

JULIANA LÁZARA CURCINO VIANA

**Um Estudo Sobre a Estabilidade e  
Bifurcação de Hopf no  
Sistema Mecânico de Watt**



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE MATEMÁTICA  
2009

JULIANA LÁZARA CURCINO VIANA

# Um Estudo Sobre a Estabilidade e Bifurcação de Hopf no Sistema Mecânico de Watt

**Dissertação** apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**.

**Área de Concentração:** Matemática.  
**Linha de Pesquisa:** Equações Diferenciais.

**Orientador:** Prof. Dr. Márcio José Horta Dantas.

## Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

- 
- V61e Viana, Juliana Lazara Curcino, 1984-  
Um estudo sobre a estabilidade e bifurcação de Hopf no sistema mecânico de Watt / Juliana Lazara Curcino Viana. - 2009.  
48 f.
- Orientador: Márcio José Horta Dantas.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Matemática.  
Inclui bibliografia.
1. Matemática - Teses. 2. Teoria da bifurcação - Teses. 3. Estabilidade - Teses. I. Dantas, Márcio José Horta. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDU: 51



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
 FACULDADE DE MATEMÁTICA  
 PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
 Av. João Naves de Ávila, 2121, Bloco 1F, Sala 1F 152  
 Campus Santa Mônica, Uberlândia - MG, CEP 38400-902

**ALUNA:** Juliana Lázara Curcino Viana.

**NÚMERO DE MATRÍCULA:** 86186.

**ÁREA DE CONCENTRAÇÃO:** Matemática.

**LINHA DE PESQUISA:** Equações Diferenciais.

**PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA:** Nível Mestrado.

**TÍTULO DA DISSERTAÇÃO:** Um Estudo Sobre a Estabilidade e Bifurcação de Hopf no Sistema Mecânico de Watt.

**ORIENTADOR:** Prof. Dr. Márcio José Horta Dantas.

A dissertação foi **APROVADA**, em reunião pública, realizada na Sala Multiuso da Faculdade de Matemática, Bloco 1F, Campus Santa Mônica, em 19 de fevereiro de 2009, às 9:00 horas, com a seguinte Banca Examinadora:

**NOME**

Prof. Dr. Márcio José Horta Dantas - UFU

Prof. Dr. José Manoel Balthazar -UNESP/Rio Claro

Prof. Dr. Weber Flávio Pereira - UFU

**ASSINATURA**

*Márcio José Horta Dantas*

*Weber Flávio Pereira*

Uberlândia, 19 de fevereiro de 2009.

## Dedicatória

Dedico este trabalho a meus pais, Vanderlei e Nilva, e avós, Jovino e Sebastiana, que sempre me incentivaram a estudar; a meus amigos, Wanda, Wilian, Paulo, Daniel, Carol, Elizabeth e Renata, que acreditaram e ajudaram na realização desse projeto; a meu marido, Clayton, pela paciência e o incentivo, a minha cunhada, Cássia, pela disponibilização para ficar com a minha filha enquanto eu estudava e é claro a pessoa mais importante da minha vida, minha filha Lana.

## Agradecimentos

Gostaria de agradecer a agência Capes pela bolsa ao longo da Pós-graduação; aos professores do curso pela ajuda e o incentivo, aos professores José Manoel Balthazar e Weber Flávio Pereira por terem aceito o convite para fazerem parte da minha banca e também aos professores suplentes Valdair Bonfim e Masayoshi Tsuchida pela disponibilização, e é claro ao meu orientador, Márcio José Horta Dantas, pela confiança a mim depositada para o êxito desse trabalho.

VIANA, J. L. C. *Um Estudo Sobre a Estabilidade e Bifurcação de Hopf no Sistema Mecânico de Watt*. 2009. 80 p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia-MG.

## Resumo

Nesta dissertação apresentamos a análise feita por Sotomayor e outros em [11] sobre estabilidade e Bifurcação de Hopf no Sistema Mecânico de Watt. Este sistema consiste de uma máquina a vapor unida a um Regulador de Watt. Desta análise são obtidos vários resultados relativos a Bifurcação de Hopf. De fato, mostramos que se uma determinada expressão, que depende de parâmetros físicos desse sistema, é positiva ou negativa a existência de Bifurcação de Hopf supercrítica ou subcrítica é obtida.

*Palavras-chave:* Regulador de Watt, estabilidade, Bifurcação de Hopf, órbita periódica.

VIANA, J. L. C. *Stability and Hopf Bifurcation in the Watt Mechanical System*. 2009. 80 p. M. Sc. Dissertation, Federal University of Uberlândia, Uberlândia-MG.

### **Abstract**

In this work we give the analysis did by Sotomayor et al in [11], on stability and Hopf bifurcation of the Watt Mechanical System. This system consists of a steam engine coupled to a Watt Regulator. From this analysis are obtained several results on the onset of Hopf Bifurcation. Indeed, it is showed that if a special expression, which depends on the physical parameters of this system, is positive or negative the existence of supercritical or subcritical Hopf bifurcation can be achieved from it.

*Key-words:* Watt Regulator, Hopf bifurcation, stability, periodic orbit.



# Lista de Figuras

Fig 3.1: Bifurcação de Hopf supercrítica	p.9
Fig 3.2: Bifurcação de Hopf subcrítica	p.10
Fig 4.1: Sistema Regulador de Watt	p.13
Fig 4.2: Coordenadas Esféricas no Regulador de Watt	p.14

# Lista de Tabelas

Tabela 1: Dependência dos autovalores em relação a  $\epsilon$

p.20

# Sumário

Resumo	vii
Abstract	viii
Lista de Figuras	ix
Lista de Tabelas	x
Introdução	1
<b>1 Estabilidade</b>	<b>3</b>
1.1 Estabilidade de Pontos de Equilíbrio . . . . .	3
1.1.1 Estabilidade de Polinômios Reais de Grau Dois e Três . . . . .	4
<b>2 Variedades Centrais</b>	<b>7</b>
<b>3 Bifurcação de Hopf</b>	<b>9</b>
<b>4 O Sistema Regulador de Watt</b>	<b>13</b>
4.1 Descrição do Sistema Mecânico . . . . .	13
4.2 Dedução da Equação de Movimento do Sistema . . . . .	14
4.3 Pontos de Equilíbrio de (4.12) e Análise de Estabilidade . . . . .	17
<b>5 O Caso Crítico no Regulador de Watt</b>	<b>19</b>
<b>6 A Condição de Transversalidade no Sistema de Watt</b>	<b>22</b>
<b>7 A Condição de Foco Elementar para o Sistema de Watt</b>	<b>24</b>
7.1 Aproximação da Variedade Central . . . . .	28
7.2 Aproximação Quadrática da Variedade Central . . . . .	28
7.3 Cálculo do Primeiro Coeficiente de Lyapunov . . . . .	29
<b>8 Bifurcação de Hopf no Sistema de Watt-Vyshnegradskii</b>	<b>33</b>
<b>9 Conclusão</b>	<b>36</b>

# Introdução

Com o advento da Revolução Industrial, na segunda parte do século XVIII, muitas inovações tecnológicas foram introduzidas. Entre as principais devemos citar a invenção das máquinas a vapor, por Watt, na Inglaterra. Para controlar a quantidade adequada de vapor em alta temperatura que é injetada na máquina foi necessário a invenção, também por Watt em 1788, de um mecanismo adequado que executasse o controle da injeção de vapor de água no motor. Com o desenvolvimento tecnológico, a partir da segunda metade do século XIX, começaram a surgir problemas com estes controladores, também conhecidos como reguladores de Watt. Como veremos no Capítulo 4, as hastes em rotação do regulador tem de manter em um ângulo de abertura  $\varphi_0$  com o seu eixo de sustentação de forma estável. Este ângulo é estabelecido no projeto da máquina.

Na segunda metade do século XIX percebeu-se, devido aos avanços na manufatura das máquinas, que o ângulo de abertura do controlador, se afastava claramente do ângulo projetado ou oscilava periodicamente de forma estável em torno do ângulo inicialmente projetado. Em ambos os casos o regulador não cumpria sua função original. Investigações mais profundas, envolvendo a mecânica do regulador e o modelo matemático envolvido, eram necessárias. As primeiras iniciativas foram do físico inglês Maxwell [7] e do engenheiro russo Vyshnegradskii [12].

Do ponto de vista matemático, o comportamento inadequado do regulador poderia estar associado a alguma instabilidade do ângulo  $\varphi_0$  ou ao aparecimento da bifurcação de Hopf. Maxwell e Vyshnegradskii essencialmente investigaram o caso da instabilidade de  $\varphi_0$  e estabeleceram resultados que, na área, são clássicos. Tais resultados são apresentados no clássico livro de Pontryagin [9]. O fenômeno da bifurcação de Hopf, tal como o conhecemos hoje, não era do conhecimento dos pesquisadores do século XIX.

No século XX a existência da bifurcação de Hopf, para este problema, foi estabelecida em [5], [6]. Uma outra referência é [4]. Em [11] a existência de bifurcação de Hopf em um sistema mais geral do os investigados em [9], [5], [6] e [4] é dada. Os autores de [11] utilizam uma técnica mais adequada na abordagem desta classe de problemas.

Nesta dissertação, usaremos as mesmas idéias de [11] mas com algumas diferenças técnicas. Em [11] os autores partem diretamente para o cálculo das formas normais do campo vetorial envolvido. Isto permite chegar, de forma relativamente rápida à computação do primeiro coeficiente de Lyapunov, que fornece a condição da existência da bifurcação de Hopf. Aqui optamos por um caminho um pouco mais longo, mas acreditamos, menos sofisticado. Computamos explicitamente aproximações da variedade central envolvida na dinâmica deste problema mecânico. Do ponto de vista qualitativo obtemos os mesmos resultados de [11].

Esta dissertação está dividida na seguinte forma: na Seção 1.1 os conceitos básicos de ponto de equilíbrio e estabilidade são dados, assim como o clássico resultado de linearização Teorema 1.1. Na Subseção 1.1.1, devido ao Teorema 1.1 fazemos um estudo bastante completo da estabilidade de polinômios de grau três. Particularmente, para este caso, damos uma demonstração completa do Critério de Hurwitz, ver Teorema 1.2, item *a*, usando um argumento elementar dado em [3]. No Capítulo 2 são dados os principais resultados sobre variedades centrais que serão usados nesta dissertação. Resultados gerais sobre a bifurcação de Hopf, inclusive o im-

portante Teorema 3.1 (*Teorema de Hopf*), são dados no Capítulo 3. Na seção 4.1 é dada uma descrição do Regulador de Watt e na seção 4.2 é dada uma dedução detalhada da equação de movimento que rege o Regulador de Watt. Uma análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio determinados é realizada na seção 4.3, cujo principal resultado é o Teorema 4.1. Naturalmente este teorema, dado em [11], é uma generalização dos clássicos resultados dados em [7] e [12]. No caso crítico o teorema anterior não se aplica e é necessário considerar a existência de bifurcações, especificamente bifurcações de Hopf. Isto é feito no Capítulo 5. No Capítulo 6 é provado que no caso do sistema de equações diferenciais que regem o Regulador de Watt a condição de transversalidade é satisfeita, ver Teorema 6.1. A Condição do Foco Elementar, que é essencialmente a condição de que o primeiro coeficiente de Lyapunov seja não nulo, é abordada no Capítulo 7. Desta seção em diante serão necessárias extensas computações de natureza algébrica. Todas elas foram realizadas usando o programa `wxMaxima 0.7.4` que pode ser obtido na página [http://wxmaxima.sourceforge.net/wiki/index.php/Main\\_Page](http://wxmaxima.sourceforge.net/wiki/index.php/Main_Page). Na verdade o `wxMaxima 0.7.4` é uma interface gráfica (GUI), do programa de computação algébrica `Maxima`, ver <http://maxima.sourceforge.net/>. Todos estes aplicativos são programas gratuitos de código aberto. Na Subseção 7.1 é realizada uma longa computação algébrica para obter uma aproximação quadrática da variedade central envolvida no caso crítico deste sistema mecânico. Usando este resultado podemos calcular, na seção 7.3, o primeiro coeficiente de Lyapunov que é dado na equação (7.11). Finalmente, no Capítulo 8 provamos a existência de bifurcações de Hopf, tanto no caso supercrítico como no caso subcrítico, no Teorema 8.1.

# Capítulo 1

## Estabilidade

### 1.1 Estabilidade de Pontos de Equilíbrio

O principal objetivo do nosso trabalho é o estudo da estabilidade do sistema regulador-máquina. Para fazermos isto em um contexto matematicamente preciso, é necessário introduzir as definições de ponto de equilíbrio e estabilidade deste ponto. Para facilitar esse estudo faremos uso de resultados matemáticos como por exemplo o Teorema de Lyapunov, cuja demonstração é dada em [9]. Temos as seguintes definições preliminares.

Seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $U \subset \mathbb{R}^n$  aberto e  $f \in C^1$ . Considere a equação diferencial

$$x' = f(x) \tag{1.1}$$

dizemos que  $x_0 \in U$  é um ponto de equilíbrio de (1.1) se  $f(x_0) = 0$ . Note que  $x(t) = x_0$  é uma solução de (1.1).

A seguir, definiremos estabilidade de um ponto de equilíbrio.

