FABRÍCIA RODRIGUES DE OLIVEIRA

O Teorema do Tipo Dvoretzky-Rogers para Sequências Misto Somáveis e Resultados de Espaçabilidade

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2012

FABRÍCIA RODRIGUES DE OLIVEIRA

O Teorema do Tipo Dvoretzky-Rogers para Sequências Misto Somáveis e Resultados de Espaçabilidade

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Análise Funcional.

Orientador: Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro.

UBERLÂNDIA - MG
2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU , MG, Brasil

O48t Oliveira, Fabrícia Rodrigues de, 1986-
2012 O Teorema do tipo Dvoretzky-Rogers para sequências misto somáveis e resultados de espaçabilidade / Fabrícia Rodrigues de Oliveira. - 2012.
109 f. : il.

Orientador: Vinícius Vieira Fávaro.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Inclui bibliografia.

1. Matemática - Teses. 2. Banach, Espaços de - Teses. 3. Sequências (Matemática) - Teses. I. Fávaro, Vinícius Vieira. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNA: Fabrícia Rodrigues de Oliveira.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11012MAT006.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Análise Funcional.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: O Teorema do tipo Dvoretzky-Rogers para sequências misto somáveis e resultados de espaçabilidade.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 24 de Fevereiro de 2012, às 10h30min, pela seguinte Banca Examinadora:

NOME	ASSINATURA
Prof. Dr. Vinícius Vieira Fávaro UFU - Universidade Federal de Uberlândia	VFávaro
Prof. Dr. Jorge Túlio Mujica Ascui UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas	[illegible]
Prof. Dr. Ariosvaldo Marques Jatobá UFU - Universidade Federal de Uberlândia	Ariosvaldo M. Jatobá

Uberlândia-MG, 24 de Fevereiro de 2012.

Dedicatória

Aos meus pais, Fernando e Dilourdes, e aos meus irmãos Fernando e Fabiana.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por mais esta conquista.

Aos meus pais, Fernando e Dilourdes, pelo amor incondicional e por estarem sempre do meu lado, me apoiando e me ajudando em todos os momentos da minha vida.

Aos meus irmãos Fernando e Fabiana, pelo amor, carinho, companheirismo e compreensão.

Ao meu orientador Vinícius Vieira Fávaro, pela dedicação, paciência, confiança, ensinamentos, disposição em esclarecer minhas dúvidas sempre quando era preciso e por me aceitar como orientanda.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, em especial ao professor Edson Agustini, uma pessoa maravilhosa que tive o prazer de conhecer. A ele sou profundamente grata.

Aos professores do grupo de Análise da Faculdade de Matemática (FAMAT) pelos valiosos seminários e pelo convívio.

Aos professores Jorge Túlio Mujica Ascui e Ariosvaldo Marques Jatobá, por participarem da banca examinadora e, de mesma forma, agradeço aos professores suplentes Mary Lilian Lourenço e Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

Aos meus amigos do mestrado que compartilharam comigo momentos de estudo e descontração.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) pelo apoio financeiro.

À todas as pessoas que de forma direta ou indireta contribuíram para a realização deste trabalho.

OLIVEIRA, F. R. *O Teorema do tipo Dvoretzky-Rogers para sequências misto somáveis e resultados de espaçabilidade.* 2012. 98 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Neste trabalho estudamos os espaços de sequências absolutamente, fracamente e incondicionalmente p-somáveis e os espaços de sequências misto $(s;q)$-somáveis de um espaço de Banach e provamos Teoremas do tipo Dvoretzky-Rogers para sequências incondicionalmente (em particular fracamente) p-somáveis e para sequências misto $(s;q)$-somáveis. Além disso, provamos resultados de espaçabilidade para diversos conjuntos de sequências, em especial, para alguns conjuntos de sequências misto $(s;q)$-somáveis, fracamente p-somáveis, incondicionalmente p-somáveis e absolutamente p-somáveis.

Palavras-chave: Espaços de Banach e p-Banach, sequências misto somáveis, operadores misto somantes, Teoremas do tipo Dvoretzky-Rogers, espaçabilidade.

OLIVEIRA, F. R. *The Dvoretzky-Rogers type Theorem for mixed summable sequences and results about spaceability.* 2012. 98 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

In this work we study the spaces of absolutely, weakly and unconditionally p-summable sequences and the space of mixed $(s; q)$-summable sequences of a Banach space and we prove Dvoretzky-Rogers type Theorems for unconditionally (in particular weakly) p-summable sequences and for mixed $(s; q)$-summable sequences. Besides, we prove results about spaceability for several sequence sets, in special, for sets of mixed $(s; q)$-summable, weakly p-summable, unconditionally p-summable and absolutely p-summable sequences.

Keywords: Banach and p-Banach spaces, mixed summable sequences, mixed summing operators, Dvoretzky-Rogers type Theorems, spaceability.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	$\{1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$A^{\complement}$	complementar de A
B_E	bola fechada do espaço normado E com centro em 0 e raio 1
$\mathfrak{B}(B_{E'})$	conjunto de Borel ou borelianos de $B_{E'}$
$C(K)$	$\{f\colon K \longrightarrow \mathbb{K} : f$ é contínua$\}$ com $\|f\| = \sup_{x\in K} \lvert f(x)\rvert$
$C_0(X)$	$\{f\colon X \longrightarrow \mathbb{C} : f$ é contínua e se anula no infinito$\}$
$\mathfrak{C}_0(A)$	envoltória convexa de A
e_j	$(0, \ldots, 0, \overset{(j)}{1}, 0, \ldots)$
E'	dual topológico do espaço vetorial normado E
E''	bidual de E
$G(T)$	gráfico do operador T
$int\, C$	interior de C
$\mathcal{L}(E; F)$	conjunto dos operadores lineares e contínuos de E em F
$\mathcal{L}_c(E; F)$	conjunto dos operadores compactos de E em F
$\mathcal{L}_{cc}(E; F)$	conjunto dos operadores completamente contínuos de E em F
$\mathcal{L}_{wc}(E; F)$	conjunto dos operadores fracamente compactos de E em F
$\mathcal{L}_1(B_{E'}, \mu)$	conjunto de todas as funções mensuráveis $f\colon B_{E'} \longrightarrow \mathbb{K}$
$M(X)$	espaço das medidas de Radon complexas nos borelianos de X
$\mathcal{P}(X)$	conjunto das partes de X
p'	é o número conjugado de p, isto é: $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$
$W(B_{E'})$	conjunto constituído pelas medidas regulares de probabilidade nos borelianos de $B_{E'}$ com a topologia fraca estrela
$\sigma(E, E')$	topologia fraca
$\sigma(E', E)$	topologia fraca estrela
$\sigma(S)$	sigma álgebra gerada pelo conjunto S
$(\ell_p(E), \|\cdot\|_p)$	$\{(x_n)_{n=1}^{\infty} : x_n \in E$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < +\infty\}$ onde $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p\right)^{1/p}$

$(\ell_\infty(E), \|\cdot\|_\infty)$	$\{(x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in E$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $(x_n)_{n=1}^\infty$ é limitada$\}$ onde $\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_\infty = \sup\{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\}$
$(c_0(E), \|\cdot\|_\infty)$	$\{(x_n)_{n=1}^\infty : x_n \in E$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$
$\ell_p^u(E)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ das sequências $(x_n)_{n=1}^\infty$ incondicionalmente p-somáveis cujos termos pertencem ao espaço de Banach E
$\ell_p^w(E)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ das sequências $(x_n)_{n=1}^\infty$ cujos termos pertencem ao espaço de Banach E e $(\|\varphi(x_n)\|)_{n=1}^\infty \in \ell_p$ sempre que $\varphi \in E'$
$\ell_{m(s;q)}(E)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ das sequências $(x_n)_{n=1}^\infty$ misto $(s;q)$-somáveis cujos termos pertencem ao espaço de Banach E
$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{w,p}$	$\sup\left\{\left(\sum_{n=1}^\infty \|\varphi(x_n)\|^p\right)^{1/p} : \varphi \in B_{E'}\right\}$
$\|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{m(s;q)}$	$\inf \|(\tau_n)_{n=1}^\infty\|_{s(q)'} \|(x_n^0)_{n=1}^\infty\|_{w,s}$, com $(\tau_n)_{n=1}^\infty \in \ell_{s(q)'}$ e $(x_n^0)_{n=1}^\infty \in \ell_s^w(E)$
$\longrightarrow, \xrightarrow{w}$	significam respectivamente convergência na norma e convergência na topologia fraca

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O assunto desta dissertação está inserido na área de Análise Funcional, mais especificamente na Teoria de Espaços de Banach (p-Banach). O tópico central a ser abordado é o estudo de sequências em espaços de Banach. Neste sentido, destacamos o estudo das sequências misto somáveis de um espaço de Banach e a demonstração de um Teorema do tipo Dvoretzky-Rogers para sequências misto somáveis.

Sabemos que em espaços de dimensão finita, a convergência absoluta de séries implica na convergência simples e que os conceitos de convergência absoluta e incondicional são equivalentes. No entanto, em espaços normados de dimensão infinita, nem sempre é verdade que convergência absoluta implica em convergência simples e muito menos que os conceitos de convergência absoluta e incondicional são equivalentes. Em 1950, A. Dvoretzky e C. A. Rogers provaram em [10] que em qualquer espaço normado de dimensão infinita sempre existe uma série incondicionalmente convergente que não é absolutamente convergente. Utilizando operadores absolutamente somantes, cujo conceito foi introduzido por A. Grothendieck em 1956, o mesmo conseguiu dar uma demonstração diferente para o Teorema de Dvoretzky-Rogers. Entretanto, foi apenas no final da década de 60, com os trabalhos de A. Pietsch, J. Lindenstrauss e A. Pelczińsky, que as ideias de Grothendieck começaram a ser melhor compreendidas e foi introduzido, por Pietsch, o conceito de operador absolutamente p-somante. Com isso foi possível provar que em um espaço de Banach de dimensão infinita, sempre existe uma sequência incondicionalmente p-somável (em particular fracamente p-somável) que não é absolutamente p-somável. Resultados deste tipo são conhecidos hoje como Teoremas do tipo Dvoretzky-Rogers.

Um dos objetivos deste trabalho é o estudo de um Teorema do tipo Dvoretzky-Rogers para sequências misto somáveis. Para isto, faremos um estudo detalhado das sequências misto somáveis, suas propriedades e estudaremos os operadores misto somantes que serão essenciais na demonstração. A prova que faremos aqui é essencialmente a prova original feita por M. C. Matos em [21] e que também pode ser encontrada em [22]. Vale ressaltar que [22] é uma excelente referência que foi bastante utilizada tanto para o estudo das sequências misto somáveis, quanto dos operadores misto somantes.

Um outro objetivo deste trabalho é, utilizando os Teoremas do tipo Dvoretzky-Rogers mencionados, provar resultados de lineabilidade/espaçabilidade em conjuntos de sequências incondicionalmente p-somáveis, fracamente p-somáveis e misto somáveis. Lineabilidade e espaçabilidade são conceitos que estão sendo fortemente explorados nos últimos anos, principalmente em Análise Funcional, veja por exemplo [1, 2, 3, 4, 11, 15, 16, 19, 25] e demais referências lá contidas.

O termo *lineabilidade* foi introduzido por V. I. Gurariy no início da década de 2000 e, de maneira bem informal, lineabilidade é a busca por linearidade em ambientes em que, *a priori*, não se tem uma estrutura linear. Mais precisamente, se E é um espaço vetorial topológico de dimensão infinita, 0 é o vetor nulo de E e $A \subset E$, dizemos que A é *lineável* se $A \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial de dimensão infinita e dizemos que A é *espaçável* se $A \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial de dimensão infinita e fechado na topologia de E.

Os resultados de espaçabilidade que estudamos aqui são baseados nos resultados obtidos em [4].

Para organizar este estudo, dividimos a dissertação da seguinte forma:

O Capítulo 1 é dedicado às definições e resultados preliminares da Análise Funcional e da Teoria da medida e integração que serão utilizados nos outros capítulos. Tais resultados são clássicos e, em geral, podem ser facilmente encontrados na literatura.

O Capítulo 2 é dedicado ao estudo de sequências em espaços de Banach. Em particular, serão estudados os espaços das sequências absolutamente p-somáveis, incondicionalmente p-somáveis, fracamente p-somáveis e misto $(p;q)$-somáveis. Provaremos que em espaços de Banach de dimensão finita, o espaço das sequências absolutamente p-somáveis coincide com o espaço das sequências fracamente p-somáveis. No entanto, para espaços de Banach de dimensão infinita, veremos um exemplo onde mostra-se que isso não é verdade. Depois apresentaremos um exemplo de uma sequências em um espaço de Banach de dimensão infinita que é incondicionalmente somável mas não é absolutamente somável. Veremos também um exemplo de uma sequência fracamente somável, em um espaço de Banach de dimensão infinita, que não é incondicionalmente somável. Finalizaremos este capítulo com o estudo das sequências misto $(p;q)$-somáveis.

No Capítulo 3 definiremos os operadores absolutamente $(p, m(s;q))$-somantes entre espaços de Banach e provaremos algumas caracterizações e resultados de inclusão referentes a estes operadores. Quando $p = q = s$ teremos os operadores absolutamente p-somantes. Demonstraremos também o Teorema da Dominação de Grothendieck-Pietsch e o Teorema da Fatoração de Pietsch para os operadores absolutamente p-somantes, e finalmente os Teoremas do tipo Dvoretzky-Rogers para sequências incondicionalmente p-somáveis e para sequências misto $(s;q)$-somáveis.

O Capítulo 4 é dedicado ao estudo de espaçabilidade para diversos conjuntos de sequências. Definiremos os espaços de sequências invariantes sobre um espaço de Banach, mostraremos que os espaços de sequências estudados no Capítulo 2 são todos exemplos de espaços de sequências invariantes e, em seguida, mostraremos que se E é um espaço de sequências invariantes sobre o espaço de Banach X , então o conjunto $E - \bigcup_{q\in\Gamma} \ell_q(X)$ é espaçável (desde que seja não vazio), onde $\ell_q(X)$ denota o espaço das sequências em X que são absolutamente q-somáveis e Γ é um subconjunto qualquer de $(0, +\infty]$. A partir deste resultado, finalmente, provaremos diversos resultados de espaçabilidade envolvendo os espaços estudados no Capítulo 2.

Fabrícia Rodrigues de Oliveira
Uberlândia-MG, 24 de Fevereiro de 2012.

CAPÍTULO 1

RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e resultados clássicos da Análise Funcional e da Teoria da Medida e Integração que serão fundamentais para o desenvolvimento dos próximos capítulos. Não demonstraremos todos os resultados, entretanto tais demonstrações podem ser facilmente encontradas na literatura, conforme referências sugeridas.

1.1 Análise Funcional

Definição 1.1.1 Sejam $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma *norma* sobre E é uma aplicação

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\|\colon E & \longrightarrow & [0, +\infty) \\ x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$$

que satisfaz as seguintes condições:

(i) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$.

(ii) $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$.

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in E$.

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in E$.

O par $(E, \|\cdot\|)$ é chamado de espaço vetorial normado, ou simplesmente espaço normado. Um espaço normado que é *completo* com relação a métrica definida por

$$x, y \in E \longmapsto d(x, y) = \|x - y\|$$

é denominado *espaço de Banach*.

Definição 1.1.2 Seja $0 < p < 1$. Se na definição anterior, a aplicação $\|\cdot\|$ satisfaz (i), (ii), (iii) e ao invés de (iv) tivermos $\|x+y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$, para todo $x, y \in E$, então $\|\cdot\|$ é chamada uma *p-norma* em E e $(E, \|\cdot\|)$ é denominado um *espaço vetorial p-normado* ou simplesmente um *espaço p-normado*. Neste caso, a função

$$x, y \in E \longmapsto d(x,y) = \|x-y\|^p$$

define uma métrica em E.

O próximo exemplo mostra que todo espaço normado também é p-normado, para $0 < p \leq 1$.

Exemplo 1.1.3 Se E é um espaço normado sobre $\mathbb{K}$ e $0 < p \leq 1$, então

$$\|x+y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$$

para todo $x, y \in E$.

Com efeito, a desigualdade acima é clara se $x + y = 0$. Consideremos o caso em que $x + y \neq 0$. A desigualdade equivale a

$$1 \leq \left(\frac{\|x\|}{\|x+y\|}\right)^p + \left(\frac{\|y\|}{\|x+y\|}\right)^p.$$

Quando

$$\alpha = \frac{\|x\|}{\|x+y\|} \geq 1 \text{ ou } \beta = \frac{\|y\|}{\|x+y\|} \geq 1$$

tal desigualdade também é clara. Se $x = 0$ ou $y = 0$, o resultado é trivial. Resta mostrar que $1 \leq \alpha^p + \beta^p$, quando $\alpha, \beta \in (0,1)$. Note que

$$\alpha + \beta = \frac{\|x\| + \|y\|}{\|x+y\|} \geq 1.$$

Além disso, a função $g(p) = \alpha^p + \beta^p$, quando p varia em $(0,1]$ é decrescente, pois $g'(p) = \alpha^p \ln\alpha + \beta^p \ln\beta < 0$. Portanto, $1 \leq g(1) = \alpha + \beta \leq g(p) = \alpha^p + \beta^p$, para cada $p \in (0,1]$.

Definição 1.1.4 Denotamos por $\ell_\infty(E)$ o espaço vetorial de todas as sequências $(x_j)_{j=1}^\infty$ tais que $x_j \in E$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\sup\limits_{j\in\mathbb{N}} \|x_j\| < +\infty$. Se $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_\infty(E)$, fazendo

$$\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_\infty = \sup_{j\in\mathbb{N}} \|x_j\|$$

obtemos uma norma em $\ell_\infty(E)$. Não é difícil ver que $\ell_\infty(E)$ é um espaço de Banach. Quando $E = \mathbb{K}$ escrevemos ℓ_∞ ao invés de $\ell_\infty(\mathbb{K})$.

Denotamos por $c_0(E)$ o espaço vetorial de todas as sequências $(x_j)_{j=1}^\infty$ tais que $x_j \in E$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\lim\limits_{j\to\infty} x_j = 0$. Observe que $c_0(E) \subset \ell_\infty(E)$ e é claro que $c_0(E)$ é um subespaço vetorial fechado de $\ell_\infty(E)$. Considerando em $c_0(E)$ a norma induzida pela norma de $\ell_\infty(E)$, segue que $c_0(E)$ é um espaço de Banach. Quando $E = \mathbb{K}$ escrevemos c_0 ao invés de $c_0(\mathbb{K})$.

Um outro exemplo de espaço normado completo que usaremos nesta dissertação é o $C(K)$:

Definição 1.1.5 Seja K um subconjunto compacto de um espaço topológico X. Definimos $C(K)$ como sendo o espaço vetorial das funções contínuas $f: K \longrightarrow \mathbb{K}$. Além disso, $\|f\| = \sup\limits_{x \in K} |f(x)|$, define uma norma em $C(K)$ com a qual ele se torna um espaço de Banach.

Definição 1.1.6 Sejam E e F espaços normados. Um operador linear $T: E \longrightarrow F$ é *limitado* se existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|T(x)\| \leq c\|x\|$$

para todo $x \in E$.

Teorema 1.1.7 *Sejam E e F espaços normados e $T: E \longrightarrow F$ um operador linear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) T é limitado.

(b) T é contínuo.

(c) T é contínuo na origem.

Demonstração: Veja [14, Proposition 5.2]. ■

Denotamos por $\mathcal{L}(E;F)$ o conjunto de todos os operadores lineares contínuos de E em F. É fácil provar que $\mathcal{L}(E;F)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações usuais de funções. A expressão $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\}$ define uma norma no espaço $\mathcal{L}(E;F)$, que se torna um espaço de Banach quando F é Banach.

Quando F é o corpo dos escalares, escrevemos E' no lugar de $\mathcal{L}(E;\mathbb{K})$, chamamos esse espaço de *dual topológico* de E, ou simplesmente *dual* de E, e chamamos seus elementos de *funcionais lineares contínuos.*

O espaço $E'' = (E')' = \{f: E' \longrightarrow \mathbb{K}: f \text{ é linear e contínua}\}$ é chamado de *bidual* de E.

Definição 1.1.8 Sejam E e F espaços normados. Dizemos que E e F são *topologicamente isomorfos*, ou simplesmente *isomorfos*, se existir um operador linear contínuo bijetor $T: E \longrightarrow F$ cujo operador inverso $T^{-1}: F \longrightarrow E$ - que é sempre linear - é também contínuo. Tal operador é chamado de *isomorfismo.* Se, além disso, T for uma *isometria*, isto é, $\|T(x)\| = \|x\|$, para todo $x \in E$ então dizemos que E e F são *isomorfos isometricamente.*

Quando um espaço normado tem dimensão finita temos a seguinte proposição.

Proposição 1.1.9 *Se um espaço normado E tem dimensão finita, digamos n, então E e $\mathbb{K}^n$ são isomorfos.*

Demonstração: Veja [24, Proposition 4]. ■

A seguir enunciaremos alguns teoremas clássicos da Análise Funcional. Comecemos com o Teorema de Hahn-Banach e algumas consequências que serão úteis nesta dissertação.

Teorema 1.1.10 (Teorema de Hahn-Banach) *Sejam E um espaço normado, M_0 um subespaço de E, $\varphi_0 \in M_0'$. Então existe $\tilde{\varphi} \in E'$ tal que $\tilde{\varphi}(x) = \varphi_0(x)$ para todo $x \in M_0$, isto é, $\tilde{\varphi}|_{M_0} = \varphi_0$ e $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi_0\|$.*

Demonstração: Veja [12, Theorem 2.4]. ■

Vejamos algumas consequências do Teorema de Hahn-Banach.

Proposição 1.1.11 *Sejam E um espaço normado e $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$. Então existe $\varphi \in E'$ tal que $\varphi(x_0) = \|x_0\|$ e $\|\varphi\| = 1$.*

Demonstração: Veja [20, Theorem 4.3-3]. ■

Corolário 1.1.12 *Seja E um espaço normado, $E \neq \{0\}$. Então,*

(a) $E' \neq \{0\}$.

(b) $\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in E', \|\varphi\| \leq 1\}$ *para todo* $x \in E$.

Demonstração: Veja [12, Corollary 2.5]. ■

Teorema 1.1.13 (Teorema de Banach-Steinhaus) *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $(T_i)_{i\in I}$ uma família de operadores em $\mathcal{L}(E;F)$ satisfazendo a condição de que para cada $x \in E$ existe $C_x < +\infty$ tal que*

$$\sup_{i\in I} \|T_i(x)\| < C_x.$$

Então $\sup_{i\in I} \|T_i\| < +\infty$.

Demonstração: Veja [20, Theorem 4.7-3]. ■

Como consequências do teorema acima temos:

Corolário 1.1.14 *Sejam E um espaço de Banach e $A \subseteq E$ tal que $\phi(A)$ é limitado em $\mathbb{K}$, para todo $\phi \in E'$. Então A é limitado em E.*

Demonstração: Veja [12, Theorem 3.15]. ■

Corolário 1.1.15 *Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de operadores em $\mathcal{L}(E;F)$ tal que $(T_n(x))_{n=1}^{\infty}$ é convergente em F para todo x em E. Se definirmos $T\colon E \longrightarrow F$, $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$, então T é um operador linear contínuo.*

Demonstração: Veja [12, Corollary 3.13]. ■

Sejam E e F espaços normados e $T\colon E \longrightarrow F$ um operador linear. Denotamos por $G(T)$ o gráfico de T, onde

$$G(T) = \{(x, y) : x \in E \text{ e } y = T(x)\} = \{(x, T(x)) : x \in E\} \subseteq E \times F.$$

O próximo resultado garante que, para operadores entre espaços de Banach, a continuidade de T é equivalente ao fato de $G(T)$ ser fechado.

Teorema 1.1.16 (Teorema do Gráfico Fechado) *Sejam E e F espaços de Banach e $T\colon E \longrightarrow F$ um operador linear. Então T é contínuo se, e somente se, $G(T)$ é fechado em $E \times F$.*

Demonstração: Veja [20, Theorem 4.13-2]. ■

Corolário 1.1.17 *Sejam E e F espaços de Banach e $T\colon E \longrightarrow F$ um operador linear. Então T é contínuo se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E, $x_n \longrightarrow x$ e $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ em F, $T(x_n) \longrightarrow y$ tem-se $T(x) = y$.*

Demonstração: Veja [20, Theorem 4.13-3]. ■

Lembremos que um conjunto A de um espaço vetorial é *convexo* se para todo $x, y \in A$, o segmento de reta que liga x a y, isto é, o conjunto $\{tx + (1-t)y,\ 0 \leq t \leq 1\}$ estiver inteiramente contido em A.

Teorema 1.1.18 (Teorema da Separação de Hahn-Banach) *Sejam E um espaço normado sobre $\mathbb{R}$, A e B subconjuntos convexos de E não vazios tais que $A \cap B = \emptyset$. Suponhamos que A é aberto. Então, existem $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\phi \in E'$, com $\phi \neq 0$, tais que $\phi(x) < \alpha \leq \phi(y)$ para todo $x \in A$ e $y \in B$.*

Demonstração: Veja [5, Theorem 1.6]. ■

Definição 1.1.19 A *topologia fraca* no espaço normado E, denotada por $\sigma(E, E')$, é a topologia gerada pelos funcionais lineares contínuos $\varphi \in E'$, isto é, $\sigma(E, E')$ é a menor topologia em E que mantém contínuos os funcionais $\varphi \in E'$. Quando uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E converge para $x \in E$ na topologia fraca escrevemos $x_n \xrightarrow{w} x$.

Proposição 1.1.20 *Sejam E um espaço normado e $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E. Então $x_n \xrightarrow{w} x$ se, e somente se, $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ para todo $\varphi \in E'$.*

Demonstração: Veja [12, Proposition 3.7]. ■

Corolário 1.1.21 *Em um espaço normado E, se $x_n \longrightarrow x$ então $x_n \xrightarrow{w} x$.*

Proposição 1.1.22 *Seja E um espaço normado.*

(a) Se $x_n \xrightarrow{w} x$ *em* E *então a sequência* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *é limitada.*

(b) Se $x_n \xrightarrow{w} x$ *em* E *e* $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ *em* E'*, então* $\varphi_n(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ *em* $\mathbb{K}$.

Demonstração: (a) Suponha que $x_n \xrightarrow{w} x$ então $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ para todo $\varphi \in E'$. Portanto $\{\varphi(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado para todo $\varphi \in E'$. Pelo Corolário 1.1.14, segue que $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ é limitado em E. Logo, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é limitada.

(b) Dado $\varepsilon > 0$, das convergências $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ e $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\varphi_n - \varphi\| < \varepsilon$ e $|\varphi(x_n) - \varphi(x)| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Pelo item (a) existe $C > 0$ tal que $\|x_n\| \leq C$ para todo n. Assim

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x_n) - \varphi(x)| &= |(\varphi_n - \varphi)(x_n) + \varphi(x_n - x)| \\ &\leq \|\varphi_n - \varphi\|\|x_n\| + |\varphi(x_n) - \varphi(x)| \\ &\leq C\varepsilon + \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $n \geq n_0$. Portanto, $\varphi_n(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$. ■

Teorema 1.1.23 *Sejam* E *e* F *espaços de Banach. Um operador linear* $T\colon E \longrightarrow F$ *é contínuo se, e somente se,* $T\colon (E, \sigma(E, E')) \longrightarrow (F, \sigma(F, F'))$ *é contínuo.*

Demonstração: Veja [5, Theorem 3.10]. ■

Proposição 1.1.24 *Seja* E *um espaço normado. Então a aplicação*

$$J_E\colon E \longrightarrow E'', \ J_E(x)(\varphi) = \varphi(x)$$

é uma imersão isométrica, chamada de mergulho canônico de E *em* E''*.*

Definição 1.1.25 A topologia em E' gerada pelas funções pertencentes ao conjunto $J_E(E) = \{J_E(x)\}_{x \in E}$ é chamada de *topologia fraca estrela* e é denotada por $\sigma(E', E)$.

Teorema 1.1.26 (Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki) *Seja* E *um espaço normado. Então o conjunto* $B_{E'}$ *é compacto na topologia fraca estrela de* E'*.*

Demonstração: Veja [12, Theorem 3.21]. ■

1.2 Teoria da Medida e Integração

Definição 1.2.1 Seja X um conjunto. Uma *σ-álgebra* é uma família de subconjuntos de X, denotada por $\mathcal{A}$, que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\emptyset, X \in \mathcal{A}$.

(ii) Se $A \in \mathcal{A}$, então $A^{\complement} = X \backslash A \in \mathcal{A}$.

(iii) Se $A_n \in \mathcal{A}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, então $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Se $\mathcal{A}$ é uma σ-álgebra em X, então os elementos de $\mathcal{A}$ são chamados de *conjuntos mensuráveis em* X e o par ordenado $(X, \mathcal{A})$ é chamado de *espaço mensurável*.

Definição 1.2.2 Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Uma *medida* sobre X é uma função $\mu\colon \mathcal{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ que satisfaz:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ sempre que $(A_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A}$ são dois a dois disjuntos.

Um *espaço de medida* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço mensurável $(X, \mathcal{A})$ que tem uma medida μ definida na σ-álgebra $\mathcal{A}$ de seus conjuntos mensuráveis.

Definição 1.2.3 Seja $(X, \mathcal{A})$ um espaço mensurável. Uma função $\mu\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ é chamada de *medida complexa* se verifica as seguintes condições:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$.

(ii) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ se $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de membros disjuntos de $\mathcal{A}$.

Relembramos agora as noções de espaço de Hausdorff e espaços localmente compactos.

Definição 1.2.4 Seja X um conjunto. Chamaremos de *topologia* em X uma família τ de subconjuntos de X com as seguintes propriedades:

(i) $\emptyset$ e X pertencem a τ.

(ii) A união de uma família arbitrária de membros de τ pertence a τ.

(iii) A interseção de uma família finita de membros de τ pertence a τ.

Os membros de τ são chamados de abertos. O par (X, τ) é chamado de *espaço topológico*.

Definição 1.2.5 Um espaço topológico X é um *espaço de Hausdorff* se pontos distintos de X admitem vizinhanças disjuntas, isto é, se $x, y \in X$ e $x \neq y$, então existe uma vizinhança V de x e uma vizinhança U de y tais que $V \cap U = \emptyset$.

Definição 1.2.6 Seja X um espaço topológico.

(a) Uma *cobertura aberta* de X é uma coleção $(A_i)_{i \in I}$ de abertos de X tal que $X = \bigcup_{i \in I} A_i$.

(b) Dizemos que a cobertura aberta $(A_i)_{i \in I}$ de X admite *subcobertura finita* se existem $n \in \mathbb{N}$ e $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$ tais que $X = \bigcup_{j=1}^{n} A_{i_j}$.

(c) X é *compacto* se toda cobertura aberta de X admite subcobertura finita.

Definição 1.2.7 Sejam X um conjunto e $S \subset \mathcal{P}(X)$, onde $\mathcal{P}(X)$ denota o conjunto das partes de X. A interseção de todas as σ-álgebras que contém S é ainda uma σ-álgebra. Além disso, ela é a menor σ-álgebra que contém S, e será denotada por $\sigma(S)$. Chamamos $\sigma(S)$ de *σ-álgebra gerada* por S. Dado um espaço topológico X, a *σ-álgebra de Borel* em X é a gerada pelos abertos de X e seus elementos são chamados de *conjuntos de Borel* ou *borelianos* e será denotado por $\mathfrak{B}(X)$.

Definição 1.2.8 Sejam X um espaço de Hausdorff compacto, μ uma medida sobre os borelianos de X e A um boreliano de X. A medida μ é denominada *exteriormente regular* sobre A se

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \supset A, \text{ U aberto}\}$$

e é denominada *internamente regular* sobre A se

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \text{ compacto}\}.$$

A medida μ é denominada *medida regular* se for exteriormente regular e internamente regular sobre os borelianos.

Por outro lado, dizemos que μ é uma *medida de Radon* se for finita sobre os conjuntos compactos, exteriormente regular sobre os borelianos e internamente regular sobre os conjuntos abertos.

Observação 1.2.9 O espaço das medidas regulares de probabilidade nos borelianos de $B_{E'}$, com a topologia fraca estrela, será denotado por $W(B_{E'})$.

Definição 1.2.10 Sejam X um espaço topológico e $f\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua. Se para todo $\varepsilon \geq 0$ o conjunto $\{x \in X : |f(x)| \geq \varepsilon\}$ é compacto, diremos que f *se anula no infinito.* Denotamos

$$C_0(X) := \{f\colon X \longrightarrow \mathbb{C} : f \text{ é contínua e se anula no infinito}\}.$$

No próximo lema, e no restante da dissertação, o símbolo $M(X)$ representará o espaço das medidas de Radon complexas definidas nos borelianos do espaço topológico X. Além disso, a correspondência

$$\mu \in M(X) \longmapsto \|\mu\| := |\mu|(X),$$

onde $|\mu|$ é a variação total de μ, define uma norma em $M(X)$ (veja [14, Proposition 7.16]).

Observação 1.2.11 A *variação total* de uma medida complexa μ é a medida positiva $|\mu|$ tal que se $d\mu = f dv$, onde v é uma medida positiva, então $d|\mu| = |f|dv$, ou seja,

$$|\mu|(X) = \int_X |f|dv.$$

Lema 1.2.12 (Teorema da Representação de Riesz) *Seja X um espaço de Hausdorff compacto. Então a aplicação*

$$\begin{array}{rcl} \Psi\colon M(X) & \longrightarrow & (C_0(X))' \\ \mu & \mapsto & I_\mu\colon C_0(X) \longrightarrow \mathbb{K} \\ & & I_\mu(f) = \displaystyle\int f d\mu \end{array}$$

é um isomorfismo isométrico.

