



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA QUÍMICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
EM ENGENHARIA QUÍMICA



# Controle Preditivo Distribuído de Processos Lineares

*Rosiane Ribeiro Rocha*  
*Uberlândia*  
*2014*





UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA  
FACULDADE DE ENGENHARIA QUÍMICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO  
EM ENGENHARIA QUÍMICA



# Controle Preditivo Distribuído de Processos Lineares

*Rosiane Ribeiro Rocha*

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Química da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia Química, Área de Concentração em Desenvolvimento de Processos Químicos.

Orientador: Prof. Dr. Luís Cláudio Oliveira Lopes

*Uberlândia*  
*2014*

R672c    Rocha, Rosiane Ribeiro, 1987-  
2014      Controle preditivo distribuído de processos lineares / Rosiane  
            Ribeiro Rocha. - 2014.  
            185 f. : il.

Orientador: Luis Cláudio Oliveira Lopes.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química.  
Inclui bibliografia.

1. Engenharia química - Teses. 2. Controle preditivo - Teses. I. Lopes, Luis Cláudio Oliveira. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Química. III. Título.

CDU: 66.0

---

# Controle Preditivo Distribuído de Processos Lineares

Dissertação de Mestrado submetida ao corpo docente do Programa de Pós-graduação em Engenharia Química da Universidade Federal de Uberlândia como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de mestre em Engenharia Química.

## BANCA EXAMINADORA



---

*Prof. Dr. Luís Cláudio Oliveira Lopes*  
Orientador - PPGEQ - FEQUI/UFU



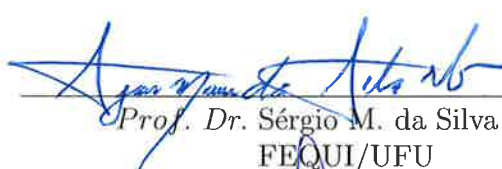
---

*Dr. Cláudio Homero Ferreira Silva*  
CEMIG



---

*Prof. Dr. Rubens Gedraite*  
FEQUI/UFU



---

*Prof. Dr. Sérgio M. da Silva Neiro*  
FEQUI/UFU



---

*Prof. Dra. Valéria Viana Murata*  
PPGEQ - FEQUI/UFU



---

# Agradecimentos

Primeiramente a Deus, por estar sempre ao meu lado, me abençoando e me dando forças para não desistir nas lutas mais difíceis.

Aos meus pais, João e Rosângela, que sempre fizeram mais por mim do que para si próprios.

Ao meu irmão, Raphael, pelo apoio e conselhos.

Ao Professor Luís Cláudio Oliveira Lopes, pela orientação deste trabalho, pela compreensão e paciência nos momentos críticos e principalmente pela amizade e confiança.

À minha amiga, Marina, por me mostrar o verdadeiro significado da amizade, pois, apesar da distância sempre esteve presente em todos os momentos.

Às minhas amigas e companheiras de curso, Bruna, Natália Mazzarioli e Nádia, pela amizade e carinho.

Aos meus amigos e companheiros do Laboratório de Otimização e Modelagem de Processos (LOM), pela força e incentivo.

Aos professores da Faculdade de Engenharia Química.

Aos membros da banca, *Dr. Cláudio Homero Ferreira da Silva*, *Prof. Dr. Rubens Gedraite*, *Prof. Dr. Sérgio M. da Silva Neiro* e *Profa. Dra. Valéria Viana Murata*, pelo enriquecimento deste trabalho.

À CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) pela concessão da bolsa de estudos.





*Aos meus pais.*



---

# Resumo

O objetivo básico de um controle de planta é o de coordenar as várias interações existentes nos subsistemas que compõem a mesma. Os subsistemas de uma planta são em geral projetados de forma independente ou adicionados posteriormente com a evolução da planta instalada. Essas alterações em geral ocorrem motivadas por exigências de produção ou por regulamentação ambiental. A maioria das grandes plantas químicas implementam o controle descentralizado como estratégia de controle. Mas, para subsistemas com fortes interações, essa estratégia pode levar a um desempenho não aceitável. Por outro lado, o controle centralizado é capaz de abordar o problema de interação de forma ótima, mas com custos estruturais e organizacionais elevados, tornando tal estrutura de complexa atualização e manutenção. Uma estrutura que preserva a topologia e flexibilidade do controle descentralizado ao tempo que oferece propriedades de estabilidade é o controle distribuído. Nessa estrutura de controle, as interações entre os subsistemas são modeladas e informações entre os subsistemas são compartilhadas entre os mesmos. Neste trabalho, a decomposição de sistemas é realizada com base nas matrizes (**A**, **B** e **C**) da representação em espaço de estados do sistema, em que representam interações entre estados, entre estados e entradas e entre estados e saídas. Cada novo subsistema tem um subconjunto de entradas e a seleção dos estados pertencentes a cada subsistema é feita pela análise dos estados que são afetados pelo subconjunto de entradas e que afetam as saídas controladas. Os subsistemas gerados devem satisfazer a condição de controlabilidade. A proposta de DMPC (Controle Preditivo Distribuído) desenvolvida foi avaliada em 4 estudos de casos distintos e seus desempenhos comparados com estratégias de controle centralizada e descentralizada. As estruturas sequencial e paralela também foram avaliadas, e considerou-se casos em que o problema de controle apresentava restrições nas variáveis manipuladas. Os resultados obtidos mostram que a proposta DMPC desenvolvida apresenta resultados satisfatórios para a estrutura sequencial e a ordem dos controladores MPC é um parâmetro importante na formulação dessa estrutura, para os três primeiros exemplos. A estrutura em paralelo não favoreceu o desempenho da estratégia DMPC proposta, exceto para o estudo de caso # 4, em que não há diferenças entre as estrutura sequencial e paralelo.

**Palavras-chave:** *Controle Preditivo baseado em Modelo, Controle Distribuído, Decomposição de Modelos.*



---

# Abstract

The main purpose of a plant control is to coordinate the various interactions between the subsystems that compose it. The subsystems of a plant are usually designed independently or added later with the evolution of the installed plant. These changes usually occur motivated by production requirements or environmental regulations. Most large-scale systems implement the decentralized control as control strategy. But for subsystems with strong interactions, this approach can lead to unacceptable performance. Furthermore, centralized control is able to address optimally the problem of interaction, but with high structural and organizational costs, making costly such a complex structure and upgrade maintenance. A structure that preserves the topology and flexibility of decentralized control and at the same time may offer a nominal closed-loop stability guarantee is the distributed control approach. In this control structure, the interactions between subsystems are modeled and information between the subsystems is shared between them. In this work, the plant model decomposition is proposed directly on the state space ( $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  and  $\mathbf{C}$ ) matrices realization description, which has interactions between states, between states and inputs and between states and outputs. Each new subsystem has a subset of inputs and the selection of the states belonging to this subsystem is made through the analysis of the states that are excited by the subset of input selected for each subsystem. A decomposition algorithm is introduced that gives a set of controllable subsystems using a subset of the available inputs. The proposed DMPC was successfully evaluated in 4 studies of different cases and their performances compared with other control strategies (centralized and decentralized). The sequential and parallel structures were also evaluated and cases that the control problem with constraints on the manipulated variables was considered. The results show that the proposed DMPC presents performance satisfactory for the DMPC sequential and the order of MPC controllers is an important parameter in the design of this structure, for the first three examples. The parallel structure did not favor the performance of the proposed DMPC, except for the case study # 4, in which there are no differences between sequential and parallel structures.

**Keywords:** *Distributed control, Model predictive control, Decomposition models.*



# Lista de Figuras

2.1	Horizonte móvel do controle preditivo baseado em modelo (adaptado de Seborg et al. (2004)). . . . .	9
2.2	Genealogia aproximada para algoritmos de MPC lineares (adaptado de Qin e Badgwell (2003)). . . . .	10
2.3	Representação de um MPC Centralizado (adaptado de Christofides et al. (2013)). . . . .	15
2.4	Representação MPC Descentralizado (adaptado de Christofides et al. (2013)). . . . .	15
2.5	Representação MPC Distribuído (adaptado de Christofides et al. (2013)).	16
2.6	Exemplo de decomposição de um modelo global em quatro submodelos. Cada retângulo colorido identifica os estados pertencentes ao submodelo correspondente (Alessio et al. (2011)). . . . .	17
2.7	Representação DMPC não cooperativo sequencial (adaptado de Christofides et al. (2013)). . . . .	22
2.8	Representação DMPC não cooperativo paralelo (adaptado de Christofides et al. (2013)). . . . .	22
2.9	Representação genérica de um matriz A decomposta para diferentes valores de $\epsilon$ . . . . .	28
3.1	Dinâmicas da saída controlada $y_1$ do processo do estudo de caso #1 obtidas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com ordem 2-1. . . .	41
3.2	Dinâmicas da saída controlada $y_2$ do processo do estudo de caso #1 obtidas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com ordem 2-1. . . .	42
3.3	Ações de controle da entrada manipulada $u_1$ do processo do estudo de caso #1 implementadas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com ordem 2-1. . . . .	42
3.4	Ações de controle da entrada manipulada $u_2$ do processo do estudo de caso #1 implementadas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com ordem 2-1. . . . .	43
3.5	Dinâmicas da saída controlada $y_1$ do processo do estudo de caso #1 considerando restrição em $ \Delta u_i  = 0,4$ obtidas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com ordem 1-2. . . . .	46

3.6	Dinâmicas da saída controlada $y_2$ do processo do estudo de caso #1 considerando restrição em $ \Delta u_i  = 0,4$ obtidas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com ordem 1-2. . . . .	47
3.7	Ações de controle restritas em $ \Delta u_i  = 0,4$ da entrada manipulada $u_1$ do processo do estudo de caso #1 obtidas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com ordem 1-2. . . . .	47
3.8	Ações de controle restritas em $ \Delta u_i  = 0,4$ da entrada manipulada $u_2$ do processo do estudo de caso #1 obtidas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com ordem 1-2. . . . .	47
3.9	Dinâmicas da saída controlada $y_1$ do processo do estudo de caso #1 obtidas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com estrutura em paralelo. . . . .	50
3.10	Dinâmicas da saída controlada $y_2$ do processo do estudo de caso #1 obtidas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com estrutura em paralelo. . . . .	50
3.11	Ações de controle da entrada manipulada $u_1$ do processo do estudo de caso #1 obtidas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com estrutura em paralelo. . . . .	51
3.12	Ações de controle da entrada manipulada $u_2$ do processo do estudo de caso #1 obtidas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com estrutura em paralelo. . . . .	51
3.13	Dinâmicas das saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, pelo controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-1-3. . . . .	59
3.14	Ações das entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, pelo controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-1-3. . . . .	60
3.15	Dinâmicas das saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 considerando restrições em $ \Delta u_i  = 0,1$ obtidas pelo controle centralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-1-3. . . . .	63
3.16	Ações das entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 considerando restrições em $ \Delta u_i  = 0,1$ obtidas pelo controle centralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-1-3. . . . .	64
3.17	Dinâmicas das saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com estrutura em paralelo. . . . .	66
3.18	Ações das entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com estrutura em paralelo. . . . .	67
3.19	Três tanques em série com reciclo. . . . .	68



3.20	Dinâmicas das saídas controladas do sistema dos 3 tanques obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-1-3 e com restrições nas variáveis manipuladas. . .	72
3.21	Ações de controle das entradas manipuladas do sistema dos 3 tanques obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-1-3 e com restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	73
3.22	Dinâmicas das saídas controladas do sistema dos 3 tanques obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com estrutura em paralelo e com restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	75
3.23	Ações de controle das entradas manipuladas do sistema dos 3 tanques obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com estrutura em paralelo e com restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	76
3.24	Fluxograma de um sistema típico de moagem industrial. . . . .	78
3.25	Dinâmicas das saídas controladas do sistema industrial de moagem de minério obtidas pelo controle centralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-2 e com restrições nas variáveis manipuladas. . . .	82
3.26	Ações de controle das entradas manipuladas do sistema industrial de moagem de minério obtidas pelo controle centralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-2 e com restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	83
3.27	Dinâmicas das saídas controladas do sistema industrial de moagem de minério obtidas pelo controle centralizado e DMPC utilizando partição proposta com estrutura em paralelo e com restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	85
3.28	Ações de controle das entradas manipuladas do sistema industrial de moagem de minério obtidas pelo controle centralizado e DMPC utilizando partição proposta com estrutura em paralelo e com restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	85
Ap.1	Dígrafos que representam os efeitos entre os estados e (a) entrada $u_1$ e (b) entrada $u_2$ para o sistema do estudo de caso #1. . . . .	108
Ap.2	Dígrafos que representam os efeitos entre estados para: (a) estado $x_1$ , (b) estado $x_2$ , (c) estado $x_3$ e (d) estado $x_4$ para o sistema do estudo de caso #1. . . . .	109
Ap.3	Dígrafos que representam os efeitos entre estados e (a) saída $y_1$ e (b) saída $y_2$ para o sistema do estudo de caso #1. . . . .	109
Ap.4	Dígrafos dos subsistemas criados através da partição proposta para o sistema do estudo de caso #1. . . . .	110
Ap.5	Dígrafos que representam os efeitos entre os estados e: (a) entrada $u_1$ , (b) entrada $u_2$ , (c) entrada $u_3$ e (d) entrada $u_4$ para o sistema do estudo de caso #2. . . . .	111
Ap.6	Dígrafos que representam os efeitos entre estados para: (a) estado $x_1$ , (b) estado $x_2$ , (c) estado $x_3$ , (d) estado $x_4$ , (e) estado $x_5$ , (f) estado $x_6$ , (g) estado $x_7$ e (h) estado $x_8$ para o estudo de caso #2. . . . .	112

Ap.7	Dígrafos que representam os efeitos entre estados e: (a) saída $y_1$ , (b) saída $y_2$ , (c) saída $y_3$ e (d) saída $y_4$ para sistema do estudo de caso #2. . . . .	112
Ap.8	Dígrafos dos subsistemas criados através da partição proposta para o sistema do estudo de caso #2. . . . .	113
Ap.9	Dígrafos que representam os efeitos entre os estados e: (a) entrada $F_1$ , (b) entrada $F_2$ e (c) entrada $F_3$ para o sistema de 3 tanques. . . . .	114
Ap.10	Dígrafos que representam os efeitos entre estados para o sistema de 3 tanques. . . . .	114
Ap.11	Dígrafos que representam os efeitos entre estados e: (a) saída $y_1$ , (b) saída $y_2$ e (c) saída $y_3$ para o sistema de 3 tanques. . . . .	114
Ap.12	Dígrafos dos subsistemas criados através da partição proposta para o sistema de 3 tanques. . . . .	115
Ap.13	Dígrafos que representam os efeitos entre os estados e (a) entrada $u_1$ e (b) entrada $u_2$ para o sistema industrial de moagem de minério. . . . .	116
Ap.14	Dígrafos que representam os efeitos entre estados para: (a) estado $x_1$ , (b) estado $x_2$ , (c) estado $x_3$ , (d) estado $x_4$ , (e) estado $x_5$ , (f) estado $x_6$ , (g) estado $x_7$ , (h) estado $x_8$ e (i) estado $x_9$ para o sistema industrial de moagem de minério. . . . .	117
Ap.15	Dígrafos que representam os efeitos entre estados e (a) saída $y_1$ e (b) saída $y_2$ para o sistema de moagem industrial de minério. . . . .	117
Ap.16	Dígrafos dos subsistemas criados através da partição proposta para o sistema industrial de moagem de minério. . . . .	118
Ap.17	Dinâmicas da saída controlada $y_1$ do processo do estudo de caso #1 obtidas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com ordem 1-2. . . . .	120
Ap.18	Dinâmicas da saída controlada $y_2$ do processo do estudo de caso #1 obtidas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com ordem 1-2. . . . .	120
Ap.19	Ações de controle da entrada manipulada $u_1$ do processo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com ordem 1-2. . . . .	121
Ap.20	Ações de controle da entrada manipulada $u_2$ do processo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com 1-2. . . . .	121
Ap.21	Dinâmicas das saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-2-3. . . . .	123
Ap.22	Ações das entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-2-3. . . . .	124
Ap.23	Dinâmicas das saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-3-2. . . . .	125
Ap.24	Ações das entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-3-2. . . . .	126

Ap.25	Dinâmicas das saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-3-1. . . . .	127
Ap.26	Ações das entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-3-1. . . . .	128
Ap.27	Dinâmicas das saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-1-2. . . . .	130
Ap.28	Ações das entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-1-2. . . . .	131
Ap.29	Dinâmicas das saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-2-1. . . . .	132
Ap.30	Ações das entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-2-1. . . . .	133
Ap.31	Dinâmicas das saídas controladas do sistema dos 3 tanques obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-2-3 e restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	134
Ap.32	Ações de controle das entradas manipuladas do sistema dos 3 tanques obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-2-3 e restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	135
Ap.33	Dinâmicas das saídas controladas do sistema dos 3 tanques obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-2-3 e restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	136
Ap.34	Ações de controle das entradas manipuladas do sistema dos 3 tanques obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-3-2 e restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	137
Ap.35	Dinâmicas das saídas controladas do sistema dos 3 tanques obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-3-1 e restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	138
Ap.36	Ações de controle das entradas manipuladas do sistema dos 3 tanques obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-3-1 e restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	139
Ap.37	Dinâmicas das saídas controladas do sistema dos 3 tanques obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-1-2 e restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	140
Ap.38	Ações de controle das entradas manipuladas do sistema dos 3 tanques obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-1-2 e restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	141

Ap.39	Dinâmicas das saídas controladas do sistema dos 3 tanques obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-2-1 e restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	142
Ap.40	Ações de controle das entradas manipuladas do sistema dos 3 tanques obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-2-1 e restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	143
Ap.41	Dinâmicas das saídas controladas $y_1$ e $y_2$ obtidas pelo controle centralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-1 e restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	144
Ap.42	Ações de controle das entradas manipuladas $u_1$ e $u_2$ obtidas pelo controle centralizado e DMPC utilizando partição com ordem 2-1 e restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	145
An.1	Processo de geração dos novos vetores da ED para uma função objetivo bidimensional. . . . .	153

# Lista de Tabelas

1.1	Algumas aplicações de MPC lineares em diversos tipos de indústria (adaptado de Qin e Badgwell (2003)). . . . .	3
3.1	Valores dos índices ITAE para as saídas controladas $y_1$ e $y_2$ do processo do estudo de caso #1 para DMPCs com ordem 2-1. . . . .	43
3.2	Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas $u_1$ e $u_2$ do processo do estudo de caso #1 para DMPCs com ordem 2-1. . . . .	44
3.3	Valores dos índices globais $I_y$ do processo do estudo de caso #1 e desempenho dos DMPCs com ordem 2-1. . . . .	44
3.4	Valores dos índices globais $I_u$ do processo do estudo de caso #1 e desempenho dos DMPCs com ordem 2-1. . . . .	44
3.5	Valores dos índices ITAE para as saídas controladas $y_1$ e $y_2$ do processo do estudo de caso #1 para DMPCs com ordem 2-1 e restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	48
3.6	Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas $u_1$ e $u_2$ do processo do estudo de caso #1 para DMPCs com ordem 1-2 e restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	48
3.7	Valores dos índices globais $I_y$ do processo do estudo de caso #1 e desempenho dos DMPCs com ordem 2-1 e com restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	48
3.8	Valores dos índices globais $I_u$ do processo do estudo de caso #1 e desempenho dos DMPCs com ordem 2-1 e com restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	48
3.9	Valores dos índices ITAE para as saídas controladas $y_1$ e $y_2$ do processo do estudo de caso #1 para DMPCs com estrutura em paralelo. . . . .	51
3.10	Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas $u_1$ e $u_2$ do processo do estudo de caso #1 para DMPCs com estrutura em paralelo. . . . .	52
3.11	Valores dos índices globais $I_y$ do processo do estudo de caso #1 e desempenho dos DMPCs com estrutura em paralelo. . . . .	52
3.12	Valores dos índices globais $I_u$ do processo do estudo de caso #1 e desempenho dos DMPCs com estrutura em paralelo. . . . .	52
3.13	Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-1-3. . . . .	59
3.14	Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-1-3. . . . .	59
3.15	Valores dos índices globais $I_y$ do modelo do estudo de caso #2 e desempenho do DMPC com ordem 2-1-3. . . . .	60
3.16	Valores dos índices globais $I_u$ do modelo do estudo de caso #2 e desempenho do DMPC com ordem 1-2-3. . . . .	60

3.17	Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 com restrições nas variáveis manipuladas para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-1-3. . . . .	63
3.18	Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 com restrições nas variáveis manipuladas para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-1-3. . . . .	64
3.19	Valores dos índices globais $I_y$ do modelo do estudo de caso #2 com restrições nas variáveis manipuladas e desempenho do DMPC com ordem 2-1-3. . . . .	64
3.20	Valores dos índices globais $I_u$ do modelo do estudo de caso #2 com restrições nas variáveis manipuladas e desempenho do DMPC com ordem 1-2-3. . . . .	65
3.21	Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com estrutura em paralelo. . . . .	66
3.22	Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com estrutura em paralelo. . . . .	67
3.23	Valores dos índices globais $I_y$ do modelo do estudo de caso #2 e desempenho do DMPC com estrutura em paralelo. . . . .	67
3.24	Valores dos índices globais $I_u$ do modelo do estudo de caso #2 e desempenho do DMPC com estrutura em paralelo. . . . .	68
3.25	Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do sistema dos 3 tanques para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-1-3 e com restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	73
3.26	Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do sistema dos 3 tanques para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-1-3 e com restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	74
3.27	Valores dos índices globais $I_y$ do sistema dos 3 tanques e desempenho do DMPC com ordem 2-1-3 e com restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	74
3.28	Valores dos índices globais $I_u$ do sistema dos 3 tanques e desempenho do DMPC com ordem 2-1-3 e com restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	74
3.29	Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do sistema dos 3 tanques para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com estrutura em paralelo e com restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	76
3.30	Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do sistema dos 3 tanques para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com estrutura em paralelo e com restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	77
3.31	Valores dos índices globais $I_y$ do sistema dos 3 tanques e desempenho do DMPC com estrutura em paralelo e com restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	77

3.32	Valores dos índices globais $I_u$ do sistema dos 3 tanques e desempenho do DMPC com estrutura em paralelo e com restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	77
3.33	Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do sistema industrial de moagem de minério para o controle centralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-2 e com restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	83
3.34	Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do sistema industrial de moagem de minério para o controle centralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-2 e com restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	83
3.35	Valores dos índices globais $I_y$ do sistema industrial de moagem de minério e desempenho do DMPC com ordem 1-2 e com restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	83
3.36	Valores dos índices globais $I_u$ do sistema industrial de moagem de minério e desempenho do DMPC com ordem 1-2 e com restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	84
3.37	Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do sistema industrial de moagem de minério para o controle centralizado e DMPC utilizando partição proposta com estrutura em paralelo e com restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	86
3.38	Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do sistema industrial de moagem de minério para o controle centralizado e DMPC utilizando partição proposta com estrutura em paralelo e com restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	86
3.39	Valores dos índices globais $I_y$ do sistema industrial de moagem de minério e desempenho do DMPC com estrutura em paralelo e com restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	86
3.40	Valores dos índices globais $I_u$ do sistema industrial de moagem de minério e desempenho do DMPC com estrutura em paralelo e com restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	86
Ap.1	Etapa 1 do Algoritmo da proposta de partição de sistemas. . . . .	105
Ap.2	Etapa 2 do Algoritmo da proposta de partição de sistemas. . . . .	106
Ap.3	Etapa 3 do Algoritmo da proposta de partição de sistemas. . . . .	106
Ap.4	Etapa 4 do Algoritmo da proposta de partição de sistema. . . . .	106
Ap.5	Algoritmo da proposta de partição de sistemas. . . . .	106
Ap.6	Valores dos índices ITAE para as saídas controladas $y_1$ e $y_2$ do processo do estudo de caso #1 para DMPCs com ordem 1-2. . . . .	120
Ap.7	Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas $u_1$ e $u_2$ do processo do estudo de caso #1 para DMPCs com ordem 1-2. . . . .	121
Ap.8	Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 para controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-2-3. . . . .	122
Ap.9	Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 para controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-2-3. . . . .	122

Ap.10	Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 para controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-3-2. . . . .	125
Ap.11	Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 para controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-3-2. . . . .	125
Ap.12	Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 para controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-3-1. . . . .	128
Ap.13	Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 para controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-3-1. . . . .	128
Ap.14	Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 para controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-1-2. . . . .	129
Ap.15	Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 para controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-1-2. . . . .	130
Ap.16	Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 para controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-2-1. . . . .	132
Ap.17	Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 para controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-2-1. . . . .	133
Ap.18	Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do sistema dos 3 tanques para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-2-3 e restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	134
Ap.19	Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do sistema dos 3 tanques para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-2-3 e restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	135
Ap.20	Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do sistema dos 3 tanques para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-3-2 e restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	136
Ap.21	Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do sistema dos 3 tanques para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-3-2 e restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	137
Ap.22	Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do sistema dos 3 tanques para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-3-1 e restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	139
Ap.23	Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do sistema dos 3 tanques para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-3-1 e restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	139



Ap.24	Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do sistema dos 3 tanques para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-1-2 e restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	141
Ap.25	Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do sistema dos 3 tanques para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-1-2 e restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	141
Ap.26	Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do sistema dos 3 tanques para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-2-1 e restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	143
Ap.27	Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do sistema dos 3 tanques para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-2-1 e restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	143
Ap.28	Valores dos índices ITAE para as saídas controladas $y_1$ e $y_2$ do sistema industrial de moagem de minério para controle centralizado e DMPC com ordem 2-1 e restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	145
Ap.29	Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas $u_1$ e $u_2$ do sistema industrial de moagem de minério para controle centralizado e DMPC com ordem 2-1 e restrições nas variáveis manipuladas. . . . .	145



---

# LISTA DE ABREVIATURAS

**DCS** - *Distributed Control Systems*, Sistemas de Controle Distribuído

**DDKF** - *Distributed and Decentralized Kalman Filter*, Filtro Distribuído e Descentralizado de Kalman

**DMC** - *Dynamic Matrix Control*, Controle por Matriz Dinâmica

**DMPC** - *Distributed Model Predictive Control*, Controle Preditivo Distribuído baseado em Modelo

**ED** - *Differential Evolution*, Evolução Diferencial

**HIECON** - *Hierarchical Constraint Control*

**IAE** - *Integral of Absolute Error*, Integral do erro absoluto

**IDCOM** - *Identification and Command*

**IDCOM-M** - *Multivariable Identification and Command*

**IHMPC** - *Infinite Horizon Model Predictive Control*, Controle Preditivo baseado em Modelo com Horizonte Infinito

**ITAE** - *Integral of Time multiply Absolute Error*, Integral do erro absoluto ponderado pelo tempo

**LBT** - *Lower Block Triangular*, Bloco Triangular Inferior

**LMI** - *Linear Matrix Inequalities*, Inequações Matriciais Lineares

**LQG** - *Linear Quadratic Gaussian*

**MBP** - *Model Based Control*, Controle baseado em Modelo

**MPC** - *Model Predictive Control*, Controle Preditivo baseado em Modelo

**MPHC** - *Model Predictive Heuristic Control*, Controle Heurístico Preditivo baseado em Modelo

**PCT** - *Predictive Control Technology*

**PFC** - *Predictive Functional Control*

**PID** - *Proportional-Integral-Derivative*, Proporcional-Integral-Derivativo

**QDMC** - *Quadratic Dynamic Matrix Control*, Controle por Matriz Dinâmica Quadrática

**QP** - *Quadratic Programming*, Programação Quadrática

**RMPC** - *Robust Model Predictive Control*

**RMPCT** - *Robust Model Predictive Control Technology*

**SIMO** - *Single Input Multiple Output*, Única Entrada e Única saída

**SMCA** - *Setpoint Multivariable Control Architecture*

**SMOC** - *Shell Multivariable Optimizing Controller*

---

# SIMBOLOGIA

$\mathbf{A}$  - Matriz dos estados na representação em espaço de estados

$\mathbf{A}_{ii}$  - Matriz dos estados na representação em espaço de estados do subsistema  $i$

$\mathbf{B}$  - Matriz das entradas na representação em espaço de estados

$\mathbf{B}_{ii}$  - Matriz das entradas na representação em espaço de estados do subsistema  $i$

$\mathbf{C}$  - Matriz das saídas controladas na representação em espaço de estados

$\mathbf{C}_{ii}$  - Matriz das saídas controladas na representação em espaço de estados do subsistema  $i$

$H_p$  - Horizonte de predição

$H_u$  - Horizonte de controle

$H_w$  - Atraso do sistema

$H_{p_i}$  - Horizonte de predição do subsistema  $i$

$H_{u_i}$  - Horizonte de controle do subsistema  $i$

$H_{w_i}$  - Atraso do subsistema  $i$

$n$  - Número de estados do sistema

$n_i$  - Número de estados do subsistema  $i$

$m$  - Número de entradas do sistema

$m_i$  - Número de entradas do subsistema  $i$

$M$  - Número de subsistemas

$\mathbf{x}$  - Vetor dos estados do sistema

$\mathbf{x}_i$  - Vetor dos estados do subsistema  $i$

$\mathbf{u}$  - Vetor das entradas ou variáveis manipuladas do sistema

$\mathbf{u}_i$  - Vetor das entradas ou variáveis manipuladas do subsistema  $i$

$\mathbf{y}$  - Vetor das saídas controladas do sistema

$\mathbf{y}_i$  - Vetor das saídas controladas do subsistema  $i$

$k$  - Instante de tempo no domínio discreto

$V$  - Função objetivo do controle centralizado

$V_i$  - Função objetido do controlador do subsistema  $i$

$\mathbf{r}$  - Vetor de referência para as saídas controladas (*set-point*)

$\mathbf{r}_i$  - Vetor de referência para as saídas controladas (*set-point*) do subsistema  $i$

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>ix</b>
<b>Abstract</b>	<b>xi</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>xiii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xix</b>
<b>Lista de Abreviaturas</b>	<b>xxv</b>
<b>Simbologia</b>	<b>xxvii</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Controle Preditivo Distribuído</b>	<b>5</b>
2.1 Controle Preditivo Baseado em Modelo (MPC) . . . . .	5
2.1.1 Modelo para predição . . . . .	6
2.1.2 Função objetivo . . . . .	7
2.1.3 Estratégia do horizonte móvel . . . . .	9
2.1.4 Breve histórico do MPC industrial . . . . .	10
2.2 Controle Preditivo Distribuído . . . . .	13
2.2.1 Controle Descentralizado . . . . .	16
2.2.2 Controle Distribuído . . . . .	21
2.3 Decomposição de sistema lineares - estado da arte . . . . .	25
<b>3 Uma proposta para MPC distribuído de Sistemas Lineares</b>	<b>31</b>
3.1 Partição proposta . . . . .	31
3.1.1 Formulação do Problema . . . . .	31
3.1.2 Projeto do MPC distribuído . . . . .	33
3.2 Aplicações do MPC Distribuído Proposto . . . . .	37
3.2.1 Estudo de caso #1 (ZHANG; WANG, 2012) . . . . .	38
3.2.2 Estudo de caso #2 . . . . .	52
3.2.3 Estudo de caso #3: Sistema de 3 tanques . . . . .	68
3.2.4 Estudo de caso #4: Sistema industrial de moagem de minério . . . . .	77
<b>4 Análise do Algoritmo de Controle Distribuído</b>	<b>87</b>
4.1 Estabilidade de Sistemas: Aspectos Básicos . . . . .	87
4.2 LMI - Inequações Matriciais Lineares . . . . .	88
4.3 Estabilidade do Controlador MPC Distribuído Proposto . . . . .	89
4.3.1 Avaliação de estabilidade de problemas não restritos com a partição proposta. . . . .	92

<b>5</b>	<b>Conclusões e Sugestões</b>	<b>97</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>99</b>
	<b>Apêndices</b>	<b>105</b>
A	Algoritmo da Proposta de Decomposição de Sistemas . . . . .	105
B	Etapas da geração dos subsistemas pela partição proposta . . . . .	107
C	Resultados adicionais das simulações . . . . .	119
C.1	Estudo de caso #1 (ZHANG; WANG, 2012) . . . . .	119
C.2	Estudo de caso #2 . . . . .	121
C.3	Estudo de caso # 3: Sistema de 3 tanques . . . . .	132
C.4	Estudo de caso #4: Sistema industrial de moagem de minério . . . .	143
	<b>Anexos</b>	<b>147</b>
A	Teoria dos Grafos . . . . .	147
B	Modelo de Predição com Perturbações . . . . .	148
C	Evolução Diferencial . . . . .	152



---

---

# CAPÍTULO 1

---

## Introdução



Seu objetivo básico do sistema de controle numa planta industrial é o de estabilizar o comportamento da planta, rejeitar perturbações e garantir que as condições operacionais desejadas estejam dentro de um desempenho projetado através da coordenação das várias interações existentes nos subsistemas que compõem a mesma. Os subsistemas de uma planta são em geral projetados de forma independente ou adicionados posteriormente com a evolução da planta. Essas alterações em geral ocorrem motivadas por exigências de produção ou por regulamentação ambiental. Os subsistemas são ligados através de uma rede de fluxo de material, de energia e/ou de informação. Essas ligações às vezes são necessárias para reaproveitamento de material (reprocessamento) e/ou para integração energética (STEWART et al., 2010).

Rede de sistemas de controle é uma tecnologia que possui um campo vasto de aplicações devido a sua relevância na solução de problemas de natureza bem diversa, variando desde a otimização do fluxo de dados na internet até a operação de plantas químicas de elevada dimensão. No que se refere a aplicações em plantas químicas, alguns aspectos elevam a importância dessa abordagem devido ao fato que as plantas químicas em geral possuem grande interação entre as suas unidades, características de redes com subunidades bem diversas até formando redes com topologias heterogêneas.

Existem três tipos de estratégias de controle: o controle centralizado, o controle descentralizado e o controle distribuído. A maioria das grandes plantas químicas emprega o

controle descentralizado como estratégia de controle (SCATTOLINI, 2009). Mas, para subsistemas com fortes interações, essa estratégia pode levar a um desempenho não aceitável. Por outro lado, o controle centralizado é capaz de abordar o problema das interações de forma ótima, mas com custos estruturais e organizacionais elevados, tornando tal estrutura de complexa atualização e manutenção. Uma estrutura que preserva a topologia e flexibilidade do controle descentralizado ao tempo que oferece propriedades de estabilidade é o controle distribuído. Nessa estrutura de controle, as interações entre os subsistemas são modeladas e as informações entre os subsistemas são compartilhadas entre os mesmos.

Na topologia de controle distribuído clássico, cada unidade distribuída contém um microcontrolador para aquisição de dados e ações de controle (STOLEN, 1999). As unidades são interligadas por uma rede para que haja troca de informações e o processamento é dividido por unidades independentes. Um sistema de controle distribuído apresenta várias vantagens, dentre elas destacam-se (JOTA, 1987):

- descentralização do controle (aumento da tolerância à falha, ou seja, a falha de uma estação não acarretará necessariamente a falha em todo o sistema de controle);
- maior flexibilidade na inserção e retirada de elementos (a expansibilidade e a redução do sistema se tornam mais fáceis e econômicas devido à sua característica modular).

Diferentemente do controle *feedback* clássico PID (do inglês, *Proportional-Integral-Derivative*), em que o controlador atua sobre os erros para calcular as ações de controle, o controle baseado em modelo (MBC, do inglês *Model Based Control*) é uma técnica de controle que utiliza diretamente um modelo do processo para calcular essas ações. Entre as técnicas MBC, a que vem sendo mais utilizada na indústria de processos é o controle preditivo baseado em modelo (MPC, do inglês, *Model Predictive Control*). A Tabela (1.1) apresenta exemplos de aplicações de MPC lineares em diversos tipos de indústrias. A Tabela (1.1) mostra ainda que a técnica MPC linear também é utilizada em problemas de grande dimensão, sendo o maior deles com 603 variáveis controladas e 283 variáveis manipuladas.

O MPC é um método geral especialmente adequado para problemas de controle multi-variável com restrições e, em que existem interações significativas entre as entradas manipuladas e as saídas controladas. Diferentemente de outras estratégias de controle baseado em modelo, o MPC formula explicitamente restrições de desigualdade nas variáveis manipuladas e controladas, tais como limites inferior e superior ou limites de incrementos nessas variáveis. As ações de controle do MPC são calculadas baseadas num problema de otimização em relação ao desempenho projetado. Então, o MPC pode ser prontamente integrado com estratégias de otimização em linha para otimizar o desempenho da planta.

**Tabela 1.1:** Algumas aplicações de MPC lineares em diversos tipos de industria (adaptado de Qin e Badgwell (2003)).

Área	<i>Aspen Technology</i>	<i>Honeywell Hi-Spec</i>	<i>Invensys</i>
Refinaria	1200	480	28
Petroquímica	450	80	20
Química	100	20	21
Papel e Celulose	18	-	-
Utilidades	-	-	4
Mineração/Metalurgia	8	7	16
Alimentos	-	-	10
Fornos	-	-	3
Não classificados	40	40	26
Maior aplicação	$603 \times 283$	$225 \times 85$	$31 \times 12$

Além disso, essa estratégia de controle pode ser facilmente atualizada em linha para compensar mudanças nas condições do processo, restrições e/ou critério de desempenho.

Além dos aspectos salientados anteriormente, os sistemas modernos de controle distribuído (DCS, do inglês *Distributed Control Systems*) já possuem a estrutura de rede que permite a implementação de algoritmos de controle para uma estratégia vertical (baseada numa escala de tempo ou tarefas) e horizontal (o controle de plantas inteiras). Assim, como a opção preferencial para trabalhar com o controle de processos químicos com restrição e de elevada dimensão é o controle preditivo baseado em modelo (MPC), essa é a opção que será usada nesse trabalho para o estudo de algoritmos de controle distribuído.

Neste contexto, o objetivo desta dissertação é desenvolver uma nova estratégia de controle preditivo distribuído para sistemas lineares, desenvolvendo-se uma nova forma de decomposição de sistemas para aplicação em controle distribuído e comparando-a com outras estratégias de controle disponíveis (centralizada e descentralizada). Além disso, a avaliação da estabilidade da estratégia desenvolvida é outro foco deste trabalho.

A estrutura básica desta dissertação possui a seguinte forma: O Capítulo 2 apresenta aspectos gerais e breve histórico do MPC. Também faz referência às principais características e estruturadas de controle descentralizado e controle distribuído. Além disso, apresenta alguns métodos de decomposição de sistemas lineares presentes na literatura. O Capítulo 3 apresenta a proposta de MPC distribuído e os resultados de aplicações da técnica desenvolvida em 4 estudos de caso. A metodologia desenvolvida é comparada com outras estratégias de controle e índices de desempenho são utilizados para selecionar a melhor técnica. Por fim, no Capítulo 4 apresentam-se as conclusões e as sugestões para trabalhos futuros.



---

---

# CAPÍTULO 2

---

## Controle Preditivo Distribuído



Neste capítulo é apresentada uma discussão sobre o Controle Preditivo Distribuído, enfatizando as metodologias existentes e as suas aplicações reportadas na literatura. Primeiramente, é apresentada a fundamentação básica da teoria envolvida no Controle Preditivo baseado em Modelo, bem como um breve histórico do desenvolvimento desta técnica, e em seguida apresenta-se uma avaliação das metodologias de MPC distribuídos existentes.

### 2.1 Controle Preditivo Baseado em Modelo (MPC)

O controle preditivo baseado em modelo (MPC) foi proposto pela primeira vez no âmbito industrial, durante a década de 1970 e se desenvolveu de forma considerável desde então (CAMACHO; BORDONS, 2004; MAYNE et al., 2000; NIKOLAOU, 2001; SAFFER II; DOYLE III, 2004; MACIEJOWSKI, 2002; RAWLINGS; MAYNE, 2009). O seu surgimento se deve ao objetivo das indústrias em realizar operações cada vez mais rentáveis, ou seja, atingir índices cada vez mais elevados de qualidade, consumindo energia de forma eficiente, respeitando as leis ambientais e satisfazendo as altas demandas comerciais. Atingir esses objetivos por meio de um sistema de controle tradicional (como por exemplo, um controlador *feedback* PID) é praticamente inviável em certos casos. Atualmente, pode-se afirmar que o MPC é a estratégia de controle multivariável mais aplicada nas indústrias de processos químicos

e de outras áreas.

O MPC é adequado para quase todo tipo de problema, exibindo grande aplicabilidade em problemas que apresentam:

- um grande número de variáveis manipuladas e controladas;
- restrições impostas às variáveis manipuladas e controladas;
- mudanças nos objetivos de controle;
- falhas em equipamentos (sensores/atuadores);
- atrasos no processo.

Os controladores preditivos caracterizam-se por utilizar previsões do comportamento futuro do sistema controlado para realizar o cálculo da lei ótima de controle, com base em um determinado critério de desempenho determinístico ou estocástico. As previsões são obtidas através de um modelo do sistema. A diferença entre as classes de controladores preditivos está basicamente no tipo de modelo adotado.

O controle preditivo baseado em modelo não é uma técnica única, mas um conjunto de métodos de controle que se baseiam em algumas ideias comuns:

- utilizam um modelo explícito do processo para prever a saída do mesmo num determinado horizonte;
- calculam as ações de controle para o horizonte projetado a partir da minimização de uma determinada função objetivo;
- o horizonte é móvel: em cada período de amostragem o horizonte é deslocado um passo para frente, aplica-se a ação de controle unicamente naquele instante e desconsidera-se o restante das ações dentro do horizonte.

Cada um dos aspectos acima será explorado em maiores detalhes nas próximas seções. O modelo para predição das saídas do processo, será o primeiro tema abordado.

### 2.1.1 Modelo para predição

Os cálculos das ações de controle são baseados em medições atuais e previsões dos valores futuros das saídas. As previsões são feitas utilizando um modelo dinâmico, tipicamente um modelo linear empírico como o modelo de resposta ao degrau ou modelos de equações

de diferença. Alternativamente, as funções de transferências e os modelos em espaço de estado podem ser empregados. Para processos muito não lineares, pode ser vantajoso prever os valores futuros das saídas utilizando um modelo não linear dinâmico. Tanto os modelos físicos como os empíricos, tais como redes neurais, têm sido utilizados em abordagens de MPC não lineares.

No presente trabalho, optou-se por utilizar o modelo do processo em espaço de estados na sua forma discreta. Assim, tem-se:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k) \quad (2.2)$$

em que  $\hat{\mathbf{x}}$  representa o vetor  $n$ -dimensional contendo os estados preditos do processo;  $\hat{\mathbf{u}}$ , o vetor  $m$ -dimensional das entradas preditas e  $\hat{\mathbf{y}}$ , o vetor  $l$ -dimensional das saídas controladas.

Este modelo pode ser escrito de outra forma, de tal maneira que represente o comportamento do sistema em qualquer instante de amostragem quando tem-se horizontes de predição ( $H_p$ ) e de controle ( $H_u$ ). Assim:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1+h|k) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k+h|k) + \mathbf{B}\hat{\mathbf{u}}(k+h|k), \quad h = 0, 1, 2, \dots, H_p - 1 \quad (2.3)$$

$$\hat{\mathbf{y}}(k+h|k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k+h|k) \quad (2.4)$$

em que,  $\hat{\mathbf{x}}(k+1+h|k)$  representa o estado  $\hat{\mathbf{x}}$  obtido em um instante de amostragem qualquer quando  $h$  assume qualquer valor entre 0 e  $H_p$ . Desta forma, são realizadas  $H_p$  predições do comportamento do processo em cada instante de amostragem  $k$ .

O próximo aspecto do MPC a ser considerado será a função objetivo utilizada no problema de otimização.

### 2.1.2 Função objetivo

Como apresentado anteriormente, o controlador MPC refere-se a um problema de otimização, e sua formulação baseia-se:

- numa função objetivo em termos das variáveis de decisão do processo, que pode representar o lucro, a produção, os custos, o consumo de energia, etc;
- no modelo do processo, podendo ser o modelo fenomenológico do processo, ou seu modelo empírico;

- restrições impostas as variáveis do processo, tais como os limites superior e inferior de funcionamento dos atuadores.

De uma forma geral, é usual se definir a função objetivo como a norma quadrática do termo de erro em relação a trajetória desejada e o termo de movimento do controladores, assim:

$$V(k) = \sum_{i=H_w}^{H_p} \|\hat{\mathbf{y}}(k+i|k) - \mathbf{r}(k+i|k)\|_{\mathbf{Q}(i)}^2 + \sum_{i=0}^{H_u-1} \|\Delta \hat{\mathbf{u}}(k+i|k)\|_{\mathbf{R}(i)}^2 \quad (2.5)$$

sendo  $H_w$  o atraso do processo,  $H_p$  o horizonte de predição e  $H_u$  o horizonte de controle.  $\mathbf{Q}(i)$  é uma matriz de ponderação simétrica positiva definida para as saídas  $\hat{\mathbf{y}}(k+i|k)$  e  $\mathbf{R}(i)$  é uma matriz simétrica positiva semi-definida para as taxas de mudança das entradas manipuladas  $\Delta \hat{\mathbf{u}}(k+i|k)$ .

A função objetivo  $V$  penaliza desvios das saídas previstas e controladas  $\hat{\mathbf{y}}(k+i|k)$  a partir de um vetor da trajetória de referência  $\mathbf{r}(k+i|k)$ . Se houver algum atraso entre a aplicação da entrada e seu efeito na saída, ou seja,  $H_w > 1$ , a função objetivo apenas penalizará os desvios entre  $\hat{\mathbf{y}}$  e  $\mathbf{r}$  a partir de  $H_w$ . Supõe-se que  $H_u \leq H_p$  e que  $\Delta \hat{\mathbf{u}}(k+i|k) = 0$  para  $i \geq H_u$ , de modo que  $\hat{\mathbf{u}}(k+i|k) = \hat{\mathbf{u}}(k+H_u-i|k)$  para todo  $i \geq H_u$ . A Equação (2.5) só penaliza mudanças no vetor de entrada, mas não o seu valor. Em alguns casos, um termo do tipo  $\sum \|\hat{\mathbf{u}}(k+i|k) - \mathbf{u}_0\|_{\mathbf{S}(i)}^2$  é adicionado, o que penaliza os desvios do vetor de entrada de algum valor ideal ( $\mathbf{u}_0$ ).

Os horizontes de predição  $H_p$  e de controle  $H_u$ , o atraso do processo  $H_w$ , os pesos  $\mathbf{Q}(i)$  e  $\mathbf{R}(i)$ , e a trajetória de referência  $\mathbf{r}(k+i|k)$  afetam o comportamento da planta em malha fechada e a previsão do controlador. Além disso, o problema de otimização do controle preditivo baseado em modelo pode apresentar restrições. Neste trabalho, as restrições consideradas estão atuando sobre as entradas e saídas do processo, definidas da seguinte forma:

$$\mathbf{u}_{min}(k) \leq \mathbf{u}(k+h|k) \leq \mathbf{u}_{max}(k), \quad h = 0, 1, \dots, H_u - 1 \quad (2.6)$$

$$\Delta \mathbf{u}_{min}(k) \leq \Delta \mathbf{u}(k+h|k) \leq \Delta \mathbf{u}_{max}(k), \quad h = 0, 1, \dots, H_u - 1 \quad (2.7)$$

$$\mathbf{y}_{min}(k+h) \leq \hat{\mathbf{y}}(k+h|k) \leq \mathbf{y}_{max}(k+h), \quad h = 1, 2, \dots, H_p \quad (2.8)$$

As restrições tornam o problema de otimização a ser resolvido mais complexo, podendo algumas vezes torná-lo inviável. As restrições que mais inviabilizam um problema de otimização deste tipo são as aquelas impostas sobre as saídas controladas. Portanto, em alguns casos é necessário o abrandamento destas restrições com a introdução de variáveis

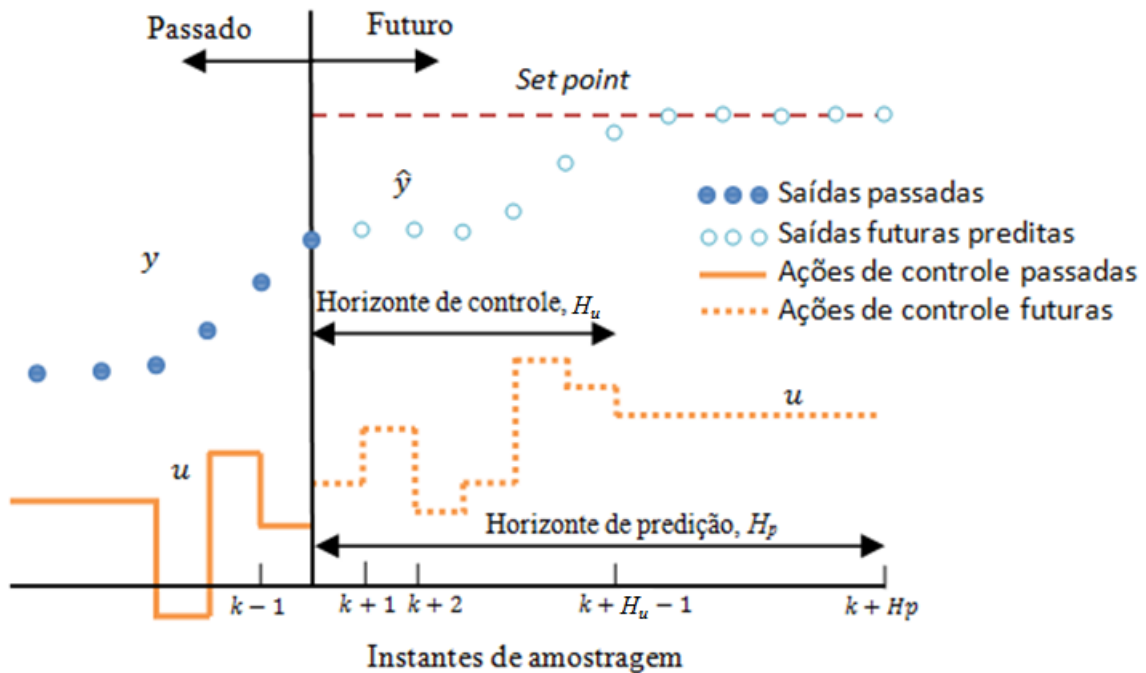


folga.

Na próxima seção aborda-se o aspecto do horizonte móvel, característica importante do controle preditivo baseado em modelo.

### 2.1.3 Estratégia do horizonte móvel

O objetivo do MPC é determinar uma sequência de ações do controlador, de modo que a resposta prevista se aproxime do *set-point*. A saída atual  $y$  real, a saída predita  $\hat{y}$  e a entrada manipulada  $u$  são mostradas na Figura (2.1). No instante atual de amostragem, denotado por  $k$ , a estratégia de MPC é calcular um conjunto de  $H_u$  valores para as entradas  $[u(k+i-1), i = 1, 2, \dots, H_u]$ . O conjunto consiste nas entradas atuais  $u(k)$ , e  $u(k+H_u-1)$  entradas futuras. A entrada é mantida constante após  $H_u$  ações de controle. As entradas são calculadas de modo que o conjunto de  $H_p$  saídas preditas  $[\hat{y}(k+i), i = 1, 2, \dots, H_p]$  atinga o ponto desejado de forma ideal. Como já dito anteriormente, os cálculos de controle são baseados na otimização de uma função objetivo.



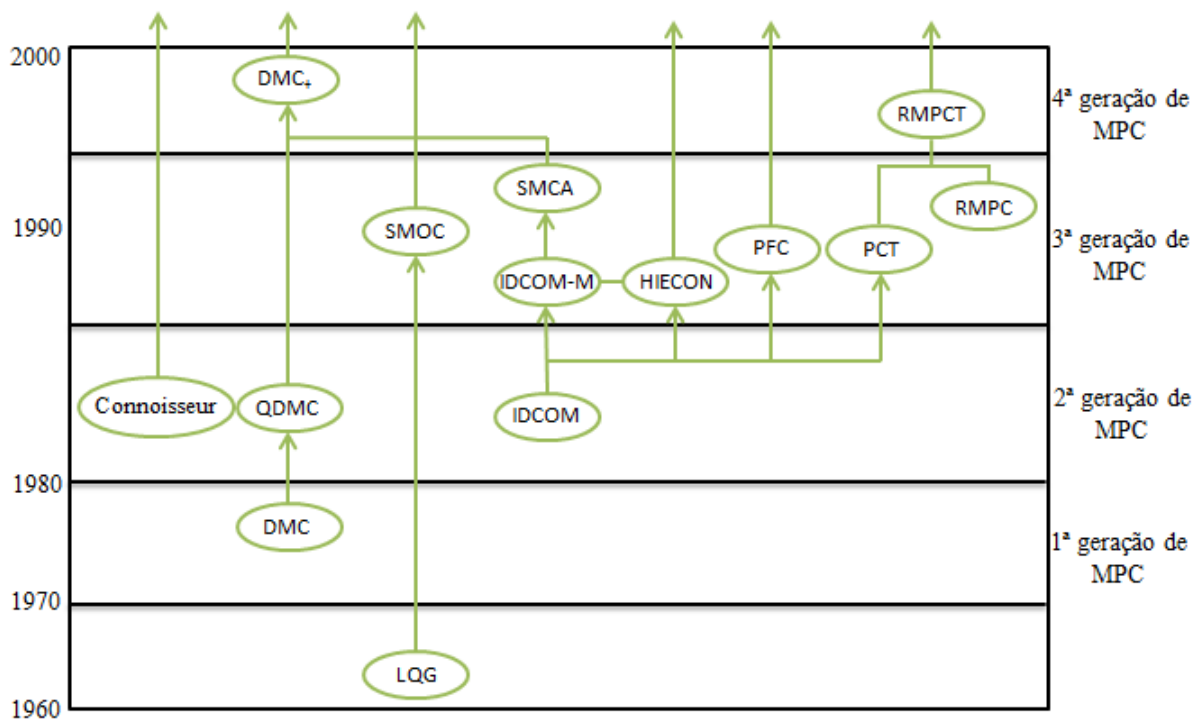
**Figura 2.1:** Horizonte móvel do controle preditivo baseado em modelo (adaptado de Seborg et al. (2004)).

Uma característica distinta do MPC consiste na teoria do horizonte móvel. Apesar de uma sequência  $H_u$  de ações de controle ser calculada a cada instante de amostragem, apenas a primeira ação é de fato implementada. Em seguida, uma nova sequência é calculada no instante de amostragem seguinte, quando novas medições advindas da planta estão disponíveis. Este procedimento é repetido em cada instante de amostragem.

Na próxima seção apresenta-se uma breve história do MPC no âmbito industrial, citando os principais algoritmos desenvolvidos.

### 2.1.4 Breve histórico do MPC industrial

Qin e Badgwell (2003) apresentam um breve histórico da tecnologia do MPC aplicada na indústria. Algumas passagens aqui apresentadas fazem referência a este trabalho. A Figura (2.2) mostra o processo evolutivo dos mais importantes algoritmos de MPC do âmbito industrial, ilustrando as conexões envolvidas.



**Figura 2.2:** Genealogia aproximada para algoritmos de MPC lineares (adaptado de Qin e Badgwell (2003)).

A primeira geração de MPC surgiu nos anos 1970, quando a primeira aplicação industrial foi desenvolvida por Richalet et al. (1978), sendo esta estratégia conhecida como MPHC (*Model Predictive Heuristic Control*). Este trabalho resultou no *software* IDCOM (acrônimo de *Identification and Command*). As principais características deste *software* são:

- modelo linear de resposta ao impulso, como modelo de predição da planta;
- função objetivo do tipo quadrática, sujeita a um horizonte de predição finito;
- comportamento futuro das saídas especificado por trajetórias de referência;

- restrições nas entradas e saídas incluídas na formulação;
- ações de controle ótimas calculadas usando um algoritmo heurístico iterativo.

