

MURILO RODOLFO CÂNDIDO

**Dinâmica não-linear e excitação
paramétrica: Uma abordagem via Método
da Média.**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2014

MURILO RODOLFO CÂNDIDO

Dinâmica não-linear e excitação paramétrica: Uma abordagem via Método da Média.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Dinâmica Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Márcio José Horta Dantas.

UBERLÂNDIA - MG
2014

C217d Cândia, Murilo Rodolfo, 1986-
2014 Dinâmica não-linear e excitação paramétrica: uma abordagem
via Método da Média / Murilo Rodolfo Cândia. - 2014.
67 f. : il.

Orientador: Márcio José Horta Dantas.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia,
Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Inclui bibliografia.

1. Matemática - Teses. 2. Equações diferenciais ordinárias -
Teses. 3. Lagrange, Funções de - Teses. I. Dantas, Márcio José
Horta. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-
Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO: Murilo Rodolfo Cândido.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11212MAT010.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Dinâmica Aplicada.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Dinâmica não-linear e excitação paramétrica: Uma abordagem via Método da Média.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Márcio José Horta Dantas.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 18 de Fevereiro de 2014, às 10h 30min, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME

ASSINATURA

Prof. Dr. Márcio José Horta Dantas
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Dr. Luis Fernando de Osório Mello
UNIFEI - Universidade Federal de Itajubá

Prof. Dr. Jean Venato Santos
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Uberlândia-MG, 18 de Fevereiro de 2014.

Dedicatória

Dedico esse trabalho a minha mãe Eunice Maria Cândido.

Agradecimentos

Dedico meus sinceros agradecimentos para:

- Deus por ter me permitido chegar até aqui;
- ao programa de pós-graduação em matemática por me dar condições de realizar este trabalho;
- ao professor Márcio José Horta Dantas cuja amizade e orientação foram imprescindíveis no desenvolvimento desta dissertação;
- a minha família pelo apoio durante todos os momentos da minha vida.

Cândido, M. R. *Dinâmica não-linear e excitação paramétrica: Uma abordagem via Método da Média*. 2014. (67 pág) p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Nosso objetivo é formular uma demonstração para o Teorema da Média usando métodos de análise clássica. Para isto estudamos alguns resultados que nos serviram como base teórica, como por exemplo, o Teorema de Estabilidade de Liapunov. Além disso, aplicaremos o Teorema da Média a um sistema físico com dois graus de liberdade, que é composto de uma massa única com acoplamento não-linear e excitação paramétrica. Com isso, a investigação de existência e estabilidade de órbitas periódicas neste sistema, reduz-se ao estudo da estabilidade de pontos de equilíbrio do sistema médio. Tal estudo foi feito com o auxílio do Critério de Routh-Hurwitz.

Palavras-chave: Equações diferenciais ordinárias, Método da Média, Dinâmica Não-linear.

Cândido, M. R. *Nonlinear Dynamics and Parametric Excitation: An Approach by Averaging*. 2014. (67 pages) p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

The aim of this work is to formulate a demonstration for the Averaging Theorem using classical analysis methods. In order to do that we studied some results that was used as the theoretical basis, such as the Liapunov Stability Theorem. Moreover, we will apply the Averaging theorem to a physical system with two degrees of freedom, wich is composed by a single mass with nonlinear coupling and parametric excitation. Thus, the investigation of the existence and stability of periodic orbits in this system is reduced to studying the stability of equilibrium points of the average system. This study was made using the Routh-Hurwitz stability criterion.

Keywords: Ordinary differential equations, Averaging Method, Non-linear Dynamics.

LISTA DE FIGURAS

4.1	Sistema de massa única, com dois graus de liberdade e excitação paramétrica na presença de um campo de força paralelo à direção y	30
4.2	Estabilidade da solução trivial, caso <i>i</i> . Onde $a = 1$, $b = 4$, $c = 10$, $q = 3$, $\delta_0 = 10$, $\kappa = 3$, $\eta = 4$, $\varepsilon = 0.6$ e $(9, 0.1, 8, 0.1)$ sendo o condição inicial.	34
4.3	Estabilidade da solução trivial, caso <i>ii</i> . Onde $a = 1$, $b = 4$, $c = 4$, $q = 3$, $\delta_0 = 10$, $\kappa = 3$, $\varepsilon = 0.008$, $\eta = 1$ e $(10, 0, 8, 0)$ sendo o condição inicial.	35
4.4	Instabilidade da solução trivial, caso <i>ii</i> . Onde $a = 1$, $b = 4$, $c = 4$, $q = 3$, $\delta_0 = 1$, $\kappa = 3$, $\varepsilon = 0.008$, $\eta = 1$ e $(10, 0, 8, 0)$ sendo o condição inicial.	35
4.5	Projeção da Órbita instável com $a = 1$, $b = 4$, $c = 4$, $q = 3$, $\delta_0 = 10$, $\kappa = 3$, $\varepsilon = 0.008$, $\eta = 1$ e $(10, 0, 8, 0)$ sendo o condição inicial.	36
4.6	Plano- $c \delta_0$	36
4.7	Região de estabilidade da equação diferencial no plano $c \times \mu$	40
4.8	Exemplo de órbita obtida onde c e μ pertencem a região de estabilidade e $\delta_0 > 0$. Novamente as cores representam a passagem do tempo, indo da cor preta, quando $t = 0$, até amarelo quando $t = 60$	40
4.9	Representação de uma órbita estável obtida com c , μ e δ_0 dentro da região de estabilidade.	41
4.10	Representação de uma órbita estável obtida com c , μ e δ_0 dentro da região de estabilidade.	41
4.11	Região de instabilidade em laranjado.	42
4.12	Projeção de uma órbita periódica representada pela curva fechada em amarelo. Sendo $\varepsilon = 0.8$, $a = 10$, $b = 8$, $c = 10$, $\kappa = 25$, $\delta = 58$, $\delta_0 = 2$, $\gamma = 19$ e o ponto inicial $(-0.403679, -0.241490, -0.024253, 1.08781)$	47
4.13	Representação do movimento periódico, nas variáveis y e x associado a órbita periódica estável representada pela curva fechada em amarelo. . . .	48
4.14	Projeção de uma órbita periódica representada pela curva fechada em amarelo. Sendo $\varepsilon = 0.008$, $a = 10$, $b = 8$, $c = 40$, $\kappa = 25$, $\delta = 58$, $\delta_0 = 2$, $\gamma = 19$ e o ponto inicial $(-0.947436, 1.75851, 0.07181, 1.08781)$	49
4.15	Movimento no plano associado a órbita periódica representada pela curva fechada em amarelo.	49

4.16	Projeção de uma órbita periódica representada pela curva fechada em amarelo. Sendo $\varepsilon = 0.8$, $a = 0.8$, $b = -8$, $c = 40$, $\kappa = 25$, $\delta = 58$, $\delta_0 = 2$, $\gamma = 19$ e o ponto inicial $(-0.85513, -0.041494, 0.0157913, 1.28781)$	50
4.17	Projeção de uma órbita periódica representada pela curva fechada em amarelo.	51
4.18	Projeção de uma órbita representada pela curva fechada em amarelo. Sendo $\varepsilon = 0.0001$, $a = 0.77$, $b = -800$, $c = \frac{8}{20}$, $\kappa = 5$, $\delta = 58$, $\delta_0 = 0.3$, $\gamma = 1$ e o ponto inicial $(-0.494327, -0.241490, 9.774382, 1.08781)$	52
4.19	Representação do movimento físico da partícula.	53
4.20	Projeção de uma órbita representada pela curva fechada em amarelo. Em verde temos o ponto inicial e em vermelho o ponto final. Sendo $\varepsilon = 0.008$, $a = -10.8$, $b = 700$, $c = \frac{9}{20}$, $\kappa = 5$, $\delta = 50$, $\delta_0 = 0.3$, $\gamma = 1$ e o ponto inicial $(-0.054538, -0.241490, -0.014872, 1.08781)$	54
4.21	Representação do movimento físico da partícula. Em verde temos o ponto inicial e em vermelho o ponto final.	54

SUMÁRIO

Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de Figuras	viii
Introdução	1
1 Teoria Preliminar	2
1.1 Existência e Unicidade	2
1.2 Equações Lineares com Coeficientes Variáveis	3
1.3 Lemas e Resultados Técnicos	6
2 Estabilidade de Soluções Periódicas	13
2.1 Teorema de Estabilidade de Liapunov	13
3 O Teorema da Média	19
3.1 Introdução	19
3.2 Existência de Órbitas Periódicas	24
3.3 Estabilidade da Solução Periódica	26
4 Excitação Paramétrica em Dinâmica Não-Linear	29
4.1 Estabilidade da solução trivial	30
4.1.1 Estabilidade da solução trivial: caso ressonante	32
4.2 Estabilidade da solução trivial: caso próximo da ressonância	37
4.3 Soluções periódicas determinadas por pontos de equilíbrio não triviais da equação da média	42
5 Conclusões	61

INTRODUÇÃO

Neste trabalho estudaremos, por meio do Teorema da Média, um sistema de massa única com excitação paramétrica no sistema primário e um acoplamento não-linear expresso pelos termos de segunda ordem na equação diferencial. Dizemos que um sistema oscilatório está sujeito a uma excitação paramétrica quando suas oscilações são influenciadas pela variação periódica de algum de seus parâmetros o que no nosso caso ocorrerá devido a excitação cinética do suporte.

Este tipo de sistema surge em várias áreas da física e da engenharia, por exemplo:

- Dispositivos em mecatrônica, assim como em estruturas inteligentes, como por exemplo, rolamentos magnéticos controlados ativamente.
- Materiais ferroelétricos imersos em campos elétricos alternados. Tais materiais são amplamente utilizados na produção de dispositivos eletrônicos modernos.

Esses dispositivos estão normalmente associados a outros fenômenos não-lineares, daí a importância de explicar bem sua natureza para o melhor desempenho de suas funções.

Para estudar o sistema físico em questão vamos primeiramente, no capítulo 1, apresentar alguns teoremas e definições da teoria básica de equações diferenciais ordinárias, juntamente com alguns resultados de análise clássica que serão necessários para o desenvolvimento da teoria de estabilidade apresentada no capítulo 2. Toda essa teoria preliminar será usada para demonstrar o Teorema da Média no capítulo 3 e com isso estudar detalhadamente o sistema físico no capítulo 4. Os cálculos computacionais assim como os gráficos apresentados neste trabalho foram feitos utilizando o software Maxima, a Computer Algebra System. Version 5.25.1 (2011). <http://maxima.sourceforge.net/>, que é um software livre e de código aberto.

Murilo Rodolfo Cândido
Uberlândia-MG, 18 de Fevereiro de 2014.

CAPÍTULO 1

TEORIA PRELIMINAR

Neste capítulo vamos introduzir algumas definições e resultados preliminares fundamentais para o estudo criterioso do Teorema da Média, que será apresentado posteriormente.

1.1 Existência e Unicidade

O principal intuito deste trabalho é estudar a existência e a estabilidade de soluções periódicas para uma certa classe específica de equações diferenciais, neste contexto, é natural que o primeiro resultado a ser apresentado seja o de existência e unicidade de soluções para equações diferenciais. Já o segundo teorema aqui apresentado tem uma característica mais técnica e será usado para provar o Teorema de Liapunov um pouco mais adiante no texto.

Teorema 1.1 *Seja $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ um aberto e $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 . Considere a seguinte E.D.O*

$$\dot{x} = f(t, x). \quad (1.1)$$

Então:

- i) Para cada ponto (t_0, x_0) do domínio U , existe uma solução $x = \varphi(t)$ para (1.1) definida no intervalo $r_1 < t < r_2$, que satisfaz a seguinte condição de valor inicial*

$$\varphi(t_0) = x_0.$$

- ii) Considere duas soluções para (1.1), $x = \varphi(t)$ definida no intervalo aberto J_1 e $x = \chi(t)$ definida no intervalo aberto J_2 . Se $t_1 \in J_1 \cap J_2$ e $\varphi(t_1) = \chi(t_1)$ então estas soluções são idênticas em $J_1 \cap J_2$.*

Demonstração. Veja [8], capítulo 1, Teorema 2. ■

Teorema 1.2 *Assuma as hipóteses do Teorema 1.1. Seja φ uma solução da equação (1.1) definida no intervalo maximal (m_-, m_+) . Então a aplicação $g(t) = (t, \varphi(t))$ tende para a fronteira de U quando $t \rightarrow m_{\pm}$. Isto é, para todo compacto $S \subset U$ existe um $\varepsilon_+ > 0$ tal que, se $t > m_+ - \varepsilon_+$ então $g(t) \notin S$. Analogamente existe um $\varepsilon_- > 0$ tal que $g(t) \notin S$ sempre que $t < m_- + \varepsilon_-$.*

Demonstração. Veja [8], capítulo 4, seção 24. ■

1.2 Equações Lineares com Coeficientes Variáveis

O estudo de Equações Diferenciais Lineares é importante, nos dias de hoje, basicamente por duas razões. Primeiramente, as técnicas utilizadas para lidar com estas equações, especialmente no estudo da estabilidade de suas soluções, conferem analogias que podem ser utilizadas para estudar equações diferenciais não-lineares. Além disso, veremos posteriormente, que uma vasta classe de equações diferenciais podem ser “linearizadas”, isto é, poderemos estudar características de equações diferenciais não-lineares por meio das aproximações lineares do campo vetorial. Esta seção também possui caráter introdutório, de modo que todos os resultados aqui apresentados, incluindo o Teorema 1.13 estão demonstrados, em detalhe, em [8]. De modo geral, as equações diferenciais lineares tem a forma $\dot{x} = A(t)x + B(t)$ onde, $A(t) = (a_j^i(t))$ e $B(t) = (b^i(t))$ sendo cada uma das funções $a_j^i(t)$ e $b^i(t)$ contínua em um dado intervalo de tempo para todo $1 \leq i, j \leq n$. No entanto, será suficiente ao que se segue tratarmos de equações lineares homogêneas definidas da seguinte forma:

Seja $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n^2}$, a aplicação definida pela matriz $A(t) = (a_j^i(t))$ onde $a_j^i(t)$ é contínua para todo $i, j = 1, 2, \dots, n$. Considere o sistema linear

$$\dot{x} = A(t)x. \quad (1.2)$$

Vamos estabelecer uma série de definições e propriedades que serão úteis não só para o estudo de equações lineares, mas para a teoria de modo geral.

Definição 1.3 *Um conjunto de soluções de (1.2), $\varphi_1(t), \dots, \varphi_r(t)$, $t \in I$, é dito **linearmente dependente** se existem constantes c_1, \dots, c_r não todas nulas tais que $c_1\varphi_1(t) + \dots + c_r\varphi_r(t) = 0$ para todo $t \in I$. Caso contrário dizemos que o sistema de soluções é **linearmente independente**.*

Definição 1.4 *Se um conjunto de soluções*

$$\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$$

*é linearmente independente e n é a ordem de $A(t)$, então dizemos que este é um **sistema fundamental de soluções** para (1.2).*

A proposição abaixo nos mostra que um sistema fundamental de soluções gera o espaço das soluções das equações do tipo (1.2).

Proposição 1.5 *Toda equação diferencial do tipo (1.2) admite um sistema fundamental de soluções. Além disso, se $\varphi(t)$ é uma solução e $\{\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\}$ é um sistema fundamental de soluções para (1.2), então existem constantes c_1, \dots, c_n tais que $\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + \dots + c_n\varphi_n(t)$.*

Demonstração. Veja [8], página 129. ■

Munido de um sistema fundamental de soluções podemos escrever todas as soluções de uma dada equação linear, isto faz desse conjunto uma ferramenta indispensável para determinar as propriedades gerais dessas soluções. A fim de simplificar a notação convém escrever o sistema fundamental de solução por meio de uma matriz.

Definição 1.6 *A matriz*

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1^1(t) & \cdots & \varphi_n^1(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_1^n(t) & \cdots & \varphi_n^n(t) \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

onde $\varphi_j(t) = (\varphi_j^1(t), \dots, \varphi_j^n(t))$, com $1 \leq j \leq n$, formam um sistema fundamental de soluções, é chamada de **matriz solução** de (1.2).

Consideraremos agora o caso onde a matriz $A(t)$ tem coeficientes T -periódicos. Considere a equação

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (1.4)$$

onde $A(t+T) = A(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Do estudo deste caso, obtemos resultados que nos serão úteis quando formos tratar do caso geral de equações diferenciais com o lado direito T -periódico.

Seja $X = \Phi(t)$ uma matriz solução de (1.4), chamamos de uma **matriz fundamental** de $\Phi(t)$, a matriz constante C definida conforme a proposição abaixo.

Proposição 1.7 *Seja $X = \Phi(t)$ uma matriz solução da equação (1.4). Então existe uma matriz C constante (não-singular) tal que $\Phi(t+T) = \Phi(t)C$.*

Demonstração. Veja [8], página 144. ■

Os autovalores da matriz fundamental podem, como veremos nas seções posteriores, nos fornecer informações sobre a estabilidade de soluções de classes de equações diferenciais.

Definição 1.8 *Dizemos que λ é um número característico de multiplicidade k de (1.4), se λ é um autovalor de multiplicidade k de uma matriz fundamental C .*

Note que definimos os valores característicos da equação diferencial e não de uma matriz fundamental, isso decorre do fato de que todas as matrizes fundamentais são conjugadas, logo seus autovalores são os mesmos para qualquer matriz fundamental.

Proposição 1.9 *Seja $\Phi(t)$ e $\hat{\Phi}(t)$ soluções para (1.4) onde C e \hat{C} são suas respectivas matrizes fundamentais. Então existe uma matriz constante P tal que*

$$\hat{C} = PCP^{-1}.$$

Demonstração. Veja [8], página 145. ■

O Teorema 1.13 abaixo, foi demonstrado por Liapunov, e consiste no principal resultado desta seção. Segundo este teorema toda equação diferencial T -periódica linear, pode ser estudada a partir de uma equação linear com coeficientes constantes, através de uma transformação $S(t)$ definida a seguir.

Definição 1.10 *As equações lineares T -periódicas $\dot{x} = A(t)x$ e $\dot{y} = B(t)y$ são ditas **equivalentes** se existe uma transformação $x = S(t)y$, com $S(t)$ T -periódica e não singular, que transforma a primeira equação na segunda.*

Note que se substituirmos $x = S(t)y$ na primeira equação diferencial da definição acima, teremos

$$\dot{y} = \left(\dot{S}(t) + S(t)A(t) \right) S^{-1}(t)y.$$

Portanto se $B(t) = \left(\dot{S}(t) + S(t)A(t) \right) S^{-1}(t)$, segue a equivalência das equações.

A próxima proposição simplifica a forma de verificar a equivalência entre duas equações relacionando este conceito com a igualdade de suas matrizes fundamentais.

Proposição 1.11 *As equações diferenciais $\dot{x} = A(t)x$ e $\dot{y} = B(t)y$ são equivalentes se, e somente se, existem $\Phi(t)$ e $\Psi(t)$ matrizes soluções respectivamente de $\dot{x} = A(t)x$ e $\dot{y} = B(t)y$ com a mesma matriz fundamental.*

Demonstração. Veja [8], página 145. ■

Observação 1.12 *A propriedade acima e a Proposição (1.9) mostram que se duas equações diferenciais são equivalentes então elas tem os mesmos números característicos.*

Portanto, se duas equações são equivalentes, toda informação que dependa dos autovalores são partilhadas por ambas equações, isso implicará na possibilidade de se estudar a estabilidade das soluções de uma equação, através das soluções de outra equação, equivalente a primeira e, por vezes, mais simples de ser analisada. É exatamente isso que afirma o seguinte teorema.

Teorema 1.13 *Toda equação $\dot{x} = A(t)x$ com $A(t)$ T -periódica, é equivalente a uma equação $\dot{y} = By$ onde B é uma matriz constante. Se $A(t)$ for uma matriz real com período T então esta equação, se considerada com período $2T$, é equivalente à equação*

$$\dot{y} = B_1y$$

onde a matriz B_1 é constante e real, e a matriz $S(t)$ que leva $\dot{x} = A(t)x$ em $\dot{y} = B_1y$ também é real.

Demonstração. Veja [8], página 146. ■

1.3 Lemas e Resultados Técnicos

Veremos agora algumas definições e resultados técnicos que serão usados no decorrer do texto. Considere a equação diferencial

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)) \quad (1.5)$$

e seja $x(t)$ uma solução de (1.5).

Lema 1.14 $x(t)$ será T -periódica se, e somente se, $x(0) = x(T)$.

Demonstração. (\Rightarrow) Imediato.

(\Leftarrow) Considere o Problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = x(0) = x(T) \end{cases}.$$

Deste modo teremos que $x(t)$ e $x(t+T)$ são soluções para o mesmo problema de Cauchy, e pela unicidade de soluções temos que $x(t) = x(t+T)$. ■

Lema 1.15 $x(t)$ satisfaz a condição $x(0) = x(T)$ se, e somente se, $\int_0^T f(t, x(t))dt = 0$.

Demonstração.

Para demonstrar esse lema basta reescrever a solução $x(t)$ na forma,

$$x(t) = x(0) + \int_0^t f(s, x(s))ds. \quad (1.6)$$

(\Rightarrow) Por hipótese temos que $x(T) - x(0) = 0$. Por outro lado, usando (1.6) temos que, $x(T) - x(0) = \int_0^T f(s, x(s))ds$. Portanto,

$$\int_0^T f(s, x(s))ds = 0.$$

(\Leftarrow) Usando novamente (1.6), temos que $x(T) = x(0) + \int_0^T f(s, x(s))ds = 0$. Como $\int_0^T f(t, x(t))dt = 0$, temos que $x(T) = x(0)$. ■

Lema 1.16 Considere a Equação Diferencial Ordinária $\dot{x} = f(t, x)$. Seja $x(t)$ uma solução desta equação, então a solução $x(t)$ é T -periódica se, e somente se,

$$\int_0^T f(t, x(t))dt = 0.$$

Demonstração. A demonstração desse lema segue diretamente de 1.14 e 1.15. ■

Definição 1.17 Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ um operador linear, a **norma uniforme** de T é definida como sendo

$$\|T\| = \max\{|Tx|; x \in D\} \quad \text{onde } D = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq 1\} \quad (1.7)$$

sendo $|\cdot| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ a norma euclidiana.

A existência do valor máximo, na definição acima, se deve a compacidade de D e a continuidade de $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. A norma uniforme possui as seguintes propriedades:

Lema 1.18 Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e $\|\cdot\|$ a norma uniforme, então:

- a) Para todo $x \in \mathbb{R}^n$ vale que $|T(x)| \leq \|T\| |x|$.
- b) $\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$.
- c) Para todo $m \in \mathbb{N}$ vale que $\|T^m\| \leq \|T\|^m$.

Demonstração. Ver [4]. ■

A propriedade (a) é particularmente importante para obter uma estimativa dos autovalores de T . Note que, se $v \in \mathbb{R}^n$ é um autovetor associado ao autovalor λ de T , então esta desigualdade garante que $|T(v)| = |\lambda v| \leq \|T\| |v|$ e portanto $|\lambda| \leq \|T\|$. Sendo assim, o módulo de qualquer autovalor de um operador linear é menor ou igual a sua norma.

Sabemos que, fixada uma base de \mathbb{R}^n , os elementos de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ são as matrizes, de ordem n , com coeficientes reais. Além disso, pode-se provar que a aplicação determinante, $\det : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Este fato será usado posteriormente.

O lema seguinte fornece uma caracterização por séries para inversa de matrizes reais. Este resultado será utilizado em várias demonstrações posteriores.

Lema 1.19 Seja $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, invertível e tal que $\|I - A\| < 1$. Então

$$A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - A)^k. \quad (1.8)$$

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que $\sum_{k=0}^{\infty} (I - A)^k$ converge. Como $\|I - A\| < 1$ temos que dado $\varepsilon > 0$ existe um $n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n_1, n_2 \geq n_0$ tal que, pelo Lema 1.18 c,

$$\left\| \sum_{k=n_1}^{n_2} (I - A)^k \right\| \leq \sum_{k=n_1}^{n_2} \|(I - A)^k\| \leq \varepsilon. \quad (1.9)$$

Logo $S_n = \sum_{k=0}^n (I - A)^k$, também é de Cauchy e portanto a série $\sum_{k=0}^{\infty} (I - A)^k$ converge.

Considere agora a matriz $C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tal que $C = \sum_{k=0}^{\infty} (I - A)^k$. Por outro lado, note

que

$$\begin{aligned}
A \sum_{k=0}^n (I - A)^k &= [I - (I - A)] \sum_{k=0}^n (I - A)^k \\
&= \sum_{k=0}^n (I - A)^k - \sum_{k=0}^n (I - A)^{k+1} \\
&= [(I - A)^0 + (I - A)^1 + \cdots + (I - A)^n] \\
&\quad - [(I - A)^1 + (I - A)^2 + \cdots + (I - A)^{n+1}] \\
&= I - (I - A)^{n+1}.
\end{aligned}$$

Quando $n \rightarrow \infty$ temos que $(I - A)^{n+1} \rightarrow 0$. Como $\|(I - A)^{n+1}\| \leq \|I - A\|^{n+1}$, segue da hipótese que $\lim_{n \rightarrow \infty} (I - A)^{n+1} = 0$.

Logo

$$\begin{aligned}
AC &= A \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^n (I - A)^k \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(A \sum_{k=0}^n (I - A)^k \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (I - (I - A)^{n+1}) \\
&= I - \lim_{n \rightarrow \infty} (I - A)^{n+1} \\
&= I.
\end{aligned}$$

Portanto $C = A^{-1}$, ou seja, $A^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (I - A)^k$. ■

Uma das questões fundamentais, no estudo de estabilidade de soluções de equações diferenciais, é saber quando soluções, passando por pontos arbitrariamente próximos, seguem próximas uma das outras durante um certo intervalo de tempo. Para simplificar a notação ao tratarmos desse problema, vamos introduzir a noção de Ordem, como segue abaixo.

