

IEGO FERNANDES PIRES

Um estudo sobre bases de Schauder em espaços
de Banach e aplicações do princípio de seleção de
Bessaga-Pelczynski.



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA

2013

IEGO FERNANDES PIRES

Um estudo sobre bases de Schauder em espaços
de Banach e aplicações do princípio de seleção de
Bessaga-Pelczynski.

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.

Linha de Pesquisa: Análise Funcional.

Orientador: Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU , MG, Brasil

P667e Pires, Igo Fernandes, 1986-
2013 Um estudo sobre bases de Schauder em espaços de Banach
e aplicações do princípio de seleção de Bessaga-Pelczynski / Igo
Fernandes Pires. - 2013.
61 f. : il.

Orientador: Vinícius Vieira Fávaro.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia,
Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Inclui bibliografia.

1. Matemática - Teses. 2. Análise funcional - Teses. 3. Banach,
Espaços de - Teses. I. Fávaro, Vinícius Vieira. II. Universidade Fe-
deral de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática.
III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO(A): Iego Fernandes Pires.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11112MAT004.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Análise Funcional.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Um estudo sobre bases de Schauder em espaços de Banach e aplicações do princípio de seleção de Bessaga-Pelczynski.

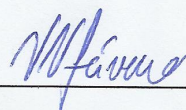
ORIENTADOR(A): Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 29 de Agosto de 2013, às 10h00min, pela seguinte Banca Examinadora:

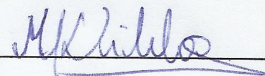
NOME

ASSINATURA

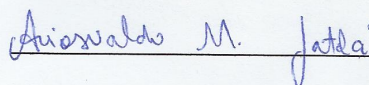
Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro
UFU - Universidade Federal de Uberlândia



Profa. Dra. Marcela Luciano Vilela de Souza
UFTM - Universidade Federal do Triângulo Mineiro



Prof. Dr. Ariosvaldo Marques Jatobá
UFU - Universidade Federal de Uberlândia



Uberlândia-MG, 29 de Agosto de 2013.

Dedicatória

Dedico este trabalho a toda minha família, especialmente ao meu pai Ginair Francisco Pires, à minha mãe Cátia Deus Fernandes, às minhas irmãs Iêla Fernanda e Ingrid Nayara, e, a minha esposa Keina, pelo incentivo, compreensão e todo o apoio.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por ter me abençoado em mais uma conquista.
Agradeço a minha esposa Keina, por acreditar em mim e nunca me deixar desanimar.
Aos meus pais Ginair e Cátia, por não medirem esforços para eu chegar até aqui.
Às minhas irmãs Iêla e Nayara, por estarem sempre a meu lado.
Ao professor Vinícius Vieira Faváro, pela paciência e compreensão na orientação desse trabalho.
À professora Marcela Luciano Vilela de Souza e ao professor Ariosvaldo Marques Jatobá, por terem aceito o convite para fazerem parte da banca de defesa deste trabalho.
Aos professores do programa de Pós-Graduação em Matemática da UFU.
Aos colegas do curso de mestrado: Bruno, Rafael, Letícia e Otoniel.
Ao meu primo Mário Sergio e aos amigos Rafael Fernandes, João Victor e Thiago Alves.
À CAPES pelo apoio financeiro.

PIRES, I. F. *Um estudo sobre bases de Schauder em espaços de Banach e aplicações do princípio de seleção de Bessaga-Pelczynski*. 2013. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Neste trabalho faremos um estudo detalhado da teoria básica de bases de Schauder em espaços de Banach. Mais precisamente, estudaremos os principais resultados envolvendo bases de Schauder (incondicionais), sequências básicas (incondicionais) e provaremos um importante resultado da teoria de espaços de Banach, o princípio de seleção de Bessaga-Pelczynski. Estudaremos também algumas aplicações deste princípio tais como a existência de sequências básicas em espaços de Banach e o Teorema de Pitt para operadores compactos entre espaços de sequências.

Palavras-chave: Espaços de Banach, Bases de Schauder, sequências básicas, o problema da base incondicional, princípio de seleção de Bessaga-Pelczynski e Teorema de Pitt.

PIRES, I. F. *A study about Schauder's basis in Banach spaces and applications of the Bessaga-Pelczynski selection principle*. 2013. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

In this work, we will study the basic theory of Schauder basis of Banach spaces. More precisely, we will study the main results involving (unconditionally) Schauder basis, (unconditionally) basic sequences and we will prove an important result of the Banach space theory, the Bessaga-Pelczynski selection principle. We will also study some applications of this principle such that the existence of basic sequences in Banach spaces and the Pitt's Theorem for compact operators between sequence spaces.

Keywords: Banach spaces, Schauder basis, basic sequences, the unconditional basis problem, Bessaga-Pelczynski selection principle and Pitt's Theorem.

SUMÁRIO

Resumo	vii
Abstract	viii
Introdução	1
1 Resultados Clássicos de Análise Funcional	3
2 Bases de Schauder em espaços de Banach	9
2.1 Séries em espaços de Banach	9
2.2 Bases em espaços de Banach	15
3 Sequências básicas em Espaços de Banach	27
3.1 Bases e sequências básicas incondicionais	32
3.2 Dois problemas importantes envolvendo sequências básicas em espaços de Banach	37
3.2.1 O problema da base incondicional	37
3.2.2 O Princípio de Seleção de Bessaga-Pelczynski	39
4 Aplicações do princípio de seleção de Bessaga-Pelczynski	48
4.1 Existência de sequências básicas	48
4.2 O Teorema de Pitt	49

Introdução

A área do conhecimento na qual essa dissertação se insere é a Análise Funcional, mais precisamente na teoria de espaços de Banach. Em Análise Funcional, um conceito bastante importante e usual é o de base de Schauder. Bases de Schauder são muito úteis para se entender o comportamento e a estrutura dos espaços de Banach. Dizemos que uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de Schauder de um espaço de Banach E se cada $x \in E$ pode ser escrito de maneira única como uma série do tipo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, onde a_n são escalares no corpo. Como veremos neste trabalho, é fácil provar que todo espaço de Banach com base de Schauder é separável. Entretanto, a pergunta de que todo espaço de Banach separável tem base de Schauder permaneceu em aberto por vários anos. A resposta a esse problema veio com Enflo em 1973, em sua negativa.

A busca de condições para que um espaço de Banach tenha base de Schauder foi objeto de pesquisa de diversos matemáticos e um problema importante e que tem resposta afirmativa é que todo espaço de Banach tem um subespaço com base de Schauder. A solução desse problema utiliza um resultado extremamente importante que é conhecido como o princípio de seleção de Bessaga-Pelczynski. Esse resultado é importante não só devido a sua aplicação para a solução desse problema, mas também em diversos outros problemas. Nesta dissertação, mostraremos com detalhes a demonstração deste princípio de seleção, mostraremos também detalhadamente a demonstração de que todo espaço de Banach tem um subespaço com base de Schauder. Além disso, faremos uma outra aplicação interessante do princípio de seleção de Bessaga-Pelczynski, que é a demonstração do Teorema de Pitt (essas aplicações serão feitas no capítulo 4).

O Teorema de Pitt tem diversas aplicações e ele caracteriza operadores compactos entre espaços de sequências somáveis. Este teorema é usado, por exemplo, na obtenção de operadores, definidos entre espaços de sequências somáveis, que atingem a norma e problemas de lineabilidade envolvendo tais operadores (veja por exemplo [14] para os problemas de lineabilidade e operadores que atingem a norma e [12] como referência para resultados sobre operadores que atingem a norma).

Nesta dissertação, faremos também um estudo sobre bases de Schauder incondicionais, isto

é, bases em que a convergência da representação de cada elemento, em termos da base, é incondicional. Tais bases são muito úteis na teoria dos espaços de Banach, entretanto não é verdade nem que espaços de Banach possuem algum subespaço com base de Schauder incondicional. Este problema é conhecido como o *problema da base incondicional* (trataremos desse problema com mais detalhes no capítulo 3). Entretanto, daremos uma caracterização para que uma base de Schauder seja base de Schauder incondicional de algum subespaço.

Este trabalho está dividido da seguinte maneira:

- (i) No capítulo 1, daremos os principais conceitos e notações que usaremos ao longo do trabalho e faremos uma revisão dos principais resultados de Análise Funcional necessários.
- (ii) No capítulo 2, devotaremos uma seção ao estudo de séries em espaços de Banach e depois introduziremos as bases de Schauder juntamente com os resultados básicos pertinentes além de vários exemplos importantes.
- (iii) No capítulo 3, faremos um estudo sobre sequências básicas (incondicionais) em espaços de Banach, isto é, bases de Schauder (incondicionais) de um subespaço. Além disso, abordaremos os problemas de existência de sequências básicas e sequências básicas incondicionais. Neste capítulo também provaremos o princípio de seleção de Bessaga-Pelczynski.
- (iv) Finalmente, no capítulo 4, faremos as duas aplicações do princípio de seleção que nos referimos anteriormente, além de dar os pré-requisitos necessários para elas.

Iego Fernandes Pires

Uberlândia-MG, 31 de Julho de 2013.

CAPÍTULO 1

Resultados Clássicos de Análise Funcional

O objetivo deste capítulo é introduzir algumas definições, notações e alguns resultados de Análise Funcional que serão utilizados nos demais capítulos.

Durante todo o texto, \mathbb{K} denotará o corpo \mathbb{R} dos números reais ou o corpo \mathbb{C} dos complexos.

Definição 1.0.1. Seja E um espaço vetorial sobre \mathbb{K} . Uma *norma* em E é uma função $\|\cdot\|: E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

(N1) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(N2) $\|ax\| = |a|\|x\|$ para todo $a \in \mathbb{K}$ e $x \in E$.

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para quaisquer $x, y \in E$.

Definição 1.0.2. Um *espaço normado* é um espaço vetorial E munido de uma norma $\|\cdot\|$. E por sua vez é um *espaço métrico* com a métrica induzida pela norma, isto é, a métrica d dada por

$$d(x, y) = \|x - y\| \text{ com } x, y \in E.$$

A *bola unitária fechada* do espaço normado E é o conjunto

$$B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}.$$

Definição 1.0.3. Dizemos que um espaço normado E é um *espaço de Banach* se E for completo.

Definição 1.0.4. Se K é um espaço métrico compacto, denotamos o espaço vetorial de todas as funções contínuas definidas no compacto K a valores em \mathbb{R} por espaço $C(K)$, o qual torna-se um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_\infty = \sup \{|f(x)| : x \in K\}.$$

Um caso que estamos particularmente interessado é quando K é o intervalo compacto $[a, b]$. Nesse caso, denotamos $C(K)$ por $C[a, b]$.

Definição 1.0.5. Denotamos

$$c_0 = \{(a_n)_{n=1}^{\infty} : a_n \in \mathbb{K} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } a_n \rightarrow 0\}$$

o qual se torna um espaço de Banach com a norma

$$\|(a_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup \{|a_n| : n \in \mathbb{N}\}.$$

Definição 1.0.6. Seja $1 \leq p < +\infty$. O espaço vetorial das sequências *absolutamente p -somáveis* é dado por

$$\ell_p = \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} : a_n \in \mathbb{K} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\},$$

o qual se torna um espaço de Banach com a norma

$$\|(a_n)_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 1.0.7. O espaço vetorial das sequências limitadas é dado por

$$\ell_{\infty} = \left\{ (a_n)_{n=1}^{\infty} : a_n \in \mathbb{K} \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ e } \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < \infty \right\}$$

o qual se torna um espaço de Banach com a norma

$$\|(a_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|.$$

Definição 1.0.8. Um espaço métrico M é dito *separável* se contém um subconjunto denso e enumerável.

Proposição 1.0.9. Um espaço normado E é separável se, e somente se, E possui um subconjunto enumerável $A \subset E$ tal que $\text{span}\{A\}$ é denso em E , onde $\text{span}\{A\}$ denota o espaço gerado pelo conjunto A .

Demonstração: Veja [3, Lema 1.6.3]. ■

Definição 1.0.10. Se E e F são espaços normados, denotamos o conjunto de todos os operadores lineares e contínuos de E em F por $\mathcal{L}(E, F)$ que é um espaço vetorial com as operações usuais de funções.

Quando $F = \mathbb{K}$, denotamos simplesmente $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = E'$ ou $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = E^*$, o qual é chamado de *dual* de E .

Já o espaço $E'' = (E')'$ é chamado de *bidual* de E .

Proposição 1.0.11. *Sejam E e F espaços normados.*

(a) *A expressão*

$$\|T\| = \sup_{x \in B_E} \|T(x)\|$$

define uma norma no espaço $\mathcal{L}(E, F)$.

(b) $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ *para todos $T \in \mathcal{L}(E, F)$ e $x \in E$.*

(c) *Se F for Banach, então $\mathcal{L}(E, F)$ é um espaço Banach.*

Demonstração: Veja [3, Proposição 2.1.4] ■

Corolário 1.0.12. *O dual E' de qualquer espaço normado E é um espaço de Banach.*

Definição 1.0.13. Dizemos que os espaços normados E e F são *isomorfos* se existe um operador linear contínuo e bijetor $T: E \rightarrow F$ cujo operador inverso $T^{-1}: F \rightarrow E$ também é contínuo. Neste caso, dizemos que T é um *isomorfismo*. E se $\|x\| = \|T(x)\|$ para $x \in E$ e $T(x) \in F$ dizemos que T é um *isomorfismo isométrico*.

Teorema 1.0.14. *Todo espaço normado separável é isometricamente isomorfo a algum subespaço de $C[0, 1]$.*

Demonstração: Veja [3, Teorema 6.5.5]. ■

Proposição 1.0.15. *Seja $1 \leq p < \infty$. Então*

(a) *Os espaços $(\ell_p)'$ e $\ell_{p'}$ são isometricamente isomorfos, onde p' denota o conjugado de p , isto é, p' é tal que*

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{p} = 1.$$

(b) *Os espaços $(c_0)'$ e ℓ_1 são isometricamente isomorfos.*

Demonstração: Veja [3, Proposições 4.2.1 e 4.2.3]. ■

Teorema 1.0.16 (Teorema de Baire). *Seja (M, d) um espaço métrico completo e $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de subconjuntos fechados de M tais que $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que F_{n_0} tem interior não vazio.*

Demonstração: Veja [3, Teorema 2.3.1]. ■

Teorema 1.0.17 (Teorema de Banach-Steinhaus). *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $(T_i)_{i \in I}$ uma família de operadores em $\mathcal{L}(E, F)$ tal que para cada $x \in E$ existe $C_x > 0$ tal que*

$$\sup_{i \in I} \|T_i x\| < C_x.$$

Então $\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty$.

Demonstração: Veja [3, Teorema 2.3.2]. ■

Teorema 1.0.18 (Teorema da Aplicação Aberta). *Sejam E e F espaços de Banach e $T: E \rightarrow F$ linear, contínuo e sobrejetor. Então T é uma aplicação aberta. Em particular, todo operador linear contínuo e sobrejetor entre espaços de Banach é um isomorfismo.*

Demonstração: Veja [3, Teorema 2.4.2]. ■

Teorema 1.0.19 (Teorema do Gráfico Fechado). *Seja $T: E \rightarrow F$ um operador linear entre espaços de Banach. Então T é contínuo se, e somente se, o gráfico $Gr(T)$ é fechado em $E \times F$. Lembrando que*

$$Gr(T) = \{(x, y) : x \in E \text{ e } y = T(x)\} = \{(x, T(x)) : x \in E\} \subseteq E \times F.$$

Demonstração: Veja [3, Teorema 2.5.1]. ■

Proposição 1.0.20. *Sejam E e F espaços normados, com F completo. Seja D um subespaço denso de E e seja $T \in \mathcal{L}(D, F)$. Então existe $\tilde{T} \in \mathcal{L}(E, F)$ tal que $\tilde{T}|_D = T$ e $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.*

Demonstração: Dado $x \in E$, seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em D que converge para x . Como

$$\|T(x_m) - T(x_n)\| \leq \|T\| \|x_m - x_n\|$$

e como F é completo, segue que a sequência $(T(x_n))_{n=1}^\infty$ converge em F . Assim a aplicação definida por

$$\tilde{T}: E \longrightarrow F; \quad \tilde{T}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n)$$

está bem definida. Além disso, é fácil ver que \tilde{T} é linear, $\tilde{T}(x) = T(x)$ para todo $x \in D$ e que $\|\tilde{T}\| = \|T\|$. ■

Proposição 1.0.21. *Para todo espaço normado E o operador denifido por*

$$J_E: E \longrightarrow E''; \quad J_E(x)(\varphi) = \varphi(x)$$

para todos $x \in E$ e $\varphi \in E'$, é uma isometria linear, chamado de mergulho canônico de E em E'' .

Demonstração: Veja [3, Proposição 4.3.1]. ■

Definição 1.0.22. Dizemos que o espaço normado E é *reflexivo* se o mergulho canônico $J_E: E \longrightarrow E''$ for sobrejetor, ou seja, $J_E(E) = E''$.

Definição 1.0.23. Seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$ um operador linear contínuo entre espaços normados. O operador adjunto de T é o operador $T': F' \rightarrow E'$ dado por

$$T'(\varphi)(x) = \varphi(T(x)) \text{ para todos } x \in E \text{ e } \varphi \in F'.$$

Proposição 1.0.24. Seja $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Então $T' \in \mathcal{L}(F', E')$ e $\|T'\| = \|T\|$. Mais ainda, se T é isomorfismo (isométrico), T' também é isomorfismo (isométrico).