**Definição 1.1** *Seja  $x_0 \in U$  um ponto de equilíbrio de (1.1). Então  $x_0$  é um ponto de equilíbrio estável se para toda vizinhança  $W$  de  $x_0$  em  $U$  existe uma vizinhança  $W_1$  de  $x_0$  em  $W$  tal que toda solução  $x(t)$  com  $x(0)$  em  $W_1$  é definida para todo  $t > 0$  e  $x(t) \in W$  para todo  $t > 0$ .*

**Definição 1.2** *Um ponto de equilíbrio  $x_0$  diz-se assintoticamente estável, se é estável e, além, disso para toda solução  $x(t)$  cuja condição inicial está no aberto  $W_1$  dado na definição (1.1) temos  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0$ .*

**Definição 1.3** *Um ponto de equilíbrio  $x_0$  que não é estável é chamado instável. Isto significa que existe uma vizinhança  $W$  de  $x_0$  tal que para toda vizinhança  $W_1$  de  $x_0$  em  $W$ , existe pelo menos uma solução  $x(t)$  que começa em  $x(0) \in W_1$ , cuja órbita não está inteiramente contida em  $W$ .*

Para a demonstração de alguns resultados futuros, relativos a estabilidade assintótica de um ponto de equilíbrio, faremos uso do seguinte resultado.

**Teorema 1.1** *(Lyapunov) Seja  $\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, \dots, n$  um sistema de equações diferenciais e  $a = (a^1, \dots, a^n)$  um ponto de equilíbrio do sistema. Seja  $a_j^i = \frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}$ . Se todos autovalores da matriz  $A = (a_j^i)$  tem parte real negativa, o ponto de equilíbrio  $a$  do sistema é assintoticamente estável.*

Uma questão natural é como determinar se os autovalores da matriz  $A$ , dada no Teorema 1.1, tem parte real negativa. Inicialmente observemos que estes autovalores são raízes do polinômio característico  $\det(\lambda I - A)$ . A questão é então equivalente ao problema de determinar condições sob as quais um polinômio com coeficientes reais tem raízes com parte real negativa. Tal questão é abordada na próxima subseção.

### 1.1.1 Estabilidade de Polinômios Reais de Grau Dois e Três

Nesta seção definiremos estabilidade de polinômios e vamos caracterizar a estabilidade para polinômios de grau dois ou três.

**Definição 1.4** *Seja  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  um polinômio real de grau  $n$ . Dizemos que  $p$  é um polinômio estável se todas as raízes de  $p$  tem parte real menor que zero.*

Inicialmente observemos que o polinômio  $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  é estável se, e somente se, o polinômio  $x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{a_n} x + \frac{a_0}{a_n}$  é estável.

No caso de polinômios de grau dois teremos de caracterizar somente polinômios do tipo  $p(x) = x^2 + ax + b$ . Sejam  $p_1, p_2$  as raízes de  $p$ . Temos dois casos a considerar, o caso em que ambas raízes são reais e o caso em que as raízes são números complexos conjugados. Como  $a = -(p_1 + p_2)$ ,  $b = p_1 p_2$ , segue que se  $p$  é estável, então para cada um dos casos anteriores temos  $a > 0$ ,  $b > 0$ . Se a condição  $a > 0$ ,  $b > 0$  é válida, no caso de ambas as raízes serem reais, a equação  $b = p_1 p_2$  implica que  $p_1, p_2$  tem o mesmo sinal. Se ambos forem positivos a equação  $a = -(p_1 + p_2)$  implica que  $a < 0$  que é uma contradição. Assim  $p_1, p_2$  são ambos negativos. O caso em que  $p_1, p_2$  são complexos conjugados é ainda mais simples. Assim o polinômio  $p(x) = x^2 + ax + b$  é estável se, e somente se,  $a > 0$ ,  $b > 0$ .

Uma consequência do resultado anterior é a seguinte condição suficiente para a estabilidade de polinômios.

**Lema 1.1** *Se o polinômio  $p(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  com coeficientes reais é estável, então todos os seus coeficientes são positivos.*

**Prova:**

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra,  $p$  tem  $n$  raízes complexas, contando com as suas multiplicidades. Como  $p$  é um polinômio real segue que as raízes complexas não reais aparecem aos pares, e em cada par as raízes são conjugadas, portanto  $p$  escreve-se como

$$p(x) = \prod_{i=1}^l (x - c_i) \prod_{j=1}^m (x^2 + d_j x + f_j) \quad (1.2)$$

onde  $d_j, f_j, c_i$  pertencem ao conjunto  $\mathbb{R}$ . Como  $p$  é estável, segue que  $c_i < 0$  e que as raízes de cada polinômio  $x^2 + d_j x + f_j$  tem parte real negativa, portanto é estável. Então segue da nossa análise do caso quadrático que  $d_j, f_j$  são ambos positivos. Assim de (1.2) concluímos que todos os coeficientes de  $p$  são positivos.  $\square$

Nesta dissertação trabalharemos somente com sistemas de equações diferenciais que envolvem 3 variáveis independentes. Assim a linearização em torno de uma posição de equilíbrio dá origem a um sistema linear  $3 \times 3$ . Portanto, isto nos leva a considerar a estabilidade de polinômios de terceira ordem. Tais polinômios são caracterizados pelo Critério de Hurwitz. Gostaríamos de ressaltar que existe uma versão deste critério para polinômios reais arbitrários de ordem  $n$ . De qualquer forma daremos uma demonstração deste resultado quando  $n = 3$ . Para isto, é necessário o seguinte resultado preliminar.

**Lema 1.2** *Seja  $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ , onde  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Denotemos por  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  as raízes de  $p(x)$ . Então*

$$ab - c = -(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_3)$$

**Prova:**

Como  $a = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)$ ,  $b = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3$  e  $c = -\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ , então um cálculo direto mostra que

$$ab - c = -(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_3).$$

□

Deste lema segue o seguinte resultado.

**Teorema 1.2** *Seja  $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ , polinômio com coeficientes reais, então*

a) **(Critério de Hurwitz)**  *$p$  é estável se, e somente se,*

$$a, b, c > 0 \quad e \quad ab - c > 0 \tag{1.3}$$

b) *Se  $c > 0$  e  $ab - c < 0$ , então  $p$  tem duas raízes com parte real positiva e uma raiz real negativa.*

c) *Se  $a, b, c > 0$  e  $ab - c = 0$ , então  $p$  tem duas raízes com parte real nula e uma raiz real negativa.*

**Demonstração :**

a) Se  $p$  é estável segue do Lema 1.1 que  $a, b, c > 0$ . Temos dois casos a considerar:

a.1) Todas as raízes de  $p$  são reais.

Pela Definição 1.4 e o Lema 1.2 temos que

$$ab - c = -\underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2)}_{<0} \underbrace{(\alpha_1 + \alpha_3)}_{<0} \underbrace{(\alpha_2 + \alpha_3)}_{<0} > 0.$$

a.2)  $p$  tem pelo menos uma raiz complexa não real.

Como grau de  $p$  é três, segue que este polinômio tem exatamente uma raiz real e um par de raízes complexas conjugadas. Suponhamos  $\alpha_1 \in \mathbb{R}$  e  $\alpha_2$  raiz complexa não real. Novamente pela Definição 1.4 e o Lema 1.2 temos que

$$ab - c = \underbrace{-2 \operatorname{Re}(\alpha_2)}_{>0} \underbrace{|\alpha_1 + \alpha_2|^2}_{>0} > 0.$$

O que prova que (1.3) é uma condição necessária.

Se as desigualdades em (1.3) são válidas, novamente temos dois casos a considerar

a.3) Todas as raízes de  $p$  são reais.

Como  $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -c < 0$  as únicas possibilidades são as seguintes:

a.3.1) Duas raízes são positivas e uma é negativa.

a.3.2) Todas as raízes são negativas.



Se a.3.1 é válida, podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $\alpha_1, \alpha_2 > 0$  e  $\alpha_3 < 0$ . Assim  $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$ .

De  $a = -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) > 0$  temos que  $\alpha_2 + \alpha_3 < 0$  e  $\alpha_1 + \alpha_3 < 0$ . Do Lema 1.2 segue que  $ab - c < 0$ . O que é uma contradição, portanto a.3.2 é válida.

**a.4)**  $p$  tem pelo menos uma raiz complexa não real.

Sem perda de generalidade suponhamos  $\alpha_1 \in \mathbb{R}$  e  $\alpha_2$  raiz complexa não real. É claro que  $\alpha_1 < 0$ , pois caso contrário,  $c = -\alpha_1 \alpha_2 \bar{\alpha}_2 < 0$ , o que é uma contradição. Se  $Re(\alpha_2) = 0$  ou  $Re(\alpha_2) > 0$  do Lema 1.2 temos respectivamente  $ab - c = \underbrace{-2 Re(\alpha_2)}_{=0} \underbrace{|\alpha_1 + \alpha_2|^2}_{>0} = 0$  ou  $ab - c = \underbrace{-2 Re(\alpha_2)}_{<0} \underbrace{|\alpha_1 + \alpha_2|^2}_{>0} < 0$ . O que é uma contradição, portanto  $Re(\alpha_2) < 0$  e conseqüentemente  $Re(\bar{\alpha}_2) < 0$ .

Assim todas as raízes tem parte real negativa.

**b)** Novamente temos dois casos a considerar

**b.1)** Todas as raízes de  $p$  são reais.

Como no item anterior temos duas possibilidades

**b.1.1)** Duas raízes são positivas e uma é negativa.

**b.1.2)** Todas as raízes são negativas.

Se b.1.2 é válida, segue do Lema 1.2 que

$$ab - c = -(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_3) > 0$$

que é uma contradição com a hipótese, assim b.1.1 é válido.

**b.2)**  $p$  tem pelo menos uma raiz complexa não real.

Novamente sem perda de generalidade suponhamos  $\alpha_1 \in \mathbb{R}$  e  $\alpha_2$  raiz complexa não real. Se  $\alpha_1 \geq 0$  então  $c = -\alpha_1 \alpha_2 \bar{\alpha}_2 \leq 0$ , o que é uma contradição. Portanto  $\alpha_1 < 0$ . Se  $Re(\alpha_2) = 0$  ou  $Re(\alpha_2) < 0$ , usando um argumento similar àquele usado em a.4, obtemos respectivamente  $ab - c = 0$  ou  $ab - c > 0$ , o que é uma contradição. Portanto  $Re(\alpha_2) > 0$  e conseqüentemente  $Re(\bar{\alpha}_2) > 0$ .

**c)** Novamente temos que considerar dois casos

**c.1)** Todas as raízes de  $p$  são reais.

Como nos itens anteriores temos as seguintes possibilidades

**c.1.1)** Duas raízes são positivas e uma é negativa.

**c.1.2)** Todas as raízes são negativas.

Se c.1.1 é válido assumiremos, sem perda de generalidade, que  $\alpha_1 > 0$ ,  $\alpha_2 > 0$  e  $\alpha_3 < 0$ . Como  $\alpha_1, \alpha_2$  são positivos, segue do Lema 1.2 e da hipótese, que  $(\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_3) = 0$ . Assim podemos admitir, também sem perda de generalidade, que  $\alpha_3 = -\alpha_1$ . Como  $a > 0$  temos que  $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 < 0$ , logo  $\alpha_2 < 0$ , o que é uma contradição.

Se c.1.2 válido, do Lema 1.2 temos que  $ab - c > 0$  que é uma contradição com a hipótese.

Concluimos assim que  $p$  tem necessariamente raízes complexas.

**c.2)**  $p$  tem pelo menos uma raiz complexa não real.

De modo análogo aos itens a.4 e b.2 temos  $\alpha_1 < 0$ . Se  $Re(\alpha_2) > 0$  ou  $Re(\alpha_2) < 0$  do Lema 1.2 temos respectivamente  $ab - c < 0$  ou  $ab - c > 0$ . O que é uma contradição, portanto  $Re(\alpha_2) = 0$  e conseqüentemente  $Re(\bar{\alpha}_2) = 0$ .

□

# Capítulo 2

## Variedades Centrais

Considere o sistema de equações diferenciais

$$\begin{cases} x' = Ax + f(x, y), \\ y' = By + g(x, y), \end{cases} \quad (2.1)$$

onde  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $A$  e  $B$  são matrizes constantes e  $f$  e  $g$  são funções de classe  $C^2$  com  $f(0, 0) = 0$ ,  $f'(0, 0) = 0$ ,  $g(0, 0) = 0$  e  $g'(0, 0) = 0$ . Assumiremos também que cada autovalor de  $B$  tem parte real negativa e que os autovalores de  $A$  tem parte real zero.

**Definição 2.1** Um conjunto  $S \subset \mathbb{R}^{n+m}$  é denominado de variedade invariante de (2.1) se para qualquer  $(x_0, y_0) \in S$ , existe uma solução  $(x(t), y(t))$  de (2.1), no intervalo  $(-T, T)$ ,  $T > 0$ , tal que  $x(0) = x_0$ ,  $y(0) = y_0$  e  $(x(t), y(t)) \in S$  para todo  $t \in (-T, T)$ .

Um caso importante de variedade invariante é quando ela é o gráfico de uma função. Especificamente temos o seguinte.

**Definição 2.2** Se uma variedade invariante  $S$  de (2.1) é dada pelo gráfico de uma função diferenciável  $h$  tal que  $h(0) = 0$ ,  $h'(0) = 0$ , então  $S$  é denominada de uma variedade central de (2.1) e será indicada por  $y = h(x)$ .

Naturalmente a primeira questão que se põe é a da existência de variedades centrais. Tal indagação é respondida pelo seguinte resultado.

**Teorema 2.1** Existe uma variedade central de (2.1),  $y = h(x)$ ,  $|x| < \delta$ , onde  $h$  é  $C^2$ .

Discussão e análise deste resultado são dadas em [2] e [8].

Segue do Teorema 2.1 que o sistema (2.1) reduz-se ao seguinte

$$u' = Au + f(u, h(u)). \quad (2.2)$$

Portanto informações sobre a dinâmica de (2.1) podem ser obtidas através de (2.2) que é um sistema mais simples. Nisto reside a principal importância do uso de Variedades Centrais em Equações Diferenciais Ordinárias. Particularmente a estabilidade de pontos de equilíbrio não hiperbólicos pode ser investigada dessa forma, ver por exemplo [2] e [8]. Este, no entanto, não será o nosso principal objetivo neste trabalho. De qualquer forma uma das abordagens usadas para tornar efetivo o uso de Variedades Centrais é o cálculo de suas aproximações.