Definição 1.20 Seja $p : \mathbb{R} \times U \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$, onde $U \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que p é de **ordem** ε se existem c_0 e ε_0 tais que $|p(t, x, \varepsilon)| < c_0 \varepsilon$ para todo $(t, x) \in \mathbb{R} \times U$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Indicamos isto por $p = O(\varepsilon)$. Dizemos que $p = O(\varepsilon)$ numa escala de tempo $t \sim \frac{1}{\varepsilon}$, se existem $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ e $\varepsilon_1 > 0$ tais que $|p(t, x, \varepsilon)| < c_1 \varepsilon$ para todo $x \in U$, $0 < t < \frac{c_2}{\varepsilon}$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$.

Outro resultado bastante utilizado no texto é a Fórmula de Taylor com resto Integral.

Teorema 1.21 Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação, de classe C^{p+1} , e $[a, a+v] \subset U$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Então

$$f(a+v) = f(a) + f'(a).v + \frac{1}{2}f''(a).v^2 + \cdots + \frac{1}{p!}f^{(p)}(a).v^p + r_p(v). \quad (1.10)$$

onde

$$f^{(p)}(a).v^p = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial^{p-1} f}{\partial v^{p-1}} \right) (a) \text{ e } r_p(v) = \frac{1}{p!} \int_0^1 (1-t)^p f^{(p+1)}(a+tv).v^{p+1} dt$$

Neste caso temos que existe $M > 0$ tal que $|r_p| < \frac{M|v|^{p+1}}{(p+1)!}$ e portanto $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r_p(v)}{|v|^p} = 0$.

Demonstração. Ver [6], capítulo 5 seção 4. ■

Vale a unicidade da Fórmula de Taylor, se $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ é p vezes diferenciável no ponto $a \in \mathbb{R}^m$ e, para cada $i = 1, 2, \dots, p$ é dada uma aplicação i -linear $\varphi_i : \mathbb{R}^m \times \dots \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, de tal modo que

$$f(a+v) = f(a) + \sum_{i=1}^p \frac{1}{i!} \varphi_i.v^i + r_p(v) \quad (1.11)$$

com $\lim_{v \rightarrow 0} \frac{r_p(v)}{|v|^p} = 0$, então $\varphi_i.v^i = f^{(i)}(a).v^i$ para todo $i = 1, \dots, p$ e todo $v \in \mathbb{R}^m$

A seguir temos o Lema de Grönwall que estabelece uma importante estimativa utilizada na demonstração de vários resultados sobre equações diferenciais ordinárias.

Lema 1.22 *Sejam u, v e c funções contínuas definidas em \mathbb{R} . Suponha que $c(t) \geq 0$ em $[0, t]$, se $c(t)$ é diferenciável, e $v(t) \leq c(t) + \int_0^t u(s)v(s)ds$ então*

$$v(t) \leq c(0)e^{\int_0^t u(s)ds} + \int_0^t c'(s) \left[e^{\int_s^t u(\tau)d\tau} \right] ds. \quad (1.12)$$

Demonstração. Seja $P(t) = c(t) + \int_0^t u(s)v(s)ds$, portanto $P'(t) = c'(t) + u(t)v(t)$. Dai, substituindo $v(t)$ temos por hipótese que

$$P'(t) \leq c'(t) + u(t)P(t). \quad (1.13)$$

Disto segue que

$$P'(t) - u(t)P(t) \leq c'(t).$$

Multiplicando ambos os membros da equação acima pelo fator integrante $e^{\int_0^t (-u(s))ds}$, podemos reescreve-la

$$\left(P(t)e^{-\int_0^t u(s)ds} \right)' \leq c'(t)e^{-\int_0^t u(s)ds}.$$

integrando a equação de 0 a t obtemos

$$P(t)e^{-\int_0^t u(s)ds} - P(0) \leq \int_0^t c'(w)e^{-\int_0^w u(s)ds} dw.$$

Usando o fato de que $P(0) = c(0)$ e multiplicando tudo por $e^{\int_0^t u(s)ds}$ teremos a desigualdade

$$P(t) \leq c(0)e^{\int_0^t u(s)ds} + e^{\int_0^t u(s)ds} \int_0^t c'(w)e^{-\int_0^w u(s)ds} dw,$$

ou seja,

$$P(t) \leq c(0)e^{\int_0^t u(s)ds} + \int_0^t c'(w)e^{\int_w^t u(s)ds} dw.$$

Note que $v(t) \leq P(t)$, e portanto

$$v(t) \leq c(0)e^{\int_0^t u(s)ds} + \int_0^t c'(w)e^{\int_w^t u(s)ds} dw. \quad (1.14)$$

■

O lema a seguir é uma ferramenta muito útil para estudar o comportamento dos autovalores de operadores lineares arbitrariamente próximos e será utilizado adiante no texto. A demonstração seguinte é diferente da prova apresentada em [7] página 58.

Lema 1.23 *Seja $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e $\|T - L\| < \delta$ então para cada $\bar{\lambda}$ no conjunto dos autovalores de T existe λ , no conjunto dos autovalores de L , de modo que $|\lambda - \bar{\lambda}| < \varepsilon$.*

Demonstração. Suponha que o lema acima seja falso. Portanto, dado $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ e $\varepsilon > 0$, vamos supor que para qualquer $\delta > 0$, existe $T_\delta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ com $\|T_\delta - L\| < \delta$ e $\bar{\lambda}_\delta$ um autovalor de T_δ , tal que para qualquer autovalor de L , denotado por λ , vale a relação $|\lambda - \bar{\lambda}_\delta| \geq \varepsilon$.

Sendo assim, tome $\delta = \frac{1}{n}$, se identificarmos T_δ e T_n , para cada $n \in \mathbb{N}$ teremos que $T_n \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ com $\|T_n - L\| < \frac{1}{n}$, de modo que existe um autovalor $\bar{\lambda}_n$ de T_n tal que para qualquer autovalor λ de L , vale a relação $|\lambda - \bar{\lambda}_n| \geq \varepsilon$.

Vejamus que a sequência $\{\bar{\lambda}_n\}$, está contida em um conjunto compacto. De fato, para todo $n \in \mathbb{N}$ vale que $\|T_n - L\| < \frac{1}{n} \leq 1$. Por outro lado, $\|T_n\| = \|T_n - L + L\| \leq \|T_n - L\| + \|L\|$, substituindo a primeira desigualdade na segunda temos $\|T_n\| \leq 1 + \|L\|$. Além disso, segue da observação feita sobre o Lema 1.18 (a) que $|\bar{\lambda}_n| \leq \|T_n\|$, e daí temos que $|\bar{\lambda}_n| \leq 1 + \|L\|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e com isso temos que todos os $\bar{\lambda}_n$ estão contidos no disco de centro na origem do plano complexo e raio $1 + \|L\|$.

Logo, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe uma subsequência $\{\bar{\lambda}_{n_k}\}$ convergente, portanto existe um $\bar{\lambda}$ tal que $\bar{\lambda} = \lim_{n_k \rightarrow \infty} \bar{\lambda}_{n_k}$.

Com isso, vamos definir uma nova sequência $\{a_k\}$ tal que

$$a_k = \det(I\bar{\lambda}_{n_k} - T_{n_k}), \quad (1.15)$$

como $\bar{\lambda}_{n_k}$ é autovalor de T_{n_k} temos que $a_k = 0$ pra todo n_k .

Portanto, como $L = \lim_{n_k \rightarrow \infty} T_{n_k}$, usando as propriedades de limite temos que

$$\begin{aligned} \lim_{n_k \rightarrow \infty} (I\bar{\lambda}_{n_k} - T_{n_k}) &= \lim_{n_k \rightarrow \infty} (I\bar{\lambda}_{n_k}) - \lim_{n_k \rightarrow \infty} (T_{n_k}) \\ &= I\bar{\lambda} - L, \end{aligned}$$

segue da continuidade do determinante que

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} a_{n_k} = \det \left(\lim_{n_k \rightarrow \infty} (I\bar{\lambda}_{n_k} - T_{n_k}) \right) \quad (1.16)$$

$$= \det(I\bar{\lambda} - L). \quad (1.17)$$

Contudo, $\lim_{n_k \rightarrow \infty} a_{n_k} = 0$, pois $\{a_{n_k}\}$ é a sequência constante nula. Sendo assim, temos que $\bar{\lambda}$ é um autovalor de L . Além disso, temos que $\bar{\lambda}_{n_k}$ converge para $\bar{\lambda}$, logo existe um $n_{k_0} \in \mathbb{N}$ tal que $|\bar{\lambda}_{n_{k_0}} - \bar{\lambda}| < \varepsilon$. O que é um absurdo, pois $\bar{\lambda}_{n_{k_0}}$ é autovalor de $T_{n_{k_0}} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, que satisfaz a relação $\|T_{n_{k_0}} - L\| < \frac{1}{n_{k_0}}$ e por hipótese detém a propriedade de que $|\lambda - \bar{\lambda}_{n_{k_0}}| \geq \varepsilon$ para qualquer autovalor λ de L . ■

A seguir temos a **Fórmula de Variação de Parâmetros**, que será aplicada várias vezes no decorrer do texto a fim de escrever certas equações diferenciais na forma canônica.

Lema 1.24 *Considere a seguinte equação diferencial*

$$\dot{x} = f(x) + \varepsilon g(x, t, \varepsilon) \quad (1.18)$$

sendo f e g funções de classe C^1 . Então existe uma mudança de variável $x \rightarrow y$ tal que a expressão (1.18) se escreve da forma

$$\dot{y} = \varepsilon g_1(y, t, \varepsilon). \quad (1.19)$$

Demonstração. Seja $\varphi(t, z_0)$ o fluxo da equação diferencial auxiliar $\dot{z} = f(z)$. Definimos a seguinte mudança de variável

$$x(t) = \varphi(t, y(t)). \quad (1.20)$$

Das propriedades do fluxo temos imediatamente que $y(t) = \varphi(-t, x(t))$, e além disso podemos afirmar que

$$\dot{x}(t) = \partial_1 \varphi(t, y(t)) + \partial_2 \varphi(t, y(t)) \dot{y}(t). \quad (1.21)$$

Substituindo (1.20) e (1.21) em (1.18) obtemos

$$\partial_1 \varphi(t, y(t)) + \partial_2 \varphi(t, y(t)) \dot{y}(t) = f(\varphi(t, y(t))) + \varepsilon g(t, \varphi(t, y(t)), \varepsilon) \quad (1.22)$$

devido a forma como foi definido temos que $\partial_1 \varphi(t, y(t)) = f(\varphi(t, y(t)))$, e além disso sabemos que $\varphi(t, \cdot)$ é um difeomorfismo assim $\partial_2 \varphi(t, \cdot)$ é inversível, logo $\partial_2 \varphi(t, y(t))$ é inversível e portanto podemos reescrever a equação acima da forma

$$\dot{y}(t) = \varepsilon [\partial_2 \varphi(t, y(t))]^{-1} g(t, \varphi(t, y(t)), \varepsilon) \quad (1.23)$$

como queríamos. ■

Veremos posteriormente que a estabilidade de soluções de equações diferenciais está intimamente relacionada ao estudo e análise de seus autovalores. Mais precisamente, veremos que em alguns casos, como no Teorema 2.9, o tipo de estabilidade depende fortemente do sinal da parte real de certos autovalores, que por sua vez, são as raízes de um algum polinômio característico. Tal observação revela a necessidade de se determinar sob quais condições um polinômio qualquer tem todas as raízes com partes reais negativas. Tal resultado é conhecido como **Crítério de Routh-Hurwitz**, enunciado abaixo.

Teorema 1.25 *Dado o polinômio $P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$, com $a_i \in \mathbb{R}$ para todo $i = 1, \dots, n$. Defina as n matrizes de Hurwitz da seguinte forma*

$$H_k = \begin{cases} a_{ij} = a_{2i-j}, & \text{se } 0 \leq 2i - j \leq k, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad \text{com } 1 \leq k \leq n. \quad (1.24)$$

Então, todas as raízes de P têm partes reais negativas se valem as relações:

$$\det(H_s) > 0 \quad \forall s = 1, \dots, n. \quad (1.25)$$

Nos casos em que $2i - j = 0$ definimos $a_0 = 1$.

Demonstração. Uma demonstração para este fato pode ser encontrada em [5]. ■

CAPÍTULO 2

ESTABILIDADE DE SOLUÇÕES PERIÓDICAS

2.1 Teorema de Estabilidade de Liapunov

Nesta seção estudaremos a existência e estabilidade de soluções periódicas de sistemas com coeficientes periódicos. Para isto, vamos dar a definição de estabilidade de Liapunov.

Seja

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2.1)$$

a forma vetorial de um sistema de 1º ordem tal que $f \in C^2$, definida em um certo domínio Γ do espaço das variáveis (t, x) . A solução da equação (2.1) com valores iniciais t_0 e x_0 será denotada por $\varphi(t, t_0, x_0)$.

Definição 2.1 A solução $\varphi(t, t_0, x_0)$ é dita **Liapunov estável** se as seguintes condições são satisfeitas:

- i) Existe um número $q > 0$ tal que, para $|x_1 - x_0| < q$, a solução $\varphi(t, t_0, x_1)$ é definida para todo $t \geq t_0$; em particular a própria solução $\varphi(t, t_0, x_0)$ é também definida para todo $t \geq t_0$.
- ii) Para todo número positivo ϵ , um número estritamente positivo $\delta \leq q$ pode ser obtido tal que, para $|x_1 - x_0| < \delta$ temos $|\varphi(t, t_0, x_1) - \varphi(t, t_0, x_0)| < \epsilon$ para $t \geq t_0$.

Definição 2.2 A solução $\varphi(t, t_0, x_0)$ da equação (2.1) a qual é Liapunov estável com condições iniciais (t_0, x_0) é **assintoticamente estável** se um número estritamente positivo $\alpha < q$ pode ser obtido de modo que para

$$|x_1 - x_0| < \alpha$$

quando $t \rightarrow \infty$, tenhamos

$$|\varphi(t, t_0, x_1) - \varphi(t, t_0, x_0)| \rightarrow 0.$$

A fim de estudar o comportamento das soluções de (2.1) na vizinhança de uma dada solução T -periódica $\varphi(t)$ vamos introduzir uma nova variável y , definida por

$$x = \varphi(t) + y. \quad (2.2)$$

Substituindo (2.2) em (2.1), usando o fato de que $\varphi(t)$ é solução de (2.1), e expandindo o lado direito usando a fórmula de Taylor temos

$$\dot{y} = \partial_2 f(t, \varphi(t))y + r(t, y), \quad (2.3)$$

sendo $|r(t, y)| < \frac{M\varepsilon^2}{2}$, uma vez que o segmento $[0, y]$ esteja contido em Γ . Assumindo que o lado direito de (2.1) é uma função T -periódica, podemos afirmar que o sistema linear

$$\dot{y} = \partial_2 f(t, \varphi(t))y \quad (2.4)$$

tem coeficientes T -periódicos. Os próximos resultados vão nos mostrar como o sistema (2.4) pode nos dar informações sobre a estabilidade das órbitas periódicas de (2.1). Para isso, considere a equação autônoma

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.5)$$

Definição 2.3 *Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função escalar tal que*

$$F(x^1, \dots, x^n) = F(x)$$

*é diferenciável. Definimos a **t -derivada de F em relação a equação diferencial (2.5)** no ponto $x = (x^1, \dots, x^n)$ da seguinte maneira. Seja $\varphi(t)$ uma solução da equação (2.5) tal que para $t = t_0$ tenha-se $\varphi(t_0) = x$. A derivada $\dot{F}_{(2.5)}(x)$ com respeito a equação (2.5) é definida pela fórmula*

$$\dot{F}_{(2.5)}(x) = \frac{d}{dt} F(\varphi(t))|_{t=t_0}.$$

Portanto desenvolvendo esta derivada temos que

$$\dot{F}_{(2.5)}(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F(x)}{\partial x^i} f^i(x) = (\text{grad} F)(x) \cdot f(x). \quad (2.6)$$

Observação 2.4 *Pela fórmula (2.6) nota-se que a derivada $\dot{F}_{(2.5)}(x)$ não depende da solução $\varphi(t)$ escolhida.*

Definição 2.5 *Chamamos uma função escalar $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de **forma quadrática simétrica**, se para $x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$, $W(x)$ seja determinada pela fórmula*

$$W(x) = \sum_{i,j=1}^n w_{ij} x^i x^j, \quad (2.7)$$

onde $w_{ij} = w_{ji}$. Chamamos uma forma quadrática de definida positiva se $W(x) > 0$ sempre que $x \neq 0$.

Proposição 2.6 Dado $W(x)$, uma forma quadrática definida positiva, sempre podemos obter números positivos u e v tais que vale a relação

$$u |x|^2 \leq W(x) \leq v |x|^2, \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.8)$$

Demonstração. Ver [8], seção 26(D). ■

Observação 2.7 Da proposição acima segue diretamente que se $x = (x^1, \dots, x^n)$ então

$$|x^i| \leq \sqrt{\frac{1}{u} W(x)} \quad (2.9)$$

para qualquer i tal que $1 \leq i \leq n$.

Teorema 2.8 Seja

$$\dot{x} = Ax \quad (2.10)$$

uma equação linear com coeficientes constantes. Se todos os autovalores da matriz constante $A = (a_{ij}^i)$ têm partes reais negativas, então existe uma forma quadrática positiva definida $W(x)$ cuja derivada em relação ao sistema (2.10) satisfaz a desigualdade

$$\dot{W}_{(2.10)}(x) \leq -\beta W(x), \quad (2.11)$$

onde β é um número real positivo independente de x .

Demonstração. Ver [8], seção 26(E). ■

Teorema 2.9 Considere a equação diferencial

$$\dot{z} = Bz + p(t, z), \quad (2.12)$$

onde $B = (b_{ij}^i)$ é uma matriz constante, cujos autovalores têm partes reais negativas, e $p(t, z)$ é uma função definida para $t \geq t_0$ e $|z| < c$ ($c > 0$) satisfazendo a relação

$$|p(t, z)| \leq p_0 |z|^2, \quad (2.13)$$

onde p_0 é um número positivo. Desta forma, teremos que $z = 0$ é uma solução assintoticamente estável de (2.12), e além disso,

$$|\chi(t, z_1)| \leq r |z_1| e^{-\alpha t} \quad (2.14)$$

vale para a solução $z = \chi(t, z_1)$ com as condições iniciais $t_0, z_1, |z_1| < c_1 < c$, com r e α números positivos independentes de z_1 .

Demonstração. Como $B = (b_{ij}^i)$ tem todos autovalores com partes reais negativas, se consideremos o sistema

$$\dot{z} = Bz \quad (2.15)$$

então pelo Teorema 2.8 temos que existe uma forma quadrática definida positiva $W(x)$ tal que

$$\dot{W}_{(2.15)}(z) \leq -\beta W(z), \quad (2.16)$$

onde $\dot{W}_{(2.15)}(z) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial W(z)}{\partial x^i} \left(\sum_{j=1}^n b_j^i z^j \right)$. Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \dot{W}_{(2.12)}(z) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial W(z)}{\partial x^i} \left(\sum_{j=1}^n b_j^i z^j \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W(z)}{\partial x^i} p^i(t, z) \\ &\leq -\beta W(z) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial W(z)}{\partial x^i} p^i(t, z). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Para majorar a segunda parcela desta soma usaremos o fato de que, como $W(z) = \sum_{i,j=1}^n w_{i,j} z^i z^j$, então $\frac{\partial W(z)}{\partial z_k} = 2 \sum_{i=1}^n w_{ik} z^i$ para qualquer $1 \leq k \leq n$. Logo $\left| \frac{\partial W(z)}{\partial z_k} \right| \leq 2 \sum_{i=1}^n |w_{ik}| |z^i|$, e portanto, usando a Observação 2.7, temos que

$$\left| \frac{\partial W(z)}{\partial z_k} \right| \leq 2 \sum_{i=1}^n |w_{ik}| \sqrt{\frac{1}{u} W(z)}. \quad (2.18)$$

Daí segue que, chamando $2n \left(\sum_{i=1}^n |w_{ik}| \right) \sqrt{\frac{1}{u}} = q$ podemos escrever

$$\left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial W(z)}{\partial z_i} \right| \leq q \sqrt{W(z)}. \quad (2.19)$$

Além disso, usando (2.13) e a primeira desigualdade da Proposição 2.6 temos que

$$|p(t, z)| \leq \frac{p_0}{u} W(z). \quad (2.20)$$

Contudo usando (2.20) e (2.19) em (2.17) e chamando $g = \frac{p_0 q}{u}$ temos a expressão

$$\dot{W}_{(2.12)}(z) \leq -\beta W(z) + g W(z) \sqrt{W(z)}. \quad (2.21)$$

Então, se $W(z) \leq c$ onde $c < \frac{\beta^2}{4g^2}$ teremos

$$\dot{W}_{(2.12)}(z) \leq -\frac{\beta}{2} W(z). \quad (2.22)$$

Denotaremos por E o elipsoide $W(z) \leq c$. Então vamos tomar $z_0 \in E$. Dada uma solução $\varphi(t, t_0, z_0)$ de (2.12) podemos definir $w(t) = W(\varphi(t, t_0, z_0))$ e t tal que $\varphi(t, t_0, z_0) \in E$, substituindo z por $\varphi(t, t_0, z_0)$ e usando (2.22) temos

$$\dot{w}(t) \leq -2\alpha w(t) \quad (2.23)$$

onde $\alpha = \frac{\beta}{4}$. Vamos mostrar que $\varphi(t, t_0, z_0)$ está definida para todo $t \geq t_0$.

Suponha por absurdo que existam m_1 e m_2 números reais tal que $m_1 < t < m_2$ seja o intervalo maximal da solução. Vamos considerar o subconjunto compacto de \mathbb{R}^n definido pelo elipsoide E . Pela Proposição (1.2) existe um $\varepsilon_2 > 0$ tal que para $t > m_2 - \varepsilon_2$, $\varphi(t, t_0, z_0) \notin E$, tome t' o valor para o qual a solução esta no fecho do elipsoide E , assim $w(t') = c$, então para $t_0 \leq t \leq t'$ temos que $\varphi(t, t_0, z_0) \in E$.

Por outro lado, a derivada de $w(t)$ é negativa neste intervalo, veja (2.23), e portanto está função é não crescente, logo $c = w(t') \leq w(t_0) < c$, o que é uma contradição. Portanto, a solução $\varphi(t, t_0, z_0)$ está definida para todo $t \geq t_0$. Por fim, temos que $w(t) > 0$, então podemos calcular

$$\int_{t_0}^t \frac{\dot{w}(s)}{w(s)} ds < \int_{t_0}^t -2\alpha ds \quad (2.24)$$

resolvendo esta integral obtemos,

$$\frac{w(t)}{w(t_0)} < e^{-2\alpha(t-t_0)} \quad (2.25)$$

e portanto,

$$W(\varphi(t, t_0, z_0)) < W(z_0)e^{-2\alpha(t-t_0)}. \quad (2.26)$$

Usando as relações fornecidas na Proposição 2.6 concluímos que

$$|\varphi(t, t_0, z_0)| < r |z_0| e^{-\alpha t}. \quad (2.27)$$

■

Teorema 2.10 *Consideremos a equação diferencial*

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2.28)$$

tal que f seja de classe C^2 e T periódica na variável t . Seja $\varphi(t)$ uma solução T -periódica para (2.28) com condições iniciais $\varphi(t_0) = x_0$. Se os valores absolutos de todos os números característicos do sistema

$$\dot{z} = D_2 f(t, \varphi(t))z \quad (2.29)$$

são menores que 1, então a solução $\varphi(t)$ é assintoticamente estável. Além disso, existe um número $\sigma > 0$ tal que para $|x_1 - x_0| < \sigma$ vale a relação

$$|\varphi(t, t_0, x_1) - \varphi(t)| < r e^{-\alpha t} |x_1 - x_0| \quad (2.30)$$

para todo $t \geq t_0$, com r e α números positivos e independentes de x_1 .

Demonstração. Primeiramente usamos o Teorema 1.13, considerando a matriz $D_2 f(t, \varphi(t))$ $2T$ -periódica, para afirmar que o sistema (2.29) é equivalente a equação

$$\dot{y} = B y \quad (2.31)$$

com B constante. Logo se tomarmos um sistema fundamental de soluções para (2.31), $\{\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\}$ de modo que a matriz solução associada seja tal que $\Phi(0) = Id$, a matriz fundamental de $\Phi(t)$ será da forma $C = e^{2TB}$ e com isso temos que seus autovalores serão da forma $e^{2T\lambda}$ com λ percorrendo os autovalores de B .

Deste modo pela Observação 1.12 temos os valores característicos de $D_2f(t, \varphi(t))$ são iguais aos valores característicos de C , portanto vale a relação

$$|e^{2T\lambda}| < 1. \quad (2.32)$$

Portanto,

$$e^{2TRe(\lambda)} < 1,$$

ou ainda, $Re(\lambda) < 0$. Portanto, todos autovalores de B têm partes reais negativas.

