

Antonio de Freitas Neto

# **Manipulação coerente de pontos quânticos em nanocavidades**

Brasil

2013

Antonio de Freitas Neto

## **Manipulação coerente de pontos quânticos em nanocavidades**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Física da Universidade Federal de Uberlândia, para a obtenção de Título de Mestre em Física.

Orientador: Prof. Dr. José Maria Villas Bôas

Universidade Federal de Uberlândia – UFU

Instituto de Física

Programa de Pós-Graduação em Física

Brasil

2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
Sistema de Bibliotecas da UFU, MG, Brasil

---

F866m    Freitas Neto, Antonio de, 1987-  
2013        Manipulação coerente de pontos quânticos em nanocavidades /  
Antonio de Freitas Neto. - 2013.  
73 f. : il.

Orientador: José Maria Villas Bôas.  
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Pro-  
grama de Pós-Graduação em Física.  
Inclui bibliografia.

1. Física - Teses. 2. Pontos quânticos - Teses. I. Villas Bôas, José  
Maria. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-  
Graduação em Física. III. Título.

CDU: 53

---

Antonio de Freitas Neto

“Manipulação coerente de pontos quânticos em nanocavidades”

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Uberlândia, como requisito parcial para obtenção do título de mestre em Física.

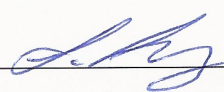
Uberlândia, 25 de fevereiro de 2013.

Banca Examinadora:



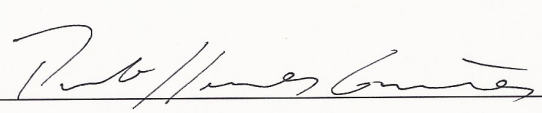
---

Prof. Dr. José Maria Villas-Bôas – Orientador  
Instituto de Física/UFU



---

Profa. Dra. Liliana Sanz de la Torre  
Instituto de Física UFU



---

Prof. Dr. Paulo Sérgio Soares Guimarães  
Departamento de Física UFMG

*Aos meus pais João Pedro e Regina*  
*Ao meu irmão Leonardo*  
*Às minhas avós Tereza e Rita,*  
*em especial ao meu avô Antonio (in memoriam).*

# Agradecimentos

A Deus, pelo Dom da Vida, e por me proporcionar uma imensa oportunidade de aprendizado.

A minha Família, em especial minha mãe Regina, meu pai João Pedro, meu irmão Leonardo e minhas avós Rita e Tereza, que a todo momento me educaram para a coragem, para que eu não desanimasse diante de todos obstáculos, e que abriram mãos de seus sonhos e sempre se dedicaram para que eu pudesse realizar os meus.

Ao professor José Maria Villas-Bôas que me orientou com toda paciência, dedicação, esforço e competência.

A todos meus amigos, que mesmo distantes sempre me apoiaram para a realização deste sonho, e de uma forma especial aos meus eternos amigos Thiago e Roberto que conviveram comigo e vivenciaram todos os momentos marcantes ao longo desta jornada.

A minha namorada Carla, incentivadora assídua e a toda sua família.

Aos alunos do grupo GOIQ pelos momentos de aprendizagem, mas muito mais pela amizade aqui formada.

A todos os professores, funcionários e amigos do Instituto de Física.

A Capes, CNPQ, FAPEMIG e Disse que financiaram o desenvolvimento deste trabalho.

O dia mais belo: Hoje  
A coisa mais fácil: Equivocar-se  
O obstáculo maior: O medo  
O erro maior: Abandonar-se  
A raiz de todos os males: O egoísmo  
A distração mais bela: O trabalho  
A pior derrota: O desalento  
Os melhores professores: As crianças  
A primeira necessidade: Comunicar-se  
O que traz felicidade: Ser útil aos demais  
O pior defeito: O mau humor  
A coisa mais perigosa: A mentira  
O pior sentimento: O rancor  
O presente mais belo: O perdão  
O mais imprescindível: O lar  
A rota mais rápida: O caminho correto  
A sensação mais agradável: A paz interior  
O resguardo mais eficaz: O sorriso  
O melhor remédio: O otimismo  
A maior satisfação: O dever cumprido  
A força mais potente do mundo: A fé  
As pessoas mais necessárias: Os Pais  
A mais bela de todas as coisas: O AMOR!!!

Madre Tereza de Calcutá

# Resumo

Neste trabalho estudamos os efeitos da incidência de um laser coerente num sistema formado por um ponto quântico (PQ) no interior de uma nanocavidade. Inicialmente investigamos o caso em que a energia de um éxciton formado no PQ está em ressonância com um modo da cavidade e variamos a frequência do laser incidente. Usamos laser contínuo e pulsado em nossas simulações.

O ponto quântico foi tratado como um sistema de dois níveis e consideramos que a cavidade contém no máximo quatro fótons. Para este estudo foi utilizado o modelo de Jaynes-Cummings com acréscimo de um termo relacionado com o pulso externo usado para manipular os estados quânticos, que foi feito com o auxílio da diagonalização do Hamiltoniano aproximado e procurando por anticruzamentos no seu espectro de energia.

Consideramos apenas o estado de éxciton no PQ, e situações em que tanto o laser como o modo da cavidade estão próximos à energia de ressonância, o que nos permitiu usar a aproximação de ondas girantes.

Utilizamos um laser contínuo e calculamos a média ocupacional de cada estado para fazer um melhor mapeamento dos valores dos parâmetros necessário para realizar a manipulação dos estados quânticos. Encontramos que o sistema pode ser manipulado usando processo de dois ou mais fótons, sendo que as energias destes fótons podem ser estimadas usando um procedimento de mapeamento desenvolvido nesta dissertação.

**Palavras-chaves:** Pontos quânticos, éxciton-poláriton, nanocavidades, Jaynes-Cummings, ocupação média.



# Abstract

In this work we studied the effects of coherent laser in a system formed by a quantum dot (QD) in a nanocavity. Initially we investigated the case where the energy of an exciton are in resonance with the cavity mode and we vary the frequency of the laser. During our simulation we have used pulsed and continuous laser. We consider only the exciton state of the QD, and in situations where both the laser and the cavity mode are close to resonance, allowing us to use the rotating wave approximation.

The QD was treated as a two-level system and the cavity containing a maximum of four photons. For this study we used the Jaynes-Cummings model with an extra term related to the external pulse, which was used to manipulate quantum states. This was done with the help of diagonalization of the approximated Hamiltonian and searching for anticrossings in its energy spectrum.

Then we use a continuous laser and the technique of calculating the average occupation each state to do a better mapping of the parameter values required to make the manipulation of quantum states. We found that the system can be manipulated using the process of two or more photons, and the energies of these photons could be estimated using a mapping procedure developed in this dissertation.

**Key-words:** Quantum dots, exciton-polariton, nanocavities, Jaynes-Cummings, average occupation.

# Lista de ilustrações

Figura 2.1	(a) Esquema simplificado de um PQ auto-organizado (região central). (b) Imagem STM ( <i>Scanning Tunneling Microscopy</i> ) de um PQ único (MÁRQUEZ; GEELHAAR; JACOBI, 2001). . . . .	25
Figura 2.2	Processo de fabricação de pontos quânticos auto-organizados (Stranski–Krastanow). Em a) encontra-se um substrato com um parametro de rede ligeiramente distinto do material com o qual se deseja criar estes pontos quânticos. Em seguida, o material que se deseja formar os pontos quânticos é depositado sobre o substrato, figura b). Devido a tensão superficial criada, ocorre a formação de pequenas ilhas do material depositado (Pontos Quânticos), figura c). Por fim, é depositado sobre estes pontos quânticos algumas camadas do material com o qual se iniciou o processo, figura d). . . . .	25
Figura 2.3	Desenho esquemático mostrando a formação do estado de éxciton, em que $E_{gap}$ corresponde a diferença de energia entre a última banda (camada de valência), e a primeira banda (camada de condução), $E_{exc}$ corresponde a energia de formação do estado éxciton. . . . .	26
Figura 3.1	a) Cristal fotônico unidimensional formado por camadas alternadas de materiais com diferentes constantes dielétricas. b) Cristal fotônico bidimensional formado por cilindros dielétricos: a estrutura é homogênea ao longo da direção $z$ e apresenta uma periodicidade ao longo do plano $xy$ , o que garante o confinamento da luz. c) Cristal fotônico bidimensional formado por lacunas cilíndricas: a ausência do material cria o confinamento da luz. . . . .	28
Figura 3.2	a) Polímero 3D parcialmente preenchido com GaAs. b) Por meio de microscopia eletrônica de varredura, observa-se o crescimento não homogêneo de GaAs. c) Polímero completamente preenchido por GaAs. d) Estrutura de GaAs criada, removendo o molde de cristal fotônico, por meio de litografia, utilizando alumina. e) GaAs é preenchido com alumina: GaAs é representado em azul e a alumina em vermelho. f) Cristal fotônico de GaAs tridimensional, contendo uma linha de InGaAs (emissor), com um eletrodo de ouro na superfície (LED). Figuras adaptadas da Ref. (NELSON et al., 2011). . . . .	29

Figura 3.3	Cristal fotônico unidimensional formado por camadas alternadas de materiais com constantes dielétricas diferentes. Um defeito na região central (ausência de duas camadas do mesmo material) cria uma cavidade que pode ser usada para aprisionar luz na direção de crescimento. Note que a amplitude do campo elétrico é alterada devido a presença da cavidade. . . . .	30
Figura 3.4	Cristal fotônico bidimensional, contendo uma cavidade formada pela ausência de 3 buracos. . . . .	30
Figura 3.5	Ilustração esquemática de uma cavidade fotônica tridimensional. O campo eletromagnético nas superfícies tende a zero. . . . .	31
Figura 4.1	a) Transição do estado fundamental para o estado excitado $ g\rangle \rightarrow  e\rangle$ , processo realizado pelo o operador $\sigma_+$ , b) Transição do estado excitado para o estado fundamental $ e\rangle \rightarrow  g\rangle$ , processo realizado pelo o operador $\sigma_-$ . . . . .	35
Figura 4.2	(a) Aniquilação de um fóton e transição do sistema de $ g\rangle \rightarrow  e\rangle$ , (b) Criação de um fóton e transição do sistema de $ g\rangle \rightarrow  e\rangle$ , (c) Aniquilação de um fóton e transição do sistema de $ e\rangle \rightarrow  g\rangle$ (d) Criação de um fóton e transição do sistema de $ e\rangle \rightarrow  g\rangle$ . . . . .	37
Figura 4.3	Cálculo de inversão de população, realizado para um sistema considerando o ponto quântico inicialmente no estado excitado $ e\rangle$ e o campo eletromagnético da cavidade em um estado coerente. Em (a) e (d) o número médio de fótons foi 5, em (b) e (e) foi 15 e em (c) e (f) foi 30. Em (a),(b) e (c) a dessintonia entre a energia de excitação do ponto quântico e a energia de ressonância da cavidade é nula $\delta = 0$ meV. No entanto, para o cálculo realizado em (d), (e) e (f) foi considerado $\delta = -0.2$ meV, $\delta = -0.8$ meV e $\delta = -1.8$ meV respectivamente. . . . .	41
Figura 5.1	Representação esquemática da configuração energética do sistema. O estado $ 0, 0\rangle$ corresponde ao estado fundamental do sistema, já o estado $ 1, 2\rangle$ representa o estado em que o PQ está no estado excitado e a cavidade apresenta dois fótons. Os processos de acoplamentos estão simbolizados por setas. . . . .	45
Figura 5.2	Autovalores do Hamiltoniano (5.15) em função da dessintonia do PQ com relação ao laser ( $\delta_x = \omega_x - \omega_b$ ) para $\hbar\omega_x = \hbar\omega_c$ e $\hbar g = \hbar\Omega \rightarrow 0$ . . .	46

Figura 5.3	Autovalores do sistema, em função da dessintonia do ponto quântico com relação ao laser ( $\delta_x = \omega_x - \omega_b$ ), considerando somente a interação PQ-cavidade ( $\hbar g = 0.1$ meV). Observa-se o comportamento conhecido como escada de Jaynes-Cummings. Nota-se ainda o cruzamento entre alguns autovalores, garantindo que estes encontram-se em espaços de Hilbert diferentes. . . . .	47
Figura 5.4	Autovalores do sistema, em função da dessintonia do ponto quântico com relação ao laser ( $\delta_x = \omega_x - \omega_b$ ), considerando a interação PQ-cavidade ( $\hbar g = 0,1$ meV) e a interação com um laser ( $\hbar \Omega = 1,0$ meV). Destaque para o comportamento de anticruzamento, o que corresponde a uma assinatura de que todo o sistema encontra-se no mesmo espaço de Hilbert. . . . .	48
Figura 5.5	Autovalores do sistema, em função da dessintonia do PQ com relação ao laser ( $\delta_x = \omega_x - \omega_b$ ), considerando a interação átomo-cavidade ( $\hbar g = 0.1$ meV) e a interação com o laser ( $\hbar \Omega = 1$ meV). Ênfase para o anticruzamento entre o autovalor correspondente ao estado fundamental $ 0,0\rangle$ ( $\lambda_6$ ) e um autovalor correspondente a uma combinação linear dos estados $ 1,0\rangle$ e $ 0,1\rangle$ ( $\lambda_5$ ), presente em $\delta_x \simeq -0.1$ meV. . . . .	49
Figura 5.6	Evolução temporal do sistema considerando $\delta_x = -0.1$ meV, juntamente com um pulso de $\hbar \Omega(t) = 2,0$ meV com duração de $10ps$ . O PQ encontra-se inicialmente no estado fundamental $ 0,0\rangle$ . Nota-se que exatamente no instante em que o pulso interage com o sistema, a população do estado fundamental do PQ muda, aumentando as populações dos estados $ 1,0\rangle$ e $ 0,1\rangle$ . Quando o pulso é desligado, ocorre uma oscilação entre estes estados. . . . .	50
Figura 5.7	Evolução temporal do sistema considerando as mesmas condições da Fig. 5.6, porém com $\hbar \Omega(t) = 2,0$ meV. Nota-se que estados mais excitados começam a ser populados. . . . .	51
Figura 5.8	Evolução temporal do sistema considerando as mesmas condições da Fig. 5.7, porém com um pulso de maior duração. Os estados excitados não são populados. . . . .	51
Figura 5.9	Autovalores do sistema, em função da dessintonia do PQ com relação ao laser ( $\delta_x = \omega_x - \omega_b$ ), com $\hbar g = 0.1$ meV e $\hbar \Omega = 1.0$ meV. Ênfase para o anticruzamento entre o autovalor correspondente a uma combinação linear dos estados $ 1,1\rangle$ e $ 0,2\rangle$ ( $\lambda_2$ ) e um autovalor correspondente a uma combinação linear dos estados $ 1,2\rangle$ e $ 0,3\rangle$ ( $\lambda_1$ ), presente em $\delta_x \simeq -0.4$ meV. . . . .	52

Figura 5.10	Evolução temporal do sistema considerando $\delta_x = -0.4$ meV. O ponto quântico encontra-se inicialmente no estado fundamental $ 0, 2\rangle$ . Nota-se que inicialmente os estados $ 0, 2\rangle$ e $ 1, 1\rangle$ oscilam e que no instante em que o pulso interage com o sistema, as populações destes estados decaem e em contrapartida os estados $ 0, 3\rangle$ e $ 1, 2\rangle$ intensificam suas populações. . . . .	53
Figura 5.11	Evolução temporal do sistema considerando as mesmas condições da Fig. 5.10, aumentando apenas a intensidade do pulso para $\hbar\Omega = 3$ meV. . . . .	53
Figura 5.12	Média ocupacional do estado $ 0, 0\rangle$ em função da dessintonia do PQ e a cavidade $\hbar(\omega_x - \omega_c)$ e entre o laser e a cavidade $\hbar(\omega_b - \omega_c)$ , tendo como estado inicial o estado fundamental. Nas regiões escuras o sistema permanece no estado fundamental enquanto que nas regiões claras ele pode popular outros estados. . . . .	57
Figura 5.13	Média ocupacional dos estados $ 1, 0\rangle$ , $ 1, 1\rangle$ , $ 1, 2\rangle$ , $ 1, 3\rangle$ (Figs (a), (b), (c), (d) respectivamente), em função da dessintonia do PQ com a cavidade $\hbar(\omega_x - \omega_c)$ e dessintonia entre o laser e a cavidade $\hbar(\omega_b - \omega_c)$ . . . . .	58
Figura 5.14	Média ocupacional do sistema em função da dessintonia entre o laser e a energia da cavidade $\hbar(\omega_b - \omega_c)$ , para $\hbar(\omega_x - \omega_c) = -0.5$ meV. Por meio deste gráfico é possível encontrar as dessintonias apropriadas para popular estados de éxciton-poláritons partindo do estado fundamental. Observa-se que a medida que $\hbar(\omega_x - \omega_c)$ progride de -1 a 1, há configurações específicas de dessintonia em que a média ocupacional do estado fundamental $P_{0,0}$ decai e a média ocupacional dos estados $ 1, 1\rangle$ , $ 1, 2\rangle$ , $ 1, 3\rangle$ , $ 1, 4\rangle$ , respectivamente $P_{1,1}$ , $P_{1,2}$ , $P_{1,3}$ e $P_{1,4}$ aumentam. . . . .	59
Figura 5.15	Ampliação da Fig. 5.14 próximo a região $\hbar(\omega_b - \omega_c) \simeq -0.2775$ meV. . . . .	59
Figura 5.16	Média ocupacional do estado $ 1, 1\rangle$ em função da dessintonia do ponto quântico e a cavidade $\hbar(\omega_x - \omega_c)$ e em função da dessintonia entre o laser e a cavidade $\hbar(\omega_b - \omega_c)$ , comprovando o resultado apresentado no Fig. 5.15, onde observa-se que para popular o estado $ 1, 1\rangle$ partindo do estado fundamental, a melhor configuração corresponde a $\hbar(\omega_x - \omega_c) = -0,4$ meV e $\hbar(\omega_b - \omega_c) = -0.2775$ meV. Estas configurações estão representadas por setas na figura. . . . .	60
Figura 5.17	Representação esquemática da escada energética do sistema PQ-cavidade considerando a energia de excitação do ponto quântico abaixo da energia de ressonância da cavidade. Na figura $\hbar\omega_x$ corresponde a energia de excitação do ponto quântico e $\hbar\omega_c$ a energia de ressonância da cavidade. . . . .	61

Figura 5.18	Evolução temporal do sistema com um laser contínuo para a situação em que $\hbar(\omega_b - \omega_c) = -0.2775$ meV, $\hbar(\omega_x - \omega_c) = -0.4$ meV, $\hbar g = 0.1$ meV e $\hbar\Omega = 0.1$ meV. O sistema encontra-se inicialmente no estado fundamental. Verifica-se uma oscilação entre as populações do estado fundamental $P_{0,0}$ e $P_{1,1}$ (éxciton-polariton). . . . .	62
Figura 5.19	Cálculo de inversão de população, para a situação em que $\hbar(\omega_b - \omega_c) = -0.2775$ meV e $\hbar(\omega_x - \omega_c) = -0.4$ meV, considerando um pulso de 10.0 meV. O ponto quântico inicialmente encontra-se no estado excitado $ e\rangle$ e a cavidade contém um número médio de 25 fótons em seu interior ( $\langle n \rangle$ ). Em (a) foi considerado a duração do pulso de $4/g$ , em (b) $2/g$ , (c) $1/g$ e (d) $0.5/g$ . Nota-se que alterando a duração do pulso é possível perturbar o comportamento da inversão de população. . . . .	63
Figura 5.20	Média ocupacional do sistema em função de $\hbar(\omega_b - \omega_c)$ para a situação em que $\hbar(\omega_x - \omega_c) = -0.25$ meV (corte realizado na Fig. 5.12 ao longo da direção vertical). Observa-se que a média ocupacional $P_{1,2}$ do estado $ 1,2\rangle$ é máxima para a situação em torno de $\hbar(\omega_b - \omega_c) \simeq -0.119$ meV. . . . .	64
Figura 5.21	Média ocupacional do estado $ 1,2\rangle$ . Observa-se que para popular o estado $ 1,2\rangle$ partindo do estado fundamental a melhor configuração corresponde a $\hbar(\omega_x - \omega_c) = -0.25$ meV e $\hbar(\omega_b - \omega_c) = -0.119$ meV, estas configurações estão representadas por setas na figura. . . . .	64
Figura 5.22	Evolução temporal do sistema para a situação em que $\hbar(\omega_b - \omega_c) = -0.119$ meV, $\hbar(\omega_x - \omega_c) = -0.25$ meV, $\hbar g = 0.1$ meV e $\hbar\Omega = 0, 1$ meV. O sistema esta inicialmente no estado fundamental e como previsto, nota-se um aumento considerável na população do segundo estado de éxciton-polariton $P_{1,2}$ . . . . .	65
Figura 5.23	Cálculo de inversão de população, para a situação em que $\hbar(\omega_b - \omega_c) = -0.119$ e $\hbar(\omega_x - \omega_c) = -0.25$ meV, considerando um pulso de 10.0 meV. O ponto quântico inicialmente encontra-se no estado excitado $ e\rangle$ e a cavidade contém um número médio de 25 fótons em seu interior ( $\langle n \rangle$ ). Em (a) foi considerado a duração do pulso de $4/g$ , em (b) $2/g$ , (c) $1/g$ e (d) $0.5/g$ . Nota-se que alterando a duração do pulso é possível perturbar o comportamento da inversão de população. . . . .	66
Figura 5.24	Média ocupacional do estado $ 1,15\rangle$ e $ 0,15\rangle$ , de forma que o sistema inicialmente se encontra no estado $ 1,15\rangle$ . Por meio deste cálculo é possível notar configurações energéticas que propiciam uma troca de população entre os estados $ 0,15\rangle$ e $ 1,15\rangle$ . A configuração energética aqui escolhida está representada pelas setas na figura. . . . .	67

Figura 5.25 Cálculo de inversão de população, para a situação em que  $\hbar(\omega_b - \omega_c) = -1.5$  meV e  $\hbar(\omega_x - \omega_c) = -1.25$  meV, considerando um pulso de 10.0 meV. O ponto quântico inicialmente encontra-se no estado excitado  $|1\rangle$  e a cavidade contém um número médio de 15 fótons em seu interior ( $\langle n \rangle$ ). Em (a) foi considerado a duração do pulso de  $2.5/g$ , em (b)  $0.5/g$ . Nota-se que alterando a duração do pulso é possível perturbar o comportamento da inversão de população. . . . . 67

# Lista de abreviaturas e siglas

<i>MJC</i>	Modelo de Jaynes-Cummings.
<i>PQ</i>	Ponto Quântico.
<i>CQED</i>	Cavity Quatum Eletrodynamics (Eletrodinâmica Quântica de Cavidades).
<i>MBE</i>	Molecular Beam Epitaxy (Epitaxia por Feixe Molecular).
<i>CVD</i>	Chemical Vapor Deposition (Deposição Química à Vapor).
<i>STM</i>	Scanning Tunneling Microscopy (Microscopia de Tunelamento).
<i>LED</i>	Light Emitting Diode (Diodo Emissor de Luz).
<i>RWA</i>	Rotation Wave Approximation (Aproximação de Ondas Girantes).
<i>GaAs</i>	Arseneto de Gálio.
<i>InAs</i>	Arseneto de Índio.
<i>InGaAs</i>	Arseneto de Gálio Índio.



# Lista de símbolos

$Li$	Elemento químico Lítio.
$Na$	Elemento químico Sódio.
$Rb$	Elemento químico Rubídio.
$Cs$	Elemento químico Césio.
$g$	Taxa de acoplamento átomo-cavidade.
$\hbar$	Constante de Planck.
$\omega_x$	Frequência excitônica do ponto quântico.
$\omega_c$	Frequência de um modo do campo elétrico no interior da cavidade.
$\omega_b$	Frequência do laser de bombeio.
$\sigma_z$	Matriz de Pauli.
$\sigma_+$	Matriz de transição do estado $ g\rangle \rightarrow  e\rangle$ .
$\sigma_-$	Matriz de transição do estado $ e\rangle \rightarrow  g\rangle$ .
$\mathbf{E}$	Campo elétrico.
$\mathbf{B}$	Campo magnético.
$\epsilon_0$	Constante dielétrica do vácuo.
$\mu_0$	Permeabilidade elétrica do vácuo.
$c$	Velocidade da luz no vácuo.
$\mathbf{K}$	Vetor de onda.
$V$	Volume da cavidade.
$a$	Operador aniquilação.
$a^\dagger$	Operador criação.
$q$	Posição generalizada.

$p$	Momento generalizado.
$H_{cav}$	Hamiltoniano da cavidade.
$H_{PQ}$	Hamiltoniano do ponto quântico.
$H_{int}$	Hamiltoniano de interação ponto quântico-cavidade.
$\tilde{H}_{int}$	Hamiltoniano de interação efetivo ponto quântico-cavidade.
$H_0$	Hamiltoniano livre de interação.
$\mathbf{d}$	Momento de dipolo elétrico.
$e$	Carga elétrica elementar.
$p_{i,j}$	Matriz de transição de dipolo elétrico.
$ \psi\rangle$	Função de onda.
$\Omega_n$	Frequência de Rabi.
$p_{n,n}(0)$	Distribuição de Poisson, para o número de fótons no interior da cavidade, considerando o campo elétrico em um estado coerente.
$\delta$	Dessintonia entre a frequência de excitação do ponto quântico e a frequência de ressonância da cavidade.
$\delta_x$	Dessintonia entre a frequência de excitação do ponto quântico e a frequência de bombeio externo.
$\delta_c$	Dessintonia entre a frequência de ressonância da cavidade e a frequência de bombeio externo.
$\mathcal{U}$	Transformação unitária.
$\lambda_i$	Autovalores do sistema.
$P_{i,n}$	Probabilidade de ocupação do estado $ i, n\rangle$ , em que $i$ corresponde a estados do PQ e $n$ ao número de fótons no interior da cavidade.
$ \lambda\rangle$	Autovetor com autovalor $\lambda$ .
$ \mathcal{B}\rangle$	Vetor com estados da base do sistema.
$\mathcal{C}$	Matriz mudança de base.
$\bar{P}_i$	Ocupação média do estado $i$ .
$\hbar\omega_x$	Energia de excitação do PQ.

$\hbar\omega_c$	Energia de ressonância da cavidade.
$\hbar\omega_b$	Energia do laser.
$\hbar g$	Energia de acoplamento átomo-cavidade
$\hbar\Omega$	Intensidade do laser.
$n$	Número médio de fótons no interior da cavidade.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>20</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>20</b>
<b>2 Pontos quânticos auto-organizados</b>	<b>24</b>
2.1 Hamiltoniano do PQ . . . . .	25
<b>3 Cristais fotônicos e cavidade</b>	<b>27</b>
3.1 Cavidades em cristais fotônicos . . . . .	29
3.2 Modos normais do campo eletromagnético em cavidades . . . . .	30
3.3 Hamiltoniano da cavidade, quantização do campo eletromagnético . . . . .	32
<b>4 Interação ponto quântico-cavidade</b>	<b>34</b>
4.1 Aproximação de Ondas Girantes . . . . .	35
4.2 Colapso e Ressurgimento . . . . .	36
<b>5 Ponto-quântico em cavidade sob bombeio coerente</b>	<b>42</b>
5.1 Transformação unitária . . . . .	43
5.2 Sistema com 3 fótons na cavidade . . . . .	44
5.2.1 Espectro . . . . .	45
5.3 Manipulação Coerente . . . . .	48
5.4 Média Ocupacional . . . . .	54
<b>6 Conclusões</b>	<b>68</b>
<b>Conclusão</b>	<b>68</b>
<b>Referências</b>	<b>69</b>

# 1 Introdução

No contexto do mundo quântico, uma partícula pode ocupar mais de um estado simultaneamente. Tais estados, que descrevem o sistema completamente, podem ser não localizados espacialmente e é este um dos pontos que mais perturbam o nosso senso comum baseado no mundo clássico. Como uma partícula poderia estar localizada em regiões distintas do espaço simultaneamente?

