 trapezoidal e a variável de saída taxa de retorno é um número real e na seção 4.2 a variável de saída é “singleton”. A Figura 4.1, mostra as variáveis de entrada do SBRF2.

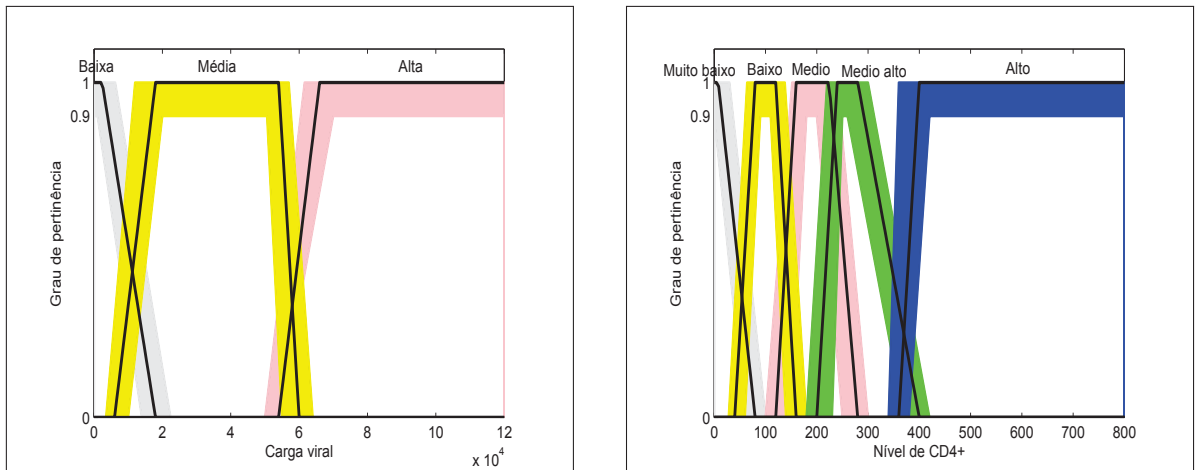


Figura 4.1: Funções de pertinência carga viral e nível de CD4+.

## 4.1 Modelo Fuzzy do Tipo 2 para um Grupo de Indivíduos HIV Positivos com Saída Real

De forma análoga ao modelo fuzzy do tipo 1 para um grupo de indivíduos HIV positivos, realizamos um estudo para estimar a taxa de retorno. Neste estudo utilizamos os dados de carga viral média e nível de CD4+ médio de dez pacientes em cada instante de tempo, tomando como tempo inicial  $t = 0$  (meses) e tempo final  $t = 72$  (meses), os exames forem realizados em intervalos de tempos diferentes. Agora, realizamos o estudo utilizando conjuntos fuzzy do tipo 2 trapezoidal, para as variáveis de entrada como mostra a Figura 4.1, base de regras fuzzy e consequentes de SBRF2 com saída dada por um número real como mostram as Tabelas 4.1 e 4.2 respectivamente.

Para defuzzificar os valores de carga viral média e nível de CD4+ médio, utilizamos os algoritmos de defuzzificação propostos por Karnik e Mendel. No Exemplo 4.1, mostramos como calcular o valor defuzzificado do vetor  $x' = (2391, 241.5)$  obtendo como resultado  $y(x') = 0.4473$ , estes cálculos demandam muito tempo.

**Exemplo 4.1** *Apresentamos no seguinte exemplo como defuzzificar o vetor de entrada  $x' = (x'_1, x'_2) = (2391, 241.5)$ , utilizando o algoritmo KM. A primeira coordenada  $x'_1 = 2391$  representa a carga viral média de 10 pacientes no instante de tempo  $t = 3$ (meses) e a segunda coordenada  $x'_2 = 241.5$  representa o nível de CD4+ médio no mesmo instante de tempo.*

A Tabela 4.1 apresenta as 15 regras fuzzy utilizadas para modelar a taxa de retorno com saída dada por um número real, onde:

- $\tilde{X}_1^1$  : Conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar carga viral baixa;
- $\tilde{X}_1^2$  : Conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar carga viral média;
- $\tilde{X}_1^3$  : Conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar carga viral alta;
- $\tilde{X}_2^1$  : Conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar nível de CD4+ muito baixo;
- $\tilde{X}_2^2$  : Conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar nível de CD4+ baixo;
- $\tilde{X}_2^3$  : Conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar nível de CD4+ médio;
- $\tilde{X}_2^4$  : Conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar nível de CD4+ médio alto;
- $\tilde{X}_2^5$  : Conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar nível de CD4+ alto.

$R^1$	: Se $x'_1$ é $\tilde{X}_1^1$ e $x'_2$ é $\tilde{X}_2^1$ então y é $Y^1$
$R^2$	: Se $x'_1$ é $\tilde{X}_1^1$ e $x'_2$ é $\tilde{X}_2^2$ então y é $Y^2$
$R^3$	: Se $x'_1$ é $\tilde{X}_1^1$ e $x'_2$ é $\tilde{X}_2^3$ então y é $Y^3$
$R^4$	: Se $x'_1$ é $\tilde{X}_1^1$ e $x'_2$ é $\tilde{X}_2^4$ então y é $Y^4$
$R^5$	: Se $x'_1$ é $\tilde{X}_1^1$ e $x'_2$ é $\tilde{X}_2^5$ então y é $Y^5$
$R^6$	: Se $x'_1$ é $\tilde{X}_1^2$ e $x'_2$ é $\tilde{X}_2^1$ então y é $Y^6$
$R^7$	: Se $x'_1$ é $\tilde{X}_1^2$ e $x'_2$ é $\tilde{X}_2^2$ então y é $Y^7$
$R^8$	: Se $x'_1$ é $\tilde{X}_1^2$ e $x'_2$ é $\tilde{X}_2^3$ então y é $Y^8$
$R^9$	: Se $x'_1$ é $\tilde{X}_1^2$ e $x'_2$ é $\tilde{X}_2^4$ então y é $Y^9$
$R^{10}$	: Se $x'_1$ é $\tilde{X}_1^2$ e $x'_2$ é $\tilde{X}_2^5$ então y é $Y^{10}$
$R^{11}$	: Se $x'_1$ é $\tilde{X}_1^3$ e $x'_2$ é $\tilde{X}_2^1$ então y é $Y^{11}$
$R^{12}$	: Se $x'_1$ é $\tilde{X}_1^3$ e $x'_2$ é $\tilde{X}_2^2$ então y é $Y^{12}$
$R^{13}$	: Se $x'_1$ é $\tilde{X}_1^3$ e $x'_2$ é $\tilde{X}_2^3$ então y é $Y^{13}$
$R^{14}$	: Se $x'_1$ é $\tilde{X}_1^3$ e $x'_2$ é $\tilde{X}_2^4$ então y é $Y^{14}$
$R^{15}$	: Se $x'_1$ é $\tilde{X}_1^3$ e $x'_2$ é $\tilde{X}_2^5$ então y é $Y^{15}$

Tabela 4.1: Base de regras fuzzy da taxa de retorno.

$x'_1 \backslash x'_2$	$\tilde{X}_2^1$	$\tilde{X}_2^2$	$\tilde{X}_2^3$	$\tilde{X}_2^4$	$\tilde{X}_2^5$
$\tilde{X}_1^1$	$Y^1 = 0$	$Y^2 = 0.15$	$Y^3 = 0.15$	$Y^4 = 0.65$	$Y^5 = 1$
$\tilde{X}_1^2$	$Y^6 = 0$	$Y^7 = 0$	$Y^8 = 0.15$	$Y^9 = 0.65$	$Y^{10} = 0.65$
$\tilde{X}_1^3$	$Y^{11} = 0$	$Y^{12} = 0$	$Y^{13} = 0.15$	$Y^{14} = 0.15$	$Y^{15} = 0.65$

Tabela 4.2: Consequentes de SBRF2 com saída dada por um número real.

Determine, as funções de pertinência para cada um dos conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar, da carga viral.

- Funções de pertinência para o conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar, carga viral baixa  $\tilde{X}_1^1$ .

$$\bar{\mu}_{\tilde{X}_1^1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < 6200, \\ \frac{-x+22400}{16200} & \text{se } 6200 \leq x < 22400, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \text{ e } \underline{\mu}_{\tilde{X}_1^1}(x) = \begin{cases} 0.9 & \text{se } 0 \leq x < 1000, \\ \frac{-0.9x+12600}{13000} & \text{se } 1000 \leq x < 14000, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Funções de pertinência para o conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar, carga viral média  $\tilde{X}_1^2$ .

$$\bar{\mu}_{\tilde{X}_1^2}(x) = \begin{cases} \frac{x-3500}{8500} & \text{se } 3500 \leq x < 12000, \\ 1 & \text{se } 12000 \leq x < 57000, \\ \frac{-x+64000}{7000} & \text{se } 57000 \leq x < 64000, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \text{ e } \underline{\mu}_{\tilde{X}_1^2}(x) = \begin{cases} \frac{0.9x-9000}{1000} & \text{se } 10000 \leq x < 20000, \\ 0.9 & \text{se } 20000 \leq x < 50600, \\ \frac{-0.9x+49500}{4400} & \text{se } 50600 \leq x < 55000, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Funções de pertinência para o conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar, carga viral alta  $\tilde{X}_1^3$ .

$$\bar{\mu}_{\tilde{X}_1^3}(x) = \begin{cases} \frac{x-50000}{11600} & \text{se } 50000 \leq x < 61600, \\ 1 & \text{se } 61600 \leq x < 120000, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad \text{e} \quad \underline{\mu}_{\tilde{X}_1^3}(x) = \begin{cases} \frac{0.9x-48600}{16000} & \text{se } 54000 \leq x < 70000, \\ 0.9 & \text{se } 70000 \leq x < 120000, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Determine, as funções de pertinência para cada um dos conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar, nível de CD4+.

