

FRANCIELE ALVES DA SILVEIRA GONZAGA PEREIRA

# Existência e Estabilidade de Órbitas Periódicas da Equação de van der Pol-Mathieu



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE MATEMÁTICA  
2012

FRANCIELE ALVES DA SILVEIRA GONZAGA PEREIRA

# Existência e Estabilidade de Órbitas Periódicas da Equação de van der Pol-Mathieu

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

**Área de Concentração:** Matemática.

**Linha de Pesquisa:** Equações Diferenciais.

**Orientador:** Prof. Dr. Márcio José Horta Dantas.

UBERLÂNDIA - MG  
2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil

---

P436e  
2012     Pereira, Franciele Alves da Silveira Gonzaga, 1984  
Existência e estabilidade de órbitas periódicas da Equação de  
Van der Pol-Mathieu / Franciele Alves da Silveira Gonzaga Pereira. -  
2012.  
45 f. : il.

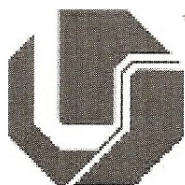
Orientador: Márcio José Horta Dantas.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia,  
Programa de Pós-Graduação em Matemática.  
Inclui bibliografia.

1. Matemática - Teses. 2. Equações diferenciais - Teses. I.  
Dantas, Márcio José Horta. II. Universidade Federal de Uberlândia.  
Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

---

CDU:51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152  
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

**ALUNA:** Franciele Alves da Silveira Gonzaga Pereira.

**NÚMERO DE MATRÍCULA:** 11012MAT001.

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO:** Matemática.

**LINHA DE PESQUISA:** Equações Diferenciais.

**PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA:** Nível Mestrado.

**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:** Existência e Estabilidade de Órbitas Periódica da Equação de van der Pol-Mathieu.

**ORIENTADOR:** Prof. Dr. Márcio José Horta Dantas.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 28 de fevereiro de 2012, às 14h00min, pela seguinte Banca Examinadora:

**NOME**

**ASSINATURA**

Prof. Dr. Márcio José Horta Dantas  
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Prof. Dr. Masayoshi Tsuchida  
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Thiago Aparecido Catalan  
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Uberlândia-MG, 28 de fevereiro de 2012.

## Agradecimentos

Primeiramente a Deus, pela vida e por todas as oportunidades dadas.

A minha família pelo apoio, e aos meus pais, Manoel e Marley, pela dedicação durante todos os momentos de minha vida.

Ao meu orientador pelos ensinamentos, pela paciência, pela compreensão e incentivo, pois sem ele, talvez este trabalho não existisse.

Aos professores membros da banca examinadora por aceitarem o convite.

Aos colegas de pós-graduação, obrigada pela contribuição em meu aprendizado e pela amizade.

De uma maneira muito especial agradeço ao meu marido Henrique, que sempre me incentivou e em nenhum momento duvidou que este momento se tornasse realidade.

PEREIRA, F. A. S. G. *Existência e Estabilidade de Órbitas Periódicas da Equação de van der Pol-Mathieu*. 2012. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

## Resumo

Neste trabalho alguns resultados sobre existência e estabilidade de soluções periódicas da equação de van der Pol-Mathieu são estudados. Por meio do Teorema da Média é provado, sob condições adequadas, que esta equação possui duas órbitas periódicas assintoticamente estáveis. Além disso é obtida a existência de cônicas invariantes no plano de fase desta equação.

*Palavras-chave:* Método da Média, Órbitas Periódicas, Estabilidade, Curvas Invariantes.

PEREIRA, F. A. S. G. *Existence and Stability of Periodic Orbits of van der Pol-Mathieu Equation* 2010. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

### Abstract

In this work some existence and stability results of periodic orbits of van der Pol-Mathieu Equation are studied. By using the Averaging Theorem we are able to prove, under mild conditions, the existence of two asymptotically stable periodic orbits of this equation. Moreover, the existence of invariant quadrics can be settled in plane phase of this equation.

*Keywords:* Averaging Theorem, Periodic Orbits, Stability, Invariant Curves.

# Sumário

Resumo	vi
Abstract	vii
Introdução	1
<b>1 Equações Diferenciais Ordinárias</b>	<b>2</b>
1.1 Definições Básicas . . . . .	2
1.2 Estabilidade de Pontos de Equilíbrio . . . . .	7
1.3 Estabilidade de Órbitas Periódicas . . . . .	9
1.4 A equação de van der Pol e a equação de Mathieu. . . . .	9
<b>2 O Teorema da Média</b>	<b>12</b>
2.1 Definições Preliminares e o Resultado Principal . . . . .	12
2.2 Método da Variação dos Parâmetros . . . . .	16
<b>3 Equação de van der Pol-Mathieu</b>	<b>17</b>
3.1 Uma Pequena Motivação Física do Modelo . . . . .	17
3.2 Uma Reformulação da Equação de Van der-Pol Mathieu . . . . .	18
<b>4 Existência e Estabilidade dos Pontos de Equilíbrio da Equação da Média</b>	<b>22</b>
4.1 Existência . . . . .	22
4.2 Estabilidade . . . . .	24
4.2.1 Estudo da estabilidade do ponto de equilíbrio $(0, 0)$ . . . . .	24
4.2.2 Estudo da estabilidade do ponto de equilíbrio $(A, B)_+^{\text{antisimétrico}}$ . . . . .	25
4.2.3 Estudo da estabilidade do ponto de equilíbrio $(A, B)_+^{\text{simétrico}}$ . . . . .	25
4.3 Amplitude das Órbitas Periódicas . . . . .	26
<b>5 Curvas Invariantes da Equação da Média</b>	<b>28</b>
5.1 Quádricas Invariantes . . . . .	28
5.2 Planos de Fase da Equação da Média . . . . .	31
5.2.1 Elipse Invariante: Caso 1 . . . . .	31
5.2.2 Elipse Invariante: Caso 2 . . . . .	32
5.2.2.1 Cálculo do Período da Órbita Periódica . . . . .	33
5.2.3 Hipérbole Invariante . . . . .	35
<b>6 Conclusões</b>	<b>36</b>



# Introdução

Em diversos modelos matemáticos originários tanto da Engenharia Mecânica como da Física Teórica, tem-se de levar em conta não linearidades das forças ou campos envolvidos na situação concreta dada. Sem isto os modelos obtidos não seriam realistas. Além disto, também há contextos onde além das interações não lineares temos excitações paramétricas. Isto torna o modelo, do ponto de vista da Dinâmica, complexo e interessante. No estudo de plasmas com poeira, (*"dusty plasmas"*) , como também na investigação da dinâmica de sistemas microeletromecânicos, conhecidos também por sua sigla em Inglês **MEMS** , encontramos fenômenos onde tal situação ocorre. A investigação de tais problemas nos leva necessariamente ao estudo da equação de van der Pol-Mathieu.

O objetivo dessa dissertação é expor os resultados do artigo [7] o qual envolve exatamente a equação de van der Pol-Mathieu. Especificamente vamos estudar a existência e estabilidade de órbitas periódicas dessa equação seguindo a abordagem do Teorema da Média.

Para isso, começamos no Capítulo 1 com algumas definições básicas da Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias, focando nos conceitos de estabilidade e ciclo limite. No Capítulo 2 enunciamos o Teorema da Média e o exploramos com alguns exemplos. No Capítulo 3 iniciamos o estudo da equação de van der Pol-Mathieu, dando uma motivação física e uma reformulação dessa equação para o uso do Teorema da Média. No Capítulo 4 estudamos a existência e estabilidade dos pontos de equilíbrio da equação da média obtida da equação de van der Pol-Mathieu. Finalmente no Capítulo 5 mostramos a existência de quádras invariantes e plotamos os planos de fase da equação da Média.

É importante ressaltar que as computações algébricas e numéricas e vários gráficos foram realizados utilizando o software Maxima 5.21.1. Esse software é livre e de código aberto, podendo ser efetuado o download nas páginas da internet:

<http://maxima.sourceforge.net>

e

<http://wxmaxima.sourceforge.net>.

Franciele Alves da Silveira Gonzaga Pereira  
Uberlândia-MG, 28 de fevereiro de 2012.

# Capítulo 1

## Equações Diferenciais Ordinárias

No presente capítulo apresentaremos alguns conceitos e resultados da teoria qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias que serão necessários ao longo desse trabalho.

### 1.1 Definições Básicas

Seja  $W$  um subconjunto aberto do  $\mathbb{R}^n$  e  $f : W \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma aplicação lipschitziana.

Considere a equação diferencial

$$x' = f(x) \quad (1.1)$$

a qual está associada ao campo vetorial definido pela aplicação  $f$ , e reciprocamente o campo vetorial  $f$  está associado a equação diferencial (1.1).

As soluções desta equação diferencial, isto é, as aplicações diferenciáveis  $u : I \subset \mathbb{R} \rightarrow W$  tais que

$$u'(t) = f(u(t)) \quad (1.2)$$

para todo  $t \in I$ , são chamadas **trajetórias** ou **curvas integrais** da aplicação  $f$ . Além disso se dado  $u_0 \in W$  existir uma solução de (1.2) tal que

$$u(0) = u_0, \quad (1.3)$$

dizemos que  $u$  satisfaz o problema de condição inicial dado por (1.2) e (1.3).

Pode-se provar que para cada  $y \in W$  existe uma única solução  $\varphi(t)$  de (1.1) definida em um intervalo maximal  $I_y \subset \mathbb{R}$  satisfazendo uma condição inicial  $\varphi(0) = y$ . Ressaltamos que um **intervalo maximal** significa um intervalo aberto contendo 0 e todos os intervalos  $J$  onde  $J$  é o domínio de uma outra função diferenciável, digamos  $v$ , satisfazendo (1.1) e  $v(0) = y$ .

Considere agora o conjunto  $\Omega = \{(t, y) : y \in W, t \in I_y\}$ , o qual foi provado em [1] no Teorema 2 do Capítulo 8, que é um aberto em  $\mathbb{R} \times W$ .

**Definição 1.1** A aplicação  $\phi : \Omega \rightarrow W$  definida por  $\phi(t, y) = \varphi(t)$  é denominada **fluxo** da equação diferencial (1.1).

**Notação:**  $\phi_t(y) := \phi(t, y)$ .

Em outras palavras podemos dizer que o fluxo da equação diferencial (1.1) é, para cada  $y \in W$  a solução  $u(t)$  de (1.1), tal que  $u(0) = y$  e é definida no intervalo maximal  $I_y$ .

A imagem da solução  $\varphi(t)$  da equação diferencial (1.1) é denominada de **órbita**. O conjunto dessas órbitas nos dá a representação gráfica do campo vetorial  $f$  associado à equação diferencial (1.1). Chamamos esta representação gráfica de **espaço de fase**.

Em consequência da existência e unicidade de soluções de (1.1) definidas em intervalos máximos, temos que as órbitas que compõem o espaço de fase são disjuntas ou coincidem, podendo cada uma ser:

1. Imagem difeomorfa de um intervalo aberto de  $\mathbb{R}$  ;
2. Um ponto;
3. Difeomorfa a um círculo.

No segundo caso a órbita chama-se órbita **singular** ou órbita **periódica trivial**, no terceiro caso a órbita chama-se **fechada** ou **periódica**.

As soluções de (1.1) cujas órbitas são singulares, são as aplicações constante  $\varphi(t) = \bar{x}$ . Observe que se  $\bar{x}$  é solução de (1.1), então  $f(\bar{x}) = 0$ . Os pontos  $\bar{x} \in W$  com essa propriedade tem a seguinte definição

**Definição 1.2** Um ponto  $\bar{x} \in W$  tal que  $f(\bar{x}) = 0$  é chamado **ponto de equilíbrio** de (1.1).

Um ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  também pode ser chamado de **ponto estacionário** ou **ponto fixo**, isso se deve ao fato de que o campo vetorial  $f$  permanece fixo mesmo com a mudança da variável  $t$ .

Um caso particular da equação diferencial (1.1) em  $\mathbb{R}^2$  é o caso em que  $f(x)$  é linear, e o único ponto de equilíbrio é o ponto  $(0,0)$ . Neste caso, podemos obter informações qualitativas importantes sobre as soluções da equação diferencial  $x' = Ax$  a partir dos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  de  $A$ , os quais são reais ou complexos conjugados.

Distinguimos os seguintes casos:

1. Os autovalores são reais e tem os mesmo sinal.

1.1- Se  $\lambda_1 = \lambda_2$  e o operador  $A$  é diagonalizável, o ponto de equilíbrio  $(0,0)$  é chamado de **foco**. Se o operador  $A$  não é diagonalizável, o ponto de equilíbrio  $(0,0)$  é chamado de **nó impróprio**.

1.2- Se  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ , o ponto de equilíbrio  $(0,0)$  é chamado de **nó**.

2. Os autovalores são reais e tem sinais opostos. Neste caso o ponto de equilíbrio  $(0,0)$  é um **ponto de sela**.

3. Os autovalores são complexos conjugados  $\lambda_1 = a + ib$  e  $\lambda_2 = a - ib$  com  $b \neq 0$ .

3.1- Se a parte real for não nula, o ponto de equilíbrio  $(0,0)$  é um **foco espiral**.

3.2- Se os autovalores são imaginários puros, o ponto de equilíbrio  $(0,0)$  é um **centro**.

Os pontos de equilíbrio classificados como: foco, nó, nó impróprio e foco espiral, ainda serão classificados como estável ou instável, dependendo do sinal dos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Esse conceito de estabilidade será definido posteriormente.

Nas figuras seguintes estão esboçados os planos de fase que ilustram os casos citados.

