LETÍCIA GARCIA POLAC

O adjunto de um polinômio homogêneo contínuo entre espaços de Banach

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2013

LETÍCIA GARCIA POLAC

O adjunto de um polinômio homogêneo contínuo entre espaços de Banach

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Análise Funcional.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

UBERLÂNDIA - MG
2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU , MG, Brasil

P762a 2013

Polac, Letícia Garcia, 1988-
O adjunto de um polinômio homogêneo contínuo entre espaços de Banach / Letícia Garcia Polac. - 2013.
66 p. : il.

Orientador: Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Inclui bibliografia.

1. Matemática - Teses. 2. Polinômios - Teses. 3. Banach, Espaços de - Teses. I. Botelho, Geraldo Márcio de Azevedo. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III.Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO(A): Letícia Garcia Polac

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11212MAT007.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Análise Funcinal.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: O adjunto de um polinômio homogêneo contínuo entre espaços de Banach.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 26 de Julho de 2013, às 10h, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME	ASSINATURA
Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho UFU - Universidade Federal de Uberlândia (Orientador)	
Prof. Dr. Jorge Tulio Mujica Ascui IMECC-UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas	
Profa. Dra. Kuo Po Ling UFU - Universidade Federal de Uberlândia	Kuo Po Ling

Uberlândia-MG, 26 de Julho de 2013.

Dedicatória

Dedico este trabalho ao Thiago, meu amado noivo, pela paciência e apoio durante toda a pós-graduação. Agradeço imensamente por todo o amor e carinho.

Aos meus pais, Amaury e Sônia, responsáveis por toda a minha existência, especialmente pela transmissão dos princípios e valores que orientam minha vida.

Ao Euclides, grande homem, que foi enviado por Deus, a fim de enriquecer minha trajetória.

À minha querida irmã, em quem posso confiar e contar sempre.

À minha avó Marieta, pessoa sábia e de fé.

Agradecimentos

Em um universo de pessoas especiais, muitas me apoiaram; algumas incentivaram e, outras compartilharam com o meu trabalho, contudo não tenho dúvidas que todas torceram pelo o meu sucesso. Por isso, deixo aqui registrado o meu "muito obrigada", em especial:

• ao meu orientador Geraldo Botelho, pela excelente orientação. Agradeço também, pela confiança, apoio e paciência, sendo desta forma um dos grandes responsáveis por esta conquista;

• aos professores da pós-graduação, que muito contribuíram para a minha formação;

• aos meus amigos da pós-graduação, Bruno, Otoniel e Rafael;

• à minha querida amiga Lívia, pela franca amizade;

• à FAPEMIG, pelo apoio financeiro;

e, acima de tudo, a Deus, que me dá força e coragem para continuar, sempre!

POLAC, L. G. *O adjunto de um polinômio homogêneo contínuo entre espaços de Banach.* 2013. 66 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

O principal objetivo desta dissertação é estudar o adjunto de um polinômio homogêneo contínuo entre espaços de Banach. Primeiramente exibimos algumas propriedades básicas e exemplos de adjuntos de determinados polinômios homogêneos. Em seguida estudamos o adjunto das composições $u \circ P$ e $P \circ u$, em que P é um polinômio homogêneo e u é um operador linear, ambos contínuos. No último capítulo estudamos os adjuntos de algumas classes especiais de polinômios homogêneos, a saber, polinômios de posto finito, aproximáveis, compactos e fracamente compactos. Para isso estudamos a linearização de polinômios homogêneos por meio do produto tensorial simétrico projetivo e também aspectos introdutórios da teoria de ideais de operadores.

Palavras-chave: espaços de Banach, polinômios homogêneos contínuos, adjunto, polinômios de posto finito, polinômios aproximáveis, polinômios compactos e polinômios fracamente compactos.

POLAC, L. G. *The adjoint of a continuous homogeneous polynomial on Banach spaces.* 2013. 66p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

The main purpose of this dissertation is the study of the adjoint of a continuous homogeneous polynomial between Banach spaces. First we prove some basic properties and provide some examples of adjoints of certain homogeneous polynomials. Next we study the adjoint of the compositions $u \circ P$ and $P \circ u$, where P is a homogeneous polynomial and u is a linear operator, both of them continuous. In the last chapter we study the adjoints of some special classes of homogeneous polynomials, namely, polynomials of finite rank, approximable, compact and weakly compact. To accomplish this task we study the linearization of homogeneous polynomials through the projective symmetric tensor product and also some introductory aspects of the theory of operator ideals.

Keywords: Banach spaces, continuous homogeneous polynomials, adjoint, finite rank polynomials, approximable polynomials, compact polynomials, weakly compact polynomials.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	$\{1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{R}^+$	conjunto dos números reais não-negativos
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
X, Y	espaços topológicos
$E_1, \ldots, E_m, E$ e F	espaços vetoriais ou espaços vetoriais normados ou espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$
$Im(f)$	imagem da aplicação f
$ker(f)$	núcleo da aplicação f
$L(E_1, \ldots, E_m; F)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ das aplicações multilineares de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F
E'	dual topológico do espaço normado E
E''	bidual de E
B_E	bola fechada do espaço normado E com centro na origem e raio 1
$\overset{\circ}{B}_E$	a bola berta do espaço normado E com centro na origem e raio 1
Id_E	operador identidade definido em E
$J_E \colon E \longrightarrow E''$	mergulho canônico de E em E''
$\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ das aplicações multilineares contínuas de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F
$(\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F), \lVert \cdot \rVert)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ das aplicações multilineares contínuas de $E_1 \times \cdots \times E_m$ em F munido com a norma usual do sup
$L(^m E; F)$	$L(E, \overset{(m)}{\ldots}, E; F)$
$\mathcal{L}(^m E; F)$	$\mathcal{L}(E, \overset{(m)}{\ldots}, E; F)$
$L^s(^m E; F)$	subespaço vetorial de $L(^m E; F)$ das aplicações multilineares simétricas

$\mathcal{L}^s(^mE;F)$	subespaço vetorial de $\mathcal{L}(^mE;F)$ das aplicações multilineares simétricas
$P(^mE;F)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos polinômios m-homogêneos de E em F
$\mathcal{P}(^mE;F)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ dos polinômios m-homogêneos contínuos de E em F
$\mathcal{P}_f(^mE;F)$	conjunto dos polinômios m-homogêneos contínuos de tipo finito de E em F
$\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(^mE;F)$	conjunto dos polinômios m-homogêneos contínuos de posto finito entre os espaços de Banach E e F
$\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(^mE;F)$	conjunto dos polinômios m-homogêneos contínuos aproximáveis entre os espaços de Banach E e F
$\mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^mE;F)$	conjunto dos polinômios m-homogêneos contínuos compactos entre os espaços de Banach E e F
$\mathcal{P}_{\mathcal{W}}(^mE;F)$	conjunto dos polinômios m-homogêneos contínuos fracamente compactos entre os espaços de Banach E e F
$(\mathcal{P}(^mE;F), \\|\cdot\\|)$	espaço vetorial normado sobre $\mathbb{K}$ dos polinômios m-homogêneos contínuos que aplicam E em F munido com a norma usual do sup
$(\mathcal{L}^s(^mE;F), \\|\cdot\\|)$	subespaço vetorial normado de $(\mathcal{L}(^mE;F), \\|\cdot\\|)$ das aplicações multilineares simétricas
$x_1 \otimes \cdots \otimes x_m$	tensor elementar definido por $x_1 \otimes \cdots \otimes x_m(A) = A(x_1, \ldots, x_m)$ para toda aplicação $A \in L(E_1, \ldots, E_m; \mathbb{K})$
$E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$	produto tensorial dos espaços de Banach $E_1, \ldots, E_m$, definido como o subespaço de $L(E_1, \ldots, E_m; \mathbb{K})^*$ gerado pelos tensores elementares
$\otimes^m E$	$E \otimes \overset{(m)}{\cdots} \otimes E$
$\otimes^{m,s} E$	produto tensorial simétrico de E, definido como o subespaço do produto tensorial $\otimes^m E$ gerado pelos tensores da forma $x \otimes \overset{(m)}{\cdots} \otimes x, x \in E$
π_s	norma s-tensorial projetiva
$\otimes_{\pi_s}^{m,s} E$	espaço normado $(\otimes^{m,s} E, \pi_s)$
$\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E$	completamento do espaço normado $\otimes_{\pi_s}^{m,s} E$
$\Gamma(A)$	envoltória absolutamente convexa do subconjunto A de um espaço vetorial
$\mathcal{F}(E;F)$	conjuntos dos operadores lineares de posto finito entre os espaços de Banach E e F
$\mathcal{A}(E;F)$	conjuntos dos operadores lineares aproximáveis entre os espaços de Banach E e F
$\mathcal{K}(E;F)$	conjuntos dos operadores lineares compactos entre os espaços de Banach E e F
$\mathcal{W}(E;F)$	conjuntos dos operadores lineares fracamente compactos entre os espaços de Banach E e F
$\mathcal{F}$	ideal dos operadores de posto finito

$\mathcal{A}$	ideal dos operadores aproximáveis
$\mathcal{K}$	ideal dos operadores compactos
$\mathcal{W}$	ideal dos operadores fracamente compactos
$\sigma(E, E')$	topologia fraca no espaço normado E
$\sigma(E', E)$	topologia fraca-estrela no dual E' do espaço normado E

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Análise Funcional Linear trata essencialmente de operadores lineares contínuos entre espaços normados e espaços de Banach. Além da linearidade, o natural é considerar num primeiro momento funções não lineares que mantêm alguma proximidade com os operadores lineares. Por exemplo, aplicações multilineares entre espaços normados. Ao mesmo tempo em que estende a Análise Funcional além da linearidade, a consideração de aplicações multilineares contínuas

$$A\colon E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F,$$

em que $m \in \mathbb{N}$ e $E_1, \ldots, E_m, F$ são espaços normados, abre o caminho para o tratamento matemático de funções analíticas entre espaços normados. Vejamos como isso é feito: como se sabe, as funções analíticas no plano complexo são funções que podem ser expandidas em séries de potências da forma $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} a_m(z - z_0)^m$. A dificuldade imediata para a transposição disso para funções entre espaços normados é a ausência das funções

$$f_m\colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}\ ,\ f_m(z) = a_m z^m,\ m \in \mathbb{N},$$

chamadas de polinômios homogêneos. A ideia então é contornar essa dificuldade encontrando funções que gozam da mesma propriedade fundamental dessas funções, a saber, a m-homogeneidade:

$$f_m(\lambda z) = \lambda^m f_m(z) \text{ para todos } \lambda, z \in \mathbb{C}.$$

Isso é feito da seguinte forma: dados espaços normados E, F sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$ e uma aplicação m-linear $A\colon E^m \longrightarrow F$, chame de P a restrição de A à diagonal, isto é,

$$P\colon E \longrightarrow F\ ,\ P(x) = A(x, \ldots, x).$$

Da m-linearidade de A segue que P satisfaz a condição

$$P(\lambda x) = \lambda^m P(x) \text{ para todos } \lambda \in \mathbb{K} \text{ e } x \in E,$$

e por isso tais funções são chamadas de *polinômios m-homogêneos.* Dessa forma, no caso complexo a consideração de séries convergentes da forma $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} P_m(x - x_0)$, em que cada P_m

é um polinômio m-homogêneo, dá origem à teoria de funções holomorfas entre espaços normados complexos.

Assim, o estudo de polinômios homogêneos contínuos entre espaços normados pode ser visto tanto como um primeiro passo além da linearidade como também como um caminho para o estudo de funções holomorfas em infinitas dimensões. Ao longo das últimas décadas os polinômios homogêneos têm sido exaustivamente estudados a partir das duas perspectivas descritas na frase anterior.

Nesta dissertação exploraremos vários aspectos relacionados ao adjunto de um polinômio homogêneo entre espaços de Banach. Transportanto para o caso polinomial a noção usual de adjunto de um operador linear, R. Aron e M. Schottenlher [4] introduziram em 1976 o adjunto de um polinômio m-homogêneo $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$ entre espaços de Banach como sendo o operador linear

$$P' \colon F' \longrightarrow \mathcal{P}(^mE) \ , \ P'(\varphi)(x) = \varphi(P(x)).$$

Desde então o adjunto de um polinômio homogêneo tem sido ferramenta importante no estudo de espaços de polinômios homogêneos e em holomorfia em dimensão infinita (veja, por exemplo, [3, 8, 12, 22, 21, 27]).

O estudo empreendido nesta dissertação sobre o adjunto de um polinômio homogêneo contínuo entre espaços de Banach está estruturado da seguinte maneira:

• O primeiro capítulo é dividido em três seções: a primeira é dedicada a definições e resultados básicos da Análise Funcional, Topologia Geral e Teoria da Medida, os quais serão utilizados no decorrer deste trabalho; a segunda seção estabelece resultados sobre aplicações multilineares e a terceira seção fornece resultados e exemplos acerca dos polinômios homogêneos. As principais referências utilizadas neste capítulo foram [9, 14, 27, 29].

• No segundo capítulo definiremos o adjunto de um polinômio homogêneo contínuo entre espaços de Banach. Algumas propriedades básicas são demonstradas e os adjuntos de alguns polinômios homogêneos são calculados.

• Motivados pela fórmula $(u \circ v)' = v' \circ u'$ do adjunto da composição de dois operadores lineares contínuos, no terceiro capítulo demonstraremos fórmulas para os adjuntos das composições $u \circ P$ e $P \circ v$, em que u e v são operadores lineares contínuos e P é um polinômio homogêneo contínuo. Para isso, na Seção 3.1 veremos um resultado importante sobre a linearização dos polinômios homogêneos contínuos através do produto tensorial simétrico projetivo, obtido por Ryan [27] e demonstrado com outra técnica por Mujica [20]. Essa linearização de polinômios será utilizada em outros momentos da dissertação, por exemplo na última seção deste Capítulo 3, Seção 3.4, na qual caracterizaremos os operaradores lineares que são adjuntos de polinômios homogêneos.

• No quarto e último capítulo estudaremos o adjunto de classes especiais de polinômios homogêneos. A ideia é mostrar que se um polinômio homogêneo goza de determinada propriedade, então seu adjunto também goza da mesma propriedade e vice-versa. Nessa direção provaremos que um polinômio homogêneo é de posto finito (aproximável, compacto, fracamente compacto, respectivamente) se, e somente se, seu adjunto é de posto finito (aproximável, compacto, fracamente compacto, respectivamente). Classes especiais de polinômios homogêneos entre espaços de Banach têm sido um permanente tópico de investigação, desde Pełczyński [24], passando por Aron e Schottenlher [4], Ryan [27] e Mujica [20], e chegando até nossos dias com, por exemplo, [3, 6, 8, 7, 21, 23]. O estudo de classes especiais de operadores lineares, que originam classes especiais de polinômios, foi sistematizado por Pietsch [26] no âmbito da teoria de Ideais de Operadores. Por isso iniciamos o capítulo com a seção 4.1 que abordará a teoria abstrata de ideais de operadores lineares entre espaços de Banach. E nas seções subsequentes demonstraremos os resultados sobre os adjuntos de polinômios de posto finito, aproximáveis, compactos e fracamente compactos. Para o estudo da relação entre a compacidade fraca de um polinômio e a de seu adjunto precisamos usar o Teorema de Krein-Smulian, que diz que a envoltória absolutamente convexa de subconjunto relativamente fracamente compacto de um espaço de Banach é também relativamente fracamente compacta. Pesquisando na literatura, observamos que, apesar de se tratar de um teorema muito utilizado, sua demonstração não é facilmente encontrada. Por isso incluímos uma demonstração detalhada do Teorema de Krein-Smulian na Seção 4.5.

Cabe ressaltar que vários resultados demonstrados nesta dissertação, por exemplo a fórmula para o adjunto da composta $P \circ u$, em que P é um polinômio homogêneo e u é um operador linear, não foram encontrados em nenhuma referência.

Letícia Garcia Polac
Uberlândia-MG, 26 de julho de 2013.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

O intuito deste capítulo é apresentar uma coleção de definições e resultados que serão necessários para o desenvolvimento desta dissertação. Na primeira seção apresentaremos os principais conceitos e resultados da Análise Funcional, Topologia Geral e Teoria da Medida. Por serem resultados clássicos e muito conhecidos, não incluiremos demonstrações, mas sempre daremos referência de onde cada uma pode ser encontrada. Na segunda seção introduziremos as aplicações multilineares contínuas que servirão para definir os polinômios homogêneos na terceira seção, que serão extremamente importantes nesta dissertação.

Alguns resultados básicos, cujas demonstrações não são tão facilmente encontradas, serão demonstrados à medida em que forem necessários.

1.1 Conceitos e resultados básicos

Iniciaremos esta seção com conceitos e resultados clássicos da Análise Funcional Linear. Por $\mathbb{K}$ denotaremos, indistintamente, os corpos $\mathbb{R}$ dos números reais e $\mathbb{C}$ dos números complexos. Sempre consideraremos espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$

Será denotado por $\mathcal{L}(E;F)$ o espaço normado de todos os operadores lineares contínuos $u\colon E \longrightarrow F$ entre os espaços normados E e F sobre $\mathbb{K}$, munido da norma usual de operadores

$$u \in \mathcal{L}(E;F) \longmapsto \|u\| := \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}.$$

Quando F for o corpo dos escalares, escrevemos E' no lugar de $\mathcal{L}(E;\mathbb{K})$, chamamos este espaço de *dual topológico de* E (ou simplesmente *dual de* E), e dizemos que seus elementos são *funcionais lineares contínuos.*

Proposição 1.1.1 *Sejam E e F espaços normados.*
(a) $\|u(x)\| \leq \|u\| \cdot \|x\|$ *para todos* $u \in \mathcal{L}(E;F)$ *e* $x \in E$.
(b) *Se F for um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(E;F)$ também é espaço de Banach com a norma usual de operadores.*

Demonstração. Veja [9, Proposição 2.1.4]. ■

Existem várias expressões alternativas para a norma $\|u\|$ do operador linear e contínuo $u\colon E \longrightarrow F$, sendo que uma das mais úteis é a seguinte:

$$\|u\| = \inf \{C \geq 0 : \|u(x)\| \leq C \|x\| \text{ para todo } x \in E\}.$$

Ao longo deste trabalho, denotaremos por B_E a bola unitária fechada no espaço normado E de centro na origem e raio 1, e por $\overset{\circ}{B}_E$ a bola unitária aberta em E de centro na origem e raio 1, isto é,

$$B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\} \text{ e } \overset{\circ}{B}_E = \{x \in E : \|x\| < 1\}.$$

Como é comum na literatura, tanto o Teorema de Hahn-Banach como algumas de suas consequências serão chamadas de Teorema de Hahn-Banach.

Teorema 1.1.2 (Teorema de Hahn-Banach) *Seja G um subespaço vetorial de um espaço normado E sobre $\mathbb{K}$ e seja $\varphi\colon G \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear contínuo em G. Então existe um funcional linear contínuo $\widetilde{\varphi}\colon E \longrightarrow \mathbb{K}$ em E cuja restrição a G coincide com φ e $\|\widetilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.*

Demonstração. Veja [9, Corolário 3.1.3]. ■

Teorema 1.1.3 (Teorema de Hahn-Banach) *Sejam E um espaço normado, $E \neq \{0\}$ e $x \in E$. Então*

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\},$$

e o supremo é atingido.

Demonstração. Veja [9, Corolário 3.1.5]. ■

Teorema 1.1.4 (Teorema de Hahn-Banach) *Seja E um espaço normado. Para todo $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$, existe um funcional linear contínuo $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\|$.*

Demonstração. Veja [9, Corolário 3.1.4]. ■

Lembramos que um subconjunto A de um espaço topológico X é dito *denso* em X se o fecho $\overline{A}$ de A em X coincide com X.

Definição 1.1.5 Um espaço normado E que contém um subconjunto enumerável e denso em E é dito *separável*.

Dado um subconjunto A de um espaço vetorial E, por $[A]$ denotaremos o subespaço vetorial de E gerado por A, isto é, o conjunto de todas as combinações lineares (finitas) de elementos de A.

Lema 1.1.6 *Um espaço normado E é separável se, e somente se, existe um subconjunto enumerável $A \subseteq E$ tal que $[A]$ é denso em E.*

Demonstração. Veja [9, Lema 1.6.3]. ■

O *núcleo* de um aplicação $f\colon E \longrightarrow F$ entre espaços vetoriais E e F será denotado por $\ker(f)$, ou seja, $\ker(f) = \{x \in E : f(x) = 0\}$.

Precisaremos do seguinte resultado auxiliar da Álgebra Linear:

Proposição 1.1.7 *Sejam E um espaço vetorial, $n \in \mathbb{N}$ e $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ funcionais lineares em E tais que $\bigcap\limits_{i=1}^{n} \ker(\varphi_i) \subseteq \ker(\varphi)$. Então existem escalares $a_1, \ldots, a_n$ tais que $\varphi = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \varphi_i$.*

Demonstração. Veja [9, Lema 6.3.5]. ■

Definição 1.1.8 Sejam E e F espaços normados. Uma função $f\colon E \longrightarrow F$ tal que $\|f(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in E$ é chamado de *isometria*.

É claro que toda isometria é injetora, mas não é necessariamente sobrejetora. Alguns autores usam a expressão *imersão isométrica* para o que chamamos de isometria e chamam de isometria o que para nós é uma isometria sobrejetora.

Uma operador linear entre espaços normados que é uma isometria é chamado de *isometria linear*. É claro que toda isometria linear é contínua e tem norma 1.

Para todo espaço normado E podemos considerar seu dual E', que é sempre um espaço de Banach. Podemos então considerar o dual de E', chamado de *bidual* de E e denotado por E''. Ou seja, $E'' = (E')'$.

Proposição 1.1.9 *Para todo espaço normado E, o operador*

$$J_E\colon E \longrightarrow E''\ ,\ J_E(x)(\varphi) = \varphi(x) \text{ para todos } x \in E \text{ e } \varphi \in E',$$

é uma isometria linear.

Demonstração. Veja [9, Proposição 4.3.1]. ■

A isometria linear J_E da proposição acima é chamada de *mergulho canônico de E em E''*.

Definição 1.1.10 Dizemos que dois espaços normados E e F são *isomorfos* se existir um operador $u\colon E \longrightarrow F$ linear contínuo bijetor cujo operador inverso $u^{-1}\colon F \longrightarrow E$, que é sempre linear, é também contínuo. Tal operador u é chamado de *isomorfismo*. Um isomorfismo $u\colon E \longrightarrow F$ que também é uma isometria é chamado de *isomorfismo isométrico*, e neste caso os espaços E e F são ditos *isomorfos isometricamente*.

Para que o mergulho canônico J_E de E no seu bidual E'' seja um isomorfismo isométrico falta apenas que seja sobrejetor. Essa propriedade caracteriza uma classe importante de espaços:

Definição 1.1.11 Um espaço normado E é dito *reflexivo* se o mergulho canônico $J_E \colon E \longrightarrow E''$ for sobrejetor, ou seja, $J_E(E) = E''$. Neste caso J_E é um isomorfismo isométrico.

Proposição 1.1.12 *Um espaço de Banach E é reflexivo se, e somente se, seu dual E' também é reflexivo.*

Demonstração. Veja [9, Proposição 4.3.13]. ■

Enunciamos a seguir, para referência futura, alguns resultados típicos e clássicos da Topologia Geral que serão úteis nesta dissertação.

Proposição 1.1.13 *Sejam X e Y espaços topológicos. Uma aplicação $f \colon X \longrightarrow Y$ é contínua se, e somente se, para cada $S \subseteq X$ tem-se $f\left(\overline{S}\right) \subseteq \overline{f(S)}$.*

Demonstração. Veja [30, Teorema 7.2]. ■

Proposição 1.1.14 *Todo subconjunto fechado Y de um espaço topológico compacto X é compacto.*

Demonstração. Veja [19, Proposição 7.2.2]. ■

Proposição 1.1.15 *Sejam X e Y espaços topológicos e $f \colon X \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua. Para todo subconjunto compacto K de X, $f(K)$ é um suconjunto compacto de Y.*

Demonstração. Veja [19, Proposição 7.2.4]. ■

Sejam X um conjunto, $(Y_i)_{i\in I}$ uma família de espaços topológicos e $(f_i)_{i\in I}$ uma família de funções $f_i \colon X \longrightarrow Y_i$ para cada $i \in I$. Para cada $i \in I$ e cada aberto A_i em Y_i considere o conjunto

$$f_i^{-1}(A_i) = \{x \in X : f(x) \in A_i\}.$$

Chame de Φ a coleção dos subconjuntos de X que podem ser escritas como interseções finitas de conjuntos da forma $f_i^{-1}(A_i)$.