Demonstração: Veja [9, Theorem IV.6.3]. ■

Lema 1.2.13 *Considere E' e $(C(B_{E'}))'$ munidos com as respectivas topologias fraca estrela. Então $W(B_{E'})$, visto como subconjunto de $(C(B_{E'}))'$ de acordo com o Teorema da Representação de Riesz, é compacto.*

Demonstração: Pelo Teorema de Alaoglu sabemos que $B_{E'}$ é compacto, logo $C(B_{E'}) = C_0(B_{E'})$. Com efeito, é claro que $C_0(B_{E'}) \subseteq C(B_{E'})$. Por outro lado sejam $f \in C(B_{E'})$ e $\varepsilon > 0$. Chame $L = \{x \in B_{E'} : |f(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq B_{E'}$. L é compacto em $B_{E'}$ pois pelo Teorema de Alaoglu, basta que L seja limitado, o que é verdade já que $L \subseteq B_{E'}$ o qual é limitado. Mantendo a notação do nosso enunciado do Teorema da Representação de Riesz, como Ψ é isomorfismo isométrico,

$$\Psi(W(B_{E'})) \subseteq B_{(C(B_{E'}))'}.$$

De fato, seja $J \in \Psi(W(B_{E'}))$, então $J = \Psi(\mu) \in (C_0(B_{E'}))' = (C(B_{E'}))'$, onde $\mu \in W(B_{E'})$. Logo

$$\begin{aligned} J = \Psi(\mu) \colon C_0(B_{E'}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longmapsto \Psi(\mu)(f) = \int f d\mu. \end{aligned}$$

Assim

$$\|J\| = \|\Psi(\mu)\| = \sup_{\|f\|_{C(B_{E'})\leq 1}} |\Psi(\mu)(f)| = \sup_{\|f\|_{C(B_{E'})\leq 1}} \left| \int_{B_{E'}} f d\mu \right| \leq \|f\|_{C(B_{E'})} \mu(B_{E'}) \leq 1.$$

Portanto, $J \in (C(B_{E'}))'$ e $\|J\| \leq 1$, isto é, $J \in B_{(C(B_{E'}))'}$. Como $(C(B_{E'}))'$ está munido com a topologia fraca estrela, uma nova aplicação do Teorema de Alaoglu nos diz que $B_{(C(B_{E'}))'}$ é compacto. Logo basta mostrar que $\Psi(W(B_{E'}))$ é fechado em $B_{(C(B_{E'}))'}$ na topologia fraca estrela. Para isso seja $(\Psi(\mu_\lambda))_\lambda$ uma rede contida em $\Psi(W(B_{E'}))$ tal que $\Psi(\mu_\lambda) \xrightarrow{w^*} \varphi \in B_{(C(B_{E'}))'}$. Pelo Teorema da Representação de Riesz existe $\mu \in M(B_{E'})$ tal que $\Psi(\mu) = \varphi$ e, além disso, da convergência na topologia fraca estrela,

$$\int_{B_{E'}} f d\mu_\lambda = \Psi(\mu_\lambda)(f) \longrightarrow \varphi(f) = \Psi(\mu)(f) = \int_{B_{E'}} f d\mu$$

para toda $f \in C(B_{E'})$. Em particular, tomando a função constante igual a 1,

$$1 = \mu_\lambda(B_{E'}) = \int_{B_{E'}} d\mu_\lambda \longrightarrow \int_{B_{E'}} d\mu = \mu(B_{E'}),$$

o que implica $\mu(B_{E'}) = 1$. Como μ é uma medida de Radon complexa precisamos mostrar que $\mu(A) \in \mathbb{R}^+$ para todo $A \in \mathfrak{B}(B_{E'})$. Seja $A \in \mathfrak{B}(B_{E'})$ então existe uma sequência $(f_n)_{n=1}^\infty$ em $C(B_{E'})$ tal que $f_n \longrightarrow \chi_A$ em $\mathcal{L}_1(B_{E'}, \mu)$ (veja [14, Proposition 7.9]). Logo, fixado $n \in \mathbb{N}$ e novamente aplicando o Teorema da Representação de Riesz, obtemos

$$\int_{B_{E'}} |f_n| \, d\mu_\lambda \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow \int_{B_{E'}} |f_n| \, d\mu,$$

o que implica $\int_{B_{E'}} |f_n|\, d\mu \in \mathbb{R}^+$. Mas como $f_n \longrightarrow \chi_A$ em $\mathcal{L}_1(B_{E'}, \mu)$, então $|f_n| \longrightarrow |\chi_A|$ em $\mathcal{L}_1(B_{E'}, \mu)$; assim

$$\int_{B_{E'}} |f_n| d\mu \in \mathbb{R}^+ \longrightarrow \int_{B_{E'}} |\chi_A| d\mu = \int_{B_{E'}} \chi_A d\mu = \mu(A)$$

e, por conseguinte, $\mu(A) \in \mathbb{R}^+$. Isto completa a demonstração. ■

O próximo resultado que precisamos relembrar é o Teorema da Convergência Dominada. Antes disso, relembre que se $(X, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço de medida e $0 \leq p < +\infty$, denotamos por $L_p(X, \mu)$ o espaço vetorial de todas as (classes de equivalência de) funções $f \colon X \to \mathbb{K}$ tais que $|f|^p$ é mensurável. Este espaço torna-se um espaço normado (p-normado se $0 < p < 1$) completo com

$$\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Teorema 1.2.14 (Teorema da Convergência Dominada) *Seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de funções mensuráveis em X tal que existe $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ para todo $x \in X$. Suponha que exista $g \in L_1(X, \mu)$ tal que $|f_n(x)| \leq g(x)$ para todo $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$. Então,*

$$f \in L_1(X, \mu) \text{ e } \int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu.$$

Demonstração: Veja [14, Theorem 2.24]. ■

CAPÍTULO 2

SEQUÊNCIAS EM ESPAÇOS DE BANACH

Neste capítulo definiremos e estudaremos caracterizações dos espaços das sequências absolutamente p-somáveis, fracamente p-somáveis, incondicionalmente p-somáveis e por fim o espaço das sequências misto $(s; q)$-somáveis.

2.1 Sequências somáveis

Nesta seção as letras E e F denotam espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$. E' denota o dual topológico de E.

Definição 2.1.1 Sejam E um espaço de Banach e $0 < p < +\infty$. Dizemos que uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E é *absolutamente p-somável* se $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p < +\infty$. Quando $p = 1$ dizemos que $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é *absolutamente somável*.

O espaço vetorial de todas as sequências absolutamente p-somáveis em E é denotado por $\ell_p(E)$, o qual se torna um espaço normado (p-normado se $0 < p < 1$) completo, quando munido com $\|\cdot\|_p$ definida por

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p := \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

para toda $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$. O espaço $\ell_p(\mathbb{K})$ é denotado simplesmente por ℓ_p.

A seguir, enunciaremos as Desigualdades de Hölder generalizada e de Minkowski para sequências visto que serão muito utilizadas em demonstrações que serão feitas posteriormente. Esta Desigualdade de Hölder segue fazendo uma simples adaptação da Desigualdade de Hölder usual. Para detalhes da demonstração veja [22, Proposition 1.1.5].

Teorema 2.1.2 (Desigualdade de Hölder para sequências) *Se E é um espaço normado, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$ e $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q(E)$, então*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^r \|y_j\|^r\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|y_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

para $r, p, q \in (0, +\infty]$ e $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Teorema 2.1.3 (Desigualdade de Minkowski para sequências) *Se E é um espaço normado sobre $\mathbb{K}$ e $1 \leq p < +\infty$, então*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j + y_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|y_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.1}$$

para $(x_j)_{j=1}^{\infty}$, $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$.

A proposição que veremos a seguir, nos diz que, para $0 < q \leq p$ o espaço das sequências absolutamente q-somáveis está contido no espaço das sequências absolutamente p-somáveis e que esta inclusão é contínua.

Proposição 2.1.4 *Se $0 < q \leq p$, então $\ell_q(E) \subset \ell_p(E)$ para todo espaço normado E. Além disso,*

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p \leq \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_q$$

para toda $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q(E)$.

Demonstração: Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q(E)$ com $\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_q = 1$, então $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^q = 1$. Como $q > 0$, segue que $\|x_n\|^q \leq \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^q$ e, consequentemente $\|x_n\| \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como $q \leq p$, então $\|x_j\|^p \leq \|x_j\|^q$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^q = 1 \Rightarrow \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p \leq 1.$$

Portanto, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$ e $\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p \leq \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_q$.

Agora se $0 \neq \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_q \neq 1$ consideramos a sequência $y_j = \dfrac{x_j}{\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_q}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim, é fácil ver que $\left\|(y_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_q = 1$ e pela primeira parte desta demonstração $\left\|(y_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p \leq 1$. Consequentemente,

$$\left\|(y_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p \leq \left\|(y_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_q.$$

Por outro lado,

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p = \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_q \left\|(y_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p \leq \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_q \left\|(y_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_q = \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_q < +\infty.$$

Portanto, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$ e $\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p \leq \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_q$.

Por fim, o caso $\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_q = 0$ é trivial e vale a igualdade. ■

No próximo resultado, mostraremos que o dual topológico de $\ell_1(E)$ é (isometricamente isomorfo a) $\ell_\infty(E')$.

Proposição 2.1.5 (O dual topológico de $\ell_1(E)$) *Se E é um espaço normado sobre $\mathbb{K}$, então existe um isomorfismo isométrico entre $(\ell_1(E))'$ e $\ell_\infty(E')$.*

Demonstração: Para cada $k \in \mathbb{N}$ consideremos a aplicação $I_k\colon E \longrightarrow \ell_1(E)$, dada por $I_k(x) = (0, 0, \ldots, 0, x, 0, \ldots)$, com x na k-ésima coordenada. É claro que I_k é linear e que $\|I_k(x)\|_1 = \|x\|$ para todo $x \in E$. Defina a aplicação

$$\begin{array}{rcl} I\colon (\ell_1(E))' & \longrightarrow & \ell_\infty(E') \\ T & \longmapsto & (T \circ I_k)_{k=1}^{\infty}. \end{array}$$

Vamos mostrar que I está bem definida é linear e contínua. Observe que

$$\ell_\infty(E') = \left\{(\varphi_j)_{j=1}^{\infty} : \varphi_j \in E' \text{ e } \sup_{j\in\mathbb{N}} \|\varphi_j\|_{E'} < +\infty\right\}.$$

Assim,

$$\|I(T)\|_\infty \ = \ \sup_{k\in\mathbb{N}} \|T \circ I_k\|_{E'} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{x\in B_E} |T \circ I_k(x)| \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \sup_{x\in B_E} \|T\|\|x\| \leq \|T\| < +\infty.$$

Portanto, $(T \circ I_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_\infty(E')$ para todo $T \in (\ell_1(E))'$ e $\|I\| \leq 1$. Para mostrar que I é linear sejam T, $S \in (\ell_1(E))'$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então

$$I(T + \lambda S) \ = \ ((T + \lambda S)(I_k))_{k=1}^{\infty} = (T(I_k))_{k=1}^{\infty} + \lambda(S(I_k))_{k=1}^{\infty} = I(T) + \lambda I(S).$$

Além disso I é contínua e $\|T \circ I_k\|_{E'} \leq \|T\|$. De fato,

$$|T \circ I_k(x)| = |T(0, 0, \ldots, 0, x, 0, \ldots)| \leq \|T\|\|(0, \ldots, 0, x, 0, \ldots)\| = \|T\|\|x\|.$$

Agora, defina a aplicação

$$\begin{array}{rcl} J\colon \ell_\infty(E') & \longrightarrow & (\ell_1(E))' \\ S = (S_j)_{j=1}^{\infty} & \longmapsto & J(S)\colon \ell_1(E) \longrightarrow \mathbb{K} \\ & & J(S)(x) = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} S_j(x_j), \end{array}$$

para toda $S = (S_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty(E')$ e $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1(E)$. Esta aplicação está bem definida é linear e contínua com $\|J\| \leq 1$. Com efeito, primeiro vamos provar que J está bem definida, isto é, $J(S) \in (\ell_1(E))'$. Sejam $x, y \in \ell_1(E)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Temos

$$\begin{aligned} J(S)(x+\lambda y) &= \sum_{j=1}^{\infty} S_j(x_j+\lambda y_j) = \sum_{j=1}^{\infty}(S_j(x_j)+\lambda S_j(y_j)) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} S_j(x_j) + \lambda \sum_{j=1}^{\infty} S_j(y_j) = J(S)(x) + \lambda J(S)(y), \end{aligned}$$

o que implica que $J(S)$ é linear. Por outro lado,

$$\begin{aligned} |J(S)(x)| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |S_j(x_j)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|S_j\|_{E'} \|x_j\| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sup_{k \in \mathbb{N}} \|S_k\|_{E'} \right) \|x_j\| \\ &= \|S\|_\infty \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\| = \|S\|_\infty \|x\|_1. \end{aligned}$$

Portanto, $J(S)$ é contínua e $\|J(S)\| \leq \|S\|_\infty$. Com isto, J está bem definida e é contínua. É claro que J é linear pois, sejam T, $S \in \ell_\infty(E')$, $x \in \ell_1(E)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ então

$$\begin{aligned} J(T+\lambda S)(x) &= \sum_{j=1}^{\infty}(T_j+\lambda S_j)(x_j) = \sum_{j=1}^{\infty}(T_j(x_j)+\lambda S_j(x_j)) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} T_j(x_j) + \lambda \sum_{j=1}^{\infty} S_j(x_j) = J(T)(x) + \lambda J(S)(x) \\ &= (J(T)+\lambda J(S))(x). \end{aligned}$$

Portanto $J(T+\lambda S) = J(T) + \lambda J(S)$. Note que, $(J \circ I)$ e $(I \circ J)$ são respectivamente as aplicações identidade de $(\ell_1(E))'$ e $\ell_\infty(E')$. Então,

$$\|S\|_\infty = \|I(J(S))\|_\infty \leq \|J(S)\| \leq \|S\|_\infty \Rightarrow \|J(S)\| = \|S\|_\infty,$$

para toda $S \in \ell_\infty(E')$. Portanto, J (e consequentemente I) é uma isometria. ■

Nos resultados a seguir, mostraremos que os duais topológicos de $c_0(E)$ e de $\ell_p(E)$ para $p \in (1, +\infty)$ são (isometricamente isomorfos a) $\ell_1(E')$ e $\ell_{p'}(E')$, respectivamente. Para tanto, usaremos o resultado para o caso $E = \mathbb{K}$ que pode ser encontrado em qualquer livro introdutório de Análise Funcional.

Proposição 2.1.6 (O dual topológico de $c_0(E)$) *Se E é um espaço normado sobre $\mathbb{K}$, então $(c_0(E))'$ é isometricamente isomorfo a $\ell_1(E')$.*

Demonstração: Consideremos a aplicação linear

$$\begin{aligned} I_k\colon E &\longrightarrow c_0(E) \\ x &\longmapsto I_k(x) = (0, \ldots, 0, x, 0, \ldots), \end{aligned}$$

com x na k-ésima coordenada. Vamos mostrar que $(T \circ I_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1(E')$, para todo $T \in (c_0(E))'$. É claro que $(T \circ I_k) \in E'$. Logo dado $\varepsilon > 0$ existe $x_k \in E$, com $\|x_k\| \leq 1$, tal que

$$\|T \circ I_k\|_{E'} < |T \circ I_k(x_k)| + \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

Para cada $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$ podemos escrever

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{\infty}(\|T \circ I_k\|_{E'})\alpha_k\right| &\leq \left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(|T \circ I_k(x_k)| + \frac{\varepsilon}{2^k}\right)\alpha_k\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(T \circ I_k(x_k) + \frac{\varepsilon}{2^k}\right)\alpha_k\right| \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left|(T \circ I_k(x_k))\alpha_k + \frac{\varepsilon}{2^k}\alpha_k\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}\left(|T \circ I_k(x_k)||\alpha_k| + \frac{\varepsilon}{2^k}|\alpha_k|\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}|T \circ I_k(x_k)||\alpha_k| + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}|\alpha_k| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty}|T \circ I_k(x_k)||\alpha_k| + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}\sup_{j\in\mathbb{N}}|\alpha_j| \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}|T \circ I_k(x_k)||\alpha_k| + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k}\left\|(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}|T \circ I_k(x_k)||\alpha_k| + \varepsilon\left\|(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty}.
\end{aligned}$$

Para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $\beta_k \in \mathbb{K}$, com $|\beta_k| = 1$ tal que $|T \circ I_k(x_k)||\alpha_k| = T \circ I_k(x_k)\alpha_k\beta_k$. Assim,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}|T \circ I_k(x_k)||\alpha_k| + \varepsilon\left\|(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty} &= \sum_{k=1}^{\infty}|T \circ I_k(x_k)\alpha_k\beta_k| + \varepsilon\left\|(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty} \\
&= \left|T\left(\sum_{k=1}^{\infty}I_k(x_k\alpha_k\beta_k)\right)\right| + \varepsilon\left\|(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty} \\
&\leq \|T\|\left\|\sum_{k=1}^{\infty}I_k(x_k\alpha_k\beta_k)\right\|_{\infty} + \varepsilon\left\|(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty}.
\end{aligned}$$

Como

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty}I_k(\beta_k\alpha_k x_k)\right\|_{\infty} = \sup_{k\in\mathbb{N}}\{\|\beta_k\alpha_k x_k\|\} = \sup_{k\in\mathbb{N}}\{|\beta_k||\alpha_k|\|x_k\|\} \leq \sup_{k\in\mathbb{N}}|\alpha_k| = \|(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}\|_{\infty},$$

obtemos

$$\|T\| \left\| \sum_{k=1}^{\infty} I_k(x_k \alpha_k \beta_k) \right\|_{\infty} + \varepsilon \left\| (\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\infty} \leq \|T\| \left\| (\alpha_k)_{k=1}^{\infty} \right\|_{\infty} + \varepsilon \left\| (\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\infty}.$$

Portanto, para toda $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$,

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} (\|T \circ I_k\|_{E'}) \alpha_k \right| \leq (\|T\| + \varepsilon) \|(\alpha_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty}.$$

Fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0$ temos

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} (\|T \circ I_k\|_{E'}) \alpha_k \right| \leq \|T\| \left\| (\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\infty}. \tag{2.2}$$

Logo, a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (\|T \circ I_k\|_{E'}) \alpha_k$ converge para toda $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$. Então defina $S \colon c_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ por

$$S((\alpha_k)_{k=1}^{\infty}) = \sum_{k=1}^{\infty} (\|T \circ I_k\|_{E'}) \alpha_k$$

De (2.2) segue que S está bem definida é linear e contínua com $\|S\| \leq \|T\|$. Logo $S \in (c_0)'$ e pela dualidade temos que $(\|T \circ I_k\|_{E'})_{k=1}^{\infty} \in \ell_1$, consequentemente $(T \circ I_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1(E')$. Além disso,

$$\|(T \circ I_k)_{k=1}^{\infty}\|_1 \leq \|T\|$$

e podemos concluir que a aplicação linear

$$\begin{array}{rcl} I \colon (c_0(E))' & \longrightarrow & \ell_1(E') \\ T & \longmapsto & I(T) = (T \circ I_k)_{k=1}^{\infty} \end{array}$$

é contínua e $\|I\| \leq 1$. Por outro lado, a aplicação linear

$$\begin{array}{rcl} J \colon \ell_1(E') & \longrightarrow & (c_0(E))' \\ (S_k)_{k=1}^{\infty} & \longmapsto & J((S_k)_{k=1}^{\infty}) \colon c_0(E) \longrightarrow \mathbb{K} \\ & & J((S_k)_{k=1}^{\infty})((x_k)_{k=1}^{\infty}) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} S_k(x_k), \end{array}$$

para toda $(S_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_1(E')$ e $(x_k)_{k=1}^{\infty} \in c_0(E)$, está bem definida. De fato, é claro que $J((S_k)_{k=1}^{\infty})$ é linear. Além disso,

$$\begin{aligned} |J((S_k)_{k=1}^{\infty})((x_k)_{k=1}^{\infty})| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} S_k(x_k) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |S_k(x_k)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|S_k\|_{E'} \|x_k\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \|S_k\|_{E'} \left(\sup_{j \in \mathbb{N}} \|x_j\| \right) = \left(\sup_{j \in \mathbb{N}} \|x_j\| \right) \sum_{k=1}^{\infty} \|S_k\|_{E'} \\ &= \|(S_k)_{k=1}^{\infty}\|_1 \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty}, \end{aligned}$$

logo $J((S_k)_{k=1}^{\infty})$ é contínua (portanto pertence a $(c_0(E))'$) e $\|J((S_k)_{k=1}^{\infty})\| \leq \|(S_k)_{k=1}^{\infty}\|_1$.

É fácil ver que $J\colon \ell_1(E') \longrightarrow (c_0(E))'$ é linear e de $\|J((S_k)_{k=1}^{\infty})\| \leq \|(S_k)_{k=1}^{\infty}\|_1$, segue que J é contínua e $\|J\| \leq 1$. Como $(I \circ J)$ e $(J \circ I)$ são respectivamente as aplicações identidade de $\ell_1(E')$ e $(c_0(E))'$, temos que $(c_0(E))'$ e $\ell_1(E')$ são isometricamente isomorfos.

$\blacksquare$

Proposição 2.1.7 (O dual topológico de $\ell_p(E)$, $1 < p < +\infty$) *Se E é um espaço normado sobre $\mathbb{K}$, então $(\ell_p(E))'$ é isometricamente isomorfo a $\ell_{p'}(E')$.*

Demonstração: Consideremos a aplicação linear $J\colon \ell_{p'}(E') \longrightarrow (\ell_p(E))'$ dada por,

$$J((S_j)_{j=1}^{\infty})((x_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} S_j(x_j),$$

para $(S_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p'}(E')$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$. Pela Desigualdade de Hölder para sequências, segue que

$$\begin{aligned}
\left|J((S_j)_{j=1}^{\infty})((x_j)_{j=1}^{\infty})\right| &\leq \sum_{j=1}^{\infty} |S_j(x_j)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \|S_j\|_{E'} \|x_j\| \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|S_j\|_{E'}^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|S_j\|_{E'}^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_p < +\infty.
\end{aligned}$$

Isto mostra que J está bem definida é contínua e $\|J\| \leq 1$. Agora, defina a aplicação linear $I_k\colon E \longrightarrow \ell_p(E)$ por $I_k(x) = (0, \ldots, 0, x, 0, \ldots)$, com x na k-ésima coordenada. É claro que $(T \circ I_k) \in E'$ para todo $T \in (\ell_p(E))'$. Vamos mostrar que $(T \circ I_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{p'}(E')$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $x_k \in E$, com $\|x_k\| \leq 1$, tal que

$$\|T \circ I_k\|_{E'} < |T \circ I_k(x_k)| + \frac{\varepsilon}{2^{\frac{k}{p'}}}.$$

Para toda $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_p$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{\infty} (\|T \circ I_k\|_{E'})\alpha_k\right| &\leq \left|\sum_{k=1}^{\infty} \left(|T \circ I_k(x_k)| + \frac{\varepsilon}{2^{\frac{k}{p'}}}\right)\alpha_k\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left|\left(|T \circ I_k(x_k)| + \frac{\varepsilon}{2^{\frac{k}{p'}}}\right)\alpha_k\right| \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \left||T \circ I_k(x_k)|\alpha_k + \frac{\varepsilon}{2^{\frac{k}{p'}}}\alpha_k\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(|T \circ I_k(x_k)||\alpha_k| + \frac{\varepsilon}{2^{\frac{k}{p'}}}|\alpha_k|\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} |T \circ I_k(x_k)||\alpha_k| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{\frac{k}{p'}}}|\alpha_k|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{k=1}^{\infty} |T \circ I_k(x_k)||\alpha_k| + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\varepsilon}{2^{\frac{k}{p'}}}\right)^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} |T \circ I_k(x_k)||\alpha_k| + \varepsilon \left\|(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}\right\|_p .
\end{aligned}
$$

Escolhendo para cada $k \in \mathbb{N}$, $\beta_k \in \mathbb{K}$, com $|\beta_k| = 1$ tal que $T \circ I_k(x_k)\alpha_k\beta_k = |T \circ I_k(x_k)\alpha_k|$, temos

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} |T \circ I_k(x_k)||\alpha_k| + \varepsilon \left\|(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}\right\|_p &= \left|\sum_{k=1}^{\infty} T \circ I_k(x_k)\alpha_k\beta_k\right| + \varepsilon \left\|(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}\right\|_p \\
&= \left|T\left(\sum_{k=1}^{\infty} I_k(x_k\alpha_k\beta_k)\right)\right| + \varepsilon \left\|(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}\right\|_p \\
&\leq \|T\| \left\|\sum_{k=1}^{\infty} I_k(x_k\alpha_k\beta_k)\right\|_p + \varepsilon \left\|(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}\right\|_p .
\end{aligned}
$$

Como

$$
\left\|\sum_{k=1}^{\infty} I_k(x_k\alpha_k\beta_k)\right\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\alpha_k\beta_k\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\|x_k\||\alpha_k||\beta_k|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^p\right)^{\frac{1}{p}},
$$

então

$$
\begin{aligned}
\|T\| \left\|\sum_{k=1}^{\infty} I_k(x_k\alpha_k\beta_k)\right\|_p + \varepsilon \left\|(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}\right\|_p &\leq \|T\| \left\|(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}\right\|_p + \varepsilon \left\|(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}\right\|_p \\
&= (\|T\| + \varepsilon) \left\|(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}\right\|_p .
\end{aligned}
$$

Logo, para toda $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_p$,

$$
\left|\sum_{k=1}^{\infty} (\|T \circ I_k\|_{E'})\alpha_k\right| \leq (\|T\| + \varepsilon) \left\|(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}\right\|_p .
$$

Fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0$ temos

$$
\left|\sum_{k=1}^{\infty} (\|T \circ I_k\|_{E'})\alpha_k\right| \leq \|T\| \left\|(\alpha_k)_{k=1}^{\infty}\right\|_p . \tag{2.3}
$$

Portanto, a série $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\|T \circ I_k\|_{E'})\alpha_k$ converge para toda $(\alpha_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_p$. Defina $S\colon \ell_p \longrightarrow \mathbb{K}$ por

$$
S((\alpha_k)_{k=1}^{\infty}) = \sum_{k=1}^{\infty} (\|T \circ I_k\|_{E'})\alpha_k
$$

De (2.3) segue que S está bem definida é linear e contínua com $\|S\| \leq \|T\|$. Assim, $S \in (\ell_p)'$ e pela dualidade $(\|T \circ I_k\|_{E'})_{k=1}^{\infty} \in \ell_{p'}$, consequentemente $(T \circ I_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_{p'}(E')$ e $\|(T \circ I_k)_{k=1}^{\infty}\|_{p'} \leq \|T\|$. Acabamos de provar que a aplicação linear $I\colon (\ell_p(E))' \longrightarrow \ell_{p'}(E')$ está bem definida é contínua e $\|I\| \leq 1$. Uma vez que $(I \circ J)$ e $(J \circ I)$ são respectivamente as aplicações identidade de $\ell_{p'}(E')$ e $(\ell_p(E))'$, concluímos que $\ell_{p'}(E')$ e $(\ell_p(E))'$ são isometricamente isomorfos. ■

2.2 Sequências fracamente somáveis

Definição 2.2.1 Sejam $0 < p \leq +\infty$ e E um espaço de Banach. Uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E é *fracamente p-somável* se a sequência de escalares $(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}$ estiver em ℓ_p para todo $\varphi \in E'$, isto é, se $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p < +\infty$ para todo $\varphi \in E'$.

Denotamos por $\ell_p^w(E)$ o conjunto de todas as sequências em E que são fracamente p-somáveis. Como ℓ_p é um espaço vetorial, então é claro que $\ell_p^w(E)$ também é. Para $0 < p < +\infty$, definimos

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} := \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

e para $p = \infty$, definimos

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,\infty} := \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sup_{j \in \mathbb{N}} |\varphi(x_j)| \right).$$

Veremos a seguir, que o espaço vetorial $\ell_p^w(E)$ munido com $\|\cdot\|_{w,p}$, definida acima, se torna um espaço normado (p-normado se $0 < p < 1$) completo. Antes, veremos uma proposição em que vamos mostrar que a função $\|\cdot\|_{w,p}\colon \ell_p^w(E) \longrightarrow [0, +\infty)$ está bem definida e uma observação onde mostraremos que o espaço das sequências absolutamente p-somáveis está contido no espaço das sequências fracamente p-somáveis para qualquer espaço E.

Proposição 2.2.2 *Se* $0 < p < +\infty$ *e* $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$*, então*

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p} := \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Demonstração: Para cada $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$, defina a aplicação linear

$$\begin{aligned} T\colon E' &\longrightarrow \ell_p \\ \varphi &\longmapsto T(\varphi) = (\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}. \end{aligned}$$

Claramente T está bem definida e é linear. Vamos mostrar que T tem o gráfico fechado. Seja $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência em E' tal que

$$\varphi_j \longrightarrow \varphi \in E' \;\text{ e }\; T(\varphi_j) \longrightarrow y \in \ell_p.$$

Então temos

$$(\varphi_j(x_n))_{n=1}^{\infty} = T(\varphi_j) \longrightarrow y = (y_k)_{k=1}^{\infty} \;\text{ quando } j \longrightarrow \infty$$

e, consequentemente

$$\varphi_j(x_n) \longrightarrow y_n \;\text{ quando } j \longrightarrow \infty, \tag{2.4}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, de $\varphi_j \longrightarrow \varphi$, obtemos

$$\varphi_j(x_n) \longrightarrow \varphi(x_n) \;\text{ quando } j \longrightarrow \infty, \tag{2.5}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, de (2.4), (2.5) e da unicidade do limite, concluímos que $\varphi(x_n) = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, mostrando assim que $T(\varphi) = y$. Portanto, o operador T tem o gráfico fechado e, pelo Teorema do Gráfico Fechado, segue que T é limitado, isto é,

$$\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|T(\varphi)\|_p < +\infty.$$

■

Lema 2.2.3 *Seja $(a_{mn})_{m,n}$ uma família de números reais não negativos. Então:*

(a) Se $\sup_m \left[\sup_n a_{mn}\right] = \infty$, então $\sup_n \left[\sup_m a_{mn}\right] = \infty$.

(b) Se $\sup_m \left[\sup_n a_{mn}\right] = L < \infty$, então $\sup_n \left[\sup_m a_{mn}\right] = L$.

Demonstração: (a) Suponha que $\sup_m \left[\sup_n a_{mn}\right] = \infty$. Dado $K > 0$, existe m_0 tal que $\sup_n a_{m_0 n} > K$. Dessa forma, existe n_0 tal que $a_{m_0 n_0} > K$ e segue que $\sup_m a_{mn_0} > K$. Logo $\sup_n \left[\sup_m a_{mn}\right] > K$. Portanto $\sup_n \left[\sup_m a_{mn}\right] = \infty$.

(b) Suponhamos que $\sup_m \left[\sup_n a_{mn}\right] = L < \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, existe m_0 tal que $\sup_n a_{m_0 n} > L - \varepsilon$. Consequentemente, existe n_0 tal que $a_{m_0 n_0} > L - \varepsilon$. Logo

$$\sup_n \left[\sup_m a_{mn}\right] \geq \sup_m a_{mn_0} \geq a_{m_0 n_0} > L - \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, segue que

$$\sup_n \left[\sup_m a_{mn} \right] \geq L. \tag{2.6}$$

Note que, pelo item (a), é imediato que

$$\sup_n \left[\sup_m a_{mn} \right] < \infty.$$

Por outro lado, segue diretamente da hipótese que $\sup\limits_n a_{mn} \leq L$, para todo m. Logo, $a_{mn} \leq L$, para todo m e todo n. Então $\sup\limits_m a_{mn} \leq L$, para todo n. Assim,

$$\sup_n \left[\sup_m a_{mn} \right] \leq L. \tag{2.7}$$

Portanto, de (2.6) e (2.7), segue que

$$\sup_n \left[\sup_m a_{mn} \right] = L.$$

$\blacksquare$

Observação 2.2.4 Se $0 < p < +\infty$, então $\ell_p(E) \subset \ell_p^w(E)$. De fato,

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,p} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|\varphi\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p.$$

Além disso, quando $p = \infty$, temos $\ell_\infty^w(E) = \ell_\infty(E)$. De fato,

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} = \sup_{j \in \mathbb{N}} \|x_j\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} \left(\sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x_j)| \right) = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sup_{j \in \mathbb{N}} |\varphi(x_j)| \right) = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,\infty}.$$

Note que a terceira igualdade segue do lema anterior.

Definição 2.2.5 Um subconjunto D de $B_{E'}$, é *normante* em E se para todo $x \in E$,

$$\|x\| = \sup_{\varphi \in D} |\varphi(x)|.$$

Observação 2.2.6 Sejam $0 < p < +\infty$ e $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$. Pelo isomorfismo isométrico entre $(\ell_{p'})'$ e ℓ_p, temos bem definido o operador

$$\begin{aligned} J \colon \ell_p &\longrightarrow (\ell_{p'})' \\ y &\longmapsto J(y) \colon \ell_{p'} \longrightarrow \mathbb{K} \\ & \qquad J(y)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n x_n \end{aligned}$$

onde $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$ e $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{p'}$. Note que,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \|(\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty}\|_p = \|J((\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty})\| \\
&= \sup_{\|(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\|_{p'} \leq 1} |J((\varphi(x_n))_{n=1}^{\infty})((\lambda_n)_{n=1}^{\infty})| \\
&= \sup_{\|(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\|_{p'} \leq 1} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi(x_n) \right| \\
&= \sup_{\|(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\|_{p'} \leq 1} \left| \varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \right) \right|.
\end{aligned}$$

Logo, se D é normante em E obtemos

$$\begin{aligned}
\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \sup_{\substack{\|(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\|_{p'} \leq 1 \\ \varphi \in B_{E'}}} \left| \varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \right) \right| \\
&= \sup_{\|(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\|_{p'} \leq 1} \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \right\| \\
&= \sup_{\|(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\|_{p'} \leq 1} \sup_{\varphi \in D} \left| \varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \right) \right| \\
&= \sup_{\varphi \in D} \sup_{\|(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\|_{p'} \leq 1} \left| \varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n \right) \right| \\
&= \sup_{\varphi \in D} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p} = \sup_{\varphi \in D} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

para todo subconjunto D de $B_{E'}$ normante em E.

A seguinte observação se fará necessária na demonstração da próxima proposição.

Observação 2.2.7 Se $A \subseteq [0, +\infty)$, então $\sup\{a^p : a \in A\} = (\sup\{a : a \in A\})^p$. Com efeito, $\sup\{a^p : a \in A\} \geq a^p$, para todo $a \in A$, então $(\sup\{a^p : a \in A\})^{\frac{1}{p}} \geq a$, para todo $a \in A$, logo c é cota superior para o conjunto A, onde $c = (\sup\{a^p : a \in A\})^{\frac{1}{p}}$. Portanto, $c \geq \sup\{a^p : a \in A\}$, ou seja, $\sup\{a^p : a \in A\} \geq (\sup\{a : a \in A\})^p$. Por outro lado, $a \leq \sup\{a : a \in A\}$, para todo $a \in A$, logo $a^p \leq (\sup\{a : a \in A\})^p$ e segue que $\sup\{a^p : a \in A\} \leq (\sup\{a : a \in A\})^p$.

Proposição 2.2.8 *Se $1 \leq p < +\infty$, então $\|\cdot\|_{w,p}$ define uma norma (p-norma se $0 < p < 1$) em $\ell_p^w(E)$ o qual se torna um espaço normado completo.*

Demonstração: Primeiro faremos o caso $1 \leq p < +\infty$, isto é, $\|\cdot\|_{w,p}$ define uma norma em $\ell_p^w(E)$. Para isso, verificaremos as condições de norma.

(i) É claro que

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geq 0.$$

(ii) Devemos mostrar que $\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,q} = 0$ se, e somente se, $(x_n)_{n=1}^{\infty} = 0$. Note que

$$\begin{aligned}
\|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p} &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \Leftrightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \\
&\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p = 0 \Leftrightarrow |\varphi(x_n)|^p = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \\
&\Leftrightarrow \varphi(x_n) = 0 \Leftrightarrow x_n = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow (x_n)_{n=1}^{\infty} = 0.
\end{aligned}$$

(iii) Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Daí,

$$\begin{aligned}
\|(\lambda x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p} &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(\lambda x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^p |\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\lambda| \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |\lambda| \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p}.
\end{aligned}$$

(iv) Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$. Então,

$$\begin{aligned}
\|(x_n)_{n=1}^{\infty} + (y_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p} &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n + y_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n) + \varphi(y_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\overset{(2.1)}{\leq} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left[\left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(y_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \\
&\leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(y_n)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p} + \|(y_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p}.
\end{aligned}$$

Agora, vamos mostrar que $\ell_p^w(E)$ é completo.

Seja $\left(x^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\ell_p^w(E)$. Denotemos, para cada k, $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \ldots\right) \in \ell_p^w(E)$. Como $\left(x^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ é de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$k, l \geq N \Rightarrow \left\|x^{(k)} - x^{(l)}\right\|_{w,p} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi\left(x_n^{(k)} - x_n^{(l)}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Logo, para todo $\varphi \in B_{E'}$,

$$\left|\varphi\left(x_n^{(k)} - x_n^{(l)}\right)\right|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi\left(x_n^{(k)} - x_n^{(l)}\right)\right|^p < \varepsilon^p.$$

Como cada termo é majorado por ε^p, segue que para todo n,

$$k, l \geq N \Rightarrow \left\|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}\right\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left|\varphi\left(x_n^{(k)} - x_n^{(l)}\right)\right| \leq \varepsilon.$$

Assim, para cada n, $\left(x_n^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em E, e consequentemente converge pois E é Banach. Sejam x_n o limite de $\left(x_n^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ em E e $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$. Vamos mostrar que $x \in \ell_p^w(E)$ e que $x^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} x$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ e $\varphi \in B_{E'}$,

$$k, l \geq N \Rightarrow \sum_{n=1}^{m} \left|\varphi\left(x_n^{(k)} - x_n^{(l)}\right)\right|^p < \varepsilon^p. \tag{2.8}$$

Fazendo $l \longrightarrow \infty$ em (2.8), temos que

$$k \geq N \Rightarrow \sum_{n=1}^{m} \left|\varphi\left(x_n^{(k)} - x_n\right)\right|^p < \varepsilon^p. \tag{2.9}$$

Agora em (2.9) fazendo $m \longrightarrow \infty$, temos

$$k \geq N \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi\left(x_n^{(k)} - x_n\right)\right|^p \leq \varepsilon^p,$$

para todo $\varphi \in B_{E'}$. Portanto podemos concluir que $x - x^{(N)} \in \ell_p^w(E)$. Logo $x = (x - x^{(N)}) + x^{(N)} \in \ell_p^w(E)$. Além disso,

$$k \geq N \Rightarrow \left\|x^{(k)} - x\right\|_{w,p} \leq \varepsilon,$$

ou seja, $x^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} x \in \ell_p^w(E)$. Portanto, $\ell_p^w(E)$ é Banach.

