

MARCELO LOPES VIEIRA

Uma Análise da Dinâmica de um Sistema
Autoparamétrico Auto-Excitado do tipo
Rayleigh

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2010

MARCELO LOPES VIEIRA

Uma Análise da Dinâmica de um Sistema Autoparamétrico Auto-Excitado do tipo Rayleigh

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Equações Diferenciais.

Orientador: Prof. Dr. Márcio José Horta Dantas.

UBERLÂNDIA - MG
2010

(Ficha Catalográfica elaborada pela biblioteca da UFU)
(anexar ou “escanear”)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

V658a	<p>Vieira, Marcelo Lopes, 1984- Uma análise da dinâmica de um sistema autoparamétrico auto-excitado do tipo Rayleigh [manuscrito] / Marcelo Lopes Vieira. - 2009. 70 f.</p> <p>Orientador: Márcio José Horta Dantas.</p> <p>Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática. Inclui bibliografia.</p> <p>1. Equações diferenciais ordinárias - Teses. I. Dantas, Márcio José Horta. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU: 517.91</p>
-------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNO: MARCELO LOPES VIEIRA.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 93801.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Equações Diferenciais.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Uma Análise da Dinâmica de um Sistema Autoparamétrico Auto-Excitado do tipo Rayleigh.

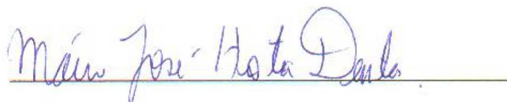
ORIENTADOR: Prof. Dr. Márcio José Horta Dantas.

Esta dissertação foi **APROVADA** em reunião pública realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 19 de fevereiro de 2010, às 9h00min, pela seguinte Banca Examinadora:

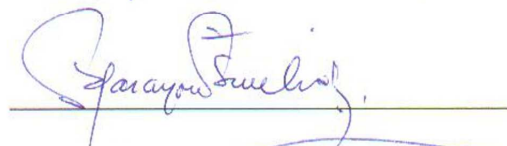
NOME

ASSINATURA

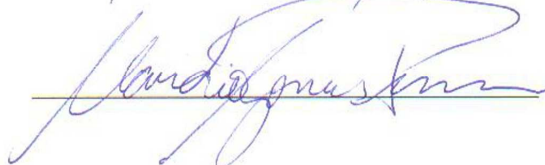
Prof. Dr. Márcio José Horta Dantas
UFU - Universidade Federal de Uberlândia



Prof. Dr. Masayoshi Tsuchida
UNESP - São José do Rio Preto



Prof. Dr. Cláudio Gomes Pessoa
UFU - Universidade Federal de Uberlândia



Uberlândia-MG, 19 de fevereiro de 2010.

Agradecimentos

Agradeço aos colegas de mestrado pelo incentivo e amizade durante o período de trabalho. Agradeço, também, ao meu orientador Márcio José Horta Dantas, pela paciência e basta dizer que sem ele esse trabalho não teria sido concluído.

Agradeço de forma especial a:

Meus pais, que são meus exemplos e sempre me apoiaram em todo o processo do mestrado.

Minha amada esposa, Barbara, que é minha inspiração e minha segurança. Obrigado por não me deixar desistir.

Toda minha família, em especial meus avós, Agoncílio e Maria das Dores, que sempre me motivaram de modo formal ou informal dando importância ímpar ao meu estudo que resultou neste trabalho.

Aos meus amigos, por estarem ao meu lado durante este percurso.

VIEIRA, Marcelo L. *Uma Análise da Dinâmica de um Sistema Autoparamétrico Auto-Excitado do tipo Rayleigh*. 2010. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Nesta dissertação analisamos a dinâmica de um sistema autoparamétrico auto-excitado do tipo Rayleigh. Tal tipo de análise foi realizada em [5]. Mostramos, utilizando o Método da Média e a Teoria da Perturbação Regular, que podemos estabelecer condições sobre os parâmetros do sistema de forma a garantir a estabilidade da solução semi-trivial. Quanto às soluções não-triviais, fizemos estudos dos pontos de equilíbrio do sistema em questão nos planos invariantes $u = 0$ e $\rho = 0$.

Palavras-chave: Sistema Autoparamétrico Auto-excitado, Estabilidade, Bifurcação, Órbita Periódica.

Abstract

In this work is analyzed the dynamical behavior of a Rayleigh type self-excited autoparametric system. Using the Regular Perturbation Theory and the Averaging Method, one can give conditions on the parameters of the system in order to get stability of the semi-trivial solution. Along with this analysis, some bifurcations results are obtained too. Some results about non trivial solutions are obtained from the analysis of the equilibrium points in the invariant manifolds $u = 0$ and $\rho = 0$.

Sumário

Resumo	vi
Abstract	vi
Introdução	1
1 Teoria Clássica das Equações Diferenciais Ordinárias	3
1.1 Resultados de Existência, Estabilidade de Soluções e Diferenciabilidade em relação às Condições Iniciais	3
1.2 Sistemas Lineares Dependentes do Tempo com Coeficientes Periódicos . . .	6
1.3 Estabilidade	7
1.3.1 Estabilidade de Pontos de Equilíbrio	7
1.3.2 Estabilidade de Órbitas Periódicas	14
2 O Método da Média	17
2.1 Formulação Heurística	17
2.2 A Forma Canônica das Equações de Movimento	22
2.3 Média para o Caso Periódico	23
2.4 Soluções Periódicas	32
3 Sistemas Auto-Paramétricos Auto-Excitados	40
3.1 Soluções Semi-Triviais e Estabilidade	41
3.1.1 Equação de Rayleigh: Existência e Estabilidade de Soluções Periódicas	41
3.1.2 Estabilidade Assintótica da Solução Periódica	46
3.1.3 Estudo da Estabilidade da Solução Semi-Trivial	48
3.2 Análise das Soluções Não-Triviais	56
3.3 Ressonância Exata	59
Conclusão	68

Introdução

Nesta dissertação investigamos aspectos da dinâmica de um sistema auto-paramétrico auto-excitado do tipo Rayleigh

$$\begin{cases} \ddot{x} - \beta(1 - \dot{x}^2)\dot{x} + x + \gamma_1 y^2 = 0 \\ \ddot{y} + \kappa\dot{y} + q^2 y + \gamma_2 xy = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Este tipo de sistema tem larga aplicação em mecânica (ver [2]). Para tanto, enunciaremos conceitos e resultados básicos afim de analisar o comportamento de soluções semi-triviais e não triviais estudando a estabilidade e bifurcação de pontos de equilíbrio e órbitas periódicas em termos dos parâmetros que ocorrem em (1).

O primeiro capítulo será destinado ao desenvolvimento da teoria clássica das equações diferenciais ordinárias com o objetivo de construir uma base para o nosso estudo. Enunciaremos teoremas fundamentais sobre existência, unicidade de soluções e diferenciabilidade em relação aos parâmetros e às condições iniciais de soluções para equações diferenciais não necessariamente lineares. Estabeleceremos o conceito de estabilidade e estabilidade assintótica de soluções e hipóteses suficientes para garantir sua ocorrência. Para o caso das soluções periódicas é bom salientar que não trabalharemos com a estabilidade orbital, visto que, a estabilidade no sentido de Liapunov é o bastante para a análise que desejamos realizar. Para um aprofundamento na teoria básica indicamos [1] e [4].

O Método da Média, que é uma técnica utilizada para analisar a estabilidade de equações diferenciais ordinárias, é desenvolvida no segundo capítulo. Tal abordagem foi motivada pelas técnicas de perturbação em equações diferenciais ordinárias bastante utilizadas por pesquisadores do século XVIII na área de Mecânica Celeste. A evolução desta teoria pode ser traçada através de trabalhos sobre mecânica celeste e dinâmica no decorrer dos séculos XIX e XX. Nossa discussão será baseada na formalização teórica que começou com *Poincaré*, porém em um primeiro momento faremos uma motivação heurística do método. Historicamente, uma demonstração da validade assintótica do método da média foi dada por *Fatou* no fim do século XIX, utilizando a iteração de Picard-Lindelöf. Para uma referência mais detalhada da teoria do método da média, o leitor pode consultar [2] e [9]. Tal técnica será utilizada no capítulo 3 no estudo de (1).

No capítulo 3, estudaremos o sistema (1) utilizando a teoria da perturbação regular. Seguindo ABADI[5] estabeleceremos condições para os parâmetros do sistema com o intuito de garantir a estabilidade de algumas soluções periódicas.

Gostaríamos de ressaltar que todas as computações algébricas e numéricas nesta dissertação foram realizadas utilizando o software Maxima 5.13.0, com a inter-

face gráfica wxMaxima 0.7.1. Com exceção das Figuras 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9 e 1.10 e detalhes ortográficos colocados na Figura 3.2, todos os gráficos aqui foram plotados pelo Maxima 5.13.0. Os programas citados são livres e abertos, podendo ser efetuado o download nas seguintes páginas da internet: <http://maxima.sourceforge.net> e <http://wxmaxima.souceforge.net>.

Capítulo 1

Teoria Clássica das Equações Diferenciais Ordinárias

1.1 Resultados de Existência, Estabilidade de Soluções e Diferenciabilidade em relação às Condições Iniciais

Nesta seção queremos enunciar alguns resultados básicos da teoria clássica das equações diferenciais ordinárias, afim de estabelecer uma base teórica para o estudo que será desenvolvido. Os teoremas nesta seção serão enunciados sem demonstração.

Considere $W \subset \mathbb{R}^n$, subconjunto aberto de \mathbb{R}^n e $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial contínuo. Por uma solução da equação diferencial

$$\dot{x} = f(x) \tag{1.1}$$

entendemos uma função diferenciável

$$u : J \longrightarrow W$$

definida em algum intervalo aberto J dos reais, tal que, para todo $t \in J$,

$$\dot{u}(t) = f(u(t)).$$

A seguir, enunciaremos o teorema que garante, sob certas hipóteses, a existência e a unicidade de soluções de (1.1). Uma demonstração para este resultado pode ser encontrada em [1] nas páginas 163 a 167 .

Teorema 1.1 (Teorema da Existência e Unicidade de soluções de (1.1)) *Seja W um subconjunto aberto do espaço vetorial \mathbb{R}^n , $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial lipschitziano e x_0 um ponto de W . Então, existe algum $a > 0$ e uma única solução*

$$x : (-a, a) \longrightarrow W$$

da equação diferencial

$$\dot{x} = f(x)$$

satisfazendo a condição inicial

$$x(0) = x_0.$$

Sob as condições do Teorema 1.1, dadas duas soluções de (1.1), uma consequência imediata é o fato de que o gráfico destas soluções não podem se cruzar. Uma demonstração efetiva deste fato pode ser encontrada em [1] nas páginas 166 e 167, mas de modo não rigoroso podemos dizer que se estas duas soluções, digamos $\lambda(t)$ e $\gamma(t)$, se cruzarem em um ponto $\lambda(t_k) = \gamma(t_k)$, $t_k > 0$ então o teorema (1.1) garante que elas coincidem em uma vizinhança deste ponto. Logo pela unicidade obtemos que $\lambda(t) = \gamma(t)$.

Definição 1.1 *Seja $\bar{x} \in W$ tal que $f(\bar{x}) = 0$. Então \bar{x} é chamado de ponto de **equilíbrio** da equação (1.1). O ponto \bar{x} é também chamado de ponto **estacionário** ou ponto **crítico** da equação (1.1).*

Note que o ponto de equilíbrio \bar{x} de (1.1) permanece fixo com o passar do tempo. Então, podemos considerá-lo como uma órbita degenerada no espaço de fase. Uma observação interessante é o fato de que o ponto de equilíbrio \bar{x} de (1.1) nunca pode ser alcançado por uma órbita em um tempo finito, caso contrário, duas soluções poderiam alcançar \bar{x} e, conseqüentemente, estas duas órbitas se intersectariam, contrariando o Teorema 1.1.

Suponha que exista $\bar{x} \in W$ de modo que $f(\bar{x}) = 0$. Vemos claramente que a função constante $x(t) = \bar{x}$ é uma solução de (1.1). Pelo Teorema 1.1, nenhuma outra curva solução pode passar por \bar{x} .

Definição 1.2 *Seja $x(t)$ uma solução de (1.1). Se existe um número positivo T tal que, para t arbitrário, a igualdade*

$$x(t + T) = x(t)$$

*é válida para todo $t \in \mathbb{R}$, então a solução $x(t)$ é chamada **periódica com período T** e a trajetória descrita por ela é chamada de **trajetória fechada ou ciclo**.*

Segue do Teorema 1.1 que uma solução de (1.1) não pode ter uma auto-interseção, a menos que esta solução seja periódica.

Uma questão natural é quanto a dependência das soluções de (1.1) em relação às suas condições iniciais. O próximo teorema estabelece uma dependência contínua e a diferenciabilidade de uma solução com respeito às suas condições iniciais. Este resultado constitui a base para a Teoria de Perturbação Regular rigorosa. Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada em [4] na página 199.

Teorema 1.2 (Dependência Contínua e Diferenciabilidade das Soluções em Termos das Condições Iniciais) *Seja $f : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $I \subset \mathbb{R}$ e*

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.2}$$

um sistema de equações diferenciais cujo lado direito é definido contínuo, assim como suas derivadas parciais

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_j(t, x) \quad (1.3)$$

em algum domínio $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Se (t_0, x_0) é um ponto arbitrário de B e considere a solução

$$x = \varphi(t)$$

da equação (1.2) tal que $\varphi(t_0) = x_0$ e definida em um intervalo $r_1 \leq t \leq r_2$, então existe um número positivo ρ' tal que para

$$r_1 < t < r_2, \quad |\tau - t_0| < \rho', \quad \|w - x_0\| < \rho',$$

a solução

$$x = \varphi(t, \tau, w)$$

da equação (1.2) com valores iniciais tal que $\varphi(\tau, \tau, w) = w$ é definida contínua nas variáveis t, τ, w e possui derivadas parciais contínuas com respeito às componentes do vetor w , enquanto as derivadas parciais mistas

$$\frac{\partial^2 \varphi^i(t, \tau, w)}{\partial t \partial w^i}$$

são contínuas e independem da ordem de diferenciação.

Como consequência deste resultado, o seguinte teorema pode ser demonstrado.

Teorema 1.3 (Diferenciabilidade da solução com respeito aos Parâmetros) *Assuma que as derivadas parciais*

$$e_k^i(t, x, \mu) = \frac{\partial}{\partial \mu^k} f^i(t, x, \mu), \quad i = 1, \dots, n \quad k = 1, \dots, l \quad (1.4)$$

do lado direito do sistema

$$\dot{x} = f(t, x, \mu) \quad (1.5)$$

existem e são contínuas em um domínio $B \subset \mathbb{R}^{n+l} \times I$. Seja $(t_0, x_0, \mu) \in B$ e

$$x = \phi(t) \quad (1.6)$$

uma solução da equação (1.5) que satisfaz a condição inicial

$$\phi(t_0, \mu) = x_0. \quad (1.7)$$

Se a solução

$$x = \phi(t, \mu_0) \quad (1.8)$$

é definida no intervalo $r_1 \leq t \leq r_2$, então existe um número real positivo ρ tal que para $\|\mu - \mu_0\| < \rho$ a solução (1.6) é definida no intervalo $r_1 < t < r_2$ e possui derivadas parciais contínuas

$$\frac{\partial \phi}{\partial \mu^k}(t, \mu) \quad (1.9)$$

e derivadas parciais mistas

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial \mu^k}(t, \mu) \quad (1.10)$$

também contínuas e independentes da ordem de diferenciação.

O resultado enunciado acima responde a questão natural sobre a dependência das soluções de (1.1) em relação aos parâmetros. Uma demonstração efetiva para este resultado pode ser encontrada em [4] nas páginas 197 e 198.

1.2 Sistemas Lineares Dependentes do Tempo com Coeficientes Periódicos

Seja

$$\dot{x} = A(t)x \quad (1.11)$$

um sistema linear homogêneo com $A(t)$ uma matriz $n \times n$ contínua e T -periódica. Queremos estabelecer alguns conceitos e resultados clássicos com respeito a este sistema.

Definição 1.3 *Seja $\{\varphi_i(t); i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ um conjunto de soluções linearmente independentes de (1.11). Expressando cada $\varphi_i(t)$ como a coluna de uma matriz formamos a **matriz solução fundamental**, tal matriz $[\varphi_1(t) \ \varphi_2(t) \ \dots \ \varphi_n(t)]$ é indicada por $\Phi(t)$. Quando substituirmos t pelo período de $A(t)$, ou seja, fazemos $\Phi(T)$, então esta matriz é chamada de **matriz fundamental**. Se em $t_0 \in I$, I um intervalo da reta, temos que $\Phi(t_0) = Id$, então $\Phi(t)$ é denominada **matriz solução fundamental principal**, ou simplesmente, **matriz solução principal**. Neste caso, denominaremos $\Phi(T)$ de **matriz principal**.*

Pode-se mostrar (ver página 76 de ([2])) que considerando o sistema (1.11), cada matriz fundamental $\Phi(t)$ de (1.11) pode ser escrita como o produto de duas matrizes de ordem n

$$\Phi(t) = P(t)e^{Bt}$$

com $P(t)$ T -periódica e B constante. Além disto, os autovalores de B não dependem da matriz solução fundamental escolhida. Motivados por isto temos a seguinte definição.

Definição 1.4 *Um autovalor λ de multiplicidade k da matriz fundamental é chamado de **coeficiente de Floquet** de multiplicidade k de (1.11).*

A importância dos coeficientes de Floquet está no estudo da estabilidade da solução nula de (1.11).

1.3 Estabilidade

Nosso estudo está centrado na análise qualitativa das soluções de (3.1). Para realizar esta análise utilizamos os conceitos de estabilidade. Nesta seção, iremos introduzir conceitos básicos da teoria da estabilidade de soluções de equações diferenciais ordinárias pertinentes ao estudo que será desenvolvido no Capítulo 3.

1.3.1 Estabilidade de Pontos de Equilíbrio

Queremos fazer um estudo qualitativo dos pontos de equilíbrio. Primeiramente precisamos definir a estabilidade de um ponto de equilíbrio.

Definição 1.5 (Estabilidade no sentido de Liapunov) *Seja $\bar{x} \in W$ um ponto de equilíbrio da equação (1.1) onde $f : W \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação C^1 de um subconjunto aberto $W \subset \mathbb{R}^n$.*

1. \bar{x} é um **equilíbrio estável** se para cada vizinhança de U de \bar{x} em W existe uma vizinhança U_1 de \bar{x} em U tal que cada solução $x(t)$ com $x(0)$ em U_1 está definida para todo $t > 0$, e $x(t) \in U$, para todo t positivo.
2. Se U_2 pode ser escolhido de acordo com o item 1 desta definição e, além disso, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = \bar{x}$. Então \bar{x} é **assintoticamente estável**.
3. Um equilíbrio que não é estável é chamado de **instável**.

Nas Figuras (1.1), (1.2) e (1.3) ilustramos o comportamento de uma solução de (1.1) numa vizinhança adequada de x_0 em cada um dos três casos.

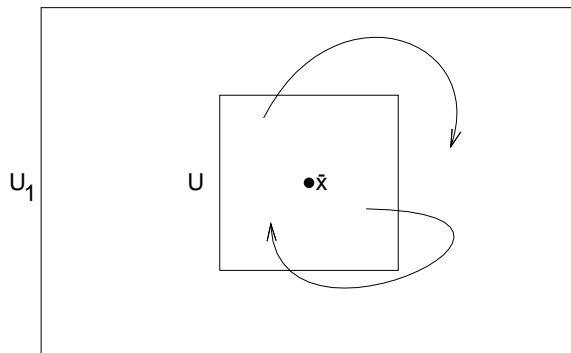


Figura 1.1: Estabilidade

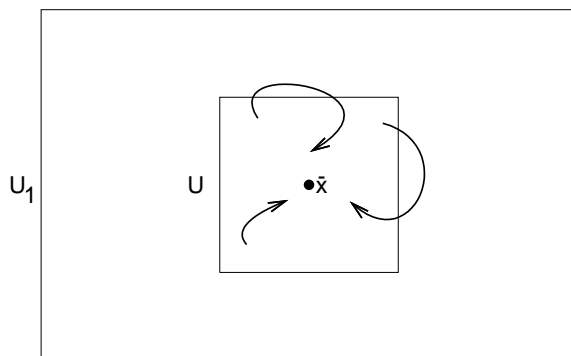


Figura 1.2: Estabilidade Assintótica

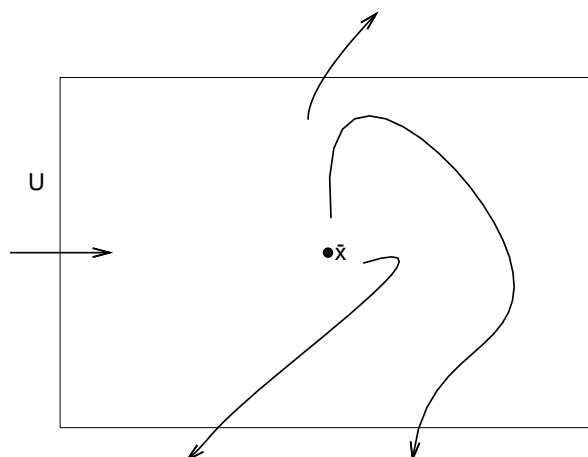


Figura 1.3: Instabilidade

CASO LINEAR

Considere a equação linear

$$\dot{x} = Ax \quad (1.12)$$

sendo A um operador linear no \mathbb{R}^n . Note que $x = 0$ é o ponto de equilíbrio de (1.12). Se todos os autovalores de A tem parte real negativa então 0 é chamado de **atrator**. O próximo teorema, demonstrado em [1] nas páginas 145 e 146, mostra que as trajetórias se aproximam de um atrator exponencialmente.

Teorema 1.4 *Seja A um operador no espaço vetorial \mathbb{R}^n . A origem é um atrator do sistema (1.12) se, e somente se para cada norma euclidiana $|\cdot|$ em \mathbb{R}^n existam constantes $k > 0$ e $b > 0$ tais que*

$$|e^{tA}x| \leq ke^{-tb} |x|.$$

Por outro lado, se cada autovalor de A possui parte real positiva então 0 é chamado de **repulsor**.

Teorema 1.5 *Seja A um operador no espaço vetorial \mathbb{R}^n . A origem é um repulsor do sistema (1.12) se, e somente se para cada norma euclidiana $|\cdot|$ em \mathbb{R}^n existam constantes $k > 0$ e $b > 0$ tais que*

$$|e^{tA}x| \geq ke^{tb} |x|.$$

$\forall t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}^n$.

O Teorema (1.5) nos diz que as trajetórias se distanciam de um repulsor exponencialmente. O teorema (1.5) é demonstrado em [1] na página 150.