Para entender a origem destes conceitos, vamos revisar como esta teoria se originou. Por volta de 1800, o físico Inglês Thomas Young (1773-1829) realizou um experimento que provou o caráter ondulatório da luz. O experimento de Young consistiu em iluminar uma fenda dupla e observar a imagem produzida em um anteparo. Ele observou franjas que só podiam ser explicadas assumindo que a luz se comportasse como uma onda, formando um padrão de interferência no anteparo. De acordo com a teoria clássica, quando uma onda atravessa as duas fendas, ela se divide em duas, que agora se propagam em direção ao anteparo, se superpondo em um determinado instante. Quando a crista da onda  $A$  encontra a crista da onda  $B$ , ocorre uma superposição conhecida como interferência construtiva. O mesmo ocorre quando o vale da onda  $A$  encontra o vale da onda  $B$ . Entretanto, quando um vale de uma determinada onda, encontra-se com uma crista de outra onda ocorre uma interferência destrutiva. Assim, é possível explicar o aparecimento de franjas claras e escuras no anteparo, que explicam o padrão de interferência. As franjas claras seriam resultados das interferências construtivas, já as franjas escuras, resultados das interferências destrutivas. Todavia, para que seja possível observar este padrão de interferência, é necessário que as ondas possuam uma coerência, o que significa dizer que as mesmas possuem um sincronismo, de forma que as regiões com interferência construtiva e destrutiva não se alterem com o passar do tempo. É possível gerar esta coerência fazendo com que ambas as ondas sejam produzidas por uma mesma fonte pontual. Caso não se consiga esta coerência, dizemos que as ondas são incoerentes, e assim, as franjas claras e escuras oscilam, e não é possível observar de forma clara as interferências. Mais recentemente, a experiência de Young (ŽITNIK, 2004) foi repetida utilizando uma fonte que emitia átomos ionizados ao invés de fótons. Surpreendentemente, de forma semelhante ao experimento clássico de Young, foram observados padrões de interferência. Quem idealizou este comportamento foi o físico francês Luiz De Broglie (1892-1987), o qual propôs que partículas subatômicas, tais como elétrons, prótons ou nêutrons, ora se comportavam como partículas, ora se comportavam como ondas (resultado este que lhe garantiu o Nobel de Física em 1929). No mesmo período Albert Einstein (1879-1955) explicou o efeito fotoelétrico (feito que lhe

valeu o Nobel em 1921), concluindo que os fótons comportavam-se como partículas com energias bem definidas, e que estas energias eram diretamente proporcionais a frequência de uma onda eletromagnética a qual estava associada aos fótons em consideração. Assim, Einstein concluiu, que em determinados processos, ondas podem se comportar como partículas. Em contrapartida, De Broglie afirmou que em determinadas situações, as partículas podem se comportar como ondas. Desde então este comportamento ficou conhecido como dualidade onda-partícula.

Um pouco mais tarde, o físico alemão Max Born (1882-1970), mostrou que essas ondas, não possuíam um significado físico, e sim nada mais eram que ferramentas matemáticas, as quais auxiliam no cálculo da probabilidade de encontrar a partícula em uma determinada posição. Essas ondas ficaram conhecidas como funções de onda.

Retornando à experiência de Young (com o conceito de função de onda) associa-se a cada fóton que passa pelo anteparo uma função de onda, que neste caso corresponde a soma das funções de onda emitidas por cada fenda. Desde que essas funções de onda sejam coerentes, os mesmos fenômenos clássicos observados no experimento de Young deverão ocorrer, contudo com uma interpretação física diferente. A função de onda neste caso esta relacionada com a probabilidade de encontrar uma partícula em uma determinada posição, em que, uma maior amplitude corresponde à uma maior probabilidade. No entanto, ao tentar verificar em qual das fendas o fóton passou, acabamos por destruir o fenômeno da interferência. Ou seja, ao interferir no experimento, com o intuito de determinar em qual das fendas o fóton passou, a função de onda que até então era uma superposição coerente, se colapsa em apenas uma, o que significa que, a medida projeta uma superposição de estados não localizados, em apenas um estado localizado. Este princípio (princípio da complementaridade) foi enunciado pelo Niels Bohr (1885-1962), o que garante de forma sucinta que não se pode realizar uma medida sem modificar o sistema. No contexto aqui apresentado, ou se observa por qual das fendas o fóton passou (característica corpuscular), ou as franjas de interferência (característica ondulatória), ou seja, são características excludentes.

Foi neste âmbito que se iniciaram os experimentos de pensamentos (da expressão alemã Gedankenexperiment) que nada mais são do que raciocínios lógicos sobre um determinado experimento não realizável na prática, mas cujas consequências podem ser exploradas na imaginação, tanto pelas leis da física quanto pela matemática. Foram esses experimentos que abriram as portas para o desenvolvimento e consolidação de toda a teoria quântica. O experimento de pensamento até hoje mais conhecido é o famoso *Gato de Schrödinger* (SCHRÖDINGER, 1935) que representa a indeterminação quântica através da manipulação quântica em um ambiente totalmente fechado, na presença de uma substância radiativa. Nos primórdios dessa teoria, os pensadores da época imaginavam experimentos hoje em dia teoricamente simples, o que acarretou e facilitou a elabora-

ção de uma teoria cada vez mais concisa. Todavia, naquela época esses pensadores não imaginavam que esses experimentos poderiam passar do plano imaginário para o plano real. Inevitavelmente, os pensadores do século passado, ficariam surpresos com os avanços experimentais que hoje possibilitam isolar um único átomo, medindo e manipulando seus estados quânticos de maneira bastante eficaz (DAVIDOVICH, 2004; MONZ et al., 2011), e até mesmo acompanhando sua evolução temporal. Como toda mudança, o surgimento dessa nova teoria não foi totalmente absorvida por grande parte dos físicos da época.

O conceito de emaranhamento foi, e é até os dias atuais, o pivô de muitas discussões no que se trata da atmosfera quântica. Este conceito aparece naturalmente quando aplica-se o princípio da superposição em sistemas compostos. Um sistema composto está quanticamente emaranhado quando não é possível descrevê-lo por meio de um produto tensorial dos subsistemas existentes.

Um modelo bastante utilizado para gerar estados emaranhados é o modelo de Jaynes-Cummings (MJC), o qual descreve a interação entre um átomo (aqui idealizado como um sistema de dois níveis) e um modo de vibração do campo eletromagnético, tratado quanticamente. O MJC foi originalmente proposto em 1963 por Edwin Thompson Jaynes e Frederick W. Cummings para estudar a relação entre teoria quântica e a teoria semi-clássica da radiação, procurando compreender o processo de emissão espontânea (JAYNES; CUMMINGS, 1963). Desta forma, o MJC tenta quantificar como a quantização do campo eletromagnético afeta as previsões da evolução temporal dos estados de um sistema de dois níveis em comparação com a teoria semi-clássica da interação radiação-matéria. Este modelo é bastante útil para descrever um sistema atômico, o qual possui dois níveis que são ressonantes com o campo no interior da cavidade. Já os outros níveis diferem bastante energeticamente dos mesmos. Usualmente, neste contexto utiliza-se para representar um sistema de dois níveis, átomos de metais alcalinos como Li, Na, Rb e Cs, pois os mesmos possuem um único elétron na banda de valência o qual pode ser manipulado por meio de campos eletromagnéticos, (outros elétrons se encontram em camadas mais internas que não sofrem ação do campo), portanto, estes átomos representam de forma bastante eficaz um sistema de dois níveis.

Um dos efeitos que mais destaca a diferença entre os modelos clássico e quântico é o aparecimento de colapsos e ressurgimentos (SCULLY; ZUBAIRY, 1997) na inversão de população do sistema de dois níveis. Isto é uma evidência direta de que os estados do campo (fótons) são discretos, que pode ser observado apenas no regime de acoplamento forte (FOX, 2006) <sup>1</sup>. Uma montagem experimental que permite uma análise deste fenômeno (colapso e ressurgimento) é aquele em que o átomo interage com um ou mais modos do campo eletromagnético. Neste regime, quando os dois sistemas estão em ressonância,

---

<sup>1</sup>Regime em que a taxa de acoplamento  $g$  entre o sistema de dois níveis com o campo eletromagnético é maior que as perdas do sistema (taxa de decaimento espontânea do átomo e perda de fótons da cavidade).

o átomo emite um fóton no modo da cavidade, e o mesmo é reabsorvido pelo átomo antes de ser dissipado pelas imperfeições da cavidade. Esta área da Ótica Quântica, ficou conhecida como Eletrodinâmica Quântica em Cavidades (CQED, de Cavity Quantum Electrodynamics). Os avanços tecnológicos nesta área de pesquisa permitiram testar experimentalmente o modelo de Jaynes-Cumming utilizando sistemas supercondutores com ressonadores de microondas (FINK et al., 2008), pontos quânticos (KASPRZAK et al., 2010/04) e átomos em cavidades ópticas (REMPE; WALTHER; KLEIN, 1987; BRUNE et al., 1996). Atualmente os avanços tecnológicos em circuitos CQED, permitem construir um sistema de dois níveis de circuitos quânticos interagindo com ressonadores de linhas de transmissão de microondas (BLAIS et al., 2004). Foi nesta incrível e promissora área, que Serge Haroche e David J. Wineland foram premiados com Nobel de 2012. Com pesquisas com diferentes abordagens, conseguiram medir e manipular estados quânticos sem destruí-los, o que até então era dito como impossível. Wineland e colaboradores usaram uma armadilha (magneto óptica) que prendeu átomos carregados controlando-os e medindo-os, enquanto Haroche e colaboradores procuraram o caminho inverso, enviando um átomo através de uma cavidade para observar se o mesmo deixara um fóton em seu interior. Durante um pequeno intervalo de tempo foi possível fazer diferentes manipulações deste fóton sem destruí-lo (ROSE, ). Com o intuito de melhor descrever a interação entre o átomo e o campo, o modelo de Jaynes-Cummings pode ser generalizado, ao incluir efeitos de dissipação e de amortecimento (GEA-BANACLOCHE, 1993), considerando vários modos do campo elétrico (KUNDU, 2005), diversos átomos, ou vários níveis atômicos (HUSSIN; NIETO, 2005), entre outros.

Neste trabalho usaremos o modelo Jaynes-Cumming para descrever a interação coerente entre um ponto quântico semiconductor e um modo de uma nanocavidade em cristais fotônicos. No capítulo 2, apresentamos de uma forma sintetizada alguns modelos de cristais fotônicos, juntamente com alguns métodos de criá-los e suas propriedades. No capítulo 3, abordamos os fundamentos básicos relacionados à cavidades. No seguinte capítulo apresentamos o modelo de Jaynes-Cummings e observamos o comportamento de Colapsos e Ressurgimentos. No capítulo 5, apresentamos o sistema a ser estudado, calculamos seus autovalores, observamos com cuidado o comportamento de anticruzamento, e então calculamos a evolução temporal do sistema para configurações específicas, buscando popular estados energeticamente superiores. Na seção 5.4, realizamos o cálculo da média ocupacional do sistema, com o intuito de encontrar as melhores condições para popular estados de éxciton-polárítons<sup>2</sup> por meio de processos de dois ou mais fótons. Por fim, no capítulo 6 apresentamos as conclusões deste trabalho.

---

<sup>2</sup>Termo utilizado para representar estados que correspondem a superposição dos estados de éxciton e fótons.



## 2 Pontos quânticos auto-organizados

Os avanços tecnológicos envolvendo crescimento e caracterização de materiais semicondutores fizeram com que este se tornasse a base de toda a eletrônica que hoje conhecemos. À medida que as dimensões destes dispositivos vêm sendo reduzidas, efeitos quânticos tornam-se cada vez mais evidentes, fazendo com que dispositivos à base de semicondutores sejam propostos para se tornarem a base de um possível computador quântico. É neste contexto, que desde 1990 pontos quânticos (PQ) semicondutores têm atraído muita atenção devido ao fato dos portadores de carga (elétrons e buracos) estarem altamente confinados, apresentarem estados de energia discretos e quantizados, sendo assim muitas vezes referidos na literatura como átomos artificiais, com a vantagem de que suas propriedades podem ser controladas externamente.

PQ semicondutores podem ser obtidos de diversas formas, sendo uma das técnicas mais utilizadas o crescimento epitaxial auto-organizado (Fig. 2.1), conhecido como Stranski–Krastanow. Nesta técnica, um material semiconductor com um determinado parâmetro de rede é depositado camada por camada sobre outro material semiconductor com parâmetro de rede ligeiramente diferente, como no caso do GaAs e InAs em que a diferença é de aproximadamente 7%. Isso gera uma tensão superficial na amostra e quando a espessura do material crescido ultrapassa um valor crítico, a tensão é aliviada por meio da criação espontânea de pequenas ilhas (do material depositado) de forma regular e tamanhos similares (BIMBERG; GRUNDMANN; LEDENTSOV, 1999; ARRIBAS, 2009; GYWAT; KRENNER; BEREZOVSKY, 2010), processo este representado na Fig 2.2. O depósito camada por camada do material semiconductor sobre o substrato pode ser feito por epitaxia de feixe molecular (*molecular beam epitaxy-MBE*) ou por deposição química a vapor (*chemical vapor deposition-CVD*). A formação destas ilhas acontece porque é energeticamente favorável para o material criar pequenas regiões pouco tensas do que possuir um filme muito tenso. Em seguida é depositado sobre as ilhas uma nova camada de um material semiconductor diferente, que pode ser o mesmo material ao qual iniciou-se o processo.

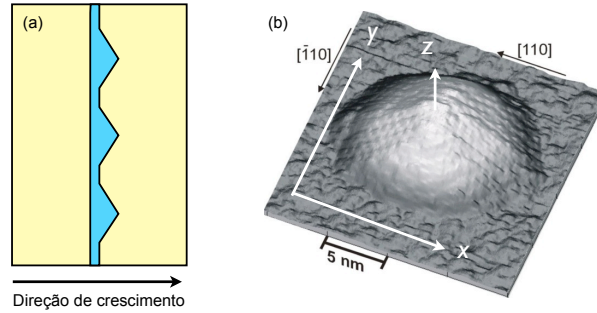


Figura 2.1 – (a) Esquema simplificado de um PQ auto-organizado (região central). (b) Imagem STM (*Scanning Tunneling Microscopy*) de um PQ único (MÁRQUEZ; GEELHAAR; JACOBI, 2001).

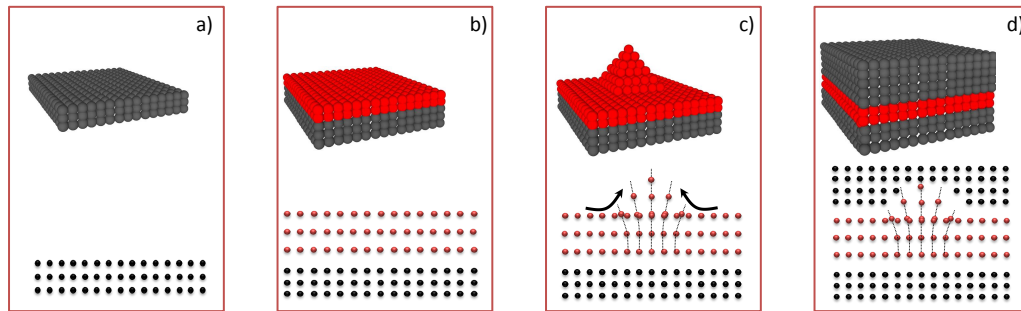


Figura 2.2 – Processo de fabricação de pontos quânticos auto-organizados (Stranski–Krastanow). Em a) encontra-se um substrato com um parâmetro de rede ligeiramente distinto do material com o qual se deseja criar estes pontos quânticos. Em seguida, o material que se deseja formar os pontos quânticos é depositado sobre o substrato, figura b). Devido a tensão superficial criada, ocorre a formação de pequenas ilhas do material depositado (Pontos Quânticos), figura c). Por fim, é depositado sobre estes pontos quânticos algumas camadas do material com o qual se iniciou o processo, figura d).

## 2.1 Hamiltoniano do PQ

O espectro de energia de um PQ está relacionado com o material com o qual é feito, assim como com suas dimensões. O estado ligado entre um elétron e um buraco (ausência do elétron na banda de valência) num ponto quântico é conhecido como éxciton, conceito inicialmente introduzido por Frenkel em 1931 (FRENKEL, 1931) que afirma, que no instante em que um determinado material absorve luz, cada átomo deste material individualmente é excitado, e a este processo de excitação se dá o nome de éxciton, o qual pode vir a se propagar pelo material, devido às interações com os átomos da rede.

Um pouco mais tarde, em 1937, Wannier realizou uma abordagem mais profunda do estado de éxciton (WANNIER, 1937). Afirmando que no estado fundamental (na ausência de campos externos), um material isolante ou semiconductor apresenta bandas de energia completamente preenchidas ou completamente vazias. Assim quando o material absorve uma luz (fóton), com uma frequência definida, um elétron é promovido da banda de valência, para a banda de condução deixando uma lacuna na banda de valência. Desta forma, no modelo de Wannier, o éxciton é formado por este par elétron-buraco.

Sob condições especiais, o PQ, pode ser considerado como um sistema de dois níveis, em que o estado fundamental corresponde ao estado de vácuo, ou seja, o sistema sem nenhuma excitação e o estado excitado é o estado de éxciton, ou seja, um par elétron-buraco ligado (VILLAS-BÔAS; ULLOA; GOVOROV, 2005) (veja a ilustração esquemática na Fig. 2.3). O estado de éxciton pode facilmente ser gerado usando um laser com energia suficiente para remover um elétron da banda de valência e promovê-lo para a banda de condução, deixando assim a ausência de um elétron na banda de valência, que aqui chamaremos de buraco, como anteriormente mencionado. O elétron na banda de condução juntamente com o buraco na banda de valência formam um estado ligado conhecido como éxciton. Em princípio é possível excitar mais um par elétron-buraco para o mesmo nível da banda de condução, criando assim um estado de bi-éxciton, entretanto, devido a interações coulombianas entre as partículas, a energia necessária para se criar um par adicional de elétron-buraco é ligeiramente diferente. Esta diferença de energia é na maioria das vezes suficiente para se ignorar a presença deste estado. A energia do éxciton pode ser controlada durante o crescimento ou com o uso de campos elétricos externos (VILLAS-BÔAS; GOVOROV; ULLOA, 2004; VILLAS-BÔAS; ULLOA; GOVOROV, 2005). É possível também inserir estes átomos artificiais em nanocavidades e assim controlar sua interação com o campo eletromagnético (LAUCHT et al., 2009a). Feitas estas considerações, o Hamiltoniano aproximado de um PQ pode ser escrito como

$$H_{PQ} = \frac{\hbar\omega_x}{2}\sigma_z, \quad (2.1)$$

em que  $\hbar\omega_x$  é a energia necessária para se criar um éxciton, e  $\sigma_z = |g\rangle\langle g| - |e\rangle\langle e|$ , sendo  $|g\rangle$  o estado fundamental e  $|e\rangle$  o estado excitônico.

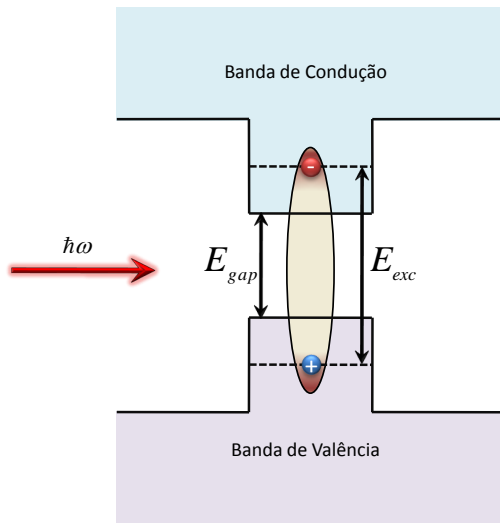


Figura 2.3 – Desenho esquemático mostrando a formação do estado de éxciton, em que  $E_{gap}$  corresponde a diferença de energia entre a última banda (camada de valência), e a primeira banda (camada de condução),  $E_{exc}$  corresponde a energia de formação do estado éxciton.

### 3 Cristais fotônicos e cavidade

Os avanços tecnológicos na fabricação e caracterização de nanoestruturas fotônicas levaram ao desenvolvimento de uma vasta variedade de estruturas fotônicas periódicas (variação periódica do índice de refração), desde unidimensionais, até tridimensionais, permitindo o confinamento do campo eletromagnético em regiões muito pequenas. Estas estruturas, aqui denominadas de cristais fotônicos, possuem propriedades óticas interessantes e inovadoras, podendo o campo eletromagnético ser quantizado, assim como se propagar controladamente nestes meios devido à diferença entre as constantes dielétricas dos mesmos, formando deste modo uma estrutura ideal para investigar a natureza quântica da interação radiação-matéria.

Espera-se que da mesma forma com que a física dos semicondutores, desenvolvida no século passado e destinada a estudar e aperfeiçoar o transporte de elétrons nos materiais, revolucionou a eletrônica, causando grande impacto nas telecomunicações, a física dos cristais fotônicos possa trazer uma nova revolução à eletrônica e às telecomunicações, substituindo os elétrons por fótons no processo de transporte de informação. O uso de fótons apresenta inúmeras vantagens, dentre as quais podemos destacar a sua velocidade de propagação e fraca interação com meios externos, não havendo assim resistência ao seu movimento, ao contrário do elétron que apresenta uma resistência a qual dissipa energia na forma de calor. Cristais fotônicos surgem então como uma alternativa atraente para substituir os semicondutores em circuitos integrados.

No caso dos semicondutores, o potencial periódico gerado pela rede cristalina juntamente com a geometria da rede, determinam as propriedades de condução no cristal, fazendo com que elétrons com determinadas energias sejam proibidos de se propagarem em direções específicas. Estas regiões proibidas de energia são conhecidas como *gaps*. De forma semelhante, cristais fotônicos apresentam uma distribuição periódica de meios com constantes dielétricas diferentes, fazendo com que surjam bandas de energias proibidas para a propagação de um fóton. Manipulando as dimensões dos materiais que formam o cristal fotônico é possível obter um *gap* específico, ou seja, uma determinada frequência na qual a luz não pode se propagar. Desta forma é possível guiar a luz, já que nas regiões proibidas ela será refletida. É possível fazer grandes desvios e também aumentar a eficiência da transmissão da luz (chegando a marca de 95%) (MEKIS et al., 1996). No entanto, a fabricação destas estruturas artificiais é complicada, já que a constante de rede de um cristal fotônico deve ser da ordem do comprimento de onda da luz que se deseja ter controle.

Para criar estas estruturas artificiais são empregadas técnicas como *litografia holográfica*, deposição química a vapor (*chemical vapor deposition*), entre outras. É possível criar estruturas com bandas proibidas em apenas uma, duas ou três dimensões.

No caso mais simples, cristais fotônicos unidimensionais são realizados crescendo estruturas periódicas com camadas de materiais que apresentam constantes dielétricas distintas. Aumentando a complexidade destas estruturas, os cristais fotônicos bidimensionais apresentam sua importância, quando vinculados como guias de onda. No que se trata da geometria destes cristais fotônicos, há duas formas bastante conhecidas. Uma delas consiste em cilindros dielétricos não superpostos, enquanto a outra, consiste de perfurações (cilindros de ar) criados em um material dielétrico. A metodologia é utilizar a diferença dielétrica entre os cilindros, ou buracos de ar para gerar a estrutura periódica e gerar uma banda proibida. Removendo uma fila destes buracos ou cilindros é possível criar uma extensão no cristal fotônico onde a luz pode se propagar com uma frequência na região da banda proibida do cristal ao seu redor, criando-se assim um guia de onda. Este mecanismo pode conduzir a luz sem perdas, diferentemente das fibras óticas, em que a luz pode escapar para ângulos de incidência muito grandes. Yablonovitch é o nome dado ao primeiro cristal fotônico tridimensional, criado por Yablonovitch em 1991. Avanços tecnológicos no desenvolvimento destes cristais fotônicos poderão abrir novos rumos para as células solares, laser entre outros dispositivos. Nas Figs. 3.1 e 3.2 ilustramos estes três tipos de cristais fotônicos.

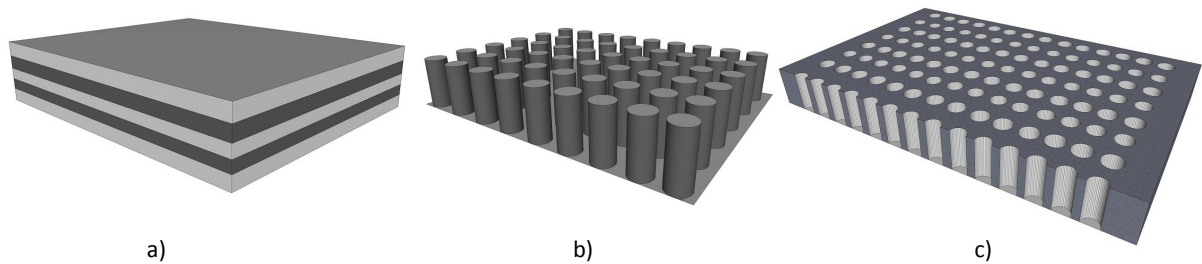


Figura 3.1 – a) Cristal fotônico unidimensional formado por camadas alternadas de materiais com diferentes constantes dielétricas. b) Cristal fotônico bidimensional formado por cilindros dielétricos: a estrutura é homogênea ao longo da direção  $z$  e apresenta uma periodicidade ao longo do plano  $xy$ , o que garante o confinamento da luz. c) Cristal fotônico bidimensional formado por lacunas cilíndricas: a ausência do material cria o confinamento da luz.

Pesquisadores da Universidade de Illinois, nos Estados Unidos desenvolveram uma técnica para fabricar cristais fotônicos tridimensionais (NELSON et al., 2011). Para criar estas estruturas, esferas são estrategicamente posicionadas no interior de um molde. Em seguida, é depositado um semicondutor no interior deste molde, por exemplo arseneto de gálio (GaAs), posteriormente é utilizado crescimento epitaxial para preencher todas as lacunas deixada pelas esferas. Quando todo o molde está coberto por arseneto de gálio, as esferas são retiradas utilizando um processo de litografia, e por fim é depositado sobre

este material um novo semiconductor com *gap* ligeiramente superior. Uma das grandes vantagens de criar estas estruturas por meio de crescimento epitaxial é a possibilidade de criar heteroestruturas complexas. Como, por exemplo, pontos quânticos ou poços quânticos, podem ser crescidos modificando a razão entre os fluxos dos materiais depositados.

