

CAROLINA FERNANDES MOLINA SANCHES

Geometria de Superfícies em $\mathbb{R}^3$ do Ponto de Vista de Contato



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
2010

CAROLINA FERNANDES MOLINA SANCHES

Geometria de Superfícies em $\mathbb{R}^3$ do Ponto de Vista de Contato

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

Área de Concentração: Matemática.

Linha de Pesquisa: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Antônio Carlos Nogueira.

UBERLÂNDIA - MG
2010

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

S211g	Sanches, Carolina Fernandes Molina, 1983- Geometria de superficies em $\mathbb{R}^3$ do ponto de vista de contato / Carolina Fernandes Molina Sanches. - 2010. 92 f. : il. Orientador: Antônio Carlos Nogueira. Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática. Inclui bibliografia. 1. Geometria diferencial - Teses. I. Nogueira, Antônio Carlos. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título. CDU: 514.7
-------	--

Elaborado pelo Sistema de Bibliotecas da UFU / Setor de Catalogação e Classificação



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152
Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

ALUNA: Carolina Fernandes Molina Sanches.

NÚMERO DE MATRÍCULA: 93806.

ÁREA DE CONCENTRAÇÃO: Matemática.

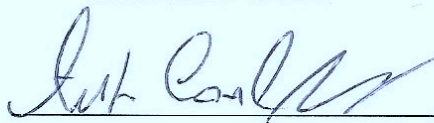
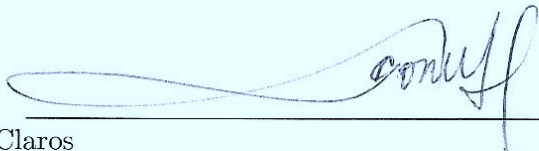
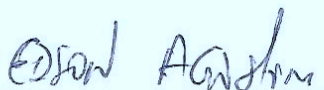
LINHA DE PESQUISA: Geometria Diferencial.

PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA: Nível Mestrado.

TÍTULO DA DISSERTAÇÃO: Geometria de Superfícies em $\mathbb{R}^3$ do Ponto de Vista de Contato.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Antônio Carlos Nogueira.

A dissertação foi **APROVADA**, em reunião pública, realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 26 de janeiro de 2010, às 9 horas, com a seguinte Banca Examinadora:

NOME	ASSINATURA
Prof. Dr. Antônio Carlos Nogueira UFU - Universidade Federal de Uberlândia	
Prof. Dr. Rosivaldo Antônio Gonçalves UNIMONTES - Universidade Estadual de Montes Claros	
Prof. Dr. Edson Agustini UFU - Universidade Federal de Uberlândia	

Uberlândia, 26 de janeiro de 2010.

Dedicatória

Ao meu amor Carlos Alberto.
Aos meus pais Marilene e Moacyr.
Ao meu irmão Júlio César.

Agradecimentos

À CAPES, agência financiadora.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Antônio Carlos Nogueira, pelos ensinamentos e pela paciência.

Aos professores Dr. Rosivaldo Antônio Gonçalves e Dr. Edson Agustini por terem aceito o convite para participarem da banca examinadora e, da mesma forma, agradeço aos professores suplentes Dr. Fábio Scalco Dias e Dr. Jocelino Sato.

Aos docentes do Corpo do Mestrado da Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia.

Aos colegas do Mestrado pelo apoio e pela amizade, em especial à primeira turma.

Ao meu marido, Carlos Alberto, pela paciência, pelo incentivo, pelo companheirismo e pela ajuda nos momentos difíceis.

Aos meus pais, Marilene e Moacyr, pelo incentivo ao estudo, pelo apoio e por acreditarem na minha capacidade.

À vovó Mariana pela companhia e hospitalidade enquanto estive em Uberlândia para a realização deste trabalho.

SANCHES, C. F. M. *Geometria de Superfícies em $\mathbb{R}^3$ do Ponto de Vista de Contato*. 2010. 92 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

Resumo

Neste trabalho é apresentado um estudo sobre o contato de superfícies imersas no $\mathbb{R}^3$ com algumas subvariedades, a saber, esferas e círculos. Para este estudo são necessários alguns pré-requisitos da teoria de singularidades. Para medir o contato entre as superfícies e estas subvariedades, utiliza-se uma variação da função distância ao quadrado. O tipo de contato depende do tipo de singularidade da aplicação de contato que é, a menos de uma constante, igual a função distância ao quadrado.

Palavras-chave: geometria genérica, contato, singularidades, esferas, círculos.

SANCHES, C. F. M. *Geometry of Surfaces in $\mathbb{R}^3$ from a Contact Viewpoint*. 2010. 92 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

Abstract

This work presents a study of the contact of immersed surface in $\mathbb{R}^3$ with some submanifolds, namely, spheres and circles. To develop the subject is necessary a background on singularity theory. The contact between the surface and the submanifold is measured by using a modified distance-squared function. The type of contact depends on the singularity type of the contact map, that is, the singularity type of the distance-squared function.

Key-words: generic geometry, contact, singularities, spheres, circles.

Lista de Símbolos

X	Superfície em $\mathbb{R}^3$;
$g : X \rightarrow \mathbb{R}^3$	Imersão de X em $\mathbb{R}^3$;
x	Ponto na superfície X ;
n	Vetor normal à superfície;
dg_x	Derivada de g com relação a x ;
I_x	Primeira Forma Fundamental em x ;
II_x	Segunda Forma Fundamental em x ;
S^2	Esfera unitária;
G	Aplicação Normal de Gauss;
$T_x X$	Espaço tangente à X em x ;
dG_x	Diferencial da aplicação normal de Gauss G em x ;
k	Curvatura principal;
K	Curvatura Gaussiana;
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Produto interno;
$\mathcal{P}^3(\mathbb{R})$	Espaço Projetivo;
$[c : s]$	Ponto do espaço projetivo, com $c \in \mathbb{R}^3$ e $s \in \mathbb{R}$;
V	Função distância ao quadrado;
V_i	i -ésima derivada da função V com relação a x ;
N	Fibrado normal compactificado;

S^1X	Fibrado tangente unitário;
F	Conjunto focal;
κ	Notação para $\mathcal{K}$ -equivalência;
$\pitchfork$	Notação para transversalidade;
$C^\infty(X, Y)$	Espaço vetorial das aplicações contínuas de X em Y ;
$J^r(X, Y)$	Espaço de jatos de aplicações de X em Y ;
$j^r f$	r-jato extensão da aplicação f ;
$\text{Imm}(X, Y)$	Espaço vetorial das imersões de X em Y ;
$\sigma(k, p)$	Codimensão do conjunto de singularidades modais em $J^r(k, p)$;
A_k	Tipo de singularidade;
D_k	Tipo de singularidade;
$\mathcal{M}_i^j$	Conjunto dos monômios de i variáveis e grau j ;
M_u	Esfera de Meusnier para a direção u ;
Σ^k	Tipo de singularidade;
IV_k	Tipo de singularidade;
g_t	Aplicação paralela na distância t .

Sumário

Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de Símbolos	x
Introdução	1
1 Preliminares	4
1.1 Superfícies em $\mathbb{R}^3$	4
1.1.1 A função altura e a aplicação normal de Gauss	8
1.2 Função distância ao quadrado e o conjunto focal	9
1.3 Contato e $\mathcal{K}$ -equivalência	11
1.4 Genericidade	14
2 Contato com Esferas	20
2.1 Definindo as esferas e a aplicação de contato	20
2.2 <i>Ridges</i> e <i>ribs</i>	23
2.3 Umbílicos	32
2.3.1 Propriedades da Singularidade D_4	38
2.3.2 Geometria de uma superfície genérica próximo de um umbílico	42
3 Contato com Círculos	45
3.1 Definindo os círculos	45
3.2 O Teorema de Meusnier	48
3.3 Na Vizinhança de um Umbílico	53
4 O Teorema de Banchoff, Gaffney e McCrory	61
4.1 O Teorema de Banchoff, Gaffney e McCrory	61
4.2 Generalização do Teorema de Banchoff, Gaffney e McCrory	63
5 Conclusões e Perspectivas Futuras	66
Apêndice	67
A	67
A.1 Variedades Diferenciáveis	67
A.2 Aplicações Estáveis	69
B	71
B.1 Germes e Jatos de Aplicações C^∞	71
B.2 Singularidades	73

C	77
C.1 Formas Cúbicas	77
Referências Bibliográficas	79

Introdução

Por volta dos anos 50 surgem os primeiros estudos sobre as singularidades de aplicações diferenciáveis com o trabalho pioneiro de Hassler Whitney [24]. Nesta mesma época o matemático francês René Thom [22] se inspirava nas idéias de Whitney. Assim, na década de 60 alguns matemáticos, principalmente John Mather [13], [14], [15], começaram a estabelecer as bases de uma teoria, a teoria de singularidades.

Thom aplicou suas idéias em vários campos além da geometria. Ele sugeriu estudar o contato de subvariedades mergulhadas em $\mathbb{R}^n$ com objetos degenerados tais como planos, retas, esferas e círculos. Esperava com isto obter informações sobre a geometria das subvariedades. Tais contatos são medidos através das singularidades de algumas funções ou aplicações. As primeiras observações sobre o contato com esferas são devidas a Thom, mas os primeiros trabalhos nesta área são devidos a Ian Porteous [18], [19], [20]. Aluno de Porteous, James Anthony Montaldi, [16], [17], tem desenvolvido a teoria de contato entre subvariedades para o estudo de curvas e superfícies no espaço euclidiano como uma aplicação da teoria de singularidades de aplicações diferenciáveis devida a Mather. A idéia é utilizar a equivalência de contato $\mathcal{K}$ introduzida por Mather como descrita em [10].

O objetivo central desta dissertação é o estudo da geometria extrínseca de superfícies em $\mathbb{R}^3$ através do uso de técnicas da teoria de singularidades. Em geral, dada uma subvariedade $X \subset \mathbb{R}^n$, pode-se obter informações sobre a geometria desta subvariedade estudando o contato de X com certas subvariedades de $\mathbb{R}^n$, denominadas subvariedades modelos, como por exemplo, contato com planos ou contato com esferas.

Este trabalho é baseado na tese de doutorado de Montaldi intitulada *Contact, with applications to submanifolds of $\mathbb{R}^n$* [16], onde ele estuda o contato de superfícies no $\mathbb{R}^3$ e no $\mathbb{R}^4$. Será feito aqui o estudo apenas para superfícies em $\mathbb{R}^3$.

A idéia básica é a seguinte: para uma subvariedade X imersa no $\mathbb{R}^3$ pela aplicação $g : X \rightarrow \mathbb{R}^3$, deseja-se olhar para o contato entre X e cada uma das famílias diferenciáveis de subvariedades modelo que, em particular, são esferas e círculos. O que se deseja saber é, para uma dada situação, qual o tipo de contato pode-se esperar que ocorra genericamente.

A dissertação está organizada da seguinte maneira:

O Capítulo 1 traz algumas noções preliminares sobre superfícies no $\mathbb{R}^3$, teoria de contato

e genericidade, importantes para o desenvolvimento desta dissertação. Existe uma relação interessante entre a aplicação normal de Gauss e a função altura a saber: um ponto crítico degenerado da função altura é um ponto singular da Aplicação Normal de Gauss, que é mostrada neste capítulo. A definição de conjunto focal usual é apresentada aqui, porém será utilizada uma definição equivalente, introduzida por Montaldi [16]. A função utilizada para medir o contato com esferas é uma variação da função distância ao quadrado que possui os mesmos conjuntos de nível mas que é não singular nos casos em que os conjuntos de nível são planos. Também, ao invés de se tomar pontos $c \in \mathbb{R}^3$, são tomados pontos no espaço projetivo $\mathcal{P}^3(\mathbb{R})$ da forma $[c : s]$, em que $c \in \mathbb{R}^3$ e $s \in \mathbb{R}$. Dessa forma a função $V : X \times \mathcal{P}^3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, que será também chamada distância ao quadrado, é definida por

$$V(x, [c : s]) = \langle c, g(x) \rangle - \frac{1}{2}s|g(x)|^2,$$

onde $g : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão.

Na seção dedicada à genericidade são apresentadas as famílias de subvariedades modelo m a serem estudadas, o Teorema de Genericidade, o significado de uma aplicação genérica e algumas considerações a respeito da dimensão da superfície X e da subvariedade m .

No segundo capítulo estuda-se o contato de superfícies em $\mathbb{R}^3$ com esferas. O contato entre uma superfície e uma esfera é descrito pela $\mathcal{K}$ -classe da função distância ao quadrado correspondente ao centro da esfera. São definidos *ridges* e *ribs*, seguidos de dois importantes teoremas que sugerem definições equivalentes para pontos *ridges*. Porteous denomina pontos *ridges* aqueles cujo contato entre a esfera e a superfície é do tipo A_3 . Existem dois tipos de *ridges*, o elíptico, ou A_3^+ , e o hiperbólico, ou A_3^- . São também descritos os diferentes conjuntos resultantes da intersecção da esfera com a superfície nestes dois tipos diferentes de pontos *ridges*. É dada uma atenção especial para a geometria de uma superfície genérica em torno de um umbílico, bem como para algumas propriedades da singularidade do tipo D_4 .

No terceiro capítulo estuda-se o contato de superfícies em $\mathbb{R}^3$ com círculos. O Teorema de Meusnier tem uma participação importante neste capítulo para dar origem à definição de Esfera de Meusnier que aparece nos resultados de contato com círculo utilizando os resultados obtidos no Capítulo 2. No fim deste capítulo aparece o fenômeno conhecido como “*curling up and dying*” em que o círculo osculador se reduz a um ponto quando há uma aproximação ao umbílico, e também é mostrada a relação existente entre este fenômeno e o índice do umbílico.

No Capítulo 4 tem-se uma generalização do Teorema de Banchoff, Gaffney e McCrory, que é o teorema central de [4]. Este teorema é sobre *ridges* onde a curvatura principal é zero, a generalização é para pontos *ridge* com qualquer valor de curvatura principal.

Por fim, é apresentado um apêndice que está dividido em três partes. A primeira parte contém definições e resultados envolvendo variedades diferenciáveis, imersão e submersão. A

segunda traz algumas idéias básicas sobre germes e jatos de aplicações diferenciáveis e conceitos e resultados importantes de singularidades. E a terceira parte do apêndice é dedicada às formas cúbicas.

Carolina Fernandes Molina Sanches
Uberlândia-MG, 26 de janeiro de 2010.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo são apresentadas algumas ferramentas matemáticas importantes necessárias no decorrer deste estudo. Na primeira seção está um pouco de superfícies no $\mathbb{R}^3$ como as formas fundamentais e definições importantes como o conjunto focal. Existe uma relação entre a segunda forma fundamental e a função altura que é explicada nesta seção. Depois, é abordado um pouco de teoria de contato e $\mathcal{K}$ -equivalência com definições e resultados essenciais. Por fim, há uma seção sobre genericidade em que são definidos os conjuntos e famílias de subvariedades que serão trabalhados nos capítulos seguintes e que traz resultados utilizados mais adiante.

1.1 Superfícies em $\mathbb{R}^3$

Sejam X uma superfície regular, orientável e conexa em $\mathbb{R}^3$ e $g : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão. A imagem de g será também chamada X . Sejam u e v vetores tangentes a X em x , $x \in X$, e n um vetor unitário normal à superfície no ponto x . As duas formas bilineares e simétricas definidas a seguir são chamadas primeira e segunda formas fundamentais em x de X , em relação à imersão g , respectivamente,

$$I_x(u, v) = \langle dg_x(u), dg_x(v) \rangle$$

$$II_x(u, v) = \langle n, d^2g_x(u, v) \rangle.$$

Sendo dg_x a diferencial de g em x e d^2g_x a hessiana de g em x .

Introduzindo coordenadas locais (x_1, x_2) e identificando X com $g(X)$ é possível expressar a imersão g como uma aplicação $g : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde U é um aberto de $\mathbb{R}^2$. Assim, o plano tangente a X em x , denotado por T_xX , é o espaço vetorial real bidimensional gerado pelos

vetores $\frac{\partial g}{\partial x_1}(x)$ e $\frac{\partial g}{\partial x_2}(x)$.

O vetor normal unitário a X em x é definido por

$$n(x) = \frac{\frac{\partial g}{\partial x_1}(x) \times \frac{\partial g}{\partial x_2}(x)}{\left| \frac{\partial g}{\partial x_1}(x) \times \frac{\partial g}{\partial x_2}(x) \right|}.$$

Seja $v \in T_x X$, com $v = a \frac{\partial g}{\partial x_1} + b \frac{\partial g}{\partial x_2}$, então

$$dg_x(v) = a \frac{\partial g}{\partial x_1} + b \frac{\partial g}{\partial x_2}$$

e

$$d^2 g_x(v, v) = a^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} + 2ab \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} + b^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}.$$

Assim, a forma quadrática associada à primeira forma fundamental, que também é denotada por I_x , é dada por

$$I_x(v, v) = \langle dg_x(v), dg_x(v) \rangle = a^2 \left\langle \frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\rangle + 2ab \left\langle \frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\rangle + b^2 \left\langle \frac{\partial g}{\partial x_2}, \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\rangle.$$

Os coeficientes da primeira forma são

$$E(x_1, x_2) = \left\langle \frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\rangle$$

$$F(x_1, x_2) = \left\langle \frac{\partial g}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\rangle$$

$$G(x_1, x_2) = \left\langle \frac{\partial g}{\partial x_2}, \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\rangle$$

e, então,

$$I_x(v, v) = Ea^2 + 2Fab + Gb^2.$$

A forma quadrática associada à segunda forma fundamental, que também é denotada por II_x , é dada por

$$II_x(v) = \langle n, d^2 g_x(v, v) \rangle = a^2 \left\langle n, \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \right\rangle + 2ab \left\langle n, \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} \right\rangle + b^2 \left\langle n, \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \right\rangle. \quad (1.1)$$

Os coeficientes da segunda forma são

$$e(x_1, x_2) = \left\langle n, \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \right\rangle$$

$$f(x_1, x_2) = \left\langle n, \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} \right\rangle$$

$$g(x_1, x_2) = \left\langle n, \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \right\rangle$$

logo,

$$II_x(v) = ea^2 + 2fab + gb^2.$$

A aplicação $G : X \rightarrow S^2$ dada por $G(x) = n(x)$, onde S^2 é a esfera unitária, é chamada a Aplicação Normal de Gauss de X . Considere a diferencial de G em x , $dG_x : T_x X \rightarrow T_{G(x)} S^2$. Como $T_x X$ e $T_{G(x)} S^2$ são paralelos pode-se identificá-los e então dG_x pode ser interpretada como um operador linear de $T_x X$, isto é, $dG_x : T_x X \rightarrow T_x X$.

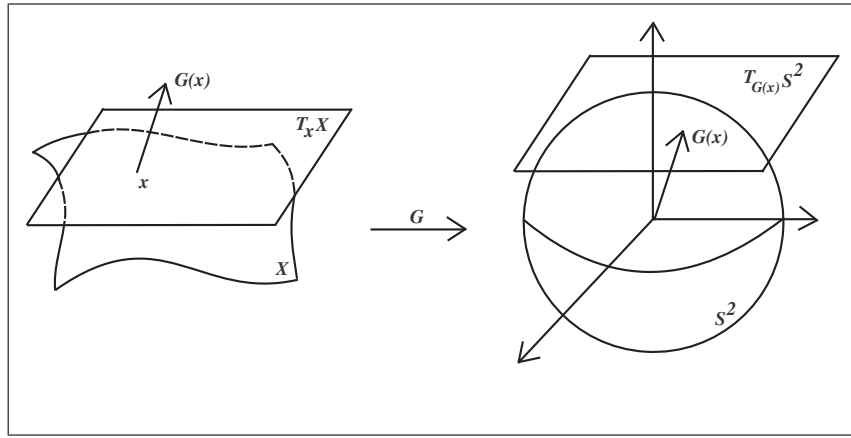


Figura 1.1: Aplicação Normal de Gauss.

Observe um exemplo da aplicação normal de Gauss, na Figura 1.2, obtido através do programa *Superfícies II* [2]. Neste caso, a superfície X é uma superfície parametrizada por $g(x, y) = (x \cos y, x \sin y, y + y^2)$, com $x \in (0, 2\pi)$ e $y \in (-1, 1)$.

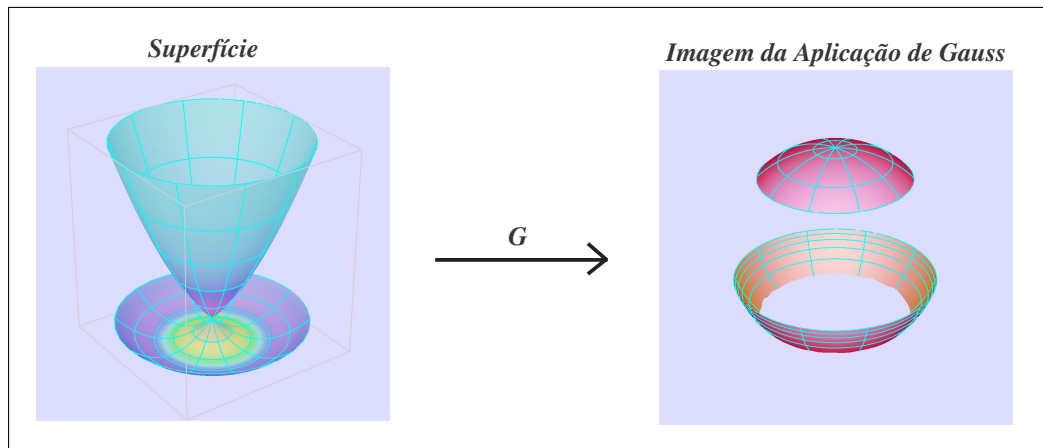


Figura 1.2: Exemplo da aplicação Normal de Gauss.

Observação 1.1.1 *É comum encontrar uma outra maneira de escrever a segunda forma quadrática.*

$$\text{Como } \left\langle n, \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\rangle = \left\langle n, \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\rangle = 0, \text{ então}$$

$$e = \left\langle n, \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial n}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\rangle,$$

$$f = \left\langle n, \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial n}{\partial x_2}, \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial n}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\rangle = \left\langle n, \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1} \right\rangle,$$

$$g = \left\langle n, \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial n}{\partial x_2}, \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\rangle.$$

Substituindo as expressões acima na equação (1.1) obtém-se

$$\begin{aligned} II_x(v) &= -a^2 \left\langle \frac{\partial n}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\rangle - ab \left\langle \frac{\partial n}{\partial x_1}, \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\rangle - ab \left\langle \frac{\partial n}{\partial x_2}, \frac{\partial g}{\partial x_1} \right\rangle - b^2 \left\langle \frac{\partial n}{\partial x_2}, \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\rangle = \\ &= - \left\langle a \frac{\partial n}{\partial x_1} + b \frac{\partial n}{\partial x_2}, a \frac{\partial g}{\partial x_1} + b \frac{\partial g}{\partial x_2} \right\rangle = \\ &= - \langle dG_x(v), v \rangle \end{aligned}$$

Assim, para todo $v \in T_x X$ a segunda forma quadrática é

$$II_x(v) = - \langle dG_x(v), v \rangle.$$

Os autovalores de $-dG_x$, denotados por k , são as curvaturas principais, e os autovetores são as direções principais. Pela definição, k é uma curvatura principal em x se, e somente se, $\det((-dG_x) - kI) = 0$.

Em cada ponto da superfície temos uma equação do tipo

$$II_x(u,) = kI_x(u,). \quad (1.2)$$

Onde $I_x(u,)$ é a aplicação linear definida por $(I_x)_u : T_x X \rightarrow \mathbb{R}$, com $(I_x)_u(v) = I_x(u, v)$, e $II_x(u,)$ é a aplicação linear definida por $(II_x)_u : T_x X \rightarrow \mathbb{R}$, com $(II_x)_u(v) = II_x(u, v)$.

Então os autovalores da equação (1.2) são as curvaturas principais e os autovetores são as direções principais, por isso, esta equação sempre tem solução. Se I_x e II_x são linearmente independentes, existem duas direções principais ortogonais, ortogonalidade sendo definida com respeito a I_x . Um ponto x onde as duas formas quadráticas são linearmente dependentes é

chamado umbílico, isto é, as curvaturas principais são iguais, e em geral umbílicos são isolados. Assim, fora do conjunto de umbílicos, existem dois campos de vetores distintos que podem ser integrados para obter duas famílias de curvas na superfície. Essas curvas são chamadas linhas de curvatura. Diz-se que a superfície X é totalmente umbílica se todos os pontos de X são umbílicos.

A curvatura de Gauss (ou curvatura Gaussiana) de X em x é definida por $K(x) = \det(-dG_x)$, isto é, é o produto das curvaturas principais. Uma outra forma bastante conhecida de se escrever a curvatura Gaussiana, em termos dos coeficientes da primeira e da segunda forma fundamental, é

$$K(x) = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}. \quad (1.3)$$

Um ponto $x \in X$ é chamado parabólico quando $K(x) = 0$ e $k_1 \neq k_2$, sendo k_1 e k_2 as curvaturas principais.

Tem-se, então, um conhecido resultado de geometria diferencial:

Proposição 1.1.2 *Suponha que X é totalmente umbílica, então $K(x)$ é constante K com $K \geq 0$. Assim:*

1. *Se $K \neq 0$ então X é um pedaço de uma esfera;*
2. *Se $K = 0$ então X é um pedaço de um plano.*

1.1.1 A função altura e a aplicação normal de Gauss

Sejam $v \in \mathbb{R}^3$ um vetor unitário e $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ a função altura definida por $h(q) = \langle q, v \rangle$. O valor $h(q)$ é a altura de $q \in X$ relativa a um plano normal a v e passando pela origem de $\mathbb{R}^3$.

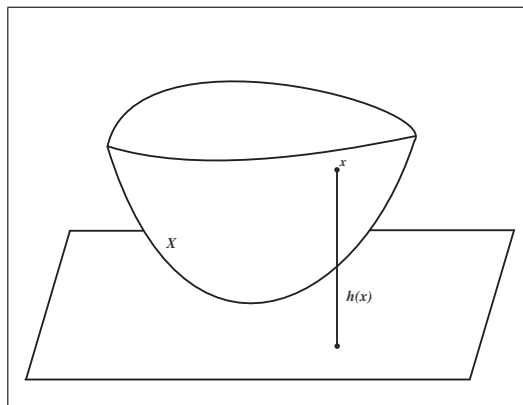


Figura 1.3: Função altura.

Seja $w \in T_q X$ e escolha uma curva diferenciável $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow X$ tal que $\gamma(0) = q$ e $\gamma'(0) = w$, como $h(\gamma(t)) = \langle \gamma(t), v \rangle$, obtém-se

$$dh_q(w) = \left. \frac{d}{dt} h(\gamma(t)) \right|_{t=0} = \langle \gamma'(0), v \rangle = \langle w, v \rangle.$$

Assim, $dh_q(w) = 0$ para todo $w \in T_q X$ se, e somente se, v é normal a X em q . Tome então $v = n$ e observe que q é um ponto crítico de $h(x) = \langle x, n \rangle$.