Particularmente no caso em que A é uma matriz quadrada de ordem 2 temos a seguinte análise qualitativa do ponto de equilíbrio 0:

1. O operador A possui autovalores reais com sinais opostos. Neste caso 0 é chamado de ponto de sela (ver Figura (1.4)).
2. Todos os autovalores do operador A possuem parte real negativa. Neste caso, é chamado de atrator e , além disso, é assintoticamente estável (veja [1] página 92). Se A é um operador diagonalizável em \mathbb{R}^2 então seus autovalores são reais, que sendo iguais, 0 é chamado de **foco** (ver Figura (1.6)) e sendo diferentes, 0 é chamado de **nó** (ver Figura (1.7)). Se o operador A possui autovalores reais negativos, mas não é diagonalizável, então 0 é um **nó impóprio** (ver Figura (1.8)). Por fim, se os autovalores do operador A são complexos ($a \pm bi$) com $a < 0$ e $b < 0$ então 0 é um atrator cujas trajetórias são espirais (ver Figura (1.5)) tendendo a 0 no sentido horário e se $b > 0$ então as trajetórias serão espirais tendendo a zero no sentido anti-horário.
3. Todos os autovalores do operador A possuem parte real positiva. Neste caso, é chamado de repulsor e , além disso, é instável ([1] página 95). Podemos fazer uma análise dos autovalores similar à feita no item anterior. Os planos de fase serão os mesmos com a diferença de que as trajetórias se afastam de 0.
4. Todos os autovalores do operador A são imaginários puros. Neste caso, 0 é chamado de **centro** (ver Figura (1.9)) e todas as soluções são periódicas com mesmo período.

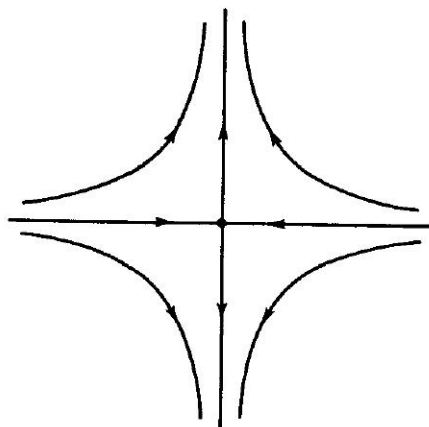


Figura 1.4: Ponto de Sela



Figura 1.5: Atrator Espiral

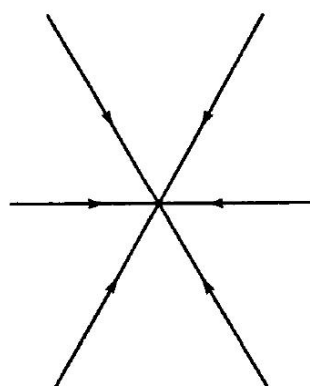


Figura 1.6: Foco

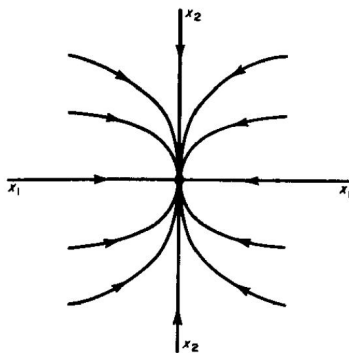


Figura 1.7: Nó Estável

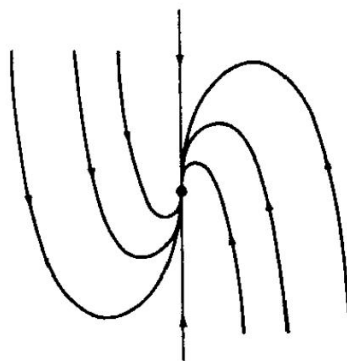


Figura 1.8: Nó Impróprio Estável

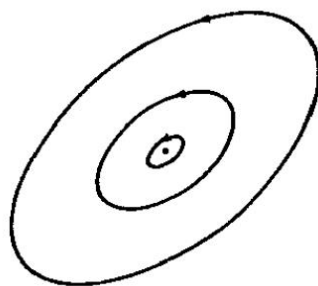


Figura 1.9: Centro

Os autovalores de A nos fornecem uma condição suficiente para a estabilidade assintótica do ponto de equilíbrio $\bar{x} = 0$ de (1.12).

Teorema 1.6 *Se todos os autovalores de (1.12) tem parte real menor que zero então o ponto de equilíbrio $\bar{x} = 0$ é assintoticamente estável.*

CASO NÃO-LINEAR

O teorema a seguir estabelece uma condição para a estabilidade de um ponto de equilíbrio de (1.1). A demonstração deste teorema é encontrada em [1] nas páginas 181 e 182.

Teorema 1.7 *Seja $\bar{x} \in W \subset \mathbb{R}^n$ um ponto de equilíbrio de (1.1). Suponha que cada autovalor de $f'(\bar{x})$ possui parte real menor que $-c$, $c > 0$. Então existe uma vizinhança $U \subset W$ de \bar{x} tal que*

1. $x(t) \in U$ é definido para todo $t > 0$;
2. Existe uma norma euclidiana $\|\cdot\|$ em \mathbb{R}^n tal que

$$\|x(t) - \bar{x}\| \leq e^{-tc} \|x - \bar{x}\|,$$

para $x \in U$.

Em particular, $x(t) \rightarrow \bar{x}$ enquanto $t \rightarrow \infty$ para todo $x \in U$.

Em outras palavras, nas condições do Teorema 1.7 soluções de (1.1) que começam próximas de \bar{x} continuam se aproximando exponencialmente, garantindo a estabilidade assintótica. Obviamente, este teorema generaliza o Teorema 1.6.

Definição 1.6 *Seja \bar{x} um ponto de equilíbrio de (1.1). Se todos os autovalores de $f'(\bar{x})$ possuem parte real negativa, \bar{x} é chamado de **atrator**;*

Teorema 1.8 *Seja $\bar{x} \in W$ um ponto de equilíbrio de (1.1). Suponha que cada autovalor de $f'(\bar{x})$ possui parte real maior que c , $c > 0$. Então para toda vizinhança $U \subset W$ de \bar{x}*

1. existe t_k tal que $x(t_k)$ não está em U ;
2. Para toda norma euclidiana $\|\cdot\|$ em \mathbb{R}^n

$$\|x(t) - \bar{x}\| \geq e^{-tc} \|x - \bar{x}\|$$

$\forall x \in U$ e $t \geq 0$.

O teorema (1.8) garante que sob suas hipóteses soluções que começam próximas de \bar{x} se distanciam de \bar{x} exponencialmente, garantindo a instabilidade de \bar{x} .

Definição 1.7 *Seja \bar{x} um ponto de equilíbrio de (1.1). Se todos os autovalores de $f'(\bar{x})$ possuem parte real positiva, \bar{x} é chamado de **repulsor**;*

1.3.2 Estabilidade de Órbitas Periódicas

Em grande parte do nosso estudo se faz necessário o estudo de estabilidade de órbitas periódicas. Nesta seção, desenvolveremos um estudo básico da estabilidade de soluções periódicas.

Considere o sistema não autônomo

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1.13)$$

satisfazendo as condições do teorema (1.1). Primeiramente vamos definir a estabilidade para uma solução periódica $\phi(t)$, caso esta solução periódica exista.

Definição 1.8 (Estabilidade no Sentido de Liapunov para soluções Periódicas)

Considere a equação (1.13) com a solução periódica $\phi(t)$. A solução periódica é Liapunov-estável se para cada t_0 e $\varepsilon > 0$ podemos encontrar um número positivo $\delta(\varepsilon, t_0)$ tal que

$$\|x_0 - \phi(t_0)\| \leq \delta \Rightarrow \|x(t; t_0, x_0) - \phi(t)\| \leq \varepsilon$$

para $t \geq t_0$, sendo $x(t; t_0, x_0)$ a solução $x(t)$ de (1.13) com $x(t_0) = x_0$.

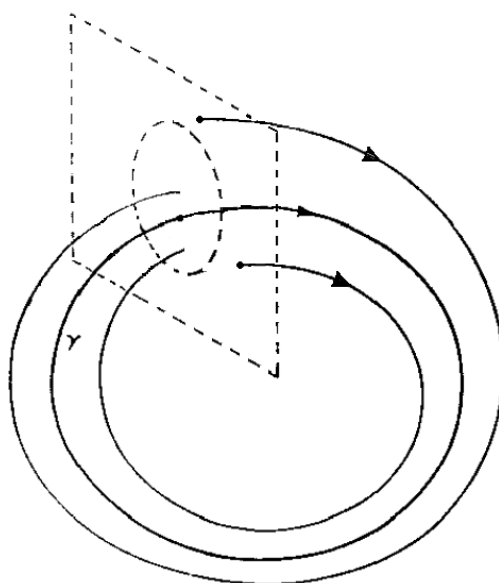


Figura 1.10: Estabilidade no Sentido de Liapunov

Em outras palavras, uma solução periódica $\gamma(t)$ de (1.13) é Liapunov-estável se dada uma órbita com valor inicial suficientemente próximo de algum ponto de $\gamma(t)$, esta órbita continua suficientemente próxima de $\gamma(t)$ (ver Figura (1.10)). No caso de órbitas no plano, temos como consequência do teorema de existência e unicidade de soluções para (1.13) a garantia de que órbitas que iniciam fora da região limitada pela órbita periódica permanecem fora desta região. O mesmo acontecendo com órbitas que iniciam dentro desta região.

Observação 1.1 O conceito de estabilidade no sentido de Liapunov para soluções periódicas implica que os pontos que começam perto uns dos outros permanecem próximos uns dos outros, em uma vizinhança, a cada período da solução periódica. Mas, podem existir soluções periódicas cujas órbitas que iniciam próximas continuam próximas, porém não se enquadram na definição da estabilidade no sentido de Liapunov para soluções periódicas. Estas considerações levaram a uma definição de estabilidade inspirada em idéias geométricas utilizando a aplicação de Poincaré. Esta nova definição de estabilidade chamada de estabilidade orbital é uma generalização da definição de estabilidade no sentido de Liapunov. Para nossos objetivos, a definição da estabilidade no sentido de Liapunov para soluções periódicas é suficiente, sendo assim, não iremos nos aprofundar no conceito da estabilidade orbital que pode ser encontrado em [2] nas páginas 63 a 65.

Com o objetivo de estudar o comportamento das soluções de (1.13) na vizinhança da solução T -periódica $\phi(t)$ considere a equação obtida pela linearização de (1.13) na órbita periódica $\phi(t)$. Temos então

$$\dot{y} = \frac{\partial f}{\partial x}(t, \phi(t)) y \quad (1.14)$$

onde, na forma matricial de (1.14), $\frac{\partial f}{\partial x}(t, \phi(t))$ é uma matriz $B(t)$ com elementos dados por

$$b_{ij}(t) = \frac{\partial f_i(t, \phi(t))}{\partial x_j}.$$

Devemos assumir que o lado direito de (1.13) seja T -periódico com respeito a variável t . Daí, (1.14) tem o lado direito também T -periódico e podemos estudar seus coeficientes de Floquet. Agora enunciaremos alguns resultados que nos auxiliarão no estudo das soluções periódicas de (1.13).

Proposição 1.1 *Se o sistema (1.13) é autônomo e sua solução periódica $\phi(t)$ não é um ponto de equilíbrio, então o sistema (1.14) possui um coeficiente de Floquet igual a 1*

Demonstração: Seja $\Phi(t)$ a matriz que satisfaz a equação matricial

$$\dot{\Phi} = A(t)\Phi \quad (1.15)$$

com a condição inicial $\Phi(t_0) = Id$, onde Id denota a matriz identidade de ordem n e seja C a matriz principal da solução $\Phi(t)$. Pode-se mostrar que

$$\Phi(t + T) = \Phi(t)C \quad (1.16)$$

(ver [4], página 144). Qualquer solução $\phi(t)$ de $\dot{y} = A(t)y$ pode ser escrita na forma

$$\phi(t) = \Phi(t)\phi(t_0).$$

Daí, considerando (1.16) obtemos

$$\phi(t_0 + T) = \Phi(t_0 + T)\phi(t_0) = \Phi(t_0)C\phi(t_0) = C\phi(t_0). \quad (1.17)$$

Lembrando que (1.13) é autônomo e $\varphi(t)$ é sua solução periódica, temos que $\dot{\varphi}(t) = f(\varphi(t))$ e derivando com respeito a t obtemos $\ddot{\varphi}(t) = A(t)\dot{\varphi}(t)$. Ou seja, $\dot{\varphi}(t)$ satisfaz a equação vetorial (1.15). No entanto, $\dot{\varphi}(t)$ é periódica com período T , então de (1.17) obtemos

$$\dot{\varphi}(t_0) = \dot{\varphi}(t_0 + T) = C\dot{\varphi}(t_0). \quad (1.18)$$

Como, por hipótese, $\varphi(t_0)$ não é um ponto de equilíbrio então $\dot{\varphi}(t_0) = f(\varphi(t_0)) \neq 0$. Segue que a matriz C possui um autovalor igual a 1 e conseqüentemente, possui um coeficiente de Floquet igual a 1. \square

Assim, podemos enunciar condições suficientes para a estabilidade de soluções periódicas de (1.13). Existe, ainda, um resultado semelhante para o caso em que (1.13) não é autônomo, mas T -periódico em relação a t , este é conhecido como teorema de Liapunov ([4] página 264) e uma demonstração deste resultado pode ser encontrada nesta mesma referência. O resultado que enunciaremos a seguir é uma derivação do teorema de Liapunov e uma demonstração rigorosa pode ser encontrada também em [4] nas páginas 265 a 272.

Teorema 1.9 (Andronov-Witt) *Seja $\dot{x} = f(x)$ um sistema autônomo e suponha que $\varphi(t)$ é solução periódica de período T a qual não é um ponto de equilíbrio. Se o coeficiente de Floquet do sistema linearizado $\dot{y} = A(t)y$ que é igual a 1 tem multiplicidade 1 e se o valor absoluto de todos os outros coeficientes de Floquet é menor que 1, então a solução $\varphi(t)$ é assintoticamente estável no sentido de Liapunov.*

Capítulo 2

O Método da Média

O método da média é uma técnica para estabelecer resultados qualitativos em relação as soluções de equações diferenciais ordinárias. Esta técnica foi utilizada extensivamente por Lagrange e Laplace em seus estudos sobre mecânica celeste. Grandes matemáticos estudaram método da média com o objetivo de estabelecer uma teoria formal. Matemáticos como *Jacobi* e *Poincaré* estabeleceram os pilares para que formulação rigorosa do Método da Média. A primeira demonstração da validade assintótica do método da média foi dada por *Fatou* na virada do século XIX para o século XX, que utilizou o procedimento de iteração de Picard-Lindelöf. Na extinta União Soviética resultados similares foram obtidos por *Mandelstam* e *Papalexi* já em meados do século XX.

2.1 Formulação Heurística

O método da média foi utilizado intuitivamente por Lagrange e Laplace no estudo das perturbações de orbitas planetárias no sistema solar. Com o passar dos anos os estudiosos usavam o método como algo tão natural que não se incomodavam com a sua formalização. Como técnica computacional o método da média foi formulado no século XVIII. Nesta secção vamos dar uma motivação heurística para o método. Como exemplo vamos considerar a equação

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, \dot{x}) \quad (2.1)$$

onde $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Se $\varepsilon = 0$, as soluções são conhecidas. De fato, por uma computação simples notamos que o conjunto $\text{sen}(t), \text{cos}(t)$ é um conjunto fundamental de soluções, com a matriz solução fundamental

$$\begin{bmatrix} \cos(t) & \text{sen}(t) \\ -\text{sen}(t) & \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Então, neste caso, a solução de $\ddot{x} + x = 0$ é uma combinação linear de $\text{sen}(t)$ e $\text{cos}(t)$. Assim, podemos escrever esta combinação linear como

$$r_0 \cos(t + \psi_0).$$

De fato, como

$$A \operatorname{sen}(t) + B \cos(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \left(\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos(t) + \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \operatorname{sen}(t) \right),$$

tomamos

$$\cos(\psi_0) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \in [-1, 1], \quad \operatorname{sen}(\psi_0) = \frac{-A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \in [-1, 1], \quad e \quad r_0 = \sqrt{A^2 + B^2}$$

obtendo a combinação linear almejada. A amplitude r_0 e a fase ψ_0 são constantes e eles são determinados pelos valores iniciais.

Para estudar a vizinhança das soluções para $\varepsilon \neq 0$, Lagrange introduziu a "variação das constantes". Primeiro assumiu que os parâmetros r e ψ estão em função do tempo. Então assumimos para solução da equação (2.1)

$$x(t) = r(t) \cos(t + \psi(t)) \quad (2.2)$$

$$\dot{x}(t) = -r(t) \operatorname{sen}(t + \psi(t)) \quad (2.3)$$

Substituindo (2.2) e (2.3) na equação (2.1) e obtendo \ddot{x} de (2.3), obtemos

$$-\dot{r}(t) \operatorname{sen}(t + \psi(t)) - r(t) \cos(t + \psi(t)) \dot{\psi} + r(t) \cos(t + \psi(t)) = \varepsilon f(r(t) \cos(t + \psi), -r(t) \operatorname{sen}(t + \psi)) \quad (2.4)$$

Outra condição é que a diferenciação do lado direito da equação (2.2) deve produzir uma expressão igual ao lado direito da equação (2.3). Então encontramos

$$\dot{r}(t) \cos(t + \psi(t)) - [r(t) \operatorname{sen}(t + \psi(t))] (1 + \dot{\psi}(t)) = -r(t) \operatorname{sen}(t + \psi(t)). \quad (2.5)$$

As equações (2.4) e (2.5) podem ser consideradas como duas equações algébricas em \dot{r} e $\dot{\psi}$. Assim, matricialmente

$$\begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(t + \psi) & -r \cos(t + \psi) \\ \cos(t + \psi) & -r \operatorname{sen}(t + \psi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon f(r \cos(t + \psi), -r \operatorname{sen}(t + \psi)) \\ 0 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{r} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\operatorname{sen}(t + \psi) & -r \cos(t + \psi) \\ \cos(t + \psi) & -r \operatorname{sen}(t + \psi) \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon f(r \cos(t + \psi), -r \operatorname{sen}(t + \psi)) \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -\varepsilon \operatorname{sen}(t + \psi) f(r \cos(t + \psi), -r \operatorname{sen}(t + \psi)) \\ \frac{-\varepsilon}{r} \cos(t + \psi) f(r \cos(t + \psi), -r \operatorname{sen}(t + \psi)) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

vemos que suas soluções são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\varepsilon \operatorname{sen}(t + \psi) f(r \cos(t + \psi), -r \operatorname{sen}(t + \psi)) \\ \dot{\psi} &= \frac{-\varepsilon}{r} \cos(t + \psi) f(r \cos(t + \psi), -r \operatorname{sen}(t + \psi)) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Naturalmente, é assumido na mudança de variáveis (2.2) e (2.3) onde $(x, \dot{x}) \longrightarrow (r, \psi)$ que $r \neq 0$.

O sistema de equações diferenciais (2.6) é dado com condições iniciais para o instante $t = 0$, determinado por meio de (2.2) e (2.3)

$$x(0) = r(0) \cos(\psi(0))$$

$$\dot{x}(0) = -r(0) \text{sen}(\psi(0)).$$

Indicaremos por $g(t, r, \psi)$, $h(t, r, \psi)$ as funções do lado direito de (2.6). Portanto, (2.6) reescreve-se como

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \varepsilon g(t, r, \psi) \\ \dot{\psi} &= \varepsilon h(t, r, \psi) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Observe que g e h são funções de classe C^∞ , nas variáveis t, r e ψ e tem período igual a 2π na variável t . Então segue de [8], que g e h tem expansões de Fourier que convergem uniformemente. A expansão de g é dada por

$$g(t) = \frac{1}{2}a_0(r, \psi) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(r, \psi) \cos(nt) + b_n(r, \psi) \text{sen}(nt)]$$

onde

$$a_n(r, \psi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t, r, \psi) \cos(nt) dt$$

e

$$b_n(r, \psi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(t, r, \psi) \text{sen}(nt) dt.$$

Resultado análogo é válido para h . Neste caso, indicaremos os coeficientes de Fourier por $c_n(r, \psi)$ e $d_n(r, \psi)$, assim

$$c_n(r, \psi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(t, r, \psi) \cos(nt) dt$$

e

$$d_n(r, \psi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} h(t, r, \psi) \text{sen}(nt) dt.$$

Substituindo as expansões de Fourier em (2.7) obtemos

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon \left[\frac{1}{2}a_0(r, \psi) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n(r, \psi) \cos(nt) + b_n(r, \psi) \text{sen}(nt)) \right] \\ \dot{\psi} = \varepsilon \left[\frac{1}{2}c_0(r, \psi) + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n(r, \psi) \cos(nt) + d_n(r, \psi) \text{sen}(nt)) \right] \end{cases} \quad (2.8)$$

Pela Identidade de Parseval (ver [8] página 84) temos que, para r e ψ fixos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} d_n^2 = 0.$$

Considerando isto, é plausível admitir que as soluções de

$$\begin{cases} \dot{r} = \varepsilon \left[\frac{1}{2} a_0(r, \psi) \right], \\ \dot{\psi} = \varepsilon \left[\frac{1}{2} c_0(r, \psi) \right], \end{cases} \quad (2.9)$$

estão "próximas" das soluções de (2.8), desde que tenhamos a mesma condição inicial (r_0, ψ_0) . Notemos que

$$\frac{1}{2} a_0(r, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t, r, \psi) dt \quad (2.10)$$

e

$$\frac{1}{2} c_0(r, \psi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(t, r, \psi) dt. \quad (2.11)$$

Motivados por (2.10) e (2.11) temos a seguinte definição

Definição 2.1 *Seja $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação periódica com período T na variável t , ou seja, $f(x, t + T) = f(x, t)$. Desta forma, podemos definir sua **média** como*

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x, t) dt.$$

Para ilustrar o processo vamos considerar o seguinte exemplo

Exemplo 2.1 (Oscilador com Amortecimento) A fim de exemplificar o raciocínio de Lagrange considere a equação

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(-\dot{x} + x^2). \quad (2.12)$$

Utilizando as equações (2.6) temos que

$$\dot{r} = -\varepsilon \operatorname{sen}(t + \psi) [r(t) \operatorname{sen}(t + \psi) + r^2(t) \cos^2(t + \psi)]$$

$$\dot{\psi} = -\frac{\varepsilon}{r} \cos(t + \psi) [r(t) \operatorname{sen}(t + \psi) + r^2(t) \cos^2(t + \psi)]$$

O lado direito é 2π -periódico em t . Calculando a média do lado direito das equações

acima sobre t e mantendo r e ψ fixos obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\varepsilon \operatorname{sen}(t + \psi) [r(t) \operatorname{sen}(t + \psi) + r(t) \cos^2(t)] dt \\
&= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\varepsilon \operatorname{sen}^2(t + \psi) dt + \frac{r^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\varepsilon \operatorname{sen}(t + \psi) \cos^2(t + \psi) dt = \\
&= -\frac{r\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(t + \psi) dt - \frac{r^2\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(t + \psi) \cos^2(t + \psi) dt = \\
&= -\frac{r\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1 - \cos(2(t + \psi))}{2} \right] dt - \frac{r^2\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(t + \psi) \left[\frac{1 + \cos(2(t + \psi))}{2} \right] dt = \\
&= -\frac{r\varepsilon}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1 - \cos(2(t + \psi))}{2} \right] dt - \frac{r^2\varepsilon}{2\pi} \left[\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}(t + \psi)}{2} dt + \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}(t + \psi) \cos(2(t + \psi))}{2} dt \right] = \\
&= -\frac{r\varepsilon}{2\pi} \left[\frac{(t + \psi)}{2} - \frac{\operatorname{sen}^2(t + \psi)}{4} \right]_0^{2\pi} - \frac{r^2\varepsilon}{2\pi} \left[-\frac{\cos(t + \psi)}{2} + \frac{1}{4} \left(-\frac{\cos(3(t + \psi))}{3} - \cos(t + \psi) \right) \right]_0^{2\pi} = \\
&= -\frac{1}{2}\varepsilon r.
\end{aligned}$$

e, para a segunda equação

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\frac{\varepsilon}{r} \cos(t + \psi) [r(t) \operatorname{sen}(t + \psi) + r^2(t) \cos^2(t + \psi)] dt = \\
&= \frac{-\varepsilon}{2\pi r} \left[\int_0^{2\pi} r \cos(t + \psi) \operatorname{sen}(t + \psi) dt + \int_0^{2\pi} r^2 \cos^3(t + \psi) dt \right] = \\
&= \frac{-\varepsilon}{2\pi r} \left\{ \left[r \frac{\operatorname{sen}^2(t + \psi)}{2} \right]_0^{2\pi} + r^2 \left[\int_0^{2\pi} \frac{3}{4} \cos(t + \psi) dt + \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \cos(3(t + \psi)) dt \right] \right\} = \\
&= 0 - \frac{r\varepsilon}{2\pi} \left[\frac{3}{4} \operatorname{sen}(t + \psi) + \frac{1}{4} \frac{\operatorname{sen}(3(t + \psi))}{3} \right]_0^{2\pi} = 0,
\end{aligned}$$

ou seja, calculando a média temos que $\dot{r} = -\frac{1}{2}\varepsilon r$ e $\dot{\psi} = 0$. Indicando r_a e ψ_a como as aproximações de r e ψ pela média temos que

$$\dot{r}_a = -\frac{1}{2}\varepsilon r \quad e \quad \dot{\psi}_a(t) = 0 \quad (2.13)$$

Agora, as equações (2.13) possuem uma solução de fácil computação e obtemos

$$r_a(t) = r(0)e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t} \quad e \quad \psi_a(t) = \psi(0). \quad (2.14)$$

Para aproximação da solução $x(t)$, do sistema (2.12), temos então usando (2.14) e (2.2) que

$$x_a(t) = r(0)e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t} \cos(t + \psi(0)) \quad (2.15)$$

Uma questão natural que será respondida precisamente na próxima seção é se (2.15) é uma "boa aproximação" de $x(t)$.