Paralelamente, Cutler e Ramaker (1979), engenheiros da *Shell Oil*, desenvolveram independentemente de Richalet et al. (1978) o seu MPC, ao qual deram o nome de DMC (*Dynamic Matrix Control*). As principais características do DMC são:

- modelo linear de resposta ao degrau (modelo de convolução), como modelo de predição da planta;
- função objetivo quadrática sujeita a um horizonte de predição finito;
- saídas futuras da planta são especificadas para rastreamento do *set-point*;
- ações de controle ótimas calculadas como solução de um problema de mínimos quadrados.

Os algoritmos IDCOM e DMC marcaram a primeira geração de MPC. Eles tiveram grande impacto no controle de processos industriais e serviram para definir o paradigma inicial do MPC industrial. A dificuldade que os controladores IDCOM e DMC tinham de incorporar restrições do processo aos problemas de controle levou ao surgimento da segunda geração de controladores preditivos.

O algoritmo QDMC (*Quadratic Dynamic Matrix Control*) desenvolvido por Garcia et al. (1986) pode ser considerado representante da segunda geração de tecnologia MPC, caracterizado por desenvolver sistematicamente uma forma de programar restrições nas entradas e saídas, função não realizada pelos algoritmos anteriores. Essa formulação aperfeiçoa o MPC na medida em que posiciona o problema de controle como um problema de otimização quadrática (QP), cuja solução pode ser obtida, eficientemente, por códigos de QP disponíveis. Além disso, nesta abordagem, foi introduzido o conceito de controle por faixas, em que o processo é controlado através de uma janela de operação. As principais características deste algoritmo são:

- modelo linear de resposta ao degrau, como modelo de predição da planta;
- função objetivo quadrática sujeita a um horizonte de predição finito;
- saídas futuras da planta são especificadas para rastreamento de *set-point*, submetido à um fator de supressão de movimentos nas variáveis manipuladas;
- entradas ótimas são calculadas como solução de um problema de programação quadrática.

À medida que a tecnologia MPC foi sendo mais utilizada, e os problemas a serem resolvidos por ela tornaram-se maiores e mais complexos, novas deficiências foram sendo percebidas pelos engenheiros de controle. O algoritmo QDMC provia uma forma sistemática de incorporar fortes restrições nas entradas e saídas, mas não havia uma forma clara para lidar com soluções inviáveis. Foi, também, se tornando cada vez mais difícil a tradução das especificações de controle em pesos relativos para uma única função objetivo. Mesmo quando um conjunto de pesos relativos podia ser encontrado, era preciso ter cuidado para se evitar problemas com soluções mal condicionadas.

Estes problemas motivaram engenheiros da *Adersa*, *Setpoint Inc.* e *Shell* a desenvolverem um novo algoritmo MPC. A versão disponível pela *Setpoint* foi chamada IDCOM-M e apresentada em 1988, enquanto a versão praticamente idêntica da *Adersa* era referenciada como *Hierarchical Constraint Control* (HIECON). As principais características do IDCOM-M e HIECON são:

- modelo linear de resposta ao impulso como modelo de predição da planta;
- supervisor de controlabilidade que verifica os subconjuntos mal condicionados da planta;
- função objetivo quadrática para as saídas e entradas;
- controle de um conjunto de pontos futuros para cada saída, escolhido a partir da trajetória de referência;
- um único movimento é calculado para cada entrada;
- as restrições podem ser *hard* ou *soft*, sendo as *hard* classificadas por ordem de prioridade.

No final dos anos 1980, engenheiros da *Shell Research* na França desenvolveram o *Shell Multivariable Optimizing Controller* (SMOC) o qual foi descrito como uma ponte entre o espaço de estados e os algoritmos MPC. Eles pretendiam combinar as características de gerenciamento de restrições do MPC com a rica base de métodos de controle por realimentação do espaço de estados. O algoritmo SMOC inclui várias características que são agora consideradas essenciais nos MPC atuais:

- modelos em espaço de estados que podem ser usados para representar todos os tipos de dinâmica linear (estável, instável e integradora);
- modelo explícito de perturbação para descrever distúrbios não medidos;

- filtro de Kalman é usado para estimar os estados da planta e perturbações não medidas a partir de saídas medidas;
- distinções são introduzidas entre as variáveis controladas que aparecem na função objetivo e as variáveis de realimentação que são usadas na estimação dos estados;
- restrições nas entradas e saídas são impostas via programação quadrática.

Foi também a partir da difusão da tecnologia MPC que surgiram algumas propostas de análise de sua estabilidade. Na linha de desenvolver controladores MPC estáveis, Muske e Rawlings (1993) mostraram que para sistemas não integradores, quando o estado é medido e o horizonte de predição tende ao infinito, os MPC têm a estabilidade nominal garantida, independentemente dos parâmetros de sintonia. Eles desenvolveram um algoritmo de controle chamada IHMPC (*Infinite Horizon Model Predictive Control*), cuja estratégia principal consiste em converter o horizonte de predição infinito para um estado terminal equivalente cujo peso é obtido pela equação discretizada de Lyapunov. O algoritmo IHMPC foi adotado pelos acadêmicos como o paradigma dos anos de 1990, constituindo a terceira geração de MPC e ainda considerando a estabilidade como conceito central nos estudos de sistemas dinâmicos (NIKOLAOU, 2001; MORARI; LEE, 1999). Essa geração se distingue devido aos vários níveis de restrições desenvolvidas por vários mecanismos. A solução viável é procurada e direcionada para variações na planta em tempo real, fornecendo um rico conjunto de soluções para realimentação. Permite-se, deste modo, uma larga faixa de processos dinâmicos (estáveis, integradores e instáveis) e especificações de controle.

A quarta geração de MPC contempla preocupações como a consideração da incerteza e o controle robusto; otimização em múltiplos níveis direcionada para a priorização dos objetivos de controle; melhoria na tecnologia de identificação, dentre outras (QIN; BADGWELL, 1997, 2003).

A próxima seção deste capítulo faz referência ao MPC distribuído, enfatizando suas principais características e as principais estruturas deste tipo de abordagem presentes na literatura.

## 2.2 Controle Preditivo Distribuído

A estratégia de controle centralizado pode não ser viável em algumas aplicações em grandes plantas químicas. As razões para isso são muitas, mas a mais proeminente é que os problemas de sistemas de larga escala são demasiadamente complexos. Portanto, é

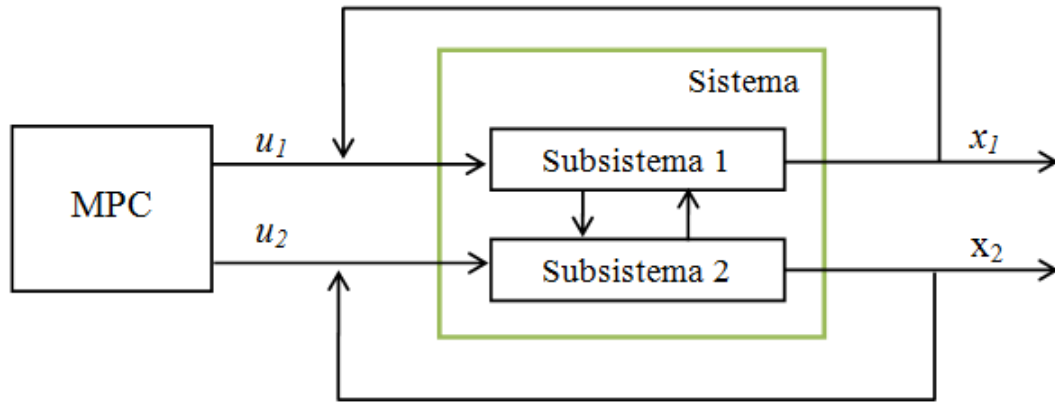
vantajoso a sua divisão em subproblemas independentes ou quase independentes. A dimensionalidade, a estrutura de informação das restrições, a incerteza e o atraso dão origem as dificuldades que são encontradas nas tarefas de análise, projeto e implementação das estratégias de controle (BAKULE, 2008).

A teoria de sistemas de larga escala é dedicada à resolução dos problemas que surgem a partir das dificuldades descritas acima. A literatura responde as questões fundamentais para dividir um problema de controle em subproblemas gerenciáveis que são apenas fracamente relacionados entre si e que podem ser resolvidos de forma independente. Como resultado, a planta geral já não é controlada por um único controlador, mas por vários controladores independentes.

Num sistema de controle distribuído, que emprega técnicas de controle descentralizado, existem várias estações de controle locais, em que cada controlador observa apenas saídas locais e só controla as entradas locais. Além das vantagens na implementação do controlador (ou seja, cálculos reduzidos e paralelos, comunicações reduzidas), uma grande vantagem da descentralização é a facilidade na manutenção do processo. Enquanto algumas partes do processo global são interrompidas, as partes restantes mantêm-se em operação em malha fechada com seus controladores locais (possivelmente com desempenho reduzido), sem a necessidade da suspensão total do processo, tal como no caso de uma abordagem de controle centralizado. Além disso, uma alteração parcial do processo não implica, necessariamente, numa alteração completa do processo. No entanto, todos os controladores estão envolvidos no controle do processo em grande escala, e que, por isso é de suma importância determinar as condições sob as quais as comunicações entre eles serão impostas, de tal forma que se tornem capazes de estabilizar o sistema por completo.

O conceito de centralidade em controle significa que todas as informações disponíveis sobre o sistema são tratadas em um único local da planta, em que todos os cálculos de controle baseados em tais informações são realizados. A Figura (2.3) é uma representação esquemática da abordagem do MPC centralizado para um sistema composto por dois subsistemas acoplados. No MPC centralizado, todas as entradas manipuladas do sistema de controle são otimizadas respeitando a função objetivo de um único problema de otimização.

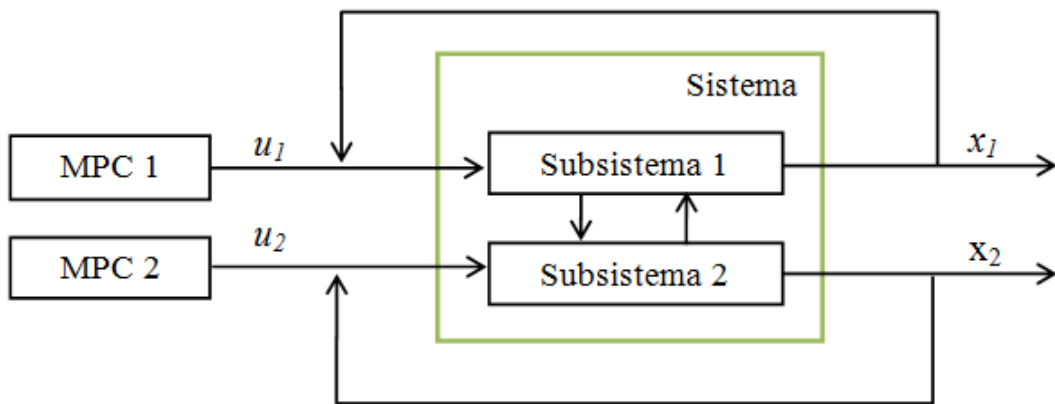
A estrutura de controle descentralizado é caracterizada por apresentar um agente de controle em diferentes unidades da planta. Esses agentes tomam as suas decisões de forma independente um do outro. A troca de informações (como as ações de controle) só é permitida antes e/ou depois do processo decisório. Não há negociação entre os agentes durante o processo de cálculo. A estrutura de controle distribuído também apresenta diversos agentes de controle espalhados pelo processo, mas há troca de informações entre eles, durante o processo decisório.



**Figura 2.3:** Representação de um MPC Centralizado (adaptado de Christofides et al. (2013)).

As ideias para descentralizar e organizar hierarquicamente as ações de controle em sistemas de automação industrial remontam à década de 70 (CALLIER et al., 1976; MICHEL, 1974; MICHEL; RASMUSSEN, 1976; SANDELL et al., 1978; WANG; DAVISON, 1973), mas tiveram limitações quanto a estabilidade do controle descentralizado de subsistemas interligados, de modo que o interesse desapareceu. Desde o final dos anos 90, por causa dos avanços nas técnicas de computação como a otimização convexa, o interesse no controle descentralizado ressuscitou (D'ANDREA., 1998; ROTKOWITZ; LALL., 2006) e formulações convexas foram desenvolvidas, embora limitadas às classes especiais de sistemas, como sistemas espacialmente invariantes (BAMIEH et al., 2002).

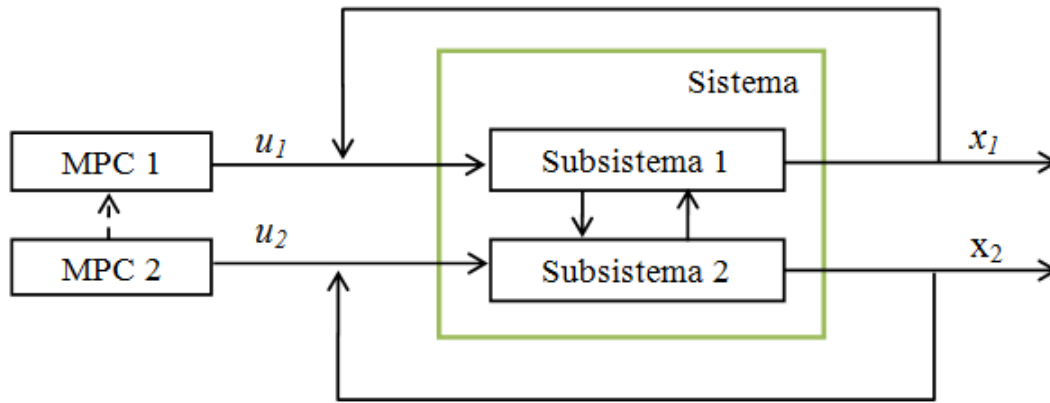
A Figura (2.4) apresenta um esquema de MPC descentralizado com dois subsistemas. Nota-se que a principal característica de uma abordagem de controle descentralizado é que não há comunicação entre os controladores nos diferentes locais da planta, ou seja, eles atuam de forma independente.



**Figura 2.4:** Representação MPC Descentralizado (adaptado de Christofides et al. (2013)).

Em estruturas de controle distribuídas, como o exemplo representado na Figura (2.5),

em que supõe-se que informações são transmitidas através dos controladores locais (MPC 1 e MPC 2) de modo que cada um deles tem conhecimento do comportamento dos outros. Como os controladores são projetados como MPC, a informação tipicamente transmitida consiste no comportamento futuro das variáveis controladas ou dos valores previstos para as variáveis de estado calculados localmente, de modo que cada controlador pode prever os efeitos da interação ao longo do horizonte de predição considerado. Com referência ao caso representado na Figura (2.5), os controladores MPC 1 e MPC 2 destinam-se a controlar os subsistemas 1 e 2, respectivamente. Se a troca de informação entre estes controladores locais refere-se a evolução prevista dos estados locais ( $x_1$  e  $x_2$ ), qualquer controlador local necessita apenas conhecer a dinâmica do subsistema diretamente controlado. Caso contrário, se as ações de controle futuras ( $u_1$  e  $u_2$ ) são transmitidas, os reguladores locais devem conhecer o modelo de todos os subsistemas. Em qualquer caso, fica evidente que a transmissão e sincronização das informações têm grande impacto sobre o desempenho alcançável.



**Figura 2.5:** Representação MPC Distribuído (adaptado de Christofides et al. (2013)).

Nas próximas seções serão apresentados os principais trabalhos encontrados na literatura que abordam os temas de controle descentralizado e controle distribuído, respectivamente.

### 2.2.1 Controle Descentralizado

Sabe-se que as fortes interações entre os diferentes subsistemas podem impedir o alcance da estabilidade desejada e prejudicar o desempenho dos controladores descentralizados (DAVISON; CHANG, 1990; WANG; DAVISON, 1973). Geralmente, com o objetivo de se alcançar a estabilidade em malha fechada, bem como obter bom desempenho dos algoritmos de MPC descentralizados, as interações entre os subsistemas são consideradas fracas e supostas como perturbações que podem ser compensadas através de *feedback*, de tal forma que elas não estejam envolvidas na formulação explícita do controlador.



Alessio et al. (2011) desenvolveram um algoritmo de MPC descentralizado para processos lineares de grande escala, sujeitos à restrições nas entradas. O modelo global do processo é decomposto em vários outros modelos menores utilizados para as previsões locais. O grau de dissociação entre os submodelos representa um parâmetro ajustável do projeto: quanto menor o acoplamento dos submodelos, menores serão os esforços computacionais e os esforços com as transmissões das informações compartilhadas, por outro lado, quanto menor o grau de cooperatividade entre os controladores descentralizados, menor o desempenho global do controle do sistema.

Considere o problema regulador do sistema linear discreto e invariante no tempo:

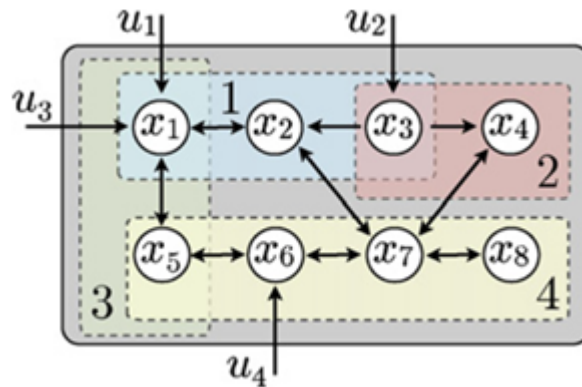
$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (2.9)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (2.10)$$

$$\mathbf{u}_{min} \leq \mathbf{u}(k) \leq \mathbf{u}_{max} \quad (2.11)$$

cumprindo as Restrições (2.11) em todos os instantes de tempo  $k \in \mathbb{Z}_{O+}$ , sendo  $\mathbb{Z}_{O+}$  o conjunto dos números inteiros não negativos,  $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^m$  e  $\mathbf{y}(k) \in \mathbb{R}^p$  são os vetores dos estados, entradas manipuladas e saídas, respectivamente, e o par  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  é estabilizável.

Alessio et al. (2011) construíram um conjunto de submodelos de predição baseados na observação que, tipicamente, em sistemas de grande escala, as matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  têm um certo número de componentes nulos ou negligenciáveis, correspondendo à um desacoplamento parcial dinâmico do processo. A Figura (2.6) representa um sistema acoplado dinamicamente decomposto em quatro subsistemas parcialmente sobrepostos.



**Figura 2.6:** Exemplo de decomposição de um modelo global em quatro submodelos. Cada retângulo colorido identifica os estados pertencentes ao submodelo correspondente (Alessio et al. (2011)).

Para todo  $i \in \{1, \dots, M\}$ , sendo  $M$ , o número de subsistemas, define-se  $\mathbf{x}^i \in \mathbb{R}^{n_i}$

como o vetor que reúne um subconjunto  $\mathbf{I}_{xi} \subseteq \{1, \dots, n\}$  dos componentes de estado,

$$\mathbf{x}^i = \mathbf{W}_i^T \mathbf{x} = [x_1^i \dots x_{n_i}^i]^T \in \mathbb{R}^{n_i} \quad (2.12)$$

sendo  $\mathbf{W}_i \in \mathbb{R}^{n \times n_i}$  formado por  $n_i$  colunas de uma matriz identidade de ordem  $n$  correspondente aos índices de  $\mathbf{I}_{xi}$  e, similarmente defina-se,

$$\mathbf{u}^i = \mathbf{Z}_i^T \mathbf{u} = [u_1^i \dots u_{m_i}^i]^T \in \mathbb{R}^{m_i} \quad (2.13)$$

como o vetor de entradas calculadas pelo  $i$ -ésimo controlador, sendo  $\mathbf{Z}_i \in \mathbb{R}^{m \times m_i}$  formado por  $m_i$  colunas de uma matriz identidade de ordem  $m$  correspondente aos índices de  $\mathbf{I}_{ui} \subseteq \{1, \dots, m\}$ . Nota-se que

$$\mathbf{W}_i^T \mathbf{W}_i = \mathbf{I}_{n_i}, \quad \mathbf{Z}_i^T \mathbf{Z}_i = \mathbf{I}_{m_i}, \quad \forall i \in \{1, \dots, M\} \quad (2.14)$$

em que  $\mathbf{I}_{(\cdot)}$  denota a matriz identidade de ordem  $(\cdot)$ . Por definição de  $\mathbf{x}^i$  em (2.12) obtêm-se

$$\mathbf{x}^i(k+1) = \mathbf{W}_i^T \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{W}_i^T \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{W}_i^T \mathbf{B} \mathbf{u}(k) \quad (2.15)$$

Uma aproximação de (2.9) é obtida substituindo  $\mathbf{W}_i^T \mathbf{A}$  em (2.15) por  $\mathbf{W}_i^T \mathbf{A} \mathbf{W}_i \mathbf{W}_i^T$  e  $\mathbf{W}_i^T \mathbf{B}$  por  $\mathbf{W}_i^T \mathbf{B} \mathbf{Z}_i \mathbf{Z}_i^T$ , portanto tem-se o novo modelo de predição de ordem reduzida

$$\mathbf{x}^i(k+1) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}^i(k) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}^i(k) \quad (2.16)$$

em que as matrizes  $\mathbf{A}_i = \mathbf{W}_i^T \mathbf{A} \mathbf{W}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$  e  $\mathbf{B}_i = \mathbf{W}_i^T \mathbf{B} \mathbf{Z}_i \in \mathbb{R}^{n_i \times m_i}$  são submatrizes das matrizes originais  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$ , respectivamente, descrevendo uma possível aproximação da evolução dos estados do subsistema de número  $i$ .

A dimensão  $(n_i, m_i)$  do modelo descrito pela Equação (2.16), em geral será muito menor do que a dimensão  $(n, m)$  do modelo geral do processo da Equação ((2.9)). A escolha das matrizes de desacoplamento  $(\mathbf{W}_i, \mathbf{Z}_i)$  (e, conseqüentemente, das dimensões  $n_i$  e  $m_i$  de cada submodelo) é uma parâmetro de ajuste do processo de MPC descentralizado proposto pelos autores.

Uma abordagem interessante sobre MPC descentralizada para sistemas não lineares foi formulada por Magni e Scattolini (2006). Neste estudo os autores supuseram que nenhuma informação é trocada entre os controladores locais.

Seja o sistema sob controle composto por  $M$  subsistemas locais descritos pelos seguin-

tes modelos não lineares e discretos no tempo:

$$\mathbf{x}_i^p(k+1) = f_i(\mathbf{x}_i^p(k), \mathbf{u}_i(k)) + g_i(\mathbf{x}^p(k)) + \mathbf{d}_i(k) \quad (2.17)$$

$$\mathbf{x}_i^p(0) = \mathbf{x}_{i0}^p, i = 1, \dots, N, \quad (2.18)$$

em que  $\mathbf{x}_i^p \in \mathbb{R}^{n_i}$  são os estados do  $i$ -ésimo subsistema,  $\mathbf{d}_i \in \mathbb{R}^{r_i}$  são as perturbações, enquanto  $\mathbf{u}_i$  é o vetor das ações de controle em que é restrito a satisfazer a seguinte restrição:

$$\mathbf{u}_i(k) \in \mathbf{U}_i, k \geq 0, \quad (2.19)$$

em que  $\mathbf{U}_i$  é um subconjunto compacto de  $\mathbb{R}^{n_i}$  contendo a origem como um ponto interior.

Na Equação (2.17), a influência mútua dos subsistemas  $M$  é descrito pelas funções  $g_i$ , que dependem de todos os estados

$$\mathbf{x}^p(k) = \begin{bmatrix} x_1^{p^T}(k) & x_2^{p^T}(k) & \dots & x_M^{p^T}(k) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^n, n = \sum_{i=1}^M n_i \quad (2.20)$$

Define-se também o vetor global das perturbações

$$\mathbf{d}(k) = \begin{bmatrix} d_1^{p^T}(k) & d_2^{p^T}(k) & \dots & d_M^{p^T}(k) \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^r, r = \sum_{i=1}^M r_i \quad (2.21)$$

A prova da estabilidade depende da inclusão de uma restrição de contração na formulação do problema do MPC proposto pelos autores. No projeto do MPC descentralizado, os efeitos de interações entre os diferentes subsistemas são considerados como perturbações, com magnitude dependente da norma dos estados do sistema.

Sun e El-Farra (2008) desenvolveram uma estratégia de controle semi-descentralizada para plantas que apresentem perturbações, unidades interligadas e troca de informações através de uma rede de comunicação compartilhada. Nesta estrutura, cada unidade tem seu próprio sistema de controle local, que se comunica com o sistema supervisor da planta (e com outros sistemas locais) através de um meio de comunicação compartilhado. O objetivo dos autores foi projetar um sistema de controle integrado e elaborar estratégias de comunicação que garantissem a estabilidade e desempenho do sistema em malha fechada. Além disso, os autores desejaram minimizar os custos com a comunicação, reduzindo a troca de informações entre os sistemas locais de controle, tanto quanto possível, sem contudo, sacrificar a estabilidade das unidades individuais e de toda a planta.

Os modelos de predição de cada subsistema são incorporados em cada unidade de

controle local para fornecer uma estimativa da evolução das unidades vizinhas, quando as medidas não são transmitidas através da rede. Sensores instalados em cada unidade possibilitam a troca de informações e atualização dos estados, a fim de compensar as incertezas do modelo. Dessa forma é necessário determinar a frequência mínima de comunicação cruzada entre cada um dos sistemas de controle. Tal cálculo se baseia no grau de incompatibilidade entre a dinâmica real das unidades e os modelos utilizados para descrevê-las.

Considere uma planta distribuída de grande escala composta por  $M$  unidades de processos interligadas, cada uma é modelada por um sistema linear contínuo, e representada pela seguinte descrição em espaço de estados:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{u}_1 + \sum_{j=2}^n \mathbf{A}_{1j}\mathbf{x}_j \\ \dot{\mathbf{x}}_2 &= \mathbf{A}_2\mathbf{x}_2 + \mathbf{B}_2\mathbf{u}_2 + \sum_{j=1, j \neq 2}^n \mathbf{A}_{2j}\mathbf{x}_j \\ &\vdots \\ \dot{\mathbf{x}}_M &= \mathbf{A}_M\mathbf{x}_M + \mathbf{B}_M\mathbf{u}_M + \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{A}_{Mj}\mathbf{x}_j\end{aligned}\tag{2.22}$$

em que  $\mathbf{x}_i = [x_i^{(1)} \ x_i^{(2)} \ \dots \ x_i^{(n_i)}]^T \in \mathbb{R}^{n_i}$  denota o vetor das variáveis de estado associadas a  $i$ -ésima unidade do processo,  $n_i$  é o número de variáveis de estados na  $i$ -ésima unidade,  $\mathbf{u}_i = [u_i^{(1)} \ u_i^{(2)} \ \dots \ u_i^{(m_i)}] \in \mathbb{R}^{m_i}$  denota o vetor das entradas manipuladas associadas a  $i$ -ésima unidade do processo,  $\mathbf{x}^T$  denota a transposta do vetor coluna  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{A}_i$ ,  $\mathbf{B}_i$  e  $\mathbf{A}_{ij}$  são matrizes constantes. O termo de interligação  $\mathbf{A}_{ij} < \mathbf{x}_j$ , em que  $i \neq j$  descreve como a dinâmica da  $i$ -ésima unidade é influenciada pela  $j$ -ésima unidade na planta. Nota-se a partir da notação da Equação (2.22), que cada unidade do processo pode ser conectada com todas as outras unidades da planta. Nota-se também que, embora cada um dos subsistemas é referido como uma unidade para simplificação, cada subsistema pode compreender um conjunto de operações unitárias dependendo do modo como a planta está decomposta.

O principal objetivo dos autores é elaborar uma estratégia de comunicação em que o sistema de controle integrado estabilize as unidades individuais (e da planta toda), com a presença de uma rede de comunicação entre as diversas unidades do processo.

Em geral, o desempenho global em malha fechada de um sistema de controle descentralizado é limitado por causa da escassez de informações disponíveis e falta de comunicação entre os diferentes controladores da planta. Isso favorece a utilização do controle distribuído, que é tema da próxima sessão.

## 2.2.2 Controle Distribuído

Quando é estabelecido algum nível de comunicação entre os diferentes controladores, tal como feito pela estrutura do controle preditivo distribuído (DMPC) é possível obter um melhor desempenho do sistema de controle em malha fechada. Dentro deste contexto, vários métodos de MPC distribuído já foram propostos. Os artigos de Rawlings e Stewart (2008), Scattolini (2009) e Christofides et al. (2013) apresentam uma análise dos vários esquemas de MPC distribuído em um nível conceitual. Algumas passagens aqui apresentadas fazem referência à estes trabalhos.

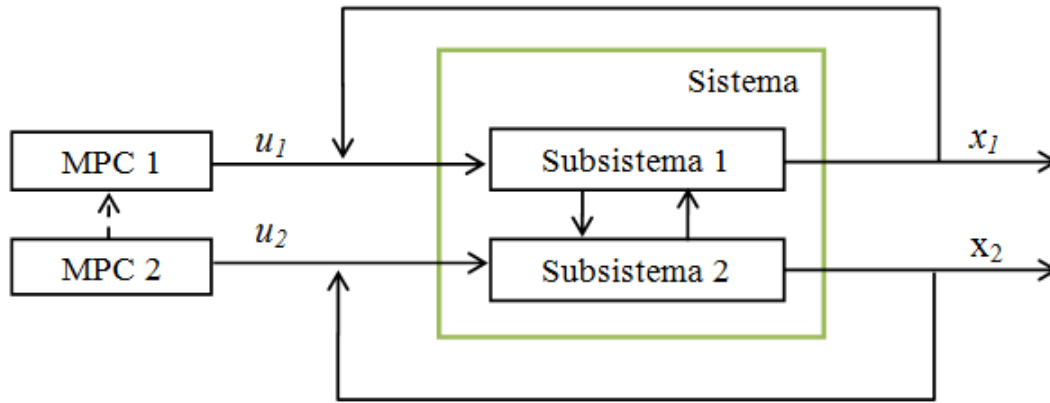
No que se refere aos algoritmos de DMPC disponíveis na literatura, uma classificação pode ser feita de acordo com a topologia da rede de comunicações, os diferentes protocolos de comunicação utilizados pelos controladores locais, e a função objetivo considerada no problema de otimização do controlador local (SCATTOLINI, 2009).

Segundo Scattolini (2009), quando as informações trocadas entre os controladores são transmitidas e recebidas a partir de cada controlador, os algoritmos de DMPC são ditos totalmente conectados. E quando, as informações são transmitidas e recebidas a partir de qualquer controlador local para um dado subconjunto dos outros, os algoritmos são ditos parcialmente conectados. Os algoritmos parcialmente conectados podem ser convenientes quando se tem subsistemas fracamente acoplados. Neste cenário, limitar as informações transmitidas entre os subsistemas, não afeta significativamente o desempenho do sistema de controle.

A troca de informações entre os controladores locais pode ser feita de acordo com diferentes protocolos. Quando a informação é transmitida e recebida por cada controlador apenas uma vez em cada tempo de amostragem, os algoritmos são ditos não iterativos. Se for possível a transmissão e recebimento de informações muitas vezes ao longo do tempo de amostragem, os algoritmos são ditos iterativos.

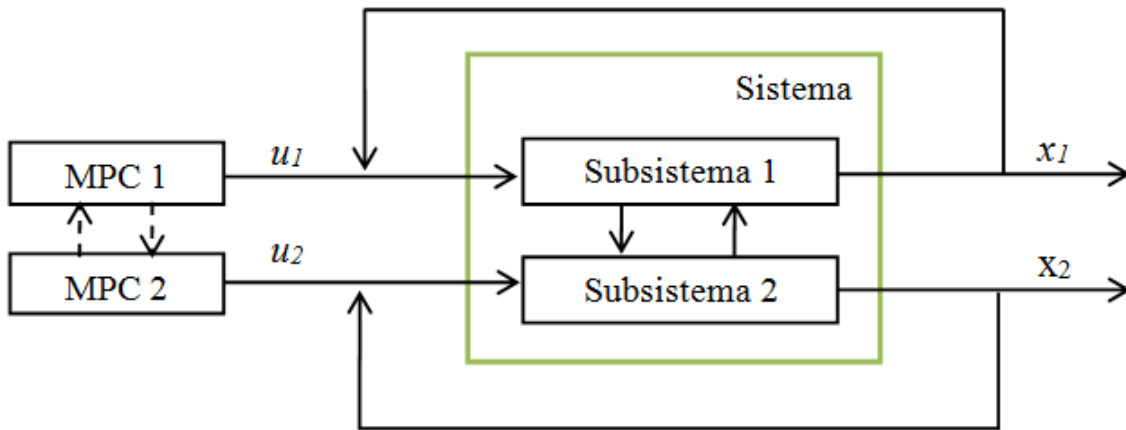
Além disso, segundo a definição de Rawlings e Stewart (2008) existem dois tipos de algoritmos para a estratégia de controle preditivo distribuído: o DMPC cooperativo e o DMPC não cooperativo. Na estratégia cooperativa, cada controlador otimiza uma função objetivo global e na estratégia não cooperativa, cada controlador otimiza uma função objetivo local.

Existem dois tipos diferentes de DMPC não cooperativo: DMPC não cooperativo sequencial e o DMPC não cooperativo paralelo. Na abordagem sequencial, as ações de controle são calculadas em sequência, ou seja, o controlador  $i + 1$  calcula suas ações depois do controlador  $i$ . Um esquema de um DMPC não cooperativo sequencial com dois controladores locais é apresentados na Figura (2.7).



**Figura 2.7:** Representação DMPC não cooperativo sequencial (adaptado de Christofides et al. (2013)).

Outros algoritmos, ainda na categoria de DMPC não cooperativos utilizam a abordagem paralela. Isto significa que as ações de controle são calculadas paralelamente pelos controladores, isto é, ao mesmo tempo. Uma representação esquemática de um DMPC não cooperativo paralelo com dois controladores locais é mostrado na Figura (2.8).



**Figura 2.8:** Representação DMPC não cooperativo paralelo (adaptado de Christofides et al. (2013)).

Entre os trabalhos sobre DMPC não cooperativo paralelo, pode-se citar o trabalho de Camponogara et al. (2002). Neste trabalho, são apresentados métodos gerais de decomposição de problemas em larga escala e métodos para garantir a estabilidade dos vários agentes de controle quando ocorre mudanças abruptas. O sistema controlado é composto por um número de subsistemas lineares e discretos no tempo sem restrições e sinais de

entradas desacopladas e é descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k+1) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_M(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \cdots & \mathbf{A}_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{M1} & \cdots & \mathbf{A}_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(k) \\ \vdots \\ \mathbf{x}_M(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \mathbf{B}_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1(k) \\ \vdots \\ \mathbf{u}_M(k) \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

O efeito do acoplamento dinâmico entre os estados vizinhos é considerado através de um modelo de predição com sinal de uma perturbação  $\mathbf{v}$ . Como exemplo, o modelo de predição usado pelo controlador  $\#j$  é

$$\mathbf{x}_j(k+i+1|k) = \mathbf{A}_{jj}\mathbf{x}_j(k+i|k) + \mathbf{B}_j\mathbf{u}_j(k+i|k) + \mathbf{K}_j\mathbf{v}_j(k+i|k) \quad (2.24)$$

em que  $\mathbf{K}_j = [\mathbf{A}_{j,1} \ \cdots \ \mathbf{A}_{j,j-1} \ \mathbf{A}_{j,j+1} \ \cdots \ \mathbf{A}_{j,M}]$ . As informações trocadas entre os agentes de controle no final de cada amostragem é a totalidade do vetor de estados preditos localmente. Em particular, o controlador  $\#j$  recebe o sinal:

$$\mathbf{v}_j(k+i|k) = \begin{bmatrix} x_1(k+i|k-1) \\ \vdots \\ x_{j-1}(k+i|k-1) \\ x_{j+1}(k+i|k-1) \\ \vdots \\ x_M(k+i|k-1) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

em que  $x_s(k+i|k-1)$  é o estado predito pelo agente  $s$  no instante  $k-1$ . O sinal  $\mathbf{v}_j(k+i|k)$  é usado pelo controlador  $\#j$  no instante  $k$  para estimar o efeito dos subsistemas vizinhos na Equação (2.24).

A restrição de estabilidade em malha fechada foi incluída na formulação do problema, através da inclusão duma restrição de contração sobre a norma de  $\mathbf{x}_j(k+1|k)$  em cada controlador local.

Camponogara et al. (2002) apresentaram resultados de MPC distribuído concentrando-se na coordenação dos cálculos de otimização utilizando a troca iterativa de informações e na estabilidade do sistema em malha fechada, quando as informações são trocadas apenas depois de cada iteração.

Com relação ao DMPC cooperativo, sua primeira formulação foi proposta por Venkat

et al. (2005). Nesta estratégia de controle, cada controlador considera os efeitos de todas as entradas manipuladas sobre a planta, através da função objetivo centralizada. A cada iteração, cada controlador otimiza o seu próprio conjunto de variáveis manipuladas, supondo que o restante das entradas estão fixadas no último valor calculado. Em seguida, os controladores compartilham as melhores trajetórias encontradas e uma trajetória ótima final é calculada como a soma ponderada delas.

Os algoritmos de DMPCs cooperativos utilizam a seguinte estratégia de implementação:

1. Em  $k$ , todos os controladores recebem os valores dos estados mensuráveis da planta,  $x(k)$  advindos dos sensores espalhados na planta;
2. Na iteração  $c$  ( $c \geq 1$ ):
  - 2.1. Cada controlador calcula seu próprio conjunto de ações de controle baseando-se em  $x(k)$  e nas últimas trajetórias de entrada advindas dos outros controladores;
  - 2.2. Os controladores trocam informações das ações de controle calculadas e baseando-se nessas novas informações, cada controlador calcula uma nova trajetória para suas entradas manipuladas.
3. Se a condição terminal for satisfeita, cada controlador envia as ações para os respectivos atuadores; caso contrário, retorna-se à etapa 2 ( $c \leftarrow c + 1$ );
4. Quando novos valores dos estados mensuráveis da planta estão disponíveis, retorna-se à etapa 1 ( $k \leftarrow k + 1$ ).

Em Venkat et al. (2008); Venkat et al. (2006) e Venkat et al. (2005) os autores propõem um algoritmo MPC distribuído baseado num processo de cooperação entre os agentes de controle. O modelo de predição utilizado foi

$$\mathbf{x}_{ii}(k+i) = \mathbf{A}_{ii}\mathbf{x}_{ii}(k) + \mathbf{B}_{ii}\mathbf{u}_i(k) \quad (2.26)$$

$$\mathbf{x}_{ij}(k+i) = \mathbf{A}_{ij}\mathbf{x}_{ij}(k) + \mathbf{B}_{ij}\mathbf{u}_j(k) \quad (2.27)$$

$$\mathbf{y}_i(k) = \sum_{j=1}^M \mathbf{C}_{ij}\mathbf{x}_{ij}(k) \quad (2.28)$$

O efeito das entradas do subsistema  $\#j$  no subsistema  $\#i$  é modelado pelo modelo de interação. Todos os modelos de interação são supostos estáveis e as restrições nas entradas são supostas desacopladas (por exemplo, saturação nas entradas).

A partir de uma formulação multiobjetivo, os autores distinguem o esquema de controle baseado em comunicação, em que cada controlador  $\#i$  tem o objetivo de otimizar seu próprio índice de desempenho local  $\Phi_i$  e o esquema de controle baseado em cooperação,



no qual cada controlador  $\#i$  tem a função de otimizar a soma ponderada  $\sum_{j=1}^M \alpha_j \Phi_j$  de todos os índices de desempenho,  $0 \leq \alpha_j \leq 1$ . Como os índices de desempenho dependem das decisões tomadas pelos outros controladores, a cada instante de tempo  $k$ , a sequência de iterações é adquirida antes de se calcular e de se implementar o vetor de entrada  $\mathbf{u}(k)$ . Em específico, em cada período de amostragem  $k$  e em cada iteração  $p$  as decisões anteriores  $\mathbf{u}_{j \neq i}^{p-1}$  são transmitidas para o controlador  $\#i$ , para calcular a nova iteração  $\mathbf{u}_i^p$ . Com a abordagem baseada na comunicação, os autores mostram que se a sequência de iterações converge para um Equilíbrio de Nash. Com a abordagem baseada na cooperação, a convergência para o desempenho ótimo de controle (centralizado) é alcançada.

Outra abordagem MPC distribuída (MERCANGÖZ; DOYLE III, 2007) para sistemas quadrados (o número de entradas igual ao número de saídas), cujos modelos locais de previsão são

$$\mathbf{x}_i(k+1) = \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i(k) + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i(k) + \sum_{j=1}^M \mathbf{B}_j \mathbf{u}_j(k) + \mathbf{w}_i(k) \quad (2.29)$$

$$\mathbf{y}_i(k) = \mathbf{C}_i \mathbf{x}_i(k) + \mathbf{v}_i(k) \quad (2.30)$$

A estimação dos estados, em cada tempo de amostragem, é realizada por um filtro distribuído e descentralizado de Kalman (DDKF), com base nos submodelos locais descritos pelas Equações (2.29) e (2.30). A estrutura física da planta e o modelo matemático da mesma são utilizados para particionar o sistema e definir os nós de controle. Medições locais nos nós são usados para estimar os estados relevantes. Estas informações são então utilizadas nos cálculos de controle. Verificou-se que a comunicação entre os nós durante os cálculos de estimativa e controle proporcionam melhorias no desempenho dos controladores.

Os resultados de estabilidade e convergência (MERCANGÖZ; DOYLE III, 2007) não foram provados, mas os resultados experimentais para um sistema de quatro tanques são relatados para mostrar a eficiência da abordagem. Os resultados indicam que a estrutura proporciona melhoria significativa sobre os controladores MPC completamente descentralizados, e aproxima-se do desempenhos de um sistema centralizado de controle.

## 2.3 Decomposição de sistema lineares - estado da arte

O modelo da planta é geralmente decomposto de acordo com a estrutura física da instalação ou com base em uma análise do modelo matemático, ou através da combinação de

ambos. Quando um sistema é muito complexo, por apresentar muitos estados, entradas e saídas, o processo de decomposição baseado na intuição, percepção da estrutura física e/ou experiência, pode ser difícil ou até mesmo inviável. Neste contexto, o desenvolvimento de métodos sistemáticos de decomposição de sistemas, que extraíam informações a partir das equações de estado do modelo da planta são de grande aplicabilidade.

Decomposições deste tipo podem tirar proveito da estrutura das matrizes esparsas presentes no sistema e identificar estruturas escondidas que favorecem as simplificações conceituais e numéricas de controle e projeto de estimação. Desta forma, decomposição de sistemas dinâmicos se favorece dos diversos e poderosos métodos matemáticos envolvidos na pesquisa de matrizes esparsas.

Existem vários métodos para decomposição de sistemas, um bom exemplo é a decomposição hierárquica LBT (do inglês *Lower Block Triangular*). Sezer e Siljak (1981) propuseram um procedimento baseado na teoria de grafos para decomposição de sistemas de grande escala em subsistemas interconectados de entradas realizáveis. A realização das entradas é um requisito fundamental para se garantir a controlabilidade do sistema. A pesquisa nessa área mostra que a teoria de grafos (definições relacionadas à esta Teoria são apresentadas no Anexo A) é uma poderosa ferramenta para decomposição de sistemas de grande escala.

Segundo o trabalho de Sezer e Siljak (1981), a decomposição LBT é realizada da seguinte forma. Considere um sistema de controle descrito como:

$$\mathbf{S} : \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (2.31)$$

em que,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  são os vetores dos estados e das entradas, respectivamente. O sistema  $\mathbf{S}$  pode ser associado a um grafo orientado  $\mathbf{D} = (\mathbf{U} \cup \mathbf{X}, \mathbf{E})$ , sendo  $\mathbf{U} = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$  e  $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , os conjuntos de vértices das entradas e estados, respectivamente.  $(u_j, x_j) \in \mathbf{E}[(x_j, x_i) \in \mathbf{E}]$  se e somente se, a entrada  $u_j$  (estado  $x_j$ ) pertencer à equação correspondente para  $\dot{x}_i$  na Equação (2.31). Assim, as matrizes de adjacência e de acessibilidade de  $\mathbf{D}$  apresentam a seguinte forma:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{L} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (2.32)$$

sendo  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{L}$  ( $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$ ) matrizes de interconexão entre estados e entradas (acessibilidade) de dimensões adequadas. Uma vez estabelecida a associação entre um grafo orientado  $\mathbf{D}$  e um dado sistema  $\mathbf{S}$ , o dígrafo  $\mathbf{D}$  pode ser utilizado para estudo das propriedades estruturais de  $\mathbf{S}$ .

O sistema  $\mathbf{S}$  da Equação (2.31) pode ser decomposto através da decomposição LBT,

de tal forma que gere subsistemas hierarquicamente ordenados e descritos como

$$\mathbf{S}_k : \mathbf{x}_k = \sum_{j=1}^k \mathbf{A}_{kj} \mathbf{x}_j + \sum_{j=1}^k \mathbf{B}_{kj} \mathbf{u}_j \quad k = 1, 2, \dots, s \quad (2.33)$$

sendo  $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n_k}$  e  $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^{m_k}$ , respectivamente, estados e entradas de  $\mathbf{S}_k$ , tal que,  $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_s}$ ,  $\mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{m_s}$  e  $\mathbf{A}_{kj}$ ,  $\mathbf{B}_{kj}$  matrizes de dimensões adequadas.

A decomposição da Equação (2.33) é obtida pela permutação de  $\mathbf{S}_k$  que transforma as matrizes  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{B}$  da Equação (2.31) em matrizes de blocos triangulares compatíveis. Neste caso, a matriz de interconexão  $\mathbf{M}$  da Equação (2.32) tem a seguinte representação

$$\mathbf{M} = \left[ \begin{array}{ccccc|ccccc} \mathbf{E}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{11} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{L}_{21} & \mathbf{L}_{22} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{E}_{n1} & \mathbf{E}_{n2} & \mathbf{E}_{n3} & \dots & \mathbf{E}_{nn} & \mathbf{L}_{n1} & \mathbf{L}_{n2} & \mathbf{L}_{n3} & \dots & \mathbf{L}_{nn} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{array} \right] \quad (2.34)$$

Em termos de dígrafo associado  $\mathbf{D} = (\mathbf{U} \cup \mathbf{X}, \mathbf{E})$ , a permutação representada pela Equação (2.34) de  $\mathbf{S}$  corresponde a partição de  $\mathbf{D}$  em subgrafos  $\mathbf{D}_k = (\mathbf{U}_k \cup \mathbf{X}_k, \mathbf{E}_k)$  identificados pelos pares  $(\mathbf{E}_{kk}, \mathbf{L}_{kk})$  da Equação (2.34). Os subgrafos são dígrafos de subsistemas desacoplados que são definidos como:

$$\mathbf{S}_k^o : \mathbf{x}_k = \mathbf{A}_{kk} \mathbf{x}_k + \mathbf{B}_{kk} \mathbf{u}_k \quad k = 1, 2, \dots, s \quad (2.35)$$

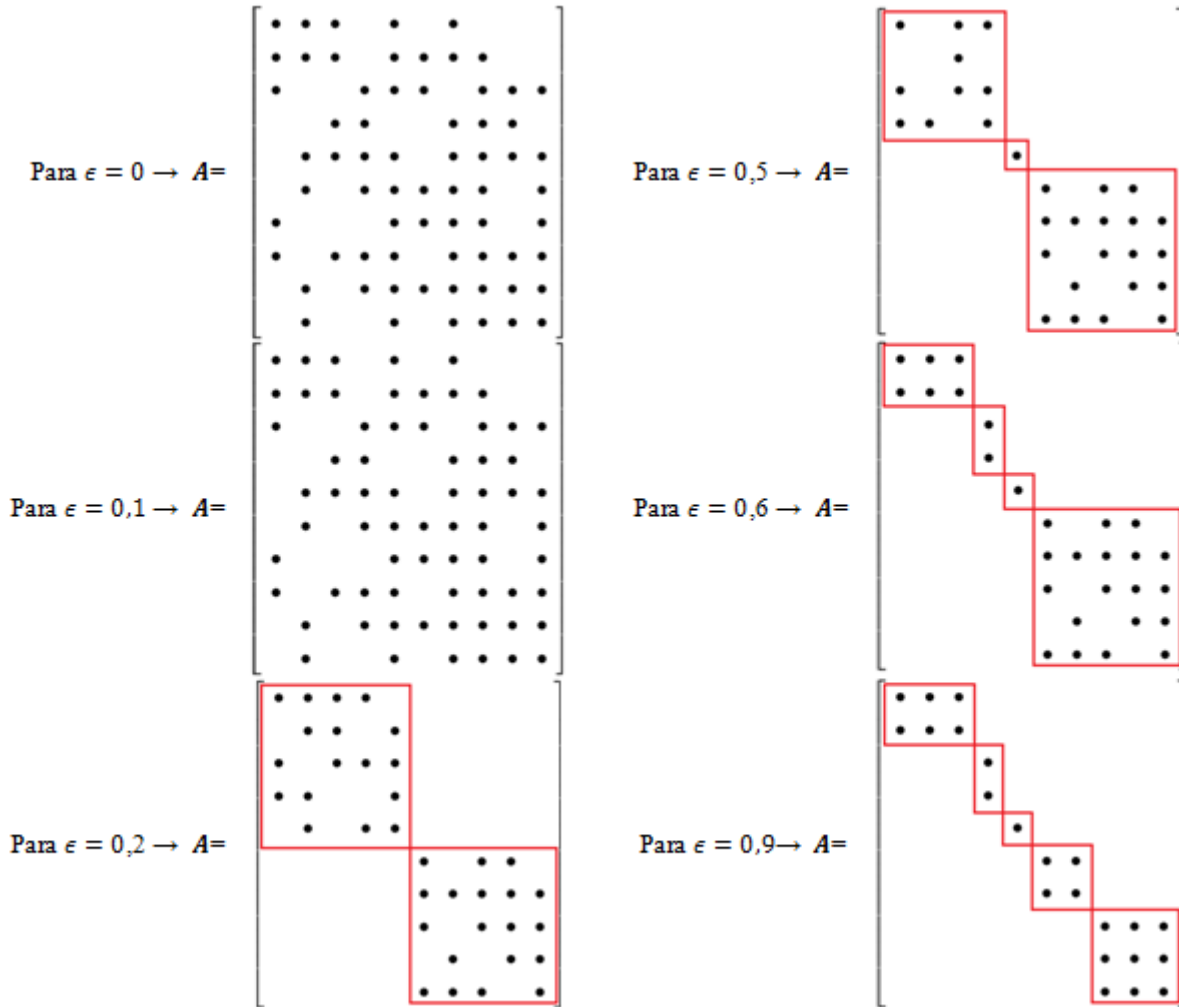
que são obtidos a partir da Equação (2.33), quando  $\mathbf{A}_{kj} = \mathbf{0}$  e  $\mathbf{B}_{kj} = \mathbf{0}$  para  $j \neq k$ .

Sezer e Siljak (1986) propuseram outro método bastante simples para decomposição de sistemas complexos em subsistemas interligados, com base na Teoria de Grafos. O método de decomposição Epsilon é adequado para análise de estabilidade através de funções de Lyapunov e aplicações em controle descentralizado. A ideia é a de associar um grafo à um determinado sistema e desconectar as arestas correspondentes as interações mais fracas, menores que um fator  $\epsilon$ , e identificar os subgrafos desconectados do grafo correspondente. Os componentes obtidos correspondem aos subsistemas com mútuo acoplamento maior ou igual a  $\epsilon$ . Uma vez que os componentes de um grafo podem ser determinados como representações lineares, o algoritmo de decomposição  $\epsilon$  é bastante simples.

A ideia básica da decomposição Epsilon é notavelmente simples. Dado uma matriz  $\mathbf{A} = [a_{rs}]$  e o valor do parâmetro  $\epsilon$ , sendo  $\epsilon > 0$ , todo elementos de  $\mathbf{A}$  que forem menor que  $\epsilon$  em módulo (ou seja,  $|a_{rs}| < \epsilon$ ) são considerados nulos.

A matriz esparsa resultante é então permutada para obter a forma de uma matriz

diagonal de blocos, e todos elementos no mesmo bloco são considerados fortemente acoplados. Como pode-se verificar através da Figura (2.9), o resultado obtido pela aplicação



**Figura 2.9:** Representação genérica de um matriz A decomposta para diferentes valores de  $\epsilon$ .

da Decomposição Epsilon irá depender do valor atribuído ao parâmetro  $\epsilon$ . Naturalmente, com o aumento de  $\epsilon$ , mais elementos são descartados e as diagonais em blocos se tornarão menores. É, portanto necessário determinar um valor adequado para  $\epsilon$  que irá identificar fortes acoplamentos, enquanto preserva a estrutura em blocos da matriz resultante.

Motee e Sayyar-Rodsari (2003) desenvolveram um algoritmo baseado numa métrica de desempenho para o particionamento ótimo de um sistema para posterior aplicação da tecnologia de MPC distribuído. Primeiramente, os autores definem uma matriz de ponderação para representar o sistema distribuído como um grafo orientado. Em seguida, desenvolveram uma formulação na qual um critério de desempenho em malha fechada é utilizado para particionar o sistema em subsistemas, que serão utilizados nos problemas locais de controle.

Zhang e Wang (2012) propuseram uma estratégia de controle distribuído preditivo baseado em modelo utilizando um novo método de particionamento de modelos. A partição é feita analisando a distribuição das entradas que serão manipuladas.

Considere o seguinte modelo em espaço de estados no tempo discreto:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (2.36)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (2.37)$$

em que  $\mathbf{x}(k) = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T \in \mathbb{R}^n$  refere-se ao vetor dos estados do processo;  $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^m$  refere-se ao vetor de entradas do sistema ou variáveis manipuladas;  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  são as matrizes de estados e entradas, respectivamente. Supõe-se que o conjunto  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  é controlável e que as entradas do sistema podem ser decompostas em  $M$  entradas da seguinte forma:

$$\mathbf{u}(k) = [\mathbf{u}_1^T(k) \ \mathbf{u}_2^T(k) \ \cdots \ \mathbf{u}_M^T(k)]^T \quad (2.38)$$

Partindo do pressuposto que em um sistema, os estados são geralmente controlados por algumas entradas particulares, os autores definiram que:

**Definição 1:** O conjunto  $\Omega_i = \{\alpha | B_{\alpha i} \neq 0, \alpha = 1, \dots, n\}$  em que  $B_{\alpha i}$  é o elemento da  $\alpha$ -ésima linha e  $i$ -ésima coluna da matriz de entradas  $\mathbf{B}$ . O conjunto de estados diretamente controlados pela entrada  $u_i(k)$  pode ser descrito como  $\{x_\alpha, \alpha \in \Omega_i\}$ .

A Definição 1 é a base do método de partição de modelos apresentado no trabalho de Zhang e Wang (2012). O vetor compacto dos estados diretamente controlados pode ser escrito como  $\mathbf{x}_{d,i}(k)$ , e então o modelo da planta pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\mathbf{x}_{d,i}(k+1) = \mathbf{A}_{ii}\mathbf{x}_{d,i}(k) + \mathbf{B}_{ii}\mathbf{u}_i(k) + \sum_{j=1(j \neq i)}^M (\mathbf{A}_{ij}\mathbf{x}_{d,j}(k) + \mathbf{B}_{ij}\mathbf{u}_j(k)) \quad (2.39)$$

em que  $i = 1, \dots, M$ ;  $\mathbf{x}_{d,i}(k) \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $\mathbf{u}_i(k) \in \mathbb{R}^{m_i}$  são os vetores de estados e de entradas do subsistema  $i$  no instante  $k$ , respectivamente;  $\mathbf{x}_{d,j}(k)$ ,  $\mathbf{u}_j(k)$  são os vetores de estados e de entradas do subsistema  $j$ , respectivamente.

Os estados calculados no instante  $k$ ,  $\mathbf{x}_{d,i}(k)$  do subsistema  $i$  são obtidos através de medições e informações advindas dos outros subsistemas.