Em coordenadas locais, no ponto q , tem-se $h(x_1, x_2) = \langle g(x_1, x_2), n \rangle$. Então,

$$\frac{\partial h}{\partial x_1} = \left\langle \frac{\partial g}{\partial x_1}, n \right\rangle$$

$$\frac{\partial h}{\partial x_2} = \left\langle \frac{\partial g}{\partial x_2}, n \right\rangle$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} = \left\langle \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2}, n \right\rangle = e$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} = \left\langle \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2}, n \right\rangle = g$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} = \left\langle \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2}, n \right\rangle = f$$

Logo, $\det(Hess\ h) = eg - f^2$, e então, $\det(Hess\ h) = 0$ se, e somente se $eg - f^2 = 0$, o que equivale a $K(q) = 0$, pela equação (1.3). Portanto o ponto q é um ponto crítico degenerado da função altura se, e somente se, q é um ponto parabólico de X , ou seja, q é um ponto singular da aplicação normal de Gauss.

1.2 Função distância ao quadrado e o conjunto focal

Definição 1.2.1 *Os pontos focais de X em x são os pontos da forma $g(x) + \frac{1}{k_i}n(x)$, onde k_i são as curvaturas principais em x , para $i = 1, 2$. O conjunto focal de X , também conhecido como evoluta, é o conjunto de todos os pontos focais de X .*

Exemplo 1.2.2 *A Figura 1.4 mostra um parabolóide hiperbólico e uma folha do conjunto focal.*

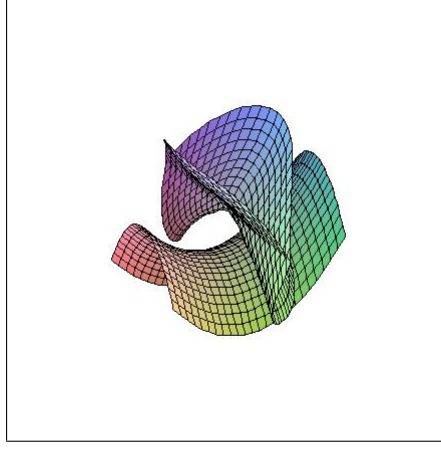


Figura 1.4: Uma folha do conjunto focal de um parabolóide hiperbólico.

Os pontos focais podem ser vistos como os dois centros de curvatura correspondentes às direções principais. Eles podem ser pensados como estando no espaço ambiente ou no fibrado normal (Definição 1.2.4). Quando a curvatura principal é zero o ponto focal associado está no infinito, então ao invés de tomar pontos $c \in \mathbb{R}^3$, tome pontos no espaço projetivo, $[c : s] \in \mathcal{P}^3(\mathbb{R})$, ($s \in \mathbb{R}$). c e s podem ser escolhidos tais que $|c|^2 + s^2 = 1$. Defina a função distância ao quadrado $V : X \times \mathcal{P}^3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$V(x, [c : s]) = \langle c, g(x) \rangle - \frac{1}{2}s|g(x)|^2.$$

A razão do nome é que para $s \neq 0$, $V(x, [c : s])$ tem os mesmos conjuntos de nível da função $|c - sg(x)|^2$, mas a função utilizada é não singular quando $s = 0$ e, neste caso, os conjuntos de nível são planos.

Denote por V_i a i -ésima derivada de V em x .

Observação 1.2.3 *No apêndice e na referência [7] é possível encontrar um pouco sobre o espaço projetivo e variedades diferenciáveis.*

Definição 1.2.4 *O fibrado normal compactificado é dado pelo seguinte conjunto:*

$$N = \{(x, [c : s]) \in X \times \mathcal{P}^3(\mathbb{R}); V_1(x, [c : s]) = 0\}.$$

A seguir é dada uma definição de conjunto focal que será utilizada neste trabalho.

Definição 1.2.5 *Seja $\tilde{N} = N \oplus S^1X$, onde S^1X é o fibrado tangente unitário de X . Considere o conjunto*

$$\tilde{F} = \{(x, [c : s], u) \in \tilde{N}; V_2(x, [c : s])u = 0\},$$

o conjunto focal F é definido como a imagem de $\tilde{F}$ sob a projeção $\tilde{N} \rightarrow N$.

Observação 1.2.6 $(x, [c : s]) \in N$ é um ponto focal se, e somente se, existir um vetor tangente não nulo u satisfazendo

$$\langle c - sg(x), d^2gu \rangle - s\langle dg, dgu \rangle = 0$$

que é equivalente à equação (1.2) com $k(c - sg(x)) = sn$. De fato, $(x, [c : s], u) \in \tilde{F}$ se, e somente se, $V_2(x, [c : s])u = 0$, logo

$$\langle c - sg(x), d^2gu \rangle - s\langle dg, dgu \rangle = 0$$

$$\left\langle \frac{sn}{k}, d^2gu \right\rangle - s\langle dg, dgu \rangle = 0$$

$$\langle n, d^2gu \rangle - k\langle dg, dgu \rangle = 0$$

$$II_x(u, \cdot) = kI_x(u, \cdot)$$

Observação 1.2.7 As Definições 1.2.1 e 1.2.5 são equivalentes. Basta observar que, como para $i = 1, 2$, $k_i(c_i - s_i g(x)) = s_i n$, então $c_i - s_i g(x) = \frac{1}{k_i} s_i n$, logo $\frac{c_i}{s_i} = g(x) + \frac{1}{k_i} n$ são os centros de curvatura correspondentes às direções principais.

Observação 1.2.8 Na Seção 2.3 prova-se que sob certas condições o conjunto $\tilde{F}$ é uma subvariedade de $\tilde{N}$.

1.3 Contato e $\mathcal{K}$ -equivalência

A idéia de contato corresponde a um grau de tangência maior que o usual entre duas subvariedades, em geral é uma tangência maior que a mínima possível. [8]

Sejam N_1, N_2, P_1 e P_2 variedades diferenciáveis.

Definição 1.3.1 Uma contato equivalência (ou $\mathcal{K}$ -equivalência) é o par (h, H) de germes invertíveis para os quais o diagrama abaixo comuta

$$\begin{array}{ccccc} (N_1, x_1) & \xrightarrow{i_1} & (N_1 \times P_1, z_1) & \xrightarrow{\pi_1} & (N_1, x_1) \\ h \downarrow & & H \downarrow & & \downarrow h \\ (N_2, x_2) & \xrightarrow{i_2} & (N_2 \times P_2, z_2) & \xrightarrow{\pi_2} & (N_2, x_2) \end{array}$$

onde, para $k = 1, 2$

i_k : germe em x_k da inclusão $N_k \rightarrow N_k \times P_k$ dada por $x \mapsto (x, y_k)$;

π_k : germe em z_k da projeção $N_k \times P_k \rightarrow N_k$ dada por $(x, y) \mapsto x$.

Em outras palavras, H é dada pela fórmula

$$H(x, y) = (h(x), \theta(x, y))$$

com $\theta(x, y_1) = y_2$. E os germes f_1 e f_2 são ditos *contato-equivalentes*, ou *$\mathcal{K}$ -equivalentes*, quando existe uma *contato equivalência* (h, H) para a qual

$$H \circ (1, f_1) = (1, f_2) \circ h$$

Notação: $f_1 \stackrel{\mathcal{K}}{\sim} f_2$.

Observação 1.3.2 *$\mathcal{A}$ -equivalência implica em $\mathcal{K}$ -equivalência. Por outro lado, dois germes $\mathcal{K}$ -equivalentes não são necessariamente $\mathcal{A}$ -equivalentes. [10]*

Observação 1.3.3 *Sobre $\mathcal{A}$ -equivalência, ver apêndice.*

Exemplo 1.3.4 *Sejam os germes $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definido por $f(x, y, z) = (y, z)$, e $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definido por $g(x, y, z) = (y, z - xy)$, que recortam o eixo x , isto é, $f^{-1}(0, 0) = (x, 0, 0)$ e $g^{-1}(0, 0) = (x, 0, 0)$. Considere o contato do eixo x com a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\gamma(t) = (t, t^2, t^3)$. Então as aplicações de contato são $f \circ \gamma(t) = (t^2, t^3)$ e $g \circ \gamma(t) = (t^2, 0)$. Assim, como $f \circ \gamma$ e $g \circ \gamma$ são $\mathcal{K}$ -equivalentes, pois os ideais $I_{f \circ \gamma}$ e $I_{g \circ \gamma}$, gerados pelas componentes de $f \circ \gamma$ e $g \circ \gamma$, respectivamente, coincidem, então f e g também são $\mathcal{K}$ -equivalentes. Mas f e g não são $\mathcal{A}$ -equivalentes, pois as imagens das aplicações de contato não são difeomórficas.*

Sejam X_i e Y_i , $i = 1, 2$ subvariedades de $\mathbb{R}^n$, com $\dim X_1 = \dim X_2$ e $\dim Y_1 = \dim Y_2$.

Definição 1.3.5 *O contato de X_1 e Y_1 em y_1 é do mesmo tipo que o contato de X_2 e Y_2 em y_2 se existe um germe difeomorfismo*

$$H : (\mathbb{R}^n, y_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, y_2)$$

tal que $H(X_1) = X_2$ e $H(Y_1) = Y_2$. Neste caso escreve-se

$$K(X_1, Y_1; y_1) = K(X_2, Y_2; y_2)$$

Observação 1.3.6 *Se $y \notin X \cap Y$ então o contato é vazio.*

Sejam $g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma imersão e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma submersão em cada ponto de $Y = f^{-1}(0)$, neste caso, diz-se que uma tal aplicação recorta Y . O tipo de contato de X e Y em y é medido pela $\mathcal{K}$ -classe da aplicação composta $f \circ g$ em $g^{-1}(y)$, que é chamada aplicação de contato de X e Y . A proposição a seguir diz que esta $\mathcal{K}$ -classe depende apenas das subvariedades X e Y , e não da escolha da imersão g e da submersão f .

Os resultados seguintes relacionam tipo de contato com as $\mathcal{K}$ -classes da aplicação de contato. As provas dos mesmos podem ser encontradas em [16].

Proposição 1.3.7 *Sejam X, Y, g e f como acima, e sejam $g' : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma outra imersão com mesma imagem de g e $f' : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma outra aplicação que recorta Y , então $f \circ g$ e $f' \circ g'$ são $\mathcal{K}$ -equivalentes.*

Teorema 1.3.8 *Para $i = 1, 2$ sejam $g_i : (X_i, x_i) \rightarrow (\mathbb{R}^n, y_i)$ germes de imersões e $f_i : (\mathbb{R}^n, y_i) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ aplicações que recortam Y_i , com $\dim X_1 = \dim X_2$ e $\dim Y_1 = \dim Y_2$. Então,*

$$K(X_1, Y_1; y_1) = K(X_2, Y_2; y_2) \Leftrightarrow \mathcal{K}(f_1 \circ g_1) = \mathcal{K}(f_2 \circ g_2).$$

Em outras palavras pode-se medir o contato entre subvariedades utilizando o conceito de transversalidade como em [8].

Definição 1.3.9 *Sejam X e Y duas variedades diferenciáveis e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação diferenciável entre elas. Dada uma subvariedade $W \subset Y$ e um ponto $x \in X$, diz-se que f corta W transversalmente em x , e denota-se por $f \pitchfork W$, se $f(x) \notin W$, ou $f(x) \in W$ e $T_{f(x)}Y = T_{f(x)}W + df_x(T_xX)$.*

Assim, para $g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma imersão e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma submersão em cada ponto de $Y = f^{-1}(0)$, se X e Y tem um ponto em comum $p \in X \cap Y$ tal que $p = g(x)$ e $f \circ g(x) = 0$, diz-se que X e Y tem contato em p se não são transversais em tal ponto. Isto implica que a diferencial $d(f \circ g)_x$ não é sobrejetora, portanto a aplicação $f \circ g$ tem uma singularidade, o ponto crítico em x . Desta forma aparece a relação entre contato e singularidades: o tipo de singularidade que a aplicação $f \circ g$ tem no ponto x determina o tipo de contato entre as subvariedades X e Y no ponto p . Por esse motivo a composição $f \circ g$ é chamada aplicação de contato.

Essa correspondência entre tipos de contato de subvariedades e tipos de singularidades das aplicações permite o uso dos nomes dos tipos de singularidades para os tipos de contato. Por exemplo, as subvariedades X e Y tem contato do tipo A_1 em p se a aplicação de contato $f \circ g$ tem singularidade do tipo A_1 em x .

Observação 1.3.10 *Sobre tipos de singularidades, ver apêndice.*

Em [16] e [17], Montaldi usa o termo $(k+1)$ -ponto de contato, quando uma das subvariedades envolvidas é uma curva, para indicar que o contato é do tipo A_k . O número $(k+1)$ é a multiplicidade de contato entre a curva e a subvariedade que tem contato do tipo A_k . Intuitivamente, se a ordem de contato é k , então o ponto de contato se quebra em $k+1$ pontos em uma deformação.

Exemplo 1.3.11 O contato da curva $y = x^3$ com o eixo x é do tipo A_2 , pois $\frac{dy}{dx}(0) = \frac{d^2y}{dx^2}(0) = 0$ e $\frac{d^3y}{dx^3}(0) \neq 0$. Considerando a deformação $y = x^3 - ax$, para $a \in \mathbb{R}$, o gráfico da função deformada tem três pontos de intersecção com o eixo x .

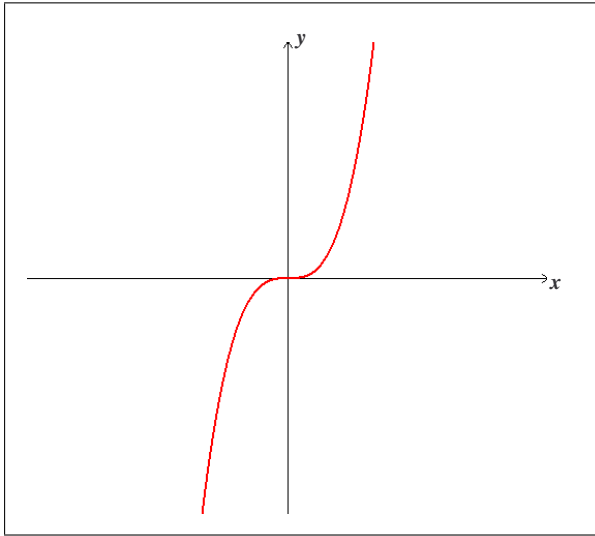


Figura 1.5: Curva $y = x^3$.

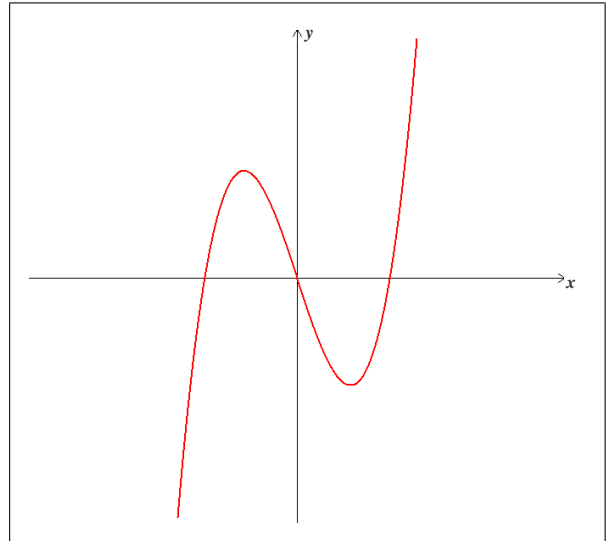


Figura 1.6: Deformação da curva $y = x^3$.

1.4 Genericidade

Considere uma família de subvariedades modelos do $\mathbb{R}^n$ parametrizada suavemente por $m \in M$, com M uma variedade. Geralmente essas subvariedades modelos são retas, planos, esferas e círculos. Deseja-se medir o contato entre uma subvariedade X de $\mathbb{R}^n$ fixada e cada $m \in M$. Para isto é necessário imergir X , recortar $m = f^{-1}(0)$, para alguma f , e olhar a aplicação de contato resultante. Procedendo desta maneira é possível incluir nesta família aplicações que determinam m cujos conjuntos de zeros são singulares.

Para cada $m \in M$ existe uma aplicação $f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ tal que $f_m^{-1}(0) = m$ é a subvariedade modelo de codimensão p do $\mathbb{R}^n$. É preciso que a aplicação

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n \times M &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ (y, m) &\longmapsto f_m(y) \end{aligned}$$

seja diferenciável.

Fixe também uma imersão $g : X \rightarrow \mathbb{R}^n$. Então, pelo Teorema 1.3.8, o contato entre X , ou melhor $g(X)$, e a subvariedade modelo m em $g(x)$ é dado pela $\mathcal{K}$ -classe da composta $f_m \circ g$ em x .

Denote por Φ_g e $\phi_{g,m}$ as aplicações

$$\begin{aligned} \Phi_g : X \times M &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ (x, m) &\longmapsto \phi_{g,m}(x) = f_m \circ g(x) \end{aligned}$$

e quando não houver confusão o índice g será omitido.

Dadas duas variedades X e Y , dê ao conjunto das aplicações diferenciáveis de X em Y , $C^\infty(X, Y)$, a topologia de Whitney, em que, uma base de abertos consiste dos conjuntos

$$\mathfrak{F}(u) = \{f \in C^\infty(X, Y); j^r f(X) \subset U\},$$

onde U é um aberto no espaço de jatos $J^r(X, Y)$, para algum r .

Observação 1.4.1 *Sobre jatos de aplicações C^∞ , ver apêndice.*

Para os teoremas a seguir é necessária a seguinte versão do teorema de transversalidade de Thom:

Proposição 1.4.2 *Sejam M , X e Y variedades diferenciáveis e seja Z uma subvariedade de $J^r(X, Y) \times M$. Então, o conjunto*

$$T_Z = \{g \in C^\infty(X, Y); (j^r g, 1) \pitchfork Z\}$$

é residual, isto é, intersecção de abertos densos, em $C^\infty(X, Y)$, onde $(j^r g, 1) : X \times M \rightarrow J^r(X, Y) \times M$ é a aplicação produto.

O primeiro teorema de genericidade é para a situação geral descrita acima, onde para cada $m \in M$, a aplicação $f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ recorta seu conjunto de zeros, $m = f^{-1}(0)$. Depois este resultado será estendido a um caso particular em que esta situação pode falhar.

Denote por $J_y^r(X, \mathbb{R}^p)$ o subconjunto de r -jatos com meta y . Seja W uma subvariedade $\mathcal{K}$ -invariante de $J^r(X, \mathbb{R}^p)$, isto é, se $f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ é tal que $j^r f(x) \in W$, dada $g : X \rightarrow \mathbb{R}^p$ com $g \stackrel{\mathcal{K}}{\sim} f$, então $j^r g \in W$.

Em geral, quando se considera aplicações sob $\mathcal{K}$ -equivalência, as metas podem ser distintas (e também as fontes). Neste caso, porém, existe uma meta preferida, a meta zero, pois o interesse está em subvariedades dadas como $f^{-1}(0)$. Aqui são consideradas aplicações com meta não nula como sendo $\mathcal{K}$ -equivalentes, enquanto se uma aplicação tem meta nula e outra não, elas não podem ser $\mathcal{K}$ -equivalentes. Com isto segue que se W é uma subvariedade $\mathcal{K}$ -invariante de $J^r(X, \mathbb{R}^p)$, então W é uma subvariedade de $J_0^r(X, \mathbb{R}^p)$ ou é o complementar de $J_0^r(X, \mathbb{R}^p)$.

Dadas as variedades X e M e uma aplicação $\Phi : X \times M \rightarrow \mathbb{R}^p$ são definidas duas aplicações:

$$j^r \Phi : X \times M \longrightarrow J^r(X \times M, \mathbb{R}^p)$$

e

$$j_1^r \Phi : X \times M \longrightarrow J^r(X, \mathbb{R}^p)$$

que é o r -jato na primeira variável.

Teorema 1.4.3 *Sejam X, Y, f_m, g e Φ_g como acima. Seja W uma subvariedade de $J_0^r(X, \mathbb{R}^p)$ ou todo o complementar de $J_0^r(X, \mathbb{R}^p)$. Então o conjunto*

$$R_W = \{g \in \text{Imm}(X, \mathbb{R}^n); j_1^r \Phi_g \cap W\}$$

é residual, isto é, intersecção de abertos densos, em $\text{Imm}(X, \mathbb{R}^n)$.

Demonstração:

A demonstração se encontra em [16]. ■

O próximo teorema, teorema de genericidade, é para situações particulares: o contato entre subvariedades imersas de $\mathbb{R}^n$ com esferas de codimensão p .

Seja M o conjunto das $(n - p)$ -esferas em $\mathbb{R}^n$, cada tal esfera sendo recortada por uma aplicação apropriada $f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$.

Qualquer $(n - p)$ -esfera em $\mathbb{R}^n$ pode ser dada pela intersecção de p hiperesferas. Suponha que estas p hiperesferas tenham centros $c_1, \dots, c_p$ e raios $r_1, \dots, r_p$, então a $(n - p)$ -esfera é o conjunto de zeros da aplicação

$$y \mapsto (|c_1 - y|^2 - r_1^2, \dots, |c_p - y|^2 - r_p^2)$$

onde $c_i \neq c_j$ quando $i \neq j$ e os r_i 's são tais que o conjunto de zeros é de fato $(n - p)$ -esfera genuína. Para incluir planos como um caso especial de esferas é preciso adicionar os pontos no infinito em $\mathbb{R}^n$ e então tratar com pontos $[c : s] \in \mathcal{P}^n(\mathbb{R})$ e $[c : s : \rho] \in \mathcal{P}^{n+1}(\mathbb{R})$. Isto porque para parametrizar uma esfera precisa-se de dois parâmetros, o centro e o raio e, analogamente para um plano, um vetor e um número real, então para parametrizar em uma só família esferas e planos são necessários três parâmetros.

Assim, são definidos dois conjuntos

$$M_e = \{([c_1 : s_1 : \rho_1], \dots, [c_p : s_p : \rho_p]); [c_i : s_i] \neq [c_j : s_j] \text{ para } i \neq j \text{ e } (c_i, s_i) \neq 0, \forall i\}$$

e

$$M = \{m \in M_e; f_m^{-1}(0) \text{ é uma subvariedade de } \mathbb{R}^n \text{ de codimensão } p\}$$

onde

$$f_m(y) = \left(\langle c_1, y \rangle - \frac{1}{2}s_1|y|^2 + \rho_1, \dots, \langle c_p, y \rangle - \frac{1}{2}s_p|y|^2 + \rho_p \right).$$

Assim, se $s_i \neq 0$, a i -ésima componente de f_m define a hiperesfera

$$\left| y - \frac{c_i}{s_i} \right|^2 - \frac{2\rho_i}{s_i} - \frac{|c_i|^2}{s_i^2} = 0,$$

caso contrário, se $s_i = 0$, ela define o hiperplano

$$\langle c_i, y \rangle + \rho_i = 0.$$

De fato,

$$\bullet \ s_i \neq 0 : \quad \langle c_i, y \rangle - \frac{1}{2}s_i|y|^2 + \rho_i = 0 \Rightarrow \left\langle \frac{c_i}{s_i}, y \right\rangle - \frac{1}{2}|y|^2 + \frac{\rho_i}{s_i} = 0 \Rightarrow -2 \left\langle \frac{c_i}{s_i}, y \right\rangle + |y|^2 - \frac{2\rho_i}{s_i} +$$

$$+ \frac{|c_i|^2}{s_i^2} - \frac{|c_i|^2}{s_i^2} = 0 \Rightarrow \left| y - \frac{c_i}{s_i} \right|^2 - \frac{2\rho_i}{s_i} - \frac{|c_i|^2}{s_i^2} = 0$$

$$\bullet \ s_i = 0 : \quad \langle c_i, y \rangle + \rho_i = 0$$

Estes conjuntos não dependem da escolha do representante de $[c_i : s_i : \rho_i]$, apesar de f_m depender. Também, a $\mathcal{K}$ -classe de $f_m \circ g$ não é afetada por esta escolha.

Quando necessário pode-se limitar esta escolha à condição $|c_i|^2 + s_i^2 + \rho_i^2 = 1$.

Teorema 1.4.4 (Genericidade) *Defina a aplicação*

$$\Gamma^r : J^r(X, \mathbb{R}^n) \times M \rightarrow J^r(X, \mathbb{R}^p)$$

$$(j^r g(x), m) \mapsto j^r(f_m \circ g)(x) = j^r \phi_{g,m}(x)$$

Se W é uma subvariedade $\mathcal{K}$ -invariante de $J^r(X, \mathbb{R}^p)$, então $\Gamma^r \pitchfork W$ e, conseqüentemente o conjunto

$$R_W = \{g \in \text{Imm}(X, \mathbb{R}^n); j_1^r \Phi_g \pitchfork W\}$$

é residual em $\text{Imm}(X, \mathbb{R}^n)$.

Demonstração:

A demonstração se encontra em [16]. ■

Será discutido agora o que se entende por imersão genérica para quaisquer dados X , n , M e, conseqüentemente p . Mather [15] calculou a codimensão $\sigma(k, p)$ do conjunto de singularidades modais em $J^r(k, p)$ - a fibra de $J^r(X, \mathbb{R}^p)$ sobre um ponto $(x, 0)$ em $X \times \mathbb{R}^p$ - para r suficientemente grande. Devido à preferência pela meta zero, a codimensão do conjunto de todas as singularidades modais em $J^r(X, \mathbb{R}^p)$ é $\sigma(k, p) + p$. Observe também que para g dada, a dimensão da imagem da aplicação jato-extensão associada $j_1^r \Phi_g$ é $k + d$, onde $d = \dim M$.

Nos casos em que $k + d < \sigma(k, p) + p$, sejam $\{W_1, \dots, W_s\}$ o conjunto finito de $\mathcal{K}$ -órbitas em $J^r(X, \mathbb{R}^p)$ de codimensão menor que $k + d$ e $\{W_{s+1}, \dots, W_t\}$ uma estratificação finita do

complemento de $\{W_1, \dots, W_s\}$. Então, para a situação genérica descrita no Teorema 1.4.3 e a particular extensão no Teorema 1.4.4, seja R a intersecção dos R_W , a qual será um subconjunto residual de $\text{Imm}(X, \mathbb{R}^n)$. Para $g \in R$ aplicação jato-extensão associada irá, então, perder os W_i para $i > s$, e ser transversal aos W_i para $i \leq s$, e uma tal aplicação será chamada genérica para a situação dada. Para as aplicações dos Capítulos 2 e 3, a hipótese $k + d < \sigma(k, p) + p$ é sempre verificada conforme as fórmulas abaixo, e para esses capítulos, o termo genérica terá o significado descrito aqui.

Quando as dimensões são tais que as singularidades modais não são encontradas para uma imersão genérica, a transversalidade da estratificação garante que todas as singularidades são apresentadas transversalmente, isto é, são versalmente deformadas. Se, por outro lado, as singularidades modais ocorrerem, então as singularidades não podem ser apresentadas transversalmente. Assim, nas aplicações deste trabalho, todas as singularidades que surgirem para uma imersão genérica serão apresentadas transversalmente, isto é, não ocorrerão singularidades modais.