2.2 A Forma Canônica das Equações de Movimento

Na demonstração da validade assintótica das aproximações realizadas anteriormente, geralmente é utilizado um sistema de variação lenta como as equações (2.6). Aqui mostramos como obter tais equações pelo método da variação dos parâmetros. Considere problema de valor inicial

$$\dot{x} = A(t)x + \varepsilon g(t, x), \quad x(0) = x_0 \quad (2.16)$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ e $A(t)$ como uma aplicação linear $n \times n$ contínua e $g(t, x)$ uma função suficientemente suave de t e x . A equação sem perturbação ($\varepsilon = 0$) é linear e possui soluções linearmente independentes que são usadas para compor a matriz fundamental de $\dot{x} = A(t)x$ que denotaremos por $\Phi(t)$. Seja $x = \Phi(t)y$. Usando esta mudança de variável em (2.16), obtemos

$$\dot{\Phi}(t)y + \Phi(t)\dot{y} = A(t)\Phi(t)y + \varepsilon g(t, \Phi(t)y)$$

e como $\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t)$ temos

$$\Phi(t)\dot{y} = \varepsilon g(t, \Phi(t)y).$$

Portanto,

$$\dot{y} = \varepsilon \Phi(t)^{-1} g(t, \Phi(t)y). \quad (2.17)$$

O valor inicial é dado por $y(0) = \Phi(0)^{-1}x_0$.

De maneira mais geral a forma canônica é dada por

$$\dot{y} = \varepsilon f(t, y).$$

Observação 2.1

1. A equação não perturbada no caso da equação (2.16) é linear (de fato, se $\varepsilon = 0$, então $\dot{x} = A(t)x$); Isto facilita o procedimento da variação dos parâmetros.
2. Se a equação não perturbada é não-linear a variação dos parâmetros ainda se aplica. Na prática, existem muitas obstruções técnicas quanto a execução do procedimento.

Exemplo 2.2 Considere a equação

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon g(t, x, \dot{x}). \quad (2.18)$$

com constante $\omega > 0$. Primeiramente, vamos utilizar as transformações (2.2) e (2.3),

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t) \cos(\omega t + \psi(t)) \\ \dot{x}(t) &= -r(t) \operatorname{sen}(\omega t + \psi(t)). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Utilizando as fórmulas (2.6)

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\frac{\varepsilon}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t + \psi) g(t, r \cos(\omega t + \psi), -r \operatorname{sen}(\omega t + \psi)) \\ \dot{\psi} &= \frac{-\varepsilon}{\omega r} \cos(\omega t + \psi) g(t, r \cos(\omega t + \psi), -r \operatorname{sen}(\omega t + \psi)) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Outra possibilidade é usar a transformação

$$\begin{aligned} x(t) &= y_1(t) \cos(\omega t) + \frac{y_2(t)}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t) \\ \dot{x}(t) &= -\omega y_1(t) \operatorname{sen}(\omega t) + y_2(t) \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (2.21)$$

encontramos as equações

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\frac{\varepsilon}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t) g(t, y_1(t) \cos(\omega t) + \frac{y_2(t)}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t), -\omega y_1(t) \operatorname{sen}(\omega t) + y_2(t) \cos(\omega t)) \\ \dot{y}_2 &= \varepsilon \cos(\omega t) g(t, y_1(t) \cos(\omega t) + \frac{y_2(t)}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t), -\omega y_1(t) \operatorname{sen}(\omega t) + y_2(t) \cos(\omega t)) \end{aligned} \quad (2.22)$$

A equação (2.18) pode ser tratada com a forma canônica (2.20) ou a forma canônica (2.22). Portanto, o lado direito $\varepsilon g(t, x, \dot{x})$ em sua forma explícita é determinado com a escolha da melhor forma canônica para o caso estudado.

2.3 Média para o Caso Periódico

Deveremos considerar a validade assintótica do método da média. Considere o problema de valor inicial

$$\dot{x} = \varepsilon f(t, x) + \varepsilon^2 g(t, x, \varepsilon), \quad x(0) = x_0 \quad (\varepsilon > 0). \quad (2.23)$$

Considere agora o problema de valor inicial para a equação em média

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y), \quad y(0) = x_0. \quad (2.24)$$

Antes de prosseguir com o próximo resultado uma definição preliminar se faz necessária

Definição 2.2 (Escala de Tempo) Considere a função vetorial $f(t, x, \varepsilon)$, $t \geq 0$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, e funções $\delta_1(\varepsilon)$ e $\delta_2(\varepsilon)$;

1. Diz-se que $f(t, x, \varepsilon) = O(\delta_1(\varepsilon))$ na escala de tempo $1/\delta_2(\varepsilon)$ enquanto $\varepsilon \rightarrow 0$ se existem $\varepsilon_0 > 0$, $M > 0$ tais que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{f(t, x, \varepsilon)}{\delta_1(\varepsilon)} \right\| \leq M$$

para todo $x \in D$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $0 \leq t \leq \frac{1}{\delta_2(\varepsilon)}$.

2. Diz-se que $f(t, x, \varepsilon) = o(\delta_1(\varepsilon))$ na escala de tempo $1/\delta_2(\varepsilon)$ enquanto $\varepsilon \rightarrow 0$ se existem $\varepsilon_0 > 0$ tais que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\| \frac{f(t, x, \varepsilon)}{\delta_1(\varepsilon)} \right\| = 0$$

para todo $x \in D$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $0 \leq t \leq \frac{1}{\delta_2(\varepsilon)}$.

O próximo resultado mostra como a função vetorial $y(t)$ representa uma aproximação de $x(t)$.

Teorema 2.1 *Considere os problemas de valor inicial (2.23) e (2.24) com $x, y, x_0 \in D \subset \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$. Suponha que*

1. *As funções vetoriais f , g e $\frac{\partial f}{\partial x}$ são definidas, contínuas e limitadas por uma constante M (independente de ε) em $[0, \infty) \times D$;*
2. *g é lipschitz em x .*
3. *$f(t, x)$ é T -periódica em t com média $f^0(x)$; T é uma constante independente de ε ;*
4. *$y(t) \in D$, para todo $t \geq 0$.*

Então, temos $x(t) - y(t) = O(\varepsilon)$ em uma escala de tempo $1/\varepsilon$.

Para a demonstração efetiva do teorema 2.1 necessitamos de três resultados auxiliares. Dois deles serão enunciados sem prova, sendo um deles a Regra de Leibnitz que garante a derivação sob o sinal da integral, desde que o integrando resultante seja uma função contínua.

Lema 2.1 *Considere o problema de valor inicial*

$$\dot{x} = \sum_{i=0}^m \varepsilon^i f_i(t, x) + \varepsilon^{m+1} R(t, x, \varepsilon)$$

com $x(t_0) = \rho$ e $|t - t_0| \leq h$, $x \in D \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Assuma que neste domínio temos

1. *$f_i(t, x)$, $i = 1, 2, 3, \dots, m$, contínua em t e em x e $(m + 1 - i)$ -vezes diferenciável em x ;*
2. *$R(t, x, \varepsilon)$ contínua em t e em x e lipschitziana em x .*

Substituindo x na equação pela expansão

$$\sum_{i=0}^m \varepsilon^i x_i(t)$$

calculando os coeficientes correspondentes e aplicando os valores iniciais $x_0(t_0) = \rho$, $x_i(t_0) = 0$, $i = 1, 2, 3, \dots, m$ produzimos uma aproximação de $x(t)$

$$\left\| x(t) - \sum_{i=0}^m \varepsilon^i x_i(t) \right\| = O(\varepsilon^{m+1})$$

na escala de tempo 1.

Demonstração: Ver [2], páginas 117 e 118. \square

Lema 2.2 [Regra de Leibnitz](Derivação sob o sinal da integral). Dado $U \subset \mathbb{R}^n$, aberto, seja $f : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com as seguintes propriedades:

1. Para todo $x \in U$, a função $t \mapsto f(x, t)$ é integrável em $a \leq t \leq b$.
2. a i -ésima derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t)$ existe para cada $(x, t) \in U \times [a, b]$ e a função $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, assim definida é contínua.

Então a função $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\phi(x) = \int_a^b f(x, t) dt$, possui i -ésima derivada parcial em cada ponto $x \in U$, sendo

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, t) dt.$$

Demonstração: Ver [3] páginas 145 e 146. \square

O próximo lema elementar será frequentemente utilizado.

Lema 2.3 Se $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, limitada, tem período igual a T e

$$\int_0^T h(s) ds = 0, \tag{2.25}$$

então a função

$$w(t) = \int_0^t h(s) ds \tag{2.26}$$

é contínua e periódica de período igual a T .

Demonstração: Como h é limitada, é imediato que w é lipschitziana e portanto, é contínua. Temos que

$$w(t+T) = \int_0^{T+t} h(s)ds,$$

logo $\dot{w}(T+t) = h(T+t) = h(t) = \dot{w}(t)$. Consequentemente, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $w(T+t) = w(t) + k$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\int_0^{T+t} h(s)ds = \int_0^t h(s)ds + k. \quad (2.27)$$

Fazendo $t = 0$ em (2.27) e usando (2.3) temos que $k = 0$. Portanto, $w(T+t) = w(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Assim, w é T -periódica. \square

Demonstração do Teorema 2.1: Considere o problema de valor inicial (2.23) e a média

$$f^0(x) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t, x)dt.$$

Do Teorema 1.1 garantimos a existência e a unicidade das soluções dos problemas de valor inicial (2.23) e (2.24).

Seja

$$u(t, x) = \int_0^t [f(s, x) - f^0(x)] ds. \quad (2.28)$$

Da definição de f^0 , segue que

$$\int_0^T [f(s, x) - f^0(x)] ds = 0. \quad (2.29)$$

Segue do Lema 2.3 que u é contínua e tem período igual a T . Então temos que

$$\begin{aligned} \sup_{x \in D, t \geq 0} \|u(t, x)\| &= \sup_{x \in D, 0 \leq t \leq T} \|u(t, x)\| = \sup_{x \in D, 0 \leq t \leq T} \left\| \int_0^t [f(s, x) - f^0(x)] ds \right\| \leq \\ &\leq \sup_{x \in D, 0 \leq t \leq T} \int_0^t \|f(s, x) - f^0(x)\| ds \leq \sup_{x \in D, 0 \leq t \leq T} \left[\int_0^t \|f(s, x)\| ds + \int_0^t \|f^0(x)\| ds \right] \leq \\ &\leq \sup_{x \in D} \left[\int_0^T \|f(s, x)\| ds + \int_0^T \|f^0(x)\| ds \right] \leq 2MT. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u(t, x)\| \leq 2MT. \quad (2.30)$$

Além disso, usando o Lema 2.2 temos que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial x}(s, x) - \left(\frac{\partial f^0}{\partial x} \right)(x) \right) ds.$$

Como $\frac{\partial u}{\partial x}(t, x)$ é também, T -periódica na variável t e usando o mesmo argumento anterior, obtemos

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right| \leq 2MT, \quad t \geq 0 \quad e \quad x \in D. \quad (2.31)$$

Agora, introduza a "transformação próxima-da-identidade"

$$x(t) = z(t) + \varepsilon u(t, z(t)). \quad (2.32)$$

Diferenciando (2.32) temos

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{dz}{dt}(t) + \varepsilon \left[\frac{\partial u}{\partial t}(t, z) + \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \cdot \frac{dz}{dt}(t) \right],$$

ou seja,

$$\dot{x} = \dot{z} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}(t, z) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \dot{z}. \quad (2.33)$$

Substituindo (2.32) em (2.23) obtemos

$$\dot{z} + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}(t, z) + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \dot{z} = \varepsilon f(t, z + \varepsilon u(t, z)) + \varepsilon^2 g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon),$$

portanto

$$\begin{aligned} \left(Id + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \right) \dot{z} &= \varepsilon f(t, z + \varepsilon u(t, z)) + \varepsilon^2 g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon) - \varepsilon \frac{\partial u}{\partial t}(t, z) \\ &= \varepsilon f(t, z + \varepsilon u(t, z)) + \varepsilon^2 g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon) - \varepsilon (f(t, z) - f^0(z)) \\ &= \varepsilon f^0(z) + R(t, z, \varepsilon) \end{aligned}$$

onde

$$R(t, z, \varepsilon) = \varepsilon [f(t, z + \varepsilon u(t, z)) - f(t, z)] + \varepsilon^2 g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon). \quad (2.34)$$

Segue de (2.31) que $\frac{\partial u}{\partial z}(t, z)$ é limitada por $K = 2MT$, assim $\left(Id + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \right)$ é limitada e inversível para todo ε adequadamente pequeno. De fato, caso contrário, existiria um vetor v com norma igual a 1 tal que $\left(Id + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \right) \cdot v = 0$, e daí, $1 = \|v\| = \left\| \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \cdot v \right\| \leq \varepsilon \left\| \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \right\| \leq \varepsilon 2MT < 1$ se $0 < \varepsilon < 1/2MT$, que é uma contradição. Portanto, a matriz $\left[Id + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \right]$ é inversível e sua inversa é dada por

$$\left[Id + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \right]^{-1} = Id - \left[\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \right] + \left[\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \right]^2 + \dots$$

$$= Id - \left[\varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \right] + O(\varepsilon^2), \quad t \geq 0, z \in D. \quad (2.35)$$

Consequentemente,

$$\dot{z} = \left[Id + \varepsilon \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) \right]^{-1} [\varepsilon f^0(z) + R(t, z, \varepsilon)] \quad (2.36)$$

Como f é lipschitz e usando (2.30) temos

$$\|f(t, z + \varepsilon u(t, z)) - f(t, z)\| \leq L \|\varepsilon u(t, z)\| \leq 2L\varepsilon MT$$

sendo L a constante de lipschitz. Como consequência da limitação de g temos que R é, também, limitada por uma constante C , independente de ε , pois

$$\begin{aligned} \|R(t, z, \varepsilon)\| &\leq \|\varepsilon f(t, z + \varepsilon u(t, z)) - \varepsilon f(t, z)\| + \|\varepsilon^2 g(t, z + \varepsilon u(t, z), \varepsilon)\| \leq \varepsilon^2 LMT2 + \varepsilon^2 M = \\ &= \varepsilon^2 \underbrace{M(2TL + 1)}_C \end{aligned}$$

logo,

$$\|R(t, z, \varepsilon)\| \leq \varepsilon^2 C, \quad \forall t \geq 0, z \in D \quad (2.37)$$

De (2.36), (2.37) e (2.35) encontramos para z a equação

$$\dot{z} = \varepsilon f^0(z) - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) f^0(z) + O(\varepsilon^3) + R(t, z, \varepsilon) \quad z(0) = x(0) \quad (2.38)$$

De (2.37) temos que $R(t, x, \varepsilon) = O(\varepsilon^2)$. Logo, existe uma aplicação R^* tal que

$$R(t, z, \varepsilon) = \varepsilon^2 R^*(t, z, \varepsilon) \quad (2.39)$$

e, assim,

$$\dot{z} = \varepsilon f^0(z) + \varepsilon^2 R^*(t, z, \varepsilon) - \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) f^0(z) + O(\varepsilon^3)$$

ou

$$\dot{z} = \varepsilon f^0(z) + \varepsilon^2 \left[R^*(t, z, \varepsilon) - \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) f^0(z) \right] + O(\varepsilon^3).$$

Fazendo $f_1(t, z, \varepsilon) = R^*(t, z, \varepsilon) - \frac{\partial u}{\partial z}(t, z) f^0(z)$ temos que

$$\dot{z} = \varepsilon f^0(z) + \varepsilon^2 f_1(t, z, \varepsilon) + O(\varepsilon^3).$$

Substituindo t por τ/ε obtemos

$$\dot{z}(\tau/\varepsilon) = \varepsilon f^0(z(\tau/\varepsilon)) + \varepsilon^2 f_1(\tau/\varepsilon, z(\tau/\varepsilon), \varepsilon) + O(\varepsilon^3).$$

Seja $w(\tau) = z(\tau/\varepsilon)$, portanto, $\dot{z}(\tau/\varepsilon) = \varepsilon \dot{w}(\tau)$ e, assim

$$\varepsilon \dot{w}(\tau) = \varepsilon f^0(w(\tau)) + \varepsilon^2 f_1(\tau/\varepsilon, w(\tau), \varepsilon) + O(\varepsilon^3),$$

ou seja,

$$\dot{w}(\tau) = f^0(w(\tau)) + O(\varepsilon) \quad e \quad w_0(\varepsilon t) = z_0(t). \quad (2.40)$$

Obtemos, assim, o problema

$$\frac{dw_0}{d\tau} = f^0(w_0), \quad w_0(0) = z_0(0).$$

Pelo Lema 2.1 e por (2.40) produzimos uma aproximação que depende de ε , $w(t, \varepsilon)$ tal que $\|w(\tau, \varepsilon) - w_0(\tau)\| = O(\varepsilon)$ na escala de tempo 1. Ou seja, existem $\varepsilon_0 > 0$, $M > 0$ e $N > 0$ tais que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|w(\tau, \varepsilon) - w_0(\tau)\|}{\varepsilon} \leq M \quad \text{para} \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad e \quad 0 \leq \tau \leq N.$$

Consequentemente, como $w(\varepsilon t, \varepsilon) = z(t, \varepsilon)$ temos que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\|z(t, \varepsilon) - z_0(t)\|}{\varepsilon} \leq M \quad \text{para} \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0 \quad e \quad 0 \leq t \leq \frac{N}{\varepsilon}.$$

Ou seja, produzimos uma aproximação $z(t, \varepsilon)$ tal que $\|z(t, \varepsilon) - z_0(t)\| = O(\varepsilon)$ na escala de tempo $1/\varepsilon$ em t . Por fim, usando (2.32) obtemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|x(t, \varepsilon) - z(t, \varepsilon)\| = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varepsilon u(t, z(t, \varepsilon))\| = 0, \quad \forall x \in D \quad e \quad t \geq 0$$

podemos afirmar que $z(t, \varepsilon)$ é uma aproximação de $x(t, \varepsilon)$. □

Vamos considerar alguns exemplos pertinentes.

Exemplo 2.3 Considere a equação autônoma

$$\ddot{x} + x = \varepsilon f(x, \dot{x})$$

que é um caso particular do Exemplo 2.2. De (2.22), temos que o cálculo da média do lado direito das equações é dada por

$$\begin{aligned} f_1(r, \psi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{sen}(t + \psi) f(r \cos(t + \psi), -r \text{sen}(t + \psi)) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\psi}^{2\pi + \psi} \text{sen}(s) f(r \cos(s), -r \text{sen}(s)) ds \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \text{sen}(s) f(r \cos(s), -r \text{sen}(s)) ds \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned} f_2(r, \psi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t + \psi) f(r \cos(t + \psi), -r \text{sen}(t + \psi)) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\psi}^{2\pi + \psi} \cos(s) f(r \cos(s), -r \text{sen}(s)) ds \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(s) f(r(\cos(s)), -r\text{sen}(s)) ds \quad (2.42)$$

Observemos que $f_1(r, \psi)$ e $f_2(r, \psi)$ não dependem de ψ .

Assim, aproximações assintóticas r_a e ψ_a de r e ψ podem ser encontradas como soluções de

$$\begin{cases} \dot{r}_a = -\varepsilon f_1(r_a), & r_a(0) = r(0) \\ \dot{\psi}_a = -\frac{\varepsilon}{r_a} f_2(r_a), & \psi_a(0) = \psi(0) \end{cases} \quad (2.43)$$

Como ψ_a não está presente no lado direito, o número de equações diferenciais a serem efetivamente resolvidas é reduzido a 1.