Esse capítulo apresentou várias estratégias de controle preditivo distribuído. Outras alternativas propostas existem e podem ser encontradas nas referências destacadas nesse trabalho, como por exemplo o estudo de acoplamento entre modelos de resposta ao degrau baseando-se no critério de otimalidade de Nash (DU et al., 2001). No geral, há

formulações em espaço de estados que dividem o problema global de controle preditivo, em subproblemas, e essas implementações locais podem trocar ou não informações entre si. Entretanto, na sua maioria, os sistemas são adotados como completamente desacoplados, e sem superposição de estados nos submodelos usados no particionamento para o controlador.

Existe ainda controladores preditivos distribuídos que se baseiam em partições do modelos em espaço de estados de forma a que o problema seja tratado em uma formulação de entrada única e saída múltipla (SIMO, *single-input, multiple-output*), como o controlador proposto em Zhang e Wang (2012).

Nota-se ainda que a partição de Zhang e Wang (2012) não se aplica para os casos em que a matriz  $\mathbf{B}$  apresenta pelo menos uma coluna completa de números diferentes de zero. Nesses casos, o subsistema gerado seria o sistema completo da planta, pois todos estados seriam selecionados. Assim, as abordagens existentes, podem não atender satisfatoriamente demandas de controle para situações de elevado grau de interação entre os subsistemas e um controle preditivo distribuído concebido numa estratégia que aceita cooperação entre os subsistemas, que aceita superposição estrutural parece ser ainda necessário.

Assim, a criação de metodologias sistemáticas de partição de representações no espaço de estados de modelos lineares invariantes no tempo necessita de desenvolvimento e evolução. A proposta desta dissertação visa responder a essas demandas e é apresentada no próximo capítulo. A nova abordagem de controle é comparada com outras estratégias de controle e seu desempenho é avaliado através de critérios de desempenho estabelecidos.

---

---

## CAPÍTULO 3

---

### Uma proposta para MPC distribuído de Sistemas Lineares



presente capítulo faz referência a um tema intrinsecamente ligado ao controle distribuído preditivo, a decomposição de sistemas. Quando se deseja aplicar o controle distribuído em uma planta química é necessário fornecer aos controladores modelos de predição de cada subsistema de sua responsabilidade. Neste contexto, se faz necessário o desenvolvimento de métodos para decomposição de sistemas, afim de subdividir o modelo completo da planta. A seguir é introduzida a partição proposta neste trabalho.

### 3.1 Partição proposta

#### 3.1.1 Formulação do Problema

Considere que o modelo da planta seja descrito em representação de espaço de estados no tempo discreto da seguinte forma:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (3.1)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (3.2)$$

em que  $\mathbf{x}(k) = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T \in \mathbb{R}^n$  é o vetor dos estados do processo;  $\mathbf{u}(k) \in \mathbb{R}^m$  refere-se ao vetor de entradas do sistema ou variáveis manipuladas;  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  são as matrizes dos estados e entradas, respectivamente. Supõe-se que o conjunto  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  é controlável.

Neste trabalho, a decomposição do modelo da planta é realizada com base no grafo orientado dos efeitos nas variáveis controladas a partir do espaço das entradas. Primeiramente, verifica-se quais saídas cada entrada afeta, posteriormente, o efeito estado-saída é avaliado. Existem dois níveis de efeitos, o efeito direto e o efeito indireto. É preciso considerar primeiro os efeitos diretos mais dominantes, e se eles não são explícitos no modelo, em seguida, a seleção é baseada no efeito indireto de todas as entradas sobre as saídas controladas especificadas.

**Definição 2:** Defina-se um conjunto  $\varphi_i = \{\alpha | \mathbf{B}_{\alpha i} \neq 0, \alpha = 1, \dots, n\}$ , no qual  $\mathbf{B}_{\alpha i}$  é o elemento da  $\alpha$ -ésima linha e  $i$ -ésima coluna da matriz  $\mathbf{B}$ . O conjunto  $\vartheta_i = \{x_\alpha, \alpha \in \varphi_i\}$  representa os estados diretamente controlados pela entrada  $u_i$ .

**Definição 3:** Defina-se um conjunto  $\xi_i = \{\alpha | \mathbf{A}_{\alpha i} \neq 0, \alpha = 1, \dots, n\}$ , no qual  $\mathbf{A}_{\alpha i}$  é o elemento da  $\alpha$ -ésima linha e  $i$ -ésima coluna da matriz  $\mathbf{A}$ . O conjunto  $\rho_i = \{x_\alpha, \alpha \in \xi_i\}$  representa os estados diretamente afetados pelo estado  $x_i$ .

**Definição 4:** Defina-se um conjunto  $\pi_i$  com os estados que deverão ser incluídos no submodelo  $M\pi_i$ . Cada submodelo  $M\pi_i$  será definido baseado no mapeamento dos estados pertencentes aos conjuntos  $\vartheta_i$  e  $\rho_i$  que afetam o espaço das saídas (com base na matriz  $\mathbf{C}$ ).

Neste trabalho, a proposta de partição de sistemas é baseada nas Definições (2-4). As etapas de construção dos subsistemas gerados pela decomposição proposta são:

**Etapa 1:** criar o conjunto  $\varphi_i$  (e o conjunto  $\vartheta_i$ ) e o conjunto  $\xi_i$  (e o conjunto  $\rho_i$ ), baseando-se na matriz estrutural dos estados  $\mathbf{P}$ ;

**Etapa 2:** criar o conjunto  $\pi_i$  com os estados pertencentes aos conjuntos  $\vartheta_i$  e  $\rho_i$  que afetam diretamente os estados que afetam o espaço das saídas;

**Etapa 3:** incluir no conjunto  $M\pi_i$ , os elementos pertencentes ao conjunto  $\pi_i$ ;

**Etapa 4:** agrupar os submodelos  $M\pi_i$  e  $M\pi_j$  (para  $i \neq j$ ) se  $\pi_i$  e  $\pi_j$  forem conjuntos idênticos. Criar o novo conjunto de entradas pela junção das  $u_i$  e  $u_j$ ;

**Etapa 5:** verificar se o submodelo  $M\pi_i$  é controlável, caso contrário elementos adicionais de  $\pi_i$  deveram ser incluídos até que esta restrição seja satisfeita.

O algoritmo detalhado da proposta de decomposição é apresentado no Apêndice A.



A forma compacta de cada submodelo pode ser escrita como  $\mathbf{x}_i \in \pi_i$ , e então o modelo completo da planta pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\mathbf{x}_i(k+1) = \mathbf{A}_{ii}\mathbf{x}_i(k) + \mathbf{B}_{ii}\mathbf{u}_i(k) + \sum_{j=1(j \neq i)}^M \mathbf{A}_{ij}\mathbf{x}_j(k) + \mathbf{B}_{ij}\mathbf{u}_j(k) \quad (3.3)$$

em que,  $i = 1, \dots, M$ ;  $\mathbf{x}_i(k) \in \mathbb{R}^{n_i}$ ,  $\mathbf{u}_i(k) \in \mathbb{R}^{m_i}$  são os vetores de estados e entradas do subsistema  $M\pi_i$  no instante  $k$ , respectivamente;  $\mathbf{x}_j(k)$ ,  $\mathbf{u}_j(k)$  são os vetores de estados e entradas do subsistema  $M\pi_j$ , respectivamente.

### 3.1.2 Projeto do MPC distribuído

O modelo do subsistema  $i$  pode ser então escrito da seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{x}}_{d,i}(k+1) = \mathbf{A}_{ii}\hat{\mathbf{x}}_{d,i}(k) + \mathbf{B}_{ii}\mathbf{u}_i(k) + \mathbf{B}_{d,i}\mathbf{d}_i(k) \quad (3.4)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_{d,i}(k) = \mathbf{C}_i\hat{\mathbf{x}}_{d,i}(k), \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3.5)$$

O controlador trata as interações entre os subsistemas como perturbações. Portanto, tem-se:

$$\mathbf{B}_{d,i}\mathbf{d}_i(k) = \sum_{j=1(j \neq i)}^M \mathbf{A}_{ij}\hat{\mathbf{x}}_j(k) + \mathbf{B}_{ij}\mathbf{u}_j(k) \quad (3.6)$$

em que  $\mathbf{B}_{d,i}$  é a matriz das perturbações do subsistema  $i$ . Para cada subsistema, supõe-se que modelo nominal das Equações (3.4) e (3.1.2) podem ser descritos como

$$\hat{\mathbf{x}}_i(k+1) = \mathbf{A}_{ii}\hat{\mathbf{x}}_i(k) + \mathbf{B}_{ii}\mathbf{u}_i(k) \quad (3.7)$$

$$\hat{\mathbf{y}}_i(k) = \mathbf{C}_i\hat{\mathbf{x}}_i(k), \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3.8)$$

As saídas controladas são obtidas a partir do modelo nominal, como segue:

$$\hat{\mathbf{Y}}_i(k|k) = \Psi_i\hat{\mathbf{x}}_i(k|k) + \Theta_i\Delta\mathbf{U}_i(k|k) + \Upsilon_i\mathbf{u}_i(k-1|k) + \Xi_i(\mathbf{y}_{p,i}(k) - \hat{\mathbf{y}}_{d,i}(k)) \quad (3.9)$$

em que

$$\Psi_i = \Omega_i \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ii} \\ \mathbf{A}_{ii}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{ii}^{H_{p_i}} \end{bmatrix}, \quad (3.10)$$

$$\Theta_i = \Omega_i \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{ii} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{ii}\mathbf{B}_{ii} + \mathbf{B}_{ii} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{ii}^{H_{p_i}-1}\mathbf{B}_{ii} + \cdots + \mathbf{B}_{ii} & \cdots & \mathbf{A}_{ii}^{H_{p_i}-H_{c_i}}\mathbf{B}_{ii} + \cdots + \mathbf{B}_{ii} \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

$$\Upsilon_i = \Omega_i \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{ii} \\ \mathbf{A}_{ii}\mathbf{B}_{ii} + \mathbf{B}_{ii} \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{ii}^{H_{p_i}-1}\mathbf{B}_{ii} + \cdots + \mathbf{B}_{ii} \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

$$\Xi_i = \Omega_i \begin{bmatrix} \mathbf{B}_d\mathbf{C}_i \\ \mathbf{A}_{ii}\mathbf{B}_d\mathbf{C}_i + \mathbf{B}_d\mathbf{C}_i \\ \vdots \\ \mathbf{A}_{ii}^{H_{p_i}-1}\mathbf{B}_d\mathbf{C}_i + \cdots + \mathbf{B}_d\mathbf{C}_i \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

e

$$\Omega_i = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_i & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_i & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{C}_i \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

A função objetivo que se deve minimizar em cada controlador é dado por (MACIEJOWSKI, 2002):

$$V_i(k) = \sum_{j=H_{w_i}}^{H_{p_i}} \|\hat{\mathbf{y}}_i(k+j|k) - \mathbf{r}_i(k+j)\|_{\mathbf{Q}_i(j)}^2 + \sum_{j=0}^{H_{u_i}-1} \|\Delta \hat{\mathbf{u}}_i(k+j|k)\|_{\mathbf{R}_i(j)}^2 \quad (3.15)$$

em que  $\mathbf{Q}_i > 0$  e  $\mathbf{R}_i \geq 0$  são as matrizes de ponderação das saídas e das entradas do subsistema  $i$ , respectivamente.

O funcional objetivo  $V_i$  penaliza desvios nas saídas previstas e controladas  $\hat{\mathbf{y}}_i(k+j|k)$  a partir de um vetor da trajetória de referência  $\mathbf{r}_i(k+j|k)$  em cada subsistema  $i$ . Além disso, penaliza também a variação das ações de controle  $\Delta \hat{\mathbf{u}}_i(k+j|k)$ . Esta equação pode ser reescrita da seguinte forma:

$$V_i(k) = \|\mathbf{Y}_i(k) - \tau_i(k)\|_{\mathbf{Q}_i}^2 + \|\Delta \mathbf{U}_i(k)\|_{\mathbf{R}_i}^2 \quad (3.16)$$

em que

$$\mathbf{Y}_i(k) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{y}}_i(k + H_{wi}|k) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{y}}_i(k + H_{pi}|k) \end{bmatrix}, \quad (3.17)$$

$$\tau_i(k) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{r}}_i(k + H_{wi}|k) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{r}}_i(k + H_{pi}|k) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

e

$$\Delta \mathbf{U}_i(k) = \begin{bmatrix} \Delta \hat{\mathbf{u}}_i(k|k) \\ \vdots \\ \Delta \hat{\mathbf{u}}_i(k + H_{ui} - 1|k) \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

e as matrizes de ponderação  $\mathbf{Q}_i$  e  $\mathbf{R}_i$  são dadas por:

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_i(H_w) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}_i(H_w + 1) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{Q}_i(H_p) \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

e

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_i(0) & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_i(1) & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{R}_i(H_u - 1) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

A diferença entre a trajetória de referência e a resposta livre do sistema, ou seja, a resposta que ocorreria durante o horizonte de predição sem que nenhuma ação de controle fosse aplicada nas entradas manipuladas (isto é,  $\Delta \mathbf{U}_i(k) = 0$ ) pode ser definida como:

$$\varepsilon_i(k) = \tau_i(k) - \Psi_i \hat{\mathbf{x}}_i(k|k) - \Upsilon_i \mathbf{u}_i(k-1|k) - \Xi_i \mathbf{d}_i(k) \quad (3.22)$$

Dessa forma tem-se que:

$$V_i(k) = \|\Theta_i \Delta \mathbf{U}_i(k) - \varepsilon_i(k)\|_{\mathbf{Q}_i}^2 + \|\Delta \mathbf{U}_i(k)\|_{\mathbf{R}_i}^2 \quad (3.23)$$

$$= [\Delta \mathbf{U}_i(k)^T \Theta_i^T - \varepsilon_i(k)^T] \mathbf{Q}_i [\Theta_i \Delta \mathbf{U}_i(k) - \varepsilon_i(k)] \\ + \Delta \mathbf{U}_i(k)^T \mathbf{R}_i \Delta \mathbf{U}_i(k) \quad (3.24)$$

$$= \varepsilon_i(k)^T \mathbf{Q}_i \varepsilon_i(k) - 2 \Delta \mathbf{U}_i(k)^T \Theta_i^T \mathbf{Q}_i \varepsilon_i(k) \\ + \Delta \mathbf{U}_i(k)^T [\Theta_i^T \mathbf{Q}_i \Theta_i + \mathbf{R}_i] \Delta \mathbf{U}_i(k) \quad (3.25)$$

Nota-se que esta equação tem a seguinte forma:

$$V_i(k) = \text{const} - \Delta \mathbf{U}_i(k)^T G_i + \Delta \mathbf{U}_i(k)^T H_i \Delta \mathbf{U}_i(k) \quad (3.26)$$

em que

$$G_i = 2 \Theta_i^T \mathbf{Q}_i \varepsilon_i(k) \quad (3.27)$$

e

$$H_i = \Theta_i^T \mathbf{Q}_i \Theta_i + \mathbf{R}_i \quad (3.28)$$

nem  $G_i$  e nem  $H_i$  dependem de  $\Delta \mathbf{U}_i(k)$ . As ações de controle são obtidas resolvendo-se o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min \quad & V_i(k) \\ & u_i(k+l|k), l = 0, \dots, H_u - 1 \\ \text{sujeito a : } & \hat{\mathbf{Y}}_i(k|k) = \Psi_i \hat{\mathbf{x}}_i(k|k) + \Theta_i \Delta \mathbf{U}_i(k|k) + \Upsilon_i \mathbf{u}_i(k-1|k) \\ & + \Xi_i(\mathbf{y}_{p,i}(k) - \hat{\mathbf{y}}_{d,i}(k)) \\ & \hat{\mathbf{x}}_i(k|k) = \mathbf{x}_i(k) \\ & x_i(0) = x_{i0} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Para encontrar a solução ótima sem restrições  $\Delta \mathbf{U}_i(k)$  deve-se encontrar o gradiente de  $V_i(k)$  e igualá-lo a zero. A partir da Equação (3.26) tem-se que:

$$\nabla_{\Delta \mathbf{U}_i(k)} V_i = -G_i + 2H_i \Delta \mathbf{U}_i(k) \quad (3.30)$$

então o conjunto ótimo de ações de controle é

$$\Delta \mathbf{U}_i(k)_{opt} = \frac{1}{2} H_i^{-1} G_i \quad (3.31)$$

De acordo com a teoria do horizonte móvel, apenas a primeira ação de controle é de fato

aplicada à planta. Assim, se  $n$  é o número de entradas manipuladas, deve-se utilizar apenas as  $n$  primeiras linhas do vetor  $\Delta \mathbf{U}_i(k)_{opt}$ , o que pode ser representado da seguinte forma:

$$\Delta \mathbf{u}_i(k)_{opt} = [I_n, \quad 0_n, \quad \dots, \quad 0_n] \Delta \mathbf{U}_i(k)_{opt} \quad (3.32)$$

em que  $I_n$  é uma matriz identidade  $n \times n$ , e  $0_n$  é uma matriz de zeros  $n \times n$ . Na próxima seção, tem-se a aplicação da partição proposta em 3 estudos de casos distintos, em que se compara a nova abordagem com outras estratégias de controle. O desempenho de cada sistema de controle é aferido por índices adequados e pré-definidos.

## 3.2 Aplicações do MPC Distribuído Proposto

Nesta seção tem-se os resultados de simulações dinâmicas realizadas para avaliar o desempenho do controlador DMPC (Controle Preditivo Distribuído baseado em Modelo) utilizando a proposta de decomposição de sistemas apresentada na seção anterior deste capítulo. Em cada exemplo serão feitas as seguintes análises:

- avaliação da estratégia DMPC utilizando a proposta de decomposição de sistemas, comparando-a com o sistema de controle centralizado, o DMPC utilizando a partição de Zhang e Wang (2012) (quando aplicável) e o controle descentralizado;
- avaliação do efeito da ordem dos controladores MPC sobre os resultados obtidos, quando utiliza-se a estrutura DMPC sequencial;
- avaliação da estratégia DMPC sequencial em problemas de controle com restrições nas variáveis manipuladas;
- avaliação da estratégia DMPC em paralelo.

O primeiro exemplo se trata do sistema artificial presente no trabalho de Zhang e Wang (2012). O segundo caso é um sistema artificial criado especificamente para este trabalho, com a característica de mal-condicionamento, o que dificulta consideravelmente o controle do mesmo e possibilita verificar a eficiência da estrutura DMPC desenvolvida. O terceiro estudo de caso, constituído de três tanques em série com reciclo com base no modelo apresentado em Stewart et al. (2010). O quarto e último exemplo, é um sistema industrial de moagem de minério apresentado em Ylinen et al. (1987).

As simulações presentes nesta dissertação foram realizadas no *software* livre Scilab e os problemas de otimizações inerentes ao MPC foram resolvidos utilizando a função **qpsolve**,

que faz uso da programação quadrática e cujo algoritmo foi proposto em Goldfarb e Idnani (1982).

### 3.2.1 Estudo de caso #1 (ZHANG; WANG, 2012)

Considere um sistema com quatro estados ( $x_1$ ,  $x_2$ ,  $x_3$  e  $x_4$ ), duas entradas manipuladas ( $u_1$  e  $u_2$ ), duas saídas controladas ( $y_1$  e  $y_2$ ), instável em malha aberta, bem condicionado, linear e invariante no tempo. Sua representação em espaço de estados é dada pelas seguintes equações:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,75 & -0,5 & 0 \\ 1,5 & -1 & -0,6 & -0,15 \\ 0 & 0,5 & -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

O modelo descrito pelas Equações (3.33) e (3.34), que se refere ao sistema completo da planta, foi particionado em dois subsistemas baseando-se na partição proposta neste trabalho. Além disso, objetivando a comparação das técnicas, o mesmo sistema foi particionado em dois outros subsistemas baseando-se na partição de Zhang e Wang (2012). A seguir, tem-se os subsistemas e seus respectivos submodelos gerados por ambas as técnicas.

A partição proposta neste trabalho é baseada nas Definições (2-4), presentes na seção anterior. Utilizando tais definições, gera-se dois subsistemas distintos representados por:

Subsistema #1:  $\{u_1\} \Rightarrow \{x_3\}$  (Sistema quadrado em que se manipula  $u_1$  para o controle de  $x_3$ ).

Subsistema #2:  $\{u_2\} \Rightarrow \{x_3 \text{ e } x_4\}$  (Sistema não quadrado em que se manipula  $u_2$  para o controle de  $x_3$  e  $x_4$ ).

As etapas de obtenção destes subsistemas estão presentes na seção 1 do Apêndice B.

Nota-se que há partes sobrepostas entre os subsistemas criados, o que mostra que eles não estão totalmente desacoplados. Os respectivos submodelos são:

Submodelo #1:

$$\begin{bmatrix} x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} u_1(k) \quad (3.35)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3(k) \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Submodelo #2:

$$\begin{bmatrix} x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,6 & -0,15 \\ -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_2(k) \quad (3.37)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

A partição proposta por Zhang e Wang (2012) é baseado na Definição (1). Utilizando tal definição, gera-se os seguintes subsistemas distintos:

Subsistema 1:  $\{u_1\} \Rightarrow \{x_1 \text{ e } x_3\}$  (Sistema não quadrado em que se manipula  $u_1$  para o controle de  $x_1$  e  $x_3$ ).

Subsistema 2:  $\{u_2\} \Rightarrow \{x_2, x_3 \text{ e } x_4\}$  (Sistema não quadrado em que se manipula  $u_2$  para o controle de  $x_2, x_3$  e  $x_4$ ).

Os submodelos gerados são:

Submodelo #1:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & -0,25 \\ 1,5 & -0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_1(k) \quad (3.39)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Submodelo #2:

$$\begin{bmatrix} x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,75 & -0,5 & 0 \\ -1 & -0,6 & -0,15 \\ 0,5 & -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u_2(k)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

As primeiras simulações realizadas se referem às envolvendo a abordagem DMPC sequencial. Neste estudo de caso, optou-se pela comparação entre controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012).

### Avaliação da estrutura DMPC sequencial

Para a estrutura DMPC sequencial, avaliou-se o efeito da ordem dos controladores na estrutura de controle. Simulações foram realizadas para cada uma das duas ordens possíveis (1-2 e 2-1) e a ordem que mais favorece a utilização da aplicação do DMPC com a partição proposta é a 2-1. Os resultados obtidos para a ordem 1-2 estão na seção 1 do Apêndice F. Na estratégia DMPC sequencial com ordem 2-1, as ações de controle são primeiramente calculadas pelo controlador do subsistema #2, e de posse dessas informações, o controlador do subsistema #1 realiza seus cálculos. Somente após estas duas etapas, as ações são de fato implementadas na planta.

Os valores dos horizontes de predição e de controle utilizados nas simulações para este estudo de caso são:  $H_p = 10$  e  $H_u = 5$ , respectivamente. As matrizes de ponderação  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  foram otimizadas através do método da Evolução Diferencial (detalhes sobre esta técnica no Anexo C) e as matrizes resultantes para a estratégia de controle centralizado são:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 8,87 & 0 \\ 0 & 0,15 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

e

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2,23 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 3,33 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

As matrizes obtidas  $\mathbf{Q}_1$  e  $\mathbf{R}_1$  (referentes ao subsistema #1) e as matrizes  $\mathbf{Q}_2$  e  $\mathbf{R}_2$  (referentes ao subsistema #2) da estratégia de controle DMPC que utiliza a partição proposta são:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 6,44 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

e

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 2,34 & 0 \\ 0 & 6,69 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 2,14 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

As matrizes obtidas para os controladores da estratégia DMPC que utiliza a partição de



Zhang e Wang (2012) foram:

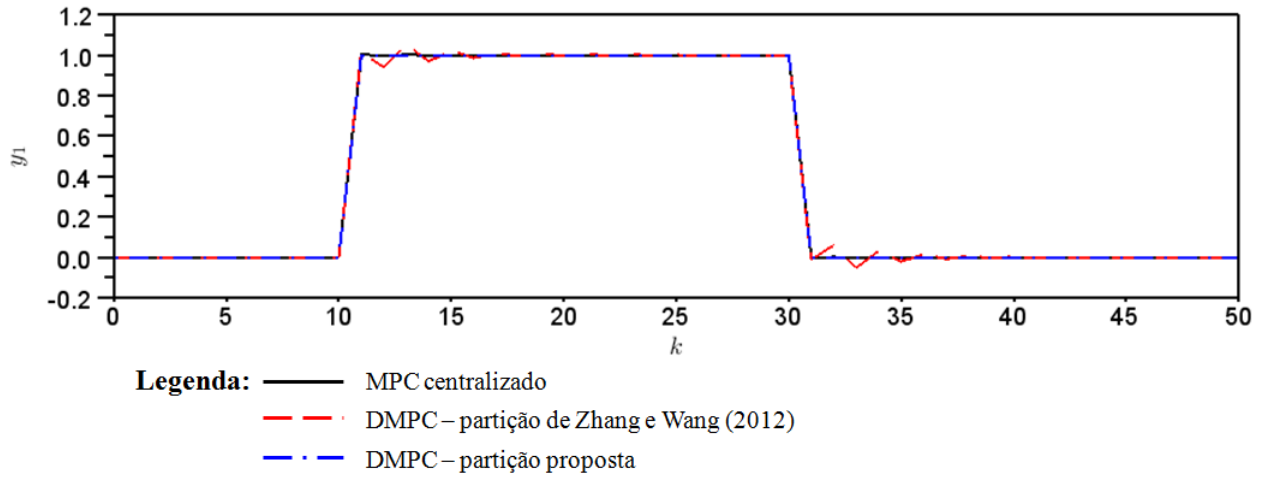
$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

e

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

As condições iniciais são:  $x_3(0) = 0$  e  $x_4(0) = 0$ . O objetivo do controle é manter as variáveis controladas na condição inicial até o instante de amostragem  $k = 10$ . Entre os instantes  $k = 11$  e  $k = 30$ , levar e manter as saídas do processo em 1 e depois retorná-las para sua condição inicial a partir de  $k = 31$  até o instante  $k = 50$ , quando a simulação termina.

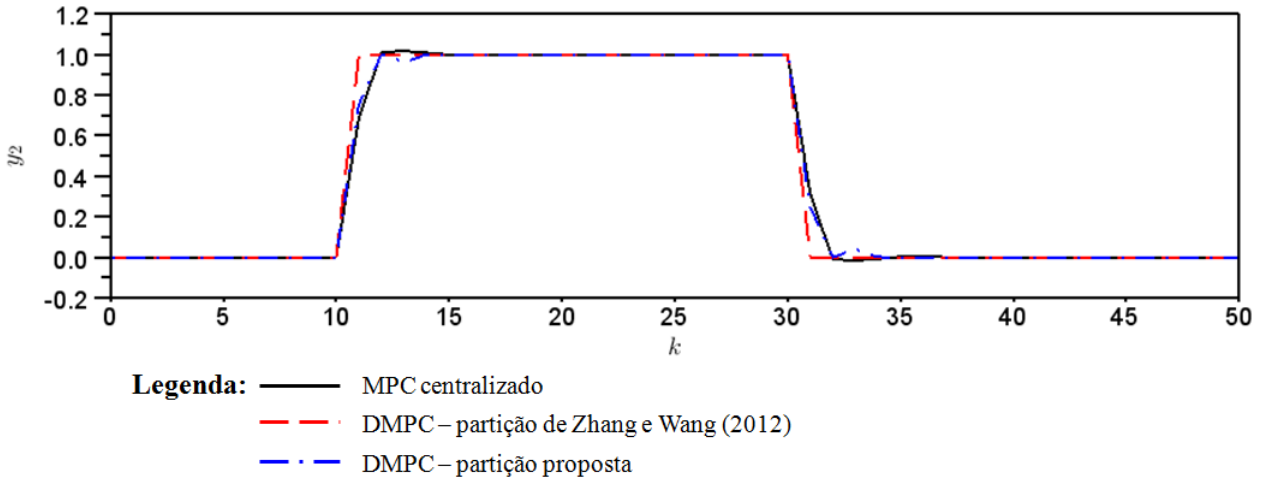
As Figuras (3.1) e (3.2) apresentam as dinâmicas das saídas controladas do processo  $y_1$  e  $y_2$ , respectivamente. As figuras mostram as respostas obtidas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta neste trabalho e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012).



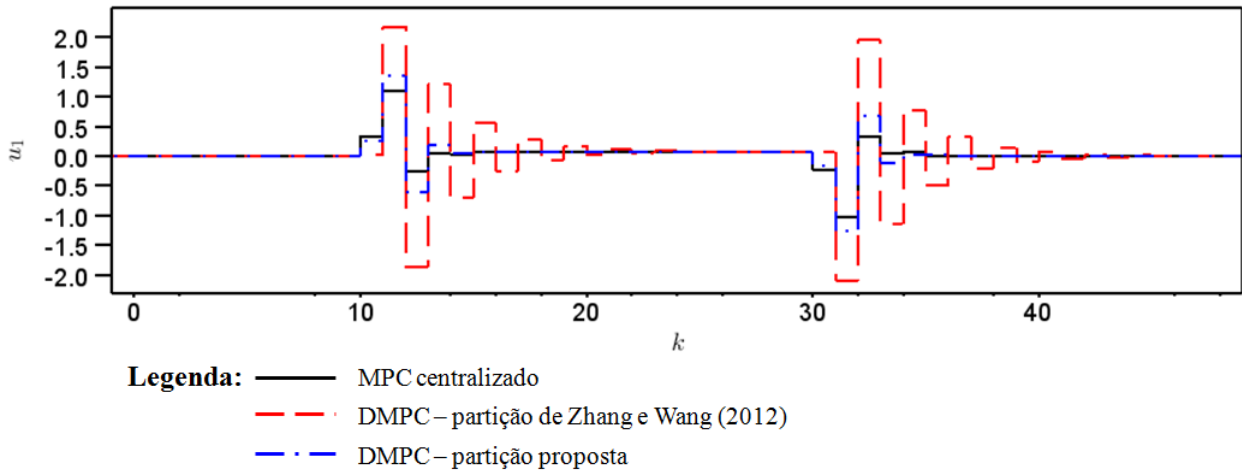
**Figura 3.1:** Dinâmicas da saída controlada  $y_1$  do processo do estudo de caso #1 obtidas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com ordem 2-1.

As ações de controle implementadas pelas entradas manipuladas  $u_1$  e  $u_2$ , que provocaram as respostas apresentadas anteriormente, estão representadas nas Figuras (3.3) e (3.4), respectivamente.

Analisando-se os resultados, pode-se afirmar em termos qualitativos, que a metodologia proposta de DMPC apresenta resultados satisfatórios. Os resultados obtidos se



**Figura 3.2:** Dinâmicas da saída controlada  $y_2$  do processo do estudo de caso #1 obtidas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com ordem 2-1.

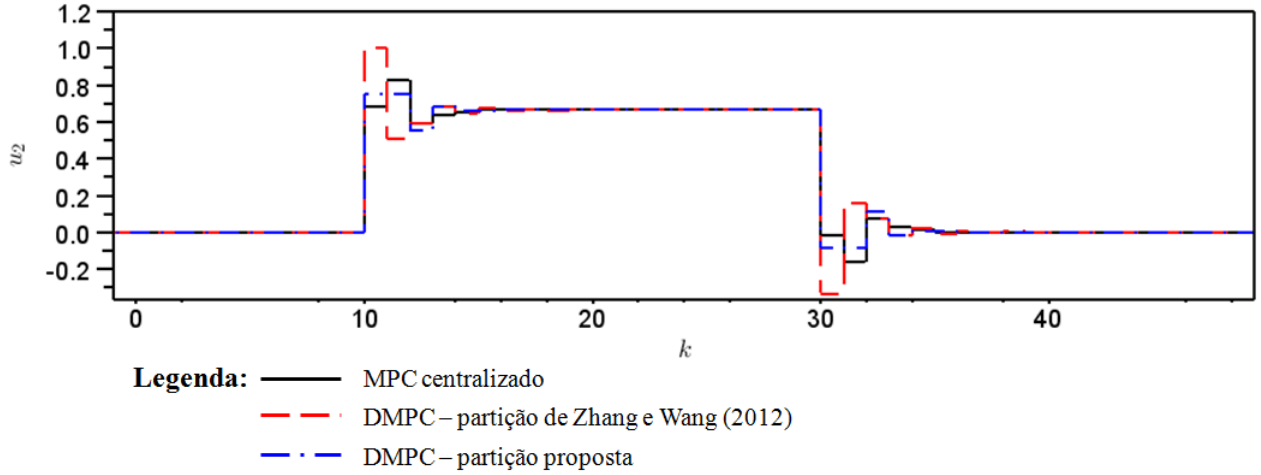


**Figura 3.3:** Ações de controle da entrada manipulada  $u_1$  do processo do estudo de caso #1 implementadas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com ordem 2-1.

aproximam dos obtidos pelo controle ideal proporcionado pelo sistema centralizado, o que não ocorre para o DMPC utilizando a proposta de Zhang e Wang (2012), que apresenta pequenas oscilações nos comportamentos das saídas e principalmente das entradas, levando um tempo considerável para estabilizar no ponto desejado.

Para realizar uma comparação em termos quantitativos, optou-se por fazê-la avaliando-se o índice de desempenho ITAE (Integral do erro absoluto ponderado pelo tempo) para as saídas controladas. O ITAE pode ser calculado discretamente da seguinte forma:

$$ITAE = \sum_{k=0}^T k \cdot |e(k)| \quad (3.48)$$



**Figura 3.4:** Ações de controle da entrada manipulada  $u_2$  do processo do estudo de caso #1 implementadas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com ordem 2-1.

sendo,  $\mathbf{e}(k) = \mathbf{y}(k) - \mathbf{r}(k)$  e  $T$  o último instante de amostragem considerado na simulações. Os valores encontrados para cada uma das técnicas e para cada uma das saídas controladas estão presentes na Tabela (3.1).

**Tabela 3.1:** Valores dos índices ITAE para as saídas controladas  $y_1$  e  $y_2$  do processo do estudo de caso #1 para DMPCs com ordem 2-1.

Estratégia de controle	ITAE para $y_1$	ITAE para $y_2$
MPC centralizado	0,0963	14,9758
DMPC - partição de Zhang e Wang (2012)	10,1638	0,00955
DMPC - partição proposta	0,0003	12,3080

Com intuito de quantificar o desempenho em relação às entradas manipuladas e posteriormente apresentar uma avaliação global das técnicas, defini-se o critério IAE (Integral do erro absoluto) para  $\Delta u$ , na forma discreta:

$$IAE = \sum_{k=0}^T |\Delta \mathbf{u}(k)| \quad (3.49)$$

sendo  $\Delta \mathbf{u} = \mathbf{u}(k) - \mathbf{u}(k-1)$ . Os valores encontrados para cada uma das técnicas e para cada uma das entradas manipuladas estão presentes na Tabela (3.2).

Para avaliar as técnicas em termos globais, defini-se um novo critério que considera todos os índices obtidos por cada saída, e é representado da seguinte forma:

$$I_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n_y} \alpha_i \cdot ITAE_{yi}^2} \quad (3.50)$$

**Tabela 3.2:** Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas  $u_1$  e  $u_2$  do processo do estudo de caso #1 para DMPCs com ordem 2-1.

Estratégia de controle	IAE - $u_1$	IAE - $u_2$
MPC centralizado	5,6611	2,2737
DMPC - partição de Zhang e Wang (2012)	29,6679	3,5622
DMPC - partição proposta	8,4887	2,2341

sendo  $n_y$  o número de saídas controladas e  $\alpha_i$  o índice de adimensionamento para as saídas. A Tabela (3.3) apresenta os valores de  $I_y$  para cada estratégia de controle avaliada. Além disso, esta tabela apresenta a perda ( $\downarrow$ ) ou ganho ( $\uparrow$ ) de desempenho em relação ao controle centralizado.

**Tabela 3.3:** Valores dos índices globais  $I_y$  do processo do estudo de caso #1 e desempenho dos DMPCs com ordem 2-1.

Estratégia de controle	$I_y$	Desempenho (%)
MPC centralizado	14,98	-
DMPC - partição de Zhang e Wang (2012)	10,16	$\uparrow$ 47
DMPC - partição proposta	12,31	$\uparrow$ 22

O mesmo critério definido para as entradas manipuladas é representado por:

$$I_u = \sqrt{\sum_{i=1}^m \beta_i \cdot IAE_{ui}^2} \quad (3.51)$$

sendo  $m$  o número de entradas manipuladas e  $\beta_i$  o índice de adimensionamento para as entradas. A Tabela (3.4) apresenta os valores de  $I_u$  para cada estratégia de controle avaliada. Da mesma forma que a anterior, também apresenta a perda ( $\downarrow$ ) ou ganho ( $\uparrow$ ) de desempenho em relação ao controle centralizado.

**Tabela 3.4:** Valores dos índices globais  $I_u$  do processo do estudo de caso #1 e desempenho dos DMPCs com ordem 2-1.

Estratégia de controle	$I_u$	Desempenho (%)
MPC centralizado	6,1	-
DMPC - partição de Zhang e Wang (2012)	29,88	$\downarrow$ 390
DMPC - partição proposta	8,78	$\downarrow$ 44

Em termos globais, o sistema de controle centralizado apresenta o melhor resultado para o controle do sistema em questão, como já era esperado. Dentre as abordagens de DMPC, a que utiliza a partição proposta, tem um ganho de 22 % no desempenho para as saídas controladas, mas por outro lado, apresenta uma perda de 44 % no desempenho

para as entradas manipuladas. O DMPC com a partição proposta por Zhang e Wang (2012) tem um ganho de 47 % no desempenho para as saídas controladas, mas por outro lado, apresenta uma perda de 390 % no desempenho para as entradas manipuladas, o que provocaria movimentos desnecessários nos atuadores. Portanto, em termos gerais, o DMPC proposto é mais eficiente.

Quando se avalia o controle DMPC sequencial com a ordem dos controladores 1-2 (resultados na seção 1 do Apêndice F) nota-se que os resultados não são favoráveis para a abordagem DMPC utilizando partição proposta. Estes resultados mostram que a ordem dos controladores no DMPC sequencial afeta significativamente os resultados obtidos. Portanto, a escolha da ordem é um parâmetro importante durante o processo de construção da estratégia DMPC.

### Avaliação do problema de controle DMPC sequencial com restrições

Com o intuito de avaliar o desempenho da estrutura DMPC considerando o caso do problema de controle com restrições nas variáveis manipuladas, realizaram-se outras simulações. O acréscimo dessas restrições tem como objetivo restringir os movimentos das entradas e impedir que ocorram mudanças abruptas nessas variáveis, mas vale ressaltar que a adição dessas condições aumenta a dificuldade de resolução do problema de otimização.

As condições iniciais e o objetivo de controle são os mesmos utilizados nas simulações anteriores. As restrições impostas foram sobre o incremento de cada variável manipulada  $u_i$ . O valor da restrição imposta sobre o  $\Delta u_i$  é de 0,4. As matrizes de ponderação  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  foram otimizadas através do método da Evolução Diferencial (detalhes sobre esta técnica no Anexo C) e as matrizes resultantes para a estratégia de controle centralizado são:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0,65 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

e

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 2,88 \cdot 10^{-3} & 0 \\ 0 & 2,17 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

As matrizes obtidas  $\mathbf{Q}_1$  e  $\mathbf{R}_1$  (referentes ao subsistema #1) e as matrizes  $\mathbf{Q}_2$  e  $\mathbf{R}_2$  (referentes ao subsistema #2) da estratégia de controle DMPC que utiliza a partição proposta são:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 8,33 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

e

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1,83 & 0 \\ 0 & 9,14 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1,35 \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

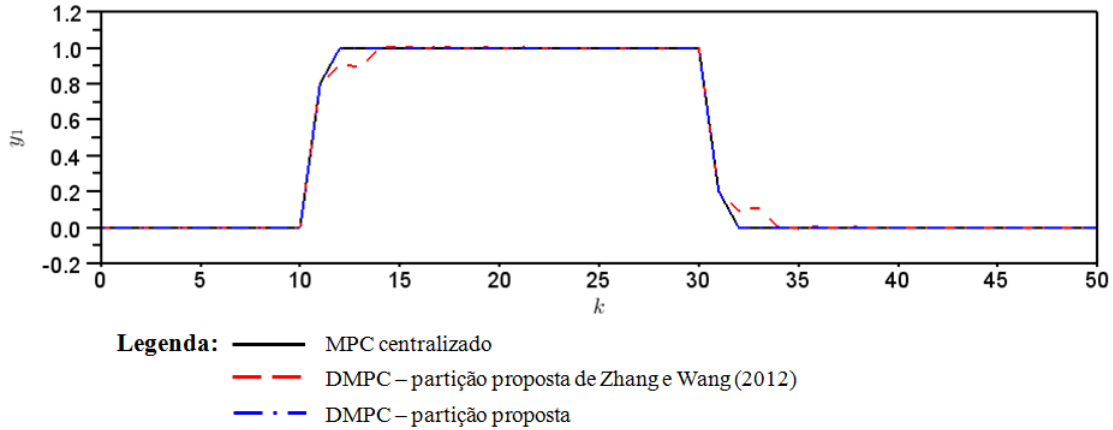
As matrizes obtidas para os controladores da estratégia DMPC que utiliza a partição de Zhang e Wang (2012) são:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

e

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

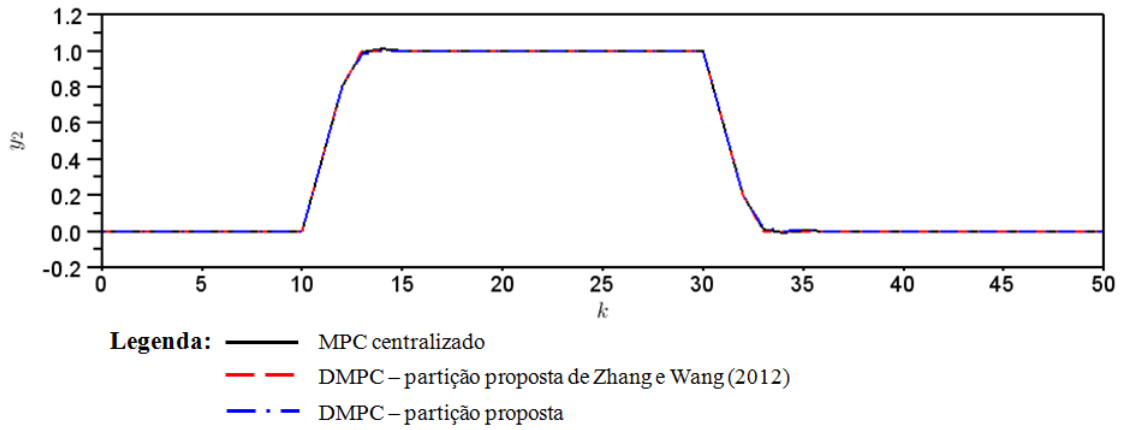
As Figuras (3.5) e (3.6) apresentam as dinâmicas das saídas controladas do processo  $y_1$  e  $y_2$ , respectivamente. Elas mostram as respostas obtidas, com restrições em  $\Delta u_i$  pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta neste trabalho e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012).



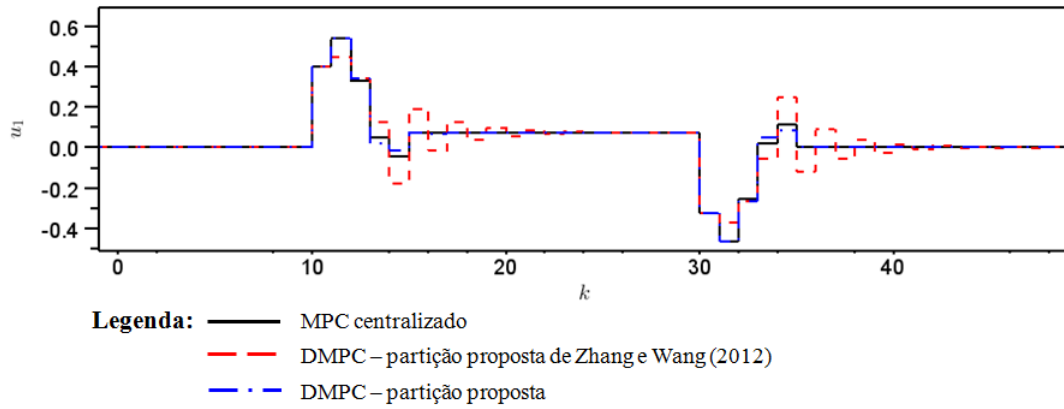
**Figura 3.5:** Dinâmicas da saída controlada  $y_1$  do processo do estudo de caso #1 considerando restrição em  $|\Delta u_i| = 0,4$  obtidas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com ordem 1-2.

As ações de controle implementadas pelas entradas manipuladas  $u_1$  e  $u_2$ , que provocaram as respostas apresentadas anteriormente, estão representadas nas Figuras (3.7) e (3.8), respectivamente.

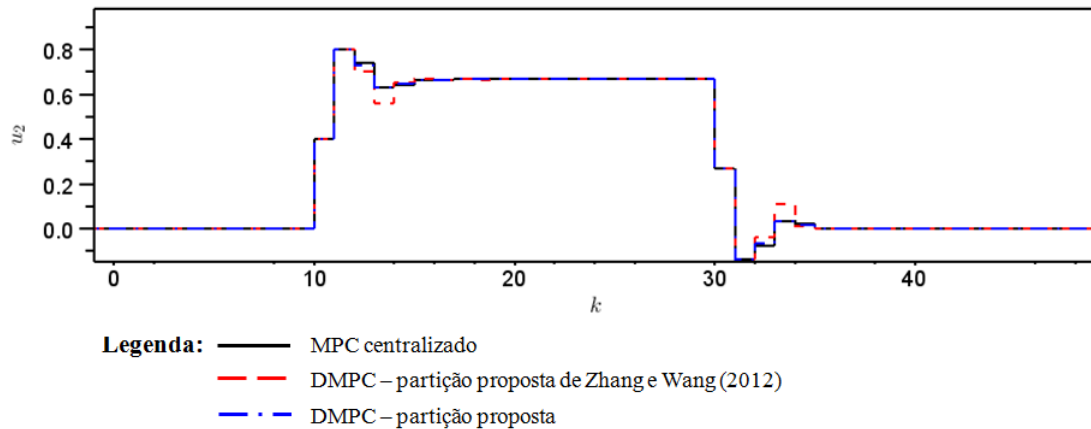
Em termos qualitativos, pode-se afirmar através da análise dos resultados apresentadas, que a metodologia proposta de DMPC para o problema de controle com restrições apresenta resultados satisfatórios tanto para as saídas controladas, quanto para as entra-



**Figura 3.6:** Dinâmicas da saída controlada  $y_2$  do processo do estudo de caso #1 considerando restrição em  $|\Delta u_i| = 0,4$  obtidas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com ordem 1-2.



**Figura 3.7:** Ações de controle restritas em  $|\Delta u_i| = 0,4$  da entrada manipulada  $u_1$  do processo do estudo de caso #1 obtidas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com ordem 1-2.



**Figura 3.8:** Ações de controle restritas em  $|\Delta u_i| = 0,4$  da entrada manipulada  $u_2$  do processo do estudo de caso #1 obtidas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com 1-2.

das manipuladas. Os resultados são muito próximos dos obtidos pelo controle centralizado. O DMPC utilizando a partição de Zhang e Wang (2012) apresenta os resultados piores.

A comparação em termos quantitativos realizou-se através do índice de desempenho ITAE para as saídas controladas e IAE para as entradas manipuladas. Os valores encontrados para estes índices e para cada uma das técnicas estão presentes nas Tabelas (3.5) e (3.6), respectivamente.

**Tabela 3.5:** Valores dos índices ITAE para as saídas controladas  $y_1$  e  $y_2$  do processo do estudo de caso #1 para DMPCs com ordem 2-1 e restrições nas variáveis manipuladas.

Estratégia de controle	ITAE para $y_1$	ITAE para $y_2$
MPC centralizado	8,42	34,97
DMPC - partição de Zhang e Wang (2012)	18,48	33,99
DMPC - partição proposta	8,40	35,08

**Tabela 3.6:** Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas  $u_1$  e  $u_2$  do processo do estudo de caso #1 para DMPCs com ordem 1-2 e restrições nas variáveis manipuladas.

Estratégia de controle	IAE para $u_1$	IAE para $u_2$
MPC centralizado	2,48	2,01
DMPC - partição de Zhang e Wang (2012)	4,11	2,32
DMPC - partição proposta	2,37	2,00

Nas Tabelas (3.7) e (3.8) tem-se os valores obtidos de  $I_y$  e  $I_u$ , respectivamente.

**Tabela 3.7:** Valores dos índices globais  $I_y$  do processo do estudo de caso #1 e desempenho dos DMPCs com ordem 2-1 e com restrições nas variáveis manipuladas.

Estratégia de controle	$I_y$	Desempenho (%)
MPC centralizado	35,97	-
DMPC - partição de Zhang e Wang (2012)	38,69	↓ 7,56
DMPC - partição proposta	36,07	↓ 0,28

**Tabela 3.8:** Valores dos índices globais  $I_u$  do processo do estudo de caso #1 e desempenho dos DMPCs com ordem 2-1 e com restrições nas variáveis manipuladas.

Estratégia de controle	$I_u$	Desempenho (%)
MPC centralizado	3,19	-
DMPC - partição de Zhang e Wang (2012)	4,72	↓ 47,96
DMPC - partição proposta	3,10	↑ 2,9

Analisando-se os resultados obtidos para os desempenhos das estratégias, nota-se que a proposta de DMPC apresenta resultados satisfatórios (perda de desempenho quase nula



para as saídas controladas e ganho de desempenho de 3 % para as entradas manipuladas), mesmo quando atribui-se restrições ao problema de controle, enquanto a que utiliza a partição de Zhang e Wang (2012) apresenta desempenho inferior. Constatou-se quantitativamente o que havia sido concluído pela análise gráfica.

### Avaliação da estrutura DMPC em paralelo

Com o intuito de avaliar a estrutura DMPC em paralelo realizaram-se simulações para este tipo de abordagem e os resultados foram comparados entre o controle centralizado, o DMPC utilizando partição proposta neste trabalho e o DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012). Na estratégia de controle DMPC paralelo, os cálculos das ações de controle são efetuadas ao mesmo tempo, não havendo troca de informações entre os controladores durante o processo de decisão (ou seja, no mesmo intervalo de amostragem). Isso permite que computadores com múltiplos processadores possam ser usados numa arquitetura também paralela de cálculo. Os cálculos realizados se baseiam nas informações obtidas no instante de amostragem anterior.

Considerou-se os mesmos valores para os parâmetros  $H_p(=10)$  e  $H_u(=5)$  e as matrizes de ponderação  $Q$  e  $R$ , para os subsistema #1 e #2, também foram otimizadas através da técnica da Evolução Diferencial. Os valores das matrizes  $Q_1$  e  $R_1$  do subsistema #1 e  $Q_2$  e  $R_2$  do subsistema #2 para DMPC utilizando a partição proposta neste trabalho são:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 9, 70 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 6, 61 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

e

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 2, 87 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 2, 54 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Os valores dessas matrizes para os controladores do DMPC utilizando a partição de Zhang e Wang (2012) são:

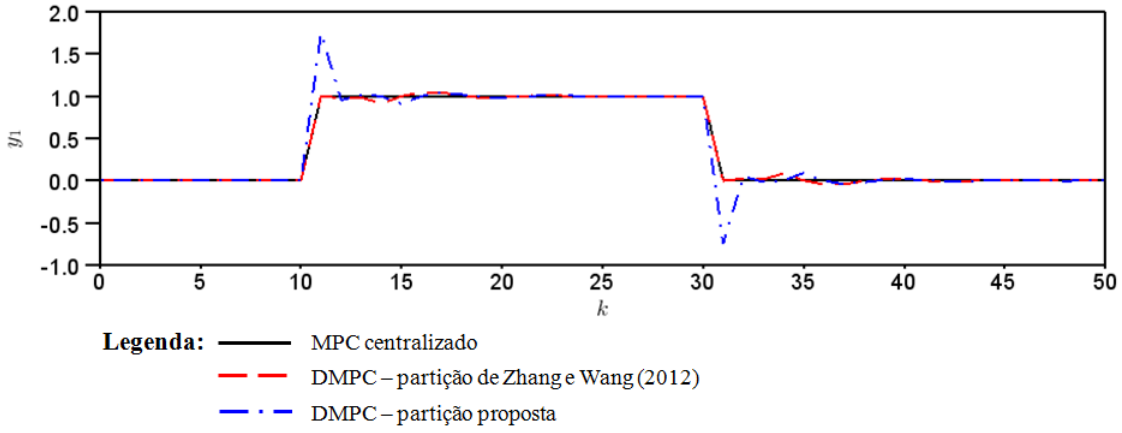
$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 6, 10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 8, 48 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

e

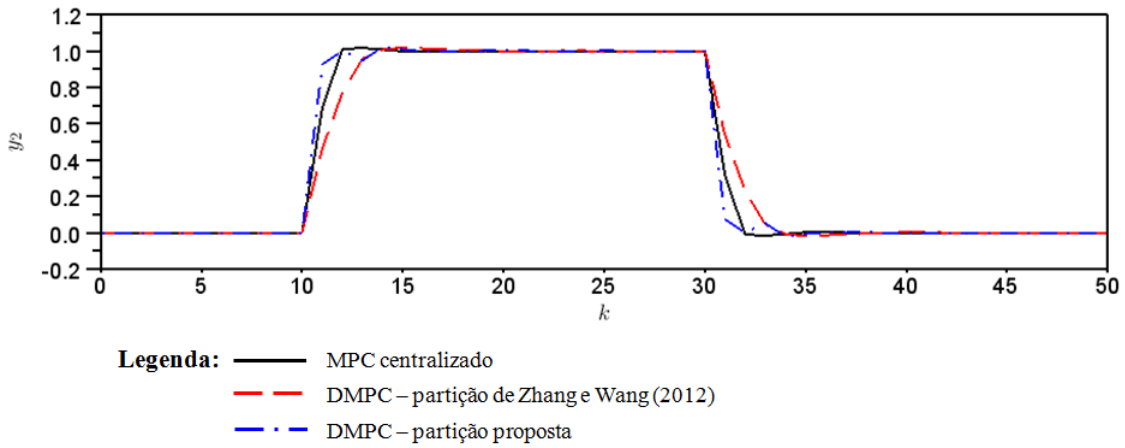
$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 2, 22 & 0 \\ 0 & 9, 73 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 3, 35 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

As condições iniciais e o objetivo de controle são os mesmos considerados nas simulações anteriores. As Figuras (3.9) e (3.10) apresentam as dinâmicas das saídas controladas do processo  $y_1$  e  $y_2$ , respectivamente. Elas mostram as respostas obtidas pelo controle centra-

lizado, DMPC utilizando partição proposta neste trabalho e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com a estrutura em paralelo.



**Figura 3.9:** Dinâmicas da saída controlada  $y_1$  do processo do estudo de caso #1 obtidas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com estrutura em paralelo.

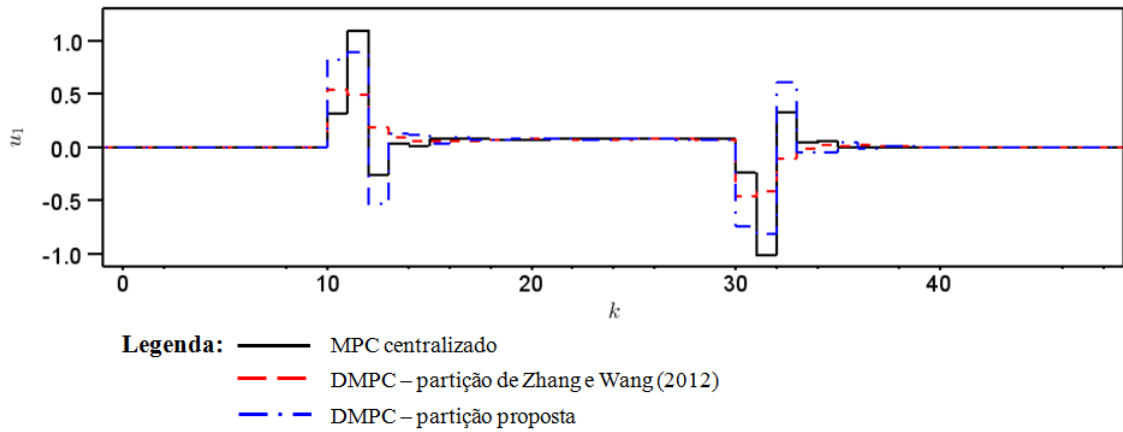


**Figura 3.10:** Dinâmicas da saída controlada  $y_2$  do processo do estudo de caso #1 obtidas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com estrutura em paralelo.