Por outro lado, seja

$$x = \varphi(t) + z. \quad (2.33)$$

Usando a fórmula de Taylor com relação a z em torno da origem, teremos que

$$f(t, \varphi(t) + z) = f(t, \varphi(t)) + D_2f(t, \varphi(t))z + r_1(t, z) \quad (2.34)$$

com $|r_1(t, z)| < \frac{M}{2} |z|^2$ onde $M > 0$. Substituindo (2.33) e (2.34) em (2.28) obtém-se

$$\dot{z} = D_2f(t, \varphi(t))z + r_1(t, z). \quad (2.35)$$

Note que $z = x - \varphi(t)$. Então usando a transformação $y = S(t)z$ fornecida pelo Teorema 1.13 em (2.35) segue que

$$\dot{y} = By + S(t)r_1(t, S^{-1}(t)y) \quad (2.36)$$

como

$$|S(t)r_1(t, S^{-1}(t)y)| < \|S(t)\| \frac{M}{2} |S^{-1}(t)y|^2$$

e portanto

$$|S(t)r_1(t, S^{-1}(t)y)| < \frac{M_1}{2} |y|^2. \quad (2.37)$$

Com isso podemos usar o Teorema 2.9 para afirmar que $x = \varphi(t)$ é uma solução assintoticamente estável e, além disso para $|x_1 - x_0| < \sigma$ vale

$$|\varphi(t, t_0, x_1) - \varphi(t)| < r |x_1 - x_0| e^{-\alpha t}, \quad (2.38)$$

para todo $t \geq t_0$. ■

CAPÍTULO 3

O TEOREMA DA MÉDIA

O Teorema da Média é uma ferramenta poderosa para estudar equações diferenciais não-lineares com coeficientes periódicos. Este resultado possui basicamente três implicações fundamentais. A primeira fornece uma aproximação das soluções do sistema original em termos do sistema médio, o qual será apresentado neste capítulo. A segunda fornece condições para existência de soluções periódicas para o sistema original. A última implicação trata das condições de estabilidade destas soluções periódicas. Esse teorema muitas vezes é tratado como um único resultado, veja [3], mas optamos enunciar o Teorema da Média dividido nos três teoremas abaixo a exemplo do que foi feito em [9].

3.1 Introdução

Considere a equação diferencial na forma canônica

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x(t), \varepsilon); \quad x \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq \varepsilon \ll 1, \quad (3.1)$$

onde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ é limitada em conjuntos limitados, de classe C^r com $r \geq 2$ e de período $T > 0$ em t . Vamos nos restringir a um conjunto limitado $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Com isso fazemos as seguintes definições preliminares.

Definição 3.1 Definimos a **Média** de $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ como sendo

$$\bar{f}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, z, 0) dt \quad (3.2)$$

com $z \in U$, nesta equação, considerado constante em relação a t .

Observação 3.2 Seja $U_1 \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto compacto e f contínua, então \bar{f} é Lipschitz em U_1 .

Definição 3.3 Chamamos de **Equação Média** do sistema (3.1) a equação

$$\dot{y} = \varepsilon \bar{f}(y) \quad (3.3)$$

Definição 3.4 Chamamos de **Parte Oscilante** de f a função

$$\tilde{f}(t, x, \varepsilon) = f(t, x, \varepsilon) - \bar{f}(x), \forall x \in U. \quad (3.4)$$

Note de \tilde{f} é T -periódica.

Teorema 3.5 Existe uma mudança de variável de classe C^r , $x = y + \varepsilon\omega(t, y)$ com respeito a qual, a equação diferencial (3.1) pode ser reescrita como

$$\dot{y} = \varepsilon \bar{f}(y) + \varepsilon^2 f_1(t, y, \varepsilon) \quad (3.5)$$

com f_1 T -periódica.

Além disso se $x(t)$ e $y(t)$ são soluções de (3.1) e (3.3) respectivamente, com relação as condições iniciais x_0 e y_0 , em $t = 0$ e $|x_0 - y_0| = O(\varepsilon)$ então $|x(t) - y(t)| = O(\varepsilon)$ sempre que $0 \leq t < \frac{1}{\varepsilon}$.

Demonstração.

Primeiramente, definimos $\omega : \mathbb{R} \times U \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\omega(t, z) = \int_0^t \tilde{f}(s, z, 0) ds \quad (3.6)$$

com $z \in U$ independente de t . Pela definição 3.4 temos

$$\begin{aligned} \int_0^T \tilde{f}(t, z, 0) dt &= \int_0^T \left(f(s, z, 0) - \frac{1}{T} \int_0^T f(v, z, 0) dv \right) ds \\ &= \int_0^T f(s, z, 0) ds - \int_0^T \left(\frac{1}{T} \int_0^T f(v, z, 0) dv \right) ds \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo pelo Lema 1.14 temos que $\omega(t, z)$ é T -periódica. Seja

$$x = y(t) + \varepsilon\omega(t, y(t)). \quad (3.7)$$

Diferenciando (3.7) temos

$$\dot{x} = \dot{y}(t) + \varepsilon \frac{d}{dt} (\omega(t, y(t))) = \dot{y}(t) + \varepsilon D_y \omega(t, y(t)) \dot{y}(t) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \omega(t, y(t)).$$

Assim,

$$\dot{x} - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \omega(t, y(t)) = [I + \varepsilon D_y \omega(t, y(t))] \dot{y}(t).$$

Usando a equação (3.1), teremos

$$[I + \varepsilon D_y \omega(t, y(t))] \dot{y}(t) = \varepsilon f(t, x, \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \omega(t, y(t)).$$

A partir de agora vamos omitir a dependência de y em t para simplificar a notação. Pela Definição 3.4 e a equação (3.7) podemos reescrever a equação acima da seguinte forma

$$[I + \varepsilon D_y \omega(t, y)] \dot{y}(t) = \varepsilon \bar{f}(y + \varepsilon \omega(t, y)) + \varepsilon \tilde{f}(t, y + \varepsilon \omega(t, y), \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \omega(t, y). \quad (3.8)$$

Vamos mostrar que

$$\det([I + \varepsilon D_y \omega(t, y)]) \neq 0. \quad (3.9)$$

De fato, usando a norma uniforme, veja def.(1.17), e a continuidade do determinante, temos que dado $0 < \varepsilon_0 \leq 1$, existe um $\delta_0 > 0$ tal que $\forall X \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$; $\|X - I\| < \delta_0$ teremos $|\det(X) - \det(I)| \leq \varepsilon_0$. Como $\det(I) = 1$ temos que, neste caso, $1 - \varepsilon_0 < \det(X) < 1 + \varepsilon_0$. Dessa forma teremos $\det(X) \neq 0$.

Como $t \rightarrow \omega(t, y)$ é periódica em t , segue que $D_y \omega(t, y)$ é periódica em t , assim podemos nos restringir a $[0, T]$. Por hipótese $y \in U$ sendo U aberto e limitado e portanto contido em um compacto K . Temos que $(t, y) \in [0, T] \times K$, e da continuidade de $D_y \omega$ segue que $D_y \omega(t, y)$ é limitada, portanto $D_y \omega(t, y(t))$ é limitada. Sendo assim, podemos restringir ε a fim de garantir que

$$\|[I + \varepsilon D_y \omega(t, y(t))] - I\| < \delta_0,$$

ou seja, $\|\varepsilon D_y \omega(t, y(t))\| < \delta_0$ e daí teremos a validade da equação (3.9). Portanto, esta matriz admite inversa, e além disso, se $\delta_0 < 1$ temos pelo Lema 1.19 teremos

$$[I + \varepsilon D_y \omega(t, y)]^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\varepsilon)^k (D_y \omega(t, y))^k. \quad (3.10)$$

Com isso, podemos reescrever a equação (3.8) da seguinte maneira

$$\dot{y}(t) = \varepsilon [I + \varepsilon D_y \omega(t, y)]^{-1} \left[\bar{f}(y + \varepsilon \omega(t, y)) + \tilde{f}(t, y + \varepsilon \omega(t, y), \varepsilon) - \frac{\partial}{\partial t} \omega(t, y) \right]. \quad (3.11)$$

A Fórmula de Taylor da função

$$f(t, y + \varepsilon \omega(t, y), \varepsilon)$$

em torno de $\varepsilon = 0$ é

$$f(t, y + \varepsilon \omega(t, y), \varepsilon) = f(t, y, 0) + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(t, y, 0) + r_2(\varepsilon), \quad (3.12)$$

onde $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{|r_2(\varepsilon)|}{|\varepsilon|^2} = 0$.

Pela Definição 3.4 podemos escrever

$$f(t, y, 0) = \bar{f}(y) + \tilde{f}(t, y, 0), \quad (3.13)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(t, y, 0) = \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}(y) \omega(t, y, 0) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(t, y, 0) \omega(t, y, 0) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varepsilon}(y, t, 0). \quad (3.14)$$

Desta maneira, a equação (3.12) fica na forma

$$\begin{aligned} f(t, y + \varepsilon\omega(t, y), \varepsilon) &= \bar{f}(y) + \tilde{f}(t, y, 0) + \varepsilon \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(t, y, 0)\omega(t, y, 0) \\ &\quad + \varepsilon \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}(t, y, 0)\omega(t, y, 0) + \varepsilon \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varepsilon}(y, t, 0) + \varepsilon r_2(\varepsilon) \end{aligned} \quad (3.15)$$

e substituindo (3.15) e (3.6) em (3.11) teremos

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \varepsilon [I + \varepsilon D_y \omega(t, y)]^{-1} \left[\bar{f}(y) + \tilde{f}(t, y, 0) + \varepsilon \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(t, y, 0)\omega(t, y, 0) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}(t, y, 0)\omega(t, y, 0) + \varepsilon \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varepsilon}(y, t, 0) + \varepsilon r_2(\varepsilon) - \tilde{f}(t, y, 0) \right]. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Usando (3.10) podemos escrever

$$[I + \varepsilon D_y \omega(t, y)]^{-1} = I - \varepsilon D_y \omega(t, y) + O(\varepsilon^2) \quad (3.17)$$

e sendo assim

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \varepsilon [I - \varepsilon D_y \omega(t, y) + O(\varepsilon^2)] \left[\bar{f}(y) + \varepsilon \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}(y)\omega(t, y, 0) \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(t, y, 0)\omega(t, y, 0) + \varepsilon \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varepsilon}(y, t, 0) + r_2(\varepsilon) \right] \end{aligned}$$

e por fim temos

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \varepsilon \bar{f}(y) + \varepsilon^2 \left[\frac{\partial \bar{f}}{\partial y}(y)\omega(t, y, 0) + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(t, y, 0)\omega(t, y, 0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varepsilon}(y, t, 0) - D_y \omega(t, y) \bar{f}(y) \right] + O(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\dot{y} \stackrel{def}{=} \varepsilon \bar{f}(y) + \varepsilon^2 f_1(y, t, \varepsilon). \quad (3.19)$$

Das equações (3.5) e (3.3) temos respectivamente

$$y_\varepsilon(t) = y_\varepsilon(0) + \varepsilon \int_0^t \bar{f}(y_\varepsilon(s)) ds + \varepsilon^2 \int_0^t f_1(s, y_\varepsilon(s), \varepsilon) ds \quad (3.20)$$

$$y(t) = y(0) + \varepsilon \int_0^t \bar{f}(y(s)) ds. \quad (3.21)$$

Denote $\gamma(t) = y_\varepsilon(t) - y(t)$, seja L a constate de Lipschitz de \bar{f} e C o valor máximo de f_1 , daí segue que

$$|\gamma(t)| \leq |\gamma(0)| + \varepsilon \int_0^t |\bar{f}(y_\varepsilon(s)) - \bar{f}(y(s))| ds + \int_0^t |f_1(s, y_\varepsilon(s), \varepsilon)| ds. \quad (3.22)$$

Como \bar{f} é Lipschitz, $|\bar{f}(y_\varepsilon(s)) - \bar{f}(y(s))| \leq L |y_\varepsilon(s) - y(s)|$ e $|f_1(s, y_\varepsilon(s), \varepsilon)| \leq C$, temos que

$$|\gamma(t)| \leq |\gamma(0)| + \varepsilon \int_0^t |y_\varepsilon(s) - y(s)| ds + \varepsilon^2 C t. \quad (3.23)$$

Vamos usar a desigualdade de Gronwall, Lema 1.22, na equação acima, fazendo $c(t) = |\gamma(0)| + \varepsilon^2 C t$ e $u(s) = \varepsilon L$, daí temos

$$\begin{aligned} |\gamma(t)| &\leq |\gamma(0)| e^{\int_0^t \varepsilon L ds} + \int_0^t \varepsilon^2 C \left(e^{\int_s^t \varepsilon L d\tau} \right) ds \\ &\leq |\gamma(0)| e^{\varepsilon L t} - \frac{\varepsilon^2 C}{\varepsilon L} (1 - e^{\varepsilon L T}) \\ &= \left(|\gamma(0)| + \frac{\varepsilon C}{L} \right) e^{\varepsilon L t} - \frac{\varepsilon C}{L} \\ &\leq \left[|\gamma(0)| + \frac{\varepsilon C}{L} \right] e^{\varepsilon L t}. \end{aligned}$$

Como resultado disso, se $|y_\varepsilon(0) - y(0)| = O(\varepsilon)$ nós concluímos que

$$|\gamma(t)| \leq \left[|\gamma(0)| + \frac{\varepsilon C}{L} \right] e^L, \quad (3.24)$$

sempre que $t \in \left[0, \frac{1}{\varepsilon} \right]$.

Por fim, seja $x(t)$ uma solução da equação (3.5) então

$$|x(t) - y(t)| \leq |x(t) - y_\varepsilon(t)| + |y(t) - y_\varepsilon(t)|$$

usando a mudança de variável (3.7) temos

$$|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon |\omega(t, y_\varepsilon(t))| + |\gamma(t)| \quad (3.25)$$

onde

$$\varepsilon |\omega(t, y_\varepsilon(t))| = O(\varepsilon). \quad (3.26)$$

De fato, como $\omega(t, y)$ é T -periódica podemos considerar $t \in [0, T]$ e portanto temos

$$\begin{aligned} |\omega(t, y_\varepsilon(t))| &\leq \int_0^t |f(t, y_\varepsilon, 0) - \bar{f}(y_\varepsilon)| ds \\ &\leq \int_0^t |f(t, y_\varepsilon, 0)| ds + \int_0^t |\bar{f}(y_\varepsilon)| ds. \end{aligned}$$

Como f é limitada em conjuntos limitados, temos que existe um M tal que $|f(t, y, \varepsilon)| < M$, logo

$$\begin{aligned} |\omega(t, y_\varepsilon(t))| &\leq \int_0^t |f(s, y_\varepsilon, 0)| ds + \int_0^t \left| \frac{1}{T} \int_0^T f(s, y_\varepsilon, 0) ds \right| dt \\ &\leq \int_0^t |f(s, y_\varepsilon, 0)| ds + \int_0^t \frac{1}{T} \left(\int_0^T |f(s, y_\varepsilon, 0)| ds \right) dt \\ &\leq \int_0^t M ds + \int_0^t M ds \leq 2tM \leq 2TM. \end{aligned}$$

Logo,

$$\varepsilon |\omega(y_\varepsilon(t), t)| \leq \varepsilon(2MT) \quad (3.27)$$

Contudo, se $|x(0) - y(0)| = O(\varepsilon)$ as equações (3.24) e (3.26) garantem que neste caso

$$|x(t) - y(t)| = O(\varepsilon), \quad (3.28)$$

sempre que $0 < t < \frac{1}{\varepsilon}$. ■

3.2 Existência de Órbitas Periódicas

O resultado a seguir mostra como o Teorema da Média reduz o trabalho de determinar órbitas periódicas de equações diferenciais ao de encontrar os zeros da função, geralmente não-linear, $\bar{f}(P_0)$.

Teorema 3.6 *Se $P_0 \in U$ é ponto de equilíbrio de (3.3), ou seja $\bar{f}(P_0) = 0$, e $\det(D\bar{f}(P_0)) \neq 0$. Então existe um $\varepsilon_0 > 0$, tal que para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, a equação (3.1) tem uma órbita periódica.*

Demonstração. Considere novamente a transformação (3.7) com relação a qual a equação (3.1) se escreve da forma (3.5)

$$\dot{y} = \varepsilon \bar{f}(y) + \varepsilon^2 f_1(t, y, \varepsilon)$$

com f e f_1 T -periódicas. Considere a solução

$$y(t) = y(0) + \varepsilon \int_0^t \bar{f}(y(s)) ds + \varepsilon^2 \int_0^t f_1(s, y(s), \varepsilon) ds.$$

Usando a notação de fluxo, podemos escrever $y(t) = \phi(t, y_0, \varepsilon)$ onde, $y_0 = y(0)$, obtendo

$$\phi(t, y_0, \varepsilon) = y_0 + \varepsilon \int_0^t \bar{f}(\phi(s, y_0, \varepsilon)) ds + \varepsilon^2 \int_0^t f_1(s, \phi(s, y_0, \varepsilon), \varepsilon) ds \quad (3.29)$$

note que se (3.29) fosse periódica teríamos

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_0^{t+T} \bar{f}(\phi(s, y_0, \varepsilon)) ds + \varepsilon^2 \int_0^{t+T} f_1(s, \phi(s, y_0, \varepsilon), \varepsilon) ds &= \varepsilon \int_0^t \bar{f}(\phi(s, y_0, \varepsilon)) ds \\ &+ \varepsilon^2 \int_0^t f_1(s, \phi(s, y_0, \varepsilon), \varepsilon) ds \end{aligned}$$

o que implica em

$$\int_0^T \bar{f}(\phi(s, y_0, \varepsilon)) ds + \varepsilon \int_0^T f_1(s, \phi(s, y_0, \varepsilon), \varepsilon) ds = 0. \quad (3.30)$$

Note que em decorrência do Lema 1.16, a solução $\phi(t, y_0, \varepsilon)$ é periódica se, e somente se, a relação (3.30) é válida. Então, vamos definir a função

$$h(\varepsilon, z) = \int_0^T \bar{f}(\phi(t, z, \varepsilon)) ds + \varepsilon \int_0^T f_1(s, \phi(t, z, \varepsilon), \varepsilon) ds \quad (3.31)$$

onde $\phi(t, z, \varepsilon)$ é solução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{y} = \varepsilon \bar{f}(y) + \varepsilon^2 f_1(t, y, \varepsilon) \\ y(0) = z \end{cases}$$

Portanto,

$$h(0, P_0) = \int_0^T \bar{f}(\phi(s, P_0, 0)) ds$$

onde $\phi(t, P_0, 0)$ é solução de

$$\begin{cases} \dot{w} = 0 \\ w(0) = P_0 \end{cases} \Rightarrow \phi(t, P_0, 0) = P_0 .$$

Logo $h(0, P_0) = \int_0^T \bar{f}(P_0) ds = 0$, pois P_0 é ponto de equilíbrio.

A fim de usar o teorema da função implícita em $h(\varepsilon, z) = 0$, devemos mostrar que $\frac{\partial}{\partial z} h(0, P_0) \neq 0$. Primeiramente notemos que $\partial_2 h(0, P_0) = \frac{\partial}{\partial z} h(0, z) \Big|_{z=P_0}$. De fato, seja $g(z) = h(0, z)$ por definição temos que

$$\begin{aligned} \partial_2 h(0, P_0) v &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{h(0, P_0 + tv) - h(0, P_0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(P_0 + tv) - g(P_0)}{t} = g'(P_0) v \\ &= h'(0, z) \Big|_{z=P_0}, \end{aligned}$$

onde, $h(0, z) = \int_0^T \bar{f}(\phi(s, z, 0)) ds$ sendo $\phi(s, z, 0)$ solução da equação

$$\begin{cases} \dot{y} = 0 \\ y(0) = z \end{cases} \Rightarrow \phi(s, z, 0) = z.$$

Deste modo $h(0, z) = T \bar{f}(z)$, logo $h'(0, z) = T \bar{f}'(z)$ e sendo assim

$$\partial_2 h(0, P_0) = h'(0, P_0) = T \bar{f}'(P_0)$$

temos por hipótese que $\det(\bar{f}'(P_0)) \neq 0$ portanto

$$\det(\partial_2 h(0, P_0)) = \det(T \bar{f}'(P_0)) = T^n \det(\bar{f}'(P_0)) \neq 0.$$

Logo $\partial_2 h(0, P_0)$ é um isomorfismo, e pelo Teorema da Função Implícita existe um aberto $V \subset \mathbb{R}$, $0 \in V$ e um aberto $Z \subset U$, $P_0 \in Z$ tal que dado $\varepsilon \in V$ existe uma única aplicação $z : v \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $z(\varepsilon) \in Z$ e $h(\varepsilon, z(\varepsilon)) = 0$.

Logo, para a vizinhança V de $\varepsilon = 0$ temos que a equação diferencial

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \varepsilon \bar{f}(y(t)) + f_1(t, y(t), \varepsilon) \\ y(0) = z(\varepsilon) \end{cases}$$

possui uma solução $\phi(t, z(\varepsilon), \varepsilon)$ satisfazendo a propriedade $h(\varepsilon, z(\varepsilon)) = 0$ que implica em

$$\int_0^T \bar{f}(t, z(\varepsilon), \varepsilon) ds + \varepsilon \int_0^T f_1(s, \phi(t, z(\varepsilon), \varepsilon), \varepsilon) ds = 0$$

garantindo, portanto, que $\phi(t, z(\varepsilon), \varepsilon)$ é T periódica. ■

É importante notar que sendo $\phi(t, z(\varepsilon), \varepsilon)$ solução do sistema acima, temos que $\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow z(\varepsilon) \rightarrow z(0) \Rightarrow \phi(t, z(\varepsilon), \varepsilon) \rightarrow \phi(t, z(0), 0)$ por construção temos $z(0) = P_0$ e portanto $\phi(t, z(0), 0) = \phi(t, P_0, 0) = P_0$. Em outras palavras, então

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi(t, z(\varepsilon), \varepsilon) = P_0. \quad (3.32)$$

3.3 Estabilidade da Solução Periódica

A terceira vantagem que a Teoria da Média propicia é a possibilidade de estudar a estabilidade das soluções periódicas de uma equação diferencial ordinária por meio dos autovalores de $\bar{f}'(P_0)$.

Teorema 3.7 *Considere a equação (3.1) e suponha que as condições do Teorema 3.6 estejam satisfeitas. Seja P_0 um ponto de equilíbrio da equação (3.3). Se todos os autovalores de $\bar{f}'(P_0)$ tiverem partes reais negativas, então a solução periódica $\phi(t, x, \varepsilon)$ correspondente é assintoticamente estável para ε suficientemente pequeno.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.6 a equação (3.1) pode ser reescrita na forma $\dot{y} = \varepsilon \bar{f}(y) + \varepsilon^2 f_1(t, y, \varepsilon)$. Vamos analisar o que acontece na vizinhança de uma solução periódica. Para isso, usaremos a expressão $z + \phi(t, x, \varepsilon)$. Observe que neste caso

$$\dot{z} + \dot{\phi}(t, x, \varepsilon) = \varepsilon \bar{f}(z + \phi(t, x, \varepsilon)) + \varepsilon^2 f_1(t, z + \phi(t, x, \varepsilon), \varepsilon). \quad (3.33)$$

Usando a fórmula de Taylor em relação a z , no lado direito de (3.33) temos:

$$\begin{aligned} \varepsilon \bar{f}(z + \phi(t, x, \varepsilon)) + \varepsilon^2 f_1(t, z + \phi(t, x, \varepsilon), \varepsilon) &= \varepsilon \bar{f}(\phi(t, x, \varepsilon)) \\ &+ \varepsilon^2 f_1(t, \phi(t, x, \varepsilon), \varepsilon) + \varepsilon \bar{f}'(\phi(t, x, \varepsilon))z + \varepsilon^2 f_1'(t, \phi(t, x, \varepsilon), \varepsilon)z + r_1(t, \varepsilon, z) \end{aligned} \quad (3.34)$$

sendo $|r_1(t, \varepsilon, z)| \leq \frac{m|z|^2}{2}$, para alguma constante m positiva. Substituindo (3.34) em (3.33), e lembrando que $\dot{\phi}(t, x, \varepsilon) = \varepsilon \bar{f}(\phi(t, x, \varepsilon)) + \varepsilon^2 f_1(t, \phi(t, x, \varepsilon), \varepsilon)$, podemos escrever

$$\dot{z} = \varepsilon \bar{f}'(\phi(t, x, \varepsilon))z + \varepsilon^2 f_1'(t, \phi(t, x, \varepsilon), \varepsilon)z + r_1(t, \varepsilon, z). \quad (3.35)$$

A parte linear da equação acima é dada por

$$\dot{w} = \varepsilon A(t, \varepsilon)w \quad (3.36)$$

onde $A(t, \varepsilon) = \bar{f}'(\phi(t, x, \varepsilon)) + \varepsilon f'_1(t, \phi(t, x, \varepsilon), \varepsilon)$. Agora considere um sistema fundamental de soluções, $\{z_1(t, \varepsilon), \dots, z_n(t, \varepsilon)\}$ para (3.36) cuja matriz solução associada seja

$$\Phi(t, \varepsilon) = \begin{bmatrix} z_1^1(t, \varepsilon) & z_2^1(t, \varepsilon) & \cdots & z_n^1(t, \varepsilon) \\ z_1^2(t, \varepsilon) & z_2^2(t, \varepsilon) & \cdots & z_n^2(t, \varepsilon) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^n(t, \varepsilon) & z_2^n(t, \varepsilon) & \cdots & z_n^n(t, \varepsilon) \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

tal que $\Phi(0, \varepsilon) = Id$, deste modo a matriz fundamental desta solução será $C = \Phi(T, \varepsilon)$. Usando a fórmula de Taylor em torno de $\varepsilon = 0$ em $A(t, \varepsilon)$ teríamos

$$A(t, \varepsilon) = A_0(t, 0) + \varepsilon A_1(t, 0) + r_2(t, \varepsilon). \quad (3.38)$$

Por outro lado, considere $\theta(t, y, \varepsilon)$ o fluxo de (3.36). Sabemos que θ é diferenciável em relação ao seus parâmetros, portanto podemos admitir uma fórmula de Taylor para θ em torno de $\varepsilon = 0$ de modo que

$$\theta(t, y, \varepsilon) = \theta_0(t, y) + \varepsilon \theta_1(t, y) + r_3(t, \varepsilon). \quad (3.39)$$

Por definição temos que

$$\dot{\theta}(t, y, \varepsilon) = \varepsilon A(t, \varepsilon) \theta(t, y, \varepsilon) \quad (3.40)$$

usando (3.38) e (3.39) em (3.40) temos a relação

$$\dot{\theta}_0(t, y) + \varepsilon \dot{\theta}_1(t, y) + O(\varepsilon^2) = \varepsilon A_0(t, 0) \theta_0(t, y) + \varepsilon^2 A_1(t, 0) \theta_1(t, y) + O(\varepsilon^2). \quad (3.41)$$

Portanto, usando a unicidade da fórmula de Taylor, igualando os coeficientes acima obtemos que $\theta_0(t, y) = y$ e $\theta_1(t, y) = t \bar{f}'(P_0)y$. Com isso, temos que

$$\theta(t, y, 0) = y + \varepsilon t \bar{f}'(P_0)y + O(\varepsilon^2) \quad (3.42)$$

sempre que $0 < t < T$.