Consideraremos a equação de Van der Pol

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(1 - x^2)\dot{x}.$$

Pelas transformações (2.2) e (2.3) encontramos

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \varepsilon r \text{sen}^2(t + \psi) - \varepsilon r^3 \cos^2(t + \psi) \text{sen}^2(t + \psi) \\ \dot{\psi} &= \varepsilon \cos(t + \psi) \text{sen}(t + \psi) - \varepsilon r^2 \cos^3(t + \psi) \text{sen}(t + \psi) \end{aligned}$$

Fazendo $s = t + \psi$ temos

$$\begin{aligned} f_1(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [r \text{sen}^2(t + \psi) - r^3 \cos^2(t + \psi) \text{sen}^2(t + \psi)] dt = \\ &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2(t + \psi)) \right) dt + \frac{r^3}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(t + \psi) \text{sen}^2(t + \psi) dt = \\ &= \frac{r}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \right] - r^3 \left[\frac{1}{8} \right] \\ &= \frac{1}{2} r \left(1 - \frac{r^2}{4} \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_2(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos(t + \psi) \text{sen}(t + \psi) - r^2 \cos^3(t + \psi) \text{sen}(t + \psi)) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(t + \psi) \text{sen}(t + \psi) dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \cos^3(t + \psi) \text{sen}(t + \psi) dt = \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \left(\frac{3}{4} \cos(t + \psi) + \frac{1}{4} \cos(3(t + \psi)) \right) \text{sen}(t + \psi) dt = \\ &= -r^2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{3}{4} \cos(t + \psi) \text{sen}(t + \psi) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \cos(3(t + \psi)) \text{sen}(t + \psi) dt \right) = 0 \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{cases} \dot{r}_a = -\varepsilon f_1(r_a) = -\frac{1}{2}\varepsilon r_a \left(1 - \frac{1}{4}r_a^2\right) \\ \dot{\psi}_a = -\frac{\varepsilon}{r_a} f_2(r_a) = 0 \end{cases} \quad (2.44)$$

Tomando $r(0) = 2$ temos $r_a(t) = 2$, $t \geq 0$. De fato, $r_a(t) = 2$ é o ponto crítico da equação 2.44. Tomando $r(0) = 2$ e $\psi(0) = 0$, temos pelo método da média que $x_a(t) = r(0) \cos(t + \psi(0)) = 2 \cos(t)$ e pelo teorema anterior

$$x(t) = x_a(t) + O(\varepsilon).$$

Vamos resolver (2.44), por separação de variáveis. Temos

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\varepsilon}{8} (4r - r^3).$$

Daí,

$$\int_0^t \frac{dr}{(4r - r^3)} = \int_0^t \frac{\varepsilon}{8} dt.$$

Pelas técnicas de integração temos que

$$\int_0^t \frac{\partial r}{(4r - r^3)} = \int_0^t \left(\frac{1}{4r} - \frac{1}{8(r-2)} - \frac{1}{8(r+2)} \right) dr = \frac{1}{8} \ln \left(\frac{r^2 (r^2(0) - 4)}{r^2(0) (r^2 - 4)} \right).$$

Assim,

$$\frac{1}{8} \ln \left(\frac{r^2 (r^2(0) - 4)}{r^2(0) (r^2 - 4)} \right) = \frac{1}{8} \varepsilon t.$$

Donde encontramos

$$r_a(t) = \frac{r(0)e^{\frac{1}{2}\varepsilon t}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}r_0^2 [e^{\varepsilon t} - 1]}}, \quad \psi_a(t) = \psi(0).$$

Como $x_a(t) = r_a(t) \cos(t + \psi_a(t))$, quando t cresce, as soluções aproximam da solução periódica. Observemos que se $r(0) = 2$, temos $r_0(t) = 2$, que é a solução de equilíbrio encontrada anteriormente.

Exemplo 2.4 Considere a equação de Mathieu

$$\ddot{x} + (1 + 2\varepsilon \cos(2t))x = 0 \quad (2.45)$$

com valores iniciais $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$. A equação (2.45) modela osciladores lineares em engenharia os quais estão sujeitos a modulações de frequência. Este é um tipo de equação em que é mais conveniente utilizar a transformação (2.21). Daí,

$$\begin{aligned} x(t) &= y_1(t) \cos(t) + y_2(t) \text{sen}(t) \\ \dot{x}(t) &= -y_1(t) \text{sen}(t) + y_2(t) \cos(t) \end{aligned} \quad (2.46)$$

o que nos leva a

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= 2\varepsilon \operatorname{sen}(t) \cos(2t) (y_1 \cos(t) + y_2 \operatorname{sen}(t)), & y_1(0) &= x_0 \\ \dot{y}_2 &= -2\varepsilon \cos(t) \cos(2t) (y_1 \cos(t) + y_2 \operatorname{sen}(t)), & y_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

O lado direito é 2π -periódico em t . Nós encontramos para as equações médias

$$\begin{aligned} \dot{y}_{1a} &= \frac{-1}{2}\varepsilon y_{2a} \\ \dot{y}_{2a} &= \frac{-1}{2}\varepsilon y_{1a} \end{aligned} \tag{2.47}$$

Impondo valores iniciais, podemos reescrever as equações acima da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_{1a} \\ y_{2a} \end{bmatrix}$$

onde percebemos que os autovalores de $\begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{bmatrix}$, $\lambda_1 = -\varepsilon$ e $\lambda_2 = \varepsilon$, possuem sinais

opostos. Assim, a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ dos autovetores relacionados aos autovalores de $\begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon \\ -\varepsilon & 0 \end{bmatrix}$ nos mostram que a solução geral do sistema 2.47 é

$$\begin{bmatrix} y_{1a} \\ y_{2a} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t} \\ x_0 e^{\frac{1}{2}\varepsilon t} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_0 e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t} + x_0 e^{\frac{1}{2}\varepsilon t} \\ x_0 e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t} - x_0 e^{\frac{1}{2}\varepsilon t} \end{bmatrix}$$

Assim,

$$\begin{aligned} y_{1a} &= \frac{1}{2}x_0 e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t} + \frac{1}{2}x_0 e^{\frac{1}{2}\varepsilon t} \\ y_{2a} &= \frac{1}{2}x_0 e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t} - \frac{1}{2}x_0 e^{\frac{1}{2}\varepsilon t} \end{aligned}$$

Substituindo na transformação 2.46 obtemos:

$$\begin{aligned} x_a(t) &= \frac{1}{2} \left[x_0 e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t} + x_0 e^{\frac{1}{2}\varepsilon t} \right] \cos(t) + \frac{1}{2} \left[x_0 e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t} - x_0 e^{\frac{1}{2}\varepsilon t} \right] \operatorname{sen}(t) = \\ &= \frac{1}{2}x_0 e^{-\frac{1}{2}\varepsilon t} [\cos(t) + \operatorname{sen}(t)] + \frac{1}{2}x_0 e^{\frac{1}{2}\varepsilon t} [\cos(t) - \operatorname{sen}(t)]. \end{aligned}$$

E pelo Teorema 2.1 $x_a(t)$ é uma aproximação de $x(t)$ na escala de tempo $1/\varepsilon$.

2.4 Soluções Periódicas

Considere a equação (2.23). Além disso, assumimos que ambos $f(t, x)$ e $g(t, x, \varepsilon)$ são T -periódicos em t . Separadamente consideraremos em D a equação da média

$$\dot{y} = \varepsilon f^0(y) \tag{2.48}$$

Sob certas condições, soluções de equilíbrio da equação da média virão a corresponder com as soluções T -periódicas da equação 2.23 no sentido do teorema abaixo.

Teorema 2.2 *Considere a equação (2.23) e suponha que*

1. *As funções vetoriais f , g , $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial g}{\partial x}$ são definidas, contínuas e limitadas por uma constante M independente de ε em $[0, \infty) \times D$, $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$;*
2. *g e f são T -periódicas em t (T independente de ε).*

Se p é um ponto crítico da equação da média (2.48) considerando

$$\det \left(\frac{\partial f^0(y)}{\partial y} \right) \Big|_{y=p} \neq 0 \quad (2.49)$$

então existe uma solução T -periódica $\phi(t, \varepsilon)$ da equação (2.23) a qual está perto de p tal que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi(t, \varepsilon) = p$$

Demonstração: Usando os mesmos argumentos utilizados na demonstração do Teorema 2.1, obtemos (2.37) e (2.34), e usando a fórmula de Taylor em (2.34), temos

$$\dot{z} = \varepsilon f^0(z) + \varepsilon^2 R(t, z, \varepsilon) \quad (2.50)$$

onde

$$R(t, z, \varepsilon) = \frac{\partial f}{\partial z}(t, z)u(t, z) - \frac{\partial u}{\partial z}(t, z)f^0(z) + g(t, z, 0) + O(\varepsilon)$$

Pelo Lema 2.3 segue que $u(t, z)$ tem período T e de (2.37), (2.34), (2.39) e das hipóteses sobre f e g obtemos que R é T -periódica na variável t . Note que

$$\dot{z} = \varepsilon f^0(z) + \varepsilon^2 R^*(t, z, \varepsilon)$$

ou

$$\int_0^t \dot{z} ds = \varepsilon \int_0^t f^0(z) ds + \varepsilon^2 \int_0^t R^*(s, z, \varepsilon) ds$$

ou

$$z(t) - z(0) = \varepsilon \int_0^t f^0(z) ds + \varepsilon^2 \int_0^t R^*(s, z, \varepsilon) ds$$

Então, a equação (2.50) é equivalente à equação integral

$$z(t) = z(0) + \varepsilon \int_0^t f^0(z(s)) ds + \varepsilon^2 \int_0^t R^*(s, z(s), \varepsilon) ds. \quad (2.51)$$

Se (2.50) tem solução de período T temos $z(0) = z(T)$, logo de (2.51) obtemos que se $\varepsilon \neq 0$ então

$$0 = \varepsilon \int_0^T f^0(z(s)) ds + \varepsilon^2 \int_0^T R^*(s, z(s), \varepsilon) ds. \quad (2.52)$$

Notemos que (2.52) é uma condição necessária para a existência de órbitas periódicas. Motivados por isto, vamos considerar a seguinte construção. Pode-se mostrar (não faremos este detalhe aqui) que existe $\varepsilon_1 > 0$ e uma vizinhança U de p tal que se $w \in U$ e $|\varepsilon| < \varepsilon_1$, então a solução de (2.50) com condição inicial $z(0) = w$ está definida em um intervalo aberto que contém o intervalo $[0, T]$. Assim, a função

$$h(w, \varepsilon) = \int_0^T f^0(z(s))ds + \varepsilon \int_0^T R^*(s, z(s), \varepsilon)ds$$

com $w \in U$ e $|\varepsilon| < \varepsilon_1$ é bem definido. Temos que $z(s) = Z(s, w, \varepsilon)$. Pelo Teorema 1.2 temos que Z é diferenciável em relação às variáveis w, ε e $Z(0, w, \varepsilon) = w$. Queremos mostrar que se existem ε_0 e w_0 de modo que $h(w_0, \varepsilon_0) = 0$, então a solução do sistema

$$\begin{cases} \dot{z} = \varepsilon_0 f^0(z) + \varepsilon_0^2 R^*(t, z, \varepsilon_0) \\ z(0) = w_0 \end{cases}$$

é periódica com período T . De fato, sabemos que

$$\int_0^t \dot{z}(s)ds = \int_0^t \varepsilon_0 f^0(z(s))ds + \int_0^t \varepsilon_0^2 R^*(s, z(s), \varepsilon_0)ds$$

ou seja,

$$\begin{aligned} z(t) &= z(0) + \varepsilon_0 \int_0^t f^0(z(s))ds + \int_0^t \varepsilon_0^2 R^*(s, z(s), \varepsilon_0)ds \\ &= w_0 + \varepsilon_0 \int_0^t f^0(z(s))ds + \int_0^t \varepsilon_0^2 R^*(s, z(s), \varepsilon_0)ds \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} z(T+t) &= w_0 + \varepsilon_0 \int_0^{t+T} f^0(z(s))ds + \int_0^{t+T} \varepsilon_0^2 R^*(s, z(s), \varepsilon_0)ds \\ &= w_0 + \varepsilon_0 \int_0^T f^0(z(s))ds + \int_0^T \varepsilon_0^2 R^*(s, z(s), \varepsilon_0)ds + \varepsilon_0 \int_T^{t+T} f^0(z(s))ds + \\ &\quad + \varepsilon_0^2 \int_T^{t+T} R^*(s, z(s), \varepsilon_0)ds \\ &= w_0 + \varepsilon_0 h(w_0, \varepsilon_0) + \varepsilon_0 \int_T^{t+T} f^0(z(s))ds + \varepsilon_0^2 \int_T^{t+T} R^*(s, z(s), \varepsilon_0)ds \\ &= w_0 + \varepsilon_0 \int_T^{t+T} f^0(z(s))ds + \varepsilon_0^2 \int_T^{t+T} R^*(s, z(s), \varepsilon_0)ds \end{aligned}$$

Seja $\phi(t) = z(t+T)$, então

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= \varepsilon_0 f^0(z(t+T)) + \varepsilon_0^2 R^*(t+T, z(t+T), \varepsilon_0) \\ &= \varepsilon_0 f^0(\phi(t)) + \varepsilon_0^2 R^*(t+T, \phi(t), \varepsilon_0) \end{aligned}$$

Da T -periodicidade de R^* segue que

$$\dot{\phi}(t) = \varepsilon_0 f^0(\phi(t)) + \varepsilon^2 R^*(t, \phi(t), \varepsilon_0)$$

e, ainda

$$\phi(0) = z(0 + T) = w_0 + \varepsilon_0 \int_T^T f^0(z(s))ds + \int_T^T \varepsilon^2 R^*(s, z(s), \varepsilon_0)ds = w_0.$$

Portanto $z(t)$ e $\phi(t) = z(t + T)$ solucionam o mesmo problema com valor inicial w_0 , portanto $z(t) = z(t + T)$, ou seja, z é T -periódica. O problema reduz-se a achar soluções (w_0, ε_0) , $\varepsilon_0 > 0$, da equação $h = 0$.

Da definição de h e de p temos

$$h(p, 0) = \int_0^T f^0(p)ds = 0.$$

Temos que

$$\frac{\partial h}{\partial w}(w, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial w} \int_0^T f^0(Z(s, w, \varepsilon))ds + \frac{\partial}{\partial w} \int_0^T R^*(s, Z(s, w, \varepsilon), \varepsilon)ds.$$

Segue da regra de Leibniz que

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial w}(w, \varepsilon) &= \int_0^T \frac{\partial}{\partial w} f^0(Z(s, w, \varepsilon))ds + \varepsilon \int_0^T \frac{\partial}{\partial w} R^*(s, Z(s, w, \varepsilon), \varepsilon)ds \\ &= \int_0^T (f^0)'(Z(s, w, \varepsilon)) \frac{\partial Z}{\partial w}(s, w, \varepsilon)ds + \varepsilon \int_0^T \frac{\partial h}{\partial w} R^*(s, Z(s, w, \varepsilon), \varepsilon)ds. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial w}(p, 0) &= \int_0^T (f^0)'(Z(s, p, 0)) \frac{\partial Z}{\partial w}(s, p, 0)ds \\ &= \int_0^T (f^0)'(p) \frac{\partial Z}{\partial w}(s, p, 0)ds. \end{aligned}$$

Na dedução anterior foi utilizado o fato de $Z(s, p, 0) = p$. Como $Z(s, w, \varepsilon) = w$, temos $\frac{\partial Z}{\partial w}(s, w, \varepsilon) = Id$, ou seja,

$$\frac{\partial h}{\partial w}(p, 0) = \int_0^T (f^0)'(p)ds = (f^0)'(p)T$$

que é inversível por hipótese. Segue, então, do Teorema da Função Implícita que existe $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon_1$ e $g : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \rightarrow U$, diferenciável tal que $h(g(\varepsilon), \varepsilon) = 0$, $\forall \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ e

$g(0) = p$. Portanto, do argumento anterior, segue que existe uma solução T -periódica de (2.50), que denotaremos por $\psi(t, \varepsilon)$, e tal que $\psi(0, \varepsilon) = g(\varepsilon)$. De (2.51) temos

$$\psi(t, \varepsilon) = g(\varepsilon) + \varepsilon \int_0^t f^0(\psi(s, \varepsilon)) ds + \varepsilon^2 \int_0^t R^*(s, \psi(s, \varepsilon), \varepsilon) ds.$$

Da continuidade de g segue que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \psi(t, \varepsilon) = p. \quad (2.53)$$

Da equação (2.32) segue que a solução T -periódica de (2.48) é dada por

$$\phi(t, \varepsilon) = \psi(t, \varepsilon) + \varepsilon u(t, \psi(t, \varepsilon)). \quad (2.54)$$

De (2.55) e (2.54) segue que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \phi(t, \varepsilon) = p, \quad (2.55)$$

como queríamos provar. \square

Com o teorema anterior, podemos garantir a existência de soluções periódicas para a equação (2.23) em uma vizinhança de $x = p$. Agora, estabeleceremos a estabilidade da seguinte forma

Teorema 2.3 *Considere a equação (2.23) e suponha que as condições do teorema anterior sejam satisfeitas. Se os autovalores do ponto crítico $y = p$ da equação da média (2.48) possuem parte real negativa, a solução correspondente $\phi(t, \varepsilon)$ de (2.23) é assintoticamente estável para ε suficientemente pequeno. Se ao menos um dos autovalores possui parte real positiva, então $\phi(t, \varepsilon)$ é instável.*

Demonstração: Ver [2] páginas 141 e 142. \square

A seguir, daremos um exemplo afim de ilustrar a aplicação dos teoremas (2.2) e (2.3).

Equações diferenciais não-lineares com termos dependentes do tempo, não-homogêneas, com termo de excitação externa modelam importantes sistemas mecânicos. Vamos considerar um exemplo deste caso, a equação de Duffing forçada.

Exemplo 2.5 (Equação de Duffing forçada) Considere a equação de Duffing forçada e amortecida

$$\ddot{x}(t) + \varepsilon \mu \dot{x}(t) + x(t) - \varepsilon x(t)^3 = \varepsilon h \cos(wt) \quad (2.56)$$

com constante $\mu \geq 0$ e $h > 0$. Note que para $w \rightarrow 1$ o período da força $h \cos(wt)$ se aproxima de 2π . Desta forma, se colocarmos

$$w^{-2} = 1 - \varepsilon \beta, \quad (2.57)$$

sendo β uma constante independente de ε , observamos que quando $\varepsilon \rightarrow 0$ o período da força se aproxima de 2π . Ao assumir (2.57) na verdade temos que a frequência de excitação depende de ε .

Assumindo $s = wt$, obtemos $t = s/w$ e a equação (2.56) fica

$$\ddot{x}\left(\frac{s}{w}\right) + \varepsilon\mu\dot{x}\left(\frac{s}{w}\right) + x\left(\frac{s}{w}\right) - \varepsilon\left[x\left(\frac{s}{w}\right)\right]^3 = \varepsilon h \cos(s). \quad (2.58)$$

Agora, fazendo $y(s) = x\left(\frac{s}{w}\right)$ e observando que

$$\begin{aligned} \frac{dy}{ds}(s) &= \frac{\dot{x}\left(\frac{s}{w}\right)}{w} \Rightarrow w\dot{y}(s) = \dot{x}\left(\frac{s}{w}\right) \\ \frac{d^2y}{ds^2}(s) &= \frac{\ddot{x}\left(\frac{s}{w}\right)}{w^2} \Rightarrow w^2\ddot{y}(s) = \ddot{x}\left(\frac{s}{w}\right) \end{aligned}$$

a equação (2.58) fica

$$\ddot{y}(s)w^2 + y(s) = \varepsilon\left[-\mu w\dot{y}(s) + y^3(s) + h \cos(s)\right] \quad (2.59)$$

que de (2.57) se torna

$$\ddot{y}(s) + y(s)(1 - \varepsilon\beta) = \varepsilon\left[-\mu(1 - \varepsilon\beta)^{1/2}\dot{y}(s) + (1 - \varepsilon\beta)y^3(s) + (1 - \varepsilon\beta)h \cos(s)\right], \quad (2.60)$$

ou seja,

$$\ddot{y}(s) + y(s) = \varepsilon\left[-\mu(1 - \varepsilon\beta)^{1/2}\dot{y}(s) + y^3(s)(1 - \varepsilon\beta) + (1 - \varepsilon\beta)h \cos(s) + \beta y(s)\right] \quad (2.61)$$

Agora, utilizando a mudança de variável (2.19) e (2.20) encontramos para a variável r

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\varepsilon\text{sen}(s + \psi)\left[\mu(1 - \varepsilon\beta)^{1/2}r\text{sen}(s + \psi) + r^3 \cos^3(s + \psi)(1 - \varepsilon\beta)\right] - \\ &\quad -\varepsilon\text{sen}(s + \psi)\left[(1 - \varepsilon\beta)h \cos(s) + \beta r \cos(s + \psi)\right] \\ &= -\varepsilon\text{sen}(s + \psi)\left[\mu(1 - \varepsilon\beta)^{1/2}r\text{sen}(s + \psi) + r^3 \cos^3(s + \psi) - \varepsilon\beta r^3 \cos^3(s + \psi)\right] - \\ &\quad -\varepsilon\text{sen}(s + \psi)\left[h \cos(s) - \varepsilon\beta \cos(s) + \beta r \cos(s + \psi)\right]. \end{aligned}$$

Lembrando que

$$\sqrt{1 - \varepsilon\beta} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon\beta - \frac{1}{8}(\varepsilon\beta)^2 - \dots$$

para ε adequadamente pequeno, temos

$$\begin{aligned} \dot{r} &= -\varepsilon\text{sen}(s + \psi)\left[-\mu\left(1 - \frac{1}{2}\varepsilon\beta - \frac{1}{8}(\varepsilon\beta)^2 - \dots\right)r\text{sen}(s + \psi) + r^3 \cos^3(s + \psi)\right] - \\ &\quad -\varepsilon\text{sen}(s + \psi)\left[-\varepsilon\beta r^3 \cos^3(s + \psi) + h \cos(s) - \varepsilon\beta \cos(s) + \beta r \cos(s + \psi)\right] \\ &= -\varepsilon\text{sen}(s + \psi)\left[\mu r\text{sen}(s + \psi) + r^3 \cos^3(s + \psi) + h \cos(s) + \beta r \cos(s + \psi)\right] + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Analogamente, encontramos para ψ

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= -\frac{\varepsilon}{r} \cos(s + \psi)\left[\mu r\text{sen}(s + \psi) + r^3 \cos^3(s + \psi) + h \cos(s) + \beta r \cos(s + \psi)\right] + O(\varepsilon^2) \\ &= -\varepsilon \cos(s + \psi)\left[\mu \text{sen}(s + \psi) + r^2 \cos^3(s + \psi) + \frac{h}{r} \cos(s) + \beta \cos(s + \psi)\right] + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Então, ficamos com o sistema

$$\begin{cases} \dot{r} &= -\varepsilon \operatorname{sen}(s + \psi) [\mu r \operatorname{sen}(s + \psi) + r^3 \cos^3(s + \psi) + h \cos(s) + \beta r \cos(s + \psi)] + O(\varepsilon^2) \\ \dot{\psi} &= -\varepsilon \cos(s + \psi) [\mu \operatorname{sen}(s + \psi) + r^2 \cos^3(s + \psi) + \frac{h}{r} \cos(s) + \beta \cos(s + \psi)] + O(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (2.62)$$

Note que o lado direito de (2.62) é 2π -periódico em s e assim podemos aplicar o método da média que nos leva a

$$\begin{cases} \frac{dr_a}{ds} &= \varepsilon \left(-\frac{1}{2}\mu r_a - \frac{1}{2}h \operatorname{sen}(\psi_a) \right) \\ \frac{d\psi_a}{ds} &= \varepsilon \left(-\frac{1}{2}\beta - \frac{3}{8}r_a^2 - \frac{1}{2}\frac{h}{r_a} \cos(\psi_a) \right) \end{cases} \quad (2.63)$$

Os pontos críticos da equação média (2.63) satisfazem

$$\mu r_a = -h \operatorname{sen}(\psi_a), \quad e \quad \beta + \frac{3}{4}r_a^2 = -\frac{h}{r_a} \cos(\psi_a). \quad (2.64)$$

De (2.63) e utilizando notação do teorema (2.2)

$$Jf^0(r_a, \psi_a) = \varepsilon \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\mu & -\frac{1}{2}h \cos(\psi_a) \\ -\frac{3}{4}r_a + \frac{1}{2}\frac{h}{r_a} \cos(\psi_a) & \frac{h}{r_a^2} \operatorname{sen}(\psi_a) \end{bmatrix}. \quad (2.65)$$

Seja (r_m, ψ_m) um ponto crítico de (2.63). Daí, pela condição (2.64)

$$Jf^0(r_m, \psi_m) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}\varepsilon\mu & -\frac{1}{2}\varepsilon \left[\beta r_a + \frac{3}{4}r_a^3 \right] \\ -\frac{9}{8}\varepsilon r_a + \frac{1}{2}\frac{1}{r_a}\varepsilon\beta & -\frac{1}{2}\varepsilon\mu \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

que possui determinante nulo se

$$\mu^2 + \beta^2 = -3\beta r^2 - \frac{27}{16}r^4.$$

Note que o lado direito e o lado esquerdo da igualdade possuem sinais contrários. Logo, o determinante de (2.66) é não-nulo. Neste caso podemos garantir a existência de soluções periódicas de (2.61). Neste caso, os autovalores de (2.66) são

$$\lambda = -\frac{1}{2}\varepsilon\mu \pm \frac{1}{2}\varepsilon \left[-\left(\beta + \frac{9}{4}r_a^2 \right) \left(\beta + \frac{3}{4}r_a^2 \right) \right]^{1/2}$$

que possuem parte real negativa se $\mu > 0$ e $\beta \geq 0$, garantindo a estabilidade assintótica da solução periódica.