Demonstração: Veja [3, Proposição 4.3.11]. ■

Definição 1.0.25. A *topologia fraca* num espaço normado E , será denotada por $\sigma(E, E')$ e quando a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de E convergir para $x \in E$ na topologia fraca, escreveremos $x_n \xrightarrow{w} x$.

Proposição 1.0.26. Sejam E e F espaços de Banach. Então $T: E \longrightarrow F$ é contínua se, e somente se, T é fracamente contínua, isto é, se $T: (E, \sigma(E, E')) \rightarrow (F, \sigma(F, F'))$ for contínuo.

Demonstração: Veja [3, Proposição 6.2.9]. ■

Teorema 1.0.27. Um espaço de Banach E é reflexivo se, e somente se, a bola unitária B_E é compacta na topologia fraca.

Demonstração: Veja [3, Teorema 6.4.5]. ■

Definição 1.0.28. Sejam E e F espaços normados. Dizemos que o operador linear $T: E \longrightarrow F$ é *compacto* se $\overline{T(B_E)}$ é compacto em F .

Definição 1.0.29. Sejam E e F espaços de Banach e $T: E \longrightarrow F$ linear. Dizemos que T é *completamente contínuo* se $x_n \xrightarrow{w} x$ em E implicar que $T(x_n) \longrightarrow T(x)$ em F .

Proposição 1.0.30. Sejam E e F espaços de Banach, E reflexivo e $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Se T é completamente contínuo, então T é compacto.

Demonstração: Seja $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de vetores não nulos em E e defina a sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em B_E por

$$x_n = \frac{z_n}{\|z_n\|},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como E é reflexivo, segue do Teorema 1.0.27 que B_E é fracamente compacta, o que implica a existência de uma subsequência $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_{n_k} \xrightarrow{w} x \in B_E$. Mas por hipótese $x_{n_k} \xrightarrow{w} x$ em B_E implica $T(x_{n_k}) \rightarrow T(x)$ em F , logo $\overline{T(B_E)}$ é compacto. Portanto T é compacto. ■

Teorema 1.0.31. *Sejam E e F espaços de Banach. Então $T: E \longrightarrow F$ é um operador compacto se, e somente se, $T': F' \longrightarrow E'$ é compacto.*

Demonstração: Veja [3, Teorema 7.2.7] ■

Teorema 1.0.32 (Teorema de Ascoli). *Seja K um espaço métrico compacto e A um subconjunto de $C(K)$. Então \overline{A} é compacto se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

- (a) *A é equicontínuo, isto é, para todo $t_0 \in K$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$ para todos $t \in K$ com $d(t, t_0) < \delta$ e $f \in A$,*
- (b) *O conjunto $\{f(t); f \in A\}$ é limitado em \mathbb{K} para todo $t \in K$.*

Demonstração: Veja [9, Teorema III.2.1]. ■

CAPÍTULO 2

Bases de Schauder em espaços de Banach

Antes de iniciarmos o estudo das bases de Schauder, faremos um breve apanhado sobre séries em espaços de Banach.

2.1 Séries em espaços de Banach

Definição 2.1.1. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em um espaço normado E . Dizemos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é:

- *somável* se a série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente.
- *absolutamente somável* se $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$.
- *incondicionalmente somável* se $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ é convergente para qualquer bijeção (permutação) $\sigma: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

É fácil ver que vale o *critério de Cauchy*, análogo ao da reta, para séries num espaço de Banach. Mais precisamente, uma série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ é convergente se, e somente se, dado $\varepsilon > 0$, existe

$n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left\| \sum_{j=n}^m x_j \right\| < \varepsilon$, sempre que $m > n \geq n_0$.

É claro que toda sequência incondicionalmente somável é também somável. Dirichlet provou em 1873 que, em \mathbb{R} , os conceitos de somabilidade absoluta e incondicional são equivalentes. Em espaços de Banach, tal equivalência não é verdadeira. Vejamos um exemplo.

Exemplo 2.1.2. Seja $(e_n)_{n=1}^\infty$ a sequência canônica de vetores unitários, isto é,

$$e_n = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots),$$

onde o 1 aparece apenas na n -ésima coordenada de e_n . Vamos provar que, em c_0 , a sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$, onde $x_n = \frac{e_n}{n}$, é incondicionalmente somável, mas não é absolutamente somável. É claro que $(x_n)_{n=1}^\infty$ não é absolutamente somável, pois

$$\sum_{n=1}^\infty \|x_n\|_\infty = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$$

a qual é divergente.

Veamos agora que $(x_n)_{n=1}^\infty$ é incondicionalmente somável. Seja $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ uma bijeção qualquer. Chamando $s_n = \sum_{j=1}^n x_{\sigma(j)}$ e considerando $\varepsilon > 0$, tome $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Como σ é bijeção, para cada $k \in \{1, \dots, N\}$ existe n_k tal que $\sigma(n_k) = k$. Tomando $n_0 = \max\{n_1, \dots, n_N\}$ e $A = \{1, \dots, n\} - \{n_1, \dots, n_N\}$, segue que para $n \geq n_0$,

$$s_n = \sum_{j=1}^n x_{\sigma(j)} = x_{\sigma(1)} + \dots + x_{\sigma(n)} = x_{\sigma(n_1)} + \dots + x_{\sigma(n_N)} + \sum_{j \in A} x_{\sigma(j)} = x_1 + \dots + x_N + \sum_{j \in A} x_{\sigma(j)}.$$

Assim, para todo $n \geq n_0$

$$\left\| s_n - \left(\frac{1}{n} \right)_{n=1}^\infty \right\|_\infty \leq \frac{1}{N+1} < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Considerando este exemplo, podemos questionar se, em qualquer espaço de Banach de dimensão infinita, existe uma série incondicionalmente convergente que não é absolutamente convergente. Mais ainda, será que convergência incondicional implicar em convergência absoluta é exclusividade dos espaços de dimensão finita?

A resposta é sim, e o Teorema de Dvoretzky-Rogers garante que toda série incondicionalmente convergente em um espaço de Banach E é absolutamente convergente se, e somente se, E tem dimensão finita. Não entraremos em detalhes, mas a demonstração deste resultado pode ser encontrada em [4, Theorem 1.2]

Mesmo assim, o resultado a seguir mostra que tais conceitos ainda estão fortemente relacionados.

Proposição 2.1.3. *Um espaço normado E é um espaço de Banach se, e somente se, toda sequência absolutamente somável é incondicionalmente somável.*

Demonstração: Primeiramente, suponha que E seja Banach e considere $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência absolutamente somável em E . Considerando $y_n = \|x_n\|$ para cada $n \in \mathbb{N}$, a sequência $(y_n)_{n=1}^\infty$ é absolutamente somável em \mathbb{R} , logo também é incondicionalmente somável em \mathbb{R} e $\sum_{n=1}^\infty y_n = \sum_{n=1}^\infty y_{\sigma(n)}$, para qualquer permutação $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Com isso

$$\sum_{n=1}^\infty \|x_{\sigma(n)}\| = \sum_{n=1}^\infty y_{\sigma(n)} < \infty.$$

Então definindo $S_n = \sum_{j=1}^n x_{\sigma(j)}$, temos que para $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|S_m - S_n\| = \left\| \sum_{j=1}^m x_{\sigma(j)} - \sum_{j=1}^n x_{\sigma(j)} \right\| = \left\| \sum_{j=n+1}^m x_{\sigma(j)} \right\| \leq \sum_{j=n+1}^m \|x_{\sigma(j)}\| < \varepsilon$$

sempre que $m > n > n_0$.

Assim $(S_n)_{n=1}^\infty = \left(\sum_{j=1}^n x_{\sigma(j)} \right)_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy no espaço de Banach E , logo convergente. Portanto $(x_n)_{n=1}^\infty$ é incondicionalmente somável.

Reciprocamente seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy no espaço normado E . Assim para $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, dado $k \in \mathbb{N}$ existe $n_0^{(k)} \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_n - x_m\| < 2^{-k}$, para todos $m, n > n_0^{(k)}$.

Com isso, para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos obter $n_k \in \mathbb{N}$; $n_k > n_0^{(k)}$ e assim temos $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$ tais que $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < 2^{-k}$.

Logo

$$\sum_{k=1}^\infty \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \sum_{k=1}^\infty 2^{-k} = 1$$

o que implica que a série $\sum_{k=1}^\infty (x_{n_{k+1}} - x_{n_k})$ é absolutamente convergente, logo convergente.

Como $x_{n_{k+1}} = x_{n_1} + \sum_{j=1}^k (x_{n_{j+1}} - x_{n_j})$, então segue que a subsequência $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ de $(x_n)_{n=1}^\infty$ é convergente. Como $(x_n)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy e possui subsequência convergente, segue que $(x_n)_{n=1}^\infty$ é convergente, garantindo assim que E é completo. ■

O resultado a seguir nos dá uma caracterização de sequências incondicionalmente somáveis em espaços de Banach.

Teorema 2.1.4. *Para uma sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ em um espaço de Banach E , são equivalentes:*

- (a) $(x_n)_{n=1}^\infty$ é incondicionalmente somável.
- (b) Para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, quando M é um subconjunto finito de \mathbb{N} com $\min M > n_\varepsilon$, temos que $\left\| \sum_{n \in M} x_n \right\| < \varepsilon$.
- (c) $(x_n)_{n=1}^\infty$ é subsérie somável, ou seja, a série $\sum_{n=1}^\infty x_{k_n}$ é convergente para qualquer sequência estritamente crescente de inteiros positivos $(k_n)_{n=1}^\infty$.
- (d) $(x_n)_{n=1}^\infty$ é sinal somável, ou seja, a série $\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n x_n$ é convergente quaisquer que sejam $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, $n \in \mathbb{N}$.
- (e) O operador $T: \ell_\infty \longrightarrow E$ dado por $T((\lambda_n)_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty \lambda_n x_n$ é contínuo.

Demonstração: A prova de que o item (e) é equivalente aos demais não será feita aqui, mas pode ser encontrada em [4, p. 12]. Vejamos as demais implicações.

(a) \Rightarrow (b): Seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ incondicionalmente somável e suponha que (b) é falso, ou seja, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$ existe $M \subset \mathbb{N}$ finito tal que $\left\| \sum_{n \in M} x_n \right\| \geq \varepsilon$ sempre que $\min M > m$. Assim, para $m = 1$, tome $M_1 \subset \mathbb{N}$ finito tal que $\min M_1 > 1$ e $\left\| \sum_{n \in M_1} x_n \right\| \geq \varepsilon$. Para $m = 2$ tome $M_2 \subset \mathbb{N}$ finito tal que $\min M_2 > \max M_1 + 1$ e $\left\| \sum_{n \in M_2} x_n \right\| \geq \varepsilon$. Procedendo desta forma, para $n \in \mathbb{N}$ tome $M_n \subset \mathbb{N}$ finito tal que $\min M_n > \max M_{n-1} + 1$ e $\left\| \sum_{n \in M_n} x_n \right\| \geq \varepsilon$.

Denotando por $|M_n|$ o número de elementos de M_n , defina uma bijeção $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ que leva cada inteiro do intervalo $[\min M_n, \min M_n + |M_n|)$ em M_n . Note que é possível definir tal bijeção pois o número de inteiros do intervalo $[\min M_n, \min M_n + |M_n|)$ é igual $|M_n|$ e os intervalos são dois a dois disjuntos, o que também ocorre com os M_n .

Considere a sequência $(S_n)_{n=1}^\infty$ definida por $S_n = \sum_{k=1}^n x_{\sigma(k)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, e vamos provar que ela não é de Cauchy. Para cada $m \in \mathbb{N}$, podemos escolher algum dos M_n , com $\min M_n > m$ e $\left\| \sum_{n \in M_n} x_n \right\| \geq \varepsilon$. Tomando $p = \min M_n - 1$ e $q = \min M_n + |M_n| - 1$, temos $q \geq p + 1 > m$ e assim

$$\|S_q - S_p\| = \left\| \sum_{k=1}^q x_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^p x_{\sigma(k)} \right\| = \left\| \sum_{k=p+1}^q x_{\sigma(k)} \right\| = \left\| \sum_{k \in M_n} x_k \right\| \geq \varepsilon.$$

Com isso $(S_n)_{n=1}^\infty$ não é de Cauchy, logo é divergente pois E é um espaço de Banach. Então $(x_{\sigma(n)})_{n=1}^\infty$ não é somável, o que é uma contradição.

(b) \Rightarrow (a): Sejam $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ uma bijeção qualquer e $S_n = \sum_{k=1}^n x_{\sigma(k)}$. Dado $\varepsilon > 0$ tome n_ε de acordo com (b). Então existe $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $\{1, \dots, n_\varepsilon\} \subset \{\sigma(1), \dots, \sigma(m_\varepsilon)\}$. Para $p, q \in \mathbb{N}$ com $q \geq p + 1 \geq m_\varepsilon$ temos que $\sigma(p+1), \sigma(q) > m_\varepsilon$ e portanto

$$\|S_q - S_p\| = \left\| \sum_{k=p+1}^q x_{\sigma(k)} \right\| = \left\| \sum_{j \in M_0} x_j \right\| < \varepsilon,$$

onde $M_0 = \{\sigma(p+1), \dots, \sigma(q)\}$. Portanto $(S_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy e segue o resultado.

(b) \Rightarrow (c): Dado $\varepsilon > 0$, por hipótese existem $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ e $M \subset \mathbb{N}$ finito tal que $\left\| \sum_{n \in M} x_n \right\| < \varepsilon$, sempre que $\min M > n_\varepsilon$. Considerando $(k_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência estritamente crescente de inteiros positivos temos $k_n \geq n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e para $p, q \in \mathbb{N}$ tais que $q \geq p + 1 > n_\varepsilon$ temos

$k_q \geq q > n_\varepsilon$ e $k_{p+1} \geq p+1 > n_\varepsilon$. Definindo então a sequência $S_n = \sum_{j=1}^n x_{k_j}$ segue que

$$\begin{aligned} \|S_q - S_p\| &= \left\| \sum_{j=1}^q x_{k_j} - \sum_{j=1}^p x_{k_j} \right\| = \left\| \sum_{j=p+1}^q x_{k_j} \right\| = \|x_{k_{p+1}} + \dots + x_{k_q}\| \\ &= \left\| \sum_{n \in M_0} x_{k_n} \right\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

onde $M_0 = \{k_{p+1}, \dots, k_q\}$. Logo $(S_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy. Portanto a sequência $(x_{k_n})_{n=1}^\infty$ é somável.

(c) \Rightarrow (d): Seja $S_n = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j$ com $\varepsilon_j \in \{-1, 1\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Considerando os conjuntos $N^+ = \{n \in \mathbb{N}; \varepsilon_n = 1\}$ e $N^- = \{n \in \mathbb{N}; \varepsilon_n = -1\}$ ordenados de maneira crescente, segue da hipótese de $(x_n)_{n=1}^\infty$ ser subsérie somável que as séries $\sum_{n \in N^+} x_n$ e $\sum_{n \in N^-} x_n$ são convergentes.

Logo as sequências (A_n) e (B_n) são de Cauchy, onde $A_n = \sum_{\substack{j=1 \\ j \in N^+}}^n x_j$ e $B_n = \sum_{\substack{j=1 \\ j \in N^-}}^n x_j$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, para cada $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon^+ \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|A_q - A_p\| = \left\| \sum_{\substack{j=p+1 \\ j \in N^+}}^q x_j \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

sempre que $q > p > n_\varepsilon^+$ e existe $n_\varepsilon^- \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|B_q - B_p\| = \left\| \sum_{\substack{j=p+1 \\ j \in N^-}}^q x_j \right\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

sempre que $q > p > n_\varepsilon^-$. Por fim, tomando $n_\varepsilon = \max\{n_\varepsilon^+, n_\varepsilon^-\}$ temos

$$\begin{aligned} \|S_q - S_p\| &= \left\| \sum_{j=p+1}^q \varepsilon_j x_j \right\| = \|\varepsilon_{p+1} x_{p+1} + \dots + \varepsilon_q x_q\| \\ &= \left\| \sum_{\substack{j=p+1 \\ j \in N^+}}^q x_j - \sum_{\substack{j=p+1 \\ j \in N^-}}^q x_j \right\| \leq \left\| \sum_{\substack{j=p+1 \\ j \in N^+}}^q x_j \right\| + \left\| \sum_{\substack{j=p+1 \\ j \in N^-}}^q x_j \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

sempre que $q > p > n_\varepsilon$. Logo (S_n) é de Cauchy, implicando assim que a série $\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n x_n$ é convergente.