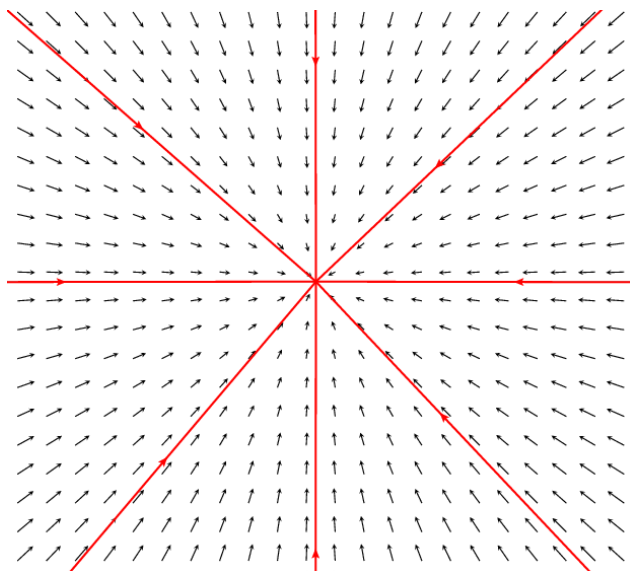


Figura 1.1: Foco Estável

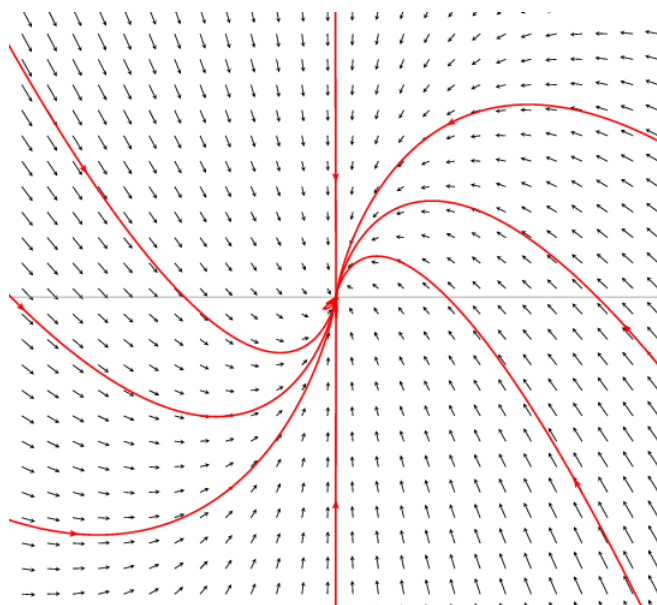


Figura 1.2: Nó Impróprio Estável

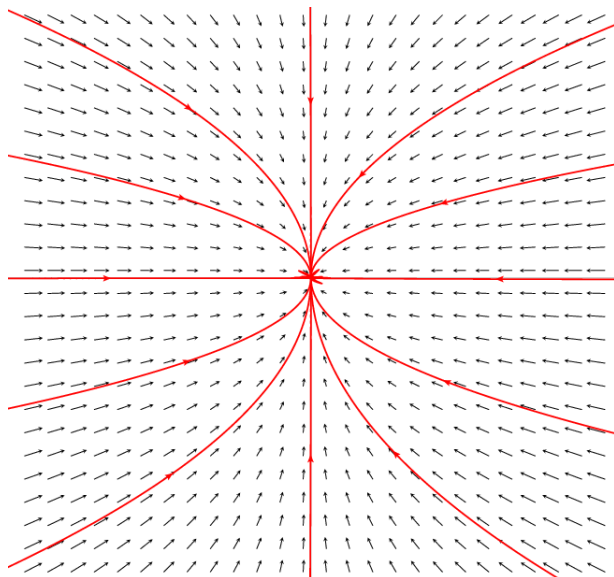


Figura 1.3: Nó Estável

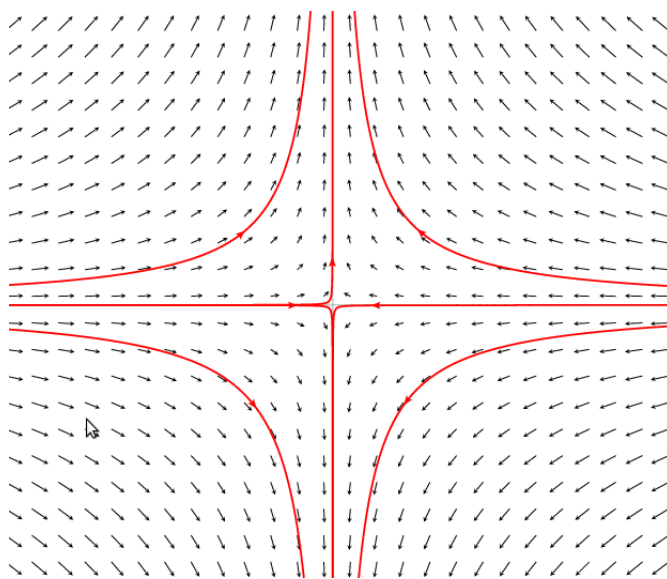


Figura 1.4: Ponto de Sela

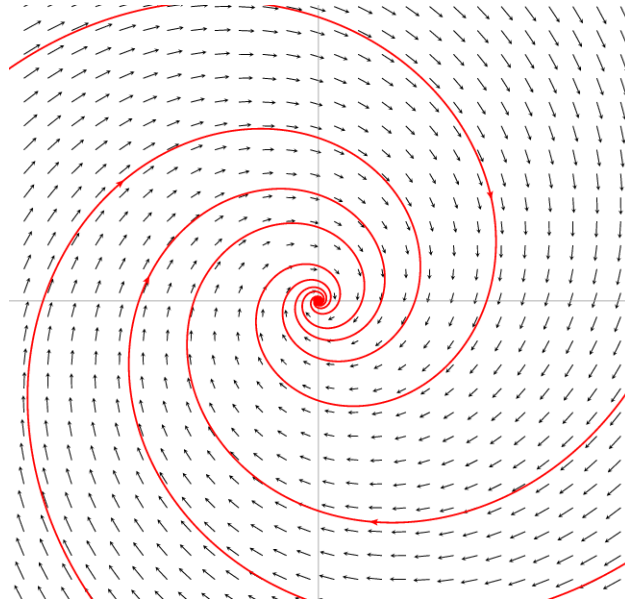


Figura 1.5: Foco Espiral Estável

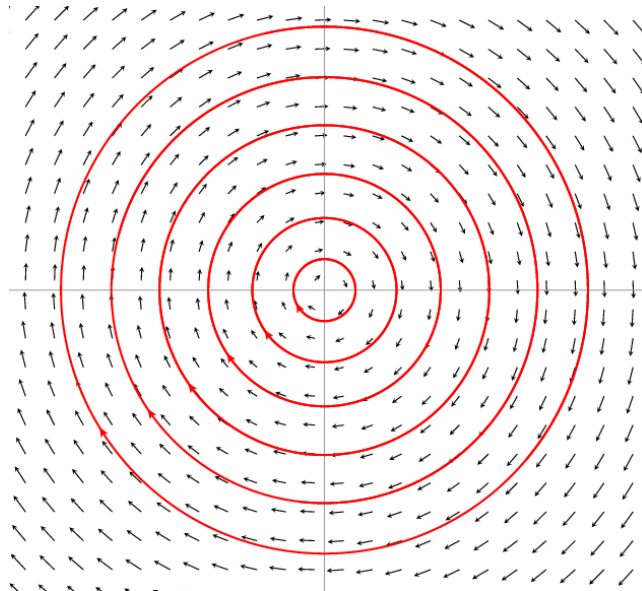


Figura 1.6: Centro

Se a equação diferencial  $x' = f(x)$  for não linear e admitir um ponto de equilíbrio hiperbólico  $\bar{x}$  (conceito que introduziremos adiante), ainda assim podemos obter informações qualitativas sobre suas soluções a partir dos autovalores através do seguinte sistema linearizado

$$y' = Ay$$

com  $A = Df(\bar{x})$ . Observe que nesse sistema o ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  de  $x' = f(x)$  corresponde com o ponto de equilíbrio  $(0, 0)$  de  $y' = Ay$ .

Assim teremos que todas as discussões anteriores do sistema linear  $x' = Ax$  com  $\det A \neq 0$ , continuarão válidas numa vizinhança do ponto de equilíbrio hiperbólico  $\bar{x}$  para o sistema não linear  $x' = f(x)$ .

A definição a seguir, nos diz quando uma solução de (1.1) é periódica.

**Definição 1.3** *Seja  $x(t)$  uma solução de (1.1). Dizemos que  $x(t)$  é uma **solução periódica** de (1.1) se existir um número positivo  $T$  tal que*

$$x(t + T) = x(t)$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Se  $\bar{x}$  for um ponto de equilíbrio, então a solução  $x(t) = \bar{x}$  é denominada *solução periódica trivial*.

A imagem de uma solução periódica é exatamente o que chamamos órbita periódica, sendo  $T$  o período dessa órbita.

Como um exemplo de órbitas periódicas considere a equação

$$x'' + \sin x = 0 \quad (1.4)$$

a qual descreve matematicamente o comportamento de um pêndulo. O espaço de fase dessa equação representado pela figura a seguir nos fornece uma família de órbitas periódicas.

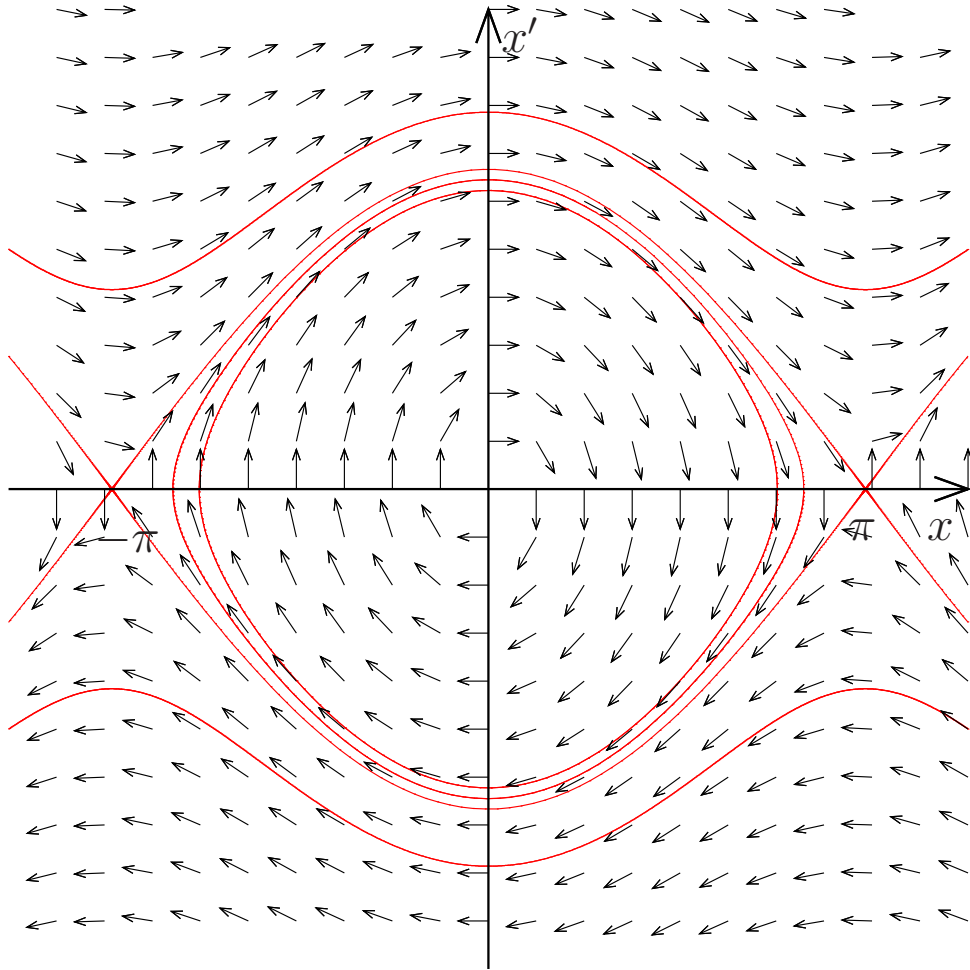


Figura 1.7: Espaço de fase da equação do Pêndulo.

As órbitas periódicas e os pontos de equilíbrio desempenham um papel importante no comportamento das soluções em suas vizinhanças, como veremos a seguir, ambos podem ser classificados em estável ou instável.

## 1.2 Estabilidade de Pontos de Equilíbrio

**Definição 1.4** *Seja  $\bar{x} \in W$  um ponto de equilíbrio de (1.1). Então  $\bar{x}$  é um ponto de equilíbrio estável se para toda vizinhança  $V$  de  $\bar{x}$  em  $W$  existe uma vizinhança  $V_1$  de  $\bar{x}$  em  $V$  tal que toda solução  $x(t)$  com  $x(0)$  em  $V_1$  é definida para todo  $t > 0$  e  $x(t) \in V$  para todo  $t > 0$ .*

A Figura 1.8 ilustra o comportamento de uma solução de (1.1) numa vizinhança adequada de um ponto de equilíbrio estável  $\bar{x}$ .

**Definição 1.5** Se  $\bar{x}$  é um equilíbrio estável e  $V_1$ , definido como na definição anterior, pode ser escolhido de tal forma que para toda solução  $x(t)$  cuja condição inicial está no aberto  $V_1$  satisfaça  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \bar{x}$ , então o ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  diz-se *assintoticamente estável*.

A Figura 1.8 ilustra o comportamento de uma solução de (1.1) numa vizinhança adequada de um ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  assintoticamente estável.

Como um exemplo de um equilíbrio que é estável mas não é assintoticamente estável tomemos a equação diferencial

$$X' = AX; \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.5)$$

Vemos que suas soluções são

$$\begin{cases} x_1(t) = x_1(0) \cos(tb) - x_2(0) \sin(tb), \\ x_2(t) = x_1(0) \sin(tb) + x_2(0) \cos(tb). \end{cases} \quad (1.6)$$

Observe que  $(0,0)$  é um ponto de equilíbrio de  $X' = AX$  e a solução  $X(t) = (x_1(t), x_2(t))$  se aproxima de  $(0,0)$ , quando  $(x_1(0), x_2(0)) \rightarrow (0,0)$ , no entanto a órbita dessa solução é uma cônica elíptica, a qual não tende a  $(0,0)$ . Portanto  $(0,0)$  é um equilíbrio estável, mas não é assintoticamente estável.

**Definição 1.6** Um ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  que não é estável é chamado *instável*. Isto significa que existe uma vizinhança  $V$  de  $\bar{x}$  tal que para toda vizinhança  $V_1$  de  $\bar{x}$  em  $W$ , existe pelo menos uma solução  $x(t)$  que começa em  $x(0) \in V_1$ , cuja órbita positiva não está inteiramente contida em  $V$ .

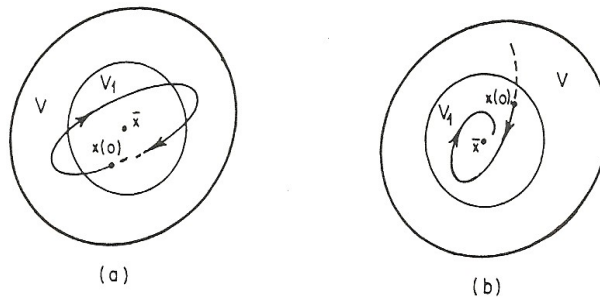


Figura 1.8: (a) Estabilidade; (b) Estabilidade assintótica

O teorema que vamos enunciar a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [1] nas páginas 187 a 190, nos permite classificar a estabilidade de um ponto de equilíbrio.

**Teorema 1.1** Seja  $\bar{x} \in W$  um ponto de equilíbrio do sistema (1.1). Seja a matriz  $A = Df(\bar{x})$ .

- (i) Se todos os autovalores da matriz  $A$  tem parte real negativa, então o ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  é *assintoticamente estável*.
- (ii) Por outro lado se algum dos autovalores da matriz  $A$  tem parte real positiva, então o ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  é *instável*.

Um ponto de equilíbrio  $\bar{x}$  de  $x' = f(x)$  é denominado **hiperbólico** se todos os autovalores de  $Df(\bar{x})$  tem parte real não nula. Como consequência um ponto de equilíbrio hiperbólico é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável ou instável.



### 1.3 Estabilidade de Órbitas Periódicas

**Definição 1.7** *Seja  $x(t)$  uma solução periódica de (1.1) e seja  $\gamma \subset W$  a órbita periódica correspondente a essa solução  $x(t)$ . Dizemos que  $\gamma$  é assintoticamente estável se para todo conjunto aberto  $U_1 \subset W$ , com  $\gamma \subset U_1$  existe um conjunto aberto  $U_2$ ,  $\gamma \subset U_2 \subset U_1$ , tal que  $\phi_t(U_2) \subset U_1$  para todo  $t > 0$  e  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\phi_t(x) - \gamma\| = 0$ . Caso esta condição não esteja satisfeita dizemos que a órbita periódica é instável.*

Em outras palavras, uma órbita periódica  $\gamma$  é assintoticamente estável se dada uma órbita com valor inicial suficientemente próximo de algum ponto de  $\gamma$ , esta órbita, mesmo com o decorrer do tempo, continua suficientemente próxima de  $\gamma$ .

O teorema a seguir nos permite classificar a estabilidade de órbitas periódicas, esse teorema pode ser encontrado em [1] na página 277.

**Teorema 1.2** *Seja  $\gamma$  uma órbita periódica de período  $T$  da equação diferencial (1.1). Seja  $p \in \gamma$ . Se  $n - 1$  dos autovalores da matriz correspondente a aplicação linear  $D\phi_T(p) : W \rightarrow \mathbb{R}^n$  em valor absoluto for menor que 1, então  $\gamma$  é uma órbita periódica assintoticamente estável.*

No plano, uma órbita periódica assintoticamente estável estudada é o ciclo limite, esses foram definidos por Poincaré. Porém para definirmos um ciclo limite, precisamos antes definirmos um conjunto limite.

**Definição 1.8** *Seja a aplicação diferencial definida como em (1.1). Seja  $x \in W$ . Diz-se que  $y$  é um  $\omega$ -limite de  $x$ , se existe uma sequência  $\{t_n\}$ ,  $t_n \rightarrow \infty$  tal que  $\phi(t_n, x) \rightarrow y$ , onde  $\phi$  é o fluxo de  $f$ . Se  $\phi(t_n, x) \rightarrow y$  quando  $t_n \rightarrow -\infty$ , então dizemos que  $y$  é um  $\alpha$ -limite de  $x$ .*

Por um **conjunto limite** entendemos o conjunto  $L_\omega(y)$  de todos os  $\omega$ -limite e o conjunto  $L_\alpha(z)$  de todos os  $\alpha$ -limite. Prova-se que o conjunto  $L_\omega(y)$  e o conjunto  $L_\alpha(z)$  é um conjunto fechado e invariante sobre o fluxo da equação diferencial.