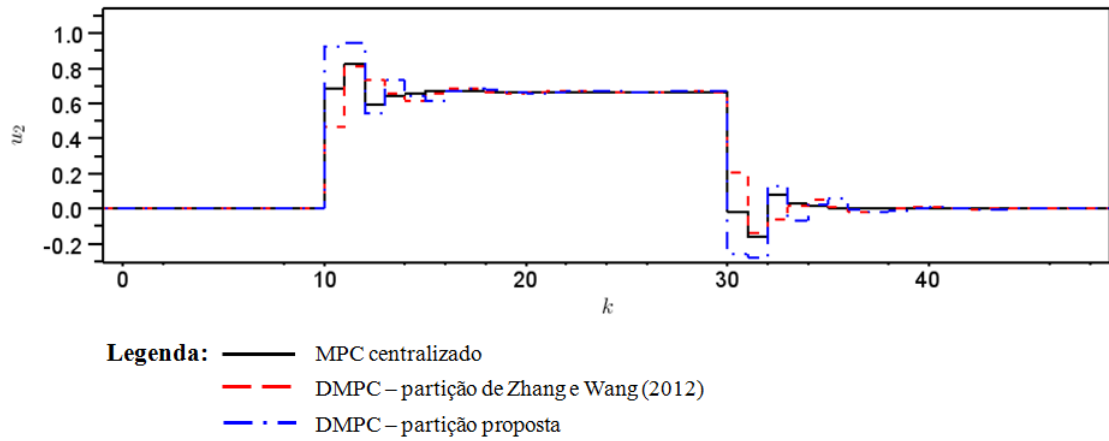
As ações de controle implementadas pelas entradas manipuladas  $u_1$  e  $u_2$  que provocaram as respostas apresentadas anteriormente, estão representadas nas Figuras (3.11) e (3.12), respectivamente.

Analisando-se os resultados, pode-se afirmar em termos qualitativos, que a metodologia proposta de DMPC com a estrutura do tipo paralela, apresenta o pior resultado para a saída controlada  $y_1$ , mas para a saída  $y_2$  apresenta um resultado satisfatório, se aproximando do resultado obtido pelo controle centralizado.

A comparação em termos quantitativos realizou-se através do índice de desempenho



**Figura 3.11:** Ações de controle da entrada manipulada  $u_1$  do processo do estudo de caso #1 obtidas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com estrutura em paralelo.



**Figura 3.12:** Ações de controle da entrada manipulada  $u_2$  do processo do estudo de caso #1 obtidas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com estrutura em paralelo.

ITAE para as saídas controladas e IAE para as entradas manipuladas. Os valores encontrados para estes índices e para cada uma das técnicas estão presentes nas Tabelas (3.9) e (3.10), respectivamente.

**Tabela 3.9:** Valores dos índices ITAE para as saídas controladas  $y_1$  e  $y_2$  do processo do estudo de caso #1 para DMPCs com estrutura em paralelo.

Estratégia de controle	ITAE - $y_1$	ITAE - $y_2$
MPC centralizado	0,0963	14,9758
DMPC - partição de Zhang e Wang (2012)	14,1356	37,7011
DMPC - partição proposta	46,0641	7,3178

Nas Tabelas (3.11) e (3.12) tem-se os valores obtidos de  $I_y$  e  $I_u$ , respectivamente.

Em termos globais, o sistema de controle centralizado continua apresentando o melhor

**Tabela 3.10:** Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas  $u_1$  e  $u_2$  do processo do estudo de caso #1 para DMPCs com estrutura em paralelo.

Estratégia de controle	IAE - $u_1$	IAE - $u_2$
MPC centralizado	5,6611	2,2737
DMPC - partição de Zhang e Wang (2012)	2,1272	2,2471
DMPC - partição proposta	6,3133	3,5924

**Tabela 3.11:** Valores dos índices globais  $I_y$  do processo do estudo de caso #1 e desempenho dos DMPCs com estrutura em paralelo.

Estratégia de controle	$I_y$	Desempenho (%)
MPC centralizado	14,98	-
DMPC - partição de Zhang e Wang (2012)	40,26	↓ 169
DMPC - partição proposta	46,64	↓ 211

**Tabela 3.12:** Valores dos índices globais  $I_u$  do processo do estudo de caso #1 e desempenho dos DMPCs com estrutura em paralelo.

Estratégia de controle	$I_u$	Desempenho (%)
MPC centralizado	6,1	-
DMPC - partição de Zhang e Wang (2012)	3,09	↑ 97
DMPC - partição proposta	7,26	↓ 19

resultado para o controle do sistema em questão. Dentre as abordagens de DMPC com a estrutura paralela, a que utiliza a partição de Zhang e Wang (2012), apresenta os melhores resultados tanto para as saídas controladas quanto para as entradas manipuladas. Houve uma perda de 169 % no desempenho para as saídas controladas, mas por outro lado, houve um ganho de 97 % no desempenho para as entradas manipuladas. Estes resultados mostram que estrutura em paralela não é uma boa estratégia de controle para o DMPC utilizando a partição proposta neste trabalho. Além disso, no geral, a estratégia DMPC sequencial apresentou resultados mais satisfatórios. Isto já era esperado, uma vez que existe uma troca de informações entre os subsistemas (apesar que unilateral) no mesmo instante de amostragem.

### 3.2.2 Estudo de caso #2

Considere um sistema com oito estados ( $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$  e  $x_8$ ), quatro entradas manipuladas ( $u_1, u_2, u_3$  e  $u_4$ ), quatro saídas controladas ( $y_1, y_2, y_3$  e  $y_4$ ), instável em malha aberta, mal condicionado, linear e invariante no tempo. Sua representação em espaço de estados é dada pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \\ x_5(k+1) \\ x_6(k+1) \\ x_7(k+1) \\ x_8(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0,14 & 0,37 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,27 & 0,04 & 0,90 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,64 & 0,65 & 0,61 & 0 & 0,79 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,63 & 0,40 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,16 & 0,55 & 0,03 & 0,21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,27 & 0,18 & 0,45 & 0 & 0,52 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,26 & 0,96 & 0,20 & 0,73 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,11 & 0,20 & 0,82 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \\ x_6(k) \\ x_7(k) \\ x_8(k) \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,2 & 0 \\ 1,3 & 0 & -0,2 & 0 \\ 0,2 & 1,5 & 0,5 & 0,3 \\ 0,5 & 1 & 0,5 & 0,2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0,2 & 1 & 0,7 & 0,4 \\ 0 & 0,5 & 1 & 1 \\ 0 & 0,2 & 1 & 0,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ u_3(k) \\ u_4(k) \end{bmatrix} \quad (3.62)
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ y_3(k) \\ y_4(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \\ x_6(k) \\ x_7(k) \\ x_8(k) \end{bmatrix} \quad (3.63)$$

O modelo descrito pelas Equações (3.62) e (3.63) faz referência ao sistema completo da planta e este foi particionado em três subsistemas baseando-se na partição proposta neste trabalho. Os detalhes das etapas de obtenção dos subsistemas estão presentes na seção 2 do Apêndice F. A partição de Zhang e Wang (2012) não se aplica neste caso, pois há entradas manipuladas que afetam todos os estados do processo, o que resultaria num subsistema equivalente ao sistema do controle centralizado. Os subsistemas gerados são:

Subsistema #1:  $\{u_1\} \Rightarrow \{x_2, x_4 \text{ e } x_6\}$  (Utilização de  $u_1$  para o controle de  $x_2, x_4$  e  $x_6$ ).

Subsistema #2:  $\{u_2 \text{ e } u_4\} \Rightarrow \{x_4, x_6 \text{ e } x_8\}$  (Utilização de  $u_2$  e  $u_4$  para o controle de

$x_4$ ,  $x_6$  e  $x_8$ ).

Subsistema #3:  $\{u_3\} \Rightarrow \{x_2, x_4, x_6 \text{ e } x_8\}$  (Utilização de  $u_3$  para o controle de  $x_2$ ,  $x_4$ ,  $x_6$  e  $x_8$ ).

Os respectivos submodelos são:

Submodelo #1:

$$\begin{bmatrix} x_2(k+1) \\ x_4(k+1) \\ x_6(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,04 & 0 & 0 \\ 0 & 0,40 & 0 \\ 0 & 0,27 & 0,45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(k) \\ x_4(k) \\ x_6(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,3 \\ 0,5 \\ 0,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ y_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(k) \\ x_4(k) \\ x_6(k) \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

Submodelo #2:

$$\begin{bmatrix} x_4(k+1) \\ x_6(k+1) \\ x_8(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,40 & 0 & 0 \\ 0,27 & 0,45 & 0,52 \\ 0 & 0,11 & 0,82 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4(k) \\ x_6(k) \\ x_8(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0,2 \\ 1 & 0,4 \\ 0,2 & 0,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2(k) \\ u_4(k) \end{bmatrix} \quad (3.66)$$

$$\begin{bmatrix} y_2(k) \\ y_3(k) \\ y_4(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4(k) \\ x_6(k) \\ x_8(k) \end{bmatrix} \quad (3.67)$$

Submodelo #3:

$$\begin{bmatrix} x_2(k+1) \\ x_4(k+1) \\ x_6(k+1) \\ x_8(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,04 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,40 & 0 & 0 \\ 0 & 0,27 & 0,45 & 0,52 \\ 0 & 0 & 0,11 & 0,82 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(k) \\ x_4(k) \\ x_6(k) \\ x_8(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,2 \\ 0,4 \\ 0,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4(k) \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ y_3(k) \\ y_4(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(k) \\ x_4(k) \\ x_6(k) \\ x_8(k) \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

O controle descentralizado também foi aplicado neste exemplo, objetivando a comparação das técnicas. A partição do sistema gerou os seguintes subsistemas:

Subsistema #1:  $\{u_1\} \Rightarrow \{x_1 \text{ e } x_2\}$  (Entrada manipulada  $u_1$  controlando  $x_2$ )

Subsistema #2:  $\{u_2\} \Rightarrow \{x_3 \text{ e } x_4\}$  (Entrada manipulada  $u_2$  controlando  $x_4$ )

Subsistema #3:  $\{u_3\} \Rightarrow \{x_5 \text{ e } x_6\}$  (Entrada manipulada  $u_3$  controlando  $x_6$ )

Subsistema #4:  $\{u_4\} \Rightarrow \{x_7 \text{ e } x_8\}$  (Entrada manipulada  $u_4$  controlando  $x_8$ )

Os respectivos submodelos são:

Submodelo #1:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,14 & 0,37 \\ 0,27 & 0,04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1,3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Submodelo #2:

$$\begin{bmatrix} x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,61 & 0 \\ 0,63 & 0,40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,5 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2(k) \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

$$\begin{bmatrix} y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Submodelo #3:

$$\begin{bmatrix} x_5(k+1) \\ x_6(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,03 & 0,21 \\ 0,18 & 0,45 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_5(k) \\ x_6(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3(k) \end{bmatrix} \quad (3.74)$$

$$\begin{bmatrix} y_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_5(k) \\ x_6(k) \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

Submodelo #4:

$$\begin{bmatrix} x_7(k+1) \\ x_8(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,20 & 0,73 \\ 0,20 & 0,82 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_7(k) \\ x_8(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4(k) \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

$$\begin{bmatrix} y_4(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_7(k) \\ x_8(k) \end{bmatrix} \quad (3.77)$$

As primeiras simulações realizadas se referem às envolvendo a abordagem DMPC sequencial. Optou-se para este estudo de caso, a comparação entre controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta.

#### Avaliação da estrutura DMPC sequencial

Neste exemplo também foi avaliado o efeito da ordem dos controladores no DMPC



sequencial. As simulação foram desenvolvidas considerando cada uma das seis ordens possíveis (1-2-3, 1-3-2, 2-1-3, 2-3-1, 3-1-2 e 3-2-1). A ordem que mais favorece a utilização da aplicação do DMPC com a partição proposta é a 2-1-3 e os resultados obtidos a partir dessa ordem serão apresentados neste capítulo. Os resultados considerando as demais ordem estão na seção 2 do Apêndice F. As simulações utilizam  $H_p = 15$ ,  $H_u = 13$  e as matrizes de ponderação  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  otimizadas através da técnica da Evolução Diferencial. As matrizes obtidas para o controle centralizado são:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0,71 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,79 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3,93 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,05 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

e

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 0,45 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9,79 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,04 \end{bmatrix} \quad (3.79)$$

As matrizes  $\mathbf{Q}_1$  e  $\mathbf{R}_1$  (referentes ao subsistema #1),  $\mathbf{Q}_2$  e  $\mathbf{R}_2$  (referentes ao subsistema #2) e  $\mathbf{Q}_3$  e  $\mathbf{R}_3$  (referentes ao subsistem #3) para cada um dos controladores do DMPC com a partição proposta são:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 8,53 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 6,16 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 7,41 \end{bmatrix}, \quad (3.80)$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1,96 & 0 & 0 \\ 0 & 8,21 & 0 \\ 0 & 0 & 6,93 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 2,21 \end{bmatrix} \quad (3.81)$$

e

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 6,51 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6,11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7,41 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 0,70 \end{bmatrix} \quad (3.82)$$

As matrizes obtidas para o controle descentralizado são:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 7, 05 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 8, 30 \end{bmatrix}, \quad (3.83)$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 4, 19 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}, \quad (3.84)$$

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 9, 03 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 2, 42 \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

e

$$\mathbf{Q}_4 = \begin{bmatrix} 1, 26 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_4 = \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

As condições iniciais são:  $x_2(0) = 1$ ,  $x_4(0) = 1$ ,  $x_6(0) = 1$  e  $x_8(0) = 1$ . O objetivo do controle é levar as variáveis controladas para o estado estacionário a partir do instante de amostragem  $k = 0$  e mantê-las neste valor até o instante  $k = 30$ , quando a simulação termina.

A Figura (3.13) apresenta as dinâmicas das saídas controladas do processo  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  e  $y_4$ . Elas mostram as respostas obtidas pelo controle centralizado, pelo controle descentralizado e pelo DMPC utilizando partição proposta neste trabalho.

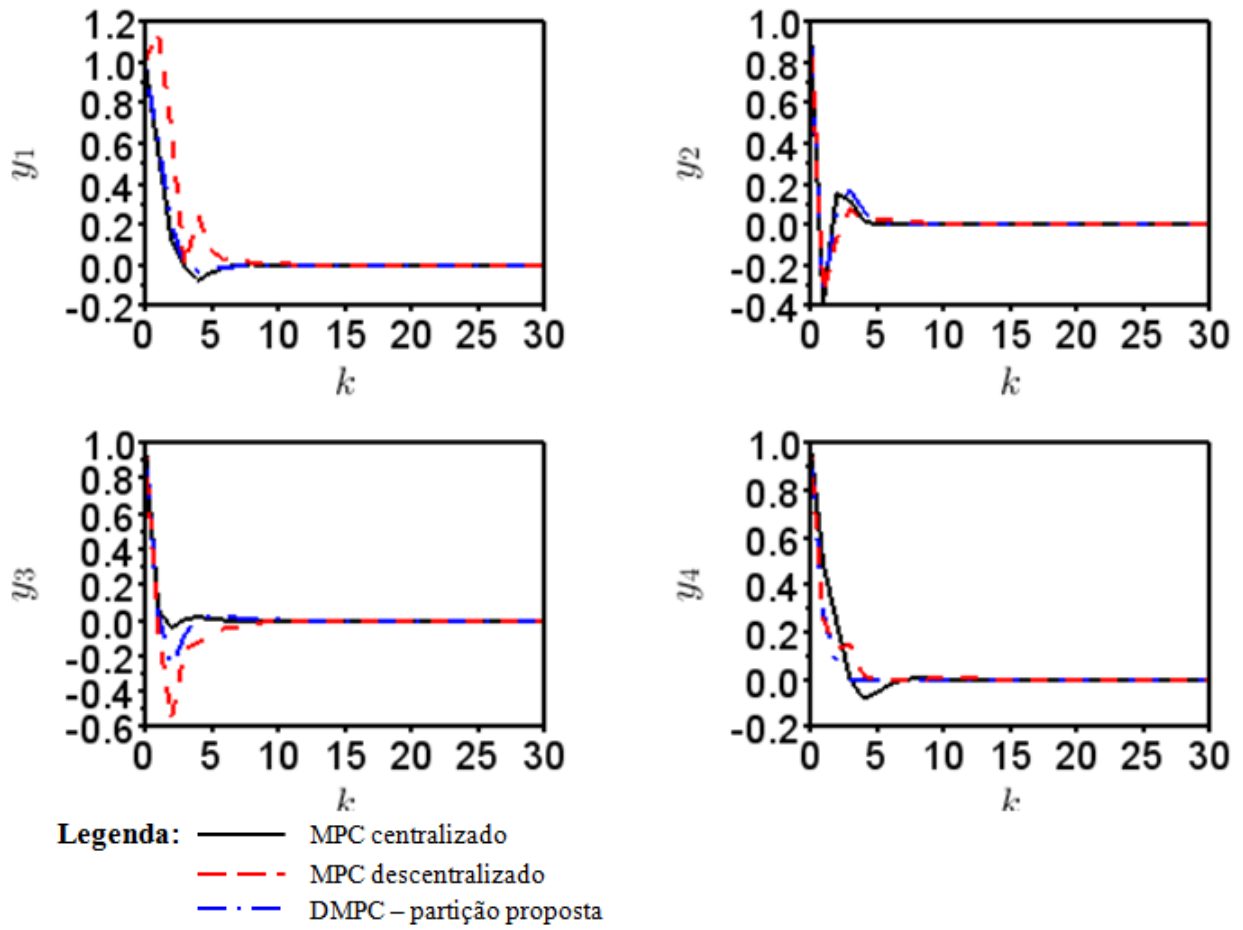
As ações de controle implementadas pelas entradas manipuladas  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  e  $u_4$  que provocaram as respostas apresentadas anteriormente, estão representadas na Figura (3.14).

Analisando-se os resultados, pode-se afirmar, que a metodologia de DMPC utilizando a nova abordagem de partição apresenta resultados satisfatórios para o controle das saídas controladas. Os resultados obtidos através desta estratégia se aproximam dos gerados pelo controle centralizado. A estratégia de controle descentralizado apresentou os piores resultados, como pode ser verificado nas figuras apresentadas.

A comparação em termos quantitativos realizou-se através do índice de desempenho ITAE para as saídas controladas e IAE para as entradas manipuladas. Os valores encontrados para estes índices e para cada uma das técnicas estão presentes nas Tabelas (3.13) e (3.14), respectivamente.

Nas Tabelas (3.15) e (3.16) tem-se os valores obtidos de  $I_y$  e  $I_u$ , respectivamente.

Em termos globais, o sistema de controle DMPC que utiliza a partição proposta apresenta resultados melhores que o controle centralizado quando se avalia as saídas con-



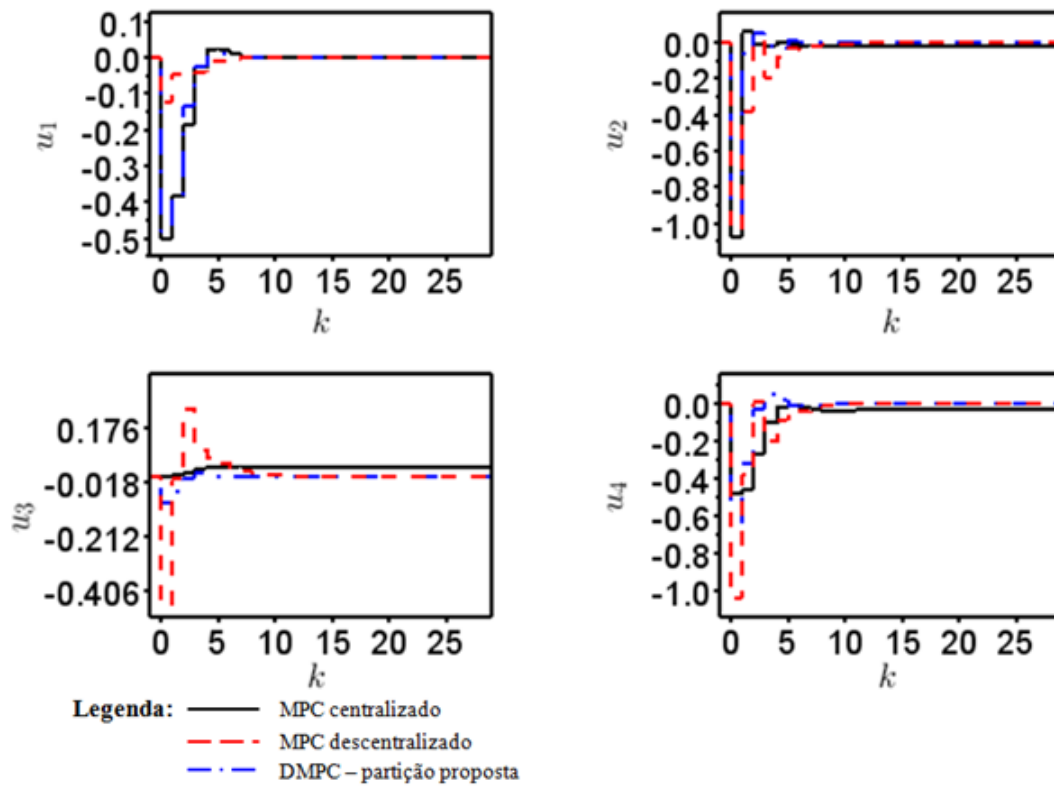
**Figura 3.13:** Dinâmicas das saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, pelo controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-1-3.

**Tabela 3.13:** Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-1-3.

Estratégia de controle	ITAE - $y_1$	ITAE - $y_2$	ITAE - $y_3$	ITAE - $y_4$
MPC centralizado	1,2271	1,1303	0,1515	1,8814
MPC descentralizado	4,6041	1,2781	3,5073	1,2327
DMPC - partição proposta	1,2417	1,4386	1,1641	

**Tabela 3.14:** Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-1-3.

Estratégia de controle	IAE - $u_1$	IAE - $u_2$	IAE - $u_3$	IAE - $u_4$
MPC centralizado	1,1944	2,3582	0,0133	1,1304
MPC descentralizado	0,2489	2,5047	1,4066	2,5047
DMPC - partição proposta	1,0616	2,0559	0,2552	1,4158



**Figura 3.14:** Ações das entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, pelo controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-1-3.

**Tabela 3.15:** Valores dos índices globais  $I_y$  do modelo do estudo de caso #2 e desempenho do DMPC com ordem 2-1-3.

Estratégia de controle	$I_y$	Desempenho (%)
MPC centralizado	2,5191	-
MPC descentralizado	6,0541	↓ 123
DMPC - partição proposta	2,2859	↑ 10,20

**Tabela 3.16:** Valores dos índices globais  $I_u$  do modelo do estudo de caso #2 e desempenho do DMPC com ordem 1-2-3.

Estratégia de controle	$I_u$	Desempenho (%)
MPC centralizado	2,8750	-
MPC descentralizado	3,8194	↓ 39,53
DMPC - partição proposta	2,7246	↑ 2,03

troladas, sendo o desempenho maior que 10%. Quando se avalia as entradas manipuladas, o controle distribuído provoca menores variações sucessivas nestas variáveis, provocando um aumento no desempenho em aproximadamente 2%. Vale, ressaltar que a métrica utilizada para otimização da sintonia (por Evolução Diferencial) foi diferente da adotada para análise e comparação dos resultados. Devido a isso, o controle distribuído teve uma

ligeira vantagem com relação ao controle centralizado, mas caso a métrica fosse idêntica, este quadro inverteria.

Com relação à estrutura descentralizada, constatou-se o que havia sido concluído com a análise gráfica, ou seja, ela apresenta perdas de desempenho quando comparada com as outras técnicas estudadas. Houve perda de 123 % para as saídas controladas e de aproximadamente 40 % para as entradas manipuladas.

#### Avaliação do problema de controle DMPC sequencial com restrições

Com o intuito de avaliar o desempenho da estrutura DMPC considerando o caso do problema de controle com restrições nas variáveis manipuladas, realizaram-se outras simulações. As condições iniciais e o objetivo de controle são os mesmos utilizados nas simulações anteriores. As restrições impostas são sobre o incremento de cada variável manipulada  $u_i$  e o valor imposto em  $\Delta u_i$  é de 0,1. As matrizes de ponderação  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  foram otimizadas e as matrizes resultantes para a estratégia de controle centralizado são:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,08 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,92 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6,61 \end{bmatrix} \quad (3.87)$$

e

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1,10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9,84 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6,41 \end{bmatrix} \quad (3.88)$$

As matrizes  $\mathbf{Q}_1$  e  $\mathbf{R}_1$  (referentes ao subsistema #1),  $\mathbf{Q}_2$  e  $\mathbf{R}_2$  (referentes ao subsistema #2) e  $\mathbf{Q}_3$  e  $\mathbf{R}_3$  (referentes ao subsistema #3) para cada um dos controladores do DMPC com a partição proposta são:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 0,05 & 0 \\ 0 & 0 & 6,98 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 9,49 \end{bmatrix}, \quad (3.89)$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 7,46 & 0 \\ 0 & 0 & 5,94 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 9,48 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad (3.90)$$

e

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8,72 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5,09 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 3,60 \end{bmatrix} \quad (3.91)$$

As matrizes obtidas para o controle descentralizado são:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}, \quad (3.92)$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 4,31 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0,13 \end{bmatrix}, \quad (3.93)$$

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (3.94)$$

e

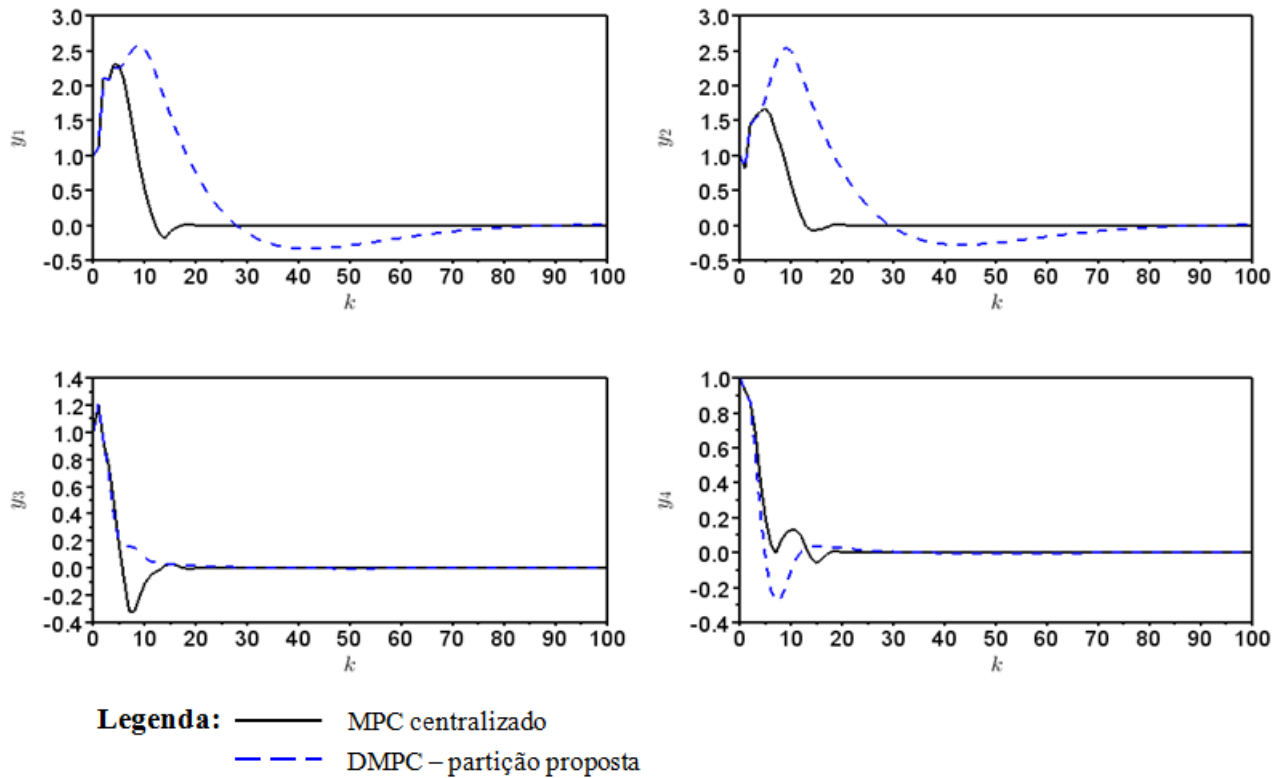
$$\mathbf{Q}_4 = \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_4 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (3.95)$$

As condições iniciais e o objetivo do controle são os mesmos considerados nas simulações anteriores. A Figura (3.15) apresenta as dinâmicas das saídas controladas do processo mostrando as respostas obtidas pelo controle centralizado e pelo DMPC utilizando partição proposta neste trabalho, quando o problema de controle apresenta restrições.

As ações de controle implementadas pelas entradas manipuladas que provocaram as respostas apresentadas anteriormente, estão representadas na Figura (3.16).

O controle descentralizado não conseguiu controlar o sistema em questão, quando restrições nas variáveis manipuladas são impostas ao problema de controle. Por isso, os resultados para esta estratégia de controle não foram apresentados nas Figuras (3.15) e (3.16).

Analisando-se os resultados, pode-se afirmar, que a metodologia proposta de DMPC apresenta resultados satisfatórios para o controle das saídas  $y_3$  e  $y_4$ , mas resultados consideravelmente distantes dos obtidos pelo controle centralizado para as saídas  $y_1$  e  $y_2$ . Mas considerando o fato das restrições aumentarem significativamente o grau de dificuldade do problema de otimização juntamente com o fato do sistema ser mal-condicionamento, pode-se considerar o controle proporcionado pelo DMPC aceitável.



**Figura 3.15:** Dinâmicas das saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 considerando restrições em  $|\Delta u_i| = 0,1$  obtidas pelo controle centralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-1-3.

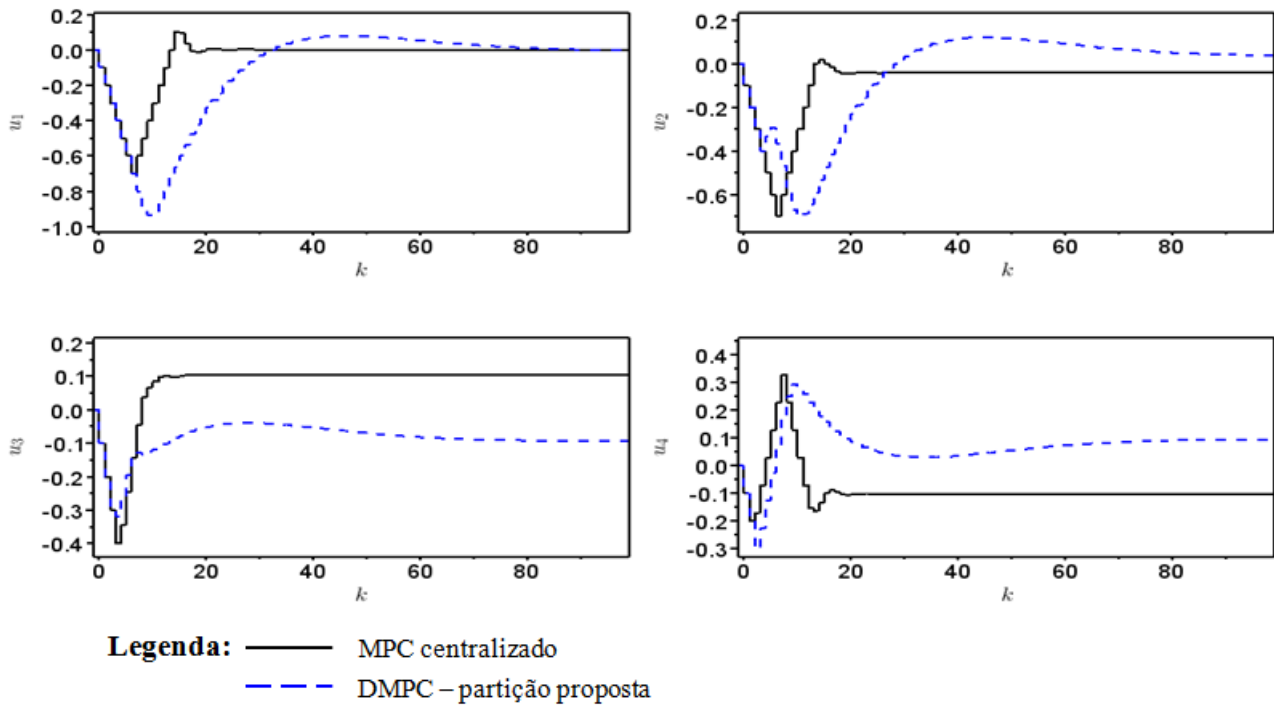
A comparação em termos quantitativos realizou-se através do índice de desempenho ITAE para as saídas controladas e IAE para as entradas manipuladas. Os valores encontrados para estes índices e para cada uma das técnicas estão presentes nas Tabelas (3.17) e (3.18), respectivamente.

**Tabela 3.17:** Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 com restrições nas variáveis manipuladas para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-1-3.

Estratégia de controle	ITAE - $y_1$	ITAE - $y_2$	ITAE - $y_3$	ITAE - $y_4$
MPC centralizado	97,1277	74,0826	19,1781	15,8764
MPC descentralizado	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
DMPC - partição proposta	917,8737	845,9883	23,7874	28,6341

Nas Tabelas (3.19) e (3.20) tem-se os valores obtidos de  $I_y$  e  $I_u$ , respectivamente.

Com a análise quantitativa constatou-se o que havia sido concluído com as análises gráficas. A estratégia DMPC apresenta desempenho significativamente inferior ao obtido pelo controle centralizado (perda de aproximadamente 902 %), quando considera-se os resultados obtidos das saídas controladas do processo. Para as entradas manipuladas, o



**Figura 3.16:** Ações das entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 considerando restrições em  $|\Delta u_i| = 0,1$  obtidas pelo controle centralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-1-3.

**Tabela 3.18:** Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 com restrições nas variáveis manipuladas para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-1-3.

Estratégia de controle	IAE - $u_1$	IAE - $u_2$	IAE - $u_3$	IAE - $u_4$
MPC centralizado	1,6391	1,4912	0,9156	1,3155
MPC descentralizado	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
DMPC - partição proposta	2,0366	1,8118	0,6620	1,2219

**Tabela 3.19:** Valores dos índices globais  $I_y$  do modelo do estudo de caso #2 com restrições nas variáveis manipuladas e desempenho do DMPC com ordem 2-1-3.

Estratégia de controle	$I_y$	Desempenho (%)
MPC centralizado	124,6671	-
MPC descentralizado	$\infty$	$\downarrow \infty$
DMPC - partição proposta	1248,8291	$\downarrow 902$

desempenho pode ser considerável aceitável, sendo a perda de desempenho calculada em aproximadamente 12 %.

#### Avaliação da estrutura DMPC em paralelo

Com a intenção de avaliar a estrutura DMPC em paralelo realizaram-se simulações para este tipo de abordagem e os resultados comparados com os controles centralizado e



**Tabela 3.20:** Valores dos índices globais  $I_u$  do modelo do estudo de caso #2 com restrições nas variáveis manipuladas e desempenho do DMPC com ordem 1-2-3.

Estratégia de controle	$I_u$	Desempenho (%)
MPC centralizado	2,7348	-
MPC descentralizado	$\infty$	$\downarrow \infty$
DMPC - partição proposta	3,0597	$\downarrow 12$

descentralizado. Considerou-se os mesmos valores para os parâmetros  $H_p(=15)$  e  $H_u(=13)$  e as matrizes de ponderação  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$ , para os subsistema #1, #2 e #3 otimizadas apresentam os seguintes valores:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 3,36 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 4,61 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 7,58 \end{bmatrix}, \quad (3.96)$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 2,36 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 9,51 \end{bmatrix} \quad (3.97)$$

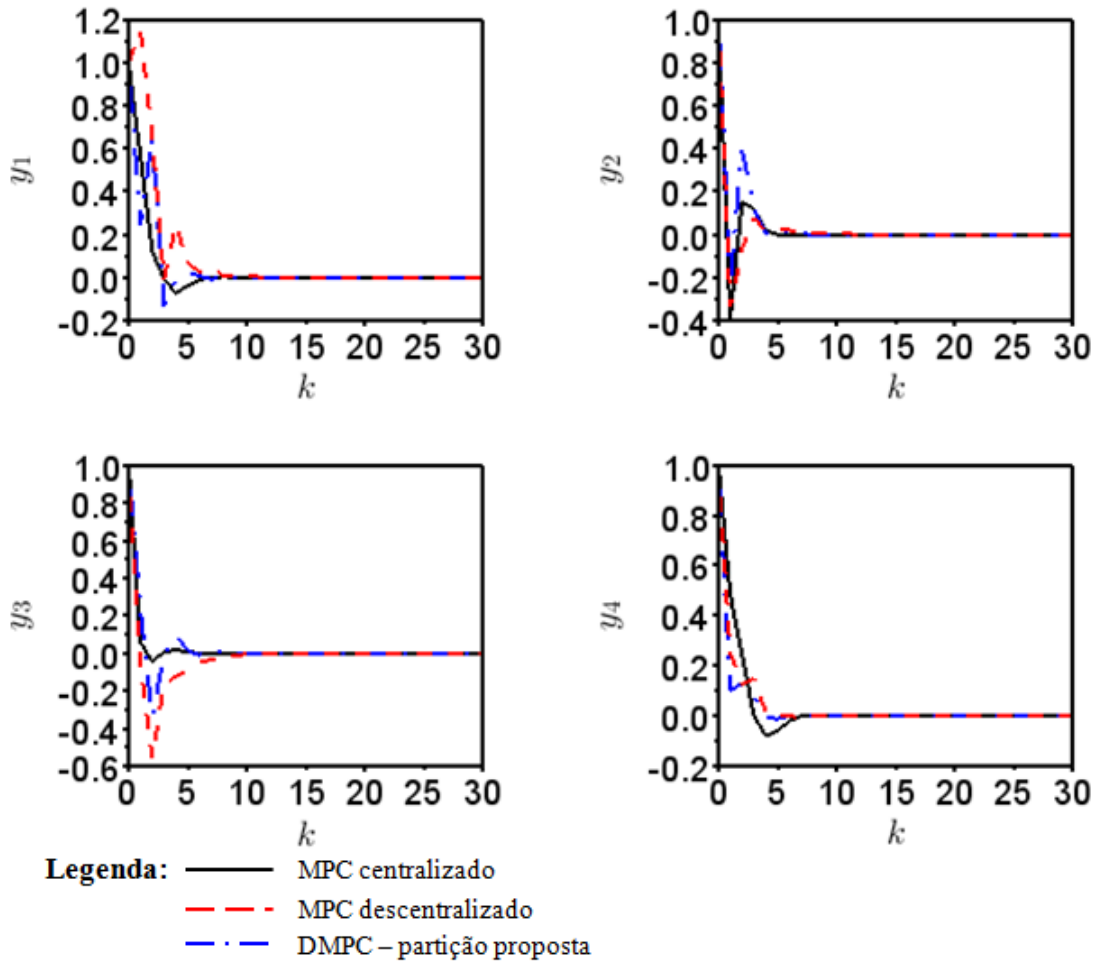
e

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 4,66 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5,51 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,66 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6,05 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 1,18 \end{bmatrix} \quad (3.98)$$

As condições iniciais e o objetivo de controle são os mesmos considerados nas simulações anteriores. As Figuras (3.17) e (3.18) apresentam as dinâmicas das saídas controladas do processo e das entradas manipuladas, respectivamente. Elas mostram as respostas obtidas pelo sistema de controle centralizado, pelo controle descentralizado e pelo DMPC utilizando partição proposta com estrutura em paralelo.

Analisando-se os resultados, pode-se afirmar que a metodologia proposta de DMPC utilizando a proposta de partição e com a estrutura paralela apresenta resultados satisfatórios tanto para as saídas controladas quanto para as entradas manipuladas. Nota-se que os resultados se aproximam daqueles obtidos para o controle centralizado.

A comparação em termos quantitativos foi realizada através do índice de desempenho ITAE para as saídas controladas e IAE para as entradas manipuladas. Os valores encontrados para estes índices e para cada uma das técnicas estão presentes nas Tabelas (3.21)



**Figura 3.17:** Dinâmicas das saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com estrutura em paralelo.

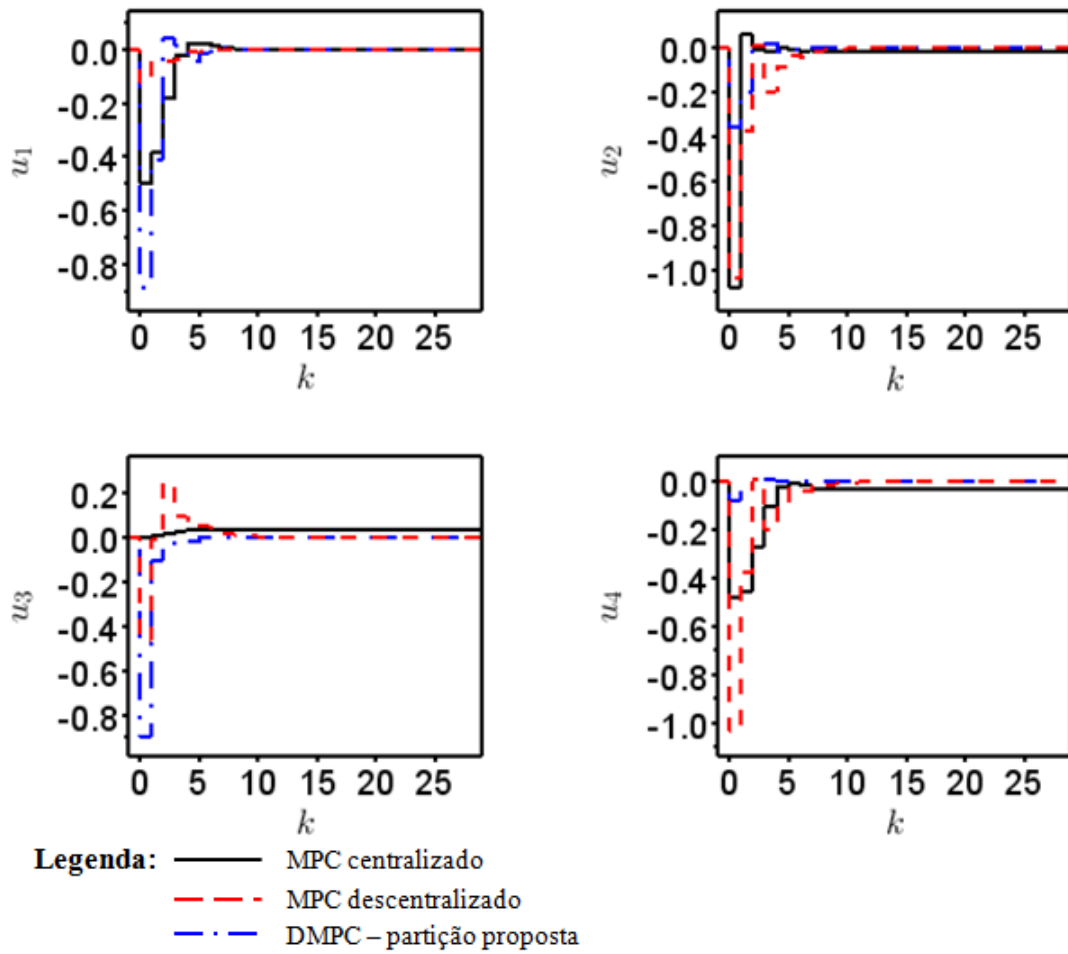
e (3.22), respectivamente.

**Tabela 3.21:** Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com estrutura em paralelo.

Estratégia de controle	ITAE - $y_1$	ITAE - $y_2$	ITAE - $y_3$	ITAE - $y_4$
MPC centralizado	1,4867	1,1884	0,3032	1,9043
MPC descentralizado	4,6041	1,2781	3,5073	1,2327
DMPC - partição proposta	2,2657	1,6170	1,5550	0,6923

Nas Tabelas (3.23) e (3.24) tem-se os valores obtidos de  $I_y$  e  $I_u$ , respectivamente. Além disso, essas tabelas apresentam a perda ( $\downarrow$ ) ou ganho ( $\uparrow$ ) de desempenho das estratégias DMPC proposta e descentralizada, quando comparadas com o controle centralizado.

Os valores de  $I_y$  e  $I_u$  mostram que a estrutura em paralelo não favorece a estratégia DMPC, apresentando perda de aproximadamente 20 % para as saídas controladas e de



**Figura 3.18:** Ações das entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com estrutura em paralelo.

**Tabela 3.22:** Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com estrutura em paralelo.

Estratégia de controle	IAE - $u_1$	IAE - $u_2$	IAE - $u_3$	IAE - $u_4$
MPC centralizado	1,0473	2,3280	0,0443	0,9872
MPC descentralizado	0,2489	2,5047	1,4066	2,5047
DMPC - partição proposta	1,9521	0,7973	1,7982	0,1683

**Tabela 3.23:** Valores dos índices globais  $I_y$  do modelo do estudo de caso #2 e desempenho do DMPC com estrutura em paralelo.

Estratégia de controle	$I_y$	Desempenho (%)
MPC centralizado	2,7094	-
MPC descentralizado	6,0541	↓ 123
DMPC - partição proposta	3,2627	↓ 20,42

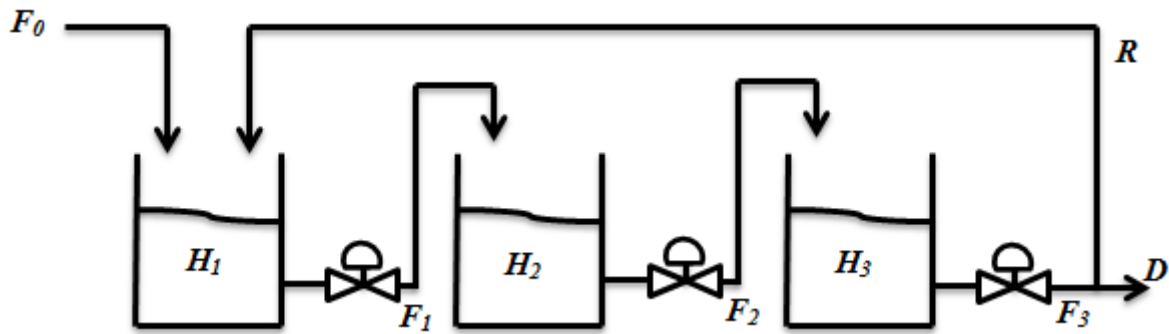
**Tabela 3.24:** Valores dos índices globais  $I_u$  do modelo do estudo de caso #2 e desempenho do DMPC com estrutura em paralelo.

Estratégia de controle	$I_u$	Desempenho (%)
MPC centralizado	2,7373	-
MPC descentralizado	3,8194	↓ 39,53
DMPC - partição proposta	2,7764	↓ 1,43

quase 2 % para as entradas manipuladas, sendo que para a estrutura DMPC sequencial há ganhos no desempenho, tanto para as saídas quanto para as entradas. Essa perda de desempenho era esperada, devido ao fato da estrutura em paralelo considerar apenas informações do instante de amostragem anterior e na estrutura sequencial existir uma troca unilateral de informações entre os controladores no mesmo instante de amostragem.

### 3.2.3 Estudo de caso #3: Sistema de 3 tanques

Considere uma planta constituinte de três tanques conectados em série, como descrito na Figura (3.19). Há uma corrente de alimentação no primeiro tanque da série e o efluente do último tanque é dividido e uma parte é redirecionada para o primeiro tanque. Este exemplo é apresentado no trabalho de Stewart et al. (2010). O modelo para este sistema



**Figura 3.19:** Três tanques em série com reciclo.

é:

$$\frac{dH_1}{dt} = \frac{1}{S_1}(F_0 + R + F_1) \quad (3.99)$$

$$\frac{dH_2}{dt} = \frac{1}{S_2}(F_1 - F_2) \quad (3.100)$$

$$\frac{dH_3}{dt} = \frac{1}{S_3}(F_2 - F_3) \quad (3.101)$$

$$R = \alpha F_3 \quad (3.102)$$

em que  $S_i$  é a área da secção transversal do tanque  $i$  e  $\alpha$  é fração de  $F_3$  reciclada. No estado estacionário, as seguinte equações são satisfeitas:

$$F_1 = \frac{F_0}{1 - \alpha} \quad (3.103)$$

$$F_2 = F_1 \quad (3.104)$$

$$F_3 = F_2 \quad (3.105)$$

Se  $F_0 = 10$  e  $\alpha = 0,5$ , o estado estacionário para as correntes serão  $F_1^{ss} = F_2^{ss} = F_3^{ss} = 20$ . No estado estacionário do sistema, as alturas podem assumir qualquer valor positivo, tal que,  $H_1^{ss} = H_2^{ss} = H_3^{ss} = \bar{H}^{ss}$ . Optou-se por escolher  $\bar{H}^{ss} = 10$ . A área da seção transversal  $S_i$  é igual à 1 para todos os tanques.

As variáveis a serem controladas são  $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$  e as variáveis manipuladas são  $F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$ . O modelo para este sistema, na sua representação em espaço de estados e em variável desvio fica,

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (3.106)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (3.107)$$

em que,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} H_1 - H_1^{ss} \\ H_2 - H_2^{ss} \\ H_3 - H_3^{ss} \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} F_1 - F_1^{ss} \\ F_2 - F_2^{ss} \\ F_3 - F_3^{ss} \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} H_1 - H_1^{ss} \\ H_2 - H_2^{ss} \\ H_3 - H_3^{ss} \end{bmatrix}, \quad (3.108)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta}{S_1} & 0 & \alpha \frac{\Delta}{S_1} \\ \frac{\Delta}{S_2} & -\frac{\Delta}{S_2} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta}{S_3} & -\frac{\Delta}{S_3} \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.109)$$

sendo  $\Delta$ , o intervalo de amostragem, cujo valor é igual a 0,1. O sistema apresentado foi particionado em três subsistemas distintos utilizando a partição proposta nesta dissertação. Os detalhes das etapas de construção destes subsistemas são apresentados na seção 3 do Apêndice B. Os subsistemas são:

Subsistema #1:  $\{F_1\} \Rightarrow \{H_1 \text{ e } H_2\}$  (A variável  $F_1$  é usada para o controle de  $H_1$  e  $H_2$ ).

Subsistema #2:  $\{F_2\} \Rightarrow \{H_2 \text{ e } H_3\}$  (A variável  $F_2$  é usada para o controle de  $H_2$  e  $H_3$ )

Subsistema #3:  $\{F_3\} \Rightarrow \{H_1 \text{ e } H_3\}$  (A variável  $F_3$  é usada para o controle de  $H_1$  e  $H_3$ )

Os respectivos submodelos são:

Submodelo #1:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\Delta}{S_1} \\ \frac{\Delta}{S_2} \end{bmatrix} u_1(k) \quad (3.110)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \quad (3.111)$$

Submodelo #2:

$$\begin{bmatrix} x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\Delta}{S_2} \\ \frac{\Delta}{S_3} \end{bmatrix} u_2(k) \quad (3.112)$$

$$\begin{bmatrix} y_2(k) \\ y_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \quad (3.113)$$

Submodelo #3:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \frac{\Delta}{S_1} \\ -\frac{\Delta}{S_3} \end{bmatrix} u_3(k) \quad (3.114)$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_3(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_3(k) \end{bmatrix} \quad (3.115)$$

As simulações realizadas neste estudo de caso consideraram o problema de controle com restrições nas variáveis manipuladas. Primeiramente, realizou-se a avaliação da estrutura DMPC sequencial.

### Avaliação da estrutura DMPC sequencial

Neste estudo de caso também foi avaliado o efeito da ordem dos controladores no DMPC sequencial. Realizaram-se várias simulações considerando cada uma das seis ordens possíveis (1-2-3, 1-3-2, 2-1-3, 2-3-1, 3-1-2 e 3-2-1) e constatou-se que a ordem que mais favorece a utilização da aplicação do DMPC é a 2-1-3, que será apresenta neste

capítulos. Os demais resultados estão na seção 3 do Apêndice F. As simulações utilizam  $H_p = 10$ ,  $H_u = 5$  e as matrizes de ponderação  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  otimizadas, sendo as matrizes obtidas para o controle centralizado:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 8,63 & 0 & 0 \\ 0 & 6,73 & 0 \\ 0 & 0 & 6,45 \end{bmatrix} \quad (3.116)$$

e

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (3.117)$$

As matrizes  $\mathbf{Q}_1$  e  $\mathbf{R}_1$  (referentes ao subsistema #1),  $\mathbf{Q}_2$  e  $\mathbf{R}_2$  (referentes ao subsistema #2),  $\mathbf{Q}_3$  e  $\mathbf{R}_3$  (referentes ao subsistema #3) para os controladores do DMPC utilizando a partição proposta neste trabalho são:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0,18 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0,16 \end{bmatrix}, \quad (3.118)$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 0,19 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (3.119)$$

e

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 6,11 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (3.120)$$

As matrizes  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  de cada subsistema do controle descentralizado são:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}, \quad (3.121)$$

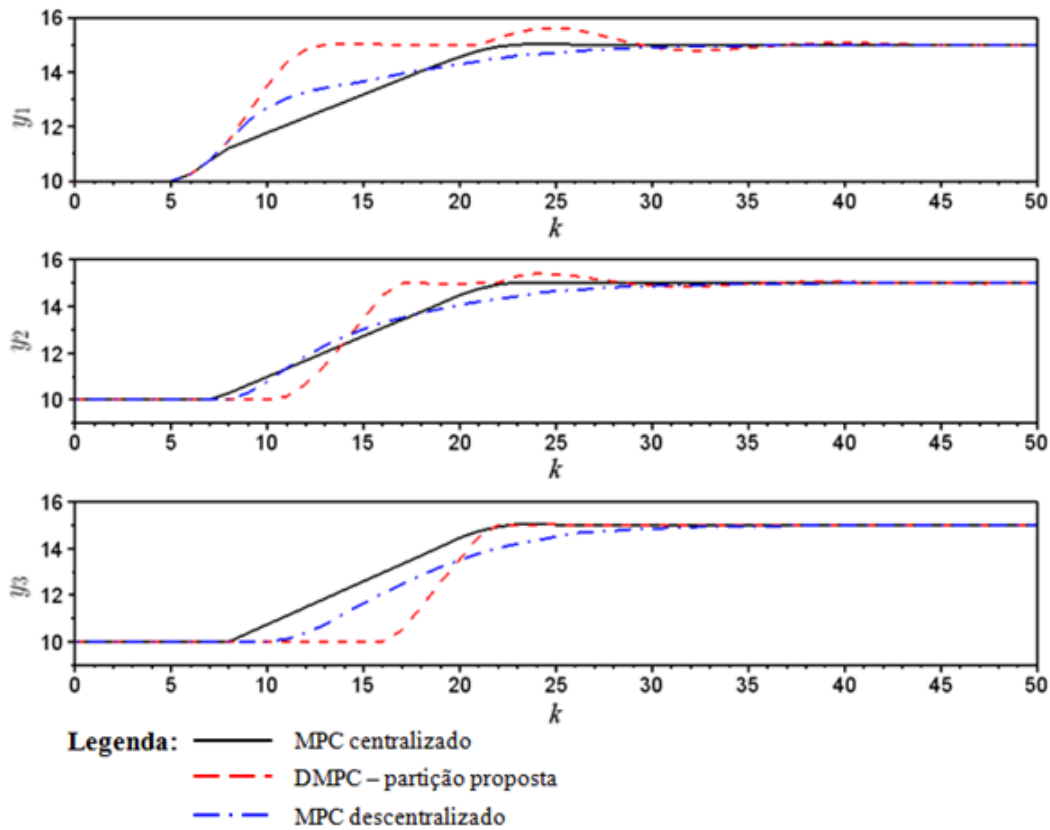
$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (3.122)$$

e

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 7,63 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 0,18 \end{bmatrix} \quad (3.123)$$

As condições iniciais são:  $x_1(0) = 10$ ,  $x_2(0) = 10$  e  $x_3(0) = 10$ . O objetivo do controle é manter as variáveis controladas em seus valores iniciais até o instante  $k = 5$  e a partir deste ponto levá-las e mantê-las em 15 até o instante  $k = 50$ , quando a simulação termina. Considerou-se que as entradas não poderiam assumir valores menores que 0 ou maiores que 20 e nem sofrer variações sucessivas maiores que 5, em módulo.