(d) \Rightarrow (b): Por hipótese $(x_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência sinal somável. Suponhamos que (b) seja falso. Então existem $\varepsilon > 0$ e uma sequência $(M_k)_{k=1}^\infty$ de subconjuntos finitos de \mathbb{N} tais que $\min M_{k+1} > \max M_k$ e $\left\| \sum_{n \in M_k} x_n \right\| \geq \varepsilon$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Defina a seguinte função

$$\varepsilon_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \in \bigcup_{k=1}^\infty M_k \\ -1, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Considere a sequência definida por $S_n = \sum_{j=1}^n (1 + \varepsilon_j)x_j$ e para cada $m \in \mathbb{N}$, tome $k \in \mathbb{N}$ tal que $m < \min M_k$. Assim, para $p = \min M_k$ e $q = \max M_k$ segue que $p, q > m$, mas

$$\|S_q - S_p\| = \left\| \sum_{j=\min M_k+1}^{\max M_k} (1 + \varepsilon_j)x_j \right\| = \left\| \sum_{n \in M_k} 2x_n \right\| \geq 2\varepsilon.$$

Então $(S_n)_{n=1}^\infty$ não é uma sequência de Cauchy, logo diverge, pois E é espaço de Banach. Com isso, $\sum_{n=1}^\infty x_n$ ou $\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_n x_n$ é divergente (ou ambas), o que é um absurdo. ■

Corolário 2.1.5. Se $(x_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência incondicionalmente somável em um espaço de Banach E , então para qualquer bijeção $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ é verdade que

$$\sum_{n=1}^\infty x_n = \sum_{n=1}^\infty x_{\sigma(n)}.$$

Demonstração: Como $(x_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência incondicionalmente somável, segue do Teorema 2.1.4(b) que para $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que, se $M \subset \mathbb{N}$ é finito com $\min M > n_\varepsilon$, então $\left\| \sum_{n \in M} x_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tome $q \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de tal forma que $\{1, \dots, n_\varepsilon\} \subset \{\sigma(1), \dots, \sigma(n_\varepsilon), \dots, \sigma(q)\}$ e defina $M_0 = \{1, \dots, q\} - \{\sigma(1), \dots, \sigma(q)\}$ e $M_1 = \{\sigma(1), \dots, \sigma(q)\} - \{1, \dots, q\}$.

Assim,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^q x_n - \sum_{n=1}^q x_{\sigma(n)} \right\| &= \left\| \sum_{n \in M_0} x_n - \sum_{n \in M_1} x_n \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{n \in M_0} x_n \right\| + \left\| \sum_{n \in M_1} x_n \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, fazendo $q \rightarrow \infty$ em $\sum_{n=1}^q x_n = \left(\sum_{n=1}^q x_n - \sum_{n=1}^q x_{\sigma(n)} \right) + \sum_{n=1}^q x_{\sigma(n)}$, segue que $\sum_{n=1}^\infty x_n = \sum_{n=1}^\infty x_{\sigma(n)}$. ■

2.2 Bases em espaços de Banach

O conceito de base que trataremos no decorrer deste texto é o de base de Schauder, conceito este que não é o mesmo de base algébrica (de Hamel) de espaços vetoriais. E um dos motivos de geralmente não se trabalhar com bases algébricas em espaços de Banach de dimensão infinita está justificado no resultado a seguir:

Proposição 2.2.1. *Todo espaço de Banach com dimensão infinita possui base algébrica (base de Hamel) não enumerável.*

Demonstração: Seja E um espaço de Banach com dimensão infinita e suponhamos que exista uma base algébrica enumerável $B = \{v_j \in E; j \in \mathbb{N}\}$ de E . Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina $F_n = [v_1, \dots, v_n]$, isto é, o espaço vetorial gerado por v_1, \dots, v_n . Assim $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$, cada F_n é subespaço próprio de E e fechado (pois tem dimensão finita). Logo cada F_n tem o interior vazio, mas isto é uma contradição devido ao Teorema de Baire, 1.0.16. Portanto não existe base algébrica enumerável em espaços de Banach de dimensão infinita.

■

Definição 2.2.2. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no espaço de Banach E é chamada de *base de Schauder* de E se cada $x \in E$ pode ser representado de maneira única por

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n,$$

onde $a_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. É fácil ver que tal unicidade nos permite definir, a sequência de funcionais lineares $x_n^*: E \rightarrow \mathbb{K}$ dada por

$$x_n^* \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \right) = a_n,$$

$n \in \mathbb{N}$. Tais funcionais são chamados *funcionais coeficientes* (ou funcionais coordenadas ou ainda funcionais biortogonais associados).

A unicidade também garante o resultado a seguir.

Proposição 2.2.3. *Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de Schauder de um espaço de Banach E , então o conjunto $\{x_n \in E; n \in \mathbb{N}\}$ é linearmente independente.*

Demonstração: Suponha que $\sum_{n=1}^k a_n x_n = 0$, onde $k \in \mathbb{N}$. Chamando $x = \sum_{n=1}^k a_n x_n$, segue da unicidade de representação que esta é a representação de x em termos da base de Schauder. Aplicando x_j^* em x segue que $a_j = x_j^*(x) = x_j^* \left(\sum_{n=1}^k a_n x_n \right) = x_j^*(0) = 0$, para cada $j = 1, \dots, k$. Logo, $\{x_n \in E; n \in \mathbb{N}\}$ é linearmente independente. ■

Exemplo 2.2.4. A sequência dos vetores unitários canônicos $(e_n)_{n=1}^\infty$ é base de Schauder de c_0 e ℓ_p , $1 \leq p < \infty$. Mostraremos primeiramente que $(e_n)_{n=1}^\infty$ é base de Schauder de c_0 . Seja $x = (x_n)_{n=1}^\infty \in c_0$. Como $x_n \rightarrow 0$, para $\varepsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_\infty < \varepsilon$ sempre que $n \geq n_0$. Assim, para $n \geq n_0$,

$$\left\| \sum_{j=1}^n x_j e_j - x \right\|_\infty = \left\| \sum_{j=1}^n x_j e_j - (x_j)_{j=1}^\infty \right\|_\infty = \|(0, 0, \dots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots)\|_\infty = \sup_{j \geq n+1} |x_j| < \varepsilon.$$

Logo $\sum_{n=1}^\infty x_n e_n = x$ e daí $(e_n)_{n=1}^\infty$ é base de Schauder de c_0 . De maneira análoga prova-se que $(e_n)_{n=1}^\infty$ é base de Schauder de ℓ_p , $1 \leq p < \infty$.

Uma pergunta natural é se ℓ_∞ também possui base de Schauder. O próximo resultado nos diz que “ser separável” é uma condição necessária para que um espaço de Banach tenha base de Schauder. Como ℓ_∞ não é separável, então não possui base de Schauder.

Proposição 2.2.5. *Todo espaço de Banach com base de Schauder é separável.*

Demonstração: Seja E um espaço de Banach sobre o corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ com base de Schauder $(x_n)_{n=1}^\infty$. Seja $x \in E$. Então $x = \sum_{n=1}^\infty a_n x_n$, com $(a_n)_{n=1}^\infty \subset \mathbb{K}$. Dado $\varepsilon > 0$, segue da convergência de $\sum_{n=1}^\infty a_n x_n$ que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left\| \sum_{n=n_0+1}^\infty a_n x_n \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Claramente $\left\{ \sum_{n=1}^k q_n x_n; q_n \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{N} \right\}$ é enumerável. Seja $M = \max\{\|x_1\|, \dots, \|x_{n_0}\|\} > 0$. Da densidade de \mathbb{Q} em \mathbb{R} segue que, para cada $n = 1, \dots, n_0$, existe $q_n \in \mathbb{Q}$ tal que $|a_n - q_n| < \frac{\varepsilon}{2n_0 M}$. Assim,

$$\left\| x - \sum_{n=1}^{n_0} q_n x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{n_0} |a_n - q_n| \|x_n\| + \left\| \sum_{n=n_0+1}^\infty a_n x_n \right\| < \sum_{n=1}^{n_0} \frac{\varepsilon}{2n_0 M} \|x_n\| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Logo $\left\{ \sum_{n=1}^k q_n x_n; q_n \in \mathbb{Q}, k \in \mathbb{N} \right\}$ é denso em E , concluindo assim que E é separável. O caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ segue usando o conjunto $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ ao invés de \mathbb{Q} e sua densidade em \mathbb{C} . ■

Vejamos que o espaço das funções contínuas definidas no intervalo $[0, 1]$ possui base de Schauder. A existência de base de Schauder em $C[0, 1]$ será bastante útil na demonstração de um dos resultados principais do Capítulo 3 e do Capítulo 4.

Exemplo 2.2.6 (Base de Faber-Schauder). Em $C[0, 1]$ considere a sequência $(x_n)_{n=0}^\infty$ de funções contínuas definidas por $x_0(t) = 1$ e $x_1(t) = t$ e, para $n \geq 2$, considere o inteiro positivo m tal

que $2^{m-1} < n \leq 2^m$ e defina:

$$x_n(t) = \begin{cases} 2^m \left(t - \left(\frac{2n-2}{2^m} - 1 \right) \right) & \text{se } \frac{2n-2}{2^m} - 1 \leq t < \frac{2n-1}{2^m} - 1; \\ 1 - 2^m \left(t - \left(\frac{2n-1}{2^m} - 1 \right) \right) & \text{se } \frac{2n-1}{2^m} - 1 \leq t < \frac{2n}{2^m} - 1; \\ 0 & \text{, caso contrário.} \end{cases}$$

Vamos provar que $(x_n)_{n=0}^\infty$ é base de Schauder de $C[0, 1]$. Para $f \in C[0, 1]$ queremos determinar únicos escalares $(a_n)_{n=0}^\infty$ tais que $f = \sum_{n=0}^\infty a_n x_n$. Para isso defina em $C[0, 1]$ a sequência $(p_n)_{n=0}^\infty$ por

$$\begin{aligned} p_0 &= f(0)x_0, \\ p_1 &= p_0 + (f(1) - p_0(1))x_1, \\ p_2 &= p_1 + \left(f\left(\frac{1}{2}\right) - p_1\left(\frac{1}{2}\right) \right)x_2, \\ p_3 &= p_2 + \left(f\left(\frac{1}{4}\right) - p_2\left(\frac{1}{4}\right) \right)x_3, \\ p_4 &= p_3 + \left(f\left(\frac{3}{4}\right) - p_3\left(\frac{3}{4}\right) \right)x_4, \\ p_5 &= p_4 + \left(f\left(\frac{1}{8}\right) - p_4\left(\frac{1}{8}\right) \right)x_5, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Agora, como para qualquer $t \in C[0, 1]$ temos $p_0(t) = f(0)x_0(t) = f(0)$ então p_0 coincide com f no ponto 0 e como

$$p_1(t) = p_0(t) + (f(1) - p_0(1))x_1(t) = f(0) + (f(1) - f(0))t$$

então p_1 coincide com f nos pontos 0 e 1 e o seu gráfico é o segmento de reta com extremidade $(0, f(0))$ e $(1, f(1))$. Com um raciocínio análogo verifica-se que p_2 coincide com f nos pontos 0, 1 e $\frac{1}{2}$ e o seu gráfico é a união dos segmentos de reta com extremidades em $(0, f(0))$ e $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$ e em $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$ e $(1, f(1))$. Continuando com este raciocínio para $n \in \mathbb{N}$, temos que p_n coincide com f nos $n+1$ primeiros pontos do subconjunto $D = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \dots\} \subset [0, 1]$ e seu gráfico é a justaposição dos segmentos de reta cujas abscissas das extremidades estão no conjunto D .

Para cada inteiro não negativo m , seja a_m o coeficiente de x_m na equação que define p_m . Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, teremos $p_n = \sum_{m=0}^n a_m x_m$. Como $f \in C[0, 1]$ é uniformemente contínua segue que para $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } t_1, t_2 \in [0, 1], |t_1 - t_2| < \delta \text{ então } |f(t_1) - f(t_2)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considere $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^m} < \frac{\delta}{2}$ e tome $n_0 \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que f e p_{n_0} coincidam no conjunto $D = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \dots, \frac{2^m - 1}{2^m}\right\}$. Com isso, se $t \in [0, 1]$, então

existe $k \in \{1, \dots, 2^m - 1\}$ tal que $|t - \frac{k}{2^m}| < \delta$. Logo, se $k \neq 2^m$, segue que

$$\begin{aligned}
 |f(t) - p_n(t)| &\leq \left| f(t) - f\left(\frac{k}{2^m}\right) \right| + \left| f\left(\frac{k}{2^m}\right) - p_n(t) \right| \\
 &< \frac{\varepsilon}{2} + \left| f\left(\frac{k}{2^m}\right) - p_n(t) \right| \\
 &= \frac{\varepsilon}{2} + \left| p_n\left(\frac{k}{2^m}\right) - p_n(t) \right| \\
 &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \left| p_n\left(\frac{k}{2^m}\right) - p_n\left(\frac{k+1}{2^m}\right) \right| \\
 &= \frac{\varepsilon}{2} + \left| f\left(\frac{k}{2^m}\right) - f\left(\frac{k+1}{2^m}\right) \right| \\
 &< \varepsilon,
 \end{aligned}$$

para todo $n > n_0$. Se $k = 2^m$ o resultado segue de maneira similar. Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n - f\|_\infty = 0$, ou seja, é válida a representação $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$.

Vejamos agora que tal representação é única. Considere uma sequência de escalares $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $f = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_n$. Como $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n(t) = f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x_n(t)$, para todo $t \in [0, 1]$, temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x_n(t) = 0 \text{ para todo } t \in [0, 1]. \text{ Para } t = 0, \text{ temos } a_0 - b_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n - b_n) x_n(0) = 0,$$

implicando assim que $a_0 = b_0$. Com isso $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) x_n(t) = 0$ e, para $t = 1$, temos

$a_1 - b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - b_n) x_n(1) = 0$ que implica $a_1 = b_1$. Assim $\sum_{n=2}^{\infty} (a_n - b_n) x_n(t) = 0$ e aplicando $t = \frac{1}{2}$ obtemos $a_2 = b_2$. Procedendo com este raciocínio para os demais valores de $t = 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \dots$, obtém-se $a_n = b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Nosso próximo objetivo é mostrar que os funcionais coeficientes de uma base de Schauder são contínuos. Para isso precisaremos da seguinte definição e do seguinte lema.

Definição 2.2.7. Dada uma base de Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ do espaço de Banach E , denotaremos por \mathcal{V}_E o espaço vetorial formado pela sequência de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tais que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ é convergente em E .

Lema 2.2.8. Seja E um espaço de Banach com base de Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Então a função

$$\eta_E: \mathcal{V}_E \longrightarrow \mathbb{R}; \eta_E((a_n)_{n=1}^{\infty}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\|$$

é uma norma em \mathcal{V}_E e (\mathcal{V}_E, η_E) é um espaço de Banach. Além disso o operador

$$T_E: \mathcal{V}_E \longrightarrow E; T_E((a_n)_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^\infty a_n x_n$$

é um isomorfismo.

Demonstração: Por simplicidade usaremos a notação $(a_n)_{n=1}^\infty = (a_n)$ e vamos provar que η é uma norma:

(i) Se $\eta_E((a_n)) = 0$ então $\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\| = 0$. Logo dado $n \in \mathbb{N}$ temos $0 \leq \|a_n x_n\| \leq \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\| = 0$. Daí $a_n x_n = 0$ e como $x_n \neq 0$ segue que $a_n = 0$. Como $n \in \mathbb{N}$ é arbitrário segue que (a_n) é nula. Por outro lado, é claro que se (a_n) é nula, então $\eta_E((a_n)) = 0$.

(ii) Para $\lambda \in \mathbb{K}$ temos que

$$\eta_E(\lambda(a_n)) = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^n \lambda a_j x_j \right\| = |\lambda| \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\| = |\lambda| \eta_E((a_n))$$

(iii) Para todo $(a_n), (b_n) \in \mathcal{V}_E$ temos

$$\begin{aligned} \eta_E((a_n) + (b_n)) &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^n (a_j + b_j) x_j \right\| \\ &\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\| + \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{j=1}^n b_j x_j \right\| \\ &= \eta_E((a_n)) + \eta_E((b_n)). \end{aligned}$$

Vejamos agora que \mathcal{V}_E é um espaço de Banach. Seja $(y_n)_{n=1}^\infty = ((a_k^n)_{k=1}^\infty)_{n=1}^\infty$ uma sequência de Cauchy em \mathcal{V}_E , onde $y_n = (a_k^n)_{k=1}^\infty$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\begin{aligned} |a_n^k - a_n^j| \|x_n\| &= \|(a_n^k - a_n^j) x_n\| = \left\| \sum_{i=1}^n (a_i^k - a_i^j) x_i - \sum_{i=1}^{n-1} (a_i^k - a_i^j) x_i \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^n (a_i^k - a_i^j) x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n-1} (a_i^k - a_i^j) x_i \right\| \\ &\leq \sup_n \left\| \sum_{i=1}^n (a_i^k - a_i^j) x_i \right\| + \sup_n \left\| \sum_{i=1}^{n-1} (a_i^k - a_i^j) x_i \right\| \\ &= 2\eta_E(y_k - y_j) \end{aligned}$$

e assim $|a_n^k - a_n^j| \leq \frac{2\eta_E(y_k - y_j)}{\|x_n\|}$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $(y_j)_{j=1}^\infty$ é de Cauchy em \mathcal{V}_E , para $\varepsilon > 0$ dado, existe $j_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que se $k, j \geq j_\varepsilon$ temos $\eta_E(y_k - y_j) < \frac{\|x_n\|}{2} \varepsilon$. Logo, para $k, j \geq j_\varepsilon$ segue que $|a_n^k - a_n^j| \leq \frac{2\eta_E(y_k - y_j)}{\|x_n\|} < \varepsilon$, concluindo assim que $(a_n^k)_{k=1}^\infty$ é de Cauchy em \mathbb{K} , logo convergente. Para cada $n \in \mathbb{N}$, digamos que $a_n^k \rightarrow a_n$ quando $k \rightarrow \infty$. Definindo

$y = (a_n)_{n=1}^\infty$, vejamos que $y \in \mathcal{V}_E$ e que $(y_j)_{j=1}^\infty$ converge para y em \mathcal{V}_E . Novamente pelo fato de $(y_n)_{n=1}^\infty$ ser de Cauchy, segue que existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $\eta_E(y_k - y_j) < \frac{\varepsilon}{4}$, sempre que $k, j \geq n_\varepsilon$. Assim, $\left\| \sum_{i=1}^n (a_i^k - a_i^j)x_i \right\| < \frac{\varepsilon}{4}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $k, j \geq n_\varepsilon$ e, fazendo $k \rightarrow \infty$, segue que $\left\| \sum_{i=1}^n (a_i - a_i^j)x_i \right\| \leq \frac{\varepsilon}{4}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $j \geq n_\varepsilon$. Em particular, para $m, n \in \mathbb{N}$, com $m > n$, temos

$$\left\| \sum_{i=n+1}^m (a_i - a_i^{n_\varepsilon})x_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^m (a_i - a_i^{n_\varepsilon})x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^n (a_i - a_i^{n_\varepsilon})x_i \right\| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como $y_{n_\varepsilon} = (a_k^{n_\varepsilon})_{k=1}^\infty \in \mathcal{V}_E$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\left\| \sum_{i=n}^m a_i^{n_\varepsilon} x_i \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$, sempre que $m > n \geq n_0$.