Observação 1.4.5 *Sobre singularidades modais e deformação versal, ver apêndice.*

Para quais situações as singularidades modais são evitadas pelas imersões genéricas? Mather calculou a codimensão da variedade algébrica consistindo de todas as singularidades modais em $J^r(X, \mathbb{R}^p)$. Se $\dim X = k$, então este número é $\sigma(k, p)$ - mais precisamente é $\sigma_r(k, p)$, que é uma função decrescente de r , e $\sigma(k, p)$ é definida como $\inf_r \sigma_r(k, p)$. O número $\sigma(k, p)$ é dado pela seguinte fórmula:

Caso I, $k \leq p$:

$$\sigma(k, p) = \begin{cases} 6(p - k) + 8 & \text{se } p - k \geq 4 \text{ e } k \geq 4 \\ 6(p - k) + 9 & \text{se } 0 < p - k < 3 \text{ e } k > 4 \text{ ou se } k = 3 \\ 7(p - k) + 10 & \text{se } k = 2 \\ \infty & \text{se } k = 1 \end{cases}$$

Caso II, $k > p$:

$$\sigma(k, p) = \begin{cases} 9 & \text{se } k - p = 1 \\ 8 & \text{se } k - p = 2 \\ k - p + 7 & \text{se } k - p \geq 3 \end{cases}$$

No presente contexto de medição do contato de uma dada subvariedade X de $\mathbb{R}^n$ com cada uma das famílias de subvariedades modelo $m \in M$, p é a codimensão de m . Se $d = \dim M$, então a imagem da aplicação jato-extensão $j_1^r \Phi$ tem dimensão $k + d$, então para evitar singularidades modais deve-se ter $k + d < \sigma(k, p) + p$.

Por exemplo, se as subvariedades modelos são esferas de codimensão p , então $d = p(n - p + 2)$, e assim deve-se ter $k + p(n - p + 2) < \sigma(k, p) + p$.

No caso deste estudo, $\dim X = k = 3$, para $p = 1$ tem-se as esferas e para $p = 2$ tem-se os círculos.

Considere o caso $p = 1$, então só acontece o Caso II em que $k > p$:

Como $k - p = 2$, então

$$k + p(n - p + 2) < \sigma(k, p) + p$$

$$3 + 1(n - 1 + 2) < 8 + 1$$

$$n < 5$$

Considere o caso $p = 2$, então só vale o Caso II em que $k > p$:

Como $k - p = 1$, então

$$k + p(n - p + 2) < \sigma(k, p) + p$$

$$3 + 2(n - 2 + 2) < 9 + 2$$

$$n < 4$$

Portanto, nos dois casos acima, para $p = 1$ e para $p = 2$, não vão ocorrer singularidades modais já que o valor de n considerado é 3, pois o contato estudado é para superfícies em $\mathbb{R}^3$.

Capítulo 2

Contato com Esferas

Neste capítulo estão definidos os conjuntos e a função vistos na Seção 1.4 adaptados para se trabalhar com esferas. Muitos teoremas são apresentados para estabelecer o tipo de contato entre esferas e superfícies e as propriedades associadas, bem como a intersecção da esfera dada com a superfície, o que está resumido em uma tabela no final do capítulo. Uma atenção especial é dada para os umbílicos da superfície e, dessa forma, são estudadas duas propriedades importantes da singularidade D_4 , a saber: para um D_4^- existem três curvas não-singulares em cada ponto das quais a deformação versal da forma normal tem singularidades do tipo A_3 enquanto que para um D_4^+ existe apenas uma curva não-singular com essa propriedade; para um D_4^- mas não para um D_4^+ , pela origem do espaço de parâmetros passa uma curva, em cada ponto da qual, a função perturbada tem três singularidades do tipo A_1^- .

2.1 Definindo as esferas e a aplicação de contato

Considere os conjuntos

$$M_e = \{[c : s : \rho] \in \mathcal{P}^4(\mathbb{R}); s, \rho \in \mathbb{R}, (c, s) \neq 0\}$$

$$M = \{m \in M_e; f_m^{-1}(0) \text{ é uma subvariedade de } \mathbb{R}^3 \text{ de codimensão } 1\}$$

onde

$$f_m : y \mapsto \langle c, y \rangle - \frac{1}{2}s|y|^2 + \rho$$

com conjunto de zeros igual a $m = [c : s : \rho] \in M_e$ (identificando m com a superfície definida por m e f_m ou $\mathbb{R}^3$), tem-se M a coleção de esferas em $\mathbb{R}^3$, cada tal esfera sendo definida pela aplicação apropriada $f_m : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

Para $m \in M$, tem-se que $m = f_m^{-1}(0)$ é não singular e f_m é uma submersão em cada ponto de m .

Se $s \neq 0$, então m é a esfera de centro em $\frac{c}{s}$ e raio $\left(\left|\frac{c}{s}\right|^2 + \frac{2\rho}{s}\right)^{\frac{1}{2}}$, enquanto que se $s = 0$,

m é o plano $\langle c, y \rangle + \rho = 0$.

Dada uma imersão $g : X \rightarrow \mathbb{R}^3$, o contato entre X e a subvariedade modelo m em $g(x)$ é dado pela $\mathcal{K}$ -classe da composta $f_m \circ g$ em x .

Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi : X \times M_e &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, m) &\longmapsto \phi_m(x) = f_m \circ g(x) \end{aligned}$$

e defina a função distância ao quadrado $V : X \times \mathcal{P}^3(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$V(x, [c : s]) = \langle c, g(x) \rangle - \frac{1}{2}s|g(x)|^2.$$

Observe que as aplicações f_m , Φ e $f_m \circ g$ parecem não estar bem definidas, pois seus valores dependem da escolha do representante de $[c : s]$. Isso pode ser eliminado fazendo restrição à esfera $|c|^2 + s^2 = 1$, e as aplicações serão então determinadas a menos de um sinal, mas em qualquer caso o conjunto de zeros - ou de nível no caso de V - não são afetados pela escolha dos representantes, assim como as $\mathcal{K}$ -classes.

Agora, supondo que $(x, m) \in \Phi^{-1}(0)$, com $m = [c : s : \rho]$, segue que $V(x, [c : s]) = -\rho$ e existe um difeomorfismo entre $\Phi^{-1}(0)$ e $X \times \mathcal{P}^3(\mathbb{R})$. De fato:

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(0) &= \{(x, m); \phi_m(x) = f_m \circ g(x) = 0\} = \left\{ (x, m); \langle c, g(x) \rangle - \frac{1}{2}s|g(x)|^2 + \rho = 0 \right\} = \\ &= \{(x, m); V(x, [c : s]) + \rho = 0\} = \{(x, m); V(x, [c : s]) = -\rho\} \end{aligned}$$

Com isto, a projeção natural

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(0) &\longrightarrow X \times \mathcal{P}^3(\mathbb{R}) \\ (x, m) &\longmapsto (x, [c : s]) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo entre $\Phi^{-1}(0)$ e $X \times \mathcal{P}^3(\mathbb{R})$, sua inversa sendo dada por

$$\begin{aligned} X \times \mathcal{P}^3(\mathbb{R}) &\longrightarrow \Phi^{-1}(0) \\ (x, [c : s]) &\longmapsto (x, [c : s : -V(x, [c : s])]) \end{aligned}$$

Observe que a aplicação de contato $f_m \circ g$ é igual, a menos da constante ρ , a função distância ao quadrado segundo $[c : s]$, isto é,

$$f_m \circ g(x) = V(x, [c : s]) + \rho$$

Então, o tipo de contato de m com X em $g(x)$ será dado pelo tipo de singularidade da função $V(\cdot, [c : s])$. Onde $V(\cdot, [c : s])$ denota a função $V_{[c:s]} : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Denote por V_i a i -ésima derivada de V em x .

O primeiro resultado é sobre as propriedades de segunda ordem da superfície.

Proposição 2.1.1 $V(\cdot, [c : s])$ tem uma singularidade do tipo A_1 , A_2 ou D_4 em x se, e somente se, $(x, [c : s])$ está no fibrado normal de X , no conjunto focal de X ou é um centro umbílico (isto é, x é um umbílico com centro $[c : s]$), respectivamente. Além disso, o núcleo para contato A_2 é a direção principal associada ao ponto focal.

Demonstração:

A condição para que V tenha uma singularidade do tipo A_1 em x é que sua primeira derivada, V_1 , se anule em x .

Temos que

$$V = f_m \circ g - \rho$$

logo,

$$V_1(x, [c : s]) = \langle df_m(g(x)), dg(x) \rangle = \langle c - sg(x), dg(x) \rangle.$$

A condição $V_1(x, [c : s]) = 0$ diz que o vetor $c - sg(x)$ é normal à superfície X em $g(x)$, e portanto, o ponto $(x, [c : s])$ pertence ao fibrado normal de X .

As condições para que V tenha uma singularidade do tipo A_2 em x são, simultaneamente, que $V_1(x, [c : s]) = 0$ e que $V_2(x, [c : s])u = 0$ para algum vetor tangente não nulo $u \in T_x X$, isto é,

$$V_2(x, [c : s])u = \langle c - sg(x), d^2g(x)u \rangle - s\langle dg(x), dg(x)u \rangle = 0 \quad (2.1)$$

e então $(x, [c : s])$ pertence ao conjunto focal de X .

A condição para V ter uma singularidade D_4 em x é que $V_2(x, [c : s]) = 0$.

Tomando $k(c - sg(x)) = sn$, onde n é o vetor normal á superfície em x , obtemos da equação (2.1) que

$$k\langle c - sg(x), d^2g(x)u \rangle - ks\langle dg(x)u, dg(x) \rangle = 0$$

$$\langle sn, d^2g(x)u \rangle - ks\langle dg(x)u, dg(x) \rangle = 0$$

$$\langle n, d^2g(x)u \rangle = k\langle dg(x)u, dg(x) \rangle$$

$$II_x(u, \cdot) = kI_x(u, \cdot)$$

A condição $V_2(x, [c : s]) = 0$ diz, então, que

$$II_x(u, v) = kI_x(u, v), \quad \forall u, v \in T_x X$$

isto é, II_x e I_x são linearmente dependentes e, portanto, x é um ponto umbílico. ■

Observação 2.1.2 As esferas com contato do tipo A_2 com a superfície são chamadas esferas focais, pois de acordo com a correspondência acima $\Phi^{-1}(0) \rightarrow X \times \mathcal{P}^3(\mathbb{R})$, estas esferas têm seus centros no conjunto focal F , e o conjunto $\tilde{F}$ corresponde a $\{(x, m, u) \in M \times S^1 X; d\phi_m = d^2\phi_m u = 0\}$.

Se $x \in X$ não é umbílico, existirão duas esferas focais, enquanto que em um umbílico elas coincidem e, neste caso, é chamada esfera umbílica.

Exemplo 2.1.3 A Figura 2.1 mostra um parabolóide hiperbólico com uma das esferas focais.

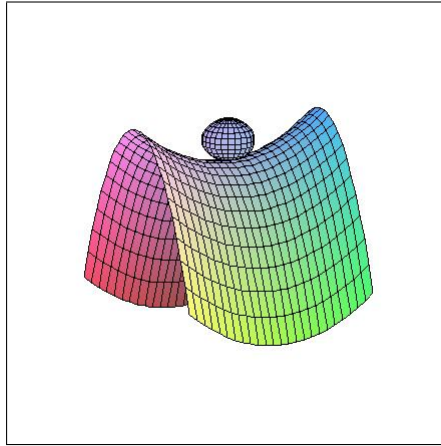


Figura 2.1: Esfera focal de um parabolóide hiperbólico.

Observe que se $c = sg(x)$, então $[c : s]$ está na origem do plano normal, logo, $m \in M_e \setminus M$ e, neste caso, f_m é singular em $g(x)$: $df_m(y) = sg(x) - sy$, e a singularidade envolvida é um A_1^+ : $d(f_m \circ g)(x) = 0$, $d^2(f_m \circ g)(x) = -s\langle dg(x), dg(x) \rangle \neq 0$.

Daqui pra frente o trabalho será feito apenas com esferas focais, podendo assumir então que $c \neq sg(x)$ e $m \in M$.

Observação 2.1.4 Para uma imersão genérica os umbílicos são isolados. Isto porque a k -codimensão da singularidade D_4 é 4 e então a k -codimensão da D_4 -órbita em $J^r(X, \mathbb{R})$ é $4+2=6$ e $\dim(X \times M_e) = 6$, então desde que para uma imersão genérica $j_1^r \Phi$ seja transversal à D_4 -órbita, elas devem se intersectar em um conjunto discreto de pontos.

2.2 Ridges e ribs

Seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma parametrização regular de uma linha de curvatura principal, com $\gamma(0)$ não umbílico, e então para cada t , $\gamma'(t)$ é uma direção principal em $\gamma(t)$. Isto determina uma curva $t \mapsto (\gamma(t), \tilde{\gamma}(t))$ no conjunto focal, com $\tilde{\gamma}(t) \in \mathcal{P}^3(\mathbb{R})$. Seja k a função curvatura principal associada, isto é, que é associada à direção principal $\gamma'(t)$.

Definição 2.2.1 Um ponto $x = \gamma(0)$ é um ponto ridge se $(k \circ \gamma)'(0) = 0$. Um ponto $x = \gamma(0)$ é um ponto ridge de ordem k em x se uma das funções curvatura principal medida ao longo da linha de curvatura associada é estacionária de ordem k em x , isto é,

$$(k \circ \gamma)'(0) = \dots = (k \circ \gamma)^k(0) = 0 \quad e \quad (k \circ \gamma)^{k+1}(0) \neq 0$$

Definição 2.2.2 Associado a qualquer ponto ridge x está uma direção principal u neste ponto e um ponto focal $(x, [c : s])$ que é chamado um ponto rib.

Definição 2.2.3 Os conjuntos de nível em x da função curvatura principal $k : X \rightarrow \mathbb{R}$ são chamados curvas de curvatura principal constante.

Observação 2.2.4 Essas curvas de curvatura principal constante são uma generalização da clássica curva parabólica em uma superfície a qual é uma curva de curvatura principal constante zero. Fora dos umbílicos, as curvas de curvatura principal constantes são diferenciáveis com possíveis singularidades nos pontos descritos na Proposição 2.2.5.

Proposição 2.2.5 Seja $x \in X$ não umbílico, e seja k_1 uma das curvaturas principais com direção principal u em x . Então k_1 é singular em x se, e somente se, valem ambas as equações abaixo:

$$\langle n, d^3 gu^3 \rangle - 3k_1 \langle dgu, d^2 gu^2 \rangle = 0$$

$$\langle n, d^3 gu^2 v \rangle - 2k_1 \langle dgu, d^2 guv \rangle - k_2 \langle dgu, d^2 gu^2 \rangle = 0,$$

onde k_2 é a outra curvatura principal em x e v é um vetor tangente unitário e ortogonal a u .

Demonstração:

A demonstração se encontra em [16]. ■

Seja $\phi : \mathbb{R} \rightarrow X$ uma parametrização de uma curva de curvatura principal constante, e suponha que se a imagem de ϕ é não-singular, então sua parametrização também é. Assim ϕ pode ser singular apenas onde $dk(x) = 0$. Desde que cada função curvatura principal é associada (localmente) a uma folha definida do conjunto focal, ϕ se levanta a uma curva $(\phi(t), \tilde{\phi}(t))$ no conjunto focal. Suponha que $(\phi(0), \tilde{\phi}(0)) = (\gamma(0), \tilde{\gamma}(0)) = (x, [c : s])$, assim, se $dk(x) \neq 0$, então k é uma submersão em todos os pontos de ϕ , e portanto x é um ponto ridge de ordem k se, e somente se, ϕ e γ têm contato do tipo A_k em x .

Teorema 2.2.6 Com $x, \phi, \gamma, \dots$, etc., como acima, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) x é um ponto ridge, isto é, $(k \circ \gamma)'(0) = 0$;
- (ii) ou $dk(x) = 0$ ou ϕ e γ são tangentes em x ;
- (iii) $\tilde{\gamma}'(0) = 0$;
- (iv) a projeção do conjunto focal no espaço ambiente compactificado $\mathcal{P}^3(\mathbb{R})$ é singular em $(x, [c : s])$;

(v) ou $dk(x) = 0$ ou $\tilde{\phi}'(0) = 0$;

(vi) $V_3(x, [c : s])u^2 + V_2v = 0$, para algum v (equivalentemente $V_3u^3 = 0$).

Demonstração:

A demonstração se encontra em [16]. ■

O próximo teorema é análogo ao teorema anterior para *ridges* de ordem mais alta.

Teorema 2.2.7 *Seja x um ponto ridge, $\phi, \gamma, \dots$, etc., como acima, e $dk(x) \neq 0$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) x é um ponto ridge de ordem mais alta, isto é, $(k \circ \gamma)'(0) = (k \circ \gamma)''(0) = 0$;

(ii) ϕ e γ tem, no mínimo, 3-ponto de contato em x ;

(iii) $\tilde{\gamma}''(0) = 0$;

(iv) $\tilde{\phi}''(0) = 0$;

(v) para v como no Teorema 2.2.6, $V_4u^4 + 3V_3u^2v = 0$.

E se o ridge através de x é uma curva não-singular, então as afirmações acima são todas equivalentes a

(vi) a projeção do rib em $\mathcal{P}^3(\mathbb{R})$ é singular;

(vii) o ridge através de x é tangente a γ (e então a ϕ) em x .

Demonstração:

A demonstração se encontra em [16]. ■

A próxima proposição traz uma definição alternativa para um ponto *ridge*, interpretando as últimas condições dos Teoremas 2.2.6 e 2.2.7.

Proposição 2.2.8 *Seja x não umbílico, então:*

(i) x é um ponto ridge se, e somente se, uma das esferas focais em x tem contato pelo menos do tipo A_3 com a superfície.

(ii) x é um ponto ridge de ordem superior se, e somente se, uma das esferas focais em x tem contato pelo menos do tipo A_4 com a superfície.

Demonstração:

Seja $[c : s]$ um ponto focal em x com direção principal u , então $V_1(x, [c : s]) = 0$ e $V_2(x, [c : s])u = 0$.

O fato de x não ser um ponto umbílico garante que $V_2(x, [c : s]) \neq 0$.

As condições para x ser uma singularidade dos tipos A_3 e A_4 são, cumulativamente: [18]

$$V_3u^2 + V_2v = 0, \text{ para algum } v$$

$$V_4u^3 + 3V_3uv + V_2w = 0, \text{ para algum } w$$

A primeira é equivalente a $V_3u^3 = 0$, pois $V_2vu = V_2uv = 0$, já que $V_2u = 0$. E a segunda é equivalente a $V_4u^4 + 3V_3u^2v = 0$, pela mesma razão.

Assim, pelos Teoremas 2.2.6(vi) e 2.2.7(v) segue o resultado. ■

Observação 2.2.9 *Existem dois tipos distintos de singularidades A_3 de funções em $\mathbb{R}^2$, chamados hiperbólico e elíptico, ou A_3^- e A_3^+ , respectivamente, e diz-se que um ridge de primeira ordem é hiperbólico ou elíptico de acordo com o tipo do A_3 . O hiperbólico é também chamado de fértil e o elíptico de estéril. Se um A_3 é hiperbólico ou elíptico depende do tipo de quadrática em v dada por*

$$V_4u^4 + 6V_3u^2v + 3V_2v^2 = 0.$$

No caso parabólico, quando as duas raízes coincidem, esta equação se reduz à equação da condição para singularidade do tipo A_4 acima.

As formas normais para A_3^- e A_3^+ são, respectivamente, $x^2 - y^4$ e $x^2 + y^4$ e seus conjuntos de zeros são duas curvas tangentes na origem (mas com curvaturas distintas) e um ponto isolado, respectivamente. O conjunto de zeros de um A_4 é uma cúspide ramphoidal e sua forma normal é $x^2 - y^5$.

Observação 2.2.10 *Sobre cúspides, ver apêndice.*

Teorema 2.2.11 *O conjunto dos pontos ribs no conjunto focal de uma superfície imersa genérica é, fora dos centros umbílicos, uma variedade unidimensional.*

Demonstração:

Um ponto *rib* é um ponto $(x, [c : s])$ do conjunto focal em que $V(\cdot, [c : s])$ tem uma singularidade do tipo A_3 , ou mais degenerada, em x , mas não do tipo D_4 , pois, por hipótese, estamos fora dos centros umbílicos. A correspondência $\Phi^{-1}(0) \rightarrow X \times \mathcal{P}^3(\mathbb{R})$ diz então que um ponto *rib* é um ponto $(x, m) \in X \times M$ em que $\phi_m = f_m \circ g$ tem uma singularidade do tipo A_3 , ou mais degenerada, em x , mas não D_4 . Portanto, são esperadas apenas singularidades

dos tipos A_3 ou A_4 : o conjunto de singularidades do tipo A_k , $k > 4$, forma um subconjunto de $J^r(X, \mathbb{R})$ de codimensão 7 (para r grande) que será evitado pela hipótese de genericidade.

A união das órbitas A_3 e A_4 é uma subvariedade do espaço de jatos (teoria do desdobramento) e, como $j_1^r \Phi_g$ é transversal a cada uma das órbitas, ela deve ser também transversal à união delas. Então, $j_1^r \Phi_g^{-1}(A_3 \cup A_4)$ é uma subvariedade de $X \times M$: (x, m) é tal que ϕ_m tem singularidades do tipo A_3 ou do tipo A_4 em x . Então, usando novamente a correspondência $\Phi^{-1}(0) \rightarrow X \times \mathcal{P}^3(\mathbb{R})$, segue que o conjunto dos pontos *ribs* é uma subvariedade unidimensional. ■

Observação 2.2.12 *Na demonstração do próximo resultado, e de alguns resultados seguintes, será útil trabalhar com uma classe especial de parametrizações locais de superfícies. Seja $x \in X$. Escolha coordenadas em $\mathbb{R}^3$ tais que $g(x) = 0$, onde g é a imersão e o plano xy é tangente a X em $g(x) = 0$. A projeção ortogonal de $\mathbb{R}^3$ em tal plano induz um sistema de coordenadas em X via imersão g . O resultado da parametrização pode ser escrito como*

$$g(r, t) = (r, t, h(r, t))$$

onde h é uma função real em $\mathbb{R}^2$ com $h(0, 0) = 0$ e $dh(0, 0) = 0$. Uma imersão expressa nessa forma é dita estar na forma de Monge.

Exemplo 2.2.13 *Considere a superfície X como sendo o parabolóide hiperbólico parametrizado por $(x, y) \mapsto (x, y, x^2 - y^2)$. Uma vizinhança da origem pode ser representada pela forma $z = h(x, y)$, com $(x, y) \in U \subset \mathbb{R}^2$, onde U é um aberto e h é uma função diferenciável com $h(0, 0) = 0$, $\frac{\partial h}{\partial x}(0, 0) = 0$ e $\frac{\partial h}{\partial y}(0, 0) = 0$. A segunda forma fundamental de X na origem aplicada ao vetor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ fica*

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0, 0)x^2 + 2\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0, 0)xy + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0, 0)y^2.$$

Assumindo que as direções dos eixos x e y são as direções principais, sendo o eixo x ao longo da direção com curvatura principal máxima, obtém-se

$$f = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$$

$$k_1(0, 0) = \frac{e}{E} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0, 0)$$

$$k_2(0, 0) = \frac{g}{G} = \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0, 0)$$

Fazendo a expansão em série de Taylor de $h(x, y)$ e considerando $\frac{\partial h}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial h}{\partial y}(0, 0) = 0$, segue que

$$\begin{aligned}
h(x, y) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(0, 0)x^2 + 2 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(0, 0)xy + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(0, 0)y^2 \right) + R = \\
&= \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2) + R
\end{aligned}$$

onde

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{R}{x^2 + y^2} = 0.$$

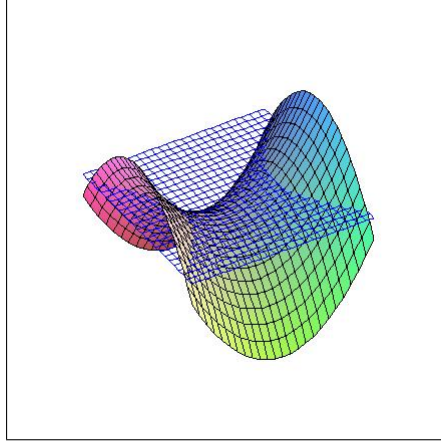


Figura 2.2: Um plano paralelo a $T_x X$, com X sendo o parabolóide hiperbólico.

Lema 2.2.14 *Seja $(x, [c : s], u) \in \tilde{F}$ e $\pi : \tilde{F} \rightarrow X$ a projeção, então*

- (i) *Se x não é umbílico, a aplicação π é uma imersão em $(x, [c : s], u)$. Conseqüentemente, fora dos umbílicos, esta é um difeomorfismo local.*
- (ii) *Se x é umbílico, então a imagem sob esta projeção de qualquer curva não-singular em $\tilde{F}$ através de $(x, [c : s], u)$ transversal a $\pi^{-1}(x)$ é uma curva não-singular em X .*

Demonstração:

Considere a aplicação

$$\begin{aligned}
\psi : TX \times \mathcal{P}^3(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\
(x, [c : s], u) &\longmapsto (V_1(x, [c : s]), V_2(x, [c : s])u, \frac{1}{2}(\langle dgu, dgu \rangle - 1))
\end{aligned}$$

e então $\tilde{F} = \psi^{-1}(0)$. A diferencial de ψ é dada pela matriz

$$[d\psi] = \begin{bmatrix} V_2 & \langle \cdot, dg \rangle & -\langle g, dg \rangle & 0 \\ V_3 u & \langle \cdot, d^2 gu \rangle & -\langle g, d^2 gu \rangle - \langle dgu, dgu \rangle & V_2 \\ \langle d^2 gu, dgu \rangle & 0 & 0 & \langle dgu, dgu \rangle \end{bmatrix}.$$

Um vetor $(\hat{x}, [\hat{c} : \hat{s}], \hat{u})$ é tangente a F se, e somente se, $d\psi(\hat{x}, \hat{c}, \hat{s}, \hat{u}) = 0$ e $\langle (c, s), (\hat{c}, \hat{s}) \rangle = 0$, ou seja,

$$V_2 \hat{x} + \langle \hat{c}, dg \rangle - \hat{s} \langle g(x), dg \rangle = 0 \Rightarrow V_2 \hat{x} + \langle \hat{c} - \hat{s}g(x), dg \rangle = 0$$

$$V_3 u \hat{x} + \langle \hat{c} - \hat{s}g(x), d^2 gu \rangle - \hat{s} \langle dgu, dg \rangle + V_2 \hat{u} = 0$$

$$\langle d^2 gu \hat{x}, dgu \rangle + \langle dgu, dg \hat{u} \rangle = 0$$

$$\langle c, \hat{c} \rangle + \langle s, \hat{s} \rangle = 0$$

Sejam $y = (x, [c : s], u) \in \tilde{F}$ e $\pi_* : T_y \tilde{F} \rightarrow T_x X$ a diferencial de $\pi : \tilde{F} \rightarrow X$. Assim, $\pi_*(\hat{x}, \hat{c}, \hat{s}, \hat{u}) = \hat{x} = 0$ se, e somente se, $\hat{x} = 0$. Então, π_* tem núcleo não nulo se, e somente se, um vetor não nulo da forma $(0, \hat{c}, \hat{s}, \hat{u})$ é tangente a F .

