UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2012

O dual de um ideal de operadores e ideais de operadores simétricos entre espaços de Banach

GISELLE MORAES RESENDE PEREIRA

GISELLE MORAES RESENDE PEREIRA

O dual de um ideal de operadores e ideais de operadores simétricos entre espaços de Banach

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA.**

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Análise Funcional.

Orientador: Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

UBERLÂNDIA - MG
2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU , MG, Brasil

P436d Pereira, Giselle Moraes Resende, 1987-
O dual de um ideal de operadores e ideais de operadores simétricos entre espaços de Banach / Giselle Moraes Resende Pereira. - 2012.
85 f.

Orientador: Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Inclui bibliografia.

1. Matemática - Teses. 2. Banach, Espaços de - Teses. 3. Operadores lineares - Teses. 4. Operadores simétricos - Teses. I. Botelho, Geraldo Márcio de Azevedo. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51

Universidade Federal de Uberlândia
Faculdade de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 159
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO: Giselle Moraes Resende Pereira.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 11012MAT008.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Análise Funcional.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: O dual de um ideal de operadores e ideais de operadores simétricos entre espaços de Banach

ORIENTADOR: Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 23 de Fevereiro de 2012, às 16h00min, pela seguinte Banca Examinadora:

Prof. Dr. Geraldo Márcio de Azevedo Botelho ______________________
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Profa. Dra. Mary Lilian Lourenço ______________________
USP - Universidade de São Paulo

Profa. Dra. Sônia Sarita Berrios Yana ______________________
UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Uberlândia-MG, 23 de Fevereiro de 2012.

Dedicatória

Dedico *aos meus pais Francisco e Jane que com muito carinho e apoio não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.*

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por mais esta oportunidade e por colocar as pessoas mencionadas abaixo em minha vida.

Aos meus pais, Francisco e Jane, e a minha irmã, Sibelle, agradeço pela paciência, compreensão, apoio e amor.

Ao meu noivo Odair Júnior pelo carinho, alegria e amor que sempre me proporcionou.

Ao meu orientador Geraldo Márcio de Azevedo Botelho pela paciência, disponibilidade na orientação deste trabalho e dedicação ao longo da minha formação, sendo um dos grandes responsáveis por esta conquista.

Aos professores de graduação. Especialmente à Antônio Carlos Nogueira, Marcos Antônio da Câmara e aos meus tios Lúcia Resende Pereira Bonfim e Valdair Bonfim.

Aos professores da pós-graduação: Edson Agustini, Eliana Xavier Linhares de Andrade, Geraldo Márcio de Azevedo Botelho, Sezimária de Fátima Pereira Saramago, Victor Gonzalo Lopez Neumann e Vinícius Vieira Fávaro que muito contribuíram para a minha formação.

Aos professores do grupo de pesquisa em Análise. Especialmente à Ana Carla Piantella, Ariosvaldo Marques Jatobá e Kuo Po Ling.

Às professoras Mary Lilian Lourenço e Sonia Saria Berrios Yana por terem aceito o convite para participarem da banca examinadora.

À todos os meus amigos que sempre estiveram presentes me aconselhando e incentivando.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro concedido durante este período.

À todos que colaboraram, direta ou indiretamente, com este trabalho.

"NADA acontece por acaso.
TUDO acontece na hora certa.
E, TUDO vai dar certo."
— Conhecimento Popular

PEREIRA, G. M. R. *O dual de um ideal de operadores e ideais de operadores simétricos entre espaços de Banach.* 2012. 85 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

O principal objetivo desta dissertação é estudar o dual de um ideal de operadores (no sentido de Pietsch [22]) entre espaços de Banach. Iniciamos o estudo estudando propriedades gerais e exemplos básicos de ideais de operadores entre espaços de Banach. Em seguida introduzimos e exploramos o dual de um ideal de operadores. Posteriormente, estudam-se os ideais de operadores injetivos e/ou sobrejetivos, ideais de composição e suas relações com o conceito do ideal dual. Por fim são estudados os ideais simétricos de operadores lineares entre espaços de Banach. Nesse estudo apresentamos exemplos de ideais que são simultaneamente simétricos e anti-simétricos (completamente simétricos), de ideais que não são nem simétricos nem anti-simétricos, de ideais que são simétricos e não são anti-simétricos e de ideais que são anti-simétricos e não são simétricos.

Palavras-chave: ideal de operadores, espaço de Banach, ideal simétrico, dual de um ideal de operadores.

PEREIRA, G. M. R. *The dual of an operators ideal and symmetric operators ideals on Banach spaces.* 2012. 85 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

The main goal of this dissertation is to study the dual of an ideal of operators (in the sense of Pietsch [22]) between Banach spaces. We begin studying general properties and basic examples of operator ideals. Next we introduce and explore the dual of an operator ideal. Ideals that are injective and/or surjective and compostion ideals are also studied, as well as their connections with the notion of dual ideal. In this investigation we present examples of ideals which are simultaneously symmetric and anti-symmetric (completely symmetric), ideals which are neither symmetric nor anti-symmetric, symmetric non-anti-symmetric ideals and anti-symmetric non-symmetric ideals.

Keywords: operator ideal, Banach space, symmetric ideal, dual of an operator ideal.

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	$\{1, 2, \ldots\}$
$\mathbb{R}$	conjunto dos números reais
$\mathbb{C}$	conjunto dos números complexos
$\mathbb{K}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
X, Y	espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$
E, F e G	espaços normados ou espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$
e_j	$(0, \ldots, 0, \overset{(j)}{1}, 0, \ldots)$
u	operador
u'	operador adjunto
$Im(A)$	imagem da aplicação A
$ker(u)$	núcleo do operador linear u
E'	dual topológico do espaço normado E
E''	bidual de E
$B_E[x_0; r]$	bola fechada no espaço normado E com centro em x_0 e raio r
B_E	$B_E[0; 1]$
$\mathring{B}_E$	bola unitária aberta do espaço normado E
S_E	esfera unitária do espaço normado E
Id_E	operador identidade definido em E
i	operador inclusão
$j : F \hookrightarrow G$	injeção métrica
$q : G \twoheadrightarrow E$	sobrejeção métrica
$J_E \colon E \longrightarrow E''$	mergulho canônico de E em E''
$\mathcal{L}(E; F)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ das aplicações lineares contínuas de E em F
$(\mathcal{L}(E; F), \Vert . \Vert)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ das aplicações lineares contínuas de E em F munido com a norma usual do sup
$L(X; Y)$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de todas as aplicações lineares de X em Y

$\text{span}\{b\}$ ou $[b]$	espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ gerado pelo vetor b
$(\ell_p, \|.\|_p)$	$\{(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} : \lambda_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \|\lambda_n\|^p < \infty\}$, onde $\|(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|\lambda_n\|^p\right)^{1/p}$
$(\ell_\infty, \|.\|_\infty)$	$\{(\lambda_n)_{n=1}^{\infty} : \lambda_n \in \mathbb{K}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}$ é limitada$\}$, onde $\|(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\|_\infty = \sup\{\|\lambda_j\| : j \in \mathbb{N}\}$
$\mathcal{I}, \mathcal{J}$	ideal de operadores
$(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$, $(\mathcal{J}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$	ideal normado de operadores
$\mathcal{I}^{\text{dual}}(E;F)$	$\{u \in \mathcal{L}(E;F) : u' \in \mathcal{I}(F';E')\}$
$\mathcal{I} \circ \mathcal{J}$	$\{u \in \mathcal{L}(E;F) :$ existem G de Banach, $v \in \mathcal{J}(E;G)$ e $w \in \mathcal{I}(G;F)$ tais que $u = w \circ v\}$
$(\mathcal{F}, \|\cdot\|)$	ideal normado dos operadores de posto finito
$(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$	ideal de Banach dos operadores aproximáveis
$(\mathcal{K}, \|\cdot\|)$	ideal de Banach dos operadores compactos
$(\mathcal{CC}, \|\cdot\|)$	ideal de Banach dos operadores completamente contínuos
$(\mathcal{W}, \|\cdot\|)$	ideal de Banach dos operadores fracamente compactos
$(\Pi_p, \pi_p(\cdot))$	ideal de Banach dos operadores absolutamente p-somantes
$(\mathcal{N}, \|\cdot\|_{\mathcal{N}})$	ideal de Banach dos operadores nucleares
$(\mathcal{S}, \|\cdot\|)$	ideal de Banach dos operadores separáveis
$\sigma(E';E)$	topologia fraca-estrela no dual E' do espaço normado E
$\sigma(E;E')$	topologia fraca no espaço normado E

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Análise Funcional Linear tem como principal meta estudar os operadores lineares contínuos entre espaços normados. Ao longo deste estudo, várias classes de operadores com propriedades específicas e desejáveis foram sendo identificadas. Como o espaço formado por todos os operadores lineares e contínuos entre dois espaços de Banach é, em geral, muito grande, torna-se interessante restringir o estudo a determinadas classes de operadores.

A partir dos trabalhos de vários matemáticos datados da metade do século 20, em especial os trabalhos de A. Grothendieck, começaram a se destacar as classes $\mathcal{I}$ de operadores que se comportam como os ideais de álgebra no seguinte sentido: se o operador linear $u\colon E \longrightarrow F$ pertence à classe $\mathcal{I}$ e $v\colon E_0 \longrightarrow E$ e $t\colon F \longrightarrow F_0$ são operadores lineares contínuos, então o operador composição $t \circ u \circ v\colon E_0 \longrightarrow F_0$ também pertence à classe $\mathcal{I}$. Esquematicamente:

$$E_0 \xrightarrow{v} E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{t} F_0$$
$$u \in \mathcal{I}(E;F) \Longrightarrow t \circ u \circ \ v \in \mathcal{I}(E_0;F_0)$$

Satisfazem essa condição de ideal muitas classes de operadores lineares que já haviam sido estudadas, por exemplo os operadores compactos e fracamente compactos, e outras classes que estavam começando a ser estudadas, por exemplo os operadores nucleares e absolutamente somantes. O aparecimento de um grande número de classes de operadores desse tipo e a importância dessas classes para a teoria dos espaços de Banach culminou na criação de uma teoria abstrata de ideais de operadores, concebida por A. Pietsch na década de 1960 e formalizada por ele no livro [22], que tem todas essas importantes classes como casos particulares. A partir daí a teoria cresceu muito, tanto na variedade dos ideais estudados como na abrangência das aplicações e conexões com diversas áreas da teoria dos espaços de Banach e outras disciplinas matemáticas. Prova disso é que os ideais de operadores protagonizam um capítulo no Manual da Geometria dos Espaços de Banach (veja [14, Chapter 11]). Nesta referência o leitor pode encontrar mais detalhes sobre a origem e o desenvolvimento da teoria de ideais de operadores.

A sub-área da Análise Funcional Linear na qual esta dissertação se insere é a Teoria dos Ideais de Operadores entre Espaços de Banach. O objetivo principal é estudar o dual de um ideal de operadores e relacioná-lo com o ideal original. Mais precisamente, dado um ideal de operadores $\mathcal{I}$, seu dual é definido da seguinte forma: dados espaços de Banach E e F.

$$\mathcal{I}^{\text{dual}}(E;F) := \{u \in \mathcal{L}(E;F) : u' \in \mathcal{I}(F';E')\}, \tag{1}$$

onde u' denota o adjunto do operador u. Diz-se que um ideal de operadores $\mathcal{I}$ é:

- *Simétrico* se $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^{\text{dual}}$;
- *Anti-simétrico* se $\mathcal{I}^{\text{dual}} \subseteq \mathcal{I}$;
- *Completamente simétrico* se $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\text{dual}}$.

Nesta dissertação fazemos, em resumo, um estudo das propriedades gerais do dual $\mathcal{I}^{dual}$ de um ideal de operadores $\mathcal{I}$, e exibimos exemplos de ideais que são completamente simétricos, simétricos mas não anti-simétricos, anti-simétricos mas não simétricos, nem simétricos nem anti-simétricos.

Apresentamos duas justificativas para escrever uma dissertação sobre esse assunto. A primeira é que o dual de um ideal de operadores é uma ferramenta importante em vários trabalhos de pesquisa (veja, por exemplo, [2, 6, 12, 18, 22]). Muitas vezes, o fato de um ideal ser simétrico, anti-simétrico ou completamente simétrico, é hipótese de um teorema importante. Daí a necessidade de se conhecer os ideais que satisfazem (ou não) essas propriedades. A segunda justificativa é que são muito poucas as referências disponíveis na literatura que demonstram com detalhes os resultados relativos a esse assunto. O dual de um ideal, bem como suas propriedades básicas e os primeiros exemplos, constam das principais referências da área (por exemplo, [6], [14, Chapter 11] e [22]), mas sempre omitindo as demonstrações. Na maioria das vezes, os resultados são considerados como *folclore*, isto é, como coisas conhecidas e sabidas há tempos. O problema é que, mesmo sendo resultados conhecidos, nem sempre suas demonstrações são triviais. Mesmo assim essas demonstrações são invariavelmente omitidas ou apresentadas sem detalhes. Em vista disso, um dos objetivos desta dissertação é apresentar as demonstrações em detalhes, preenchendo o que, em nossa opinião, é uma lacuna na literatura. Cabe ressaltar que várias demonstrações apresentadas nesta dissertação não foram encontradas em nenhuma referência.

Passamos agora a descrever a organização da dissertação. Iniciamos com um capítulo dedicado às definições e resultados preparatórios de Análise Funcional. São resultados clássicos e que podem ser encontrados nos principais livros. De toda forma, damos uma referência para cada resultado enunciado.

No Capítulo 2 abordamos a teoria abstrata de ideais de operadores lineares entre espaços de Banach. Como descrito acima, essa teoria foi introduzida por A. Pietsch por volta de 1969 e seu intento é unificar o estudo de várias classes especiais de operadores lineares que vinham sendo estudadas separadamente. Além de resultados gerais da teoria, apresentamos seções com os seguintes exemplos de ideais de operadores: operadores de posto finito $(\mathcal{F}, \|\cdot\|)$, operadores aproximáveis $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$, operadores compactos $(\mathcal{K}, \|\cdot\|)$, operadores absolutamente p-somantes $(\Pi_p, \pi_p(\cdot))$ para $p \geq 1$, operadores fracamente compactos $(\mathcal{W}, \|\cdot\|)$, operadores completamente contínuos $(\mathcal{CC}, \|\cdot\|)$, operadores nucleares $(\mathcal{N}, \|\cdot\|_{\mathcal{N}})$ e operadores separáveis $(\mathcal{S}, \|\cdot\|)$. Além de ilustrar a teoria com exemplos importantes, estes ideais de operadores serão retomados quando tratarmos dos ideais simétricos, anti-simétricos e completamente simétricos.

No Capítulo 3 estudaremos o dual de um ideal de operadores entre espaços de Banach conforme definido em (1). Na Seção 3.1 as propriedades gerais do dual de um ideal de operadores são estudadas. Nesta seção faremos a demonstração de que se um ideal é de Banach, então seu dual com a norma induzida também será ideal de Banach. Este é um exemplo de resultado cuja demonstração não foi encontrada em nenhuma referência. Na Seção 3.2 introduziremos o conceito de ideais injetivos e sobrejetivos. O objetivo é relacionar a injetividade/sobrejetividade de um ideal com a de seu dual. Na Seção 3.3 estudamos os ideais de composição, também chamados de produtos de ideais. Nesta seção mostramos que dados dois ideais de operadores, a composição deles também será um ideal de operadores; e que o produto de dois ideais de operadores normados nem sempre é um ideal normado. Dados os espaços de Banach E e F sobre o corpo $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, analisaremos a validade da igualdade

$$(\mathcal{I} \circ \mathcal{J})^{\mathrm{dual}}(E;F) = \mathcal{J}^{\mathrm{dual}} \circ \mathcal{I}^{\mathrm{dual}}(E;F).$$

Mostraremos que a igualdade acima será verdadeira acrescentando uma condição ao espaço F e uma condição aos ideais $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$; mais precisamente, a igualdade será verdadeira se F for reflexivo e os ideais estiverem contidos em seus respectivos duais, ou seja, se os ideais forem simétricos. Analisaremos também a validade da igualdade

$$\overline{\mathcal{I}^{\mathrm{dual}}}(E;F) = \overline{\mathcal{I}}^{\mathrm{dual}}(E;F).$$

Mostraremos que a inclusão $\overline{\mathcal{I}^{\mathrm{dual}}}(E;F) \subseteq \overline{\mathcal{I}}^{\mathrm{dual}}(E;F)$ é verificada para todo ideal $\mathcal{I}$ e todos espaços de Banach E e F; e que a igualdade vale se o espaço F for reflexivo.

No Capítulo 4 procuramos identificar as propriedades de simetria dos ideais de operadores estudados no Capítulo 2. O objetivo principal é dar exemplos de ideais que são simultaneamente simétricos e anti-simétricos (completamente simétricos), de ideais que não são nem simétricos nem anti-simétricos, de ideais que são simétricos e não são anti-simétricos e de ideais que são anti-simétricos e não são simétricos. Na Seção 4.1 mostraremos que o ideal dos operadores compactos e o ideal dos operadores fracamente compactos são completamente simétricos. Na Seção 4.2 mostraremos que o ideal dos operadores completamente contínuos e o ideal dos operadores absolutamentes p-somantes, $p \geq 1$, não são simétricos nem anti-simétricos. Na Seção 4.3 mostraremos que o ideal de operadores nucleares é simétrico mas não é anti-simétrico. Na Seção 4.4 finalizaremos mostrando que ideal de operadores separáveis é um exemplo de ideal de operadores que é anti-simétrico mas não é simétrico. Para cada ideal que provamos ser não simétrico ou não anti-simétrico, procuramos identificar condições adicionais sobre os espaços que garantam a validade da inclusão que não vale em geral.

No Apêndice A apresentaremos um quadro resumo com as principais propriedades dos ideais de operadores entre espaços de Banach estudados nesta dissertação.

Cada capítulo ou seção foi fortemente baseado em uma, ou em alguns casos, mais de uma, referências bibliográficas. Para evitar que a redação ficasse muito truncada com créditos a referências a todo momento, informamos abaixo as principais referências de cada capítulo:

- Capítulo 1: Botelho, Pellegrino e Teixeira [3].

- Capítulo 2: Defant e Floret [6], Pietsch [22] e Silva [24].
- Capítulo 3: Defant e Floret [6], Jarchow [12] e Pietsch [22].
- Capítulo 4: Abramovich e Aliprantis [1], Botelho, Pellegrino e Teixeira [3], Figiel e Johnson [9], Jarchow [12], Jatobá [13] e Oja e Reinov [21].

CAPÍTULO 1

DEFINIÇÕES E RESULTADOS PREPARATÓRIOS

Uma vez que os operadores lineares e contínuos entre espaços de Banach são os protagonistas desta dissertação, resultados básicos e clássicos da Análise Funcional Linear serão necessários para o estudo aqui empreendido. Enunciaremos neste capítulo os resultados da Análise Funcional que serão usados em algum momento desta dissertação. A principal referência bibliográfica utilizada foi Botelho, Pellegrino e Teixeira [3]. Quanto aos resultados que não se encontram na referência anterior, para evitar um número muito grande de fontes, preferimos nos referir às dissertações Jatobá [13], Polac [23] e Silva [24], as quais concentram os resultados que necessitamos.

Ao longo da dissertação, as letras X e Y denotam os espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e $L(X;Y)$ denota o espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ de todas as aplicações lineares de X em Y. As letras E e F representam espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$ e $\mathcal{L}(E;F)$ denota o espaço de Banach dos operadores lineares contínuos munido com a norma do supremo

$$u \in \mathcal{L}(E,F) \mapsto \|u\| := \sup\{\|u(x)\| : x \in E, \|x\| \leq 1\}.$$

Por B_E denotamos a bola unitária fechada de E, isto é, $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ e por S_E a esfera unitária de E, isto é, $S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$. Vejamos alguns desses conceitos com mais detalhes:

Definição 1.1 Seja E um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{K}$. Uma *norma* sobre E é uma aplicação

$$\begin{array}{rcl} \|\cdot\| : E & \longrightarrow & [0,\infty) \\ x & \mapsto & \|x\| \end{array}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:
$N1)$ $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in E$ e $\|x\| = 0$ se, e somente se, $x = 0$;
$N2)$ $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e para todo $x \in E$;
$N3)$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para quaisquer $x, y \in E$.

Neste caso o par $(E, \|\cdot\|)$ é chamado de *espaço vetorial normado*, ou simplesmente *espaço normado*. Um espaço normado que é completo na métrica definida por

$$x, y \in E \mapsto d(x, y) = \|x - y\|,$$

é chamado de *espaço de Banach*.

Teorema 1.2 *Sejam E espaço vetorial normado e F subespaço vetorial de E. Então $\overline{F}$ é subespaço vetorial de E.*

Demonstração: Como $0 \in F$ e $F \subseteq \overline{F}$ segue que $0 \in \overline{F}$. Sejam $x, y \in \overline{F}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então existem sequências $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq F$ tais que $x_n \longrightarrow x$ e $y_n \longrightarrow y$. Pela continuidade das operações algébricas em E, segue que $x_n + \lambda y_n \longrightarrow x + \lambda y$; e como F é subespaço de E, a sequência $(x_n + \lambda y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq F$. Logo $x + \lambda y \in \overline{F}$. $\square$

As funções entre espaços normados que são simultaneamente lineares e contínuas são chamadas de *operadores lineares contínuos*. Sendo assim, um operador linear contínuo do espaço normado E no espaço normado F, ambos sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$, é uma função $u \colon E \longrightarrow F$ que é linear, isto é

- $u(x + y) = u(x) + u(y)$ para quaisquer $x, y \in E$ e
- $u(\lambda x) = \lambda u(x)$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ e qualquer x em E;

e contínua, isto é, para todos $x_0 \in E$ e $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|u(x) - u(x_0)\| < \varepsilon$ sempre que $x \in E$ e $\|x - x_0\| < \delta$.

Como já mencionamos, o conjunto de todos os operadores lineares contínuos de E em F será denotado por $\mathcal{L}(E; F)$. É claro que $\mathcal{L}(E; F)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ com as operações usuais de funções. Quando F é o corpo dos escalares, escrevemos E' no lugar de $\mathcal{L}(E; \mathbb{K})$, chamamos esse espaço de *dual topológico* de E, ou simplesmente *dual* de E, e dizemos que seus elementos são *funcionais lineares contínuos*.

A Proposição enunciada a seguir nos ensina como normar o espaço $\mathcal{L}(E; F)$ dos operadores lineares contínuos de E em F:

Proposição 1.3 *Sejam E e F espaços normados.*
(a) *A expressão $\|u\| = \sup\{\|u(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leqslant 1\}$ define uma norma no espaço $\mathcal{L}(E; F)$ dos operadores lineares contínuos de E em F.*
(b) *Se F for Banach, então $\mathcal{L}(E; F)$ também é Banach.*

A demonstração desse resultado encontra-se em [3, Teorema 2.1.4].

Enunciaremos agora o Teorema da Aplicação Aberta que é um resultado famoso da Análise Funcional, devido a Banach (1929), e garante que se E e F são espaços de Banach, então todo operador linear contínuo e sobrejetor $u : E \longrightarrow F$ é uma aplicação aberta, isto é, $u(A)$ é aberto em F sempre que A for aberto em E.

Teorema 1.4 (Teorema da Aplicação Aberta) *Sejam E e F espaços de Banach e $u : E \longrightarrow F$ linear, contínuo e sobrejetor. Então u é uma aplicação aberta. Em particular, todo operador linear contínuo e bijetor entre espaços de Banach é um isomorfismo.*

A demonstração desse resultado encontra-se em [3, Teorema 2.4.2].
O próximo resultado é uma conhecida e muito útil consequência do Teorema de Hahn-Banach:

Proposição 1.5 *Sejam E um espaço normado, $E \neq \{0\}$ e $x \in E$. Então*

$$\|x\| = \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in E' \text{ e } \|\varphi\| \leq 1\},$$

e o supremo é atingido.

A demonstração desse resultado encontra-se em [3, Teorema 3.1.5].

O próximo resultado a ser apresentado é uma caracterização de quando um espaço normado é de Banach envolvendo séries absolutamente convergentes. Para isso definamos os conceitos envolvidos:

Definição 1.6 Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de vetores em um espaço normado E. A partir dela, formamos uma nova sequência $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ cujos elementos são as somas

$$s_1 = x_1, s_2 = x_1 + x_2, \ldots, s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \ldots,$$

a qual chamaremos de *sequência das somas parciais da série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$. A parcela x_n é chamada o termo geral da série. Se existir $s \in E$ tal que

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n),$$

diremos que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ é *convergente* e o limite s será chamado de *soma da série.* Escreveremos

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n + \cdots$$

Se a sequência das somas parciais não convergir, diremos que a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ é *divergente.*

Definição 1.7 Uma série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ no espaço normado E é dita *absolutamente convergente* quando $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ é uma série convergente. Quando uma série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ converge mas $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|x_n\|$ é divergente, dizemos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ é *condicionalmente convergente.*

Abordaremos agora o problema da comutatividade. Dada uma série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, mudar a ordem dos seus termos significa tomar uma bijeção $\sigma \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ e considerar a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$. O problema é, então, o seguinte: supondo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ convergente, será ainda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ convergente? No caso afirmativo, vale $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$?

Definição 1.8 Uma série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ no espaço normado E é *incondicionalmente convergente* quando, para toda bijeção $\sigma \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ é convergente.

Proposição 1.9 [3, Proposição 5.3.8] *Seja $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ uma série incondicionalmente convergente em um espaço normado E. Se $\sigma_1, \sigma_2 \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ são funções bijetoras, então*

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_1(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma_2(n)}.$$

Agora sim podemos enunciar a caracterização desejada:

Teorema 1.10 *As seguintes afirmações são equivalentes para um espaço normado E.*

(i) *E é espaço de Banach.*

(ii) *Toda série absolutamente convergente em E é convergente.*

(iii) *Toda série absolutamente convergente em E é incondicionalmente convergente.*

A demonstração desse resultado encontra-se em [23, Teorema 5.3.4].

Para a definição dos espaços ℓ_p e da norma $\|\cdot\|_p$, veja a Lista de Símbolos.

Teorema 1.11 *Seja $1 \leq p \leq q < \infty$. Então $\ell_p \subseteq \ell_q$ e $\|\cdot\|_q \leq \|\cdot\|_p$.*

As seguintes caracterizações dos operadores lineares entre espaços normados que são contínuos é muito útil:

Proposição 1.12 *Sejam E e F espaços normados. Para cada operador linear $u \in L(E;F)$, as afirmações seguintes são equivalentes:*
(a) *u é contínuo.*
(b) *u é contínuo na origem.*
(c) *Existe uma constante $c \geq 0$ tal que $\|u(x)\| \leq c\,\|x\|$ para qualquer $x \in E$.*
(d) $\|u\| := \sup\{\|u(x)\| : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} < \infty$.

Para a demonstração desse resultado veja [24, Proposição 2.7].

Proposição 1.13 *Sejam E e F espaços normados. Considere a aplicação linear contínua $u\colon E \longrightarrow F$. Então*
(a) $\|u(x)\| \leq \|u\| \cdot \|x\|$ *para qualquer* $x \in E$.
(b) $\|u\| = \inf\{c \geq 0 : \|u(x)\| \leq c\|x\|$ *para todo* $x \in E\}$.

A demonstração desse resultado encontra-se em [24, Proposição 2.8].

Observação 1.14 Sejam E e F espaços normados e $u\colon E \longrightarrow F$ um operador linear e contínuo. Então

$$\begin{aligned} \|u\| &= \sup_{x\neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|u(x)\| = \sup_{\|x\|<1} \|u(x)\| \\ &= \inf\{c \geq 0 : \|u(x)\| \leq c\|x\|, \forall x \in E\}. \end{aligned}$$

Os operadores lineraes de posto finito, introduzidos a seguir, serão muito utilizado nesta dissertação.

Definição 1.15 Sejam X e Y espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, $\varphi\colon X \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear e $b \in Y$. O operador

$$\begin{array}{rcl} \varphi \otimes b\colon X & \longrightarrow & Y \\ x & \mapsto & \varphi \otimes b(x) = \varphi(x)b \end{array}$$

é claramente linear. Uma combinação linear de operadores lineares deste tipo é chamada de *operador linear de posto finito.* A forma geral de um operador linear de posto finito de X em Y é então

$$u(x) = \sum_{i=1}^{k} \varphi_i(x) b_i,$$

onde $\varphi_i\colon X \longrightarrow \mathbb{K}$ é um funcional linear e $b_i \in Y$ para $i = 1, \ldots, n$.

Por sua própria definição, é claro que o conjunto de todos os operadores lineares de posto finito de X em Y é subespaço vetorial de $L(X;Y)$.

Daremos agora um exemplo ilustrativo de operador linear contínuo que será útil na sequência da dissertação.

Exemplo 1.16 (Operadores lineares contínuos de posto finito) Sejam E e F espaços normados. Considere $\varphi \in E'$ e $b \in F$. Defina, como antes,

$$\begin{array}{rcl} \varphi \otimes b\colon E & \longrightarrow & F \\ x & \mapsto & \varphi \otimes b(x) = \varphi(x)b. \end{array}$$

Da Definição 1.15 sabemos que $\varphi \otimes b$ é linear. Mostremos que esta aplicação é contínua. Usando a definição da norma de uma aplicação linear,

$$\begin{aligned} \sup\{\|\varphi \otimes b(x)\| : x \in B_E\} &= \sup\{\|\varphi(x)b\| : x \in B_E\} \\ &= \sup\{|\varphi(x)| \cdot \|b\| : x \in B_E\} \\ &= \|b\| \cdot \sup\{|\varphi(x)| : x \in B_E\} \\ &= \|b\| \cdot \sup_{x \in B_E} |\varphi(x)| \\ &= \|b\| \cdot \|\varphi\|. \end{aligned}$$

Portanto $\|\varphi \otimes b\| < \infty$, e aplicando a Proposição 1.12 segue que o operador linear $\varphi \otimes b$ é contínuo, isto é, $(\varphi \otimes b) \in \mathcal{L}(E; F)$. Mais ainda,

$$\|\varphi \otimes b\| = \|\varphi\| \cdot \|b\|.$$

Denotaremos por $\mathcal{F}(E; F)$ o subespaço de $\mathcal{L}(E; F)$ gerado pelos operadores lineares do tipo que acabamos de estudar.

Dado um subconjunto A de um espaço vetorial normado E, por $[A]$ ou span$\{A\}$ denotaremos o subespaço de E gerado por A, isto é, o conjunto de todas as combinações lineares (finitas) de elementos de A. Assim,

$$\mathcal{F}(E; F) = \text{span}\{\varphi \otimes b : b \in F \text{ e } \varphi \in E'\}.$$

Os elementos de $\mathcal{F}(E; F)$ são chamados de *operadores lineares contínuos de posto finito.*

O próximo resultado envolve compacidade e será útil mais adiante.

Proposição 1.17 *Sejam τ e τ' topologias em um conjunto X tais que $\tau \subseteq \tau'$. Se $A \subseteq X$ é τ'-compacto, então A é τ-compacto.*

Demonstração: Seja $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ uma cobertura aberta de A na topologia τ. Então $A_\alpha \in \tau$ para todo $\alpha \in I$ e $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$. Como $\tau \subseteq \tau'$ segue que $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$ é também uma cobertura aberta de A na topologia τ'. Como A é τ'-compacto, existem $n \in \mathbb{N}$ e $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in I$ tais que $A \subseteq (A_{\alpha_1} \cup A_{\alpha_2} \cup \cdots \cup A_{\alpha_n})$. Segue que A é τ-compacto. □

Um conceito importante nesta dissertação envolve separabilidade. Devido a isso definimos:

Definição 1.18 Um espaço normado E é *separável* se contém um subconjunto enumerável e denso, ou, equivalentemente, se contém uma sequência densa. Mais geralmente, um espaço métrico M é separável quando contém um subconjunto denso e enumerável.

Proposição 1.19 *Espaços normados de dimensão finita são separáveis.*

Para a demonstração desse resultado veja [3, Exemplo 1.6.2].

O Lema a seguir será útil quando precisarmos mostrar que um determinado espaço é separável.

Lema 1.20 *Um espaço normado E é separável se, e somente se, existe um subconjunto enumerável $A \subseteq E$ tal que $[A]$ é denso em E.*

Para a demonstração desse resultado veja [3, Exemplo 1.6.3].

Da teoria dos espaços métricos sabe-se que todo subconjunto de um espaço métrico separável é também separável (veja, por exemplo, [16, Exemplo 9.1.4]). Temos então:

Proposição 1.21 *Todo subespaço de um espaço normado separável é também separável.*

Teorema 1.22 *Seja E um espaço normado. Se E' é separável, então E também é separável.*

Para a demonstração desse resultado veja [3, Teorema 3.3.2].

Um resultado trivial é

Proposição 1.23 *Se E é separável, então o seu fecho $\overline{E}$ é um espaço separável.*

No produto cartesiano de dois espaços normados podemos considerar as normas da soma, euclidiana e do máximo. Como essas três normas são equivalentes, consideraremos o produto cartesiano munido de qualquer uma das três.