Observação 2.2 Considere a equação de Van der Pol

$$\ddot{x} + x = \varepsilon [1 - x^2] \dot{x} \quad (2.67)$$

Pelas transformações (2.2) e (2.3) encontramos

$$\begin{aligned} \dot{r} &= \varepsilon^2 r^2 \operatorname{sen}^2(t + \psi) - \varepsilon r^3 \cos^2(t + \psi) \operatorname{sen}^2(t + \psi) \\ \dot{\psi} &= \frac{\varepsilon}{r} \cos(t + \psi) \operatorname{sen}(t + \psi) - \varepsilon r^2 \cos^3(t + \psi) \operatorname{sen}(t + \psi) \end{aligned}$$

Fazendo $s = t + \psi$ temos

$$\begin{aligned} f_1(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2(t + \psi) - r^2 \cos^2(t + \psi) \operatorname{sen}^2(t + \psi) dt = \\ &= \frac{r}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2(t + \psi)) \right) dt + \frac{r^3}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(t + \psi) \operatorname{sen}^2(t + \psi) dt = \\ &= \frac{r}{2\pi} \left[\frac{1}{2} \right] - r^3 \left[\frac{1}{8} \right] \\ &= \frac{1}{2} r \left(1 - \frac{r^2}{4} \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_2(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r} \cos(t + \psi) \operatorname{sen}(t + \psi) - r^2 \cos^3(t + \psi) \operatorname{sen}(t + \psi) \right) dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \cos(t + \psi) \operatorname{sen}(t + \psi) dt - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \cos^3(t + \psi) \operatorname{sen}(t + \psi) dt = \\ &= 0 - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r^2 \left(\frac{3}{4} \cos(t + \psi) + \frac{1}{4} \cos(3(t + \psi)) \right) \operatorname{sen}(t + \psi) dt = \\ &= -r^2 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{3}{4} \cos(t + \psi) \operatorname{sen}(t + \psi) dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} \cos(3(t + \psi)) \operatorname{sen}(t + \psi) dt \right) = 0. \end{aligned}$$

Note que, neste caso não poderemos aplicar os Teoremas (2.2) e (2.3). Para fazer uso destes resultados utilizaremos um argumento que será apresentado posteriormente para o estudo da equação de Rayleigh. Pode-se mostrar, com o uso do Método da Média, que a equação de Van der Pol tem órbita periódica assintoticamente estável. Como já indicamos na Observação 1.1, nosso interesse é a estabilidade assintótica no sentido de Liapunov

Capítulo 3

Sistemas Auto-Paramétricos Auto-Excitados

Um sistema auto-paramétrico é um sistema formado por pelo menos dois sistemas. Um deles é o sistema primário, que em geral está em um estado vibratório e pode ter mais de um grau de liberdade. Os outros subsistemas são denominados sistemas secundários. Os sistemas secundários são acoplados ao sistema primário de forma não-linear, mas de forma que os sistemas secundários possam estar em repouso enquanto o sistema primário está vibrando. Denominamos este tipo de movimento de solução semi-trivial.

Um sistema auto-paramétrico auto-excitado é um tipo de sistema auto-paramétrico com um oscilador auto-excitado em estado de vibração. Daremos atenção ao sistema auto-paramétrico auto-excitado do tipo Rayleigh na forma não-dimensional

$$\begin{cases} \ddot{x} - \beta(1 - \dot{x}^2)\dot{x} + x + \gamma_1 y^2 = 0 \\ \ddot{y} + \kappa \dot{y} + q^2 y + \gamma_2 x y = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $\beta > 0$, é o coeficiente de auto-excitação, $\kappa > 0$ é o coeficiente de amortecimento do sistema excitado, γ_1 e γ_2 são coeficientes de acoplamento não-linear e q é o coeficiente de sintonia expressando a proporção de frequências naturais dos sub-sistemas linearizados sem amortecimento, onde a frequência do modo- x é normalizado para 1. Neste exemplo, (x, \dot{x}) denota as coordenadas do sistema primário no espaço de fase e (y, \dot{y}) as coordenadas do sistema secundário. Também podemos observar que se $y = 0$, então (3.1) reduz-se a um oscilador auto-excitado de tipo Rayleigh.

No sistema (3.1) a primeira equação refere-se ao movimento do oscilador enquanto a segunda representa o subsistema excitado. Vamos assumir que os parâmetros são pequenos e a fim de aplicar o método da média redimensionaremos os parâmetros fazendo

$$\beta = \varepsilon \bar{\beta}, \quad \kappa = \varepsilon \bar{\kappa}, \quad \gamma_1 = \varepsilon \bar{\gamma}_1, \quad \gamma_2 = \varepsilon \bar{\gamma}_2 \quad (3.2)$$

e afim de analisar qualitativamente o sistema numa vizinhança do parâmetro $q = \frac{1}{2}$

tomamos

$$q^2 = \frac{1}{4} + \varepsilon\sigma. \quad (3.3)$$

Substituindo os parâmetros (3.2) e (3.3) em (3.1) e desconsiderando as barras obtemos

$$\begin{cases} \ddot{x} + x = \varepsilon(\beta(1 - \dot{x}^2)\dot{x} - \gamma_1 y^2), \\ \ddot{y} + \frac{1}{4}y = -\varepsilon(\kappa\dot{y} + \sigma y + \gamma_2 xy). \end{cases} \quad (3.4)$$

Nosso objetivo é estudar a existência e o comportamento de soluções periódicas para o sistema (3.4) e também o que acontece nas vizinhanças (estabilidade e bifurcação) destas soluções.

3.1 Soluções Semi-Triviais e Estabilidade

Notemos que se $x_0(t)$ é uma solução periódica de

$$\ddot{x} + x = \varepsilon\beta(1 - \dot{x}^2)\dot{x}, \quad (3.5)$$

então $(x_0(t), 0)$ é também uma solução de (3.4). Particularmente se $x_0(t)$ é periódica então (3.4) terá uma solução do tipo indicado anteriormente. A equação (3.5) é denominada de equação Rayleigh. Vamos reescrever (3.4) como um sistema de primeira ordem. Temos então

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{u} = -x + \varepsilon(\beta(1 - u^2)u - \gamma_1 y^2), \\ \dot{y} = v, \\ \dot{v} = -\varepsilon(\kappa v + \sigma y + \gamma_2 xy). \end{cases} \quad (3.6)$$

No caso periódico, a órbita $(x_0(t), 0)$ é a *solução semi-trivial*.

Uma questão natural é a da estabilidade da solução semi-trivial $(x_0(t), 0)$ em (3.6). A solução semi-trivial pode ser instável em alguns intervalos de q . Nos intervalos de instabilidade ou próximos a ele temos a chamada ressonância auto-paramétrica. Inicialmente vamos investigar a existência e estabilidade de soluções periódicas de (3.5).

3.1.1 Equação de Rayleigh: Existência e Estabilidade de Soluções Periódicas

Nesta seção utilizaremos as idéias desenvolvidas de uma maneira geral em [6] para obter resultados sobre existência e estabilidade das órbitas periódicas de (3.5). Para um estudo rigoroso da existência e estabilidade de soluções periódicas de (3.5) usaremos a Teoria de Perturbação Regular.

Sejam U um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n , I, J intervalos abertos de \mathbb{R} sendo que $0 \in J$. Além disso $X : U \times I \times J \rightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo vetorial de classe C^r , $r \geq 1$. Consideremos a equação diferencial $\dot{x}(t) = X(x(t), t, \varepsilon)$. Temos, pelo Teorema 1.2,

que o fluxo $\varphi(t, x_0, \varepsilon)$ desta equação é uma aplicação diferenciável de classe C^r em um aberto adequado de \mathbb{R}^{n+2} . Podemos então usar a fórmula de Taylor em φ . Assim se $t \in [0, L]$, $L < \infty$, $x_0 \in \mathcal{K}$ sendo que \mathcal{K} é um compacto de \mathbb{R}^n , então

$$\varphi(t, x_0, \varepsilon) = \varphi_0(t, x_0) + \varphi_1(t, x_0)\varepsilon + \dots + \varphi_l(t, x_0)\varepsilon^l + O(\varepsilon^{l+1}), \quad (3.7)$$

sendo que $1 \leq l \leq r$. A expansão (3.7) é denominada de **expansão regular do fluxo** φ e será usada freqüentemente na computação de aproximações de φ .

Primeiramente vamos reescrever (3.5) como um sistema na forma canônica. Façamos $u = \dot{x}$ então (3.5) escreve-se como

$$\begin{cases} \dot{x} = u, \\ \dot{u} = -x + \varepsilon\beta(1 - u^2)u. \end{cases} \quad (3.8)$$

Consideremos, agora, a seguinte mudança de variáveis:

$$x = R \cos(\psi), \quad u = -R \operatorname{sen}(\psi). \quad (3.9)$$

Substituindo (3.9) em (3.8) obtemos o sistema

$$\begin{cases} \dot{R} \cos(\psi) - R \operatorname{sen}(\psi) \dot{\psi} = -R \operatorname{sen}(\psi) \\ -\dot{R} \operatorname{sen}(\psi) - R \cos(\psi) \dot{\psi} = -R \cos(\psi) - \varepsilon\beta(1 - (R \operatorname{sen}(\psi))^2) R \operatorname{sen}(\psi), \end{cases} \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{R} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos(\psi) & -R \operatorname{sen}(\psi) \\ -\operatorname{sen}(\psi) & -R \cos(\psi) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -R \operatorname{sen}(\psi) \\ -R \cos(\psi) - \varepsilon\beta(1 - R^2 \operatorname{sen}^2(\psi)) R \operatorname{sen}(\psi) \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{R} \begin{bmatrix} -R \cos(\psi) & R \operatorname{sen}(\psi) \\ \operatorname{sen}(\psi) & \cos(\psi) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -R \operatorname{sen}(\psi) \\ -R \cos(\psi) - \varepsilon\beta(1 - R^2 \operatorname{sen}^2(\psi)) R \operatorname{sen}(\psi) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \beta \varepsilon \operatorname{sen}^2(\psi) R - \beta \varepsilon \operatorname{sen}^4(\psi) R^3 \\ 1 - \beta \varepsilon \cos(\psi) \operatorname{sen}^3(\psi) R^2 + \beta \varepsilon \cos(\psi) \operatorname{sen}(\psi) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} \dot{R} = \beta \varepsilon \operatorname{sen}^2(\psi) R - \beta \varepsilon \operatorname{sen}^4(\psi) R^3 \\ \dot{\psi} = 1 - \beta \varepsilon \cos(\psi) \operatorname{sen}^3(\psi) R^2 + \beta \varepsilon \cos(\psi) \operatorname{sen}(\psi). \end{cases} \quad (3.11)$$

Note que para ε pequeno

$$\dot{\psi} = 1 - \beta \varepsilon \cos(\psi) \operatorname{sen}^3(\psi) R^2 + \beta \varepsilon \cos(\psi) \operatorname{sen}(\psi) \neq 0,$$

assim, quando $\varepsilon \rightarrow 0$ então $\dot{\psi} \rightarrow 1$. Daí, o teorema da função inversa garante a inversão da função $\psi(t)$, ou seja, podemos escrever t em função de ψ . Assim, obtemos

$$\frac{dR}{d\psi} = \frac{\beta \varepsilon \sin^2(\psi) R - \beta \varepsilon \sin^4(\psi) R^3}{1 - \beta \varepsilon \cos(\psi) \sin^3(\psi) R^2 + \beta \varepsilon \cos(\psi) \sin(\psi)}. \quad (3.12)$$

Do ponto de vista heurístico, estamos "dividindo" as duas equações que estão em (3.11). Em outras palavras, assumindo (3.11)₂, temos para ε pequeno $\psi' \neq 0$. Portanto podemos inverter a função ψ , exprimindo t em termos de ψ . Notemos que o lado direito de (3.12) é uma função periódica de período 2π . Fazendo $w = \beta \varepsilon \cos(\psi) \sin^3(\psi) R^2 + \beta \varepsilon \cos(\psi) \sin(\psi)$ e observando que $\frac{1}{1-w} = 1 - w + w^2 - \dots$, encontramos de (3.12)

$$\frac{dR}{d\psi} = \varepsilon (\beta \sin^2(\psi) R - \beta \sin^4(\psi) R^3) + O(\varepsilon^2). \quad (3.13)$$

Podemos aplicar o Teorema da Média em (3.13). Neste caso o "tempo" seria a variável angular ψ e a equação (3.13) é 2π -periódica. Temos que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\beta R \sin^2(\psi) - \beta R^3 \sin^4(\psi)] d\psi = \frac{\beta R}{2} - \frac{3\beta R^3}{8}.$$

A equação da média, escrita em uma nova variável S , é então dada por

$$\frac{dS}{d\psi} = \varepsilon \frac{\beta S}{2} - \varepsilon \frac{3\beta S^3}{8}. \quad (3.14)$$

A fim de que $\frac{dS}{d\psi} = 0$ devemos ter $S = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$ ou $S = 0$. Observemos que (3.14) tem um ponto crítico não-trivial $S_0 = 2/\sqrt{3}$, e neste ponto a derivada do lado direito de (3.14) é igual a $-\beta \varepsilon$ que é menor que zero. De fato, tomando $F(S) = \varepsilon \frac{\beta S}{2} - \varepsilon \frac{3\beta S^3}{8}$ obtemos $\dot{F}(S) = \varepsilon \frac{\beta}{2} - \varepsilon \frac{9\beta S^2}{8}$, logo $\dot{F}(2/\sqrt{3}) = \varepsilon - \beta$ e como $\varepsilon, \beta > 0$ então $\dot{F}(2/\sqrt{3}) < 0$. Portanto, S_0 é um atrator e conseqüentemente um ponto de equilíbrio assintoticamente estável. Uma outra forma de obter este mesmo resultado é resolver explicitamente (3.14). Esta é uma equação de variáveis separáveis que pode ser resolvida por métodos elementares. Da equação (3.14) encontramos

$$\frac{dS}{\frac{S}{2} - \frac{3S^3}{8}} = \varepsilon \beta d\psi$$

integramos em ambos os lados com intervalo de integração variando de 0 a ψ

$$\int_0^s \frac{dS}{\frac{S}{2} - \frac{3S^3}{8}} = \int_0^\psi \varepsilon \beta d\psi$$

Utilizando a técnica das frações parciais integramos o lado esquerdo e por propriedades de logaritmos obtemos que

$$S(\psi) = \frac{2S(0) e^{\frac{\beta\varepsilon\psi}{2}}}{\sqrt{3S(0)^2 e^{\beta\varepsilon\psi} - 3S(0)^2 + 4}} \quad (3.15)$$

é a solução geral de (3.14). Além disso, segue de (3.15) e pela regra de L'Hospital que

$$\lim_{\psi \rightarrow \infty} S(\psi) = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Voltando à equação (3.13), temos pelo Teorema 2.2 que (3.13) possui uma órbita periódica, de período 2π . Como $\dot{F}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) < 0$ segue do Teorema (2.3) que (3.13) possui uma solução periódica assintoticamente estável de período 2π que indicaremos por $R_p(\psi, \varepsilon)$. Também temos, pelo Teorema 2.1 que

$$R_p(\psi, \varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{3}} + O(\varepsilon). \quad (3.16)$$

Defina

$$g(\psi, \varepsilon) = \int_0^\psi \frac{1}{1 - \beta\varepsilon \cos(s) \operatorname{sen}^3(s) R_p^2(s, \varepsilon) + \beta\varepsilon \cos(s) \operatorname{sen}(s)} ds. \quad (3.17)$$

Usando (3.17) temos que se ε é positivo adequadamente pequeno então $g'(\psi, \varepsilon) \neq 0$ para todo $\psi \in \mathbb{R}$ e $\lim_{\psi \rightarrow \pm\infty} g(\psi, \varepsilon) = \pm\infty$. A derivada anterior refere-se à derivada em relação à variável ψ . Assim g é inversível e $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Como $R_p(\cdot, \varepsilon)$ tem período 2π em relação à variável ψ segue que $g'(\psi + 2\pi, \varepsilon) = g'(\psi, \varepsilon)$ para todo $\psi \in \mathbb{R}$. Portanto, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $g(\psi + 2\pi, \varepsilon) = g(\psi, \varepsilon) + c$ para todo $\psi \in \mathbb{R}$. Fazendo $\psi = 0$ na última igualdade temos que $g(0 + 2\pi, \varepsilon) = g(0, \varepsilon) + c$ ou $g(2\pi, \varepsilon) = c$, pois $g(0, \varepsilon) = 0$. Portanto

$$g(\psi + 2\pi, \varepsilon) = g(\psi, \varepsilon) + T(\varepsilon), \quad (3.18)$$

onde

$$\begin{aligned} T(\varepsilon) &\stackrel{\text{def}}{=} g(2\pi, \varepsilon) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - \beta\varepsilon \cos(s) \operatorname{sen}^3(s) R_p^2(s, \varepsilon) + \beta\varepsilon \cos(s) \operatorname{sen}(s)} ds. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Definimos $\psi_0(t, \varepsilon) = g^{-1}(t, \varepsilon)$ e $R_0(t, \varepsilon) = R_p(g^{-1}(t, \varepsilon))$. Segue de (3.18) que

$$g^{-1}(g(\psi, \varepsilon) + T(\varepsilon), \varepsilon) = \psi + 2\pi. \quad (3.20)$$

Substituindo ψ por $g^{-1}(t, \varepsilon)$ em (3.20) obtemos

$$g^{-1}(g(g^{-1}(t, \varepsilon), \varepsilon) + T(\varepsilon), \varepsilon) = g^{-1}(t, \varepsilon) + 2\pi. \quad (3.21)$$

Como $g(g^{-1}(t, \varepsilon), \varepsilon) = t$, segue da definição de ψ_0 e de (3.21) que

$$g^{-1}(t + T(\varepsilon), \varepsilon) = \psi_0(t, \varepsilon) + 2\pi, \quad (3.22)$$

ou seja,

$$\psi_0(t + T(\varepsilon), \varepsilon) = \psi_0(t, \varepsilon) + 2\pi. \quad (3.23)$$

Além disso, como R_p é 2π -periódica segue de (3.23) que

$$\begin{aligned} R_0(t + T(\varepsilon), \varepsilon) &= R_p(g^{-1}(t + T(\varepsilon), \varepsilon)) \\ &= R_p(g^{-1}(t, \varepsilon) + 2\pi) \\ &= R_p(g^{-1}(t, \varepsilon)) \\ &= R_0(t, \varepsilon) \end{aligned} \quad (3.24)$$

ou seja, R_0 é $T(\varepsilon)$ -periódica. Portanto segue de (3.24), (3.23) e (3.9) que (x_0, u_0) , onde $x_0(t, \varepsilon) = R_0(t, \varepsilon) \cos(\psi_0(t, \varepsilon))$ e $u_0(t, \varepsilon) = -R_0(t, \varepsilon) \sin(\psi_0(t, \varepsilon))$, é uma solução periódica de (3.8) de período igual a $T(\varepsilon)$.

Segue de (3.17) que

$$\begin{aligned} g(\psi, \varepsilon) &= \int_0^\psi \frac{1}{1 - \beta \varepsilon \cos(s) \sin^3(s) R_p^2(s, \varepsilon) + \beta \varepsilon \cos(s) \sin(s)} ds. \\ &= \int_0^\psi [1 + \varepsilon (-\beta \cos(s) \sin^3(s) R_p^2(s, \varepsilon) + \beta \cos(s) \sin(s)) + \dots] ds \\ &= \int_0^\psi ds + \int_0^\psi [\varepsilon (-\beta \cos(s) \sin^3(s) R_p^2(s, \varepsilon) + \beta \cos(s) \sin(s)) + \dots] ds \\ &= \int_0^\psi ds + O(\varepsilon) \\ &= \psi + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Logo, $T(\varepsilon) = g(2\pi, \varepsilon) = 2\pi + O(\varepsilon)$. Além disso, também segue $g^{-1}(t, 0) = t$, assim pela fórmula de Taylor temos que $\psi_0(t, \varepsilon) = t + O(\varepsilon)$. Assim dos argumentos anteriores e de (3.16) temos

$$\begin{cases} R_0(t, \varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{3}} + O(\varepsilon), \\ \psi_0(t, \varepsilon) = t + O(\varepsilon), \\ T(\varepsilon) = 2\pi + O(\varepsilon). \end{cases} \quad (3.25)$$

Finalmente, usando (3.25)_{1,2} em (3.9) obtemos

$$\begin{cases} x_0(t, \varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(t) + O(\varepsilon), \\ u_0(t, \varepsilon) = -\frac{2}{\sqrt{3}} \sin(t) + O(\varepsilon). \end{cases} \quad (3.26)$$

Portanto, conseguimos garantir a existência de uma solução periódica para (3.5). A pergunta natural é quanto a sua estabilidade. Esta questão será respondida na próxima seção.

3.1.2 Estabilidade Assintótica da Solução Periódica

Queremos provar a estabilidade assintótica da solução periódica determinada na subseção anterior.