**Definição 1.9** *Um ciclo limite é uma órbita fechada  $\gamma$  tal que  $\gamma \subset L_\omega(x)$  ou  $\gamma \subset L_\alpha(x)$  para algum  $x \notin \gamma$ . No primeiro caso  $\gamma$  é chamada ciclo  $\omega$ -limite e no segundo caso ciclo  $\alpha$ -limite.*

Do ponto de vista geométrico um  $\omega$ -ciclo limite  $\gamma$  indica a existência de uma trajetória espiral aproximando de  $\gamma$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Por outro lado um  $\alpha$ -ciclo limite  $\gamma$  também indica a existência de uma trajetória espiral aproximando de  $\gamma$  quando  $t \rightarrow -\infty$ .

O conhecido Teorema de Poincaré-Bendixson nos fornece um caminho para provarmos a existência de ciclos limites quando algumas condições adequadas forem satisfeitas, entretanto não exploraremos esse aspecto aqui. A demonstração desse Teorema poder ser encontrada em [1] no Capítulo 11 e em [9] no Capítulo 4.

**Teorema 1.3 (Teorema Poincaré-Bendixson)** *Um conjunto limite compacto não-vazio de  $f : W \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o qual não contém pontos de equilíbrio é uma órbita periódica.*

### 1.4 A equação de van der Pol e a equação de Mathieu.

A equação de van der Pol-Mathieu que analisaremos no Capítulo 3 é uma equação híbrida, combinando a equação de van der Pol e a equação de Mathieu. Assim para um melhor entendimento dessa equação vamos analisar separadamente a equação de van der Pol e a equação de Mathieu.

Por volta de 1920, o engenheiro elétrico e físico holandês Balthasar van der Pol propôs um modelo chamado de oscilador de van der Pol para modelar o funcionamento de um circuito elétrico que existia nos primeiros aparelhos de rádio. O modelo consiste, basicamente, de uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, que pode ser escrita como:

$$x''(t) - (\alpha - \beta x^2(t)) x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0. \quad (1.7)$$

Até hoje, extensões do modelo de van der Pol são comuns em problemas reais e modelos mais gerais de sistemas dinâmicos tem como base sua formulação.

O termo  $(\alpha - \beta x^2(t))$  faz com que as oscilações com grande amplitude decaiam e que osciladores com pequena amplitude cresçam. Isso leva o sistema a uma oscilação auto-sustentada (um ciclo limite) em que a energia dissipada e a energia ganha, num período, se equivalem.

Foi provado por Liénard que, sob certas condições, o oscilador de van der Pol sempre tende a um ciclo-limite, sendo esta a principal característica dos sistemas modelados dinamicamente pela equação de van der Pol. Em [1], na Seção 3 do Capítulo 10, é dada uma demonstração da existência do ciclo-limite para a equação de van der Pol. Pode se ter uma visualização dessa propriedade através da figura (1.9), a qual mostra o espaço de fase da equação (1.7) com os parâmetros  $\alpha = \beta = \omega_0 = 1$ .

Observe que independentemente do ponto inicial, as soluções sempre tendem para uma única curva que corresponde à solução periódica quando o tempo tende ao infinito.

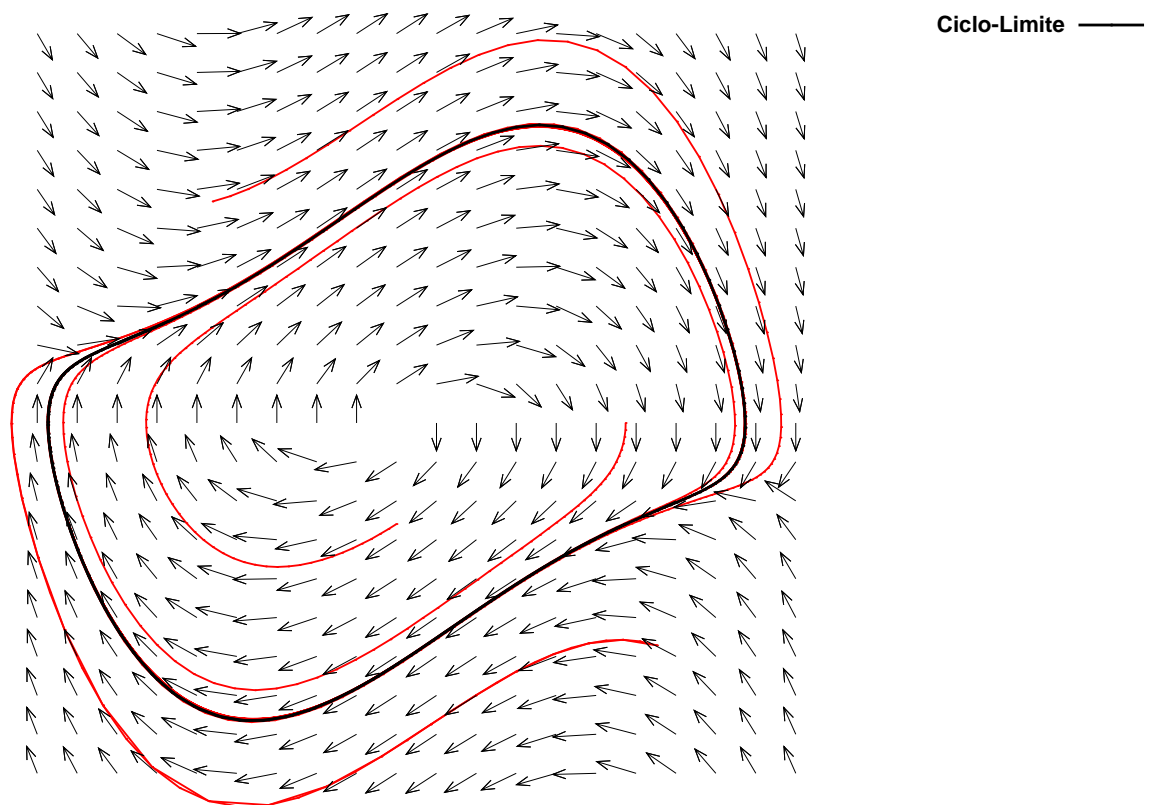


Figura 1.9: Ciclo Limite da Equação de van der Pol

Em 1868, E.L. Mathieu ao analisar a propagação de uma onda numa membrana com condição de contorno definida ao longo de uma elipse obteve a seguinte equação

$$x''(t) + \omega_0^2(1 + h \cos(\gamma t)) x(t) = 0 \quad (1.8)$$

onde  $\omega_0$  é a frequência natural de oscilação do sistema,  $\gamma$  é a frequência com a qual o parâmetro oscilante varia e  $h$  é a amplitude de variação da frequência natural.

Atualmente essa equação modela osciladores lineares em engenharia os quais estão sujeitos a modulações de frequência.

Veja que para  $\gamma = \frac{2\omega_0}{n}$ , sendo  $n$  um número inteiro, a amplitude das oscilações aumenta rapidamente. Neste caso dizemos que o sistema encontra-se em um regime de instabilidade paramétrica. Fora desse domínio não ocorre nenhum aumento de amplitude, permanecendo constante a amplitude de oscilação.

# Capítulo 2

## O Teorema da Média

Neste capítulo vamos desenvolver um estudo sobre o Teorema da Média, o qual será aplicado na análise da equação (3.2). A importância deste método deve-se ao fato de que, com esta abordagem, podemos reduzir a investigação da existência e estabilidade de soluções periódicas de sistemas não autônomos do tipo (2.1) em uma investigação da estabilidade de pontos de equilíbrio de um sistema autônomo adequado.

A idéia básica pode ser datada por volta do século XVIII, quando em 1788, Lagrange formulou o problema gravitacional de três corpos como uma perturbação no problema gravitacional de dois corpos. Até o fim do século XIX esse resultado foi muito aplicado, de forma não rigorosa, em Mecânica Celeste. Por volta de 1920 Van der Pol promoveu o seu uso em equações diferenciais originárias da teoria de circuitos eletrônicos. Somente em 1928, a primeira prova da validade foi dada por Fatou.

Em 1930 esse método tornou-se gradualmente um dos métodos clássicos na análise de osciladores fracamente não-lineares. Tal abordagem foi estabelecida após pesquisas sistemáticas feitas por matemáticos da Escola Russa como por exemplo Krylov, Bogoliubov, Mitropolsky.

Existem muitas versões sobre o Teorema da Média, a nossa será baseada na versão dada por [2] e [3], que consiste no estudo de sistemas da forma

$$x'(t) = \varepsilon f(x(t), t, \varepsilon); \quad x \in U \subseteq \mathbb{R}^n, \quad 0 < \varepsilon \ll 1 \quad (2.1)$$

onde  $f : U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$  é  $C^r$ ,  $r \geq 2$ , limitada em conjuntos limitados, e de período  $T > 0$  na variável  $t$  e  $U$  é um subconjunto que é um aberto do  $\mathbb{R}^n$ .

### 2.1 Definições Preliminares e o Resultado Principal

Definimos a média de  $f$  como sendo

$$\bar{f}(z) = \frac{1}{T} \int_0^T f(z, s, 0) ds, \quad (2.2)$$

onde  $z \in U$ .

**Definição 2.1** *A Equação da Média para sistemas da forma (2.1) é definida por*

$$y'(t) = \varepsilon \bar{f}(y(t)) \quad (2.3)$$

**Definição 2.2** *Seja  $p : U \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ , onde  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Dizemos que  $p$  é de ordem  $\varepsilon$  se existem  $c_0 > 0$  e  $\varepsilon_0 > 0$  tais que  $|p(x, t, \varepsilon)| < c_0 \varepsilon$  para todo  $(x, t) \in U \times \mathbb{R}$  e  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ . Indicamos isto por  $p = O(\varepsilon)$ .*

*Dizemos que  $p = O(\varepsilon)$  numa escala de tempo  $t \sim 1/\varepsilon$ , se existem  $c_1 > 0$ ,  $c_2 > 0$  e  $\varepsilon_1 > 0$  tais que  $|p(x, t, \varepsilon)| < c_1 \varepsilon$  para todo  $x \in U$ ,  $0 < t < c_2/\varepsilon$  e  $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ .*

Enunciaremos, agora, o principal resultado deste capítulo, cuja demonstração poder ser encontrada em [3].

**Teorema 2.1 (Teorema da Média)** : *Existe uma mudança de coordenadas  $x = y + \varepsilon \omega(y, t, \varepsilon)$  tal que nestas novas variáveis o sistema (2.1) torna-se*

$$y'(t) = \varepsilon \bar{f}(y) + \varepsilon^2 f_1(y, t, \varepsilon) \quad (2.4)$$

onde  $f_1$  é de período  $T$  em  $t$  e  $\bar{f}$  é dada por (2.2). Mais ainda

(i) *Se  $x_\varepsilon(t)$  e  $y_\varepsilon(t)$  são soluções de (2.1) e (2.3) respectivamente, com  $x(0) = x_0$  e  $y(0) = y_0$ , e  $|x_0 - y_0| = O(\varepsilon)$  então  $|x_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(t)| = O(\varepsilon)$  em uma escala de tempo  $t \sim 1/\varepsilon$ .*

(ii) *Se  $p_0$  é um ponto de equilíbrio hiperbólico de (2.3), então existe  $\varepsilon_0 > 0$  tal que, para todo  $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , (2.1) possui uma única órbita periódica*

$$\gamma_\varepsilon(t) = p_0 + O(\varepsilon) \quad (2.5)$$

do mesmo tipo de estabilidade de  $p_0$ .

De acordo com esse teorema, podemos inferir propriedades do sistema (2.1) pela compreensão da dinâmica do sistema de média (2.3), que é um sistema autônomo e provavelmente mais fácil de analisar, obtendo assim uma boa aproximação ao estudo de (2.1). Agora seguem alguns exemplos que motivam o teorema anterior.

### Exemplo 2.1

Considere a equação escalar

$$x'(t) = \varepsilon x(t) \sin^2(t) \quad (2.6)$$

Aqui temos um sistema da forma  $x'(t) = \varepsilon f(x(t), t, \varepsilon)$  onde  $f(x, t, \varepsilon) = x \sin^2(t)$  conforme descrito em (2.1). Logo calculando a média de  $f(x, t, \varepsilon)$  com relação a  $t$ , encontramos

$$\bar{f}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi z \sin^2(s) ds = \frac{z}{2}. \quad (2.7)$$

Assim o sistema autônomo da média é dado por

$$y'(t) = \varepsilon \bar{f}(y(t)) = \varepsilon \frac{y(t)}{2}. \quad (2.8)$$

É fácil verificar que esta equação tem como solução  $y_\varepsilon(t) = y_0 e^{\frac{\varepsilon t}{2}}$ . A solução exata de (2.6) com valor inicial  $x(0) = x_0$  é

$$x_\varepsilon(t) = x_0 e^{\varepsilon(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4})}. \quad (2.9)$$

Assumiremos que  $x_0$  é fixo ao longo do argumento a seguir, que  $0 < \varepsilon < 1$  e que o domínio de  $f$  na variável  $x$  é  $(-a, a)$ , sendo  $a > 0$  fixo. A condição  $|x_0 - y_0| = O(\varepsilon)$  significa que existe  $C > 0$  tal que

$$|x_0 - y_0| < C \varepsilon. \quad (2.10)$$

Também assumiremos que

$$x_0, y_0 \in \left(-\frac{a}{\sqrt{e}}, \frac{a}{\sqrt{e}}\right). \quad (2.11)$$

Notemos que se  $0 < t < \frac{1}{\varepsilon}$  segue das fórmulas explícitas que temos para  $x_\varepsilon(t)$  e  $y_\varepsilon(t)$  e de (2.11) que  $x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t) \in (-a, a)$ .

Vamos determinar, agora, uma estimativa para a diferença entre as duas soluções. Então

$$\begin{aligned} |x_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(t)| &= \left| e^{\frac{\varepsilon t}{2}} \left[ x_0 e^{\frac{-\varepsilon \operatorname{sen}(2t)}{2}} - y_0 \right] \right| = \\ &= \left| e^{\frac{\varepsilon t}{2}} \left[ x_0 e^{\frac{-\varepsilon \operatorname{sen}(2t)}{2}} - x_0 + x_0 - y_0 \right] \right| \leq e^{\frac{\varepsilon t}{2}} \left[ |x_0| \left| e^{\frac{-\varepsilon \operatorname{sen}(2t)}{2}} - 1 \right| + |x_0 - y_0| \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

Usando o Teorema do Valor Médio temos que

$$|e^x - 1| \leq e^a |x|. \quad (2.13)$$

para todo  $x \in [-a, a]$ . Como  $\frac{-\varepsilon \operatorname{sen}(2t)}{2} \in \left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right]$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , segue de (2.13) que

$$\left| e^{\frac{-\varepsilon \operatorname{sen}(2t)}{2}} - 1 \right| \leq e^{\frac{\varepsilon}{2}} \frac{\varepsilon}{2} |\operatorname{sen}(2t)| \leq \frac{\sqrt{e} \varepsilon}{2}. \quad (2.14)$$

Usando (2.14) e (2.10) em (2.12) obtemos

$$|x_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(t)| \leq e^{\frac{\varepsilon t}{2}} \left[ |x_0| \frac{\sqrt{e} \varepsilon}{2} + C \varepsilon \right] = \varepsilon e^{\frac{\varepsilon t}{2}} \left[ |x_0| \frac{\sqrt{e}}{2} + C \right]. \quad (2.15)$$

No intervalo  $0 < t < \frac{1}{\varepsilon}$  obtemos de (2.15) que

$$|x_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(t)| \leq \varepsilon \sqrt{e} \left[ |x_0| \frac{\sqrt{e}}{2} + C \right] = C_1 \varepsilon. \quad (2.16)$$

Ou seja

$$x_\varepsilon(t) - y_\varepsilon(t) = O(\varepsilon) \quad (2.17)$$

na escala de tempo  $t \sim \frac{1}{\varepsilon}$ .