Proposição 1.24 *Sejam E e F espaços normados separáveis. Então $E \times F$ também é separável.*

Podemos saber se um espaço é separável através da sua bola unitária fechada ou de sua esfera unitária:

Lema 1.25 *As seguintes condições são equivalentes para um espaço normado E:*
(a) *E é espaço separável;*
(b) *B_E é separável;*
(c) *S_E é separável.*

Nesta dissertação usaremos o seguinte teorema de separação, também conhecido como segunda forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach:

Teorema 1.26 (Segunda Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach) *Sejam A e B subconjuntos convexos, não-vazios e disjuntos do espaço normado real E. Se A é fechado e B é compacto, então existem um funcional $\varphi \in E'$ e a, $b \in \mathbb{R}$ tais que*

$$\varphi(x) \leq a < b \leq \varphi(x) \text{ para todos } x \in A \text{ e } y \in B.$$

Para $c \in (a, b)$ diz-se que o hiperplano fechado $[\varphi = c] := \{x \in E : \varphi(x) = c\}$ separa A e B estritamente.

Para a demonstração desse resultado veja [3, Teorema 3.4.9].

Dizemos que dois espaços normados E e F são *topologicamente isomorfos*, ou simplesmente *isomorfos*, se existir um operador linear contínuo bijetor $u\colon E \longrightarrow F$ cujo operador inverso $u^{-1}\colon F \longrightarrow E$ - que é sempre linear - é também contínuo. Tal operador u é chamado de *isomorfismo topológico*, ou simplesmente *isomorfismo*.

Um operador linear $u : E \longrightarrow F$ tal que $\|u(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in E$ é chamado de *imersão isométrica*. Observe que toda imersão isométrica é injetora e contínua. Um isomorfismo que é também uma imersão isométrica é chamado de *isomorfismo isométrico*, e nesse caso dizemos que os espaços são *isomorfos isometricamente*.

Vejamos agora a relação de dualidade que descreve o dual de c_0:

Proposição 1.27 *Os espaços ℓ_1 e $(c_0)'$ são isomorfos isometricamente através da relação de dualidade*

$$b = (b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1 \mapsto \varphi_b \in (c_0)' \text{ em que } \varphi_b\left((a_j)_{j=1}^{\infty}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j \text{ para toda } (a_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0.$$

Para a demonstração desse resultado veja [3, Teorema 4.2.3].

Definição 1.28 A *topologia fraca* no espaço normado E, denotada por $\sigma(E; E')$, é a topologia gerada pelos funcionais lineares contínuos $\varphi \in E'$. Isto é, $\sigma(E; E')$ é a menor topologia em E que mantém contínuos todos os funcionais $\varphi \in E'$.

Quando uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E converge para $x \in E$ na topologia fraca, escrevemos $x_n \xrightarrow{w} x$.

Proposição 1.29 *Seja E um espaço normado. Então:*
(a) *Funcionais lineares contínuos são fracamente contínuos, isto é, para todo $\varphi \in E'$, $\varphi : (E; \sigma(E; E')) \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínuo.*
(b) *Para cada $x_0 \in E$, os conjuntos da forma*

$$V_{J,\varepsilon} = \{x \in E : |\varphi_i(x) - \varphi_i(x_0)| < \varepsilon \text{ para todo } i \in J\},$$

onde J é um conjunto finito, $\varphi_i \in E'$ para todo $i \in J$ e $\varepsilon > 0$, formam uma base de vizinhanças abertas de x_0 para a topologia fraca.
(c) *Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E. Então $x_n \xrightarrow{w} x$ se, e somente se, $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ para todo $\varphi \in E'$.*
(d) *A topologia fraca $\sigma(E; E')$ é de Hausdorff.*
(e) *Sejam Z um espaço topológico e $f : Z \longrightarrow (E; \sigma(E; E'))$. Então f é contínua se, e somente se, $\varphi \circ f : Z \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínua para todo $\varphi \in E'$.*

Para a demonstração desse resultado veja [3, Teorema 6.2.2].

Corolário 1.30 *Em um espaço normado E, se $x_n \longrightarrow x$ então $x_n \xrightarrow{w} x$.*

Demonstração: Se $x_n \longrightarrow x$, da continuidade dos funcionais de E' segue que $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ para todo $\varphi \in E'$. Da Proposição 1.29(c) segue que $x_n \xrightarrow{w} x$. $\square$

Proposição 1.31 *Seja E um espaço normado.*
(a) *Se $x_n \xrightarrow{w} x$ em E, então a sequência $(\|x_n\|)_{n=1}^{\infty}$ é limitada e $\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\|$.*
(b) *Se $x_n \xrightarrow{w} x$ em E e $\varphi_n \longrightarrow \varphi$ em E', então $\varphi_n(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$ em $\mathbb{K}$.*

Para a demonstração desse resultado veja [3, Teorema 6.2.5].

Teorema 1.32 *Sejam E e F espaços de Banach. Um operador linear $u \colon E \longrightarrow F$ é contínuo se, e somente se, $u \colon (E; \sigma(E; E')) \longrightarrow (F; \sigma(F; F'))$ é contínuo.*

Para a demonstração desse resultado veja [3, Teorema 6.2.9].

Observação 1.33 O Teorema 1.32 vale também para operadores entre espaços normados. Veja [19, Theorem 2.5.11].

Sabemos que, em dimensão infinita, existem conjuntos fechados que não são fechados na topologia fraca. Ao impormos a convexidade esta possibilidade desaparece:

Teorema 1.34 (Teorema de Mazur) *Sejam E um espaço normado e K um subconjunto convexo de E. Então o fecho de K na topologia da norma coindice com o fecho de K na topologia fraca. Em particular, um conjunto convexo é fechado na topologia fraca se, e somente se, é fechado na topologia da norma.*

A demonstração do Teorema de Mazur encontra-se em [3, Teorema 6.2.11].

Para todo espaço normado E, podemos considerar seu *dual* E', que pela Proposição 1.3 é um espaço de Banach. Podemos então considerar o dual de E', chamado de *bidual* de E e denotado por E''. Ou seja, $E'' = (E')'$.

Dado um espaço normado E, segue imediatamente da Proposição 1.5 que o operador linear

$$J_E \colon E \longrightarrow E'' \ , \ J_E(x)(\varphi) = \varphi(x),$$

chamado de *mergulho canônico* de E em E'', é uma imersão isométrica.

Definição 1.35 Um espaço normado E é dito *reflexivo* se o mergulho canônico $J_E \colon E \longrightarrow E''$ for sobrejetor, ou seja, se $J_E(E) = E''$. Neste caso J_E é um isomorfismo isométrico.

Proposição 1.36 *Um espaço de Banach E é reflexivo se, e somente se, seu dual E' também é reflexivo.*

A demonstração desse resultado encontra-se em [3, Proposição 4.3.13].

Proposição 1.37 *Em um espaço reflexivo, toda sequência limitada tem subsequência fracamente convergente.*

A demonstração desse resultado encontra-se em [3, Teorema 6.5.6].

Veremos no transcorrer desta dissertação que é muito proveitoso considerar em E' a topologia gerada pelos elementos de $J_E(E)$:

Definição 1.38 A *topologia fraca-estrela* no dual E' do espaço normado E, denotada por $\sigma(E'; E)$, é a topologia em E' gerada pelas funções pertencentes ao conjunto $J_E(E) = \{J_E(x)\}_{x \in E}$, isto é, pelas funções $\varphi \in E' \mapsto J_E(\varphi)(x) = \varphi(x) \in \mathbb{K}$, onde $x \in E$.
Quando uma sequência (φ_n) em E' converge para $\varphi \in E'$ na topologia fraca-estrela escrevemos $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$.

Proposição 1.39 *Seja E um espaço normado. Então:*
(a) *Para todo $x \in E$, $J_E(x) : (E'; \sigma(E'; E)) \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínuo.*
(b) *Para cada $\varphi_0 \in E'$, os conjuntos da forma*

$$W_{J,\varepsilon} = \{\varphi \in E' : |\varphi(x_i) - \varphi_0(x_i)| < \varepsilon \text{ para todo } i \in J\},$$

onde J é um conjunto finito, $x_i \in E$ para todo $i \in J$ e $\varepsilon > 0$, formam uma base de vizinhanças abertas de φ_0 para a topologia fraca-estrela.
(c) *Seja $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em E'. Então $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$ se, e somente se, $\varphi_n(x) \longrightarrow \varphi(x)$ para todo $x \in E$.*
(d) *A topologia fraca-estrela $\sigma(E'; E)$ é de Hausdorff.*
(e) *Sejam Z um espaço topológico e $f : Z \longrightarrow (E'; \sigma(E'; E))$. Então f é contínua se, e somente se, $J_E(x) \circ f : Z \longrightarrow \mathbb{K}$ é contínua para todo $x \in E'$.*

Para a demonstração desse resultado veja [3, Teorema 6.3.2].

Denotemos por $(E'; \sigma(E'; E))'$ o espaço formados pelos funcionais lineares de E' em $\mathbb{K}$ que são contínuos na topologia fraca-estrela $\sigma(E'; E)$. Pela Proposição 1.39 sabemos que $J_E(E) \subseteq (E'; \sigma(E'; E))'$.

Teorema 1.40 *Sejam E um espaço normado e $f : (E'; \sigma(E'; E)) \longrightarrow \mathbb{K}$ um funcional linear e contínuo. Então existe $x \in E$ tal que $f = J_E(x)$. Em outras palavras,*

$$(E'; \sigma(E'; E))' = J_E(E).$$

A demonstração desse resultado encontra-se em [3, Proposição 6.3.6].

Note que, pela definição da topologia fraca-estrela, $J_E(x) \in E''$ é w^*-contínuo.

Proposição 1.41 *Seja E um espaço normado.*
(a) *A topologia fraca está contida na topologia da norma.*
(b) *As topologias da norma e fraca coincidem se, e somente se, E tem dimensão finita.*
(c) *A topologia fraca-estrela $(E'; \sigma(E'; E))$ está contida na topologia fraca $(E'; \sigma(E'; E''))$ em E'.*
(d) *As topologias fraca $(E'; \sigma(E'; E''))$ e fraca-estrela $(E'; \sigma(E'; E))$ coincidem em E' se, e somente se, E é reflexivo.*
(e) *A função $J_E \colon (E, \sigma(E, E')) \longrightarrow (E'', \sigma(E'', E'))$ é contínua.*

A demonstração desses resultados encontram-se em [3, Proposições 6.2.6 e 6.3.8 e Lema 6.4.1].

De acordo com o resultado a seguir, a bola unitária fechada de um espaço normado de dimensão infinita nunca é compacta na topologia da norma.

Teorema 1.42 *Um espaço normado E tem dimensão finita se, e somente se, a bola unitária fechada de E é compacta na topologia da norma.*

Para a demonstração desse resultado veja [3, Teorema 1.5.4].

Em forte contraste, na topologia fraca-estrela a bola unitária fechada é sempre compacta:

Teorema 1.43 (Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki) *Para todo espaço normado E, a bola $B_{E'}$ é compacta na topologia fraca-estrela de E'.*

Para a demonstração desse resultado veja [3, Teorema 6.3.9].

O Teorema abaixo foi provado por H. Goldstine em 1938.

Teorema 1.44 (Teorema de Goldstine) *Sejam E um espaço de Banach e $J_E : E \longrightarrow E''$ o mergulho canônico. Então $\overline{J_E(B_E)}^{w^*} = B_{E''}$.*

Para a demonstração desse resultado veja [3, Teorema 6.4.4].

Vejamos a caracterização dos espaços reflexivos como aqueles nos quais a bola unitária fechada é fracamente compacta:

Teorema 1.45 (Teorema de Kakutani) *Um espaço de Banach E é reflexivo se, e somente se, a bola unitária fechada B_E é compacta na topologia fraca $\sigma(E; E')$.*

Para a demonstração desse resultado veja [3, Teorema 6.4.5].

O Teorema de Ascoli enunciado abaixo caracteriza os subconjuntos relativamente compactos do espaço métrico completo $C(K)$ das funções contínuas $f : K \longrightarrow \mathbb{K}$, onde K é um espaço métrico compacto, com a métrica

$$d(f, g) = \sup \{|f(t) - g(t)| : t \in K\}.$$

Teorema 1.46 (Teorema de Ascoli) *Sejam K um espaço métrico compacto e A um subconjunto de $C(K)$. Então A é compacto em $C(K)$ se, e somente se, as seguintes condições estão satisfeitas:*
(a) A é equicontínuo, isto é, para todos $t_0 \in K$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(t) - f(t_0)| < \varepsilon \text{ para todos } t \in K \text{ com } d(t; t_0) < \delta \text{ e } f \in A.$$

(b) O conjunto $\{f(t) : f \in A\}$ é limitado em $\mathbb{K}$ para todo $t \in K$.

A demonstração de uma forma do Teorema de Ascoli mais geral que a enunciada acima encontra-se em [11, Teorema III.2.1].

CAPÍTULO 2

IDEAIS DE OPERADORES

Conforme descrito na Introdução, o estudo de classes especiais de operadores lineares – em particular, ideais de operadores – foi consequência natural do desenvolvimento da Análise Funcional Linear. Neste capítulo abordaremos a teoria geral de ideais de operadores, que foi introduzida por A. Pietsch por volta de 1969 com o intuito de unificar o estudo de várias classes especiais de operadores lineares que vinham sendo estudadas separadamente. Além disso ilustraremos com a teoria estudando em detalhes os ideais compostos pelos seguintes operadores: posto finito, aproximáveis, compactos, absolutamente p-somantes, fracamente compactos, completamente contínuos, nucleares e separáveis. Além de ilustrar a teoria geral, esses ideais serão retomados no Capítulo 4. Grande parte das demonstrações desse capítulo foram baseadas na dissertação de mestrado [24].

2.1 Teoria geral de ideais de operadores

Relembre que um operador linear $u\colon E \longrightarrow F$ entre espaços vetoriais tem *posto finito* se sua imagem tem dimensão finita. Para operadores entre espaços normados, no Exemplo 1.16 adotamos a notação $\mathcal{F}(E;F)$ para designar o conjunto de todos os operadores lineares contínuos de posto finito de E em F.

Definição 2.1.1 Um *ideal de operadores* $\mathcal{I}$ é uma subclasse da classe $\mathcal{L}$ de todos os operadores lineares contínuos entre espaços de Banach tal que, para todos espaços de Banach E e F, suas componentes $\mathcal{I}(E;F) := \mathcal{L}(E;F) \cap \mathcal{I}$ satisfazem:

(1) $\mathcal{I}(E;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$ que contém os operadores lineares contínuos de posto finito.

(2) A propriedade de ideal: se $u_1 \in \mathcal{L}(F_0;F)$, $u_2 \in \mathcal{I}(E_0;F_0)$ e $u_3 \in \mathcal{L}(E;E_0)$, então a composição $u_1 \circ u_2 \circ u_3$ pertence a $\mathcal{I}(E;F)$.

Além disso, se existe uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}\colon \mathcal{I} \longrightarrow [0,\infty)$ tal que

(a) A função $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ restrita à componente $\mathcal{I}(E;F)$ é uma norma para todos espaços de Banach E e F;

(b) O funcional $Id_{\mathbb{K}}\colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ dado por $Id_{\mathbb{K}}(\lambda) = \lambda$ é tal que $\|Id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 1$;

(c) Se $u_1 \in \mathcal{L}(F_0;F)$, $u_2 \in \mathcal{I}(E_0;F_0)$ e $u_3 \in \mathcal{L}(E;E_0)$, com a composição satisfazendo

$$\|u_1 \circ u_2 \circ u_3\|_{\mathcal{I}} \leq \|u_1\| \cdot \|u_2\|_{\mathcal{I}} \cdot \|u_3\|\,;$$

então $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um *ideal normado de operadores.* Mais ainda, se todas as componentes $\mathcal{I}(E;F)$ são subespaços completos relativamente a norma $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$, dizemos que $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um *ideal de Banach.*

Dizemos que um ideal de operadores $\mathcal{I}$, é um *ideal fechado* se todas as componentes $\mathcal{I}(E;F)$ são espaços fechados em $\mathcal{L}(E;F)$ em relação à norma usual de operadores. Assim, se $\mathcal{I}$ é um ideal fechado com a norma usual de operadores, temos que cada componente $\mathcal{I}(E;F)$ é um subespaço completo relativamente à norma induzida, ou seja, todo ideal fechado com a norma usual de operadores é um ideal de Banach.

Note que $\mathcal{L}$ é o maior ideal de operadores.

Observação 2.1.2 (i) Muitas vezes a propriedade que define os operadores que pertencem a um certo ideal faz sentido para operadores entre espaços normados. Podemos então definir um ideal considerando operadores entre espaços normados. Mas quando tratarmos desta classe como ideal, consideraremos apenas o operadores da classe que atuam entre espaços de Banach.
(ii) Se considerarmos um ideal de operadores $\mathcal{I}$ com a norma usual de operadores, temos que $(\mathcal{I}, \|\cdot\|)$ é um ideal normado:
(a) A função $\|\cdot\|$ restrita à componente $\mathcal{I}(E;F)$ é uma norma para todos os espaços de Banach E e F por se tratar da norma induzida pela norma de operadores uma vez que $\mathcal{I}(E;F) \subseteq \mathcal{L}(E;F)$.
(b)$\|Id_{\mathbb{K}}\| = \sup\{|Id_{\mathbb{K}}(\lambda)| : \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq 1\} = \sup\{|\lambda)| : \lambda \in \mathbb{K}, |\lambda| \leq 1\} = 1$.
(c) Sejam $u_1 \in \mathcal{L}(F_0;F), u_2 \in \mathcal{I}(E_0;F_0) \subseteq \mathcal{L}(E_0;F_0), u_3 \in \mathcal{L}(E;E_0)$ e $x \in E$. Então

$$\|u_1(u_2(u_3(x)))\| \leq \|u_1\| \cdot \|u_2\| \cdot \|u_3\| \cdot \|x\|\,.$$

Portanto, pela Proposição 1.13, $\|u_1 \circ u_2 \circ u_3\| \leq \|u_1\| \cdot \|u_2\| \cdot \|u_3\|$. Logo $(\mathcal{I}, \|\cdot\|)$ é um ideal normado.

O critério a seguir, que será muito útil na comprovação de que determinadas classes são ideais de Banach, encontra-se enunciado – sem demonstração – em A. Defant e K. Floret [6, Criterion 9.4] e A. Pietsch [22, Theorem 6.2.3].

Teorema 2.1.3 *Seja $\mathcal{I}$ uma subclasse de $\mathcal{L}$ na qual está definida uma função $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} : \mathcal{I} \longrightarrow [0,\infty)$. Então $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal de Banach se, e somente se, as seguintes condições estão satisfeitas:*
(1) *$Id_{\mathbb{K}} \in \mathcal{I}(\mathbb{K};\mathbb{K})$ e $\|Id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 1$;*

(2) *Se* $u_1 \in \mathcal{L}(F_0;F)$, $u_2 \in \mathcal{I}(E_0;F_0)$ *e* $u_3 \in \mathcal{L}(E;E_0)$, *então* $u_1 \circ u_2 \circ u_3 \in \mathcal{I}(E;F)$ *e* $\|u_1 \circ u_2 \circ u_3\|_{\mathcal{I}} \le \|u_1\| \cdot \|u_2\|_{\mathcal{I}} \cdot \|u_3\|$;
(3) *Se* $u_n \in \mathcal{I}(E;F)$ *para todo* n *e* $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_{\mathcal{I}} < \infty$, *então* $u := \sum_{n=1}^{\infty} u_n \in \mathcal{I}(E;F)$ *e*

$$\|u\|_{\mathcal{I}} \le \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_{\mathcal{I}}.$$

Demonstração: Suponha primeiramente que $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ seja um ideal de Banach. Por conter os de posto finito, $Id_{\mathbb{K}} \in \mathcal{I}(\mathbb{K};\mathbb{K})$, e a outra afirmação da condição (1) segue da condição (b) da Definição 2.1.1. A condição (2) segue das condições (2) e (c) da Definição 2.1.1. Nas hipóteses da condição (3), a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é absolutamente convergente no espaço de Banach $\mathcal{I}(E;F)$, logo convergente pelo Teorema 1.10. Isso prova que $u \in \mathcal{I}(E;F)$. Da continuidade da norma em um espaço normado segue que

$$\|u\|_{\mathcal{I}} = \left\|\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right\|_{\mathcal{I}} = \left\|\lim_n \sum_{j=1}^{n} u_j\right\|_{\mathcal{I}} = \lim_n \left\|\sum_{j=1}^{n} u_j\right\|_{\mathcal{I}} \le \lim_n \sum_{j=1}^{n} \|u_j\|_{\mathcal{I}} = \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_{\mathcal{I}}.$$

Reciprocamente, suponha que as condições (1), (2) e (3) do enunciado estejam satisfeitas. Dados espaços de Banach E e F, vejamos que o operador nulo de E em F pertence a $\mathcal{I}(E;F)$: de fato, tomando um funcional $\varphi \in E'$ qualquer e denotando por v o operador nulo de $\mathbb{K}$ em F, é claro que o operador nulo de E em F coincide com $v \circ Id_{\mathbb{K}} \circ \varphi$. Pela condição (2) segue que o operador nulo de E em F pertence a $\mathcal{I}(E;F)$ e que sua norma $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ é igual a zero. Que a soma de operadores em $\mathcal{I}(E;F)$ está em $\mathcal{I}(E;F)$ e que $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ satisfaz a desigualdade triangular segue tomando $u_n = 0$ para todo $n \ge 3$ na condição (3). Sejam agora $u \in \mathcal{I}(E;F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. É claro que o operador linear

$$u_\lambda \colon F \longrightarrow F \ , \ u_\lambda(y) = \lambda y,$$

é contínuo e $\|u_\lambda\| = |\lambda|$. Da condição (2) segue que $\lambda u = u_\lambda \circ u \in \mathcal{I}(E;F)$ e $\|\lambda u\|_{\mathcal{I}} \le |\lambda| \cdot \|u\|_{\mathcal{I}}$. A desigualdade inversa é óbvia se $\lambda = 0$, e para $\lambda \ne 0$, usando o que acabamos de provar para o escalar $\frac{1}{\lambda}$, temos

$$\|u\|_{\mathcal{I}} = \left\|\frac{1}{\lambda}\lambda u\right\|_{\mathcal{I}} \le \frac{1}{|\lambda|}\|\lambda u\|_{\mathcal{I}},$$

o que comprova que $\|\lambda u\|_{\mathcal{I}} = |\lambda| \cdot \|u\|_{\mathcal{I}}$. Já está provado que $\mathcal{I}(E;F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$ e para provar que $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ é uma norma em $\mathcal{I}(E;F)$ falta apenas mostrar que o único vetor de norma nula é o vetor nulo. Para isso tomemos $u \in \mathcal{I}(E;F)$ com $\|u\|_{\mathcal{I}} = 0$. Supondo $u \ne 0$, podemos tomar $0 \ne x \in E$ tal que $u(x) \ne 0$. Pelo Teorema de Hahn-Banach na forma da Proposição 1.5, existe um funcional $\varphi \in F'$ tal que $\varphi(u(x)) = 1$. O operador linear

$$T \colon \mathbb{K} \longrightarrow E \ , \ T(\lambda) = \lambda x,$$

é contínuo por estar definido em um espaço de dimensão finita. De

$$\varphi \circ u \circ T(\lambda) = \varphi(u(T(\lambda))) = \varphi(u(\lambda x)) = \lambda\varphi(u(x)) = \lambda$$

para todo $\lambda \in \mathbb{K}$, concluímos, pela condição (2), que $\varphi \circ u \circ T = Id_{\mathbb{K}} \in \mathcal{I}(E;F)$ e $\|Id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} \leq \|\varphi\| \cdot \|u\|_{\mathcal{I}} \cdot \|T\| = 0$. Disso segue que $\|Id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = 0$, e como isso contradiz a condição (1) concluímos que $u = 0$. Está provado que $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ é uma norma no espaço vetorial $\mathcal{I}(E;F)$.

Dados $\varphi \in E'$ e $b \in F$, o operador linear

$$T_b \colon \mathbb{K} \longrightarrow F \ , \ T_b(\lambda) = \lambda b,$$

é claramente contínuo. De

$$T_b \circ Id_{\mathbb{K}} \circ \varphi(x) = T_b(\varphi(x)) = \varphi(x)b = \varphi \otimes b(x)$$

para todo $x \in E$, concluímos que $\varphi \otimes b = T_b \circ Id_{\mathbb{K}} \circ \varphi$. Das condições (1) e (2) segue que $\varphi \otimes b \in \mathcal{I}(E;F)$. Como já provamos que $\mathcal{I}(E;F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$, isso implica que $\mathcal{I}(E;F)$ contém os operadores lineares contínuos de posto finito.

As condições (2) e (c) da Definição 2.1.1 seguem da condição (2) do enunciado. A condição (b) da Definição 2.1.1 seguem da condição (1) do enunciado. A condição (3) do enunciado nos diz que toda série absolutamente convergente em $\mathcal{I}(E;F)$ é convergente, o que pelo Teorema 1.10 nos garante que $(\mathcal{I}(E;F), \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é espaço de Banach. Isso completa a demonstração. □

Do Exemplo 1.16 sabemos que dados $\varphi \in E'$ e $y \in F$, o operador $\varphi \otimes y$ é linear e contínuo e $\|\varphi \otimes y\| = \|y\| \cdot \|\varphi\|$. E como posto$(\varphi \otimes y) = 1 < \infty$, tem-se $\varphi \otimes y \in \mathcal{I}(E;F)$ para todo ideal de operadores $\mathcal{I}$. Em particular, o operador

$$\begin{array}{rcl} Id_{\mathbb{K}} \otimes y \colon \mathbb{K} & \longrightarrow & F \\ \lambda & \mapsto & (Id_{\mathbb{K}} \otimes y)(\lambda) = \lambda y, \end{array}$$

pertence a todo ideal de operadores e $\|Id_{\mathbb{K}} \otimes y\| = \|y\| \cdot \|Id_{\mathbb{K}}\| = \|y\|$.

Proposição 2.1.4 *Sejam E e F espaços de Banach e $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ um ideal normado. Então*
(a) $\|u\| \leq \|u\|_{\mathcal{I}}$ *para todo* $u \in \mathcal{I}(E;F)$.
(b) $\|\varphi \otimes y\|_{\mathcal{I}} = \|\varphi\| \cdot \|y\|$ *para todos* $\varphi \in E'$ *e* $y \in F$.

Demonstração: (a) Sejam $u \in \mathcal{I}(E;F)$, $x \in B_E$ e $\varphi \in B_{F'}$. Primeiramente provemos que $\varphi(u(x))Id_{\mathbb{K}} = \varphi \circ u \circ (Id_{\mathbb{K}} \otimes x)$. Com efeito, para todo $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{array}{rcl} (\varphi(u(x))Id_{\mathbb{K}})(\lambda) & = & \varphi(u(x))Id_{\mathbb{K}}(\lambda) = \varphi(u(x))\lambda = \varphi(u(\lambda x)) = \varphi(u(Id_{\mathbb{K}}(\lambda)x)) \\ & = & \varphi(u((Id_{\mathbb{K}} \otimes x)(\lambda))) = (\varphi \circ u \circ (Id_{\mathbb{K}} \otimes x))(\lambda). \end{array}$$

De

$$\begin{array}{rcl} |\varphi(u(x))| & = & |\varphi(u(x))| \cdot \|Id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} = \|\varphi(u(x))Id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} \\ & = & \|\varphi \circ u \circ (Id_{\mathbb{K}} \otimes x)\|_{\mathcal{I}} \leq \|\varphi\| \cdot \|u\|_{\mathcal{I}} \cdot \|Id_{\mathbb{K}} \otimes x\| \\ & = & \|\varphi\| \cdot \|u\|_{\mathcal{I}} \cdot \|x\| \leq 1 \cdot \|u\|_{\mathcal{I}} \cdot 1 = \|u\|_{\mathcal{I}}\,, \end{array}$$

segue que $|\varphi(u(x))| \leq \|u\|_{\mathcal{I}}$ para todos $x \in B_E$, $\varphi \in B_{F'}$ e $u \in \mathcal{I}(E;F)$. Daí pelo Teorema de Hahn Banach obtemos

$$\|u\| = \sup_{x \in B_E} ||u(x)|| = \sup_{x \in B_E} \sup_{\varphi \in B_{F'}} |\varphi(u(x))| \leq \|u\|_{\mathcal{I}}.$$

(b) Dados $\varphi \in E'$ e $y \in F$, vimos no parágrafo acima que $\varphi \otimes y \in \mathcal{I}(E;F)$. Pelo item (a) segue que $\|\varphi \otimes y\| \leq \|\varphi \otimes y\|_{\mathcal{I}}$. Por outro lado, para todo $w \in E$,

$$\begin{aligned} ((Id_{\mathbb{K}} \otimes y) \circ Id_{\mathbb{K}} \circ \varphi)(w) &= (Id_{\mathbb{K}} \otimes y)(Id_{\mathbb{K}}(\varphi(w))) \\ &= (Id_{\mathbb{K}} \otimes y)(\varphi(w)) \\ &= Id_{\mathbb{K}}(\varphi(w))y \\ &= \varphi(w)y \\ &= (\varphi \otimes y)(w), \end{aligned}$$

mostrando que $\varphi \otimes y = (Id_{\mathbb{K}} \otimes y) \circ Id_{\mathbb{K}} \circ \varphi$. Assim,

$$\begin{aligned} \|\varphi\| \cdot \|y\| &= \|\varphi \otimes y\| \leq \|\varphi \otimes y\|_{\mathcal{I}} \\ &= \|(Id_{\mathbb{K}} \otimes y) \circ Id_{\mathbb{K}} \circ \varphi\|_{\mathcal{I}} \\ &\leq \|Id_{\mathbb{K}} \otimes y\| \cdot \|Id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}} \cdot \|\varphi\| \\ &= \|y\| \cdot 1 \cdot \|\varphi\| = \|y\| \cdot \|\varphi\|, \end{aligned}$$

provando que $\|\varphi \otimes y\|_{\mathcal{I}} = \|\varphi\| \cdot \|y\|$. □

Dados um ideal de operadores $\mathcal{I}$ e espaços de Banach E e F, definimos

$$\overline{\mathcal{I}}(E;F) := \overline{\mathcal{I}(E;F)},$$

onde o fecho é tomado em relação à norma usual de operadores.

Teorema 2.1.5 *Seja $\mathcal{I}$ ideal de operadores. Então $\overline{\mathcal{I}}$ é um ideal fechado, ou seja, $\overline{\mathcal{I}}$ é um ideal de Banach com a norma usual de operadores.*

Demonstração: Primeiramente mostraremos que $\overline{\mathcal{I}}$ é um ideal de operadores:

(1) Como $\mathcal{I}$ é um ideal de operadores, sabemos que $\mathcal{I}(E;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$ que contém $\mathcal{F}(E;F)$, e portanto, pelo Teorema 1.2,

$$\mathcal{F}(E;F) \subseteq \mathcal{I}(E;F) \subseteq \overline{\mathcal{I}}(E;F) := \overline{\mathcal{I}(E;F)}$$

é também um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$ contendo $\mathcal{F}(E;F)$.

(2) Propriedade de ideal: sejam $u_1 \in \mathcal{L}(F_0;F), u_2 \in \overline{\mathcal{I}}(E_0;F_0)$ e $u_3 \in \mathcal{L}(E;E_0)$. Logo existe uma sequência $(v_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{I}(E_0;F_0)$ tal que $v_n \longrightarrow u_2$ na norma usual de operadores. Da propriedade de ideal de $\mathcal{I}$ sabemos que a sequência $(u_1 \circ v_n \circ u_3)_{n=1}^{\infty}$ está inteiramente contida em $\mathcal{I}(E;F)$. Mais ainda, para cada $x \in E$,

$$\begin{aligned} \|u_1(v_n(u_3(x))) - u_1(u_2(u_3(x)))\| &= \|u_1((v_n(u_3(x))) - (u_2(u_3(x))))\| \\ &= \|u_1((v_n - u_2)(u_3(x)))\| \\ &\leq \|u_1\| \cdot \|(v_n - u_2)(u_3(x))\| \\ &\leq \|u_1\| \cdot \|v_n - u_2\| \cdot \|u_3(x)\| \\ &\leq \|u_1\| \cdot \|v_n - u_2\| \cdot \|u_3\| \cdot \|x\|. \end{aligned}$$

Segue que

$$0 \leq \|u_1 \circ v_n \circ u_3 - u_1 \circ u_2 \circ u_3\| \leq \|u_1\| \cdot \|v_n - u_2\| \cdot \|u_3\| \longrightarrow 0 \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Portanto

$$u_1 \circ v_n \circ u_3 \longrightarrow u_1 \circ u_2 \circ u_3$$

na norma usual de operadores e $(u_1 \circ v_n \circ u_3)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{I}(E;F)$. Então $u_1 \circ u_2 \circ u_3 \in \overline{\mathcal{I}}(E;F)$. Assim, $\overline{\mathcal{I}}$ é um ideal de operadores. Como, por definição $\overline{\mathcal{I}}(E;F) = \overline{\mathcal{I}(E;F)}$, temos que $\overline{\mathcal{I}}$ é um ideal fechado. E, como cada componente deste ideal é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(E;F)$, segue que $(\overline{\mathcal{I}}, \|\cdot\|)$ é um ideal de Banach. □

2.2 Operadores de posto finito e operadores aproximáveis

Nesta seção veremos que a classe dos operadores lineares contínuos de posto finito entre espaços de Banach, a qual estamos denotando por $\mathcal{F}$, é um ideal de operadores. A seção culminará com um exemplo mostrando que o ideal dos operadores de posto finito não é Banach com a norma usual de operadores. Isso ensejará a introdução do fecho do ideal dos operadores de posto finito, chamado de ideal dos operadores aproximáveis.

A rigor, usamos duas definições para um operador ser de tipo finito, a saber, se pertence ao subespaço gerado pelos operadores do tipo $\varphi \otimes b$ e se sua imagem tem dimensão finita. Vejamos que, de fato, essas duas propriedades são equivalentes. Dado $u \in \mathcal{L}(E;F)$, devemos provar que a imagem de u tem dimensão finita se, e somente se, existem $n \in \mathbb{N}, b_1, \ldots, b_n \in F$ e $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E'$ tais que $u = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes b_i$.