Se $0 < p < 1$, mostremos que $\|\cdot\|_{w,p}$ é uma p-norma. Pela Definição 1.1.2 basta mostrar que

$$\|(x_n)_{n=1}^{\infty} + (y_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p}^p \leq \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p}^p + \|(y_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p}^p$$

para toda $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$.

$$\begin{aligned}
\|(x_n)_{n=1}^{\infty} + (y_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p}^p &= \left(\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n + y_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \\
&= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n) + \varphi(y_n)|^p \\
&\leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{n=1}^{\infty} (|\varphi(x_n)|^p + |\varphi(y_n)|^p) \\
&= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p + \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(y_n)|^p \right) \\
&\leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p + \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(y_n)|^p \\
&= \left(\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p + \left(\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(y_n)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \right)^p \\
&= \|(x_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p}^p + \|(y_n)_{n=1}^{\infty}\|_{w,p}^p.
\end{aligned}$$

Note que, a segunda e a penúltima igualdades seguem diretamente da Observação 2.2.7. A demonstração de que $\ell_p^w(E)$ é um espaço completo, para $0 < p < 1$, é análoga ao feito acima. De fato, seja $\left(x^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\ell_p^w(E)$. Denotemos, para cada k, $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \ldots\right) \in \ell_p^w(E)$. Como $\left(x^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ é de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$k, l \geq N \Rightarrow \left\|x^{(k)} - x^{(l)}\right\|_{w,p}^p = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi\left(x_n^{(k)} - x_n^{(l)}\right)\right|^p < \varepsilon.$$

Logo, para todo $\varphi \in B_{E'}$,

$$\left|\varphi\left(x_n^{(k)} - x_n^{(l)}\right)\right|^p \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi\left(x_n^{(k)} - x_n^{(l)}\right)\right|^p < \varepsilon.$$

Como cada termo é majorado por ε, segue que para todo n,

$$k, l \geq N \Rightarrow \left\|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}\right\|^p = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left|\varphi\left(x_n^{(k)} - x_n^{(l)}\right)\right|^p \leq \varepsilon.$$

Assim, para cada n, $\left(x_n^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em E, e consequentemente converge pois E é Banach. Sejam x_n o limite de $\left(x_n^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ em E e $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$. Vamos mostrar que $x \in \ell_p^w(E)$ e que $x^{(k)} \xrightarrow{k \to \infty} x$. Para cada $m \in \mathbb{N}$ e $\varphi \in B_{E'}$,

$$k, l \geq N \Rightarrow \sum_{n=1}^{m} \left|\varphi\left(x_n^{(k)} - x_n^{(l)}\right)\right|^p < \varepsilon. \tag{2.10}$$

Fazendo $l \longrightarrow \infty$ em (2.10), temos que

$$k \geq N \Rightarrow \sum_{n=1}^{m} \left|\varphi\left(x_n^{(k)} - x_n\right)\right|^p < \varepsilon. \tag{2.11}$$

Agora em (2.11) fazendo $m \longrightarrow \infty$, temos

$$k \geq N \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left|\varphi\left(x_n^{(k)} - x_n\right)\right|^p \leq \varepsilon,$$

para todo $\varphi \in B_{E'}$. Portanto podemos concluir que $x - x^{(N)} \in \ell_p^w(E)$. Logo $x = (x - x^{(N)}) + x^{(N)} \in \ell_p^w(E)$. Além disso,

$$k \geq N \Rightarrow \left\|x^{(k)} - x\right\|_{w,p}^p \leq \varepsilon,$$

ou seja, $x^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} x \in \ell_p^w(E)$. Portanto, $\ell_p^w(E)$ é um espaço completo. ■

O próximo resultado, nos diz que, o espaço das sequências absolutamente p-somáveis coincide com o espaço das sequências fracamente p-somáveis quando E tem dimensão finita.

Proposição 2.2.9 *Se E tem dimensão finita, então $\ell_p(E) = \ell_p^w(E)$.*

Demonstração: Pela Proposição 1.1.9, basta provar o caso $E = \mathbb{K}^m$ munido com a $(p-)$ norma $\|\cdot\|_p$. Já vimos que $\ell_p(E) \subseteq \ell_p^w(E)$ logo, basta mostrar que $\ell_p^w(E) \subseteq \ell_p(E)$. Sejam $(x_n)_{n=1}^\infty \in \ell_p^w(E)$, então $x_n = (x_{n,1}, \ldots, x_{n,m})$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$\begin{aligned} \pi_j \colon E = \mathbb{K}^m \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{K} \\ x_n = (x_{n,1}, \ldots, x_{n,m}) \quad &\longmapsto \quad x_{n,j}, \end{aligned}$$

a projeção na j-ésima coordenada de x_n, para todo $j = 1, \ldots, m$. É claro que π_j é linear e de

$$|\pi_j(x_n)| = |x_{n,j}| \leq \left(\sum_{k=1}^{m} |x_{n,k}|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|(x_{n,k})_{k=1}^m\|_p = \|x_n\|_p,$$

segue que π_j é contínua e $\|\pi_j\| \leq 1$. Com isso $\pi_j \in E'$ e assim

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_p^p &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m} |x_{n,j}|^p = \sum_{j=1}^{m}\sum_{n=1}^{\infty} |x_{n,j}|^p \\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{n=1}^{\infty} |\pi_j(x_n)|^p \leq \sum_{j=1}^{m} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)|^p \\ &= \sum_{j=1}^{m} \|(x_n)_{n=1}^\infty\|_{w,p}^p < +\infty. \end{aligned}$$

Portanto, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(E)$. ■

A conclusão da Proposição 2.2.9 não é verdadeira se E tiver dimensão infinita como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 2.2.10 Seja $E = c_0$ e considere a sequência $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ onde $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ com 1 na n-ésima coordenada. Para todo $n \in \mathbb{N}$ temos que $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \in c_0$ e além disso, $\|e_n\|_{\infty} = 1$, então $(e_n)_{n=1}^{\infty} \notin \ell_1(c_0)$ pois,

$$\|(e_n)_{n=1}^{\infty}\|_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \|e_n\|_{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty.$$

Agora vamos mostrar que $(e_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1^w(c_0)$. Para isso, basta mostrar que $(\varphi(e_n))_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$ para todo $\varphi \in (c_0)' = \ell_1$. Seja $\varphi \in (c_0)'$, pela dualidade existe $y = (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$ tal que $J(y) = \varphi$ (conforme Proposição 2.1.6). Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(e_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |J(y)(e_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |y_n| < +\infty,$$

e assim, $(e_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1^w(c_0)$.

2.3 Sequências incondicionalmente somáveis

Nesta seção introduziremos as sequências incondicionalmente p-somáveis, mas para motivar a definição faremos antes um estudo sobre sequências incondicionalmente somáveis.

Já vimos que uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ num espaço de Banach E é absolutamente somável se $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ converge. Introduziremos agora a definição de sequências somáveis e incondicionalmente somáveis.

Definição 2.3.1 Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em um espaço de Banach E é *somável* se a série correspondente, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge em E. Dizemos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é *incondicionalmente somável* se $(x_{\sigma(n)})_{n=1}^{\infty}$ é somável em E para qualquer permutação σ de $\mathbb{N}$.

Sabemos que existem exemplos de sequências somáveis que não são absolutamente somáveis. Em 1837, Dirichlet provou que para uma sequência de números reais, o conceito de absolutamente somável é equivalente à noção de incondicionalmente somável. Em outras palavras, na reta, uma sequência é absolutamente somável se, e somente se, é incondicionalmente somável.

Denotamos por $\ell^u(E) = \ell_1^u(E)$ o conjunto de todas as sequências incondicionalmente somáveis em E. Aplicando o Critério de Cauchy para convergência de séries e o Teorema de Dirichlet é possível mostrar que $\ell_1(E) \subset \ell^u(E)$. De fato, seja $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1(E)$, isto é,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty.$$

Logo, $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$ e pelo Teorema de Dirichlet segue que $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável. Seja $\sigma\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ uma bijeção, então $\displaystyle\sum_{k=n}^{m} \|x_{\sigma(k)}\| \longrightarrow 0$, quando $n, m \longrightarrow \infty$, e como

$$\left\|\sum_{k=n}^{m} x_{\sigma(k)}\right\| \leq \sum_{k=n}^{m} \|x_{\sigma(k)}\|,$$

segue do Critério de Cauchy para convergência de séries que $(x_{\sigma(n)})_{n=1}^{\infty}$ é somável. Portanto, $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell^u(E)$.

Uma sequência em $\mathbb{K}^n$ converge se, e somente se, converge coordenada a coordenada. Logo, o Teorema de Dirichlet continua verdadeiro para sequências em qualquer espaço de Banach E que tenha dimensão finita. Se E tiver dimensão infinita, este resultado não é verdadeiro, como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 2.3.2 Tome $E = c_0$ e seja $e_n \in E$, $n \in \mathbb{N}$, o vetor canônico de E, isto é, $e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$, onde 1 aparece na n-ésima coordenada. Chame $x_n = \frac{e_n}{n}$ e analisemos a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ em c_0. Tomando $x = (\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty} \in c_0$, é fácil ver que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x$ pois,

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j - x\right\| &= \left\|\left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, 0, 0, \ldots\right) - x\right\| \\ &= \left\|\left(0, 0, \ldots, 0, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, \ldots\right)\right\| = \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

quando $n \longrightarrow \infty$. Agora mostraremos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente para x. Para isso, seja σ uma permutação de $\mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, tome um inteiro positivo $N > \frac{1}{\varepsilon}$. É claro que para cada $j = 1, \ldots, N$, existe $n_j \in \mathbb{N}$ tal que $\sigma(n_j) = j$. Chame agora $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_N\}$. Então para $n \geq n_0$ a sequência $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)}$ certamente tem suas primeiras N coordenadas iguais às de x. Portanto,

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_{\sigma(j)} - x\right\| \leq \frac{1}{N+1} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0$. Isso prova que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ converge, e portanto $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável. Por outro lado, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ não é absolutamente somável, pois

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\|\frac{1}{n} e_n\right\|_{\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

que é a série harmônica, logo divergente.

Se E tiver dimensão infinita, podemos ter também, sequências fracamente somáveis que não são incondicionalmente somáveis, como veremos no próximo exemplo. Um resultado importante da Análise Funcional nos diz que exemplos nessa situação só podem ocorrer em espaços de Banach E que têm uma cópia de c_0 (isto é, E contém um subespaço isomorfo a c_0). Em outras palavras: $\ell_1^u(E) = \ell_1^w(E)$ se, e somente se, E não tiver uma cópia de c_0.

Abaixo, relembramos um resultado útil que caracteriza espaços de Banach via convergência de séries e que será usado na demonstração do Teorema 4.0.24.

Proposição 2.3.3 *Seja E um espaço normado (p-normado). Então E é completo se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset E$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < +\infty$ ($\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^p < +\infty$ no caso p-normado) for verdade que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge.*

Demonstração: Para o caso normado veja [8, Proposition 1.1]. O caso p-normado segue com uma simples adaptação do caso normado. ■

Proposição 2.3.4 *Seja E um espaço normado. Se $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge em E, então x_n converge para 0 quando $n \longrightarrow \infty$.*

Demonstração: Suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = a \in E$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \geq j_1$, temos $\left\| \sum_{n=1}^{j} x_n - a \right\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Seja $j_0 > j_1$, $j_0 \in \mathbb{N}$, então para todo $j \geq j_0$,

$$\begin{aligned} \|x_j - 0\| &= \left\| x_j - \sum_{n=1}^{j-1} x_n + \sum_{n=1}^{j-1} x_n - a + a \right\| = \left\| \sum_{n=1}^{j} x_n - a + a - \sum_{n=1}^{j-1} x_n \right\| \\ &\leq \left\| \sum_{n=1}^{j} x_n - a \right\| + \left\| \sum_{n=1}^{j-1} x_n - a \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

A última desigualdade vale pois $j \geq j_0 > j_1$ e $j - 1 \geq j_0 - 1 \geq j_1$. Assim, $x_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$. ■

Agora vamos ao exemplo de uma sequência fracamente somável que não é incondicionalmente somável.

Exemplo 2.3.5 Seja $E = c_0$ e tomemos a sequência $(e_n)_{n=1}^{\infty}$, onde $e_n = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ com 1 na n-ésima coordenada. No Exemplo 2.2.10 vimos que $(e_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1^w(c_0)$ e agora vamos mostrar que $(e_n)_{n=1}^{\infty} \notin \ell^u(c_0)$. Para isto, basta mostrar que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ não é somável em c_0. Suponha que $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ seja somável em c_0, então pela Proposição 2.3.4 temos que $e_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$, o que não ocorre, pois se ocorresse teríamos $1 = \|e_n\|_{\infty} \xrightarrow{n \to \infty} \|(0, 0, \ldots, 0)\|_{\infty} = 0$, o que é um absurdo. Logo, $(e_n)_{n=1}^{\infty} \notin \ell^u(c_0)$.

O próximo teorema trata de algumas equivalências a respeito de sequências incondicionalmente somáveis em espaços de Banach. Antes veremos o seguinte lema.

Lema 2.3.6 *Seja $\alpha > 0$. Se $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de escalares tal que* $\left|\sum_{n\in M}\lambda_n\right| \leq \alpha$ *para todo conjunto finito $M \subset \mathbb{N}$, então* $\sum_{n=1}^{\infty}|\lambda_n| \leq 4\alpha$.

Demonstração: Para todo $k \in \mathbb{N}$, veja que

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{k}|\lambda_n| &= \sum_{n=1}^{k}|Re(\lambda_n)+Im(\lambda_n)| \leq \sum_{n=1}^{k}|Re(\lambda_n)| + \sum_{n=1}^{k}|Im(\lambda_n)|\\ &= \sum_{n\in M_{Re}^{+}} Re(\lambda_n) + \sum_{n\in M_{Re}^{-}}(-Re(\lambda_n)) + \sum_{n\in M_{Im}^{+}} Im(\lambda_n) + \sum_{n\in M_{Im}^{-}}(-Im(\lambda_n)),\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}M_{Re}^{+} &= \{1 \leq n \leq k; Re(\lambda_n) > 0\},\\ M_{Re}^{-} &= \{1 \leq n \leq k; Re(\lambda_n) < 0\},\\ M_{Im}^{+} &= \{1 \leq n \leq k; Im(\lambda_n) > 0\},\\ M_{Im}^{-} &= \{1 \leq n \leq k; Im(\lambda_n) < 0\}\end{aligned}$$

e $Re(\lambda_n)$, $Im(\lambda_n)$ são respectivamente as partes real e imaginária do número complexo λ_n. Desde que $\left|\sum_{n\in M}\lambda_n\right| \leq \alpha$ para qualquer M finito, considerando $M = M_{Re}^{+}, M_{Re}^{-}, M_{Im}^{+}$ e M_{Im}^{-}, obtemos

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n\in M_{Re}^{+}} Re(\lambda_n)\right| &= \left|Re\left(\sum_{n\in M_{Re}^{+}}\lambda_n\right)\right| \leq \left|\sum_{n\in M_{Re}^{+}}\lambda_n\right| \leq \alpha,\\ \left|\sum_{n\in M_{Re}^{-}} (-Re(\lambda_n))\right| &= \left|Re\left(\sum_{n\in M_{Re}^{-}}\lambda_n\right)\right| \leq \left|\sum_{n\in M_{Re}^{-}}\lambda_n\right| \leq \alpha,\\ \left|\sum_{n\in M_{Im}^{+}} Im(\lambda_n)\right| &= \left|Im\left(\sum_{n\in M_{Im}^{+}}\lambda_n\right)\right| \leq \left|\sum_{n\in M_{Im}^{+}}\lambda_n\right| \leq \alpha,\\ \left|\sum_{n\in M_{Im}^{-}} (-Im(\lambda_n))\right| &= \left|Im\left(\sum_{n\in M_{Im}^{-}}\lambda_n\right)\right| \leq \left|\sum_{n\in M_{Im}^{-}}\lambda_n\right| \leq \alpha.\end{aligned}$$

Portanto, $\sum_{n=1}^{k}|\lambda_n| \leq 4\alpha$, e o resultado segue, pois k é arbitrário. ■

Teorema 2.3.7 *Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em um espaço de Banach E. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(1) $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *é incondicionalmente somável.*

(2) Para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que se J é um subconjunto finito de $\mathbb{N}$ com $\min J > n_\varepsilon$ então

$$\left\| \sum_{n \in J} x_n \right\| < \varepsilon.$$

(3) $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1^w(E)$ *e* $\lim\limits_{k\to\infty} \|(x_n)_{n=k}^{\infty}\|_{w,1} = 0.$

Além disso, se $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável em E, então para toda permutação σ de $\mathbb{N}$ temos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$.

Demonstração: (1)$\Rightarrow$(2) Suponhamos, por absurdo, que (2) seja falsa. Então, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $m \in \mathbb{N}$, existe um subconjunto finito J dos naturais com $\min J > m$ e $\left\| \sum\limits_{n \in J} x_n \right\| \geq \varepsilon$.

Isso nos permite construir uma sequência $(J_n)_{n=1}^{\infty}$ de subconjuntos finitos dos naturais tal que

$$\min J_1 > 1 \text{ e } \left\| \sum_{i \in J_1} x_i \right\| \geq \varepsilon,$$

e

$$\min J_n > \max J_{n-1} \text{ e } \left\| \sum_{i \in J_n} x_i \right\| \geq \varepsilon,$$

para todo $n \geq 2$.

Agora, consideremos uma bijeção $\sigma \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ que leva cada inteiro do intervalo $[\min J_n, \min J_n + |J_n|)$ em J_n, onde $|J_n|$ é a quantidade de elementos de J_n. Isso é possível pois o número de inteiros do intervalo $[\min J_n, \min J_n + |J_n|)$ é igual a $|J_n|$ e porque, tanto os intervalos quanto os J_n são disjuntos entre si.

Afirmamos que a sequência $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)}$ não é de Cauchy. De fato, é possível escolher, para todo $m \in \mathbb{N}$, algum dos $J_n \subset \mathbb{N}$, com $\min J_n > m$ e $\left\| \sum\limits_{n \in J_n} x_n \right\| \geq \varepsilon$. Tomando $p = \min J_n - 1$ e $q = \min J_n + |J_n| - 1$, teremos $q \geq p + 1 > m$ e assim

$$\|S_q - S_p\| = \left\| \sum_{k=p+1}^{q} x_{\sigma(k)} \right\| = \left\| \sum_{k \in J_n} x_k \right\| \geq \varepsilon.$$

Portanto, $(x_{\sigma(n)})_{n=1}^{\infty}$ não é somável, isto é, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ não é incondicionalmente somável, o que é absurdo.

(2)⇒(1) Seja $\sigma\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ uma bijeção qualquer e consideremos a sequência $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)}$. Fixe $\varepsilon > 0$ e escolha $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ de acordo com (2). Então existe $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$, suficientemente grande, de modo que $\{1, \ldots, n_\varepsilon + 1\} \subset \{\sigma(1), \ldots, \sigma(m_\varepsilon)\}$. Assim, para $q, p \in \mathbb{N}$ com $q \geq p + 1 \geq m_\varepsilon$, temos que $\sigma(p+1), \sigma(q) > n_\varepsilon$, e portanto

$$\|S_q - S_p\| = \left\| \sum_{k=1}^{q} x_{\sigma(k)} - \sum_{k=1}^{p} x_{\sigma(k)} \right\| = \left\| \sum_{k=p+1}^{q} x_{\sigma(k)} \right\| = \left\| \sum_{n \in \{\sigma(p+1), \ldots, \sigma(q)\}} x_n \right\| < \varepsilon.$$

Logo, $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ é de Cauchy. Como E é Banach segue que a série $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)}$ é convergente. Então, $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável.

(1)⇒(3) Suponha que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ seja uma sequência incondicionalmente somável em E. Então, pelo item (2), dado $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \sum_{n \in J} x_n \right\| < \varepsilon,$$

para todo subconjunto finito $J \subset \{n_\varepsilon, n_\varepsilon + 1, \ldots\}$.

Pelo Teorema de Hahn-Banach, para todo $\varphi \in B_{E'}$ temos

$$\left| \sum_{n \in J} \varphi(x_n) \right| \leq \sup_{\psi \in B_{E'}} \left| \sum_{n \in J} \psi(x_n) \right| = \left\| \sum_{n \in J} x_n \right\| < \varepsilon$$

e pelo Lema 2.3.6 segue que $\sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} |\varphi(x_n)| < 4\varepsilon$, para todo $\varphi \in B_{E'}$. Então

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(x_n)| = \sum_{n=1}^{n_\varepsilon - 1} |\varphi(x_n)| + \sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} |\varphi(x_n)| < +\infty,$$

donde $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1^w(E)$. Além disso, para todo

$$k \geq n_\varepsilon \Rightarrow \|(x_n)_{n=k}^{\infty}\|_{w,1} \leq \left\|(x_n)_{n=n_\varepsilon}^{\infty}\right\|_{w,1} \leq 4\varepsilon,$$

isto é, $\lim_{k \to \infty} \|(x_n)_{n=k}^{\infty}\|_{w,1} = 0$.

(3)⇒(1) Se $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1^w(E)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq n_\varepsilon \Rightarrow \|(x_n)_{n=k}^{\infty}\|_{w,1} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{n=k}^{\infty} |\varphi(x_n)| < \varepsilon.$$

Dessa forma, para todo conjunto finito $J \subset \{n_\varepsilon, n_\varepsilon + 1, \ldots\}$ temos que

$$\left\| \sum_{n \in J} x_n \right\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left| \sum_{n \in J} \varphi(x_n) \right| \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{n \in J} |\varphi(x_n)| \leq \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{n=n_\varepsilon}^{\infty} |\varphi(x_n)| < \varepsilon.$$

Assim, do item (2) segue que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é incondicionalmente somável.

Agora vamos provar a última afirmação do teorema. Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência incondicionalmente somável. Devemos mostrar que $x = x_\sigma$, onde $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j$ e $x_\sigma = \sum_{j=1}^{\infty} x_{\sigma(j)}$. Por (2), dado $\varepsilon > 0$, existe $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j - x \right\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left\| \sum_{j=1}^{m} x_{\sigma(j)} - x_\sigma \right\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{e} \quad \left\| \sum_{n \in J} x_n \right\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

para $n, m \geq m_\varepsilon$ e $J \subset \mathbb{N}$ finito com $\min J \geq \varepsilon$.

Sejam $1 = \sigma(j_1), \ldots, m_\varepsilon = \sigma(j_{m_\varepsilon})$, com $j_1, \ldots, j_{m_\varepsilon} \in \mathbb{N}$ e tome $m = \max\{j_1, \ldots, j_{m_\varepsilon}\}$. Assim, $m \geq m_\varepsilon$ e

$$\begin{aligned}
\|x - x_\sigma\| &= \left\| x - \sum_{j=1}^{m_\varepsilon} x_j + \sum_{j=1}^{m_\varepsilon} x_j - \sum_{j=1}^{m} x_{\sigma(j)} + \sum_{j=1}^{m} x_{\sigma(j)} - x_\sigma \right\| \\
&\leq \left\| x - \sum_{j=1}^{m_\varepsilon} x_j \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{m_\varepsilon} x_j - \sum_{j=1}^{m} x_{\sigma(j)} \right\| + \left\| \sum_{j=1}^{m} x_{\sigma(j)} - x_\sigma \right\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \left\| \sum_{j=1}^{m_\varepsilon} x_j - \sum_{j=1}^{m} x_{\sigma(j)} \right\| + \frac{\varepsilon}{3} \\
&= \frac{2\varepsilon}{3} + \left\| \sum_{n \in J} x_n \right\| < \varepsilon,
\end{aligned}$$

onde $J = \{1, \ldots, m\} \backslash \{1, \ldots, m_\varepsilon\}$. Logo, $x = x_\sigma$. ■

A condição (3) do Teorema 2.3.7 motiva a próxima definição.

Definição 2.3.8 Seja $p > 0$. Uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em um espaço de Banach E é *incondicionalmente p-somável* se $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$ e $\lim_{k \to \infty} \|(x_n)_{n=k}^{\infty}\|_{w,p} = 0$.

Denotamos por $\ell_p^u(E)$ o conjunto de todas as sequências incondicionalmente p-somáveis em E. A seguir veremos que $\ell_p^u(E)$ é um subespaço fechado de $\ell_p^w(E)$, logo completo.

Proposição 2.3.9 *$\ell_p^u(E)$ é um subespaço fechado de $\ell_p^w(E)$.*

Demonstração: Sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Note que,

$$0 \leq \left\| (x_j)_{j=n}^{\infty} + \lambda (y_j)_{j=n}^{\infty} \right\|_{w,p} \leq \left\| (x_j)_{j=n}^{\infty} \right\|_{w,p} + |\lambda| \left\| (y_j)_{j=n}^{\infty} \right\|_{w,p}. \tag{2.12}$$

Em (2.12), fazendo $n \longrightarrow \infty$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \left\| (x_j)_{j=n}^{\infty} + \lambda (y_j)_{j=n}^{\infty} \right\|_{w,p} = 0,$$

e portanto

$$(x_j)_{j=1}^{\infty} + \lambda (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E),$$

donde $\ell_p^u(E)$ é um subespaço de $\ell_p^w(E)$.

Agora, considere $p \geq 1$ e seja $\left(x^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência em $\ell_p^u(E)$. Denotemos, para cada k, $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \ldots\right)$. Então, para cada k, temos

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=n}^{\infty} \right\|_{w,p} = 0.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0^{(k)} \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_0^{(k)} \Rightarrow \left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=n}^{\infty} \right\|_{w,p} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.13}$$

Suponhamos que $x^{(k)} \longrightarrow x = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ em $\ell_p^w(E)$, ou seja, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$k \geq k_0 \Rightarrow \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \varphi\left(x_j^{(k)} - x_j\right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=1}^{\infty} - (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dessa forma, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$k \geq k_0 \Rightarrow \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=n}^{\infty} \left| \varphi\left(x_j^{(k)} - x_j\right) \right|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left\| \left(x_j^{(k)}\right)_{j=n}^{\infty} - (x_j)_{j=n}^{\infty} \right\|_{w,p} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.14}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \left\| (x_j)_{j=n}^{\infty} \right\|_{w,p} &= \left\| (x_j)_{j=n}^{\infty} - \left(x_j^{(k_0)}\right)_{j=n}^{\infty} + \left(x_j^{(k_0)}\right)_{j=n}^{\infty} \right\|_{w,p} \\ &\leq \left\| (x_j)_{j=n}^{\infty} - \left(x_j^{(k_0)}\right)_{j=n}^{\infty} \right\|_{w,p} + \left\| \left(x_j^{(k_0)}\right)_{j=n}^{\infty} \right\|_{w,p}, \end{aligned}$$

e, por (2.13) e (2.14) segue que

$$n \geq n_0^{(k_0)} \Rightarrow \left\| (x_j)_{j=n}^{\infty} \right\|_{w,p} < \varepsilon,$$

ou seja, $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E)$. Portanto, $\ell_p^u(E)$ é fechado em $\ell_p^w(E)$.

O caso $0 < p < 1$ é facilmente adaptado do caso $p \geq 1$ elevando a potência p cada p-norma $\|\cdot\|_{w,p}$. ■

2.4 Sequências misto somáveis

Nesta seção e no restante do capítulo, para $0 < q \leq s \leq +\infty$, denotamos por $s(q)'$ o número que é *q-conjugado* com s, isto é, que satisfaz

$$\frac{1}{s(q)'} + \frac{1}{s} = \frac{1}{q}.$$

Quando $q = 1$, $s(1)'$ é simplesmente o conjugado de s, ou seja $s(1)' = s'$.

Definição 2.4.1 Sejam $0 < q \leq s \leq +\infty$. Uma sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E é *misto* $(s;q)$-*somável* se $x_j = \tau_j x_j^0$, para todo $j \in \mathbb{N}$ com $(\tau_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{s(q)'}$ e $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s^w(E)$.

Denotamos por $\ell_{m(s;q)}(E)$ o conjunto de todas as sequências misto $(s;q)$-somáveis em E. Para $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$, definimos

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)} := \inf \left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q)'} \left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,s}, \tag{2.15}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as representações possíveis de $x_j = \tau_j x_j^0$, para todo $j \in \mathbb{N}$, com $(\tau_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{s(q)'}$ e $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s^w(E)$.

Veremos que o conjunto $\ell_{m(s;q)}(E)$ é um espaço vetorial e que $\|\cdot\|_{m(s;q)}$ define uma norma (q-norma se $0 < q < 1$) em $\ell_{m(s;q)}(E)$.

(i) É claro que o vetor nulo (sequência nula) pertence a $\ell_{m(s;q)}(E)$.

(ii) Sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Devemos mostrar que $(\lambda x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$. Com efeito, como $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$ segue que, $x_j = \tau_j x_j^0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ com $(\tau_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{s(q)'}$ e $\left(x_j^0\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s^w(E)$. Como $\lambda x_j = \lambda \tau_j x_j^0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, e $\ell_{s(q)'}$ é um espaço vetorial, então $(\lambda \tau_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{s(q)'}$ e, consequentemente $(\lambda x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$.

Para provar que a soma de duas sequências em $\ell_{m(s;q)}(E)$ ainda está em $\ell_{m(s;q)}(E)$, usaremos um resultado de caracterização das sequências misto somáveis devido à Bernard Maurey [23]. Para a prova deste resultado, precisamos de algumas definições e resultados como o Lema de Ky Fan.

O Lema a seguir compara a norma $\|x_n\|$ com $\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Lema 2.4.2 *Se* $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$, *então* $\|x_n\| \leq \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)}$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$, então pela definição $x_j = \tau_j x_j^0$, para todo $j \in \mathbb{N}$ com $(\tau_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{s(q)'}$ e $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s^w(E)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}
\|x_n\| &= \left\|\tau_n x_n^0\right\| = |\tau_n| \left\|x_n^0\right\| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\tau_j|^{s(q)'}\right)^{\frac{1}{s(q)'}} \left\|x_n^0\right\| \\
&= \left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q)'} \left\|x_n^0\right\| = \left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q)'} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left|\varphi(x_n^0)\right| \\
&\leq \left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q)'} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\varphi(x_j^0)\right|^s\right)^{\frac{1}{s}} = \left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q)'} \left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,s}.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\|x_n\| \leq \inf \left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q)'} \left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,s},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as representações possíveis de $x_j = \tau_j x_j^0$, para todo $j \in \mathbb{N}$ com $(\tau_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{s(q)'}$ e $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s^w(E)$. Portanto, $\|x_n\| \leq \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)}$. ■

Antes do Lema de Ky Fan precisamos de algumas definições e de um lema que garante que se um subconjunto C de um espaço normado é convexo, então o interior desse subconjunto, denotado por $int\, C$, é convexo.

Lema 2.4.3 *Seja E um espaço normado e $C \subset E$ um subconjunto convexo, então $int\, C$ é convexo.*

Demonstração: Sejam $x, y \in int\, C$, então existe $r > 0$ tal que $B(x;r) \subset C$ e $B(y;r) \subset C$. Como C é convexo segue que $tB(x;r) + (1-t)B(y;r) \subset C$ para todo $t \in [0,1]$. Mas $tB(x;r)+(1-t)B(y;r) = B(tx+(1-t)y;r)$. Com efeito, seja $z \in tB(x;r)+(1-t)B(y;r)$, então $z = ta + (1-t)b$, com $a \in B(x;r), b \in B(y;r)$ e $t \in [0,1]$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|z - (tx + (1-t)y)\| &= \|ta + (1-t)b - tx - (1-t)y\| \\
&= \|ta - tx + (1-t)b - (1-t)y\| \\
&= \|t(a-x) + (1-t)(b-y)\| \\
&\leq t\|x-a\| + (1-t)\|y-b\| \\
&< tr + (1-t)r = r.
\end{aligned}$$

Portanto, $z \in B(tx + (1-t)y; r)$.

Agora, seja $z \in B(tx+(1-t)y;r)$. Queremos mostrar que $z = ta+(1-t)b$, para algum $a \in B(x;r)$ e algum $b \in B(y;r)$. Seja $a = z-(tx+(1-t)y)+x$ e $b = z-(tx+(1-t)y)+y$, então $a \in B(x;r), b \in B(y;r)$ e

$$\begin{aligned}
&t(z - (tx + (1-t)y) + x) + (1-t)(z - (tx + (1-t)y) + y) \\
&\qquad = tz - t(tx + (1-t)y) + tx + (1-t)z - (1-t)(tx + (1-t)y) + (1-t)y \\
&\qquad = z - (tx + (1-t)y) + tx + (1-t)y = z.
\end{aligned}$$

Portanto, $z \in tB(x;r) + (1-t)B(y;r)$. E fica provado que $tB(x;r) + (1-t)B(y;r) = B(tx + (1-t)y; r)$.

Assim, $B(tx + (1-t)y; r) \subset C$ e, consequentemente $tx + (1-t)y \in int\, C$. ■

Definição 2.4.4 Seja E um espaço vetorial. Uma função $f \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ é dita *convexa* se

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

para quaisquer $x, y \in E$ e $\lambda \in (0,1)$.

Definição 2.4.5 Seja X um espaço topológico. Uma função $f \colon X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ é chamada *semicontínua inferiormente* se o conjunto

$$\{x \in X : f(x) > a\}$$

é aberto para todo ponto $a \in \mathbb{R}$.

Definição 2.4.6 Uma coleção $\mathcal{F}$ de funções reais f definidas sobre um conjunto K é denominada *côncava* se, para $n \in \mathbb{N}$, $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ tais que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$, existe $f \in \mathcal{F}$ que satisfaz

$$f(x) \geq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(x)$$

para todo $x \in K$.

Definição 2.4.7 Sejam X um conjunto não vazio, M uma sigma álgebra de X e x_0 algum ponto em X. Denomina-se *medida de Dirac em* x_0, a medida $\mu \colon M \longrightarrow [0, +\infty]$ definida por

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & \text{se } \ x_0 \in A \\ 0, & \text{se } \ x_0 \notin A \end{cases}$$

para todo $A \in M$.

Definição 2.4.8 Uma família $(A_i)_{i \in I}$ de subconjuntos do espaço topológico X tem a *propriedade da interseção finita* se para toda subcoleção finita $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$ tem-se que $\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j} \neq \emptyset$.

Agora estamos em condições de provar o importante Lema de Ky Fan.

Lema 2.4.9 (Lema de Ky Fan) *Seja K um subconjunto compacto e convexo de um espaço vetorial topológico de Hausdorff e seja $\mathcal{F}$ uma família côncava de funções reais, convexas e semicontínuas inferiormente, definidas sobre K. Seja $\rho \in \mathbb{R}$ e suponha que para cada $f \in \mathcal{F}$ existe $x \in K$ com $f(x) \leq \rho$. Então é possível encontrar $x_0 \in K$ tal que $f(x_0) \leq \rho$ para toda $f \in \mathcal{F}$.*

Demonstração: Como cada $f \in \mathcal{F}$ é semicontínua inferiormente, para cada $\varepsilon > 0$ o conjunto

$$B(f, \varepsilon) := \{x \in K : f(x) \leq \rho + \varepsilon\}$$

é fechado (já que seu complementar é aberto).

Vamos provar que a coleção das $B(f, \varepsilon)$, com $f \in \mathcal{F}$ e $\varepsilon > 0$, tem a propriedade da interseção finita, pois da compacidade de K, concluiremos que $\bigcap_{f \in \mathcal{F}, \varepsilon > 0} B(f, \varepsilon) \neq \emptyset$. Com efeito, se $\bigcap_{f \in \mathcal{F}, \varepsilon > 0} B(f, \varepsilon) = \emptyset$, então $K = (\emptyset)^{\complement} = \left(\bigcap_{f \in \mathcal{F}, \varepsilon > 0} B(f, \varepsilon) \right)^{\complement} = \bigcup_{f \in \mathcal{F}, \varepsilon > 0} B(f, \varepsilon)^{\complement}$. Como K é compacto, existem $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{F}$ e $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n > 0$, tais que

$$K = \bigcup_{j=1}^{n} B(f_j, \varepsilon_j)^{\complement} = \left(\bigcap_{j=1}^{n} B(f_j, \varepsilon_j) \right)^{\complement} \Rightarrow \bigcap_{j=1}^{n} B(f_j, \varepsilon_j) = \emptyset,$$

contradizendo a hipótese. Logo, $\displaystyle\bigcap_{f\in\mathcal{F},\varepsilon>0} B(f,\varepsilon) \neq \emptyset$ e qualquer $x_0 \in \displaystyle\bigcap_{f\in\mathcal{F},\varepsilon>0} B(f,\varepsilon)$, satisfaz $f(x_0) \leq \rho$, para toda $f \in \mathcal{F}$. Portanto, basta provar que $B(f_1,\varepsilon_1)\cap\ldots\cap B(f_n,\varepsilon_n) \neq \emptyset$.

