

LEONARDO DE QUEIROZ MOREIRA

**SIMULAÇÃO DE GRANDES ESCALAS DE JATOS
PERIÓDICOS TEMPORAIS UTILIZANDO A
METODOLOGIA PSEUDO-ESPECTRAL DE FOURIER**



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA**

2007

LEONARDO DE QUEIROZ MOREIRA

**SIMULAÇÃO DE GRANDES ESCALAS DE JATOS PERIÓDICOS
TEMPORAIS UTILIZANDO A METODOLOGIA PSEUDO-
ESPECTRAL DE FOURIER**

Dissertação **APROVADA** pelo Programa de
Pós-graduação em Engenharia Mecânica da
Universidade Federal de Uberlândia.

Área de Concentração: Mecânica dos Fluidos

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto - UFU - Orientador

Prof. Dr. Paulo Cesar Philippi - UFSC - SC

Prof. Dr. Cláudio de Castro Pellegrini - UFSJ-MG

Prof. Dr. Solidônio Rodrigues Carvalho - UFU

Uberlândia, 03 de Setembro de 2007

LEONARDO DE QUEIROZ MOREIRA

**SIMULAÇÃO DE GRANDES ESCALAS DE JATOS PERIÓDICOS
TEMPORAIS UTILIZANDO A METODOLOGIA PSEUDO-
ESPECTRAL DE FOURIER**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de **MESTRE EM ENGENHARIA MECÂNICA**.

Área de Concentração: Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos.

Orientador: Prof. Dr. Aristeu da Silveira Neto

UBERLÂNDIA - MG

2007

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

- M838s Moreira, Leonardo de Queiroz, 1980-
 Simulação de grandes escalas de jatos periódicos temporais utilizando
 a metodologia psedo-espectral de Fourier / Leonardo de Queiroz Moreira.
 - 2007.
 100 f. : il.
- Orientador: Aristeu da Silveira Neto.
- Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Uberlândia, Programa
 de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica.
 Inclui bibliografia.
1. Mecânica dos fluidos - Teses. 2. Turbulência - Teses. I. Silveira Neto,
 Aristeu da. II. Universidade Federal de Uberlândia. Programa de Pós-
 Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

CDU: 532

À minha família.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer a meus pais, Geraldo e Marina, por estarem sempre ao meu lado, dando suporte para que eu pudesse sempre me concentrar na vida acadêmica. Obrigado também pelo exemplo de amor, dedicação, respeito e carinho.

Aos meus irmãos Tales, Murilo e Hugo por sempre estarem ao meu lado mesmo nos momentos mais difíceis.

Tio Marcelo que me incentivou desde o primeiro momento e nesta caminhada sempre esteve ao meu lado. Agradeço também Luiza, Henrique e Camila.

Ao meu orientado Aristeu pelos ensinamentos, paciência e incentivos transmitidos durante a realização deste trabalho.

A meus amigos Carlos Frederico Bettencourt da Silva e Felipe Pamplona Mariano, pelas relevantes contribuições, mesmo quando os problemas pareciam não ter mais solução.

Aos membros do LTCM e todos que de uma maneira ou de outra foram indispensáveis para a realização deste trabalho.

Aos meus amigos Cláudio de Castro Pellegrini e Luis Antonio Scola, pelo incentivo de a vida acadêmica. Vocês me mostraram que a ciência vale à pena.

Ao meu amigo Alexandre Santana (*in memorian*) que sempre me ajudou à sua maneira.

A CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior por financiar meus estudos junto ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica (POSMEC-UFU) onde tive todo suporte necessário para realização dos meus trabalhos.

À Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia, juntamente com a Coordenação do seu Programa de Pós-Graduação (POSMEC-UFU) onde tive todo suporte e infra-estrutura necessários para realização dos meus trabalhos.

Moreira, L.Q., 2007. “Simulação de Grandes Escalas de Jatos Periódicos Temporais Utilizando a Metodologia Pseudo-Espectral de Fourier”, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, Brasil.

RESUMO

A turbulência nos fluídos é um dos problemas mais desafiadores da atualidade, em especial no que se refere às aplicações industriais que envolvem processos de mistura de componentes, transferência de calor, lubrificação e degelo, injeção de combustível em câmaras de combustão, sistemas de propulsão de aviões e aeronaves. Diante de considerável interesse, no presente trabalho objetivou-se a análise da transição a turbulência de jatos em desenvolvimento temporal a números de Reynolds moderados utilizando a metodologia LES. Primeiramente desenvolveu-se um código computacional ESPC3D, com alta ordem de resolução para simulação de escoamentos do tipo jatos em desenvolvimento temporal em transição e/ou turbulentos. O código foi desenvolvido no Laboratório de Transferência de Calor e Massa e Dinâmica dos Fluidos (LTCM). Resultados consistentes foram obtidos do ponto de vista da análise física utilizando o código ESPC3D, com o qual realizou-se simulações de grandes escalas empregando o método pseudo-espectral de Fourier. Os resultados das simulações permitem verificar a transição a turbulência bem como suas estruturas típicas. Foi possível também verificar a influência da modelagem da turbulência utilizando a metodologia LES, bem como a influencia do número de Reynolds para o modelo de turbulência estudado. Os espectros de energia cinética turbulenta permitiram verificar a proximidade da região inercial do jato à inclinação de $-5/3$ e a região de decaimento do jato.

