RAFAELA NEVES BONFIM

Operadores de convolução hipercíclicos definidos entre espaços de Fréchet

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2014

RAFAELA NEVES BONFIM

Operadores de convolução hipercíclicos definidos entre espaços de Fréchet

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Análise Funcional.

Orientador: Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro.

UBERLÂNDIA - MG
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU , MG, Brasil

B713o
2014

Bonfim, Rafaela Neves, 1989-
Operadores de convolução hipercíclicos definidos entre espaços de Fréchet / Rafaela Neves Bonfim. - 2014.
65 f. : il.

Orientador: Vinícius Vieira Fávaro.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Inclui bibliografia.

1. Matemática - Teses. 2. Banach, Espaços de - Teses. 3. Funções holomórficas - Teses. I. Fávaro, Vinícius Vieira. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO: Rafaela Neves Bonfim.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11212MAT012.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Análise Funcional.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Operadores de convolução hipercíclicos definidos entre espaços de Fréchet

ORIENTADOR: Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 26 de fevereiro de 2014, às 15h00min, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME	**ASSINATURA**
Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro UFU - Universidade Federal de Uberlândia	VFávaro
Prof. Dr. Nilson da Costa Bernardes Junior UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro	Nilson da Costa Bernardes junior
Profa. Dra. Sônia Sarita Berrios Yana UFU - Universidade Federal de Uberlândia	Sonia Berrios

Uberlândia-MG, 26 de fevereiro de 2014.

Dedicatória

Dedico a meus pais, irmão e namorado que sempre me apoiaram durante essa jornada.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pois ele é o princípio de tudo. Depois, agradeço meus pais que sempre estiveram do meu lado dedicando um apoio incondicional. Ao meu namorado que sempre soube compreender os momentos nos quais tive que estar ausente. Ao meu orientador Vinícius Vieira Fávaro pelo empenho e paciência. Agradeço aos meus amigos Fabrício e Grégory pelo companheirismo. Obrigada também a todos os colegas de mestrado, em especial Nathali, Eduard e Raildo. Por fim agradeço a CAPES pelo apoio financeiro.

Bonfim, R. N. *Operadores de convolução hipercíclicos definidos em espaços de Fréchet*. 2014. 65 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Neste trabalho estudaremos alguns resultados da teoria de hiperciclicidade. Exibiremos as demonstrações dos primeiros exemplos conhecidos de operadores hipercíclicos e provaremos que todo operador de convolução definido entre os espaços das funções holomorfas definidas em $\mathbb{C}$, que não é múltiplo da identidade, é hipercíclico. Estudaremos ainda recentes resultados de hiperciclicidade para operadores de convolução definidos entre certos espaços de Fréchet de funções holomorfas definidas num espaço de Banach complexo. Mostraremos que a passagem do caso $\mathbb{C}$ para o caso de um espaço de Banach complexo de dimensão infinita não é trivial e exige o uso de diversas ferramentas de holomorfia em dimensão infinita.

Palavras-chave: Espaços de Banach; Espaços de Fréchet; Funções holomorfas; Operadores de convolução; Critério de Kitai; Hiperciclicidade.

Bonfim, R. N. *Hypercyclic convolution operators defined on Fréchet spaces.* 2014. 63 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

In this work, we study some results of the hypercyclicity theory. We show the proof of the first known examples of hypercyclic operators and we prove that every convolution operator defined between the spaces of all holomorphic functions defined on $\mathbb{C}$, which is not a scalar multiple of the identity, is hypercyclic. We still study recent results of hypercyclicity for convolution operators defined between certain Fréchet spaces of holomorphic functions defined on a complex Banach space. We show that the passage of the complex case to the case of an infinite dimensional complex Banach space is not trivial and this requires the use of several tools of holomorphy in infinite dimension.

Keywords:Banach spaces; Fréchet spaces; holomorphic functions; convolution operators, Kitai criterion; hypercyclicity.

Sumário

Introdução

Sejam E um espaço de Fréchet e T um operador linear contínuo em E. Diremos que T é *hipercíclico* se, para algum elemento $x \in E$, a *órbita de x sob T*, dada por $Orb(x,T) = \{x, Tx, T^2x, ...\}$, for densa em E.

Nos últimos 25 anos, diversos autores vêm estudando resultados nas mais diversas direções envolvendo hiperciclicidade. Uma excelente referência para consulta de resultados envolvendo hiperciclicidade é [5]. O termo hiperciclicidade foi utilizado pela primeira vez por B. Beauzamy em [3] e foi motivado pelo conhecido conceito de ciclicidade na teoria de operadores em espaços de Hilbert que é bastante usado no estudo de subespaços T-invariantes.

O primeiro exemplo de operador hipercíclico apareceu em 1929 no trabalho [5] de Birkhoff, apesar de não aparecer nessa linguagem de hiperciclicidade que utilizamos hoje. Essencialmente, ele mostrou a existência de uma função f no espaço de Fréchet $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ das funções inteiras definidas em $\mathbb{C}$, munido da topologia compacto-aberta, tal que o conjunto $\{f(z), f(1+z), ..., f(n+z), ...\}$ é denso em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Neste trabalho, apresentaremos a demonstração detalhada deste exemplo devido a Birkhoff e também o interessante exemplo devido a Maclane [14].

Esses exemplos comprovam a dificuldade que é, na maioria das vezes, mostrar que um dado operador T num espaço de Fréchet é hipercíclico exibindo o vetor cuja órbita é densa no espaço. Entretanto, existe um Critério Geral de Hiperciclicidade (e um caso particular e mais usual conhecido como Critério de Kitai - veja [13]) que nos diz se um operador em questão é hipercíclico. No capítulo 2 exibiremos a demonstração detalhada deste resultado.

Utilizando o Critério de Kitai, Godefroy e Shapiro [10] caracterizaram os operadores de convolução definidos em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ que são hipercíclicos. Eles provaram que todo operador de convolução definido em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, que não é múltiplo da identidade, é hipercíclico. No capítulo 2 exibiremos com detalhes a demonstração deste resultado.

Em 2007, Carando, Dimant e Muro [6] provaram resultados de hiperciclicidade para operadores de convolução definidos em certos espaços de funções holomorfas definidas num espaço de Banach complexo. Recentemente, Bertoloto, Botelho, Fávaro e Jatobá [4] generalizaram os resultados de [6] para ambientes mais gerais do que os lá abordados.

Vale ressaltar que a passagem do caso $\mathbb{C}$ para o caso de um espaço de Banach complexo não é trivial e exige o uso de diversas ferramentas de holomorfia em dimensão infinita. Por isso, no capítulo 3 faremos um apanhado geral da teoria de polinômios homogêneos, aplicações multilineares e holomorfia em dimensão infinita.

No capítulo 4 provaremos um dos casos de hiperciclicidade abordado em [6] e [4]. Provaremos que todo operador de convolução definido em $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$, que não é múltiplo da identidade, é hipercíclico, onde $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ denota o espaço de todas as funções Θ-holomorfas de tipo limitado, definidas no espaço de Banach complexo E.

Rafaela Neves Bonfim
Uberlândia-MG, 26 de fevereiro de 2014.

Capítulo 1

Conceitos e Resultados Preliminares

Neste capítulo vamos apresentar algumas definições e resultados que serão utilizados neste trabalho. Primeiramente vamos fixar algumas notações. Durante todo o texto consideraremos $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. O símbolo $\mathbb{N}_0$ denotará o conjunto dos números inteiros não negativos. Dado $r > 0$, $\mathbb{N}_0^r$ denotará o produto cartesiano $\underbrace{\mathbb{N}_0 \times \ldots \times \mathbb{N}_0}_{r}$ e $\bar{\triangle}(0, r)$ representará o disco fechado de centro em 0 e raio r.

1.1 Espaços Localmente Convexos

Definição 1.1.1 Diremos que E é um *espaço vetorial topológico* se E é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, munido de uma topologia τ, e tal que as aplicações

$$\begin{array}{rcccl} (x, y) & \in & E \times E & \to & x + y \in E \\ (\lambda, x) & \in & \mathbb{K} \times E & \to & \lambda x \in E \end{array}$$

são contínuas. Neste caso diremos que τ é uma *topologia vetorial.*

Definição 1.1.2 Seja E um espaço vetorial. Uma métrica d em E é dita *invariante sob translação* se

$$d(x, y) = d(a + x, a + y)$$

para todos $x, y, a \in E$.

A topologia τ de um espaço vetorial topológico E é invariante sob translações, ou seja, a aplicação $x \in E \to a + x \in E$ é um homeomorfismo para cada $a \in E$. Isso nos garante que, se uma dada propriedade é válida nas vizinhanças de zero em E, então ela é válida para qualquer vizinhança de qualquer ponto de E.

Definição 1.1.3 Um espaço vetorial topológico E é denominado *espaço localmente convexo* se cada vizinhança de zero contém uma vizinhança convexa de zero. Nesse caso, diremos que a topologia de E é uma *topologia localmente convexa.*

Exemplo 1.1.4 Dado um espaço normado X, segue que X é um espaço vetorial topológico com a topologia induzida pela norma. Como as bolas

$$B(0, \varepsilon) = \{x \in X : \|x\| < \varepsilon\}$$

com $\varepsilon > 0$, formam uma base de vizinhanças convexas de zero, segue que cada espaço normado é um espaço localmente convexo.

Definição 1.1.5 *(i) Um espaço vetorial topológico E é dito* metrizável *se existe uma métrica em E que define a sua topologia.*

(ii) Todo espaço localmente convexo, metrizável e completo será chamado espaço de Fréchet.

Lema 1.1.6 *Sejam E um espaço localmente convexo e M um subespaço fechado de E. Se $M \neq E$, então existe uma aplicação linear f não nula tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in M$.*

Demonstração. Ver [21, Corolário 3, página 187]. ■

Proposição 1.1.7 *Seja (T_n) uma sequência de aplicações lineares contínuas definidas em um espaço de Fréchet E com valores em um espaço vetorial topológico Hausdorff F tal que $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$ existe para cada $x \in E$. Consideremos a aplicação T definida como*

$$\begin{array}{rrcl} T: & E & \to & F \\ & x & \mapsto & T(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x) \end{array}$$

Então T é uma aplicação linear e contínua de E em F.

Demonstração. Ver [15, página 200]. ■

Para um espaço vetorial qualquer E e uma seminorma $p : E \to \mathbb{R}$, consideremos os conjuntos

$$U_{p,\varepsilon} = \{x \in E : p(x) < \varepsilon\}$$

onde $\varepsilon > 0$. Então vale o seguinte resultado:

Proposição 1.1.8 *Seja E um espaço vetorial e seja P uma família de seminormas em E. Seja*

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ \bigcap_{p\in P_0} U_{p,\varepsilon} : P_0 \subset P \text{ finito }, \varepsilon > 0 \right\}.$$

Então existe uma única topologia localmente convexa τ_p em E que admite $\mathcal{B}_0$ como base de vizinhanças de zero. Mais ainda, τ_p é a topologia vetorial mais fraca em E tal que cada $p \in P$ é contínua. Diremos que τ_p é a topologia localmente convexa definida por P.

Demonstração. Ver [17]. ■

Exemplo 1.1.9 Seja E um espaço topológico. Consideremos $\mathcal{C}(E)$ o espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$ de todas as funções contínuas definidas em E com valores em $\mathbb{C}$. Dado $K \subset E$ compacto, considere a família de seminormas $p_K : \mathcal{C}(E) \to \mathbb{R}$ definidas por

$$p_K(f) = \sup_{x\in K} |f(x)|.$$

Os conjuntos

$$U_{K,\varepsilon} = \{f \in \mathcal{C}(E) : p_K(f) < \varepsilon\}$$

com $\varepsilon > 0$ formam uma base de vizinhanças abertas e convexas de zero e, portanto, induzem uma topologia τ_p localmente convexa. Chamamos essa topologia de *topologia compacto-aberta em $\mathcal{C}(E)$* e a denotamos por τ_0.

Consideremos agora o espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ constituído de todas as funções $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ inteiras. Claramente, $\mathcal{H}(\mathbb{C}) \subset \mathcal{C}(\mathbb{C})$. Mais ainda, se considerarmos a mesma família de seminormas p_K onde $K \subset \mathbb{C}$ compacto, os conjuntos

$$U_{K,\varepsilon} = \{f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) : p_K(f) < \varepsilon\}$$

com $\varepsilon > 0$, formam a base de vizinhanças de zero na topologia τ_0. Logo $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ é subespaço topológico de $\mathcal{C}(\mathbb{C})$, munido da topologia compacto-aberta.

Definição 1.1.10 *Um conjunto Λ junto com uma relação $\leq$ é chamado de* conjunto dirigido *se verifica as seguintes propriedades:*

(i) $\lambda \leq \lambda$, *para todo* $\lambda \in \Lambda$

(ii) Se $\lambda \leq \mu$ *e* $\mu \leq \nu$ *então* $\lambda \leq \nu$

(iii) Dados $\lambda, \mu \in \Lambda$, *existe* $\nu \in \Lambda$ *tal que* $\lambda \leq \nu$ *e* $\mu \leq \nu$.

Definição 1.1.11 *Seja E um espaço vetorial. Uma família P de seminormas sobre E é dirigida, se ela é dirigida pela ordem usual $\leq$, definida por "$p(x) \leq q(x)$, para todo $x \in E$".*

Proposição 1.1.12 *Sejam E e F dois espaços localmente convexos e sejam P e Q famílias dirigidas de seminormas que definem as topologias de E e F respectivamente. Então uma aplicação linear $T : E \to F$ é contínua se, e somente se, dada $q \in Q$, existem $p \in P$ e $c > 0$ tais que $q(T(x)) \leq cp(x)$, para todo $x \in E$.*

Demonstração. Ver [8, Proposição 1.13, página 12]. ∎

Corolário 1.1.13 *Seja E um espaço vetorial, e seja $(P, \geq)$ uma* família dirigida de seminormas em *E, ou seja, dadas $p_1, p_2 \in P$, existe $p_3 \in P$ tal que $p_3 \geq p_1$ e $p_3 \geq p_2$. Então os conjuntos $U_{p,\varepsilon}$, com $p \in P$ e $\varepsilon > 0$, formam uma base de vizinhanças de zero em (E, τ_P)*

Demonstração. Ver [17]. ∎

Corolário 1.1.14 *Seja E um espaço vetorial, e seja P uma família de seminormas em E. Então (E, τ_P) é Hausdorff se, e somente se, $\displaystyle\bigcap_{p\in P} p^{-1}\{0\} = \{0\}$.*

Demonstração. Ver [17]. ∎

Teorema 1.1.15 *Seja E um espaço localmente convexo de Hausdorff. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(a) *E é metrizável;*

(b) *Existe uma base enumerável de vizinhanças do zero em E;*

(c) *Existe uma sequência de seminormas que define a topologia de E.*

Se uma destas condições for verificada, então existe uma métrica em E, invariante sob translações, que define a topologia de E.

Demonstração. Ver [17]. ∎

1.2 Funções Analíticas

No que segue enunciaremos alguns resultados que serão utilizados no Capítulo 2.

Proposição 1.2.1 *Sejam K um subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ e G uma vizinhança de K tal que $\mathbb{C}\backslash G$ é conexo. Então, para cada função f analítica em G, existe uma sequência de polinômios $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{C}$ convergindo uniformemente para f em K.*

Demonstração. Ver [7, Corolário 1.15, página 200]. ■

Definição 1.2.2 Uma função $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ é dita ser de *tipo exponencial* quando existem $C > 0$ e $R > 0$ tais que $|f(z)| \leq Ce^{R|z|}$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

O espaço vetorial constituído por todas as funções de tipo exponencial é denotado por $Exp(\mathbb{C})$.

Proposição 1.2.3 *Sejam f uma função inteira e*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!}(x_0)(x - x_0)^n$$

sua série de Taylor em $x_0 \in \mathbb{C}$. Então f é de tipo exponencial se, e somente se, a sequência $(|f^{(n)}(x_0)|^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ for limitada.

Demonstração. Ver [8]. ■

Teorema 1.2.4 *Sejam $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ e f uma função em $\mathcal{C}(\mathbb{C})$ tal que $f_n \to f$. Então f é inteira e $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$, para todo inteiro $k \geq 1$.*

Demonstração. Ver [7, Teorema 2.1, página 151]. ■

Capítulo 2

Operadores Hipercíclicos em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$

Neste capítulo iremos apresentar três exemplos clássicos de operadores hipercíclicos. Mas, primeiramente, vamos relembrar a definição de operador hipercíclico.

Definição 2.0.5 Sejam E um espaço vetorial topológico e T um operador linear contínuo em E. Dado $x \in E$, definimos a *órbita de x sob T*, a qual denotaremos por $Orb(T, x)$, como sendo o conjunto

$$Orb(T, x) = \{x, T(x), T^2(x), \ldots\},$$

onde $T^2 = T \circ T, T^3 = T \circ T^2, \ldots$. Dizemos que T é *hipercíclico* se, para algum elemento $x \in E$, a órbita de x sob T for densa em E. Nesse caso, tal elememto $x \in E$ será chamado de *vetor hipercíclico para T*.

2.1 Exemplos de operadores hipercíclicos

O primeiro exemplo de operador hipercíclico conhecido foi dado por Birkhoff em 1929. Em tal exemplo mostra-se que o operador translação $f \to f(\cdot + 1)$ é hipercíclico.

Teorema 2.1.1 ***(Birkhoff)*** *Existe uma função $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ com a seguinte propriedade: dados uma função $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ e $\varepsilon > 0$ quaisquer, para todo $R > 0$ existe um número natural n tal que $| f(z + n) - g(z) | < \varepsilon$ qualquer que seja z com $| z | \leq R$. Em outras palavras, o operador*

$$\begin{array}{rccc} L: & \mathcal{H}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{H}(\mathbb{C}) \\ & f & \longmapsto & L(f) \end{array}$$

onde $L(f)(z) = f(z + 1)$, $\forall z \in \mathbb{C}$ é hipercíclico.

Demonstração. Observe que dado $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ temos $L^n(f)(z) = f(z + n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, para $n = 1$ é claro que $L(f)(z) = f(z + 1)$. Suponha que para $k = n$ temos que $L^n(f)(z) = f(z + n)$. Então

$$L^{n+1}(f)(z) = L(L^n(f))(z) = L^n(f)(z + 1) = f(z + 1 + n) = f(z + n + 1).$$

Portanto $Orb(L, f) = \{f_n : n \in \mathbb{N}_0\}$, onde $f_n(z) = f(z + n)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Para demonstrar que o operador L é hipercíclico, vamos construir uma função $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ e mostrar que a órbita de f sob L é densa em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Note que toda função inteira pode ser aproximada por polinômios complexos definidos em cada compacto $K \subset \mathbb{C}$. De fato, basta considerar a sequência das somas parciais da expansão em série de Taylor de cada função inteira f. Esta sequência de polinômios converge uniformemente para f em K. Além disso, como podemos aproximar polinômios complexos por polinômios com coeficientes em $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$, existe uma sequência de polinômios $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ densa em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Para facilitar o argumento da demonstração, podemos supor que cada P_j aparece uma quantidade infinita de vezes na sequência. De fato, se a sequência $(P_j)_{j\in\mathbb{N}}$ contem apenas uma quantidade finita do polinômio P_k, para algum $k \in \mathbb{N}$, acrescente uma quantidade infinita e enumerável do polinômio P_k à sequência.