Sejam $A = \{(f_1(x),\ldots,f_n(x)) \in \mathbb{R}^n : x \in K\}$,

$$\mathfrak{C}_0(A) = \left\{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \alpha_j : \lambda_j \geq 0,\ \alpha_j \in A,\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1\right\}$$

a envoltória convexa de A e $D = \{(t_1,\ldots,t_n) \in \mathbb{R}^n : t_j \leq \rho + \varepsilon_j,\ j = 1,\ldots,n\}$.

D é convexo, pois sejam $\alpha,\beta \geq 0$ com $\alpha+\beta = 1$ e $(t_1,\ldots,t_n),(s_1,\ldots,s_n) \in D$, então

$$\alpha(t_1,\ldots,t_n) + \beta(s_1,\ldots,s_n) = (\alpha t_1 + \beta s_1,\ldots,\alpha t_n + \beta s_n)$$

e para $j = 1,\ldots,n$,

$$\alpha t_j + \beta s_j \leq \alpha(\rho+\varepsilon_j) + \beta(\rho+\varepsilon_j) = (\alpha+\beta)(\rho+\varepsilon_j) = \rho+\varepsilon_j.$$

Logo, $\alpha(t_1,\ldots,t_n) + \beta(s_1,\ldots,s_n) \in D$.

Assim, segue do Lema 2.4.3 que *int* D é convexo e além disso é não vazio, pois contém a bola fechada de centro $(0,\ldots,0)$ e raio ρ denotada por $B_\rho(0) \subseteq \mathbb{R}^n$.

Suponha que $\mathfrak{C}_0(A) \cap int\, D = \emptyset$, então pelo Teorema da Separação de Hahn-Banach, existe $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ (pois $(\mathbb{R}^n)' = \mathbb{R}^n$) que, sem perda de generalidade, podemos supor satisfazendo $|\alpha_1| + \ldots + |\alpha_n| = 1$ e existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tais que

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j t_j \leq \alpha \ \text{ para todo } (t_1,\ldots,t_n) \in int\, D$$

e

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j t_j \geq \alpha \ \text{ para todo } (t_1,\ldots,t_n) \in \mathfrak{C}_0(A).$$

Como $\lambda e_j \in B_\rho(0) \subset D$ então $\lambda e_j \in int\, D$ se $\lambda \leq \rho$, logo $\lambda\alpha_j \leq \alpha$ para todo $j = 1,\ldots,n$. Note que os α_j são positivos pois se fossem negativos, existiria $\lambda < 0$ e $\lambda < \frac{\alpha}{\alpha_j}$ com $\lambda \leq \rho$ tal que $\lambda\alpha_j > \alpha$ o que é absurdo, logo $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$. Como $\mathcal{F}$ é côncava, existe $f \in \mathcal{F}$ tal que

$$f(x) \geq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(x)$$

para todo $x \in K$ e como $f_j(x) \in \mathfrak{C}_0(A)$, para $j = 1,\ldots,n$, então

$$f(x) \geq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(x) \geq \alpha \geq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(\rho+\varepsilon_j) > \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(\rho + \min_{j=1,\ldots,n} \varepsilon_j) = \rho + \min_{j=1,\ldots,n} \varepsilon_j > \rho,$$

para todo $x \in K$ o que é absurdo por hipótese. Logo, $\mathfrak{C}_0(A) \cap int\, D \neq \emptyset$. Agora, para $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathfrak{C}_0(A) \cap int\, D$ temos que

$$t_j = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_j(x_k)$$

para todo $j = 1, \ldots, n$ com $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$, tal que $\lambda_1 + \ldots + \lambda_m = 1$ e $x_1, \ldots, x_m \in K$. Como K é convexo, $x := \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m \in K$ e como cada f_j é convexa obtemos

$$\rho + \varepsilon_j \geq t_j = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_j(x_k) \geq f_j\left(\sum_{k=1}^{m} \lambda_k x_k\right) = f_j(x).$$

Portanto, $x \in B(f_j, \varepsilon_j)$, para $j = 1, \ldots, n$ e, consequentemente $\bigcap_{j=1,\ldots,n} B(f_j, \varepsilon_j) \neq \emptyset$. ■

Teorema 2.4.10 *Sejam $0 < q < s < +\infty$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty(E)$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

(1) $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é $m(s;q)$-somável.

(2) Se $W(B_{E'})$ denota o conjunto de todas as medidas regulares de probabilidade definidas nos borelianos de $B_{E'}$ ($B_{E'}$ munida com a topologia fraca estrela), então

$$\left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{s}}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q,$$

para todo $\mu \in W(B_{E'})$. Neste caso,

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)} = \sup_{\mu \in W(B_{E'})} \left\| \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s\, d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{s}}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_q .$$

Demonstração: Primeiro, vamos provar que (2) implica que

$$S = \sup_{\mu \in W(B_{E'})} \left\| \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{s}}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_q < +\infty. \tag{2.16}$$

De fato, se não fosse verdade, para todo $n \in \mathbb{N}$, existiria $\mu_n \in W(B_{E'})$ tal que

$$\left\| \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu_n(\varphi)\right)^{\frac{1}{s}}\right)_{j=1}^{\infty} \right\|_q \geq 2^{\frac{n}{s}} n.$$

Defina $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\mu_n$. Como cada $\mu_n \in W(B_{E'})$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, segue que $\mu \in W(B_{E'})$. Note que $\mu \geq \frac{1}{2^n}\mu_n$ então,

$$\left\| \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s}} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_q \geq \left\| \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s \frac{1}{2^n} d\mu_n(\varphi) \right)^{\frac{1}{s}} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_q \geq \frac{1}{2^{\frac{n}{s}}} 2^{\frac{n}{s}} n = n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, o que é absurdo por (2), logo vale (2.16).

(2)$\Rightarrow$(1) Seja $p = \frac{s}{q} > 1$, então $p' = \frac{s(q)'}{q}$ pois,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{q}{s} + \frac{q}{s(q)'} = q\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s(q)'}\right) = q\left(\frac{1}{q}\right) = 1.$$

Defina,

$$K = \left\{ (\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{p'} : \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^{p'} \leq S^q,\ \xi_j \geq 0,\ j \in \mathbb{N} \right\} \subseteq \ell_{p'}.$$

Não é difícil provar que K é convexo, fechado e limitado em $\ell_{p'}$. Como $\ell_{p'}$ é Banach e reflexivo segue de [5, Corollary 3.22] que K é compacto na topologia fraca de $\ell_{p'}$.

Para $\varepsilon > 0$, $\mu \in W(B_{E'})$, $m \in \mathbb{N}$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ satisfazendo (2), a função $f_{\varepsilon,\mu,(x_j),m} \colon K \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f_{\varepsilon,\mu,(x_j),m}((\xi_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{m} (\xi_j + \varepsilon)^{-p} \int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi)$$

é contínua. Já que a função $x > 0 \longmapsto \frac{1}{(x+\varepsilon)^p}$ é convexa segue que $f_{\varepsilon,\mu,(x_j),m}$ é convexa.

Consideremos agora o conjunto formado por todas essas funções:

$$\mathcal{F} := \left\{ f_{\varepsilon,\mu,(x_j),m} : \varepsilon > 0,\ \mu \in W(B_{E'}),\ m \in \mathbb{N} \text{ e } (x_j)_{j=1}^{\infty} \text{ satisfaz (2)} \right\}.$$

A família de funções $\mathcal{F}$ é côncava. Com efeito, dados $f_{\varepsilon_1,\mu_1,\left(x_j^{(1)}\right),m_1}, \ldots, f_{\varepsilon_n,\mu_n,\left(x_j^{(n)}\right),m_n} \in \mathcal{F}$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ tais que $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[f_{\varepsilon_i,\mu_i,\left(x_j^{(i)}\right),m_i}((\xi_j)_{j=1}^{\infty}) \right] &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left[\sum_{j=1}^{m_i} (\xi_j + \varepsilon_i)^{-p} \int_{B_{E'}} \left| \varphi\left(x_j^{(i)}\right) \right|^s d\mu_i(\varphi) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m_i} (\xi_j + \varepsilon_i)^{-p} \int_{B_{E'}} \left| \varphi\left(\alpha_i^{\frac{1}{s}} x_j^{(i)}\right) \right|^s d\mu_i(\varphi) \\ &= f_{\left(\varepsilon_i,\mu_i,\left(\alpha_i^{\frac{1}{s}} x_j^{(i)}\right),m_i\right)_{i=1,j=1}^{n,m_i}}((\xi_j)_{j=1}^{\infty}) \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$ seja,

$$\xi_j = \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{pp'}}$$

e vamos provar que $(\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in K$. É claro que $\xi_j \geq 0$, para todo $j \in \mathbb{N}$ e

$$\sum_{j=1}^{\infty} \xi_j^{p'} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}} \leq S^q,$$

assim $(\xi_j)_{j=1}^{\infty} \in K$. Com isso,

$$\begin{aligned}
f_{\varepsilon,\mu,(x_j),m}((\xi_j)_{j=1}^{\infty}) &= \sum_{j=1}^{m} \left\{ \left[\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{pp'}} + \varepsilon \right]^{-p} \int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi) \right\} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \frac{\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi)}{\left[\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{pp'}} + \varepsilon \right]^{p}} \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} \frac{\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi)}{\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{p}{pp'}}} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}} \leq S^q.
\end{aligned}$$

Logo, pelo Lema de Ky Fan, existe $(\xi_j^0)_{j=1}^{\infty} \in K$ tal que $f((\xi_j^0)_{j=1}^{\infty}) \leq S^q$, para toda $f \in \mathcal{F}$. Assim, para todo $\varepsilon > 0$, $\varphi_0 \in B_{E'}$, $m \in \mathbb{N}$ e δ_{φ_0} a medida de Dirac temos

$$\begin{aligned}
f_{\varepsilon,\delta_{\varphi_0},(x_j),m}((\xi_j^0)_{j=1}^{\infty}) &= \sum_{j=1}^{m} (\xi_j^0 + \varepsilon)^{-p} \int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\delta_{\varphi_0}(\varphi) \\
&= \sum_{j=1}^{m} (\xi_j^0 + \varepsilon)^{-p} \left[\int_{B_{E'} \setminus \{\varphi_0\}} |\varphi(x_j)|^s d\delta_{\varphi_0}(\varphi) + \int_{\{\varphi_0\}} |\varphi(x_j)|^s d\delta_{\varphi_0}(\varphi) \right] \\
&= \sum_{j=1}^{m} (\xi_j^0 + \varepsilon)^{-p} |\varphi_0(x_j)|^s \leq S^q. \qquad (2.17)
\end{aligned}$$

Se $x_j \neq 0$, então $\xi_j^0 \neq 0$. De fato, suponha que $\xi_j^0 = 0$. Note que a desigualdade (2.17) vale para todo $\varepsilon > 0$, $\varphi \in B_{E'}$ e $m \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema de Hahn-Banach existe $\varphi \in B_{E'}$ tal que $\varphi(x_j) \neq 0$, com isso $|\varphi(x_j)|^s \neq 0$. Assim, tomando ε suficientemente pequeno temos

$$\frac{1}{\varepsilon^p} |\varphi(x_j)|^s \geq S^q$$

o que é absurdo, logo $\xi_j^0 \neq 0$. Para $x_j \neq 0$ defina $\tau_j = (\xi_j^0)^{\frac{1}{q}}$, $x_j^0 = \tau_j^{-1} x_j$ e se $x_j = 0$, defina $\tau_j = 0$ e $x_j^0 = 0$. Agora, temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\tau_j|^{s(q)'} = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \xi_j^0 \right|^{\frac{s(q)'}{q}} = \sum_{j=1}^{\infty} \left| \xi_j^0 \right|^{p'} \leq S^q$$

e

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{m}\left|\varphi_0\left(x_j^0\right)\right|^s\right)^{\frac{1}{s}} &= \left(\sum_{j=1}^{m}\left|\varphi_0\left(\tau_j^{-1}x_j\right)\right|^s\right)^{\frac{1}{s}} = \left(\sum_{j=1}^{m}\left(\xi_j^0\right)^{-p}\left|\varphi_0(x_j)\right|^s\right)^{\frac{1}{s}}\\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\sum_{j=1}^{m}(\xi_j^0+\varepsilon)^{-p}|\varphi_0(x_j)|^s\right)^{\frac{1}{s}} \leq S^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

para todo $m\in\mathbb{N}$ e $\varphi_0\in B_{E'}$. Fazendo $m\longrightarrow\infty$ temos

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varphi_0\left(x_j^0\right)\right|^s\right)^{\frac{1}{s}} \leq S^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|\varphi\left(x_j^0\right)\right|^s\right)^{\frac{1}{s}} \leq S^{\frac{1}{p}}.$$

Portanto, $(x_j)_{j=1}^{\infty}=\left(\tau_j x_j^0\right)_{j=1}^{\infty}\in\ell_{m(s;q)}(E)$ e além disso,

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)} \leq \left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q)'}\left\|\left(x_j^0\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,s} \leq S. \tag{2.18}$$

(1)⇒(2) Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty}\in\ell_{m(s;q)}(E)$, então $x_j=\tau_j x_j^0$, para todo $j\in\mathbb{N}$ com $(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\in\ell_{s(q)'}$ e $(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\in\ell_s^w(E)$. Para cada $\mu\in W(B_{E'})$ temos,

$$\begin{aligned}\left\|\left(\left(\int_{B_{E'}}|\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{s}}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_q &= \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\int_{B_{E'}}|\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi)\right)^{\frac{q}{s}}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &= \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left(\int_{B_{E'}}\left|\varphi\left(\tau_j x_j^0\right)\right|^s d\mu(\varphi)\right)^{\frac{q}{s}}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &= \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\tau_j|^q\left(\int_{B_{E'}}\left|\varphi\left(x_j^0\right)\right|^s d\mu(\varphi)\right)^{\frac{q}{s}}\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\leq \left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q)'}\left\|\left(\left(\int_{B_{E'}}\left|\varphi\left(x_j^0\right)\right|^s d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{s}}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_s\\ &\leq \left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q)'}\sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\left|\varphi\left(x_j^0\right)\right|^s\right)^{\frac{1}{s}}\\ &= \left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q)'}\left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,s} < +\infty.\end{aligned}$$

Observe que a quarta desigualdade segue diretamente da Desigualdade de Hölder para sequências. Logo, vale (2) e além disso, como μ foi tomada arbitrária, segue que

$$S \leq \left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q)'}\left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,s}.$$

Consequentemente,

$$S \leq \inf \left\| (\tau_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{s(q)'} \left\| (x_j^0)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,s} = \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{m(s;q)}, \tag{2.19}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as representações possíveis de $x_j = \tau_j x_j^0$, para todo $j \in \mathbb{N}$ com $(\tau_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{s(q)'}$ e $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s^w(E)$. Portanto, de (2.18) e (2.19) segue que $\left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{m(s;q)} = S$. ■

Agora estamos aptos a terminar a demonstração de que $\ell_{m(s;q)}(E)$ é espaço vetorial.

(iii) Sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty}$, $(y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$. Devemos mostrar que $(x_j + y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$. Temos dois casos para analisar:

<u>1° caso:</u> Seja $s \geq 1$. Pelo Teorema 2.4.10 segue que

$$\left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s}} \right)_{j=1}^{\infty}, \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(y_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s}} \right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q$$

para toda $\mu \in W(B_{E'})$. Como ℓ_q é um espaço vetorial obtemos

$$\left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s}} \right)_{j=1}^{\infty} + \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(y_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s}} \right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q.$$

Agora, usando o fato de que $L_s(B_{E'}, \mathcal{A}, \mu)$ é um espaço normado, como definido no Capítulo 1, para cada $j \in \mathbb{N}$ segue que

$$\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j + y_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s}} + \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(y_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s}}.$$

Portanto,

$$\left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j + y_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s}} \right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q$$

e novamente pelo Teorema 2.4.10 resulta que $(x_j + y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$.

<u>2° caso:</u> Seja $0 < s < 1$. Note que $|\varphi(x_j) + \varphi(y_j)|^s \leq |\varphi(x_j)|^s + |\varphi(y_j)|^s$, conforme Exemplo 1.1.3. Daí,

$$\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j + y_j)|^s d\mu(\varphi) \leq \int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi) + \int_{B_{E'}} |\varphi(y_j)|^s d\mu(\varphi).$$

Como

$$\left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s}} \right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q \Rightarrow \sum_{j=1}^{\infty} \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s}} \right)^q < +\infty,$$

logo

$$\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi)\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\frac{q}{s}}.$$

De maneira análoga, é possível verificar que

$$\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(y_j)|^s d\mu(\varphi)\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\frac{q}{s}}.$$

Como $\ell_{\frac{q}{s}}$ é um espaço vetorial segue que

$$\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi) + \int_{B_{E'}} |\varphi(y_j)|^s d\mu(\varphi)\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\frac{q}{s}}.$$

Portanto,

$$\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j+y_j)|^s d\mu(\varphi)\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\frac{q}{s}} \Rightarrow \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j+y_j)|^s d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{s}}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q$$

e pelo Teorema 2.4.10 resulta que $(x_j+y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$.

Corolário 2.4.11 *Se* $0 < q < s < +\infty$, *então* $\ell_{m(s;q)}(E)$ *é um espaço vetorial normado* (q*-normado se* $0 < q < 1$*).*

Demonstração: As três primeiras propriedades da definição de norma (q-norma) seguem diretamente da definição de $\|\cdot\|_{m(s;q)}$, conforme abaixo:

(i) $\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)} = \inf \left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q)'} \left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,s} \geq 0.$

(ii) $\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)} = 0$ se, e somente se, $(x_j)_{j=1}^{\infty} = 0$.
De fato, se $\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)} = 0$, segue do Lema 2.4.2 que

$$0 \leq \|x_n\| \leq \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)} = 0,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $\|x_n\| = 0$ e, consequentemente $x_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $(x_n)_{n=1}^{\infty} = 0$.

Agora se $(x_j)_{j=1}^{\infty} = 0$, então $x_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo, podemos escrever $x_j = \tau_j x_j^0$ com $\tau_j = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s^w(E)$. Assim,

$$\left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q)'} \left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,s} = 0.$$

Com isso,

$$0 \leq \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)} \leq \|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\|_{s(q)'} \|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\|_{w,s} = 0.$$

Portanto $\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)} = 0$.

(iii) Sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$ com $\alpha \neq 0$. Então $x_j = \tau_j x_j^0$, para todo $j \in \mathbb{N}$ com $(\tau_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{s(q)'}$ e $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s^w(E)$. Note que, $\alpha x_j = \alpha\tau_j x_j^0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ com $(\alpha\tau_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{s(q)'}$ e $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s^w(E)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\left\|(\alpha x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)} &\leq \left\|(\alpha\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q)'} \left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,s} \\
&= |\alpha| \left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q)'} \left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,s}.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\left\|(\alpha x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)} &\leq |\alpha| \inf \left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q)'} \left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,s} \\
&= |\alpha| \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)}. \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

Por outro lado, como $(\alpha x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$, segue que $\alpha x_j = \delta_j y_j^0$, para todo $j \in \mathbb{N}$ com $(\delta_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{s(q)'}$ e $(y_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s^w(E)$. Assim, $x_j = \frac{\delta_j}{\alpha} y_j^0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e além disso $\left(\frac{1}{\alpha}\delta_j\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{s(q)'}$ e $(y_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s^w(E)$. Logo,

$$\begin{aligned}
\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)} &\leq \left\|\left(\frac{\delta_j}{\alpha}\right)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q)'} \left\|(y_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,s} \\
&= \frac{1}{|\alpha|} \left\|(\delta_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q)'} \left\|(y_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,s}.
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade acima por $|\alpha|$ temos

$$|\alpha| \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)} \leq \left\|(\delta_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q)'} \left\|(y_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,s}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
|\alpha| \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)} &\leq \inf \left\|(\delta_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q)'} \left\|(y_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,s} \\
&= \left\|(\alpha x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)}. \qquad (2.21)
\end{aligned}$$

Portanto, de (2.20) e (2.21) temos que $\left\|(\alpha x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)} = |\alpha| \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)}$.

Note que o item (iii) também segue facilmente do Teorema 2.4.10, mas como ele não é necessário para a demonstração, preferimos fazer a demonstração utilizando apenas argumentos básicos, que também serão úteis durante o texto.

(iv) Para provar este item dividiremos em casos.

Primeiramente, considere $q \geq 1$. Neste caso devemos verificar que

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty} + (y_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)} \leq \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)} + \left\|(y_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)},$$

para toda $(x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$. Com efeito, sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$ então,

$$\left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} + (y_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{m(s;q)} = \sup_{\mu \in W(B_{E'})} \left\| \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j + y_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s}} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_q$$

$$\leq \sup_{\mu \in W(B_{E'})} \left\| \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s}} \right)_{j=1}^{\infty} + \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(y_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s}} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_q$$

$$\leq \sup_{\mu \in W(B_{E'})} \left(\left\| \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s}} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_q + \left\| \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(y_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s}} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_q \right)$$

$$\leq \sup_{\mu \in W(B_{E'})} \left\| \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s}} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_q + \sup_{\mu \in W(B_{E'})} \left\| \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(y_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s}} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_q$$

$$= \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{m(s;q)} + \left\| (y_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{m(s;q)}.$$

Agora, quando $0 < q < 1$ pela Definição 1.1.2 basta mostrar que

$$\left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} + (y_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{m(s;q)}^q \leq \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{m(s;q)}^q + \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{m(s;q)}^q,$$

para toda $(x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$.

Temos dois casos para analisar.

<u>1º caso:</u> Se $s \geq 1$. Sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$, então

$$\left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} + (y_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{m(s;q)}^q = \left(\sup_{\mu \in W(B_{E'})} \left\| \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j + y_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s}} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_q \right)^q$$

$$= \sup_{\mu \in W(B_{E'})} \left\| \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j + y_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s}} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_q^q$$

$$\leq \sup_{\mu \in W(B_{E'})} \left\| \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s}} \right)_{j=1}^{\infty} + \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(y_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s}} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_q^q$$

$$\leq \sup_{\mu \in W(B_{E'})} \left(\left\| \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s}} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_q^q + \left\| \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(y_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s}} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_q^q \right)$$

$$\leq \sup_{\mu \in W(B_{E'})} \left\| \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s}} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_q^q + \sup_{\mu \in W(B_{E'})} \left\| \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(y_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s}} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_q^q$$

$$= \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{m(s;q)}^q + \left\| (y_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{m(s;q)}^q.$$

$\underline{2^{\text{o}}\text{ caso:}}$ Se $0 < s < 1$. Sejam $(x_j)_{j=1}^{\infty}, (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$, então

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty} + (y_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)}^{q} = \left(\sup_{\mu \in W(B_{E'})} \left\| \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j + y_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s}} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_q \right)^q$$

$$= \sup_{\mu \in W(B_{E'})} \left\| \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j + y_j)|^s d\mu(\varphi) \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\frac{q}{s}}^{\frac{q}{s}}$$

$$\leq \sup_{\mu \in W(B_{E'})} \left\| \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi) \right)_{j=1}^{\infty} + \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(y_j)|^s d\mu(\varphi) \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\frac{q}{s}}^{\frac{q}{s}}$$

$$\leq \sup_{\mu \in W(B_{E'})} \left(\left\| \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi) \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\frac{q}{s}}^{\frac{q}{s}} + \left\| \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(y_j)|^s d\mu(\varphi) \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\frac{q}{s}}^{\frac{q}{s}} \right)$$

$$\leq \sup_{\mu \in W(B_{E'})} \left\| \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi) \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\frac{q}{s}}^{\frac{q}{s}} + \sup_{\mu \in W(B_{E'})} \left\| \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(y_j)|^s d\mu(\varphi) \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_{\frac{q}{s}}^{\frac{q}{s}}$$

$$= \sup_{\mu \in W(B_{E'})} \left\| \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s}} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_q^q + \sup_{\mu \in W(B_{E'})} \left\| \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(y_j)|^s d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s}} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_q^q$$

$$= \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)}^{q} + \left\|(y_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)}^{q}.$$

■

Proposição 2.4.12 *$(\ell_{m(s;q)}(E), \|\cdot\|_{m(s;q)})$ é um espaço completo.*

Demonstração: Considere $q \geq 1$ e seja $\left(x^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\ell_{m(s;q)}(E)$. Para cada k escrevemos $x^{(k)} = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)}, \ldots\right) \in \ell_{m(s;q)}(E)$. Como $\left(x^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy, dado $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$k, l \geq N \Rightarrow \left\|x^{(k)} - x^{(l)}\right\|_{m(s;q)} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.22}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ e pelo Lema 2.4.2 temos que

$$\left\|x_n^{(k)} - x_n^{(l)}\right\| \leq \left\|x^{(k)} - x^{(l)}\right\|_{m(s;q)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\left(x_n^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em E, logo converge. Sejam x_n o limite de $\left(x_n^{(k)}\right)_{k=1}^{\infty}$ e $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$. Devemos mostrar que $x \in \ell_{m(s;q)}(E)$ e

$x^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} x$. Como $x_n^{(k)} \xrightarrow{k\to\infty} x_n$, segue que para todo $\varphi \in B_{E'}$, $\varphi\left(x_n^{(k)}\right) \xrightarrow{k\to\infty} \varphi(x_n)$ e $\left|\varphi\left(x_n^{(k)}\right)\right|^s \xrightarrow{k\to\infty} |\varphi(x_n)|^s$. Logo, para cada $\mu \in W(B_{E'})$ e $\varphi \in B_{E'}$ temos

$$\left(\int_{B_{E'}} \left|\varphi\left(x_n^{(k)}\right)\right|^s d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{s}} \longrightarrow \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_n)|^s d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{s}},$$

quando $k \longrightarrow \infty$. Então,

$$\left(\left(\int_{B_{E'}} \left|\varphi\left(x_n^{(k)}\right)\right|^s d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{s}}\right)_{n=1}^{\infty} \longrightarrow \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_n)|^s d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{s}}\right)_{n=1}^{\infty},$$

quando $k \longrightarrow \infty$, em ℓ_q. Com isso concluímos que

$$\left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_n)|^s d\mu(\varphi)\right)^{\frac{1}{s}}\right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_q.$$

Pelo Teorema 2.4.10, $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$.

Fazendo $l \longrightarrow \infty$ em (2.22) obtemos

$$k \geq N \Rightarrow \left\|x^{(k)} - x\right\|_{m(s;q)} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

donde $\lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)} = x$.

O caso $0 < q < 1$ é facilmente adaptado do caso $q \geq 1$ elevando a potência q cada q-norma $\|\cdot\|_{m(s;q)}$. ∎

A próxima proposição é sobre inclusões dos espaços das sequências misto somáveis. Antes veremos duas observações que serão utilizadas nas demonstrações que faremos sobre as inclusões.

Observação 2.4.13 *Temos que* $(\ell_{m(q;q)}(E), \|\cdot\|_{m(q;q)}) = (\ell_q^w(E), \|\cdot\|_{w,q})$.

Com efeito, note que

$$\frac{1}{q(q)'} + \frac{1}{q} = \frac{1}{q} \Rightarrow q(q)' = +\infty.$$

Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(q;q)}(E)$, logo $x_j = \tau_j x_j^0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ com $(\tau_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ e $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$. Como $(\tau_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty$, segue que $\sup\limits_{j\in\mathbb{N}} |\tau_j| < +\infty$.

Para mostrar que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$, basta verificar que $(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_q$ para todo $\varphi \in E'$. Seja $\varphi \in E'$, então

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^q &= \sum_{j=1}^{\infty} \left|\varphi(\tau_j x_j^0)\right|^q = \sum_{j=1}^{\infty} |\tau_j|^q \left|\varphi(x_j^0)\right|^q \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} |\tau_n|\right)^q \left|\varphi(x_j^0)\right|^q \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \|(\tau_n)_{n=1}^{\infty}\|_\infty^q \left|\varphi(x_j^0)\right|^q = \|(\tau_n)_{n=1}^{\infty}\|_\infty^q \sum_{j=1}^{\infty} \left|\varphi(x_j^0)\right|^q \\
&\leq \|(\tau_n)_{n=1}^{\infty}\|_\infty^q \sup_{\varphi\in B_{E'}} \sum_{j=1}^{\infty} \left|\varphi(x_j^0)\right|^q = \|(\tau_n)_{n=1}^{\infty}\|_\infty^q \left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}^q < +\infty.
\end{aligned}$$

Portanto, para todo $\varphi \in E'$ temos que $(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_q$ e como

$$\left\|(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_q \leq \left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty} \left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q},$$

segue que

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q} = \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left\|(\varphi(x_j))_{j=1}^{\infty}\right\|_q \leq \left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty} \left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q},$$

onde $x_j = \tau_j x_j^0$, para todo $j \in \mathbb{N}$ com $(\tau_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}$ e $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$. Tomando o ínfimo sobre todas a representações possíveis de $x_j = \tau_j x_j^0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, temos que

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q} \leq \inf \left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty} \left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q} = \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(q;q)}.$$

Com isso, provamos que

$$\ell_{m(q;q)}(E) \subseteq \ell_q^w(E) \text{ e } \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q} \leq \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(q;q)}.$$

Agora, seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$. Note que, $x_j = 1 \cdot x_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Então tome $\tau_j = 1$ e $x_j^0 = x_j$ para todo $j \in \mathbb{N}$, assim $x_j = \tau_j x_j^0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ com $(\tau_j)_{j=1}^{\infty} = (1)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}$ e $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$. Logo $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(q;q)}(E)$ e, consequentemente $\ell_q^w(E) \subseteq \ell_{m(q;q)}(E)$ e além disso,

$$\begin{aligned}
\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(q;q)} &\leq \left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty} \left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q} \\
&= \left\|(1)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty} \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q} \\
&= \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}.
\end{aligned}$$

Portanto $(\ell_{m(q;q)}(E), \|\cdot\|_{m(q;q)}) = (\ell_q^w(E), \|\cdot\|_{w,q})$.

Observação 2.4.14 *Temos que* $(\ell_{m(\infty;q)}(E), \|\cdot\|_{m(\infty;q)}) = (\ell_q(E), \|\cdot\|_q)$.

Com efeito, note que

$$\frac{1}{\infty(q)'} + \frac{1}{\infty} = \frac{1}{q} \Rightarrow \infty(q)' = q.$$

Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(\infty;q)}(E)$, logo $x_j = \tau_j x_j^0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ com $(\tau_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q$ e $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}^w(E) = \ell_{\infty}(E)$. Como $(\tau_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q$, segue que $\sum_{j=1}^{\infty} |\tau_j|^q < +\infty$.

Agora, vamos mostra que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q(E)$. Temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^q &= \sum_{j=1}^{\infty} \left\|\tau_j x_j^0\right\|^q = \sum_{j=1}^{\infty} |\tau_j|^q \left\|x_j^0\right\|^q \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\tau_j|^q \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\|x_n^0\right\|^q\right) \\
&= \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\|x_n^0\right\|\right)^q \sum_{j=1}^{\infty} |\tau_j|^q = \left\|(x_n^0)_{n=1}^{\infty}\right\|_{\infty}^q \left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_q^q < +\infty.
\end{aligned}$$

Portanto, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q(E)$ e, consequentemente $\ell_{m(\infty;q)}(E) \subseteq \ell_q(E)$. Além disso,

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_q^q = \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^q \leq \left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_q^q \left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty}^q,$$

isto é,

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_q \leq \left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_q \left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty}.$$

Tomando o ínfimo sobre todas as representações possíveis de $x_j = \tau_j x_j^0$, para todo $j \in \mathbb{N}$ temos

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_q \leq \inf \left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_q \left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty} = \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(\infty;q)}.$$

Agora, seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q(E)$. Note que $x_j = \|x_j\| \frac{x_j}{\|x_j\|}$, para todo $j \in \mathbb{N}$, então tome $\tau_j = \|x_j\|$ e $x_j^0 = \frac{x_j}{\|x_j\|}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo $x_j = \tau_j x_j^0$, para todo $j \in \mathbb{N}$ com $(\tau_j)_{j=1}^{\infty} = (\|x_j\|)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q$ e $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} = \left(\frac{x_j}{\|x_j\|}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}(E) = \ell_{\infty}^w(E)$, pois $\sup\limits_{j\in\mathbb{N}} \|x_j^0\| = \sup\limits_{j\in\mathbb{N}} \frac{\|x_j\|}{\|x_j\|} = 1$. Assim, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(\infty;q)}(E)$ e, consequentemente $\ell_q(E) \subseteq \ell_{m(\infty;q)}(E)$. Além disso

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(\infty;q)} \leq \left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_q \left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty} = \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_q.$$

Portanto $(\ell_{m(\infty;q)}(E), \|\cdot\|_{m(\infty;q)}) = (\ell_q(E), \|\cdot\|_q)$.

Proposição 2.4.15 *(1) Se $0 < q \leq s_2 \leq s_1 \leq +\infty$, então*

(a) $\ell_{m(s_1;q)}(E) \subset \ell_{m(s_2;q)}(E)$,

(b) $\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s_2;q)} \leq \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s_1;q)}$, para toda $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s_1;q)}(E)$.

(2) Se $0 < q \leq s \leq +\infty$, então

(a) $\ell_{m(s;q)}(E) \subset \ell_q^u(E)$,

(b) $\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q} \leq \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)}$, para toda $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$.

(3) Se $0 < q \leq s \leq +\infty$, então

(a) $\ell_{m(s;q)}(E) \subset \ell_{s(q)'}(E)$,

(b) $\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q)'} \leq \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)}$, para toda $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$.

(4) Se $0 < q_1 \leq q_2 \leq s \leq +\infty$, então

(a) $\ell_{m(s;q_1)}(E) \subset \ell_{m(s;q_2)}(E)$,

(b) $\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q_2)} \leq \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q_1)}$, para toda $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q_1)}(E)$.

Demonstração: (1) Para demonstrar esse item dividiremos em três casos.