Sendo assim, pelo fato de que $\Phi(0, \varepsilon) = Id$ temos que cada z_i definido em (3.37) é da forma

$$z_i(t, 0, e_i) = e_i + \varepsilon t \bar{f}'(P_0)e_i + O(\varepsilon^2) \quad (3.43)$$

com $1 \leq i \leq n$, onde e_i é o i -ésimo elemento da base canônica de \mathbb{R}^n . Como $C = \Phi(T, \varepsilon)$ segue daí que

$$C = Id + T \varepsilon \bar{f}'(P_0) + O(\varepsilon^2). \quad (3.44)$$

Antes de continuarmos, vamos restringir o valor de ε para garantir que os autovalores de $T \bar{f}'(P_0) + O(\varepsilon)$ e os autovalores de $T \bar{f}'(P_0)$ estejam suficientemente próximos. Para isso, sejam $\{\lambda_1(\varepsilon), \dots, \lambda_n(\varepsilon)\}$ os autovalores de $T \bar{f}'(P_0) + O(\varepsilon)$ e $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ os autovalores de $T \bar{f}'(P_0)$. Tome $\gamma_0 = \min\{|Re(\alpha_1)|, \dots, |Re(\alpha_n)|\}$, pelo Lema 1.23, temos que existe um $\delta > 0$ tal que, se

$$\left\| T \bar{f}'(P_0) + O(\varepsilon) - T \bar{f}'(P_0) \right\| = \|O(\varepsilon)\| < \delta,$$

então para cada $\lambda \in \{\lambda_1(\varepsilon), \dots, \lambda_n(\varepsilon)\}$ existe $\alpha \in \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ com $|\lambda - \alpha| < \gamma_0$. Como $\varepsilon \rightarrow 0 \Rightarrow O(\varepsilon) \rightarrow 0$, de fato, existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que se $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ então $\|O(\varepsilon)\| < \delta$. Sendo assim, admitindo esta restrição para ε , teremos

$$|\lambda - \alpha| < \gamma_0. \quad (3.45)$$

E com isso temos

$$|Re(\lambda) - Re(\alpha)| < \gamma_0,$$

ou seja,

$$-\gamma_0 + Re(\alpha) < Re(\lambda) < \gamma_0 + Re(\alpha).$$

Por hipótese, $Re(\alpha)$ é negativo e pela forma como escolhemos γ_0 segue da desigualdade acima que $Re(\lambda) < 0$ para cada $\lambda \in \{\lambda_1(\varepsilon), \dots, \lambda_r(\varepsilon)\}$.

Agora vamos identificar os autovalores de $C = Id + \varepsilon(T\bar{f}'(P_0) + O(\varepsilon))$. Para isso, considere um autovetor $v_j \in \mathbb{R}^n$ correspondente a um autovalor $\lambda_j(\varepsilon)$ de $T\bar{f}'(P_0) + O(\varepsilon)$. Note que

$$Cv_j = [Id + \varepsilon(T\bar{f}'(P_0) + O(\varepsilon))]v_j = v_j + \varepsilon\lambda_j(\varepsilon)v_j = (1 + \varepsilon\lambda_j(\varepsilon))v_j$$

Logo os autovalores de C são do tipo $1 + \varepsilon\lambda_j(\varepsilon)$ com $\lambda_j(\varepsilon)$ percorrendo os autovalores de $T\bar{f}'(P_0) + O(\varepsilon)$, ou seja, $1 \leq j \leq n$.

Sendo assim, se $\lambda_j(\varepsilon) = \alpha_j(\varepsilon) + i\beta_j(\varepsilon)$, $m = \min\{|Re(\lambda_1(\varepsilon))|, \dots, |Re(\lambda_n(\varepsilon))|\}$ e $M = \max\{|\lambda_1(\varepsilon)|, \dots, |\lambda_n(\varepsilon)|\}$ então, para todo $1 \leq j \leq n$ vale a relação

$$|1 + \varepsilon\lambda_j(\varepsilon)|^2 = (1 + \varepsilon\alpha_j(\varepsilon))^2 + (\varepsilon\beta_j(\varepsilon))^2$$

ou seja,

$$|1 + \lambda_j(\varepsilon)|^2 = 1 + 2\varepsilon\alpha_j(\varepsilon) + \varepsilon^2 |\lambda_j(\varepsilon)|^2$$

Lembrando que $\alpha_j(\varepsilon) < 0$ podemos usar m e M para fazer a seguinte afirmação

$$|1 + \lambda_j(\varepsilon)|^2 < 1 - \varepsilon(2m - \varepsilon M^2). \quad (3.46)$$

Deste modo, se $0 \leq \varepsilon \leq \frac{m}{M^2}$ temos

$$|1 + \lambda_j(\varepsilon)|^2 < 1 - \varepsilon \frac{m}{M^2}. \quad (3.47)$$

Portando sempre que ε é suficientemente pequeno os autovalores de C tem módulo menor que 1 e, por fim,

$$|1 + \lambda_j(\varepsilon)|^2 < 1 \Rightarrow |1 + \lambda_j(\varepsilon)| < 1, \quad (3.48)$$

e pelo Teorema 2.10, $\varphi(t, x, \varepsilon)$ é assintoticamente estável. ■

CAPÍTULO 4

EXCITAÇÃO PARAMÉTRICA EM DINÂMICA NÃO-LINEAR

Sistemas vibrantes não-lineares normalmente consistem em dois sub-sistemas, ou mais, onde um deles é excitado, chamado sistema primário, e os outros são acoplados ao sistema primário por termos não-lineares, formando o que chamamos de sistema secundário. O sistema primário é um oscilador que pode ser excitado externamente, parametricamente ou ser auto-excitado, enquanto sistema secundário é excitado indiretamente através do seu acoplamento não-linear.

Neste capítulo, estudaremos um sistema de massa única com excitação paramétrica no sistema primário e um acoplamento não-linear expresso pelos termos de segunda ordem na equação diferencial. A excitação paramétrica ocorre devido a excitação cinética do suporte, e é transmitida para o sistema secundário através das molas não-lineares, veja a Figura 4.1 a seguir:

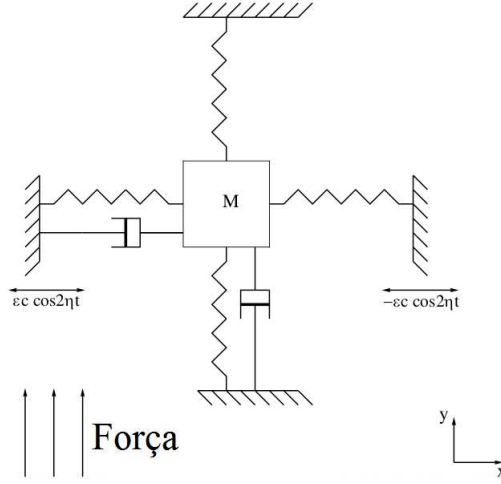


Figura 4.1: Sistema de massa única, com dois graus de liberdade e excitação paramétrica na presença de um campo de força paralelo à direção y .

O sistema é paramétrico simples quando as molas, na direção x , são idênticas, e as duas excitações cinéticas atuam, simultaneamente, tendo a mesma amplitude e frequência, porém direções opostas. Tal sistema foi estudado em [10].

As equações de movimento para este sistema são:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \delta x^2 \dot{x} + \delta_0 \dot{x} + (1 + \varepsilon c \cos(2\eta t))x + \gamma x^3 + axy &= 0, \\ \ddot{y} + \kappa \dot{y} + q^2 y + bx^2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Como coeficientes de amortecimento temos $\delta, \delta_0, \kappa \geq 0$, $c > 0$, $\gamma \geq 0$ e ε é um pequeno parâmetro positivo. Uma dedução para esta equação é dada no final do texto.

4.1 Estabilidade da solução trivial

O Teorema da Média, nos permite obter uma informação detalhada a respeito das soluções deste sistema e fornece expressões precisas para as estimativas de erro. Portanto, para que possamos aplicar o teorema neste caso, vamos introduzir uma mudança de variável em x e y onde cada variável é multiplicada por uma potência adequada de ε a ser escolhida posteriormente. Os parâmetros também serão modificados, de modo que os novos parâmetros também estarão multiplicados por potências adequadas de ε . A finalidade deste processo é obter uma equação tal que os termos não lineares estejam multiplicados por ε , consideremos:

$$\begin{aligned} x &= \varepsilon^{\nu_x} \bar{x}, & y &= \varepsilon^{\nu_y} \bar{y}, & a &= \varepsilon^{\nu_a} \bar{a}, & b &= \varepsilon^{\nu_b} \bar{b}, \\ \kappa &= \varepsilon^{\nu_\kappa} \bar{\kappa}, & \delta &= \varepsilon^{\nu_\delta} \bar{\delta}, & \gamma &= \varepsilon^{\nu_\gamma} \bar{\gamma} & \text{e} & \delta_0 &= \varepsilon^{\nu_{\delta_0}} \bar{\delta}_0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

substituindo estes valores na equação teremos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \ddot{\bar{x}} + \bar{\delta} \bar{x}^2 \dot{\bar{x}} \varepsilon^{\nu_\delta + 2\nu_x} + \bar{\delta}_0 \dot{\bar{x}} \varepsilon^{\nu_{\delta_0}} + (1 + \varepsilon c \cos(2\eta t))\bar{x} + \bar{\gamma} \bar{x}^3 \varepsilon^{2\nu_x + \nu_\gamma} + \bar{a} \bar{x} \bar{y} \varepsilon^{\nu_a + \nu_y} &= 0, \\ \ddot{\bar{y}} + \bar{\kappa} \dot{\bar{y}} \varepsilon^{\nu_\kappa} + q^2 \bar{y} + \bar{b} \bar{x}^2 \varepsilon^{\nu_b + 2\nu_x - \nu_y} &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Escolhendo adequadamente os termos na primeira equação do sistema (4.1) teremos

$$\nu_\delta + 2\nu_x = \nu_\gamma + 2\nu_x = \nu_a + \nu_y = \nu_{\delta_0} = 1.$$

Escolhendo os termos na segunda equação do sistema (4.1) obtemos

$$\nu_\kappa = \nu_b + 2\nu_x - \nu_y = 1.$$

Temos portanto seis equações com oito variáveis, portanto a solução para as equações não é única e resolvendo-as temos:

$$\nu_{\delta_0} = \nu_\kappa = 1, \quad \nu_\gamma = \nu_\delta = 1 - 2\nu_x, \quad \nu_a = 1 - \nu_y \quad \text{e} \quad \nu_b = 1 + \nu_y - 2\nu_x.$$

A terceira e quarta equações resultam em

$$0 \leq \nu_x \leq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad 0 \leq \nu_y \leq 1.$$

Podemos escolher livremente ν_x bem como ν_y . Contudo, os parâmetros escolhidos foram: $\nu_y = \nu_x = \nu_a = \nu_b = \frac{1}{2}$ e sendo assim $x = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\bar{x}$, $y = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\bar{y}$, $a = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\bar{a}$, $b = \varepsilon^{\frac{1}{2}}\bar{b}$, $\kappa = \varepsilon\bar{\kappa}$, $\delta = \bar{\delta}$, $\gamma = \bar{\gamma}$ e $\delta_0 = \varepsilon\bar{\delta}_0$.

Introduzindo esta nova escala no sistema (4.1) e omitindo as barras temos

$$\begin{aligned} \ddot{x} + (1 + \varepsilon c \cos(2\eta t))x + \varepsilon\delta_0\dot{x} + \varepsilon axy + \varepsilon(\delta x^2\dot{x} + \gamma x^3) &= 0, \\ \ddot{y} + q^2y + \varepsilon\kappa\dot{y} + \varepsilon bx^2 &= 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Chamando $u = \dot{x}$, $v = \dot{y}$ e $\mathbf{w} = (x, u, y, v)$ podemos escrever a equação acima, de modo que,

$$\dot{\mathbf{w}} = A\mathbf{w} + \varepsilon g(t, \mathbf{w}) \tag{4.5}$$

onde,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -q^2 & 0 \end{pmatrix}$$

e, além disso, g é uma função periódica em t definida da seguinte forma,

$$g(t, \mathbf{w}) := \begin{pmatrix} 0 \\ -\left(c \cos(2\eta t) x + \delta_0 u + a x y + \delta x^2 u + \gamma x^3\right) \\ 0 \\ -\left(k v + b x^2\right) \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

A fim de colocar o sistema (4.5) na forma canônica, usaremos a fórmula de variação de parâmetros, Lema 1.24, obtendo

$$\dot{\mathbf{w}}_1 = \varepsilon e^{-tA} g(t, \varphi(t, \mathbf{w}_1)) \tag{4.7}$$

Note que a matriz e^{-tA} é tal que ,

$$e^{-tA} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) & 0 & 0 \\ \sin(t) & \cos(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(qt) & -\frac{\sin(qt)}{q} \\ 0 & 0 & q \sin(qt) & \cos(qt) \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Além disso,

$$\varphi(t, \mathbf{w}_1) = \begin{pmatrix} x_2 \sin(t) + x_1 \cos(t) \\ x_2 \cos(t) - x_1 \sin(t) \\ y_2 \frac{\sin(qt)}{q} + y_1 \cos(qt) \\ y_2 \cos(qt) - y_1 q \sin(qt) \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

com isso, podemos substituir a expressão (4.9) na equação (4.6) e usar a matriz (4.8) a fim de escrever explicitamente a equação (4.7) obtendo,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} X_1(t, x_1, x_2, y_1, y_2) \\ X_2(t, x_1, x_2, y_1, y_2) \\ X_3(t, x_1, x_2, y_1, y_2) \\ X_4(t, x_1, x_2, y_1, y_2) \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

onde,

$$X_1(t, x_1, x_2, x_3, x_4) = -\sin(t) \left(-a (x_2 \sin(t) + x_1 \cos(t)) \left(\frac{y_2 \sin(qt)}{q} + y_1 \cos(qt) \right) - c (x_2 \sin(t) + x_1 \cos(t)) \cos(2\eta t) - \gamma (x_2 \sin(t) + x_1 \cos(t))^3 - \delta (x_2 \cos(t) - x_1 \sin(t)) (x_2 \sin(t) + x_1 \cos(t))^2 - \delta_0 (x_2 \cos(t) - x_1 \sin(t)) \right),$$

$$X_2(t, x_1, x_2, x_3, x_4) = \cos(t) \left(-a (x_2 \sin(t) + x_1 \cos(t)) \left(\frac{y_2 \sin(qt)}{q} + y_1 \cos(qt) \right) - c (x_2 \sin(t) + x_1 \cos(t)) \cos(2\eta t) - \gamma (x_2 \sin(t) + x_1 \cos(t))^3 - \delta (x_2 \cos(t) - x_1 \sin(t)) (x_2 \sin(t) + x_1 \cos(t))^2 - \delta_0 (x_2 \cos(t) - x_1 \sin(t)) \right),$$

$$X_3(t, x_1, x_2, x_3, x_4) = -\sin(qt) \left(\frac{-k (y_2 \cos(qt) - y_1 q \sin(qt)) - b (x_2 \sin(t) + x_1 \cos(t))^2}{q} \right),$$

$$X_4(t, x_1, x_2, x_3, x_4) = \cos(qt) \left(-k (y_2 \cos(qt) - y_1 q \sin(qt)) - b (x_2 \sin(t) + x_1 \cos(t))^2 \right).$$

4.1.1 Estabilidade da solução trivial: caso ressonante

Para que possamos aplicar o Teorema da Média em (4.10) é necessário que este sistema seja periódico na variável t . Como os termos $\sin(t)$, $\cos(t)$, $\sin(qt)$, $\cos(qt)$ estão presentes, isto só será possível se q é racional. Assumiremos o caso mais simples em que $q \in \mathbb{N}$. Tal condição é, na verdade, uma condição de ressonância. Usando o mesmo argumento também é assumido que $2\eta \in \mathbb{N}$. Estas restrições serão válidas somente nesta

seção. Sendo assim, pode-se verificar que o lado direito da equação (4.10) é 2π -periódica quando q é ímpar e π -periódica quando q é par, e em ambos os casos a equação média de (4.7),

$$\bar{g}(\mathbf{w}_1) = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-tA} g(t, \varphi(t, \mathbf{w}_1)) dt \quad (4.11)$$

tal que T é o período de (4.10), dá origem ao seguinte sistema médio

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{1a} \\ \dot{x}_{2a} \\ \dot{y}_{1a} \\ \dot{y}_{2a} \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} x_{1a} \left(-\frac{y_{1a} a \alpha(q)}{q} - \frac{\delta_0}{2} \right) + x_{2a} (y_{1a} a \alpha(q) + \alpha(2\eta) c) \\ + \left(\frac{(x_{1a} x_{2a}^2 + x_{1a}^3) \delta - 3 \gamma x_{2a}^3 - 3 \gamma x_{1a}^2 x_{2a}}{8} \right) \\ x_{2a} \left(\frac{y_{2a} a \alpha(q)}{q} - \frac{\delta_0}{2} \right) + x_{1a} (y_{1a} a \alpha(q) + \alpha(2\eta) c) \\ + \left(\frac{(x_{2a}^3 + x_{1a}^2 x_{2a}) \delta + 3 \gamma x_{1a} x_{2a}^2 + 3 \gamma x_{1a}^3}{8} \right) \\ - \frac{2 x_{1a} x_{2a} b \alpha(q)}{q} - \frac{y_{1a} \kappa}{2} \\ x_{2a}^2 b \alpha(q) + x_{1a}^2 b \alpha(q) - \frac{y_{2a} \kappa}{2} \end{pmatrix}, \quad (4.12)$$

onde a função α é definida da seguinte forma,

$$\alpha(s) = \begin{cases} -\frac{1}{4} & \text{se } s \text{ é } \pm 2, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.13)$$

Pelo Teorema da Média, sabemos que dados $(x_1(t), x_2(t), y_1(t), y_2(t))$ solução de (4.10) e $(x_{1a}(t), x_{2a}(t), y_{1a}(t), y_{2a}(t))$ solução (4.12) tais que suas condições iniciais $x(0)$ e $x_a(0)$ satisfaçam a relação $|x(0) - x_a(0)| < C_0 \varepsilon$ teremos $|x(t) - x_a(t)| < C_1 \varepsilon$ para todo $t \in \left[0, \frac{1}{\varepsilon}\right]$.

Temos que $\vec{0} \in \mathbb{R}^4$ é uma solução de (4.10), usualmente chamada de solução trivial da equação. Além disso $\vec{0}$ é um ponto de equilíbrio da equação (4.12) e portanto usando o Teorema 3.7, podemos estudar a estabilidade da solução periódica $\varphi(t, \vec{0}, 0) = \vec{0}$ através dos autovalores da matriz

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{\delta_0}{2} & \alpha(2\eta)c & 0 & 0 \\ \alpha(2\eta)c & -\frac{\delta_0}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\kappa}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\kappa}{2} \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

sendo eles $\lambda_1 = -\frac{2c\alpha(2\eta) + \delta_0}{2}$, $\lambda_2 = \frac{2c\alpha(2\eta) - \delta_0}{2}$ e $\lambda_3 = \lambda_4 = -\frac{\kappa}{2}$. O Teorema da Média nos garante que se todos os autovalores de B tiverem partes reais negativas a solução trivial de (4.12) será assintoticamente estável. Portanto, vamos analisar os seguintes casos:

i) Quando $\eta \neq \pm 1$, $\alpha(2\eta) = 0$.

Todos autovalores terão parte real negativa, pois nesse caso, $\lambda_1 = -\frac{\delta_0}{2}$, $\lambda_2 = -\frac{\delta_0}{2}$ e $\lambda_3 = \lambda_4 = -\frac{\kappa}{2}$. Assim, a solução trivial do sistema médio é assintoticamente estável. Esta afirmativa se estende ao sistema original. Isto significa que existe uma órbita periódica, no sistema original, próxima de $\vec{0}$ que é assintoticamente estável.

ii) Quando $\eta = \pm 1$, $\alpha(2\eta) = -\frac{1}{4}$.

Temos $\lambda_1 = \frac{c - 2\delta_0}{4}$, $\lambda_2 = \frac{-c - 2\delta_0}{4}$ e $\lambda_3 = \lambda_4 = -\frac{\kappa}{2}$. Sendo assim, $\lambda_2 < 0$, $\lambda_3 < 0$ e $\lambda_4 < 0$ sempre que $c \neq 2\delta_0$. Neste caso, a estabilidade da solução trivial depende somente do autovalor $\lambda_1 = \frac{c - 2\delta_0}{4}$, que por sua vez, será negativo quando $\delta_0 > \frac{c}{2}$, garantindo a estabilidade assintótica da solução trivial da equação média e consequentemente da equação original. Por outro lado, λ_1 será positivo quando $\delta_0 < \frac{c}{2}$ de modo que, a solução trivial será instável.

iii) Quando $\eta = \pm 1$ e $c = 2\delta_0$.

Neste caso, um dos quatro autovalores de B é zero. Enquanto os outros três têm partes reais negativas. A análise linear neste caso não é conclusiva ao que se refere a estabilidade da solução trivial. Devemos, assim, usar outras técnicas para examinar o fluxo neste caso. Esta observação se mantém no caso em que $\kappa = 0$.

As figuras abaixo mostram as projeções das soluções associadas às condições acima no espaço das variáveis x , y e \dot{y} . Note que a Figura (4.2) mostra uma convergência mais direta que a Figura (4.3) porém ambas sugerem a estabilidade da origem como ponto de equilíbrio.

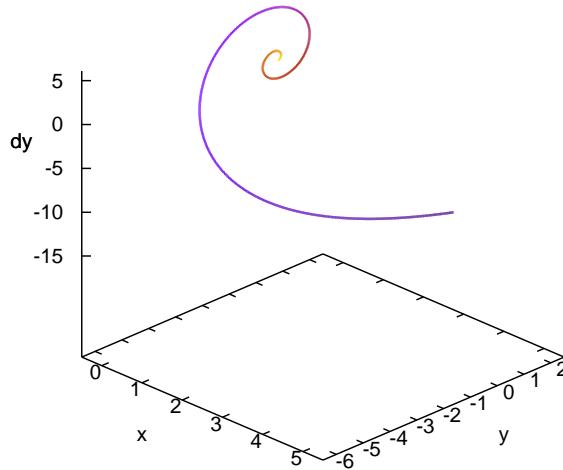


Figura 4.2: Estabilidade da solução trivial, caso i . Onde $a = 1$, $b = 4$, $c = 10$, $q = 3$, $\delta_0 = 10$, $\kappa = 3$, $\eta = 4$, $\varepsilon = 0.6$ e $(9, 0.1, 8, 0.1)$ sendo o condição inicial.

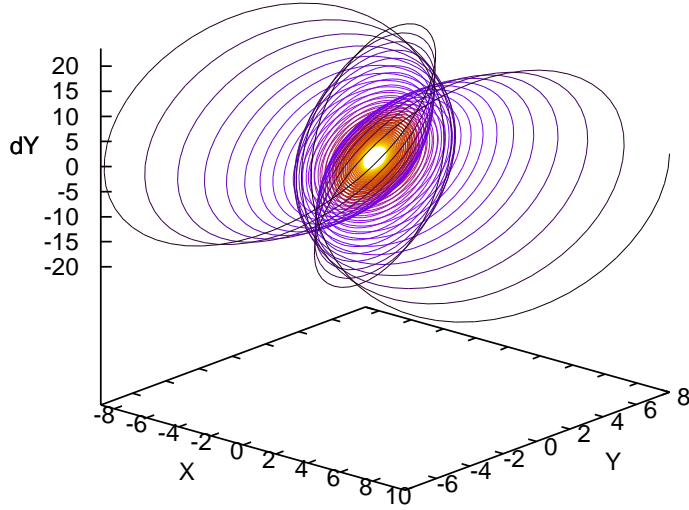


Figura 4.3: Estabilidade da solução trivial, caso *ii*. Onde $a = 1$, $b = 4$, $c = 4$, $q = 3$, $\delta_0 = 10$, $\kappa = 3$, $\varepsilon = 0.008$, $\eta = 1$ e $(10, 0, 8, 0)$ sendo o condição inicial.

As cores nas figuras representam a passagem do tempo, de modo que a medida que o tempo avança as cores mudam na seguinte ordem, preto, roxo, vermelho e amarelo. Portanto as cores escuras representam o tempo inicial e as claras o tempo final.

A seguir temos representações do caso em que há instabilidade, note que a Figura (4.4) representa o movimento físico do corpo de massa ilustrado na Figura (4.1). Já a Figura (4.5) é uma projeção do espaço de fase da Equação Média do sistema (4.4) no espaço das variáveis, x , y e \dot{y} , nas duas figuras nota-se a instabilidade da origem como ponto de equilíbrio.

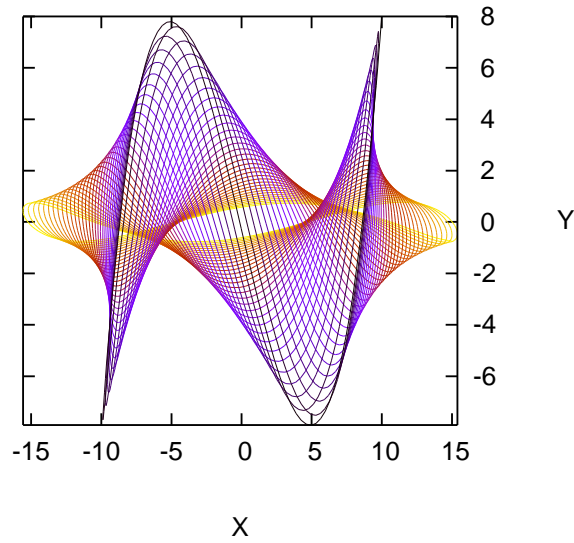


Figura 4.4: Instabilidade da solução trivial, caso *ii*. Onde $a = 1$, $b = 4$, $c = 4$, $q = 3$, $\delta_0 = 1$, $\kappa = 3$, $\varepsilon = 0.008$, $\eta = 1$ e $(10, 0, 8, 0)$ sendo o condição inicial.