Consideremos agora $(D_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de discos fechados disjuntos, cada D_j com raio j e centro c_j de tal forma que $(c_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de números inteiros positivos. Seja também $(E_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de discos fechados centrados na origem e de tal forma que $D_j \subset E_j$ e $D_{j+1} \cap E_j = \emptyset$. Em outras palavras,

$$D_k \subset E_j, \text{para todo } 1 \leq k \leq j \text{ e}$$

$$D_k \cap E_j = \emptyset, \text{para todo } k > j.$$

Seja $Q_1 = P_1$ e consideremos $K_1 = E_1 \cup D_2$. Como E_1 e D_2 são compactos, segue que K_1 é compacto, e vamos considerar uma função h_1 analítica em um aberto contendo K_1 da seguinte forma: Como E_1 e D_2 são compactos disjuntos, segue que a distância entre eles é estritamente positiva e logo é possível escolher abertos A_1 e A_2, com $E_1 \subset A_1$, $D_2 \subset A_2$ e $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Tal função será definida como

$$h_1(z) = \begin{cases} 0, \text{ se } z \in A_1 \\ P_2(z - c_2) - Q_1(z), \text{ se } z \in A_2 \end{cases}$$

Em particular temos

$$h_1(z) = \begin{cases} 0, \text{ se } z \in E_1 \\ P_2(z - c_2) - Q_1(z), \text{ se } z \in D_2 \end{cases}$$

Como $\mathbb{C} \backslash K_1$ é conexo por caminhos, e portanto conexo, pela Proposição 1.2.1 existe um polinômio Q_2 tal que

$$\sup_{z\in K_1} |Q_2(z) - h_1(z)| = \sup_{z\in K_1} |Q_2(z) - (P_2(z - c_2) - Q_1(z))| < \frac{1}{2}.$$

Assim, como $E_1 \subset K_1$ temos

$$\sup_{z\in E_1} |Q_2(z) - h_1(z)| \leq \sup_{z\in K_1} |Q_2(z) - h_1(z)| < \frac{1}{2}.$$

Agora, $h_1(z) = 0$ sempre que $z \in E_1$, logo

$$\sup_{z\in E_1} |Q_2(z) - h_1(z)| = \sup_{z\in E_1} |Q_2(z) - 0| = \sup_{z\in E_1} |Q_2(z)| < \frac{1}{2},$$

e, portanto,

$$\|Q_2\|_{E_1} = \sup_{z\in E_1} |Q_2(z)| < \frac{1}{2}.$$

Observe que $D_2 \subset K_1$ e então

$$\sup_{z\in D_2} |Q_2(z) - (P_2(z - c_2) - Q_1(z))| < \frac{1}{2}.$$

Considere agora $K_2 = E_2 \cup D_3$ e defina a função h_2, que será analítica em um aberto conveniente (analogo ao caso h_1), por

$$h_2(z) = \begin{cases} 0, \text{ se } z \in E_2 \\ P_3(z - c_3) - Q_1(z) - Q_2(z), \text{ se } z \in D_3 \end{cases}$$

Como $\mathbb{C}\backslash K_2$ é conexo por caminhos, e logo conexo, novamente pela Proposição 1.2.1 temos que existe um polinômio Q_3 tal que

$$\sup_{z \in K_2} |Q_3(z) - h_2(z)| = \sup_{z \in K_2} |Q_3(z) - (P_3(z - c_3) - Q_1(z) - Q_2(z))| < \frac{1}{2^2}.$$

E logo, assim como fizemos acima, temos que

$$\|Q_3\|_{E_2} < \frac{1}{2^2} \text{ e } \sup_{z \in D_3} |Q_3(z) - h_2(z)| < \frac{1}{2^2}.$$

Para o caso geral, considere $K_{n-1} = E_{n-1} \cup D_n$ e a função analítica h_{n-1} satisfazendo

$$h_{n-1}(z) = \begin{cases} 0, \text{ se } z \in E_{n-1} \\ P_n(z - c_n) - \sum_{j=1}^{n-1} Q_j(z), \text{ se } z \in D_n \end{cases}$$

Repetindo o procedimento acima, existe um polinômio Q_n tal que

$$\|Q_n\|_{E_{n-1}} < \frac{1}{2^{n-1}} \text{ e } \sup_{z \in D_n} |Q_n(z) - (P_n(z - c_n) - \sum_{j=1}^{n-1} Q_j(z))| < \frac{1}{2^{n-1}} \tag{2.1}$$

Observe que a série $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ é de Cauchy. De fato, seja $\varepsilon > 0$. Então, dado K um compacto de $\mathbb{C}$, existe $N \in \mathbb{N}$ para o qual $K \subset E_N$ e $\frac{1}{2^N} < \varepsilon$. Assim para $n > m \geq N$ suficientemente grandes

$$\begin{aligned} \sup_{z \in K} | \sum_{j=1}^{n} Q_j(z) - \sum_{j=1}^{m} Q_j(z) | &\leq \sup_{z \in E_N} | \sum_{j=1}^{n} Q_j(z) - \sum_{j=1}^{m} Q_j(z) | \\ &= \sup_{z \in E_N} | \sum_{j=m+1}^{n} Q_j(z) | \leq \sup_{z \in E_N} \sum_{j=m+1}^{n} | Q_j(z) | \\ &\leq \sum_{j=m+1}^{n} \frac{1}{2^j} < \frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^N} < \varepsilon. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Como o espaço $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ é completo, segue que $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ é convergente. Considere $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ dada por $f = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n$. Vamos mostrar que a órbita de f sob translações é densa em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, ou seja, dados $\varepsilon > 0, R > 0$ e $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ devemos exibir $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{|z| \leq R} |L^n(f)(z) - g(z)| = \sup_{|z| \leq R} |f(z + n) - g(z)| < \varepsilon.$$

Para isso basta mostrar que, dados $\varepsilon > 0$ e $R > 0$ para cada P_k de $(P_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é possível encontrar $l_k \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{|z| \leq R} | f(z + c_{l_k}) - P_k(z) | < \varepsilon$. De fato, como a sequência $(P_j)_{j \in \mathbb{N}}$ é densa em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, para cada $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{|z| \leq R} | g(z) - P_k(z) | < \varepsilon$.

Logo,

$$\sup_{|z|\leq R} \mid f(z+c_{l_k}) - g(z) \mid \leq \sup_{|z|\leq R} \mid f(z+c_{l_k}) - P_k(z) \mid + \sup_{|z|\leq R} \mid g(z) - P_k(z) \mid < 2\varepsilon.$$

Consequentemente, o conjunto $\{f_{l_j} : j \in \mathbb{N}\}$ onde $f_{l_j}(z) = f(z + c_{l_j})$, é denso em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, ou seja, $\overline{\{f_{l_j} : j \in \mathbb{N}\}} = \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Como $\{f_{l_j} : j \in \mathbb{N}\} \subseteq \{f_n : n \in \mathbb{N}_0\} = Orb(L, f)$, segue que $\mathcal{H}(\mathbb{C}) \subseteq \overline{\{f_{l_j} : j \in \mathbb{N}\}} \subseteq \overline{Orb(L, f)}$. É claro que $\overline{Orb(L, f)} \subseteq \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Portanto a $Orb(L, f)$ será densa em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Sejam $\varepsilon > 0$ e $R > 0$. Consideremos então $P_k \in (P_j)_{j\in\mathbb{N}}$. Sejam $l_1, l_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$l_1 > R \text{ e } \frac{1}{2^{l_2-1}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tome l =máx$\{l_1, l_2\}$. Então, como por hipótese P_k aparece uma quantidade infinita de vezes na sequência, temos que

$$l > R, \frac{1}{2^{l-1}} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } P_l = P_k. \tag{2.3}$$

Notemos que, se $z \in \mathbb{C}$ for tal que $|z| \leq R$, então $w = z + c_l \in (RB_{\mathbb{C}} + c_l) \subset (lB_{\mathbb{C}} + c_l) \subset D_l \subset E_l$. Logo

$$\begin{aligned}
\sup_{|z|\leq R} \mid f(z+c_l) - P_k(z) \mid &\leq \sup_{w\in D_l} \mid f(w) - P_l(w-c_l) \mid \\
&\leq \sup_{w\in D_l} |f(w) - \sum_{j=1}^{l} Q_j(w)| + \sup_{w\in D_l} \mid \sum_{j=1}^{l} Q_j(w) - P_l(w-c_l) \mid \\
&\leq \sup_{w\in D_l} \mid \sum_{n=1}^{\infty} Q_n(w) - \sum_{j=1}^{l} Q_j(w) \mid + \sup_{w\in D_l} \mid \sum_{j=1}^{l} Q_j(w) - P_l(w-c_l) \mid \\
&\leq \sup_{w\in D_l} \sum_{n=l+1}^{\infty} \mid Q_n(w) \mid + \sup_{w\in D_l} \mid \sum_{j=1}^{l-1} Q_j(w) + Q_l(w) - P_l(w-c_l) \mid \\
&\leq \sup_{w\in D_l} \sum_{n=l+1}^{\infty} \mid Q_n(w) \mid + \sup_{w\in D_l} \mid Q_l(w) - (P_l(w-c_l) - \sum_{j=1}^{l-1} Q_j(w)) \mid \\
\text{por (2.2), (2.1) e (2.3)} &\leq \frac{1}{2^l} + \frac{1}{2^{l-1}} < \varepsilon
\end{aligned}$$

Segue que $\sup_{|z|\leq R} \mid f(z + c_l) - P_k(z) \mid < \varepsilon$ e portanto o conjunto $\{f_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ é denso em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. ■

Mais tarde, exatamente no ano de 1952, o matemático MacLane mostrou em [14] que o operador diferenciação $f \mapsto f'$ é um operador hipercíclico em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Não exibiremos a demonstração devido a MacLane, a qual também é construtiva, conforme a feita acima, e demasiada longa. Provaremos tal resultado como aplicação de um critério de hiperciclicidade que provaremos na próxima seção.

Os exemplos de Birkhoff e Maclane são de operadores hipercíclicos entre espaços de Fréchet que não são normados. Em 1969, o matemático S. Rolewicz exibiu em [19] um exemplo de operador hipercíclico definido em um espaço de Banach, mais precisamente, definido no espaço ℓ_p o qual definiremos abaixo. Tal operador é conhecido como *weighted backward shift*. Apesar de não ser o foco principal deste trabalho, também exibiremos a demonstração de tal resultado.

Definição 2.1.2 *Seja $p \geq 1$. Definimos ℓ_p como sendo o espaço vetorial de todas as sequências de elementos em $\mathbb{K}$ que são* absolutamente p-somáveis, *isto é, todas as sequências $x = (\xi_j) \subset \mathbb{K}$ tais que $\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p$ converge, o qual se torna um espaço de Banach com a norma definida por*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para todo } x = (\xi_j) \in \ell_p.$$

Teorema 2.1.3 ***(Rolewicz)*** *Seja ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ o espaço de Banach das sequências p-somáveis e consideremos, para cada $a \in \mathbb{R}$, o operador T_a definido como*

$$T_a : \ell_p \longrightarrow \ell_p$$

$$(x_1, x_2, \ldots) \longmapsto a(x_2, x_3, \ldots)$$

conhecido como "weighted backward shift". Se $a > 1$, então T será hipercíclico.

Demonstração. Defina os operadores

$$\begin{array}{rl} T: & \ell_p \longrightarrow \ell_p \\ & (x_1, x_2, \ldots) \longmapsto (x_2, x_3, \ldots) \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rl} S: & \ell_p \longrightarrow \ell_p \\ & (x_1, x_2, \ldots) \longmapsto (0, x_1, x_2, \ldots) \end{array}$$

conhecidos como *backward shift* e *forward shift* respectivamente.

Seja $a > 1$ e observe que $T_a = aT$. Defina a aplicação $B : \ell_p \longrightarrow \ell_p$ por $B = \frac{S}{a}$. Para mostrar que o operador T_a é hipercíclico, vamos construir um vetor $y \in \ell_p$ e em seguida provaremos que a órbita $Orb(T_a, y)$ é densa em ℓ_p. Antes de prosseguirmos com a demonstração observe que dado $x = (x_j)_j \in \ell_p$ e $n \in \mathbb{N}$ temos

$$T_a^n(x) = a^n(x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, \ldots) \qquad \text{e}$$

$$B^n(x) = \frac{1}{a^n}(\overbrace{0, \ldots, 0}^{n}, x_1, x_2, x_3, \ldots).$$

Da demonstração de que o espaço ℓ_p é separável, podemos considerar um conjunto $\{x^n; n \in \mathbb{N}\} \subset \ell_p$ denso em ℓ_p e tal que, para cada n, $x^n = (x_1^n, x_2^n, \ldots)$ possui apenas uma quantidade finita de coordenadas não nulas. Seja $k(n)$ o maior índice da coordenada de x^n que não é 0. Considere agora uma sequência $r(n)$ de inteiros positivos tal que

$$\begin{gathered} r(n) > max_{1 \leq i \leq n} k(i) \qquad \text{e} \\ \| B^{r(n)} x^n \| = \frac{1}{a^{r(n)}} \| x^n \| < \frac{1}{2^n}. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Seja $p(n) = \sum_{i=1}^{n} r(i)$ e considere $y = \sum_n B^{p(n)} x^n$, o qual pertence a ℓ_p, pois dado $j \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^{j} B^{p(n)} x^n \right\| & \leq \sum_{n=1}^{j} \|B^{p(n)} x^n\| = \sum_{n=1}^{j} \frac{1}{a^{p(n)}} \|x^n\| \\ & < \sum_{n=1}^{j} \frac{1}{a^{r(n)}} \|x^n\| \\ \text{por (2.4)} \quad & < \sum_{n=1}^{j} \frac{1}{2^n}. \end{aligned}$$

Então

$$\lim_{j\to\infty}\left\|\sum_{n=1}^{j} B^{p(n)}x^n\right\| \leq \lim_{j\to\infty}\sum_{n=1}^{j}\frac{1}{2^n}, \text{ ou seja }, \|y\| = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} B^{p(n)}x^n\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n},$$

e portanto $y \in \ell_p$.

Por outro lado, de (2.4) também segue que $T_a^{r(n)}x^i = 0$, para todo $i < n$. Logo,

$$T_a^{p(n)}y = x^n + \sum_{m=n+1}^{\infty} B^{p(m)-p(n)}x^m.$$

Mas

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{m=n+1}^{\infty} B^{p(m)-p(n)}x^m\right\| &\leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \| B^{p(m)-p(n)}x^m \| = \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{a^{p(m)-p(n)}} \| x^m \| \\ &\leq \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{a^{r(m)}} \| x^m \| \leq \sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^n}.\end{aligned}$$

Portanto $\| T_a^{p(n)}y - x^n \| \leq \frac{1}{2^n}$.

Vamos agora provar a densidade de $Orb(T_a, y)$ em ℓ_p. Seja $\varepsilon > 0$. Então existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^m} < \varepsilon$. Consideremos agora a subsequência $(x^k)_{k\in I}$ onde $I = \{m, m+1, m+2, \ldots\}$. Temos que $(x^k)_{k\in I}$ ainda é densa em ℓ_p, já que ℓ_p não possui pontos isolados. Assim, dado $z \in \ell_p$, existe $n \in I$ tal que $\| z - x^n \| < \varepsilon$ e $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$. Então

$$\begin{aligned}\| T_a^{p(n)}y - z \| &= \| T_a^{p(n)}y - x^n + x^n - z \| \\ &\leq \| T_a^{p(n)}y - x^n \| + \| x^n - z \| \\ &\leq \frac{1}{2^n} + \varepsilon < 2\varepsilon\end{aligned}$$

Como $z \in \ell_p$ é arbitrário, segue que $Orb(T_a, y)$ é denso em ℓ_p e, consequentemente, T_a é um operador hipercíclico em ℓ_p. ■

2.2 Critério de hiperciclicidade

Como vimos nos exemplos anteriores, nem sempre é fácil mostrar pela definição que um dado operador é hipercíclico. Então, apresentaremos agora, o critério de hiperciclicidade que dá condições suficientes para que um operador seja hipercíclico. Como aplicação desse critério, provaremos o resultado devido a Maclane e estudaremos a hiperciclicidade dos operadores de convolução definidos em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Antes de exibirmos o critério de hiperciclicidade, precisaremos de um lema que provaremos e do Teorema de Baire.

Lema 2.2.1 *Sejam E um espaço de Fréchet separável e T um operador hipercíclico em E. Tome $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência densa em E e defina $G_{j,k} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T^{-n}(B(y_j, \frac{1}{k}))$, para todos $j, k \in \mathbb{N}$. Seja $HC(T)$ o conjunto de todos os vetores hipercíclicos para T. Então $HC(T) = \bigcap_{j,k\in\mathbb{N}} G_{j,k}$.*

Demonstração. Como T é hipercíclico segue que T é contínuo, por definição. Então para cada $n \in \mathbb{N}$, T^n também é contínuo, como composta de funções contínuas. Assim, $T^{-n}(B(y_j, \frac{1}{k}))$ é aberto, quaisquer que sejam $n, j, k \in \mathbb{N}$. Por hipótese $HC(T)$ é não vazio e, para cada $x \in HC(T)$, a órbita de x sob T é densa em E. Então dado $x \in HC(T)$ para cada $j, k \in \mathbb{N}$ existe $n_{j,k} \in \mathbb{N}$ tal que $T^{n_{j,k}}x \in B(y_j, \frac{1}{k})$. Logo, para cada $j, k \in \mathbb{N}$, $x \in T^{-n_{j,k}}(B(y_j, \frac{1}{k}))$. Considerando então, para cada $j, k \in \mathbb{N}$ o conjunto aberto

$$G_{j,k} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^{-n}\left(B\left(y_j, \frac{1}{k}\right)\right)$$

segue que $HC(T) \subset \bigcap_{j,k \in \mathbb{N}} G_{j,k}$.

Por outro lado, se $x \in \bigcap_{j,k \in \mathbb{N}} G_{j,k}$ vamos mostrar que $x \in HC(T)$. Dado $\varepsilon > 0$, para cada $z \in E$, existem $j_0, k_0 \in \mathbb{N}$ tais que $\frac{1}{k_0} < \frac{\varepsilon}{2}$ e $d(z, y_{j_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como $x \in G_{j_0,k_o}$, $T^{n_0}x \in B(y_{j_0}, \frac{1}{k_o})$ para algum $n_0 \in \mathbb{N}$ e segue que

$$d(T^{n_0}x, z) \leq d(T^{n_0}x, y_{j_0}) + d(y_{j_o}, z) < \frac{1}{k_0} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo a órbita de x sob T é densa em E, para todo $x \in \bigcap_{j,k \in \mathbb{N}} G_{j,k}$. Portanto $HC(T) = \bigcap_{j,k \in \mathbb{N}} G_{j,k}$. ■

Teorema 2.2.2 ***(Teorema de Baire)*** *Seja M um espaço métrico completo. Então toda interseção enumerável de abertos densos em M é também um subconjunto denso em M.*

Demonstração. Ver [15, Página 37]. ■

Teorema 2.2.3 ***(Critério de Hiperciclicidade)*** *Seja T um operador linear contínuo em um espaço de Fréchet E separável. Suponhamos que existam subconjuntos densos Z e Y de E, uma sequência de inteiros positivos $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e uma família de aplicações $S_{n_k} : Z \to Z$ tais que*

(*i*) *para cada $y \in Y$, $T^{n_k}y \mapsto 0$, quando $k \to \infty$;*

(*ii*) *para cada $z \in Z$, $S_{n_k}z \mapsto 0$, quando $k \to \infty$;*

(*iii*) *$T^{n_k} \circ S_{n_k}z \mapsto z$, quando $k \to \infty$, para todo $z \in Z$.*

Então T é hipercíclico.

Demonstração. Como por hipótese E é separável podemos considerar $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uma sequência densa em E. Para cada $j, l \in \mathbb{N}$, tome os conjuntos $G_{j,l} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} T^{-n}B(y_j, \frac{1}{l})$, definidos no lema anterior. Para demonstrarmos o teorema, é suficiente mostrarmos que, para cada j e para cada l, $G_{j,l}$ é denso em E. De fato, se $G_{j,l}$ é denso em E, para cada j, l, pelo Teorema de Baire segue que $\bigcap_{j,l} G_{j,l}$ é denso em E e logo $\bigcap_{j,l} G_{j,l} \neq \emptyset$. Logo existe $x \in \bigcap_{j,l} G_{j,l}$ e como mostramos que todo elemento de $\bigcap_{j,l} G_{j,l}$ é hipercíclico para T, concluímos que T é hipercíclico.

Sendo assim, fixe $G_{j,l}$. Para facilitar a notação, denotaremos y_j por y e $\frac{1}{l}$ por ε. Sejam $z \in E$ e $\delta > 0$. Precisamos encontrar um elemento $x \in G_{j,l}$ tal que $d(x, z) < \delta$. Como por hipótese Z e Y são densos em E, existem $y_0 \in Y$ e $z_0 \in Z$ tais que

$$d(y, z_0) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad d(z, y_0) < \frac{\delta}{2}. \tag{2.5}$$

Agora, por (*i*), $T^{n_k}(y_0) \to 0$ quando $k \to \infty$. Assim existe um inteiro positivo K_1 para o qual

$$T^{n_k}y_0 \in B\left(0, \frac{\varepsilon}{4}\right),$$

sempre que $k \geq K_1$. Também por (ii) e (iii), $S_{n_k}(z_0) \to 0$ e $T^{n_k} \circ S_{n_k}(z_0) \to z_0$ quando $k \to \infty$. Logo, existe um inteiro positivo K_2 para o qual

$$S_{n_k}(z_0) \in B\left(0, \frac{\delta}{2}\right) \quad \text{e} \quad T^{n_k} \circ S_{n_k}(z_0) \in B\left(z_0, \frac{\varepsilon}{4}\right),$$

sempre que $K \geq K_2$. Fixemos então $k > \text{máx}\{K_1, K_2\}$ e consideremos o vetor $x = S_{n_k} z_0 + y_0$ pertencente a E. Como $T^{n_k}(x) = T^{n_k}(S_{n_k} z_0 + y_0) = T^{n_k} S_{n_k}(z_0) + T^{n_k}(y_0)$, $z_0 \in Z$ e d é invariante sob translação, chamando de $\alpha = T^{n_k} S_{n_k}(z_0)$ e $\gamma = T^{n_k}(y_0)$, temos que

$$\begin{aligned} d(T^{n_k}(x), z_0) &= d(\alpha + \gamma, z_0) \leq d(\alpha + \gamma, \alpha) + d(\alpha, z_0) \\ &= d(\alpha + \gamma - \alpha, \alpha - \alpha) + d(\alpha, z_0) \\ &= d(\gamma, 0) + d(\alpha, z_0) \\ &< \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Então, como $T^{n_k} x \in B(z_0, \frac{\varepsilon}{2})$ e $y \in B(z_0, \frac{\varepsilon}{2})$ segue que $d(T^{n_k} x, y) < \varepsilon$. Logo,

$$T^{n_k}(x) \in B(y, \varepsilon), \text{ ou seja, } x \in T^{-n_k}(B(y, \varepsilon)) \subset G_{j,l}.$$

Como $x = S_{n_k}(z_0) + y_0$, temos $x - y_0 = S_{n_k}(z_0)$ e logo $(x - y_0) \in B(0, \frac{\delta}{2})$. Agora observe que

$$d(x, y_0) = d(x - y_0, y_0 - y_0) = d(x - y_0, 0) < \frac{\delta}{2}, \text{ ou seja, } x \in B(y_0, \frac{\delta}{2}).$$

De (2.5) temos $z \in B(y_0, \frac{\delta}{2})$, então

$$d(x, z) \leq d(x, y_0) + d(z, y_0) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Como z foi escolhido arbitrariamente, segue que $G_{j,l}$ é denso em E, para todos $j, l \in \mathbb{N}$, ou seja, $\bigcap_{j,l \in \mathbb{N}} G_{j,l}$ é denso em E. ■

Como caso particular do critério geral de Hiperciclicidade segue imediatamente o critério de Kitai.

Corolário 2.2.4 ***(Critério de Kitai)*** *Seja T um operador linear contínuo em um espaço de Fréchet E separável. Suponhamos que existam subconjuntos densos Z e Y de E e que exista uma aplicação $S : Z \to Z$ tal que*

(i) *para cada $y \in Y$, $T^n y \mapsto 0$, quando $n \to \infty$;*

(ii) *para cada $z \in Z$, $S^n z \mapsto 0$, quando $n \to \infty$;*

(iii) *$T \circ S = Id_Z$.*

Então T é hipercíclico.

Conforme mencionado na seção anterior, faremos agora a demonstração do resultado de Maclane utilizando o critério de Hiperciclicidade, mais precisamente, o de Kitai.