- Funções de pertinência para o conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar, nível de CD4+ muito baixo  $\tilde{X}_2^1$ .

$$\bar{\mu}_{\tilde{X}_2^1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 \leq x < 30, \\ \frac{-x+100}{70} & \text{se } 30 \leq x < 100, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad \text{e} \quad \underline{\mu}_{\tilde{X}_2^1}(x) = \begin{cases} \frac{-0.9x+54}{60} & \text{se } 0 \leq x < 60, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Funções de pertinência para o conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar, nível de CD4+ baixo  $\tilde{X}_2^2$ .

$$\bar{\mu}_{\tilde{X}_2^2}(x) = \begin{cases} \frac{x-28}{36} & \text{se } 28 \leq x < 64, \\ 1 & \text{se } 64 \leq x < 138, \\ \frac{-x+180}{42} & \text{se } 138 \leq x < 180, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad \text{e} \quad \underline{\mu}_{\tilde{X}_2^2}(x) = \begin{cases} \frac{0.9x-54}{30} & \text{se } 60 \leq x < 90, \\ 0.9 & \text{se } 90 \leq x < 110, \\ \frac{-0.9x+126}{30} & \text{se } 110 \leq x < 140, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Funções de pertinência para o conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar, nível de CD4+ médio  $\tilde{X}_2^3$ .

$$\bar{\mu}_{\tilde{X}_2^3}(x) = \begin{cases} \frac{x-100}{52} & \text{se } 100 \leq x < 152, \\ 1 & \text{se } 152 \leq x < 240, \\ \frac{-x+300}{60} & \text{se } 240 \leq x < 300, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad \text{e} \quad \underline{\mu}_{\tilde{X}_2^3}(x) = \begin{cases} \frac{0.9x-135}{30} & \text{se } 150 \leq x < 180, \\ 0.9 & \text{se } 180 \leq x < 200, \\ \frac{-0.9x+225}{50} & \text{se } 200 \leq x < 250, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Funções de pertinência para o conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar, nível de CD4+ médio alto  $\tilde{X}_2^4$ .

$$\bar{\mu}_{\tilde{X}_2^4}(x) = \begin{cases} \frac{x-180}{40} & \text{se } 180 \leq x < 220, \\ 1 & \text{se } 220 \leq x < 300, \\ \frac{-x+420}{120} & \text{se } 300 \leq x < 420, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad \text{e} \quad \underline{\mu}_{\tilde{X}_2^4}(x) = \begin{cases} \frac{0.9x-207}{20} & \text{se } 230 \leq x < 250, \\ 0.9 & \text{se } 250 \leq x < 260, \\ \frac{-0.9x+333}{110} & \text{se } 260 \leq x < 370, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- Funções de pertinência para o conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar, nível de CD4+ alto  $\tilde{X}_2^5$ .

$$\bar{\mu}_{\tilde{X}_2^5}(x) = \begin{cases} \frac{x-340}{20} & \text{se } 340 \leq x < 360, \\ 1 & \text{se } 360 \leq x < 800, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad \text{e} \quad \underline{\mu}_{\tilde{X}_2^5}(x) = \begin{cases} \frac{0.9x-342}{40} & \text{se } 380 \leq x < 420, \\ 0.9 & \text{se } 420 \leq x < 800, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Calcule os intervalos iniciais, dos oito conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar, como segue.

$$[\underline{\mu}_{\tilde{X}_1^1}(x'_1), \bar{\mu}_{\tilde{X}_1^1}(x'_1)] = [\underline{\mu}_{\tilde{X}_1^1}(2391), \bar{\mu}_{\tilde{X}_1^1}(2391)] = [0.8037, 1];$$

$$[\underline{\mu}_{\tilde{X}_1^2}(x'_1), \bar{\mu}_{\tilde{X}_1^2}(x'_1)] = [\underline{\mu}_{\tilde{X}_1^2}(2391), \bar{\mu}_{\tilde{X}_1^2}(2391)] = [0, 0];$$

$$[\underline{\mu}_{\tilde{X}_1^3}(x'_1), \bar{\mu}_{\tilde{X}_1^3}(x'_1)] = [\underline{\mu}_{\tilde{X}_1^3}(2391), \bar{\mu}_{\tilde{X}_1^3}(2391)] = [0, 0];$$

$$[\underline{\mu}_{\tilde{X}_2^1}(x'_2), \bar{\mu}_{\tilde{X}_2^1}(x'_2)] = [\underline{\mu}_{\tilde{X}_2^1}(241.5), \bar{\mu}_{\tilde{X}_2^1}(241.5)] = [0, 0];$$

$$[\underline{\mu}_{\tilde{X}_2^2}(x'_2), \bar{\mu}_{\tilde{X}_2^2}(x'_2)] = [\underline{\mu}_{\tilde{X}_2^2}(241.5), \bar{\mu}_{\tilde{X}_2^2}(241.5)] = [0, 0];$$

$$[\underline{\mu}_{\tilde{X}_2^3}(x'_2), \bar{\mu}_{\tilde{X}_2^3}(x'_2)] = [\underline{\mu}_{\tilde{X}_2^3}(241.5), \bar{\mu}_{\tilde{X}_2^3}(241.5)] = [0.153, 0.975];$$

$$[\underline{\mu}_{\tilde{X}_2^4}(x'_2), \bar{\mu}_{\tilde{X}_2^4}(x'_2)] = [\underline{\mu}_{\tilde{X}_2^4}(241.5), \bar{\mu}_{\tilde{X}_2^4}(241.5)] = [0.5175, 1];$$

$$[\underline{\mu}_{\tilde{X}_2^5}(x'_2), \bar{\mu}_{\tilde{X}_2^5}(x'_2)] = [\underline{\mu}_{\tilde{X}_2^5}(241.5), \bar{\mu}_{\tilde{X}_2^5}(241.5)] = [0, 0].$$

A Tabela 4.3 apresenta os intervalos iniciais das quinze regras fuzzy da taxa de retorno e os consequentes, com saída real, pois neste exemplo,  $\underline{y}^i = \bar{y}^i, i = 1, \dots, 15$ .

Aplique o **algoritmo KM, para calcular**  $y_L$ .

**a)** Ordene os  $\underline{y}^n, n = 1, \dots, 15$  e proceda a renomeá-los como  $\underline{y}_n, n = 1, \dots, 15$  tal que:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc} \underline{y}^1 & \leq & \underline{y}^6 & \leq & \underline{y}^7 & \leq & \underline{y}^{11} & \leq & \underline{y}^{12} & < & \underline{y}^2 & \leq & \underline{y}^3 & \leq & \underline{y}^8 & \leq & \underline{y}^{13} & \leq & \underline{y}^{14} & < & \underline{y}^4 & \leq & \underline{y}^9 & \leq & \underline{y}^{10} & \leq & \underline{y}^{15} & < & \underline{y}^5 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \leq & 0 & \leq & 0 & \leq & 0 & \leq & 0 & < & 0.15 & \leq & 0.15 & \leq & 0.15 & \leq & 0.15 & \leq & 0.15 & < & 0.65 & \leq & 0.65 & \leq & 0.65 & \leq & 0.65 & < & 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \underline{y}_1 & \leq & \underline{y}_2 & \leq & \underline{y}_3 & \leq & \underline{y}_4 & \leq & \underline{y}_5 & < & \underline{y}_6 & \leq & \underline{y}_7 & \leq & \underline{y}_8 & \leq & \underline{y}_9 & \leq & \underline{y}_{10} & < & \underline{y}_{11} & \leq & \underline{y}_{12} & \leq & \underline{y}_{13} & \leq & \underline{y}_{14} & < & \underline{y}_{15} \end{array}$$

Além disso, renome os  $f^n = [\underline{f}^n, \bar{f}^n]$  por  $f_n = [\underline{f}_n, \bar{f}_n]$ , onde:

$$f_1 = [\underline{f}_1, \bar{f}_1] = [\underline{f}^1, \bar{f}^1] = [0, 0],$$

$$f_2 = [\underline{f}_2, \bar{f}_2] = [\underline{f}^6, \bar{f}^6] = [0, 0],$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$f_{15} = [\underline{f}_{15}, \bar{f}_{15}] = [\underline{f}^5, \bar{f}^5] = [0, 0].$$

Para um melhor entendimento, é apresentada a Tabela 4.4, que representa as quinze regras fuzzy da taxa de retorno renomeadas.



Regra n°	Intervalo inicial	→	Consequente
$R^1 :$	$[\underline{f}^1, \bar{f}^1] = [\underline{\mu}_{\tilde{X}_1}(x'_1) \cdot \underline{\mu}_{\tilde{X}_2}(x'_2), \bar{\mu}_{\tilde{X}_1}(x'_1) \cdot \bar{\mu}_{\tilde{X}_2}(x'_2)]$ $= [0.8037 \times 0, 1 \times 0] = [0, 0]$	→	$[\underline{y}^1, \bar{y}^1] = 0$
$R^2 :$	$[\underline{f}^2, \bar{f}^2] = [\underline{\mu}_{\tilde{X}_1}(x'_1) \cdot \underline{\mu}_{\tilde{X}_2}(x'_2), \bar{\mu}_{\tilde{X}_1}(x'_1) \times \bar{\mu}_{\tilde{X}_2}(x'_2)]$ $= [0.8037 \times 0, 1 \times 0] = [0, 0]$	→	$[\underline{y}^2, \bar{y}^2] = 0.15$
$R^3 :$	$[\underline{f}^3, \bar{f}^3] = [\underline{\mu}_{\tilde{X}_1}(x'_1) \cdot \underline{\mu}_{\tilde{X}_2}(x'_2), \bar{\mu}_{\tilde{X}_1}(x'_1) \times \bar{\mu}_{\tilde{X}_2}(x'_2)]$ $= [0.8037 \times 0.153, 1 \times 0.975] = [0.123, 0.975]$	→	$[\underline{y}^3, \bar{y}^3] = 0.15$
$R^4 :$	$[\underline{f}^4, \bar{f}^4] = [\underline{\mu}_{\tilde{X}_1}(x'_1) \cdot \underline{\mu}_{\tilde{X}_2}(x'_2), \bar{\mu}_{\tilde{X}_1}(x'_1) \times \bar{\mu}_{\tilde{X}_2}(x'_2)]$ $= [0.8037 \times 0.5157, 1 \times 1] = [0.4159, 1]$	→	$[\underline{y}^4, \bar{y}^4] = 0.65$
$R^5 :$	$[\underline{f}^5, \bar{f}^5] = [\underline{\mu}_{\tilde{X}_1}(x'_1) \cdot \underline{\mu}_{\tilde{X}_2}(x'_2), \bar{\mu}_{\tilde{X}_1}(x'_1) \times \bar{\mu}_{\tilde{X}_2}(x'_2)]$ $= [0.8037 \times 0, 1 \times 0] = [0, 0]$	→	$[\underline{y}^5, \bar{y}^5] = 1$
$R^6 :$	$[\underline{f}^6, \bar{f}^6] = [\underline{\mu}_{\tilde{X}_1}(x'_1) \cdot \underline{\mu}_{\tilde{X}_2}(x'_2), \bar{\mu}_{\tilde{X}_1}(x'_1) \times \bar{\mu}_{\tilde{X}_2}(x'_2)]$ $= [0 \times 0, 0 \times 0] = [0, 0]$	→	$[\underline{y}^6, \bar{y}^6] = 0$
$R^7 :$	$[\underline{f}^7, \bar{f}^7] = [\underline{\mu}_{\tilde{X}_1}(x'_1) \cdot \underline{\mu}_{\tilde{X}_2}(x'_2), \bar{\mu}_{\tilde{X}_1}(x'_1) \times \bar{\mu}_{\tilde{X}_2}(x'_2)]$ $= [0 \times 0, 0 \times 0] = [0, 0]$	→	$[\underline{y}^7, \bar{y}^7] = 0$
$R^8 :$	$[\underline{f}^8, \bar{f}^8] = [\underline{\mu}_{\tilde{X}_1}(x'_1) \cdot \underline{\mu}_{\tilde{X}_2}(x'_2), \bar{\mu}_{\tilde{X}_1}(x'_1) \times \bar{\mu}_{\tilde{X}_2}(x'_2)]$ $= [0 \times 0.153, 0 \times 0.975] = [0, 0]$	→	$[\underline{y}^8, \bar{y}^8] = 0.15$
$R^9 :$	$[\underline{f}^9, \bar{f}^9] = [\underline{\mu}_{\tilde{X}_1}(x'_1) \cdot \underline{\mu}_{\tilde{X}_2}(x'_2), \bar{\mu}_{\tilde{X}_1}(x'_1) \times \bar{\mu}_{\tilde{X}_2}(x'_2)]$ $= [0 \times 0.5175, 0 \times 1] = [0, 0]$	→	$[\underline{y}^9, \bar{y}^9] = 0.65$
$R^{10} :$	$[\underline{f}^{10}, \bar{f}^{10}] = [\underline{\mu}_{\tilde{X}_1}(x'_1) \cdot \underline{\mu}_{\tilde{X}_2}(x'_2), \bar{\mu}_{\tilde{X}_1}(x'_1) \times \bar{\mu}_{\tilde{X}_2}(x'_2)]$ $= [0 \times 0, 0 \times 0] = [0, 0]$	→	$[\underline{y}^{10}, \bar{y}^{10}] = 0.65$
$R^{11} :$	$[\underline{f}^{11}, \bar{f}^{11}] = [\underline{\mu}_{\tilde{X}_1}(x'_1) \cdot \underline{\mu}_{\tilde{X}_2}(x'_2), \bar{\mu}_{\tilde{X}_1}(x'_1) \times \bar{\mu}_{\tilde{X}_2}(x'_2)]$ $= [0 \times 0, 0 \times 0] = [0, 0]$	→	$[\underline{y}^{11}, \bar{y}^{11}] = 0$
$R^{12} :$	$[\underline{f}^{12}, \bar{f}^{12}] = [\underline{\mu}_{\tilde{X}_1}(x'_1) \cdot \underline{\mu}_{\tilde{X}_2}(x'_2), \bar{\mu}_{\tilde{X}_1}(x'_1) \times \bar{\mu}_{\tilde{X}_2}(x'_2)]$ $= [0 \times 0, 0 \times 0] = [0, 0]$	→	$[\underline{y}^{12}, \bar{y}^{12}] = 0$
$R^{13} :$	$[\underline{f}^{13}, \bar{f}^{13}] = [\underline{\mu}_{\tilde{X}_1}(x'_1) \cdot \underline{\mu}_{\tilde{X}_2}(x'_2), \bar{\mu}_{\tilde{X}_1}(x'_1) \times \bar{\mu}_{\tilde{X}_2}(x'_2)]$ $= [0 \times 0.153, 0 \times 0.975] = [0, 0]$	→	$[\underline{y}^{13}, \bar{y}^{13}] = 0.15$
$R^{14} :$	$[\underline{f}^{14}, \bar{f}^{14}] = [\underline{\mu}_{\tilde{X}_1}(x'_1) \cdot \underline{\mu}_{\tilde{X}_2}(x'_2), \bar{\mu}_{\tilde{X}_1}(x'_1) \times \bar{\mu}_{\tilde{X}_2}(x'_2)]$ $= [0 \times 0.5175, 0 \times 1] = [0, 0]$	→	$[\underline{y}^{14}, \bar{y}^{14}] = 0.15$
$R^{15} :$	$[\underline{f}^{15}, \bar{f}^{15}] = [\underline{\mu}_{\tilde{X}_1}(x'_1) \cdot \underline{\mu}_{\tilde{X}_2}(x'_2), \bar{\mu}_{\tilde{X}_1}(x'_1) \times \bar{\mu}_{\tilde{X}_2}(x'_2)]$ $= [0 \times 0, 0 \times 0] = [0, 0]$	→	$[\underline{y}^{15}, \bar{y}^{15}] = 0.65$