Palavras-chave: jatos circulares, simulação de grandes escalas, método pseudo-espectral.

Moreira, L.Q., 2007. “Large Eddy Simulation of Periodic Temporal Jets Using the Fourier Pseudo-Spectral Method”, Master Thesis, Federal University of Uberlândia, MG, Brazil.

ABSTRACT

The turbulence in fluids is one of the most challenging problems in actuality, especially in industrial applications, like mixtures processes, heat transfer, lubrication, combustion, or propulsion systems in airplanes. In front of such interest, in the present work, the objective is the analysis of the transition of turbulence of temporal jets at moderate Reynolds numbers using the LES (Large Eddy Simulation) methodology. A high order resolution computational code, based on Fourier pseudo-spectral method, called ESPC3D, was developed in the present work for simulating the development of temporal jets in transition and/or turbulent state. Such code was developed in the Laboratory of Heat and Mass Transfer and Fluid Dynamics (LTCM) of Federal University of Uberlândia. Consistent results were obtained from the point of view of physical analysis, using the developed code. The simulations performed allowed to verify the transition to turbulence as well as the coherent structures that characterizes it. In addition, the influence of the LES methodology and the Reynolds number influence in such flows could be verified. The proximity of the inertial region to the inclination of $-5/3$, from Kolmogorov Theory, and the decay region were verified in the energy spectra.

Key-words: Circular jets, Large Eddy Simulation, Pseudo-spectral method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Ilustração conceitual de uma simulação numérica direta (DNS) de escoamentos turbulentos: máximo número de Reynolds versus complexidade geométrica (KIRBY e KARNIADAKIS, 2003).	4
Figura 2.1 Visualização de fumaça e velocimetria por imagem de partículas de pares de vórtices (Aerodynamics of Segmented Solid Motors - Centre Nacional d'Etudes Spatiales- França).	9
Figura 2.2 Definição da espessura da camada cisalhante, e meia largura em um jato turbulento(SILVA, 2001).	10
Figura 2.3 Esboço do desenvolvimento do escoamento próximo ao bocal.	11
Figura 2.4 Contorno instantâneo da vorticidade (Freund, 2001).	16
Figura 2.5 Esquema da superfície de controle na vizinhança do escoamento do jato.	18
Figura 3.1 Espectro de energia em função do número de onda para um escoamento turbulento, escala em log-log. Wilcox (1998).	28
Figura 3.2 Definição do plano π (SILVEIRA-NETO, 2002).	34
Figura 3.3 Projeção do termo não-linear, do termo difusivo e do termo fonte sobre o plano π	38
Figura 5.1 Campos gerados pelos vórtices de Taylor-Green: (a) módulo de vorticidade $\ w\ $ e (b) pressão.	49
Figura 5.2 Evolução temporal do erro das componentes de velocidade e pressão para uma malha de 8^3	49
Figura 5.3 Evolução temporal do erro das componentes de velocidade e pressão para uma malha de 16^3	50
Figura 5.4 Evolução temporal do erro das componentes de velocidade e pressão para uma malha de 32^3	50
Figura 5.5 Evolução temporal do erro da componente de velocidade u para as malhas de 8^3 , 16^3 e 32^3	51
Figura 5.6 Evolução temporal do erro da componente de velocidade v para as malhas de 8^3 , 16^3 e 32^3	52
Figura 5.7 Evolução temporal do erro da componente de velocidade w para as malhas de 8^3 , 16^3 e 32^3	52

