

WILIAN EURÍPEDES VIEIRA

# Mergulhos Isométricos do Plano Hiperbólico em Espaços Euclidianos



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE MATEMÁTICA  
2009

WILIAN EURÍPEDES VIEIRA

# Mergulhos Isométricos do Plano Hiperbólico em Espaços Euclidianos

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

**Área de Concentração:** Matemática.  
**Linha de Pesquisa:** Geometria Diferencial.

**Orientador:** Prof. Dr. Edson Agustini.

UBERLÂNDIA - MG  
2009

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

---

V658m Vieira, Wilian Eurípedes, 1971-  
Mergulhos isométricos do plano hiperbólico em espaços Euclidianos /  
Wilian Eurípedes Vieira. - 2009.  
75 f.

Orientador: Edson Agustini.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática.  
Inclui bibliografia.

1. Geometria diferencial - Teses. 2. Isometria (Matemática) - Teses. 3. Espaços hiperbólicos - Teses. 4. Poincaré, Séries de - Teses. I. Agustini, Edson. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 514.7

---



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA**  
**FACULDADE DE MATEMÁTICA**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA**

Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152  
 Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

**ALUNO:** Wilian Eurípedes Vieira.

**NÚMERO DE MATRÍCULA:** 86191.

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO:** Matemática.

**LINHA DE PESQUISA:** Geometria Diferencial.

**PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA:** Nível Mestrado.

**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:** Mergulhos Isométricos do Plano Hiperbólico em Espaços Euclidianos.

**ORIENTADOR:** Prof. Dr. Edson Agustini.

A dissertação foi **APROVADA**, em reunião pública, realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 02 de março de 2009, às 9:00 horas, com a seguinte Banca Examinadora:

**NOME**

**ASSINATURA**

Prof. Dr. Edson Agustini  
 UFU - Universidade Federal de Uberlândia

  
 \_\_\_\_\_

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Sueli Irene Rodrigues Costa  
 UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas

  
 \_\_\_\_\_

Prof<sup>ª</sup>. Dr<sup>ª</sup>. Dulce Mary de Almeida  
 UFU - Universidade Federal de Uberlândia

  
 \_\_\_\_\_

Uberlândia, 02 de março de 2009.

## Dedicatória

Dedico este trabalho às pessoas que, diretamente ou indiretamente, contribuíram para a realização do mesmo. Aos alunos do mestrado, Turma 2007, amigos fiéis de tantas batalhas e sofrimentos, que tanto me incentivaram a prosseguir. À minha mãe Luzia Pereira da Silva Vieira pelo apoio. À minha querida esposa, Noemi Santos Vieira, que me incentivou muito a voltar a estudar, e que acreditou mais em mim do que eu mesmo. Agradeço ao meu professor e orientador Edson Agustini e à professora Rosana Jafelice pelo incentivo e apoio na hora em que mais precisei. À Deus por me ter dado a oportunidade de estudar mais um pouco e ser feliz. Ao meu amigo Pastor Lael Cristiano de Melo, minha eterna gratidão. Ao corpo docente e discente da Escola Estadual Raul Soares, que acreditaram no meu sonho, minha gratidão e admiração. Enfim, a todos que me incentivaram e acreditaram no meu sonho.

## Agradecimentos

Agradeço à agência de fomento FAPEMIG, pelo apoio dado a Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia e ao corpo docente da Pós-Graduação, em especial ao coordenador Edson Agustini, meu amigo e incentivador.

VIEIRA, W. E. *Mergulhos Isométricos do Plano Hiperbólico em Espaços Euclidianos*. 2009. 75 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

## Resumo

Nesta dissertação apresentamos expressões analíticas para mergulhos isométricos do plano hiperbólico  $(\mathbb{H}^2, ds)$  com a métrica Riemanniana  $ds^2 = dx^2 + \cosh^2(x) dy^2$  nos espaços euclidianos  $\mathbb{R}^6$  e  $\mathbb{S}^8 \subset \mathbb{R}^9$ . Além dos mergulhos isométricos, apresentamos expressões analíticas das isometrias entre os modelos Euclidianos do Disco de Poincaré, Semiplano Superior e o modelo  $(\mathbb{H}^2, ds)$  supracitado. Com isso, torna-se possível mergulhos isométricos de reticulados de pontos do plano hiperbólico em ambientes Euclidianos, o que pode vir a ser bastante útil em Teoria da Informação e Codificação.

*Palavras-chave:* mergulho isométrico, imersão isométrica, isometria, plano hiperbólico, modelo de Poincaré, curvatura Gaussiana.

VIEIRA, W. E. *Isometric Embeddings of the Hyperbolic Plane in Euclidean Spaces*. 2009. 75 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

### Abstract

In this dissertation we present analytic expressions for isometric embeddings of hyperbolic plane  $(\mathbb{H}^2, ds)$  with Riemannian metric  $ds^2 = dx^2 + \cosh^2(x) dy^2$  in Euclidean spaces  $\mathbb{R}^6$  and  $\mathbb{S}^8 \subset \mathbb{R}^9$ . Besides isometric embeddings, we present analytic expressions for isometries between the Euclidean models of the Poincaré disk, Upper Half-Plane and the model  $(\mathbb{H}, ds)$  cited above, for the Plane Hyperbolic Geometry. In this way, it is possible isometrically embed point lattices of hyperbolic plane in Euclidean environments, what can be useful for Coding and Information Theory.

*Key-words:* isometric embedding, isometric Imersion, isometry, hyperbolic plane, Poincaré model, Gaussian curvature.



# Sumário

Resumo	vii
Abstract	viii
Introdução	1
<b>1 Preliminares</b>	<b>2</b>
1.1 Superfícies	2
1.2 Primeira Forma Quadrática	8
1.3 Algumas Transformações Geométricas Importantes	13
1.4 Segunda Forma Quadrática	17
1.5 O Teorema Egregium de Gauss	27
1.6 Superfícies Abstratas	30
<b>2 O Plano Hiperbólico</b>	<b>37</b>
2.1 Isometria entre o Modelo do Semiplano e o Modelo do Disco de Poincaré	38
2.2 Isometria do Plano Hiperbólico $H_k$ no Modelo do Semiplano de Poincaré	44
<b>3 Mergulho Isométrico de <math>\mathbb{H}^2</math> em <math>\mathbb{R}^6</math></b>	<b>47</b>
3.1 A Aplicação $I$	47
3.2 Um Exemplo Simples: Mergulho Isométrico do 4- $HPSK$ em $\mathbb{R}^6$	53
<b>4 Mergulho Isométrico de <math>\mathbb{H}^2</math> em <math>\mathbb{S}^8 \subset \mathbb{R}^9</math></b>	<b>55</b>
4.1 A Aplicação $M$	55
4.2 Um Exemplo Simples: Mergulho Isométrico do 4- $HPSK$ em $\mathbb{S}^8 \subset \mathbb{R}^9$	61
<b>5 Conclusões e Perspectivas Futuras</b>	<b>64</b>
Referências Bibliográficas	65

# Introdução

Em tempos recentes, vários trabalhos tem apontado interessantes direções no estudo de Reticulados e Códigos Corretores de Erros em espaços hiperbólicos, conforme referências [18], [8], [14], [11] e [1]. No entanto, a aparente ausência de uma situação prática em Teoria da Informação e Codificação que possa ser modelada convenientemente por modelos hiperbólicos tem preocupado os pesquisadores dessa área.

A pesquisa sobre mergulhos isométricos de determinadas variedades riemannianas em espaços euclidianos e esféricos é bastante árdua, como pode ser constatada nas referências [13], [7], [12], [6], [9], [17], [16], [15], [5], [4] e [3] e na escassez de artigos recentes sobre o assunto. Em especial, expressões para mergulhos isométricos de espaços hiperbólicos em espaços euclidianos e esféricos não fogem à regra geral. No entanto, para a Teoria da Informação e Codificação envolvendo Geometria Hiperbólica, a passagem do ambiente hiperbólico para o euclidiano e esférico com total controle das propriedades métricas de reticulados hiperbólicos de pontos pode representar uma aplicação imediata de toda a teoria desenvolvida até o presente momento.

Levando-se em conta a grande quantidade de grupos discretos de isometrias no espaço hiperbólico e, conseqüentemente, a grande quantidade de reticulados de pontos (ref. [10]) e, também, o problema dos mergulhos descrito acima, nosso objetivo na presente dissertação foi desenvolver um estudo de mergulhos isométricos do plano hiperbólico em espaços euclidianos e esféricos, tendo por base os artigos [4] e [5]. Mais especificamente, mergulho isométrico de  $\mathbb{H}^2$  (plano hiperbólico) em  $\mathbb{R}^6$ , espaço euclidiano de dimensão 6, e  $\mathbb{S}^8 \subset \mathbb{R}^9$ , espaço esférico de dimensão 8. Além do interesse puramente matemático nesse problema, uma vez que a transferência de reticulados de pontos do ambiente hiperbólico para o ambiente euclidiano seja viável computacionalmente, a comparação entre os reticulados mergulhados de  $\mathbb{H}^2$  e os reticulados de pontos utilizados em sistemas de comunicações digitais torna-se algo possível de ser feito.

A dissertação está dividida do seguinte modo:

Capítulo 1: Preliminares de Geometria Diferencial necessários ao desenvolvimento dos capítulos subseqüentes.

Capítulo 2: Introdução de modelos para o plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  e isometrias entre eles.

Capítulo 3: Desenvolvimento de um mergulho isométrico de  $\mathbb{H}^2$  em  $\mathbb{R}^6$ .

Capítulo 4: Desenvolvimento de uma classe de mergulhos isométricos de  $\mathbb{H}^2$  em  $\mathbb{S}^8 \subset \mathbb{R}^9$ .

Capítulo 5: Algumas conclusões e perspectivas futuras são esboçadas.

Algumas referências bibliográficas.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste capítulo introduziremos as definições e resultados de Geometria Diferencial que constituem a base para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes. O capítulo está subdividido em seções que abordam os tópicos: Superfícies Regulares, Primeira e Segunda Formas Quadráticas, Transformações Geométricas Importantes, Teorema Egregium de Gauss e Superfícies Abstratas. Para tanto, utilizamos a referência [6].

### 1.1 Superfícies

Nesta seção introduzimos as principais definições sobre superfícies regulares no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$  e superfícies abstratas, assim como os primeiros resultados envolvendo tais conceitos. Alguns exemplos úteis para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes também são considerados.

#### SUPERFÍCIES REGULARES

Abaixo segue a definição de superfície regular, que servirá de base para o desenvolvimento das seções seguintes.

**Definição 1.1** *Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  um subconjunto. Dizemos que  $S$  é uma **superfície regular** quando, para todo ponto  $P \in S$ , existem  $U \subset \mathbb{R}^2$  aberto e  $V \subset \mathbb{R}^3$  com  $P \in V$  e  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \cap S \subset \mathbb{R}^3$  que cumpre as seguintes condições:*

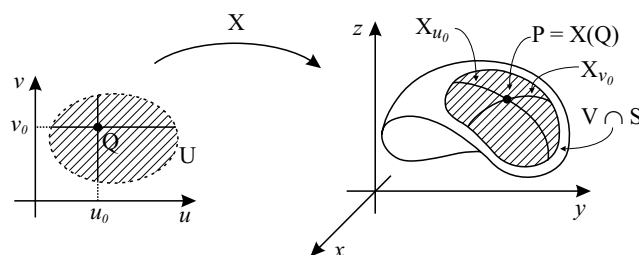
(1)  *$X$  é diferenciável de classe  $C^\infty$  em  $(u, v) \in U$ , isto é,  $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  é tal que  $x, y, z : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  possuem todas as derivadas parciais e elas são contínuas.*

(2)  *$X : U \rightarrow V \cap S$  é um homeomorfismo.*

(3)  *$dX_Q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva para qualquer  $Q = (u, v) \in U$ .*

*Nessas condições dizemos que  $X$  é uma **parametrização** de uma vizinhança de  $P$  ou que  $X$  é um **sistema de coordenadas locais** em uma vizinhança de  $P$ .*

Seja  $Q = (u_0, v_0) \in U \subset \mathbb{R}^2$ . Fazendo  $v = v_0$ , temos a curva  $X_{v_0} : A_1 \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ , definida por  $X_{v_0}(u) = X(u, v_0)$ , sendo  $A_1 = U \cap (\mathbb{R} \times \{v_0\})$ . Fazendo  $u = u_0$  temos a curva  $X_{u_0} : A_2 \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ , definida por  $X_{u_0}(v) = X(u_0, v)$ , sendo  $A_2 = U \cap \mathbb{R} \times \{u_0\}$ . Essas curvas são chamadas de **curvas coordenadas**  $u = u_0$  e  $v = v_0$ , respectivamente.



Sejam  $B = \{e_1, e_2\}$  e  $C = \{f_1, f_2, f_3\}$  bases canônicas de  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ . A matriz da diferencial  $dX_Q$  é dada por

$$[dX_Q] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(Q) & \frac{\partial x}{\partial v}(Q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(Q) & \frac{\partial y}{\partial v}(Q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(Q) & \frac{\partial z}{\partial v}(Q) \end{bmatrix},$$

visto que,

$$\begin{aligned} dX_Q(e_1) &= \left( \frac{\partial x}{\partial u}(Q), \frac{\partial y}{\partial u}(Q), \frac{\partial z}{\partial u}(Q) \right) = \frac{\partial X}{\partial u}(Q) = X_u(Q) \\ dX_Q(e_2) &= \left( \frac{\partial x}{\partial v}(Q), \frac{\partial y}{\partial v}(Q), \frac{\partial z}{\partial v}(Q) \right) = \frac{\partial X}{\partial v}(Q) = X_v(Q). \end{aligned}$$

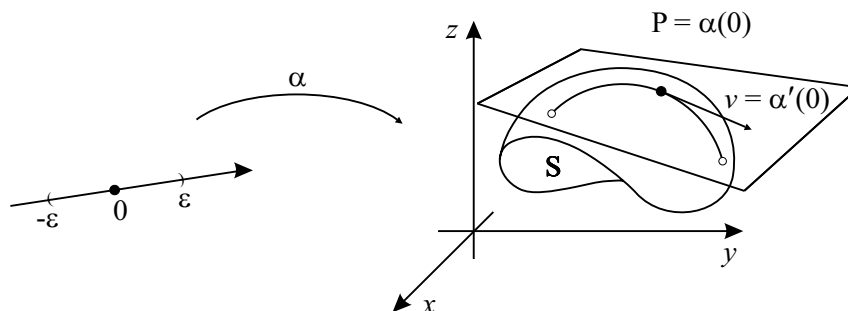
sendo os vetores denotados pelas suas componentes na base  $\{f_1, f_2, f_3\}$ .

Como  $dX_Q$  é injetiva,  $\{X_u(Q), X_v(Q)\}$  é linearmente independente. Logo, podemos considerar um plano paralelo a  $dX_Q(\mathbb{R}^2)$  passando por  $X(Q) = P \in S$ . Notemos que este plano está bem definido e é chamado plano tangente a  $S$  em  $P$  e denotado por  $T_P S$ .

Seja  $S$  uma superfície regular. Um vetor  $v \in \mathbb{R}^3$  é um **vetor tangente** à  $S$  em  $P$ , quando existir uma curva regular

$$\begin{aligned} \alpha : ]-\varepsilon, \varepsilon[ &\longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \alpha(t) \end{aligned}$$

tal que  $\alpha'(0) = v$  e  $\alpha(0) = P$ . Ao conjunto de todos os vetores  $v$  tangentes à  $S$  em  $P$ , denominamos de **plano tangente** à  $S$  em  $P$  e denotamos por  $T_P S$ .



**Proposição 1.1** *Seja  $S$  superfície regular e  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  parametrização local em torno de  $P \in S$ . Seja  $Q \in U$  tal que  $X(Q) = P$ . Então, o subespaço vetorial de dimensão 2,  $dX_Q(\mathbb{R}^2)$ , coincide com o conjunto de vetores  $v$  tangentes à  $S$  em  $P$ , denotado por  $T_P S$ .*

### Exemplo:

Seja  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  (esfera). Temos que  $S$  é regular. Seja

$$\begin{aligned} X_1 : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2}) \end{aligned},$$

sendo  $U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$ .

A aplicação  $X_1$  satisfaz a condição (1) da definição de superfície regular. De fato, sendo  $X_1(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ , temos  $x(u, v) = u$ ,  $y(u, v) = v$  e  $z(u, v) = \sqrt{1 - u^2 - v^2}$ , que são diferenciáveis de classe  $C^\infty$  em  $U$ .

Quanto à condição (2) temos que  $X_1$  é uma bijeção e

$$\begin{aligned} X_1^{-1} : X_1(U) &\longrightarrow U \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y) \end{aligned}$$

é contínua (projeção).

Quanto à condição (3), sendo  $Q = (u, v) \in U$ , temos  $X_u(u, v) = (1, 0, \frac{\partial z}{\partial u}(Q))$  e  $X_v(u, v) = (0, 1, \frac{\partial z}{\partial v}(Q))$  que formam um conjunto linearmente independente.

Tomando outras cinco parametrizações análogas à parametrização acima,

$$X_2(u, v) = (u, v, -\sqrt{1 - u^2 - v^2});$$

$$X_3(u, v) = (u, \sqrt{1 - u^2 - v^2}, v);$$

$$X_4(u, v) = (u, -\sqrt{1 - u^2 - v^2}, v);$$

$$X_5(u, v) = (\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v);$$

$$X_6(u, v) = (-\sqrt{1 - u^2 - v^2}, u, v).$$

cobrimos toda a esfera  $S$  por sistemas de coordenadas locais.

Portanto,  $S$  é uma superfície regular.

As Proposições 1.2 e 1.3 abaixo, encontram-se em [6] e são bastante úteis para a obtenção de superfícies regulares.

**Proposição 1.2** *Seja  $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação diferenciável de classe  $C^\infty$  definida em um conjunto  $U$ , aberto de  $\mathbb{R}^2$ . Então, o gráfico de  $f$ ,  $S = \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in U\}$  é uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ .*

**Definição 1.2** *Sejam  $U$  um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  e  $F : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação diferenciável de classe  $C^\infty$ . Dizemos que  $P \in U$  é um **ponto crítico** de  $F$  quando  $dF_P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  não for sobrejetiva. Nesse caso,  $F(P)$  é chamado **valor crítico** de  $F$ . Um ponto  $A \in \mathbb{R}^m$  que não é valor crítico de  $F$  é chamado de **valor regular**.*

### Observações:

(1) Se  $m > n$ , então todos os pontos  $P \in U$  são pontos críticos.

(2) Se  $A \notin F(U)$ , então  $A$  é valor regular de  $F$ .

(3) Se  $m = 1$ , a noção de ponto crítico coincide com a noção de ponto crítico do Cálculo Diferencial. De fato, se  $P \in U$  é um ponto crítico, então  $dF_P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  não é sobrejetiva.

Logo,

$$dF_P = 0 \Leftrightarrow [dF_P] = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial F}{\partial x_1}(P) & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_n}(P) \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{ccc} 0 & \cdots & 0 \end{array} \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x_1}(P) = \cdots = \frac{\partial F}{\partial x_n}(P) = 0$$

$$\Leftrightarrow P \text{ é ponto crítico (no sentido do Cálculo Diferencial)}$$

**Proposição 1.3** *Sejam  $U$  um conjunto aberto de  $\mathbb{R}^3$ ,  $F : U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável e  $A \in F(U)$  um valor regular de  $F$ . Então,  $F^{-1}(A) = \{P \in U \subset \mathbb{R}^3 : F(P) = A\} \subset U \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular.*

### Exemplo:

Sejam

$$F : \quad \mathbb{R}^3 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R} \quad ; \quad a, b, c > 0.$$

$$(x, y, z) \longmapsto \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1$$

e

$$P = (x_0, y_0, z_0) \in F^{-1}(0) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}. \text{ (hiperbolóide de duas folhas)}$$

Temos,  $dF_P$  não é sobrejetiva se, e somente se,

$$[dF_P] \equiv \left( \frac{\partial F}{\partial x}(P), \frac{\partial F}{\partial y}(P), \frac{\partial F}{\partial z}(P) \right) = \left( \frac{2x_0}{a^2}, \frac{2y_0}{b^2}, -\frac{2z_0}{c^2} \right) = (0, 0, 0),$$

ou seja,  $dF_P$  não é sobrejetiva apenas quando  $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ . Mas  $(0, 0, 0) \notin F^{-1}(0)$ . Logo, pela Proposição 1.3,  $F^{-1}(0)$  é uma superfície regular.

A Proposição 1.4 abaixo é útil em situações nas quais desejamos mostrar que um conjunto não é uma superfície regular. Uma demonstração dessa proposição encontra-se em [6].

**Proposição 1.4** *Seja  $S$  uma superfície regular e  $P \in S$ . Então, existe uma vizinhança aberta  $V \subset S$  tal que  $P \in V$ , de modo que  $V$  é o gráfico de uma função diferenciável que assume uma das seguintes formas:*

$$z = f(x, y), \quad y = h(x, z) \quad \text{ou} \quad x = g(y, z).$$

**Exemplo:**

Seja

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2 + y^2} \right\}. \quad (\text{cone de duas folhas})$$

O conjunto  $S$  não é uma superfície regular.

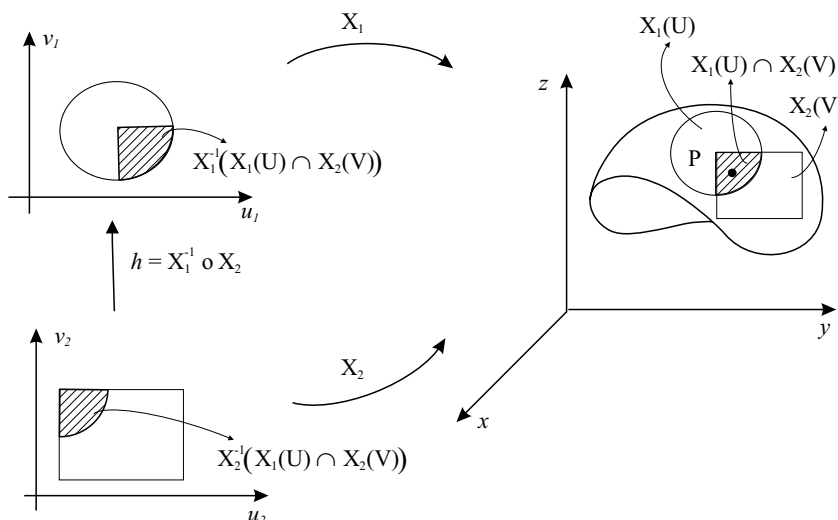
De fato, seja  $P = (0, 0, 0)$ . Se  $S$  fosse superfície regular, pela Proposição 1.4, existiria uma vizinhança aberta  $V \subset S$ ,  $P \in V$  que seria o gráfico de uma função da forma  $z = f(x, y)$ , ou  $y = h(x, z)$  ou  $x = g(y, z)$ . Mas a projeção de  $V$  no plano  $xz$  ou no plano  $yz$  não é uma aplicação injetiva. Logo,  $V$  não pode ser gráfico de  $y = h(x, z)$  ou  $x = g(y, z)$ . Se  $V$  fosse o gráfico de  $z = f(x, y)$ , então, necessariamente,  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ , que não é diferenciável na origem.

Conclusão:  $S$  não é uma superfície regular.

## MUDANÇA DE PARÂMETROS - FUNÇÕES DIFERENCIÁVEIS SOBRE SUPERFÍCIES

Nesta seção estamos interessados em definir aplicações diferenciáveis entre superfícies regulares, que servirá de base para a seção subsequente, na qual definiremos superfícies abstratas.

**Proposição 1.5** (referência [6]) *Sejam  $S$  uma superfície regular e  $P \in S$ . Consideremos dois sistemas de coordenadas locais em torno de  $P$ ,  $X_1 : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  e  $X_2 : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , sendo  $U$  e  $V$  abertos de  $\mathbb{R}^2$ . Então,  $h = X_1^{-1} \circ X_2 : X_2^{-1}(X_1(U) \cap X_2(V)) \rightarrow X_1^{-1}(X_1(U) \cap X_2(V))$  é um difeomorfismo.*



**Definição 1.3** A aplicação  $h$  é chamada de **mudança de parâmetros** ou **mudança de coordenadas**.

**Definição 1.4** Sejam  $S$  uma superfície regular  $F : V \subset S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função,  $V$  aberto de  $S$  e  $P \in V$ . Dizemos que  $F$  é **diferenciável em  $P$**  quando, dada  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  parametrização local em  $P$  tal que  $X(U) \subset V$ , a composição  $F \circ X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  for diferenciável em  $X^{-1}(P)$ . Dizemos que  $F$  é diferenciável em  $V$  quando for **diferenciável** em todo ponto  $P \in V$ .

A definição acima não depende da escolha da parametrização  $X$ .

De fato, seja  $\bar{X} : \bar{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  outra parametrização em  $P$  tal que  $\bar{X}(\bar{U}) \subset V$ . Seja  $W = X(U) \cap \bar{X}(\bar{U})$  em  $V$ . Consideremos a mudança de coordenadas  $h = X^{-1} \circ \bar{X} : \bar{X}^{-1}(W) \rightarrow X^{-1}(W)$ . Logo, sendo  $\bar{X} = X \circ h$ , temos  $F \circ \bar{X} : \bar{U} \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  coincidindo com  $F \circ X \circ h$  em  $\bar{X}^{-1}(W)$ . Como  $F \circ X$  é diferenciável em  $X^{-1}(P)$ ;  $h$  é diferenciável e a composta de aplicações diferenciáveis é diferenciável, concluímos que  $F \circ \bar{X}$  é diferenciável em  $\bar{X}^{-1}(P)$ .

*Afirmção:* Seja  $F : W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável, sendo  $W$  aberto do  $\mathbb{R}^3$ . Seja  $S \subset W$  uma superfície regular. Então,  $F|_S : S \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é diferenciável.

De fato, sejam  $P \in S$  e  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização em torno de  $P$ . Assim,  $F|_S \circ X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  coincide com  $F \circ X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , que é diferenciável.

### Exemplo:

Sejam  $v$  um vetor unitário de  $\mathbb{R}^3$  e  $S$  uma superfície regular. Tomemos

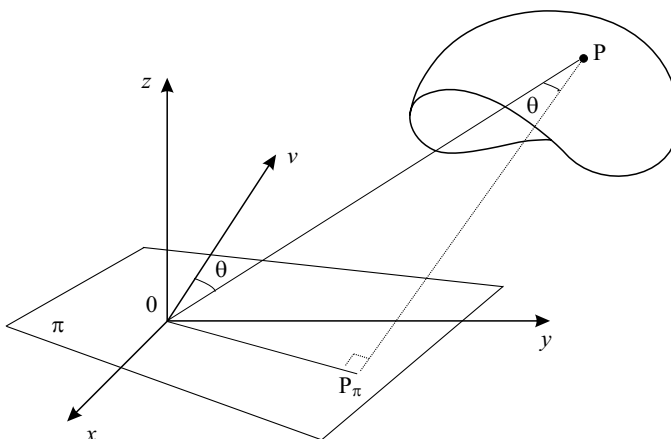
$$\begin{aligned} H : S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto \langle P, v \rangle \end{aligned}$$

sendo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  o símbolo para o produto interno usual do  $\mathbb{R}^3$ . A função  $H$  é diferenciável em  $S$  pois é a restrição à  $S$  de

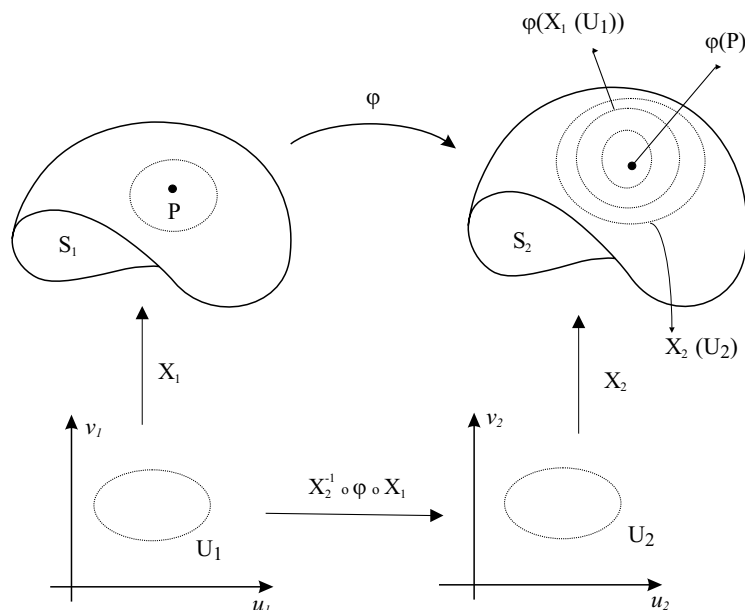
$$\begin{aligned} \bar{H} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto \langle P, v \rangle \end{aligned}$$

que é diferenciável.

Geometricamente (figura abaixo), observemos que: por um lado,  $\cos(\theta) = \frac{\langle P, v \rangle}{|P||v|} = \frac{\langle P, v \rangle}{|P|}$ , sendo  $\theta$  o ângulo entre  $v$  e o vetor do  $\mathbb{R}^3$  determinado por  $P$ . E, por outro lado, do triângulo  $POP_\pi$ , sendo  $P_\pi$  a projeção ortogonal de  $P$  no plano  $\pi$  (plano ortogonal a  $v$  passando pela origem de  $\mathbb{R}^3$ ), temos  $\cos(\theta) = \frac{PP_\pi}{|P|}$ . Logo,  $\frac{PP_\pi}{|P|} = \frac{\langle P, v \rangle}{|P|}$ , ou seja,  $H(P) = \overline{PP_\pi}$ . Portanto,  $H(P)$  é a altura de  $P \in S$  relativa ao plano  $\pi$ .



**Definição 1.5** Dizemos que uma aplicação contínua  $\varphi : V_1 \subset S_1 \rightarrow S_2$ , de um conjunto aberto  $V_1$  de uma superfície regular  $S_1$  em uma superfície regular  $S_2$ , é **diferenciável em**  $P \in V_1$  quando, dadas as parametrizações  $X_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$  e  $X_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2$  com  $P \in X_1(U_1)$  e  $\varphi(X_1(U_1)) \subset X_2(U_2)$ , a aplicação  $X_2^{-1} \circ \varphi \circ X_1 : U_1 \rightarrow U_2$  for diferenciável em  $Q = X_1^{-1}(P)$ . A aplicação  $\varphi$  é **diferenciável** quando for diferenciável em todo ponto de  $V_1$ .



**Observação:** À semelhança da Definição 1.4, a noção de diferenciabilidade acima não depende das parametrizações  $X_1$  e  $X_2$ .