<u>1º Caso $0 < q < s_2 \leq s_1 < +\infty$:</u> Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s_1;q)}(E)$, então $x_j = \tau_j x_j^0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ com $(\tau_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{s_1(q)'}$ e $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{s_1}^{w}(E)$. Defina,

$$\begin{array}{rcl} f_j\colon B_{E'} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \varphi & \longmapsto & f_j(\varphi) = \varphi(x_j). \end{array}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\sup_{\mu \in W(B_{E'})} \left\| \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^{s_2} d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s_2}} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_q &= \sup_{\mu \in W(B_{E'})} \left\| \left(\|f_j\|_{L_{s_2}(B_{E'},\mu)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_q \\
&\leq \sup_{\mu \in W(B_{E'})} \left\| \left(\|f_j\|_{L_{s_1}(B_{E'}\mu)} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_q \\
&= \sup_{\mu \in W(B_{E'})} \left\| \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^{s_1} d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s_1}} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_q \\
&= \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{m(s_1;q)} < +\infty. \qquad (2.23)
\end{aligned}$$

Portanto, para cada $\mu \in W(B_{E'})$,

$$\left\| \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^{s_2} d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s_2}} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_q < +\infty, \text{ isto é, } \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^{s_2} d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s_2}} \right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q$$

e pelo Teorema 2.4.10 segue que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s_2;q)}(E)$. De (2.23) temos

$$\left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{m(s_2;q)} = \sup_{\mu \in W(B_{E'})} \left\| \left(\left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x_j)|^{s_2} d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{s_2}} \right)_{j=1}^{\infty} \right\|_q \leq \left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{m(s_1;q)}.$$

<u>2º Caso $s_2 = q$:</u> Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s_1;q)}(E)$, então $x_j = \tau_j x_j^0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ com $(\tau_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{s_1(q)'}$ e $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{s_1}^{w}(E)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)|^q \right)^{\frac{1}{q}} &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \varphi\left(\tau_j x_j^0\right) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\tau_j|^q |\varphi(x_j^0)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\tau_j|^{s_1(q)'} \right)^{\frac{1}{s_1(q)'}} \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j^0)|^{s_1} \right)^{\frac{1}{s_1}} \\
&= \left\| (\tau_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{s_1(q)'} \left\| (x_j^0)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,s_1} < +\infty. \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

A terceira desigualdade segue diretamente da Desigualdade de Hölder para sequências. Portanto, pela Observação 2.4.13, segue que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E) = \ell_{m(q;q)}(E) = \ell_{m(s_2;q)}(E)$. Agora de (2.24) obtemos

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s_2;q)} \leq \left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s_1(q)'} \left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,s_1}.$$

Consequentemente,

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s_2;q)} \leq \inf \left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s_1(q)'} \left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,s_1} = \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s_1;q)}.$$

<u>3º Caso $s_1 = +\infty$:</u> Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s_1;q)}(E) = \ell_q(E)$ pela Observação 2.4.14. Suponha que $x_j \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e tome

$$x_j = \|x_j\|^{\frac{q}{s_2(q)'}} \frac{x_j}{\|x_j\|^{\frac{q}{s_2(q)'}}},$$

com $\tau_j = \|x_j\|^{\frac{q}{s_2(q)'}}$ e $x_j^0 = \frac{x_j}{\|x_j\|^{\frac{q}{s_2(q)'}}}$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\|x_j\|^{\frac{q}{s_2(q)'}}\right)^{s_2(q)'} = \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^q < +\infty$$

e portanto, $(\tau_j)_{j=1}^{\infty} = \left(\|x_j\|^{\frac{q}{s_2(q)'}}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{s_2(q)'}$. Agora,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\|x_j\|^{s_2}}{\|x_j\|^{\frac{s_2 q}{s_2(q)'}}} = \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^q < +\infty.$$

Logo, $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} = \left(\frac{x_j}{\|x_j\|^{\frac{q}{s_2(q)'}}}\right)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{s_2}(E) \subseteq \ell_{s_2}^w(E)$ pela Observação 2.2.4, consequentemente $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s_2;q)}(E)$. Agora,

$$\begin{aligned}
\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s_2;q)} &\leq \left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s_2(q)'} \left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,s_2} \\
&\leq \left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s_2(q)'} \left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s_2} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^q\right)^{\frac{1}{s_2(q)'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^q\right)^{\frac{1}{s_2}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_q = \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s_1;q)}.
\end{aligned}$$

(2) Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$, então $x_j = \tau_j x_j^0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ com $(\tau_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{s(q)'}$ e $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s^w(E)$. Como $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$, pois $\ell_{m(s;q)}(E) \subseteq \ell_{m(q;q)}(E) = \ell_q^w(E)$ e

$$0 \leq \lim_{m\to\infty} \left\|(x_j)_{j=m}^{\infty}\right\|_{w,q} \leq \lim_{m\to\infty} \left\|(\tau_j)_{j=m}^{\infty}\right\|_{s(q)'} \lim_{m\to\infty} \left\|(x_j^0)_{j=m}^{\infty}\right\|_{w,s} = 0,$$

segue que $\lim\limits_{m\to\infty}\left\|(x_j)_{j=m}^{\infty}\right\|_{w,q}=0$. Temos pela Definição 2.3.8 que $(x_j)_{j=1}^{\infty}\in\ell_q^u(E)$ e

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}=\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(q;q)}\leq\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)}\leq\left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q)'}\left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,s}.$$

Tomando o ínfimo sobre todas a representações possíveis de $x_j=\tau_j x_j^0$, segue que

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\leq\inf\left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q)'}\left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,s}=\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)}.$$

(3) Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty}\in\ell_{m(s;q)}(E)$. Dado $\varepsilon>0$, existem $(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\in\ell_{s(q)'}$ e $(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\in\ell_s^w(E)$ (a qual podemos tomar com $\left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,s}=1$) com $x_j=\tau_j x_j^0$ para todo $j\in\mathbb{N}$, satisfazendo

$$\left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q)'}\left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,s}\leq(1+\varepsilon)\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)}.$$

Agora $\left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty}=\left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,\infty}=1$ e

$$\begin{aligned}\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q)'} &= \left(\sum_{j=1}^{\infty}\left\|\tau_j x_j^0\right\|^{s(q)'}\right)^{\frac{1}{s(q)'}}=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\tau_j|^{s(q)'}\left\|x_j^0\right\|^{s(q)'}\right)^{\frac{1}{s(q)'}}\\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\tau_j|^{s(q)'}\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|x_n^0\right\|^{s(q)'}\right)^{\frac{1}{s(q)'}}=\sup_{n\in\mathbb{N}}\left\|x_n^0\right\|\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\tau_j|^{s(q)'}\right)^{\frac{1}{s(q)'}}\\ &= \left\|(x_n^0)_{n=1}^{\infty}\right\|_{\infty}\left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q)'}\leq(1+\varepsilon)\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)}<+\infty.\end{aligned}$$

Portanto, $(x_j)_{j=1}^{\infty}\in\ell_{s(q)'}(E)$ e como ε é arbitrário segue que

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q)'}\leq\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)}.$$

(4) Primeiro vamos mostrar que $s(q_1)'\leq s(q_2)'$. Temos

$$\frac{1}{s(q_1)'}+\frac{1}{s}=\frac{1}{q_1}\ \text{e}\ \frac{1}{s(q_2)'}+\frac{1}{s}=\frac{1}{q_2}.$$

Então,

$$\frac{1}{s(q_1)'}+\frac{1}{s}=\frac{1}{q_1}\geq\frac{1}{q_2}=\frac{1}{s(q_2)'}+\frac{1}{s}\Rightarrow\frac{1}{s(q_1)'}\geq\frac{1}{s(q_2)'}\Rightarrow s(q_1)'\leq s(q_2)'.$$

Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty}\in\ell_{m(s;q_1)}(E)$, então $x_j=\tau_j x_j^0$ para todo $j\in\mathbb{N}$, com $(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\in\ell_{s(q_1)'}$ e $(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\in\ell_s^w(E)$. Como $s(q_1)'\leq s(q_2)'$, pela Proposição 2.1.4 segue que $\ell_{s(q_1)'}\subset\ell_{s(q_2)'}$. Logo, $(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\in\ell_{s(q_2)'}$ e $\left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q_2)'}\leq\left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q_1)'}$, ou seja, $(x_j)_{j=1}^{\infty}\in\ell_{m(s;q_2)}(E)$. Além disso,

$$\begin{aligned}\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q_2)} &\leq \left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q_2)'}\left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,s}\\ &\leq \left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q_1)'}\left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,s}.\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q_2)} \leq \inf \left\|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{s(q_1)'} \left\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,s} = \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q_1)}.$$

■

Nosso próximo objetivo é mostrar que o espaço das sequências $m(s;q)$-somáveis está entre o espaço das sequências absolutamente q-somáveis e o espaço das sequências fracamente q-somáveis no seguinte sentido: $\ell_q(E) \subset \ell_{m(s;q)}(E) \subset \ell_q^w(E)$ para $0 < q < s \leq +\infty$. Provaremos antes alguns resultados necessários.

Se $0 < q < +\infty$, denotamos por $\ell^0_{m(q;q)}(E)$ o espaço vetorial de todas as sequências $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ em E tal que $x_j = \tau_j x_j^0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, com $(\tau_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$ e $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$. Definimos,

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|^0_{m(q;q)} = \inf \|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,q},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as representações possíveis de $x_j = \tau_j x_j^0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, com $(\tau_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$ e $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$.

Proposição 2.4.16 *Se* $0 < q < +\infty$, *então* $\ell^0_{m(q;q)}(E) \subset \ell_{m(q;q)}(E)$ *e* $\|\cdot\|_{m(q,q)} \leq \|\cdot\|^0_{m(q,q)}$.

Demonstração: Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell^0_{m(q;q)}(E)$, então $x_j = \tau_j x_j^0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, com $(\tau_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$ e $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$. Como $c_0 \subset \ell_{\infty}$ segue que $(\tau_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\infty}$. Portanto, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(q;q)}(E)$ e

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{m(q;q)} \leq \|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} \|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\|_{w,q}.$$

Tomando o ínfimo sobre todas as representações possíveis de $x_j = \tau_j x_j^0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, com $(\tau_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$ e $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$ temos

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{m(q;q)} \leq \inf \|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} \|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\|_{w,q} = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|^0_{m(q;q)}.$$

■

Teorema 2.4.17 *Se* $0 < q < +\infty$, *então* $(\ell_q^u(E), \|\cdot\|_{w,q}) = (\ell^0_{m(q;q)}(E), \|\cdot\|^0_{m(q;q)})$.

Demonstração: Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell^0_{m(q;q)}(E)$, então $x_j = \tau_j x_j^0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, com $(\tau_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$ e $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$. Assim,

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,q} = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{m(q;q)} \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|^0_{m(q;q)} \leq \|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} \|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\|_{w,q}.$$

Em particular,

$$\|(x_j)_{j=m}^{\infty}\|_{w,q} \leq \|(\tau_j)_{j=m}^{\infty}\|_{\infty} \|(x_j^0)_{j=m}^{\infty}\|_{w,q},$$

para todo $m \in \mathbb{N}$. Então,

$$0 \leq \lim_{m\to\infty} \|(x_j)_{j=m}^{\infty}\|_{w,q} \leq \lim_{m\to\infty} \|(\tau_j)_{j=m}^{\infty}\|_{\infty} \lim_{m\to\infty} \|(x_j^0)_{j=m}^{\infty}\|_{w,q} = 0.$$

Portanto, $\lim\limits_{m\to\infty} \|(x_j)_{j=m}^{\infty}\|_{w,q} = 0$ e pela Definição 2.3.8 resulta que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$. Além disso,

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,q} \leq \inf \|(\tau_j)_{j=1}^{\infty}\|_{\infty} \|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\|_{w,q} = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{m(q;q)}^0,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as representações possíveis de $x_j = \tau_j x_j^0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ com $(\tau_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$ e $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$.

Para mostrar a recíproca, seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$. Defina

$$\sigma_n = \sup_{\phi \in B_{E'}} \sum_{j=n}^{\infty} |\phi(x_j)|^q \quad \text{e} \quad \sigma_n(\phi) = \sum_{j=n}^{\infty} |\phi(x_j)|^q,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela Definição 2.3.8 temos $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.

Podemos supor $\sigma_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pois se $\sigma_n = 0$ para algum $n \in \mathbb{N}$, então $|\phi(x_j)| = 0$ para todo $\phi \in B_{E'}$ e $j \geq n$. Pelo Teorema de Hahn-Banach $\|x_j\| = 0$ para todo $j \geq n$, então $x_j = 0$ para todo $j \geq n$ e o resultado segue trivialmente. Para $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\sigma_n)^{\frac{1}{2}} \leq \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}(\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,q})^q; 1\right\}, \tag{2.25}$$

para todo $n \geq m$. Seja

$$\rho_n = \begin{cases} 1, & \text{se } n \leq m \\ (\sigma_n)^{\frac{1}{2}}, & \text{se } n > m \end{cases},$$

então $(\rho_n)_{n=1}^{\infty} \in c_0$, $\|(\rho_n)_{n=1}^{\infty}\|_{\infty} \leq 1$ e $1 \geq \rho_1 \geq \rho_2 \geq \ldots \geq 0$. Defina $\rho_n(\phi) = (\sigma_n(\phi))^{\frac{1}{2}}$ se $n > m$. Note que $\rho_n = (\sigma_n)^{\frac{1}{2}} \geq (\sigma_n(\phi))^{\frac{1}{2}} = \rho_n(\phi)$, logo $(\rho_n)^{-1} = \frac{1}{\rho_n} \leq \frac{1}{\rho_n(\phi)} = (\rho_n(\phi))^{-1}$. Agora podemos escrever

$$\begin{aligned}
&\sup_{\phi \in B_{E'}} \sum_{n=1}^{\infty} (\rho_n)^{-1} |\phi(x_n)|^q \\
&= \sup_{\phi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{m} (\rho_n)^{-1} |\phi(x_n)|^q + \sum_{n=m+1}^{\infty} (\rho_n)^{-1} |\phi(x_n)|^q \right) \\
&= \sup_{\phi \in B_{E'}} \left[\sum_{n=1}^{m} (\rho_n)^{-1} |\phi(x_n)|^q + \sum_{n=m+1}^{\infty} (\rho_n)^{-1} \left(\sum_{j=n}^{\infty} |\phi(x_j)|^q - \sum_{j=n+1}^{\infty} |\phi(x_j)|^q \right) \right] \\
&\leq \sup_{\phi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{m} (\rho_n)^{-1} |\phi(x_n)|^q \right) + \sup_{\phi \in B_{E'}} \left[\sum_{n=m+1}^{\infty} (\rho_n)^{-1} \left(\sum_{j=n}^{\infty} |\phi(x_j)|^q - \sum_{j=n+1}^{\infty} |\phi(x_j)|^q \right) \right] \\
&\leq \sup_{\phi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{m} |\phi(x_n)|^q \right) + \sup_{\phi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} (\rho_n(\phi))^{-1} (\sigma_n(\phi) - \sigma_{n+1}(\phi)) \right) \\
&= \sup_{\phi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=1}^{m} |\phi(x_n)|^q \right) + \sup_{\phi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} (\rho_n(\phi))^{-1} \left[(\rho_n(\phi))^2 - (\rho_{n+1}(\phi))^2 \right] \right) \\
&\leq \left(\left\| (x_j)_{j=1}^{\infty} \right\|_{w,q} \right)^q + \sup_{\phi \in B_{E'}} \left(\sum_{n=m+1}^{\infty} (\rho_n(\phi))^{-1} (\rho_n(\phi) + \rho_{n+1}(\phi))(\rho_n(\phi) - \rho_{n+1}(\phi)) \right) = (*).
\end{aligned}$$

Observe que $(\rho_n(\phi))^{-1}(\rho_n(\phi)+\rho_{n+1}(\phi)) = 1 + \frac{\rho_{n+1}(\phi)}{\rho_n(\phi)} \leq 1+1 = 2$. Assim,

$$\begin{aligned}
(*) &\leq \left(\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right)^q + \sup_{\phi\in B_{E'}}\left(\sum_{n=m+1}^{\infty} 2(\rho_n(\phi)-\rho_{n+1}(\phi))\right) \\
&= \left(\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right)^q + 2\sup_{\phi\in B_{E'}}\rho_{m+1}(\phi) \\
&= \left(\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right)^q + 2(\sigma_{m+1})^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right)^q + \varepsilon\left(\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right)^q \\
&= (1+\varepsilon)\left(\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right)^q .
\end{aligned}$$

Agora seja $\rho_n = (\lambda_n)^q$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned}
\sup_{\phi\in B_{E'}}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\phi((\lambda_j)^{-1}x_j)\right|^q &= \sup_{\phi\in B_{E'}}\sum_{j=1}^{\infty}|\lambda_j^{-1}|^q|\phi(x_j)|^q \\
&= \sup_{\phi\in B_{E'}}\sum_{j=1}^{\infty}(\rho_j)^{-1}|\phi(x_j)|^q \\
&\leq (1+\varepsilon)\left(\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}\right)^q .
\end{aligned}$$

Isto mostra que $((\lambda_j)^{-1}x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^w(E)$ e

$$\left\|((\lambda_j)^{-1}x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q} \leq (1+\varepsilon)^{\frac{1}{q}}\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}.$$

Como $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$ e $\left\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty} \leq 1$, concluímos que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell^0_{m(q;q)}(E)$ e

$$\begin{aligned}
\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|^0_{m(q;q)} &= \inf\left\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty}\left\|((\lambda_j)^{-1}x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q} \\
&\leq \left\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{\infty}\left\|((\lambda_j)^{-1}x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q} \\
&\leq (1+\varepsilon)^{\frac{1}{q}}\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}.
\end{aligned}$$

Como ε foi tomado arbitrário, segue que

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|^0_{m(q;q)} \leq \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{w,q}.$$

■

Teorema 2.4.18 *Se $0 < q < s \leq +\infty$, então $\ell_q(E) \subset \ell_{m(s;q)}(E) \subset \ell^0_{m(q;q)}(E)$.*

Demonstração: Vimos que $\ell_q(E) = \ell_{m(\infty;q)}(E)$ e pela Proposição 2.4.15 item (1) temos que $\ell_{m(\infty;q)}(E) \subset \ell_{m(s;q)}(E)$. Logo, $\ell_q(E) \subset \ell_{m(s;q)}(E)$ e

$$\left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(s;q)} \leq \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{m(\infty;q)} = \left\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\right\|_{q}.$$

Agora vamos mostrar a outra inclusão. Pela Proposição 2.4.15 item (2) segue que $\ell_{m(s;q)}(E) \subset \ell_q^u(E)$ e pelo Teorema 2.4.17 temos que $\ell_q^u(E) = \ell^0_{m(q;q)}(E)$. Logo, $\ell_{m(s;q)}(E) \subset \ell^0_{m(q;q)}(E)$ e

$$\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|^0_{m(q;q)} = \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{w,q} \leq \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{m(s;q)}.$$

■

CAPÍTULO 3

OPERADORES ABSOLUTAMENTE SOMANTES

Com o objetivo de demonstrar a versão do Teorema de Dvoretzky-Rogers para sequências misto somáveis, definiremos os operadores $(p, m(s; q))$-somantes e provaremos algumas caracterizações destes operadores assim como o Teorema do Dominação de Grothendieck-Pietsch e o Teorema da Fatoração de Pietsch para operadores absolutamente p-somantes. Em seguida, definiremos os operadores completamente contínuos, compactos e fracamente compactos. Além disso, provaremos que todo operador absolutamente p-somante, entre espaços de Banach, é fracamente compacto e completamente contínuo e então concluiremos que a composição de operadores absolutamente p-somantes é compacto. Com isso, mostraremos que o operador identidade no espaço de Banach E será absolutamente p-somante se, e somente se, E tem dimensão finita. Por fim, provaremos o Teorema de Dvoretzky-Rogers para sequências incondicionalmente p-somáveis o qual será utilizado para demonstrar a versão do Teorema de Dvoretzky-Rogers para sequências misto somáveis.

Considere neste capítulo E e F como sendo espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$.

3.1 Operadores $(p, m(s; q))$-somantes

Definição 3.1.1 Sejam $0 < q \leq s \leq +\infty$ e $p \geq q$. Um operador linear $T\colon E \longrightarrow F$ é *(p,m(s;q))-somante* se $(T(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F)$ para toda $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$. Quando $s = q < +\infty$, temos $\ell_{m(q;q)}(E) = \ell_q^w(E)$ e neste caso dizemos que T é *absolutamente (p, q)-somante.* Quando $s = p = q$ dizemos simplesmente que T é *absolutamente p-somante.*

Se $p < q$, então o único operador linear T satisfazendo a Definição 3.1.1 é o operador nulo. De fato, suponha que exista $T \neq 0$ satisfazendo a definição com $p < q$. Então existe $a \in E$ com $a \neq 0$, tal que $T(a) \neq 0$. Para toda $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q$, temos que $(\lambda_j a)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q(E) \subset \ell_{m(s;q)}(E)$ e $(\lambda_j T(a))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F)$. Mas isso implica que $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p$. Portanto, $\ell_q \subseteq \ell_p$

com $p < q$ e pela Proposição 2.1.4 segue que $\ell_p \subseteq \ell_q$. Com isso $\ell_p = \ell_q$ para $p < q$ o que é absurdo.

Denotamos por $\mathcal{L}_{(p,m(s;q))}(E;F)$ o espaço vetorial de todos os operadores lineares $(p, m(s;q))$-somantes de E em F.

Para $T \in \mathcal{L}_{(p,m(s;q))}(E;F)$ consideramos o operador $\psi_{(p,m(s;q))}(T)((x_j)_{j=1}^{\infty}) = (T(x_j))_{j=1}^{\infty}$ para toda $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$. É claro que $\psi_{(p,m(s;q))}(T)((x_j)_{j=1}^{\infty}) \in \ell_p(F)$. Com isso, $\psi_{(p,m(s;q))}(T)$ é um operador linear bem definido de $\ell_{m(s;q)}(E)$ em $\ell_p(F)$. Quando $s = q$ escrevemos $\psi_{(p;q)}(T)$ ao invés de $\psi_{(p,m(q;q))}(T)$. Neste caso, $\psi_{(p;q)}(T)$ é um operador linear bem definido de $\ell_q^w(E)$ em $\ell_p(F)$.

A seguir veremos que todo operador $(p, m(s;q))$-somante de E em F é contínuo.

Lema 3.1.2 *Se $T\colon E \longrightarrow F$ é um operador $(p, m(s;q))$-somante, então $T \in \mathcal{L}(E;F)$.*

Demonstração: Suponha que T não seja contínuo. Então para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in E$, tal que $\|T(y_n)\| \geq 2^n \|y_n\|$. Definindo $x_n = \frac{y_n}{\|y_n\|}$ temos

$$\|T(x_n)\| \geq 2^n, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

Agora, como $2^q > 1$ segue que $\frac{1}{2^q} < 1$, logo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{x_n}{2^n} \right\|^q = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^q} \right)^n < +\infty,$$

então $\left(\frac{x_n}{2^n}\right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_q(E) \subseteq \ell_{m(s;q)}(E)$ pelo Teorema 2.4.18.

Vamos provar que $\left(T\left(\frac{x_n}{2^n}\right)\right)_{n=1}^{\infty} \notin \ell_p(F)$. Suponha que $\left(T\left(\frac{x_n}{2^n}\right)\right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(F)$, logo $T\left(\frac{x_n}{2^n}\right) \xrightarrow{n \to \infty} 0$, ou seja, $\frac{T(x_n)}{2^n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$ e ainda $\frac{\|T(x_n)\|}{2^n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$. Então para $\varepsilon = 1$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\|T(x_n)\|}{2^n} < 1$, para todo $n \geq n_0$. Portanto $\|T(x_{n_0})\| < 2^{n_0}$ o que é absurdo por (3.1). Logo, $\left(T\left(\frac{x_n}{2^n}\right)\right)_{n=1}^{\infty} \notin \ell_p(F)$ mas isso também é absurdo pois T é $(p, m(s;q))$-somante. Portanto T é contínuo. ∎

Provemos o seguinte teorema de caracterização para os operadores $(p, m(s;q))$-somantes.

Teorema 3.1.3 *Se $T\colon E \longrightarrow F$ é um operador linear, então as seguintes condições são equivalentes:*

(1) T é $(p, m(s;q))$-somante;

(2) $\psi_{(p,m(s;q))}(T)$ é um operador linear bem definido de $\ell_{m(s;q)}(E)$ em $\ell_p(F)$;

(3) $\psi_{(p,m(s;q))}(T)$ é um operador linear bem definido e contínuo de $\ell_{m(s;q)}(E)$ em $\ell_p(F)$;

(4) Existe $C \geq 0$ tal que

$$\|(T(x_j))_{j=1}^m\|_p \leq C \|(x_j)_{j=1}^m\|_{m(s;q)}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, $x_j \in E$, $j = 1, 2, \ldots, m$;

(5) Existe $D \geq 0$ tal que

$$\|(T(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_p \leq D\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{m(s;q)}$$

para toda $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$.
Neste caso,

$$\|\psi_{(p,m(s;q))}(T)\| = \inf\{C : C \text{ satisfaz (4) e (5)}\}.$$

Demonstração: (1)$\Leftrightarrow$(2) É a própria definição.

(1)$\Rightarrow$(3) É claro que $\psi_{(p,m(s;q))}(T)$ está bem definido e é linear. Vamos provar que seu gráfico é fechado. Sejam $(x_n^{(k)})_{k=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$ e $\psi_{(p,m(s;q))}(T)((x_n^{(k)})_{k=1}^{\infty}) \in \ell_p(F)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tais que $(x_n^{(k)})_{k=1}^{\infty}$ converge para $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ em $\ell_{m(s;q)}(E)$ e $\psi_{(p,m(s;q))}(T)((x_n^{(k)})_{k=1}^{\infty}))$ converge para $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ em $\ell_p(F)$, quando n tende a infinito. E, consequentemente temos que $T(x_n^{(k)})$ converge para y_k em F e $x_n^{(k)}$ converge para x_k em E, para todo $k \in \mathbb{N}$. Como T é contínuo, resulta que $T(x_n^{(k)})$ converge para $T(x_k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e pela unicidade do limite temos que $T(x_k) = y_k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto $\psi_{(p,m(s;q))}(T)((x_k)_{k=1}^{\infty}) = (y_k)_{k=1}^{\infty}$ e, por conseguinte $\psi_{(p,m(s;q))}(T)$ é contínuo.

(3)$\Rightarrow$(1) É óbvio.

(3)$\Rightarrow$(5) Como $\psi_{(p,m(s;q))}(T)$ é um operador linear e contínuo, segue que

$$\|\psi_{(p,m(s;q))}(T)((x_j)_{j=1}^{\infty})\|_p \leq \|\psi_{(p,m(s;q))}(T)\|\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{m(s;q)}.$$

Fazendo $D = \|\psi_{(p,m(s;q))}(T)\|$ obtemos

$$\|(T(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_p = \|\psi_{(p,m(s;q))}(T)((x_j)_{j=1}^{\infty})\|_p \leq D\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{m(s;q)}.$$

(5)$\Rightarrow$(3) Como T é um operador linear, segue que $\psi_{(p,m(s;q))}(T)$ é linear e, por (5) temos que $\psi_{(p,m(s;q))}(T)$ é contínuo.

(5)$\Rightarrow$(4) Basta fazer $C = D$.

(4)$\Rightarrow$(5) Basta tomar o limite com $m \longrightarrow \infty$. ■

Nosso próximo objetivo é mostrar que $(\mathcal{L}_{(p,m(s;q))}(E;F), \|\cdot\|_{(p,m(s;q))})$ é um espaço de Banach. Mas antes veremos que se definirmos

$$\|T\|_{(p,m(s;q))} \quad = \quad \|\psi_{(p,m(s;q))}(T)\| = \inf\{C : C \text{ satisfaz (4) e (5)}\}$$

para todo $T \in \mathcal{L}_{(p,m(s;q))}(E;F)$, então $\|\cdot\|_{(p,m(s;q))}$ é uma norma (p-norma se $0 < p < 1$) em $\mathcal{L}_{(p,m(s;q))}(E;F)$. De fato, primeiro vamos mostrar que $\|\cdot\|_{(p,m(s;q))}$ é uma norma para $p \geq 1$.

(i) Claramente $\|T\|_{(p,m(s;q))} \geq 0$.

(ii) Devemos mostrar que $\|T\|_{(p,m(s;q))} = 0$ se, e somente se, $T = 0$.

Se $T = 0$ então,

$$\begin{aligned} \|T\|_{(p,m(s;q))} &= \|\psi_{(p,m(s;q))}(T)\| \\ &= \sup_{\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{m(s;q)} \leq 1} \|\psi_{(p,m(s;q))}(T)((x_j)_{j=1}^{\infty})\|_p \\ &= \sup_{\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{m(s;q)} \leq 1} \|(T(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_p = 0. \end{aligned}$$

Reciprocamente, se $\|T\|_{(p,m(s;q))} = 0$, então $\|\psi_{(p,m(s;q))}(T)\| = 0$ consequentemente $\psi_{(p,m(s;q))}(T) = 0$, isto é, $(T(x_j))_{j=1}^{\infty}$ é igual a sequência nula, para toda $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$. Em particular, $T(x_j) = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e toda $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$. Sejam $x \in E$ e $(x, 0, 0, \ldots)$ uma sequência em $\ell_{m(s;q)}(E)$. Assim, $T(x) = 0$ para todo $x \in E$, então $T = 0$.

(iii) Sejam $T \in \mathcal{L}_{(p,m(s;q))}(E;F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Vamos mostrar que $\|\lambda T\|_{(p,m(s;q))} = |\lambda|\|T\|_{(p,m(s;q))}$. Temos

$$\begin{aligned} \|\lambda T\|_{(p,m(s;q))} &= \|\psi_{(p,m(s;q))}(\lambda T)\| = \|\lambda \psi_{(p,m(s;q))}(T)\| \\ &= |\lambda|\|\psi_{(p,m(s;q))}(T)\| = |\lambda|\|T\|_{(p,m(s;q))}. \end{aligned}$$

(iv) Sejam $T, S \in \mathcal{L}_{(p,m(s;q))}(E;F)$ e vamos mostrar que $\|T+S\|_{(p,m(s;q))} \leq \|T\|_{(p,m(s;q))} + \|S\|_{(p,m(s;q))}$. Temos

$$\begin{aligned} \|T+S\|_{(p,m(s;q))} &= \|\psi_{(p,m(s;q))}(T+S)\| \\ &= \|\psi_{(p,m(s;q))}(T) + \psi_{(p,m(s;q))}(S)\| \\ &\leq \|\psi_{(p,m(s;q))}(T)\| + \|\psi_{(p,m(s;q))}(S)\| \\ &= \|T\|_{(p,m(s;q))} + \|S\|_{(p,m(s;q))}. \end{aligned}$$

Por fim, vamos mostrar que $\|\cdot\|_{(p,m(s;q))}$ é uma p-norma para $0 < p < 1$. Sejam $T, S \in \mathcal{L}_{(p,m(s;q))}(E;F)$. Temos,

$$\begin{aligned} \|T+S\|_{(p,m(s;q))}^p &= \|\psi_{(p,m(s;q))}(T+S)\|^p \\ &= \|\psi_{(p,m(s;q))}(T) + \psi_{(p,m(s;q))}(S)\|^p \\ &\leq \|\psi_{(p,m(s;q))}(T)\|^p + \|\psi_{(p,m(s;q))}(S)\|^p \\ &= \|T\|_{(p,m(s;q))}^p + \|S\|_{(p,m(s;q))}^p. \end{aligned}$$

Proposição 3.1.4 *Se $p \geq 1$, então $(\mathcal{L}_{(p,m(s;q))}(E;F), \|\cdot\|_{(p,m(s;q))})$ é um espaço de Banach.*

Demonstração: Seja $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}_{(p,m(s;q))}(E;F)$. Temos que $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E;F)$. De fato, como $\mathcal{L}_{(p,m(s;q))}(E;F) \subseteq \mathcal{L}(E;F)$ e $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{(p,m(s;q))}$, então dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow \|T_n - T_m\|_{(p,m(s;q))} < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Por outro lado,

$$\|T_n - T_m\| \leq \|T_n - T_m\|_{(p,m(s;q))} < \varepsilon. \tag{3.3}$$

Logo, $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(E;F)$, que é completo, portanto $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ converge para algum $T \in \mathcal{L}(E;F)$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ consideremos o operador

$$\begin{aligned} \psi_{(p,m(s;q))}(T_n) \colon \ell_{m(s;q)}(E) &\longrightarrow \ell_p(F) \\ (x_j)_{j=1}^{\infty} &\longmapsto (T_n(x_j))_{j=1}^{\infty}. \end{aligned}$$

$\psi_{(p,m(s;q))}(T_n)$ está bem definido é linear e contínuo. Portanto, $(\psi_{(p,m(s;q))}(T_n))_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}(\ell_{m(s;q)}(E);\ell_p(F))$. Vamos provar que $(\psi_{(p,m(s;q))}(T_n))_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(\ell_{m(s;q)}(E);\ell_p(F))$. Temos

$$\begin{aligned} &\|\psi_{(p,m(s;q))}(T_n) - \psi_{(p,m(s;q))}(T_m)\| \\ &\quad = \sup_{\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{m(s;q)} \leq 1} \|\psi_{(p,m(s;q))}(T_n)((x_j)_{j=1}^{\infty}) - \psi_{(p,m(s;q))}(T_m)((x_j)_{j=1}^{\infty})\|_p \\ &\quad = \sup_{\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{m(s;q)} \leq 1} \|(T_n(x_j))_{j=1}^{\infty} - (T_m(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_p \\ &\quad = \sup_{\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{m(s;q)} \leq 1} \|((T_n - T_m)(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_p \\ &\quad = \|T_n - T_m\|_{(p,m(s;q))} < \varepsilon, \end{aligned}$$

para todo $n, m \geq n_0$.

Como $\ell_p(F)$ é completo, segue que $\mathcal{L}(\ell_{m(s;q)}(E);\ell_p(F))$ é um espaço de Banach. Assim, $(\psi_{(p,m(s;q))}(T_n))_{n=1}^{\infty}$ converge para algum $S \in \mathcal{L}(\ell_{m(s;q)}(E);\ell_p(F))$. Logo,

$$\psi_{(p,m(s;q))}(T_n)(w) \longrightarrow S(w),$$

para todo $w \in \ell_{m(s;q)}(E)$.

Se $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n \geq n_1 \Rightarrow \|\psi_{(p,m(s;q))}(T_n)((x_j)_{j=1}^{\infty}) - S((x_j)_{j=1}^{\infty})\|_p < \varepsilon.$$

Seja $(y_j)_{j=1}^{\infty} = S((x_j)_{j=1}^{\infty}) \in \ell_p(F)$, logo

$$n \geq n_1 \Rightarrow \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T_n(x_j) - y_j\|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|(T_n(x_j))_{j=1}^{\infty} - (y_j)_{j=1}^{\infty}\|_p < \varepsilon.$$

Portanto, para todo $j \in \mathbb{N}$ e $n \geq n_1$, temos

$$\|T_n(x_j) - y_j\| < \varepsilon, \text{ ou seja, } \lim_{n \to \infty} T_n(x_j) = y_j. \tag{3.4}$$

Como $T_n \longrightarrow T$ em $\mathcal{L}(E;F)$ obtemos

$$\lim_{n \to \infty} T_n(x_j) = T(x_j) \text{ em } F, \tag{3.5}$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo de (3.4), (3.5) e pela unicidade do limite, segue que

$$(T(x_j))_{j=1}^{\infty} = (y_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F).$$

Portanto, $T \in \mathcal{L}_{(p,m(s;q))}(E;F)$.

Como $\psi_{(p,m(s;q))}(T_n) \longrightarrow S$ existe $N \in \mathbb{N}$, tal que

$$\begin{aligned}
n \geq N \quad &\Rightarrow \quad \|\psi_{(p,m(s;q))}(T_n) - S\| < \varepsilon \\
&\Rightarrow \sup_{\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{m(s;q)} \leq 1} \|\psi_{(p,m(s;q))}(T_n)((x_j)_{j=1}^{\infty}) - S((x_j)_{j=1}^{\infty})\|_p < \varepsilon \\
&\Rightarrow \sup_{\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{m(s;q)} \leq 1} \|(T_n(x_j))_{j=1}^{\infty}) - (T(x_j))_{j=1}^{\infty})\|_p < \varepsilon \\
&\Rightarrow \sup_{\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_{m(s;q)} \leq 1} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|T_n(x_j) - T(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon \\
&\Rightarrow \|T_n - T\|_{(p,m(s;q))} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, $T_n \longrightarrow T$ em $\mathcal{L}_{(p,m(s;q))}(E;F)$. ■

Com a próxima proposição veremos que o espaço dos operadores $(p, m(s;q))$-somantes tem a propriedade central de ideais de operadores.

Proposição 3.1.5 *Se* $T \in \mathcal{L}_{(p,m(s;q))}(E;F)$, $S \in \mathcal{L}(D;E)$ *e* $R \in \mathcal{L}(F;G)$ *então* $R \circ T \circ S \in \mathcal{L}_{(p,m(s;q))}(D;G)$. *Além disso,*

$$\|R \circ T \circ S\|_{(p,m(s;q))} \leq \|R\| \|T\|_{(p,m(s;q))} \|S\|.$$

Demonstração: Vimos que

$$\begin{aligned}
\hat{T} = \psi_{(p,m(s;q))}(T) \colon \ell_{m(s;q)}(E) &\longrightarrow \ell_p(F) \\
(x_j)_{j=1}^{\infty} &\longmapsto (T(x_j))_{j=1}^{\infty},
\end{aligned}$$

está bem definido é linear, contínuo e $\|T\|_{(p,m(s;q))} = \|\psi_{(p,m(s;q))}(T)\|$.