A Figura (3.20) apresenta as dinâmicas das saídas controladas do processo  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$ . Elas mostram as respostas obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta.

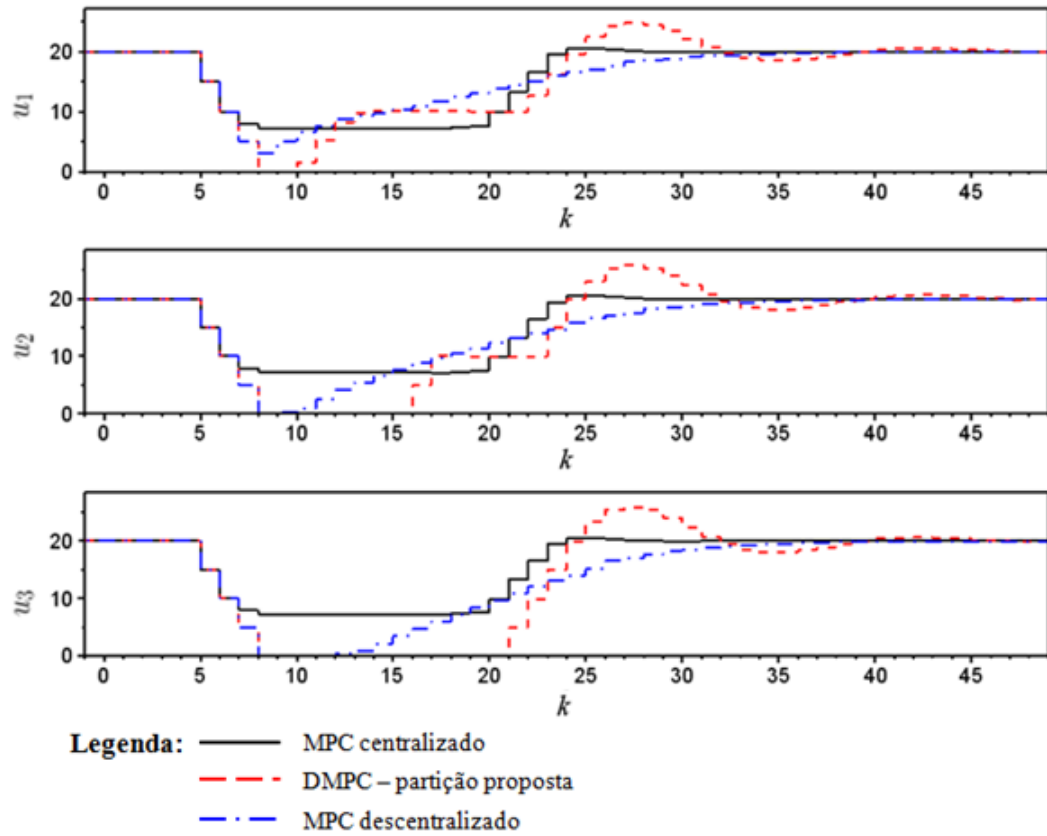


**Figura 3.20:** Dinâmicas das saídas controladas do sistema dos 3 tanques obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-1-3 e com restrições nas variáveis manipuladas.

As ações de controle implementadas pelas entradas manipuladas  $u_1$ ,  $u_2$  e  $u_3$  que provocaram as respostas apresentadas anteriormente, estão representadas na Figura (3.21).

Analisando-se os resultados, nota-se que a metodologia de DMPC utilizando a partição proposta proporciona respostas mais rápidas para as saídas controladas  $y_1$  e  $y_2$ , mas mesmo depois de atingir e estabilizar no *set-point* desejado, há um pequeno *overshoot* no instante  $k = 20$  para essas saídas. Por outro lado, os controles centralizado e descentralizado são mais lentos para atingir o ponto desejado, mas não apresenta *overshoot*. Para





**Figura 3.21:** Ações de controle das entradas manipuladas do sistema dos 3 tanques obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-1-3 e com restrições nas variáveis manipuladas.

realizar uma avaliação mais precisa é necessários calcular os índices de desempenho. Para o exemplo em questão, optou-se pelo índice ITAE para as saídas controladas e IAE para as entradas manipuladas. Os valores encontrados para estes índices e para cada uma das técnicas estão presentes nas Tabelas (3.25) e (3.26), respectivamente.

**Tabela 3.25:** Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do sistema dos 3 tanques para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-1-3 e com restrições nas variáveis manipuladas.

Estratégia de controle	ITAE - $y_1$	ITAE - $y_2$	ITAE - $y_3$
MPC centralizado	397,6832	487,3455	512,6571
MPC descentralizado	403,4669	585,1419	806,7039
DMPC - partição proposta	262,9229	491,6731	831,7986

Nas Tabelas (3.27) e (3.28) tem-se os valores obtidos de  $I_y$  e  $I_u$ , respectivamente.

O sistema de controle DMPC que utiliza a partição proposta apresenta resultados melhores que o controle descentralizado, quando se avalia as saídas controladas. Os erros desta aplicação são menores que os erros do controle descentralizado. Por outro lado, a

**Tabela 3.26:** Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do sistema dos 3 tanques para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-1-3 e com restrições nas variáveis manipuladas.

Estratégia de controle	IAE - $u_1$	IAE - $u_2$	IAE - $u_3$
MPC centralizado	27,0361	34,2333	41,8610
MPC descentralizado	34,0343	39,9809	39,9766
DMPC - partição proposta	54,0201	58,7023	57,3175

**Tabela 3.27:** Valores dos índices globais  $I_y$  do sistema dos 3 tanques e desempenho do DMPC com ordem 2-1-3 e com restrições nas variáveis manipuladas.

Estratégia de controle	$I_y$	Desempenho (%)
MPC centralizado	811,4646	-
MPC descentralizado	1075,15	↓ 32,48
DMPC - partição proposta	1001,38	↓ 23,40

**Tabela 3.28:** Valores dos índices globais  $I_u$  do sistema dos 3 tanques e desempenho do DMPC com ordem 2-1-3 e com restrições nas variáveis manipuladas.

Estratégia de controle	$I_u$	Desempenho (%)
MPC centralizado	60,4583	-
MPC descentralizado	65,9919	↓ 9,15
DMPC - partição proposta	98,2315	↓ 62,48

estratégia distribuída apresenta maiores variações sucessivas das entradas manipuladas, o que provocaria maiores desgastes dos atuadores.

#### Avaliação da estrutura DMPC em paralelo

Para avaliar a estrutura DMPC em paralelo realizaram-se simulações para este tipo de abordagem e os resultados comparados com os controles centralizado e descentralizado. Considerou-se os mesmos valores para os parâmetros  $H_p(=10)$  e  $H_u(=5)$  e as matrizes de ponderação  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$ , para os subsistema #1, #2 e #3 também foram otimizadas. Os valores dessas matrizes são:

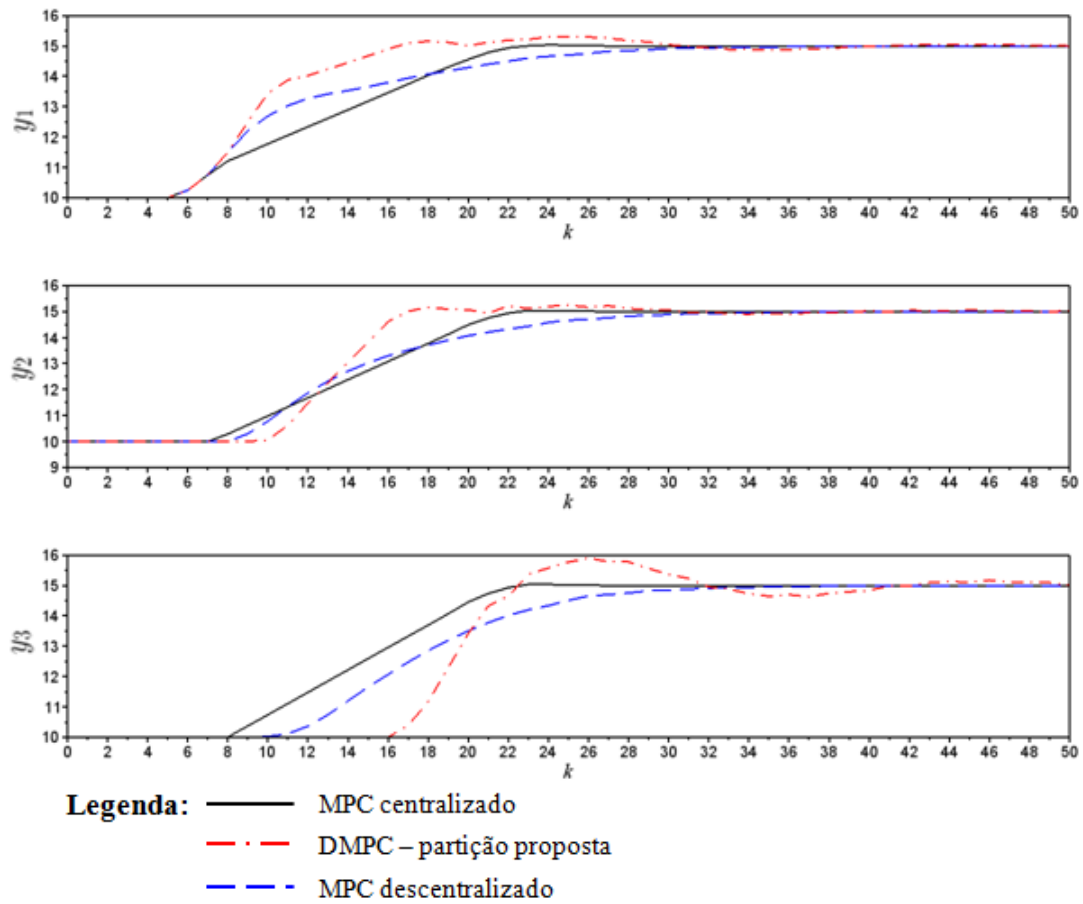
$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 3,42 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}, \quad (3.124)$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (3.125)$$

e

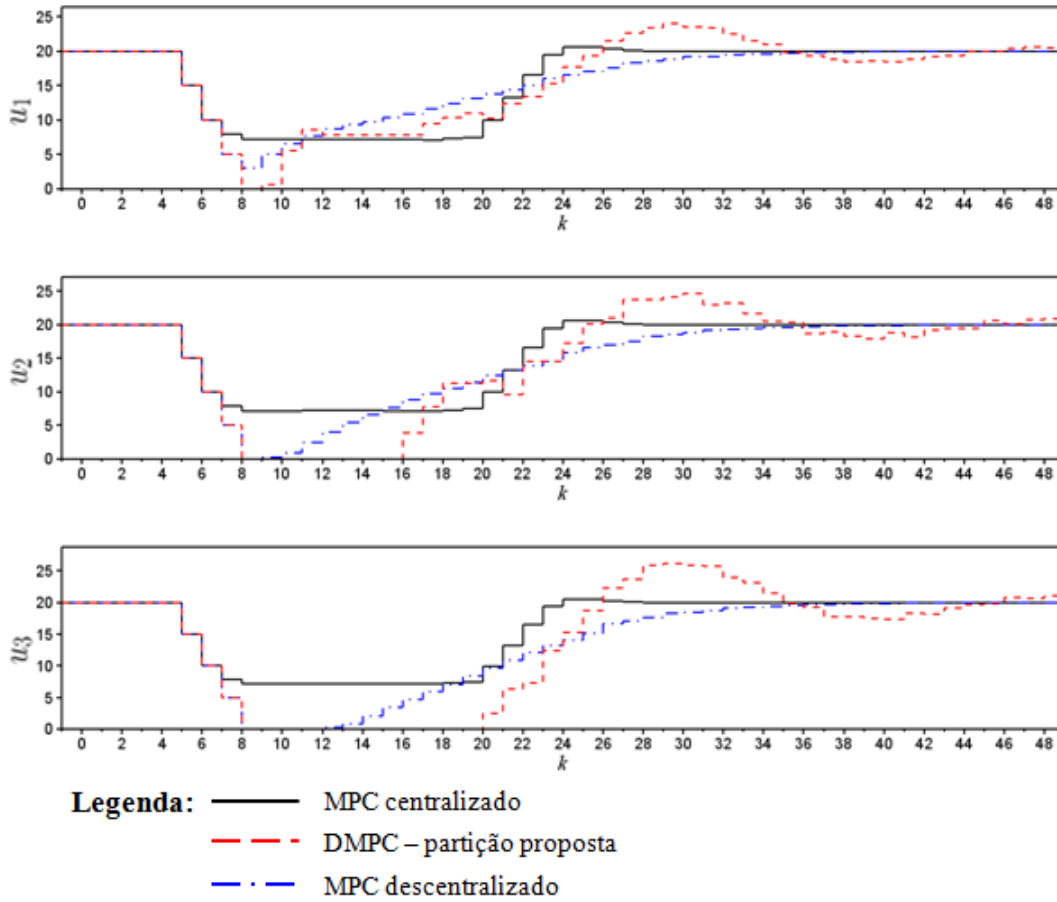
$$\mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 6, 13 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 0, 26 \end{bmatrix} \quad (3.126)$$

As condições iniciais e o objetivo de controle são os mesmos considerados nas simulações anteriores. As Figuras (3.22) e (3.23) apresentam as dinâmicas das saídas controladas do processo e das entradas manipuladas, respectivamente. Elas mostram as respostas obtidas por controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta neste trabalho com estrutura em paralelo.



**Figura 3.22:** Dinâmicas das saídas controladas do sistema dos 3 tanques obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com estrutura em paralelo e com restrições nas variáveis manipuladas.

Analisando-se os resultados, nota-se claramente que houve uma queda da eficiência do controle DMPC, principalmente para a saída controlada  $y_3$ . Percebe-se que essa saída oscila com uma amplitude superior à apresentado pelo DMPC sequencial. Pode-se afirmar que a estrutura em paralelo não favorece o desempenho dos controladores distribuídos para este exemplo em questão.



**Figura 3.23:** Ações de controle das entradas manipuladas do sistema dos 3 tanques obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com estrutura em paralelo e com restrições nas variáveis manipuladas.

A comparação em termos quantitativos realizou-se através do índice de desempenho ITAE para as saídas controladas e IAE para as entradas manipuladas. Os valores encontrados para estes índices e para cada uma das técnicas estão presentes nas Tabelas (3.29) e (3.30), respectivamente.

**Tabela 3.29:** Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do sistema dos 3 tanques para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com estrutura em paralelo e com restrições nas variáveis manipuladas.

Estratégia de controle	ITAE - $y_1$	ITAE - $y_2$	ITAE - $y_3$
MPC centralizado	397,6832	487,3455	512,6571
MPC descentralizado	403,4669	585,1419	806,7039
DMPC - partição proposta	271,4076	452,5398	1113,5180

Nas Tabelas (3.31) e (3.32) tem-se os valores obtidos de  $I_y$  e  $I_u$ , respectivamente.

Os valores de  $I_y$  e  $I_u$  comprovam o que havia sido concluindo com a análise dos gráficos: a estrutura em paralelo não favorece o controle distribuído para o sistema dos

**Tabela 3.30:** Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do sistema dos 3 tanques para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com estrutura em paralelo e com restrições nas variáveis manipuladas.

Estratégia de controle	IAE - $u_1$	IAE - $u_2$	IAE - $u_3$
MPC centralizado	27,0361	34,2333	41,8610
MPC descentralizado	34,0343	39,9809	39,9766
DMPC - partição proposta	55,3836	61,9934	59,2911

**Tabela 3.31:** Valores dos índices globais  $I_y$  do sistema dos 3 tanques e desempenho do DMPC com estrutura em paralelo e com restrições nas variáveis manipuladas.

Estratégia de controle	$I_y$	Desempenho (%)
MPC centralizado	811,4646	-
MPC descentralizado	1075,15	↓ 32,48
DMPC - partição proposta	1232,2242	↓ 51,85

**Tabela 3.32:** Valores dos índices globais  $I_u$  do sistema dos 3 tanques e desempenho do DMPC com estrutura em paralelo e com restrições nas variáveis manipuladas.

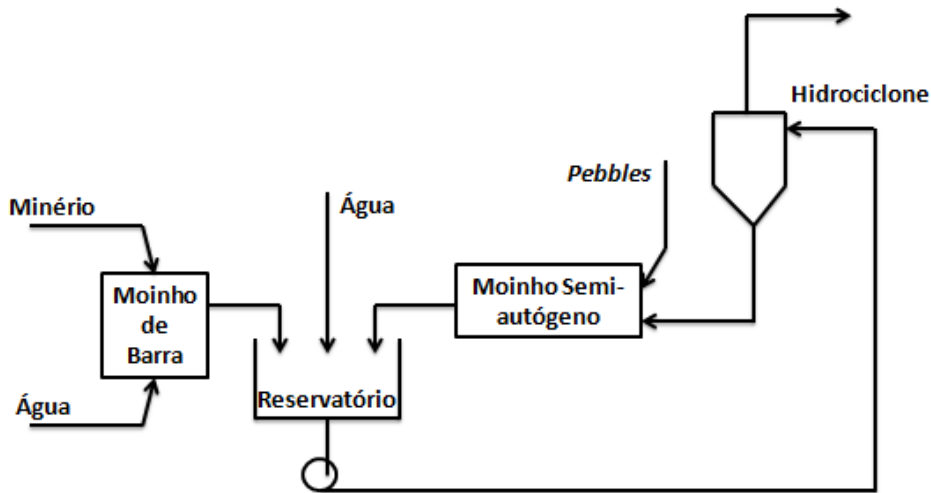
Estratégia de controle	$I_u$	Desempenho (%)
MPC centralizado	60,4583	-
MPC descentralizado	65,9919	↓ 9,15
DMPC - partição proposta	102,1076	↓ 68,89

3 tanques. Como já foi citado anteriormente, isso já era esperado, pois na estrutura sequencial há troca de informações entre os controladores (unilateral) no mesmo instante de amostragem.

### 3.2.4 Estudo de caso #4: Sistema industrial de moagem de minério

Raramente encontra-se na natureza minérios na sua forma pura. A rocha da mina deve ser quebrada em pequenos grãos antes que os minérios sejam separados uns dos outros e os de menor valor sejam retirados. Os últimos passos da cominuição normalmente ocorrem em moinhos rotativos. Estes equipamentos proporcionam contato máximo entre o corpo moedor e o minério, aplicando impacto e abrasão. Os corpos moedores podem ser partículas grandes do próprio minério (moagem autógena), bolas de aço, barras de aço ou corpos de cerâmica, entre outros. Os grãos resultantes da cominuição não apresentam um único tamanho, mas uma distribuição de tamanhos. O sistema de controle de um sistema de moagem tem como objetivo assegurar que a distribuição de tamanhos dos grãos de minério esteja numa faixa aceitável.

O sistema apresentado na Figura (3.24) é um típico fluxograma de um sistema de moagem industrial e é apresentado em Ylinen et al. (1987). Esta planta é composta por um moinho de barras em circuito aberto, que utiliza barras cilíndricas como corpos moedores. Estes moinhos são utilizados para obtenção de produto grosseiro ou para preparação de produto para alimentação de um moinho de bolas. O outro moinho presente no sistema é do tipo moinho semi-autógeno, que utiliza esferas de aço. Este último moinho está em circuito fechado com um classificador, no caso em questão, um hidrociclone. As saídas controladas são: tamanho dos grãos da corrente de *overflow* do hidrociclone (com percentagem acima de 0,074 mm, que é o limite mínimo da leitura do equipamento de medição), definida como  $y_1$  e densidade da alimentação do hidrociclone, chamada de  $y_2$ . Estas saídas são controladas manipulando-se a alimentação de minério ( $u_1$ ) e a alimentação de água secundária (ou seja, alimentação de água do reservatório) ( $u_2$ ).



**Figura 3.24:** Fluxograma de um sistema típico de moagem industrial.

O modelo de predição da planta em espaço de estados é:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\Delta\mathbf{u}(k) \quad (3.127)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (3.128)$$

em que,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0,716 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0,283 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,863 & 1,049 & 0 & 0 & 0 & 0,755 & 0 & 0 \\ 0 & -0,109 & 0,186 & 0 & 0 & 0 & -0,529 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,670 & 0 & 0,176 & 0,865 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,135 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,819 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,819 \end{bmatrix} \quad (3.129)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,181 & 0 \\ 0 & 0,181 \end{bmatrix} \quad (3.130)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.131)$$

Neste estudo estabeleceu-se que o sistema de controle deverá sempre obedecer a restrição de velocidade nas variáveis manipuladas,  $|\Delta u_{max}| = 1$  e que o sistema está inicialmente em  $\mathbf{x}(0) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ . O sistema apresentado foi particionado em dois subsistemas distintos utilizando a partição proposta nesta dissertação. Os detalhes das etapas de construção destes subsistemas são apresentados na seção 4 do Apêndice B. Os subsistemas são:

Subsistema #1:  $u_1 \Rightarrow x_1, x_2, x_4, x_6, x_8$  (Entrada  $u_1$  controlando  $x_1$  e  $x_2$ )

Subsistema #2:  $u_2 \Rightarrow x_2, x_3, x_4, x_5, x_7, x_9$  (Entrada  $u_2$  controlando  $x_4$  e  $x_5$ )

Os respectivos submodelos são:

Submodelo #1:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_4(k+1) \\ x_6(k+1) \\ x_8(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0,7165 & 0 & 0 & -0,2835 & 0 \\ 0 & 0,863 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6703 & 0,1759 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,819 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_4(k) \\ x_6(k) \\ x_8(k) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,181 \end{bmatrix} u_1(k) \tag{3.132}
 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_4(k) \\ x_6(k) \\ x_8(k) \end{bmatrix} \tag{3.133}$$

Submodelo #2:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \\ x_5(k+1) \\ x_7(k+1) \\ x_9(k+1) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0,863 & 1,049 & 0 & 0 & 0,7551 & 0 \\ -0,1092 & 0,1861 & 0 & 0 & -0,5293 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6703 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,1653 & 0,8647 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,819 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \\ x_7(k) \\ x_9(k) \end{bmatrix} \\
 &+ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,181 \end{bmatrix} u_2(k) \tag{3.134}
 \end{aligned}$$



$$\begin{bmatrix} y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \\ x_7(k) \\ x_9(k) \end{bmatrix} \quad (3.135)$$

Primeiramente, realizou-se a avaliação da estrutura DMPC sequencial.

### Avaliação da estrutura DMPC sequencial

Neste estudo de caso também foi avaliado o efeito da ordem dos controladores no DMPC sequencial e constatou-se que não houve diferenças significativas entre as respostas obtidas quando varia-se a ordem dos controladores MPC na estrutura DMPC sequencial. Neste capítulo apenas os resultados referentes à ordem (1-2) serão apresentados e na seção 4 do Apêndice F estão os resultados para a ordem 2-1. As simulações utilizam  $H_p = 10$ ,  $H_u = 5$  e as matrizes de ponderação  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  otimizadas, sendo as matrizes obtidas para o controle centralizado:

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 9,30 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad (3.136)$$

e

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.137)$$

As matrizes  $\mathbf{Q}_1$  e  $\mathbf{R}_1$  (referentes ao subsistema #1),  $\mathbf{Q}_2$  e  $\mathbf{R}_2$  (referentes ao subsistema #2) para os controladores do DMPC utilizando a partição proposta neste trabalho são:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad (3.138)$$

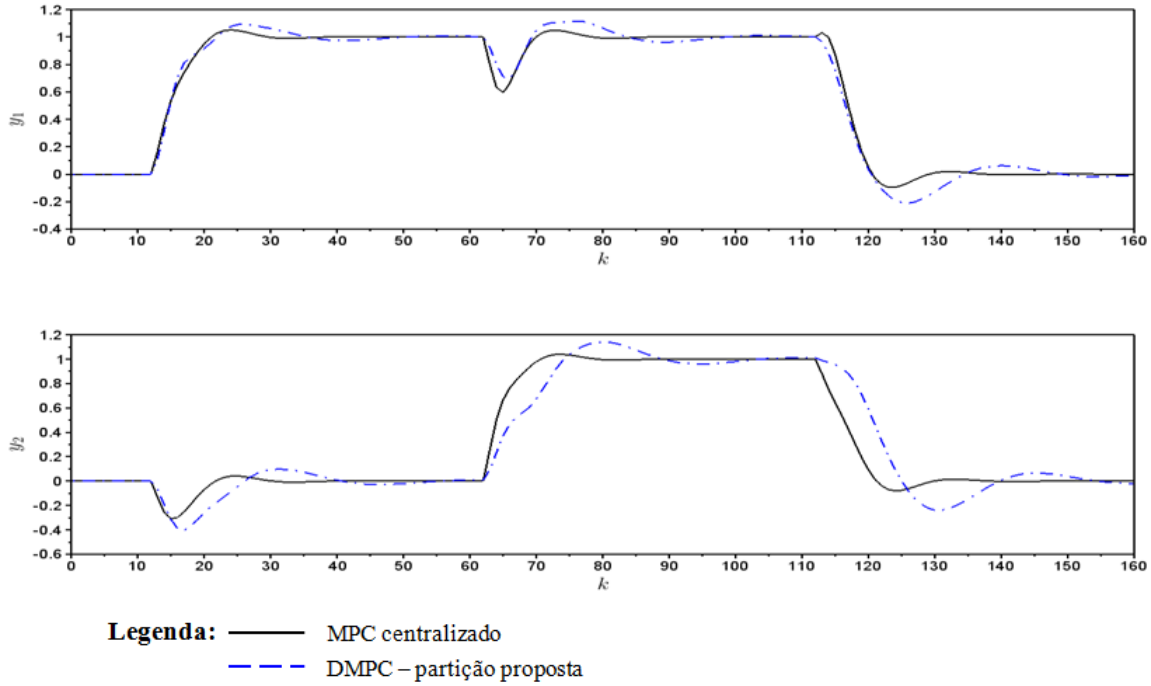
e

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 2,58 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 6,02 \end{bmatrix} \quad (3.139)$$

O objetivo do controle para a variável  $y_1$  é mantê-la em seu valor inicial até o instante  $k = 10$ , a partir deste ponto levá-la e mantê-la em 1 até o instante  $k = 110$  e depois retorná-la para a condição inicial até  $k = 160$ , quando a simulação termina. Para a variável controlada  $y_2$ , o objetivo do controle é mantê-la em seu valor inicial até o instante  $k = 60$ , a partir deste ponto levá-la e mantê-la em 1 até o instante  $k = 110$  e depois

retorná-la para a condição inicial até  $k = 160$ , quando a simulação termina. Restrições foram impostas às variáveis manipuladas, no sentido de impedir variações maiores que 1 em módulo, conforme estabelecido para o processo.

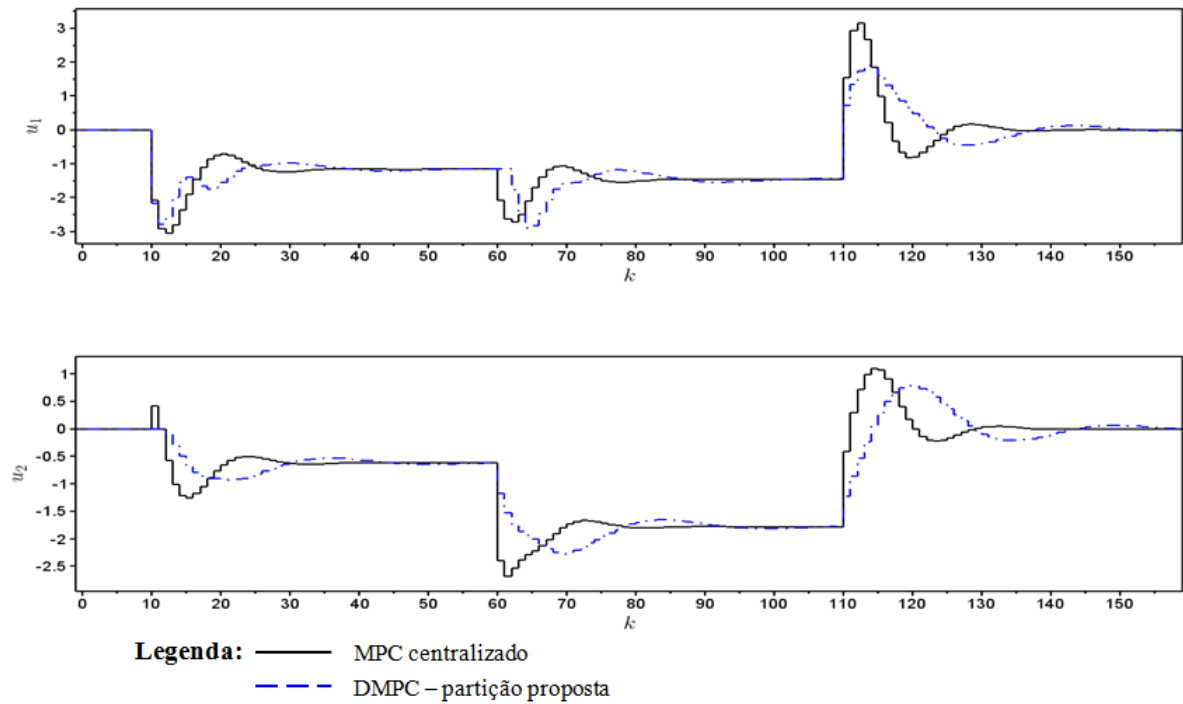
A Figura (3.25) apresenta as dinâmicas das saídas controladas do processo  $y_1$  e  $y_2$ . Elas mostram as respostas obtidas pelo controle centralizado e DMPC utilizando a partição proposta.



**Figura 3.25:** Dinâmicas das saídas controladas do sistema industrial de moagem de minério obtidas pelo controle centralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-2 e com restrições nas variáveis manipuladas.

As ações de controle implementadas pelas entradas manipuladas  $u_1$  e  $u_2$  que provocaram as respostas apresentadas anteriormente, estão representadas na Figura (3.26).

Analisando-se os resultados, nota-se que para saída controlada  $y_1$ , a metodologia de DMPC utilizando a partição proposta proporciona uma resposta próxima da obtida pelo controle centralizado. Mas, o comportamento da variável  $y_2$  já apresenta maiores oscilações e distanciamento da resposta do controle centralizado, que é a referência. Nota-se que as ações implementadas pelas entradas manipuladas apresentam menores variações sucessivas quando utiliza-se a proposta de controle DMPC. Para realizar uma avaliação mais precisa optou-se pelo índice ITAE para as saídas controladas e IAE para as entradas manipuladas. Os valores encontrados para estes índices e para cada uma das técnicas estão presentes nas Tabelas (3.33) e (3.34), respectivamente.



**Figura 3.26:** Ações de controle das entradas manipuladas do sistema industrial de moagem de minério obtidas pelo controle centralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-2 e com restrições nas variáveis manipuladas.

**Tabela 3.33:** Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do sistema industrial de moagem de minério para o controle centralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-2 e com restrições nas variáveis manipuladas.

Estratégia de controle	ITAE - $y_1$	ITAE - $y_2$
MPC centralizado	1162,3656	1218,5143
DMPC - partição proposta	1326,0834	2221,0655

**Tabela 3.34:** Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do sistema industrial de moagem de minério para o controle centralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-2 e com restrições nas variáveis manipuladas.

Estratégia de controle	IAE - $u_1$	IAE - $u_2$
MPC centralizado	6,0423	3,0111
DMPC - partição proposta	5,5670	1,4302

Nas Tabelas (3.35) e (3.36) tem-se os valores obtidos de  $I_y$  e  $I_u$ , respectivamente.

**Tabela 3.35:** Valores dos índices globais  $I_y$  do sistema industrial de moagem de minério e desempenho do DMPC com ordem 1-2 e com restrições nas variáveis manipuladas.

Estratégia de controle	$I_y$	Desempenho (%)
MPC centralizado	1684,00	-
DMPC - partição proposta	2587,82	↓ 53,61

**Tabela 3.36:** Valores dos índices globais  $I_u$  do sistema industrial de moagem de minério e desempenho do DMPC com ordem 1-2 e com restrições nas variáveis manipuladas.

Estratégia de controle	$I_u$	Desempenho (%)
MPC centralizado	6,75	-
DMPC - partição proposta	5,75	↑ 17,45

O sistema de controle DMPC que utiliza a partição proposta apresenta resultados melhores quando se avalia as entradas manipuladas, apresentando ganho de 17,45 % no desempenho. As variações sucessivas das entradas quando utiliza-se desta aplicação são menores que as variações das ações de controle da estratégia centralizada. Por outro lado, a estratégia distribuída apresenta perda de desempenho para as saídas controladas (de aproximadamente 54 %). Essas diferenças poderiam ser alteradas modificando-se a sintonia dos controladores. Neste trabalho optou-se por usar o mesmo critério para a seleção de sintonia de cada um dos controladores avaliados.

#### Avaliação da estrutura DMPC em paralelo

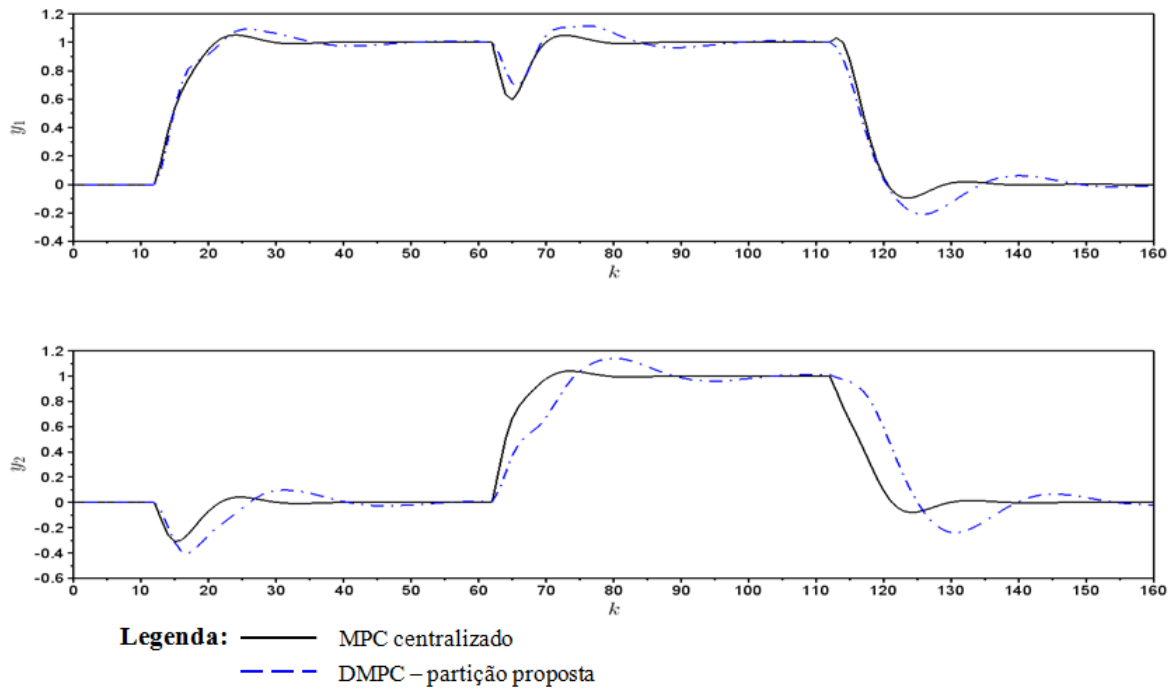
Para avaliar a estrutura DMPC em paralelo realizaram-se simulações para este tipo de abordagem e os resultados comparados com o controle centralizado. Considerou-se os mesmos valores para os parâmetros  $H_p(=10)$  e  $H_u(=5)$  e as matrizes de ponderação  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$ , para os subsistema #1 e #2 também foram otimizadas. Os valores dessas matrizes são:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \quad (3.140)$$

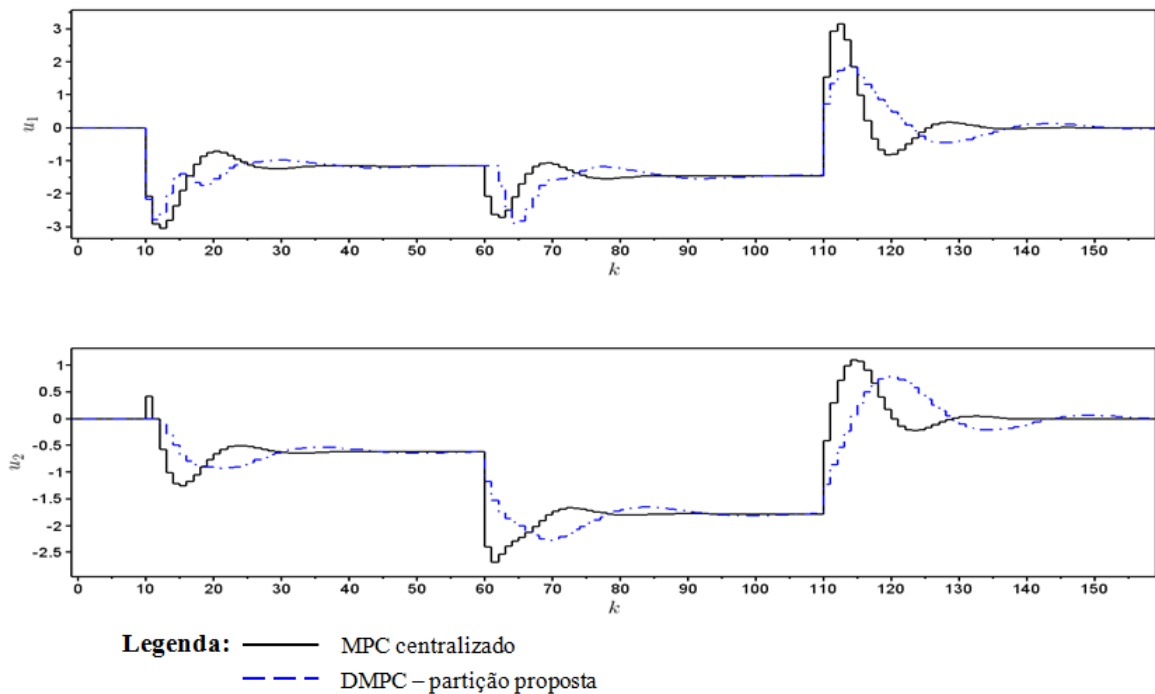
$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 4, 11 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 9, 59 \end{bmatrix} \quad (3.141)$$

As condições iniciais e o objetivo de controle são os mesmos considerados nas simulações anteriores. As Figuras (3.27) e (3.28) apresentam as dinâmicas das saídas controladas do processo e das entradas manipuladas, respectivamente. Elas mostram as respostas obtidas por controle centralizado e DMPC utilizando partição proposta neste trabalho com estrutura em paralelo.

Analisando-se os resultados, nota-se claramente que as resposta obtidas, tanto para as saídas controladas quanto para as entradas manipuladas, assemelham-se das obtidas pelo controle DMPC sequencial. A comparação em termos quantitativos realizou-se da mesma forma, ou seja, através do índice de desempenho ITAE para as saídas controladas e IAE para as entradas manipuladas. Os valores encontrados para estes índices e para cada uma das técnicas estão presentes nas Tabelas (3.37) e (3.38), respectivamente.



**Figura 3.27:** Dinâmicas das saídas controladas do sistema industrial de moagem de minério obtidas pelo controle centralizado e DMPC utilizando partição proposta com estrutura em paralelo e com restrições nas variáveis manipuladas.



**Figura 3.28:** Ações de controle das entradas manipuladas do sistema industrial de moagem de minério obtidas pelo controle centralizado e DMPC utilizando partição proposta com estrutura em paralelo e com restrições nas variáveis manipuladas.

Nas Tabelas (3.39) e (3.40) tem-se os valores obtidos de  $I_y$  e  $I_u$ , respectivamente.

**Tabela 3.37:** Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do sistema industrial de moagem de minério para o controle centralizado e DMPC utilizando partição proposta com estrutura em paralelo e com restrições nas variáveis manipuladas.

Estratégia de controle	ITAE - $y_1$	ITAE - $y_2$
MPC centralizado	1162,3656	1218,5143
DMPC - partição proposta	1326,0837	2221,0653

**Tabela 3.38:** Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do sistema industrial de moagem de minério para o controle centralizado e DMPC utilizando partição proposta com estrutura em paralelo e com restrições nas variáveis manipuladas.

Estratégia de controle	IAE - $u_1$	IAE - $u_2$
MPC centralizado	6,0423	3,0111
DMPC - partição proposta	5,5671	1,4302

**Tabela 3.39:** Valores dos índices globais  $I_y$  do sistema industrial de moagem de minério e desempenho do DMPC com estrutura em paralelo e com restrições nas variáveis manipuladas.

Estratégia de controle	$I_y$	Desempenho (%)
MPC centralizado	1684	-
DMPC - partição proposta	2587	↓ 54

**Tabela 3.40:** Valores dos índices globais  $I_u$  do sistema industrial de moagem de minério e desempenho do DMPC com estrutura em paralelo e com restrições nas variáveis manipuladas.

Estratégia de controle	$I_u$	Desempenho (%)
MPC centralizado	6,75	-
DMPC - partição proposta	5,74	↑ 17

Os valores obtidos para  $I_y$  e  $I_u$  comprovam o que havia sido concluído anteriormente, a estrutura em paralelo obteve desempenho similar aquele da estrutura sequencial. Isso leva a concluir que a informação que é transmitida entre os controladores durante o mesmo instante de amostragem não é relevante para o controle deste sistema em específico.

Neste capítulo foram apresentadas algumas aplicações do controle preditivo distribuído proposto nesta dissertação. Tal sistema DMPC mostrou-se ser uma interessante estratégia de controle para sistemas com características específicas, como mal condicionamento, restrições nas variáveis manipuladas e com significativas interações entre os subsistemas do processo. No Capítulo 4 é apresentada uma análise das propriedades de estabilidade para o controle preditivo distribuído proposto nesse trabalho.

---

---

# CAPÍTULO 4

---

## Análise do Algoritmo de Controle Distribuído



presente capítulo apresenta uma análise das propriedades de estabilidade para o controle preditivo distribuído proposto nesse trabalho. Aborda-se o tema num contexto de estabilidade de Lyapunov com uma descrição baseada em Inequações Matriciais Lineares (LMI, *Linear Matrix Inequalities*).

### 4.1 Estabilidade de Sistemas: Aspectos Básicos

Considere o sistema:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (4.2)$$

em que as matrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{C}$  possuem dimensões apropriadas,  $\mathbf{x}$  representa o vetor  $n$ -dimensional contendo os estados preditos do processo;  $\mathbf{u}$ , o vetor  $m$ -dimensional das entradas preditas e  $\mathbf{y}$ , o vetor  $l$ -dimensional das saídas controladas. Deseja-se estabilizar o sistema (4.1)-(4.2) com o controle  $\mathbf{u}(k) = \mathbf{K}\mathbf{y}(k)$ . O sistema em malha fechada é dado

por:

$$\mathbf{x}(k+1) = (\mathbf{A} + \mathbf{BKC})\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}_{CL}\mathbf{x}(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

Sabe-se que:

Lema: (BOYD et al., 1994) O sistema em malha fechada, Equação (4.3), é estável no sentido de Schur, se e somente se uma das seguintes condições for satisfeita:

$$\mathbf{P} > 0, \quad \mathbf{A}_{CL}^T \mathbf{P} \mathbf{A}_{CL} - \mathbf{P} < 0 \quad (4.4)$$

$$\mathbf{Q} > 0, \quad \mathbf{A}_{CL} \mathbf{Q} \mathbf{A}_{CL}^T - \mathbf{Q} < 0 \quad (4.5)$$

Ou seja, todos os valores característicos (autovalores) da matriz  $\mathbf{A}_{CL}$  estão dentro do ciclo unitário. Essa propriedade é equivalente a existência de matrizes simétricas positivo-definidas,  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{Q}$ , tal que  $\mathbf{A}_{CL}$  seja a solução da equação de Stein,  $\mathbf{A}_{CL}^T \mathbf{P} \mathbf{A}_{CL} - \mathbf{P} = -\mathbf{Q}$ . Essa equação matricial pode ser escrita na forma de Inequações Matriciais Lineares (LMIs), cuja principal vantagem é a grande disponibilidade de aplicativos de elevada eficiência para a sua solução. Nesse trabalho, o algoritmo de programação semidefinida (VANDENBERGHE; BOYD, 1994) que se encontra disponível no *software* Scilab foi utilizado para a avaliação de todas LMIs necessárias ao estudo.

## 4.2 LMI - Inequações Matriciais Lineares

Essa seção não tem a ambição de apresentar uma descrição detalhada da teoria de inequações matriciais lineares (LMI), detalhes podem ser encontrados em Boyd et al. (1994). Uma inequação matricial linear (LMI) é qualquer restrição que apresenta a seguinte forma:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{F}_i > 0 \quad (4.6)$$

sendo,  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ , o vetor de escalares reais desconhecidos (variáveis de decisão ou de otimização) e  $\mathbf{F}_0, \dots, \mathbf{F}_m$ , matrizes simétricas. O símbolo de desigualdade  $>$  presente na Inequação (4.6), significa que  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$  é positivo-definida, ou seja,  $\mathbf{u}^T \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{u} > 0$  para todo  $\mathbf{u}$  pertencente ao conjunto dos números reais de ordem apropriada e diferente de zero. A LMI dada pela Equação (4.6) é equivalente a um conjunto de  $m$  inequações polinomiais em  $\mathbf{x}$ . As LMI também podem se apresentar na forma não estrita, como apresentado na Equação (4.7).

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) \geq 0 \quad (4.7)$$



As LMI estritas e não estritas são proximamente relacionadas, porém algumas considerações são necessárias. A LMI da Equação (4.7) é uma restrição convexa em  $\mathbf{x}$ , isto é, o conjunto  $\{\mathbf{x} | \mathbf{F}(\mathbf{x}) > 0\}$  é convexo.

Convexidade tem uma consequência importante: mesmo que a Equação (4.7) não tenha uma solução analítica, em geral, ela pode ser resolvida numericamente com a garantia de encontrar uma solução quando existir. Note que um sistema de restrições LMI,  $\mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{x}) > 0, \dots, \mathbf{F}^{(p)}(\mathbf{x}) > 0$ , pode ser considerado como uma única LMI na forma de  $\text{diag}(\mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{F}^{(p)}(\mathbf{x})) > 0$ .

Quando as matrizes  $\mathbf{F}_i(\mathbf{x})$  são diagonais, a LMI  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) > 0$  é apenas um conjunto de inequações lineares. Inequações (convexas) não lineares são convertidas na forma de LMI usando os complementos de Schur. A ideia básica é a seguinte: a LMI

$$\begin{bmatrix} \mathbf{Q}(\mathbf{x}) & \mathbf{S}(\mathbf{x}) \\ \mathbf{S}(\mathbf{x})^T & \mathbf{R}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} > 0 \quad (4.8)$$

sendo  $\mathbf{Q}(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\mathbf{x})^T$ ,  $\mathbf{R}(\mathbf{x}) = \mathbf{R}(\mathbf{x})^T$  e  $\mathbf{S}(\mathbf{x})$ , funções lineares em  $\mathbf{x}$ , é equivalente a

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}) > 0, \quad \mathbf{Q}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}(\mathbf{x})\mathbf{R}(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{S}(\mathbf{x})^T > 0 \quad (4.9)$$

Em outras palavras, o conjunto de inequações não lineares (4.9) pode ser representado como a LMI da Equação (4.8). Resolver um problema em LMI significa determinar se o problema em questão é viável ou não, e, sendo viável, calcular este ponto de viabilidade.

Assim, para o caso de interesse, o sistema descrito pela Equação (4.5) admite solução nula como um ponto de equilíbrio assintoticamente estável se a LMI:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{P} - \mathbf{A}_{CL}^T \mathbf{P} \mathbf{A}_{CL} \end{bmatrix} > 0 \quad (4.10)$$

é viável na variável matricial  $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ .

### 4.3 Estabilidade do Controlador MPC Distribuído Proposto

Seja o sistema descrito pelas Equações (4.1)-(4.2) expresso conforme,

$$\mathbf{y}(k+1) = \mathbf{CAx}(k) + \mathbf{CBu}(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.11)$$

As variáveis controladas podem ser escritas em termos dos estados diretamente afetados por cada variável manipulada na forma:

$$\hat{\mathbf{y}}_{d,i}(k+1) = \mathbf{C}_i \mathbf{A}_{ii} \hat{\mathbf{x}}_{d,i}(k) + \mathbf{C}_i \mathbf{B}_{ii} \mathbf{u}_i(k) + \mathbf{C}_i \mathbf{B}_{d,i} \mathbf{d}_i(k), \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (4.12)$$

em que  $\mathbf{B}_{d,i}$  é a matriz das perturbações. Nessa formulação, o controlador trata as interações entre os subsistemas como perturbações. Portanto, tem-se:

$$\varpi_i(k) = \mathbf{C}_i \omega_i(k) = \sum_{j=1(j \neq i)}^M \mathbf{C}_i \mathbf{A}_{ij} \hat{\mathbf{x}}_j(k) + \mathbf{C}_i \mathbf{B}_{ij} \mathbf{u}_j(k) \quad (4.13)$$

Com modelo nominal definido como:

$$\hat{\mathbf{y}}_i(k+1) = \mathbf{C}_i \mathbf{A}_{ii} \hat{\mathbf{x}}_i(k) + \mathbf{C}_i \mathbf{B}_{ii} \mathbf{u}_i(k), \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (4.14)$$

Expressando as dinâmicas dos estados para os modelos, têm-se:

$$\hat{\mathbf{x}}_{d,i}(k+1) = \mathbf{A}_{ii} \hat{\mathbf{x}}_{d,i}(k) + \mathbf{B}_{ii} \mathbf{u}_i(k) + \omega_i(k), \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (4.15)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_i(k+1) = \mathbf{A}_{ii} \hat{\mathbf{x}}_i(k) + \mathbf{B}_{ii} \mathbf{u}_i(k), \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (4.16)$$

O objetivo é estabilizar o sistema por controle *feedback*. Para a implementação do controle, pode-se usar a expressão da lei de controle  $\mathbf{u}_i(k) = \mathbf{K}_i \mathbf{x}_i(k)$ , em que  $\mathbf{K}_i$  deve ser calculado. A abordagem desse trabalho necessita ainda de usar modelo de perturbação para eliminar *offset* uma vez que haverá sempre um erro de predição entre o modelo nominal para cada subsistema  $i$ . De um ponto de vista prática, com é usual em controle centralizado, usa-se a estratégia de corrigir a trajetória futura de predição conhecendo-se o erro entre a saída predita e a medida para cada variável de controle de interesse. Existem muitas outras opções que poderiam ser exploradas como aumentar por exemplo os submodelos com perturbações integradoras para um sistema detectável, conforme apresentado em Venkat (2006).

Sabe-se do critério de estabilidade quadrática de Lyapunov (OGATA, 1995) que um sistema dinâmico em malha fechada  $\eta(k+1) = \mathbf{\Psi} \eta(k)$  é assintoticamente estável se existir uma matriz  $\mathbf{P}$  positivo-definida e uma função quadrática de Lyapunov para todas as condições iniciais  $V(k) = \eta^T(k) \mathbf{P} \eta(k)$ , tal que:

$$V(k+1) - V(k) < 0 \quad (4.17)$$

Para o controle baseado nos submodelos, a estabilidade de planta em malha fechada pode ser descrita por:

**Teorema 1:** (Adaptado de Zhang e Wang (2012)) O sistema da planta completa em malha fechada satisfaz a condição de estabilidade quadrática de Lyapunov se existir uma sequência de matrizes  $\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_i^T > 0$  tal que,

$$\mathbf{A}_{CL_i}^T \mathbf{P}_i \mathbf{A}_{CL_i} - \mathbf{P}_i < 0 \quad (4.18)$$

para todos os subsistemas  $i \in \{1, \dots, M\}$ . Então,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_{CL_1}^T \mathbf{P}_1 \mathbf{A}_{CL_1} - \mathbf{P}_1 < 0 \\ \mathbf{A}_{CL_2}^T \mathbf{P}_2 \mathbf{A}_{CL_2} - \mathbf{P}_2 < 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ \mathbf{A}_{CL_M}^T \mathbf{P}_M \mathbf{A}_{CL_M} - \mathbf{P}_M < 0 \end{array} \right. \quad (4.19)$$

A condição descrita pelo sistema de inequações matriciais (4.19) garante a estabilidade assintótica de cada um dos subsistemas. Entretanto, com argumento similar pode-se provar a estabilidade assintótica do sistema global em malha fechada. Se existe  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_M$  satisfazendo a condição (4.19), então pode-se escrever:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1(k+1) - V_1(k) < 0 \\ V_2(k+1) - V_2(k) < 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ V_M(k+1) - V_M(k) < 0 \end{array} \right. \quad (4.20)$$

Da convexidade de  $V_i$  pode-se somar as inequações (4.20), chegando-a uma inequação para o sistema completo conforme a inequação (4.16). Com as Equações (4.16)-(4.17) e a formulação do problema de controle preditivo distribuído pode-se escrever a equação de malha fechada;

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{d,i}(k+1) \\ \hat{\mathbf{x}}_i(k+1) \end{bmatrix} = \mathbf{A}_{CL_i} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}_{d,i}(k) \\ \hat{\mathbf{x}}_i(k) \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Em que,

$$\mathbf{A}_{CL_i} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ii} - \mathbf{B}_{ii}\mathbf{K}_i(\psi_{ii} + \mathbf{L}_i) & \mathbf{B}_{ii}\mathbf{K}_i\mathbf{L}_i \\ -\mathbf{B}_{ii}\mathbf{K}_i\mathbf{L}_i & \mathbf{A}_{ii} - \mathbf{B}_{ii}\mathbf{K}_i(\psi_{ii} - \mathbf{L}_i) \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Todos os casos foram avaliados com a utilização do Scilab, e foi demonstrado que os exemplos investigados para o controle preditivo distribuído do sistema completo são estáveis.

### 4.3.1 Avaliação de estabilidade de problemas não restritos com a partição proposta.

Resolvendo-se as LMIs para as matrizes  $\mathbf{P}_i$ , pode-se verificar que os resultados são como seguem com  $\mathbf{P}_i > 0$ , o que satisfaz as condições de estabilidade para os casos #1, #2 e #4 sem restrição. O estudo de caso #3 não apresentou solução viável na região aceitável na região operacional (valores inaceitáveis negativos), e não foi apresentado o estudo sem restrição. A simulação do Caso #3 foi realizada apenas para o problema com restrição. As simulações podem ser encontradas no Capítulo 3 e Apêndice F para todos os cenários investigados. No estudo apresentado nesta seção, as sintonias dos controladores DMPC não foram otimizadas, assim, matrizes de ponderação  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R}$  foram adotadas como simples matrizes identidades com dimensões compatíveis.