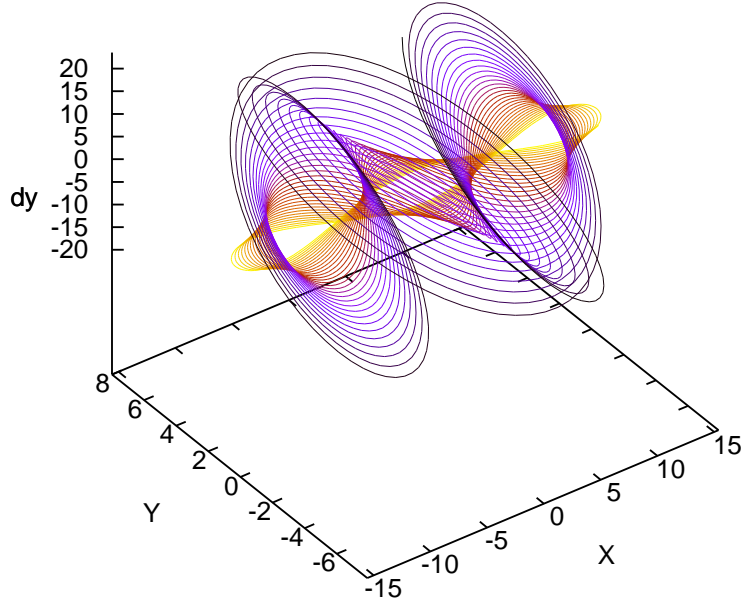


Figura 4.5: Projeção da Órbita instável com $a = 1$, $b = 4$, $c = 4$, $q = 3$, $\delta_0 = 10$, $\kappa = 3$, $\varepsilon = 0.008$, $\eta = 1$ e $(10, 0, 8, 0)$ sendo o condição inicial.

Vale a pena destacar a forma como as restrições acima afetam o espaço dos coeficientes da equação diferencial. Quando η é igual a 1 ou -1 a solução trivial é assintoticamente estável, independentemente de quais sejam os outros coeficientes. No caso em que $\eta \neq \pm 1$, a estabilidade está associada a duas regiões do plano- $c\delta_0$, veja a Figura 4.6:

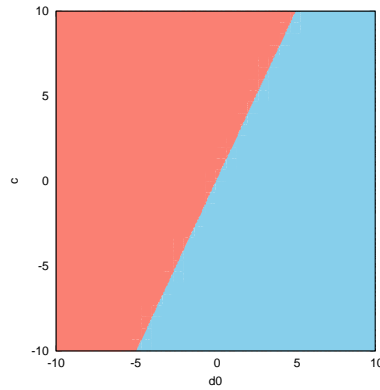


Figura 4.6: Plano- $c\delta_0$

A região rosa, onde $\delta_0 < \frac{c}{2}$, caracteriza instabilidade do sistema físico e a região azul, onde $\delta_0 > \frac{c}{2}$, está associada a estabilidade. A linha que separa as duas regiões está associada ao autovalor com parte real nula.

4.2 Estabilidade da solução trivial: caso próximo da ressonância

Agora, vamos estudar o comportamento do sistema próximo da ressonância. Para isso, vamos assumir que $\eta = 1 + \varepsilon\mu$ e $q^2 = 4 + \varepsilon\sigma$, onde σ e μ são parâmetros independentes de ε , e substituí-los em (4.4) obtendo

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \varepsilon \left(a x y + \delta x^2 \dot{x} + \delta_0 \dot{x} + \gamma x^3 + c \cos(2\tau) x \right) + x &= 0, \\ \ddot{y} + \varepsilon \left(\kappa \dot{y} + b x^2 + \sigma y \right) + 4 y &= 0,\end{aligned}\quad (4.15)$$

onde $\tau = (1 + \varepsilon\mu)t$, com isso, podemos reescrever a equação (4.15) colocando todas as derivadas com relação a τ obtendo,

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \varepsilon \left(\frac{(\delta x^2 + \delta_0) \dot{x}}{1 + \varepsilon\mu} + \frac{a x y + \gamma x^3 + c \cos(2\tau) x}{(1 + \varepsilon\mu)^2} \right) + \frac{x}{(1 + \varepsilon\mu)^2} &= 0, \\ \ddot{y} + \varepsilon \left(\frac{\kappa \dot{y}}{(1 + \varepsilon\mu)} + \frac{b x^2 + \sigma y}{(1 + \varepsilon\mu)^2} \right) + \frac{4 y}{(1 + \varepsilon\mu)^2} &= 0.\end{aligned}\quad (4.16)$$

Usando a Fórmula de Taylor nestas equações obtemos

$$\begin{aligned}\ddot{x} + x + \left(\gamma x^3 + \dot{x} \delta x^2 + (-2\mu + c \cos(2\tau) + y a) x + \dot{x} \delta_0 \right) \varepsilon + R_1(\varepsilon^3) &= 0, \\ \ddot{y} + 4 y + \left((-8\mu + \sigma) y + x^2 b + \dot{y} \kappa \right) \varepsilon + R_2(\varepsilon^3) &= 0,\end{aligned}\quad (4.17)$$

onde, R_1 e R_2 são os restos da fórmula de Taylor para cada uma das equações. Sendo assim, existem constantes positivas, m_1 e m_2 tais que $R_1(\varepsilon^3) \leq \frac{m_1 \varepsilon^3}{2}$ e $R_2(\varepsilon^3) \leq \frac{m_2 \varepsilon^3}{2}$. As condições de ressonância do sistema físico (4.4) foram obtidas através das curvas de ressonância encontradas em [10].

Escrevendo a equação (4.17) na forma canônica,

$$\dot{\mathbf{w}} = A_1 \mathbf{w} + \varepsilon g_1(\tau, \mathbf{w}, \varepsilon) \quad (4.18)$$

onde $\mathbf{w} = (x, u, y, v)$, $u = \dot{x}$ e $v = \dot{y}$. Além disso,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

e $g_1(\tau, \mathbf{w}, \varepsilon)$ é uma função π -periódica tal que

$$g_1(\tau, \mathbf{w}, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 \\ -a x y + (-\delta x^2 - \delta_0 u - \gamma x^3 + (2\mu - \cos(2\tau) c) x) + O_1(\varepsilon^2) \\ 0 \\ -\kappa v + (8\mu - \sigma) y - b x^2 + O_2(\varepsilon^2) \end{pmatrix}. \quad (4.20)$$

Usando a fórmula de variação de parâmetros, vamos introduzir, de forma análoga à anterior, a mudança de variável $\mathbf{w} = \varphi_1(\tau, \mathbf{w}_1)$, onde $\mathbf{w}_1 = (x_1, x_2, y_1, y_2)$. Lembramos que,

$\varphi_1(\tau, \mathbf{w}_1) = e^{\tau A_1} \mathbf{w}_1$ é solução do sistema linear, $\dot{\mathbf{z}} = A_1 \mathbf{z}$, portanto

$$\varphi_1(\tau, \mathbf{w}_1) = \begin{pmatrix} x_2 \sin(\tau) + x_1 \cos(\tau) \\ x_2 \cos(\tau) - x_1 \sin(\tau) \\ y_2 \frac{\sin(2\tau)}{2} + y_1 \cos(2\tau) \\ y_2 \cos(2\tau) - 2 y_1 \sin(2\tau) \end{pmatrix}. \quad (4.21)$$

Desta forma, podemos escrever

$$\dot{\mathbf{w}}_1 = \varepsilon e^{-\tau A_1} \mathbf{g}_1(\tau, \varphi_1(\tau, \mathbf{w}_1), \varepsilon), \quad (4.22)$$

ou, escrevendo em forma de coordenadas,

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} X_1(\tau, x_1, x_2, y_1, y_2) \\ X_2(\tau, x_1, x_2, y_1, y_2) \\ X_3(\tau, x_1, x_2, y_1, y_2) \\ X_4(\tau, x_1, x_2, y_1, y_2) \end{pmatrix} \quad (4.23)$$

onde,

$$\begin{aligned} X_1(\tau, x_1, x_2, y_1, y_2) = & (2x_1 \sin(4\tau) - 2x_2 \cos(4\tau) + 4x_2 \cos(2\tau) - 2x_2) \frac{c}{8} + ((2x_1 y_1 - x_2 y_2) \sin(4\tau) + (-x_1 y_2 - 2x_2 y_1) \cos(4\tau)) \frac{a}{8} \\ & (4x_2 y_1 \cos(2\tau) + x_1 y_2 - 2x_2 y_1) \frac{a}{8} + ((3x_1^2 x_2 - x_2^3) \delta - 3\gamma x_1 x_2^2 + \gamma x_1^3) \frac{\sin(4\tau)}{8} + ((x_1^3 - 3x_1 x_2^2) \delta) \frac{\cos(4\tau)}{8} \\ & (-8x_1 \mu + (2x_2^3 - 2x_1^2 x_2) \delta + 6\gamma x_1 x_2^2 + 4\delta_0 x_2 + 2\gamma x_1^3) \frac{\sin(2\tau)}{8} + (8x_2 \mu + 4x_1 x_2^2 \delta - 4\gamma x_2^3 + 4\delta_0 x_1) \frac{\cos(2\tau)}{8} \\ & -x_2 \mu - (3\gamma x_2^3 + 3\gamma x_1^2 x_2 - 4\delta_0 x_1) \frac{1}{8} + (2x_2 y_2 \sin(2\tau)) \frac{a}{8} - 3(\gamma x_1^2 x_2) \frac{\cos(4\tau)}{8} + (-x_1 x_2^2 - x_1^3) \frac{\delta}{8} \\ & + \gamma x_2^3 \frac{\cos(4\tau)}{8} + R_1(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_2(\tau, x_1, x_2, y_1, y_2) = & (-2x_2 \sin(4\tau) - 2x_1 \cos(4\tau) - 4x_1 \cos(2\tau) - 2x_1) \frac{c}{8} + ((-x_1 y_2 - 2y_1 x_2) \sin(4\tau) + (x_2 y_2 - 2x_1 y_1) \cos(4\tau)) \frac{a}{8} \\ & (-4x_1 y_1 \cos(2\tau) - x_2 y_2 - 2x_1 y_1) \frac{a}{8} + ((x_1^3 - 3x_1 x_2^2) \delta + \gamma x_2^3 - 3\gamma x_1^2 x_2) \frac{\sin(4\tau)}{8} + ((x_2^3 - 3x_1^2 x_2) \delta) \frac{\cos(4\tau)}{8} \\ & -(\gamma x_1^3) \frac{\cos(4\tau)}{8} + (8x_2 \mu + (2x_1^3 - 2x_1 x_2^2) \delta - 2\gamma x_2^3 - 6\gamma x_1^2 x_2 + 4\delta_0 x_1) \frac{\sin(2\tau)}{8} + (8x_1 \mu - 4x_1^2 x_2 \delta) \frac{\cos(2\tau)}{8} \\ & + (8x_1 \mu + (-x_2^3 - x_1^2 x_2) \delta - 3\gamma x_1 x_2^2 - 4\delta_0 x_2 - 3\gamma x_1^3) \frac{1}{8} - (2x_1 y_2 \sin(2\tau)) \frac{a}{8} - (4\gamma x_1^3) \frac{\cos(2\tau)}{8} \\ & + 3\gamma x_1 x_2^2 \frac{\cos(4\tau)}{8} - 4\delta_0 x_2 \frac{\cos(2\tau)}{8} + R_1(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_3(\tau, x_1, x_2, y_1, y_2) = & ((x_1^2 - x_2^2) \sin(4\tau) - 2x_1 x_2 \cos(4\tau) + (2x_2^2 + 2x_1^2) \sin(2\tau) + 2x_1 x_2) \frac{b}{8} + (2y_1 \sigma - 16y_1 \mu + 2y_2 \kappa) \frac{\sin(4\tau)}{8} \\ & + (4y_1 \kappa) \frac{\cos(4\tau)}{8} + (y_2 \sigma - 8y_2 \mu - 4y_1 \kappa) \frac{1}{8} + (-y_2 \sigma + 8y_2 \mu) \frac{\cos(4\tau)}{8} + R_2(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_4(\tau, x_1, x_2, y_1, y_2) = & (-2x_1 x_2 \sin(4\tau) + (x_2^2 - x_1^2) \cos(4\tau) + (-2x_2^2 - 2x_1^2) \cos(2\tau) + x_2^2 - x_1^2) \frac{b}{4} + (-y_2 \sigma + 8y_2 \mu + 4y_1 \kappa) \frac{\sin(4\tau)}{4} \\ & + (-2y_1 \sigma) \frac{\cos(4\tau)}{4} + (16y_1 - \mu 2y_2 \kappa) \frac{\cos(4\tau)}{4} - (2y_1 \sigma + 16y_1 \mu - 2y_2 \kappa) \frac{1}{8} + R_2(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Pode-se verificar que a expressão acima é π -periódica em τ . Portanto, podemos calcular

a equação média de (4.23), obtendo o seguinte sistema médio

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_{1a} \\ \dot{x}_{2a} \\ \dot{y}_{1a} \\ \dot{y}_{2a} \end{pmatrix} = \frac{\varepsilon}{8} \begin{pmatrix} -(2x_{2a}c + (2y_{1a}x_{2a} - x_{1a}y_{2a})a + 8x_{2a}\mu \\ + (x_{1a}x_{2a}^2 + x_{1a}^3)\delta - 3\gamma x_{2a}^3 - 3\gamma x_{1a}^2x_{2a} + 4\delta_0x_{1a}) \\ -(2x_{1a}c + (x_{2a}y_{2a} + 2x_{1a}y_{1a})a - 8x_{1a}\mu \\ + (x_{2a}^3 + x_{1a}^2x_{2a})\delta + 3\gamma x_{1a}x_{2a}^2 + 4\delta_0x_{2a} + 3\gamma x_{1a}^3) \\ 2x_{1a}x_{2a}b + y_{2a}\sigma - 8y_{2a}\mu - 4y_{1a}\kappa \\ 2((x_{2a}^2 - x_{1a}^2)b - 2y_{1a}\sigma + 16y_{1a}\mu - 2y_{2a}\kappa) \end{pmatrix}, \quad (4.24)$$

também podemos escrever a equação acima na forma

$$\dot{\mathbf{w}}_a = \bar{\mathbf{g}}_1(\mathbf{w}_a), \quad (4.25)$$

onde $\mathbf{w}_a = (x_{1a}, x_{2a}, y_{1a}, y_{2a})$. Note que zero é, novamente, um ponto de equilíbrio da equação, e portanto pelo Teorema 3.7 podemos analisar a estabilidade da solução nula através dos autovalores da matriz

$$B_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\delta_0\varepsilon}{2} & -\frac{\varepsilon(2c+8\mu)}{8} & 0 & 0 \\ -\frac{\varepsilon(2c-8\mu)}{8} & -\frac{\delta_0\varepsilon}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\varepsilon\kappa}{2} & \frac{\varepsilon(\sigma-8\mu)}{8} \\ 0 & 0 & \frac{\varepsilon(16\mu-2\sigma)}{4} & -\frac{\varepsilon\kappa}{2} \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Sendo assim, podemos novamente utilizar o Teorema 2.13 que consiste em estudar os autovalores, $\lambda_1 = \frac{-(\varepsilon\sigma - 8\varepsilon\mu)i - 2\varepsilon\kappa}{4}$, $\lambda_2 = \frac{(\varepsilon\sigma - 8\varepsilon\mu)i - 2\varepsilon\kappa}{4}$, $\lambda_3 = \frac{-\varepsilon\sqrt{c^2 - 16\mu^2} - 2\delta_0\varepsilon}{4}$ e $\lambda_4 = \frac{\varepsilon\sqrt{c^2 - 16\mu^2} - 2\delta_0\varepsilon}{4}$. Para isto, vamos introduzir a variável $z_\mu = \frac{\mu}{c}$ para analisar os autovalores da matriz B_1 . Desta forma podemos distinguir entre os seguintes casos:

No caso em que $|z_\mu| > \frac{1}{4}$, temos que $c^2 - 16\mu^2 < 0$ e portanto a parte real dos autovalores serão $Re(\lambda_1) = -\frac{\varepsilon\kappa}{2}$, $Re(\lambda_2) = -\frac{\varepsilon\kappa}{2}$, $Re(\lambda_3) = -\frac{\varepsilon\delta_0}{2}$ e $Re(\lambda_4) = -\frac{\varepsilon\delta_0}{2}$. Como κ é positivo segue que λ_1 e λ_2 tem partes reais negativas. Já para os autovalores λ_3 e λ_4 temos os seguintes sub casos:

1. Se $\delta_0 > 0$ todos os auto-valores têm partes reais negativas. Podemos dizer que a solução trivial é assintoticamente estável. Ver figura (4.8).
2. Se $\delta_0 = 0$ a análise linear revela-se inconclusiva.

Nesse caso, a estabilidade da equação diferencial está associada à região $c^2 - 16\mu^2 < 0$, destacada pela cor azul. Veja Figura 4.7:

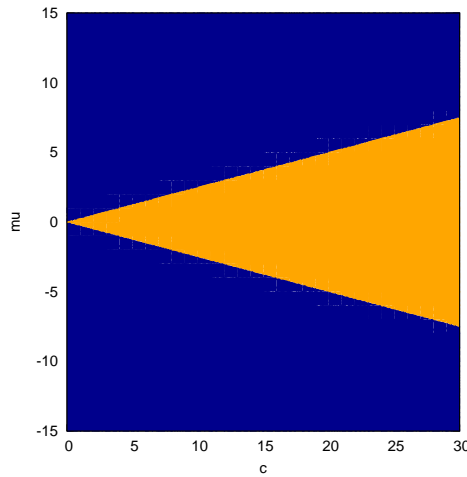


Figura 4.7: Região de estabilidade da equação diferencial no plano $c \times \mu$.

A Figura 4.8 mostra uma trajetória cujos coeficientes c e μ satisfazem a desigualdade $c^2 - 16\mu^2 < 0$.

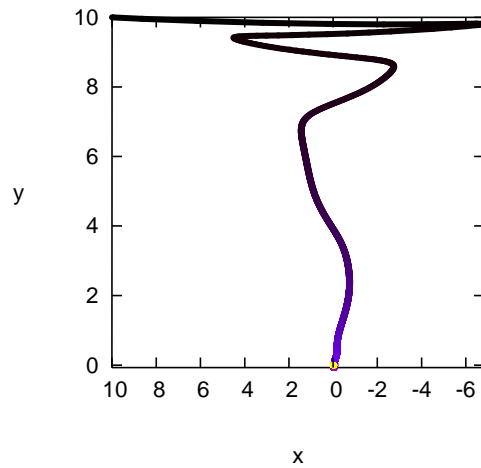


Figura 4.8: Exemplo de órbita obtida onde c e μ pertencem a região de estabilidade e $\delta_0 > 0$. Novamente as cores representam a passagem do tempo, indo da cor preta, quando $t = 0$, até amarelo quando $t = 60$.

No caso em que $|z_\mu| \leq \frac{1}{4}$, temos $c^2 - 16\mu^2 \geq 0$ e portanto λ_3 e λ_4 são números reais, assim temos novamente três sub-casos:

1. Se $\delta_0 > \frac{\sqrt{c^2 - 16\mu^2}}{2}$ teremos todos os autovalores com partes reais negativas e portanto a origem será uma solução assintoticamente estável. Esta desigualdade esta associada à porção do espaço dos coeficientes δ_0 , μ e c estritamente acima da região laranja na Figura 4.11.

A Figura 4.9 ilustra uma trajetória obtida com os coeficientes satisfazendo as condições acima.

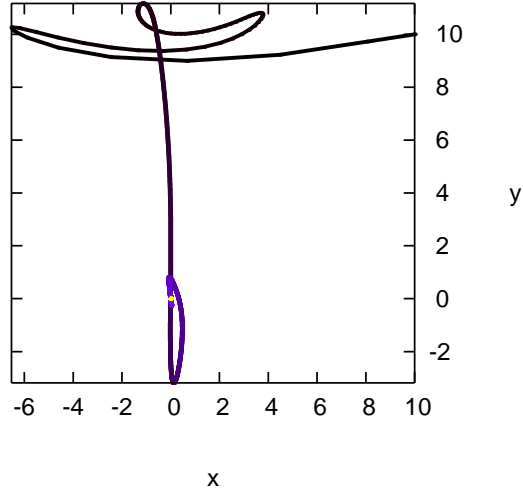


Figura 4.9: Representação de uma órbita estável obtida com c , μ e δ_0 dentro da região de estabilidade.

2. Se $\delta_0 < \frac{\sqrt{c^2 - 16\mu^2}}{2}$ o autovalor λ_4 é um número real positivo e portanto a solução trivial é instável. A Figura 4.10 representa o caso de instabilidade, note que nessa configuração ocorre o surgimento de uma órbita periódica (em amarelo).

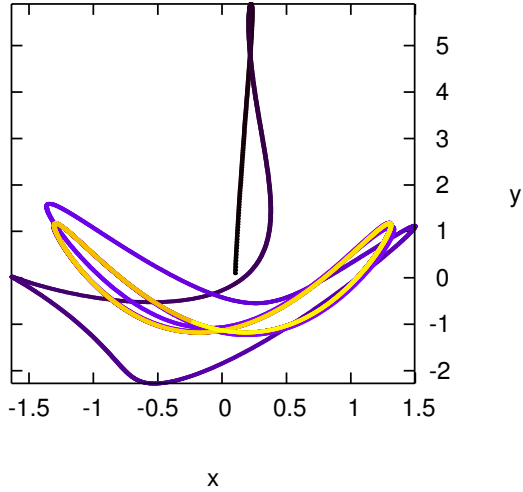


Figura 4.10: Representação de uma órbita estável obtida com c , μ e δ_0 dentro da região de estabilidade.

3. Se $\delta_0 = \frac{\sqrt{c^2 - 16\mu^2}}{2}$ teremos que $\lambda_3 = 0$ e portanto a análise linear se torna inconclusiva.

A Figura 4.11 mostra, em laranja, a região onde as variáveis c , μ e δ_0 satisfazem a desigualdade $\delta_0 < \frac{\sqrt{c^2 - 16\mu^2}}{2}$ caracterizando a instabilidade da solução trivial. As demais regiões estão associadas a estabilidade da solução trivial.

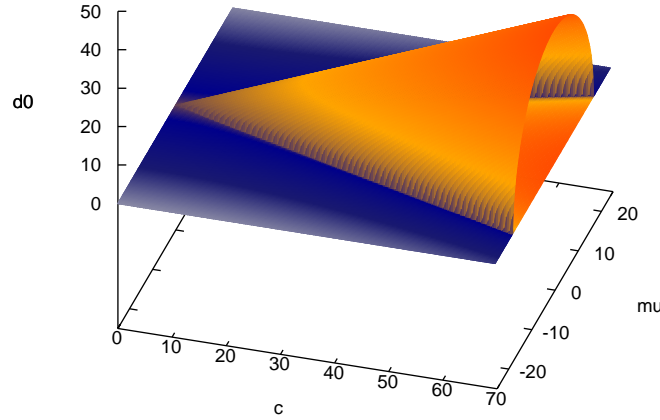


Figura 4.11: Região de instabilidade em laranja.