Logo, para $m > n \geq n_0$, segue que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^m a_i x_i - \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| &= \left\| \sum_{i=n+1}^m a_i x_i \right\| = \left\| \sum_{i=n+1}^m (a_i + a_i^{n_\varepsilon} - a_i^{n_\varepsilon})x_i \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{i=n+1}^m (a_i - a_i^{n_\varepsilon})x_i \right\| + \left\| \sum_{i=n+1}^m a_i^{n_\varepsilon} x_i \right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

concluindo assim que $\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right)_{n=1}^\infty$ é de Cauchy em E e, portanto, convergente. Assim $y = (a_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{V}_E$ e $\eta_E(y_n - y) = \sup_m \left\| \sum_{i=1}^m (a_i^n - a_i)x_i \right\| \leq \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$, sempre que $n \geq n_\varepsilon$. Portanto, $y_n \rightarrow y$, concluindo assim que (\mathcal{V}_E, η_E) é completo.

Finalmente vejamos que a aplicação $T_E : \mathcal{V}_E \longrightarrow E$; $T_E((a_n)) = \sum_{n=1}^\infty a_n x_n$ é um isomorfismo.

Para $(a_n), (b_n) \in \mathcal{V}_E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned} T_E((a_n) + \lambda(b_n)) &= \sum_{n=1}^\infty (a_n + \lambda b_n)x_n = \sum_{n=1}^\infty (a_n x_n + \lambda b_n x_n) \\ &= \sum_{n=1}^\infty a_n x_n + \sum_{n=1}^\infty \lambda b_n x_n = T_E((a_n)) + \lambda T_E((b_n)), \end{aligned}$$

ou seja, T_E é linear.

Agora se $(a_n), (b_n) \in \mathcal{V}_E$ são distintos tem-se $T_E((a_n)) = \sum_{n=1}^\infty a_n x_n \neq \sum_{n=1}^\infty b_n x_n = T_E((b_n))$ (devido a $(x_n)_{n=1}^\infty$ ser base de Schauder), logo T_E é injetor. É claro que T_E é sobrejetor, pois para todo $x \in E$ existe $(a_n) \in \mathcal{V}_E$ tal que $x = \sum_{n=1}^\infty a_n x_n = T_E((a_n))$. Agora, como

$$\|T_E((a_n))\| = \left\| \sum_{n=1}^\infty a_n x_n \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| = \eta_E((a_n))$$

segue que T_E é contínua e do Teorema da Aplicação Aberta (Teorema 1.0.18) segue que T_E é uma aplicação aberta. Portanto T_E^{-1} é contínua. ■

Definição 2.2.9. Sejam $(x_n)_{n=1}^\infty$ e $(y_n)_{n=1}^\infty$ bases de Schauder dos espaços de Banach E e F , respectivamente. Dizemos que a sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ é *equivalente* à $(y_n)_{n=1}^\infty$ e representamos por $(x_n)_{n=1}^\infty \approx (y_n)_{n=1}^\infty$, se para qualquer sequência de escalares $(a_n)_{n=1}^\infty$ temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \text{ é convergente se, somente se, } \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \text{ é convergente.}$$

Não é difícil provar que vale a seguinte caracterização para sequências equivalentes (veja [3, Teorema 10.3.11]):

Teorema 2.2.10. Sejam $(x_n)_{n=1}^\infty$ e $(y_n)_{n=1}^\infty$ bases de Schauder dos espaços de Banach E e F , respectivamente. Então $(x_n)_{n=1}^\infty \approx (y_n)_{n=1}^\infty$ se, e somente se, existe um isomorfismo $T: E \rightarrow F$ tal que $T(x_n) = y_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.2.11. Os funcionais coeficientes da base de Schauder $(x_n)_{n=1}^\infty$ de um espaço de Banach E são contínuos.

Demonstração: Sejam $(a_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{V}_E$ e $T_E((a_n)_{n=1}^\infty) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = x \in E$. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ e cada funcional coeficiente $x_n^* \in E'$ é verdade que

$$\begin{aligned} |x_n^*(x)| \|x_n\| &= \|x_n^*(x) x_n\| = \|a_n x_n\| = \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \right\| \leq 2 \sup_{n \in \mathbb{N}} \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \\ &= 2\eta_E((a_n)_n) = 2\eta_E((T_E)^{-1}(x)) \\ &\leq 2\|T_E^{-1}\| \|x\|. \end{aligned}$$

Ou seja, $|x_n^*(x)| \leq \frac{2\|T_E^{-1}\|}{\|x_n\|} \|x\|$ para todo $x \in E$. Logo x_n^* é contínuo. ■

Definição 2.2.12. Seja E um espaço de Banach com base de Schauder $(x_n)_{n=1}^\infty$. Considere a sequência de operadores $(P_n)_{n=1}^\infty$ dada por

$$P_n: E \longrightarrow E; P_n(x) = P_n \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \right) = \sum_{j=1}^n a_j x_j,$$

onde $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \in E$. Os P_n são chamados de *projeções canônicas* associadas a base $(x_n)_{n=1}^\infty$.

Observação 2.2.13. Note que $\|P_n\| \geq 1$, para cada $n \in \mathbb{N}$. De fato,

$$\begin{aligned}\|P_n\| &= \sup_{\|x\| \leq 1} \|P_n(x)\| \geq \left\| P_n \left(\frac{x_n}{\|x_n\|} \right) \right\| = \frac{1}{\|x_n\|} \|P_n(x_n)\| \\ &= \frac{1}{\|x_n\|} \left\| \sum_{j=1}^n x_j^*(x_n) x_j \right\| = \frac{1}{\|x_n\|} \|x_n\| = 1.\end{aligned}$$

Proposição 2.2.14. As projeções canônicas $(P_n)_{n=1}^\infty$ associadas a base de Schauder $(x_n)_{n=1}^\infty$ do espaço de Banach E são contínuas.

Demonstração: Seja $x = \sum_{n=1}^\infty a_n x_n \in E$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ e cada $x_j \in E$ defina $x_j^* \otimes x_j: E \rightarrow E$ por $x_j^* \otimes x_j(x) = x_j^*(x) x_j$. Note que $x_j^* \otimes x_j = i_j \circ x_j^*$, onde $i_j: \mathbb{K} \rightarrow E$ é dada por $i_j(a) = ax_j$, para todo $a \in \mathbb{K}, j \in \mathbb{N}$. Como i_j e x_j^* são contínuas, segue que $x_j^* \otimes x_j$ é contínua. Além disso, para todo $x \in E$ temos que

$$P_n(x) = P_n \left(\sum_{n=1}^\infty a_n x_n \right) = \sum_{j=1}^n a_j x_j = \sum_{j=1}^n x_j^*(x) x_j = \sum_{j=1}^n x_j^* \otimes x_j(x).$$

Ou seja $P_n = \sum_{j=1}^n x_j^* \otimes x_j$, concluindo que P_n é contínua. ■

Observação 2.2.15. Além da aplicação $x_j^* \otimes x_j: E \rightarrow E$ definida na demonstração da Proposição 2.2.14 acima ser contínua, tem-se também que $\|x_j^* \otimes x_j\| = \|x_j^*\| \|x_j\|$, pois

$$\|x_j^* \otimes x_j\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|x_j^* \otimes x_j(x)\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|x_j^*(x) x_j\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |x_j^*(x)| \|x_j\| = \|x_j^*\| \|x_j\|.$$

Proposição 2.2.16. Sejam $(P_n)_{n=1}^\infty$ as projeções canônicas associadas a base de Schauder $(x_n)_{n=1}^\infty$ do espaço de Banach E . Então $\sup_n \|P_n\| < \infty$.

Demonstração: Para cada $x = \sum_{n=1}^\infty a_n x_n \in E$, como $P_n \left(\sum_{n=1}^\infty a_n x_n \right) = \sum_{j=1}^n a_j x_j$ e a sequência $\left(\sum_{j=1}^n a_j x_j \right)_{n=1}^\infty$ converge para x , segue que a sequência $(\|P_n(x)\|)_{n=1}^\infty$ é limitada. Logo, para cada $x \in E$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} (\|P_n(x)\|) < \infty$. Como E é Banach e cada P_n é contínua segue do Teorema de Banach-Steinhaus que $\sup_n \|P_n\| < \infty$. ■

Definição 2.2.17. Sejam $(P_n)_{n=1}^\infty$ as projeções canônicas associadas a base de Schauder $(x_n)_{n=1}^\infty$ do espaço de Banach E . O número $\sup_n \|P_n\|$ é chamado de *constante da base* $(x_n)_{n=1}^\infty$ e é denotado por $K_{(x_n)_{n=1}^\infty}$.

Teorema 2.2.18. Sejam $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma base de Schauder de um espaço de Banach E e $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ seus funcionais coeficientes. Então, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$1 \leq \|x_k^*\| \|x_k\| \leq 2K_{(x_n)_{n=1}^\infty}.$$

Demonstração: Considerando as projeções canônicas $(P_n)_{n=1}^\infty$ associadas a base de Schauder $(x_n)_{n=1}^\infty$, segue que

$$\begin{aligned} 1 &= \|x_k^*(x_k)\| \leq \|x_k^*\| \|x_k\| = \|x_k^* \otimes x_k\| = \left\| \sum_{j=1}^k x_j^* \otimes x_j - \sum_{j=1}^{k-1} x_j^* \otimes x_j \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{j=1}^k x_j^* \otimes x_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{k-1} x_j^* \otimes x_j \right\| = \|P_k\| + \|P_{k-1}\| \leq 2 \sup_n \|P_n\| = 2K_{(x_n)_{n=1}^\infty}. \end{aligned}$$

■

Corolário 2.2.19. *Sejam $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ os funcionais coeficientes da base de Schauder $(x_n)_{n=1}^\infty$ de um espaço de Banach E . Então,*

$$(a) \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < \infty \text{ se, e somente se, } \inf_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^*\| > 0.$$

$$(b) \inf_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| > 0 \text{ se, e somente se, } \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^*\| < \infty.$$

Demonstração: Faremos o caso (a), pois (b) segue de maneira similar. Chamando $K = 2K_{(x_n)_{n=1}^\infty}$ segue do Teorema anterior que $1 \leq \|x_k^*\| \|x_k\| \leq K$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Primeiramente suponha que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$. Assim, $1 \leq \|x_k^*\| \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < \infty$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo $0 < \frac{1}{\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|} \leq \|x_k^*\|$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e segue da definição de ínfimo que

$$0 < \frac{1}{\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\|} \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^*\|.$$

Reciprocamente, temos que $\|x_k\| \inf_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^*\| \leq \|x_k^*\| \|x_k\| \leq K$ e como $\inf_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^*\| > 0$, segue que $\|x_k\| \leq \frac{K}{\inf_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^*\|}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Da definição de supremo segue que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| \leq \frac{K}{\inf_{n \in \mathbb{N}} \|x_n^*\|} < \infty$. ■

Definição 2.2.20. Sejam E um espaço de Banach e $(y_n)_{n=1}^\infty$ e $(y_n^*)_{n=1}^\infty$ sequências em E e E' , respectivamente. Dizemos que $(y_n, y_n^*)_{n=1}^\infty$ é um *sistema biortogonal* se $y_i^*(y_j) = \delta_{ij}$ para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}$, onde $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$. Neste caso, as funções $(P_n)_{n=1}^\infty$, dadas por

$$P_n: E \longrightarrow E; P_n(x) = \sum_{j=1}^n y_j^*(x) y_j$$

são chamadas *projeções canônicas* do sistema biortogonal $(y_n, y_n^*)_{n=1}^\infty$.

Exemplo 2.2.21. Claramente, se $(x_n)_{n=1}^\infty$ é base de Schauder de um espaço de Banach E e $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ é a sequência dos seus funcionais coeficientes, então $(x_n, x_n^*)_{n=1}^\infty$ é um sistema biortogonal. Mais ainda, se $(x_n, y_n^*)_{n=1}^\infty$ também é um sistema biortogonal, então $x_n^* = y_n^*$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, como x_n^* e y_n^* são tais que $x_n^*(x_j) = \delta_{nj} = y_n^*(x_j)$ para todo $n, j \in \mathbb{N}$, então para $x = \sum_{j=1}^\infty a_j x_j \in E$, temos

$$x_n^*(x) = x_n^*\left(\sum_{j=1}^\infty a_j x_j\right) = \sum_{j=1}^\infty a_j x_n^*(x_j) = \sum_{j=1}^\infty a_j \delta_{nj} = \sum_{j=1}^\infty a_j y_n^*(x_j) = y_n^*\left(\sum_{j=1}^\infty a_j x_j\right) = y_n^*(x).$$

Logo $x_n^* = y_n^*$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 2.2.22. *Seja $(x_n, x_n^*)_{n=1}^\infty$ um sistema biortogonal em um espaço de Banach E e considere $(P_n)_{n=1}^\infty$ as projeções associadas a $(x_n, x_n^*)_{n=1}^\infty$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) $(x_n)_{n=1}^\infty$ é base de Schauder de E ;
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = x$ para todo $x \in E$;
- (c) $\overline{[x_n; n \in \mathbb{N}]} = E$ e $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n(x)\| < \infty$ para todo $x \in E$;
- (d) $\overline{[x_n; n \in \mathbb{N}]} = E$ e $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n\| < \infty$.

Demonstração:

(a) \Rightarrow (b): Seja $x \in E$. Como $(x_n)_{n=1}^\infty$ é base de Schauder de E , segue do Exemplo 2.2.21 que, $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ é a sequência dos seus funcionais coeficientes. Logo $x = \sum_{j=1}^\infty x_j^*(x)x_j$ e $P_n(x) = \sum_{j=1}^n x_j^*(x)x_j$. Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n x_j^*(x)x_j = x.$$

(b) \Rightarrow (c): Claramente $\overline{[x_n; n \in \mathbb{N}]} \subset E$. Seja $x \in E$. De (b) segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n x_j^*(x)x_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) = x,$$

e como $(P_n(x))_{n=1}^\infty \subset [x_n; n \in \mathbb{N}]$, temos $x \in \overline{[x_n; n \in \mathbb{N}]}$. Como $(P_n(x))_{n=1}^\infty$ é convergente (logo limitada), segue que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n(x)\| < \infty$.

(c) \Rightarrow (d): É consequência imediata do Teorema de Banach-Steinhaus aplicado para a sequência de operadores $(P_n)_{n=1}^\infty$.

(d) \Rightarrow (a): A hipótese de (d) garante que o conjunto

$$D = \left\{ \sum_{j=1}^m a_j x_j; \quad m \in \mathbb{N}, \quad a_j \in \mathbb{K}, j = 1, \dots, m \right\}$$

é denso em E . Assim para $\sum_{j=1}^m a_j x_j = y_m \in D$, se $n \geq m$ temos que

$$P_n(y_m) = \sum_{j=1}^n x_j^*(y_m) x_j = \sum_{i=1}^m x_i^*(y_m) x_i + \sum_{j=m+1}^n x_j^*(y_m) x_j = \sum_{j=1}^m a_j x_j + 0 = y_m.$$

Logo $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(y_m) = y_m$. Agora, sejam $z \in E$ e $\varepsilon > 0$. Da densidade de D , existe $y \in D$ tal que $\|z - y\| < \frac{\varepsilon}{1 + \sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n\|}$. Além disso, segue do que vimos acima que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geq n_0$, temos $P_n(y) = y$. Logo, para todo $n \geq n_0$, é verdade que

$$\begin{aligned} \|P_n(z) - z\| &= \|P_n(z) - P_n(y) + P_n(y) - y + y - z\| \\ &\leq \|P_n(z) - P_n(y)\| + \|P_n(y) - y\| + \|y - z\| \\ &= \|P_n(z - y)\| + \|z - y\| \\ &\leq \|P_n\| \|z - y\| + \|z - y\| \\ &= (\|P_n\| + 1) \|z - y\| \\ &\leq \left(\sup_{j \in \mathbb{N}} \|P_j\| + 1 \right) \|z - y\| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z) = z$, para todo $z \in E$ e, além disso,

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n x_j^*(z) x_j = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(z) x_n.$$

Note ainda que a representação $z = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(z) x_n$ é única, pois se $z = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n$ então

$\sum_{n=1}^{\infty} (x_n^*(z) - b_n) x_n = 0$. Logo, para cada $j \in \mathbb{N}$, temos

$$x_j^*(z) - b_j = \sum_{n=1}^{\infty} (x_n^*(z) - b_n) x_j^*(x_n) = x_j^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} (x_n^*(z) - b_n) x_n \right) = x_j^*(0) = 0$$

e, consequentemente, $x_j^*(z) = b_j$, para todo $j \in \mathbb{N}$.