#### Estudo de Caso #1

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 1406,85 & 477,50 & -153,28 & -589,33 \\ 477,50 & 2616,78 & -148,21 & -1538,03 \\ -153,28 & -148,21 & 1247,79 & 138,59 \\ -589,33 & -1538,03 & 138,59 & 2863,90 \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

#### Estudo de Caso #2

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} 2145,69 & 589,15 & 601,17 & -792,97 & -764,60 & -676,400 \\ 589,19 & 2465,45 & 734,97 & -673,08 & -741,19 & -648,27 \\ 601,11 & 734,97 & 2341,10 & -597,11 & -661,08 & -585,14 \\ -792,97 & -673,08 & -597,11 & 2227,63 & 651,20 & 573,40 \\ -764,60 & -741,19 & -661,08 & 651,20 & 2564,73 & 760,70 \\ -676,40 & -648,27 & -585,14 & 573,40 & 760,70 & 2314,13 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} 2494,56 & 560,26 & -345,12 & -948,57 & -807,63 & 379,15 \\ 560,26 & 3177,08 & 214,80 & -873,26 & -1549,96 & -609,78 \\ -345,12 & 214,80 & 2646,75 & 360,53 & -735,32 & -1831,39 \\ -948,57 & -873,26 & 360,53 & 2985,21 & 967,87 & -484,43 \\ -807,63 & -1549,96 & -735,32 & 967,87 & 3184,02 & -51,68 \\ 379,15 & -609,78 & -1831,39 & -484,43 & -51,68 & 3147,85 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{3a} & \mathbf{P}_{3b} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

sendo,

$$\mathbf{P}_{3a} = \begin{bmatrix} 1496,64 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1732,27 & 205,92 & 137,94 \\ 0,00 & 205,92 & 2221,91 & 917,08 \\ 0,00 & 137,94 & 917,08 & 2703,51 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -46,77 & -181,51 & -269,84 \\ 0,00 & -172,59 & -1033,82 & -1271,73 \\ 0,00 & -292,46 & -1472,79 & -1946,98 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

e

$$\mathbf{P}_{3b} = \begin{bmatrix} 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & -46,79 & -172,58 & -292,46 \\ 0,00 & -181,51 & -1033,83 & -1472,79 \\ 0,00 & -269,84 & -1271,73 & -1946,98 \\ 1496,64 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 0,00 & 1747,05 & 262,37 & 264,36 \\ 0,00 & 262,38 & 2188,31 & 1194,40 \\ 0,00 & 264,36 & 1194,40 & 3524,40 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

#### Estudo de Caso #4

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{1a} & \mathbf{P}_{1b} \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

sendo,

$$\mathbf{P}_{1a} = \begin{bmatrix} 2235,53 & 0,00 & 708,94 & -630,73 & -525,24 \\ 0,00 & 4173,02 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 708,94 & 0,00 & 3051,99 & 245,21 & 264,67 \\ -630,73 & 0,00 & 245,21 & 2970,49 & 2613,17 \\ -525,24 & 0,00 & 264,67 & 2613,17 & 4984,49 \\ -1384,67 & 0,00 & 669,53 & 577,34 & 496,13 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 682,79 & 0,00 & -361,50 & -357,19 & -241,90 \\ 264,97 & 0,00 & -150,15 & -2467,64 & -2322,20 \\ 178,57 & 0,00 & -29,11 & -1549,13 & -4423,78 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

e

$$\mathbf{P}_{1b} = \begin{bmatrix} -1384,67 & 0,00 & 682,79 & 264,97 & 178,56 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 669,53 & 0,00 & -361,50 & -150,15 & -29,11 \\ 577,34 & 0,00 & -357,19 & -2467,64 & -1549,13 \\ -496,13 & 0,00 & -241,90 & -2322,20 & -4423,77 \\ 2206,18 & 0,00 & 678,60 & -168,52 & -244,79 \\ 0,00 & 4173,02 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 678,60 & 0,00 & 3092,32 & 29,51 & 153,12 \\ -168,52 & 0,00 & 29,51 & 2340,54 & 1498,27 \\ -244,79 & 0,00 & 153,12 & 1498,27 & 5534,57 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{2a} & \mathbf{P}_{2b} \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

sendo,

$$\mathbf{P}_{2a} = \begin{bmatrix} -59,88 & 742,99 & 0,00 & 1645,29 & 61,01 & 401,69 \\ 297,49 & 238,77 & 0,00 & 61,01 & 4058,61 & 3056,69 \\ 286,19 & -108,59 & 0,00 & 401,69 & 3056,68 & 6020,60 \\ -925,17 & -726,99 & 0,00 & 148,67 & -469,27 & -297,88 \\ -639,82 & -1431,97 & 0,00 & 489,94 & -107,89 & -4,19 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 107,04 & 489,68 & 0,00 & -636,34 & -274,56 & -251,61 \\ -297,23 & -412,47 & 0,00 & -14,49 & -3028,50 & -2817,23 \\ 20,15 & -229,53 & 0,00 & 118,81 & -1636,99 & -4461,76 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

e

$$\mathbf{P}_{2b} = \begin{bmatrix} 148,67 & 489,94 & 0,00 & -636,34 & -14,49 & 118,81 \\ -469,27 & -107,89 & 0,00 & -274,56 & -3028,50 & -1636,99 \\ -297,88 & -4,19 & 0,00 & -251,61 & -2817,23 & -4461,76 \\ 1311,24 & 1013,56 & 0,00 & 59,37 & 227,18 & -73,54 \\ 1013,56 & 3794,20 & 0,00 & 636,64 & 630,04 & -93,85 \\ 0,00 & 0,00 & 3467,49 & 0,00 & 0,00 & 0,00 \\ 59,37 & 636,64 & 0,00 & 1742,03 & -385,61 & 41,07 \\ 227,18 & 630,04 & 0,00 & -385,61 & 3315,43 & 1422,40 \\ -73,54 & -93,85 & 0,00 & 41,07 & 1422,40 & 5857,05 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

O estudo de estabilidade sem restrição foi apresentado para representar as características do sistema proposto, entretanto, condições de estabilidade usando outros argumentos teóricos poderiam ser aplicadas para os problemas com restrição. O estudo de estabilidade com restrição não faz parte desse trabalho.





---

---

# CAPÍTULO 5

---

## Conclusões e Sugestões

O presente trabalho propôs uma estratégia de controle preditivo distribuído utilizando um procedimento simples e promissor de decomposição de modelos de processos lineares e invariantes no tempo. O método de decomposição é uma variação da proposta de Zhang e Wang (2012) e pode ser aplicada em sistemas lineares que apresentam pelo menos uma coluna da matriz  $\mathbf{B}$  cheia, ou seja, com todos os seus valores diferentes de zero, diferentemente da técnica de Zhang e Wang (2012). Se as condições de estabilidade forem garantidas para cada subsistema gerado, o controle de toda a planta poderá ser implementado.

A partir das análises dos resultados obtidos nos primeiros 3 estudos de caso, nota-se que a ordem dos controladores MPC afeta significativamente os resultados obtidos pela estrutura DMPC sequencial, sendo portanto um parâmetro importante no projeto deste sistema de controle. A importância da ordem não é verificada no estudo de caso 4. Isto leva a concluir, que para este sistema, a informação transmitida entre os controladores durante o mesmo instante de amostragem não é relevante para o controle de cada subsistema, tanto que, quando utiliza-se a estrutura em paralelo, ou seja, quando não há nenhuma troca de informações entre os controladores no mesmo instante de amostragem, não há perda de desempenho do controle distribuído. A proposta de DMPC utilizando a partição proposta obteve resultados satisfatórios com a abordagem sequencial para a melhor ordem dos controladores, quando se avalia as saídas controladas. Os resultados obtidos para essas variáveis se aproximam dos obtidos pelo controle centralizado, o que comprova a eficiência do controle.

Vale ressaltar que a estratégia DMPC desenvolvida neste trabalho apresentou resultados interessantes para o controle de um sistema mal condicionado, tratado no estudo de caso #2, que é considerado de difícil controle. Além disso, obteve-se bons resultados para casos em que restrições são impostas às variáveis manipuladas, o que dificulta consideravelmente a resolução do problema de otimização intrínseco aos controladores do DMPC. Com relação aos resultados obtidos para a estrutura DMPC em paralelo, esta abordagem obteve os piores desempenhos para os três primeiros estudos de caso, levando a conclusão que tal estrutura não é viável para estes casos, sem estudos complementares.

Como sugestões para próximos trabalhos destacam-se:

- Avaliar a estratégia DMPC desenvolvida em casos em que ocorram falhas no sistema;
- Desenvolver metodologia sistemática de seleção da melhor ordem dos controladores MPC na estrutura DMPC sequencial;
- Aplicar a estratégia DMPC proposta em sistemas não lineares e avaliar seu desempenho;
- Desenvolver outros métodos de particionamento de sistemas (lineares e não lineares);
- Avaliar o desempenho do DMPC proposto quando há cooperação entre os controladores (ou seja, estrutura DMPC cooperativa);
- Avaliar a formulação proposta para o caso de estados não medidos

---

# REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALESSIO, A.; BARCELLI, D.; BEMPORAD, A. Decentralized model predictive control of dynamically coupled linear systems. *Journal of Process Control*, v. 21, n. 5, p. 705 – 714, 2011. ISSN 0959-1524.
- BAKULE, L. Decentralized control: An overview. *Annual Reviews in Control*, v. 32, n. 1, p. 87 – 98, 2008. ISSN 1367-5788.
- BAMIEH, B.; PAGANINI, F.; DAHLEH., M. A. Distributed control of spatially invariant systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, v. 47(7), p. 1091–1107, 2002.
- BOYD, S.; EL GHAOU, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA: SIAM, 1994. (Studies in Applied Mathematics, v. 15). ISBN 0-89871-334-X.
- CALLIER, F. M.; CHAN, W. S.; DESOER, C. A. Input-output stability theory of interconnected systems using decomposition techniques. *IEEE Trans. Circuits and Systems*, v. 23(12), p. 714–729, 1976.
- CAMACHO, E.; BORDONS, C. *Model Predictive Control*. [S.l.]: Springer-Verlag GmbH, 2004. (Advanced Textbooks in Control and Signal Processing). ISBN 9781852336943.
- CAMPONOGARA, E.; JIA, D.; KROGH, B. H.; TALUKDAR, S. Distributed model predictive control. *IEEE Control Systems Magazine*, p. 44 – 52, 2002.
- CHRISTOFIDES, P. D.; SCATTOLINI, R.; de la PEÑA, D. M.; LIU, J. Distributed model predictive control: A tutorial review and future research directions. *Computers & Chemical Engineering*, v. 51, n. 0, p. 21 – 41, 2013. ISSN 0098-1354.

- CUTLER, C.; RAMAKER, B. Dynamic matrix control - a computer control algorithm. 1979.
- D'ANDREA, R. A linear matrix inequality approach to decentralized control of distributed parameter systems. In *Proceedings American Control Conference*, p. 1350–1354, 1998.
- DAVISON, E. J.; CHANG, T. N. Decentralized stabilization and pole assignment for general proper systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 35, p. 652 – 664, 1990.
- DU, X.; XI, Y.; SHAOYUAN, L. Distributed model predictive control for large-scale systems. In: *Proceedings of the American Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2001. p. 3142 – 3143. Arlington, VA.
- GARCIA, E.; CARLOS, E.; MORSHEDI, A. M. Quadratic programming solution of dynamic matrix control (QDMC). *Chemical Engineering Communications*, v. 46, n. 1-3, p. 73–87, 1986.
- GOLDFARB, D.; IDNANI, A. Dual and primal-dual methods for solving strictly convex quadratic programs. In: HENNART, J. (Ed.). *Numerical Analysis*. Springer Berlin Heidelberg, 1982, (Lecture Notes in Mathematics, v. 909). p. 226–239. ISBN 978-3-540-11193-1. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1007/BFb0092976>>.
- JOTA, F. *The Application of Self-tuning Control Techniques to a Multivariable Process*. [S.l.]: University of Oxford, 1987.
- MACIEJOWSKI, J. *Predictive Control with Constraints*. [S.l.]: Prentice-Hall, 2002. Japanese translation published by Tokyo Denki University Press, 2005. “Best Control Engineering Textbook” prize, SICE, 2007.
- MAGNI, L.; SCATTOLINI, R. Stabilizing decentralized model predictive control of non-linear systems. *Automatica*, v. 42, n. 7, p. 1231–1236, 2006.
- MAYNE, D.; RAWLINGS, J. B.; RAO, C. V.; SCOKAERT, P. Constrained model predictive control: Stability and optimality. *Automatica*, v. 36, n. 6, p. 789–814, Jun 2000.
- MERCANGÖZ, M.; DOYLE III, F. J. Distributed model predictive control of an experimental four-tank system. *Journal of Process Control*, v. 17, n. 3, p. 297 – 308, 2007. ISSN 0959-1524.
- MICHEL, A. Stability analysis of interconnected systems. *SIAM Journal on Control*, v. 12, p. 554–579, 1974.

- MICHEL, A. N.; RASMUSSEN, R. D. Stability of stochastic composite systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, v. 21, p. 89–94, 1976.
- MORARI, M.; LEE, J. H. Model predictive control: past, present and future. *Computers & Chemical Engineering*, v. 23, p. 667 – 682, 1999. ISSN 0098-1354.
- MOTEE, N.; SAYYAR-RODSARI, B. Optimal partitioning in distributed model predictive control. *Proceedings of the American Control Conference*, 2003.
- MUSKE, K. R.; RAWLINGS, J. B. Model predictive control with linear models. *AIChE Journal*, American Institute of Chemical Engineers, v. 39, n. 2, p. 262 – 287, 1993. ISSN 1547-5905.
- NIKOLAOU, M. Model predictive controllers: A critical synthesis of theory and industrial needs. In: . [S.l.]: Academic Press, 2001, (Advances in Chemical Engineering, v. 26). p. 131 – 204.
- OGATA, K. *Discrete-time control systems*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1995.
- QIN, S. J.; BADGWELL, T. A survey of industrial model predictive control technology. *Control Engineering Practice*, v. 11, n. 7, p. 733 – 764, 2003. ISSN 09670661.
- QIN, S. J.; BADGWELL, T. A. An overview of industrial model predictive control technology. In: . [S.l.: s.n.], 1997. p. 232–256.
- RAWLINGS, J. B.; MAYNE, D. Q. *Model Predictive Control: Theory and Design*. [S.l.]: Nob Hill Publishing, 2009. ISBN 9780975937709.
- RAWLINGS, J. B.; STEWART, B. T. Coordinating multiple optimization-based controllers: New opportunities and challenges. *Journal of Process Control*, v. 18, n. 9, p. 839 – 845, 2008. ISSN 0959-1524.
- RICHALET, J.; RAULT, A.; TESTUD, J.; PAPON, J. Model predictive heuristic control: Applications to industrial processes. *Automatica*, v. 14, n. 5, p. 413 – 428, 1978. ISSN 0005-1098.
- ROTKOWITZ, M.; LALL, S. A characterization of convex problems in decentralized control. *IEEE Trans. Automatic Control*, v. 51(2), p. 1984–1996, 2006.
- SAFFER II, D. R.; DOYLE III, F. J. Analysis of linear programming in model predictive control. *Computers & Chemical Engineering*, v. 28, n. 12, p. 2749–2763, 2004.
- SANDELL, N. R.; VARAIYA, P.; ATHANS, M.; SAFONOV, M. G. Survey of decentralized control methods for large scale systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, v. 23(2), p. 108–128, 1978.

- SCATTOLINI, R. Architectures for distributed and hierarchical model predictive control - a review. *Journal of Process Control*, v. 19, n. 5, p. 723 – 731, 2009. ISSN 0959-1524.
- SEBORG, D.; EDGAR, T.; MELLICHAMP, D. *Process Dynamics and Control*. [S.l.]: John Wiley & Sons, Incorporated, 2004. ISBN 9780471452461.
- SEZER, M.; SILJAK, D. Nested  $\epsilon$ -decompositions and clustering of complex systems. *Automatica*, v. 22, n. 3, p. 321 – 331, 1986. ISSN 0005-1098.
- SEZER, M. E.; SILJAK, D. D. On structural decomposition and stabilization of large-scale control systems. *IEEE Transactions*, v. 26, p. 439 – 444, 1981.
- STEWART, B. T.; VENKAT, A. N.; RAWLINGS, J. B.; WRIGHT, S. J.; PANNOCCHIA, G. Cooperative distributed model predictive control. *Systems & Control Letters*, v. 59, n. 8, p. 460 – 469, 2010. ISSN 0167-6911.
- STOLEN, L. Distributed control system. *IEEE The 21st International Telecommunications Energy Conference*, p. 1 – 4, 1999.
- SUN, Y.; EL-FARRA, N. H. Quasi-decentralized model-based networked control of process systems. *Computers & Chemical Engineering*, v. 32, n. 9, p. 2016–2029, 2008.
- VANDENBERGHE, L.; BOYD, S. Semidefinite programming. *SIAM Review*, v. 38, p. 49–95, 1994.
- VENKAT, A. N. *Distributed model predictive control: Theory and applications*. Tese (Doutorado) — University of Wisconsin-Madison, USA., 2006.
- VENKAT, A. N.; HISKENS, I. A.; RAWLINGS, J. B.; WRIGHT, S. J. Distributed mpc strategies with application to power system automatic generation control. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, IEEE, v. 16, n. 6, p. 1192–1206, 2008. ISSN 1063-6536.
- VENKAT, A. N.; RAWLINGS, J. B.; WRIGHT, S. J. Stability and optimality of distributed model predictive control. In: *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005*. Seville, Spain: [s.n.], 2005.
- VENKAT, A. N.; RAWLINGS, J. B.; WRIGHT, S. J. Implementable distributed model predictive control with guaranteed performance properties. In: *Proceedings of the 2006 American Control Conference*. Minneapolis, Minnesota, USA: [s.n.], 2006.
- WANG, S.; DAVISON, E. J. On the stabilization of decentralized control systems. *IEEE Trans. Automatic Control*, v. 18(5), p. 473–478, 1973.

YLINEN, R.; NIEMI, A. J.; IIVARINEN, T. A linear-quadratic-gaussian control algorithm for sulphide ore grinding. *Automatica*, v. 23, n. 3, p. 287 – 294, 1987. ISSN 0005-1098. Disponível em: <<http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0005109887900021>>.

ZHANG, L.; WANG, J. Distributed model predictive control with a novel partition method. In: *31st Chinese Control Conference*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 4108–4113.





---

# Apêndices

## A Algoritmo da Proposta de Decomposição de Sistemas

A seguir tem-se as etapas que constituem o algoritmo da proposta de decomposição de sistemas deste trabalho. As Tabelas (Ap.1-Ap.4) apresentam as etapas de 1 a 4, respectivamente e a Tabela Ap.5 apresenta o algoritmo completo, que faz referência as etapas apresentadas nas tabelas anteriores a ela.

**Tabela Ap.1:** Etapa 1 do Algoritmo da proposta de partição de sistemas.

---

---

### INICIALIZAÇÃO ETAPA 1

Avaliação dos conjuntos  $\varphi_i$  (efeitos de  $u_i$  nos estados),  $\xi_i$  (efeitos entre estados) e  $\pi_i$  (efeitos de todos os estados nas variáveis controladas)

Construção dos submodelos a partir do conjunto gerado pela interseção das informações dos  $\varphi_i$  e  $\pi_i$

Avaliação da controlabilidade dos submodelos gerados

Caso exista pelo menos um submodelo não controlável, vá para **Etapa 2**, senão finaliza **Etapa 1** da construção dos submodelos

FIM DA ETAPA 1

---

---

**Tabela Ap.2:** Etapa 2 do Algoritmo da proposta de partição de sistemas.

---

---

INICIALIZAÇÃO DA ETAPA 2
Adição dos efeitos indiretos utilizando as informações de $\xi_i$ para os estados afetados por $u_i$
Construção dos novos submodelos
Avaliação da controlabilidade
Caso exista pelo menos um submodelo não controlável, vai para <b>Etapa 3</b> , senão finalizar <b>Etapa 2</b> da construção dos submodelos
FIM DA ETAPA 2

---

---

**Tabela Ap.3:** Etapa 3 do Algoritmo da proposta de partição de sistemas.

---

---

INICIALIZAÇÃO DA ETAPA 3
Para cada estado indiretamente afetados, dos estados que são afetados pelas entradas, seleção daqueles que afetam as saídas controladas
Construção dos novos submodelos
Avaliação da controlabilidade de cada subsistema
Caso todos submodelo sejam controláveis ou submodelos idênticos ao modelo completo, fim do particionamento
FIM DA ETAPA 3

---

---

**Tabela Ap.4:** Etapa 4 do Algoritmo da proposta de partição de sistema.

---

---

INICIALIZAÇÃO DA ETAPA 4
A partir dos submodelos projetados pelas <b>Etapas</b> (1-3), avaliar se existem submodelos com todos idênticos
União dos submodelos aumentando-se a matriz <b>B</b> , gerando uma nova matriz que reúne a contribuição de todas as entradas respectivas dos submodelos com mesmos estados
FIM DA ETAPA 4

---

---

**Tabela Ap.5:** Algoritmo da proposta de partição de sistemas.

---

---

Algoritmo da Proposta de Decomposição de Sistemas
Entrada de Dados ( <b>A</b> , <b>B</b> , <b>C</b> )
INICIALIZAÇÃO DO PARTICIONAMENTO
<b>Etapa 1</b>
<b>Etapa 2</b>
<b>Etapa 3</b>
<b>Etapa 4</b>
FIM DO PARTICIONAMENTO

---

---

## B Etapas da geração dos subsistemas pela partição proposta

A proposta de decomposição de sistemas presente nesta dissertação é realizada seguindo basicamente os seguintes passos:

**1ª etapa:** Identificar quais estados cada entrada afeta;

**2ª etapa:** Identificar os efeitos entre os estados;

**3ª etapa:** Identificar quais estados afetam as saídas controladas.

Deve-se satisfazer os seguintes critérios para a formação de cada subsistema e respectivo submodelo:

- incluir no subsistema os estados que afetam diretamente as saídas controladas;
- se houver, saídas controladas sem efeito direto de nenhum estado, considerar os efeitos indiretos;
- gerar subsistemas controláveis, para isto, deve-se avaliar a matriz de controlabilidade do subsistema criado. Se o *rank* desta matriz for igual ao número de estados desse subsistema, ele é dito controlável. Caso contrário, deve-se acrescentar novos estados ao subsistema, até que a condição de controlabilidade seja satisfeita.

A seguir, tem-se as etapas de geração dos subsistemas e respectivos submodelos para cada estudo de caso considerado neste trabalho.

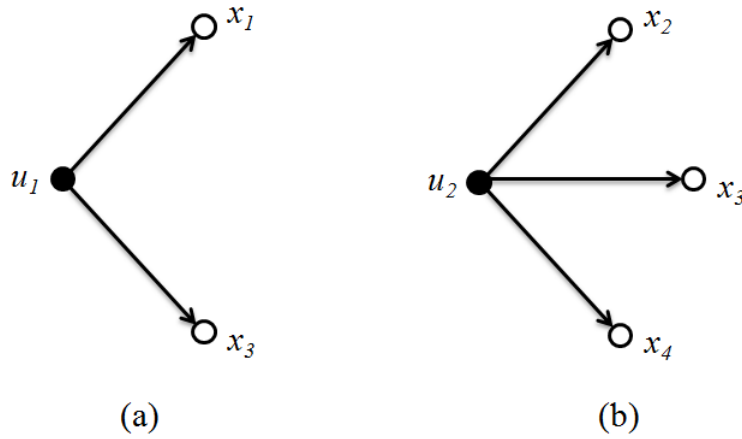
### B.1 Estudo de caso #1 (ZHANG; WANG, 2012)

O modelo completo da planta do sistema em questão é representado pelas seguintes equações:

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,8 & 0,6 & -0,25 & 0 \\ 0 & 0,75 & -0,5 & 0 \\ 1,5 & -1 & -0,6 & -0,15 \\ 0 & 0,5 & -0,5 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.1})$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.2})$$

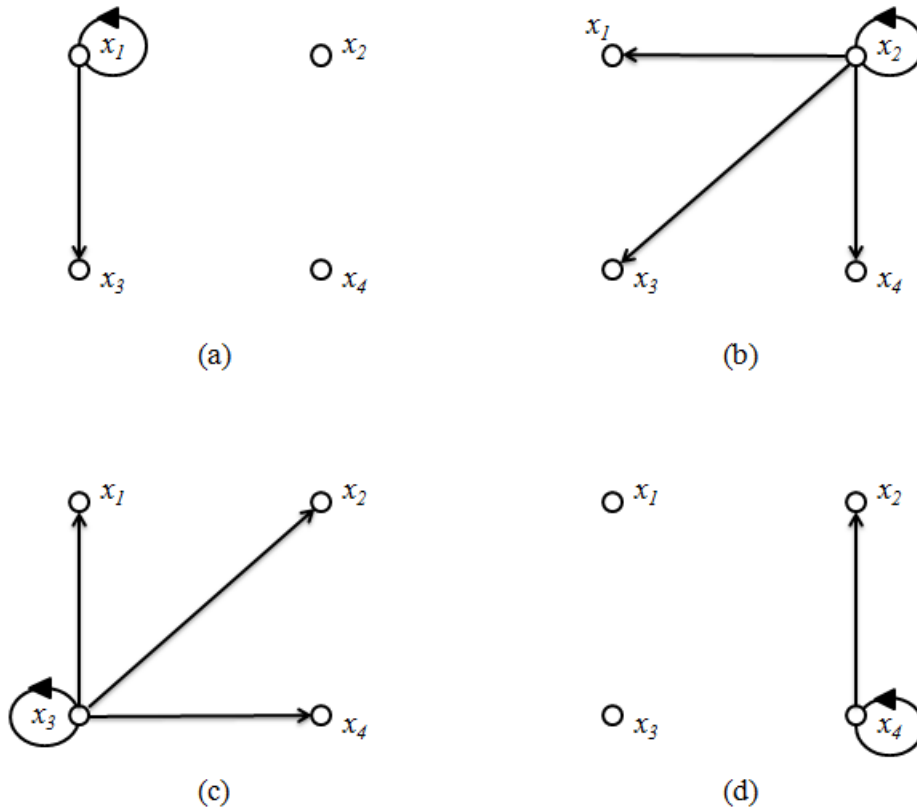
A 1ª etapa de identificar quais estados cada entrada afeta gera os dígrafos apresentados na Figura Ap.1.



**Figura Ap.1:** Dígrafos que representam os efeitos entre os estados e (a) entrada  $u_1$  e (b) entrada  $u_2$  para o sistema do estudo de caso #1.

Nota-se que a entrada  $u_1$  afeta os estados  $x_1$  e  $x_3$  e a entrada  $u_2$  afeta  $x_2$ ,  $x_3$  e  $x_4$ . A 2ª etapa de identificar os efeitos entre estados gera os dígrafos presentes na Figura Ap.2.

Nota-se que o estado  $x_1$  interage que ele mesmo e  $x_3$ . Os estados  $x_2$  e  $x_3$  interagem com si próprios e com todos os outros estados. Já, o estado  $x_4$  interage com ele mesmo e com  $x_3$ . A 3ª etapa de identificar quais estados afetam as saídas controladas gera os dígrafos representados na Figura Ap.3.



**Figura Ap.2:** Dígrafos que representam os efeitos entre estados para: (a) estado  $x_1$ , (b) estado  $x_2$ , (c) estado  $x_3$  e (d) estado  $x_4$  para o sistema do estudo de caso #1.

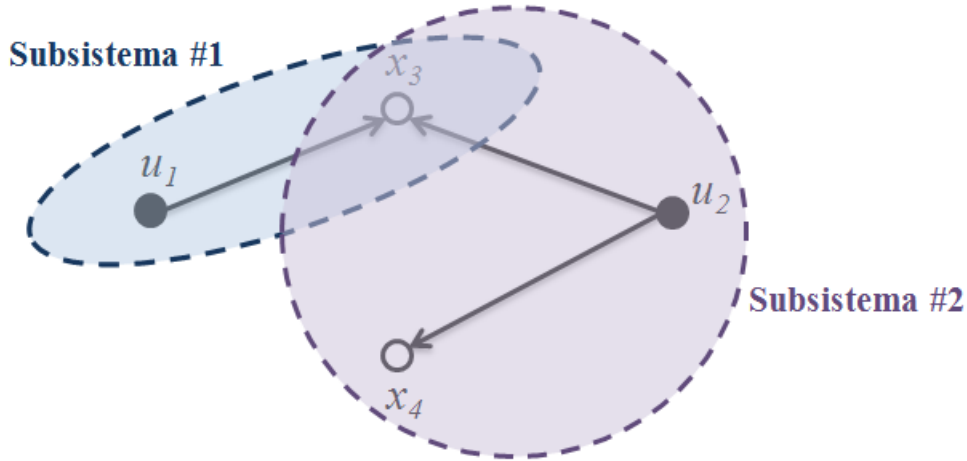


**Figura Ap.3:** Dígrafos que representam os efeitos entre estados e (a) saída  $y_1$  e (b) saída  $y_2$  para o sistema do estudo de caso #1.

Nota-se que  $x_3$  e  $x_4$  são os únicos estados que afetam diretamente as saídas controladas  $y_1$  e  $y_2$ , respectivamente. Logo, dos subsistemas gerados na 1ª etapa, deve-se considerar apenas estes estados para composição final dos subsistemas. No subsistema # 1,  $u_1$  controla  $x_3$  e no subsistema # 2,  $u_2$  controla  $x_3$  e  $x_4$ , formando assim os dígrafos da Figura Ap.4.

## B.2 Estudo de caso #2

O modelo completo da planta do sistema em questão é representado pelas seguintes equações:

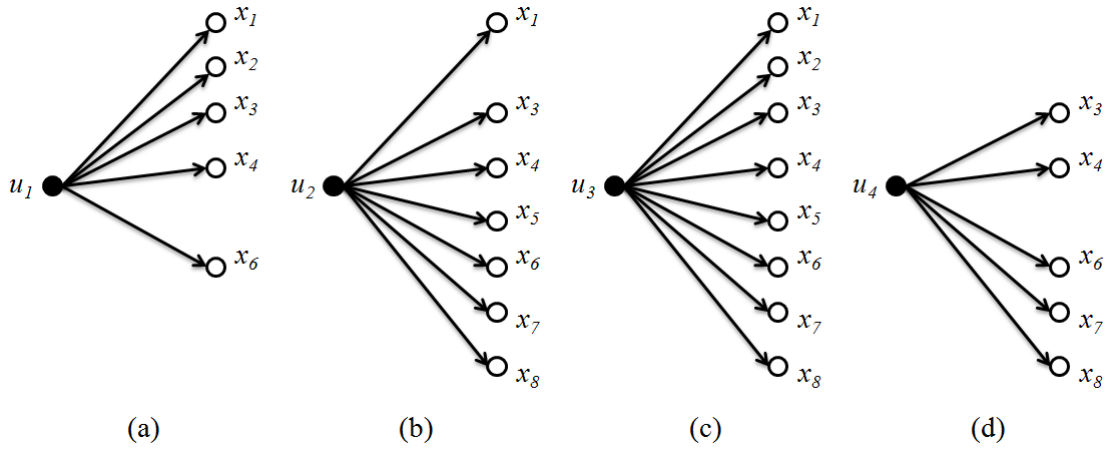


**Figura Ap.4:** Dígrafos dos subsistemas criados através da partição proposta para o sistema do estudo de caso #1.

$$\begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \\ x_3(k+1) \\ x_4(k+1) \\ x_5(k+1) \\ x_6(k+1) \\ x_7(k+1) \\ x_8(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,14 & 0,37 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,27 & 0,04 & 0,90 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,64 & 0,65 & 0,61 & 0 & 0,79 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,63 & 0,40 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,16 & 0,55 & 0,03 & 0,21 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,27 & 0,18 & 0,45 & 0 & 0,52 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,26 & 0,96 & 0,20 & 0,73 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,11 & 0,20 & 0,82 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \\ x_6(k) \\ x_7(k) \\ x_8(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0,5 & 0,2 & 0 \\ 1,3 & 0 & -0,2 & 0 \\ 0,2 & 1,5 & 0,5 & 0,3 \\ 0,5 & 1 & 0,5 & 0,2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0,2 & 1 & 0,7 & 0,4 \\ 0 & 0,5 & 1 & 1 \\ 0 & 0,2 & 1 & 0,9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(k) \\ u_2(k) \\ u_3(k) \\ u_4(k) \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.3})$$

$$\begin{bmatrix} y_1(k) \\ y_2(k) \\ y_3(k) \\ y_4(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \\ x_4(k) \\ x_5(k) \\ x_6(k) \\ x_7(k) \\ x_8(k) \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.4})$$

A 1ª etapa de identificar quais estados cada entrada afeta gera os dígrafos apresentados na Figura Ap.5.

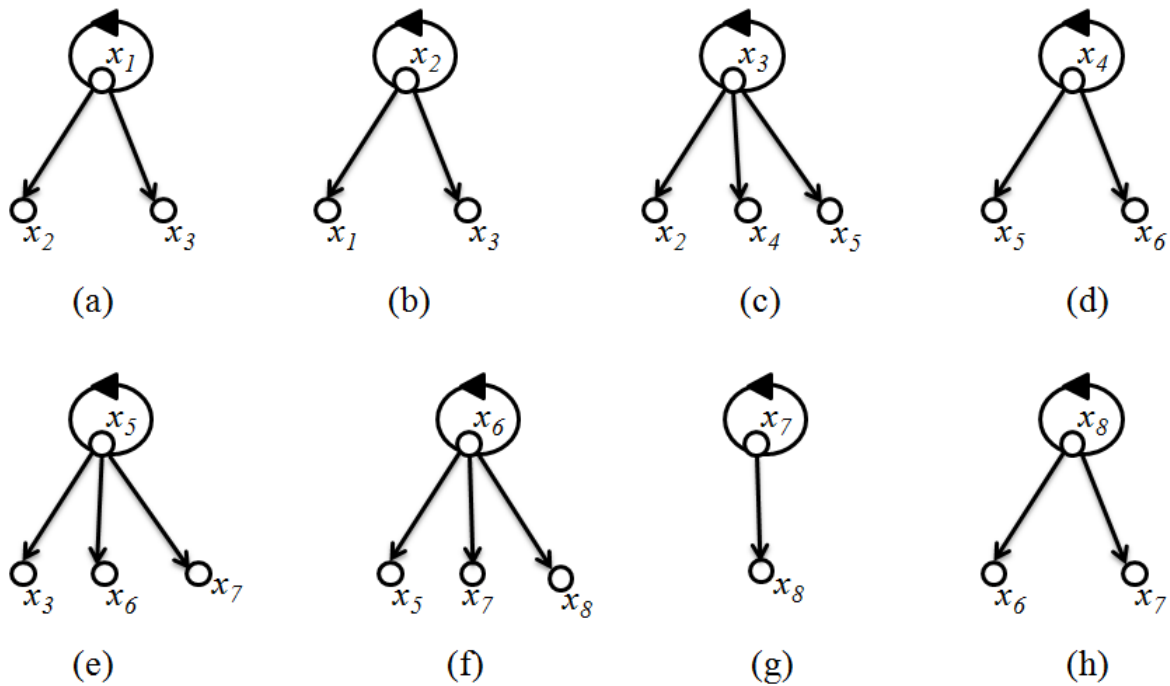


**Figura Ap.5:** Dígrafos que representam os efeitos entre os estados e: (a) entrada  $u_1$ , (b) entrada  $u_2$ , (c) entrada  $u_3$  e (d) entrada  $u_4$  para o sistema do estudo de caso #2.

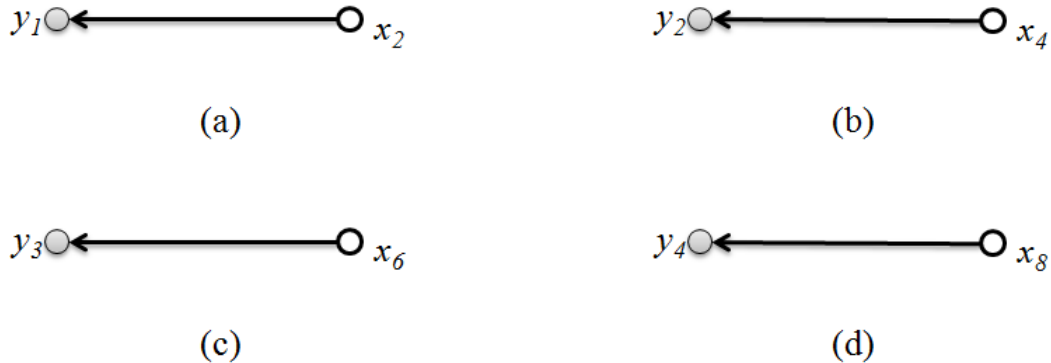
Nota-se que a entrada  $u_1$  afeta os estados  $x_1, x_2, x_3, x_4$  e  $x_6$ , a entrada  $u_2$  afeta  $x_1, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$  e  $x_8$ , a entrada  $u_3$  afeta todos os estados e  $u_4$ , os estados  $x_3, x_4, x_6, x_7$  e  $x_8$ . A 2ª etapa de identificar os efeitos entre estados gera os dígrafos presentes na Figura Ap.6.

Nota-se que todos os estados interagem com eles próprios. Além disso, estado  $x_1$  interage com  $x_2$  e  $x_3$ ;  $x_2$  interage com  $x_1$  e  $x_3$ ; o estado  $x_3$  interage com  $x_2, x_4$  e  $x_5$ ;  $x_4$  com  $x_5$  e  $x_6$ ;  $x_5$  interage com  $x_3, x_6$  e  $x_7$ ;  $x_6$  com  $x_5, x_6$  e  $x_8$ ;  $x_7$  com  $x_8$ ; e por fim,  $x_8$  interage com  $x_6$  e  $x_7$ . A 3ª etapa de identificar quais estados afetam as saídas controladas gera os dígrafos representados na Figura Ap.3.

Nota-se que  $x_2, x_4, x_6$  e  $x_8$  são os únicos estados que afetam diretamente as saídas controladas  $y_1, y_2, y_3$  e  $y_4$ , respectivamente. Logo, dos subsistemas gerados na 1ª etapa, deve-se considerar apenas estes estados para composição final dos subsistemas. No subsistema # 1,  $u_1$  controla  $x_2, x_4$  e  $x_6$ , no subsistema # 2,  $u_2$  e  $u_4$  controlam  $x_4, x_6$  e  $x_8$ , no



**Figura Ap.6:** Dígrafos que representam os efeitos entre estados para: (a) estado  $x_1$ , (b) estado  $x_2$ , (c) estado  $x_3$ , (d) estado  $x_4$ , (e) estado  $x_5$ , (f) estado  $x_6$ , (g) estado  $x_7$  e (h) estado  $x_8$  para o estudo de caso #2.



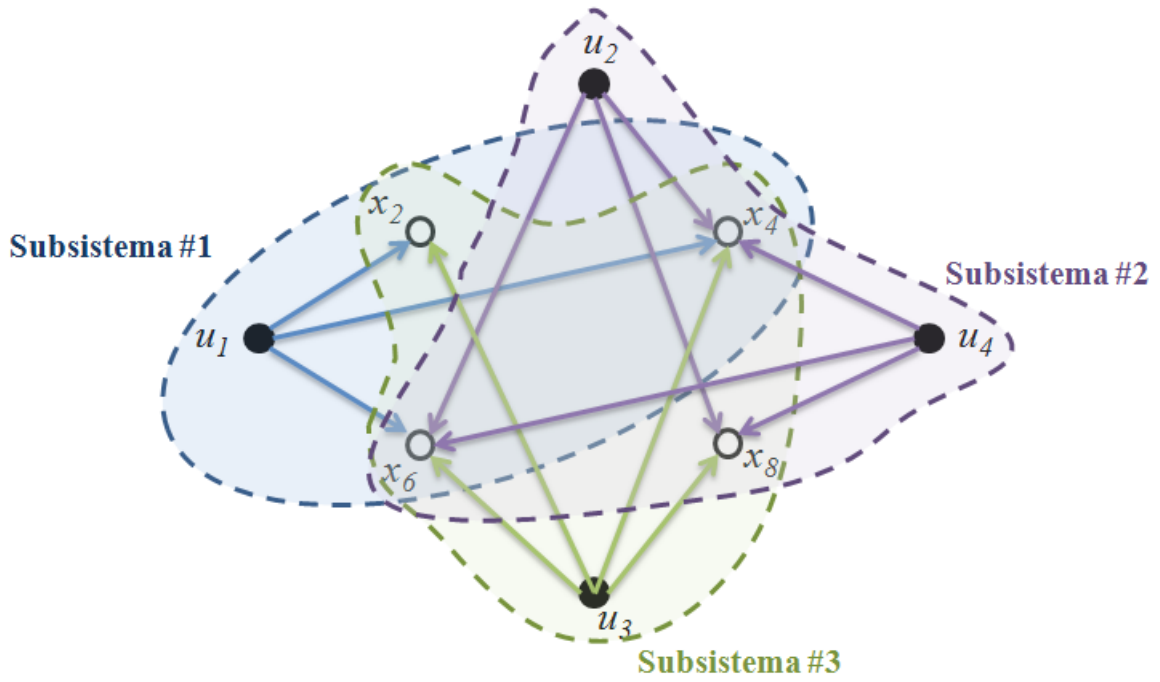
**Figura Ap.7:** Dígrafos que representam os efeitos entre estados e: (a) saída  $y_1$ , (b) saída  $y_2$ , (c) saída  $y_3$  e (d) saída  $y_4$  para sistema do estudo de caso #2.

subsistema # 3,  $u_3$  controla  $x_2$ ,  $x_4$ ,  $x_6$  e  $x_8$ , formando assim os dígrafos da Figura Ap.8.

### B.3 Estudo de caso #3: Sistema de 3 tanques

O modelo completo da planta do sistema em questão é representado pelas seguintes equações:





**Figura Ap.8:** Dígrafos dos subsistemas criados através da partição proposta para o sistema do estudo de caso #2.

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) \quad (\text{Ap.5})$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) \quad (\text{Ap.6})$$

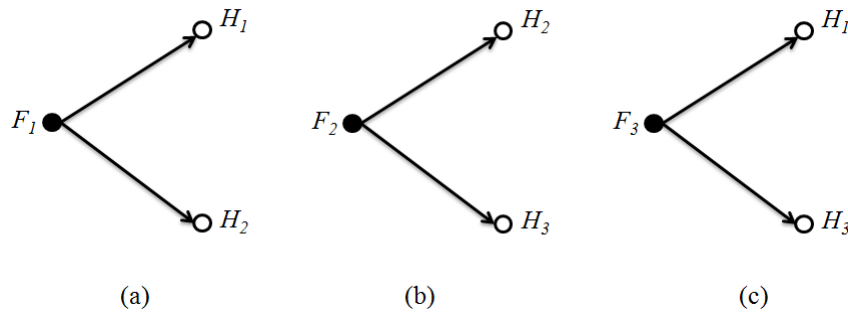
em que,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} H_1 - H_1^{ss} \\ H_2 - H_2^{ss} \\ H_3 - H_3^{ss} \end{bmatrix}, \mathbf{u} = \begin{bmatrix} F_1 - F_1^{ss} \\ F_2 - F_2^{ss} \\ F_3 - F_3^{ss} \end{bmatrix}, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} H_1 - H_1^{ss} \\ H_2 - H_2^{ss} \\ H_3 - H_3^{ss} \end{bmatrix},$$

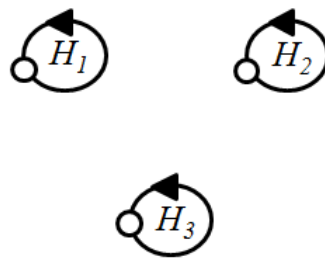
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{\Delta}{S_1} & 0 & \alpha \frac{\Delta}{S_1} \\ \frac{\Delta}{S_2} & -\frac{\Delta}{S_2} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta}{S_3} & -\frac{\Delta}{S_3} \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A 1ª etapa de identificar quais estados cada entrada afeta gera os dígrafos apresentados na Figura Ap.9.

Nota-se que a entrada manipulada  $F_1$  afeta os níveis  $H_1$  e  $H_2$ . A entrada  $F_2$  afeta os níveis  $H_2$  e  $H_3$  e  $F_3$  afeta  $H_3$  e  $H_1$ , devido ao reciclo. A 2ª etapa de identificar os efeitos entre estados gera os dígrafos presentes na Figura Ap.10.

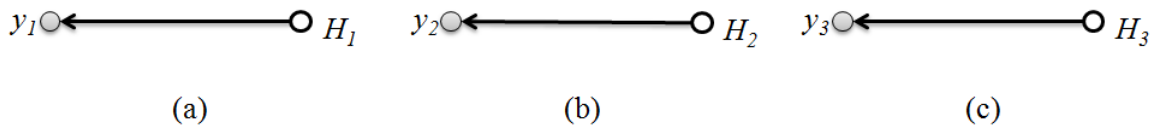


**Figura Ap.9:** Dígrafos que representam os efeitos entre os estados e: (a) entrada  $F_1$ , (b) entrada  $F_2$  e (c) entrada  $F_3$  para o sistema de 3 tanques.



**Figura Ap.10:** Dígrafos que representam os efeitos entre estados para o sistema de 3 tanques.

Nota-se que os estados só interagem com eles próprios. A 3ª etapa de identificar quais estados afetam as saídas controladas gera os dígrafos representados na Figura Ap.11.



**Figura Ap.11:** Dígrafos que representam os efeitos entre estados e: (a) saída  $y_1$ , (b) saída  $y_2$  e (c) saída  $y_3$  para o sistema de 3 tanques.

Nota-se que  $H_1$ ,  $H_2$  e  $H_3$  afetam diretamente as saídas controladas  $y_1$ ,  $y_2$  e  $y_3$ , respectivamente. Logo, dos subsistemas gerados na 1ª etapa, deve-se considerar apenas estes estados para composição final dos subsistemas. No subsistema # 1,  $F_1$  controla  $H_1$  e  $H_2$ , no subsistema # 2,  $F_2$  controla  $H_2$  e  $H_3$  e no subsistema # 3,  $F_3$  controla  $H_3$  e  $H_1$ , formando assim os dígrafos da Figura Ap.12.

#### B.4 Estudo de caso #4: Sistema de Moagem Industrial

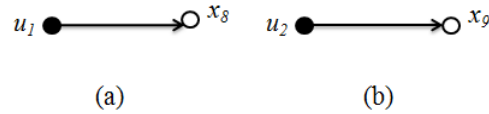
O modelo completo da planta do sistema em questão é representado pelas seguintes equações:



$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,181 & 0 \\ 0 & 0,181 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A 1ª etapa de identificar quais estados cada entrada afeta gera os dígrafos apresentados na Figura Ap.13.



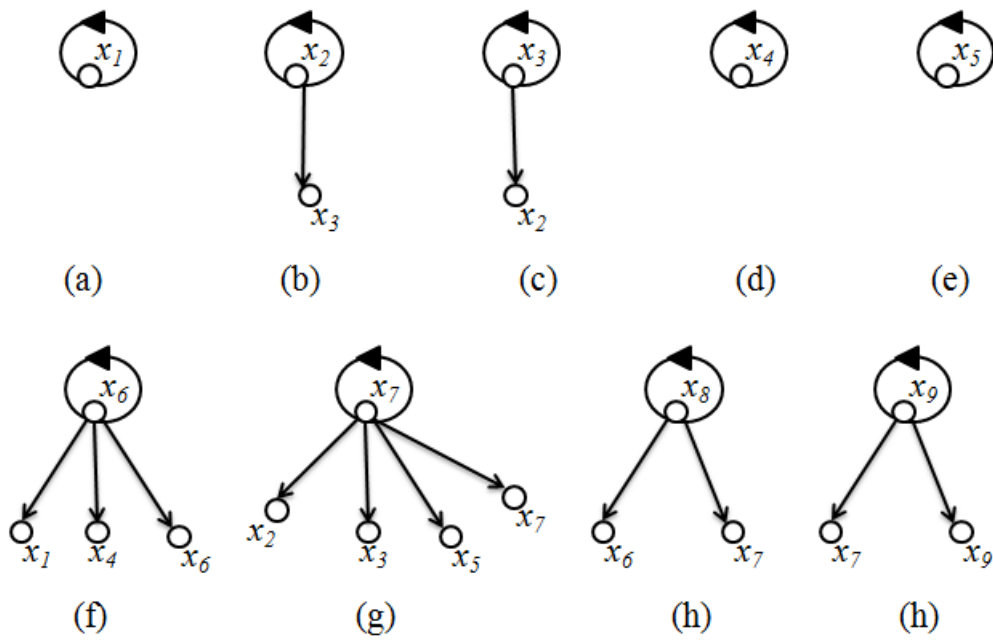
**Figura Ap.13:** Dígrafos que representam os efeitos entre os estados e (a) entrada  $u_1$  e (b) entrada  $u_2$  para o sistema industrial de moagem de minério.

Nota-se que a entrada  $u_1$  afeta apenas o estado  $x_8$  e a entrada  $u_2$  afeta  $x_9$ . A 2ª etapa de identificar os efeitos entre estados gera os dígrafos presentes na Figura Ap.14.

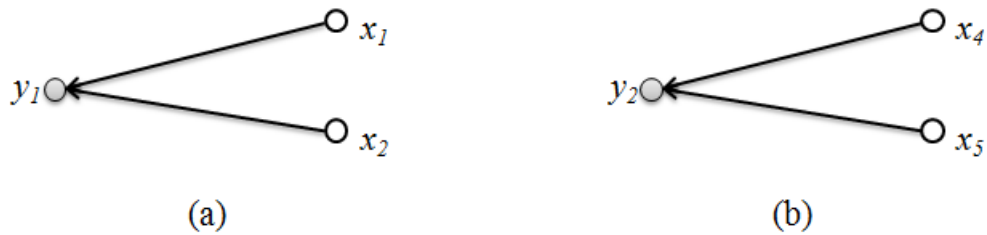
Nota-se que os estados  $x_1$ ,  $x_4$ ,  $x_5$  interagem apenas com si próprios. Os estados  $x_2$  e  $x_3$  interagem com si próprios e entre eles. O estado  $x_6$  interage com ele mesmo e com  $x_1$  e  $x_4$ . O estado  $x_7$  interage com ele mesmo e com  $x_2$ ,  $x_3$  e  $x_5$ . O estado  $x_8$  com ele mesmo e com  $x_6$ . E por último, o  $x_9$  interage com si próprio e com  $x_7$ . A 3ª etapa de identificar quais estados afetam as saídas controladas gera os dígrafos representados na Figura Ap.15.

Nota-se que a saída controlada  $y_1$  é afetada diretamente pelos estados  $x_1$  e  $x_2$  e a saída  $y_2$  é afetada pelos estados  $x_4$  e  $x_5$ . Nota-se que as entradas manipuladas não afetam diretamente nenhum destes estados (apenas  $x_8$  e  $x_9$ ), portanto, deve-se considerar os efeitos indiretos no processo de geração dos subsistemas para este estudo de caso. Os estados afetados indiretamente pelas entradas manipuladas são:

$$u_1 \Rightarrow x_1, x_4, x_6, x_8$$



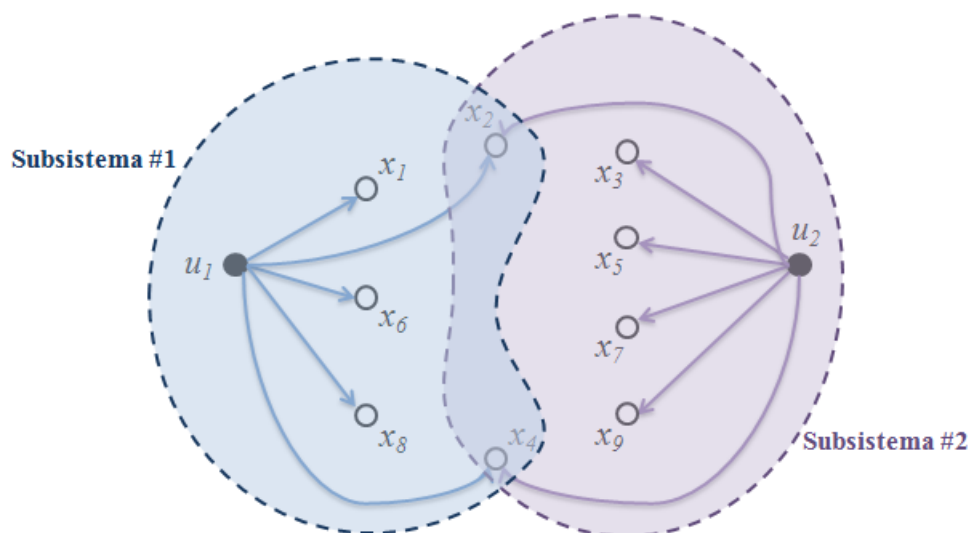
**Figura Ap.14:** Dígrafos que representam os efeitos entre estados para: (a) estado  $x_1$ , (b) estado  $x_2$ , (c) estado  $x_3$ , (d) estado  $x_4$ , (e) estado  $x_5$ , (f) estado  $x_6$ , (g) estado  $x_7$ , (h) estado  $x_8$  e (i) estado  $x_9$  para o sistema industrial de moagem de minério.



**Figura Ap.15:** Dígrafos que representam os efeitos entre estados e (a) saída  $y_1$  e (b) saída  $y_2$  para o sistema de moagem industrial de minério.

$$u_2 \Rightarrow x_2, x_3, x_5, x_7, x_9$$

Aos conjuntos acima deve-se acrescentar os estados identificados na 3ª do processo de decomposição proposta, para que as saídas controladas por cada subsistema tenha os estados que as afetam. Considerando, que a saída  $y_1$  seja controlada pela entrada  $u_1$  e a saída  $y_2$  pela  $u_2$ , o subsistema # 1 será  $u_1$  controlando  $x_1, x_2, x_4, x_6$  e  $x_8$  e o subsistema # 2,  $u_2$  controlando  $x_2, x_3, x_5, x_7, x_9$ , formando assim os dígrafos da Figura Ap.16.



**Figura Ap.16:** Dígrafos dos subsistemas criados através da partição proposta para o sistema industrial de moagem de minério.

## C Resultados adicionais das simulações

Este Apêndice apresenta os resultados adicionais das simulações consideradas nos estudos de casos do Capítulo 3.