Definimos

$$\begin{aligned}
\hat{R} \colon \ell_p(F) &\longrightarrow \ell_p(G) \\
(x_j)_{j=1}^{\infty} &\longmapsto (R(x_j))_{j=1}^{\infty}.
\end{aligned}$$

$\hat{R}$ está bem definido é linear, contínuo e $\|\hat{R}\| = \|R\|$. Com efeito, para toda sequência $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(F)$ temos

$$\begin{aligned}
\|(R(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_p &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|R(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|R\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|R\| \|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p < +\infty,
\end{aligned}$$

com isso, $\hat{R}((x_j)_{j=1}^{\infty}) = (R(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_p(G)$, ou seja, $\hat{R}$ está bem definido, já a linearidade é óbvia. Pela desigualdade acima temos

$$\|\hat{R}((x_j)_{j=1}^{\infty})\|_p = \|(R(x_j))_{j=1}^{\infty}\|_p \leq \|R\|\|(x_j)_{j=1}^{\infty}\|_p,$$

logo $\hat{R}$ é contínuo e além disso $\|\hat{R}\| \leq \|R\|$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\|R(x)\| &= \|(R(x),0,0,\ldots)\|_p = \|\hat{R}(x,0,0,\ldots)\|_p \\ &\leq \|\hat{R}\|\|(x,0,0,\ldots)\|_p = \|\hat{R}\|\|x\|,\end{aligned}$$

o que permite concluir que $\|R\| \leq \|\hat{R}\|$. Portanto, $\|R\| = \|\hat{R}\|$.

Agora, definimos

$$\begin{aligned}\hat{S}\colon \ell_{m(s;q)}(D) &\longrightarrow \ell_{m(s;q)}(E) \\ (x_j)_{j=1}^{\infty} &\longmapsto (S(x_j))_{j=1}^{\infty}.\end{aligned}$$

$\hat{S}$ está bem definido é linear, contínuo e $\|\hat{S}\| = \|S\|$. De fato, seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(D)$. Então, $x_j = \tau_j x_j^0$ para todo $j \in \mathbb{N}$, com $(\tau_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{s(q)'}$ e $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s^w(D)$. Observe que $S(x_j) = S(\tau_j x_j^0) = \tau_j S(x_j^0)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Devemos mostrar que $(S(x_j))_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$ para isso, basta provar que $(S(x_j^0))_{j=1}^{\infty} \in \ell_s^w(E)$ já que $(\tau_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{s(q)'}$. Como $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s^w(D)$, para todo $\varphi \in D'$ temos

$$\|(x_j^0)_{j=1}^{\infty}\|_{w,s} = \sup_{\varphi \in B_{D'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j^0)|^s\right)^{\frac{1}{s}} < +\infty$$

e, consequentemente para todo $\varphi \in E'$

$$\begin{aligned}\|(S(x_j^0))_{j=1}^{\infty}\|_{w,s} &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(S(x_j^0))|^s\right)^{\frac{1}{s}} \\ &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |(\varphi \circ S)(x_j^0)|^s\right)^{\frac{1}{s}} \\ &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |(\varphi \circ S)(x_j^0)|^s\right)^{\frac{1}{s}} \cdot \frac{\|S\|}{\|S\|} \\ &= \sup_{\varphi \in B_{E'}} \|S\| \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\left(\varphi \circ \frac{S}{\|S\|}\right)(x_j^0)\right|^s\right)^{\frac{1}{s}} \\ &= \|S\| \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\left(\varphi \circ \frac{S}{\|S\|}\right)(x_j^0)\right|^s\right)^{\frac{1}{s}}.\end{aligned}$$

Para todo $\varphi \in E'$, com $\|\varphi\| \leq 1$ segue que $\varphi \circ \frac{S}{\|S\|} \in D'$ e $\left\|\varphi \circ \frac{S}{\|S\|}\right\| \leq \|\varphi\| \frac{\|S\|}{\|S\|} = \|\varphi\| \leq 1$.

Então,

$$\begin{aligned}
\|(S(x_j^0)_{j=1}^\infty)\|_{w,s} &= \|S\| \sup_{\varphi\in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\left(\varphi\circ\frac{S}{\|S\|}\right)(x_j^0)\right|^s\right)^{\frac{1}{s}} \\
&\leq \|S\| \sup_{\gamma\in B_{D'}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|\gamma(x_j^0)\right|^s\right)^{\frac{1}{s}} \\
&= \|S\|\|(x_j^0)_{j=1}^\infty\|_{w,s} < +\infty
\end{aligned}$$

e, consequentemente $(S(x_j^0))_{j=1}^\infty \in \ell_s^w(E)$. Claramente $\hat{S}$ é linear.

Para $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{m(s;q)}(D)$ temos que $x_j = \tau_j x_j^0$ para todo $j\in\mathbb{N}$, com $(\tau_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{s(q)'}$ e $(x_j^0)_{j=1}^\infty \in \ell_s^w(D)$. Como $S(x_j) = \tau_j S(x_j^0)$ para todo $j\in\mathbb{N}$, com $(\tau_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{s(q)'}$ e $(S(x_j^0))_{j=1}^\infty \in \ell_s^w(E)$ resulta que

$$\begin{aligned}
\|\hat{S}((x_j)_{j=1}^\infty)\|_{m(s;q)} &= \|(S(x_j))_{j=1}^\infty\|_{m(s;q)} \\
&\leq \|(\tau_j)_{j=1}^\infty\|_{s(q)'}\|(S(x_j^0))_{j=1}^\infty\|_{w,s} \\
&= \|S\|\|(\tau_j)_{j=1}^\infty\|_{s(q)'}\|(x_j^0)_{j=1}^\infty\|_{w,s}.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
\|\hat{S}((x_j)_{j=1}^\infty)\|_{m(s;q)} &\leq \|S\| \inf \|(\tau_j)_{j=1}^\infty\|_{s(q)'}\|(x_j^0)_{j=1}^\infty\|_{w,s} \\
&\leq \|S\|\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{m(s;q)}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\hat{S}$ é contínuo e $\|\hat{S}\| \leq \|S\|$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|S(x)\| &= \|(S(x),0,0,0,\ldots)\|_{m(s;q)} \\
&= \|\hat{S}(x,0,0,0,\ldots)\|_{m(s;q)} \\
&\leq \|\hat{S}\|\|(x,0,0,0,\ldots)\|_{m(s;q)} \\
&= \|\hat{S}\|\|x\|,
\end{aligned}$$

o que permite concluir que $\|S\| \leq \|\hat{S}\|$ e então $\|S\| = \|\hat{S}\|$.

Assim, mostramos que $\|T\|_{(p,m(s;q))} = \|\psi_{(p,m(s;q))}(T)\| = \|\hat{T}\|$, $\|\hat{R}\| = \|R\|$ e $\|\hat{S}\| = \|S\|$. Para toda $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell_{m(s;q)}(D)$ temos

$$\begin{aligned}
(R\circ T\circ S(x_j))_{j=1}^\infty &= (R(T(S(x_j))))_{j=1}^\infty \\
&= \hat{R}((T(S(x_j)))_{j=1}^\infty) \\
&= \hat{R}\circ\hat{T}((S(x_j))_{j=1}^\infty) \\
&= \hat{R}\circ\hat{T}\circ\hat{S}((x_j)_{j=1}^\infty) \in \ell_p(G).
\end{aligned}$$

Portanto, $R \circ T \circ S \in \mathcal{L}_{(p,m(s;q))}(D;G)$ e

$$\begin{aligned}
\|R \circ T \circ S\|_{(p,m(s;q))} &= \|\hat{R} \circ \hat{T} \circ \hat{S}\| \\
&= \sup_{\|x\| \leq 1} \|\hat{R}(\hat{T}(\hat{S}(x)))\| \\
&\leq \sup_{\|x\| \leq 1} \|\hat{R}\|\|\hat{T}\|\|\hat{S}(x)\| \\
&= \|\hat{R}\|\|\hat{T}\| \sup_{\|x\| \leq 1} \|\hat{S}(x)\| \\
&= \|\hat{R}\|\|\hat{T}\|\|\hat{S}\| \\
&= \|R\|\|T\|_{(p,m(s;q))}\|S\|.
\end{aligned}$$

■

Vejamos algumas notações. Quando $s = q < +\infty$ escrevemos $\mathcal{L}^{as}_{(p,q)}(E;F)$ ao invés de $\mathcal{L}_{(p,m(q;q))}(E;F)$ e $\| \cdot \|_{as,(p,q)}$ ao invés de $\| \cdot \|_{(p,m(q;q))}$. E quando $s = p = q$ escrevemos $\mathcal{L}^{as}_{q}(E;F)$ ao invés de $\mathcal{L}^{as}_{(q,q)}(E;F)$ e $\| \cdot \|_{as,q}$ ao invés de $\| \cdot \|_{as,(q,q)}$.

Se $s = q$ podemos acrescentar mais três condições no Teorema 3.1.3.

Teorema 3.1.6 *Se $T \colon E \longrightarrow F$ é um operador linear, então as seguintes condições são equivalentes:*

(1) T é absolutamente (p,q)-somante;

(2) $\psi_{(p,q)}(T)$ é um operador linear bem definido de $\ell^w_q(E)$ em $\ell_p(F)$;

(3) $\psi_{(p,q)}(T)$ é um operador linear bem definido de $\ell^u_q(E)$ em $\ell_p(F)$;

(4) $\psi_{(p,q)}(T)$ é um operador linear bem definido e contínuo de $\ell^w_q(E)$ em $\ell_p(F)$;

(5) $\psi_{(p,q)}(T)$ é um operador linear bem definido e contínuo de $\ell^u_q(E)$ em $\ell_p(F)$;

(6) Existe $C \geq 0$ tal que

$$\|(T(x_j))_{j=1}^m\|_p \leq C\|(x_j)_{j=1}^m\|_{w,q}$$

para todo $m \in \mathbb{N}$, $x_j \in E, j = 1, 2, \ldots, m$;

(7) Existe $D \geq 0$ tal que

$$\|(T(x_j))_{j=1}^\infty\|_p \leq D\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,q}$$

para toda $(x_j)_{j=1}^\infty \in \ell^w_q(E)$;

(8) Existe $H \geq 0$ tal que

$$\|(T(x_j))_{j=1}^\infty\|_p \leq H\|(x_j)_{j=1}^\infty\|_{w,q}$$

para toda $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_q^u(E)$.
Neste caso,

$$\begin{aligned} \|\psi_{(p,q)}(T)\| &= \inf\{C : C \text{ satisfaz (6) e (7)}\} \\ &= \|\psi_{(p,q)}(T)|_{\ell_q^u(E)}\| \\ &= \inf\{H : H \text{ satisfaz (8)}\}. \end{aligned}$$

Demonstração: Pelo Teorema 3.1.3 basta provar a equivalência entre (3), (5) e (8). É claro que (5) implica (3). Aplicando o Teorema do Gráfico Fechado, temos que (1) implica em (5) e (3) implica (5). É claro que (5) implica em (8) com $H = \|\psi_{(p,q)}(T)|_{\ell_q^u(E)}\|$. Com certeza (8) implica em (6), com $D = H$ e sabemos que (6) implica em (1). ■

Os operadores absolutamente p-somantes tem uma caracterização interessante dada pelo Teorema da Dominação de Grothendieck-Pietsch.

Teorema 3.1.7 (Teorema da Dominação de Grothendieck-Pietsch) *Sejam* $0 < p < +\infty$ *e* K *é um subconjunto normante e fechado de* $B_{E'}$, $B_{E'}$ *munida com a topologia fraca estrela. Um operador linear* $T \colon E \longrightarrow F$ *é absolutamente p-somante se, e somente se, existem uma constante* $C \geq 0$ *e* $\mu \in W(K)$ *tais que*

$$\|T(x)\| \leq C \left(\int_K |\varphi(x)|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.6}$$

para todo $x \in E$. *Neste caso,*

$$\|T\|_{as,p} = \inf\{C : C \text{ satisfaz (3.6)}\}$$

Demonstração: Suponha que existam C e μ descritas na hipótese acima tais que a desigualdade (3.6) ocorra para todo $x \in E$. Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E)$, então por (3.6) temos

$$\|T(x_j)\|^p \leq C^p \left(\int_K |\varphi(x_j)|^p d\mu(\varphi) \right),$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim, fazendo o somatório com $j = 1, \ldots, m$ temos

$$\begin{aligned} \|(T(x_j))_{j=1}^m\|_p^p &= \sum_{j=1}^m \|T(x_j)\|^p \\ &\leq C^p \sum_{j=1}^m \int_K |\varphi(x_j)|^p d\mu(\varphi) \\ &= C^p \int_K \sum_{j=1}^m |\varphi(x_j)|^p d\mu(\varphi) \\ &\leq C^p \sup_{\varphi \in K} \sum_{j=1}^m |\varphi(x_j)|^p \mu(K) \\ &= C^p \|(x_j)_{j=1}^m\|_{w,p}^p, \end{aligned}$$

para todo $m \in \mathbb{N},\ x_j \in E$ e $j = 1, \ldots, m$. Portanto, pelo Teorema 3.1.6 T é absolutamente p-somante e

$$\|T\|_{as,p} \leq C. \tag{3.7}$$

Para mostrar a recíproca, sejam T um operador absolutamente p-somante e $D = \|T\|_{as,p}$. Considere o espaço vetorial topológico $(C(K))'$, munido com a topologia fraca estrela. Pelo Lema 1.2.13 sabemos que $W(K)$ é um subconjunto compacto desse espaço. Para cada família finita $(x_j)_{j=1}^m$ constituída por elementos de E, defina a função associada $\Phi_{(x_j)_{j=1}^m} \colon W(K) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\Phi_{(x_j)_{j=1}^m}(\mu) = \sum_{j=1}^m \left[\|T(x_j)\|^p - D^p \int_K |\varphi(x_j)|^p d\mu(\varphi) \right].$$

Consideremos agora o conjunto formado por todas essas funções:

$$\mathcal{F} := \{\Phi_{(x_j)_{j=1}^m} : (x_j)_{j=1}^m \text{ é uma família finita com elementos em } E\}.$$

Agora, verificaremos as hipóteses do Lema de Ky Fan para então aplicá-lo.

(a) A família de funções $\mathcal{F}$ é côncava. Com efeito, dados $\Phi_{(x_{j,1})_{j=1}^{m_1}}, \ldots, \Phi_{(x_{j,n})_{j=1}^{m_n}} \in \mathcal{F}$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \geq 0$ tais que $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \alpha_i \Phi_{(x_{j,i})_{j=1}^{m_i}}(\mu) &= \alpha_1 \Phi_{(x_{j,1})_{j=1}^{m_1}}(\mu) + \cdots + \alpha_n \Phi_{(x_{j,n})_{j=1}^{m_n}}(\mu) \\
&= \sum_{i=1}^n \alpha_i \left[\sum_{j=1}^{m_i} \left(\|T(x_{j,i})\|^p - D^p \int_K |\varphi(x_{j,i})|^p d\mu(\varphi) \right) \right] \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{m_i} \left[\left\| T\left(\alpha_i^{\frac{1}{p}} x_{j,i} \right) \right\|^p - D^p \int_K \left| \varphi\left(\alpha_i^{\frac{1}{p}} x_{j,i} \right) \right|^p d\mu(\varphi) \right] \\
&= \Phi_{(\alpha_i^{\frac{1}{p}} x_{j,i})_{j=1,i=1}^{m_i,n}}(\mu) \in \mathcal{F}.
\end{aligned}$$

(b) Verifiquemos que cada função $\Phi_{(x_j)_{j=1}^m} \in \mathcal{F}$ é convexa. Com o objetivo de aplicar o Teorema da Representação de Riesz, mostraremos primeiramente que a aplicação

$$\varphi \in K \longrightarrow |\varphi(x)|^p \in \mathbb{R}$$

pertence a $C_0(K)$, para todo ponto x em E. Para isso lembre da imersão isométrica linear entre E e E'' definida por

$$\begin{aligned}
J_E \colon E &\longrightarrow E'' \\
x &\longmapsto J_E(x) \colon E' \longrightarrow \mathbb{K} \\
&\qquad\; J_E(x)(\varphi) = \varphi(x)
\end{aligned}$$

e que E' está munido com a topologia fraca estrela. Desse modo, seja $(\varphi_\lambda)_\lambda$ uma rede convergindo na topologia fraca estrela para φ em K. Então

$$|\varphi_\lambda(x)|^p = |J_E(x)(\varphi_\lambda)|^p \longrightarrow |J_E(x)(\varphi)|^p = |\varphi(x)|^p,$$

e portanto a aplicação $\varphi \in K \longrightarrow |\varphi(x)|^p$ é contínua. Sejam $\varepsilon > 0$ arbitrário e $x \in E$. Da continuidade que acabamos de provar segue que o conjunto

$$\{\varphi \in K : |\varphi(x)|^p \geq \varepsilon\}$$

é fechado em K. Mas como K é fechado em $B_{E'}$ que por sua vez é compacta, segue que K é compacto na topologia fraca estrela e, consequentemente, $\{\varphi \in K : |\varphi(x)|^p \geq \varepsilon\}$ é compacto em K. Portanto a aplicação $\varphi \in K \longrightarrow |\varphi(x)|^p$ está em $C_0(K)$, para todo ponto x em E.

Por fim, mostremos a convexidade de $\Phi_{(x_j)_{j=1}^m}$. Para isso sejam $\mu_1, \mu_2 \in W(K)$ e $\lambda \in (0,1)$. Assim,

$$\begin{aligned}
&\Phi_{(x_j)_{j=1}^m}(\lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2) \\
&\quad = \sum_{j=1}^m \left[\|T(x_j)\|^p - D^p \int_K |\varphi(x_j)|^p d(\lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2)(\varphi)\right] \\
&\quad = \sum_{j=1}^m \left[\|T(x_j)\|^p - D^p \left(\lambda \int_K |\varphi(x_j)|^p d\mu_1(\varphi) + (1-\lambda)\int_K |\varphi(x_j)|^p d\mu_2(\varphi)\right)\right] \\
&\quad = \lambda \sum_{j=1}^m \left[\|T(x_j)\|^p - D^p \int_K |\varphi(x_j)|^p d\mu_1(\varphi)\right] + \\
&\qquad (1-\lambda)\sum_{j=1}^m \left[\|T(x_j)\|^p - D^p \int_K |\varphi(x_j)|^p d\mu_2(\varphi)\right] \\
&\quad = \lambda\Phi_{(x_j)_{j=1}^m}(\mu_1) + (1-\lambda)\Phi_{(x_j)_{j=1}^m}(\mu_2).
\end{aligned}$$

Observe que a segunda igualdade é uma aplicação do Teorema da Representação de Riesz.

(c) Agora vamos mostrar que cada função $\Phi_{(x_j)_{j=1}^m} \in \mathcal{F}$ é contínua e, consequentemente, semicontínua inferiormente. Para isso seja $(\mu_\lambda)_\lambda$ uma rede convergindo para μ em $W(K) \subseteq M(K)$. No item (b) vimos que a aplicação

$$\varphi \in K \longrightarrow |\varphi(x)|^p \in \mathbb{R},$$

onde $x \in E$, pertence a $C_0(K)$. Aplicando o Teorema da Representação de Riesz, segue que

$$\int_K |\varphi(x)|^p d\mu_\lambda(\varphi) \longrightarrow \int_K |\varphi(x)|^p d\mu(\varphi),$$

para todo ponto x em E. Logo,

$$\sum_{j=1}^m \left[\|T(x_j)\|^p - D^p \int_K |\varphi(x_j)|^p d\mu_\lambda(\varphi)\right] \longrightarrow \sum_{j=1}^m \left[\|T(x_j)\|^p - D^p \int_K |\varphi(x_j)|^p d\mu(\varphi)\right]$$

e, por isso, $\Phi_{(x_j)_{j=1}^m}$ é contínua.

(d) Como K é normante, pela Observação 2.2.6, vimos que

$$\|(x_j)_{j=1}^m\|_{w,p} = \sup_{\varphi\in K}\left(\sum_{j=1}^m |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Agora, a função $f\colon K \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(\varphi) = \left(\sum_{j=1}^m |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ é contínua na topologia fraca estrela de K, assim f assume máximo em $\mathbb{R}$, isto é, existe $\varphi_0 \in K$ tal que

$$\left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,p} = \left(\sum_{j=1}^m |\varphi_0(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left\|(\varphi_0(x_j))_{j=1}^m\right\|_p.$$

Se δ_{φ_0} denota a medida de Dirac em φ_0, temos

$$\begin{aligned}
\Phi_{(x_j)_{j=1}^m}(\delta_{\varphi_0}) &= \sum_{j=1}^m \left[\|T(x_j)\|^p - D^p\int_K |\varphi(x_j)|^p d\delta_{\varphi_0}(\varphi)\right] \\
&= \sum_{j=1}^m \left[\|T(x_j)\|^p - D^p\left(\int_{K\setminus\{\varphi_0\}} |\varphi(x_j)|^p d\delta_{\varphi_0}(\varphi) + \int_{\{\varphi_0\}} |\varphi(x_j)|^p d\delta_{\varphi_0}(\varphi)\right)\right] \\
&= \sum_{j=1}^m [\|T(x_j)\|^p - D^p|\varphi_0(x_j)|^p] \\
&= \left\|(T(x_j))_{j=1}^m\right\|_p^p - D^p\sum_{j=1}^m |\varphi_0(x_j)|^p \\
&= \left\|(T(x_j))_{j=1}^m\right\|_p^p - D^p\left\|(\varphi_0(x_j))_{j=1}^m\right\|_p^p \\
&= \left\|(T(x_j))_{j=1}^m\right\|_p^p - D^p\left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,p}^p.
\end{aligned}$$

Como T é absolutamente p-somante, pelo Teorema 3.1.6 temos que

$$\left\|(T(x_j))_{j=1}^m\right\|_p^p \leq D^p\left\|(x_j)_{j=1}^m\right\|_{w,p}^p,$$

o que implica $\Phi_{(x_j)_{j=1}^m}(\delta_{\varphi_0}) \leq 0$.

Pelo Lema de Ky Fan, existe uma medida $\mu_0 \in W(K)$ tal que $\Phi_{(x_j)_{j=1}^m}(\mu_0) \leq 0$ para todo $\Phi \in \mathcal{F}$. Em particular, tomando $m = 1$ e $x_1 = x \in E$, segue que

$$\|T(x)\|^p - D^p\int_K |\varphi(x)|^p d\mu_0(\varphi) = \Phi_{(x)}(\mu_0) \leq 0$$

para todo ponto x em E. Consequentemente,

$$\|T(x)\| \leq D\left[\int_K |\varphi(x)|^p d\mu_0(\varphi)\right]^{\frac{1}{p}}, \tag{3.8}$$

para todo ponto x em E. Além disso, das desigualdades (3.7) e (3.8) segue que $\|T\|_{as,p}$ é a menor das constantes que satisfazem a desigualdade (3.6). ■

3.2 Resultados de inclusão

Nesta seção veremos alguns resultados de inclusão para os operadores $(p, m(s;q))$-somantes. As duas inclusões a seguir, como veremos, podem ser facilmente verificadas.

Se $0 < p_1 \leq p_2$, então $\mathcal{L}_{(p_1,m(s;q))}(E;F) \subset \mathcal{L}_{(p_2,m(s;q))}(E;F)$. Isto decorre facilmente do fato que $\ell_{p_1}(F) \subset \ell_{p_2}(F)$.

Se $0 < q \leq s_1 \leq s_2 \leq +\infty$, então $\mathcal{L}_{(p,m(s_1;q))}(E;F) \subset \mathcal{L}_{(p,m(s_2;q))}(E;F)$. Isto decorre facilmente do fato que $\ell_{m(s_2;q)}(E) \subset \ell_{m(s_1;q)}(E)$.

Teorema 3.2.1 *Se* $0 < p_1 \leq p_2$, $0 < q_1 \leq q_2$, $q_1 \leq s_1$, $q_2 \leq s_2$, $s_1 \leq s_2$, $q_j \leq p_j$, $j = 1, 2$ *e*

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} \leq \frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2} \leq \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}, \tag{3.9}$$

então

$$\mathcal{L}_{(p_1,m(s_1;q_1))}(E;F) \subset \mathcal{L}_{(p_2,m(s_2;q_2))}(E;F)$$

e além disso,

$$\|T\|_{(p_2,m(s_2;q_2))} \leq \|T\|_{(p_1,m(s_1;q_1))},$$

para todo $T \in \mathcal{L}_{(p_1,m(s_1;q_1))}(E;F)$.

Demonstração: Se definirmos

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} \leq \frac{1}{q_1} \quad \text{e} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}$$

temos que $s_2(q)' \leq s_1(q)'$, pois

$$\frac{1}{s_2(q)'} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{q} = \frac{1}{s_1(q)'} + \frac{1}{s_1} \geq \frac{1}{s_1(q)'} + \frac{1}{s_2} \Rightarrow \frac{1}{s_2(q)'} \geq \frac{1}{s_1(q)'} \Rightarrow s_2(q)' \leq s_1(q)'$$

e por hipótese $p \leq s$. Sejam $S \in \mathcal{L}_{(p_1,m(s_1;q_1))}(E;F)$, $m \in \mathbb{N}$ e $x_j = \lambda_j x_j^0$, $j = 1, \ldots, m$. Temos

$$\begin{aligned} \|(\alpha_j S(x_j))_{j=1}^m\|_{p_1} &= \|(S(\alpha_j x_j))_{j=1}^m\|_{p_1} \\ &\leq \|S\|_{(p_1,m(s_1;q_1))} \|(\alpha_j x_j)_{j=1}^m\|_{m(s_1;q_1)} \\ &\leq \|S\|_{(p_1,m(s_1;q_1))} \|(\lambda_j)_{j=1}^m\|_{s_1(q_1)'} \|\|(\alpha_j x_j^0)_{j=1}^m\|_{w,s_1} \end{aligned} \tag{3.10}$$

para qualquer escolha de $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$. Observe que $\frac{s}{s_1}$ e $\frac{s_2}{s_1}$ são conjugados, pois

$$\frac{1}{\frac{s}{s_1}} + \frac{1}{\frac{s_2}{s_1}} = \frac{s_1}{s} + \frac{s_1}{s_2} = \frac{s_1}{s_1} - \frac{s_1}{s_2} + \frac{s_1}{s_2} = 1.$$

Pela Desigualdade de Hölder para sequências, temos que

$$\begin{aligned}
\left\|(\alpha_j x_j^0)_{j=1}^m\right\|_{w,s_1} &= \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{j=1}^m |\varphi(\alpha_j x_j^0)|^{s_1}\right)^{\frac{1}{s_1}} \\
&= \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{j=1}^m |\alpha_j|^{s_1}|\varphi(x_j^0)|^{s_1}\right)^{\frac{1}{s_1}} \\
&\leq \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left[\left(\sum_{j=1}^m |\alpha_j|^{s}\right)^{\frac{s_1}{s}}\left(\sum_{j=1}^m |\varphi(x_j^0)|^{s_2}\right)^{\frac{s_1}{s_2}}\right]^{\frac{1}{s_1}} \\
&= \left(\sum_{j=1}^m |\alpha_j|^{s}\right)^{\frac{1}{s}}\sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{j=1}^m |\varphi(x_j^0)|^{s_2}\right)^{\frac{1}{s_2}} \\
&= \|(\alpha_j)_{j=1}^m\|_s\|(x_j^0)_{j=1}^m\|_{w,s_2}.
\end{aligned}$$

Voltando em (3.10) concluímos que

$$\|(\alpha_j S(x_j))_{j=1}^m\|_{p_1} \leq \|S\|_{(p_1,m(s_1;q_1))}\|(\lambda_j)_{j=1}^m\|_{s_1(q_1)'}\|(\alpha_j)_{j=1}^m\|_s\|(x_j^0)_{j=1}^m\|_{w,s_2}.$$

Agora vamos mostrar que $s_2(q_2)' \leq s_1(q_1)'$. Como

$$\frac{1}{s_1(q_1)'} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{s_1} \text{ e } \frac{1}{s_2(q_2)'} = \frac{1}{q_2} - \frac{1}{s_2}$$

segue que

$$\frac{1}{s_2(q_2)'} - \frac{1}{s_1(q_1)'} = \left(\frac{1}{q_2} - \frac{1}{q_1}\right) + \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2}\right) = -\left(\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}\right) + \left(\frac{1}{s_1} - \frac{1}{s_2}\right) \geq 0.$$

A desigualdade acima segue por hipótese. Logo, $s_2(q_2)' \leq s_1(q_1)'$. Como $p \leq s$ resulta

$$\|(\alpha_j S(x_j))_{j=1}^m\|_{p_1} \leq \|S\|_{(p_1,m(s_1;q_1))}\|(\lambda_j)_{j=1}^m\|_{s_2(q_2)'}\|(\alpha_j)_{j=1}^m\|_p\|(x_j^0)_{j=1}^m\|_{w,s_2}, \tag{3.11}$$

para qualquer escolha de $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$. Em particular, para $\alpha_j = \|S(x_j)\|^{\frac{p_2}{p}}$ temos

$$\begin{aligned}
\|\alpha_j S(x_j)\|^{p_1} &= \|\|S(x_j)\|^{\frac{p_2}{p}}S(x_j)\|^{p_1} \\
&= \|S(x_j)\|^{\frac{p_2 p_1}{p}}\|S(x_j)\|^{p_1} \\
&= \|S(x_j)\|^{\frac{p_2 p_1}{p}+p_1} = \|S(x_j)\|^{p_2}.
\end{aligned}$$

Assim, de (3.11) temos

$$\begin{aligned}\left(\sum_{j=1}^{m}\|S(x_j)\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_1}} &= \left(\sum_{j=1}^{m}\|\alpha_j S(x_j)\|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}} = \|(\alpha_j S(x_j))_{j=1}^m\|_{p_1} \\ &\leq \|S\|_{(p_1,m(s_1;q_1))}\|(\lambda_j)_{j=1}^m\|_{s_2(q_2)'}\|(\alpha_j)_{j=1}^m\|_p\|(x_j^0)_{j=1}^m\|_{w,s_2} \\ &= \|S\|_{(p_1,m(s_1;q_1))}\|(\lambda_j)_{j=1}^m\|_{s_2(q_2)'}\left(\sum_{j=1}^{m}|\alpha_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\|(x_j^0)_{j=1}^m\|_{w,s_2} \\ &= \|S\|_{(p_1,m(s_1;q_1))}\|(\lambda_j)_{j=1}^m\|_{s_2(q_2)'}\left(\sum_{j=1}^{m}\|S(x_j)\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p}}\|(x_j^0)_{j=1}^m\|_{w,s_2}.\end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados da desigualdade acima por $\left(\sum_{j=1}^{m}\|S(x_j)\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p}}$ obtemos

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\|S(x_j)\|^{p_2}\right)^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}} \leq \|S\|_{(p_1,m(s_1;q_1))}\|(\lambda_j)_{j=1}^m\|_{s_2(q_2)'}\|(x_j^0)_{j=1}^m\|_{w,s_2}.$$

Como $\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p}=\frac{1}{p_2}$ segue que

$$\|(S(x_j))_{j=1}^m\|_{p_2} \leq \|S\|_{(p_1,m(s_1;q_1))}\|(\lambda_j)_{j=1}^m\|_{s_2(q_2)'}\|(x_j^0)_{j=1}^m\|_{w,s_2}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\|(S(x_j))_{j=1}^m\|_{p_2} &\leq \|S\|_{(p_1,m(s_1;q_1))}\inf\|(\lambda_j)_{j=1}^m\|_{s_2(q_2)'}\|(x_j^0)_{j=1}^m\|_{w,s_2} \\ &= \|S\|_{(p_1,m(s_1;q_1))}\|(x_j)_{j=1}^m\|_{m(s_2;q_2)}.\end{aligned}$$

Portanto, $S \in \mathcal{L}_{(p_2,m(s_2;q_2))}(E;F)$ e além disso, $\|S\|_{(p_2,m(s_2;q_2))} \leq \|S\|_{(p_1,m(s_1;q_1))}$ para todo $S \in \mathcal{L}_{(p_1,m(s_1;q_1))}(E;F)$. ■

Corolário 3.2.2 *Se* $0 < p_1 \leq p_2,\ 0 < q_1 \leq q_2,\ q_j \leq p_j,\ j = 1,2$ *e*

$$\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2} \leq \frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2},$$

então

$$\mathcal{L}^{as}_{(p_1,q_1)}(E;F) \subset \mathcal{L}^{as}_{(p_2,q_2)}(E;F)$$

e

$$\|T\|_{as,(p_2,q_2)} \leq \|T\|_{as,(p_1,q_1)}$$

para todo $T \in \mathcal{L}^{as}_{(p_1,q_1)}(E;F)$.

Demonstração: Faça $s_j = q_j$ para $j = 1, 2$ no Teorema 3.2.1. ■

Teorema 3.2.3 *Se* $0 < p \leq s$, *então* $\mathcal{L}_{(p,m(s;p))}(E;F) \subset \mathcal{L}_s^{as}(E;F)$ *e* $\|S\|_{as,s} \leq \|S\|_{(p,m(s;p))}$ *para todo* $S \in \mathcal{L}_{(p,m(s;p))}(E;F)$.

Demonstração: Sejam $S \in \mathcal{L}_{(p,m(s;p))}(E;F)$, $m \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_m \in E$. Temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{m} |\alpha_j| \|S(x_j)\|^p &= \sum_{j=1}^{m} \|S(|\alpha_j|^{\frac{1}{p}} x_j)\|^p \\ &\leq \|S\|^p_{(p,m(s;p))} \|(|\alpha_j|^{\frac{1}{p}} x_j)_{j=1}^m\|^p_{m(s;p)} \\ &\leq \|S\|^p_{(p,m(s;p))} \|(|\alpha_j|^{\frac{1}{p}})_{j=1}^m\|^p_{s(p)'} \|(x_j)_{j=1}^m\|^p_{w,p} \\ &= \|S\|^p_{(p,m(s;p))} \|(\alpha_j)_{j=1}^m\|_{\frac{s(p)'}{p}} \|(x_j)_{j=1}^m\|^p_{w,p}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

para todo $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{K}$. Então para $\alpha_j = \|S(x_j)\|^{\frac{p \cdot s}{s(p)'}}$ com $j = 1, \ldots, m$, obtemos

$$\begin{aligned} |\alpha_j| \|S(x_j)\|^p &= \|S(x_j)\|^{\frac{p \cdot s}{s(p)'}} \|S(x_j)\|^p \\ &= \|S(x_j)\|^{\frac{p \cdot s}{s(p)'} + p} \\ &= \|S(x_j)\|^s. \end{aligned}$$

Voltando em (3.12) temos

$$\sum_{j=1}^{m} \|S(x_j)\|^s \leq \|S\|^p_{(p,m(s;p))} \left(\sum_{j=1}^{m} \|S(x_j)\|^s \right)^{\frac{p}{s(p)'}} \|(x_j)_{j=1}^m\|^p_{w,p}.$$

Dividindo ambos os lados da desigualdade acima por $\left(\sum_{j=1}^{m} \|S(x_j)\|^s \right)^{\frac{p}{s(p)'}}$ resulta

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \|S(x_j)\|^s \right)^{1 - \frac{p}{s(p)'}} \leq \|S\|^p_{(p,m(s;p))} \|(x_j)_{j=1}^m\|^p_{w,p}.$$

Como $1 - \frac{p}{s(p)'} = \frac{p}{s}$ segue que

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \|S(x_j)\|^s \right)^{\frac{p}{s}} \leq \|S\|^p_{(p,m(s;p))} \|(x_j)_{j=1}^m\|^p_{w,p}.$$

Consequentemente

$$\|(S(x_j))_{j=1}^m\|_s \leq \|S\|_{(p,m(s;p))} \|(x_j)_{j=1}^m\|_{w,p}.$$

Portanto, S é absolutamente s-somante, isto é, $S \in \mathcal{L}_s^{as}(E;F)$ e

$$\|S\|_{as,s} \leq \|S\|_{(p,m(s;p))}$$

para todo $S \in \mathcal{L}_{(p,m(s;p))}(E;F)$. ■

3.3 Teorema da Fatoração de Pietsch

Nesta seção veremos um resultado interessante obtido a partir do Teorema da Dominação de Grothendieck-Pietsch, o qual é conhecido como o Teorema da Fatoração de Pietsch, que nos diz que podemos fatorar um operador p-somante através de um espaço de funções contínuas e de um espaço $L_p(K,\mu)$ onde μ é uma medida regular de probabilidade. Antes precisamos de alguns resultados preparatórios para o teorema da fatoração.

Proposição 3.3.1 *Sejam K um espaço de Hausdorff compacto, $\mu \in W(K)$ e $1 \leq p < +\infty$. Então o operador inclusão*

$$J_p\colon C(K) \longrightarrow L_p(K,\mu),\ J_p(f) := f$$

é absolutamente p-somante e $\|J_p\|_{as,p} = 1$.