A equação (2.8) tem o ponto de equilíbrio  $y = 0$ . Como a derivada do lado direito de (2.8) neste ponto é  $1/2$  segue do Teorema 1.1 que o ponto de equilíbrio  $y = 0$  é instável.

A equação (2.6) tem a órbita periódica trivial  $x \equiv 0$ , vamos provar que esta órbita trivial é instável. De (2.9) temos que se  $n \in \mathbb{N}$  então

$$x_\varepsilon(\pi n) = x_0 e^{\frac{\varepsilon \pi n}{2}}$$

Portanto se  $x_0 \neq 0$  temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|e^{\frac{\varepsilon \pi n}{2}} - 0\| = \infty$  o que implica que a órbita periódica trivial é instável de acordo com a Definição 1.7.

## Exemplo 2.2

Considere a equação não-linear

$$x'(t) = \varepsilon(x(t) - x^2(t)) \operatorname{sen}^2(t) \quad (2.18)$$

Temos que essa equação é da forma (2.1). Calculando a média da aplicação  $f$  definida pelo lado direito de (2.18) obtemos:

$$\bar{f}(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [(z - z^2) \operatorname{sen}^2(s)] ds = \frac{z - z^2}{2} \quad (2.19)$$

Logo o sistema autônomo da média é dado por

$$y'(t) = \varepsilon \bar{f}(y(t)) = \varepsilon \frac{y(t) - y^2(t)}{2} \quad (2.20)$$

Resolvendo-o encontramos que

$$y_\varepsilon(t) = \frac{y_0 e^{\frac{\varepsilon t}{2}}}{y_0 e^{\frac{\varepsilon t}{2}} - 1}, \quad (2.21)$$

sendo que  $y(0) = y_0$  e  $y_0 \neq 1$ .

A solução exata de (2.18) com condição inicial  $x(0) = x_0$  é

$$x_\varepsilon(t) = \frac{x_0 e^{\varepsilon\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right)}}{x_0 e^{\varepsilon\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right)} - 1} \quad (2.22)$$

A equação (2.20) tem os seguintes pontos de equilíbrio:  $y = 0$  e  $y = 1$ . Para o ponto de equilíbrio  $y = 0$  temos que

$$\left. \frac{d\left(\frac{y-y^2}{2}\right)}{dy} \right|_{y=0} = \frac{1}{2}$$

logo de acordo com o Teorema 1.1 o ponto de equilíbrio  $y = 0$  é instável. Para o ponto de equilíbrio  $y = 1$  temos que

$$\left. \frac{d\left(\frac{y-y^2}{2}\right)}{dy} \right|_{y=1} = -\frac{1}{2}$$

logo de acordo com esse mesmo Teorema 1.1 o equilíbrio  $y = 1$  é estável.

A equação (2.18) tem as seguintes órbitas periódicas  $x(t) \equiv 0$  e  $x(t) \equiv 1$ . Vamos provar que a órbita  $x(t) \equiv 0$  é instável e que a órbita  $x(t) \equiv 1$  é estável.

Veja que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{x_0 e^{\varepsilon\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right)}}{x_0 e^{\varepsilon\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right)} - 1} - 0 \right| = 1, \quad (2.23)$$

logo pela Definição 1.7 segue que  $x(t) \equiv 0$  é uma órbita periódica instável.

Como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{x_0 e^{\varepsilon\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right)}}{x_0 e^{\varepsilon\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right)} - 1} - 1 \right| = \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{x_0 e^{\varepsilon\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right)} - 1} \right| = 0 \quad (2.24)$$

temos pela mesma Definição 1.7 que  $x(t) \equiv 1$  é uma órbita periódica estável.

A prova de que (2.17) também é válida neste exemplo segue linha de argumentação análoga ao do caso anterior mas não o faremos aqui.

Com esses dois exemplos, onde as soluções das equações dadas são facilmente calculadas, podemos verificar explicitamente o que nos diz o Teorema da Média, e concluirmos assim que, com o uso desse teorema, admitindo algumas condições, podemos transformar a investigação sobre a existência e estabilidade de órbitas periódicas de sistemas não autônomos, com dependência periódica em relação ao tempo, em uma pesquisa sobre a existência e estabilidade de pontos de equilíbrios do sistema (2.3), que é claramente mais simples que o original. Nisto temos uma das grandes vantagens do Teorema da Média.

## 2.2 Método da Variação dos Parâmetros

É bem conhecido que vários problemas envolvendo oscilações não-lineares reduzem-se ao seguinte caso

$$x'(t) = A(t)x(t) + \varepsilon g(x(t), t), \quad x(0) = x_0 \quad (2.25)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \geq 0$ ,  $A(t)$  é uma aplicação linear  $n \times n$  contínua na variável  $t$  e  $g(x, t)$  é uma função suficientemente suave de  $t$  e  $x$ . Um importante caso que reduz-se à (2.25) é o caso de sistemas que envolvem equações diferenciais de segunda ordem como o seguinte:

$$x''(t) + \omega_0^2 x(t) = \varepsilon f(x(t), x'(t), t) \quad (2.26)$$

sendo  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de período  $T > 0$  na variável  $t$ .

Nesta seção vamos fazer uso do método da variação dos parâmetros a fim de escrevermos sistemas da forma (2.25) e (2.26) na forma do sistema (2.1).

No caso em que  $\varepsilon = 0$  em (2.25) obtemos um sistema linear o qual possui soluções linearmente independentes que são usadas para compor a matriz fundamental de  $x'(t) = A(t)x(t)$  que denotaremos por  $\Phi(t)$ . Façamos a seguinte mudança de variável  $x(t) = \Phi(t)y(t)$  então  $x'(t) = \Phi'(t)y(t) + \Phi(t)y'(t)$ . Como  $x(t)$  é solução de (2.25), temos

$$\Phi'(t)y(t) + \Phi(t)y'(t) = A(t)\Phi(t)y(t) + \varepsilon g(\Phi(t)y(t), t).$$

Ou seja

$$\Phi(t)y'(t) = (A(t)\Phi(t) - \Phi'(t))y(t) + \varepsilon g(\Phi(t)y(t), t). \quad (2.27)$$

Mas  $\Phi(t)$  é a matriz fundamental desse sistema, assim  $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ . Então podemos reescrever (2.27) da seguinte forma

$$y'(t) = \varepsilon \Phi^{-1}(t)g(\Phi(t)y(t), t). \quad (2.28)$$

O sistema (2.28) é conhecido como a *forma canônica de Lagrange*, que de maneira mais geral pode ser escrito por  $y'(t) = \varepsilon f(y(t), t)$ . Portanto, sem perda de qualquer generalidade, podemos escrever os sistemas da forma (2.25) na *forma canônica de Lagrange*, a qual é exatamente a forma (2.1).

No caso do sistema (2.26), por um cálculo simples, encontramos que a matriz fundamental  $\Phi(t)$  é dada por

$$\begin{bmatrix} \cos(\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) \\ -\sin(\omega_0 t)\omega_0 & \cos(\omega_0 t)\omega_0 \end{bmatrix}.$$

Assim o sistema (2.26) se reescreve como o seguinte sistema:

$$\begin{cases} y_1'(t) = \varepsilon f(y_1(t) \cos(\omega_0 t) + y_2(t) \sin(\omega_0 t), -y_1(t) \sin(\omega_0 t)\omega_0 \\ \quad + y_2(t) \cos(\omega_0 t)\omega_0, t) \frac{-\sin(\omega_0 t)}{\omega_0} \\ y_2'(t) = \varepsilon f(y_1(t) \cos(\omega_0 t) + y_2(t) \sin(\omega_0 t), -y_1(t) \sin(\omega_0 t)\omega_0 \\ \quad + y_2(t) \cos(\omega_0 t)\omega_0, t) \frac{\cos(\omega_0 t)}{\omega_0} \end{cases} \quad (2.29)$$

o qual está escrito exatamente na forma do sistema (2.1).



# Capítulo 3

## Equação de van der Pol-Mathieu

Na Seção 3.1 damos uma das possíveis motivações para a investigação da dinâmica da equação de van der Pol-Mathieu. Existem outras, como o estudo da dinâmica de sistemas microeletromecânicos, conhecidos pela sua sigla em Inglês como MEMS, para detalhes deste modelo ver a referência [4]. E na Seção 3.2 obtemos a Equação da Média (3.21) determinada por (3.5).

### 3.1 Uma Pequena Motivação Física do Modelo

Entendemos por plasma uma massa, por exemplo um gas, formado por um grande número de partículas eletricamente carregadas. As partículas negativamente carregadas são os elétrons de carga elétrica mínima indicada por  $-e$ . As partículas positivamente carregadas são os íons cuja carga é dada por  $Ze$ , onde  $Z$  é um número natural fixo. Tal tipo de gás é denominado de *plasma eletron-íon*. Assumiremos que ele é eletricamente neutro, isto é, a soma de todas as cargas elétricas é igual a zero. Em algumas situações em Astrofísica é interessante considerar a interação do plasma com partículas que possuem uma massa muito maior que a dos elétrons e íons do plasma original e que não são eletricamente neutras. O conjunto de tais partículas massivas é denominado de poeira. A carga elétrica das partículas de poeira é determinada pelo balanço entre a captura e emissão de partículas carregadas do plasma. Isto sugere que as partículas de poeira tem uma carga elétrica que varia com o tempo.

Enfim, vamos listar, de forma mais precisa mas ainda assim qualitativamente, algumas das principais características físicas deste modelo:

- As partículas de poeira aumentam ou diminuem sua carga elétrica por absorção ou emissão de eletrons.
- As partículas de poeira estão uniformemente distribuídas na região.

Se denotarmos por  $q_d(t)$  a carga de um grão de poeira e considerando os pressupostos anteriores podemos interpretar esta quantidade como sendo  $-Z_d(t)$  e sendo  $Z_d(t)$  o número de elétrons absorvidos pelo grão de poeira no instante  $t$ . Como aproximação podemos também assumir o seguinte

- $q_d(t)$  varia de forma contínua e periódica,

Um dos casos mais simples satisfazendo a última condição seria assumir que

$$q_d(t) = q_0 \cos(1 + h \cos(\gamma t)), \quad (3.1)$$

onde  $q_0$ ,  $h$ ,  $\gamma$  são constantes positivas. Como não é um dos objetivos desta dissertação fornecer uma detalhada dedução das equações resultantes a partir dos pressupostos anteriores, daremos a equação resultante em sua forma adimensional que é a seguinte:

$$x''(t) - (\alpha - \beta x^2(t)) x'(t) + \omega_0^2(1 + h \cos(\gamma t)) x(t) = 0 \quad (3.2)$$

onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\omega_0$  são números não negativos. Uma dedução detalhada de (3.2) a partir de princípios físicos básicos e do modelo anterior é dada em [5]. A equação (3.2) é denominada de equação de Van der Pol-Mathieu.

Observemos que se  $h = 0$  em (3.2) então obtemos

$$x''(t) - (\alpha - \beta x^2(t)) x'(t) + \omega_0^2 x(t) = 0, \quad (3.3)$$

que é conhecida como equação de Van der-Pol. E se  $\alpha = 0$  e  $\beta = 0$  em (3.2)

$$x''(t) + \omega_0^2(1 + h \cos(\gamma t)) x(t) = 0 \quad (3.4)$$

temos a equação de Mathieu.

## 3.2 Uma Reformulação da Equação de Van der-Pol Mathieu

Nesta seção vamos introduzir um pequeno parâmetro em (3.2) e partir daí escrever esta equação em uma forma adequada para o uso do Teorema da Média dado no Capítulo 2.

Para isto escreveremos  $\alpha = \varepsilon \alpha_0$ ,  $\beta = \varepsilon \beta_0$  e  $h = \varepsilon h_0$  com  $\alpha_0, \beta_0, h_0 \in \mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$  e  $0 < \varepsilon \ll 1$ . Então obtemos

$$x''(t) - \varepsilon(\alpha_0 - \beta_0 x^2(t)) x'(t) + \omega_0^2(1 + \varepsilon h_0 \cos(\gamma t)) x(t) = 0 \quad (3.5)$$

Observemos que se  $\varepsilon = 0$  então (3.5) torna-se a equação de um oscilador harmônico com frequência igual a  $\omega_0$ . Vamos assumir uma condição de ressonância entre a *frequência natural do sistema*, que é  $\omega_0$  e  $\gamma$ , que é denominada de *frequência de excitação paramétrica*. Tendo em vista o que ocorre em outros sistemas mecânicos, como por exemplo o pêndulo elástico ver por exemplo [6], é plausível considerar a ressonância 2 : 1. Assim teríamos  $\gamma = 2\omega_0$ . Devido às naturais imprecisões em uma situação física assumiremos um erro de ordem  $\varepsilon$  na ressonância anterior e também um parâmetro de controle deste erro, o qual será indicado por  $d$  e o denominaremos de *parâmetro de sintonia*. Este parâmetro, ao contrário dos anteriores, pode assumir valores negativos. Enfim assumiremos em nosso modelo a seguinte condição de ressonância aproximada

$$\gamma = 2(\omega_0 + d\varepsilon). \quad (3.6)$$

Substituindo (3.6) em (3.5) obtemos finalmente que

$$x''(t) - \varepsilon(\alpha_0 - \beta_0 x^2(t)) x'(t) + \omega_0^2(1 + \varepsilon h_0 \cos(2(\omega_0 + d\varepsilon)t)) x(t) = 0 \quad (3.7)$$

A fim de escrevermos a equação (3.7) na forma da equação (2.26) trabalharemos com uma nova escala de tempo  $\tau = (\omega_0 + d\varepsilon)t$ . Com esta substituição obtemos

$$x''\left(\frac{\tau}{\omega_0 + d\varepsilon}\right) - \varepsilon(\alpha_0 - \beta_0 x^2\left(\frac{\tau}{\omega_0 + d\varepsilon}\right)) x'\left(\frac{\tau}{\omega_0 + d\varepsilon}\right) + \omega_0^2(1 + \varepsilon h_0 \cos(2\tau)) x\left(\frac{\tau}{\omega_0 + d\varepsilon}\right) = 0 \quad (3.8)$$

Seja  $y(\tau) = x\left(\frac{\tau}{\omega_0 + d\varepsilon}\right)$ . Portanto a equação (3.8) torna-se

$$(\omega_0 + d\varepsilon)^2 y''(\tau) - \varepsilon(\alpha_0 - \beta_0 y^2(\tau)) (\omega_0 + d\varepsilon) y'(\tau) + \omega_0^2(1 + \varepsilon h_0 \cos(2\tau)) y(\tau) = 0 \quad (3.9)$$

Ou seja

$$y''(\tau) - \left( \frac{\varepsilon}{\omega_0 + d\varepsilon} \right) (\alpha_0 - \beta_0 y^2(\tau)) y'(\tau) + \left( \frac{\omega_0^2}{(\omega_0 + d\varepsilon)^2} \right) (1 + \varepsilon h_0 \cos(2\tau)) y(\tau) = 0. \quad (3.10)$$

Como

$$\frac{\varepsilon}{\omega_0 + d\varepsilon} = \frac{1}{\omega_0} \varepsilon - \frac{d}{\omega_0(\omega_0 + d\varepsilon)} \varepsilon^2 \quad e \quad \frac{\omega_0^2}{(\omega_0 + d\varepsilon)^2} = 1 - \frac{2d}{\omega_0} \varepsilon + \frac{d^2(2d\varepsilon + 3\omega_0)}{\omega_0(\omega_0 + d\varepsilon)^2} \varepsilon^2 \quad (3.11)$$