Note que substituindo a variedade central  $y = h(x)$  em (2.1), obtemos que

$$h'(x)[Ax + f(u, h(u))] = Bh(x) + g(u, h(u)). \quad (2.3)$$

Dada uma função  $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$  que é  $C^1$  em uma vizinhança da origem, definimos a seguinte função

$$(M\phi)(x) = \phi'(x)[Ax + f(x, \phi(x))] - B\phi(x) - g(x, \phi(x)). \quad (2.4)$$

Segue de (2.3) que para variedades centrais temos  $(Mh)(x) = 0$ .

O seguinte teorema nos permite obter aproximações arbitrárias de variedades centrais.

**Teorema 2.2** *Seja  $\phi$  uma aplicação  $C^1$  de uma vizinhança da origem de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^m$  tal que  $\phi(0) = 0$  e  $\phi'(0) = 0$ . Suponha que  $(M\phi)(x) = O(|x|^q)$  onde  $q > 1$ . Então em uma vizinhança da origem temos  $|h(x) - \phi(x)| = O(|x|^q)$ .*

# Capítulo 3

## Bifurcação de Hopf

Inicialmente, faremos algumas considerações informais sobre a bifurcação de Hopf. Consideremos o sistema dinâmico dado por  $w' = X(w, \mu)$  onde  $(w, \mu) \in \Omega \times I$  e  $\Omega$  e  $I$  são abertos de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}$  respectivamente. Além disso,  $X$  é um campo vetorial de classe  $C^\infty$ .

Suponhamos que o sistema dinâmico anterior tenha um ponto de equilíbrio. Além disso, é observado que este ponto de equilíbrio perde estabilidade quando um par de autovalores complexos da linearização do sistema cruza o eixo imaginário do plano complexo a medida que o parâmetro  $\mu$  varia em torno de um valor adequado. Sob condições razoáveis sobre o campo vetorial, podemos esperar o aparecimento de um pequeno ciclo limite a partir do ponto de equilíbrio. O ciclo limite é estável se um certo valor, denominado de primeiro coeficiente de Lyapunov, é negativo e a bifurcação é denominada de bifurcação de Hopf supercrítica. Se o ponto de equilíbrio é instável, temos o caso subcrítico. Este comportamento dinâmico é indicado nas Figuras 3.1 e 3.2 respectivamente.

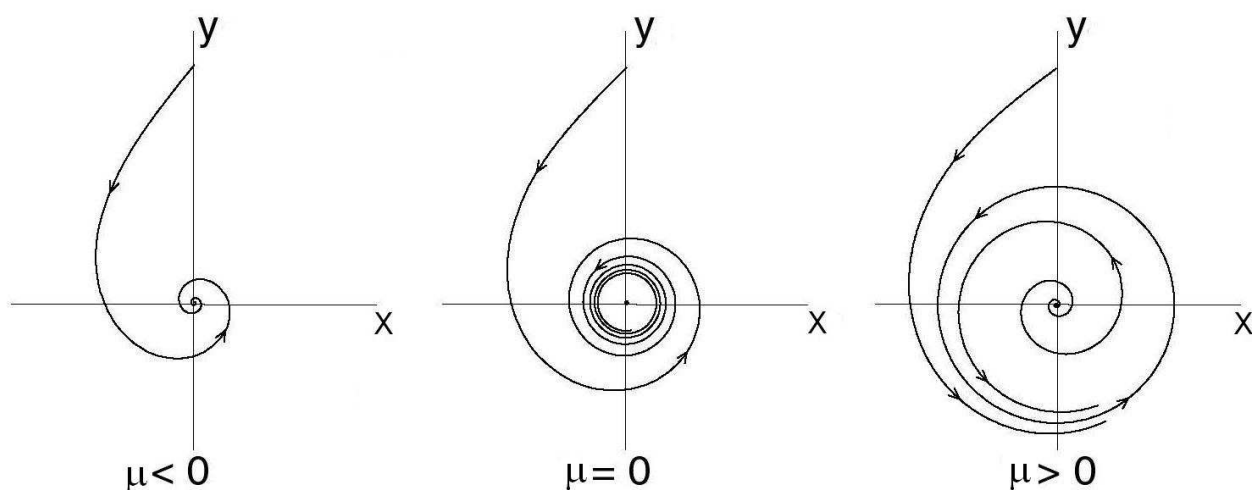


Figura 3.1: Bifurcação de Hopf supercrítica

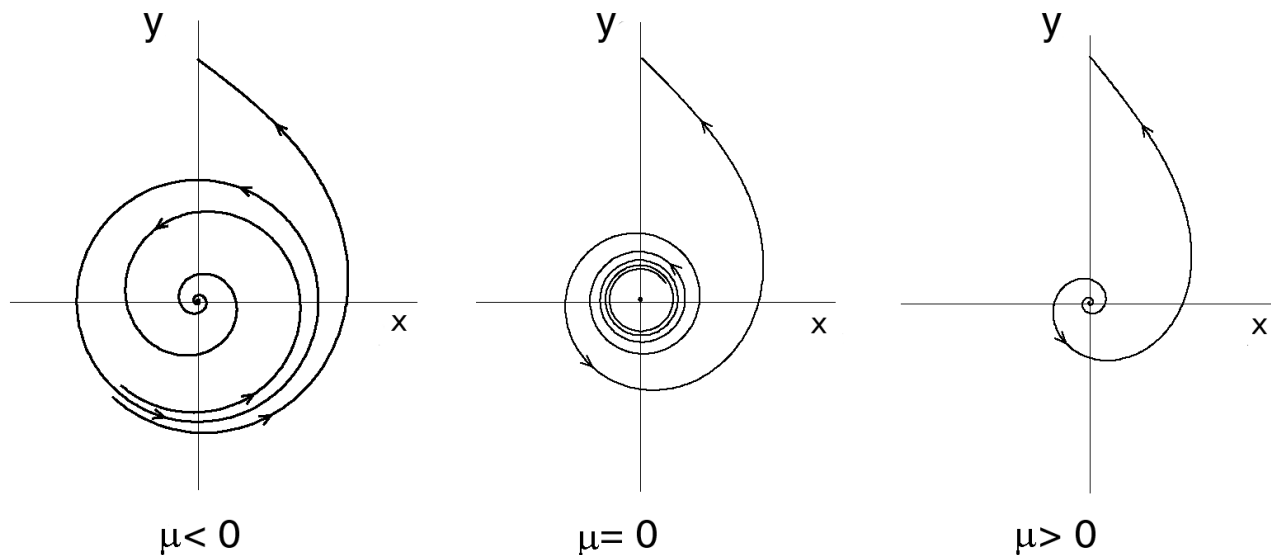


Figura 3.2: Bifurcação de Hopf subcrítica

Naturalmente, dependendo do sistema de coordenadas adotado, os sinais do parâmetro  $\mu$  podem ser trocados. O que é essencial é que na bifurcação de Hopf supercrítica, temos um ponto de equilíbrio isolado e assintoticamente estável e, com a bifurcação, "transforma-se" em uma órbita periódica estável em cujo interior há um ponto de equilíbrio instável. Na bifurcação de Hopf subcrítica temos inicialmente um ponto de equilíbrio isolado e instável e com a bifurcação é obtida uma órbita periódica instável em cujo interior há um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.

A situação anterior é descrita precisamente no seguinte resultado e nas Observações 3.2 e 3.3.

**Teorema 3.1** *Suponha que o sistema*

$$\mathbf{x}' = f_{\mu}(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ , tem um ponto de equilíbrio  $\mathbf{x}_0$  em  $\mu = \mu_0$ , no qual as seguintes propriedades são satisfeitas:

(H)  $f'_{\mu_0}(\mathbf{x}_0)$  tem um par simples (multiplicidade 1) de autovalores imaginários puros,  $\pm i\omega$ , e nenhum outro autovalor com parte real nula.

Então H implica que existe uma curva diferenciável de pontos de equilíbrio  $\mu \rightarrow (x(\mu), \mu)$  tal que  $x(\mu_0) = x_0$ . Os autovalores  $\lambda(\mu)$ ,  $\bar{\lambda}(\mu)$  de  $f'_{\mu}(x(\mu))$ , que são imaginários puros em  $\mu = \mu_0$ , dependem diferenciavelmente de  $\mu$ . Se, além disso

$$\frac{d}{d\mu} (\operatorname{Re} \lambda(\mu))|_{\mu=\mu_0} = d \neq 0, \quad (3.2)$$

então existe uma variedade central, de dimensão três, passando por  $(\mathbf{x}_0, \mu_0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  e uma mudança de variáveis para o qual a expansão de Taylor, em torno da origem, até a ordem três do sistema, **na variedade central**, é dada por

$$\begin{cases} x' = (d\mu + a(x^2 + y^2))x - (\omega + c\mu + b(x^2 + y^2))y, \\ y' = (\omega + c\mu + b(x^2 + y^2))x + (d\mu + a(x^2 + y^2))y. \end{cases} \quad (3.3)$$

Se

$$a \neq 0 \quad (3.4)$$

Então para  $\mu$  suficientemente pequeno temos

- a) Se  $\frac{d}{a}\mu > 0$ , (3.1) tem um ponto de equilíbrio hiperbólico isolado perto de  $\mathbf{x}_0$ .
- b) Se  $\frac{d}{a}\mu < 0$ , (3.1) têm um ponto de equilíbrio hiperbólico e uma órbita periódica hiperbólica perto de  $\mathbf{x}_0$ , com estabilidade oposta.

**Observação 3.1** Em (3.3) a expansão de Taylor é em torno de  $\mathbf{x}_0$  e depois é feita uma translação  $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{x}_0$ , por isso na equação (3.3) tratamos o ponto de equilíbrio como sendo a origem. Além disso, também transladamos  $\mu_0$  para origem de modo que também  $\mu$  varie em torno de zero.

**Observação 3.2** A dinâmica do sistema ocorre em dimensão dois, pois a terceira equação do sistema, na variedade central, é dada por  $\mu' = 0$ , e neste caso podemos então nos referir à região limitada por órbitas periódicas sem ambiguidade.

Notemos que o comportamento qualitativo do sistema (3.1) na vizinhança do ponto  $P_0$  depende do sinal de  $\mu$ , de um lado temos um ponto de equilíbrio hiperbólico e do outro temos uma órbita periódica. Quando este tipo de mudança qualitativa ocorre temos o que é denominado de bifurcação de Hopf.

A equação (3.2) é denominada de condição de transversalidade. Se a condição (3.4) é satisfeita, dizemos que o ponto de equilíbrio  $\mathbf{x}_0$ , ou a origem após translação, é um foco elementar composto, ou, simplesmente um foco elementar. O número  $a$  é denominado de primeiro coeficiente de Lyapunov.

Para uma análise e demonstração deste importante resultado, ver [2] e [8].

**Observação 3.3** Pode-se também demonstrar, ver por exemplo [8], que além do teorema anterior, as seguintes afirmações são também válidas.

- a) Se  $d > 0$ ,  $a > 0$  e  $\mu > 0$  então  $\mathbf{x}_0$  é um ponto de equilíbrio instável .
- b) Se  $d > 0$ ,  $a > 0$  e  $\mu < 0$  então  $\mathbf{x}_0$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável que está no interior da região limitada por uma órbita periódica instável do sistema (3.1).
- c) Se  $d > 0$ ,  $a < 0$  e  $\mu > 0$  então  $\mathbf{x}_0$  é um ponto de equilíbrio instável que está no interior da região limitada por uma órbita periódica assintoticamente estável do sistema (3.1).
- d) Se  $d > 0$ ,  $a < 0$  e  $\mu < 0$  então  $\mathbf{x}_0$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.
- e) Se  $d < 0$ ,  $a > 0$  e  $\mu > 0$  então  $\mathbf{x}_0$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável que está no interior da região limitada por uma órbita periódica instável do sistema (3.1).
- f) Se  $d < 0$ ,  $a > 0$  e  $\mu < 0$  então  $\mathbf{x}_0$  é um ponto de equilíbrio instável .
- g) Se  $d < 0$ ,  $a < 0$  e  $\mu > 0$  então  $\mathbf{x}_0$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável.
- h) Se  $d < 0$ ,  $a < 0$  e  $\mu < 0$  então  $\mathbf{x}_0$  é um ponto de equilíbrio instável que está no interior da região limitada por uma órbita periódica assintoticamente estável do sistema (3.1).

Na demonstração dos itens anteriores escreve-se (3.3) em coordenadas polares, e para este sistema truncado obtem-se os resultados dos itens precedentes. O ponto realmente difícil é mostrar que os resultados obtidos permanecem qualitativamente os mesmos sob perturbação dos termos de ordem igual ou maior que quatro. Como o nosso objetivo nesta tese é o estudo da dinâmica de um sistema mecânico particular, não faremos tal prova.

A condição de foco elementar, como veremos, exigirá computações algébricas particularmente longas. O procedimento geral é o seguinte. Usando-se a hipótese **H** do Teorema 3.1 pode-se determinar uma mudança de variável adequada e colocar o sistema (3.1), quando  $\mu = \mu_0$ , na forma (2.1). No caso a ser estudado, teremos

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}.$$

Pelo Teorema 2.1 temos que existe uma variedade central, e sobre esta variedade, o sistema (3.1) escreve-se como o seguinte sistema bidimensional

$$\begin{cases} x' = \omega y + f(x, y), \\ y' = -\omega x + g(x, y). \end{cases} \quad (3.5)$$

Pode-se mostrar, ver eq. (3.4.11), pg. 152 de [8], que  $a$ , dado em (3.4), é obtido de (3.5) por meio da seguinte fórmula.

$$a = \begin{cases} \frac{1}{16} [f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}] \\ + \frac{1}{16\omega} [f_{xy} (f_{xx} + f_{yy}) \\ - g_{xy} (g_{xx} + g_{yy}) \\ - f_{xx} g_{xx} + f_{yy} g_{yy}], \end{cases} \quad (3.6)$$

onde as derivadas parciais são calculadas em  $(0, 0)$ . Para a obtenção de  $f, g$  teremos de calcular aproximações da variedade central, que serão obtidas com o uso do Teorema 2.2.

