

LAÍS BÁSSAME RODRIGUES

**Reticulados Hiperbólicos em Espaços
Quocientes Mergulhados Isometricamente em
Espaços Euclidianos**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2010

LAÍS BÁSSAME RODRIGUES

Reticulados Hiperbólicos em Espaços Quocientes Mergulhados Isometricamente em Espaços Euclidianos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.
Linha de Pesquisa: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Edson Agustini.

UBERLÂNDIA - MG
2010

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFU – MG, Brasil

R696h Rodrigues, Laís Bássame, 1984-
Reticulados hiperbólicos em espaços quocientes mergulhados
isometricamente em espaços euclidianos [manuscrito] / Laís Bássame
Rodrigues. - 2010.
74 f. il.

Orientador: Edson Agustini.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática.
Inclui bibliografia.

1. Geometria diferencial - Teses. 2. Teoria dos reticulados - Teses. I. Agustini, Edson. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 514.7



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
 Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
 Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNA: Laís Bássame Rodrigues.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 93803.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

LINHA DE PESQUISA: Geometria Diferencial.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Reticulados Hiperbólicos em Espaços Quocientes Mergulhados Isometricamente em Espaços Euclidianos.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Edson Agustini.

A dissertação foi **APROVADA**, em reunião pública, realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 26 de fevereiro de 2010, às 9:00 horas, com a seguinte Banca Examinadora:

NOME

ASSINATURA

Prof. Dr. Edson Agustini
 UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Prof^a. Dr^a. Sueli Irene Rodrigues Costa
 UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas

Prof. Dr. Jocelino Sato
 UFU - Universidade Federal de Uberlândia

Uberlândia, 26 de fevereiro de 2010.

Dedicatória

Dedico esta dissertação à minha família. Aos meus pais e irmãos por me apoiarem desde os primeiros passos. Por estarem comigo em todas as batalhas e me incentivarem a enfrentar novos desafios. Dedico também ao Professor Doutor Edson Agustini, pelo apoio e confiança, tão decisivos na minha vida acadêmica, durante os 3 anos e meio de orientação incluindo a graduação e o mestrado.

Aqueles que passam por nós, não vão sós, não nos deixam sós. Deixam um pouco de si, levam um pouco de nós. (O Pequeno Príncipe)

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus. Agradeço à CAPES pela bolsa e pelo projeto REUNI que me possibilitou aprender um pouco sobre como educar. Agradeço à Universidade Federal de Uberlândia e à Faculdade de Matemática pelo Programa de Pós-graduação em Matemática inaugurado em 2007. Agradeço ainda aos professores deste instituto pelo esforço e dedicação para que o Mestrado fosse possível.

RODRIGUES, L. B. *Reticulados Hiperbólicos em Espaços Quocientes Mergulhados Isometricamente em Espaços Euclidianos*. 2010. 73 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Nesta dissertação apresentamos um estudo de transformações de Möbius e grupos fuchsianos que servirá de base para o desenvolvimento da teoria de determinados espaços quocientes. Nesses espaços quociente tomaremos reticulados hiperbólicos geometricamente uniformes que serão mergulhados isometricamente na esfera $S^8 \subset \mathbb{R}^9$.

Palavras-chave: Reticulado, Espaço Quociente, Código Geometricamente Uniforme, Grupo Fuchsiano, Transformação de Möbius, Mergulho Isométrico.

RODRIGUES, L. B. *Hyperbolic Lattices in Quotient Spaces isometrically Embed in Euclidean Spaces*. 2010. 73 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

In this work we present a study of Möbius transformations and fuchsian groups as the basis for the development of the theory of some specific quotient spaces. In these quotient spaces we consider geometrically uniform hyperbolic lattices that will be isometrically embedded in the sphere $\mathbb{S}^8 \subset \mathbb{R}^9$.

Key-words: Lattice, Quotient Space, Geometrically Uniform Code, Fuchsian Group, Möbius Transformation, Isometric Embedding.

Sumário

Resumo	vii
Abstract	viii
Introdução	1
1 Alguns Tópicos de Geometria Hiperbólica	2
1.1 A Métrica Hiperbólica no Modelo H do Semi-plano	2
1.2 Grupos Fuchsianos no Modelo do Semi-plano	4
1.3 Geodésicas no Modelo do Semi-plano	9
1.4 Expressões para a Distância Hiperbólica em H	11
1.5 A Métrica Hiperbólica no Modelo do Disco	17
1.6 Geodésicas no Modelo do Disco	19
1.7 Expressões para a Distância Hiperbólica em U	23
1.8 Grupos Fuchsianos no Modelo do Disco	26
2 Isometrias Hiperbólicas em H	28
2.1 Alguns Teoremas Importantes	28
2.2 Classificação de Isometrias	34
3 Reticulados em Espaços Quociente	41
3.1 Buscando Reticulados Geometricamente Uniformes	41
3.2 Círculos Isométricos	45
3.3 Encontrando Geradores do Grupo Fuchsiano F_2	47
3.4 Encontrando Geradores do Grupo Fuchsiano F_1	51
4 Mergulhos Isométricos	54
5 Conclusões e Perspectivas Futuras	59
Referências Bibliográficas	60
Apêndice	62

Introdução

Nosso objetivo neste trabalho foi estudar a teoria básica de transformações de Möbius e grupos fuchsianos (Capítulos 1 e 2) necessária para a geração de reticulados hiperbólicos geometricamente uniformes em espaços quociente (Capítulo 3). Os reticulados que estamos interessados podem ser obtidos como órbitas de um conjunto finito de pontos por grupos fuchsianos. Além disso, consideramos mergulhos isométricos de alguns reticulados interessantes, sob o ponto de vista da Teoria da Informação e Codificação, na esfera \mathbb{S}^8 (Capítulo 4). A distância euclidiana mínima entre pontos de um reticulado mergulhado foi calculada nos exemplos que abordamos. Tais cálculos tem por finalidade a comparação e a eficiência em uma possível utilização prática dos reticulados, uma vez que, em Teoria da Codificação, esse é um dos parâmetros de desempenho de códigos.

Nos dois primeiros capítulos, onde abordamos a teoria básica de transformações de Möbius e grupos fuchsianos, algumas das demonstrações que apresentamos são de nossa autoria, como por exemplo os três teoremas de caracterização das isometrias elípticas, hiperbólicas e parabólicas que constam do Capítulo 2. Esses capítulos foram inspirados principalmente nas referências [2] e [10].

O capítulo sobre espaços quocientes não foi baseado em algum artigo ou livro. Basicamente o que fizemos foi a formalização de espaços quocientes específicos com o objetivo de tornar geometricamente uniforme alguns reticulados interessantes do ponto de vista de modulação de sinais. Dois exemplos importantes se destacam: (1) o reticulado $16 - \text{QAM}$ (que não é geometricamente uniforme) foi “quocientado” para torná-lo geometricamente uniforme e (2) um reticulado de 16 pontos genuinamente hiperbólico (sem análogos euclidianos), que chamamos de $16 - \text{HQAM}$ que também foi “quocientado” por grupo fuchsiano para tornar-se geometricamente uniforme.

O capítulo sobre os mergulhos isométricos foi um dos mais trabalhosos em nossa dissertação. Embora tenhamos utilizado na íntegra os resultados teóricos sobre mergulhos isométricos da dissertação [16], a parte computacional dos mergulhos é muito árdua. Em especial, desenvolvemos uma interpolação polinomial interessante para cálculo de algumas integrais utilizando o software Maple. Com isso foi possível fazer várias comparações, inclusive de distância mínima. Os reticulados que foram utilizados no domínio dos mergulhos foram os do capítulo anterior.

Por fim, colocamos em um apêndice os comandos utilizados no software supracitado no que diz respeito aos mergulhos isométricos do plano hiperbólico no \mathbb{S}^8 .

Laís Bássame Rodrigues
Uberlândia-MG, 26 de fevereiro de 2010.

Capítulo 1

Alguns Tópicos de Geometria Hiperbólica

Neste capítulo apresentamos as principais definições e resultados concernentes aos modelos euclidianos de Poincaré para a Geometria Hiperbólica que serão utilizados nos capítulos posteriores. Procuramos utilizar a referência [10] com alterações em algumas demonstrações de proposições nas quais procuramos imprimir maiores detalhamentos que cremos facilitar uma primeira leitura do assunto. Nossa contribuição está destacada no texto.

1.1 A Métrica Hiperbólica no Modelo H do Semi-plano

Seja \mathbb{C} o plano complexo. Usamos as notações usuais para as partes reais e imaginárias de $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $\text{Re}(z) = x$ e $\text{Im}(z) = y$. Além disso, se $z = x_1 + iy_1$ e $w = x_2 + iy_2$ então $d(z, w) = |z - w| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Enfatizamos que como existe uma bijeção entre \mathbb{C} e \mathbb{R}^2 então poderemos escrever $z = (x, y)$ para significar que $z = x + iy$.

O principal objeto desse estudo é a parte superior do plano do plano complexo, $H = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$. Munido da métrica riemanniana

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}, \quad (1.1)$$

também chamada de métrica hiperbólica do semi-plano. Temos, assim, o modelo do semi-plano de Poincaré ou modelo de Lobachewsky para a Geometria Hiperbólica. Veremos na Seção 1.3 que os formatos das geodésicas (isto é, curvas de menor comprimento ligando dois pontos com respeito a esta métrica) são dados por semi-retas ou semi-círculos ortogonais ao eixo real $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 0\}$. Com isso, quaisquer dois pontos em H podem ser ligados por uma única geodésica e a distância entre estes dois pontos é medida ao longo desta geodésica. Contudo, como podemos observar na Figura 1, dada a geodésica l e um ponto z , há mais de uma geodésica passando por z e paralela a l , isto é, sem intersecção com l . Isto significa que a geometria em H é não-euclidiana, pois o quinto postulado dos Elementos de Euclides não se aplica aqui.

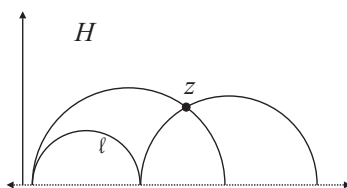


FIGURA 1: O Quinto Postulado de Euclides não vale na Geometria Hiperbólica.

Seja $I = [0, 1]$ e $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}$ um caminho diferenciável por partes, $\gamma(t) = z(t) = x(t) + iy(t) \in \mathbb{H}$ com $t \in I$. Então, o comprimento hiperbólico $h(\gamma)$ é dado por

$$h(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{|dz|}{y(t)} dt.$$

A distância hiperbólica $\rho(z, w)$ entre dois pontos $z, w \in \mathbb{H}$ é definida pela fórmula $\rho(z, w) = \inf\{h(\gamma)\}$, onde o ínfimo é tomado sobre todo γ ligando os pontos $z, w \in \mathbb{H}$.

Observação: ρ é, de fato, uma métrica em \mathbb{H} .

(1) Como $\frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} \geq 0$, então ρ é não negativa.

(2) ρ é simétrica.

De fato: seja γ uma curva qualquer ligando z a w com $\gamma(0) = z$ e $\gamma(1) = w$. Logo,

$$h(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt \text{ e } \rho(z, w) = \inf\{h(\gamma)\}.$$

Consideremos agora $\bar{\gamma}(\lambda) = \bar{x}(\lambda) + i\bar{y}(\lambda)$ tal que

$$\begin{aligned} \bar{\gamma} : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{H} \\ \lambda &\longmapsto \gamma(1 - \lambda) = x(1 - \lambda) + iy(1 - \lambda). \end{aligned}$$

Temos que $\bar{\gamma}$ liga w a z com $\bar{\gamma}(0) = \gamma(1) = w$ e $\bar{\gamma}(1) = \gamma(0) = z$. O comprimento de $\bar{\gamma}$ é dado

$$\text{por } h(\bar{\gamma}) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{d\bar{x}}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{d\lambda}\right)^2}}{\bar{y}(\lambda)} d\lambda \text{ e } \rho(w, z) = \inf\{h(\bar{\gamma})\}. \text{ Mostremos que } \rho(z, w) = \rho(w, z).$$

Fazendo $\lambda = 1 - t$ temos $\frac{d\lambda}{dt} = -1 \implies d\lambda = -dt$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{d\bar{x}}{d\lambda}(\lambda)\right)^2 + \left(\frac{d\bar{y}}{d\lambda}(\lambda)\right)^2}}{\bar{y}(\lambda)} d\lambda &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\lambda}(1 - \lambda)\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}(1 - \lambda)\right)^2}}{y(1 - \lambda)} d\lambda \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\lambda}(1 - \lambda)(-1)\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\lambda}(1 - \lambda)(-1)\right)^2}}{y(1 - \lambda)} d\lambda \\ &= \int_1^0 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}(t)\right)^2}}{y(t)} (-dt) \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}(t)\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}(t)\right)^2}}{y(t)} dt. \end{aligned}$$

Portanto,

$$h(\bar{\gamma}) = h(\gamma) \implies \inf\{h(\bar{\gamma})\} = \inf\{h(\gamma)\} \implies \rho(w, z) = \rho(z, w).$$

(3) Além disso, ρ satisfaz a desigualdade triangular $\rho(z, w) \leq \rho(z, \varepsilon) + \rho(\varepsilon, w)$.

De fato: sejam

$A = \{h(\gamma) \mid \gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H} \text{ é caminho diferenciável por partes ligando } z \text{ a } w\}$

$B = \{h(\bar{\gamma}) \mid \bar{\gamma} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H} \text{ é caminho diferenciável por partes ligando } z \text{ a } w \text{ passando por } \varepsilon\}$

Naturalmente, $B \subset A$, significando que $\inf A \leq \inf B$, ou seja, $\rho(z, w) \leq \inf B$.

Consideremos agora

$$\begin{aligned} \gamma_1 : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{H} & \text{e} & \gamma_2 : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{H} \\ \lambda &\longmapsto \gamma_1(\lambda) & & \lambda &\longmapsto \gamma_2(\lambda) \end{aligned}$$

tais que $\gamma_1(0) = z$, $\gamma_1(1) = \varepsilon$, $\gamma_2(0) = \varepsilon$ e $\gamma_2(1) = w$. Fazendo

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}: [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{H} \\ \lambda &\longmapsto \begin{cases} \bar{\gamma}_1(t) = \gamma_1(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \bar{\gamma}_2(t) = \gamma_2(2t-1), & \text{se } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Agora, $h(\bar{\gamma}) = h(\gamma_1) + h(\gamma_2)$ pois

$$\begin{aligned} h(\bar{\gamma}) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{d}{dt} \operatorname{Re}(\bar{\gamma}(t))\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} \operatorname{Im}(\bar{\gamma}(t))\right)^2}}{\operatorname{Im}(\bar{\gamma}(t))} dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\left(\frac{d}{dt} \operatorname{Re}(\bar{\gamma}_1(t))\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} \operatorname{Im}(\bar{\gamma}_1(t))\right)^2}}{\operatorname{Im}(\bar{\gamma}_1(t))} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{d}{dt} \operatorname{Re}(\bar{\gamma}_2(t))\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} \operatorname{Im}(\bar{\gamma}_2(t))\right)^2}}{\operatorname{Im}(\bar{\gamma}_2(t))} dt \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{\left(\frac{d}{dt} \operatorname{Re}(\gamma_1(2t))\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} \operatorname{Im}(\gamma_1(2t))\right)^2}}{\operatorname{Im}(\gamma_1(2t))} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{d}{dt} \operatorname{Re}(\gamma_2(2t-1))\right)^2 + \left(\frac{d}{dt} \operatorname{Im}(\gamma_2(2t-1))\right)^2}}{\operatorname{Im}(\gamma_2(2t-1))} dt \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(2\frac{d}{d\lambda} \operatorname{Re}(\gamma_1(\lambda))\right)^2 + \left(2\frac{d}{d\lambda} \operatorname{Im}(\gamma_1(\lambda))\right)^2}}{2\operatorname{Im}(\gamma_1(\lambda))} d\lambda + \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(2\frac{d}{d\alpha} \operatorname{Re}(\gamma_2(\alpha))\right)^2 + \left(2\frac{d}{d\alpha} \operatorname{Im}(\gamma_2(\alpha))\right)^2}}{2\operatorname{Im}(\gamma_2(\alpha))} d\alpha \\ &= h(\gamma_1) + h(\gamma_2). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \rho(z, w) &\leq \inf B \\ &= \inf \{h(\bar{\gamma})\} \\ &= \inf \{h(\gamma_1) + h(\gamma_2)\} = \inf \{h(\gamma_1)\} + \inf \{h(\gamma_2)\}; \quad ([12], \text{Cap.3}) \\ &= \rho(z, \varepsilon) + \rho(\varepsilon, w). \end{aligned}$$

1.2 Grupos Fuchsianos no Modelo do Semi-plano

Consideremos o grupo linear especial, denotado por $SL(2, \mathbb{R})$, composto pelas matrizes reais $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ com $\det(M) = ad - bc = 1$, no qual a operação considerada é a multiplicação usual de matrizes.

O conjunto de transformações fracionais lineares (ou transformações de Möbius)

$$\left\{ f: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C} \atop z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d} \text{ tal que } a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ e } ad - bc = 1 \right\}, \quad (1.2)$$

munido da operação de composição usual forma um grupo de tal modo que a composição de duas transformações corresponde ao produto de duas matrizes de $SL(2, \mathbb{R})$ e a inversa corresponde à matriz inversa. De fato: se $f_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$ e $f_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$, então $f_1 \circ f_2(z) = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2)z + a_1 b_2 + b_1 d_2}{(c_1 a_2 + d_1 c_2)z + c_1 b_2 + d_1 d_2}$, que corresponde ao produto $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}$. Também $f^{-1}(z) =$

$\frac{dz-b}{-cz+a}$, que corresponde à matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1}$. Além disso, a operação de composição é fechada no conjunto 1.2, pois $\det(AB) = \det(A) \det(B)$.

Quanto às propriedades de grupo:

(1) A composição é associativa: sejam $f_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$, $f_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$, $f_3(z) = \frac{a_3 z + b_3}{c_3 z + d_3}$. Mostrar que $f_1 \circ (f_2 \circ f_3) = (f_1 \circ f_2) \circ f_3$ equivale a mostrar que

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} a_3 & b_3 \\ c_3 & d_3 \end{bmatrix},$$

o que sabemos ser verdade por propriedade de matrizes.

(2) $f(z) = z$ é o elemento neutro da composição, pois dada $f_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$ temos

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}.$$

(3) Todo elemento do conjunto de Möbius é simetrizável: seja $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $ad - bc = 1$.

A matriz, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ possui inversa $\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ e portanto, $f^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$.

Cada transformação f da forma 1.2 pode ser representada por um par de matrizes $\pm M \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ pois se a matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ com $ad - bc = 1$ representa a transformação $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, então a matriz $\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{bmatrix}$ também representa f , pois $f(z) = \frac{-az-b}{-cz-d} = \frac{az+b}{cz+d}$ e $(-a)(-d) - (-b)(-c) = 1$. Então, o grupo de todas as transformações 1.2, chamado $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, é isomorfo ao grupo quociente $\text{SL}(2, \mathbb{R}) / \{\pm \text{Id}_2\}$ onde Id_2 é a matriz identidade de ordem 2 e escreveremos $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \approx \text{SL}(2, \mathbb{R}) / \{\pm \text{Id}_2\}$.

Para estabelecer o isomorfismo citado acima, vamos trabalhar um pouco mais com o grupo quociente $\text{SL}(2, \mathbb{R}) / \{\pm \text{Id}_2\}$. A relação de equivalência \sim considerada em $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ é tal que $M \sim N \iff M = N$ ou $M = -N$.

Temos que \sim é, de fato, uma relação de equivalência:

- é reflexiva pois $M = M$, $\forall M \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$;
- é simétrica pois se $M \sim N$, então $M = N$ ou $M = -N \implies N = M$ ou $N = -M \implies N \sim M$.
- é transitiva pois se $M \sim N$ e $N \sim P$, então

$$\left\{ \begin{array}{l} M = N \text{ ou } M = -N \\ e \\ N = P \text{ ou } N = -P \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} M = P \text{ ou } M = -P \\ e \\ M = -P \text{ ou } M = P \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} M = P \\ \text{ou} \\ M = -P \end{array} \right. \implies M \sim P.$$

Dessa forma, $\text{SL}(2, \mathbb{R}) / \{\pm \text{Id}_2\} = \{\overline{M} : M \in \text{SL}(2, \mathbb{R})\} = \{\{M, -M\} : M \in \text{SL}(2, \mathbb{R})\}$, sendo $\overline{M} = \{M, -M\}$ as classes de equivalência que \sim determina em $\text{SL}(2, \mathbb{R})$. A operação que torna $\text{SL}(2, \mathbb{R}) / \{\pm \text{Id}_2\}$ um grupo é tal que $\overline{M} \cdot \overline{N} = \overline{MN}$. (observemos que esta operação está bem definida pois $MN = (-M)(-N)$ e $(-M)N = M(-N) = -MN$).

Considerando em $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ a operação de composição de aplicações, mostremos que

$$\begin{aligned} \phi : \quad \text{PSL}(2, \mathbb{R}) &\longrightarrow \text{SL}(2, \mathbb{R}) / \{\pm \text{Id}_2\} \\ f(z) = \frac{az+b}{cz+d} &\longmapsto \phi(f) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, - \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right\} = \overline{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} \end{aligned}$$

é isomorfismo: se $f(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}$ e $g(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$, então

$$\phi(f \circ g) = \overline{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}} = \overline{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}} \cdot \overline{\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}} = \phi(f) \cdot \phi(g).$$

Além disso, ϕ é injetora, pois se

$$\begin{aligned} \phi(f) = \phi(g) &\implies \\ \overline{\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}} &= \overline{\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}} \implies \\ \left\{ \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, -\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} \right\} &= \left\{ \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}, -\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \right\} \implies \\ \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} &\text{ ou } \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2 & -b_2 \\ -c_2 & -d_2 \end{bmatrix} \implies \\ f(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} = g(z) &\text{ ou} \\ f(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} = \frac{-a_2 z - b_2}{-c_2 z - d_2} = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} = g(z), \forall z &\implies \\ f &= g. \end{aligned}$$

E, ϕ é sobrejetora, pois dada $\overline{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} \in \text{SL}(2, \mathbb{R}) / \{\pm \text{Id}_2\}$, então

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{-az - b}{-cz - d} \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$$

com $\phi(f) = \overline{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}}$. Portanto, ϕ é um isomorfismo.

Notemos que $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ contém todas as transformações fracionais lineares da forma $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $\Delta = ad - cb > 0$.

De fato, $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{\sqrt{\Delta}}z + \frac{b}{\sqrt{\Delta}}}{\frac{c}{\sqrt{\Delta}}z + \frac{d}{\sqrt{\Delta}}}$ e $\det \left(\begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{\Delta}} & \frac{b}{\sqrt{\Delta}} \\ \frac{c}{\sqrt{\Delta}} & \frac{d}{\sqrt{\Delta}} \end{bmatrix} \right) = 1$. Em particular, $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ contém todas as transformações da forma $f(z) = az + b$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a > 0$, pois f está associada à matriz $\begin{bmatrix} \frac{a}{\sqrt{a}} & \frac{b}{\sqrt{a}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a}} \end{bmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$. O mesmo ocorre com $f(z) = -\frac{1}{z}$ que está associada à matriz $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$.

Seja $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ matriz associada a $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Definimos sua norma por

$$\|f\| = \|M\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Seja $N \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ associada a $g \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Com a distância induzida $d(f, g) = \|M - N\|$, $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ é um *grupo topológico* e a topologia é a induzida pela norma definida acima (é a topologia do \mathbb{R}^4). Um subgrupo G de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ é discreto quando a topologia induzida de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ sobre G é discreta. Portanto, um subgrupo discreto de isometrias de \mathbb{H} corresponde a um conjunto discreto de pontos em \mathbb{R}^4 . Um subgrupo discreto de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ é chamado de fuchsiano.

Os grupos fuchsianos desempenham papel importante nos capítulos seguintes, pois serão eles que irão gerar os reticulados de pontos hiperbólicos que iremos considerar.

Teorema 1.1 $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ age em \mathbb{H} por homeomorfismos, ou seja, para cada $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$,

$$T: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \\ z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

com $ad - bc = 1$ é um homeomorfismo.

Demonstração:

Mostremos, primeiramente, que as transformações 1.2 com domínio em \mathbb{H} tem imagem em \mathbb{H} . Seja $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ e $w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Então,

$$w = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd}{|cz+d|^2}.$$

Logo, fazendo $z = x + iy$, temos

$$\begin{aligned} \text{Im}(w) &= \frac{w - \bar{w}}{2i} \\ &= \frac{ac(x^2 + y^2) + adx + adyi + bcx - bcyi + bd - (ac(x^2 + y^2) + adx - adyi + bcx + bcyi - bd)}{2i|cz+d|^2} \\ &= \frac{2adyi - 2bcyi}{2i|cz+d|^2} \\ &= \frac{\text{Im}(z)}{|cz+d|^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\text{Im}(w) = \frac{\text{Im}(z)}{|cz+d|^2}. \quad (1.3)$$

Daí, se $\text{Im}(z) > 0$, então $\text{Im}(w) > 0$, o que significa $T(\mathbb{H}) = \{T(z) : z \in \mathbb{H}\} \subset \mathbb{H}$. Mostremos agora que T é injetora: seja $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$, com $T(z_1) = T(z_2)$. Temos,

$$\begin{aligned} \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} &= \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} \implies \\ acz_1z_2 + adz_1 + bcz_2 + bd &= acz_1z_2 + adz_2 + bcz_1 + bd \implies \\ (ad - bc)z_1 &= (ad - bc)z_2 \implies \\ z_1 &= z_2. \end{aligned}$$

Mostremos que T é sobrejetora: para todo elemento $z \in \mathbb{H}$ temos que existe $\frac{dz-b}{-cz+a} \in \mathbb{H}$ tal que

$$T\left(\frac{dz-b}{-cz+a}\right) = \frac{a\left(\frac{dz-b}{-cz+a}\right) + b}{c\left(\frac{dz-b}{-cz+a}\right) + d} = \frac{adz - ab - bcz + ba}{cdz - cb - cdz + ad} = z,$$

ou seja, $\mathbb{H} \subset T(\mathbb{H})$. Como $T(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$, temos $\mathbb{H} = T(\mathbb{H})$.

Mostremos que T é contínua: se $w = T(z)$, então $\text{Im}(w) = \frac{\text{Im}(z)}{|cz+d|^2}$ e $\text{Re}(w) = \frac{\text{Re}(z)}{|cz+d|^2}$ e, como $cz + d \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{H}$ (pois ou $c \neq 0$ ou $d \neq 0$), então $\text{Im}(w)$ e $\text{Re}(w)$ são funções reais contínuas. Daí, T é contínua. De forma análoga

$$T^{-1}: \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H} \\ z \longmapsto \frac{dz-b}{-cz+a}$$

é contínua. Portanto, T é um homeomorfismo. \square

Uma transformação de \mathbb{H} em \mathbb{H} é chamada uma isometria quando preserva a distância hiperbólica ρ em \mathbb{H} . O conjunto de todas as isometrias de \mathbb{H} será denotado por $\text{Isom}(\mathbb{H})$.