Teorema 2.2.5 ***(MacLane)*** *Existe uma função inteira f tal que o conjunto $\{f^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ é denso em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.*

Demonstração. Seja $D : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{C})$ o operador diferenciação. É claro que D é linear e não é difícil ver que é contínuo. Vamos provar que D satisfaz o critério de Kitai. Tome $Y = Z = \mathcal{P}(\mathbb{C})$, onde $\mathcal{P}(\mathbb{C})$ denota o espaço dos polinômios com coeficientes em $\mathbb{C}$. Na demonstração do Teorema de Birkhoff vimos que Y e Z são densos em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Considere a aplicação $S : Z \longrightarrow Z$, definida para z^k por $S(z^k) = \frac{z^{k+1}}{k+1}$ para todo $k \in \mathbb{N}_0$ e para $P \in Z$ qualquer, extenda S por linearidade. Observe que dado $P \in Y$ temos que $D^n(P) = 0$ sempre que n for maior que o grau do polinômio P, logo

$$D^n(P) \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow \infty. \tag{2.6}$$

Seja $K \subset \mathbb{C}$ compacto. Então existe $R > 0$ tal que $K \subset B(0, R)$. Veja que

$$S^n(z^k) = \frac{z^{k+n}}{(k+n)(k+n-1)\dots(k+1)}, \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Agora observe que

$$\frac{k!z^{k+n}}{(k+n)!} = \frac{k!z^{k+n}}{(k+n)(k+n-1)\dots(k+1)k!} = \frac{z^{k+n}}{(k+n)(k+n-1)\dots(k+1)} = S^n(z^k)$$

e logo

$$|S^n(z^k)| = \left|\frac{k!z^{k+n}}{(k+n)!}\right| = \frac{k!}{(k+n)!}|z|^{k+n}.$$

Assim, se $z \in \mathbb{C}$ é tal que $|z| \leq R$ temos $|z|^{k+n} \leq R^{k+n}$ e

$$|S^n(z^k)| = \frac{k!}{(k+n)!}|z|^{k+n} \leq \frac{k!R^{k+n}}{(k+n)!},$$

logo

$$\sup_{z\in K} |S^n(z^k)| \leq \frac{k!R^{k+n}}{(k+n)!}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, o que implica

$$\sup_{z\in K} |S^n(z^k)| \longrightarrow 0 \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.7}$$

Sejam $P \in Z$, digamos $P(z) = a_k z^k + \ldots + a_1 z + a_0$ e $\varepsilon > 0$. Então

$$S^n(P)(z) = a_k S^n(z^k) + \ldots + a_1 S^n(z) + a_0 S^n(z^0)$$

o que implica

$$|S^n(P)(z)| \leq |a_k||S^n(z^k)| + \ldots + |a_1||S^n(z)| + |a_0||S^n(z^0)|.$$

Assim, por (2.7) existem constantes $n_k, \ldots, n_1, n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\begin{aligned}
|S^n(z^k)| &< \frac{\varepsilon}{2(k+1)|a_k|} \text{ sempre que } n \geq n_k, \\
&\vdots \\
|S^n(z)| &< \frac{\varepsilon}{2(k+1)|a_1|} \text{ sempre que } n \geq n_1 \\
|S^n(z^0)| &< \frac{\varepsilon}{2(k+1)|a_0|} \text{ sempre que } n \geq n_0.
\end{aligned}$$

Tomando $\tilde{n} = \text{máx}\{n_k, \ldots, n_1, n_0\}$ segue que, para $n \geq \tilde{n}$,

$$\begin{aligned}
|S^n(P)(z)| &\leq |a_k||S^n(z^k)| + \ldots + |a_1||S^n(z)| + |a_0||S^n(z^0)| \\
&\leq |a_k|\frac{\varepsilon}{2(k+1)|a_k|} + \ldots + |a_1|\frac{\varepsilon}{2(k+1)|a_1|} + |a_0|\frac{\varepsilon}{2(k+1)|a_0|} \\
&= \frac{(k+1)\varepsilon}{2(k+1)} = \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Logo $|S^n(P)| < \varepsilon$ sempre que $n \geq \tilde{n}$, ou seja,

$$S^n(P) \longrightarrow 0 \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.8}$$

Agora observe que dado $P = a_k z^k + \ldots + a_1 z + a_0 \in Z$ temos

$$\begin{aligned}
(D \circ S)(P) &= D(S(P)) = D\left(a_k \frac{z^{k+1}}{k+1} + \ldots + a_1 \frac{z^2}{2} + a_0 z\right) \\
&= a_k(k+1)\frac{z^k}{k+1} + \ldots + a_1 2\frac{z}{2} + a_0 \\
&= a_k z^k + \ldots + a_1 z + a_0 = P = Id(P),
\end{aligned}$$

como P é arbitrário temos que

$$D \circ S = Id. \tag{2.9}$$

Assim concluímos que D satisfaz o Critério de Kitai e logo é hipercíclico. ■

Definição 2.2.6 Dizemos que um operador linear e contínuo $L : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{C})$ é um *operador de convolução* se L comuta com as translações, ou seja, dados $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ e $a \in \mathbb{C}$, temos que $L(\tau_a f) = \tau_a(Lf)$, onde $\tau_a f(z) = f(z+a)$.

O conjunto dos operadores de convolução será denotado por $\mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$. Consideremos agora o espaço vetorial dos funcionais lineares contínuos definidos em $(\mathcal{H}(\mathbb{C}), \tau_0)$, ou seja, $\mathcal{H}'(\mathbb{C})$ e o espaço das funções de tipo exponencial $Exp(\mathbb{C})$ definido na Seção 1.2, para provar o seguinte resultado de isomorfismo.

Proposição 2.2.7 *Os espaços $\mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$, $\mathcal{H}'(\mathbb{C})$ e $Exp(\mathbb{C})$ são isomorfos como espaços vetoriais.*

Demonstração. Considere a aplicação

$$\begin{array}{rccc}
\psi : & \mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C})) & \longrightarrow & \mathcal{H}'(\mathbb{C}) \\
& L & \longmapsto & \psi(L)
\end{array}$$

onde $\psi(L)(f) = L(f)(0)$, para cada $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Provaremos que ψ é um isomorfismo entre esses dois espaços.

Para cada $L \in \mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$ vamos provar que ψ está bem definida, ou seja, provemos que $\psi(L) \in \mathcal{H}'(\mathbb{C})$. Veja que $\psi(L)$ é linear: sejam $L, S \in \mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então, dado $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, temos

$$\begin{aligned}
\psi(L + \lambda S)(f) &= (L + \lambda S)(f)(0) = L(f)(0) + \lambda S(f)(0) \\
&= \psi(L)(f) + \lambda\psi(S)(f) = (\psi(L) + \lambda\psi(S))(f),
\end{aligned}$$

portanto $\psi(L + \lambda S) = \psi(L) + \lambda\psi(S)$. Vamos mostrar agora que $\psi(L)$ é contínua. Seja (f_n) uma sequência em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ convergindo uniformemente sobre compactos para $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Dados

$\varepsilon > 0$, $L \in \mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$ e $K \subset \mathbb{C}$ um compacto com $0 \in K$, pela Proposição 1.1.12 existem uma constante $M > 0$ e um compacto $K' \subseteq \mathbb{C}$ para os quais

$$p_K(L(f_n - f)) \leq M \cdot p_{K'}(f_n - f), \quad \text{ou seja ,}$$

$$\sup_{z \in K} |L(f_n)(z) - L(f)(z)| = \sup_{z \in K} |L(f_n - f)(z)| \leq M \cdot \sup_{w \in K'} |f_n(w) - f(w)|.$$

Seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\sup_{w \in K'} |f_n(w) - f(w)| < \dfrac{\varepsilon}{M}$, qualquer que seja $n > n_0$. Assim

$$|\psi(L)(f_n) - \psi(L)(f)| = |L(f_n)(0) - L(f)(0)| \leq M \cdot \sup_{w \in K'} |f_n(w) - f(w)| < \varepsilon,$$

para todo $n \geq n_0$. Segue que $\psi(L)(f_n)$ converge para $\psi(L)(f)$, e logo $\psi(L) \in \mathcal{H}'(\mathbb{C})$, para todo $L \in \mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$. Vamos provar agora que ψ é bijetora. Para cada $T \in \mathcal{H}'(\mathbb{C})$, consideremos agora a função associada

$$\begin{array}{rccc} L_T : & \mathcal{H}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{H}(\mathbb{C}) \\ & f & \longmapsto & L_T(f) \end{array}$$

onde $L_T(f)(w) = T(\tau_w f)$, para todo $w \in \mathbb{C}$.

Observe que para cada $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $L_T(f)$ pertence a $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Dados $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ temos

$$\begin{aligned} L_T(f + \lambda g)(w) &= T(\tau_w(f + \lambda g)) = T(\tau_w f + \lambda \tau_w g) = T(\tau_w f) + \lambda T(\tau_w g) \\ &= L_T(f)(w) + \lambda L_T(g)(w) = (L_T(f) + \lambda L_T(g))(w), \end{aligned}$$

para todo $w \in \mathbb{C}$. Portanto $L_T(f + \lambda g) = L_T(f) + \lambda L_T(g)$ e logo L_T é linear.

Provemos agora que a função L_T é contínua. Sejam $K \subseteq \mathbb{C}$ um compacto e (f_n) uma sequência em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ convergindo uniformemente sobre compactos de $\mathbb{C}$ para uma função $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Vamos mostrar que $L_T(f_n)$ converge para $L_T(f)$ em K.

Como $T \in \mathcal{H}'(\mathbb{C})$, pela Proposição 1.1.12, existem $M > 0$ e um compacto $K' \subseteq \mathbb{C}$ para os quais $|T(g)| \leq M \sup_{z \in K'} |g(z)|$, para todo $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Seja agora $\varepsilon > 0$ e consideremos $K'' \subseteq \mathbb{C}$ um compacto tal que $K + K' \subset K''$. Então existe $n_{\varepsilon, K''} \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{z \in K''} |f_n(z) - f(z)| < \frac{\varepsilon}{M},$$

para todo $n > n_{\varepsilon, K''}$. Observe que para cada $b \in K$, temos

$$\begin{aligned} |T(\tau_b f_n) - T(\tau_b f)| &= |T(\tau_b(f_n - f))| \leq M \sup_{z \in K'} |\tau_b(f_n - f)(z)| = M \sup_{z \in K'} |(f_n - f)(z + b)| \\ &\leq M \sup_{w \in (K + K')} |(f_n - f)(w)| \leq M \sup_{w \in K''} |(f_n - f)(w)| \\ &< M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim $\sup_{b \in K} |T(\tau_b f_n) - T(\tau_b f)| < \varepsilon$ para todo $n > n_{\varepsilon, K''}$. Portanto $L_T(f_n)$ converge para $L_T(f)$ em K, e logo L_T é contínua.

Observe que $\tau_w(\tau_v(f)) = \tau_{w+v} f$, para cada $v, w \in \mathbb{C}$. De fato, dado $z \in \mathbb{C}$ temos

$$\tau_w(\tau_v(f))(z) = \tau_v(f)(z + w) = f(z + w + v) = \tau_{w+v}(f)(z),$$

e logo, como z é arbitrário conclui-se que $\tau_w(\tau_v(f)) = \tau_{w+v}f$. Finalmente L_T comuta com as translações pois, para cada $v \in \mathbb{C}$,

$$\tau_v \circ L_T(f)(w) = L_T(f)(w+v) = T(\tau_w(\tau_v(f))) = L_T(\tau_v(f))(w) = L_T \circ \tau_v(f)(w)$$

para todo $w \in \mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Então, como L_T é linear, contínua e comuta com as translações concluímos que $L_T \in \mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$.

Para mostrar que ψ é isomorfismo, vamos exibir sua aplicação inversa. Considere a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \Theta : & \mathcal{H}'(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C})) \\ & T & \longmapsto & L_T \end{array}.$$

Provemos que $\Theta = \psi^{-1}$. Para isso mostremos que $(\psi \circ \Theta)(T) = T$, para cada $T \in \mathcal{H}'(\mathbb{C})$ e $(\Theta \circ \psi)(L) = L$, para cada $L \in \mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$. Seja $T \in \mathcal{H}'(\mathbb{C})$. Então

$$(\psi \circ \Theta)(T) = \psi(\Theta(T)) = \psi(L_T).$$

Agora, dado $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ temos

$$\psi(L_T)(g) = L_T(g)(0) = T(\tau_0 g) = T(g).$$

Portanto $\psi(L_T) = T$ e logo $(\psi \circ \Theta)(T) = T$.

Seja $f \in \mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$. Então

$$(\Theta \circ \psi)(f) = \Theta(\psi(f)) = L_{\psi(f)}.$$

Vamos provar que $L_{\psi(f)} = f$. Para isso, basta mostrar que dado $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ temos $L_{\psi(f)}(g) = f(g)$. Seja $w \in \mathbb{C}$. Então,

$$L_{\psi(f)}(g)(w) = \psi(f)(\tau_w g) = f(\tau_w g)(0) = f(\tau_w g(0)) = f(g(0+w)) = f(g(w)) = f(g)(w),$$

portanto $L_{\psi(f)}(g) = f(g)$ e como g é arbitrário temos $L_{\psi(f)} = f$. Logo, $(\Theta \circ \psi)(f) = f$.

Consequentemente $\mathcal{H}'(\mathbb{C})$ e $\mathcal{O}(\mathcal{H}'(\mathbb{C}))$ são isomorfos. Vamos mostrar agora que $\mathcal{H}'(\mathbb{C})$ e $Exp(\mathbb{C})$ são isomorfos. Para isso, consideremos a função

$$\begin{array}{rccc} \varphi & \mathcal{H}'(\mathbb{C}) & \longrightarrow & Exp(\mathbb{C}) \\ & T & \longmapsto & \varphi(T) \end{array}$$

onde $\varphi(T)(\lambda) = T(g_\lambda)$ para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, sendo $g_\lambda(z) = e^{\lambda z}$, para todo $z \in \mathbb{C}$, e vamos mostrar que φ é um isomorfismo.

É fácil verificar que φ é linear. Também, para cada $T \in \mathcal{H}'(\mathbb{C})$, $\varphi(T)$ é holomorfa. De fato, sendo $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{\varphi(T)(\lambda+\delta) - \varphi(T)(\lambda)}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} \frac{T(g_{(\lambda+\delta)}) - T(g_\lambda)}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} T\left(\frac{g_{(\lambda+\delta)} - g_\lambda}{\delta}\right).$$

Agora, para cada $z \in \mathbb{C}$,

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{(g_{(\lambda+\delta)} - g_\lambda)(z)}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} \frac{e^{(\lambda+\delta)z} - e^{\lambda z}}{\delta} = \lim_{\delta \to 0} \frac{e^{\lambda z}(e^{\delta z} - 1)}{\delta} = z e^{\lambda z}.$$

Assim, para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi(T)'(\lambda) = T(h_\lambda)$, com $h_\lambda(z) = z e^{\lambda z}$, para todo $z \in \mathbb{C}$.

Além de holomorfa, note que $\varphi(T)$ é de tipo exponencial: pela continuidade de T, existem constantes $C, R > 0$ para as quais

$$|T(h)| \leq C \max_{|z|\leq R} |h(z)|,$$

para todo $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Em particular, se $\lambda \in \mathbb{C}$

$$|\varphi(T)(\lambda)| = |T(g_\lambda)| \leq C \max_{|z|\leq R} |e^{\lambda z}| = Ce^{R|\lambda|}.$$

Falta mostrarmos que φ é bijetora. Dada uma função inteira $g \in Exp(\mathbb{C})$, consideremos a função

$$\begin{array}{rccl} T_g: & \mathcal{H}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} f^{(n)}(0). \end{array}$$

Observemos que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} f^{(n)}(0) \in \mathbb{C}$:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_n \left| \frac{g^{(n)}(0)}{n!} f^{(n)}(0) \right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sup_n |g^{(n)}(0)|^{\frac{1}{n}} \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right|^{\frac{1}{n}}.$$

Agora, como $g \in Exp(\mathbb{C})$ segue da Proposição 1.2.3 que $(|g^{(n)}(0)|^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, ou seja, existe $M > 0$ tal que $|g^{(n)}(0)|^{\frac{1}{n}} \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\sup_n |g^{(n)}(0)|^{\frac{1}{n}} \leq M$ e portanto

$$\lim_{n\to\infty} \sup_n |g^{(n)}(0)|^{\frac{1}{n}} \leq M.$$

Como f é uma função inteira, temos $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$ e seu raio de convergência R é infinito. Logo, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sup_n \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{R} = 0$. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \sup_n |g^{(n)}(0)|^{\frac{1}{n}} \left| \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \right|^{\frac{1}{n}} = 0.$$

Assim, pelo Teste da Raíz, a série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} f^{(n)}(0)$ converge absolutamente e, portanto, converge em $\mathbb{C}$.

Vamos provar que T_g é contínua. Para isso, consideremos a sequência de funções $(H_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tais que

$$\begin{array}{rccl} H_m: & \mathcal{H}(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} f^{(n)}(0). \end{array}$$

Claramente, para todo $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $H_m(f) \longrightarrow T_g(f)$ quando $m \longrightarrow \infty$. Por outro lado, para cada m inteiro, H_m é linear e contínua: seja $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ convergindo uniformemente sobre compactos para $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Então, pelo Teorema 1.2.4, $(f_j^{(k)})_{j\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente sobre compactos para $f^{(k)} \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$.

Em particular, para cada k, $f_j^{(k)}(0) \to f^{(k)}(0)$ em $\mathbb{C}$, quando $j \to \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, existe um inteiro $N > 0$ tal que

$$\left| f_j^{(k)}(0) - f^{(k)}(0) \right| < \frac{\varepsilon}{M},$$

para todo $j > N$ e $k \in \mathbb{N}$, onde $M > \sum_{n=0}^{m} \frac{|g^{(n)}(0)|}{n!}$. Assim, para $j > N$,

$$\begin{aligned}
|H_m(f_j) - H_m(f)| &= \left| \sum_{n=0}^{m} \frac{g^{(n)}(0)}{n!} (f_j - f)^{(n)}(0) \right| \\
&\leq \sum_{n=0}^{m} \left| \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \right| |(f_j - f)^{(n)}(0)| \\
&= \sum_{n=0}^{m} \left| \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \right| |f_j^{(n)}(0) - f^{(n)}(0)| \\
&< \sum_{n=0}^{m} \frac{\varepsilon}{M} \left| \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \right| \\
&< \frac{\varepsilon}{M} \sum_{n=0}^{m} \frac{|g^{(n)}(0)|}{n!} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Segue que H_m é contínua, para todo $m \geq 0$ e, portanto, pela Proposição 1.1.7, $T_g \in \mathcal{H}'(\mathbb{C})$, qualquer que seja $g \in Exp(\mathbb{C})$. Consideremos agora a função

$$\begin{array}{rccc}
\eta : & Exp(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{H}'(\mathbb{C}) \\
& g & \longmapsto & T_g
\end{array}$$

Note que $\eta \circ \varphi(T) = T_{\varphi(T)} = T$ e $\varphi \circ \eta(g) = g$. Logo, $\eta = \varphi^{-1}$ e, portanto, $Exp(\mathbb{C})$ é isomorfo a $\mathcal{H}'(\mathbb{C})$. ■

De posse dessa proposição podemos estudar os operadores de convolução em termos de hiperciclicidade. Este resultado é devido a Godefroy e Shapiro e foi obtido em [10].

Teorema 2.2.8 *Seja $L \in \mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$ um operador de convolução que não é múltiplo da identidade. Então L é hipercíclico.*

Demonstração. Seja $L \in \mathcal{O}(\mathcal{H}(\mathbb{C}))$. Pelos isomorfismos ψ e φ definidos na proposição anterior, existe um único $g_L \in Exp(\mathbb{C})$ associado a L tal que $\varphi(\psi(L)) = g_L$. Considere a expansão de g_L em série de Taylor,

$$g_L(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_L^{(n)}(0)}{n!} z^n,$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Sabemos da proposição anterior que $\psi^{-1} = \Theta$ e $\eta = \varphi^{-1}$. Então

$$\begin{aligned}
L(f)(w) &= \psi^{-1}(\varphi^{-1}(g_L))(f)(w) = \psi^{-1}(\eta(g_L))(f)(w) = \psi^{-1}(T_{g_L})(f)(w) \\
&= \Theta(T_{g_L})(f)(w) = L_{T_{g_L}}(f)(w) = T_{g_L}(\tau_w f) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_L^{(n)}(0)}{n!} (\tau_w f)^{(n)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g_L^{(n)}(0)}{n!} f^{(n)}(w) \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

para todos $w \in \mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Agora note que L será um múltiplo da identidade se, e somente se, a função associada g_L for constante: de fato, se $L = \alpha Id$ para algum $\alpha \in \mathbb{C}$ temos

$$g_L(\lambda) = \varphi(\psi(\alpha Id))(\lambda) = \psi(\alpha Id)(g_\lambda) = (\alpha Id)(g_\lambda)(0) = (\alpha Id)(e^{\lambda 0}) = \alpha.$$

Por outro lado, se g_L for constante, $g_L^{(n)} = 0$ para todos $z \in \mathbb{C}$ e $n > 0$. Logo por (2.10) temos que

$$L(f)(w) = g_L(0)f(w),$$

para todo $w \in \mathbb{C}$ e $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, ou seja, $L = KId$, onde $K = g_L(0)$.

Como, por hipótese, L não é múltiplo da identidade, segue que g_L não é constante. Além disso, para cada $b \in \mathbb{C}$ fixo, a função $f_b(z) = e^{bz}$ é um autovetor de L:

$$\begin{aligned} L(f_b)(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g_L^{(j)}(0)}{j!} f_b^{(j)}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g_L^{(j)}(0)}{j!} b^j f_b(z) \\ &= f_b(z) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g_L^{(j)}(0)}{j!} b^j = g_L(b) f_b(z). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Provemos agora que, para cada aberto não vazio V de $\mathbb{C}$, o espaço $F = [f_b : b \in V]$ é denso em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. De fato, dado $b \in V$, para cada $\delta > 0$ suficientemente pequeno temos que $b + \delta \in V$. Também, para cada $z \in \mathbb{C}$,

$$\left| \frac{e^{(b+\delta)z} - e^{bz}}{\delta} - ze^{bz} \right| = \left| \frac{e^{bz}(e^{\delta z} - 1 - \delta z)}{\delta} \right| \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad \delta \to 0.$$

Logo $\lim\limits_{\delta \to 0} \dfrac{e^{(b+\delta)z} - e^{bz}}{\delta} = ze^{bz}$ e, assim, ze^{bz} pertence ao fecho de F. De maneira análoga, dado $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned} \left| \frac{z^{n-1}e^{(b+\delta)z} - z^{n-1}e^{bz}}{\delta} - z^n e^{bz} \right| &= \left| \frac{z^{n-1}e^{(b+\delta)z} - z^{n-1}e^{bz} - \delta z^n e^{bz}}{\delta} \right| \\ &= \left| \frac{z^{n-1}e^{bz}(e^{\delta z} - 1 - \delta z)}{\delta} \right| \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $\delta \to 0$. Portanto,

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{z^{n-1}e^{(b+\delta)z} - z^{n-1}e^{bz}}{\delta} = z^n e^{bz}$$

e logo $z^n e^{bz}$ pertence ao fecho de F, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$.