4.3 Soluções periódicas determinadas por pontos de equilíbrio não triviais da equação da média

Por fim vamos procurar por soluções periódicas para o sistema (4.4). Para isto, vamos encontrar os pontos de equilíbrio de sua equação média, que será obtida usando novamente a substituição induzida pelo método de variação de parâmetros escritas desta vez na forma polar

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \\ y(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1(t) \cos(t + \phi(t)) \\ -R_1(t) \sin(t + \phi(t)) \\ R_2(t) \cos(2t + \psi(t)) \\ -2R_2(t) \sin(2t + \psi(t)) \end{pmatrix}. \quad (4.27)$$

Note que os valores R_1 e R_2 estão associados a amplitude do movimento descrito nas direções x e y respectivamente. Além disso, ϕ e ψ são chamados ângulos de fase da solução. Continuamos interessados em estudar o sistema físico próximo da ressonância,

para isso vamos substituir (4.27) em (4.17) obtendo o sistema na forma canônica,

$$\begin{pmatrix} \dot{R}_1(t) \\ \dot{\phi}(t) \\ \dot{R}_2(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} a \cos(t + \phi) \sin(t + \phi) \cos(2t + \psi) R_1 R_2 + \left(\gamma \cos(t + \phi)^3 \sin(t + \phi) + \delta \cos(t + \phi)^4 - \delta \cos(t + \phi)^2 \right) R_1^3 + \left((c \cos(2t) - 2\mu) \cos(t + \phi) \sin(t + \phi) + \delta_0 \cos(t + \phi)^2 - \delta_0 \right) R_1 \\ a \cos(t + \phi)^2 \cos(2t + \psi) R_2 + \left(\gamma \cos(t + \phi)^4 - \delta \cos(t + \phi)^3 \sin(t + \phi) \right) R_1^2 - \delta_0 \cos(t + \phi) \sin(t + \phi) + (c \cos(2t) - 2\mu) \cos(t + \phi)^2 \\ \left((\sigma - 8\mu) \cos(2t + \psi) \sin(2t + \psi) + 2\kappa \cos(2t + \psi)^2 - 2\kappa \right) \frac{R_2}{2} + b \cos(t + \phi)^2 \sin(2t + \psi) \frac{R_1^2}{2} \\ - \left(2\kappa \cos(2t + \psi) \sin(2t + \psi) + (8\mu - \sigma) \cos(2t + \psi)^2 \right) \frac{1}{2} + b \cos(t + \phi)^2 \cos(2t + \psi) \frac{R_1^2}{2 R_2} \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

A equação acima é π -periódica, portanto podemos calcular sua equação média de forma análoga às anteriores, obtendo

$$\begin{pmatrix} \dot{R}_{1a}(t) \\ \dot{\phi}_a(t) \\ \dot{R}_{2a}(t) \\ \dot{\psi}_a(t) \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} -\frac{R_{1a} (2 \sin(\psi_a - 2\phi_a) a R_{2a} - 2 \sin(2\phi_a) c) + \delta R_{1a}^3 + 4 \delta_0 R_{1a}}{8} \\ \frac{2 \cos(\psi_a - 2\phi_a) a R_{2a} + 3 \gamma R_{1a}^2 + 2 \cos(2\phi_a) c - 8 \mu}{8} \\ \frac{\sin(\psi_a - 2\phi_a) b R_{1a}^2 - 4 \kappa R_{2a}}{8} \\ \frac{(2\sigma - 16\mu) R_{2a} + \cos(\psi_a - 2\phi_a) b R_{1a}^2}{8 R_{2a}} \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

Igualando o lado direito da equação acima a zero, obtemos as seguintes relações para seus pontos de equilíbrio:

$$\begin{aligned} \cos(\psi - 2\phi) &= \frac{(16\mu - 2\sigma) R_2}{b R_1^2}, \\ \sin(\psi - 2\phi) &= \frac{4\kappa R_2}{b R_1^2}, \\ \cos(2\phi) &= -\frac{(32\mu - 4\sigma) a R_2^2 + 3\gamma b R_1^4 - 8\mu b R_1^2}{2 b c R_1^2}, \\ \sin(2\phi) &= \frac{8\kappa a R_2^2 + \delta b R_1^4 + 4\delta_0 b R_1^2}{2 b c R_1^2}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Usando as relações (4.30) podemos obter uma expressão para R_1 ao resolver a equação $\cos^2(\psi - 2\phi) + \sin^2(\psi - 2\phi) = 1$. Daí temos que

$$R_1^2 = \frac{2 \sqrt{(\sigma - 8\mu)^2 + 4\kappa^2 R_2}}{|b|}. \quad (4.31)$$

Isto nos permite reescrever as relações dadas em (4.30) de modo a obter:

$$\begin{aligned}\cos(\psi - 2\phi) &= -\frac{\sigma_\mu \operatorname{sgn}(b)}{\sqrt{\sigma_\mu^2 + 4\kappa^2}}, \\ \cos(\psi - 2\phi) &= \frac{\sigma_\mu \operatorname{sgn}(b)}{\sqrt{\sigma_\mu^2 + 4\kappa^2}}, \\ \cos(2\phi) &= \beta R_2 + 2z, \\ \sin(2\phi) &= \alpha R_2 + 4z_\mu,\end{aligned}\tag{4.32}$$

onde $\sigma_\mu = \sigma - 8\mu$, $z_\mu = \frac{\mu}{c}$, $z = \frac{\delta_0}{c}$, $\alpha = \frac{\sigma_\mu a b - 3\gamma(\sigma_\mu^2 + 4\kappa^2)}{\sqrt{\sigma_\mu^2 + 4\kappa^2} |b| c}$, $\operatorname{sgn}(b) = \frac{b}{|b|}$ e $\beta = \frac{2\kappa a b + \delta(\sigma_\mu^2 + 4\kappa^2)}{\sqrt{\sigma_\mu^2 + 4\kappa^2} |b| c}$. Usando a relação $\cos(2\phi)^2 + \sin(2\phi)^2 = 1$ podemos afirmar que R_2 assume os seguintes valores

$$R_2^+ = \frac{\sqrt{-4\alpha^2 z^2 + 16\alpha\beta z_\mu z - 16\beta^2 z_\mu^2 + \beta^2 + \alpha^2} - 2\beta z - 4\alpha z_\mu}{\beta^2 + \alpha^2},\tag{4.33}$$

$$R_2^- = \frac{-\sqrt{-4\alpha^2 z^2 + 16\alpha\beta z_\mu z - 16\beta^2 z_\mu^2 + \beta^2 + \alpha^2} - 2\beta z - 4\alpha z_\mu}{\beta^2 + \alpha^2}.\tag{4.34}$$

Com isso podemos estudar as soluções periódicas no caso de exata ressonância, ou seja, quando $\sigma = 0$ e $\mu = 0$. Usaremos os resultados (3.6) e (3.7) do Teorema da Média, que nos garante que se P_0 é ponto de equilíbrio de (4.29), então existe um $\varepsilon_0 > 0$ tal que para qualquer $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ a equação diferencial possui uma solução periódica. Além disso, se os autovalores da parte linear do sistema em P_0 tiverem partes reais negativas esta solução periódica será assintoticamente estável. Quando $\sigma = 0$ e $\mu = 0$ os pontos de equilíbrio de (4.29) estarão associado às relações:

$$\begin{aligned}, R_1^2 &= \frac{4\kappa R_2}{|b|}, \\ \cos(\psi - 2\phi) &= 0, \\ \sin(\psi - 2\phi) &= 1, \\ \cos(2\phi) &= \frac{6\gamma\kappa R_2}{b c}, \\ \sin(2\phi) &= \frac{(2ab + 4\delta\kappa) R_2 + 4\delta_0 b}{2bc}.\end{aligned}\tag{4.35}$$

Além disso se calcularmos a matriz jacobiana com relação ao lado direito da equação

(4.29) em função das variáveis R_1 , ϕ , R_2 e ψ e substituirmos os valores acima teremos

$$\begin{pmatrix} -\frac{\delta \varepsilon R_1^2}{4} & \frac{3 \gamma \varepsilon R_1^3}{4} & -\frac{\varepsilon a R_1 \operatorname{sgn}(b)}{4} & 0 \\ \frac{3 \gamma \varepsilon R_1}{4} & -\frac{\delta \varepsilon R_1^2 + 4 \delta_0 \varepsilon}{4} & 0 & -\frac{\varepsilon a R_2 \operatorname{sgn}(b)}{4} \\ \frac{\varepsilon |b| R_1}{4} & 0 & -\frac{\varepsilon \kappa}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon |b| R_1^2}{4 R_2} & 0 & -\frac{\varepsilon |b| R_1^2}{8 R_2} \end{pmatrix}. \quad (4.36)$$

Calculando o polinômio característico da matriz acima obtemos

$$p(x) = a_0 x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4,$$

onde

$$a_0 = 1,$$

$$a_1 = \frac{2 \delta \kappa R_2 + (\kappa + \delta_0) |b|}{|b|},$$

$$a_2 = \frac{(4 \delta^2 + 36 \gamma^2) \kappa^2 |b| R_2^2 + (2 \kappa a b^2 \operatorname{sgn}(b) |b| + (8 \delta \kappa^2 + 4 \delta_0 \delta \kappa) b^2) R_2 + (\kappa^2 + 4 \delta_0 \kappa) b^2 |b|}{4 b^2 |b|},$$

$$a_3 = \frac{((4 \delta^2 + 36 \gamma^2) \kappa^3 |b| + 2 \delta \kappa^2 a b^2 \operatorname{sgn}(b)) R_2^2 + ((\kappa^2 + \delta_0 \kappa) a b^2 \operatorname{sgn}(b) |b| + (2 \delta \kappa^3 + 4 \delta_0 \delta \kappa^2) b^2) R_2}{4 b^2 |b|} + \frac{\delta_0 \kappa^2 b^2 |b|}{4 b^2 |b|}, \quad (4.37)$$

$$a_4 = \frac{\left((\kappa^2 a^2 b^2 \operatorname{sgn}(b))^2 + (4 \delta^2 + 36 \gamma^2) \kappa^4 \right) |b| + 4 \delta \kappa^3 a b^2 \operatorname{sgn}(b) R_2^2}{16 b^2 |b|} + \frac{(2 \delta_0 \kappa^2 a b^2 \operatorname{sgn}(b) |b| + 4 \delta_0 \delta \kappa^3 b^2) R_2}{16 b^2 |b|}.$$

Portanto, nos resta verificar as condições necessárias para as quais todos autovalores da matriz (4.36) tenham partes reais negativas. Para tanto, vamos usar o critério de Routh-Hurwitz 1.25 em relação ao polinômio característico da matriz em questão. Podemos escrever os determinantes das matrizes de Hurwitz das seguintes formas

$$\det(H_1) = \frac{2 \delta \kappa R_2 + (\kappa + \delta_0) |b|}{|b|},$$

$$\det(H_2) = ((8 \delta^3 + 72 \gamma^2 \delta) \kappa^2 R_2^3 + ((16 \delta^2 \kappa^2 + (12 \delta_0 \delta^2 + 36 \gamma^2 \delta_0) \kappa) |b| + 2 \delta \kappa a b^2 \operatorname{sgn}(b)) R_2^2 + ((\kappa + \delta_0) a b^2 \operatorname{sgn}(b) |b| + (8 \delta \kappa^2 + 16 \delta_0 \delta \kappa + 4 \delta_0^2 \delta) b^2) R_2 + (\kappa^2 + 4 \delta_0 \kappa + 4 \delta_0^2) b^2 |b|) \left(\frac{1}{4 b^4 |b|} \right),$$

$$\det(H_3) = (8 \delta (\delta^2 + 9 \gamma^2) \kappa^3 R_2^3 + b^2 |b| ((\kappa + \delta_0)^2 a \operatorname{sgn}(b) R_2 + \delta_0 \kappa (\kappa + 2 \delta_0)) + 2 \delta \kappa b^2 R_2 (2 (\kappa + \delta_0) a \operatorname{sgn}(b) R_2 + \kappa^2 + 4 \delta_0 \kappa + 2 \delta_0^2) + 4 \kappa^2 |b| R_2^2 (\delta^2 a \operatorname{sgn}(b) R_2 + \delta^2 (2 \kappa + 3 \delta_0) + 9 \gamma^2 \delta_0)) (\kappa^2) (4 \delta^2 \kappa R_2^2 + 36 \gamma^2 \kappa R_2^2 + 4 \delta \kappa |b| R_2 + 4 \delta_0 \delta |b| R_2 + \kappa |b|^2 + 2 \delta_0 |b|^2), \quad (4.38)$$

$$\det(H_4) = \left((4 \delta \kappa a \operatorname{sgn}(b) |b| + a^2 b^2 \operatorname{sgn}(b))^2 + (4 \delta^2 + 36 \gamma^2) \kappa^2 \right) R_2 + 4 \delta_0 \delta \kappa |b| + 2 \delta_0 a b^2 \operatorname{sgn}(b) (|b| \kappa^2 R_2) \det(H_3).$$

Sendo assim, sabemos que os autovalores de (4.36) terão partes reais negativas se, e somente se, valerem as relações

$$\det(H_1) > 0, \quad \det(H_2) > 0, \quad \det(H_3) > 0 \quad \text{e} \quad \det(H_4) > 0. \quad (4.39)$$

Omitindo as parcelas positivas dos determinantes, as desigualdades acima são equivalentes as expressões

$$\begin{aligned} D_1 &= \frac{2 \delta \kappa R_2}{|b|} + (\kappa + \delta_0) > 0, \\ D_2 &= \left((16 \delta^2 \kappa^2 + (12 \delta_0 \delta^2 + 36 \gamma^2 \delta_0) \kappa) |b| + 2 \delta \kappa a b^2 \operatorname{sgn}(b) \right) R_2^2 \\ &\quad + (8 \delta^3 + 72 \gamma^2 \delta) \kappa^2 R_2^5 + (\kappa + \delta_0) a b^2 \operatorname{sgn}(b) |b| R_2^2 \\ &\quad + ((8 \delta \kappa^2 + 16 \delta_0 \delta \kappa + 4 \delta_0^2 \delta) b^2) R_2 + (\kappa^2 + 4 \delta_0 \kappa + 4 \delta_0^2) b^2 |b| > 0, \\ D_3 &= \left(8 \delta (\delta^2 + 9 \gamma^2) \kappa^3 R_2^3 + b^2 |b| \left((\kappa + \delta_0)^2 a \operatorname{sgn}(b) R_2 + \delta_0 \kappa (\kappa + 2 \delta_0) \right) \right. \\ &\quad \left. + 2 \delta \kappa b^2 R_2 (2 (\kappa + \delta_0) a \operatorname{sgn}(b) R_2 + \kappa^2 + 4 \delta_0 \kappa + 2 \delta_0^2) \right. \\ &\quad \left. + 4 \kappa^2 |b| R_2^2 (\delta^2 a \operatorname{sgn}(b) R_2 + \delta^2 (2 \kappa + 3 \delta_0) + 9 \gamma^2 \delta_0) \right) > 0, \\ D_4 &= \left(4 \delta \kappa a \operatorname{sgn}(b) |b| + a^2 b^2 \operatorname{sgn}(b)^2 + (4 \delta^2 + 36 \gamma^2) \kappa^2 \right) R_2 + 4 \delta_0 \delta \kappa |b| \\ &\quad + 2 \delta_0 a b^2 \operatorname{sgn}(b) > 0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Com isso, somos capazes de obter várias propriedades para as soluções de (4.28). Neste intuito, usaremos entre outras coisas, o fato de que quando $\sigma = 0$ e $\mu = 0$ a amplitude R_2 se reescreve da forma

$$R_2^+ = \frac{\sqrt{-4 \alpha^2 z^2 + \beta^2 + \alpha^2} - 2 \beta z}{\beta^2 + \alpha^2}, \quad (4.41)$$

$$R_2^- = \frac{-\sqrt{-4 \alpha^2 z^2 + \beta^2 + \alpha^2} - 2 \beta z}{\beta^2 + \alpha^2}, \quad (4.42)$$

onde $\alpha = -\frac{6 \gamma \kappa}{|b| c}$, $\beta = \frac{a b + 2 \delta \kappa}{|b| c}$ e $z = \frac{\delta_0}{c}$.

Note que as únicas parcelas de (4.40) capazes de assumir valores negativos são $a \operatorname{sgn}(b)$ e R_2 . A seguir apresentamos vários resultados sobre a estabilidade das soluções periódicas do sistema original no estado de exata ressonância.

Proposição 4.1 *Suponha que $ab > 0$ e $z < \frac{1}{2}$ então a solução periódica com amplitude ao longo do eixo-y igual a R_2^+ será estável independentemente de quais sejam os outros parâmetros.*

Demonstração. A condição $z < \frac{1}{2}$ garante a existência de R_2^+ . De fato, nesse caso $z^2 < \frac{1}{4}$ e multiplicando ambos os lados dessa desigualdade por $-4\alpha^2$ temos $-4\alpha^2 z^2 > -\alpha^2$,

somando $\alpha^2 + \beta^2$ e extraindo a raiz quadrada, obtemos $\sqrt{-4\alpha^2 z^2 + \beta^2 + \alpha^2} > \beta$. Esta desigualdade garante que $R_2^+ \in \mathbb{R}$.

Por outro lado, temos que $-2\beta z > -\beta$, e usando as duas desigualdades acima fica evidente que $R_2^+ > 0$. Além disso, a hipótese de que $ab > 0$ implica em $a \operatorname{sgn}(b) > 0$ o que garante que todas as desigualdades do critério de Routh-Hurwitz (4.40) são estritamente positivas. Portanto todos autovalores de (4.36) tem parte real negativa o que garante, pelo Teorema 3.7, que a solução periódica nesse caso é estável. ■

A figura 4.12 representa uma órbita no espaço de fase da equação (4.4) projetada no espaço das variáveis \dot{y} , \dot{x} e y . Nota-se na figura que a órbita, cujo ponto inicial é representado pelo ponto verde, converge rapidamente para curva fechada em amarelo, que por sua vez representa a solução periódica estável citada na proposição acima.

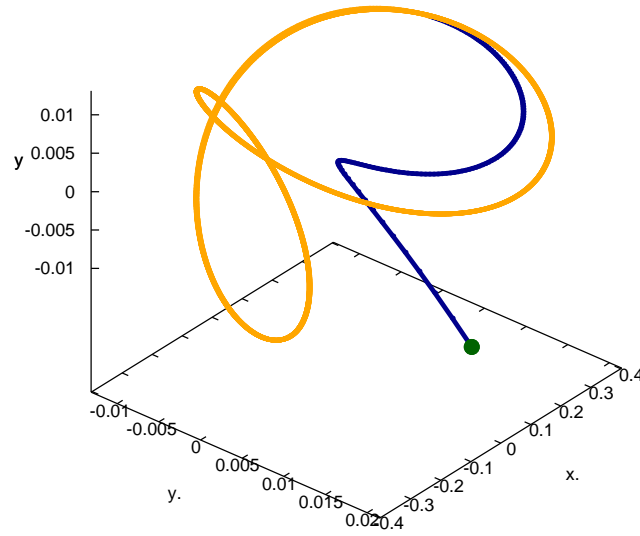


Figura 4.12: Projeção de uma órbita periódica representada pela curva fechada em amarelo. Sendo $\varepsilon = 0.8$, $a = 10$, $b = 8$, $c = 10$, $\kappa = 25$, $\delta = 58$, $\delta_0 = 2$, $\gamma = 19$ e o ponto inicial $(-0.403679, -0.241490, -0.024253, 1.08781)$.

A próxima figura mostra como a órbita periódica se manifesta no plano- $x y$.

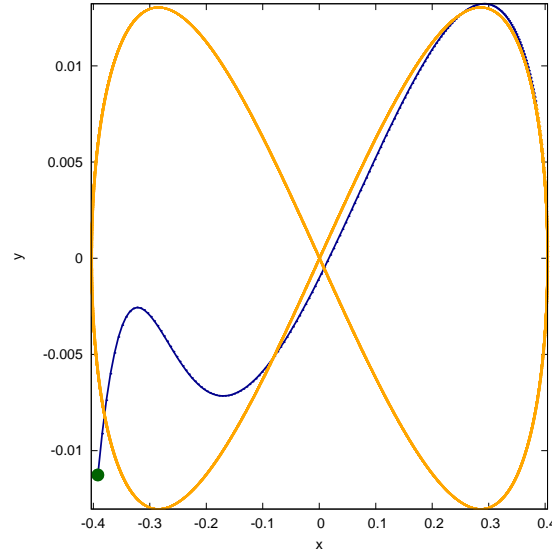


Figura 4.13: Representação do movimento periódico, nas variáveis y e x associado a órbita periódica estável representada pela curva fechada em amarelo.

Proposição 4.2 *A solução periódica com amplitude ao longo do eixo- y igual a R_2^- será, se existir, sempre instável.*

Demonstração. Reescrevendo a quarta equação do critério de Routh-Hurwitz (4.40) temos,

$$(\beta^2 + \alpha^2) b^2 c^2 R_2 + 2 \delta_0 a b |b| + 4 \delta_0 \delta \kappa |b|.$$

Substituindo R_2 por R_2^- e simplificando temos

$$-b^2 c^2 \sqrt{-4 \alpha^2 z^2 + \beta^2 + \alpha^2},$$

o que garante que esta equação será sempre negativa e, portanto, a solução periódica para esta amplitude, quando existir, será instável. ■

Na Figura (4.14) podemos visualizar a projeção de uma órbita que se aproxima e se afasta da solução periódica de amplitude R_2^- ao longo do eixo- y no espaço das variáveis \dot{y} , \dot{x} e y . Note que apesar de em algumas regiões a órbita em azul se aproximar da órbita periódica em amarelo, ela continua se afastando em outras o que caracteriza a instabilidade da solução periódica

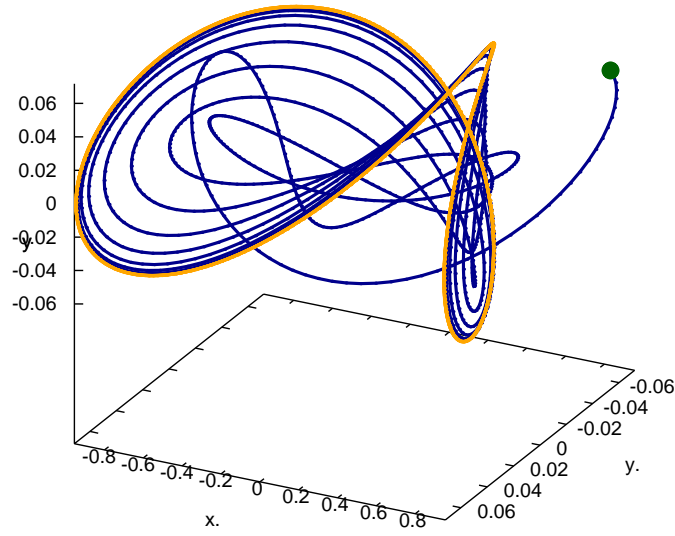


Figura 4.14: Projeção de uma órbita periódica representada pela curva fechada em amarelo. Sendo $\varepsilon = 0.008$, $a = 10$, $b = 8$, $c = 40$, $\kappa = 25$, $\delta = 58$, $\delta_0 = 2$, $\gamma = 19$ e o ponto inicial $(-0.947436, 1.75851, 0.07181, 1.08781)$.

Já o movimento físico representado pela solução da equação original fica representado pela seguinte Figura 4.15. Note que o carácter instável da solução se preserva.

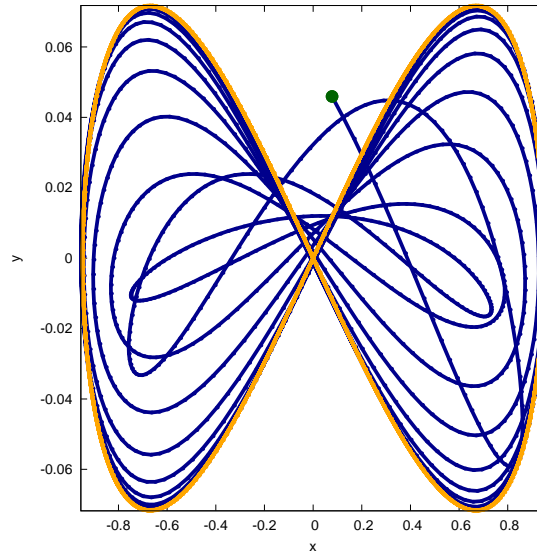


Figura 4.15: Movimento no plano associado a órbita periódica representada pela curva fechada em amarelo.

Observação 4.3 Em algumas das proposições a seguir será usado o seguinte resultado para funções contínuas. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em a tal que $f(a) > 0$ ($f(a) < 0$). Então, existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) $\forall x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x - a\| < \delta$. Este resultado é chamado de **princípio da permanência de sinal**.

Proposição 4.4 Dados os parâmetros c , δ_0 , δ , γ , b e κ , suponha que $ab < 0$ e $z < \frac{1}{2}$ então existe um valor $a_s > 0$ tal que a solução periódica com amplitude no eixo- y igual a R_2^+ será estável sempre que $|a| < a_s$.

Demonstração. Como já vimos nas proposições anteriores a condição $z < \frac{1}{2}$ garante a existência de $R_2^+ > 0$ e além disso, temos que quando $a = 0$ as equações (4.40) ficam da forma:

$$D_1 = \frac{2\delta\kappa R_2^+}{|b|} + (\kappa + \delta_0),$$

$$D_2 = (8\delta^3 + 72\gamma^2\delta)\kappa^2 R_2^{+3} + (16\delta^2\kappa^2 + (12\delta_0\delta^2 + 36\gamma^2\delta_0)\kappa)|b|R_2^{+2} + (8\delta\kappa^2 + 16\delta_0\delta\kappa + 4\delta_0^2\delta)b^2 R_2^+ + (\kappa^2 + 4\delta_0\kappa + 4\delta_0^2)b^2|b|,$$

$$D_3 = 8\delta(\delta^2 + 9\gamma^2)\kappa^3 R_2^{+3} + 4\kappa^2(\delta^2(2\kappa + 3\delta_0) + 9\gamma^2\delta_0)|b|R_2^{+2} + 2\delta\kappa(\kappa^2 + 4\delta_0\kappa + 2\delta_0^2)b^2 R_2^+ + \delta_0\kappa(\kappa + 2\delta_0)b^2|b|,$$

$$D_4 = (4\delta^2 + 36\gamma^2)\kappa^2 R_2^+ + 4\delta_0\delta\kappa|b|,$$

sendo todas estritamente positivas. Como todas as equações D_i , com $1 \leq i \leq 4$, dependem continuamente de a , temos que para cada i existe um valor $a_i > 0$ tal que, dado $a \in \mathbb{R}$ com $|a| < a_i$ então $D_i(a) > 0$. Este resultado decorre do princípio da permanência do sinal (4.3). Deste modo, tomando $a_s = \min\{a_i \mid 1 \leq i \leq 4\}$, temos satisfeitas as condições do critério de Routh-Hurwitz sempre que $|a| < a_s$. E, portanto, temos garantida a estabilidade da solução periódica. ■

A estabilidade da solução periódica neste caso fica perceptível na Figura 4.17 a seguir, note que a órbita, cujo ponto inicial é representado pelo ponto verde, se aproxima e depois permanece sobre a curva fechada, em amarelo, representação da solução periódica.

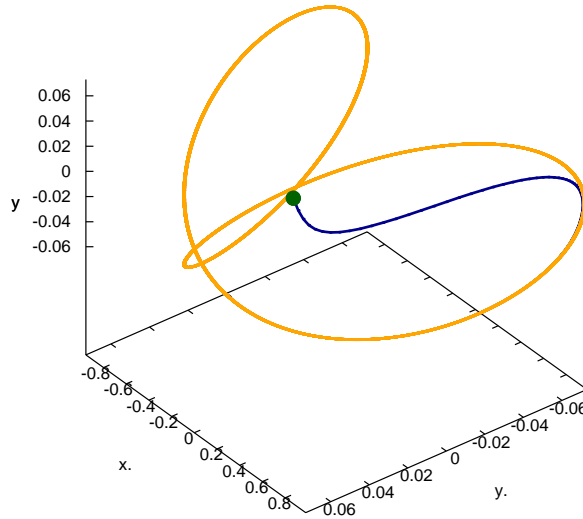


Figura 4.16: Projeção de uma órbita periódica representada pela curva fechada em amarelo. Sendo $\varepsilon = 0.8$, $a = 0.8$, $b = -8$, $c = 40$, $\kappa = 25$, $\delta = 58$, $\delta_0 = 2$, $\gamma = 19$ e o ponto inicial $(-0.85513, -0.041494, 0.0157913, 1.28781)$.