■

Corolário 2.2.23. Se $(x_n, x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ é um sistema biortogonal no espaço de Banach E e

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n\| < \infty,$$

então $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma base de Schauder de um subespaço fechado de E .

Demonstração: Considere o subespaço fechado de E dado por $F = \overline{[x_n; n \in \mathbb{N}]}$. Claramente $(x_n, x_n^*)_{n=1}^\infty$ é um sistema biortogonal de F com $(P_n|_F)_{n=1}^\infty$ sendo as projeções canônicas associadas a $(x_n, x_n^*)_{n=1}^\infty$ em F . Além disso,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n|_F\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n\| < \infty.$$

Logo, segue do Teorema 2.2.22(d) que $(x_n)_{n=1}^\infty$ é base de Schauder de F . ■

CAPÍTULO 3

Sequências básicas em Espaços de Banach

Vimos no capítulo anterior que todo espaço de Banach com base de Schauder é separável. Um problema que permaneceu em aberto por vários anos é se a recíproca deste resultado é verdadeira. Este problema, além do interesse por se tratar de um problema importante da Análise Funcional, também ficou conhecido por uma história curiosa. Nos anos de 1930 e 1940, Banach e outros matemáticos tinham o hábito de se reunirem em um bar (o Scottish Café) para, dentre outras coisas, discutirem matemática. Eles usavam um livro cedido pela esposa de Banach e que ficava no bar (o qual ficou conhecido como *Scottish Book*) para escreverem problemas interessantes de matemática (principalmente de Análise Funcional e Topologia) e suas soluções. Geralmente, aos problemas propostos mas não resolvidos, eram oferecidos prêmios, tais como uma garrafa de vinho ou de conhaque. Mas o problema de número 153 do livro, que é justamente a pergunta sobre a validade da recíproca acima, foi proposto por Mazur, em 1936 e oferecido um ganso vivo para quem solucionasse o problema.

Em um artigo de 1973, P. Enflo mostrou que a recíproca é falsa, ou seja, existem espaços de Banach separáveis que não possuem base de Schauder. De fato, Enflo provou mais do que isso, ele construiu um espaço de Banach reflexivo e separável que não tem a propriedade da aproximação e não possui base de Schauder, respondendo também negativamente à questão de que todo espaço de Banach tem a propriedade da aproximação. A demonstração de Enflo utiliza propriedades de simetria em espaços de dimensão alta e técnicas avançadas de combinatória, assuntos esses que fogem do escopo deste trabalho. Para um leitor interessado, sugerimos a leitura do trabalho original de Enflo, em [6].

Quanto a premiação, Enflo viajou a Varsóvia e recebeu o ganso das mãos do próprio Mazur, o qual foi feito em um jantar naquele mesmo dia.

Voltando à matemática, um resultado mais fraco, porém bastante importante, é verdadeiro: *Todo espaço de Banach de dimensão infinita contém um subespaço de dimensão infinita com base de Schauder.*

Neste capítulo, o principal resultado a ser provado é o princípio de seleção de Bessaga-Pelczynski e, como uma das aplicações do princípio de seleção, provaremos o resultado enunciado acima. Faremos também, neste capítulo, um estudo sobre bases incondicionais e sequências básicas incondicionais. Começamos com o conceito de sequência básica.

Definição 3.0.24. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E é dita *sequência básica* quando $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de Schauder de $\overline{\text{span}\{x_n; n \in \mathbb{N}\}}$, onde $\text{span } A$ denota o espaço gerado por A .

Note que o Corolário 2.2.23 pode ser reescrito da seguinte forma:

"Se $(x_n, x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ é um sistema biortogonal no espaço de Banach E e $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n\| < \infty$, então $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência básica em E ."

O resultado a seguir nos dá uma caracterização útil na decisão de que uma sequência num espaço de Banach é ou não básica.

Teorema 3.0.25. (Critério de Banach-Grünblum) *Seja E um espaço de Banach e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de vetores não-nulos em E . Então $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência básica se, e somente se, existe $M > 0$ tal que se $n \geq m$, então*

$$\left\| \sum_{j=1}^m a_j x_j \right\| \leq M \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\|,$$

para qualquer sequência de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

Demonstração: Para a implicação direta, suponha que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência básica em E . Assim, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de Schauder de $\overline{\text{span}\{x_n; n \in \mathbb{N}\}}$. Considerando $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ como a sequência dos funcionais coeficientes de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, segue que $(x_n, x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ é um sistema biortogonal em $\overline{\text{span}\{x_n; n \in \mathbb{N}\}}$. Logo, segue do Teorema 2.2.22(b) que a sequência $(P_n(x))_{n=1}^{\infty}$ converge em $\overline{\text{span}\{x_n; n \in \mathbb{N}\}}$, qualquer que seja $x \in \overline{\text{span}\{x_n; n \in \mathbb{N}\}}$, onde $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ são as projeções canônicas de $((x_n, x_n^*))_{n=1}^{\infty}$. Pelo mesmo resultado (agora usando (d)) segue que $M := \sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n\| < \infty$.

Assim, para toda sequência de escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ e para $n \geq m$, temos que

$$\begin{aligned} P_m \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right) &= \sum_{i=1}^n a_i P_m(x_i) = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^m x_j^*(x_i) x_j \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^m \delta_{ij} x_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \delta_{ij} x_j \\ &= \sum_{i=1}^n (a_i \delta_{i1} x_1 + \dots + a_i \delta_{im} x_m) = \sum_{i=1}^m a_i x_i. \end{aligned}$$

Então, para $n \geq m$, temos que

$$\left\| \sum_{i=1}^m a_i x_i \right\| = \left\| P_m \left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right) \right\| \leq \|P_m\| \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \leq M \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|.$$

Agora vejamos a recíproca. Seja $F = \text{span}\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Devemos mostrar que $(x_n)_{n=1}^\infty$ é base de Schauder de $\overline{F} = \overline{\text{span}\{x_n; n \in \mathbb{N}\}} \subset E$ (aqui estamos considerando F e \overline{F} com a norma induzida de E). Vejamos primeiro que $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ é linearmente independente. Para isso, sejam $n \in \mathbb{N}$ e uma sequência $(a_i)_{i=1}^\infty$ de escalares qualquer com $\sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$. Para $m = 1$ vale

$$0 \leq \|a_1 x_1\| \leq M \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\| = 0$$

e, conseqüentemente, $a_1 = 0$, pois $x_1 \neq 0$. Para $m = 2$ segue que

$$0 \leq \|a_2 x_2\| = \|a_1 x_1 + a_2 x_2\| \leq M \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\| = 0,$$

donde obtém-se $a_2 = 0$. Continuando com esse procedimento até $m = n$ obtém-se $a_n = \dots = a_1 = 0$. Portanto $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ é linearmente independente.

Agora vejamos que cada $x \in \overline{\text{span}\{x_n; n \in \mathbb{N}\}}$ é escrito de maneira única como $x = \sum_{n=1}^\infty a_n x_n$. Considere, para cada $n \in \mathbb{N}$, o funcional linear $x_n^* : F \rightarrow \mathbb{K}$ e a transformação linear T_n dados por:

$$x_n^* \left(\sum_{j=1}^k a_j x_j \right) = a_n \text{ e } T_n \left(\sum_{j=1}^k a_j x_j \right) = \sum_{j=1}^n a_j x_j,$$

se $n \leq k$ e

$$x_n^* \left(\sum_{j=1}^k a_j x_j \right) = 0 \text{ e } T_n \left(\sum_{j=1}^k a_j x_j \right) = \sum_{j=1}^n a_j x_j,$$

se $n > k$, onde $a_{k+1} = \dots = a_n = 0$.

Assim, segue da hipótese que se $n \leq k$, então

$$\left\| T_n \left(\sum_{j=1}^k a_j x_j \right) \right\| = \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\| \leq M \left\| \sum_{j=1}^k a_j x_j \right\|.$$

e se $n > k$, então

$$\left\| T_n \left(\sum_{j=1}^k a_j x_j \right) \right\| = \left\| \sum_{j=1}^k a_j x_j \right\|.$$

Pelas duas relações acima, concluímos que

$$\|T_n\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|T_n(x)\| \leq \sup_{\|x\| \leq 1} \max\{M\|x\|, \|x\|\} = \max\{M, 1\}.$$

Chamando $C = \max\{M, 1\}$, segue que $\|T_n\| \leq C$, ou seja, cada T_n é contínua.

Note que se $n \leq k$, então para todo $x \in F$, $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i$, temos

$$\begin{aligned} |x_n^*(x)| \|x_n\| &= |a_n| \|x_n\| = \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i - \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| + \left\| \sum_{i=1}^{n-1} a_i x_i \right\| \leq 2M \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \\ &= 2M \|x\|. \end{aligned}$$

Logo

$$|x_n^*(x)| \leq \frac{2M}{\|x_n\|} \|x\|,$$

garantindo assim que x_n^* também é contínua. E como os contradomínios \mathbb{K} de x_n^* e \overline{F} de T_n são espaços de Banach e F é denso em \overline{F} , da Proposição 1.0.20 segue que, para cada n existem únicas extensões lineares e contínuas f_n e R_n de x_n^* e T_n , respectivamente, tais que $\|x_n^*\| = \|f_n\|$ e $\|T_n\| = \|R_n\|$.

Agora é fácil ver que, como

$$T_n(z) = \sum_{i=1}^n x_i^*(z) x_i,$$

para todo $z \in F$, então segue da unicidade das extensões que

$$R_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) x_i,$$

para todo $x \in \overline{F}$.

E agora dados $x \in \overline{F}$ e $\varepsilon > 0$, como F é denso em \overline{F} , existe $y = \sum_{i=1}^m a_j x_j \in \text{span} \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ tal que

$$\|x - y\| < \frac{\varepsilon}{1 + \|T_n\|}.$$

Assim, para todo $n > m$, temos

$$\begin{aligned} \|x - R_n(x)\| &= \|x - y + y - R_n(y) + R_n(y) - R_n(x)\| \\ &\leq \|x - y\| + \|y - R_n(y)\| + \|R_n(y) - R_n(x)\| \\ &\leq \|x - y\| + \|y - y\| + \|R_n\| \|x - y\| \\ &\leq (1 + \|R_n\|) \|x - y\| \\ &< (1 + \|R_n\|) \frac{\varepsilon}{1 + \|T_n\|} \\ &= (1 + \|T_n\|) \frac{\varepsilon}{1 + \|T_n\|} = \varepsilon, \end{aligned}$$

e, portanto,

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f_i(x) x_i = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) x_i. \quad (3.1)$$

Resta agora verificar que a representação de x acima é única. Para isto, é suficiente mostrar que

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \Rightarrow a_i = 0,$$

para todo $i \in \mathbb{N}$. Para $\varepsilon > 0$, segue que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\| < \varepsilon,$$

para todo $n \geq n_0$. Pela desigualdade da hipótese concluímos que

$$\left\| \sum_{j=1}^m a_j x_j \right\| \leq M\varepsilon,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Assim,

$$|a_m| \|x_m\| = \left\| \sum_{j=1}^m a_j x_j - \sum_{j=1}^{m-1} a_j x_j \right\| < 2M\varepsilon,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Como $\varepsilon > 0$ foi escolhido arbitrariamente, segue que $a_m = 0$ para todo $m \in \mathbb{N}$. ■

Corolário 3.0.26. *A menor constante que satisfaz a desigualdade do critério de Banach-Grunblum é a constante da base*

$$K_{(x_n)_{n=1}^{\infty}} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n\|,$$

conforme introduzida na Definição 2.2.17. Além disso, $K_{(x_n)_{n=1}^{\infty}} \geq 1$.

Demonstração: Se M é uma constante que satisfaz a desigualdade do critério de Banach-Grunblum e $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \in \overline{\{x_n; n \in \mathbb{N}\}}$, então para $m \geq n$ temos

$$\|P_n(x)\| = \left\| P_n \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \right) \right\| = \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\| \leq M \left\| \sum_{j=1}^m a_j x_j \right\|$$

e daí

$$\|P_n(x)\| \leq M \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \sum_{j=1}^m a_j x_j \right\| \leq M \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j \right\| = M \|x\|.$$

Logo $\|P_n\| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e assim $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|P_n\| \leq M$. A desigualdade $K_{(x_n)_{n=1}^{\infty}} \geq 1$ segue da Observação 2.2.13. ■

Uma questão natural é se todo subconjunto linearmente independente e enumerável de um espaço de Banach é uma sequência básica. O exemplo a seguir mostra que não.

Exemplo 3.0.27. Em ℓ_p , $1 \leq p < \infty$, defina $x_1 = e_1$ e $x_j = \frac{-1}{j-1}e_{j-1} + \frac{1}{j}e_j$ para todo $j \geq 2$. É fácil ver que $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \ell_p$ é linearmente independente. Além disso, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\left\| \sum_{j=1}^n x_j \right\|_p = \frac{1}{n}.$$

Logo não existe constante M que satisfaça a desigualdade do critério de Banach-Grünblum. Portanto $(x_n)_{n=1}^\infty$ não é sequência básica em ℓ_p .

3.1 Bases e sequências básicas incondicionais

Definição 3.1.1. Uma base de Schauder $(x_n)_{n=1}^\infty$ em um espaço de Banach E é uma *base incondicional* se, para todo $x \in E$, a representação $x = \sum_{n=1}^\infty a_n x_n$ é incondicionalmente convergente.

Exemplo 3.1.2. A base de Schauder $(e_n)_{n=1}^\infty$ dos espaços c_0 e ℓ_p , $1 \leq p < \infty$ é incondicional. De fato, primeiramente considere $(x_n)_{n=1}^\infty \in c_0$, $\varepsilon_n = \pm 1$ e defina em c_0 a sequência $(s_n)_{n=1}^\infty$ por $s_n = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j e_j$. Para $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n| < \varepsilon$ sempre que $n \geq n_0$. Assim, para $m > n \geq n_0$ temos

$$\begin{aligned} \|s_m - s_n\| &= \left\| \sum_{j=n+1}^m \varepsilon_j x_j e_j \right\|_\infty = \|(0, \dots, 0, \varepsilon_{n+1}x_{n+1}, \dots, \varepsilon_m x_m, 0, 0, \dots)\|_\infty \\ &= \max\{|x_{n+1}|, \dots, |x_m|\} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ou seja, $(s_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy no espaço de Banach c_0 , logo é convergente. Assim $(x_n e_n)_{n=1}^\infty$ é sinal somável e pelo Teorema 2.1.4(d) podemos concluir que $(e_n)_{n=1}^\infty$ é base incondicional de c_0 .

Agora para $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p$ defina $S_n = \sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j e_j$, $n \in \mathbb{N}$ e $\varepsilon_n = \pm 1$. Como $\sum_{n=1}^\infty |x_n|^p$ converge, então dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m > n \geq n_0$ temos $\sum_{j=n}^m |x_j|^p < \varepsilon^p$. Daí,

$$\begin{aligned} \|S_m - S_n\|_p^p &= \left\| \sum_{j=n+1}^m \varepsilon_j x_j e_j \right\|_p^p = \|(0, \dots, 0, \varepsilon_{n+1}x_{n+1}, \dots, \varepsilon_m x_m, 0, 0, \dots)\|_p^p \\ &= \sum_{j=n+1}^m |x_j|^p < \varepsilon^p, \end{aligned}$$

para todo $m > n \geq n_0$. Portanto $(S_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência de Cauchy no espaço de Banach ℓ_p , logo converge. Assim $(x_n e_n)_{n=1}^\infty$ é sinal somável e pelo Teorema 2.1.4(d) podemos concluir que $(e_n)_{n=1}^\infty$ é base incondicional de ℓ_p .

Proposição 3.1.3. Seja $T: E \longrightarrow F$ um isomorfismo entre os espaços de Banach E e F .

- (a) Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de Schauder de E , então $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é base de Schauder de F ;
- (b) Se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é base incondicional de E , então $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é base incondicional de F .