Tabela 4.3: Intervalos iniciais das quinze regras fuzzy da taxa de retorno.

b) Defina  $f_n = \frac{\underline{f}_n + \bar{f}_n}{2}$ ,  $n = 1, \dots, 15$ ,

- $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = f_6 = 0$ ,
- $f_7 = \frac{\underline{f}_7 + \bar{f}_7}{2} = \frac{0.123 + 0.975}{2} = 0.549$ ,
- $f_8 = f_9 = f_{10} = 0$ ,
- $f_{11} = \frac{\underline{f}_{11} + \bar{f}_{11}}{2} = \frac{0.4159 + 1}{2} = 0.7079$ ,

Regra n°	Intervalo inicial	Consequente
$R^1 :$	$[f^1, \bar{f}^1] = [0, 0]$	$\rightarrow [\underline{y}^1, \bar{y}^1] = 0$
$R^2 :$	$[f^2, \bar{f}^2] = [0, 0]$	$\rightarrow [\underline{y}^2, \bar{y}^2] = 0$
$R^3 :$	$[f^3, \bar{f}^3] = [0, 0]$	$\rightarrow [\underline{y}^3, \bar{y}^3] = 0$
$R^4 :$	$[f^4, \bar{f}^4] = [0, 0]$	$\rightarrow [\underline{y}^4, \bar{y}^4] = 0$
$R^5 :$	$[f^5, \bar{f}^5] = [0, 0]$	$\rightarrow [\underline{y}^5, \bar{y}^5] = 0$
$R^6 :$	$[f^6, \bar{f}^6] = [0, 0]$	$\rightarrow [\underline{y}^6, \bar{y}^6] = 0.15$
$R^7 :$	$[f^7, \bar{f}^7] = [0.123, 0.975]$	$\rightarrow [\underline{y}^7, \bar{y}^7] = 0.15$
$R^8 :$	$[f^8, \bar{f}^8] = [0, 0]$	$\rightarrow [\underline{y}^8, \bar{y}^8] = 0.15$
$R^9 :$	$[f^9, \bar{f}^9] = [0, 0]$	$\rightarrow [\underline{y}^9, \bar{y}^9] = 0.15$
$R^{10} :$	$[f^{10}, \bar{f}^{10}] = [0, 0]$	$\rightarrow [\underline{y}^{10}, \bar{y}^{10}] = 0.15$
$R^{11} :$	$[f^{11}, \bar{f}^{11}] = [0.4159, 1]$	$\rightarrow [\underline{y}^{11}, \bar{y}^{11}] = 0.65$
$R^{12} :$	$[f^{12}, \bar{f}^{12}] = [0, 0]$	$\rightarrow [\underline{y}^{12}, \bar{y}^{12}] = 0.65$
$R^{13} :$	$[f^{13}, \bar{f}^{13}] = [0, 0]$	$\rightarrow [\underline{y}^{13}, \bar{y}^{13}] = 0.65$
$R^{14} :$	$[f^{14}, \bar{f}^{14}] = [0, 0]$	$\rightarrow [\underline{y}^{14}, \bar{y}^{14}] = 0.65$
$R^{15} :$	$[f^{15}, \bar{f}^{15}] = [0, 0]$	$\rightarrow [\underline{y}^{15}, \bar{y}^{15}] = 1$

Tabela 4.4: Base de regras fuzzy da taxa de retorno.

- $f_{12} = f_{13} = f_{14} = f_{15} = 0$ .

Agora calcule,  $y = \frac{\sum_{n=1}^{15} \underline{y}_n f_n}{\sum_{n=1}^{15} f_n}$ , ou seja,

- $\sum_{n=1}^{15} \underline{y}_n f_n = 0.15(0.549) + 0.65(0.7079) = 0.5425$ ,
- $\sum_{n=1}^{15} f_n = 0.549 + 0.7079 = 1.2569$ .

Então,  $y = \frac{0.5425}{1.2569} = 0.4316$ .

- c) Encontre o ponto **switch**  $k$  ( $1 \leq k \leq 14$ ) tal que  $\underline{y}_k \leq 0.4316 \leq \underline{y}_{k+1}$ . Note que:

$$\underline{y}_{10} < 0.4316 < \underline{y}_{11} \quad (0.15 < 0.4316 < 0.65).$$

- d) Defina,  $f_n = \begin{cases} \bar{f}_n & \text{se } n \leq 10, \\ \underline{f}_n & \text{se } n > 10. \end{cases}$

Agora calcule,  $y' = \frac{\sum_{n=1}^{15} \underline{y}_n f_n}{\sum_{n=1}^{15} f_n} = \frac{\sum_{n=1}^{10} \underline{y}_n \bar{f}_n + \sum_{n=11}^{15} \underline{y}_n \underline{f}_n}{\sum_{n=1}^{10} \bar{f}_n + \sum_{n=11}^{15} \underline{f}_n}$ , ou seja,

- $\sum_{n=1}^{10} \underline{y}_n \bar{f}_n = 0.15(0.975) = 0.1462$ ,

- $\sum_{n=11}^{15} \underline{y}_n \underline{f}_n = 0.65(0.4159) = 0.2703,$
- $\sum_{n=1}^{10} \bar{f}_n = 0.975,$
- $\sum_{n=11}^{15} \underline{f}_n = 0.4159.$

$$\text{Então, } y' = \frac{0.1462 + 0.2703}{0.975 + 0.4159} = \frac{0.4165}{1.3909} = 0.2994.$$

e) Como  $y \neq y'$ , então continue o processo.

f) Defina  $y = y'$ .

Encontre o ponto **switch**  $k$ , ( $1 \leq k \leq 14$ ) tal que  $\underline{y}_k \leq 0.2994 \leq \underline{y}_{k+1}$ .  
 Note que,  $\underline{y}_{10} < 0.2994 \leq \underline{y}_{11}$ , isto é, ( $0 < 0.2994 \leq 0.65$ ).

$$\text{Defina } f_n = \begin{cases} \bar{f}_n & \text{se } n \leq 10, \\ \underline{f}_n & \text{se } n > 10. \end{cases}$$

$$\text{Agora calcule } y'' = \frac{\sum_{n=1}^{15} \underline{y}_n f_n}{\sum_{n=1}^{15} f_n} = \frac{\sum_{n=1}^{10} \underline{y}_n \bar{f}_n + \sum_{n=11}^{15} \underline{y}_n \underline{f}_n}{\sum_{n=1}^{10} \bar{f}_n + \sum_{n=11}^{15} \underline{f}_n}.$$

$$\text{Então, } y'' = y' = 0.2994.$$

Como  $y = y''$ , então  $y_L = 0.2994$  e  $L = 10$ .