# Capítulo 4

## O Sistema Regulador de Watt

Como já informamos na Introdução, problemas de natureza tecnológica levaram ao estudo da dinâmica de um sistema mecânico. Como veremos esta dinâmica é não trivial. Embora a questão aqui tratada seja específica ao problema do Regulador de Watt, as técnicas aqui utilizadas são de natureza geral e podem ser aplicadas a uma grande variedade de problemas que se originam da Física ou dos diversos ramos da Engenharia.

### 4.1 Descrição do Sistema Mecânico

O Regulador de Watt consiste em um mecanismo constituído por duas hastes que junto com um eixo central podem girar, articulados por duas pequenas hastes que conecta as hastes maiores com o eixo central. Estas duas hastes maiores possuem duas massas iguais em suas extremidades. Pelo efeito da força centrífuga, quando a velocidade de rotação do eixo central aumenta, as massas tendem a separar simultaneamente do eixo central, formando um ângulo entre as hastes maiores e o eixo. As hastes maiores agem na válvula que controla a saída de vapor, assim quando a velocidade angular da carga de massa  $m$  aumenta, a válvula de vapor abaixa, limitando o volume de vapor e, conseqüentemente reduzindo a velocidade. Se a velocidade angular da carga de massa  $m$  diminui acontece o oposto: as hastes abaixam e a válvula abre mais, aumentando a velocidade angular.

Uma representação esquemática deste sistema é dada na figura seguinte.

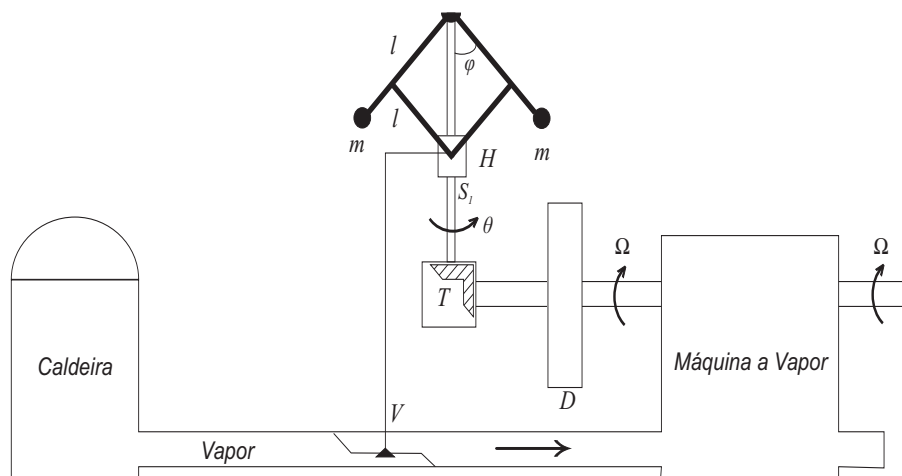


Figura 4.1: Sistema Regulador de Watt



Temos que,  $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$  é o ângulo de abertura das hastes do regulador com relação ao seu eixo vertical  $S_1$ ;  $\Omega \in [0, \infty)$  é a velocidade angular de rotação do disco  $D$ ;  $\theta$  é a velocidade angular de rotação de  $S_1$ ;  $l$  é o comprimento das hastes;  $m$  é a massa de cada bola;  $T$  é o conjunto de engrenagens de transmissão;  $H$  é um dispositivo localizado no eixo central que controla a abertura e fechamento da válvula  $V$  a qual abre e fecha de acordo com a abertura das hastes localizadas no Regulador de Watt e que determina o abastecimento de vapor à máquina.

## 4.2 Dedução da Equação de Movimento do Sistema

Um caso mais simples de estudo da estabilidade de funcionamento do sistema regulador-máquina é dado em [9] p.217. Como motivação deduziremos a equação de movimento do sistema para este caso, que é feito utilizando o artigo [10]. Em seguida formulamos o caso mais geral, que é o objeto de estudo do nosso trabalho. Como citamos anteriormente, o regulador centrífugo é formado por uma barra vertical capaz de girar sobre si mesma, com cargas iguais em suas extremidades, submetidas à articulações de modo que, só podem separar -se da posição de equilíbrio formando um mesmo ângulo  $\varphi$  com a barra vertical. Quando as hastes se separam elas movimentam um anel móvel acoplado à barra e que está ligado à uma alavanca. O mecanismo é construído de tal forma que a distância do anel à extremidade superior da barra seja igual à  $\mu \cos \varphi$ , sendo  $\mu$  uma constante. Vamos assumir que o comprimento de cada haste é igual a 1 e designemos por  $m$  a massa de cada carga.

Considere a representação

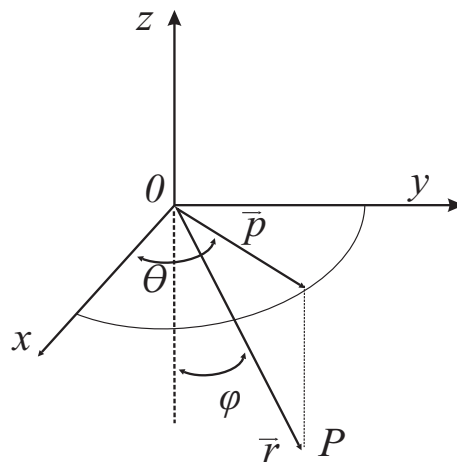


Figura 4.2: Coordenadas Esféricas no Regulador de Watt

Sejam

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  o vetor posição do ponto  $P$  no qual está localizado a massa  $m$ ,

$\varphi =$  o ângulo entre  $\vec{r}$  e a direção negativa do eixo  $z$ ,

$\theta =$  o ângulo entre a projeção de  $\vec{r}$  sobre o plano  $xy$  e a direção positiva do eixo  $x$ ,

$\dot{\theta} =$  velocidade angular da barra central.

Daí temos:

$$\begin{cases} x = L \operatorname{sen} \varphi \cos \theta \\ y = L \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \theta \\ z = -L \cos \varphi \end{cases} \quad (4.1)$$

Considere  $\vec{T}$  a tração que a haste  $\overline{OP}$  exerce sobre o corpo de massa  $m$  e indiquemos a sua norma por  $T$ .

No modelo mecânico, a direção da tração é sempre oposta à do vetor posição, assim de (4.1) obtemos

$$\vec{T} = \left( \frac{-\vec{r}}{|\vec{r}|} \right) T = \left( -\text{sen}\varphi \cos\theta \vec{i} - \text{sen}\varphi \text{sen}\theta \vec{j} + \cos\varphi \vec{k} \right) T \quad (4.2)$$

A outra força que atua na massa  $m$  é o peso que é dado por

$$\vec{P} = -mg\vec{k} \quad (4.3)$$

Além da tração  $\vec{T}$  e do peso  $\vec{P}$ , também atua sobre a massa  $m$  a força de atrito  $\vec{R}$ . Tal força de resistência é devida ao atrito viscoso nas articulações e atua na direção de  $\varphi$  e é contrária à velocidade angular  $\dot{\varphi}$ . Portanto é dada por

$$\vec{R} = -b\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

onde  $b$  uma constante positiva e  $\vec{e}_\varphi$  é o vetor tangente unitário à curva  $\theta = (\text{constante})$ . Assim

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}}{\left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} \right|}$$

Portanto de (4.1) temos que

$$\vec{e}_\varphi = \cos\varphi \cos\theta \vec{i} + \cos\varphi \text{sen}\theta \vec{j} + \text{sen}\varphi \vec{k}$$

dessa forma

$$\vec{R} = -b\dot{\varphi} \left( \cos\varphi \cos\theta \vec{i} + \cos\varphi \text{sen}\theta \vec{j} + \text{sen}\varphi \vec{k} \right) \quad (4.4)$$

Aplicando a segunda lei de Newton temos:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} \\ &= -mg\vec{k} + \vec{T} - b\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Portanto, de (4.1), (4.2), (4.3) e (4.4) obtemos

$$\begin{aligned} m \left( \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} \vec{i} + \frac{d^2 \vec{y}}{dt^2} \vec{j} + \frac{d^2 \vec{z}}{dt^2} \vec{k} \right) &= -mg\vec{k} - T \text{sen}\varphi \cos\theta \vec{i} - \\ &T \text{sen}\varphi \text{sen}\theta \vec{j} + T \cos\theta \vec{k} - \\ &b\dot{\varphi} \cos\varphi \cos\theta \vec{i} - b\dot{\varphi} \cos\varphi \text{sen}\theta \vec{j} - \\ &b\dot{\varphi} \text{sen}\varphi \vec{k}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{cases} m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -T \text{sen}\varphi \cos\theta - b\dot{\varphi} \cos\varphi \cos\theta, \\ m \frac{d^2 \vec{y}}{dt^2} = -T \text{sen}\varphi \text{sen}\theta - b\dot{\varphi} \cos\varphi \text{sen}\theta, \\ m \frac{d^2 \vec{z}}{dt^2} = T \cos\varphi - mg - b\dot{\varphi} \text{sen}\varphi, \end{cases} \quad (4.5)$$

Usando (4.1), temos

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = L[-(\text{sen}\varphi)(\cos\theta)\dot{\varphi}^2 - 2(\cos\varphi)(\text{sen}\theta)\dot{\theta}\dot{\varphi} - (\text{sen}\varphi)(\cos\theta)\dot{\theta}^2 + (\cos\varphi)(\cos\theta)\ddot{\varphi} - (\text{sen}\varphi)(\text{sen}\theta)\ddot{\theta}]$$

$$\frac{d^2\vec{y}}{dt^2} = L[-(\text{sen}\varphi)(\text{sen}\theta)\dot{\varphi}^2 + 2(\cos\varphi)(\cos\theta)\dot{\theta}\dot{\varphi} - (\text{sen}\varphi)(\text{sen}\theta)\dot{\theta}^2 + (\cos\varphi)(\text{sen}\theta)\ddot{\varphi} + (\text{sen}\varphi)(\cos\theta)\ddot{\theta}]$$

$$\frac{d^2\vec{z}}{dt^2} = L[(\cos\varphi)\dot{\varphi}^2 + (\text{sen}\varphi)\ddot{\varphi}]$$

Assim, de (4.5) temos

$$\begin{cases} mL[-(\text{sen}\varphi)(\cos\theta)\dot{\varphi}^2 - 2(\cos\varphi)(\text{sen}\theta)\dot{\theta}\dot{\varphi} - (\text{sen}\varphi)(\cos\theta)\dot{\theta}^2 + (\cos\varphi)(\cos\theta)\ddot{\varphi} - (\text{sen}\varphi)(\text{sen}\theta)\ddot{\theta}] = -T\text{sen}\varphi\cos\theta - b\dot{\varphi}\cos\varphi\cos\theta, \\ mL[-(\text{sen}\varphi)(\text{sen}\theta)\dot{\varphi}^2 + 2(\cos\varphi)(\cos\theta)\dot{\theta}\dot{\varphi} - (\text{sen}\varphi)(\text{sen}\theta)\dot{\theta}^2 + (\cos\varphi)(\text{sen}\theta)\ddot{\varphi} + (\text{sen}\varphi)(\cos\theta)\ddot{\theta}] = -T\text{sen}\varphi\text{sen}\theta - b\dot{\varphi}\cos\varphi\text{sen}\theta, \\ mL[(\cos\varphi)\dot{\varphi}^2 + (\text{sen}\varphi)\ddot{\varphi}] = T\cos\varphi - mg - b\dot{\varphi}\text{sen}\varphi, \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por  $\cos\theta$  e a segunda equação por  $\text{sen}\theta$  e somando as duas membro a membro, resulta no seguinte sistema

$$\begin{cases} mL[-(\text{sen}\varphi)\dot{\varphi}^2 - (\text{sen}\varphi)\dot{\theta}^2 + (\cos\varphi)\ddot{\varphi}] = -T\text{sen}\varphi - b\dot{\varphi}(\cos\varphi), \\ mL[(\cos\varphi)\dot{\varphi}^2 + (\text{sen}\varphi)\ddot{\varphi}] = T\cos\varphi - mg - b\dot{\varphi}\text{sen}\varphi, \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por  $\cos\varphi$  a segunda equação por  $\text{sen}\theta$ , somando-as membro a membro e fazendo algumas simplificações usuais obtemos que

$$m\ddot{\varphi} = m\dot{\theta}^2(\text{sen}\varphi)(\cos\varphi) - \frac{mg}{L}(\text{sen}\varphi) - \frac{b\dot{\varphi}}{L}. \quad (4.6)$$

Simplificando nosso estudo, reduziremos a máquina a vapor a um volante e ao eixo principal da máquina, que se põe em movimento de rotação devido a força gerada pela pressão do vapor da caldeira. E também assumimos que  $L = 1$ .