Suponha primeiramente que a imagem de u tenha dimensão finita. Chame $n = \dim(u(E)) \in \mathbb{N}$ e escolha uma base $\{b_1, \ldots, b_n\}$ para $u(E)$. Assim, para todo $x \in E$ existem únicos $\lambda_1, \ldots \lambda_n \in \mathbb{K}$ tais que $u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, defina

$$\begin{aligned} \varphi_i \colon E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \varphi_i(x) = \lambda_i. \end{aligned}$$

A linearidade de φ_i segue da unicidade da representação de cada elemento de $u(E)$ como combinação linear de vetores da base e da linearidade de u. Considere a função

$$\begin{aligned} \|\cdot\|' \colon u(E) &\longrightarrow [0, \infty) \\ u(x) &\longmapsto \|u(x)\|' = \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i \right\|' := |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n| \, . \end{aligned}$$

É fácil ver que $\|\cdot\|'$ é uma norma em $u(E)$. Estamos considerando então duas normas em $u(E)$, a saber, $\|\cdot\|'$ e a norma induzida em $u(E)$ pela norma de F, a qual continuaremos a denotar por $\|\cdot\|$. Essas duas normas são equivalentes pois $u(E)$ tem dimensão finita, portanto existe $k > 0$ tal que $\|z\|' \leq k \|z\|$ para todo $z \in u(E)$. Assim, para cada $i = 1, \ldots, n$,

$$|\varphi_i(x)| = |\lambda_i| \leq |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n| = \|u(x)\|' \leq k \|u(x)\| \leq k \|u\| \cdot \|x\| \, ,$$

para todo $x \in E$. Segue que os funcionais $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ são contínuos. Por outro lado,

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) b_i = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i \otimes b_i)(x),$$

para todo $x \in E$; ou seja, $u = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes b_i$ com $n \in \mathbb{N}, b_1, \ldots, b_n \in F$ e $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E'$. Reciprocamente, seja $u = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes b_i$, onde $n \in \mathbb{N}, b_1, \ldots, b_n \in F$ e $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E'$. De $u(x) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) b_i$ para todo $x \in E$ segue que $\{b_1, \ldots, b_n\}$ gera $u(E)$, o que implica posto $(u) \leq n < \infty$. É óbvio que $u \in \mathcal{L}(E; F)$ pois tanto a linearidade como a continuidade vêm do fato de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ serem funcionais lineares contínuos.

Proposição 2.2.1 *$\mathcal{F}$ é ideal de operadores.*

Demonstração: (1) Usando o fato de que $\mathcal{F}(E; F)$ é o subespaço gerado pelos operadores do tipo $\varphi \otimes b$, é claro que $\mathcal{F}(E; F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E; F)$; e, por definição, contém os operadores de posto finito de E em F.
(2) Provemos a propriedade de ideal: sejam $u_1 \in \mathcal{L}(F_0; F), u_2 \in \mathcal{F}(E_0; F_0)$ e $u_3 \in \mathcal{L}(E; E_0)$. Como $u_2 \in \mathcal{F}(E_0; F_0)$, existem $n \in \mathbb{N}, b_1, \ldots, b_n \in F_0$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E_0'$ tais que $u_2 = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes b_i$. Logo,

$$\begin{aligned} u_1 \circ u_2 \circ u_3(x) = u_1(u_2(u_3(x))) &= u_1 \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes b_i(u_3(x)) \right) \\ &= u_1 \left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(u_3(x)) b_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(u_3(x)) u_1(b_i), \end{aligned}$$

para todo $x \in E$, o que implica que a imagem de $u_1 \circ u_2 \circ u_3$ está contida no subespaço gerado por $\{u_1(b_1), \ldots, u_1(b_n)\}$, e portanto posto$(u_1 \circ u_2 \circ u_3) \leq n < \infty$. Isso prova que $u_1 \circ u_2 \circ u_3 \in \mathcal{F}(E; F)$. $\square$

Uma vez que sabemos que $\mathcal{F}$ é um ideal de operadores, da Observação 2.1.2 segue que $(\mathcal{F}, \|\cdot\|)$ é um ideal normado. Obviamente $\mathcal{F}$ é o menor ideal de operadores.

Por último mostremos que $\mathcal{F}$ não é um ideal de Banach com a norma usual de operadores.

Proposição 2.2.2 *$\mathcal{F}$ não é um ideal de Banach com a norma usual de operadores.*

Demonstração: Considere os espaços de Banach c_0, das sequências de escalares convergentes para a zero com a norma do supremo; e ℓ_1, das sequências de escalares absolutamente convergentes com a norma da soma. Seja $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ a sequência formada pelos vetores unitários canônicos, isto é: para todo $i \in \mathbb{N}$, $e_i = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ onde 1 aparece na i-ésima coordenada. Defina

$$\begin{aligned} u \colon c_0 &\longrightarrow \ell_1 \\ (\lambda_j)_{j=1}^{\infty} &\mapsto u\left((\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda_j}{2^j} e_j. \end{aligned}$$

Mostremos que u está bem definido. De fato, para toda sequência $(\lambda_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$,

$$\begin{aligned}\left\|u\left((\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right\| = \left\|\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_j}{2^j}e_j\right\| = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{|\lambda_j|}{2^j} \leq \left(\sup_{j\in\mathbb{N}}|\lambda_j|\right)\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{2^j} \\ = \sup_{j\in\mathbb{N}}|\lambda_j| = \left\|(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\right\| < \infty.\end{aligned}$$

É fácil ver que u é linear, então da desigualdade acima segue também que u é contínuo. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina

$$\begin{aligned} u_n\colon c_0 &\longrightarrow \ell_1 \\ (\lambda_j)_{j=1}^{\infty} &\mapsto u_n\left((\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\right) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{2^j}e_j. \end{aligned}$$

Observe que a imagem de u_n está contida no subespaço gerado por $\{e_1, \ldots, e_n\}$, e portanto $u_n \in \mathcal{F}(c_0; \ell_1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outo lado, temos que

$$\begin{aligned}\|u - u_n\| &= \sup_{(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\in B_{c_0}}\left\|(u-u_n)\left((\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\right)\right\| = \sup_{(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\in B_{c_0}}\left\|\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{\lambda_j}{2^j}\cdot e_j\right\| \\ &= \sup_{(\lambda_j)_{j=1}^{\infty}\in B_{c_0}}\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{|\lambda_j|}{2^j} \leq \sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^j}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\|u - u_n\| \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{j=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^j} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n} = 0,$$

o que implica que $u_n \longrightarrow u$ na norma usual de operadores. Por fim, note que $u(e_j) = \frac{1}{2^j}\cdot e_j$, ou seja, $u(2^j e_j) = e_j$. Logo $e_j \in Im(u)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Assim a imagem de u contém uma infinidade de vetores linearmente independentes, o que nos permite concluir que $u \notin \mathcal{F}(c_0; \ell_1)$. Temos então que $\mathcal{F}(c_0; \ell_1)$ não é fechado em $\mathcal{L}(c_0; \ell_1)$, e portanto o ideal $\mathcal{F}$ não é Banach com a norma usual de operadores. $\square$

Uma vez que $\mathcal{F}(E; F)$ nem sempre é fechado em $\mathcal{L}(E; F)$, faz todo sentido considerar o fecho de $\mathcal{F}(E; F)$ em $\mathcal{L}(E; F)$, isto é, os operadores que podem ser aproximados na norma usual por operadores de posto finito.

Definição 2.2.3 Sejam E e F espaços normados. Dizemos que o operador $u \in \mathcal{L}(E; F)$ é um *operador aproximável* se existe uma sequência $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ de operadores lineares contínuos de posto finito tal que $u_n \longrightarrow u$ na norma usual de operadores.

Denotaremos por $\mathcal{A}(E; F)$ o espaço de todos os operadores aproximáveis de E em F. Assim, $\mathcal{A}(E; F) := \overline{\mathcal{F}(E; F)}$.

Proposição 2.2.4 *$\mathcal{A}$ é ideal de Banach com a norma usual de operadores.*

Demonstração: Como $\mathcal{A}(E; F) := \overline{\mathcal{F}(E; F)}$ e $\mathcal{F}$ é ideal de operadores, pelo Teorema 2.1.5 segue que $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ é um ideal de Banach. $\square$

2.3 Operadores compactos

O objetivo desta seção é apresentar o ideal dos operadores compactos que, além de desempenhar papel central na teoria dos espaços de Banach, no nosso contexto será útil para exemplificar uma classe importante de ideais de operadores que veremos adiante, a saber, os ideais de operadores completamente simétricos. A seção culminará com a demonstração de que $(\mathcal{K}, \|\cdot\|)$ é um ideal de Banach.

Definição 2.3.1 Sejam E e F espaços normados. Diz-se que um operador linear contínuo $u\colon E \longrightarrow F$ é *compacto* se $\overline{u(B_E)}$ é compacto em F.

Denotaremos por $\mathcal{K}(E;F)$ o espaço de todos os operadores compactos de E em F.

Como consequência imediata do Teorema 1.42 temos a

Proposição 2.3.2 *Um espaço normado E tem dimensão finita se, e somente se, a identidade em E é um operador compacto.*

Usando o fato de que um subconjunto de um espaço métrico é compacto se, e somente se, é sequencialmente compacto, provamos a seguir uma caracterização importante dos operadores compactos:

Teorema 2.3.3 *Sejam E e F espaços normados e $u\colon E \longrightarrow F$ operador linear. Então u é compacto se, e somente se, para toda sequência limitada $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$, a sequência $(u(x_n))_{n=1}^{\infty}$ possui uma subsequência convergente em F.*

Demonstração: Se u é compacto e $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ é limitada, então existe uma constante $K > 0$ tal que $\|x_n\| \leq K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo $\frac{\|x_n\|}{K} \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso implica que a sequência $\left(\frac{x_n}{K}\right)_{n=1}^{\infty} \subseteq B_E$ e portanto

$$\left(u\left(\frac{x_n}{K}\right)\right)_{n=1}^{\infty} \subseteq u(B_E) \subseteq \overline{u(B_E)}.$$

Como u é compacto, $\overline{u(B_E)}$ é compacto e então existe uma subsequência $\left(u\left(\frac{x_{n_j}}{K}\right)\right)_{j=1}^{\infty} = \left(\frac{u(x_{n_j})}{K}\right)_{j=1}^{\infty}$ convergente em F, digamos $\frac{u(x_{n_j})}{K} \longrightarrow x \in F$. É claro que $u(x_{n_j}) \longrightarrow Kx \in F$.

Reciprocamente, considere $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\overline{u(B_E)}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar $x_n \in B_E$ tal que

$$\|u(x_n) - y_n\| \leq \frac{1}{n}.$$

Por hipótese $(u(x_n))_{n=1}^{\infty}$ possui subsequência convergente, digamos $u(x_{n_j}) \longrightarrow y \in F$. De

$$\|y_{n_j} - y\| \leq \|y_{n_j} - u(x_{n_j})\| + \|u(x_{n_j}) - y\| \leq \frac{1}{n_j} + \|u(x_{n_j}) - y\| \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

segue que $y_{n_k} \longrightarrow y$. Isso prova que $\overline{u(B_E)}$ é compacto. $\square$

Proposição 2.3.4 *$\mathcal{K}$ é ideal de operadores.*

Demonstração: (1) É claro que o operador identicamente nulo $0 : E \longrightarrow F$ é compacto. Sejam $u_1, u_2 \in \mathcal{K}(E;F)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ uma sequência limitada. Como $u_1 \in \mathcal{K}(E;F)$, a sequência $(u_1(x_n))_{n=1}^{\infty}$ possui uma subsequência convergente, ou seja, existem um subconjunto infinito $N_1 \subseteq \mathbb{N}$ e $z_1 \in F$ tais que

$$\lim_{n \in N_1} u_1(x_n) = z_1.$$

Por sua vez, a sequência $(x_n)_{n \in N_1}$ é subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, logo é limitada; e como $u_2 \in \mathcal{K}(E;F)$, a sequência $(u_2(x_n))_{n \in N_1}$ possui uma subsequência convergente, isto é, existem um subconjunto infinito $N_2 \subseteq N_1 \subseteq \mathbb{N}$ e $z_2 \in F$ tais que

$$\lim_{n \in N_2} u_2(x_n) = z_2.$$

Por ser subsequência de $(u_1(x_n))_{n \in N_1}$, $(u_1(x_n))_{n \in N_2}$ também converge para z_1, e de tudo isso concluímos que

$$\lim_{n \in N_2} (u_1 + \lambda u_2)(x_n) = \lim_{n \in N_2} u_1(x_n) + \lambda \cdot \lim_{n \in N_2} u_2(x_n) = z_1 + \lambda z_2.$$

Assim a sequência $((u_1+\lambda u_2)(x_n))_{n=1}^{\infty}$ possui uma subsequência, a saber $((u_1+\lambda u_2)(x_n))_{n \in N_2}$, convergente. Segue do Teorema 2.3.3 que $u_1 + \lambda u_2 \in \mathcal{K}(E;F)$, e portanto $\mathcal{K}(E;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$.

Provemos que $\mathcal{K}(E;F)$ contém os operadores lineares contínuos de posto finito, ou seja, que tais operadores são compactos. Para isso sejam $\varphi \in E'$ e $b \in F$. Logo

$$(\varphi \otimes b)(B_E) \subseteq \operatorname{span}\{b\}.$$

Como $\varphi \otimes b$ é um operador contínuo, $(\varphi \otimes b)(B_E)$ é um conjunto limitado. Além disso, $\overline{(\varphi \otimes b)(B_E)} \subseteq \operatorname{span}\{b\}$ e $\dim(\operatorname{span}\{b\}) = 1$, logo $\overline{(\varphi \otimes b)(B_E)}$ é um conjunto compacto pois é um fechado e limitado em um espaço normado de dimensão finita. Portanto $\varphi \otimes b$ é um operador compacto. Como todo operador linear contínuo de posto finito é uma combinação linear de operadores desse tipo e $\mathcal{K}(E;F)$ é um subespaço vetorial, concluímos que todo operador linear contínuo de posto finito é compacto. Assim, $\mathcal{K}(E;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$ que contém os operadores lineares contínuos de posto finito.

(2) Para provar a propriedade de ideal, sejam $u_1 \in \mathcal{L}(F_0;F), u_2 \in \mathcal{K}(E_0;F_0)$ e $u_3 \in \mathcal{L}(E;E_0)$ e $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ uma sequência limitada. Como u_3 é um operador contínuo, a sequência $(u_3(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é limitada em E_0. Sabendo que $u_2 \in \mathcal{K}(E_0;F_0)$, tem-se do Teorema 2.3.3 que a sequência $(u_2(u_3(x_n)))_{n=1}^{\infty}$ possui uma subsequência convergente, isto é, existem $z \in F_0$ e uma subsequência $(u_2(u_3(x_{n_k})))_{k=1}^{\infty}$ tais que

$$\lim_{k \to \infty} u_2(u_3(x_{n_k})) = z.$$

Da continuidade de u_1 temos

$$u_1(u_2(u_3(x_{n_k}))) \longrightarrow u_1(z),$$

e portanto a sequência $(u_1(u_2(u_3(x_n))))_{n=1}^{\infty} \subseteq F$ possui uma subsequência convergente. Novamente do Teorema 2.3.3 temos que $u_1 \circ u_2 \circ u_3 \in \mathcal{K}(E;F)$. $\Box$

Da Observação 2.1.2 concluímos que $(\mathcal{K}, \|\cdot\|)$ é um ideal normado. Mas podemos ir mais longe:

Proposição 2.3.5 *$\mathcal{K}$ é ideal fechado.*

Demonstração: Devemos provar que cada $\mathcal{K}(E;F)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(E;F)$. Para isso considere uma sequência $(u_m)_{m=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{K}(E;F)$ tal que $u_m \longrightarrow u \in \mathcal{L}(E;F)$ na norma usual de operadores e uma sequência limitada $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$. Como u_1 é um operador compacto, a sequência $(u_1(x_n))_{n=1}^{\infty} \subseteq F$ possui uma subsequência convergente, digamos $(u_1(x_{1,n}))_{n\in\mathbb{N}}$. Por sua vez, como u_2 é compacto e como a sequência $(x_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, pois é subsequência de sequência limitada, a sequência $(u_2(x_{1,n}))_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência $(u_2(x_{2,n}))_{n\in\mathbb{N}}$ que é convergente. Continuando com este raciocínio, podemos obter, para cada número natural $m \in \mathbb{N}$, uma subsequência $(x_{m,n})_{n\in\mathbb{N}}$ de $(x_{m-1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $(u_m(x_{m,n}))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. Para cada n, defina

$$z_n = x_{n,n}.$$

Ou seja, a sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é formada pelos elementos da diagonal da matriz $(x_{i,n})_{i,n\in\mathbb{N}}$. Por construção, para cada número fixo $m \in \mathbb{N}$, $(z_n)_{n\geq m}$ é uma subsequência de $(x_{m,n})_{n\geq 1}$. Logo $(u_m(z_n))_{n\geq 1}$ é convergente para cada $m \in \mathbb{N}$. Como $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ é limitada, existe $c > 0$ tal que $\|x_n\| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\|z_n\| \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $\varepsilon > 0$. Temos ainda que $u_m \longrightarrow u$ e portanto existe um $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_p - u\| < \frac{\varepsilon}{3c}.$$

Como $(u_p(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, e portanto de Cauchy, existe N tal que para $j, k > N$,

$$\|u_p(z_j) - u_p(z_k)\| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Daí, para $j, k > N$,

$$\begin{aligned}
\|u(z_j) - u(z_k)\| &= \|u(z_j) - u_p(z_j) + u_p(z_j) - u_p(z_k) + u_p(z_k) - u(z_k)\| \\
&\leq \|u(z_j) - u_p(z_j)\| + \|u_p(z_j) - u_p(z_k)\| + \|u_p(z_k) - u(z_k)\| \\
&< \|u - u_p\|\|z_j\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|u_p - u\|\|z_k\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3c} \cdot c + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3c} \cdot c = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Portanto a sequência $(u(z_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq F$ é de Cauchy, e portanto convergente pois F é completo, provando que u é compacto, o que implica que cada componente $\mathcal{K}(E;F)$ é um subespaço fechado. $\Box$

Portanto $(\mathcal{K}, \|\cdot\|)$ é ideal de Banach.

2.4 Operadores absolutamente p-somantes

Introduziremos nesta seção o ideal Π_p dos operadores absolutamente p-somantes, para todo $p \geq 1$, que servirá para exemplificar os ideais que não são nem simétricos nem anti-simétricos que veremos adiante. Também será mostrado que Π_p é um ideal de Banach com uma norma conveniente.

Definição 2.4.1 Sejam E e F espaços de Banach e $1 \leq p < \infty$. O operador $u \in \mathcal{L}(E;F)$ é chamado *absolutamente p-somante* se existe uma constante $c \geq 0$ tal que

$$\sum_{j=1}^{n} \|u(x_j)\|^p \leq c^p \cdot \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^p, \tag{2.1}$$

para toda sequência finita $x_1, \ldots, x_n$ em E.

Denotaremos por $\Pi_p(E;F)$ o conjunto formado por todos os operadores absolutamente p-somantes de E em F.

Defina $\pi_p \colon \Pi_p(E;F) \longrightarrow [0, \infty)$ por

$$\pi_p(u) = \inf \{c \geq 0 : (2.1) \text{ vale para todos } x_1, \ldots, x_n \in E \text{ e } n \in \mathbb{N}\}.$$

Vejamos que o ínfimo acima é assumido:
Dados $u \in \Pi_p(E;F)$ e $\varepsilon > 0$, como $\pi_p(u) < (1+\varepsilon)\pi_p(u)$, da definição de $\pi_p(u)$ existe uma constante $c \geq 0$ tal que

$$\sum_{j=1}^{n} \|u(x_j)\|^p \leq c^p \cdot \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^p$$

para todos $n \in \mathbb{N}$ e $x_1, \ldots, x_n \in E$, e $\pi_p(u) \leq c < (1+\varepsilon)\pi_p(u)$. Logo,

$$\sum_{j=1}^{n} \|u(x_j)\|^p \leq c^p \cdot \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^p < \pi_p(u)^p (1+\varepsilon)^p \cdot \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^p,$$

para toda sequência finita $x_1, \ldots, x_n$ em E. Fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0$, obtemos

$$\sum_{j=1}^{n} \|u(x_j)\|^p \leq \pi_p(u)^p \cdot \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^p,$$

para toda sequência finita $x_1, \ldots, x_n$ em E, mostrando que o ínfimo é assumido.

Proposição 2.4.2 *Para todo $1 \leq p < \infty$, Π_p é ideal de operadores.*

Demonstração: (1) É claro que o operador identicamente nulo de E em F pertence a $\Pi_p(E;F)$. Sejam $u_1, u_2 \in \Pi_p(E;F)$. Pelo que acabamos de mostrar no parágrafo acima, para quaisquer $x_1, \ldots, x_n \in E$,

$$\begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{n} \|u_1(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(u_1) \cdot \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad e \\ \left(\sum_{j=1}^{n} \|u_2(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(u_2) \cdot \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \end{cases}$$

Consideremos as seguintes n-uplas de números reais:

$$\begin{cases} a = (\|u_1(x_1)\|, \|u_1(x_2)\|, \ldots, \|u_1(x_n)\|) \\ b = (\|u_2(x_1)\|, \|u_2(x_2)\|, \ldots, \|u_2(x_n)\|) \end{cases}$$

Como $\|\cdot\|_p$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$, a desigualdade triangular nos garante que $\|a+b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p$. Assim,

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{n} \|(u_1+u_2)(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{j=1}^{n} \|u_1(x_j)+u_2(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^{n} (\|u_1(x_j)\| + \|u_2(x_j)\|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|a+b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} \|u_1(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{j=1}^{n} \|u_2(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (\pi_p(u_1) + \pi_p(u_2)) \cdot \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

comprovando que $u_1 + u_2 \in \Pi_p(E;F)$ e

$$\pi_p(u_1+u_2) \leq \pi_p(u_1) + \pi_p(u_2). \tag{2.2}$$

Segue imediatamente da definição que se $u \in \Pi_p(E;F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, então $\lambda u \in \Pi_p(E;F)$. Portanto $\Pi_p(E;F)$ é um subespaço de $\mathcal{L}(E;F)$.

Sejam $b \in F$ e $\varphi \in E'$, $\varphi \neq 0$. Dados $x_1, \ldots, x_k$ em E,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k} \|\varphi \otimes b(x_j)\|^p &= \sum_{j=1}^{k} \|\varphi(x_j) b\|^p = \|b\|^p \cdot \sum_{j=1}^{k} |\varphi(x_j)|^p = \|b\|^p \cdot \|\varphi\|^p \cdot \sum_{j=1}^{k} \left|\frac{\varphi}{\|\varphi\|}(x_j)\right|^p \\ &\leq (\|b\| \cdot \|\varphi\|)^p \cdot \sup_{\psi \in B_{E'}} \sum_{j=1}^{k} |\psi(x_j)|^p. \end{aligned}$$

Portanto $\varphi \otimes b \in \Pi_p(E;F)$ e $\pi_p(\varphi \otimes b) \leq \|\varphi\| \cdot \|b\|$ para todos $\varphi \in E'$ e $b \in F$. Dado um operador $u \in \mathcal{F}(E;F)$, vimos que $u = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes b_i$ com $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E'$ e $b_1, \ldots, b_n \in F$. Como $\Pi_p(E;F)$ é um subespaço vetorial, concluímos que $u = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes b_i \in \Pi_p(E;F)$. Assim, cada componente $\Pi_p(E;F)$ contém os operadores lineares contínuos de posto finito de E em F.

(2) Propriedade de ideal: sejam $u_1 \in \mathcal{L}(F_0;F)$, $u_2 \in \Pi_p(E_0;F_0)$, $u_3 \in \mathcal{L}(E;E_0)$ e $x_1,\ldots,x_n \in E$ com $n \in \mathbb{N}$. De

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} \|(u_1 \circ u_2 \circ u_3)(x_j)\|^p &= \sum_{j=1}^{n} \|u_1(u_2(u_3(x_j)))\|^p \leq \|u_1\|^p \cdot \sum_{j=1}^{n} \|u_2(u_3(x_j))\|^p \\
&\leq \|u_1\|^p \cdot \pi_p(u_2)^p \cdot \sup_{\varphi \in B_{E_0'}} \sum_{j=1}^{n} |\varphi(u_3(x_j))|^p \\
&= (\|u_1\| \cdot \pi_p(u_2))^p \cdot \sup_{\varphi \in B_{E_0'}} \sum_{j=1}^{n} \left| \|u_3\| \varphi\left(u_3\left(\frac{x_j}{\|u_3\|}\right)\right)\right|^p \\
&= (\|u_1\| \cdot \pi_p(u_2) \cdot \|u_3\|)^p \cdot \sup_{\varphi \in B_{E_0'}} \sum_{j=1}^{n} \left|\varphi \circ \frac{u_3}{\|u_3\|}(x_j)\right|^p \\
&\leq (\|u_1\| \cdot \pi_p(u_2) \cdot \|u_3\|)^p \cdot \sup_{\psi \in B_{E'}} \sum_{j=1}^{n} |\psi(x_j)|^p,
\end{aligned}$$

segue que $u_1 \circ u_2 \circ u_3 \in \Pi_p(E;F)$ e $\pi_p(u_1 \circ u_2 \circ u_3) \leq \|u_1\| \cdot \pi_p(u_2) \cdot \|u_3\|$. □

Proposição 2.4.3 *Para todo $1 \leq p < \infty$, (Π_p, π_p) é ideal normado.*

Demonstração: Mostremos primeiro que π_p restrita a $\Pi_p(E;F)$ é uma norma.
É claro que $\pi_p(u) \geq 0$ para todo $u \in \Pi_p(E;F)$. Observe que se $u = 0$ então $\pi_p(u) = 0$. Agora se $\pi_p(u) = 0$, então dado $x \in E$, como u é absolutamente p-somante, tem-se

$$0 \leq \|u(x)\|^p \leq (\pi_p(u))^p \cdot \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)|^p = 0 \cdot \|x\|^p = 0.$$

Portanto $\|u(x)\| = 0$ para todo $x \in E$, o que implica $u = 0$.

Sejam agora $\lambda \in \mathbb{K}$ e $u \in \Pi_p(E;F)$. Se $\lambda = 0$, é claro que $\pi_p(0 \cdot u) = 0 = 0 \cdot \pi_p(u)$. Se $\lambda \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\pi_p(\lambda u) &= \inf\left\{c \geq 0 : \sum_{j=1}^{n} \|\lambda u(x_j)\|^p \leq c^p \cdot \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^p, x_1,\ldots,x_n \in E, n \in \mathbb{N}\right\} \\
&= \inf\left\{c \geq 0 : |\lambda|^p \cdot \sum_{j=1}^{n} \|u(x_j)\|^p \leq c^p \cdot \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^p, x_1,\ldots,x_n \in E, n \in \mathbb{N}\right\} \\
&= \inf\left\{c \geq 0 : \sum_{j=1}^{n} \|u(x_j)\|^p \leq \left(\frac{c}{|\lambda|}\right)^p \cdot \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^p, x_1,\ldots,x_n \in E, n \in \mathbb{N}\right\} \\
&= |\lambda| \cdot \inf\left\{d \geq 0 : \sum_{j=1}^{n} \|u(x_j)\|^p \leq d^p \cdot \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^p, x_1,\ldots,x_n \in E, n \in \mathbb{N}\right\} \\
&= |\lambda| \cdot \pi_p(u).
\end{aligned}$$

A desigualdade triangular foi provada na equação (2.2).

Já mostramos que $\pi_p(\varphi \otimes b) \leq \|\varphi\| \cdot \|b\|$ para todos $\varphi \in E'$ e $b \in F$. Em particular, tomando $\varphi = Id_{\mathbb{K}} \colon \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ e $b = 1 \in \mathbb{K}$, temos $\varphi \otimes b = Id_{\mathbb{K}}$ e então

$$\pi_p(Id_{\mathbb{K}}) = \pi_p(\varphi \otimes b) \leq \|\varphi\| \cdot |b| = \|Id_{\mathbb{K}}\| = 1.$$

Por outro lado, dados $u \in \Pi_p(E; F)$ e $x \in E$,

$$\|u(x)\|^p \leq \pi_p(u)^p \cdot \sup_{\varphi \in B_{E'}} |\varphi(x)|^p = \pi_p(u)^p \cdot \|x\|^p,$$

o que implica $\|u(x)\| \leq \pi_p(u) \cdot \|x\|$ para todo $x \in E$. Sabendo que

$$\|u\| = \inf\{c \geq 0 : \|u(x)\| \leq c\|x\| \text{ para todo } x \in E\},$$

concluímos que $\|u\| \leq \pi_p(u)$. Por ter posto finito, $Id_{\mathbb{K}}$ é absolutamente somante e portanto $1 = \|Id_{\mathbb{K}}\| \leq \pi_p(Id_{\mathbb{K}})$. Segue que $\pi_p(Id_{\mathbb{K}}) = 1$. Portanto (Π_p, π_p) é um ideal normado. $\square$

Por último mostremos que (Π_p, π_p) é um ideal de Banach. Para isso usaremos o seguinte resultado:

Proposição 2.4.4 *Sejam E e F espaços de Banach e $1 \leq p < \infty$. Para todo $u \in \Pi_p(E; F)$,*

$$\pi_p(u) = \sup\left\{ \left(\sum_{j=1}^{n} \|u(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} : n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in E \text{ e } \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 1 \right\}.$$

Demonstração: Chame

$$\beta = \sup\left\{ \left(\sum_{j=1}^{n} \|u(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} : n \in \mathbb{N},\ x_1, \ldots, x_n \in E \text{ e } \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 1 \right\}$$

e seja $c \geq 0$ tal que para toda sequência finita $x_1, \ldots, x_n \in E$,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \|u(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq c \cdot \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.3}$$

Em particular, dada uma sequência finita $x_1, \ldots, x_n \in E$ tal que

$$\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 1,$$

da equação (2.3) segue que $\left(\sum_{j=1}^{n} \|u(x_j)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq c$. Portanto $\beta \leq c$. Da definição de $\pi_p(u)$ segue que $\beta \leq \pi_p(u)$. Seja $x_1, \ldots, x_n \in E$ uma sequência finita tal que

$$k := \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(x_j)|^p \right)^{\frac{1}{p}} > 0.$$

Então $\left(\sum_{j=1}^{n}\left\|u\left(\frac{x_j}{k}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \beta$ pois

$$\sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|\varphi\left(\frac{x_j}{k}\right)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\frac{1}{k^p}\sum_{j=1}^{n}|\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \frac{\sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{j=1}^{n}|\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}}{k} = 1.$$

Da linearidade de u e como $\left(\sum_{j=1}^{n}\left\|u\left(\frac{x_j}{k}\right)\right\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \beta$, podemos escrever

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|u(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \beta\cdot k = \beta\cdot\sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{j=1}^{n}|\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{2.4}$$

Vejamos que a equação (2.4) também se verifica para todas sequências finitas $x_1,\ldots,x_n \in E$ tais que $k = \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{j=1}^{n}|\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0$. De fato, se $k = \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{j=1}^{n}|\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0$, então

$$\|x_j\| = \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(|\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{j=1}^{n}|\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}} = k = 0,$$

e isso implica que $x_j = 0$. Logo $u(x_j) = 0$ e então $\|u(x_j)\| = 0$. Portanto

$$\left(\sum_{j=1}^{n}\|u(x_j)\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \leq \beta\cdot 0 = \beta\cdot\sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{j=1}^{n}|\varphi(x_j)|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Então a equação (2.4) se verifica para todas sequências finitas $x_1,\ldots,x_n \in E$. Assim, da definição de $\pi_p(u)$ e da equação (2.4) concluímos que $\pi_p(u) \leq \beta$. Daí, $\pi_p(u) = \beta$. □

Proposição 2.4.5 *Para todo* $1 \leq p < \infty$, (Π_p, π_p) *é ideal de Banach.*

Demonstração: Provemos que $\Pi_p(E;F)$ é completo relativamente à norma π_p. Para isso seja $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência de Cauchy em $\Pi_p(E;F)$. Seja $x \in E$ com $x \neq 0$. Dado $\varepsilon > 0$, temos que $\frac{\varepsilon}{\|x\|} > 0$, e portanto existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\pi_p(u_j - u_k) < \frac{\varepsilon}{\|x\|}$ para $j,k \geq j_0$. Então

$$\begin{aligned}\|u_j(x) - u_k(x)\| &= \|(u_j - u_k)(x)\| \leq \|u_j - u_k\|\cdot\|x\|\\ &\leq \pi_p(u_j - u_k)\cdot\|x\| < \frac{\varepsilon}{\|x\|}\cdot\|x\| = \varepsilon.\end{aligned}$$

A sequência $(u_j(x))_{j=1}^{\infty}$ é então de Cauchy em F para todo $x \in E$, $x \neq 0$. É claro que o mesmo vale se $x = 0$. Como F é Banach temos que

$$\lim_{j\to\infty} u_j(x)$$

existe e pertence a F. Podemos então definir

$$\begin{aligned} u\colon E &\longrightarrow F\\ x &\longmapsto u(x) = \lim_{j\to\infty} u_j(x).\end{aligned}$$

É claro que u é linear, pois basta usar a linearidade de u_j para todo $j \in \mathbb{N}$ e as propriedades dos limites. Além disso, como $(u_j)_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\Pi_p(E;F)$ e toda sequência de Cauchy é limitada, existe uma constante $c > 0$ tal que $\pi_p(u_j) \leq c$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Provemos que $u \in \Pi_p(E;F)$. Com efeito, considere uma sequência finita $x_1, \ldots, x_n \in E$. De

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \|u(x_i)\|^p &= \sum_{i=1}^{n} \left\| \lim_{j\to\infty} u_j(x_i) \right\|^p \\
&= \lim_{j\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \|u_j(x_i)\|^p \\
&\leq \lim_{j\to\infty} \left(\pi_p(u_j)^p \cdot \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i)|^p \right) \\
&\leq \lim_{j\to\infty} \left(c^p \cdot \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i)|^p \right) \\
&= c^p \cdot \sup_{\varphi \in B_{E'}} \sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i)|^p,
\end{aligned}$$

temos que $u \in \Pi_p(E;F)$. Por outro lado, sejam $x_1, \ldots, x_n \in E$ com $n \in \mathbb{N}$ tais que $\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq 1$. Sabemos que para todos j, k,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|(u_j - u_k)(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(u_j - u_k) \cdot \sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \pi_p(u_j - u_k).$$

Daí, fixado $j \in \mathbb{N}$ e fazendo $k \to \infty$ obtemos

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} \|u_j(x_i) - u(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| u_j(x_i) - \lim_{k\to\infty} u_k(x_i) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \lim_{k\to\infty} (u_j(x_i) - u_k(x_i)) \right\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \lim_{k\to\infty} \|u_j(x_i) - u_k(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \|u_j(x_i) - u_k(x_i)\|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \lim_{k\to\infty} \pi_p(u_j - u_k),
\end{aligned}$$

sempre que

$$\sup_{\varphi \in B_{E'}} \left(\sum_{i=1}^{n} |\varphi(x_i)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq 1.$$

Logo

$$\sup\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\|(u_j-u)(x_i)\|^p\right)^{\frac{1}{p}}: x_j\in E \text{ e } \sup_{\varphi\in B_{E'}}\left(\sum_{i=1}^{n}|\varphi(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq 1\right\} \leq \lim_{k\to\infty}\pi_p(u_j-u_k).$$

Portanto, da Proposição 2.4.4,

$$0\leq \pi_p(u_j-u)\leq \lim_{k\to\infty}\pi_p(u_j-u_k).$$

Fazendo $j\to\infty$ obtemos

$$0\leq \lim_{j\to\infty}\pi_p(u_j-u)\leq \lim_{j,k\to\infty}\pi_p(u_j-u_k)=0.$$

Assim, $\lim_{j\to\infty}\pi_p(u_j-u)=0$, o que implica $\lim_{j\to\infty}u_j=u\in\Pi_p(E;F)$, ou seja, $\Pi_p(E;F)$ é completo para todos espaços de Banach E e F. $\square$

O próximo resultado será útil para futuras demonstrações desta dissertação.