Substituindo as equações (3.11) em (3.10) temos

$$\begin{aligned} y''(\tau) + y(\tau) &= \frac{\varepsilon}{\omega_0} [(\alpha_0 - \beta_0 y^2(\tau)) y'(\tau) + (2d - h_0 \omega_0 \cos(2\tau)) y(\tau)] - \\ &\quad \frac{\varepsilon^2}{\omega_0} \left[ \left( \frac{d}{\omega_0 + d\varepsilon} \right) (\alpha_0 - \beta_0 y^2(\tau)) y'(\tau) - 2d h_0 \cos(2\tau) y(\tau) + \right. \\ &\quad \left. \left( \frac{d}{\omega_0 + d\varepsilon} \right)^2 (2d\varepsilon + 3\omega_0)(1 + \varepsilon h_0 \cos(2\tau)) y(\tau) \right]. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Seguindo o procedimento utilizado na Seção 2.2 vamos escrever a equação (3.12) na forma da equação (2.1). Façamos então a mudança de variável

$$y(\tau) = a(\tau) \cos\tau + b(\tau) \sin\tau \quad (3.13)$$

e

$$y'(\tau) = -a(\tau) \sin\tau + b(\tau) \cos\tau \quad (3.14)$$

Observemos que a derivada do lado direito da equação (3.13) deve produzir uma expressão igual ao do lado direito da equação (3.14). Isso implica que

$$a'(\tau) \cos\tau + b'(\tau) \sin\tau = 0. \quad (3.15)$$

Substituindo (3.13) e (3.14) na equação (3.12) e obtendo  $y''(\tau)$  de (3.14), temos

$$-a'(\tau) \sin\tau + b'(\tau) \cos\tau = \frac{\varepsilon}{\omega_0} f_1(a(\tau), b(\tau), \tau) + \frac{\varepsilon^2}{\omega_0} f_2(a(\tau), b(\tau), \tau, \varepsilon), \quad (3.16)$$

sendo

$$\begin{aligned} f_1(a(\tau), b(\tau), \tau) &= (\alpha_0 - \beta_0 (a(\tau) \cos\tau + b(\tau) \sin\tau)^2) (-a(\tau) \sin\tau + b(\tau) \cos\tau) + \\ &\quad (2d - h_0 \omega_0 \cos(2\tau)) (a(\tau) \cos\tau + b(\tau) \sin\tau). \end{aligned} \quad (3.17)$$

e

$$\begin{aligned} f_2(a(\tau), b(\tau), \tau, \varepsilon) &= \left( \frac{d}{\omega_0 + d\varepsilon} \right) (\alpha_0 - \beta_0 (a(\tau) \cos\tau + b(\tau) \sin\tau)^2) (-a(\tau) \sin\tau + \\ &\quad b(\tau) \cos\tau) - \left( 2d h_0 \cos(2\tau) - \left( \frac{d}{\omega_0 + d\varepsilon} \right)^2 (2d\varepsilon + 3\omega_0)(1 + \right. \\ &\quad \left. \varepsilon h_0 \cos(2\tau)) (a(\tau) \cos\tau + b(\tau) \sin\tau). \end{aligned} \quad (3.18)$$

As equações (3.16) e (3.15) podem ser consideradas como o seguinte sistema linear em  $a'(\tau)$  e  $b'(\tau)$ :

$$\begin{bmatrix} \cos(\tau) & \sin(\tau) \\ -\sin(\tau) & \cos(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a'(\tau) \\ b'(\tau) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\varepsilon}{\omega_0} f_1(a(\tau), b(\tau), \tau, \varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{\omega_0} f_2(a(\tau), b(\tau), \tau, \varepsilon) \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Resolvendo este sistema obtemos:

$$\begin{aligned} a'(\tau) &= \varepsilon \left( -\frac{1}{\omega_0} f_1(a(\tau), b(\tau), \tau) \sin(\tau) - \frac{\varepsilon}{\omega_0} f_2(a(\tau), b(\tau), \tau, \varepsilon) \sin(\tau) \right) \\ b'(\tau) &= \varepsilon \left( \frac{1}{\omega_0} f_1(a(\tau), b(\tau), \tau) \cos(\tau) + \frac{\varepsilon}{\omega_0} f_2(a(\tau), b(\tau), \tau, \varepsilon) \cos(\tau) \right), \end{aligned} \quad (3.20)$$

onde  $f_1(a(\tau), b(\tau), \tau)$  e  $f_2(a(\tau), b(\tau), \tau, \varepsilon)$  são dados por (3.17) e (3.18) respectivamente.

Observemos que (3.20) é um sistema não autônomo, de classe  $C^\infty$  e é  $2\pi$ -periódico na variável  $\tau$ . Além disto, (3.20) está na forma (2.1). Assim podemos aplicar o Teorema da Média a esse sistema de equações.

$$\begin{aligned} A'(\tau) &= \varepsilon \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{\omega_0} \left( \int_0^{2\pi} \alpha_0 A(\tau) \sin^2(s) ds - \int_0^{2\pi} \alpha_0 B(\tau) \cos(s) \sin(s) ds - \right. \right. \\ &\quad \int_0^{2\pi} \beta_0 A^3(\tau) \cos^2(s) \sin^2(s) ds - \int_0^{2\pi} \beta_0 2 A^2(\tau) B(\tau) \cos(s) \sin^3(s) ds + \\ &\quad \int_0^{2\pi} \beta_0 2 A(\tau) B^2(\tau) \cos^2(s) \sin^2(s) ds - \int_0^{2\pi} \beta_0 A(\tau) B^2(\tau) \sin^4(s) ds + \\ &\quad \int_0^{2\pi} \beta_0 B^3(\tau) \cos(s) \sin^3(s) ds - \int_0^{2\pi} 2 d A(\tau) \cos(s) \sin(s) ds - \\ &\quad \int_0^{2\pi} 2 d B(\tau) \sin^2(s) ds + \int_0^{2\pi} h_0 \omega_0 A(\tau) \cos(2s) \cos(s) \sin(s) ds + \\ &\quad \left. \left. \int_0^{2\pi} h_0 \omega_0 B(\tau) \cos(2s) \sin^2(s) ds + \int_0^{2\pi} \beta_0 A^2(\tau) B(\tau) \cos^3(s) \sin(s) ds \right) \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B'(\tau) = & \varepsilon \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{\omega_0} \left( - \int_0^{2\pi} \alpha_0 A(\tau) \cos(s) \sin(s) ds + \int_0^{2\pi} \alpha_0 B(\tau) \cos^2(s) ds + \right. \right. \\
& \int_0^{2\pi} \beta_0 A^3(\tau) \cos^3(s) \sin(s) ds - \int_0^{2\pi} \beta_0 A^2(\tau) B(\tau) \cos^4(s) ds + \\
& \int_0^{2\pi} \beta_0 2 A^2(\tau) B(\tau) \cos^2(s) \sin^2(s) ds - \int_0^{2\pi} \beta_0 2 A(\tau) B^2(\tau) \cos^3 \sin(s) ds - \\
& \int_0^{2\pi} \beta_0 B^3(\tau) \cos^2(s) \sin^2(s) ds + \int_0^{2\pi} 2 d A(\tau) \cos^2(s) ds + \\
& \int_0^{2\pi} 2 d B(\tau) \cos(s) \sin(s) ds - \int_0^{2\pi} h_0 \omega_0 A(\tau) \cos(2s) \cos^2(s) ds - \\
& \left. \left. \int_0^{2\pi} h_0 \omega_0 B(\tau) \cos(2s) \cos(s) \sin(s) ds + \int_0^{2\pi} \beta_0 A(\tau) B^2(\tau) \cos(s) \sin^3(s) ds \right) \right).
\end{aligned}$$

A Equação da Média (2.3) é então dada por

$$\begin{aligned}
A'(\tau) &= \frac{\varepsilon}{2\omega_0} \left[ \alpha_0 A(\tau) - \left( \frac{h_0 \omega_0}{2} + 2d \right) B(\tau) - \frac{\beta_0}{4} (A^2(\tau) + B^2(\tau)) A(\tau) \right] \\
B'(\tau) &= \frac{\varepsilon}{2\omega_0} \left[ \alpha_0 B(\tau) - \left( \frac{h_0 \omega_0}{2} - 2d \right) A(\tau) - \frac{\beta_0}{4} (A^2(\tau) + B^2(\tau)) B(\tau) \right]
\end{aligned} \tag{3.21}$$

No Capítulo 2 vimos que o Teorema da Média nos fornece condições suficientes para a investigação da existência e estabilidade de órbitas periódicas de sistemas não autônômos. Para isto é necessário obter a equação da média, que no nosso caso é dada por (3.21). A partir disto, será necessário a investigação da existência e estabilidade dos pontos de equilíbrio deste último sistema que será realizada no próximo capítulo.

# Capítulo 4

## Existência e Estabilidade dos Pontos de Equilíbrio da Equação da Média

Neste capítulo são obtidos os pontos de equilíbrio de (3.21). Como foi indicado em [7], nos trabalhos anteriores sobre a equação de van der Pol-Mathieu, particularmente [5] sómente a origem é investigada. Na Seção 4.2 a estabilidade destes pontos é investigada. Segue do Teorema da Média dado no Capítulo 2 que temos várias órbitas periódicas hiperbólicas. Com relação à amplitude destas órbitas, a menos de um erro de ordem  $\varepsilon$ , temos que as órbitas periódicas estáveis tem amplitude maior que as instáveis, como pode ser visto da Figura 4.1.

### 4.1 Existência

Os pontos de equilíbrio de (3.21) satisfazem o seguinte sistema de equações algébricas:

$$\begin{aligned}\alpha_0 A - \left(\frac{h_0 \omega_0}{2} + 2d\right) B - \frac{\beta_0}{4} (A^2 + B^2) A &= 0, \\ \alpha_0 B - \left(\frac{h_0 \omega_0}{2} - 2d\right) A - \frac{\beta_0}{4} (A^2 + B^2) B &= 0,\end{aligned}\tag{4.1}$$

é imediato que  $(A, B) = (0, 0)$  é uma solução de (4.1). Para encontrar as demais soluções multiplicaremos  $(4.1)_1$  por  $B$  e  $(4.1)_2$  por  $A$ . Assim obtemos

$$\begin{aligned}\alpha_0 AB - \left(\frac{h_0 \omega_0}{2} + 2d\right) B^2 - \frac{\beta_0}{4} (A^2 + B^2) AB &= 0, \\ \alpha_0 BA - \left(\frac{h_0 \omega_0}{2} - 2d\right) A^2 - \frac{\beta_0}{4} (A^2 + B^2) BA &= 0.\end{aligned}\tag{4.2}$$

Subtraindo a primeira equação de (4.2) pela segunda temos

$$\left(\frac{h_0 \omega_0}{2} + 2d\right) B^2 = \left(\frac{h_0 \omega_0}{2} - 2d\right) A^2.\tag{4.3}$$

A equação (4.3) tem soluções reais  $A, B$  se, e somente se, os coeficientes de  $A^2$  e  $B^2$  são não-negativos. Isto implica que

$$|d| \leq \frac{h_0 \omega_0}{4}.\tag{4.4}$$

Daqui em diante será assumido que a condição anterior é sempre satisfeita. Segue de (4.3) que

$$B = \pm \sqrt{\frac{\frac{h_0 \omega_0}{2} - 2d}{\frac{h_0 \omega_0}{2} + 2d}} |A|.\tag{4.5}$$

Para simplificar alguns cálculos, vamos assumir que

$$K = \sqrt{\frac{\frac{h_0\omega_0}{2} - 2d}{\frac{h_0\omega_0}{2} + 2d}}, \quad (4.6)$$

assim substituiremos (4.5) por

$$B = \pm K |A|. \quad (4.7)$$

Agora em (4.7) temos quatro casos,  $B = \pm K A$  com  $A > 0$  e também  $B = \pm K A$  no entanto com  $A < 0$ . Vamos fazer explicitamente sómente o caso  $B = K A$ ,  $A > 0$ , pois os outros são análogos. Substituindo então esta última equação em (4.1)<sub>1</sub> e usando (4.6) encontramos

$$\alpha_0 - \left(\frac{h_0\omega_0}{2} + 2d\right) K - \frac{\beta_0}{4} (1 + K^2) A^2 = 0. \quad (4.8)$$

Portanto

$$A = \sqrt{\frac{4}{\beta_0 h_0 \omega_0} \left( \alpha_0 - \sqrt{\frac{h_0^2 \omega_0^2}{4} - 4d^2} \right) \sqrt{\frac{h_0 \omega_0}{2} + 2d}}, \quad (4.9)$$

e

$$B = \sqrt{\frac{4}{\beta_0 h_0 \omega_0} \left( \alpha_0 - \sqrt{\frac{h_0^2 \omega_0^2}{4} - 4d^2} \right) \sqrt{\frac{h_0 \omega_0}{2} - 2d}}. \quad (4.10)$$

Para que o resultado anterior seja válido, naturalmente estaremos assumindo que a seguinte condição seja válida:

$$\Gamma := \sqrt{\frac{h_0^2 \omega_0^2}{4} - 4d^2} \leq \alpha_0. \quad (4.11)$$

Assim temos que o sistema (3.21) tem os seguintes pontos de equilíbrio:

$$(A, B) = (0, 0),$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}_{\pm}^{\text{simétrico}} &= \pm \sqrt{\frac{4}{\beta_0 h_0 \omega_0} \left( \alpha_0 - \sqrt{\frac{h_0^2 \omega_0^2}{4} - 4d^2} \right)} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{h_0 \omega_0}{2} + 2d} \\ \sqrt{\frac{h_0 \omega_0}{2} - 2d} \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}_{\pm}^{\text{antisimétrico}} &= \pm \sqrt{\frac{4}{\beta_0 h_0 \omega_0} \left( \alpha_0 + \sqrt{\frac{h_0^2 \omega_0^2}{4} - 4d^2} \right)} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{h_0 \omega_0}{2} + 2d} \\ -\sqrt{\frac{h_0 \omega_0}{2} - 2d} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Naturalmente para o par de pontos de equilíbrio simétricos é assumida a validade da condição (4.11). Esta condição pode ser reescrita como

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{h_0^2 \omega_0^2}{4} - \alpha_0^2} \leq |d|. \quad (4.13)$$

Portanto no caso de pontos de equilíbrio simétricos o parâmetro de sintonia em valor absoluto, é limitado tanto inferiormente, veja equação (4.13), como superiormente, veja equação (4.4). Já o par de pontos de equilíbrio anti-simétricos não impõe limite inferior no parâmetro de sintonia, sendo esse limitado apenas superiormente pela mesma equação (4.4)

## 4.2 Estabilidade

Agora vamos estudar a estabilidade dos pontos de equilíbrio do sistema de equações (3.21) a fim de investigarmos a existência e estabilidade de órbitas periódicas do sistema de equações (3.2). Para isto teremos de calcular as matrizes jacobianas associadas a cada um dos pontos de equilíbrio obtidos na Seção 4.1, assim como os seus respectivos autovalores.

Antes porém, vamos enfatizar que se somente a condição (4.4) for satisfeita teremos três pontos de equilíbrios do sistema de equações (3.21) e se as condições (4.4) e (4.11) forem simultaneamente satisfeitas teremos cinco pontos de equilíbrio do sistema (3.21). E finalmente se (4.4) e (4.11) não são válidas, só teremos a origem como um ponto de equilíbrio.

A matriz jacobiana para o sistema de equação (3.21) é dada por

$$J(A, B) = \frac{\varepsilon}{2\omega_0} \begin{bmatrix} \alpha_0 - \frac{\beta_0}{4}(3A^2 + B^2) & -\left(\frac{h_0\omega_0}{2} + 2d\right) - \frac{\beta_0}{2}AB \\ -\left(\frac{h_0\omega_0}{2} - 2d\right) - \frac{\beta_0}{2}AB & \alpha_0 - \frac{\beta_0}{4}(A^2 + 3B^2) \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

### 4.2.1 Estudo da estabilidade do ponto de equilíbrio $(0, 0)$

Para o ponto de equilíbrio  $(A, B) = (0, 0)$  temos

$$J(0, 0) = \frac{\varepsilon}{2\omega_0} \begin{bmatrix} \alpha_0 & -\left(\frac{h_0\omega_0}{2} + 2d\right) \\ -\left(\frac{h_0\omega_0}{2} - 2d\right) & \alpha_0 \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Os autovalores de  $J(0, 0)$  são raízes do polinômio característico

$$\det(J(0, 0) - \lambda I_2) = \frac{\varepsilon}{2\omega_0} \left( \lambda^2 - 2\alpha_0 \lambda + \left( \alpha_0^2 - \frac{h_0^2 \omega_0^2}{4} + 4d^2 \right) \right). \quad (4.16)$$

Assim encontramos que os autovalores de  $J(0, 0)$ , são

$$\lambda_1^0 = \frac{\varepsilon}{2\omega_0} \left( \alpha_0 + \sqrt{\frac{h_0^2 \omega_0^2}{4} - 4d^2} \right) = \frac{\varepsilon}{2\omega_0} (\alpha_0 + \Gamma)$$

e

$$\lambda_2^0 = \frac{\varepsilon}{2\omega_0} \left( \alpha_0 - \sqrt{\frac{h_0^2 \omega_0^2}{4} - 4d^2} \right) = \frac{\varepsilon}{2\omega_0} (\alpha_0 - \Gamma).$$

Veja que se a condição (4.4) não for satisfeita, então  $\left( \frac{h_0^2 \omega_0^2}{4} - 4d^2 \right) < 0$  e assim os autovalores de  $J(0, 0)$  serão complexos com parte real igual a  $\alpha_0 > 0$ , e neste caso o ponto de equilíbrio  $(0, 0)$  é um foco espiral instável.