**Definição 1.6** Seja  $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$  uma aplicação diferenciável entre as superfícies regulares  $S_1$  e  $S_2$  e suponha que  $\varphi$  seja bijetiva e a inversa  $\varphi^{-1} : S_2 \rightarrow S_1$  seja também diferenciável. Nessas condições dizemos que  $\varphi$  é uma **difeomorfismo** e as superfícies regulares  $S_1$  e  $S_2$  são ditas **difeomorfas**.

*Afirmção:* Sejam  $S_1$  e  $S_2$  superfícies regulares,  $F : V \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow S_2 \subset \mathbb{R}^3$  uma aplicação diferenciável, sendo  $V$  aberto do  $\mathbb{R}^3$  e  $S_1 \subset V$ . Então,  $F|_{S_1} : S_1 \rightarrow S_2$  é diferenciável.

De fato, sejam  $X_1 : U_1 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$  e  $X_2 : U_2 \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2$  parametrizações em torno de  $P \in S_1$  e de  $F(P) \in S_2$ , respectivamente, tais que  $F(X_1(U_1)) \subset X_2(U_2)$ . Consideremos a aplicação  $X_2^{-1} \circ F \circ X_1 : U_1 \rightarrow U_2$ , que é diferenciável (composta de diferenciáveis). Mas  $X_2^{-1} \circ F \circ X_1$  coincide com  $X_2^{-1} \circ F|_{S_1} \circ X_1$ , e o resultado segue.

### Exemplo:

Sejam

$$S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

(esfera) e

$$S_2 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; a, b, c > 0 \right\}$$

(elipse). Seja

$$F : \begin{array}{ccc} S_1 & \longrightarrow & S_2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (ax, by, cz) \end{array} .$$

Temos que  $F$  é diferenciável, pois é a restrição da aplicação

$$\bar{F} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (ax, by, cz) \end{array}$$

à esfera  $S_1$ , que é diferenciável.



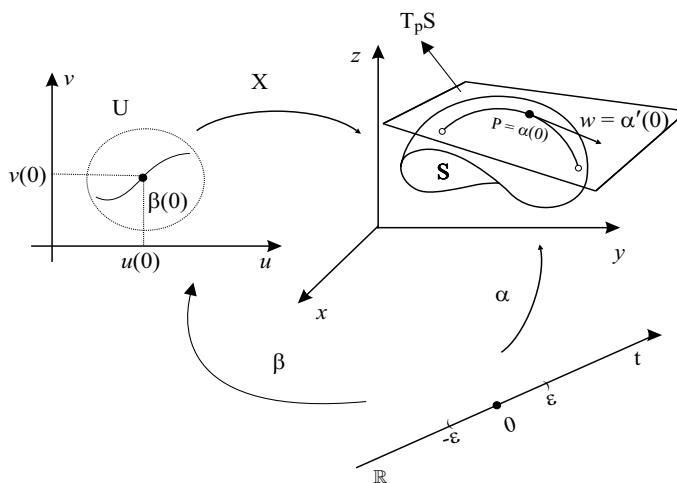
## 1.2 Primeira Forma Quadrática

**Definição 1.7** Denotemos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  o produto interno usual de  $\mathbb{R}^3$ . Seja  $S$  uma superfície regular e  $P \in S$ . O produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induz um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$  no plano tangente  $T_P S \subset \mathbb{R}^3$ . Como  $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$  é uma forma bilinear simétrica em  $T_P S$ , podemos definir a seguinte forma quadrática em  $T_P S$ :

$$I_P : T_P S \longrightarrow \mathbb{R}, \\ w \longmapsto \langle w, w \rangle_P = |w|^2,$$

chamada de **Primeira Forma Quadrática**, ou **Primeira Forma Fundamental** de  $S$  em  $P$ .

Seja  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização em torno de  $P \in S$  e  $Q \in U$  tal que  $X(Q) = P$ . Consideremos  $\{X_u(Q), X_v(Q)\}$  a base associada a  $X$  em  $T_P S$ . Seja  $w \in T_P S$ . Logo, existe uma curva diferenciável  $\alpha : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \subset \mathbb{R} \rightarrow X(U) \subset S \subset \mathbb{R}^3$  tal que  $\alpha'(0) = w$  e  $\alpha(0) = P$ . Logo, podemos escrever  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ , visto que, existe uma curva diferenciável  $\beta = X^{-1} \circ \alpha : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \subset \mathbb{R} \rightarrow U \subset \mathbb{R}^2$  definida por  $\beta(t) = (u(t), v(t))$ , e portanto  $\alpha(t) = X(\beta(t))$ .



Escrevendo então  $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ , segue-se que  $\alpha'(t) = X_u(u(t), v(t))u'(t) + X_v(u(t), v(t))v'(t)$ . Em particular,  $\alpha'(0) = X_u(Q)u'(0) + X_v(Q)v'(0)$ . Assim, observamos que as coordenadas de  $\alpha'(0)$  na base associada a  $X$  em  $T_P S$  é  $(u'(0), v'(0))$ . Portanto:

$$\begin{aligned} I_P(w) &= \langle w, w \rangle_P \\ &= \langle \alpha'(0), \alpha'(0) \rangle_P \\ &= \langle X_u(Q)u'(0) + X_v(Q)v'(0), X_u(Q)u'(0) + X_v(Q)v'(0) \rangle_P \\ &= \langle X_u(Q), X_u(Q) \rangle_P u'(0)^2 + 2 \langle X_u(Q), X_v(Q) \rangle_P u'(0)v'(0) + \langle X_v(Q), X_v(Q) \rangle_P v'(0)^2. \end{aligned}$$

Sejam  $E, F, G : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  funções definidas por:

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \langle X_u(u, v), X_u(u, v) \rangle_{X(u, v)} = |X_u(u, v)|^2, \\ F(u, v) &= \langle X_u(u, v), X_v(u, v) \rangle_{X(u, v)}, \\ G(u, v) &= \langle X_v(u, v), X_v(u, v) \rangle_{X(u, v)} = |X_v(u, v)|^2. \end{aligned}$$

Essas funções são diferenciáveis em  $U$  e são chamadas de **Coefficientes da Primeira Forma Quadrática na parametrização  $X$** . Logo,

$$I_P(w) = E(Q)u'(0)^2 + 2F(Q)u'(0)v'(0) + G(Q)v'(0)^2.$$

De um modo geral,

$$I_{X(u,v)}(\alpha'(t)) = E(u,v)u'(t)^2 + 2F(u,v)u'(t)v'(t) + G(u,v)v'(t)^2,$$

sendo  $\alpha'(t) = X_u(u,v)u'(t) + X_v(u,v)v'(t)$ .

### Exemplos:

(1) Seja  $S$  o plano de  $\mathbb{R}^3$  parametrizado por

$$\begin{aligned} X : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto P_0 + uv_1 + vv_2 \end{aligned}$$

sendo  $P_0 \in \mathbb{R}^3$  e  $\{v_1, v_2\}$  um conjunto de vetores ortonormais do  $\mathbb{R}^3$ . Então, para um ponto arbitrário  $P = X(Q) \in S$  temos que  $\{v_1, v_2\}$  é uma base ortonormal (associada a  $X$ ) em  $T_P S$ . Assim, dado  $w \in T_P S$ ,  $w = \alpha v_1 + \beta v_2$  para algum  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e, portanto:

$$I_P(w) = E(Q)\alpha^2 + 2F(Q)\alpha\beta + G(Q)\beta^2,$$

sendo

$$\begin{aligned} E(Q) &= \langle X_u(Q), X_u(Q) \rangle_P = \langle v_1, v_1 \rangle_P = |v_1|^2 = 1; \\ F(Q) &= \langle X_u(Q), X_v(Q) \rangle_P = \langle v_1, v_2 \rangle_P = 0; \\ G(Q) &= \langle X_v(Q), X_v(Q) \rangle_P = \langle v_2, v_2 \rangle_P = |v_2|^2 = 1. \end{aligned}$$

Assim,

$$I_P(w) = \alpha^2 + \beta^2, \quad \forall w = \alpha v_1 + \beta v_2 \in T_P S.$$

(2) Seja  $S$  o cilindro parametrizado por

$$\begin{aligned} X : \quad ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R} &\longrightarrow S \subset \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto (\cos(u), \sin(u), v) \end{aligned}.$$

Seja  $P_0 = X(u_0, v_0) \in S$ . Temos que

$$\{X_u(u_0, v_0), X_v(u_0, v_0)\} = \{(-\sin(u_0), \cos(u_0), 0), (0, 0, 1)\}$$

é a base associada a  $X$  em  $T_{P_0} S$ .

Seja  $w \in T_{P_0} S$ . Logo,  $w = \alpha X_u(u_0, v_0) + \beta X_v(u_0, v_0)$  para algum  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e

$$I_{P_0}(w) = E(u_0, v_0)\alpha^2 + 2F(u_0, v_0)\alpha\beta + G(u_0, v_0)\beta^2,$$

sendo

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0) &= \langle X_u(u_0, v_0), X_u(u_0, v_0) \rangle_{P_0} \\ &= \langle (-\sin(u_0), \cos(u_0), 0), (-\sin(u_0), \cos(u_0), 0) \rangle_{P_0} \\ &= \sin^2(u_0) + \cos^2(u_0) \\ &= 1 \\ F(u_0, v_0) &= \langle X_u(u_0, v_0), X_v(u_0, v_0) \rangle_{P_0} \\ &= \langle (-\sin(u_0), \cos(u_0), 0), (0, 0, 1) \rangle_{P_0} \\ &= 0 \\ G(u_0, v_0) &= \langle X_v(u_0, v_0), X_v(u_0, v_0) \rangle_{P_0} \\ &= \langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle_{P_0} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Logo,

$$I_{P_0}(w) = \alpha^2 + \beta^2, \forall w = \alpha X_u(u_0, v_0) + \beta X_v(u_0, v_0) \in T_{P_0}S.$$

### COMPRIMENTO DE CURVAS SOBRE SUPERFÍCIES REGULARES

**Definição 1.8** *Sejam  $S$  uma superfície regular e  $\alpha : [0, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow S$  uma curva diferenciável sobre  $S$ , isto é  $\alpha(t) \in S, \forall t \in [0, b]$ . O **comprimento de arco**  $\alpha$  no ponto  $\alpha(0)$  até o ponto  $\alpha(t)$  é dado por*

$$s(t) = \int_0^t |\alpha'(t)| dt = \int_0^t \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'(t))} dt,$$

sendo  $I_{\alpha(t)}(\alpha'(t))$  a Primeira Forma Quadrática de  $S$  em  $\alpha(t)$ .

Em particular, se

$$\begin{aligned} X : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow S \\ (u, v) &\mapsto X(u, v) \end{aligned}$$

é uma parametrização tal que  $\alpha(t) \in X(U), \forall t \in [0, b]$ , então podemos escrever  $\alpha(t) = X(u(t), v(t)), \forall t \in [0, b]$ . Sob estas condições:

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{E(\beta(t))u'(t)^2 + 2F(\beta(t))u'(t)v'(t) + G(\beta(t))v'(t)^2} dt,$$

sendo  $u'(t)$  e  $v'(t)$  coordenadas de  $\alpha'(t)$  na base  $\{X_u(\beta(t)), X_v(\beta(t))\}$  associada a  $X$  em  $T_{\alpha(t)}S$ , e  $\beta(t) = X^{-1} \circ \alpha(t) = (u(t), v(t))$ . Naturalmente, o comprimento de uma curva  $\alpha$  em uma superfície regular  $S$ , quando puder ser calculado via os coeficientes da Primeira Forma Quadrática em uma parametrização  $X$  de uma vizinhança de  $S$  que contém  $\alpha$ , não depende da parametrização  $X$ .

#### Exemplo:

Sejam  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$  e

$$\begin{aligned} X : U = ]0, 2\pi[ \times \mathbb{R} &\rightarrow S \\ (u, v) &\mapsto (\cos(u), \sin(u), v) \end{aligned}$$

uma parametrização.

Seja

$$\begin{aligned} \alpha : ]0, 2\pi[ &\rightarrow S \\ t &\mapsto (\cos(t), \sin(t), 0) \end{aligned}.$$

Logo,  $\alpha(t) \in X(U) \subset S, \forall t$ . Calculemos  $E(\beta(t))$ ,  $F(\beta(t))$  e  $G(\beta(t))$ :

$$E(\beta(t)) = \langle X_u(\beta(t)), X_u(\beta(t)) \rangle = \langle (-\sin(t), \cos(t), 0), (-\sin(t), \cos(t), 0) \rangle_{\alpha(t)} = 1$$

$$F(\beta(t)) = \langle X_u(\beta(t)), X_v(\beta(t)) \rangle = \langle (-\sin(t), \cos(t), 0), (0, 0, 1) \rangle_{\alpha(t)} = 0$$

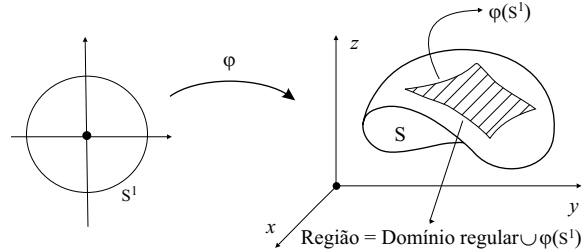
$$G(\beta(t)) = \langle X_v(\beta(t)), X_v(\beta(t)) \rangle = \langle (0, 0, 1), (0, 0, 1) \rangle_{\alpha(t)} = 1$$

Temos  $\alpha'(t) = (-\sin(t), \cos(t), 0)$  (ou  $\alpha'(t) = (1, 0)$  na base associada a  $X$ ). Logo,

$$s(2\pi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{1(1)^2 + 2(0)(1)(0) + (0)^2} dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

## ÁREAS EM SUPERFÍCIES REGULARES

**Definição 1.9** Seja  $S$  superfície regular. Um **domínio regular** de  $S$  é um conjunto aberto e conexo de  $S$  cuja fronteira é a imagem de uma aplicação  $\varphi : S^1 \rightarrow \varphi(S^1) \subset S$ , sendo  $S^1$  o círculo unitário no plano e  $\varphi$  um homeomorfismo diferenciável cuja diferencial não se anula exceto em uma quantidade finita de pontos de  $S^1$ . A reunião de um domínio regular de  $S$  com sua fronteira é chamada de **região** de  $S$ .



**Definição 1.10** Sejam  $S$  uma superfície regular e  $R$  uma região limitada de  $S$ , contida em uma vizinhança coordenada, ou seja,  $R \subset X(U)$ , sendo

$$\begin{aligned} X : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow S \\ (u, v) &\mapsto X(u, v) \end{aligned}$$

uma parametrização.

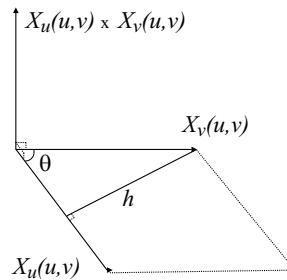
A integral dupla

$$A(R) = \iint_{X^{-1}(R)} |X_u(u, v) \times X_v(u, v)| \, du \, dv$$

chamamos de **área da região**  $R$ .

É possível mostrar que a definição de área dada acima independe da parametrização  $X$ . Uma demonstração desse fato encontra-se em [6].

Consideremos a figura abaixo.



Da figura temos

$$\text{sen}(\theta) = \frac{h}{|X_v(u, v)|} \Rightarrow h = |X_v(u, v)| \text{sen}(\theta), \text{ sendo } \theta \text{ o ângulo entre os vetores } X_u(u, v) \text{ e } X_v(u, v).$$

Logo,

$$\begin{aligned} |X_u(u, v) \times X_v(u, v)| &= |X_u(u, v)| |X_v(u, v)| \text{sen}(\theta) \Rightarrow \\ |X_u(u, v) \times X_v(u, v)|^2 &= |X_u(u, v)|^2 |X_v(u, v)|^2 \text{sen}^2(\theta) \Rightarrow \\ |X_u(u, v) \times X_v(u, v)|^2 &= |X_u(u, v)|^2 |X_v(u, v)|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= |X_u(u, v)|^2 |X_v(u, v)|^2 - \langle X_u, X_v \rangle_{X(u, v)}^2 \Rightarrow \\ |X_u(u, v) \times X_v(u, v)|^2 &= |X_u(u, v)|^2 |X_v(u, v)|^2 - \langle X_u(u, v), X_v(u, v) \rangle_{X(u, v)}^2 \\ &= E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2 \Rightarrow \\ |X_u(u, v) \times X_v(u, v)| &= \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2}. \end{aligned}$$

Então,

$$A(R) = \iint_{X^{-1}(R)} \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2} dudv.$$

**Exemplo:**

Consideremos a superfície regular  $S = X(U)$  sendo  $U = ]0, 2\pi[ \times ]0, 2\pi[$  e

$$X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) \mapsto ((a + r \cos(u)) \cos(v), (a + r \cos(u)) \sin(v), r \sin(u)).$$

Temos que  $S$  é um toro menos um meridiano e um paralelo.

Os coeficientes da Primeira Forma Quadrática em  $(u, v) \in U$  são:

$$E(u, v) = \langle X_u(u, v), X_u(u, v) \rangle_{X(u, v)} = r^2 \\ F(u, v) = \langle X_u(u, v), X_v(u, v) \rangle_{X(u, v)} = 0 \\ G(u, v) = \langle X_v(u, v), X_v(u, v) \rangle_{X(u, v)} = (a + r \cos(u))^2$$

Seja

$$R_\varepsilon = X([\varepsilon, 2\pi - \varepsilon] \times [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon]), \quad 0 < \varepsilon < \pi.$$

Logo,

$$A(R_\varepsilon) = \iint_{X^{-1}(R_\varepsilon)} \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2} dudv \\ = \int_\varepsilon^{2\pi - \varepsilon} \int_\varepsilon^{2\pi - \varepsilon} r(a + r \cos(u)) dudv \\ = r \int_\varepsilon^{2\pi - \varepsilon} \int_\varepsilon^{2\pi - \varepsilon} (a + r \cos(u)) dudv \\ = r \int_\varepsilon^{2\pi - \varepsilon} (au|_\varepsilon^{2\pi - \varepsilon} + r \sin(u)|_\varepsilon^{2\pi - \varepsilon}) dv \\ = r \int_\varepsilon^{2\pi - \varepsilon} (a[2\pi - \varepsilon - \varepsilon] + r[\sin(2\pi - \varepsilon) - \sin(\varepsilon)]) dv \\ = r[a(2\pi - 2\varepsilon) + r[\sin(2\pi - \varepsilon) - \sin(\varepsilon)]](2\pi - 2\varepsilon) \\ = r(2\pi - 2\varepsilon)(a(2\pi - 2\varepsilon) + r[\sin(2\pi - \varepsilon) - \sin(\varepsilon)]).$$

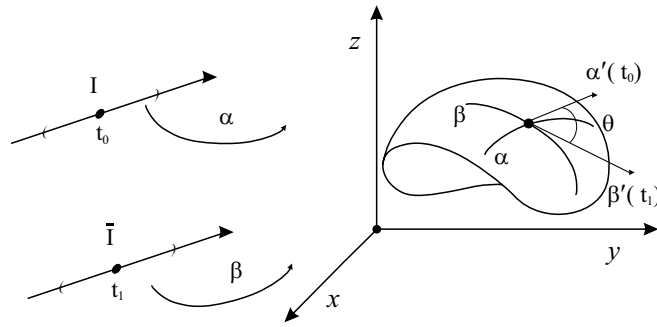
Temos, portanto, que

$$A(S) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(R_\varepsilon) = 2\pi r a(2\pi) = 4\pi^2 r a.$$

## ÂNGULO ENTRE CURVAS COORDENADAS DE UMA SUPERFÍCIE REGULAR

**Definição 1.11** *Sejam  $S$  superfície regular e  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$ ,  $\beta : \bar{I} \subset \mathbb{R} \rightarrow S$  curvas diferenciáveis sobre  $S$  que se intersectam em um ponto  $P = \alpha(t_0) = \beta(t_1)$ . O **ângulo** entre  $\alpha$  e  $\beta$  no ponto  $P$  é definido como sendo o ângulo formado pelas retas paralelas a  $\alpha'(t_0)$  e  $\beta'(t_1)$  passando por  $P$ . A medida  $\theta$ ,  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$  radianos, desse ângulo é dada por:*

$$\cos(\theta) = \frac{|\langle \alpha'(t_0), \beta'(t_1) \rangle_P|}{|\alpha'(t_0)| \cdot |\beta'(t_1)|}.$$



Em particular, se  $\alpha(u) = X(u, v_0)$  e  $\beta(v) = X(u_0, v)$ , sendo

$$\begin{aligned} X : U \subset \mathbb{R}^2 &\rightarrow S \\ (u, v) &\mapsto X(u, v) \end{aligned}$$

uma parametrização em torno de  $P = X(u_0, v_0)$ , então

$$\cos(\theta) = \frac{|\langle X_u(u_0, v_0), X_v(u_0, v_0) \rangle|}{|X_u(u_0, v_0)| \cdot |X_v(u_0, v_0)|} = \frac{|F(u_0, v_0)|}{\sqrt{E(u_0, v_0)G(u_0, v_0)}}.$$

**Observação:** se  $F(u_0, v_0) = 0$ , então  $\theta = 90^\circ$ , ou seja as curvas coordenadas  $X(u, v_0)$  e  $X(u_0, v)$  são ortogonais. Quando  $F(u, v) = 0, \forall (u, v) \in U$ , chamamos a parametrização  $X$  de **parametrização ortogonal**. É possível mostrar que dada uma superfície regular  $S$  e  $P \in S$ , sempre existe uma parametrização em  $P$  que é ortogonal.

### 1.3 Algumas Transformações Geométricas Importantes

Nesta seção introduziremos as isometrias (global e local), as aplicações conformes (global e local), as imersões, as imersões isométricas, os mergulhos e os mergulhos isométricos. Transformações essas imprescindíveis para os próximos capítulos.

#### ISOMETRIAS

**Definição 1.12** Sejam  $S$  e  $\bar{S}$  superfícies regulares. Uma aplicação  $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$  difeomorfismo é dita **isometria** entre  $S$  e  $\bar{S}$  quando  $\langle w_1, w_2 \rangle_P = \langle d\varphi_P(w_1), d\varphi_P(w_2) \rangle_{\varphi(P)}, \forall w_1, w_2 \in T_P S$ . Duas superfícies são **isométricas** quando existir uma isometria entre elas.

**Proposição 1.6** Sejam  $S$  e  $\bar{S}$  superfícies regulares. Um difeomorfismo  $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$  é uma isometria se, e somente se,  $I_P(w) = I_{\varphi(P)}(d\varphi_P(w)), \forall P \in S$  e  $\forall w \in T_P S$ .

*Demonstração:*

Se  $\varphi : S \rightarrow \bar{S}$  é uma isometria entre as superfícies regulares  $S$  e  $\bar{S}$ , então  $I_P(w) = I_{\varphi(P)}(d\varphi_P(w))$  decorre diretamente da definição de isometria.

Por um lado,

$$\begin{aligned} I_P(w_1 + w_2) &= \langle w_1 + w_2, w_1 + w_2 \rangle_P \\ &= \langle w_1, w_2 \rangle_P + \langle w_2, w_2 \rangle_P + 2 \langle w_1, w_2 \rangle_P \\ &= I_P(w_1) + I_P(w_2) + 2 \langle w_1, w_2 \rangle_P \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
I_{\varphi(P)}(d\varphi_P(w_1 + w_2)) &= I_{\varphi(P)}(d\varphi_P(w_1) + d\varphi_P(w_2)) \\
&= \langle d\varphi_P(w_1) + d\varphi_P(w_2), d\varphi_P(w_1) + d\varphi_P(w_2) \rangle_{\varphi(P)} \\
&= \langle d\varphi_P(w_1), d\varphi_P(w_1) \rangle_{\varphi(P)} + \langle d\varphi_P(w_2), d\varphi_P(w_2) \rangle_{\varphi(P)} \\
&\quad + 2 \langle d\varphi_P(w_1), d\varphi_P(w_2) \rangle_{\varphi(P)} \\
&= I_{\varphi(P)}(d\varphi_P(w_1)) + I_{\varphi(P)}(d\varphi_P(w_2)) + 2 \langle d\varphi_P(w_1), d\varphi_P(w_2) \rangle_{\varphi(P)}
\end{aligned}$$

Por outro lado, por hipótese,

$$I_P(w_1 + w_2) = I_{\varphi(P)}(d\varphi_P(w_1 + w_2))$$

e

$$I_P(w_1) = I_{\varphi(P)}(d\varphi_P(w_1)) \text{ e } I_P(w_2) = I_{\varphi(P)}(d\varphi_P(w_2)).$$

Segue então que

$$2 \langle w_1, w_2 \rangle_P = 2 \langle d\varphi_P(w_1), d\varphi_P(w_2) \rangle_{\varphi(P)},$$

ou seja,  $\varphi$  é uma isometria. □

**Definição 1.13** *Sejam  $S$  e  $\bar{S}$  superfícies regulares,  $P \in S$  e  $U \subset S$  uma vizinhança aberta de  $P$  em  $S$ . Dizemos que  $\varphi : U \rightarrow \bar{S}$  é uma **isometria local** em  $P$  quando existir  $V \subset \bar{S}$ , uma vizinhança aberta de  $\varphi(P)$  em  $\bar{S}$  tal que  $\varphi : U \rightarrow V$  seja uma isometria. Quando, para todo  $P \in S$ , existir uma isometria local, então dizemos que  $S$  e  $\bar{S}$  são **localmente isométricas**.*

Nem toda isometria local é isometria global.

**Exemplo:**

Sejam  $S$  o plano dado pela parametrização

$$\begin{aligned}
X : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
(u, v) &\longmapsto (u, v, 0)
\end{aligned}$$

e  $\bar{S}$  o cilindro dado pela parametrização

$$\begin{aligned}
\bar{X} : (]0, 2\pi[ \times \mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
(u, v) &\longmapsto (\cos(u), \sin(u), v)
\end{aligned}$$

Seja

$$\begin{aligned}
\varphi : X(]0, 2\pi[ \times \mathbb{R}) &\longrightarrow \bar{X}(]0, 2\pi[ \times \mathbb{R}) \\
(u, v, 0) &\longmapsto (\cos(u), \sin(u), v)
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que  $I_P(w)$  coincide com  $I_{\varphi(P)}(d\varphi_P(w))$ ,  $\forall P \in X(]0, 2\pi[ \times \mathbb{R})$  e  $\forall w \in T_P S$ .  
Sejam  $w \in T_P S$  e  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$  tal que  $\alpha(0) = P$  e  $\alpha'(0) = w$ .

Como

$$\alpha(t) = X(u(t), v(t)) \Rightarrow \alpha'(t) = X_u(u(t), v(t))u'(t) + X_v(u(t), v(t))v'(t).$$

Em  $t = 0$  temos

$$\alpha'(0) = X_u(Q)u'(0) + X_v(Q)v'(0),$$

sendo  $Q \in (]0, 2\pi[ \times \mathbb{R})$  tal que  $X(Q) = P$ . Mas

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha(t)) &= \varphi(X(u(t), v(t))) = \bar{X}(u(t), v(t)) \Rightarrow \\
d\varphi_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) &= \bar{X}_u(u(t), v(t))u'(t) + \bar{X}_v(u(t), v(t))v'(t).
\end{aligned}$$

Em  $t = 0$  temos

$$d\varphi_P(\alpha'(0)) = \overline{X}_u(Q)u'(0) + \overline{X}_v(Q)v'(0).$$

Concluimos que

$$\alpha'(0) = (u'(0), v'(0)) \text{ na base } \{X_u(Q), X_v(Q)\} \text{ de } T_P S$$

e

$$d\varphi_P(\alpha'(0)) = (u'(0), v'(0)) \text{ na base } \{\overline{X}_u(Q), \overline{X}_v(Q)\} \text{ de } T_{\varphi(P)} \overline{S}.$$

Logo,

$$I_P(w) = I_P(\alpha'(0)) = E(Q)u'(0)^2 + 2F(Q)u'(0)v'(0) + G(Q)v'(0)^2$$

e

$$I_{\varphi(P)}(d\varphi_P(w)) = I_{\varphi(P)}(d\varphi_P(\alpha'(0))) = \overline{E}(Q)u'(0)^2 + 2\overline{F}(Q)u'(0)v'(0) + \overline{G}(Q)v'(0)^2.$$

Mas

$$\begin{aligned} E(Q) &= \langle X_u(Q), X_v(Q) \rangle_P = 1 \\ \overline{E}(Q) &= \langle \overline{X}_u(Q), \overline{X}_v(Q) \rangle_{\varphi(P)} = 1 \\ F(Q) &= \overline{F}(Q) = 0 \\ G(Q) &= \overline{G}(Q) = 1 \end{aligned}$$

Segue então que  $I_P(w) = I_{\varphi(P)}(d\varphi_P(w))$ ,  $\forall P \in X(]0, 2\pi[ \times \mathbb{R})$  e  $w \in T_P S$ , ou seja,  $\varphi$  é uma isometria local.

A isometria local  $\varphi$  não pode ser estendida a uma isometria global, pois não seria difeomorfismo. De fato, o cilindro inteiro não é nem mesmo homeomorfo ao plano inteiro.

**Proposição 1.7** *Se  $S$  e  $\overline{S}$  são superfícies regulares dadas por  $X : U \rightarrow S$  e  $\overline{X} : U \rightarrow \overline{S}$  com  $E = \overline{E}$ ,  $F = \overline{F}$  e  $G = \overline{G}$  em  $U$ , então  $\varphi : \overline{X} \circ X^{-1} : X(U) \rightarrow \overline{S}$  é uma isometria local. Portanto,  $S$  e  $\overline{S}$  são localmente isométricas.*

A demonstração pode ser encontrada no Capítulo 4 de [6] (Proposição 1).

## APLICAÇÕES CONFORMES

**Definição 1.14** *Sejam  $S$  e  $\overline{S}$  superfícies regulares e  $\varphi : S \rightarrow \overline{S}$  um difeomorfismo. Dizemos que  $\varphi$  é uma **aplicação conforme** quando para qualquer  $P \in S$  e  $v_1, v_2 \in T_P S$  tem-se*

$$\langle d\varphi_P(v_1), d\varphi_P(v_2) \rangle_{\varphi(P)} = \lambda^2(P) \langle v_1, v_2 \rangle_P,$$

sendo  $\lambda : S \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável tal que  $\lambda(P) \neq 0$ ,  $\forall P \in S$ . Nessas condições, dizemos que  $S$  e  $\overline{S}$  são **superfícies conformes**.