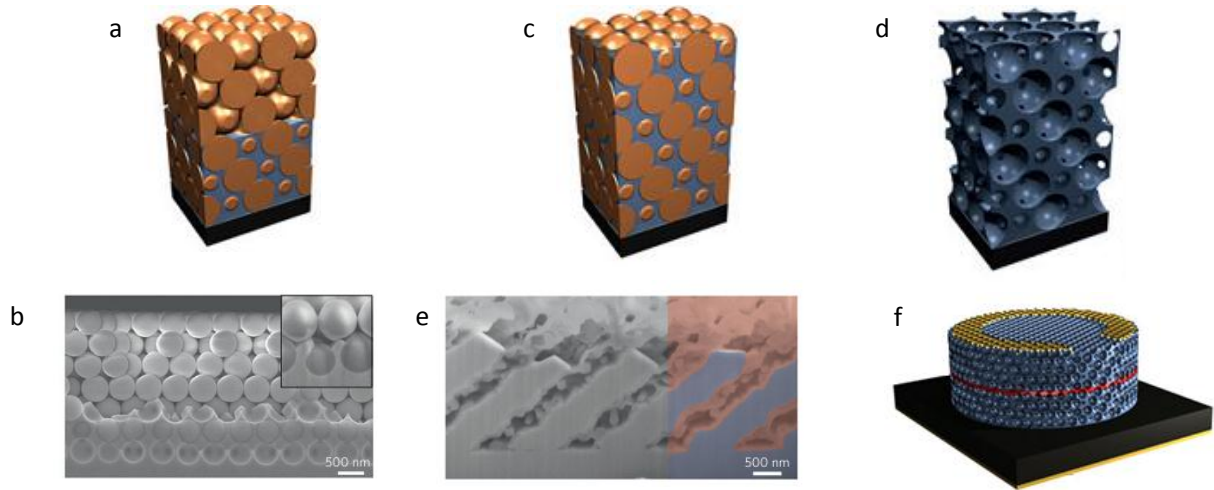


Figura 3.2 – a) Polímero 3D parcialmente preenchido com GaAs. b) Por meio de microscopia eletrônica de varredura, observa-se o crescimento não homogêneo de GaAs. c) Polímero completamente preenchido por GaAs. d) Estrutura de GaAs criada, removendo o molde de cristal fotônico, por meio de litografia, utilizando alumina. e) GaAs é preenchido com alumina: GaAs é representado em azul e a alumina em vermelho. f) Cristal fotônico de GaAs tridimensional, contendo uma linha de InGaAs (emissor), com um eletrodo de ouro na superfície (LED). Figuras adaptadas da Ref. (NELSON et al., 2011).

### 3.1 Cavidades em cristais fotônicos

As imperfeições ou defeitos propositalmente criados nos cristais fotônicos alteram suas propriedades. Da mesma forma que defeitos em semicondutores criam estados localizados que podem aprisionar elétrons, em cristais fotônicos estes defeitos podem criar estados localizados para a luz aprisionando fótons e assim criando o que conhecemos como cavidade.

Nos cristais fotônicos unidimensionais, o defeito pode ser criado modificando a dimensão de uma das camadas, gerando portanto, uma quebra de periodicidade local. Na presença de um campo elétrico, o mesmo perceberá a quebra de simetria, alterando sua amplitude, processo evidenciado na Fig. 3.3. Já tratando-se de cristais fotônicos bidimensionais, existem várias formas de criar estes defeitos. No exemplo da Fig. 3.4 o defeito é criado removendo-se 3 dos buracos de ar da estrutura periódica. Neste defeito, a luz pode existir com frequências dentro do *gap* do cristal fotônico, mas não pode sair, já que com esta frequência a luz não pode se propagar no cristal, criando assim uma região de confinamento da luz, ou seja, uma cavidade (AKAHANE et al., 2003). É também



possível criar defeitos em regiões arbitrárias de um cristal fotônico tridimensional, como demonstrado por Susumu Noda e colaboradores (NODA et al., 2000). Os mesmos autores também inseriram um emissor dentro da cavidade.

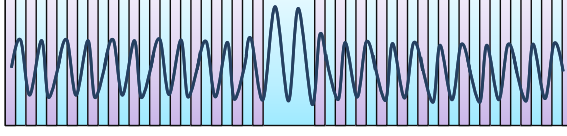


Figura 3.3 – Cristal fotônico unidimensional formado por camadas alternadas de materiais com constantes dielétricas diferentes. Um defeito na região central (ausência de duas camadas do mesmo material) cria uma cavidade que pode ser usada para aprisionar luz na direção de crescimento. Note que a amplitude do campo elétrico é alterada devido a presença da cavidade.

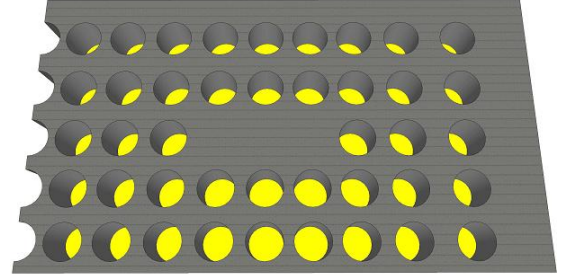


Figura 3.4 – Cristal fotônico bidimensional, contendo uma cavidade formada pela ausência de 3 buracos.

## 3.2 Modos normais do campo eletromagnético em cavidades

Nesta seção vamos ilustrar a teoria que envolve o confinamento da luz em cavidades. Vamos considerar aqui o caso mais simples, com finalidade apenas de discutir algumas propriedades importantes para compreensão deste trabalho, e que são tratadas de forma similar em outros tipos de cavidades. Considerando inicialmente uma cavidade tridimensional como ilustrado na Fig. 3.5, de comprimento  $L$  em todas as direções, cujas paredes são formadas por espelhos planos com alta capacidade de reflexão, garantindo que o campo elétrico nas superfícies da cavidade tenda a zero.<sup>1</sup> Isto implica em condições de contorno para o campo elétrico que têm a seguinte forma para todas as componentes:

$$E(0, y, z) = 0, \quad E(L, y, z) = 0 \quad (3.1a)$$

$$E(x, 0, z) = 0, \quad E(x, L, z) = 0 \quad (3.1b)$$

$$E(x, y, 0) = 0, \quad E(x, y, L) = 0 \quad (3.1c)$$

Nosso ponto de partida serão as equações de Maxwell para um sistema sem fontes de cargas e corrente, que é nosso caso aqui. Vamos considerar o meio com sendo o vácuo, mas toda a metodologia é equivalente para meios dielétricos, sendo necessário apenas

<sup>1</sup>Em um sistema real o campo eletromagnético penetra nas superfícies espelhadas da cavidade. Isto resulta em perdas as quais iremos ignorar nesta primeira abordagem.

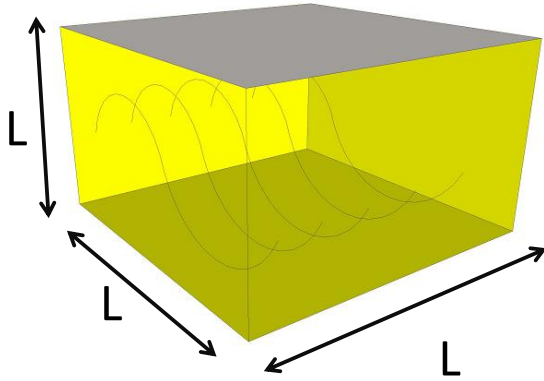


Figura 3.5 – Ilustração esquemática de uma cavidade fotônica tridimensional. O campo eletromagnético nas superfícies tende a zero.

reescrever a constante dielétrica  $\epsilon_0$  e permeabilidade magnética  $\mu_0$ .

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (3.2a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.2b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.2c)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3.2d)$$

Aplicando o rotacional na Eq. (3.2c) e substituindo a Eq. (3.2d) no resultado, obtemos

$$\nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (3.3)$$

em que usamos  $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$  e  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. A Eq. (3.3) pode ser resolvida assumindo a dependência temporal do tipo  $\exp(i\omega t)$ . Assim, de uma forma geral a solução da Eq. (3.3) pode ser escrita como

$$E(\mathbf{r}, t) = E_0 e^{-i(\mathbf{K} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad (3.4)$$

em que  $\mathbf{K}$  é o vetor de onda (com módulo  $k = \omega/c$ ),  $\mathbf{r}$  sua posição e  $\omega$  a sua frequência. Decompondo estas equações em coordenadas cartesianas e aplicando as condições de contorno dadas pelas Eqs. (3.1), encontramos que os valores permitidos de  $\mathbf{K}$  são:

$$K_x = \frac{l\pi}{L}, \quad K_y = \frac{m\pi}{L}, \quad K_z = \frac{n\pi}{L}, \quad (3.5)$$

em que  $l$ ,  $m$  e  $n$  são números inteiros.

Podemos então obter os valores permitidos de  $\omega$  dentro da cavidade substituindo a Eq. (3.4) na Eq. (3.3) e usando os valores permitidos para o vetor de onda, assim temos:

$$\omega_{l,m,n} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \left( \frac{l^2 \pi^2}{L^2} + \frac{m^2 \pi^2}{L^2} + \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.6)$$

Note que não é qualquer valor de frequência do campo eletromagnético que pode existir dentro da cavidade. Neste modelo de espelhos perfeitos, apenas aqueles com exata



frequência de um modo da cavidade podem existir. Entretanto, sabemos que no mundo real os espelhos não são perfeitos e parte dos fótons podem escapar da cavidade, reduzindo assim a intensidade do campo no seu interior com o passar do tempo. Estas perdas levarão a um alargamento dos estados fotônicos, fazendo com que este deixe de ser uma função delta. Associado a este alargamento, que pode ser medido experimentalmente, está o fator de qualidade  $Q$  do modo fotônico. O fator de qualidade é um parâmetro que serve para medir quão boa é a cavidade e é definido como  $2\pi$  vezes a razão entre a energia total armazenada na cavidade e a energia perdida em um ciclo. Para altos valores de  $Q$  este pode ser aproximado por

$$Q = \frac{\omega}{\Delta\omega}. \quad (3.7)$$

### 3.3 Hamiltoniano da cavidade, quantização do campo eletromagnético

Nesta seção descrevemos como obter o Hamiltoniano para um modo fotônico de uma cavidade com frequência  $\omega_c$ . Sem perda de generalidade, vamos assumir que inicialmente o campo elétrico está linearmente polarizado na direção  $x$ , e o campo magnético está linearmente polarizado na direção  $y$ , de tal forma que o campo eletromagnético se propaga ao longo da direção  $z$ . Desta forma, o campo elétrico e magnético dentro da cavidade, considerando um único modo, podem ser escritos como (SCULLY; ZUBAIRY, 1997):

$$E_x(z, t) = Aq(t) \sin(kz) \quad (3.8a)$$

$$B_y(z, t) = A \left( \frac{\mu_0 \epsilon_0}{k} \right) \dot{q}(t) \cos(kz), \quad (3.8b)$$

em que  $q(t)$  corresponde a parte dependente do tempo da solução das equações de Maxwell e

$$A = \sqrt{\frac{2\omega_c^2}{V\epsilon_0}}, \quad (3.9)$$

com  $V$  sendo o volume da cavidade. De acordo com (SCULLY; ZUBAIRY, 1997; GERRY, 2005) o Hamiltoniano clássico para o campo pode ser calculado a partir da energia do campo eletromagnético, da seguinte forma:

$$H_{\text{cav}} = \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{\mu_0} \mathbf{H}^2 + \epsilon_0 \mathbf{E}^2 \right) dV = \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{\mu_0} H_y^2 + \epsilon_0 E_x^2 \right) dV. \quad (3.10)$$

Substituindo as Eqs. (3.8a) e (3.8b) na Eq. (3.10) e então realizando a integração sobre todo o volume da cavidade, encontra-se:

$$H_{\text{cav}} = \frac{1}{2} (\omega_c^2 q^2 + \dot{q}^2). \quad (3.11)$$

Este Hamiltoniano lembra o Hamiltoniano de um oscilador Harmônico com massa unitária. Nesta analogia, podemos identificar  $p = \dot{q}$  como o momento canônico. Desta forma, as variáveis  $p$  e  $q$ , constituem variáveis canonicamente conjugadas, análogo aos operadores momento e posição respectivamente. Estes obedecem às relações de comutação  $[q, p] = i\hbar$  e assim podemos definir os operadores criação e aniquilação, respectivamente como:

$$a^\dagger(t) = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_c}} [\omega_c q(t) - ip(t)] \quad (3.12a)$$

$$a(t) = \sqrt{\frac{1}{2\hbar\omega_c}} [\omega_c q(t) + ip(t)]. \quad (3.12b)$$

Note que os operadores momento e posição podem ser escritos como:

$$q(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_c}} [a(t) + a^\dagger(t)] \quad (3.13a)$$

$$p(t) = i\sqrt{\frac{\hbar\omega_c}{2}} [a^\dagger(t) - a(t)], \quad (3.13b)$$

o que nos permite reescrever o Hamiltoniano do campo eletromagnético, após algumas manipulações algébricas, como:

$$H_{\text{cav}} = \hbar\omega_c \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right). \quad (3.14)$$

Assim, como no caso do oscilador harmônico quântico, o campo eletromagnético de um modo da cavidade também é quantizado, com energia separadas por múltiplos inteiros de  $\hbar\omega_c$ .

Note que o campo elétrico agora pode ser reescrito em termo dos operadores criação e destruição. Assim, substituindo a Eq. (3.13a) na Eq. (3.8a) temos:

$$E_x(z, t) = \left( \frac{\hbar\omega_c}{V\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} [a(t) + a^\dagger(t)] \sin(kz), \quad (3.15)$$

que também pode ser escrita como:

$$E_x(z, t) = \left( \frac{\hbar\omega_c}{V\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} [a(0)e^{-i\omega_c t} + a^\dagger(0)e^{i\omega_c t}] \sin(kz), \quad (3.16)$$

já que os operadores  $a$  e  $a^\dagger$  satisfazem a equação de movimento

$$\frac{da}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H_{\text{cav}}, a]. \quad (3.17)$$

## 4 Interação ponto quântico-cavidade

Neste capítulo vamos deduzir o Hamiltoniano de interação entre um único ponto quântico, o qual representaremos aqui por um sistema de dois níveis, com um modo da cavidade. Inicialmente, vamos dividir o Hamiltoniano em três partes,

$$H = H_{\text{PQ}} + H_{\text{cav}} + H_{\text{int}}, \quad (4.1)$$

em que  $H_{\text{PQ}}$  refere-se ao ponto quântico, dado pela Eq. (2.1),  $H_{\text{cav}}$  ao campo eletromagnético do modo fotônico, dado pela Eq. (3.14), e  $H_{\text{int}}$  é o Hamiltoniano de interação entre o campo eletromagnético da cavidade e o PQ, que aqui será descrito na aproximação de dipolo<sup>1</sup>. Assim,

$$H_{\text{int}} = e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad (4.2)$$

em que  $\mathbf{d} = -e\mathbf{r}$  é o momento de dipolo ocasionado devido ao estado de éxciton. Sem perda de generalidade, podemos usar o resultado dado pela Eq. (3.15), já escrito em termos dos operadores criação e aniquilação, apenas generalizando para uma polarização qualquer  $\hat{\varepsilon}$ . Assim a Eq. (4.2) pode ser escrita como

$$H_{\text{int}} = -\mathbf{d} \cdot \hat{\varepsilon} \left( \frac{\hbar\omega_c}{V\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \sin(kz)(a + a^\dagger). \quad (4.3)$$

As transições permitidas para os níveis do PQ podem agora ser obtidas calculando a matriz de transição de dipolo elétrico.  $p_{i,j} = \langle i | \mathbf{d} \cdot \hat{\varepsilon} | j \rangle$ . Os únicos elementos diferentes de zero são aqueles fora de diagonal,  $p_{g,e}$  e  $p_{e,g}$ . Assim

$$H_{\text{int}} = - \left( \frac{\hbar\omega_c}{V\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \sin(kz) (p_{e,g} |e\rangle\langle g| + p_{g,e} |g\rangle\langle e|)(a + a^\dagger). \quad (4.4)$$

Definindo  $g = - \left( \frac{\hbar\omega_c}{V\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} p_{e,g} \frac{\sin(kz)}{\hbar}$  e  $\sigma_- = |g\rangle\langle e|$ , o Hamiltoniano de interação pode ser escrito como

$$H_{\text{int}} = (\hbar g \sigma_- + \hbar g^* \sigma_+)(a + a^\dagger), \quad (4.5)$$

lembrando que  $|g\rangle$  é o estado fundamental e  $|e\rangle$  o estado excitônico. Como  $g$  em geral é real, o Hamiltoniano de interação pode ser simplificado ainda mais e ser escrito como

$$H_{\text{int}} = \hbar g (\sigma_- + \sigma_+)(a + a^\dagger). \quad (4.6)$$

---

<sup>1</sup>Considerando para esta aproximação o dipolo elétrico criado devido ao par elétron-buraco.

## 4.1 Aproximação de Ondas Girantes

No Hamiltoniano (4.6) é possível observar quatro termos de interações representados por  $\sigma_+a$ ,  $\sigma_+a^\dagger$ ,  $\sigma_-a$  e  $\sigma_-a^\dagger$ . Considerando que os operadores de transição  $\sigma_\pm$  comutam com os operadores de criação,  $a^\dagger$ , e aniquilação,  $a$ , é possível escrever os termos de interação como  $a\sigma_+$ ,  $a^\dagger\sigma_+$ ,  $a\sigma_-$  e  $a^\dagger\sigma_-$ . A matriz  $\sigma_+$  descreve a transição do estado fundamental para o estado excitônico ( $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ ) e a matriz  $\sigma_-$  realiza a transição do estado excitônico para o estado fundamental ( $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ ). De forma a auxiliar na interpretação, segue na figura 4.1 um esquema, em que assumimos a base  $\{|i, n\rangle\}$  com  $i = g, e$  representando os estados do PQ e  $n$  inteiro, representando os estados fotônicos da cavidade. Desta forma, o termo  $a^\dagger$ , conhecido como operador criação, cria um fóton no interior da cavidade e nesta base pode ser representado como

$$a^\dagger|g, n\rangle = \sqrt{n+1}|g, n+1\rangle \quad (4.7a)$$

$$a^\dagger|e, n\rangle = \sqrt{n+1}|e, n+1\rangle \quad (4.7b)$$

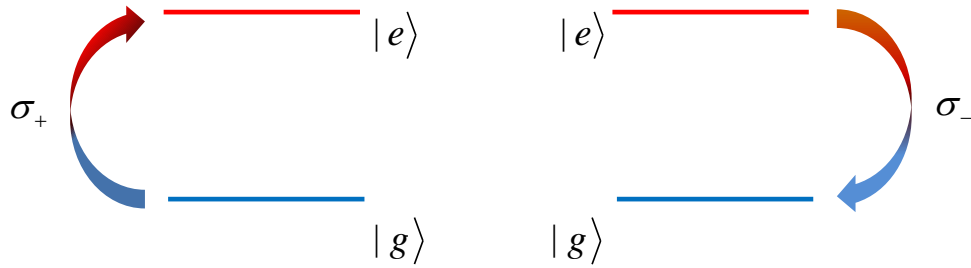


Figura 4.1 – a) Transição do estado fundamental para o estado excitado  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ , processo realizado pelo o operador  $\sigma_+$ , b) Transição do estado excitado para o estado fundamental  $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$ , processo realizado pelo o operador  $\sigma_-$

De forma semelhante o termo  $a$ , conhecido como operador aniquilação, destrói um fóton do interior da cavidade e pode ser representado por

$$a|g, n\rangle = \sqrt{n}|g, n-1\rangle \quad (4.8a)$$

$$a|e, n\rangle = \sqrt{n}|e, n-1\rangle \quad (4.8b)$$

Nesta perspectiva, o termo  $a^\dagger\sigma_-$  descreve o processo em que o sistema é levado do estado  $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$  com a criação de um fóton na cavidade. De forma semelhante, o termo  $a\sigma_+$  descreve o processo em que o PQ vai do estado fundamental para o estado excitônico ao custo da aniquilação de um fóton na cavidade. Ambos os termos conservam a energia total do sistema e são conhecidos como termos girantes. Já o termo  $a\sigma_-$  descreve o processo em que o sistema é levado do estado  $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$  com a aniquilação de um fóton na cavidade, o que proporciona uma perda de  $2\hbar\omega_x$  de energia e portanto, não conserva a energia do sistema. Similarmente o termo  $a^\dagger\sigma_+$  leva o sistema do estado  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$  com a

criação de um fóton na cavidade, com um ganho de  $2\hbar\omega_x$  de energia, o que também não conserva a energia do sistema (veja ilustração destes processos na Fig. 4.2). Estes termos são conhecidos como termos contra-girantes. Para abordar esta questão em uma outra perspectiva, vamos escrever o Hamiltoniano (4.6) (na ausência da aproximação de ondas girantes) na representação de Heisenberg, em que os operadores evoluem no tempo.

$$a(t) = ae^{i\omega_c t} \quad (4.9a)$$

$$a^\dagger(t) = a^\dagger e^{-i\omega_c t} \quad (4.9b)$$

$$\sigma_+(t) = \sigma_+ e^{-i\omega_x t} \quad (4.9c)$$

$$\sigma_-(t) = \sigma_- e^{i\omega_x t} \quad (4.9d)$$

O Hamiltoniano total do sistema  $H = H_{\text{PQ}} + H_{\text{cav}} + H_{\text{int}}$  fica então

$$\begin{aligned} H = & \hbar\omega_c \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar\omega_x}{2} \sigma_z + \hbar g \underbrace{\left[ \sigma_+ a e^{i(\omega_c - \omega_x)t} + \sigma_- a^\dagger e^{-i(\omega_c - \omega_x)t} \right]}_{\text{girantes}} \\ & + \hbar g \underbrace{\left[ \sigma_- a e^{i(\omega_c + \omega_x)t} + \sigma_+ a^\dagger e^{-i(\omega_c + \omega_x)t} \right]}_{\text{contra-girantes}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Próximo a condição de ressonância ( $\omega_c \approx \omega_x$ ), os termos contra-girantes oscilam de forma mais rápida que os termos girantes já que no sistema aqui analisado a constante de acoplamento  $g$  é muito menor que as frequências  $\omega_c$  e  $\omega_x$ . Desta forma, em média os termos girantes contribuem de forma expressiva com o passar do tempo, e seu efeito constitui uma troca periódica de energia entre o átomo e o campo, o que fica evidente nas oscilações de Rabi. Em contrapartida, os termos contra-girantes oscilam em frequências muito maiores que a constante de acoplamento  $g$  e desta forma, em média não contribuem de forma significativa para a dinâmica e em geral podem ser desprezados. Esta é a aproximação de ondas girantes (RWA – do inglês Rotation Wave Approximation). Assim nosso Hamiltoniano total com interação pode ser escrito como

$$H = \hbar\omega_c \left( a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) + \frac{\hbar\omega_x}{2} \sigma_z + \hbar g (\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger) \quad (4.11)$$

que é popularmente conhecido como modelo de Jaynes-Cummings.

Este será o modelo usado nessa dissertação, em que iremos apenas acrescentar um termo de bombeio coerente proveniente de um laser.

## 4.2 Colapso e Ressurgimento

Um aspecto interessante previsto pelo modelo Jaynes-Cummings é o colapso e ressurgimento. Vamos revisar aqui a teoria deste efeito o qual será analisado mais tarde para o sistema aqui proposto, incluindo bombeio coerente.

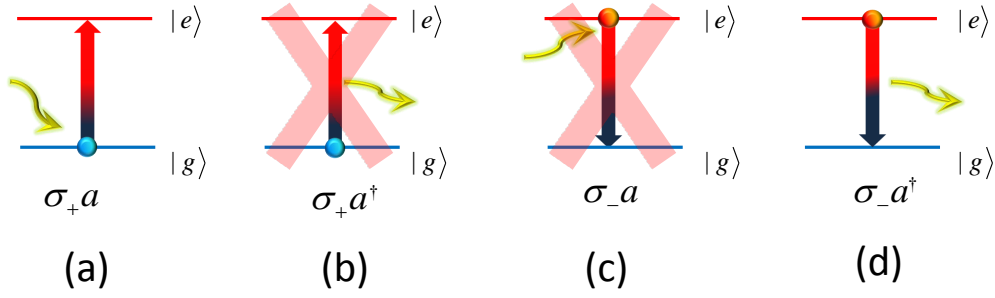


Figura 4.2 – (a) Aniquilação de um fóton e transição do sistema de  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ , (b) Criação de um fóton e transição do sistema de  $|g\rangle \rightarrow |e\rangle$ , (c) Aniquilação de um fóton e transição do sistema de  $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$  (d) Criação de um fóton e transição do sistema de  $|e\rangle \rightarrow |g\rangle$

Considerando  $H = H_0 + H_{\text{int}}$  em que  $H_0 = H_{\text{PQ}} + H_{\text{cav}}$  representa o Hamiltoniano livre e  $H_{\text{int}}$  representa o Hamiltoniano de interação descrito anteriormente. Assim

$$H_0 = \hbar\omega_c(a^\dagger a + \frac{1}{2}) + \frac{\hbar\omega_x}{2}\sigma_z \quad (4.12)$$

$$H_{\text{int}} = \hbar g(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger). \quad (4.13)$$

A equação de Schrödinger para este Hamiltoniano

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = (H_0 + H_{\text{int}})|\psi\rangle, \quad (4.14)$$

pode então ser escrita na representação de interação fazendo a transformação unitária

$$|\tilde{\psi}\rangle = e^{\frac{iH_0 t}{\hbar}} |\psi\rangle. \quad (4.15)$$

Desta forma a dinâmica do sistema será governada pela equação:

$$i\hbar \frac{\partial |\tilde{\psi}\rangle}{\partial t} = \tilde{H}_{\text{int}} |\tilde{\psi}\rangle, \quad (4.16)$$

em que

$$\tilde{H}_{\text{int}} = e^{\frac{iH_0 t}{\hbar}} H_{\text{int}} e^{-\frac{iH_0 t}{\hbar}}. \quad (4.17)$$

Os operadores presentes em  $H_0$  e  $H_{\text{int}}$  satisfazem as seguinte relações de comutação

$$[\sigma_z, \sigma_-] = \sigma_z \sigma_- - \sigma_- \sigma_z = -2\sigma_- \quad (4.18)$$

$$[\sigma_z, \sigma_+] = \sigma_z \sigma_+ - \sigma_+ \sigma_z = 2\sigma_+ \quad (4.19)$$

$$[a^\dagger a, a] = a^\dagger [a, a] + [a^\dagger, a] a = -a \quad (4.20)$$

$$[a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger [a, a^\dagger] + [a^\dagger, a^\dagger] a = a^\dagger. \quad (4.21)$$

Fazendo uso destas relações e com o auxílio do Lema de Baker-Hausdorff,

$$e^{iA\lambda} B e^{-iA\lambda} = B + i\lambda[A, B(\lambda)] + \left(\frac{i^2 \lambda^2}{2!}\right) [A, [A, B(\lambda)]] + \dots, \quad (4.22)$$

a Eq. (4.17) pode ser reescrita como

$$\tilde{H}_{\text{int}} = \hbar g(\sigma_+ a e^{i\delta t} + \sigma_- a e^{-i\delta t}) \quad (4.23)$$

em que  $\delta = \omega_x - \omega_c$ . Para o caso ressonante temos

$$\tilde{H}_{\text{int}} = \hbar g(\sigma_+ a + \sigma_- a). \quad (4.24)$$

Uma vez que o conjunto dos autoestados de  $H_0$ ,  $\{|e, n\rangle, |g, n\rangle\}$ , formam uma base completa, qualquer estado do sistema conjunto pode ser escrito como uma combinação linear dos estados da base. Assim,

$$|\tilde{\psi}\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} [C_{e,n}(t)|e, n\rangle + C_{g,n}(t)|g, n\rangle]. \quad (4.25)$$

Neste caso ressonante, em particular, o sistema tem solução exata que é conhecida como estados vestidos. A idéia básica por trás desta solução é que o Hamiltoniano de interação dado pela Eq. (4.24) só acopla os estados  $|e, n\rangle$  com os estados  $|g, n+1\rangle$ , independentemente do número de fótons  $n$  na cavidades.