Seja $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ qualquer e consideremos $g(z) = e^{-bz} f(z)$ para algum $b \in \mathbb{C}$. Expandindo g pela série de Taylor, temos que existe uma sequência complexa $(a_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tal que

$$g(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j.$$

Logo $e^{-bz} f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j f(z)$, o que implica $f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j f(z) e^{bz}$ uniformemente em cada compacto. Pelo o que vimos acima temos que $a_j z^j e^{bz}$ pertence ao fecho de F, para todo $j \in \mathbb{N}_0$, e como $f(z) = \lim_{n \to \infty} \sum_{j=0}^{n} a_j z^j f(z) e^{bz}$ segue que f pertence ao fecho de F e portanto o conjunto F é denso em $\mathcal{H}(\mathbb{C})$.

Consideremos agora os conjuntos $V = \{b \in \mathbb{C} : |g_L(b)| < 1\}$ e $W = \{b \in \mathbb{C} : |g_L(b)| > 1\}$. Observe que ambos os conjuntos são abertos e não vazios, uma vez que g_L não é constante por hipótese. De fato, suponha por absurdo que W é vazio. Então $|g_L(b)| \leq 1$ para todo $b \in \mathbb{C}$. Assim g_L é uma função inteira e limitada e logo pelo Teorema de Liouville segue que g_L é constante, absurdo. Portanto $W \neq \emptyset$. Da mesma forma conclui-se que $V \neq \emptyset$, senão obteria que a função $\frac{1}{g_L}$ seria constante.

Vamos aplicar o critério de Kitai para L, considerando os conjuntos densos $Y = [f_b : b \in V]$ e $Z = [f_b : b \in W]$ e a aplicação $S : Z \to Z$ definida da seguinte forma: para cada $b \in W$ temos

$$S(f_b)(z) = \frac{f_b(z)}{g_L(b)}.$$

Claramente S é linear. Como, para cada $h \in Z$, existem $b_1, b_2, \ldots, b_n \in W$ tais que $h(z) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_{b_j}(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Então

$$S(h)(z) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j S(f_{b_j})(z) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{f_{b_j}(z)}{g_L(b_j)}.$$

Assim,

(*i*) Para cada $b \in V$, $|g_L(b)| < 1$ e, portanto, $L^n(f_b) = g_L(b)^n f_b \to 0$ quando $n \to \infty$;

(*ii*) Para cada $b \in W$, $|g_L(b)| > 1$ e, portanto, $S^n(f_b) = \frac{f_b}{g_L(b)^n} \to 0$ quando $n \to \infty$;

(*iii*) Seja $h \in Z$. Então existem constantes $b_1, b_2, \ldots, b_n \in W$ tais que $h(z) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_{b_j}(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Então, dado $z \in \mathbb{C}$ temos

$$\begin{aligned}
(L \circ S)(h)(z) &= L(S(h))(z) = L\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \frac{f_{b_j}}{g_L(b_j)}\right)(z) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{g_L(b_j)} L(f_{b_j})(z) \\
\text{por (2.11)} \quad &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\lambda_j}{g_L(b_j)} g_L(b_j) f_{b_j}(z) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_{b_j}(z) = h(z).
\end{aligned}$$

Portanto, $(L \circ S)(h) = h$, para todo $h \in Z$. Logo, pelo critério de Kitai, L é hipercíclico. ■

No capítulo 4, estudaremos resultados de hiperciclicidade na mesma linha que o Teorema 2.2.8, mas para operadores de convolução definidos entres certos espaços de funções inteiras definidas num espaço de Banach complexo. Para isto necessitamos fazer um estudo de polinômios homogêneos e holomorfia em dimensão infinita. Este será o teor do próximo capítulo.

Capítulo 3

Polinômios homogêneos e holomorfia em espaços de Banach

Conforme já dissemos, este capítulo servirá de subsídio teórico para o desenvolvimento do próximo capítulo.

3.1 Polinômios homogêneos e aplicações multilineares

Definição 3.1.1 Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $E_1, \ldots, E_m, F$ espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma aplicação $A : E_1 \times \ldots \times E_m \to F$ é dita *multilinear* (ou *m-linear*) se

$$A(x_1, \ldots, \lambda x_i + x_i', \ldots, x_m) = \lambda A(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m) + A(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_m)$$

para todos $i = 1, \ldots, m$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x_i, x_i' \in E_i$.

O espaço vetorial das aplicações multilineares e das aplicações multilineares contínuas serão denotados por $L(E_1, \ldots, E_m; F)$ e $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$ respectivamente. Para toda aplicação multilinear $A \in L(E_1, \ldots, E_m; F)$ definimos

$$\|A\| := \sup\{\|A(x_1, \ldots, x_m)\| : x_j \in E_j \text{ e } \|x_j\| \leq 1, \text{ para todo } j = 1, \ldots, m\}.$$

Apesar da notação de norma, essa expressão não define uma norma em $L(E_1, \ldots, E_m; F)$ pois pode ocorrer $\|A\| = \infty$, mas define uma norma em $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$. Consideremos agora o caso particular das aplicações multilineares em $L(E_1, \ldots, E_m; F)$ onde $E_1 = \ldots = E_m = E$. Neste caso o espaço vetorial das aplicações multilineares será denotado por $L(^mE; F)$

Definição 3.1.2 Uma aplicação multilinear $A : E^m \to F$ é dita ser *simétrica* se

$$A(x_1, \ldots, x_m) = A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)})$$

para todos $(x_1, \ldots, x_m) \in E^m$ e $\sigma \in S_m$, onde S_m denota o conjunto das permutações dos m primeiros números naturais.

O conjunto das aplicações multilineares simétricas será denotado por $L^S(^mE; F)$. Sejam $n, m \in \mathbb{N}$ e $A \in L(^mE; F)$. Então para cada $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$ e cada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ com $|\alpha| := \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = m$ usaremos a notação

$$Ax_1^{\alpha_1} \cdot \cdots \cdot x_n^{\alpha_n} = A(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{\alpha_1}, \ldots, \underbrace{x_n, \ldots, x_n}_{\alpha_n})$$

para todo $m \geq 1$.

Proposição 3.1.3 *Para cada $A \in L(^mE;F)$ defina A^S por*

$$A^S(x_1,\ldots,x_m) := \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} A(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(m)}).$$

Então as seguintes propriedades são satisfeitas:

(a) $A^S \in L^S(^mE;F)$

(b) $A^S = A$ *se, e somente se* $A \in L^S(^mE;F)$

(c) $(A^S)^S = A^S$

(d) O operador $S : L(^mE;F) \to L^S(^mE;F)$, *definido por* $S(A) = A^S$ *é linear*

(e) Se $x \in E$ *então* $Ax^m = A^S x^m$.

Demonstração. (a) Sejam $(x_1,\ldots,x_m) \in E^m$ e $\sigma' \in S_m$. Assim,

$$\begin{aligned} A^S(x_1,\ldots,x_m) &= \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} A(x_{\sigma_{(1)}},\ldots,x_{\sigma_{(m)}}) = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} A(x_{\sigma(\sigma_1)},\ldots,x_{\sigma(\sigma_m)}) \\ &= A^S(x_{\sigma'(1)},\ldots,x_{\sigma'(m)}), \end{aligned}$$

e consequentemente $A^S \in L^S(^mE;F)$.

(b) Se $A = A^S$ então A é simétrica pois, como provamos acima A^S é simétrica. Suponha agora que $A \in L^S(^mE;F)$. Então,

$$\begin{aligned} A^S(x_1,\ldots,x_m) &= \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} A(x_{\sigma_{(1)}},\ldots,x_{\sigma_{(m)}}) = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} A(x_1,\ldots,x_m) \\ &= \frac{1}{m!} m! A(x_1,\ldots,x_m) = A(x_1,\ldots,x_m), \end{aligned}$$

para todo $(x_1,\ldots,x_m) \in E^m$ o que implica $A^S = A$.

(c) Por (a) $A^S \in L^s(^mE;F)$, logo por (b) $(A^S)^S = A^S$.

(d) Pelo item (a) o operador S está bem definido. Além disso, dados $A, B \in L(^mE;F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ obtemos

$$\begin{aligned} S(A+\lambda B)(x_1,\ldots,x_m) &= (A+\lambda B)^S(x_1,\ldots,x_m) \\ &= \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} (A+\lambda B)(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(m)}) \\ &= \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} [A(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(m)}) + \lambda B(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(m)})] \\ &= \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} A(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(m)}) + \lambda\left[\frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} B(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(m)})\right] \\ &= A^s(x_1,\ldots,x_m) + \lambda[B^s(x_1,\ldots,x_m)] \\ &= (S(A)+\lambda S(B))(x_1,\ldots,x_m), \end{aligned}$$

para todo $(x_1,\ldots,x_m) \in E^m$. Portanto S é linear.

(e) Seja $x \in E$. Então

$$A^S x^m = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A x^m = \frac{1}{m!} m! A x^m = A x^m.$$

■

Essa proposição dentre outras consequências, mostra que S é uma projeção de $L(^mE;F)$ sobre $L^S(^mE;F)$.

Teorema 3.1.4 ***(Fórmula de Leibniz)*** *Sejam E, F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, $k \in \mathbb{N}_0$ e $T \in L^S(^kE;F)$. Então para todos $x_1, \ldots, x_r \in E$ temos que*

$$T(x_1 + \ldots + x_r)^k = \sum_{|\gamma|=k} \frac{k!}{n_1! n_2! \ldots n_r!} T x_1^{n_1} \ldots x_r^{n_r}$$

onde a soma é sobre todas as r-uplas $\gamma = (n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{N}_0^r$ satisfazendo $|\gamma| = k$, onde $|\gamma| = n_1 + \ldots + n_r$.

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre k. Para $k = 0$ e $k = 1$ é trivial. Assumindo que a fórmula vale para $k \geq 1$, mostraremos que é válido para $k+1$. Se $T \in L^S(^kE;F)$ então podemos escrever

$$T(x_1 + \ldots + x_r)^{k+1} = T(x_1 + \ldots + x_r)(x_1 + \ldots + x_r)^k$$

onde $T(x_1 + \ldots + x_r) \in L^S(^kE;F)$ é definido por

$$T(x_1 + \ldots + x_r)(z_1, \ldots, z_k) = T(x_1 + \ldots + x_r, z_1, \ldots, z_k)$$

para qualquer $(z_1, \ldots, z_k) \in E^k$. Agora por indução

$$\begin{aligned} T(x_1 + \ldots + x_r)^{k+1} &= \sum_{|\gamma|=k} \frac{k!}{n_1! \ldots n_r!} T(x_1 + \ldots + x_r) x_1^{n_1} \ldots x_r^{n_r} \\ &= \sum_{|\gamma|=k} \frac{k!}{n_1! \ldots n_r!} T x_1^{n_1+1} x_2^{n_2} \ldots x_r^{n_r} + \\ &+ \sum_{|\gamma|=k} \frac{k!}{n_1! \ldots n_r!} T x_1^{n_1} x_2^{n_2+1} \ldots x_r^{n_r} + \ldots + \sum_{|\gamma|=k} \frac{k!}{n_1! \ldots n_r!} T x_1^{n_1} \ldots x_r^{n_r+1}, \end{aligned}$$

onde $\gamma = (n_1, \ldots, n_r) \in \mathbb{N}_o^r$ tal que $|\gamma| = k$. Para cada $i = 1, \ldots, r$ vamos considerar $\beta^{[i]} = (\beta_1^{[i]}, \ldots, \beta_r^{[i]}) \in \mathbb{N}_0^r$ tal que $\beta_i^{[i]} = n_i + 1$ e $\beta_j^{[i]} = n_j$ para $j \neq i$ e $j = 1, \ldots, r$. Assim

$$\begin{aligned} T(x_1 + \ldots + x_r)^{k+1} = &\sum_{|\beta^{[1]}|=k+1} \frac{k!}{(\beta_1^{[1]} - 1)! \beta_2^{[1]}! \ldots \beta_r^{[1]}!} T x_1^{\beta_1^{[1]}} \ldots x_r^{\beta_r^{[1]}} + \ldots + \\ &\sum_{|\beta^{[r]}|=k+1} \frac{k!}{\beta_1^{[r]}! \beta_2^{[r]}! \ldots (\beta_r^{[r]} - 1)!} T x_1^{\beta_1^{[r]}} \ldots x_r^{\beta_r^{[r]}} \\ = \sum_{|\beta|=k+1} \frac{k!}{(\beta_1 - 1)! \beta_2! \ldots \beta_r!} T x_1^{\beta_1} \ldots x_r^{\beta_r} &+ \ldots + \sum_{|\beta|=k+1} \frac{k!}{\beta_1! \beta_2! \ldots (\beta_r - 1)!} T x_1^{\beta_1} \ldots x_r^{\beta_r} \end{aligned}$$

onde $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_r) \in \mathbb{N}_0^r$ tal que $|\beta| = k+1$. Logo,

$$\begin{aligned}
T(x_1 + \ldots + x_r)^{k+1} &= \sum_{|\beta|=k+1} k! T x_1^{\beta_1} \ldots x_r^{\beta_r} \left(\frac{1}{(\beta_1 - 1)!\beta_2! \ldots \beta_r!} + \ldots + \frac{1}{\beta_1! \ldots (\beta_r - 1)!} \right) \\
&= \sum_{|\beta|=k+1} k! T x_1^{\beta_1} \ldots x_r^{\beta_r} \left(\frac{\beta_1}{\beta_1!\beta_2! \ldots \beta_r!} + \ldots + \frac{\beta_r}{\beta_1! \ldots \beta_r!} \right) \\
&= \sum_{|\beta|=k+1} \frac{k!}{\beta_1! \ldots \beta_r!} T x_1^{\beta_1} \ldots x_r^{\beta_r} (\beta_1 + \ldots + \beta_r) \\
&= \sum_{|\beta|=k+1} \frac{(k+1)!}{\beta_1! \ldots \beta_r!} ! T x_1^{\beta_1} \ldots x_r^{\beta_r}.
\end{aligned}$$

■

Teorema 3.1.5 ***(Fórmula de Polarização)*** *Sejam E, F espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ e $k \in \mathbb{N}$. Se $T \in L^S({}^kE; F)$ então*

$$T(x_1, \ldots, x_k) = \frac{1}{k!2^k} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \le i \le k}} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k T(\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_k x_k)^k$$

para quaisquer $x_1, \ldots, x_k \in E$.

Demonstração. Para quaisquer $x_1, \ldots, x_k \in E$, seja

$$B = \frac{1}{k!2^k} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \le i \le k}} \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k T(\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_k x_k)^k.$$

Pela Fórmula de Leibniz, temos que

$$T(\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_k x_k)^k = \sum_{|\gamma|=k} \frac{k!}{\gamma!} T(\varepsilon_1 x_1)^{n_1} \ldots (\varepsilon_k x_k)^{n_k} = \sum_{|\gamma|=k} \frac{k!}{\gamma!} \varepsilon_1^{n_1} \ldots \varepsilon_k^{n_k} T x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k}$$

onde $\gamma = (n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}_0^k$ com $|\gamma| = k$. Logo,

$$B = \frac{1}{k!2^k} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \le i \le k}} \sum_{|\gamma|=k} \frac{k!}{\gamma!} \varepsilon_1^{1+n_1} \ldots \varepsilon_k^{1+n_k} T x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k}.$$

Chamando $\sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \le i \le k}} \varepsilon_1^{1+n_1} \ldots \varepsilon_k^{1+n_k}$ de $a(n_1, \ldots, n_k)$ então

$$B = \frac{k!}{k!2^k} \sum_{|\gamma|=k} \frac{1}{\gamma!} a(n_1, \ldots, n_k) T x_1^{n_1} \ldots x_k^{n_k}. \tag{3.1}$$

Supondo $n_1 = 0$ temos que

$$\begin{aligned}
a(n_1, \ldots, n_k) &= \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \le i \le k}} \varepsilon_1^{1+n_1} \ldots \varepsilon_k^{1+n_k} = \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \le i \le k}} \varepsilon_1 \varepsilon_2^{1+n_2} \ldots \varepsilon_k^{1+n_k} \\
&= \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \le i \le k}} 1 \varepsilon_2^{1+n_2} \ldots \varepsilon_k^{1+n_k} + \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \le i \le k}} -1 \varepsilon_2^{1+n_2} \ldots \varepsilon_k^{1+n_k} = 0.
\end{aligned}$$

Assim, sempre que $n_i = 0$ para algum $i = 1, \dots, k$, temos que $a(n_1, \dots, n_k) = 0$. Logo em (3.1) existe apenas um termo $a(n_1, \dots, n_k)$ não nulo, que ocorre quando $n_1 = \dots = n_k = 0$. Como

$$a(\underbrace{1, \dots, 1}_{k}) = \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq k}} \varepsilon_1^2 \dots \varepsilon_k^2 = 2^k$$

segue que

$$B = \frac{1}{2^k} \frac{1}{1!1! \dots 1!} 2^k T x_1 \dots x_k = T(x_1, \dots, x_k).$$

Portanto $T(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{k!2^k} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq k}} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_k T(\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_k x_k)^k$. ■

Definição 3.1.6 Sejam E e F espaços vetoriais normados. Uma aplicação $P : E \to F$ será denominada *polinômio m-homogêneo* ou *polinômio homogêneo de grau m*, se existir uma aplicação $A \in L(^m E; F)$ tal que $P(x) = Ax^m$ para todo $x \in E$.

O espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos polinômios $P : E \to F$ m-homogêneos e dos polinômios m-homogêneos contínuos serão denotados respectivamente por $P(^m E; F)$ e $\mathcal{P}(^m E; F)$. Para cada $P \in P(^m E; F)$, denotaremos

$$\|P\| = \sup\{\|P(x)\| : x \in E, \|x\| < 1\}.$$

Assim como no caso das aplicações multilineares, apesar da notação de norma, essa relação define uma norma apenas em $\mathcal{P}(^m E; F)$. Mais ainda, se F é um espaço de Banach, o espaço normado $(\mathcal{P}(^m E; F), \|\cdot\|)$ é um espaço de Banach.

Proposição 3.1.7 *Sejam E e F espaços vetoriais normados. Para cada $A \in L(^m E; F)$ considere a aplicação dada por $\widehat{A} : E \to F$, $\widehat{A}(x) := Ax^m$. Então a correspondência*

$$\begin{aligned} L : L^S(^m E; F) &\longrightarrow P(^m E; F) \\ A &\longmapsto \hat{A} \end{aligned}$$

é um isomorfismo. Mais ainda,

$$\|\widehat{A}\| \leq \|A\| \leq \frac{m^m}{m!} \|\widehat{A}\|.$$

Demonstração. Obviamente a aplicação $A \mapsto \widehat{A}$ está bem definida. Provemos que L é linear. Sejam $A, B \in L^S(^m E; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então,

$$\begin{aligned} L(A + \lambda B)(x) &= (\widehat{A + \lambda B})(x) = (A + \lambda B)x^m = Ax^m + \lambda Bx^m \\ &= \hat{A}(x) + \lambda \hat{B}(x) = (\hat{A} + \lambda \hat{B})(x) = (L(A) + \lambda L(B))(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in E$. Além disso a aplicação L é bijetora. De fato, se $P \in P(^m E; F)$ existe $A \in L(^m E; F)$ tal que $P(x) = Ax^m$. Considere agora

$$A^S(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(m)}).$$

Então, pela Proposição 3.1.3, A^S é simétrica e $A^S x^m = Ax^m = P(x)$. Portanto a aplicação é sobrejetora. Seja agora $A \in L^S(^m E; F)$ tal que $L(A) = 0$, ou seja, $\widehat{A} = 0$. Logo, $\widehat{A}(x) = Ax^m = 0$, para todo $x \in E$. Desse modo, pela Fórmula de Polarização

$$A(x_1, \dots, x_m) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq m}} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_m A(\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_m x_m)^m = 0,$$

para quaisquer $x_1, \dots, x_m \in E$. Portanto $A = 0$ e consequentemente L é injetora. Provemos agora as desigualdades anunciadas. Segue trivialmente que

$$\|\widehat{A}\| = \sup\{\|Ax^m\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} \leq \sup\{\|A(x_1, \dots, x_m)\| : x_j \in E, \text{máx}_j \|x_j\| \leq 1\} = \|A\|.$$

Resta mostrar a segunda desigualdade. Primeiramente observe que, dado $P \in P(^mE; F)$ então

$$\|P(x)\| \leq \|P\| \|x\|^m, \tag{3.2}$$

para todo $x \in E$. De fato, se $x = 0$ é óbvio. Suponha $x \neq 0$. Logo,

$$\left\| P\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\| \leq \|P\|, \text{ e logo}$$

$$\frac{1}{\|x\|^m} \|P(x)\| \leq \|P\|, \text{ ou seja }, \|P(x)\| \leq \|x\|^m \|P\|.$$

Desse modo, pela Fórmula de Polarização obtemos

$$\begin{aligned} A(x_1, \dots, x_m) &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq m}} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_m A(\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_m x_m)^m \\ &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq m}} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_m \hat{A}(\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_m x_m). \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \|A(x_1, \dots, x_m)\| &= \left\| \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq m}} \varepsilon_1 \dots \varepsilon_m \hat{A}(\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_m x_m) \right\| \\ &\leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq m}} \|\varepsilon_1 \dots \varepsilon_m \hat{A}(\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_m x_m)\| \\ &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq m}} \|\hat{A}(\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_m x_m)\| \\ \text{por (3.2)} &\leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq m}} \|\hat{A}\| \cdot \|(\varepsilon_1 x_1 + \dots + \varepsilon_m x_m)\|^m \\ &\leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq m}} \|\hat{A}\| \cdot (\|\varepsilon_1 x_1\| + \dots + \|\varepsilon_m x_m\|)^m \\ &\leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq m}} \|\hat{A}\| \cdot (\|x_1\| + \dots + \|x_m\|)^m. \end{aligned}$$

Então, se $\text{máx}_j \|x_j\| \leq 1$ segue que

$$\|A(x_1, \dots, x_m)\| \leq \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_i = \pm 1 \\ 1 \leq i \leq m}} \|\hat{A}\| m^m = \frac{m^m}{m!} \|\hat{A}\|.$$

Portanto, $\sup\{\|A(x_1, \dots, x_m)\| : x_j \in E, \|x_j\| \leq 1, \forall j = 1, \dots, m\} \leq \frac{m^m}{m!} \|\hat{A}\|$, ou seja, $\|A\| \leq \frac{m^m}{m!} \|\hat{A}\|$. ■

Definição 3.1.8 Uma aplicação $A \in \mathcal{L}(^m E; F)$ é dita *nuclear* se existem sequências limitadas $(x'_{ji})_{i=1}^{\infty} \subset E'$ $(1 \leq j \leq m)$ e $(y_i)_{i=1}^{\infty} \subset F$ com

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x'_{1i}\| \cdots \|x'_{mi}\| \|y_i\| < \infty \tag{3.3}$$

tais que

$$A(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{\infty} x'_{1i}(x_1) \cdots x'_{mi}(x_m) y_i \tag{3.4}$$

onde $x_j \in E$ para $1 \leq j \leq m$.