Proposição 1.1.16 *Existe uma topologia τ em X que tem Φ como uma base, isto é, os elementos de τ são uniões de elementos de Φ.*

Demonstração. Veja [30, 8.9]. ■

Definição 1.1.17 A topologia τ da Proposição 1.1.16 é chamada de *topologia gerada pela família de funções $(f_i)_{i\in I}$*.

Para a teoria básica de redes em espaços topológicos veja [9, Apêndice B].

Proposição 1.1.18 *Sejam τ a topologia em X gerada pela família de funções $(f_i)_{i\in I}$ e $(x_\lambda)_\lambda$ uma rede em X. Então $x_\lambda \longrightarrow x$ em (X, τ) se, e somente se, $f_i(x_\lambda) \longrightarrow f(x)$ em Y_i para todo $i \in I$.*

Demonstração. Veja [9, Proposição 6.1.3]. ∎

Apresentaremos agora duas topologias que serão amplamente utilizadas nesta dissertação.

Definição 1.1.19 A *topologia fraca* no espaço normado E, denotada por $\sigma(E, E')$ ou simplesmente por w, é a topologia gerada, de acordo com a Definição 1.1.17, pelos funcionais lineares contínuos $\varphi \in E'$.

Quando uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E convergir para $x \in E$ na topologia fraca, escrevemos $x_n \xrightarrow{w} x$.

Proposição 1.1.20 *Seja E um espaço normado.*
(a) *Se $x_n \xrightarrow{w} x$ em E, então a sequência $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty}$ é limitada.*
(b) *Se $x_n \xrightarrow{w} x$ em E e $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ em E', então $\varphi_n(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ em $\mathbb{K}$.*

Demonstração. Veja [9, Proposição 6.2.5]. ∎

Proposição 1.1.21 *Se E é um espaço normado, então $E' = (E, \sigma(E, E'))'$.*

Demonstração. Veja [9, Corolário 6.2.7]. ∎

Proposição 1.1.22 *Sejam E e F espaços de Banach. Um operador linear $u\colon E \longrightarrow F$ é contínuo se, e somente se, $u\colon (E, \sigma(E, E')) \longrightarrow (F, \sigma(F, F'))$ é contínuo.*

Demonstração. Veja [9, Proposição 6.2.9]. ∎

É conveniente estabelecer uma notação para o fecho de um conjunto na topologia fraca e uma terminologia para a compacidade fraca: dado um subconjunto A do espaço normado E, denotaremos o conjunto dos pontos de aderência de A em $(E, \sigma(E, E'))$ por $\overline{A}^{\sigma(E,E')}$ ou por $\overline{A}^{w}$. E quando A for compacto em $(E, \sigma(E, E'))$, diremos que A é *fracamente compacto* ou que A é *$\sigma(E, E')$-compacto*, ou simplesmente que A é *w-compacto.*

Definição 1.1.23 Um subconjunto A de um espaço normado E é *relativamente fracamente compacto* se $\overline{A}^{w}$ é fracamente compacto em E.

Teorema 1.1.24 (Teorema de Eberlein-Smulian) *Sejam E um espaço de Banach e A um subconjunto de E. Então A é relativamente fracamente compacto (respectivamente, fracamente compacto) se, e somente se, cada sequência em A admite uma subsequência que converge fracamente para algum ponto em E (respectivamente, para algum ponto de A).*

Demonstração. Veja [1, Theorem 3.40]. ∎

Definição 1.1.25 Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Um subconjunto $A \subseteq E$ é dito *convexo* se $\alpha x + \beta y \in A$ para todos $x, y \in A$ e escalares $\alpha, \beta \geq 0$ com $\alpha + \beta = 1$.

Teorema 1.1.26 (Teorema de Mazur) *Sejam E um espaço normado e K um subconjunto convexo de E. Então o fecho de K na topologia da norma coincide com o fecho de K na topologia fraca. Em particular, um conjunto convexo é fechado na topologia fraca se, e somente se, é fechado na topologia da norma.*

Demonstração. Veja [9, Teorema 6.2.11]. ■

Teorema 1.1.27 (Teorema de Kakutani) *Um espaço de Banach E é reflexivo se, e somente se, a bola unitária fechada B_E é compacta na topologia fraca $\sigma(E, E')$.*

Demonstração. Veja [9, Teorema 6.4.5] ■

Definição 1.1.28 A *topologia fraca-estrela* no dual E' do espaço normado E, denotada por $\sigma(E', E)$ ou simplesmente por w^*, é a topologia em E' gerada, de acordo com a Definição 1.1.17, pelas funções pertencentes ao conjunto $J_E(E) = \{J_E(x) : x \in E\}$, isto é, pelas funções $\varphi \in E' \mapsto J_E(\varphi)(x) = \varphi(x) \in \mathbb{K}$, onde $x \in E$.

Quando uma sequência $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ em E' convergir para $\varphi \in E'$ na topologia fraca-estrela, escrevemos $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$.

Proposição 1.1.29 *Seja E um espaço normado. Então:*
(a) *Para todo $x \in E$, $J_E(x) : (E', \sigma(E', E)) \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínuo.*
(b) *Para cada $\varphi_0 \in E'$, os conjuntos da forma*

$$W_{J,\varepsilon} = \{\varphi \in E' : |\varphi(x_i) - \varphi_0(x_i)| < \varepsilon \text{ para todo } i \in J\},$$

onde J é um conjunto finito, $x_i \in E$ para todo $i \in J$ e $\varepsilon > 0$, formam uma base de vizinhanças abertas de φ_0 para a topologia fraca-estrela.
(c) *Seja $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E'. Então $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$ se, e somente se, $\varphi_n(x) \longrightarrow \varphi(x)$ para todo $x \in E$.*
(d) *A topologia fraca-estrela $\sigma(E', E)$ é de Hausdorff.*
(e) *Sejam Z um espaço topológico e $f : Z \longrightarrow (E', \sigma(E', E))$. Então f é contínua se, e somente se, $J_E(x) \circ f : Z \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínua para todo $x \in E'$.*

Demonstração. Veja [9, Teorema 6.3.2]. ■

Denotamos por $(E', \sigma(E', E))'$ o espaço formado pelos funcionais lineares de E' em $\mathbb{K}$ que são contínuos na topologia fraca-estrela $\sigma(E', E)$.

Proposição 1.1.30 *Sejam E um espaço normado e $f \colon (E', \sigma(E', E)) \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear e contínuo. Então existe $x \in E$ tal que $f = J_E(x)$. Em outras palavras $(E', \sigma(E', E))' = J_E(E)$.*

Demonstração. Veja [9, Proposição 6.3.6]. ■

Proposição 1.1.31 *Seja E espaço normado.*
(a) *Em E', a topologia fraca-estrela $\sigma(E', E)$ está contida na topologia fraca $\sigma(E', E'')$.*
(b) *As topologias fraca $\sigma(E', E'')$ e fraca-estrela $\sigma(E', E)$ coincidem em E' se, e somente se, E é reflexivo.*

Demonstração. Veja [9, Proposição 6.3.8]. ∎

Teorema 1.1.32 (Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki) *Para todo espaço normado E, a bola fechada $B_{E'}$ é compacta na topologia fraca-estrela $\sigma(E', E)$ de E'.*

Demonstração. Veja [9, Teorema 6.3.9]. ∎

Um espaço topológico X diz-se *metrizável* quando é possível definir uma métrica d em X tal que a topologia em X induzida pela métrica d coincide com a topologia original de X.

Teorema 1.1.33 *Um espaço normado E é separável se, e somente se, $(B_{E'}, \sigma(E', E))$ é um espaço topológico metrizável.*

Demonstração. Veja [1, Theorem 3.34]. ∎

Lema 1.1.34 *Sejam E um espaço normado e F um subespaço vetorial de E. Então a topologia fraca $\sigma(F, F')$ em F coincide com a topologia induzida em F pela topologia fraca $\sigma(E, E')$ de E.*

Demonstração. Veja [1, Lema 3.36]. ∎

Teorema 1.1.35 *Sejam E um espaço de Banach e $f\colon E' \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*
(a) *O funcional linear f é contínuo na topologia fraca-estrela $\sigma(E', E)$ em E'.*
(b) *A restrição do funcional linear f à bola unitária fechada $B_{E'}$ de E' é contínua na topologia fraca-estrela $\sigma(E', E)$ em $B_{E'}$.*

Demonstração. Veja [1, Theorem 3.41]. ∎

Introduziremos agora o adjunto de um operador linear contínuo.

Definição 1.1.36 Sejam E e F espaços normados e $u \in \mathcal{L}(E; F)$ um operador linear contínuo. Definimos o operador $u'\colon F' \longrightarrow E'$ por

$$u'(\varphi)(x) = \varphi(u(x)) \text{ para todos } x \in E \text{ e } \varphi \in F'.$$

O operador u' é chamado de *adjunto* de u.

Proposição 1.1.37 *Sejam u,$v \in \mathcal{L}(E; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então:*
(a) *$u' \in \mathcal{L}(F'; E')$.*
(b) *$(u + v)' = u' + v'$.*
(c) *$(\lambda u)' = \lambda u'$.*
(d) *$\|u\| = \|u'\|$.*
(e) *Se u é um isomorfismo (isométrico), então u' também é um isomorfismo (isométrico), e neste caso $(u^{-1})' = (u')^{-1}$.*
Em particular, a correspondência

$$u \in \mathcal{L}(E; F) \longmapsto u' \in \mathcal{L}(F'; E') \tag{1.1}$$

é uma isometria linear, isto é, é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem em $\mathcal{L}(F'; E')$.

Demonstração. Veja [25, Proposição 3.1.3]. ■

Sejam E um espaço normado e

$$Id_E \colon E \longrightarrow E \ , \ Id_E(x) = x,$$

o operador identidade em E, que é claramente linear e contínuo de norma 1. Então temos:

Proposição 1.1.38 *Seja E um espaço normado. Então $(Id_E)' = Id_{E'}$*

Demonstração. Veja [25, Lema 3.1.2]. ■

Dados espaços normados E e F e $u \in \mathcal{L}(E;F)$, por u'' denotamos o adjunto de u', isto é, $u'' = (u')'$. Note que $u'' \in \mathcal{L}(E'';F'')$.

Proposição 1.1.39 *Sejam E e F espaços normados e $u \in \mathcal{L}(E;F)$. Então u'' é uma extensão de u a E'' no sentido de que $u'' \circ J_E = J_F \circ u$, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} E'' \arrow[r, "u''"] & F'' \\ E \arrow[u, "J_E"'] \arrow[r, "u"] & F \arrow[u, "J_F"'] \end{tikzcd}$$

Em particular, $u'' \circ J_E(E) \subseteq J_F(F)$.

Demonstração. Veja [25, Prposição 3.1.5]. ■

O Teorema de Ascoli enunciado abaixo caracteriza os subconjuntos relativamente compactos do espaço métrico completo $C(K)$ das funções contínuas $f \colon K \longrightarrow \mathbb{K}$, onde K é um espaço métrico compacto, com a métrica

$$d(f,g) = \sup \{|f(t) - g(t)| : t \in K\} .$$

Teorema 1.1.40 (Teorema de Ascoli) *Sejam K um espaço métrico compacto e A um subconjunto de $C(K)$. Então A é compacto em $C(K)$ se, e somente se, as seguintes condições estão satisfeitas:*
(a) *A é equicontínuo, isto é, para todos $t_0 \in K$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon \text{ para todos } t \in K \text{ com } d(t;t_0) < \delta \text{ e } f \in A.$$

(b) *O conjunto $\{f(t) : f \in A\}$ é limitado em $\mathbb{K}$ para todo $t \in K$.*

A demonstração de uma forma do Teorema de Ascoli mais geral que a enunciada acima encontra-se em [16, Teorema III.2.1].

Enunciaremos agora alguns conceitos e resultados da Teoria de Medida, os quais podem ser encontrados em [14].

Teorema 1.1.41 (Teorema da Convergência Dominada) *Sejam* (X, Σ, μ) *um espaço de medida e* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *uma sequência de funções Lebesgue-integráveis que converge* μ*-quase sempre para uma função mensurável* $f\colon X \longrightarrow \mathbb{K}$. *Se existe uma função* $g\colon X \longrightarrow \mathbb{K}$ *Lebesgue-integrável tal que* $|f_n| \leq |g|$ *para todo* n, *então* f *é Lebesgue-integrável e*

$$\int_X f \; d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \; d\mu.$$

Demonstração. Veja [14, Theorem 2.24]. ■

Dado um espaço topológico X, a σ-álgebra em X gerada pela família dos conjuntos abertos de X é chamada de *σ-álgebra de Borel de X* e é denotada por $\mathcal{B}(X)$. Os elementos de $\mathcal{B}(X)$ são chamados de *conjuntos de Borel ou borelianos.*

Medidas podem tomar valores em $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. No caso complexo usaremos o termo medida complexa, no caso de reais quaisquer, usaremos o termo medida com sinal, e no caso de reais não-negativos usaremos o termo medida.

Uma medida, medida com sinal ou medida complexa definida na σ-álgebra de Borel de um espaço topológico X é conhecida como *medida de Borel em X*.

Definição 1.1.42 Sejam X um espaço topológico de Hausdorff, μ uma medida de Borel em X e A um boreliano de X.
(a) A medida μ é denominada *externamente regular* sobre A se

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \supset A,\, U \text{ aberto em } X\}.$$

(b) A medida μ é denominada *internamente regular* sobre A se

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \text{ compacto em } X\}.$$

(c) A medida μ é denominada *medida regular* se for externamente regular e internamente regular sobre todos os borelianos de X.

Definição 1.1.43 Seja X um espaço topológico de Hausdorff. Uma *medida de Radon* em X é uma medida de Borel em X que é finita sobre todos subconjuntos compactos de X, externamente regular sobre todos borelianos e internamente regular sobre os conjuntos abertos. Assim, toda medida de Radon em um espaço topológico compacto de Hausdorff é finita.

Dizemos que uma medida de Borel μ em um espaço topológico é uma *medida de Radon com sinal em X* se μ é uma medida de Borel com sinal cujas variações positiva μ^+ e negativa μ^- são medidas de Radon. E dizemos que μ é uma *medida de Radon complexa* se μ é uma medida de Borel complexa e suas partes real μ_r e imaginária μ_i são medidas de Radon com sinal.

Denotaremos por $M(X)$ o espaço de Banach das medidas de Radon complexas em X com a norma da variação.

Enunciaremos a seguir uma versão do teorema da representação de Riesz que descreve os funcionais lineares contínuos no espaço $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$ em que X é um espaço topológico de Hausdorff compacto, como medidas de Radon nos borelianos de X.

Teorema 1.1.44 (Teorema da Representação de Riesz) *Seja X um espaço de Hausdorff compacto. Então a aplicação*

$$\begin{aligned}\Psi\colon M(X) &\longrightarrow (C(X))' \\ \mu &\longmapsto I_\mu\colon C(X) \longrightarrow \mathbb{K} \\ &\qquad I_\mu(f) = \int_X f d\mu\end{aligned}$$

é um isomorfismo isométrico.

Demonstração. Veja [14, Theorem 7.17] e [14, Corollary 7.18]. ■

1.2 Aplicações multilineares

Nesta dissertação usaremos as aplicações multilineares para definir polinômios homogêneos entre espaços de Banach, os quais constituem o tópico central do trabalho. Nesta seção apresentaremos os conceitos e resultados relativos às aplicações multilineares que necessitaremos para o trato dos polinômios homogêneos.

Definição 1.2.1 Sejam $m \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_m$ e F espaços vetoriais. Uma aplicação $A\colon E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ é dita *multilinear* (ou *m-linear*) se

$$A(x_1, \ldots, \lambda x_i + x_i', \ldots, x_m) = \lambda\, A(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m) + A(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_m),$$

para todos $i = 1, \ldots, m$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x_i, x_i' \in E_i$.

Os espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$ das aplicações multilineares e das aplicações multilineares contínuas, no caso em que os espaços são normados, $A\colon E_1 \times \cdots \times E_m \longrightarrow F$ serão denotados por $L(E_1, \ldots, E_m; F)$ e $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$, respectivamente. Para toda aplicação multilinear $A \in L(E_1, \ldots, E_m; F)$ definimos

$$\|A\| := \sup\left\{\|A(x_1, \ldots, x_m)\| : x_j \in E_j \text{ e } \|x_j\| \leq 1 \text{ para todo } j = 1, \ldots, m\right\}. \quad (1.2)$$

Apesar da notação de norma, essa expressão não define uma norma em $L(E_1, \ldots, E_m; F)$, pois neste espaço pode ocorrer $\|A\| = \infty$. Por outro lado, essa expressão define uma norma sobre o espaço vetorial $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$, como se pode ver, por exemplo, em [29, Proposição 2.11]. O próximo resultado explicita isso e também mostra que, a exemplo do que ocorre no caso linear, a multilinearidade de uma aplicação simplifica o seu comportamento topológico.

Proposição 1.2.2 *Sejam $E_1, \ldots, E_m$ e F espaços normados e $A \in L(E_1, \ldots, E_m; F)$ uma aplicação m-linear. Então as seguintes condições são equivalentes:*
(a) *A é contínua.*
(b) *A é contínua na origem.*
(c) *Existe uma constante $C \geq 0$ tal que*

$$\|A(x_1, \ldots, x_m)\| \leq C\, \|x_1\| \cdots \|x_m\|$$

para todo ponto $(x_1, \ldots, x_m)$ em $E_1 \times \cdots \times E_m$.
(d) $\|A\| < \infty$.

Demonstração. Veja [29, Proposição 2.7]. ■

A norma de uma aplicação multilinear contínua, definida em (1.2), também pode ser calculada de várias maneiras equivalentes. Uma caracterização especialmente útil dessa norma é dada por

$$\|A\| = \inf \{C : \|A(x_1, \ldots, x_m)\| \leq C \|x_1\| \cdots \|x_m\| \text{ para todos } j \in \{1, \ldots, m\} \text{ e } x_j \in E_j\},$$

para toda $A \in \mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$. E daí segue facilmente que

$$\|A(x_1, \ldots, x_m)\| \leq \|A\| \cdot \|x_1\| \cdots \|x_m\|$$

para todo ponto $(x_1, \ldots, x_m)$ em $E_1 \times \cdots \times E_m$.

Proposição 1.2.3 *Sejam $E_1, \ldots, E_m$ espaços normados e F um espaço de Banach. O espaço vetorial $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_m; F)$, munido com a norma definida por (1.2), é um espaço de Banach.*

Demonstração. Veja [29, Proposição 2.11]. ■

As aplicações multilineares simétricas desempenharão um papel de destaque no estudo dos polinômios homogêneos. Com a finalidade de começar a estudar essas aplicações, consideraremos a partir de agora o caso particular das aplicações multilineares em $L(E_1, \ldots, E_m; F)$ onde

$$E_1 = E_2 = \cdots = E_m = E.$$

Neste caso os espaços vetoriais das aplicações multilineares e das aplicações multilineares contínuas $A\colon E^m \longrightarrow F$ serão denotados por $L(^mE; F)$ e $\mathcal{L}(^mE; F)$, respectivamente. Além disso, adotaremos as seguintes notações simplificadas:

$$L(^mE; \mathbb{K}) = L(^mE), \ \mathcal{L}(^mE; \mathbb{K}) = \mathcal{L}(^mE).$$

Definição 1.2.4 Uma aplicação multilinear $A\colon E^m \longrightarrow F$ é *simétrica* se

$$A(x_1, \ldots, x_m) = A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)})$$

para todos $(x_1, \ldots, x_m) \in E^m$ e $\sigma \in S_m$, onde S_m denota o conjunto das permutações dos m primeiros números naturais.

Exemplo 1.2.5 Sejam E e F espaços vetoriais com dimensão de E maior ou igual a 2, φ_1, φ_2 funcionais lineares não nulos em E e $0 \neq b \in F$. A aplicação bilinear

$$A\colon E \times E \longrightarrow F \ , \ A(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2)b,$$

não é simétrica, a menos que $\varphi_1 = \varphi_2$. De fato, como $\varphi_1 - \varphi_2$ é um funcional linear não-nulo em E e E tem dimensão maior ou igual a 2, segue que $\varphi_1 - \varphi_2$ não é injetor, e portanto existe $y \in E$ não-nulo tal que $\varphi_1(y) = \varphi_2(y)$. Tomando $x \in E$ tal que $\varphi_1(x) \neq \varphi_2(x)$, temos

$$A(x,y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)b \neq \varphi_2(x)\varphi_1(y)b = A(y,x).$$

Por outro lado, é fácil ver que a aplicação bilinear

$$B\colon E \times E \longrightarrow F \ , \ B(x_1,x_2) = \frac{1}{2}\left(\varphi_1(x_1)\varphi_2(x_2) + \varphi_1(x_2)\varphi_2(x_1)\right) b,$$

é simétrica e $A(x,x) = B(x,x)$ para todo $x \in E$.

Os conjuntos das aplicações multilineares simétricas e das aplicações multilineares simétricas contínuas $A\colon E^m \longrightarrow F$ serão denotados por $L^s({}^mE;F)$ e $\mathcal{L}^s({}^mE;F)$, respectivamente. Mais ainda, os conjuntos $L^s({}^mE;F)$ e $\mathcal{L}^s({}^mE;F)$ são subespaços vetoriais de $L({}^mE;F)$ e $\mathcal{L}({}^mE;F)$, respectivamente.

Vejamos que o artifício que usamos no exemplo acima para *simetrizar* a aplicação bilinear não-simétrica A, mantendo os valores assumidos na diagonal, funciona em geral. Sejam $n, m \in \mathbb{N}$ e $A \in L({}^mE;F)$. Para cada $(x_1, \ldots, x_n) \in E^m$ e cada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ com $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m$, usaremos a notação

$$Ax_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} := A(\underbrace{x_1, \ldots, x_1}_{\alpha_1}, \ldots, \underbrace{x_n, \ldots, x_n}_{\alpha_n})$$

para todo $m \geq 1$.

Proposição 1.2.6 *Para cada $A \in L({}^mE;F)$, defina $A^s\colon E^m \longrightarrow F$ por*

$$A^s(x_1, \ldots, x_m) := \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}).$$

Então as seguintes propriedades são satisfeitas:
(a) *$A^s \in L^s({}^mE;F)$.*
(b) *$A^s = A$ se, e somente se, $A \in L^s({}^mE;F)$.*
(c) *$(A^s)^s = A^s$.*
(d) *O operador $s\colon L({}^mE;F) \longrightarrow L^s({}^mE;F)$, definido por $s(A) = A^s$, é linear.*
(e) *Se $x \in E$ então $Ax^m = A^sx^m$.*

Demonstração. Veja [2, Proposição 1.1.6]. ■

O operador s da proposição anterior é chamado de *operador de simetrização.* Essa proposição mostra, dentre outras consequências, que s é uma projeção de $L({}^mE;F)$ sobre $L^s({}^mE;F)$.

Finalizaremos esta seção com a Fórmula de Polarização.

Fórmula de Polarização. *Seja $A \in L^s({}^mE;F)$. Então para todos $x_0, \ldots, x_m \in E$ tem-se a fórmula*

$$A(x_1, \ldots, x_m) = \frac{1}{m!2^m} \sum_{\varepsilon_j = \pm 1} \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_m A(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_m x_m)^m,$$

que será denominada Fórmula de polarização.

A demonstração da Fórmula de Polarização pode ser encontrada em [22, Theorem 1.10].

1.3 Polinômios homogêneos

Nesta seção apresentaremos o objeto principal da investigação realizada nesta dissertação, a saber, os polinômios homogêneos contínuos entre espaços de Banach. Enunciaremos algumas propriedades básicas e daremos alguns exemplos de polinômios homogêneos que serão úteis no decorrer do trabalho.

Definição 1.3.1 Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$ e $m \in \mathbb{N}$. Uma aplicação $P\colon E \longrightarrow F$ é um *polinômio m-homogêneo* ou *polinômio homogêneo de grau m*, se existir uma aplicação $A \in L(^mE;F)$ tal que $P(x) = Ax^m$ para todo ponto $x \in E$. Neste caso dizemos que P é o polinômio m-homogêneo associado à aplicação m-linear A.

É fácil ver que o conjunto constituído pelos polinômios m-homogêneos $P\colon E \longrightarrow F$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações usuais de aplicações. Denotaremos esse espaço por $P(^mE;F)$.

Exemplo 1.3.2 A função $P\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$, definida por $P(x) = ax^m$, $a \in \mathbb{K}$, é um polinômio m-homogêneo. Basta tomar $A \in L(^m\mathbb{K})$ dada por $A(x_1,\ldots,x_m) = ax_1\ldots x_m$, e assim temos $P(x) = Ax^m$. Note que esses são os únicos polinômios m-homogêneos de $\mathbb{K}$ em $\mathbb{K}$. De fato, se $A \in L(^m\mathbb{K})$ e $x_1,\ldots,x_m \in \mathbb{K}$, temos

$$A(x_1,\ldots,x_m) = x_1\ldots x_m A(1,\ldots,1) = ax_1\ldots x_m,$$

onde $a = A(1,\ldots,1)$.