Seja A a aplicação linear $A : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definida por

$$A(\hat{c}, \hat{s}, \hat{u}) = (\langle \hat{c} - \hat{s}g(x), dg \rangle, \langle \hat{c} - \hat{s}g(x), d^2 gu \rangle - \hat{s} \langle dgu, dg \rangle + V_2 \hat{u}, \langle d^2 gu \hat{x}, dgu \rangle + \langle dgu, dg \hat{u} \rangle, \langle c, \hat{c} \rangle + \langle s, \hat{s} \rangle)$$

É preciso mostrar que A é invertível se x não é umbílico. Para isso, coloque g na forma de Monge em x com os eixos x e y sendo direções principais. Então, g tem a forma

$$g(x, y) = \left(x, y, \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2) + \theta(x, y) \right)$$

com $\theta \in \mathcal{M}_2^3$.

Tome $u = (1, 0)$ uma direção principal em $x = 0$ correspondente ao autovalor k_1 . Assim,

$$dg(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$dg(0)u = dg(0) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = (1, 0, 0)$$

$$d^2 g(0) = \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \right]$$

$$d^2 g(0)uv = \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k_1 & 0 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = (0, 0, k_1 v_1)$$

Considerando $c = (c_1, c_2, c_3)$, temos

$$V(x, y) = c_1 x + c_2 y + c_3 h(x, y) - \frac{1}{2}s(x^2 + y^2 + h^2(x, y))$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = c_1 + c_3(k_1 x + \theta_x) - sx - sh(x, y)(k_1 x + \theta_x)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = c_2 + c_3(k_2 y + \theta_y) - sy - sh(x, y)(k_2 y + \theta_y)$$

Como $(x, [c : s])$ pertence ao fibrado normal deve-se ter $V_1(0) = 0$, isto é, $c_1 = c_2 = 0$. Então, $c = (0, 0, c_3)$, Também, deve-se ter $V_2 u = 0$, isto é,

$$\begin{bmatrix} c_3 k_1 - s & 0 \\ 0 & c_3 k_2 - s \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_3 k_1 - s & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow c_3 k_1 = s$$

e daí, $[c : s] = [(0, 0, c_3) : c_3 k_1] = [(0, 0, 1) : k_1]$, isto é, pode-se assumir $s = k_1$ e $c = (0, 0, 1)$.

Com isto, V_2 é dada pela matriz

$$V_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_2 - k_1 \end{bmatrix} \neq 0,$$

pois, como x não é umbílico, $k_2 \neq k_1$.

Com tudo isto, tem-se que

$$A(\hat{c}, \hat{s}, \hat{u}) = (\langle \hat{c}, dg(0) \rangle, \langle \hat{c}, d^2 g(0)u \rangle - \hat{s} \langle dg(0)u, dg(0) \rangle + V_2 \hat{u}, \langle dg(0)u, dg(0)\hat{u} \rangle, \hat{c}_3 + k_1 \hat{s}).$$

Assim, $A = 0$ se, e somente se,

1. $\langle \hat{c}, dg(0)v \rangle = 0, \forall v \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \hat{c}_1 \hat{v}_1 + \hat{c}_2 \hat{v}_2 = 0, \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \hat{c}_1 = \hat{c}_2 = 0 \Leftrightarrow \hat{c} = (0, 0, \hat{c}_3)$
2. $\langle \hat{c}, d^2 g(0)uv \rangle - \hat{s} \langle dg(0)u, dg(0)v \rangle + V_2 \hat{u}v = 0, \forall v \in \mathbb{R}^2$

Em particular, tomando $v = (1, 0)$ e $v = (0, 1)$, obtém-se

2.a $v = (1, 0)$:

$$\langle \hat{c}, d^2 g(0)u(1, 0) \rangle - \hat{s} \langle dg(0)u, dg(0)(1, 0) \rangle + V_2 \hat{u}(1, 0) = 0$$

$$\langle (\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3), (0, 0, k_1) \rangle - \hat{s} \langle (1, 0, 0), (1, 0, 0) \rangle = 0$$

$$\hat{c}_3 k_1 - \hat{s} = 0$$

$$\hat{c}_3 k_1 = \hat{s}$$

2.b $v = (0, 1)$:

$$\langle \hat{c}, d^2 g(0)u(0, 1) \rangle - \hat{s} \langle dg(0)u, dg(0)(0, 1) \rangle + V_2 \hat{u}(0, 1) = 0$$

$$\langle (\hat{c}_1, \hat{c}_2, \hat{c}_3), (0, 0, 0) \rangle - \hat{s} \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle + V_2 \hat{u}(0, 1) = 0$$

$$V_2 \hat{u}(0, 1) = 0$$

Logo,

$$\begin{aligned} V_2 \hat{u}(0, 1) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & k_2 - k_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [0, \hat{u}_2(k_2 - k_1)] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\ &= \hat{u}_2(k_2 - k_1) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \hat{u}_2 = 0, \text{ pois } k_2 \neq k_1.$$

$$3. \langle dg(0)u, dg(0)\hat{u} \rangle = 0 \Rightarrow \langle (1, 0, 0), (\hat{u}_1, \hat{u}_2, 0) \rangle = 0 \Rightarrow \hat{u}_1 = 0$$

$$4. \hat{c}_3 + k_1 \hat{s} = 0 \Rightarrow \hat{c}_3 = -k_1 \hat{s}$$

De (4) e (2.a), tem-se:

$$\hat{s} = \hat{c}_3 k_1 = -k_1 \hat{s} k_1 = -k_1^2 \hat{s}$$

logo,

$$\hat{s} + k_1^2 \hat{s} = 0 \Rightarrow \hat{s}(1 + k_1^2) = 0 \Rightarrow \hat{s} = 0$$

e (4) implica que $\hat{c}_3 = 0$.

Portanto, $\hat{c} = (0, 0, 0)$. Assim, A é injetora, e então um isomorfismo, se x não é umbílico.

Seja $(0, \hat{c}, \hat{s}, \hat{u}) \in T\tilde{F}$. Então, pelas condições acima, $A(\hat{c}, \hat{s}, \hat{u}) = 0$ e, portanto, $(\hat{c}, \hat{s}, \hat{u}) = 0$. Assim, π_* é injetora, logo π é uma imersão em $(x, [c : s], u)$, se x não é umbílico.

Por outro lado, se x é umbílico, então $V_2 = 0$ e A toma a forma

$$A(\hat{c}, \hat{s}, \hat{u}) = (\langle \hat{c}, dg(0) \rangle, \langle \hat{c}, d^2g(0)u \rangle - \hat{s} \langle dg(0)u, dg(0) \rangle, \langle dg(0)u, dg(0)\hat{u} \rangle, \hat{c}_3 + k_1 \hat{s})$$

e

$$A(\hat{c}, \hat{s}, \hat{u}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{c}_1 = \hat{c}_2 = 0 \\ \hat{c}_3 k - \hat{s} = 0 \\ u \perp \hat{u} \\ \hat{c}_3 + k \hat{s} = 0 \end{cases}$$

Portanto, $Ker A = \{(0, 0, v); v \perp u\}$.

Assim, se $\tilde{\gamma}$ é uma curva não-singular em $\tilde{F}$ passando por $(x, [c : s], u)$ e transversal a $\pi^{-1}(x)$, então $\gamma = \pi \circ \tilde{\gamma}$ também é não-singular. ■

Observação 2.2.15 *Segue do Teorema 2.2.11 e do Lema 2.2.14 que o conjunto dos ridges na superfície, fora dos umbílicos, é uma união de curvas não-singulares. Se duas dessas curvas se encontram em um ponto não umbílico, então para uma imersão genérica elas necessariamente são de folhas diferentes do conjunto focal.*

Para uma superfície não genérica, porém, linhas ridge de mesma folha do conjunto focal podem se cruzar, e em tal ponto a esfera focal tem contato do tipo A_4 .

Observação 2.2.16 *A projeção $\pi : \tilde{F} \rightarrow X$ se fatora através do conjunto focal F , e fora dos umbílicos a aplicação $\tilde{F} \rightarrow F$ é um difeomorfismo global. Seja x um umbílico e $(x, [c : s]) \in F$, então $\pi^{-1}(x) = (x, [c : s]) \times S^1 \subset \tilde{F}$ e a aplicação $\tilde{F} \rightarrow F$ é uma explosão do centro umbílico $(x, [c : s])$, como na Figura 2.3. Agora, qualquer curva regular passando por $(x, [c : s], u)$ transversal a $\pi^{-1}(x)$ passa de uma componente de $\tilde{F} \setminus \pi^{-1}(x)$ a outra e, conseqüentemente, sua projeção em F passa de uma folha para outra de F e sua imagem em X é não-singular. Por outro lado, espera-se que a projeção de qualquer curva passando por $\pi^{-1}(x)$, mas contida em uma componente de $\tilde{F} \setminus \pi^{-1}(x)$, seja singular, ver Figura 2.4.*

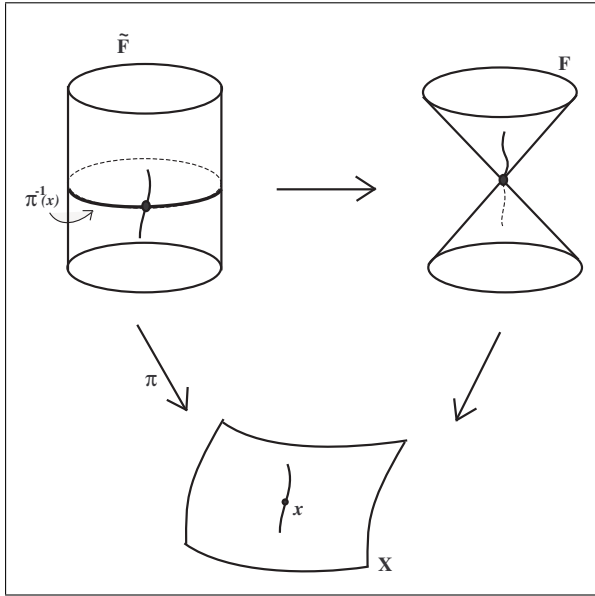


Figura 2.3: Conjunto Focal 1.

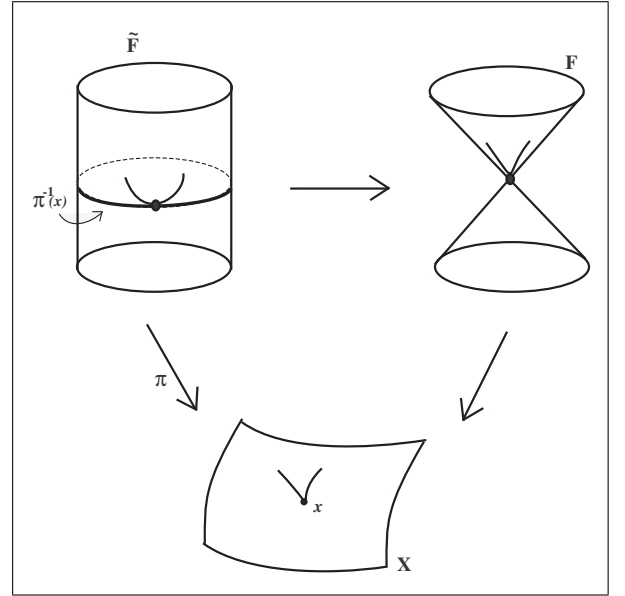


Figura 2.4: Conjunto Focal 2.

2.3 Umbílicos

Um umbílico é um ponto na superfície onde as duas curvaturas principais são iguais e cada direção é então principal. A geometria em, e na vizinhança de, um umbílico é regida pela forma cúbica

$$C = \langle n, d^3g \rangle - 3k \langle dg, d^2g \rangle = dII_x - kdI_x$$

onde k é a única curvatura principal no umbílico x e n é o vetor normal unitário escolhido na definição de II_x . C é chamada a cúbica intrínseca no umbílico e diz-se que o umbílico é elíptico, hiperbólico ou parabólico de acordo com C .

Definição 2.3.1 *Uma forma cúbica C é dita ortogonal se existe um par de vetores ortogonais não nulos u e v tais que $Cuv = 0$.*

Observação 2.3.2 *Sobre formas cúbicas, ver apêndice.*

Proposição 2.3.3 *Seja x um umbílico cuja forma cúbica intrínseca C não é ortogonal, então:*

- (i) *Se x é elíptico, então não existem curvas de curvatura principal constante passando por x e as curvas próximas de curvas de curvatura principal constantes são curvas fechadas em torno de x ;*
- (ii) *Se x é hiperbólico, então existem duas curvas de curvatura principal constante não-singulares passando por x com tangentes nas direções hessianas de x .*

Demonstração:

A demonstração se encontra em [16]. ■

Observação 2.3.4 Considere na superfície X duas funções curvatura principal, cada uma correspondente a uma folha do conjunto focal. Porém, as curvas não-singulares de curvatura constante k , na Proposição 2.3.3, passam de uma folha para outra, e então suas projeções em X não são curvas de curvatura principal constante. As curvas de curvatura principal constante são singulares em um umbílico. Nas figuras abaixo tem-se as curvas de curvatura principal constante para os dois tipos de umbílico, com as linhas contínuas para uma folha do conjunto focal e linhas pontilhadas para a outra folha.

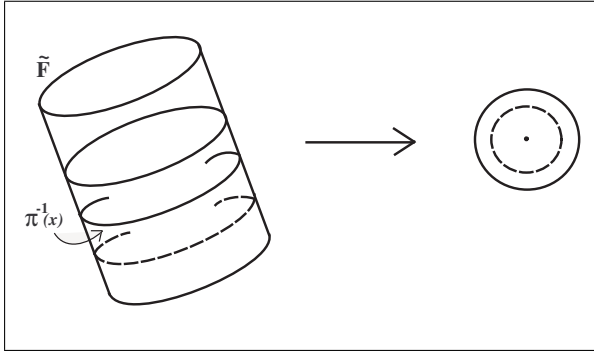


Figura 2.5: Umbílico Elíptico.

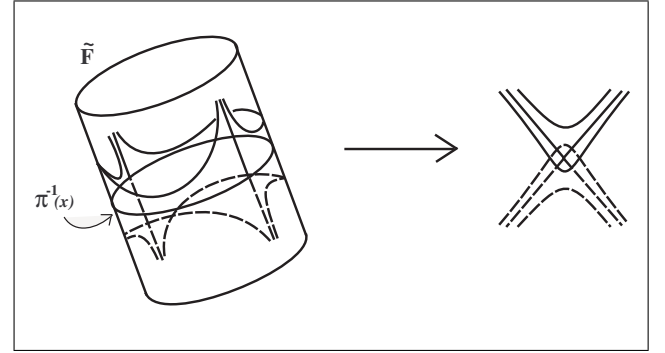


Figura 2.6: Umbílico Hiperbólico.

Proposição 2.3.5 O conjunto focal $\tilde{F}$ é uma subvariedade (bidimensional) de $\tilde{N}$ se, em cada ponto umbílico de X , a cúbica intrínseca não é ortogonal.

Demonstração:

Considere a aplicação ψ do Lema 2.2.14, então $\tilde{F} = \psi^{-1}(0)$. Assim, $\tilde{F}$ é uma subvariedade se ψ é uma submersão em $\psi^{-1}(0)$, isto é, se $[d\psi]$ é sobrejetora, ou equivalentemente, se $[d\psi]^t$ (transposta de $[d\psi]$) é injetora.

Suponha que $[d\psi]^t(a, b, t) = 0$, $a, b \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{R}$ e considere a imersão na forma de Monge em x , então

$$\begin{bmatrix} V_2 & V_3u & 0 \\ \langle \cdot, dg \rangle & \langle \cdot, d^2gu \rangle & 0 \\ 0 & -\langle dgu, dg \rangle & 0 \\ 0 & V_2 & \langle dgu, dg \rangle \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ t \end{bmatrix} = 0$$

(i) $V_2a + V_3ub = 0$

(ii) $\langle dg, a \rangle + d^2gub = 0$

(iii) $\langle dgu, dgb \rangle = 0$

$$(iv) \quad V_2b + t\langle dgu, dg \rangle = 0$$

Aplicando (iv) em u , obtemos que $t = 0$, pois $V_2u = 0$, logo $V_2bu = V_2ub = 0$ e então $V_2b = 0$. Se x não é umbílico, $V_2b = 0$ implica que b é um múltiplo escalar de u (isto é, b está no autoespaço gerado por u), então por (iii) $b = 0$ (pois se $b = \alpha u$, então $\alpha\langle dgu, dgu \rangle = \langle dgu, dgb \rangle = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow b = 0$), e então por (ii), $a = 0$. Portanto, $[d\psi]^t$ é injetora.

Por outro lado, se x é umbílico então $V_2 = 0$, então por (i) $V_3ub = 0$ e por (iii) $\langle dgu, dgb \rangle = 0$. Assim, $b = 0$ ou V_3 é ortogonal. Mas V_3 é um múltiplo escalar de C que por hipótese é não ortogonal. Então, $b = 0$ e, novamente, $[d\psi]^t$ é injetora. ■

Proposição 2.3.6 *Seja x um umbílico da imersão g , então a singularidade D_4 de ϕ_m (m como acima) é apresentada transversalmente se, e somente se, a cúbica intrínseca C no umbílico é não ortogonal com respeito à primeira forma fundamental de g .*

Demonstração:

Escreva g na forma de Monge

$$g(x, y) = (x, y, h(x, y)), \quad h \in \mathcal{M}_2^2.$$

Considere $h(x, y) = \frac{k}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{6}C(x, y)^3 + H(x, y)$, com $H(x, y) \in \mathcal{M}_2^4$. Então, k é a curvatura em x e C é a cúbica intrínseca.

Com $c = (c_1, c_2, c_3)$, segue que

$$\begin{aligned} \phi_m(x, y) &= \langle c, g(x) \rangle - \frac{1}{2}s|g(x)|^2 + \rho = \\ &= c_1x + c_2y + c_3h(x, y) - \frac{1}{2}s(x^2 + y^2 + h^2(x, y)) + \rho \end{aligned}$$

Assim, $d\phi_m = 0 \Leftrightarrow c_1 = c_2 = 0$ e $d^2\phi_m = 0 \Leftrightarrow s = kc_3$. Então, o centro umbílico está em $m = [c : s : \rho] = [(0, 0, 1) : k : 0]$ e ϕ_m toma a forma

$$\begin{aligned} \phi_m(x, y) &= h(x, y) - \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + h^2(x, y)) = \\ &= \frac{k}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{6}C(x, y)^3 + H(x, y) - \frac{k}{2}(x^2 + y^2 + h^2(x, y)) = \\ &= \frac{1}{6}C(x, y)^3 + H(x, y) - \frac{k}{2}h^2(x, y) \end{aligned}$$

Pondo $C(x, y)^3 = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3$, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_m}{\partial x} &= \frac{1}{6}(3ax^2 + 6bxy + 3cy^2) + \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{k}{2} \left(2h(x, y) \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \right) = \\
&= \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) + \frac{\partial H}{\partial x} - k \left(\frac{k}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{6}C(x, y)^3 + H(x, y) \right) \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = \\
&= \frac{1}{2}C(1, 0)(x, y)^2 + \frac{\partial H}{\partial x} \\
&\quad - k \left(\frac{k}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{6}C(x, y)^3 + H(x, y) \right) \cdot \left(kx + \frac{1}{2}C(1, 0)(x, y)^2 + \frac{\partial H}{\partial x} \right) = \\
&= \frac{1}{2}C(1, 0)(x, y)^2 \left(1 - k \left(\frac{k}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{6}C(x, y)^3 + H(x, y) \right) \right) + \\
&\quad + \frac{\partial H}{\partial x} \left(1 - k \left(\frac{k}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{6}C(x, y)^3 + H(x, y) \right) \right) \\
&\quad - k^2x \left(\frac{k}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{6}C(x, y)^3 + H(x, y) \right) = \\
&= \frac{1}{2}C(1, 0)(x, y)^2 \left(1 - k \left(\frac{k}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{6}C(x, y)^3 + H(x, y) \right) \right) + H_1(x, y), \quad H_1(x, y) \in \mathcal{M}_2^3
\end{aligned}$$

Analogamente, obtém-se

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi_m}{\partial y} &= \frac{1}{6}(3bx^2 + 6cxy + 3dy^2) + \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{k}{2} \left(2h(x, y) \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \right) = \\
&= \frac{1}{2}C(0, 1)(x, y)^2 \left(1 - k \left(\frac{k}{2}(x^2 + y^2) + \frac{1}{6}C(x, y)^3 + H(x, y) \right) \right) + H_2(x, y), \quad H_2(x, y) \in \mathcal{M}_2^3
\end{aligned}$$

Portanto o espaço tangente estendido a ϕ_m é

$$T_{\mathcal{K}_e} \phi_m = \langle C(x, y)^3 + H(x, y) - \frac{k}{2}h^2(x, y), C(1, 0)(x, y)^2 + H_1(x, y), C(0, 1)(x, y)^2 + H_2(x, y) \rangle,$$

com $H_i(x, y) \in \mathcal{M}_2^3$, $i = 1, 2$.

Como a singularidade não pode ser mais degenerada que um D_4 , por causa da codimensão, segue que C não é parabólica (pois, do contrário $C \stackrel{\mathcal{K}}{\sim} x^2y$ e a singularidade seria pior que um D_4). Então, C é equivalente a $x^2y + y^3$ ou a $x^2y - y^3$. É preciso mostrar que $T_{\mathcal{K}_e} \phi_m \supset \mathcal{M}_2^3$:

Primeiro veja que $\mathcal{M}_2^3 \subset T_{\mathcal{K}_e} \phi_m + \mathcal{M}_2^4$. De fato,

$$\mathcal{M}_2^3 = \langle x^3, x^2y, xy^2, y^3 \rangle.$$

Observe que

$$\begin{aligned}
x^3 &= x(x^2 + 3y^2 + H_y) - 3xy^2 - xH_y = \\
&= x(x^2 + 3y^2 + H_y) - 3\left(\frac{1}{2}y(2xy + H_x) - \frac{1}{2}yH_x\right) - xH_y = \\
&= x(x^2 + 3y^2 + H_y) - \frac{3}{2}y(2xy + H_x) + \frac{3}{2}yH_x - xH_y
\end{aligned}$$

Então, $x^3 \in T_{\mathcal{K}_e}\phi_m + \mathcal{M}_2^4$.

Também,

$$y^3 = (x^2y + y^3 + H) - x^2y - H \in T_{\mathcal{K}_e}\phi_m + \mathcal{M}_2^4$$

$$x^2y = \frac{1}{2}x(2xy + H_x) - \frac{1}{2}xH_x \in T_{\mathcal{K}_e}\phi_m + \mathcal{M}_2^4$$

$$xy^2 = \frac{1}{2}y(2xy + H_x) - \frac{1}{2}yH_x \in T_{\mathcal{K}_e}\phi_m + \mathcal{M}_2^4$$

Portanto, $\mathcal{M}_2^3 \subset T_{\mathcal{K}_e}\phi_m + \mathcal{M}_2^4$.

Agora, $\phi_m \stackrel{\mathcal{K}}{\sim} x^2y \pm y^3 + H$, $H \in \mathcal{M}_2^4$ e então,

$$T_{\mathcal{K}_e}\phi_m \stackrel{\mathcal{K}}{\sim} \langle x^2y \pm y^3 + H, 2xy + H_x, x^2 \pm 3y^2 + H_y \rangle.$$

Segue daí que $\mathcal{M}_2^3 \subset T_{\mathcal{K}_e}\phi_m + \mathcal{M}_2^4 = T_{\mathcal{K}_e}\phi_m + \mathcal{M}_2(M_2^3)$ e, pelo Lema de Nakayama B.2.3, $\mathcal{M}_2^3 \subset T_{\mathcal{K}_e}\phi_m$.

Lembrando que

$$\begin{aligned} \Phi : X \times M_e &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, m) &\longmapsto \phi_m(x) = f_m \circ g(x) \end{aligned}$$

ou melhor,

$$\Phi(x, [c : s : \rho]) = c_1x + c_2y + c_3h(x, y) - \frac{1}{2}s(x^2 + y^2 + h^2(x, y)) + \rho$$

é uma deformação a s parâmetros de ϕ_m , segue que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C_1}([(0, 0, 1) : k : 0]) = x$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C_2}([(0, 0, 1) : k : 0]) = y$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial C_3}([(0, 0, 1) : k : 0]) = h(x, y)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s}([(0, 0, 1) : k : 0]) = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + h^2(x, y))$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \rho}([(0, 0, 1) : k : 0]) = 1$$

Assim,

$$\begin{aligned} T_{\mathcal{K}_e}\phi_m + \mathbb{R}\{\dot{\phi}_i\} &= T_{\mathcal{K}_e}\phi_m + \mathbb{R}\{\dot{\phi}_i\} + \mathcal{M}_2^3 = \\ &= \langle C(x, y)^3 + H(x, y) - \frac{k}{2}h^2(x, y), C(1, 0)(x, y)^2 + H_1, C(0, 1)(x, y)^2 + H_2 \rangle + \\ &\quad + \mathbb{R}\{1, x, y, h(x, y), x^2 + y^2 + h^2\} + \mathcal{M}_2^3 = \\ &= \langle C(x, y)^3 + H(x, y), C(1, 0)(x, y)^2, C(0, 1)(x, y)^2 \rangle + \mathbb{R}\{1, x, y, x^2 + y^2\} + \mathcal{M}_2^3 = \\ &= \mathbb{R}\{1, x, y, C(1, 0)(x, y)^2, C(0, 1)(x, y)^2, x^2 + y^2\} + \mathcal{M}_2^3 \end{aligned}$$

Segue daí que Φ é uma deformação k -versal de ϕ_m se, e somente se, os termos quadráticos acima são independentes e isto ocorre se, e somente se, a cúbica C não é ortogonal em relação à $x^2 + y^2$ (a primeira forma fundamental). De fato,

$$T_{\mathcal{K}_e}\phi_m + \mathbb{R}\{\dot{\phi}_i\} = \mathbb{R}\{1, x, y, C(1,0)(x, y)^2, C(0,1)(x, y)^2, x^2 + y^2\} + \mathcal{M}_2^3 = \varepsilon_2 \quad (2.2)$$

se, e somente se, os termos quadráticos são linearmente independentes.