Demonstração: É claro que a aplicação J_p está bem definida e é linear. Vamos verificar que J_p é absolutamente p-somante. Para cada $w \in K$ definimos a aplicação $\delta_w\colon C(K) \longrightarrow \mathbb{K}$ tal que $\delta_w(f) = f(w)$ para todo $f \in C(K)$. Então δ_w está bem definida e é claramente linear. Por outro lado, como $w \in K$, temos

$$|\delta_w(f)| = |f(w)| \leq \sup_{u\in K} |f(u)| = \|f\|_\infty,$$

o que implica na continuidade de δ_w e também $\|\delta_w\| \leq 1$. Portanto, $\delta_w \in B_{(C(K))'}$ para todo $w \in K$. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e $f_1, \ldots, f_m \in C(K)$,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^m \|J_p(f_i)\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^m \int_K |f_i(w)|^p d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\int_K \sum_{i=1}^m |f_i(w)|^p d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{w\in K} \left(\sum_{i=1}^m |f_i(w)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_K d\mu(w)\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \sup_{w\in K} \left(\sum_{i=1}^m |\delta_w(f_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \mu(K)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \sup_{\varphi\in B_{(C(K))'}} \left(\sum_{i=1}^m |\varphi(f_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|(f_i)_{i=1}^m\|_{w,p}.
\end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 3.1.6 concluímos que o operador J_p é absolutamente p-somante e $\|J_p\|_{as,p} \leq 1$. Por outro lado,

$$1 = (\mu(K))^{\frac{1}{p}} = \left(\int_K d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \|J_p(1)\|_p \leq \sup_{\|f\|_\infty\leq 1} \|J_p(f)\|_p = \|J_p\| \leq \|J_p\|_{as,p}.$$

Logo, $\|J_p\|_{as,p} = 1$. ■

Agora, veremos uma proposição que nos fornecerá uma imersão isométrica que, assim como o operador da proposição anterior, aparecerá explicitamente no Teorema da Fatoração de Pietsch.

Proposição 3.3.2 *Sejam E espaço de Banach e E' munido com a topologia fraca estrela. Então o operador linear*

$$i_E \colon E \longrightarrow C(B_{E'}),\ i_E(x)(\varphi) := \varphi(x)$$

é uma imersão isométrica.

Demonstração: Vejamos que i_E está bem definido, isto é, $i_E(x) \in C(B_{E'})$ para todo $x \in E$. Da definição da topologia fraca estrela sabe-se que os funcionais

$$J_E(x) \colon E' \longrightarrow \mathbb{K},\ J_E(x)(\varphi) = \varphi(x),$$

são contínuos nesta topologia para todo ponto x em E. Segue assim que a função $i_E(x) \colon B_{E'} \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínua, uma vez que coincide com a restrição do funcional $J_E(x)$ ao conjunto $B_{E'}$ e E' está munido com a topologia fraca estrela. O operador i_E está então bem definido e é claramente linear. A aplicação i_E é uma imersão isométrica, pois

$$\|i_E(x)\| = \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)| = \|x\|$$

para todo ponto x em E. ■

Agora vamos estabelecer algumas notações. Seja $K \subset B_{F'}$ um subconjunto normante em F. Definimos $\ell_\infty(K) = \left\{ f \colon K \longrightarrow \mathbb{K} : \sup\limits_{x \in K} |f(x)| < +\infty \right\}$ o qual é normado por $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in K} |f(x)|$ e completo. Denotamos um elemento $f \in \ell_\infty(K)$ por $f = (f_\varphi)_{\varphi \in K}$. Podemos considerar a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rcl} i_F \colon F & \longrightarrow & \ell_\infty(K) \\ x & \longmapsto & i_F(x) = (\varphi(x))_{\varphi \in K} \end{array}$$

para todo $x \in F$. A aplicação i_F é uma isometria, pois

$$\|i_F(x)\| = \sup_{\varphi \in K} |\varphi(x)| = \|x\|,$$

para todo $x \in F$.

Definição 3.3.3 Um espaço de Banach G é *injetivo* ou tem a *propriedade da extensão métrica* se, para todo subespaço F_0 de um espaço de Banach F e todo $S \in \mathcal{L}(F_0; G)$ é possível encontrar uma extensão linear $T \in \mathcal{L}(F; G)$ de S tal que $\|T\| = \|S\|$.

Proposição 3.3.4 *Se $K \subset B_{F'}$ é um subconjunto normante em F, então $\ell_\infty(K)$ tem a propriedade da extensão métrica.*

Demonstração: Sejam E um espaço de Banach, E_0 um subespaço de E e $S \in \mathcal{L}(E_0; \ell_\infty(K))$. Defina

$$\begin{aligned} \pi_\varphi \colon \ell_\infty(K) &\longrightarrow \mathbb{K} \\ f &\longmapsto f(\varphi) \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in K$. É claro que π_φ é linear e é contínua pois

$$|\pi_\varphi(f)| = |f(\varphi)| \leq \sup_{\varphi \in K} |f(\varphi)| = \|f\|_\infty.$$

Então $\pi_\varphi \circ S \colon E_0 \longrightarrow \mathbb{K}$ é linear e contínua como composta de aplicações lineares e contínuas, e pelo Teorema de Hahn-Banach, existe $\widetilde{\pi_\varphi \circ S} \colon E \longrightarrow \mathbb{K}$ linear e contínua tal que $\widetilde{\pi_\varphi \circ S}\ |_{E_0} = \pi_\varphi \circ S$ e $\|\widetilde{\pi_\varphi \circ S}\| = \|\pi_\varphi \circ S\|$. Consideremos, $\widetilde{S} \colon E \longrightarrow \ell_\infty(K)$ onde $\widetilde{S}(x) = (\widetilde{\pi_\varphi \circ S}(x))_{\varphi \in K}$, então se $x \in E_0$, $\widetilde{S}(x) = (\pi_\varphi \circ S(x))_{\varphi \in K} = S(x)$. Além disso,

$$\begin{aligned} \|\widetilde{S}\| &= \sup_{x \in B_E} \|\widetilde{S}(x)\| = \sup_{x \in B_E} \sup_{\varphi \in K} |\widetilde{\pi_\varphi \circ S}(x)| = \sup_{\varphi \in K} \sup_{x \in B_E} |\widetilde{\pi_\varphi \circ S}(x)| \\ &= \sup_{\varphi \in K} \|\widetilde{\pi_\varphi \circ S}\| = \sup_{\varphi \in K} \|\pi_\varphi \circ S\| = \sup_{\varphi \in K} \sup_{x \in B_E} |\pi_\varphi \circ S(x)| \\ &= \sup_{x \in B_E} \sup_{\varphi \in K} |\pi_\varphi \circ S(x)| = \sup_{x \in B_E} \|S(x)\| = \|S\|. \end{aligned}$$

Portanto $\ell_\infty(K)$ tem a propriedade da extensão métrica. ■

Teorema 3.3.5 (Teorema da Fatoração de Pietsch) *Se $1 \leq p < +\infty$ e $T \colon E \longrightarrow F$ é um operador linear, então as seguintes condições são equivalentes:*

(1) T é absolutamente p-somante;

(2) Existem um espaço de Hausdorff compacto K, uma medida $\mu \in W(K)$ e aplicações lineares $A \in \mathcal{L}(E; C(K))$, $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(L_p(K, \mu); \ell_\infty(B_{F'}))$ tais que $i_F \circ T = \widetilde{T} \circ J_p \circ A$. Neste caso,

$$\|T\|_{as,p} = \inf \|\widetilde{T}\| \|A\|,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as fatorações.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "T"] \arrow[d, "A"'] & F \arrow[r, "i_F"] & \ell_\infty(B_{F'}) \\ C(K) \arrow[rr, "J_p"'] & & L_p(K,\mu) \arrow[u, "\tilde{T}"'] \end{tikzcd}$$

Demonstração: (1)$\Rightarrow$(2) Como T é absolutamente p-somante, então pelo Teorema da Dominação de Grothendieck-Pietsch, existe $\mu \in W(B_{E'})$ tal que

$$\|T(x)\| \leq \|T\|_{as,p} \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x)|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}} \tag{3.13}$$

para todo $x \in E$. Consideremos a aplicação $A = i_E$. Pela Proposição 3.3.2 A está bem definida é linear e além disso é uma isometria. Daí segue que $A \in \mathcal{L}(E; C(K))$ onde $K = B_{E'}$ é compacto na topologia fraca estrela de E'. Temos que $J_p \circ A(E)$ é subespaço vetorial de $L_p(B_{E'}, \mu)$. Seja agora,

$$\begin{array}{rccl} S\colon & J_p \circ A(E) & \longrightarrow & F \\ & J_p \circ A(x) & \longmapsto & S(J_p \circ A(x)) = T(x) \end{array}$$

para todo $x \in E$. É claro que S é linear, pois $(J_p \circ A)$ e T são lineares. Além disso, para todo $x \in E$ temos

$$\|S(J_p \circ A(x))\| = \|T(x)\| \leq \|T\|_{as,p} \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x)|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.14}$$

Observe que a última desigualdade resulta de (3.13). Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|J_p \circ A(x)\| &= \left(\int_{B_{E'}} |(J_p \circ A(x))(\varphi)|^p \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{B_{E'}} |A(x)(\varphi)|^p \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{B_{E'}} |\varphi(x)|^p \, d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Logo, voltando em (3.14) temos que

$$\|S(J_p \circ A(x))\| \leq \|T\|_{as,p} \|J_p \circ A(x)\|$$

e portanto S é contínua com $\|S\| \leq \|T\|_{as,p}$. Assim, $i_F \circ S$ é uma aplicação linear e contínua de $J_p \circ A(E)$ em $\ell_\infty(B_{F'})$. Como $\ell_\infty(B_{F'})$ tem a propriedade da extensão métrica, existe uma extensão linear $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(L_p(B_{E'}, \mu); \ell_\infty(B_{F'}))$ de $i_F \circ S$. Além disso,

$$\|\widetilde{T}\| = \|i_F \circ S\| = \|S\| \leq \|T\|_{as,p}$$

e $i_F \circ T = \widetilde{T} \circ J_p \circ A$.

Agora como $\|T\|_{as,p} = \|i_F \circ T\|_{as,p}$ pois $\|(T(x_j))_{j=1}^m\|_p = \|(i_F \circ T(x_j))_{j=1}^m\|_p$, segue que

$$\|T\|_{as,p} = \|\widetilde{T} \circ J_p \circ A\|_{as,p} \leq \|\widetilde{T}\| \|J_p\|_{as,p} \|A\| = \|\widetilde{T}\|.$$

Portanto, $\|\widetilde{T}\| = \|T\|_{as,p}$ e daí, $\|T\|_{as,p} \geq \inf \|\widetilde{T}\|\|A\|$, onde o ínfimo é tomado sobre todas as fatorações possíveis.

(2)⇒(1) Por hipótese temos que existem um espaço de Hausdorff compacto K, uma medida $\mu \in W(K)$ e aplicações lineares $A \in \mathcal{L}(E; C(K))$ e $\tilde{T} \in \mathcal{L}(L_p(K,\mu); \ell_\infty(B_{F'}))$ tais que $i_F \circ T = \widetilde{T} \circ J_p \circ A$. Vimos, pela Proposição 3.3.1, que J_p é absolutamente p-somante e portanto, $i_F \circ T = \widetilde{T} \circ J_p \circ A$ é um operador absolutamente p-somante de E em $\ell_\infty(B_{F'})$. Pelo Teorema da Dominação de Grothendieck-Pietsch, existem uma constante $C \geq 0$ e $\mu \in W(K)$ tais que

$$\|i_F \circ T(x)\| \leq C \left(\int_K |\varphi(x)|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}},$$

para todo $x \in E$. Mas $\|i_F \circ T(x)\| = \|T(x)\|$ e daí,

$$\|T(x)\| \leq C \left(\int_K |\varphi(x)|^p d\mu(\varphi) \right)^{\frac{1}{p}},$$

para todo $x \in E$. Novamente pelo Teorema da Dominação de Grothendieck-Pietsch temos que T é absolutamente p-somante. Além disso,

$$\|T\|_{as,p} = \|i_F \circ T\|_{as,p} = \|\widetilde{T} \circ J_p \circ A\|_{as,p} \leq \|\widetilde{T}\|\|J_p\|_{as,p}\|A\| = \|\widetilde{T}\|\|A\|.$$

Consequentemente, como a fatoração foi tomada arbitrariamente, temos que

$$\|T\|_{as,p} \leq \inf \|\widetilde{T}\|\|A\|.$$

■

3.4 Teoremas do tipo Dvoretzky-Rogers

Nesta seção iremos demonstrar a versão do Teorema de Dvoretzky-Rogers para sequências misto somáveis para tanto utilizaremos o Teorema de Dvoretzky-Rogers para sequências incondicionalmente p-somáveis. Antes precisamos de alguns resultados preliminares.

Definição 3.4.1 Um operador linear $T\colon E \longrightarrow F$ é *completamente contínuo* se para toda $(x_j)_{j=1}^\infty$ fracamente convergente para 0 em E, $(T(x_j))_{j=1}^\infty$ converge na norma para 0 em F.

É claro que um operador linear $T\colon E \longrightarrow F$ é completamente contínuo se, e somente se, para toda $(x_j)_{j=1}^\infty$ fracamente convergente para $x \in E$, $(T(x_j))_{j=1}^\infty$ converge na norma para $T(x)$ em F. De fato,

$$x_j \xrightarrow{w} x \Leftrightarrow x_j - x \xrightarrow{w} 0 \Leftrightarrow T(x_j - x) \longrightarrow 0 \Leftrightarrow T(x_j) - T(x) \longrightarrow 0 \Leftrightarrow T(x_j) \longrightarrow T(x).$$

Denotamos por $\mathcal{L}_{cc}(E; F)$ o espaço vetorial de todos os operadores lineares completamente contínuos de E em F, o qual é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(E; F)$. É claro que $\mathcal{L}_{cc}(E; F)$ é um subespaço de $\mathcal{L}(E; F)$. Mostremos que $\mathcal{L}_{cc}(E; F)$ é fechado. Para isso seja $(T_k)_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}_{cc}(E;F)$ tal que $T_k \longrightarrow T \in \mathcal{L}(E;F)$. Sejam $\varepsilon > 0$ e $(x_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq E$ tal que $x_j \xrightarrow{w} 0$. Como consequência do Teorema de Banach-Steinhauss segue que $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ é limitada em E, isto é, existe uma constante $M > 0$ tal que $\|x_j\| \leq M$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Como $T_k \longrightarrow T$, então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \geq k_0$, temos que $\|T_k - T\| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Já que $T_{k_0} \in \mathcal{L}_{cc}(E;F)$ temos $T_{k_0}(x_j) \xrightarrow{j\to\infty} 0$ em F, logo existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \geq j_0$, implica que $\|T_{k_0}(x_j)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim, para todo $j \geq j_0$

$$\begin{aligned}
\left\|T\left(\frac{x_j}{\|x_j\|}\right)\right\| &= \frac{1}{\|x_j\|}\|T(x_j) - T_{k_0}(x_j) + T_{k_0}(x_j)\| \\
&\leq \left\|T\left(\frac{x_j}{\|x_j\|}\right) - T_{k_0}\left(\frac{x_j}{\|x_j\|}\right)\right\| + \frac{1}{\|x_j\|}\|T_{k_0}(x_j)\| \\
&\leq \|T - T_{k_0}\| + \frac{1}{\|x_j\|}\|T_{k_0}(x_j)\| \\
&< \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{1}{\|x_j\|}\frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\frac{1}{\|x_j\|}\|T(x_j)\| < \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{1}{\|x_j\|}\frac{\varepsilon}{2}$$

para todo $j \geq j_0$. Portanto,

$$\|T(x_j)\| < \frac{\varepsilon\|x_j\|}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2M}M + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para todo $j \geq j_0$, isto é, $T(x_j) \longrightarrow 0$ em F. Acabamos de mostrar que $T \in \mathcal{L}_{cc}(E;F)$ logo, $\mathcal{L}_{cc}(E;F)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(E;F)$. Consequentemente, é um espaço de Banach com a norma usual de $\mathcal{L}(E;F)$.

A seguir, mostraremos que o espaço dos operadores completamente contínuos tem a propriedade de ideal para operadores.

Proposição 3.4.2 (Propriedade de ideal) *Sejam $S \in \mathcal{L}(D;E)$, $T \in \mathcal{L}_{cc}(E;F)$ e $R \in \mathcal{L}(F;G)$. Então $R \circ T \circ S \in \mathcal{L}_{cc}(D;G)$.*

Demonstração: Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq D$ tal que $x_j \xrightarrow{w} x$. Como S é contínuo segue do Teorema 1.1.23 que $S(x_j) \xrightarrow{w} S(x)$. Já que $T \in \mathcal{L}_{cc}(E;F)$ e a sequência $(S(x_j))_{j=1}^{\infty} \subseteq E$ é tal que $S(x_j) \xrightarrow{w} S(x)$ temos que $T(S(x_j)) \longrightarrow T(S(x))$. Agora pela continuidade de R segue que $R(T(S(x_j))) \longrightarrow R(T(S(x)))$. Portanto, $R \circ T \circ S \in \mathcal{L}_{cc}(D;G)$. ■

Definição 3.4.3 Sejam E e F espaços de Banach. Dizemos que um operador linear contínuo $T\colon E \longrightarrow F$ é *compacto* se $\overline{T(B_E)}$ é compacto em F. Denotamos por $\mathcal{L}_c(E;F)$ o conjunto de todos os operadores compactos de E em F.

Usando o fato que um subconjunto K de um espaço métrico é compacto se, e somente se, K é sequencialmente compacto, provaremos o seguinte resultado:

Proposição 3.4.4 *Sejam E e F espaços normados e $T\colon E \longrightarrow F$ um operador linear. Então T é compacto se, e somente se, para toda sequência limitada $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$, a sequência $(T(x_n))_{n=1}^{\infty} \subseteq F$ possui uma subsequência convergente em F.*

Demonstração: Se T é compacto e $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ é limitada então existe uma constante $M > 0$ tal que $\|x_n\| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então $\frac{\|x_n\|}{M} \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e isso implica que a sequência $\left(\frac{x_n}{M}\right)_{n=1}^{\infty} \subseteq B_E$ e portanto $\left(T\left(\frac{x_n}{M}\right)\right)_{n=1}^{\infty} \subseteq T(B_E) \subseteq \overline{T(B_E)}$. Como T é compacto, $\overline{T(B_E)}$ é compacto e então $\left(\frac{T(x_n)}{M}\right)_{n=1}^{\infty} = \left(T\left(\frac{x_n}{M}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ tem subsequência convergente. Logo $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ tem subsequência convergente.

Reciprocamente, considere $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\overline{T(B_E)}$. Para cada n existe $x_n \in B_E$ tal que

$$\|T(x_n) - y_n\| \leq \frac{1}{n}.$$

Por hipótese $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ tem subsequência convergente, digamos $T(x_{n_k}) \longrightarrow y \in F$. Como

$$\|y_{n_k} - y\| \leq \|y_{n_k} - T(x_{n_k})\| + \|T(x_{n_k}) - y\| \leq \frac{1}{n_k} + \|T(x_{n_k}) - y\| \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

segue que $y_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} y$ e isso prova que $\overline{T(B_E)}$ é compacto. ■

Proposição 3.4.5 *$\mathcal{L}_c(E;F)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(E;F)$.*

Demonstração: É claro que o operador identicamente nulo $0\colon E \longrightarrow F$ é compacto. Sejam $T_1, T_2 \in \mathcal{L}_c(E;F)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ uma sequência limitada. Como $T_1 \in \mathcal{L}_c(E;F)$, segue que $(T_1(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente, ou seja, existem um subconjunto infinito $N_1 \subseteq \mathbb{N}$ e $z_1 \in F$ tais que $\lim\limits_{n\in N_1} T_1(x_n) = z_1$. Por sua vez, temos que a sequência $(x_n)_{n\in N_1} \subseteq E$ é limitada, e como $T_2 \in \mathcal{L}_c(E;F)$, a sequência $(T_2(x_n))_{n\in N_1}$ possui uma subsequência convergente, isto é, existem um subconjunto infinito $N_2 \subseteq N_1 \subseteq \mathbb{N}$ e $z_2 \in F$ tais que $\lim\limits_{n\in N_2} T_2(x_n) = z_2$. Concluímos que

$$\lim_{n\in N_2}(T_1 + \lambda T_2)(x_n) = \lim_{n\in N_2} T_1(x_n) + \lambda \lim_{n\in N_2} T_2(x_n) = z_1 + \lambda z_2,$$

ou seja, a sequência $((T_1 + \lambda T_2)(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência $((T_1 + \lambda T_2)(x_n))_{n\in N_2}$ convergente. Portanto $T_1 + \lambda T_2 \in \mathcal{L}_c(E;F)$, isto é, $\mathcal{L}_c(E;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$.

Agora mostremos que $\mathcal{L}_c(E;F)$ é fechado. Para isso seja $(T_m)_{m=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}_c(E;F)$ tal que $T_m \longrightarrow T \in \mathcal{L}(E;F)$. Como T_1 é um operador compacto, dada a sequência limitada $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ temos que $(T_1(y_n))_{n=1}^{\infty} \subseteq F$ possui uma subsequência convergente, digamos $(T_1(y_{1,n}))_{n\in\mathbb{N}}$. Por sua vez, como T_2 é compacto e como a sequência $(y_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, segue que $(T_2(y_{1,n}))_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência $(T_2(y_{2,n}))_{n\in\mathbb{N}}$ que é convergente. Continuando com este raciocínio, podemos obter, para cada número fixo $m \in \mathbb{N}$, uma subsequência $(y_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(y_{m-1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(T_m(y_{m,n}))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. Seja $(z_n) = (y_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}$. Então, para cada número fixo $m \in \mathbb{N}$, $(z_n)_{n\geq m}$ é uma subsequência de

$(y_{m,n})_{n\geq 1}$. Logo $(T_m(z_n))_{n\geq 1}$ é convergente para cada $m \in \mathbb{N}$. Como (y_n) é limitada, existe $c > 0$ tal que $\|y_n\| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Daí, $\|z_n\| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $\varepsilon > 0$. Como $T_m \longrightarrow T$ temos que existe um $p \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_p - T\| < \frac{\varepsilon}{3c}$. Como $(T_p(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, e portanto de Cauchy, existe N tal que para $j,k > N$, $\|T_p(z_j) - T_p(z_k)\| < \frac{\varepsilon}{3}$. Daí, para $j,k > N$,

$$\begin{aligned}\|T(z_j) - T(z_k)\| &= \|T(z_j) - T_p(z_j) + T_p(z_j) - T_p(z_k) + T_p(z_k) - T(z_k)\| \\ &\leq \|T(z_j) - T_p(z_j)\| + \|T_p(z_j) - T_p(z_k)\| + \|T_p(z_k) - T(z_k)\| \\ &< \|T - T_p\|\|z_j\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|T_p - T\|\|z_k\| < \frac{\varepsilon}{3c}\cdot c + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3c}\cdot c = \varepsilon.\end{aligned}$$

Portanto a sequência $(T(z_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F$ é de Cauchy e, consequentemente convergente pois F é completo. Isso prova que T é compacto. ■

O espaço dos operadores compactos também tem a propriedade de ideal como veremos na próxima proposição.

Proposição 3.4.6 (Propriedade de ideal) *Sejam $S \in \mathcal{L}(D;E)$, $T \in \mathcal{L}_c(E;F)$ e $R \in \mathcal{L}(F;G)$. Então $R \circ T \circ S \in \mathcal{L}_c(D;G)$.*

Demonstração: Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq D$ uma sequência limitada. Como S é um operador contínuo, a sequência $(S(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é limitada em E. Sabendo que $T \in \mathcal{L}_c(E;F)$, tem-se que a sequência $(T(S(x_n)))_{n=1}^{\infty}$ possui uma subsequência convergente, isto é, existem $z \in F$ e uma subsequência $(T(S(x_{n_k})))_{k=1}^{\infty}$ tais que $\lim\limits_{k\to\infty} T(S(x_{n_k})) = z$. Daí, como R é um operador contínuo, tem-se $R(T(S(x_{n_k}))) \longrightarrow R(z)$, e portanto a sequência $(R(T(S(x_n))))_{n=1}^{\infty} \subseteq G$ tem uma subsequência convergente, isto é, $R \circ T \circ S \in \mathcal{L}_c(E;F)$. ■

Definição 3.4.7 Sejam E e F espaços de Banach. Um operador linear contínuo $T\colon E \longrightarrow F$ é *fracamente compacto* se $T(B_E)$ é relativamente fracamente compacto em F, isto é, $\overline{T(B_E)}^{w}$ é fracamente compacto em F. Denotamos por $\mathcal{L}_{wc}(E;F)$ o espaço de todos os operadores fracamente compactos de E em F.

O próximo teorema será importante para o estudo dos operadores fracamente compactos.

Teorema 3.4.8 (Eberlein-Šmulian) *Sejam E um espaço de Banach e A um subconjunto de E. Então A é relativamente fracamente compacto se, e somente se, cada sequência em A admite uma subsequência que converge fracamente para algum ponto em E. Em particular, um subconjunto de um espaço de Banach é fracamente compacto se, e somente se, é sequencialmente fracamente compacto.*

Demonstração: Veja [29, Theorem II.C.3]. ■

Portanto T é fracamente compacto se, e somente se, toda sequência $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq T(B_E)$ tem uma subsequência que converge fracamente se, e só se, para toda sequência limitada $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ tem-se que $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ possui uma subsequência que converge fracamente.

O próximo corolário é uma consequência do Teorema de Eberlein-Šmulian. Para demonstrá-lo usaremos a seguinte proposição.

Proposição 3.4.9 *Sejam $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ e $a \in E$ com a seguinte propriedade: dada $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ uma subsequência de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, existe $\left(x_{n_{j_k}}\right)_{k=1}^{\infty}$ uma subsequência de $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$, tal que $x_{n_{j_k}} \longrightarrow a$ em E. Então $x_n \longrightarrow a$.*

Demonstração: Suponha por absurdo que $x_n \nrightarrow a$. Então existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $n \geq k$ tal que $\|x_n - a\| \geq \varepsilon$. Para $k_1 = 1$, existe $n_1 \geq k_1$ tal que $\|x_{n_1} - a\| \geq \varepsilon$. Para $k_2 = n_1 + 1$, existe $n_2 \geq k_2$ tal que $\|x_{n_2} - a\| \geq \varepsilon$. Para $k_3 = n_2 + 1$, existe $n_3 \geq k_3$ tal que $\|x_{n_3} - a\| \geq \varepsilon$. E assim, sucessivamente construímos uma sequência de índices $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_j < \ldots$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Logo, construímos também uma subsequência $(x_{n_j})_{j=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que não possui nenhuma subsequência convergindo para a, absurdo. Portanto $x_n \longrightarrow a$. ■

Corolário 3.4.10 *Um operador linear $T\colon E \longrightarrow F$ é completamente contínuo se, e somente se, $T(K)$ é compacto na norma para todo subconjunto fracamente compacto K em E.*

Demonstração: Seja $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq T(K)$, então existe $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq K$ tal que $y_n = T(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema de Eberlein-Šmulian, existe uma subsequência de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge fracamente em K, digamos $x_{n_k} \xrightarrow{w} x \in K$. Como T é completamente contínuo, resulta que $T(x_{n_k}) \longrightarrow T(x) \in T(K)$. Portanto, $T(K)$ é compacto na norma.
Reciprocamente, suponha que $T(K)$ é compacto na norma para todo subconjunto fracamente compacto K de E. Note que T é contínuo, pois caso contrário, dado $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in E$, $\|x_n\| \leq 1$ tal que $\|T(x_n)\| \geq n^2$. O conjunto $\left\{\frac{x_n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ é compacto na norma, pois seja $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\left\{\frac{x_n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$. Chame $A = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}$. Temos duas possibilidades: ou o conjunto A é finito ou infinito. No primeiro caso, pelo menos um dos elementos de A se repete uma infinidade de vezes, o que nos dá uma subsequência constante - e portanto convergente - de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$. No segundo caso, temos que $0 \in \left\{\frac{x_n}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$, um ponto de acumulação de A. Todo aberto contendo 0 contém uma infinidade de elementos de A e, portanto, contém termos y_n com índices arbitrariamente grandes. Portanto, podemos extrair uma subsequência de $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ que converge para 0. Por hipótese $\left\{\frac{T(x_n)}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$ é compacto, absurdo pois este conjunto não é limitado. Logo, T é contínuo.

Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ não nula tal que $x_n \xrightarrow{w} 0$. Queremos mostrar que $T(x_n) \longrightarrow 0$ na norma. O conjunto $\{x_n\} \cup \{0\}$ é fracamente compacto logo, por hipótese $\{T(x_n)\} \cup \{0\}$ é compacto na norma. Seja $(T(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ uma subsequência arbitrária de $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$. Existe uma subsequência $(T(x_{n_{k_j}}))_{j=1}^{\infty}$ de $(T(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ tal que $T(x_{n_{k_j}}) \longrightarrow b \in T(K)$ na norma, por maior razão $T(x_{n_{k_j}}) \xrightarrow{w} b \in T(K)$. Como $x_{n_{k_j}} \xrightarrow{w} 0$, obtemos $T(x_{n_{k_j}}) \xrightarrow{w} T(0) = 0$, e assim $b = 0$. Logo, $T(x_{n_{k_j}}) \longrightarrow 0$. Uma vez que isto acontece para cada subsequência $(T(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ de $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$, pela Proposição 3.4.9 resulta que $T(x_n) \longrightarrow 0$ na norma, isto é, T é completamente contínuo. ■

Mostraremos a seguir que o espaço de todos os operadores fracamente compactos é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(E; F)$. Antes precisamos do seguinte lema.

Lema 3.4.11 (Grothendieck) *Sejam E um espaço de Banach e $A \subseteq E$. Se para todo $\varepsilon > 0$ existe um conjunto fracamente compacto $A_\varepsilon \subseteq E$ tal que $A \subseteq A_\varepsilon + \varepsilon B_E$, então A é relativamente fracamente compacto.*

Demonstração: Veja [12, Lemma 11.26] ■

Proposição 3.4.12 *$\mathcal{L}_{wc}(E;F)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(E;F)$.*

Demonstração: Não é difícil ver que $\mathcal{L}_{wc}(E;F)$ é um subespaço de $\mathcal{L}(E;F)$.

Agora mostraremos que $\mathcal{L}_{wc}(E;F)$ é fechado. Para isso, seja $(T_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{L}_{wc}(E;F)$ tal que $T_n \longrightarrow T \in \mathcal{L}(E;F)$. Dado $\varepsilon > 0$, existe n_0 tal que $n \geq n_0$ implica que $\|T_n - T\| < \varepsilon$. Afirmamos que

$$T(B_E) \subseteq T_{n_0}(B_E) + \varepsilon B_F.$$

Com efeito, dado $x \in T(B_E)$ existe $y \in B_E$ tal que $T(y) = x$. Observe que

$$x = T_{n_0}(y) + x - T_{n_0}(y) = T_{n_0}(y) + \varepsilon\left(\frac{x - T_{n_0}(y)}{\varepsilon}\right).$$

Como $\|T_{n_0} - T\| < \varepsilon$, segue que $\|T_{n_0}(y) - T(y)\| \leq \|T_{n_0} - T\| < \varepsilon$, e portanto

$$\left\|\frac{x - T_{n_0}(y)}{\varepsilon}\right\| = \frac{\|T_{n_0}(y) - T(y)\|}{\varepsilon} < \frac{\varepsilon}{\varepsilon} = 1.$$

Temos que $x \in T_{n_0}(B_E) + \varepsilon B_F$. Portanto

$$T(B_E) \subseteq T_{n_0}(B_E) + \varepsilon B_F \subseteq \overline{T_{n_0}(B_E)} + \varepsilon B_F.$$

Como $T_{n_0} \in \mathcal{L}_{wc}(E;F)$, $\overline{T_{n_0}(B_E)}^{w}$ é fracamente compacto. Por convexidade segue que $\overline{T_{n_0}(B_E)}$ é fracamente compacto. Aplicando o Lema 3.4.11 segue que $T(B_E)$ é relativamente fracamente compacto, isto é, $T \in \mathcal{L}_{wc}(E;F)$. ■

O espaço de todos os operadores fracamente compactos também tem a propriedade de ideal.

Proposição 3.4.13 (Propriedade de ideal) *Sejam $S \in \mathcal{L}(D;E)$, $T \in \mathcal{L}_{wc}(E;F)$ e $R \in \mathcal{L}(F;G)$. Então $R \circ T \circ S \in \mathcal{L}_{wc}(D;G)$.*

Demonstração: Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq D$ uma sequência limitada. Como S é um operador contínuo, a sequência $(S(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é limitada em E. Sabendo que $T \in \mathcal{L}_{wc}(E;F)$, tem-se que a sequência $(T(S(x_n)))_{n=1}^{\infty}$ possui uma subsequência que converge fracamente, isto é, existem $z \in F$ e uma subsequência $(T(S(x_{n_k})))_{k=1}^{\infty}$ tais que $T(S(x_{n_k})) \xrightarrow{w} z$. Sendo R um operador linear contínuo, pelo Teorema 1.1.23, R também permanece contínuo quando F e G estão munidos com a topologia fraca e, consequentemente $R(T(S(x_{n_k}))) \xrightarrow{w} R(z)$. Portanto a sequência $(R(T(S(x_n))))_{n=1}^{\infty} \subseteq G$ tem uma subsequência que converge fracamente, isto é, $R \circ T \circ S \in \mathcal{L}_{wc}(E;F)$. ■

$\mathcal{L}_{cc}$, $\mathcal{L}_{wc}$ e $\mathcal{L}_c$ tem a propriedade injetiva. Isto significa que fixada uma isometria linear i de F em F_0, então $T \in \mathcal{L}_{cc}(E;F)$ (respectivamente $T \in \mathcal{L}_{wc}(E;F)$, $T \in \mathcal{L}_c(E;F)$) se, e somente se, $i \circ T \in \mathcal{L}_{cc}(E;F_0)$ (respectivamente $i \circ T \in \mathcal{L}_{wc}(E;F_0)$, $i \circ T \in \mathcal{L}_c(E;F_0)$, $i \circ T \in \mathcal{L}_{cc}(E;F_0)$).

Temos que $\mathcal{L}_c(E;F) \subset \mathcal{L}_{wc}(E;F)$ e $\mathcal{L}_c(E;F) \subset \mathcal{L}_{cc}(E;F)$. De fato, provemos a primeira inclusão. Seja $T\colon E \longrightarrow F$ um operador compacto. Por definição, $\overline{T(B_E)}$ é compacto em F. Usando o fato que a topologia fraca é menos fina do que a topologia determinada pela norma, temos que se um subconjunto de um espaço normado é compacto, então este subconjunto é fracamente compacto. Portanto, $\overline{T(B_E)}$ é fracamente compacto. Agora, sabendo que $\overline{T(B_E)} = \overline{T(B_E)}^w$ (veja [6, Corollary 1.5]) segue que $\overline{T(B_E)}^w$ é fracamente compacto, ou seja, T é um operador fracamente compacto. Então $\mathcal{L}_c(E;F) \subset \mathcal{L}_{wc}(E;F)$ para todos espaços de Banach E e F.

Mostremos a segunda inclusão. Sejam $T\colon E \longrightarrow F$ um operador compacto e $x_n \xrightarrow{w} x$ em E. Note que $T(x_n) \xrightarrow{w} T(x)$ em F. De fato, dado $g \in F'$, temos que $g \circ T \in E'$. Como $x_n \xrightarrow{w} x$ em E, segue que $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ para todo $\varphi \in E'$, logo $g(T(x_n)) \longrightarrow g(T(x))$ para todo $g \in F'$ o que implica que $T(x_n) \xrightarrow{w} T(x)$.

Suponha por absurdo que $T(x_n) \nrightarrow T(x)$. Então existe $\varepsilon > 0$, tal que para todo $n_0 \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ tem-se

$$\|T(x_n) - T(x)\| \geq \varepsilon.$$

Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é fracamente convergente, então é limitada, logo pela Proposição 3.4.4 $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ possui uma subsequência convergente em F, digamos $T(x_{n_k}) \longrightarrow y$. Em particular, $T(x_{n_k}) \xrightarrow{w} y$ e pela unicidade do limite, segue que $y = T(x)$, ou seja, $T(x_n) \longrightarrow T(x)$, absurdo. Portanto T é completamente contínuo e então $\mathcal{L}_c(E;F) \subset \mathcal{L}_{cc}(E;F)$.