Entretanto, para o caso geral, podemos obter a dinâmica do sistema substituindo a Eq. (4.25) na equação de Schrödinger [Eq. (4.16)] assim obtemos:

$$\begin{aligned} i\hbar \sum_{n=0}^{\infty} \dot{C}_{e,n}(t)|e, n\rangle + \dot{C}_{g,n}(t)|g, n\rangle \\ = \hbar g \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_+ a e^{i\delta t} C_{g,n}(t)|g, n\rangle + \sigma_- a^\dagger e^{-i\delta t} C_{e,n}(t)|e, n\rangle. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Como o Hamiltoniano de interação [Eq. (4.23)] somente realiza transições do estado  $|e, n\rangle$  para o estado  $|g, n+1\rangle$  e vice-versa, podemos considerar apenas a evolução das amplitudes de probabilidade  $C_{e,n}$  e  $C_{g,n+1}$  (SCULLY; ZUBAIRY, 1997). Assim, podemos reescrever a Eq. (4.26) como:

$$\begin{aligned} \dot{C}_{e,n}(t)|e, n\rangle + \dot{C}_{g,n+1}(t)|g, n+1\rangle \\ = -ig\sqrt{n+1}(e^{i\delta t}C_{g,n+1}(t)|e, n\rangle + e^{-i\delta t}C_{e,n}(t)|g, n+1\rangle). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Projetando a Eq. (4.27) sobre  $\langle e, n|$  e  $\langle g, n+1|$ , respectivamente, obtêm-se duas equações acopladas,

$$\dot{C}_{e,n}(t) = -ig\sqrt{n+1}e^{i\delta t}C_{g,n+1} \quad (4.28)$$

$$\dot{C}_{g,n+1}(t) = -ig\sqrt{n+1}e^{-i\delta t}C_{e,n}. \quad (4.29)$$

Derivando a primeira com relação ao tempo

$$\ddot{C}_{e,n}(t) = -ig\sqrt{n+1}(i\delta e^{i\delta t}C_{g,n+1}(t) + \dot{C}_{g,n+1}(t)e^{i\delta t}), \quad (4.30)$$

e substituindo nesta as Eqs. (4.28) e (4.29) obtemos uma equação diferencial de segunda ordem, dada por:

$$\ddot{C}_{e,n}(t) = i\delta\dot{C}_{e,n}(t) - g^2(n+1)C_{e,n}(t). \quad (4.31)$$

Esta equação sugere solução do tipo exponencial. Assim:

$$C_{e,n}(t) = e^{i\gamma t} \quad (4.32)$$

$$\dot{C}_{e,n}(t) = i\gamma e^{i\gamma t} \quad (4.33)$$

$$\ddot{C}_{e,n}(t) = -\gamma^2 e^{i\gamma t}. \quad (4.34)$$

Utilizando este conjunto de soluções na Eq. (4.31), e após rearranjar os termos, obtemos uma equação para  $\gamma$ , dada por:

$$\gamma = \frac{\delta}{2} \pm \frac{\sqrt{\delta^2 + 4g^2(n+1)}}{2} = \frac{1}{2}(\delta \pm \Omega_n), \quad (4.35)$$

em que  $\Omega_n$  é a frequência de Rabi efetiva que depende do número de fótons na cavidade (LAMBROPOULOS; PETROSYAN, 2007)

$$\Omega_n = \sqrt{\delta^2 + 4g^2(n+1)}. \quad (4.36)$$

Como temos duas soluções para  $\gamma$ , a solução para  $C_{e,n}(t)$  será uma combinação linear destas, assim

$$C_{e,n}(t) = Ae^{i\gamma_+ t} + Be^{i\gamma_- t}. \quad (4.37)$$

Admitindo como condição inicial  $C_{e,n}(0) = C_n(0)$  e  $C_{g,n+1}(0) = 0$ , em que  $C_n(0)$  corresponde a amplitude do estado inicial do campo eletromagnético, podemos obter as constantes  $A$  e  $B$ , que são dadas por:

$$A = \frac{C_n(0)}{2} \left(1 - \frac{\delta}{\Omega_n}\right) \quad (4.38)$$

$$B = \frac{C_n(0)}{2} \left(1 + \frac{\delta}{\Omega_n}\right). \quad (4.39)$$

Desta forma, nossa solução para os coeficientes podem ser escritos como:

$$C_{e,n}(t) = C_n(0) \left[ \cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) - \frac{i\delta}{\Omega_n} \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right] e^{\frac{i\delta t}{2}}. \quad (4.40)$$

De forma análoga, a amplitude de probabilidade da função de onda  $C_{g,n+1}(t)$ , é dada por:

$$C_{g,n+1}(t) = -C_n(0) \left[ \frac{2ig\sqrt{n+1}}{\Omega_n} \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right] e^{\frac{-i\delta t}{2}}. \quad (4.41)$$

Desta forma, a inversão de população, entre os estados  $|C_{g,n+1}(t)|$  e  $|C_{e,n}(t)|$ , pode ser computada por meio da seguinte expressão:

$$\mathcal{W}(t) = \sum_n [|C_{e,n}(t)|^2 - |C_{g,n+1}(t)|^2] \quad (4.42)$$

$$\mathcal{W}(t) = \sum_n p_{n,n} \left[ \frac{\delta^2}{\Omega_n^2} + \left( \frac{4g^2(n+1)}{\Omega_n^2} \right) \cos(\Omega_n t) \right] \quad (4.43)$$



Em que  $p_{n,n} = |C_n(0)|^2$ , é a probabilidade de que existam  $n$  fótons presentes no campo no instante  $t = 0$ . Considerando o estado do campo eletromagnético inicial dentro da cavidade como sendo um estado coerente<sup>2</sup>, no qual  $p_{n,n}$  é dado por:

$$p_{n,n}(0) = \frac{\langle n \rangle^n e^{-\langle n \rangle}}{n!} \quad (4.44)$$

obtemos a inversão de população mostrada nas Figs. 4.3 (a) – (f) considerando que o ponto quântico se encontra no estado excitado e a cavidade possui em média 5, 15 e 30 fótons respectivamente. Observa-se que a medida que o número médio de fótons aumenta, o comportamento de colapso e ressurgimento se torna mais evidente, haja vista a presença de um número maior de termos na equação (4.43). Foi considerado tanto a situação em que  $\delta = 0$ , bem como a situação em que  $\delta \neq 0$ . Atenta-se ao fato de que nas situações em que  $\delta \neq 0$  as inversões de populações entre os estados não se encontram centralizadas em torno de zero (com relação ao eixo de inversão de população). Fato este que pode ser notado nas Figs. 4.3(d), (e) e (f).

Este fenômeno conhecido como colapso e ressurgimento, pode ser melhor compreendido, observando com rigor a Eq. (4.43). Para cada valor  $n$ , uma oscilação de Rabi é verificada, em que  $p_{n,n}$  determina o peso de cada valor de  $n$ , de acordo com a Eq. (4.44). De início, o átomo está preparado em um determinado estado (condição inicial), e portanto todos os termos presentes no somatório convergem para um único valor. Com o passar do tempo, estas oscilações ficam moduladas ao produto  $\Omega_n t$ , que de quando em quando são múltiplos de  $\frac{m\pi}{2}$  levando as oscilações a zero, gerando o colapso, ainda com o passar do tempo este produto alcança o valor máximo quando  $\Omega_n t$  for um múltiplo de  $m\pi$ , surgindo novamente as oscilações, o que pode ser denominado como ressurgimento.

---

<sup>2</sup>Estados coerentes são estados que mais se aproximam do campo clássico, além de confirmar o princípio de Heisenberg, os valores esperados para o campo calculados com estes estados, são os mesmo obtidos no eletromagnetismo clássico.

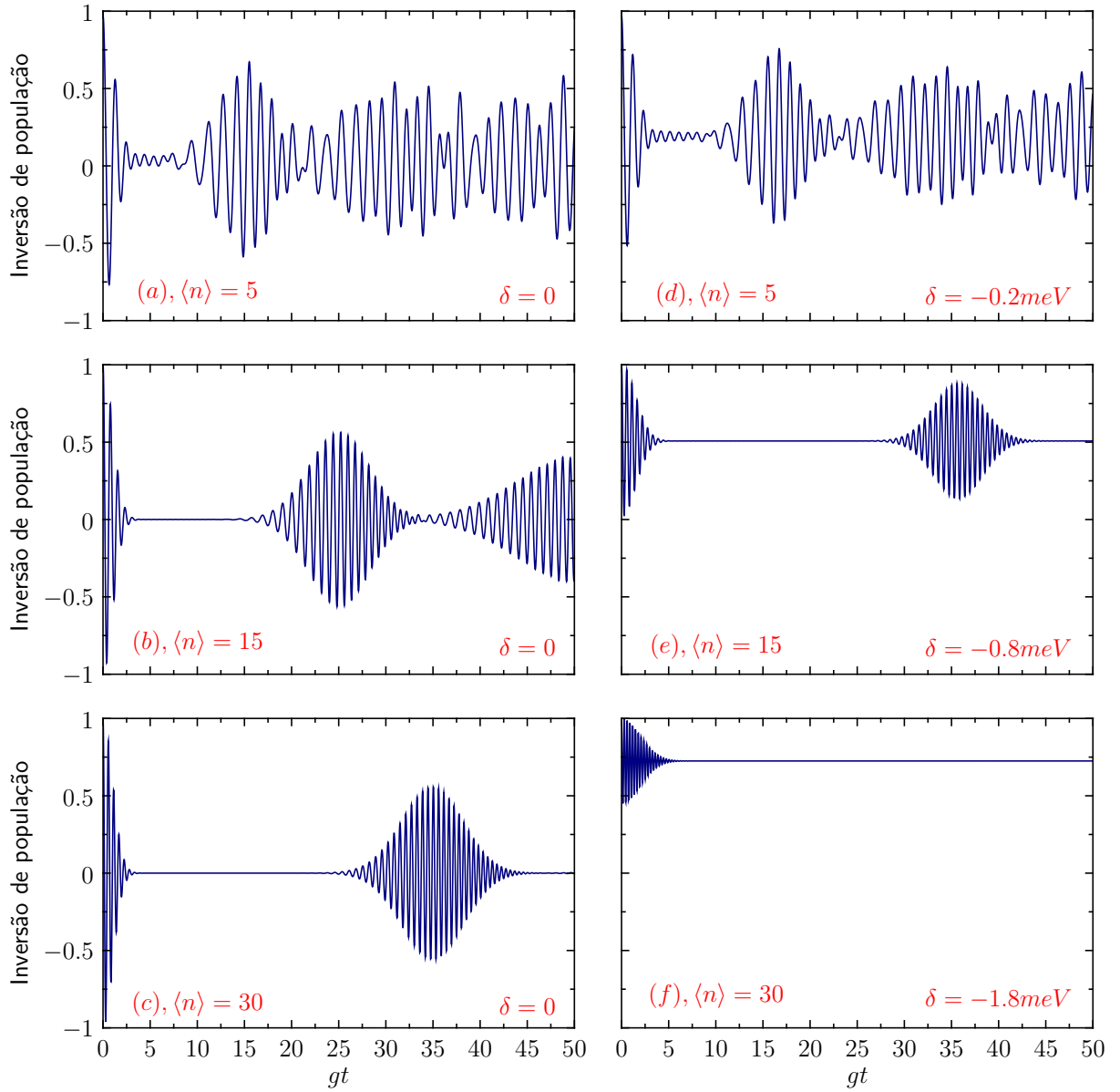


Figura 4.3 – Cálculo de inversão de população, realizado para um sistema considerando o ponto quântico inicialmente no estado excitado  $|e\rangle$  e o campo eletromagnético da cavidade em um estado coerente. Em (a) e (d) o número médio de fótons foi 5, em (b) e (e) foi 15 e em (c) e (f) foi 30. Em (a),(b) e (c) a dessintonia entre a energia de excitação do ponto quântico e a energia de ressonância da cavidade é nula  $\delta = 0$  meV. No entanto, para o cálculo realizado em (d), (e) e (f) foi considerado  $\delta = -0.2$  meV,  $\delta = -0.8$  meV e  $\delta = -1.8$  meV respectivamente.

## 5 Ponto-quântico em cavidade sob bombeio coerente

Neste capítulo daremos sequência ao estudo do sistema de PQ em uma cavidade, agora adicionando um bombeio coerente e analisando seus efeitos na dinâmica do sistema, quando o bombeio é feito por meio de pulsos de laser ou de forma contínua. Inicialmente faremos algumas considerações que facilitarão o entendimento do sistema. Uma delas será remover a dependência temporal do laser aplicado por meio de uma transformação unitária.

O Hamiltoniano utilizado é o mesmo descrito no capítulo anterior, com acréscimo de um termo de bombeio externo coerente, aqui tratado como um campo clássico na aproximação de dipolo. Desta forma, o Hamiltoniano relacionado com o bombeio externo, pode ser escrito como:

$$H_B = -e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}(t) = \mathbf{d} \cdot \mathbf{E}(t) \quad (5.1)$$

Considerando  $\mathbf{d} = -e\mathbf{r}$  e o campo elétrico como sendo um campo clássico dado por:

$$E(t) = \xi(t) \cos(\omega_b t) \hat{\epsilon} \quad (5.2)$$

Em que  $\xi(t)$  corresponde a amplitude do campo elétrico. Aplicando o operador identidade em 5.1,

$$H_B = (|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|)\mathbf{d}(|e\rangle\langle e| + |g\rangle\langle g|)\mathbf{E}(t) \quad (5.3)$$

Sendo assim, mais uma vez, as transições permitidas para os níveis do PQ devido ao bombeio externo, podem ser determinadas por meio da matriz de transição de dipolo elétrico  $p_{i,j} = \langle i|\mathbf{d} \cdot \hat{\epsilon}|j\rangle$  (como realizado anteriormente). E os únicos termos neste caso diferentes de zero são aqueles fora da diagonal, no caso  $p_{e,g}$  e  $p_{g,e}$ . Considerando ainda que  $p_{e,g} = p_{g,e}^*$  e que  $\Omega(t) = \frac{|p_{e,g}|\xi(t)}{\hbar}$ , o hamiltoniano de bombeio externo pode ser reescrito como (SCULLY; ZUBAIRY, 1997):

$$H_B = \Omega(t) \cos(\omega_b t) (\sigma_+ + \sigma_-) \quad (5.4)$$

Assim, o Hamiltoniano do sistema completo pode ser escrito como:

$$H = \underbrace{\frac{\hbar\omega_x}{2}\sigma_z}_{PQ} + \underbrace{\hbar\omega_c a^\dagger a}_{Cavidade} + \underbrace{\hbar g(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-)}_{PQ-Cavidade} + \underbrace{\Omega(t) \cos(\omega_b t) (\sigma_+ + \sigma_-)}_{Bombeio} \quad (5.5)$$

*Jaynes-Cummings*

em que  $\omega_c$  corresponde a frequência de ressonância da cavidade e  $\omega_b$  representa a frequência do laser de bombeio. O primeiro e o segundo termo do Hamiltoniano, estão relacionados

com o ponto quântico e com o número de fótons no interior da cavidade, respectivamente. Já o terceiro e o quarto termos representam a interação entre o ponto quântico e a cavidade e o bombeio externo, respectivamente.

Utilizando a aproximação de ondas girantes (RWA) no termo de bombeio externo, em que  $\Omega(t)$  corresponde a amplitude do pulso Gaussiano (VILLAS-BÔAS; ULLOA; GOVOROV, 2005; FOX, 2006; LI et al., 2003; VILLAS-BÔAS; ULLOA; GOVOROV, 2007), o Hamiltoniano se torna:

$$H = \frac{\hbar\omega_x}{2}\sigma_z + \hbar\omega_c a^\dagger a + \hbar g(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-) + \frac{\Omega(t)}{2}(\sigma_+ e^{i\omega_b t} + \sigma_- e^{-i\omega_b t}) \quad (5.6)$$

## 5.1 Transformação unitária

Para simplificar o cálculo e facilitar o entendimento do sistema, podemos remover a dependência temporal que aparece na exponencial do último termo do Hamiltoniano dado pela Eq. (5.6) utilizando uma transformação unitária (SAKURAI.J.J., 1994) da seguinte forma:

$$\mathcal{U} = e^{-i\omega_b(\frac{\sigma_z}{2} + a^\dagger a)t}. \quad (5.7)$$

Partindo da equação de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = H|\psi\rangle, \quad (5.8)$$

e aplicando a transformação unitária na função de onda

$$|\psi\rangle = \mathcal{U}|\psi'\rangle \quad (5.9)$$

Encontramos

$$i\hbar \left[ \frac{d\mathcal{U}}{dt} |\psi'\rangle + \mathcal{U} \frac{d|\psi'\rangle}{dt} \right] = H\mathcal{U}|\psi'\rangle. \quad (5.10)$$

Multiplicando esta equação por  $\mathcal{U}^{-1}$  pela esquerda e utilizando a relação dos operadores unitários ( $\mathcal{U}^{-1}\mathcal{U} = 1$ ) obtemos:

$$i\hbar \frac{d|\psi'\rangle}{dt} = \left[ \mathcal{U}^{-1} H \mathcal{U} - i\hbar \mathcal{U}^{-1} \frac{d\mathcal{U}}{dt} \right] |\psi'\rangle \quad (5.11)$$

que pode ser interpretado como a equação de Schrödinger com um Hamiltoniano efetivo

$$H' = \mathcal{U}^{-1} H \mathcal{U} - i\hbar \mathcal{U}^{-1} \frac{d\mathcal{U}}{dt} \quad (5.12)$$

Para determinar a forma exata  $H'$  é necessário calcular  $\mathcal{U}^{-1}H\mathcal{U}$ , assim como a derivada. O primeiro termo pode ser calculado escrevendo:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}^{-1}H\mathcal{U} = & \frac{\hbar\omega_x}{2}e^{\frac{i\omega_b\sigma_z t}{2}}e^{i\omega_b a^\dagger at}\sigma_z e^{-\frac{i\omega_b\sigma_z t}{2}}e^{-i\omega_b a^\dagger at} \\ & + \hbar\omega_c e^{\frac{i\omega_b\sigma_z t}{2}}e^{i\omega_b a^\dagger at}a^\dagger a e^{-\frac{i\omega_b\sigma_z t}{2}}e^{-i\omega_b a^\dagger at} \\ & + \hbar g e^{\frac{i\omega_b\sigma_z t}{2}}e^{i\omega_b a^\dagger at}\sigma_+ a e^{-\frac{i\omega_b\sigma_z t}{2}}e^{-i\omega_b a^\dagger at} \\ & + \hbar g e^{\frac{i\omega_b\sigma_z t}{2}}e^{i\omega_b a^\dagger at}\sigma_- a^\dagger e^{-\frac{i\omega_b\sigma_z t}{2}}e^{-i\omega_b a^\dagger at} \\ & + \frac{\hbar\Omega(t)}{2}e^{\frac{i\omega_b\sigma_z t}{2}}e^{i\omega_b a^\dagger at}\sigma_+ e^{-i\omega_b t}e^{-\frac{i\omega_b\sigma_z t}{2}}e^{-i\omega_b a^\dagger at} \\ & + \frac{\hbar\Omega(t)}{2}e^{\frac{i\omega_b\sigma_z t}{2}}e^{i\omega_b a^\dagger at}\sigma_- e^{i\omega_b t}e^{-\frac{i\omega_b\sigma_z t}{2}}e^{-i\omega_b a^\dagger at}\end{aligned}\quad (5.13)$$

Novamente, com o auxílio do Lema de Baker–Hausdorff [Eq. (4.22)], o Hamiltoniano  $H'$ , pode ser escrito como:

$$H' = \hbar\delta_x\sigma_+\sigma_- + \hbar\delta_c a^\dagger a + \hbar g(\sigma_+ a + \sigma_- a^\dagger) + \frac{\hbar\Omega(t)}{2}(\sigma_+ + \sigma_-) \quad (5.14)$$

em que  $\delta_x = \omega_x - \omega_b$  e  $\delta_c = \omega_c - \omega_b$  correspondem respectivamente as dessintonias entre o laser e o estado excitônico e entre o laser e a energia do modo da cavidade. Aqui deslocamos a energia do PQ em  $\delta_x/2$ , de forma que o estado fundamental tenha energia nula.

O Hamiltoniano  $H'$  dado pela Eq. (5.14) será usado durante o restante desta dissertação. Nas próximas seções iremos investigar o espectro e a dinâmica deste fazendo algumas considerações.

## 5.2 Sistema com 3 fótons na cavidade

Para obter o espectro do Hamiltoniano  $H'$  dado pela Eq. (5.14), um método bastante usado é expandir as suas funções de ondas em termos de uma base completa do sistema sem interação. Neste caso  $\{|i, n\rangle\}$ , em que  $i = \{0, 1\}$ <sup>1</sup> corresponde aos estados do PQ e  $n = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  corresponde ao estados da cavidade. Nota-se que esta base contém infinitos estados, o que nos obriga a fazer um corte em determinado momento para poder resolver o problema numericamente. Isto pode facilmente ser feito no âmbito computacional, determinando o corte num dado valor de  $n$  tal que uma dada precisão seja atingida. Entretanto, em alguns casos os resultados podem ser melhor entendidos considerando apenas alguns estados. Desta forma, vamos considerar inicialmente o sistema em que a cavidade possa conter apenas 3 fótons. Para facilitar a compreensão deste, apresentamos na Fig. 5.1 um desenho esquemático que ilustra a configuração energética do sistema dado pelo Hamiltoniano considerado, o qual na forma matricial pode ser escrito como:

<sup>1</sup>Até a seção anterior vínhamos adotando a nomenclatura  $\{g, e\}$  para estes estados. Mudamos agora para que o texto fique coerente com a implementação numérica.

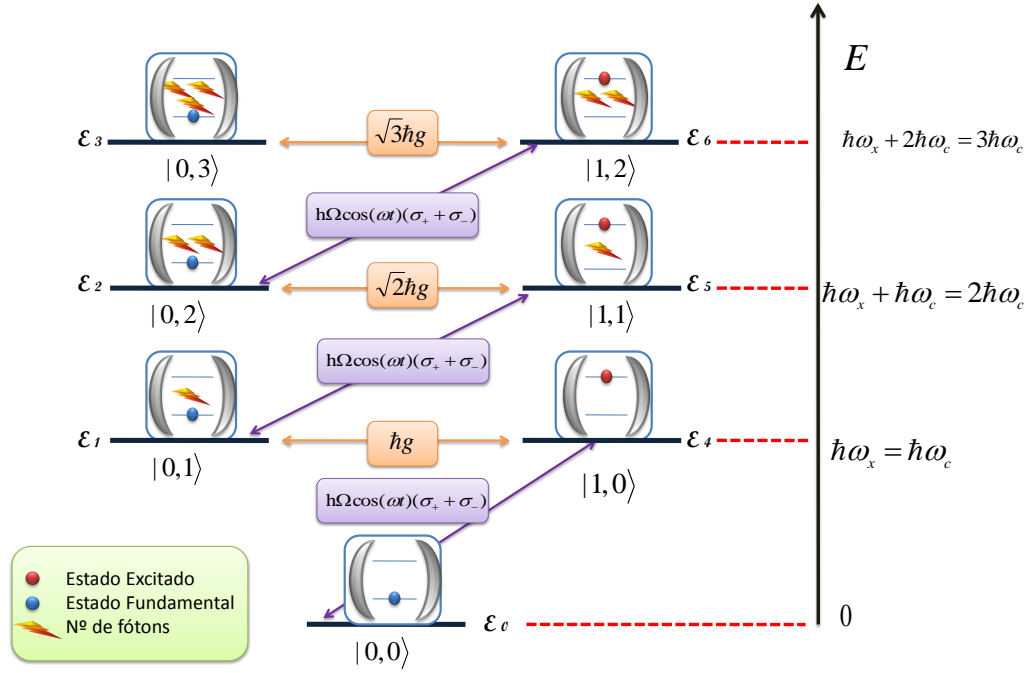


Figura 5.1 – Representação esquemática da configuração energética do sistema. O estado  $|0,0\rangle$  corresponde ao estado fundamental do sistema, já o estado  $|1,2\rangle$  representa o estado em que o PQ está no estado excitado e a cavidade apresenta dois fótons. Os processos de acoplamentos estão simbolizados por setas.

$$H' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\hbar\Omega}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \hbar\delta_c & 0 & 0 & \hbar g & \frac{\hbar\Omega}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\hbar\delta_c & 0 & 0 & \sqrt{2}\hbar g & \frac{\hbar\Omega}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 3\hbar\delta_c & 0 & 0 & \sqrt{3}\hbar g \\ \frac{\hbar\Omega}{2} & \hbar g & 0 & 0 & \hbar\delta_x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\hbar\Omega}{2} & \sqrt{2}\hbar g & 0 & 0 & \hbar(\delta_x + \delta_c) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\hbar\Omega}{2} & \sqrt{3}\hbar g & 0 & 0 & \hbar(\delta_x + 2\delta_c) \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

Podemos então calcular os autovalores e autovetores do Hamiltoniano escrito na forma matricial (5.15). Os valores dos parâmetros que usaremos no decorrer das próximas seções são valores realísticos tirados de diversos experimentos (KASPRZAK et al., 2010/04; LAUCHT et al., 2009b; LAUCHT et al., 2010). Manteremos a energia de cavidade fixa,  $\hbar\omega_c = 0.9$  eV, e assim, quando estivermos variando as dessintonias  $\delta_x$  e  $\delta_c$ , estaremos variando as energias do PQ e/ou do laser, respectivamente.

### 5.2.1 Espectro

Inicialmente, vamos considerar a situação em que o acoplamento entre o ponto quântico e a cavidade, juntamente com a intensidade do laser, tendam a zero ( $\hbar\Omega \rightarrow$

$0, \hbar g \rightarrow 0$ ). Nesta situação, os autoestados do Hamiltoniano são os estados do sistema sem interação, ou seja  $E = \hbar(i\delta_x + n\delta_c)$ , em que  $i = \{0, 1\}$ . Neste caso, em particular, os autovalores são independentes. Em outras palavras, os autovalores do ponto quântico e os autovalores da cavidade estão em espaços de Hilbert diferentes, como evidencia a Fig. 5.2, em que plotamos o espectro de energia como função da dessintonia do PQ  $\delta_x = \omega_x - \omega_b$  para  $\omega_x = \omega_c = 0.9$  eV, já que as energias se cruzam em  $\delta_x = 0$ . Note que neste caso a variável que muda é  $\omega_b$ , mudando simultaneamente as variáveis  $\delta_x$  e  $\delta_c$ .