Se F for um espaço de Banach, denotamos por $\mathcal{L}_N(^m E; F)$ o espaço de Banach de todas as aplicações m-lineares nucleares dotado da norma nuclear

$$\|A\|_N = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \|x'_{1i}\| \cdots \|x'_{mi}\| \|y_i\|, \tag{3.5}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as sequências $(x'_{ji})_{i=1}^{\infty} \subset E'$ $(1 \leq j \leq m)$ e $(y_i)_{i=1}^{\infty} \subset F$ satisfazendo (3.3) e (3.4).

Definição 3.1.9 Definimos um polinômio $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ como sendo *nuclear* se podemos escrever P na forma

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x'_i(x)^m y_i \tag{3.6}$$

onde $(x'_i)_{i=1}^{\infty} \subset E'$ e $(y_i)_{i=1}^{\infty} \subset F$ são sequências limitadas tais que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x'_i\|^m \|y_i\| < \infty. \tag{3.7}$$

Denotamos por $\mathcal{P}_N(^m E; F)$ o espaço de todos os polinômios m-homogêneos nucleares de E em F, dotado da norma nuclear

$$\|P\|_N = \inf \sum_{i=1}^{\infty} \|x'_i\|^m \|y_i\|, \tag{3.8}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as sequências $(x'_i)_{i=1}^{\infty} \subset E'$ e $(y_i)_{i=1}^{\infty} \subset F$ satisfazendo (3.6) e (3.7). O espaço $\mathcal{P}_N(^m E; F)$ torna-se um espaço de Banach com a norma definida acima, desde que F seja um espaço de Banach. Denotamos por $\mathcal{L}_N(E; F)$ o espaço de todos os operadores nucleares de E em F. Quando $m = 0$ definimos $\mathcal{P}_N(^0 E; F) = F$. A demonstração de que os números definidos em (3.5) e (3.8) de fato definem uma norma nos espaços $\mathcal{L}_N(^m E; F)$ e $\mathcal{P}_N(^m E; F)$ respectivamente pode ser encontrada em [11].

Definição 3.1.10 Um polinômio $P \in P(^m E; F)$ é dito ser de *tipo finito* se é da forma

$$P(x) = \sum_{j=1}^{p} (\varphi_j(x))^m b_j,$$

com $\varphi_j \in E'$ e $b_j \in F$ para $j = 1, \ldots, p$.

O subespaço vetorial dos polinômios de tipo finito será denotado por $\mathcal{P}_f(^m E; F)$.

3.2 Holomorfia em espaços de Banach

Nesta seção vamos desenvolver um pouco da teoria de tipos de holomorfia, exibindo resultados e definições que serão necessários no próximo capítulo.

Definição 3.2.1 Sejam E e F espaços de Banach complexos e $\mathcal{U}$ um subconjunto aberto de E. Uma função $f : \mathcal{U} \to F$ é dita *holomorfa* em $\mathcal{U}$ se para cada $a \in \mathcal{U}$ existem uma bola $B(a; r) \subset \mathcal{U}$ e uma sequência de polinômios $P_m \in \mathcal{P}(^m E; F)$ tais que

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} P_m(x - a)$$

uniformemente para $x \in B(a; r)$.

Vamos denotar por $\mathcal{H}(\mathcal{U}; F)$ o espaço vetorial de todas as funções holomorfas de $\mathcal{U}$ em F. Se $F = \mathbb{C}$, denotaremos $\mathcal{H}(\mathcal{U}; \mathbb{C})$ apenas por $\mathcal{H}(\mathcal{U})$.

A sequência $(P_m)_{m=0}^{\infty}$ é determinada de maneira única por f e por a. Se $P_m \in \mathcal{P}(^m E; F)$ é o polinômio correspondente a $A_m \in \mathcal{L}^s(^m E; F)$ por $P_m = \hat{A}_m$ para cada $m \in \mathbb{N}_0$, fixemos as notações:

$$d^m f(a) = m! A_m \quad \text{e} \quad \hat{d}^m f(a) = m! P_m.$$

Podemos obter assim as aplicações diferenciais

$$d^m f : a \in \mathcal{U} \longrightarrow d^m f(a) \in \mathcal{L}^s(^m E; F)$$

e

$$\hat{d}^m f : a \in \mathcal{U} \longrightarrow \hat{d}^m f(a) \in \mathcal{P}(^m E; F),$$

e também os operadores diferenciais

$$d^m : f \in \mathcal{H}(\mathcal{U}; F) \longrightarrow d^m f \in \mathcal{H}(\mathcal{U}, \mathcal{L}^s(^m E; F))$$

e

$$\hat{d}^m : f \in \mathcal{H}(\mathcal{U}; F) \longrightarrow \hat{d}^m f \in \mathcal{H}(\mathcal{U}, \mathcal{P}(^m E; F)).$$

Definição 3.2.2 Uma aplicação $f : E \to F$ é dita uma função *inteira* se f é holomorfa em todo E. Denotamos o espaço de todas as funções inteiras de E em F por $\mathcal{H}(E; F)$.

Exemplo 3.2.3 $\mathcal{P}(^m E; F) \subset \mathcal{H}(E; F)$.

Demonstração. Sejam $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ e $\check{P} \in \mathcal{L}^s(^m E; F)$ tal que $P(x) = \check{P}(\overbrace{x, \ldots, x}^{m})$ para cada $x \in E$. Dados $x, y \in E$, pela Fórmula do Binômio de Newton temos que

$$P(x + y) = \check{P}(x + y)^m = \check{P}\left(\sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} x^{m-k} y^k\right) = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} \check{P} x^{m-k} y^k,$$

onde $\check{P} x^{m-k} y^k = \check{P}(\underbrace{x, \ldots, x}_{m-k}, \underbrace{y, \ldots, y}_{k})$. Assim dados $a, x \in E$, segue que

$$P(x) = P(a + x - a) = \check{P}(a + (x - a))^m = \sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m - k!)} \check{P} a^{m-k} (x - a)^k$$

onde $\check{P}a^{m-k}$ denota o elemento de $\mathcal{L}^s({}^kE;F)$ dado por

$$\check{P}a^{m-k}(x_1,\ldots,x_k) = \check{P}(\underbrace{a,\ldots,a}_{m-k},x_1,\ldots,x_k).$$

Então P é holomorfa em E e

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{k!}\hat{d}^m P(a)(t) = & \ \tfrac{m!}{k!(m-k!)}\check{P}(a,\overset{m-k}{\cdots},a,t,\overset{k}{\cdots},t), \quad \text{se } k \leq m \\
\tfrac{1}{k!}\hat{d}^m P(a)(t) = & \ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \text{se } k > m
\end{aligned}$$

■

Teorema 3.2.4 ***(Fórmula Integral de Cauchy)*** *Sejam U um subconjunto aberto de E e $f \in \mathcal{H}(U;F)$. Considere $a \in U, t \in E$ e $r > 0$ tais que $a + \xi t \in U$ para todo $\xi \in \bar{\triangle}(0,r)$. Então para cada $m \in \mathbb{N}_0$ temos a Fórmula Integral de Cauchy*

$$\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(a)(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r}\frac{f(a+\xi t)}{\xi^{m+1}}d\xi.$$

Demonstração. Ver [16, Corolário 7.3, página 47].
■

Proposição 3.2.5 *Seja $\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-a)$ uma série de potências de E em F. Se existe $r > 0$ tal que $\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x-a) = 0$ para todo $x \in B(a;r)$, então $P_m = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$.*

Demonstração. Ver [16, Proposição 4.4, página 29]. ■

Definição 3.2.6 Um *tipo de holomorfia* Θ de E em F é uma sequência de espaços de Banach $(\mathcal{P}_\Theta({}^mE;F), \|\cdot\|_\Theta)_{m=0}^{\infty}$ para a qual são válidas as seguintes afirmações:

(i) Cada $\mathcal{P}_\Theta({}^mE;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}({}^mE;F)$;

(ii) $\mathcal{P}_\Theta({}^0E;F)$ coincide com $\mathcal{P}({}^0E;F) = F$ como um espaço vetorial normado;

(iii) Existe um número real $\sigma \geq 1$ tal que, dados $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}_0$, $k \leq m$, $a \in E$ e $P \in \mathcal{P}_\Theta({}^mE;F)$ temos que

$$\hat{d}^k P(a) \in \mathcal{P}_\Theta({}^kE;F), \left\|\frac{1}{k!}\hat{d}^k P(a)\right\|_\Theta \leq \sigma^m \|P\|_\Theta \|a\|^{m-k}.$$

Temos do Exemplo 3.2.3 e da condição (iii) que para cada $P \in \mathcal{P}_\Theta({}^mE;F)$ e $k \leq m$ temos que $\widehat{\check{P}a^{m-k}} = \frac{(m-k)!}{m!}\hat{d}^k P(a) \in \mathcal{P}_\Theta({}^kE;F)$ e

$$\begin{aligned}
\|\widehat{\check{P}a^{m-k}}\|_\Theta &= \left\|\frac{(m-k)!}{m!}\hat{d}^k P(a)\right\|_\theta \\
&= \frac{(m-k)!}{m!}\|\hat{d}^k P(a)\|_\theta \leq \frac{\sigma^m (m-k)!k!}{m!}\|P\|_\Theta \cdot \|a\|^{m-k}.
\end{aligned}$$

É claro que a sequência $(\mathcal{P}({}^mE;F))_{m=0}^{\infty}$ é um tipo de holomorfia de E em F. Provaremos agora que a sequência $(\mathcal{P}_N({}^mE;F))_{m=0}^{\infty}$ também é um tipo de holomorfia de E em F. Mas antes faremos uma observação.

Observação: Sejam $m, j \in \mathbb{N}_0$. Então,

$$\begin{aligned} 2^{m+j} = (1+1)^{m+j} &= \sum_{k=1}^{m+j} \frac{(m+j)!}{k!(m+j-k)!} 1^{m+j-k} 1^k \\ &\geq \frac{(m+j)!}{k!(m+j-k)!} \end{aligned}$$

e, se $k = j$, tem-se

$$2^{m+k} \geq \frac{(m+k)!}{k!m!}.$$

Se $j = 0$, tem-se

$$2^m \geq \frac{m!}{k!(m-k)!}. \tag{3.9}$$

Exemplo 3.2.7 *A sequência $(\mathcal{P}_N(^mE; F), \|\cdot\|_N)_{m=0}^{\infty}$ é um tipo de holomorfia de E em F. Além disso,*

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{k!} \hat{d}^k P(a) \right\|_N &\leq \frac{m!}{k!(m-k)!} \|P\|_N \|a\|^{m-k} \\ &\leq 2^m \|P\|_N \|a\|^{m-k} \end{aligned}$$

para todo $a \in E$, $k \leq m$ e $P \in \mathcal{P}_N(^mE; F)$.

Demonstração. Como $\mathcal{P}_N(^mE; F) \subset \mathcal{P}(^mE; F)$ e $\mathcal{P}(^mE; F)$ é um espaço de Banach, segue que, para cada $m \in \mathbb{N}_0$, $\mathcal{P}_N(^mE; F)$ é um espaço de Banach. As condições (i) e (ii) da Definição 3.2.6 são triviais. Falta então demonstrar (iii).

Sejam $k \in \mathbb{N}_0$, $m \in \mathbb{N}_0$, $k \leq m$, $a \in E$ e $P \in \mathcal{P}_N(^mE; F)$. Dados $\varepsilon > 0$, como $P \in \mathcal{P}_N(^mE; F)$ é um polinômio nuclear existem sequências limitadas $(x_i')_{i=1}^{\infty} \subset E'$ e $(y_i)_{i=1}^{\infty} \subset F$ satisfazendo

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i'\|^m \|y_i\| < \infty,$$

de forma que

$$P(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i'(x)^m y_i. \tag{3.10}$$

Pela definição da norma nuclear temos que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i'\|^m \|y_i\| \leq \|P\|_N + \varepsilon. \tag{3.11}$$

Seja $\check{P} \in \mathcal{L}^s(^mE; F)$ tal que $P(x) = \check{P}(\overbrace{x, \ldots, x}^{m})$ para cada $x \in E$. Então pela fórmula de polarização temos que:

$$\check{P}(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{m! 2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ 1 \leq j \leq m}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m P(\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_m x_m)$$

$$\text{por (3.10)} = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ 1 \leq j \leq m}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m \sum_{i=1}^{\infty} x_i'(\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_m x_m)^m y_i$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ 1 \leq j \leq m}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m x_i'(\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_m x_m)^m y_i$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} y_i \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ 1 \leq j \leq m}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m x_i'(\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_m x_m)^m.$$

Agora observe que, aplicando a Fórmula de polarização em $Q \in L^s({}^m E; F)$ definida por $Q(x_1, \ldots, x_m) = x_i'(x_1) \cdots x_i'(x_m)$ temos:

$$\begin{aligned} Q(x_1, \ldots, x_m) &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ 1 \leq j \leq m}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m Q(\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_m x_m)^m \\ &= \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ 1 \leq j \leq m}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m x_i'(\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_m x_m)^m. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\check{P}(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i \frac{1}{m!2^m} \sum_{\substack{\varepsilon_j = \pm 1 \\ 1 \leq j \leq m}} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m x_i'(\varepsilon_1 x_1 + \ldots + \varepsilon_m x_m)^m$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} Q(x_1, \ldots, x_m) y_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i'(x_1) \cdots x_i'(x_m) y_i$$

para todos $x_1, \ldots, x_m \in E$. Pelo Exemplo 3.2.3, se $k \leq m$ temos que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} \hat{d}^k P(a)(t) &= \frac{m!}{k!(m-k)!} \check{P} a^{m-k} t^k \\ &= \frac{m!}{k!(m-k)!} \sum_{i=1}^{\infty} [x_i'(a)]^{m-k} [x_i'(t)]^k y_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} [x_i'(t)]^k \frac{m!}{k!(m-k)!} [x_i'(a)]^{m-k} y_i. \end{aligned}$$

Logo para cada $a \in E$ e $k \leq m$, $\hat{d}^k P(a) \in \mathcal{P}_N({}^k E; F)$ e

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{k!} \hat{d}^k P(a) \right\|_N &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i'\|^k \left\| \frac{m!}{k!(m-k)!} [x_i'(a)]^{m-k} y_i \right\| \\ &\leq \frac{m!}{k!(m-k)!} \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i'\|^k \|x_i'\|^{m-k} \|a\|^{m-k} \|y_i\| \\ &= \frac{m!}{k!(m-k)!} \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i'\|^m \|y_i\| \|a\|^{m-k} \\ \text{por (3.11)} \quad &\leq \frac{m!}{k!(m-k)!} (\|P\|_N + \varepsilon) \|a\|^{m-k} \\ \text{por (3.9)} \quad &\leq 2^m (\|P\|_N + \varepsilon) \|a\|^{m-k}, \end{aligned}$$

e logo a demonstração é concluída. ■

Proposição 3.2.8 *Seja $(\mathcal{P}_\Theta(^mE;F))_{m=0}^\infty$ um tipo de holomorfia de E em F. A aplicação inclusão $\mathcal{P}_\Theta(^mE;F) \subset \mathcal{P}(^mE;F)$ é contínua para cada $m \in \mathbb{N}_0$ e $\|P\| \leq \sigma^m \|P\|_\Theta$.*

Demonstração. Ver [18, Proposição 1, página 34]. ■

Vamos agora fazer um estudo sobre as funções inteiras Θ-holomorfas de tipo limitado.

Definição 3.2.9 Uma função inteira $f \in \mathcal{H}(E;F)$ é de *tipo limitado* se leva conjuntos limitados de E em conjuntos limitados de F.

Vamos indicar por $\mathcal{H}_b(E;F)$ o conjunto de tais funções.

Definição 3.2.10 Sejam $(\mathcal{P}_\Theta(^mE;F))_{m=0}^\infty$ um tipo de holomorfia de E em F e $f : E \to F$ uma função inteira, com série de Taylor em torno da origem dada por $f(x) = \sum_{m=0}^\infty \frac{1}{m!}\hat{d}^m f(0)(x)$. Então f é dita uma função inteira Θ-*holomorfa de tipo limitado* de E em F se:

(i) $\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(0) \in \mathcal{P}_\Theta(^mE;F)$, para todo $m \in \mathbb{N}_0$.

(ii) $\lim_{m\to\infty}(\frac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(0)\|_\Theta)^{\frac{1}{m}} = 0$.

Denotamos por $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$ o subespaço vetorial de $\mathcal{H}(E;F)$ de todas as funções inteiras Θ-holomorfas de tipo limitado de E em F.

Proposição 3.2.11 *Se $(\mathcal{P}_\Theta(^mE;F))_{m=0}^\infty$ é um tipo de holomorfia de E em F, então*

$$\mathcal{P}_\Theta(^mE;F) \subset \mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$$

para todo $m \in \mathbb{N}_0$.

Demonstração. Seja $P \in \mathcal{P}_\Theta(^mE;F)$. Vamos verificar inicialmente que P é uma função inteira. Do Exemplo 3.2.3 temos que $\mathcal{P}(^mE;F) \subset \mathcal{H}(E;F)$. Como $(\mathcal{P}_\Theta(^mE;F))_{m=0}^\infty$ é um tipo de holomorfia de E em F, $\mathcal{P}_\Theta(^mE;F) \subset \mathcal{P}(^mE;F)$. Logo $P \in \mathcal{H}(E;F)$.

Considere a série de Taylor de P em volta da origem dada por

$$P(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{k!}\hat{d}^k P(0)(x).$$

Do Exemplo 3.2.3 temos que

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{k!}\hat{d}^m P(0)(t) &= \tfrac{m!}{k!(m-k!)}\check{P}(0,\overset{m-k}{\cdots},0,t,\overset{k}{\cdots},t), \quad &\text{se } k \leq m \\
\tfrac{1}{k!}\hat{d}^m P(0)(t) &= 0, &\text{se } k > m.
\end{aligned}$$

Mas se $m-k \neq 0$ teremos $\check{P}(0,\overset{m-k}{\cdots},0,t,\overset{k}{\cdots},t) = 0$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{k!}\hat{d}^k P(0)(t) &= 0, \quad &\text{se } k \neq m \\
\tfrac{1}{k!}\hat{d}^m P(0)(t) &= P(t), &\text{se } k = m.
\end{aligned}$$

Portanto, $\hat{d}^k P(0) \in \mathcal{P}_\Theta({}^k E; F)$ para todo k e, claramente,

$$\lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k!} \|\hat{d}^k P(0)\|_\Theta \right)^{\frac{1}{k}} = 0.$$

Portanto $P \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E; F)$. ■

Teorema 3.2.12 *Se $f \in \mathcal{H}(E; F)$, então $\frac{1}{m!}\hat{d}^m f \in \mathcal{H}(E; \mathcal{P}({}^m E; F))$ e*

$$\frac{1}{k!}\hat{d}^k \left(\frac{1}{m!}\hat{d}^m f \right)(a) = \frac{1}{m!}\hat{d}^m \left(\frac{1}{(m+k)!}\hat{d}^{m+k} f(a) \right)$$

para todos $m, k \in \mathbb{N}_0$ e $a \in E$. Assim a série de Taylor para $\frac{1}{m!}\hat{d}^m f$ em volta da origem, no ponto a, é dada por

$$\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\hat{d}^m \left(\frac{1}{(m+k)!}\hat{d}^{m+k} f(0) \right)(a).$$

Demonstração. Ver [16][Teorema 7.17, página 54]. ■

Proposição 3.2.13 *Seja $f : E \to F$ uma função inteira. Então $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E; F)$ se, e somente se*

(i) $\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(a) \in \mathcal{P}_\Theta({}^m E; F)$, *para todo $a \in E$ e $m \in \mathbb{N}_0$;*

(ii) $\lim_{m\to\infty}(\left\|\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(a)\right\|_\Theta)^{\frac{1}{m}} = 0$, *para todo $a \in E$.*

Demonstração. Seja $f : E \longrightarrow F$ uma função inteira satisfazendo (i) e (ii). Então para $a = 0$ é verdade que

$$\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(0) \in \mathcal{P}_\Theta({}^m E; F), \text{ para todo } m \in \mathbb{N}_0 \text{ e } \lim_{m\to\infty} \left(\left\| \frac{1}{m!}\hat{d}^m f(a) \right\|_\Theta \right)^{\frac{1}{m}} = 0.$$

Logo da Definição 3.2.10 segue que $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E; F)$.

Considere $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E; F)$ e $a \neq 0 \in E$. Logo $\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(0) \in \mathcal{P}_\Theta({}^m E; F)$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$ e $\lim_{m\to\infty}(\frac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(0)\|_\Theta)^{\frac{1}{m}} = 0$. Seja $\varepsilon > 0$, de forma que $\varepsilon \cdot \|a\| < 1$ e considere $\sigma \geq 1$ da condição (iii) da Definição 3.2.6. Então, como $\lim_{m\to\infty}(\frac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(0)\|_\Theta)^{\frac{1}{m}} = 0$ e $\frac{\varepsilon}{\sigma} > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\frac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(0)\|_\Theta \right)^{\frac{1}{m}} \leq \frac{\varepsilon}{\sigma} \text{ para todo } m \geq m_0, \text{ ou seja }, \frac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(0)\|_\Theta \leq \left(\frac{\varepsilon}{\sigma} \right)^{\frac{1}{m}}$$

sempre que $m \geq m_0$.