Proposição 1.3.3 *Sejam E e F espaços normados sobre $\mathbb{K}$. Para cada $A \in L^s(^mE;F)$, considere a aplicação*

$$\widehat{A}\colon E \longrightarrow F \ , \ \widehat{A}(x) := Ax^m.$$

Então a correspondência $A \longmapsto \widehat{A}$ é um isomorfismo entre os espaços vetoriais $L^s(^mE;F)$ e $P(^mE;F)$.

Demonstração. Veja [5, Proposição 1.3.5]. ■

Observação 1.3.4 Da Proposição anterior vemos que para todo polinômio $P \in P(^mE;F)$, existe uma única aplicação multilinear simétrica $A \in L^s(^mE;F)$ tal que

$$Ax^m = P(x)$$

para todo $x \in E$. Nesse caso denotaremos $\overset{\vee}{P} := A$.

O subespaço de $P(^mE;F)$ formado pelos polinômios m-homogêneos contínuos entre os espaços normados E e F será denotado por $\mathcal{P}(^mE;F)$. Quando $F = \mathbb{K}$, denotaremos $\mathcal{P}(^mE;\mathbb{K})$ por $\mathcal{P}(^mE)$.

A continuidade de um polinômio homogêneo pode ser apurada de diversas maneiras:

Proposição 1.3.5 *Sejam E e F espaços normados e $P \in P(^mE;F)$. Então as seguintes condições são equivalentes:*
(a) *P é contínuo.*
(b) *P é contínuo em algum ponto de E.*
(c) *P é contínuo na origem.*
(d) $\sup\{\|P(x)\| : x \in E$ *e* $\|x\| \leq 1\} < \infty$.
(e) *Existe $C \geq 0$ tal que $\|P(x)\| \leq C\,\|x\|^m$ para todo ponto x em E.*
(f) *$P(A)$ é limitado em F sempre que A for limitado em E.*
(g) *P é limitado em toda bola fechada $B_E[x_0, r]$ centrada em $x_0 \in E$ de raio $r > 0$.*
(h) *P é limitado em alguma bola fechada $B_E[x_0, r]$ centrada em $x_0 \in E$ de raio $r > 0$.*
(i) *A aplicação m-linear $\overset{\vee}{P}$ é contínua.*
(j) *Existe $A \in \mathcal{L}(^mE, F)$ tal que $P(x) = Ax^m$ para todo ponto x em E.*

Demonstração. Veja [2, Proposição 1.2.7]. ■

O próximo resultado nos diz que o espaço dos polinômios m-homogêneos contínuos é um espaço vetorial normado se munido com a norma

$$\|P\| = \sup\{\|P(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}.$$

Proposição 1.3.6 *Sejam E e F espaços normados. Então $(\mathcal{P}(^mE;F); \|\cdot\|)$ é um espaço normado.*

Demonstração. Veja [2, Proposição 1.2.8]. ■

Proposição 1.3.7 *Sejam E e F espaços normados e $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$. Então*
(a) $\|P\| = \sup\{\|P(x)\| : x \in E$ *e* $\|x\| = 1\}$.
(b) $\|P\| = \inf\{M \geq 0 : \|P(x)\| \leq M\|x\|^m,$ *para todo* $x \in E\}$.
(c) $\|P(x)\| \leq \|P\| \cdot \|x\|^m$ *para todo $x \in E$.*

Demonstração. Veja [5, Proposição 1.3.5]. ■

Proposição 1.3.8 *Sejam E e F espaços normados e $m \in \mathbb{N}$. A correspondência $P \longmapsto \overset{\vee}{P}$ induz um isomorfismo topológico entre os espaços normados $\mathcal{L}^s(^mE;F)$ e $\mathcal{P}(^mE;F)$. Além disso,*

$$\|\overset{\vee}{P}\| \leq \|P\| \leq \frac{m^m}{m!}\|\overset{\vee}{P}\|,$$

para todo $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$.

Demonstração. Veja [5, Proposição 1.3.8]. ■

Teorema 1.3.9 *Sejam $m \in \mathbb{N}$, E um espaço normado e F espaço de Banach. Então $\mathcal{P}(^mE;F)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Veja [5, Proposição 1.3.10]. ■

Daremos agora alguns exemplos de polinômios m-homogêneos que serão úteis na sequência da dissertação.

Exemplo 1.3.10 Sejam E e F espaços normados, $\varphi \in E'$, $u \in \mathcal{L}(E;F)$ e $m \in \mathbb{N}$. Considere a aplicação

$$P\colon E \longrightarrow F \ , P(x) = (\varphi(x))^{m-1}\, u(x).$$

Obviamente P está bem definida. Verifiquemos que $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$. Para isso, considere a aplicação $A\colon E^m \longrightarrow F$ dada por

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_m) = \varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_{m-1})u(x_m).$$

É fácil ver que $A \in L(^mE;F)$ e $P(x) = Ax^m$ para todo $x \in E$. Assim, segue que P é um polinômio m-homogêneo. Além disso, note que

$$\begin{aligned}
\|P\| &= \sup\{\|P(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\
&= \sup\{\left\|(\varphi(x))^{m-1}\, u(x)\right\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\
&= \sup\{|\varphi(x)|^{m-1}\, \|u(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\
&= (\sup\{|\varphi(x)| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\})^{m-1} \sup\{\|u(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\
&= \|\varphi\|^{m-1}\, \|u\| < \infty,
\end{aligned}$$

portanto P é contínuo e $\|P\| = \|\varphi\|^{m-1}\, \|u\|$.

Em particular, definindo

$$\varphi^m\colon E \longrightarrow \mathbb{K} \ , \ \varphi^m(x) = \varphi(x)^m,$$

segue que $\varphi^m \in \mathcal{P}(^mE)$ e $\|\varphi^m\| = \|\varphi\|^m$.

Exemplo 1.3.11 Sejam E e F espaços normados. A aplicação dada por

$$Q_m\colon E \longrightarrow (\mathcal{P}(^mE))' \ , \quad Q_m(x)(P) = P(x),$$

é um polinômio m-homogêneo contínuo de norma 1. De fato, vejamos primeiramente que Q_m está bem definida em $(\mathcal{P}(^mE))'$. Sejam $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(^mE)$, $x \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então

$$\begin{aligned}
Q_m(x)(\lambda P_1 + P_2) &= (\lambda P_1 + P_2)(x) \\
&= \lambda P_1(x) + P_2(x) \\
&= \lambda Q_m(x)(P_1) + Q_m(x)(P_2).
\end{aligned}$$

Logo $Q_m(x)$ é linear para todo $x \in E$. De

$$\begin{aligned}
\|Q_m(x)\| &= \sup\{|Q_m(x)(P)| : P \in \mathcal{P}(^mE) \text{ e } \|P\| \leq 1\} \\
&= \sup\{|P(x)| : P \in \mathcal{P}(^mE) \text{ e } \|P\| \leq 1\} \\
&\leq \sup\{\|P\| \cdot \|x\|^m : P \in \mathcal{P}(^mE) \text{ e } \|P\| \leq 1\} \\
&= \|x\|^m \cdot \sup\{\|P\| : P \in \mathcal{P}(^mE) \text{ e } \|P\| \leq 1\} \\
&= \|x\|^m,
\end{aligned}$$

para todo $x \in E$, segue que $Q_m(x)$ é um operador linear contínuo para todo $x \in E$, ou seja, $Q_m(x) \in (\mathcal{P}(^mE))'$ para todo $x \in E$. Considere a aplicação

$$A\colon E\times \overset{(m)}{\cdots} \times E \longrightarrow (\mathcal{P}(^mE))', \quad A(x_1, \ldots, x_m)(P) = \overset{\vee}{P} (x_1, \ldots, x_m).$$

Vejamos que A é uma aplicação m-linear. Primeiramente, provemos que esta aplicação está bem definida em $(\mathcal{P}(^mE))'$. Dados $P_1, P_2 \in \mathcal{P}(^mE)$, $(x_1, \ldots, x_m) \in E\times \overset{(m)}{\cdots} \times E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, temos

$$\begin{aligned} A(x_1, \ldots, x_m)(\lambda P_1 + P_2) &= (\lambda P_1 + P_2)^{\vee}(x_1, \ldots, x_m) \\ &= \lambda \overset{\vee}{P_1} (x_1, \ldots, x_m) + \overset{\vee}{P_2} (x_1, \ldots, x_m) \\ &= \lambda A(x_1, \ldots, x_m)(P_1) + A(x_1, \ldots, x_m)(P_2) \end{aligned}$$

para todo $(x_1, \ldots, x_m) \in E\times \overset{(m)}{\cdots} \times E$, logo $A(x_1, \ldots, x_m)$ é linear para todo $(x_1, \ldots, x_m) \in E\times \overset{(m)}{\cdots} \times E$. De

$$\begin{aligned} \|A(x_1, \ldots, x_m)\| &= \sup\left\{|A(x_1, \ldots, x_m)(P)| : P \in \mathcal{P}(^mE) \text{ e } \|P\| \leq 1\right\} \\ &= \sup\left\{| \overset{\vee}{P} (x_1, \ldots, x_m)| : P \in \mathcal{P}(^mE) \text{ e } \|P\| \leq 1\right\} \\ &\leq \sup\left\{\| \overset{\vee}{P} \| \cdot \|x_1\| \cdots \|x_m\| : P \in \mathcal{P}(^mE) \text{ e } \|P\| \leq 1\right\} \\ &\leq \frac{m^m}{m!} \|x_1\| \cdots \|x_m\| < \infty, \end{aligned}$$

para todo $(x_1, \ldots, x_m) \in E\times \overset{(m)}{\cdots} \times E$, segue que $A(x_1, \ldots, x_m) \in (\mathcal{P}(^mE))'$ para todo $(x_1, \ldots, x_m) \in E\times \overset{(m)}{\cdots} \times E$. A m-linearidade de A segue da m-linearidade de $\overset{\vee}{P}$ para cada $P \in \mathcal{P}(^mE)$. Além disso,

$$A(x^m)(P) = \overset{\vee}{P} x^m = P(x) = Q_m(x)(P)$$

para todos $x \in E$ e $P \in \mathcal{P}(^mE)$, assim $Ax^m = Q_m(x)$ para todo $x \in E$, o que mostra que Q_m é um polinômio m-homogêneo.

Da desiguladade $\|Q_m(x)\| \leq \|x\|^m$ para todo $x \in E$ provada acima segue que Q_m é um polinômio m-homogêneo contínuo e $\|Q_m\| \leq 1$. Para provar a desigualdade inversa, tome $x_0 \in E$ com $\|x_0\| = 1$. Do Teorema de Hahn-Banach na forma da Proposição 1.1.4 sabemos que existe um funcional linear $\varphi \in E'$ tal que $\|\varphi\| = 1$ e $\varphi(x_0) = \|x_0\| = 1$. Do Exemplo 1.3.10 segue que $\varphi^m \in \mathcal{P}(^mE)$ e $\|\varphi^m\| = \|\varphi\|^m = 1$. Dessa forma,

$$|\varphi(x_0)^m| = |\varphi(x_0)|^m = 1 \in \left\{|P(x_0)| : P \in \mathcal{P}(^mE) \text{ e } \|P\| \leq 1\right\},$$

logo

$$\|Q_m(x_0)\| = \sup\left\{|P(x_0)| : P \in \mathcal{P}(^mE) \text{ e } \|P\| \leq 1\right\} \geq 1.$$

Então

$$\|Q_m\| = \sup\left\{\|Q_m(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\right\} \geq \|Q_m(x_0)\| \geq 1,$$

provando que $\|Q_m\| = 1$

Exemplo 1.3.12 Sejam E e F espaços normados, $\varphi \in E'$ e $b \in F$. A aplicação dada por

$$\varphi^m \otimes b\colon E \longrightarrow F, \quad (\varphi^m \otimes b)(x) = (\varphi(x))^m \; b,$$

é um polinômio m-homogêneo contínuo. De fato, considere a aplicação:

$$A\colon E\times \overset{(m)}{\cdots} \times E \longrightarrow F, \quad A(x_1,\ldots,x_m) = \varphi(x_1)\ldots\varphi(x_m)\; b.$$

É fácil de verificar que A é m-linear e $P(x) = Ax^m$ para todo $x \in E$. Logo P é um polinômio m- homogêneo. De

$$\begin{aligned}
\|\varphi^m \otimes b\| &= \sup\{\|\varphi^m \otimes b(x)\| : x \in E, \|x\| = 1\} \\
&= \sup\{\| (\varphi(x))^m \, b\| : x \in E, \|x\| = 1\} \\
&= \sup\{|\varphi(x)^m|\|b\| : x \in E, \|x\| = 1\} \\
&= \sup\{|\varphi(x)|^m : x \in E, \|x\| = 1\}\|b\| \\
&= \|\varphi\|^m\|b\|,
\end{aligned}$$

segue a continuidade de $\varphi^m \otimes b$. Portanto, $\varphi^m \otimes b$ é um polinômio m-homogêneo contínuo e $\|\varphi^m \otimes b\| = \|\varphi\|^m\|b\|$.

Definição 1.3.13 Um polinômio $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$ entre espaços normados e denominado de *tipo finito* se é da forma

$$P = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j^m \otimes b_j,$$

onde $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_j \in E'$ e $b_j \in F$ para todo $j \in \{1,\ldots,k\}$.

É fácil ver que o subconjunto de todos os polinômios m-homogêneos contínuos de tipo finito é um subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^mE;F)$, que será denotado por $\mathcal{P}_f(^mE;F)$. E também não é difícil verificar que se E tem dimensão finita, então todo polinômio homogêneo em E é de tipo finito, isto é,

$$\mathcal{P}(^mE;F) = \mathcal{P}_f(^mE;F)$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e todo espaço normado F.

Exemplo 1.3.14 Sejam $m \in \mathbb{N}$, E e F espaços normados, $Q \in \mathcal{P}(^mE)$ e $b \in F$. Considere a aplicação

$$Q \otimes b\colon E \longrightarrow F \;, Q \otimes b(x) = Q(x)b.$$

Vejamos que $Q \otimes b \in \mathcal{P}(^mE;F)$ e que $\|Q \otimes b\| = \|Q\| \cdot \|b\|$. É claro que $Q \otimes b$ está bem definida. Considere a aplicação

$$B\colon E\times \overset{(m)}{\cdots} \times E \longrightarrow F, \; B(x_1,\ldots,x_m) = \overset{\vee}{Q}\,(x_1,\ldots,x_m)b.$$

Verifica-se facilmente que B é m-linear. Para todo $x \in E$,

$$Q \otimes b(x) = Q(x)b = \overset{\vee}{Q}\,(x,\ldots,x)b = Bx^m,$$

o que prova que $Q \otimes b$ é um polinômio m-homogêneo. De

$$\begin{aligned}
\|Q \otimes b\| &= \sup\{\|Q \otimes b(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} \\
&= \sup\{\|Q(x)b\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} \\
&= \sup\{|Q(x)|\|b\| : x \in E, \|x\| \leq 1\} \\
&= \sup\{|Q(x)| : x \in E, \|x\| \leq 1\} \cdot \|b\| \\
&= \|Q\| \cdot \|b\|,
\end{aligned}$$

segue a continuidade de $Q \otimes b$ e que $\|Q \otimes b\| = \|Q\| \cdot \|b\|$.

Na Seção 4.2 estudaremos em detalhes o subespaço vetorial de $\mathcal{P}(^m E; F)$ gerado pelos polinômios da forma $Q \otimes b$ onde $Q \in \mathcal{P}(^m E)$ e $b \in F$. É claro que este subespaço contém os polinômios de tipo finito.

CAPÍTULO 2

O ADJUNTO DE UM POLINÔMIO HOMOGÊNEO

Conforme descrito na Introdução, o adjunto de um polinômio homogêneo contínuo é indiscutivelmente o principal objeto de estudo desta dissertação. Neste capítulo introduziremos este conceito, provaremos algumas propriedades básicas e apresentaremos alguns exemplos de adjuntos de polinômios homogêneos contínuos.

2.1 Definição e primeiras propriedades

Para a definição do adjunto de um polinômio m-homogêneo contínuo precisamos de um resultado preliminar sobre a composição de um polinômio m-homogêneo contínuo com operadores lineares contínuos.

Proposição 2.1.1 *Sejam E, F, G e H espaços normados, $u \in \mathcal{L}(E;F)$, $P \in \mathcal{P}(^mF;G)$ e $v \in \mathcal{L}(G;H)$. Então $v \circ P \circ u \in \mathcal{P}(^mE;H)$ e*

$$\|v \circ P \circ u\| \leq \|v\| \cdot \|P\| \cdot \|u\|^m.$$

Demonstração. A compatibilidade dos domínios deixa claro que a composição $v \circ P \circ u$ está bem definida como aplicação de E em H. Para verificar que $v \circ P \circ u$ é um polinômio m-homogêneo, considere a aplicação dada por

$$\begin{aligned} A \colon E \times \stackrel{(m)}{\cdots} \times E &\longrightarrow H \\ (x_1, \ldots, x_m) &\longmapsto (v \circ \overset{\vee}{P})\left(u(x_1), \ldots, u(x_m)\right). \end{aligned}$$

Da linearidade de u e de v e da m-linearidade de $\overset{\vee}{P}$ segue facilmente que A é m-linear. Além disso,

$$\begin{aligned} Ax^m &= (v\circ \overset{\vee}{P})(u(x), \overset{(m)}{\ldots}, u(x)) \\ &= (v\circ \overset{\vee}{P})(u(x))^m \\ &= v(\overset{\vee}{P}\,(u(x))^m) \\ &= v(P(u(x)) \\ &= (v \circ P \circ u)(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in E$. Isso prova que $v \circ P \circ u$ é um polinômio m-homogêneo. Para todo $x \in E$,

$$\begin{aligned} \|(v \circ P \circ u)(x)\| &= \|v(P \circ u)(x))\| \\ &\leq \|v\| \cdot \|(P \circ u)(x)\| \\ &\leq \|v\| \cdot \|P\| \cdot \|u(x)\|^m \\ &\leq \|v\| \cdot \|P\| \cdot \|u\|^m \cdot \|x\|^m \end{aligned}$$

donde concluímos que $v \circ P \circ u$ é contínuo e que $\|v \circ P \circ u\| \leq \|v\| \cdot \|P\| \cdot \|u\|^m$. ■

Sejam $m \in \mathbb{N}$, E, F espaços Banach e $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$. Para cada $\varphi \in F'$, da Proposição 2.1.1 sabemos que $\varphi \circ P \in \mathcal{P}(^mE)$. Isso significa que a seguinte definição de adjunto de um polinômio homogêneo, introduzida por R. Aron e M. Schottenloher em [4], está bem colocada:

Definição 2.1.2 Sejam E e F espaços de Banach e $P\colon E \longrightarrow F$ um polinômio m-homogêneo contínuo. A aplicação

$$P'\colon F' \longrightarrow \mathcal{P}(^mE)\ ,\ P'(\varphi) = \varphi \circ P,$$

é chamado o *adjunto* de P.

Apesar do adjunto de um polinômio homogêneo compartilhar de muitas das propriedades do adjunto de um operador linear, conforme verificaremos a seguir; é importante notar que, enquanto o adjunto de um operador linear é também um operador linear, o adjunto de um polinômio homogêneo não é um polinômio homogêneo, e sim um operador linear:

Proposição 2.1.3 *Sejam E e F espaços de Banach, P e $Q \in \mathcal{P}(^mE; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então:*
(a) *P' é um operador linear contínuo, isto é, $P' \in \mathcal{L}(F'; \mathcal{P}(^mE))$.*
(b) *$(P + Q)' = P' + Q'$.*
(c) *$(\lambda P)' = \lambda P'$.*
(d) *$\|P'\| = \|P\|$.*

Demonstração. (a) Sejam φ e $\psi \in F'$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então

$$\begin{aligned} P'(\lambda\varphi + \psi)(x) &= ((\lambda\varphi + \psi) \circ P)(x) \\ &= (\lambda\varphi + \psi)(P(x)) \\ &= \lambda\varphi(P(x)) + \psi(P(x)) \\ &= \lambda P'(\varphi)(x) + P'(\psi)(x) \\ &= (\lambda P'(\varphi) + P'(\psi))(x) \end{aligned}$$

para todo $x \in E$. Logo $P'(\lambda\varphi+\psi) = \lambda P'(\varphi) + P'(\psi)$ provando assim a linearidade de P'.

De

$$\begin{aligned} \|P'(\varphi)\| &= \sup\{|P'(\varphi)(x) : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|\varphi(P(x))| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|\varphi\| \cdot \|P(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &= \|\varphi\| \cdot \sup\{\|P(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} \\ &= \|\varphi\| \cdot \|P\| \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in F'$, segue que P' é contínuo e $\|P'\| \leq \|P\|$.
(b) Para todos $\varphi \in F'$ e $x \in E$,

$$\begin{aligned} (P+Q)'(\varphi)(x) &= (\varphi \circ (P+Q))(x) \\ &= \varphi((P+Q)(x)) \\ &= \varphi(P(x) + Q(x)) \\ &= \varphi(P(x)) + \varphi(P(x)) \\ &= P'(\varphi)(x) + Q'(\varphi)(x) \\ &= (P' + Q')(\varphi)(x). \end{aligned}$$

Logo $(P+Q)' = P' + Q'$.
(c) Temos

$$\begin{aligned} (\lambda P)'(\varphi)(x) &= (\varphi \circ (\lambda\ P))(x) \\ &= \varphi((\lambda\ P)(x)) \\ &= \lambda\ \varphi(P(x)) \\ &= \lambda\ P'(\varphi)(x), \end{aligned}$$

para todos $\varphi \in F'$ e $x \in E$, portanto $(\lambda\ P)' = \lambda\ P'$.
(d) No item (a) mostramos que $\|P'\| \leq \|P\|$. Por outro lado, pelo Teorema de Hanh-Banach na forma do Teorema 1.1.3,

$$\begin{aligned} \|P(x)\| &= \sup\{|\varphi(P(x))| : \varphi \in F' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\} \\ &= \sup\{|P'(\varphi)(x)| : \varphi \in F' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\} \\ &\leq \sup\{\|P'(\varphi)\| \cdot \|x\|^m : \varphi \in F' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\} \\ &= \sup\{\|P'(\varphi)\| : \varphi \in F' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\} \cdot \|x\|^m, \\ &= \|P'\| \cdot \|x\|^m \end{aligned}$$

para todo $x \in E$, logo $\|P\| \leq \|P'\|$, provando assim que $\|P\| = \|P'\|$. ∎

Corolário 2.1.4 *Sejam E e F espaços de Banach. A aplicação dada por*

$$\Phi\colon \mathcal{P}(^mE;F) \longrightarrow \mathcal{L}(F';\mathcal{P}(^mE)), \quad \Phi(P) = P',$$

é uma isometria linear.

À luz do Corolário acima, a seguinte pergunta é natural: qual é a imagem da correspondência Φ? No próximo capítulo (veja Teorema 3.4.7) veremos a resposta dessa pergunta.

A seguir daremos uma demonstração do caso polinomial da Proposição 1.1.39. Relembre que J_F é o mergulho canônico do espaço normado F em F'' e

$$Q_m\colon E \longrightarrow \mathcal{P}(^mE)' \ , \ Q_m(x)(P) = P(x),$$

é o polinômio m-homogêneo contínuo de norma 1 do Exemplo 1.3.11.

Para $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$, por P'' denotamos o adjunto do operador linear P', isto é, $P'' = (P')'$. Note que $P'' \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(^mE)';F'')$.

Proposição 2.1.5 *Sejam E e F espaços Banach e $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$. Então P'' é uma extensão de P a $\mathcal{P}(^mE)'$ no sentido de que $J_F \circ P = P'' \circ Q_m$, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(^mE)' \arrow[r, "P''"] & F'' \\
E \arrow[u, "Q_m"] \arrow[r, "P"] & F \arrow[u, "J_F"']
\end{tikzcd}$$

Em particular, $P''(Q_m(E)) = J_F(P(E))$.