Demonstração:

- (a) Para $y \in F$, como $T^{-1}(y) \in E$, existem únicos escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ tais que $T^{-1}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ e como T é bijeção temos que $y = T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right)$. Devido a T ser uma aplicação linear e contínua, temos que

$$\begin{aligned} y &= T\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n a_j x_j\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} T\left(\sum_{j=1}^n a_j x_j\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n a_j T(x_j) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T(x_n). \end{aligned}$$

Portanto, $y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n T(x_n) \in F$. Vejamos que tal representação é única, o que nos levará a concluir que $T(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de Schauder de F . Para isso suponha que exista uma sequência de escalares $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ tais que $y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n T(x_n)$. Um argumento análogo ao que foi feito, mostra que $T^{-1}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n$, e como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de Schauder de E , isso contraria a unicidade dos escalares $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

- (b) Devemos verificar que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n T(x_n)$ converge incondicionalmente. Para isso, considere

$\sigma: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ uma bijeção qualquer e em F defina a sequência $s_n = \sum_{j=1}^n a_j T(x_{\sigma(j)})$. Como

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge incondicionalmente em E , segue que para $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m > n \geq n_0$, então

$$\left\| \sum_{j=n+1}^m a_j x_{\sigma(j)} \right\| < \frac{\varepsilon}{\|T\|}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|s_m - s_n\| &= \left\| \sum_{j=1}^m a_j T(x_{\sigma(j)}) - \sum_{j=1}^n a_j T(x_{\sigma(j)}) \right\| = \left\| \sum_{j=n+1}^m a_j T(x_{\sigma(j)}) \right\| \\ &= \left\| T\left(\sum_{j=n+1}^m a_j x_{\sigma(j)}\right) \right\| \leq \|T\| \left\| \sum_{j=n+1}^m a_j x_{\sigma(j)} \right\| < \varepsilon, \end{aligned}$$

sempre que $m > n \geq n_0$, e isto implica que $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy no espaço de Banach F .

Portanto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n T(x_{\sigma(n)})$ é convergente em F .

■

Definição 3.1.4. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em um espaço de Banach E é uma *sequência básica incondicional* se ela for base incondicional de $\overline{\text{span}\{x_n; n \in \mathbb{N}\}}$.

O resultado a seguir é uma importante caracterização para sequências básicas incondicionais. Este resultado nos traz uma lembrança do critério de Banach-Grunblum que trata de sequências básicas. Entretanto no critério de Banach-Grunblum as desigualdades são feitas via somas finitas e no resultado a seguir são feitas por meio de somas infinitas.

Teorema 3.1.5. *Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência no espaço de Banach E . As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência básica incondicional;
- (b) Existe uma constante L tal que, se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge, então, para qualquer subconjunto $N \subset \mathbb{N}$, temos

$$\left\| \sum_{n \in N} a_n x_n \right\| \leq L \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|;$$

- (c) Existe uma constante K tal que se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ converge, então para quaisquer sinais $\varepsilon_n = \pm 1$, temos

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n x_n \right\| \leq K \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|.$$

Demonstração: (a) \Rightarrow (b): Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $X = \overline{\text{span}\{x_n; n \in \mathbb{N}\}}$. Para $N \subset \mathbb{N}$ defina $P_N : X \subset E \longrightarrow X$ por $P_N \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right) = \sum_{n \in N} a_n x_n$. Note que P_N está bem definido, pois a convergência incondicional de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ juntamente com o Teorema 2.1.4 (c) implicam na convergência de $\sum_{n \in N} a_n x_n$. Claramente P_N é linear e a continuidade seguirá do Teorema do Gráfico Fechado, bastando para isso mostrar que o gráfico

$$G(P_N) = \left\{ (x, P_N(x)); x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in X \right\}$$

é fechado em $X \times X$. Seja então $((z_n, y_n))_{n=1}^{\infty}$ uma sequência convergente em $Gr(P_N)$, isto é, existe $(x, y) \in X \times X$ tal que $(z_n, y_n) \rightarrow (x, y)$. Como $((z_n, y_n))_{n=1}^{\infty} \subset Gr(P_N)$, então $y_n = P_N(z_n)$. Devemos mostrar que $(x, y) \in Gr(P_N)$, ou seja, $y = P_N(x)$.

Para isso considere

$$z_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^k x_n, \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, \quad y_k = P_N(z_k) = \sum_{n \in N} a_n^k x_n \quad \text{e} \quad y = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x_n.$$

Note que a continuidade dos funcionais coeficientes x_n^* garante que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_n^k = \lim_{k \rightarrow \infty} x_n^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n^k x_n \right) = x_n^* \left(\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^k x_n \right) = x_n^* \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right) = a_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Ou seja,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_n^k = a_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Da mesma forma obtém-se

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_n^k = b_n,$$

para todo $n \in N$ e $b_n = 0$ se $n \notin N$, pois nesse caso a sequência nula converge para b_n . Logo, $a_n = b_n$, para todo $n \in N$ e $b_n = 0$ para todo $n \notin N$ e, consequentemente,

$$P_N(x) = \sum_{n \in N} a_n x_n = \sum_{n \in N} b_n x_n = y.$$

Portanto, $Gr(P_N)$ é fechado em $X \times X$, implicando assim que P_N é contínua.

Agora, para cada $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in X$ fixo, como $(a_n x_n)_{n=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável,

segue do Teorema 2.1.4(e) que o operador $T: \ell_{\infty} \rightarrow X$ dado por $T((\lambda_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n x_n$ é contínuo. Assim, existe $L_x > 0$ tal que

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n x_n \right\| = \|T((\lambda_n)_{n=1}^{\infty})\| \leq L_x \|(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty}.$$

Para cada $N \subset \mathbb{N}$ defina a sequência $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}$ por $\lambda_n = 1$, se $n \in N$, e $\lambda_n = 0$, caso contrário. Assim,

$$\|P_N(x)\| = \left\| \sum_{n \in N} a_n x_n \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n a_n x_n \right\| \leq L_x \|(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty} = L_x$$

e, portanto,

$$\sup_{N \subset \mathbb{N}} \|P_N(x)\| \leq L_x.$$

Pelo Teorema da Banach-Steinhaus, existe $L > 0$ tal que

$$\sup_{N \subset \mathbb{N}} \|P_N\| \leq L.$$

Portanto, para todo $N \subset \mathbb{N}$ segue que

$$\|P_N(x)\| \leq L \|x\|,$$

donde resulta

$$\left\| \sum_{n \in N} a_n x_n \right\| \leq L \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|.$$

(b) \Rightarrow (c) Sejam $N \subset \mathbb{N}$ e $\varepsilon_n \in \{-1, 1\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por hipótese, temos

$$\left\| \sum_{n \in N} a_n x_n \right\| \leq L \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| < \infty,$$

logo $(a_n x_n)_{n=1}^{\infty}$ é subsérie somável. Assim, segue do Teorema 2.1.4(d) que $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n x_n$ é convergente. Logo, para $N^+ = \{n \in \mathbb{N}; \varepsilon_n = 1\}$ e $N^- = \{n \in \mathbb{N}; \varepsilon_n = -1\}$ segue que

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n x_n \right\| \leq \left\| \sum_{n \in N^+} a_n x_n \right\| + \left\| \sum_{n \in N^-} a_n x_n \right\| \leq 2L \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|.$$

Chamando $K = 2L$, segue que

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n x_n \right\| \leq K \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|.$$

(c) \Rightarrow (a) Por hipótese

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n x_n \right\| \leq K \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|,$$

logo segue do Teorema 2.1.4(d) que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ é incondicionalmente convergente. Vejamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é sequência básica de E . Para isso usaremos o critério de Banach-Grunblum, ou seja, vamos mostrar que existe $M > 0$ tal que $\left\| \sum_{j=1}^m a_j x_j \right\| \leq M \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\|$, sempre que $n \geq m$. Seja $N \subset \mathbb{N}$ e defina $\varepsilon_n = 1$, se $n \in N$, e $\varepsilon_n = -1$, se $n \notin N$. Daí

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j a_j x_j = \sum_{n \in N} a_n x_n - \sum_{n \notin N} a_n x_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = \sum_{n \in N} a_n x_n + \sum_{n \notin N} a_n x_n$$

e, consequentemente,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n x_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = 2 \sum_{n \in N} a_n x_n.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n \in N} a_n x_n \right\| &= \frac{1}{2} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n x_n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| \\ &\leq \frac{1}{2} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n a_n x_n \right\| + \frac{1}{2} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| \\ &\leq \frac{K}{2} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| + \frac{1}{2} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| \\ &= \frac{K+1}{2} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|. \end{aligned}$$

Portanto, para $M = \frac{k+1}{2}$, obtemos

$$\left\| \sum_{n \in N} a_n x_n \right\| \leq M \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\|,$$

qualquer que seja $N \subset \mathbb{N}$.

Assim, para $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, e considerando $N = \{1, \dots, n\}$ e $a_j = 0$ para $j \in \{m+1, m+2, \dots\}$, temos

$$\left\| \sum_{n \in N} a_n x_n \right\| \leq M \left\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right\| = M \left\| \sum_{n=1}^m a_n x_n \right\|,$$

ou seja,

$$\left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\| \leq M \left\| \sum_{j=1}^m a_j x_j \right\|.$$

Agora o resultado segue do critério de Banach-Grunblum. ■

3.2 Dois problemas importantes envolvendo sequências básicas em espaços de Banach

Até o momento, estudamos caracterizações para decidir se uma sequência num espaço de Banach é ou não sequência básica ou, se é ou não sequência básica incondicional. Vimos também que nem todo subconjunto linearmente independente e enumerável de um espaço de Banach é uma sequência básica. Entretanto, duas perguntas fundamentais ainda estão sem resposta:

1. Sempre existe sequência básica num dado espaço de Banach?
2. Sempre existe sequência básica incondicional num dado espaço de Banach?

Veremos que a resposta para a primeira pergunta é *sim* e a resposta para a segunda é *não*.

A prova de que todo espaço de Banach de dimensão infinita tem sequência básica será feita no próximo capítulo, como aplicação do princípio de seleção de Bessaga-Pelczynski. Antes disso, faremos um breve estudo a respeito da segunda pergunta.

3.2.1 O problema da base incondicional

Conforme dissemos anteriormente, a pergunta 1 é respondida de maneira positiva. Mais precisamente, o Teorema de Banach-Mazur diz que todo espaço de Banach com dimensão infinita contém um subespaço fechado com dimensão também infinita que tem base de Schauder (este resultado será provado adiante). Assim, surge um questionamento natural, que é conhecido como o *problema da base incondicional*:

"É verdade que todo espaço de Banach com dimensão infinita contém um subespaço fechado de dimensão infinita que possui base incondicional?"

A solução desse problema foi dada em sua negativa, nos trabalhos de W. T. Gowers e B. Maurey. Eles resolveram este problema, juntamente com a solução de um outro importante problema proposto por Banach em seu livro [1] de 1932, que é conhecido como o problema do espaço homogêneo. A solução desses problemas garantiram a Gowers uma medalha Fields em 1998.

Em [2], G. Botelho e D. Pellegrino fizeram um ótimo artigo de divulgação, contando um pouco mais sobre os problemas da base incondicional e do espaço homogêneo.

Para um melhor entendimento da solução desse problema, precisaremos de algumas definições:

Definição 3.2.1. Dizemos que um espaço de Banach E é *soma direta topológica* de E_1 e E_2 e escrevemos $E = E_1 \oplus E_2$, se E_1 e E_2 são subespaços fechados de E tais que $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ e $E = E_1 + E_2$.

No trabalho [13] de 1970, J. Lindenstrauss questionou se era possível decompor qualquer espaço de Banach de dimensão infinita como soma direta topológica de dois subespaços de dimensão infinita. Em 1991, Gowers e Maurey construíram, independentemente, espaços que resolveram a questão proposta por Lindenstrauss. Como os espaços construídos por Gowers e Maurey eram essencialmente os mesmos, eles publicaram, em 1993, o artigo [8] onde introduziram o conceito de espaço hereditariamente indecomponível e construíram o primeiro exemplo de espaço hereditariamente indecomponível, que ficou conhecido por espaço X_{GM} (ou simplesmente espaço GM). Em particular, o espaço GM além de resolver o problema de Lindenstrauss, também resolve o problema da base incondicional.

Definição 3.2.2. Um espaço de Banach E de dimensão infinita é dito *hereditariamente indecomponível* se nenhum subespaço de E é soma direta topológica de dois subespaços de dimensão infinita.

O primeiro exemplo dado de espaço hereditariamente indecomponível é o espaço GM . Sua construção é extremamente difícil e técnica, além de utilizar ferramentas que não são tratadas nessa dissertação. Por isso, omitiremos a construção do espaço GM e admitiremos apenas a existência de espaços hereditariamente indecomponíveis.

Agora, com as ferramentas em mãos, provar que os espaços hereditariamente indecomponíveis não possuem sequência básica incondicional é simples. O trabalho árduo de criar as ferramentas ficou para Gowers e Maurey.

Teorema 3.2.3. *Espaços de Banach hereditariamente indecomponíveis não possuem subespaços fechados e de dimensão infinita com base incondicional.*

Demonstração: Sejam E um espaço de Banach hereditariamente indecomponível e F um subespaço fechado de dimensão infinita. Suponhamos, por absurdo, que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ seja base incondicional de F . Considere F_1 e F_2 subespaços fechados de F dados por

$$F_1 = \overline{\text{span}\{x_1, x_3, x_5, \dots\}} \quad \text{e} \quad F_2 = \overline{\text{span}\{x_2, x_4, x_6, \dots\}}.$$

Como $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ é linearmente independente, segue que $\{x_1, x_3, x_5, \dots\}$ e $\{x_2, x_4, x_6, \dots\}$ também são. Logo F_1 e F_2 são subespaços fechados (por definição) e de dimensão infinita.

Vejamos que $F = F_1 + F_2$. Para $x \in F$, temos $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$, onde $(a_n)_n^{\infty} \subset \mathbb{K}$, com esta convergência sendo incondicional. Como toda série incondicionalmente convergente é subsérie convergente segue que

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} x_{2n-1} \quad \text{e} \quad z = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} x_{2n}$$

são convergentes e $y \in F_1$ e $z \in F_2$. Além disso,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} x_{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} x_{2n},$$

ou seja, $x = y + z \in F_1 + F_2$. Logo, $F \subset F_1 + F_2$. De maneira similar, prova-se que $F_1 + F_2 \subset F$. Portanto, $F = F_1 + F_2$. Vejamos agora que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Seja

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \in F_1 \cap F_2.$$

Pela unicidade de representação de x em relação a base $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e pelo fato de $x \in F_1$, segue que $a_{2n} = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Da mesma forma, como $x \in F_2$, segue que $a_{2n-1} = 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $x = 0$, ou seja, $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Portanto, $F = F_1 \oplus F_2$ e isto é um absurdo já que E é hereditariamente indecomponível. ■

3.2.2 O Princípio de Seleção de Bessaga-Pelczynski

O princípio de seleção de Bessaga-Pelczynski, é um resultado bastante importante da Teoria dos espaços de Banach e, como já dissemos, provaremos a partir dele que todo espaço de Banach possui sequência básica. Como provaremos também outras aplicações de tal princípio, deixaremos todas essas aplicações para o próximo capítulo. Começaremos com os pré-requisitos para a demonstração do princípio de seleção.

Definição 3.2.4. Um subconjunto N do dual E' de um espaço de Banach E é dito *normante* para E se

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in N, \|\varphi\| \leq 1\}$$

para todo $x \in E$.

Observação 3.2.5. Todo conjunto $N \subset E$ normante para E separa os pontos de E , ou seja, para todos $x, y \in E, x \neq y$ existe $\varphi \in N$ tal que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$. De fato, como N é normante para E , segue que

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in N, \|\varphi\| \leq 1\}$$

para todo $x \in E$. Para $y \neq x$, segue que

$$0 \neq \|x - y\| = \sup\{|\varphi(x - y)| : \varphi \in N, \|\varphi\| \leq 1\}.$$

Portanto, existe $\varphi \in N$ tal que $|\varphi(x - y)| \neq 0$, garantindo que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$.

Lema 3.2.6. *Sejam N um conjunto normante para o espaço de Banach E e a sequência $(x_n)_{n=1}^\infty \subset E$ tal que $\inf \|x_n\| > 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = 0$, para todo $\varphi \in N$. Então para cada $0 < \varepsilon < 1$, cada inteiro positivo k e cada subespaço de dimensão infinita F de E , existe um inteiro $n \geq k$ tal que*

$$\|y + ax_n\| \geq (1 - \varepsilon)\|y\|$$

para todos $y \in F$ e $a \in \mathbb{K}$.

Demonstração: O resultado será provado primeiramente com o enunciado valendo para vetores unitários $v \in F$. Depois faremos o caso $y \in F$ arbitrário. Façamos por absurdo. Suponha que não vale a tese, ou seja, existem $0 < \varepsilon < 1$, $k \in \mathbb{N}$ e F subespaço de dimensão finita de E tais que, para todo $n \geq k$ existem $a_n \in \mathbb{K}$ e $v_n \in F$ unitário tais que

$$\|v_n + a_n x_n\| < (1 - \varepsilon)\|v_n\| = 1 - \varepsilon.$$

Assim, temos sequências $(v_n)_{n=k}^\infty \subset F$ e $(a_n)_{n=k}^\infty \subset \mathbb{K}$, satisfazendo a desigualdade acima, sempre que $n \geq k$.