### C.1 Estudo de caso #1 (ZHANG; WANG, 2012)

#### DMPC Sequencial com os controladores na ordem: 1-2

As condições das simulações para o DMPC sequencial na ordem 1-2 são:

$$H_{p_1} = 10 \text{ e } H_{u_1} = 5;$$

$$H_{p_2} = 10 \text{ e } H_{u_2} = 5;$$

As matrizes obtidas  $\mathbf{Q}_1$  e  $\mathbf{R}_1$  (referentes ao subsistema #1) e as matrizes  $\mathbf{Q}_2$  e  $\mathbf{R}_2$  (referentes ao subsistema #2) da estratégia de controle DMPC que utiliza a partição proposta foram:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 4,00 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1,55 \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.9})$$

e

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1,69 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.10})$$

As matrizes obtidas para os controladores da estratégia DMPC que utiliza a partição de Zhang e Wang (2012) foram:

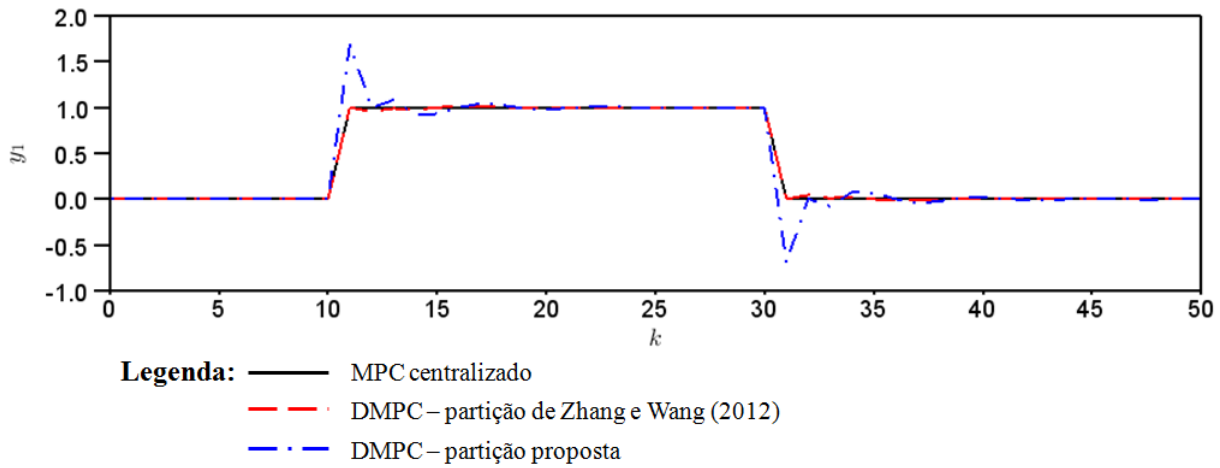
$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 6,36 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 5,15 \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.11})$$

e

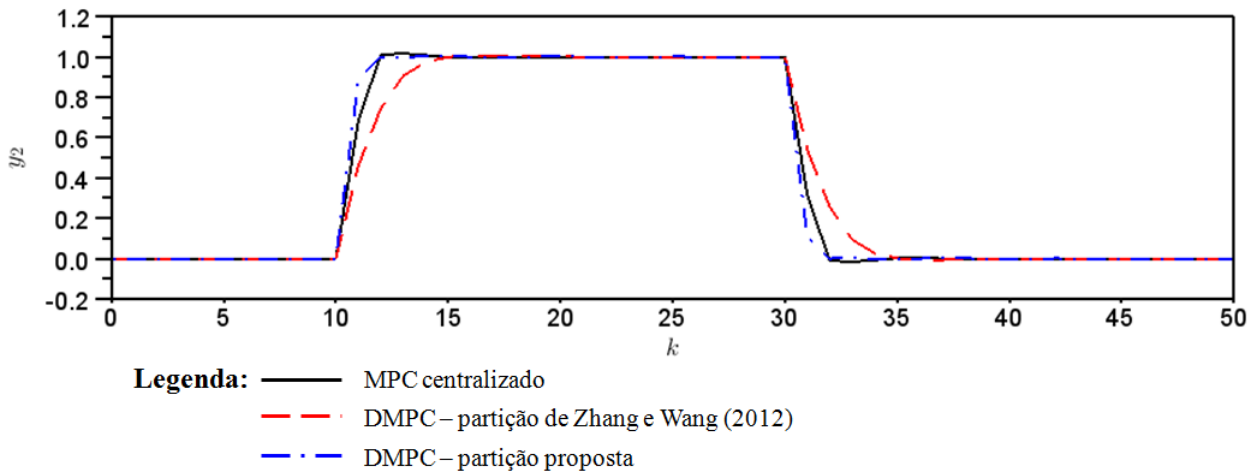
$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 2,71 & 0 \\ 0 & 7,52 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1,05 \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.12})$$

As Figuras (Ap.17) e (Ap.18) apresentam as dinâmicas das saídas controladas do processo  $y_1$  e  $y_2$ , respectivamente.

As Figuras (Ap.19) e (Ap.20) apresentam as ações de controle implementadas pelas entradas manipuladas  $u_1$  e  $u_2$ , respectivamente.



**Figura Ap.17:** Dinâmicas da saída controlada  $y_1$  do processo do estudo de caso #1 obtidas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com ordem 1-2.



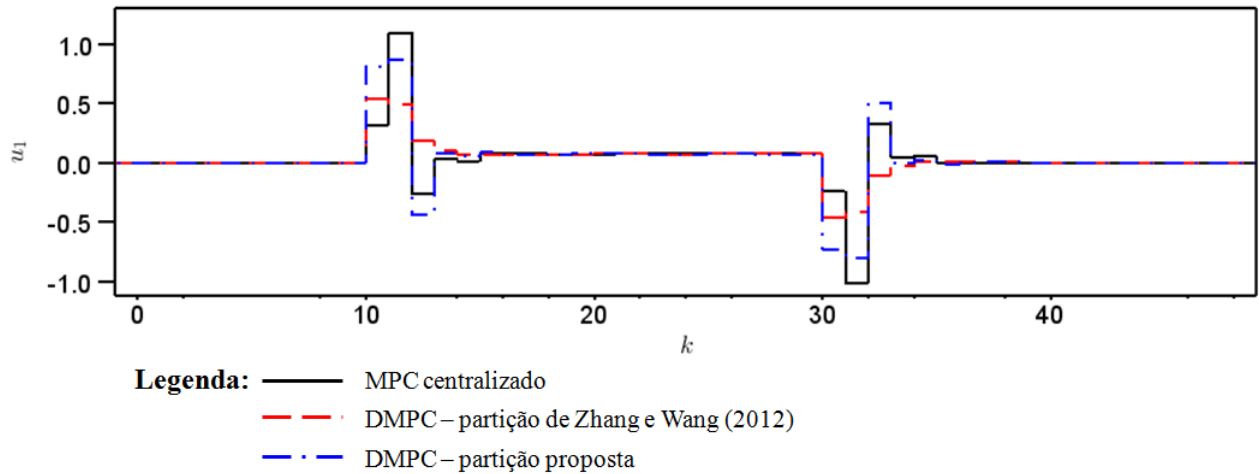
**Figura Ap.18:** Dinâmicas da saída controlada  $y_2$  do processo do estudo de caso #1 obtidas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com ordem 1-2.

Os valores dos índices ITAE para as saídas controladas e IAE para as entradas manipuladas estão nas Tabelas (Ap.6) e (Ap.7), respectivamente.

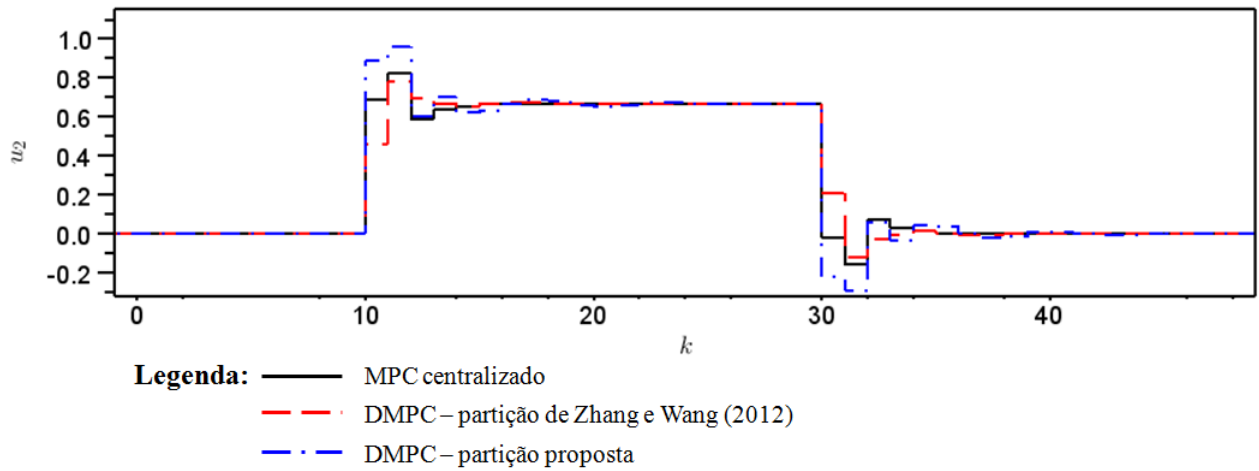
**Tabela Ap.6:** Valores dos índices ITAE para as saídas controladas  $y_1$  e  $y_2$  do processo do estudo de caso #1 para DMPCs com ordem 1-2.

Estratégia de controle	ITAE para $y_1$	ITAE para $y_2$
MPC centralizado	0,1	15,0
DMPC - partição de Zhang e Wang (2012)	6,3	40,5
DMPC - partição proposta	48,5	5,8





**Figura Ap.19:** Ações de controle da entrada manipulada  $u_1$  do processo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com ordem 1-2.



**Figura Ap.20:** Ações de controle da entrada manipulada  $u_2$  do processo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, DMPC utilizando partição proposta e DMPC utilizando partição de Zhang e Wang (2012) com 1-2.

**Tabela Ap.7:** Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas  $u_1$  e  $u_2$  do processo do estudo de caso #1 para DMPCs com ordem 1-2.

Estratégia de controle	IAE para $u_1$	IAE para $u_2$
MPC centralizado	5,7	2,3
DMPC - partição de Zhang e Wang (2012)	2,0	1,9
DMPC - partição proposta	5,6	3,2

## C.2 Estudo de caso #2

### DMPC Sequencial com os controladores na ordem: 1-2-3

As condições das simulações para o DMPC sequencial na ordem 1-2-3 são:

$$H_{p1} = 15, H_{p2} = 15 \text{ e } H_{p3} = 15;$$

$$H_{u1} = 13, H_{u2} = 13 \text{ e } H_{u3} = 13;$$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 8,53 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 6,16 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 7,41 \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.13})$$

e

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1,96 & 0 & 0 \\ 0 & 8,21 & 0 \\ 0 & 0 & 6,93 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 2,21 \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.14})$$

e

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 6,51 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,40 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6,11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7,41 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 0,70 \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.15})$$

As Figuras (Ap.21) e (Ap.22) representam as dinâmicas das saídas controladas e das entradas manipuladas, respectivamente.

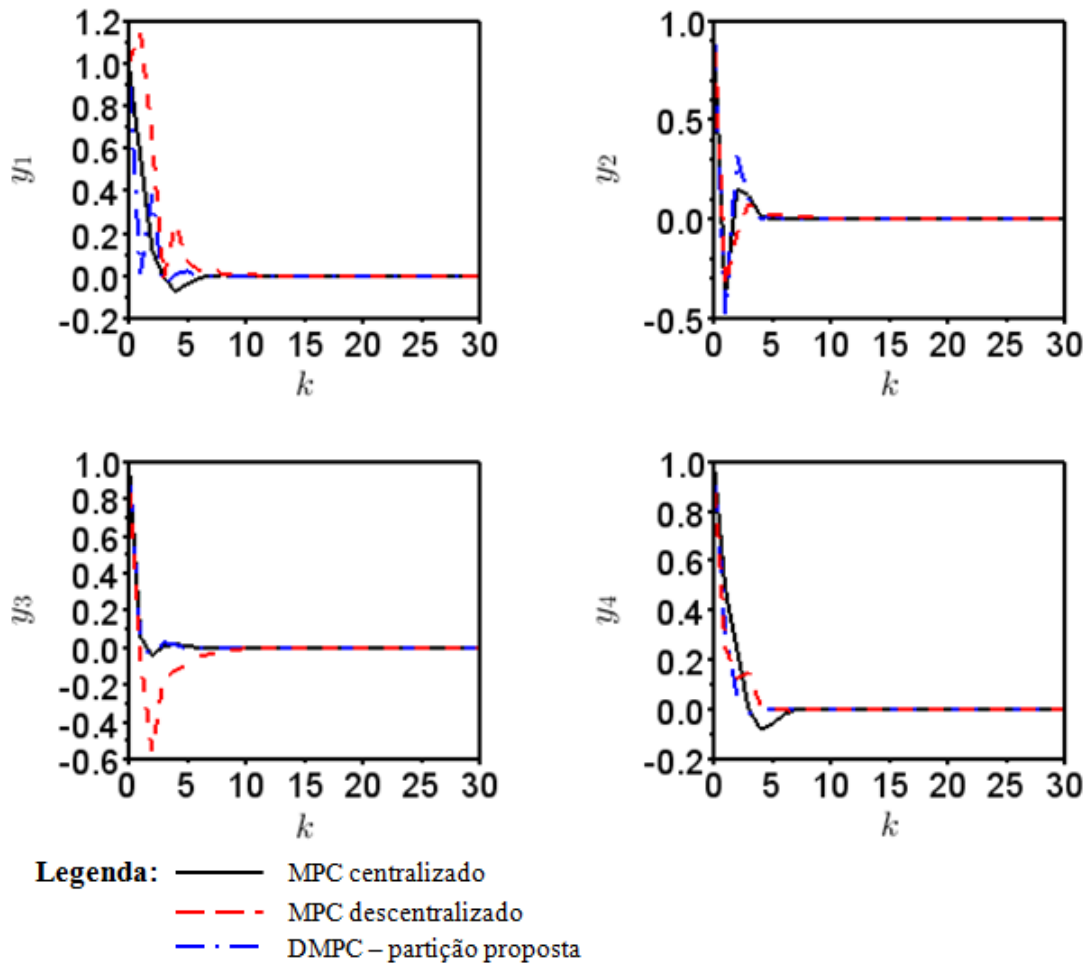
Os valores dos índices ITAE para as saídas controladas e IAE para as entradas manipuladas estão nas Tabelas (Ap.8) e (Ap.9), respectivamente.

**Tabela Ap.8:** Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 para controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-2-3.

Estratégia de controle	ITAE - $y_1$	ITAE - $y_2$	ITAE - $y_3$	ITAE - $y_4$
MPC centralizado	1,4867	1,1884	0,3032	1,9043
MPC descentralizado	4,6041	1,2781	3,5073	1,2327
DMPC - partição proposta	1,2533	1,7412	0,3933	0,5607

**Tabela Ap.9:** Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 para controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-2-3.

Estratégia de controle	IAE - $u_1$	IAE - $u_2$	IAE - $u_3$	IAE - $u_4$
MPC centralizado	1,0473	2,3280	0,0443	0,9872
MPC descentralizado	0,2489	2,5047	1,4066	2,5047
DMPC - partição proposta	1,8963	2,1392	0,1126	1,4661



**Figura Ap.21:** Dinâmicas das saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-2-3.

### DMPC Sequencial com os controladores na ordem: 1-3-2

As condições das simulações para o DMPC sequencial na ordem 1-3-2 são:

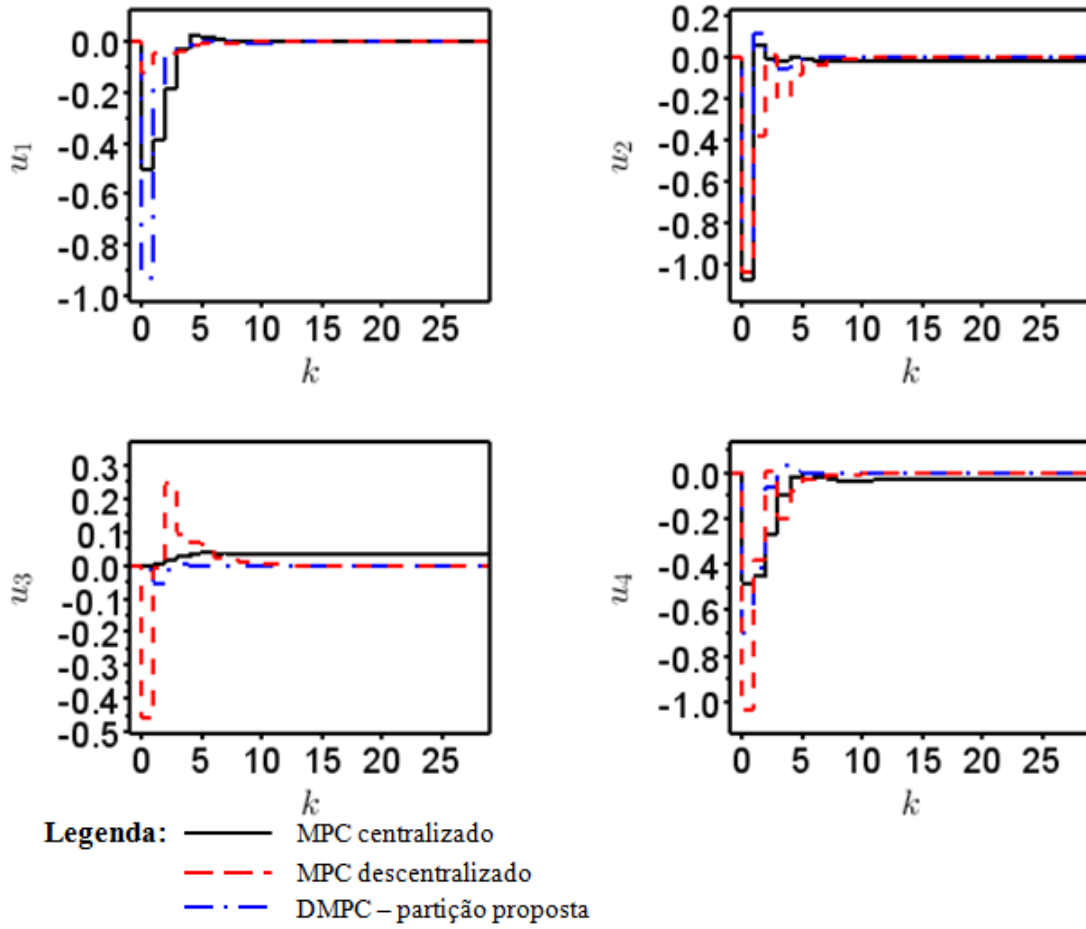
$$H_{p1} = 15, H_{p2} = 15 \text{ e } H_{p3} = 15;$$

$$H_{u1} = 13, H_{u2} = 13 \text{ e } H_{u3} = 13;$$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 9,44 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 1,16 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 2,48 \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.16})$$

e

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 2,40 & 0 \\ 0 & 0 & 6,37 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 1,73 \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.17})$$



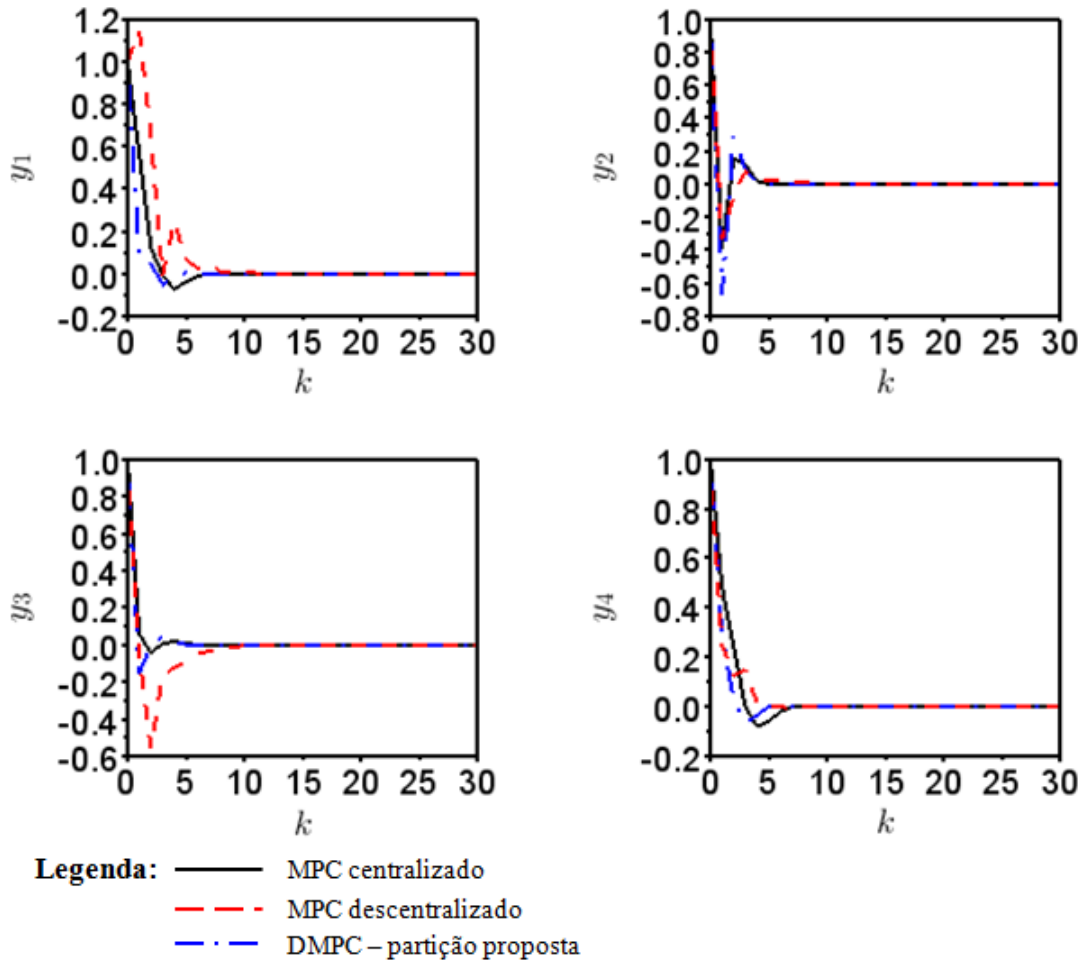
**Figura Ap.22:** Ações das entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-2-3.

e

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.18})$$

As Figuras (Ap.23) e (Ap.24) representam as dinâmicas das saídas controladas e das entradas manipuladas, respectivamente.

Os valores dos índices ITAE para as saídas controladas e IAE para as entradas manipuladas estão nas Tabelas (Ap.10) e (Ap.11), respectivamente.



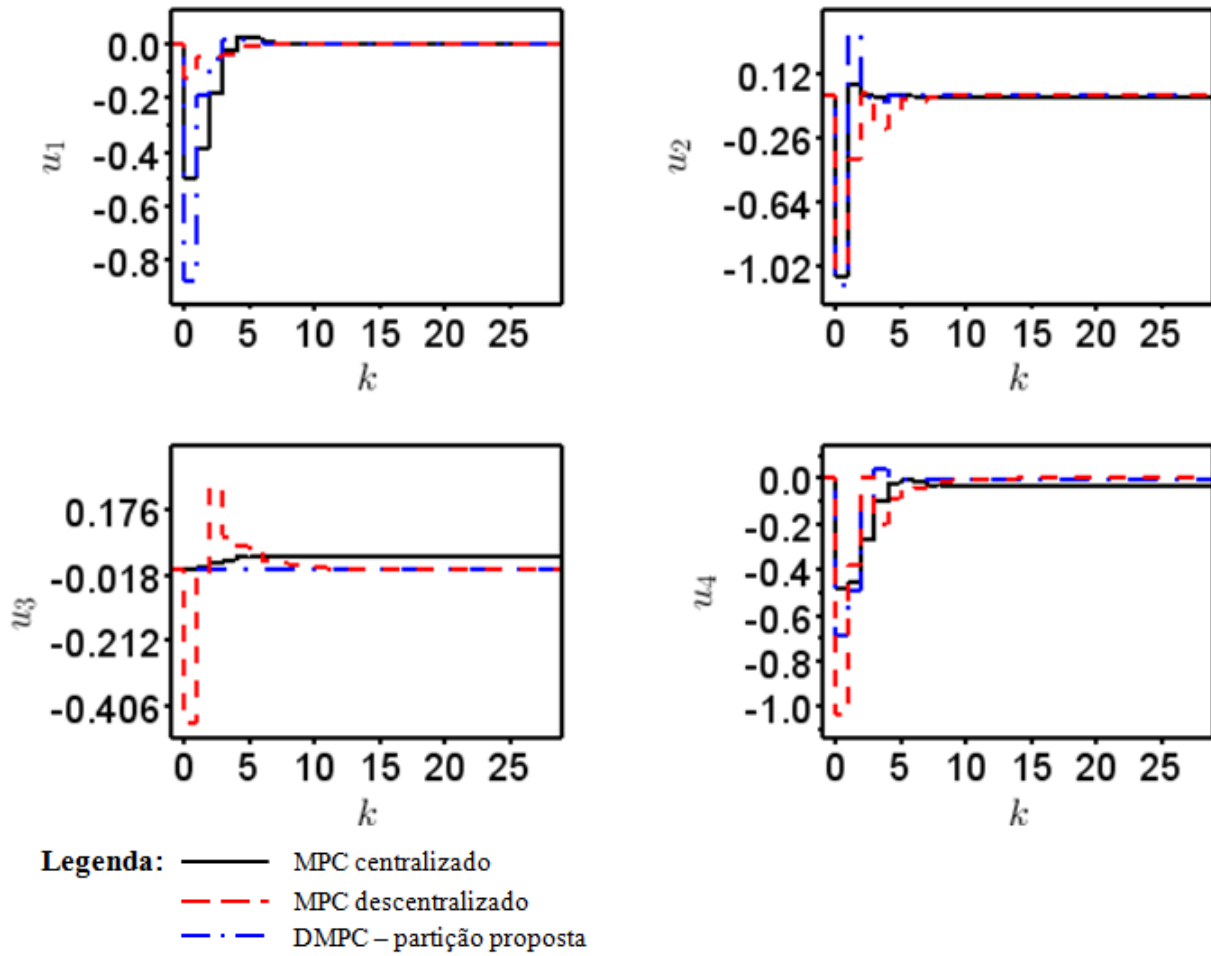
**Figura Ap.23:** Dinâmicas das saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-3-2.

**Tabela Ap.10:** Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 para controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-3-2.

Estratégia de controle	ITAE - $y_1$	ITAE - $y_2$	ITAE - $y_3$	ITAE - $y_4$
MPC centralizado	1,4867	1,1884	0,3032	1,9043
MPC descentralizado	4,6041	1,2781	3,5073	1,2327
DMPC - partição proposta	0,4481	1,7053	0,4032	0,7359

**Tabela Ap.11:** Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 para controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-3-2.

Estratégia de controle	IAE - $u_1$	IAE - $u_2$	IAE - $u_3$	IAE - $u_4$
MPC centralizado	1,0473	2,3280	0,0443	0,9872
MPC descentralizado	0,2489	2,5047	1,4066	2,5047
DMPC - partição proposta	1,8074	3,0772	0,0021	1,4641



**Figura Ap.24:** Ações das entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-3-2.

### DMPC Sequencial com os controladores na ordem: 2-3-1

As condições das simulações para o DMPC sequencial na ordem 2-3-1 são:

$$H_{p1} = 15, H_{p2} = 15 \text{ e } H_{p3} = 15;$$

$$H_{u1} = 13, H_{u2} = 13 \text{ e } H_{u3} = 13;$$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 8,08 & 0 & 0 \\ 0 & 0,49 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.19})$$

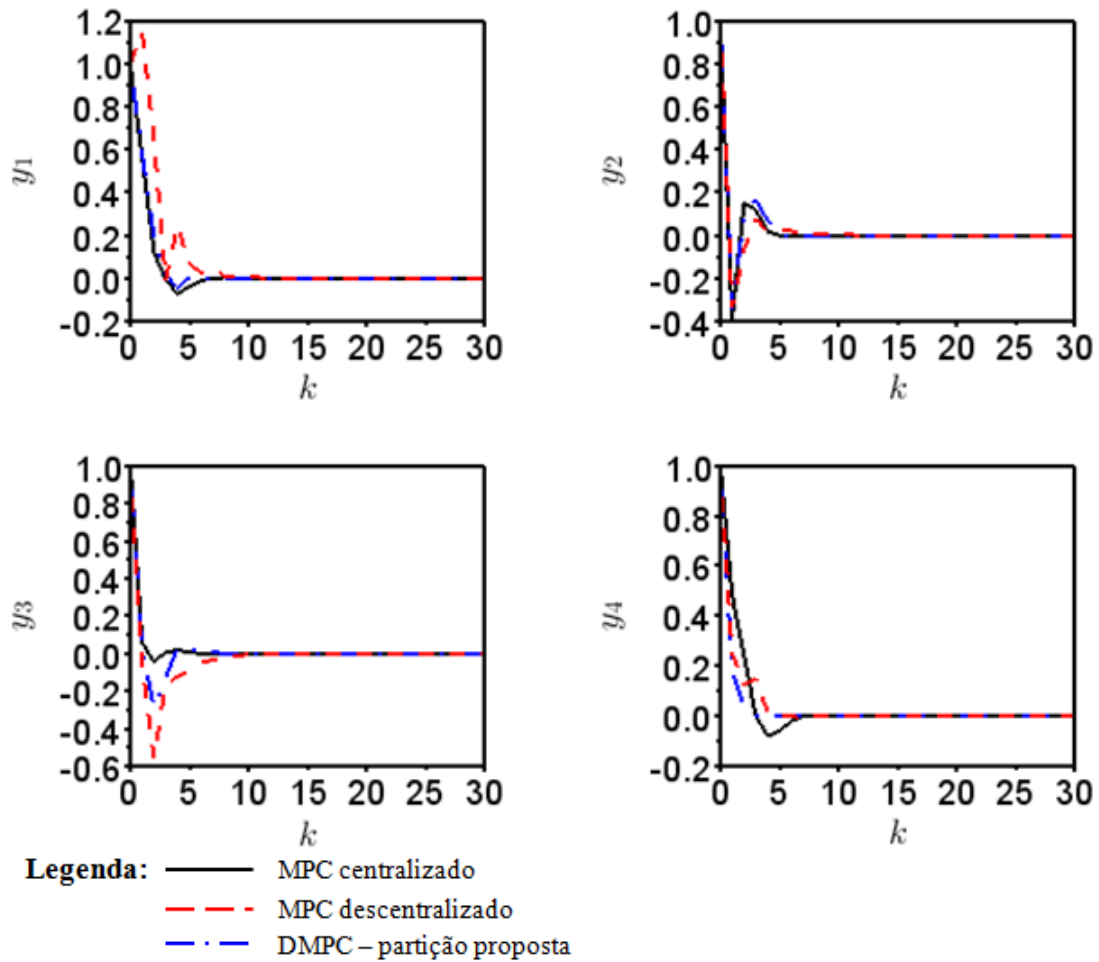
e

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 7,71 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 1,68 \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.20})$$

e

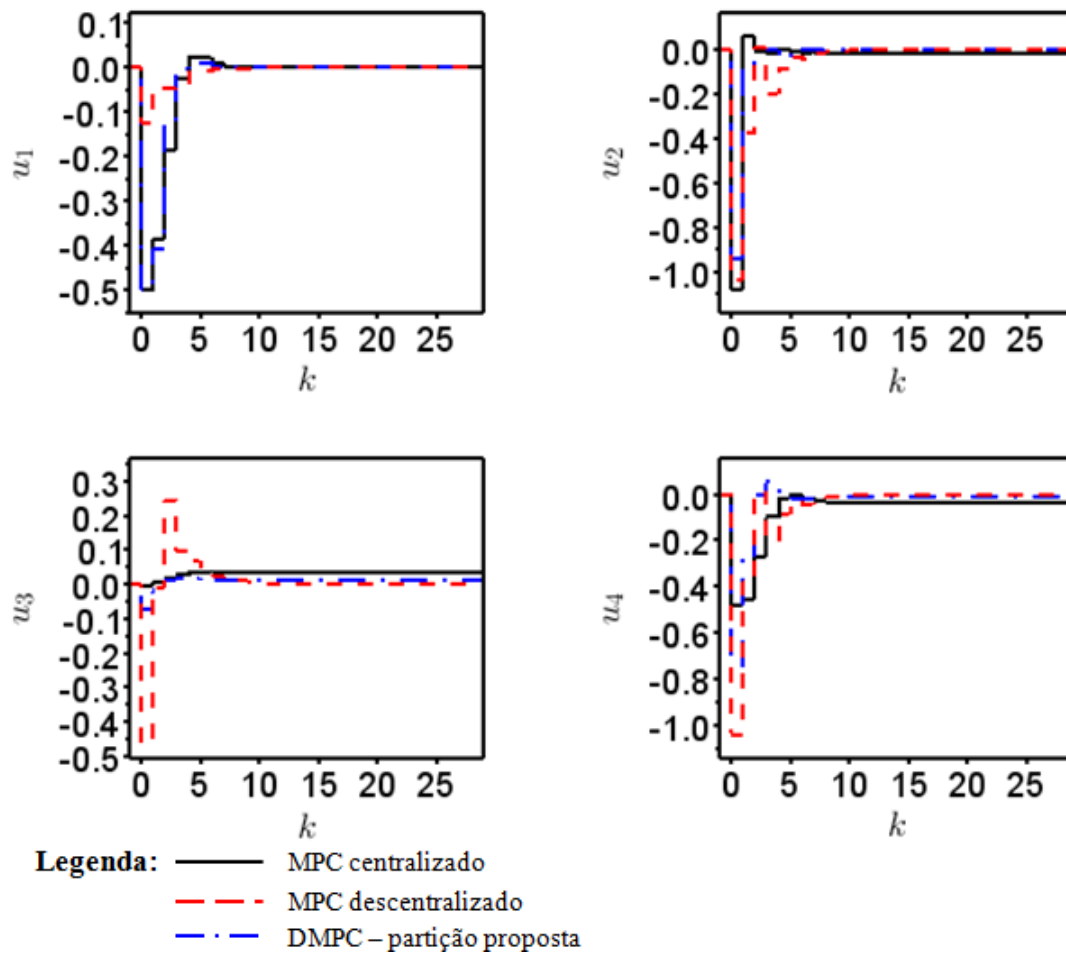
$$\mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,66 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9,2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 1,74 \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.21})$$

As Figuras (Ap.25) e (Ap.26) representam as dinâmicas das saídas controladas e das entradas manipuladas, respectivamente.



**Figura Ap.25:** Dinâmicas das saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-3-1.

Os valores dos índices ITAE para as saídas controladas e IAE para as entradas manipuladas estão nas Tabelas (Ap.12) e (Ap.13), respectivamente.



**Figura Ap.26:** Ações das entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-3-1.

**Tabela Ap.12:** Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 para controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-3-1.

Estratégia de controle	ITAE - $y_1$	ITAE - $y_2$	ITAE - $y_3$	ITAE - $y_4$
MPC centralizado	1,4867	1,1884	0,3032	1,9043
MPC descentralizado	4,6041	1,2781	3,5073	1,2327
DMPC - partição proposta	1,3517	1,3717	1,4392	0,3021

**Tabela Ap.13:** Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 para controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-3-1.

Estratégia de controle	IAE - $u_1$	IAE - $u_2$	IAE - $u_3$	IAE - $u_4$
MPC centralizado	1,0473	2,3280	0,0443	0,9872
MPC descentralizado	0,2489	2,5047	1,4066	2,5047
DMPC - partição proposta	1,02584	1,9768	0,1765	1,6747



**DMPC Sequencial com os controladores na ordem: 3-1-2**

As condições das simulações para o DMPC sequencial na ordem 3-1-2 são:

$$H_{p1} = 15, H_{p2} = 15 \text{ e } H_{p3} = 15;$$

$$H_{u1} = 13, H_{u2} = 13 \text{ e } H_{u3} = 13;$$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 6,44 & 0 & 0 \\ 0 & 5,33 & 0 \\ 0 & 0 & 8,76 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.22})$$

e

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 2,69 & 0 & 0 \\ 0 & 3,68 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.23})$$

e

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 4,35 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8,12 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 5,51 \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.24})$$

As Figuras (Ap.27) e (Ap.28) representam as dinâmicas das saídas controladas e das entradas manipuladas, respectivamente.

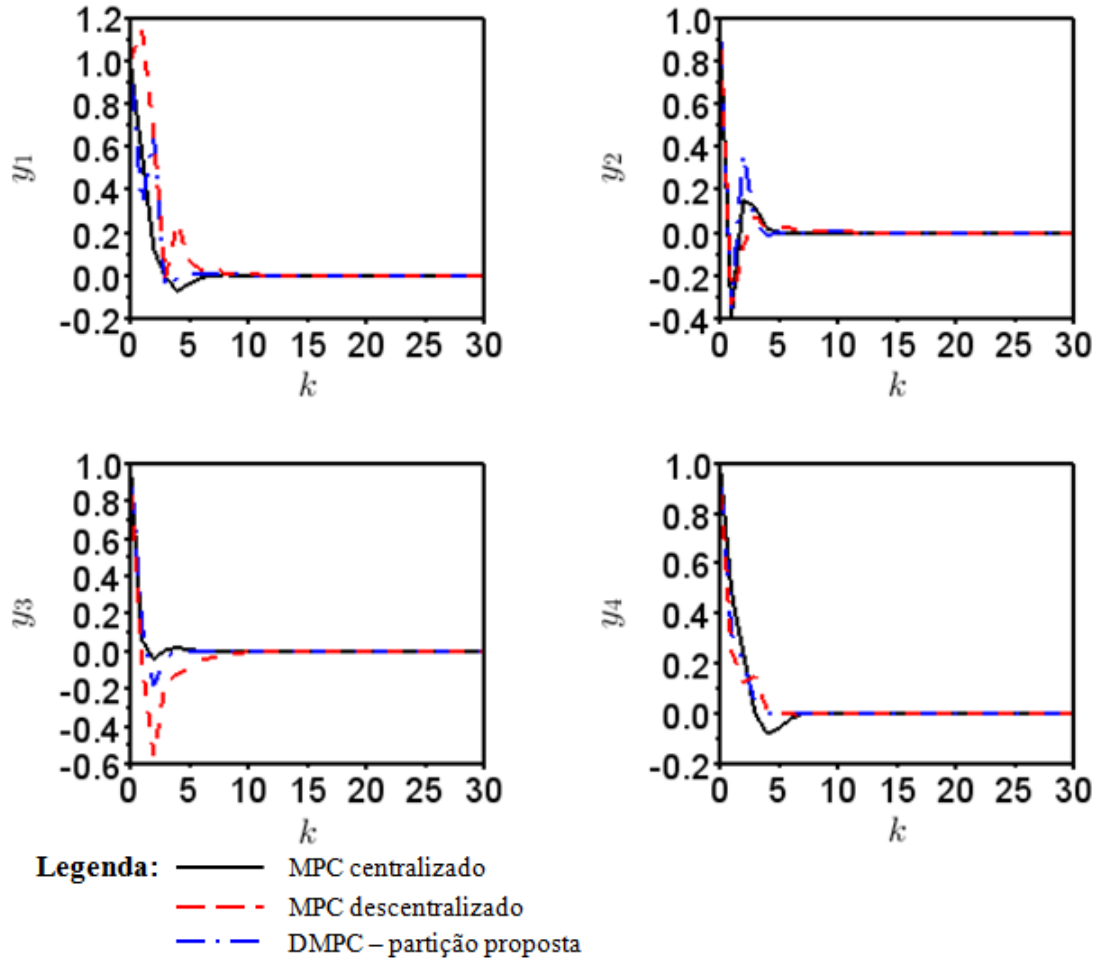
Os valores dos índices ITAE para as saídas controladas e IAE para as entradas manipuladas estão nas Tabelas (Ap.14) e (Ap.15), respectivamente.

**Tabela Ap.14:** Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 para controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-1-2.

Estratégia de controle	ITAE - $y_1$	ITAE - $y_2$	ITAE - $y_3$	ITAE - $y_4$
MPC centralizado	1,4867	1,1884	0,3032	1,9043
MPC descentralizado	4,6041	1,2781	3,5073	1,2327
DMPC - partição proposta	2,2504	1,6866	0,81169	0,9265

**DMPC Sequencial com os controladores na ordem: 3-2-1**

As condições das simulações para o DMPC sequencial na ordem 3-2-1 são:



**Figura Ap.27:** Dinâmicas das saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-1-2.

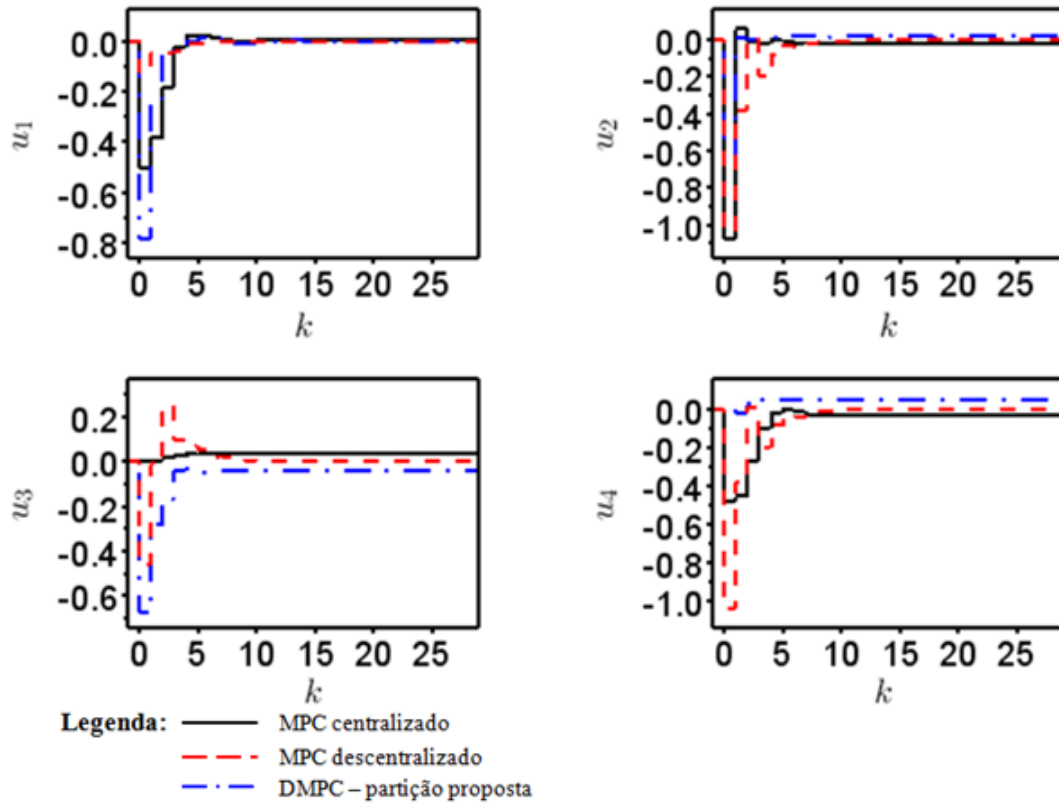
**Tabela Ap.15:** Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 para controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-1-2.

Estratégia de controle	IAE - $u_1$	IAE - $u_2$	IAE - $u_3$	IAE - $u_4$
MPC centralizado	1,0473	2,3280	0,0443	0,9872
MPC descentralizado	0,2489	2,5047	1,4066	2,5047
DMPC - partição proposta	1,6300	1,3598	1,3329	0,1031

$$H_{p1} = 15, H_{p2} = 15 \text{ e } H_{p3} = 15;$$

$$H_{u1} = 13, H_{u2} = 13 \text{ e } H_{u3} = 13;$$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 4,87 & 0 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 9,04 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.25})$$



**Figura Ap.28:** Ações das entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-1-2.

e

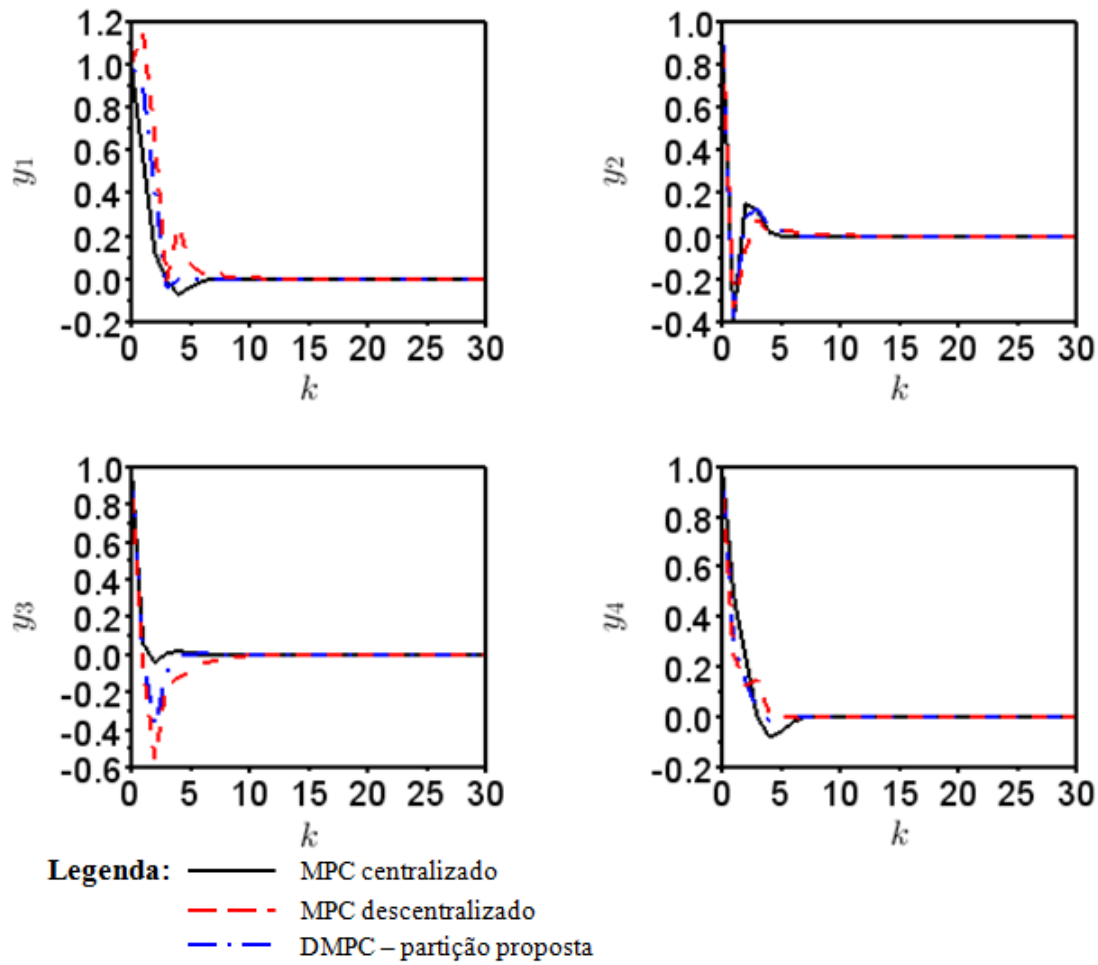
$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 1,81 & 0 & 0 \\ 0 & 0,45 & 0 \\ 0 & 0 & 9,91 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 6,44 \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.26})$$

e

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,03 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 8,65 \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.27})$$

As Figuras (Ap.29) e (Ap.30) representam as dinâmicas das saídas controladas e das entradas manipuladas, respectivamente.

Os valores dos índices ITAE para as saídas controladas e IAE para as entradas manipuladas estão nas Tabelas (Ap.16) e (Ap.17), respectivamente.



**Figura Ap.29:** Dinâmicas das saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-2-1.

**Tabela Ap.16:** Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do modelo do estudo de caso #2 para controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-2-1.

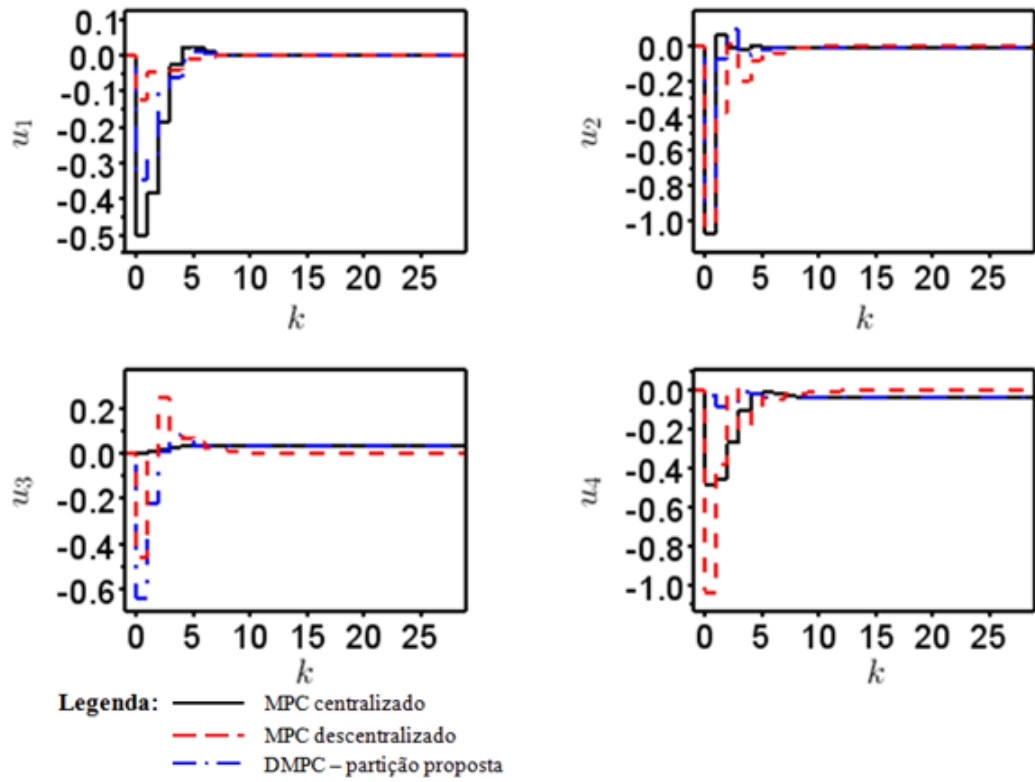
Estratégia de controle	ITAE - $y_1$	ITAE - $y_2$	ITAE - $y_3$	ITAE - $y_4$
MPC centralizado	1,4867	1,1884	0,3032	1,9043
MPC descentralizado	4,6041	1,2781	3,5073	1,2327
DMPC - partição proposta	2,1795	1,4256	1,4103	0,7376

### C.3 Estudo de caso # 3: Sistema de 3 tanques

#### DMPC Sequencial com os controladores na ordem: 1-2-3

As condições das simulações para o DMPC sequencial na ordem 1-2-3 são:

$$H_{p1} = 10, H_{p2} = 10 \text{ e } H_{p3} = 10;$$



**Figura Ap.30:** Ações das entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-2-1.

**Tabela Ap.17:** Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do modelo do estudo de caso #2 para controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-2-1.

Estratégia de controle	IAE - $u_1$	IAE - $u_2$	IAE - $u_3$	IAE - $u_4$
MPC centralizado	1,0473	2,3280	0,0443	0,9872
MPC descentralizado	0,2489	2,5047	1,4066	2,5047
DMPC - partição proposta	0,7141	2,1439	1,4016	0,1805

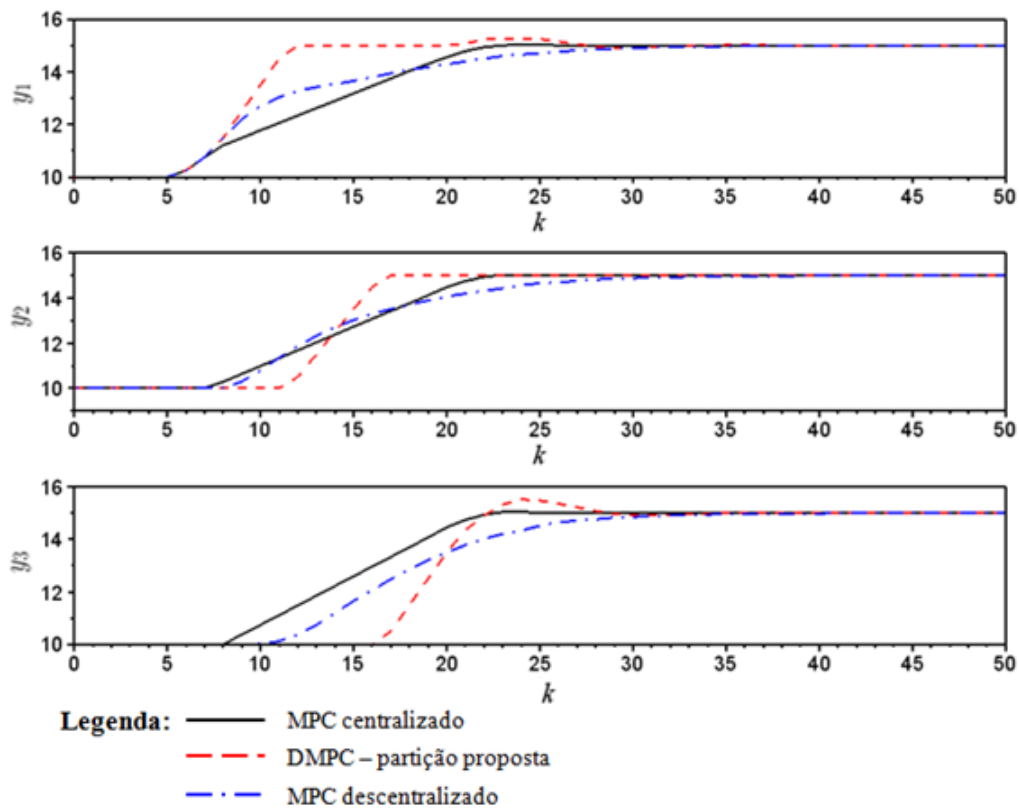
$$H_{u1} = 5, H_{u2} = 5 \text{ e } H_{u3} = 5;$$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.28})$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.29})$$

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 7,63 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 0,18 \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.30})$$

As Figuras (Ap.31) e (Ap.32) representam as dinâmicas das saídas controladas e das entradas manipuladas, respectivamente.



**Figura Ap.31:** Dinâmicas das saídas controladas do sistema dos 3 tanques obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-2-3 e restrições nas variáveis manipuladas.

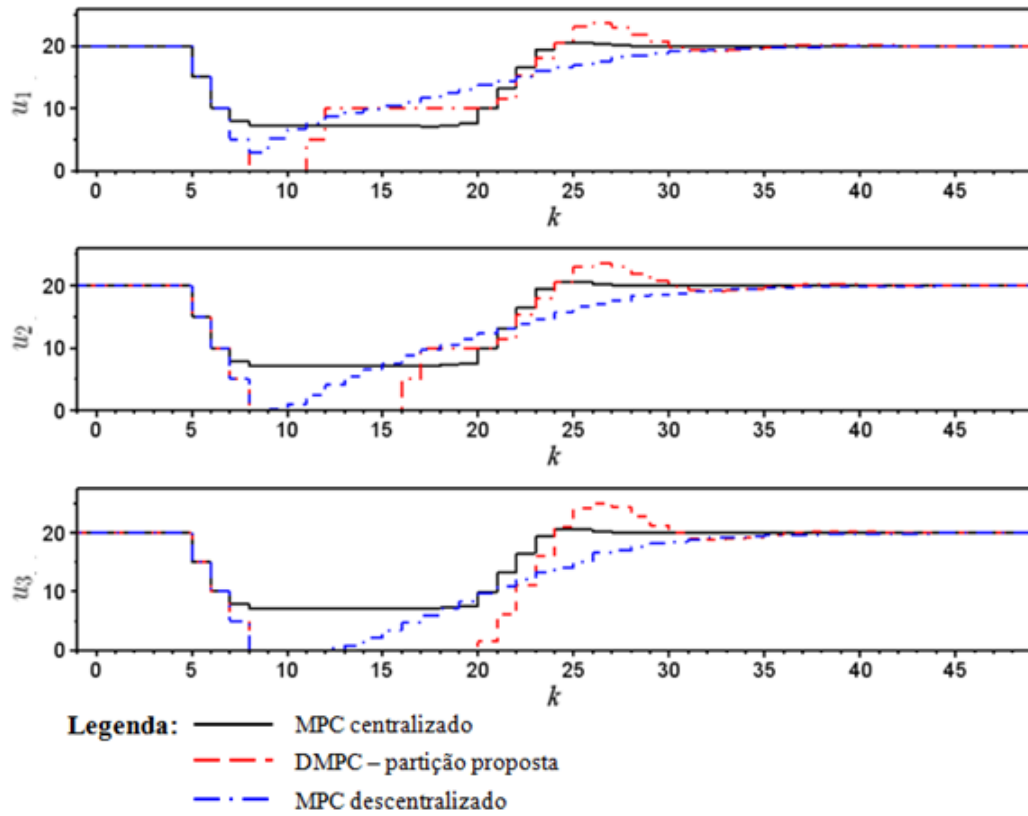
Os valores dos índices ITAE para as saídas controladas e IAE para as entradas manipuladas estão nas Tabelas (Ap.18) e (Ap.19), respectivamente.

**Tabela Ap.18:** Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do sistema dos 3 tanques para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-2-3 e restrições nas variáveis manipuladas.

Estratégia de controle	ITAE - $y_1$	ITAE - $y_2$	ITAE - $y_3$
MPC centralizado	397,6832	487,3455	512,6571
DMPC - partição proposta	171,8456	420,0067	902,1214
MPC descentralizado	403,4669	585,1419	806,7039

### DMPC Sequencial com os controladores na ordem: 1-3-2

As condições das simulações para o DMPC sequencial na ordem 1-3-2 são:



**Figura Ap.32:** Ações de controle das entradas manipuladas do sistema dos 3 tanques obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-2-3 e restrições nas variáveis manipuladas.