Teorema 1.2 *Se $f \in \text{Isom}(\mathbf{H})$, então f é uma bijeção e $f^{-1} \in \text{Isom}(\mathbf{H})$.*

Demonstração:

Quanto à injeção: se $f \in \text{Isom}(\mathbf{H})$ e $f(z_1) = f(z_2)$, então $\rho(f(z_1), f(z_2)) = \rho(z_1, z_2) = 0$, o que implica em $z_1 = z_2$, ou seja, f é injetora.

Quanto à sobrejeção:

(1) $f \in \text{Isom}(\mathbf{H})$ leva geodésica em geodésica sobrejetivamente.

De fato, seja γ uma geodésica em \mathbf{H} e $z_1, z_2 \in \gamma$ distintos. Sejam $z'_1 = f(z_1)$ e $z'_2 = f(z_2)$. Como $z_1 \neq z_2$ temos $z'_1 \neq z'_2$ e, portanto, existe uma única geodésica γ' passando por z'_1 e z'_2 . Seja $z \in \gamma$ distinto de z_1 e z_2 . Logo, dentre os três pontos: z, z_1 ou z_2 , um está entre os outros dois. Digamos que seja z (os outros dois casos são tratados de modo análogo). Tomemos $z' = f(z)$. Assim, $\rho(z_1, z) + \rho(z, z_2) = \rho(z_1, z_2)$ e, como f é isometria, $\rho(z'_1, z') + \rho(z', z'_2) = \rho(z'_1, z'_2)$, o que significa que z' está em γ' , ou seja, a restrição de f a γ está em γ' .

Chamemos f restrita a γ de $f_\gamma : \gamma \rightarrow \gamma'$ e mostremos que f_γ é uma sobrejeção. De fato, seja $w' \in \gamma'$ e consideremos $d = \rho(w', z')$. Se $d = 0$, então $w' = z'$ e temos a existência de $z \in \gamma$ tal que $f(z) = w'$. Se $d \neq 0$, então temos dois pontos distintos em γ à distância d de z . Chamemos esses pontos de w_1 e w_2 e suas imagens $w'_1 = f(w_1)$ e $w'_2 = f(w_2)$. Assim, $d = \rho(w_1, z) = \rho(w_2, z) = \rho(w'_1, z') = \rho(w'_2, z')$, ou seja, w'_1 e w'_2 são distintos em γ' (pois f é injetora) e estão à distância d de z' . Como w' também está à distância d de z' e são apenas dois os pontos com essa propriedade em γ' , concluímos que $w' = w'_1$ ou $w' = w'_2$, ou seja, que $f(w_1) = w'$ ou $f(w_2) = w'$, como queríamos.

(2) $f \in \text{Isom}(\mathbf{H})$ transforma geodésicas perpendiculares em geodésicas perpendiculares.

De fato, sejam $\gamma \perp \sigma$ geodésicas perpendiculares sendo $\{a\} = \gamma \cap \sigma$. Tomemos $b_1 \in \gamma$ e $c \in \sigma$ distintos de a e $b_2 \in \gamma$ distinto de b_1 de tal modo que $\rho(b_1, a) = \rho(a, b_2)$. Desta forma, o triângulo de vértices c, b_1 e b_2 é isósceles e σ é a geodésica mediatriz do segmento de extremos b_1 e b_2 . Tomemos as imagens $a' = f(a)$, $b'_1 = f(b_1)$, $b'_2 = f(b_2)$, $\gamma' = f(\gamma)$ e $\sigma' = f(\sigma)$. Como f é isometria e leva geodésicas em geodésicas, temos que o triângulo de vértices c', b'_1 e b'_2 é isósceles e σ' é a geodésica mediatriz do segmento de extremos b'_1 e b'_2 . Como γ' é a única geodésica que passa por b'_1 e b'_2 temos $\gamma' \perp \sigma'$, como queríamos.

(3) Seja $d' \in \mathbf{H}$. Mostremos que existe $d \in \mathbf{H}$ tal que $f(d) = d'$. Para tanto, tomemos $\gamma \subset \mathbf{H}$ uma geodésica e $\gamma' = f(\gamma)$. Se $d' \in \gamma'$ temos a existência de $d \in \gamma$ tal que $f(d) = d'$ pois f leva geodésica em geodésica. Se $d' \notin \gamma'$, seja $\sigma' \subset \mathbf{H}$ geodésica perpendicular a γ' passando por d' e chamemos de e' a intersecção de γ' com σ' . Como $e' \in \gamma'$ temos a existência de $e \in \gamma$ tal que $f(e) = e'$. Tomemos a geodésica σ perpendicular a γ passando por e . Como f transforma geodésicas perpendiculares em geodésicas perpendiculares temos, necessariamente que $f(\sigma) = \sigma'$. Logo, existe $d \in \sigma$ tal que $f(d) = d'$, como queríamos.

Logo, f é uma bijeção e, portanto, tem inversa f^{-1} em \mathbf{H} que é isometria. De fato: se $z, w \in \mathbf{H}$, temos $\rho(f^{-1}(z), f^{-1}(w)) = \rho(f(f^{-1}(z)), f(f^{-1}(w))) = \rho(z, w)$. \square

Com a operação de composição, $\text{Isom}(\mathbf{H})$ forma um grupo. De fato, a operação de composição é fechada em $\text{Isom}(\mathbf{H})$ pois se f e g são isometrias, então $f \circ g$ é uma isometria: sejam $z, w \in \mathbf{H}$, então $\rho(f(g(z)), f(g(w))) = \rho(g(z), g(w)) = \rho(z, w)$. Quanto às propriedades de grupo, seguem trivialmente, bastando lembrar que o elemento neutro é a identidade $f(z) = z$.

Abaixo segue o principal motivo de nosso interesse por transformações de Möbius.

Teorema 1.3 $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) \subset \text{Isom}(\mathbb{H})$.

Demonstração:

Pelo Teorema 1.1 toda transformação em $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ é um homeomorfismo de \mathbb{H} em \mathbb{H} . Temos que mostrar que, se $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}$ é um caminho diferenciável por partes em \mathbb{H} , então para qualquer $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ temos $h(T(\gamma)) = h(\gamma)$. Suponha que, $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}$ é dado por $z(t) = (x(t), y(t))$ e $w(t) = T(z(t)) = \frac{az(t)+b}{cz(t)+d} = u(t) + iv(t)$. Temos

$$\frac{dw}{dz} = \frac{a(cz+d) - (az+b)c}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2} \quad (1.4)$$

Por 1.3 $\text{Im}(w) = v = \frac{\text{Im}(z)}{|cz+d|^2} = \frac{y}{|cz+d|^2}$, e daí, $\left| \frac{dw}{dz} \right| = \frac{1}{|cz+d|^2} = \frac{v}{y}$. Então,

$$h(T(\gamma)) = \int_0^1 \frac{\left| \frac{dw}{dt} \right|}{v(t)} dt = \int_0^1 \frac{\left| \frac{dw}{dz} \frac{dz}{dt} \right|}{v(t)} dt = \int_0^1 \frac{\frac{v(t)}{y(t)} \left| \frac{dz}{dt} \right|}{v(t)} dt = \int_0^1 \frac{\left| \frac{dz}{dt} \right|}{y(t)} dt = h(\gamma),$$

como queríamos. \square

1.3 Geodésicas no Modelo do Semi-plano

Nosso objetivo nesta seção é fazer um estudo acerca do formato euclidiano das geodésicas no modelo do Semi-plano. Para tanto, começamos com um lema bastante interessante do ponto de vista geométrico: é sempre possível mapear uma geodésica em uma semi-reta euclidiana por meio de uma transformação de Möbius.

Lema 1.1 *Sejam $l \subset \mathbb{H}$ um semi-círculo ou semi-reta ortogonal ao eixo real \mathbb{R} e $\alpha \in \mathbb{R}$ um ponto que seria de intersecção de l com \mathbb{R} . Então, existe $\beta \in \mathbb{R}$ tal que a transformação $T(z) = -\frac{1}{z-\alpha} + \beta \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ mapeia l no semi-eixo imaginário de \mathbb{H} .*

Demonstração:

Primeiramente, $T(z) = -\frac{1}{z-\alpha} + \beta = \frac{-1+\beta z-\alpha\beta}{z-\alpha} = \frac{\beta z+(-1-\alpha\beta)}{z-\alpha}$ e $\det \begin{bmatrix} \beta & -1-\alpha\beta \\ 1 & -\alpha \end{bmatrix} = -\beta\alpha - (-1-\alpha\beta) = 1$. Logo, $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

(1) Se l é uma semi-reta ortogonal ao eixo real \mathbb{R} , em $\alpha \in \mathbb{R}$, então tomemos $\beta = 0$ na expressão acima. Assim, uma parametrização para l será dada por $z = z(y) = \alpha + iy$, $y > 0$, e daí,

$$\begin{aligned} T(z) &= -\frac{1}{z-\alpha} = -\frac{1}{iy} = \frac{i}{y}; \text{ (a parte real da imagem é nula)} \\ \lim_{z \rightarrow \alpha} T(z) &= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{i}{y} = +\infty \\ \lim_{z \rightarrow +\infty} T(z) &= \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{i}{y} = 0 \end{aligned}$$

Logo, T leva l no semi-eixo imaginário de \mathbb{H} .

(2) Seja, agora, l um semi-círculo ortogonal ao eixo real \mathbb{R} , conforme Figura 2.

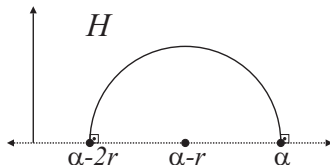


FIGURA 2: Semi-círculo em \mathbb{H} .

Consideremos $T(z) = -\frac{1}{z-\alpha} - \frac{1}{2r}$. Daí,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(T(z)) &= \operatorname{Re}\left(-\frac{1}{(x-\alpha) + iy} - \frac{1}{2r}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{-(x-\alpha) + iy}{(x-\alpha)^2 + y^2} - \frac{1}{2r}\right) \\ &= \frac{\alpha-x}{(x-\alpha)^2 + y^2} - \frac{1}{2r} \\ &= \frac{\alpha-x}{2r(\alpha-x)} - \frac{1}{2r}; \quad (*) \\ &= 0, \end{aligned}$$

sendo que a justificativa em (*) é dada por

$$\begin{aligned} |z - (\alpha - r)| = r &\implies \\ (x + r - \alpha)^2 + y^2 = r^2 &\implies \\ x^2 + 2rx - 2\alpha x - 2\alpha r + \alpha^2 + y^2 = 0 &\implies \\ (x - \alpha)^2 + y^2 = 2r(\alpha - x). \end{aligned}$$

Agora, $\lim_{z \rightarrow \alpha} T(z) = \lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ y \rightarrow 0}} \frac{yi}{2r(\alpha-x)} = \infty$ e $\lim_{z \rightarrow \alpha-2r} T(z) = \lim_{\substack{x \rightarrow \alpha-2r \\ y \rightarrow 0}} \frac{yi}{2r(\alpha-x)} = 0$. Portanto, T leva l no eixo imaginário. \square

Teorema 1.4 *As geodésicas em H são os semi-círculos e as semi-retas ortogonais ao eixo real \mathbb{R} , bordo de H .*

Demonstração:

Seja z_1 e z_2 dois pontos em H . Suponha primeiro que $z_1 = ia$ e $z_2 = ib$ ($b > a$). Se $\gamma : I \rightarrow H$ é um caminho diferenciável por partes unindo ia e ib , com $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, então

$$h(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{\left|\frac{dy}{dt}\right|}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{dy}{y(t)} dt \stackrel{(*)}{=} \int_a^b \frac{dy}{y} = \ln(b) - \ln(a) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

sendo que a justificativa em (*) é dada por

$$y(t) = y \implies \frac{dy(t)}{dt} \cdot dt = dy \text{ e } y(0) = a, y(1) = b.$$

Mas $\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ é o comprimento hiperbólico do segmento do eixo imaginário unindo ia e ib . De fato, parametrizando esse segmento, temos $y(t) = (1-t)a + tb$, $t \in [0, 1]$, e

$$x(t) = 0 \implies h(\gamma) = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{b-a}{(1-t)a + tb} dt = \int_a^b \frac{ds}{s} = \ln\left(\frac{b}{a}\right),$$

daí, o segmento geodésico unindo ia e ib é o segmento euclidiano do eixo imaginário que os une. Para z_1 e z_2 arbitrários em H seja l o único semi-circunferência ou semi-reta ortogonal ao eixo real \mathbb{R} passando por esses pontos. Pelo Lema 1.1, existe uma transformação T em $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})$

que leva l no eixo imaginário. Como, pelo Teorema 1.3, T é isometria, então $h(l) = h(T(l))$ e daí, o segmento geodésico unindo z_1 a z_2 é o segmento de l que os une. \square

Observações:

- (1) Da geometria euclidiana, dados dois pontos em H , existe um único semi-círculo ou semi-reta em H , ortogonal ao bordo \mathbb{R} de H , passando pelos pontos dados. Como era de se esperar, esse fato e o teorema acima estão de acordo com um axioma da Geometria Hiperbólica: por dois pontos quaisquer em H passa uma única geodésica.
- (2) A demonstração do teorema acima indica, como era de se esperar, que a distância entre dois pontos z e w em H é o comprimento hiperbólico do único segmento geodésico que os liga.

1.4 Expressões para a Distância Hiperbólica em H

É útil em muitos casos estender o plano complexo \mathbb{C} com a introdução do símbolo ∞ para representar o infinito; $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. A razão-cruzada de pontos distintos $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \overline{\mathbb{C}}$ é definida pela fórmula

$$(z_1, z_2; z_3, z_4) = \frac{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_4 - z_1)}.$$

Além disso, também é útil considerar a compactificação de H , ou seja, $\overline{H} = H \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Os pontos de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ são chamados de pontos ideais de H , enquanto que os pontos de H são chamados de pontos ordinários. Também é útil estender as transformações de Möbius $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ a \overline{H} definindo:

$$\begin{aligned} T(\infty) &= \infty, \text{ no caso } c = 0; \\ T(\infty) &= \frac{a}{c}, \text{ no caso } c \neq 0; \\ T\left(-\frac{d}{c}\right) &= \infty, \text{ no caso } c \neq 0; \\ T(z) &= \frac{az+b}{cz+d} \text{ nos demais pontos de } \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Teorema 1.5 *Sejam $z, w \in H$ ($z \neq w$) e seja a geodésica unindo z e w que tem pontos finais z^*, w^* em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ escolhidos de forma que z fique entre z^* e w (Figura 4). Então, $\rho(z, w) = \ln(w, z^*; z, w^*)$.*

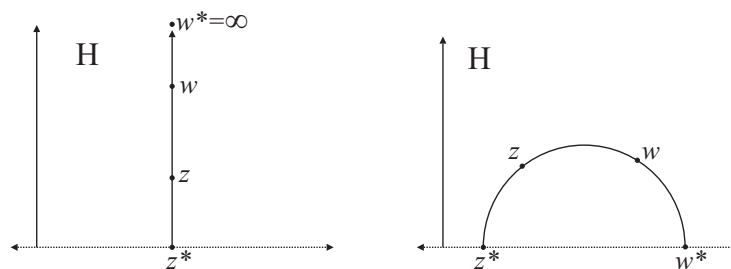


FIGURA 4: Razão Cruzada.

Demonstração:

Pelo Lema 1.1, existe $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ que leva a geodésica que passa por z e w no eixo imaginário. Aplicando as transformações

$$T_1: H \longrightarrow H \quad \text{e} \quad T_2: H \longrightarrow H \\ \xi \longmapsto k\xi \quad \quad \quad \xi \longmapsto -\frac{1}{\xi}$$

com $k > 0$, se necessário, podemos assumir que existe $\overline{T} \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ tal que $\overline{T}(z^*) = 0$, $\overline{T}(w^*) = \infty$ e $\overline{T}(z) = i$, pois como $T(\xi) = \frac{y'i}{2r(\alpha-x)}$ com $\xi = x' + iy'$, se $T(z^*) = 0$, $T(w^*) = \infty$

e $z = x + iy$. Então, tomando $k = \frac{2r(\alpha-x)}{y}$ teríamos

$$\bar{T}(z) = T_1(T(z)) = kT(z) = \frac{2r(\alpha-x)}{y} \frac{yi}{2r(\alpha-x)} = i.$$

Caso $T(z^*) = +\infty$ e $T(w^*) = 0$, fazendo $w^* = x^* + iy^*$ então

$$\begin{aligned} T_2(T(w^*)) &= \lim_{T(w^*) \rightarrow 0} \frac{1}{T(w^*)} \\ &= \lim_{\frac{y^*}{2r(\alpha-x^*)} \rightarrow 0} \frac{-2r(\alpha-x^*)i}{iy^*} \frac{i}{i} \\ &= \lim_{\frac{y^*}{2r(\alpha-x^*)} \rightarrow 0} \frac{2r(\alpha-x^*)i}{y^*} = +\infty, \text{ pois } \alpha \geq x^*. \end{aligned}$$

Agora, $T_2(T(z^*)) = \lim_{T(z^*) \rightarrow +\infty} -\frac{1}{T(z^*)} = 0$. Daí, se $T_1(\xi) = k\xi$, basta tomarmos $k = \frac{y}{2r(\alpha-x)}$ onde $z = x + iy$ e, portanto,

$$\bar{T}(z) = T_1(T_2(T(z))) = T_1\left(T_2\left(\frac{yi}{2r(\alpha-x)}\right)\right) = T_1\left(\frac{2r(\alpha-x)i}{y}\right) = \frac{y}{2r(\alpha-x)} \frac{2r(\alpha-x)i}{y} = i.$$

A partir daí, como assumimos que z está entre z^* e w então existe um $s > 1$ tal que $\bar{T}(w) = si$ e, pelo resultado na demonstração do Teorema 1.4, $\rho(z, w) = \rho(\bar{T}(z), \bar{T}(w)) \ln\left(\frac{si}{i}\right) = \ln s$. Mas, $(si, 0; i, \infty) = \frac{(si-0)(i-\infty)}{(0-i)(\infty-si)} = s$.

Mostremos que $(z_1, z_2; z_3, z_4) = (T(z_1), T(z_2); T(z_3), T(z_4))$. Seja $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $ad - bc = 1$. Observemos primeiro que

$$\begin{aligned} T(z) - T(w) &= \frac{(az+b)(cw+d) - (aw+b)(cz+d)}{c^2zw + cdz + cdw + d^2} \\ &= \frac{aczw + adz + bcw + bd - acwz - adw - bcz - bd}{c^2zw + cdz + cdw + d^2} \\ &= \frac{ad(z-w) - bc(z-w)}{c^2zw + cdz + cdw + d^2} \\ &= \frac{z-w}{c^2zw + cdz + cdw + d^2} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} (T(z_1), T(z_2); T(z_3), T(z_4)) &= \frac{(T(z_1) - T(z_2))(T(z_3) - T(z_4))}{(T(z_2) - T(z_3))(T(z_4) - T(z_1))} \\ &= \frac{\left(\frac{z_1-z_2}{c^2z_1z_2+cd(z_1+z_2)+d^2}\right) \left(\frac{z_3-z_4}{c^2z_3z_4+cd(z_3+z_4)+d^2}\right)}{\left(\frac{z_2-z_3}{c^2z_2z_3+cd(z_2+z_3)+d^2}\right) \left(\frac{z_4-z_1}{c^2z_4z_1+cd(z_4+z_1)+d^2}\right)} \\ &= \frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_2-z_3)(z_4-z_1)} \cdot \frac{(c^2z_2z_3+cd(z_2+z_3)+d^2)(c^2z_4z_1+cd(z_4+z_1)+d^2)}{(c^2z_1z_2+cd(z_1+z_2)+d^2)(c^2z_3z_4+cd(z_3+z_4)+d^2)} \\ &= \frac{(z_1-z_2)(z_3-z_4)}{(z_2-z_3)(z_4-z_1)} \\ &= (z_1, z_2; z_3, z_4). \end{aligned}$$

Então, $s = (si, 0; i, \infty) = (\bar{T}(w), \bar{T}(z^*); \bar{T}(z), \bar{T}(w^*)) = (w, z^*; z, w^*)$. Portanto, $\rho(z, w) = \ln(w, z^*; z, w^*)$ como queríamos demonstrar. \square

Abaixo seguem fórmulas explícitas para a distância hiperbólica em H .

Teorema 1.6 Para $z, w \in \mathbb{H}$:

- (i) $\rho(z, w) = \ln \left(\frac{|z-\bar{w}|+|z-w|}{|z-\bar{w}|-|z-w|} \right)$;
- (ii) $\cosh(\rho(z, w)) = 1 + \frac{|z-w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}$;
- (iii) $\sinh\left(\frac{1}{2}\rho(z, w)\right) = \frac{|z-w|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}}$;
- (iv) $\cosh\left(\frac{1}{2}\rho(z, w)\right) = \frac{|z-\bar{w}|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}}$;
- (v) $\tanh\left(\frac{1}{2}\rho(z, w)\right) = \left| \frac{z-w}{z-\bar{w}} \right|$.

Demonstração:

Observemos primeiro que

$$\begin{aligned} |z-\bar{w}|^2 - |z-w|^2 &= (\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(w))^2 \\ &\quad + (\operatorname{Im}(z) + \operatorname{Im}(w))^2 \\ &\quad - (\operatorname{Re}(z) - \operatorname{Re}(w))^2 \\ &\quad - (\operatorname{Im}(z) - \operatorname{Im}(w))^2 \\ &= 4\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Mostremos agora que as 5 afirmações são equivalentes:

(i) \implies (ii). Temos que:

$$\begin{aligned} \cosh(\rho(z, w)) &= \frac{1}{2} \left(e^{\rho(z, w)} + \frac{1}{e^{\rho(z, w)}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{|z-\bar{w}|+|z-w|}{|z-\bar{w}|-|z-w|} + \frac{|z-\bar{w}|-|z-w|}{|z-\bar{w}|+|z-w|} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(|z-\bar{w}|+|z-w|)^2 + (|z-\bar{w}|-|z-w|)^2}{|z-\bar{w}|^2 - |z-w|^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2|z-\bar{w}|^2 + 2|z-w|^2}{|z-\bar{w}|^2 - |z-w|^2} \right) \\ &= \frac{|z-w|^2 + 4\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w) + |z-\bar{w}|^2}{4\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)} \quad (\text{devido a 1.5}) \\ &= 1 + \frac{|z-w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)} \end{aligned}$$

(ii) \implies (i). Temos que:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{|z-w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)} = \cosh(\rho(z, w)) &= \frac{1}{2} \left(e^{\rho(z, w)} + \frac{1}{e^{\rho(z, w)}} \right) = \frac{e^{2\rho(z, w)} + 1}{2e^{\rho(z, w)}} \implies \\ e^{2\rho(z, w)} + 1 &= e^{\rho(z, w)} \left(2 + \frac{|z-w|^2}{\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)} \right) \implies \\ e^{2\rho(z, w)} - \left(2 + \frac{|z-w|^2}{\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)} \right) e^{\rho(z, w)} + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Fazendo $e^{\rho(z,w)} = x$ temos a equação do segundo grau $x^2 - \left(2 + \frac{|z-w|^2}{\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}\right)x + 1 = 0$, cujo discriminante é dado por

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{4|z-w|^2}{\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)} + \frac{|z-w|^4}{(\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w))^2} \\ &= \frac{|z-w|^2 \cdot |z-\bar{w}|^2 - |z-w|^4 + |z-w|^4}{(\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w))^2} \quad (\text{devido a 1.5}) \\ &= \frac{|z-w|^2 \cdot |z-\bar{w}|^2}{(\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w))^2}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}x &= \frac{\left(2 + \frac{|z-w|^2}{\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}\right) \pm \frac{|z-w| \cdot |z-\bar{w}|}{\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)}}{2} \\ &= 1 + \frac{|z-w|^2}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)} \pm \frac{|z-w| \cdot |z-\bar{w}|}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)} \\ &= \frac{\frac{|z-\bar{w}|^2 - |z-w|^2}{2} + |z-w|^2 \pm |z-w| |z-\bar{w}|}{2\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)} \quad (\text{devido a 1.5}) \\ &= \frac{|z-\bar{w}|^2 - |z-w|^2 + 2|z-w|^2 \pm 2|z-w| |z-\bar{w}|}{|z-\bar{w}|^2 - |z-w|^2} \quad (\text{devido a 1.5}) \\ &= \frac{(|z-\bar{w}| \pm |z-w|)^2}{(|z-\bar{w}| + |z-w|)(|z-\bar{w}| - |z-w|)}.\end{aligned}$$

Como $\rho \geq 0$ então escolheremos o sinal positivo pois, caso contrário, teríamos

$$\begin{aligned}-|z-w| &\leq |z-w| \implies \\ |z-\bar{w}| - |z-w| &\leq |z-w| + |z-\bar{w}| \implies \\ \frac{|z-\bar{w}| - |z-w|}{|z-w| + |z-\bar{w}|} &\leq 1 \implies \\ \rho(z,w) &= \ln \left(\frac{|z-\bar{w}| - |z-w|}{|z-w| + |z-\bar{w}|} \right) \leq \ln 1 = 0.\end{aligned}$$

Conclusão:

$$x = e^{\rho(z,w)} = \frac{|z-\bar{w}| + |z-w|}{|z-w| - |z-\bar{w}|} \implies \rho(z,w) = \ln \left(\frac{|z-\bar{w}| + |z-w|}{|z-w| - |z-\bar{w}|} \right).$$

(i) \implies (iii). Temos que:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{sen} \left(\frac{1}{2} \rho(z, w) \right) &= \frac{1}{2} \left(e^{\frac{1}{2} \rho(z, w)} - e^{-\frac{1}{2} \rho(z, w)} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - w| - |z - \bar{w}|}} - \sqrt{\frac{|z - \bar{w}| - |z - w|}{|z - w| + |z - \bar{w}|}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{|z - \bar{w}| + |z - w| - |z - \bar{w}| + |z - w|}{\sqrt{|z - \bar{w}|^2 - |z - w|^2}} \right) \\
 &= \frac{|z - w|}{\sqrt{4 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w)}} \quad (\text{devido a 1.5}) \\
 &= \frac{|z - w|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w)}}.
 \end{aligned}$$

(iii) \implies (iv). Temos que

$$\begin{aligned}
 \cosh^2 \left(\frac{1}{2} \rho(z, w) \right) &= \operatorname{senh}^2 \left(\frac{1}{2} \rho(z, w) \right) + 1 \\
 &= \frac{|z - w|^2 + 4 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w)}{4 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w)} \\
 &= \frac{|z - w|^2 + |z - \bar{w}|^2 - |z - w|^2}{4 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w)} \quad (\text{devido a 1.5}) \\
 &= \frac{|z - \bar{w}|^2}{4 \operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w)} \implies \\
 \cosh \left(\frac{1}{2} \rho(z, w) \right) &= \frac{|z - \bar{w}|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w)}}.
 \end{aligned}$$

$$(\text{iv}) \implies (\text{v}): \tanh \left(\frac{1}{2} \rho(z, w) \right) = \frac{\operatorname{senh} \left(\frac{1}{2} \rho(z, w) \right)}{\cosh \left(\frac{1}{2} \rho(z, w) \right)} = \frac{\frac{|z - w|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w)}}}{\frac{|z - \bar{w}|}{2\sqrt{\operatorname{Im}(z) \operatorname{Im}(w)}}} = \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|}.$$