Como F tem dimensão finita e $(v_n)_{n=k}^\infty$ é limitada, segue que existe uma subsequência $(v_{n_j})_{j=1}^\infty$ de $(v_n)_{n=k}^\infty$ tal que $v_{n_j} \rightarrow v_0 \in F$ e, é claro, que v_0 também é unitário. Note que, para todo $n_j \geq k$, temos

$$\begin{aligned} |a_{n_j}| \|x_{n_j}\| &= \|a_{n_j} x_{n_j}\| \leq \|v_{n_j} + a_{n_j} x_{n_j}\| + \|v_{n_j}\| \\ &< (1 - \varepsilon) + 1 = 2 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Logo,

$$|a_{n_j}| < \frac{2 - \varepsilon}{\|x_{n_j}\|} \leq \frac{2 - \varepsilon}{\inf\{\|x_i\|; i \geq k\}}$$

e isto implica que $(a_{n_j})_{j=1}^\infty$ é limitada. Utilizando este fato, juntamente com a hipótese, a convergência de $(v_{n_j})_{j=1}^\infty$ e a continuidade de φ , segue que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varphi(v_{n_j} + a_{n_j} x_{n_j}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi(v_{n_j}) + \lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_j} \varphi(x_{n_j}) = \varphi(v_0) + 0 = \varphi(v_0).$$

Como N é normante e

$$\sup_{\varphi \in N; \|\varphi\| \leq 1} |\varphi(v_0)| = \|v_0\| = 1,$$

então existe $\varphi_0 \in N$ tal que $\|\varphi_0\| \leq 1$ e $|\varphi_0(v_0)| > 1 - \varepsilon$. Mas, para todo $n_j \geq k$, temos

$$1 - \varepsilon > \|v_{n_j} + a_{n_j}x_{n_j}\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(v_{n_j} + a_{n_j}x_{n_j})| \geq |\varphi_0(v_{n_j} + a_{n_j}x_{n_j})|.$$

Logo

$$1 - \varepsilon \geq \lim_{j \rightarrow \infty} |\varphi_0(v_{n_j} + a_{n_j}x_{n_j})| = \varphi(v_0) > 1 - \varepsilon$$

o que é um absurdo. Portanto, o resultado está provado para $v \in F$ unitário.

Vejamos agora o caso arbitrário de $y \in F$. Se $y = 0$ a desigualdade é óbvia. Agora, seja $y \in F, y \neq 0$. Tomando $v = \frac{y}{\|y\|}$ (o qual é unitário) e $a \in \mathbb{K}$, segue do caso já provado que

$$\frac{\|y + ax_n\|}{\|y\|} = \left\| v + \frac{a}{\|y\|} x_n \right\| \geq (1 - \varepsilon) \|v\| = 1 - \varepsilon,$$

ou seja,

$$\|y + ax_n\| \geq (1 - \varepsilon) \|y\|.$$

■

Para a demonstração do próximo teorema precisamos de um resultado sobre produtos infinitos, o qual enunciamos na forma de lema.

Definição 3.2.7. Seja $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de números reais. Definimos o *produto infinito*

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots$$

como sendo o limite da sequência $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ dos *produtos parciais*, isto é,

$$p_n = a_1 \cdot \dots \cdot a_n,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$.

Lema 3.2.8. Se $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de números reais, com $0 < a_n < 1$, então

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - a_n) \text{ converge se, e somente se, } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

Demonstração: Ver [10, Theorem 7, p. 96]. ■

Teorema 3.2.9. Sejam E um espaço de Banach, $N \subset E$ normante para E e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E tal que $\inf \|x_n\| > 0$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = 0$, para todo $\varphi \in N$. Então $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ contém uma subseqüência básica $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ com $x_{n_1} = x_1$.

Demonstração: Devido ao Lema 3.2.6 se tomarmos $n_1 = 1$, $F_1 = \text{span}\{x_{n_1}\}$ e $\varepsilon_1 > 0$ temos que existe $n_2 > n_1$ tal que para $a_1 x_{n_1} \in F_1$ e $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$ temos

$$\|a_1 x_{n_1} + a_2 x_{n_2}\| \geq (1 - \varepsilon_1) \|a_1 x_{n_1}\|.$$

Procedendo indutivamente obtemos $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ tais que, para quaisquer $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}$, vale

$$\|a_1x_{n_1} + \dots + a_kx_{n_k}\| \geq (1 - \varepsilon_{k-1}) \|a_1x_{n_1} + \dots + a_{k-1}x_{n_{k-1}}\|.$$

Então tomando $F_k = \text{span}\{x_{n_1}, \dots, x_{n_k}\}$ e $\varepsilon_k > 0$, temos

$$\|a_1x_{n_1} + \dots + a_{k+1}x_{n_{k+1}}\| \geq (1 - \varepsilon_k) \|a_1x_{n_1} + \dots + a_kx_{n_k}\|.$$

Assim por diante, construímos uma subsequência $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$, a qual vamos mostrar ser uma sequência básica. De fato, para $a_1, \dots, a_{k+m} \in \mathbb{K}$, onde $k, m \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^{k+m} a_j x_{n_j} \right\| &\geq (1 - \varepsilon_{k+m-1}) \left\| \sum_{j=1}^{k+m-1} a_j x_{n_j} \right\| \geq (1 - \varepsilon_{k+m-1})(1 - \varepsilon_{k+m-2}) \left\| \sum_{j=1}^{k+m-2} a_j x_{n_j} \right\| \\ &\geq \dots \geq (1 - \varepsilon_{k+m-1}) \dots (1 - \varepsilon_k) \left\| \sum_{j=1}^k a_j x_{n_j} \right\| \\ &\geq \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \varepsilon_k) \left\| \sum_{j=1}^k a_j x_{n_j} \right\|. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\left\| \sum_{j=1}^k a_j x_{n_j} \right\| \leq L \left\| \sum_{j=1}^{k+m} a_j x_{n_j} \right\|,$$

onde

$$L = \left(\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \varepsilon_k) \right)^{-1},$$

e daí, segue do critério de Banach-Grunblum que a sequência $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ é básica. ■

Agora, introduziremos o conceito de sequência de blocos básica e provaremos alguns resultados envolvendo tal conceito, já que o mesmo aparecerá no Princípio de Seleção de Bessaga-Pelczynski.

Definição 3.2.10. Seja $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma base de Schauder de um espaço de Banach E e $(k_n)_{n=0}^\infty \subset \mathbb{N}$ uma sequência estritamente crescente, com $k_0 = 0$. Uma sequência $(y_n)_{n=1}^\infty \subset E$ de vetores não-nulos é dita uma *sequência de blocos básica relativa à $(x_n)_{n=1}^\infty$* , se

$$y_n = \sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n} b_j x_j,$$

com cada $b_j \in \mathbb{K}$.

O próximo resultado é essencialmente uma rápida consequência do critério de Banach-Grunblum. Ele garante que toda sequência de blocos básica é também uma sequência básica.

Proposição 3.2.11. Se $(x_n)_{n=1}^\infty$ é base de Schauder do espaço de Banach E e $(y_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência de blocos básica relativa a $(x_n)_{n=1}^\infty$, então $(y_n)_{n=1}^\infty$ é sequência básica em E e $K_{(y_n)_{n=1}^\infty} \leq K_{(x_n)_{n=1}^\infty}$.

Demonstração: Digamos que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é dada por

$$y_n = \sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n} b_j x_j,$$

onde $b_j \in \mathbb{K}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, para $p, q \in \mathbb{Z}^+$, segue do critério de Banach-Grünblum que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{n=1}^p a_n y_n \right\| &= \left\| \sum_{n=1}^p a_n \left(\sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n} b_j x_j \right) \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{k_1} a_1 b_j x_j + \sum_{j=k_1+1}^{k_2} a_2 b_j x_j + \cdots + \sum_{j=k_{p-1}+1}^{k_p} a_p b_j x_j \right\| \\ &\leq K_{(x_n)_{n=1}^{\infty}} \left\| \sum_{j=1}^{k_1} a_1 b_j x_j + \cdots + \sum_{j=k_{p-1}+1}^{k_p} a_p b_j x_j + \cdots + \sum_{j=k_{p+q-1}+1}^{k_{p+q}} a_{p+q} b_j x_j \right\| \\ &= K_{(x_n)_{n=1}^{\infty}} \left\| \sum_{n=1}^{p+q} a_n \left(\sum_{j=k_{n-1}+1}^{k_n} b_j x_j \right) \right\| = K_{(x_n)_{n=1}^{\infty}} \left\| \sum_{n=1}^{p+q} a_n y_n \right\|. \end{aligned}$$

Novamente aplicando o critério de Banach-Grünblum, segue que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência básica e, do Corolário 3.0.26, segue que $K_{(y_n)_{n=1}^{\infty}} \leq K_{(x_n)_{n=1}^{\infty}}$. ■

O próximo teorema é devido a Bessaga e Pelczyński e também faz-se necessário para a demonstração do princípio de seleção. Para a demonstração deste teorema precisamos da seguinte proposição.

Proposição 3.2.12. *Sejam E um espaço de Banach e $T \in \mathcal{L}(E, E)$, $\|T\| < 1$. Então existe a inversa de $I - T$, a qual é contínua e é dada por*

$$(I - T)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} T^j.$$

Aqui I denota a identidade em E , $T^0 = I$ e $T^j = T \circ \cdots \circ T$ composto j -vezes, $j \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Essa demonstração é simples e usual em Análise Funcional, por isso não a faremos. Para a prova veja [3, Proposição 7.1.3]. ■

Teorema 3.2.13. *Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência básica no espaço de Banach E e $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ seus funcionais coeficientes. Se $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ é tal que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| \cdot \|x_n^*\| < 1,$$

então $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência básica equivalente a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Além disso, se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de Schauder de E , então $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ também é base de Schauder de E .

Demonstração: Chame

$$\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| \cdot \|x_n^*\|.$$

Dada a sequência de escalares $(a_n)_{n=1}^\infty$, como

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n a_i(x_i - y_i) \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^n x_i^* \left(\sum_{j=1}^n a_j x_j \right) (x_i - y_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^n \left\| x_i^* \left(\sum_{j=1}^n a_j x_j \right) (x_i - y_i) \right\| \\ &= \sum_{i=1}^n \left\| x_i^* \left(\sum_{j=1}^n a_j x_j \right) \right\| \|x_i - y_i\| \leq \sum_{i=1}^n \|x_i^*\| \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\| \|x_i - y_i\| \\ &= \sum_{i=1}^n \|x_i - y_i\| \|x_i^*\| \left\| \sum_{j=1}^n a_j x_j \right\| = \lambda \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|, \end{aligned}$$

então

$$\left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| - \left\| \sum_{i=1}^n a_i y_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i (x_i - y_i) \right\| \leq \lambda \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|$$

e dessa desigualdade segue que

$$(1 - \lambda) \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n a_i y_i \right\| \leq (1 + \lambda) \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\|, \quad (3.2)$$

qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Como $(x_n)_{n=1}^\infty$ é sequência básica, segue do critério de Banach-Grunblum e da desigualdade acima que existem uma constante $M \geq 1$ tal que, se $m \in \mathbb{N}$ e $m \geq n$, então

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^n a_i y_i \right\| &\leq (1 + \lambda) \left\| \sum_{i=1}^n a_i x_i \right\| \leq M(1 + \lambda) \left\| \sum_{i=1}^m a_i x_i \right\| \\ &\leq \frac{M(1 + \lambda)}{1 - \lambda} \left\| \sum_{i=1}^m a_i y_i \right\|. \end{aligned}$$

Novamente do critério de Banach-Grunblum, segue que $(y_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência básica.

Agora, utilizando a desigualdade (3.2) juntamente com o critério de Cauchy para séries, segue diretamente que $\sum_{n=1}^\infty x_n$ converge se, e somente se, $\sum_{n=1}^\infty a_n y_n$ converge. Portanto, $(x_n)_{n=1}^\infty$ é equivalente a $(y_n)_{n=1}^\infty$.

Finalmente vejamos que se $(x_n)_{n=1}^\infty$ é base de Schauder de E , então $(y_n)_{n=1}^\infty$ também é base de Schauder de E . Defina o operador $T: E \longrightarrow E$ por

$$T(x) = \sum_{n=1}^\infty x_n^*(x)(x_n - y_n),$$

para todo $x \in E$. Como E é Banach, para garantir que T está bem definida, basta mostrar que para todo $x \in E$ a série $\sum_{n=1}^\infty x_n^*(x)(x_n - y_n)$ converge absolutamente. Para $x \in E$, temos que

$$\left\| \sum_{n=1}^\infty x_n^*(x)(x_n - y_n) \right\| \leq \sum_{n=1}^\infty \|x_n^*\| \cdot \|x\| \cdot \|(x_n - y_n)\| = \lambda \|x\| < \infty.$$

Note que a desigualdade acima também garante que T é contínua com $\|T\| \leq \lambda < 1$. Então pela Proposição 3.2.12 segue que a aplicação $(I - T)$ é invertível (em particular, isomorfismo). Por fim,

$$\begin{aligned}
 (I - T)(x_n) &= I(x_n) - T(x_n) = x_n - \sum_{j=1}^{\infty} x_j^*(x_n)(x_j - y_j) \\
 &= x_n - \sum_{j=1}^{\infty} (x_j^*(x_n)x_j - x_j^*(x_n)y_j) \\
 &= x_n - \sum_{j=1}^{\infty} x_j^*(x_n)x_j + \sum_{j=1}^{\infty} x_j^*(x_n)y_j \\
 &= x_n - x_n + y_n = y_n,
 \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, segue da Proposição 3.1.3 que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é base de Schauder de E . ■

Agora temos todas as ferramentas necessárias para provar o princípio de seleção.

Teorema 3.2.14 (Princípio de seleção de Bessaga-Pelczynski). *Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma base de Schauder de um espaço de Banach E e $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ a sequência de seus funcionais coeficientes. Se $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência em E tal que*

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \|y_n\| > 0 \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} x_i^*(y_n) = 0,$$

para todo $i \in \mathbb{N}$, então $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ contém uma subsequência básica equivalente a uma sequência de blocos básica relativa a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Demonstração: Primeiramente, note que como $\lim_{n \rightarrow \infty} x_i^*(y_n) = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, então

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_i^*(y_n)x_i = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Consequentemente $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k x_i^*(y_n)x_i = 0$, qualquer que seja $k \in \mathbb{N}$. Considere $\varepsilon = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|y_n\| > 0$, $n_1 = 1$ e escolha $m_1 \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$\left(\frac{4K_{(x_n)_{n=1}^{\infty}}}{\varepsilon} \right) \left\| \sum_{i=m_1+1}^{\infty} x_i^*(y_{n_1}) x_i \right\| \leq \frac{1}{2^3}$$

e $n_2 > n_1$ satisfazendo

$$\left(\frac{4K_{(x_n)_{n=1}^{\infty}}}{\varepsilon} \right) \left\| \sum_{i=1}^{m_1} x_i^*(y_{n_2}) x_i \right\| \leq \frac{1}{2^3}.$$

Tome agora $m_2 > m_1$ e $n_3 > n_2$ tais que

$$\left(\frac{4K_{(x_n)_{n=1}^{\infty}}}{\varepsilon} \right) \left\| \sum_{i=m_2+1}^{\infty} x_i^*(y_{n_2}) x_i \right\| \leq \frac{1}{2^4} \quad \text{e} \quad \left(\frac{4K_{(x_n)_{n=1}^{\infty}}}{\varepsilon} \right) \left\| \sum_{i=1}^{m_2} x_i^*(y_{n_3}) x_i \right\| \leq \frac{1}{2^4}.$$

Continuando com esse processo, obtemos sequências crescentes $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ e $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ de números naturais satisfazendo

$$\left(\frac{4K_{(x_n)_{n=1}^{\infty}}}{\varepsilon} \right) \left\| \sum_{i=m_k+1}^{\infty} x_i^*(y_{n_k}) x_i \right\| \leq \frac{1}{2^{k+2}} \quad \text{e} \quad \left(\frac{4K_{(x_n)_{n=1}^{\infty}}}{\varepsilon} \right) \left\| \sum_{i=1}^{m_k} x_i^*(y_{n_{k+1}}) x_i \right\| \leq \frac{1}{2^{k+2}}.$$

Assim, se para cada $k \in \mathbb{N}$, definirmos

$$z_k = \sum_{i=m_k+1}^{m_{k+1}} x_i^*(y_{n_{k+1}})x_i,$$

então

$$y_{n_{k+1}} = \sum_{i=1}^{m_k} x_i^*(y_{n_{k+1}})x_i + z_k + \sum_{i=m_{k+1}+1}^{\infty} x_i^*(y_{n_{k+1}})x_i$$

e

$$\|y_{n_{k+1}}\| \leq \left\| \sum_{i=1}^{m_k} x_i^*(y_{n_{k+1}})x_i \right\| + \|z_k\| + \left\| \sum_{i=m_{k+1}+1}^{\infty} x_i^*(y_{n_{k+1}})x_i \right\|.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|z_k\| &\geq \|y_{n_{k+1}}\| - \left\| \sum_{i=1}^{m_k} x_i^*(y_{n_{k+1}})x_i \right\| - \left\| \sum_{i=m_{k+1}+1}^{\infty} x_i^*(y_{n_{k+1}})x_i \right\| \\ &\geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{4K_{(x_n)_{n=1}}^{\infty} 2^{k+2}} - \frac{\varepsilon}{4K_{(x_n)_{n=1}}^{\infty} 2^{k+3}} \\ &\geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{K_{(x_n)_{n=1}}^{\infty} 2^{k+4}} - \frac{\varepsilon}{K_{(x_n)_{n=1}}^{\infty} 2^{k+5}} \geq \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

sendo que a penúltima desigualdade segue do fato que $K_{(x_n)_{n=1}}^{\infty} \geq 1$.