Seja  $\Omega$  a velocidade angular de rotação do eixo principal da máquina que gira o volante, denotemos por  $I$  um momento de inércia do volante, por  $P_1$  o momento angular da força da máquina, por  $P$  o momento angular da força que atua sobre o volante devido à carga sobre ele. Assim, a equação diferencial da máquina de vapor

$$I\dot{\Omega} = P_1 - P \quad (4.7)$$

O momento  $P_1$  depende da abertura da válvula que regula a entrada de vapor, e  $P$  depende do peso da carga sobre o volante. O regulador é acoplado à máquina a vapor a fim de manter uma uniformidade de funcionamento, medindo e regulando a velocidade de rotação do volante, que está unido ao regulador por um conjunto de engrenagens de transmissão de modo que, o bom funcionamento do regulador nos dá uma razão constante de transmissão:

$$c = \frac{\dot{\theta}}{\Omega} > 0. \quad (4.8)$$

Esta razão também é denominada relação de transmissão. Por outro lado, o anel móvel do regulador está conectado à válvula que controla a entrada de vapor, de modo que

$$P_1 = F_1 + \mu (\cos \varphi - \cos \varphi^{(*)}) \quad (4.9)$$

onde  $\varphi^{(*)}$  é o valor médio do ângulo central, perto do qual  $\varphi$  deve se manter;  $F_1$  é a força correspondente ao valor médio  $\varphi = \varphi^{(*)}$ ,  $\mu > 0$ ,  $\mu$  um coeficiente constante de proporcionalidade. De (4.6), (4.7), (4.8), (4.9) obtemos

$$\begin{cases} m\ddot{\varphi} = mc^2\Omega^2 (\text{sen}\varphi) (\cos \varphi) - mg(\text{sen} \varphi) - b\dot{\varphi} \\ I\dot{\Omega} = \mu \cos \varphi - F \end{cases} \quad (4.10)$$

onde  $F = P - F_1 + \mu \cos \varphi^{(*)}$ , que depende da carga. Onde (4.10) pode ser transformado num sistema de equações de primeira ordem. Tome  $\psi = \dot{\varphi}$ , daí

$$\begin{cases} \dot{\varphi} = \psi \\ \dot{\psi} = c^2\Omega^2(\text{sen} \varphi)(\cos \varphi) - g(\text{sen} \varphi) - \frac{b}{m}\psi \\ \dot{\Omega} = \frac{\mu}{I} \cos \varphi - \frac{F}{I} \end{cases} \quad (4.11)$$

que é chamado de sistema de Watt ou Watt-Vyshnegradskii.

Em funcionamento normal, a velocidade  $\Omega$  é constante para uma carga  $P$ , e a válvula de entrada de vapor se mantém imóvel, isto é,  $\varphi$  permanece constante.

As equações diferenciais que generalizam esse modelo são dadas por

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{d\tau} = \psi \\ \frac{d\psi}{d\tau} = (s(\Omega))^2 \text{sen}\varphi \cos\varphi - \frac{g}{l} \text{sen}\varphi - \frac{1}{m}h(\psi) \\ \frac{d\Omega}{d\tau} = \frac{1}{I} (M(\varphi) - F) \end{cases} \quad (4.12)$$

Na equação (4.12),  $\tau$  é o tempo,  $g$  a aceleração da gravidade,  $s$  é uma função estritamente crescente não-negativa com  $s(0) = 0$  e  $s'(0) > 0$ , chamada de função transmissão,  $h$  uma função estritamente crescente não-negativa com  $h(0) = 0$  e  $h'(0) > 0$  que representa a força de resistência do sistema;  $I$  é o momento de inércia do disco  $D$  e  $M$  é uma função estritamente decrescente de ângulo  $\varphi$  com  $M'(\varphi) < 0$ . As funções dependem do projeto do Sistema Regulador de Watt. O torque  $F$  devido à carga é determinado por  $F = M(\varphi^*)$ , onde  $\varphi^*$  é o ângulo de equilíbrio.

### 4.3 Pontos de Equilíbrio de (4.12) e Análise de Estabilidade

Vamos determinar os pontos  $(\varphi_0, \psi_0, \Omega_0)$  que anulam o lado direito da equação (4.12).

Temos então que

$$\begin{cases} \psi_0 = 0, \\ (s(\Omega_0))^2 \operatorname{sen}\varphi_0 \cos\varphi_0 - \frac{g}{l} \operatorname{sen}\varphi_0 - \frac{1}{m} h(\psi_0) = 0, \\ \frac{1}{I} (M(\varphi_0) - F) = 0. \end{cases} \quad (4.13)$$

Como  $h(0) = 0$  e  $\varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$ , segue de (4.13) que

$$\psi_0 = 0, \quad s(\Omega_0)^2 = \frac{g}{l \cos\varphi_0}, \quad M(\varphi_0) = F.$$

A matriz obtida pela linearização de (4.12) no ponto de equilíbrio

$$P_0 = (\varphi_0, 0, \Omega_0) \quad (4.14)$$

é dada então por

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{g \operatorname{sen}^2\varphi_0}{l \cos\varphi_0} & \frac{h'(0)}{m} & \frac{2g s'(\Omega_0) \operatorname{sen}\varphi_0}{l s(\Omega_0)} \\ \frac{M'(\varphi_0)}{I} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

Temos então o seguinte resultado

**Teorema 4.1** *Se*

$$h'(0) > \frac{-2m s'(\Omega_0)}{I s(\Omega_0)} M'(\varphi_0) \cot(\varphi_0) \quad (4.16)$$

*então  $P_0$  é um ponto de equilíbrio assintoticamente estável de (4.12). Se*

$$0 < h'(0) < \frac{-2m s'(\Omega_0)}{I s(\Omega_0)} M'(\varphi_0) \cot(\varphi_0) \quad (4.17)$$

*então  $P_0$  é instável.*

**Demonstração:**

O polinômio característico de (4.15) é dado por

$$p(\lambda) = \lambda^3 + \frac{h'(0)}{m} \lambda^2 + \frac{g \operatorname{sen}^2(\varphi_0)}{l \cos(\varphi_0)} \lambda - \frac{2g s'(\Omega_0) \operatorname{sen}(\varphi_0) M'(\varphi_0)}{I l s(\Omega_0)} \quad (4.18)$$

Como  $s(\Omega_0) > 0$  e  $h'(0) > 0$ ,  $s'(\Omega_0) > 0$ ,  $M'(\varphi_0) < 0$  e  $\varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$  segue que os coeficientes de  $p$  são positivos. A expressão  $ab - c$  do Teorema 1.2 no caso do polinômio dado em (4.18) é igual a

$$ab - c = \frac{h'(0) g \operatorname{sen}^2(\varphi_0)}{m l \cos(\varphi_0)} + \frac{2g s'(\Omega_0) \operatorname{sen}(\varphi_0) M'(\varphi_0)}{I l s(\Omega_0)}, \quad (4.19)$$

segue então que  $ab - c > 0$  se, e somente se, (4.16) válido. Então, pelo Teorema (1.2.a), Critério de Hurwitz,  $p$  é um polinômio estável. Logo segue pelo Teorema 1.1 que  $P_0$  é assintoticamente estável. Se (4.17) é válida, como o termo independente de  $p$  é positivo, temos do Teorema (1.2.b) que a matriz (4.15) têm dois autovalores com parte real positiva. Logo, do Teorema 1.1, concluímos que  $P_0$  é instável.  $\square$

# Capítulo 5

## O Caso Crítico no Regulador de Watt

No Teorema 4.1 não há informação sobre o caso crítico, isto é, sobre a dinâmica do sistema quando

$$h'(0) = \frac{-2m s'(\Omega_0)}{I s(\Omega_0)} M'(\varphi_0) \cot(\varphi_0) \quad (5.1)$$

Quando (5.1) é válida, temos na notação do Teorema 1.2 que  $ab - c = 0$ , assim pelo caso  $c$  deste mesmo resultado segue que a matriz (4.15) tem duas raízes com parte real nula e uma raiz com parte real negativa. Isto sugere que teremos de lidar com bifurcações para compreender a dinâmica no caso crítico. Isto foi feito em Sotomayor [11]. No restante desta dissertação vamos mostrar os resultados obtidos por este autor, no entanto usaremos uma abordagem diferente, baseada na computação de aproximações da variedade central envolvida.

Vamos assumir que em (4.12) temos as seguintes restrições

$$s(\Omega) = c\Omega \text{ e } h(\psi) = b\psi \quad (5.2)$$

onde  $b, c$  são constantes positivas. Façamos a seguinte mudança de variável

$$x = \varphi, \quad y = \sqrt{\frac{l}{g}} \psi, \quad z = c \sqrt{\frac{l}{g}} \Omega, \quad \tau = \sqrt{\frac{l}{g}} t \quad (5.3)$$

na equação (4.12). Obtemos então

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = z^2 \operatorname{sen}(x) \cos(x) - \operatorname{sen}(x) - \epsilon y \\ \frac{dz}{dt} = T(x) - G, \end{cases} \quad (5.4)$$

onde

$$(x, y, z) \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R} \times [0, \infty),$$

e

$$\epsilon = \frac{b}{m} \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad T(x) = \frac{cl}{Ig} M(x), \quad G = \frac{clF}{Ig}. \quad (5.5)$$

Naturalmente, o campo vetorial em (5.4) é dado por

$$H(x, y, z) = (y, z^2 \operatorname{sen}(x) \cos(x) - \operatorname{sen}(x) - \epsilon y, T(x) - G). \quad (5.6)$$

com a notação dada acima, o ponto de equilíbrio  $P_0$  reescreve-se como

$$P_0 = (x_0, y_0, z_0) = \left( \arccos\beta, 0, \sqrt{\frac{1}{\beta}} \right), \quad (5.7)$$

onde  $T(x_0) = G$  e  $\beta = \cos(x_0)$ . Disto segue que

$$H'(x_0, y_0, z_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega_0^2 & -\epsilon & 2\omega_0\beta \\ T'(x_0) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

onde

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{\beta}}. \quad (5.9)$$

E portanto o polinômio característico da linearização de (5.4) no ponto  $P_0$  é dado por

$$r(t) = t^3 + \epsilon t^2 + \omega_0^2 t - 2\omega_0\beta T'(x_0). \quad (5.10)$$

Portanto, segue de (5.10) que a expressão  $ab - c$  dada no Teorema 1.2 é dada por

$$ab - c = \omega_0 (\omega_0 \epsilon + 2\beta T'(x_0)). \quad (5.11)$$

Usando a notação desta seção, o Teorema 4.1 responde a questão da estabilidade de  $P_0$  sob a condição

$$\epsilon \neq -\frac{2\beta}{\omega_0} T'(x_0). \quad (5.12)$$

Notemos que este resultado nada informa sobre o que acontece quando (5.12) não é satisfeita, isto é, quando

$$\epsilon = -\frac{2\beta}{\omega_0} T'(x_0). \quad (5.13)$$

A discussão sobre a estabilidade do polinômio característico da linearização de (5.4) no ponto de equilíbrio  $P_0$ , usando o Teorema (1.2) e a equação (5.11), pode ser resumida na seguinte tabela:

	Número de raízes com parte real menor que zero	Número de raízes com parte real igual zero	Número de raízes com parte real maior que zero
$\epsilon > -\frac{2\beta}{\omega_0} T'(x_0)$	3	0	0
$\epsilon = -\frac{2\beta}{\omega_0} T'(x_0)$	1	2	0
$\epsilon < -\frac{2\beta}{\omega_0} T'(x_0)$	1	0	2

Tabela 1: Dependência dos autovalores em relação a  $\epsilon$ .

Naturalmente a tabela anterior sugere a existência de uma bifurcação de Hopf, por causa do deslocamento de autovalores do semi-plano esquerdo para o semi-plano direito. No entanto não prova a existência de tal bifurcação por que, entre outras afirmações, temos que provar a condição de transversalidade dada em (3.2), assim como a condição (3.4).



# Capítulo 6

## A Condição de Transversalidade no Sistema de Watt

Definimos um parâmetro  $\mu$  como sendo

$$\mu = - \left( \epsilon + \frac{2\beta T'(x_0)}{\omega_0} \right) \quad (6.1)$$

e assumiremos que  $x_0$  e  $\epsilon$  são constantes. Naturalmente, isto implica que  $T'(x_0)$  e  $\beta$  também são constantes.

Com estas convenções, o campo vetorial (5.6) pode ser reescrito como

$$H_\mu(x, y, z) = \begin{pmatrix} y, z^2 \operatorname{sen}(x) \cos(x) - \operatorname{sen}(x) + \left( \mu + \frac{2\beta T'(x_0)}{\omega_0} \right) y, \\ T(x) - G \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

O sistema determinado pelo campo vetorial (6.2) é dado por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = z^2 \operatorname{sen}(x) \cos(x) - \operatorname{sen}(x) + \left( \mu + \frac{2\beta T'(x_0)}{\omega_0} \right) y \\ \frac{dz}{dt} = T(x) - G, \end{cases} \quad (6.3)$$

Portanto a matriz dada em (5.8) escreve-se como

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega_0^2 & \mu + \frac{2\beta T'(x_0)}{\omega_0} & 2\omega_0\beta \\ T'(x_0) & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

e o polinômio característico de (6.4) é dado por

$$r(t) = t^3 - \left( \mu + \frac{2\beta T'(x_0)}{\omega_0} \right) t^2 + \omega_0^2 t - 2\omega_0\beta T'(x_0). \quad (6.5)$$

Da Tabela 1, concluímos que  $H'_0(P_0)$  satisfaz a hipótese **(H)** do Teorema 3.1. Na verdade não precisamos de tanto, pois devido às convenções adotadas, segue que, neste caso,  $x(\mu)$  é constante.

Considere a aplicação

$$\begin{aligned} F: \mathbb{R} \times \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\mu, z) &\longrightarrow z^3 - \left( \mu + \frac{2\beta T'(x_0)}{\omega_0} \right) z^2 + \omega_0^2 z - 2\omega_0 \beta T'(x_0). \end{aligned}$$

É imediato que  $F$  é  $C^\infty$ . Um cálculo direto mostra que  $F(0, i\omega_0) = 0$ . Vamos aplicar o Teorema da Função Implícita em  $F$ .