Figura 5.8 Evolução temporal do erro da pressão para as malhas de 8^3 , 16^3 e 32^3	53
Figura 5.9 Esquema do domínio de cálculo.	55
Figura 5.10 Perfil de velocidade axial inicial $w(x, y, z)$	55
Figura 5.11 Evolução temporal do Módulo de Vorticidade $\ w\ $ (Isosuperfície Nível $1,6 \text{ s}^{-1}$) para Re=5000 e malha de 128^3	58
Figura 5.12 Evolução temporal relação entre a viscosidade efetiva e molecular (isosuperfície Nível 2,0) para Re=5000 e malha de 128^3	59
Figura 5.13 Evolução temporal do campo do critério Q (Isosuperfície Nível $0,01 \text{ s}^{-2}$) – Jato Natural para Re=5000 e malha de 128^3	60
Figura 5.14 Esquema do arranjo de anéis de vórtice conduzindo à ocorrência de emparelhamento alternado, (SILVA e MÉTAIS, 2002).	62
Figura 5.15 Evolução temporal do Módulo de Vorticidade $\ \vec{w}\ $ no plano xy ($z = \pi$) para Re=5000 e malha de 128^3	63
Figura 5.16 Evolução temporal do Módulo de Vorticidade $\ \vec{w}\ $ no plano xz ($y = \pi$) para Re=5000 e malha de 128^3	64
Figura 5.17 Evolução temporal da relação entre a viscosidade efetiva e molecular no plano xz ($y = \pi$) para Re=5000 e malha de 128^3	65
Figura 5.18 Evolução do espectro de energia cinética turbulenta para um jato em desenvolvimento temporal.	66
Figura 5.19 Evolução temporal do Módulo de Vorticidade $\ w\ $ (isosuperfície Nível $1,6 \text{ s}^{-1}$).para diferentes constantes de Smagorinsky.	69
Figura 5.20 Evolução temporal relação entre a viscosidade efetiva e molecular (isosuperfície nível 2,0).para diferentes constantes de Smagorinsky.	70
Figura 5.21 Evolução temporal do critério Q (isovalores nível $0,01 \text{ s}^{-2}$) para diferentes constantes de Smagorinsky.	71
Figura 5.22 Evolução temporal do Módulo de Vorticidade $\ \vec{w}\ $ no plano xy ($z = \pi$) para diferentes constantes de Smagorinsky.	72
Figura 5.23 Evolução temporal do Módulo de Vorticidade $\ \vec{w}\ $ no plano xz ($y = \pi$) para diferentes constantes de Smagorinsky.	73
Figura 5.24 Espectro de energia cinética turbulenta para um jato no tempo $t = 25 \text{ s}$ e $C_s=0,24$, $C_s=0,27$ e $C_s=0,30$	74

Figura 5.25 Evolução temporal do Módulo de Vorticidade $\ \vec{w}\ $ (isosuperfície Nível $1,6 \text{ s}^{-1}$).para diferentes número de Reynolds.	77
Figura 5.26 Evolução temporal relação entre a viscosidade efetiva e molecular (isosuperfície nível 2,0).para diferentes número de Reynolds.	78
Figura 5.27 Evolução temporal do critério Q (isovalores nível $0,01 \text{ s}^{-2}$) para diferentes número de Reynolds.	79
Figura 5.28 Evolução temporal do Módulo de Vorticidade $\ \vec{w}\ $ no plano xy ($z = \pi$) para diferentes número de Reynolds.	80
Figura 5.29 Evolução temporal do Módulo de Vorticidade $\ \vec{w}\ $ no plano xz ($y = \pi$) para diferentes número de Reynolds.	81
Figura 5.30 Espectro de energia cinética turbulenta para um jato no $t = 25 \text{ s}$ e para $Re=1.600$, $Re=5.000$ e $Re=10.000$	82
Figura 5.31 Espectro de energia cinética turbulenta para um jato em desenvolvimento temporal para $Re=1.600$, $Re=5.000$ e $Re=10.000$	83
Figura 5.32 Visualizações de isosuperfície de vorticidade em jato a um nível de $1,6 \text{ s}^{-1}$ (a) presente trabalho, (b) Isosuperfície de vorticidade a um nível de $1,3 \text{ s}^{-1}$ (SOUZA, 2005), (c) visualização experimental via PIV (SAKAKIBARA, 2004).	84
Figura 5.33 Isosuperfícies pelo critério Q para escoamento do jato em desenvolvimento espacial (SILVA e METAIS, 2002) e em desenvolvimento temporal (presente trabalho).	85
Figura 5.34 Isosuperfícies pelo critério Q para escoamento do jato em desenvolvimento espacial (GLAZE e FRANKEL, 2003) e em desenvolvimento temporal (presente trabalho).	86

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Máxima Norma L_2 entre a solução analítica e solução numérica.