Teorema 2.4.6 *Sejam* $1\leq p\leq q<\infty$. *Então* $\Pi_p\subseteq\Pi_q$.

Para a demonstração desse resultado veja [8, Theorem 2.8].

O próximo Teorema é um resultado importante da teoria dos operadores absolutamente p-somantes.

Teorema 2.4.7 (Teorema de Grothendieck) *Todo operador linear contínuo* $u\colon \ell_1\longrightarrow\ell_2$ *é absolutamente 1-somante.*

A demonstração desse resultado encontra-se em [3, Teorema 9.2.6].

2.5 Operadores fracamente compactos

Essa seção tem por objetivo apresentar o ideal dos operadores fracamente compactos que será útil, da mesma maneira que o ideal de operadores compactos, para exemplificar uma classe importante de ideal de operadores que veremos adiante, a saber, o ideal dos operadores completamente simétrico.

Definição 2.5.1 Sejam E e F espaços normados. Um operador linear contínuo $u\colon E\longrightarrow F$ é dito *fracamente compacto* se $u(B_E)$ é relativamente fracamente compacto em F, isto é, se $\overline{u(B_E)}^w$ é fracamente compacto em F.

Denotaremos por $\mathcal{W}(E;F)$ o conjunto de todos os operadores fracamente compactos de E em F.

Como B_E é convexo e $u\in\mathcal{L}(E;F)$, o conjunto $u(B_E)$ é convexo, assim pelo Teorema de Mazur (Teorema 1.34) concluímos que $\overline{u(B_E)}^w=\overline{u(B_E)}$. Isso quer dizer que definição acima podemos substituir $\overline{u(B_E)}^w$ por $\overline{u(B_E)}$.

Para o estudo dos operadores fracamente compactos será importante o

Teorema 2.5.2 (Teorema de Eberlein-Smulian [25, Theorem II.C.3]) *Seja E um espaço de Banach. Um conjunto $A \subseteq E$ é relativamente fracamente compacto se, e somente se, toda sequência em A admite subsequência fracamente convergente.*

Com isso obtemos uma caracterização semelhante ao caso dos operadores compactos:

Proposição 2.5.3 *Sejam E e F espaços de Banach e $u \in \mathcal{L}(E;F)$. São equivalentes:*
(a) *u é fracamente compacto;*
(b) *Toda sequência $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq u(B_E)$ admite subsequência fracamente convergente;*
(c) *Para toda sequência limitada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E, tem-se que $(u(x_n))_{n=1}^{\infty}$ admite subsequência fracamente convergente.*

Demonstração: As implicações (a)⇒(b) e (c)⇒(a) seguem imediatamente do Teorema de Eberlein-Smulian.

Mostremos então (b)⇒(c): Dada uma sequência limitada $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$, existe uma constante K positiva tal que $\|x_n\| \leq K$ para todo n. Logo $\left\|\frac{x_n}{K}\right\| \leq 1$ para todo n, e isso implica que a sequência $\left(\frac{x_n}{K}\right)_{n=1}^{\infty}$ está inteiramente contida em B_E. Portanto a sequência $\left(u\left(\frac{x_n}{K}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ está inteiramente contida em $u\left(B_E\right)$ e, por hipótese, $\left(u\left(\frac{x_n}{K}\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ tem subsequência que converge fracamente, digamos $u\left(\frac{x_{n_j}}{K}\right) \xrightarrow{w} y$. Logo

$$
\begin{aligned}
\varphi\left(u\left(\frac{x_{n_j}}{K}\right)\right) \longrightarrow \varphi(y), \forall \varphi \in F' \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{K}\varphi\left(u\left(x_{n_j}\right)\right) \longrightarrow \varphi(y), \forall \varphi \in F' \\
&\Longrightarrow \quad \varphi\left(u\left(x_{n_j}\right)\right) \longrightarrow K\varphi(y) = \varphi(Ky), \forall \varphi \in F'.
\end{aligned}
$$

Segue que $u\left(x_{n_j}\right) \xrightarrow{w} Ky$, ou seja, a sequência $\left(u\left(x_n\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ possui uma subsequência que converge fracamente. □

Seja $u \in \mathcal{K}(E;F)$. Como a topologia fraca $\sigma(F;F')$ está contida na topologia da norma de F, pela Proposição 1.17 concluímos que u é um operador fracamente compacto. Então $\mathcal{K}(E;F) \subseteq \mathcal{W}(E;F)$ para todos espaços de Banach E e F.

Vejamos que a componente $\mathcal{W}(E;F)$ só tem interesse quando nem E nem F são espaços reflexivos.

Proposição 2.5.4 *Sejam E e F espaços de Banach. Se E ou F é reflexivo, então $\mathcal{W}(E;F) = \mathcal{L}(E;F)$.*

Demonstração: Como $\mathcal{W}(E;F) \subseteq \mathcal{L}(E;F)$, basta mostrar que $\mathcal{W}(E;F) \supseteq \mathcal{L}(E;F)$.

Suponhamos primeiramente que F seja reflexivo e consideremos um operador $u \in \mathcal{L}(E;F)$ e uma sequência limitada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E. Como u é contínuo, a sequência $\left(u\left(x_n\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ é limitada em F. Existe então $K > 0$ tal que $u\left(x_n\right) \subseteq KB_F$, e por F ser reflexivo temos pelo Teorema de Kakutani (Teorema 1.45) que KB_F é compacto na topologia fraca $\sigma(F,F')$. Pelo Teorema de Eberlein-Smulian, $\left(u\left(x_n\right)\right)_{n=1}^{\infty}$ admite subsequência fracamente convergente, provando que $u \in \mathcal{W}(E;F)$.

Suponhamos agora que E seja reflexivo e consideremos um operador $u \in \mathcal{L}(E;F)$ e uma sequência limitada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E. Novamente pelos teoremas de Kakutani e Eberlein-Sumulian, existe uma subsequência $\left(x_{n_j}\right)_{j=1}^{\infty}$ de $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que $x_{n_j} \xrightarrow{w} x \in E$. Pelo Teorema 1.32, o operador $u : (E;\sigma(E;E')) \longrightarrow (F;\sigma(F;F'))$ é contínuo, e isso implica que $u\left(x_{n_j}\right) \xrightarrow{w} u(x)$. Isso prova que $u \in \mathcal{W}(E;F)$. □

Proposição 2.5.5 *$\mathcal{W}$ é ideal de operadores.*

Demonstração: (1) Já vimos que o operador identicamente nulo de E em F é compacto, e portanto fracamente compacto. Sejam $u_1, u_2 \in \mathcal{W}(E;F)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ uma sequência limitada. Como $u_1 \in \mathcal{W}(E;F)$, segue que $(u_1(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência que converge fracamente, ou seja, existem um subconjunto infinito $N_1 \subseteq \mathbb{N}$ e $z_1 \in F$ tais que a sequência $(u_1(x_n))_{n\in N_1}$ converge fracamente para z_1. Por sua vez, a sequência $(x_n)_{n\in N_1} \subseteq E$ é limitada, pois é subsequência de sequência limitada, e como $u_2 \in \mathcal{W}(E;F)$, $(u_2(x_n))_{n\in N_1}$ possui uma subsequência que converge fracamente, isto é, existem um subconjunto infinito $N_2 \subseteq N_1 \subseteq \mathbb{N}$ e $z_2 \in F$ tais que a sequência $(u_2(x_n))_{n\in N_2}$ converge fracamente para z_2. Como $(u_1(x_n))_{n\in N_2}$ é subsequência de $(u_1(x_n))_{n\in N_1}$ e $(u_1(x_n))_{n\in N_1}$ converge fracamente para z_1, concluímos que $(u_1(x_n))_{n\in N_2}$ converge fracamente para z_1. Da Proposição 1.29(c) segue que a sequência $((u_1 + \lambda u_2)(x_n))_{n\in N_2}$ converge fracamente para $z_1 + \lambda z_2$, ou seja, $u_1 + \lambda u_2 \in \mathcal{W}(E;F)$.

Agora mostremos que $\mathcal{W}(E;F)$ contém os operadores lineares contínuos de posto finito. Já mostramos que para todos espaços de Banach E e F,

$$\mathcal{F}(E;F) \subseteq \mathcal{K}(E;F) \subseteq \mathcal{W}(E;F).$$

Portanto $\mathcal{W}(E;F)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$ que contém os operadores lineares contínuos de posto finito para todos espaços de Banach E e F.

(2) Provemos a propriedade de ideal: sejam $u_1 \in \mathcal{L}(F_0;F), u_2 \in \mathcal{W}(E_0;F_0)$, $u_3 \in \mathcal{L}(E;E_0)$ e $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ uma sequência limitada. Como u_3 é um operador contínuo, a sequência $(u_3(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é limitada em E_0. Sabendo que $u_2 \in \mathcal{W}(E_0;F_0)$, tem-se que a sequência $(u_2(u_3(x_n)))_{n=1}^{\infty}$ possui uma subsequência que converge fracamente, isto é, existem $z \in F_0$ e uma subsequência $(u_2(u_3(x_{n_k})))_{k=1}^{\infty}$ tais que

$$u_2(u_3(x_{n_k})) \xrightarrow{w} z.$$

Sendo u_1 um operador linear contínuo, pelo Teorema 1.32, u_1 permanece contínuo quando F_0 e F estão munidos com as respectivas topologias fracas, e consequentemente

$$u_1(u_2(u_3(x_{n_k}))) \xrightarrow{w} u_1(z).$$

Portanto a sequência $(u_1(u_2(u_3(x_n))))_{n=1}^{\infty} \subseteq F$ possui uma subsequência que converge fracamente, isto é, $u_1 \circ u_2 \circ u_3 \in \mathcal{W}(E;F)$. $\square$

Da Observação 2.1.2 concluímos que $(\mathcal{W}, \|\cdot\|)$ é um ideal normado. Mostraremos no Capítulo 4, entre outras coisas, que $\mathcal{W}$ é um ideal fechado, e portanto $(\mathcal{W}, \|\cdot\|)$ é um ideal de Banach.

2.6 Operadores completamente contínuos

O objetivo dessa seção é apresentar o ideal dos operadores completamente contínuos, o qual será útil para exemplificar os ideais que não são nem simétricos nem anti-simétricos que, conforme veremos no Capítulo 4. A seção culminará com a demonstração de que o ideal $\mathcal{CC}$ dos operadores completamente contínuos é um ideal fechado, isto é, que $(\mathcal{CC}, \|\cdot\|)$ é um ideal de Banach.

Definição 2.6.1 Sejam E e F espaços normados. Um operador linear contínuo $u\colon E \longrightarrow F$ é dito *completamente contínuo* se para toda sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ tal que $x_n \xrightarrow{w} x$ em E, for verdade que $u(x_n) \longrightarrow u(x)$ em F.

Denotaremos por $\mathcal{CC}(E;F)$ o conjunto de todos os operadores completamente contínuos de E em F.

Proposição 2.6.2 *$\mathcal{CC}$ é ideal de operadores.*

Demonstração: (1) É óbvio que o operador nulo de E em F pertence a $\mathcal{CC}(E;F)$.

Sejam $u_1, u_2 \in \mathcal{CC}(E;F)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ uma sequência tal que $x_n \xrightarrow{w} x \in E$. Por definição de operador completamente contínuo, $u_1(x_n) \longrightarrow u_1(x)$ e $u_2(x_n) \longrightarrow u_2(x)$. Daí

$$(u_1 + \lambda u_2)(x_n) = u_1(x_n) + \lambda u_2(x_n) \longrightarrow u_1(x) + \lambda u_2(x) = (u_1 + \lambda u_2)(x).$$

Portanto $(u_1 + \lambda u_2) \in \mathcal{CC}(E;F)$. E com isso concluímos que $\mathcal{CC}(E;F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$.

Agora mostremos que $\mathcal{CC}(E;F)$ contém os operadores lineares contínuos de posto finito. Sejam $\varphi \in E'$, $y \in F$ e $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ tal que $x_n \xrightarrow{w} x$. Da definição de topologia fraca $\sigma(E;E')$, $\varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x)$. Daí,

$$(\varphi \otimes y)(x_n) = \varphi(x_n)y \longrightarrow \varphi(x)y = (\varphi \otimes y)(x).$$

Isso prova que $\varphi \otimes y \in \mathcal{CC}(E;F)$. Como operadores lineares contínuos de posto finito são combinações lineares de operadores deste tipo e como $\mathcal{CC}(E;F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$, segue imediatamente que $\mathcal{F}(E;F) \subseteq \mathcal{CC}(E;F)$.

(2) Provemos a propriedade de ideal: sejam $u_1 \in \mathcal{L}(F_0;F), u_2 \in \mathcal{CC}(E_0;F_0)$, $u_3 \in \mathcal{L}(E;E_0)$ e $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ tal que $x_n \xrightarrow{w} x$. Como u_3 é um operador contínuo, pelo Teorema 1.32 temos que $u_3(x_n) \xrightarrow{w} u_3(x)$. Como $u_2 \in \mathcal{CC}(E_0;F_0)$ e a sequência $(u_3(x_n))_{n=1}^{\infty} \subseteq E_0$ é tal que $u_3(x_n) \xrightarrow{w} u_3(x)$, temos que

$$u_2(u_3(x_n)) \longrightarrow u_2(u_3(x)).$$

Pela continuidade de u_1 segue que

$$u_1(u_2(u_3(x_n))) \longrightarrow u_1(u_2(u_3(x))).$$

Portanto, $u_1 \circ u_2 \circ u_3 \in \mathcal{CC}(E;F)$. $\square$

Proposição 2.6.3 *$\mathcal{CC}$ é ideal fechado.*

Demonstração: Seja $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{CC}(E;F)$ tal que $\lim\limits_n u_n = u$ na norma usual de operadores. Mostremos que $u \in \mathcal{CC}(E;F)$. Para isso seja $(x_j)_{j=1}^{\infty} \subseteq E$ uma sequência fracamente convergente para $x \in E$. Como cada u_n é completamente contínuo, para todo n temos que $\lim\limits_j u_n(x_j) = u(x)$ na norma de F. Pela Proposição 1.31(a) existe $M > 0$ tal que $\|x_n\| \leq M$ para todo n e

$$\|x\| \leq \liminf_n \|x_n\| \leq M.$$

Seja $\varepsilon > 0$. Como $u = \lim_n u_n$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_{n_0} - u\| < \frac{\varepsilon}{3M}.$$

Como $u_{n_0} \in \mathcal{CC}(E;F)$, temos a convergência $\lim_j u_{n_0}(x_j) = u_{n_0}(x)$, e portanto podemos tomar $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_{n_0}(x_j) - u_{n_0}(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

para todo $j \geq j_0$. Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\|u(x_j) - u(x)\| &= \|u(x_j) - u_{n_0}(x_j) + u_{n_0}(x_j) + u_{n_0}(x) - u_{n_0}(x) - u(x)\| \\
&\leq \|u(x_j) - u_{n_0}(x_j)\| + \|u_{n_0}(x_j) + u_{n_0}(x)\| + \|u_{n_0}(x) - u(x)\| \\
&\leq \|u - u_{n_0}\| \cdot \|x_j\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|u_{n_0} - u\| \cdot \|x\| \\
&< \frac{\varepsilon}{3M}M + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3M}M = \varepsilon,
\end{aligned}$$

para todo $j \geq j_0$. Isso nos permite concluir que $\lim_j u(x_j) = u(x)$, e portanto $u \in \mathcal{CC}(E;F)$.
□

Portanto $(\mathcal{CC}, \|\cdot\|)$ é ideal de Banach.

2.7 Operadores nucleares

O objetivo dessa seção é apresentar o ideal dos operadores nucleares que será útil para exemplificar os ideais que são simétricos mas não são anti-simétricos, conforme veremos no Capítulo 4. A seção culminará com a demonstração de que o ideal dos operadores nucleares $\mathcal{N}$ munido da norma nuclear $\|\cdot\|_{\mathcal{N}}$ é o menor ideal de Banach.

Definição 2.7.1 Sejam E e F espaços de Banach. Um operador linear contínuo $u\colon E \longrightarrow F$ é dito *nuclear* se existem $\varphi_i \in E'$ e $b_i \in F$, $i \in \mathbb{N}$, tais que $\sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\| \cdot \|b_i\| < \infty$ e para cada $x \in E$,

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \otimes b_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) b_i.$$

Denotaremos por $\mathcal{N}(E;F)$ o espaço de todos os operadores nucleares de E em F.

Não é necessário exigir que u seja linear nem contínuo, pois, uma vez que u admite tal representação, tanto a linearidade quanto a continuidade vêm do fato de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ serem funcionais lineares contínuos.

Proposição 2.7.2 *$\mathcal{N}$ é ideal de operadores.*

Demonstração: (1) É claro que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{N}$, e, em particular, $\mathcal{N}(E;F) \neq \emptyset$ para todos espaços de Banach E e F. Sejam $u \in \mathcal{N}(E;F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Existem então $\varphi_i \in E'$ e $b_i \in F$, $i \in \mathbb{N}$, tais que $\sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\| \cdot \|b_i\| < \infty$ e para cada $x \in E$,

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \otimes b_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) b_i.$$

Definindo $\psi_i = \lambda\varphi_i \in E'$ para todo $i \in \mathbb{N}$, temos

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\psi_i\| \cdot \|b_i\| = \sum_{i=1}^{\infty} \|\lambda\varphi_i\| \cdot \|b_i\| = \sum_{i=1}^{\infty} |\lambda| \cdot \|\varphi_i\| \cdot \|b_i\| = |\lambda| \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\| \cdot \|b_i\| < \infty,$$

e, para cada $x \in E$,

$$(\lambda u)(x) = \lambda u(x) = \lambda \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) b_i = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda\varphi_i(x) b_i = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x) b_i.$$

Isso prova que $\lambda u \in \mathcal{N}(E; F)$.

Sejam $u_1, u_2 \in \mathcal{N}(E; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Logo, existem $\varphi_i \in E'$ e $b_i \in F$, $i \in \mathbb{N}$, tais que $\sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\| \cdot \|b_i\| < \infty$ e para cada $x \in E$,

$$u_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \otimes b_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) b_i;$$

e existem $\psi_i \in E'$ e $c_i \in F$, $i \in \mathbb{N}$, tais que $\sum_{i=1}^{\infty} \|\psi_i\| \cdot \|c_i\| < \infty$ e para cada $x \in E$,

$$u_2(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i \otimes c_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x) c_i.$$

Considere as sequências $(\beta_i)_{i=1}^{\infty} \subseteq E'$ e $(a_i)_{i=1}^{\infty} \subseteq F$ definidas da seguinte forma:

$$\begin{cases} \beta_{2i} = \psi_i, & \text{para } i = 1, 2, 3, \ldots \\ \beta_{2i-1} = \varphi_i, & \text{para } i = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} a_{2i} = c_i, & \text{para } i = 1, 2, 3, \ldots \\ a_{2i-1} = b_i, & \text{para } i = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

ou seja, $(\beta_i)_{i=1}^{\infty} = (\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, \ldots) \subseteq E'$ e $(a_i)_{i=1}^{\infty} = (b_1, c_1, b_2, c_2, \ldots) \subseteq F$.
Temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \|\beta_i\| \cdot \|a_i\| &= \|\beta_1\| \cdot \|a_1\| + \|\beta_2\| \cdot \|a_2\| + \|\beta_3\| \cdot \|a_3\| + \ldots \\ &= \|\varphi_1\| \cdot \|b_1\| + \|\psi_1\| \cdot \|c_1\| + \|\varphi_2\| \cdot \|b_2\| + \ldots \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\| \cdot \|b_i\| + \sum_{i=1}^{\infty} \|\psi_i\| \cdot \|c_i\| < \infty, \end{aligned}$$

sendo a reordenação justificada pela convergência absoluta; e

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i(x) b_i + \psi_i(x) c_i\| &\leq \sum_{i=1}^{\infty} (\|\varphi_i(x) b_i\| + \|\psi_i(x) c_i\|) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i(x) b_i\| + \sum_{i=1}^{\infty} \|\psi_i(x) c_i\| < \infty. \end{aligned}$$

Isso mostra que a série $\sum_{i=1}^{\infty}(\varphi_i(x)b_i+\psi_i(x)c_i)$ é absolutamente convergente em F. Como F é Banach, pelo Teorema 1.10 sabemos que $\sum_{i=1}^{\infty}(\varphi_i(x)b_i+\psi_i(x)c_i)$ é incondicionalmente convergente, e então

$$\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(x)b_i+\sum_{i=1}^{\infty}\psi_i(x)c_i=\sum_{i=1}^{\infty}(\varphi_i(x)b_i+\psi_i(x)c_i).$$

Assim, para cada $x\in E$,

$$\begin{aligned}(u_1+u_2)(x) &= u_1(x)+u_2(x)\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(x)b_i+\sum_{i=1}^{\infty}\psi_i(x)c_i\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}(\varphi_i(x)b_i+\psi_i(x)c_i)\\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\beta_i(x)a_i.\end{aligned}$$

Logo $u_1+u_2\in\mathcal{N}(E;F)$.

E com isso concluímos que $\mathcal{N}$ é subespaço de $\mathcal{L}(E;F)$ e contém os operadores lineares contínuos de posto finito.
(2) Propriedade de ideal: Sejam $u_1\in\mathcal{L}(F_0;F), u_2\in\mathcal{N}(E_0;F_0)$ e $u_3\in\mathcal{L}(E;E_0)$. Como $u_2\in\mathcal{N}(E_0;F_0)$, existem $\varphi_i\in E_0'$ e $b_i\in F_0$, $i\in\mathbb{N}$, tais que $\sum_{i=1}^{\infty}\|\varphi_i\|\cdot\|b_i\|<\infty$ e para cada $y\in E_0$,

$$u_2(y)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i\otimes b_i(y)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(y)b_i.$$

Para cada $i\in\mathbb{N}$, defina $\psi_i:=\varphi_i\circ u_3\in E'$ e $c_i:=u_1(b_i)\in F$. Temos

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\|\psi_i\|\cdot\|c_i\| &= \sum_{i=1}^{\infty}\|\varphi_i\circ u_3\|\cdot\|u_1(b_i)\|\\ &\le \sum_{i=1}^{\infty}\|\varphi_i\|\cdot\|u_3\|\cdot\|u_1\|\cdot\|b_i\|\\ &= \|u_1\|\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|\varphi_i\|\|b_i\|\right)\cdot\|u_3\|<\infty,\end{aligned}$$

e, para cada $x \in E$,

$$\begin{aligned}
(u_1 \circ u_2 \circ u_3)(x) &= u_1(u_2(u_3(x))) = u_1\left(\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(u_3(x))b_i\right) \\
&= u_1\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(u_3(x))b_i\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} u_1\left(\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(u_3(x))b_i\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(u_3(x))u_1(b_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(u_3(x))u_1(b_i) \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \psi_i(x)c_i.
\end{aligned}$$

Isso prova que $u_1 \circ u_2 \circ u_3 \in \mathcal{N}(E;F)$. □

Proposição 2.7.3 *$\mathcal{N}$ é ideal normado.*

Demonstração: Vejamos que a expressão

$$\begin{aligned}
\|\cdot\|_{\mathcal{N}} \colon \mathcal{N}(E;F) &\longrightarrow [0,\infty) \\
u &\longmapsto \|u\|_{\mathcal{N}} := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\| \cdot \|b_i\| : u = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \otimes b_i\right\}
\end{aligned}$$

define uma norma em $\mathcal{N}(E;F)$. De fato:
(i) É claro que $\|u\|_{\mathcal{N}} \geq 0$ para todo $u \in \mathcal{N}(E;F)$.
(ii) Se $u = 0$, então também é claro que $\|u\|_{\mathcal{N}} = 0$. Se $\|u\|_{\mathcal{N}} = 0$ então

$$\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\| \cdot \|b_i\| : u = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \otimes b_i\right\} = 0.$$

Logo, para todo $\varepsilon > 0$ existe uma representação da forma $u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x)b_i$ tal que $\sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\| \cdot \|b_i\| < \varepsilon$. Assim,

$$\|u(x)\| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i(x)| \cdot \|b_i\| < \varepsilon\|x\| \text{ para todo } x \in E,$$

ou seja $\|u\| < \varepsilon$. Portanto $\|u\| = 0$ e então $u = 0$.
(iii) Dados $u \in \mathcal{N}(E;F)$ e $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned}
\|\lambda u\|_{\mathcal{N}} &= \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\|\varphi_i\|\cdot\|b_i\| : \lambda u = \sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i\otimes b_i\right\} \\
&= \inf\left\{|\lambda|\cdot\sum_{i=1}^{\infty}\left\|\frac{1}{\lambda}\varphi_i\right\|\cdot\|b_i\| : u = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda}\varphi_i\otimes b_i\right\} \\
&= |\lambda|\cdot\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\|\phi_i\|\cdot\|b_i\| : u = \sum_{i=1}^{\infty}\phi_i\otimes b_i\right\} \\
&= |\lambda|\cdot\|u\|_{\mathcal{N}}.
\end{aligned}$$

(iv) Conforme vimos na demonstração anterior, dadas as representações $u_1 = \sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i\otimes b_i$ e $u_2 = \sum_{i=1}^{\infty}\psi_i\otimes c_i$, existe uma representação de $u_1 + u_2$ da forma

$$u_1 + u_2 = \sum_{i=1}^{\infty}\beta_i\otimes a_i,$$

onde $(\beta_i)_{i=1}^{\infty} = (\varphi_1, \psi_1, \varphi_2, \psi_2, \ldots) \subseteq E'$ e $(a_i)_{i=1}^{\infty} = (b_1, c_1, b_2, c_2, \ldots) \subseteq F$, tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|\beta_i\|\cdot\|a_i\| = \sum_{i=1}^{\infty}\|\varphi_i\|\cdot\|b_i\| + \sum_{i=1}^{\infty}\|\psi_i\|\cdot\|c_i\| < \infty.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\|u_1+u_2\|_{\mathcal{N}} &\leq \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\|\varphi_i\|\cdot\|b_i\| + \sum_{i=1}^{\infty}\|\psi_i\|\cdot\|c_i\| : u_1 = \sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i\otimes b_i \text{ e } u_2 = \sum_{i=1}^{\infty}\psi_i\otimes c_i\right\} \\
&\leq \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\|\varphi_i\|\cdot\|b_i\| : u_1 = \sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i\otimes b_i\right\} \\
&\quad + \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\|\psi_i\|\cdot\|c_i\| : u_2 = \sum_{i=1}^{\infty}\psi_i\otimes c_i\right\} \\
&= \|u_1\|_{\mathcal{N}} + \|u_2\|_{\mathcal{N}}.
\end{aligned}$$

Já sabemos que, por ter posto finito, $Id_{\mathbb{K}} \in \mathcal{N}(\mathbb{K};\mathbb{K})$. Vejamos que $\|Id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{N}} = 1$. Para isso, mostremos primeiro que $\|u\| \leq \|u\|_{\mathcal{N}}$ para todo $u \in \mathcal{N}(E;F)$. De fato, dado $u \in \mathcal{N}(E;F)$, $u = \sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i\otimes b_i$, temos

$$\|u\| = \left\|\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i\otimes b_i\right\| \leq \sum_{i=1}^{\infty}\|\varphi_i\|\cdot\|b_i\|.$$

Tomando o ínfimo sobre todas as representações possíveis, obtemos

$$\|u\| \leq \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\|\phi_i\|\cdot\|c_i\| : u = \sum_{i=1}^{\infty}\phi_i\otimes c_i\right\} = \|u\|_{\mathcal{N}}.$$

Assim,

$$1 = \|Id_{\mathbb{K}}\| \leq \|Id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{N}} = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\|\varphi_i\|\cdot|b_i| : Id_{\mathbb{K}} = \sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i\otimes b_i\right\} \leq \|Id_{\mathbb{K}}\|\cdot|1| = 1,$$

provando que $\|Id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{N}} = 1$.

Dados $u_1 \in \mathcal{L}(F_0;F), u_2 \in \mathcal{N}(E_0;F_0)$ com representação $u_2 = \sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i\otimes b_i$, e $u_3 \in \mathcal{L}(E;E_0)$, existe uma representação $u_1\circ u_2\circ u_3(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(u_3(x))u_1(b_i)$ tal que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\|\varphi_i\circ u_3\|\cdot\|u_1(b_i)\| &\leq \sum_{i=1}^{\infty}\|\varphi_i\|\cdot\|u_3\|\cdot\|u_1\|\cdot\|b_i\| \\ &= \|u_1\|\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|\varphi_i\|\cdot\|b_i\|\right)\cdot\|u_3\| < \infty.\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}\|u_1\circ u_2\circ u_3\|_{\mathcal{N}} &\leq \inf\left\{\|u_1\|\cdot\left(\sum_{i=1}^{\infty}\|\varphi_i\|\cdot\|b_i\|\right)\cdot\|u_3\| : u_2 = \sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i\otimes b_i\right\} \\ &\leq \|u_1\|\cdot\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\|\varphi_i\|\cdot\|b_i\| : u_2 = \sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i\otimes b_i\right\}\cdot\|u_3\| \\ &= \|u_1\|\cdot\|u_2\|_{\mathcal{N}}\cdot\|u_3\|.\end{aligned}$$

Portanto $\mathcal{N}$ é um ideal normado. □

Proposição 2.7.4 *$(\mathcal{N}, \|\cdot\|_{\mathcal{N}})$ é ideal de Banach.*

Demonstração: Vamos usar o critério do Teorema 2.1.3. As condições (1) e (2) do critério já foram provadas. Basta então provar a condição (3). Para isso seja $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathcal{N}(E;F)$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty}\|u_n\|_{\mathcal{N}} < \infty$. Para cada n existem $\varphi_{n,i} \in E'$, $b_{n,i} \in F$, $i \in \mathbb{N}$ tais que

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|\varphi_{n,i}\|\cdot\|b_{n,i}\| < \|u_n\|_{\mathcal{N}} + \frac{\varepsilon}{2^n},$$

e, para todo $x \in E$,

$$u_n(x) = \sum_{i=1}^{\infty}\varphi_{n,i}\otimes b_{n,i}.$$

Como $\|u_n\| \leq \|u_n\|_{\mathcal{N}}$ para todo n, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|u_n\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\|u_n\|_{\mathcal{N}} < \infty.$$

Isso quer dizer que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é absolutamente convergente no espaço de Banach $\mathcal{L}(E;F)$. Pelo Teorema 1.10 a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente em $\mathcal{L}(E;F)$, digamos

$$u := \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{n,i} \otimes b_{n,i} = \sum_{n,i=1}^{\infty} \varphi_{n,i} \otimes b_{n,i} \in \mathcal{L}(E;F),$$

onde a reordenação, novamente, é garantida pela convergência absoluta. Pelo mesmo motivo, de

$$\begin{aligned}
\sum_{n,i=1}^{\infty} \|\varphi_{n,i}\| \cdot \|b_{n,i}\| &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_{n,i}\| \cdot \|b_{n,i}\| \right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\|u_n\|_{\mathcal{N}} + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_{\mathcal{N}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} < \infty,
\end{aligned}$$

concluímos que $u \in \mathcal{N}(E;F)$. Mais ainda,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\mathcal{N}} &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\| \cdot \|b_i\| : u = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \otimes b_i \right\} \\
&\leq \sum_{n,i=1}^{\infty} \|\varphi_{n,i}\| \cdot \|b_{n,i}\| \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_{\mathcal{N}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_{\mathcal{N}} + \varepsilon \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_{\mathcal{N}} + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \longrightarrow 0$ obtemos $\|u\|_{\mathcal{N}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_{\mathcal{N}}$. Pelo critério do Teorema 2.1.3 segue que $(\mathcal{N}, \|\cdot\|_{\mathcal{N}})$ é ideal de Banach. $\square$

O ideal $\mathcal{N}$ dos operadores nucleares tem uma posição de destaque no conjunto de todos os ideais de Banach: enquanto que o ideal dos operadores lineares contínuos de posto finito é o menor ideal de operadores, o ideal dos operadores nucleares é o menor ideal de Banach. Mais precisamente:

Proposição 2.7.5 *Para todo ideal de Banach $\mathcal{I}$, $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{I}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{I}} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{N}}$.*

Demonstração: Sejam $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ um ideal de Banach e $u \in \mathcal{N}(E;F)$ representado na forma $u = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \otimes b_i$, onde $\varphi_i \in E$ e $b_i \in F$, $i \in \mathbb{N}$, são tais que $\sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\| \cdot \|b_i\| < \infty$.