Já se a condição (4.4) for satisfeita, temos dois casos a serem considerados: o primeiro é quando  $\sqrt{\frac{h_0^2 \omega_0^2}{4} - 4d^2} > \alpha_0$ , isto é, quando a condição (4.11) não for satisfeita. Nesse caso os autovalores serão reais com sinais opostos, e assim o equilíbrio  $(0, 0)$  é um ponto sela. No segundo caso quando (4.11) for satisfeita, os autovalores de  $J(0, 0)$  serão reais distintos e positivos, sendo o equilíbrio  $(0, 0)$  um nó instável.



### 4.2.2 Estudo da estabilidade do ponto de equilíbrio $(A, B)_+^{\text{antisimétrico}}$

Para o ponto de equilíbrio

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}_+^{\text{antisimétrico}} = \sqrt{\frac{4}{\beta_0 h_0 \omega_0} \left( \alpha_0 + \sqrt{\frac{h_0^2 \omega_0^2}{4} - 4d^2} \right)} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{h_0 \omega_0}{2} + 2d} \\ -\sqrt{\frac{h_0 \omega_0}{2} - 2d} \end{pmatrix}$$

a matriz jacobiana associada será

$$J(A, B)_+^{\text{antisimétrico}} = \frac{\varepsilon}{2\omega_0} \begin{bmatrix} (-\Gamma - \alpha_0) \left( \frac{4d}{\omega_0 h_0} + 1 \right) - \Gamma & -2d + \frac{2\Gamma(\Gamma + \alpha_0)}{\omega_0 h_0} - \frac{\omega_0 h_0}{2} \\ 2d + \frac{2\Gamma(\Gamma + \alpha_0)}{\omega_0 h_0} - \frac{\omega_0 h_0}{2} & (\Gamma + \alpha_0) \left( \frac{4d}{\omega_0 h_0} - 1 \right) - \Gamma \end{bmatrix}. \quad (4.17)$$

Os autovalores de  $J(A, B)_+^{\text{antisimétrico}}$  são raízes do polinômio característico

$$\det(J(A, B)_+^{\text{antisimétrico}} - \lambda I_2) = \frac{\varepsilon}{2\omega_0} (\lambda^2 + (4\Gamma + 2\alpha_0)\lambda + 2\Gamma^2 + 2\Gamma\alpha_0). \quad (4.18)$$

Então seus autovalores são  $\lambda_1^{\text{antisimétrico}} = -\frac{\varepsilon}{2\omega_0}\Gamma$  e  $\lambda_2^{\text{antisimétrico}} = -\frac{\varepsilon}{2\omega_0}(\alpha_0 + \Gamma)$ , os quais são reais distintos e negativos, assim o equilíbrio  $(A, B)_+^{\text{antisimétrico}}$  é um nó estável. O estudo da estabilidade do ponto de equilíbrio  $(A, B)_-^{\text{antisimétrico}}$  segue de modo análogo ao caso  $(A, B)_+^{\text{antisimétrico}}$ .

### 4.2.3 Estudo da estabilidade do ponto de equilíbrio $(A, B)_+^{\text{simétrico}}$

Para os pontos de equilíbrios

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}_+^{\text{simétrico}} = \sqrt{\frac{4}{\beta_0 h_0 \omega_0} \left( \alpha_0 - \sqrt{\frac{h_0^2 \omega_0^2}{4} - 4d^2} \right)} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{h_0 \omega_0}{2} + 2d} \\ \sqrt{\frac{h_0 \omega_0}{2} - 2d} \end{pmatrix}$$

a matriz jacobiana associada será

$$J(A, B)_+^{\text{simétrico}} = \frac{\varepsilon}{2\omega_0} \begin{bmatrix} -(-\Gamma + \alpha_0) \left( \frac{4d}{\omega_0 h_0} + 1 \right) + \Gamma & -2d + \frac{2\Gamma(\Gamma - \alpha_0)}{\omega_0 h_0} - \frac{\omega_0 h_0}{2} \\ 2d + \frac{2\Gamma(\Gamma - \alpha_0)}{\omega_0 h_0} - \frac{\omega_0 h_0}{2} & -(\Gamma - \alpha_0) \left( \frac{4d}{\omega_0 h_0} - 1 \right) + \Gamma \end{bmatrix}. \quad (4.19)$$

Os autovalores de  $J(A, B)_+^{\text{simétrico}}$  são raízes do polinômio característico

$$\det(J(A, B)_+^{\text{simétrico}} - \lambda I_2) = \frac{\varepsilon}{2\omega_0} (\lambda^2 + (-4\Gamma + 2\alpha_0)\lambda + 4\Gamma^2 - 4\Gamma\alpha_0). \quad (4.20)$$

Segue que seus autovalores são  $\lambda_1^{\text{simétrico}} = \frac{\varepsilon}{2\omega_0}\Gamma$  e  $\lambda_2^{\text{simétrico}} = \frac{\varepsilon}{2\omega_0}(-\alpha_0 + \Gamma)$  os quais são reais distintos e de sinais opostos, logo temos que o equilíbrios  $(A, B)_+^{\text{simétrico}}$  é um ponto de sela.

Para o ponto de equilíbrio  $(A, B)_-^{\text{simétrico}}$ , por um estudo totalmente análogo, também obtemos que esse ponto de equilíbrio é um ponto de sela.

Como vimos os pares de pontos antisimétricos são pontos de equilíbrio estável, logo pelo Teorema da Média o sistema de equação (3.2) possui órbitas periódicas estável com o mesmo

tipo de estabilidade desses pontos. Fazendo a substituição desses pontos na equação (3.13) encontramos que essas soluções periódicas são:

$$y(\tau) = \pm \sqrt{\frac{4(\alpha_0 + \Gamma)}{\beta_0 h_0 \omega_0}} \left( \sqrt{\frac{h_0 \omega_0}{2} + 2d} \cos(\tau) - \sqrt{\frac{h_0 \omega_0}{2} - 2d} \sin(\tau) \right) + O(\varepsilon). \quad (4.21)$$

### 4.3 Amplitude das Órbitas Periódicas

Usando os resultados da Seção 4.2 podemos obter informações sobre a amplitude das órbitas periódicas em termos do parâmetro  $\Gamma$ .

No caso dos pontos de equilíbrio simétricos temos de (4.12)<sub>1</sub> e (2.5) que

$$\begin{aligned} a(\tau) &= (A)_+^{\text{simétrico}} + \varepsilon a_1(\tau, \varepsilon) = \sqrt{\frac{4(\alpha_0 - \Gamma)}{\beta_0 h_0 \omega_0}} \sqrt{\frac{h_0 \omega_0}{2} + 2d} + \varepsilon a_1(\tau, \varepsilon), \\ b(\tau) &= (B)_+^{\text{simétrico}} + \varepsilon b_1(\tau, \varepsilon) = \sqrt{\frac{4(\alpha_0 - \Gamma)}{\beta_0 h_0 \omega_0}} \sqrt{\frac{h_0 \omega_0}{2} - 2d} + \varepsilon b_1(\tau, \varepsilon) \end{aligned} \quad (4.22)$$

sendo que  $a_1, b_1$  são funções limitadas,  $C^\infty$  e  $2\pi$ -periódicas na variável  $\tau$ . Substituindo (4.22) em (3.13) obtemos

$$y(\tau) = \sqrt{\frac{4(\alpha_0 - \Gamma)}{\beta_0 h_0 \omega_0}} \left( \sqrt{\frac{h_0 \omega_0}{2} + 2d} \cos(\tau) + \sqrt{\frac{h_0 \omega_0}{2} - 2d} \sin(\tau) \right) + O(\varepsilon) \quad (4.23)$$

Notemos que (4.23) pode ser escrita como

$$y(\tau) = \sqrt{\frac{2(\alpha_0 - \Gamma)}{\beta_0}} \cos(\tau + \theta_0(d)) + O(\varepsilon), \quad (4.24)$$

sendo que

$$\begin{aligned} \cos(\theta_0(d)) &= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{2d}{h_0 \omega_0}}, \\ \sin(\theta_0(d)) &= \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{2d}{h_0 \omega_0}}. \end{aligned}$$

Assim a amplitude, a menos de um erro de ordem  $\varepsilon$  da órbita periódica instável de (3.12) associada ao ponto de equilíbrio  $((A)_+^{\text{simétrico}}, (B)_+^{\text{simétrico}})$ , é dada por

$$\sqrt{\frac{2(\alpha_0 - \Gamma)}{\beta_0}} \quad (4.25)$$

Para o ponto de equilíbrio  $((A)_-^{\text{simétrico}}, (B)_-^{\text{simétrico}})$  obtemos a mesma amplitude dada por (4.25).

Com relação aos pontos de equilíbrio anti-simétricos  $((A)_\pm^{\text{anti-simétrico}}, (B)_\pm^{\text{anti-simétrico}})$ , usando o mesmo argumento anterior, obtemos que para este caso a amplitude é dada por

$$\sqrt{\frac{2(\alpha_0 + \Gamma)}{\beta_0}} \quad (4.26)$$

Também temos, usando o mesmo raciocínio anterior, que a órbita periódica determinada pelo ponto de equilíbrio  $(0, 0)$  da equação (3.21) tem amplitude de ordem  $\varepsilon$ . Usando então (4.25), (4.26) e o argumento anterior temos o seguinte gráfico que nos dá as relações entre o parâmetro  $\Gamma$  e a amplitude das órbitas periódicas a menos de um erro de ordem  $\varepsilon$ .

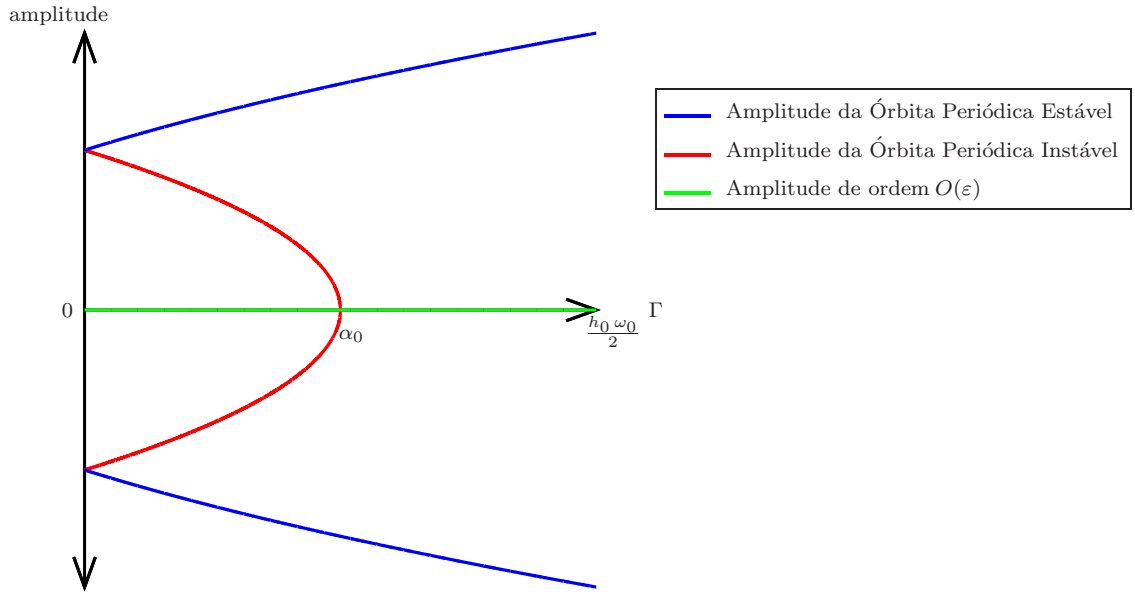


Figura 4.1: Amplitude das Órbitas Periódicas

Se considerarmos os pontos de equilíbrio da equação da média (3.21) teremos o gráfico seguinte

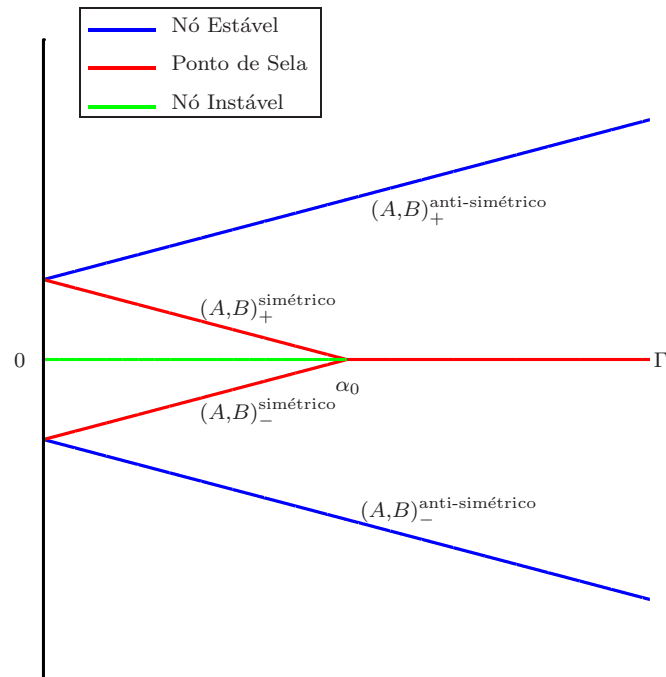


Figura 4.2: Pontos de Equilíbrio

# Capítulo 5

## Curvas Invariantes da Equação da Média

Neste capítulo mostraremos um dos resultados mais interessantes de [7] que é a existência de curvas invariantes que são dadas por quádricas. Tais quádricas podem ser computadas explicitamente como é mostrado na Seção 5.1. Os planos de fase também são plotados na Seção 5.2. Todos os casos são obtidos nas Subseções 5.2.1, 5.2.2, 5.2.3.