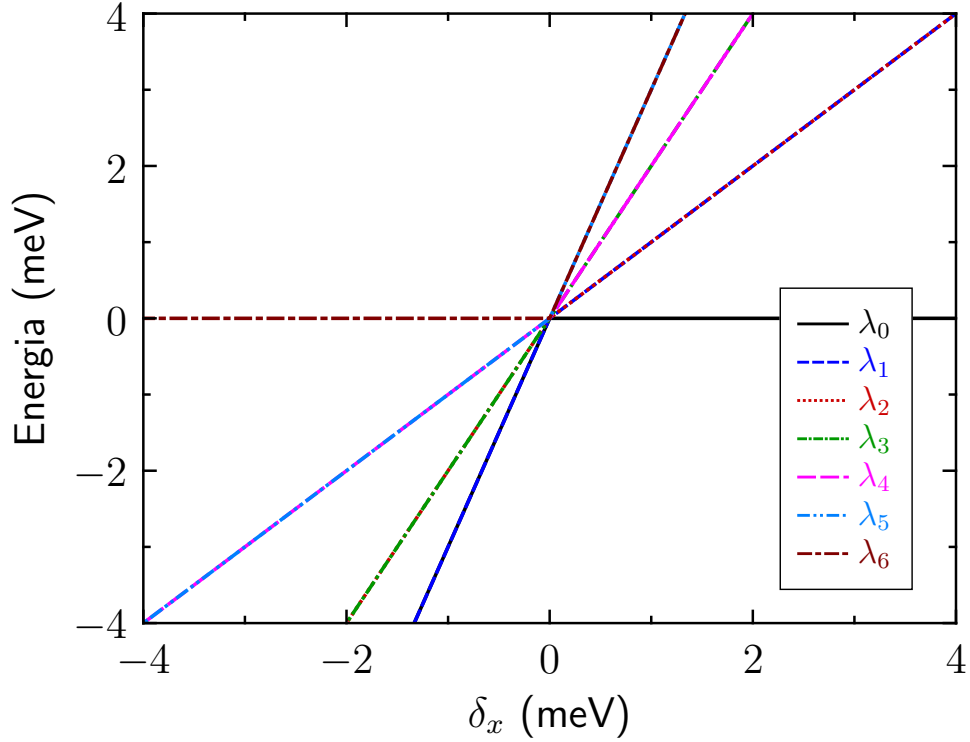


Figura 5.2 – Autovalores do Hamiltoniano (5.15) em função da dessintonia do PQ com relação ao laser ( $\delta_x = \omega_x - \omega_b$ ) para  $\hbar\omega_x = \hbar\omega_c$  e  $\hbar g = \hbar\Omega \rightarrow 0$ .

Observa-se também que na ausência de interação, como pode ser visto na Fig. 5.1, as energias  $\varepsilon_1 = \varepsilon_4$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon_5$  e  $\varepsilon_3 = \varepsilon_6$ .

$$H' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hbar\delta_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\hbar\delta_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3\hbar\delta_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hbar\delta_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hbar(\delta_x + \delta_c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \hbar(\delta_x + 2\delta_c) \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Na Fig. 5.2, isto se apresenta de forma que os autovalores  $\lambda_5$  e  $\lambda_4$  são degenerados, bem como os pares  $\lambda_3$  e  $\lambda_2$ ,  $\lambda_1$  e  $\lambda_0$ .

Ao acrescentar interação no sistema, fazendo  $\hbar g = 0.1$ , (considerando uma interação do tipo ponto quântico-cavidade), os autovalores  $\lambda_5$  e  $\lambda_4$  se desdobram com uma abertura  $2\hbar g$ . Já os autovalores  $\lambda_3$  e  $\lambda_2$  se desdobram com uma abertura de  $2\sqrt{2}\hbar g$  e, por fim, os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_0$  se desdobram com uma abertura de  $2\sqrt{3}\hbar g$ . Comportamento este conhecido como escada de Jaynes-Cumming (FINK et al., 2008; KASPRZAK et al., 2010/04), e que pode ser evidenciado por meio da Fig. 5.3. Nesta situação, os autovalores correspondem agora a uma combinação linear dos estados originais, no caso de  $\lambda_5$  e  $\lambda_4$  são combinações lineares dos estados  $|1, 0\rangle$  e  $|0, 1\rangle$ , já os autovalores  $\lambda_3$  e  $\lambda_2$  correspondem a uma superposição dos estados  $|0, 2\rangle$  e  $|1, 1\rangle$ , e por fim os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_0$  correspondem a superposição dos estados  $|0, 3\rangle$  e  $|1, 2\rangle$ .

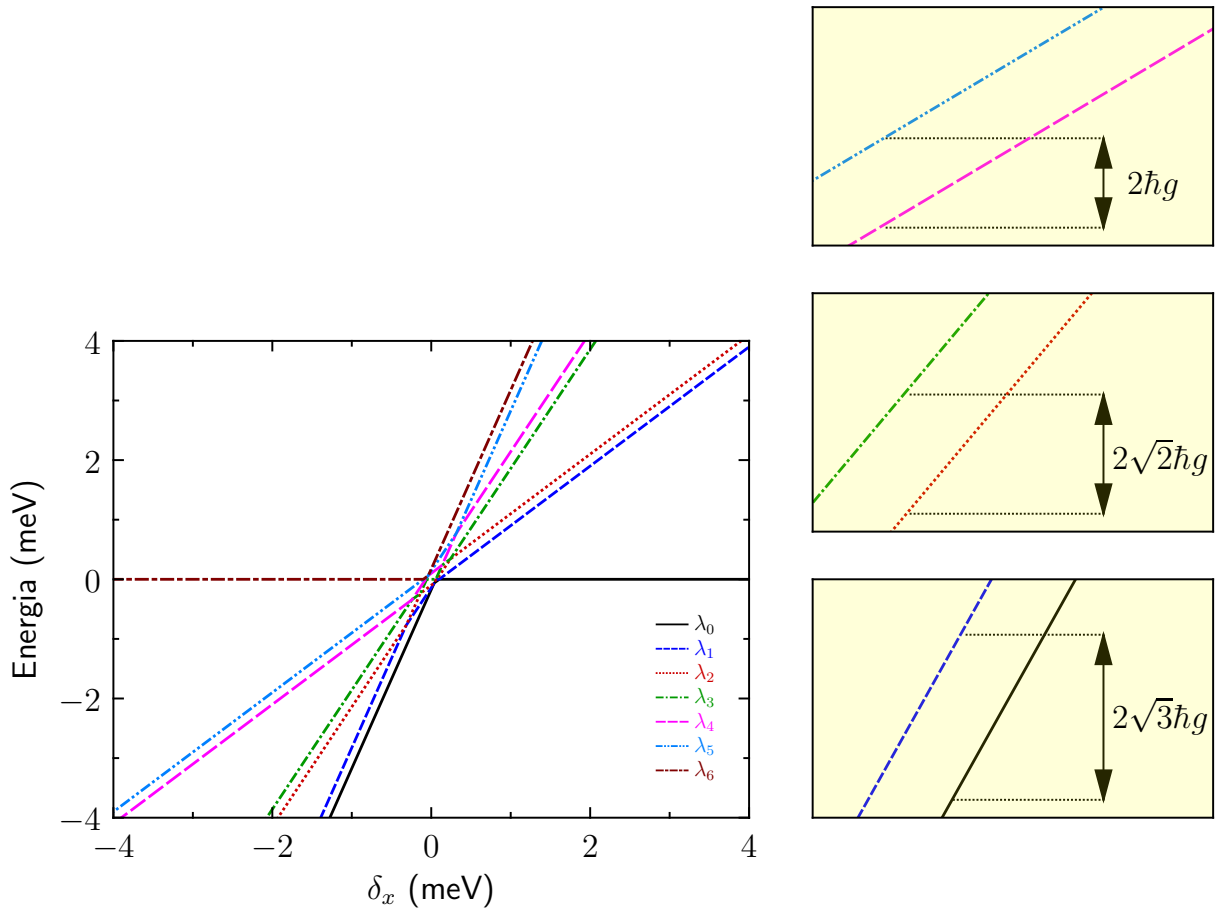


Figura 5.3 – Autovalores do sistema, em função da dessintonia do ponto quântico com relação ao laser ( $\delta_x = \omega_x - \omega_b$ ), considerando somente a interação PQ-cavidade ( $\hbar g = 0.1$  meV). Observa-se o comportamento conhecido como escada de Jaynes-Cummings. Nota-se ainda o cruzamento entre alguns autovalores, garantindo que estes encontram-se em espaços de Hilbert diferentes.

No entanto, ao acrescentar o pulso  $\hbar\Omega$ , os estados deixam de pertencer a espaços de Hilbert distintos. Desta forma, os autoestados do sistema apresentado se repelem, comportamento este conhecido como anticruzamento, Fig 5.4. As autoenergias são tais que a degenerescência é removida e os estados do sistema correspondem a combinações de dois ou mais estados da base ( $|e, n\rangle, |g, n\rangle$ ). Nestas regiões de anticruzamento, os estados



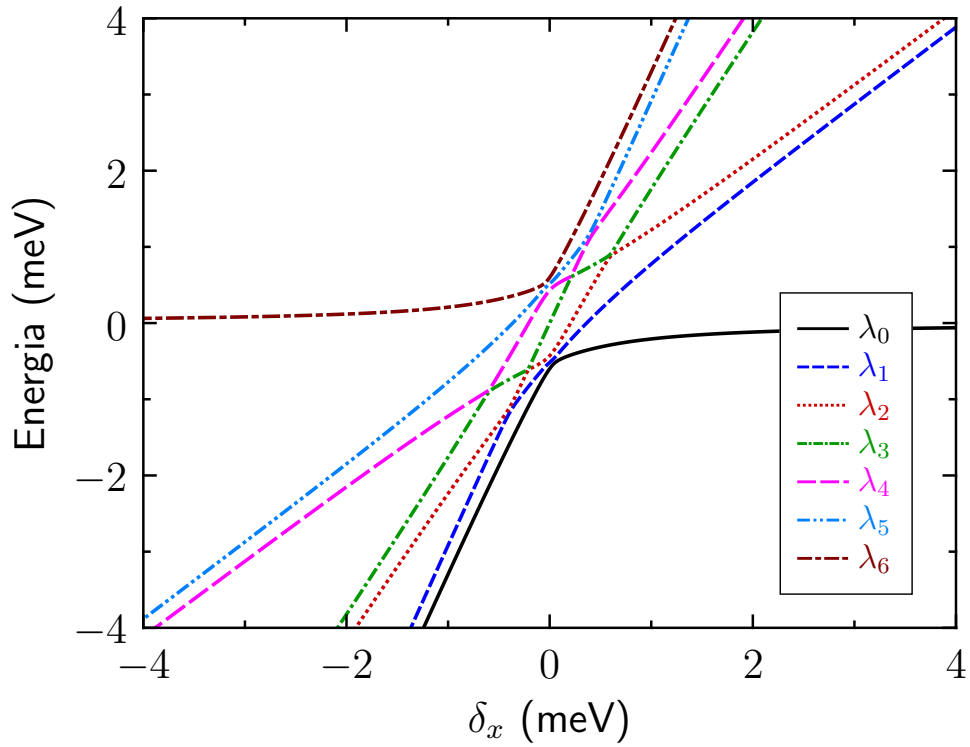


Figura 5.4 – Autovalores do sistema, em função da dessintonia do ponto quântico com relação ao laser ( $\delta_x = \omega_x - \omega_b$ ), considerando a interação PQ-cavidade ( $\hbar g = 0,1$  meV) e a interação com um laser ( $\hbar\Omega = 1,0$  meV). Destaque para o comportamento de anticruzamento, o que corresponde a uma assinatura de que todo o sistema encontra-se no mesmo espaço de Hilbert.

se superpoem, sendo um bom indicativo que estas posições em dessintonia sejam uma boa escolha para se fazer uma manipulação coerente, que é o que iremos investigar na próxima seção.

### 5.3 Manipulação Coerente

Ao longo deste trabalho, foi utilizado um pulso coerente, com formato Gaussiano, dado pela seguinte expressão

$$\Omega(t) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp \left[ -\frac{(t - t_c)^2}{2s^2} \right] \quad (5.17)$$

em que  $t_c$  é a posição do centro do pulso, e  $s$

$$s = \frac{t_p}{\sqrt{8 \ln 2}} \quad (5.18)$$

sendo  $t_p$  o tempo de duração do pulso. Em alguns casos será usado laser contínuo. Note que devido a esta dependência temporal no formato do pulso, precisaremos usar métodos numéricos para resolver a equação de Schrödinger dependente do tempo. Aqui empregaremos o método Runge-Kutta para calcular a ocupação de cada estado, definido como:

$$P_{i,n} = |\langle i, n | \Psi(x, t) \rangle|^2 \quad (5.19)$$

Como definido anteriormente, o estado fundamental, como um estado de vácuo. Com a ampliação realizada na Fig. 5.5 fica evidente que ocorre um anticruzamento entre o autovalor  $\lambda_6$  e  $\lambda_5$ . Inicialmente como foi exposto na Fig. 5.2, quando o sistema não

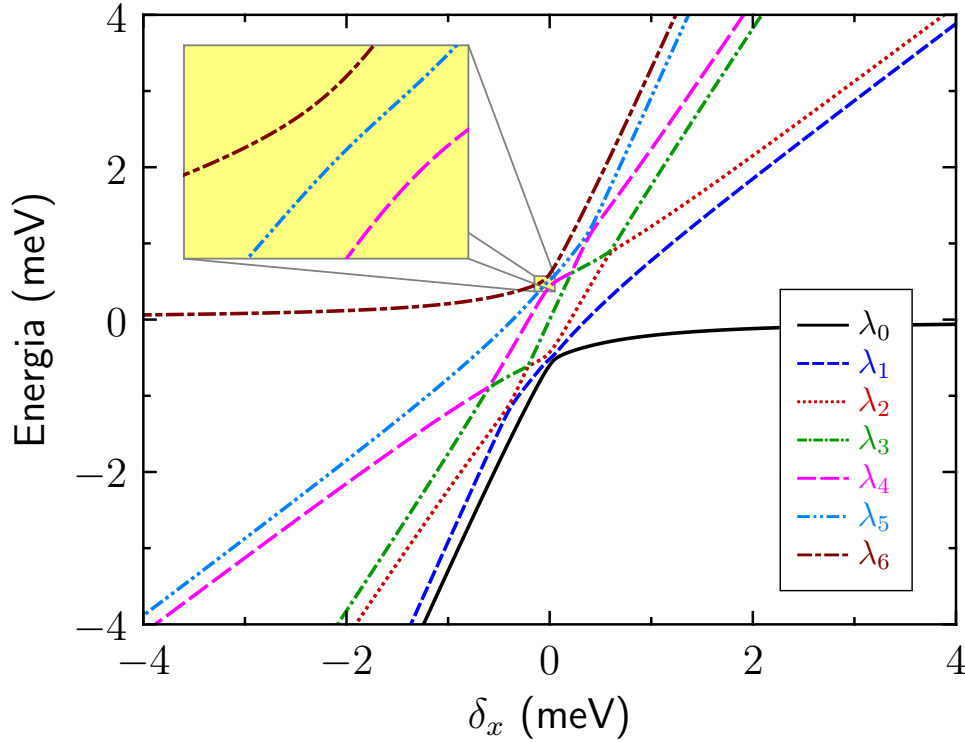


Figura 5.5 – Autovalores do sistema, em função da dessintonia do PQ com relação ao laser ( $\delta_x = \omega_x - \omega_b$ ), considerando a interação átomo-cavidade ( $\hbar g = 0.1$  meV) e a interação com o laser ( $\hbar \Omega = 1$  meV). Ênfase para o anticruzamento entre o autovalor correspondente ao estado fundamental  $|0, 0\rangle$  ( $\lambda_6$ ) e um autovalor correspondente a uma combinação linear dos estados  $|1, 0\rangle$  e  $|0, 1\rangle$  ( $\lambda_5$ ), presente em  $\delta_x \simeq -0.1$  meV.

apresenta nenhuma forma de interação, os autovalores são degenerados e portanto, cada um corresponde a um estado original do sistema, por exemplo o autovalor  $\lambda_5$  corresponde ao estado  $|0, 1\rangle$ . Entretanto, após acrescentar a interação entre o átomo e a cavidade ( $\hbar g$ ), juntamente com o laser ( $\frac{\hbar \Omega}{2}$ ), o mesmo autovalor  $\lambda_5$  não mais corresponde ao estado  $|0, 1\rangle$ , mas sim a uma combinação linear dos estados  $|0, 1\rangle$  e  $|1, 0\rangle$ . Desta forma, o que se observa na ampliação apresentada na Fig. 5.5 é um anticruzamento entre o autovalor relacionado com estado fundamental  $|0, 0\rangle$  e um autovalor que corresponde a uma combinação linear dos estados  $|0, 1\rangle$  e  $|1, 0\rangle$ . Assim, ao observar a dinâmica de população do sistema, para uma configuração de dessintonia  $\delta_x = -0.1$ , observa-se que os estados  $|0, 0\rangle$ ,  $|0, 1\rangle$  e  $|1, 0\rangle$  contribuem de forma expressiva para a evolução do sistema. Vale ressaltar, que o processo de evolução temporal dos estados inicialmente se dá com uma queda da população do estado  $|0, 0\rangle$  e um aumento da população  $|1, 0\rangle$ , a qual corresponde ao estado excitado do

PQ. Em seguida, pelo processo de emissão espontânea, o átomo decai ocasionando então, um aumento da população do estado  $|0, 1\rangle$ . Como não foram incluídos processos de perdas após a interação com o pulso, a população do estado fundamental estabiliza, e os estados  $|1, 0\rangle$  e  $|0, 1\rangle$  oscilam com o passar do tempo, processo este evidenciado na Fig. 5.6.

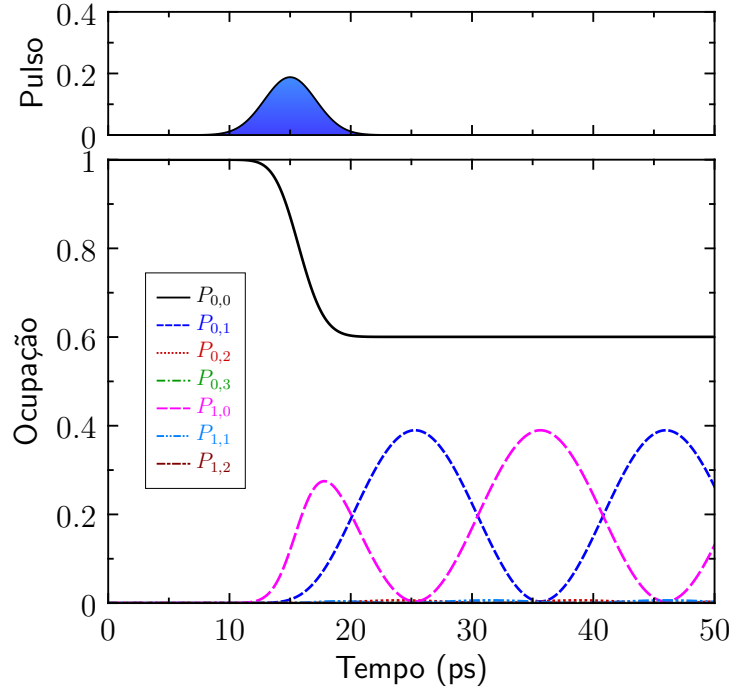


Figura 5.6 – Evolução temporal do sistema considerando  $\delta_x = -0.1$  meV, juntamente com um pulso de  $\hbar\Omega(t) = 2,0$  meV com duração de  $10ps$ . O PQ encontra-se inicialmente no estado fundamental  $|0, 0\rangle$ . Nota-se que exatamente no instante em que o pulso interage com o sistema, a população do estado fundamental do PQ muda, aumentando as populações dos estados  $|1, 0\rangle$  e  $|0, 1\rangle$ . Quando o pulso é desligado, ocorre uma oscilação entre estes estados.

Em busca de uma manipulação destes estados aumenta-se a intensidade do pulso incidente passando de  $\hbar\Omega(t) = 1,0$  meV para  $\hbar\Omega(t) = 2,0$  meV e observa-se que a troca de população entre os estados acima citados é intensificada. Ou seja, após a interação com o pulso, o estado fundamental potencializa o seu decréscimo, em contrapartida, a população do estado  $|1, 0\rangle$  aumenta. Ao final do pulso temos criado uma superposição coerente dos estados  $|1, 0\rangle$  e  $|0, 1\rangle$ , que permanecem oscilando com o tempo devido a interação com os modos da cavidade. Neste caso já é possível notar que os estados excitados de segunda ordem  $|1, 1\rangle$  e  $|0, 2\rangle$  começam também a ser populados, situação esta presente na Fig. 5.7. Ampliando a duração do pulso, nota-se que esta troca de população entre os estados  $|0, 0\rangle$ ,  $|0, 1\rangle$  e  $|1, 0\rangle$ , anteriormente evidenciada, ocorre agora de forma a não ocupar estados indesejados. Com este procedimento, a ocupação dos estados  $|0, 1\rangle$  e  $|1, 0\rangle$  oscilam, sem efetivamente ocorrer a ocupação de outros estados. Entretanto, agora nenhum dos estados apresenta com o passar do tempo, de forma isolada, instantes em que suas populações são nulas. Resultado este que garante que o sistema permanece em uma superposição dos três estados, conforme apresentado na Fig. 5.8.

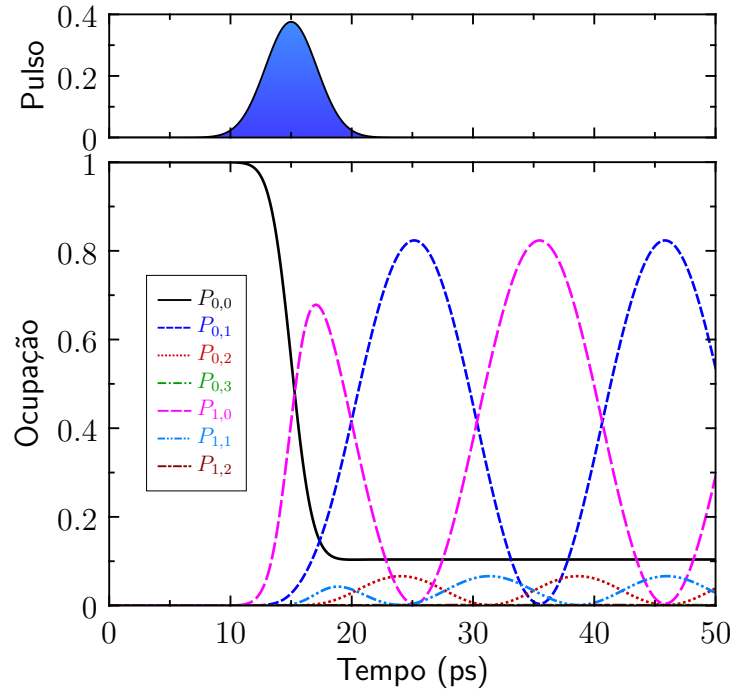


Figura 5.7 – Evolução temporal do sistema considerando as mesmas condições da Fig. 5.6, porém com  $\hbar\Omega(t) = 2,0$  meV. Nota-se que estados mais excitados começam a ser populados.

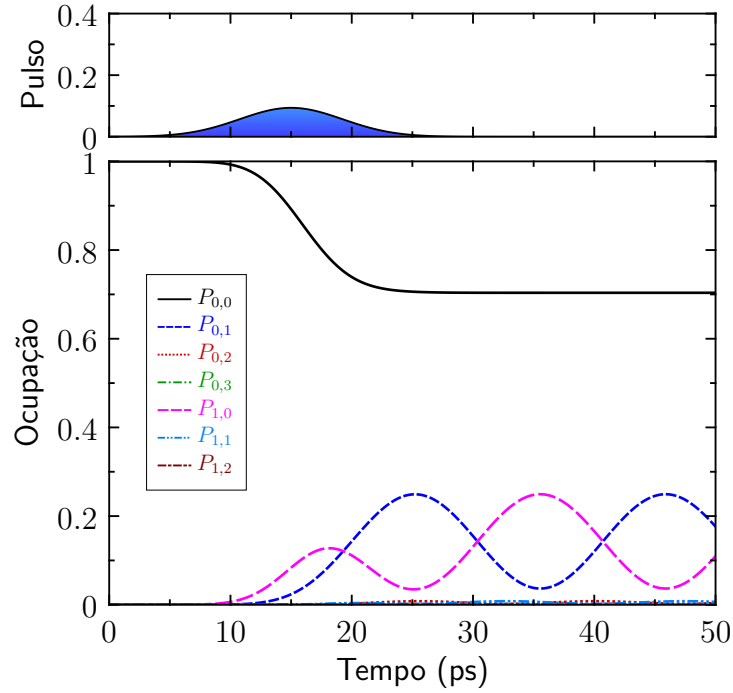


Figura 5.8 – Evolução temporal do sistema considerando as mesmas condições da Fig. 5.7, porém com um pulso de maior duração. Os estados excitados não são populados.

Um processo semelhante é apresentado na Fig. 5.9, em que foi analisado outro ponto de anticruzamento. Neste caso, a figura mostra um anticruzamento entre duas combinações lineares de estados distintos. O autovalor  $\lambda_2$  corresponde a uma combinação linear dos estados  $|1,1\rangle$  e  $|0,2\rangle$  e o autovalor  $\lambda_1$  corresponde a uma combinação linear

entre os estados  $|1, 2\rangle$  e  $|0, 3\rangle$ . Portanto, calculando a evolução temporal do sistema (Fig.