Escreva

$$C(1,0)(x, y)^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

$$C(0,1)(x, y)^2 = bx^2 + 2cxy + dy^2$$

e então os termos quadráticos na equação (2.2) são linearmente independentes se, e somente se, o sistema

$$\begin{cases} ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0 \\ bx^2 + 2cxy + dy^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

tem uma única solução, isto é, se, e somente se, o determinante D da matriz dos coeficientes for não nulo:

$$D = \begin{vmatrix} a & 2b & c \\ b & 2c & d \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2[(bd - c^2) + (ac - b^2)] \neq 0$$

Esta é a condição algébrica, que pode ser expressa geometricamente: associada à cúbica $C(x, y)^3$ está a sua forma Hessiana que é dada por

$$H(x, y)^2 = (ac - b^2)x^2 + (ad - bc)xy + (bd - c^2)y^2.$$

Para simplificar, escreva $\alpha = (ac - b^2)$, $\beta = (ad - bc)$ e $\gamma = (bd - c^2)$, então

$$H(x, y)^2 = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2.$$

As raízes de H são as direções Hessianas de C , e C é dita ortogonal com respeito a uma forma quadrática Q se $Quv = 0$, onde u e v são quaisquer direções Hessianas de C .

Note que $D = 0$ se, e somente se, C é não ortogonal com respeito à primeira forma fundamental.

Observe inicialmente que o discriminante de H é $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ e então para $\alpha \neq 0$ as raízes de H são dadas (nos complexos) por

$$\left(\left(\frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \right) y, y \right)$$

e então as direções Hessianas são

$$u = (-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}, 2\alpha) \quad \text{e} \quad v = (-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}, 2\alpha)$$

Assim,

$$\langle u, v \rangle = 0 \Leftrightarrow \beta^2 - (\beta^2 - 4\alpha\gamma) + 4\alpha^2 = 0 \Leftrightarrow 4\alpha^2 + 4\alpha\gamma = 0 \Leftrightarrow 4\alpha(\alpha + \gamma) = 0 \xLeftrightarrow{\alpha \neq 0} \alpha = -\gamma,$$

isto é, $ac - b^2 = -(bd - c^2)$ e daí, $D = 0$.

Resta considerar o caso em que $\alpha = 0$:

$$H(x, y)^2 = \beta xy + \gamma y^2 = y(\beta x + \gamma y)$$

seu discriminante é $\Delta = \beta^2$ e $D = 2\gamma$.

Como $C(x, y)^3$ não pode ser parabólica, deve-se ter $\beta \neq 0$. Então, as direções Hessianas de C são $u = (1, 0)$ e $v = \left(-\frac{\gamma}{\beta}, 1\right)$ que são ortogonais se, e só se, $\gamma = 0$, isto é, se, e somente se, $D = 0$. ■

2.3.1 Propriedades da Singularidade D_4

A relação entre a Proposição 2.3.5 e a Proposição 2.3.6 é que o conjunto

$$\{(m, x, u) \in M \times S^1 X; d\phi_m = d^2\phi_m u = 0\}$$

correspondendo a $\tilde{F}$ é uma subvariedade de $M \times S^1 X$ perto de um umbílico se a singularidade D_4 é apresentada transversalmente.

De fato, o conjunto $\{(m, x, u) \in M \times S^1 X; d\phi_m = d^2\phi_m u = 0\}$ se projeta sobre $\tilde{F}$ pela projeção $\pi : M \times S^1 X \rightarrow \mathcal{P}^3(\mathbb{R}) \times S^1 X$ (na verdade, π projeta $M \times S^1 X$ em $N \times S^1 X$). Suponha que perto de um umbílico a singularidade D_4 seja apresentada transversalmente. Então, pela Proposição 2.3.6, a cúbica intrínseca C não é ortogonal e, portanto, pela Proposição 2.3.5, $\tilde{F}$ é uma subvariedade. Assim, o conjunto acima é uma subvariedade de $M \times S^1 X$.

Existem dois tipos de singularidade D_4 : hiperbólica (D_4^+) com forma normal $x(x^2 + y^2)$ e elíptica (D_4^-) com forma normal $x(x^2 - y^2)$. Como as duas primeiras derivadas da forma normal de uma singularidade do tipo D_4 se anulam, a terceira derivada é intrínseca, e então a singularidade D_4 é hiperbólica ou elíptica de acordo com a terceira derivada da forma normal. Em um umbílico na superfície, esta terceira derivada intrínseca é, a menos de um múltiplo escalar, a cúbica intrínseca no umbílico.

Seja $f(x, y) = x(x^2 - y^2)$ a forma normal de uma singularidade D_4^- e considere a seguinte deformação versal de f :

$$F(x, y, s, t, u, v) = x(x^2 - y^2) + sx^2 + tx + uy + v.$$

Tem-se que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - y^2 + 2sx + t \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -2xy + u.$$

Procura-se os pontos singulares de $F(x, y, s, t, u, v)$ que são mais degenerados, isto é, aqueles cujo determinante Hessiano é nulo, mas também que, nestes pontos, a hessiana seja não nula, isto é, tenha corank 1. Deve-se ter

$$\det \text{Hess}F = \begin{vmatrix} 6x + 2s & -2y \\ -2y & -2x \end{vmatrix} = -4(3x^2 + sx + y^2) = 0,$$

ou seja, $sx = -(3x^2 + y^2)$. Substituindo a equação anterior em $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, tem-se

$$3x^2 - y^2 - 2(3x^2 + y^2) = 0$$

$$-3x^2 - 3y^2 = -t$$

$$x^2 + y^2 = \frac{t}{3},$$

e portanto $t \geq 0$.

Pode-se parametrizar x e y pondo

$$x = \sqrt{\frac{t}{3}} \cos \theta \quad \text{e} \quad y = \sqrt{\frac{t}{3}} \sin \theta,$$

com $\theta \in [0, 2\pi)$, e então,

$$u = 2xy = 2\frac{t}{3} \cos \theta \sin \theta = \frac{t}{3} \sin 2\theta$$

$$s = -\sqrt{\frac{t}{3}}(3 \cos \theta + \sin \theta \tan \theta)$$

Assim, para cada $t > 0$ obtém-se uma curva λ_t no plano us . Esta curva é singular nos pontos $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \pm \frac{3\pi}{4}$, pois $\frac{du}{d\theta}$ e $\frac{ds}{d\theta}$ se anulam nestes pontos.

Os pontos singulares de λ_t , para $\theta = \pm \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \pm \frac{3\pi}{4}$, respectivamente, são: $\left(\frac{t}{3}, -2\sqrt{2}\sqrt{\frac{t}{3}}\right)$ e $\left(-\frac{t}{3}, 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{t}{3}}\right)$. Tem-se assim definidas em $\mathbb{R}^3$ duas curvas não singulares

$$t \mapsto (s, t, u) = \left(-2\sqrt{2}\sqrt{\frac{t}{3}}, t, \frac{t}{3}\right), \quad t > 0$$

$$t \mapsto (s, t, u) = \left(2\sqrt{2}\sqrt{\frac{t}{3}}, t, -\frac{t}{3}\right), \quad t > 0.$$

Pondo $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $\theta = \frac{3\pi}{4}$ nas expressões de x e y , obtém-se duas curvas não-singulares em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ dadas por:

$$t \mapsto \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{t}{3}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{t}{3}}, -2\sqrt{2}\sqrt{\frac{t}{3}}, t, \frac{t}{3}\right), \quad t > 0$$

$$t \mapsto \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{t}{3}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{t}{3}}, 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{t}{3}}, t, -\frac{t}{3} \right), \quad t > 0.$$

Como $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{t}{3}}$, segue que $x^2 = \frac{t}{6}$, e então $t = 6x^2$. Assim, é possível reparametrizar as curvas acima por:

$$x \mapsto (x, x, -4x, 6x^2, 2x^2)$$

$$x \mapsto (x, -x, -4x, 6x^2, -2x^2)$$

Quando $x = 0$, $\det \text{Hess} F = y^2$, logo $\det \text{Hess} F = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Então deve-se ter $s \neq 0$ para que a Hessiana de F seja não nula. Com isto, obtém-se $t = u = 0$. Assim, tem-se uma outra curva não singular em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$:

$$s \mapsto (0, 0, s, 0, 0)$$

É preciso mostrar que, em cada ponto de cada uma destas curvas, F tem uma singularidade do tipo A_3^- (exceto na origem, onde a singularidade é D_4).

Começando com a curva $s \mapsto (0, 0, s, 0, 0)$, mostra-se que no parâmetro $\lambda = (s, 0, 0)$, o ponto $(0, 0)$ é uma singularidade de F_λ do tipo A_3 . E, neste caso tem-se

$$F_\lambda(x, y, s, t, u, v) = x^3 - xy^2 + sx^2$$

que é exatamente o 3-jato de F_λ na origem, $(j^3 F_\lambda(0, 0))$.

Para saber se $j^3 F_\lambda(0, 0)$ tem a forma normal de uma singularidade do tipo A_3^- é preciso verificar as seguintes condições descritas em [21]: sendo

$$A_{ij} = \frac{1}{i!(j-i)!} \frac{\partial^j j^3 F_\lambda}{\partial x^{j-i} \partial y^i}, \quad \text{deve-se ter } A_{33} = 0 \text{ e } A_{44} - \frac{1}{4}A_{23}^2 \neq 0.$$

Nesse caso, tem-se $A_{33} = 0$, $A_{44} = 0$ e $A_{23} = -1$. Logo, a condição para singularidade do tipo A_3 está verificada. Então, em cada ponto desta curva, F tem singularidades do tipo A_3 .

Para as outras curvas o procedimento é análogo.

Agora, seja $f(x, y) = x(x^2 - y^2)$ a forma normal de uma singularidade D_4^+ e a seguinte deformação versal de f :

$$F(x, y, s, t, u, v) = x^3 + xy^2 + sx^2 + tx + uy + v.$$

Tem-se que:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 + y^2 + 2sx + t \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2xy + u$$

$$\det HessF = \begin{vmatrix} 6x+2s & 2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(3x^2 + sx - y^2) = 0,$$

ou seja, $sx = -3x^2 + y^2$. Substituindo a equação anterior em $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, obtém-se

$$3x^2 + y^2 + 2(-3x^2 + y^2) + t = 0$$

$$-3x^2 + 3y^2 = -t$$

$$x^2 - y^2 = \frac{t}{3},$$

então, para $\theta \in \mathbb{R}$, se $t \neq 0$:

$$x = \sqrt{\frac{t}{3}} \cosh \theta \quad \text{e} \quad y = \sqrt{\frac{t}{3}} \sinh \theta, \quad \text{se } t > 0$$

e

$$x = \sqrt{\frac{-t}{3}} \sinh \theta \quad \text{e} \quad y = \sqrt{\frac{-t}{3}} \cosh \theta, \quad \text{se } t < 0$$

E assim, se $t > 0$,

$$u = \frac{-t}{3} \sinh(2\theta)$$

$$s = -3x + \frac{y^2}{x} = \sqrt{\frac{t}{3}} \left(-3 \cosh \theta + \frac{\sinh^2 \theta}{\cosh \theta} \right)$$

e esta é uma curva não-singular.

Se $t < 0$

$$u = \frac{t}{3} \sinh(2\theta)$$

$$s = \sqrt{\frac{-t}{3}} \left(-3 \sinh \theta + \frac{\cosh^2 \theta}{\sinh \theta} \right)$$

que também é não-singular.

Se $t = 0$, então $y = \pm x$ e

$$u = -2x(\pm x) = \mp 2x^2$$

$$sx = -3x^2 + y^2 = -3x^2 + x^2 = -2x^2 \Rightarrow s = -2x, x \neq 0$$

Tem-se então três curvas

$$x \mapsto (x, \pm x, -2x, 0, \pm 2x^2)$$

$$s \mapsto (0, 0, s, 0, 0)$$

das quais apenas a última representa singularidade A_3 de F .

Outra propriedade importante de uma singularidade D_4^- , mas não de uma singularidade D_4^+ , é que pela origem no espaço de parâmetros passa uma curva em cada ponto da qual (exceto

na origem) a função perturbada tem três singularidades do tipo A_1^- . Considerando a mesma deformação anterior, tem-se:

$$F(x, y, s, t, u, v) = x^3 - xy^2 + sx^2 + tx + uy + v$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - y^2 + 2sx + t = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \Leftrightarrow -2xy + u = 0$$

Fazendo $u = v = 0$ obtém-se as seguintes soluções:

Se $x = 0$ então $t = y^2$, e a curva é $(0, y, s, y^2, 0, 0)$.

Se $y = 0$ então $t = -3x^2 - 2sx$ e a curva é $(x, 0, s, -3x^2 - 2sx, 0, 0)$.

E então fazendo $s = 2a$, tem-se a curva $(s, t, u, v) = (2a, a^2, 0, 0)$ com as singularidades $(x, y) = (0, a)$, $(x, y) = (0, -a)$ e $(x, y) = (-a, 0)$. Nesses três pontos o determinante Hessiano é não nulo.

2.3.2 Geometria de uma superfície genérica próximo de um umbílico

Teorema 2.3.7 *Seja x um umbílico elíptico (respectivamente, hiperbólico) da imersão g . Então, passando por x existem 3 (respectivamente, 1) ridges, cada um sendo uma curva não-singular. Mais ainda, em uma vizinhança suficientemente pequena de um umbílico todos os pontos ridges são férteis (ou hiperbólicos). Em cada ponto ridge existe uma direção principal associada, e as direções raízes da cúbica intrínseca no umbílico são os valores limite das direções principais quando nos aproximamos dos umbílicos ao longo dos ridges. Se u é uma dessas direções raízes e C é a cúbica intrínseca, então o vetor tangente ao ridge associado é $\hat{x}$ satisfazendo $Cuv\hat{x} = 0$, com v ortogonal a u .*

Demonstração:

Seja x um umbílico da imersão g e considere a deformação

$$\Phi : X \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, m) \longmapsto \phi_m(x) = f_m \circ g(x)$$

Seja m a esfera focal correspondente ao umbílico x . Se x é elíptico, existem 3 curvas em $X \times M$ passando por (x, m) tais que, em cada ponto de cada uma delas, a aplicação deformada tem uma singularidade do tipo A_3^- . Se x é hiperbólico existe somente uma tal curva.

Pela Proposição 2.2.8 essas curvas representam linhas *ribs* em $X \times M$. Assim, no caso elíptico existem 3 linhas *ridges* em x e no caso hiperbólico somente uma tal linha.

Precisa-se mostrar que essas linhas *ridges* são não-singulares.

O A_2 -conjunto de ϕ_m é o conjunto focal de X e sua dessingularização é o conjunto

$$\tilde{A}_2 = \{(m, x, u) \in M \times S^1 X; d\phi_m = d^2\phi_m u = 0\}$$

que, pelas Proposições 2.3.5 e 2.3.6, é uma subvariedade de $M \times S^1 X$ perto de um umbílico se a singularidade D_4 é apresentada transversalmente.

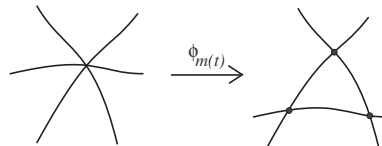
Seja $\alpha(t) = (x(t), m(t))$ uma das linhas *ribs* definidas acima. Esta curva se levanta a uma curva $\tilde{\alpha}(t) = (m(t), x(t), u(t))$ em $\tilde{A}_2$ não singular. Temos que $\tilde{\alpha}$ é transversal ao círculo unitário correspondente ao umbílico. Então, pelo Lema 2.2.14, a projeção de $\tilde{\alpha}$ em X , isto é, a curva $x(t)$, é não-singular. ■

Para umbílico elíptico tem-se:

Teorema 2.3.8 *Seja x um umbílico elíptico da imersão genérica g , com m a esfera umbílica. Então, existe uma curva em M passando por m tal que, cada ponto desta curva, exceto m , representa uma esfera tritangente, isto é, uma esfera tangente à superfície X em três pontos distintos. Quando a esfera se aproxima de m , ao longo desta curva, os três pontos de tangência se aproximam de x .*

Demonstração:

De acordo com a segunda propriedade de um D_4^- , existe uma curva em M (espaço de parâmetros), digamos $m(t)$ passando por m , em cada ponto da qual (exceto m) a aplicação deformada $\phi_{m(t)}$ tem três singularidades A_1^- . O resultado agora segue: a aplicação $\phi_{m(t)}$ corresponde à perturbação



com o primeiro conjunto sendo o conjunto de zeros de um D_4^- e os pontos duplos representam contato A_1^- . ■

Observação 2.3.9 *O enunciado do teorema anterior pode ser reescrito na forma: Em qualquer vizinhança de um umbílico elíptico existem três pontos com uma esfera tangente comum.*

Obtém-se assim, a seguinte lista dos vários tipos de contato esperados para uma imersão genérica, as propriedades associadas e a intersecção da esfera dada com a superfície.

Tipo de Contato	Situação	Intersecção	
		ponto isolado	
A_1^+	Esfera tangente		•
A_1^-	mas não focal	duas curvas transversais	
A_2	Esfera focal (nem <i>ridge</i> , nem umbílico)	cúspide	
A_3^+	<i>Ridge</i> elíptico	ponto isolado	•
A_3^-	<i>Ridge</i> hiperbólico	duas curvas tangentes	
A_4	<i>Ridge</i> de ordem mais alta	cúspide ramphoidal	
D_4^+	umbílico hiperbólico	curva, mais um ponto singular	
D_4^-	umbílico elíptico	3 curvas concorrentes duas a duas transversais	

Tabela 2.1: Tipos de contato, propriedades associadas e intersecção da esfera dada com a superfície.

Capítulo 3

Contato com Círculos

Neste capítulo estão definidos os conjuntos e a função vistos na Seção 1.4 adaptados para se trabalhar com círculos. Muitos teoremas são apresentados para estabelecer o tipo de contato entre círculos e superfícies. Aparece também o fenômeno conhecido como “*curling up and dying*” em que o círculo osculador se reduz a um ponto quando há uma aproximação ao umbílico. Existe uma relação entre este fenômeno e o índice do umbílico, que é mostrada no final do capítulo.

3.1 Definindo os círculos

Para este capítulo seja

$$M_e = \{([c_1 : s_1 : \rho_1], [c_2 : s_2 : \rho_2]) \in \mathcal{P}^4(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}^4(\mathbb{R}); (c_1, s_1), (c_2, s_2) \neq 0, [c_1 : s_1] \neq [c_2 : s_2]\}$$

Então, para $m \in M_e$, a aplicação f_m é definida por

$$f_m(y) = \left(\langle c_1, y \rangle - \frac{1}{2}s_1|y|^2 + \rho_1, \langle c_2, y \rangle - \frac{1}{2}s_2|y|^2 + \rho_2 \right)$$

Observe que $f_m^{-1}(0)$ é a intersecção de duas esferas com centros (c_1, s_1) e (c_2, s_2) . Se $s_1 = 0$ então, a primeira esfera será um plano, o mesmo acontece para $s_2 = 0$. Se $s_1 = s_2 = 0$ este círculo se degenera em uma reta. Também, M_e não é uma representação fiel da família de círculos em $\mathbb{R}^3$, pois a escolha de esferas intersectando em um dado círculo pode dar origem a uma redundância, isto é, diferentes pares de esferas podem dar origem a um mesmo círculo.

Defina M como o subconjunto aberto de M_e para o qual $f_m^{-1}(0)$ é um círculo genuíno (não-vazio e não-singular).

Como no capítulo anterior, da família de aplicações f_m , defina $F : \mathbb{R} \times M_e \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $F(x, m) = f_m(x)$, e Φ e ϕ_m por

$$\begin{aligned} \Phi : X \times M &\longrightarrow \mathbb{R}^p \\ (x, m) &\longmapsto \phi_m(x) = f_m \circ g(x) \end{aligned}$$

Para determinar o quão alta pode ser a k -codimensão das singularidades é preciso considerar os seguintes fatos:

1. Se W é uma k -órbita em $J_r(X, \mathbb{R}^2)$, então a codimensão de W , para r suficientemente grande, é duas unidades maior do que a k -codimensão da singularidade que ela representa (os círculos são considerados como conjuntos de zeros ao invés de conjuntos de nível).
2. $\dim(X \times M_e) = 10$
3. Existe uma redundância bidimensional na parametrização do conjunto de círculos em $\mathbb{R}^3$, isto é, dois pares distintos de esferas podem dar origem a um mesmo círculo.

De (2) e (3) espera-se que $j_1^r \Phi$ encontre subvariedades k -invariantes de codimensão no máximo oito, então, de (1), as aplicações ϕ_m irão exibir singularidades de k -codimensão no máximo seis.

Para utilizar o Teorema de Genericidade 1.4.4, considere o subconjunto de $J^r(X, \mathbb{R}^2)$ de singularidades de k -codimensão no máximo seis. Este tem uma estratificação regular por um número finito de k -órbitas $\{W_1, \dots, W_s\}$. O complementar desse subconjunto é algébrico, então $\{W_1, \dots, W_s\}$ pode ser estendido a uma estratificação regular de $J^r(X, \mathbb{R}^2)$, $\{W_1, \dots, W_t\}$. Seja $R = \bigcap_{i=1}^t R_{W_i}$. Este conjunto é aberto e denso, embora o W_i possa não ser fechado, pois o fecho de cada W_i contém um W_j de dimensão menor.

Para este capítulo, dado um subconjunto aberto e denso R' de $\text{Imm}(X, \mathbb{R}^3)$, a imersão g é genérica se $g \in R \cap R'$. Para uma tal imersão todas as singularidades de ϕ_m são k -versalmente deformadas por Φ .

Se $m \in M$, então as únicas singularidades que aparecem são as do tipo A_k , pois a aplicação ϕ_m é $\mathcal{K}$ -equivalente a uma suspensão de uma aplicação de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Porém, características interessantes ocorrem para $m \in M_e \setminus M$ onde podem aparecer singularidades de corank 2.

Definição 3.1.1 *Considere um círculo contido em um plano. A reta que passa pelo centro do círculo e é normal ao plano que o contém é chamada eixo do círculo.*

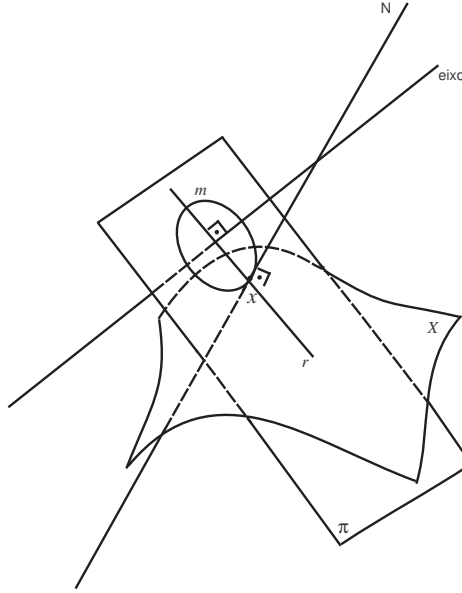


Figura 3.1: Eixo do círculo m tangente à superfície X em x .

Suponha que o círculo m é tangente à superfície em x , como na Figura 3.1. Para representar esse círculo pode-se escolher quaisquer duas esferas distintas passando por x com centros no eixo do círculo. Assim, m é tangente à superfície em x se, e somente se, seu eixo passa pela normal N à superfície em x . De fato, considere o plano π que contém o círculo m e uma reta r contida em π passando por x e pelo centro do círculo. Então, o eixo do círculo é perpendicular a r . Pelo teorema das três perpendiculares [9], existe um ponto de intersecção entre o eixo e a reta N normal à superfície em x . Por outro lado, se N e o eixo fossem reversas, o círculo m não seria tangente à superfície no ponto x , pois, neste caso, o vetor tangente ao círculo no ponto x não estaria em $T_x X$.

Existem dois pontos importantes no eixo, um onde o eixo encontra a normal, denotado por (c_1, s_1) , e outro onde encontra o plano tangente, denotado por (c_2, s_2) . Sejam

$$V(x) = \langle c_1, g(x) \rangle - \frac{1}{2}s_1|g(x)|^2 \quad \text{e} \quad W(x) = \langle c_2, g(x) \rangle - \frac{1}{2}s_2|g(x)|^2$$

as funções distância ao quadrado apropriadas. Assim,

$$\phi_m(x) = (V(x) + \rho_1, W(x) + \rho_2).$$

Denote por V_i e W_i a i -ésima derivada, respectivamente, de V e W em x .

As condições para ϕ_m ter singularidade do tipo A_k em x , para $k = 1, \dots, 4$ são, cumulativamente: [18]

$$A_1: W_1 u = 0, \text{ para algum } u \neq 0$$

$$A_2: V_2 u^2 = 0; W_2 u^2 + W_1 v = 0, \text{ para algum } v$$

$A_3: V_3u^3 + 3V_2uv = 0; W_3u^3 + 3W_2uv + W_1w = 0$, para algum w

$A_4: V_4u^4 + 6V_3u^2v + 3V_2v^2 + V_2uw = 0;$

$W_4u^4 + 6W_3u^2v + 3W_2v^2 + W_2uw + W_1z = 0$, para algum z

Isto segue da condição que um germe de aplicação $\varphi : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tem uma singularidade do tipo A_k se existe uma curva imersa $\gamma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ tal que $\varphi \circ \gamma$ tem k -jato zero na origem, mas $d\varphi(0) \neq 0$.

Antes de dar continuidade, será dada uma pausa para fazer um comentário a respeito do Teorema de Meusnier e definir a Esfera de Meusnier.

3.2 O Teorema de Meusnier

Teorema 3.2.1 (Meusnier) *Os centros de curvatura de todas as curvas em uma superfície X que passam por um ponto x arbitrário fixado e cujos vetores tangentes a x tem mesma direção, diferente das direções assintóticas, estão em um círculo de raio $\frac{1}{2}|R|$ que está contido no plano normal e tem um contato de, no mínimo, primeira ordem com X em x . Aqui $|R|$ é o raio de curvatura da secção normal no ponto x . [12]*

Os círculos de curvatura de todas as secções planas de X com reta tangente comum em x , cujas direções são diferentes das direções assintóticas, pertencem a uma esfera. Tal esfera é a chamada Esfera de Meusnier definida mais adiante.

Em outras palavras, o Teorema de Meusnier pode ser enunciado da seguinte maneira: Todas as curvas de uma superfície que tem, em um dado ponto, a mesma reta tangente, tem mesma curvatura normal. [6]

Observação 3.2.2 *Uma ilustração deste teorema pode ser observada utilizando o programa Superfícies [1]. A Figura 3.2 mostra um elipsóide recortado por um plano que passa por um ponto na superfície, chamado x (vermelho), e é ortogonal à direção tangente à superfície no ponto x , que é determinada pela reta r (azul). Um meio disco, em verde, corta o elipsóide em uma curva α (branca), e contém a reta r e a reta s , sendo s normal à superfície em x (verde claro). O ponto p (vermelho) no círculo c (verde claro) representa o centro de curvatura de α em x e sua distância a x é o raio de curvatura $|R|$ da secção normal no ponto x . A seta (vermelha) representa o vetor curvatura de α em x . Na extremidade deste vetor passa uma reta t (verde claro), paralela a uma reta cinza, q , que é tangente à superfície, ortogonal à reta r e contém o ponto x . Observe agora a Figura 3.3, ao mover a extremidade do vetor ao longo desta*

reta t , obtém-se uma família de curvas (brancas), na superfície que compartilham a mesma reta tangente em x , a reta r (azul). Os centros de curvatura descrevem um círculo, o círculo c , e a direção do vetor curvatura, varia ao longo da reta t . Como a projeção ortogonal de todos os pontos dessa reta sobre a reta normal à superfície em x vai para um mesmo ponto, então todas as secções planas da superfície que tem mesma reta tangente em x tem a mesma curvatura normal.