Temos que

$$\frac{\partial F}{\partial z}(0, i\omega_0) = -4i\beta T'(x_0) - 2\omega_0^2 \neq 0$$

então, pelo Teorema da Função Implícita existe  $\lambda: (-\delta, \delta) \longrightarrow \mathbb{C}$ ,  $C^\infty$  tal que  $\lambda(0) = i\omega_0$  e  $F(\mu, \lambda(\mu)) = 0$ . Notemos que para cada  $\mu$  o número complexo  $\lambda(\mu)$  é uma raiz de (6.5). Sejam  $\nu(\mu)$  e  $\xi(\mu)$  a parte real e imaginária de  $\lambda(\mu)$  respectivamente, assim temos  $\lambda(\mu) = \nu(\mu) + i\xi(\mu)$ . Também segue do Teorema da Função Implícita que

$$\frac{d\lambda}{d\mu}(0) = \frac{2\omega_0^4}{16\beta^2 T'(x_0)^2 + 4\omega_0^4} - \frac{4i\omega_0^2 \beta T'(x_0)}{16\beta^2 T'(x_0)^2 + 4\omega_0^4}$$

logo

$$d = \frac{d\nu}{d\mu}(0) = \frac{2\omega_0^4}{16\beta^2 T'(x_0)^2 + 4\omega_0^4} \neq 0. \quad (6.6)$$

Com isto a condição (3.2) é satisfeita.

A argumentação anterior resulta no seguinte teorema.

**Teorema 6.1** *Existe  $\lambda: (-\delta, \delta) \longrightarrow \mathbb{C}$ ,  $C^\infty$  tal que*

- a) *Para todo  $\mu$  em  $(-\delta, \delta)$ ,  $\lambda(\mu)$  é autovalor de  $H'_\mu(x_0, 0, z_0)$ , que é a matriz dada em (6.4),*
- b)  $\lambda(0) = i\omega_0$ ,
- c)  $\frac{d(\operatorname{Re}\lambda(\mu))}{d\mu}(0) \neq 0$ .

# Capítulo 7

## A Condição de Foco Elementar para o Sistema de Watt

Nos resta agora a verificação da condição (3.4) para a prova de existência da bifurcação de Hopf no campo vetorial dado por (6.2). Levando-se em conta as considerações feitas no final da Seção 3, para a verificação da condição de Foco Elementar basta considerar o sistema (5.4) no caso em que  $\mu = 0$ , ou por (6.1) temos  $\epsilon = -\frac{2\beta T'(x_0)}{\omega_0}$ . Desta última equação concluímos que  $T'(x_0) < 0$  e que (5.4), neste caso é dada por

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y, \\ \frac{dy}{dt} = z^2 \operatorname{sen}(x) \cos(x) - \operatorname{sen}(x) + \frac{2\beta T'(x_0)}{\omega_0} y, \\ \frac{dz}{dt} = T(x) - G. \end{cases} \quad (7.1)$$

Inicialmente vamos colocar o sistema (7.1) na forma da equação (2.1). Para isto, calcularemos a expansão de Taylor, até a terceira ordem, do lado direito de (7.1) em torno do ponto de equilíbrio  $P_0$ , dado em (5.7). Vamos também indicar por  $\mathbf{x} = (x, y, z)$  o ponto trasladado  $\mathbf{x} - P_0$ . Esta convenção, usada da equação (7.2) em diante, não causará confusão. Temos então

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\omega_0^2 & \frac{2\beta T'(x_0)}{\omega_0} & 2\omega_0\beta \\ T'(x_0) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{3\sqrt{1-\beta^2}}{2}x^2 + \frac{2(2\beta^2-1)}{\sqrt{\beta}}xz + \beta\sqrt{1-\beta^2}z^2 \\ \frac{T''(x_0)}{2}x^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (7.2)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{7\beta^2 - 1}{6\beta} x^3 + -4\beta\omega_0 x^2 z + (2\beta^2 - 1) x z^2 \\ \frac{T'''(x_0)}{6} x^3 \end{bmatrix} + O(4).$$

Consideremos, agora, a seguinte mudança de variável

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2\omega_0\beta T'(x_0)}{4\beta^2 T'(x_0)^2 + \omega_0^4} & -\frac{2\omega_0^3\beta}{4\beta^2 T'(x_0)^2 + \omega_0^4} \\ 0 & \frac{\omega_0^3}{4\beta^2 T'(x_0)^2 + \omega_0^4} & -\frac{4\omega_0\beta^2 T'(x_0)}{4\beta^2 T'(x_0)^2 + \omega_0^4} \\ 0 & \frac{2\omega_0\beta T'(x_0)}{4\beta^2 T'(x_0)^2 + \omega_0^4} & \frac{2\omega_0^3\beta}{4\beta^2 T'(x_0)^2 + \omega_0^4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Disto segue que

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u + w \\ \omega_0 v + \frac{2\beta T'(x_0) w}{\omega_0} \\ -\frac{T'(x_0) v}{\omega_0} + \frac{\omega_0 w}{2\beta} \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

Substituindo (7.3) em (7.2) obtemos

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_0 & 0 \\ -\omega_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\beta T'(x_0)}{\omega_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{bmatrix} + O(4). \quad (7.4)$$

onde

$$I_1 = \begin{pmatrix} T'(x_0) \left( \beta \sqrt{1-\beta^2} \left( \frac{\omega_0 w}{2\beta} - \frac{T'(x_0) v}{\omega_0} \right)^2 + 4\beta^{\frac{3}{2}} (w+u) \left( \frac{\omega_0 w}{2\beta} - \frac{T'(x_0) v}{\omega_0} \right) \right) \\ - \frac{2(w+u) \left( \frac{\omega_0 w}{2\beta} - \frac{T'(x_0) v}{\omega_0} \right)}{\sqrt{\beta}} - \frac{3\sqrt{1-\beta^2} (w+u)^2}{2} \\ \omega_0 \left( \frac{2\beta T'(x_0)^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega_0^2}{2\beta} \right) \\ - \frac{\omega_0 T''(x_0) (w+u)^2}{2 \left( \frac{2\beta T'(x_0)^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega_0^2}{2\beta} \right)} \end{pmatrix}$$

$$I_2 = \left( \begin{array}{c} \omega_0 \left( \begin{array}{c} \beta \sqrt{1-\beta^2} \left( \frac{\omega_0 w}{2\beta} - \frac{T'(x_0) v}{\omega_0} \right)^2 + 4\beta^{\frac{3}{2}} (w+u) \left( \frac{\omega_0 w}{2\beta} - \frac{T'(x_0) v}{\omega_0} \right) \\ - \frac{2(w+u) \left( \frac{\omega_0 w}{2\beta} - \frac{T'(x_0) v}{\omega_0} \right)}{\sqrt{\beta}} - \frac{3\sqrt{1-\beta^2} (w+u)^2}{2} \end{array} \right) \\ \hline 2\beta \left( \frac{2\beta T'(x_0)^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega_0^2}{2\beta} \right) \\ \hline \frac{\beta T'(x_0) T''(x_0) (w+u)^2}{\omega_0 \left( \frac{2\beta T'(x_0)^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega_0^2}{2\beta} \right)} \end{array} \right)$$

$$I_3 = \left( \begin{array}{c} T'(x_0) \left( \begin{array}{c} \beta \sqrt{1-\beta^2} \left( \frac{\omega_0 w}{2\beta} - \frac{T'(x_0) v}{\omega_0} \right)^2 + 4\beta^{\frac{3}{2}} (w+u) \left( \frac{\omega_0 w}{2\beta} - \frac{T'(x_0) v}{\omega_0} \right) \\ - \frac{2(w+u) \left( \frac{\omega_0 w}{2\beta} - \frac{T'(x_0) v}{\omega_0} \right)}{\sqrt{\beta}} - \frac{3\sqrt{1-\beta^2} (w+u)^2}{2} \end{array} \right) \\ \hline \omega_0 \left( \frac{2\beta T'(x_0)^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega_0^2}{2\beta} \right) \\ \hline + \frac{\omega_0 T''(x_0) (w+u)^2}{2 \left( \frac{2\beta T'(x_0)^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega_0^2}{2\beta} \right)} \end{array} \right)$$

$$J_1 = \left( \begin{array}{c} T'(x_0) \left( \begin{array}{c} (2\beta^2 - 1) (w+u) \left( \frac{\omega_0 w}{2\beta} - \frac{T'(x_0) v}{\omega_0} \right)^2 \\ - 4\sqrt{\beta} \sqrt{1-\beta^2} (w+u)^2 \left( \frac{\omega_0 w}{2\beta} - \frac{T'(x_0) v}{\omega_0} \right) \\ - \frac{(7\beta^2 - 4) (w+u)^3}{6\beta} \end{array} \right) \\ \hline \omega_0 \left( \frac{2\beta T'(x_0)^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega_0^2}{2\beta} \right) \\ \hline - \frac{\omega_0 T'''(x_0) (w+u)^3}{6 \left( \frac{2\beta T'(x_0)^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega_0^2}{2\beta} \right)} \end{array} \right)$$

$$J_2 = \frac{\omega_0 \begin{pmatrix} (2\beta^2 - 1)(w + u) \left( \frac{\omega_0 w}{2\beta} - \frac{T'(x_0)v}{\omega_0} \right)^2 \\ -4\sqrt{\beta}\sqrt{1-\beta^2}(w + u)^2 \left( \frac{\omega_0 w}{2\beta} - \frac{T'(x_0)v}{\omega_0} \right) \\ -\frac{(7\beta^2 - 4)(w + u)^3}{6\beta} \end{pmatrix}}{2\beta \left( \frac{2\beta T'(x_0)^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega_0^2}{2\beta} \right)} - \frac{\beta T'(x_0) T'''(x_0) (w + u)^3}{3\omega_0 \left( \frac{2\beta T'(x_0)^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega_0^2}{2\beta} \right)}$$

$$J_3 = \frac{T'(x_0) \begin{pmatrix} (2\beta^2 - 1)(w + u) \left( \frac{\omega_0 w}{2\beta} - \frac{T'(x_0)v}{\omega_0} \right)^2 \\ -4\sqrt{\beta}\sqrt{1-\beta^2}(w + u)^2 \left( \frac{\omega_0 w}{2\beta} - \frac{T'(x_0)v}{\omega_0} \right) \\ -\frac{(7\beta^2 - 4)(w + u)^3}{6\beta} \end{pmatrix}}{\omega_0 \left( \frac{2\beta T'(x_0)^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega_0^2}{2\beta} \right)} + \frac{\omega_0 T'''(x_0) (w + u)^3}{6 \left( \frac{2\beta T'(x_0)^2}{\omega_0^2} + \frac{\omega_0^2}{2\beta} \right)}$$

Notemos que (7.4) está exatamente na forma (2.1), e portanto pelo Teorema (2.1) existe uma função  $h : U \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^\infty$ , definida em um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$ , que contém a origem tal que  $w = h(u, v)$  e, portanto, o gráfico de  $h$  é uma variedade invariante do sistema dinâmico dado por (7.4). Assim, sobre a variedade central  $h$ , (7.4) reduz-se a

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & \omega_0 \\ -\omega_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \\ &\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix} + \\ &O\left((u^2 + v^2 + (h(u, v))^2)^2\right) \end{aligned} \tag{7.5}$$

onde

$$L_1 = I_1(u, v, h(u, v)), L_2 = I_2(u, v, h(u, v)), M_1 = J_1(u, v, h(u, v)) \text{ e } M_2 = J_2(u, v, h(u, v)).$$

Como  $h(0) = 0$  e  $h'(0) = 0$ , ver Definição 2.2, segue que

$$O\left(\left(u^2 + v^2 + (h(u, v))^2\right)^2\right) = O(4).$$

## 7.1 Aproximação da Variedade Central

Como já foi dito no capítulo 2, é necessário, daqui em diante calcular aproximações da variedade central. Para isto usaremos o Teorema 2.2. Temos de determinar o operador  $M$  definido em (2.4) no caso do sistema (7.4). Assim, se  $\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função de classe  $C^1$ , definida em uma vizinhança  $U$  da origem, então

$$(M\phi)(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial u} \\ \frac{\partial \phi}{\partial v} \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} 0 & \omega_0 \\ -\omega_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \right) - \frac{2\beta T'(x_0) \phi(u, v)}{\omega_0} - R_1 - R_2 + O(4). \quad (7.6)$$

sendo que

$$N_1 = I_1(u, v, \phi(u, v)), N_2 = I_2(u, v, \phi(u, v)), Q_1 = J_1(u, v, \phi(u, v)), Q_2 = J_2(u, v, \phi(u, v)), R_1 = I_3(u, v, \phi(u, v)) \text{ e } R_2 = J_3(u, v, \phi(u, v)).$$

## 7.2 Aproximação Quadrática da Variedade Central

Tomemos  $\phi(u, v) = k_1 u^2 + k_2 u v + k_3 v^2$ . A escolha desta função é motivada pelo fato dela ser a mais simples aplicação em duas variáveis tal que  $\phi(0) = 0$  e  $\phi'(0) = 0$ . Então, substituindo-a em (7.6) obtemos

$$M(k_1 u^2 + k_2 u v + k_3 v^2) = \frac{1}{4\omega_0 \sqrt{\beta^5} T'(x_0)^2 + \omega_0^5 \sqrt{\beta}} \times \left( \begin{array}{l} \left( \begin{array}{l} \left( 4\omega_0^2 \sqrt{\beta^5} T'(x_0)^2 + \omega_0^6 \sqrt{\beta} \right) k_2 \\ + \left( 8\sqrt{\beta^7} T'(x_0)^3 + 2\omega_0^4 \sqrt{\beta^3} T'(x_0) \right) k_1 \\ + \omega_0^4 \sqrt{\beta^3} T''(x_0) - 3\omega_0^2 \sqrt{\beta^3} \sqrt{1 - \beta^2} T'(x_0) \end{array} \right) u^2 \\ + \left( \begin{array}{l} \left( 8\omega_0^2 \sqrt{\beta^5} T'(x_0)^2 + 2\omega_0^6 \sqrt{\beta} \right) k_3 \\ + \left( 8\sqrt{\beta^7} T'(x_0)^3 + 2\omega_0^4 \sqrt{\beta^3} T'(x_0) \right) k_2 \\ + \left( -8\omega_0^2 \sqrt{\beta^5} T'(x_0)^2 - 2\omega_0^6 \sqrt{\beta} \right) k_1 \\ + (-8\omega_0 \beta^3 + 4\omega_0 \beta) T'(x_0)^2 \end{array} \right) u v \\ + \left( \begin{array}{l} \left( 8\sqrt{\beta^7} T'(x_0)^3 + 2\omega_0^4 \sqrt{\beta^3} T'(x_0) \right) k_3 \\ + \left( -4\omega_0^2 \sqrt{\beta^5} T'(x_0)^2 - \omega_0^6 \sqrt{\beta} \right) k_2 \\ + 2\sqrt{\beta^5} \sqrt{1 - \beta^2} T'(x_0)^3 \end{array} \right) v^2 \end{array} \right) + O(3). \quad (7.7)$$