Seja $C(\varepsilon) = \text{ máx } \left\{ \left\{ \frac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(0)\|_\Theta (\frac{\sigma}{\varepsilon})^m / m < m_0 \right\} \cup \{1\} \right\}$. Assim se $m \geq m_0$,

$$\frac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(0)\|_\Theta \leq \left(\frac{\varepsilon}{\sigma} \right)^m \leq C(\varepsilon) \left(\frac{\varepsilon}{\sigma} \right)^m.$$

Se $m < m_0$ temos

$$\frac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(0)\|_\Theta \left(\frac{\sigma}{\varepsilon} \right)^m \leq C(\varepsilon)$$

e logo, $\frac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(0)\|_\Theta \leq C(\varepsilon)\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)^m$. Portanto

$$\frac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(0)\|_\Theta \leq C(\varepsilon)\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)^m, \tag{3.12}$$

para todo $m \in \mathbb{N}_0$. Vamos mostrar agora a condição (i). Seja $m \in \mathbb{N}_0$. Pelo Teorema 3.2.12, temos que

$$\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\hat{d}^m\left(\frac{1}{(m+k)!}\hat{d}^{m+k} f(0)\right)(a).$$

Como, por hipótese, $\frac{1}{(m+k)!}\hat{d}^{m+k} f(0) \in \mathcal{P}_\Theta(^{m+k}E; F)$ para todo k, usando a condição (iii) da Definição 3.2.6, concluímos que

$$\frac{1}{m!}\hat{d}^m\left(\frac{1}{(m+k)!}\hat{d}^{m+k} f(0)\right)(a) \in \mathcal{P}_\Theta(^{m+k}E; F) \text{ e também}$$

$$\left\|\frac{1}{m!}\hat{d}^m\left(\frac{1}{(m+k)!}\hat{d}^{m+k} f(0)\right)(a)\right\|_\Theta \leq \sigma^{m+k}\left\|\frac{1}{(m+k)!}\hat{d}^{m+k} f(0)\right\|_\Theta \|a\|^k. \tag{3.13}$$

Agora temos,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(a)\|_\Theta &= \left\|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\hat{d}^m\left(\frac{1}{(m+k)!}\hat{d}^{m+k} f(0)\right)(a)\right\|_\Theta \\
\text{por (3.13)} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^{m+k}\left\|\frac{1}{(m+k)!}\hat{d}^{m+k} f(0)\right\|_\Theta \|a\|^k \\
\text{por (3.12)} &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^{m+k} C(\varepsilon)\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)^{m+k} \|a\|^k = C(\varepsilon)\frac{\varepsilon^m}{1-\varepsilon\|a\|},
\end{aligned}$$

onde ε é tal que $\varepsilon \cdot \|a\| < 1$. Assim segue que

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(a)\|_\Theta\right)^{\frac{1}{m}} \leq \lim_{m\to\infty}\sqrt[m]{\frac{C(\varepsilon)}{1-\varepsilon\|a\|}}\varepsilon = \varepsilon.$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ temos que $\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(a)\|_\Theta\right)^{\frac{1}{m}} = 0$. Portanto isto prova (i) e (ii). ■

Vamos agora introduzir uma topologia no espaço $\mathcal{H}_{\Theta b}(E; F)$ das funções Θ-holomorfas de tipo limitado. Para isso, considere a seguinte família de seminormas:

$$f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E; F) \to \|f\|_{\Theta,\rho} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\rho^m}{m!}\|\hat{d}^m f(0)\|_\Theta, \tag{3.14}$$

para cada $\rho > 0$.

Dotamos $\mathcal{H}_{\Theta b}(E; F)$ com a topologia τ_Θ gerada pela família de seminormas (3.14). É claro que $[\mathcal{H}_{\Theta b}(E; F), \tau_\Theta]$ é um espaço localmente convexo de Hausdorff.

Proposição 3.2.14 $[\mathcal{H}_{\Theta b}(E; F), \tau_\Theta]$ *é um espaço de Fréchet.*

Demonstração. Para que $[\mathcal{H}_{\Theta b}(E; F), \tau_\Theta]$ seja um espaço de Fréchet devemos provar que esse espaço é localmente convexo, metrizável e completo. Provemos que $[\mathcal{H}_{\Theta b}(E; F), \tau_\Theta]$ é localmente convexo. Temos que as vizinhanças do zero (nesse caso, função nula) em $\mathcal{H}_{\Theta b}(E; F)$ contém vizinhanças do tipo $A = \{f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E;F) : \|f\|_{\Theta,\rho} < \varepsilon\}$, $\varepsilon, \rho > 0$, as quais são convexas. De fato, dados $\alpha, \beta \geq 0$ e $f, g \in A$ temos que

$$\begin{aligned}\|\alpha f + \beta g\|_{\Theta,\rho} &\leq \|\alpha f\|_{\Theta,\rho} + \|\beta g\|_{\Theta,\rho} = \alpha\|f\|_{\Theta,\rho} + \beta\|g\|_{\Theta,\rho} \\ &< \alpha \cdot \varepsilon + \beta \cdot \varepsilon = (\alpha + \beta) \cdot \varepsilon = \varepsilon.\end{aligned}$$

Portanto $\alpha f + \beta g \in A$ e logo A é convexo. Como toda vizinhança do zero, contém uma vizinhança convexa do zero, concluímos que $[\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F), \tau_\Theta]$ é localmente convexo.

Observe que a família enumerável de seminormas

$$\mathfrak{F} = \{\|f\|_{\Theta,n}/n \in \mathbb{N}\}$$

define a topologia τ_Θ em $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$. Logo, como $[\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F), \tau_\Theta]$ é um espaço localmente convexo de Hausdorff, segue do Teorema 1.1.15 que esse espaço é metrizável.

Provemos agora que $[\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F), \tau_\Theta]$ é completo. Seja $\varepsilon > 0$. Seja $(f_k)_{k=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em $[\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F), \tau_\Theta]$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ para $\frac{\varepsilon}{4} > 0$ existe um $K_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|f_k - f_j\|_{\Theta,\rho} < \frac{\varepsilon}{4}$, sempre que $k, j \geq K_0$. Assim, dados $\rho \geq 1$ e $m \in \mathbb{N}$, se $k, j \geq K_0$ temos

$$\begin{aligned}\left\|\frac{1}{m!}\hat{d}^m f_k(0) - \frac{1}{m!}\hat{d}^m f_j(0)\right\|_\Theta &\leq \rho^m \left\|\frac{1}{m!}\hat{d}^m f_k(0) - \frac{1}{m!}\hat{d}^m f_j(0)\right\|_\Theta \\ &\leq \|f_k - f_j\|_{\Theta,\rho} \\ &< \frac{\varepsilon}{4}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Logo para cada m, $(\frac{1}{m!}\hat{d}^m f_k(0))_{k=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{P}_\Theta(^mE;F)$ o qual é um espaço de Banach. Então, existe $P_m \in \mathcal{P}_\Theta(^mE;F)$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{m!}\hat{d}^m f_k(0) = P_m.$$

Considere $f(x) = \sum_{m=0}^\infty P_m(x)$. Veja que $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$. De fato, como

$$\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(0) = P_m \in \mathcal{P}_\Theta(^mE;F),$$

resta provar que $\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m!}\|\hat{d}^m f(0)\|_\Theta\right)^{\frac{1}{m}} = \lim_{m\to\infty}(\|P_m\|_\Theta)^{\frac{1}{m}} = 0$. Para cada $\rho > 0$ existe $0 \leq M_\rho < \infty$ tal que $\|f_k\|_{\Theta,\rho} \leq M_\rho$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Segue que

$$\rho^m \left\|\frac{1}{m!}\hat{d}^m f_k(0)\right\|_\Theta \leq \|f_k\|_{\Theta,\rho} \leq M_\rho, \text{ o que implica}$$

$$\left\|\frac{1}{m!}\hat{d}^m f_k(0)\right\|_\Theta \leq \frac{M_\rho}{\rho^m}, \tag{3.16}$$

para todos $k, m \in \mathbb{N}$.

Observe que

$$\begin{aligned}\|P_m\|_\Theta &\leq \left\|P_m - \frac{1}{m!}\hat{d}^m f_k(0)\right\|_\Theta + \left\|\frac{1}{m!}\hat{d}^m f_k(0)\right\|_\Theta \\ &\leq \left\|P_m - \frac{1}{m!}\hat{d}^m f_k(0)\right\|_\Theta + \frac{M_\rho}{\rho^m}.\end{aligned}$$

Fazendo $k \to \infty$ temos que

$$\|P_m\|_\Theta \leq \frac{M_\rho}{\rho^m} \tag{3.17}$$

para cada $m = 0, 1, \dots$ e então

$$\lim_{m\to\infty} \|P_m\|_\Theta^{\frac{1}{m}} \leq \frac{1}{\rho}.$$

Fazendo agora $\rho \to \infty$, temos que

$$\lim_{m\to\infty} \|P_m\|_\Theta^{\frac{1}{m}} = 0.$$

Falta mostrar que $f_k \to f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$ na topologia τ_Θ de $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$. Sejam $\varepsilon > 0$ e $\rho > 0$ fixos. Assim se $\rho_1 > 0$ é tal que $0 < \rho < \rho_1$, usando (3.17), temos que

$$\sum_{m=0}^{\infty} \rho^m \|P_m\|_\Theta \leq \sum_{m=0}^{\infty} \rho^m \frac{M_{\rho_1}}{\rho_1^m} = M_{\rho_1} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^m < \infty$$

e usando (3.16), segue que

$$\sum_{m=0}^{\infty} \rho^m \left\| \frac{1}{m!} \hat{d}^m f_j(0) \right\|_\Theta \leq \sum_{m=0}^{\infty} M_{\rho_1} \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^m < \infty.$$

Logo existe um $n > 0$ tal que

$$\sum_{m=n}^{\infty} \rho^m \left\| \frac{1}{m!} \hat{d}^m f_j(0) \right\|_\Theta < \frac{\varepsilon}{4} \tag{3.18}$$

para cada $j = 1, 2, \dots$ e

$$\sum_{m=n}^{\infty} \rho^m \|P_m\|_\Theta < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{3.19}$$

Como $\lim_{j\to\infty} \frac{1}{m!}\hat{d}^m f_j(0) = P_m$, temos que $\lim_{j\to\infty} \|\frac{1}{m!}\hat{d}^m f_j(0) - P_m\|_\Theta = 0$, e logo para $\frac{\varepsilon}{4n} > 0$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $\rho^m \|\hat{d}^m f_j(0) - P_m\|_\Theta < \frac{\varepsilon}{4n}$ sempre que $j \geq j_0$. Assim,

$$\sum_{m=0}^{n-1} \rho^m \left\| \frac{1}{m!} \hat{d}^m f_j(0) - P_m \right\|_\Theta < \underbrace{\frac{\varepsilon}{4n} + \dots + \frac{\varepsilon}{4n}}_{n} = n\frac{\varepsilon}{4n} = \frac{\varepsilon}{4}, \tag{3.20}$$

para todo $j \geq j_0$.

Logo, escolhendo j_0, k e n adequados temos que existe $K(\varepsilon,\rho)$ tal que

$$\begin{aligned}
\|f_k - f\|_{\Theta,\rho} &\leq \|f_k - f_j\|_{\Theta,\rho} + \|f_j - f\|_{\Theta,\rho} \\
\text{por (3.11)} \quad &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \left\| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\hat{d}^m f_j(0) - \sum_{m=0}^{\infty} P_m \right\|_{\Theta,\rho} \\
&= \frac{\varepsilon}{4} + \left\| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\hat{d}^m f_j(0) - P_m \right\|_{\Theta,\rho} \\
&= \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho^m}{m!} \left\| \hat{d}^m \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\hat{d}^m f_j(0) - P_m \right)(0) \right\|_{\Theta} \\
&= \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\rho^m}{m!} \left\| \hat{d}^m f_j(0) - m! P_m \right\|_{\Theta} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{m=0}^{n-1} \rho^m \left\| \frac{1}{m!}\hat{d}^m f_j(0) - P_m \right\|_{\Theta} + \sum_{m=n}^{\infty} \rho^m \left\| \frac{1}{m!}\hat{d}^m f_j(0) - P_m \right\|_{\Theta} \\
\text{por (3.20)} \quad &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \sum_{m=n}^{\infty} \rho^m \left\| \frac{1}{m!}\hat{d}^m f_j(0) \right\|_{\Theta} + \sum_{m=n}^{\infty} \rho^m \|P_m\|_{\Theta} \\
\text{por (3.18) e (3.19)} \quad &\leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon
\end{aligned}$$

para todo $k \geq K(\varepsilon,\rho)$. Portanto, provamos que $f_k \to f$ em $\mathcal{H}_{\Theta,b}(E;F)$. ■

Definição 3.2.15 Seja $f \in \mathcal{H}(E;F)$. O *polinômio de Taylor* $\tau_{n,f,a}(x)$ de ordem n de f em a, para cada $x \in E$, é definido por

$$\tau_{n,f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\hat{d}^k f(a)(x-a).$$

O lema abaixo prova a convergência do polinômio de Taylor de ordem n na origem de $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ para f na topologia τ_Θ do espaço $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$.

Lema 3.2.16 *Sejam $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$ e $\tau_{n,f,0}$ polinômio de Taylor de ordem n de f na origem. Então para cada $\rho > 0$ temos*

$$\lim_{n\to\infty} \|f - \tau_{n,f,0}\|_{\Theta,\rho} = 0.$$

Demonstração. Seja $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$ e considere a série de Taylor de f em volta da origem dada por $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\hat{d}^k f(0)$. Veja que

$$\begin{aligned}
\|f - \tau_{n,f,0}\|_{\Theta,\rho} &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\hat{d}^k f(0) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\hat{d}^k f(0) \right\|_{\Theta,\rho} \\
&= \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}\hat{d}^k f(0) \right\|_{\Theta,\rho} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} \left\| \hat{d}^k \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k!}\hat{d}^k f(0) \right) \right\|_{\Theta} \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} \left\| k! \frac{1}{k!}\hat{d}^k f(0) \right\|_{\Theta} \\
&= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} \left\| \hat{d}^k f(0) \right\|_{\Theta}
\end{aligned}$$

Como $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$, segue que

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k!}\|\hat{d}^k f(0)\|_\Theta\right)^{\frac{1}{k}} = 0.$$

Logo

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\rho^k}{k!}\|\hat{d}^k f(0)\|_\Theta\right)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty}\rho\left(\frac{1}{k!}\|\hat{d}^k f(0)\|_\Theta\right)^{\frac{1}{k}} = 0.$$

Portanto, pelo teste da raiz, provamos que a série $\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k!}\left\|\hat{d}^k f(0)\right\|_\Theta$ converge. E logo

$$\lim_{n\to\infty}\|f-\tau_{n,f,0}\| = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k!}\left\|\hat{d}^k f(0)\right\|_\Theta = 0.$$

■

Capítulo 4

Hiperciclicidade em $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$

Neste capítulo vamos demonstrar que os operadores de convolução sobre os espaços de funções inteiras Θ-holomorfas de tipo limitado, que não são múltiplos da identidade, são hipercíclicos. Este resultado foi provado em [4] e generaliza diversos resultados de hiperciclicidade nessa linha. Para isso, precisaremos ainda de alguns resultados de holomorfia. Como estes resultados são mais recentes e não fazem parte da literatura geral de holomorfia, preferimos introduzir neste capítulo, como ferramentas específicas para a prova do resultado principal.

4.1 π_1-tipo de holomorfia

Vamos agora exibir a definição de π_1-tipo de holomorfia introduzida em [9] (e refinada em [4]) e caracterizar o espaço dual de $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ usando a transformada de Borel.

Definição 4.1.1 Seja $(\mathcal{P}_\Theta(^mE;F))_{m=0}^\infty$ um tipo de holomorfia de E em F. Um Θ-tipo de holomorfia é dito ser um *π_1-tipo de holomorfia* se satisfaz as seguintes condições:

(i) Para todos $\phi \in E'$, $b \in F$ e $m \in \mathbb{N}_0$, temos que $\phi^m b \in \mathcal{P}_\Theta(^mE;F)$ e $\|\phi^m b\|_\Theta \leq \|\phi\|^m \|b\|$;

(ii) Para cada m, $\mathcal{P}_f(^mE;F)$ é denso em $(\mathcal{P}_\Theta(^mE;F), \|\cdot\|_\Theta)$.

Exemplo 4.1.2 *A sequência $(\mathcal{P}_N(^mE;F), \|\cdot\|_N)_{m=0}^\infty$ é um π_1-tipo de holomorfia de E em F.*

Proposição 4.1.3 *Seja Θ um π_1-tipo de holomorfia de E em F. Então, $\mathcal{P}_N(^mE;F) \subset \mathcal{P}_\Theta(^mE;F)$ e a aplicação inclusão é contínua.*

Demonstração. Seja $P \in \mathcal{P}_N(^mE;F)$. Então dado $\varepsilon > 0$ existem sequências $(x_i')_{i=1}^\infty \subset E'$ e $(y_i)_{i=1}^\infty \subset F$ limitadas tais que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i'\|^m \|y_i\| < (1+\varepsilon)\|P\|_N \tag{4.1}$$

e também

$$P = \sum_{i=1}^{\infty} x_i'^m \otimes y_i, \tag{4.2}$$

onde $x_i'^m \otimes y_i : E \longrightarrow F$, é dado por $x_i^m \otimes y_i(x) = x_i'(x)^m y_i$.

Defina $S_n = \sum_{i=1}^n \|x_i'\|^m \|y_i\|$. Logo, por (4.1), temos que $(S_n)_{n=1}^\infty$ é convergente e logo é uma sequência de Cauchy.

Considere $P_n = \sum_{i=1}^n x_i'^m \otimes y_i$. Veja que $(P_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{P}_\Theta(^mE;F)$. De fato, para $\varepsilon > 0$ dado acima existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > j \geq n_0$, temos que

$$
\begin{aligned}
\|P_n - P_j\|_\Theta &= \left\| \sum_{i=1}^{n} x_i'^m \otimes y_i - \sum_{i=1}^{j} x_i'^m \otimes y_i \right\|_\Theta \\
&\leq \left\| \sum_{i=j+1}^{n} x_i'^m \otimes y_i \right\|_\Theta \\
&\leq \sum_{i=j+1}^{n} \|x_i'^m \otimes y_i\|_\Theta \\
\text{pela Definição 4.1.1} &\leq \sum_{i=j+1}^{n} \|x_i'\|^m \|y_i\| \\
\text{por } (S_n) \text{ ser de Cauchy} &< \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Então como $\mathcal{P}_\Theta(^m E; F)$ é um espaço de Banach existe $Q \in \mathcal{P}_\Theta(^m E; F)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|P_n - Q\|_\Theta = 0$. Assim, pela Proposição 3.2.8 temos que

$$\|P_n - Q\| \leq \sigma^m \|P_n - Q\|_\Theta.$$

Logo $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i'(x)^m y_i = Q(x)$, ou seja, $Q(x) = P(x)$, para todo $x \in E$. Agora, observe que

$$
\begin{aligned}
\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i'^m \otimes y_i \right\|_\Theta &\leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i'^m \otimes y_i\|_\Theta \\
\text{pela Definição 4.1.1} &\leq \sum_{i=1}^{n} \|x_i'\|^m \|y_i\|.
\end{aligned}
$$

Daí segue que

$$
\begin{aligned}
\|P\|_\Theta &= \left\| \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} x_i'^m \otimes y_i \right\|_\Theta \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \|x_i'\|^m \|y_i\| = \sum_{i=1}^{\infty} \|x_i'\|^m \|y_i\| \\
\text{por (4.1)} &< (1+\varepsilon)\|P\|_N.
\end{aligned}
$$

Fazendo $\varepsilon \to 0$ temos que $\|P\|_\Theta \leq \|P\|_N$. ■

Corolário 4.1.4 *Para cada π_1-tipo de holomorfia Θ de E em F, $\mathcal{H}_{Nb}(E; F)$ está contido em $\mathcal{H}_{\Theta b}(E; F)$ e a aplicação inclusão é contínua.*

Proposição 4.1.5 *Seja Θ um π_1-tipo de holomorfia de E em F. Então o subespaço vetorial S de $\mathcal{H}_{\Theta b}(E; F)$ dado por $S = span\{e^\phi b : \phi \in E', b \in F\}$ é denso $\mathcal{H}_{\Theta b}(E; F)$.*

Demonstração. Primeiramente vamos provar que $e^\phi \cdot b \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E; F)$, para todos $\phi \in E'$ e $b \in F$. Como $e^\phi \cdot b = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \phi^m b$ e o raio de convergência dessa série é infinito segue que

$e^{\phi} \cdot b \in \mathcal{H}(E;F)$. Como Θ é um π_1-tipo de holomorfia segue que $\frac{\phi^m}{m!} b \in \mathcal{P}_{\Theta}(^m E;F)$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$ e pela condição (i) da Definição 4.1.1 segue que

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m!}\|\phi^m \cdot b\|_{\Theta}\right)^{\frac{1}{m}} \leq \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m!}\|\phi\|^m \cdot \|b\|\right)^{\frac{1}{m}} = \|\phi\| \lim_{m\to\infty}\frac{\|b\|^{\frac{1}{m}}}{\sqrt[m]{m!}} = 0.$$

Portanto $e^{\phi} \cdot b \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$ para todos $\phi \in E', b \in F$ e logo $\{e^{\phi} \cdot b : \phi \in E', b \in F\} \subset \mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$. Provemos agora que S é denso em $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$. Seja $\overline{S}$ o fecho de S na topologia de $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$. Seja $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$ e considere sua série de Taylor em volta da origem

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\hat{d}^k f(0).$$

Observe que se cada $\frac{1}{k!}\hat{d}^k f(0) \in \overline{S}$ então $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\hat{d}^k f(0) \in \overline{S}$, para todo $n \in \mathbb{N}_0$, ou seja, $\tau_{n,f,0} \in \overline{S}$ para todo $n \in \mathbb{N}_0$. Pelo Lema 3.2.16 temos $\|f - \tau_{n,f,0}\|_{\Theta,\rho} \longrightarrow 0$ quando $n \to \infty$ e daí $f \in \overline{S}$.