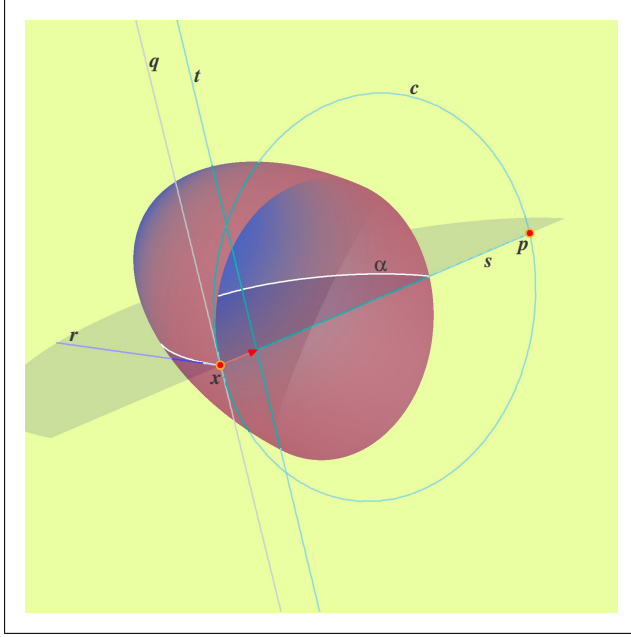


Figura 3.2: Teorema de Meusnier 1.

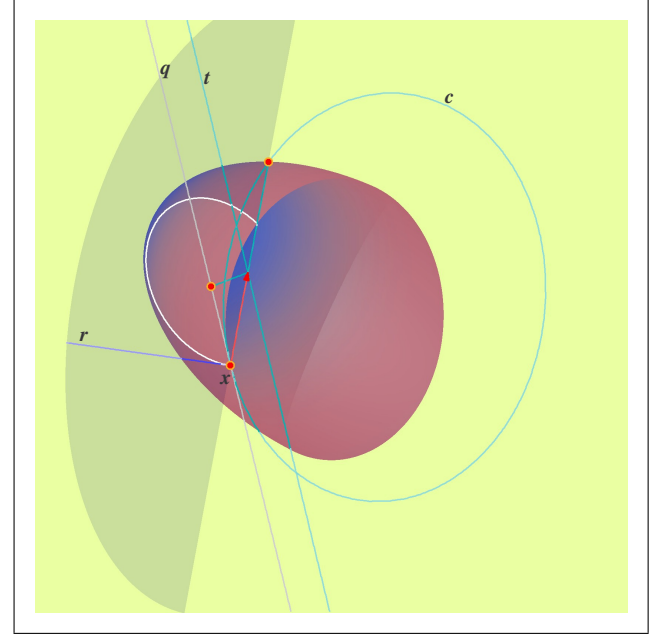


Figura 3.3: Teorema de Meusnier 2.

Definição 3.2.3 Seja u um vetor unitário tangente a X em x . A Esfera de Meusnier, denotada por M_u , para a direção u em x é definida como a esfera tangente à superfície em $g(x)$ com curvatura gaussiana $II_x(u, u)$ [16].

Observação 3.2.4 Como a curvatura gaussiana da Esfera de Meusnier, M_u , é $II_x(u, u)$, então o raio de M_u é $r = \frac{1}{\sqrt{II_x(u, u)}}$.

Observação 3.2.5 Se u é uma direção assintótica, então $II_x(u, u) = 0$, e daí M_u é o plano tangente em $g(x)$.

Observação 3.2.6 Em [17] Montaldi define Esfera de Meusnier da seguinte maneira: para qualquer vetor tangente não nulo u em x , a Esfera de Meusnier é a esfera tangente a X em x com centro (c, s) no fibrado normal compactificado satisfazendo a equação $\langle c, d^2gu^2 \rangle = s\langle dgu, dgu \rangle$. Ele afirma que o comprimento do vetor u não é importante, isto é, a Esfera de Meusnier depende apenas da direção de u . Aqui será mostrado que a Definição 3.2.3, de [16], é equivalente à definição de Esfera de Meusnier dada em [17] quando o vetor u é unitário.

De fato, tome g na forma de Monge, isto é, o sistema de coordenadas tem origem em $g(x)$ e o plano tangente a X passando por $g(x)$ é o plano xy , assim, $g(x) = 0$ e pode-se tomar $dg(x)u = u$ e $d^2g(x)u = u'$, como na Figura 3.4. Se M_u é a Esfera de Meusnier da Definição 3.2.3, então, sendo r o raio da esfera, segue que

$$II_x(u, u) = \frac{1}{r^2}$$

Mas $II_x(u, u) = \langle n, u' \rangle$, onde n é o vetor normal unitário. Por outro lado, como o centro da esfera é $[c : s]$, então o raio é $r = \frac{1}{s}$, logo $s^2 = \frac{1}{r^2}$ e, portanto, $s^2 = \langle n, u' \rangle$. Também tem-se que $c = \frac{n}{s}$, assim, $n = sc$ o que implica $s^2 = s\langle c, u' \rangle$ e, então, $s = \langle c, u' \rangle$. E como u é unitário, segue que $s\langle u', u' \rangle = \langle c, u' \rangle$.

Agora se M_u é a Esfera de Meusnier definida em [17], com $|u| = 1$, então, considerando $g(x)$ na forma de Monge, $\langle c, d^2gu^2 \rangle = s\langle dgu, dgu \rangle \Rightarrow \langle c, u' \rangle = s$. Como, para n normal e unitário, $c = \frac{n}{s}$, então $s^2 = \langle n, u' \rangle = s$, logo $s^2 = II_x(u, u)$. O raio de M_u é $r = \frac{1}{s}$, assim $II_x(u, u) = \frac{1}{r^2}$ e, portanto, a curvatura gaussiana da Esfera de Meusnier M_u é $II_x(u, u)$.

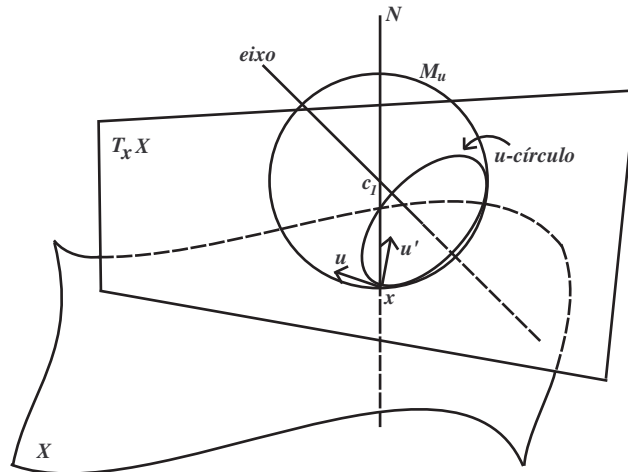


Figura 3.4: Esfera de Meusnier M_u com centro em (c_1, s_1) .

No teorema seguinte, um u -círculo é um círculo tangente à superfície em x cujo vetor tangente está na direção u . Observe que a única suposição de genericidade aparece na segunda parte de (iv).

Teorema 3.2.7 Para qualquer imersão $g : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ e com M_u definido anteriormente, as seguintes afirmações são válidas para cada vetor u não nulo tangente à superfície em x .

- (i) Um u -círculo tem contato do tipo A_2 com a superfície em $g(x)$ se, e somente se, está em M_u . (Este é o Teorema de Meusnier estendido para incluir o caso em que u é uma direção assintótica)

- (ii) Se u não é uma direção principal, então existe um único u -círculo em M_u com, no mínimo, contato do tipo A_3 com a superfície em x .
- (iii) Se x é não umbílico e se u é uma direção principal, então
- (a) Se u não está associado a um ponto ridge, então não existe u -círculo com contato do tipo A_3 com a superfície.
 - (b) Se u está associado a um ponto ridge, então cada u -círculo em M_u tem, no mínimo, contato do tipo A_3 com a superfície de acordo com o ridge, se é hiperbólico, elíptico ou de ordem mais alta.
- (iv) Se x é um umbílico, então toda M_u coincide, e será chamada M . Daí um círculo em M tangente à superfície tem, no mínimo, contato do tipo A_3 se, e somente se, seu vetor tangente à superfície é uma raiz da cúbica intrínseca C . Mais ainda, se u é uma raiz de C e o umbílico é genérico, então exatamente um u -círculo em M terá, no mínimo, contato do tipo A_4 com a superfície. Assim, em um umbílico elíptico existem três círculos com contato do tipo A_4 , enquanto que em um hiperbólico existe apenas um.

Demonstração:

- (i) Uma singularidade do tipo A_k de ϕ_m corresponde a $(k + 1)$ -ponto de contato e um u -círculo é tangente à superfície, então a condição para contato do tipo A_1 acima está satisfeita, e assim, (c_2, s_2) é tal que $W_1u = 0$. O círculo em questão tem contato do tipo A_2 com a superfície se, e somente se, $V_2u^2 = 0$ e $W_2u^2 + W_1v = 0$ para algum v . A segunda equação depende apenas de v e (c_2, s_2) , então não impõe restrições sobre u e (c_1, s_1) . A primeira equação fica $V_2u^2 = \langle c_1 - s_1g(x), d^2g(x)u^2 \rangle - s_1\langle dg(x)u, dg(x)u \rangle = 0$. Considere g na forma de Monge, então a primeira equação pode ser escrita da seguinte maneira $\langle c_1, u' \rangle - s_1\langle u, u \rangle = 0$. Como u é unitário, então $\langle u, u \rangle = 1$ e $\langle u, u' \rangle = 0$, assim, $\langle c_1, u' \rangle = s_1$. Seja n o vetor normal unitário e, como $|c_1| = \frac{1}{s_1}$, segue que $c_1 = \frac{1}{s_1}n$, e então $\langle \frac{1}{s_1}n, u' \rangle = s_1 \Rightarrow \langle n, u' \rangle = s_1^2 \Rightarrow II_x(u, u) = s_1^2$. Portanto, $\frac{1}{s_1} = \frac{1}{\sqrt{II_x(u, u)}}$ que é o raio da Esfera de Meusnier, logo o centro de M_u é c_1 e, como x é um ponto da esfera e x pertence ao u -círculo, então o círculo está contido na Esfera de Meusnier. Agora, por outro lado, se o círculo está contido na Esfera de Meusnier, então o centro da esfera é c_1 e o raio é $r = \frac{1}{s_1}$. Como o raio da Esfera de Meusnier M_u é $r = \frac{1}{\sqrt{II_x(u, u)}}$, segue que $II_x(u, u) = s_1^2$, isto é, $\langle n, u' \rangle = s_1^2 \Rightarrow \langle \frac{1}{s_1}n, u' \rangle = s_1 \Rightarrow \langle c_1, u' \rangle = s_1$. Como u é unitário e $g(x) = 0$, então $\langle c_1 - s_1g(x), u' \rangle = s_1\langle u, u \rangle \Rightarrow \langle c_1 - s_1g(x), u' \rangle - s_1\langle u, u \rangle = 0$ e, portanto,

$V_2u^2 = 0$, ou seja, o u -círculo tem, no mínimo, contato do tipo A_2 com a superfície em $g(x)$.

- (ii) As condições para se ter contato do tipo A_3 são: $V_3u^3 + 3V_2uv = 0$; $W_3u^3 + 3W_2uv + W_1w = 0$, para algum w e com v satisfazendo $W_2u^2 + W_1v = 0$.

Se u não é uma direção principal, então $V_2u \neq 0$ (com (c_1, s_1) sendo o centro de M_u , por (i)) e a primeira equação pode ser resolvida unicamente para v (módulo u). Então, $W_2u^2 + W_1v = 0$ pode ser resolvida unicamente para (c_2, s_2) , que determina o círculo unitário unicamente (a segunda equação da condição para contato do tipo A_3 é solucionada para w).

- (iii) Como u é direção principal $V_2u = 0$, mas como x não é umbílico, então $V_2 \neq 0$. Pelo Teorema 2.2.6, a condição para que u seja associado a um *ridge* é que $V_3u^3 = 0$.

- (a) Como u não é associado a um *ridge*, $V_3u^3 \neq 0$ e, como $V_2u = 0$, então, não existe v que satisfaça $V_3u^3 + 3V_2uv = 0$, logo não existe círculo que tenha contato do tipo A_3 com a superfície.

- (b) Nesse caso, $V_3u^3 = 0$, logo todo v satisfaz $V_3u^3 + 3V_2uv = 0$, então não há restrições para (c_2, s_2) na condição para contato do tipo A_3 .

A condição para contato do tipo A_4 se reduz a $V_4u^4 + 6V_3u^2v + 3V_2v^2 = 0$, dando uma equação quadrática para v que é a mesma que determina o tipo de A_3 . Então, existem duas, uma ou nenhuma soluções para v , e assim, para (c_2, s_2) , de acordo com o *ridge* ser hiperbólico, de ordem mais alta ou elíptico, respectivamente.

A segunda equação para a condição A_4 pode ser resolvida para z .

- (iv) Como x é umbílico, então $V_2 = 0$ para (c_1, s_1) no centro da esfera umbílica. A cúbica intrínseca C é um múltiplo escalar de V_3 . Como em (iii)(a), se $V_3u^3 \neq 0$, então não existem soluções para a condição A_3 , assim, cada u -círculo na esfera umbílica tem contato do tipo A_2 .

Porém, se u é uma direção raiz, então a condição A_3 deixa v indeterminado (pois $Cuv = 0$), assim, cada u -círculo tem, no mínimo, contato do tipo A_3 .

A condição para contato do tipo A_4 fica $V_4u^4 + 6V_3u^2v = 0$, que é unicamente solucionada para v desde que $V_3u^2 \neq 0$. A condição $V_3u^2 = 0$ é a condição para que o umbílico seja parabólico, o qual é não-genérico.

■

Existe uma intuição para o contato desses u -círculos na esfera de Meusnier com a superfície. A intersecção de M_u com a superfície é determinada, por difeomorfismo, pelo tipo do ponto

(c_1, s_1) , como na Tabela 2.1. Por exemplo, se (c_1, s_1) é um *rib* fértil (hiperbólico), então M_u intersecta a superfície em um par de curvas tangentes. Qualquer u -círculo em M_u é tangente a ambas as curvas tendo, então, $2 + 2 = 4$ -ponto de contato com a superfície. Cada uma dessas curvas tem um círculo osculador, resultando, então, em dois círculos com $2 + 3 = 5$ -ponto de contato. Esta intuição funciona sempre que a intersecção determina o contato entre M_u e a superfície. Para a situação do item (ii) do Teorema 3.2.7, M_u intersecta a superfície em x em duas curvas transversais, uma das quais tem vetor tangente u , pois, como u não é uma direção principal, então $V_2u \neq 0$ e $V_2u^2 = 0$, logo M_u tem contato do tipo A_1^- com a superfície em $g(x)$. O círculo osculador para este ramo é o único u -círculo tendo 4-ponto de contato com a superfície em x . Para esta situação pode-se aproximar a situação (iii)(a) do Teorema 3.2.7 onde u é uma direção principal.

Neste processo, a curvatura da curva de intersecção se torna infinita e o círculo osculador se reduz a um ponto. Desde que este círculo osculador está sempre na apropriada esfera de Meusnier, segue que o plano gerando este círculo se aproxima do plano tangente. Este fenômeno é chamado “*curling up and dying*”.

Voltando à situação de um ponto arbitrário na superfície, pelo Teorema 3.2.7, em um dado ponto x e para a maioria das direções tangentes u existe um único círculo com contato do tipo A_3 com a superfície, e para um número finito de direções (geralmente nenhuma) existe uma família unidimensional de tais círculos com contato do tipo A_3 . Então, espera-se que existam círculos com contato do tipo A_4 com a superfície em qualquer ponto x . O próximo teorema diz quantos tais círculos podem existir.

Teorema 3.2.8 *Existe um conjunto aberto denso de imersões $g : X \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que em qualquer ponto $x \in X$ existe, no máximo, dez círculos com, no mínimo, contato do tipo A_4 com a superfície em x .*

Demonstração:

A demonstração deste teorema utiliza técnicas de geometria algébrica que estão fora do contexto deste dissertação e se encontra em [16] ou em [17]. ■

3.3 Na Vizinhança de um Umbílico

Muitos desses círculos com contato do tipo A_4 de fato tem, no mínimo, contato do tipo A_5 com a superfície. Não é fácil afirmar muito sobre isso em geral, embora seja possível obter algumas informações na vizinhança dos umbílicos usando teoria de deformação.

Primeiro é preciso verificar como as singularidades Σ^2 aparecem.

Observação 3.3.1 *Sobre singularidades dos tipos Σ^2 e IV_k , ver apêndice.*

Observe que $d\phi_m(x) = 0$ se, e somente se, (c_1, s_1) e (c_2, s_2) estão ambos na reta normal à superfície em x . De fato,

$$\begin{aligned}\phi_m(x) &= (V(x) + \rho_1, W(x) + \rho_2) \\ d\phi_m(x) &= (\langle c_1 - s_1g(x), dg(x) \rangle, \langle c_2 - s_2g(x), dg(x) \rangle)\end{aligned}$$

Assim, $d\phi_m(x) = 0 \Leftrightarrow V_1(x, [c_1 : s_1]) = 0$ e $W_1(x, [c_2 : s_2]) = 0$, isto é, $\langle c_1 - s_1g(x), dg(x) \rangle = 0$ e $\langle c_2 - s_2g(x), dg(x) \rangle = 0$, ou seja, (c_1, s_1) e (c_2, s_2) estão na reta normal à superfície em x .

Com isso, ϕ_m tem uma Σ^2 singularidade e $m = f_m^{-1}(0)$ é o ponto isolado $\{x\}$, então $m \in M_e \setminus M$. Como antes, pode-se escolher (c_1, s_1) e (c_2, s_2) como quaisquer dois pontos distintos no eixo do círculo m . Neste caso, o eixo é a reta normal à superfície em x e (c_2, s_2) é tomado como sendo o ponto x , que por conveniência será a origem do $\mathbb{R}^3$, então escolha $(c_2, s_2) = (0, -1)$ obtendo-se $\phi_m(x) = \left(V(x, (c_1, s_1)) + \rho_1, \frac{1}{2}|g(x)|^2 \right)$. E, portanto, $d^2\phi_m = (V_2, \langle dg, dg \rangle)$.

Se x não é um umbílico da imersão g , então as duas formas quadráticas que aparecem em $d^2\phi_m$ são linearmente independentes com uma sendo positiva definida e, segue que, a Σ^2 singularidade que ocorre é um $I_{2,2}$, na notação de Mather, que tem forma normal $(x^2 + y^2, xy)$.

Se, por outro lado, x é umbílico, então as duas formas quadráticas são linearmente dependentes e a singularidade é de um tipo mais alto. Desde que a forma quadrática que ocorre é definida positiva, a singularidade é do tipo IV_k , com $k \geq 3$, que tem forma normal $(x^2 + y^2, x^k)$. A codimensão de uma singularidade do tipo IV_k é $2k$, então a única possibilidade para uma superfície genérica é $k = 3$. Para este caso, pode-se escolher (c_1, s_1) como sendo o centro umbílico, então $d^2\phi_m = (0, \langle dg, dg \rangle)$. Tem-se que $d^3\phi_m = (V_3, 3\langle dg, d^2g \rangle)$.

Daí, ϕ_m tem uma singularidade tipo IV_3 em x se, e somente se, $I_x = \langle dg, dg \rangle$ não é um fator da forma cúbica V_3 . Ou equivalentemente, ϕ_m tem uma singularidade tipo IV_3 no umbílico se, e somente se, a cúbica intrínseca C tem representante harmônico não nulo com respeito a primeira forma fundamental I_x .

Observação 3.3.2 *Sobre representante harmônico de uma forma cúbica e direções harmônicas, ver apêndice.*

Teorema 3.3.3 *Por qualquer umbílico genérico passam três curvas na superfície tais que, em cada ponto de cada uma delas, existe um círculo com contato do tipo A_5 com a superfície. Aproximando-se do umbílico ao longo dessas curvas, as direções tangentes aos círculos se aproximam das direções harmônicas do umbílico. Mais ainda, os raios dos círculos tendem a zero e o plano que o gera se aproxima do plano tangente à superfície no umbílico.*

Demonstração:

A demonstração se encontra em [16]. ■

Existem duas maneiras em que um círculo pode “*curl up and die*” aproximando-se do umbílico x . Seja P um ponto em uma das curvas descritas no Teorema 3.3.3, também chamadas A_5 -curvas, com o círculo apropriado chamado A_5 -círculo. Considere a projeção do A_5 -círculo e sua reta tangente em P no plano tangente a X em x . Para P suficientemente perto de x essas projeções são não-singulares. A distinção entre os dois tipos é a seguinte: para o tipo (i) a projeção do círculo e o ponto x estão no lado oposto da projeção da reta tangente, enquanto que para o tipo (ii) eles estão no mesmo lado, como na Figura 3.5.

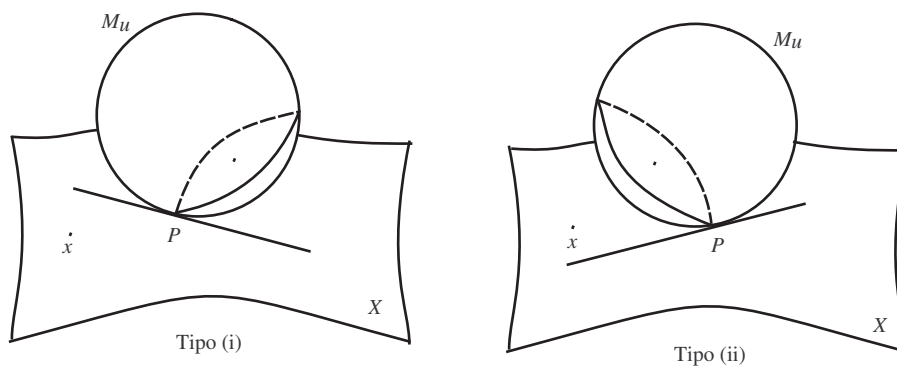


Figura 3.5: Duas maneiras de um círculo “*curl up and die*”.

Equivalentemente, se c é o centro do círculo, então para os tipos (i) e (ii), $(c - P)(x - P)$ é, respectivamente, negativo ou positivo para P suficientemente próximo de x .

Associado a um umbílico está um número que é o índice da singularidade no umbílico do campo de direções principais. Existe uma relação entre este índice e a cúbica intrínseca. Em resumo, qualquer forma cúbica real em (x, y) pode ser escrita como

$$\alpha z^3 + 3\bar{\beta} z^2 \bar{z} + 3\beta z \bar{z}^2 + \bar{\alpha} \bar{z}^3,$$

com $z = x + yi$.

Para um umbílico genérico a cúbica intrínseca tem parte harmônica não nula, então $\alpha \neq 0$. Pode-se rotacionar o plano xy para fazer $\alpha = 1$, assim a forma cúbica fica parametrizada por $\beta \in \mathbb{C}$. O umbílico tem, então, índice $\frac{1}{2}$ se $|\beta| > 1$ e $-\frac{1}{2}$ se $|\beta| < 1$.

Teorema 3.3.4 *Para uma imersão genérica, quando nos aproximamos de um umbílico ao longo de qualquer uma das A_5 -curvas, a maneira em que o A_5 -círculo “curls up and dies” corresponde ao índice do umbílico como segue:*

$$\text{tipo (i): índice } \frac{1}{2} \quad e \quad \text{tipo (ii): índice } -\frac{1}{2}$$

Demonstração:

Para provar este teorema cada círculo é imerso enquanto a superfície é o conjunto de zeros da submersão. A aplicação composta agora é de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Esta inversão de papéis da superfície e do círculo não altera o problema de procurar singularidades do tipo A_5 , pelo Lema de Simetria 1.3.8.

Considere o umbílico como a origem do $\mathbb{R}^3$ e a superfície dada por

$$f(x, y, z) = h(x, y) - z = 0$$

com

$$h(x, y) = \frac{1}{2}B(x, y)^2 + \frac{1}{6}C(x, y)^3 + \frac{1}{24}D(x, y)^4 + H(x, y)$$

onde $H(0) = dH(0) = \dots = d^4H(0) = 0$.

O A_5 -círculo em P pode ser imerso por

$$r_P(t) = P + (a, a_3)\sin t + (b, b_3)(1 - \cos t),$$

onde $a, b \in \mathbb{R}^2$, $(b, b_3) = c - P$ e (a, a_3) é o produto vetorial de (b, b_3) com o vetor normal unitário à superfície em P . Este círculo tem centro c e vetor tangente (a, a_3) em P .

A aplicação de contato é, então,

$$f \circ r_P(t) = h(a \sin t + b(1 - \cos t)) - a_3 \sin t - b_3(1 - \cos t).$$

A condição para que a aplicação de contato tenha uma singularidade do tipo A_5 é que as cinco primeiras derivadas de $f \circ r_P(t)$ se anulem em $t = 0$, com todas as derivadas de h em P , logo

$$A_1 : \quad dh(a \cos t + b \sin t) - a_3 \cos t - b_3 \sin t \big|_{t=0} = 0$$

$$dha - a_3 = 0$$

$$A_2 : \quad d^2h(a \cos t + b \sin t)^2 + dh(-a \sin t + b \cos t) + a_3 \sin t - b_3 \cos t \big|_{t=0} = 0$$

$$d^2ha^2 + dhb - b_3 = 0$$

$$A_3 : \quad d^3h(a \cos t + b \sin t)^3 + 3d^2h(a \cos t + b \sin t)(-a \sin t + b \cos t) +$$

$$+ dh(-a \cos t - b \sin t) + a_3 \cos t + b_3 \sin t \big|_{t=0} = 0$$

$$d^3ha^3 + 3d^2hab - dha + a_3 = 0$$

$$d^3ha^3 + 3d^2hab = 0$$

$$\begin{aligned}
A_4 : \quad & d^4h(a \cos t + b \sin t)^4 + 6d^3h(a \cos t + b \sin t)^2(-a \sin t + b \cos t) + \\
& + 3d^2h[(-a \sin t + b \cos t)^2 - (a \cos t + b \sin t)^2] + \\
& + d^2h(a \cos t + b \sin t)(-a \cos t - b \sin t) + \\
& + dh(a \sin t - b \cos t) - a_3 \sin t + b_3 \cos t \big|_{t=0} = 0 \\
& d^4ha^4 + 6d^3ha^2b + 3d^2h(b^2 - a^2) - d^2ha^2 - dhb + b_3 = 0 \\
& d^4ha^4 + 6d^3ha^2b + 3d^2hb^2 - 3d^2ha^2 = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_5 : \quad & d^5h(a \cos t + b \sin t)^5 + 10d^4h(a \cos t + b \sin t)^3(-a \sin t + b \cos t) + \\
& + 15d^3h(a \cos t + b \sin t)(-a \sin t + b \cos t)^2 - 10d^3h(a \cos t + b \sin t)^3 \\
& - 15d^2h(a \cos t + b \sin t)(-a \sin t + b \cos t) + \\
& + dh(a \cos t + b \sin t) - a_3 \cos t - b_3 \sin t \big|_{t=0} = 0 \\
& d^5ha^5 + 10d^4ha^3b + 15d^3hab^2 - 10d^3ha^3 - 15d^2hab + dha - a_3 = 0 \\
& d^5ha^5 + 10d^4ha^3b + 15d^3hab^2 - 10d^3ha^3 - 15d^2hab = 0
\end{aligned}$$

Agora, como o círculo “*curls up and dies*”, então c tende a P , e daí (a, a_3) , e (b, b_3) tendem a zero.