A linearização de (3.8) na órbita (x_0, u_0) é dada pelo seguinte sistema linear de coeficiente periódico $u_0(t, \varepsilon)$ de período igual $T(\varepsilon)$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t, \varepsilon) = u_1(t, \varepsilon), \\ \dot{u}_1(t, \varepsilon) = -x_1(t, \varepsilon) + \varepsilon\beta(1 - 3(u_0(t, \varepsilon))^2)u_1(t, \varepsilon). \end{cases} \quad (3.27)$$

Agora, levando-se em conta (3.26)₂ em (3.27) temos que o sistema anterior reescreve-se como

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t, \varepsilon) = u_1(t, \varepsilon), \\ \dot{u}_1(t, \varepsilon) = -x_1(t, \varepsilon) + \varepsilon\beta(1 - 4(\text{sen}(t))^2)u_1(t, \varepsilon) + O(\varepsilon^2). \end{cases} \quad (3.28)$$

Vamos usar a expansão (3.7) no caso $l = 1$ na equação anterior. Assim

$$\begin{cases} x_1(t, \varepsilon) = x_{10}(t) + x_{11}(t)\varepsilon + O(\varepsilon^2), \\ u_1(t, \varepsilon) = u_{10}(t) + u_{11}(t)\varepsilon + O(\varepsilon^2). \end{cases} \quad (3.29)$$

Substituindo (3.29) em (3.28) e igualando os coeficientes de ε^0 e ε obtemos

$$\begin{cases} \dot{x}_{10}(t) = u_{10}(t), \\ \dot{u}_{10}(t) = -x_{10}(t), \end{cases} \quad (3.30)$$

e

$$\begin{cases} \dot{x}_{11}(t) = u_{11}(t), \\ \dot{u}_{11}(t) = -x_{11}(t) + \beta(1 - 4(\text{sen}(t))^2)u_{10}(t). \end{cases} \quad (3.31)$$

Precisamos então achar a solução de (3.27) com condição inicial $(x_1(0, \varepsilon), u_1(0, \varepsilon)) = (1, 0)$ e uma outra com condição inicial $(x_1(0, \varepsilon), u_1(0, \varepsilon)) = (0, 1)$ para construirmos uma matriz solução fundamental. A solução de (3.30) no primeiro caso é dada por $(x_{101}(t), u_{101}(t)) = (\cos(t), -\text{sen}(t))$ e no segundo caso por $(x_{102}(t), u_{102}(t)) = (\text{sen}(t), \cos(t))$. Substituindo cada uma destas soluções em (3.31) obtemos dois sistemas de equações que são os seguintes:

$$\begin{cases} \dot{x}_{111}(t) = u_{111}(t), \\ \dot{u}_{111}(t) = -x_{111}(t) - \beta(1 - 4(\text{sen}(t))^2)\text{sen}(t), \\ x_{111}(0) = 0, \\ u_{111}(0) = 0, \end{cases} \quad (3.32)$$

e

$$\begin{cases} \dot{x}_{112}(t) = u_{112}(t), \\ \dot{u}_{112}(t) = -x_{112}(t) + \beta(1 - 4(\text{sen}(t))^2)\cos(t), \\ x_{112}(0) = 0, \\ u_{112}(0) = 0. \end{cases} \quad (3.33)$$

O sistema não-autônomo não-homogêneo (3.33) pode ser escrito na forma matricial $\dot{x} = Ax + B(t)$ com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\beta(1 - 4\text{sen}^2(t))\text{sen}(t) \end{bmatrix}, \quad x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e possui solução dada por

$$x(t) = e^{At} \left[\int_0^t e^{-As} B(s) ds + x(0) \right] \quad (3.34)$$

(ver [1], páginas 100 e 101). Assim, encontramos o seguinte resultado

$$\begin{cases} x_{111}(t) = \frac{\beta \text{sen}(3t)}{8} + \frac{5\beta \text{sen}(t)}{8} - \beta t \cos(t), \\ u_{111}(t) = \frac{3\beta \cos(3t)}{8} + \beta t \text{sen}(t) - \frac{3\beta \cos(t)}{8}. \end{cases} \quad (3.35)$$

Analogamente encontramos para o segundo sistema a solução

$$\begin{cases} x_{112}(t) = \frac{\beta \cos(t)}{8} - \frac{\beta \cos(3t)}{8}, \\ u_{112}(t) = \frac{3\beta \text{sen}(3t)}{8} - \frac{\beta \text{sen}(t)}{8}. \end{cases} \quad (3.36)$$

A primeira coluna da matriz solução principal de (3.27) é dada por $(x_{101}(t), u_{101}(t)) + \varepsilon(x_{111}(t), u_{111}(t)) + O(\varepsilon^2)$. Analogamente para segunda coluna encontramos $(x_{102}(t), u_{102}(t)) + \varepsilon(x_{112}(t), u_{112}(t)) + O(\varepsilon^2)$. Assim a matriz solução principal é então

$$\begin{pmatrix} \cos(t) + \varepsilon \begin{pmatrix} \frac{\beta \text{sen}(3t)}{8} + \\ + \frac{5\beta \text{sen}(t)}{8} - \\ -\beta t \cos(t) \end{pmatrix} & \text{sen}(t) + \varepsilon \begin{pmatrix} \frac{\beta \cos(t)}{8} - \\ -\frac{\beta \cos(3t)}{8} \end{pmatrix} \\ -\text{sen}(t) + \varepsilon \begin{pmatrix} \frac{3\beta \cos(3t)}{8} + \\ +\beta t \text{sen}(t) - \\ -\frac{3\beta \cos(t)}{8} \end{pmatrix} & \cos(t) + \varepsilon \begin{pmatrix} \frac{3\beta \text{sen}(3t)}{8} - \\ -\frac{\beta \text{sen}(t)}{8} \end{pmatrix} \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2) \quad (3.37)$$

Assim a matriz principal de (3.27) é obtida substituindo $T(\varepsilon)$ em (3.37) e usando (3.25)₃ temos que esta matriz é dada por

$$\begin{pmatrix} 1 - 2\pi\beta\varepsilon & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + O(\varepsilon^2). \quad (3.38)$$

Note que os autovalores da matriz solução principal são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 1 - 2\pi\beta\varepsilon$ e que $|\lambda_2| < 1$ para um ε adequadamente pequeno. Como (3.27) é a linearização de (3.8), que é um sistema autônomo, em uma órbita periódica, segue que da Proposição 1.1 que um dos coeficientes de Floquet de (3.27) é necessariamente igual a 1. Temos também de (3.38) que o outro coeficiente de Floquet é dado por $1 - 2\pi\beta\varepsilon + O(\varepsilon^2)$. Portanto tem valor absoluto menor que um para ε adequadamente pequeno. Segue do Teorema 1.9, que a órbita periódica (x_0, u_0) de (3.8) é assintoticamente estável. Provamos assim o principal resultado desta subseção.

Na Figura a seguir, obtemos o plano de fase da equação de Rayleigh (3.4). Neste caso assumimos que $\beta = 1$ e $\varepsilon = 0.1$.

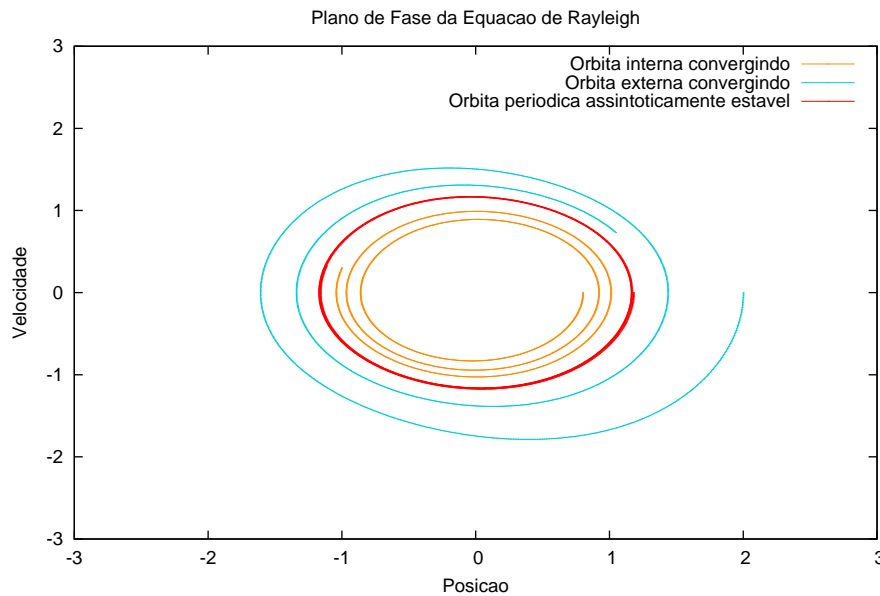


Figura 3.1: Plano de Fase de $\ddot{x} + x = 0.1(1 - \dot{x}^2)\dot{x}$

3.1.3 Estudo da Estabilidade da Solução Semi-Trivial

Nesta subseção também utilizaremos as idéias dadas em [6], como, por exemplo, o uso do Teorema de Andronov-Witt no estudo da estabilidade de soluções periódicas. Após o estudo da equação de Rayleigh estamos interessados no estudo da estabilidade da solução semi-trivial $(x_0(t, \varepsilon), u_0(t, \varepsilon), 0, 0)$ de (3.6). A linearização (3.6) na solução semi-trivial é dada por

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{u}_1 \\ \dot{y}_1 \\ \dot{v}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & \varepsilon\beta(1 - 3u_0^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} - \varepsilon\sigma - \varepsilon\gamma_2 x_0 & -\varepsilon\kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ u_1 \\ y_1 \\ v_1 \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Consideremos a expansão regular de fluxo com $l = 1$, temos então

$$\varphi(t, x_0, \varepsilon) = \varphi_0(t, x_0) + \varphi_1(t, x_0)\varepsilon + O(\varepsilon^2) \quad (3.40)$$

onde $\varphi = (x_1, u_1, y_1, v_1)$, $\varphi_0 = (x_{10}, u_{10}, y_{10}, v_{10})$ e $\varphi_1 = (x_{11}, u_{11}, y_{11}, v_{11})$. Assim,

$$\begin{cases} x_1(t, \varepsilon) = x_{10}(t) + x_{11}(t)\varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ u_1(t, \varepsilon) = u_{10}(t) + u_{11}(t)\varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ y_1(t, \varepsilon) = y_{10}(t) + y_{11}(t)\varepsilon + O(\varepsilon^2) \\ v_1(t, \varepsilon) = v_{10}(t) + v_{11}(t)\varepsilon + O(\varepsilon^2). \end{cases} \quad (3.41)$$

Daí, substituindo (3.40) e (3.26) em (3.39) e igualando os coeficientes de ε^0 e ε obtemos

$$\begin{cases} \dot{x}_{10} = u_{10} \\ \dot{u}_{10} = -x_{10} \\ \dot{y}_{10} = v_{10} \\ \dot{v}_{10} = -\frac{1}{4}y_{10} \end{cases} \quad (3.42)$$

e

$$\begin{cases} \dot{x}_{11} = u_{11} \\ \dot{u}_{11} = -x_{11} + \beta(1 - 4\text{sen}^2(t))u_{10} \\ \dot{y}_{11} = v_{11} \\ \dot{v}_{11} = y_{11} \left(-\sigma - \gamma_2(\sqrt{4/3} \cos(t)) \right) - \frac{1}{4}y_{11} - \kappa v_{10} \end{cases} \quad (3.43)$$

Para obter a matriz principal queremos encontrar as soluções de (3.39) tais que

$$\begin{pmatrix} x_1(0) \\ u_1(0) \\ y_1(0) \\ v_1(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.44)$$

Substituindo (3.44) em (3.41) obtemos as condições iniciais

$$\begin{aligned} (x_{10}(0), u_{10}(0), y_{10}(0), v_{10}(0)) &= (1, 0, 0, 0) \\ (x_{10}(0), u_{10}(0), y_{10}(0), v_{10}(0)) &= (0, 1, 0, 0) \\ (x_{10}(0), u_{10}(0), y_{10}(0), v_{10}(0)) &= (0, 0, 1, 0) \\ (x_{10}(0), u_{10}(0), y_{10}(0), v_{10}(0)) &= (0, 0, 0, 1) \end{aligned} \quad (3.45)$$

e

$$\begin{aligned} (x_{11}(0), u_{11}(0), y_{11}(0), v_{11}(0)) &= (0, 0, 0, 0) \\ (x_{11}(0), u_{11}(0), y_{11}(0), v_{11}(0)) &= (0, 0, 0, 0) \\ (x_{11}(0), u_{11}(0), y_{11}(0), v_{11}(0)) &= (0, 0, 0, 0) \\ (x_{11}(0), u_{11}(0), y_{11}(0), v_{11}(0)) &= (0, 0, 0, 0) \end{aligned} \quad (3.46)$$

A matriz solução principal será dada por

$$\bar{M}(t, \varepsilon) = m(t) + M(t)\varepsilon + O(\varepsilon^2). \quad (3.47)$$

Para o cálculo de $m(t)$ usaremos as soluções do sistema (3.42) com as condições iniciais (3.45). Para o cálculo de $M(t)$ usaremos (3.43) com as condições iniciais (3.46). Desta forma,

$$m(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & \text{sen}(t) & 0 & 0 \\ -\text{sen}(t) & \cos(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \cos\left(\frac{t}{2}\right) & -\frac{1}{2} \text{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \\ 0 & 0 & 2 \text{sen}\left(\frac{t}{2}\right) & \frac{1}{2} \cos\left(\frac{t}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

e

$$M(t) = \begin{bmatrix} M_{11}(t) & M_{12}(t) & 0 & 0 \\ M_{21}(t) & M_{22}(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{33}(t) & M_{34}(t) \\ 0 & 0 & M_{43}(t) & M_{44}(t) \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

onde,

$$M_{11}(t) = \frac{\beta \text{sen}(3t)}{8} + \frac{5\beta \text{sen}(t)}{8} - \beta t \cos(t)$$

$$M_{12}(t) = \frac{3\beta \cos(3t)}{8} + \beta t \text{sen}(t) - \frac{3\beta \cos(t)}{8}$$

$$M_{21}(t) = \frac{\beta \cos(t)}{8} - \frac{\beta \cos(3t)}{8}$$

$$M_{22}(t) = \frac{3\beta \text{sen}(3t)}{8} - \frac{\beta \text{sen}(t)}{8}$$

$$M_{33}(t) = \frac{3^{-\frac{1}{2}} \gamma_2 \cos\left(\frac{3t}{2}\right)}{2} + \frac{4\kappa \text{sen}\left(\frac{t}{2}\right) - 2\left(3^{-\frac{1}{2}}\right) \gamma_2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{4} - \frac{(6\sigma + 2\sqrt{3}\gamma_2) t \text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}{6} - \frac{\kappa t \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2}$$

$$M_{34}(t) = -\frac{3\gamma_2 \text{sen}\left(\frac{3t}{2}\right)}{4\sqrt{3}} + \frac{\kappa t \text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}{4} + \frac{(-4\sigma - \sqrt{3}\gamma_2) \text{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}{4} - \frac{(6\sigma + 2\sqrt{3}\gamma_2) t \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{12}$$

$$\begin{aligned}
M_{43}(t) &= \frac{\gamma_2 \operatorname{sen}\left(\frac{3t}{2}\right)}{\sqrt{3}} - \kappa t \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) - \frac{(24\sigma - 2\sqrt{3}\gamma_2) \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}{6} \\
&\quad + \frac{(24\sigma - 8\sqrt{3}\gamma_2) t \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{12} \\
M_{44}(t) &= \frac{\sqrt{3}\gamma_2 \cos\left(\frac{3t}{2}\right)}{2} + \frac{-4\kappa \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) - 2\sqrt{3}\gamma_2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{4} \\
&\quad - \frac{(6\sigma - 2\sqrt{3}\gamma_2) t \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}{6} - \frac{\kappa t \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2}
\end{aligned}$$

Portanto, substituindo $m(t)$ e $M(t)$ em (3.47) obtemos

$$\bar{M}(t, \varepsilon) = \begin{bmatrix} \bar{M}_{11}(t, \varepsilon) & \bar{M}_{12}(t, \varepsilon) & 0 & 0 \\ \bar{M}_{21}(t, \varepsilon) & \bar{M}_{22}(t, \varepsilon) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{M}_{33}(t, \varepsilon) & \bar{M}_{34}(t, \varepsilon) \\ 0 & 0 & \bar{M}_{43}(t, \varepsilon) & \bar{M}_{44}(t, \varepsilon) \end{bmatrix} + O(\varepsilon^2) \quad (3.50)$$

onde

$$\begin{aligned}
\bar{M}_{11}(t, \varepsilon) &= \varepsilon \left(\begin{array}{c} \frac{\beta \operatorname{sen}(3t)}{8} + \\ + \frac{5\beta \operatorname{sen}(t)}{8} - \\ - \beta t \cos(t) \end{array} \right) + \cos(t) \\
\bar{M}_{12}(t, \varepsilon) &= \left(\begin{array}{c} \frac{3\beta \cos(3t)}{8} + \\ + \beta t \operatorname{sen}(t) - \\ - \frac{3\beta \cos(t)}{8} \end{array} \right) - \operatorname{sen}(t) \\
\bar{M}_{21}(t, \varepsilon) &= \varepsilon \left(\begin{array}{c} \frac{\beta \cos(t)}{8} - \\ - \frac{\beta \cos(3t)}{8} \end{array} \right) + \operatorname{sen}(t) \\
\bar{M}_{22}(t, \varepsilon) &= \varepsilon \left(\begin{array}{c} \frac{3\beta \operatorname{sen}(3t)}{8} - \\ - \frac{\beta \operatorname{sen}(t)}{8} \end{array} \right) + \cos(t) \\
\bar{M}_{33}(t, \varepsilon) &= \varepsilon \left(\begin{array}{c} \frac{3^{-\frac{1}{2}} \gamma_2 \cos\left(\frac{3t}{2}\right)}{2} \\ + \frac{4\kappa \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) - 2 \cdot 3^{-\frac{1}{2}} \gamma_2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{6} \\ - \frac{(6\sigma + 2\sqrt{3}\gamma_2) t \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}{6} \\ - \frac{\kappa t \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2} \end{array} \right) + \cos\left(\frac{t}{2}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{M}_{34}(t, \varepsilon) &= \varepsilon \left(\begin{array}{c} -\frac{3\gamma_2 \operatorname{sen}\left(\frac{3t}{2}\right)}{4\sqrt{3}} \\ +\frac{\kappa t \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}{4} \\ +\frac{(-4\sigma - \sqrt{3}\gamma_2) \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}{(6\sigma + 2\sqrt{3}\gamma_2)t \cos\left(\frac{t}{2}\right)} \\ -\frac{6}{12} \end{array} \right) - \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}{2} \\
\bar{M}_{43}(t, \varepsilon) &= \varepsilon \left(\begin{array}{c} \frac{\gamma_2 \operatorname{sen}\left(\frac{3t}{2}\right)}{\sqrt{3}} \\ -\kappa t \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \\ -\frac{(24\sigma - 2\sqrt{3}\gamma_2) \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)}{6} \\ +\frac{(24\sigma - 8\sqrt{3}\gamma_2)t \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{12} \end{array} \right) + 2 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) \\
\bar{M}_{44}(t, \varepsilon) &= \varepsilon \left(\begin{array}{c} \frac{\sqrt{3}\gamma_2 \cos\left(\frac{3t}{2}\right)}{2} \\ +\frac{-4\kappa \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right) - 2\sqrt{3}\gamma_2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{(6\sigma - 2\sqrt{3}\gamma_2)t \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2}\right)} \\ -\frac{6}{6} \\ -\frac{\kappa t \cos\left(\frac{t}{2}\right)}{2} \end{array} \right) + \cos\left(\frac{t}{2}\right)
\end{aligned}$$

Assim, a matriz principal é dada por $\bar{M}(T(\varepsilon), \varepsilon)$. De (3.25)₃ segue que

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 - 2\pi\beta\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \pi\varepsilon\kappa - 1 \\ 0 & 0 & \frac{\pi\varepsilon(6\sigma + 2\sqrt{3}\gamma_2)}{6} \end{array} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ -\frac{\pi\varepsilon(24\sigma - 8\sqrt{3}\gamma_2)}{6} \\ \pi\varepsilon\kappa - 1 \end{array} \right) + O(\varepsilon^2). \quad (3.51)$$

Os autovalores desta matriz são os seguintes

$$\begin{aligned}
\lambda_1(\varepsilon) &= 1 - 2\pi\beta\varepsilon + O(\varepsilon^2), \\
\lambda_2(\varepsilon) &= 1 + O(\varepsilon^2), \\
\lambda_3(\varepsilon) &= -1 - \frac{(2\sqrt{3}\pi\sqrt{\gamma_2^2 - 3\sigma^2 - 3\pi\kappa})\varepsilon}{3} + O(\varepsilon^2), \\
\lambda_4(\varepsilon) &= -1 + \frac{(2\sqrt{3}\pi\sqrt{\gamma_2^2 - 3\sigma^2 + 3\pi\kappa})\varepsilon}{3} + O(\varepsilon^2),
\end{aligned} \quad (3.52)$$

Como (3.6) é autônomo, segue do Lema 1.1 que um dos autovalores de (3.52) é necessariamente igual a um, assim só nos interessam os autovalores $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4$. O primeiro autovalor tem valor absoluto necessariamente menor que um para $0 < \varepsilon \ll 1$. Assim tudo se resume aos autovalores λ_3, λ_4 . Vamos assumir que $\gamma_2^2 - 3\sigma^2 > 0$. Então λ_4 tem valor absoluto menor que um para ε adequadamente pequeno. É imediato que $|\lambda_3| > 1$ se $2\sqrt{3}\pi\sqrt{\gamma_2^2 - 3\sigma^2} - 3\pi\kappa > 0$ e que $|\lambda_3| < 1$ se $2\sqrt{3}\pi\sqrt{\gamma_2^2 - 3\sigma^2} - 3\pi\kappa < 0$. No primeiro caso temos instabilidade da órbita semi-trivial (ver [7]), e no segundo, segue do Teorema 1.9, que temos estabilidade assintótica da solução semi-trivial. A instabilidade da órbita semi-trivial é também denominada de ressonância auto-paramétrica. De qualquer

forma os pontos da superfície $2\sqrt{3}\pi\sqrt{\gamma_2^2 - 3\sigma^2} - 3\pi\kappa = 0$ (Figura (3.2)) no espaço de parâmetros, são pontos de bifurcação. Assim, acima da superfície obtemos parâmetros que nos dão a instabilidade da solução semi-trivial e, abaixo da superfície obtemos parâmetros que nos levam a estabilidade da solução semi-trivial.

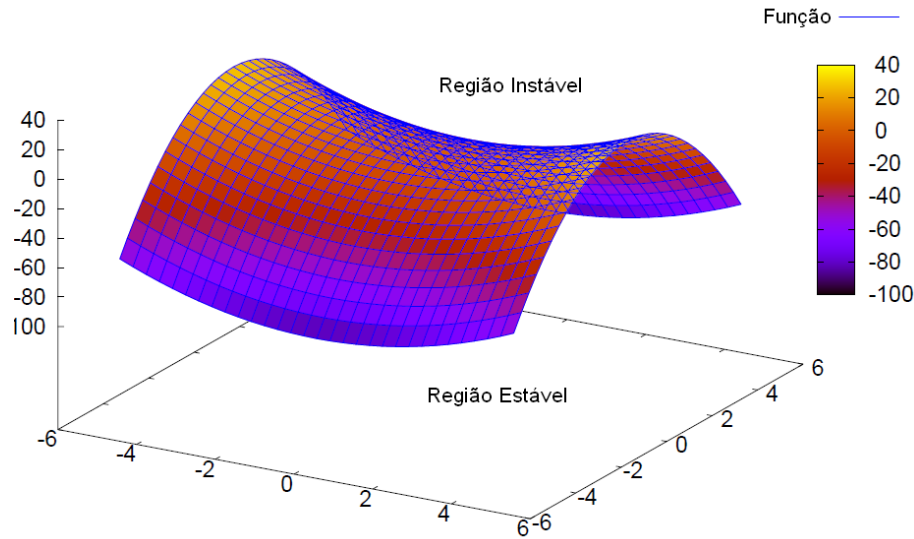


Figura 3.2: Superfície dos pontos de Bifurcação

Seja

$$R_c = \frac{1}{\gamma_2} \frac{\sqrt{3}\sqrt{4\sigma^2 + \kappa^2}}{2}, \quad (3.53)$$

então os resultados de estabilidade anteriores podem ser reescritos de outra forma, observe que estes novos resultados são obtidos diretamente das condições impostas aos parâmetros que compõem o autovalor λ_3 . Se $R_c^2 < 1$ temos instabilidade, se $R_c^2 > 1$ temos estabilidade assintótica da órbita semi-trivial. Este é o mesmo resultado que o obtido em [5] eq.(9). Observemos que com esta abordagem não é necessário usar diretamente resultados relativos a equação de Mathieu, como é feito em ABADI [5]. A análise anterior, baseada na teoria da Perturbação Regular, fornece diretamente os resultados necessários.