A Figura (4.17) representa como a órbita periódica se manifesta como solução da equação original.

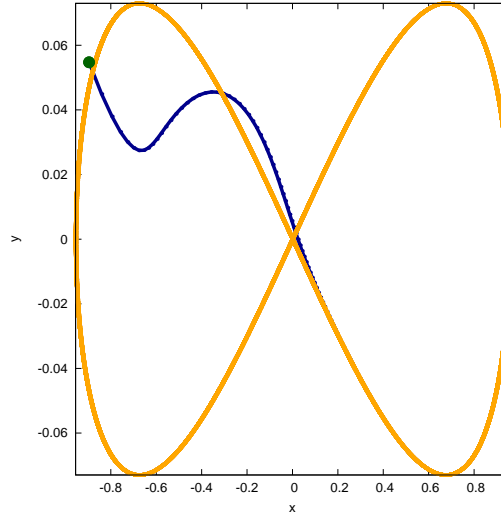


Figura 4.17: Projeção de uma órbita periódica representada pela curva fechada em amarelo.

Proposição 4.5 *Dados os parâmetros c , δ , γ , b e κ , suponha que $\beta < 0$, então existem a_{s_1} , a_{s_2} ambos positivos e $z_s > \frac{1}{2}$ tais que a solução periódica com amplitude R_2^+ ao longo do eixo- y será estável para todo $\frac{1}{2} \leq z \leq \min \left\{ \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2}}{2}, z_s \right\}$, sempre que a condição $a_{s_1} \leq |a| \leq a_{s_2}$ for satisfeita.*

Demonstração. Sabemos que $\beta = \frac{2\kappa ab + 4\delta\kappa^2}{2\kappa|b|c}$ portanto, se $\beta > 0$ então $a > \frac{-2\delta\kappa}{b}$. Além disso, destacamos o fato de que

$$\lim_{a \rightarrow \frac{-2\delta\kappa}{b}} \beta(a) = 0.$$

Definimos $a_{s_1} = \frac{2\delta\kappa}{|b|}$, note que quando $z = \frac{1}{2}$ e $|a| = a_{s_1}$ temos $R_2^+(|a|, z) = 0$. Nessas condições, quando $|a| = a_{s_1}$, temos que as equações (4.40) ficam da forma

$$D_1 = \kappa + \delta_0,$$

$$D_2 = (\kappa^2 + 4\delta_0\kappa + 4\delta_0^2)|b|^3,$$

$$D_3 = (\delta_0\kappa^2 + 2\delta_0^2\kappa)|b|^3,$$

$$D_4 = 8\delta_0\delta\kappa|b|.$$

Garantindo a condição de positividade para estas equações. Pelo princípio da permanência do sinal (4.3) sabemos que existe uma região aberta U no plano- za tal que $\left(\frac{1}{2}, a_{s_1}\right) \in U$ e a condição de positividade se mantém para todo elemento de U . Vamos definir os parâmetros a_{s_2} e z_s tais que $\left[\frac{1}{2}, z_s\right] \times (a_{s_1}, a_{s_2}) \subset U$.

Para garantir a existência de R_2^+ devemos ter $0 \leq -4\alpha^2 z^2 + \beta^2 + \alpha^2$, somando $4\alpha^2 z^2$ em ambos os lados e isolando z obtemos $z^2 \leq \frac{1}{4} \left(\frac{\beta^2}{\alpha^2} + 1\right)$ extraindo raiz quadrada temos a desigualdade $z \leq \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha^2} + 1}\right)$. Portanto basta tomar $\frac{1}{2} \leq z \leq \min \left\{ \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha^2} + 1}\right), z_s \right\}$. ■

Novamente ao ilustrarmos a projeção de uma órbita sobre o espaço das variáveis \dot{y} , \dot{x} e y , cujo ponto inicial (em verde) reside na vizinhança de um ponto de equilíbrio, fica evidente a estabilidade da solução periódica representada pela curva fechada em amarelo. Ver Figura 4.18.

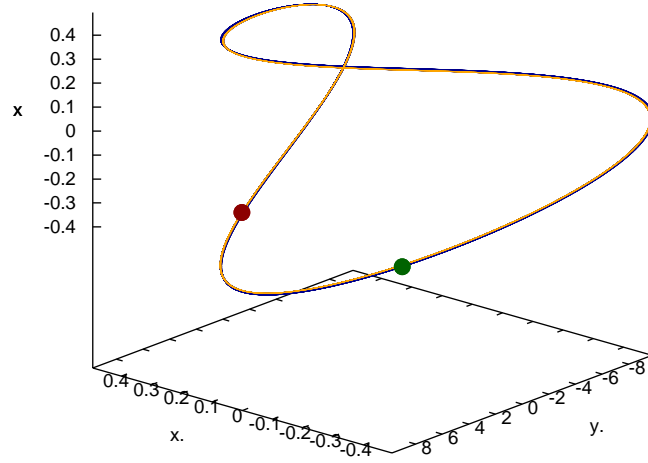


Figura 4.18: Projeção de uma órbita representada pela curva fechada em amarelo. Sendo $\varepsilon = 0.0001$, $a = 0.77$, $b = -800$, $c = \frac{8}{20}$, $\kappa = 5$, $\delta = 58$, $\delta_0 = 0.3$, $\gamma = 1$ e o ponto inicial $(-0.494327, -0.241490, 9.774382, 1.08781)$.

E essa solução periódica se manifesta no movimento real da partícula da seguinte forma, ver Figura (4.19).

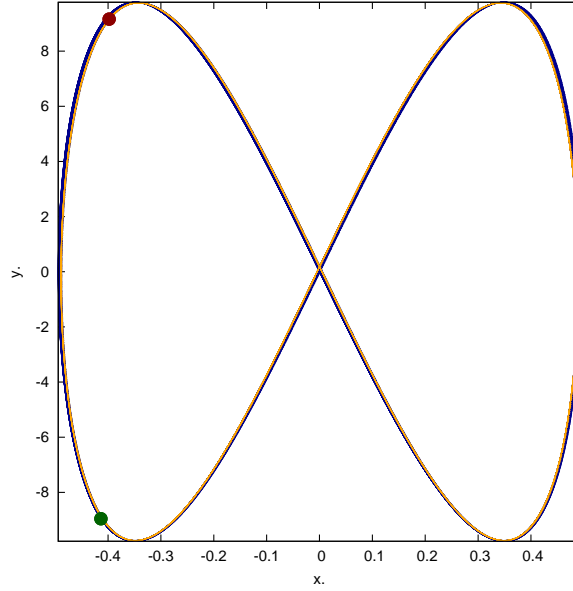


Figura 4.19: Representação do movimento físico da partícula.

Proposição 4.6 *Dados os parâmetros $c, \delta_0, \delta, \gamma, b$ e κ , suponha que $ab < 0$, então existe $0 < a_u < \infty$ tal que a solução periódica com amplitude no eixo- y igual a R_2^+ será instável sempre que $|a| \geq a_u$.*

Demonstração. Se $ab < 0$ então podemos escrever $\beta(|a|) = \frac{2\delta\kappa - |b||a|}{|b|c}$ naturalmente quando $|a| \rightarrow \infty$ seque que $\beta(a) \rightarrow -\infty$. Por outro lado, sabemos que vale a relação $z \leq \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha^2} + 1} \right)$ portanto quando $\beta \rightarrow -\infty$, $\sqrt{\frac{\beta^2}{\alpha^2} + 1} \rightarrow \infty$ e com isso $z \rightarrow \infty$ (satisfazendo portanto a condição de existência da solução periódica).

Além disso, temos que $\lim_{|a| \rightarrow \infty} R_2(|a|) = 0$, de modo que

$$\lim_{|a| \rightarrow \infty} D_3(|a|) = (-\delta_0 \kappa^2 - 2\delta_0^2 \kappa) |b|^3 < 0,$$

portanto, existe um valor $0 < a_u < \infty$ tal que $D_3(a) < 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \geq a_u$. O que garante a instabilidade da solução periódica. ■

A Figura (4.20) mostra uma órbita cujo ponto inicial (em verde) está na vizinhança da solução periódica, no entanto, a órbita escapa para o infinito a medida que o tempo passa, caracterizando a instabilidade da órbita.

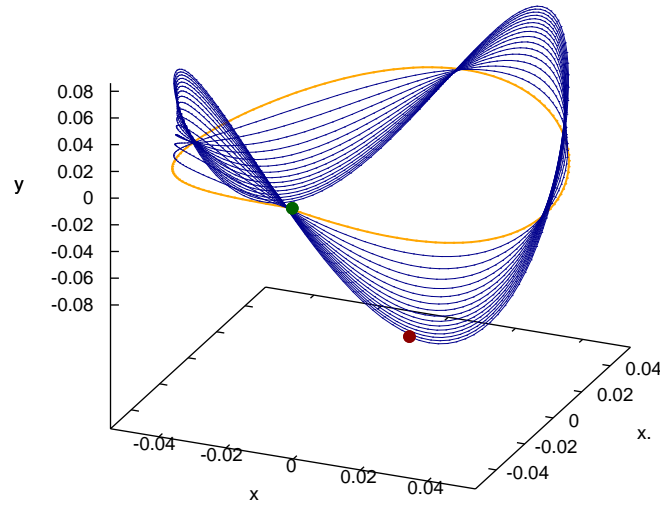


Figura 4.20: Projeção de uma órbita representada pela curva fechada em amarelo. Em verde temos o ponto inicial e em vermelho o ponto final. Sendo $\varepsilon = 0.008$, $a = -10.8$, $b = 700$, $c = \frac{9}{20}$, $\kappa = 5$, $\delta = 50$, $\delta_0 = 0.3$, $\gamma = 1$ e o ponto inicial $(-0.054538, -0.241490, -0.014872, 1.08781)$.

Como esperado o movimento físico descrito pela solução do sistema original também apresenta um comportamento instável semelhante ao encontrado na projeção anterior. Ver (4.21).

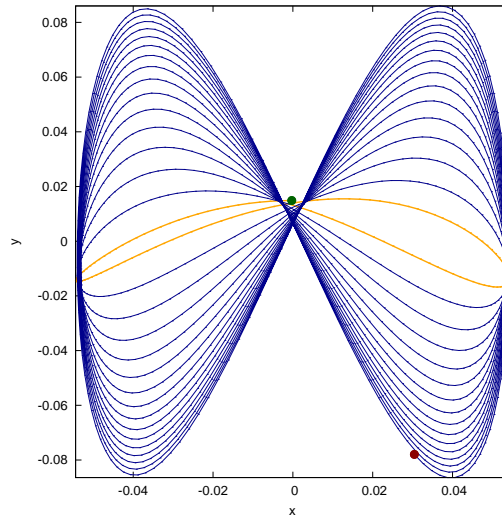


Figura 4.21: Representação do movimento físico da partícula. Em verde temos o ponto inicial e em vermelho o ponto final.

Agora vamos estudar a estabilidade das soluções periódicas no caso em que $\delta_0 = 0$ e $\gamma = 0$. Neste caso o sistema médio da equação (4.29), fica da forma

$$\begin{pmatrix} \dot{R}_{1a}(t) \\ \dot{\phi}_a(t) \\ \dot{R}_{2a}(t) \\ \dot{\psi}_a(t) \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} \frac{-R_1 (2 \sin(\psi - 2\phi) a R_2 - 2 \sin(2\phi) c) - \delta R_1^3}{8} \\ \frac{2 \cos(\psi - 2\phi) a R_2 + 2 \cos(2\phi) c - 8\mu}{8} \\ \frac{\sin(\psi - 2\phi) b R_1^2 - 4\kappa R_2}{8} \\ \frac{(2\sigma - 16\mu) R_2 + \cos(\psi - 2\phi) b R_1^2}{8 R_2} \end{pmatrix}. \quad (4.43)$$

Neste caso, valem as seguintes relações

$$\begin{aligned} \cos(\psi - 2\phi) &= \frac{(16\mu - 2\sigma) R_2}{b R_1^2}, \\ \sin(\psi - 2\phi) &= \frac{4\kappa R_2}{b R_1^2}, \\ \cos(2\phi) &= \frac{8\mu b R_1^2 - (32\mu - 4\sigma) a R_2^2}{2 b c R_1^2}, \\ \sin(2\phi) &= \frac{8\kappa a R_2^2 + \delta b R_1^4}{2 b c R_1^2}, \\ R_2 &= \frac{|b| R_1^2}{2 \sqrt{(\sigma - 8\mu)^2 + 4\kappa^2}}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Portanto, calculando a matriz jacobiana do sistema (4.43), nos pontos de equilíbrio acima, teremos

$$\begin{pmatrix} -\frac{\delta R_1^2}{4} & 2\mu R_1 & -\frac{\kappa a \operatorname{sgn}(b) R_1}{2D} & \frac{\sigma_\mu a \operatorname{sgn}(b) R_1 R_2}{4D} \\ 0 & -\frac{\delta R_1^2}{4} & -\frac{\sigma_\mu a \operatorname{sgn}(b)}{4D} & -\frac{\kappa a \operatorname{sgn}(b) R_2}{2D} \\ \frac{\kappa |b| R_1}{2D} & \frac{\sigma_\mu |b| R_1^2}{4D} & -\frac{\kappa}{2} & -\frac{\sigma_\mu |b| R_1^2}{8D} \\ -\frac{\sigma_\mu |b| R_1}{4D R_2} & \frac{\kappa |b| R_1^2}{2D R_2} & \frac{\sigma_\mu |b| R_1^2}{8D R_2^2} & -\frac{\kappa |b| R_1^2}{4D R_2} \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

onde $D = \sqrt{4\kappa^2 + \sigma_\mu^2}$. Além disso, o polinômio característico, $p(x) = b_0x^4 + b_1x^3 + b_2x^2 + b_3x + b_4$, da matriz acima é tal que

$$\begin{aligned}
b_0 &= 1, \\
b_1 &= \frac{\delta D R_2 + \kappa |b|}{|b|}, \\
b_2 &= \frac{4\delta^2 |b| D^3 R_2^2 + (16\delta\kappa b^2 D^2 + (4\sigma_\mu^2 + 16\kappa^2) a b^2 \operatorname{sgn}(b) |b|) R_2 + (\sigma_\mu^2 + 4\kappa^2) b^2 |b| D}{16b^2 |b| D}, \\
b_3 &= \frac{(4\delta^2 \kappa |b| D^3 + (2\delta\sigma_\mu^2 + 8\delta\kappa^2) a b^2 \operatorname{sgn}(b) D) R_2^2}{16b^2 |b| D} \\
&+ \frac{((\delta\sigma_\mu^2 + 4\delta\kappa^2) b^2 D^2 + (2\kappa\sigma_\mu^2 + 8\kappa^3) a b^2 \operatorname{sgn}(b) |b|) R_2}{16b^2 |b| D}, \\
b_4 &= \frac{((\delta^2 \sigma_\mu^2 + 4\delta^2 \kappa^2) |b| D^4 + (4\delta\kappa\sigma_\mu^2 + 16\delta\kappa^3) a b^2 \operatorname{sgn}(b) D^2)}{64b^2 |b| D^2} \\
&+ \frac{(\sigma_\mu^4 + 8\kappa^2 \sigma_\mu^2 + 16\kappa^4) a^2 b^2 \operatorname{sgn}(b)^2 |b|}{64b^2 |b| D^2} R_2^2 + \frac{(4\mu\sigma_\mu^3 + 16\kappa^2 \mu\sigma_\mu) a b^2 \operatorname{sgn}(b) |b| D R_2}{64b^2 |b| D^2}.
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Calculando o determinante das matrizes de Hurwitz para os coeficientes acima, após algumas simplificações, conseguimos as seguintes equivalências para o critério (1.25)

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \frac{\delta D R_2}{|b|} + \kappa > 0, \\
\Delta_2 &= 4\delta^3 D^2 R_2^3 + 16\delta^2 \kappa |b| D R_2^2 + 2\delta a b^2 \operatorname{sgn}(b) D R_2^2, \\
&+ 2\kappa a b^2 \operatorname{sgn}(b) |b| R_2 + 16\delta\kappa^2 b^2 R_2 + \kappa b^2 |b| D > 0, \\
\Delta_3 &= 16\delta^5 \kappa D^4 R_2^4 + 2\delta^2 b^2 |b| D^2 R_2 (a \operatorname{sgn}(b) (D^2 - 8\mu\sigma_\mu + 20\kappa^2) R_2 + 8\kappa^2 D) \\
&+ \delta\kappa b^4 D (4a \operatorname{sgn}(b) (D^2 - 8\mu\sigma_\mu + 4\kappa^2) R_2 + D^3) \\
&+ 8\delta^3 \kappa b^2 D^2 R_2^2 (4a \operatorname{sgn}(b) D R_2 + D^2 + 8\kappa^2) \\
&+ 8\delta^4 |b| D^3 R_2^3 (a \operatorname{sgn}(b) D R_2 + 8\kappa^2) \\
&+ 2\kappa^2 a b^4 \operatorname{sgn}(b) |b| (D^2 - 8\mu\sigma_\mu) > 0, \\
\Delta_4 &= a b^2 \operatorname{sgn}(b) (a \operatorname{sgn}(b) D R_2 + 4\mu\sigma_\mu) + \delta^2 D^3 R_2 + 4\delta\kappa a b D R_2 > 0.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Com isso, podemos fazer algumas afirmações sobre as soluções periódicas de (4.43).

Proposição 4.7 *Suponha que $ab > 0$ e $|\sigma| < 4\sqrt{2\kappa}$, então a solução periódica ao longo do eixo- y igual a R_2^+ , será, se existir, sempre estável independente de quais sejam os outros parâmetros.*

Demonstração. A condição $ab > 0$ implica em $a \operatorname{sgn}(b) > 0$ o que garante que $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ e $\Delta_4 > 0$. Por outro lado, substituindo $D = \sqrt{4\kappa^2 + \sigma_\mu^2}$ e $\sigma_\mu = \sigma - 8\mu$ temos a relação

$$D^2 - 8\mu\sigma_\mu > 0$$

é equivalente a

$$128\mu^2 - 24\mu\sigma + 4\kappa^2 + \sigma^2 > 0. \tag{4.48}$$

O lado esquerdo da desigualdade acima pode ser visto como um polinômio em relação a μ que, por sua vez, tem a concavidade voltada para cima, e portanto vale se, e somente se

$$(-24\sigma)^2 - 4(128)(4\kappa^2 + \sigma^2) < 0.$$

Desenvolvendo esta expressão obtemos $\sigma^2 < 32\kappa^2$. Portanto, podemos dizer que se $|\sigma| < 4\sqrt{2}\kappa$, então $D^2 - 8\mu\sigma_\mu > 0$. O que, juntamente com a condição $ab > 0$, garante a validade da desigualdade $\Delta_3 > 0$. Desta forma, usando os Teoremas (1.25) e (3.7) temos que a solução periódica será estável sempre que existir. ■

Proposição 4.8 *Suponha que $ab > 0$ e $|\sigma| < 4\sqrt{2}\kappa$, então a solução periódica ao longo do eixo-y igual a R_2^+ , será, se existir, sempre estável independente de quais sejam os outros parâmetros.*

Demonstração. A condição $ab > 0$ implica em $a \operatorname{sgn}(b) > 0$ o que garante que $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ e $\Delta_4 > 0$. Por outro lado, substituindo $D = \sqrt{4\kappa^2 + \sigma_\mu^2}$ e $\sigma_\mu = \sigma - 8\mu$ temos a relação

$$D^2 - 8\mu\sigma_\mu > 0$$

é equivalente a

$$128\mu^2 - 24\mu\sigma + 4\kappa^2 + \sigma^2 > 0 \quad (4.49)$$

O lado esquerdo da desigualdade acima pode ser visto como um polinômio em relação a μ que, por sua vez, tem a concavidade voltada para cima, e portanto vale se, e somente se

$$(-24\sigma)^2 - 4(128)(4\kappa^2 + \sigma^2) < 0.$$

Desenvolvendo esta expressão obtemos $\sigma^2 < 32\kappa^2$. Portanto, podemos dizer que se $|\sigma| < 4\sqrt{2}\kappa$, então $D^2 - 8\mu\sigma_\mu > 0$. O que, juntamente com a condição $ab > 0$, garante a validade da desigualdade $\Delta_4 > 0$. Desta forma, usando os Teoremas (1.25) e (3.7) temos que a solução periódica será estável sempre que existir. ■

Proposição 4.9 *A solução periódica com amplitude ao longo do eixo-y igual a R_2^- será, caso exista, sempre instável.*

Demonstração. A equação Δ_4 pode ser reescrita na forma $(\alpha^2 + \beta^2)b^2c^2DR_2 + 4\mu\sigma_\mu ab^2 \operatorname{sgn}(b)$. Substituindo R_2 por

$$R_2^- = \frac{-\sqrt{-16\beta^2 z_\mu^2 + \beta^2 + \alpha^2} - 4\alpha z_\mu}{\beta^2 + \alpha^2}$$

temos,

$$-\left(\sqrt{-16\beta^2 z_\mu^2 + \beta^2 + \alpha^2}\right) b^2 c^2 D - 4\alpha z_\mu b^2 c^2 D + 4\mu\sigma_\mu a b^2 \operatorname{sgn}(b).$$

Note que

$$-4\alpha z_\mu b^2 c^2 D + 4\mu \sigma_\mu a b^2 \operatorname{sgn}(b) = 0. \quad (4.50)$$

De fato, se substituirmos $\alpha = \frac{\sigma_\mu a b}{|b| c D}$, $z_\mu = \frac{\mu}{c}$ e $\operatorname{sgn}(b) = \frac{b}{|b|}$ na equação (4.50) teremos

$$\frac{4\mu \sigma_\mu a b^3}{|b|} - \frac{4\mu \sigma_\mu a b^3}{|b|} = 0.$$

Logo, a equação Δ_4 fica na forma

$$-\left(\sqrt{-16\beta^2 z_\mu^2 + \beta^2 + \alpha^2}\right) b^2 c^2 D$$

sendo sempre negativa e, por isso, a solução periódica será sempre instável. ■

Proposição 4.10 *Dados os parâmetros $c, \mu, \delta, \sigma, b$ e κ , suponha que $ab < 0$ e $|z_\mu| < \frac{1}{4}$, então existe um valor $a_s > 0$ tal que a solução periódica ao longo do eixo- y igual a R_2^+ será estável sempre que $|a| < a$.*

Demonstração. Quando $a = 0$ as equações em (4.47) ficam da seguinte forma

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{\delta D R_2}{|b|} + \kappa, \\ \Delta_2 &= 4\delta^3 D^2 R_2^3 + 16\delta^2 \kappa |b| D R_2^2 + 16\delta \kappa^2 b^2 R_2 + \kappa b^2 |b| D, \\ \Delta_3 &= 16\delta^5 \kappa D^4 R_2^4 + 64\delta^4 \kappa^2 |b| D^3 R_2^3 + (8\delta^3 \kappa b^2 D^4 + 64\delta^3 \kappa^3 b^2 D^2) R_2^2 \\ &\quad + 16\delta^2 \kappa^2 b^2 |b| D^3 R_2 + \delta \kappa b^4 D^4, \\ \Delta_4 &= \delta^2 D^3 R_2. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Além disso, note que a condição $|z_\mu| < \frac{1}{4}$ garante a existência de $R_2^+ = \frac{|b| \sqrt{c^2 - 16\mu^2}}{\delta |D|} > 0$. Como as equações (4.51) dependem continuamente de a , podemos afirmar que para cada i com $1 \leq i \leq 4$ existe $a_i \in \mathbb{R}$ tal que $\Delta_i(a) > 0$ para todo $a \in \mathbb{R}$ cujo $|a| < a_i$. Portanto, se definirmos $a_s = \min\{a_i \mid 1 \leq i \leq 4\}$ a teremos, para todo a tal que $|a| < a_s$, satisfeita a desigualdade $\Delta_i(a) > 0$, para todo $i = 1, 2, 3$ e 4 . Contudo, a solução periódica será estável pelo critério de Routh-Hurwitz. ■

Proposição 4.11 *Dados os parâmetros $c, \mu, \delta, \sigma, b$ e κ , suponha que $ab > 0$, $|z_\mu| < \frac{1}{4}$ e $|\mu| > \frac{1}{2}\kappa$, então existem σ_1, σ_2 e $a_u > 0$ tais que a solução periódica ao longo do eixo- y igual a R_2^+ será instável sempre que $|a| \geq a_u$ e $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$.*

Demonstração. Primeiramente vamos definir $h(\sigma) := D^2 - 8\mu\sigma_\mu$. Pelo visto na Proposição ??, sabemos que se $|\mu| > \frac{1}{2}\kappa$ então $h(\sigma) < 0$. Como h depende continuamente de

σ podemos afirmar, pelo princípio da permanência do sinal (4.3), existem σ_1 e σ_2 tais que $h(\sigma) < 0$ para todo $\sigma \in (\sigma_1, \sigma_2)$. Por outro lado, temos que a condição $|z_\mu| < \frac{1}{4}$ garante a existência de R_2^+ . Além disso, $ab > 0 \Rightarrow a \operatorname{sgn}(b) = |a|$, por isso podemos reescrever a terceira equação do critério da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta_3(|a|)}{(D^2 - 8\mu\sigma_\mu)} &= \frac{8\delta^4 |a| |b| D^4 R_2^+(a)^4}{D^2 - 8\mu\sigma_\mu} + \frac{16\delta^5 \kappa D^4 R_2^+(a)^4}{D^2 - 8\mu\sigma_\mu} + \frac{64\delta^4 \kappa^2 |b| D^3 R_2^+(a)^3}{D^2 - 8\mu\sigma_\mu} \\
&+ \frac{8\delta^3 \kappa b^2 D^4 R_2^+(a)^2}{D^2 - 8\mu\sigma_\mu} - \frac{16\delta^2 \mu \sigma_\mu |a| b^2 |b| D^2 R_2^+(a)^2}{D^2 - 8\mu\sigma_\mu} + \frac{40\delta^2 \kappa^2 |a| b^2 |b| D^2 R_2^+(a)^2}{D^2 - 8\mu\sigma_\mu} \\
&\frac{16\delta^2 \kappa^2 b^2 |b| D^3 R_2^+(a)}{D^2 - 8\mu\sigma_\mu} + \frac{4\delta \kappa |a| b^4 D^3 R_2^+(a)}{D^2 - 8\mu\sigma_\mu} - \frac{32\delta \kappa \mu \sigma_\mu |a| b^4 D R_2^+(a)}{D^2 - 8\mu\sigma_\mu} \\
&+ \frac{32\delta^3 \kappa |a| b^2 D^3 R_2^+(a)^3}{D^2 - 8\mu\sigma_\mu} + \frac{64\delta^3 \kappa^3 b^2 D^2 R_2^+(a)^2}{D^2 - 8\mu\sigma_\mu} + \frac{16\delta \kappa^3 |a| b^4 D R_2^+(a)}{D^2 - 8\mu\sigma_\mu} \\
&+ \frac{2\delta^2 |a| b^2 |b| D^4 R_2^+(a)^2}{D^2 - 8\mu\sigma_\mu} + \frac{\delta \kappa b^4 D^4}{D^2 - 8\mu\sigma_\mu} + 2\kappa^2 |a| b^4 |b|
\end{aligned} \tag{4.52}$$

Vamos usar o fato de que $\lim_{|a| \rightarrow \infty} a R_2^+(a)$ existe juntamente com a relação $\lim_{|a| \rightarrow \infty} R_2^+(a) = 0$ para afirmar que $\lim_{|a| \rightarrow \infty} a (R_2^+(a))^n = 0$ para todo $n = 2, 3, 4, \dots$. Usando isso temos claramente que

$$\lim_{|a| \rightarrow \infty} \frac{\Delta_3(|a|)}{(D^2 - 8\mu\sigma_\mu)} = \infty$$

sendo assim, como $\sigma \in (\sigma_1, \sigma_2)$ e $D^2 - 8\mu\sigma_\mu < 0$ temos

$$\lim_{|a| \rightarrow \infty} \Delta_3(|a|) = -\infty.$$

Com isso, podemos afirmar que existe um $0 < a_u < \infty$ tal que $\Delta_3(a) < 0$ para todo a tal que $|a| \geq a_u$, deste modo a solução periódica será instável pelo critério de Routh-Hurwitz.