Sejam u, v vetores nas direções limites de (a, a_3) e (b, b_3) respectivamente.

Por A_1 e A_2 tem-se que u e v estão no plano tangente à superfície em 0, que $\langle u, v \rangle = 0$ e que pode-se tomar $|u| = |v| = 1$. De fato:

- u está no plano tangente à superfície, pois $a_3 = dha$, logo existe um α tal que $u = \alpha(a_1, a_2, dh(a_1, a_2))$ e o plano tangente é gerado por $\{(1, 0, h_x), (0, 1, h_y)\}$.
- v está no plano tangente à superfície, pois $b_3 = dhb - d^2ha^2$, logo existe um β tal que $v = \beta(b_1, b_2, dhb - d^2ha^2)$ e o plano tangente é gerado por $\{(1, 0, h_x), (0, 1, h_y)\}$.
- $\langle u, v \rangle = 0$ pois $(a, a_3) \perp (b, b_3)$

Diferenciando as condições A_3 , A_4 e A_5 três vezes e avaliando em 0 obtém-se, com $\hat{p}$ tangente à A_5 -curva

$$\begin{cases} Cu^3 + 3Cuv\hat{p} & = 0 \\ 2Cu^2v + Cv^2\hat{p} - Cu^2\hat{p} & = 0 \\ 3Cuv^2 - 2Cu^3 - 3Cuv\hat{p} & = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Eliminando $Cuv\hat{p}$ na primeira e na terceira equações, tem-se $Cu^3 - 3Cuv^2 = 0$ que é precisamente a condição para u ser uma direção harmônica no umbílico.

Expresse a forma cúbica como

$$C(x, y)^3 = z^3 + 3\bar{\beta}z^2\bar{z} + 3\beta z\bar{z}^2 + \bar{z}^3,$$

e seja $\beta = s + it$. Então, para $u = (x, y)$ e $v = (-y, x)$, obtém-se

$$\begin{aligned} Cu^3 &= (x + yi)^3 + 3(s - ti)(x + yi)^2(x - yi) + 3(s + ti)(x + yi)(x - yi)^2 + (x - yi)^3 = \\ &= (x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i) + 3(s - ti)[x^3 + x^2yi + xy^2 + y^3i] + \\ &\quad + 3(s + ti)[x^3 - x^2yi + xy^2 - y^3i] + x^3 - 3x^2yi - 3xy^2 + y^3i = \\ &= 2x^3 - 6xy^2 + 6sx^3 + 6sxy^2 + 6tx^2y + 6ty^3 = \\ &= (2 + 6s)x^3 + (6s - 6)xy^2 + 6tx^2y + 6ty^3 = \\ &= 2(1 + 3s)x^3 + 6(s - 1)xy^2 + 6tx^2y + 6ty^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cuv^2 &= (x + yi)(y - xi)^2 + (s - ti)[2(x + yi)(y - xi)(y + xi) + (x - yi)(y - xi)^2] + \\ &\quad + (s + ti)[2(x - yi)(y - xi)(y + xi) + (x + yi)(y + xi)^2] + (x - yi)(y + xi)^2 = \\ &= -2x^3 + 6xy^2 + 2sx^3 + 2sxy^2 + 2tx^2y + 2ty^3 = \\ &= (2s - 2)x^3 + (6 + 2s)xy^2 + 2tx^2y + 2ty^3 = \\ &= 2(s - 1)x^3 + 2(3 + s)xy^2 + 2tx^2y + 2ty^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Cu^3 - 3Cuv^2 &= (2 + 6s)x^3 + (6s - 6)xy^2 + 6tx^2y + 6ty^3 \\ &\quad - 3[(2s - 2)x^3 + (6 + 2s)xy^2 + 2tx^2y + 2ty^3] = \\ &= [(2 + 6s) - 3(2s - 2)]x^3 + [(6s - 6) - 3(6 + 2s)]xy^2 + [6t - 3(2t)]x^2y + \\ &\quad + [6t - 3(2t)]y^3 = \\ &= 8x(x^2 - 3y^2) \end{aligned}$$

Assim, as raízes harmônicas, isto é, as raízes de $Cu^3 - 3Cuv^2 = 0$, são $u = (0, 1)$, $u = (\sqrt{3}, 1)$ e $u = (-\sqrt{3}, 1)$. Sem perda de generalidade, pode-se tomar $u = (0, 1)$, $v = (-1, 0)$ e $\hat{p} = (x, y)$, e substituir em (3.1). Logo,

$$Cu^3 = i^3 + 3(s - ti)i^2(-i) + 3(s + ti)i(-i)^2 + (-i)^3 = -i + 3si + 3t - 3si + 3t + i = 6t$$

$$\begin{aligned}
Cuv\hat{p} &= -i(x+yi) + (s-ti)[(-i)(x+yi) + i(x+yi) + (-i)(x-yi)] + \\
&\quad + (s+ti)[i(x+yi) + (-i)(x-yi) + i(x-yi)] + i(x-yi) = \\
&= -xi + y - sxi - sy - tx + tyi + sxi - sy - tx - tyi + ix + y = \\
&= 2y - 2sy - 2tx
\end{aligned}$$

A primeira (e também a terceira) equação de (3.1) fica:

$$Cu^3 + 3Cuv\hat{p} = 6t + 3(2y - 2sy - 2tx) = 6t + 6y - 6sy - 6tx = 6t + 6(1-s)y - 6tx = 0$$

$$\begin{aligned}
Cu^2v &= (-1)i^2 + (s-ti)[2(-1)(-i)i + (-1)i^2] + \\
&\quad + (s+ti)[(-1)(-i)^2 + 2(-1)i(-i)] + (-1)(-i)^2 = \\
&= 1 - s + ti - s - ti + 1 = \\
&= 2 - 2s
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Cv^2\hat{p} &= (x+yi) + (s-ti)[2(x+yi) + (x-yi)] + (s+ti)[(x+yi) + 2(x-yi)] + (x-yi) = \\
&= 2x + 3sx + syi - 3txi + ty + 3sx - syi + 3txi + ty = \\
&= (6s+2)x + 2ty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Cu^2\hat{p} &= i^2(x+yi) + (s-ti)[2i(-i)(x+yi) + i^2(x-yi)] + (s+ti)[(-i)^2(x+yi) + \\
&\quad + 2i(-i)(x-yi)] + (-i)^2(x-yi) = \\
&= -2x + (s-ti)(x+3yi) + (s+ti)(x-3yi) = \\
&= -2x + sx + 3syi - txi + 3ty + sx - 3syi + txi + 3ty = \\
&= (2s-2)x + 6ty
\end{aligned}$$

A segunda equação de (3.1) fica:

$$\begin{aligned}
2Cu^2v + Cv^2\hat{p} - Cu^2\hat{p} &= 2(2-2s) + (6s+2)x + 2ty - [(2s-2)x + 6ty] = \\
&= 4 - 4s + 6sx + 2x + 2ty - 2sx + 2x - 6ty = \\
&= 4(s+1)x - 4ty - 4(s-1) = 0
\end{aligned}$$

E assim (3.1) se torna

$$tx + (s - 1)y \quad \text{e} \quad (s + 1)x - ty = (s - 1)$$

Resolvendo esse sistema, obtém-se

$$x = \frac{t^2 + (s - 1)^2}{s^2 + t^2 - 1}.$$

Como o sinal de $\langle \hat{p}, v \rangle = x$ determina o sinal limite de $(c - P)(x_0 - P)$: para o tipo (i) $\langle \hat{p}, v \rangle > 0$ e para o tipo (ii) $\langle \hat{p}, v \rangle < 0$, para C não ortogonal, isto é, $s^2 + t^2 \neq 1$, segue que

- se $s^2 + t^2 > 1$, então $\langle \hat{p}, v \rangle > 0$ e o índice é $\frac{1}{2}$;
- se $s^2 + t^2 < 1$, então $\langle \hat{p}, v \rangle < 0$ e o índice é $-\frac{1}{2}$.

■

Capítulo 4

O Teorema de Banchoff, Gaffney e McCrory

Neste capítulo é apresentada uma generalização do Teorema de Banchoff, Gaffney e McCrory, que é o teorema central do livro intitulado “Cusps of Gauss Mappings”, [4]. Nesta generalização são considerados os contatos de uma superfície com esferas e círculos, sendo o plano considerado como um caso especial de esfera, e a reta como um caso especial de círculo, pois o teorema original trata apenas do contato de uma superfície com retas e planos. Primeiramente é apresentado o teorema original, e depois a generalização. Para isso, não é utilizada a Aplicação de Gauss como definida no Capítulo 1, mas sim uma extensão da aplicação paralela para incluir a Aplicação de Gauss no infinito.

4.1 O Teorema de Banchoff, Gaffney e McCrory

Seja $g : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão de uma superfície X . A Aplicação de Gauss $G : X \rightarrow S^2$ é singular nos pontos onde a curvatura principal é zero - a curva parabólica.

Denote por $g_t : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação paralela, $g_t(x) = g(x) + tG(x)$, sua imagem sendo a superfície paralela a X na distância t e g_t é singular em x se, e somente se, $g_t(x)$ é um ponto focal em x .

Segue agora o enunciado do teorema original de Banchoff, Gaffney e McCrory, que é o teorema central do livro “Cusps of Gauss Mappings” [4].

Teorema 4.1.1 *Se a Aplicação de Gauss G de g tem uma cúspide em $x \in X$, então as afirmações de (i) a (viii) são verdadeiras. Por outro lado, se G é estável e as seguintes afirmações são válidas, então G tem uma cúspide em x .*

(i) *Uma direção de curvatura principal nula de g é tangente à curva parabólica em x ;*

- (ii) Para cada $\epsilon > 0$ existem três pontos $y_1, y_2, y_3 \in X$ tais que, para $i = 1, 2, 3$, $|y_i - x| < \epsilon$ e os planos tangentes a X em $g(y_i)$ são paralelos;
- (iii) Para cada $\epsilon > 0$ existem dois pontos $y_1, y_2 \in X$ tais que, para $i = 1, 2$, $|y_i - x| < \epsilon$ e os planos tangentes a X em $g(y_i)$ são iguais;
- (iv) x é um ponto ridge de g , assim como um ponto parabólico, e a curvatura principal associada ao ridge é zero em x ;
- (v) Dados $D, \epsilon > 0$ existem $a, d > D$ e um ponto $y \in X$ tais que $|x - y| < \epsilon$ e y é um rabo de andorinha da aplicação paralela g_d ;
- (vi) Para qualquer ponto $z \in \mathbb{R}^3$ que não está no plano tangente a X em $g(x)$, o ponto x é um rabo de andorinha da superfície pedal de X a z ;
- (vii) x é um ponto parabólico de g e uma reta em $\mathbb{R}^3$ tem, no mínimo, contato do tipo A_2 com X em x .
- (viii) x é um ponto parabólico de g e dado $\epsilon > 0$ existe um $y \in X$ tal que $|y - x| < \epsilon$ e y é um ponto de inflexão de uma curva assintótica de g .

Se a imagem da curva parabólica de g em X tem curvatura não nula em x , então a condição (ix) pode ser incluída no teorema e, se a aplicação direção assintótica ao longo da curva parabólica de g é regular em x , então tem-se também a condição (x).

- (ix) O plano osculador em $g(x)$ da imagem da curva parabólica de g é o plano tangente de X em $g(x)$;
- (x) x é um ponto de inflexão da aplicação assintótica de g .

A generalização do Teorema 4.1.1 não faz uso da Aplicação de Gauss como definida anteriormente. Então, estenda a aplicação paralela para incluir o infinito tomando $t = [a : b] \in \mathcal{P}^1(\mathbb{R})$ e $g_t(x) = [ag(x) + bG(x) : a]$.

Para $t = [0 : 1]$, a aplicação acima é exatamente a Aplicação de Gauss. Singularidades de g_t ocorrem nos pontos x para os quais $\frac{a}{b}$ é uma de suas curvaturas principais, ou equivalentemente, quando $g_t(x)$ é um ponto do conjunto focal de X em x . Isto sugere que a generalização da curva parabólica é para curvas na superfície ao longo das quais uma das curvaturas principais é constante - essas curvas são chamadas curvas de curvatura principal constante.

4.2 Generalização do Teorema de Banchoff, Gaffney e McCrory

O próximo teorema é uma generalização do Teorema 4.1.1 de Banchoff, Gaffney e McCrory, exceto para os itens (vi), (viii) e (x) do teorema original.

Teorema 4.2.1 *Seja $g : X \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão genérica e suponha que $x \in X$ seja não umbílico. Seja $k(x)$ uma das funções curvatura principal com direção principal u e ponto focal (c, s) em x . Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i) *x é um ponto ridge de g , com curvatura principal associada $k(x)$;*
- (ii) *$dk(x) = 0$ ou a linha de curvatura, associada à k , é tangente à curva de curvatura principal constante $k(x)$ em x ;*
- (iii) *Para qualquer vizinhança U de x em X existem três pontos em U e três esferas concêntricas, cada uma tangente à superfície em um desses três pontos;*
- (iv) *Para qualquer vizinhança U de x em X existem dois pontos em U e uma esfera que é tangente à superfície em ambos os pontos;*
- (v) *Seja t tal que $g_t(x) = (c, s)$, então x é um rabo de andorinha de g_t ;*
- (vi) *Existe um círculo em $\mathbb{R}^3$ com vetor tangente u em x que tem, no mínimo, contato do tipo A_3 com a superfície;*
- (vii) *A esfera osculadora em x de qualquer curva passando por x com vetor tangente u na superfície é tangente à superfície em x . Se isso for verdade para uma tal curva, então é verdade para todas elas.*

Demonstração:

Para verificar que todas as afirmações são equivalentes, observe que cada uma delas é equivalente à afirmação (i).

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) é o Teorema 2.2.6.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii),(iv) A função distância ao quadrado para (c, s) tem uma singularidade do tipo A_3 em x se, e somente se, $(x, (c, s))$ é um ponto *rib* [20]. Considere a seguinte deformação da forma normal de um $A_3^\pm$:

$$f_a(x, y) = x^2 \pm (y^2 - a)^2.$$

Então, f_a é singular em $(0, 0)$, $(0, \sqrt{a})$ e $(0, -\sqrt{a})$ para $a > 0$, com valores a^2 em $(0, 0)$ e zero nos demais pontos. Como g é genérica, esta situação também é válida para a função distância ao

quadrado nos pontos próximos de (c, s) , provando assim que (i) $\Rightarrow$ (iii) e (i) $\Rightarrow$ (iv). Agora, por outro lado, suponha que $(x, (c, s))$ não é um ponto *rib*, então a função distância ao quadrado tem uma singularidade, no máximo, do tipo A_2 . Tomando uma deformação da forma normal de um A_2 , é possível obter apenas duas singularidades, o que implica que não pode valer (iii) nem (iv).

(i) $\Leftrightarrow$ (v): A condição para g_t ter uma singularidade rabo de andorinha é similar à condição para se ter uma singularidade do tipo A_3 , que é, para $t = [a, b]$

$$dg_t u = 0 \quad d^2 g_t u^2 + dg_t v = 0$$

para algum vetor não nulo u e algum vetor v . [16]

Escrevendo isto em termos de g e G e usando o fato que $dG\hat{x} = \hat{n}$, a primeira equação diz que $(x, (c, s))$ é um ponto focal com direção principal associada u , de fato:

$$0 = dg_t u(x) = adgu(x) + bdGu(x).$$

Como $g_t(x) = (c, s)$ e $g_t(x) = [ag(x) + bG(x) : a]$, então $a = s$ e $bG(x) = c - sg(x)$. Também, $bdGu = -sdgu$. Assim,

$$\langle c - sg(x), d^2 gu \rangle - s \langle dgu, dgu \rangle = \langle bG(x), d^2 gu \rangle + \langle bdGu, dgu \rangle = 0,$$

pois $dG\hat{x} = \hat{n} \perp dgu$ e, portanto, $(x, (c, s))$ é um ponto focal com direção principal associada u .

Agora, é preciso mostrar que a segunda equação é exatamente a condição para que a função distância ao quadrado tenha uma singularidade do tipo A_3 .

Primeiramente observe que a segunda equação é:

$$d^2 g_t u^2 + dg_t v = ad^2 gu^2 + bd^2 Gu^2 + adgv + bdGv = 0.$$

Substituindo $a = s$ na equação acima, vem:

$$sd^2 gu^2 + bd^2 Gu^2 + sdgv + bdGv = 0.$$

Logo,

$$bd^2 Gu^2 + bdGv = -sd^2 gu^2 - sdgv. \quad (4.1)$$

Observe também que

$$\langle G, dg \rangle = 0, \quad (4.2)$$

$$\langle dG, dg \rangle + \langle G, d^2 g \rangle = 0, \quad (4.3)$$

$$\langle d^2 G, dg \rangle + 2\langle dG, dg \rangle + \langle G, d^3 g \rangle = 0. \quad (4.4)$$

A condição para que a função distância ao quadrado tenha uma singularidade do tipo A_3 é: $V_3u^2 + V_2v = 0$ para algum v .

Assim,

$$\begin{aligned} V_3u^2 + V_2v &= \langle c - sg, d^3gu^2 \rangle - 3s\langle d^2gu^2, dg \rangle + \langle c - sg, d^2gv \rangle - s\langle dgv, dg \rangle = \\ &= \langle c - sg, d^3gu^2 + d^2gv \rangle - 2s\langle d^2gu^2, dg \rangle + \langle -sd^2gu^2 - sgv, dg \rangle \end{aligned}$$

Agora substituindo $c - sg = bG(x_0)$ e as equações (4.1), (4.3) e (4.4) na expressão acima, obtém-se:

$$\begin{aligned} V_3u^2 + V_2v &= \langle bG(x_0), d^3gu^2 + d^2gv \rangle - 2s\langle d^2gu^2, dg \rangle + \langle bd^2Gu^2 + bdGv, dg \rangle = \\ &= b\langle G(x_0), d^3gu^2 \rangle + b\langle G(x_0), d^2gv \rangle - 2s\langle d^2gu^2, dg \rangle + b\langle d^2Gu^2 + dGv, dg \rangle = \\ &= b(-\langle d^2Gu^2, dg \rangle - 2\langle dG, d^2gu^2 \rangle) - b\langle dGv, dg \rangle - 2s\langle d^2gu^2, dg \rangle + \\ &\quad + b\langle d^2Gu^2, dg \rangle + b\langle dGv, dg \rangle = \\ &= -2b\langle dG, d^2gu^2 \rangle - 2s\langle d^2gu^2, dg \rangle = \\ &= -2\langle bdG - sgv, d^2gu^2 \rangle \end{aligned}$$

Como $bdG - sgv = 0$, a condição para singularidade do tipo A_3 está verificada.

(i) $\Leftrightarrow$ (vi): É exatamente o item (iii)(b) do Teorema 3.2.7.

(i) $\Leftrightarrow$ (vii): Chame as curvas na superfície que passam por x com vetor tangente u de u -curvas. Pelo item (i) do Teorema 3.2.7, o círculo osculador à u -curva está na Esfera de Meusnier M_u , então a sua reta focal passa pelo centro (c, s) de M_u . Agora, o centro da esfera osculadora, que também é chamado de centro da curvatura esférica, de uma curva está na reta focal. Então, a esfera osculadora é tangente à superfície se, e só se, coincide com M_u . Assim, fica mostrado que M_u tem contato do tipo A_3 com (isto é, é a esfera osculadora de) uma u -curva se, e somente se, $(x, (c, s))$ é um ponto *rib*. A condição para que uma curva tenha contato do tipo A_3 com uma esfera é:

$$V_1u = V_2u^2 + V_1u = V_3u^3 + 3V_2uv + V_1w = 0,$$

onde V é a função distância ao quadrado do centro da esfera, e (x, u, v, w) é o 3-jato da curva. Para V medida de (c, s) , estas equações se reduzem a $V_3u^3 = 0$, pois como $[c : s]$ é ponto focal, então $V_1 = V_2u = 0$, que é precisamente a condição para $(x, (c, s))$ ser um ponto *rib*. ■

Capítulo 5

Conclusões e Perspectivas Futuras

O objetivo deste trabalho foi estudar os contatos entre superfícies do $\mathbb{R}^3$ e objetos como esferas e círculos. Ele foi baseado na referência [16], com o intuito de desenvolver as idéias do autor para o $\mathbb{R}^3$ e escrever algumas passagens omitidas. Para isso foi preciso introduzir conceitos básicos da teoria de contato entre subvariedades e $\mathcal{K}$ -equivalência, genericidade e teoria de singularidades.

Alguns resultados interessantes da geometria diferencial de superfícies foram explorados aqui, como a relação existente entre a função altura e a aplicação normal de Gauss e uma ilustração do Teorema de Meusnier.

Uma extensão natural deste trabalho seria desenvolver o mesmo estudo para subvariedades em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$. Observa-se, porém, que embora resultados gerais possam ser obtidos, cada valor de n deve ser considerado separadamente. Fica ainda o desejo de encontrar a generalização para as partes (vi), (viii) e (x) do Teorema de Banchoff, Gaffney e McCrory.

Apêndice A

Neste apêndice estão algumas definições e resultados básicos envolvendo variedades diferenciáveis. Na primeira seção se encontra a definição de uma variedade diferenciável, imersão e submersão. Mais sobre esse assunto pode ser encontrado na referência [7]. A segunda seção é sobre aplicações estáveis. As definições desta seção foram retiradas da referência [11].

A.1 Variedades Diferenciáveis

Definição A.1.1 *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações injetoras $f_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M tais que:*

- (i) $\bigcup_{\alpha} f_\alpha(U_\alpha) = M$;
- (ii) *Para todo par α, β com $f_\alpha(U_\alpha) \cap f_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $f_\alpha^{-1}(W)$ e $f_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$ são diferenciáveis (Figura A.1);*
- (iii) *A família $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ é máxima relativamente às condições (i) e (ii).*

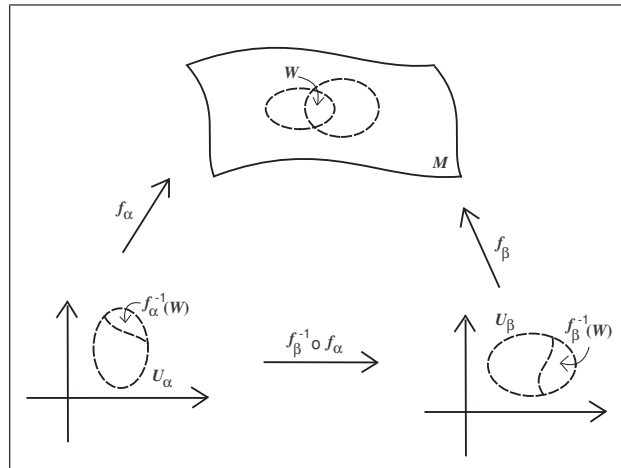


Figura A.1: Aplicações $f_\beta^{-1} \circ f_\alpha$.

O par (U_α, f_α) com $p \in f_\alpha(U_\alpha)$ é chamado uma parametrização, ou um sistema de coordenadas, de M em p ; $f_\alpha(U_\alpha)$ é, então, chamada uma vizinhança coordenada em p . Uma família $\{(U_\alpha, f_\alpha)\}$ satisfazendo (i) e (ii) é chamada uma estrutura diferenciável em M .

Exemplo A.1.2 São exemplos de variedades diferenciáveis:

- (i) O espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ com a estrutura diferenciável dada pela identidade;
- (ii) O espaço projetivo real $\mathcal{P}^n(\mathbb{R})$ com a estrutura diferenciável $\{(\mathbb{R}^n, f_i)\}$, em que f_i é definida da seguinte maneira:

Considere que $\mathcal{P}^n(\mathbb{R})$ é o espaço quociente de $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ pela relação de equivalência

$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \sim (tx_1, \dots, tx_{n+1}), \quad t \in \mathbb{R}, \quad t \neq 0$$

e indique os pontos de $\mathcal{P}^n(\mathbb{R})$ por $[x_1, \dots, x_{n+1}]$. Defina em $\mathcal{P}^n(\mathbb{R})$ os subconjuntos $V_1, \dots, V_{n+1}$ por

$$V_i = \{[x_1, \dots, x_{n+1}]; x_i \neq 0\}, \quad i = 1, \dots, n+1.$$

E assim, são definidas as aplicações $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow V_i$ por

$$f_i(y_1, \dots, y_n) = [y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n], \quad (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

que satisfazem as condições da Definição A.1.1.

Definição A.1.3 Sejam M e N variedades diferenciáveis com dimensões m e n , respectivamente. Uma aplicação $\varphi : M \rightarrow N$ é diferenciável em $p \in M$ se dada uma parametrização $g : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow N$ em $\varphi(p)$ existe uma parametrização $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ em p tal que $\varphi(f(U)) \subset g(V)$ e a aplicação $g^{-1} \circ \varphi \circ f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $f^{-1}(p)$. A aplicação φ é diferenciável em um aberto de M se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.

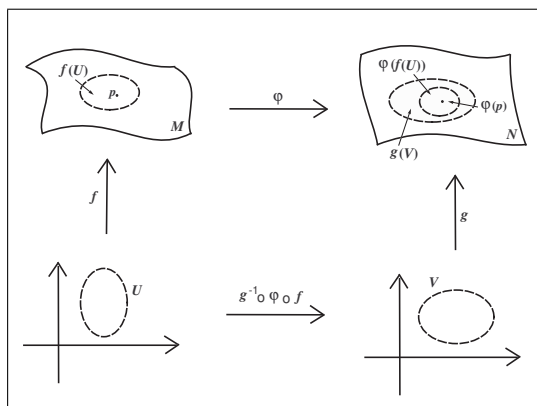


Figura A.2: Aplicação $g^{-1} \circ \varphi \circ f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

Da condição (ii) da Definição A.1.1 segue que a Definição A.1.3 não depende da escolha das parametrizações f e g .

Definição A.1.4 *Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ é chamada uma curva (diferenciável) em M . Suponha que $\gamma(0) = p \in M$, e seja $\mathcal{D}$ o conjunto das funções de M diferenciáveis em p . O vetor tangente à curva γ em $t = 0$ é a função $\gamma'(0) : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$\gamma'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} \right|_{t=0}$$

com $f \in \mathcal{D}$. Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ com $\gamma(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p , com as operações usuais de funções, forma um espaço vetorial chamado o espaço tangente de M em p , denotado por $T_p M$.