Agora, como Θ é um π_1-tipo de holomorfia temos que $\frac{1}{m!}\widehat{d}^m f(0) \in \mathcal{P}_{\Theta}(^m E;F)$ para cada m e logo basta mostrar que $\mathcal{P}_{\Theta}(^m E;F) \subseteq \overline{S}$, para cada $m \in \mathbb{N}_0$. Para provar isso basta mostrar que $\mathcal{P}_f(^m E;F) \subseteq \overline{S}$, para cada $m \in \mathbb{N}_0$. De fato, seja $P \in \mathcal{P}_{\Theta}(^m E;F)$ então segue de (ii) da Definição 4.1.1 que existe uma sequência $(P_j)_{j=1}^{\infty} \subset \mathcal{P}_f(^m E;F)$ tal que

$$\|P - P_j\|_{\Theta} \longrightarrow 0, \quad \text{quando } j \to \infty.$$

Para cada $\rho > 0$, como Θ é um π_1-tipo de holomorfia segue que $\mathcal{P}_f(^m E;F) \subset \mathcal{P}_{\Theta}(^m E;F) \subset \mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$ e, logo, $P_j, P \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$ para cada j. Daí temos

$$\|P - P_j\|_{\Theta,\rho} = \frac{\rho^m}{m!}\|P - P_j\|_{\Theta} \longrightarrow 0 \quad \text{quando } j \to \infty.$$

Logo $P \in \overline{\mathcal{P}_f(^m E;F)} \subseteq \overline{S}$, ou seja, $\mathcal{P}_{\Theta}(^m E;F) \subseteq \overline{S}$. Para provar que $\mathcal{P}_f(^m E;F) \subseteq \overline{S}$ basta mostrar que $\phi^n \cdot b \in \overline{S}$ para todos $n = 0, 1, 2, \ldots, \phi \in E'$ e $b \in F$. Vamos fazer isto por indução sobre n. Sejam $\phi \in E'$ e $b \in F$. É claro que

$$e^{\phi} \cdot b = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\phi^n \cdot b$$

no sentido de $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$. Logo

$$e^{\lambda\phi} \cdot b = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!}\phi^n \cdot b$$

para todo $\lambda \in \mathbb{C}$, no sentido de $\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$. Para cada $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{e^{\lambda\phi}\cdot b - b}{\lambda} - \phi\cdot b &= \frac{1}{\lambda}(e^{\lambda\phi}\cdot b - b - \lambda\phi\cdot b)\\
&= \frac{1}{\lambda}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\lambda^j\phi^j\cdot b - b - \lambda\phi\cdot b\right)\\
&= \frac{1}{\lambda}\left(b + \lambda\phi\cdot b + \sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j!}\lambda^j\phi^j\cdot b - b - \lambda\phi\cdot b\right)\\
&= \frac{1}{\lambda}\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j!}\lambda^j\phi^j\cdot b = \sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j!\lambda}\lambda^j\phi^j\cdot b\\
&= \sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j!}\lambda^{j-1}\phi^j\cdot b = \sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j!}\lambda\lambda^{j-2}\phi^j\cdot b\\
&= \lambda\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j!}\lambda^{j-2}\phi^j\cdot b.
\end{aligned}$$

Logo

$$\lim_{|\lambda|\to 0}\left\|\frac{e^{\lambda\phi}\cdot b - b}{\lambda} - \phi\cdot b\right\|_{\Theta,\rho} = \lim_{|\lambda|\to 0}|\lambda|\left\|\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j!}\lambda^{j-2}\phi^j\cdot b\right\|_{\Theta,\rho}. \tag{4.3}$$

Observe que, para $|\lambda| \leq 1$ temos

$$\left\|\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j!}\lambda^{j-2}\phi^j\cdot b\right\|_{\Theta,\rho} = \sum_{j=2}^{\infty}\rho^j|\lambda|^{j-2}\left\|\frac{\phi^j\cdot b}{j!}\right\|_{\Theta} \leq \sum_{j=2}^{\infty}\rho^j\left\|\frac{\phi^j\cdot b}{j!}\right\|_{\Theta} = \left\|\sum_{j=2}^{\infty}\frac{\phi^j\cdot b}{j!}\right\|_{\Theta,\rho} < \infty.$$

Então, segue de (4.3) que

$$\lim_{|\lambda|\to 0}\left\|\frac{e^{\lambda\phi}\cdot b - b}{\lambda} - \phi\cdot b\right\|_{\Theta,\rho} = \lim_{|\lambda|\to 0}|\lambda|\left\|\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j!}\lambda^{j-2}\phi^j\cdot b\right\|_{\Theta,\rho} = 0.$$

Logo $\phi\cdot b \in \overline{S}$. Suponhamos que $\phi^j\cdot b \in \overline{S}$ para todo $j \leq n-1$. Observe que, dado $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda^n}\left(e^{\lambda\phi}\cdot b - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}\lambda^j\phi^j\cdot b\right) - \frac{\phi^n\cdot b}{n!} &= \frac{1}{\lambda^n}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\lambda^j\phi^j\cdot b - \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}\lambda^j\phi^j\cdot b\right) - \frac{\phi^n\cdot b}{n!}\\
&= \frac{1}{\lambda^n}\left(\sum_{j=n}^{\infty}\frac{1}{j!}\lambda^j\phi^j\cdot b\right) - \frac{\phi^n\cdot b}{n!}\\
&= \frac{1}{\lambda^n}\left(\frac{1}{n!}\lambda^n\phi^n\cdot b + \sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j!}\lambda^j\phi^j\cdot b\right) - \frac{\phi^n\cdot b}{n!}\\
&= \frac{1}{\lambda^n}\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j!}\lambda^j\phi^j\cdot b = \sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j!}\lambda^{j-n}\phi^j\cdot b\\
&= \sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j!}\lambda\lambda^{j-n-1}\phi^j\cdot b\\
&= \lambda\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j!}\lambda^{j-n-1}\phi^j\cdot b.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\lim_{|\lambda|\to 0}\left\|\frac{1}{\lambda^n}\left(e^{\lambda\phi}\cdot b-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}\lambda^j\phi^j\cdot b\right)-\frac{\phi^n\cdot b}{n!}\right\|_{\Theta,\rho}=\lim_{|\lambda|\to 0}|\lambda|\left\|\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j!}\lambda^{j-n-1}\phi^j\cdot b\right\|_{\Theta,\rho}. \tag{4.4}$$

Como

$$\left\|\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{j!}\lambda^{j-n-1}\phi^j\cdot b\right\|_{\Theta,\rho}\leq\left\|\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{\phi^j\cdot b}{j!}\right\|_{\Theta,\rho}$$

para $|\lambda|$ suficientemente pequeno segue de (4.4) que

$$\lim_{|\lambda|\to 0}\left\|\frac{1}{\lambda^n}\left(e^{\lambda\phi}\cdot b-\sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{j!}\lambda^j\phi^j\cdot b\right)-\frac{\phi^n\cdot b}{n!}\right\|_{\Theta,\rho}=0.$$

Logo, $\phi^n\cdot b\in\overline{S}$ para todo $n\in\mathbb{N}_0$. Portanto $f\in\overline{S}$ e então $\overline{S}=\mathcal{H}_{\Theta b}(E;F)$. ■

Vamos agora definir a transformada de Borel. Suponhamos que Θ é um π_1-tipo de holomorfia de E em F. Podemos então definir a *transformada de Borel*

$$\mathfrak{B}_\Theta:[\mathcal{P}_\Theta(^mE;F)]'\longrightarrow\mathcal{P}(^mE';F')$$

definida por $\mathfrak{B}_\Theta T(\phi)(y)=T(\phi^m y)$, para todo $T\in[\mathcal{P}_\Theta(^mE;F)]'$, $\phi\in E'$ e $y\in F$. É claro que $\mathfrak{B}_\Theta$ está bem definida e é linear. Vamos denotar por $\mathcal{P}_{\Theta'}(^mE';F')$ a imagem de $\mathfrak{B}_\Theta$ em $\mathcal{P}(^mE';F')$ e definir a norma em $\mathcal{P}_{\Theta'}(^mE';F')$ por $\|\mathfrak{B}_\Theta T\|_{\Theta'}=\|T\|$. Então $([\mathcal{P}_\Theta(^mE;F)]',\|\cdot\|)$ é isometricamente isomorfo a $(\mathcal{P}_{\Theta'}(^mE';F'),\|\cdot\|_{\Theta'})$.

Definição 4.1.6 Seja Θ um π_1-tipo de holomorfia. Para $T\in[\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$ definimos a *transformada de Borel* de T, denotada por $\mathfrak{B}T$, como a função definida em E' por

$$\mathfrak{B}T(\phi)=T(e^\phi)\in\mathbb{C},\ \text{para todo }\phi\in E'.$$

Como provamos na proposição anterior que $e^\phi\in\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$, para todo $\phi\in E'$, segue que $\mathfrak{B}T$ está bem definida.

Definição 4.1.7 Sejam $(\mathcal{P}_\Theta(^mE))_{m=0}^\infty$ um π_1-tipo de holomorfia de E em $\mathbb{C}$ e $f\in\mathcal{H}(E')$. Então f é dita ser *Θ'-tipo exponencial* se:

(i) $\hat{d}^mf(0)\in\mathcal{P}_{\Theta'}(^mE')$ para cada $m\in\mathbb{N}_0$;

(ii) Existirem constantes $C\geq 0$, $\rho\geq 0$ tais que

$$\|\hat{d}^mf(0)\|_{\Theta'}\leq C\rho^m,\ \text{para todo }m\in\mathbb{N}_0.$$

O conjunto das funções Θ'-tipo exponencial será denotado por $Exp_{\Theta'}(E')$.

Proposição 4.1.8 *Seja Θ um π_1-tipo de holomorfia de E em $\mathbb{C}$. Se $T\in[\mathcal{H}_{\Theta b}(E),\tau_\Theta]'$, então $\mathfrak{B}T\in Exp_{\Theta'}(E')$ e a aplicação*

$$\mathfrak{B}:[\mathcal{H}_{\Theta b}(E),\tau_\Theta]'\longrightarrow Exp_{\Theta'}(E')$$

é um isomorfismo algébrico.

Demonstração. Vamos mostrar primeiramente que $\mathfrak{B}$ está bem definida. Para isso devemos provar que dado $T \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E), \tau_\Theta]'$ temos que $\mathfrak{B}T \in Exp_{\Theta'}(E')$. Como $\mathcal{P}_\Theta(^mE) \subset \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ podemos considerar a restrição $T_m = T \mid \mathcal{P}_\Theta(^mE)$ e logo $T_m \in [\mathcal{P}_\Theta(^mE)]'$. Agora, como

$$([\mathcal{P}_\Theta(^mE)]', \|\cdot\|) \cong (\mathcal{P}_{\Theta'}(^mE'), \|\cdot\|_{\Theta'})$$

para cada $T_m \in [\mathcal{P}_\Theta(^mE)]'$ existe um único polinômio $P'_m \in \mathcal{P}_{\Theta'}(^mE')$ tal que $\mathfrak{B}_\Theta T_m = P'_m$, ou seja, $\mathfrak{B}_\Theta T_m(\phi) = P'_m(\phi)$, para todo $\phi \in E'$ e logo $T_m(\phi^m) = P'_m(\phi)$. Mais ainda, como o isomorfismo é isométrico temos que

$$\|T_m\| = \|P'_m\|_{\Theta'}, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}_0. \tag{4.5}$$

Então,

$$\mathfrak{B}T(\phi) = T(e^\phi) = T\left(\sum_{m=o}^{\infty} \frac{1}{m!}\phi^m\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} T(\phi^m).$$

Portanto $\hat{d}^m\mathfrak{B}T(0) = P'_m$. Como $P'_m \in \mathcal{P}_{\Theta'}(^mE')$, segue que $\hat{d}^m\mathfrak{B}T(0) \in \mathcal{P}_{\Theta'}(^mE')$.

Como T é contínua, existem constantes $C \geq 0$, $\rho \geq 0$ tais que

$$|T(f)| \leq C\|f\|_{\Theta,\rho},$$

para cada $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$.

Em particular, para cada $Q_m \in \mathcal{P}_\Theta(^mE)$, temos

$$|T(Q_m)| \leq C\|Q_m\|_{\Theta,\rho} = C\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\rho^j}{j!}\|\hat{d}^j Q_m\|_\Theta = C\frac{\rho^m}{m!}\|m!Q_m\|_\Theta = C\rho^m\|Q_m\|_\Theta.$$

Daí segue que

$$\|T_m\| = \sup_{\|Q_m\|_\Theta \leq 1} |T_m(Q_m)| \leq C\rho^m\|Q_m\|_\Theta \leq C\rho^m,$$

para todo $m \in \mathbb{N}_0$.

De (4.5) temos que $\|P'_m\|_{\Theta'} = \|T_m\|$ e portanto $\|P'_m\|_{\Theta'} \leq C\rho^m$. Logo $\mathfrak{B}T \in Exp_{\Theta'}(E')$. Provemos agora que $\mathfrak{B}$ é injetora. Como $\mathfrak{B}$ é linear basta mostrarmos que $\mathfrak{B}T = 0$ implica em $T = 0$. Se $\mathfrak{B}T = 0$, então para cada $\phi \in E'$ temos $\mathfrak{B}T(\phi) = T(e^\phi) = 0$. Seja $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$. Pela Proposição 4.1.5 $\overline{\text{span}\{e^\phi : \phi \in E'\}}^{\tau_\Theta} = \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$, existe uma sequência $(e^{\phi_n})_{n=1}^\infty$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} e^{\phi_n} = f.$$

Como T é contínua

$$T(f) = \lim_{n\to\infty} T(e^{\phi_n}) = 0,$$

e logo, como f é arbitrária segue que $T \equiv 0$.

Falta mostrarmos que $\mathfrak{B}$ é sobrejetora. Seja $H \in Exp_{\Theta'}(E')$ e vamos denotar $\hat{d}^mH(0)$ por P'_m. Assim

$$H(\phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} P'_m(\phi),$$

e como $H \in Exp_{\Theta'}(E')$ tem-se que $P'_m \in \mathcal{P}_{\Theta'}(^mE')$ e $\|P'_m\|_{\Theta'} \leq C\rho^m$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$ e algum $C, \rho \geq 0$. Como $P'_m \in \mathcal{P}_{\Theta'}(^mE')$, existe um único funcional $H_m \in [\mathcal{P}_\Theta(^mE)]'$ tal que

$\mathfrak{B}_\Theta H_m = P'_m$, ou seja, $H_m(\phi^m) = P'_m(\phi)$ para cada $\phi \in E'$ e $\|H_m\| = \|P'_m\|_{\Theta'}$, para todo $m \in \mathbb{N}_0$. Para cada $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$, com $f = \sum_{m=0}^{\infty} Q_m$ fixo, seja

$$T(f) := \sum_{m=0}^{\infty} H_m(Q_m).$$

Provemos que $T \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$. É claro que T é linear. Observe que

$$\begin{aligned} |T(f)| &= \left|\sum_{m=0}^{\infty} H_m(Q_m)\right| \leq \sum_{m=0}^{\infty} |H_m(Q_m)| \\ &\leq \sum_{m=0}^{\infty} \|H_m\| \cdot \|Q_m\|_\Theta = \sum_{m=0}^{\infty} \|P'_m\|_{\Theta'} \|Q_m\|_\Theta \\ &\leq C \sum_{m=0}^{\infty} \rho^m \|Q_m\|_\Theta = C\|f\|_{\Theta,\rho}. \end{aligned}$$

Então para cada $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$, $T(f)$ está bem definida e $|T(f)| \leq C\|f\|_{\Theta,\rho}$. Portanto T é contínua. Logo $T \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$ e

$$\mathfrak{B}T(\phi) = T(e^\phi) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} H_m(\phi^m) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} P'_m(\phi) = H(\phi),$$

para cada $\phi \in E'$. Assim, dado $H \in Exp_{\Theta'}(E')$, encontramos $T \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$ tal que $\mathfrak{B}T = H$. Portanto $\mathfrak{B}$ é sobrejetora. ■

Proposição 4.1.9 *Seja Θ um π_1-tipo de holomorfia de E em $\mathbb{C}$ e $\mathcal{U}$ um subconjunto aberto não vazio de E'. Então o conjunto $S_0 = span\{e^\phi : \phi \in \mathcal{U}\}$ é denso em $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$.*

Demonstração. Suponha que S_0 não é denso em $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$. Então pelo Lema 1.1.6 temos que existe $T \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E), \tau_\Theta]'$ que se anula em $\overline{S_0}$. Em particular, $T(e^\phi) = 0$ para todo $\phi \in \mathcal{U}$. Logo $\mathfrak{B}T(\phi) = T(e^\phi) = 0$, para todo $\phi \in \mathcal{U}$. Então $\mathfrak{B}T$ é uma função holomorfa que se anula no conjunto aberto e não vazio $\mathcal{U}$. Assim pela Proposição 3.2.5 segue que $\mathfrak{B}T \equiv 0$ em E'. Pela Proposição 4.1.8 temos que $\mathfrak{B}$ é injetora e logo $T \equiv 0$. Esta contradição prova que S_0 é denso em $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$. ■

4.2 Hiperciclicidade dos Operadores de Convolução em $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$

Nessa seção vamos estudar os operadores de convolução em termos de hiperciclicidade. Começamos com a definição de operador de convolução.

Definição 4.2.1 Seja Θ um tipo de holomorfia de E em $\mathbb{C}$.

(i) Para cada $a \in E$ e $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$, a *translação de f por a* é definida por

$$\tau_a f : E \longrightarrow \mathbb{C}, (\tau_a f)(x) = f(x - a).$$

(ii) Um operador linear contínuo $L : \mathcal{H}_{\Theta b}(E) \longrightarrow \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ é chamado de *operador de convolução* em $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ se é invariante sob translação, isto é,

$$L(\tau_a f) = \tau_a(L(f))$$

para todo $a \in E$ e $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$.

O espaço vetorial de todos os operadores de convolução em $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ será denotado por $\mathcal{O}(\mathcal{H}_{\Theta b}(E))$

Proposição 4.2.2 *Sejam $a \in E$ e $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$. Então:*

(i) $\hat{d}^m f(\cdot)(a) \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ *e*

$$\hat{d}^m f(x)(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d^{m+k} f(0) x^k}\,(a)$$

no sentido de $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ para todo $m \in \mathbb{N}_0$

(ii)

$$(\tau_{-a} f)(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(x)(a)$$

no sentido de $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$, onde $(\tau_{-a} f)(x) = f(x - (-a)) = f(x + a)$.

Demonstração. *(i)* Seja $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ com série de Taylor em volta da origem dada por

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(0)(x).$$

Então $\hat{d}^m f(0) \in \mathcal{P}_{\Theta}(^m E)$ e

$$\lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{m!} \|\hat{d}^m f(0)\|_{\Theta} \right)^{\frac{1}{m}} = 0. \tag{4.6}$$

Pelo Teorema 3.2.12 e pela Fórmula Integral de Cauchy, segue que

$$\hat{d}^m f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{d}^m \left(\frac{1}{(m+k)!} \hat{d}^{m+k} f(0) \right)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d^{m+k} f(0) x^k}\,.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\hat{d}^m f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d^{m+k} f(0) x^k}\,(a) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} d^{m+k} f(0) x^k a^m \\
\text{pois } d^{m+k} f(0) \text{ é simétrica} \quad &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} d^{m+k} f(0) a^m x^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d^{m+k} f(0) a^m}\,(x) \\
&= \hat{d}^m f(a)(x).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Agora como $\hat{d}^m f(0) \in \mathcal{P}_\Theta({}^m E)$ para todo m, pela condição (iii) da Definição 3.2.6 temos que

$$\widehat{d^{m+k} f(0) a^m} \in \mathcal{P}_\Theta({}^k E)$$

e

$$\| \widehat{d^{m+k} f(0) a^m} \|_\Theta \leq \frac{\sigma^{m+k} m! k!}{(m+k)!} \|\hat{d}^{m+k} f(0)\|_\Theta \|a\|^m. \tag{4.8}$$

Então

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \left(\left\| \frac{1}{k!} \widehat{d^{m+k} f(0) a^m} \right\|_\Theta \right)^{\frac{1}{k}} &\leq \lim_{k\to\infty} \left(m! \sigma^{m+k} \left\| \frac{1}{(m+k)!} \hat{d}^{m+k} f(0) \right\|_\Theta \|a\|^m \right)^{\frac{1}{k}} \\
&= \sigma \lim_{k\to\infty} \left((\sigma\|a\|)^m m! \left\| \frac{1}{(m+k)!} \hat{d}^{m+k} f(0) \right\|_\Theta \right)^{\frac{1}{k}} \\
&= \sigma \lim_{k\to\infty} \left(\sqrt[k]{(\sigma\|a\|)^m m!} \right) \lim_{k\to\infty} \left(\left\| \frac{1}{(m+k)!} \hat{d}^{m+k} f(0) \right\|_\Theta \right)^{\frac{1}{k}} \\
\text{por (4.6)} \quad &= 0,
\end{aligned}$$

para todo $m \in \mathbb{N}_0$. Provamos então que $\hat{d}^m f(\cdot)(a) \in \mathcal{H}_{\theta b}(E)$. Falta mostrar que

$$\hat{d}^m f(\cdot)(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d^{m+k} f(0)(\cdot)^k}\ (a)$$

no sentido de $(\mathcal{H}_{\theta b}(E), \tau_\theta)$. Seja $\rho > 0$ então

$$\begin{aligned}
\left\| \hat{d}^m f(\cdot)(a) - \sum_{k=0}^{v} \frac{1}{k!} \left[\widehat{d^{m+k} f(0)(\cdot)^k} \right] (a) \right\|_{\Theta,\rho} &= \left\| \sum_{k=v+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d^{m+k} f(0)(\cdot)^k}\ (a) \right\|_{\Theta,\rho} \\
&= \left\| \sum_{k=v+1}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d^{m+k} f(0)(a)^m}\ (\cdot) \right\|_{\Theta,\rho} \\
&= \sum_{k=v+1}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} \| \widehat{d^{m+k} f(0)(a)^m} \|_\Theta \\
\text{por (4.8)} \quad &\leq \sum_{k=v+1}^{\infty} \sigma^{m+k} m! \rho^k \left\| \frac{1}{(m+k)!} \hat{d}^{m+k} f(0) \right\|_\Theta \|a\|^m \\
&= \frac{m! \|a\|^m}{\rho^m} \sum_{k=v+1}^{\infty} \frac{(\rho\sigma)^{m+k}}{(m+k)!} \|\hat{d}^{m+k} f(0)\|_\Theta \\
&= \frac{\|a\|^m m!}{\rho^m} \left\| \sum_{k=v+1}^{\infty} \frac{1}{(m+k)!} \hat{d}^{m+k} f(0) \right\|_{\Theta,\rho\sigma},
\end{aligned}$$

que converge a 0 quando $v \to \infty$, pois $f \in (\mathcal{H}_{\Theta b}(E), \tau_\Theta)$.