■

Proposição 4.12 *Dados os parâmetros $c, \mu, \delta, \sigma, b$ e κ , suponha que $ab < 0$, $|z_\mu| < \frac{1}{4}$ e $|\mu| < \frac{1}{2}\kappa$, então existe $a_u > 0$ tal que a solução periódica ao longo do eixo-y igual a R_2^+ será instável sempre que $|a| \geq a_u$.*

Demonstração. Pelo visto anteriormente, quando $|\mu| < \frac{1}{4}$ teremos que $D^2 - 8\mu\sigma_\mu$ será sempre positivo. Além disso, quando $|a|$ tende ao infinito, a condição $|z_\mu| < \frac{1}{4}$ garante a existência de R_2^+ . Note que

$$\lim_{|a| \rightarrow \infty} |a| R_2^+ = \frac{|b| \sqrt{c^2 D^2 - 64\kappa^2 \mu^2} + 4\mu\sigma_\mu b}{b D}.$$

Por outro lado, como $ab < 0$ podemos reescrever a terceira equação de (4.47) da forma

$$\begin{aligned} \Delta_3(a) = & -2\delta D |a| R_2^+ \left(4\delta^3 |b| D^3 R_2^{+3} + 16\delta^2 \kappa b^2 D^2 R_2^{+2} + \delta b^2 |b| D^3 R_2^+ - 8\delta \mu \sigma_\mu b^2 |b| D R_2^+ \right. \\ & + 20\delta \kappa^2 b^2 |b| D R_2^+ + 2\kappa b^4 D^2 - 16\kappa \mu \sigma_\mu b^4 + 8\kappa^3 b^4 \left. \right) - 2\delta D R_2^+ \left(-8\delta^4 \kappa D^3 R_2^{+3} \right. \\ & - 32\delta^3 \kappa^2 |b| D^2 R_2^{+2} - 4\delta^2 \kappa b^2 D^3 R_2^+ - 32\delta^2 \kappa^3 b^2 D R_2^+ - 8\delta \kappa^2 b^2 |b| D^2 \left. \right) \\ & + \delta \kappa b^4 D^4 - 2\kappa^2 |a| b^4 |b| (D^2 - 8\mu \sigma_\mu). \end{aligned} \quad (4.53)$$

Destacamos que

$$\lim_{|a| \rightarrow \infty} R_2^+ = 0$$

e além disso,

$$\lim_{|a| \rightarrow \infty} |a| R_2^+ = \frac{|b| \sqrt{c^2 D^2 - 64 \kappa^2 \mu^2} + 4 \mu \sigma_\mu b}{b D}.$$

Deste modo é fácil ver que

$$\lim_{|a| \rightarrow \infty} |a| \Delta_3(a) = -\infty$$

Portanto, assim como no caso anterior, temos que existe um $0 < a_u < \infty$ tal que $\Delta_3(a) < 0$ para todo a tal que $|a| \geq a_u$, deste modo a solução periódica será instável pelo critério de Routh-Hurwitz. ■

Proposição 4.13 *Dados os parâmetros $c, \mu, \delta, \sigma, b$ e κ , suponha que $ab < 0$, $|z_\mu| < \frac{1}{4}$ e $|\sigma| < 4\sqrt{2}\kappa$, então existe $a_u > 0$ tal que a solução periódica ao longo do eixo- y igual a R_2^+ será instável sempre que $|a| \geq a_u$.*

Demonstração. Note que a condição $|\sigma| < 4\sqrt{2}\kappa$ implica que $D^2 - 8\mu\sigma_\mu > 0$. O restante da demonstração se segue semelhante à anterior. ■

CAPÍTULO 5

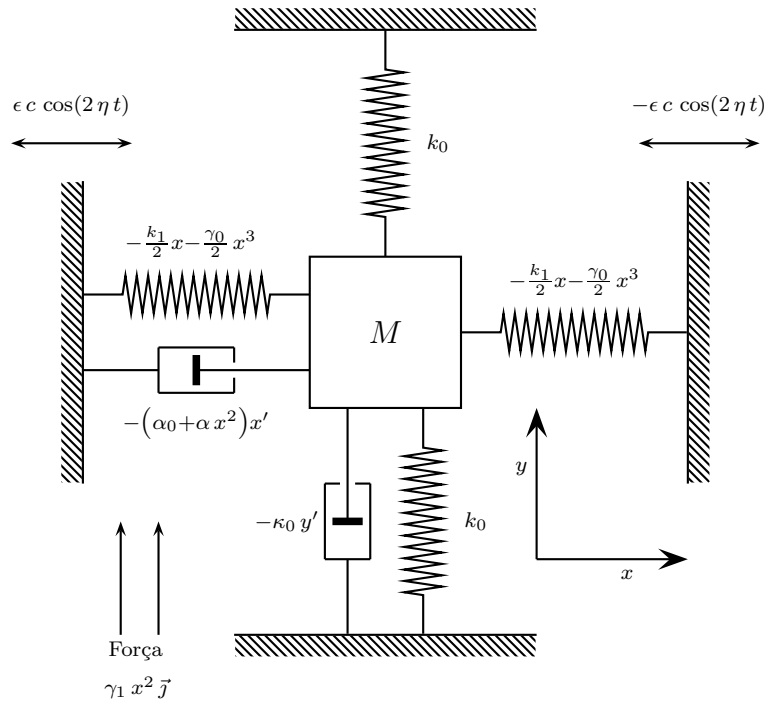
CONCLUSÕES

Lançando mão do Teorema da Média pudemos analisar um sistema físico complexo, usando os métodos de dinâmica não-linear na equação média associada ao sistema. Dessa forma pudemos obter condições para que a solução trivial seja assintoticamente estável através da análise dos autovalores do sistema médio neste ponto. Além disso, analisamos o sistema acima em condições de quase-ressonância, quando $q^2 = 4 + \varepsilon \sigma$ e $\eta = 1 + \varepsilon \mu$, sendo σ e μ pequenos parâmetros positivos independentes de ε . Nesse caso ainda foi possível determinar as condições que caracterizavam estabilidade assintótica ou instabilidade da solução trivial do sistema. Não obstante, o Método da Média foi utilizado também para encontrar soluções periódicas não-triviais do sistema, tanto em situação de exata ressonância, ou seja, quando $\sigma = 0$ e $\mu = 0$, quanto no caso em que $\delta_0 = 0$ e $\gamma = 0$. Para tanto, usamos os pontos de equilíbrio do sistema médio da equação (4.1) e, nas suas vizinhanças, pudemos, com o auxílio do critério de Routh-Hurwitz, identificar sob quais circunstâncias os coeficientes da equação acima garantem a existência e também a estabilidade destas soluções.

Por fim, vimos que o Teorema da Média, nos permite obter uma informação detalhada a respeito das soluções deste sistema e fornece expressões precisas para as estimativas de erro, afirmando-se como um método extremamente eficiente para as aplicações matemáticas.

APÊNDICE

Um sistema similar ao que vamos tratar nesta seção pode ser encontrado em [1]. No caso do qual vamos tratar, existe uma excitação paramétrica devido à não linearidade das molas horizontais e a vibração dos suportes laterais ver figura



Nesse sistema, chamaremos de l_0 o comprimento natural da mola linear fixada no topo da figura, sua constante elástica será representada por κ_0 e M representa a massa do corpo, que nesse trabalho será tomado como uma massa pontual, portanto rotações foram suprimidas deste sistema físico. Na posição de equilíbrio esta mola terá o comprimento

$$a = \frac{Mg}{\kappa_0} + l_0, \quad (5.1)$$

onde g é a aceleração da gravidade. Na parte inferior temos outra mola linear com a mesma constante elástica κ_0 , porém seu comprimento será denotado por b_0 . Devido a isso, no ponto de equilíbrio, esta mola não exerce nenhuma força sobre o corpo. Portanto, b_0 é na verdade um parâmetro positivo livre no sistema. Se levarmos em conta apenas estas molas teremos um sistema físico que é essencialmente um pêndulo elástico. No entanto, existem outras forças sobre este sistema, na parte inferior atua a seguinte força dissipativa $-\kappa_0 \dot{y}$, note que esta força atua somente na direção y . Nos suportes laterais do sistema existem duas molas não-lineares cujas forças elásticas são dadas por $-\frac{\kappa_1}{2}x - \frac{\gamma_0}{2}x^3$, onde $\frac{\kappa_1}{2}$ é a constante elástica de cada mola e $\frac{\gamma_0}{2}$ é o coeficiente elástico que descreve o quanto o comportamento da mola se distingue do caso linear. É importante destacar que essas forças atuam somente na direção x , além disso, ambas as molas laterais tem comprimento c . Os suportes laterais vibram simultaneamente e em direções opostas de modo que seu movimento é descrito pela relação $\epsilon c \cos(2\eta t)$. Temos ainda do lado esquerdo uma força dissipativa não-linear dada por $-(\alpha_0 + \alpha x^2)\dot{x}$, esta força atua somente ao longo da direção x . Por fim, todo o sistema esta sujeito ao campo de forças $\gamma_1 x^2$ na direção y .

A fim de usarmos a formulação lagrangiana devemos calcular a energia mecânica do sistema. Primeiramente vamos definir as forças conservativas que atuam sobre o sistema na forma vetorial:

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= \kappa_0 \left(\sqrt{(a-y)^2 + x^2} - l_0 \right) \left(-\frac{x}{\sqrt{(a-y)^2 + x^2}}, \frac{a-y}{\sqrt{(a-y)^2 + x^2}} \right) \\ F_2(x, y) &= \kappa_0 \left(\sqrt{y^2 + x^2} - b_0 \right) \left(-\frac{x}{\sqrt{(-y-b_0)^2 + x^2}}, \frac{-y-b_0}{\sqrt{(-y-b_0)^2 + x^2}} \right), \\ F_3(x, y, t) &= - \left(\frac{\gamma_0 (x - \epsilon c \cos(2\eta t))^3}{2} + \frac{k_1 (x - \epsilon c \cos(2\eta t))}{2} \right) (1, 0), \\ F_4(x, y, t) &= - \left(\frac{\gamma_0 (x + \epsilon c \cos(2\eta t))^3}{2} + \frac{k_1 (x + \epsilon c \cos(2\eta t))}{2} \right) (1, 0), \\ F_5(x, y) &= gM (0, -1). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Além disso, sabemos que, veja [2] página 4, uma condição necessária e suficiente para que uma força seja conservativa é dada por $F = -\nabla V(r, t)$, onde r é o vetor posição

da partícula e $V(r, t)$ é uma função escalar chamada de energia potencial. Deste modo, podemos calcular a energia potencial de cada força descrita acima obtendo:

$$\begin{aligned}
V_1(x, y) &= \frac{\kappa_0 \left(\sqrt{(y-a)^2 + x^2} - l_0 \right)^2}{2}, \\
V_2(x, y) &= \frac{\kappa_0 \left(\sqrt{(y+b)^2 + x^2} - b \right)^2}{2}, \\
V_3(x, y, t) &= \frac{\gamma_0 (x - \epsilon c \cos(2\eta t))^4}{8} + \frac{k_1 (x - \epsilon c \cos(2\eta t))^2}{4}, \\
V_4(x, y, t) &= \frac{\gamma_0 (x + \epsilon c \cos(2\eta t))^4}{8} + \frac{k_1 (x + \epsilon c \cos(2\eta t))^2}{4}, \\
V_5(x, y) &= gMy.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Somando todos estes potenciais temos o seguinte potencial resultante:

$$\begin{aligned}
V(x, y, t) &= \frac{\kappa_0 \left(\sqrt{(y+b)^2 + x^2} - b \right)^2}{2} + \frac{\kappa_0 \left(\sqrt{(y-a)^2 + x^2} - l_0 \right)^2}{2} + gMy \\
&\quad + \frac{\gamma_0 x^4 + (6\gamma_0 \epsilon^2 c^2 \cos(2\eta t)^2 + 2k_1) x^2}{4}.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Expandindo a expressão

$$\frac{\kappa_0 \left(\sqrt{(y+b)^2 + x^2} - b \right)^2}{2} + \frac{\kappa_0 \left(\sqrt{(y-a)^2 + x^2} - l_0 \right)^2}{2} + gMy$$

até os termos de terceira ordem em x, y e usando (5.1), descartando os termos constantes, podemos reescrever o potencial resultante da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
V(x, y, t) &= \frac{(2\kappa_0 g M + 2\kappa_0^2 l_0) y^2 + \kappa_0 g M x^2}{2gM + 2\kappa_0 l_0} + \frac{(\kappa_0 g^2 M^2 + 2\kappa_0^2 l_0 g M - \kappa_0^3 l_0 b + \kappa_0^3 l_0^2) x^2 y}{2bg^2 M^2 + 4\kappa_0 l_0 bgM + 2\kappa_0^2 l_0^2 b} \\
&\quad + \frac{\gamma_0 x^4 + (6\gamma_0 \epsilon^2 c^2 \cos(2\eta t)^2 + 2k_1) x^2}{4}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

A energia cinética do sistema é definida por $T = \frac{M}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$ e por sua vez, a Lagrangiana do sistema é dada por $L = T - V$, ou seja:

$$\begin{aligned}
L &= -\frac{x(t)^2 y(t) (\kappa_0 g^2 M^2 + 2\kappa_0^2 l_0 g M - \kappa_0^3 l_0 b + \kappa_0^3 l_0^2)}{2bg^2 M^2 + 4\kappa_0 l_0 bgM + 2\kappa_0^2 l_0^2 b} + \frac{(\dot{y}(t)^2 + \dot{x}(t)^2) M}{2} \\
&\quad - \frac{y(t)^2 (2\kappa_0 g M + 2\kappa_0^2 l_0) + \kappa_0 g x(t)^2 M}{2gM + 2\kappa_0 l_0} - \frac{x(t)^2 (6\gamma_0 \epsilon^2 c^2 \cos(2\eta t)^2 + 2k_1)}{4} - \frac{\gamma_0 x(t)^4}{4}.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

No caso de forças não conservativas as equações de Lagrange ficam da forma

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial x} \right) = -(\alpha_0 + \alpha x^2) \dot{x}, \quad (5.7)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \left(\frac{\partial L}{\partial y} \right) = -\frac{\kappa_1}{2} x - \frac{\gamma_0}{2} x^3. \quad (5.8)$$

Escrevendo explicitamente temos,

$$\begin{aligned} x(t) y(t) \frac{\kappa_0 x(t) y(t) (g^2 M^2 + 2 \kappa_0 l_0 g M - \kappa_0^2 l_0 b + \kappa_0^2 l_0^2)}{b (g M + \kappa_0 l_0)^2} + x(t) \frac{\kappa_0 g M}{g M + \kappa_0 l_0} + \gamma_0 x(t)^3 \\ + \ddot{x}(t) M + x(t) \left(3 \gamma_0 \varepsilon^2 c^2 \left(\frac{\cos(4 \eta t) + 1}{2} \right) + \kappa_1 \right) = -\dot{x}(t) (\alpha x(t)^2 + \alpha_0), \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$x(t)^2 \left(\frac{\kappa_0 (g^2 M^2 + 2 \kappa_0 l_0 g M - \kappa_0^2 l_0 b + \kappa_0^2 l_0^2)}{2 b (g M + \kappa_0 l_0)^2} \right) + 2 \kappa_0 y(t) + \ddot{x}(t) M = \gamma_1 x(t)^2 - \kappa_0 \dot{y}(t). \quad (5.10)$$

Para que as equações acima não dependam das unidades de medida vamos passar-las para forma adimensional. Para tanto, vamos introduzir as seguintes variáveis $x_1(\tau) = \frac{1}{l_0} x \left(\sqrt{\frac{l_0}{g}} \tau \right)$ e $y_1(\tau) = \frac{1}{l_0} y \left(\sqrt{\frac{l_0}{g}} \tau \right)$ além disso, vamos mudar a variável de derivação para $\tau = \sqrt{\frac{l_0}{g}} t$ deste modo podemos reescrever as equações (5.9) e (5.10), respectivamente, como

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(\tau) + x_1(\tau) \left(\cos \left(4 \eta \tau \sqrt{\frac{l_0}{g}} \right) + 1 \right) \frac{3 \gamma_0 l_0 \varepsilon^2 c^2}{2 g M} + x_1(\tau) \frac{((l_0 \kappa_1 + \kappa_0 l_0) g M + \kappa_0 l_0^2 \kappa_1)}{g^2 M^2 + \kappa_0 l_0 g M} \\ + x_1(\tau)^2 \dot{x}_1(\tau) \frac{l_0^2 \alpha \sqrt{l_0 g}}{g M} + x_1(\tau)^3 \frac{\gamma_0 l_0^3}{g M} + \dot{x}_1(\tau) \frac{\alpha_0 \sqrt{l_0 g}}{g M} \\ + x_1(\tau) y_1(\tau) \frac{\kappa_0 l_0^2 (g^2 M^2 + 2 \kappa_0 l_0 g M - \kappa_0^2 l_0 b + \kappa_0^2 l_0^2)}{b g M (g M + \kappa_0 l_0)^2} = 0, \end{aligned} \quad (5.11)$$

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1(\tau) + y_1(\tau) \frac{2 \kappa_0 l_0}{g M} + \dot{y}_1(\tau) \frac{\kappa_0 \sqrt{l_0 g}}{g M} + x_1(\tau)^2 \frac{(2 l_0^2 \gamma_1 b - \kappa_0 l_0^2) g^2 M^2 + (4 \kappa_0 l_0^3 \gamma_1 b - 2 \kappa_0^2 l_0^3) g M}{4 b g M (g M + \kappa_0 l_0)^2} \\ + \frac{(2 \kappa_0^2 l_0^4 \gamma_1 + \kappa_0^3 l_0^3) b - \kappa_0^3 l_0^4}{4 b g M (g M + \kappa_0 l_0)^2} = 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Por fim, vamos omitir os índices das variáveis dependentes a fim de simplificar a notação e definir as seguintes constantes

$$\begin{aligned} \delta = \frac{l_0^2 \alpha \sqrt{l_0 g}}{g M}, \quad \delta_0 = \frac{\alpha_0 \sqrt{l_0 g}}{g M}, \quad c_1 = \frac{3 \gamma_0 l_0 c^2}{2 g M}, \quad 2 \omega = \frac{l_0 (k_1 g M + k_0 g M + k_0 l_0 k_1)}{g M (g M + k_0 l_0)}, \\ \gamma = \frac{\gamma_0 l_0^3}{g M}, \quad \kappa = \frac{\kappa_0 \sqrt{l_0 g}}{g M}, \quad q^2 = \frac{2 \kappa_0 l_0}{g M}, \quad a = \frac{k_0 l_0^2 (g^2 M^2 + 2 \kappa_0 l_0 g M - k_0^2 l_0 b + k_0^2 l_0^2)}{b g M (g M + k_0 l_0)^2}, \\ b = \frac{((2 k_0 l_0^2 - 4 l_0^2 \gamma_1 b) g^2 M^2 + (4 k_0^2 l_0^3 - 8 k_0 l_0^3 \gamma_1 b) g M + (-4 k_0^2 l_0^4 \gamma_1 - 2 k_0^3 l_0^3) b + 2 k_0^3 l_0^4)}{4 b g M (g M + k_0 l_0)^2}, \quad \eta_1 = 2 \eta \sqrt{\frac{l_0}{g}}. \end{aligned}$$

Desta forma, podemos reescrever as equações (5.11) e (5.12) da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \ddot{x}(\tau) + \delta x(\tau)^2 \dot{x}(\tau) + (2 \omega + \bar{\varepsilon} c_1 (1 + \cos(2 \eta_1 \tau))) x(\tau) \\ + x(\tau) \omega_2 + \gamma x(\tau)^3 + a x(\tau) y(\tau) = 0, \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\ddot{y}(\tau) + \kappa \dot{y}(\tau) + q^2 y(\tau) + b x(\tau)^2 = 0. \quad (5.14)$$

As equações (5.13) e (5.14) foram obtidas formalmente e descrevem completamente o comportamento do sistema físico, é importante destacar que nessas equações $\bar{\varepsilon} = \varepsilon^2$, mas omitiremos a barra por simplicidade de notação.

Agora daremos início a um argumento heurístico cujo único propósito é elucidar como as equações (5.13) e (5.14) podem dar origem às expressões (4.1) encontradas em [10].

Substituindo $x(t) = \frac{z(t)}{2\omega + \varepsilon c_1}$ nas equações obtidas acima teremos,

$$\frac{\ddot{z}(t)}{2\omega + \varepsilon c_1} + z(t) \left(\frac{\varepsilon c_1 \cos(2\eta t)}{2\omega + \varepsilon c_1} + 1 \right) + \frac{\delta z(t)^2 \dot{z}(t)}{(2\omega + \varepsilon c_1)^3} + \frac{\gamma z(t)^3}{(2\omega + \varepsilon c_1)^3} + \frac{a y(t) z(t)}{2\omega + \varepsilon c_1} = 0, \quad (5.15)$$

$$\ddot{y}(t) + \frac{b z(t)^2}{(2\omega + \varepsilon c_1)^2} + \kappa \dot{y}(t) + q^2 y(t) = 0. \quad (5.16)$$

Por outro lado, a expansão de Taylor da expressão $\frac{1}{2\omega + \varepsilon c_1}$, em torno de zero, é da forma

$$\frac{1}{2\omega} + O(\varepsilon). \quad (5.17)$$

Como ε é um número estritamente positivo e pequeno, poderia ser plausível aproximar a expressão acima por $\frac{1}{2\omega}$ omitindo por sua vez os termos de ordem superior. Essa aproximação nos fornece as expressões

$$\frac{\ddot{z}(t)}{2\omega} + z(t) \left(\frac{\varepsilon c_1 \cos(2\eta t)}{2\omega} + 1 \right) + \frac{\delta z(t)^2 \dot{z}(t)}{(2\omega)^3} + \frac{\gamma z(t)^3}{(2\omega)^3} + \frac{a y(t) z(t)}{2\omega} = 0, \quad (5.18)$$

$$\dot{y}(t) + \frac{b z(t)^2}{(2\omega)^2} + \ddot{y}(t) + \kappa q^2 y(t) = 0, \quad (5.19)$$

que são semelhantes as relações dadas em (4.1).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] M. J. H. Dantas. Quenching in a class of singularly perturbed mechanical systems. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 50:48–57, 2013.
- [2] H. Goldstein, C. P. Poole, and J. L. Safko. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, 3 edition, 2001.
- [3] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillation, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, second edition, 1983.
- [4] M. W. Hirsch and S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Pure and Applied Mathematics, 60. Academic Press, 1974.
- [5] S. H. Lee. Famílias de polinômios estáveis: teoremas de routh-hurwitz e kharitonov. Master's thesis, Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 2008.
- [6] E. Lima. *Curso de análise*, volume v. 2 of *Projeto Euclides*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1992.
- [7] W. Palis, Jacob e de Melo. *Introdução aos sistemas dinâmicos*. Projecto Euclides. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1978.
- [8] L. Pontryagin. *Ordinary Differential Equations: Y L. S. Pontryagin ; Translated from the Russian by Leonas Kacinskas and Walter B. Counts*. Adiwes International Series in Mathematics. Addison - Wesley Publishing Company, 1962.
- [9] F. Verhulst. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Hochschultext / Universitext. Springer, 1996.
- [10] F. Verhulst, T. Bakri, R. Nabergoj, and A. Tondl. Parametric excitation in non-linear dynamics. *International Journal of Non-Linear Mechanincs*, 39:311–329, 2004.