Vamos agora esboçar alguns gráficos pertinentes à questão de estabilidade. Tome $\varepsilon = \sigma = \kappa = 0.1, \gamma_2 = 0.5$. Estes parâmetros satisfazem a condição de instabilidade dada anteriormente.

O primeiro gráfico representa o plano de fase das duas últimas equações do sistema (3.39).

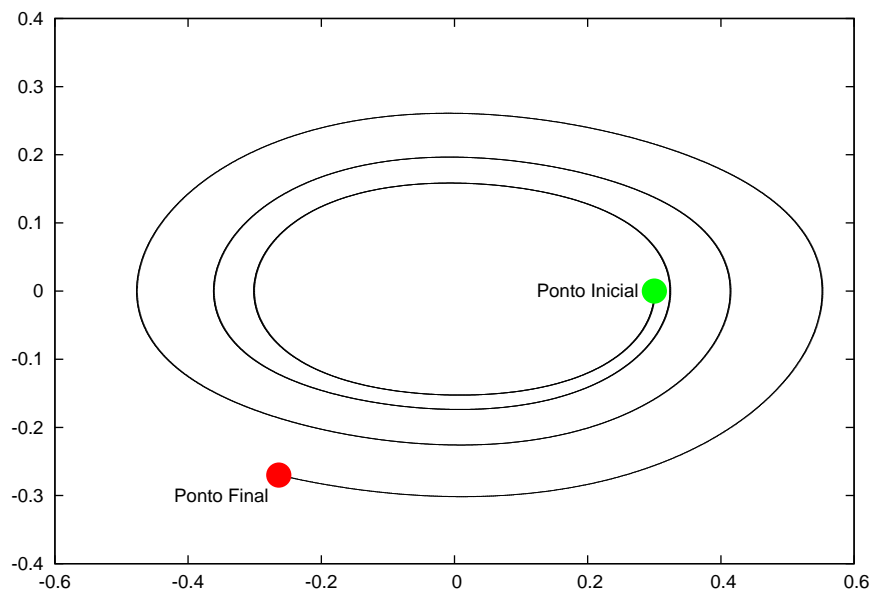


Figura 3.3: Plano de Fase de $(3.39)_{3,4}$: Caso Instável

Provamos, teóricamente a existência da ressonância autoparamétrica. Vamos agora ilustrar graficamente este resultado teórico usando a análise anterior. Neste caso, além dos parâmetros anteriores tomemos $\beta = 1$, $\gamma_1 = 0.5$, então temos obtemos o gráfico representado na Figura 3.4.

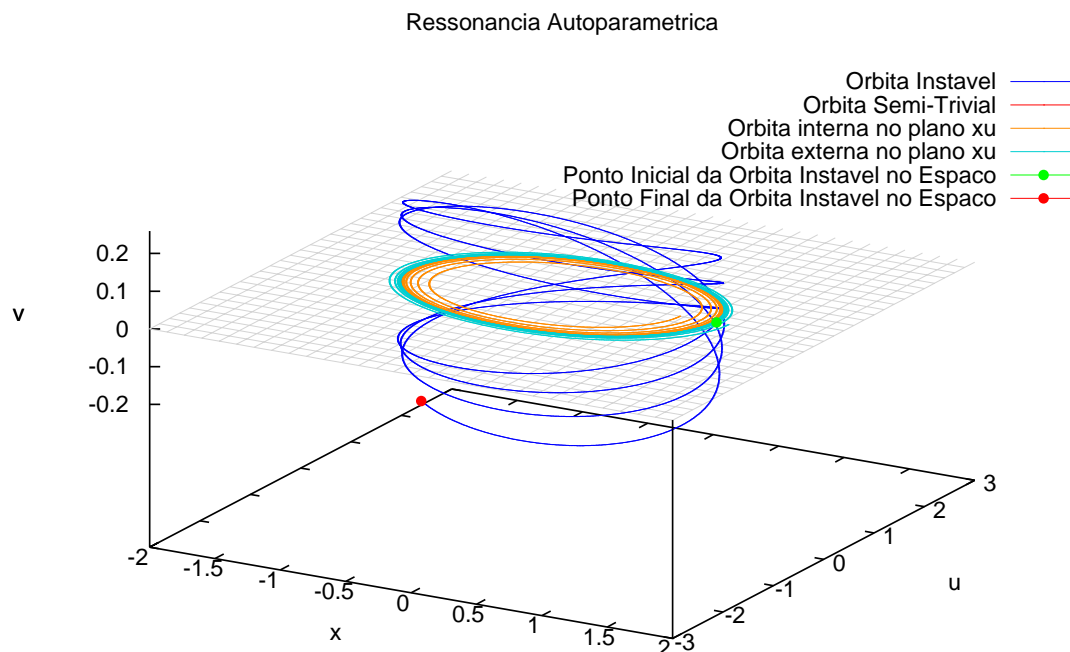


Figura 3.4: Espaço de Fase xuv de (3.6): Ressonância Autoparamétrica

Ela representa uma projeção em terceira dimensão da órbita instável e o eixo v indica o afastamento da órbita com ponto inicial $(1.18, 0, 0, 0.3)$, fora do plano xu onde está a órbita semi-trivial. Note que a órbita em azul se afasta do plano xu à medida que o tempo t se desloca de 0 a 40, ou seja, existe uma órbita que começa próxima da solução semi-trivial, mas não permanece próxima da solução semi-trivial caracterizando sua instabilidade.

Na verdade a amplitude da órbita em azul da Figura 3.4, ao longo do eixo v , torna-se maior ainda com o tempo. Lembrando que $v = \dot{y}$, expomos na Figura 3.5 o gráfico de $\dot{y}(t)$.

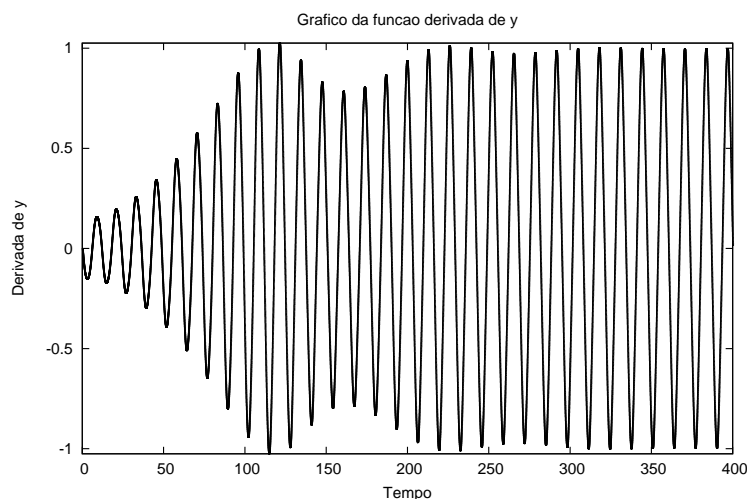


Figura 3.5: Gráfico de $v(t) = \dot{y}(t)$

A Figura 3.5 mostra que, para estes parâmetros e com esta condição inicial, a amplitude do eixo v continua aumentando de acordo com o passar do tempo, neste caso dez vezes maior que na Figura 3.4, o que nos mostra que a órbita com ponto inicial $(1.18, 0, 0, 0.3)$ continua se afastando da solução semi-trivial.

3.2 Análise das Soluções Não-Triviais

A fim de discutir as soluções não-triviais de (3.4) utilizaremos nesta equação as seguintes substituições

$$\begin{aligned}
 x &= R_1 \cos(t + \psi_1) & e & & \dot{x} &= -R_1 \sin(t + \psi_1) \\
 y &= R_2 \cos\left(\frac{1}{2}t + \psi_2\right) & e & & \dot{y} &= -\frac{R_2}{2} \sin\left(\frac{1}{2}t + \psi_2\right).
 \end{aligned}
 \tag{3.54}$$

Substituindo (3.54) em (3.6), encontramos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} (\cos(t + \psi_1) R_1) = -\text{sen}(t + \psi_1) R_1 \\ \frac{d}{dt} (-\text{sen}(t + \psi_1) R_1) = \varepsilon (-\gamma_1 \cos^2(\frac{t}{2} + \psi_2) R_2^2 - \beta \text{sen}(t + \psi_1) R_1 (1 - \text{sen}^2(t + \psi_1) R_1^2)) - \cos(t + \psi_1) R_1 \\ \frac{d}{dt} (\cos(\frac{t}{2} + \psi_2) R_2) = -\frac{\text{sen}(\frac{t}{2} + \psi_2) R_2}{2} \\ \frac{d}{dt} \left(-\frac{\text{sen}(\frac{t}{2} + \psi_2) R_2}{2} \right) = -\varepsilon \left(\gamma_2 \cos(\frac{t}{2} + \psi_2) \cos(t + \psi_1) R_1 R_2 - \frac{\kappa \text{sen}(\frac{t}{2} + \psi_2) R_2}{2} + \sigma \cos(\frac{t}{2} + \psi_2) R_2 \right) - \frac{\cos(\frac{t}{2} + \psi_2) R_2}{4} \end{array} \right.$$

logo,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{R}_1 = \frac{\varepsilon}{8} \left(\begin{array}{l} 2\gamma_1 \text{sen}(2t + 2\psi_2\psi_1) + \\ +4\gamma_1 \text{sen}(t + \psi_1 - 2\gamma_1 \text{sen}(2\psi_2 - \psi_1)) R_2^2 + \\ +(-\beta \cos(4t + 4\psi_1) + 4\beta \cos(2t + 2\psi_1) - 3\beta) R_1^3 + \\ +(4\beta - 4\beta, \cos(2t + 2\psi_1)) R_1 \end{array} \right) \\ \dot{\psi}_1 = \frac{\varepsilon}{8} \left(\begin{array}{l} \frac{(2\gamma_1 \cos(2t + 2\psi_2 + \psi_1) + 4\gamma_1 \cos(t + \psi_1) + 2\gamma_1 \cos(2\psi_2 - \psi_1)) R_2^2 +}{R_1} \\ +(\beta \text{sen}(4t + 4\psi_1) - 2\beta \text{sen}(2t + 2\psi_1)) R_1^3 + 4\beta \text{sen}(2t + 2\psi_1) R_1 \\ R_1 \end{array} \right) \\ \dot{R}_2 = \frac{\varepsilon}{2} \left(\begin{array}{l} (\gamma_2 \text{sen}(2t + 2\psi_2 + \psi_1) + \gamma_2 \text{sen}(2\psi_2 - \psi_1)) R_1 + \\ 2\sigma \text{sen}(t + 2\psi_2) + \kappa \cos(t + 2\psi_2) - \kappa R_2 \end{array} \right) \\ \dot{\psi}_2 = \frac{\varepsilon}{2} \left(\begin{array}{l} \gamma_2 \cos(2t + 2\psi_2 + \psi_1) + 2\gamma_2 \cos(t + \psi_1) + \\ +\gamma_2 \cos(2\psi_2 - \psi_1) R_1 - \kappa \text{sen}(t + 2\psi_2) + \\ +2\sigma \cos(t + 2\psi_2) + 2\sigma \end{array} \right) \end{array} \right. \quad (3.55)$$

Como (3.55) tem coeficientes periódicos, podemos utilizar o Teorema 2.3, assim as equações da média, neste caso, são dadas por

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{R}_1 = \varepsilon \left(\frac{\gamma_1 \operatorname{sen}(2\psi_2 - \psi_1) R_2^2}{4} - \frac{3\beta R_1^3}{8} + \frac{\beta R_1}{2} \right) \\ \dot{\psi}_1 = \varepsilon \left(\frac{\gamma_1 \cos(2\psi_2 - \psi_1) R_2^2}{4 R_1} \right) \\ \dot{R}_2 = \varepsilon \left(\frac{-\gamma_2 \operatorname{sen}(2\psi_2 - \psi_1) R_1 R_2}{2} - \frac{\kappa R_2}{2} \right) \\ \dot{\psi}_2 = \varepsilon \left(\frac{\gamma_2 \cos(2\psi_2 - \psi_1) R_1}{2} + \sigma \right). \end{array} \right. \quad (3.56)$$

Tomando $-\phi = -\psi_1 + 2\psi_2$ obtemos $\dot{\phi} = -\dot{\psi}_1 + 2\dot{\psi}_2$, o sistema (3.56) fica

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{R}_1 = \varepsilon \left(\frac{\gamma_1 \operatorname{sen}(\phi) R_2^2}{4} - \frac{3\beta R_1^3}{8} + \frac{\beta R_1}{2} \right) \\ \dot{\phi} = \varepsilon \left(\frac{\gamma_1 \cos(\phi) R_2^2}{4 R_1} - \gamma_2 R_1 \cos(\phi) - 2\sigma \right) \\ \dot{R}_2 = \varepsilon \left(-\frac{\gamma_2 \operatorname{sen}(\phi) R_1 R_2}{2} - \frac{\kappa R_2}{2} \right) \\ \dot{\psi}_2 = \varepsilon \left(\frac{\gamma_2 \cos(\phi) R_1}{2} + \sigma \right). \end{array} \right. \quad (3.57)$$

Notemos que ψ_2 não ocorre nas três primeiras equações de (3.57), ou seja, as variáveis R_1, R_2, ϕ estão desacopladas de ψ_2 . Assim, vamos considerar somente o sistema formado pelas três primeiras equações de (3.57), isto é,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{R}_1 = \varepsilon \left(\frac{\gamma_1 \operatorname{sen}(\phi) R_2^2}{4} - \frac{3\beta R_1^3}{8} + \frac{\beta R_1}{2} \right) \\ \dot{\phi} = \varepsilon \left(\frac{\gamma_1 \cos(\phi) R_2^2}{4 R_1} - \gamma_2 R_1 \cos(\phi) - 2\sigma \right) \\ \dot{R}_2 = \varepsilon \left(-\frac{\gamma_2 \operatorname{sen}(\phi) R_1 R_2}{2} - \frac{\kappa R_2}{2} \right) \end{array} \right. \quad (3.58)$$

Observação 3.1 Naturalmente qualquer informação obtida de (3.58) é relevante, assim é interessante estudar (3.58) por si mesmo. Isto é o que é feito em [5] e o que faremos daqui em diante.

Considere a seguinte mudança de variáveis

$$R_1 = \sqrt{v^2 + u^2}, \quad R_2 = \sqrt{\rho} \quad e \quad \phi = \operatorname{arctg} \left(\frac{v}{u} \right). \quad (3.59)$$

Usando (3.59) em (3.58) obtemos

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \sqrt{v^2 + u^2} &= -\frac{3\beta\varepsilon(v^2+u^2)^{\frac{3}{2}}}{8} + \frac{\beta\varepsilon\sqrt{v^2+u^2}}{2} + \frac{\varepsilon\rho\gamma_1 v}{4\sqrt{v^2+u^2}} \\ \frac{d}{dt} \sqrt{\rho} &= -\frac{\varepsilon\sqrt{\rho}\gamma_2 v}{2} - \frac{\varepsilon\sqrt{\rho}\kappa}{2} \\ \frac{d}{dt} \arctg\left(\frac{v}{u}\right) &= \frac{\varepsilon\rho\gamma_1 u}{4(v^2+u^2)} - \varepsilon\gamma_2 u - 2\varepsilon\sigma. \end{cases} \quad (3.60)$$

Após uma longa computação o seguinte resultado é obtido

$$\begin{cases} \dot{\rho} &= \varepsilon(-\rho\gamma_2 v - \rho\kappa) \\ \dot{u} &= \varepsilon\left(\frac{-3\beta u(v^2+u^2)^2 - ((-8\gamma_2 u - 16\sigma)v - 4\beta u)(v^2+u^2)}{8v^2+8u^2}\right) \\ \dot{v} &= \varepsilon\left(\frac{-3\beta v(v^2+u^2)^2 - (-4\beta v + 8\gamma_2 u^2 + 16\sigma u)(v^2+u^2) + 2\rho\gamma_1 v^2 + 2\rho\gamma_1 u^2}{8v^2+8u^2}\right) \end{cases} \quad (3.61)$$

ou

$$\begin{cases} \dot{\rho} &= \varepsilon(-\rho\gamma_2 v - \rho\kappa) \\ \dot{u} &= \varepsilon\left(\frac{-3\beta u(v^2+u^2)}{8} + \gamma_2 u v + 2\sigma v + \frac{\beta u}{2}\right) \\ \dot{v} &= \varepsilon\left(\frac{-3\beta v(v^2+u^2)}{8} + \frac{\beta v}{2} - \gamma_2 u^2 - 2\sigma u + \frac{\rho\gamma_1}{4}\right) \end{cases} \quad (3.62)$$

Se definirmos $u = R_1 \cos \phi$ e $v = R_1 \sin \phi$ o sistema (3.62) se escreve como

$$\begin{cases} \dot{\rho} &= \varepsilon(-\rho\gamma_2 v - \rho\kappa) \\ \dot{u} &= \varepsilon\left(\frac{-3\beta u R_1^2}{8} + \gamma_2 u v + 2\sigma v + \frac{\beta u}{2}\right) \\ \dot{v} &= \varepsilon\left(\frac{-3\beta v R_1^2}{8} + \frac{\beta v}{2} - \gamma_2 u^2 - 2\sigma u + \frac{\rho\gamma_1}{4}\right) \end{cases} \quad (3.63)$$

3.3 Ressonância Exata

A fim de estudar o sistema 3.63, consideraremos a ressonância exata ($\sigma = 0$), que é mais simples. Assumindo, além disso, $\beta > 0$, $\gamma_1 > 0$ e $\gamma_2 > 0$, temos o sistema 3.63 escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{\rho} &= \varepsilon(-\rho\gamma_2 v - \rho\kappa) \\ \dot{u} &= \varepsilon\left(\frac{-3\beta u(v^2+u^2)}{8} + \gamma_2 u v + \frac{\beta u}{2}\right) \\ \dot{v} &= \varepsilon\left(\frac{-3\beta v(v^2+u^2)}{8} + \frac{\beta v}{2} - \gamma_2 u^2 + \frac{\rho\gamma_1}{4}\right) \end{cases} \quad (3.64)$$

Note que se $\rho = 0$ então $(0, u(t), v(t))$ ainda é uma solução de (3.64). Da mesma maneira, se $u = 0$, $(\rho(t), 0, v(t))$ é uma solução de (3.64). Observe ainda que as trajetórias de $(0, u(t), v(t))$ e $(\rho(t), 0, v(t))$ estão inteiramente contidas nos planos uv e ρv , respectivamente. Ou seja, $\rho = 0$ e $u = 0$ são planos invariantes do sistema (3.64). O mesmo não acontece no caso $v = 0$, basta observar a última equação do sistema (3.64).

Queremos agora analisar os pontos fixos do sistema (3.64). Sendo assim, igualamos o lado direito das equações de (3.64) a zero e obtemos os seguintes pontos fixos

$$\begin{aligned} x_{00} &= (0, 0, 0) \\ x_{10} &= \left(0, 0, \sqrt{\frac{4}{3}}\right) \\ x_{20} &= \left(0, 0, -\sqrt{\frac{4}{3}}\right) \\ x_1 &= \left(\frac{2\beta\kappa}{\gamma_1\gamma_2} \left(1 - \frac{3\kappa^2}{4\gamma_2^2}\right), 0, \frac{-\kappa}{\gamma_2}\right) \end{aligned} \quad (3.65)$$

e

$$x_2 = \left(\frac{16\gamma_2}{3\gamma_1} \left(1 - 2\frac{\kappa}{\beta}\right), \pm\sqrt{\frac{4}{3} \left(1 - \frac{3\kappa^2}{4\gamma_2^2}\right) - \frac{8\kappa}{3\beta}}, \frac{-\kappa}{\gamma_2}\right) \quad (3.66)$$

Observe que os pontos x_{00} , x_{10} e x_{20} estão no plano invariante $\rho = 0$ e que x_{00} , x_{10} , x_{20} e x_1 estão no plano invariante $u = 0$. Assim, analisaremos os pontos fixos nos planos invariantes onde estão e o ponto x_2 não será analisado nesta dissertação.

Primeiramente vamos estudar a dinâmica de (3.64) no plano invariante $\rho = 0$. Neste plano o sistema se reduz a

$$\begin{cases} \dot{u} = \varepsilon \left(\frac{-3\beta u(v^2+u^2)}{8} + \gamma_2 u v + \frac{\beta u}{2}\right) \\ \dot{v} = \varepsilon \left(-\frac{3\beta v(v^2+u^2)}{8} + \frac{\beta v}{2} - \gamma_2 u^2\right) \end{cases} \quad (3.67)$$

que possui matriz jacobiana dada por

$$J_1 = \begin{bmatrix} \frac{-3\beta\varepsilon(v^2+u^2)}{8} + \varepsilon\gamma_2 v - \frac{3\beta\varepsilon u^2}{4} + \frac{\beta\varepsilon}{2} & \varepsilon\gamma_2 u - \frac{3\beta\varepsilon uv}{4} \\ -\frac{3\beta\varepsilon uv}{4} - 2\varepsilon\gamma_2 u & -\frac{3\beta\varepsilon(v^2+u^2)}{8} - \frac{3\beta\varepsilon v^2}{4} + \frac{\beta\varepsilon}{2} \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Antes de analisarmos os autovalores da matriz J_1 aplicada aos pontos críticos de (3.64) que pertencem ao plano invariante $\rho = 0$, queremos provar a seguinte proposição:

Proposição 3.1 Se $u(0) = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$, $v(0)=0$, então a respectiva solução de (3.67) é dada por

$$u(t) = \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sech} \left(\frac{2\gamma_2}{\sqrt{3}} t \right)$$

$$v(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tgh} \left(\frac{2\gamma_2}{\sqrt{3}} t \right)$$

Demonstração: Vamos considerar somente as condições iniciais $u(0) = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $v(0) = 0$. Vamos procurar soluções de (3.67), caso existam, tais que $u^2 + v^2 = 4/3$. Por causa disto, vamos tentar achar soluções da forma

$$u(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \cos(g(t)) \quad (3.69)$$

$$v(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sen}(g(t)) \quad (3.70)$$

Substituindo (3.69) em (3.67) obtemos, após algumas simplificações, que

$$\begin{cases} \dot{g} &= \frac{2\gamma_2}{\sqrt{3}} \cos(g) \\ g(0) &= 0 \end{cases} \quad (3.71)$$

Como

$$\int \frac{1}{\cos(x)} dx = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \operatorname{sen}(x)}{1 - \operatorname{sen}(x)} \right) + C$$

e integrando (3.71) usando a separação das variáveis obtemos

$$\frac{1}{2} \log \left(\frac{1 + \operatorname{sen}(x)}{1 - \operatorname{sen}(x)} \right) = \frac{2\gamma_2}{\sqrt{3}} t$$

ou

$$\operatorname{sen}(g(t)) = \frac{e^{\frac{4\gamma_2}{\sqrt{3}} t} - 1}{1 + e^{\frac{4\gamma_2}{\sqrt{3}} t}} = \frac{e^{\frac{2\gamma_2}{\sqrt{3}} t} - e^{-\frac{2\gamma_2}{\sqrt{3}} t}}{e^{\frac{2\gamma_2}{\sqrt{3}} t} + e^{-\frac{2\gamma_2}{\sqrt{3}} t}} = \operatorname{tgh} \left(\frac{2\gamma_2}{\sqrt{3}} t \right) \quad (3.72)$$

Portanto, $v(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tgh} \left(\frac{2\gamma_2}{\sqrt{3}} t \right)$. Como $u(0) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ e $u^2 + v^2 = 4/3$ temos que

$$\begin{aligned} u(t) &= \sqrt{\frac{4}{3} - v^2} = \sqrt{\frac{4}{3} - v^2} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{1 - \operatorname{tgh}^2 \left(\frac{2\gamma_2}{\sqrt{3}} t \right)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\operatorname{sech}^2 \left(\frac{2\gamma_2}{\sqrt{3}} t \right)} \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sech} \left(\frac{2\gamma_2}{\sqrt{3}} t \right) \end{aligned}$$

Segue assim que

$$(u(t), v(t)) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{sech} \left(\frac{2\gamma_2}{\sqrt{3}} t \right), \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{tgh} \left(\frac{2\gamma_2}{\sqrt{3}} t \right) \right)$$

é uma solução de (3.67). Notemos que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (u(t), v(t)) = \left(0, \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \right), \quad (3.73)$$

além disso, como já mostramos em (3.39), $\left(0, \pm \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$ são pontos de equilíbrio de (3.67). Assim, a órbita $(u(t), v(t))$, por meio de (3.73), conecta assintoticamente os pontos de equilíbrio $\left(0, -\frac{2}{\sqrt{3}} \right)$ e $\left(0, \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$. Denominaremos tal órbita de órbita heteroclínica. As mesmas considerações são válidas para $(-u(t), v(t))$ \square

Agora vamos analisar os autovalores da matriz jacobiana J_1 aplicada aos pontos críticos pertencentes ao plano invariante $\rho = 0$:

1. para $(0, 0)$ obtemos a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{\beta\epsilon}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\beta\epsilon}{2} \end{pmatrix}$$

que possui autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = \beta/2$. Autovalores iguais com parte real positiva nos dão um foco instável.