Seja  $V \subset S$  uma vizinhança aberta de  $P$  em  $S$  e  $\varphi : V \rightarrow \overline{S}$  uma aplicação diferenciável. Quando existe  $\overline{V} \subset \overline{S}$  vizinhança aberta de  $\varphi(P)$  tal que  $\varphi : V \rightarrow \overline{V}$  seja conforme, dizemos que  $\varphi$  é uma **aplicação conforme local em  $P$** . Se, para qualquer  $P \in S$ , existem  $V \subset S$  uma vizinhança aberta de  $P$  e  $\varphi : V \rightarrow \overline{V}$  aplicação conforme local, sendo  $\overline{V} \subset \overline{S}$  vizinhança aberta de  $\varphi(P)$ , então dizemos que  $S$  e  $\overline{S}$  são **localmente conformes**.

**Proposição 1.8** *Uma aplicação conforme  $\varphi : S \rightarrow \overline{S}$  entre as superfícies regulares  $S$  e  $\overline{S}$  preserva ângulos.*



*Demonstração:*

De fato, sejam  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$  e  $\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow S$  curvas parametrizadas regulares sobre  $S$  tais que  $\alpha(0) = \beta(0) = P \in S$ . Tomemos o ângulo  $\theta$  entre  $\alpha$  e  $\beta$  em  $P$ , o qual é definido por:

$$\cos(\theta) = \frac{|\langle \alpha'(0), \beta'(0) \rangle_P|}{|\alpha'(0)| \cdot |\beta'(0)|}.$$

Sejam  $\varphi \circ \alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \bar{S}$ ,  $\varphi \circ \beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \bar{S}$  as imagens de  $\alpha$  e  $\beta$  em  $\bar{S}$ . Logo, as curvas  $\varphi \circ \alpha$  e  $\varphi \circ \beta$  intersectam-se em  $\varphi(\alpha(0)) = \varphi(\beta(0)) = \varphi(P)$  e o ângulo  $\bar{\theta}$  entre  $\varphi \circ \alpha$  e  $\varphi \circ \beta$  é tal que

$$\begin{aligned} \cos(\bar{\theta}) &= \frac{|\langle d\varphi_{(P)}(\alpha'(0)), d\varphi_{(P)}(\beta'(0)) \rangle_{\varphi(P)}|}{|d\varphi_{(P)}(\alpha'(0))| \cdot |d\varphi_{(P)}(\beta'(0))|} \\ &= \frac{|\lambda^2(P) \langle \alpha'(0), \beta'(0) \rangle_P|}{\sqrt{\langle d\varphi_{(P)}(\alpha'(0)), d\varphi_{(P)}(\alpha'(0)) \rangle_{\varphi(P)}} \sqrt{\langle d\varphi_{(P)}(\beta'(0)), d\varphi_{(P)}(\beta'(0)) \rangle_{\varphi(P)}} \\ &= \frac{\lambda^2(P) |\langle \alpha'(0), \beta'(0) \rangle_P|}{\lambda^2(P) |\alpha'(0)| |\beta'(0)|} \\ &= \cos(\theta). \end{aligned}$$

Como  $0 \leq \theta, \bar{\theta} \leq \frac{\pi}{2}$ , temos  $\theta = \bar{\theta}$ , como queríamos.  $\square$

**Observação:** toda isometria é uma aplicação conforme. A recíproca é falsa. Um exemplo é a projeção estereográfica da esfera (menos um ponto) no plano, que é conforme, mas não é isometria.

**Proposição 1.9** *Sejam  $S$  e  $\bar{S}$  superfícies regulares  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  e  $\bar{X} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \bar{S}$  parametrizações. Se existe  $\lambda : X(U) \rightarrow \mathbb{R}$  uma função diferenciável tal que  $\lambda(P) \neq 0$ ,  $\forall P \in X(U)$  e:*

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \lambda^2(X(u, v)) \bar{E}(u, v); \\ F(u, v) &= \lambda^2(X(u, v)) \bar{F}(u, v); \\ G(u, v) &= \lambda^2(X(u, v)) \bar{G}(u, v), \end{aligned}$$

$\forall (u, v) \in U$ , então  $\varphi : \bar{X} \circ X^{-1} : X(U) \subset S \rightarrow \bar{S}$  é uma aplicação conforme local.

## IMERSÃO ISOMÉTRICA - MERGULHO ISOMÉTRICO

**Definição 1.15** *Uma aplicação diferenciável  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , de uma superfície regular  $S$  em  $\mathbb{R}^n$  é uma **imersão** quando a diferencial  $d\varphi_P : T_P S \rightarrow T_{\varphi(P)} \mathbb{R}^n$  é injetiva  $\forall P \in S$ . Se, além disto,  $\langle d\varphi_P(v), d\varphi_P(w) \rangle_{\varphi(P)} = \langle v, w \rangle_P$ ;  $\forall v, w \in T_P S$ , dizemos que  $\varphi$  é uma **imersão isométrica**.*

Note que o primeiro produto interno na relação acima é o produto interno usual de  $\mathbb{R}^n$ , enquanto que o segundo é o induzido de  $\mathbb{R}^3$  sobre  $T_P S$ .

**Definição 1.16** *Seja  $S$  uma superfície regular. Uma aplicação diferenciável  $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um **mergulho** quando  $\varphi$  é uma imersão e um homeomorfismo sobre sua imagem. Quando, além disso,  $\varphi$  é imersão isométrica, dizemos que o mergulho é **mergulho isométrico**.*

**Observação:** uma imersão isométrica pode não ser um mergulho isométrico. Por exemplo, seja  $S$  o plano  $\mathbb{R}^2$ , parametrizado por  $X(u, v) = (u, v, 0)$ ,  $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$ , e

$$\begin{aligned} \varphi : S \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v, 0) &\longmapsto (\cos(u), \sin(u), v) \end{aligned} .$$

Temos que a imagem de  $\varphi$  é o cilindro  $\bar{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ . A aplicação  $\varphi$  é uma imersão isométrica pois nas parametrizações  $X$  do plano e  $\bar{X}(u, v) = (\cos(u), \sin(u), v)$  do cilindro, os coeficientes das Primeiras Formas Quadráticas coincidem (ver exemplo após a Definição 1.13). Mas  $\varphi$  não é mergulho isométrico pois não é injetiva e, portanto, não é homeomorfismo sobre sua imagem.

## 1.4 Segunda Forma Quadrática

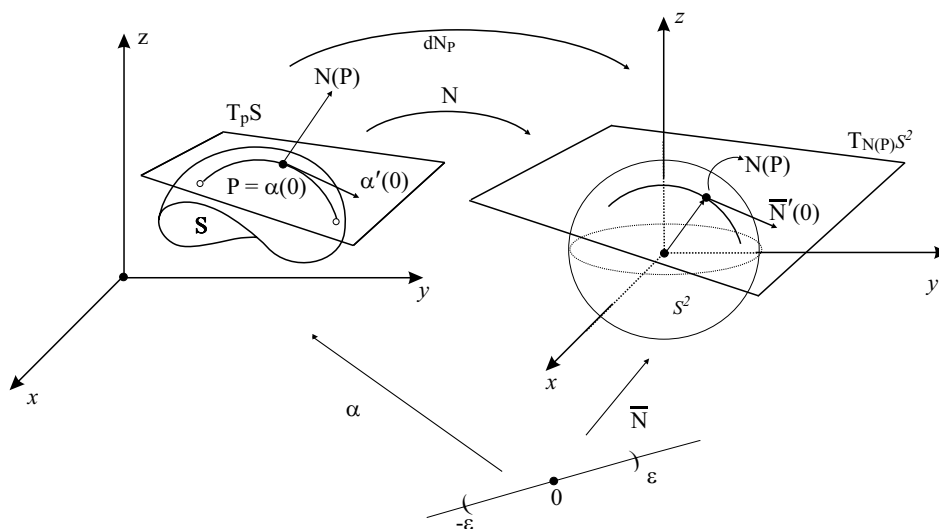
Nesta seção estamos interessados em definir curvatura gaussiana de uma superfície regular. Para tanto, faremos uso de uma nova forma quadrática.

### APLICAÇÃO NORMAL DE GAUSS

A partir dessa seção, consideraremos apenas superfícies  $S$  orientáveis (ver [6], Capítulo 2, página 122), ou seja, superfícies sobre as quais existe um campo diferenciável de vetores normais e unitários.

**Definição 1.17** *Seja  $S$  uma superfície regular orientada e consideremos o campo diferenciável de vetores normais unitários  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ , que define a orientação de  $S$ , sendo  $\mathbb{S}^2$  a esfera com centro na origem de  $\mathbb{R}^3$  e raio 1. A aplicação  $N$  é chamada de **Aplicação Normal de Gauss** de  $S$ .*

Consideremos a diferencial de  $N$  em  $P \in S$ ,  $dN_P : T_P S \rightarrow T_{N(P)} \mathbb{S}^2$ . Visto que  $T_P S$  e  $T_{N(P)} \mathbb{S}^2$  são paralelos, podemos pensar em  $dN_P : T_P S \rightarrow T_P S$  como sendo o operador linear que age da seguinte maneira: para cada curva parametrizada  $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  com  $\alpha(0) = P$ , considere a curva parametrizada na esfera  $\mathbb{S}^2$  definida por  $\bar{N}(t) = N \circ \alpha(t)$ . Logo,  $\bar{N} : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^2$ . Então,  $\bar{N}'(t) = dN_{\alpha(t)}(\alpha'(t))$ ,  $\forall t \in I$ , e portanto,  $\bar{N}'(0) = dN_P(\alpha'(0))$  é um vetor de  $T_P S$  quando indentificamos  $T_P S$  com  $T_{N(P)} \mathbb{S}^2$ . Geometricamente,  $\bar{N}'(0)$  é a taxa de variação instantânea, no ponto  $P$ , da direção do vetor  $N(P)$  ao longo da curva  $\alpha$ .



**Exemplos:**

(1) Seja  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = d, a \neq 0, b \neq 0 \text{ ou } c \neq 0\}$  (um plano). Seja

$$\begin{aligned} N : S \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3 \\ P = (x, y, z) &\longmapsto \frac{(a, b, c)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned}$$

a Aplicação Normal de Gauss de  $S$ . Temos

$$\begin{aligned} dN_P : T_P S &\longrightarrow T_P S \\ v &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

Logo, todo  $v \neq 0 \in T_P S$  é um autovetor de  $dN_P$  associado ao autovalor 0.

(2) Seja  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  a esfera unitária em  $\mathbb{R}^3$ . Considere a aplicação

$$\begin{aligned} N : S \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3 \\ P = (x, y, z) &\longmapsto (x, y, z) \end{aligned}$$

e seja

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow S \\ t &\longmapsto (x(t), y(t), z(t)) \end{aligned}$$

uma curva parametrizada tal que  $\alpha(0) = P$ . Temos que  $\alpha'(t_0) = (x'(0), y'(0), z'(0))$  é o vetor tangente a  $\alpha$  em  $t = 0$  e, portanto, pertence à  $T_P S$ . Mas

$$\begin{aligned} x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) &= 1 \Rightarrow \\ 2x(t)x'(t) + 2y(t)y'(t) + 2z(t)z'(t) &= 0 \Rightarrow \\ \langle (x'(t), y'(t), z'(t)), (x(t), y(t), z(t)) \rangle &= 0. \end{aligned}$$

Logo,  $N$  é um campo de vetores normais unitários em  $S^2$ . Considerando então  $S^2$  orientada por  $N$ , temos que  $N$  é a Aplicação Normal de Gauss de  $S$  e,

$$\begin{aligned} dN_P : T_P S &\longrightarrow T_P S \\ v &\longmapsto v \end{aligned}$$

Logo,  $dN_P(v) = 1v$ , ou seja, todo  $v \neq 0 \in T_P S$  é um autovetor de  $dN_P$  associado ao autovalor 1.

**Proposição 1.10** *A diferencial  $dN_P : T_P S \rightarrow T_P S$  da Aplicação Normal de Gauss  $N : S \rightarrow S^2$  da superfície regular  $S$  no ponto  $P \in S$  é auto-adjunta, ou seja,  $\langle dN_P(v), w \rangle = \langle v, dN_P(w) \rangle$ ,  $\forall v, w \in T_P S$ .*

A demonstração pode ser encontrada em [6], Capítulo 3.

**Definição 1.18** *Sejam  $S$  uma superfície regular e  $P \in S$ . Seja*

$$\begin{aligned} Q : T_P S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \langle dN_P(v), v \rangle_P \end{aligned}$$

a forma quadrática em  $T_P S$  associada ao operador linear auto-adjunto  $dN_P : T_P S \rightarrow T_P S$ . À forma quadrática  $II_P$  em  $T_P S$  dada por:

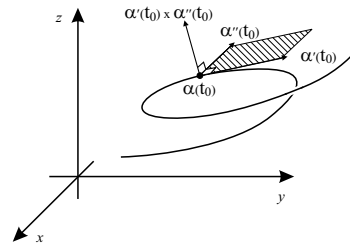
$$\begin{aligned} II_P : T_P S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto -\langle dN_P(v), v \rangle_P = -Q(v) \end{aligned}$$

chamamos de **Segunda Forma Quadrática** ou **Segunda Forma Fundamental** de  $S$  em  $P$ .

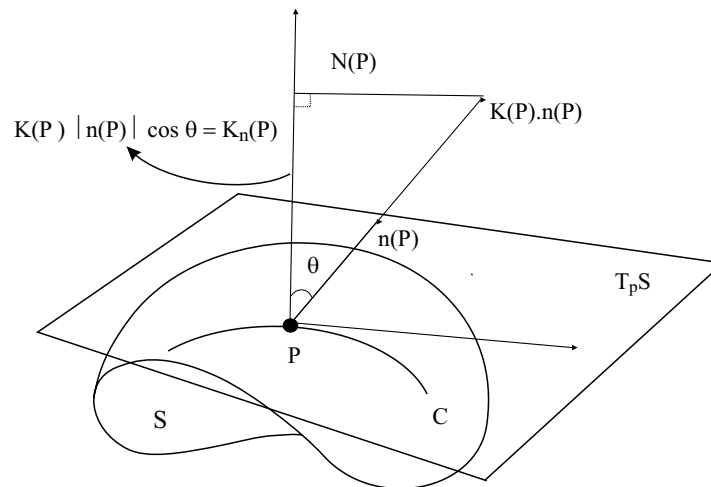
## CURVATURA NORMAL

**Lembrete:** Seja  $C$  uma curva regular em  $S$  passando por  $P \in S$  e  $K(P)$  a curvatura da curva  $C$  em  $P$ . Se  $\alpha : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma parametrização de  $C$ , com  $\alpha(t_0) = P$ , então  $K(P) = K(\alpha(t_0)) = \frac{|\alpha'(t_0) \times \alpha''(t_0)|}{|\alpha'(t_0)|^3}$ . Se  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco, então  $K(P) = K(\alpha(t_0)) = |\alpha''(t_0)|$  e o vetor  $n(P) = n(\alpha(t_0)) = \frac{\alpha''(t_0)}{|\alpha''(t_0)|}$  é chamado de **vetor normal a  $C$  em  $P$** . Logo,

$$\alpha''(t_0) = K(\alpha(t_0)) n(\alpha(t_0)) = K(P)n(P).$$



**Definição 1.19** Seja  $C$  curva regular em uma superfície regular orientada passando por  $P \in S$ . Seja  $N(P)$  o vetor normal e unitário à superfície  $S$  em  $P$  definido pela Aplicação de Gauss de  $S$ . Seja  $\cos(\theta) = \langle N(P), n(P) \rangle$ , sendo  $n(P)$  vetor normal a  $C$  em  $P$  e  $\theta$  a medida do ângulo entre  $N(P)$  e  $n(P)$ . Chamamos  $K_n(P) = K(P) \cos(\theta)$  de **curvatura normal** de  $C \subset S$  em  $P$ , onde  $K(P)$  denota a curvatura da curva  $C$  em  $P$ .



Na verdade, podemos associar curvaturas normais à direções no plano tangente. Esse é o conteúdo da proposição seguinte, devida a Meusnier.

**Proposição 1.11** Todas as curvas de uma superfície regular  $S$  que tem, em um mesmo ponto, a mesma reta tangente têm, nesse ponto, a mesma curvatura normal, ou seja, a curvatura normal de uma curva regular  $C \subset S$  em  $P$  depende, na verdade, de uma direção (dada pela reta tangente) e não da curva  $C$  escolhida.

*Demonstração:*

Sejam  $S$  uma superfície regular,  $P \in S$  e  $C$  uma curva regular em  $S$  passando por  $P$ , parametrizada pelo comprimento de arco, tal que

$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto \alpha(t) \end{aligned}$$

seja uma parametrização de  $C$ . Seja  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  a Aplicação Normal de Gauss de  $S$  e

$$\begin{aligned} dN_P : T_P S &\longrightarrow T_P S \\ v &\longmapsto dN_P(v) \end{aligned} .$$

Considere a curva parametrizada em  $\mathbb{S}^2$  dada por

$$\begin{aligned} \bar{N} : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ t &\longmapsto N(\alpha(t)) \end{aligned}$$

e seja

$$\begin{aligned} II_P : T_P S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto -\langle dN_P(v), v \rangle \end{aligned}$$

a segunda forma quadrática de  $S$  em  $P$ .

Suponhamos que  $0 \in I$  e  $\alpha(0) = P$ . Temos

$$\bar{N}(t) = N(\alpha(t)) \Rightarrow \bar{N}'(t) = dN_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) \Rightarrow \bar{N}'(0) = dN_P(\alpha'(0)).$$

Observamos que

$$\begin{aligned} \langle \bar{N}(t), \alpha'(t) \rangle &= 0 \Rightarrow \\ \langle \bar{N}'(t), \alpha'(t) \rangle + \langle \bar{N}(t), \alpha''(t) \rangle &= 0 \Rightarrow \\ -\langle \bar{N}'(0), \alpha'(0) \rangle &= \langle \bar{N}(0), \alpha''(0) \rangle \Rightarrow \\ -\langle dN_{\alpha(0)}(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle &= \langle N(\alpha(0)), \alpha''(0) \rangle \Rightarrow \\ -\langle dN_P(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle &= \langle N(P), \alpha''(0) \rangle \Rightarrow \\ II_P(\alpha'(0)) &= \langle N(P), \alpha''(0) \rangle = \langle N(P), K(P)n(P) \rangle \end{aligned}$$

(pois  $n(P) = \frac{\alpha''(0)}{|\alpha''(0)|} = \frac{\alpha''(0)}{K(P)} \Rightarrow N(P)K(P) = n(P)$ ; vimos que  $\alpha$  está p.c.a.). Logo,

$$\begin{aligned} II_P(\alpha'(0)) &= K(P) \langle N(P), n(P) \rangle \Rightarrow \\ II_P(\alpha'(0)) &= K(P) \cos(\theta) = K_n(P), \end{aligned}$$

ou seja,  $K_n(P)$  depende apenas de  $\alpha'(0)$ , como queríamos.  $\square$

Sejam  $S$  uma superfície regular,  $P \in S$ ,  $v \in T_P S$ ,  $|v| = 1$  e  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$  a Aplicação Normal de Gauss associada a  $S$ . A intersecção de  $S$  com o plano paralelo a  $N(P)$  e  $v$ , passando por  $P$ , chamamos de **secção normal** de  $S$  em  $P$  na direção de  $v$ .

**Observação:** é possível que a curvatura da secção normal seja nula sem que a secção normal seja uma reta. De fato, isto ocorre em uma superfície obtida pela rotação da curva  $z = y^4$  em torno do eixo  $z$  no ponto  $P = (0, 0, 0)$ . De fato, mostremos que em  $P = (0, 0, 0)$  a diferencial  $dN_P = 0$ . Para isto, observamos que a curvatura da curva  $z = y^4$  em  $P$  é igual a zero. Além disso, como o plano  $xy$  é o plano tangente à superfície em  $P$ , o vetor normal  $N(P)$  é paralelo ao eixo  $Oz$ . Portanto, qualquer secção normal em  $P$  é obtida a partir da curva  $z = y^4$  por uma rotação; logo tem curvatura zero. Segue-se que todas as curvaturas normais são nulas em  $P$  e, assim,  $dN_P = 0$ .

**Proposição 1.12** *Sejam  $S$  superfície regular,  $P \in S$  e  $dN_P : T_P S \rightarrow T_P S$  a diferencial da Aplicação Normal de Gauss de  $S$ . Então, existe uma base ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  em  $T_P S$  tal que  $dN_P(e_1) = -K_1 e_1$  e  $dN_P(e_2) = -K_2 e_2$ , sendo  $K_1 \geq K_2$  o máximo e o mínimo da segunda forma fundamental  $II_P$  restrita ao círculo unitário de  $T_P S$ . Isto é,  $K_1$  e  $K_2$  são os valores máximo e mínimo da curvatura normal de  $S$  em  $P$ .*

A demonstração pode ser encontrada no Apêndice do Capítulo 3 de [6].

**Exemplos:**

(1) Sejam  $S$  a esfera unitária e

$$N : \quad S \quad \longrightarrow \quad \mathbb{S}^2 \\ (x, y, z) \longmapsto (x, y, z)$$

A Aplicação de Gauss de  $S$ . Fixada  $\{e_1, e_2\}$  base ortonormal em  $T_P S$ , temos

$$dN_P(e_1) = 1e_1 \Rightarrow -K_1 = 1 \Rightarrow K_1 = -1 \\ dN_P(e_2) = 1e_2 \Rightarrow -K_2 = 1 \Rightarrow K_2 = -1$$

Assim,

$$II_P(e_1) = -\langle dN_P(e_1), e_1 \rangle_P = -\langle e_1, e_1 \rangle_P = -1 = K_1 = K_n(P) \text{ (na direção de } e_1) \\ II_P(e_2) = -\langle dN_P(e_2), e_2 \rangle_P = -\langle e_2, e_2 \rangle_P = -1 = K_2 = K_n(P) \text{ (na direção de } e_2)$$

**Observação:** Se tomarmos  $S$  orientada por :

$$N : \quad S \quad \longrightarrow \quad \mathbb{S}^2 \\ (x, y, z) \longmapsto (-x, -y, -z)$$

temos

$$dN_P : \quad T_P S \quad \longrightarrow \quad T_P S \\ v \longmapsto -v$$

e, portanto,

$$dN_P(e_1) = -e_1 \Rightarrow -K_1 = -1 \Rightarrow K_1 = 1 = K_n(P) \text{ (direção de } e_1), \\ dN_P(e_2) = -e_2 \Rightarrow -K_2 = -1 \Rightarrow K_2 = 1 = K_n(P) \text{ (direção de } e_2).$$

(2) No cilindro de raio 1,  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1\}$ ,

$$N : \quad S \quad \longrightarrow \quad \mathbb{S}^2, \\ (x, y, z) \longmapsto (x, y, 0)$$

e seja  $\{e_1, e_2\}$  base ortonormal de  $T_P S$  tal que  $e_1$  aponta na direção de um meridiano de  $S$  e  $e_2$  aponta direção de um paralelo de  $S$ . Temos

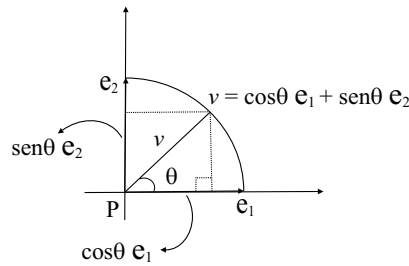
$$dN_P(e_1) = 0e_1 \Rightarrow -K_1 = 0 \Rightarrow K_1 = 0 \Rightarrow K_n(P) = 0 \text{ (na direção de } e_1) \\ dN_P(e_2) = 1e_2 \Rightarrow -K_2 = 1 \Rightarrow K_2 = -1 \Rightarrow K_n(P) = 0 \text{ (na direção de } e_2)$$

As curvaturas normais em outras direções diferentes de  $e_1$  e  $e_2$  terão valores entre  $-1$  e  $0$ .

**Definição 1.20** *Sejam  $K_1$  e  $K_2$  as curvaturas normais máxima e mínima de  $S$  em  $P$ . Chamamos  $K_1$  e  $K_2$  de **curvaturas principais** de  $S$  em  $P$ . As direções ortogonais  $e_1$  e  $e_2$ , autovetores de  $-dN_P$  associados, respectivamente, a  $K_1$  e  $K_2$  chamamos de **direções principais** de  $S$  em  $P$ .*

**Afirmção:** conhecendo-se as curvaturas principais  $K_1$  e  $K_2$  de  $S$  em  $P$  é possível calcular a curvatura normal de  $S$  em  $P$  em qualquer direção dada por  $v \in T_P S$ , com  $|v| = 1$ .

De fato, seja  $\theta$  o ângulo formado entre  $e_1$  e  $v$ , sendo  $\{e_1, e_2\}$  base ortonormal de  $T_P S$ , onde  $e_1$  e  $e_2$  são autovetores de  $dN_P$  associados a  $K_1$  e  $K_2$ , isto é,  $dN_P(e_1) = -K_1 e_1$  e  $dN_P(e_2) = -K_2 e_2$ .



Logo,  $v = \cos(\theta) e_1 + \sin(\theta) e_2$  e, então, a curvatura normal de  $S$  em  $P$  na direção de  $v$  é dada por

$$\begin{aligned}
 K_n(P) &= II_P(v) \\
 &= -\langle dN_P(v), v \rangle \\
 &= -\langle dN_P(\cos(\theta) e_1 + \sin(\theta) e_2), \cos(\theta) e_1 + \sin(\theta) e_2 \rangle_P \\
 &= -\langle -K_1 \cos(\theta) e_1 - K_2 \sin(\theta) e_2, \cos(\theta) e_1 + \sin(\theta) e_2 \rangle_P \\
 &= -(-K_1 \cos^2(\theta) \langle e_1, e_1 \rangle_P - K_2 \sin^2(\theta) \langle e_2, e_2 \rangle_P) \Rightarrow \\
 K_n(P) &= -(-K_1 \cos^2(\theta) - K_2 \sin^2(\theta)) \Rightarrow \\
 K_n(P) &= K_1 \cos^2(\theta) + K_2 \sin^2(\theta) \quad (\text{Fórmula de Euler})
 \end{aligned}$$

## CURVATURA MÉDIA E CURVATURA GAUSSIANA

Sejam  $S$  uma superfície regular,  $P \in S$  e  $\{e_1, e_2\}$  base ortonormal de  $T_P S$  tal que  $dN_P(e_1) = -K_1 e_1$  e  $dN_P(e_2) = -K_2 e_2$ . A matriz de  $dN_P : T_P S \rightarrow T_P S$  na base  $\{e_1, e_2\}$  é

$$[dN_P] = \begin{bmatrix} -K_1 & 0 \\ 0 & -K_2 \end{bmatrix}$$

e o determinante de  $[dN_P]$  e o traço de  $[dN_P]$  não dependem da base escolhida para  $T_P S$  (resultados de Álgebra Linear).

**Definição 1.21** Nas condições acima, ao determinante de  $[dN_P]$  chamamos de **curvatura Gaussiana**  $K$  de  $S$  em  $P$ . À metade do oposto do traço de  $[dN_P]$  chamamos de **curvatura média**  $H$  de  $S$  em  $P$ , ou seja,

$$\begin{aligned}
 K &= K_1 K_2 \\
 H &= \frac{K_1 + K_2}{2}
 \end{aligned}$$

Como  $dN_P$  mede a taxa de variação da direção do vetor  $N(P)$  em uma vizinhança de  $P$ , podemos dizer que a curvatura Gaussiana mede, em um certo sentido, “o quanto uma superfície se afasta de seu plano tangente em uma vizinhança do ponto  $P$ ”. Portanto, parece que a curvatura Gaussiana é algo que depende do espaço ambiente  $\mathbb{R}^3$  no qual  $S$  está inserida, uma vez que envolve uma taxa de variação de um campo de vetores no  $\mathbb{R}^3$ . No entanto, por incrível que possa ser, a curvatura é uma propriedade intrínseca de  $S$ , ou seja, não depende da posição de  $S$  no espaço  $\mathbb{R}^3$ . Este é o conteúdo do Teorema Egregium de Gauss que veremos adiante.

## A APLICAÇÃO NORMAL DE GAUSS EM COORDENADAS LOCAIS

Sejam  $S$  uma superfície regular,  $P \in S$  e

$$\begin{aligned} X : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow X(U) \subset S \cap \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto X(u, v) \end{aligned}$$

parametrização de  $S$  em  $P$ ,  $X(Q) = P$ . Seja

$$\begin{aligned} N : S &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto N(x, y, z) \end{aligned}$$

a Aplicação Normal de Gauss de  $S$  em  $X(U) \subset S$ , podemos escrever  $N(x, y, z) = N(X(u, v)) = \tilde{N}(u, v)$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \tilde{N} : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \\ (u, v) &\longmapsto \tilde{N}(u, v) = N(X(u, v)) \end{aligned}$$

Sejam

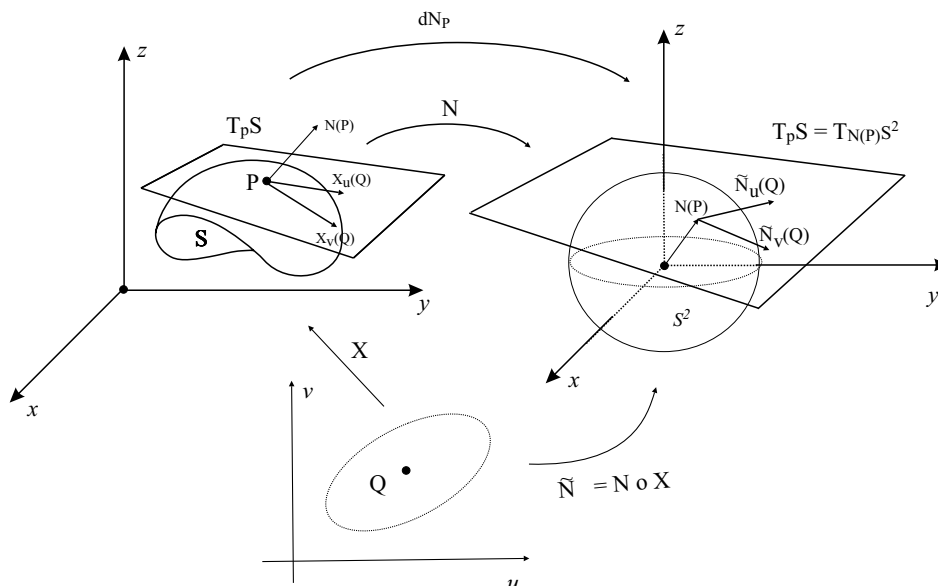
$$\begin{aligned} \alpha : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow S \\ t &\longmapsto \alpha(t) \end{aligned}$$

uma curva parametrizada tal que  $\alpha(0) = P$  e  $\beta(t) = X^{-1} \circ \alpha(t) = (u(t), v(t))$ . Logo,

$$\begin{aligned} \alpha(t) &= X \circ \beta(t) = X(\beta(t)) = X(u(t), v(t)) \Rightarrow \\ \alpha'(t) &= X_u(u(t), v(t))u'(t) + X_v(u(t), v(t))v'(t) \Rightarrow \\ \alpha'(0) &= X_u(Q)u'(0) + X_v(Q)v'(0). \end{aligned}$$

Restringindo  $N$  à curva  $\alpha$  temos

$$\begin{aligned} N(\alpha(t)) &= N(X(u(t), v(t))) = \tilde{N}(u(t), v(t)) \\ dN_{\alpha(t)}(\alpha'(t)) &= \tilde{N}_u(u(t), v(t))u'(t) + \tilde{N}_v(u(t), v(t))v'(t) \Rightarrow \\ dN_P(\alpha'(0)) &= \tilde{N}_u(Q)u'(0) + \tilde{N}_v(Q)v'(0). \end{aligned}$$





Observemos que  $\{\tilde{N}_u(Q), \tilde{N}_v(Q)\}$  e  $\{X_u(Q), X_v(Q)\}$  são bases de  $T_P S$  (aqui estamos identificando  $T_P S$  com  $T_{N(P)} \mathbb{S}^2$ ). Logo, podemos escrever  $\tilde{N}_u(Q)$  e  $\tilde{N}_v(Q)$  como combinação linear dos vetores  $X_u(Q)$  e  $X_v(Q)$ :

$$\begin{aligned}\tilde{N}_u(Q) &= a_{11}X_u(Q) + a_{21}X_v(Q) \\ \tilde{N}_v(Q) &= a_{12}X_u(Q) + a_{22}X_v(Q)\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}dN_P(\alpha'(0)) &= (a_{11}X_u(Q) + a_{21}X_v(Q))u'(0) + (a_{12}X_u(Q) + a_{22}X_v(Q))v'(0) \\ dN_P(\alpha'(0)) &= (a_{11}u'(0) + a_{12}v'(0))X_u(Q) + (a_{21}u'(0) + a_{22}v'(0))X_v(Q)\end{aligned}$$

Na base  $B = \{X_u(Q), X_v(Q)\}$  temos

$$\begin{aligned}dN_P(u'(0), v'(0))_B &= (a_{11}u'(0) + a_{12}v'(0), a_{21}u'(0) + a_{22}v'(0))_B \Rightarrow \\ [dN_P] \begin{bmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{bmatrix}_B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{bmatrix}_B.\end{aligned}$$

Precisamos encontrar  $a_{ij}$ ;  $i, j \in \{1, 2\}$ .