Por ter posto finito, o operador $u_n := \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes b_i$ pertence a $\mathcal{I}(E;F)$ para todo n. Para $m > n$, temos

$$\begin{aligned}
\|u_n - u_m\|_{\mathcal{I}} &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes b_i - \sum_{i=1}^{m} \varphi_i \otimes b_i \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=n+1}^{m} \varphi_i \otimes b_i \right\| \\
&\leq \sum_{i=n+1}^{m} \|\varphi_i\| \cdot \|b_i\| \\
&\leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \|\varphi_i\| \cdot \|b_i\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Assim $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $(\mathcal{I}(E;F), \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$. Como $\mathcal{I}$ é ideal de Banach, $u_n \overset{\|\cdot\|_{\mathcal{I}}}{\to} T$ em $\mathcal{I}(E;F)$ para algum $T \in \mathcal{I}(E;F)$. Da desigualdade $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ segue que $u_n \longrightarrow T$ em $\mathcal{L}(E;F)$. Vejamos que $u_n \longrightarrow u$ em $\mathcal{L}(E;F)$. De fato, de

$$\begin{aligned}
\|u(x) - u_n(x)\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) b_i - \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) b_i \right\| \\
&= \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \varphi_i(x) b_i \right\| \\
&\leq \|x\| \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} \|\varphi_i\| \cdot \|b_i\|
\end{aligned}$$

para todo $x \in E$, segue que

$$\|u_n - u\| \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \|\varphi_i\| \cdot \|b_i\| \longrightarrow 0,$$

ou seja, $u_n \longrightarrow u$ em $\mathcal{L}(E;F)$. Da unicidade do limite podemos concluir que $u = T \in \mathcal{I}(E;F)$. Para a desigualdade das normas, note que para toda representação $u = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \otimes b_i$, temos

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\mathcal{I}} &= \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{\mathcal{I}} = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes b_i \right\|_{\mathcal{I}} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \|\varphi_i\| \cdot \|b_i\| = \sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\| \cdot \|b_i\|.
\end{aligned}$$

Tomando o ínfimo sobre todas as representações possíveis,

$$\|u\|_{\mathcal{I}} \leq \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\| \cdot \|b_i\| : u = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \otimes b_i \right\} = \|u\|_{\mathcal{N}}.$$

$\square$

2.8 Operadores separáveis

O objetivo dessa seção é apresentar o ideal $\mathcal{S}$ dos operadores separáveis que será útil para exemplificar os ideais que são anti-simétricos mas não são simétricos que veremos no Capítulo 4. A seção culminará com a demonstração de que $\mathcal{S}$ é um ideal fechado, isto é, que $(\mathcal{S}, \|\cdot\|)$ é um ideal de Banach.

Definição 2.8.1 Sejam E e F espaços de Banach. Um operador linear contínuo $u\colon E \longrightarrow F$ é dito *separável* se sua imagem $u(E)$ é um subespaço separável de F.

Denotaremos por $\mathcal{S}(E;F)$ o conjunto de todos os operadores separáveis de E em F.

Proposição 2.8.2 *$\mathcal{S}$ é ideal de operadores.*

Demonstração: $\mathcal{S}(E;F) \neq \emptyset$ pois pela Proposição 1.19 temos $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{S}$.

Sejam $u \in \mathcal{S}(E;F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. O caso em que $\lambda = 0$ é trivial. Suponhamos $\lambda \neq 0$. Podemos tomar uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ tal que a sequência $(u(x_n))_{n=1}^{\infty}$ é densa em $u(E)$. Assim, dados $x \in E$ e $\varepsilon > 0$ existe n_x tal que

$$\|u(x) - u(x_{n_x})\| < \frac{\varepsilon}{|\lambda|}.$$

Portanto,

$$\|\lambda u(x) - \lambda u(x_{n_x})\| = |\lambda| \cdot \|u(x) - u(x_{n_x})\| < |\lambda| \cdot \frac{\varepsilon}{|\lambda|} = \varepsilon.$$

Isso mostra que a sequência $(\lambda u(x_n))_{n=1}^{\infty} = (u(\lambda x_n))_{n=1}^{\infty}$ é densa em $\lambda u(E)$, e consequentemente λu é separável.

Antes de prosseguir com a demonstração de que $\mathcal{S}$ é um ideal de operadores, mostremos a

Afirmação 1: Sejam Y um espaço métrico e $X \subseteq Y$. Suponha que exista uma sequência $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq Y$ tal que para todos $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(x, y_N) < \varepsilon$. Então X é separável.

Demonstração da Afirmação 1: Considere o conjunto $Z := X \cup \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq Y$. Sejam $x \in Z$ e $\varepsilon > 0$. Temos duas possibilidades:
(i) $x \in X$: Neste caso, por hipótese existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $d(y_N, x) < \varepsilon$, e $y_N \in Z$.
(ii) $x = y_k$ para algum k: Neste caso $y_k \in Z$ e $d(y_k, x) = d(y_k, y_k) = 0 < \varepsilon$.

Isso prova que $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência densa em $Z = X \cup \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$. Portanto $Z = X \cup \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$ é separável. Como $X \subseteq Z = X \cup \{y_n : n \in \mathbb{N}\}$, pelo Lema 1.21 segue que X é separável.

Voltando à demonstração da proposição, provemos a propriedade de ideal: sejam $u_1 \in \mathcal{L}(F_0;F)$, $u_2 \in \mathcal{S}(E_0;F_0)$ e $u_3 \in \mathcal{L}(E;E_0)$. Como $u_2 \in \mathcal{S}(E_0;F_0)$, $u_2(E_0)$ é separável, ou seja, existe uma sequência $(y_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E_0$ tal que a sequência $(u_2(y_n))_{n=1}^{\infty}$ é densa em $u_2(E_0)$. Supondo $\|u_1\| > 0$, dado $y \in E_0$ existe n_y tal que

$$\|u_2(y) - u_2(y_{n_y})\| < \frac{\varepsilon}{\|u_1\|}.$$

O caso em que $\|u_1\| = 0$ é trivial. Assim dados $x \in E$ e $\varepsilon > 0$, $u_3(x) \in E_0$ e portanto

$$\|u_1(\underbrace{u_2(u_3(x))}_{\in u_2(E_0)}) - u_1(u_2(y_{n_y}))\| < \|u_1\| \cdot \frac{\varepsilon}{\|u_1\|} = \varepsilon.$$

Da Afirmação 1 segue que $u_1(u_2(u_3(E)))$ é separável, ou seja, $u_1 \circ u_2 \circ u_3 \in \mathcal{S}(E;F)$.

Para mostrar que a soma de dois operadores separáveis é separável, mostremos a

Afirmação 2: Um operador $u \in \mathcal{L}(E;F)$ é separável se, e somente se, existem um espaço separável M e operadores $w \in \mathcal{L}(E;M)$ e $v \in \mathcal{L}(M;F)$ tais que $u = v \circ w$.

Demonstração da Afirmação 2: Suponhamos primeiramente que u seja separável. Neste caso $u(E) \subseteq F$ é separável, e pela Proposição 1.23, $\overline{u(E)} \subseteq F$ é separável. Defina

$$\widetilde{u} \colon E \longrightarrow \overline{u(E)}\ ,\ \widetilde{u}(x) = u(x),$$

e considere o operador inclusão

$$i \colon \overline{u(E)} \longrightarrow F\ ,\ i(\widetilde{u}(x)) = \widetilde{u}(x).$$

Então $\widetilde{u}$ e i são lineares e contínuos, $u = i \circ \widetilde{u}$ e $\overline{u(E)}$ é separável.

Reciprocamente, suponha que existam um espaço separável M e operadores $w \in \mathcal{L}(E;M)$ e $v \in \mathcal{L}(M;F)$ tais que $u = v \circ w$. Como $w(E) \subseteq M$ e M é separável pela Proposição 1.21, segue que $w(E)$ é separável, ou seja, w é separável. A propriedade de ideal, já demonstrada, garante que $u = v \circ w$ é separável.

Prosseguindo com a demonstração de que $\mathcal{S}$ é um ideal de operadores, sejam u_1, $u_2 \in \mathcal{S}(E;F)$. Pela Afirmação 2 existem um espaço separável M_1 e operadores $w_1 \in \mathcal{L}(E;M_1)$ e $v_1 \in \mathcal{L}(M_1;F)$ tais que $u_1 = v_1 \circ w_1$; e existem um espaço separável M_2 e operadores $w_2 \in \mathcal{L}(E;M_2)$ e $v_2 \in \mathcal{L}(M_2;F)$ tais que $u_2 = v_2 \circ w_2$. Definamos os seguintes operadores lineares contínuos:

$$\begin{array}{rcl} R_1 \colon M_1 & \longrightarrow & M_1 \times M_2 \\ a & \mapsto & R_1(a) = (a,0), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} R_2 \colon M_2 & \longrightarrow & M_1 \times M_2 \\ b & \mapsto & R_2(b) = (0,b), \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} Q_1 \colon M_1 \times M_2 & \longrightarrow & M_1 \\ (a,b) & \mapsto & Q_1(a,b) = a, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} Q_2 \colon M_1 \times M_2 & \longrightarrow & M_2 \\ (a,b) & \mapsto & Q_2(a,b) = b. \end{array}$$

Note que

$$R_1 \circ w_1 + R_2 \circ w_2 \in \mathcal{L}(E; M_1 \times M_2) \;\text{ e }\; v_1 \circ Q_1 + v_2 \circ Q_2 \in \mathcal{L}(M_1 \times M_2; F).$$

Vejamos que

$$u_1 + u_2 = (v_1 \circ Q_1 + v_2 \circ Q_2) \circ (R_1 \circ w_1 + R_2 \circ w_2).$$

De fato, para todo $x \in E$,

$$\begin{aligned}
(v_1 \circ Q_1 + v_2 \circ Q_2) \circ (R_1 \circ w_1 + R_2 \circ w_2)(x) \\
&= (v_1 \circ Q_1 + v_2 \circ Q_2)((R_1 \circ w_1)(x) + (R_2 \circ w_2)(x)) \\
&= (v_1 \circ Q_1 + v_2 \circ Q_2)(R_1(w_1(x)) + R_2(w_2(x))) \\
&= (v_1 \circ Q_1 + v_2 \circ Q_2)((w_1(x), 0) + (0, w_2(x))) \\
&= (v_1 \circ Q_1 + v_2 \circ Q_2)((w_1(x), w_2(x))) \\
&= (v_1(Q_1(w_1(x), w_2(x)))) + (v_2(Q_2(w_1(x), w_2(x)))) \\
&= (v_1(w_1(x))) + (v_2(w_2(x))) \\
&= (v_1 \circ w_1)(x) + (v_2 \circ w_2)(x) \\
&= ((v_1 \circ w_1) + (v_2 \circ w_2))(x) \\
&= (u_1 + u_2)(x).
\end{aligned}$$

Isso prova que $u_1+u_2 = (\underbrace{v_1 \circ Q_1 + v_2 \circ Q_2}_{\in \mathcal{L}(M_1 \times M_2; F)}) \circ (\underbrace{R_1 \circ w_1 + R_2 \circ w_2}_{\in \mathcal{L}(E; M_1 \times M_2)})$. Sabemos, pela Proposição 1.24, que $M_1 \times M_2$ separável. Novamente pela Afirmação 2 concluímos que $u_1 + u_2 \in \mathcal{S}(E; F)$.

Está completa a demonstração de que $\mathcal{S}$ é um ideal de operadores. □

Proposição 2.8.3 *O ideal $\mathcal{S}$ dos operadores separáveis é fechado.*

Demonstração: Seja $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{S}(E; F)$ uma sequência tal que $u_n \longrightarrow u \in \mathcal{L}(E; F)$. Devemos mostrar que $u \in \mathcal{S}(E; F)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ o operador u_n é separável, portanto podemos tomar uma sequência $(x_j^n)_{j=1}^{\infty} \subseteq E$ tal que a sequência $(u_n(x_j^n))_{j=1}^{\infty}$ é densa em $u_n(E)$. Seja $\varepsilon > 0$. Dado $x \in E$, como convergência em $\mathcal{L}(E; F)$ implica em convergência pontual, $u_n(x) \longrightarrow u(x)$, logo existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_N(x) - u(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como a sequência $\left(u_N\left(x_j^N\right)\right)_{j=1}^{\infty}$ é densa em $u_N(E)$ e $u_N(x) \in u_N(E)$, existe $J \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|u_N(x) - u_N\left(x_J^N\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Então

$$\begin{aligned}\left|u(x)-u_N\left(x_J^N\right)\right| &= \left|u(x)-u_N\left(x\right)+u_N\left(x\right)-u_N\left(x_J^N\right)\right| \\ &\leq \left|u_N\left(x\right)-u(x)\right|+\left|u_N\left(x\right)-u_N\left(x_J^N\right)\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Isso prova que a sequência $(u_n(x_j^n))_{n,j=1}^{\infty} \subseteq F$ é densa em $u(E)$. Pela Afirmação 1 da demonstração da Proposição 2.8.2 concluímos que $u(E)$ é separável, e portanto $u \in \mathcal{S}(E;F)$. $\square$

Portanto $(\mathcal{S}, \|\cdot\|)$ é um ideal de Banach.

CAPÍTULO 3

O DUAL DE UM IDEAL DE OPERADORES

Dado um operador linear contínuo $u\colon E \longrightarrow F$ entre espaços de Banach, o seu *adjunto* é o operador

$$u'\colon F' \longrightarrow E' \ , \ u'(\varphi)(x) = \varphi(u(x)).$$

O objetivo deste capítulo é estudar o dual de um ideal de operadores $\mathcal{I}$, que é definido por

$$\mathcal{I}^{\text{dual}}(E;F) := \{u \in \mathcal{L}(E;F) : u' \in \mathcal{I}(F';E')\}.$$

Para isso precisamos de um seção preparatória, na qual provaremos as propriedades do adjunto de um operador linear que serão necessárias para o estudo do dual de um ideal de operadores.

3.1 O adjunto de um operador linear contínuo

A noção de adjunto de um operador linear, introduzida a seguir, desempenha papel central nesta dissertação.

Definição 3.1.1 Sejam E, F espaços normados e $u \in \mathcal{L}(E;F)$ um operador linear contínuo. Definimos o operador $u'\colon F' \longrightarrow E'$ por

$$u'(\varphi)(x) = \varphi(u(x)),$$

para todos $x \in E$ e $\varphi \in F'$. O operador u' é chamado de *adjunto* de u.

Agrupamos nesta seção as propriedades do adjunto de um operador linear que serão necessárias na sequência.

Lema 3.1.2 *Seja E espaço normado. Então $(Id_E)' = Id_{E'}$.*

Demonstração: De fato,

$$(Id_E)'(\varphi)(x) = \varphi(Id_E(x)) = \varphi(x) = Id_{E'}(\varphi)(x),$$

para todos $x \in E$ e $\varphi \in E'$. $\square$

Proposição 3.1.3 *Sejam $u, v \in \mathcal{L}(E; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então:*
(a) *$u' \in \mathcal{L}(F'; E')$.*
(b) *$(u + v)' = u' + v'$.*
(c) *$(\lambda u)' = \lambda u'$.*
(d) *$\|u\| = \|u'\|$.*
(e) *Se u é um isomorfismo (isométrico), então u' também é um isomorfismo (isométrico), e neste caso $(u^{-1})' = (u')^{-1}$.*
Em particular, a correspondência

$$u \in \mathcal{L}(E; F) \longmapsto u' \in \mathcal{L}(F'; E') \tag{3.1}$$

é linear e imersão isométrica, isto é, é um isomorfismo isométrico sobre sua imagem em $\mathcal{L}(F'; E')$.

Demonstração: (a) Primeiramente mostremos que u' de fato toma valores em E': dados $\varphi \in F'$, $x, y \in E$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$u'(\varphi)(x + \lambda y) = \varphi(u(x + \lambda y)) = \varphi(u(x) + \lambda u(y)) = u'(\varphi)(x) + \lambda u'(\varphi)(y),$$

provando que $u'(\varphi)$ é linear. De

$$|u'(\varphi)(x)| = |\varphi(u(x))| \leq \|\varphi\| \cdot \|u(x)\| \leq \|\varphi\| \cdot \|u\| \cdot \|x\|,$$

concluímos que $u'(\varphi)$ é contínuo. Assim, $u'(\varphi) \in E'$. Vejamos agora que u' é linear: dados $\varphi, \psi \in F'$ e $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} u'(\varphi + \lambda\psi)(x) &= (\varphi + \lambda\psi)(u(x)) \\ &= \varphi(u(x)) + \lambda\psi(u(x)) \\ &= u'(\varphi)(x) + \lambda u'(\psi)(x) \\ &= (u'(\varphi) + \lambda u'(\psi))(x) \end{aligned}$$

para todos $x \in E$, logo $u'(\varphi + \lambda\psi) = u'(\varphi) + \lambda u'(\psi)$. Mostremos agora que u' é contínuo. De fato,

$$\begin{aligned} \|u'(\varphi)\| &= \sup_{x \in B_E} |u'(\varphi)(x)| \\ &= \sup_{x \in B_E} |\varphi(u(x))| \\ &\leq \|\varphi\| \cdot \sup_{x \in B_E} |u(x)| \\ &= \|\varphi\| \cdot \|u\|, \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in F'$, o que comprova a continuidade de u' e ainda nos fornece a desigualdade $\|u'\| \leq \|u\|$.

(b) De

$$\begin{aligned}
(u+v)'(\varphi)(x) &= \varphi((u+v)(x)) \\
&= \varphi(u(x)+v(x)) \\
&= \varphi(u(x))+\varphi(v(x)) \\
&= u'(\varphi)(x)+v'(\varphi)(x) \\
&= (u'+v')(\varphi)(x),
\end{aligned}$$

para todos $\varphi \in F'$ e $x \in E$, segue que $(u+v)' = u'+v'$.

(c) De

$$\begin{aligned}
(\lambda u)'(\varphi)(x) &= \varphi((\lambda u)(x)) \\
&= \varphi(\lambda u(x)) \\
&= \lambda\varphi(u(x)) \\
&= \lambda u'(\varphi)(x),
\end{aligned}$$

para todos $\varphi \in F'$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in E$, segue que $(\lambda u)' = \lambda u'$.

(d) No item (a) já provamos que $\|u'\| \leq \|u\|$. Por outro lado, pela Proposição 1.5 temos

$$\|u(x)\| = \sup_{\varphi\in B_{F'}} |\varphi(u(x))| = \sup_{\varphi\in B_{F'}} |u'(\varphi)(x)| \leq \sup_{\varphi\in B_{F'}} |u'(\varphi)| \cdot \|x\| = \|u'\| \cdot \|x\|,$$

para todo $x \in E$, provando que $\|u\| \leq \|u'\|$. Portanto $\|u\| = \|u'\|$.

(e) Suponha que u seja um isomorfismo. Vejamos que u' sobrejetor. Para isso seja $\varphi \in E'$. Considere $\Phi \in F'$ dado por $\Phi(z) = \varphi(u^{-1}(z))$. Temos que

$$u'(\Phi(z)) = u'(\varphi(u^{-1}(z))) = \varphi(u(u^{-1}(z))) = \varphi(z),$$

para todo $z \in F$, provando que $u'(\Phi) = \varphi$, e portanto u' é sobrejetor. Vejamos que u' é injetor. Se $\psi \in \ker(u')$, então

$$\psi(u(x)) = u'(\psi)(x) = 0$$

para todo $x \in E$. Como u é sobrejetor segue que $\psi = 0$. Portanto u' é bijetor, e, como E' é Banach, segue do Teorema 1.4 (Teorema da Aplicação Aberta) que u' é isomorfismo.

Supondo que u seja um isomorfismo isométrico, para mostrar que u' é também um isomorfismos isométrico basta mostrar que $\|u'(\varphi)\| = \|\varphi\|$ para todo $\varphi \in F'$. Para isso seja $\varphi \in F'$. Como u é isomorfismo isométrico,

$$x \in B_E \text{ se, e somente se, } u(x) \in B_F,$$

e portanto

$$\|u'(\varphi)\| = \sup_{x \in B_E} |u'(\varphi)(x)| = \sup_{x \in B_E} |\varphi(u(x))| = \sup_{u(x) \in B_F} |\varphi(u(x))| = \sup_{z \in B_F} |\varphi(z)| = \|\varphi\|.$$

A demonstração de que $(u^{-1})' = (u')^{-1}$ segue das seguintes igualdades:

$$Id_E = Id_{E'} = (u^{-1} \circ u)' = u' \circ (u^{-1})' \text{ e}$$

$$Id_F = Id_{F'} = (u \circ u^{-1})' = (u^{-1})' \circ u'.$$

□

Proposição 3.1.4 *Se* $u \in \mathcal{L}(E;F)$ *e* $v \in \mathcal{L}(F;G)$, *então* $(v \circ u)' = v' \circ u'$.

Demonstração: Para todos $\varphi \in G'$ e $x \in E$,

$$\begin{aligned}(u' \circ v')(\varphi)(x) &= u'(v'(\varphi))(x) = v'(\varphi)(u(x)) = \varphi(v(u(x))) \\ &= \varphi(v \circ u(x)) = (v \circ u)'(\varphi)(x),\end{aligned}$$

provando o resultado. □

Uma pergunta natural é: qual é a imagem da correspondência (3.1) em $\mathcal{L}(F';E')$? Em outras palavras, quais operadores são adjuntos de outros operadores? A resposta desta pergunta será importante para propósitos futuros. Para respondê-la precisamos de alguns resultados preparatórios, alguns dos quais também serão úteis mais adiante.

Proposição 3.1.5 *Seja* $u \in \mathcal{L}(E;F)$. *Então* u'' *é uma extensão de* u *a* E'' *no sentido de que* $u'' \circ J_E = J_F \circ u$; *ou seja, o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd} E'' \arrow[r, "u''"] & F'' \\ E \arrow[u, "J_E"] \arrow[r, "u"] & F \arrow[u, "J_F"'] \end{tikzcd}$$

Em particular, $u'' \circ J_E(E) \subseteq J_F(F)$.

Demonstração: Para todos $x \in E$ e $\varphi \in F'$,

$$\begin{aligned}(J_F \circ u)(x)(\varphi) &= J_F(u(x))(\varphi) = \varphi(u(x)) = u'(\varphi)(x) \\ &= J_E(x)(u'(\varphi)) = u''(J_E(x))(\varphi).\end{aligned}$$

Assim,

$$(J_F \circ u)(x) = u''(J_E(x)) = (u'' \circ J_E)(x),$$

para todo $x \in E$. Portanto $u'' \circ J_E = J_F \circ u$. E disso segue que

$$(u'' \circ J_E)(E) = (J_F \circ u)(E) = J_F(u(E)) \subseteq J_F(F).$$

□

Corolário 3.1.6 *Sejam F um espaço reflexivo e $u\colon E \longrightarrow F$ um operador linear contínuo. Então $J_F^{-1} \circ u'' \circ J_E = u$.*

Demonstração: Da Proposição 3.1.5 temos

$$J_F^{-1} \circ u'' \circ J_E = J_F^{-1} \circ J_F \circ u = u.$$

□

Quando falamos em funções contínuas entre espaços topológicos, normalmente as topologias envolvidas estão claras, por isso não as mencionamos. Quando houver necessidade de explicitar as topologias, adotaremos a seguinte notação: dados espaços topológicos (X, τ) e (Y, τ'), uma função contínua $f\colon (X, \tau) \longrightarrow (Y, \tau')$ será dita τ-τ'-*contínua.* Por simplicidade, a topologia fraca-estrela no dual de um espaço normado será denotada por w^*.

Lema 3.1.7 *Seja $T \in \mathcal{L}(F'; E')$. O operador T é w^*-w^*-contínuo se, e somente se, existe $u \in \mathcal{L}(E; F)$ tal que $u' = T$.*

Demonstração: Suponha primeiramente que T seja w^*-w^*-contínuo. Considere os mergulhos canônicos $J_E\colon E \longrightarrow E''$ e $J_F\colon F \longrightarrow F''$. Para cada $x \in E$, da definição da topologia fraca-estrela temos a w^*-continuidade de $J_E(x)$; o que nos assegura que o operador $J_E(x) \circ T$ é um funcional linear w^*-contínuo em F'. Pelo Teorema 1.40, $(J_E(x) \circ T) \in J_F(F)$, logo $J_F^{-1}(J_E(x) \circ T) \in F$. Defina

$$u\colon E \longrightarrow F \ , \ u(x) = J_F^{-1}(J_E(x) \circ T).$$

O operador u está bem definido e é linear. De fato, $u(x) = J_F^{-1}(J_E(x) \circ T) \in F$ para cada $x \in E$; e para todos $x, y \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$ tem-se

$$\begin{aligned} u(x + \lambda y) &= J_F^{-1}(J_E(x + \lambda y) \circ T) \\ &= J_F^{-1}((J_E(x) + \lambda J_E(y)) \circ T) \\ &= J_F^{-1}((J_E(x) \circ T + \lambda J_E(y) \circ T) \\ &= J_F^{-1}(J_E(x) \circ T) + \lambda J_F^{-1}(J_E(y) \circ T) \\ &= u(x) + \lambda u(y). \end{aligned}$$

Levando em conta que as aplicações J_F e J_E são isometrias, tem-se

$$\|u(x)\|_F = \|J_F^{-1}(J_E(x) \circ T)\|_F = \|J_E(x) \circ T\|_{F''} \leq \|J_E(x)\|_{E''} \cdot \|T\| = \|T\| \cdot \|x\|_E,$$

o que nos mostra que u é contínuo. Observe que, para todos $x \in E$ e $\varphi \in F'$,

$$\begin{aligned} u'(\varphi)(x) &= \varphi(u(x)) = \varphi(J_F^{-1}(J_E(x) \circ T)) \\ &= J_F(J_F^{-1}(J_E(x) \circ T))(\varphi) = (J_E(x) \circ T)(\varphi) \\ &= J_E(x)(T(\varphi)) = T(\varphi)(x), \end{aligned}$$

provando que $u' = T$.

Reciprocamente, suponha a existência de um operador $u \in \mathcal{L}(E;F)$ tal que $u' = T$. Seja $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede em F' tal que $\varphi_\lambda \xrightarrow{w^*} \varphi$. Para cada $x \in E$,

$$T(\varphi_\lambda)(x) = u'(\varphi_\lambda)(x) = \varphi_\lambda(u(x)) \longrightarrow \varphi(u(x)) = u'(\varphi)(x) = T(\varphi)(x),$$

assim, $T(\varphi_\lambda) \xrightarrow{w^*} T(\varphi)$. Isso prova que T é w^*-w^*-contínuo. $\square$

Definimos $\mathcal{L}_{w^*w^*}(F';E') := \{u \in \mathcal{L}(F';E') : u \text{ é } w^*{-}w^*{-}\text{contínuo}\}$.

Proposição 3.1.8 *A correspondência*

$$u \in \mathcal{L}(E;F) \longmapsto u' \in \mathcal{L}_{w^*w^*}(F';E')$$

é um isomorfismo isométrico. Em particular, se F for um espaço de Banach então $\mathcal{L}_{w^*w^*}(F';E')$ é subespaço fechado de $\mathcal{L}(F';E')$.

A demonstração desse resultado segue da Proposição 3.1.3 e do Lema 3.1.7.

3.2 Propriedades do ideal dual

De posse das propriedades do adjunto de um operador linear, provaremos nesta seção algumas propriedades do dual $\mathcal{I}^{\text{dual}}$ de um ideal de operadores $\mathcal{I}$.

Teorema 3.2.1 *Se $\mathcal{I}$ é um ideal de operadores, então $\mathcal{I}^{\text{dual}}$ é também um ideal de operadores.*

Demonstração: Mostremos que, dados espaços de Banach E e F, $\mathcal{I}^{\text{dual}}(E;F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$ e contém os operadores de posto finito. É claro que operador identicamente nulo pertence a $\mathcal{I}^{\text{dual}}(E;F)$ pois $0' = 0 \in \mathcal{I}(F';E')$. Sejam $\lambda \in \mathbb{K}$ e $u_1, u_2 \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(E;F)$. Como $u_1', u_2' \in \mathcal{I}(F';E')$ e como $\mathcal{I}(F';E')$ é subespaço vetorial por $\mathcal{I}$ ser ideal de operadores, da Proposição 3.1.3 decorre que

$$(u_1 + \lambda u_2)' = u_1' + \lambda u_2' \in \mathcal{I}(F';E'),$$

o que mostra que $(u_1 + \lambda u_2) \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(E;F)$.

Seja $u = \sum_{i=1}^n \varphi_i \otimes y_i$ um operador linear contínuo de posto finito, isto é, $\varphi_i \in E'$ e $y_i \in F$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$. Como $\mathcal{I}$ é ideal de operadores, o operador $u \in \mathcal{I}(E;F)$. Devemos mostrar que $u \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(E;F)$, isto é, que $u' \in \mathcal{I}(F';E')$. Primeiramente vamos mostrar que se $\varphi \otimes y \in \mathcal{I}(E;F)$, $\varphi \in E'$ e $y \in F$, então $(\varphi \otimes y)' \in \mathcal{I}(F';E')$. De fato, para todo $x \in E$,

$$\varphi \otimes y(x) = \varphi(x)y \in [y].$$

E para todos $x \in E$ e $\psi \in F'$,

$$(\varphi \otimes y)'(\psi)(x) = \psi(\varphi \otimes y(x)) = \psi(\varphi(x)y) = \varphi(x)\psi(y) = \psi(y)\varphi(x).$$

Logo $(\varphi \otimes y)'(\psi) = \psi(y)\varphi \in [\varphi]$ para todo $\psi \in F'$. Dessa forma, a imagem do operador $(\varphi \otimes y)'$ está contida no subespaço $[\varphi]$ gerado por φ, o que por sua vez implica que

$$(\varphi \otimes y)' \in \mathcal{F}(F'; E') \subseteq \mathcal{I}(F'; E').$$

Como $\mathcal{I}$ é ideal de operadores, $u' = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i \otimes y_i)' \in \mathcal{I}(F'; E')$, o que mostra que

$$u = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i \otimes y_i \in \mathcal{I}^{\text{dual}}.$$

Provemos a propriedade de ideal: sejam $u_1 \in \mathcal{L}(F_0; F), u_2 \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(E_0; F_0)$ e $u_3 \in \mathcal{L}(E; E_0)$. Logo $u_1' \in \mathcal{L}(F'; F_0')$, $u_2' \in \mathcal{I}(F_0'; E_0')$ e $u_3' \in \mathcal{L}(E_0'; E')$. Usando a propriedade de ideal de $\mathcal{I}$ e a Proposição 3.1.4, temos

$$(u_3' \circ u_2' \circ u_1') = (u_1 \circ u_2 \circ u_3)' \in \mathcal{I}(F'; E').$$

Isso prova que $u_1 \circ u_2 \circ u_3 \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(E; F)$. □

Definição 3.2.2 Seja $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ um ideal normado de operadores. Para cada $u \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(E; F)$, definimos

$$\|u\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}} := \|u'\|_{\mathcal{I}}.$$

Teorema 3.2.3 *Se $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal normado de operadores, então $(\mathcal{I}^{\text{dual}}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}})$ também é ideal normado de operadores.*

Demonstração: (1) $\|\cdot\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}}$ é norma em cada componente $\mathcal{I}^{\text{dual}}(E; F)$:
(i) Seja $u \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(E; F)$. Então $u' \in \mathcal{I}(F'; E')$, e como $\|\cdot\|_{\mathcal{I}}$ é norma em $\mathcal{I}(E; F)$, temos $\|u\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}} = \|u'\|_{\mathcal{I}} \geq 0$. Pelo mesmo motivo,

$$\|u\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}} = \|u'\|_{\mathcal{I}} = 0 \Longleftrightarrow u' = 0 \Longleftrightarrow \|u'\|_{\mathcal{L}} = 0 \Longleftrightarrow u = 0.$$

(ii) Sejam $u_1, u_2 \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(E; F)$. Então $u_1', u_2' \in \mathcal{I}(F'; E')$, e da mesma forma como antes, com a ajuda da Proposição 3.1.3,

$$\|u_1 + u_2\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}} = \|(u_1 + u_2)'\|_{\mathcal{I}} = \|u_1' + u_2'\|_{\mathcal{I}} \leq \|u_1'\|_{\mathcal{I}} + \|u_2'\|_{\mathcal{I}} = \|u_1\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}} + \|u_2\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}}.$$

(iii) Sejam $u \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(E; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Então $u' \in \mathcal{I}(F'; E')$, e pelos mesmos motivos do item anterior,

$$\|\lambda u\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}} = \|(\lambda u)'\|_{\mathcal{I}} = \|\lambda u'\|_{\mathcal{I}} = |\lambda| \cdot \|u'\|_{\mathcal{I}} = |\lambda| \cdot \|u\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}}.$$

(2) $\|Id_{\mathbb{K}}\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}} = \|(Id_{\mathbb{K}})'\|_{\mathcal{I}} = \|Id_{\mathbb{K}'}\|_{\mathcal{I}} = 1$.
(3) Sejam $u_1 \in \mathcal{L}(F_0; F), u_2 \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(E_0; F_0)$ e $u_3 \in \mathcal{L}(E; E_0)$. Assim, $u_1 \circ u_2 \circ u_3 \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(E; F)$ e $u_2' \in \mathcal{I}(F_0'; E_0')$. Da propriedade de ideal do ideal normado $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ e da Proposição 3.1.4,

$$\begin{aligned} \|u_1 \circ u_2 \circ u_3\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}} &= \|(u_1 \circ u_2 \circ u_3)'\|_{\mathcal{I}} = \|u_3' \circ u_2' \circ u_1'\|_{\mathcal{I}} \\ &\leq \|u_3'\| \cdot \|u_2'\|_{\mathcal{I}} \cdot \|u_1'\| = \|u_3\| \cdot \|u_2\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}} \cdot \|u_1\|. \end{aligned}$$

□

O resultado a seguir é mais um cuja demonstração não foi encontrado em nenhuma referência.