(v) \implies (i). Temos que:

$$\begin{aligned}
 \frac{|z - w|}{|z - \bar{w}|} &= \tanh \left(\frac{1}{2} \rho(z, w) \right) \\
 &= \frac{\operatorname{senh} \left(\frac{1}{2} \rho(z, w) \right)}{\cosh \left(\frac{1}{2} \rho(z, w) \right)} \\
 &= \frac{e^{\frac{1}{2} \rho(z, w)} - e^{-\frac{1}{2} \rho(z, w)}}{e^{\frac{1}{2} \rho(z, w)} + e^{-\frac{1}{2} \rho(z, w)}} \\
 &= \frac{e^{\frac{1}{2} \rho(z, w)} - \frac{1}{e^{\frac{1}{2} \rho(z, w)}}}{e^{\frac{1}{2} \rho(z, w)} + \frac{1}{e^{\frac{1}{2} \rho(z, w)}}} \\
 &= \frac{e^{\rho(z, w)} - 1}{e^{\rho(z, w)} + 1}.
 \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
e^{\rho(z,w)} \cdot |z - \bar{w}| - |z - \bar{w}| &= e^{\rho(z,w)} \cdot |z - w| + |z - w| \implies \\
e^{\rho(z,w)} \cdot (|z - \bar{w}| - |z - w|) &= |z - \bar{w}| + |z - w| \implies \\
e^{\rho(z,w)} &= \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \implies \\
\rho(z, w) &= \ln \left(\frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} \right).
\end{aligned}$$

Agora que provamos a equivalência dos cinco itens mostremos que o item (v) se verifica. De fato, pelo Teorema 1.3, $\tanh \left(\frac{1}{2} \rho(z, w) \right) = \tanh \left(\frac{1}{2} \rho(T(z), T(w)) \right)$, $\forall T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Observemos que $\frac{|z-w|}{|z-\bar{w}|}$ também é invariante para qualquer $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ pois, se $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $ad - bc = 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{|T(z) - T(w)|}{|T(z) - \overline{T(w)}|} &= \frac{\left| \frac{az+b}{cz+d} - \frac{aw+b}{cw+d} \right|}{\left| \frac{az+b}{cz+d} - \frac{a\bar{w}+b}{c\bar{w}+d} \right|} \\
&= \frac{\left| \frac{(az+b)(cw+d) - (aw+b)(cz+d)}{(cz+d)(cw+d)} \right|}{\left| \frac{(az+b)(c\bar{w}+d) - (a\bar{w}+b)(cz+d)}{(cz+d)(c\bar{w}+d)} \right|} \\
&= \frac{\left| \frac{aczw+adz+bcw+bd-acz\bar{w}-a\bar{w}d-bcz-bd}{(cz+d)(cw+d)} \right|}{\left| \frac{acz\bar{w}+adz+bc\bar{w}+bd-acz\bar{w}-a\bar{w}d-bcz-bd}{(cz+d)(c\bar{w}+d)} \right|} \\
&= \frac{\left| \frac{ad(z-w)-bc(z-w)}{(cz+d)(cw+d)} \right|}{\left| \frac{ad(z-\bar{w})-bc(z-\bar{w})}{(cz+d)(c\bar{w}+d)} \right|} \\
&= \frac{|z-w| |cz+d| \cdot |c\bar{w}+d|}{|z-\bar{w}| |cz+d| \cdot |c\bar{w}+d|} \\
&= \frac{|z-w|}{|z-\bar{w}|},
\end{aligned}$$

já que, se $w = x + iy$,

$$\begin{aligned}
|c\bar{w} + d| &= |c(x - iy) + d| \\
&= |(cx + d) - cyi| \\
&= (cx + d)^2 + (cy)^2 \\
&= |cx + d + cyi| \\
&= |c(x + iy) + d| \\
&= |cw + d|.
\end{aligned}$$

Seja l a única geodésica passando por z e w e seja T_0 a transformação que leva l no eixo imaginário como no Lema 1.1. Falta apenas verificar então que (v) se verifica quando $z = ia$,

$w = ib$ ($a < b$). Nós vimos que $\rho(ia, ib) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$, logo

$$\left\{ \begin{array}{l} \tanh\left(\frac{1}{2}\rho(ia, ib)\right) = \frac{e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b}{a}\right)} - e^{-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}}{e^{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b}{a}\right)} + e^{-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{b}{a}\right)}} = \frac{\sqrt{\frac{b}{a}} - \sqrt{\frac{a}{b}}}{\sqrt{\frac{b}{a}} + \sqrt{\frac{a}{b}}} = \frac{b-a}{b+a} \\ e \\ \frac{|ia-ib|}{|ia+ib|} = \frac{\sqrt{(a-b)^2}}{\sqrt{(a+b)^2}} = \frac{b-a}{b+a}. \end{array} \right.$$

□

1.5 A Métrica Hiperbólica no Modelo do Disco

Iremos agora descrever um modelo de geometria hiperbólica no disco unitário:

$$U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$$

A aplicação

$$f(z) = \frac{zi + 1}{z + i} \tag{1.6}$$

é uma aplicação bijetora de H em U .

De fato: Primeiramente mostremos que $f(H) \subset U$. Seja $z = x + iy \in H$, como

$$\begin{aligned} y > 0 &\implies -y < y \implies -2y < 2y \implies \\ 1 - 2y + y^2 + x^2 < 1 + 2y + y^2 + x^2 &\implies \frac{(1-y)^2 + x^2}{(1+y)^2 + x^2} < 1 \implies |f(z)| < 1. \end{aligned}$$

Agora, $U \subset f(H)$, pois dado $z = x + iy \in U$ ($|z| < 1$), então existe $w = \frac{iz-1}{-z+i} \in H$ tal que

$$f(w) = f\left(\frac{iz-1}{-z+i}\right) = \frac{\left(\frac{iz-1}{-z+i}\right)i + 1}{\left(\frac{iz-1}{-z+i}\right) + i} = \frac{\frac{-z-i-z+i}{-z+i}}{\frac{iz-1-iz-1}{-z+i}} = \frac{-2z}{-2} = z.$$

Quanto à existência do w acima temos

$$\begin{aligned} w &= \frac{i(x+iy) - 1}{-(x+iy) + i} \\ &= \frac{ix - y - 1}{-x + i(1-y)} \cdot \frac{-x - i(1-y)}{-x - i(1-y)} \\ &= \frac{-ix^2 + x(1-y) + xy + iy(1-y) + x + i(1-y)}{x^2 + (1-y)^2} \\ &= \frac{-ix^2 + x - xy + xy + iy - iy^2 + x + i - yi}{x^2 + (1-y)^2} \\ &= \frac{-ix^2 + x - iy^2 + x + i}{x^2 + (1-y)^2} \\ &= \frac{-i(x^2 + y^2) + 2x + i}{x^2 + (1-y)^2} \\ &= \frac{i(1 - x^2 - y^2) + 2x}{x^2 + (1-y)^2}, \end{aligned}$$

ou seja, $\text{Im}(z) = \frac{1-x^2-y^2}{x^2+(1-y)} > 0$ já que $|z| < 1$ implica em $1-x^2-y^2 > 0$.

Além disso, f é injetora pois dados $z, w \in \mathbb{H}$, se

$$f(z) = f(w) \implies \frac{zi+1}{z+i} = \frac{wi+1}{w+i} \implies zwi - z + w + i = zwi + z - w + i \implies z = w.$$

Ou seja, f é uma bijeção de \mathbb{H} em \mathbb{U} .

Dessa forma, ρ^* dado por $\rho^*(z, w) = \rho(f^{-1}(z), f^{-1}(w))$, onde $z, w \in \mathbb{U}$, é uma métrica em \mathbb{U} .

A relação a seguir será útil para o desenvolvimento que faremos adiante.

Mostremos que $\forall z \in \mathbb{H}$ e $f(z) = \frac{zi+1}{z+i}$ temos

$$\frac{2|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} = \frac{1}{\text{Im}z}. \quad (1.7)$$

De fato: fazendo $z = x + iy$ temos

$$\frac{2|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} = \frac{2 \left| \frac{i(z+i)-(zi+1)}{(z+i)^2} \right|}{1 - \left| \frac{zi+1}{z+i} \right|^2} = \frac{2 \cdot |-2|}{|z+i|^2 - |zi+1|^2} = \frac{4}{x^2 + (y+1)^2 - (1-y)^2 - x^2} = \frac{4}{4y} = \frac{1}{\text{Im}z}.$$

Consideremos uma geodésica parametrizada em \mathbb{H} por $\gamma(t) = z(t) = (x(t), y(t))$, $t \in \mathbb{R}$. Logo, $\text{Im}z(t) = y(t)$ e

$$z'(t) = (x'(t), y'(t)) \implies |z'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \implies |\gamma'(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \quad (1.8)$$

Seja $\delta(t) = f(\gamma(t)) = f(z(t))$, onde $f(z) = \frac{zi+1}{z+i}$ (Figura 5).

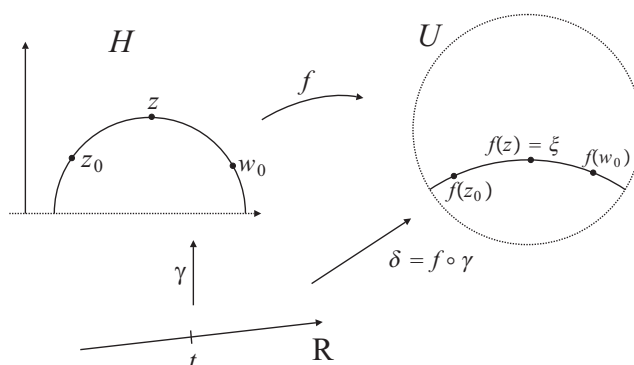


FIGURA 5: Correlação entre modelos.

Logo,

$$\delta'(t) = f'(\gamma(t))\gamma'(t) \implies \delta'(t) = f'(z(t))\gamma'(t). \quad (1.9)$$

Ou seja, $\delta'(t) = \frac{d\delta}{dt} = \frac{df(z)}{dz} \frac{dz}{dt}$, o que significa

$$|\delta'(t)| = \frac{|df(z)| |dz|}{|dz| |dt|}. \quad (1.10)$$

Assim, supondo $\gamma(0) = z_0$ e $\gamma(1) = w_0$ temos

$$\begin{aligned}
\rho^*(f(z_0), f(w_0)) &= \rho(z_0, w_0) \\
&= \int_0^1 \frac{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}}{y(t)} dt \\
&= \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im } z(t)} dt; \text{ (devido à 1.8)} \\
&= \int_0^1 |\gamma'(t)| \frac{2|f'(z(t))|}{1 - |f(z(t))|^2} dt; \text{ (devido à 1.7)} \\
&= \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)| \cdot 2|f'(\gamma(t))|}{1 - |f(z(t))|^2} dt \\
&= \int_0^1 \frac{2|\delta'(t)|}{1 - |f(z(t))|^2} dt; \text{ (devido à 1.9)} \\
&= \int_0^1 \frac{2 \frac{|df(z)| |dz|}{|dz| |dt|}}{1 - |f(z)|^2} |dt|; \text{ (devido à 1.10)} \\
&= \int_0^1 \frac{2|df(z)|}{1 - |f(z)|^2}.
\end{aligned}$$

Fazendo $f(z) = \xi$ temos: $\rho^*(f(z_0), f(w_0)) = \int_0^1 \frac{2|d\xi|}{1 - |\xi|^2}$, ou seja, $\frac{2|d\xi|}{1 - |\xi|^2}$ é o elemento de comprimento em \mathbf{U} (ds em \mathbf{U}). Portanto, $ds = \frac{2|d\xi|}{1 - |\xi|^2}$ (métrica Riemanniana).

Com isso, f é uma isometria de (\mathbf{H}, ρ) em (\mathbf{U}, ρ^*) .

O círculo $\Sigma = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ é chamado de círculo principal de \mathbf{U} , e é a fronteira euclidiana de \mathbf{U} . Os pontos de Σ são chamados de pontos ideais de \mathbf{U} (os pontos de \mathbf{U} são chamados de pontos ordinários).

1.6 Geodésicas no Modelo do Disco

Nesta seção faremos uso da isometria 1.6 entre modelos para deduzir o formato euclidiano das geodésicas em \mathbf{U} .

Teorema 1.7 *No modelo hiperbólico \mathbf{U} as geodésicas são segmentos de círculos ortogonais ao círculo principal Σ ou seus diâmetros.*

Demonstração:

Mostraremos que as geodésicas do modelo \mathbf{H} , parametrizadas por $\varphi(y) = a + iy$, com $y > 0$, ou $\gamma(\theta) = r \cos(\theta) - a + ir \sin(\theta)$, com $\theta \in (0, \pi)$, são levadas pela isometria $f(z) = \frac{zi+1}{z+i}$ em círculos ortogonais ao círculo principal Σ ou seus diâmetros (lembramos que isometria leva geodésica em geodésica).

(1) Consideremos, primeiramente a geodésica em \mathbf{H} parametrizada por $\varphi(y) = (a, y) = a + iy$, com $y > 0$. Observemos que

$$f(\varphi(y)) = \frac{(a + iy)i + 1}{a + iy + i} = \frac{2a + i(y^2 + a^2 - 1)}{a^2 + (y + 1)^2}.$$

(1-i) Se $\alpha = 0$, então $\operatorname{Re}(f(\varphi(y))) = 0$ e

$$\operatorname{Im}(f(\varphi(y))) = \frac{y^2 - 1}{(y + 1)^2} \implies -1 < \operatorname{Im}(f(\varphi(y))) < 1,$$

pois

$$\begin{aligned} y > 0 &\implies \\ -2y < 2y^2 < 2y^2 + 2y + 2 &\implies \\ -y^2 - 2y - 1 < y^2 - 1 < y^2 + 2y + 1 &\implies \\ -(y + 1)^2 < y^2 - 1 < (y + 1)^2 &\implies \\ -1 < \frac{y^2 - 1}{(y + 1)^2} < 1. \end{aligned}$$

Logo, $f(\varphi(y))$ é o diâmetro de Σ que está sob o eixo imaginário.

(1-ii) Mostremos que se $\alpha \neq 0$, $f(\varphi(y))$ é a parte do círculo de centro $(\frac{1}{\alpha}, 1)$ e raio $\frac{1}{\alpha^2}$ que está em \mathcal{U} . Para isso basta observar que

$$\begin{aligned} d\left(f(\varphi(y)), \left(\frac{1}{\alpha} + i\right)\right)^2 &= \left(\frac{2\alpha}{\alpha^2 + (y + 1)^2} - \frac{1}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y^2 + \alpha^2 - 1}{\alpha^2 + (y + 1)^2} - 1\right)^2 \\ &= \frac{\alpha^4 + 2\alpha^2(y + 1)^2 + (y + 1)^4}{\alpha^2(\alpha^2 + (y + 1)^2)^2} \\ &= \frac{(\alpha^2 + (y + 1)^2)^2}{\alpha^2(\alpha^2 + (y + 1)^2)^2} \\ &= \frac{1}{\alpha^2}. \end{aligned}$$

Observemos também que $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(\varphi(y)) = i$ e $\lim_{y \rightarrow 0^+} f(\varphi(y)) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} + \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1}i$, sendo que

$$\left| \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} + \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1}i \right|^2 = \frac{4\alpha^2 + \alpha^4 - 2\alpha^2 + 1}{(\alpha^2 + 1)^2} = \frac{\alpha^4 + 2\alpha^2 + 1}{(\alpha^2 + 1)^2} = \frac{(\alpha^2 + 1)^2}{(\alpha^2 + 1)^2} = 1,$$

ou seja, i e $\frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1} + i\frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1}$ são os pontos de "intersecção" entre $f(\varphi(y))$ e Σ . Falta mostrar apenas que $f(\varphi(y))$ é perpendicular à Σ . Para isso, mostraremos que os vetores com origem em $\frac{1}{\alpha} + i$ e extremidade nas intersecções dos dois círculos são ortogonais ao raio de Σ . De fato: o vetor $\vec{r}_1 = (\frac{1}{\alpha}, 1) - (0, 1) = (\frac{1}{\alpha}, 0)$ é ortogonal ao vetor $\vec{v}_1 = (0, 1)$ e, analogamente, o vetor $\vec{r}_2 = (\frac{1}{\alpha}, 1) - (\frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}, \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1}) = (\frac{1 - \alpha^2}{\alpha(\alpha^2 + 1)}, \frac{2}{\alpha^2 + 1})$ é ortogonal ao vetor $\vec{v}_2 = (\frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}, \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1})$. Quanto a este último:

$$\left\langle \left(\frac{1 - \alpha^2}{\alpha(\alpha^2 + 1)}, \frac{2}{\alpha^2 + 1} \right), \left(\frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}, \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 1} \right) \right\rangle_{\mathbb{R}^2} = \frac{2\alpha - 2\alpha^3 + 2\alpha^3 - 2\alpha}{\alpha(\alpha^2 + 1)^2} = 0.$$

Logo, $f(\varphi(y))$ é um círculo ortogonal à Σ .

(2) Consideremos a geodésica $\gamma(\theta) = (r \cos(\theta) - a, r \sin(\theta)) = r \cos(\theta) - a + ir \sin(\theta)$, com $\theta \in (0, \pi)$. Mostremos que $f(\gamma(\theta))$, onde $f(z) = \frac{zi+1}{z+i}$, é parte de um círculo ortogonal ao círculo principal Σ em \mathcal{U} , ou é um diâmetro de Σ . Vejamos, primeiramente, que

$$\begin{aligned} f(\gamma(\theta)) &= \frac{(r \cos(\theta) - a + ir \sin(\theta))i + 1}{r \cos(\theta) - a + ir \sin(\theta) + i} \\ &= \frac{2(r \cos(\theta) - a) + i(r^2 + a^2 - 2ar \cos(\theta) - 1)}{(r \cos(\theta) - a)^2 + (r \sin(\theta) + 1)^2} \\ &= \left(\frac{2(r \cos(\theta) - a)}{(r \cos(\theta) - a)^2 + (r \sin(\theta) + 1)^2}, \frac{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\theta) - 1}{(r \cos(\theta) - a)^2 + (r \sin(\theta) + 1)^2} \right). \end{aligned}$$

(2-i) Suponhamos que $r^2 - a^2 - 1 = 0$, ou seja, $r^2 - 1 = a^2$, daí

$$\begin{aligned} f(\gamma(\theta)) &= \left(\frac{2(r \cos(\theta) - a)}{(r \cos(\theta) - a)^2 + (r \sin(\theta) + 1)^2}, \frac{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\theta) - 1}{(r \cos(\theta) - a)^2 + (r \sin(\theta) + 1)^2} \right) \\ &= \left(\frac{2(r \cos(\theta) - a)}{(r \cos(\theta) - a)^2 + (r \sin(\theta) + 1)^2}, -a \frac{2(r \cos(\theta) - a)}{(r \cos(\theta) - a)^2 + (r \sin(\theta) + 1)^2} \right) \end{aligned}$$

Logo, nesse caso, $f(\gamma(\theta))$ é da forma $f(\gamma(\theta)) = (\alpha(\theta), -a\alpha(\theta))$, ou seja, é um diâmetro de Σ . Observemos que

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 0^+} f(\gamma(\theta)) &= \left(\frac{2(r-a)}{(r-a)^2 + 1}, -a \frac{2(r-a)}{(r-a)^2 + 1} \right) \\ &\quad \text{e} \\ \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} f(\gamma(\theta)) &= \left(-\frac{2(r+a)}{(r+a)^2 + 1}, a \frac{2(r+a)}{(r+a)^2 + 1} \right), \end{aligned}$$

ou seja, $\left| \lim_{\theta \rightarrow 0^+} f(\gamma(\theta)) \right| = \left| \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} f(\gamma(\theta)) \right| = 1$.

(2-ii) Suponhamos que $r^2 - a^2 - 1 \neq 0$ e mostremos que $f(\gamma(\theta))$ é a parte do círculo de centro $\left(\frac{2a}{r^2 - a^2 - 1}, \frac{r^2 - a^2 + 1}{r^2 - a^2 - 1} \right)$ e raio $\frac{2r}{|r^2 - a^2 - 1|}$ que está em \mathcal{U} . Para tanto, basta observar que

$$\begin{aligned}
& d\left(f(\gamma(\theta)), \left(\frac{2a}{r^2 - a^2 - 1}, \frac{r^2 - a^2 + 1}{r^2 - a^2 - 1}\right)\right)^2 = \\
& = \left(\frac{2(r \cos(\theta) - a)}{(r \cos(\theta) - a)^2 + (r \sin(\theta) + 1)^2} - \frac{2a}{r^2 - a^2 - 1}\right)^2 + \left(\frac{r^2 + a^2 - 2ar \cos(\theta) - 1}{(r \cos(\theta) - a)^2 + (r \sin(\theta) + 1)^2} - \frac{r^2 - a^2 + 1}{r^2 - a^2 - 1}\right)^2 \\
& = \frac{\left((r \cos(\theta) - a)^2 + (r \sin(\theta) + 1)^2\right)^2 (r^2 - a^2 - 1)^2}{\left((r \cos(\theta) - a)^2 + (r \sin(\theta) + 1)^2\right)^2 (r^2 - a^2 - 1)^2} \\
& \quad - 2 \frac{(r^2 - a^2 - 1)^2 \left((r \cos(\theta) - a)^2 + (r \sin(\theta) + 1)^2\right)^2}{\left((r \cos(\theta) - a)^2 + (r \sin(\theta) + 1)^2\right)^2 (r^2 - a^2 - 1)^2} \\
& \quad + \frac{\left(4a^2 + (r^2 - a^2 + 1)^2\right) \left((r \cos(\theta) - a)^2 + (r \sin(\theta) + 1)^2\right)^2}{\left((r \cos(\theta) - a)^2 + (r \sin(\theta) + 1)^2\right)^2 (r^2 - a^2 - 1)^2} \\
& = \frac{(r^2 - a^2 - 1)^2 - 2(r^2 - a^2 - 1)^2 + 4a^2 + (r^2 - a^2 + 1)^2}{(r^2 - a^2 - 1)^2} \\
& = \frac{4a^2 + (r^2 - a^2 + 1)^2 - (r^2 - a^2 - 1)^2}{(r^2 - a^2 - 1)^2} \\
& = \frac{4r^2}{(r^2 - a^2 - 1)^2}.
\end{aligned}$$

Por fim, $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} f(\gamma(\theta)) = \frac{2(r-a)}{(r-a)^2+1} + i \frac{(r-a)^2-1}{(r-a)^2+1}$ e $\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} f(\gamma(\theta)) = \frac{-2(r+a)}{(r+a)^2+1} + i \frac{(r+a)^2-1}{(r+a)^2+1}$ são tais que

$$\begin{aligned}
\left| \lim_{\theta \rightarrow 0^+} f(\gamma(\theta)) \right|^2 &= \frac{4(r-a)^2 + \left((r-a)^2 - 1\right)^2}{\left((r-a)^2 + 1\right)^2} = 1; \\
\left| \lim_{\theta \rightarrow \pi^-} f(\gamma(\theta)) \right|^2 &= \frac{4(r+a)^2 + (r+a)^4 - 2(r+a)^2 + 1}{\left((r+a)^2 + 1\right)^2} = 1;
\end{aligned}$$

ou seja, tendem a Σ . Falta mostrar que o arco de círculo $f(\gamma(\theta))$ é ortogonal à Σ , mas, para isso basta observar que

$$\begin{aligned}
& \left\langle \left(\frac{2(r-a)}{(r-a)^2+1}, \frac{(r-a)^2-1}{(r-a)^2+1}\right), \left(\frac{2(r-a)}{(r-a)^2+1} - \frac{2a}{r^2-a^2-1}, \frac{(r-a)^2-1}{(r-a)^2+1} - \frac{r^2-a^2+1}{r^2-a^2-1}\right) \right\rangle_{\mathbb{R}^2} = 0 \\
& \quad \text{e} \\
& \left\langle \left(\frac{-2(r+a)}{(r+a)^2+1}, \frac{(r+a)^2-1}{(r+a)^2+1}\right), \left(\frac{-2(r+a)}{(r+a)^2+1} - \frac{2a}{r^2-a^2-1}, \frac{(r+a)^2-1}{(r+a)^2+1} - \frac{r^2-a^2+1}{r^2-a^2-1}\right) \right\rangle_{\mathbb{R}^2} = 0,
\end{aligned}$$

ou seja, o vetor com origem em $\frac{2a}{r^2-a^2-1} + \frac{r^2-a^2+1}{r^2-a^2-1}i$ e extremo em $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} f(\gamma(\theta))$ é ortogonal ao vetor com origem em 0 e extremo em $\lim_{\theta \rightarrow 0^+} f(\gamma(\theta))$. Analogamente o vetor com origem em $\frac{2a}{r^2-a^2-1} + \frac{r^2-a^2+1}{r^2-a^2-1}i$ e extremo em $\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} f(\gamma(\theta))$ é ortogonal ao vetor com origem em 0 e extremo em $\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} f(\gamma(\theta))$. Portanto, $f(\gamma(\theta))$ é parte de um círculo ortogonal à Σ em \mathcal{U} . \square

1.7 Expressões para a Distância Hiperbólica em \mathbb{U} .

Vejamos as fórmulas para distância hiperbólica em \mathbb{U} análogas às do Teorema 1.6.

Teorema 1.8 Para $z, w \in \mathbb{U}$

- (i) $\rho^*(z, w) = \ln \left(\frac{|1 - z\bar{w}| + |z - w|}{|1 - z\bar{w}| - |z - w|} \right)$;
- (ii) $\cosh^2 \left(\frac{1}{2} \rho^*(z, w) \right) = \frac{|1 - z\bar{w}|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}$;
- (iii) $\sinh^2 \left(\frac{1}{2} \rho^*(z, w) \right) = \frac{|z - w|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}$;
- (iv) $\tanh \left(\frac{1}{2} \rho^*(z, w) \right) = \left| \frac{z - w}{1 - z\bar{w}} \right|$.