Demonstração. Para todos $x \in E$ e $\varphi \in F'$, note que $\varphi \circ P \in \mathcal{P}(^mE)$ e

$$\begin{aligned}
(J_F \circ P)(x)(\varphi) &= J_F(P(x))(\varphi) \\
&= \varphi(P(x)) \\
&= (\varphi \circ P)(x) \\
&= Q_m(x)(\varphi \circ P) \\
&= Q_m(x)(P'(\varphi)) \\
&= (Q_m(x) \circ P')(\varphi) \\
&= P''(Q_m(x))(\varphi) \\
&= (P'' \circ Q_m)(x)(\varphi).
\end{aligned}$$

Assim, $J_F \circ P = P'' \circ Q_m$. ■

2.2 Exemplos

Exemplo 2.2.1 Sejam E e F espaços de Banach, $\varphi \in E'$ e $b \in F$. Considere o polinômio m-homogêneo contínuo $\varphi^m \otimes b$ do Exemplo 1.3.12, isto é,

$$\varphi^m \otimes b \colon E \longrightarrow F, \quad (\varphi^m \otimes b)(x) = (\varphi(x))^m \, b.$$

Vejamos que $(\varphi^m \otimes b)' = J_F(b) \otimes \varphi^m$. De fato, sejam $\psi \in F'$ e $x \in E$. Então

$$\begin{aligned}(\varphi^m \otimes b)'(\psi)(x) &= \psi \circ (\varphi^m \otimes b)(x)\\ &= \psi\left((\varphi^m \otimes b)(x)\right)\\ &= \psi\left((\varphi(x))^m \, b\right)\\ &= (\varphi(x))^m \, \psi(b)\\ &= (\varphi(x))^m \, J_F(b)(\psi)\\ &= (J_F(b) \otimes \varphi^m)(\psi)(x),\end{aligned}$$

portanto $(\varphi^m \otimes b)' = J_F(b) \otimes \varphi^m$.

Observação 2.2.2 Vimos que um polinômio $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ é contínuo de tipo finito se é da forma

$$P = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j^m \otimes b_j,$$

com $\varphi_j \in E'$ e $b_j \in F$ para cada $j \in \{1, \ldots, k\}$. Da Proposição 2.1.3 e do exemplo anterior segue que

$$\begin{aligned}P' &= \left(\sum_{j=1}^{k} \varphi_j^m \otimes b_j\right)'\\ &= \sum_{j=1}^{k} \left(\varphi_j^m \otimes b_j\right)'\\ &= \sum_{j=1}^{k} J_F(b_j) \otimes \varphi^m.\end{aligned}$$

Como $J_F(b_j) \in F''$ e $\varphi^m \in \mathcal{P}(^m E)$ para $j \in \{1, \ldots, k\}$, segue que P' é um operador linear de posto finito. Assim, o adjunto de todo polinômio homogêneo de tipo finito é um operador linear de posto finito.

Exemplo 2.2.3 Sejam E e F espaços de Banach, $Q \in \mathcal{P}(^m E)$ e $b \in F$. Determinemos o adjunto do polinômio m-homogêneo $Q \otimes b$ do Exemplo 1.3.14, isto é,

$$Q \otimes b \colon E \longrightarrow F \ , Q \otimes b(x) = Q(x) b.$$

Temos

$$\begin{aligned}(Q \otimes b)'(\psi)(x) &= \psi(Q \otimes b(x))\\ &= \psi(Q(x)b)\\ &= Q(x)\psi(b)\\ &= J_F(b)(\psi)Q(x)\\ &= (J_F(b)(\psi)Q)(x)\\ &= ((J_F(b) \otimes Q)(\psi))\,(x)\\ &= (J_F(b) \otimes Q)(\psi)(x)\end{aligned}$$

para todos $\psi \in F'$ e $x \in E$. Portanto $(Q \otimes b)' = J_F(b) \otimes Q$.

Para o próximo exemplo precisaremos do seguinte resultado:

Lema 2.2.4 *Sejam E um espaço normado e $\varphi \in E'$. Então a aplicação dada por*

$$T_\varphi \colon E' \longrightarrow \mathcal{P}(^m E),\ T_\varphi(\psi)(x) = \varphi(x)^{m-1}\psi(x),$$

é linear e contínua, ou seja, $T_\varphi \in \mathcal{L}(E'; \mathcal{P}(^m E))$.

Demonstração. Do Exemplo 1.3.10 segue que a aplicação T_φ está bem definida, isto é, $T_\varphi(\psi) \in \mathcal{P}(^m E)$ para todo $\psi \in E'$. Vejamos que T_φ é linear. Para isso sejam $\psi, \phi \in E'$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então

$$\begin{aligned}T_\varphi(\lambda\psi + \phi)(x) &= \varphi(x)^{m-1}(\lambda\psi + \phi)(x)\\ &= \varphi(x)^{m-1}(\lambda\psi(x) + \phi(x))\\ &= \lambda\, \varphi(x)^{m-1}\psi(x) + \varphi(x)^{m-1}\phi(x)\\ &= \lambda\, T_\varphi(\psi)(x) + T_\varphi(\phi)(x)\\ &= (\lambda\, T_\varphi(\psi) + T_\varphi(\phi))\,(x),\end{aligned}$$

para todo $x \in E$, portanto $T_\varphi(\lambda\psi + \phi) = \lambda\, T_\varphi(\psi) + T_\varphi(\phi)$ provando a linearidade de T_φ. De

$$\begin{aligned}\|T_\varphi(\psi)\| &= \sup\{|T_\varphi(\psi)(x)| : x \in E \text{ e } \|x\| \le 1\}\\ &= \sup\left\{|\varphi(x)^{m-1}\psi(x)| : x \in E \text{ e } \|x\| \le 1\right\}\\ &= \sup\left\{|\varphi(x)|^{m-1}|\psi(x)| : x \in E \text{ e } \|x\| \le 1\right\}\\ &\le (\sup\{|\varphi(x)| : x \in E \text{ e } \|x\| \le 1\})^{m-1} \sup\{|\psi(x)| : x \in E \text{ e } \|x\| \le 1\}\\ &= \|\varphi\|^{m-1}\|\psi\|,\end{aligned}$$

para todo $\psi \in E'$, segue a continuidade de T_φ. ■

Exemplo 2.2.5 Sejam E e F espaços de Banach, $\varphi \in E'$, $u \in \mathcal{L}(E;F)$ e $m \in \mathbb{N}$. Considere o polinômio m-homogêneo P do Exemplo 1.3.10, isto é,

$$P \colon E \longrightarrow F,\ P(x) = \varphi(x)^{m-1}u(x).$$

Vejamos que $P' = T_\varphi \circ u'$, onde T_φ é o operador linear do Lema 2.2.4, ou seja, que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[rr, "P'"] \arrow[dr, "u'"'] & & \mathcal{P}(^m E) \\ & E' \arrow[ur, "T_\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

De fato, para todos $\psi \in F'$ e $x \in E$,

$$\begin{aligned} P'(\psi)(x) &= \psi(P(x)) \\ &= \psi\left(\varphi(x)^{m-1}u(x)\right) \\ &= \varphi(x)^{m-1}\psi(u(x)) \\ &= \varphi(x)^{m-1}u'(\psi)(x) \\ &= T_\varphi(u'(\psi))(x) \\ &= (T_\varphi \circ u')(\psi)(x), \end{aligned}$$

donde concluímos que $P' = T_\varphi \circ u'$.

Exemplo 2.2.6 Sejam E espaço de Banach, $\varphi \in E'$ e $m \in \mathbb{N}$. Considere o polinômio m-homogêneo

$$P\colon E \longrightarrow E,\ P(x) = \varphi(x)^{m-1}x.$$

Tomando $u = Id_E$ no exemplo anterior, temos $P' = T_\varphi \circ (Id_E)'$, e pela Proposição 1.1.38 segue que $P' = T_\varphi \circ Id_{E'}$.

O polinômio homogêneo deste exemplo é muito usado como o *análogo polinomial* do operador identidade (veja, por exemplo, [6]).

CAPÍTULO 3

O ADJUNTO DA COMPOSIÇÃO DE UM POLINÔMIO COM UM OPERADOR

É bem conhecido que se $u\colon E \longrightarrow F$ e $v\colon F \longrightarrow G$ são operadores lineares contínuos entre espaços normados, então vale a fórmula

$$(v \circ u)' = u' \circ v'.$$

A validade dessa fórmula nos leva naturalmente a buscar fórmulas para os adjuntos das compostas $u \circ P$ e $P \circ v$, onde u e v são operadores lineares contínuos e P é um polinômio homogêneo contínuo, todos com domínios e contra-domínios adequados para as compostas terem sentido. O objetivo deste capítulo é provar fórmulas para $(u \circ P)'$ e $(P \circ v)'$.

3.1 O adjunto de $u \circ P$

Dados $m \in \mathbb{N}$, E, F e G espaços de Banach, se $u \in \mathcal{L}(G; F)$ e $P \in \mathcal{P}(^mE; G)$, observe que $u'\colon F' \longrightarrow G'$ e $P'\colon G' \longrightarrow \mathcal{P}(^mE)$, e portanto os domínios e contra-domínios nos permitem considerar a composta $P' \circ u'$, operador este que é o candidato óbvio para ser o adjunto de $u \circ P$:

Teorema 3.1.1 *Sejam $m \in \mathbb{N}, E, F$ e G espaços de Banach. Se $u \in \mathcal{L}(G; F)$ e $P \in \mathcal{P}(^mE; G)$, então $(u \circ P)' = P' \circ u'$, ou seja, o diagrama seguinte é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[rr, "(u\circ P)'"] \arrow[dr, "u'"'] & & \mathcal{P}(^mE) \\ & G' \arrow[ur, "P'"'] & \end{tikzcd}$$

Demonstração. Da Proposição 2.1.1 temos que $u \circ P \in \mathcal{P}\left({}^{m}E;F\right)$. Seja $\varphi \in F'$, então $\varphi \circ u \in G'$. Assim

$$\begin{aligned}(u \circ P)'(\varphi) &= \varphi \circ (u \circ P) \\ &= (\varphi \circ u) \circ P \\ &= P'(\varphi \circ u) \\ &= P'\left(u'(\varphi)\right) \\ &= \left(P' \circ u'\right)(\varphi),\end{aligned}$$

portanto $(u \circ P)' = P' \circ u'$. ■

Por outro lado, se $u \in \mathcal{L}(E;G)$ e $P \in \mathcal{P}({}^{m}G;F)$, então $u' \colon G' \longrightarrow E'$ e $P' \colon F' \longrightarrow \mathcal{P}({}^{m}G)$, e portanto não há nenhuma composta óbvia para ser o candidato a ser o adjunto de $(P \circ u)$. Precisamos desenvolver a teoria de linearização de polinômios homogêneos para chegar a uma fórmula para $(P \circ u)'$, a qual, por sinal, não foi por nós encontrada na literatura.

3.2 Linearização de polinômios

Nesta seção apresentaremos a linearização de polinômios homogêneos contínuos através do produto tensorial simétrico projetivo, essencialmente devida a Ryan [27]. Uma abordagem alternativa equivalente pode ser encontrada em Mujica [20]. O objetivo inicial é ter ferramentas para apresentar uma fórmula para o adjunto da composição $P \circ u$ de um polinômio homogêneo P com um operador linear u, entretanto a teoria desenvolvida também será aproveitada para responder a pergunta formulada após o Corolário 2.1.4.

Veremos que é possível, em certo sentido, linearizar um polinômio homogêneo contínuo alterando o seu domínio. Mantendo o que vimos fazendo, todos os espaços vetoriais considerados são sobre o mesmo corpo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, e E^* denota o dual algébrico do espaço vetorial E. Dados $m \in \mathbb{N}$, $E_1, \ldots, E_m$ espaços vetoriais e $x_1 \in E_1, \ldots, x_m \in E_m$, é imediato que a aplicação

$$\begin{aligned}x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \colon L(E_1, \ldots, E_m; \mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ A &\longmapsto (x_1 \otimes \cdots \otimes x_m)(A) := A(x_1, \ldots, x_m),\end{aligned}$$

é linear. Desse modo segue que $x_1 \otimes \cdots \otimes x_m \in L(E_1, \ldots, E_m; \mathbb{K})^*$. Usando essa notação, vejamos as primeiras definições.

Definição 3.2.1 Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $E_1, \ldots, E_m$ espaços vetoriais. Denominamos por *produto tensorial* de $E_1, \ldots, E_m$ o subespaço vetorial de $L(E_1, \ldots, E_m; \mathbb{K})^*$ gerado pelo conjunto

$$D := \{x_1 \otimes \cdots \otimes x_m : x_1 \in E_1, \ldots, x_m \in E_m\}.$$

O produto tensorial de $E_1, \ldots, E_m$ será denotado por $E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$. Em particular, se $E_1 = \cdots = E_m = E$, o produto tensorial de $E_1, \ldots, E_m$ será denotado por $\otimes^m E$.

Os elementos do produto tensorial $E_1 \otimes \cdots \otimes E_m$ são chamados *tensores*, e os tensores da forma $x_1 \otimes \cdots \otimes x_m$ serão denominados *tensores elementares*. Estes tensores elementares satisfazem algumas propriedades úteis e de verificação imediata, a saber:

- $x_1 \otimes \cdots \otimes (x_i + x_i') \otimes \cdots \otimes x_m = x_1 \otimes \cdots \otimes x_i \otimes \cdots \otimes x_m + x_1 \otimes \cdots \otimes x_i' \otimes \cdots \otimes x_m$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$.

- $\lambda(x_1 \otimes \cdots \otimes x_i \otimes \cdots \otimes x_m) = x_1 \otimes \cdots \otimes (\lambda x_i) \otimes \cdots \otimes x_m$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$.

- Se $x_i = 0$ para algum $i \in \{1, \ldots, m\}$, então $x_1 \otimes \cdots \otimes x_m = 0$.

Para a teoria algébrica dos produtos tensoriais, veja [28, Capítulo 1] e [10, Seção 2].

Vejamos a seguir um subespaço do produto tensorial que será imprescindível na linearização de polinômios homogêneos contínuos.

Definição 3.2.2 Sejam $m \in \mathbb{N}$ e E um espaço vetorial. O subespaço do produto tensorial $\otimes^m E$ gerado pelos tensores elementares da forma

$$x \otimes \overset{(m)}{\cdots} \otimes x := \otimes^m x, \ x \in E,$$

será denominado *produto tensorial simétrico* de E por E m vezes. Este subespaço será denotado por $\otimes^{m,s} E$.

No caso em que E é um espaço normado, pode-se introduzir no produto tensorial simétrico $\otimes^{m,s} E$ uma norma que será a chave para a linearização dos polinômios m-homogêneos contínuos definidos em E. Essa norma é denominada *norma s-tensorial projetiva*, denotada por π_s e definida por

$$\pi_s(z) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{k} |\lambda_j| \cdot \|x_j\|^m : k \in \mathbb{N} \text{ e } z = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \otimes^m x_j \right\}$$

para $z \in \otimes^{m,s} E$. Denotaremos o espaço normado $(\otimes^{m,s} E, \pi_s)$ por $\otimes_{\pi_s}^{m,s} E$.

Da definição de π_s segue imediatamente que, para todo $x \in E$, $\pi_s(\otimes^m x) \leq \|x\|^m$. Prova-se também a desigualdade inversa, veja [15, Proposition 2.2(3)], e portanto

$$\pi_s(\otimes^m x) = \|x\|^m,$$

para todo $x \in E$. Para a teoria dos produtos tensoriais simétricos projetivos veja, por exemplo, [15] e [27].

A proposição a seguir diz que a aplicação natural de um espaço normado E no seu produto tensorial simétrico projetivo é um polinômio homogêneo contínuo.

Proposição 3.2.3 *Seja $m \in \mathbb{N}$. A aplicação*

$$\delta_m^E \colon E \longrightarrow \otimes_{\pi_s}^{m,s} E \ , \ \delta_m^E(x) := \otimes^m x, \tag{3.1}$$

é um polinômio m-homogêneo contínuo de norma 1.

Demonstração. Primeiramente vejamos que a aplicação

$$\begin{aligned} A\colon E\times \overset{(m)}{\cdots} \times E &\longrightarrow \otimes^m E \\ (x_1,\ldots,x_m) &\longmapsto x_1\otimes\cdots\otimes x_m \end{aligned}$$

é m-linear. Com efeito, dados $\lambda\in\mathbb{K}$, $i\in\{1,\ldots,m\}$ e $x_1,\ldots,x_i,x_i',\ldots,x_m\in E$, segue que

$$\begin{aligned} A(x_1,\ldots,\lambda x_i+x_i',\ldots,x_m) &= x_1\otimes\cdots\otimes(\lambda x_i+x_i')\otimes\cdots\otimes x_m \\ &= \lambda\,(x_1\otimes\cdots\otimes x_i\otimes\cdots\otimes x_m)+x_1\otimes\cdots\otimes x_i'\otimes\cdots\otimes x_m \\ &= \lambda\,A(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_m)+A(x_1,\ldots,x_i',\ldots,x_m) \end{aligned}$$

e, por conseguinte, a aplicação A é deveras multilinear. De acordo com a Proposição 1.2.6, a simetrização A^s de A,

$$\begin{aligned} A^s\colon E\times \overset{(m)}{\cdots} \times E &\longrightarrow \otimes^m E \\ (x_1,\ldots,x_m) &\longmapsto \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} A(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(m)}) = \frac{1}{m!}\sum_{\sigma\in S_m} x_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes x_{\sigma(m)} \end{aligned}$$

é uma aplicação multilinear simétrica (relembre que S_m é o conjunto de todas as permutações do conjunto $\{1,\ldots,m\}$). Como a imagem da aplicação A^s é justamente o produto tensorial simétrico $\otimes^{m,s}E$ (veja [27, Proposition 1.4]), a aplicação

$$B\colon E^m \longrightarrow \otimes^{m,s}E\ ,\ B(x_1,\ldots,x_m) := A^s(x_1,\ldots,x_m),$$

está bem definida e é multilinear. Mais ainda, $Bx^m=\delta_m^E(x)$ para todo x em E, logo a aplicação δ_m^E é um polinômio m-homogêneo. Conforme vimos acima, é verdade que

$$\pi_s(\delta_m^E(x)) = \pi_s(\otimes^m x) = \|x\|^m$$

para todo $x\in E$. De acordo com a Proposição 1.3.5, isso prova que o polinômio m-homogêneo δ_m^E é contínuo e tem norma 1. ■

Agora estamos em condições de descrever em que sentido os polinômios homogêneos contínuos são linearizados através do produto tensorial simétrico projetivo. Essa linearização dos polinômios homogêneos através do produto tensorial simétrico projetivo, que conforme já dissemos é devida a Ryan [27], diz que todo polinômio m-homogêneo contínuo em E se fatora através do polinômio m-homogêneo canônico δ_m^E:

Teorema 3.2.4 *Sejam E e F espaços normados. Se $P\colon E\longrightarrow F$ é um polinômio m-homogêneo contínuo, então existe um único operador linear $P^L\in\mathcal{L}(\otimes_{\pi_s}^{m,s}E;F)$ tal que*

$$P = P^L\circ\delta_m^E,$$

ou seja, o diagrama seguinte é comutativo:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "P"] \arrow[dr, "\delta_m^E"'] & & F \\ & \otimes_{\pi_s}^{m,s}E \arrow[ur, "P^L"'] & \end{tikzcd}$$

Mais ainda, a correspondência $P \longrightarrow P^L$ é um isomorfismo isométrico entre os espaços normados $\mathcal{P}(^m E; F)$ e $\mathcal{L}(\otimes_{\pi_s}^{m,s} E; F)$.

Demonstração. Veja [27, Proposition 2.1] ■

Definição 3.2.5 O operador linear contínuo P^L do Teorema 3.2.4 é denominado *linearização* do polinômio m-homogêneo contínuo P.

Observação 3.2.6 Em geral o produto tensorial simétrico projetivo $\otimes_{\pi_s}^{m,s} E$ não é completo, mesmo que E o seja. Na verdade, $\otimes_{\pi_s}^{m,s} E$ só é completo se E tem dimensão finita. Quando houver necessidade de se trabalhar com espaços de Banach, basta considerar o completamento de $\otimes_{\pi_s}^{m,s} E$ e estender a linearização P^L de um polinômio m-homogêneo P definido em E a este completamento (relembre que todo operador linear contínuo em um espaço normado E pode ser estendido ao completamento de E mantendo-se a linearidade, a continuidade e o valor da norma) .

Aprenderemos agora como fazer o produto tensorial simétrico projetivo de operadores lineares contínuos:

Proposição 3.2.7 *Sejam $m \in \mathbb{N}$, E e F espaços normados e $u \in \mathcal{L}(E; F)$. Então existe um único operador linear contínuo*

$$\otimes^{m,s} u\colon \otimes_{\pi_s}^{m,s} E \longrightarrow \otimes_{\pi_s}^{m,s} F, \tag{3.2}$$

tal que $\otimes^{m,s} u(\otimes^m x) = \otimes^m u(x)$ para todo $x \in E$.

Demonstração. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} P\colon E &\longrightarrow \otimes_{\pi_s}^{m,s} F \\ x &\longmapsto \otimes^m u(x). \end{aligned}$$

Provaremos agora que $P \in \mathcal{P}(^m E; \otimes_{\pi_s}^{m,s} F)$. Para isso, considere a aplicação

$$\begin{aligned} A\colon E \times \overset{(m)}{\cdots} \times E &\longrightarrow \otimes^m F \\ (x_1, \ldots, x_m) &\longmapsto u(x_1) \otimes \cdots \otimes u(x_m). \end{aligned}$$

Vejamos que A é uma aplicação multilinear. Com efeito, dados $\lambda \in \mathbb{K}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $x_1, \ldots, x_i, x_i', \ldots, x_m \in E$, temos

$$\begin{aligned} A(x_1, \ldots, \lambda x_i + x_i', \ldots, x_m) &= u(x_1) \otimes \cdots \otimes u(\lambda x_i + x_i') \otimes \cdots \otimes u(x_m) \\ &= u(x_1) \otimes \cdots \otimes (\lambda u(x_i) + u(x_i')) \otimes \cdots \otimes u(x_m) \\ &= \lambda\, (u(x_1) \otimes \cdots \otimes u(x_i) \otimes \cdots \otimes u(x_m)) \\ &\quad + u(x_1) \otimes \cdots \otimes u(x_i') \otimes \cdots \otimes u(x_m) \\ &= \lambda\, A(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_m) + A(x_1, \ldots, x_i', \ldots, x_m). \end{aligned}$$

Isso prova que a aplicação A é multilinear. Desse modo, mais uma vez de acordo com a Proposição 1.2.6, a simetrização A^s da aplicação multilinear A,

$$\begin{aligned} A^s \colon E \times \overset{(m)}{\cdots} \times E &\longrightarrow \otimes^m F \\ (x_1, \ldots, x_m) &\longmapsto \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} A(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)}) = \frac{1}{m!} \sum_{\sigma \in S_m} u(x_{\sigma(1)}) \otimes \cdots \otimes u(x_{\sigma(m)}) \end{aligned}$$

é uma aplicação multilinear simétrica. Da mesma forma que já fizemos antes, a imagem da aplicação A^s está contida no produto tensorial simétrico $\otimes^{m,s} F$, portanto a aplicação

$$B \colon E^m \longrightarrow \otimes^{m,s} F \ , \ B(x_1, \ldots, x_m) := A^s(x_1, \ldots, x_m),$$

está bem definida e é multilinear. Mais ainda,

$$Bx^m = B(x, \ldots, x) = A^s(x, \ldots, x) = A(x, \ldots, x) = \otimes^m u(x) = P(x)$$

para todo x em E, logo a aplicação P é um polinômio m-homogêneo. Para comprovar que o polinômio m-homogêneo P é contínuo, basta notar que

$$\pi_s(P(x)) = \pi_s(\otimes^m u(x)) = \|u(x)\|^m$$

para todo x em E. A continuidade do polinômio m-homogêneo P segue agora da Proposição 1.3.5. Do Teorema 3.2.4 existe um único operador linear contínuo $P^L \in \mathcal{L}\left(\otimes_{\pi_s}^{m,s} E; \otimes_{\pi_s}^{m,s} F\right)$ tal que $P = P^L \circ \delta_m^E$. Chame $\otimes^{m,s} u = P^L$ para obter

$$\begin{aligned} \otimes^{m,s} u(\otimes^m x) &= P^L(\otimes^m x) \\ &= \left(P^L \circ \delta_m^E\right)(x) \\ &= P(x) \\ &= \otimes^m u(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in E$, o que completa a demonstração. ■

Observação 3.2.8 Será importante para nós considerar o caso escalar no Teorema 3.2.4, isto é $F = \mathbb{K}$. Neste caso, chamando de Δ_m^E a correspondência $P \longmapsto P^L$, decorre que o operador

$$\Delta_m^E \colon \mathcal{P}\left({}^m E\right) \longrightarrow \left(\otimes_{\pi_s}^{m,s} E\right)'$$

é um isomorfismo isométrico e $\Delta_m^E(P) = P^L$ para todo P em $\mathcal{P}\left({}^m E\right)$. Obviamente o isomorfismo isométrico inverso $\left(\Delta_m^E\right)^{-1}$ satisfaz $\left(\Delta_m^E\right)^{-1}(P^L) = P$ para todo P em $\mathcal{P}\left({}^m E\right)$.