Tomemos  $k_1, k_2, k_3$  tais que

$$\left\{ \begin{array}{l} \left( \begin{array}{l} \left( 4\omega_0^2 \sqrt{\beta^5} T'(x_0)^2 + \omega_0^6 \sqrt{\beta} \right) k_2 \\ + \left( 8\sqrt{\beta^7} T'(x_0)^3 + 2\omega_0^4 \sqrt{\beta^3} T'(x_0) \right) k_1 \\ + \omega_0^4 \sqrt{\beta^3} T''(x_0) - 3\omega_0^2 \sqrt{\beta^3} \sqrt{1-\beta^2} T'(x_0) \end{array} \right) = 0 \\ \\ \left( \begin{array}{l} \left( 8\omega_0^2 \sqrt{\beta^5} T'(x_0)^2 + 2\omega_0^6 \sqrt{\beta} \right) k_3 \\ + \left( 8\sqrt{\beta^7} T'(x_0)^3 + 2\omega_0^4 \sqrt{\beta^3} T'(x_0) \right) k_2 \\ + \left( -8\omega_0^2 \sqrt{\beta^5} T'(x_0)^2 - 2\omega_0^6 \sqrt{\beta} \right) k_1 \\ + (-8\omega_0 \beta^3 + 4\omega_0 \beta) T'(x_0)^2 \end{array} \right) = 0 \\ \\ \left( \begin{array}{l} \left( 8\sqrt{\beta^7} T'(x_0)^3 + 2\omega_0^4 \sqrt{\beta^3} T'(x_0) \right) k_3 \\ + \left( -4\omega_0^2 \sqrt{\beta^5} T'(x_0)^2 - \omega_0^6 \sqrt{\beta} \right) k_2 \\ + 2\sqrt{\beta^5} \sqrt{1-\beta^2} T'(x_0)^3 \end{array} \right) = 0 \end{array} \right.$$

Segue então do sistema linear anterior que

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{\left( \begin{array}{l} \sqrt{\beta} (-2\omega_0^4 \beta^2 T'(x_0)^2 - \omega_0^8) T''(x_0) \\ + \sqrt{\beta} \sqrt{1-\beta^2} ((6\omega_0^2 \beta^2 - 2\omega_0^4 \beta) T'(x_0)^3 \\ + 3\omega_0^6 T'(x_0)) + (4\omega_0^3 \beta - 8\omega_0^3 \beta^3) T'(x_0)^3 \end{array} \right)}{4\sqrt{\beta} T'(x_0) (\beta^2 T'(x_0)^2 + \omega_0^4) (4\beta^2 T'(x_0)^2 + \omega_0^4)}, \\ k_2 &= \frac{\left( \begin{array}{l} -\omega_0^6 \beta^{\frac{3}{2}} T''(x_0) + \sqrt{\beta} \sqrt{1-\beta^2} (2\omega_0^2 \beta^2 T'(x_0)^3 \\ + 3\omega_0^4 \beta T'(x_0)) \\ + (8\omega_0 \beta^4 - 4\omega_0 \beta^2) T'(x_0)^3 \end{array} \right)}{2\sqrt{\beta} (\beta^2 T'(x_0)^2 + \omega_0^4) (4\beta^2 T'(x_0)^2 + \omega_0^4)}, \\ k_3 &= -\frac{\left( \begin{array}{l} \omega_0^8 \sqrt{\beta} T''(x_0) + \sqrt{\beta} \sqrt{1-\beta^2} (4\beta^3 T'(x_0)^5 \\ + 2\omega_0^4 \beta T'(x_0)^3 - 3\omega_0^6 T'(x_0)) \\ + (4\omega_0^3 \beta - 8\omega_0^3 \beta^3) T'(x_0)^3 \end{array} \right)}{4\sqrt{\beta} T'(x_0) (\beta^2 T'(x_0)^2 + \omega_0^4) (4\beta^2 T'(x_0)^2 + \omega_0^4)}. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Assim de (7.7) segue que  $M(k_1 u^2 + k_2 uv + k_3 v^2) = O(3)$ . Portanto do Teorema 2.2 temos que

$$h(u, v) = k_1 u^2 + k_2 uv + k_3 v^2 + O(3), \tag{7.9}$$

onde  $k_1, k_2, k_3$  são dadas por (7.8).

### 7.3 Cálculo do Primeiro Coeficiente de Lyapunov

Vamos substituir (7.9) em (7.5) para calcular o coeficiente  $a$  dado em (3.6). Obtemos então



$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_0 \\ -\omega_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \quad (7.10)$$

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} + O(4)$$

onde

$$S_1 = \left( \frac{-1}{\omega_0^5 + 4T'(x_0)^2 \beta^2 \omega_0} \begin{pmatrix} \omega_0^2 \beta \left( \omega_0^2 T''(x_0) - 3\sqrt{1-\beta^2} T'(x_0) \right) u^2 \\ + \omega_0 \left( 4\sqrt{\beta} T'(x_0)^2 - 8\beta^{\frac{5}{2}} T'(x_0)^2 \right) uv \\ + 2\sqrt{-\beta^2+1} T'(x_0)^3 \beta^2 v^2 \end{pmatrix} \right)$$

$$T_1 = \left( \begin{array}{l} \frac{1}{3\beta\omega_0^5 + 12T'(x_0)^2 \beta^3 \omega_0} \times \\ -\omega_0^2 \begin{pmatrix} 6\omega_0^2 \beta^2 T''(x_0) k_1 - 18\beta^2 \sqrt{1-\beta^2} T'(x_0) k_1 \\ + 12\omega_0 \beta^{\frac{5}{2}} T'(x_0) k_1 - 6\omega_0 \sqrt{\beta} T'(x_0) k_1 \\ + \omega_0^2 \beta^2 T'''(x_0) \\ - 7\beta^3 T'(x_0) + 4\beta T'(x_0) \end{pmatrix} u^3 \\ -6\omega_0 \begin{pmatrix} \omega_0^3 \beta^2 T''(x_0) k_2 - 3\omega_0 \beta^2 \sqrt{1-\beta^2} T'(x_0) k_2 \\ + 2\omega_0^2 \beta^{\frac{5}{2}} T'(x_0) k_2 - \omega_0^2 \sqrt{\beta} T'(x_0) k_2 \\ - \omega_0 \beta^2 \sqrt{1-\beta^2} T'(x_0)^2 k_1 - 4\beta^{\frac{7}{2}} T'(x_0)^2 k_1 \\ + 2\beta^{\frac{3}{2}} T'(x_0)^2 k_1 + 4\beta^{\frac{5}{2}} \sqrt{1-\beta^2} T'(x_0)^2 \end{pmatrix} u^2 v \\ -6 \begin{pmatrix} \omega_0^4 \beta^2 T''(x_0) k_3 - 3\omega_0^2 \beta^2 \sqrt{1-\beta^2} T'(x_0) k_3 \\ + 2\omega_0^3 \beta^{\frac{5}{2}} T'(x_0) k_3 - \omega_0^3 \sqrt{\beta} T'(x_0) k_3 \\ - \omega_0^2 \beta^2 \sqrt{1-\beta^2} T'(x_0)^2 k_2 \\ - 4\omega_0 \beta^{\frac{7}{2}} T'(x_0)^2 k_2 + 2\omega_0 \beta^{\frac{3}{2}} T'(x_0)^2 k_2 \\ + 2\beta^4 T'(x_0)^3 - \beta^2 T'(x_0)^3 \end{pmatrix} uv^2 \\ + 6\omega_0 \beta T'(x_0)^2 k_3 \left( \omega_0 \beta \sqrt{1-\beta^2} + 4\beta^{\frac{5}{2}} - 2\sqrt{\beta} \right) v^3 \end{array} \right)$$

$$S_2 = \left( \frac{1}{2\beta\omega_0^4 + 8T'(x_0)^2 \beta^3} \begin{pmatrix} -\omega_0 \beta \left( 4\beta^2 T'(x_0) T''(x_0) + 3\omega_0^2 \sqrt{1-\beta^2} \right) u^2 \\ + \omega_0^2 \left( 4\sqrt{\beta} T'(x_0) - 8\beta^{\frac{5}{2}} T'(x_0) \right) uv \\ + 2\sqrt{-\beta^2+1} T'(x_0)^2 \beta^2 \omega_0 v^2 \end{pmatrix} \right)$$

$$T_2 = \left( \begin{array}{l} \frac{-1}{6\beta^2\omega_0^4 + 24T'(x_0)^2\beta^4} \times \\ \omega_0 \left( \begin{array}{l} 24\beta^4 T'(x_0) T''(x_0) k_1 \\ +18\omega_0^2 \beta^2 \sqrt{1-\beta^2} k_1 \\ -12\omega_0^3 \beta^{\frac{5}{2}} k_1 + 6\omega_0^3 \sqrt{\beta} k_1 \\ +4\beta^4 T'(x_0) T'''(x_0) + 7\omega_0^2 \beta^3 - 4\omega_0^2 \beta \end{array} \right) u^3 \\ +6\omega_0 \left( \begin{array}{l} 4\beta^4 T'(x_0) T''(x_0) k_2 + 3\omega_0^2 \beta^2 \sqrt{1-\beta^2} k_2 \\ -2\omega_0^3 \beta^{\frac{5}{2}} k_2 \\ +\omega_0^3 \sqrt{\beta} k_2 + \omega_0^2 \beta^2 \sqrt{1-\beta^2} T'(x_0) k_1 \\ +4\omega_0 \beta^{\frac{7}{2}} T'(x_0) k_1 \\ -2\omega_0 \beta^{\frac{3}{2}} T'(x_0) k_1 - 4\omega_0 \beta^{\frac{5}{2}} \sqrt{1-\beta^2} T'(x_0) \end{array} \right) u^2 v \\ +6\omega_0 \left( \begin{array}{l} 4\beta^4 T'(x_0) T''(x_0) k_3 + 3\omega_0^2 \beta^2 \sqrt{1-\beta^2} k_3 \\ -2\omega_0^3 \beta^{\frac{5}{2}} k_3 + \omega_0^3 \sqrt{\beta} k_3 \\ +\omega_0^2 \beta^2 \sqrt{1-\beta^2} T'(x_0) k_2 \\ +4\omega_0 \beta^{\frac{7}{2}} T'(x_0) k_2 - 2\omega_0 \beta^{\frac{3}{2}} T'(x_0) k_2 \\ -2\beta^4 T'(x_0)^2 + \beta^2 T'(x_0)^2 \end{array} \right) uv^2 \\ +6\omega_0^2 \beta T'(x_0) k_3 ( \omega_0 \beta \sqrt{1-\beta^2} + 4\beta^{\frac{5}{2}} - 2\sqrt{\beta} ) v^3 \end{array} \right)$$

Usando a fórmulas (3.6), (5.9), (7.10) obtemos, após uma longa computação, que

$$a = \frac{A_1}{A_2}, \quad (7.11)$$

onde

$$\begin{aligned} A_1 = & (\sqrt{1-\beta} \sqrt{\beta} \sqrt{\beta+1} ( (8\beta^{13} - 16\beta^{11} + 8\beta^9) T'(x_0)^5 \\ & + (10\beta^{13} - 40\beta^{11} + 60\beta^9 - 40\beta^7 + 10\beta^5) T'(x_0)^3 + 2\beta^{13} T'(x_0) \\ & + (-12\beta^{11} + 30\beta^9 - 40\beta^7 + 30\beta^5 - 12\beta^3 + 2\beta) T'(x_0) ) T'''(x_0) \\ & + (8\beta^{13} - 16\beta^{11} + 8\beta^9) T'(x_0)^4 + (-2\beta^{13} + 8\beta^{11}) T'(x_0)^2 \\ & + (-12\beta^9 + 8\beta^7 - 2\beta^5) T'(x_0)^2 + (-4\beta^{13} + 24\beta^{11}) T''(x_0)^2 \\ & + (-60\beta^9 + 80\beta^7 - 60\beta^5 + 24\beta^3 - 4\beta) T''(x_0)^2 + 56\beta^{13} T'(x_0)^8 \\ & + (-24\beta^{11}) T'(x_0)^8 + (150\beta^{13} - 254\beta^{11} + 122\beta^9 - 18\beta^7) T'(x_0)^6 \\ & + (61\beta^{13} - 162\beta^{11} + 114\beta^9 + 20\beta^7 - 39\beta^5 + 6\beta^3) T'(x_0)^4 \\ & + (3\beta^{13} + 6\beta^{11} - 75\beta^9 + 180\beta^7 - 195\beta^5 + 102\beta^3) T'(x_0)^2 \\ & + (-21\beta) T'(x_0)^2 + \sqrt{\beta} (36\beta^{14} - 100\beta^{12} + 92\beta^{10}) T'(x_0)^5 \\ & + (-28\beta^8) T'(x_0)^5 + (45\beta^{14} - 191\beta^{12} + 314\beta^{10} - 246\beta^8) T'(x_0)^3 \\ & + (89\beta^6 - 11\beta^4) T'(x_0)^3 + (15\beta^{14} - 85\beta^{12} + 195\beta^{10} - 225\beta^8 \\ & + 125\beta^6 - 15\beta^4 - 15\beta^2 + 5) T'(x_0) ) T''(x_0) ) \end{aligned} \quad (7.12)$$

e

$$\begin{aligned} A_2 = & ((256\beta^{14} - 256\beta^{12}) T'(x_0)^7 \\ & + (384\beta^{14} - 1152\beta^{12} + 1152\beta^{10} - 384\beta^8) T'(x_0)^5 \\ & + (144\beta^{14} - 720\beta^{12} + 1440\beta^{10} - 1440\beta^8 + 720\beta^6) T'(x_0)^3 \\ & + (-144\beta^4) T'(x_0)^3 + (16\beta^{14} - 112\beta^{12} + 336\beta^{10} - 560\beta^8 \\ & + 560\beta^6 - 336\beta^4 + 112\beta^2 - 16) T'(x_0) ) \end{aligned} \quad (7.13)$$