Consideremos a Segunda Forma Quadrática:

$$\begin{aligned}II_P(\alpha'(0)) &= -\langle dN_P(\alpha'(0), \alpha'(0)) \rangle \\ &= -\left\langle \tilde{N}_u(Q)u'(0) + \tilde{N}_v(Q)v'(0), X_u(Q)u'(0) + X_v(Q)v'(0) \right\rangle_P \\ &= -(u'(0))^2 \left\langle \tilde{N}_u, X_u \right\rangle_P(Q) + u'(0)v'(0) \left\langle \tilde{N}_u, X_v \right\rangle_P(Q) + u'(0)v'(0) \left\langle \tilde{N}_v, X_u \right\rangle_P(Q) \\ &\quad + v'(0)^2 \left\langle \tilde{N}_v, X_v \right\rangle_P(Q)\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}\langle \tilde{N}, X_u \rangle(Q) = 0 &\Rightarrow \langle \tilde{N}_v, X_u \rangle(Q) + \langle \tilde{N}, X_{uv} \rangle(Q) = 0, \\ \langle \tilde{N}, X_v \rangle(Q) = 0 &\Rightarrow \langle \tilde{N}_u, X_v \rangle(Q) + \langle \tilde{N}, X_{vu} \rangle(Q) = 0\end{aligned}$$

e como  $X_{uv} = X_{vu}$ , pois  $X$  é diferenciável, temos  $\langle \tilde{N}_v, X_u \rangle(Q) = \langle \tilde{N}_u, X_v \rangle(Q)$ .

Temos também

$$\begin{aligned}\langle \tilde{N}, X_u \rangle(Q) = 0 &\Rightarrow \langle \tilde{N}_u, X_u \rangle(Q) + \langle \tilde{N}, X_{uu} \rangle(Q) = 0 \\ \langle \tilde{N}, X_v \rangle(Q) = 0 &\Rightarrow \langle \tilde{N}_v, X_v \rangle(Q) + \langle \tilde{N}, X_{vv} \rangle(Q) = 0\end{aligned}$$

Logo,

$$II(\alpha'(0)) = \langle \tilde{N}, X_{uu} \rangle(Q) (u'(0))^2 + 2 \langle \tilde{N}, X_{uv} \rangle(Q) u'(0)v'(0) + \langle \tilde{N}, X_{vv} \rangle(Q) (v'(0))^2.$$

Sejam

$$\begin{aligned}e(Q) &= \langle \tilde{N}, X_{uu} \rangle(Q); \\ f(Q) &= \langle \tilde{N}, X_{uv} \rangle(Q); \\ g(Q) &= \langle \tilde{N}, X_{vv} \rangle(Q),\end{aligned}$$

que são chamados de **Coefficientes da Segunda Forma Fundamental** de  $S$  em  $P$  na parametrização  $X$ .

Vimos acima que

$$\begin{aligned}\tilde{N}_u(Q) &= a_{11}X_u(Q) + a_{21}X_v(Q) \\ \tilde{N}_v(Q) &= a_{12}X_u(Q) + a_{22}X_v(Q).\end{aligned}$$

Temos,

$$\begin{aligned}\langle \tilde{N}, X_u \rangle(Q) &= 0 \Rightarrow \\ \langle \tilde{N}_u, X_u \rangle(Q) + \langle \tilde{N}, X_{uu} \rangle(Q) &= 0 \Rightarrow \\ \langle \tilde{N}_u, X_u \rangle(Q) &= -\langle \tilde{N}, X_{uu} \rangle(Q).\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}\langle \tilde{N}_u, X_u \rangle(Q) &= \langle (a_{11}X_u + a_{21}X_v), X_u \rangle(Q) \\ &= a_{11} \langle X_u, X_u \rangle(Q) + a_{21} \langle X_v, X_u \rangle(Q).\end{aligned}$$

Então,

$$-e(Q) = a_{11}E(Q) + a_{21}F(Q).$$

Também

$$\begin{aligned}\langle \tilde{N}, X_v \rangle(Q) &= 0 \Rightarrow \\ \langle \tilde{N}_u, X_v \rangle(Q) + \langle \tilde{N}, X_{uv} \rangle(Q) &= 0 \Rightarrow \\ \langle \tilde{N}_u, X_v \rangle(Q) &= -\langle \tilde{N}, X_{uv} \rangle(Q).\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}\langle \tilde{N}_u, X_v \rangle(Q) &= \langle (a_{11}X_u + a_{21}X_v), X_v \rangle(Q) \\ &= a_{11} \langle X_u, X_v \rangle(Q) + a_{21} \langle X_v, X_v \rangle(Q).\end{aligned}$$

Então,

$$-f(Q) = a_{11}F(Q) + a_{21}G(Q).$$

Também

$$\begin{aligned}\langle \tilde{N}, X_v \rangle(Q) &= 0 \Rightarrow \\ \langle \tilde{N}_v, X_v \rangle(Q) + \langle \tilde{N}, X_{vv} \rangle(Q) &= 0 \Rightarrow \\ \langle \tilde{N}_v, X_v \rangle(Q) &= -\langle \tilde{N}, X_{vv} \rangle(Q).\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}\langle \tilde{N}_v, X_v \rangle(Q) &= \langle (a_{12}X_u + a_{22}X_v), X_v \rangle(Q) \\ &= a_{12} \langle X_u, X_v \rangle(Q) + a_{22} \langle X_v, X_v \rangle(Q).\end{aligned}$$

Então,

$$-g(Q) = a_{12}F(Q) + a_{22}G(Q).$$

Também

$$\begin{aligned}\langle \tilde{N}, X_u \rangle (Q) &= 0 \Rightarrow \\ \langle \tilde{N}_v, X_u \rangle (Q) + \langle \tilde{N}, X_{uv} \rangle (Q) &= 0 \Rightarrow \\ \langle \tilde{N}_v, X_u \rangle (Q) &= -\langle \tilde{N}, X_{uv} \rangle (Q).\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}\langle \tilde{N}_v, X_u \rangle (Q) &= \langle (a_{12}X_u + a_{22}X_v), X_u \rangle (Q) \\ &= a_{12} \langle X_u, X_u \rangle (Q) + a_{22} \langle X_v, X_u \rangle (Q).\end{aligned}$$

Então,

$$-f(Q) = a_{12}E(Q) + a_{22}F(Q).$$

Matricialmente:

$$\begin{aligned}- \begin{bmatrix} e(Q) & f(Q) \\ f(Q) & g(Q) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(Q) & F(Q) \\ F(Q) & G(Q) \end{bmatrix} \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} e(Q) & f(Q) \\ f(Q) & g(Q) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(Q) & F(Q) \\ F(Q) & G(Q) \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} e(Q) & f(Q) \\ f(Q) & g(Q) \end{bmatrix} \frac{1}{(EG-F^2)(Q)} \begin{bmatrix} G(Q) & -F(Q) \\ -F(Q) & E(Q) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{(EG-F^2)(Q)} \begin{bmatrix} (fF - eG)(Q) & (eF - fE)(Q) \\ (gF - fG)(Q) & (fF - gE)(Q) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

**Observação:** temos que a matriz  $A(Q) = \begin{bmatrix} E(Q) & F(Q) \\ F(Q) & G(Q) \end{bmatrix}$  é inversível, pois  $\det A(Q) = EG - F^2 \neq 0$ .

Logo,

$$[dN_P]_B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{fF - eG}{EG - F^2}(Q) & \frac{gF - fG}{EG - F^2}(Q) \\ \frac{eF - fE}{EG - F^2}(Q) & \frac{fF - gE}{EG - F^2}(Q) \end{bmatrix}$$

(Equações de Weingarten)

Em resumo:

$$II_P(a, b) = e(Q)a^2 + 2f(Q)ab + g(Q)b^2,$$

sendo  $(a, b)$  escrito na base  $\{X_u(Q), X_v(Q)\}$ . As curvaturas Gaussiana e Média de  $S$  em  $P$  são dada por

$$\left\{ \begin{array}{l} K(P) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}(Q) \\ H(P) = \frac{-(a_{11} + a_{22})}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \right) (Q), \text{ sendo } X(Q) = P \end{array} \right.$$

Por fim, cabe ressaltar que as curvaturas Gaussiana e Média de  $S$  em  $P$ , quando expressas pelas fórmulas acima, não dependem, naturalmente, da parametrização  $X$  escolhida.

## 1.5 O Teorema Egregium de Gauss

Conforme já comentado na seção anterior, um fato impressionante da Geometria Diferencial é que a curvatura Gaussiana é uma propriedade intrínseca da superfície regular, ou seja, não depende do espaço no qual ela esteja inserida, que é o  $\mathbb{R}^3$ . Para provar isso, é necessário expressar a curvatura Gaussiana apenas em função dos coeficientes da Primeira Forma Quadrática. Esta seção é dedicada a isso.

Sejam  $S$  uma superfície regular e  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow X(U) \subset S$  parametrização de  $S$  em  $P$ . Seja  $Q \in U$  tal que  $X(Q) = P$ . Temos que  $B = \{X_u(Q), X_v(Q), \tilde{N}(Q)\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^3$ , sendo  $\tilde{N}(Q) = N(Q) = N(P)$ ,  $N : S \rightarrow \mathbb{S}^2$ ,  $N(P) = \frac{X_u(Q) \times X_v(Q)}{|X_u(Q) \times X_v(Q)|}$ , a Aplicação Normal de Gauss de  $S$ . Podemos escrever os vetores  $X_{uu}(Q)$ ,  $X_{uv}(Q)$ ,  $X_{vu}(Q)$ ,  $X_{vv}(Q)$ ,  $\tilde{N}_u(Q)$ ,  $\tilde{N}_v(Q)$  na base  $B$ . Omitiremos o ponto  $Q$  para simplificar a notação.

$$\begin{cases} X_{uu} = \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + L_1 \tilde{N} \\ X_{uv} = \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + L_2 \tilde{N} \\ X_{vu} = \Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + \bar{L}_2 \tilde{N} \\ X_{vv} = \Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + L_3 \tilde{N} \\ \tilde{N}_u = a_{11} X_u + a_{21} X_v + 0 \tilde{N} \\ \tilde{N}_v = a_{12} X_u + a_{22} X_v + 0 \tilde{N} \end{cases} \quad (1.1)$$

sendo os coeficientes  $\Gamma_{ij}^k$ ,  $L_i$ ,  $\bar{L}_2$  e  $a_{ij}$ , números reais a determinar.

Já calculamos  $a_{ij}$  (matriz de  $dN_Q$ ):

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}, \quad a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}, \quad a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}, \quad a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}.$$

(Equações de Weingarten)

Temos:

$$\boxed{\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1} \quad , \quad \boxed{\Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2} \quad \text{e} \\ L_2 = \bar{L}_2$$

pois  $X_{uv} = X_{vu}$ .

**Definição 1.22** Nas condições acima, os números reais  $\Gamma_{11}^1(Q)$ ,  $\Gamma_{11}^2(Q)$ ,  $\Gamma_{12}^1(Q)$ ,  $\Gamma_{12}^2(Q)$ ,  $\Gamma_{21}^1(Q)$ ,  $\Gamma_{21}^2(Q)$ ,  $\Gamma_{22}^1(Q)$ ,  $\Gamma_{22}^2(Q)$  são chamados de **Símbolos de Christoffel** de  $S$  em  $P$  na parametrização  $X$ .

Assim, utilizando-se a primeira, segunda terceira e quarta linhas de 1.1 temos

$$\langle X_{uu}, \tilde{N} \rangle = \Gamma_{11}^1 \langle X_u, \tilde{N} \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle X_v, \tilde{N} \rangle + L_1 \langle \tilde{N}, \tilde{N} \rangle \Rightarrow L_1 = e;$$

$$\langle X_{uv}, \tilde{N} \rangle = \Gamma_{12}^1 \langle X_u, \tilde{N} \rangle + \Gamma_{12}^2 \langle X_v, \tilde{N} \rangle + L_2 \langle \tilde{N}, \tilde{N} \rangle \Rightarrow L_2 = f;$$

$$\bar{L}_2 = f;$$

$$\langle X_{vv}, \tilde{N} \rangle = \Gamma_{22}^1 \langle X_u, \tilde{N} \rangle + \Gamma_{22}^2 \langle X_v, \tilde{N} \rangle + L_3 \langle \tilde{N}, \tilde{N} \rangle \Rightarrow L_3 = g.$$

(1) Utilizando-se a primeira linha de 1.1 temos

$$\begin{aligned} \langle X_{uu}, X_u \rangle &= \Gamma_{11}^1 \langle X_u, X_u \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle X_v, X_u \rangle + e \langle \tilde{N}, X_u \rangle \Rightarrow \\ E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 &= \langle X_{uu}, X_u \rangle = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \langle X_u, X_u \rangle}{\partial u} \right) = \frac{1}{2} E_u. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \langle X_{uu}, X_v \rangle &= \Gamma_{11}^1 \langle X_u, X_v \rangle + \Gamma_{11}^2 \langle X_v, X_v \rangle + e \langle \tilde{N}, X_v \rangle \Rightarrow \\ F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 &= \langle X_{uu}, X_v \rangle + \langle X_u, X_{vv} \rangle - \frac{1}{2} (\langle X_{uv}, X_u \rangle + \langle X_u, X_{uv} \rangle) \Rightarrow \\ F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 &= F_u - \frac{1}{2}E_v, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{cases} E\Gamma_{11}^1 + F\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2}E_u \\ F\Gamma_{11}^1 + G\Gamma_{11}^2 = F_u - \frac{1}{2}E_v \end{cases}$$

Como  $\det \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix} \neq 0$ , o sistema é possível e determinado. Logo,

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{\det \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_u & F \\ F_u - \frac{1}{2}E_v & G \end{bmatrix}}{EG - F^2} \quad \text{e} \quad \Gamma_{11}^2 = \frac{\det \begin{bmatrix} E & \frac{1}{2}E_u \\ F & F_u - \frac{1}{2}E_v \end{bmatrix}}{EG - F^2}.$$

(2) Analogamente, utilizando-se segunda linha de 1.1 temos

$$\begin{cases} E\Gamma_{12}^1 + F\Gamma_{12}^2 = \langle X_{uv}, X_u \rangle = \frac{1}{2}E_v \\ F\Gamma_{12}^1 + G\Gamma_{12}^2 = \langle X_{uv}, X_v \rangle = \frac{1}{2}G_u \end{cases}.$$

Logo,

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{\det \begin{bmatrix} \frac{1}{2}E_v & F \\ \frac{1}{2}G_u & G \end{bmatrix}}{EG - F^2} \quad \text{e} \quad \Gamma_{12}^2 = \frac{\det \begin{bmatrix} E & \frac{1}{2}E_v \\ F & \frac{1}{2}G_u \end{bmatrix}}{EG - F^2}.$$

(3) E, por fim, utilizando-se a quarta linha de 1.1 temos

$$\begin{cases} E\Gamma_{22}^1 + F\Gamma_{22}^2 = \langle X_{vv}, X_u \rangle = F_v - \frac{1}{2}G_u \\ F\Gamma_{22}^1 + G\Gamma_{22}^2 = \langle X_{vv}, X_v \rangle = \frac{1}{2}G_v \end{cases}.$$

Logo,

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{\det \begin{bmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u & F \\ \frac{1}{2}G_v & G \end{bmatrix}}{EG - F^2} \quad \text{e} \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{\det \begin{bmatrix} E & F_v - \frac{1}{2}G_u \\ F & \frac{1}{2}G_v \end{bmatrix}}{EG - F^2}.$$

Podemos relacionar os coeficientes da primeira e da segunda formas fundamentais considerando as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} X_{uvv} &= X_{uvu} \\ X_{vvu} &= X_{vuv} \\ \tilde{N}_{uv} &= \tilde{N}_{vu} \end{aligned}$$

Temos,

$$\begin{aligned} X_{uu} &= \Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + e\tilde{N} \Rightarrow \\ X_{uuv} &= (\Gamma_{11}^1)_v X_u + \Gamma_{11}^1 X_{uv} + (\Gamma_{11}^2)_v X_v + \Gamma_{11}^2 X_{vv} + e_v \tilde{N} + e\tilde{N}_v \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} X_{uv} &= \Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + f\tilde{N} \Rightarrow \\ X_{uvu} &= (\Gamma_{12}^1)_u X_u + \Gamma_{12}^1 X_{uu} + (\Gamma_{12}^2)_u X_v + \Gamma_{12}^2 X_{vu} + f_u \tilde{N} + f\tilde{N}_u \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} X_{uuv} &= (\Gamma_{11}^1)_v X_u + \Gamma_{11}^1 (\Gamma_{12}^1 X_u + \Gamma_{12}^2 X_v + f\tilde{N}) + (\Gamma_{11}^2)_v X_v + \Gamma_{11}^2 (\Gamma_{22}^1 X_u + \Gamma_{22}^2 X_v + g\tilde{N}) + \\ &+ e_v \tilde{N} + e(a_{12} X_u + a_{22} X_v), \text{ visto que } L_3 = g \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} X_{uvu} &= (\Gamma_{12}^1)_u X_u + \Gamma_{12}^1 (\Gamma_{11}^1 X_u + \Gamma_{11}^2 X_v + e\tilde{N}) + (\Gamma_{12}^2)_u X_v + \Gamma_{12}^2 (\Gamma_{21}^1 X_u + \Gamma_{21}^2 X_v + f\tilde{N}) + \\ &+ f_u \tilde{N} + f(a_{11} X_u + a_{21} X_v), \text{ visto que } L_1 = e, \bar{L}_2 = f. \end{aligned}$$

De  $X_{uuv} = X_{uvu}$  temos:

(i) Igualando os coeficientes de  $X_u$ :

$$\begin{aligned} (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 + ea_{12} &= (\Gamma_{12}^1)_u + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 + fa_{11} \Rightarrow \\ (\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 &= fa_{11} - ea_{12} \\ &= f \frac{fF - eG}{EG - F^2} - e \frac{gF - fG}{EG - F^2} \\ &= \frac{f^2 F - feG - egF + feG}{EG - F^2} \\ &= F \frac{f^2 - eg}{EG - F^2} \\ &= -FK \end{aligned}$$

Então,

$$-FK = (\Gamma_{12}^1)_u - (\Gamma_{11}^1)_v + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^1 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^1 \quad (1.2)$$

(ii) Igualando os coeficientes de  $X_v$ , temos:

$$\boxed{-EK = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2} \quad (1.3)$$

(iii) Igualando os coeficientes de  $\tilde{N}$ , temos:

$$e_v - f_u = \Gamma_{12}^1 e + (\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) f - \Gamma_{11}^2 g \quad (1.4)$$

Procedendo de modo análogo com  $X_{vuv} = X_{uvu}$  e  $\tilde{N}_{uv} = \tilde{N}_{vu}$  encontramos apenas mais uma equação distinta das equações acima:

$$f_v - g_u = e\Gamma_{22}^1 + f(\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{12}^1) - g(\Gamma_{12}^2) \quad (1.5)$$

As equações 1.2 e 1.3 são chamadas de **Equações de Gauss**. As equações 1.4 e 1.5 são chamadas de **Equações de Mainardi-Codazzi**. As equações 1.2, 1.4 e 1.5 ou 1.3, 1.4 e 1.5 são chamadas de **Equações de Compatibilidade**.

**Proposição 1.13 (Teorema Egregium de Gauss)** *A curvatura Gaussiana de uma superfície regular é invariante por isometrias locais, ou seja, se  $\varphi : V \subset S \rightarrow \bar{S}$  é uma isometria local, sendo  $S$  e  $\bar{S}$  superfícies regulares e  $V$  contido em uma vizinhança coordenada, então  $K(P) = \bar{K}(\varphi(P))$ ,  $\forall P \in V$ , sendo  $K$  e  $\bar{K}$  as curvaturas gaussianas de  $S$  e  $\bar{S}$ , respectivamente.*

*Demonstração:*

Seja

$$\begin{aligned} X : U \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S \\ (u, v) &\longmapsto X(u, v) \end{aligned}$$

parametrização de  $S$  tal que  $X(U) \supset V$ . Como  $\varphi$  é um difeomorfismo sobre sua imagem, temos que  $Y = \varphi \circ X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \bar{S}$  é uma parametrização de  $\bar{S}$ .

Seja  $P \in V$ . Como  $\varphi = Y \circ X^{-1}$ , vimos que os coeficientes da primeira forma fundamental de  $S$  em  $P$  na parametrização  $X$  são os mesmos que os coeficientes da primeira forma quadrática de  $\bar{S}$  em  $\varphi(P)$  na parametrização  $Y$ . Como os Símbolos de Christoffell de  $S$  em  $P$  e  $\bar{S}$  em  $\varphi(P)$  depende apenas dos coeficientes da primeira forma quadrática das superfícies e a curvatura Gaussiana dependem apenas dos Símbolos de Christoffell (fórmula de Gauss), concluímos que  $K(P) = \bar{K}(\varphi(P))$ . Como  $P \in V$  é arbitrário, temos o resultado.  $\square$

**Observações:**

- (1) Alguns livros adotam o seguinte enunciado para o Teorema Egregium: “A curvatura Gaussiana de uma superfície regular depende apenas da Primeira Forma Quadrática da superfície”.
- (2) Superfícies isométricas possuem a mesma curvatura Gaussiana.
- (3) A recíproca do Teorema Egregium é falsa, ou seja existem superfícies que possuem curvaturas Gaussianas iguais, mas não são localmente isométricas.
- (4) Se as curvaturas de duas superfícies forem iguais e constantes, então vale a recíproca do Teorema Egregium, ou seja, as superfícies são localmente isométricas.
- (5) A contra-positiva do Teorema Egregium afirma que se duas superfícies possuem curvaturas Gaussianas diferentes, então elas não são localmente isométricas. Por exemplo, o plano e esfera não são localmente isométricos. Logo, não é possível planificar uma esfera mantendo-se distâncias.

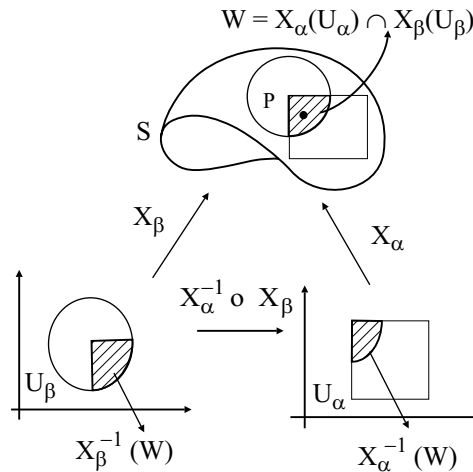
## 1.6 Superfícies Abstratas

Definimos superfície regular como sendo um subconjunto de  $\mathbb{R}^3$  satisfazendo as condições da Definição 1.1. Nosso objetivo nessa seção é generalizar a definição de superfície regular de tal modo que ela não dependa do ambiente euclidiano  $\mathbb{R}^3$ .

**Definição 1.23** *Uma **superfície abstrata** ou **variedade diferenciável de dimensão 2** é um conjunto  $S$  munido de uma família de aplicações bijetivas  $X_\alpha : U_\alpha \rightarrow S$  de conjuntos abertos  $U_\alpha \subset \mathbb{R}^2$  em  $S$  tal que:*

- (1)  $\bigcup_{\alpha} X_\alpha(U_\alpha) = S$ ;
- (2) *Para cada par  $(\alpha, \beta)$  com  $X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ , temos que  $X_\alpha^{-1}(W)$  e  $X_\beta^{-1}(W)$  são conjuntos abertos em  $\mathbb{R}^2$ . Além disso,  $X_\beta^{-1} \circ X_\alpha$  e  $X_\alpha^{-1} \circ X_\beta$  são aplicações diferenciáveis.*

O par  $(U_\alpha, X_\alpha)$  com  $P \in X_\alpha(U_\alpha)$  é chamado uma **parametrização** (ou um sistema de coordenadas) de  $S$  em torno de  $P$ . Dizemos ainda que  $X_\alpha(U_\alpha)$  é uma **vizinhança coordenada** de  $P$ . Quando  $P = X_\alpha(u_\alpha, v_\alpha) \in S$ , dizemos que  $(u_\alpha, v_\alpha)$  são as **coordenadas** de  $P$  neste sistema de coordenadas. A família  $\{U_\alpha, X_\alpha\}$  é chamada uma **estrutura diferenciável** em  $S$ .



Segue-se imediatamente da condição 2 que a “mudança de parâmetros”

$$X_\beta^{-1} \circ X_\alpha : X_\alpha^{-1}(W) \rightarrow X_\beta^{-1}(W)$$

é um difeomorfismo.

### Observações:

(1) Convém, às vezes, acrescentar um axioma à definição acima e dizer que a estrutura diferenciável deve ser máxima em relação às condições (1) e (2). Isto significa que a família  $\{U_\alpha, X_\alpha\}$  não está contida propriamente em nenhuma outra família de vizinhanças coordenadas satisfazendo as condições (1) e (2) da Definição 1.23.

(2) Uma comparação da definição acima com a definição de uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$  mostra que o ponto fundamental na primeira foi incluir a propriedade da mudança de parâmetros na definição de uma superfície abstrata. Como esta foi a propriedade que nos permitiu definir funções diferenciáveis em superfícies regulares do  $\mathbb{R}^3$ , então é natural propor a seguinte definição.

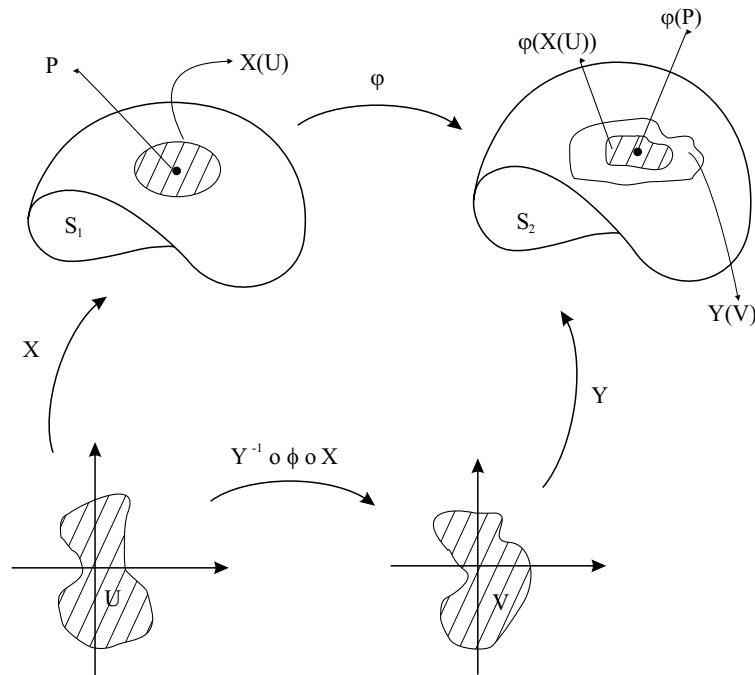
**Definição 1.24** *Sejam  $S_1$  e  $S_2$  superfícies abstratas. Uma aplicação  $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$  é **diferenciável** em  $P \in S_1$  quando dada uma parametrização  $Y : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_2$  em torno de  $\varphi(P)$ , existe uma parametrização  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S_1$  em torno de  $P$  tal que  $\varphi(X(U)) \subset Y(V)$  e a aplicação*

$$Y^{-1} \circ \varphi \circ X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V \subset \mathbb{R}^2 \tag{1.6}$$

*é diferenciável em  $X^{-1}(P)$ . A aplicação  $\varphi$  é diferenciável em  $S_1$  quando for diferenciável em todo  $P \in S_1$ .*

É claro, pela condição (2) da definição de superfícies abstratas, que esta definição não depende das escolhas das parametrizações. A aplicação 1.6 é chamada de expressão de  $\varphi$  nas parametrizações  $X$  e  $Y$ . Assim, faz sentido falar de aplicações diferenciáveis em superfícies abstratas, e já demos o primeiro passo rumo a uma generalização da geometria intrínseca das superfícies abstratas.