Será útil para os nossos propósitos reconhecer o isomorfismo isométrico inverso $\left(\Delta_m^E\right)^{-1}$ da observação acima como o adjunto do polinômio m-homogêneo canônico δ_m^E:

Proposição 3.2.9 *Sejam $m \in \mathbb{N}$ e E espaço de Banach. Então o adjunto do polinômio homogêneo $\delta_m^E \colon E \longrightarrow \otimes_{\pi_s}^{m,s} E$, $\delta_m^E(x) = \otimes^m x$, é o isomorfismo isométrico $\left(\Delta_m^E\right)^{-1}$, assim $\left(\delta_m^E\right)'\left(P^L\right) = P$ para todo P em $\mathcal{P}\left({}^m E\right)$.*

Demonstração. Dados um funcional $\varphi \in \left(\otimes_{\pi_s}^{m,s} E\right)'$ e um vetor $x \in E$, chamando $P_\varphi := (\Delta_m^E)^{-1}(\varphi) \in \mathcal{P}\left({}^m E\right)$ e aplicando o Teorema 3.2.4 com $F = \mathbb{K}$ obtemos que $P_\varphi = \varphi \circ \delta_m^E$. Portanto

$$\begin{aligned} \left(\delta_m^E\right)'(\varphi)(x) &= (\varphi \circ \delta_m^E)(x) \\ &= P_\varphi(x) \\ &= (\Delta_m^E)^{-1}(\varphi)(x). \end{aligned}$$

provando que $\left(\delta_m^E\right)' = (\Delta_m^E)^{-1}$. Segue então que, para todo $P \in \mathcal{P}\left({}^m E\right)$,

$$\left(\delta_m^E\right)'\left(P^L\right) = (\Delta_m^E)^{-1}(P^L) = P.$$

■

3.3 O adjunto de $P \circ u$

Com a linearização de polinômios homogêneos contínuos através do produto tensorial simétrico projetivo em mãos, podemos finalmente apresentar uma fórmula para o adjunto da composição $P \circ u$ onde P é um polinômio homogêneo e u é um operador linear. Para demonstrar essa fórmula utilizaremos vários resultados anteriores, entre eles os seguintes: Proposição 3.2.7, Observação 3.2.8 e Proposição 3.2.9. Reiteramos que a fórmula apresentada a seguir não foi encontrada em nenhuma referência:

Teorema 3.3.1 *Sejam $m \in \mathbb{N}$, E, F e G espaços de Banach. Se $u \in \mathcal{L}(E;G)$ e $P \in \mathcal{P}({}^m G;F)$ então $(P \circ u) \in \mathcal{P}({}^m E;F)$ e*

$$(P \circ u)' = \left(\delta_m^E\right)' \circ (\otimes^{m,s} u)' \circ \left[\left(\delta_m^G\right)'\right]^{-1} \circ P',$$

ou seja, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[rr, "(P\circ u)'"] \arrow[d, "P'"'] & & \mathcal{P}({}^m E) \\ \mathcal{P}({}^m G) \arrow[r, "{\left[\left(\delta_m^G\right)'\right]^{-1}}"] & \left(\otimes_{\pi_s}^{m,s} G\right)' \arrow[r, "(\otimes^{m,s} u)'"] & \left(\otimes_{\pi_s}^{m,s} E\right)' \arrow[u, "\left(\delta_m^E\right)'"'] \end{tikzcd}$$

Demonstração. Segue da Proposição 2.1.1 que $P \circ u \in \mathcal{P}({}^m E;F)$. Sejam $\varphi \in \mathbb{F}'$ e $x \in E$. Usando sucessivamente os seguintes resultados: Proposição 3.2.9, Proposição

3.2.7, Teorema 3.2.4, nesta ordem, segue que

$$\begin{aligned}
\left(\left(\delta_m^E\right)' \circ (\otimes^{m,s}u)' \circ \left[\left(\delta_m^G\right)'\right]^{-1} \circ P'\right)(\varphi)(x) &= \left(\left(\delta_m^E\right)' \left((\otimes^{m,s}u)' \left(\left[\left(\delta_m^G\right)\right]^{-1} \left(P'\left(\varphi\right)\right)\right)\right)\right)(x) \\
&= \left(\left(\delta_m^E\right)' \left((\otimes^{m,s}u)' \left(\left[\left(\delta_m^G\right)'\right]^{-1} \left(\varphi \circ P\right)\right)\right)\right)(x) \\
&= \left(\left(\delta_m^E\right)' \left((\otimes^{m,s}u)' \left((\varphi \circ P)^L\right)\right)\right)(x) \\
&= \left(\delta_m^E\right)' \left((\varphi \circ P)^L \circ \otimes^{m,s}u\right)(x) \\
&= \left((\varphi \circ P)^L \circ \otimes^{m,s}u \circ \delta_m^E\right)(x) \\
&= \left((\varphi \circ P)^L \circ \otimes^{m,s}u\right)\left(\delta_m^E(x)\right) \\
&= \left((\varphi \circ P)^L \circ \otimes^{m,s}u\right)(\otimes^m x) \\
&= (\varphi \circ P)^L \left(\otimes^{m,s}u\left(\otimes^m x\right)\right) \\
&= (\varphi \circ P)^L \left(\otimes^m u(x)\right) \\
&= (\varphi \circ P)\left(u(x)\right) \\
&= \varphi\left((P \circ u)\right)(x) \\
&= (P \circ u)'(\varphi)(x).
\end{aligned}$$

Portanto $(P \circ u)' = \left(\delta_m^E\right)' \circ (\otimes^{m,s}u)' \circ \left[\left(\delta_m^G\right)'\right]^{-1} \circ P'$. ■

Combinando as fórmulas obtidas para os adjuntos de $P \circ u$ e $u \circ P$, temos:

Corolário 3.3.2 *Sejam $m \in \mathbb{N}, E, F, G$ e H espaços de Banach, $u \in \mathcal{L}(E; F)$, $P \in \mathcal{P}(^m F; G)$ e $v \in \mathcal{L}(G; H)$. Então $(v \circ P \circ u) \in \mathcal{P}(^m E; H)$ e*

$$(v \circ P \circ u)' = \left(\delta_m^E\right)' \circ (\otimes^{m,s}u)' \circ \left[\left(\delta_m^F\right)'\right]^{-1} \circ P' \circ v'.$$

Demonstração. Da Proposição 2.1.1 sabemos que $(v \circ P \circ u) \in \mathcal{P}(^m E; H)$. Obtemos a fórmula enunciada aplicando primeiramente o Teorema 3.1.1 e em seguida o Teorema 3.3.1:

$$(v \circ P \circ u)' = (P \circ u)' \circ v' = \left(\delta_m^E\right)' \circ (\otimes^{m,s}u)' \circ \left[\left(\delta_m^G\right)'\right]^{-1} \circ P' \circ v'.$$

■

3.4 Operadores que são adjuntos de polinômios

Aplicaremos nesta seção a teoria desenvolvida para linearizar polinômios na solução da pergunta formulada após o Corolário 2.1.4.

No Corolário 2.1.4 provamos que a aplicação

$$\Phi \colon \mathcal{P}(^m E; F) \longrightarrow \mathcal{L}(F'; \mathcal{P}(^m E)), \quad \Phi(P) = P',$$

é uma isometria linear. Quaisquer que sejam o número natural m e os espaços de Banach E e F. A pergunta que fizemos é a seguinte: qual é a imagem dessa aplicação em $\mathcal{L}(F'; \mathcal{P}(^m E))$? Em outras palavras, quais operadores lineares de F' em $\mathcal{P}(^m E)$ são adjuntos de polinômios m-homogêneos de E em F? No caso linear ($m = 1$) a solução é conhecida, e a descreveremos a seguir.

Quando se trata de funções contínuas entre espaços topológicos, na maior parte das vezes as topologias envolvidas estão claras, e por isso não precisam ser explicitadas a todo momento. Quando houver necessidade de explicitar as topologias, adotaremos a seguinte terminologia: dados espaços topológicos $(X, \tau_1), (Y, \tau_2)$, uma função contínua $f\colon (X, \tau_1) \longrightarrow (Y, \tau_2)$ será dita τ_1-τ_2 contínua.

A solução do nosso problema no caso linear é a seguinte:

Teorema 3.4.1 *Sejam E e F espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(F'; E')$. O operador T é w^*-w^* contínuo se, e somente se, existe $u \in \mathcal{L}(E; F)$ tal que $u' = T$.*

Demonstração. Veja [25, Lema 3.1.7]. ■

Precisamos do seguinte resultado elementar para dar a solução completa do problema no caso linear.

Lema 3.4.2 *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $u \in \mathcal{L}(E; F)$ uma isometria linear. Então $u(E)$ é fechado em F.*

Demonstração. Seja $(u(x_n))_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $u(E)$ tal que $u(x_n) \longrightarrow y \in F$. Como u é uma isometria, para todos n e $m \in \mathbb{N}$ temos

$$\|x_n - x_m\| = \|u(x_n - x_m)\| = \|u(x_n) - u(x_m)\| \longrightarrow \|y - y\| = 0.$$

Logo $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em E, e portanto convergente pois E é completo. Existe então $x \in E$ tal que $x_n \longrightarrow x$. Como u é contínuo segue que $u(x_n) \longrightarrow u(x)$, e da unicidade do limite temos $y = u(x) \in u(E)$, provando que $u(E)$ é fechado em F. ■

Introduzindo a notação

$$\mathcal{L}_{w^*\text{-}w^*}(F'; E') := \{u \in \mathcal{L}(F'; E') : u' \text{ é } w^*\text{-}w^* \text{ contínuo}\},$$

podemos enunciar a solução completa do caso linear:

Corolário 3.4.3 *Sejam E e F espaços de Banach. A correspondência*

$$u \in \mathcal{L}(E; F) \longmapsto u' \in \mathcal{L}_{w^*\text{-}w^*}(F'; E')$$

é um isomorfismo isométrico. Mais ainda, $\mathcal{L}_{w^*\text{-}w^*}(F'; E')$ é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(F'; E')$.

Demonstração. A boa definição da correspondência sobre $\mathcal{L}_{w^*\text{-}w^*}(F'; E')$ decorre do Teorema 3.4.1. A linearidade e a preservação da norma decorrem da Proposição 1.1.37. O fato de $\mathcal{L}_{w^*\text{-}w^*}(F'; E')$ ser fechado em $\mathcal{L}(F'; E')$ decorre do Lema 3.4.2. ■

Motivados pelo caso linear, tentaremos estender o Corolário 3.4.3 para o caso polinomial. Para isso precisamos definir em $\mathcal{P}(^m E)$ uma topologia que faça o papel que a topologia fraca-estrela faz em E'.

Definição 3.4.4 Seja $f\colon S \longrightarrow X$ uma aplicação de um conjunto arbitrário S num espaço topológico (X, τ). A coleção

$$\tau' = \left\{ f^{-1}(A) : A \in \tau \right\}$$

é uma topologia em S, denominada *topologia induzida em S pela aplicação $f\colon S \longrightarrow X$*. Observe que, munindo S com a topologia τ', a função f é contínua.

Sejam $m \in \mathbb{N}$ e E um espaço de Banach. De acordo com a Observação 3.2.8, sabemos que a aplicação

$$\Delta_m^E\colon \mathcal{P}(^m E) \longrightarrow \left(\otimes_{\pi_s}^{m,s} E\right)', \ \Delta_m^E(P) = P^L,$$

é um isomorfismo isométrico. Podemos então usar a Definição 3.4.4 para emular a topologia fraca-estrela de $\left(\otimes_{\pi_s}^{m,s} E\right)'$ em $\mathcal{P}(^m E)$:

Definição 3.4.5 Chamamos de *topologia fraca-estrela em $\mathcal{P}(^m E)$* à topologia induzida em $\mathcal{P}(^m E)$ pela aplicação

$$\Delta_m^E\colon \mathcal{P}(^m E) \longrightarrow \left(\left(\otimes_{\pi_s}^{m,s} E\right)', \sigma\left(\left(\otimes_{\pi_s}^{m,s} E\right)', \otimes_{\pi_s}^{m,s} E\right)\right).$$

Denotaremos esta topologia em $\mathcal{P}(^m E)$ por w^*. Dessa forma o operador Δ_m^E é w^*-w^* contínuo.

Com essa terminologia, o caso polinomial do nosso problema tem a mesma solução do caso linear, ou seja, um operador linear é o adjunto de um polinômio se, e somente se, é w^*-w^* contínuo:

Teorema 3.4.6 *Sejam E e F espaços de Banach e $u \in \mathcal{L}(F'; \mathcal{P}(^m E))$. Então as seguintes condições são equivalentes:*
(a) *Existe $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ tal que $P' = u$.*
(b) *O operador $\Delta_m^E \circ u$ é w^*-w^* contínuo.*
(c) *O operador u é w^*-w^* contínuo.*

Demonstração. (a) $\Longrightarrow$ (b) Seja $P^L \in \mathcal{L}\left(\otimes_{\pi_s}^{m,s} E; F\right)$ a linearização do polinômio m-homogêneo P de acordo com o Teorema 3.2.4. Então $P = P^L \circ \delta_m^E$. Do Teorema 3.1.1 e da Proposição 3.2.9 temos

$$u = P' = (\delta_m^E)' \circ (P^L)' = (\Delta_m^E)^{-1} \circ (P^L)',$$

e portanto $\Delta_m^E \circ u = (P^L)'$. Por ser o adjunto de um opeador linear, segue do Teorema 3.4.1 que $\Delta_m^E \circ u$ é w^*-w^* contínuo.

(b)$\Longrightarrow$(c) Pela Definição 3.4.5, Δ_m^E é w^*-w^* contínuo, e como Δ_m^E é um aplicação bijetora segue que sua inversa, $(\Delta_m^E)^{-1}$, também é w^*-w^* contínua. Assim, $u = (\Delta_m^E)^{-1} \circ \left(\Delta_m^E \circ u\right)$ é w^*-w^* contínuo.
(c)$\Longrightarrow$(b) O operador u é w^*-w^* contínuo por hipótese, e pela Definição 3.4.5, o operador Δ_m^E é w^*-w^* contínuo. Logo $\Delta_m^E \circ u$ é w^*-w^* contínuo.
(b)$\Longrightarrow$(a) Como o operador $\Delta_m^E \circ u$ é w^*-w^* contínuo, pelo Teorema 3.4.1 sabemos que existe um operador $v \in \mathcal{L}(\otimes_{\pi_s}^{m,s} E; F)$ tal que $v' = \Delta_m^E \circ u$. E pelo Teorema 3.2.4 sabemos que existe um polinômio $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ tal que $P^L = v$ e $P = v \circ \delta_m^E$. Então, pelo Teorema 3.1.1,

$$P' = (\delta_m^E)' \circ v' = (\Delta_m^E)^{-1} \circ v' = (\Delta_m^E)^{-1} \circ \Delta_m^E \circ u = u,$$

completando a demonstração. ■

Dados $m \in \mathbb{N}$ e espaços de Banach E e F, definimos

$$\mathcal{L}_{w^*\text{-}w^*}(F'; \mathcal{P}(^m E)) := \{u \in \mathcal{L}(F'; \mathcal{P}(^m E)) : u \text{ é } w^*\text{-}w^* \text{ contínuo}\}$$

É fácil ver que $\mathcal{L}_{w^*\text{-}w^*}(F'; \mathcal{P}(^m E))$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(F'; \mathcal{P}(^m E))$. Além disso:

Teorema 3.4.7 *Sejam E e F espaços de Banach e $m \in \mathbb{N}$. Então a correspondência*

$$P \in \mathcal{P}(^m E; F) \longmapsto P' \in \mathcal{L}_{w^*\text{-}w^*}(F'; P(^m E))$$

é um isomorfismo isométrico. Mais ainda, $\mathcal{L}_{w^*\text{-}w^*}(F'; P(^m E))$ é subespaço fechado de $\mathcal{L}(F'; P(^m E))$.

Demonstração. Do Corolário 2.1.4 sabemos que a correspondência

$$P \in \mathcal{P}(^m E; F) \longmapsto P' \in \mathcal{L}(F'; P(^m E))$$

é uma isometria linear. Pelo Teorema 3.4.6, a imagem dessa correspondência coincide com $\mathcal{L}_{w^*\text{-}w^*}(F'; P(^m E))$. Portanto

$$P \in \mathcal{P}(^m E; F) \longmapsto P' \in \mathcal{L}_{w^*\text{-}w^*}(F'; P(^m E))$$

é um isomorfismo isométrico, e do Lema 3.4.2 decorre que $\mathcal{L}_{w^*\text{-}w^*}(F'; P(^m E))$ é subespaço fechado de $\mathcal{L}(F'; P(^m E))$. ■

Vejamos um exemplo de um operador linear que não é o adjunto de nenhum polinômio homogêneo. Precisamos de alguma preparação.

Por c_0 denotaremos o espaço vetorial de todas as sequências de escalares que convergem para zero, ou seja,

$$c_0 = \left\{(a_k)_{k=1}^{\infty} : a_k \in \mathbb{K} \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \text{ e } a_k \longrightarrow 0\right\},$$

o qual se torna um espaço de Banach com as operações usuais de sequências e com a norma

$$\|(a_k)_{k=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup\{|a_k| : k \in \mathbb{N}\}.$$

Para cada número real $p \geq 1$, definimos

$$\ell_p = \left\{ (a_j)_{j=1}^{\infty} : a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < \infty \right\},$$

o qual se torna um espaço de Banach com as operações usuais de sequências e com a norma

$$\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Proposição 3.4.8 *Os espaços ℓ_1 e $(c_0)'$ são isomorfos isometricamente por meio da relação de dualidade*

$$b = (b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1 \longmapsto \varphi_b \in (c_0)', \varphi_b((a_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j \textit{ para toda } (a_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0. \tag{3.3}$$

Demonstração. Veja [9, Proposição 4.2.3] ■

Por um abuso de notação escrevemos $\ell_1 = (c_0)'$, e essa igualdade deve ser entendida a menos do isomorfismo isométrico (3.3).

Exemplo 3.4.9 Sejam E um espaço de Banach qualquer e $Q \in \mathcal{P}(^m E)$ um polinômio não-nulo. Considere a aplicação

$$u \colon (c_0)' = \ell_1 \longrightarrow \mathcal{P}(^m E), \ u\left((a_j)_{j=1}^{\infty}\right) := \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot Q.$$

É fácil ver que a aplicação está bem definida e é linear. De

$$\begin{aligned} \|u\left((a_j)_{j=1}^{\infty}\right)\| &= \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cdot Q \right\| \\ &= \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_j \right| \cdot \|Q\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \cdot \|Q\| \\ &= \|(a_j)_{j=1}^{\infty}\|_1 \cdot \|Q\|, \end{aligned}$$

para toda $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$, segue a continuidade do operador linear u, e portanto $u \in \mathcal{L}\left((c_0)'; \mathcal{P}(^m E)\right)$. Considere a sequência $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ formada pelos vetores unitários canônicos de $\ell_1 = (c_0)'$. Vejamos que $e_n \xrightarrow{w^*} 0$. Dado $y = (y_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$, temos $y_j \longrightarrow 0$. Da relação de dualidade (3.3) da Proposição 3.4.8, temos

$$e_n(y) = e_n((y_j)_{j=1}^{\infty}) = (0, \ldots, \overset{(n)}{1}, 0, \ldots)\left((y_1, \ldots, y_n, \ldots)\right) = y_n,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, logo $e_n(y) = y_n \longrightarrow 0$, e da Proposição 1.1.29 (c) segue que $e_n \xrightarrow{w^*} 0$ em $\ell_1 = (c_0)'$.

Suponhamos que o operador $\Delta_m^E \circ u$ seja w^*-w^* contínuo. Neste caso,

$$\Delta_m^E \circ u(e_n) \xrightarrow{w^*} \Delta_m^E \circ u(0) = 0.$$

Por outro lado, $u(e_n) = Q \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim $\Delta_m^E \circ u(e_n) = \Delta_m^E(Q) \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto

$$\Delta_m^E \circ u(e_n) = \Delta_m^E(Q) \xrightarrow{w^*} \Delta_m^E(Q) \neq 0.$$

Isso é um absurdo, pois $\Delta_m^E \circ u(e_n) \xrightarrow{w^*} \Delta_m^E \circ u(0) = 0$. Logo $\Delta_m^E \circ u$ não é w^*-w^* contínuo. Pelo Teorema 3.4.6 concluímos que não existe $P \in \mathcal{P}(^mE; c_0)$ tal que $P' = u$.

Observação 3.4.10 No exemplo anterior vimos um operador linear $u \in \mathcal{L}((c_0)'; \mathcal{P}(^mE))$ que não é o adjunto de nenhum polinômio homogêneo $P \in \mathcal{P}(^mE; c_0)$. Observe que o espaço de Banach $(c_0)'$ não é reflexivo (veja [9, Exemplo 4.3.6(c)]), e isto não é uma casualidade:

Proposição 3.4.11 *Sejam E um espaço de Banach e F um espaço de Banach reflexivo. Então para todo operador linear $u \in \mathcal{L}(F'; \mathcal{P}(^mE))$ existe um polinômio homogêneo $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$ tal que $P' = u$.*

Demonstração. Seja $u \in \mathcal{L}(F'; \mathcal{P}(^mE))$. Então o operador $\Delta_m^E \circ u \in \mathcal{L}(F'; \left(\otimes_{\pi_s}^{m,s} E\right)')$. Pela Proposição 1.1.22 o operador

$$\Delta_m^E \circ u \colon (F', \sigma(F', F'')) \longrightarrow \left(\left(\otimes_{\pi_s}^{m,s} E\right)', \sigma\left(\left(\otimes_{\pi_s}^{m,s} E\right)', \left(\otimes_{\pi_s}^{m,s} E\right)'' \right) \right),$$

é contínuo. E como F é um espaço reflexivo segue dos itens (a) e (b) da Proposição 1.1.31 que $\Delta_m^E \circ u$ é w^*-w^* contínuo, e portanto do Teorema 3.4.6 existe um polinômio homogêneo $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$ tal que $P' = u$. ■

CAPÍTULO 4

O ADJUNTO DE CLASSES ESPECIAIS DE POLINÔMIOS

Assim como no caso linear, o espaço $\mathcal{P}(^mE;F)$ dos polinômios m-homogêneos contínuos é muito grande, e por isso determinados subespaços, isto é, determinadas classes especiais de polinômios, são estudados. Neste capítulo estudaremos o adjunto de um polinômio m-homogêneo pertencente a determinadas classes especiais de polinômios. Estudaremos os adjuntos dos polinômios pertencentes às seguintes classes especiais: polinômios de tipo finito, polinômios de posto finito, polinômios aproximáveis, polinômios compactos e polinômios fracamente compactos.

Como aperitivo, relembre que no Exemplo 2.2.1 e na Observação 2.2.2 provamos que o adjunto de um polinômio homogêneo de tipo finito é um operador linear de posto finito, em particular um operador linear de tipo finito. O objetivo deste capítulo é provar resultados dessa forma: se um polinômio pertence a determinada classe de polinômios, então seu adjunto pertence à classe correspondente de operadores lineares.

4.1 Teoria abstrata de ideais de operadores

Estudaremos classes especiais de polinômios que aparecem como generalização da teoria de ideais de operadores lineares. Preparamos esta abordagem estudando, nesta seção, os ideais de operadores lineares.

Definição 4.1.1 Sejam E e F espaços vetoriais e $U \subseteq E$. Uma aplicação $f\colon U \longrightarrow F$ tem *posto finito* se o subespaço vetorial $[f(U)]$ de F gerado pela imagem de f tem dimensão finita.

A definição acima, no caso de aplicações arbitrárias entre espaços vetoriais, é devida a Mujica [20, p. 872]. No caso linear, um operador linear $u\colon E \longrightarrow F$ entre espaços vetoriais tem posto finito se a imagem de u, $\mathrm{Im}(u)$, tem dimensão finita. Dados espaços de Banach E e F, denotaremos por $\mathcal{F}(E;F)$ o conjunto de todos os operadores lineares contínuos de posto finito de E em F.

A definição a seguir é devida a Pietsch [26]:

Definição 4.1.2 Um *ideal de operadores* $\mathcal{I}$ é uma subclasse da classe $\mathcal{L}$ de todos os operadores lineares contínuos entre espaços de Banach tal que, para todos espaços de Banach E e F, suas componentes

$$\mathcal{I}(E;F) := \mathcal{L}(E;F) \cap \mathcal{I}$$

satisfazem as seguintes condições:

(1) $\mathcal{I}(E;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$ que contém os operadores lineares contínuos de posto finito.