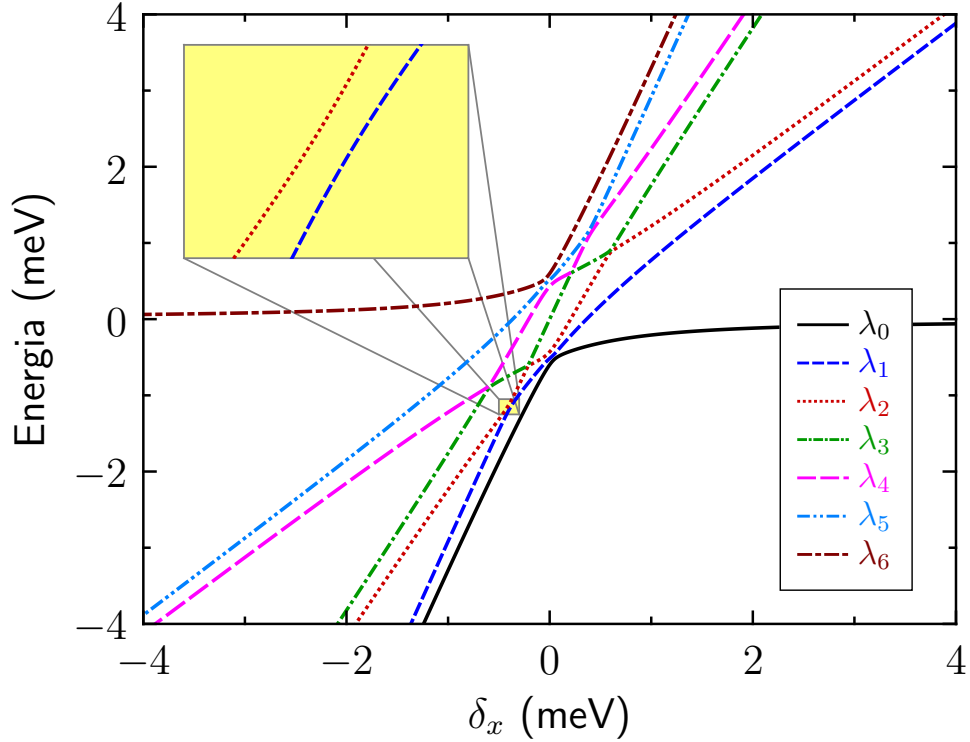


Figura 5.9 – Autovalores do sistema, em função da dessintonia do PQ com relação ao laser ( $\delta_x = \omega_x - \omega_b$ ), com  $\hbar g = 0.1$  meV e  $\hbar \Omega = 1.0$  meV. Ênfase para o anticruzamento entre o autovalor correspondente a uma combinação linear dos estados  $|1, 1\rangle$  e  $|0, 2\rangle$  ( $\lambda_2$ ) e um autovalor correspondente a uma combinação linear do estados  $|1, 2\rangle$  e  $|0, 3\rangle$  ( $\lambda_1$ ), presente em  $\delta_x \simeq -0.4$  meV.

5.10), no caso em que o estado inicial corresponde ao estado  $|0, 2\rangle$  e utilizando uma dessintonia de  $\delta_x = 0.4$  meV, observa-se que após a interação com o pulso as oscilações entre os estados  $|0, 2\rangle$  e  $|1, 1\rangle$  decrescem. Enquanto, os estados  $|1, 2\rangle$  e  $|0, 3\rangle$  apresentam um acréscimo em suas populações. De modo geral, configurando o pulso, aumentando a frequência de oscilação juntamente com a duração do pulso, é possível trazer o sistema a uma superposição dos estados  $|1, 1\rangle$ ,  $|0, 2\rangle$ ,  $|1, 2\rangle$  e  $|0, 3\rangle$ . Em que estes últimos apresentam uma maior probabilidade de serem populados com relação aos primeiros, devido ao fato de utilizar um pulso em dessintonia com a frequência de excitação do PQ em  $\delta_x = -0.4$  meV, dinâmica esta apresentada na Fig. 5.11.

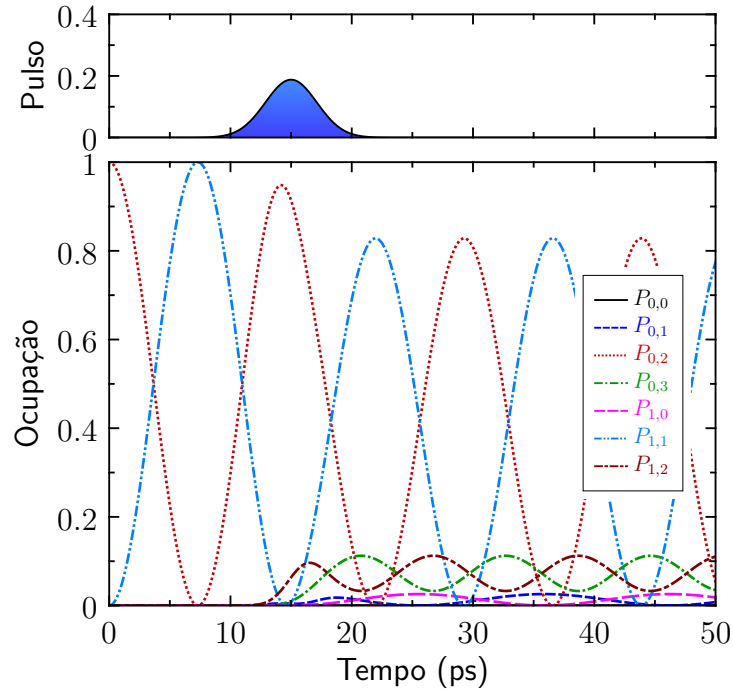


Figura 5.10 – Evolução temporal do sistema considerando  $\delta_x = -0.4$  meV. O ponto quântico encontra-se inicialmente no estado fundamental  $|0, 2\rangle$ . Nota-se que inicialmente os estados  $|0, 2\rangle$  e  $|1, 1\rangle$  oscilam e que no instante em que o pulso interage com o sistema, as populações destes estados decaem e em contrapartida os estados  $|0, 3\rangle$  e  $|1, 2\rangle$  intensificam suas populações.

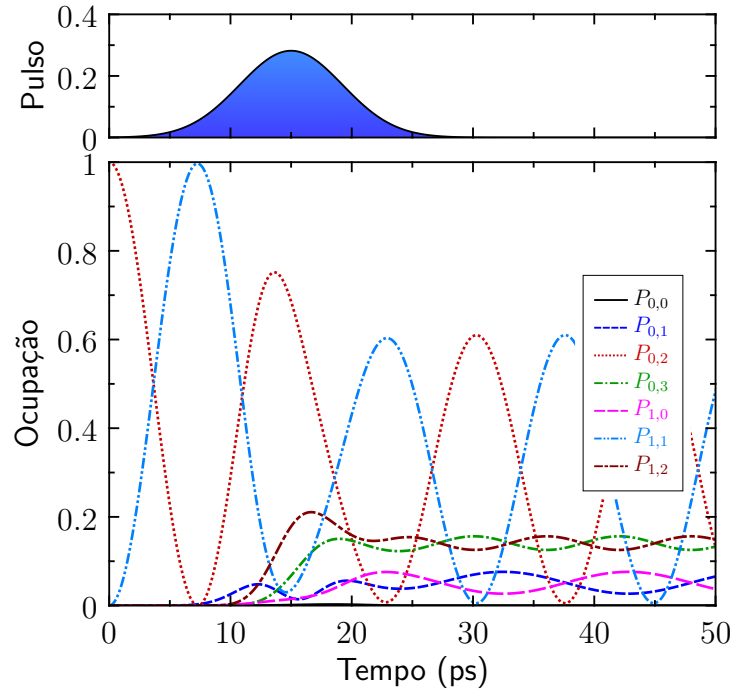


Figura 5.11 – Evolução temporal do sistema considerando as mesmas condições da Fig. 5.10, aumentando apenas a intensidade do pulso para  $\hbar\Omega = 3$  meV.

## 5.4 Média Ocupacional

Nesta seção vamos ilustrar como obter a média ocupacional de um sistema qualquer em que o Hamiltoniano seja independente do tempo. Em seguida usaremos este resultado a fim de mapear os pontos mais interessantes para uma possível manipulação coerente de estados do sistema.

Vamos considerar aqui um sistema com apenas três níveis, mas isto pode facilmente ser generalizado para sistemas com qualquer número de níveis. Tudo que precisaremos no final será diagonalizar a matriz correspondente.

Considerando inicialmente  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ , como os estados da base, os autoestados do sistema podem ser escritos como uma combinação linear dos estados da base, assim:

$$|\lambda_0\rangle = \mathcal{C}_{0,0}|0\rangle + \mathcal{C}_{0,1}|1\rangle + \mathcal{C}_{0,2}|2\rangle \quad (5.20)$$

$$|\lambda_1\rangle = \mathcal{C}_{1,0}|0\rangle + \mathcal{C}_{1,1}|1\rangle + \mathcal{C}_{1,2}|2\rangle \quad (5.21)$$

$$|\lambda_2\rangle = \mathcal{C}_{2,0}|0\rangle + \mathcal{C}_{2,1}|1\rangle + \mathcal{C}_{2,2}|2\rangle \quad (5.22)$$

Em uma representação matricial isto se torna

$$|\lambda\rangle = \mathcal{C}|\mathcal{B}\rangle, \quad (5.23)$$

em que  $|\lambda\rangle$  representa um autovetor com os autovalor  $\lambda$  e  $|\mathcal{B}\rangle$  um vetor da base. Nesta notação,  $\mathcal{C}$  é simplesmente a matriz mudança de base que pode ser obtida durante a diagonalização do Hamiltoniano. Desta forma é possível escrever os estados da base como função dos autovetores simplesmente invertendo a matriz mudança de base  $\mathcal{C}$ , ou seja

$$|\mathcal{B}\rangle = \mathcal{C}^{-1}|\lambda\rangle, \quad (5.24)$$

em que  $\mathcal{C}^{-1}$  corresponde a matriz inversa de  $\mathcal{C}$ , que aqui representaremos por:

$$\mathcal{C}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_{0,0} & \mathcal{W}_{0,1} & \mathcal{W}_{0,2} \\ \mathcal{W}_{1,0} & \mathcal{W}_{1,1} & \mathcal{W}_{1,2} \\ \mathcal{W}_{2,0} & \mathcal{W}_{2,1} & \mathcal{W}_{2,2} \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

Assim, considerando um estado inicial qualquer do sistema expresso na base original

$$|\psi(0)\rangle_{\mathcal{B}} = A_0|0\rangle + A_1|1\rangle + A_2|2\rangle \quad (5.26)$$

em que o índice  $\mathcal{B}$  indica que o estado está representado na base dos estados original do sistema. Fazendo a mudança de base, ou seja, multiplicando a Eq. (5.26) por  $\mathcal{C}$  obtemos o estado inicial escrito na base dos autoestados  $|\psi_0\rangle_{\lambda}$  como:

$$|\psi_0\rangle_{\lambda} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_{0,0}A_0 + \mathcal{C}_{0,1}A_1 + \mathcal{C}_{0,2}A_2 \\ \mathcal{C}_{1,0}A_0 + \mathcal{C}_{1,1}A_1 + \mathcal{C}_{1,2}A_2 \\ \mathcal{C}_{2,0}A_0 + \mathcal{C}_{2,1}A_1 + \mathcal{C}_{2,2}A_2 \end{pmatrix}, \quad (5.27)$$

que por simplicidade, iremos reescrever como:

$$|\psi_0\rangle_\lambda = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \quad (5.28)$$

em que:

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \mathcal{C}_{0,0}A_0 + \mathcal{C}_{0,1}A_1 + \mathcal{C}_{0,2}A_2 \\ \varphi_1 &= \mathcal{C}_{1,0}A_0 + \mathcal{C}_{1,1}A_1 + \mathcal{C}_{1,2}A_2 \\ \varphi_2 &= \mathcal{C}_{2,0}A_0 + \mathcal{C}_{2,1}A_1 + \mathcal{C}_{2,2}A_2 \end{aligned}$$

Nesta base a evolução do sistema pode ser simplesmente escrita como:

$$|\psi(t)\rangle_\lambda = \begin{pmatrix} \varphi_0 e^{\frac{-iE_0 t}{\hbar}} \\ \varphi_1 e^{\frac{-iE_1 t}{\hbar}} \\ \varphi_2 e^{\frac{-iE_2 t}{\hbar}} \end{pmatrix} \quad (5.29)$$

em que  $E_0$ ,  $E_1$  e  $E_2$  são as autoenergias do sistema, que podem ser obtidos diagonalizando o Hamiltoniano inicial.

Agora, com auxílio da Eq. (5.24), é possível representar a Eq. (5.29) na base dos estados originais  $|0\rangle$ ,  $|1\rangle$  e  $|2\rangle$ , assim obtemos:

$$|\psi(t)\rangle_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \mathcal{W}_{0,0}\varphi_0 e^{\frac{-iE_0 t}{\hbar}} + \mathcal{W}_{0,1}\varphi_1 e^{\frac{-iE_1 t}{\hbar}} + \mathcal{W}_{0,2}\varphi_2 e^{\frac{-iE_2 t}{\hbar}} \\ \mathcal{W}_{1,0}\varphi_0 e^{\frac{-iE_0 t}{\hbar}} + \mathcal{W}_{1,1}\varphi_1 e^{\frac{-iE_1 t}{\hbar}} + \mathcal{W}_{1,2}\varphi_2 e^{\frac{-iE_2 t}{\hbar}} \\ \mathcal{W}_{2,0}\varphi_0 e^{\frac{-iE_0 t}{\hbar}} + \mathcal{W}_{2,1}\varphi_1 e^{\frac{-iE_1 t}{\hbar}} + \mathcal{W}_{2,2}\varphi_2 e^{\frac{-iE_2 t}{\hbar}} \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

A probabilidade de se encontrar  $|\psi(t)\rangle_{\mathcal{B}}$  no estado  $|i\rangle$  qualquer da base original é dada por:

$$\mathcal{P}_i = |\langle i|\psi(t)\rangle_{\mathcal{B}}|^2. \quad (5.31)$$

Para o estado fundamental  $|i\rangle = |0\rangle$ , isto se resume a calcular o módulo ao quadrado do primeiro termo da equação 5.30, já que  $|\psi(t)\rangle_{\mathcal{B}}$  está na base dos estados originais do sistema. Assim, chamando  $\mathcal{W}_{0,0}\varphi_0 = a$ ,  $\mathcal{W}_{0,1}\varphi_1 = b$  e  $\mathcal{W}_{0,2}\varphi_2 = c$  a probabilidade  $\mathcal{P}_0$  pode ser escrita simplesmente como:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab \cos \left[ \frac{(E_0 - E_1)t}{\hbar} \right] \\ &\quad + 2bc \cos \left[ \frac{(E_1 - E_2)t}{\hbar} \right] + 2ac \cos \left[ \frac{(E_0 - E_2)t}{\hbar} \right]. \end{aligned} \quad (5.32)$$

Uma quantidade interessante para se calcular é a ocupação média de um determinado estado  $|i\rangle$ , definida como (VILLAS-BÔAS; GOVOROV; ULLOA, 2004; BORGES, 2010; SOTO, 2011):

$$\bar{P}_i = \frac{1}{t_f} \int_0^{t_f} \mathcal{P}_i(t) dt. \quad (5.33)$$



Para o caso aqui apresentado a média ocupacional do estado  $|0\rangle$  pode ser calculada de forma exata e o resultado da integração pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \bar{P}_0 = & a^2 + b^2 + c^2 + \frac{2ab\hbar}{t_f(E_0 - E_1)} \sin \left[ \frac{(E_0 - E_1)t}{\hbar} \right]_0^{t_f} \\ & + \frac{2bc\hbar}{t_f(E_1 - E_2)} \sin \left[ \frac{(E_1 - E_2)t}{\hbar} \right]_0^{t_f} \\ & + \frac{2ac\hbar}{t_f(E_0 - E_2)} \sin \left[ \frac{(E_0 - E_2)t}{\hbar} \right]_0^{t_f} \end{aligned} \quad (5.34)$$

Para que esta integral dê um valor relevante, normalmente temos que fazer  $t_f \rightarrow \infty$ , o que no caso geral torna o problema bastante complicado, mas aqui como temos uma expressão analítica, e como:

$$\lim_{t_f \rightarrow \infty} \frac{\sin \left[ \frac{(E_1 - E_2)t_f}{\hbar} \right]}{t_f} = 0 \quad (5.35)$$

a média ocupacional do estado  $|0\rangle$  torna-se:

$$\bar{P}_0 = \mathcal{W}_{0,0}^2 \varphi_0^2 + \mathcal{W}_{0,1}^2 \varphi_1^2 + \mathcal{W}_{0,2}^2 \varphi_2^2 \quad (5.36)$$

Assim, como anteriormente mencionado, para realizar o cálculo da média ocupacional, é necessário apenas que o Hamiltoniano seja independente do tempo e que se conheça o estado inicial na base original. A matriz mudança de base é facilmente obtida diagonalizando este Hamiltoniano.

Generalizando, a média ocupacional do estado  $|i\rangle$ , pode ser representada por:

$$\bar{P}_i = \sum_j |\mathcal{W}_{i,j} \varphi_j|^2. \quad (5.37)$$

Desta forma, o cálculo da média ocupacional se torna relativamente simples, uma vez que não há necessidade de realizar integrais numericamente.

Aplicaremos em seguida este conceito no sistema, em que iremos considerar agora que a cavidade pode conter no máximo 4 fótons. Assim, uma forma mais eficiente de estudar o sistema físico é calculando a média ocupacional de todos os níveis em função da dessintonia entre a energia do PQ e a energia da cavidade,  $\hbar(\omega_x - \omega_c)$ , e a dessintonia entre a energia do laser e a energia da cavidade,  $\hbar(\omega_c - \omega_b)$ , para um laser contínuo. Por meio deste mapeamento, pode-se observar configurações energéticas que tornam possível acessar de forma eficaz estados de éxciton-poláriton do sistema como:  $|1, 1\rangle$ ,  $|1, 2\rangle$ ,  $|1, 3\rangle$  e até mesmo  $|1, 4\rangle$  com contribuições expressivas, utilizando um laser contínuo.

A média ocupacional do estado fundamental deste sistema em função de  $\delta_x$  e  $\delta_c$ , para a situação em que  $\hbar g = \hbar \Omega = 0.1$  meV, é apresentada na Fig. 5.12, em que novamente fixamos a energia da cavidade em  $\hbar \omega_c = 0.9$  eV. Observa-se que há algumas configurações

específicas em que é possível diminuir a ocupação média do estado fundamental (regiões claras na figura na Fig 5.12), o que corresponde, a um aumento da ocupação média de outros estados. Fato este comprovado por meio do cálculo da média ocupacional de outros estados do sistema, como mostrado na Fig. 5.13, (a), (b), (c) e (d), e que são suficientes para evidenciar o comportamento de troca de população.

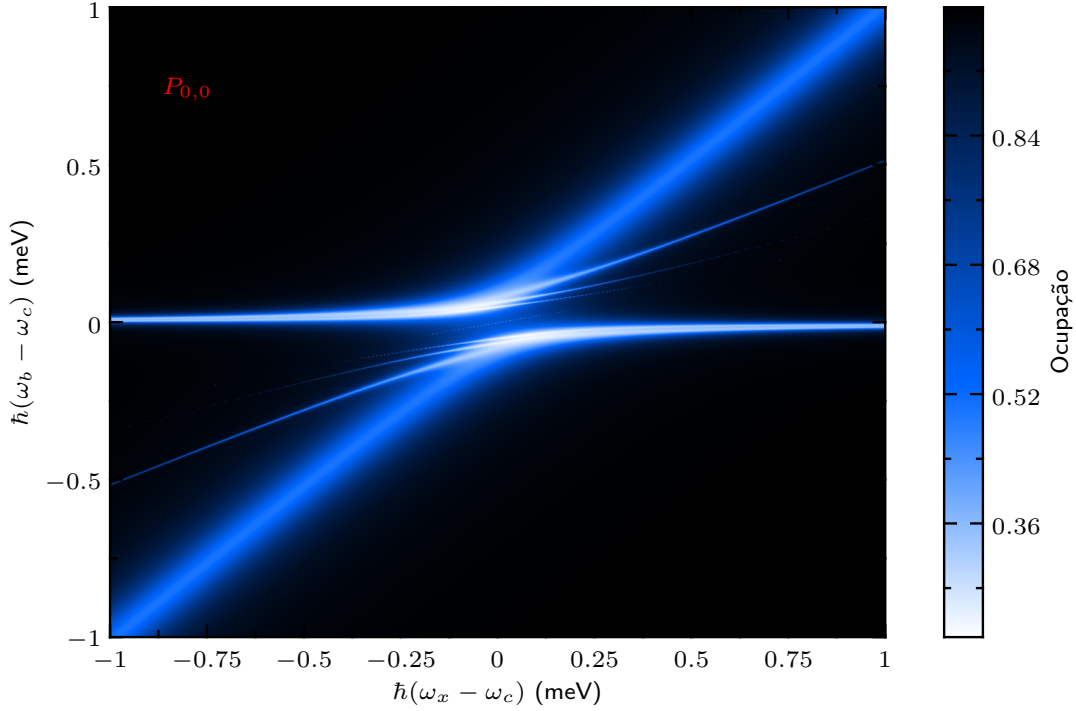


Figura 5.12 – Média ocupacional do estado  $|0,0\rangle$  em função da dessintonia do PQ e a cavidade  $\hbar(\omega_x - \omega_c)$  e entre o laser e a cavidade  $\hbar(\omega_b - \omega_c)$ , tendo como estado inicial o estado fundamental. Nas regiões escuras o sistema permanece no estado fundamental enquanto que nas regiões claras ele pode popular outros estados.

Uma breve análise dos gráficos apresentados nas figuras 5.12 e 5.13 (a), comprovam que na situação em que o sistema se encontra em completa ressonância, ou seja,  $\hbar\omega_c = \hbar\omega_x$ , a ocupação média do estado  $|0,0\rangle$  diminui, por outro lado, a ocupação média do estado  $|1,0\rangle$  aumenta. O que pode ser comprovado com auxílio da barra de cores localizada ao lado das figuras.

Buscando maior controle das possíveis transições do sistema, partindo do estado fundamental, um procedimento mais eficaz pode ser realizado plotando a ocupação média do estado fundamental em função apenas da dessintonia entre o laser de bombeio e a frequência de ressonância da cavidade  $\hbar(\omega_b - \omega_c)$ . Sem entrar em pormenores, isto corresponde a realizar um “corte” na direção vertical da Fig. 5.12. Observa-se então, com auxílio da Fig. 5.14, que é possível realizar transições do estado fundamental  $|0,0\rangle$  para estados  $|1,1\rangle$ ,  $|1,2\rangle$ ,  $|1,3\rangle$  e até mesmo  $|1,4\rangle$ . Estas transições podem ser melhores compreendidas notando na Fig. 5.14 regiões em que a média ocupacional do estado  $|0,0\rangle$  diminui e em contra-partida a média de um outro determinado estado aumenta. Como por exemplo

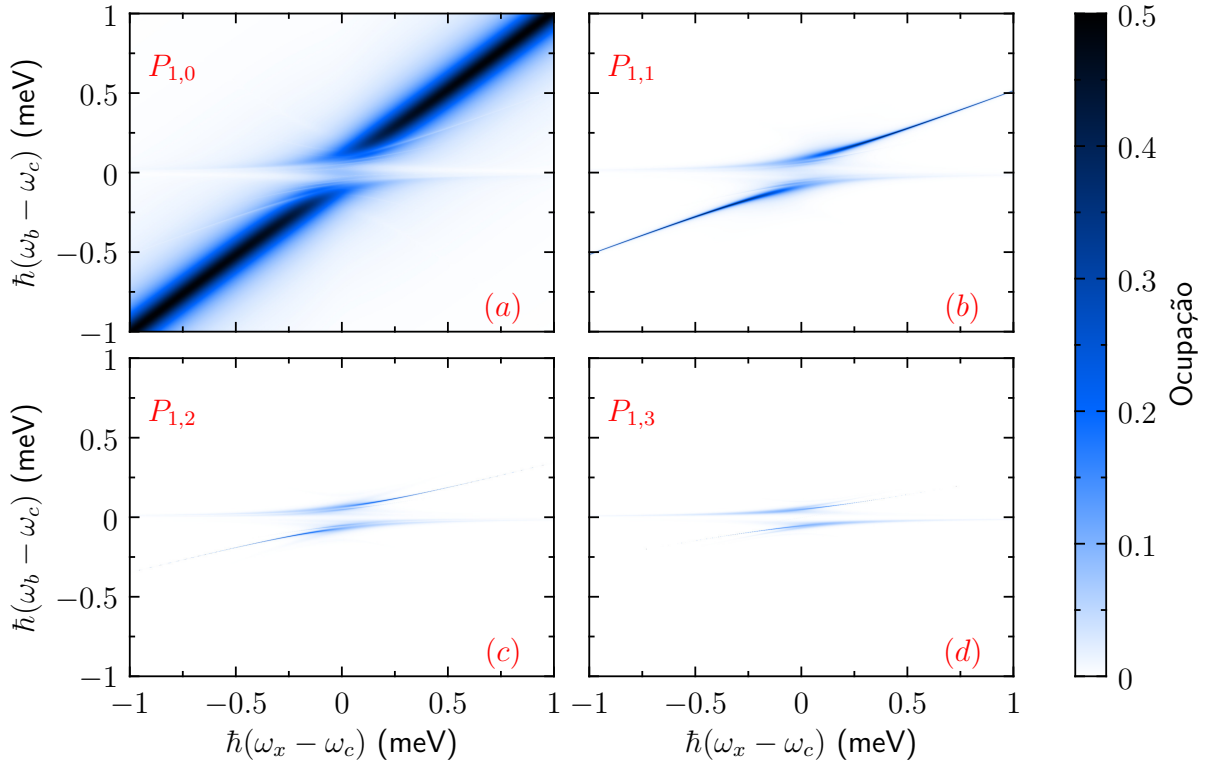


Figura 5.13 – Média ocupacional dos estados  $|1,0\rangle$ ,  $|1,1\rangle$ ,  $|1,2\rangle$ ,  $|1,3\rangle$  (Figs (a), (b), (c), (d) respectivamente), em função da dessintonia do PQ com a cavidade  $\hbar(\omega_x - \omega_c)$  e dessintonia entre o laser e a cavidade  $\hbar(\omega_b - \omega_c)$ .

na região em que a dessintonia entre o laser de bombeio e a energia de ressonância da cavidade  $\hbar(\omega_b - \omega_c)$  é de aproximadamente  $-0.5$  meV. Próximo desta região, encontra-se a configuração em que é possível uma maior troca de população entre os estados  $|0,0\rangle$  e  $|1,0\rangle$ .

Restringindo o intervalo dos “detunings” na figura 5.14 pode-se encontrar a configuração energética do laser que propicia a máxima ocupação média do estado  $|1,1\rangle$ , como representado na Fig. 5.15. Diante deste resultado, limitando  $\hbar(\omega_b - \omega_c) = -0.2775$  meV, é possível determinar, por meio da média ocupacional em duas dimensões (Fig. 5.16), a dessintonia entre o PQ e a cavidade como  $\hbar(\omega_x - \omega_c) \simeq -0.4$  meV.