### Exemplos:

1) Sejam  $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$  a esfera unitária e

$$A : \quad \mathbb{S}^2 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{S}^2 \\ (x, y, z) \longmapsto (-x, -y, -z)$$

a aplicação antípoda. Seja  $\mathbb{P}^2$  o conjunto obtido de  $\mathbb{S}^2$  identificando  $p$  com  $A(p)$  e consideremos

$$\pi : \quad \mathbb{S}^2 \quad \longrightarrow \quad \mathbb{P}^2 \\ (x, y, z) \longmapsto \{(x, y, z), A(x, y, z)\}$$

Cubramos  $\mathbb{S}^2$  com parametrizações  $X_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{S}^2$  tais que  $X_\alpha(U_\alpha) \cap A(X_\alpha(U_\alpha)) = \emptyset$ . Como  $\mathbb{S}^2$  é uma superfície e  $A$  é um difeomorfismo, segue-se que  $\mathbb{P}^2$  munido da família  $\{U_\alpha, \pi \circ X_\alpha\}$  é uma superfície abstrata, chamada de *plano projetivo real*.

2) Seja  $T \subset \mathbb{R}^3$  um toro de revolução com centro em  $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$  e seja

$$A : \quad T \quad \longrightarrow \quad T \\ (x, y, z) \longmapsto (-x, -y, -z)$$

Seja  $K$  o espaço quociente de  $T$  pela relação de equivalência  $(x, y, z) \sim A(x, y, z)$  e consideremos

$$\pi : \quad T \quad \longrightarrow \quad K \\ (x, y, z) \longmapsto \{(x, y, z), A(x, y, z)\}$$

Cubramos  $T$  com parametrizações  $X_\alpha : U_\alpha \rightarrow T$  tais que  $X_\alpha(U_\alpha) \cap A(X_\alpha(U_\alpha)) = \emptyset$ . Como antes, no exemplo acima, é possível mostrar que  $K$  com a família  $\{U_\alpha, \pi \circ X_\alpha\}$  é uma superfície abstrata, chamada de *Garrafa de Klein*.

Vamos definir o plano tangente à superfície abstrata  $S$  em um ponto  $P \in S$ . Para tanto, recorreremos à noção de plano tangente à uma superfície regular  $S$  em  $P \in S$  no  $\mathbb{R}^3$ . Vimos que para uma superfície regular  $S \subset \mathbb{R}^3$  o plano tangente é o conjunto de vetores tangentes à  $S$  em  $P$ ; lembrando que um vetor tangente a  $S$  em  $P$  é definido como sendo o vetor velocidade em  $P$

de uma curva de  $S$  passando por  $P$ . Assim, precisamos definir o que é o vetor tangente de uma curva em uma superfície abstrata. Como não podemos contar com  $\mathbb{R}^3$ , que é o ambiente natural dos vetores tangentes às curvas no espaço, é necessário buscar uma propriedade característica de tais vetores tangentes que não dependam do  $\mathbb{R}^3$ .

As seguintes considerações irão motivar a definição que será dada abaixo.

Seja  $\gamma : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma curva diferenciável em  $\mathbb{R}^2$ , com  $\gamma(0) = P$ . Escrevamos  $\gamma(t) = (u(t), v(t))$  e  $\gamma'(0) = (u'(0), v'(0)) = w$ . Seja  $g$  uma função diferenciável em uma vizinhança de  $P$ . Podemos restringir  $g$  a  $\gamma$  e escrever a derivada direcional de  $g$  em  $P$  na direção de  $w$ :

$$\frac{d(g \circ \gamma)}{dt}(0) = \frac{\partial g}{\partial u}(P) \cdot u'(0) + \frac{\partial g}{\partial v}(P) \cdot v'(0) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ u'(0) \frac{\partial}{\partial u} + v'(0) \frac{\partial}{\partial v} \right\} g.$$

Assim, a derivada direcional de  $g$  em  $P$  na direção do vetor  $w$  pode ser vista como um operador sobre funções diferenciáveis que depende apenas de  $w$ . Assim, o vetor  $w$  pode “ser visto” como um operador sobre funções. Esta é a propriedade característica dos vetores tangentes que estávamos buscando.

**Definição 1.25** *Seja  $S$  uma superfície abstrata. Uma aplicação diferenciável  $\alpha : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \subset \mathbb{R} \rightarrow S$  é chamada uma curva em  $S$ . Suponha que  $\alpha(0) = P$  e seja  $D$  o conjunto de funções em  $S$  que são diferenciáveis em  $P$ . O **vetor tangente** à curva  $\alpha$  em  $t = 0$  é a função*

$$\begin{aligned} \alpha'(0) : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}. \end{aligned}$$

Um vetor tangente em um ponto  $P \in S$  é o vetor tangente em  $t = 0$  de alguma curva

$$\alpha : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \subset \mathbb{R} \rightarrow S \text{ com } \alpha(0) = P.$$

Escolhendo uma parametrização  $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ , com  $(0, 0) \in U$ , em torno de  $P = X(0, 0)$  podemos expressar a função  $f$  e a curva  $\alpha$  em  $S$  por  $f(X(u, v)) := f(u, v)$  e  $\alpha(t) = X(u(t), v(t)) := (u(t), v(t))$ , respectivamente. Portanto,

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(f(u(t), v(t)))}{dt} \right|_{t=0} = u'(0) \cdot \frac{\partial f}{\partial u}(P) + v'(0) \cdot \frac{\partial f}{\partial v}(P).$$

Isto sugere que, dadas as coordenadas  $(u, v)$  em torno de  $P$ , denotemos por  $\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_0$  o vetor tangente em  $P$ , que aplica a função  $f$  em  $\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_0$ . Um significado análogo será dado ao símbolo  $\left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)_0$ . Observemos que  $\left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_0$  e  $\left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_0$  podem ser interpretados como vetores tangentes às “curvas coordenadas”

$$u \longrightarrow X(u, 0) \text{ e } v \longrightarrow X(0, v),$$

respectivamente.

Segue do que foi visto acima que o conjunto de vetores tangentes em  $P$ , com as operações usuais para funções, é um espaço vetorial bidimensional  $T_P S$  chamado de **espaço tangente** de  $S$  em  $P$ . Também é claro que a escolha de uma parametrização  $X : U \rightarrow S$  em torno de  $P$  determina uma base associada  $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial u}\right)_q, \left(\frac{\partial}{\partial v}\right)_q \right\}$  de  $T_P S$  para todo  $q \in U$ .

Com a noção de espaço tangente, podemos estender às superfícies abstratas a definição de diferencial.

**Definição 1.26** *Sejam  $S_1$  e  $S_2$  superfícies abstratas e seja  $\varphi : S_1 \rightarrow S_2$  uma aplicação diferenciável. Para cada  $w \in T_P S_1$ , considere a curva diferenciável  $\alpha : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \subset \mathbb{R} \rightarrow S_1$ , com  $\alpha(0) = P$ ,  $\alpha'(0) = w$ . Faça  $\beta = \varphi \circ \alpha$ . A aplicação  $d\varphi_P : T_P S_1 \rightarrow T_{\varphi(P)} S_2$ , dada por  $d\varphi_P(w) = \beta'(0)$  é uma aplicação linear bem definida, chamada de **diferencial** de  $\varphi$  em  $p$ .*

Estamos agora prontos para dar o passo final em nossa generalização da geometria intrínseca.

**Definição 1.27** Uma *variedade Riemanniana de dimensão 2* é uma superfície abstrata  $S$  munida de uma escolha de um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$  em cada  $T_P S$ ,  $P \in S$ , que varia diferenciavelmente com  $P$  no seguinte sentido. Para alguma (logo, para todas, devido à definição de superfície abstrata) parametrização  $X : U \rightarrow S$  em torno de  $P$ , as funções

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle_{X(u,v)} \\ F(u, v) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle_{X(u,v)} \\ G(u, v) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle_{X(u,v)} \end{aligned}$$

são funções diferenciáveis em  $U$ . O produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$  é, freqüentemente, chamado de **métrica Riemanniana** em  $S$ , que também é indicada por  $ds$ , sendo  $ds^2 = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) dudv + G(u, v) dv^2$ .

Com as definições acima fica simples estender às variedades riemanianas  $S$  de dimensão 2 as noções da geometria intrínseca. Com efeito, a partir das funções  $E, F$  e  $G$  definimos os Símbolos de Christoffel para  $S$  pelo Sistema 1.1. Como todas as noções da geometria intrínseca foram definidas em torno dos Símbolos de Christoffel, elas podem agora ser definidas em  $S$ . A curvatura Gaussiana de  $S$  pode ser definida pela Equação de Gauss 1.3. Também as definições de isometria, aplicação conforme, imersão, imersão isométrica, mergulho e mergulho isométrico podem ser estendidas no contexto de variedades Riemannianas.

**Exemplo:** O Toro Plano. (ref. [6], pág. 521)

Consideremos a aplicação translação

$$\begin{aligned} T_{m,n} : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (x + m, y + n) \end{aligned} \text{ ,}$$

sendo  $m$  e  $n$  inteiros. Definamos a relação de equivalência em  $\mathbb{R}^2$  dada por  $(x, y) \sim (x_1, y_1)$  quando existem inteiros  $m$  e  $n$  tais que  $T_{m,n}(x, y) = (x_1, y_1)$ . Seja  $T = \mathbb{R}^2 / \sim$  o espaço quociente de  $\mathbb{R}^2$  por esta relação de equivalência, e seja  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T$  a projeção natural  $\pi(x, y) = \{T_{m,n}(x, y) : m, n \in \mathbb{Z}\}$ . Assim, em cada quadrado de vértices com coordenadas inteiras e aberto em dois lados adjacentes, existe apenas um representante de um elemento de  $T$ , e  $T$  pode ser pensado como um “quadrado com os lados opostos identificados” (figura abaixo). Notemos que todos os pontos de  $\mathbb{R}^2$  em uma mesma classe de equivalência representam o mesmo ponto  $P$  em  $T$ .

Seja  $i_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma família de parametrizações de  $\mathbb{R}^2$ , sendo  $i_\alpha$  a aplicação identidade, tal que  $U_\alpha \cap T_{m,n}(U_\alpha) = \emptyset$  para quaisquer  $m$  e  $n$  inteiros. Como  $T_{m,n}$  é um difeomorfismo, é fácil verificar que a família  $(U_\alpha, \pi \circ i_\alpha)$  é uma estrutura diferenciável para  $T$ . O conjunto  $T$  é chamado um **toro** (diferenciável). Segue-se da própria definição de estrutura diferenciável em  $T$  que  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T$  é uma aplicação diferenciável e um difeomorfismo local (a construção feita na figura abaixo indica que  $T$  é difeomorfo ao toro usual em  $\mathbb{R}^3$ ).

Notemos que  $T_{m,n}$  é uma isometria de  $\mathbb{R}^2$  e introduzimos uma métrica Riemanniana em  $T$  da seguinte maneira. Sejam  $P \in T$  e  $v \in T_P T$ . Sejam  $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}^2$  e  $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^2$  tais que  $\pi(Q_1) = \pi(Q_2) = P$  e  $d\pi_{Q_1}(w_1) = d\pi_{Q_2}(w_2) = v$ . Então,  $Q_1 \sim Q_2$ . Logo, existe  $T_{m,n}$  tal que  $T_{m,n}(Q_1) = Q_2$  e  $d(T_{m,n})_{Q_1}(w_1) = w_2$ . Como  $T_{m,n}$  é uma isometria,  $|w_1| = |w_2|$ . Agora,

definamos o comprimento de  $v$  em  $T_P T$  por  $|v| = |d\pi_Q(w_1)| = |w_1|$ . Tal definição dá origem a um produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$  em  $T_P T$  para cada  $P \in T$ . Como este é essencialmente o produto interno usual do  $\mathbb{R}^2$  e  $\pi$  é um difeomorfismo local,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$  varia diferencialmente com  $P$ .

Observemos que os coeficientes da Primeira Forma Quadrática de  $T$ , em qualquer uma das parametrizações da família  $\{U_\alpha, \pi \circ i_\alpha\}$ , são  $E = G = 1, F = 0$ . Assim, este toro se comporta localmente como um espaço euclidiano. Por exemplo, a sua curvatura Gaussiana é identicamente nula. Isto justifica o nome “toro plano”, que usualmente é dado a  $T$  munido do produto interno que acabamos de descrever.

Evidentemente o toro plano não pode ser isometricamente imerso em  $\mathbb{R}^3$ , pois por compacidade, ele teria um ponto com curvatura positiva. No entanto, ele pode ser imerso isometricamente em  $\mathbb{R}^4$ .

De fato, seja

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y) \mapsto \frac{1}{2\pi}(\cos(2\pi x), \sin(2\pi x), \cos(2\pi y), \sin(2\pi y))$$

Como  $F(x+m, y+n) = F(x, y)$  para quaisquer  $m$  e  $n$  inteiros, podemos definir uma aplicação

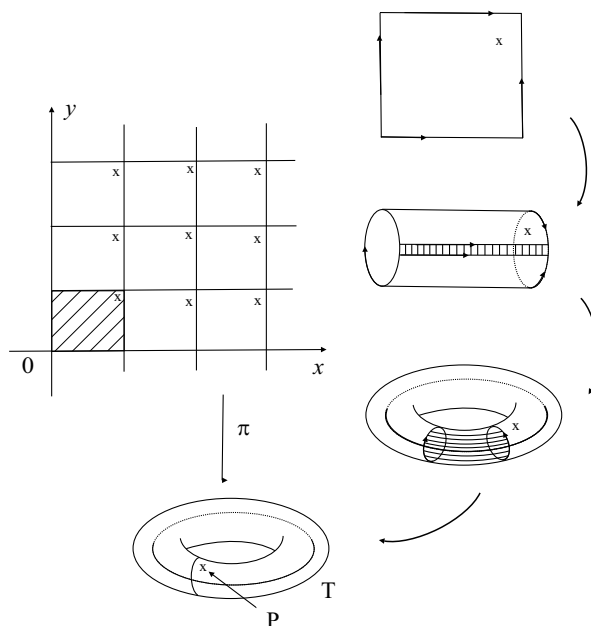
$$\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}^4 \\ P \mapsto F(Q)$$

onde  $Q \in \pi^{-1}(P)$ . É claro que  $\varphi \circ \pi = F$  e, como  $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow T$  é um difeomorfismo local,  $\varphi$  é diferenciável. Além disto, o posto de  $d\varphi$  é igual ao posto de  $dF$  que, por sua vez, verifica-se facilmente, é igual a 2. Assim,  $\varphi$  é uma imersão. Para ver que a imersão é isométrica, observamos primeiro que se  $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$  são vetores da base canônica de  $\mathbb{R}^2$ , os vetores  $d\pi_Q(e_1) = f_1, d\pi_Q(e_2) = f_2, Q \in \mathbb{R}^2$ , formam uma base para  $T_{\pi(Q)}T$ . Pela definição do produto interno em  $T$ ,  $\langle f_i, f_j \rangle = \langle e_i, e_j \rangle, i, j = 1, 2$ . Em seguida, calculamos

$$\frac{\partial F}{\partial x} = dF(e_1) = (-\sin(2\pi x), \cos(2\pi x), 0, 0) \\ \frac{\partial F}{\partial y} = dF(e_2) = (0, 0, -\sin(2\pi y), \cos(2\pi y))$$

e obtemos que

$$\langle dF(e_i), dF(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \langle f_i, f_j \rangle.$$



Assim,

$$\langle d\varphi(f_i), d\varphi(f_j) \rangle = \langle d\varphi(d\pi(e_i)), d\varphi(d\pi(e_j)) \rangle = \langle f_i, f_j \rangle.$$

Segue-se que  $\varphi$  é uma imersão isométrica, como havíamos afirmado.

Além disso,  $\varphi : T \rightarrow \mathbb{R}^4$  é injetiva e um homeomorfismo sobre sua imagem. Assim sendo,  $\varphi$  é um mergulho isométrico.

# Capítulo 2

## O Plano Hiperbólico

Apresentamos neste capítulo três modelos para o plano hiperbólico e isometrias entre eles, possibilitando a passagem de um modelo para o outro. As isometrias construídas aqui não são muito comuns na literatura matemática especializada da área e, por esse motivo, esperamos que sejam uma boa contribuição para estudos relacionados à Geometria Hiperbólica. Tendo em vista que nosso principal objetivo nessa dissertação é desenvolver mergulhos isométricos envolvendo o plano hiperbólico, apresentamos a definição formal do plano hiperbólico.

**Definição 2.1** *Uma variedade riemanniana  $H$  de dimensão 2 é chamada de **plano hiperbólico** quando a métrica riemanniana  $ds$  introduzida em  $H$  faz com que a curvatura Gaussiana de  $H$  seja constante e negativa.*

**Observação:** como visto na definição de variedade Riemanniana de dimensão 2, a notação  $ds$  é proveniente da expressão  $ds^2 = E(u, v) du^2 + 2F(u, v) dudv + G(u, v) dv^2$ , que é uma maneira simplificada de informar que na variedade riemanniana  $H$  os coeficientes da Primeira Forma Quadrática são  $E(u, v)$ ,  $F(u, v)$  e  $G(u, v)$ .

**Exemplo:** Isometria entre planos hiperbólicos. (referência [6])

Seja  $\mathbb{R}^2 = \{(u, v) : u, v \in \mathbb{R}\}$  e definamos uma métrica Riemanniana  $ds$  em  $\mathbb{R}^2$  dada por  $ds^2 = du^2 + e^{2u} dv^2$ , ou seja, sendo  $P = (u, v)$ ,

$$\begin{aligned} E(u, v) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle_P = 1; \\ F(u, v) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle_P = 0; \\ G(u, v) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle_P = e^{2u}. \end{aligned}$$

O plano  $\mathbb{R}^2$  munido deste produto interno é uma variedade Riemanniana. A geometria desse plano é diferente da geometria usual de  $\mathbb{R}^2$ . Por exemplo, sua curvatura pode ser calculada utilizando-se a Equação de Gauss 1.3 e é constante e igual a  $-1$ . Portanto pela definição acima, trata-se de um plano hiperbólico  $H$ .

Seja  $H_s = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  e definamos a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : H &\longrightarrow H_s \\ (u, v) &\longmapsto (x, y) = (v, e^{-u}) \end{aligned} .$$

Temos que  $\phi$  é diferenciável pois suas funções coordenadas são diferenciáveis e como  $y > 0$ , temos que  $\phi^{-1}(x, y) = (-\ln(y), x)$  é diferenciável (pois suas funções coordenadas são diferenciáveis). Assim,  $\phi$  é um difeomorfismo, e podemos introduzir um produto interno em  $H_s$  fazendo

$$\langle d\phi_P(w_1), d\phi_P(w_2) \rangle_{\phi(P)} = \langle w_1, w_2 \rangle_P,$$

o que torna  $H_s$  um plano hiperbólico e  $\phi$  uma isometria. Para calcularmos este produto interno, observamos que

$$\frac{\partial}{\partial x} = d\phi_P \left( \frac{\partial}{\partial v} \right) \text{ e } \frac{\partial}{\partial y} = -e^u d\phi_P \left( \frac{\partial}{\partial u} \right),$$

sendo  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$  base de  $T_{\phi(P)}H_s$  e  $\left\{ \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v} \right\}$  base de  $T_P H$ . De fato:

$$\begin{aligned} d\phi_P \left( \frac{\partial}{\partial u} \right) &= a_{11} \frac{\partial}{\partial x} + a_{21} \frac{\partial}{\partial y} \\ d\phi_P \left( \frac{\partial}{\partial v} \right) &= a_{12} \frac{\partial}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned}$$

Mas

$$[d\phi_P] = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial u} & \frac{\partial \phi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial u} & \frac{\partial \phi_2}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -e^{-u} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Então,

$$\begin{aligned} d\phi_P \left( \frac{\partial}{\partial u} \right) &= 0 \frac{\partial}{\partial x} - e^{-u} \frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow \\ d\phi_P \left( \frac{\partial}{\partial v} \right) &= -e^{-u} \frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow \\ d\phi_P \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) &= -\frac{1}{e^{-u}} \frac{\partial}{\partial u} \Rightarrow \\ d\phi_P \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) &= e^u \frac{\partial}{\partial u} \end{aligned}$$

e

$$d\phi_P \left( \frac{\partial}{\partial v} \right) = 1 \frac{\partial}{\partial x} + 0 \frac{\partial}{\partial y} \Rightarrow d\phi_P \left( \frac{\partial}{\partial v} \right) = \frac{\partial}{\partial x}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right\rangle_{\phi(P)} &= \left\langle d\phi_P \left( \frac{\partial}{\partial v} \right), d\phi_P \left( \frac{\partial}{\partial v} \right) \right\rangle_{\phi(P)} = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial v} \right\rangle_P = e^{2u} = \frac{1}{y^2} \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle_{\phi(P)} &= \left\langle d\phi_P \left( \frac{\partial}{\partial v} \right), e^{-u} d\phi_P \left( \frac{\partial}{\partial u} \right) \right\rangle_{\phi(P)} = \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, -e^u \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle_P = -e^u \left\langle \frac{\partial}{\partial v}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle_P = 0 \\ \left\langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \right\rangle_{\phi(P)} &= \left\langle e^{-u} d\phi_P \left( \frac{\partial}{\partial u} \right), e^{-u} d\phi_P \left( \frac{\partial}{\partial u} \right) \right\rangle_{\phi(P)} = \left\langle -e^u \frac{\partial}{\partial u}, -e^u \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle_P = e^{2u} \left\langle \frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u} \right\rangle_P = e^{2u} = \frac{1}{y^2}, \end{aligned}$$

sendo  $y = e^{-2u}$ .

A variedade riemanniana  $H_s$  com esse produto interno é isométrica a  $H$ , sendo  $\phi$  a isometria, e é chamada de **Modelo do Semiplano de Poincaré**.

Observemos que no exemplo acima, a curvatura Gaussiana de  $H_s$  é  $-1$ . Isso decorre do Teorema Egregium de Gauss 1.13 e do fato de  $\phi$  definida acima ser uma isometria.

## 2.1 Isometria entre o Modelo do Semiplano e o Modelo do Disco de Poincaré

Consideremos a variedade Riemanniana  $H_s$  sendo

$$H_s = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : v > 0\},$$

munida da métrica  $ds_s^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$ , ou seja,  $H_s$  é o *Modelo do Semiplano de Poincaré* para a Geometria Hiperbólica introduzido no exemplo acima.

Como vimos, a variedade riemanniana  $H_s$  possui curvatura Gaussiana constante igual a  $-1$ . Vamos verificar isso, novamente, de modo direto, ou seja, sem uso de isometria.

### A CURVATURA GAUSSIANA DE $(H_s, ds_s)$ É $-1$

Consideremos a Equação de Gauss 1.3:

$$-EK = (\Gamma_{12}^2)_u - (\Gamma_{11}^2)_v + \Gamma_{12}^1 \Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{11}^2 \Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1 \Gamma_{12}^2,$$

sendo  $K$  a curvatura gaussiana de  $H_s$ ,  $\Gamma_{ij}^k(u, v)$  Símbolos de Christoffel e  $E = E_s(u, v) = \frac{1}{v^2}$  o primeiro coeficiente da Primeira Forma Quadrática de  $H_s$ . Os demais coeficientes da Primeira Forma Quadrática são dados por  $F = F_s(u, v) = 0$  e  $G = G_s(u, v) = \frac{1}{v^2}$ . Desta forma,

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1(u, v) &= \frac{E_u(u, v)}{2E(u, v)} = 0; \\ \Gamma_{11}^2(u, v) &= -\frac{E_v(u, v)}{2G(u, v)} = \frac{1}{v}; \\ \Gamma_{12}^1(u, v) &= \frac{E_v(u, v)}{2E(u, v)} = -\frac{1}{v}; \\ \Gamma_{22}^1(u, v) &= -\frac{G_u(u, v)}{2E(u, v)} = 0; \\ \Gamma_{12}^2(u, v) &= \frac{G_u(u, v)}{2G(u, v)} = 0; \\ \Gamma_{22}^2(u, v) &= \frac{G_v(u, v)}{2G(u, v)} = -\frac{1}{v}.\end{aligned}$$

Substituindo na Equação 1.3 temos

$$-\frac{K}{v^2} = \frac{1}{v^2} + \left(-\frac{1}{v}\right) \left(\frac{1}{v}\right) - \left(\frac{1}{v}\right) \left(-\frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v^2} - \frac{1}{v^2} + \frac{1}{v^2} = \frac{1}{v^2} \Rightarrow K = -1,$$

como queríamos. □

Consideremos a variedade Riemanniana  $H_d$ , sendo

$$H_d = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^2 < 1\}$$

munida da métrica  $ds_d^2 = \frac{4(du^2 + dv^2)}{(1 - u^2 - v^2)^2}$ . Afirmamos que a variedade  $H_d$  possui curvatura gaussiana constante igual a  $-1$ , (veja demonstração abaixo) e, portanto, também serve de modelo para a Geometria Hiperbólica Plana, chamado de *Modelo do Disco de Poincaré*.

### A CURVATURA GAUSSIANA DE $(H_d, ds_d)$ É $-1$

Neste caso, temos os coeficientes da Primeira Forma Quadrática como sendo  $E_d(u, v) = \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2}$ ,  $F_d(u, v) = 0$  e  $G_d(u, v) = \frac{4}{(1 - u^2 - v^2)^2}$ . Assim,

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1(u, v) &= \frac{E_u(u, v)}{2E(u, v)} = \frac{-2u}{u^2 + v^2 - 1}; \\ \Gamma_{11}^2(u, v) &= -\frac{E_v(u, v)}{2G(u, v)} = \frac{2v}{u^2 + v^2 - 1} \Rightarrow (\Gamma_{11}^2(u, v))_v = \frac{2(u^2 - v^2 - 1)}{(u^2 + v^2 - 1)^2}; \\ \Gamma_{12}^1(u, v) &= \frac{E_v(u, v)}{2E(u, v)} = \frac{-2v}{u^2 + v^2 - 1}; \\ \Gamma_{22}^1(u, v) &= -\frac{G_u(u, v)}{2E(u, v)} = \frac{2u}{u^2 + v^2 - 1}; \\ \Gamma_{12}^2(u, v) &= \frac{G_u(u, v)}{2G(u, v)} = \frac{-2u}{u^2 + v^2 - 1} \Rightarrow (\Gamma_{12}^2(u, v))_u = \frac{2(u^2 - v^2 + 1)}{(u^2 + v^2 - 1)^2}; \\ \Gamma_{22}^2(u, v) &= \frac{G_v(u, v)}{2G(u, v)} = \frac{-2v}{u^2 + v^2 - 1}.\end{aligned}$$



Substituindo na Equação de Gauss 1.3 temos

$$\begin{aligned} \frac{-4}{(1-u^2-v^2)^2} K &= \frac{4}{(u^2+v^2-1)^2} - \frac{4v^2}{(u^2+v^2-1)^2} + \frac{4u^2}{(u^2+v^2-1)^2} \\ &+ \frac{4v^2}{(u^2+v^2-1)^2} - \frac{4u^2}{(u^2+v^2-1)^2} \\ &\Rightarrow K = -1, \end{aligned}$$

com queríamos. □

Uma isometria entre os Modelos do Semiplano  $(H_s, ds_s)$  e o Modelo do Disco de Poincaré  $(H_d, ds_d)$  é construída fazendo uso da projeção estereográfica. Para tanto, consideremos  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1\}$  com pólo norte  $N = (0, 0, 2)$  e

$$\begin{aligned} \pi : S - \{N\} \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (u, v, 0) \end{aligned}$$

tal que  $P = (x, y, z)$  e  $\pi(P) = (u, v, 0)$  estejam alinhados, ou seja ambos pertencem à reta (em  $\mathbb{R}^3$ ) que passa por  $P$  e  $N$ .

A equação da reta que passa por  $N$  e por  $P$  é dada por

$$\begin{aligned} r(\lambda) &= N + \lambda \overrightarrow{NP} \Rightarrow r(\lambda) = (0, 0, 2) + \lambda(x, y, z-2) \Rightarrow \\ r(\lambda) &= (\lambda x, \lambda y, \lambda(z-2) + 2). \end{aligned}$$

Mas  $\pi(P)$  pertence à reta  $r(\lambda)$  e possui a última coordenada igual a 0. Logo,

$$\pi(P) = (u, v, 0) = (\lambda_0 x, \lambda_0 y, \lambda_0(z-2) + 2), \text{ para algum } \lambda_0 \in \mathbb{R}$$

e, então,  $\lambda_0 = \frac{2}{2-z}$ . Portanto,

$$u = \frac{2x}{2-z} \text{ e } v = \frac{2y}{2-z}.$$

Logo,

$$\boxed{\begin{aligned} \pi : S - \{N\} \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto \left(\frac{2x}{2-z}, \frac{2y}{2-z}, 0\right) \end{aligned}}$$

No entanto,  $\pi$  é uma bijeção e, portanto, tem inversa

$$\begin{aligned} \pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow S - \{N\} \subset \mathbb{R}^3 \\ (u, v, 0) &\longmapsto (x, y, z) \end{aligned}$$

Determinemos  $\pi^{-1}$ : fazendo  $A = \pi(P)$ , a equação da mesma reta acima pode ser dada por

$$\begin{aligned} r(\mu) &= N + \mu \overrightarrow{AN} \Rightarrow \\ r(\mu) &= (0, 0, 2) + \mu(-u, -v, 2) = (-\mu u, -\mu v, 2 + 2\mu). \end{aligned}$$

Mas  $P = (x, y, z) \in S - \{N\}$  pertence a esta reta. Logo,  $x = -\mu_0 u$ ,  $y = -\mu_0 v$  e  $z = 2 + 2\mu_0$  para algum  $\mu_0 \in \mathbb{R}$ . Como  $P \in S$ , segue que

$$\begin{aligned} (-\mu_0 u)^2 + (-\mu_0 v)^2 + (2 + 2\mu_0 - 1)^2 &= 1 \Rightarrow \\ \mu_0^2 u^2 + \mu_0^2 v^2 + (2\mu_0 + 1)^2 &= 1 \Rightarrow \\ \mu_0^2 u^2 + \mu_0^2 v^2 + 4\mu_0^2 + 4\mu_0 + 1 &= 1 \Rightarrow \\ \mu_0^2 (u^2 + v^2 + 4) &= -4\mu_0 \Rightarrow \\ \mu_0 &= \frac{-4}{u^2 + v^2 + 4}. \end{aligned}$$

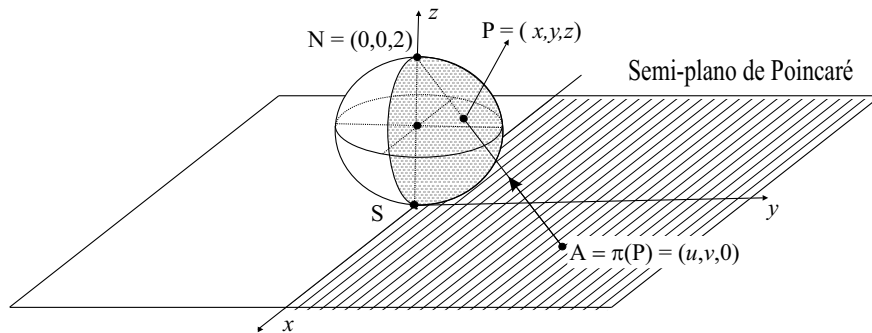
Logo,

$$x = \frac{4u}{u^2 + v^2 + 4}, \quad y = \frac{4v}{u^2 + v^2 + 4} \quad \text{e} \quad z = \frac{2(u^2 + v^2)}{u^2 + v^2 + 4},$$

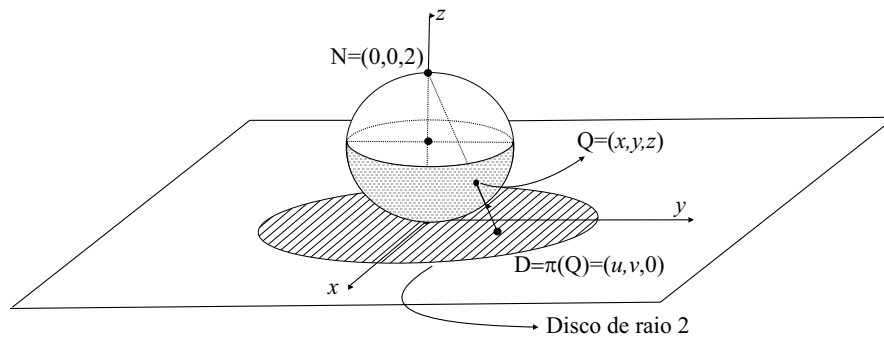
e, portanto,

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & S - \{N\} \subset \mathbb{R}^3 \\ (u, v, 0) & \longmapsto & \left( \frac{4u}{u^2+v^2+4}, \frac{4v}{u^2+v^2+4}, \frac{2(u^2+v^2)}{u^2+v^2+4} \right) \end{array}}.$$

Como os pontos do Modelo do Semiplano de Poincaré coincidem com os pontos de  $\mathbb{R}_+^2 \times \{0\}$  ( $v > 0$  no domínio acima), então a inversa da projeção estereográfica,  $\pi^{-1}$ , mapeia  $H_s$  no hemisfério oriental de  $S$ , conforme ilustrado na figura abaixo.