Teorema 3.2.4 *Se $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é um ideal de Banach, então $(\mathcal{I}^{\text{dual}}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}})$ também é ideal de Banach.*

Demonstração: Usaremos o critério do Teorema 2.1.3. As condições (1) e (2) já foram provadas. Basta então provar a condição (3). Para isso sejam E e F espaços de Banach e $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em $\mathcal{I}^{\text{dual}}(E;F)$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}} < \infty$. Então $(u_n')_{n=1}^{\infty}$ é uma sequência em $\mathcal{I}(F';E')$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n'\|_{\mathcal{I}} = \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}} < \infty.$$

Como $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ é ideal de Banach, pelo critério do Teorema 2.1.3 segue que

$$v := \sum_{n=1}^{\infty} u_n' \in \mathcal{I}(F';E') \subseteq \mathcal{L}(F';E') \quad \text{e} \quad \|v\|_{\mathcal{I}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n'\|_{\mathcal{I}}.$$

Usando primeiro a Proposição 3.1.3(d) e depois a Proposição 2.1.4(a), temos que $\|u_n\| = \|u_n'\| \leq \|u_n'\|_{\mathcal{I}}$ para todo n. Então

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n'\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n'\|_{\mathcal{I}} < \infty.$$

Isso quer dizer que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é absolutamente convergente no espaço de Banach $\mathcal{L}(E;F)$. Pelo Teorema 1.10 segue que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ é convergente em $\mathcal{L}(E;F)$, digamos $u := \sum_{n=1}^{\infty} u_n \in \mathcal{L}(E;F)$. De

$$\left\| u' - \sum_{j=1}^{n} u_j' \right\| = \left\| \left(u - \sum_{j=1}^{n} u_j \right)' \right\| = \left\| u - \sum_{j=1}^{n} u_j \right\| \overset{n \longrightarrow \infty}{\longrightarrow} 0,$$

concluímos que $u' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n' = v \in \mathcal{I}(F';E')$. Da definição de ideal dual temos $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(E;F)$ e

$$\|u\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}} = \|u'\|_{\mathcal{I}} = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} u_n' \right\|_{\mathcal{I}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n'\|_{\mathcal{I}} = \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}}.$$

Novamente pelo critério do Teorema 2.1.3 segue que $(\mathcal{I}^{\text{dual}}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}})$ também é ideal de Banach. $\square$

Corolário 3.2.5 *Se $\mathcal{I}$ é um ideal fechado, então $\mathcal{I}^{\text{dual}}$ também é ideal fechado.*

3.3 Ideais injetivos e sobrejetivos

Nesta seção definiremos os conceitos de ideal de operadores injetivo e sobrejetivo. O objetivo é estabelecer como essas propriedades passam de um ideal $\mathcal{I}$ para o seu dual $\mathcal{I}^{\text{dual}}$. No Apêndice A indicamos, dentre os ideais estudados nesta dissertação, quais são injetivos e/ou sobrejetivos.

Definição 3.3.1 Um operador linear $j\colon F \hookrightarrow G$ entre espaços normados é chamado de *injeção métrica* se

$$\|j(x)\|_G = \|x\|_F \text{ para todo } x \in F.$$

Os exemplos canônicos de injeções métricas são: (i) a inclusão $i\colon F \hookrightarrow G$ de um subespaço F do espaço normado G; (ii) o mergulho canônico J_E do espaço normado E em seu bidual E''. É claro que toda injeção métrica é injetora, e um isomorfismo isométrico nada mais é do que uma injeção métrica sobrejetora.

Definição 3.3.2 Um operador linear $q\colon G \twoheadrightarrow E$ entre espaços normados é chamado de *sobrejeção métrica* se

$$\|y\|_E = \inf\{\|x\|_G : q(x) = y\} \text{ para todo } y \in E.$$

O exemplo canônico de sobrejeção métrica é a projeção $\pi : E \longrightarrow E/F$ de um espaço normado E no espaço quociente E/F de E por um subespaço fechado F.

Definição 3.3.3 Um ideal de operadores $\mathcal{I}$ é *injetivo* se dados um operador $u \in \mathcal{L}(E;F)$ e uma injeção métrica $j\colon F \hookrightarrow G$ tais que $(j \circ u) \in \mathcal{I}(E;G)$, tem-se $u \in \mathcal{I}(E;F)$.

Definição 3.3.4 Um ideal de operadores $\mathcal{I}$ é *sobrejetivo* se dados um operador $u \in \mathcal{L}(E;F)$ e uma sobrejeção métrica $q\colon G \twoheadrightarrow E$ tais que $(u \circ q) \in \mathcal{I}(G;F)$, tem-se $u \in \mathcal{I}(E;F)$.

Para provar os principais resultados desta seção precisamos demonstrar algumas propriedades básicas de injeções métricas e sobrejeções métricas. Por $\overset{\circ}{B}_E$ indicaremos a bola unitária aberta do espaço normado E.

Lema 3.3.5 *Seja $q\colon G \twoheadrightarrow E$ uma sobrejeção métrica entre espaços normados. Então:*
(a) $\|q\| \leq 1$.
(b) $q(\overset{\circ}{B}_G) = \overset{\circ}{B}_E$.

Demonstração: (a) Para todo $x \in G$,

$$\|q(x)\|_E = \inf\{\|y\|_G : q(x) = q(y)\} \leq \|x\|,$$

pois $\|x\| \in \{\|y\|_G : q(x) = q(y)\}$. Portanto $\|q\| \leq 1$.
(b) Primeiramente mostremos que $q(\overset{\circ}{B}_G) \subseteq \overset{\circ}{B}_E$. Para isso seja $z \in \overset{\circ}{B}_G$. Então $\|z\| < 1$ e pelo item (a) segue que

$$\|q(z)\| \leq \|q\| \cdot \|z\| \leq \|z\| < 1.$$

provando que $q(z) \in \overset{\circ}{B}_E$.

Mostremos agora que $\overset{\circ}{B}_E \subseteq q(\overset{\circ}{B}_G)$. Seja $y \in \overset{\circ}{B}_E$. Então $\|y\|_E = \inf\{\|x\|_G : q(x) = y\} < 1$. Por uma propriedade do ínfimo, podemos tomar uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq G$ tal que $q(x_n) = y$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$\|x_n\| \longrightarrow \|y\| < 1.$$

Assim existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|x_N\| < 1$. Então $x_N \in \overset{\circ}{B}_E$ e $q(x_N) = y$. Isso implica que $y \in q(\overset{\circ}{B}_G)$ e prova que $\overset{\circ}{B}_E \subseteq q(\overset{\circ}{B}_G)$. $\square$

Lema 3.3.6 (a) *Seja $j\colon F \hookrightarrow G$ uma injeção métrica entre espaços normados. Então j' é sobrejeção métrica.*
(b) *Seja $q\colon G \twoheadrightarrow E$ uma sobrejeção métrica entre espaços normados. Então q' é injeção métrica.*

Demonstraremos apenas o item (b) deste lema. A demonstração do item (a) pode ser encontrada em [22, Proposition B.3.9.1]. Entretanto, vale a pena mencionar que o caso em que $j\colon F \hookrightarrow G$ é uma injeção métrica sobrejetora é trivial. De fato, neste caso j é isomorfismo isométrico, e portanto pela Proposição 3.1.3 segue que j' é isomorfismo isométrico. Em particular, j' é sobrejeção métrica.

Demonstração: (b) Uma vez que $q\colon G \twoheadrightarrow E$ é uma sobrejeção métrica, temos, para todo $\varphi \in E'$,

$$\|q'(\varphi)\|_{G'} = \sup_{x\in \mathring{B}_G} |q'(\varphi)(x)| = \sup_{x\in \mathring{B}_G} |\varphi(q(x))| = \sup_{y\in \mathring{B}_E} |\varphi(y)| = \|\varphi\|_{E'},$$

onde a primeira igualdade segue da Observação 1.14 e a terceira do Lema 3.3.5(b). Isso prova que q' é injeção métrica. $\square$

Teorema 3.3.7 *Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores.*
(a) *Se $\mathcal{I}$ é injetivo, então $\mathcal{I}^{\text{dual}}$ é sobrejetivo.*
(b) *Se $\mathcal{I}$ é sobrejetivo, então $\mathcal{I}^{\text{dual}}$ é injetivo.*

Demonstração: (a) Sejam E e F espaços de Banach, $u \in \mathcal{L}(E;F)$ e $q\colon G \twoheadrightarrow E$ uma sobrejeção métrica tais que $(u \circ q) \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(G;F)$. Devemos mostrar que $u \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(E;F)$. Pelo Lema 3.3.6(b) sabemos que q' é injeção métrica. Da Proposição 3.1.4 segue que

$$q' \circ u' = (u \circ q)' \in \mathcal{I}(F';G').$$

Como $\mathcal{I}$ é ideal injetivo, $u' \in \mathcal{I}(F';E')$, ou seja, $u \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(E;F)$. Portanto o ideal $\mathcal{I}^{\text{dual}}$ é sobrejetivo.
(b) Sejam E e F espaços de Banach, $u \in \mathcal{L}(E;F)$ e $j\colon F \hookrightarrow G$ uma injeção métrica tais que $(j \circ u) \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(E;G)$. Devemos mostrar que $u \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(E;F)$. Pelo Lema 3.3.6(a), j' é sobrejeção métrica. Novamente pela Proposição 3.1.4,

$$u' \circ j' = (j \circ u)' \in \mathcal{I}(G';E').$$

Como $\mathcal{I}$ é ideal sobrejetivo, $u' \in \mathcal{I}(F';E')$, ou seja, $u \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(E;F)$. Portanto o ideal $\mathcal{I}^{\text{dual}}$ é injetivo. $\square$

O conceito de ideal injetivo nos fornece uma condição suficiente para a validade da equivalência

$$u \in \mathcal{I}(E;F) \Longleftrightarrow u'' \in \mathcal{I}(E'';F'')\ :$$

Proposição 3.3.8 *Sejam $\mathcal{I}$ um ideal de operadores, E e F espaços de Banach e $u \in \mathcal{L}(E;F)$.*
(a) *Se $\mathcal{I}$ é injetivo e $u'' \in \mathcal{I}(E'';F'')$, então $u \in \mathcal{I}(E;F)$.*
(b) *Se E é reflexivo e $u \in \mathcal{I}(E;F)$, então $u'' \in \mathcal{I}(E'';F'')$.*
(c) *Se $\mathcal{I}$ é injetivo e E é reflexivo, então $u \in \mathcal{I}(E;F)$ se, e somente se, $u'' \in \mathcal{I}(E'';F'')$.*

Demonstração: (a) Como $u'' \in \mathcal{I}(E''; F'')$, pela propriedade de ideal temos $u'' \circ J_E \in \mathcal{I}(E; F'')$. Da Proposição 3.1.5 sabemos que $u'' \circ J_E = J_F \circ u$, logo $J_F \circ u \in \mathcal{I}(E; F'')$. Como J_F é injeção métrica e $\mathcal{I}$ é injetivo, segue que $u \in \mathcal{I}(E; F)$.
(b) Sabemos que J_E é um isomorfismo pois E é reflexivo, portanto da propriedade de ideal segue que

$$u'' = \underbrace{J_F \circ \underbrace{u}_{\in \mathcal{I}} \circ J_E^{-1}}_{\in \mathcal{I}} \in \mathcal{I}(E''; F'').$$

(c) Segue imediatamente de (a) e (b). $\square$

3.4 Ideais de composição

Nesta seção estudaremos uma técnica muito útil de gerar um novo ideal de operadores $\mathcal{I} \circ \mathcal{J}$ a partir de ideais de operadores $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ dados. O ideal resultante $\mathcal{I} \circ \mathcal{J}$ é chamado de ideal de composição ou de produto dos ideais $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$. Estudaremos também a validade da igualdade

$$(\mathcal{I} \circ \mathcal{J})^{\text{dual}} = \mathcal{J}^{\text{dual}} \circ \mathcal{I}^{\text{dual}}.$$

Definição 3.4.1 Sejam $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ ideais de operadores. Dados os espaços de Banach E e F e $u \in \mathcal{L}(E; F)$, dizemos que u pertence a $\mathcal{I} \circ \mathcal{J}(E; F)$ se existem um espaço de Banach G e operadores $v \in \mathcal{J}(E; G)$ e $w \in \mathcal{I}(G; F)$ tais que $u = w \circ v$.

Vejamos que se $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ são ideais de operadores, então $\mathcal{I} \circ \mathcal{J}$ também é ideal de operadores, chamado de *ideal de composição*. A demonstração a seguir também não foi encontrada em nenhuma referência.

Proposição 3.4.2 *Se $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ são ideais de operadores, então $\mathcal{I} \circ \mathcal{J}$ também é ideal de operadores.*

Demonstração: Dados os espaços de Banach E e F, mostremos que $\mathcal{I} \circ \mathcal{J}(E; F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E; F)$ que contém os operadores de posto finito. É claro que $\mathcal{I} \circ \mathcal{J}(E; F) \neq \emptyset$ pois o operador nulo aí pertence.

Sejam $u \in \mathcal{I} \circ \mathcal{J}(E; F)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Logo existem um espaço de Banach G e operadores $v \in \mathcal{J}(E; G)$ e $w \in \mathcal{I}(G; F)$ tais que $u = w \circ v$. Como $\mathcal{I}(G; F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(G; F)$, da propriedade de ideal temos

$$\lambda u = \lambda(w \circ v) = \underbrace{(\lambda w)}_{\in \mathcal{I}} \circ \underbrace{v}_{\in \mathcal{J}} \in \mathcal{I} \circ \mathcal{J}(E; F).$$

Dados u_1, $u_2 \in \mathcal{I} \circ \mathcal{J}(E; F)$, existem espaços de Banach G_1 e G_2 e operadores $v_1 \in \mathcal{J}(E; G_1)$, $v_2 \in \mathcal{J}(E; G_2)$ e $w_1 \in \mathcal{I}(G_1; F)$, $w_2 \in \mathcal{I}(G_2; F)$ tais que os diagramas abaixo são comutativos:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "u_1"] \arrow[dr, "v_1 \in \mathcal{J}"'] & & F \\ & G_1 \arrow[ur, "w_1 \in \mathcal{I}"'] & \end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "u_2"] \arrow[dr, "v_2 \in \mathcal{J}"'] & & F \\
& G_2 \arrow[ur, "w_2 \in \mathcal{I}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Defina $G := G_1 \times G_2$. Temos que G é espaço de Banach por ser o produto cartesiano de dois espaços de Banach. Os seguintes operadores são lineares e contínuos:

$$v\colon E \longrightarrow G = G_1 \times G_2\ ,\ v(x) = (v_1(x), v_2(x));$$

$$T\colon G = G_1 \times G_2 \longrightarrow F \times F\ ,\ T(y_1, y_2) = (w_1(y_1), w_2(y_2));\ \text{e}$$

$$U\colon F \times F \longrightarrow F\ ,\ U(z_1, z_2) = z_1 + z_2.$$

Vejamos que $w := U \circ T \in \mathcal{I}(G; F)$, $v \in \mathcal{J}(E; G)$ e que o seguinte diagrama é comutativo:

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "u_1+u_2"] \arrow[d, "v \in \mathcal{J}"'] & F \\
G_1 \times G_2 \arrow[r, "T \in \mathcal{I}"] & F \times F \arrow[u, "U"']
\end{tikzcd}
$$

Para isso observe primeiramente que os seguintes operadores são lineares e contínuos:

$$A\colon E \longrightarrow G = G_1 \times G_2\ ,\ A(x) = (v_1(x), 0),\ \text{e}$$

$$B\colon E \longrightarrow G = G_1 \times G_2\ ,\ B(x) = (0, v_2(x)).$$

Vejamos que $A + B = v$, $A \in \mathcal{J}(E; G)$ e $B \in \mathcal{J}(E; G)$. Para a primeira afirmação basta observar que, para todo $x \in E$,

$$(A + B)(x) = A(x) + B(x) = (v_1(x), 0) + (0, v_2(x)) = (v_1(x), v_2(x)) = v(x).$$

Para as outras duas afirmações, considere os operadores lineares e contínuos dados por

$$C\colon G_1 \longrightarrow G = G_1 \times G_2\ ,\ C(t) = (t, 0),\ \text{e}$$

$$D\colon G_2 \longrightarrow G = G_1 \times G_2\ ,\ D(s) = (0, s),$$

e observe que os diagramas a seguir são comutativos:

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "v_1 \in \mathcal{J}"'] & & G_1 \times G_2 \\
& G_1 \arrow[ur, "C"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
E \arrow[rr, "B"] \arrow[dr, "v_2 \in \mathcal{J}"'] & & G_1 \times G_2 \\
& G_2 \arrow[ur, "D"'] &
\end{tikzcd}
$$

Assim, como C e D são operadores lineares e contínuos e v_1 e v_2 pertencem ao ideal $\mathcal{J}$, segue que

$$A = C \circ v_1 \in \mathcal{J}(E;G) \ \text{ e } \ B = D \circ v_2 \in \mathcal{J}(E;G).$$

Como $A \in \mathcal{J}(E;G)$, $B \in \mathcal{J}(E;G)$ e $\mathcal{J}$ é ideal de operadores, concluímos que $v = A+B \in \mathcal{J}(E;G)$.

Vejamos agora que $w = U \circ T \in \mathcal{I}(G;F)$. Para isso basta provar que $T \in \mathcal{I}(G;F\times F)$. Veja que os operadores

$$T_1 \colon G = G_1 \times G_2 \longrightarrow F \times F \ , \ T_1(y_1,y_2) = (w_1(y_1),0), \ \text{ e}$$

$$T_2 \colon G = G_1 \times G_2 \longrightarrow F \times F \ , \ T_2(y_1,y_2) = (0,w_2(y_2)),$$

são lineares e contínuos. Vejamos que $T = T_1 + T_2$ e $T_1, T_2 \in \mathcal{I}(G;F\times F)$. De fato,

$$\begin{aligned} T(y_1,y_2) &= (w_1(y_1),w_2(y_2)) = (w_1(y_1),0) + (0,w_2(y_2)) \\ &= T_1(y_1,y_2) + T_2(y_1,y_2) = (T_1+T_2)(y_1,y_2), \end{aligned}$$

para todos $y_1 \in G_1$ e $y_2 \in G_2$. Também os operadores

$$M_1 \colon G = G_1 \times G_2 \longrightarrow G_1 \ , \ M_1(y_1,y_2) = y_1, \ \text{ e}$$

$$N_1 \colon F \longrightarrow F \times F \ , \ N_1(z) = (z,0),$$

são lineares e contínuos. Mais ainda, o diagrama a seguir é comutativo:

$$\begin{tikzcd} G_1 \times G_2 \arrow[r, "T_1"] \arrow[d, "M_1"'] & F \times F \\ G_1 \arrow[r, "w_1 \in \mathcal{I}"] & F \arrow[u, "N_1"'] \end{tikzcd}$$

Logo $T_1 = N_1 \circ w_1 \circ M_1$, e como $\mathcal{I}$ é ideal de operadores concluímos que $T_1 \in \mathcal{I}(G;F\times F)$. Da mesma forma, considere os operadores lineares e contínuos

$$M_2 \colon G = G_1 \times G_2 \longrightarrow G_2 \ , \ M_2(y_1,y_2) = y_2, \ \text{ e}$$

$$N_2 \colon F \longrightarrow F \times F \ , \ N_2(z) = (0,z),$$

e o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} G_1 \times G_2 \arrow[r, "T_2"] \arrow[d, "M_2"'] & F \times F \\ G_2 \arrow[r, "w_2 \in \mathcal{I}"] & F \arrow[u, "N_2"'] \end{tikzcd}$$

Logo $T_2 = N_2 \circ w_2 \circ M_2$, e como $\mathcal{I}$ é ideal de operadores concluímos que $T_2 \in \mathcal{I}(G;F\times F)$. Assim, como T_1 e T_2 pertencem ao ideal de operadors $\mathcal{I}$, podemos concluir que $T = T_1 + T_2 \in \mathcal{I}$. Portanto $w = U \circ T \in \mathcal{I}(G;F\times F)$.

Sendo assim, $G = G_1 \times G_2$ é um espaço de Banach, $v \in \mathcal{J}(E;G)$ e $w \in \mathcal{I}(G;F)$ são tais que $u_1 + u_2 = w \circ v$. Isso prova que $u_1 + u_2 \in \mathcal{I} \circ \mathcal{J}(E;F)$ e nos permite concluir que $\mathcal{I} \circ \mathcal{J}(E;F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$.

Dados $\varphi \in E'$ e $b \in F$, escolha $G \neq \{0\}$ um espaço de Banach e tome $\psi \in G'$ e $a \in G$ tais que $\psi(a) = 1$. Dessa forma, $\psi \otimes b \in \mathcal{F}(G;F) \subseteq \mathcal{I}(G;F)$, $\varphi \otimes a \in \mathcal{F}(E;G) \subseteq \mathcal{J}(E;G)$ e

$$((\psi \otimes b) \circ (\varphi \otimes a))(x) = \psi \otimes b(\varphi(x)a) = \psi(\varphi(x)a)b = \varphi(x)\psi(a)b = \varphi(x)b = \varphi \otimes b(x)$$

para todo $x \in E$. Portanto $\varphi \otimes b = (\psi \otimes b) \circ (\varphi \otimes a) \in \mathcal{I} \circ \mathcal{J}(E;F)$. Acabamos de provar que $\mathcal{I} \circ \mathcal{J}(E;F)$ é subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E;F)$, logo $\mathcal{I} \circ \mathcal{J}(E;F)$ contém os operadores lineares contínuos de posto finito.

Provemos agora a propriedade de ideal: sejam $u_1 \in \mathcal{L}(F_0;F), u_2 \in \mathcal{I} \circ \mathcal{J}(E_0;F_0)$ e $u_3 \in \mathcal{L}(E;E_0)$. Como $u_2 \in \mathcal{I} \circ \mathcal{J}(E_0;F_0)$, existem um espaço de Banach G e operadores $v_2 \in \mathcal{J}(E_0;G)$ e $w_2 \in \mathcal{I}(G;F_0)$ tais que $u_2 = w_2 \circ v_2$. Defina $v = v_2 \circ u_3$ e $w = u_1 \circ w_2$. Como $\mathcal{J}$ é ideal de operadores e $v_2 \in \mathcal{J}(E_0;G)$ segue que $v = v_2 \circ u_3 \in \mathcal{J}(E;G)$; e como $\mathcal{I}$ também é ideal de operadores e $w_2 \in \mathcal{I}(G;F_0)$ segue que $w = u_1 \circ w_2 \in \mathcal{I}(G;F)$. Por definição, $w \circ v \in \mathcal{I} \circ \mathcal{J}(E;F)$, e portanto

$$u_1 \circ u_2 \circ u_3 = u_1 \circ (w_2 \circ v_2) \circ u_3 = (u_1 \circ w_2) \circ (v_2 \circ u_3) = w \circ v \in \mathcal{I} \circ \mathcal{J}(E;F).$$

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "u_3"] \arrow[drr, "v=v_2\circ u_3"'] & E_0 \arrow[rr, "u_2"] \arrow[dr, "v_2\in\mathcal{J}"] & & F_0 \arrow[r, "u_1"] & F \\
& & G \arrow[ur, "w_2\in\mathcal{I}"] \arrow[urr, "w=u_1\circ w_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

□

Veremos no exemplo a seguir que vários resultados importantes da teoria de espaços de Banach podem ser escritos na linguagem de ideais de composição:

Exemplo 3.4.3 $\mathcal{K} \circ \mathcal{K} = \mathcal{K}$, $\mathcal{W} \circ \mathcal{W} = \mathcal{W}$ e $\mathcal{CC} \circ \mathcal{W} = \mathcal{K}$.

As inclusões $\mathcal{K} \circ \mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$ e $\mathcal{W} \circ \mathcal{W} \subseteq \mathcal{W}$ decorrem imediatamente da propriedade de ideal.

Vejamos que $\mathcal{CC} \circ \mathcal{W} \subseteq \mathcal{K}$. Dado $u \in \mathcal{CC} \circ \mathcal{W}(E;F)$, existem um espaço de Banach G e operadores $v \in \mathcal{W}(E;G)$ e $w \in \mathcal{CC}(G;F)$ tais que $u = w \circ v$. Seja $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ sequência limitada em E. Como v é fracamente compacto, a sequência $(v(x_n))_{n=1}^{\infty}$ admite subsequência fracamente convergente, digamos $(v(x_{n_j}))_{j=1}^{\infty}$ tal que $v(x_{n_j}) \stackrel{w}{\longrightarrow} y \in G$. Como w é completamente contínuo, neste caso temos

$$u(x_{n_j}) = w \circ v(x_{n_j}) = w(u(x_{n_j})) \longrightarrow w(y) \in F.$$

Portanto u é compacto, isto é, $u \in \mathcal{K}(E;F)$.

As demais inclusões não serão estudadas nesta dissertação. Para mais informações veja [12, Propositions 19.1.2 e 19.1.3].

Se $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ são ideais normados, então uma maneira natural de definir uma norma em $\mathcal{I} \circ \mathcal{J}$ seria

$$\|u\|_{\mathcal{I}\circ\mathcal{J}} = \inf\{\|v\|_{\mathcal{J}} \cdot \|w\|_{\mathcal{I}} : v \in \mathcal{J}, w \in \mathcal{I} \text{ e } u = w \circ v\}.$$

Infelizmente a expressão acima não define uma norma em $\mathcal{I} \circ \mathcal{J}$. Assim, o produto de dois ideais de operadores normados nem sempre é ideal normado (para maiores detalhes veja [6, 9.10].

A fórmula $(v \circ w)' = w' \circ v'$ que provamos na Proposição 3.1.4 pode nos levar a pensar que a igualdade

$$(\mathcal{I} \circ \mathcal{J})^{\text{dual}} = \mathcal{J}^{\text{dual}} \circ \mathcal{I}^{\text{dual}}$$

é verdadeira para ideais $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ quaisquer. Uma das inclusões é trivial:

Proposição 3.4.4 *Para todos $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ ideais de operadores, $\mathcal{J}^{\text{dual}} \circ \mathcal{I}^{\text{dual}} \subseteq (\mathcal{I} \circ \mathcal{J})^{\text{dual}}$.*

Demonstração: Dado $u \in \mathcal{J}^{\text{dual}} \circ \mathcal{I}^{\text{dual}}(E; F)$, existem um espaço de Banach G e operadores $v \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(E; G)$ e $w \in \mathcal{J}^{\text{dual}}(G; F)$ tais que $u = w \circ v$.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "v\in\mathcal{I}^{\text{dual}}"'] & & F \\ & G \arrow[ur, "w\in\mathcal{J}^{\text{dual}}"'] & \end{tikzcd}$$

Assim $v' \in \mathcal{I}(G'; E')$, $w' \in \mathcal{J}(F'; G')$, e como o seguinte diagrama também comuta

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[rr, "u'"] \arrow[dr, "w'\in\mathcal{J}"'] & & E' \\ & G' \arrow[ur, "v'\in\mathcal{I}"'] & \end{tikzcd}$$

temos $u' = v' \circ w' \in \mathcal{I} \circ \mathcal{J}(F'; E')$. Segue que $u \in (\mathcal{I} \circ \mathcal{J})^{\text{dual}}(E; F)$. $\square$

A inclusão inversa não é verdadeira para ideais de operadores $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ arbitrários; mas acrescentando hipóteses adicionais resultados interessantes podem ser obtidos. O resultado a seguir não foi encontrado em nenhuma referência.

Proposição 3.4.5 *Sejam $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ ideais de operadores tais que $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^{\text{dual}}$ e $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}^{\text{dual}}$. Se F é um espaço reflexivo, então $(\mathcal{I} \circ \mathcal{J})^{\text{dual}}(E; F) = \mathcal{J}^{\text{dual}} \circ \mathcal{I}^{\text{dual}}(E; F)$ para todo espaço de Banach E.*

Demonstração: Pela Proposição 3.4.4 basta provar a inclusão

$$(\mathcal{I} \circ \mathcal{J})^{\text{dual}}(E; F) \subseteq \mathcal{J}^{\text{dual}} \circ \mathcal{I}^{\text{dual}}(E; F).$$

Para isso seja $u \in (\mathcal{I} \circ \mathcal{J})^{\text{dual}}(E; F)$. Então $u' \in \mathcal{I} \circ \mathcal{J}(F'; F')$ e por isso existem um espaço de Banach G e operadores $v \in \mathcal{J}$ e $w \in \mathcal{I}$ tais que $u' = w \circ v$.

$$\begin{tikzcd} F' \arrow[rr, "u'"] \arrow[dr, "v\in\mathcal{J}"'] & & E' \\ & G \arrow[ur, "w\in\mathcal{I}"'] & \end{tikzcd}$$

De $v \in \mathcal{J}(F';G) \subseteq \mathcal{J}^{\text{dual}}(F';G)$ e de $w \in \mathcal{I}(G;E') \subseteq \mathcal{I}^{\text{dual}}(G;E')$ temos, respectivamente, $v' \in \mathcal{J}(G';F'')$ e $w' \in \mathcal{I}(E'';G')$. Considerando os mergulhos canônicos J_E de E em E'' e J_F de F em F'', o seguinte diagrama é comutativo por causa das Proposições 3.1.4 e 3.1.5:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "J_E"'] & F \arrow[d, "J_F"'] \\ E'' \arrow[r, "u''"] \arrow[d, "w' \in \mathcal{I}"'] & F'' \\ G' \arrow[ur, "v' \in \mathcal{J}"'] & \end{tikzcd}$$

Assim, $u = \underbrace{J_F^{-1} \circ v'}_{\in \mathcal{J} \subseteq \mathcal{J}^{\text{dual}}} \circ \underbrace{w' \circ J_E}_{\in \mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^{\text{dual}}} \in \mathcal{J}^{\text{dual}} \circ \mathcal{I}^{\text{dual}}(E;F)$. □

A hipótese $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^{\text{dual}}$ da proposição acima será estudada no próximo capítulo, onde veremos resultados importantes envolvendo essa inclusão.

3.5 A igualdade $\overline{\mathcal{I}^{\text{dual}}} = \overline{\mathcal{I}}^{\text{dual}}$

Nesta seção mostraremos que $\overline{\mathcal{I}^{\text{dual}}} \subseteq \overline{\mathcal{I}}^{\text{dual}}$ para todo ideal de operadores $\mathcal{I}$; e também que a inclusão inversa é verdadeira com a hipótese adicional do espaço de chegada ser reflexivo. A segunda afirmação não foi encontrada na literatura.