Aplique o **Algoritmo de KM**, para calcular  $y_R$ .

a) Ordene os  $\bar{y}^n$ ,  $n = 1, \dots, 15$  e proceda a renomeá-los como  $\bar{y}_n$ ,  $n = 1, \dots, 15$ , de forma que:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \bar{y}^1 & \leq & \bar{y}^6 & \leq & \bar{y}^7 & \leq & \bar{y}^{11} & \leq & \bar{y}^{12} & < & \bar{y}^2 & \leq & \bar{y}^3 & \leq & \bar{y}^8 & \leq & \bar{y}^{13} & \leq & \bar{y}^{14} & < & \bar{y}^4 & \leq & \bar{y}^9 & \leq & \bar{y}^{10} & \leq & \bar{y}^{15} & < & \bar{y}^5 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \leq & 0 & \leq & 0 & \leq & 0 & \leq & 0 & < & 0.15 & \leq & 0.15 & \leq & 0.15 & \leq & 0.15 & \leq & 0.15 & < & 0.65 & \leq & 0.65 & \leq & 0.65 & \leq & 0.65 & < & 1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \bar{y}_1 & \leq & \bar{y}_2 & \leq & \bar{y}_3 & \leq & \bar{y}_4 & \leq & \bar{y}_5 & < & \bar{y}_6 & \leq & \bar{y}_7 & \leq & \bar{y}_8 & \leq & \bar{y}_9 & \leq & \bar{y}_{10} & < & \bar{y}_{11} & \leq & \bar{y}_{12} & \leq & \bar{y}_{13} & \leq & \bar{y}_{14} & < & \bar{y}_{15} \end{array}$$

b) Defina  $f_n = \frac{\underline{f}_n + \bar{f}_n}{2}$ ,  $n = 1, \dots, 15$ , ou seja,

- $f_1 = f_2 = f_3 = f_4 = f_5 = f_6 = 0,$
- $f_7 = 0.549,$
- $f_8 = f_9 = f_{10} = 0,$
- $f_{11} = 0.7079,$

- $f_{12} = f_{13} = f_{14} = f_{15} = 0.$

Agora calcule  $y = \frac{\sum_{n=1}^{15} \bar{y}_n f_n}{\sum_{n=1}^{15} f_n} = 0.4316.$

c) Encontre o ponto **switch**  $k$  ( $1 \leq k \leq 14$ ) tal que  $\bar{y}_k \leq 0.4316 \leq \bar{y}_{k+1}$ .  
Note que,  $\bar{y}_5 < 0.4316 < \bar{y}_6$  ( $0.15 < 0.4316 < 0.65$ ).

d) Defina,  $f_n = \begin{cases} \bar{f}_n & \text{se } n \leq 10, \\ \underline{f}_n & \text{se } n > 10. \end{cases}$

Agora calcule,  $y' = \frac{\sum_{n=1}^{15} \bar{y}_n f_n}{\sum_{n=1}^{15} f_n} = \frac{\sum_{n=1}^{10} \bar{y}_n \underline{f}_n + \sum_{n=11}^{15} \bar{y}_n \bar{f}_n}{\sum_{n=1}^{10} \underline{f}_n + \sum_{n=11}^{15} \bar{f}_n}$ , ou seja,

- $\sum_{n=1}^{10} \bar{y}_n \underline{f}_n = 0.15(0.123) = 0.0184,$
- $\sum_{n=11}^{15} \bar{y}_n \bar{f}_n = 0.65(1) = 0.65,$
- $\sum_{n=1}^{10} \underline{f}_n = 0.123,$
- $\sum_{n=11}^{15} \bar{f}_n = 1.$

Então,  $y' = \frac{0.0184 + 0.65}{0.123 + 1} = \frac{0.6684}{1.123} = 0.5952.$

e) Como  $y \neq y'$ , então continue o processo.

f) Defina  $y = y'$ .

Encontre o ponto **switch**  $k$  ( $1 \leq k \leq 14$ ) tal que  $\bar{y}_k \leq 0.5952 \leq \bar{y}_{k+1}$ .

Note que,  $\bar{y}_{10} < 0.5952 < \bar{y}_{11}$ .

Para  $k = 10$  temos que  $\bar{y}_{10} < 0.5952 < \bar{y}_{11}$ , isto é,  $0.15 < 0.5952 < 0.65$ .

Defina  $f_n = \begin{cases} \underline{f}_n & \text{se } n \leq 10, \\ \bar{f}_n & \text{se } n > 10. \end{cases}$

Agora calcule,  $y'' = \frac{\sum_{n=1}^{15} \bar{y}_n f_n}{\sum_{n=1}^{15} f_n} = \frac{\sum_{n=1}^{10} \bar{y}_n \underline{f}_n + \sum_{n=11}^{15} \bar{y}_n \bar{f}_n}{\sum_{n=1}^{10} \underline{f}_n + \sum_{n=11}^{15} \bar{f}_n}.$

Então,  $y'' = y' = 0.5952.$

Como  $y = y''$ , então  $y_R = 0.5952$  e  $R = 10$ .

Finalmente, calcule o valor defuzzificado:

$$y(x') = \frac{y_L + y_R}{2} = \frac{0.2994 + 0.5952}{2} = \frac{0.8946}{2}.$$

Então,  $y(x') = 0.4473$ .

O valor obtido de  $y = 0.4473$ , é igual ao valor obtido pelo programa computacional apresentado no Anexo 2. As simulações numéricas são realizadas utilizando o código em MATLAB, cedido pelo autor de Wu e Nie (2011), Dongrui Wu (Professor no Machine Learning Lab, GE Global Research, Niskayuna, NY 12309 USA) [31].

Imagine fazer os cálculos para 47 valores de carga viral e nível de CD4+ médios? Para isso utilizamos, o software MATLAB, de forma a facilitar as contas. Utilizando o algoritmo KM computacionalmente, obtemos todos os valores defuzzificados, para estes vetores de entrada como mostra a Figura 4.2. Em nosso estudo foram considerados 47 dados de carga viral média e nível de CD4+ médio, em intervalos de tempos diferentes variando de 0 a 72 meses. A Figura 4.2 mostra todos os valores obtidos da taxa de retorno dos valores defuzzificados de carga viral média e nível de CD4+ médio.

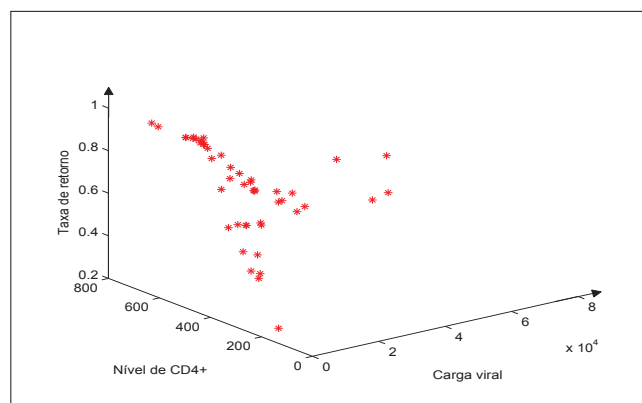


Figura 4.2: Valores da taxa de retorno nos cálculos da carga viral e nível de CD4+ médios usando algoritmo de KM computacionalmente.

Com a finalidade de fazer previsões, utilizamos o método dos mínimos quadrados [25] para ajustar, por uma superfície, os dados obtidos de carga viral média e nível de CD4+ médio do grupo de indivíduos por uma superfície.

#### 4.1.1 Ajuste dos Dados por uma Superfície

Para obter a superfície de ajuste para a taxa de retorno de um grupo de indivíduos com saída real, utilizamos o software MATLAB e o toolbox “sftool”. A função da superfície de ajuste é dada por:

$$\gamma_2(v, c) = a_2 \exp(-v^4) - b_2 c^2 + c_2 v + d_2 c - e_2 vc - f_2 c^{0.1}, \quad (4.2)$$

onde,  $a_2 = 0.8258$ ,  $b_2 = 0.000005295$ ,  $c_2 = 0.000002338$ ,  $d_2 = 0.006173$ ,  $e_2 = 0.00000001663$ ,  $f_2 = 0.4187$  e o coeficiente de determinação é  $r_2^2 = 0.8375$ . A Figura 4.3, mostra a superfície de ajuste.

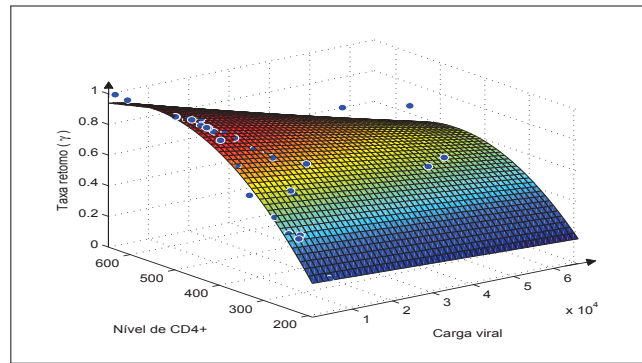


Figura 4.3: Superfície de ajuste.

## 4.2 Modelo Fuzzy do Tipo 2 para um Grupo de Indivíduos HIV Positivos com Saída “Singleton”

Nesta seção, estimamos a taxa de retorno utilizando SBRF2 Mamdani. Para este estudo utilizamos os conjuntos fuzzy do tipo 2 trapezoidal, para as variáveis de entrada carga viral e nível de CD4+, como forem apresentados na Figura 4.1, e para a variável de saída taxa de retorno utilizamos conjuntos fuzzy “singleton”, como mostra a Figura 4.4, também utilizamos base de regras fuzzy, apresentado na Tabela 4.5. Esta Tabela foi elaborada, com a colaboração de um especialista da área da saúde. O Exemplo 4.2 mostra como utilizar o SBRF2 Mamdani.

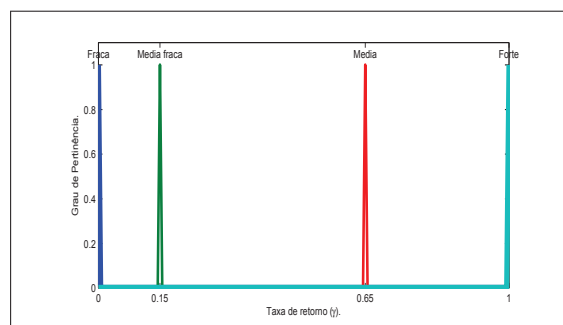


Figura 4.4: Funções de pertinência taxa retorno.

CD4+ \ CV	Muito baixo	Baixo	Médio	Médio alto	Alto
Baixa	Fraca	Média fraca	Média fraca	Média	Forte
Média	Fraca	Fraca	Média fraca	Média	Fraca
Alta	Fraca	Fraca	Média fraca	Média fraca	Fraca

Tabela 4.5: Base de regras fuzzy.

**Exemplo 4.2** Considere um caso particular das 15 regras para estimar a taxa de retorno, ou seja considere as duas regras seguintes  $R^1$  e  $R^2$  onde:

$R^1$  : **Se** a carga viral é baixa e nível de CD4+ é médio **então** a taxa de retorno é média fraca.

$R^2$  : **Se** a carga viral é baixa e nível de CD4+ é médio alto **então** a taxa de retorno é média.

Na Figura 4.5, os conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalares,  $\tilde{X}_1^1, \tilde{X}_2^1, \tilde{X}_2^2$ , representam: carga viral baixa, nível de CD4+ médio e nível de CD4+ médio alto respectivamente,  $\bar{f}^1, \underline{f}^1$  representam

os graus de ativação inferior e superior da regra  $R^1$  respectivamente, analogamente  $\bar{f}^2, \underline{f}^2$  são os graus de ativação da regra  $R^2$ .

Analisando a regra  $R^1$ , consideramos o vetor de entrada  $x' = (x'_1, x'_2) = (2391, 241.5)$ , da Figura 4.5, observamos que os graus de pertinência inferior e superior do conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar carga viral baixa no ponto  $x'_1 = 2391$  são 0.8037 e 1 respectivamente. Para o ponto  $x'_2 = 241.5$  os graus de pertinência inferior e superior do conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar nível de CD4+ médio são 0.153 e 0.975, respectivamente. Calcule os intervalos de ativação,  $\underline{f}^1 = \underline{\mu}_{\tilde{X}_1} t \underline{\mu}_{\tilde{X}_2} = \min\{0.8037, 0.153\} = 0.153$  e  $\bar{f}^1 = \bar{\mu}_{\tilde{X}_1} t \bar{\mu}_{\tilde{X}_2} = \min\{1, 0.975\} = 0.975$ , analogamente para a regra,  $R^2$  temos  $\underline{f}^2 = \underline{\mu}_{\tilde{X}_2} t \underline{\mu}_{\tilde{X}_2} = \min\{0.5175, 0.8037\} = 0.5175$ ,  $\bar{f}^2 = \bar{\mu}_{\tilde{X}_2} t \bar{\mu}_{\tilde{X}_2} = \min\{1, 1\} = 1$ . Finalmente, utilize o operador s- norma máximo(max) e obtemos a saída final, como mostra a Figura 4.5.