Proposição A.1.5 *Sejam M e N variedades diferenciáveis com dimensões m e n , respectivamente e $\varphi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M$ e cada $v \in T_p M$, escolha uma curva diferenciável $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ com $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Faça $\lambda = \varphi \circ \gamma$. A aplicação $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$ dada por $d\varphi_p(v) = \lambda'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de γ .*

Definição A.1.6 *A aplicação linear $d\varphi_p$ definida na Proposição A.1.5 é chamada diferencial de φ em p .*

Definição A.1.7 *Sejam M e N variedades diferenciáveis com dimensões m e n , respectivamente. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \rightarrow N$ é uma imersão se $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$ é injetora para todo $p \in M$. Se, além disto, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M) \subset N$, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida por N , diz-se que φ é um mergulho. Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow N$ é um mergulho, diz-se que M é uma subvariedade de N .*

Observação A.1.8 *Se $\varphi : M \rightarrow N$ é uma imersão, então $m \leq n$. A diferença $n - m$ é chamada a codimensão da imersão φ .*

Definição A.1.9 *Sejam M e N variedades diferenciáveis com dimensões m e n , respectivamente. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \rightarrow N$ é uma submersão se $d\varphi_p : T_p M \rightarrow T_{\varphi(p)} N$ é sobrejetora para todo $p \in M$.*

Observação A.1.10 *Se $\varphi : M \rightarrow N$ é uma submersão, então $m \geq n$.*

A.2 Aplicações Estáveis

Definição A.2.1 *Sejam f_1 e f_2 aplicações C^∞ de M em N . Diz-se que f_1 é equivalente a f_2 se existirem difeomorfismos $g_1 : M \rightarrow M$ e $g_2 : N \rightarrow N$ tais que o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{f_1} & N \\
 g_1 \uparrow & & \uparrow g_2 \\
 M & \xrightarrow{f_2} & N
 \end{array}$$

Definição A.2.2 *Seja f_1 em $C^\infty(M, N)$. Diz-se que f_1 é estável se existe uma vizinhança U de f_1 em $C^\infty(M, N)$ tal que cada f_2 em U é equivalente a f_1 .*

Apêndice B

Neste apêndice estão alguns conceitos importantes sobre germes e jatos de aplicações diferenciáveis e um pouco sobre singularidades. Mais sobre esses assuntos e as demonstrações dos teoremas enunciados se encontram em [10]. Para um estudo mais detalhado sobre teoria de singularidades recomenda-se [10], [11] e [23].

B.1 Germes e Jatos de Aplicações C^∞

Considere a aplicação diferenciável $N \rightarrow P$ onde N e P são variedades diferenciáveis.

Seja um ponto $x \in N$ e considere o conjunto de todas as aplicações diferenciáveis $U \rightarrow P$ cujo domínio U é uma vizinhança de x em N . Neste conjunto introduza uma relação de equivalência $\sim$: dadas duas tais aplicações $f_1 : U_1 \rightarrow P$ e $f_2 : U_2 \rightarrow P$ escreve-se $f_1 \sim f_2$ quando existe uma vizinhança U de x em N , dependendo de f_1 e f_2 , para a qual as restrições $f_1|_U$ e $f_2|_U$ coincidam. As classes de equivalência são chamadas germes de aplicações $N \rightarrow P$ em x e elementos dessa classe de equivalência são chamados representantes do germe.

É comum usar a notação $f : (N, x) \rightarrow (P, y)$ para o germe, e x e y são chamados respectivamente de fonte e meta.

Em particular, quando $N = P$ usa-se a notação $1_N : (N, x) \rightarrow (N, x)$ para o germe em x da aplicação identidade.

Dados os germes $f : (N, x) \rightarrow (P, y)$ e $g : (P, y) \rightarrow (R, z)$ pode-se obter um germe $g \circ f : (N, x) \rightarrow (R, z)$ escolhendo-se representantes $f : U \rightarrow P$ e $g : V \rightarrow R$ tais que $f(U) \subseteq V$ e o germe dessa composição $g \circ f : U \rightarrow R$ em x pode ser definido pela composição dos germes.

Um germe $f : (N, x) \rightarrow (P, y)$ é invertível quando existe um germe $g : (P, y) \rightarrow (N, x)$, para o qual tem-se $f \circ g = 1_P$ e $g \circ f = 1_N$ e, nesse caso, g é chamado o inverso de f . Mais ainda, a um germe $f : (N, x) \rightarrow (P, y)$ associa-se uma diferencial denotada por $T_x f : T_x N \rightarrow T_y P$ e definida pela diferencial em x de algum representante.

O teorema da aplicação inversa admite uma versão para germes e diz que um germe é in-

vertível se, e somente se, a diferencial é invertível. O posto (rank) de um germe $f : (N, x) \rightarrow (P, y)$ é definido como o posto da diferencial. Quando o posto é igual à dimensão de N o germe é dito imersivo e quando é igual à dimensão de P , é dito submersivo. Assim, um germe é invertível se é imersivo e submersivo. Um germe que não é imersivo nem submersivo é chamado singular.

Dois germes $f_1 : (N_1, x_1) \rightarrow (P_1, y_1)$ e $f_2 : (N_2, x_2) \rightarrow (P_2, y_2)$ são equivalentes se existirem germes h, k invertíveis para os quais o diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} (N_1, x_1) & \xrightarrow{f_1} & (P_1, y_1) \\ \uparrow h & & \uparrow k \\ (N_2, x_2) & \xrightarrow{f_2} & (P_2, y_2) \end{array}$$

Observação B.1.1 *Esta definição é análoga à Definição A.2.1 de aplicações equivalentes.*

Às vezes é conveniente dizer, nesta situação, que f_1 e f_2 são $\mathcal{A}$ -equivalentes.

Observe que, sendo n e p as dimensões das variedades N e P , respectivamente, qualquer germe $f : (N, x) \rightarrow (P, y)$ é equivalente a algum germe $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$.

Dado um germe pode-se obter a correspondente Série de Taylor (de algum representante com respeito a apropriadas coordenadas locais de fonte e meta) e os jatos do germe correspondem aos finitos segmentos da Série de Taylor. O espaço de jatos $J^k(n, p)$ é o espaço vetorial real de todas as aplicações $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ em que cada componente é um polinômio de grau $\leq k$ nas coordenadas canônicas em $\mathbb{R}^n$ com o termo constante nulo. Os elementos de $J^k(n, p)$ são chamados k -jatos. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ uma aplicação C^∞ e $a \in \mathbb{R}$. Tomando a Série de Taylor de $f(x) - f(a)$ na origem sem os termos de grau maior que k , o resultado pode ser pensado como um k -jato, o qual é denotado por $j^k f(a)$ e chamado k -jato de f em a . Dessa forma obtém-se uma aplicação C^∞

$$j^k f : \mathbb{R}^n \longrightarrow J^k(n, p)$$

dada por $a \mapsto j^k f(a)$ chamada k -jato extensão de f .

Definição B.1.2 *Dado um germe $f_0 : (\mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^q, 0)$, uma deformação a r parâmetros de f_0 é um germe $f : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^q, 0)$ com $f(0, x) = f_0(x)$ e o correspondente desdobramento a r parâmetros é o germe $F : (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^q, 0)$ dado por $F(u, x) = (u, f(u, x))$.*

Definição B.1.3 *Uma deformação f do germe f_0 é dita versal se cada deformação f' de f_0 pode ser representada na forma $f'(0, x) = f(g(0, x), \theta(x))$, $g(0, 0) = 0$, $\theta(0) = 0$. [3]*

Definição B.1.4 Uma deformação g de f_0 é $\mathcal{K}$ -versal quando para qualquer deformação f existe um morfismo de f em g .

B.2 Singularidades

Definição B.2.1 Um ponto singular (ou singularidade) de uma aplicação diferenciável $f : N \rightarrow P$ é um ponto $x \in N$ onde o germe é singular, isto é, não é imersivo nem submersivo. Ou ainda, é um ponto onde o posto da diferencial não é máximo. O conjunto singular Σf de f é o conjunto de todos os pontos singulares.

Lema B.2.2 (Hadamard) Seja U uma vizinhança convexa do zero em $\mathbb{R}^n$, e seja f uma função diferenciável definida em $U \times \mathbb{R}^q$ que se anula em $0 \times \mathbb{R}^q$. Então existem funções diferenciáveis $f_1, \dots, f_n$ em $U \times \mathbb{R}^q$ com $f = x_1 f_1 + \dots + x_n f_n$, onde $x_1, \dots, x_n$ são as coordenadas usuais do $\mathbb{R}^n$.

Lema B.2.3 (Nakayama) Seja ε um anel comutativo com unidade 1, e seja $\mathcal{M}$ um ideal em ε com a propriedade que $1 + x$ é invertível em ε para qualquer $x \in \mathcal{M}$. Seja M um ε -módulo e sejam A e B ε -submódulos de M com A finitamente gerado. Se $A \subseteq B + \mathcal{M}A$, então $A \subseteq B$.

Teorema B.2.4 (René Thom) Seja $f \in \mathcal{M}_n^2$ com codimensão ≥ 2 e ≤ 5 , então, a menos da adição de uma forma quadrática não degenerada em várias variáveis e multiplicação por ± 1 , f é equivalente a um dos germes da lista a seguir:

Corank	Codimensão	Germe	Nome
1	2	x^3	dobra
	3	x^4	cúspide
	4	x^5	rabo de andorinha
	5	x^6	borboleta
2	4	$x^3 - xy^2$	umbílico elíptico
	4	$x^3 + y^3$	umbílico hiperbólico
	5	$x^2y + y^4$	umbílico parabólico

Observação B.2.5 Considere a curva regular $\gamma(t) = (t^r, t^s)$ com $t > 0$ e $s > r > 0$. A imagem de γ para todo t (pequeno) é chamada uma cúspide ordinária (Figura B.1) quando $r = 2$ e $s = 3$, neste caso a curvatura tende a infinito, e é chamada uma cúspide ramphoidal (Figura B.2) quando $r = 2$ e $s = 5$, neste caso a curvatura tende a zero. [5]

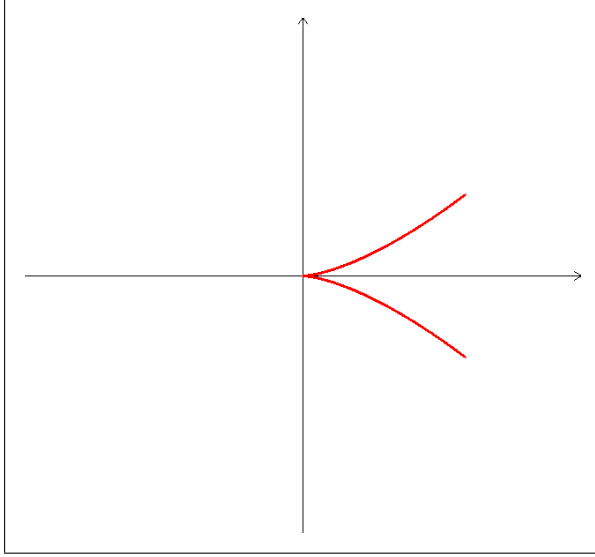


Figura B.1: Cúspide Ordinária.

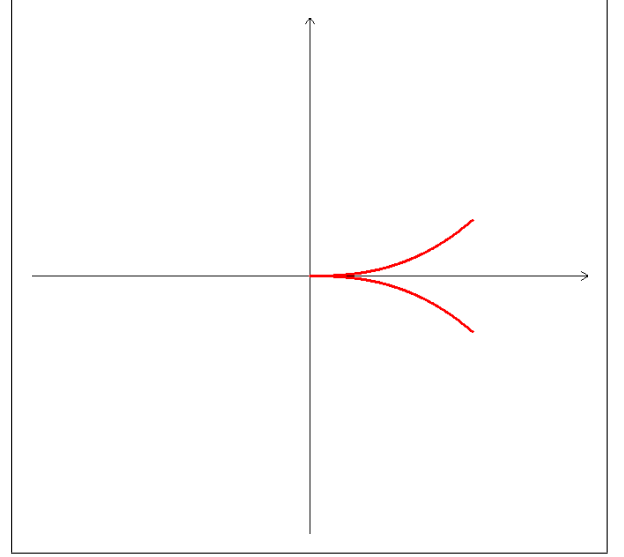


Figura B.2: Cúspide Ramphoidal.

Teorema B.2.6 *Seja $f \in \mathcal{M}_n^2$.*

(i) *Se f tem corank 1 e codimensão finita ($k - 1$), então*

$$f(x_1, \dots, x_n) \sim \pm x_1^k \pm x_2^2 \pm \dots \pm x_n^2.$$

(ii) *Se f tem corank 2 e codimensão ≤ 5 , então f é equivalente a um dos seguintes germes:*

$$\pm (x_1^3 - x_1 x_2^2) \pm x_3^2 \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_n^2;$$

$$\pm (x_1^3 + x_2^3) \pm x_3^2 \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_n^2;$$

$$\pm (x_1^2 x_2 + x_2^4) \pm x_3^2 \pm x_3^2 \pm \dots \pm x_n^2.$$

Um ponto singular de uma função diferenciável de corank ≤ 1 e codimensão finita k é chamado uma singularidade do tipo A_k .

Restringindo a atenção a curvas algébricas reais, isto é, subconjuntos do $\mathbb{R}^2$ definidos pela equação $f(x, y) = 0$, onde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função polinomial, supondo que a curva $f = 0$ passa pela origem - então f não possui termos constantes - e que a origem é um ponto singular de f - então f também não tem termos lineares. Se assumirmos a singularidade ser de codimensão finita, então será do tipo A_k para algum inteiro $k \geq 1$ e então equivalente à singularidade de $\pm x^{k+1} \pm y^2$, pelo Teorema B.2.6. A multiplicação de f por um escalar não nulo não afeta a curva $f = 0$, então pode-se supor que a forma normal é $\pm x^{k+1} + y^2$. Para k ímpar, há uma distinção entre A_k^+ e A_k^- , com formas normais $x^{k+1} + y^2$ e $-x^{k+1} + y^2$, respectivamente.

Um ponto singular de uma função diferenciável de corank ≤ 2 e codimensão finita $k \geq 4$ é chamado uma singularidade do tipo D_k . A forma normal de uma singularidade do tipo D_k é $\pm x^2 y + y^{k-1}$. Quando k é par, há uma distinção entre D_k^+ e D_k^- com formas normais $x^2 y + y^{k-1}$

e $-x^2y + y^{k-1}$, respectivamente.

As singularidades dos tipos A_k e D_k são chamadas singularidades simples, pois suas formas normais dependem apenas das variáveis x e y .

Uma singularidade modal é um tipo de singularidade para a qual a forma normal depende de um parâmetro (ou parâmetros) além das variáveis usuais x e y . Um exemplo de singularidade modal é a singularidade P_8 com forma normal $x^3 + ax^2z + xz^2 + y^2z$, neste caso o parâmetro a é chamado o parâmetro modal.

Definição B.2.7 *Sejam $f : N \rightarrow P$ uma aplicação diferenciável e para cada $x \in N$, $T_x f : T_x N \rightarrow T_{f(x)} P$ a diferencial de f . Os conjuntos de singularidade de Thom de primeira ordem são dados por*

$$\Sigma^i f = \{x \in N : \dim \ker(T_x f) = i\}$$

Se os conjuntos $\Sigma^i f$ são subvariedades, pode-se introduzir os conjuntos de singularidades de segunda ordem que são dados por $\Sigma^{i,j} f = \Sigma^j(f|_{\Sigma^i f})$. Se estes conjuntos forem subvariedades pode-se introduzir conjuntos de singularidades de terceira ordem $\Sigma^{i,j,k} f = \Sigma^k(f|_{\Sigma^{i,j} f})$. E assim sucessivamente pode-se obter os conjuntos de singularidades de Thom de ordem mais alta.

Agora, defina subvariedades Σ^i do espaço de jatos $J^1(n, p)$ para os quais as imagens inversas sob $j^1 f$ são os conjuntos $\Sigma^i f$, e então para uma aplicação genérica esses conjuntos são variedades diferenciáveis. Thom gostaria de continuar com este procedimento para conjuntos de singularidade de ordem k . O caso $k = 2$ foi resolvido por H. Levine, mas o caso geral foi resolvido apenas em 1967 por Boardman.

Sejam ε_n o conjunto de todos os germes $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, y)$ e $\varepsilon_{n,p}$ o conjunto dos germes $(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y)$, que pode ser escrito como $\varepsilon_{n,p} = \varepsilon_n \times \dots \times \varepsilon_n$, com p fatores. Dado um germe $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, considere J_f o ideal jacobiano de f e I_f o ideal em ε_n gerado pelas componentes de f . Defina $\Delta_s I$ o ideal $I_f + I'$, onde I' é o ideal gerado por todos os menores $s \times s$ da matriz jacobiana. Observe que $\Delta_s I = I$ quando $s > n$ e que valem também as inclusões

$$I_f \subseteq \Delta_n I \subseteq \Delta_{n-1} I \subseteq \dots \subseteq \Delta_1 I.$$

Denote $\Delta^s I = \Delta_{n-s+1} I$ e chame $\Delta^1 I, \Delta^2 I, \dots, \Delta^n I$ as sucessivas extensões jacobianas de I_f . Observe também que

$$I_f \subseteq \Delta^0 I \subseteq \Delta^1 I \subseteq \dots \subseteq \Delta^n I. \quad (\text{B.1})$$

O ideal I_f é próprio quando $I_f \neq \varepsilon_n$. Supondo que I_f seja próprio, a extensão jacobiana crítica de I_f é o último ideal $\Delta^{i_1} I$ da sequência (B.1) que é próprio. Este tem uma extensão jacobiana crítica $\Delta^{i_2} \Delta^{i_1} I$. E continua dessa forma para obter uma sequência ascendente $\Delta^{i_1} I, \Delta^{i_2} \Delta^{i_1} I, \dots$ de sucessivas extensões jacobianas críticas de I_f . Fica definido assim o Símbolo de Boardman do ideal I_f , denotado por $(i_1, i_2, \dots)$.

Definição B.2.8 *O Símbolo de Boardman de um germe $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ é definido como o Símbolo de Boardman do ideal I_f gerado pelas componentes $f_1, \dots, f_p$.*

Observação B.2.9 *O Símbolo de Boardman de um germe é um invariante de contato.*

Definição B.2.10 *Dados k inteiros $i_1, \dots, i_k$, um germe $f : (\mathbb{R}^n, x) \rightarrow (\mathbb{R}^p, y)$ é do tipo $\Sigma^{i_1, \dots, i_k}$ quando seu Símbolo de Boardman tem a forma $(i_1, \dots, i_k, 0, \dots)$.*

Proposição B.2.11 *Qualquer germe $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ do tipo $\Sigma^{2,0}$ e $\mathcal{K}$ -codimensão finita é $\mathcal{K}$ -equivalente a um dos germes listados abaixo:*

$$I_{a,b}: (xy, x^a + y^b), \ 2 \leq a \leq b$$

$$II_{a,b}: (xy, x^a - y^b), \ 2 \leq a \leq b \text{ com } a \text{ par}$$

$$IV_a: (x^2 + y^2, x^a), \ a \geq 3$$

Observação B.2.12 *A notação $I_{a,b}$, $II_{a,b}$, IV_a é devida a Mather. Em sua lista encontram-se também outros germes denotados por $III_{a,b}$ e V_a .*

Apêndice C

Este apêndice é dedicado às formas cúbicas e à representante harmônica de uma forma cúbica. As definições e os resultados apresentados estão em [16] e em [17].

C.1 Formas Cúbicas

A geometria de uma superfície em, e perto de, um umbílico é regida por uma forma cúbica no espaço tangente, a cúbica intrínseca, junto com uma forma quadrática positiva definida, a primeira forma fundamental.

Sejam x e y duas variáveis reais, então uma forma cúbica arbitrária C pode ser escrita como

$$C(x, y)^3 = ax^3 + bx^2y + 3cxy^2 + dy^3. \quad (\text{C.1})$$

Associada a qualquer cúbica está sua hessiana quadrática

$$H(x, y)^2 = \det[C(x, y)].$$

Para C como em (C.1), tem-se

$$H(x, y)^2 = (ac - b^2)x^2 + (ad - bc)xy + (bd - c^2)y^2.$$

As raízes de H são chamadas as direções hessianas de C . Se $Hu^2 = 0$, $u = (x, y)$, então $Cuv = 0$ para algum v , neste caso v também é uma direção hessiana. Portanto, as direções hessianas satisfazem $Cuv = 0$. Segue que C é um cubo perfeito se, e somente se, sua hessiana é zero, e C tem uma raiz repetida se, e somente se, H satisfaz: $Hu = 0 \Leftrightarrow Cu^2 = 0$, para $H \neq 0$. As outras correspondências são:

C tem três raízes reais distintas se, e somente se, H é elíptica;

C tem uma raiz real e duas raízes complexas se, e somente se, H é hiperbólica.

Então C é dita elíptica, hiperbólica ou parabólica de acordo com H .

Suponha que tem-se também uma forma quadrática Q positiva definida. Esta define uma relação de ortogonalidade: u e v são ortogonais se $Quv = 0$. Uma forma cúbica é dita ortogonal se suas direções hessianas são ortogonais com respeito a Q .

Dada uma forma quadrática Q , pode-se escolher uma mudança de coordenadas lineares h tal que $I = h^*Q$, onde $I(x, y)^2 = x^2 + y^2$. Associado a Q está o operador diferencial $\Delta_Q = (h^*)^{-1}\Delta_I h^*$, onde Δ_I é o laplaciano usual.

Observe que para $Q(x, y)^2 = x^2 + y^2$, $\Delta_Q(Q(x, y)^2) = 4$ e, para qualquer forma linear L , $\Delta_Q(QL) = 8L$.

Dada uma forma cúbica, pode-se formar um feixe de formas cúbicas $\{C + LQ\}$, com L variando no espaço de formas lineares. Existe uma única forma linear L para a qual $\Delta_Q(C + LQ) = 0$ e esta forma cúbica $(C + LQ)$ é chamada a representante harmônica de C com respeito a Q . É claro que a representante harmônica de C com respeito a Q é zero se, e somente se, $C = LQ$, para algum L . Também, $\Delta_Q(C) = 0$ se, e somente se, a hessiana de C é um múltiplo de Q . Conseqüentemente, a representante harmônica de qualquer forma cúbica tem três raízes reais que são distribuídas harmonicamente com respeito a Q . [16]

Pode-se reescrever o que está acima afirmando que ϕ_m tem uma singularidade IV_3 no umbílico se, e somente se, a cúbica intrínseca C tem representante harmônico não nulo com respeito a primeira forma fundamental I .

Em um umbílico, as direções raízes da parte harmônica da cúbica intrínseca (com respeito a primeira forma fundamental) são chamadas direções harmônicas no umbílico.

Lema C.1.1 *Seja $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ um germe de aplicação com uma singularidade IV_3 . A representante harmônica de f é intrínseca: é uma forma k -invariante no espaço tangente a $\mathbb{R}^2$ em 0.*

Demonstração:

Ver [17].

■

Referências Bibliográficas

- [1] AMILIBIA, A. M. *Superficies*. Disponível em: <<http://www.uv.es/montesin/>>. Acesso em: dez. 2009
- [2] AMILIBIA, A. M. *Superficies II*. Disponível em: <<http://www.uv.es/montesin/>>. Acesso em: dez. 2009
- [3] ARNOLD, V. I., GORYUNOV, V. V., LYASHKO, O. V. e VASIL'EV V. A. *Singularity Theory I*. 1 ed. Verlag, Belin, Heidelberg: Springer, 1998.
- [4] BANCHOFF, T., GAFFNEY, T. e MCCRORY, C. *Cusps of Gauss Mappings*. Research Notes in Mathematics, 55, Londres: Pitman, 1982.
- [5] BRUCE, J. W. e GIBLIN, P. J. *Curves and Singularities*. 2 ed. Cambridge: Cambridge University Press, 1992.
- [6] CARMO, M. P. DO *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 2 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- [7] CARMO, M. P. DO *Geometria Riemanniana*. 2 ed. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1988.
- [8] CODESAL, E. S. *Aplicaciones del Contacto con p-esferas al Estudio de Invariantes Conformes*. Universitat de València, 2003. 128 p. Tese (Doutorado).
- [9] DOLCE, O e POMPEO, J. N. *Fundamentos de Matemática Elementar: Geometria Espacial, posição e métrica*. v. 10, 5 ed. São Paulo: Atual, 1993.
- [10] GIBSON, C. G. *Singular Points of Smooth Mappings*. Research Notes in Mathematics. n. 25. Londres: Pitman, 1979.
- [11] GOLUBITSKY, M. e GUILLEMIN, V. *Stable Mappings and Their Singularities*. New York: Springer-Verlag, 1973.
- [12] KREYSZIG, E. *Differential Geometry*. New York: Dover Publications, 1991.

- [13] MATHER, J. *Stability of C^∞ Mappings, IV: Classification of Stable Map-Germs by R -Algebras*. Publ. Math. IHES, n. 37, p.223-248, 1970.
- [14] MATHER, J. *Stability of C^∞ Mappings, V: Transversality*. Adv. Math. n. 4, p. 301-336, 1970.
- [15] MATHER, J. *Stability of C^∞ Mappings, VI: The Nice Dimensions*. Proceedings of Liverpool Singularities Symposium. I, Lectures Notes in Math. n. 192, p. 207-253. Springer, 1971.
- [16] MONTALDI, J. A. *Contact, with Applications to Submanifolds of $\mathbb{R}^n$* . University of Liverpool, 1983. 124 p. Tese (Doutorado).
- [17] MONTALDI, J. A. *Surfaces in 3-Space and Their Contact with Circles*. Journal of Differential Geometry. v. 23, n. 2, p. 109-126, 1986.
- [18] PORTEOUS, I. R. *Probing Singularities*. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. v. 40, p. 395-406, 1983.
- [19] PORTEOUS, I. R. *The Normal Singularities of a Submanifold*. Journal of Differential Geometry. v.5, p. 543-564, 1971.
- [20] PORTEOUS, I. R. *The Normal Singularities of Surfaces in $\mathbb{R}^3$* . Proceedings of Symposia in Pure Mathematics. v. 40, p. 379-393, 1983.
- [21] RUAS, M. A. S. *Germes Finitamente Determinados*. Universidade de São Paulo, 1974. 126 p. Dissertação (Mestrado).
- [22] THOM, R. *Structural Stability and Morphogenesis*. Reading, Massachusetts: Benjamin - Addison Wesley, 1975.
- [23] WALL, C. T. C. *Geometric Properties of Generic Differentiable Manifolds. Geometry and Topology*. Springer Lecture Notes in Math. n. 597, p. 707-774, 1977.
- [24] WHITNEY, H. *On Singularities of Mappings of Euclidean Spaces I*. Annals of Math. n.62, p. 374-410, 1955.