Demonstração:

Consideremos a isometria $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$ com $z \in \mathbb{H}$. Então, $f^{-1}(w) = \frac{-iw+1}{w-i}$, $w \in \mathbb{U}$. Observemos que

$$\begin{aligned}
 |f^{-1}(z) - f^{-1}(w)| &= \left| \frac{1-iz}{z-i} - \frac{1-iw}{w-i} \right| \\
 &= \left| \frac{(1-iz)(w-i) - (1-iw)(z-i)}{(z-i)(w-i)} \right| \\
 &= \left| \frac{w-i-izw-z-z+i+iwz+w}{(z-i)(w-i)} \right| \\
 &= \left| \frac{2(w-z)}{(z-i)(w-i)} \right| \\
 &= \frac{2|w-z|}{|z-i| \cdot |w-i|}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 |f^{-1}(z) - \overline{f^{-1}(w)}| &= \left| \frac{1-iz}{z-i} - \frac{1+i\bar{w}}{\bar{w}+i} \right| \\
 &= \left| \frac{(1-iz)(\bar{w}+i) - (1+i\bar{w})(z-i)}{(z-i)(\bar{w}+i)} \right| \\
 &= \left| \frac{\bar{w}+i-iz\bar{w}+z-z+i-i\bar{w}z-\bar{w}}{(z-i)(\bar{w}+i)} \right| \\
 &= \left| \frac{2i(1-\bar{w}z)}{(z-i)(\bar{w}+i)} \right| \\
 &= \frac{2|1-\bar{w}z|}{|z-i| \cdot |w-i|}.
 \end{aligned}$$

Além disso, se $z = x + iy$, então

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}(f^{-1}(z)) &= \operatorname{Im}\left(\frac{-zi + 1}{z - i}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{-i(x + iy) + 1}{(x + iy) - i}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{(-ix + y + 1)(x - i(y - 1))}{x^2 + (y - 1)^2}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{-ix^2 - x(y - 1) + yx - iy(y - 1) + x - i(y - 1)}{x^2 + (y - 1)^2}\right) \\
&= \frac{-(x^2 + y^2) + 1}{x^2 + (y - 1)^2} = \frac{1 - |z|^2}{|z - i|^2}.
\end{aligned}$$

Logo, mostremos que, se vale (i), então

$$\begin{aligned}
\rho(f^{-1}(z), f^{-1}(w)) &= \rho^*(z, w) \\
&= \ln\left(\frac{|1 - z\bar{w}| + |z - w|}{|1 - z\bar{w}| - |z - w|}\right) \\
&= \ln\left(\frac{\frac{|z-i||w-i||f^{-1}(z)-\overline{f^{-1}(w)}|}{2} + \frac{|z-i||w-i||f^{-1}(z)-f^{-1}(w)|}{2}}{\frac{|z-i||w-i||f^{-1}(z)-\overline{f^{-1}(w)}|}{2} - \frac{|z-i||w-i||f^{-1}(z)-f^{-1}(w)|}{2}}\right) \\
&= \ln\left(\frac{|f^{-1}(z) - \overline{f^{-1}(w)}| + |f^{-1}(z) - f^{-1}(w)|}{|f^{-1}(z) - \overline{f^{-1}(w)}| - |f^{-1}(z) - f^{-1}(w)|}\right),
\end{aligned}$$

ou seja, vale o item (i) do Teorema 1.6 para $f^{-1}(z)$ e $f^{-1}(w)$. Logo, por esse mesmo teorema,

$$\begin{aligned}
\cosh^2\left(\frac{1}{2}\rho^*(z, w)\right) &= \cosh^2\left(\frac{1}{2}\rho(f^{-1}(z), f^{-1}(w))\right) \\
&= \frac{|f^{-1}(z) - \overline{f^{-1}(w)}|^2}{4 \operatorname{Im}(f^{-1}(z)) \operatorname{Im}(f^{-1}(w))} \\
&= \frac{\left(\frac{2|1-\bar{w}z|}{|z-i||w-i|}\right)^2}{4 \frac{(1-|z|^2)}{|z-i|^2} \frac{(1-|w|^2)}{|w-i|^2}} \\
&= \frac{|1 - \bar{w}z|^2}{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)},
\end{aligned}$$

ou seja, (i) \implies (ii). Agora, se $\cosh^2\left(\frac{1}{2}\rho^*(z, w)\right) = \frac{|1-\bar{w}z|^2}{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}$, então

$$\begin{aligned} \cosh^2\left(\frac{1}{2}\rho(f^{-1}(z), f^{-1}(w))\right) &= \cosh^2\left(\frac{1}{2}\rho^*(z, w)\right) \\ &= \frac{|1-\bar{w}z|^2}{(1-|z|^2)(1-|w|^2)} \\ &= \frac{|f^{-1}(z) - \overline{f^{-1}(w)}|^2 \cdot |z-i|^2 \cdot |w-i|^2}{4 \operatorname{Im}(f^{-1}(z)) \cdot |z-i|^2 \operatorname{Im}(f^{-1}(w)) \cdot |w-i|^2} \\ &= \frac{|f^{-1}(z) - \overline{f^{-1}(w)}|^2}{4 \operatorname{Im}(f^{-1}(z)) \operatorname{Im}(f^{-1}(w))}, \end{aligned}$$

logo, vale o item (iv) do Teorema 1.6 para $f^{-1}(z)$ e $f^{-1}(w)$, e daí, vale o item (iii) do mesmo teorema, portanto,

$$\begin{aligned} \sinh^2\left(\frac{1}{2}\rho^*(z, w)\right) &= \sinh^2\left(\frac{1}{2}\rho(f^{-1}(z), f^{-1}(w))\right) \\ &= \frac{|f^{-1}(z) - f^{-1}(w)|^2}{4 \operatorname{Im}(f^{-1}(z)) \operatorname{Im}(f^{-1}(w))} \\ &= \frac{\left(\frac{2|z-w|}{|z-i| \cdot |w-i|}\right)^2}{4 \cdot \frac{(1-|z|^2)}{|z-i|^2} \cdot \frac{(1-|w|^2)}{|w-i|^2}} \\ &= \frac{|z-w|^2}{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}, \end{aligned}$$

ou seja, (ii) \implies (iii). Além disso, se $\sinh^2\left(\frac{1}{2}\rho^*(z, w)\right) = \frac{|z-w|^2}{(1-|z|^2)(1-|w|^2)}$, então

$$\begin{aligned} \sinh^2\left(\frac{1}{2}\rho(f^{-1}(z), f^{-1}(w))\right) &= \sinh^2\left(\frac{1}{2}\rho^*(z, w)\right) \\ &= \frac{|z-w|^2}{(1-|z|^2)(1-|w|^2)} \\ &= \frac{|f^{-1}(z) - f^{-1}(w)|^2 \cdot |z-i|^2 \cdot |w-i|^2}{4 \operatorname{Im}(f^{-1}(z)) \cdot |z-i|^2 \operatorname{Im}(f^{-1}(w)) \cdot |w-i|^2} \\ &= \frac{|f^{-1}(z) - f^{-1}(w)|^2}{4 \operatorname{Im}(f^{-1}(z)) \operatorname{Im}(f^{-1}(w))}, \end{aligned}$$

ou seja, vale o item (iii) do Teorema 1.6 para $f^{-1}(z)$ e $f^{-1}(w)$, e daí, vale o item (v) do mesmo teorema, portanto,

$$\begin{aligned} \tanh\left(\frac{1}{2}\rho^*(z, w)\right) &= \tanh\left(\frac{1}{2}\rho\left(f^{-1}(z), f^{-1}(w)\right)\right) \\ &= \left|\frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(w)}{f^{-1}(z) - \overline{f^{-1}(w)}}\right| \\ &= \frac{\frac{2|w-z|}{|z-i|\cdot|w-i|}}{\frac{2|1-\overline{wz}|}{|z-i|\cdot|w-i|}} \\ &= \frac{|w-z|}{|1-\overline{wz}|}, \end{aligned}$$

ou seja, (iii) \implies (iv). Mais ainda, se $\tanh\left(\frac{1}{2}\rho^*(z, w)\right) = \frac{|w-z|}{|1-\overline{wz}|}$, então

$$\begin{aligned} \tanh\left(\frac{1}{2}\rho\left(f^{-1}(z), f^{-1}(w)\right)\right) &= \tanh\left(\frac{1}{2}\rho^*(z, w)\right) \\ &= \frac{|w-z|}{|1-\overline{wz}|} \\ &= \frac{\frac{2|w-z|}{|z-i|\cdot|w-i|}}{\frac{2|1-\overline{wz}|}{|z-i|\cdot|w-i|}} \\ &= \left|\frac{f^{-1}(z) - f^{-1}(w)}{f^{-1}(z) - \overline{f^{-1}(w)}}\right|, \end{aligned}$$

ou seja, o item (v) do Teorema 1.6 é válido para $f^{-1}(z)$ e $f^{-1}(w)$, logo, vale o item (i) do mesmo teorema, portanto,

$$\begin{aligned} \rho^*(z, w) &= \rho\left(f^{-1}(z), f^{-1}(w)\right) \\ &= \ln\left(\frac{\frac{|z-i|\cdot|w-i|}{2}\left(\left|f^{-1}(z) - \overline{f^{-1}(w)}\right| + |f^{-1}(z) - f^{-1}(w)|\right)}{\frac{|z-i|\cdot|w-i|}{2}\left(\left|f^{-1}(z) - \overline{f^{-1}(w)}\right| - |f^{-1}(z) - f^{-1}(w)|\right)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{|1-z\overline{w}|+|z-w|}{|1-z\overline{w}|-|z-w|}\right), \end{aligned}$$

ou seja, (iv) \implies (i). Portanto, as quatro afirmações são equivalentes.

Mostremos agora que (i) é verdadeira: sabendo que o item (i) do Teorema 1.6 é verdadeiro para $f^{-1}(z)$ e $f^{-1}(w)$ então

$$\begin{aligned} \rho^*(z, w) &= \rho\left(f^{-1}(z), f^{-1}(w)\right) \\ &= \ln\left(\frac{\frac{|z-i|\cdot|w-i|}{2}\left(\left|f^{-1}(z) - \overline{f^{-1}(w)}\right| + |f^{-1}(z) - f^{-1}(w)|\right)}{\frac{|z-i|\cdot|w-i|}{2}\left(\left|f^{-1}(z) - \overline{f^{-1}(w)}\right| - |f^{-1}(z) - f^{-1}(w)|\right)}\right) \\ &= \ln\left(\frac{|1-z\overline{w}|+|z-w|}{|1-z\overline{w}|-|z-w|}\right), \end{aligned}$$

ou seja, (i) é válido. □

1.8 Grupos Fuchsianos no Modelo do Disco

O estudo de grupos fuchsianos no modelo do disco é análogo ao do modelo do semi-plano. Consideremos grupo linear especial sobre \mathbb{C} , denotado por $SL(2, \mathbb{C})$, composto pelas matrizes

reais $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ com $\det(M) = ad - bc = 1$, no qual a operação considerada é a multiplicação usual de matrizes. Para que uma transformação de Möbius $f: \mathbb{U} \rightarrow \mathbb{C}$ tenha imagem em \mathbb{U} , é necessário que $b = \bar{c}$ e $d = \bar{a}$ e, assim, teremos

$$f: \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{U} \quad (1.11)$$

$$z \longmapsto \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}}$$

com $a\bar{a} - c\bar{c} = 1$.

O conjunto

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} a & \bar{c} \\ c & \bar{a} \end{bmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{C}) \right\} \subset \text{SL}(2, \mathbb{C})$$

é, na verdade, um subgrupo de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$ quando consideramos a operação de composição herdada de $\text{SL}(2, \mathbb{C})$.

Como no caso do semi-plano, o conjunto de transformações de Möbius acima munido da operação de composição usual forma um grupo de tal modo que a composição de duas transformações corresponde ao produto de duas matrizes de A e a inversa corresponde à matriz inversa. Além disso, cada transformação f da forma acima pode ser representada por um par de matrizes $\pm M \in A$. Então, o grupo de todas as transformações 1.11, chamado $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$, é isomorfo ao grupo quociente $A / \{\pm \text{Id}_2\}$ onde Id_2 é a matriz identidade de ordem 2 e escreveremos $\text{PSL}(2, \mathbb{C}) \approx A / \{\pm \text{Id}_2\}$.

Seja $M = \begin{bmatrix} a & \bar{c} \\ c & \bar{a} \end{bmatrix} \in A$ matriz associada a $f(z) = \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}} \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$. Definimos

$$\|f\| = \|M\| = \sqrt{|a|^2 + |\bar{c}|^2 + |c|^2 + |\bar{a}|^2} = \sqrt{2|a|^2 + 2|c|^2}.$$

Seja $N \in A$ associada a $g \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$. Com a distância induzida $d(f, g) = \|M - N\|$, $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ é um *grupo topológico* e a topologia é a induzida pela norma definida acima (é, também, a topologia do \mathbb{R}^4). Um subgrupo G de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ é discreto quando a topologia induzida de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ sobre G é discreta. Um subgrupo discreto de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ é chamado de fuchsiano.

Uma transformação de \mathbb{U} em \mathbb{U} é chamada uma isometria quando preserva a distância hiperbólica ρ^* em \mathbb{U} . O conjunto de todas as isometrias de \mathbb{U} será denotado por $\text{Isom}(\mathbb{U})$.

À semelhança do semi-plano temos os três seguintes teoremas, cujas demonstrações são análogas:

Teorema 1.9 $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$ age em \mathbb{U} por homeomorfismos.

Teorema 1.10 Se $f \in \text{Isom}(\mathbb{U})$, então f é uma bijeção e $f^{-1} \in \text{Isom}(\mathbb{U})$.

Teorema 1.11 $\text{PSL}(2, \mathbb{C}) \subset \text{Isom}(\mathbb{U})$.

É importante também ressaltar que a isometria 1.6 entre os modelos faz correlação entre elementos de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ e $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$.

Capítulo 2

Isometrias Hiperbólicas em \mathbb{H}

2.1 Alguns Teoremas Importantes

Vimos no Teorema 1.3 que as transformações de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ são isometrias em \mathbb{H} . Seja $\text{PS}^*\text{L}(2, \mathbb{R}) = \text{S}^*\text{L}(2, \mathbb{R}) / \{\pm 1_2\}$ onde $\text{S}^*\text{L}(2, \mathbb{R})$ é um grupo de matrizes reais $g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ com $\det g = \pm 1$. Assim, $\text{PS}^*\text{L}(2, \mathbb{R})$ contém o grupo $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ como subgrupo de ordem 2.

O próximo teorema identifica **todas** as isometrias no modelo hiperbólico \mathbb{H} .

Teorema 2.1 *O grupo $\text{Isom}(\mathbb{H})$ é gerado pelas transformações lineares fracionais de $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ juntamente com a transformação $\Gamma : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ tal que $\Gamma(z) = -\bar{z}$, e é isomorfo a $\text{PS}^*\text{L}(2, \mathbb{R})$.*

Demonstração:

Seja ϕ uma isometria de \mathbb{H} . Pela demonstração do Teorema 1.2 podemos afirmar que ϕ leva geodésica em geodésica. Chamemos I a parte positiva do eixo imaginário. Então $\phi(I)$ é uma geodésica. Pelo Lema 1.1 existe uma isometria $g \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ que leva $\phi(I)$ em I . De modo análogo à demonstração do Teorema 1.5, podemos assumir que $g\phi$ fixa i e leva as semi-retas (i, ∞) e $(0, i)$ nelas mesmas, e daí, $g\phi$ fixa cada ponto de I .

Agora, seja $z = x + iy \in \mathbb{H}$ e $g\phi(z) = u + iv$. Para todo t positivo,

$$\rho(z, it) = \rho(g\phi(z), g\phi(it)) = \rho(u + iv, it)$$

e pelo Teorema 1.6 (iii),

$$\begin{aligned} \sinh\left(\frac{1}{2}\rho(z, it)\right) &= \sinh\left(\frac{1}{2}\rho(u + iv, it)\right) \implies \\ \frac{|z - it|}{2\sqrt{yt}} &= \frac{|u + iv - it|}{2\sqrt{vt}} \implies \\ |z - it|\sqrt{v} &= |u + iv - it|\sqrt{y} \implies \\ \left(x^2 + (y - t)^2\right)v &= \left(u^2 + (v - t)^2\right)y. \end{aligned}$$

Como isso vale para todo t positivo, dividindo ambos os lados da equação acima por t^2 e fazendo $t \rightarrow \infty$,

$$\left(\frac{x^2}{t^2} + \left(\frac{y}{t} - 1\right)^2\right)v = \left(\frac{u^2}{t^2} + \left(\frac{v}{t} - 1\right)^2\right)y \xrightarrow{t \rightarrow \infty} v = y.$$

E, daí, $x^2 = u^2$. Então,

$$g\phi(z) = u + iv \implies \begin{cases} g\phi(z) = x + iy = z \\ \text{ou} \\ g\phi(z) = -x + iy = -(x - iy) = -\bar{z} \end{cases} \quad (2.1)$$

Como as isometrias são contínuas (pois se $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma isometria, então seja $\mathbf{a} \in \mathbb{C}$, logo, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \varepsilon$ tal que $\|x - \mathbf{a}\| < \delta \implies \|g(x) - g(\mathbf{a})\| = \|x - \mathbf{a}\| < \varepsilon$) só uma das Equações 2.1 pode ser verdadeira para todo $z \in \mathbb{H}$. Se $g\phi(z) = z$, então $\phi(z)$ é uma transformação linear fracional da forma 1.2 pois se $g(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $ad - bc = 1$ então $\phi(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$ e $g\phi(z) = z$. Se $g\phi(z) = -\bar{z}$ e $g(z) = \frac{dz+b}{-cz-a}$ com $-ad + bc = 1$, então

$$\phi(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d} \text{ com } ad - bc = -1. \quad (2.2)$$

Então, identificamos todas as isometrias de \mathbb{H} . Agora, o conjunto das Transformações 1.2 e 2.2 forma um grupo que é isomorfo ao grupo $PS^*L(2, \mathbb{R})$.

Já vimos acima que a composição de transformações do tipo 1.2 são associativas, possuem elemento neutro e são simetrizáveis. Além disso, de forma análoga, se $\phi(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ com $ad - bc = -1$ então $\phi^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$, ou seja, todo elemento dessa forma é simetrizável e se tomarmos $h(z) = z$ então $\phi(h(z)) = h(\phi(z)) = \phi(z)$, ou seja, $PS^*L(2, \mathbb{R})$ tem elemento neutro. De forma análoga ao que foi visto para as Transformações 1.2, as transformações da forma 2.2 são associativas. Falta mostrar apenas que compostas envolvendo transformações da forma 1.2 e 2.2 são associativas. Consideremos $f_1(z) = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$, $f_2(z) = \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$ e $f_3(z) = \frac{a_3\bar{z}+b_3}{c_3\bar{z}+d_3}$. Logo,

$$((f_1 \circ f_2) \circ f_3)(z) = (f_1 \circ f_2)(f_3(z)) = \frac{a_1 \left(\frac{a_2 f_3(z) + b_2}{c_2 f_3(z) + d_2} \right) + b_1}{c_1 \left(\frac{a_2 f_3(z) + b_2}{c_2 f_3(z) + d_2} \right) + d_1} = (f_1 \circ (f_2 \circ f_3))(z).$$

O mesmo se verifica se f_1 e f_2 forem da forma 2.2 e f_3 da forma 1.2. Portanto, o conjunto das transformações 1.2 e 2.2 forma um grupo que é isomorfo ao grupo $PS^*L(2, \mathbb{R})$. \square

O sinal do determinante da matriz correspondente $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ determina a orientação para uma isometria; portanto, as transformações em $PSL(2, \mathbb{R})$ preservam a orientação enquanto as transformações da forma 2.2, em particular, $z \rightarrow -\bar{z}$, revertem orientação.

Vamos considerar agora o espaço tangente a \mathbb{H} no ponto z , $T_z\mathbb{H} \approx \mathbb{C}$. A métrica Riemanniana 1.1 em \mathbb{H} é induzida pelo produto interno em $T_z\mathbb{H}$: para $\zeta_1 = \xi_1 + i\eta_1$ e $\zeta_2 = \xi_2 + i\eta_2$ em $T_z\mathbb{H}$

$$\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle = \frac{1}{(\text{Im } z)^2} (\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2). \quad (2.3)$$

Denotaremos a norma em $T_z\mathbb{H}$ correspondente a este produto interno por $\|\cdot\|$. Como as isometrias em \mathbb{H} (que são as transformações da forma 1.2 ou 2.2) são aplicações diferenciáveis, elas agem no fibrado tangente $T\mathbb{H}$ por diferenciais preservando norma, como veremos no próximo teorema.

Teorema 2.2 *Uma aplicação diferenciável de \mathbb{H} em \mathbb{H} é uma isometria se, e somente se, sua diferencial preserva norma no fibrado tangente de \mathbb{H} .*

Demonstração:

Observemos que

$$\begin{aligned} f: \mathbb{TH} &\longrightarrow \mathbb{TH} \\ z &\longmapsto -\bar{z} \end{aligned}$$

preserva norma em \mathbb{TH} pois se $z = x + iy \in \mathbb{TH}$ então $\|f(z)\| = \|-\bar{z}\| = \|(x - iy)\| = x^2 + y^2 = \|z\|$. Daí, é suficiente considerar o caso em que $g(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$. Seja $\zeta \in \mathbb{T}_2\mathbb{H}$. Mostremos que $(Dg)(\zeta) = g'(z) \cdot \zeta$. De fato: fazendo $z = x + iy$ temos que

$$g(z) = \frac{a(x + iy) + b}{c(x + iy) + d} = \frac{ac(x^2 + y^2) + x(ad + bc) + bd + iy}{(cx + d)^2 + c^2y^2}.$$

Chamemos

$$g_1(x, y) = \frac{ac(x^2 + y^2) + x(ad + bc) + bd}{(cx + d)^2 + c^2y^2} \quad \text{e} \quad g_2(x, y) = \frac{y}{(cx + d)^2 + c^2y^2}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) &= \frac{(cx + d)^2 - c^2y^2}{((cx + d)^2 + c^2y^2)^2}, \\ \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) &= \frac{2cy(cx + d)}{((cx + d)^2 + c^2y^2)^2}, \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) &= \frac{-2cy(cx + d)}{((cx + d)^2 + c^2y^2)^2}, \\ \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) &= \frac{(cx + d)^2 - c^2y^2}{((cx + d)^2 + c^2y^2)^2}. \end{aligned}$$

Logo, se $\zeta = \bar{x} + i\bar{y}$,

$$\begin{aligned} (Dg)(\zeta) &= \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(cx+d)^2 - c^2y^2}{((cx+d)^2 + c^2y^2)^2} & \frac{2cy(cx+d)}{((cx+d)^2 + c^2y^2)^2} \\ \frac{-2cy(cx+d)}{((cx+d)^2 + c^2y^2)^2} & \frac{(cx+d)^2 - c^2y^2}{((cx+d)^2 + c^2y^2)^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{(cx+d)^2 - c^2y^2}{((cx+d)^2 + c^2y^2)^2} \bar{x} + \frac{2cy(cx+d)}{((cx+d)^2 + c^2y^2)^2} \bar{y} \\ \frac{-2cy(cx+d)}{((cx+d)^2 + c^2y^2)^2} \bar{x} + \frac{(cx+d)^2 - c^2y^2}{((cx+d)^2 + c^2y^2)^2} \bar{y} \end{bmatrix} \\ &= \left(\frac{(cx+d)^2 - c^2y^2}{((cx+d)^2 + c^2y^2)^2} \bar{x} + \frac{2cy(cx+d)}{((cx+d)^2 + c^2y^2)^2} \bar{y} \right) + i \left(\frac{-2cy(cx+d)}{((cx+d)^2 + c^2y^2)^2} \bar{x} + \frac{(cx+d)^2 - c^2y^2}{((cx+d)^2 + c^2y^2)^2} \bar{y} \right). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 g'(z) &= \frac{a(cz + d) - (az + b)c}{(cz + d)^2} \\
 &= \frac{1}{(c(x + iy) + d)^2} \\
 &= \frac{1}{(cx + d)^2 + 2cy(cx + d)i - c^2y^2} \\
 &= \frac{(cx + d)^2 - c^2y^2 - 2cy(cx + d)i}{\left((cx + d)^2 - c^2y^2\right)^2 + 4c^2y^2(cx + d)^2} \\
 &= \frac{(cx + d)^2 - c^2y^2 - 2cy(cx + d)i}{\left((cx + d)^2 + c^2y^2\right)^2}.
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 g'(z) \cdot \zeta &= \left(\frac{(cx + d)^2 - c^2y^2 - 2cy(cx + d)i}{\left((cx + d)^2 + c^2y^2\right)^2} \right) (\bar{x} + i\bar{y}) \\
 &= \left(\frac{(cx + d)^2 - c^2y^2}{\left((cx + d)^2 + c^2y^2\right)^2} \bar{x} + \frac{2cy(cx + d)}{\left((cx + d)^2 + c^2y^2\right)^2} \bar{y} \right) \\
 &\quad + i \left(\frac{-2cy(cx + d)}{\left((cx + d)^2 + c^2y^2\right)^2} \bar{x} + \frac{(cx + d)^2 - c^2y^2}{\left((cx + d)^2 + c^2y^2\right)^2} \bar{y} \right).
 \end{aligned}$$

Portanto, $(Dg)(\zeta) = g'(z) \cdot \zeta$. Logo,

$$\begin{aligned}
 \|(Dg)(\zeta)\| &= \frac{\|(Dg)(\zeta)\|}{\text{Im}(g(z))} \quad (\text{devido a 2.3}) \\
 &= \frac{|g'(z)| \cdot |\zeta|}{\text{Im}(g(z))} \\
 &= \frac{|\zeta|}{|cz + d|^2 \text{Im}(g(z))} \quad (\text{devido a 1.4}) \\
 &= \frac{|\zeta|}{\text{Im}(z)} \quad (\text{devido a 1.3}) \\
 &= \|\zeta\|
 \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que $\|(Dg)(\zeta)\| = \|\zeta\|$, e seja $\gamma : I \rightarrow \mathbb{H}$ um caminho diferenciável por partes em \mathbb{H} dado por $z(t) = (x(t), y(t))$. Então,

$$h(g(\gamma)) = \int_0^1 \frac{|g'(z(t))| \cdot |z'(t)|}{\text{Im}(g(z(t)))} dt = \int_0^1 \frac{|z'(t)|}{\text{Im}(z(t))} dt = h(\gamma)$$

e, conseqüentemente, g é uma isometria de (\mathbb{H}, ds) . □

Pela identidade de polarização, para qualquer $\xi, \eta \in T_z\mathbb{H}$ temos

$$\langle \xi, \eta \rangle = \frac{1}{2} \left(\|\xi\|^2 + \|\eta\|^2 - \|\xi - \eta\|^2 \right).$$

Portanto, o produto interno e daí, o valor absoluto do ângulo entre os vetores tangentes são também preservados. Definiremos o ângulo entre duas geodésicas em \mathbb{H} no ponto de intersecção z como ângulo entre os seus vetores tangentes em $T_z\mathbb{H}$. Note que essa noção de ângulo coincide com a noção de medida de ângulo Euclidiano. De fato: chamemos de $\cos(\theta)$ a noção de ângulo euclidiana e de $\cos(\bar{\theta})$ a noção de ângulo hiperbólica com a métrica 1.1. Denotemos ainda $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$ e $\|\cdot\|_{\mathbb{R}^2}$ o produto interno e a norma euclidiana, respectivamente. Sejam $\zeta_1 = (\xi_1, \eta_1) = \xi_1 + i\eta_1$ e $\zeta_2 = (\xi_2, \eta_2) = \xi_2 + i\eta_2$ em \mathbb{H} . Observemos que

$$\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle = \frac{1}{(\operatorname{Im} z)^2} (\xi_1 \xi_2 + \eta_1 \eta_2) = \frac{1}{(\operatorname{Im} z)^2} \langle (\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2) \rangle_{\mathbb{R}^2} = \frac{1}{(\operatorname{Im} z)^2} \langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle_{\mathbb{R}^2}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \cos(\bar{\theta}) &= \frac{\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle}{\|\zeta_1\| \cdot \|\zeta_2\|} \\ &= \frac{\frac{1}{(\operatorname{Im} z)^2} \langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle_{\mathbb{R}^2}}{\sqrt{\frac{1}{(\operatorname{Im} z)^2} \langle \zeta_1, \zeta_1 \rangle_{\mathbb{R}^2}} \sqrt{\frac{1}{(\operatorname{Im} z)^2} \langle \zeta_2, \zeta_2 \rangle_{\mathbb{R}^2}}} \\ &= \frac{\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle_{\mathbb{R}^2}}{\|\zeta_1\|_{\mathbb{R}^2} \cdot \|\zeta_2\|_{\mathbb{R}^2}} \\ &= \cos(\theta). \end{aligned}$$

Portanto, a noção de ângulo nos dois casos coincidem.