Sendo assim, com os resultados apresentados na Fig. 5.16, pode-se determinar os valores da energia do laser e da energia de excitação do PQ,  $\hbar\omega_b = 899.7225$  meV e  $\hbar\omega_x = 899.6$  meV, respectivamente. Desta forma, a energia de excitação do ponto quântico está abaixo da energia de ressonância da cavidade, gerando a configuração energética apresentada na Fig. 5.17. Assim, com um laser contínuo é possível por meio de um processo de dois fótons (em que o primeiro fótons é destinado a criar o estado de éxciton no PQ e o segundo fóton permanece no interior da cavidade), popular o estado de éxciton-polaritons  $|1,1\rangle$ , sem efetivamente ocupar consideravelmente outros estados, considerando para isto a energia destes fótons  $\hbar\omega_b \simeq 899.7225$  meV. Desta forma, a evolução temporal do sistema

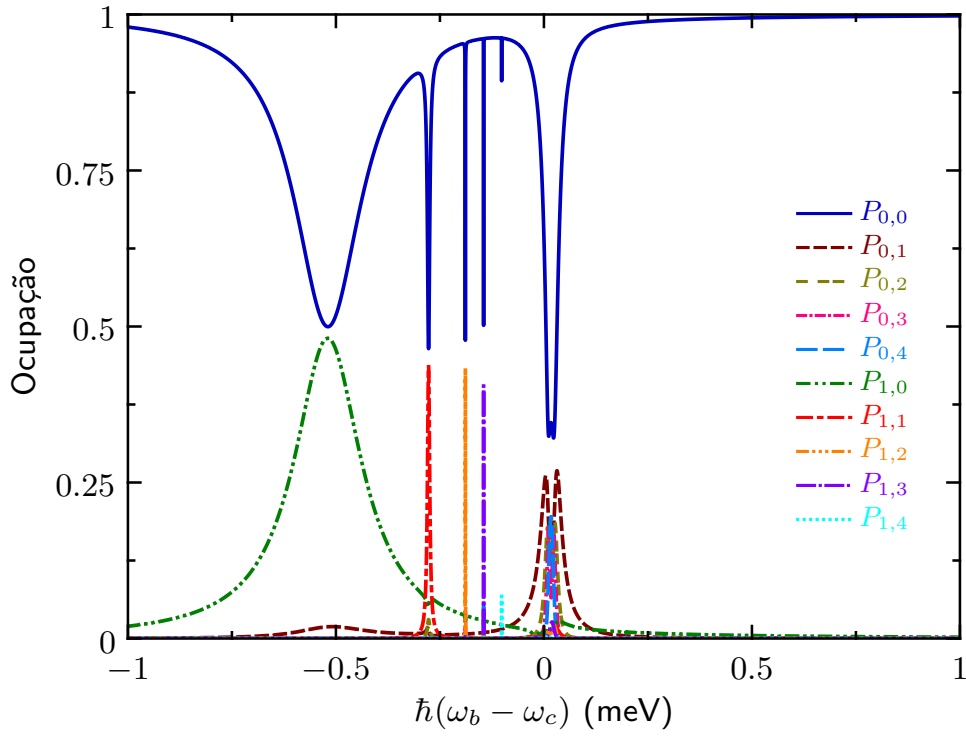


Figura 5.14 – Média ocupacional do sistema em função da dessintonia entre o laser e a energia da cavidade  $\hbar(\omega_b - \omega_c)$ , para  $\hbar(\omega_x - \omega_c) = -0.5$  meV. Por meio deste gráfico é possível encontrar as dessintonias apropriadas para popular estados de éxciton-polárítons partindo do estado fundamental. Observa-se que a medida que  $\hbar(\omega_x - \omega_c)$  progride de -1 a 1, há configurações específicas de dessintonia em que a média ocupacional do estado fundamental  $P_{0,0}$  decai e a média ocupacional dos estados  $|1, 1\rangle$ ,  $|1, 2\rangle$ ,  $|1, 3\rangle$ ,  $|1, 4\rangle$ , respectivamente  $P_{1,1}$ ,  $P_{1,2}$ ,  $P_{1,3}$  e  $P_{1,4}$  aumentam.

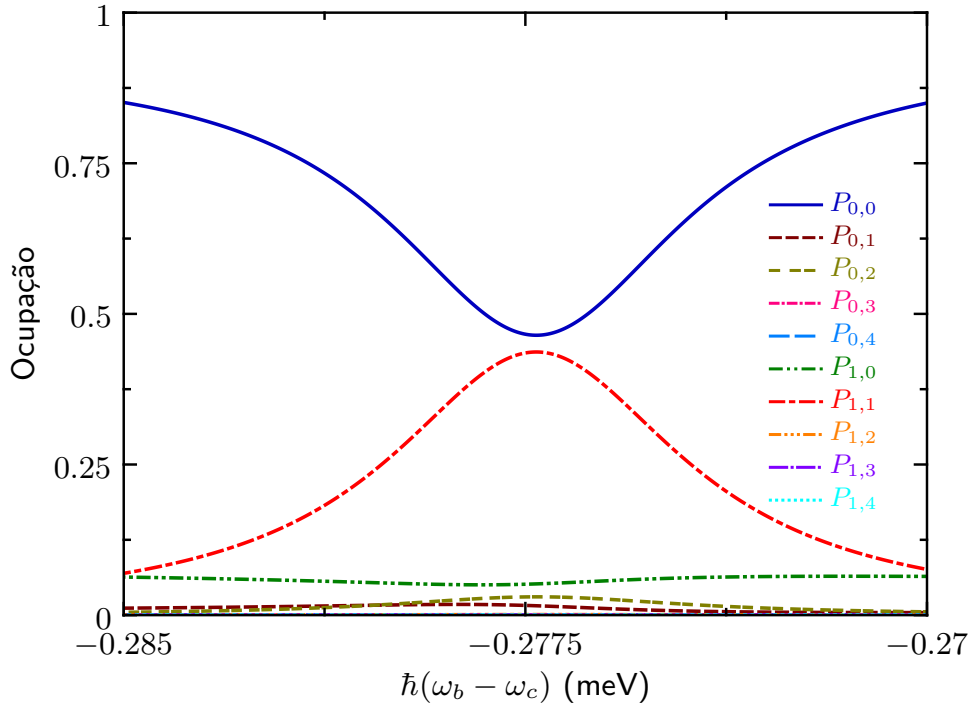


Figura 5.15 – Ampliação da Fig. 5.14 próximo a região  $\hbar(\omega_b - \omega_c) \simeq -0.2775$  meV.

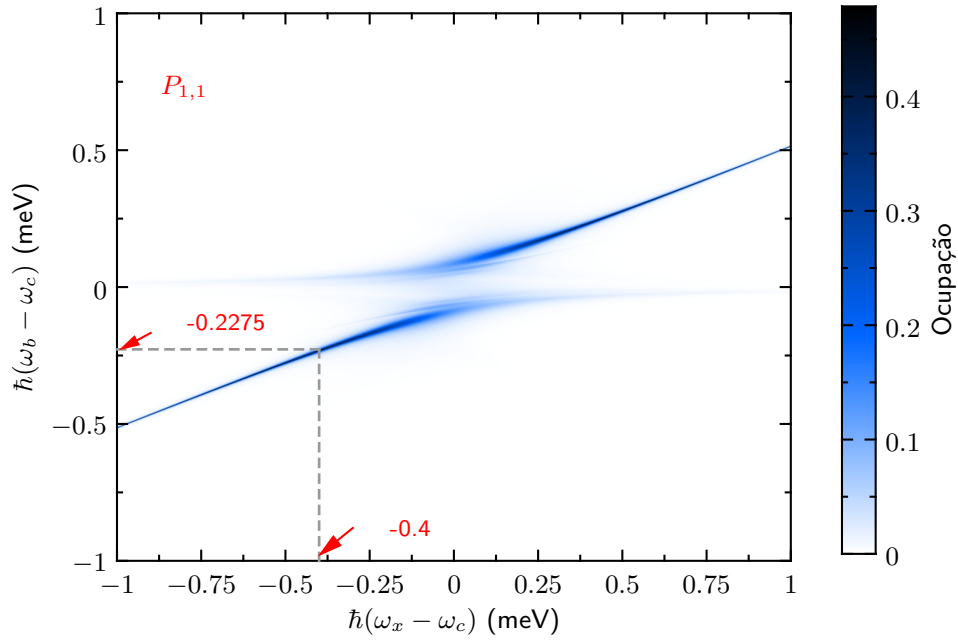


Figura 5.16 – Média ocupacional do estado  $|1, 1\rangle$  em função da dessintonia do ponto quântico e a cavidade  $\hbar(\omega_x - \omega_c)$  e em função da dessintonia entre o laser e a cavidade  $\hbar(\omega_b - \omega_c)$ , comprovando o resultado apresentado no Fig. 5.15, onde observa-se que para popular o estado  $|1, 1\rangle$  partindo do estado fundamental, a melhor configuração corresponde a  $\hbar(\omega_x - \omega_c) = -0,4$  meV e  $\hbar(\omega_b - \omega_c) = -0.2775$  meV. Estas configurações estão representadas por setas na figura.

evidencia uma troca de população significativa entre os estados  $|0, 0\rangle$  e  $|1, 1\rangle$ . Situação esta mostrada na Figura 5.18. Utilizando os valores aqui descritos para popular o estado  $|1, 1\rangle$ , foi possível, por meio de um pulso de 10.0 meV perturbar o comportamento de colapso e ressurgimento. Nota-se que a medida que a duração do pulso diminui, a perturbação no comportamento de colapso e ressurgimento é intensificada. Resultados estes, mostrado na Fig. 5.19.

Novamente por meio do cálculo da média ocupacional em uma dimensão calculada em  $\hbar(\omega_x - \omega_c) = -0.25$  meV. E então, restringindo o intervalo de dessintonia mostrado na Fig 5.14, verifica-se que para  $\hbar(\omega_b - \omega_c) = -0.119$  meV a média ocupacional do estado  $|0, 0\rangle$  diminui, em contrapartida a média ocupacional do estado  $|1, 2\rangle$  aumenta, situação esta representada na figura 5.20.

Sendo assim, limitando  $\hbar(\omega_b - \omega_c) = -0.119$  meV, é possível determinar, por meio da média ocupacional em duas dimensões (Fig. 5.21), a dessintonia entre o PQ e a cavidade como  $\hbar(\omega_x - \omega_c) \simeq -0.25$  meV

Desta forma, assim como no caso anterior, fixando a energia de ressonância da cavidade  $\hbar\omega_c = 0.9$  eV, observa-se que a energia de excitação do PQ mais uma vez está abaixo desta,  $\hbar\omega_x = 899.75$  meV, e que para popular consideravelmente o estado de éxciton-polariton  $|1, 2\rangle$  é necessário um processo de 3 fótons com energia  $\hbar\omega_b \approx 899.881$  meV.

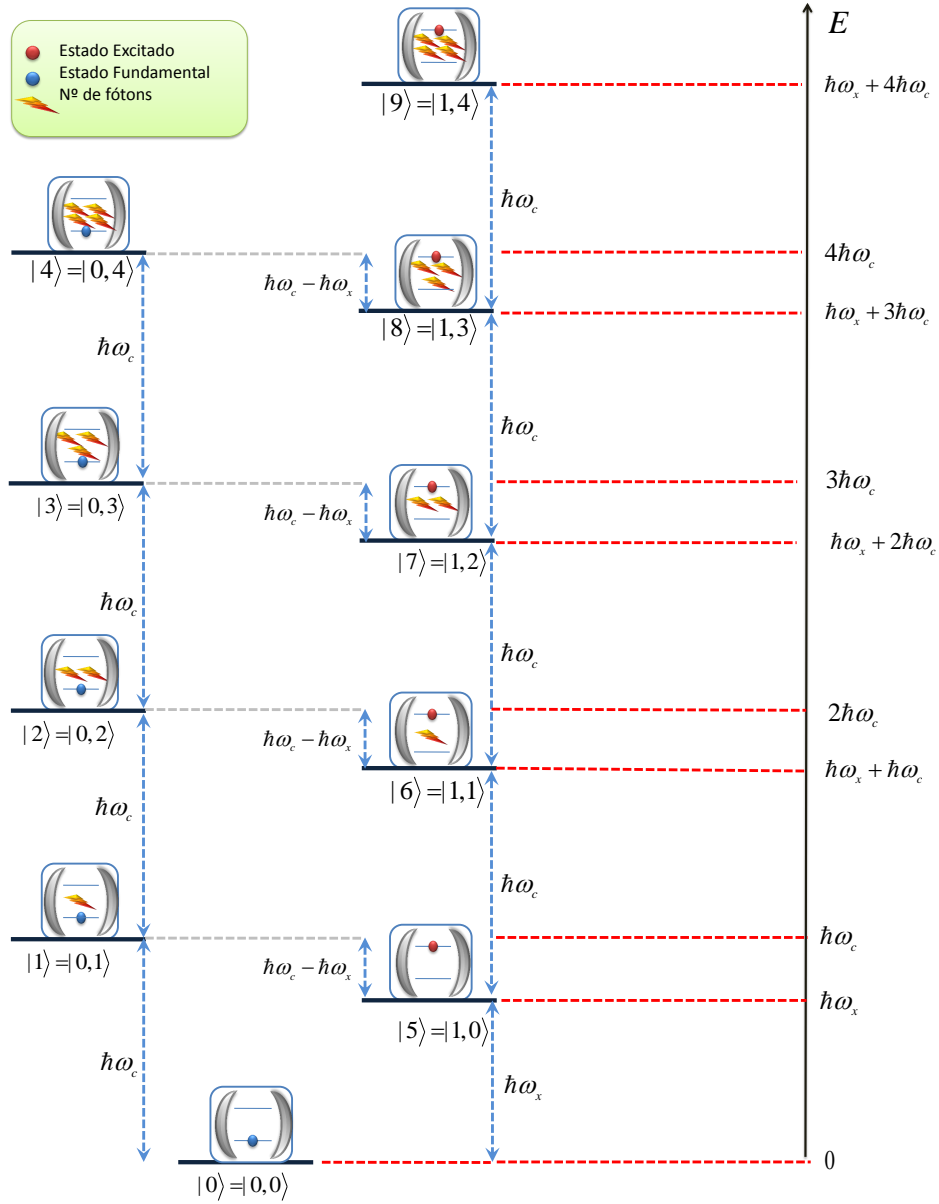


Figura 5.17 – Representação esquemática da escada energética do sistema PQ-cavidade considerando a energia de excitação do ponto quântico abaixo da energia de ressonância da cavidade. Na figura  $\hbar\omega_x$  corresponde a energia de excitação do ponto quântico e  $\hbar\omega_c$  a energia de ressonância da cavidade.

Por fim, com o cálculo da evolução temporal (Fig. 5.22), considerando as dessintonias apresentadas na Fig 5.21, verifica-se que o estado  $|1,2\rangle$  foi consideravelmente populado. Assim, o sistema como um todo pode mais uma vez ser representado pela Fig. 5.17, considerando neste caso os devidos valores de  $\hbar\omega_b$ ,  $\hbar\omega_x$  e  $\hbar\omega_c$ . Por meio destes valores, nota-se que utilizando um pulso de 10.0 meV é possível perturbar o comportamento da inversão de população. Considerando para este cálculo um número médio de 25 fótons no interior da cavidade. Resultados estes, mostrado na Fig. 5.23.

O procedimento acima apresentado para popular os estados  $|1,1\rangle$ ,  $|1,2\rangle$  foi novamente executado. No entanto, desta vez para popular os estados  $|1,3\rangle$  e  $|1,4\rangle$ . Inicialmente,

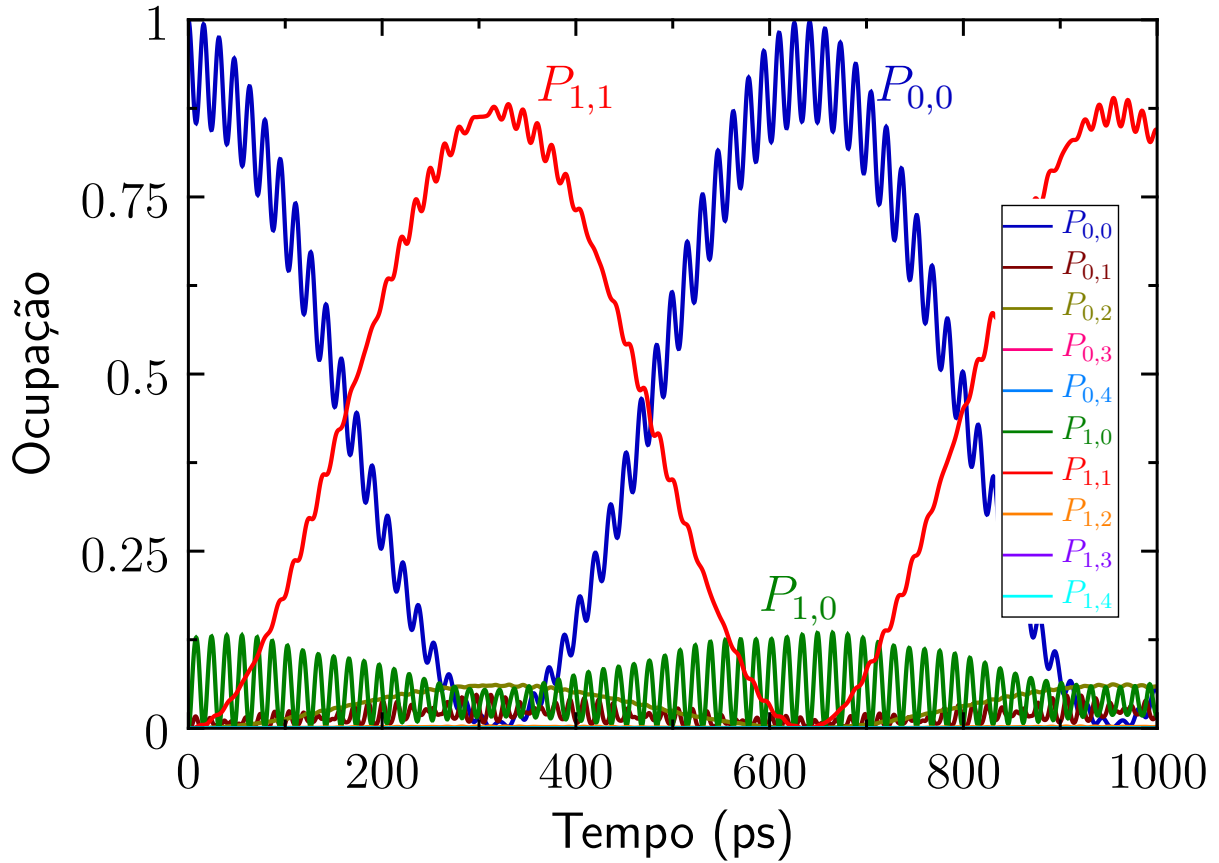


Figura 5.18 – Evolução temporal do sistema com um laser contínuo para a situação em que  $\hbar(\omega_b - \omega_c) = -0.2775$  meV,  $\hbar(\omega_x - \omega_c) = -0.4$  meV,  $\hbar g = 0.1$  meV e  $\hbar\Omega = 0.1$  meV. O sistema encontra-se inicialmente no estado fundamental. Verifica-se uma oscilação entre as populações do estado fundamental  $P_{0,0}$  e  $P_{1,1}$  (éxciton-polariton).

para realizar uma transição do estado fundamental  $|0,0\rangle$  para o estado  $|1,3\rangle$ , é necessário um processo de 4 fótons, em que cada fóton possua uma energia mínima  $\hbar\omega_b \approx 899.907$  meV, haja visto que  $\hbar\omega_x = 899.75$  meV. Por outro lado, para a transição do estado fundamental para o estado  $|1,4\rangle$ , os fótons necessitam de uma energia mínima  $\hbar\omega_b \approx 899.948$  meV, considerando a energia de excitação do ponto quântico inalterada.

Outro caso brevemente analisado foi considerar o ponto quântico no interior de uma cavidade contendo um número médio de 30 fótons. Levando em conta que o campo elétrico no interior da cavidade está em um estado coerente, como descrito pela Eq. (4.44), nota-se que o máximo desta distribuição ocorre em  $n = 30$ . Considerando que o sistema se inicializa no estado  $|1,15\rangle$ , por meio do cálculo da média ocupacional, nota-se configurações nas quais seria mais provável a inversão de população. Logo, com auxílio da média ocupacional do estado  $|0,15\rangle$  é possível determinar configurações em que há inversão de população entre estes estados. O que pode ser notado na Fig. 5.24. Por meio deste cálculo, encontra-se uma troca de população entre os estados  $|0,15\rangle$  e  $|1,15\rangle$ . Para que esta troca de população ocorra é necessário que a dessintonia entre o laser de bombeio e a energia de ressonância da cavidade seja  $\hbar(\omega_b - \omega_c) = -1.5$  meV, já a dessintonia entre

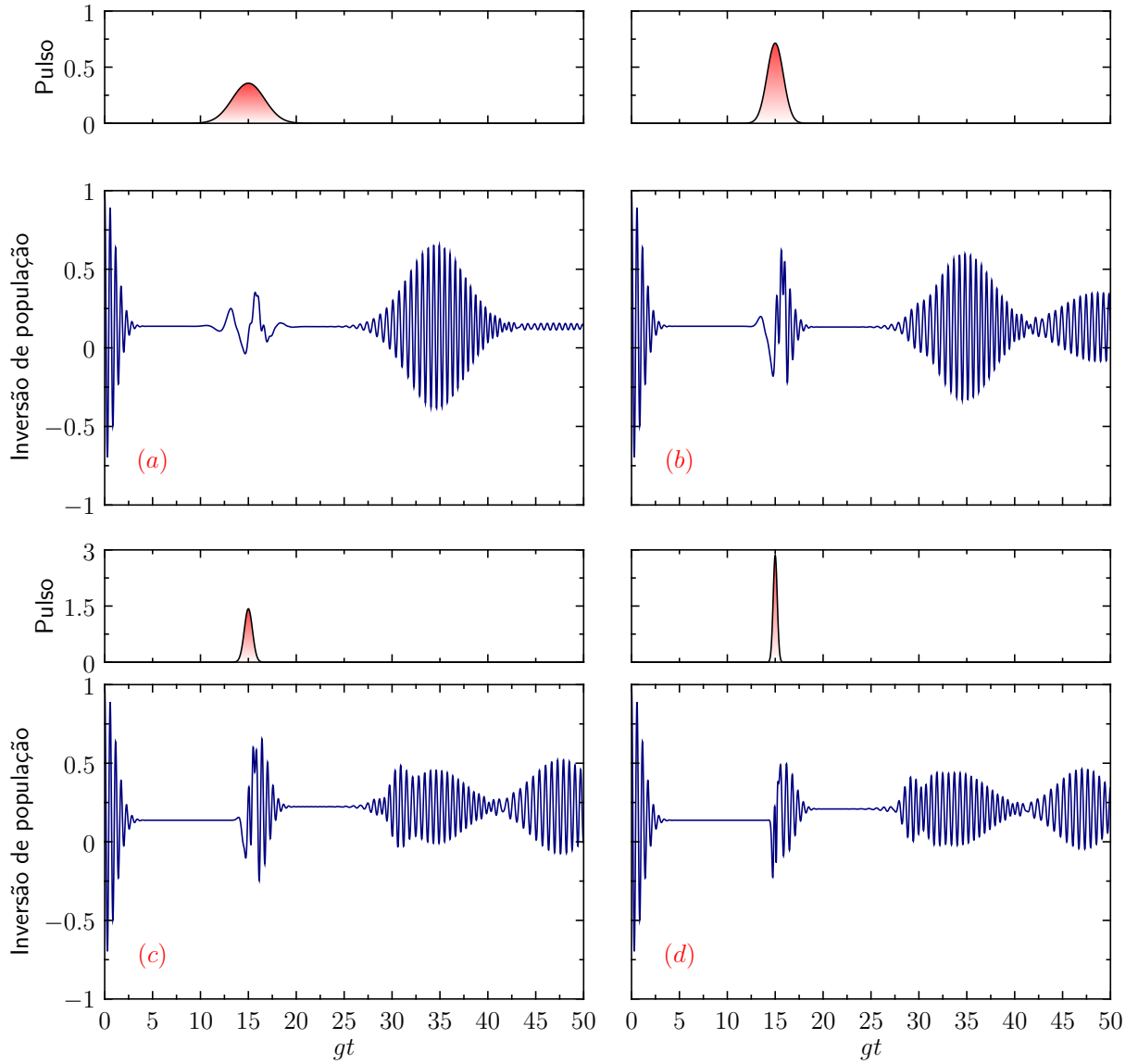


Figura 5.19 – Cálculo de inversão de população, para a situação em que  $\hbar(\omega_b - \omega_c) = -0.2775$  meV e  $\hbar(\omega_x - \omega_c) = -0.4$  meV, considerando um pulso de 10.0 meV. O ponto quântico inicialmente encontra-se no estado excitado  $|e\rangle$  e a cavidade contém um número médio de 25 fótons em seu interior ( $\langle n \rangle$ ). Em (a) foi considerado a duração do pulso de  $4/g$ , em (b)  $2/g$ , (c)  $1/g$  e (d)  $0.5/g$ . Nota-se que alterando a duração do pulso é possível perturbar o comportamento da inversão de população.

a energia de excitação do ponto quântico e a energia de ressonância da cavidade, deve ser  $\hbar(\omega_x - \omega_c) = -1.25$  meV.

Com o sistema previamente preparado nesta configuração, foi possível por meio de um pulso de 10.0 meV perturbar a inversão de população entre estes estados de uma forma mais eficaz que anteriormente, haja visto que neste caso, utilizamos uma configuração de dessintonias que favorecem a troca de população entre estes estados. Além de utilizar um número médio de fótons que corresponde ao máximo na distribuição do campo, o que pode ser confirmado por meio da Fig. 5.25.

Em resumo, podemos usar a média ocupacional dos estados a fim de mapear os



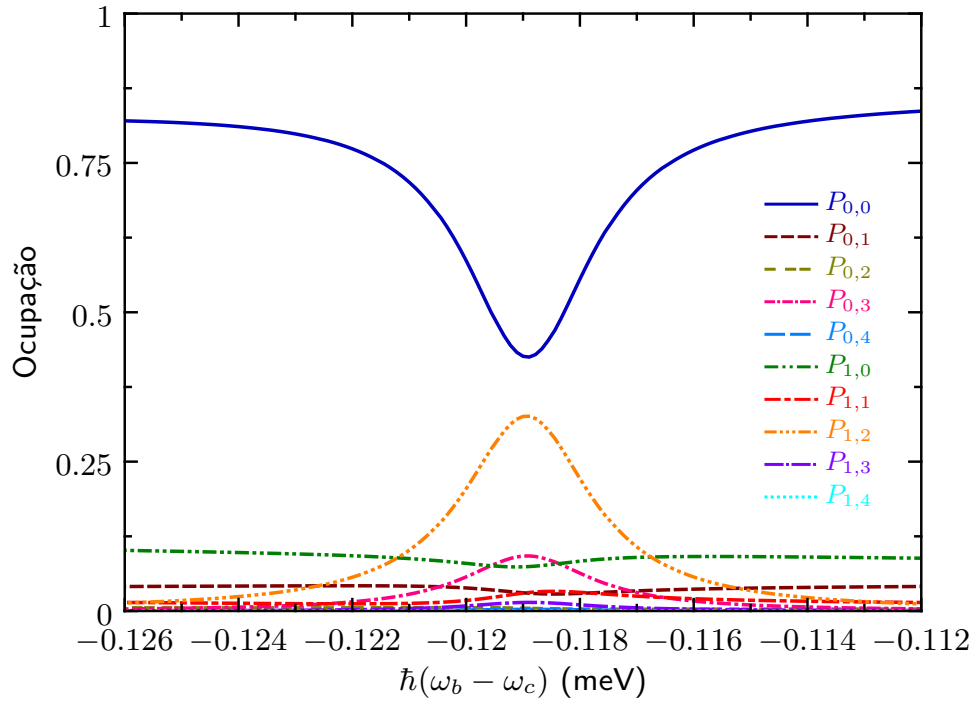


Figura 5.20 – Média ocupacional do sistema em função de  $\hbar(\omega_b - \omega_c)$  para a situação em que  $\hbar(\omega_x - \omega_c) = -0.25$  meV (corte realizado na Fig. 5.12 ao longo da direção vertical). Observa-se que a média ocupacional  $P_{1,2}$  do estado  $|1, 2\rangle$  é máxima para a situação em torno de  $\hbar(\omega_b - \omega_c) \simeq -0.119$  meV.