**Tabela Ap.19:** Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do sistema dos 3 tanques para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-2-3 e restrições nas variáveis manipuladas.

Estratégia de controle	IAE - $u_1$	IAE- $u_2$	IAE - $u_3$
MPC centralizado	27,0361	34,2333	41,8610
DMPC - partição proposta	49,3321	49,3326	53,0435
MPC descentralizado	34,0343	39,9809	39,9766

$$H_{p1} = 10, H_{p2} = 10 \text{ e } H_{p3} = 10;$$

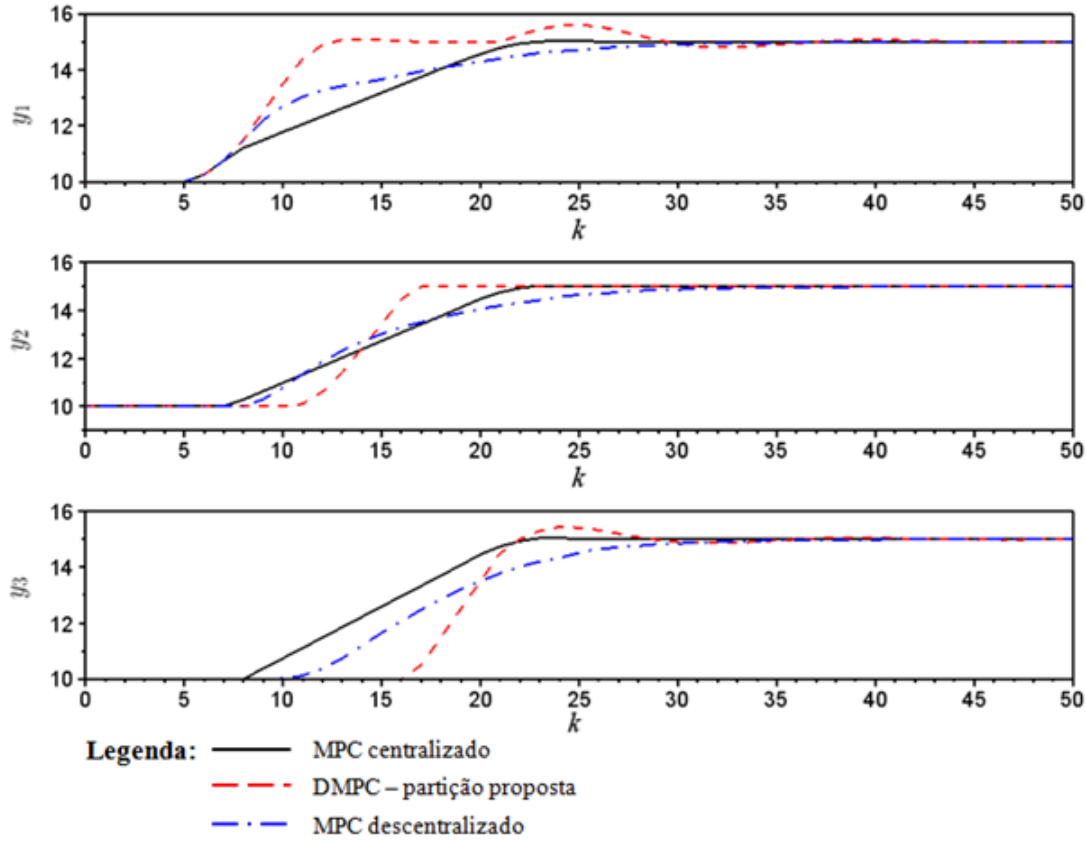
$$H_{u1} = 5, H_{u2} = 5 \text{ e } H_{u3} = 5;$$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 7,08 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 0,11 \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.31})$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 2,50 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.32})$$

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 3, 25 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.33})$$

As Figuras (Ap.33) e (Ap.34) representam as dinâmicas das saídas controladas e das entradas manipuladas, respectivamente.



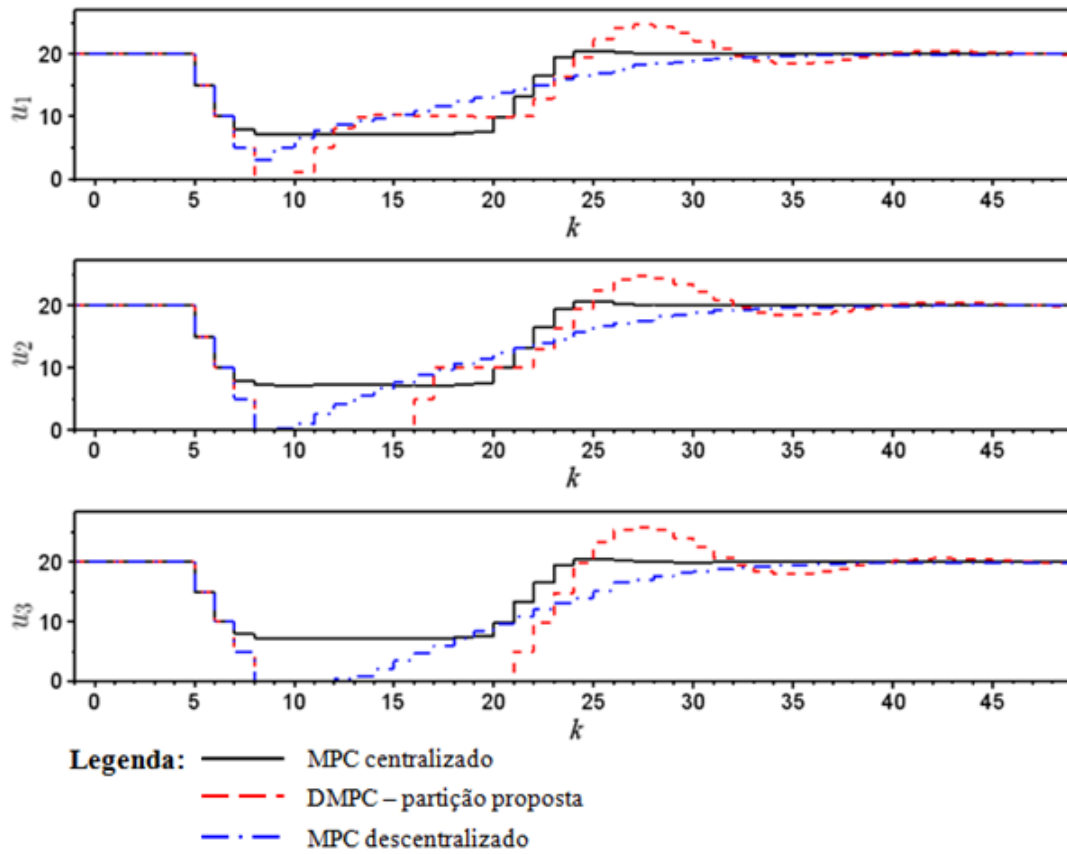
**Figura Ap.33:** Dinâmicas das saídas controladas do sistema dos 3 tanques obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-2-3 e restrições nas variáveis manipuladas.

Os valores dos índices ITAE para as saídas controladas e IAE para as entradas manipuladas estão nas Tabelas (Ap.20) e (Ap.21), respectivamente.

**Tabela Ap.20:** Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do sistema dos 3 tanques para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-3-2 e restrições nas variáveis manipuladas.

Estratégia de controle	ITAE - $y_1$	ITAE - $y_2$	ITAE - $y_3$
MPC centralizado	397,6832	487,3455	512,6571
DMPC - partição proposta	260,6185	421,0038	902,3648
MPC descentralizado	403,4669	585,1419	806,7039





**Figura Ap.34:** Ações de controle das entradas manipuladas do sistema dos 3 tanques obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-3-2 e restrições nas variáveis manipuladas.

**Tabela Ap.21:** Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do sistema dos 3 tanques para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 1-3-2 e restrições nas variáveis manipuladas.

Estratégia de controle	IAE - $u_1$	IAE - $u_2$	IAE - $u_3$
MPC centralizado	27,0361	34,2333	41,8610
DMPC - partição proposta	54,2383	53,6630	57,2333
MPC descentralizado	34,0343	39,9809	39,9766

### DMPC Sequencial com os controladores na ordem: 2-3-1

As condições das simulações para o DMPC sequencial na ordem 2-3-1 são:

$$H_{p_1} = 10, H_{p_2} = 10 \text{ e } H_{p_3} = 10;$$

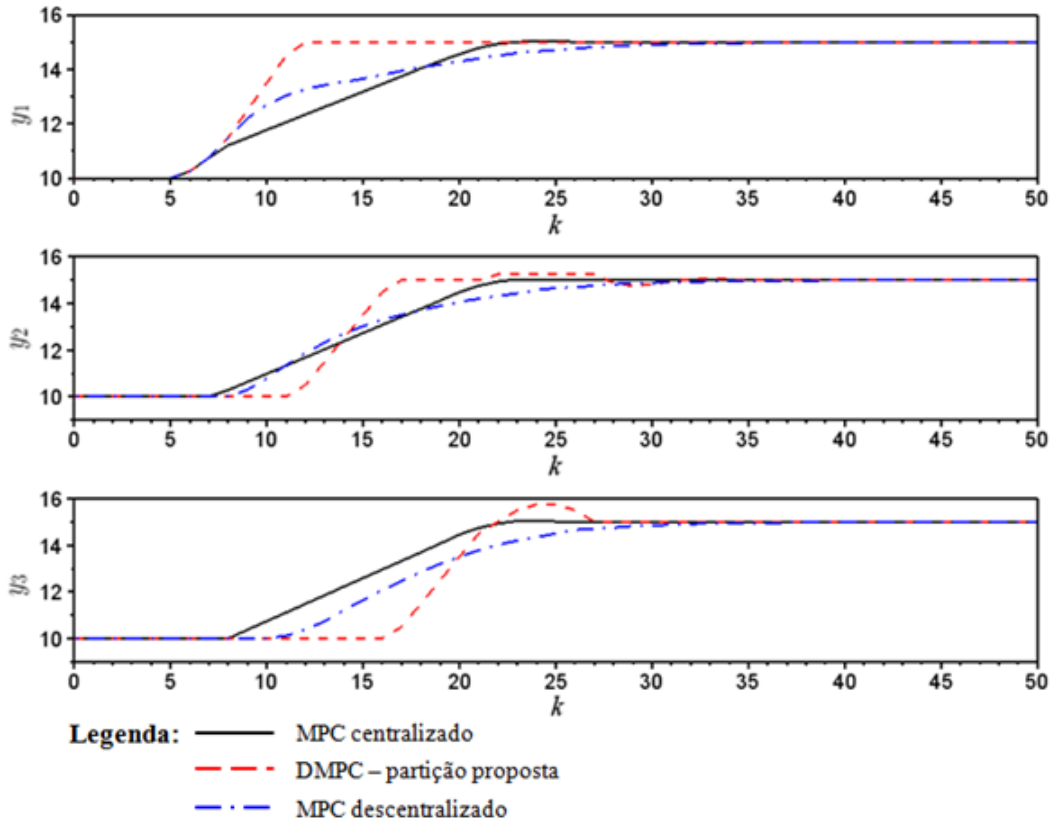
$$H_{u_1} = 5, H_{u_2} = 5 \text{ e } H_{u_3} = 5;$$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.34})$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.35})$$

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.36})$$

As Figuras (Ap.35) e (Ap.36) representam as dinâmicas das saídas controladas e das entradas manipuladas, respectivamente.



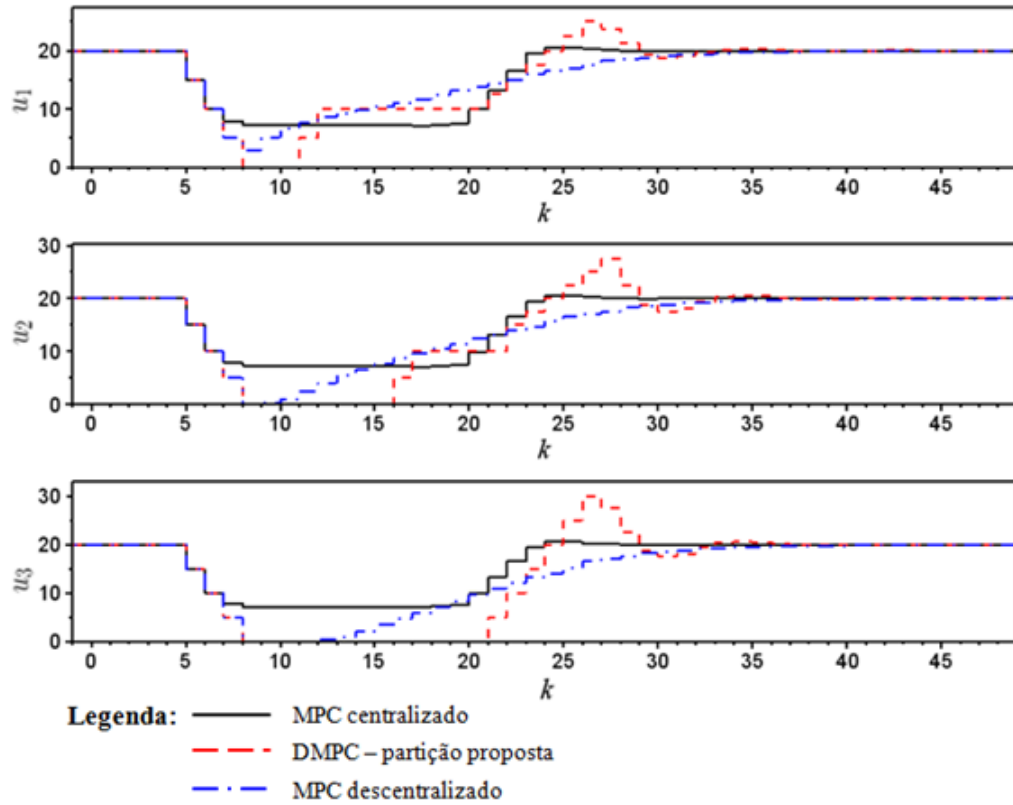
**Figura Ap.35:** Dinâmicas das saídas controladas do sistema dos 3 tanques obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-3-1 e restrições nas variáveis manipuladas.

Os valores dos índices ITAE para as saídas controladas e IAE para as entradas manipuladas estão nas Tabelas (Ap.22) e (Ap.23), respectivamente.

### DMPC Sequencial com os controladores na ordem: 3-1-2

As condições das simulações para o DMPC sequencial na ordem 3-1-2 são:

$$H_{p1} = 10, H_{p2} = 10 \text{ e } H_{p3} = 10;$$



**Figura Ap.36:** Ações de controle das entradas manipuladas do sistema dos 3 tanques obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-3-1 e restrições nas variáveis manipuladas.

**Tabela Ap.22:** Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do sistema dos 3 tanques para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-3-1 e restrições nas variáveis manipuladas.

Estratégia de controle	ITAE - $y_1$	ITAE - $y_2$	ITAE - $y_3$
MPC centralizado	397,6832	487,3455	512,6571
DMPC - partição proposta	129,2569	482,2732	893,7488
MPC descentralizado	403,4669	585,1419	806,7039

**Tabela Ap.23:** Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do sistema dos 3 tanques para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-3-1 e restrições nas variáveis manipuladas.

Estratégia de controle	IAE - $u_1$	IAE - $u_2$	IAE - $u_3$
MPC centralizado	27,0361	34,2333	41,8610
DMPC - partição proposta	53,3266	61,6509	66,6505
MPC descentralizado	34,0343	39,9809	39,9766

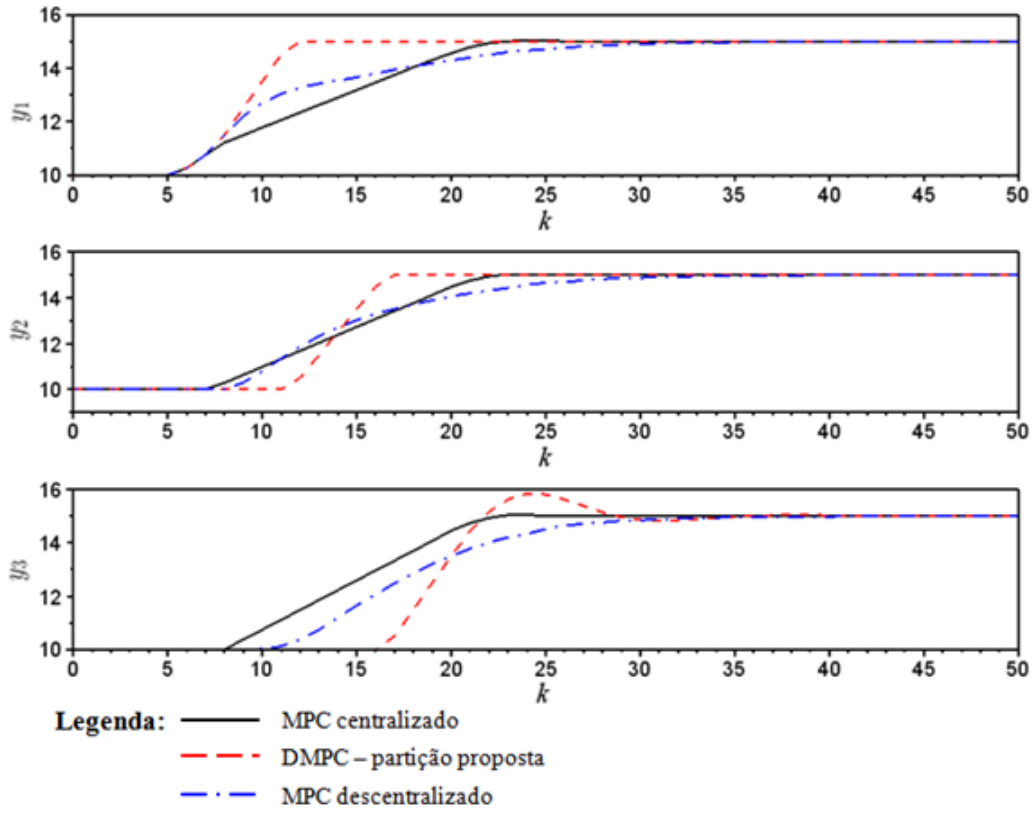
$$H_{u1} = 5, H_{u2} = 5 \text{ e } H_{u3} = 5;$$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 9,41 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.37})$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 8,90 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.38})$$

$$\mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 6,91 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 0,11 \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.39})$$

As Figuras (Ap.37) e (Ap.38) representam as dinâmicas das saídas controladas e das entradas manipuladas, respectivamente.



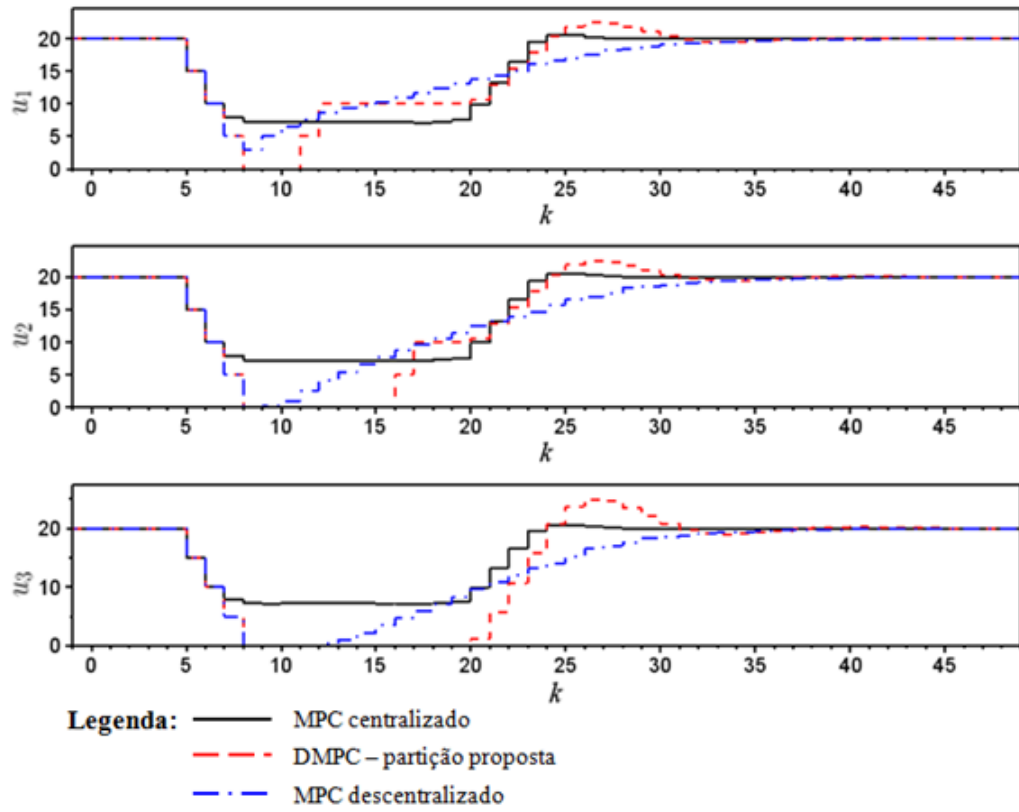
**Figura Ap.37:** Dinâmicas das saídas controladas do sistema dos 3 tanques obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-1-2 e restrições nas variáveis manipuladas.

Os valores dos índices ITAE para as saídas controladas e IAE para as entradas manipuladas estão nas Tabelas (Ap.24) e (Ap.25), respectivamente.

### DMPC Sequencial com os controladores na ordem: 3-2-1

As condições das simulações para o DMPC sequencial na ordem 3-2-1 são:

$$H_{p1} = 10, H_{p2} = 10 \text{ e } H_{p3} = 10;$$



**Figura Ap.38:** Ações de controle das entradas manipuladas do sistema dos 3 tanques obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-1-2 e restrições nas variáveis manipuladas.

**Tabela Ap.24:** Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do sistema dos 3 tanques para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-1-2 e restrições nas variáveis manipuladas.

Estratégia de controle	ITAE - $y_1$	ITAE - $y_2$	ITAE - $y_3$
MPC centralizado	397,6832	487,3455	512,6571
DMPC - partição proposta	129,2552	420,0064	953,3757
MPC descentralizado	403,4669	585,1419	806,7039

**Tabela Ap.25:** Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do sistema dos 3 tanques para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-1-2 e restrições nas variáveis manipuladas.

Estratégia de controle	IAE - $u_1$	IAE - $u_2$	IAE - $u_3$
MPC centralizado	27,0361	34,2333	41,8610
DMPC - partição proposta	46,2178	46,2181	52,4329
MPC descentralizado	34,0343	39,9809	39,9766

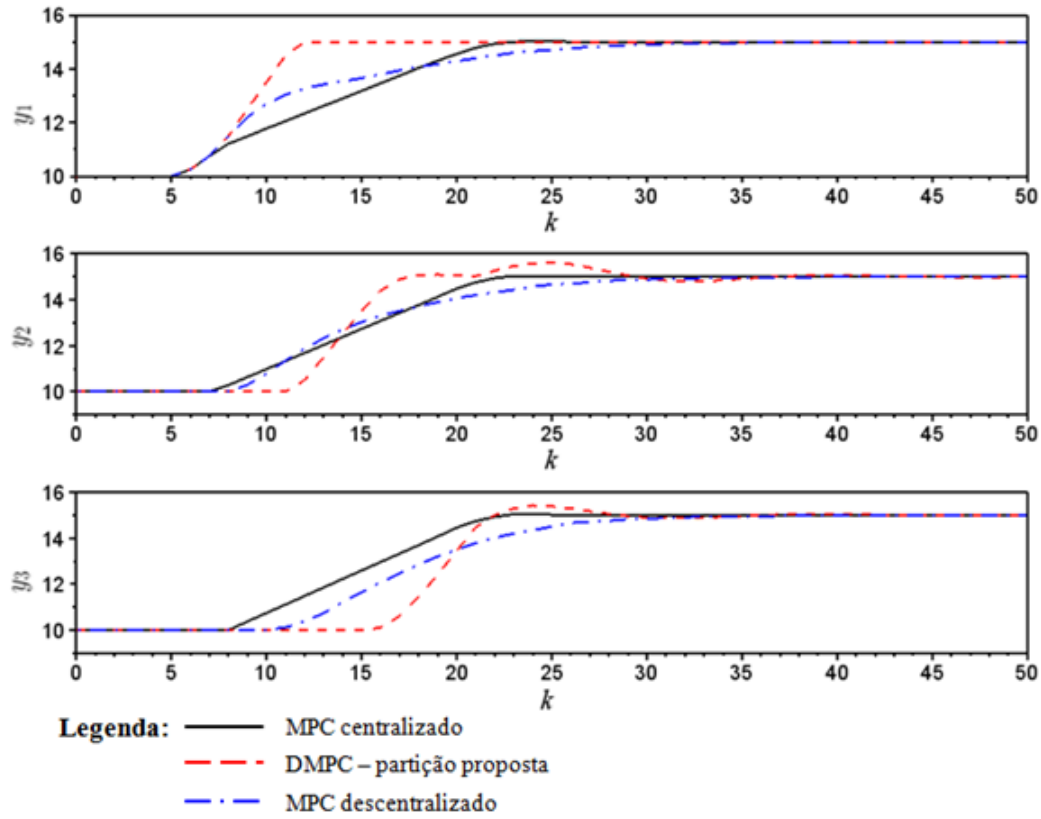
$$H_{u1} = 5, H_{u2} = 5 \text{ e } H_{u3} = 5;$$

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 9,94 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.40})$$

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 8,87 & 0 \\ 0 & 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 0,14 \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.41})$$

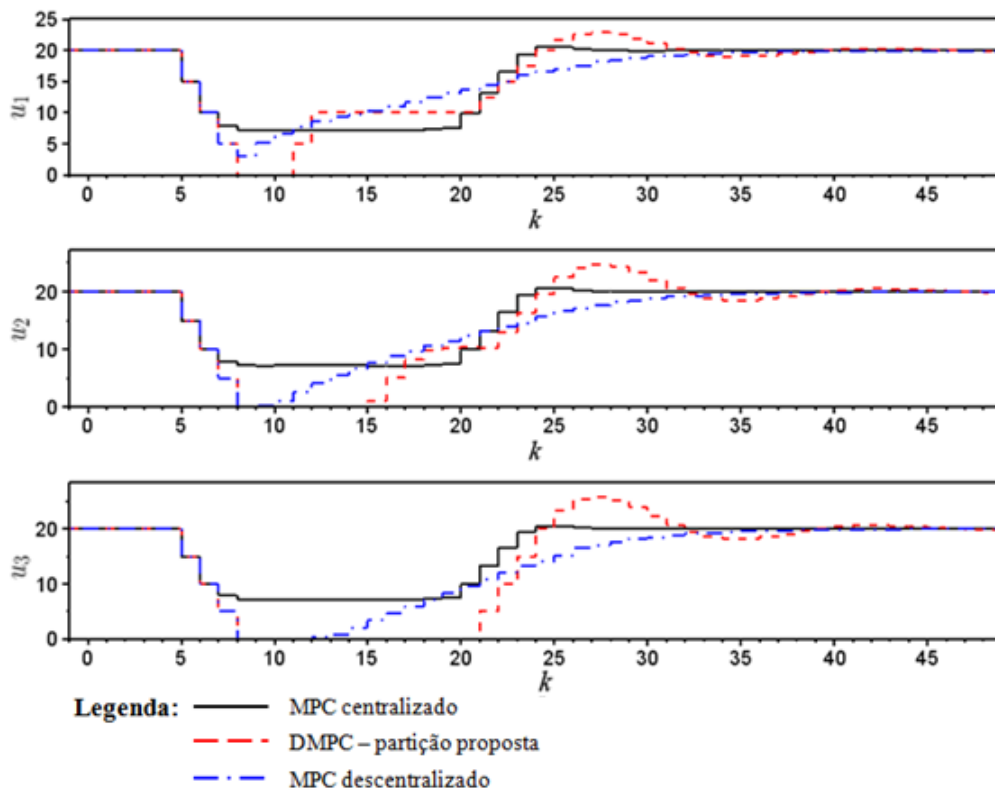
$$\mathbf{Q}_3 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_3 = \begin{bmatrix} 1 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.42})$$

As Figuras (Ap.39) e (Ap.40) representam as dinâmicas das saídas controladas e das entradas manipuladas, respectivamente.



**Figura Ap.39:** Dinâmicas das saídas controladas do sistema dos 3 tanques obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-2-1 e restrições nas variáveis manipuladas.

Os valores dos índices ITAE para as saídas controladas e IAE para as entradas manipuladas estão nas Tabelas (Ap.26) e (Ap.27), respectivamente.



**Figura Ap.40:** Ações de controle das entradas manipuladas do sistema dos 3 tanques obtidas pelo controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-2-1 e restrições nas variáveis manipuladas.

**Tabela Ap.26:** Valores dos índices ITAE para as saídas controladas do sistema dos 3 tanques para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-2-1 e restrições nas variáveis manipuladas.

Estratégia de controle	ITAE - $y_1$	ITAE - $y_2$	ITAE - $y_3$
MPC centralizado	397,6832	487,3455	512,6571
DMPC - partição proposta	129,2559	553,2052	903,9028
MPC descentralizado	403,4669	585,1419	806,7039

**Tabela Ap.27:** Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas do sistema dos 3 tanques para o controle centralizado, controle descentralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 3-2-1 e restrições nas variáveis manipuladas.

Estratégia de controle	IAE - $u_1$	IAE - $u_2$	IAE - $u_3$
MPC centralizado	27,0361	34,2333	41,8610
DMPC - partição proposta	48,4064	33,7343	56,8104
MPC descentralizado	34,0343	39,9809	39,9766

## C.4 Estudo de caso #4: Sistema industrial de moagem de minério

### DMPC Sequencial com os controladores na ordem: 2-1

As condições das simulações para o DMPC sequencial na ordem 2-1 são:

$$H_{p1} = 10 \text{ e } H_{u1} = 5;$$

$$H_{p2} = 10 \text{ e } H_{u2} = 5;$$

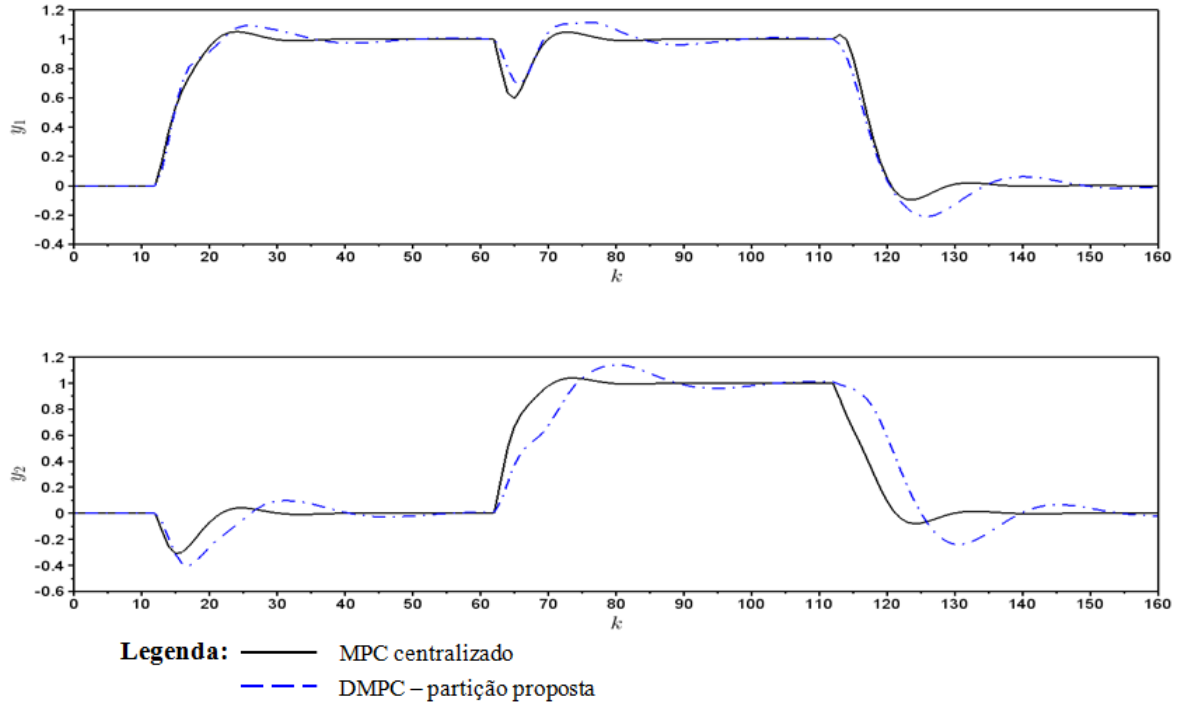
As matrizes obtidas  $\mathbf{Q}_1$  e  $\mathbf{R}_1$  (referentes ao subsistema #1) e as matrizes  $\mathbf{Q}_2$  e  $\mathbf{R}_2$  (referentes ao subsistema #2) da estratégia de controle DMPC que utiliza a partição proposta foram:

$$\mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 10 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.43})$$

e

$$\mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} 2, 64 \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_2 = \begin{bmatrix} 6, 15 \end{bmatrix} \quad (\text{Ap.44})$$

A Figura (Ap.41) apresenta as dinâmicas das saídas controladas do processo  $y_1$  e  $y_2$ , respectivamente.

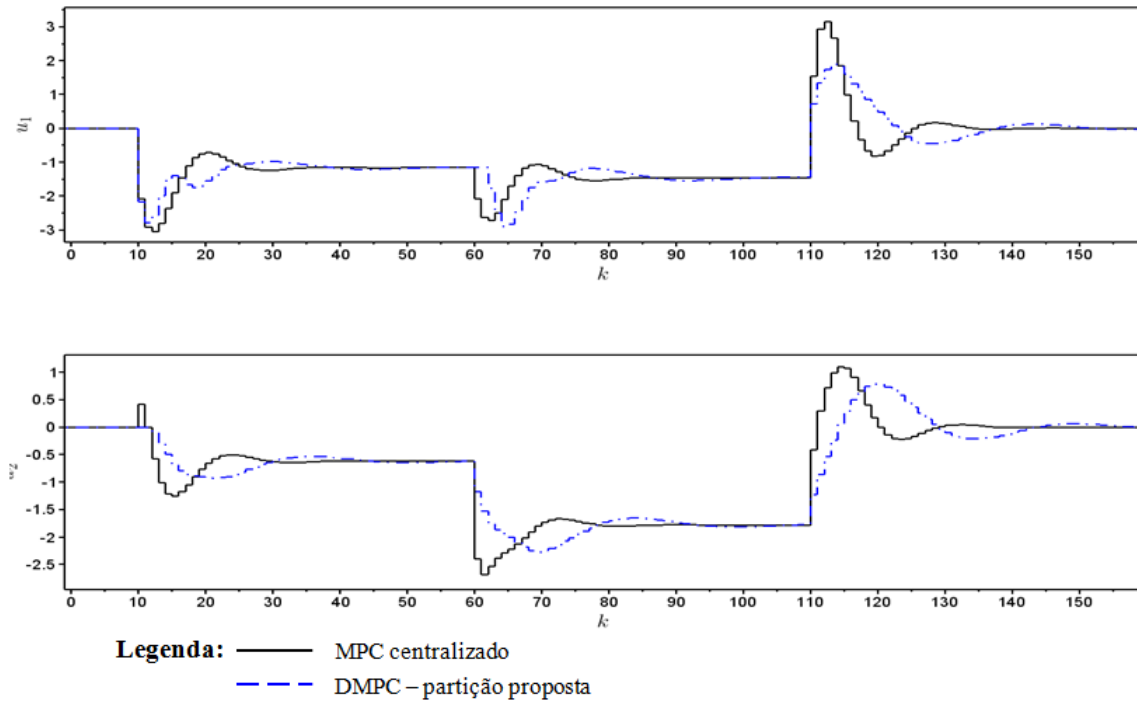


**Figura Ap.41:** Dinâmicas das saídas controladas  $y_1$  e  $y_2$  obtidas pelo controle centralizado e DMPC utilizando partição proposta com ordem 2-1 e restrições nas variáveis manipuladas.

A Figura (Ap.42) apresenta as ações de controle implementadas pelas entradas manipuladas  $u_1$  e  $u_2$ , respectivamente.

Os valores dos índices ITAE para as saídas controladas e IAE para as entradas manipuladas estão nas Tabelas (Ap.28) e (Ap.29), respectivamente.





**Figura Ap.42:** Ações de controle das entradas manipuladas  $u_1$  e  $u_2$  obtidas pelo controle centralizado e DMPC utilizando partição com ordem 2-1 e restrições nas variáveis manipuladas.

**Tabela Ap.28:** Valores dos índices ITAE para as saídas controladas  $y_1$  e  $y_2$  do sistema industrial de moagem de minério para controle centralizado e DMPC com ordem 2-1 e restrições nas variáveis manipuladas.

Estratégia de controle	ITAE para $y_1$	ITAE para $y_2$
MPC centralizado	1162,3656	1218,5143
DMPC - partição proposta	1326,1052	2221,0437

**Tabela Ap.29:** Valores dos índices IAE para as entradas manipuladas  $u_1$  e  $u_2$  do sistema industrial de moagem de minério para controle centralizado e DMPC com ordem 2-1 e restrições nas variáveis manipuladas.

Estratégia de controle	IAE para $u_1$	IAE para $u_2$
MPC centralizado	6,0423	3,0111
DMPC - partição proposta	5,5671	1,4302



---

# Anexos

## A Teoria dos Grafos

Este Apêndice faz referência à algumas definições da Teoria dos Grafos.

Um grafo orientado é definido como um par  $\mathbf{D} = (\mathbf{V}, \mathbf{E})$ , em que  $\mathbf{V}$  é o conjunto de vértices e  $\mathbf{E}$  é o conjunto de arestas orientadas  $(v_j, v_i)$  que parte do vértice  $v_j$  em direção ao vértice  $v_i$ . Se  $(v_j, v_i) \in \mathbf{E}$  então  $v_j$  é dito ser adjacente à  $v_i$ . A relação de adjacência define uma matriz binária quadrada  $\mathbf{M} = (m_{ij})$ , em que  $m_{ij} = 1$  se e somente se  $(v_j, v_i) \in \mathbf{E}$ . Tal matriz é chamada de *Matriz de Adjacência*.

A sequência de arestas  $\{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{k-1}, v_k)\}$ , em que todos vértices são distintos, é chamada de caminho entre  $v_1$  e  $v_k$ . Quando  $v_k$  coincide com  $v_1$ , então o caminho é dito fechado. Um dígrafo  $\mathbf{D}$  é dito aberto se este não contiver caminhos fechados. Se existir um caminho a partir de  $v_j$  até  $v_i$  então diz-se que  $v_i$  é alcançável a partir de  $v_j$ . Similarmente, um subconjunto  $\mathbf{V}_i \subset \mathbf{V}$  é alcançável a partir de um outro subconjunto  $\mathbf{V}_j \subset \mathbf{V}$  se todo vértice em  $\mathbf{V}_i$  for alcançável a partir de algum vértice em  $\mathbf{V}_j$ . A relação de incidência em  $\mathbf{V}$  pode ser representada pela *Matriz de Incidência*, representada por  $\mathbf{R} = (r_{ij})$  em que  $r_{ij} = 1$  se e somente se,  $v_i$  for alcançável a partir de  $v_j$ .

O subgrafo  $\mathbf{D}_k = (\mathbf{V}_k, \mathbf{E}_k)$  de  $\mathbf{D}$  é um dígrafo, em que  $\mathbf{V}_k \subset \mathbf{V}$  e  $\mathbf{E}_k \subset \mathbf{E}$ , tal que para qualquer  $v_i, v_j \in \mathbf{V}_k$ ,  $(v_i, v_j) \in \mathbf{E}_k$ , se e somente se,  $(v_i, v_j) \in \mathbf{E}_k$ .

A partição  $\mathbf{P}$  do dígrafo  $\mathbf{D}$  é definido como um conjunto de subgrafos  $\mathbf{D}_k = (\mathbf{V}_k, \mathbf{E}_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, s$ , em que  $\mathbf{V}_i \cap \mathbf{V}_j \neq \emptyset$  e  $\mathbf{V} = \cup_{k=1}^s \mathbf{V}_k$ .

A condensação  $\mathbf{D}^*$  de  $\mathbf{D}$ , com relação à partição  $\mathbf{P}$ , é um dígrafo  $\mathbf{D}^* = (\mathbf{V}^*, \mathbf{E}^*)$ , em que  $\mathbf{V}^* = \{v_1^*, v_2^*, \dots, v_s^*\}$  e  $(v_j^*, v_i^*) \in \mathbf{E}^*$ , se e somente se,  $v_j^* \neq v_i^*$  e algum subconjunto de  $\mathbf{V}_i$  for alcançável a partir de  $\mathbf{V}_j$ .

## B Modelo de Predição com Perturbações

Considere o seguinte modelo em representação em espaço de estados, na forma discreta, com medição de perturbações:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{B}_d\mathbf{d}_m(k) \quad (\text{An.1})$$

$$\hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k) \quad (\text{An.2})$$

onde  $\mathbf{d}_m(k) = \mathbf{y}_p(k) - \hat{\mathbf{y}}(k)$ . Substituindo  $\mathbf{y}_p(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}_p(k)$  e  $\hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k)$ , o modelo fica da seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{B}_d\mathbf{C}(\mathbf{x}_p(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)) \quad (\text{An.3})$$

$$\hat{\mathbf{y}}(k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k) \quad (\text{An.4})$$

os estados do vetor  $\mathbf{x}_p$  são medições reais da planta e os estados do vetor  $\hat{\mathbf{x}}(k)$  são os preditos.

Neste trabalho, a ação de controle ótima obtida está na forma de  $\Delta\mathbf{u}(k)$ . Sabe-se que:

$$\Delta\mathbf{u}(k) = \mathbf{u}(k) - \mathbf{u}(k-1) \rightarrow \mathbf{u}(k) = \Delta\mathbf{u}(k) + \mathbf{u}(k-1) \quad (\text{An.5})$$

$$\Delta\mathbf{u}(k+1) = \mathbf{u}(k+1) - \mathbf{u}(k) \quad (\text{An.6})$$

Reescrevendo as entradas  $\mathbf{u}(k)$  em função de  $\Delta\mathbf{u}(k)$ , ao longo do horizonte de controle  $(H_c)$ , obtém-se:

$$\mathbf{u}(k) = \Delta\mathbf{u}(k) + \mathbf{u}(k-1) \quad (\text{An.7})$$

$$\mathbf{u}(k+1) = \Delta\mathbf{u}(k+1) + \mathbf{u}(k) = \Delta\mathbf{u}(k+1) + \Delta\mathbf{u}(k) + \mathbf{u}(k-1) \quad (\text{An.8})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(k+2) &= \Delta\mathbf{u}(k+2) + \mathbf{u}(k+1) = \Delta\mathbf{u}(k+2) + \Delta\mathbf{u}(k+1) + \Delta\mathbf{u}(k) \\ &\quad + \mathbf{u}(k-1) \end{aligned} \quad (\text{An.9})$$

⋮

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(k+H_c) &= \Delta\mathbf{u}(k+H_c) + \mathbf{u}(k+H_c-1) = \Delta\mathbf{u}(k+H_c) + \dots + \Delta\mathbf{u}(k) \\ &\quad + \mathbf{u}(k-1) \end{aligned} \quad (\text{An.10})$$

Agora é possível reescrever o modelo de predição com base em  $\Delta \mathbf{u}(k)$  ao longo do horizonte de predição ( $H_p$ ). Fica:

$$\hat{\mathbf{x}}(k+1) = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\Delta \mathbf{u}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) + \mathbf{B}_d\mathbf{C}(\mathbf{x}^d(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)) \quad (\text{An.11})$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+2) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k+1) + \mathbf{B}\Delta \mathbf{u}(k+1) + \mathbf{B}\Delta \mathbf{u}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) \\ &\quad + \mathbf{B}_d\mathbf{C}(\mathbf{x}^d(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)) \\ &= \mathbf{A}[\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{B}\Delta \mathbf{u}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) + \mathbf{B}_d\mathbf{C}(\mathbf{x}^d(k) - \hat{\mathbf{x}}(k))] \\ &\quad + \mathbf{B}\Delta \mathbf{u}(k+1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) + \mathbf{B}_d\mathbf{C}(\mathbf{x}^d(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)) \\ \hat{\mathbf{x}}(k+2) &= \mathbf{A}^2\hat{\mathbf{x}}(k) + \mathbf{A}\mathbf{B}\Delta \mathbf{u}(k) + \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) + \mathbf{A}\mathbf{B}_d\mathbf{C}(\mathbf{x}^d(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)) \\ &\quad + \mathbf{B}\Delta \mathbf{u}(k+1) + \mathbf{B}\Delta \mathbf{u}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1) + \mathbf{B}_d\mathbf{C}(\mathbf{x}^d(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)) \\ \hat{\mathbf{x}}(k+2) &= \mathbf{A}^2\hat{\mathbf{x}}(k) + [\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}]\Delta \mathbf{u}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k+1) + [\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B}]\mathbf{u}(k+1) \\ &\quad + [\mathbf{A}\mathbf{B}_d\mathbf{C} + \mathbf{B}_d\mathbf{C}](\mathbf{x}^d(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)) \end{aligned} \quad (\text{An.12})$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+3) &= \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}(k+2) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k+2) + \mathbf{B}_d\mathbf{C}(\mathbf{x}^d(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)) \\ &= \mathbf{A}[\mathbf{A}^2\hat{\mathbf{x}}(k) + (\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B})\Delta \mathbf{u}(k) + \mathbf{B}\Delta \mathbf{u}(k-1) + (\mathbf{A}\mathbf{B} \\ &\quad + \mathbf{B})\mathbf{u}(k-1) + (\mathbf{A}\mathbf{B}_d\mathbf{C} + \mathbf{B}_d\mathbf{C})(\mathbf{x}^d(k) - \hat{\mathbf{x}}(k))] \\ &\quad + \mathbf{B}[\Delta \mathbf{u}(k+2) + \Delta \mathbf{u}(k+1) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k) + \mathbf{B}\mathbf{u}(k-1)] \\ &\quad + \mathbf{B}_d\mathbf{C}(\mathbf{x}^d(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+3) &= \mathbf{A}^3\hat{\mathbf{x}}(k) + (\mathbf{A}^2\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B})\Delta \mathbf{u}(k) + (\mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B})\Delta \mathbf{u}(k+1) \\ &\quad + \mathbf{B}\Delta \mathbf{u}(k+2) + (\mathbf{A}^2\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{B})\mathbf{u}(k-1) \\ &\quad + (\mathbf{A}^2\mathbf{B}_d\mathbf{C} + \mathbf{A}\mathbf{B}_d\mathbf{C} + \mathbf{B}_d\mathbf{C})(\mathbf{x}^d(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)) \end{aligned} \quad (\text{An.13})$$

⋮

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k+Hp) &= \mathbf{A}^{Hp}\hat{\mathbf{x}}(k) + (\mathbf{A}^{Hp-1}\mathbf{B} + \dots + \mathbf{B})\Delta \mathbf{u}(k) \\ &\quad + (\mathbf{A}^{Hp-2}\mathbf{B} + \dots + \mathbf{B})\Delta \mathbf{u}(k+1) + \dots + \mathbf{B}\Delta \mathbf{u}(k+Hp-1) \\ &\quad + (\mathbf{A}^{Hp-1}\mathbf{B} + \dots + \mathbf{B})\mathbf{u}(k-1) \\ &\quad + (\mathbf{A}^{Hp-1}\mathbf{B}_d\mathbf{C} + \dots + \mathbf{B}_d\mathbf{C})(\mathbf{x}^d(k) - \hat{\mathbf{x}}(k)) \end{aligned} \quad (\text{An.14})$$

Reescrevendo na forma matricial, tem-se:

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k+1) \\ \hat{\mathbf{x}}(k+2) \\ \hat{\mathbf{x}}(k+3) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}(k+H_p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^2 \\ \mathbf{A}^3 \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{H_p} \end{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k) + \\
& \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{AB} + \mathbf{B} & \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^2\mathbf{B} + \mathbf{AB} + \mathbf{B} & \mathbf{AB} + \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}^{H_p-1}\mathbf{B} + \cdots + \mathbf{B} & \mathbf{A}^{H_p-2}\mathbf{B} + \cdots + \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{H_p-H_c}\mathbf{B} + \cdots + \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}(k) \\ \Delta \mathbf{u}(k+1) \\ \Delta \mathbf{u}(k+2) \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{u}(k+H_c-1) \end{bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{AB} + \mathbf{B} \\ \mathbf{A}^2\mathbf{B} + \mathbf{AB} + \mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{H_p-1}\mathbf{B} + \cdots + \mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{u}(k-1) + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_d\mathbf{C} \\ \mathbf{AB}_d\mathbf{C} + \mathbf{B}_d\mathbf{C} \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{H_p-1}\mathbf{B}_d\mathbf{C} + \cdots + \mathbf{B}_d\mathbf{C} \end{bmatrix} (\mathbf{x}^d(k) - \hat{\mathbf{x}}(k))
\end{aligned} \tag{An.15}$$

As predições das saídas controladas  $z$  são obtidas da seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{y}}(k+1|k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k+1|k) \tag{An.16}$$

$$\hat{\mathbf{y}}(k+2|k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k+2|k) \tag{An.17}$$

$$\hat{\mathbf{y}}(k+3|k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k+3|k) \tag{An.18}$$

$$\vdots$$

$$\hat{\mathbf{y}}(k+H_p|k) = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k+H_p|k) \tag{An.19}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{y}}(k+1|k) \\ \hat{\mathbf{y}}(k+2|k) \\ \hat{\mathbf{y}}(k+3|k) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{y}}(k+H_p|k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}}(k+1|k) \\ \hat{\mathbf{x}}(k+2|k) \\ \hat{\mathbf{x}}(k+3|k) \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{x}}(k+H_p|k) \end{bmatrix} \tag{An.20}$$

Portanto, chega-se a seguinte equação de predição para as saídas controladas:

$$\mathbf{Y}(k|k) = \Psi \hat{\mathbf{x}}(k|k) + \Theta \Delta \mathbf{U}(k|k) + \Upsilon \mathbf{u}(k-1|k) + \Xi \mathbf{D}_m(k) \quad (\text{An.21})$$

onde

$$\Psi = \Omega \begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^2 \\ \mathbf{A}^3 \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{H_p} \end{bmatrix} \quad (\text{An.22})$$

$$\Theta = \Omega \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{AB} + \mathbf{B} & \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}^2\mathbf{B} + \mathbf{AB} + \mathbf{B} & \mathbf{AB} + \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}^{H_p-1}\mathbf{B} + \cdots + \mathbf{B} & \mathbf{A}^{H_p-2}\mathbf{B} + \cdots + \mathbf{B} & \cdots & \mathbf{A}^{H_p-H_c}\mathbf{B} + \cdots + \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (\text{An.23})$$

$$\Upsilon = \Omega \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{AB} + \mathbf{B} \\ \mathbf{A}^2\mathbf{B} + \mathbf{AB} + \mathbf{B} \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{H_p-1}\mathbf{B} + \cdots + \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (\text{An.24})$$

$$\Xi = \Omega \begin{bmatrix} \mathbf{B}_d\mathbf{C} \\ \mathbf{AB}_d\mathbf{C} + \mathbf{B}_d\mathbf{C} \\ \vdots \\ \mathbf{A}^{H_p-1}\mathbf{B}_d\mathbf{C} + \cdots + \mathbf{B}_d\mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (\text{An.25})$$

e

$$\Omega = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{C} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (\text{An.26})$$

## C Evolução Diferencial

A técnica da Evolução Diferencial (ED) foi utilizada neste trabalho para encontrar os parâmetros de sintonia (mais especificamente, as matrizes de ponderação,  $Q$  e  $R$ ) que maximizem o desempenho dos controladores.

O algoritmo de Evolução Diferencial foi proposto por Storn e Price (1995) para a resolução de problemas de otimização. De maneira resumida, nessa abordagem puramente estrutural, o valor de cada variável é representado por um valor real e a geração de candidatos é feita através do uso de operações vetoriais. A sequência lógica da técnica da Evolução Diferencial consiste na criação de uma população inicial e aleatória, dentro do domínio pré-estabelecido pelas restrições e até que as condições de parada sejam satisfeitas, o seguinte processo é realizado:

1. seleção aleatória de um indivíduo de referência para futuras comparações;
2. seleção de três elementos para realização da operação de cruzamento;
3. realização da operação de cruzamento por adição da diferença ponderada entre dois vetores a um terceiro vetor;
4. se o vetor resultante é melhor que o vetor de referência, ele o substitui, caso contrário, o mesmo vetor de referência é mantido.
5. volta-se para etapa 2.

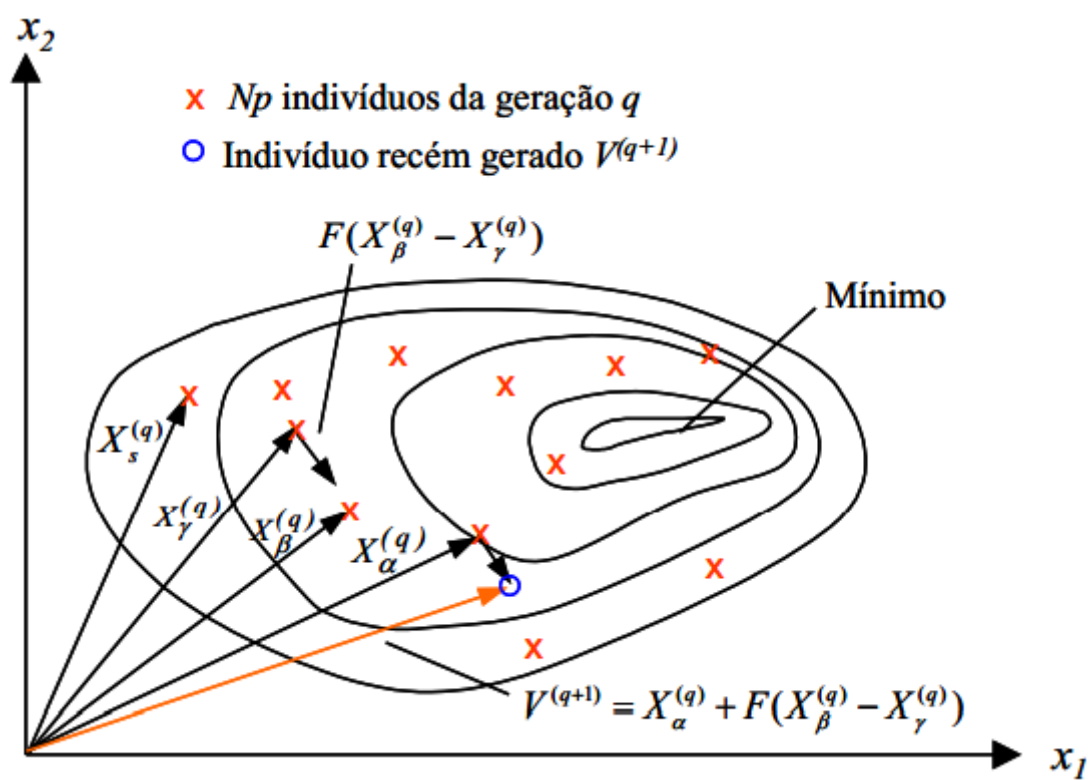
A Figura An.1 apresenta a sequência de geração de novos vetores na ED, para o caso de uma função objetivo bidimensional.

No presente trabalho, a função objetivo que se deseja minimizar para garantir o melhor desempenho dos controladores, dentro do domínio de busca é:

$$f_k(y) = \sum_{i=1}^T i \cdot \|\hat{\mathbf{y}}(k) - \mathbf{r}(k)\| + \sum_{i=1}^T \|\Delta \mathbf{U}(k)\| \quad (\text{An.27})$$

sendo  $T$ , o número total de instantes de amostragens considerado.





**Figura An.1:** Processo de geração dos novos vetores da ED para uma função objetivo bidimensional.