Assim, concluímos que $z_k \neq 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e, portanto, segue da definição que $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de blocos básica relativa a $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Além disso, da Proposição 3.2.11, segue que $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência básica.

Resta mostrar que as sequências $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ e $(z_k)_{k=1}^{\infty}$ são equivalentes. Para isso consideremos $(z_k^*)_{k=1}^{\infty}$ os funcionais coeficientes de $(z_k)_{k=1}^{\infty}$. Aplicando o Teorema 2.2.18 juntamente com a Proposição 3.2.11, segue diretamente que

$$1 \leq \|z_k^*\| \|z_k\| \leq 2K_{(z_k)_{k=1}}^{\infty} \leq 2K_{(x_n)_{n=1}}^{\infty},$$

e como $\|z_k\| \geq \frac{\varepsilon}{2}$, segue que

$$\|z_k^*\| \leq \frac{2K_{(x_n)_{n=1}}^{\infty}}{\|z_k\|} \leq \frac{4K_{(x_n)_{n=1}}^{\infty}}{\varepsilon},$$

para todo $k \in \mathbb{K}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \|z_k^*\| \|z_k - y_{n_{k+1}}\| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4K_{(x_n)_{n=1}}^{\infty}}{\varepsilon} \|z_k - y_{n_{k+1}}\| \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4K_{(x_n)_{n=1}}^{\infty}}{\varepsilon} \left\| \sum_{i=1}^{m_k} x_i^*(y_{n_{k+1}})x_i + \sum_{i=m_{k+1}+1}^{\infty} x_i^*(y_{n_{k+1}})x_i \right\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4K_{(x_n)_{n=1}}^{\infty}}{\varepsilon} \left(\left\| \sum_{i=1}^{m_k} x_i^*(y_{n_{k+1}})x_i \right\| + \left\| \sum_{i=m_{k+1}+1}^{\infty} x_i^*(y_{n_{k+1}})x_i \right\| \right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4K_{(x_n)_{n=1}}^{\infty}}{\varepsilon} \left(\frac{\varepsilon}{4K_{(x_n)_{n=1}}^{\infty} 2^{k+2}} + \frac{\varepsilon}{4K_{(x_n)_{n=1}}^{\infty} 2^{k+3}} \right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{k+2}} + \frac{1}{2^{k+3}} \right) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k+1}} < 1.
\end{aligned}$$

Assim, segue do Teorema 3.2.13 que $(y_{n_{k+1}})_{k=1}^{\infty}$ é equivalente a $(z_k)_{k=1}^{\infty}$. ■

O próximo resultado também é conhecido e encontrado em alguns livros como princípio de seleção de Bessaga-Pelczynski e possui um enunciado mais limpo do que o princípio de seleção que acabamos de provar. Sua demonstração segue do anterior.

Corolário 3.2.15. *Sejam E um espaço de Banach e $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E tal que $\inf_{n \in \mathbb{N}} \|y_n\| > 0$ e $y_n \xrightarrow{w} 0$. Então $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ admite uma subsequência básica.*

Demonstração: Pela Proposição 1.0.9, temos que $Y = \overline{\text{span}\{y_n; n \in \mathbb{N}\}}$, é um subespaço separável de E e, pelo Teorema 1.0.14, temos que Y é isometricamente isomorfo a algum subespaço de $C[0, 1]$, ou seja, existe um isomorfismo isométrico $T: Y \longrightarrow C[0, 1]$. Do fato de T ser isometria, segue que

$$\inf_{n \in \mathbb{N}} \|T(y_n)\| = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|y_n\| > 0. \quad (3.3)$$

Considere uma base de Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em $C[0, 1]$ (por exemplo, a base de Faber-Schauder definida no Exemplo 2.2.6) e denote por $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ a sequência dos funcionais coeficientes. Como $y_n \xrightarrow{w} 0$, segue da Proposição 1.0.26 que $T(y_n) \xrightarrow{w} 0$. Portanto, para todo $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_k^*(T(y_n)) = 0. \quad (3.4)$$

Logo, segue do princípio de seleção de Bessaga-Pelczynski que $(T(y_n))_{n=1}^{\infty}$ tem uma subsequência $(T(y_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ que é sequência básica. Como a inversa T^{-1} de T também é isomorfismo isométrico, segue da Proposição 3.1.3 que $(y_{n_k})_{k=1}^{\infty} = (T^{-1}(T(y_{n_k})))_{k=1}^{\infty}$ é sequência básica. ■

CAPÍTULO 4

Aplicações do princípio de seleção de Bessaga-Pelczynski

4.1 Existência de sequências básicas

Agora estamos aptos a responder a pergunta 1 do capítulo anterior.

Teorema 4.1.1. *Todo espaço de Banach de dimensão infinita contém um subespaço de dimensão infinita com base de Schauder.*

Demonstração: Pelo fato de E ter dimensão infinita, segue que E contém um subconjunto A enumerável e infinito que é linearmente independente. Assim $\overline{\text{span} A}$ é um subespaço separável de E com dimensão infinita. Logo, basta mostrar o teorema para subespaços separáveis.

Partindo do mesmo argumento (via Teorema 1.0.14) usado na demonstração do Corolário 3.2.15, podemos supor, sem perda de generalidade, que E é um subespaço de dimensão infinita de $C[0, 1]$. Denote então por $(x_n)_{n=1}^\infty$ uma base de Schauder de $C[0, 1]$ e por $(x_n^*)_{n=1}^\infty$ os seus funcionais coeficientes.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, defina

$$N_k = \{x \in E; x_1^*(x) = x_2^*(x) = \cdots x_k^*(x) = 0\}.$$

É claro que

$$N_k = \bigcap_{j=1}^k (\ker(x_j^*) \cap E).$$

Como $\ker x_k^* = x_k^{*-1}(\{0\})$ é fechado em $C[0, 1]$ (pois é a imagem inversa do conjunto fechado $\{0\}$), segue que $\ker(x_k^*) \cap E$ é fechado em E e, conseqüentemente, N_k também é fechado em E , para cada $k \in \mathbb{N}$. Claramente N_k é subespaço de E e, além disso, é imediato ver que N_k é o núcleo do operador $T_k: E \longrightarrow \mathbb{K}^k$ dado por $T_k(x) = (x_1^*(x), \dots, x_k^*(x))$. Como a imagem

$T_K(E) \subset \mathbb{K}^k$ tem dimensão menor ou igual a k , segue que o núcleo N_k de T_k tem dimensão infinita, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Da igualdade $N_k = \bigcap_{j=1}^k (\ker(x_j^*) \cap E)$ é claro que

$$N_1 \supseteq N_2 \supseteq \cdots \supseteq N_k \supseteq \cdots.$$

Vejamos que a sequência $(N_k)_{k=1}^\infty$ nunca fica estacionária (constante a partir de algum índice k). Suponha, por absurdo, que $(N_k)_{k=1}^\infty$ fique estacionária. Então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $N_j = N_{n_0}$, para todo $j \geq n_0$ e vejamos que, nesse caso, $N_{n_0} = \{0\}$, o que é um absurdo já que $\dim N_{n_0} = \infty$. Seja $x \in N_{n_0}$, então

$$x_1^*(x) = \cdots = x_{n_0}^*(x) = 0.$$

Como, para todo $j \geq n_0$, temos $N_j = N_{n_0}$, segue que $x \in N_j$ e daí $x_j^*(x) = 0$ para todo $j \geq n_0$. Logo $x_j^*(x) = 0$, para todo $j \in \mathbb{N}$ e segue da unicidade da representação $x = \sum_{j=1}^\infty x_j^*(x)x_j$, que $x = 0$. Portanto a sequência $(N_k)_{k=1}^\infty$ nunca ficará estacionária e, conseqüentemente, existem infinitos índices $j_1 < j_2 < \cdots$ tais que as inclusões

$$N_{j_1} \supset N_{j_2} \supset N_{j_3} \supset \cdots$$

são todas estritas. Por fim, para cada $k \in \mathbb{N}$, tome $z_k \in N_{j_k} - N_{j_{k+1}}$ e defina

$$y_k = \frac{z_k}{\|z_k\|}.$$

Assim, obtemos uma sequência $(y_k)_{k=1}^\infty$ de vetores unitários e distintos e tais que $y_k \in N_{j_k} - N_{j_{k+1}}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Além disso, para $n, k \in \mathbb{N}$, com $n \leq k$, temos $j_k \geq j_n \geq n$ e, portanto,

$$y_k \in N_{j_k} \subset N_{j_n} \subset N_n.$$

Logo $x_n^*(y_k) = 0$, para todo $k \geq n$ e fazendo $k \rightarrow \infty$ segue que $x_n^*(y_k) \rightarrow 0$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Como estamos nas hipóteses do princípio de seleção de Bessaga-Pelczynski, então existe uma subsequência básica $(y_{k_j})_{j=1}^\infty$ de $(y_k)_{k=1}^\infty$. Portanto $\overline{[y_{k_j}; j \in \mathbb{N}]}$ é um subespaço fechado de E e com dimensão infinita que possui base de Schauder. ■

4.2 O Teorema de Pitt

Nossa próxima aplicação do princípio de seleção de Bessaga-Pelczynski é o Teorema de Pitt para operadores compactos entre espaços de sequências somáveis. Começamos com alguns pré-requisitos.

Definição 4.2.1. Dizemos que uma sequência $(y_n)_{n=1}^\infty$, num espaço de Banach E , é uma *sequência normalizada* se $\|y_n\| = 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se, além disso, $(y_n)_{n=1}^\infty$ for base de Schauder de E , dizemos que $(y_n)_{n=1}^\infty$ é uma *base de Schauder normalizada*.

Observação 4.2.2. Se o espaço de Banach E possui base de Schauder, então sempre é possível obter uma base de Schauder normalizada. De fato, basta notar que se $(x_n)_{n=1}^\infty$ é uma base de Schauder de E e $(a_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência de escalares não nulos, então $(a_n x_n)_{n=1}^\infty$ também é base de Schauder de E . Agora, basta tomar $a_n = \frac{1}{\|x_n\|}$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 4.2.3. *Seja E igual a c_0 ou ℓ_p , $1 \leq p < +\infty$. Se $(y_n)_{n=1}^\infty$ é uma sequência de blocos básica normalizada relativa a base de Schauder canônica $(e_n)_{n=1}^\infty$ de E . Então*

(i) $(y_n)_{n=1}^\infty$ é equivalente a $(e_n)_{n=1}^\infty$;

(ii) $\overline{\text{span}\{y_n\}}$ é isometricamente isomorfo a E ;

Demonstração: Façamos o caso de ℓ_p , pois para c_0 segue de maneira similar. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja

$$y_n = \sum_{j=k_n+1}^{k_{n+1}} b_j e_j.$$

Como $(y_n)_{n=1}^\infty$ é normalizada então

$$1 = \|y_n\|_p^p = \sum_{j=k_n+1}^{k_{n+1}} |b_j|^p,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, para todo $m \in \mathbb{N}$, $a_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, m$, temos

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^m a_i y_i \right\|_p^p &= \left\| \sum_{i=1}^m a_i \sum_{j=k_n+1}^{k_{n+1}} b_j e_j \right\|_p^p = \left\| \sum_{i=1}^m \sum_{j=k_n+1}^{k_{n+1}} a_i b_j e_j \right\|_p^p \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=k_n+1}^{k_{n+1}} |a_i|^p |b_j|^p = \sum_{i=1}^m |a_i|^p \sum_{j=k_n+1}^{k_{n+1}} |b_j|^p \\ &= \sum_{i=1}^m |a_i|^p = \left\| \sum_{i=1}^m a_i e_i \right\|_p^p. \end{aligned}$$

Logo, segue diretamente da Definição 2.2.9 que $(y_n)_{n=1}^\infty$ e $(e_n)_{n=1}^\infty$ são equivalentes. Além disso, da igualdade acima das normas é fácil ver que $T: \overline{\text{span}\{y_n; n \in \mathbb{N}\}} \longrightarrow E$, dada por

$$T \left(\sum_{i=1}^m a_i y_i \right) = \sum_{i=1}^m a_i e_i,$$

é isomorfismo isométrico. ■

Agora estamos aptos a demonstrar o Teorema de Pitt.

Teorema 4.2.4 (Pitt). *Se $1 \leq p < q < \infty$, então todo operador linear contínuo $T: \ell_q \longrightarrow \ell_p$ (ou $T: c_0 \longrightarrow \ell_p$) é compacto.*

Demonstração: Se $T = 0$, o resultado é trivial em ambos os casos. Façamos o caso $T \neq 0$. Suponha que $T: \ell_q \longrightarrow \ell_p$ não é compacto. Como ℓ_q é reflexivo, segue da contra-recíproca da Proposição 1.0.30 que T não é completamente contínuo, ou seja, existe $(y_n)_{n=1}^\infty \subset \ell_q$ convergindo

fracamente para y em ℓ_q , mas tal que $(T(y_n))_{n=1}^\infty$ não converge para $T(y)$. Tomando $x_n = y_n - y$, para cada $n \in \mathbb{N}$, segue que $x_n \xrightarrow{w} 0$ mas $T(x_n) = T(y_n) - T(y) \not\xrightarrow{w} 0$. Excluindo alguns dos termos da sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$, se necessário, segue que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\|T(x_n)\| \geq \varepsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $T \neq 0$, então $\|T\| \neq 0$ e daí

$$0 < \varepsilon \leq \|T(x_n)\| \leq \|T\| \|x_n\|,$$

implicando assim que

$$\inf \|x_n\| \geq \frac{\varepsilon}{\|T\|} > 0.$$

Logo, segue do princípio de seleção de Bessaga-Pelczynski que a sequência $(x_n)_{n=1}^\infty$ possui uma subsequência $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ que é equivalente a uma sequência de blocos básica relativa a base de Schauder $(e_n)_{n=1}^\infty$ de ℓ_q . Sem perda de generalidade, podemos supor que $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ é normalizada (veja Observação 4.2.2). Assim, segue da Proposição 4.2.3 que $(x_{n_k})_{k=1}^\infty$ é equivalente a base canônica $(e_n)_{n=1}^\infty$ de ℓ_q .

Da mesma forma, prova-se que $(T(x_{n_k}))_{k=1}^\infty$ é equivalente a base canônica $(e_n)_{n=1}^\infty$ de ℓ_p .

Agora, seja $(a_n)_{n=1}^\infty \in \ell_q \setminus \ell_p$. Então, é fácil ver que $\sum_{k=1}^\infty a_k x_{n_k}$ é convergente em ℓ_q e daí

$$T\left(\sum_{k=1}^\infty a_k x_{n_k}\right) = \sum_{k=1}^\infty a_k T(x_{n_k}) \in \ell_p.$$

Logo $\sum_{k=1}^\infty |a_k|^p < \infty$, ou seja, $(a_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p$, o que é uma contradição já que $(a_n)_{n=1}^\infty \in \ell_q \setminus \ell_p$.

Portanto, $T: \ell_q \longrightarrow \ell_p$ é compacto.

Agora vejamos que $T: c_0 \longrightarrow \ell_p$ é compacto. O adjunto de T pode ser visto como um operador $T': \ell_{p'} \longrightarrow \ell_1$, já que $\ell_{p'}'$ é isometricamente isomorfo a $\ell_{p'}$ e ℓ_0' é isometricamente isomorfo a ℓ_1 . Além disso, segue da Proposição 1.0.24 que T' é contínuo. Assim, segue da parte que acabamos de provar que T' é compacto. Portanto, pelo Teorema 1.0.31, temos que T é compacto. ■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] S. Banach. *Théorie des opérations linéaires*, PWN, 1932.
- [2] G. Botelho, D. Pellegrino. *Os problemas da base incondicional e do espaço homogêneo*, Matemática Universitária **40** (2006), 7 – 20.
- [3] G. Botelho, D. Pellegrino, E. Teixeira. *Fundamentos de Análise Funcional*, SBM, Coleção Textos Universitários, 2012.
- [4] J. Diestel, H. Jarchow e A. Tonge. *Absolutely Summing Operators*, Cambridge University Press, 1995.
- [5] C. A. Di Prisco. *Una Introducción a la Teoría de Conjuntos y los Fundamentos de la Matemáticas*, Coleção CLE-UNICAMP, Volume 20, Campinas, 1997.
- [6] P. Enflo. *A counterexample to the approximation property in Banach spaces*, Acta Math. **6** (1973), 309 – 317.
- [7] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos and V. Zizler. *Banach Space Theory*, Springer, 2010.
- [8] W. T. Gowers e B. Maurey. *The unconditional bases problem*, J. Amer. Math. Soc. **6** (1993), 851 – 874.
- [9] C. S. Honig, *Análise Funcional e Aplicações*, Publicações do IME-USP, 1970.
- [10] K. Knoop, *Infinite Sequences and Series*, Dover, 1956 .
- [11] E. Kreyszig. *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley & Sons, 1978.
- [12] J. Lindenstrauss. *On operators which attain their norm*, Isr. J. Math. **1** (1963), 139 – 143.
- [13] J. Lindenstrauss. *Some aspects of the theory of Banach spaces*, Adv. Math. **5** (1970), 159 – 180.
- [14] D. Pellegrino, E. Teixeira *Norm optimization problem for linear operators in classical Banach spaces*, Bull. Braz. Math. Soc. **40** (2009), 417 – 431.