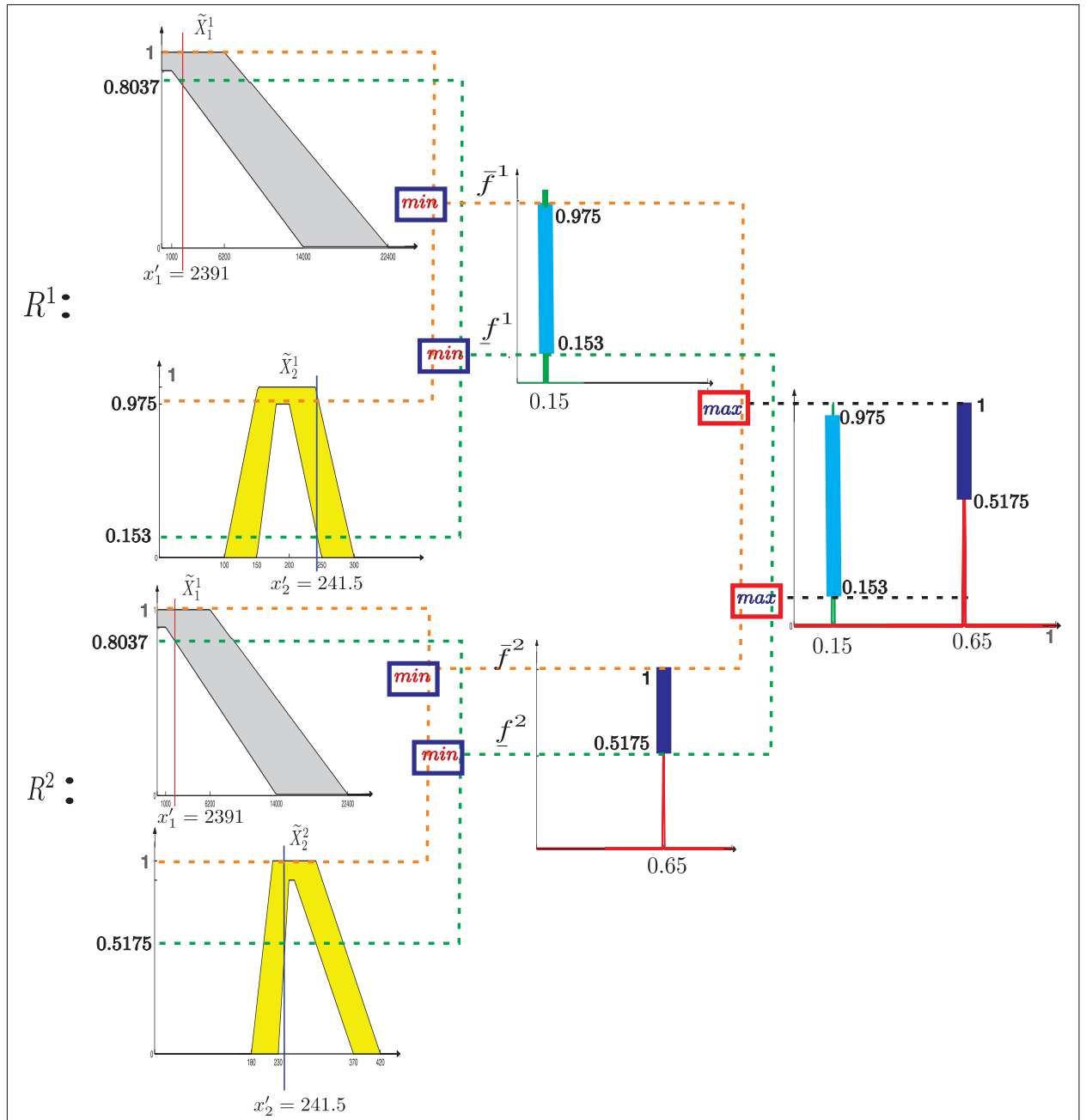


Figura 4.5: Exemplo do método de Mamdani para as regras  $R^1$  e  $R^2$ .

Na Figura 4.5, a saída obtida é “singleton”. Denomine  $M$  a saída, para defuzzificar este conjunto utilizamos o algoritmo de KM versão discreta. A Tabela 4.6 mostra os graus de pertinência do conjunto fuzzy  $M$ .

i	$x_i$	$\underline{\mu}_M(x_i)$	$\bar{\mu}_M(x_i)$
1	0.15	0.153	0.975
2	0.65	0.5175	1

Tabela 4.6: Graus de pertinência inferior e superior de  $M$ .

Aplique, o **algoritmo de KM para calcular  $y_L$** .

1. Calcule o ponto inicial,  $y' = \frac{\sum_{i=1}^2 x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^2 \theta_i}$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \bullet \theta_1 &= \frac{\underline{\mu}_M(x_1) + \bar{\mu}_M(x_1)}{2} = \frac{0.153 + 0.975}{2} = 0.564, \\ \bullet \theta_2 &= \frac{\underline{\mu}_M(x_2) + \bar{\mu}_M(x_2)}{2} = \frac{0.5175 + 1}{2} = 0.7588, \end{aligned}$$

$$\text{Logo, } y' = \frac{x_1 \theta_1 + x_2 \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} = \frac{0.15(0.564) + 0.65(0.7588)}{0.564 + 0.7588} = 0.4368.$$

2. Para  $k = 1$ ,  $x_1 \leq y' \leq x_2$ , isto é,  $(0.15 \leq y' \leq 0.65)$ .

3. Defina

$$\theta_i = \begin{cases} \bar{\mu}_M(x_i) & \text{se } i \leq 1, \\ \underline{\mu}_M(x_i) & \text{se } i > 1, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bullet \theta_1 &= \bar{\mu}_M(x_1) = 0.975, \\ \bullet \theta_2 &= \underline{\mu}_M(x_2) = 0.5175. \end{aligned}$$

$$\text{Agora calcule, } y'' = \frac{x_1 \theta_1 + x_2 \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} = \frac{0.15(0.975) + 0.65(0.5175)}{0.975 + 0.5175} = 0.3234.$$

4. Como  $y' \neq y''$ , então continue o processo.

5. Defina  $y' = y''$  e volte ao passo 2. Note que,  $x_1 < y'' < x_2$ , isto é,  $(0.15 < 0.3234 < 0.65)$ , assim  $k = 1$ . Agora, defina:

$$\theta_i = \begin{cases} \bar{\mu}_M(x_i) & \text{se } i \leq 1, \\ \underline{\mu}_M(x_i) & \text{se } i > 1, \end{cases}$$

$$\text{e calcule, } y''' = \frac{x_1 \theta_1 + x_2 \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} = \frac{0.15(0.975) + 0.65(0.5175)}{0.975 + 0.5175} = 0.3234.$$

Note que,  $y'' = y'''$ . Então pare o processo e portanto,  $y_L = 0.3234$  e  $L = 1$ .

Aplique, o **algoritmo de KM para calcular  $y_R$** .



1. Calcule o ponto inicial,  $y' = \frac{\sum_{i=1}^2 x_i \theta_i}{\sum_{i=1}^2 \theta_i} = 0.4368$ .
2. Para  $k = 1$ ,  $x_1 \leq y' \leq x_2$ , isto é,  $0.15 \leq y' \leq 0.65$ .
3. Defina

$$\theta_i = \begin{cases} \underline{\mu}_M(x_i) & \text{se } i \leq 1, \\ \bar{\mu}_M(x_i) & \text{se } i > 1, \end{cases}$$

- $\theta_1 = \underline{\mu}_M(x_1) = 0.153$ ,
- $\theta_2 = \bar{\mu}_M(x_2) = 1$ .

Agora calcule,  $y'' = \frac{x_1 \theta_1 + x_2 \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} = \frac{0.15(0.153) + 0.65(1)}{0.153 + 1} = 0.5837$ .

4. Como  $y' \neq y''$ , então continue o processo.
5. Defina  $y' = y''$  e volte ao passo 2. Note que,  $x_1 < y'' < x_2$ , isto é,  $0.15 < 0.5837 < 0.65$ , assim  $k = 1$ . Agora, defina:

$$\theta_i = \begin{cases} \bar{\mu}_M(x_i) & \text{se } i \leq 1, \\ \underline{\mu}_M(x_i) & \text{se } i > 1, \end{cases}$$

e calcule,  $y''' = \frac{x_1 \theta_1 + x_2 \theta_2}{\theta_1 + \theta_2} = \frac{0.15(0.153) + 0.65(1)}{0.153 + 1} = 0.5837$ .

Note que,  $y'' = y'''$ . Então, pare o processo e portanto,  $y_R = 0.5837$  e  $R = 1$ .

Finalmente calcule o valor defuzzificado:  $y(x') = \frac{y_L + y_R}{2} = \frac{0.3234 + 0.5837}{2} = 0.4536$ .

Imagine fazer as contas para 47 valores de carga viral e nível de CD4+ médios? Para isso usamos o toolbox “it2fuzzy” [30], fornecido pelo Prof. O. Castillo. A Figura 4.6, mostra o editor de um SBRF2 e a Figura 4.7, mostra as funções de pertinência dos conjuntos fuzzy do tipo 2 trapezoidal.

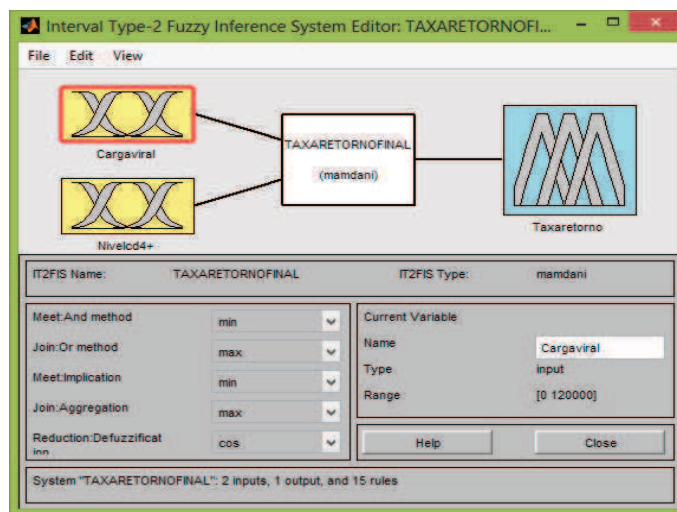


Figura 4.6: Editor de um SBRF2 [4].