Teorema 3.4.14 *Se $0 < p < +\infty$, então todo operador absolutamente p-somante entre espaços de Banach é fracamente compacto e completamente contínuo.*

Demonstração: Sejam E, F espaços de Banach e $T\colon E \longrightarrow F$ um operador absolutamente p-somante. Pelo Corolário 3.2.2 sabemos que para $0 < q \leq 1 < p < +\infty$, $\mathcal{L}_q^{as}(E;F) \subset \mathcal{L}_p^{as}(E;F)$. Logo, se provarmos o resultado para o caso $1 < p < +\infty$ consequentemente estará provado para $0 < p \leq 1$. Consideremos o operador inclusão $J_p\colon C(K) \longrightarrow L_p(K,\mu)$ e vamos provar que J_p é fracamente compacto e completamente contínuo. Temos que $L_p(K,\mu)$ é reflexivo (veja [5, Theorem 4.10]) logo, todo subconjunto fechado, limitado e convexo é fracamente compacto (veja [5, Corollary 3.22]). Observe que $J_p(B_{C(K)})$ é limitado em $L_p(K,\mu)$, então $\overline{J_p(B_{C(K)})}$ é fechado e limitado. Para verificar a convexidade de $J_p(B_{C(K)})$ sejam $y_1, y_2 \in J_p(B_{C(K)})$ e $0 \leq \lambda \leq 1$, então existem $x_1, x_2 \in B_{C(K)}$ tais que $J_p(x_1) = y_1$ e $J_p(x_2) = y_2$. Assim,

$$\lambda y_1 + (1-\lambda)y_2 = \lambda J_p(x_1) + (1-\lambda)J_p(x_2) = J_p(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \in J_p(B_{C(K)}).$$

Portanto, $J_p(B_{(C(K))})$ é convexo e, consequentemente $\overline{J_p(B_{(C(K))})}$ é convexo. Com isso, $\overline{J_p(B_{(C(K))})}$ é fracamente compacto. Logo, pela definição J_p é fracamente compacto.

Agora, seja $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ convergindo fracamente para 0 em $C(K)$ e vamos provar que $(J_p(f_n))_{n=1}^{\infty}$ converge na norma para 0. Pelo ([14, Corollary 7.18]) temos que $(C(K))'$ é isometricamente isomorfo a $M(K)$, e como $f_n \xrightarrow{w} 0$, segue que $\phi(f_n) \longrightarrow \phi(0) = 0$ para todo $\phi \in (C(K))'$. Para todo $x \in K$, consideremos δ_x a medida de Dirac concentrada em x, então pelo isomorfismo isométrico

$$\begin{aligned} T\colon M(K) &\longrightarrow (C(K))' \\ \delta_x &\longmapsto T(\delta_x)\colon C(K) \longrightarrow \mathbb{K} \\ & \qquad T(\delta_x)(f) = \int f d\delta_x \end{aligned}$$

temos que $T(\delta_x)(f_n) = \int_K f_n d\delta_x \xrightarrow{n\to\infty} 0$ logo, $f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0$, para todo $x \in K$. Então $\|f_n(x)\|^p \longrightarrow 0$, para todo $x \in K$. Além disso, pela convergência fraca de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, existe uma constante $M > 0$ tal que $\|f_n\| \leq M$, além disso a função $h = M^p$ está em $L_1(K,\mu)$ logo, $\|f_n\|^p \leq h$. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada temos

$$0 = \int_K 0 d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_K \|f_n\|^p d\mu = \lim_{n\to\infty} \|f_n\|_{L_p(K,\mu)} = \lim_{n\to\infty} \|J_p(f_n)\|_{L_p(K,\mu)},$$

ou seja, $J_p(f_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$ na norma $L_p(K,\mu)$. Então J_p é completamente contínuo. Pelo Teorema da Fatoração de Pietsch, além da existência de K e μ, existem também $A \in \mathcal{L}(E; C(K))$, $\widetilde{T} \in \mathcal{L}(L_p(K,\mu); \ell_\infty(B_{F'}))$ com $i_F \circ T = \widetilde{T} \circ J_p \circ A$. Como $\mathcal{L}_{wc}$ tem a propriedade de ideal, segue que $i_F \circ T$ é fracamente compacto e pelo mesmo fato é também completamente contínuo. Como $\mathcal{L}_{wc}$ e $\mathcal{L}_{cc}$ tem a propriedade injetiva resulta que T é fracamente compacto e completamente contínuo. ∎

Proposição 3.4.15 *Se $T \in \mathcal{L}_{cc}(F; G)$ e $S \in \mathcal{L}_{wc}(E; F)$, então $T \circ S \in \mathcal{L}_c(E; G)$.*

Demonstração: Se $S \in \mathcal{L}_{wc}(E; F)$, então $S(B_E)$ é relativamente fracamente compacto. Agora como T é completamente contínuo, pelo Corolário 3.4.10 resulta que $T(S(B_E))$ é relativamente compacto na norma. Portanto $T \circ S \in \mathcal{L}_c(E; G)$. ∎

Corolário 3.4.16 *A composição de um operador absolutamente p-somante com um operador absolutamente q-somante é um operador compacto.*

Demonstração: Segue diretamente do Teorema 3.4.14 e da Proposição 3.4.15. ∎

A seguir provaremos a versão do Teorema de Dvoretzky-Rogers para as sequências incondicionalmente p-somáveis. Veremos que em espaços de Banach de dimensão infinita é possível encontrar sequência incondicionalmente p-somável que não é absolutamente p-somável.

Teorema 3.4.17 (Teorema de Dvoretzky-Rogers) *Se $0 < p < +\infty$ e E é um espaço de Banach de dimensão infinita, então existe $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E) \backslash \ell_p(E)$.*

Demonstração: Suponha por absurdo que $\ell_p^u(E) \backslash \ell_p(E) = \emptyset$, ou seja, $\ell_p(E) = \ell_p^u(E)$. Consideremos o operador identidade $id_E\colon E \longrightarrow E$. Pelo Teorema 3.1.6 item (3) temos que id_E é absolutamente p-somante e então pelo Teorema 3.4.14, $id_E \in \mathcal{L}_{cc}(E; E)$ e $id_E \in \mathcal{L}_{wc}(E; E)$. Como $id_E = id_E \circ id_E$, pela Proposição 3.4.15 segue que id_E é compacto, isto é, $\overline{id_E(B_E)}$ é compacto daí segue que B_E é compacta. Isso implica que a dimensão de E é finita, absurdo. Portanto, existe $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^u(E) \backslash \ell_p(E)$. ∎

Como $\ell_p^u(E) \subset \ell_p^w(E)$, em particular temos:

Corolário 3.4.18 *Se* $0 < p < +\infty$ *e* E *é um espaço de Banach de dimensão infinita, então existe* $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_p^w(E) \backslash \ell_p(E)$.

Se $0 < q < +\infty$, pelo Teorema de Dvoretzky-Rogers para sequências incondicionalmente p-somáveis podemos concluir que um espaço de Banach E tem dimensão finita se, e somente se, $\ell_q^u(E) = \ell_q^w(E) = \ell_q(E)$. Provaremos agora a seguinte generalização deste resultado.

Teorema 3.4.19 (Teorema Dvoretzky-Rogers para sequências misto somáveis) *Se* $0 < q \leq s < +\infty$, *então um espaço de Banach* E *tem dimensão finita se, e somente se,* $\ell_{m(s;q)}(E) = \ell_q(E)$.

Demonstração: Se E tem dimensão finita é claro que $\ell_{m(s;q)}(E) = \ell_q(E)$, visto que, $\ell_q(E) \subset \ell_{m(s;q)}(E)$ e $\ell_{m(s;q)}(E) \subset \ell_{m(q;q)}(E) = \ell_q^w(E) = \ell_q(E)$ se E tem dimensão finita. Reciprocamente, suponha por absurdo que E tem dimensão infinita. Devemos provar que $\ell_{m(s;q)}(E) \neq \ell_q(E)$. O caso $s = q$ é o Teorema de Dvoretzky-Rogers. Consideremos então o caso $0 < q < s < +\infty$. Pelo Corolário 3.4.18 existe $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s^w(E) \backslash \ell_s(E)$. Observe que $\left(\frac{s}{q}\right)' = \frac{s(q)'}{q}$. Com efeito,

$$1 = \frac{1}{\left(\frac{s}{q}\right)'} + \frac{1}{\frac{s}{q}} \Leftrightarrow \frac{1}{q} = \frac{1}{q\left(\frac{s}{q}\right)'} + \frac{1}{s} \Leftrightarrow q\left(\frac{s}{q}\right)' = s(q)' \Leftrightarrow \left(\frac{s}{q}\right)' = \frac{s(q)'}{q}.$$

Agora vamos provar que existe $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\frac{s(q)'}{q}}$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \|x_j^0\|^q = +\infty. \tag{3.15}$$

Suponha que para toda $(\alpha_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\frac{s(q)'}{q}}$ temos que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| \|x_j^0\|^q < +\infty.$$

Então pela dualidade $(\|x_j^0\|^q)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{\frac{s}{q}}$. Logo $(\|x_j^0\|)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s$ e, consequentemente $(x_j^0)_{j=1}^{\infty} \in \ell_s(E)$, absurdo. Portanto existe $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}$ satisfazendo (3.15). Sejam $\beta_j = |\lambda_j|^{\frac{1}{q}}$ e $x_j = \beta_j x_j^0$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Então,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|^q = \sum_{j=1}^{\infty} \||\lambda_j|^{\frac{1}{q}} x_j^0\|^q = \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j| \|x_j^0\|^q = +\infty.$$

Logo, $(x_j)_{j=1}^{\infty} \notin \ell_q(E)$. Para mostrar que $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$, basta verificar que $(\beta_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{s(q)'}$. Temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\beta_j|^{s(q)'} = \sum_{j=1}^{\infty} |\lambda_j|^{\frac{s(q)'}{q}} < +\infty.$$

Portanto, $(\beta_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{s(q)'}$ por conseguinte $(x_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_{m(s;q)}(E)$. ■

CAPÍTULO 4

APLICAÇÕES DA LINEABILIDADE E ESPAÇABILIDADE

Neste capítulo, provaremos que, para uma grande classe de espaços de Banach ou quase-Banach E de sequências a valores em X (X um espaço de Banach), os conjuntos $E - \bigcup_{q\in\Gamma} \ell_q(X)$, onde Γ é um subconjunto qualquer de $(0, +\infty]$, e $E - c_0(X)$ são espaçáveis, desde que sejam não vazios.

Definição 4.0.20 Um subconjunto A de um espaço vetorial topológico E é denominado:

- *Lineável* se $A \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial de E de dimensão infinita.
- *Espaçável* se $A \cup \{0\}$ contém um espaço vetorial de E fechado e de dimensão infinita.

Denotaremos $X^{\mathbb{N}} = \{(x_j)_{j=1}^{\infty} : x_j \in X \text{ para todo } j \in \mathbb{N}\}$.

Definição 4.0.21 Seja $X \neq \{0\}$ um espaço de Banach.

(a) Dado $x \in X^{\mathbb{N}}$, denotamos por x^0 a seguinte sequência: $x^0 = (0, 0, \dots)$ se x tem apenas um número finito de coordenadas não nulas; caso contrário, definimos $x^0 = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ onde x_j é a j-ésima coordenada não nula de x.

(b) Um *espaço de sequências invariantes* sobre X é um espaço de Banach ou quase-Banach $(E, \|\cdot\|_E)$ de sequências de elementos de X, com dimensão infinita e satisfazendo as seguintes condições:

(b1) Para $x \in X^{\mathbb{N}}$ tal que $x^0 \neq 0$, então $x \in E$ se, e somente se, $x^0 \in E$ e neste caso $\|x\| \leq K\|x^0\|$ para alguma constante K dependendo somente de E.

(b2) $\|x_j\|_X \leq \|x\|_E$ para todo $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in E$ e todo $j \in \mathbb{N}$.

Um espaço de *sequências invariantes* é um espaço de sequência invariante sobre algum espaço de Banach X.

Vários espaços de sequências clássicos são espaços de sequências invariantes.

Exemplo 4.0.22 Sejam X um espaço de Banach, $0 < p \leq +\infty$ e $0 < q \leq s \leq +\infty$. Então $c_0(X)$, $\ell_p(X)$, $\ell_p^u(X)$, $\ell_p^w(X)$ e $\ell_{m(s;q)}(X)$ são espaços de sequências invariantes sobre X com suas respectivas normas usuais (p, q-normas se $0 < p, q < 1$).

De fato, para qualquer um dos casos acima a condição (b1) da Definição 4.0.21 vale com a igualdade e $K = 1$. Já a condição (b2) é clara para $c_0(X)$, $\ell_p(X)$, $\ell_p^u(X)$ e $\ell_p^w(X)$ e segue do Lema 2.4.2 para $\ell_{m(s;q)}(X)$.

Observação 4.0.23 Existem vários outros exemplos de espaços de sequências invariantes (veja [4]), mas aqui focaremos apenas nestes exemplos que foram estudados com detalhes nesta dissertação.

Agora podemos provar o resultado central deste capítulo.

Teorema 4.0.24 *Seja E um espaço de sequências invariantes sobre o espaço de Banach X. Então*

(a) Para todo $\Gamma \subseteq (0, +\infty]$, $E - \bigcup_{q \in \Gamma} \ell_q(X)$ é vazio ou espaçável.

(b) $E - c_0(X)$ é vazio ou espaçável.

Demonstração: Façamos as demonstrações de (a) e (b) simultaneamente. Para isso tome $A = \bigcup_{q \in \Gamma} \ell_q(X)$ em (a) e $A = c_0(X)$ em (b). Suponha que $E - A$ é não vazio. Seja $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in E - A$. Note que x tem uma infinidade de coordenadas não nulas, pois $x \notin A$. Como E é um espaço de sequências invariantes, segue que $x^0 \in E$, e como $c_0(X)$ e $\ell_q(X)$, $q \in \Gamma$, são espaços de sequências invariantes e $x \notin A$, então segue da Definição 4.0.21(b1) que $x^0 \notin A$. Escrevendo $x^0 = (x_j)_{j=1}^{\infty}$ temos que $x^0 \in E - A$ e $x_j \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Seja $(\mathbb{N}_i)_{i=1}^{\infty}$ uma coleção de conjuntos infinitos, dois a dois disjuntos e tais que $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{N}_i$. Para cada $i \in \mathbb{N}$ seja o conjunto $\mathbb{N}_i = \{i_1 < i_2 < \ldots\}$ e defina

$$y_i = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_{i_j} \in X^{\mathbb{N}}.$$

Observe que $y_i^0 = x^0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Assim, $0 \neq y_i^0 \in E$, para todo i, e segue da Definição 4.0.21(b1) que $y_i \in E$. Vejamos que $y_i \notin A$:

Para o caso (a), temos que $\|y_i\|_r = \|x^0\|_r = \|x\|_r$, para todo $r \in (0, +\infty]$. Mas $\|x\|_q = +\infty$ para todo $q \in \Gamma$, logo $\|y_i\|_q = +\infty$ para todo $q \in \Gamma$. Então $y_i \notin A$.

Para o caso (b), sabemos que $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \notin c_0(X)$. Como todas as coordenadas de x são algumas das coordenadas de y_i, então $y_i \notin c_0(X) = A$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Seja K a constante da Definição 4.0.21(b1) e defina $\tilde{s} = 1$ se E for um espaço de Banach e $\tilde{s} = s$ se E for um espaço s-Banach, $0 < s < 1$. Para $(a_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{\tilde{s}}$ temos,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i y_i\|_E^{\tilde{s}} &= \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{\tilde{s}} \|y_i\|_E^{\tilde{s}} \leq K^{\tilde{s}} \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{\tilde{s}} \|y_i^0\|_E^{\tilde{s}} \\ &= K^{\tilde{s}} \|x^0\|_E^{\tilde{s}} \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^{\tilde{s}} = K^{\tilde{s}} \|x^0\|_E^{\tilde{s}} \|(a_i)_{i=1}^{\infty}\|_{\tilde{s}}^{\tilde{s}} < +\infty.\end{aligned}$$

Sendo assim, $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i y_i\|_E < +\infty$ se E é um espaço de Banach e $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} \|a_i y_i\|_E^s < +\infty$ se E é um espaço s-Banach, $0 < s < 1$. Em ambos os casos, segue da Proposição 2.3.3 que a série $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$ converge em E. Assim o operador

$$T\colon \ell_{\tilde{s}} \longrightarrow E \ , \ T((a_i)_{i=1}^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$$

está bem definido. Claramente $T\colon \ell_{\tilde{s}} \longrightarrow E$ é linear. Agora,

$$T((a_i)_{i=1}^{\infty}) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i = (0, 0, \ldots).$$

Seja x_{j_0} uma coordenada não nula de x. Como os termos da forma $a_i x_{j_0}$ são termos da sequência $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$, então $a_i x_{j_0} = 0$ e daí $a_i = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Portanto T é injetivo. Assim, $T(\ell_{\tilde{s}})$ é um subespaço de E de mesma dimensão que $\ell_{\tilde{s}}$, logo infinita. É fácil ver que $\overline{T(\ell_{\tilde{s}})}$ também é um subespaço de E, logicamente de dimensão infinita e fechado. Agora devemos mostrar que $\overline{T(\ell_{\tilde{s}})} - \{0\} \subseteq E - A$. Para isso seja $z = (z_n)_{n=1}^{\infty} \in \overline{T(\ell_{\tilde{s}})}$, $z \neq 0$. Só resta mostrar que $z \notin A$. Como $z \in \overline{T(\ell_{\tilde{s}})}$, existem sequências $\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{\tilde{s}}$, $k \in \mathbb{N}$, tal que $z = \displaystyle\lim_{k\to\infty} T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)$ em E. Note que, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} y_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_{i_j} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_i^{(k)} x_j e_{i_j}.$$

Fixe $r \in \mathbb{N}$ tal que $z_r \neq 0$. Uma vez que $\mathbb{N} = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} \mathbb{N}_j$, existem $m, t \in \mathbb{N}$ tais que $e_{m_t} = e_r$. Assim, para todo $k \in \mathbb{N}$, a r-ésima coordenada de $T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)$ é igual a $a_m^{(k)} x_t$. A condição (b2) da Definição 4.0.21 garante que a convergência em E implica em convergência em cada coordenada, sendo assim

$$z_r = \lim_{k\to\infty} a_m^{(k)} x_t = x_t \lim_{k\to\infty} a_m^{(k)}.$$

Como $z_r \neq 0$, segue que $x_t \neq 0$ e daí $\lim_{k\to\infty} |a_m^{(k)}| = \dfrac{\|z_r\|_X}{\|x_t\|_X} \neq 0$. Para $j, k \in \mathbb{N}$, a m_j-ésima coordenada de $T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)$ é igual a $a_m^{(k)} x_j$. Definindo $\alpha_m = \frac{\|z_r\|_X}{\|x_t\|_X} \neq 0$, temos

$$\lim_{k\to\infty} \|a_m^{(k)} x_j\|_X = \lim_{k\to\infty} |a_m^{(k)}| \|x_j\|_X = \|x_j\|_X \lim_{k\to\infty} |a_m^{(k)}| = \alpha_m \|x_j\|_X$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Da convergência em cada coordenada temos $\lim_{k\to\infty} \|a_m^{(k)} x_j\|_X = \|z_{m_j}\|_X$, e assim $\|z_{m_j}\|_X = \alpha_m \|x_j\|_X$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Como m (que depende de r) é fixo, temos que os naturais $m_j \in \mathbb{N}_m$, para todo $j \in \mathbb{N}$, e são todos distintos. Provemos agora que a subsequência $(z_{m_j})_{j=1}^{\infty}$ de z não pertence a A tanto no item (a), quanto no item (b), logo teremos que $z \notin A$ em ambos os casos.

Para o caso (a), temos $A = \bigcup_{q\in\Gamma} \ell_q(X)$ e como $x^0 \notin A$, temos que $\|x^0\|_q = +\infty$ para todo $q \in \Gamma$. Note que

$$\|z\|_q^q = \sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|_X^q \geq \sum_{j=1}^{\infty} \|z_{m_j}\|_X^q = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_m^q \|x_j\|_X^q = \alpha_m^q \|x^0\|_q^q = +\infty$$

para todo $q \in \Gamma$, $q \neq +\infty$. Além disso, se $q = +\infty$, então

$$\|z\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|z_n\|_X \geq \sup_{j\in\mathbb{N}} \|z_{m_j}\|_X = \alpha_m \sup_{j\in\mathbb{N}} \|x_j\|_X = \alpha_m \|x^0\|_\infty = +\infty,$$

provando assim que $z \notin \bigcup_{q\in\Gamma} \ell_q(X)$. Portanto $z \in E - \bigcup_{q\in\Gamma} \ell_q(X)$.

Para o caso (b), temos $A = c_0(X)$ e como $x^0 \notin A$, temos que $\|x_j\|_X \nrightarrow 0$. Já que $(\|z_{m_j}\|_X)_{j=1}^{\infty}$ é uma subsequência de $(\|z_n\|_X)_{n=1}^{\infty}$, $\|z_{m_j}\|_X = \alpha_m \|x_j\|_X \nrightarrow 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ e $\alpha_m \neq 0$, é claro que $\|z_n\|_X \nrightarrow 0$. Assim $z \notin c_0(X)$.

Portanto, $z \notin A$ em ambos os casos, então $\overline{T(\ell_{\tilde{s}})} - \{0\} \subseteq E - A$. ■

Para facilitar o entendimento da demonstração anterior, vamos ilustrá-la com um exemplo concreto de decomposição dos conjuntos $\mathbb{N}_i$, $i \in \mathbb{N}$. Considere os conjuntos $\mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2, \ldots, \mathbb{N}_n, \ldots$ definidos da seguinte forma: $\mathbb{N}_1$ será o conjunto de todos os números primos unido com o conjunto $\{1\}$; $\mathbb{N}_2$ será o conjunto dos números que são produto de exatamente dois primos; $\mathbb{N}_3$ será o conjunto dos números que são produto de exatamente três primos, e assim sucessivamente. Como existem infinitos números primos e todo número natural maior do que 1, ou é primo ou se escreve de maneira única como o produto de potências de primos, então esses conjuntos são infinitos, dois a dois disjuntos e $\mathbb{N} = \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathbb{N}_j$.

Seja $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \in E - \bigcup\limits_{q \in \Gamma} \ell_q(X)$. Suponha $x_j \neq 0$ para todo j. Pela notação utilizada na demonstração, temos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{N}_1 &= \{\overbrace{1}^{1_1}, \overbrace{2}^{1_2}, \overbrace{3}^{1_3}, \overbrace{5}^{1_4}, \overbrace{7}^{1_5}, \overbrace{11}^{1_6}, \overbrace{13}^{1_7}, \ldots\},\\
\mathbb{N}_2 &= \{\overbrace{4}^{2_1}, \overbrace{6}^{2_2}, \overbrace{9}^{2_3}, \overbrace{10}^{2_4}, \overbrace{14}^{2_5}, \overbrace{15}^{2_6}, \ldots\},\\
\mathbb{N}_3 &= \{\overbrace{8}^{3_1}, \overbrace{12}^{3_2}, \overbrace{20}^{3_3}, \overbrace{27}^{3_4}, \overbrace{28}^{3_5}, \ldots\}
\end{aligned}
$$

e assim por diante. Além disso,

$$
\begin{aligned}
y_1 &= (x_1, x_2, x_3, 0, x_4, 0, \ldots),\\
y_2 &= (0, 0, 0, x_1, 0, x_2, 0, \ldots),\\
y_3 &= (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, x_1, \ldots),
\end{aligned}
$$

e assim sucessivamente.

Tomando $z = (z_n)_{n=1}^{\infty} \in \overline{T(\ell_{\tilde{s}})}$, $z \neq 0$ e $\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty} \in \ell_{\tilde{s}}$, $k \in \mathbb{N}$, tal que $z = \lim\limits_{k \to \infty} T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right)$ em E, temos

$$
\begin{array}{ccc}
T\left(\left(a_i^{(1)}\right)_{i=1}^{\infty}\right) & = & \left(a_1^{(1)}x_1,\ a_1^{(1)}x_2,\ a_1^{(1)}x_3,\ a_2^{(1)}x_1,\ a_1^{(1)}x_4,\ a_2^{(1)}x_2,\ a_1^{(1)}x_5,\ a_3^{(1)}x_1,\ a_2^{(1)}x_3, \ldots\right)\\
T\left(\left(a_i^{(2)}\right)_{i=1}^{\infty}\right) & = & \left(a_1^{(2)}x_1,\ a_1^{(2)}x_2,\ a_1^{(2)}x_3,\ a_2^{(2)}x_1,\ a_1^{(2)}x_4,\ a_2^{(2)}x_2,\ a_1^{(2)}x_5,\ a_3^{(2)}x_1,\ a_2^{(2)}x_3, \ldots\right)\\
\vdots & & \vdots\\
T\left(\left(a_i^{(k)}\right)_{i=1}^{\infty}\right) & = & \left(a_1^{(k)}x_1,\ a_1^{(k)}x_2,\ a_1^{(k)}x_3,\ a_2^{(k)}x_1,\ a_1^{(k)}x_4,\ a_2^{(k)}x_2,\ a_1^{(k)}x_5,\ a_3^{(k)}x_1,\ a_2^{(k)}x_3, \ldots\right)\\
\downarrow & & \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow\\
z & = & (\underbrace{z_1}_{\triangle x_1}, \underbrace{z_2}_{\triangle x_2}, \underbrace{z_3}_{\triangle x_3}, \underbrace{z_4}_{\square x_1}, \underbrace{z_5}_{\triangle x_4}, \underbrace{z_6}_{\square x_2}, \underbrace{z_7}_{\triangle x_5}, \underbrace{z_8}_{\diamond x_1}, \underbrace{z_9}_{\square x_3}, \ldots)
\end{array}
$$

Como a convergência em E implica em convergência em cada coordenada, temos que $a_1^{(k)}x_1 \longrightarrow z_1$, $a_1^{(k)}x_2 \longrightarrow z_2$, $a_1^{(k)}x_3 \longrightarrow z_3$, $a_2^{(k)}x_1 \longrightarrow z_4, \ldots$.

Para ilustrar, se z_1 fosse diferente de 0, então $a_1^{(k)}$ convergiria para um limite não nulo, digamos para $\triangle$. Daí, em cada uma das outras coordenadas indexadas por $\mathbb{N}_1$, teríamos a convergência para $\triangle x_j$, com j variando em todos os naturais. Sendo assim, a subsequência de z formada por esses termos indexados por $\mathbb{N}_1$ é tal que

$$
\|z_1\|_X^q + \|z_2\|_X^q + \|z_3\|_X^q + \|z_5\|_X^q + \|z_7\|_X^q + \ldots = \sum_{j=1}^{\infty} \|\triangle x_j\|_X^q = |\triangle|^q \sum_{j=1}^{\infty} \|x_j\|_X^q = +\infty,
$$

para todo $q \in \Gamma$, pois $x = (x_j)_{j=1}^{\infty} \notin \ell_q(X)$. Mas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|z_n\|_X^q \geq \sum_{j=1}^{\infty} \|\triangle x_j\|_X^q = +\infty,$$

o que permite concluir que $z \notin \bigcup_{q \in \Gamma} \ell_q(X)$.

O mesmo aconteceria se z_4 fosse diferente de 0. Neste caso teríamos, $a_2^{(k)}$ convergindo para um limite não nulo, digamos para $\square$, e procedendo como anteriormente, também obteríamos o resultado.

Corolário 4.0.25 *$\ell_{m(s;p)}(X) - \ell_p(X)$ e $\ell_p^u(X) - \ell_p(X)$ são espaçáveis para $0 < p \leq s < +\infty$ e para todo espaço de Banach X de dimensão infinita. Em particular, $\ell_p^w(X) - \ell_p(X)$ é espaçável.*

Demonstração: Pelos Teoremas de Dvoretzky-Rogers (Teoremas 3.4.17 e 3.4.19) seguem, respectivamente, que $\ell_p^u(X) - \ell_p(X)$ e $\ell_{m(s;p)}(X) - \ell_p(X)$ são não vazios. Como $\ell_{m(s;p)}(X)$ e $\ell_p^u(X)$ são espaços de sequências invariantes, então segue diretamente do Teorema 4.0.24(a) que $\ell_{m(s;p)}(X) - \ell_p(X)$ e $\ell_p^u(X) - \ell_p(X)$ são espaçáveis. ∎

Corolário 4.0.26 *$\ell_\infty(X) - c_0(X)$ é espaçável.*

Demonstração: Basta aplicar o item (b) do Teorema 4.0.24. ∎

No próximo lema veremos que para $p > 0$, $\ell_p - \bigcup_{0<q<p} \ell_q$ é não vazio e consequentemente como caso bastante particular do Teorema 4.0.24, mostraremos que para $p > 0$, $\ell_p - \bigcup_{0<q<p} \ell_q$ é espaçável.

Lema 4.0.27 *Se $p > 0$, então existe $x \in \ell_p - \bigcup_{0<q<p} \ell_q$.*

Demonstração: Primeiro provemos o caso $p = 2$. Sabemos que $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n=1}^{\infty} \notin \ell_2$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_r$ para todo $r > 2$ pois,

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} > +\infty$ (série harmônica diverge).

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{n}}\right|^r = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{r}{2}}} < +\infty.$

Note que, $1 \leq q < 2 \Rightarrow \dfrac{1}{q} > \dfrac{1}{2}$ mas $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$, onde q' é o conjugado de q. Sendo assim, $\dfrac{1}{q'} < \dfrac{1}{2} \Rightarrow q' > 2$. Então para cada $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_q$, com $1 \leq q < 2$, segue da Desigualdade de Hölder para sequências que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} y_n \right| \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right|^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \left\| \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)_{n=1}^{\infty} \right\|_{q'} \|(y_n)_{n=1}^{\infty}\|_q < +\infty$$

pois, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} \right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{q'}$ e $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_q$. Suponha que $\ell_2 = \displaystyle\bigcup_{0<q<2} \ell_q$. Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} y_n \right| < +\infty,$$

para toda $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$ e $T_k \colon \ell_2 \longrightarrow \mathbb{K}$ definida por $T_k((y_n)_{n=1}^{\infty}) = \displaystyle\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{n}} y_n$, pertence a $(\ell_2)'$. De fato, é claro que T_k é linear. Agora,

$$|T_k((y_n)_{n=1}^{\infty})| \leq \sum_{n=1}^{k} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} y_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} y_n \right| \leq \left\| \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)_{n=1}^{\infty} \right\|_2 \|(y_n)_{n=1}^{\infty}\|_2$$

e portanto T_k é contínua. Como, para toda $(y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$,

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} |T_k((y_n)_{n=1}^{\infty})| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} y_n \right| < +\infty,$$

segue do Corolário 1.1.15 do Teorema de Banach-Steinhaus que T, definido por $T(y) = \displaystyle\lim_{k \to \infty} T_k(y)$, para todo $y \in \ell_2$, pertence a $(\ell_2)'$. Como

$$T(y) = \lim_{k \to \infty} T_k(y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} y_n,$$

para todo $y = (y_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$ e $(\ell_2)' = \ell_2$, temos que $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2$, absurdo. Portanto $\ell_2 - \displaystyle\bigcup_{0<q<2} \ell_q \neq \emptyset$.

Para o caso geral, basta considerar $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2 - \displaystyle\bigcup_{0<q<2} \ell_q$ e assim $\left(|x_n|^{\frac{2}{p}} \right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p - \displaystyle\bigcup_{0<q<p} \ell_q$. Com efeito,

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(|x_n|^{\frac{2}{p}} \right)^p = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty \Rightarrow \left(|x_n|^{\frac{2}{p}} \right)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p,$

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(|x_n|^{\frac{2}{p}}\right)^q = \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^{\frac{2q}{p}} = +\infty \Rightarrow \left(|x_n|^{\frac{2}{p}}\right)_{n=1}^{\infty} \notin \ell_q.$

■

Corolário 4.0.28 *Se $p > 0$, então $\ell_p(X) - \bigcup\limits_{0<q<p} \ell_q(X)$ é espaçável. Em particular, $\ell_p - \bigcup\limits_{0<q<p} \ell_q$ é espaçável.*

Demonstração: Sabemos que $\ell_p(X)$ é um espaço de sequências invariantes e pelo Lema 4.0.27 existe $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p - \bigcup\limits_{0<q<p} \ell_q$. Assim, para $a \in X$, $a \neq 0$, temos $(ax_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p(X) - \bigcup\limits_{0<q<p} \ell_q(X)$, logo segue do Teorema 4.0.24(a) que $\ell_p(X) - \bigcup\limits_{0<q<p} \ell_q(X)$ é espaçável.

■

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] R. Aron, F. J. García-Pacheco, D. Pérez-García and J. B. Seoane-Sepúlveda, *On dense-lineability of sets of functions on* $\mathbb{R}$, Topology **48** (2009), 149–156.

[2] R. Aron, V. I. Gurariy and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Lineability and spaceability of sets of functions on* $\mathbb{R}$, Proc. Amer. Math. Soc. **133** (2005), 795–803.

[3] C. Barroso, G. Botelho, V. V. Fávaro and D. Pellegrino, *Lineability and spaceability for the weak form of Peano's theorem and vector-valued sequence spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., to appear.

[4] G. Botelho, D. Diniz, V. V. Fávaro, D. Pellegrino, *Spaceability in Banach and quasi-Banach sequence spaces*, Linear Algebra and its Applications **434** (2011), 1255-1260.

[5] H. Brezis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer, 2010.

[6] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer, 1990.

[7] A. Defant and K. Floret, *Tensor Norms and Operator Ideals*, North-Holland Mathematics Studies **176**, North-Hollland, 1993.

[8] J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge, *Absolutely Summing Operators*, Cambridge University Press, 1995.

[9] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators Part I: General Theory*, Interscience, John Wiley, New York, 1957.

[10] A. Dvoretzky and C. A. Rogers, *Absolute and unconditional convergence in normed spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **36** (1950), 192-197.

[11] P. Enflo, V. Gurariy and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Some results and open questions on spaceability in function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., to appear.

[12] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. M. Santalucía, J. Pelant, V. Zizler, *Functional Analysis and Infinite-Dimensional Geometry*, Springer - New York, 2001.

[13] M. S. Ferreira, *Lineabilidade do conjunto dos operadores lineares limitados não absolutamente somantes*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba - João Pessoa, 2010.

[14] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern techniques and their applications*, John Wiley and Sons, Inc., 1999.

[15] D. García, B. Grecu, M. Maestre and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Infinite dimensional Banach spaces of functions with nonlinear properties*, Math. Nachr. **283** (2010), 712–720.

[16] V. I. Gurariy and L. Quarta, *On lineability of sets of continuous functions*, J. Math. Anal. Appl. **294** (2004), 62–72.

[17] A. Jatobá, *Fatoração de operadores fracamente compactos entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, UNICAMP, 2005.

[18] D. P. Júnior, *Introdução à Análise Funcional*, Niterói, EdUFF, 1999.

[19] D. Kitson and R. Timoney, *Operator ranges and spaceability*, J. Math. Anal. Appl. **378** (2011), 680–686.

[20] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, 1989.

[21] m. c. matos, *Mappings between Banach spaces that send mixed summable sequences into absolutely summable sequences*, J. Math. Anal. Appl. **297** (2004), 833-851.

[22] m. c. matos, *Absolutely Summing Mappings, Nuclear Mappings and Convolution Equations.* IMECC-UNICAMP, 2007. Web: http://www.ime.unicamp.br/rel_pesq/2007/rp03-07.html

[23] B. Maurey, *Théorèmes de factorisation pour les opérateurs linéaires à valeurs dans les espaces L_p*, Astérisque, 11, Paris, 1974.

[24] t. j. morrison, *Functional analysis: an introduction to Banach space theory*, Wiley, New York, 2001.

[25] G.A. Muñoz-Fernández, N. Palmberg, D. Puglisi and J. B. Seoane-Sepúlveda, *Lineability in subsets of measure and function spaces*, Linear Algebra Appl. **428** (2008), 2805–2812.

[26] a. pietsch, *Operator ideals.* North-Holland Publishing Company, 1980.

[27] L. G. Polac, *Séries Incondicionalmente Convergentes e Operadores Absolutamente Somantes*, Monografia, UFU, 2010.

[28] S. T. Silva, *Cotipos e operadores lineares absolutamente somantes*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal da Paraíba - João Pessoa, 2010.

[29] P. Wojtaszczyk, *Banach Spaces for Analysts*, Cambridge University Press, 1996.