### 5.1 Quádricas Invariantes

Nesta seção vamos determinar curvas invariantes do tipo quadrático não degenerada do sistema (3.21), isto é, curvas que são do seguinte tipo:

$$C_1 A^2 + 2 C_2 A B + C_3 B^2 = R \quad (5.1)$$

onde  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $R$  são constantes. Vamos provar o seguinte resultado:

**Proposição 5.1** *Assuma que  $\alpha_0$ ,  $\beta_0$ ,  $\omega_0$ ,  $h_0$  são constantes estritamente positivas e  $C_3 \neq 0$ , então a equação da média (3.21) tem uma curva invariante dada por (5.1) se, e somente se, as constantes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $R$  são dadas por:*

$$\begin{aligned} C_1 &= \alpha_0^2 - 2d \left( \frac{h_0 \omega_0}{2} - 2d \right), \\ 2C_2 &= \alpha_0 h_0 \omega_0, \\ C_3 &= \alpha_0^2 + 2d \left( \frac{h_0 \omega_0}{2} + 2d \right), \\ R &= \frac{4\alpha_0}{\beta_0} \left( \alpha_0^2 - \left( \frac{h_0^2 \omega_0^2}{4} - 4d^2 \right) \right). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Prova: Como  $C_3 \neq 0$  podemos reescrever (5.1) como

$$C_{11} A^2 + 2 C_{21} A B + B^2 = R_1 \quad (5.3)$$

onde  $C_{11}$ ,  $C_{21}$ ,  $R_1$  são constantes. Seja  $(A(\tau), B(\tau))$  uma solução de (3.21) cuja condição inicial está nesta curva. Indicaremos tal condição inicial simplesmente por  $(A, B)$ . Então assumindo que a curva (5.3) é invariante temos

$$C_{11} A^2(\tau) + 2 C_{21} A(\tau) B(\tau) + B^2(\tau) = R_1, \quad (5.4)$$

Derivando a equação anterior em relação a  $\tau$  obtemos

$$C_{11} A(\tau) A'(\tau) + C_{21} (A'(\tau) B(\tau) + A(\tau) B'(\tau)) + B(\tau) B'(\tau) = 0 \quad (5.5)$$

Substituindo (3.21) em (5.5) e fazendo  $\tau = 0$  obtemos após alguma manipulação algébrica que

$$\begin{aligned} & -\beta_0 B^4 - 2\beta_0 C_{21} A B^3 \\ & - ((\beta_0 C_{11} + \beta_0) A^2 + 8C_{21} d + 2\omega_0 h_0 C_{21} - 4\alpha_0) B^2 \\ & - (2\beta_0 C_{21} A^3 + ((8C_{11} - 8) d - 8\alpha_0 C_{21} + 2\omega_0 h_0 C_{11} + 2\omega_0 h_0) A) B \\ & - \beta_0 C_{11} A^4 - (-8C_{21} d + 2\omega_0 h_0 C_{21} - 4\alpha_0 C_{11}) A^2 = 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

Considere agora os seguintes polinômios

$$\begin{aligned} P_1(X, Y) = & -\beta_0 C_{11} Y^4 \\ & -X (2\beta_0 C_{21} Y^3 + ((8C_{11} - 8) d - 8\alpha_0 C_{21} + 2\omega_0 h_0 C_{11} + 2\omega_0 h_0) Y) \\ & -X^2 ((\beta_0 C_{11} + \beta_0) Y^2 + 8C_{21} d + 2\omega_0 h_0 C_{21} - 4\alpha_0) \\ & - (-8C_{21} d + 2\omega_0 h_0 C_{21} - 4\alpha_0 C_{11}) Y^2 - 2\beta_0 C_{21} X^3 Y - \beta_0 X^4 \end{aligned} \quad (5.7)$$

e

$$P_2(X, Y) = C_{11} Y^2 + 2C_{21} X Y + X^2 - R_1 \quad (5.8)$$

Naturalmente  $P_1$  e  $P_2$  são obtidos de (5.6) e (5.3) respectivamente, fazendo as substituições  $A \rightarrow Y$  e  $B \rightarrow X$ . O resto da divisão de  $P_1$  por  $P_2$  em relação a variável  $X$  será denotado por  $R(X, Y)$ . Um cálculo longo, mas simples, nos dá que

$$\begin{aligned} R(X, Y) = & (C_{21} (C_{11} (8d + 2\omega_0 h_0) + 8d - 2\omega_0 h_0) + \beta_0 R_1 C_{11} - \beta_0 R_1) Y^2 \\ & + (C_{21}^2 (16d + 4\omega_0 h_0) \\ & + 8d + C_{11} (-8d - 2\omega_0 h_0) + 2\beta_0 R_1 C_{21} - 2\omega_0 h_0) X Y \\ & + R_1 C_{21} (-8d - 2\omega_0 h_0) - \beta_0 R_1^2 + 4\alpha_0 R_1 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Segue de (5.9) que o resto é identicamente nulo se, e somente se, o seguinte sistema de equações é válido:

$$\begin{aligned} (C_{21} (C_{11} (8d + 2\omega_0 h_0) + 8d - 2\omega_0 h_0) + \beta_0 R_1 C_{11} - \beta_0 R_1) & = 0 \\ (C_{21}^2 (16d + 4\omega_0 h_0) + 8d + C_{11} (-8d - 2\omega_0 h_0) + 2\beta_0 R_1 C_{21} - 2\omega_0 h_0) & = 0 \\ R_1 C_{21} (-8d - 2\omega_0 h_0) - \beta_0 R_1^2 + 4\alpha_0 R_1 & = 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

Segue de (5.10)<sub>3</sub> que

$$R_1 = -\frac{8C_{21} d + 2\omega_0 h_0 C_{21} - 4\alpha_0}{\beta_0}. \quad (5.11)$$

Substituindo (5.11) em (5.10)<sub>1</sub> obtemos

$$C_{11} = -\frac{4C_{21} d - \alpha_0}{\alpha_0}. \quad (5.12)$$

E usando (5.11) e (5.12) em (5.10)<sub>2</sub> segue que  $(8d^2 + 2\omega_0 h_0 d + 2\alpha_0^2) C_{21} = \alpha_0 \omega_0 h_0$  e particularmente temos que  $4d^2 + \omega_0 h_0 d + \alpha_0^2 \neq 0$ . Também concluímos que

$$C_{21} = \frac{\alpha_0 \omega_0 h_0}{8d^2 + 2\omega_0 h_0 d + 2\alpha_0^2}. \quad (5.13)$$

Finalmente, segue da substituição de (5.13) em (5.12) e (5.11) que

$$\begin{aligned} C_{11} &= \frac{4d^2 - \omega_0 h_0 d + \alpha_0^2}{4d^2 + \omega_0 h_0 d + \alpha_0^2} \\ R_1 &= \frac{16\alpha_0 d^2 - \alpha_0 \omega_0^2 h_0^2 + 4\alpha_0^3}{4\beta_0 d^2 + \beta_0 \omega_0 h_0 d + \alpha_0^2 \beta_0} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Usando (5.14) e (5.13) podemos reescrever (5.3), após alguma manipulação algébrica como

$$(4d^2 + \omega_0 h_0 d + \alpha_0^2) B^2 + \alpha_0 \omega_0 h_0 A B + (4d^2 - \omega_0 h_0 d + \alpha_0^2) A^2 - \frac{16\alpha_0 d^2 - \alpha_0 \omega_0^2 h_0^2 + 4\alpha_0^3}{\beta_0} = 0,$$

o que prova (5.2).

Provaremos agora o recíproco da afirmação anterior. Consideremos os polinômios (5.7) e (5.8). Segue de (5.2) que  $C_{12}$ ,  $C_{21}$ ,  $R_1$  são dados por (5.14) e (5.13). Portanto teremos

$$\begin{aligned} P_1(X, Y) = & -\frac{1}{4d^2 + \omega_0 h_0 d + \alpha_0^2} ( \\ & (4\beta_0 d^2 - \beta_0 \omega_0 h_0 d + \alpha_0^2 \beta_0) Y^4 + \alpha_0 \beta_0 \omega_0 h_0 X Y^3 \\ & + ((8\beta_0 d^2 + 2\alpha_0^2 \beta_0) X^2 - 16\alpha_0 d^2 + \alpha_0 \omega_0^2 h_0^2 - 4\alpha_0^3) Y^2 \\ & + \alpha_0 \beta_0 \omega_0 h_0 X^3 Y \\ & + (4\beta_0 d^2 + \beta_0 \omega_0 h_0 d + \alpha_0^2 \beta_0) X^4 \\ & + (-16\alpha_0 d^2 + \alpha_0 \omega_0^2 h_0^2 - 4\alpha_0^3) X^2 ). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Além disto

$$\begin{aligned} P_2(X, Y) = & \frac{(4d^2 - \omega_0 h_0 d + \alpha_0^2) Y^2}{4d^2 + \omega_0 h_0 d + \alpha_0^2} + \frac{2\alpha_0 \omega_0 h_0 X Y}{8d^2 + 2\omega_0 h_0 d + 2\alpha_0^2} + X^2 \\ & - \frac{16\alpha_0 d^2 - \alpha_0 \omega_0^2 h_0^2 + 4\alpha_0^3}{4\beta_0 d^2 + \beta_0 \omega_0 h_0 d + \alpha_0^2 \beta_0} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Segue de (5.15) e (5.16) que

$$P_1(X, Y) = -\beta_0 (X^2 + Y^2) P_2(X, Y). \quad (5.17)$$

Fazendo  $X = B$  e  $Y = A$  em (5.17) obtemos que  $P_1(B, A) = 0$ . Da construção de  $P_1$  segue que o campo vetorial determinado pela equação (3.21) é tangente à quádrlica dada por (5.3) em todo ponto. Denominaremos a restrição do campo vetorial determinado pela equação (3.21) à curva (5.3) por  $\mathfrak{X}$ . Segue do comentário seguinte à Definição 4.1.4, Chapter 4, página 213 de [8], que toda órbita determinada pelo campo  $\mathfrak{X}$  está na curva (5.3). Portanto, da definição de  $\mathfrak{X}$  e do Teorema de Unicidade de Soluções para E.D.O., segue que toda órbita de (3.21) com condição inicial em (5.3) permanece nesta curva para todo  $\tau$ . Portanto esta curva é invariante pelo fluxo de (3.21).  $\square$

**Observação 5.1** *Um cálculo direto mostra que todos os pontos críticos distintos da origem obtidos na Seção 4.1 satisfazem a equação (5.1) com coeficientes dados por (5.2).*

Uma questão natural é a natureza da cônica dada por (5.1). Usando (5.2) é imediato que

$$C_1 C_3 - C_2^2 = \frac{(4d^2 + \alpha_0^2)(16d^2 - \omega_0^2 h_0^2 + 4\alpha_0^2)}{4}. \quad (5.18)$$

É bem conhecido de Geometria Analítica Elementar que o sinal da expressão  $C_1 C_3 - C_2^2$  fornece informações sobre a natureza da quádrlica envolvida. Vamos agora identificar tais curvas.

1. Se as desigualdades (4.4) e (4.11) são simultaneamente satisfeitas então  $C_1 C_3 - C_2^2 > 0$ . Portanto a curva invariante é uma elipse. Além disto existem quatro pontos de equilíbrio que pela Observação 5.1, estarão localizados na elipse invariante.

2. Se desigualdade (4.4) não é satisfeita, isto é,

$$|d| > \frac{h_0 \omega_0}{4} \quad (5.19)$$

é válida, então de (5.18) teremos novamente que  $C_1 C_3 - C_2^2 > 0$ . Da discussão na Seção 4.1 segue que o único ponto de equilíbrio é a origem. Na Subseção 5.2.2 provaremos que esta elipse é uma órbita periódica de (3.21).

3. A desigualdade (4.4) é satisfeita mas (4.11) não é válida. Neste caso, da Seção 4.1 temos somente dois pontos de equilíbrio não triviais; os pontos de equilíbrio antissimétrico. Além disto segue de (5.18) que  $C_1 C_3 - C_2^2 < 0$  e portanto (5.1) é uma hipérbole. E da Observação 5.1 tais pontos de equilíbrio também estarão nesta quádrlica.

## 5.2 Planos de Fase da Equação da Média

Nesta seção serão plotados os diversos planos de fase associados a cada um dos três casos obtidos no final da seção anterior.

### 5.2.1 Elipse Invariante: Caso 1

Na Figura 5.2.1 temos a elipse invariante assim como os cinco pontos de equilíbrio. Como já foi indicado antes os quatro pontos de equilíbrio não triviais estão sobre a elipse. Note que cada ponto de equilíbrio não-trivial instável está ligado à cada um dos pontos de equilíbrio estáveis por meio de órbitas do Sistema da Média que satisfazem a seguinte condição:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \text{ponto de equilíbrio estável},$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = \text{ponto de equilíbrio instável}.$$

Tais órbitas são denominadas de *heteroclínicas*.

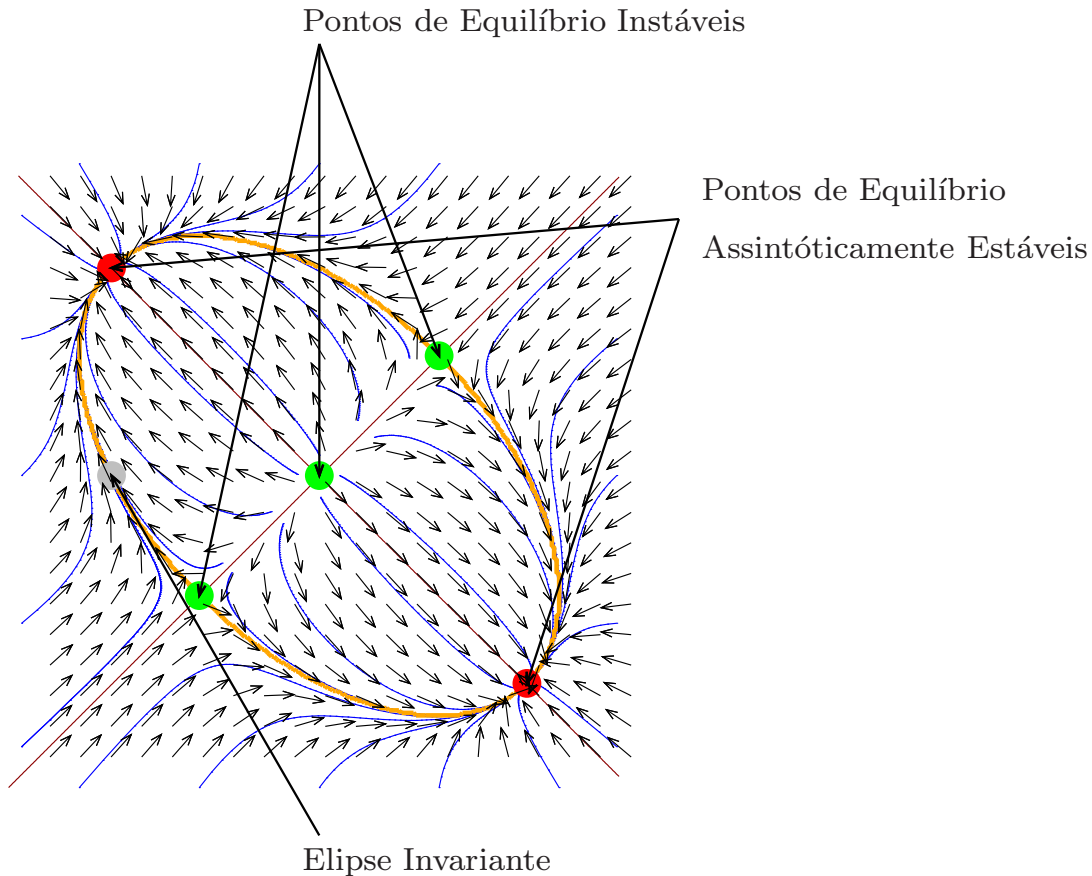


Figura 5.1: Elipse formada por quatro órbitas heteroclínicas

### 5.2.2 Elipse Invariante: Caso 2

Vamos provar que a elipse neste caso é uma órbita periódica, ao contrário do que acontece no caso anterior.

Indicaremos por  $F$  o campo vetorial associado à equação (3.21). Assumiremos que a elipse está munida com a topologia induzida por  $\mathbb{R}^2$ . Seja  $(A_0, B_0)$  um ponto desta curva. Considere a solução de (3.21) com esta condição inicial. Denotaremos tal solução por  $x$ . É bem conhecido que sendo a curva invariante um conjunto compacto então  $x(\tau)$  está definida em todo  $\mathbb{R}$ . Seja  $\tau_0 \in \mathbb{R}$ . Como  $x'(\tau_0) = F(x(\tau_0)) \neq (0, 0)$ , pois a elipse não contém pontos de equilíbrio, segue do Teorema da Função Inversa que  $x$  é um difeomorfismo entre um adequado intervalo aberto da reta contendo  $\tau_0$  e um aberto adequado da elipse contendo  $x(\tau_0)$ . Concluimos assim que a órbita dada por  $x$  é um subconjunto aberto da elipse.