(ii) Sejam $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ e $a \in E$. Então a série de Taylor de $(\tau_{-a}f)(x)$ em volta da origem é:

$$\begin{aligned}(\tau_{-a}f)(x) &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\hat{d}^m\tau_{-a}f(0)(x)\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(0+a)(x)\\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(a)(x).\end{aligned}$$

Agora, de (4.7) temos que

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(a)(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\widehat{d^{m+k}f(0)a^m}\,(x).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}(\tau_{-a}f)(x) &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\widehat{d^{m+k}f(0)a^m}\,(x)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\widehat{d^{m+k}f(0)a^m}\,(x). \qquad (4.9)\end{aligned}$$

Como $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ pela Proposição 3.2.13, temos que $\tau_{-a}f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$. De fato, seja $b \in E$ e $m \in \mathbb{N}_0$. Veja que

$$\frac{1}{m!}\hat{d}^m(\tau_{-a}f)(b) = \frac{1}{m!}\hat{d}^m f(b+a) \in \mathcal{P}_{\Theta}(^mE;F) \text{ e}$$

$$\lim_{m\to\infty}\left(\left\|\frac{1}{m!}\hat{d}^m(\tau_{-a}f)(b)\right\|_{\Theta}\right)^{\frac{1}{m}} = \lim_{m\to\infty}\left(\left\|\frac{1}{m!}\hat{d}^m f(b+a)\right\|_{\Theta}\right)^{\frac{1}{m}} = 0.$$

Portanto $\tau_{-a}f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$.

Assim, para cada $\rho > 0$ temos que

$$\begin{aligned}
\left\| \tau_{-a} f - \sum_{m=0}^{\eta} \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(\cdot)(a) \right\|_{\Theta,\rho} &= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \hat{d}^k (\tau_{-a} f)(0)(\cdot) - \sum_{m=0}^{\eta} \frac{1}{m!} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d^{m+k} f(0) a^m} \ (\cdot) \right] \right\|_{\Theta,\rho} \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \hat{d}^k f(a)(\cdot) - \sum_{m=0}^{\eta} \frac{1}{m!} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \widehat{d^{m+k} f(0) a^m} \ (\cdot) \right] \right\|_{\Theta,\rho} \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \hat{d}^k f(a)(\cdot) - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\sum_{m=0}^{\eta} \frac{1}{m!} \widehat{d^{m+k} f(0) a^m} \ (\cdot) \right] \right\|_{\Theta,\rho} \\
&= \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[\hat{d}^k f(a)(\cdot) - \sum_{m=0}^{\eta} \frac{1}{m!} \widehat{d^{m+k} f(0) a^m} \ (\cdot) \right] \right\|_{\Theta,\rho} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} \left\| \hat{d}^k f(a)(\cdot) - \sum_{m=0}^{\eta} \frac{1}{m!} \widehat{d^{m+k} f(0) a^m} \right\|_{\Theta} \\
\text{por (4.7)} \quad &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} \left\| \sum_{m=\eta+1}^{\infty} \frac{1}{m!} \widehat{d^{m+k} f(0) a^m} \right\|_{\Theta} \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \sum_{m=\eta+1}^{\infty} \frac{1}{k! m!} \| \widehat{d^{m+k} f(0) a^m} \|_{\Theta} \\
\text{por (4.8)} \quad &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=\eta+1}^{\infty} \frac{\rho^k \sigma^{m+k}}{(m+k)!} \| \hat{d}^{m+k} f(0) \|_{\Theta} \|a\|^m.
\end{aligned}$$

Agora como $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ tem-se que

$$\lim_{m \to \infty} \left(\frac{1}{m!} \| \hat{d}^m f(0) \|_{\theta} \right)^{\frac{1}{m}} = 0,$$

ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{m!} \| \hat{d}^m f(0) \|_{\Theta} \leq C \cdot \varepsilon^m$$

para todo $m \in \mathbb{N}_0$. Escolhendo $\varepsilon > 0$ de forma que $\sigma \varepsilon \rho < 1$ e $\|a\| \sigma \varepsilon < 1$, segue que

$$\begin{aligned}
\left\| \tau_{-a} f - \sum_{m=0}^{\eta} \frac{1}{m!} \hat{d}^m f(\cdot)(a) \right\| &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=\eta+1}^{\infty} \rho^k \sigma^{m+k} \|a\|^m C \varepsilon \\
&= C \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\sigma \varepsilon \rho)^k \right) \left(\sum_{m=\eta+1}^{\infty} (\|a\| \sigma \varepsilon)^m \right),
\end{aligned}$$

que tende a 0 quando η tende a infinito. ∎

Defina a seguinte aplicação em $\mathcal{O}(\mathcal{H}_{\Theta b}(E))$:

$$\begin{array}{rccccl}
\Gamma_\Theta : & \mathcal{O}(\mathcal{H}_{\Theta b}(E)) & \longrightarrow & [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]' & & \\
& L & \longmapsto & \Gamma_\Theta(L) : \mathcal{H}_{\Theta b}(E) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\
& & & f & \longmapsto & \Gamma_\Theta(L)(f) := L(f)(0)
\end{array}$$

A partir disso, temos o seguinte resultado.

Lema 4.2.3 *Seja Θ um π_1-tipo de holomorfia de E em $\mathbb{C}$ e $L \in \mathcal{O}(\mathcal{H}_{\Theta b}(E))$ dado. Então:*

(a) *$L(e^\phi) = \mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))(\phi) \cdot e^\phi$ para todo $\phi \in E'$.*

(b) *L é múltiplo da aplicação identidade se, e somente se, $\mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))$ é constante.*

Demonstração. (a) Como $\Gamma_\Theta(L) \in [\mathcal{H}_{\Theta b}(E)]'$, pelo Teorema 4.1.8 temos

$$\mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))(\phi) = \Gamma_\Theta(L)(e^\phi) = L(e^\phi)(0)$$

para todo $\phi \in E'$. Observe que, dado $y \in E$

$$\tau_{-y}(e^\phi)(x) = e^\phi(x - (-y)) = e^\phi(x + y) = e^{\phi(x+y)} = e^{\phi(y)} \cdot e^{\phi(x)} = e^{\phi(y)} \cdot e^\phi(x)$$

para todo $x \in E$ e portanto $\tau_{-y}(e^\phi) = e^{\phi(y)} \cdot e^\phi$. Então

$$\begin{aligned}
L(e^\phi)(y) &= [\tau_{-y}(L(e^\phi))](0) \\
&= [L(\tau_{-y}(e^\phi))](0) \\
&= [L(e^{\phi(y)} \cdot e^\phi)](0) \\
&= e^{\phi(y)} \cdot L(e^\phi)(0) \\
&= e^{\phi(y)} \cdot \Gamma_\Theta(L)(e^\phi) \\
&= e^{\phi(y)} \cdot \mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))(\phi) \\
&= (\mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))(\phi) \cdot e^\phi)(y),
\end{aligned}$$

para todo $y \in E$. Portanto, $L(e^\phi) = \mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))(\phi) \cdot e^\phi$ para todo $\phi \in E'$.

(b) Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))(\phi) = \lambda$ para todo $\phi \in E'$. Por (a) segue que

$$L(e^\phi) = \mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))(\phi) \cdot e^\phi = \lambda \cdot e^\phi$$

para todo $\phi \in E'$. Como pela Proposição 4.1.9 o conjunto $span\{e^\phi : \phi \in E'\}$ é denso em $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ e $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$, temos que existe uma sequência $(e^{\phi_n})_{n=1}^\infty$ que converge para f. Como L é contínua,

$$L(f) = L(\lim_{n\to\infty} e^{\phi_n}) = \lim_{n\to\infty} L(e^{\phi_n}) = \lim_{n\to\infty} \lambda e^{\phi_n} = \lambda \lim_{n\to\infty} e^{\phi_n} = \lambda f.$$

Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $L(f) = \lambda f$ para todo $f \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$. Por (a) temos que

$$\lambda \cdot e^\phi = L(e^\phi) = \mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))(\phi) \cdot e^\phi$$

e logo $\mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))(\phi) = \lambda$ para todo $\phi \in E'$. ■

Proposição 4.2.4 *Seja $(\mathcal{P}_\Theta(^mE))_{m=0}^\infty$ um π_1-tipo de holomorfia de E em $\mathbb{C}$. Então o conjunto*

$$B = \{e^\phi : \phi \in E'\}$$

é um subconjunto de $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ linearmente independente.

Demonstração. Sabemos que o conjunto $\{e^\varphi : \varphi \in E'\} \subseteq \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ sempre que Θ é um π_1-tipo de holomorfia. Dado $a \in E$, da Proposição 4.2.2 segue que o operador diferenciação

$$D_a : \mathcal{H}_{\Theta b} \longrightarrow \mathcal{H}_{\Theta b}, \qquad D_a(f) = df(\cdot)(a)$$

está bem definido. Seja $\{e^{\varphi_i}\}_{i\in I}$ um subconjunto maximal de B linearmente independente. Seja $\varphi \in E'$ fixo e assuma que existem constantes não nulas $C_{i1}, \ldots, C_{ir} \in \mathbb{C}$ tal que

$$C_{i1}e^{\varphi_{i1}} + \ldots + C_{ir}e^{\varphi_{ir}} = e^{\varphi}. \tag{4.10}$$

Seja $a \in E$ qualquer. Observe que dado $\phi \in E'$ temos que $e^{\phi(x)} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(\phi(x))^j$ e assim

$$\widehat{d^{m+k}(e^{\phi})(0)x^k}\ (a) = d^{m+k}(e^{\phi})(0)x^k a^m = (\phi(x))^k(\phi(a))^m$$

para todo $m \in \mathbb{N}_0$. Assim, novamente pela Proposição 4.2.2, temos

$$\begin{aligned} d(e^{\phi})(x)(a) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\ \widehat{d^{k+1}(e^{\phi})(0)x^k}\ (a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\phi(x))^k(\phi(a)) \\ &= \phi(a)\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\phi(x))^k = \phi(a)e^{\phi(x)} \end{aligned}$$

para todo $x \in E$. Portanto,

$$d(e^{\phi})(\cdot)(a) = \phi(a)e^{\phi}. \tag{4.11}$$

Aplicando o operador D_a em (4.10) e usando (4.11) obtemos

$$C_{i1}\varphi_{i1}(a)e^{\varphi_{i1}} + \ldots + C_{ir}\varphi_{ir}(a)e^{\varphi_{ir}} = \varphi(a)e^{\varphi}. \tag{4.12}$$

Suponha que $\varphi(a) = 0$. Então, por (4.12), temos

$$C_{i1}\varphi_{i1}(a)e^{\varphi_{i1}} + \ldots + C_{ir}\varphi_{ir}(a)e^{\varphi_{ir}} = 0$$

e logo, como as constantes $C_{i1}, \ldots, C_{ir}$ são não nulas e o conjunto $\{e^{\varphi_i}\}_{i\in I}$ é linearmente independente, temos $C_{ij}\varphi_{ij}(a) = 0$, para todo $j \in \{1, \ldots, r\}$. Portanto $\varphi_{i1}(a) = \ldots = \varphi_{ir}(a) = 0 = \varphi(a)$. Agora se $\varphi(a) \neq 0$ segue de (4.12) que

$$\frac{C_{i1}\varphi_{i1}(a)}{\varphi(a)}e^{\varphi_{i1}} + \ldots + \frac{C_{ir}\varphi_{ir}(a)}{\varphi(a)}e^{\varphi_{ir}} = e^{\varphi},$$

e logo por (4.10) temos

$$\left(\frac{C_{i1}\varphi_{i1}(a)}{\varphi(a)} - C_{i1}\right)e^{\varphi_{i1}} + \ldots + \left(\frac{C_{ir}\varphi_{ir}(a)}{\varphi(a)} - C_{ir}\right)e^{\varphi_{ir}} = 0.$$

Então segue que

$$\frac{C_{i1}\varphi_{i1}(a)}{\varphi(a)} - C_{i1} = 0 \quad \text{o que implica}$$

$\varphi_{i1}(a) = \ldots = \varphi_{ir}(a) = \varphi(a)$. Como $a \in E$ é arbitrário, $\varphi_{i1} = \ldots = \varphi_{ir} = \varphi$. Portanto, $\{e^{\varphi_i}\}_{i\in I} = E'$ e logo B é linearmente independente. ■

Finalmente todas as ferramentas necessárias estão postas e estamos aptos a enunciar e demonstrar o principal resultado deste trabalho.

Teorema 4.2.5 *Seja E' separável e $(\mathcal{P}_{\Theta}(^mE))_{m=0}^{\infty}$ um π_1-tipo de holomorfia de E em $\mathbb{C}$. Então todo operador de convolução em $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ que não é múltiplo da identidade é hipercíclico.*

Demonstração. Seja $L : \mathcal{H}_{\Theta b}(E) \longrightarrow \mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ um operador de convolução que não é múltiplo da identidade. Vamos mostrar que L satisfaz o critério de Kitai. Primeiramente, como E' é separável e Θ é um π_1-tipo de holomorfia, temos que $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ também é separável. Sabemos da Proposição 3.2.14 que $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$ é um espaço de Fréchet. Vamos denotar por $\triangle$ o disco unitário aberto em $\mathbb{C}$. Considere os conjuntos

$$V = \{\phi \in E' : |\mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))(\phi)| < 1\} = \mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))^{-1}(\triangle)$$

e

$$W = \{\phi \in E' : |\mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))(\phi)| > 1\} = \mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))^{-1}(\mathbb{C} - \overline{\triangle}).$$

Como L não é múltiplo da identidade, pelo Lema 4.2.3 (b) segue que $\mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))$ não é constante e logo V e W são subconjuntos de E' não vazios. De fato, suponha que $W = \emptyset$. Então $|\mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))(\phi)| \leq 1$ para todo $\phi \in E'$. Assim a função $\mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))$ é inteira e limitada e portanto, pelo Teorema de Liouville, $\mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))$ é constante, absurdo. Portanto W é não vazio. Suponha agora que $V = \emptyset$. Então, para todo $\phi \in E'$, tem-se

$$|\mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))(\phi)| \geq 1 \text{ o que implica } \frac{1}{|\mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))(\phi)|} \leq 1.$$

Logo a função $\frac{1}{\mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))}$ é inteira e limitada e portanto, novamente pelo Teorema de Liouville é constante. Daí segue que $\mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))$ é constante, absurdo. Concluímos então que $V \neq \emptyset$.

Considere agora os seguintes subespaços de $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$

$$H_V = span\{e^\phi : \phi \in V\} \text{ e } H_W = span\{e^\phi : \phi \in W\}.$$

Pela Proposição 4.1.9 temos que H_V e H_W são densos em $\mathcal{H}_{\Theta b}(E)$. Vamos trabalhar primeiramente com H_V. Dado $\phi \in V$ pelo Lema 4.2.3 (a) temos

$$L(e^\phi) = \mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))(\phi) \cdot e^\phi \in H_V.$$

Então $L(H_V) \subseteq H_V$ pois L é linear. Aplicando o Lema 4.2.3 e a linearidade de L temos

$$L^n(e^\phi) = [\mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))(\phi)]^n \cdot e^\phi$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\phi \in V$. Consequentemente

$$L^n(f) = [\mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))(\phi)]^n \cdot f$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e $f \in H_V$. Como $|\mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))(\phi)| < 1$ sempre que $\phi \in V$, segue que $L^n(f) \to 0$ quando $n \to \infty$ para cada $f \in H_V$.

Vamos agora trabalhar com H_W. Para cada $\phi \in W$ temos $\mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))(\phi) \neq 0$ e então podemos definir

$$S(e^\phi) := \frac{e^\phi}{\mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))(\phi)} \in \mathcal{H}_{\Theta b}(E).$$

Pela Proposição 4.2.4, o conjunto $\{e^\phi : \phi \in W\}$ é linearmente independente, e logo podemos extender S para H_W por linearidade. Portanto $S(H_W) \subseteq H_W$ e

$$S^n(f) = \frac{f}{[\mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))(\phi)]^n}$$

para todo $f \in H_W$ e $n \in \mathbb{N}$. Como $|\mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))(\phi)| > 1$ sempre que $\phi \in W$, segue que $\lim_{n\to\infty} S^n(f) = 0$, para cada $f \in H_W$. Finalmente,

$$L \circ S(f) = L(S(f)) = L\left(\frac{f}{\mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))(\phi)}\right) = \mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))(\phi) \cdot \frac{f}{\mathfrak{B}(\Gamma_\Theta(L))(\phi)} = f,$$

para todo $f \in H_W$. Portanto, pelo critério de Kitai, L é hipercíclico. ■

4.3 Considerações finais

Até o momento, este resultado provado acima e que foi publicado em 2013 em [4], é o resultado mais geral de hiperciclicidade que se tem nessa direção. Este resultado generaliza diversos resultados anteriores nessa direção. A título de informação, podemos citar um resultado de 2007 de D. Carando, V. Dimant e S. Muro publicado em [6]:

Teorema 4.3.1 *Suponha que E' é separável. Seja $\{\mathfrak{B}_k(E')\}_k$ uma sequência coerente e $\{\mathfrak{A}_k(E)\}_k$ tal que $\mathfrak{A}_k(E)' = \mathfrak{B}_k(E')$ para todo k. Então, todo operador de convolução em $\mathcal{H}_{b\mathfrak{A}}(E)$ que não é múltiplo escalar da identidade é hipercíclico.*

Este resultado é um caso particular do Teorema 4.2.5, já que foi provado em [4] que a sequência coerente $\{\mathfrak{A}_k(E)\}_k$ é um π_1-tipo de holomorfia.

Outros casos particulares do Teorema 4.2.5 são quando consideramos o espaço $\mathcal{H}_{Nb}(E)$, ou seja, considerando como π_1-tipo de holomorfia os polinômios nucleares (veja Exemplo 4.1.2). O problema de estudar hiperciclicidade de operadores de convolução em $\mathcal{H}_{Nb}(E)$ foi proposto em [2] e só foi solucionado em [6] como caso particular do Teorema 4.3.1.

Também como aplicação do Teorema 4.2.5 segue que tomando $E = \mathbb{C}^n$ e $\mathcal{P}_\Theta(^m\mathbb{C}^n) = \mathcal{P}(^m\mathbb{C}^n)$, temos $\mathcal{H}_{\Theta b}(\mathbb{C}^n) = \mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$, e neste caso, o Teorema 4.2.5 resgata o resultado de Godefroy and Shapiro [10] que é o Teorema 2.2.8 desta dissertação.

Referências Bibliográficas

[1] Alves, T. R., *Polinômios dominados entre espaços de Banach*, Dissertação de mestrado, UFU, Uberlândia, 2011.

[2] Aron, R. and Markose, D.,*On universal functions*, J. Korean Math. Soc. **41** (2004), 65-76.

[3] Beauzamy , B., *Un opérateur, sur l'espace de Hilbert, dont tous les polynômes sont hypercycliques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **303** (1986), 923-925.

[4] Bertoloto, F. J. , Botelho, G. , Fávaro, V. V. and Jatobá A. M., *Hypercyclicity of convolution operators on spaces of entire functions*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **63** (2013), 1263-1283.

[5] Birkhoff, G. D., *Démonstration d'un théoreme élémentaire sur les fonctions entiéres*, C. R. Acad Sci., Paris **189** (1929), 473-475.

[6] Carando, D., Dimant,V. and Muro, S. , *Hypercyclic convolution operators on Fréchet spaces of analytic functions.* J. Math. Anal. Appl. **336** (2007), 1324–1340.

[7] Conway, J., *Functions of One Complex Variable*, Springer-Verlag, New York, 1978.

[8] Costa, D. C. B., *Operadores hipercíclicos em espaços vetoriais topológicos*, Dissertação de mestrado, USP, São Paulo, 2007.

[9] Fávaro, V. V. and Jatobá, A. M., *Holomorphy types and spaces of entire functions of bounded type on Banach spaces*, Czech. Math. J. **59** (2009), 909-927.

[10] Godefroy, G. and Shapiro, J. H., *Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds*, J. Funct. Anal. **98** (1991), 229–269.

[11] Gupta, C. P., *Convolution Operators and Holomorphic Mappings on a Banach Space*, Université de Sherbrooke, Canadá, 1969.

[12] Jatobá, A. M., *Tipos de Holomorfia em Espaços de Banach*, Dissertação de doutorado, UNICAMP, 2008.

[13] Kitai, C.,*Invariant closed sets for linear operators*, Thesis, University of Toronto, Toronto, 1982.

[14] Maclane, G. R., *Sequences of derivatives and normal families*, J. Analyse Math. **2** (1952/53), 72-87.

[15] Megginson, R. E., *An Introduction to Banach Space Theory*, Springer-Verlag, New York, 1998.

[16] Mujica, J., *Complex Analysis in Banach Spaces*, Math. Studies, 120, North-Holland, Amsterdam,1986.

[17] Mujica, J., *Notas de Aula de Espaços Vetoriais Topológicos*, IMECC-UNICAMP, 2004.

[18] Nachbin, L., *Topology on Spaces of Holomorphic Mappings*, Springer-Verlag, New York, 1969.

[19] Rolewicz S., *On orbits of elements*, Studia Math. **33** (1969), 17–22.

[20] Schaefer, H. H., *Topological Vector Spaces*, Springer, New York, 1971.

[21] Treves, F.,*Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels*, Academic Press, New York, 1967.