(2) A propriedade de ideal: se $u_1 \in \mathcal{L}(F_0;F)$, $u_2 \in \mathcal{I}(E_0;F_0)$ e $u_3 \in \mathcal{L}(E;E_0)$, então a composição $u_1 \circ u_2 \circ u_3$ pertence a $\mathcal{I}(E;F)$.

A condição (1) acima nos leva à

Proposição 4.1.3 *A classe de todos operadores lineares contínuos de posto finito $\mathcal{F}$ é ideal de operadores que contém todos os outros ideais de operadores.*

Demonstração. Veja [25, Proposição 2.2.1]. ■

A construção (*procedimento* na linguagem de [26]) a seguir está intimamente relacionada com o estudo que estamos fazendo nesta dissertação de considerar adjuntos:

Definição 4.1.4 Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores. O *dual* de $\mathcal{I}$, denotado por $\mathcal{I}^{\text{dual}}$, é definido da seguinte forma:

$$\mathcal{I}^{\text{dual}}(E;F) := \{u \in \mathcal{L}(E;F) : u' \in \mathcal{I}(F';E')\}$$

para quaisquer espaços de Banach E e F.

Teorema 4.1.5 *Se $\mathcal{I}$ é um ideal de operadores, então $\mathcal{I}^{\text{dual}}$ é também um ideal de operadores.*

Demonstração. Veja [25, Proposição 2.1.5] ■

Estamos interessados em saber quando o adjunto de um polinômio homogêneo pertence a um determinado ideal de operadores. O próximo teorema, que apareceu em [8], nos diz que o adjunto de um polinômio m-homogêneo contínuo P entre espaços de Banach pertence a um ideal de operadores $\mathcal{I}$ se, e somente se, P admite uma fatoração $P = u \circ Q$ onde Q é um polinômio m-homogêneo e o adjunto do operador linear u pertence a $\mathcal{I}$, ou seja $u \in \mathcal{I}^{\text{dual}}$. Esse resultado será de grande valia no estudo do adjunto de classes especiais de polinômios.

A partir de agora denotaremos por $\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E$ o completamento do produto tensorial simétrico projetivo $\otimes_{\pi_s}^{m,s} E$. Dado um polinômio m-homogêneo contínuo $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$, sua linearização P^L, de acordo com o Teorema 3.2.4, pode ser estendida de forma única ao completamento $\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E$ de $\otimes_{\pi_s}^{m,s} E$, isto é, podemos supor

$$P^L \colon \widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E \longrightarrow F.$$

Teorema 4.1.6 *Sejam $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I}$ um ideal de operadores, E e F espaços de Banach e $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$. Então $P' \in \mathcal{I}(F';\mathcal{P}(^mE))$ se, e somente se, existem um espaço de Banach G, um operador linear $u \in \mathcal{L}(G;F)$ e um polinômio $Q \in \mathcal{P}(^mE;G)$ tais que $u \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(G;F)$ e $P = u \circ Q$, ou seja, o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "P"] \arrow[dr, "Q"'] & & F \\ & G \arrow[ur, "u"'] & \end{tikzcd}$$

Demonstração. Do Teorema 3.2.4 segue que existe um único operador linear $P^L \in \mathcal{L}(\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E;F)$ tal que

$$P = P^L \circ \delta_m^E.$$

Suponhamos primeiramente que $P' \in \mathcal{I}(F';\mathcal{P}(^mE))$. Aplicando o Teorema 3.1.1 temos

$$P' = \left(\delta_m^E\right)' \circ (P^L)',$$

e como $\left(\delta_m^E\right)'$ é um isomorfismo (Proposição 3.2.9), resulta que

$$(P^L)' = \left[\left(\delta_m^E\right)'\right]^{-1} \circ P'.$$

Como $P' \in \mathcal{I}(F';\mathcal{P}(^mE))$ e $\left[\left(\delta_m^E\right)'\right]^{-1} \in \mathcal{L}\left(\mathcal{P}(^mE); \left(\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E\right)'\right)$, da propriedade de ideal tem-se $(P^L)' \in \mathcal{I}\left(F'; \left(\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E\right)'\right)$, ou seja, $P^L \in \mathcal{I}^{\text{dual}}\left(\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E;F\right)$. O espaço de Banach procurado é $\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E$ e a fatoração desejada é $P = P^L \circ \delta_m^E$.

Reciprocamente, suponhamos que existam um espaço de Banach G, um operador linear $u \in \mathcal{L}(G;F)$ e um polinômio $Q \in \mathcal{P}(^mE;G)$ tais que $u \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(G;F)$ e $P = u \circ Q$. Do Teorema 3.1.1 segue que

$$P' = Q' \circ u'.$$

Como $Q' \in \mathcal{L}(G';\mathcal{P}(^mE))$ e $u' \in \mathcal{I}(F';G')$, da propriedade de ideal resulta que $P' \in \mathcal{I}\left(F';\mathcal{P}(^mE)\right)$. ■

Um outro *procedimento* útil é o de fechar um ideal de operadores:

Definição 4.1.7 Dados um ideal de operadores $\mathcal{I}$ e espaços de Banach E e F, definimos

$$\overline{\mathcal{I}}(E;F) := \overline{\mathcal{I}(E;F)}$$

onde o fecho é tomado em relação a norma usual de operadores. O ideal $\mathcal{I}$ é *fechado* se $\mathcal{I} = \overline{\mathcal{I}}$.

Proposição 4.1.8 *Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores. Então $\overline{\mathcal{I}}$ também é um ideal de operadores.*

Demonstração. Veja [25, Teorema 2.1.5] ■

Os ideais de operadores $\mathcal{I}$ tais que $\mathcal{I}^{\text{dual}} = \mathcal{I}$ serão de especial interesse para nós:

Definição 4.1.9 Um ideal de operadores $\mathcal{I}$ é dito ser *simétrico* se $\mathcal{I}^{\text{dual}} = \mathcal{I}$, ou seja, $u \in \mathcal{I}(E;F)$ se, e somente se, $u' \in \mathcal{I}(F';E')$ para todos espaços de Banach E e F.

Imediatamente do Teorema 4.1.6 temos o

Corolário 4.1.10 *Sejam $m \in \mathbb{N}$, $\mathcal{I}$ um ideal de operadores simétrico, E e F espaços de Banach e $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$. Então $P' \in \mathcal{I}(F';\mathcal{P}(^mE))$ se, e somente se, existem um espaço de Banach G, um operador linear $u \in \mathcal{L}(G;F)$ e um polinômio $Q \in \mathcal{P}(^mE;G)$ tais que $u \in \mathcal{I}(G;F)$ e $P = u \circ Q$.*

Uma lista com os ideais de operadores fechados mais comuns, indicando quais são simétricos e quais não são, pode ser encontrada em [11, 1.20]

4.2 Polinômios de posto finito

Da Definição 4.1.1 segue que um polinômio m-homogêneo contínuo $P\colon E \longrightarrow F$ entre espaços de Banach tem posto finito se o subespaço vetorial $[P(E)]$ de F gerado pela imagem de P tem dimensão finita. Denotaremos por $\dim[P(E)]$ a dimensão do subespaço vetorial $[P(E)]$ de F.

O objetivo desta seção é estudar o adjunto de um polinômio homogêneo de posto finito.

O conjunto de todos os polinômios m-homogêneos de posto finito entre os espaços de Banach E e F será denotado por $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(^mE;F)$.

Observe que para $m = 1$ temos $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(^1E;F) = \mathcal{F}(E;F)$.

Provaremos agora que um polinômio homogêneo P tem posto finito se, e somente se, P é uma combinação linear de polinômios homogêneos do tipo que estudamos no Exemplo 1.3.14.

Proposição 4.2.1 *Sejam E e F espaços de Banach e $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$. Então P tem posto finito se, e somente se, existem $k \in \mathbb{N}, Q_1, \ldots, Q_k \in \mathcal{P}(^mE)$ e $b_1, \ldots, b_k \in F$ tais que $P = \sum\limits_{j=1}^{k} Q_j \otimes b_j$.*

Demonstração. Suponhamos primeiramente que P tenha posto finito. Então a dimensão de $[P(E)]$ é finita, digamos $\dim[P(E)] = k \in \mathbb{N}$ e seja $\{b_1, \ldots, b_k\}$ uma base para $[P(E)]$. Para cada $y \in [P(E)]$ existem únicos $y_1, \ldots, y_k \in \mathbb{K}$ tais que $y = \sum\limits_{j=1}^{k} y_j b_j$. Para cada $p \in \{1, \ldots, k\}$, defina a aplicação

$$\pi_p\colon\ [P(E)] \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \pi_p(y) = y_p.$$

É claro que

$$y = \sum_{j=1}^{k} \pi_j(y) b_j \tag{4.1}$$

para todo $y \in [P(E)]$. Vejamos que $\pi_p \in [P(E)]'$. A linearidade de π_p segue da unicidade da representação de cada elemento de $[P(E)]$ como combinação linear de vetores da base. Para provar a cntinuidade π_p, considere a função

$$\begin{aligned}\|\cdot\|' \colon \ [P(E)] &\longrightarrow [0,\infty)\\ y &\longmapsto \|y\|' = \left\| \sum_{j=1}^{k} y_j b_j \right\|' := |y_1| + \cdots + |y_k|.\end{aligned}$$

É fácil ver que $\|\cdot\|'$ é uma norma em $[P(E)]$. Estamos considerando duas normas em $[P(E)]$, a saber, a norma $\|\cdot\|'$ e a norma induzida em $[P(E)]$ pela norma de F, a qual continuaremos a denotar por $\|\cdot\|$. Essas duas normas são equivalentes pois $[P(E)]$ tem dimensão finita, portanto existe $C > 0$ tal que $\|y\|' \leq C\|y\|$ para todo $y \in [P(E)]$. Assim para cada $p \in \{1, \ldots, k\}$

$$|\pi_p(y)| = |y_p| \leq |y_1| + \cdots + |y_k| = \|y\|' \leq C\|y\|$$

para todo $y \in [P(E)]$. Segue que os funcionais $\pi_1, \ldots, \pi_k$ são contínuos. Como $[P(E)] \subseteq F$ e $\pi_p \in [P(E)]'$, do Teorema de Hahn-Banach (Teorema 1.1.2) decorre a existência de um funcional $\widetilde{\pi}_p \in F'$ tal que $\widetilde{\pi}_p$ é uma extensão de π_p a F, para todo $p \in \{1, \ldots, k\}$. Defina $Q_p := \widetilde{\pi}_p \circ P$ para cada $p \in \{1, \ldots, k\}$. Então, da Proposição 2.1.1, sabemos que $Q_p \in \mathcal{P}(^m E)$ para todo $p \in \{1, \ldots, k\}$. Para cada $x \in E$,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k} Q_j \otimes b_j(x) &= \sum_{j=1}^{k} Q_j(x) b_j\\ &= \sum_{j=1}^{k} \widetilde{\pi}_j(P(x)) b_j\\ &= \sum_{j=1}^{k} \pi_j(P(x)) b_j\\ &= P(x),\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue de (4.1). Portanto $P = \sum\limits_{j=1}^{k} Q_j \otimes b_j$.

Reciprocamente, suponhamos que existam $k \in \mathbb{N}, Q_1, \ldots, Q_k \in \mathcal{P}(^m E; F)$ e $b_1, \ldots, b_k \in F$ tais que $P = \sum\limits_{j=1}^{k} Q_j \otimes b_j$. Como

$$P(x) = \sum_{j=1}^{k} Q_j \otimes b_j(x) = \sum_{j=1}^{k} Q_j(x) b_j$$

para todo $x \in E$, segue que $P(E)$ está contido no subespaço gerado pelos vetores $b_1, \ldots b_k$, o que por sua vez implica que $\dim [P(E)] \leq k < \infty$, e portanto P tem posto finito. ∎

No caso linear temos:

Corolário 4.2.2 *Sejam E e F espaços de Banach e $u \in \mathcal{L}(E;F)$. Então u tem posto finito se, e somente se, existem $k \in \mathbb{N}$, funcionais $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in E'$ e vetores $b_1, \ldots, b_k \in F$ tais que $u = \sum\limits_{j=1}^{k} \varphi_j \otimes b_j$.*

Provamos a seguir que o adjunto de um polinômio de posto finito é um operador linear de posto finito:

Proposição 4.2.3 *Sejam E e F espaços de Banach e $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$. Se $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(^mE;F)$ então $P' \in \mathcal{F}(F';\mathcal{P}(^mE))$.*

Demonstração. Como $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(^mE;F)$, então segue da Proposição 4.2.1 que existem $k \in \mathbb{N}$, $Q_1, \ldots, Q_k \in \mathcal{P}(^mE)$ e $b_1, \ldots, b_k \in F$ tais que $P = \sum\limits_{j=1}^{k} Q_j \otimes b_j$. Do Exemplo 2.2.3 e da Proposição 2.1.3 segue que

$$\begin{aligned} P' &= \left(\sum_{j=1}^{k} Q_j \otimes b_j \right)' \\ &= \sum_{j=1}^{k} (Q_j \otimes b_j)' \\ &= \sum_{j=1}^{k} J_F(b_j) \otimes Q_j. \end{aligned}$$

Do Corolário 4.2.2 segue que $P' \in \mathcal{F}(F';\mathcal{P}(^mE))$. ■

Nosso objetivo agora é provar a recíproca da proposição acima. Para isso analisaremos primeiro o caso linear. Fazendo $m = 1$ na proposição anterior, segue que se um operador linear contínuo tem posto finito então seu adjunto também tem posto finito. O próximo Teorema nos fornecerá a recíproca desse resultado. Antes de enunciá-lo, vejamos um resultado auxiliar.

Lema 4.2.4 *Sejam E espaço vetorial e $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ funcionais lineares em E linearmente independentes. Então, para cada $j \in \{1, \ldots, n\}$ tem-se $\bigcap\limits_{i \neq j} \ker(\varphi_i) \nsubseteq \ker(\varphi_j)$.*

Demonstração. Suponhamos que exista $j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $\bigcap\limits_{i \neq j} \ker(\varphi_i) \subseteq \ker(\varphi_j)$. Neste caso, pela Proposição 1.1.7, φ_j pode ser escrito como uma combinação linear de φ_i para $i \neq j$. Mas isso contradiz a independência linear da hipótese, logo $\bigcap\limits_{i \neq j} \ker(\varphi_i) \nsubseteq \ker(\varphi_j)$ para todo j. ■

Teorema 4.2.5 *Sejam E e F espaços de Banach e $u \in \mathcal{L}(E;F)$. Então $u \in \mathcal{F}(E;F)$ se, e somente, se $u' \in \mathcal{F}(F';E')$. Em outras palavras, o ideal $\mathcal{F}$ dos operadores de tipo finito é simétrico.*

Demonstração. Uma implicação já foi provada na Proposição 4.2.3. Para a outra implicação, suponhamos que $u' \in \mathcal{F}(F'; E')$. Pelo Corolário 4.2.2, u' pode ser escrito da forma $u' = \sum_{j=1}^{k} y''_j \otimes \varphi_j$ onde $k \in \mathbb{N}$, $y''_1, \ldots, y''_k \in F''$ e $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in E'$. É claro que os funcionais $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ podem ser tomados linearmente independentes, pois aquele que for uma combinação linear dos demais pode ser omitido na representação de u'. Seja $j \in \{1, \ldots, k\}$. Queremos mostrar que y''_j é contínuo na topologia fraca-estrela. Para isso seja $(\phi_i)_{i \in I}$ uma rede em F' tal que $\phi_i \xrightarrow{w^*} \varphi \in F'$. Neste caso, $\phi_i(y) \longrightarrow \varphi(y)$ para todo $y \in F$. Pelo Lema 4.2.4 existe $x_j \in E$ tal que $\varphi_j(x_j) \neq 0$ e $\varphi_i(x_j) = 0$ para todo $i \neq j$. Então

$$\begin{aligned} y''_j(\phi_i) \cdot \varphi_j(x_j) &= \sum_{l=1}^{k} y''_l(\phi_i) \cdot \varphi_l(x_j) \\ &= u'(\phi_i)(x_j) \\ &= \phi_i(u(x_j)) \longrightarrow \varphi(u(x_j)). \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \varphi(u(x_j)) &= u'(\varphi)(x_j) \\ &= \sum_{l=1}^{k} y''_l(\varphi) \cdot \varphi_l(x_j) \\ &= y''_j(\varphi) \cdot \varphi_j(x_j), \end{aligned}$$

e portanto

$$y''_j(\phi_i) \cdot \varphi_j(x_j) \longrightarrow y''_j(\varphi) \cdot \varphi_j(x_j).$$

Como $\varphi_j(x_j) \neq 0$, segue que $y''_j(\phi_i) \longrightarrow y''_j(\varphi)$. Isso prova que y''_j é contínuo na topologia fraca-estrela. Pela Proposição 1.1.30 existe $y_j \in F$ tal que $y''_j = J_F(y_j)$.

Seja $x \in E$. Para todo $\varphi \in F'$,

$$\begin{aligned} \varphi(u(x)) &= u'(\varphi)(x) \\ &= \sum_{j=1}^{k} y''_j(\varphi) \cdot \varphi_j(x) \\ &= \sum_{j=1}^{k} J_F(y_j)(\varphi) \cdot \varphi_j(x) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \varphi(y_j) \cdot \varphi_j(x) \\ &= \varphi\left(\sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x) y_j\right). \end{aligned}$$

Do Teorema de Hahn-Banach na forma do Teorema 1.1.3 segue que

$$u(x) = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j(x) y_j = \left(\sum_{j=1}^{k} \varphi_j \otimes y_j \right)(x),$$

e portanto $u = \sum_{j=1}^{k} \varphi_j \otimes y_j \in \mathcal{F}(E; F)$. ■

Agora sim podemos provar o resultado principal desta seção:

Teorema 4.2.6 *Sejam E e F espaços de Banach e $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$. Então $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(^m E; F)$ se, e somente, se $P' \in \mathcal{F}(F'; \mathcal{P}(^m E))$.*

Demonstração. Já provamos que se $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{F}}(^m E; F)$ então $P' \in \mathcal{F}(F'; \mathcal{P}(^m E))$. Suponhamos que $P' \in \mathcal{F}(F'; \mathcal{P}(^m E))$. Pelo Teorema 4.2.5 sabemos que $\mathcal{F}$ é um ideal de operadores simétrico, consequentemente segue do Corolário 4.1.10 que existem um espaço de Banach G, um operador $u \in \mathcal{F}(G; F)$ e um polinômio $Q \in \mathcal{P}(^m E; G)$ tais que $P = u \circ Q$. Assim $P(x) = u(Q(x))$ para todo $x \in E$, e portanto $P(E) \subseteq u(G)$. Isso implica que $\dim [P(E)] \leq \dim [u(G)] < \infty$, pois u tem posto finito. Portanto P tem posto finito. ■

4.3 Polinômios aproximáveis

Consideraremos nesta seção polinômios que podem ser aproximados por polinômios de posto finito. E provaremos que um dado polinômio é dessa forma se, e somente se, seu adjunto também for dessa forma.

Definição 4.3.1 Sejam E e F espaços de Banach. Um polinômio homogêneo $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ é denominado *aproximável* se existe uma sequência $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(^m E; F)$ tal que $P_n \longrightarrow P$ na norma usual de polinômios m-homogêneos.

Nesta seção veremos que um polinômio $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$ entre espaços de Banach é aproximável se, e somente se, o seu adjunto $P' \in \mathcal{L}(F'; \mathcal{P}(^m E))$ é um operador linear aproximável.

Denotaremos por $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(^m E; F)$ o conjunto de todos os polinômios m-homogêneos aproximá-veis de E em F. Assim $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(^m E; F) = \overline{\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(^m E; F)}$

Observação 4.3.2 De acordo com a terminologia introduzida na Definição 4.1.7, podemos escrever $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(^m E; F) = \overline{\mathcal{P}_{\mathcal{F}}}(^m E; F)$

Fazendo $m = 1$ na definição acima, obtemos a definição de operadores lineares aproximáveis, ou seja, um operador $u \in \mathcal{L}(E; F)$ é aproximável se existe uma sequência $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathcal{F}(E; F)$ tal que $u_n \longrightarrow u$ na norma usual de operadores. Nesse caso, denotaremos por $\mathcal{A}(E; F)$ o conjunto de todos os operadores aproximáveis de E em F. Assim, $\mathcal{A} = \overline{\mathcal{F}}$, e portanto da Proposição 4.1.8 segue que $\mathcal{A}$ é um ideal de operadores.

O caso linear da propriedade que queremos provar nesta seção foi provado por Hutton usando um resultado profundo da geometria dos espaços de Banach, chamado de Princípio de Reflexividade Local (veja [10, 6.6]):

Teorema 4.3.3 (Teorema de Hutton) *A classe de todos os operadores lineares aproximáveis $\mathcal{A}$ é um ideal simétrico de operadores.*

Demonstração. Veja [17, Theorem 2.1] ■

O Teorema de Hutton também vale para polinômios m-homogêneos:

Teorema 4.3.4 (Teorema de Hutton Polinomial) *Sejam E e F espaços de Banach e $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$. Então $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}(^mE; F)$ se, e somente se, $P' \in \mathcal{A}(F'; \mathcal{P}(^mE))$.*

Demonstração. Suponhamos primeiramente que $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}(^mE; F)$. Então existe uma sequência $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(^mE; F)$ tal que $P_n \longrightarrow P$. Do Teorema 4.2.6 sabemos que a sequência de operadores lineares $(P_n')_{n=1}^{\infty}$ está contida em $\mathcal{F}(F'; \mathcal{P}(^mE))$, e da Proposição 2.1.3 segue que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\|P_n' - P'\| = \|(P_n - P)'\| = \|P_n - P\| \longrightarrow 0.$$

Isso prova que $P_n' \longrightarrow P'$ e portanto P' é aproximável.

Reciprocamente, suponhamos que $P' \in \mathcal{A}(F'; \mathcal{P}(^mE))$. Como $\mathcal{A}$ é um ideal simétrico de operadores (Teorema 4.3.3), pelo Corolário 4.1.10 existem um espaço de Banach G, um operador $u \in \mathcal{L}(G; F)$ e um polinômio $Q \in \mathcal{P}(^mE; G)$ tais que $u \in \mathcal{A}(G; F)$ e $P = u \circ Q$. Como $u \in \mathcal{A}(G; F)$, então existe uma sequência $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ em $\mathcal{F}(G; F)$ tal que $u_n \longrightarrow u$. Seja $P_n = u_n \circ Q$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $P_n \in \mathcal{P}(^mE; F)$ e $P_n(E) \subseteq u_n(G)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto $\dim [P_n(E)] \leq \dim [u_n(G)] < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que implica que a sequência de polinômios $(P_n)_{n=1}^{\infty}$ está contida em $\mathcal{P}_{\mathcal{F}}(^mE; F)$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\|P_n - P\| = \|u_n \circ Q - u \circ Q\| = \|(u_n - u) \circ Q\| \leq \|u_n - u\| \cdot \|Q\| \longrightarrow 0,$$

logo $P_n \longrightarrow P$. Portanto $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{A}}(^mE, F)$. ■

Vale mencionar que este Teorema de Hutton Polinomial não foi por nós encontrado na literatura.

4.4 Polinômios compactos

No caso linear, a classe dos operadores compactos constitui um dos ideais de operadores mais úteis e mais usados. A extensão deste conceito para o caso polinomial, que aparentemente foi tratado pela primeira vez por Aron e Schottneloher [4], usa exatamente a mesma propriedade do caso linear para definir polinômios compactos. Passamos a descrever esta generalização.

Sejam E e F espaços de Banach e $P \colon E \longrightarrow F$ um polinômio m-homogêneo contínuo. Do Teorema 1.3.5 sabemos que $P(B_E)$ é sempre um conjunto limitado, mas pode não ser fechado; logo podemos pedir que apenas seu fecho seja compacto:

Definição 4.4.1 Um polinômio m-homogêneo $P \colon E \longrightarrow F$ entre espaços de Banach é denominado *compacto* se $\overline{P(B_E)}$ é compacto (em norma) em F.

Denotaremos por $\mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^m E; F)$ o espaço de todos os polinômios m-homogêneos compactos entre os espaços de Banach E e F. Segue do Teorema 1.3.5 que todo polinômio m-homogêneo compacto é contínuo.