Uma transformação de \mathbb{H} é chamada conforme quando preserva ângulo, e anti-conforme quando preserva o valor absoluto do ângulo mas muda o sinal.

Teorema 2.3 *Qualquer transformação em $\operatorname{PSL}(2, \mathbb{R})$ é conforme; qualquer transformação da forma 2.2 é anti-conforme.*

Demonstração:

Consideremos a Figura 6 abaixo.

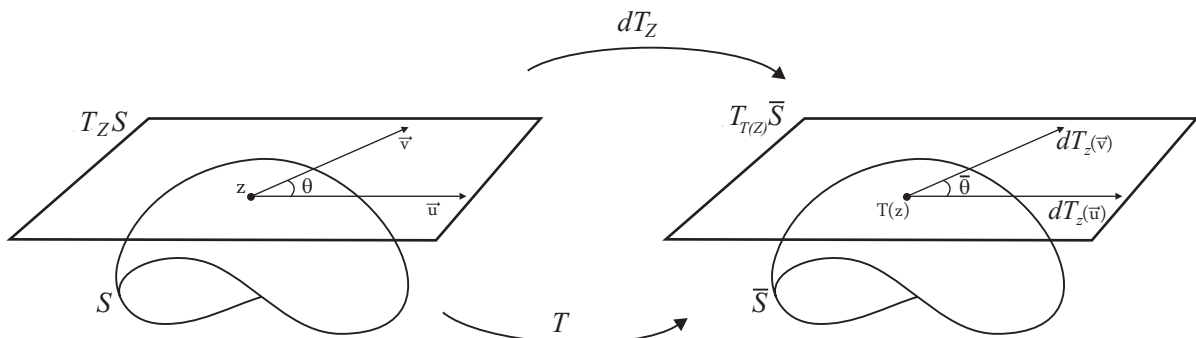


FIGURA 6: *Diferencial de isometria.*

De forma geral consideremos duas superfícies abstratas S e \bar{S} e seus respectivos planos tangentes nos pontos z e $T(z)$, $T_z S$ e $T_{T(z)} \bar{S}$. Nesse caso, temos que $\cos(\theta) = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$ e $\cos(\bar{\theta}) = \frac{\langle dT_z(\vec{u}), dT_z(\vec{v}) \rangle}{|dT_z(\vec{u})| \cdot |dT_z(\vec{v})|}$ com $dT_z(\vec{u}) = T'(z) \cdot \vec{u}$ e $dT_z(\vec{v}) = T'(z) \cdot \vec{v}$.

Nesse teorema \vec{u} e \vec{v} são números complexos e, se $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $ad - bc = 1$, então $T'(z) = \frac{1}{(cz+d)^2}$. Logo,

$$\begin{aligned} \cos(\bar{\theta}) &= \frac{\left\langle \frac{1}{(cz+d)^2} \vec{u}, \frac{1}{(cz+d)^2} \vec{v} \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \frac{1}{(cz+d)^2} \vec{u}, \frac{1}{(cz+d)^2} \vec{u} \right\rangle} \cdot \sqrt{\left\langle \frac{1}{(cz+d)^2} \vec{v}, \frac{1}{(cz+d)^2} \vec{v} \right\rangle}} \\ &= \frac{\frac{1}{(cz+d)^4} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\sqrt{\frac{1}{(cz+d)^4} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \cdot \sqrt{\frac{1}{(cz+d)^4} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}} \\ &= \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}} \\ &= \cos(\theta). \end{aligned}$$

Agora, se $T(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ com $ad - bc = -1$ então $T'(z) = \frac{-1}{(cz+d)^2}$. Logo,

$$\begin{aligned} \cos(\bar{\theta}) &= \frac{\left\langle -\frac{1}{(cz+d)^2} \vec{u}, -\frac{1}{(cz+d)^2} \vec{v} \right\rangle}{\sqrt{\left\langle \frac{1}{(cz+d)^2} \vec{u}, \frac{1}{(cz+d)^2} \vec{u} \right\rangle} \sqrt{\left\langle \frac{1}{(cz+d)^2} \vec{v}, \frac{1}{(cz+d)^2} \vec{v} \right\rangle}} \\ &= \frac{\frac{1}{(cz+d)^4} \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\sqrt{\frac{1}{(cz+d)^4} \langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \sqrt{\frac{1}{(cz+d)^4} \langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}} \\ &= \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\sqrt{\langle \vec{u}, \vec{u} \rangle} \cdot \sqrt{\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle}} \\ &= \cos(\theta). \end{aligned}$$

Portanto, as transformações em $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ são conformes.

Mostremos agora que as transformações da forma 2.2 são anti-conformes. Sejam $z = x + iy$ e

$$T: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto -\bar{z}.$$

Assim, $T(z) = T(x + iy) = -(x - iy) = -x + iy$. Considerando que $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ temos que $z = x + iy \equiv (x, y)$. Assim,

$$T \equiv F: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto F(x, y) = (-x, y).$$

Temos que F é isometria pois, dados dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) em \mathbb{R}^2 então

$$\begin{aligned} d(F(x_1, y_1), F(x_2, y_2)) &= d((-x_1, y_1), (-x_2, y_2)) \\ &= \sqrt{(-x_1 - (-x_2))^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \\ &= d((x_1, y_1), (x_2, y_2)). \end{aligned}$$

Temos ainda que F é linear, pois se $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} F((x_1, y_1) + \lambda(x_2, y_2)) &= F(x_1 + \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2) \\ &= (-x_1 - \lambda x_2, y_1 + \lambda y_2) \\ &= (-x_1, y_1) + \lambda(-x_2, y_2) \\ &= F(x_1, y_1) + \lambda F(x_2, y_2). \end{aligned}$$

Além disso, se chamarmos $F_1(x, y) = -x$ e $F_2(x, y) = y$ as funções coordenadas de F , então

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} F_1(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y) & \frac{\partial}{\partial y} F_2(x, y) \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -1 < 0.$$

Portanto F reverte orientação, ou seja, é anti-conforme. Como as transformações em $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, composta com F resultam em transformações da forma 2.2, então essas são, necessariamente, anti-conformes. \square

2.2 Classificação de Isometrias

Há três tipos distintos de isometrias $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ em $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$, sendo $ad - bc = 1$, diferenciados pelo valor absoluto do traço da matriz associada $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, que chamaremos de traço de

T , indicado por $\text{tr}(T) = |a + d|$.

Se $\text{tr}(T) < 2$, T é chamada elíptica;

Se $\text{tr}(T) = 2$, T é chamada parabólica;

Se $\text{tr}(T) > 2$, T é chamada hiperbólica.

Diremos ainda que duas matrizes $A, B \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ são conjugadas quando existir $M \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ tal que $A = MBM^{-1}$. De modo análogo, duas isometrias $T_A, T_B \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ serão ditas conjugadas quando suas matrizes correspondentes A e B assim o forem. Nesse caso, existe $T_M \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ tal que $T_A = T_M \circ T_B \circ T_M^{-1}$.

Antes de demonstrar o próximo teorema, observemos que se A, B, M são matrizes reais de ordem dois e $A = MBM^{-1}$ então $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$. De fato: sejam $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}$.

Então, $AB = \begin{bmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_3 & a_1 b_2 + a_2 b_4 \\ a_3 b_1 + a_4 b_3 & a_3 b_2 + a_4 b_4 \end{bmatrix}$. Logo, $\text{tr}(AB) = a_1 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_4$. Por

outro lado, $BA = \begin{bmatrix} b_1 a_1 + b_2 a_3 & b_1 a_2 + b_2 a_4 \\ b_3 a_1 + b_4 a_3 & b_3 a_2 + b_4 a_4 \end{bmatrix}$. Logo, $\text{tr}(BA) = b_1 a_1 + b_2 a_3 + b_3 a_2 + b_4 a_4$.

Portanto, $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$. Daí, $\text{tr}(A) = \text{tr}(MBM^{-1}) = \text{tr}(M^{-1}MB) = \text{tr}(B)$.

Observemos ainda que, se $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{az+b}{cz+d} \frac{(-1)}{(-1)} = \frac{-az-b}{-cz-d}$, com $ad - bc = 1$, então podemos escrever T de modo que $\text{tr}(T) = a + d > 0$ (sem o módulo). Além disso, também podemos escrever T de forma que $b \geq 0$.

As demonstrações dos três teoremas e corolários abaixo são diferentes daquelas que constam nas principais referências sobre o assunto. Procuramos fazê-las com o máximo de detalhamento possível.

Teorema 2.4 *Uma isometria $T_A \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ é hiperbólica se, e somente se, é conjugada em $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ a uma isometria T_B associada à matriz $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}$ com $\lambda > 1$.*

Demonstração:

Se existe $M \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ tal que $A = MBM^{-1}$, então, como vimos, $\text{tr}(T_A) = \text{tr}(T_B)$. Mas, $\text{tr}(T_B) = \left| \lambda + \frac{1}{\lambda} \right|$ e $(\lambda - 1)^2 > 0$ implica em $\lambda^2 + 1 > 2\lambda$. Como $\lambda > 1 > 0$, temos $\lambda + \frac{1}{\lambda} > 2$. Portanto, $\text{tr}(T_B) = \left| \lambda + \frac{1}{\lambda} \right| > 2$, o que implica em $\text{tr}(T_A) > 2$, ou seja, T_A é hiperbólica.

Suponhamos $T_A \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ hiperbólica de modo que $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ seja tal que $\text{tr}(T_A) = a + d > 2$. Daí, o polinômio característico de A é dado por

$$p(\alpha) = \det \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} a - \alpha & b \\ c & d - \alpha \end{bmatrix},$$

de forma que as raízes desse polinômio são as raízes da equação $(a - \alpha)(d - \alpha) - cb = 0$, o que implica em $\alpha^2 - (a + d)\alpha + 1 = 0$, ou seja, raízes $\alpha_1 = \frac{a+d+\sqrt{(a+d)^2-4}}{2}$ e $\alpha_2 = \frac{a+d-\sqrt{(a+d)^2-4}}{2}$. Como $(a + d)^2 - 4 > 0$, então α_1 e α_2 são autovalores reais, ou seja, A é diagonalizável. (ref. [13], pág. 154 e 155). Além disso,

$$\alpha_2 = \frac{a + d - \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{2} = \frac{2}{a + d + \sqrt{(a + d)^2 - 4}} = \frac{1}{\frac{a+d+\sqrt{(a+d)^2-4}}{2}} = \frac{1}{\alpha_1}.$$

Portanto, um dos autovalores, α_1 ou $\frac{1}{\alpha_1}$, é maior do que 1. A esse autovetor maior do que 1 chamaremos de λ . Daí, a diagonalização de A conduz à matriz $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}$ e, portanto, existe uma matriz inversível (matriz de mudança de bases) M tal que $A = MBM^{-1}$ (ref. [13], pág. 92 e 93).

Fazendo $M = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$, então

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{h}{eh-gf} & -\frac{f}{eh-gf} \\ -\frac{g}{eh-gf} & \frac{e}{eh-gf} \end{bmatrix} \implies \\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{eh\lambda^2 - fg}{\lambda(eh-gf)} & \frac{-ef\lambda^2 + ef}{\lambda(eh-gf)} \\ \frac{gh\lambda^2 - gh}{\lambda(eh-gf)} & \frac{-gf\lambda^2 + eh}{\lambda(eh-gf)} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Se $\det M = 1$, temos $T_M \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$.

Caso $\det M \neq 1$ e $\det M > 0$, então tomaremos $\bar{M} = \begin{bmatrix} \frac{e}{\sqrt{eh-fg}} & \frac{f}{\sqrt{eh-fg}} \\ \frac{g}{\sqrt{eh-fg}} & \frac{h}{\sqrt{eh-fg}} \end{bmatrix}$. Daí, $\det \bar{M} = 1$ e

$$\begin{aligned} \bar{M} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix} \bar{M}^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{e}{\sqrt{eh-fg}} & \frac{f}{\sqrt{eh-fg}} \\ \frac{g}{\sqrt{eh-fg}} & \frac{h}{\sqrt{eh-fg}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{h}{\sqrt{eh-fg}} & \frac{-f}{\sqrt{eh-fg}} \\ -\frac{g}{\sqrt{eh-fg}} & \frac{e}{\sqrt{eh-fg}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{e\lambda}{\sqrt{eh-fg}} & \frac{f}{\lambda\sqrt{eh-fg}} \\ \frac{g\lambda}{\sqrt{eh-fg}} & \frac{h}{\lambda\sqrt{eh-fg}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{h}{\sqrt{eh-fg}} & \frac{-f}{\sqrt{eh-fg}} \\ -\frac{g}{\sqrt{eh-fg}} & \frac{e}{\sqrt{eh-fg}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{eh\lambda^2 - fg}{\lambda(eh-gf)} & \frac{-ef\lambda^2 + ef}{\lambda(eh-gf)} \\ \frac{gh\lambda^2 - gh}{\lambda(eh-gf)} & \frac{-gf\lambda^2 + eh}{\lambda(eh-gf)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Caso $\det M \neq 1$ e $\det M < 0$, então tomaremos $\bar{M} = \begin{bmatrix} \frac{f}{\sqrt{-(eh-fg)}} & \frac{e}{\sqrt{-(eh-fg)}} \\ \frac{h}{\sqrt{-(eh-fg)}} & \frac{g}{\sqrt{-(eh-fg)}} \end{bmatrix}$. Daí, $\det \bar{M} = 1$
e

$$\begin{aligned} \bar{M} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix} \bar{M}^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{f}{\sqrt{-(eh-fg)}} & \frac{e}{\sqrt{-(eh-fg)}} \\ \frac{h}{\sqrt{-(eh-fg)}} & \frac{g}{\sqrt{-(eh-fg)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{g}{\sqrt{-(eh-fg)}} & \frac{-e}{\sqrt{-(eh-fg)}} \\ \frac{-h}{\sqrt{-(eh-fg)}} & \frac{f}{\sqrt{-(eh-fg)}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{f}{\lambda\sqrt{-(eh-fg)}} & \frac{e\lambda}{\sqrt{-(eh-fg)}} \\ \frac{h}{\lambda\sqrt{-(eh-fg)}} & \frac{g\lambda}{\sqrt{-(eh-fg)}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{g}{\sqrt{-(eh-fg)}} & \frac{-e}{\sqrt{-(eh-fg)}} \\ \frac{-h}{\sqrt{-(eh-fg)}} & \frac{f}{\sqrt{-(eh-fg)}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{eh\lambda^2 - fg}{\lambda(eh - fg)} & \frac{-ef\lambda^2 + ef}{\lambda(eh - fg)} \\ \frac{gh\lambda^2 - gh}{\lambda(eh - fg)} & \frac{-gf\lambda^2 + eh}{\lambda(eh - fg)} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Corolário 2.1 *Uma transformação $T_A \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ hiperbólica estendida a $\bar{H} = H \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ fixa exatamente dois pontos de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.*

Demonstração:

Como A é conjugada com uma matriz da forma $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}$ com $\lambda > 1$, analisemos o que ocorre com $T_B(z) = \frac{\lambda z}{1} = \lambda^2 z$. Suponhamos, por absurdo, que existe $z_0 \in H$ tal que $T_B(z_0) = z_0$. Daí, $\lambda^2 z_0 = z_0$ implica em $(\lambda^2 - 1)z_0 = 0$. Como $z_0 \in H$, então $z_0 \neq 0$. Logo, $\lambda = \pm 1$. Absurdo. Logo, T_B hiperbólica não fixa ponto ordinário (ponto de H).

Seja T_M isometria em \bar{H} tal que $T_A = T_M \circ T_B \circ T_M^{-1}$ (teorema acima). A geodésica $\alpha(t) = it$, $t > 0$ é fixada pela T_B pois $T_B(it) = \lambda^2 it = \alpha(\lambda^2 t)$. Os pontos ideais de α (pontos no fecho de H , ou seja, pontos em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tais que $z = \lim_{t \rightarrow 0^+} \alpha(t)$ ou $z = \lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t)$) são $z = 0$ e $z = \infty$, que são fixos pela isometria T_B . A geodésica α é chamada de eixo da isometria T_B e a geodésica $\beta(t) = T_M(\alpha(t))$ é eixo da isometria T_A , pois $T_M \circ T_B \circ T_M^{-1}(T_M(\alpha(t))) = T_M \circ T_B(\alpha(t)) = T_M(\alpha(t)) = \beta(t)$, ou seja, $T_A(\beta(t)) = \beta(t)$. Os pontos ideais de β são fixos por T_A , pois são imagens dos pontos ideais de α . (Figura 7)

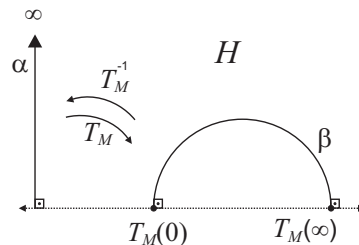


FIGURA 7: Ação da isometria T_M .

□

Teorema 2.5 *Uma isometria $T_A \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ é elíptica se, e somente se, é conjugada em $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ a uma isometria T_B associada à matriz $B = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$, $0 < \theta < \pi$.*

Demonstração:

Analogamente à demonstração do teorema anterior, se T_A é conjugada à T_B , então elas possuem o mesmo traço. Como $\text{tr}(T_B) = |2 \cos(\theta)| < 2$, então T_A é elíptica. Mostremos agora que se T_A é elíptica, então existe $M = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ tal que $T_A = T_M T_B T_M^{-1}$. De fato, escolhamos uma representação de $T_A(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ de forma que $b \geq 0$. Queremos encontrar M que satisfaça

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \text{sen}(\theta) \\ -\text{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix},$$

ou seja, que satisfaça o sistema de equações

$$\begin{cases} (a - \cos(\theta))e + bg = -f \text{sen}(\theta) \\ ce + (d - \cos(\theta))g = -h \text{sen}(\theta) \\ (a - \cos(\theta))f + bh = e \text{sen}(\theta) \\ cf + (d - \cos(\theta))h = g \text{sen}(\theta) \end{cases}.$$

Como $\text{sen}(\theta) \neq 0$, podemos escrever $e = \frac{a - \cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)}f + \frac{b}{\text{sen}(\theta)}h$ e $g = \frac{c}{\text{sen}(\theta)}f + \frac{d - \cos(\theta)}{\text{sen}(\theta)}h$. Substituindo essas equações nas duas primeiras equações do sistema anterior teremos:

$$\begin{cases} (a^2 - 2a \cos(\theta) + bc + 1)f + (ba + bd - 2b \cos(\theta))h = 0 \\ (ca + cd - 2c \cos(\theta))f + (cb + d^2 - 2d \cos(\theta) + 1)h = 0 \end{cases}$$

Como esse sistema é homogêneo, então para que ele possua solução devemos ter

$$\begin{aligned} (a^2 - 2a \cos(\theta) + bc + 1)(cb + d^2 - 2d \cos(\theta) + 1) \\ - (ca + cd - 2c \cos(\theta))(ba + bd - 2b \cos(\theta)) = 0 \implies \\ (2 \cos(\theta) - (a + d))^2 = 0 \implies \\ \cos(\theta) = \frac{a + d}{2} \implies \\ \theta = \arccos\left(\frac{a + d}{2}\right). \end{aligned}$$

Dessa forma, se tomarmos a, b, c e d de forma que $b > 0$, então podemos escolher $f = 0$ e, como $eh - gf = 1$, então

$$\begin{aligned} \left(\frac{b}{\text{sen}(\theta)}h\right)h = 1 \implies h = \sqrt{\frac{\text{sen}(\theta)}{b}}; \\ e = \frac{b}{\text{sen}(\theta)}h \implies e = \sqrt{\frac{b}{\text{sen}(\theta)}}; \\ g = \frac{d - \cos \theta}{\text{sen} \theta}h \implies g = \frac{d - a}{2\sqrt{b \text{sen}(\theta)}}. \end{aligned}$$

Além disso, se $b = 0$, então $ad = 1$, o que implica em $d = \frac{1}{a}$. Mas, $|a + d| < 2$ significa $|a + \frac{1}{a}| < 2$ e não existe $a \in \mathbb{R}$ que satisfaça essa desigualdade. Logo, basta tomarmos

$$M = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{b}{\text{sen}(\theta)}} & 0 \\ \frac{d - a}{2\sqrt{b \text{sen}(\theta)}} & \sqrt{\frac{\text{sen}(\theta)}{b}} \end{bmatrix},$$

sendo $\text{sen}(\theta) = \frac{\sqrt{4 - (a+d)^2}}{2}$. □

Corolário 2.2 *Uma isometria $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$ elíptica fixa apenas um ponto de \mathbb{H} .*

Demonstração:

De modo análogo ao Corolário anterior, podemos analisar $T(z) = \frac{\cos(\theta)z + \sin(\theta)}{-\sin(\theta)z + \cos(\theta)}$. Daí,

$$\frac{\cos(\theta)z + \sin(\theta)}{-\sin(\theta)z + \cos(\theta)} = z \implies -\sin(\theta)z^2 + \cos(\theta)z = \cos(\theta)z + \sin(\theta) \implies z^2 = -1 \implies z = i$$

é o único ponto fixo de T em \mathbb{H} . \square

Teorema 2.6 *Uma isometria $T_A \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, $T_A \neq \text{Id}$, é parabólica se, e somente se, é conjugada em $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ a uma isometria T_B associada à matriz $B = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $k \neq 0$.*

Demonstração:

Analogamente à demonstração do teorema anterior se T_A é conjugada à T_B , então elas possuem o mesmo traço. Como $\text{tr}(T_B) = 2$, então T_A é parabólica. Como na demonstração do teorema anterior, consideraremos aqui o traço de T_A sem o módulo. Reciprocamente, queremos encontrar

M que satisfaça $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, ou seja, que satisfaça o sistema de equações

$$\begin{cases} (a-1)e + bg = 0 \\ ce + (d-1)g = 0 \\ \frac{(a-1)}{k}f + \frac{b}{k}h = e \\ \frac{c}{k}f + \frac{(d-1)}{k}h = g \end{cases}$$

Substituindo as duas últimas equações nas duas primeiras, temos o sistema

$$\begin{cases} (a-1)\left(\frac{(a-1)}{k}f + \frac{b}{k}h\right) + b\left(\frac{c}{k}f + \frac{(d-1)}{k}h\right) = 0 \\ c\left(\frac{(a-1)}{k}f + \frac{b}{k}h\right) + (d-1)\left(\frac{c}{k}f + \frac{(d-1)}{k}h\right) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \left(\frac{(a-1)^2}{k} + \frac{bc}{k}\right)f + \left(\frac{(a-1)b}{k} + \frac{b(d-1)}{k}\right)h = 0 \\ \left(\frac{c(a-1)}{k} + \frac{c(d-1)}{k}\right)f + \left(\frac{bc}{k} + \frac{(d-1)^2}{k}\right)h = 0 \end{cases}$$

Como

$$\begin{aligned} \left(\frac{(a-1)^2}{k} + \frac{bc}{k}\right)\left(\frac{bc}{k} + \frac{(d-1)^2}{k}\right) - \left(\frac{c(a-1)}{k} + \frac{c(d-1)}{k}\right)\left(\frac{(a-1)b}{k} + \frac{b(d-1)}{k}\right) &= \frac{(ad-a-d+1-bc)^2}{k^2} \\ &= \frac{(-a-d+2)^2}{k^2} \\ &= 0, \end{aligned}$$

o sistema acima é possível e indeterminado.

O caso $b = 0$ e $c = 0$, não ocorre, pois, se ocorresse, então $ad = 1$, que implica em $d = \frac{1}{a}$ e, além disso,

$$a + \frac{1}{a} = 2 \implies a^2 - 2a + 1 = 0 \implies (a-1)^2 = 0 \implies a = 1$$

e daí, $d = 1$. Logo, T_A seria a identidade.

Se $b \neq 0$, podemos tomar $h = 1$, $f = 0$, $e = 1$ e $g = \frac{1-a}{b}$ e, nesse caso temos, $k = b$. Assim,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1-a}{b} & 1 \end{bmatrix}.$$

Se $c \neq 0$ e $a = 1$ então $d = 1$ (o que implica que $b = 0$) e daí, $M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & c^2 \end{bmatrix}$ com $k = -c$.