Por outro lado, consideremos uma sequência de pontos  $\{p_n\}$  pertencentes à trajetória  $x$  definida anteriormente. Vamos assumir que  $p_n \rightarrow q$ , onde  $q$  é um ponto do  $\mathbb{R}^2$ . Como cada  $p_n$  está na elipse invariante, a qual é compacta segue que necessariamente  $q$  está nesta curva. Consideremos a solução  $x_1(\tau)$  de (3.21) tal que  $x_1(0) = q$ . Usando o mesmo argumento anterior, existe  $\varepsilon_0$  tal que  $x_1((-\varepsilon_0, \varepsilon_0))$  é um aberto na elipse. Denotaremos tal aberto por  $U_0$ . Como a sequência  $\{p_n\}$  converge para  $q$  segue que existe  $n_0$  tal que se  $n > n_0$  então  $p_n \in U_0$ . Portanto existem  $s_n \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$  e  $t_n \in \mathbb{R}$  tais que  $x_1(s_n) = x(t_n) = p_n$  segue então do Teorema de Unicidade que  $q \in x(\mathbb{R})$  e portanto  $x(\mathbb{R})$  é um subconjunto fechado da elipse.

Como já provamos que  $x(\mathbb{R})$  é um aberto da curva e sendo a elipse conexa, segue então que  $x(\mathbb{R})$  é igual a toda elipse. E disto segue que a solução  $x$  é periódica.

Cabe aqui uma observação. Este resultado, de que se (5.19) for válida então a elipse invariante é uma órbita periódica é provado em [7] usando o Teorema de Poincaré-Bendixon. O argumento



anterior nos dá uma prova elementar do mesmo resultado sem o uso deste importante teorema.

Na Figura 5.2 é dado o plano de fases deste caso.

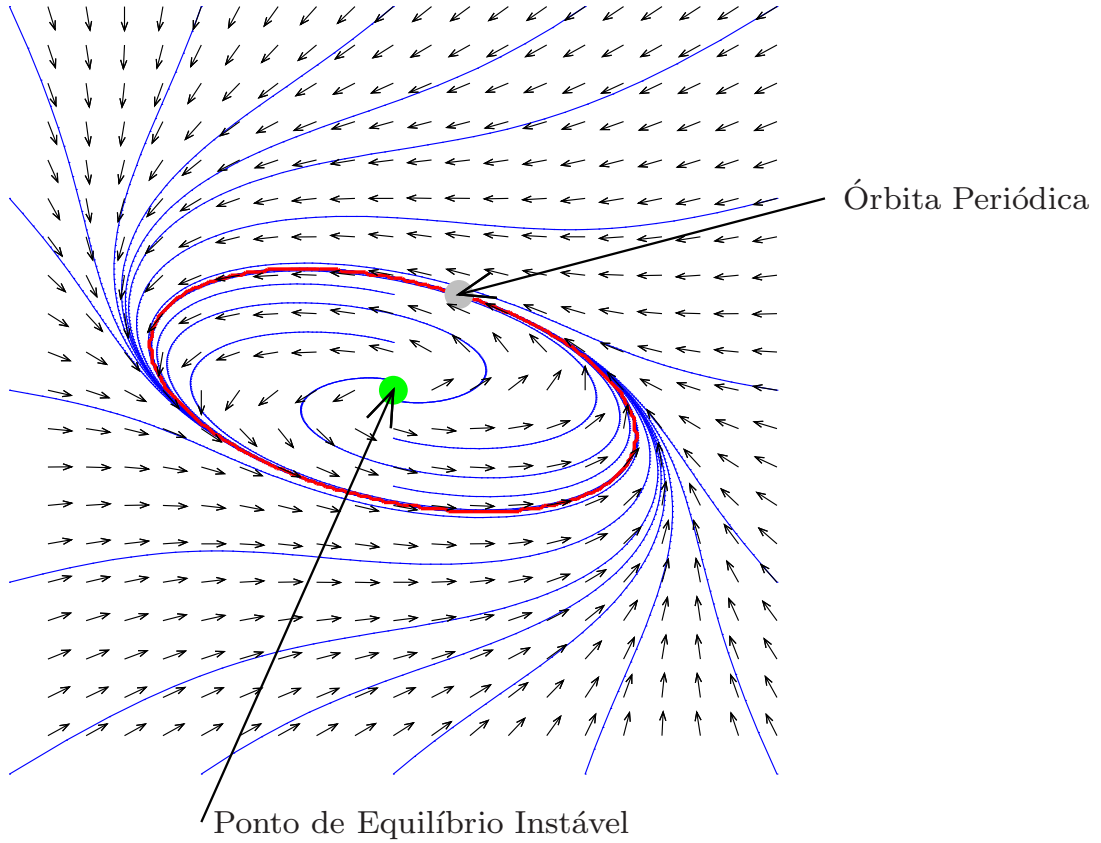


Figura 5.2: Órbita Periódica

### 5.2.2.1 Cálculo do Período da Órbita Periódica

O período desta órbita pode ser encontrado escrevendo o sistema de equação (3.21) em coordenadas polares.

Seja

$$\begin{aligned} A(\tau) &= r(\tau) \cos(\theta(\tau)) \\ B(\tau) &= r(\tau) \sin(\theta(\tau)) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Derivando essas equações em relação a  $\tau$

$$\begin{aligned} A'(\tau) &= r'(\tau) \cos(\theta(\tau)) - r(\tau) \theta'(\tau) \sin(\theta(\tau)) \\ B'(\tau) &= r'(\tau) \sin(\theta(\tau)) + r(\tau) \theta'(\tau) \cos(\theta(\tau)) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Multiplicando a equação (5.21)<sub>1</sub> por  $\cos(\theta(\tau))$  e a equação (5.21)<sub>2</sub> por  $\sin(\theta(\tau))$ , e depois adicionando-as temos

$$r'(\tau) = A'(\tau) \cos(\theta(\tau)) + B'(\tau) \sin(\theta(\tau)) \quad (5.22)$$

Substituindo (3.21) e (5.20) na equação acima obtemos

$$r'(\tau) = \frac{\varepsilon}{2\omega_0} \left[ \alpha_0 r(\tau) - \frac{\beta_0}{4} r^3(\tau) - \frac{h_0 \omega_0}{2} \sin(2\theta(\tau)) \right] \quad (5.23)$$

Agora multiplicando a primeira equação de (5.21) por  $\sin(\theta(\tau))$  e a segunda equação de (5.21) por  $\cos(\theta(\tau))$ , e depois subtraindo-as temos

$$\theta'(\tau) = \frac{-A'(\tau) \sin(\theta(\tau)) + B'(\tau) \cos(\theta(\tau))}{r(\tau)} \quad (5.24)$$

Novamente, substituindo (3.21) e (5.20) na equação anterior teremos

$$\theta'(\tau) = \frac{\varepsilon}{2\omega_0} \left[ 2d - \frac{h_0\omega_0}{2} \cos(2\theta(\tau)) \right] \quad (5.25)$$

Observe que a equação (5.25) é uma equação de variáveis separáveis. Tomemos então  $\psi(\tau) = \tan(\theta(\tau))$  ou

$$\theta(\tau) = \arctan \psi(\tau). \quad (5.26)$$

Derivando (5.26) em relação a  $\tau$  e substituindo  $\cos(2\theta(\tau)) = \frac{\psi(\tau)^2 - 1}{\psi(\tau)^2 + 1}$  em (5.25) obtemos

$$\frac{\varepsilon}{2\omega_0} \left[ 2d - \frac{h_0\omega_0}{2} \left( \frac{\psi(\tau)^2 - 1}{\psi(\tau)^2 + 1} \right) \right] = \left( \frac{1}{\psi(\tau)^2 + 1} \right) \psi'(\tau), \quad (5.27)$$

ou

$$\psi'(\tau) = \frac{\varepsilon}{2\omega_0} \left[ \left( 2d - \frac{h_0\omega_0}{2} \right) \psi(\tau)^2 + \left( 2d + \frac{h_0\omega_0}{2} \right) \right]. \quad (5.28)$$

Logo

$$\frac{\psi'(\tau)}{\left( 2d - \frac{h_0\omega_0}{2} \right) \psi(\tau)^2 + \left( 2d + \frac{h_0\omega_0}{2} \right)} = \frac{\varepsilon}{2\omega_0}. \quad (5.29)$$

Integrando ambos os membros da equação acima em relação a  $\tau$  e usando a desigualdade (5.19) obtemos

$$\frac{\arctan \left( \sqrt{\frac{2d - \frac{h_0\omega_0}{2}}{2d + \frac{h_0\omega_0}{2}}} \psi(\tau) \right)}{\sqrt{\frac{2d - \frac{h_0\omega_0}{2}}{2d + \frac{h_0\omega_0}{2}}}} - \frac{\arctan \left( \sqrt{\frac{2d - \frac{h_0\omega_0}{2}}{2d + \frac{h_0\omega_0}{2}}} \psi(\tau_0) \right)}{\sqrt{\frac{2d - \frac{h_0\omega_0}{2}}{2d + \frac{h_0\omega_0}{2}}}} = \frac{\varepsilon}{2\omega_0} \left( 2d + \frac{h_0\omega_0}{2} \right) (\tau - \tau_0).$$

Ou

$$\begin{aligned} \arctan \left( \sqrt{\frac{2d - \frac{h_0\omega_0}{2}}{2d + \frac{h_0\omega_0}{2}}} \psi(\tau) \right) &= \frac{\varepsilon}{2\omega_0} \sqrt{4d^2 - \frac{h_0^2\omega_0^2}{4}} (\tau - \tau_0) \\ &+ \arctan \left( \sqrt{\frac{2d - \frac{h_0\omega_0}{2}}{2d + \frac{h_0\omega_0}{2}}} \psi(\tau_0) \right). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Sejam

$$\phi_0 = \arctan \left( \sqrt{\frac{2d - \frac{h_0\omega_0}{2}}{2d + \frac{h_0\omega_0}{2}}} \psi(\tau_0) \right), \quad (5.31)$$

$$\Gamma_1 = \sqrt{4d^2 - \frac{h_0^2\omega_0^2}{4}},$$

então usando (5.26) e (5.31) em (5.30) obtemos

$$\theta(\tau) = \arctan \left( \left( \sqrt{\frac{2d + \frac{h_0\omega_0}{2}}{2d - \frac{h_0\omega_0}{2}}} \right) \tan \left( \frac{\varepsilon\Gamma_1}{2\omega_0} (\tau - \tau_0) + \phi_0 \right) \right). \quad (5.32)$$

Segue de (5.32) que o período da órbita é dado por  $T = \frac{2\pi\omega_0}{\varepsilon\Gamma_1}$ .

### 5.2.3 Hipérbole Invariante

Na Figura 5.3 estão indicados a hipérbole invariante assim como os pontos de equilíbrio assintoticamente estáveis. Como foi mostrado na Seção 4.2 isto corresponde, para a equação (3.5), à existência de órbitas assintoticamente estáveis, isto é ciclos-limites, para esta equação.

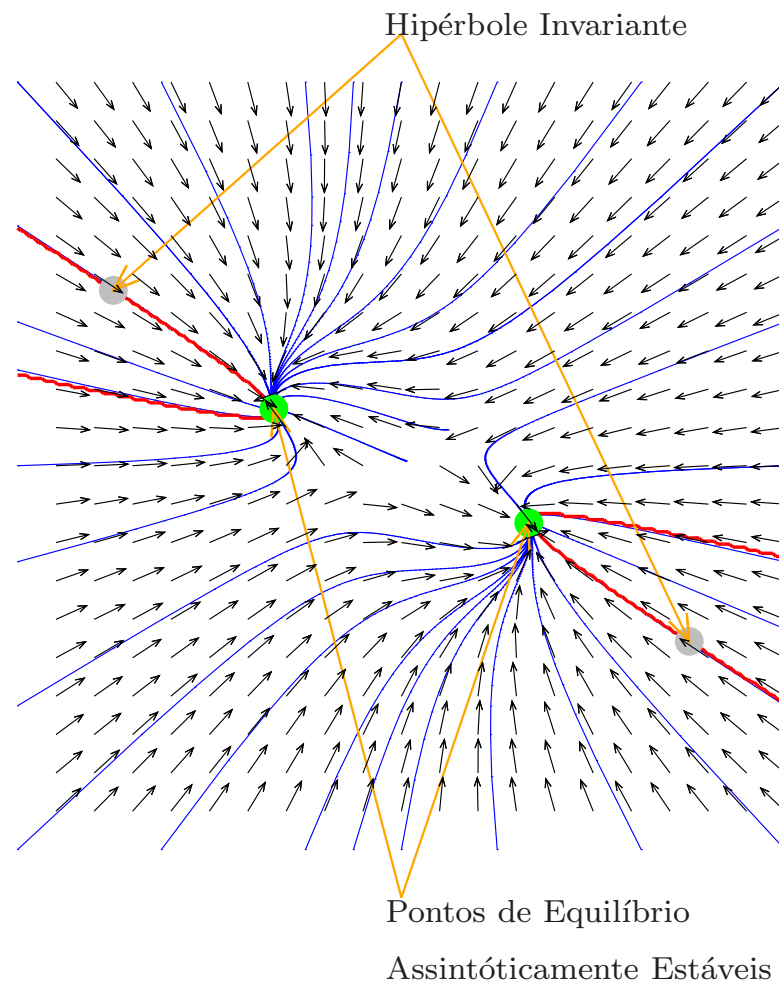


Figura 5.3: Hipérbole como curva invariante

# Capítulo 6

## Conclusões

Nessa dissertação, motivados pelo artigo [7], estudamos a equação de van der Pol-Mathieu, com o objetivo de encontrar soluções estáveis para a mesma. Para isso fizemos uso do Teorema da Média, o qual foi crucial para nossas conclusões.

Primeiramente verificamos que as condições (4.4) e (4.11) determinam a quantidade de pontos de equilíbrios da equação da média obtida da equação de van der Pol-Mathieu. Especificamente, encontramos cinco pontos de equilíbrios da equação da média caso ambas as condições (4.4) e (4.11) sejam satisfeitas, sendo dois deles assintoticamente estáveis e os outros três instáveis. Encontramos dois pontos de equilíbrios que são assintoticamente estáveis quando apenas (4.4) ocorrer. Obtemos um único ponto de equilíbrio, que foi classificado como instável, se essas condições não forem satisfeita.

Uma vez que obtemos pontos de equilíbrio assintoticamente estável quando (4.4) e (4.11) são válidas ou quando somente (4.4) ocorre, fundamentados pelo Teorema da Média, mostramos a existência de órbitas periódicas estáveis para a equação de van der Pol-Mathieu. Já no caso em que ambas as condições não ocorrem, mostramos a existência de órbita periódica da equação da média obtida da equação de van der Pol-Mathieu.

Mostramos a existência de quádricas invariantes e plotamos os diversos planos de fase, com alguns parâmetros específicos, da equação da média.

# Referências Bibliográficas

- [1] HIRSCH, M. e SMALE, S.. *Differential Equations, Dynamic Systems and Algebra Linear*, ACADEMIC PRESS, INC. 1970, San Diego, California.
- [2] VERHULST, F. e SANDERS, J.A.. *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, Springer, 1985.
- [3] GUCKENHEIMER, J. e HOLMES, P.. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Applied mathematical sciences, volume 42, Springer, 1983.
- [4] PANDEY, M., RAND, R.H. e ZEHNDER, A., *Frequency locking in a forced Mathieu-van der Pol-Duffing system*, Nonlinear Dynamics 54(2008) 3-12.
- [5] MOMENI, M., KOURAKIS, I., MOSLEHI-FARD, M. e SHUKLA, P. K.. *A Van der Pol-Mathieu equation for the dynamics of dust grain charge in dusty plasmas*, J. Math. Phys. 40 (2007) F473-F481.
- [6] BREITENBERGER, E. e MUELLER, R. D.. *The Elastic Pendulum: A nonlinear paradigm*, J. Math. Phys. 22(6) (1981) 1196-1210.
- [7] VEERMAN, F. e VERHULST, F. *Quasiperiodic phenomena in the Van der Pol-Mathieu equation*, Journal of Sound and Vibration 326(2009)314-320.
- [8] MARSDEN, J., RATIU, T. e ABRAHAM, R. *Tensor Analysis on Manifolds and Applications*, Third Edition, Springer-Verlag, 2001, New York, N.Y.
- [9] VERHULST, F.. *Nonlinear Differential Equations and Dynamic Systems*, Second Edition, Springer, 1985.