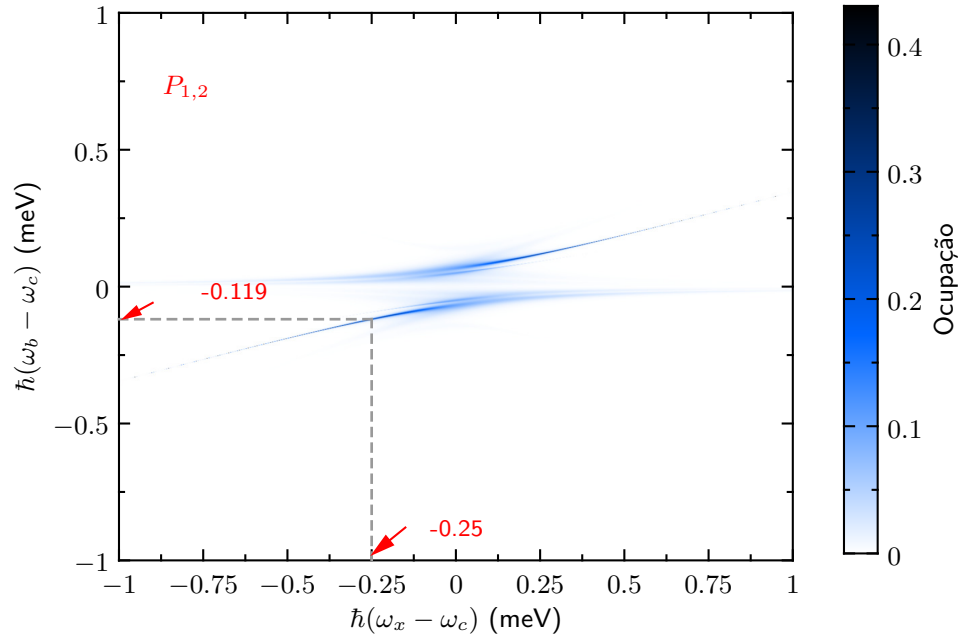


Figura 5.21 – Média ocupacional do estado  $|1, 2\rangle$ . Observa-se que para popular o estado  $|1, 2\rangle$  partindo do estado fundamental a melhor configuração corresponde a  $\hbar(\omega_x - \omega_c) = -0.25$  meV e  $\hbar(\omega_b - \omega_c) = -0.119$  meV, estas configurações estão representadas por setas na figura.

melhores valores dos parâmetros para se fazer manipulação dos estados quânticos.

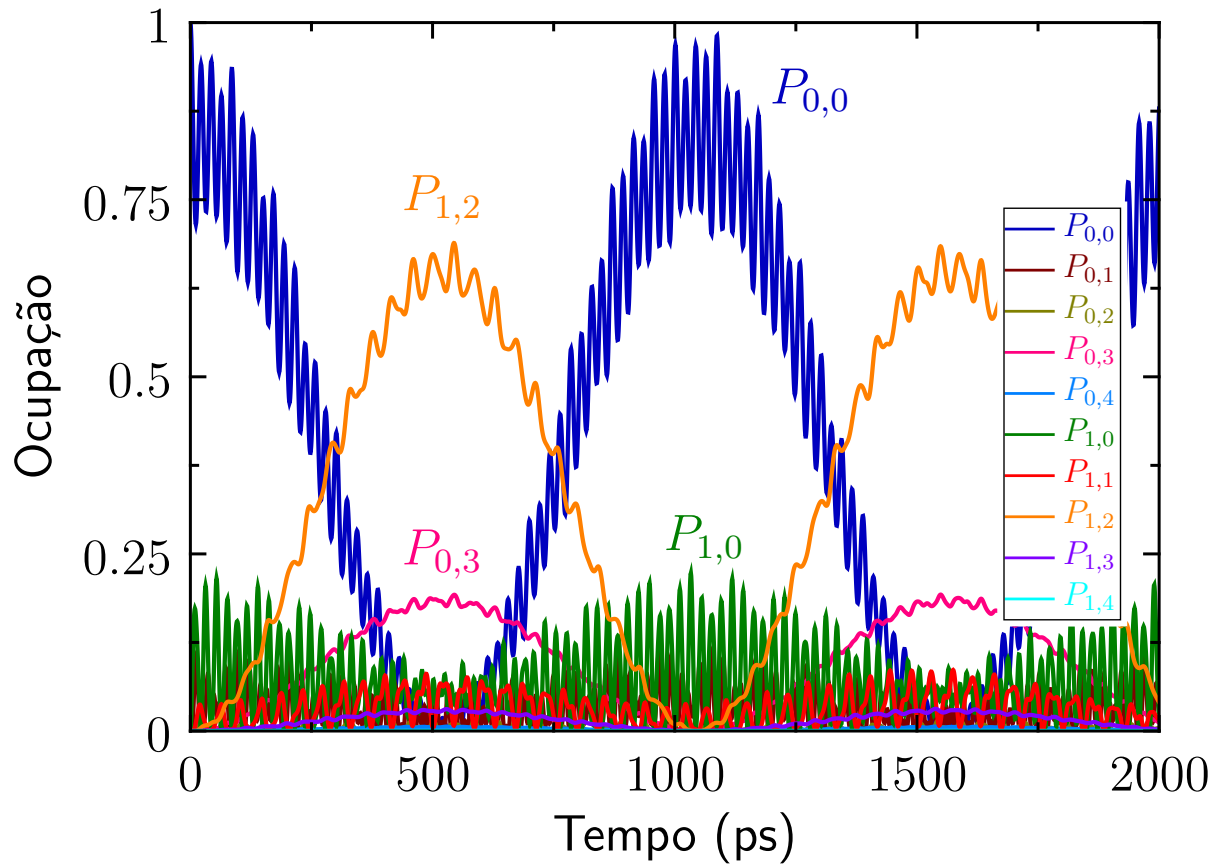


Figura 5.22 – Evolução temporal do sistema para a situação em que  $\hbar(\omega_b - \omega_c) = -0.119$  meV,  $\hbar(\omega_x - \omega_c) = -0.25$  meV,  $\hbar g = 0.1$  meV e  $\hbar\Omega = 0,1$  meV. O sistema está inicialmente no estado fundamental e como previsto, nota-se um aumento considerável na população do segundo estado de exciton-polariton  $P_{1,2}$ .

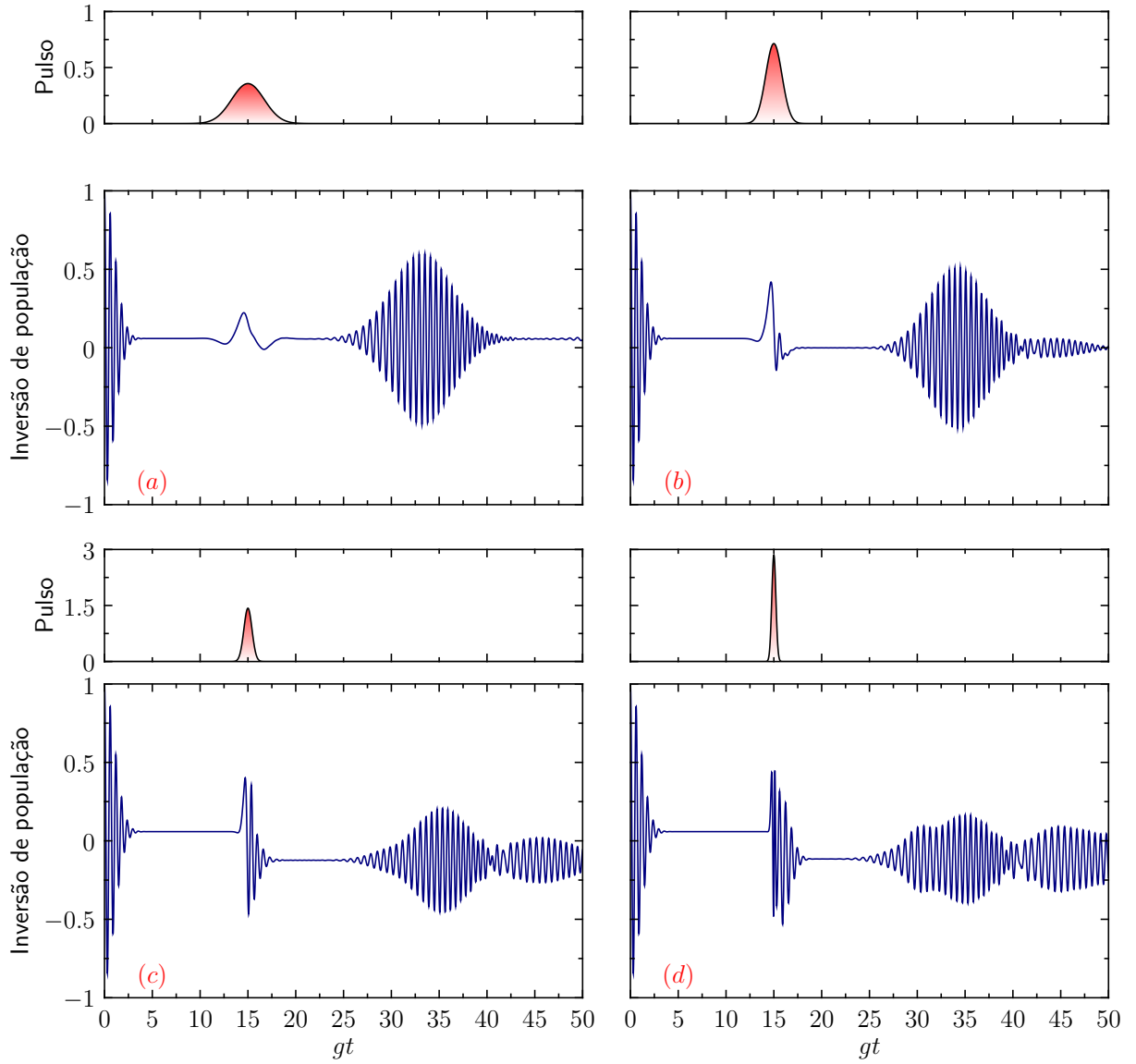


Figura 5.23 – Cálculo de inversão de população, para a situação em que  $\hbar(\omega_b - \omega_c) = -0.119$  e  $\hbar(\omega_x - \omega_c) = -0.25$  meV, considerando um pulso de 10.0 meV. O ponto quântico inicialmente encontra-se no estado excitado  $|e\rangle$  e a cavidade contém um número médio de 25 fótons em seu interior ( $\langle n \rangle$ ). Em (a) foi considerado a duração do pulso de  $4/g$ , em (b)  $2/g$ , (c)  $1/g$  e (d)  $0.5/g$ . Nota-se que alterando a duração do pulso é possível perturbar o comportamento da inversão de população.

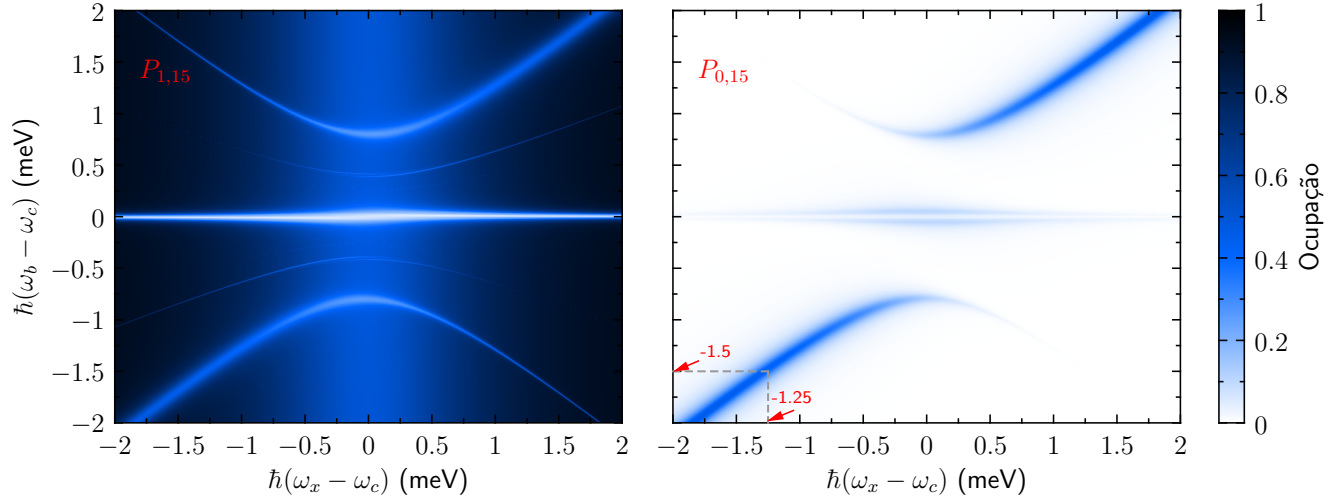


Figura 5.24 – Média ocupacional do estado  $|1,15\rangle$  e  $|0,15\rangle$ , de forma que o sistema inicialmente se encontra no estado  $|1,15\rangle$ . Por meio deste cálculo é possível notar configurações energéticas que propiciam uma troca de população entre os estados  $|0,15\rangle$  e  $|1,15\rangle$ . A configuração energética aqui escolhida está representada pelas setas na figura.

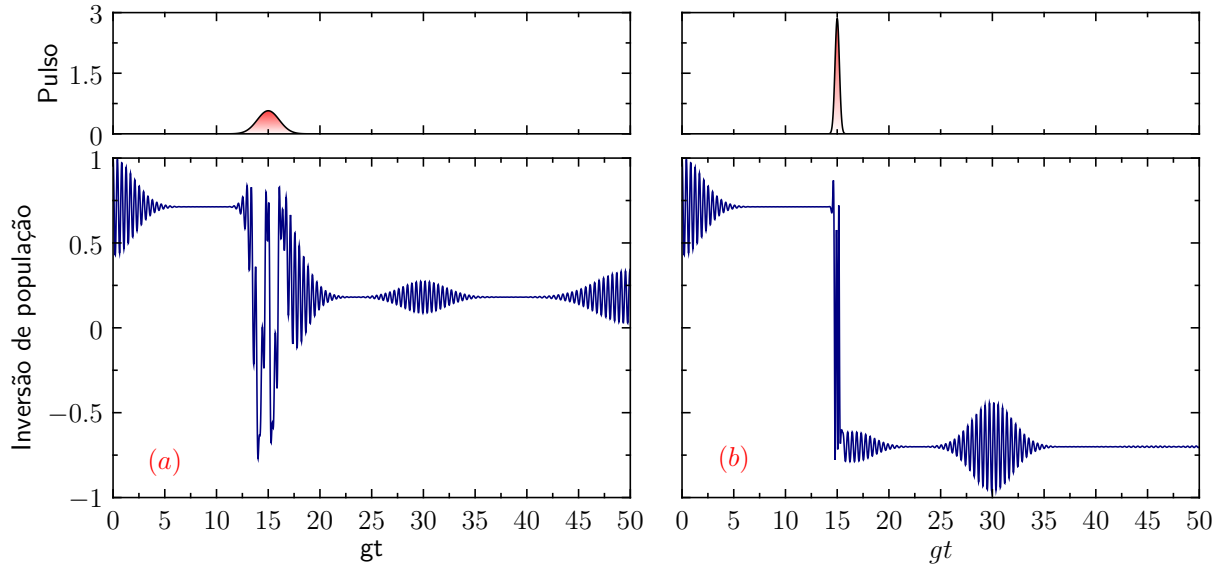


Figura 5.25 – Cálculo de inversão de população, para a situação em que  $\hbar(\omega_b - \omega_c) = -1.5$  meV e  $\hbar(\omega_x - \omega_c) = -1.25$  meV, considerando um pulso de 10.0 meV. O ponto quântico inicialmente encontra-se no estado excitado  $|1\rangle$  e a cavidade contém um número médio de 15 fótons em seu interior ( $\langle n \rangle$ ). Em (a) foi considerado a duração do pulso de  $2.5/g$ , em (b)  $0.5/g$ . Nota-se que alterando a duração do pulso é possível perturbar o comportamento da inversão de população.

## 6 Conclusões

Neste trabalho estudamos como um bombeio coerente pode ser usado para manipular os estados quânticos de um sistema formado por um único ponto quântico no interior de uma nanocavidade que apresenta um modo fotônico nas proximidades da energia de excitação do estado de éxciton do PQ. Desta forma, podemos tratar o ponto quântico como um sistema de dois níveis e considerar apenas um modo na cavidade.

Inicialmente foram calculados os autovalores do sistema considerando a interação do PQ com o pulso externo,  $\hbar\Omega$ , assim como a interação ponto quântico-cavidade,  $\hbar g$ , como sendo nulas. Desta forma, foi observado que os autovalores do sistema correspondiam a autovalores duplamente degenerados, haja vista que neste caso foi considerada a energia de excitação do ponto quântico em ressonância com a energia ressonante da cavidade. Em seguida, tomando  $\hbar g = 0.1$  meV, notamos que os autovalores do sistema não são mais degenerados. E que à medida que a intensidade de  $\hbar g$  aumenta, os autovalores que anteriormente eram duplamente degenerados, se desdobram como esperado. Em seguida, investigamos o sistema na presença de um laser, fazendo com que o espectro de energia apresentasse diversos anticruzamentos. A posição destes anticruzamentos foram tomados como base para o cálculo da evolução temporal, onde mostramos ser possível manipular os estados quânticos mudando a frequência e duração do pulso de laser aplicado.

Em seguida utilizamos um laser contínuo e a técnica de calcular a média ocupacional de cada estado para fazer um melhor mapeamento dos valores dos parâmetros necessários para se fazer a manipulação dos estados quânticos. Encontramos que o sistema pode ser manipulado usando processos de dois ou mais fótons, e as energias destes fótons podem ser estimadas usando o procedimento de mapeamento.

Por fim, para garantir uma abordagem mais realista, é necessário aprimorar o sistema, acrescentando por exemplo processos de perdas e interações com a rede cristalina (fónons). Será também interessante aumentar o número de pontos quânticos dentro da cavidade. Perspectivas estas que serão futuramente estudadas.

## Referências

- AKAHANE, Y. et al. High-q photonic nanocavity in a two-dimensional photonic crystal. *Nature*, 2003. Nature Publishing Group, v. 425, p. 944–947, Oct 2003. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1038/nature02063>. Citado na página 29.
- ARRIBAS, S. N. S. Crecimiento coherente de heteroestructuras semiconductoras de baja dimensionalidad. 2009. 2009. Citado na página 24.
- BIMBERG, D.; GRUNDMANN, M.; LEDENTSOV, N. N. *Quantum Dot Heterostructures*. New York: John Wiley and Sons Ltd, 1999. Citado na página 24.
- BLAIS, A. et al. Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation. *Phys. Rev. A*, 2004. American Physical Society, v. 69, p. 062320, Jun 2004. Disponível em: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.69.062320>. Citado na página 23.
- BORGES, H. S. *Controle coerente de estados quânticos em nanoestruturas semiconductoras*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Uberlândia, 2010. Citado na página 55.
- BRUNE, M. et al. Quantum rabi oscillation: A direct test of field quantization in a cavity. *Phys. Rev. Lett.*, 1996. American Physical Society, v. 76, p. 1800–1803, Mar 1996. Disponível em: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.76.1800>. Citado na página 23.
- DAVIDOVICH, L. Informação quântica do teletransporte ao computador quântico. *Ciência Hoje*, 2004. v. 35, p. 6, 2004. Citado na página 22.
- FINK, J. M. et al. Climbing the jaynes-cummings ladder and observing its nonlinearity in a cavity qed system. *Nature*, 2008. Macmillan Publishers Limited. All rights reserved, v. 454, p. 315–318, jul 2008. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1038/nature07112>. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 47.
- FOX, M. *Quantum Optics: An Introduction*. [S.l.]: (Oxford University), 2006. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 43.
- FRENKEL, J. On the transformation of light into heat in solids. i. *Phys. Rev.*, 1931. American Physical Society, v. 37, p. 17–44, Jan 1931. Disponível em: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.37.17>. Citado na página 25.
- GEA-BANACLOCHE, J. Jaynes-cummings model with quasiclassical fields: The effect of dissipation. *Phys. Rev. A*, 1993. American Physical Society, v. 47, p. 2221–2234, Mar 1993. Disponível em: <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevA.47.2221>. Citado na página 23.
- GERRY, P. K. C. *Introductory Quantum Optics*. [S.l.]: cambridge university press, 2005. Citado na página 32.

- GYWAT, O.; KRENNER, H. J.; BEREZOVSKY, J. *Integration of Quantum Dots in Electro-Optical Devices*. Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2010. 67–81 p. ISBN 9783527628988. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1002/9783527628988.ch4>>. Citado na página 24.
- HUSSIN, V.; NIETO, L. M. Ladder operators and coherent states for the jaynes-cummings model in the rotating-wave approximation. *Journal of Mathematical Physics*, 2005. AIP, v. 46, n. 12, p. 122102, 2005. Disponível em: <<http://link.aip.org/link/?JMP/46/122102/1>>. Citado na página 23.
- JAYNES, E.; CUMMINGS, F. Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the beam maser. *Proceedings of the IEEE*, 1963. v. 51, n. 1, p. 89 – 109, jan. 1963. ISSN 0018-9219. Citado na página 22.
- KASPRZAK, J. et al. Up on the Jaynes-Cummings ladder of a quantum-dot/microcavity system. *Nat Mater*, 2010/04. Nature Publishing Group, v. 9, p. 304–308, Abr 2010/04. Disponível em: <<http://www.nature.com/nmat/journal/v9/n4/abs/nmat2717.html>>. Citado 3 vezes nas páginas 23, 45 e 47.
- KUNDU, A. Quantum integrable multiatom matter-radiation models with and without the rotating-wave approximation. *Theoretical and Mathematical Physics*, 2005. Kluwer Academic Publishers-Consultants Bureau, v. 144, p. 975–984, 2005. ISSN 0040-5779. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/s11232-005-0125-7>>. Citado na página 23.
- LAMBROPOULOS, P.; PETROSYAN, D. *Fundamental of Quantum Optics and Quantum Information*. [S.l.]: Springer, 2007. Citado na página 39.
- LAUCHT, A. et al. Dephasing of exciton polaritons in photoexcited ingaas quantum dots in gaas nanocavities. *Phys. Rev. Lett.*, 2009. American Physical Society, v. 103, p. 087405, Aug 2009. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.087405>>. Citado na página 26.
- LAUCHT, A. et al. Dephasing of exciton polaritons in photoexcited ingaas quantum dots in gaas nanocavities. *Phys. Rev. Lett.*, 2009. American Physical Society, v. 103, p. 087405, Aug 2009. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.103.087405>>. Citado na página 45.
- LAUCHT, A. et al. Mutual coupling of two semiconductor quantum dots via an optical nanocavity. *Phys. Rev. B*, 2010. American Physical Society, v. 82, p. 075305, Aug 2010. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.82.075305>>. Citado na página 45.
- LI, X. et al. An all-optical quantum gate in a semiconductor quantum dot. *Science*, 2003. v. 301, n. 5634, p. 809–811, 2003. Disponível em: <<http://www.sciencemag.org/content/301/5634/809.abstract>>. Citado na página 43.
- MÁRQUEZ, J.; GEELHAAR, L.; JACOBI, K. Atomically resolved structure of inas quantum dots. *Appl. Phys. Lett.*, 2001. AIP, v. 78, n. 16, p. 2309–2311, 2001. Disponível em: <<http://link.aip.org/link/?APL/78/2309/1>>. Citado 2 vezes nas páginas 9 e 25.
- MEKIS, A. et al. High transmission through sharp bends in photonic crystal waveguides. *Phys. Rev. Lett.*, 1996. American Physical Society, v. 77, p. 3787–3790, Oct 1996.

Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.77.3787>>. Citado na página 27.

MONZ, T. et al. 14-qubit entanglement: Creation and coherence. *Phys. Rev. Lett.*, 2011. American Physical Society, v. 106, p. 130506, Mar 2011. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.106.130506>>. Citado na página 22.

NELSON, E. C. et al. Epitaxial growth of three-dimensionally architected optoelectronic devices. *Nat Mater*, 2011. Nature Publishing Group, v. 10, p. 676–681, Set 2011. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1038/nmat3071>>. Citado 3 vezes nas páginas 9, 28 e 29.

NODA, S. et al. Full three-dimensional photonic bandgap crystals at near-infrared wavelengths. *Science*, 2000. v. 289, n. 5479, p. 604–606, 2000. Disponível em: <<http://www.sciencemag.org/content/289/5479/604.abstract>>. Citado na página 30.

REMPE, G.; WALTHER, H.; KLEIN, N. Observation of quantum collapse and revival in a one-atom maser. *Phys. Rev. Lett.*, 1987. American Physical Society, v. 58, p. 353–356, Jan 1987. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.58.353>>. Citado na página 23.

ROSE, J. *Partikeldressyr i kvantvärlden*. <http://kva.se/sv/pressrum/Pressmeddelanden-2012/Nobelpriiset-i-fysik-2012/>. Citado na página 23.

SAKURAI, J. *Modern Quantum Mechanics*. [S.l.]: Addison Wesley, 1994. Citado na página 43.

SCHRÖDINGER, E. Die gegenwärtige situation in der quantenmechanik. *Naturwissenschaften*, 1935. Springer-Verlag, v. 23, p. 807–812, 1935. ISSN 0028-1042. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BF01491891>>. Citado na página 21.

SCULLY, M. O.; ZUBAIRY, M. S. *Quantum Optics*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1997. Citado 4 vezes nas páginas 22, 32, 38 e 42.

SOTO, J. E. R. *Coherent Exciton Phenomena in Quantum Dot Molecules*. Dissertação (Mestrado) — College of Arts and Sciences of Ohio University, 2011. Citado na página 55.

VILLAS-BÔAS, J. M.; GOVOROV, A. O.; ULLOA, S. E. Coherent control of tunneling in a quantum dot molecule. *Phys. Rev. B*, 2004. American Physical Society, v. 69, p. 125342, Mar 2004. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.69.125342>>. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 55.

VILLAS-BÔAS, J. M.; ULLOA, S. E.; GOVOROV, A. O. Decoherence of rabi oscillations in a single quantum dot. *Phys. Rev. Lett.*, 2005. American Physical Society, v. 94, p. 057404, Feb 2005. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.94.057404>>. Citado 2 vezes nas páginas 26 e 43.

VILLAS-BÔAS, J. M.; ULLOA, S. E.; GOVOROV, A. O. Spin polarized photocurrent from quantum dots. *Phys. Rev. B*, 2007. American Physical Society, v. 75, p. 155334, Apr 2007. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevB.75.155334>>. Citado na página 43.



WANNIER, G. H. The structure of electronic excitation levels in insulating crystals. *Phys. Rev.*, 1937. American Physical Society, v. 52, p. 191–197, Aug 1937. Disponível em: <<http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.52.191>>. Citado na página 25.

ŽITNIK, B. R. e M. Young's interference effect in the autoionization of atoms colliding with molecules. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 2004. v. 37, n. 19, p. 3847, 2004. Disponível em: <<http://stacks.iop.org/0953-4075/37/i=19/a=006>>. Citado na página 20.