Se $c \neq 0$ e $a \neq 1$ então $M = \begin{bmatrix} \frac{1-a}{c} & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, e, nesse caso, $k = -c$. \square

Corolário 2.3 *Uma isometria parabólica $T_A \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, $T \neq \text{Id}$, estendida a $\bar{H} = H \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ fixa um único ponto de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.*

Demonstração:

A exemplo da demonstração dos corolários acima, analisemos o que ocorre com a isometria $T(z) = z + k$, com $k \neq 0$. Entretanto, para poder entender melhor o fato de ∞ ser o ponto fixo de T , iremos analisar o que ocorre geometricamente com T no modelo do disco \mathcal{U} . Seja

$F: H \longrightarrow \mathcal{U}$. Daí, $F^{-1}: \mathcal{U} \longrightarrow H$. Tomemos um ponto $z \in H$ e façamos $w = F(z)$. Logo, $z = F^{-1}(w)$. Queremos encontrar \bar{T} tal que $\bar{T}: \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{U}$. (Figura 8)

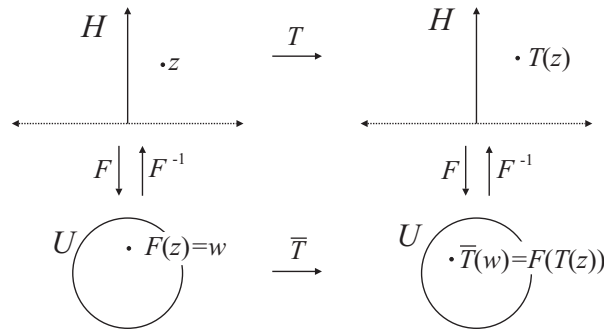


FIGURA 8: *Transferindo a análise para o modelo do disco.*

Logo,

$$\begin{aligned}
 \bar{T}(w) &= F(T(F^{-1}(w))) \\
 &= F\left(T\left(\frac{wi-1}{i-w}\right)\right) \\
 &= F\left(\frac{wi-1}{i-w} + k\right) \\
 &= \frac{i\left(\frac{wi-1}{i-w} + k\right) + 1}{\frac{wi-1}{i-w} + k + i} \\
 &= \frac{-w - i - k - kwi + i - w}{wi - 1 + ki - kw - 1 - iw} \\
 &= \frac{-2w - k - kwi}{-2 + ki - kw},
 \end{aligned}$$

com $w \neq i - \frac{2}{k}$. Mostremos agora que dado P pertencente ao fecho de \mathcal{U} , então

$$\lim_{w \rightarrow P} \bar{T}(w) = P \iff P = i.$$

De fato: Se $\lim_{w \rightarrow P} \bar{T}(w) = P$, então

$$\frac{-2P - k - kPi}{-2 + ki - kP} = P \implies -2P - k - kPi = -2P + kPi - kP^2 \implies P^2 - 2Pi - 1 = 0 \implies P = i.$$

Reciprocamente, quando $P = i$, então $\lim_{w \rightarrow i} \bar{T}(w) = \lim_{w \rightarrow i} \frac{-2w - k - kwi}{-2 + ki - kw} = i$. Agora, se $P \neq i$,

$P = x + iy$, então

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow P} F^{-1}(w) &= \frac{Pi - 1}{i - P} \\ &= \frac{xi - y - 1}{i - x - iy} \\ &= \frac{2x + (1 - x^2 - y^2)i}{x^2 + (1 - y)^2} \end{aligned}$$

pertence a \mathbb{R} , se $|x + iy| = 1$, e pertence $\mathbb{C} - \mathbb{R}$, caso contrário. Além disso, $\lim_{w \rightarrow P \neq i} F^{-1}(w) \neq w$.

Logo, o único ponto (ordinário ou ideal) de H que não é limite com $w \rightarrow P \neq i$ é o ponto $\Omega = \infty$ que corresponde a $\lim_{w \rightarrow i} |F^{-1}(w)| = \lim_{w \rightarrow i} \left| \frac{wi-1}{i-w} \right| = \lim_{w \rightarrow i} \frac{|wi-1|}{|i-w|} = \infty$ que é ponto ideal de H e, portanto, o único. \square

Capítulo 3

Reticulados em Espaços Quociente

3.1 Buscando Reticulados Geometricamente Uniformes

Sejam \mathbb{E} um espaço n -dimensional com curvatura gaussiana constante, $\mathcal{P} \subset \mathbb{E}$ um conjunto finito de pontos e J um grupo discreto de isometrias de \mathbb{E} . À órbita

$$\mathcal{R} = J\mathcal{P} = \{h(P) : h \in J \text{ e } P \in \mathcal{P}\}$$

de \mathcal{P} por J em \mathbb{E} chamaremos de **reticulado** em \mathbb{E} .

Um reticulado \mathcal{R} em \mathbb{E} é dito **geometricamente uniforme** quando o grupo de simetrias G de \mathcal{R} é transitivo, ou seja, dados dois pontos P e Q de \mathcal{R} , existe uma simetria $g \in G$ tal que $g(P) = Q$.

Observemos que se \mathcal{P} for um conjunto unitário, então \mathcal{R} será, necessariamente, geometricamente uniforme, pois nesse caso, J coincide com o grupo de simetrias G .

Os reticulados no espaço \mathbb{R}^n obtidos a partir da origem pela ação de um grupo de translações por n vetores linearmente independentes são os chamados reticulados clássicos do \mathbb{R}^n . Conforme já observado, esses reticulados (que têm uma quantidade infinita de pontos) são geometricamente uniformes. Entretanto, subconjuntos finitos de tais reticulados podem não ser geometricamente uniformes. Por exemplo, se $\mathcal{P} = \{(1, 0), (2, 0)\} \subset \mathbb{R}^2$ e $J = \langle \rho_{\frac{\pi}{4}} \rangle$, sendo $\rho_{\frac{\pi}{4}}$ rotação de $\frac{\pi}{4}$ em torno da origem, o grupo G de simetrias de \mathcal{P} não é transitivo. Outro exemplo importante de reticulado que não é geometricamente uniforme é dado no Exemplo 1.

Existem reticulados de pontos no plano euclidiano bastante utilizados em modulação de sinais e códigos corretores de erros em canais de transmissão ruidosos que não são geometricamente uniforme, mas possui estrutura interessante do ponto de vista de codificação. Para “torná-los” geometricamente uniforme, iremos fazer uso de espaços quociente.

Sejam \mathbb{E} um espaço n -dimensional com curvatura gaussiana constante, J um grupo discreto de isometrias de \mathbb{E} e a relação de equivalência \sim em \mathbb{E} definida por

$$P_1 \sim P_2 \iff P_2 = h(P_1), \quad h \in J.$$

Denotaremos a classe de equivalência de um ponto P por \bar{P} . Ao conjunto

$$\mathbb{E} = \mathbb{E} / \sim = \mathbb{E} / J = \{\bar{P} : P \in \mathbb{E}\}$$

chamaremos de espaço quociente de \mathbb{E} por J .

Abaixo, consideremos um reticulado sobre um espaço quociente.

Exemplo 1. Consideremos um reticulado \mathcal{R} de 16 pontos em forma de quadrado 4×4 no plano euclidiano \mathbb{R}^2 . Em Teoria da Informação e Codificação, tal reticulado é conhecido como **16 – QAM** (quadrature amplitude modulation) e é gerado pela órbita de $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_6\}$ (Figura 9) pelo grupo de simetrias $J = \langle R_1, R_2 \rangle$, gerado pelas reflexões R_1 pela reta que passa por P_1 e P_{16} e R_2 pela reta mediatriz do segmento P_5P_9 .

Este reticulado não é geometricamente uniforme. De fato, o grupo de simetrias J é composto pelos elementos $\text{Id}, R_1, R_2, R_3, R_4, \rho_{\frac{\pi}{2}}, \rho_{\pi}, \rho_{\frac{3\pi}{2}}$, sendo R_i reflexões e ρ_{θ} rotações de giro θ e centro O (Figura 9). Observemos que translações não podem fazer parte de J pois elas não fixam o reticulado, bem como qualquer outra isometria que não as listadas no grupo J . Assim, fixados os pontos P_{12} e P_{16} , não temos uma simetria σ de J tal que $\sigma(P_{12}) = P_{16}$, o que permite concluir a afirmação.

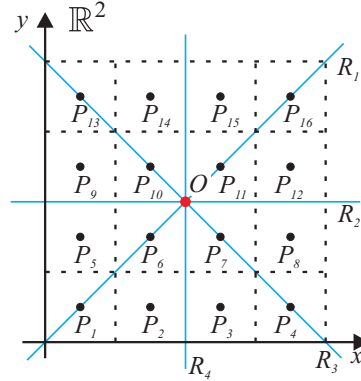


FIGURA 9: O reticulado 16 – QAM.

Consideremos:

- (i) o grupo discreto de isometrias $G_1 = \langle T_{\vec{e}_1}, T_{\vec{e}_2} \rangle$, gerado pelas translações $T_{\vec{e}_1}$ e $T_{\vec{e}_2}$, sendo $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ base canônica do espaço vetorial usual \mathbb{R}^2 .
- (ii) o ponto $P = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ em $\mathcal{P} = \{P\}$ e sua órbita $G_1\mathcal{P} = \{\varphi(P) \in \mathbb{R}^2 : \varphi \in G_1\}$.
- (iii) o grupo discreto de isometrias $G_2 = \langle T_{4\vec{e}_1}, T_{4\vec{e}_2} \rangle$ gerado pelas translações $T_{4\vec{e}_1}$ e $T_{4\vec{e}_2}$.
- (iv) o espaço quociente $E = \mathbb{R}^2/G_2$ (Figura 10).

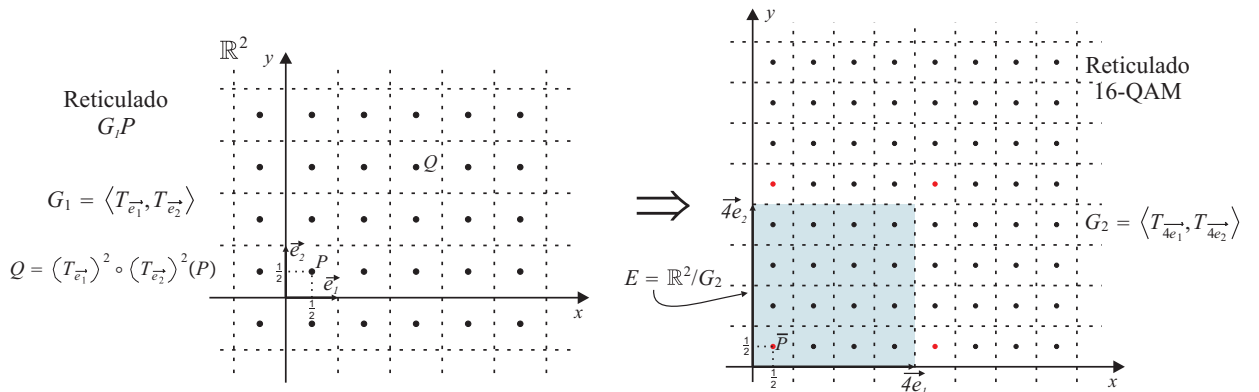


FIGURA 10: O reticulado 16 – QAM obtido por quociente.

Logo, sobre E temos o conjunto das classes de equivalência de 16 pontos da órbita de \mathcal{P} , que definiremos como sendo o reticulado **16 – QAM obtido por quociente**. O grupo de simetrias \bar{S} desse reticulado quociente possui translações pelos vetores $\vec{e}_1 = \overline{P_1P_2}$ e $\vec{e}_2 = \overline{P_1P_5}$. Assim, dados quaisquer pontos \overline{P}_i e \overline{P}_j , existe uma simetria $\bar{\sigma} \in \bar{S}$ composta de translações tal que $\bar{\sigma}(\overline{P}_i) = \overline{P}_j$, ou seja, *sobre E , o reticulado obtido é geometricamente uniforme*.

Observemos que quando “quocientamos” o reticulado $G_1\mathcal{P}$ pelo grupo G_2 , estamos identificando os lados opostos do quadrado azul da Figura 10 de tal modo que, do ponto de vista topológico, os pontos do 16 – QAM podem ser vistos sobre um toro. Este toro, chamado de toro planar, pode ser mergulhado isometricamente em uma esfera de raio $\frac{\sqrt{2}}{2\pi}$ no \mathbb{R}^4 , por meio do mergulho $\Phi(x, y) = \left(\frac{1}{2\pi} \cos(2\pi x), \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x), \frac{1}{2\pi} \cos(2\pi y), \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi y)\right)$. (ref. [8]).

Exemplo 2. Um reticulado genuinamente hiperbólico (ou seja, obtido exclusivamente por isometrias hiperbólicas): consideremos um novo reticulado de 16 pontos que não existe no ambiente euclidiano. Para modelá-lo consideremos:

(a) o grupo discreto de isometrias $F_1 = \langle \delta_0, \delta_1, \delta_2 \rangle$, no disco \mathbf{U} , gerado pelas reflexões hiperbólicas do tipo 2.2 nos lados de um triângulo hiperbólico equilátero OBE de ângulos internos $\frac{\pi}{4}$, com o lado OB no eixo das abscissas e o vértice O na origem (Figura 11).

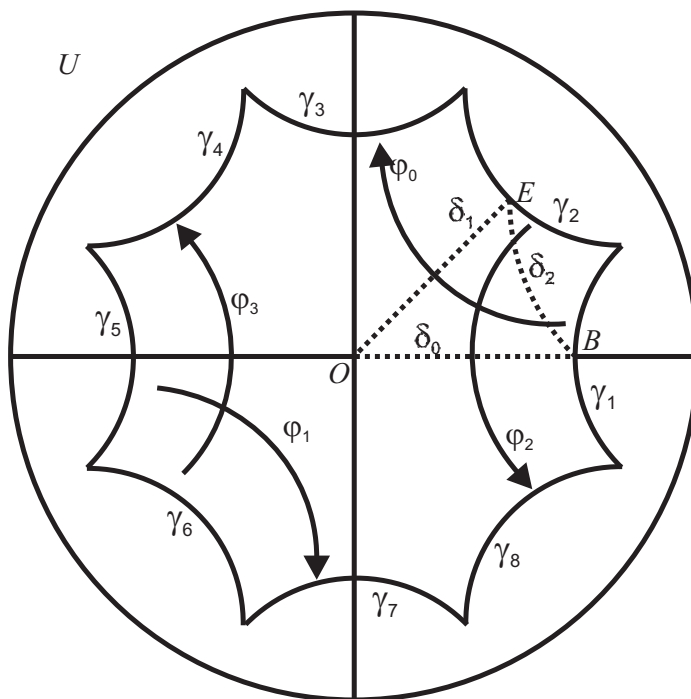


FIGURA 11: Reflexões nos lados de um triângulo hiperbólico equilátero.

(b) o ponto Q centro do triângulo OBE acima, e o reticulado \mathcal{R} gerado pela sua órbita $F_1Q = \{\delta(Q) \in \mathbf{U} : \delta \in F_1\}$, onde $Q = \left(a \cos\left(\frac{\pi}{8}\right), a \sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)$ com $a = 0,8607063036$.

Para o cálculo do valor a acima, consideremos a Figura 12. Se fizermos $y = \overline{OA}$, então, aplicando a Lei dos Cossenos II Hiperbólica ao triângulo OAB , temos $\cosh(y) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)^2 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)^2}$.

Logo, $y = 2,448452447$. Agora, observando que o triângulo OBA é isósceles, fazendo $\overline{OB} = \overline{AB} = x$ e aplicando o Teorema de Pitágoras Hiperbólico a esse triângulo temos $\cosh^4(x) = \cosh^2(y)$, ou seja, $x = 1,528570919$. Daí, fazendo $\overline{OC} = z$ e usando a Lei dos Senos Hiperbólica no triângulo OCB , temos $\frac{\sinh(z)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{\sinh(x)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}$. Logo, $z = 1,224226223$. Fazendo $\overline{QC} = w$, temos, no triângulo OQD , pela Lei dos Senos Hiperbólica, $\frac{\sinh(z-w)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\sinh(w)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}$, ou seja, $w = 0,3635199194$. Portanto, $a = z - w = 0,8607063036$.

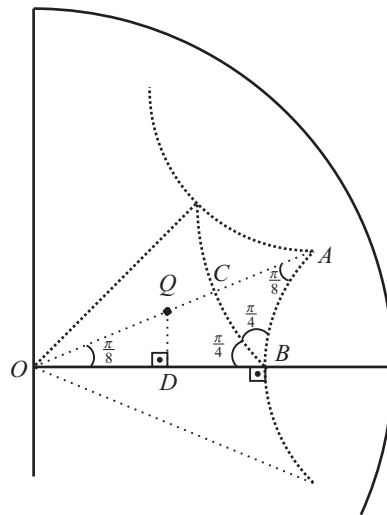


FIGURA 12: *Encontrando o centro do triângulo equilátero hiperbólico.*

(c) o grupo discreto de isometrias fuchsiano $F_2 = \langle \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \rangle$ gerado pelas isometrias hiperbólicas $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ do tipo 1.2 que identificam os lados do octógono hiperbólico regular com centro na origem composto por 16 triângulos equiláteros congruentes ao triângulo descrito no Item (a) (Figura 11).

(d) a relação de equivalência \sim em \mathcal{U} definida por $Q_1 \sim Q_2 \iff Q_2 = \varphi(Q_1)$, sendo $\varphi \in F_2$. Denotamos a classe de equivalência de um ponto Q por \overline{Q} .

(e) o espaço quociente $F = \mathcal{U} / \sim = \{ \overline{Q} : Q \in \mathcal{U} \}$. (que também é indicado por \mathcal{U}/F_2)

Logo, sobre F temos o conjunto das classes de equivalência de 16 pontos da órbita de Q , que definimos como sendo o reticulado 16 – HQAM (Figura 13). O grupo de simetrias desse reticulado quociente contém todas isometrias do grupo F_1 . *Esse reticulado quociente é geometricamente uniforme*, pois dados \overline{Q}_i e \overline{Q}_j , que são centros de triângulos hiperbólicos, sempre haverá uma composição δ de reflexões em lados desses triângulos tais que $\delta(\overline{Q}_i) = \overline{Q}_j$.

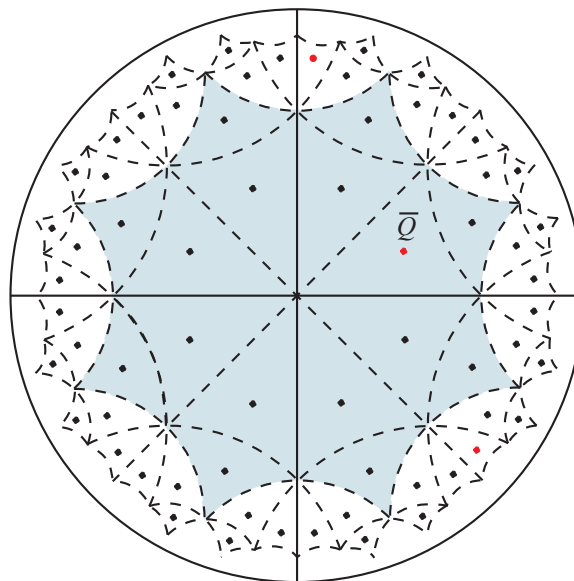


FIGURA 13: *O reticulado hiperbólico 16 – HQAM.*

Adiante, nosso objetivo é encontrar as expressões para as isometrias dos grupos F_1 e F_2 acima. Para tanto, precisamos do conceito de círculos isométricos.

3.2 Círculos Isométricos

Seja $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, com $c \neq 0$, estendida a \mathbb{C} . O círculo

$$I(T) = \{z \in \mathbb{C} \mid |cz + d| = 1\},$$

que é o lugar geométrico completo de pontos onde a transformação T age como uma isometria euclidiana, é chamado círculo isométrico da transformação T . De forma análoga, quando $T(z) = \frac{az+\bar{c}}{cz+\bar{a}} \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$, com $c \neq 0$, estendida a \mathbb{C} , o círculo isométrico com relação a T é

$$I(T) = \{z \in \mathbb{C} \mid |cz + \bar{a}| = 1\}.$$

Observação: A afirmação de que T da forma $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $ad - bc = 1$ e $|cz + d| = 1$ age como uma isometria euclidiana deve-se ao fato de que, se tomarmos dois pontos z_1 e z_2 em $I(T)$, então

$$\begin{aligned} |T(z_1) - T(z_2)| &= \left| \frac{az_1 + b}{cz_1 + d} - \frac{az_2 + b}{cz_2 + d} \right| \\ &= \left| \frac{(az_1 + b)(cz_2 + d) - (az_2 + b)(cz_1 + d)}{(cz_1 + d)(cz_2 + d)} \right| \\ &= \frac{|acz_1z_2 + adz_1 + bcz_2 + bd - acz_1z_2 - adz_2 - bcz_1 - bd|}{|cz_1 + d| \cdot |cz_2 + d|} \\ &= |(ad - bc)z_1 - (ad - bc)z_2| \\ &= |z_1 - z_2|. \end{aligned}$$

Para a demonstração do próximo teorema recordemos que se temos uma curva parametrizada em \mathbb{R}^2 , $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ com $t \in [a, b]$ então o comprimento l_γ é dado por $l_\gamma = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$. No nosso caso, $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $ad - bc = 1$ e $T'(z) = (cz + d)^{-2}$. Logo, os comprimentos euclidianos são multiplicados por $|T'(z)| = |cz + d|^{-2}$, pois

$$l_{T(\gamma)} = \int_{T(a)}^{T(b)} |T'(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)| dt = \int_{T(a)}^{T(b)} |\gamma'(t)| \cdot |c(\gamma(t)) + d|^{-2} dt.$$

Uma região infinitesimal é levada em uma região similar com comprimentos multiplicados por $|cz + d|^{-2}$. A área euclidiana, portanto, é multiplicada por $|cz + d|^{-4}$. Os comprimento e áreas euclidianos são inalterados em magnitude se, e somente se, $|cz + d| = 1$.

Teorema 3.1 *Seja $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, com $c \neq 0$, estendida a \mathbb{C} . A transformação T aumenta os comprimentos e áreas euclidianas dentro do círculo isométrico $I(T)$, e os diminui fora do círculo isométrico $I(T)$.*

Demonstração:

Seja z pertencente ao interior de $I(T)$. Daí, $|z + \frac{d}{c}| < \frac{1}{|c|}$, isto é, $|cz + d| < 1$, o que implica que $|T'(z)| > 1$, ou seja, a transformação T aumenta os comprimentos euclidianos de curvas dentro de $I(T)$. De forma análoga, se z pertence ao exterior de $I(T)$ então $|T'(z)| < 1$. Como

$$|T'(z)| > 1 \implies |T'(z)|^2 > 1$$

e

$$|T'(z)| < 1 \implies |T'(z)|^2 < 1,$$

a informação segue com relação às áreas euclidianas. □

Teorema 3.2 *Seja $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, com $c \neq 0$, estendida a \mathbb{C} . Os círculos isométricos $I(T)$ e $I(T^{-1})$ tem o mesmo raio, e $I(T)$ é levado em $I(T^{-1})$ pela transformação T .*

Demonstração:

Seja $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $ad - bc = 1$. Daí, $T^{-1}(z) = \frac{-dz+b}{cz-a}$, $I(T) = \{z \in \mathbb{C} \mid |cz + d| = 1\}$ e $I(T^{-1}) = \{z \in \mathbb{C} \mid |cz - a| = 1\}$. Fazendo $z = x + iy \in I(T)$, então

$$|cz + d| = 1 \implies |c(x + iy) + d| = 1 \implies \left| x + \frac{d}{c} + iy \right| = \frac{1}{|c|} \implies \left(x + \frac{d}{c} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{|c|} \right)^2,$$

ou seja, $I(T)$ é um círculo euclidiano de centro $(-\frac{d}{c}, 0)$ e raio $\frac{1}{|c|}$. Agora, se $z = x + iy \in I(T^{-1})$, então

$$|cz - a| = 1 \implies \left| x - \frac{a}{c} + iy \right| = \frac{1}{|c|} \implies \left(x - \frac{a}{c} \right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{|c|} \right)^2,$$

ou seja, $I(T^{-1})$ é um círculo euclidiano de centro $(\frac{a}{c}, 0)$ e raio $\frac{1}{|c|}$. Portanto, $I(T)$ e $I(T^{-1})$ tem o mesmo raio. Suponha agora que $z \in I(T)$, então $z = -\frac{d}{c} + \frac{1}{|c|}e^{i\theta}$, com $\theta \in [0, 2\pi[$, e

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{a \left(-\frac{d}{c} + \frac{1}{|c|}e^{i\theta} \right) + b}{c \left(-\frac{d}{c} + \frac{1}{|c|}e^{i\theta} \right) + d} \\ &= \frac{\frac{-ad+bc}{c} + \frac{a}{|c|}e^{i\theta}}{-d + \frac{c}{|c|}e^{i\theta} + d} \\ &= \frac{-\frac{1}{c} + \frac{a}{|c|}e^{i\theta}}{\frac{c}{|c|}e^{i\theta}} \\ &= \left(-\frac{1}{c} + \frac{a}{|c|}e^{i\theta} \right) \frac{|c|}{ce^{i\theta}} \\ &= -\frac{|c|}{c^2}e^{i(-\theta)} + \frac{a}{c} \\ &= -\frac{1}{|c|}(\cos(\theta) - i \sin(\theta)) + \frac{a}{c}. \end{aligned}$$

Vejamos que $T(z) \in I(T^{-1})$. De fato:

$$|c(T(z)) - a| = \left| -\frac{c}{|c|}(\cos(\theta) - i \sin(\theta)) + a - a \right| = \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1.$$

Logo, $T(I(T)) \subset I(T^{-1})$, ou seja, $I(T)$ é levado em $I(T^{-1})$ por T . \square

Teorema 3.3 *Seja $T \in \text{PSL}(2, \mathbb{R})$, com $c \neq 0$. A restrição do círculo isométrico $I(T)$ a \mathbb{H} é geodésica em \mathbb{H} .*

Demonstração:

Como vimos no teorema anterior, se $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ com $ad - bc = 1$ então $I(T)$ é um círculo euclidiano de centro $(-\frac{d}{c}, 0)$ e raio $\frac{1}{|c|}$. Logo, o eixo x contém um dos diâmetros de $I(T)$. Logo, $I(T)$ é um círculo ortogonal ao eixo x , portanto, geodésica em \mathbb{H} . \square

3.3 Encontrando Geradores do Grupo Fuchsiano F_2

Para encontrar as isometrias $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ que geram F_2 no Exemplo 2 da Seção 3.1, primeiramente observemos que a rotação $T(z) = e^{i\alpha}z$ pode ser escrita na forma $T(z) = \frac{az+c}{cz+a}$ com $a\bar{a} - c\bar{c} = 1$, ou seja, como elemento de $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$. De fato, tomemos $a = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ e $c = 0$. Logo,

$$\begin{aligned} \frac{(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right))z + 0}{0z + (\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right))} &= \frac{(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right))z}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \cdot \frac{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\ &= \frac{(\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i(2\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)) - \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right))z}{\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \\ &= (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))z \\ &= e^{i\alpha}z. \end{aligned}$$

Além disso,

$$a\bar{a} - c\bar{c} = \left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) + 0 \cdot 0 = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - i^2\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1.$$

Consideremos a Figura 14 abaixo.

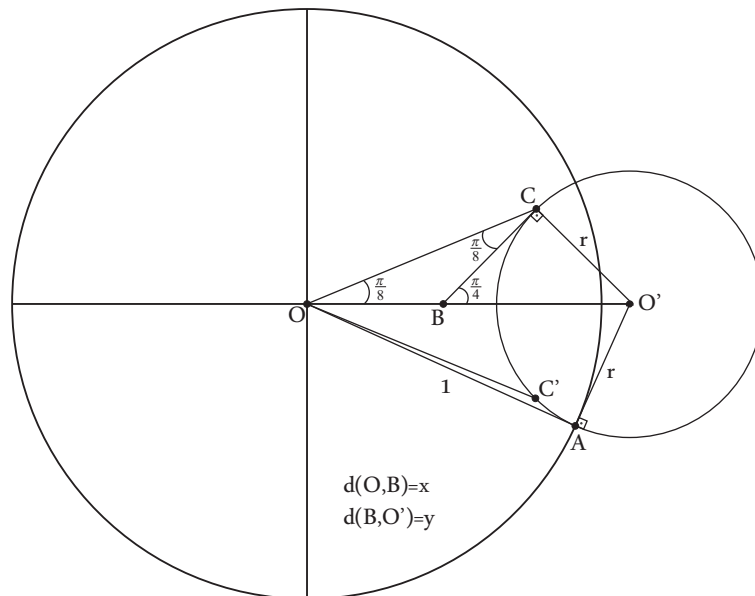


FIGURA 14: *Encontrando expressões para isometrias.*

O círculo de centro O' contém a curva γ_1 (um dos lados do octógono hiperbólico regular de ângulos internos $\frac{\pi}{4}$) representada na Figura 11.