Fazendo $m = 1$ na definição acima, recuperamos a definição clássica de operadores lineares compactos, ou seja, um operador $u \in \mathcal{L}(E; F)$ é denominado compacto se $\overline{u(B_E)}$ é compacto em F. Denotaremos $\mathcal{K}(E; F)$ o espaço de todos os operadores lineares compactos de E em F. É bem conhecido que $\mathcal{K}$ é um ideal de operadores (veja, por exemplo, [25, Proposição 2.3.4]), e mais ainda:

Teorema 4.4.2 (Teorema de Schauder) *O ideal $\mathcal{K}$ dos operadores compactos é um ideal simétrico.*

Demonstração. Veja [25, Teorema 4.1]. ■

Para provar a versão polinomial do Teorema de Schauder precisamos da seguinte caracterização dos polinômios homogêneos compactos:

Proposição 4.4.3 *Sejam E e F espaços de Banach e $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$. Então P é compacto se, e somente se, para toda sequência limitada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E, a sequência $(P(x_n))_{n=1}^{\infty}$ possui uma subsequência convergente em F.*

Demonstração. Suponhamos que P seja compacto. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ uma sequência limitada e tome uma constante $K > 0$ tal que $\|x_n\| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $\frac{\|x_n\|}{K} \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso implica que a sequência $\left(\frac{x_n}{K}\right)_{n=1}^{\infty} \subseteq B_E$, e portanto

$$\left(P\left(\frac{x_n}{K}\right)\right)_{n=1}^{\infty} \subseteq P(B_E) \subseteq \overline{P(B_E)}.$$

Como P é compacto, o conjunto $\overline{P(B_E)}$ é compacto, e então admite uma subsequência $\left(P\left(\frac{x_{n_j}}{K}\right)\right)_{j=1}^{\infty} = \left(\frac{P(x_{n_j})}{K^m}\right)_{j=1}^{\infty}$ convergente em F, digamos $\frac{P(x_{n_j})}{K^m} \longrightarrow y \in F$. É imediato que $P(x_{n_j}) \longrightarrow K^m y \in F$.

Reciprocamente, considere $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\overline{P(B_E)}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar $x_n \in B_E$ tal que

$$\|P(x_n) - y_n\| \leq \frac{1}{n}.$$

Por hipótese, a sequência $(P(x_n))_{n=1}^{\infty}$ possui subsequência convergente, digamos $P(x_{n_j}) \longrightarrow y \in F$. Assim,

$$\|y_{n_j} - y\| \leq \|y_{n_j} - P(x_{n_j})\| + \|P(x_{n_j}) - y\| \leq \frac{1}{n_j} + \|P(x_{n_j}) - y\| \longrightarrow 0 \text{ se } j \longrightarrow \infty.$$

Portanto $y_{n_j} \longrightarrow y$, provando que $\overline{P(B_E)}$ é compacto. ■

No caso linear obtemos:

Corolário 4.4.4 *Sejam E e F espaços de Banach e $u\colon E \longrightarrow F$ um operador linear. Então u é compacto se, e somente se, para toda sequência limitada $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$, a sequência $(u(x_n))_{n=1}^{\infty}$ possui uma subsequência convergente em F.*

Chegamos ao resultado principal desta seção:

Teorema 4.4.5 *Sejam E e F espaços de Banach e $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$. Então $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^mE;F)$ se, e somente se, $P' \in \mathcal{K}(F';\mathcal{P}(^mE))$.*

Demonstração. Suponhamos primeiramente que $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{K}}(^mE;F)$. Dada uma sequência $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ em $B_{F'}$, devemos provar que $(P'(\varphi_n))_{n=1}^{\infty}$ tem subsequência convergente em $\mathcal{P}(^mE)$. Chamando $K = \overline{P(B_E)}$ temos da compacidade de P que K é um espaço métrico compacto. Para cada $n \in \mathbb{N}$ chame de f_n a restrição de φ_n a K, ou seja $f_n = \varphi_n|_K \in C(K)$. Então $A := \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto de $C(K)$. Vejamos que as condições (a) e (b) do Teorema de Ascoli (Teorema 1.1.40) estão satisfeitas:
(a) Dados $t_0 \in K$ e $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon$. Se $t \in K$ é tal que $\|t - t_0\| < \delta$, então

$$\sup_n |f_n(t) - f_n(t_0)| = \sup_n |\varphi_n(t) - \varphi_n(t_0)| \le \sup_n \|\varphi_n\| \cdot \|t - t_0\| \le \|t - t_0\| < \delta = \varepsilon.$$

(b) Para todo $t \in K$,

$$\sup_n |f_n(t)| = \sup_n |\varphi_n(t)| \le \sup_n \|\varphi_n\| \cdot \|t\| \le \|t\|.$$

Do Teorema de Ascoli segue então que $\overline{A}$ é compacto em $C(K)$, e portanto existem uma subsequência $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ e $f \in C(K)$ tais que $\varphi_{n_k}|_K = f_{n_k} \longrightarrow f$ em $C(K)$. Essa convergência quer dizer que

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in B_E} |P'(\varphi_{n_k})(x) - f(P(x))| &= \sup_{x \in B_E} |\varphi_{n_k}(P(x)) - f(P(x))| \\
&\le \sup_{t \in \overline{P(B_E)}} |\varphi_{n_k}(t) - f(t)| \\
&= \sup_{t \in \overline{P(B_E)}} |f_{n_k}(t) - f(t)| \\
&= \|f_{n_k} - f\|_\infty \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

quando $k \longrightarrow \infty$. Segue que

$$\begin{aligned}
\|P'(\varphi_{n_k}) - P'(\varphi_{n_j})\| &= \sup_{x \in B_E} |P'(\varphi_{n_k})(x) - P'(\varphi_{n_j})(x)| \\
&\le \sup_{x \in B_E} \big(|P'(\varphi_{n_k})(x) - f(P(x))| + |P'(\varphi_{n_j})(x) - f(P(x))|\big) \\
&\le \sup_{x \in B_E} |P'(\varphi_{n_k})(x) - f(P(x))| + \sup_{x \in B_E} |P'(\varphi_{n_j})(x) - f(P(x))| \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

se $k, j \longrightarrow \infty$. Isso prova que a subsequência $(P'(\varphi_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ é de Cauchy no espaço de Banach $\mathcal{P}(^mE)$, logo convergente.

Reciprocamente, suponhamos que $P' \in \mathcal{K}(F';\mathcal{P}(^mE))$. Como $\mathcal{K}$ é um ideal simétrico (Teorema de Schauder 4.4.2), do Corolário 4.1.10 podemos tomar um espaço de Banach

G, um operador $u \in \mathcal{L}(G;F)$ e um polinômio $Q \in \mathcal{P}(^mE;G)$ tais que $u \in \mathcal{K}(G;F)$ e $P = u \circ Q$. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência limitada em E. Então do Teorema 1.3.5 sabemos que a sequência $(Q(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é limitada em G. Como u é um operador compacto, segue do Corolário 4.4.4 que a sequência $(u(Q(x_n)))_{n=1}^{\infty} = (P(x_n))_{n=1}^{\infty}$ possui subsequência convergente em F, e portanto da Proposição 4.4.3 resulta que P é um polinômio m-homogêneo compacto. ■

O teorema acima foi provado, usando uma técnica diferente, por Aron e Schottenloher [4].

4.5 Polinômios fracamente compactos

Nesta seção, provaremos que um polinômio m-homogêneo $P\colon E \longrightarrow F$ entre espaços de Banach, é fracamente compacto se, e somente se, seu adjunto $P'\colon F' \longrightarrow \mathcal{P}(^mE)$ é fracamente compacto. Este resultado foi originalmente provado por Ryan [27]. Na verdade provaremos mais do que isto, mostraremos de fato que as seguintes afirmações são equivalentes:
(a) O polinômio $P\colon E \longrightarrow F$ é fracamente compacto.
(b) A linearização $P^L\colon \widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E \longrightarrow F$ de P é um operador linear fracamente compacto.
(c) O adjunto $P'\colon F' \longrightarrow \mathcal{P}(^mE)$ de P é um operador linear fracamente compacto.

Ao contrário das seções anteriores, estes resultados não seguem tão facilmente da teoria anteriormente desenvolvida. De acordo com as palavras de Richard Aron, *o caso fracamente compacto é outro mundo.* Dentro da linha desenvolvida nesta dissertação, estamos interessados na equivalência (a) $\Longleftrightarrow$ (c), mas a provaremos usando a equivalência (b) $\Longleftrightarrow$ (c). Ocorre que, para provar esta última equivalência, precisamos provar que a envoltória absolutamente convexa de um conjunto fracamente compacto é também fracamente compacta (Teorema de Krein-Smulian). Ao contrário do caso da envoltória convexa, a demonstração deste teorema não é tão facilmente encontrada na literatura, por isso optamos por fazê-la aqui. Tomamos como roteiro a demonstração (muito pouco detalhada, por sinal) que aparece em Aliprantis e Burkinshaw [1]. Primeiramente temos que introduzir os conceitos envolvidos.

Iniciamos relembrando que um subconjunto A de um espaço vetorial E é convexo se $\alpha x + \beta y \in A$ para todos $x, y \in A$ e escalares $\alpha, \beta \geq 0$ com $\alpha + \beta = 1$. Definiremos agora alguns conceitos com os quais ainda não havíamos trabalhado:

Definição 4.5.1 Sejam E espaço vetorial e $A \subseteq E$.
(a) A é dito *equilibrado* se $\lambda x \in A$ para todos $x \in A$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ com $|\lambda| \leq 1$.
(b) A é dito *absolutamente convexo* se $\alpha x + \beta y \in A$ para todos $x, y \in A$ e escalares α, β com $|\alpha| + |\beta| \leq 1$.

É fácil verificar que em um espaço normado E a bola unitária fechada B_E e a bola unitária aberta $\overset{\circ}{B}_E$ são conjuntos absolutamente convexos.

Proposição 4.5.2 *Sejam E um espaço vetorial e A um subconjunto de E. Então, A é absolutamente convexo se, e somente se, A é convexo e equilibrado.*

Demonstração. Suponhamos que A seja absolutamente convexo. Assim $\alpha x+\beta y\in A$ para todos $x,y\in A$ e escalares α,β com $|\alpha|+|\beta|\leq 1$. Então, obviamente A é equilibrado (basta tomar $\beta=0$). Se α e β são escalares não-negativos tais que $\alpha+\beta=1$, então $\alpha x+\beta y\in A$, e portanto A é convexo.

Reciprocamente, suponhamos que A seja convexo e equilibrado. Sejam $x,y\in A$ e α,β escalares tais que $|\alpha|+|\beta|\leq 1$. Se $\alpha=0$ ou $\beta=0$, então a condição de ser absolutamente convexo está satisfeita pois A é equilibrado. Podemos então supor α e β não-nulos. Do fato de A ser equilibrado decorre que $\frac{\alpha}{|\alpha|}x$ e $\frac{\beta}{|\beta|}y$ pertencem a A. Como A também é convexo e $\frac{|\alpha|}{|\alpha|+|\beta|}+\frac{|\beta|}{|\alpha|+|\beta|}=1$, segue que

$$z:=\frac{|\alpha|}{|\alpha|+|\beta|}\cdot\frac{\alpha}{|\alpha|}x+\frac{|\beta|}{|\alpha|+|\beta|}\cdot\frac{\beta}{|\beta|}y\in A. \tag{4.2}$$

Novamente do fato de A ser equilibrado, e $|\alpha|+|\beta|\leq 1$, concluímos que $(|\alpha|+|\beta|)z=\alpha x+\beta y\in A$. ■

Por um refinamento do argumento (4.2) obtemos:

Teorema 4.5.3 *Sejam E um espaço vetorial e $A\subseteq E$ um subconjunto absolutamente convexo. Então para todos $n\in\mathbb{N}$, escalares $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ tais que $\sum\limits_{i=1}^{n}|\alpha_i|\leq 1$ e $x_1,\ldots,x_n$ em A, tem-se $\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n\in A$.*

Demonstração. Procederemos por indução sobre n. Para $n=1$ e $n=2$, a propriedade desejada é válida pela própria definição de conjunto absolutamente convexo. Suponhamos que a propriedade desejada seja válida para $n\in\mathbb{N}$. Sejam $x_1,\ldots,x_{n+1}\in A$ e $\alpha_1,\ldots,\alpha_{n+1}$ escalares tais que $\sum\limits_{i=1}^{n+1}|\alpha_i|\leq 1$. Então

$$\left|\frac{\alpha_1}{1-|\alpha_{n+1}|}\right|+\cdots+\left|\frac{\alpha_n}{1-|\alpha_{n+1}|}\right|=\frac{|\alpha_1|+\cdots+|\alpha_n|}{1-|\alpha_{n+1}|}\leq 1.$$

Da hipótese de indução segue que

$$\frac{\alpha_1}{1-|\alpha_{n+1}|}\cdot x_1+\cdots+\frac{\alpha_n}{1-|\alpha_{n+1}|}\cdot x_n\in A.$$

Do fato de A ser absolutamente convexo e

$$|1-|\alpha_{n+1}||+|\alpha_{n+1}|=1-|\alpha_{n+1}|+|\alpha_{n+1}|=1,$$

concluímos que

$$1-|\alpha_{n+1}|\left(\frac{\alpha_1}{1-|\alpha_{n+1}|}\cdot x_1+\cdots+\frac{\alpha_n}{1-|\alpha_{n+1}|}\cdot x_n\right)+\alpha_{n+1}x_{n+1}=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_{n+1}x_{n+1}\in A.$$

Isso prova que a propriedade desejada vale para $n+1$ e completa a demonstração por indução. ■

Combinações lineares da forma $\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_ix_i$, $n\in\mathbb{N}$, em que $\sum\limits_{i=1}^{n}|\alpha_i|\leq 1$ e $x_i\in A$ para cada $i\in\{1,\ldots,n\}$, são chamadas de *combinações absolutamente convexas de elementos de A.*

Lema 4.5.4 *Seja $(A_i)_{i\in I}$ uma coleção de subconjuntos de um espaço vetorial E.*
(a) *Se A_i é convexo para todo $i \in I$, então $\bigcap_{i\in I} A_i$ é convexo.*
(b) *Se A_i é equilibrado para todo $i \in I$, então $\bigcap_{i\in I} A_i$ é equilibrado.*
(c) *Se A_i é absolutamente convexo para todo $i \in I$, então $\bigcap_{i\in I} A_i$ é absolutamente convexo.*

Demonstração. (a) Sejam $\alpha, \beta \geq 0$ com $\alpha + \beta = 1$ e $x, y \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Como A_i é convexo para todo $i \in I$, então $\alpha x + \beta y \in A_i$ para todo $i \in I$, e portanto $\alpha x + \beta y \in \bigcap_{i\in I} A_i$, provando assim que $\bigcap_{i\in I} A_i$ é convexo.
(b) Sejam $\lambda \in \mathbb{K}$ com $|\lambda| \leq 1$ e $x \in \bigcap_{i\in I} A_i$. Como A_i é equilibrado para todo $i \in I$, então $\lambda x \in A_i$ para todo $i \in I$, e portanto $\lambda x \in \bigcap_{i\in I} A_i$, provando assim que $\bigcap_{i\in I} A_i$ é equilibrado.
(c) Segue diretamente da Proposição 4.5.2 e dos itens anteriores (a) e (b). ■

Definição 4.5.5 A *envoltória absolutamente convexa* de um subconjunto A de um espaço vetorial E é a interseção de todos os subconjuntos absolutamente convexos de E que contêm A.

Denotaremos por $\Gamma(A)$ a envoltória absolutamente convexa do subconjunto A do espaço vetorial E. As seguintes propriedades são facilmente verificadas:

- $A \subseteq \Gamma(A)$.
- Se $A \subseteq B$ então $\Gamma(A) \subseteq \Gamma(B)$.

Proposição 4.5.6 *Sejam E um espaço vetorial e $A \subseteq E$.*
(a) *A envoltória absolutamente convexa $\Gamma(A)$ do conjunto A é o menor subconjunto absolutamente convexo de E que contém A.*
(b) *A envoltória absolutamente convexa $\Gamma(A)$ do conjunto A é o conjunto formado por todas as combinações absolutamente convexas de elementos de A, isto é,*

$$\Gamma(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i : x_i \in A \text{ para cada } i, n \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq 1 \right\}.$$

Demonstração. (a) Como a interseção de conjuntos absolutamente convexos é um conjunto absolutamente convexo (Lemma 4.5.4(c)), então $\Gamma(A)$ é um conjunto absolutamente convexo que contém A. Portanto $\Gamma(A)$ é o menor conjunto absolutamente convexo que contém A.
(b) Seja $S = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i : x_i \in A \text{ para cada } i, n \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i| \leq 1 \right\}$. Vejamos que S é absolutamente convexo. Para isso, sejam $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, $\sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$ em S e escalares α, β tais que $|\alpha| + |\beta| \leq 1$. Note que tomamos, em cada combinação convexa, o mesmo n e os mesmos $x_i's$. Isso pode ser feito pois basta completar com escalares 0 quando necessário. Então

$$\alpha \cdot \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \beta \cdot \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\alpha_i + \beta\beta_i) x_i \in S,$$

uma vez que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|\alpha\alpha_i+\beta\beta_i| &\leq \sum_{i=1}^{n}|\alpha\alpha_i|+|\beta\beta_i|\\ &=\sum_{i=1}^{n}|\alpha\alpha_i|+\sum_{i=1}^{n}|\beta\beta_i|\\ &=|\alpha|\cdot\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|+|\beta|\cdot\sum_{i=1}^{n}|\beta_i|\\ &\leq|\alpha|+|\beta|\leq 1.\end{aligned}$$

Provamos assim S é um conjunto absolutamente convexo de E que contém A. Segue do item (a) que $\Gamma(A)\subseteq S$.

Por outro lado, do Teorema 4.5.3 sabemos que todo subconjunto absolutamente convexo de E que contém A também contém S, e disso segue que $S\subseteq\Gamma(A)$. Portanto $\Gamma(A)=S$. ■

Provaremos agora alguns resultados relativos às topologias fraca e fraca-estrela que serão necessários.

Lema 4.5.7 *Sejam E um espaço normado e A um subconjunto de E fracamente compacto. Então A é limitado em norma.*

Demonstração. Façamos por absurdo, e para isto suponhamos que A seja ilimitado. Então, para cada $n\in\mathbb{N}$, existe $x_n\in A$ tal que $\|x_n\|>n$. Assim construímos uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em A. Pelo Teorema de Eberlein-Smulian (Teorema 1.1.24) existem uma subsequência $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ e $x\in A$ tais que $x_{n_j}\xrightarrow{w}x$. Da Proposição 1.1.20(a) sabemos que a sequência $\left(\|x_{n_j}\|\right)_{j=1}^{\infty}$ é limitada, então existe $C>0$ tal que $\|x_{n_j}\|\leq C$ para todo $j\in\mathbb{N}$, o que é uma contradição pois $\|x_{n_j}\|>n_j\longrightarrow\infty$. Portanto A é limitado. ■

Definição 4.5.8 Um *homeomorfismo* entre os espaços topológicos X e Y é uma função $f\colon X\longrightarrow Y$ que é contínua, bijetora e tem inversa contínua.

Lema 4.5.9 *Seja E um espaço de Banach. O mergulho canônico J_E é um homeomorfismo de $(E,\sigma(E,E'))$ sobre sua imagem $J_E(E)$ com a topologia induzida pela topologia fraca-estrela de E''. Isto é, a função*

$$J_E\colon\ (E,\sigma(E,E'))\longrightarrow J_E(E)\subseteq(E'',\sigma(E'',E'))$$

é um homeomorfismo.

Demonstração. É claro que a função é bijetora. Para toda rede $(x_\lambda)_\lambda$ em E, temos

$$\begin{aligned}x_\lambda\xrightarrow{w}x\text{ em }E &\overset{(*)}{\iff}\varphi(x_\lambda)\longrightarrow\varphi(x)\text{ para todo funcional }\varphi\in E'\\ &\iff J_E(x_\lambda)(\varphi)\longrightarrow J_E(x)(\varphi)\text{ para todo funcional }\varphi\in E'\\ &\overset{(**)}{\iff}J_E(x_\lambda)\xrightarrow{w^*}J_E(x)\text{ em }E''\\ &\overset{(***)}{\iff}J_E(x_\lambda)\xrightarrow{w^*}J_E(x)\text{ em }J_E(E).\end{aligned}$$

(*) e (**) seguem da Proposição 1.1.18 e (***) se justifica pois estamos considerando em $J_E(E)$ a topologia induzida pela topologia fraca-estrela de E''. Dessas equivalências seguem as continuidades de J_E e $(J_E)^{-1}$ nas topologias indicadas. ■

Teorema 4.5.10 (Teorema de Krein-Smulian) *A envoltória absolutamente convexa de um subconjunto relativamente fracamente compacto de um espaço de Banach é relativamente fracamente compacta.*

Demonstração. Sejam E um espaço de Banach e $A \subseteq E$ um conjunto relativamente fracamente compacto. Faremos a demonstração em duas etapas.

Primeira Etapa
Nesta etapa provaremos o Teorema supondo que E seja um espaço de Banach separável. Como $\overline{A}^w$ é fracamente compacto, pelo Lema 4.5.7 existe $M > 0$ tal que $\|a\| \leq M$ para todo $a \in \overline{A}^w$. Considere o espaço topológico compacto $\left(\overline{A}^w, \sigma(E, E')\right)$ e o espaço de Banach $(C\left(\overline{A}^w\right), \|\cdot\|_\infty)$ de todas as funções contínuas a valores reais munido com a norma do supremo. Para cada $x' \in E'$ a restrição de x' a $\overline{A}^w$, $x'|_{\overline{A}^w}$, pertence a $C\left(\overline{A}^w\right)$ pela Proposição 1.1.21, o que nos permite considerar a aplicação

$$R\colon E' \longrightarrow C\left(\overline{A}^w\right)\ ,\ R(x') = x'|_{\overline{A}^w}.$$

A linearidade de R é imediata, e de

$$\begin{aligned}\|R(x')\|_\infty &= \sup\left\{|R(x')(a)| : a \in \overline{A}^w\right\}\\ &= \sup\left\{|x'(a)| : a \in \overline{A}^w\right\}\\ &\leq \sup\left\{\|x'\| \cdot \|a\| : a \in \overline{A}^w\right\}\\ &= \sup\left\{\|a\| : a \in \overline{A}^w\right\} \cdot \|x'\|\\ &\leq M \cdot \|x'\|\end{aligned}$$

para todo $x' \in E'$, segue a continuidade de R. Do Teorema da Representação de Riesz (Teorema 1.1.44) sabemos que a aplicação

$$\mu \in M(\overline{A}^w) \longmapsto I_\mu \in C\left(\overline{A}^w\right)'\ ,\ I_\mu(g) = \int_{\overline{A}^w} g\ d\mu$$

é um isomorfismo isométrico. Sejam $\mu \in M(\overline{A}^w)$ fixado e $I_\mu \in C\left(\overline{A}^w\right)'$. Considere a aplicação

$$f\colon E' \longrightarrow \mathbb{K}\ ,\ f(x') = I_\mu(R(x')) = \int_{\overline{A}^w} R(x')\ d\mu.$$

Vejamos que f é linear: de fato,

$$\begin{aligned}f(\lambda x' + y') &= I_\mu\left(R(\lambda x' + y')\right)\\ &= I_\mu\left(\lambda R(x') + R(y')\right)\\ &= \lambda I_\mu(R(x')) + I_\mu(R(y'))\\ &= \lambda f(x') + f(y'),\end{aligned}$$

para todos $x', y' \in E'$ e todo escalar λ. Como E é um espaço de Banach separável, $(B_{E'}, \sigma(E', E))$ é espaço topológico metrizável pelo Teorema 1.1.33. Vejamos que f é w^*-contínua sobre $B_{E'}$. Para isso seja $(x'_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $B_{E'}$ tal que $x'_n \xrightarrow{w^*} x'$ em $B_{E'}$. Então

$$R(x'_n)(x) = x'_n(x) \longrightarrow x'(x) = R(x')(x)$$

para todo $x \in \overline{A}^w$, e

$$|R(x'_n)(x)| = |x'_n(x)| \leq \|x'_n\| \cdot \|x\| \leq M.$$

Como μ é uma medida finita, uma vez que é uma medida de Radon em um compacto, segue que a função constante igual a M é μ-integrável, e portanto pelo Teorema da Convergência Dominada (Teorema 1.1.41),

$$f(x'_n) = \int_{\overline{A}^w} R(x'_n)\ d\mu \longrightarrow \int_{\overline{A}^w} R(x')\ d\mu = f(x'),$$

o que mostra a que f é w^*-contínua em B'_E. Pelo Teorema 1.1.35 segue que f é w^*-contínua em E'. E do Teorema 1.1.30 existe $x \in E$ tal que $f = J_E(x)$, logo

$$\begin{aligned} R'(I_\mu)(x') &= (I_\mu \circ R)(x') \\ &= I_\mu(R(x')) \\ &= \int_{\overline{A}^w} R(x')\ d\mu \\ &= f(x') \\ &= J_E(x)(x') \end{aligned}$$

para todo $x' \in E'$, provando que $R'(I_\mu) = J_E(x)$. Portanto $R'\left(C\left(\overline{A}^w\right)\right) \subseteq J_E(E)$ e então R' está definida em $C\left(\overline{A}^w\right)'$ e toma valores em $J_E(E)$. Podemos então considerar a composta $Q = J_E^{-1} \circ R'$. Pelo Teorema 3.4.1, R' é w^*-w^* contínuo e do Lema 4.5.9 sabemos que J_E^{-1} é w^*-w contínuo, então Q é um operador linear w^*-w contínuo. Do Teorema 1.1.32 sabemos que o conjunto

$$B := \left\{ I_\mu \in C\left(\overline{A}^w\right)' : \|I_\mu\| \leq 1 \right\}$$

é w^*-compacto, e do Teorema 1.1.15 segue que $Q(B)$ é w-compacto. Como B é convexo e equilibrado, então $Q(B)$ é também convexo e equilibrado (absolutamente convexo). Para cada $x \in \overline{A}^w$, seja δ_x a restrição aos borelianos de $\overline{A}^w$ da medida de Dirac concentrada em x, isto é,

$$\delta_x(C) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in C; \\ 0, & \text{se } x \notin C. \end{cases}$$

para todo $C \in \mathcal{B}\left(\overline{A}^w\right)$. Assim $I_{\delta x} \in C\left(\overline{A}^w\right)'$ e

$$\begin{aligned} I_{\delta_x}(g) &= \int_{\overline{A}^w} g\ d\delta_x \\ &= \int_{\{x\}} g\ d\delta_x + \int_{\overline{A}^w - \{x\}} g\ d\delta_x \\ &= g(x) \end{aligned}$$

para todo $g \in C\left(\overline{A}^w\right)$. Logo

$$|I_{\delta_x}(g)| = |g(x)| \leq \|g\|_\infty$$

para todo $g \in C\left(\overline{A}^w\right)$, e então

$$\begin{aligned}\|I_{\delta_x}\| &= \sup\left\{|I_{\delta_x}(g)| : \|g\|_\infty \leq 1\right\}\\ &\leq \sup\left\{\|g\|_\infty : \|g\|_\infty \leq 1\right\} = 1.\end{aligned}$$

Resulta que $I_{\delta_x} \in B$, e de

$$\begin{aligned}J_E\left(Q(I_{\delta_x})\right)(x') &= J_E\left((J_E^{-1} \circ R')(I_{\delta_x})\right)(x')\\ &= J_E\left(J_E^{-1}\left(R'\left(I_{\delta_x}\right)\right)\right)(x')\\ &= R'(I_{\delta_x})(x')\\ &= (I_{\delta_x} \circ R)(x')\\ &= I_{\delta_x}(R(x'))\\ &= R(x')(x)\\ &= x'(x)\\ &= J_E(x)(x')\end{aligned}$$

para todo $x' \in C\left(\overline{A}^w\right)$ em conjunto com a injetividade de J_E, segue que $Q(I_{\delta_x}) = x$ para cada $x \in \overline{A}^w$. Portanto $A \subseteq \overline{A}^w \subseteq Q(B)$, o que implica que $Q(B)$ é um conjunto absolutamente convexo que contém A. Assim a envoltória absolutamente convexa de A, $\Gamma(A)$, está contida em $Q(B)$, e consequentemente $\overline{\Gamma(A)}^w \subseteq \overline{Q(B)}^w$. Como a topologia fraca é de Hausdorff e $\overline{Q(B)}^w$ é fracamente compacto, segue que é fracamente fechado, isto é, $\overline{Q(B)}^w = Q(B)$. Segue que $\overline{\Gamma(A)}^w \subseteq Q(B)$ e daí a Proposição 1.1.14 garante que $\Gamma(A)$ é um conjunto relativamente fracamente compacto.