2. para $\left(0, \sqrt{\frac{4}{3}} \right)$ encontramos a matriz

$$\begin{pmatrix} \frac{2\epsilon\gamma_2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\beta\epsilon \end{pmatrix}$$

que possui os autovalores $\gamma_2\sqrt{\frac{4}{3}}$ e $-\beta$. Autovalores reais com sinais contrários nos levam a um ponto de sela.

3. em $\left(0, -\sqrt{\frac{4}{3}} \right)$ obtemos a matriz

$$\begin{pmatrix} -\frac{2\epsilon\gamma_2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & -\beta\epsilon \end{pmatrix}$$

cujos autovalores são $-\gamma_2\sqrt{\frac{4}{3}}$ e $-\beta$. Autovalores reais negativos, obtemos um nó estável.

4. pela Proposição 3.1 existe uma solução de (3.64) inteiramente contida no plano invariante $\rho = 0$ tal que $w = u^2 + v^2 = \frac{4}{3}$. Ou seja, existe uma curva que conecta os pontos $\left(0, \sqrt{\frac{4}{3}} \right)$ e $\left(0, -\sqrt{\frac{4}{3}} \right)$. Uma órbita que comece em um ponto fora da curva nunca a cruzará, isto é garantido pelo teorema da existência e unicidade de soluções. Esta curva, alguns autores também denominam de conexão sela-atratora (saddle-sink connection). A Figura 3.6 ilustra o plano de fase no plano uv .

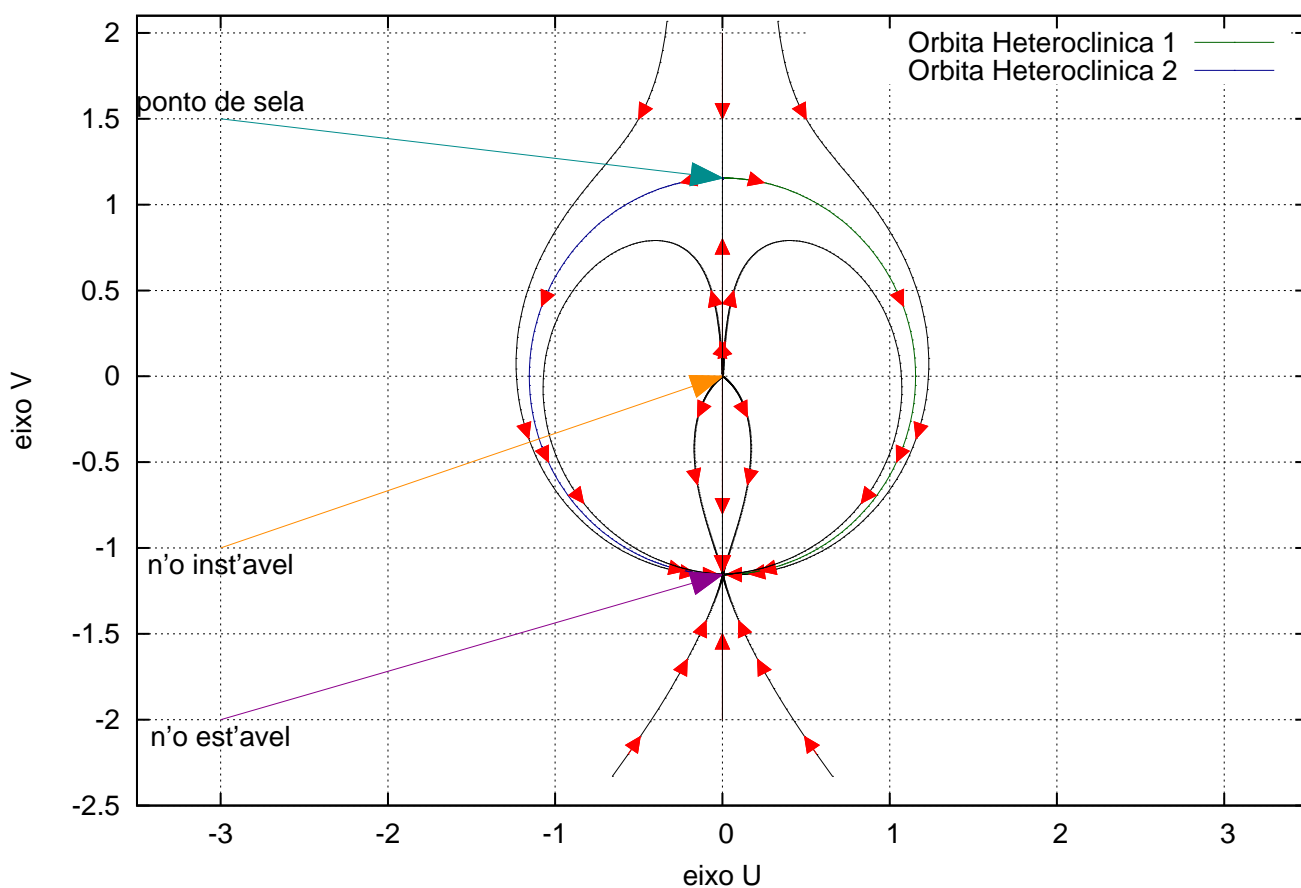


Figura 3.6: plano de fase $\rho = 0$

No plano invariante $u = 0$ estão os pontos estacionários x_{00}, x_{10}, x_{20} e x_1 e o sistema correspondente é dado por

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \varepsilon(-\rho\gamma_2 v - \rho\kappa) \\ \dot{v} = \varepsilon\left(-\frac{3\beta v(v^2)}{8} + \frac{\beta v}{2} + \frac{\rho\gamma_1}{4}\right) \end{cases} \quad (3.74)$$

que possui pontos estacionários $(0, 0)$, $(0, \sqrt{\frac{4}{3}})$, $(0, -\sqrt{\frac{4}{3}})$ e $\left(\frac{2\beta\kappa}{\gamma_1\gamma_2}\left(1 - \frac{3\kappa^2}{4\gamma_2^2}\right), \frac{-\kappa}{\gamma_2}\right)$.
A matriz jacobiana relacionada ao sistema 3.74 é igual a

$$J_2 = \begin{bmatrix} -\varepsilon \gamma_2 v - \varepsilon \kappa & -\varepsilon \rho \gamma_2 \\ \frac{\varepsilon \gamma_1}{4} & \frac{\beta \varepsilon}{2} - \frac{9 \beta \varepsilon v^2}{8} \end{bmatrix}. \quad (3.75)$$

Agora, fazendo uma análise similar à feita para o plano invariante $\rho = 0$, iremos analisar os autovalores da matriz jacobiana aplicada em cada ponto estacionário do sistema 3.74. Antes porém, vamos enunciar um lema para auxiliar nossa análise. Uma demonstração para este lema pode ser encontrada na página 130 de [1].

Lema 3.1 *Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ os autovalores com (multiplicidade) de um operador $T \in L(\mathbb{R}^n)$. Então,*

1. $Tr(T) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$
2. $Det(T) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n$

Agora, para o ponto estacionário $(0,0)$ obtemos os autovalores reais $-\kappa$ e $\frac{\beta}{2}$, que possuem sinais opostos. Desta forma obtemos um ponto de sela instável no eixo v como representado na figura 3.7.

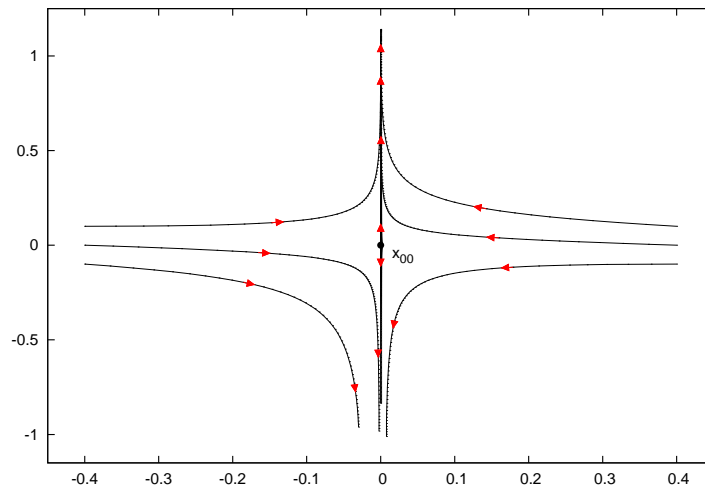


Figura 3.7: Plano de fase para $(0,0)$ no plano invariante $u=0$

No ponto estacionário $(0, \sqrt{4/3})$ encontramos os autovalores reais $-\kappa - \gamma_2 \sqrt{4/3}$ e $-\beta$ que são, ambos, negativos. Temos assim um nó estável representado graficamente na Figura 3.8.

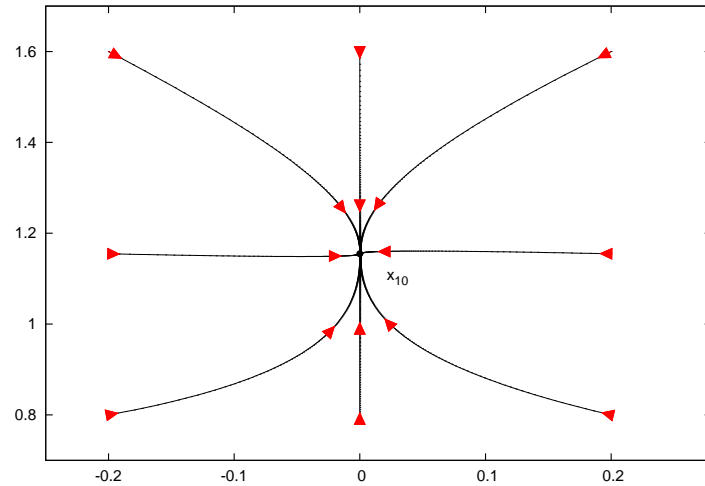


Figura 3.8: Plano de fase para $(0, \sqrt{4/3})$ no plano invariante $u = 0$

O ponto estacionário $(0, -\sqrt{4/3})$ merece uma atenção especial. Com ele encontramos os autovalores reais

$$\lambda_1 = \sqrt{4/3}\varepsilon\gamma_2 - \varepsilon\kappa, \quad \lambda_2 = -\beta\varepsilon.$$

Note que a estabilidade estará diretamente ligada ao parâmetro κ , sendo que, para os valores de κ tais que $\kappa > \gamma_2\sqrt{4/3}$ o ponto $(0, -\sqrt{4/3})$ é um nó estável (Figura 3.10) e para os valores de κ tais que $\kappa < \gamma_2\sqrt{4/3}$ o ponto $(0, -\sqrt{4/3})$ é um ponto de sela (Figura 3.9).

O último ponto estacionário $\left(\frac{2\beta\kappa}{\gamma_1\gamma_2}\left(1 - \frac{3\kappa^2}{4\gamma_2^2}\right), \frac{-\kappa}{\gamma_2}\right)$ depois de substituído na matriz jacobiana J_2 nos leva a

$$J_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\varepsilon \frac{2\beta\kappa}{\gamma_1} \left(1 - \frac{3\kappa^2}{4\gamma_2^2}\right) \\ \frac{\varepsilon\gamma_1}{4} & \frac{\beta\varepsilon}{2} - \frac{9\beta\varepsilon\kappa^2}{8\gamma_2^2} \end{bmatrix}. \quad (3.76)$$

Então, pelo lema (3.1) queremos que $Tr(J_3) < 0$ e $det(J_3) > 0$. Daí, encontramos $\kappa > \frac{2\gamma_2}{3}$. Ou seja, $\kappa = \frac{2}{3}\gamma_2$ é um ponto de bifurcação, onde o ponto fixo $\left(\frac{2\beta\kappa}{\gamma_1\gamma_2}\left(1 - \frac{3\kappa^2}{4\gamma_2^2}\right), \frac{-\kappa}{\gamma_2}\right)$ é um foco estável se $\kappa > \frac{2\gamma_2}{3}$ e se $\kappa < \frac{2\gamma_2}{3}$ então o ponto estacionário (Figura 3.12) é um foco instável (Figura 3.11).

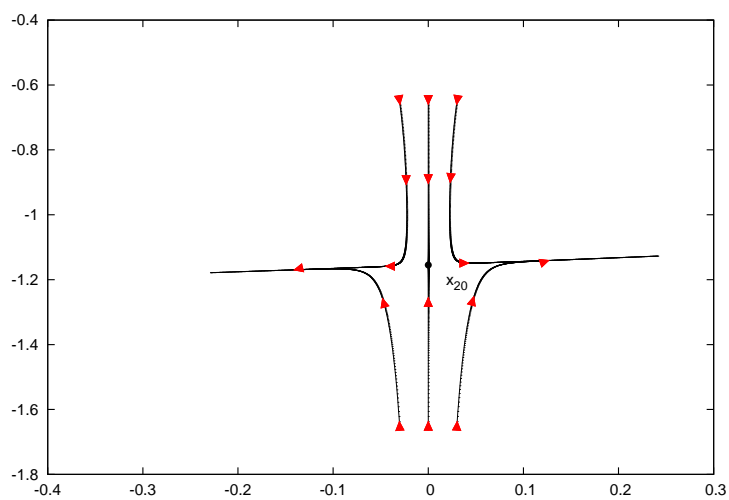


Figura 3.9: Plano de fase para $(0, -\sqrt{4/3})$ com $\kappa < \gamma_2\sqrt{4/3}$ no plano invariante $u = 0$

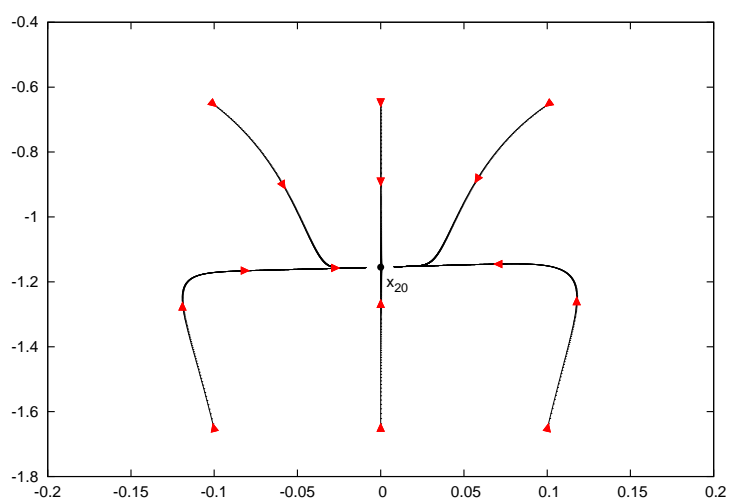


Figura 3.10: Plano de fase para $(0, \sqrt{4/3})$ com $\kappa > \gamma_2\sqrt{4/3}$ no plano invariante $u = 0$

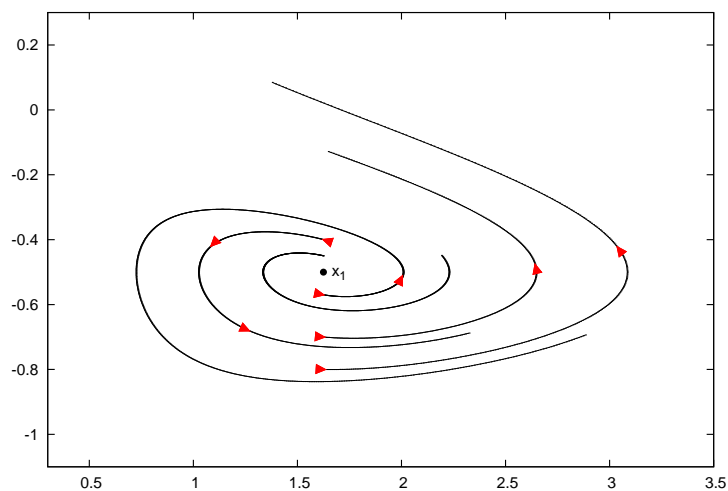


Figura 3.11: Plano de fase para $\left(\frac{2\beta\kappa}{\gamma_1\gamma_2}\left(1 - \frac{3\kappa^2}{4\gamma_2^2}\right), \frac{-\kappa}{\gamma_2}\right)$ com $\kappa < \frac{2\gamma_2}{3}$ no plano invariante $u = 0$

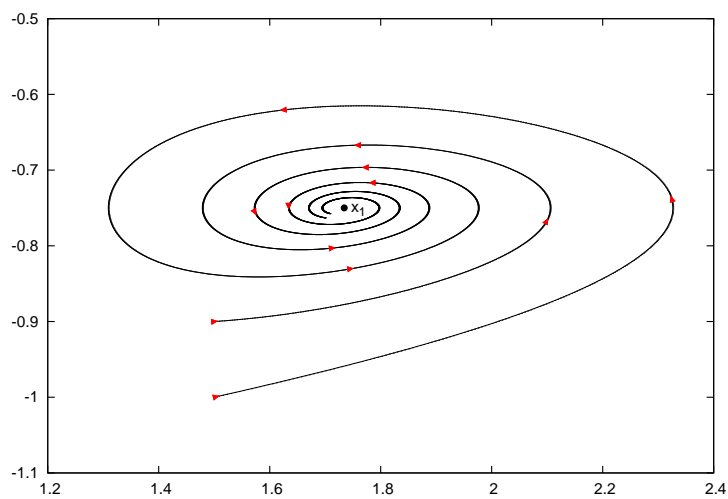


Figura 3.12: Plano de fase para $\left(\frac{2\beta\kappa}{\gamma_1\gamma_2}\left(1 - \frac{3\kappa^2}{4\gamma_2^2}\right), \frac{-\kappa}{\gamma_2}\right)$ com $\kappa > \frac{2\gamma_2}{3}$ no plano invariante $u = 0$

Conclusão

Nesta dissertação, estudamos os aspectos dinâmicos do sistema auto paramétrico auto-excitado do tipo Rayleigh (3.1).

O nosso objetivo é obter a estabilidade de algumas soluções de (3.1) condicionada aos parâmetros $\beta, \gamma_1, \gamma_2$ e κ . Fazendo uso do Teorema 1.9 mostramos que a solução semi-trivial é instável se $2\sqrt{3}\pi\sqrt{\gamma_2^2 - 3\sigma^2} - 3\pi\kappa > 0$ e assintoticamente estável se $2\sqrt{3}\pi\sqrt{\gamma_2^2 - 3\sigma^2} - 3\pi\kappa < 0$. O primeiro resultado mostra a existência da ressonância auto-paramétrica. Seria interessante um estudo para quando $\gamma_2^2 - 3\sigma^2 \leq 0$ para os parâmetros γ_2 e σ .

Quanto às soluções não-triviais, fizemos estudos nos planos invariantes $\rho = 0$ e $u = 0$. Nestes planos encontramos os pontos de equilíbrio x_{00}, x_{10}, x_{20} e x_1 .

No plano invariante $\rho = 0$, x_{00} é um foco instável, x_{10} é um ponto de sela e x_{20} é um nó estável. Pela Proposição 3.1 existe uma órbita heteroclínica contida em um círculo de raio $\sqrt{\frac{4}{3}}$. No plano invariante $u = 0$ o ponto x_{00} é um ponto de sela instável e x_{10} é um nó estável. A estabilidade dos pontos x_{20} e x_1 está condicionada aos parâmetros κ e γ_2 . O ponto x_{20} será um nó estável se $\kappa > \gamma_2\sqrt{4/3}$ ou um ponto de sela se $\kappa < \gamma_2\sqrt{4/3}$. Já o ponto x_1 será um foco estável se $\kappa > \frac{2\gamma_2}{3}$ ou um foco instável se $\kappa < \frac{2\gamma_2}{3}$.

Enfim, o estudo da estabilidade e bifurcação de (3.1) produz resultados relevantes para solucionar problemas de mecânica. Não analisamos qualitativamente o ponto de equilíbrio x_2 que não seria adequado para uma dissertação de mestrado, mas sua análise leva a resultados interessantes como pode ser visto em [5].

Referências Bibliográficas

- [1] HIRSCH, Morris e SMALE, Stephen. *Differential Equations, Dynamic Systems and Algebra Linear*. ACADEMIC PRESS, INC. 1970, San Diego, California.
- [2] VERHULST, Ferdinand. *Nonlinear Differential Equations and Dynamic Systems*, Second Edition, Springer, 1985.
- [3] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise, volume 2*, Nona Edição, IMPA, 2006.
- [4] L. S. Pontriagin. *Ordinary Differential Equations*. Pergamon Press, London-Paris 1962.
- [5] ABADI. *On Self-Excited Auto-Parametric Systems*. Nonlinear Dynamics 24: 147-166, 2001.
- [6] DANTAS, Márcio José Horta. *Another Classical Approach for existence, stability of Periodic Solutions and Computacion of the Period of a One-Degree nonlinear oscillator*. Preprint.
- [7] MALKIN, I. G.. *Theory Of Stability of Motion*. U. S. Atomic Energy Comission Translation, Washington, 1958.
- [8] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*. 4 ed.. Rio de Janeiro:IMPA, 2007.
- [9] VERHULST, Ferdinand e SANDERS, J. A.. *Averaging Methods in Nonlinear Dynamical Systems*, Springer, 1985.