Disto, segue o seguinte resultado

**Teorema 7.1** *Se  $A_1 \neq 0$  e  $A_2 \neq 0$ , então o sistema (6.3) tem bifurcação de Hopf em  $\mu = 0$ .*

**Demonstração:**

Sabemos que a condição de transversalidade é automaticamente satisfeita, ver Teorema 6.1. Por hipótese, segue que a condição (3.4) do Teorema 3.1 é também satisfeita, logo segue do Teorema 3.1 que  $\mu = 0$  é então um ponto de bifurcação de Hopf.  $\square$

Naturalmente, o resultado como o anterior, em vista da complexidade das expressões dadas em (7.12) e (7.13), só é utilizável, do ponto de vista das aplicações, quando a função  $M$  é dada explicitamente. Investigaremos então o caso em que

$$M(x) = \gamma \cos(x) \tag{7.14}$$

na equação (4.11). Este caso também é conhecido como caso de Watt-Vyshnegradskii.

# Capítulo 8

## Bifurcação de Hopf no Sistema de Watt-Vyshnegradskii

Em vista de (5.7), (7.14) e (5.5) temos que

$$\begin{aligned}\beta &= \cos(x_0) = \frac{F}{\gamma} \\ T(x_0) &= k \gamma \cos(x_0) = k F \\ T'(x_0) &= -k \sqrt{\gamma^2 - F^2} \\ T''(x_0) &= -k F \\ T'''(x_0) &= k \sqrt{\gamma^2 - F^2}\end{aligned}\tag{8.1}$$

sendo que  $k = \frac{cl}{Ig}$ . Além disso, usando (8.1), a condição (5.13), após algumas manipulações algébricas, escreve-se neste caso como

$$\gamma = \frac{4 k^2 F^3}{\epsilon^2}.\tag{8.2}$$

Substituindo (8.1) e (8.2) em (7.11) e observando que  $G = k F$ , obtemos

$$a = \frac{B_1}{B_2}\tag{8.3}$$

sendo que

$$\begin{aligned}B_1 &= \epsilon ( 12288 G^{14} + (-2304 \epsilon^4 - 36864) G^{12} \\ &\quad + (-192 \epsilon^8 - 6144 \epsilon^4) G^{10} + (544 \epsilon^8 + 5888 \epsilon^4) G^8 \\ &\quad + (28 \epsilon^{12} + 272 \epsilon^8) G^6 + (-49 \epsilon^{12} - 304 \epsilon^8) G^4 \\ &\quad + 4 \epsilon^{12} G^2 + 5 \epsilon^{12} )\end{aligned}$$

e

$$B_2 = 16 (16 G^4 + \epsilon^4 G^2 - \epsilon^4) (16 G^4 + 4 \epsilon^4 G^2 - \epsilon^4)^2.$$

Além disso, segue de (8.1) e (8.2) que

$$G > \frac{\epsilon}{2}.\tag{8.4}$$

Segue de (8.4) que  $(16 G^4 + \epsilon^4 G^2 - \epsilon^4) > \frac{\epsilon^6}{4}$ . Portanto o denominador de (8.3) é positivo. Por causa do Teorema 3.1, uma questão natural que se põe é a de determinar o sinal de  $a$ , o qual é

determinado inteiramente pelo sinal o polinômio

$$\begin{aligned} h(G) = & 12288 G^{14} + (-2304 \epsilon^4 - 36864) G^{12} \\ & + (-192 \epsilon^8 - 6144 \epsilon^4) G^{10} + (544 \epsilon^8 + 5888 \epsilon^4) G^8 \\ & + (28 \epsilon^{12} + 272 \epsilon^8) G^6 + (-49 \epsilon^{12} - 304 \epsilon^8) G^4 \\ & + 4 \epsilon^{12} G^2 + 5 \epsilon^{12} \end{aligned}$$

Em vista da desigualdade (8.4), consideremos o polinômio  $j(\delta) = h\left(\frac{\epsilon}{2} + \delta\right)$ , onde  $\delta > 0$ , cuja expressão é dada por

$$\begin{aligned} j(\delta) = & 12288 \delta^{14} + 86016 \epsilon \delta^{13} + 279552 \epsilon^2 \delta^{12} \\ & + 559104 \epsilon^3 \delta^{11} + 768768 \epsilon^4 \delta^{10} + 768768 \epsilon^5 \delta^9 \\ & + (544 \epsilon^8 + 576576 \epsilon^6 + 5888 \epsilon^4) \delta^8 \\ & + (2176 \epsilon^9 + 329472 \epsilon^7 + 23552 \epsilon^5) \delta^7 \\ & + (28 \epsilon^{12} + 3808 \epsilon^{10} + 144416 \epsilon^8 + 41216 \epsilon^6) \delta^6 \\ & + (84 \epsilon^{13} + 3808 \epsilon^{11} + 48864 \epsilon^9 + 41216 \epsilon^7) \delta^5 \\ & + (105 \epsilon^{14} + 2380 \epsilon^{12} + 13032 \epsilon^{10} + 25760 \epsilon^8) \delta^4 \\ & + (70 \epsilon^{15} + 952 \epsilon^{13} + 2864 \epsilon^{11} + 10304 \epsilon^9) \delta^3 \\ & + \frac{(105 \epsilon^{16} + 952 \epsilon^{14} + 2128 \epsilon^{12} + 10304 \epsilon^{10})}{4} \delta^2 \\ & + \frac{(21 \epsilon^{17} + 136 \epsilon^{15} + 304 \epsilon^{13} + 1472 \epsilon^{11})}{4} \delta \\ & + \frac{\epsilon^{16} (\epsilon^2 - 6)}{4}. \end{aligned} \tag{8.5}$$

Notemos que todos os coeficientes de  $j$  são positivos e que o termo independente é positivo se  $\epsilon > \sqrt{6}$  e negativo se  $\epsilon < \sqrt{6}$ . Particularmente concluímos que se  $\epsilon \geq \sqrt{6}$  então  $a > 0$ . Por (6.6) temos que  $d > 0$ . Assim de acordo com o Teorema 3.1 e Observação 3.3 a, b, concluímos que temos bifurcação de Hopf subcrítica quando  $\epsilon \geq \sqrt{6}$ .

No caso  $\epsilon < \sqrt{6}$ , notemos que  $j(0) = \frac{\epsilon^{16}(\epsilon^2-6)}{4} < 0$ . Como  $\lim_{\delta \rightarrow \infty} j(\delta) = \infty$  segue que o polinômio  $j$  tem ao menos uma raiz no intervalo  $(0, \infty)$ . É imediato de (8.5) que  $j'(\delta) > 0$ , pois todos os coeficientes da derivada são estritamente positivos. Segue portanto, do Teorema do Valor Médio, que a raiz obtida anteriormente é a única raiz de  $j$  em  $(0, \infty)$ . Indicaremos por  $r(\epsilon)$  esta raiz. Do argumento anterior, segue que  $j$  é negativo no intervalo  $(0, r(\epsilon))$  e é positivo em  $(r(\epsilon), \infty)$ , e portanto  $a$  tem o mesmo sinal de  $j$  nestes intervalos. Assim se  $G \in \left(\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2} + r(\epsilon)\right)$  obtemos que  $a < 0$  e segue do Teorema 3.1 e Observação 3.3 d,c que temos bifurcação de Hopf supercrítica. No caso em que  $G \in \left(\frac{\epsilon}{2} + r(\epsilon), \infty\right)$  temos  $a > 0$  e novamente do Teorema 3.1 e Observação 3.3 a, b temos bifurcação de Hopf subcrítica. O cálculo de  $r(\epsilon)$  é realizado numericamente.

O resultado final é o seguinte:

**Teorema 8.1** *Consideremos o sistema (6.3).*

Se

$$\epsilon = \frac{b}{m} \sqrt{\frac{l}{g}} = -\frac{2\beta}{\omega_0} T'(x_0) \geq \sqrt{6}$$

então temos bifurcação de Hopf subcrítica em  $\mu = 0$ .

Se  $\epsilon < \sqrt{6}$  seja  $r(\epsilon)$  a única raiz de  $j$  no intervalo  $(0, \infty)$ . Se  $G \in (\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2} + r(\epsilon))$ , então temos bifurcação de Hopf supercrítica.

Se  $G \in (\frac{\epsilon}{2} + r(\epsilon), \infty)$ , então temos bifurcação de Hopf subcrítica.

Como exemplo concreto suponhamos que  $\epsilon = 1$ , neste caso, segue que  $r(1) \approx 0.0025$ . Então, se  $G \in (0.5, 0.5025)$  e  $\mu > 0$ , a conclusão dada no item c) da Observação 3.3, isto é, a origem é um ponto de equilíbrio instável situada no interior da região limitada por uma órbita assintoticamente estável do sistema. Este é o caso supercrítico e dá uma justificativa teórica da ocorrência daquelas oscilações estáveis, em torno do ângulo de equilíbrio, sobre as quais falamos na Introdução, que impediam o adequado funcionamento do Regulador de Watt.

# Capítulo 9

## Conclusão

Nesta dissertação, estudamos o sistema (4.12) que representa o modelo físico do Regulador de Watt.

Como o objetivo desse trabalho é determinar condições suficientes para um bom funcionamento do Regulador de Watt, determinamos o ponto de equilíbrio assintoticamente estável de (4.12), e isso foi realizado através do Teorema 4.1, o qual fornece uma análise de estabilidade deste ponto, isto é, se  $\epsilon > -\frac{2\beta}{\omega_0} T'(x_0)$  então o ponto de equilíbrio  $P_0$ , dado em (5.7), é assintoticamente estável, e, dessa forma, as hastes em rotação do regulador se mantêm em um ângulo de abertura  $\varphi_0$  com seu eixo de sustentação de forma estável. Lembrando que este ângulo é estabelecido no projeto da máquina. No entanto, se  $\epsilon < -\frac{2\beta}{\omega_0} T'(x_0)$  o sistema torna-se instável, e, assim, o ângulo de abertura do controlador se afasta claramente do ângulo inicialmente projetado, e, por isso, o regulador não funciona de maneira adequada. Além disso, mostramos que em  $\epsilon = -\frac{2\beta}{\omega_0} T'(x_0)$  o sistema apresenta uma Bifurcação de Hopf. Verificamos a condição de transversalidade assim como a de Foco Elementar para o Sistema de Watt, ver Teorema 7.1. Por causa desta bifurcação há o surgimento de um ciclo limite estável no retrato de fase, quando o primeiro coeficiente de Lyapunov é negativo. Tal órbita periódica é responsável pelas oscilações indesejadas às quais nos referimos na Introdução.

# Referências Bibliográficas

- [1] D.K.Arrowsmith, C.M.Place, *An Introduction to Dynamical Systems* , Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
- [2] J.Carr, Naji Al-Amood, Rate of Decay in Critical Cases. I. Finite-Dimensional Problems. *JMAA* 75 (1980) 242-250.
- [3] M. J. H. Dantas; J.M. Balthazar, On Local Analysis of Oscillations of a Non-Ideal and Non-Linear Mechanical Model . *Meccanica*, v. 39, n. 4, p. 313-330, 2004.
- [4] M. Denny, Watt steam governor stability, *Eur. J. Phys.*, 23 (2002), 339- 351.
- [5] B. D. Hassard, N. D. Kazarinoff and Y. H.Wan, *Theory and Applications of Hopf Bifurcation*, Cambridge University Press, Cambridge, 1981.
- [6] A. Al-Humadi and N. D. Kazarinoff, Hopf bifurcation in the Watt steam engine, *Inst. Math. Appl.*, 21 (1985), 133-136.
- [7] J. C. Maxwell, On governors, *Proc. R. Soc.*, 16 (1868), 220-283.
- [8] G. Guckenheimer, P.Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields* New York, NY: Springer-Verlag, 1983.
- [9] L. Pontryagin, *Ordinary Differential Equations* Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1962.
- [10] Silva, Uziel Paulo; Dantas, Márcio José Horta, Análise de Estabilidade do Regulador Centrífugo. *Famat em Revista*. Abril (2005), no. 4, 131.
- [11] Sotomayor, Jorge; Mello, Luis Fernando; Braga, Denis de Carvalho, Stability and Hopf Bifurcation in the Watt Governor System. *Comm. Appl. Nonlinear Anal.* 13 (2006), no. 4, 117.
- [12] M. Vyshnegradskii, Sur la theorie generale des regulateurs, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 83 (1876), 318-321.
- [13] W. Morris, S. Stephen, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra* New York, San Francisco, London: Academic Press, 1974.