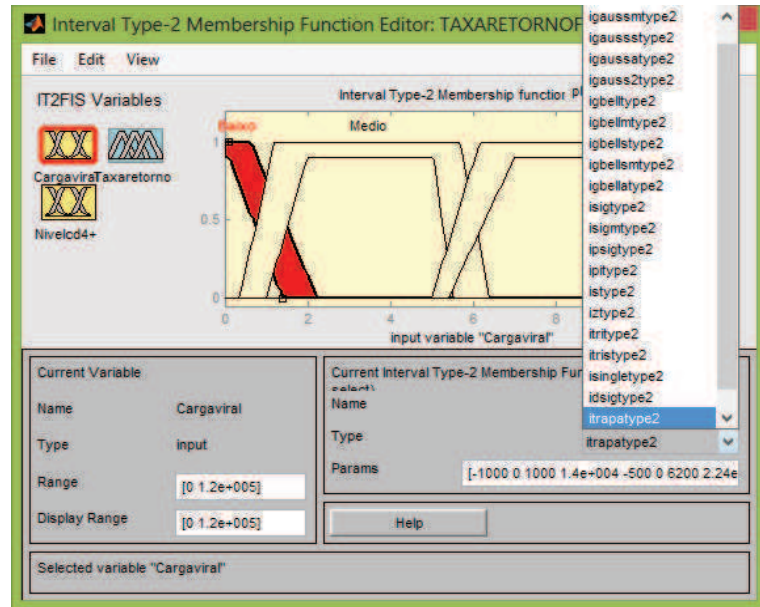


Figura 4.7: Editor funções de pertinência conjuntos fuzzy do tipo 2 trapezoidal [4].

A Figura 4.8, mostra todos os valores de carga viral média e do nível de CD4+ médio, obtidos utilizando este toolbox.

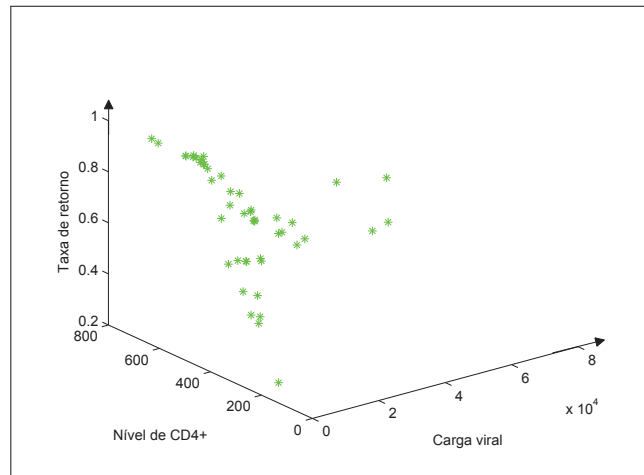


Figura 4.8: Valores de carga viral e nível de CD4+ médios obtidos utilizando o toolbox “it2fuzzy”.

#### 4.2.1 Ajuste dos Dados por uma Superfície

Para obter a superfície de ajuste para a taxa de retorno de um grupo de indivíduos com saída “singleton”, utilizamos o software MATLAB e o toolbox “sftool”. A função da superfície de ajuste é dada por:

$$\gamma_3(v, c) = a_3 \exp(-v^4) - b_3 c^2 + c_3 v + d_3 c - e_3 vc - f_3 c^{0.1}, \quad (4.3)$$

onde,  $a_3 = 0.3998$ ,  $b_3 = 0.000005202$ ,  $c_3 = 0.000002183$ ,  $d_3 = 0.006071$ ,  $e_3 = 0.00000001639$ ,  $f_3 = 0.404$  e o coeficiente de determinação é  $r_3^2 = 0.8308$ . A Figura 4.9, mostra a superfície de ajuste.

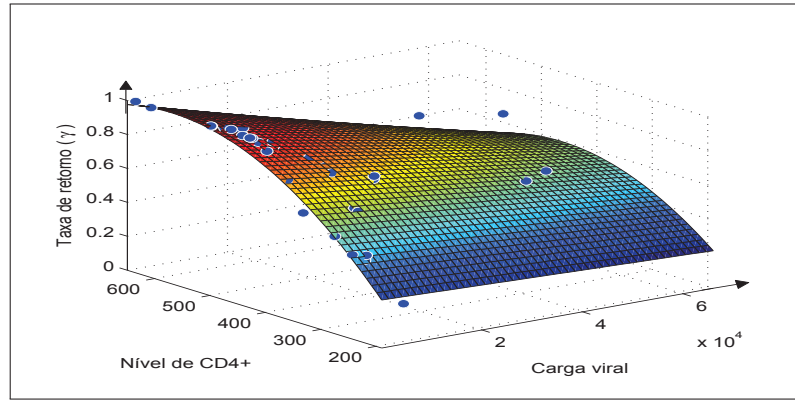


Figura 4.9: Superfície de ajuste.

### 4.3 Comparações das Superfícies obtidas pelo SBRF1 e SBRF2

Determinamos a taxa de retorno de sintomático para assintomático para a média dos exames laboratoriais da carga viral e do nível de CD4+ do grupo de indivíduos estudado através dos métodos apresentados no capítulo 2 e 3. Os programas utilizados para obter estes valores foram fornecidos por [4] e [31]. Observando a equação (2.4), da superfície de ajuste, obtida por SBRF1 e as equações (4.2) e (4.3) das superfícies de ajuste, obtidas por SBRF2, temos que estas podem ser escritas da seguinte forma:

$$\gamma_i(v, c) = a_i \exp(-v^4) - b_i c^2 + c_i v + d_i c - e_i v c - f_i c^{0.1}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (4.4)$$

onde:  $\gamma_1, \gamma_2$  e  $\gamma_3$ , estão relacionados com os valores da taxa de retorno obtidas pelo SBRF1, SBRF2 com saída um número real e SBRF2 com saída um conjunto “singleton”, respectivamente. Os valores dos parâmetros são:  $a_1 = 0.2568, a_2 = 0.8258, a_3 = 0.3998, b_1 = 0.00000533, b_2 = 0.000005295, b_3 = 0.000005202, c_1 = 0.000001684, c_2 = 0.000002338, c_3 = 0.000002183, d_1 = 0.006225, d_2 = 0.006173, d_3 = 0.006071, e_1 = 0.00000001572, e_2 = 0.00000001663, e_3 = 0.00000001639, f_1 = 0.4293, f_2 = 0.4187, f_3 = 0.404$  e os coeficientes de determinação, de cada uma destas superfícies são dadas por:  $r_1^2 = 0.793, r_2^2 = 0.8375$  e  $r_3^2 = 0.8308$ , respectivamente.

Portanto, podemos concluir que a superfície que melhor se ajusta, para estimar a taxa de retorno de um grupo de indivíduos HIV positivos, é dada por  $\gamma_2$ , pois o coeficiente de determinação para esta superfície é  $r_2^2 = 0.8375$ , e está mais próximo de 1 com respeito aos outros coeficientes de determinação das superfícies  $\gamma_1$  e  $\gamma_3$  que são  $r_1^2 = 0.793$  e  $r_3^2 = 0.8308$ , respectivamente. Além disso, as superfícies de ajuste Figuras 2.7, 4.3 e 4.9, apresentam um comportamento compatível com o que ocorre, em geral, segundo o especialista na área da saúde, quando a carga viral está alta e o nível de CD4+ está baixo então a taxa de retorno de sintomático para assintomático está próxima de zero e quando a carga viral é baixa e o nível de CD4+ é alto então a taxa de retorno está próxima de 1. A seguir, estudamos os exames laboratoriais, de carga viral e nível de CD4+ de um indivíduo HIV positivo utilizando a teoria de conjuntos fuzzy do tipo 1 e do tipo 2.

### 4.4 Um Estudo para os Dados Laboratoriais de um Indivíduo HIV Positivo

Para representar o exame laboratorial de um indivíduo HIV positivo que tem um comportamento similar ao do grupo estudado, calculamos um valor aleatório para carga viral e para

o nível de CD4+ no tempo  $t = 0$ . Neste caso, a carga viral varia entre 50 a 120000 (cópias de RNA/ml) e o nível de CD4+ de 216 a 533 (células/ $mm^3$ ), o valor aleatório obtido para a carga viral é 18956 (cópias de RNA/ml) e para o nível de CD4+ é 369 (células/ $mm^3$ ). Através dos números fuzzy triangulares para a carga viral e para o nível de CD4+ obtivemos os graus de pertinência aproximados para os dois valores aleatórios, que são 0.39 e 0.63, respectivamente. Conforme a definição da seção 1.6.1, o grânulo fuzzy permite computar o grau de pertinência do produto cartesiano entre a carga viral e o nível de CD4+, assim, calculando o mínimo entre estes valores, temos que o indivíduo tem grau de pertinência 0.39 para pertencer à média do grupo estudado; como é mostrado na Figura 4.10.

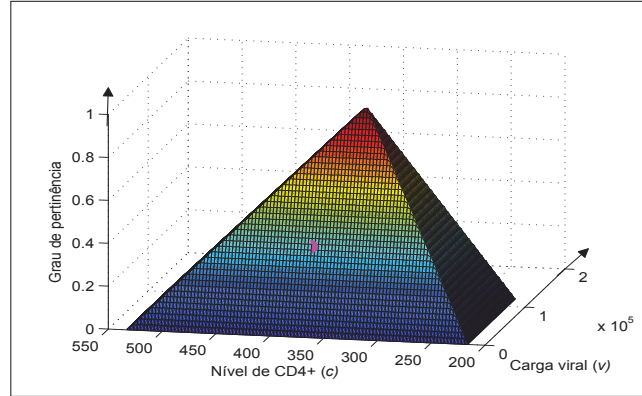


Figura 4.10: O ponto em rosa representado no grânulo tem coordenadas: Carga viral igual a 18956 (cópias de RNA/ml), nível de CD4+ igual a 369 (células/ $mm^3$ ) e grau de pertinência igual a 0.39.

Assim, este indivíduo pode observar que está com grau de pertinência baixo para pertencer à média do grupo em  $t = 0$ . Também, podemos obter a taxa de retorno de sintomático para assintomático através da equação (4.4), substituindo estes valores aleatórios nas superfícies de ajuste, obtidas por SBRF1 e SBRF2, obtemos:  $\gamma_1(18956, 369) = 0.718$ ,  $\gamma_2(18956, 369) = 0.7287$ ,  $\gamma_3(18956, 369) = 0.729$ , para este instante. Porém, as taxas de retorno obtidas para este indivíduo são otimistas porque os ajustes (4.4) foram obtidos para os valores de carga viral e do nível de CD4+ médios; e o grau de pertinência do indivíduo em estudo é 0.39 em relação aos valores da carga viral e do nível de CD4+ médios do grupo de indivíduos. Este estudo pode colaborar no sentido de ajudar o indivíduo na tomada de uma decisão, isto é, indicar se a terapia antirretroviral utilizada está adequada e inferir se o indivíduo está tendo qualidade de vida.