Por outro lado, a projeção estereográfica mapeia o hemisfério sul de  $S$  no disco de centro na origem e raio 2, o qual pode ser associado ao Modelo do Disco de Poincaré, conforme figura abaixo.



Portanto, se deduzirmos uma aplicação que leva o hemisfério oriental de  $S$  no hemisfério sul, podemos construir, via composições, aplicações de  $H_s$  em  $H_d$ . Para isso, consideremos a translação

$$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (x, y, z - 1)$$

Logo,

$$T \circ \pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v, 0) \longmapsto \left( \frac{4u}{u^2+v^2+4}, \frac{4v}{u^2+v^2+4}, \frac{u^2+v^2-4}{u^2+v^2+4} \right)$$

Consideremos a rotação

$$\rho : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & \text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ 0 & -\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \equiv (x, z, -y)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \rho \circ T \circ \pi^{-1} : \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v, 0) &\longmapsto \left( \frac{4u}{u^2+v^2+4}, \frac{u^2+v^2-4}{u^2+v^2+4}, \frac{-4v}{u^2+v^2+4} \right). \end{aligned}$$

Consideremos a inversa da translação  $T$

$$\begin{aligned} T^{-1} : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x, y, z + 1) \end{aligned}$$

e a aplicação  $h$  (homotetia de razão  $\frac{1}{2}$  no plano  $xy$ )

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto \left( \frac{x}{2}, \frac{y}{2}, z \right) \end{aligned}$$

Deste modo,  $\phi = h \circ \pi \circ T^{-1} \circ \rho \circ T \circ \pi^{-1}$  é tal que

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subset \mathbb{R}^3 \\ (u, v, 0) &\longmapsto \left( \frac{4u}{u^2+(v+2)^2}, \frac{u^2+v^2-4}{u^2+(v+2)^2}, 0 \right) \end{aligned}$$

e, se restringirmos  $\phi$  a  $H_s$ , o qual chamaremos de  $\Phi$ , sua imagem será  $H_d$ , ou seja,

$$\boxed{\begin{aligned} \Phi : H_s &\longrightarrow H_d \\ (u, v) &\longmapsto \left( \frac{4u}{u^2+(v+2)^2}, \frac{u^2+v^2-4}{u^2+(v+2)^2} \right). \end{aligned}}$$

Observemos que  $\Phi$  é diferenciável de classe  $C^\infty$ , bijetiva e

$$\begin{aligned} \Phi^{-1} : H_d &\longrightarrow H_s \\ (u, v) &\longmapsto \left( \frac{4u}{u^2+(v-1)^2}, \frac{2-2(u^2+v^2)}{u^2+(v-1)^2} \right), \end{aligned}$$

A aplicação  $\Phi^{-1}$  também é diferenciável de classe  $C^\infty$ , ou seja,  $\Phi$  é um difeomorfismo.

### A APLICAÇÃO $\Phi$ É UMA ISOMETRIA

Vamos mostrar que

$$\langle d\Phi_P(w_1), d\Phi_P(w_2) \rangle_{\Phi(P)} = \langle w_1, w_2 \rangle_P; \quad w_1, w_2 \in T_P H_s.$$

Tomando  $P = (u, v) \in H_s$ ,  $w_1 = ae_1 + be_2$  e  $w_2 = ce_1 + de_2$ , sendo  $\{e_1, e_2\}$  base ortonormal de  $T_P H_s$  e  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$  base ortonormal de  $T_{\Phi(P)} H_d$ , temos

$$\begin{aligned} \langle d\Phi_P(ae_1 + be_2), d\Phi_P(ce_1 + de_2) \rangle_{\Phi(P)} &= ac \langle d\Phi_P(e_1), d\Phi_P(e_1) \rangle_{\Phi(P)} \\ &\quad + (ad + bc) \langle d\Phi_P(e_1), d\Phi_P(e_2) \rangle_{\Phi(P)} \\ &\quad + bd \langle d\Phi_P(e_2), d\Phi_P(e_2) \rangle_{\Phi(P)}. \end{aligned}$$

Mas, sendo  $x_1(u, v)$  e  $x_2(u, v)$  as funções coordenadas de  $\Phi$ , temos

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u}(P) & \frac{\partial x_1}{\partial v}(P) \\ \frac{\partial x_2}{\partial u}(P) & \frac{\partial x_2}{\partial v}(P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u}(P) \\ \frac{\partial x_2}{\partial u}(P) \end{bmatrix} \equiv \Phi_u(P) = d\Phi_P(e_1) \\ &e \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u}(P) & \frac{\partial x_1}{\partial v}(P) \\ \frac{\partial x_2}{\partial u}(P) & \frac{\partial x_2}{\partial v}(P) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial v}(P) \\ \frac{\partial x_2}{\partial v}(P) \end{bmatrix} \equiv \Phi_v(P) = d\Phi_P(e_2) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle d\Phi_P (ae_1 + be_2), d\Phi_P (ce_1 + de_2) \rangle_{\Phi(P)} &= ac \left\langle \left( \frac{\partial x_1}{\partial u}(P), \frac{\partial x_2}{\partial u}(P) \right), \left( \frac{\partial x_1}{\partial u}(P), \frac{\partial x_2}{\partial u}(P) \right) \right\rangle_{\phi(P)} \\ &\quad + (ad + bc) \left\langle \left( \frac{\partial x_1}{\partial u}(P), \frac{\partial x_2}{\partial u}(P) \right), \left( \frac{\partial x_1}{\partial v}(P), \frac{\partial x_2}{\partial v}(P) \right) \right\rangle_{\phi(P)} \\ &\quad + bd \left\langle \left( \frac{\partial x_1}{\partial v}(P), \frac{\partial x_2}{\partial v}(P) \right), \left( \frac{\partial x_1}{\partial v}(P), \frac{\partial x_2}{\partial v}(P) \right) \right\rangle_{\phi(P)} \end{aligned}$$

Fazendo  $\alpha = \alpha(P) = \frac{\partial x_1}{\partial u}(P)$ ,  $\beta = \beta(P) = \frac{\partial x_2}{\partial u}(P)$ ,  $\gamma = \gamma(P) = \frac{\partial x_1}{\partial v}(P)$  e  $\delta = \delta(P) = \frac{\partial x_2}{\partial v}(P)$  para simplificar a notação, temos:

$$\begin{aligned} &\langle d\Phi_P (ae_1 + be_2), d\Phi_P (ce_1 + de_2) \rangle_{\Phi(P)} \\ &= ac \langle (\alpha, \beta), (\alpha, \beta) \rangle_{\Phi(P)} + (ad + bc) \langle (\alpha, \beta), (\gamma, \delta) \rangle_{\Phi(P)} + bd \langle (\gamma, \delta), (\gamma, \delta) \rangle_{\Phi(P)} \\ &= ac \langle \alpha \bar{e}_1 + \beta \bar{e}_2, \alpha \bar{e}_1 + \beta \bar{e}_2 \rangle_{\Phi(P)} + (ad + bc) \langle \alpha \bar{e}_1 + \beta \bar{e}_2, \gamma \bar{e}_1 + \delta \bar{e}_2 \rangle_{\Phi(P)} \\ &\quad + bd \langle \gamma \bar{e}_1 + \delta \bar{e}_2, \gamma \bar{e}_1 + \delta \bar{e}_2 \rangle_{\Phi(P)} \\ &= ac \left( \alpha^2 \langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle_{\Phi(P)} + 2\alpha\beta \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle_{\Phi(P)} + \beta^2 \langle \bar{e}_2, \bar{e}_2 \rangle_{\Phi(P)} \right) \\ &\quad + (ad + bc) \left( \alpha\gamma \langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle_{\Phi(P)} + (\alpha\delta + \beta\gamma) \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle_{\Phi(P)} + \beta\delta \langle \bar{e}_2, \bar{e}_2 \rangle_{\Phi(P)} \right) \\ &\quad + bd \left( \gamma^2 \langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle_{\Phi(P)} + 2\gamma\delta \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle_{\Phi(P)} + \delta^2 \langle \bar{e}_2, \bar{e}_2 \rangle_{\Phi(P)} \right) \end{aligned}$$

Mas  $\langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle_{\Phi(P)} = E_d(\phi(P))$ ;  $\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle_{\Phi(P)} = F_d(\phi(P))$  e  $\langle \bar{e}_2, \bar{e}_2 \rangle_{\Phi(P)} = G_d(\phi(P))$ , sendo  $E_d$ ,  $F_d$  e  $G_d$  os coeficientes da Primeira Forma Quadrática de  $H_d$ . Como  $E_d = G_d$  e  $F_d = 0$ , temos

$$\begin{aligned} \langle d\Phi_P (ae_1 + be_2), d\Phi_P (ce_1 + de_2) \rangle_{\Phi(P)} &= \\ &= (ac(\alpha^2 + \beta^2) + (ad + bc)(\alpha\gamma + \beta\delta) + bd(\gamma^2 + \delta^2)) G_d(\phi(P)) \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} x_1(u, v) &= \frac{8u}{u^2+(v+2)^2} \Rightarrow \alpha(u, v) = \frac{\partial x_1}{\partial u}(u, v) = \frac{8(v^2-u^2)+32(v+1)}{(u^2+(v+2)^2)^2} \\ x_2(u, v) &= \frac{2(u^2+v^2-4)}{u^2+(v+2)^2} \Rightarrow \beta(u, v) = \frac{\partial x_2}{\partial u}(u, v) = \frac{16u(v+2)}{(u^2+(v+2)^2)^2} \\ x_1(u, v) &= \frac{8u}{u^2+(v+2)^2} \Rightarrow \gamma(u, v) = \frac{\partial x_1}{\partial v}(u, v) = \frac{-16u(v+2)}{(u^2+(v+2)^2)^2} \\ x_2(u, v) &= \frac{2(u^2+v^2-4)}{u^2+(v+2)^2} \Rightarrow \delta(u, v) = \frac{\partial x_2}{\partial v}(u, v) = \frac{8(v^2-u^2)+32(v+1)}{(u^2+(v+2)^2)^2} \end{aligned}$$

Segue das igualdades acima que

$$\alpha = \delta \text{ e } \beta = -\gamma.$$

Então,

$$\begin{aligned} \alpha\gamma + \beta\delta &= \delta\gamma - \gamma\delta = 0 \\ ac(\alpha^2 + \beta^2) + bd(\gamma^2 + \delta^2) &= ac(\delta^2 + \gamma^2) + bd(\gamma^2 + \delta^2) = (ac + bd)(\gamma^2 + \delta^2) \end{aligned}$$

Calculando os valores de  $\gamma^2 + \delta^2$  e  $G_d(\Phi(u, v))$  obtemos

$$\gamma^2 + \delta^2 = \frac{128u^2v^2+512u^2+64v^4+64u^4+512v^3+1536v^2+2048v+1024}{(u^2+(v+2)^2)^4} = \frac{(32+32v+8v^2+8u^2)^2}{(u^2+(v+2)^2)^4}$$

e

$$G_d(\Phi(u, v)) = \frac{4}{(1-x_1(u, v)^2-x_2(u, v)^2)^2} = \frac{4(u^2+(v+2)^2)^4}{v^2(32+32v+8v^2+8u^2)^2}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\langle d\Phi_P (ae_1 + be_2), d\Phi_P (ce_1 + de_2) \rangle_{\Phi(P)} &= \\
&= (ac(\alpha^2 + \beta^2) + (ad + bc)(\alpha\gamma + \beta\delta) + bd(\gamma^2 + \delta^2)) G_d(\Phi(u, v)) \\
&= ((ac + bd)(\gamma^2 + \delta^2) + (ad + bc)0) G_d(\Phi(u, v)) \\
&= (ac + bd)(\gamma^2 + \delta^2) G_d(\Phi(u, v)) \\
&= \frac{ac+bd}{v^2} \Rightarrow \langle d\Phi_P (w_1), d\Phi_P (w_2) \rangle_{\Phi(P)} = \frac{ac+bd}{v^2}
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\langle w_1, w_2 \rangle_P &= \langle ae_1 + be_2, ce_1 + de_2 \rangle_P \\
&= ac \langle e_1, e_1 \rangle_P + (ad + bc) \langle e_1, e_2 \rangle_P + bd \langle e_2, e_2 \rangle_P \\
&= acE_s(u, v) + (ad + bc)F_s(u, v) + bdG_s(u, v) \\
&= (ac + bd)G_s(u, v) \\
&= \frac{ac+bd}{v^2} \Rightarrow \langle w_1, w_2 \rangle_P = \frac{ac+bd}{v^2}
\end{aligned}$$

pois os coeficientes da Primeira Forma Quadrática de  $H_s$  são tais que  $E_s(u, v) = G_s(u, v) = \frac{1}{v^2}$  e  $F_s(u, v) = 0$ .

Portanto,

$$\langle d\Phi_P(v), d\Phi_P(w) \rangle_{\Phi(P)} = \langle v, w \rangle_P; v, w \in T_P S,$$

como queríamos. □

## 2.2 Isometria do Plano Hiperbólico $H_k$ no Modelo do Semiplano de Poincaré

Para que, nos próximos capítulos, possamos estudar os mergulhos isométricos de planos hiperbólicos em espaços euclidianos, precisamos introduzir mais um modelo para a Geometria Hiperbólica Plana: consideremos a variedade Riemanniana  $H_k = \mathbb{R}^2$  munida da métrica

$$ds^2 = \frac{1}{k} du^2 + \frac{\cosh^2(u)}{k} dv^2,$$

sendo  $k$  uma constante real positiva.

A variedade  $H_k$  possui curvatura gaussiana constante negativa igual a  $-k$ .

De fato,  $E_k(u, v) = \frac{1}{k}$ ,  $F_k(u, v) = 0$  e  $G_k(u, v) = \frac{\cosh^2(u)}{k}$  são os coeficientes da Primeira Forma Quadrática de  $H_k$ . Logo,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1(u, v) &= \frac{E_u(u, v)}{2E(u, v)} = 0; \\
\Gamma_{11}^2(u, v) &= -\frac{E_v(u, v)}{2G(u, v)} = 0; \\
\Gamma_{12}^1(u, v) &= \frac{E_v(u, v)}{2E(u, v)} = 0; \\
\Gamma_{22}^1(u, v) &= -\frac{G_u(u, v)}{2E(u, v)} = -\cosh(u) \sinh(u); \\
\Gamma_{12}^2(u, v) &= \frac{G_u(u, v)}{2G(u, v)} = \operatorname{tgh}(u); \\
\Gamma_{22}^2(u, v) &= \frac{G_v(u, v)}{2G(u, v)} = 0.
\end{aligned}$$

Substituindo na Equação de Gauss 1.3 temos

$$-EK = \operatorname{sech}^2(u) + \operatorname{tgh}^2(u) = \frac{1}{\cosh^2(u)} + \frac{\sinh^2(u)}{\cosh^2(u)} = \frac{1+\sinh^2(u)}{\cosh^2(u)} = \frac{\cosh^2(u)}{\cosh^2(u)} = 1,$$

ou seja,

$$K = \frac{1}{-E} = -k.$$

Portanto, a variedade  $(H_k, ds)$  pode ser pensada como modelo para o Plano Hiperbólico.

Consideremos a aplicação  $\alpha$  entre as variedades riemannianas  $(H_k, ds)$  e  $(H_s, ds_s)$  dada por

$$\alpha : \begin{array}{ccc} H_k & \longrightarrow & H_s \\ (u, v) & \longmapsto & \frac{1}{\sqrt{k}} \left( e^v \tanh(u), \frac{e^v}{\cosh(u)} \right) \end{array},$$

cuja inversa é dada por

$$\alpha^{-1} : \begin{array}{ccc} H_s & \longrightarrow & H_k \\ (x, y) & \longmapsto & \sqrt{k} \left( \sinh^{-1} \left( \frac{x}{y} \right), \ln \left( \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right) \end{array},$$

sendo  $\sinh^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  a inversa da função  $\sinh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ .

Temos que ambas as aplicação são diferenciáveis de classe  $C^\infty$ .

### A APLICAÇÃO $\alpha$ É UMA ISOMETRIA

Vamos mostrar que  $\langle d\alpha_P(w_1), d\alpha_P(w_2) \rangle_{\alpha(P)} = \langle w_1, w_2 \rangle_P$ ;  $\forall w_1, w_2 \in T_P H_k$ . De maneira análoga ao que foi feito anteriormente, tomando  $P = (u, v)$ ,  $w_1 = ae_1 + be_2$  e  $w_2 = ce_1 + de_2$ , sendo  $\{e_1, e_2\}$  base ortonormal de  $T_P H_k$  e  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$  base ortonormal de  $T_{\alpha(P)} H_s$ , temos

$$\begin{aligned} \langle d\alpha_P(ae_1 + be_2), d\alpha_P(ce_1 + de_2) \rangle_{\alpha(P)} &= ac \langle d\alpha_P(e_1), d\alpha_P(e_1) \rangle_{\alpha(P)} \\ &\quad + (ad + bc) \langle d\alpha_P(e_1), d\alpha_P(e_2) \rangle_{\alpha(P)} \\ &\quad + bd \langle d\alpha_P(e_2), d\alpha_P(e_2) \rangle_{\alpha(P)}. \end{aligned}$$

Logo, utilizando o análogo das Expressões 2.1 com  $\alpha$  no lugar de  $\Phi$  e chamando  $\theta = \theta(u, v) = \frac{\partial x_1}{\partial u}(u, v)$ ,  $\beta = \beta(u, v) = \frac{\partial x_2}{\partial u}(u, v)$ ,  $\gamma = \gamma(u, v) = \frac{\partial x_1}{\partial v}(u, v)$  e  $\delta = \delta(u, v) = \frac{\partial x_2}{\partial v}(u, v)$ , sendo  $x_1$  e  $x_2$  as funções coordenadas de  $\alpha$ , temos

$$\begin{aligned} &\langle d\alpha_P(ae_1 + be_2), d\alpha_P(ce_1 + de_2) \rangle_{\alpha(P)} \\ &= ac \left\langle \left( \frac{\partial x_1}{\partial u}(u, v), \frac{\partial x_2}{\partial u}(u, v) \right), \left( \frac{\partial x_1}{\partial u}(u, v), \frac{\partial x_2}{\partial u}(u, v) \right) \right\rangle_{\alpha(P)} \\ &\quad + (ad + bc) \left\langle \left( \frac{\partial x_1}{\partial u}(u, v), \frac{\partial x_2}{\partial u}(u, v) \right), \left( \frac{\partial x_1}{\partial v}(u, v), \frac{\partial x_2}{\partial v}(u, v) \right) \right\rangle_{\alpha(P)} \\ &\quad + bd \left\langle \left( \frac{\partial x_1}{\partial v}(u, v), \frac{\partial x_2}{\partial v}(u, v) \right), \left( \frac{\partial x_1}{\partial v}(u, v), \frac{\partial x_2}{\partial v}(u, v) \right) \right\rangle_{\alpha(P)} \\ &= ac \langle (\theta, \beta), (\theta, \beta) \rangle_{\alpha(P)} + (ad + bc) \langle (\theta, \beta), (\gamma, \delta) \rangle_{\alpha(P)} + bd \langle (\gamma, \delta), (\gamma, \delta) \rangle_{\alpha(P)} \\ &= ac \langle \theta \bar{e}_1 + \beta \bar{e}_2, \theta \bar{e}_1 + \beta \bar{e}_2 \rangle_{\alpha(P)} + (ad + bc) \langle \theta \bar{e}_1 + \beta \bar{e}_2, \gamma \bar{e}_1 + \delta \bar{e}_2 \rangle_{\alpha(P)} \\ &\quad + bd \langle \gamma \bar{e}_1 + \delta \bar{e}_2, \gamma \bar{e}_1 + \delta \bar{e}_2 \rangle_{\alpha(P)} \\ &= ac \left( \theta^2 \langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle_{\alpha(P)} + 2\theta\beta \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle + \beta^2 \langle \bar{e}_2, \bar{e}_2 \rangle_{\alpha(P)} \right) \\ &\quad + (ad + bc) \left( \theta\gamma \langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle_{\alpha(P)} + (\theta\delta + \beta\gamma) \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle_{\alpha(P)} + \beta\delta \langle \bar{e}_2, \bar{e}_2 \rangle_{\alpha(P)} \right) \\ &\quad + bd \left( \gamma^2 \langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle_{\alpha(P)} + 2\gamma\delta \langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle_{\alpha(P)} + \delta^2 \langle \bar{e}_2, \bar{e}_2 \rangle_{\alpha(P)} \right) \\ &= [ac(\theta^2 + \beta^2) + (ad + bc)(\theta\gamma + \beta\delta) + bd(\gamma^2 + \delta^2)] G_s(\alpha(u, v)), \end{aligned}$$

visto que

$$\langle \bar{e}_1, \bar{e}_1 \rangle_{\alpha(P)} = E_s(\alpha(u, v)) = \langle \bar{e}_2, \bar{e}_2 \rangle_{\alpha(P)} = G_s(\alpha(u, v))$$

e

$$\langle \bar{e}_1, \bar{e}_2 \rangle_{\alpha(P)} = F_s(\alpha(u, v)) = 0$$

são os coeficientes da Primeira Forma Fundamental de  $H_s$ .

Mas,

$$\begin{aligned} x_1(u, v) &= \frac{e^v \tanh(u)}{\sqrt{k}} \Rightarrow \theta(u, v) = \frac{\partial x_1}{\partial u}(u, v) = \frac{e^v}{\sqrt{k} \cosh^2(u)} \\ x_2(u, v) &= \frac{e^v}{\sqrt{k} \cosh(u)} \Rightarrow \beta(u, v) = \frac{\partial x_2}{\partial u}(u, v) = -\frac{e^v}{\sqrt{k} \cosh^2(u)} \sinh(u) \\ x_1(u, v) &= \frac{e^v \tanh(u)}{\sqrt{k}} \Rightarrow \gamma(u, v) = \frac{\partial x_1}{\partial v}(u, v) = \frac{e^v \tanh(u)}{\sqrt{k}} \\ x_2(u, v) &= \frac{e^v}{\sqrt{k} \cosh(u)} \Rightarrow \delta(u, v) = \frac{\partial x_2}{\partial v}(u, v) = \frac{e^v}{\sqrt{k} \cosh(u)}. \end{aligned}$$

Então,

$$\theta\gamma + \beta\delta = \frac{1}{k} \left[ \frac{e^v}{\cosh^2(u)} e^v \tanh(u) + \left( -\frac{e^v}{\cosh^2(u)} \sinh(u) \right) \frac{e^v}{\cosh(u)} \right] = \frac{1}{k} 0 = 0.$$

Logo,

$$\theta\gamma + \beta\delta = 0.$$

Calculando o valor de  $ac(\theta^2 + \beta^2) + bd(\gamma^2 + \delta^2)$ , temos

$$\begin{aligned} &(ac(\theta^2 + \beta^2) + bd(\gamma^2 + \delta^2)) G_s(\alpha(u, v)) \\ &= \left( \frac{ac}{k} \left( \frac{e^{2v}}{\cosh^4(u)} + \frac{e^{2v}}{\cosh^4(u)} \sinh^2(u) \right) + \frac{bd}{k} \left( e^{2v} \tanh^2(u) + \frac{e^{2v}}{\cosh^2(u)} \right) \right) \frac{1}{\left( \frac{e^v}{\cosh(u)} \right)^2} \\ &= \frac{ac}{k \left( \frac{e^v}{\cosh(u)} \right)^2} \left( \frac{e^{2v}}{\cosh^2(u)} \right) + \frac{bd}{k \left( \frac{e^v}{\cosh(u)} \right)^2} (e^{2v}) \\ &= \frac{ac + \cosh^2(u)bd}{k} \end{aligned}$$

Logo,

$$\boxed{\langle d\alpha_P(w_1), d\alpha_P(w_2) \rangle_{\alpha(P)} = \frac{ac + \cosh^2(u)bd}{k}}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle v, w \rangle_P &= \langle ae_1 + be_2, ce_1 + de_2 \rangle_P \\ &= ac \langle e_1, e_1 \rangle_P + (ad + bc) \langle e_1, e_2 \rangle_P + bd \langle e_2, e_2 \rangle_P \\ &= acE_k(u, v) + bdG_k(u, v) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\boxed{\langle w_1, w_2 \rangle_P = \frac{ac + \cosh^2(u)bd}{k}}$$

Portanto,

$$\langle d\alpha_P(w_1), d\alpha_P(w_2) \rangle_{\alpha(P)} = \langle w_1, w_2 \rangle_P; \forall w_1, w_2 \in T_P H_k,$$

como queríamos.  $\square$

Com os resultados dessa seção e da anterior, temos um meio de passar de um modelo para o outro preservando todas as propriedades métricas por meio das isometrias  $\Phi$  e  $\alpha$ . A vantagem de trabalhar com a variedade  $(H_s, ds_s)$  no lugar da  $(H_k, ds)$  é que aquela, além de possuir um modelo geométrico euclidiano em que retas hiperbólicas podem ser visualizadas como semicircunferências ou semi-retas, existem expressões simples para a distância hiperbólica, como por exemplo

$$d_{H_s} : \quad H_s \times H_s \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}, \\ ((x, y), (w, z)) \quad \longmapsto \quad \ln \left( \frac{\sqrt{(x-w)^2 + (y+z)^2} + \sqrt{(x-w)^2 + (y-z)^2}}{\sqrt{(x-w)^2 + (y+z)^2} - \sqrt{(x-w)^2 + (y-z)^2}} \right),$$

que pode ser encontrada em [2].

# Capítulo 3

## Mergulho Isométrico de $\mathbb{H}^2$ em $\mathbb{R}^6$

Reticulados de pontos (ref. [10]) em espaços euclidianos tem aplicações em diversos ramos da Matemática e da Teoria da Informação e Codificação. Uma das maneiras de se obter reticulados que podem vir a ter interesse em Codificação é por meio de mergulhos isométricos de reticulados hiperbólicos em espaços euclidianos. Além da possibilidade de poder comparar reticulados provenientes do ambiente hiperbólico com reticulados euclidianos já conhecidos, há uma vasta teoria de reticulados hiperbólicos já desenvolvida e que pode ser utilizada em mergulhos. Este capítulo e o próximo são dedicados a construção destes mergulhos isométricos, em  $\mathbb{R}^6$  e em  $\mathbb{S}^8 \subset \mathbb{R}^9$ .

Há um resultado que pode ser encontrado no final da referência [6], conhecido como *Teorema de Hilbert* que afirma que não existe uma imersão isométrica de todo o plano hiperbólico em  $\mathbb{R}^3$ . Em particular, não se pode encontrar um modelo **completo** da Geometria Hiperbólica como uma superfície regular de  $\mathbb{R}^3$ . Na verdade, o teorema afirma que a existência de tal imersão isométrica só pode ocorrer para  $n \geq 4$ . O problema é que expressões analíticas de imersões isométricas não são oferecidas pelo Teorema de Hilbert. Nesse sentido, nossa imersão de  $\mathbb{H}^2$  em  $\mathbb{R}^6$  está “próxima” do limite inferior da dimensão imposto pelo teorema. O modelo **parcial** de Geometria Hiperbólica conhecido como *Modelo da Pseudo-Esfera de Beltrami*, que é uma superfície em  $\mathbb{R}^3$ , não é completo.

Começamos adotando a variedade  $(H_k, ds)$  introduzida no Capítulo 2 com  $k = 1$ , a qual por simplicidade de notação denotaremos por  $(H, ds)$ , que serve de modelo para o Plano Hiperbólico com curvatura Gaussiana constante igual a  $-1$ , e as seguintes funções, que podem ser encontradas em [4] e [5].