Observemos que $OA O'$ é reto em A e $BC O'$ é reto em C . Além disso, $\widehat{B} = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$. No triângulo $BC O'$ temos

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{r}{y} \implies y = \frac{2r}{\sqrt{2}} = r\sqrt{2}$$

e

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{x}{y} \implies x = \frac{\sqrt{2}}{2}r\sqrt{2} = r.$$

No triângulo $OO'A$ temos

$$\begin{aligned}
 (x + y)^2 &= r^2 + 1 \implies \\
 (r + r\sqrt{2})^2 &= r^2 + 1 \implies \\
 r^2(1 + \sqrt{2})^2 &= r^2 + 1 \implies \\
 r^2 \left((1 + \sqrt{2})^2 - 1 \right) &= 1 \implies \\
 r^2 &= \frac{1}{2 + 2\sqrt{2}} \implies \\
 r &= \frac{1}{\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}}.
 \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
 |x + y| &= \sqrt{r^2(1 + \sqrt{2})^2} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2 + 2\sqrt{2}}(1 + 2\sqrt{2} + 2)} \\
 &= \sqrt{1 + \frac{1}{2 + 2\sqrt{2}}} \\
 &= \frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}}{2 + 2\sqrt{2}} \\
 &= \frac{\sqrt{14 + 10\sqrt{2}}}{2 + 2\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

Queremos que o círculo de centro O' na Figura 14 seja o círculo isométrico da transformação φ_0 e, mais ainda, que $I(\varphi_0^{-1})$ seja o círculo que contém a curva γ_3 da Figura 11. Para isso, precisamos descobrir os valores de \mathbf{a} e \mathbf{c} complexos tais que

$$\begin{cases} -\frac{\bar{\mathbf{a}}}{\mathbf{c}} = \sqrt{1 + \frac{1}{2 + 2\sqrt{2}}} \\ \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} = \sqrt{1 + \frac{1}{2 + 2\sqrt{2}}}i \end{cases}.$$

Façamos $\mathbf{a} = x + iy$ e $\mathbf{c} = z + iw$. Sabemos que $z^2 + w^2 = 2 + 2\sqrt{2}$. Logo,

$$\begin{aligned}
 -\frac{\bar{\mathbf{a}}}{\mathbf{c}} &= -\frac{\bar{\mathbf{a}}}{\mathbf{c}} \cdot \frac{\bar{\mathbf{c}}}{\bar{\mathbf{c}}} \\
 &= \frac{-(x - iy)(z - iw)}{z^2 + w^2} \\
 &= \frac{(-xz + yw) + i(xw + yz)}{z^2 + w^2} \\
 &= \sqrt{1 + \frac{1}{2 + 2\sqrt{2}}} \implies \begin{cases} -xz + yw = \sqrt{14 + 10\sqrt{2}} \\ xw + yz = 0 \end{cases} \quad (\text{I})
 \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{c}} &= \frac{\alpha \bar{\mathbf{c}}}{\mathbf{c} \cdot \bar{\mathbf{c}}} \\ &= \frac{(xz + yw) + i(yz - xw)}{z^2 + w^2} \\ &= \frac{\sqrt{14 + 10\sqrt{2}}}{2 + 2\sqrt{2}} i \implies \begin{cases} xz + yw = 0 \\ yz - xw = \sqrt{14 + 10\sqrt{2}} \end{cases}. \end{aligned} \quad (\text{II})$$

Os Sistemas I e II nos fornecem as equações

$$\begin{aligned} 2yw &= \sqrt{14 + 10\sqrt{2}} \\ 2yz &= \sqrt{14 + 10\sqrt{2}} \\ 2xz &= -\sqrt{14 + 10\sqrt{2}} \\ 2xw &= -\sqrt{14 + 10\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} 4y^2w^2 + 4y^2z^2 &= 2(14 + 10\sqrt{2}) \implies \\ y^2 &= \frac{2(3 + 2\sqrt{2})(2 + 2\sqrt{2})}{4(2 + 2\sqrt{2})} \implies \\ y &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} 4x^2z^2 + 4x^2w^2 &= 2(14 + 10\sqrt{2}) \implies \\ x^2 &= \frac{2(3 + 2\sqrt{2})(2 + 2\sqrt{2})}{4(2 + 2\sqrt{2})} \implies \\ x &= \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Daí,

$$z = \frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}}{\pm\sqrt{2}\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$$

e

$$w = \frac{\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\sqrt{2 + 2\sqrt{2}}}{\pm\sqrt{2}\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}.$$

Se escolhermos $x < 0$, $y > 0$, $z > 0$ e $w > 0$ as equações que os Sistemas I e II fornecem ficam

satisfeitas. Dessa forma, temos a transformação

$$\begin{aligned} T(z) &= \frac{az + \bar{c}}{cz + \bar{a}} \\ &= \frac{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3+2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)z + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2+2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2+2\sqrt{2}}\right)}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2+2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2+2\sqrt{2}}\right)z + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3+2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)} \\ &= \frac{\left(-\sqrt{3+2\sqrt{2}} + i\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)z + \left(\sqrt{2+2\sqrt{2}} - i\sqrt{2+2\sqrt{2}}\right)}{\left(\sqrt{2+2\sqrt{2}} + i\sqrt{2+2\sqrt{2}}\right)z + \left(-\sqrt{3+2\sqrt{2}} - i\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)} \end{aligned}$$

com

$$\begin{aligned} a\bar{a} - c\bar{c} &= \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3+2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3+2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right) \\ &\quad - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2+2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2+2\sqrt{2}}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2+2\sqrt{2}} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2+2\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{2}{4} \left(3+2\sqrt{2} + 3+2\sqrt{2}\right) - \frac{2}{4} \left(2+2\sqrt{2} + 2+2\sqrt{2}\right) = \frac{2}{4} \left(6+4\sqrt{2} - 4 - 4\sqrt{2}\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Mostremos se $T(z)$ é a transformação encontrada acima, então $|cz + \bar{a}| = 1$ para $z = \frac{\sqrt{14+10\sqrt{2}}}{2+2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}}e^{i\theta}$ com $\theta \in [0, 2\pi[$. De fato:

$$\begin{aligned} |cz + \bar{a}|^2 &= \left| \frac{\sqrt{2}\sqrt{2+2\sqrt{2}}}{2} (1+i) \left(\frac{\sqrt{14+10\sqrt{2}}}{2+2\sqrt{2}} + \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}} \right) - \frac{\sqrt{2}\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{2} (1+i) \right|^2 \\ &= \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sqrt{2+2\sqrt{2}}(1+i) \left(\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}} + \frac{\cos(\theta) + i\sin(\theta)}{\sqrt{2+2\sqrt{2}}} \right) - \sqrt{3+2\sqrt{2}}(1+i) \right) \right|^2 \\ &= \left| \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \cos(\theta) + i\sin(\theta) + i\sqrt{3+2\sqrt{2}} + i\cos(\theta) - \sin(\theta) - \sqrt{3+2\sqrt{2}} - i\sqrt{3+2\sqrt{2}} \right) \right|^2 \\ &= \left| \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos(\theta) + i\sin(\theta) + i\cos(\theta) - \sin(\theta)) \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} (\cos^2(\theta) - 2\cos(\theta)\sin(\theta) + \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) + 2\sin(\theta)\cos(\theta) + \sin^2(\theta)) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Logo, para essa T o conjunto $I(T)$ é um círculo isométrico. Temos

$$T^{-1}(z) = \frac{\left(-\sqrt{3+2\sqrt{2}} - i\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)z - \left(\sqrt{2+2\sqrt{2}} - i\sqrt{2+2\sqrt{2}}\right)}{-\left(\sqrt{2+2\sqrt{2}} + i\sqrt{2+2\sqrt{2}}\right)z + \left(-\sqrt{3+2\sqrt{2}} + i\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)}.$$

Tomando

$$\begin{aligned}
\varphi_0(z) &= T(z) \\
&= \frac{(-\sqrt{3+2\sqrt{2}} + i\sqrt{3+2\sqrt{2}})z + (\sqrt{2+2\sqrt{2}} - i\sqrt{2+2\sqrt{2}})}{(\sqrt{2+2\sqrt{2}} + i\sqrt{2+2\sqrt{2}})z + (-\sqrt{3+2\sqrt{2}} - i\sqrt{3+2\sqrt{2}})}, \\
\varphi_1(z) &= e^{i\pi} (T(e^{-i\pi}(z))) \\
&= \frac{(\sqrt{3+2\sqrt{2}} - i\sqrt{3+2\sqrt{2}})z + (\sqrt{2+2\sqrt{2}} - i\sqrt{2+2\sqrt{2}})}{(\sqrt{2+2\sqrt{2}} + i\sqrt{2+2\sqrt{2}})z + (\sqrt{3+2\sqrt{2}} + i\sqrt{3+2\sqrt{2}})}, \\
\varphi_2(z) &= e^{-i\frac{\pi}{4}} (T^{-1}(e^{i\frac{\pi}{4}}(z))) \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{(-\sqrt{3+2\sqrt{2}} - i\sqrt{3+2\sqrt{2}}) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}z(1+i)\right) - (\sqrt{2+2\sqrt{2}} - i\sqrt{2+2\sqrt{2}})}{-\left(\sqrt{2+2\sqrt{2}} + i\sqrt{2+2\sqrt{2}}\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}z(1+i)\right) + (-\sqrt{3+2\sqrt{2}} + i\sqrt{3+2\sqrt{2}})} \right), \\
\varphi_3(z) &= e^{i\pi} (\varphi_2(e^{i\pi}(z))) \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(\frac{(\sqrt{3+2\sqrt{2}} + i\sqrt{3+2\sqrt{2}}) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}z(1+i)\right) + (\sqrt{2+2\sqrt{2}} - i\sqrt{2+2\sqrt{2}})}{-\left(\sqrt{2+2\sqrt{2}} + i\sqrt{2+2\sqrt{2}}\right) \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}z(1+i)\right) + (-\sqrt{3+2\sqrt{2}} + i\sqrt{3+2\sqrt{2}})} \right).
\end{aligned}$$

temos o grupo discreto de isometrias $F_2 = \langle \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \rangle$ gerado pelas isometrias hiperbólicas $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ que identificam os lados do octógono hiperbólico regular com centro na origem composto por 16 triângulos equiláteros gerados por F_1 .

Temos que $\varphi_0(\gamma_1) = \gamma_3$, $\varphi_1(\gamma_5) = \gamma_7$, $\varphi_2(\gamma_2) = \gamma_8$ e $\varphi_3(\gamma_6) = \gamma_4$. (Figura 15 abaixo)

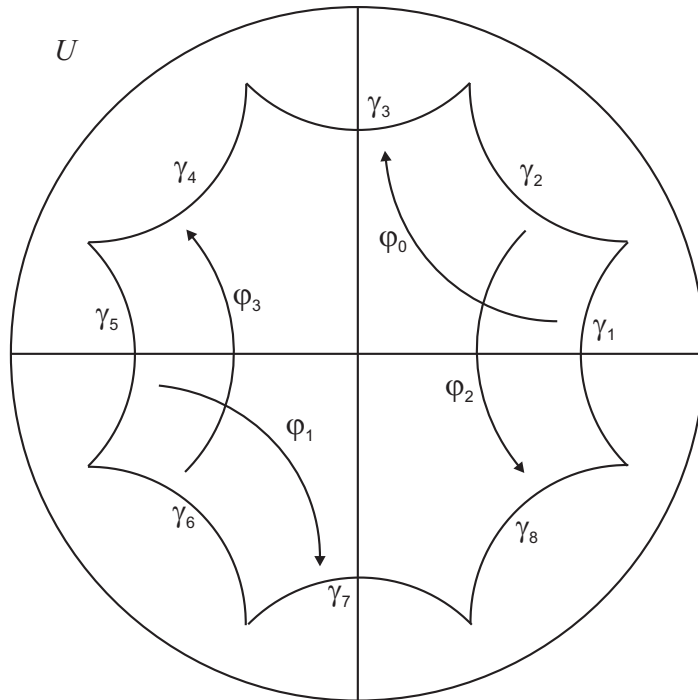


FIGURA 15: Identificação de geodésicas por isometrias.

3.4 Encontrando Geradores do Grupo Fuchsiano F_1

Para encontrar as isometrias $\delta_0, \delta_1, \delta_2$ que geram F_1 no Exemplo 2 da Seção 3.1, devemos desenvolver um pouco as inversões em círculos.

Seja Q um círculo em \mathbb{R}^2 com centro K e raio r . Dado um ponto qualquer $P \neq K$ em \mathbb{R}^2 , um ponto P_1 é chamado inverso de P quando

- (i) P_1 encontra-se no raio que vai de K a P ,
(ii) $\overline{KP_1} \cdot \overline{KP} = r^2$.

A relação é recíproca: se P_1 é o inverso de P , P é o inverso de P_1 . Dizemos que P e P_1 são inversos com relação a Q .

Façamos P , P_1 e K serem os pontos z , z_1 e k em \mathbb{C} . As condições da definição acima podem ser reescritas como

$$|(z_1 - k)(z - k)| = r^2, \quad \arg(z_1 - k) = \arg(z - k).$$

Como $\arg(z - k) = -\arg(\bar{z} - \bar{k})$ (Figura 16), as duas equações são satisfeitas se, e somente se,

$$(z_1 - k)(\bar{z} - \bar{k}) = r^2.$$

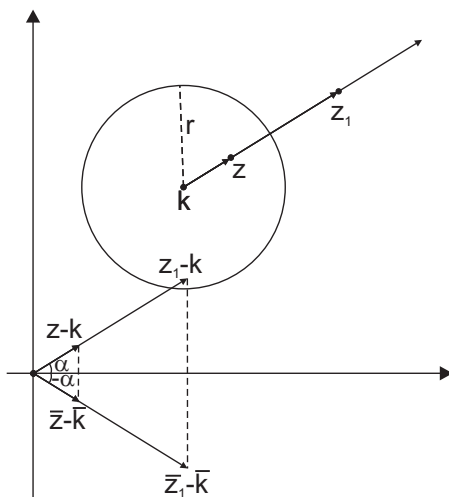


FIGURA 16: *Inversões em círculos.*

De fato:

\implies) Lembremos que $z \cdot \bar{z} = |z|^2$ e ainda que, se temos $z_1 = |z_1| e^{i\theta_1}$ e $z_2 = |z_2| e^{i\theta_2}$, então $z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$. Chamemos $\arg(\bar{z}_1 - \bar{k}) = -\alpha$ e, portanto, $\arg(z - k) = \alpha$. Logo,

$$\begin{aligned} (\bar{z}_1 - \bar{k})(z - k) &= |\bar{z}_1 - \bar{k}| \cdot |z - k| \cdot e^{i(\alpha - \alpha)} \\ &= |\bar{z}_1 - \bar{k}| \cdot |z - k| \\ &= |z_1 - k| \cdot |z - k| \\ &= |(z_1 - k)(z - k)| \\ &= r^2. \end{aligned} \tag{III}$$

Temos ainda que

$$(z_1 - k)(\bar{z}_1 - \bar{k})(z - k)(\bar{z} - \bar{k}) = |z_1 - k|^2 \cdot |\bar{z} - \bar{k}|^2 = |(z_1 - k)(\bar{z} - \bar{k})|^2 = r^4.$$

Substituindo (III) na equação anterior temos

$$\begin{aligned} (z_1 - k)(\bar{z}_1 - \bar{k})(z - k)(\bar{z} - \bar{k}) &= (z_1 - k) \cdot r^2 \cdot (\bar{z} - \bar{k}) = r^4 \implies \\ (z_1 - k)(\bar{z} - \bar{k}) &= r^2. \end{aligned}$$

\Leftarrow) Como $(z_1 - k), (\bar{z} - \bar{k}) \in \mathbb{C}$ e, por outro lado, $(z_1 - k) \cdot (\bar{z} - \bar{k}) \in \mathbb{R}$, então

$$\arg(z_1 - k) + \arg(\bar{z} - \bar{k}) = 0 \implies \arg(z_1 - k) = -\arg(\bar{z} - \bar{k}) = \arg(z - k).$$

Agora,

$$\begin{aligned}
 r^2 &= (z_1 - k) (\bar{z} - \bar{k}) \\
 &= |z_1 - k| \cdot |\bar{z} - \bar{k}| \cdot e^{i(\arg(z_1 - k) + \arg(\bar{z} - \bar{k}))} \\
 &= |z_1 - k| \cdot |\bar{z} - \bar{k}| \\
 &= |z_1 - k| \cdot |z - k| \\
 &= |(z_1 - k)(z - k)|.
 \end{aligned}$$

Então, temos uma fórmula para a inversão em círculo pois,

$$\begin{aligned}
 (z_1 - k) (\bar{z} - \bar{k}) = r^2 &\implies \\
 z_1 &= \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{k}} + k \implies \\
 z_1 &= \frac{k\bar{z} + r^2 - |k|^2}{\bar{z} - \bar{k}}.
 \end{aligned}$$

No nosso Exemplo 2 da Seção 3.1 temos 3 isometrias (Figura 11):

$$\begin{aligned}
 \delta_0(z) &= \bar{z} \\
 \delta_1(z) &= |z| \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\
 \delta_2(z) &= \frac{\bar{z} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{2 + 2\sqrt{2}}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) \right) - 1}{\bar{z} - \sqrt{1 + \frac{1}{2 + 2\sqrt{2}}} \left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) \right)}
 \end{aligned}$$

Então, o grupo discreto de isometrias procurado é $F_1 = \langle \delta_0, \delta_1, \delta_2 \rangle$ sendo o ponto $Q = \left(a \cos\left(\frac{\pi}{8}\right), a \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{8}\right) \right)$ com $a = 0,8607063036$.

Capítulo 4

Mergulhos Isométricos

Nosso objetivo neste capítulo é considerar reticulados análogos ao dos exemplos do Capítulo 3 e mergulhá-los isometricamente em $\mathbb{S}^8 \subset \mathbb{R}^9$, ou seja, transformá-los em “reticulados esféricos”. A razão disso é que, mesmo sendo crescente o estudo de códigos corretores de erros em espaços hiperbólicos, não há, aparentemente, uma situação prática em Teoria da Informação e Codificação que possa ser modelada convenientemente por modelos puramente hiperbólicos.

De um modo geral, a pesquisa sobre mergulhos isométricos de variedades riemannianas em espaços euclidianos e esféricos não é simples. Entretanto, trabalharemos com o mergulho isométrico estudado em [16] aplicado aos nossos reticulados. Para tanto, consideremos um outro modelo para a geometria hiperbólica plana denotado por (P, ds) , sendo $P = \{(u, v) : u, v \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^2$ munido da métrica riemanniana ds tal que:

$$ds = \sqrt{du^2 + \cosh^2(u) dv^2}.$$

Uma isometria entre as variedades riemannianas (P, ds) e (H, ds') , sendo H o modelo do semi-plano e

$$ds' = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y},$$

é dada por $\alpha : P \rightarrow H$ tal que:

$$\alpha(u, v) = e^v \left(\tanh(u), \frac{1}{\cosh(u)} \right),$$

cujas inversa é dada por $\alpha^{-1} = \beta : H \rightarrow P$ tal que:

$$\beta(x, y) = \left(\sinh^{-1} \left(\frac{x}{y} \right), \ln \left(\sqrt{x^2 + y^2} \right) \right).$$

Consideremos as seguintes funções (ref. [3] e [4]):

$$\begin{array}{ccc} \psi_1 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & 3^{2 \lfloor |u| + \frac{1}{2} \rfloor + 5} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} \psi_2 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & 3^{2 \lfloor \frac{|u|}{2} \rfloor + 6} \end{array}.$$

sendo $\lfloor z \rfloor$ o maior número inteiro menor do que ou igual a z . As funções acima são do “tipo escada”.

Definamos a constante

$$A = \int_0^1 \sin(\pi\xi) \exp\left(\frac{-1}{\sin^2(\pi\xi)}\right) d\xi \cong 0,14133\dots$$

Consideremos também as seguintes funções:

$$\begin{array}{ccc} \varphi_1 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ u & \longmapsto & \sqrt{\frac{1}{\lambda} \int_0^{u+1} \sin(\pi\xi) \exp\left(\frac{-1}{\sin^2(\pi\xi)}\right) d\xi} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_2: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
\mathbf{u} &\longmapsto \sqrt{\frac{1}{\lambda} \int_0^{\mathbf{u}} \operatorname{sen}(\pi \xi) \exp\left(\frac{-1}{\operatorname{sen}^2(\pi \xi)}\right) d\xi} \\
f_1: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad f_2: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\
\mathbf{u} &\longmapsto \frac{\varphi_1(\mathbf{u}) \operatorname{senh}(\mathbf{u})}{\psi_1(\mathbf{u})} \quad \mathbf{u} \longmapsto f_2(\mathbf{u}) = \frac{\varphi_2(\mathbf{u}) \operatorname{senh}(\mathbf{u})}{\psi_2(\mathbf{u})} \\
F_1: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad F_2: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\
\mathbf{u} &\longmapsto \tanh(\exp(\mathbf{u})) \quad \mathbf{u} \longmapsto \frac{1}{\cosh(\exp(\mathbf{u}))} \\
g: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
\mathbf{u} &\longmapsto \sqrt{R^2 - \varepsilon^2 \left(F_1^2(\mathbf{u}) + \frac{1}{2} F_2^2(\mathbf{u}) + f_1^2(\mathbf{u}) + f_2^2(\mathbf{u}) \right)},
\end{aligned}$$

sendo R o raio do espaço esférico, que no nosso caso é 1.

$$\begin{aligned}
\rho_1: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
\mathbf{u} &\longmapsto \int_0^{\mathbf{u}} \frac{F_2(\xi)}{F_1(\xi)} \sqrt{1 - K g'(\xi)^2 - K \varepsilon^2 \left(F_1'(\xi)^2 + \frac{1}{2} F_2'(\xi)^2 + f_1'(\xi)^2 + f_2'(\xi)^2 \right)} d\xi \\
\rho_2: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\
\mathbf{u} &\longmapsto - \int_0^{\mathbf{u}} \frac{F_1(\xi)}{F_2(\xi)} \sqrt{1 - K g'(\xi)^2 - K \varepsilon^2 \left(F_1'(\xi)^2 + \frac{1}{2} F_2'(\xi)^2 + f_1'(\xi)^2 + f_2'(\xi)^2 \right)} d\xi,
\end{aligned}$$

sendo $-K$ a curvatura gaussiana constante do modelo \mathbf{P} que, no nosso caso, é -1 (ref. [16]).

A aplicação $M: \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{S}^8 \subset \mathbb{R}^9$ tal que:

$$M(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (x_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \dots, x_9(\mathbf{u}, \mathbf{v}))$$

com funções coordenadas $x_j: \mathbf{P} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por:

$$\begin{aligned}
x_1(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \varepsilon F_1(\mathbf{u}) \cos\left(\frac{\mathbf{v} + \rho_1(\mathbf{u})}{\varepsilon \sqrt{K}}\right) \\
x_2(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \varepsilon F_1(\mathbf{u}) \operatorname{sen}\left(\frac{\mathbf{v} + \rho_1(\mathbf{u})}{\varepsilon \sqrt{K}}\right) \\
x_3(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} F_2(\mathbf{u}) \cos\left(\frac{\sqrt{2}(\mathbf{v} + \rho_2(\mathbf{u}))}{\varepsilon \sqrt{K}}\right) \\
x_4(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} F_2(\mathbf{u}) \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}(\mathbf{v} + \rho_2(\mathbf{u}))}{\varepsilon \sqrt{K}}\right) \\
x_5(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \varepsilon f_1(\mathbf{u}) \cos\left(\frac{\mathbf{v} \psi_1(\mathbf{u})}{\varepsilon \sqrt{K}}\right) \\
x_6(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \varepsilon f_1(\mathbf{u}) \operatorname{sen}\left(\frac{\mathbf{v} \psi_1(\mathbf{u})}{\varepsilon \sqrt{K}}\right) \\
x_7(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \varepsilon f_2(\mathbf{u}) \cos\left(\frac{\mathbf{v} \psi_2(\mathbf{u})}{\varepsilon \sqrt{K}}\right) \\
x_8(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \varepsilon f_2(\mathbf{u}) \operatorname{sen}\left(\frac{\mathbf{v} \psi_2(\mathbf{u})}{\varepsilon \sqrt{K}}\right) \\
x_9(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= g(\mathbf{u})
\end{aligned}$$

é um mergulho isométrico de \mathbf{P} em \mathbb{S}^8 (ref. [16]).

Adotaremos, para os exemplos a seguir, $\varepsilon = 0,5$ em g , ρ_1 e ρ_2 , que está próximo do valor limite para que as raízes em g , ρ_1 e ρ_2 não sejam números complexos. Além disso, devido

à complexidade dos integrandos que definem as funções $\rho_1(\mathbf{u})$ e $\rho_2(\mathbf{u})$, motivo pelo qual o software matemático *Maple 12* não conseguiu avaliar as funções ρ_1 e ρ_2 para vários valores de \mathbf{u} , optamos por interpolar os integrandos

$$\frac{F_2(\xi)}{F_1(\xi)} \sqrt{1 - \mathcal{K}g'(\xi)^2 - \mathcal{K}\varepsilon^2 \left(F_1'(\xi)^2 + \frac{1}{2}F_2'(\xi)^2 + f_1'(\xi)^2 + f_2'(\xi)^2 \right)}$$

e

$$\frac{F_1(\xi)}{F_2(\xi)} \sqrt{1 - \mathcal{K}g'(\xi)^2 - \mathcal{K}\varepsilon^2 \left(F_1'(\xi)^2 + \frac{1}{2}F_2'(\xi)^2 + f_1'(\xi)^2 + f_2'(\xi)^2 \right)}$$

por polinômios de grau 8 (não encontramos melhoras de aproximação para polinômios de graus maiores). As interpolações foram feitas utilizando o software *Maple 12* de forma que primeiro obtivemos os pontos (imagens de 9 pontos em cada intervalo igualmente espaçados) necessários para cada interpolação e depois utilizamos o comando *PolynomialInterpolation* para interpolar. Devido às características dos exemplos que estamos propondo nós obtivemos dois polinômios, um para cada integrando, para cada intervalo, sendo eles $[-3, -2]$, $[-2, -1]$, $[-1, 0]$, $[0, 1]$, $[1, 2]$ e $[2, 3]$ (observe que os integrandos não estão definidos nos números inteiros), ou seja, 12 polinômios. Com esses polinômios avaliamos o mergulho \mathcal{M} em cada um dos pontos dos exemplos seguintes.