## 4.5 O Novo Modelo

Observamos, a partir dos dados laboratoriais, que a carga viral ( $v$ ) e o nível de CD4+ ( $c$ ), dependem do tempo ( $t$ ), isto é,  $v(t)$  e  $c(t)$ . Assim, se assumirmos (2.3), e considerando que o instante de tempo ( $t$ ), das variáveis  $x$  e  $y$  coincide com o instante de tempo ( $t$ ) de  $v$  e  $c$ , temos que:

$$\begin{cases} x(t) &= 1 - e^{-\gamma(v(t), c(t))t} & t > 0, \\ y(t) &= e^{-\gamma(v(t), c(t))t} & t > 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Entretanto, se  $\gamma(v(t), c(t))$  é diferenciável, então  $x(t)$  e  $y(t)$  são soluções do seguinte sistema

de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \left[ \left( \frac{\partial \gamma}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial \gamma}{\partial c} \frac{dc}{dt} \right) t + \gamma(v(t), c(t)) \right] (1 - x) & x(0) = 0, \\ \frac{dy}{dt} = - \left[ \left( \frac{\partial \gamma}{\partial v} \frac{dv}{dt} + \frac{\partial \gamma}{\partial c} \frac{dc}{dt} \right) t + \gamma(v(t), c(t)) \right] y & y(0) = 1. \end{cases} \quad (4.6)$$

O sistema de equações diferenciais ordinárias é não autônomo, pois a taxa de retorno de sintomático para assintomático depende do tempo  $t$ . Observamos que o comportamento das curvas (4.5) em função do tempo é o ideal para um grupo de indivíduos HIV positivos, pois, quando  $t \rightarrow \infty$ , temos  $y(t) \rightarrow 0$  e  $x(t) \rightarrow 1$ .

## 4.6 Conclusão

As superfícies obtidas pelos método dos mínimos quadrados com os valores das taxas de retorno dos indivíduos HIV positivos de sintomático para assintomático dos SBRF2, apresentaram uma melhor aproximação do que a obtida com os valores gerados pelo SBRF1, pois os coeficientes de determinação ficaram mais próximos de 1.

# Considerações Finais

Neste estudo apresentamos didaticamente os detalhes dos cálculos dos algoritmos de Karnik e Mendel quando a saída do SBRF2 é um intervalo e quando a saída é um conjunto fuzzy do tipo 2 intervalar. Também, apresentamos o método de Mamdani quando a entrada e saída do SBRF2 são conjuntos fuzzy do tipo 2 intervalar.

Nesta pesquisa estudamos a taxa de retorno, de um grupo de indivíduos HIV positivos de sintomáticos para assintomáticos com tratamento antirretroviral. Para quantificar a taxa de retorno, que depende da carga viral e nível de CD4+, utilizamos sistema de equações diferenciais ordinárias, para representar matematicamente a evolução da população sintomática para a população assintomática com adesão regular ao tratamento. Observamos, que a partir dos dados laboratoriais, que a carga viral e o nível de CD4+, dependem do tempo, construímos um novo modelo de equações diferenciais ordinárias. Utilizando a teoria de conjuntos fuzzy do tipo 1 e do tipo 2 e baseados nas informações médicas, construímos modelos fuzzy para um grupo de indivíduos HIV positivos. Logo, utilizamos SBRF1 e SBRF2, para obter a taxa de retorno de sintomático para assintomático para a carga viral média e do nível de CD4+ médio do grupo de indivíduos estudado. Finalmente ajustamos estes dados por uma superfície, utilizando o toolbox “sftool”; e podemos observar que estas superfícies cumprem com as informações do especialista da área da saúde, obtendo um melhor ajuste quando utilizamos SBRF2. Estes resultados estão de acordo com o que afirmam os autores Mendel et al. (2006), que um SBRF do tipo 2 tem potencial para fornecer melhor desempenho que um SBRF do tipo 1.

A partir dos estudos realizados, podemos determinar a taxa de retorno de um indivíduo HIV positivo de sintomático para assintomático, desde que, tenhamos os dados de um exame laboratorial de carga viral e do nível de CD4+. Este estudo só pode ser realizado se o indivíduo tem um comportamento similar ao grupo estudado, isto é, adesão regular ao tratamento com antirretrovirais. No exemplo do capítulo 4 determinamos a taxa de retorno de um indivíduo HIV positivo de sintomático para assintomático, que mostra que o indivíduo apresentou uma taxa de retorno otimista e esta pesquisa pode colaborar na avaliação clínica do indivíduo, isto é, pode indicar se a terapia antirretroviral utilizada e a qualidade de vida do indivíduo estão adequadas.

Outros trabalhos que poderão ser desenvolvidos futuramente, como por exemplo:

- Considerar taxa de retorno de sintomático para assintomático como um número triangular fuzzy e utilizar o Princípio de Extensão de Zadeh para obter solução fuzzy do modelo estudado.
- Obter outros bancos de dados laboratoriais de carga viral e nível de CD4+ para determinar outras superfícies de ajuste, para a taxa de retorno de sintomático para assintomático.

# Referências Bibliográficas

- [1] Bando, F. M., *Sistemas Fuzzy e Aproximação Universal*, Tese de Mestrado, IMECC, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil, 2002.
- [2] Barros, L. C. e Bassanezi, R. C., *Tópicos de Lógica Fuzzy e Biomatemática*, Grupo de Biomatemática, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, UNICAMP/IMECC, 2ª ed., 2010.
- [3] Castillo, E. R., Jafelice, R. S. M. e Santana, A. A., *Modelagem Fuzzy da Taxa de Retorno de um Grupo de Indivíduos HIV Positivos Sintomáticos para Assintomáticos*, 2013.
- [4] Castro, J. R., Castillo, O. e Martínez, L. G., *Interval Type-2 Fuzzy Logic Toolbox*, Engineering Letters, 2007.
- [5] Castillo, O. e Melin, P., *Type-2 fuzzy logic: Theory and Applications*, Springer, Heidelberg, Alemanha, 2008.
- [6] Coutinho, F. R., Burattini, M. e Massad, E., *Modelling the Natural History of HIV Infection in Individuals and its Epidemiological Implications*, Bulletin of Mathematical Biology, 63: 1041-1062, 2001.
- [7] Gallo, G., Perfilieva, I., Spagnuolo, Spinello S., *Geographical Data Analysis via Mountain Function*, International Journal of Intelligent Systems, vol. 14, 359-373, 1999.
- [8] Jafelice, R. S. M., *Modelagem Fuzzy para Dinâmica de Transferência de Soropositivos para HIV em Doença Plenamente Manifesta*, Tese de Doutorado, Campinas - S.P., 2003.
- [9] Jafelice, R. S. M. e Bassanezi, R. C., *Curvas Padrões do HIV*, Biomatemática 17, 55-64, 2007.
- [10] Jafelice, R. S. M., Barros, L. C. e Bassanezi, R. C., *Usando Teoria dos Conjuntos Fuzzy na Modelagem de Fenômenos Biológicos*, II Congresso Brasileiro de Sistemas Fuzzy, Natal-RN, 2012.
- [11] Januário, S. J., *Diagnóstico/Monitoramento Laboratorial e Tratamento Farmacológico em Pacientes HIV Positivo*, Conselho Regional de Farmácia do Estado de São Paulo-CRF SP.
- [12] Klir, G. e Yuan, B., *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic Theory and Applications*, Prentice-Hall PTR, New Jersey, EUA, 1999.
- [13] Lima, M. P., Fontes, C. H. O. e Schnitman, L., *A Lógica Fuzzy do Tipo 2 e um Estudo de caso Aplicado ao Controle de Tráfego Aéreo*, Universidade Federal da Bahia-UFBA, 2007. Disponível em: [www.sba.org.br/rsv/SBAI/SBAI2007/docs/60100007.pdf](http://www.sba.org.br/rsv/SBAI/SBAI2007/docs/60100007.pdf). Acesso: 27 de Janeiro, 2014.
- [14] Mendel, J., John, R. e Liu, F. T., *Interval Type-2 Fuzzy Logic Systems Made Simple*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 14, No. 6, 2006.



- [15] Mendel, J. M., *Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems: Introduction and New Directions*, Prentice-Hall, Upper-Saddle River, NJ, 2001.
- [16] Mendel, J. M., *Fuzzy Sets for Words: a New Beginning*, The IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 2003.
- [17] Mendel, J. M., *Supplement to IEEE Computational Intelligence Magazine*, vol. 2, No. 1, pp. 20-29, 2007.
- [18] Ministério da Saúde, *Recomendações para a Prática de Atividades Físicas para Pessoas Vivendo com HIV e AIDS*, Brasília - DF, 1ª ed., 2012.
- [19] Ministério da Saúde, [www.aids.gov.br](http://www.aids.gov.br), outubro, 2013.
- [20] Ortega, N. R. S., *Aplicação da Teoria de Conjuntos Fuzzy a Problemas da Biomedicina*, Tese de Doutorado, Sao Paulo, 2001.
- [21] Pedrycz, W. e Gomide, F., *An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design*, MIT Press Cambridge, EUA, 1998.
- [22] Perelson, A. e Nelson, P., *Mathematical Analysis of HIV-1 Dynamics in Vivo*, SIAM Review, 41:3-44, 1999.
- [23] Rignel, D. G. S., Chenci, G. P. e Lucas, C. A., *Uma Introdução a Lógica Fuzzy*, Revista Eletrônica de Sistemas de Informação e Gestão Tecnológica, vol. 1, No. 1, 2011.
- [24] Rizol, P. M. S., Mesquita, L. e Saotome, O., *Lógica Fuzzy Tipo-2*, Revista Sodebras, vol. 6, pp. 27-46, 2011.
- [25] Ruggiero, M. A. G. e Lopes, V. L. R., *Cálculo Numérico Aspectos Teóricos e Computacionais*, Departamento de Matemática Aplicada IMECC - UNICAMP, 2ª ed., 2006.
- [26] Santos, J. M. F., *Interpolação Difusa de Fenómenos Geográficos*, Tese de Doutorado, Universidade de Coimbra, 2004.
- [27] Saag, M., *Diagnóstico Laboratorial da AIDS Presente e Futuro*, In Sande, M. e P.A.Volberding, editors, *Tatamento Clínico da AIDS*, pp. 27-43, Revinter, 3ª ed., 1995.
- [28] Salazar, O., Serrano, H. e Soriano, J., *Centroid of an Interval Type 2 Fuzzy Set: Continuous vs. Discrete*, En: *Ingeniería*, vol. 16, No. 2, pp. 67-78, 2011.
- [29] Triola, M. F., *Introdução à Estatística*, Editora LTC, 7ª ed., 1999.
- [30] User's Guide, *Interval Type-2 Fuzzy Logic Toolbox For Use with MATLAB*, version 1, Institute of Technology and Baja California Autonomous University, Tijuana Campus, Mexico, 2005-2008.
- [31] Wu, D. e Nie, M., *Comparison and Practical Implementation of Type-2 Fuzzy Logic Reduction Algorithms for Type-2 Fuzzy Sets and Systems*, In Proc. IEEE Intl Conf. on Fuzzy Systems, Taipei, Taiwan, 2011.
- [32] Zadeh, L. A., *Fuzzy Sets*, Information and Control 8, 338-353, 1965.
- [33] Zadeh, L. A., *The Concept of a Linguistic Variable and its Application to Approximate Reasoning-1*, Information Science, 8, 199-249, 1975.



- [34] Wu, D., *A Brief Tutorial on Interval Type-2 Fuzzy Sets and Systems*. Disponível em: <http://www.learningace.com/doc/782209/2a080752ce7c48a761b8d3fa766db413/a-brief-tutorial-on-interval-type-2-fuzzy-sets-and-systems>. Acesso: maio, 2013.