Proposição 3.5.1 *Sejam $\mathcal{I}$ e $\mathcal{J}$ ideais de operadores. Se $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{J}$, então $\mathcal{I}^{\text{dual}} \subseteq \mathcal{J}^{\text{dual}}$. Mais ainda, se existe uma constante $K > 0$ tal que $\|\cdot\|_{\mathcal{J}} \leq K \cdot \|\cdot\|_{\mathcal{I}}$, então $\|\cdot\|_{\mathcal{J}^{\text{dual}}} \leq K \cdot \|\cdot\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}}$.*

Demonstração: Seja $u \in \mathcal{I}^{\text{dual}}(E;F)$. Então $u' \in \mathcal{I}(F';E') \subseteq \mathcal{J}(F';E')$. Portanto $u \in \mathcal{J}^{\text{dual}}(E;F)$. E como $u' \in \mathcal{I}(F';E')$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{J}} \leq K \cdot \|\cdot\|_{\mathcal{I}}$, temos

$$\|u\|_{\mathcal{J}^{\text{dual}}} = \|u'\|_{\mathcal{J}} \leq K \cdot \|u'\|_{\mathcal{I}} = K \cdot \|u\|_{\mathcal{I}^{\text{dual}}}.$$

□

Vejamos que, para qualquer ideal de operadores $\mathcal{I}$, a inclusão $\overline{\mathcal{I}^{\text{dual}}} \subseteq \overline{\mathcal{I}}^{\text{dual}}$ é verdadeira:

Proposição 3.5.2 *Seja $\mathcal{I}$ ideal de operadores. Então $\overline{\mathcal{I}^{\text{dual}}} \subseteq \overline{\mathcal{I}}^{\text{dual}}$.*

Demonstração: Seja $u \in \overline{\mathcal{I}^{\text{dual}}}(E;F) = \overline{\mathcal{I}^{\text{dual}}(E;F)}$. Então existe uma sequência $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{I}^{\text{dual}}(E;F)$ tal que $u_n \longrightarrow u$ em $\mathcal{L}(E;F)$. Da continuidade da correspondência (3.1), a sequência $(u_n')_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{I}(F';E')$ é tal que $u_n' \longrightarrow u'$ em $\mathcal{L}(F';E')$. Portanto $u' \in \overline{\mathcal{I}(F';E')} = \overline{\mathcal{I}}(F';E')$, ou seja, $u \in \overline{\mathcal{I}}^{\text{dual}}(E;F)$. □

Já a inclusão $\overline{\mathcal{I}}^{\text{dual}} \subseteq \overline{\mathcal{I}^{\text{dual}}}$ não é válida sempre. Vejamos que acrescentando a hipótese do espaço de chegada ser reflexivo o resultado torna-se verdadeiro. O resultado a seguir não foi encontrado em nenhuma referência.

Proposição 3.5.3 *Sejam $\mathcal{I}$ um ideal de operadores e F um espaço reflexivo. Então $\overline{\overline{\mathcal{I}}}^{\text{dual}}(E;F) \subseteq \overline{\mathcal{I}^{\text{dual}}}(E;F)$ para todo espaço de Banach E.*

Demonstração: Seja $u \in \overline{\overline{\mathcal{I}}}^{\text{dual}}(E;F)$. Então $u' \in \overline{\overline{\mathcal{I}}}(F';E') = \overline{\mathcal{I}(F';E')}$. Logo existe uma sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{I}(F';E')$ tal que $a_n \longrightarrow u'$ em $\mathcal{L}(F';E')$. Como $a_n \in \mathcal{I}(F';E') \subseteq \mathcal{L}(F';E')$ para todo n, cada $a_n \colon F' \longrightarrow E'$ é contínuo. Pelo Teorema 1.32 sabemos que a_n é w-w-contínuo. Como F é reflexivo, pela Proposicão 1.36 sabemos que F' é reflexivo, e então pela Proposição 1.41(d) as topologias fraca e fraca-estrela coincidem em F'. Disso concluímos que cada a_n é w^*-w-contínuo. Pela Proposição 1.41(c) segue que cada a_n é w^*-w^*-contínuo. Portanto, pelo Lema 3.1.7 para cada n existe $b_n \in \mathcal{L}(E;F)$ tal que $b_n' = a_n$. De $a_n \longrightarrow u'$ em $\mathcal{L}(F';E')$ temos $b_n' \longrightarrow u'$ em $\mathcal{L}(F';E')$. E de $a_n = b_n' \in \mathcal{I}(F';E')$ para todo n temos $(b_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{I}^{\text{dual}}(E;F)$; e como

$$\|b_n - u\| = \|(b_n - u)'\| = \|b_n' - u'\| \longrightarrow 0,$$

concluímos que $b_n \longrightarrow u$ em $\mathcal{L}(E;F)$. Portanto $u \in \overline{\mathcal{I}^{\text{dual}}}(E;F)$. □

Corolário 3.5.4 *Sejam $\mathcal{I}$ um ideal de operadores e E e F espaços de Banach com F reflexivo. Então $\overline{\mathcal{I}^{\text{dual}}}(E;F) = \overline{\overline{\mathcal{I}}}^{\text{dual}}(E;F)$.*

Na demonstração da Proposição 3.5.3 fica claro que a seguinte hipótese

$$\mathcal{I}(F';E') \subseteq \mathcal{L}_{w^*w^*}(F';E'), \tag{3.2}$$

é suficiente para obter o resultado. Entretanto, como veremos a seguir, a inclusão (3.2) não é mais geral que a hipótese por nós utilizada, ou seja, F ser reflexivo. Além disso, obtemos uma caracterização interessante da reflexibilidade usando ideais de operadores.

Proposição 3.5.5 *As seguintes afirmações são equivalentes para o espaço de Banach F:*
(a) *F é reflexivo.*
(b) *Para qualquer ideal de operadores $\mathcal{I}$ e para todo espaço de Banach E, $\mathcal{I}(F';E') \subseteq \mathcal{L}_{w^*w^*}(F';E')$.*
(c) *Existem um ideal de operadores $\mathcal{I}$ e um espaço de Banach $E \neq \{0\}$ tais que $\mathcal{I}(F';E') \subseteq \mathcal{L}_{w^*w^*}(F';E')$.*

Demonstração: (a)⇒(b): Sejam $\mathcal{I}$ um ideal de operadores qualquer, E um espaço de Banach e $u \in \mathcal{I}(F';E') \subseteq \mathcal{L}(F';E')$. Por u ser contínuo e pelo Teorema 1.32, temos que u é w-w-contínuo. Como F é reflexivo, F' também é reflexivo pela Proposicão 1.36, e então, pela Proposição 1.41(d), as topologias fraca e fraca-estrela coincidem em F'. Isso nos diz que u é w^*-w-contínuo. Pela Proposição 1.41(c) segue que u é w^*-w^*-contínuo.

(b)⇒(c): Essa implicação é trivial.

(c)⇒(a): Sejam $\mathcal{I}$ um ideal de operadores e $E \neq \{0\}$ um espaço de Banach tais que $\mathcal{I}(F';E') \subseteq \mathcal{L}_{w^*w^*}(F';E')$. Mostremos que $J_F(F) = F''$. Como $J_F(F) \subseteq F''$, basta mostrar que $F'' \subseteq J_F(F)$. Para isso seja $\psi \in F''$. Escolha $b \in E'$, $b \neq 0$, e considere o operador $\psi \otimes b : F' \longrightarrow E'$, $\psi \otimes b(\varphi) = \psi(\varphi)b$ para todo $\varphi \in F'$. Então

$$\psi \otimes b \in \mathcal{F}(F';E') \subseteq \mathcal{I}(F';E') \subseteq \mathcal{L}_{w^*w^*}(F';E').$$

Portanto $\psi \otimes b$ é w^*-w^*-contínuo. Seja $(\varphi_\lambda)_\lambda$ uma rede em F' tal que $\varphi_\lambda \xrightarrow{w^*} \varphi$ em F'. Como $\psi \otimes b$ é w^*-w^*-contínuo, temos

$$\psi(\varphi_\lambda)b = \psi \otimes b(\varphi_\lambda) \xrightarrow{w^*} \psi \otimes b(\varphi) = \psi(\varphi)b$$

em E'. Da definição da topologia fraca-estrela segue que $\psi(\varphi_\lambda)b(x) \longrightarrow \psi(\varphi)b(x)$ para todo $x \in E$. Como $b \neq 0$, podemos tomar $x \in E$ tal que $b(x) = 1$. Dessa forma, $\psi(\varphi_\lambda) \longrightarrow \psi(\varphi)$ em $\mathbb{K}$. Isso prova que ψ que é um elemento de F'', é contínuo na topologia fraca-estrela. Pelo Teorema 1.40 segue que $\psi \in J_F(F)$. Portanto F é reflexivo. $\square$

Observação 3.5.6 As Proposições 3.5.3 e 3.5.5 não foram encontradas na literatura.

CAPÍTULO 4

IDEAIS SIMÉTRICOS DE OPERADORES ENTRE ESPAÇOS DE BANACH

O objetivo deste capítulo é dar exemplos de ideais que são simultaneamente simétricos e anti-simétricos (completamente simétricos), de ideais que não são nem simétricos nem anti-simétricos, de ideais que são simétricos e não são anti-simétricos e de ideais que são anti-simétricos e não são simétricos. Mais especificamente, veremos que os ideais dos operadores compactos e dos operadores fracamente compactos são simétricos e anti-simétricos; que os ideais dos operadores completamente contínuos e dos operadores absolutamente p-somantes, para todo $p \geq 1$, não são nem simétricos nem anti-simétricos; que o ideal dos operadores nucleares é simétrico mas não anti-simétrico; e que o ideal dos operadores separáveis é anti-simétrico mas não é simétrico. Além disso, em cada caso estudaremos condições sobre os espaços que garantam que as componentes correspondentes sejam completamente simétricas.

Definição 4.0.7 Um ideal de operadores $\mathcal{I}$ é dito:
- *simétrico* se $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{I}^{\text{dual}}$;
- *anti-simétrico* se $\mathcal{I}^{\text{dual}} \subseteq \mathcal{I}$;
- *completamente simétrico* se $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{\text{dual}}$.

4.1 Ideais completamente simétricos

Nesta seção, além de apresentar exemplos de ideais de operadores que são completamente simétricos, mostraremos que o ideal $\mathcal{W}$ dos operadores fracamente compactos é um ideal fechado.

Para exemplificar os ideais de operadores que são completamente simétricos estudaremos os operadores compactos e fracamente compactos.

A demonstração apresentada a seguir se baseia na referência [3].

Teorema 4.1.1 (Teorema de Schauder) *O ideal dos operadores compactos é completamente simétrico.*

Demonstração: Sejam E e F espaços normados e $u \in \mathcal{L}(E;F)$. Mostremos que $u \in \mathcal{K}(E;F)$ se, e somente se, $u' \in \mathcal{K}(F';E')$, isto é, que $u \in \mathcal{K}^{\text{dual}}(E;F)$.

Suponha primeiramente que $u \in \mathcal{K}(E;F)$. Dada uma sequência $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ em $B_{F'}$ devemos mostrar que a sequência $(u'(\varphi_n))_{n=1}^{\infty}$ tem subsequência convergente em E'. Chamando $K = \overline{u(B_E)}$, temos da compacidade de u que K é um espaço métrico compacto. Para cada n, chame de f_n a restrição de φ_n a K. É claro que essa restrição pertence a $C(K)$. Então $A := \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto de $C(K)$. Vejamos que as condições (a) e (b) do Teorema de Ascoli (Teorema 1.46) estão satisfeitas:

(a) Dados $t_0 \in K$ e $\varepsilon > 0$, tome $\delta = \varepsilon$. Se $t \in K$ é tal que $\|t - t_0\| < \delta$, então

$$\sup_n |f_n(t) - f_n(t_0)| = \sup_n |\varphi_n(t - t_0)| \leq \sup_n \|\varphi_n\| \|t - t_0\| \leq \|t - t_0\| < \delta = \varepsilon.$$

(b) Para todo $t \in K$,

$$\sup_n |f_n(t)| = \sup_n |\varphi_n(t)| \leq \sup_n \|\varphi_n\| \cdot \|t\| \leq \|t\|.$$

Do Teorema de Ascoli segue então que $\overline{A}$ é compacto em K. Portanto existem uma subsequência $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ e $f \in C(K)$ tais que $f_{n_k} \longrightarrow f$ em $C(K)$. Essa convergência quer dizer que

$$\begin{aligned}
\sup_{x \in B_E} |u'(\varphi_{n_k}(x)) - f(u(x))| &= \sup_{x \in B_E} |\varphi_{n_k}(u(x)) - f(u(x))| \\
&= \sup_{t \in u(B_E)} |\varphi_{n_k}(t) - f(t)| \\
&= \|\varphi_{n_k} - f\|_\infty \longrightarrow 0 \text{ se } k \longrightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Da desigualdade triangular concluímos que

$$\|u'(\varphi_{n_k}) - u'(\varphi_{n_j})\| = \sup_{x \in B_E} |u'(\varphi_{n_k}(x)) - u'(\varphi_{n_j}(x))| \longrightarrow 0 \text{ se } k, j \longrightarrow \infty,$$

provando que a subsequência $(u'(\varphi_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ é de Cauchy no espaço de Banach E', logo convergente. Isso prova que o operador u' é compacto.

Reciprocamente, suponha que o operador adjunto u' seja compacto. Pelo que acabamos de provar, o operador biadjunto $u'' \colon E'' \longrightarrow F''$ é compacto. Do Corolário 3.1.6 sabemos que $u = J_F^{-1} \circ u'' \circ J_E$. A compacidade do operador u segue da propriedade de ideal. $\square$

Antes de demonstrar que o ideal de operadores fracamente compactos é completamente simétrico mostremos que é fechado, isto é que $(\mathcal{W}, \|\cdot\|)$ é um ideal de Banach. Para mostramos esse fato usaremos os seguintes resultados que foram estudados em [13]:

Teorema 4.1.2 *Sejam E e F espaços de Banach e $u \in \mathcal{L}(E;F)$. Então o adjunto u' é w^*-w^*-contínuo, isto é, o operador $u' \colon (F'; \sigma(F';F)) \longrightarrow (E'; \sigma(E';E))$ é contínuo.*

Demonstração: Dado $\varphi_0 \in F'$, uma vizinhança básica de $u'(\varphi_0)$ na topologia fraca-estrela $(E';\sigma(E';E))$ de E' tem a forma

$$W_{u'(\varphi_0),x_1,x_2,\ldots,x_n,\varepsilon} := \{\varphi \in E' : |\varphi(x_i) - u'(\varphi_0)(x_i)| < \varepsilon \text{ para todo } i = 1,2,\ldots,n\},$$

em que $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in E$ e $\varepsilon > 0$. O conjunto

$$U_{\varphi_0,u(x_1),u(x_2),\ldots,u(x_n),\varepsilon} = \{\psi \in F' : |\psi(u(x_i)) - \varphi_0(u(x_i))| < \varepsilon \text{ para todo } i = 1,2,\ldots,n\}$$

é uma vizinhança de φ_0 na topologia fraca-estrela $(F';\sigma(F';F))$ de F'. Mostremos que

$$u'(U_{\varphi_0,u(x_1),u(x_2),\ldots,u(x_n),\varepsilon}) \subseteq W_{u'(\varphi_0),x_1,x_2,\ldots,x_n,\varepsilon}. \tag{4.1}$$

Para isso seja $\psi \in u'(U_{\varphi_0,u(x_1),u(x_2),\ldots,u(x_n),\varepsilon})$, digamos $\psi = u'(\varphi)$ para algum $\varphi \in U_{\varphi_0,u(x_1),u(x_2),\ldots,u(x_n),\varepsilon}$. Então, para cada $i = 1,2,\ldots,n$,

$$|\psi(x_i) - u'(\varphi_0)(x_i)| = |u'(\varphi)(x_i) - u'(\varphi_0)(x_i)| = |\varphi(u(x_i)) - \varphi_0(u(x_i))| < \varepsilon.$$

Isso prova a inclusão (4.1), que por sua vez é suficiente para concluir que o operador adjunto $u' \colon (F';\sigma(F';F)) \longrightarrow (E';\sigma(E';E))$ é contínuo. $\square$

Teorema 4.1.3 *Sejam E e F espaços de Banach. As seguintes afirmações são equivalentes para um operador $u \in \mathcal{L}(E;F)$:*
(a) *u é fracamente compacto;*
(b) *$u''(E'') \subseteq J_F(F)$;*
(c) *u' é w^*-w-contínuo.*

Demonstração: (a)$\Rightarrow$(b): Por hipótese, $u \in \mathcal{W}(E;F)$. Seja $B_{E''}$ a bola unitária fechada do bidual E'' de E. Pelo Teorema 4.1.2, o operador

$$u'' \colon (E'';\sigma(E'';E')) \longrightarrow (F'';\sigma(F'';F'))$$

é contínuo, e pela Proposição 3.1.5 temos que $u''(J_E(x)) = J_F(u(x))$ para todo $x \in E$. Assim,

$$u''\left(\overline{J_E(B_E)}^{w^*}\right) \subseteq \overline{u''(J_E(B_E))}^{w^*} = \overline{J_F(u(B_E))}^{w^*} \subseteq \overline{J_F\left(\overline{u(B_E)}^{w}\right)}^{w^*}.$$

Como $u \in \mathcal{W}(E;F)$, o conjunto $\overline{u(B_E)}^{w}$ é fracamente compacto, e sabendo que

$$J_F : (F;\sigma(F;F')) \longrightarrow (F'';\sigma(F'';F'))$$

é contínuo (Proposição 1.41(e)), temos que $J_F\left(\overline{u(B_E)}^{w}\right)$ é w^*-compacto. Logo $J_F\left(\overline{u(B_E)}^{w}\right)$ é w^*-fechado, portanto

$$J_F\left(\overline{u(B_E)}^{w}\right) = \overline{J_F\left(\overline{u(B_E)}^{w}\right)}^{w*}.$$

Daí,

$$u''\left(\overline{J_E(B_E)}^{w^*}\right) \subseteq J_F\left(\overline{u(B_E)}^{w}\right) \subseteq J_F(F).$$

Como pelo Teorema de Goldstine (Teorema 1.44), $\overline{J_E(B_E)}^{w*} = B_{E''}$, temos $u''(B_{E''}) \subseteq J_F(F)$. Dado $y \in u''(E'')$, existe $x \in E''$ tal que $y = u''(x)$. Temos que $\frac{x}{\|x\|} \in B_{E''}$, e assim $u''\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \in J_F(F)$ (o caso em que $x = 0$ é óbvio). Como u'' é linear, $\frac{1}{\|x\|}u''(x) \in J_F(F)$, e como $J_F(F)$ é subespaço de F'', concluímos que $u''(x) \in J_F(F)$. Portanto $u''(E'') \subseteq J_F(F)$.

(b)⇒(a): Por hipótese, $u''(E'') \subseteq J_F(F)$. Pelo Teorema 4.1.2, o operador

$$u''\colon (E''; \sigma(E''; E')) \longrightarrow (F''; \sigma(F''; F'))$$

é contínuo, e pelo Teorema de Alaoglu (Teorema 1.43), $B_{E''}$ é w^*-compacto. Pela Proposição 3.1.5 e por J_E ser isometria temos que

$$J_F(u(B_E)) = u''(J_E(B_E)) \subseteq u''(B_{E''}).$$

Portanto $\overline{J_F(u(B_E))}^{w^*}$ é w^*-compacto. Além disso,

$$\overline{J_F(u(B_E))}^{w^*} \subseteq \overline{u''(B_{E''})}^{w^*} = u''(B_{E''}) \subseteq J_F(F).$$

Como J_F é w-w^*-contínua (Proposição 1.41(e)), a aplicação inversa $J_F^{-1}\colon J_F(F) \longrightarrow F$ é w^*-w-contínua, e então $J_F^{-1}\left(\overline{J_F(u(B_E))}^{w^*}\right)$ é w-compacto, e consequentemente w-fechado. É claro que $u(B_E) \subseteq J_F^{-1}\left(\overline{J_F(u(B_E))}^{w^*}\right)$, o que nos garante que

$$\overline{u(B_E)}^{w} \subseteq \overline{J_F^{-1}\left(\overline{J_F(u(B_E))}^{w^*}\right)}^{w} = J_F^{-1}\left(\overline{J_F(u(B_E))}^{w^*}\right).$$

Dessa forma $\overline{u(B_E)}^{w}$ é um conjunto w-fechado contido em um conjunto que é w-compacto, portanto $\overline{u(B_E)}^{w}$ é w-compacto, isto é, $u \in \mathcal{W}(E; F)$.

(b)⇒(c): Seja $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede em F' tal que $\varphi_\lambda \xrightarrow{w^*} \varphi \in F'$, ou seja, $\varphi_\lambda(z) \longrightarrow \varphi(z)$ para todo $z \in F$. Mostremos que $u'(\varphi_\lambda) \xrightarrow{w} u'(\varphi)$, isto é, $\psi(u'(\varphi_\lambda)) \longrightarrow \psi(u'(\varphi))$ para todo $\psi \in E''$. Para isso seja $\psi \in E''$. Por hipótese existe $y \in F$ tal que $u''(\psi) = J_F(y)$. Assim,

$$\psi(u'(\varphi_0)) = u''(\psi)(\varphi_0) = J_F(y)(\varphi_0) = \varphi_0(y).$$

para todo $\varphi_0 \in F'$. Em particular, $\psi(u'(\varphi_\lambda)) = \varphi_\lambda(y)$ para todo $\lambda \in \Lambda$ e $\psi(u'(\varphi)) = \varphi(y)$. Assim,

$$\psi(u'(\varphi_\lambda)) = \varphi_\lambda(y) \longrightarrow \varphi(y) = \psi(u'(\varphi)).$$

Logo $u'(\varphi_\lambda) \xrightarrow{w} u'(\varphi)$, e portanto u' é w^*-w-contínuo.

(c)⇒(b): Por hipótese, $u'\colon (F'; \sigma(F'; F)) \longrightarrow (E'; \sigma(E'; E''))$ é contínuo. Sejam $\psi_0 \in E''$ e $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma rede em F' tal que $\varphi_\lambda \xrightarrow{w^*} \varphi$. Como u' é w^*-w-contínuo, $u'(\varphi_\lambda) \xrightarrow{w} u'(\varphi)$, ou seja, para $\psi_0 \in E''$ temos:

$$u''(\psi_0)(\varphi_\lambda) = \psi_0(u'(\varphi_\lambda)) \longrightarrow \psi_0(u'(\varphi)) = u''(\psi_0)(\varphi).$$

Segue que $u''(\psi_0) : (F'; \sigma(F'; F)) \longrightarrow \mathbb{K}$ é um funcional linear contínuo, e daí pelo Teorema 1.40,

$$u''(\psi_0) \in (F'; \sigma(F'; F))' = F = J_F(F).$$

Portanto, $u''(E'') \subseteq J_F(F)$. $\square$

Proposição 4.1.4 $(\mathcal{W}, \|\cdot\|)$ *é ideal de Banach.*

Demonstração: Falta provar apenas que cada componente $\mathcal{W}(E; F)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{L}(E; F)$. Seja $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de operadores fracamente compactos tal que $u_n \longrightarrow u \in \mathcal{L}(E; F)$. Devemos mostrar que u é fracamente compacto. Pela Proposição 3.1.3, a correspondência $u \longrightarrow u'$ é contínua, e daí,

$$u_n \longrightarrow u \Longrightarrow u'_n \longrightarrow u' \Longrightarrow u''_n \longrightarrow u'' \Longrightarrow \|u''_n - u''\| \longrightarrow 0.$$

Como cada u_n é fracamente compacto, temos pelo Teorema 4.1.3 que

$$u''_n(E'') \subseteq J_F(F)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, para cada $\psi \in E''$, temos que $u''_n(\psi) \in J_F(F)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $J_F(F)$ é fechado em F'' com a topologia da norma e

$$\|u''_n(\psi) - u''(\psi)\| = \|(u''_n - u'')(\psi)\| \leq \|u''_n - u''\| \cdot \|\psi\| \longrightarrow 0,$$

temos que $u''_n(\psi) \longrightarrow u''(\psi)$. Portanto $u''(\psi) \in J_F(F)$. Assim, pelo Teorema 4.1.3 temos que u é fracamente compacto. $\square$

A demonstração apresentada a seguir se baseia na dissertação de mestrado [13].

Teorema 4.1.5 (Teorema de Gantmacher) *O ideal dos operadores fracamente compactos é completamente simétrico.*

Demonstração: Sejam E e F espaços de Banach e $u \in \mathcal{L}(E; F)$. Devemos mostrar que $u \in \mathcal{W}(E; F)$ se, e somente se, $u' \in \mathcal{W}(F'; E')$, isto é, que $u \in \mathcal{W}^{\text{dual}}$.

Suponhamos primeiramente que o operador u seja fracamente compacto. Pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki (Teorema 1.43), a bola unitária fechada $B_{F'}$ de F' é w^*-compacta, e pelo Teorema 4.1.3(c) sabemos que u' é w^*-w-contínuo. Disso segue que $u'(B_{F'})$ é w-compacto. Portanto $\overline{u'(B_{F'})}^{w} = u'(B_{F'})$ é fracamente compacto, ou seja, $u' \in \mathcal{W}(F'; E')$.

Reciprocamente, suponhamos que u' seja fracamente compacto. Pelo Teorema 4.1.3(c), o operador

$$u'' \colon (E''; \sigma(E''; E')) \longrightarrow (F''; \sigma(F''; F''')) \tag{4.2}$$

contínuo. Pelo Teorema de Goldstine (Teorema 1.44), $\overline{J_E(B_E)}^{w^*} = B_{E''}$, e aplicando a Proposição 3.1.5 temos

$$u''(B_{E''}) = u''\left(\overline{J_E(B_E)}^{w^*}\right) \overset{(4.2)}{\subseteq} \overline{u''(J_E(B_E))}^{w} = \overline{J_F(u(B_E))}^{w}. \tag{4.3}$$

Como B_E é um conjunto convexo e $J_F \circ u$ é um operador linear, o conjunto $J_F(u(B_E))$ é convexo. Pelo Teorema de Mazur (Teorema 1.34), $\overline{J_F(u(B_E))}^{w} = \overline{J_F(u(B_E))}^{\|\cdot\|_{F''}}$. Assim de (4.3) temos

$$u''(B_{E''}) \subseteq \overline{J_F(u(B_E))}^{\|\cdot\|_{F''}} \subseteq J_F(F).$$

Portanto, $u''(B_{E''}) \subseteq J_F(F)$. Da mesma forma que foi feito anteriormente, como u'' é linear e $J_F(F)$ é subespaço vetorial, segue que $u''(E'') \subseteq J_F(F)$. Pelo Teorema 4.1.3 concluímos que $u \in \mathcal{W}(E;F)$. $\square$

4.2 Ideais que não são simétricos nem anti-simétricos

Veremos nesta seção exemplos de ideais de operadores que não são simétricos nem anti-simétricos. Começamos provando o

Teorema 4.2.1 (Teorema de Schur) *Em ℓ_1, uma sequência converge fracamente se, e somente se, converge na topologia da norma.*

Demonstração: Do Corolário 1.30 basta provar que toda sequência fracamente convergente é também convergente em norma. É claro que basta provar que toda sequência fracamente convergente para zero converge em norma para zero. Seja então $(z^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ uma sequência em ℓ_1 que converge fracamente para zero. Suponhamos, por absurdo, que $(z^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ não convirja para zero em norma. Neste caso existem $\varepsilon > 0$ e uma subsequência $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ de $(z^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ tal que $\|x^{(n)}\|_1 \geq 5\varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Escrevamos $x^n = \left(x_j^{(n)}\right)_{j=1}^{\infty}$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Como $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ converge fracamente para zero, pois subsequência de sequência fracamente convergente para zero também converge fracamente para zero, da dualidade $(\ell_1)' = \ell_\infty$ tem-se que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j^{(n)} = 0 \text{ para toda sequência } b = (b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty. \tag{4.4}$$

Como os vetores unitários canônicos e_j pertencem a ℓ_∞, segue que

$$\lim_{n\to\infty} x_j^{(n)} = 0 \text{ para todo } j \in \mathbb{N}. \tag{4.5}$$

Defina indutivamente duas sequências estritamente crescentes $(m_k)_{k=1}^{\infty}$ e $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ formadas por números naturais da seguinte maneira: $m_0 = n_0 = 1$ e, para $k > 1$, n_k é o menor inteiro maior que n_{k-1} de modo que

$$\sum_{j=1}^{m_{k-1}} |x_j^{(n)}| < \varepsilon;$$

e m_k é o menor inteiro maior que m_{k-1} satisfazendo

$$\sum_{j=m_k}^{\infty} |x_j^{(n)}| < \varepsilon.$$

A existência de n_k é garantida por (4.5), e a de m_k pelo fato de $x^{(n_k)} \in \ell_1$. Definimos uma sequência $(b_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$ da seguinte maneira: para $m_{k-1} < j \leq m_k$, tome

$$b_j = \begin{cases} 0, \text{ se } x_j^{(n_k)} = 0; \\ \frac{\overline{x_j^{(n_k)}}}{|x_j^{(n_k)}|}, \text{ se } x_j^{(n_k)} \neq 0. \end{cases}$$

Note que $|b_j| \leq 1$ para todo j. Logo

$$5\varepsilon - \left|\sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j^{(n_k)}\right| \leq \left|\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j^{(n_k)}\right|\right| - \left|\sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j^{(n_k)}\right| \leq \left|\sum_{j=1}^{\infty} \left(\left|x_j^{(n_k)}\right| - b_j x_j^{(n_k)}\right)\right|$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{m_{k-1}} \left(\left|x_j^{(n_k)}\right| - b_j x_j^{(n_k)}\right) + \sum_{j=m_{k-1}+1}^{m_k} \left(\left|x_j^{(n_k)}\right| - b_j x_j^{(n_k)}\right) + \sum_{j=m_{k+1}}^{\infty} \left(\left|x_j^{(n_k)}\right| - b_j x_j^{(n_k)}\right)\right|$$

$$= \left|\sum_{j=1}^{m_{k-1}} \left(\left|x_j^{(n_k)}\right| - b_j x_j^{(n_k)}\right) + \sum_{j=m_{k+1}}^{\infty} \left(\left|x_j^{(n_k)}\right| - b_j x_j^{(n_k)}\right)\right|$$

$$\leq \sum_{j=1}^{m_{k-1}} \left(\left|x_j^{(n_k)}\right| - \left|b_j x_j^{(n_k)}\right|\right) + \sum_{j=m_{k+1}}^{\infty} \left(\left|x_j^{(n_k)}\right| - \left|b_j x_j^{(n_k)}\right|\right) \leq 2\varepsilon + 2\varepsilon = 4\varepsilon,$$

para todo k. Fazendo $k \longrightarrow \infty$ temos

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j^{(n_k)} \neq 0.$$

Como $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j^{(n)} = 0$, toda subsequência dela também converge para 0. Em particular,

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_j x_j^{(n_k)} = 0,$$

contradição esta que completa a demonstração. □

Por causa do teorema acima, um espaço no qual toda sequência fracamente convergente é convergente em norma é chamado de *espaço de Schur*. Algumas vezes se diz que o espaço tem a *propriedade de Schur*.

Lema 4.2.2 *Seja $\varphi \in (\ell_\infty)'$. Então a série $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(e_n)|$ é convergente.*

Demonstração: Seja $\varphi \in (\ell_\infty)'$. Como $c_0 \subset \ell_\infty$, podemos considerar a restrição $\widetilde{\varphi}$ de φ a c_0. Pela Proposição 1.27 existe uma sequência $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$ tal que $\widetilde{\varphi}((b_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j$ para toda $(b_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$. Em particular, para $e_n \in c_0$ temos

$$|\varphi(e_n)| = |\widetilde{\varphi}(e_n)| = |a_n|$$

para todo n. Logo, $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(e_n)| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ pois $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$. □

O próximo resultado segue imediatamente das definições de ideais de operadores simétricos e anti-simétricos.

Proposição 4.2.3 *Seja $\mathcal{I}$ um ideal de operadores para o qual existem espaços de Banach E e F e um operador $u \in \mathcal{L}(E;F)$ tal que:*
• $u \notin \mathcal{I}(E;F)$;
• $u' \in \mathcal{I}(F';E')$;
• $u'' \notin \mathcal{I}(E'';F'')$.
Então o ideal $\mathcal{I}$ não é nem simétrico nem anti-simétrico.

Vejamos agora o primeiro exemplo de um ideal que não é simétrico nem anti-simétrico:

Proposição 4.2.4 *O ideal $\mathcal{CC}$ dos operadores completamente contínuos não é simétrico nem anti-simétrico.*

Demonstração: Chamemos de Id_E o operador identidade no espaço de Banach E. Vejamos que:
• $Id_{\ell_1} \in \mathcal{CC}(\ell_1;\ell_1)$: dada uma sequência $(x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1$ tal que $x_n \xrightarrow{w} x$, pelo Teorema de Schur (Teorema 4.2.1) temos que $x_n \longrightarrow x$ na topologia da norma. Portanto

$$Id_{\ell_1}(x_n) = x_n \longrightarrow x = Id_{\ell_1}(x),$$

o que prova que Id_{ℓ_1} é completamente contínua.

• $Id_{\ell_\infty} \notin \mathcal{CC}(\ell_\infty;\ell_\infty)$: considere a sequência $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ formada pelos vetores unitários canônicos de ℓ_∞. Para todo funcional $\varphi \in (\ell_\infty)'$, pelo Lema 4.2.2 sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} |\varphi(e_n)|$ é convergente, logo $\varphi(e_n) \longrightarrow 0 = \varphi(0)$. Da Proposição 1.29(c) segue que $e_n \xrightarrow{w} 0$ em ℓ_∞. Como $\|e_{n+1} - e_n\| = 1 \nrightarrow 0$, a sequência $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ não é de Cauchy, e assim $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ não converge em norma. Em particular, $e_n \nrightarrow 0$ em ℓ_∞. Portanto $Id_{\ell_\infty} \notin \mathcal{CC}(\ell_\infty;\ell_\infty)$.

• $Id_{c_0} \notin \mathcal{CC}(c_0;c_0)$: para todo funcional $\varphi \in c_0'$ podemos tomar uma sequência $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_1$ tal que $\varphi((b_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j$ para toda $(b_j)_{j=1}^{\infty} \in c_0$. Em particular, $\varphi(e_n) = a_n \longrightarrow 0 = \varphi(0)$, pois a_n é o termo geral de uma série convergente. Da Proposição 1.29(c), $e_n \xrightarrow{w} 0$. Da mesma forma que antes, a sequência $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ não é de Cauchy em c_0, e assim $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ não converge na norma de c_0. Consequentemente, $Id_{c_0} \notin \mathcal{CC}(c_0;c_0)$.