### 3.1 A Aplicação $I$

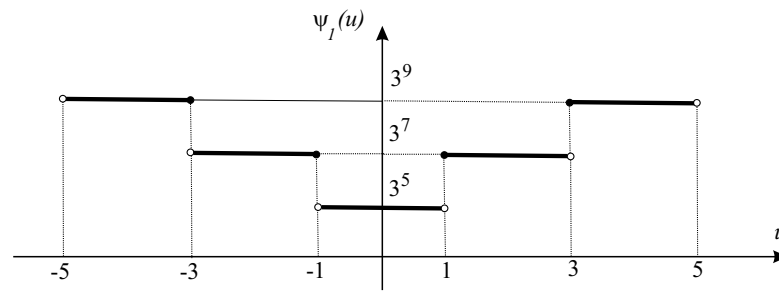
Consideremos as funções

$$\begin{aligned} \psi_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto 3^{2\lfloor \frac{|u|}{2} + \frac{1}{2} \rfloor + 5} \end{aligned} \tag{3.1}$$

sendo  $\lfloor z \rfloor$  o maior número inteiro menor do que ou igual a  $z$ . A função acima é do “tipo escada” com pontos de descontinuidade nos números ímpares, pois

$$\begin{aligned} \psi_1(u) &= 3^5 \text{ para } -1 < u < 1, \\ \psi_1(u) &= 3^7 \text{ para } -3 < u \leq -1 \text{ ou } 1 \leq u < 3 \\ \psi_1(u) &= 3^9 \text{ para } -5 < u \leq -3 \text{ ou } 3 \leq u < 5 \\ &\vdots \end{aligned}$$



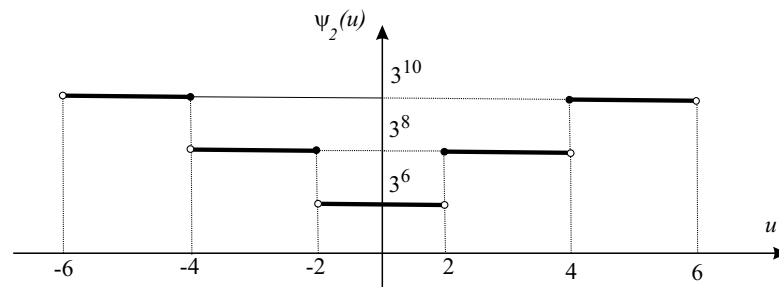


e

$$\begin{aligned} \psi_2 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto 3^{2\lfloor \frac{|u|}{2} \rfloor + 6} \end{aligned} \quad (3.2)$$

que, também, é do “tipo escada” com pontos de descontinuidade nos números pares, pois

$$\begin{aligned} \psi_2(u) &= 3^6 \text{ para } -2 < u < 2, \\ \psi_2(u) &= 3^8 \text{ para } -4 < u \leq -2 \text{ ou } 2 \leq u < 4 \\ \psi_2(u) &= 3^{10} \text{ para } -6 < u \leq -4 \text{ ou } 4 \leq u < 6 \\ &\vdots \end{aligned}$$



Seja a constante

$$A = \int_0^1 \operatorname{sen}(\pi\xi) \exp\left(\frac{-1}{\operatorname{sen}^2(\pi\xi)}\right) d\xi = 0,14133\dots \quad (3.3)$$

Consideremos as funções

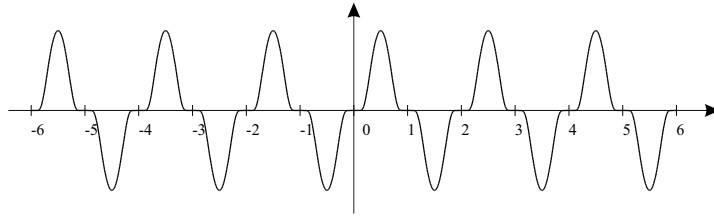
$$\begin{aligned} \varphi_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \sqrt{\frac{1}{A} \int_0^{u+1} \operatorname{sen}(\pi\xi) \exp\left(\frac{-1}{\operatorname{sen}^2(\pi\xi)}\right) d\xi} \end{aligned} \quad (3.4)$$

e

$$\begin{aligned} \varphi_2 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \sqrt{\frac{1}{A} \int_0^u \operatorname{sen}(\pi\xi) \exp\left(\frac{-1}{\operatorname{sen}^2(\pi\xi)}\right) d\xi} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Neste ponto vale a pena estudar algumas propriedades de  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ .

Uma observação interessante sobre  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$  é que a primeira se anula nos pontos de descontinuidade de  $\psi_1$  e a segunda se anula nos pontos de descontinuidade de  $\psi_2$ . Isso pode ser facilmente mostrado por meio de uma manipulação trigonométrica nas integrais que definem  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ . No entanto, essa observação possui uma visualização geométrica também interessante, pois considerando o gráfico de  $\operatorname{sen}(\pi x) \exp\left(\frac{-1}{\operatorname{sen}^2(\pi x)}\right)$ :



e levando-se em conta a relação entre as integrais acima e as áreas delimitadas pelo gráfico, é muito fácil perceber onde estão os zeros de  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ .

Observemos também que

$$\varphi_1^2(u) + \varphi_2^2(u) = 1. \quad (3.6)$$

De fato, temos

$$\begin{aligned} A\varphi_1^2(u) &= \int_0^{u+1} \text{sen}(\pi\xi) \exp\left(\frac{-1}{\text{sen}^2(\pi\xi)}\right) d\xi \\ &= \int_0^1 \text{sen}(\pi\zeta) \exp\left(\frac{-1}{\text{sen}^2(\pi\zeta)}\right) d\zeta + \int_1^{u+1} \text{sen}(\pi\xi) \exp\left(\frac{-1}{\text{sen}^2(\pi\xi)}\right) d\xi \\ &= A + \int_1^{u+1} \text{sen}(\pi\xi) \exp\left(\frac{-1}{\text{sen}^2(\pi\xi)}\right) d\xi. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variáveis  $\zeta = \xi - 1$  em  $\int_1^{u+1} \text{sen}(\pi\xi) \exp\left(\frac{-1}{\text{sen}^2(\pi\xi)}\right) d\xi$  temos

$$\begin{aligned} \int_1^{u+1} \text{sen}(\pi\xi) \exp\left(\frac{-1}{\text{sen}^2(\pi\xi)}\right) d\xi &= -\int_0^u \text{sen}(\pi\zeta) \exp\left(\frac{-1}{\text{sen}^2(\pi\zeta)}\right) d\zeta \Rightarrow \\ A\varphi_1^2(u) - A &= -A\varphi_2^2(u) \Rightarrow \\ \varphi_1^2(u) + \varphi_2^2(u) &= 1, \end{aligned}$$

como queríamos.

Além disso, com alguma manipulação trigonométrica, é fácil concluir que  $0 \leq \varphi_1(u) \leq 1$  e  $0 \leq \varphi_2(u) \leq 1$ ,  $\forall u \in \mathbb{R}$ .

De fato, observando o gráfico da função  $\text{sen}(\pi x) \exp\left(\frac{-1}{\text{sen}^2(\pi x)}\right)$ , temos:

Para  $0 \leq u \leq 1$  :

$$\begin{aligned} \int_0^u \text{sen}(\pi\xi) \exp\left(\frac{-1}{\text{sen}^2(\pi\xi)}\right) d\xi &\leq A \Rightarrow \\ 0 \leq \varphi_2(u) &= \sqrt{\frac{1}{A} \int_0^u \text{sen}(\pi\xi) \exp\left(\frac{-1}{\text{sen}^2(\pi\xi)}\right) d\xi} \leq 1 \end{aligned}$$

Para  $1 < u \leq 2$  :

$$\begin{aligned} \int_0^u \text{sen}(\pi\xi) \exp\left(\frac{-1}{\text{sen}^2(\pi\xi)}\right) d\xi &\leq A \Rightarrow \\ 0 \leq \varphi_2(u) &= \sqrt{\frac{1}{A} \int_0^u \text{sen}(\pi\xi) \exp\left(\frac{-1}{\text{sen}^2(\pi\xi)}\right) d\xi} \leq 1 \end{aligned}$$

E, como a função  $\text{sen}(\pi x) \exp\left(\frac{-1}{\text{sen}^2(\pi x)}\right)$  tem periodicidade 2, temos  $0 \leq \varphi_2(u) \leq 1$ ,  $\forall u \in \mathbb{R}$ .

Com um raciocínio análogo concluimos também que  $0 \leq \varphi_1(u) \leq 1$ ,  $\forall u \in \mathbb{R}$ .

Consideremos as funções

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} & ; & & f_2 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \frac{\varphi_1(u) \text{senh}(u)}{\psi_1(u)} & & & u &\longmapsto \frac{\varphi_2(u) \text{senh}(u)}{\psi_2(u)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

e

$$\begin{aligned} a : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \sqrt{1 - (f_1'(u))^2 - (f_2'(u))^2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

Observemos que as funções  $f_1$  e  $f_2$  são contínuas pois, nos pontos de descontinuidade de  $\psi_1$  e  $\psi_2$  temos que  $f_1$  e  $f_2$  são nulas,  $\lim_{u \rightarrow (2n+1)^+} f_1(u) = \lim_{u \rightarrow (2n+1)^-} f_1(u) = f_1(2n+1) = 0$  e  $\lim_{u \rightarrow (2n)^+} f_1(u) = \lim_{u \rightarrow (2n)^-} f_2(u) = f_2(2u) = 0, \forall n \in \mathbb{Z}$ . Na verdade,  $f_1$  e  $f_2$  são diferenciáveis  $C^\infty$ , pois possuem derivadas de qualquer ordem.

Outro fato interessante é que  $f_1$  e  $f_2$  são limitadas.

De fato, para  $f_1$  observemos que

$$0 \leq \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\varphi_1(u) \sinh(u)}{\psi_1(u)},$$

pois para  $u > 0$ , todas as funções envolvidas no limite são positivas. Observemos também que, como  $0 \leq \varphi_1(1) \leq 1$ , temos

$$\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\varphi_1(u) \sinh(u)}{\psi_1(u)} \leq \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\sinh(u)}{3^2 \left[ \frac{|u|+1}{2} \right]^{+5}} \quad (3.9)$$

Mas um número real positivo subtraído de sua parte inteira é necessariamente menor que um, ou seja,  $\frac{|u|+1}{2} - \left[ \frac{|u|+1}{2} \right] \leq 1$ , o que implica em  $-\left[ \frac{|u|+1}{2} \right] \leq 1 - \frac{|u|+1}{2}$ , que escrito convenientemente, resulta em

$$\left[ \frac{|u|+1}{2} \right] \geq \frac{|u|+1}{2} - 1,$$

que substituído em 3.9 fornece

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\varphi_1(u) \sinh(u)}{\psi_1(u)} &\leq \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\sinh(u)}{3^2 \left[ \frac{|u|+1}{2} \right]^{+5}} \\ &\leq \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\sinh(u)}{3^2 \left( \frac{u+1}{2} - 1 \right)^{+5}} \\ &= \frac{1}{3^4} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u - e^{-u}}{3^u} \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3^4} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u - \frac{1}{e^u}}{3^u} \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3^4} \lim_{u \rightarrow +\infty} \left( \frac{e^u}{3^u} - \frac{1}{(3e)^u} \right) \\ &= \frac{1}{2 \cdot 3^4} \lim_{u \rightarrow +\infty} \left( \frac{e}{3} \right)^u \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,  $0 \leq \lim_{u \rightarrow +\infty} f_1(u) \leq 0$ , o que implica em  $\lim_{u \rightarrow +\infty} f_1(u) = 0$ .

De modo totalmente análogo, mostra-se que  $\lim_{u \rightarrow -\infty} f_1(u) = 0$ .

De  $\lim_{u \rightarrow -\infty} f_1(u) = \lim_{u \rightarrow +\infty} f_1(u) = 0$  e da continuidade de  $f_1$ , concluímos a limitação de  $f_1$ , como queríamos.

Quanto à função  $a$ , dada em 3.8, novamente, com alguma manipulação algébrica, é possível concluir que  $(f'_1(u))^2 + (f'_2(u))^2 < 1$ , ou seja, que  $0 < a(u)$ .

Finalmente, consideremos aplicação

$$\boxed{I : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathbb{R}^6 \\ (u, v) & \longmapsto & (x_1(u, v), \dots, x_6(u, v)) \end{array}}$$

com funções coordenadas  $x_j : H \rightarrow \mathbb{R}$  dadas por

$$\begin{aligned} x_1(u, v) &= \int_0^u a(w) dw \\ x_2(u, v) &= v \\ x_3(u, v) &= f_1(u) \cos(v\psi_1(u)) \\ x_4(u, v) &= f_1(u) \operatorname{sen}(v\psi_1(u)) \\ x_5(u, v) &= f_2(u) \cos(v\psi_2(u)) \\ x_6(u, v) &= f_2(u) \operatorname{sen}(v\psi_2(u)) \end{aligned}$$

### A APLICAÇÃO $I$ É UMA IMERSÃO

Seja  $P = (u, v) \in H$ . A aplicação  $I$  definida acima é uma imersão devido ao fato de a matriz jacobiana de  $dI_P$ , cujas entradas são as coordenadas de  $I_u(P)$  e  $I_v(P)$ , ter posto 2. De fato,  $I_u(P)$  e  $I_v(P)$  não são proporcionais, pois as segundas coordenadas de  $I_u(P)$  e  $I_v(P)$  são 0 e 1, que não são proporcionais, além disso  $I_u(P) \neq \vec{0}$ , visto que  $\frac{\partial x_1}{\partial u} = a(u) > 0$ . Portanto, a dimensão da imagem de  $dI_P$  é dois. Logo, pelo *Teorema do Núcleo e da Imagem*, a dimensão do núcleo de  $dI_P$  é zero, ou seja,  $dI_P$  é injetiva.

### A APLICAÇÃO $I$ É UMA IMERSÃO ISOMÉTRICA

Seja  $P = (u, v) \in H$ . Para mostrar que  $I$  é imersão isométrica precisamos mostrar que  $\langle dI_P(w_1), dI_P(w_2) \rangle_{I(P)} = \langle w_1, w_2 \rangle_P$ ;  $\forall w_1, w_2 \in T_P H$ . Mas antes, precisamos determinar a métrica induzida por  $I$  em sua imagem  $I(H) \subset \mathbb{R}^6$ , pois precisaremos dela para calcular a expressão de  $\langle dI_P(v), dI_P(w) \rangle_{I(P)}$ . Mais precisamente, precisamos das expressões dos coeficientes da Primeira Forma Quadrática de  $I(H)$  considerando a métrica proveniente de  $H$  por  $I$ .

Os coeficientes da Primeira Forma Quadrática na imagem de  $I$  são dados por

$$\begin{aligned} E_I(I(u, v)) &= \langle I_u, I_u \rangle(u, v) = \left\langle \left( \frac{\partial x_1}{\partial u}, \dots, \frac{\partial x_6}{\partial u} \right), \left( \frac{\partial x_1}{\partial u}, \dots, \frac{\partial x_6}{\partial u} \right) \right\rangle(u, v) \Rightarrow \\ E_I(I(u, v)) &= \sum_{i=1}^6 \frac{\partial x_i}{\partial u}(u, v)^2; \\ F_I(I(u, v)) &= \langle I_u, I_v \rangle(u, v) = \left\langle \left( \frac{\partial x_1}{\partial u}, \dots, \frac{\partial x_6}{\partial u} \right), \left( \frac{\partial x_1}{\partial v}, \dots, \frac{\partial x_6}{\partial v} \right) \right\rangle(u, v) \Rightarrow \\ F_I(I(u, v)) &= \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\partial x_i}{\partial u}(u, v) \frac{\partial x_i}{\partial v}(u, v) \right); \\ G_I(I(u, v)) &= \langle I_v, I_v \rangle(u, v) = \left\langle \left( \frac{\partial x_1}{\partial v}, \dots, \frac{\partial x_6}{\partial v} \right), \left( \frac{\partial x_1}{\partial v}, \dots, \frac{\partial x_6}{\partial v} \right) \right\rangle(u, v) \Rightarrow \\ G_I(I(u, v)) &= \sum_{i=1}^6 \frac{\partial x_i}{\partial v}(u, v)^2. \end{aligned}$$

Fazendo os cálculos concluímos que

$$\begin{aligned} E_I(I(u, v)) &= \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\partial x_i}{\partial u} \right)^2 = 1 \\ F_I(I(u, v)) &= \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\partial x_i}{\partial u} \right) \left( \frac{\partial x_i}{\partial v} \right) = 0 \\ G_I(I(u, v)) &= \sum_{i=1}^6 \left( \frac{\partial x_i}{\partial v} \right)^2 = \cosh^2(u) \end{aligned}$$

De fato mostremos a terceira igualdade.

Para isso temos

$$\begin{aligned}
x_1(u, v) &= \int_0^u a(w)dw \Rightarrow \left(\frac{\partial x_1}{\partial v}(u, v)\right)^2 = 0^2 \\
x_2(u, v) &= v \Rightarrow \left(\frac{\partial x_2}{\partial v}(u, v)\right)^2 = 1^2 \\
x_3(u, v) &= f_1(u) \cos(v\psi_1(u)) \Rightarrow \left(\frac{\partial x_3}{\partial v}(u, v)\right)^2 = (-f_1(u)\psi_1(u) \operatorname{sen}(v\psi_1(u)))^2 \\
x_4(u, v) &= f_1(u) \operatorname{sen}(v\psi_1(u)) \Rightarrow \left(\frac{\partial x_4}{\partial v}(u, v)\right)^2 = (f_1(u)\psi_1(u) \cos(v\psi_1(u)))^2 \\
x_5(u, v) &= f_2(u) \cos(v\psi_2(u)) \Rightarrow \left(\frac{\partial x_5}{\partial v}(u, v)\right)^2 = (-f_2(u)\psi_2(u) \operatorname{sen}(v\psi_2(u)))^2 \\
x_6(u, v) &= f_2(u) \operatorname{sen}(v\psi_2(u)) \Rightarrow \left(\frac{\partial x_6}{\partial v}(u, v)\right)^2 = (f_2(u)\psi_2(u) \cos(v\psi_2(u)))^2
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
G_I(I(u, v)) &= \sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial x_i}{\partial v}(u, v)\right)^2 = 1 + f_1^2(u)\psi_1^2(u) + f_2^2(u)\psi_2^2(u) \\
&= 1 + \frac{\varphi_1^2(u) \operatorname{senh}^2(u)}{\psi_1(u)^2} \psi_1^2(u) + \frac{\varphi_2^2(u) \operatorname{senh}^2(u)}{\psi_2(u)^2} \psi_2^2(u) \\
&= 1 + \varphi_1^2(u) \operatorname{senh}^2(u) + \varphi_2^2(u) \operatorname{senh}^2(u) \\
&= 1 + \operatorname{senh}^2(u) (\varphi_1^2(u) + \varphi_2^2(u)) \\
&= 1 + \operatorname{senh}^2(u),
\end{aligned}$$

devido à relação 3.6. Portanto,

$$G_I(I(u, v)) = \cosh^2(u),$$

como queríamos.

De maneira análoga mostra-se que

$$F_I(I(u, v)) = \sum_{i=1}^9 \left(\frac{\partial x_i}{\partial u}(u, v) \frac{\partial x_i}{\partial v}(u, v)\right) = 0 \text{ e } E_I(I(u, v)) = \sum_{i=1}^9 \frac{\partial x_i}{\partial u}(u, v)^2 = 1,$$

ou seja, temos a métrica riemanniana  $ds_I$ , induzida na imagem de  $I$ , como sendo

$$ds_I^2 = du^2 + \cosh^2(u)dv^2.$$

Uma vez encontrados os coeficientes da Primeira Forma Quadrática de  $I(H) \in \mathbb{R}^6$ , considere-mos  $P = (u, v)$ ,  $w_1 = ae_1 + be_2$  e  $w_2 = ce_1 + de_2$ , sendo  $\{e_1, e_2\}$  base ortonormal de  $T_P H$ . Temos

$$\begin{aligned}
\langle dI_P(ae_1 + be_2), dI_P(ce_1 + de_2) \rangle_{I(P)} &= ac \langle dI_P(e_1), dI_P(e_1) \rangle_{I(P)} \\
&\quad + (ad + bc) \langle dI_P(e_1), dI_P(e_2) \rangle_{I(P)} \\
&\quad + bd \langle dI_P(e_2), dI_P(e_2) \rangle_{I(P)}.
\end{aligned}$$

Considerando as expressões dadas em 2.1, com  $I$  no lugar de  $\Phi$ , temos

$$\begin{aligned}
\langle dI_P(ae_1 + be_2), dI_P(ce_1 + de_2) \rangle_{I(P)} &= acE_I(I(u, v)) + (ad + bc)F_I(I(u, v)) + bdG_I(I(u, v)) \\
&= ac + bd \cosh^2(u).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \langle v, w \rangle_P &= \langle ae_1 + be_2, ce_1 + de_2 \rangle_P \\
 &= ac \langle e_1, e_1 \rangle_P + (ad + bc) \langle e_1, e_2 \rangle_P + bd \langle e_2, e_2 \rangle_P \\
 &= acE(u, v) + (ad + bc)F(u, v) + bdG(u, v) \\
 &= ac + bd \cosh^2(u),
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\langle dI_P(v), dI_P(w) \rangle_{I(P)} = \langle v, w \rangle_P; \quad v, w \in T_P H,$$

como queríamos.

## A APLICAÇÃO $I$ É UM MERGULHO ISOMÉTRICO

Resta mostrar que a aplicação  $I$  é injetiva.

De fato,  $\frac{\partial x_1}{\partial u}(u, v) = a(u) > 0$ ,  $\forall u \in H$ , ou seja,  $x_1$  é crescente, portanto,  $x_1$  é injetiva, o que permite concluir que  $I$  é injetiva.

Logo,  $I$  é uma bijeção diferenciável de classe  $C^\infty$  (pois  $x_i$  possui derivadas parciais de qualquer ordem) sobre sua imagem.

Como  $dI_P$  é injetiva para qualquer  $P \in H$  (pois  $I$  é imersão), concluímos que  $I^{-1} : I(H) \rightarrow H$  é contínua, ou seja,  $I$  é um homeomorfismo sobre sua imagem e, portanto, um mergulho isométrico (de classe  $C^\infty$ ) de  $H$  em  $\mathbb{R}^6$ .

*Observações:*

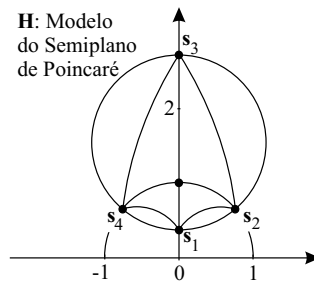
(1) Embora o mergulho seja isométrico,  $I$  não é analítica, pois nos pontos de descontinuidade das funções-escada  $\psi_1$  e  $\psi_2$  é possível mostrar que a função  $I$  não possui desenvolvimento em Série de Taylor.

(2) Do ponto de vista computacional, o grande problema no mergulho isométrico  $I$  é o cálculo da primeira coordenada  $x_1$ . Os softwares de cálculo numérico e simbólico não realizam esse cálculo para qualquer valor de  $u$ . Quando não se quer impor restrições a  $u$ , faz-se necessária a aproximação da função  $a$  por uma função mais fácil de ser manipulada na integral (um polinômio interpolador, por exemplo). Com excessão dos pontos de descontinuidade das funções-escada, a função  $a$  pode ser trocada por uma Série de Taylor, o que fornece uma ótima aproximação de  $a$ .

## 3.2 Um Exemplo Simples: Mergulho Isométrico do 4- $HPSK$ em $\mathbb{R}^6$

Uma classe de reticulados (ref. [10]) bastante fértil em propriedades de simetria é a classe dos reticulados gerados por grupos discretos de isometrias de espaços euclidianos ou hiperbólicos. Dentre esses, um reticulado bastante simples utilizado em modulações de sinais em telecomunicações é o chamado 4- $PSK$  (phase shift-keying). Sua representação no espaço euclidiano se dá em dimensão 2 com pontos de coordenadas  $(0, -1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  e  $(-1, 0)$ . O análogo hiperbólico desse esquema de modulação é o chamado 4- $HPSK$ , cujos pontos passam a ter as seguintes coordenadas no Modelo do Semiplano  $(H_s, ds_s)$ :

$$\begin{aligned}
 s_1 &= (0, 0.36788) \\
 s_2 &= (0.76159, 0.64805) \\
 s_3 &= (0, 2.7183) \\
 s_4 &= (-0.76159, 0.64805)
 \end{aligned}$$



Primeiramente, observemos que pela isometria  $\alpha^{-1}$ , para  $k = 1$ ,

$$\begin{aligned}\alpha^{-1}(0, 0.36788) &\cong (0, -1) \\ \alpha^{-1}(0.76159, 0.64805) &\cong (1, 0) \\ \alpha^{-1}(0, 2.7183) &\cong (0, 1) \\ \alpha^{-1}(-0.76159, 0.64805) &\cong (-1, 0)\end{aligned}$$

ou seja, as coordenadas do 4-*HPSK* na variedade  $(H, ds)$  são aproximadamente as mesmas das do 4-*PSK* no plano euclidiano! Esse fato é interessante pois as métricas riemannianas  $ds_s$  e a euclidiana  $dz$  ( $dz^2 = dx^2 + dy^2$ ) são diferentes, ou seja, a maneira de se medir distâncias nessas variedades são bastante distintas.

Por fim, mergulhando isometricamente o 4-*HPSK* em  $\mathbb{R}^6$ , temos

$$\begin{aligned}I(0, -1) &= (0, -1, 0, 0, 0, 0) \\ I(1, 0) &= (0.76159, 0, 0, 0, 0.0016121, 0) \\ I(0, 1) &= (0, 1, 0, 0, 0, 0) \\ I(-1, 0) &= (-0.76159, 0, 0, 0, -0.0016121, 0)\end{aligned}$$

Observemos também que o conjunto 4-*HPSK* mergulhado em  $\mathbb{R}^6$  está contido em um espaço euclidiano de três dimensões, uma vez que as terceiras, quartas e sextas coordenadas dos sinais mergulhados são todas nulas.

# Capítulo 4

## Mergulho Isométrico de $\mathbb{H}^2$ em $\mathbb{S}^8 \subset \mathbb{R}^9$

### 4.1 A Aplicação $M$

Seja  $(H, ds)$  a variedade riemanniana apresentada no Capítulo 3 com curvatura constante negativa  $-1$ , ou seja,  $k = 1$ . Neste capítulo estamos interessados em encontrar um mergulho isométrico

$$M : \begin{array}{ccc} H & \longrightarrow & \mathbb{S}^8 \subset \mathbb{R}^9 \\ (u, v) & \longmapsto & (x_1(u, v), \dots, x_9(u, v)) \end{array} .$$

Para tanto, mais uma vez utilizaremos as referências [4] e [5].

Sejam  $F_1(u)$ ,  $F_2(u)$ , funções reais positivas, monótonas e com primeiras derivadas limitadas satisfazendo

$$F_1^2(u) + F_2^2(u) = 1. \quad (4.1)$$

Vamos tomar, por exemplo,

$$F_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad F_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad . \\ u \longmapsto \tanh(e^u) \quad \quad \quad u \longmapsto \frac{1}{\cosh(e^u)}$$

Essas funções são limitadas. De fato:

Para  $F_1$  temos que  $e^u > 0$ ,  $\forall u \in \mathbb{R}$ . Logo,  $F_1(u) > 0$ . Mas  $\lim_{u \rightarrow +\infty} F_1(u) = 1$  e  $\lim_{u \rightarrow -\infty} F_1(u) = 0$  que, juntamente com o fato de  $F_1$  ser contínua, permite que concluamos que  $F_1$  é limitada.

Para  $F_2$  temos também  $F_2(u) > 0$ , pois  $\cosh(x) > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Mas  $\lim_{u \rightarrow +\infty} F_2(u) = 0$  e  $\lim_{u \rightarrow -\infty} F_2(u) = 1$  que, juntamente com o fato de  $F_2$  ser contínua, permite que concluamos que  $F_2$  é limitada.

As limitações de  $F_1$  e  $F_2$  permitem que concluamos as limitações das derivadas de  $F_1$  e  $F_2$ .

Consideremos a hipersfera  $\mathbb{S}^8 \subset \mathbb{R}^9$  com raio  $r$  e um número  $\varepsilon > 0$  adequado de tal modo que as expressões abaixo definidas existam como número reais.

Aproveitando as funções 3.1, 3.2, 3.4, 3.5, 3.7 e a constante 3.3 definidas no Capítulo 3 consideremos também as funções

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad (4.2) \\ u \longmapsto \sqrt{r^2 - \varepsilon^2 \beta(u)}$$



$$\begin{aligned} \rho_1 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \quad , \\ &\longmapsto \int_0^u \frac{F_2(\xi)}{F_1(\xi)} \sqrt{\alpha(\xi)} d\xi \end{aligned} \quad (4.3)$$

e

$$\begin{aligned} \rho_2 : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \quad , \\ u &\longmapsto - \int_0^u \frac{F_1(\xi)}{F_2(\xi)} \sqrt{\alpha(\xi)} d\xi \end{aligned} \quad (4.4)$$

sendo

$$\alpha(\xi) = 1 - g'(\xi)^2 - \varepsilon^2 (F_1'(\xi)^2 + \frac{1}{2}F_2'(\xi)^2 + f_1'(\xi)^2 + f_2'(\xi)^2)$$

e

$$\beta(u) = F_1^2(u) + \frac{1}{2}F_2^2(u) + f_1^2(u) + f_2^2(u).$$

Considerando-se que tanto as funções  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $f_1$  e  $f_2$  quanto suas derivadas são todas limitadas, com alguma manipulação algébrica prova-se que  $0 < g'(\xi)^2 < 1$ , Ou seja, com  $\varepsilon > 0$  conveniente, todas as funções acima são reais.

Por fim, a expressão de  $g'$  que aparece em  $\alpha$  é tal que

$$g'(u)^2 = \frac{\varepsilon^4 A^2(u)}{r^2 - \varepsilon^2 \beta(u)},$$

sendo

$$A(u) = F_1(u)F_1'(u) + \frac{1}{2}F_2(u)F_2'(u) + f_1(u)f_1'(u) + f_2(u)f_2'(u)$$

Como o mergulho deve ser na hipersfera de dimensão 8 no espaço euclidiano de dimensão 9, então deve ocorrer

$$\sum_{i=1}^9 x_i(u, v)^2 = r^2, \quad \forall (u, v) \in H, \quad (4.5)$$

ou, equivalentemente,  $\|M(u, v)\| = r, \quad \forall (u, v) \in H$ .