Segunda Etapa

Nesta etapa provaremos o teorema para um espaço de Banach E qualquer, concluindo assim a demonstração. Seja $(u_n)_{n=1}^\infty$ uma sequência em $\Gamma(A)$. Cada u_n é uma combinação absolutamente convexa de elementos de A (Proposição 4.5.6), digamos $u_n = \sum\limits_{j=1}^{k_n} \lambda_j^n x_j^n$ com $k_n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{j=1}^{k_n} |\lambda_j^n| \leq 1$ e $x_j^n \in A$ para cada $j \in \{1, \ldots, k_n\}$. Considere o conjunto

$$A_0 = \left\{x_j^n : n \in \mathbb{N} \text{ e } j \in \{1, \ldots, k_n\}\right\}.$$

O conjunto A_0 é um subconjunto enumerável de E uma vez que é uma união enumerável de conjuntos finitos. Definindo $F = \overline{[A_0]}$, é claro que $(u_n)_{n=1}^\infty \subseteq F$. Do Lema 1.1.6 sabemos que F é um espaço de Banach separável. Como $\overline{A \cap F}^{\sigma(E,E')} \subseteq \overline{A}^{\sigma(E,E')}$, do Teorema1.1.14 segue que $\overline{A \cap F}^{\sigma(E,E')}$ é $\sigma(E, E')$-compacto, e pelo Lema 1.1.34 concluí-se que $\overline{A \cap F}^{\sigma(F,F')}$ é $\sigma(F, F')$-compacto. Portanto F é um espaço de Banach separável e

$A \cap F$ é um subconjunto relativamente fracamente compacto na topologia fraca $\sigma(F, F')$ em F. Pela primeira etapa da demonstração segue que $\Gamma(A \cap F)$ é relativamente fracamente compacta na topologia fraca $\sigma(F, F')$ em F. Novamente pelo Lema 1.1.34, obtemos que $\Gamma(A \cap F)$ é relativamente fracamente compacta na topologia fraca $\sigma(E, E')$ em E. Como $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \Gamma(A \cap F)$, aplicando o Teorema de Eberlein-Smulian podemos tomar uma subsequência de $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge fracamente em E. E aplicando uma vez mais o Teorema de Eberlein-Smulian segue que a envoltória absolutamente convexa $\Gamma(A)$ de A é relativamente fracamente compacta. ■

Agora sim podemos abordar a relação entre a compacidade fraca de um polinômio m-homogêneo e a de seu adjunto. Como dito antes, a definição de polinômio homogêneo fracamente compacto é a mesma do caso de operadores lineares:

Definição 4.5.11 Sejam E e F espaços de Banach. Um polinômio homogêneo $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$ é denominado *fracamente compacto* se $P(B_E)$ é relativamente fracamente compacto em F, ou seja, se $\overline{P(B_E)}^w$ é fracamente compacto em F.

Denotaremos por $\mathcal{P}_{\mathcal{W}}(^mE; F)$, o conjunto de todos os polinômios m-homogêneos fracamente compactos de E em F. Os polinômios fracamente compactos entre espaços de Banach foram estudados sistematicamente pela primeira vez por Ryan [27], e em seguida por vários autores (veja, por exemplo, [20, 7]).

Em particular, um operador linear contínuo $u \colon E \longrightarrow F$ é *fracamente compacto* se $\overline{u(B_E)}^w$ é fracamente compacto em F.

Observação 4.5.12 Da linearidade de um operador $u \in \mathcal{L}(E; F)$ e da convexidade da bola fechada B_E, resulta que o conjunto $u(B_E)$ é convexo, assim pelo Teorema de Mazur (Teorema 1.1.26) concluímos que $\overline{u(B_E)}^w = \overline{u(B_E)}$. Isso quer dizer que na definição acima de operadores lineares fracamente compactos poderíamos ter substituído $\overline{u(B_E)}^w$ por $\overline{u(B_E)}$.

Denotaremos por $\mathcal{W}(E; F)$ o conjunto de todos os operadores fracamente compactos de E em F. É bem conhecido que $\mathcal{W}$ é um ideal de operadores (veja, por exemplo, [25, Proposição 2.5.5]). Mais ainda:

Teorema 4.5.13 (Teorema de Gantmacher) *A classe $\mathcal{W}$ de todos os operadores lineares fracamente compactos entre espaços de Banach é um ideal simétrico de operadores.*

Demonstração. Veja [25, Teorema 4.1.5]. ■

Proposição 4.5.14 *Sejam E e F espaços de Banach e $P \in \mathcal{P}(^mE; F)$. As seguintes condições são equivalentes:*
(a) *O polinômio P é fracamente compacto.*
(b) *Para toda sequência limitada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E, a sequência $(P(x_n))_{n=1}^{\infty}$ admite uma subsequência fracamente convergente.*

Demonstração. Basta repetir a demonstração da Proposição 4.4.3 com a ajuda do Teorema de Eberlein-Smulian (Teorema 1.1.24). ■

Observação 4.5.15 Fazendo $m = 1$ na Proposição anterior, segue que um operador linear $u \in \mathcal{L}(E;F)$ entre espaços de Banach é fracamente compacto se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E, a sequência $(u(x_n))_{n=1}^{\infty}$ admite uma subsequência fracamente convergente.

Relembre que a aplicação

$$\delta_m^E \colon E \longrightarrow \widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E \ , \ \delta_m^E(x) = \otimes^m x,$$

é o polinômio m-homogêneo visto na Proposição 3.2.3. Relembre também que

$$\Delta_m^E \colon \mathcal{P}(^m E) \longrightarrow (\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E)' \ , \ \Delta_m^E(P) = P^L,$$

é o isomorfismo isométrico visto na Observação 3.2.8 e que $(\delta_m^E)' = (\Delta_m^E)^{-1}$.

A última ferramente que nos falta é a seguinte descrição da bola unitária fechada do produto tensorial simétrico projetivo:

Proposição 4.5.16 *Seja E um espaço de Banach. A bola unitária fechada $B_{\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E}$ do espaço $\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E$ é o fecho da envoltória absolutamente convexa $\overline{\Gamma\left(\delta_m^E\left(B_E\right)\right)}$ de $\delta_m^E\left(B_E\right)$.*

Demonstração. Veja [28, Proposition 2.2] ou [27, Demonstração do Lema 4.1, p. 65]. ■

Teorema 4.5.17 *Sejam E e F espaços de Banach e seja $P \in \mathcal{P}(^m E; F)$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*
(a) *O polinômio P é fracamente compacto.*
(b) *A linearização $P^L \colon \widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E \longrightarrow F$ de P é um operador linear fracamente compacto.*
(c) *O adjunto $P' \colon F' \longrightarrow \mathcal{P}(^m E)$ de P é um operador linear fracamente compacto.*

Demonstração. (a)$\Longleftrightarrow$ (b) Suponhamos que P seja fracamente compacto. Primeiramente vamos mostrar a inclusão

$$P^L\left(\Gamma\left(\delta_m^E\left(B_E\right)\right)\right) \subseteq \Gamma\left(P^L\left(\delta_m^E\left(B_E\right)\right)\right). \tag{4.3}$$

Para isso seja $y \in P^L\left(\Gamma\left(\delta_m^E\left(B_E\right)\right)\right)$. Então existe $x \in \Gamma\left(\delta_m^E\left(B_E\right)\right)$ tal que $y = P^L(x)$. Pela Proposição 4.5.6(b), existem $N \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_N \in \delta_m^E\left(B_E\right)$ e escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ com $\sum\limits_{i=1}^{N} |\alpha_i| \leq 1$ tais que $x = \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i x_i$. Do fato de P^L ser linear segue que $P^L(x) = \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i P^L(x_i)$, e novamente pela Proposição 4.5.6(b) decorre que $y = P^L(x) \in \Gamma\left(P^L\left(\delta_m^E\left(B_E\right)\right)\right)$. Isso comprova a inclusão (4.3). Temos então

$$\begin{aligned}
P^L\left(B_{\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s} E}\right) &\overset{(*)}{=} P^L\left(\overline{\Gamma\left(\delta_m^E\left(B_E\right)\right)}\right) \\
&\overset{(**)}{=} P^L\left(\overline{\Gamma\left(\delta_m^E\left(B_E\right)\right)}^w\right) \\
&\overset{(***)}{\subseteq} \overline{P^L\left(\Gamma\left(\delta_m^E\left(B_E\right)\right)\right)}^w \\
&\overset{(****)}{\subseteq} \overline{\Gamma\left(P^L\left(\delta_m^E\left(B_E\right)\right)\right)}^w \\
&= \overline{\Gamma\left(P\left(B_E\right)\right)}^w,
\end{aligned}$$

onde (*) segue da Proposição 4.5.16, (**) do Teorema de Mazur (Teorema 1.1.26), (***) da Proposição 1.1.13 e (****) da inclusão (4.3). Portanto $\overline{P^L(B_{\widehat{\otimes}^{m,s}_{\pi_s}E})}^w \subseteq \overline{\Gamma(P(B_E))}^w$. Da compacidade fraca do polinômio P resulta que $P(B_E)$ é relativamente fracamente compacto, e do Teorema 4.5.10 segue que a envoltória absolutamente convexa $\Gamma(P(B_E))$ de $P(B_E)$ é relativamente fracamente compacta. Portanto, do Teorema 1.1.14 obtemos que $\overline{P^L(B_{\widehat{\otimes}^{m,s}_{\pi_s}E})}^w$ é fracamente compacto. Provamos assim que o operador linear P^L é fracamente compacto.

Reciprocamente, suponhamos que P^L seja um operador linear fracamente compacto. Neste caso $\overline{P^L(B_{\widehat{\otimes}^{m,s}_{\pi_s}})}^w$ é um subconjunto fracamente compacto de F. Aplicando novamente a Proposição 4.5.16, temos

$$\begin{aligned} P(B_E) &= P^L(\delta_m^E(B_E)) \\ &\subseteq P^L(\Gamma(\delta_m^E(B_E))) \\ &\subseteq P^L\left(\overline{\Gamma(\delta_m^E(B_E))}\right) \\ &= P^L(B_{\otimes^{m,s}_{\pi_s}}). \end{aligned}$$

Portanto

$$\overline{P(B_E)}^w \subseteq \overline{P^L(B_{\widehat{\otimes}^{m,s}_{\pi_s}E})}^w = \overline{P^L(B_{\widehat{\otimes}^{m,s}_{\pi_s}E})}.$$

Pelo Teorema 1.1.14 segue que $\overline{P(B_E)}^w$ é fracamente compacto, ou seja, P é fracamente compacto.

(b)$\Longleftrightarrow$(c) Suponhamos que P^L seja fracamente compacto, ou seja $P^L \in \mathcal{W}\left(\widehat{\otimes}^{m,s}_{\pi_s}E; F\right)$. Como $\mathcal{W}$ é um ideal de operadores simétrico (Teorema 4.5.13), concluímos que $\left(P^L\right)' \in \mathcal{W}\left(F'; \left(\widehat{\otimes}^{m,s}_{\pi_s}E\right)'\right)$. Da propriedade de ideal segue que $(\delta_m^E)' \circ (P^L)' \in \mathcal{W}\left(F'; \mathcal{P}\left({}^mE\right)\right)$. De $P = P^L \circ \delta_m^E$ segue do Teorema 3.1.1 que $P' = (\delta_m^E)' \circ (P^L)'$, provando assim que P' é fracamente compacto.

Reciprocamente, suponhamos que o adjunto P' de P seja fracamente compacto, isto é, $P' \in \mathcal{W}\left(F'; \mathcal{P}({}^mE)\right)$. Como $P = P^L \circ \delta_m^E$, então

$$P' = (\delta_m^E)' \circ (P^L)' = \left(\Delta_m^E\right)^{-1} \circ \left(P^L\right)',$$

e portanto

$$\Delta_m^E \circ P' = (P^L)'.$$

Da propriedade de ideal de $\mathcal{W}$ segue que $(P^L)' = \Delta_m^E \circ P' \in \mathcal{W}\left(F'; \left(\widehat{\otimes}^{m,s}_{\pi_s}E\right)'\right)$. Como $\mathcal{W}$ é simétrico, concluímos que $P^L \in \mathcal{W}(\widehat{\otimes}^{m,s}_{\pi_s}E; F)$. ■

Como aplicação do teorema anterior, mostraremos a seguir que no caso em que F é um espaço de Banach reflexivo, então o espaço de todos os polinômios m-homogêmeos fracamente compactos de um espaço de Banach E qualquer a valores em F coincide com o espaços de todos os polinômios m-homogêneos contínuos. Para isso precisamos do caso linear, em que basta que um dos espaços seja reflexivo:

Proposição 4.5.18 *Sejam E e F espaços de Banach. Se E ou F é reflexivo, então $\mathcal{W}(E; F) = \mathcal{L}(E; F)$.*

Demonstração. [25, Poposição 2.5.4]. ■

Um pergunta natural é: será que se E ou F é espaço de Banach reflexivo então $\mathcal{P}(^mE;F) = \mathcal{P}_{\mathcal{W}}(^mE;F)$? Analisemos primeiramente se a condição do espaço domínio ser reflexivo continua sendo condição suficiente. O próximo lema diz que, mais ainda que a reflexividade de E, a reflexividade do produto tensorial simétrico projetivo $\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s}E$ é uma condição necessária.

Lema 4.5.19 *Seja E um espaço de Banach. Se $\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s}E$ não é reflexivo, então existe um espaço de Banach F tal que $\mathcal{P}(^mE;F) \neq \mathcal{P}_{\mathcal{W}}(^mE;F)$.*

Demonstração. Tome $F = \mathcal{P}(^mE)'$ e seja

$$Q_m \colon E \longrightarrow F, \quad Q_m(x)(P) = P(x),$$

o polinômio m-homogêneo contínuo do Exemplo 1.3.10. Suponha que Q_m seja fracamente compacto. Então segue do Teorema 4.5.17 que o seu adjunto $Q_m' \in \mathcal{W}(F';\mathcal{P}(^mE))$. Da propriedade de ideal de $\mathcal{W}$ resulta que $Q_m' \circ J_{\mathcal{P}(^mE)} \in \mathcal{W}(\mathcal{P}(^mE);\mathcal{P}(^mE))$. Dado $P \in \mathcal{P}(^mE)$,

$$\begin{aligned}(Q_m' \circ J_{\mathcal{P}(^mE)})(P)(x) &= Q_m'\left(J_{\mathcal{P}(^mE)}(P)\right)(x)\\ &= J_{\mathcal{P}(^mE)}(P)(Q_m(x))\\ &= Q_m(x)(P)\\ &= P(x),\end{aligned}$$

para todo $x \in E$. Logo

$$(Q_m' \circ J_{\mathcal{P}(^mE)})(P) = P = Id_{\mathcal{P}(^mE)}(P)$$

para todo $P \in \mathcal{P}(^mE)$, ou seja, $Q_m' \circ J_{\mathcal{P}(^mE)} = Id_{\mathcal{P}(^mE)}$, onde $Id_{\mathcal{P}(^mE)}$ é o operador identidade definido em $\mathcal{P}(^mE)$. Assim o operador identidade $Id_{\mathcal{P}(^mE)}$ é fracamente compacto, e neste caso segue do Teorema de Kakutani (Teorema 1.1.27) que $\mathcal{P}(^mE)$ é um espaço de Banach reflexivo. Como $\left(\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s}E\right)'$ é isomorfo isometricamente a $\mathcal{P}(^mE)$ (Observação 3.2.8), então $\left(\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s}E\right)'$ é reflexivo, e da Proposição 1.1.12 segue que $\widehat{\otimes}_{\pi_s}^{m,s}E$ é reflexivo. Como isso contradiz a hipótese, concluímos que o polinômio $Q_m \in \mathcal{P}(^mE;F)$ não é fracamente compacto. ■

Observação 4.5.20 A recíproca do lema acima também é verdadeira (veja [7, Proposition 34]).

O exemplo abaixo confirma que a condição do espaço domínio ser reflexivo não é mais uma condição suficiente no caso polinomial:

Exemplo 4.5.21 O espaço de Banach ℓ_2 é reflexivo (veja [9, Proposição 4.3.12]), mas $\ell_2\widehat{\otimes}\ell_2$ não é reflexivo (veja [28, Example 2.10]). Portanto do Lema anterior segue que existe um espaço F tal que $\mathcal{P}(^m\ell_2;F) \neq \mathcal{P}_{\mathcal{W}}(^m\ell_2;F)$.

Como o auxílio do Teorema 4.5.17 provaremos a seguir que a condição do espaço de chegada ser reflexivo continua sendo condição suficiente no caso polinomial:

Teorema 4.5.22 *Sejam E um espaço de Banach e F um espaço de Banach reflexivo. Então $\mathcal{P}_{\mathcal{W}}(^mE;F) = \mathcal{P}(^mE;F)$.*

Demonstração. Como $\mathcal{P}_{\mathcal{W}}(^mE;F) \subseteq \mathcal{P}(^mE;F)$, basta mostrar que $\mathcal{P}_{\mathcal{W}}(^mE;F) \supseteq \mathcal{P}(^mE;F)$. Seja $P \in \mathcal{P}(^mE;F)$. Como F é reflexivo, então da Proposição 1.1.12 temos F' reflexivo, e daí segue da Proposição 4.5.18 que $\mathcal{W}(F';\mathcal{P}(^mE)) = \mathcal{L}(F';\mathcal{P}(^mE))$. Assim o operador adjunto $P'\colon F' \longrightarrow \mathcal{P}(^mE)$ de P é fracamente compacto e segue do Teorema 4.5.17 que $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{W}}(^mE;F)$. $\blacksquare$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] C. D. Aliprantis e O. Burkinshaw, *Positive Operators*, Springer, 2006.

[2] T. R. Alves, *Polinômios dominados entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, UFU, 2011.

[3] R. Aron e P. Rueda, *p-Compact homogeneous polynomials from an ideal point of view*, Contemp. Math. **547** (2011), 61–71.

[4] R. Aron e M. Schottenloher, *Compact holomorphic mappings on Banach spaces and the approximation property*, J. Funct. Anal. **21** (1976), 7–30.

[5] A. T. L. Bernardino, *Ideais de Aplicações Multilineares e Polinômios entre Espaços de Banach,* Dissertação de Mestrado, UFPB, 2008.

[6] G. Botelho, *Weakly compact and absolutely summing polynomials*, J. Math. Anal. Appl. **265** (2002), 458–462.

[7] G. Botelho, *Ideals of polynomials generated by weakly compact operators*, Note. Mat. **25** (2005/2006), 69–102.

[8] G. Botelho, E. Çaliskan e G. Moraes, *The polynomial dual of an operator ideal*, preprint.

[9] G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira, *Fundamentos de Análise Funcional*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[10] A. Defant e K. Floret, *Tensor Norms and Operator Ideals*, North-Holland, 1993.

[11] J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge, *Operators Ideals*, in: Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Volume 1, pp. 437–496, North-Holland, 2001.

[12] S. Dineen, *Complex Analysis On Infinite Dimensional Spaces*, Springer, 1999.

[13] S. Dineen e J. Mujica, *The approximation property for spaces of holomorphic functions on infinite dimensional spaces III*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fis. Mat. Ser. A Math. RACSAM **106** (2012), 457–469.

[14] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern techniques and their applications*, John Wiley and Sons, Inc., 1999.

[15] K. Floret, *Natural norms on symmetric tensor products of normed spaces*, Note Mat. **17** (1997), 153–188.

[16] C. S. Hönig, *Análise Funcional e Aplicações*, Vol. II, Publicações do IME-USP, 1970.

[17] C. V. Hutton, *On the approximation numbers of an operator and its adjoint*, Math. Ann. **210** (1974), 277–280.

[18] A. Jatobá, *Fatoração de operadores fracamente compactos entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, UNICAMP, 2005.

[19] E. L. Lima, *Elementos de Topologia Geral*, Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.

[20] J. Mujica, *Linearization of bounded holomorphic mappings on Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **324** (1991) 867–887.

[21] J. Mujica, *Spaces of holomorphic functions and the approximation property*, IMI Graduate Lecture Notes 1, Universidad Complutense de Madrid, 2009.

[22] J. Mujica, *Complex analysis in Banach spaces*, Dover Publications, 2010.

[23] D. Pellegrino e J. Santos, *Absolutely summing multilinear operators: a panorama*, Quaest. Math. **34** (2011), 447–478.

[24] A. Pełczyński, *On wealkly compact polynomial operators on B-spaces with Dungord-Pettis Property*, Polish Acad. Sci. Math. **11** (1963), 371-377.

[25] G. M. R. Pereira, *O dual de um ideal de operadores e ideais de operadores simétricos entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, UFU, 2012.

[26] A. Pietsch, *Operator Ideals*, North-Holland, 1980.

[27] R. Ryan, *Applications of topological tensor products to infinite dimensional holomorphy*, Thesis - Trinity College, 1980.

[28] R. Ryan, *Introduction to tensor products of Banach spaces*, Springer, 2002.

[29] A. R. Silva, *Linearização de aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach e ideais de composição*, Dissertação de Mestrado, UFU, 2010.

[30] S. Willard, *General Topology*, Dover Publications, 2004.