Segue da Proposição 4.2.3 que o ideal $\mathcal{CC}$ não é simétrico nem anti-simétrico. □

Queremos agora identificar condições sobre os espaços E e F de forma a garantir que $\mathcal{CC}(E;F) = \mathcal{CC}^{\text{dual}}(E;F)$. A observação elementar a seguir será útil para este propósito:

Proposição 4.2.5 *Seja E um espaço de Schur. Então $\mathcal{CC}(E;F) = \mathcal{L}(E;F)$ para todo espaço de Banach F.*

Demonstração: É claro que $\mathcal{CC}(E;F) \subseteq \mathcal{L}(E;F)$. Mostremos a inclusão contrária. Sejam $u \in \mathcal{L}(E;F)$ e $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ tal que $x_n \xrightarrow{w} x$. Como E é espaço de Schur temos que $x_n \longrightarrow x$ na topologia da norma. Por continuidade, $u(x_n) \longrightarrow u(x)$ e portanto $u \in \mathcal{CC}(E;F)$. □

Vimos que o ideal dos operadores completamente contínuos não é simétrico nem anti-simétrico. Entretanto, ao acrescentarmos a condição de E ser espaço de Schur, pela Proposição 4.2.5 obtemos

$$\mathcal{CC}^{\text{dual}}(E;F) \subseteq \mathcal{L}(E;F) = \mathcal{CC}(E;F);$$

e ao acrescentarmos a condição de F' ser espaço de Schur, a mesma Proposição 4.2.5 nos garante que

$$\mathcal{CC}(E;F) \subseteq \mathcal{L}(E;F) = \mathcal{CC}^{\text{dual}}(E;F).$$

Em resumo,

Proposição 4.2.6 *Se E e F' são espaços de Schur, então $\mathcal{CC}(E;F) = \mathcal{CC}^{\text{dual}}(E;F)$.*

Observe que, na igualdade acima, os espaços na verdade coincidem com $\mathcal{L}(E;F)$. Trabalharemos agora para obter um caso em que a igualdade vale sem que os espaços sejam iguais a $\mathcal{L}(E;F)$.

Proposição 4.2.7
(a) $\mathcal{K}(E;F) \subseteq \mathcal{CC}(E;F)$ *para todos espaços de Banach E e F.*
(b) *Seja E um espaço reflexivo. Então $\mathcal{K}(E;F) = \mathcal{CC}(E;F)$ para todo espaço de Banach F.*

Demonstração: (a) Sejam $u \in \mathcal{K}(E;F)$ e $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq E$ tal que $x_n \xrightarrow{w} x$. Da Proposição 1.32 (Observação 1.33 no caso normado não-Banach) segue que $u(x_n) \xrightarrow{w} u(x)$. Suponha, por absurdo, que $(u(x_n))_{n=1}^{\infty}$ não convirja em norma para $u(x)$. Neste caso existem $\varepsilon > 0$ e uma subsequência $(u(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ tais que

$$\|u(x_{n_k}) - u(x)\| \geq \varepsilon \text{ para todo } k. \tag{4.6}$$

De $x_{n_k} \xrightarrow{w} x$ segue que a sequência $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ é limitada, e portanto, pela compacidade do operador u, $(u(x_{n_k}))_{k=1}^{\infty}$ admite subsequência $(u(x_{n_{k_j}}))_{j=1}^{\infty}$ convergente, digamos

$$u(x_{n_{k_j}}) \longrightarrow y \in F.$$

Por maior razão, $u(x_{n_{k_j}}) \xrightarrow{w} y$ e, como a topologia fraca é de Hausdorff, concluímos que $u(x) = y$. Então $u(x_{n_{k_j}}) \longrightarrow u(x)$, o que contradiz (4.6) e comprova que o operador u é completamente contínuo.
(b) Seja $u \in \mathcal{CC}(E;F)$. Dada uma sequência limitada $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ em E, como E é reflexivo, pelo Teorema 1.37 podemos extrair uma subequência fracamente convergente, digamos $x_{n_k} \xrightarrow{w} x$ em E. Como u é completamente contínuo, $u(x_{n_k}) \longrightarrow u(x)$, e portanto u é compacto pela Proposição 2.3.3. □

Proposição 4.2.8 *Sejam E e F espaços de Banach.*
(a) *Se E é reflexivo, então $\mathcal{CC}(E;F) \subseteq \mathcal{CC}^{\text{dual}}(E;F)$.*
(b) *Se F é reflexivo, então $\mathcal{CC}(E;F) \supseteq \mathcal{CC}^{\text{dual}}(E;F)$.*

Demonstração: (a) Seja $u \in \mathcal{CC}(E;F)$. Da reflexividade de E, pela Proposição 4.2.7(b) sabemos que $u \in \mathcal{K}(E;F)$. Pelo Teorema de Schauder (Teorema 4.1.1), $u \in \mathcal{K}^{\text{dual}}(E;F)$, ou seja, $u' \in \mathcal{K}(F';E')$. Aplicando agora a Proposição 4.2.7(a) temos que $u' \in \mathcal{CC}(F';E')$, e isso significa que $u \in \mathcal{CC}^{\text{dual}}(E;F)$.
(b) Seja $u \in \mathcal{CC}^{\text{dual}}(E;F)$, ou seja, $u' \in \mathcal{CC}(F';E')$. Da reflexividade de F, e portanto de F', pela Proposição 4.2.7(b) sabemos que $u' \in \mathcal{K}(F';E')$, ou seja $u \in \mathcal{K}^{\text{dual}}(E;F)$. Pelo Teorema de Schauder (Teorema 4.1.1), $u \in \mathcal{K}^{\text{dual}}(E;F) = \mathcal{K}(E;F)$, e pela Proposição 4.2.7(a) concluímos que $u \in \mathcal{CC}(E;F)$. □

Corolário 4.2.9 *Seja E um espaço de Banach reflexivo de dimensão infinita. Então*
$$\mathcal{CC}(E;E) = \mathcal{CC}^{\text{dual}}(E;E) \neq \mathcal{L}(E;E).$$

Demonstração: De fato, como E é espaço de Banach reflexivo, pela Proposição 4.2.8 temos que $\mathcal{CC}(E;E) = \mathcal{CC}^{\text{dual}}(E;E)$. E como em dimensão infinita a bola unitária fechada B_E nunca é compacta na topologia da norma (Proposição 2.3.2), temos que $Id_E \notin \mathcal{K}(E;E)$. Pela Proposição 4.2.7(b) segue que $Id_E \notin \mathcal{K}(E;E) = \mathcal{CC}(E;E)$. Portanto $\mathcal{CC}(E;E) = \mathcal{CC}^{\text{dual}}(E;E) \neq \mathcal{L}(E;E)$. □

O corolário acima, bem como a proposição que o precede, não foram encontrados na literatura.

Obtemos ainda uma consequência importante para a Teoria dos Espaços de Banach:

Corolário 4.2.10 *Não existe espaço de Banach reflexivo de Schur de dimensão infinita.*

A demonstração desse resultado segue imediatamente da Proposição 4.2.5 e do Corolário 4.2.9.

Exibiremos a seguir um segundo exemplo de ideal de operadores que não é simétrico nem anti-simétrico.

Proposição 4.2.11 *Para todo $p \geq 1$, o ideal Π_p dos operadores absolutamente p-somantes não é simétrico nem anti-simétrico.*

Demonstração: Considere o operador inclusão $i\colon \ell_2 \longrightarrow c_0$. Vejamos que, para todo $p \geq 1$:

• $i \notin \Pi_p(\ell_2; c_0)$: tome primeiramente $q \geq 2$. Vejamos que $i \notin \Pi_q(\ell_2; c_0)$. É claro que $\ell_2 \subset c_0$ e que a inclusão é linear e contínua. Suponha, por absurdo, que $i \in \Pi_q(\ell_2; c_0)$ e considere $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ a sequência formada pelos vetores unitários canônicos de ℓ_2. Existe então uma constante $c \geq 0$ tal que

$$n = \sum_{j=1}^{n} \|e_j\|^q = \sum_{j=1}^{n} \|i(e_j)\|^q \leq c^q \cdot \sup_{\varphi \in B_{\ell_2'}} \sum_{j=1}^{n} |\varphi(e_j)|^q$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto,

$$n^{\frac{1}{q}} \leq c \cdot \sup_{\varphi \in B_{\ell_2'}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(e_j)|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $q \geq 2$, do Teorema 1.11 obtemos que

$$\begin{aligned} n^{\frac{1}{q}} &\leq c \cdot \sup_{\varphi \in B_{\ell_2'}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(e_j)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq c \cdot \sup_{\varphi \in B_{\ell_2'}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\varphi(e_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= c \cdot \sup_{\substack{(\mu_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2 \\ (\sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k|^2)^{\frac{1}{2}} \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^{n} | \left((\mu_k)_{k=1}^{\infty} \right) (e_j)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= c \cdot \sup_{\substack{(\mu_k)_{k=1}^{\infty} \in \ell_2 \\ (\sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k|^2)^{\frac{1}{2}} \leq 1}} \left(\sum_{j=1}^{n} |\mu_j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c \cdot 1 = c \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim, $n^{\frac{1}{q}} \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso implica que $n \leq c^q$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso é uma contradição pois não existe constante maior que todo número natural. Concluímos então que $i \notin \Pi_q(\ell_2; c_0)$ para todo $q \geq 2$. Em particular, $i \notin \Pi_2(\ell_2; c_0)$. Pelo Teorema 2.4.6, $i \notin \Pi_p(\ell_2; c_0)$ para todo $p \geq 1$.

• $i' \in \Pi_p(\ell_1; \ell_2)$: é claro que $i' \in \mathcal{L}(\ell_1; \ell_2)$. Pelo Teorema de Grothendieck (Teorema 2.4.7), $i' \in \Pi_1(\ell_1; \ell_2)$. Novamente pelo Teorema 2.4.6 segue que $i' \in \Pi_p(\ell_1; \ell_2)$ para todo $p \geq 1$.

• $i'' \notin \Pi_p(\ell_2; \ell_\infty)$: vejamos que $i''(y) = i(y)$ para todo $y \in \ell_2$ (isso poderia ser concluído usando que J_{c_0} é a inclusão e a Proposição 3.1.5, mas preferimos dar um argumento direto). De fato, dadas as sequências $(a_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1$ e $(b_j)_{j=1}^\infty \in \ell_2$,

$$i'\left((a_j)_{j=1}^\infty\right)\left((b_j)_{j=1}^\infty\right) = (a_j)_{j=1}^\infty\left(i((b_j)_{j=1}^\infty)\right) = (a_j)_{j=1}^\infty\left((b_j)_{j=1}^\infty\right) = \sum_{j=1}^\infty a_j b_j.$$

Assim, $i'((a_j)_{j=1}^\infty) = (a_j)_{j=1}^\infty$, ou seja, $i'(x) = x$ para todo $x \in \ell_1$. Sejam agora $(c_j)_{j=1}^\infty \in \ell_2$ e $(d_j)_{j=1}^\infty \in \ell_1$. Então

$$i''\left((c_j)_{j=1}^\infty\right)\left((d_j)_{j=1}^\infty\right) = (c_j)_{j=1}^\infty\left(i'((d_j)_{j=1}^\infty)\right) = (c_j)_{j=1}^\infty\left((d_j)_{j=1}^\infty\right) = \sum_{j=1}^\infty c_j d_j.$$

Assim, $i''((c_j)_{j=1}^\infty) = (c_j)_{j=1}^\infty$, ou seja, $i''(y) = y$ para todo $y \in \ell_2$.

Suponha que $i'' \in \Pi_p(\ell_2; \ell_\infty)$. Neste caso existe $c \geq 0$ tal que

$$\sum_{j=1}^n \|i(x_j)\|^p = \sum_{j=1}^n \|x_j\|^p = \sum_{j=1}^n \|i''(x_j)\|^p \leq c^p \cdot \sup_{\varphi \in B_{\ell_2'}} \sum_{j=1}^n |\varphi(x_j)|^p$$

para todos $x_1, \ldots, x_n \in \ell_2$. Mas isso significa que $i \in \Pi_p(\ell_2; c_0)$, o que já mostramos que não acontece. Essa contradição nos permite concluir que $i'' \notin \Pi_p(\ell_2; \ell_\infty)$ para todo $p \geq 1$.

Pela Proposição 4.2.3 segue que o ideal dos operadores absolutamente p-somantes não é nem simétrico nem anti-simétrico. $\square$

Ao acrescentar uma condição ao espaço de chegada obtemos uma inclusão:

Teorema 4.2.12 [8, Theorem 2.12] $\Pi_p^{\text{dual}}(E; H) \subseteq \Pi_p(E; H)$ *para todo* $p \geq 1$, *todo espaço de Banach* E *e todo espaço de Hilbert* H.

4.3 Um ideal simétrico que não é anti-simétrico

Vejamos agora que o ideal de operadores nucleares é um exemplo de ideal de operadores que é simétrico mas não é anti-simétrico.

Proposição 4.3.1 *O ideal* $\mathcal{N}$ *dos operadores nucleares é simétrico, isto é,* $\mathcal{N}(E; F) \subseteq \mathcal{N}^{\text{dual}}(E; F)$ *para todos espaços de Banach* E *e* F.

Demonstração: Dado $u \in \mathcal{N}(E;F)$, tome $\varphi_i \in E'$, $b_i \in F$, $i \in \mathbb{N}$, tais que $\sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\| \cdot \|b_i\| < \infty$ e, para cada $x \in E$,

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \otimes b_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) b_i.$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, defina $\beta_i := J_F(b_i) \in F''$. Por um lado,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\beta_i\| \cdot \|\varphi_i\| = \sum_{i=1}^{\infty} \|J_F(b_i)\| \cdot \|\varphi_i\| = \sum_{i=1}^{\infty} \|b_i\| \cdot \|\varphi_i\| < \infty.$$

Por outro lado, para todo $\psi \in F'$,

$$\begin{aligned}
\left\| u'(\psi) - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \otimes \varphi_i(\psi) \right\|_{E'} &= \left\| u'(\psi) - \sum_{i=1}^{n} \beta_i(\psi)\varphi_i \right\|_{E'} \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1} \left| \left(u'(\psi) - \sum_{i=1}^{n} \beta_i(\psi)\varphi_i \right)(x) \right| \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1} \left| u'(\psi)(x) - \sum_{i=1}^{n} \left(\beta_i(\psi)\varphi_i\right)(x) \right| \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1} \left| \psi(u(x)) - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\beta_i(\psi) \right| \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1} \left| \psi(u(x)) - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) J_F(b_i)(\psi) \right| \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1} \left| \psi(u(x)) - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\psi(b_i) \right| \\
&= \sup_{\|x\|\leq 1} \left| \psi\left(u(x) - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) b_i \right) \right| \\
&\leq \|\psi\| \cdot \sup_{\|x\|\leq 1} \left\| u(x) - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) b_i \right\| \\
&= \|\psi\| \cdot \sup_{\|x\|\leq 1} \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) b_i - \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) b_i \right\| \\
&= \|\psi\| \cdot \sup_{\|x\|\leq 1} \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \varphi_i(x) b_i \right\| \\
&\leq \|\psi\| \cdot \sup_{\|x\|\leq 1} \left(\|x\| \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} \|\varphi_i\| \cdot \|b_i\| \right) \\
&= \|\psi\| \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} \|\varphi_i\| \cdot \|b_i\| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

pois $\sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\| \cdot \|b_i\| < \infty$. Logo

$$u'(\psi) = \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i \otimes \varphi_i(\psi),$$

para todo $\psi \in F'$. Isso prova que $u' \in \mathcal{N}(F'; E')$. Portanto $u \in \mathcal{N}^{\text{dual}}(E; F)$. $\square$

Passaremos agora a discutir a inclusão

$$\mathcal{N}^{\text{dual}} \subseteq \mathcal{N}. \tag{4.7}$$

A validade de (4.7) foi um problema proposto por Grothendieck em 1955. Sua solução se desenrolou por quase duas décadas e tem muito a ver com outro problema célebre da teoria dos espaços de Banach, chamado de Problema da Aproximação, o qual passamos a descrever.

Como $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{K}$ e $\mathcal{K}$ é fechado, então $\overline{\mathcal{F}} = \mathcal{A} \subseteq \mathcal{K}$, ou seja, todo operador que é limite de uma sequência de operadores de posto finito é compacto. Em 1931, Hildebrandt perguntou se valia a recíproca, isto é, será que $\mathcal{K} = \mathcal{A} = \overline{\mathcal{F}}$? Em outras palavras, será que todo operador compacto é limite de uma sequência de operadores de posto finito?

Definição 4.3.2 Um espaço de Banach E tem a *Propriedade da Aproximação* (AP) se $\mathcal{K}(E; E) = \mathcal{A}(E; E)$.

O problema então pode ser reescrito da seguinte forma: é verdade que todo espaço de Banach tem a propriedade da aproximação? Este problema foi reformulado de diversas maneiras, e uma caracterização importante é a seguinte:

Um espaço de Banach E tem a propriedade da aproximação se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ e todo compacto $K \subseteq E$, existe um operador $u \in \mathcal{F}(E; E)$ tal que $\|u(x) - x\| < \varepsilon$ para todo $x \in K$.

Essa caracterização é importante pois dá origem a diversas variantes da (AP). Uma das mais importantes é a seguinte:

Definição 4.3.3 Um espaço de Banach E tem a *Propriedade da Aproximação Limitada* (BAP) se existe $\lambda \geq 1$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ e todo compacto $K \subseteq E$, existe um operador $u \in \mathcal{F}(E; E)$ tal que $\|u\| \leq \lambda$ e $\|u(x) - x\| < \varepsilon$ para todo $x \in K$.

A implicação (BAP)$\Longrightarrow$(AP) é óbvia. A recíproca não é imediata e por isso a validade da implicação

$$\text{(AP)} \Longrightarrow \text{(BAP)}. \tag{4.8}$$

tornou-se também um problema célebre.

Em 1972, P. Enflo resolveu o Problema da Aproximação na negativa: existem espaços de Banach que não têm a Propriedade da Aproximação. Imediatamente, Figiel e Johnson [9] em 1973 usaram o exemplo de Enflo para resolver (4.8) também na negativa: existem espaços de Banach E, com dual E' separável, que têm (AP) mas não têm (BAP). Além disso, Figiel e Johnson usaram a existência de tais espaços para mostrar que a inclusão (4.7) não vale em geral, resolvendo assim, também na negativa, o problema original de Grothendieck:

Teorema 4.3.4 [9, Proposition 3] *Seja E um espaço de Banach com dual E' separável que tem (AP) mas não tem (BAP). Então existe um operador não-nuclear $u\colon E \longrightarrow E$ cujo adjunto u' é nuclear, isto é,*

$$\mathcal{N}^{\mathrm{dual}}(E;E) \nsubseteq \mathcal{N}(E;E).$$

Os detalhes da demonstração desse resultado envolvem técnicas não estudadas nessa dissertação. Por isso faremos apenas um esboço da demonstração. Para isso, provemos antes o

Lema 4.3.5 *Sejam $(\mathcal{I}, \|\cdot\|_{\mathcal{I}})$ um ideal de Banach e E um espaço de Banach. Então o conjunto*

$$\{u \in \mathcal{I}(E';E') : u' \text{ é } w^*{-}w^*{-}\text{contínuo}\} = \mathcal{I}(E';E') \cap \mathcal{L}_{w^*w^*}(E';E')$$

é fechado em $\mathcal{I}(E';E')$

Demonstração: Seja $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \{u \in \mathcal{I}(E';E') : u' \text{ é } w^*{-}w^*{-}\text{contínuo}\}$ tal que $u_n \longrightarrow u$ em $\mathcal{I}(E';E')$, isto é, $\|u_n - u\|_{\mathcal{I}} \longrightarrow 0$. Como $\mathcal{I}(E';E')$ é espaço de Banach, temos $u \in \mathcal{I}(E';E')$. Usando a Proposição 2.1.4(a), obtemos

$$\|u_n - u\| \leq \|u_n - u\|_{\mathcal{I}} \longrightarrow 0,$$

ou seja, $u_n \longrightarrow u$ em $\mathcal{L}(E';E')$. Na Proposição 3.1.8 provamos que $\mathcal{L}_{w^*w^*}(E';E')$ é fechado em $\mathcal{L}(E';E')$, logo u é w^*-w^*-contínuo. □

Esboço da demonstração do Teorema 4.3.4: A parte delicada do argumento é mostrar que o conjunto

$$\{u' : u \in \mathcal{N}(E;E)\}$$

não é fechado em $\mathcal{N}(E';E')$. Feito isso, podemos tomar

$$v \in \overline{\{u' : u \in \mathcal{N}(E;E)\}}^{\mathcal{N}(E';E')}$$

tal que

$$v \notin \{u' : u \in \mathcal{N}(E;E)\}. \tag{4.9}$$

Existe então uma sequência $(v_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \{u' : u \in \mathcal{N}(E;E)\}$ tal que $v_n \longrightarrow v$ na norma nuclear de $\mathcal{N}(E';E')$. Para cada n podemos tomar $u_n \in \mathcal{N}(E;E)$ tal que $u_n' = v_n$. Pelo Lema 3.1.7 segue que cada v_n é w^*-w^*-contínuo. Mais ainda, como $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}^{\mathrm{dual}}$ (Proposição 4.3.1), temos que $v_n \in \mathcal{N}(E';E')$ para todo n. Assim,

$$(v_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \{u \in \mathcal{N}(E';E') : u' \text{ é } w^*{-}w^*{-}\text{contínuo}\}.$$

Como $(\mathcal{N}, \|\cdot\|_{\mathcal{N}})$ é ideal de Banach (Proposição 2.7.4) e $v_n \longrightarrow v$ em $\mathcal{N}(E';E')$, pelo Lema 4.3.5 segue que $v \in \mathcal{N}(E';E')$ e que v é w^*-w^*-contínuo. Novamente pelo Lema 3.1.7, existe $u \in \mathcal{L}(E;E)$ tal que $u' = v$. Então $u \in \mathcal{N}^{\mathrm{dual}}(E;E)$. Por (4.9) segue que $u \notin \mathcal{N}(E;E)$.

Conclusão: $\mathcal{N}$ é simétrico mas não é anti-simétrico.

Como nos outros casos, é possível obter a igualdade $\mathcal{N}^{\text{dual}}(E;F) = \mathcal{N}(E;F)$ com hipótese adicionais sobre os espaços E e F. É interessante observar que Grothendieck alegou ter provado que se F'' tem a (AP), então $\mathcal{N}^{\text{dual}}(E;F) = \mathcal{N}(E;F)$ para todo E. Conforme provado por Oja e Reinov [21], isso não é verdade. O que vale é o seguinte:

Proposição 4.3.6 *Sejam E e F espaços de Banach tais que E' tem a Propriedade da Aproximação, ou F é reflexivo ou F''' tem a Propriedade da Aproximação. Então*

$$\mathcal{N}^{\text{dual}}(E;F) = \mathcal{N}(E;F).$$

Demonstração: Para o caso em que E' tem a propriedade da aproximação, veja [7, Theorem VIII 3.7]. Para o caso em que F''' tem a propriedade da aproximação, veja [21]. Façamos o caso em que F é reflexivo. Já provamos na Proposição 4.3.1 que $\mathcal{N}(E;F) \subseteq \mathcal{N}^{\text{dual}}(E;F)$, então basta provar que $\mathcal{N}^{\text{dual}}(E;F) \subseteq \mathcal{N}(E;F)$. Dado $u \in \mathcal{N}^{\text{dual}}(E;F)$, por definição do ideal dual e usando uma vez mais a Proposição 4.3.1, temos $u' \in \mathcal{N}(F';E') \subseteq \mathcal{N}^{\text{dual}}(F';E')$. Assim, $u'' \in \mathcal{N}(E'';F'')$. Como F é reflexivo, aplicando o Corolário 3.1.6 e a propriedade de ideal temos

$$u = \underbrace{J_F^{-1} \circ \underbrace{u''}_{\in \mathcal{N}} \circ J_E}_{\in \mathcal{N}}$$

Portanto $u \in \mathcal{N}(E;F)$. □

4.4 Um ideal anti-simétrico que não é simétrico

Nesta seção veremos, por fim, que o ideal $\mathcal{S}$ dos operadores separáveis é um exemplo de ideal de operadores que é anti-simétrico mas não é simétrico.

Proposição 4.4.1 *O ideal $\mathcal{S}$ dos operadores separáveis é anti-simétrico, isto é, $\mathcal{S}^{\text{dual}}(E;F) \subseteq \mathcal{S}(E;F)$ para todos espaços de Banach E e F.*

Demonstração: Sejam E e F espaços de Banach e $u \in \mathcal{S}^{\text{dual}}(E;F)$. Logo $u' \in \mathcal{S}(F';E')$, ou seja, $u'(F') = \{u'(\varphi) : \varphi \in F'\}$ é separável. Pelo Lema 1.25, a esfera unitária $S_{u'(F')}$ é separável, e portanto podemos tomar uma sequência $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq F'$ tal que $(u'(\varphi_n))_{n=1}^{\infty}$ encontra-se em $S_{u'(F')}$ e é densa em $S_{u'(F')}$. Isto é, $\|u'(\varphi_n)\| = 1$ para todo n e se $\psi \in F'$ satisfaz $\|u'(\psi)\| = 1$, então para cada $\varepsilon > 0$ existe um índice m que satisfaz

$$\|u'(\psi) - u'(\varphi_m)\| < \varepsilon. \tag{4.10}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, como

$$\frac{1}{2} < 1 = \|u'(\varphi_n)\| = \sup_{\|x\|=1} |u'(\varphi_n)(x)|,$$

existe $x_n \in E$ com $\|x_n\| = 1$ tal que $|u'(\varphi_n)(x_n)| > \frac{1}{2}$. Considere o subespaço fechado F_0 de F gerado pelos vetores $u(x_1), u(x_2), \ldots$. Pelo Lema 1.20 sabemos que F_0 é separável, e assim basta mostrar que $u(E) \subseteq F_0$. Argumentando por absurdo, suponhamos que $u(E) \nsubseteq F_0$. Neste caso existe $x \in E$ tal que $u(x) \notin F_0$. Pelo Teorema de Hahn-Banach (Teorema 1.26), existe $\varphi \in F'$, $\varphi \neq 0$, tal que

$$\varphi(u(x)) = u'(\varphi)(x) \neq 0 \ \text{ e } \ \varphi(y) = 0 \text{ para todo } y \in F_0.$$

Em particular, $u'(\varphi) \neq 0$, e portanto podemos supor, sem perda de generalidade, que $\|u'(\varphi)\| = 1$, pois caso contrário basta substituir φ por $\frac{\varphi}{\|u'(\varphi)\|}$. Agora note que, como $\|x_n\| = 1$ e $u(x_n) \in F_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} \|u'(\varphi) - u'(\varphi_n)\| &\geq |(u'(\varphi) - u'(\varphi_n))(x_n)| \\ &= |u'(\varphi)(x_n) - u'(\varphi_n)(x_n)| \\ &= |\varphi(u(x_n)) - u'(\varphi_n)(x_n)| \\ &= |u'(\varphi_n)(x_n)| > \frac{1}{2} \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso é um absurdo pois contradiz (4.10). Essa contradição nos permite concluir que $u(E) \subseteq F_0$, e portanto $u(E)$ é separável pela Proposição 1.21. Segue que $u \in \mathcal{S}(E; F)$. $\square$

Terminaremos esta dissertação discutindo a validade da inclusão

$$\mathcal{S}(E; F) \subseteq \mathcal{S}^{\text{dual}}(E; F). \tag{4.11}$$

Conforme já anunciado, a inclusão não vale sempre:

Exemplo 4.4.2 O ideal $\mathcal{S}$ dos operadores separáveis não é simétrico. De fato, basta considerar o operador identidade Id_{ℓ_1} em ℓ_1. Como $Id_{\ell_1}(\ell_1) = \ell_1$ e ℓ_1 é separável, segue que $Id_{\ell_1} \in \mathcal{S}(\ell_1; \ell_1)$. Pelo Lema 3.1.2 temos que $(Id_{\ell_1})' = Id_{\ell_1'} = Id_{\ell_\infty}$. Como $Id_{\ell_\infty}(\ell_\infty) = \ell_\infty$ e ℓ_∞ não é separável, concluímos que

$$(Id_{\ell_1})' = Id_{\ell_\infty} \notin \mathcal{S}(\ell_\infty; \ell_\infty) = \mathcal{S}(\ell_1'; \ell_1'),$$

ou seja $Id_{\ell_1} \notin \mathcal{S}^{\text{dual}}(\ell_1; \ell_1)$. Portanto $\mathcal{S}(\ell_1; \ell_1) \nsubseteq \mathcal{S}^{\text{dual}}(\ell_1; \ell_1)$.

Como nos outros casos, ao acrescentarmos condições convenientes em E e/ou F, a inclusão (4.11) passa a ser verdadeira:

Proposição 4.4.3 *Sejam E e F espaços de Banach com E' ou F'' separável. Então*

$$\mathcal{S}(E; F) = \mathcal{S}^{\text{dual}}(E; F).$$

Demonstração: Suponha primeiramente que E' seja um espaço separável. Dado $u \in \mathcal{S}(E; F) \subseteq \mathcal{L}(E; F)$, tem-se $u' \in \mathcal{L}(F'; E')$. Como $u'(F') \subseteq E'$ e E' é separável, temos que $u'(F')$ é separável, e assim $u' \in \mathcal{S}(F'; E')$; ou seja, $u \in \mathcal{S}^{\text{dual}}(E; F)$.

Suponha agora que F'' seja um espaço separável. Dado $u \in \mathcal{S}(E; F) \subseteq \mathcal{L}(E; F)$, $u''(E'') \subseteq F''$ é separável, e assim $u'' \in \mathcal{S}(E''; F'')$. Isso quer dizer que $u' \in \mathcal{S}^{\text{dual}}(F'; E')$. Pela Proposição 4.4.1 segue que $u' \in \mathcal{S}(F'; E')$, ou seja, $u \in \mathcal{S}^{\text{dual}}(E; F)$. $\square$

APÊNDICE A

RESUMO DAS PROPRIEDADES DOS IDEAIS

Neste apêndice apresentamos um resumo das propriedades dos ideais de operadores estudados nesta dissertação.

Ideal	Simétrico	Anti-simétrico	Completamente simétrico	Fechado	Injetivo	Sobrejetivo
$\mathcal{F}$	SIM	SIM	SIM	NÃO	SIM	SIM
$\mathcal{A}$	SIM	SIM	SIM	SIM	NÃO	NÃO
$\mathcal{K}$	SIM	SIM	SIM	SIM	SIM	SIM
Π_p	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	SIM	NÃO
$\mathcal{W}$	SIM	SIM	SIM	SIM	SIM	SIM
$\mathcal{CC}$	NÃO	NÃO	NÃO	SIM	SIM	NÃO
$\mathcal{N}$	SIM	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO	NÃO
$\mathcal{S}$	NÃO	SIM	NÃO	SIM	SIM	SIM

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Y. A. Abramovich e C. D. Aliprantis, *Problems in Operator Theory*, Graduate Studies in Mathematics, V. 50, American Mathematical Society, 2002.

[2] S. Berrios e G. Botelho, *Approximation properties determined by operator ideals and approximability of homogeneous polynomials and holomorphic functions*, to appear in Studia Mathematica.

[3] G. Botelho, D. Pellegrino e E. Teixeira, *Fundamentos de Análise Funcional*, preprint.

[4] H. Brézis, *Analyse Fonctionnelle: Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1983.

[5] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Springer, 1990.

[6] A. Defant and K. Floret, *Tensor Norms and Operator Ideals*, North-Holland, 1993.

[7] J. Diestel and J. J. Uhl, Jr., *Vector Measures*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol 15, American Mathematical Society, 1977.

[8] J. Diestel, H. Jarchow and A. Tonge, *Absolutely Summing Operators*, Cambridge University Press, 1995.

[9] T. Figiel e W. B. Johnson, *The aproximation property does not imply the bounded approximation property*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 41, n 1, 1973, 197-200.

[10] G. B. Folland, *Real Analysis: Modern Techniques and their Applications*, John Wiley and Sons, Inc., 1999.

[11] C. S. Hönig, *Análise Funcional e Aplicações*, Vol. II, Publicações do IME-USP, 1970.

[12] H. Jarchow, *Locally Convex Spaces*, B. G. Teubner Stuttgart, 1981.

[13] A. Jatobá, *Fatoração de operadores fracamente compactos entre espaços de Banach*, Dissertação de Mestrado, UNICAMP, 2005.

[14] W. B. Johnson e J. Lindenstrauss, *Handbook of the Geometry of Banach Spaces*, Volume 1, North-Holland, 2001.

[15] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, 1989.

[16] E. Lima, *Espaços Métricos*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2007 (Projeto Euclides).

[17] E. Lima, *Elementos de Topologia Geral*, SBM, 2009.

[18] M. Lindström e G. Schlüchtermann, *Composition of operator ideals*, Math, Scand, 84 (1999), 284-296.

[19] R. Megginson, *An Introduction to Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics 183, Springer, 1998.

[20] J. Mujica, *Complex Analysis in Banach Spaces*, North-Holland, 1986.

[21] E. Oja e O. Reinov, *A counterexample to an affirmation of A. Grothendieck*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 305, 1987, n 4, 121-122.

[22] A. Pietsch, *Operator Ideals*, North-Holland Publishing Company, 1980.

[23] L. G. Polac, *Séries incondicionalmente convergentes e operadores absolutamente somantes*, Monografia, UFU, 2010.

[24] A. R. Silva, *Linearização de aplicações multilineares contínuas entre espaços de Banach e ideais de composição*, Dissertação de Mestrado, UFU, 2010.

[25] P. Wojtaszczyk, *Banach Spaces for Analysts*, Cambridge University Press, 1996.