Chamaremos de $\overline{\mathcal{M}}$ o mergulho \mathcal{M} com as substituições dos integrandos de ρ_1 e ρ_2 pelas interpolações conforme explicado anteriormente.

Também cabe chamar a atenção para o conceito de distância mínima entre pontos de um reticulado. Para que um reticulado tenha utilidade do ponto de vista de Teoria da Informação e Codificação, a menor distância (euclidiana) entre pontos do reticulado não deve ser tão pequena. Por outro lado, mergulhar o reticulado em espaços esféricos de raio maior significa aumentar a quantidade de energia gasta, o que não é bom para um sistema eficiente de comunicações. Por fim, ressaltamos que a utilização de espaços esféricos é interessante do ponto de vista de codificação porque a quantidade de energia gasta no envio de palavras-código é a mesma para qualquer ponto do reticulado, ou seja, a energia gasta é proporcional ao raio do espaço esférico.

Exemplo 1: Consideremos os pontos do 16 – QAM, dispostos no modelo \mathcal{P} de modo que $Q_1 = (0, 0)$, $Q_2 = (1, 0)$, $Q_3 = (2, 0)$, $Q_4 = (3, 0)$, $Q_5 = (0, 1)$, $Q_6 = (1, 1)$, $Q_7 = (2, 1)$, $Q_8 = (3, 1)$, $Q_9 = (0, 2)$, $Q_{10} = (1, 2)$, $Q_{11} = (2, 2)$, $Q_{12} = (3, 2)$, $Q_{13} = (0, 3)$, $Q_{14} = (1, 3)$, $Q_{15} = (2, 3)$ e $Q_{16} = (3, 3)$ (Figura 17). Aplicando o mergulho $\overline{\mathcal{M}}$ a esses pontos teremos as suas imagens, que chamaremos de $\mathbf{p}_i = \overline{\mathcal{M}}(Q_i) \subset \mathbb{S}^8 \subset \mathbb{R}^9$ com $i = 1, \dots, 16$. Calculando a distância euclidiana entre todos os pontos concluímos que a menor distância euclidiana se dá entre os pontos \mathbf{p}_3 e \mathbf{p}_4 que são imagens dos pontos Q_3 e Q_4 em \mathbb{R}^2 , com $d(\mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4) = 0,001218021438$, ou seja, do ponto de vista de distância mínima, esse mergulho não foi bom, pois os pontos estão muito agrupados no \mathbb{S}^8 .

Observemos que a distância entre Q_3 e Q_4 é 1, pois na métrica do modelo \mathcal{P} , a abscissa tem métrica euclidiana.

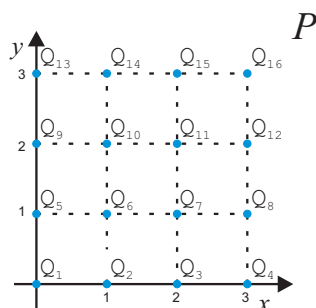


FIGURA 17: Uma possível posição para o reticulado 16 – QAM no modelo \mathcal{P} .

Exemplo 2: Consideremos agora os pontos do 16 – QAM deslocados, $Q_1 = (-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, $Q_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, $Q_3 = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$, $Q_4 = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, $Q_5 = (-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, $Q_6 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $Q_7 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $Q_8 = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, $Q_9 = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$, $Q_{10} = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $Q_{11} = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $Q_{12} = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$, $Q_{13} = (-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$, $Q_{14} = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$, $Q_{15} = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ e $Q_{16} = (\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$ (Figura 18). Aplicando o mergulho \bar{M} a esses pontos teremos as suas imagens, que chamaremos de $p_i = \bar{M}(Q_i) \subset \mathbb{S}^8 \subset \mathbb{R}^9$ com $i = 1, \dots, 16$. Calculando a distância euclidiana entre todos os pontos concluímos que a menor distância se dá entre os pontos p_4 e p_{15} que são imagens dos pontos Q_4 e Q_{15} em \mathbb{R}^2 , com $d(p_4, p_{15}) = 0,141807756$, ou seja, uma melhora bastante significativa em relação ao exemplo anterior.

Calculando a distância entre Q_4 e Q_{15} na métrica de P , denotada por $\rho(\alpha(Q_4), \alpha(Q_{15}))$, encontramos o valor $3,935213459$, ou seja, $\frac{d(p_4, p_{15})}{\rho(\alpha(Q_4), \alpha(Q_{15}))} = 0,036035594$, que demonstra uma relação entre distâncias bem melhor que no exemplo anterior, que é $0,001218021438$.

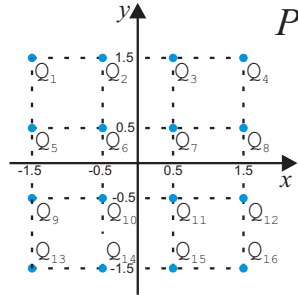


FIGURA 18: Uma posição do 16 – QAM em P que resulta em distância mínima maior em \mathbb{S}^8 .

Dos dois exemplos anteriores, percebemos que a posição do reticulado em P interfere na distância mínima em \mathbb{S}^8 . O que observamos numericamente, após tomarmos várias posições para o 16 – QAM, é que a posição central fornece a melhor distância mínima.

Exemplo 3: Neste exemplo tomaremos o 16 – HQAM definido no Capítulo 3. Fazendo $\tilde{a} = 0,8607063036$ (calculamos esse valor no referido capítulo) e $\tilde{b} = 1,587746142$ temos as coordenadas dos 16 pontos no modelo P dadas por (Figura 19):

$$\begin{aligned} Q_1 &= \left(\tilde{a} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \tilde{a} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right), \\ Q_2 &= \left(\tilde{b} \cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \tilde{b} \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \right), \\ Q_3 &= \left(\tilde{a} \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\right), \tilde{a} \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\right) \right), \\ Q_4 &= \left(\tilde{b} \cos\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\right), \tilde{b} \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\right) \right), \\ Q_5 &= \left(\tilde{a} \cos\left(\frac{\pi}{8} + 2\frac{\pi}{4}\right), \tilde{a} \sin\left(\frac{\pi}{8} + 2\frac{\pi}{4}\right) \right), \\ Q_6 &= \left(\tilde{b} \cos\left(\frac{\pi}{8} + 2\frac{\pi}{4}\right), \tilde{b} \sin\left(\frac{\pi}{8} + 2\frac{\pi}{4}\right) \right), \\ Q_7 &= \left(\tilde{a} \cos\left(\frac{\pi}{8} + 3\frac{\pi}{4}\right), \tilde{a} \sin\left(\frac{\pi}{8} + 3\frac{\pi}{4}\right) \right), \\ Q_8 &= \left(\tilde{b} \cos\left(\frac{\pi}{8} + 3\frac{\pi}{4}\right), \tilde{b} \sin\left(\frac{\pi}{8} + 3\frac{\pi}{4}\right) \right), \\ Q_9 &= \left(\tilde{a} \cos\left(\frac{\pi}{8} + 4\frac{\pi}{4}\right), \tilde{a} \sin\left(\frac{\pi}{8} + 4\frac{\pi}{4}\right) \right), \\ Q_{10} &= \left(\tilde{b} \cos\left(\frac{\pi}{8} + 4\frac{\pi}{4}\right), \tilde{b} \sin\left(\frac{\pi}{8} + 4\frac{\pi}{4}\right) \right), \\ Q_{11} &= \left(\tilde{a} \cos\left(\frac{\pi}{8} + 5\frac{\pi}{4}\right), \tilde{a} \sin\left(\frac{\pi}{8} + 5\frac{\pi}{4}\right) \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_{12} &= \left(\tilde{b} \cos \left(\frac{\pi}{8} + 5\frac{\pi}{4} \right), \tilde{b} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{8} + 5\frac{\pi}{4} \right) \right), \\
Q_{13} &= \left(\tilde{a} \cos \left(\frac{\pi}{8} + 6\frac{\pi}{4} \right), \tilde{a} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{8} + 6\frac{\pi}{4} \right) \right), \\
Q_{14} &= \left(\tilde{b} \cos \left(\frac{\pi}{8} + 6\frac{\pi}{4} \right), \tilde{b} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{8} + 6\frac{\pi}{4} \right) \right), \\
Q_{15} &= \left(\tilde{a} \cos \left(\frac{\pi}{8} + 7\frac{\pi}{4} \right), \tilde{a} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{8} + 7\frac{\pi}{4} \right) \right), \\
Q_{16} &= \left(\tilde{b} \cos \left(\frac{\pi}{8} + 7\frac{\pi}{4} \right), \tilde{b} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{8} + 7\frac{\pi}{4} \right) \right).
\end{aligned}$$

Aplicando o mergulho \overline{M} à esses pontos teremos as suas imagens, que chamaremos de $p_i = \overline{M}(Q_i) \subset \mathbb{S}^8 \subset \mathbb{R}^9$ com $i = 1, \dots, 16$. Calculando a distância euclidiana entre todos os pontos concluímos que a menor distância se dá entre os pontos p_{15} e p_{16} que são imagens dos pontos Q_{15} e Q_{16} em \mathbb{R}^2 , com $d(p_{15}, p_{16}) = 0,2235478903$.

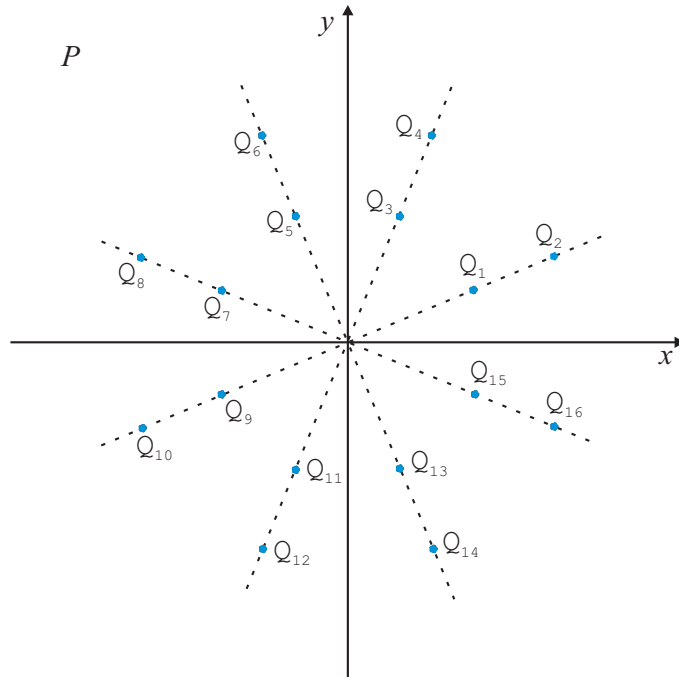


FIGURA 19: *Reticulado 16 – HQAM no modelo P.*

Observemos que a distância mínima desses 16 pontos mergulhados em \mathbb{S}^8 é bem melhor que as distâncias mínimas que encontramos nos exemplos anteriores.

Calculando a distância entre Q_{15} e Q_{16} na métrica de P encontramos o valor $0,817051786$, ou seja, $\frac{d(p_{15}, p_{16})}{\rho(\alpha(Q_{15}), \alpha(Q_{16}))} = 0,273603086$, que demonstra uma relação entre distâncias bem melhor que nos exemplos anteriores, levando-nos a crer que, reticulados em ambientes hiperbólicos temos, de fato, uma melhora considerável na relação entre as distâncias.

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas Futuras

Conforme constatado no capítulo anterior, a posição na qual se encontra o reticulado que será mergulhado isometricamente em \mathbb{S}^8 interfere na distância mínima do reticulado mergulhado. Também parece, embora não tenhamos provado, que o reticulado posicionado de modo simétrico em relação à origem fornece melhor distância mínima em \mathbb{S}^8 . Este é um resultado a ser estudado em trabalhos futuros. Também há de se considerar algo mais difícil: dentre os possíveis reticulados geometricamente uniformes com (por exemplo) 16 pontos, qual é aquele que fornece a melhor distância mínima em \mathbb{S}^8 ? Não respondemos essa pergunta em nosso trabalho, mas certamente é um problema que merece atenção, pois trata-se de uma questão básica em Teoria da Informação e Codificação o estudo dos códigos que possuem o melhor desempenho possível dentro de uma determinada classe de códigos.

Outro problema que ficará para futuros estudos está relacionado à não unicidade dos mergulhos isométricos do plano hiperbólico em \mathbb{S}^8 , ou seja, qual é e a relação entre o ε das expressões do mergulho isométrico e a distância mínima do reticulado mergulhado? Algumas contas que fizemos com alguns valores de ε levam a crer que quanto maior for o ε , melhor será a distância mínima.

Também podem ser considerados casos de mergulhos isométricos de reticulados em ambientes euclidianos e hiperbólicos simultaneamente. Por exemplo, conforme mencionado neste trabalho, o reticulado 16 – QAM pode ser mergulhado isometricamente em uma esfera tridimensional em \mathbb{R}^4 e, também, em uma esfera de dimensão 8 em \mathbb{R}^9 . Fazer a comparação entre distâncias mínimas nesses dois ambientes é interessante, pois pode levar-nos a considerar a relevância de trabalharmos com reticulados euclidianos ou com reticulados genuinamente hiperbólicos. Nesse sentido, e baseados nos exemplos que trabalhamos, somos levados a crer que reticulados genuinamente hiperbólicos geram imagens mergulhadas com propriedades melhores, do ponto de vista da codificação, do que reticulados euclidianos.

Por fim, é natural a extensão desse trabalho para dimensões maiores, seja no domínio dos mergulhos, seja na imagem. Nesse sentido, temos duas linhas de pesquisa bastante árduas: (1) a passagem do plano hiperbólico para espaços hiperbólicos de dimensões maiores do que 2 envolve o estudo de grupos de transformações bastante complicados. Em dimensão três, temos os chamados grupos kleinianos (análogos dos grupos fuchsianos) nos quais não há muita pesquisa a respeito. Aliás, do ponto de vista de pesquisa matemática, o estudo de geometrias não-euclidianas é um campo pouco explorado; (2) a passagem do \mathbb{S}^8 para outros espaços esféricos envolve o desenvolvimento de expressões de mergulhos isométricos, o que certamente é bastante difícil devido à escassez de artigos sobre o assunto.

Referências Bibliográficas

- [1] AGUSTINI, E. “Constelações de Sinais em Planos Hiperbólicos: mergulhos isométricos em \mathbb{R}^6 e em \mathbb{S}^8 ”. *Anais do XXX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC 2007*. Florianópolis. vol. único, pp. 1-6.
- [2] BEARDON, A. F. *The Geometry of Discrete Groups*. New York: Springer-Verlag. 1982.
- [3] BLANUSA, D. “Über die Einbettung hyperbolischer Räume in euklidische Räume”. *Monatshefte für Mathematik*, 59 Band, 3 Heft, 1955, pp. 217-229.
- [4] BLANUSA, D. “ C^∞ -isometric imbeddings of the hyperbolic plane and of cylinders with hyperbolic metric in spherical spaces”. *Annali di Matematica Pura et Applicata* (Springer-Verlag), vol 4, n. 57, 1962, pp.321-337.
- [5] CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*. 4ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA - Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. (coleção Projeto Euclides). 2005.
- [6] CARMO, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática. (Coleção Textos Universitários). 2005.
- [7] CAVALCANTE, R. G., LAZARI, H. LIMA, J. D. & PALAZZO JR., R. “A New Approach to the Design of Digital Communication Systems”. *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science- AMS*. Vol. 68, 2005. (33 p.)
- [8] COSTA, S. I. R., MUNIZ, M. A., AGUSTINI, E, PALAZZO JR. R. Graphs, Tessellations, and Perfect Codes on Flat Tori. *IEEE - Transactions on Information Theory*. Vol 50, n. 10, oct. 2004, pp. 2363 - 2377.
- [9] GROMOV, M. L. & ROKHLIN, V. A. “Embeddings and Immersions in Riemannian Geometry”. *Russian Mathematical Surveys*, 25, 1970, pp. 1-57.
- [10] KATOK, S. *Fuchsian Groups*. Chicago: The University of Chicago Press. 1992.
- [11] LAZARI, H. & PALAZZO JR. R. “Geometrically uniform hyperbolic codes”. *Computational and Applied Mathematics*. Vol. 24, No. 2, 2005, pp. 173-192.
- [12] LIMA, E. L. *Curso de Análise; vol 1*. 12ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA - Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. (Coleção Projeto Euclides). 2009.
- [13] LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. 7ª. ed. Rio de Janeiro: IMPA - Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. (Coleção Matemática Universitária). 2004.
- [14] RODRIGUES, L. B. & AGUSTINI, E. “Reticulados Geometricamente Uniformes Mergulhados Isometricamente em Espaços Euclidianos”. *Anais do XXXII Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional - CNMAC 2009*. Cuiabá. vol. único, pp. 1-2.

- [15] SILVA, E. B., FIRER, M., COSTA, S. R. & PALAZZO JR., R. “Signal constellations in the hyperbolic plane: A proposal for new communication systems”. *Journal of the Franklin Institute*, No. 343, 2006, pp. 69-82.
- [16] VIEIRA, W. E. *Mergulhos Isométricos do Plano Hiperbólico em Espaços Euclidianos*. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Uberlândia, 2009.

Apêndice

O software de cálculo numérico e simbólico utilizado para a execução dos cálculos apresentados no Capítulo 4 foi o *Maple 12.0*.

Primeiramente carregamos os seguintes pacotes:

```
with(Student[Calculus1]);  
with(Student:-Precalculus);  
with(geometry);  
with(Student[Precalculus]);  
with(plots);  
with(CurveFitting);
```

Para evitar confusão nos cálculos dividimos as rotinas em arquivos diferentes onde em cada arquivo foi executado um passo da resolução. Entretanto, em praticamente todos os arquivos foram definidas as seguintes funções:

$$\begin{aligned}\psi(u) &:= 3^{2\text{trunc}\left(\frac{\text{abs}(u)+1}{2}\right)+5} \\ B(u) &:= 3^{2\text{trunc}\left(\frac{\text{abs}(u)}{2}\right)+6} \\ A &:= \int_0^1 \sin(\pi\xi) \exp\left(-\frac{1}{(\sin(\pi\xi))^2}\right) d\xi \\ \varphi(u) &:= \left(\frac{1}{A} \left(\int_0^{u+1} \sin(\pi\xi) \exp\left(-\frac{1}{(\sin(\pi\xi))^2}\right) d\xi\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\ C(u) &:= \left(\frac{1}{A} \left(\int_0^u \sin(\pi\xi) \exp\left(-\frac{1}{(\sin(\pi\xi))^2}\right) d\xi\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\ f(u) &:= \left(\frac{\varphi(u)}{\psi(u)}\right) \cdot \sinh(u) \\ h(u) &:= \left(\frac{C(u)}{B(u)}\right) \cdot \sinh(u) \\ F(u) &:= \tanh(\exp(u)) \\ G(u) &:= \frac{1}{\cosh(\exp(u))}\end{aligned}$$

E ainda:

$$\begin{aligned}
\varepsilon(x) &:= 0.5 \\
g(u) &:= (1 - (\varepsilon(x))^2) \cdot \left(F(u)^2 + \frac{1}{2} \cdot G(u)^2 + f(u)^2 + h(u)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
K(u) &:= f(u) \cdot \left(((\varphi') (u)) \cdot \left(\frac{1}{\psi(u)} \right) \sinh(u) + \left(\frac{\varphi(u)}{\psi(u)} \right) \cosh(u) \right) \\
&\quad + h(u) \cdot \left(((C') (u)) \cdot \left(\frac{1}{B(u)} \right) \sinh(u) + \left(\frac{C(u)}{B(u)} \right) \cdot \cosh(u) \right) \\
J(u) &:= (\varepsilon(x)^4) \cdot (F(u) \cdot ((F') (u)) + \frac{1}{2} \cdot (G(u) \cdot ((G') (u)) + K(u)) \\
&\quad / (1 - (\varepsilon(x))^2) \cdot (F(u)^2 + \frac{1}{2} \cdot G(u)^2 + f(u)^2 + h(u)^2) \\
L(u) &:= ((F') (u))^2 + \frac{1}{2} \cdot ((G') (u))^2 + \left(\frac{(\varphi') (u)}{\psi(u)} \cdot \sinh(u) + \frac{\varphi(u)}{\psi(u)} \cdot \cosh(u) \right)^2 \\
&\quad + \left(\frac{(C') (u)}{B(u)} \cdot \sinh(u) + \frac{C(u)}{B(u)} \cdot \cosh(u) \right)^2 \\
\rho(u) &:= \int_0^u \left(\frac{G(\xi)}{F(\xi)} \cdot 1 - (J(\xi) - (\varepsilon(x)^2) \cdot (L(\xi))) \right)^{\frac{1}{2}} d\xi \\
\sigma(u) &:= - \int_0^u \left(\frac{F(\xi)}{G(\xi)} \cdot 1 - (J(\xi) - (\varepsilon(x)^2) \cdot (L(\xi))) \right)^{\frac{1}{2}} d\xi
\end{aligned}$$

Além dessas funções, para interpolar o integrando de ρ incluímos, em um dos arquivos, a função

$$M(\xi) := \frac{G(\xi)}{F(\xi)} \cdot (1 - (J(\xi) - (\varepsilon(x)^2) \cdot (L(\xi))))^{\frac{1}{2}}$$

e utilizamos o comando

```
evalf(M(0.05))
```

para avaliar M em 0.05, por exemplo. Calculamos $M(0.1)$, $M(0.2)$, ..., $M(0.9)$ para o intervalo de 0 a 1. E fizemos de forma análoga para os intervalos $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(0, -1)$, $(-1, -2)$, $(-2, -3)$. Após esse passo utilizamos o comando

```
PolynomialInterpolation([[0.1,0.7111044617],[0.2,0.6183718241],[0.3,0.5339091294],
[0.4,0.4569271249],[0.5,0.3868327086],[0.6,0.3232378012],[0.7,0.2659377173],
[0.8,0.2148619305],[0.9,0.1700034059]],x)
```

para interpolar um polinômio de grau 8 para M . Observe que dentro de cada colchete é inserido o par ordenado $[\xi, M(\xi)]$, ressaltando que esses pares ordenados foram inseridos manualmente.

De forma análoga, em outro arquivo, além as funções anteriores definimos M agora para interpolar o integrando de σ como

$$M(\xi) := \frac{F(\xi)}{G(\xi)} \cdot (1 - (J(\xi) - (\varepsilon(x)^2) \cdot (L(\xi))))^{\frac{1}{2}}$$

e interpolamos, usando os mesmos comandos, um polinômio de grau 8 para M .

Esse procedimento foi feito para todos os intervalos acima citados.

Com os polinômios interpolados foram criados agora 6 arquivos contendo os mergulhos: para os intervalos $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(0, 3)$, $(-1, 0)$, $(-2, 0)$ e $(-3, 0)$. Cada um desses arquivos

possui as funções acima citadas com apenas duas modificações: agora no lugar dos integrandos de ρ e σ aparecem os polinômios obtidos no passo acima. Por exemplo, no mergulho $(0, 2)$, ρ está definido da seguinte forma

$$\begin{aligned} \rho(u) := & \int_0^1 (0.008131944444x^8 - 0.02353154761x^7 - 0.01404347222x^6 + 0.07796141668x^5 \\ & + 0.003503804857x^4 - 0.1774347629x^3 + 0.5126909482x^2 - 1.068995836x + 0.8130534569) dx \\ & + \int_1^u (0.006154489087x^8 - 0.09581197619x^7 + 0.6122268938x^6 - 2.093144036x^5 \\ & + 4.169221506x^4 - 5.012648120x^3 + 3.917031830x^2 - 2.415097409x + 1.043413994) dx. \end{aligned}$$

Nesses arquivos dos mergulhos estão o restante das funções que definem o mergulho M , são elas:

$$l(u, v) := \varepsilon(x) \cdot F(u) \cdot \cos\left(\frac{(v+\rho(u))}{\varepsilon(x)}\right)$$

$$m(u, v) := \varepsilon(x) \cdot F(u) \cdot \sin\left(\frac{(v+\rho(u))}{\varepsilon(x)}\right)$$

$$n(u, v) := \frac{\varepsilon(x)}{\text{sqrt}(2)} \cdot G(u) \cdot \cos\left(\frac{\text{sqrt}(2) \cdot (v+\sigma(u))}{\varepsilon(x)}\right)$$

$$o(u, v) := \frac{\varepsilon(x)}{\text{sqrt}(2)} \cdot G(u) \cdot \sin\left(\frac{\text{sqrt}(2) \cdot (v+\sigma(u))}{\varepsilon(x)}\right)$$

$$p(u, v) := \varepsilon(x) \cdot f(u) \cdot \cos\left(\frac{v \cdot \psi(u)}{\varepsilon(x)}\right)$$

$$q(u, v) := \varepsilon(x) \cdot f(u) \cdot \sin\left(\frac{v \cdot \psi(u)}{\varepsilon(x)}\right)$$

$$r(u, v) := \varepsilon(x) \cdot h(u) \cdot \cos\left(\frac{v \cdot B(u)}{\varepsilon(x)}\right)$$

$$s(u, v) := \varepsilon(x) \cdot h(u) \cdot \sin\left(\frac{v \cdot B(u)}{\varepsilon(x)}\right)$$

$$t(u, v) := g(u)$$

$$H(u, v) := (l(u, v), m(u, v), n(u, v), o(u, v), p(u, v), q(u, v), r(u, v), s(u, v), t(u, v))$$

Para avaliar H nos pontos dos exemplos na dissertação utilizamos o comando `evalf(H(u,v))` dentro do arquivo do mergulho ao qual u pertence. Por exemplo, para calcular o valor de $H\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ digitamos o comando

$$\text{evalf}\left(H\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)\right)$$

dentro do arquivo do mergulho do intervalo $(0, 2)$, e assim por diante, obtendo o valor dos 48 pontos dos 3 exemplos da dissertação.

Para calcular a distância mínima definimos, em arquivos separados, os 16 pontos de cada exemplo como p_1, \dots, p_{16} . Por exemplo, no exemplo 1 p_1 é $H(0, 0)$, logo foi definido como

$$p_1 := (-0.9907385618, 0.04721623728, 0.3346564052, 0.08356188965, -0.00007386159764, \\ -0.0003362043923, -0.0009291809611, -0.0004505808513, 0.9321889905)$$

ressaltando novamente que esses valores foram copiados e colados manualmente.

Daí, com o comando

$$\text{Distance}([p_i], [p_j])$$

calculamos as distâncias entre os pontos da seguinte forma,

$$\begin{aligned} & \text{Distance}([p1], [p2]), \dots, \text{Distance}([p1], [p16]), \\ & \text{Distance}([p2], [p3]), \dots, \text{Distance}([p2], [p16]), \\ & \vdots \\ & \text{Distance}([p15], [p16]). \end{aligned}$$

E visualmente foi verificada a menor distância.