## Anexos

## Anexo 1: Algoritmo KM para Calcular o Centroide de um Conjunto Fuzzy Tipo 2 Intervalar.

```
clear all
```

```
% Defina um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar por 9 pontos: 4 pontos da função de pertinência superior e 4 da inferior e o ponto último a altura.
```

```
A=[0.1 0.5 1 1 0.6 0.65 1 1 0.25]
```

```
% Calculando o centroid de A, como CA=(CAI+CAr)/2, onde CAI=extremo inferior do centroide e CAr=extremo superior do centroide.
```

```
[CA CAI CAr]=centroidIT2edu(A)
```

```
%Plotando o conjunto fuzzy.
```

```
fill(A(1,[1:4 8:-1:5]),[0 1 1 0 0 A(1,[9 9]) 0],[1 0.78 0.8]);
hold on
plot(A(1,[1:4 8:-1:5]),[0 1 1 0 0 A(1,[9 9]) 0],'color',[0.9 0.9 0.9],'linewidth',2);
hold on
plot(CA,0,'g*')
hold on
plot(CAI,0,'r*')
hold on
plot(CAr,0,'r*')
hold on
```

```
function [CA, CAI, CAr]=centroidIT2edu(A)
```

```
%[CA, CAI, CAr]=centroidIT2(A):Calcula o centroide de um conjunto fuzzy tipo 2 intervalar, que es definido por nove pontos.
```

```
if length(A) ==9
error('The input vector must be a 9-point representation of an IT2 FS. ');
end
% No linspace utilize 9 divisões para conferir os calculos manuais.
Xs=linspace(A(1),A(4),10);
UMF=mgedu(Xs,A(1:4),[0 1 1 1]);
LMF=mgedu(Xs,A(5:8),[0 A(9) A(9) A(9)]);
CAI=EKM(Xs,LMF,UMF,-1);
CAr=EKM(Xs,LMF,UMF,1);
CA=(CAI+CAr)/2;
```

```
function y = EKM(xPoint,wLower,wUpper,maxFlag)
```

```
if max(wUpper)==0 | max(xPoint)==0
y=0; return
end
```

```

if max(wLower)==0
if maxFlag >0
y=max(xPoint);
else
y=min(xPoint);
end
return;
end

if length(xPoint)==1
y=xPoint;
return;
end

I=find(wUpper==0);
xPoint(I)=[ ];
wLower(I)=[ ];
wUpper(I)=[ ];

[xSort,xIndex] = sort(xPoint);
lowerSort = wLower(xIndex);
upperSort = wUpper(xIndex);
k=find(xSort==0,1,'last');
if k > 1
xSort(1)=0;
xSort(2:k)=[ ];
lowerSort(1)=sum(lowerSort(1:k));
lowerSort(2:k)=[ ];
upperSort(1)=sum(upperSort(1:k));
upperSort(2:k)=[ ];
end

if size(xSort,1) > 1
xSort=xSort';
end
if size(lowerSort,1) > 1
lowerSort=lowerSort';
end
if size(upperSort,1) > 1
upperSort=upperSort';
end

ly=length(xSort);
if maxFlag < 0
k=round(ly/2.4);
temp=[upperSort(1:k) lowerSort(k+1:ly)];
else
k=round(ly/1.7);
temp=[lowerSort(1:k) upperSort(k+1:ly)];
end

```

```

a=sum(temp.*xSort);
b=sum(temp);
y = a/b;
kNew = find(xSort > y,1) - 1;

while k ==kNew
mink=min(k,kNew);
maxk=max(k,kNew);
temp=upperSort(mink+1:maxk)-lowerSort(mink+1:maxk);
b=b-sign(kNew-k)*sign(maxFlag)*sum(temp);
a=a-sign(kNew-k)*sign(maxFlag)*sum(temp.*xSort(mink+1:maxk));
y = a/b;
k=kNew;
kNew = find(xSort > y,1) - 1;
end

function u=mgedu(x,xMF,uMF)

% f=mg(x,xMF,uMF)
% Função para calcular os graus de pertinência de x no conjunto fuzzy tipo 1.
% xMF: x-coordenadas de um conjunto fuzzy tipo 1.
% uMF: u-coordenadas de um conjunto fuzzy tipo 1.
% u: Pertinência de x no conjunto fuzzy tipo 1.

if nargin==2
uMF=[0 1 1 1];
elseif length(xMF) ==length(uMF)
error('xMF and uMF must have the same length. ');
end

[xMF,index]=sort(xMF);
uMF=uMF(index);

u=zeros(size(x));
for i=1:length(x)
if x(i)≤xMF(1) | x(i)> xMF(end)
u(i)=0;
else
left=find(xMF < x(i),1,'last');
right=left+1;
u(i)=uMF(left)+(uMF(right)-uMF(left))*(x(i)-xMF(left))/(xMF(right)-xMF(left));
end
end
end

```

## Anexo 2: Algoritmo de Karnik e Mendel para obter a Taxa de Retorno de um grupo de indivíduos HIV positivos de sintomáticos para assintomáticos.

```
clc; clear all; close all;
```

% FS1: As linhas 1, 2 e 3, representam os conjuntos fuzzy tipo 2 trapezoidal carga viral baixa, carga viral média e carga viral alta respectivamente.

```
FS1=[0 0 6200 22400 0 0 1000 14000 0.9;
3500 12000 57000 64000 10000 20000 50600 55000 0.9;
50000 61600 120000 120000 54000 70000 120000 120000 0.9];
```

% FS2: As linhas 1, 2, 3, 4 e 5, representam os conjuntos fuzzy tipo 2 trapezoidal nível de CD4+ muito baixo, baixo, médio, médio alto e alto respectivamente.

```
FS2=[0 0 30 100 0 0 0 60 0.9;
28 64 138 180 60 90 110 140 0.9;
100 152 240 300 150 180 200 250 0.9;
180 220 300 420 230 250 260 370 0.9;
340 360 800 800 380 420 800 800 0.9];
```

% Ys: Saída intervalar da Taxa de retorno

```
Ys=[0 0;0.15 0.15;0.15 0.15;0.65 0.65;1 1;0 0;0 0;0.15 0.15;0.65 .65;0.65 .65;0 0;0 0;.15 .15;.15
0.15;0.65 0.65];
```

% N: Número de discretizações do domínio  $X_1$ ,  $X_2$ .

```
N=80;
X1=linspace(0,1,N);
X2=linspace(0,1,N);
%O output usando IT2FLS.m
tax2=zeros(N,N);
% O output usando EKM.m
Y2=zeros(N,N);
% Calculando a taxa em cada método. No caso do tipo 2 o método do centroide generalizado
de Karnik e Mendel
for n1=1:N
for n2=1:N
tax2(n1,n2)=IT2FLS([X1(n1) X2(n2)],[FS1([1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3],:) FS2([1 2 3 4 5 1 2
3 4 5 1 2 3 4 5],:)],[Ys Ys]);
[y,yl,yr]=IT2FLS([X1(n1) X2(n2)],[FS1([1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3],:) FS2([1 2 3 4 5 1 2 3 4
5 1 2 3 4 5],:)],Ys);
A(n1,n2)=yl;
B(n1,n2)=yr;
end
end
% [2391 241.5] representa a carga viral média e nível de CD4+ médio de um grupo de indivíduos
HIV positivos, no tempo t=3 meses.
```

%  $y_l, y_r$ , representam o extremo inferior e superior do centroide do conjunto fuzzy tipo 2 intervalar e  $y$  é o valor defuzzificado, obtido como a média de  $y_l, y_r$ .

```
[y,y_l,y_r]=IT2FLS([2391 241.5],[FS1([1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 3 3 3 3 3],:) FS2([1 2 3 4 5 1 2 3 4 5 1 2 3 4 5],:)],Ys)
```

```
fismat=readfis('eduretorno');
tax1=zeros(N,N);
for i=1:N
for j=1:N
tax1(i,j)=evalfis([X1(i) X2(j)],fismat);
end
end
```

```
figure(1);
```

Graficando a primeira regra de entrada do tipo 2

```
fill(FS1(1,[1:4 8:-1:5]),[0 1 1 0 0 FS1(1,[9 9]) 0],[0.9 0.9 0.9]);
hold on
plot(FS1(1,[1:4 8:-1:5]),[0 1 1 0 0 FS1(1,[9 9]) 0],'color',[0.9 0.9 0.9],'linewidth',1.5);
hold on
fill(FS1(3,[1:4 8:-1:5]),[0 1 1 0 0 FS1(3,[9 9]) 0],[1 0.78 0.80]);
hold on
plot(FS1(3,[1:4 8:-1:5]),[0 1 1 0 0 FS1(3,[9 9]) 0],'color',[1 0.78 0.80], 'linewidth',1.5);
hold on
fill(FS1(2,[1:4 8:-1:5]),[0 1 1 0 0 FS1(2,[9 9]) 0],'yellow');
hold on
plot(FS1(2,[1:4 8:-1:5]),[0 1 1 0 0 FS1(2,[9 9]) 0],'yellow','linewidth',1.5);
hold on
```

% Graficando as funções de pertinência do Tipo1 da regra 1

```
plotmf(fismat,'input',1);
axis([min(FS1(:)) max(FS1(:)) 0 1.1]);
figure
```

% Graficando a segunda regra de entrada do tipo 2

```
fill(FS2(1,[1:4 8:-1:5]),[0 1 1 0 0 FS2(1,[9 9]) 0],[0.9 0.9 0.9]);
hold on
plot(FS2(1,[1:4 8:-1:5]),[0 1 1 0 0 FS2(1,[9 9]) 0],'color',[0.9 0.9 0.9],'linewidth',1.5);
hold on
fill(FS2(3,[1:4 8:-1:5]),[0 1 1 0 0 FS2(3,[9 9]) 0],[1 0.78 0.80]);
hold on
plot(FS2(3,[1:4 8:-1:5]),[0 1 1 0 0 FS2(3,[9 9]) 0],'color',[1 0.78 0.80],'linewidth',1.5);
hold on
fill(FS2(2,[1:4 8:-1:5]),[0 1 1 0 0 FS2(2,[9 9]) 0],'yellow');
hold on
plot(FS2(2,[1:4 8:-1:5]),[0 1 1 0 0 FS2(2,[9 9]) 0],'yellow','linewidth',1.5);
hold on
fill(FS2(4,[1:4 8:-1:5]),[0 1 1 0 0 FS2(4,[9 9]) 0],'green');
hold on
```

```

plot(FS2(4,[1:4 8:-1:5]),[0 1 1 0 0 FS2(4,[9 9]) 0],'green','linewidth',1.5);
hold on
fill(FS2(5,[1:4 8:-1:5]),[0 1 1 0 0 FS2(5,[9 9]) 0],'blue');
hold on
plot(FS2(5,[1:4 8:-1:5]),[0 1 1 0 0 FS2(5,[9 9]) 0],'blue','linewidth',1.5);
hold on

```

```

% Graficando as funções de pertinência do Tipo1 da regra 1
plotmf(fismat,'input',2);
% Enquadrando o grafico
axis([min(FS2(:)) max(FS2(:)) 0 1.1])
figure
plotmf(fismat,'output',1)
xlabel('Taxa de retorno.')
ylabel('Grau de Pertinência.')

```