Consideremos as coordenadas de  $M$  como sendo

$$\left\{ \begin{aligned} x_1(u, v) &= \varepsilon F_1(u) \cos\left(\frac{v + \rho_1(u)}{\varepsilon}\right); \\ x_2(u, v) &= \varepsilon F_1(u) \operatorname{sen}\left(\frac{v + \rho_1(u)}{\varepsilon}\right); \\ x_3(u, v) &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} F_2(u) \cos\left(\frac{\sqrt{2}(v + \rho_2(u))}{\varepsilon}\right); \\ x_4(u, v) &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} F_2(u) \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}(v + \rho_2(u))}{\varepsilon}\right); \\ x_5(u, v) &= \varepsilon f_1(u) \cos\left(\frac{v \psi_1(u)}{\varepsilon}\right); \\ x_6(u, v) &= \varepsilon f_1(u) \operatorname{sen}\left(\frac{v \psi_1(u)}{\varepsilon}\right); \\ x_7(u, v) &= \varepsilon f_2(u) \cos\left(\frac{v \psi_2(u)}{\varepsilon}\right); \\ x_8(u, v) &= \varepsilon f_2(u) \operatorname{sen}\left(\frac{v \psi_2(u)}{\varepsilon}\right); \\ x_9(u, v) &= g(u). \end{aligned} \right. \quad (4.6)$$

## A MÉTRICA RIEMANNIANA DE $M(H)$ É A MESMA DE $H$

Fazendo os cálculos concluímos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^9 \frac{\partial x_i}{\partial u}(u,v)^2 &= 1; \\ \sum_{i=1}^9 \left( \frac{\partial x_i}{\partial u}(u,v) \frac{\partial x_i}{\partial v}(u,v) \right) &= 0; \\ \sum_{i=1}^9 \frac{\partial x_i}{\partial v}(u,v)^2 &= \cosh^2(u).\end{aligned}$$

Mostremos a primeira dessas igualdade. Para isso temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_1}{\partial u}(u,v) &= \varepsilon \left( F_1'(u) \cos\left(\frac{v+\rho_1(u)}{\varepsilon}\right) - F_1(u) \frac{\rho_1'(u)}{\varepsilon} \operatorname{sen}\left(\frac{v+\rho_1(u)}{\varepsilon}\right) \right) \Rightarrow \\ \left( \frac{\partial x_1}{\partial u}(u,v) \right)^2 &= \varepsilon^2 \left( F_1'(u)^2 \cos^2\left(\frac{v+\rho_1(u)}{\varepsilon}\right) - 2F_1'(u) \cos\left(\frac{v+\rho_1(u)}{\varepsilon}\right) F_1(u) \frac{\rho_1'(u)}{\varepsilon} \operatorname{sen}\left(\frac{v+\rho_1(u)}{\varepsilon}\right) \right. \\ &\quad \left. + F_1^2(u) \frac{\rho_1'(u)^2}{\varepsilon^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{v+\rho_1(u)}{\varepsilon}\right) \right); \\ \frac{\partial x_2}{\partial u}(u,v) &= \varepsilon \left( F_1'(u) \operatorname{sen}\left(\frac{v+\rho_1(u)}{\varepsilon}\right) + F_1(u) \frac{\rho_1'(u)}{\varepsilon} \cos\left(\frac{v+\rho_1(u)}{\varepsilon}\right) \right) \Rightarrow \\ \left( \frac{\partial x_2}{\partial u}(u,v) \right)^2 &= \varepsilon^2 \left( F_1'(u)^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{v+\rho_1(u)}{\varepsilon}\right) + 2F_1'(u) \operatorname{sen}\left(\frac{v+\rho_1(u)}{\varepsilon}\right) F_1(u) \frac{\rho_1'(u)}{\varepsilon} \cos\left(\frac{v+\rho_1(u)}{\varepsilon}\right) \right. \\ &\quad \left. + F_1^2(u) \frac{\rho_1'(u)^2}{\varepsilon^2} \cos^2\left(\frac{v+\rho_1(u)}{\varepsilon}\right) \right).\end{aligned}$$

Logo,

$$\boxed{\left( \frac{\partial x_1}{\partial u}(u,v) \right)^2 + \left( \frac{\partial x_2}{\partial u}(u,v) \right)^2 = \varepsilon^2 \left( F_1'(u)^2 + F_1^2(u) \frac{\rho_1'(u)^2}{\varepsilon^2} \right)}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_3}{\partial u}(u,v) &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \left( F_2'(u) \cos\left(\frac{\sqrt{2}(v+\rho_2(u))}{\varepsilon}\right) - F_2(u) \frac{\sqrt{2}\rho_2'(u)}{\varepsilon} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}(v+\rho_2(u))}{\varepsilon}\right) \right) \Rightarrow \\ \left( \frac{\partial x_3}{\partial u}(u,v) \right)^2 &= \frac{\varepsilon^2}{2} \left( F_2'(u)^2 \cos^2\left(\frac{\sqrt{2}(v+\rho_2(u))}{\varepsilon}\right) - 2F_2'(u) \cos\left(\frac{\sqrt{2}(v+\rho_2(u))}{\varepsilon}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}(v+\rho_2(u))}{\varepsilon}\right) F_2(u) \frac{\sqrt{2}\rho_2'(u)}{\varepsilon} \right. \\ &\quad \left. + F_2^2(u) \frac{2\rho_2'(u)^2}{\varepsilon^2} \operatorname{sen}^2\left(\frac{\sqrt{2}(v+\rho_2(u))}{\varepsilon}\right) \right); \\ \frac{\partial x_4}{\partial u}(u,v) &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \left( F_2'(u) \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}(v+\rho_2(u))}{\varepsilon}\right) + F_2(u) \frac{\sqrt{2}\rho_2'(u)}{\varepsilon} \cos\left(\frac{\sqrt{2}(v+\rho_2(u))}{\varepsilon}\right) \right) \Rightarrow \\ \left( \frac{\partial x_4}{\partial u}(u,v) \right)^2 &= \frac{\varepsilon^2}{2} \left( F_2'(u)^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\sqrt{2}(v+\rho_2(u))}{\varepsilon}\right) + 2F_2'(u) \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{2}(v+\rho_2(u))}{\varepsilon}\right) \cos\left(\frac{\sqrt{2}(v+\rho_2(u))}{\varepsilon}\right) F_2(u) \frac{\sqrt{2}\rho_2'(u)}{\varepsilon} \right. \\ &\quad \left. + F_2^2(u) \frac{2\rho_2'(u)^2}{\varepsilon^2} \cos^2\left(\frac{\sqrt{2}(v+\rho_2(u))}{\varepsilon}\right) \right).\end{aligned}$$

Logo,

$$\boxed{\left( \frac{\partial x_3}{\partial u}(u,v) \right)^2 + \left( \frac{\partial x_4}{\partial u}(u,v) \right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{2} \left( F_2'(u)^2 + F_2^2(u) \frac{2\rho_2'(u)^2}{\varepsilon^2} \right)}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_5}{\partial u}(u,v) &= \varepsilon f_1'(u) \cos\left(\frac{v\psi_1(u)}{\varepsilon}\right) \Rightarrow \left( \frac{\partial x_5}{\partial u}(u,v) \right)^2 = \varepsilon^2 f_1'(u)^2 \cos^2\left(\frac{v\psi_1(u)}{\varepsilon}\right); \\ \frac{\partial x_6}{\partial u}(u,v) &= \varepsilon f_1'(u) \operatorname{sen}\left(\frac{v\psi_1(u)}{\varepsilon}\right) \Rightarrow \left( \frac{\partial x_6}{\partial u}(u,v) \right)^2 = \varepsilon^2 f_1'(u)^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{v\psi_1(u)}{\varepsilon}\right).\end{aligned}$$

Logo,

$$\boxed{\left(\frac{\partial x_5}{\partial u}(u,v)\right)^2 + \left(\frac{\partial x_6}{\partial u}(u,v)\right)^2 = \varepsilon^2 f_1'(u)^2}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_7}{\partial u}(u,v) &= \varepsilon f_2'(u) \cos\left(\frac{v\psi_2(u)}{\varepsilon\sqrt{k}}\right) \Rightarrow \left(\frac{\partial x_7}{\partial u}(u,v)\right)^2 = \varepsilon^2 f_2'(u)^2 \cos^2\left(\frac{v\psi_2(u)}{\varepsilon\sqrt{k}}\right); \\ \frac{\partial x_8}{\partial u}(u,v) &= \varepsilon f_2'(u) \operatorname{sen}\left(\frac{v\psi_2(u)}{\varepsilon\sqrt{k}}\right) \Rightarrow \left(\frac{\partial x_8}{\partial u}(u,v)\right)^2 = \varepsilon^2 f_2'(u)^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{v\psi_2(u)}{\varepsilon\sqrt{k}}\right); \\ \frac{\partial x_9}{\partial u}(u,v) &= g'(u) \Rightarrow \left(\frac{\partial x_9}{\partial u}(u,v)\right)^2 = g'(u)^2.\end{aligned}$$

Logo,

$$\boxed{\left(\frac{\partial x_7}{\partial u}(u,v)\right)^2 + \left(\frac{\partial x_8}{\partial u}(u,v)\right)^2 = \varepsilon^2 f_2'(u)^2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^9 \left(\frac{\partial x_i}{\partial u}(u,v)\right)^2 &= \varepsilon^2 \left(F_1'(u)^2 + F_1^2(u) \frac{\rho_1'(u)^2}{\varepsilon^2}\right) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left(F_2'(u)^2 + F_2^2(u) \frac{2\rho_2'(u)^2}{\varepsilon^2}\right) \\ &\quad + \varepsilon^2 f_1'(u)^2 + \varepsilon^2 f_2'(u)^2 + g'(u)^2 \\ &= \varepsilon^2 F_1'(u)^2 + \varepsilon^2 F_1^2(u) \frac{\rho_1'(u)^2}{\varepsilon^2} + \frac{\varepsilon^2}{2} F_2'(u)^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} F_2^2(u) \frac{2\rho_2'(u)^2}{\varepsilon^2} \\ &\quad + \varepsilon^2 f_1'(u)^2 + \varepsilon^2 f_2'(u)^2 + g'(u)^2 \\ &= \varepsilon^2 F_1'(u)^2 + F_1^2(u) \rho_1'(u)^2 + \frac{\varepsilon^2}{2} F_2'(u)^2 + F_2^2(u) \rho_2'(u)^2 + \varepsilon^2 f_1'(u)^2 + \varepsilon^2 f_2'(u)^2 + g'(u)^2.\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}F_1^2(u) \rho_1'(u)^2 &= F_1^2(u) \frac{F_2^2(u)}{F_1^2(u)} \left(1 - g'(u)^2 - \varepsilon^2 \left(F_1'(u)^2 + \frac{F_2'(u)^2}{2} + f_1'(u)^2 + f_2'(u)^2\right)\right) \\ &= F_2^2(u) \left(1 - g'(u)^2 - \varepsilon^2 \left(F_1'(u)^2 + \frac{F_2'(u)^2}{2} + f_1'(u)^2 + f_2'(u)^2\right)\right); \\ F_2^2(u) \rho_2'(u)^2 &= F_2^2(u) \frac{F_1^2(u)}{F_2^2(u)} \left(1 - g'(u)^2 - \varepsilon^2 \left(F_1'(u)^2 + \frac{F_2'(u)^2}{2} + f_1'(u)^2 + f_2'(u)^2\right)\right) \\ &= F_1^2(u) \left(1 - g'(u)^2 - \varepsilon^2 \left(F_1'(u)^2 + \frac{F_2'(u)^2}{2} + f_1'(u)^2 + f_2'(u)^2\right)\right),\end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^9 \left(\frac{\partial x_i}{\partial u}(u,v)\right)^2 &= (F_1^2(u) + F_2^2(u)) \left(1 - g'(u)^2 - \varepsilon^2 \left(F_1'(u)^2 + \frac{F_2'(u)^2}{2} + f_1'(u)^2 + f_2'(u)^2\right)\right) \\ &\quad + \varepsilon^2 \left(F_1'(u)^2 + \frac{F_2'(u)^2}{2}\right) + \varepsilon^2 f_1'(u)^2 + \varepsilon^2 f_2'(u)^2 + g'(u)^2 \\ &= 1 - g'(u)^2 - \varepsilon^2 \left(F_1'(u)^2 + \frac{F_2'(u)^2}{2} + f_1'(u)^2 + f_2'(u)^2\right) \\ &\quad + \varepsilon^2 \left(F_1'(u)^2 + \frac{F_2'(u)^2}{2}\right) + \varepsilon^2 f_1'(u)^2 + \varepsilon^2 f_2'(u)^2 + g'(u)^2 \\ &= \varepsilon^2 \left(F_1'(u)^2 + \frac{F_2'(u)^2}{2}\right) + 1 - g'(u)^2 - \varepsilon^2 \left(F_1'(u)^2 + \frac{F_2'(u)^2}{2}\right) \\ &\quad - \varepsilon^2 (f_1'(u)^2 + f_2'(u)^2) + \varepsilon^2 (f_1'(u)^2 + f_2'(u)^2) + g'(u)^2 \\ &= 1,\end{aligned}$$

como queríamos.

De maneira análoga mostra-se que

$$\sum_{i=1}^9 \left(\frac{\partial x_i}{\partial u}(u,v) \frac{\partial x_i}{\partial v}(u,v)\right) = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^9 \left(\frac{\partial x_i}{\partial v}(u,v)\right)^2 = \cosh^2(u),$$

ou seja, temos a métrica riemanniana  $ds_M$ , induzida na imagem de  $M$ , como sendo

$$ds_M^2 = du^2 + \cosh^2(u) dv^2,$$

pois os coeficientes da Primeira Forma Quadrática na imagem de  $M$  são dados por

$$\begin{aligned} E_M(M(u, v)) &= \langle M_u, M_u \rangle(u, v) = \left\langle \left( \frac{\partial x_1}{\partial u}, \dots, \frac{\partial x_9}{\partial u} \right), \left( \frac{\partial x_1}{\partial u}, \dots, \frac{\partial x_9}{\partial u} \right) \right\rangle(u, v) \Rightarrow \\ E_M(M(u, v)) &= \sum_{i=1}^9 \left( \frac{\partial x_i}{\partial u}(u, v) \right)^2; \\ F_M(M(u, v)) &= \langle M_u, M_v \rangle(u, v) = \left\langle \left( \frac{\partial x_1}{\partial u}, \dots, \frac{\partial x_9}{\partial u} \right), \left( \frac{\partial x_1}{\partial v}, \dots, \frac{\partial x_9}{\partial v} \right) \right\rangle(u, v) \Rightarrow \\ F_M(M(u, v)) &= \sum_{i=1}^9 \left( \frac{\partial x_i}{\partial u}(u, v) \frac{\partial x_i}{\partial v}(u, v) \right); \\ G_M(M(u, v)) &= \langle M_v, M_v \rangle(u, v) = \left\langle \left( \frac{\partial x_1}{\partial v}, \dots, \frac{\partial x_9}{\partial v} \right), \left( \frac{\partial x_1}{\partial v}, \dots, \frac{\partial x_9}{\partial v} \right) \right\rangle(u, v) \Rightarrow \\ G_M(M(u, v)) &= \sum_{i=1}^9 \left( \frac{\partial x_i}{\partial v}(u, v) \right)^2, \end{aligned}$$

ou seja, a métrica Riemanniana  $ds_M$  em  $M(H)$  é a mesma métrica Riemanniana  $ds$  em  $H$ .

### A APLICAÇÃO $M$ É UMA IMERSÃO

Seja  $P = (u, v) \in H$ . A aplicação  $M$  é uma imersão devido ao fato de a matriz jacobiana de  $dM_P$ , cujas entradas são as coordenadas de  $M_u(P)$  e  $M_v(P)$ , ter posto 2, (as últimas coordenadas desses vetores nunca são proporcionais e ambos são sempre não nulos) ou seja, a dimensão da imagem de  $dM_P$  é dois. Logo, pelo *Teorema do Núcleo e da Imagem*, a dimensão do núcleo de  $dM_P$  é zero, ou seja,  $dM_P$  é injetiva.

### A IMERSÃO $M$ É ISOMÉTRICA

Se considerarmos o domínio  $H$  de  $M$  como sendo a variedade riemanniana  $(H, ds)$ , temos que  $M$  é imersão isométrica, ou seja,  $\langle dM_P(w_1), dM_P(w_2) \rangle_{M(P)} = \langle w_1, w_2 \rangle_P; \forall w_1, w_2 \in T_P H$ . De fato, tomando  $P = (u, v) \in H$ ,  $w_1 = ae_1 + be_2$  e  $w_2 = ce_1 + de_2$ , sendo  $\{e_1, e_2\}$  base ortonormal de  $T_P H$  temos

$$\begin{aligned} \langle dM_P(ae_1 + be_2), dM_P(ce_1 + de_2) \rangle_{M(P)} &= ac \langle dM_P(e_1), dM_P(e_1) \rangle_{M(P)} \\ &\quad + (ad + bc) \langle dM_P(e_1), dM_P(e_2) \rangle_{M(P)} \\ &\quad + bd \langle dM_P(e_2), dM_P(e_2) \rangle_{M(P)}. \end{aligned}$$

Mas, utilizando as expressões 2.1 com  $M$  no lugar de  $\Phi$ , temos

$$\begin{aligned} \langle dM_P(ae_1 + be_2), dM_P(ce_1 + de_2) \rangle_{M(P)} &= acE_M(M(u, v)) + (ad + bc)F_M(M(u, v)) \\ &\quad + bdG_M(M(u, v)) \\ &= ac + bd \cosh^2(u) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle w_1, w_2 \rangle_P &= \langle ae_1 + be_2, ce_1 + de_2 \rangle_P \\ &= ac \langle e_1, e_1 \rangle_P + (ad + bc) \langle e_1, e_2 \rangle_P + bd \langle e_2, e_2 \rangle_P \\ &= acE(u, v) + (ad + bc)F(u, v) + bdG(u, v) \\ &= ac + bd \cosh^2(u) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\langle dM_P(w_1), dM_P(w_2) \rangle_{M(P)} = \langle w_1, w_2 \rangle_P; \quad \forall w_1, w_2 \in T_P H.$$

### A IMERSÃO ISOMÉTRICA $M$ É UM MERGULHO ISOMÉTRICO

É fácil ver que dois pares diferentes  $(u_1, v_1)$  e  $(u_2, v_2)$  em  $H$  não podem corresponder aos mesmos valores  $M(u_1, v_1)$  e  $M(u_2, v_2)$ . Realmente, de (4.6) deduzimos

$$x_1(u, v)^2 + x_2(u, v)^2 = \varepsilon^2 F_1^2(u) = \varepsilon^2 \tanh^2(e^u).$$

Assim, para que  $M(u_1, v_1) = M(u_2, v_2)$ , devemos ter

$$\begin{aligned} x_1(u_1, v_1) &= x_1(u_2, v_2) \\ \text{e} \\ x_2(u_1, v_1) &= x_2(u_2, v_2) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Logo,

$$\begin{aligned} x_1(u_1, v_1)^2 + x_2(u_1, v_1)^2 &= \varepsilon^2 \tanh^2(e^{u_1}) \\ \text{e} \\ x_1(u_2, v_2)^2 + x_2(u_2, v_2)^2 &= \varepsilon^2 \tanh^2(e^{u_2}) \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \tanh^2(e^{u_1}) &= \varepsilon^2 \tanh^2(e^{u_2}) \Rightarrow \\ \tanh^2(e^{u_1}) &= \tanh^2(e^{u_2}) \Rightarrow \\ \tanh(e^{u_1}) &= \tanh(e^{u_2}), \end{aligned}$$

pois  $e^{u_1}, e^{u_2} > 0$ . Mas  $\tanh(x)$  é monótona para  $x > 0$ . Logo, a equação acima está satisfeita apenas quando  $e^{u_1} = e^{u_2}$ , ou seja, quando  $u_1 = u_2$ .

Sob a condição  $u_1 = u_2$ , teremos as equações (4.7) satisfeitas quando

$$v_2 = v_1 + \varepsilon 2K_1\pi,$$

sendo  $K_1$  um inteiro qualquer. De fato, de  $x_1(u_1, v_1) = x_1(u_2, v_2)$  temos

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{v_1 + \rho_1(u_1)}{\varepsilon}\right) &= \cos\left(\frac{v_2 + \rho_1(u_2)}{\varepsilon}\right) \Rightarrow \\ \frac{v_2 + \rho_1(u_2)}{\varepsilon} &= \frac{v_1 + \rho_1(u_1)}{\varepsilon} + 2K_1\pi \Rightarrow \\ v_2 + \rho_1(u_2) &= v_1 + \rho_1(u_1) + \varepsilon 2K_1\pi \Rightarrow \\ v_2 &= v_1 + \varepsilon 2K_1\pi. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Como  $M(u_1, v_1) = M(u_2, v_2)$  também implica em  $x_4(u_1, v_1) = x_4(u_2, v_2)$ , temos

$$\begin{aligned} \text{sen}\left(\frac{\sqrt{2}(v_1 + \rho_2(u_1))}{\varepsilon}\right) &= \text{sen}\left(\frac{\sqrt{2}(v_2 + \rho_2(u_2))}{\varepsilon}\right) \Rightarrow \\ \frac{\sqrt{2}(v_2 + \rho_2(u_2))}{\varepsilon} &= \frac{\sqrt{2}(v_1 + \rho_2(u_1))}{\varepsilon} + 2K_2\pi \Rightarrow \\ v_2 &= v_1 + \frac{2\varepsilon K_2\pi}{\sqrt{2}}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

sendo  $K_2$  um inteiro qualquer.  
Igualando as equações (4.8) e (4.9) temos

$$K_1 = \frac{K_2}{\sqrt{2}}.$$

Como  $K_1$  e  $K_2$  são inteiros, a equação acima só é possível para  $K_1 = K_2 = 0$ , ou seja,  $v_1 = v_2$ . Assim a superfície  $M(H)$  não possui auto-intersecção, ou seja,  $M$  é injetiva. A conclusão de que  $M$  é mergulho isométrico segue do mesmo raciocínio feito para o mergulho isométrico  $I$  do capítulo anterior.

A condição (4.5) é facilmente verificada, isto é, a superfície é um mergulho dentro do espaço esférico de dimensão 8 e raio  $r$ .

*Observação:* O mergulho é de classe  $C^\infty$ , pois as funções  $x_1, \dots, x_9$  admitem derivadas parciais de qualquer ordem. Assim como no mergulho isométrico  $I$  do capítulo anterior,  $M$  não é analítica em todos os pontos pois as funções  $x_1, \dots, x_9$  não admitem desenvolvimento em Série de Taylor para os valores de  $u$  onde as funções-escada  $\psi_1$  e  $\psi_2$  são descontínuas. Observemos também que o mergulho  $M$  não é único, pois depende de  $\varepsilon$ .

## 4.2 Um Exemplo Simples: Mergulho Isométrico do 4-*HPSK* em $\mathbb{S}^8 \subset \mathbb{R}^9$

Tomemos novamente o conjunto de pontos 4-*HPSK* apresentad o na Seção 3.2.

Iremos considerar o espaço esférico  $\mathbb{S}^8$  com raio  $r = 1$  e mergulhar o 4-*HPSK* em  $\mathbb{S}^8$  considerando dois mergulhos distintos:

Tomando  $\varepsilon = 0, 1$  e utilizando um software de cálculo numérico e simbólico, como por exemplo, o Maple, as funções coordenadas nos pontos  $s_1 = (0, -1)$ ;  $s_2 = (1, 0)$ ;  $s_3 = (0, 1)$  e  $s_4 = (-1, 0)$  de  $H$  são tais que:

(i) Cálculo das funções coordenadas no ponto  $s_1 = (0, -1)$ :

$$\begin{aligned} x_1(s_1) &= -0.063903 \\ x_2(s_1) &= 0.041432 \\ x_3(s_1) &= -0.00022769 \\ x_4(s_1) &= -0.045824 \\ x_5(s_1) &= 0 \\ x_6(s_1) &= 0 \\ x_7(s_1) &= 0 \\ x_8(s_1) &= 0 \\ x_9(s_1) &= 0.99564 \end{aligned}$$

Assim,

$$M(s_1) = (-0.063903, 0.041432, -0.00022769, -0.045824, 0, 0, 0, 0, 0.99564)$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^9 x_i(s_1)^2 &= (-0.063903)^2 + (0.041432)^2 + (-0.00022769)^2 + (-0.045823)^2 + (0.99604)^2 \\ &= 1 \\ &= r^2 \end{aligned}$$

(ii) Cálculo das funções coordenadas no ponto  $s_2 = (1, 0)$ :

$$\begin{aligned}x_1(s_2) &= -0.039869 \\x_2(s_2) &= -0.090762 \\x_3(s_2) &= 0.0069850 \\x_4(s_2) &= 0.0061274 \\x_5(s_2) &= 0 \\x_6(s_2) &= 0 \\x_7(s_2) &= 0.00016121 \\x_8(s_2) &= 0 \\x_9(s_2) &= 0.9926\end{aligned}$$

Então,

$$M(s_2) = (-0.039869, -0.090762, 0.0069850, -0.0061274, 0, 0, 0.00016121, 0.9926)$$

e

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^9 x_i(s_2)^2 &= (0.039869)^2 + (-0.090762)^2 + (0.0069850)^2 \\&\quad + (-0.0061274)^2 + (0.00016121)^2 + (0.9926)^2 \\&= 1 \\&= r^2\end{aligned}$$

(iii) Cálculo das funções coordenadas no ponto  $s_3 = (0, 1)$ :

$$\begin{aligned}x_1(s_3) &= -0.063903 \\x_2(s_3) &= -0.041432 \\x_3(s_3) &= -0.00022769 \\x_4(s_3) &= 0.045824 \\x_5(s_3) &= 0 \\x_6(s_3) &= 0 \\x_7(s_3) &= 0 \\x_8(s_3) &= 0 \\x_9(s_3) &= 0.99564\end{aligned}$$

Assim,

$$M(s_3) = (-0.063903, -0.041432, -0.00022769, 0.045824, 0, 0, 0, 0, 0.99564)$$

e

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^9 x_i(s_3)^2 &= (-0.063903)^2 + (-0.041432)^2 + (-0.00022769)^2 + (0.045823)^2 + (0.99604)^2 \\&= 1 \\&= r^2\end{aligned}$$

(iv) Cálculo das funções coordenadas no ponto  $s_4 = (-1, 0)$ :

$$x_1(s_4) = -0.031599$$

$$x_2(s_4) = 0.015539$$

$$x_3(s_4) = -0.063737$$

$$x_4(s_4) = -0.01782$$

$$x_5(s_4) = 0$$

$$x_6(s_4) = 0$$

$$x_7(s_4) = -0.00016121$$

$$x_8(s_4) = 0$$

$$x_9(s_4) = 0.99907$$

Então,

$$M(s_4) = (-0.031599, 0.015539, -0.063737, -0.01782, 0, 0, -0.00016121, 0, 0.99907)$$

e

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^9 x_i(s_4)^2 &= (-0.031599)^2 + (0.015539)^2 + (-0.063737)^2 \\ &\quad + (-0.01782)^2 + (-0.00016121)^2 + (0.99907)^2 \\ &= 1 \\ &= r^2 \end{aligned}$$



# Capítulo 5

## Conclusões e Perspectivas Futuras

Na presente dissertação desenvolvemos um estudo sobre mergulhos isométricos do plano hiperbólico  $H$  em  $\mathbb{R}^6$  e de  $H$  em  $\mathbb{S}^8 \subset \mathbb{R}^9$  baseados nas referências [4] e [5]. Procuramos tornar o texto auto-suficiente desenvolvendo várias passagens obscuras presentes em tais artigos. No entanto, como trabalhos futuros, alguns estudos podem ser feitos, como por exemplo, descrever (ou investigar) a existência de um método para geração de mergulhos isométricos de  $\mathbb{H}^n$  (espaço hiperbólico de dimensão  $n$ ) em  $\mathbb{S}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ ,  $m > n$ . Além disso, do ponto de vista da Teoria da Informação e Codificação, a implementação de reticulados hiperbólicos mergulhados isometricamente em ambientes euclidianos pode ser muito interessante, pois possibilita novas formas de alocação de pontos com uniformidade e controle de erro em dimensões mais altas. Esperamos também que em trabalhos futuros seja investigado o papel geométrico do  $\varepsilon$  no mergulho isométrico de  $H$  em  $\mathbb{S}^8 \subset \mathbb{R}^9$  e como são as geodésicas no modelo  $H$  apresentado.

# Referências Bibliográficas

- [1] AGUSTINI, E. & COSTA, S. I. R. “AWGN-Signal Transmission in Hyperbolic Spaces”. In *Proc. of IEEE-International Symposium on Information Theory ISIT-2005*, Adelaide, Australia, 2005, (4 p.)
- [2] BEARDON, A. *The Geometry of Discrete Groups*. New York: Springer-Verlag. 1982.
- [3] BLANUSA, D. “Eine isometrische und singularitätenfreie Einbettung des  $n$ -dimensionalen hyperbolischen Raumes im Hilbertischen Raum”. *Monatshefte für Mathematik*, 57, 1953, pp. 102-108.
- [4] BLANUSA, D. “Über die Einbettung hyperbolischer Räume in euklidische Räume”. *Monatshefte für Mathematik*, 59 Band, 3 Heft, 1955, pp. 217-229.
- [5] BLANUSA, D. “ $C^\infty$ -isometric imbeddings of the hyperbolic plane and of cylinders with hyperbolic metric in spherical spaces”. *Annali di Matematica Pura et Applicata* (Springer-Verlag), vol 4, n. 57, 1962, pp.321-337.
- [6] CARMO, M. P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática-SBM, 2005. (coleção Textos Universitários)
- [7] CARMO, M. P. *Geometria Riemanniana*. 3a. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática-SBM, 2005. (coleção Projeto Euclides)
- [8] CAVALCANTE, R. G., LAZARI, H. LIMA, J. D. & PALAZZO JR., R. “A New Approach to the Design of Digital Communication Systems”. *DIMACS Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science- AMS*. Vol. 68, 2005. (33 p.)
- [9] CHERN, S. & KUIPER, N. H. “Some Theorems on the Isometric Imbedding of Compact Riemann Manifold in Euclidean Space”. *Annals of Mathematics*, Vol. 56, No. 3, Nov. 1952, pp. 422-430.
- [10] CONWAY, J. H. & SLOANE, N. J. A. *Sphere packings, Lattices, and Groups*. 3<sup>th</sup>. ed. New York: Springer-Verlag, 1999.
- [11] COSTA, S. I. R., SANTOS, S. A., & STRAPASSON, J. E. “Fisher Information Matrix and Hyperbolic Geometry”. In the *Proc. of IEEE ISOC ITW2005 on Coding and Complexity*, 2005, 34-36.
- [12] GALLOT, S., HULLIN, D. & LAFONTAINE, J. *Riemannian Geometry*. 3rd. ed. Springer-Verlag: Berlin-Heidelberg, 2004. (UTX - Universitext collection)
- [13] GROMOV, M. L. & ROKHLIN, V. A. “Embeddings and Immersions in Riemannian Geometry”. *Russian Mathematical Surveys*, 25, 1970, pp. 1-57.
- [14] LAZARI, H. & PALAZZO JR. R. “Geometrically uniform hyperbolic codes”. *Computational and Applied Mathematics*. Vol. 24, No. 2, 2005, pp. 173-192.

- [15] NASH, J. “Real Algebraic Manifolds”. *Annals of Mathematics*, Vol. 56, No. 3, Nov. 1952, pp. 405-421.
- [16] NASH, J. “ $C^1$  Isometric Imbeddings”. *Annals of Mathematics*, Vol. 60, No. 3, Nov. 1954, pp. 383-396.
- [17] NASH, J. “The Imbedding Problem for Riemannian Manifolds”. *Annals of Mathematics*, Vol. 63, No. 1, Jan. 1956, pp. 20-63.
- [18] SILVA, E. B., FIRER, M., COSTA, S. R. & PALAZZO JR., R. “Signal constellations in the hyperbolic plane: A proposal for new communication systems”. *Journal of the Franklin Institute*, No. 343, 2006, pp. 69.