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Gregas

η	posição qualquer em uma linha de um vetor ou matriz	
ν	viscosidade cinemática	$[m^2s^{-1}]$
ρ	Massa específica	$[kgm^{-3}]$
Δ	filtro espacial (igual ao tamanho da célula)	$[m]$
Δx	passo de discretização na direção transversal	$[m]$
Δy	passo de discretização na direção transversal	$[m]$
Δz	passo de discretização na direção axial	$[m]$
τ_{ij}	tensor de Reynolds sub-malha	$[m^2s^{-2}]$
θ	coordenada azimutal	$[rad]$
Δt	discretização temporal	$[s]$
δ_{ij}	delta de Kronecker	
$\delta_{0,5}$	metade da espessura da camada cisalhante	$[m]$
w	vorticidade	$[s^{-1}]$
$\ w\ $	módulo da vorticidade	$[s^{-1}]$
Ω_{ij}	parte anti-simétrica do tensor rotação	$[s^{-1}]$

Letras Latinas

\vec{a}	vetor qualquer a ser projetado no plano π	
\vec{a}_π	vetor \vec{a} projetado no plano π	
a	número aleatório gerado	
C_s	constante de Smagorinsky	
D	diâmetro do jato	$[m]$
e	exponencial	
eu	erro em relação componente transversal de velocidade	$[ms^{-1}]$
ev	erro em relação componente transversal de velocidade	$[ms^{-1}]$
ew	erro em relação componente axial de velocidade	$[ms^{-1}]$
ep	erro em relação à pressão	$[ms^{-1}]$
f	termo fonte de força, função qualquer no espaço físico	
\hat{f}	termo fonte de força no espaço de Fourier, função qualquer no espaço de Fourier	
g	função qualquer	
\hat{g}	derivada da função f no espaço de Fourier	$[m^{-1}]$
i	número imaginário, $i = \sqrt{-1}$	
\vec{k}	vetor número de onda	$[m^{-1}]$
K_1	coeficiente de Runge Kutta de 4 ^a ordem	
K_2	coeficiente de Runge Kutta de 4 ^a ordem	
K_3	coeficiente de Runge Kutta de 4 ^a ordem	

K_4	coeficiente de Runge Kutta de 4ª ordem	
k_c	energia cinética turbulenta	$[m^2 s^{-1}]$
k_l	número de onda numa direção específica	
l	tamanho da malha	
L	comprimento característico do corpo imerso, medida de dimensão do domínio computacional	$[m]$
tnl	termo não-linear	
\widehat{tnl}	termo não-linear no espaço de Fourier	
n	contador do somatório	
N	número de nós de colocação	
p	pressão	$[m^2 s^{-1}]$
\bar{p}^*	pressão modificada	$[m^2 s^{-1}]$
\widehat{p}	transformada da pressão no espaço de Fourier	
\vec{r}	parâmetro de transformação	
r	coordenada radial	$[m]$
R	raio do jato	$[m]$
Re	número de Reynolds	
\vec{s}	parâmetro de transformação	
S_{ij}	parte simétrica do tensor taxa de deformação	$[s^{-1}]$
t	tempo	$[s]$
u	componente radial ou transversal de velocidade	$[ms^{-1}]$
\bar{u}	componente radial ou transversal de velocidade média	$[ms^{-1}]$
\widehat{u}	componente radial ou transversal de velocidade no espaço de Fourier	$[ms^{-1}]$
v	componente tangencial ou transversal de velocidade	$[ms^{-1}]$
\widehat{v}	componente tangencial ou transversal de velocidade no espaço de Fourier	$[ms^{-1}]$
\bar{v}	componente tangencial ou transversal de velocidade média	$[ms^{-1}]$
$visc$	termo viscoso	
\widehat{visc}	termo viscoso no espaço de Fourier	
x	coordenada transversal	$[m]$
y	coordenada transversal	$[m]$
z	coordenada axial	$[m]$
w	componente axial de velocidade	$[ms^{-1}]$
\bar{w}	componente axial de velocidade média	$[ms^{-1}]$
\widehat{w}	componente axial de velocidade no espaço de Fourier	
w_0	velocidade axial inicial em $t=0,0\text{ s}$	$[ms^{-1}]$

Subscritos

a	analítico
c	calculado
j	índice tensorial
l	índice tensorial
m	índice tensorial
ef	efetivo
t	turbulento

u	velocidade radial ou transversal
v	velocidade tangencial ou transversal
w	velocidade axial
θ	coordenada azimutal
N	numérico
π	plano π

Sobrescritos

$*$	termo modificado
n	iteração no tempo atual

Operadores

∂	derivada parcial;
∇	nabla;
\mathbb{F}	transformada de Fourier
\wp	operador de projeção em um plano ortogonal a \vec{k}
Σ	somatório;
\int	Integral;

Siglas

CFD	Dinâmica dos Fluidos Computacional
DFT	Discrete Fourier transform
DNS	Simulação Numérica Direta
EDP	Equações Diferenciais Parciais
ESPC3D	Código Computacional - Espectral 3D
FFT	Transformada Rápida de Fourier
LES	Simulação de Grandes Escalas
PIV	Particle Image Velocimetry
URANS	Unsteady Reynolds-Average Navier-Stokes

SUMÁRIO

Agradecimentos	i
Resumo	iii
Abstract	iv
Lista de Figuras	v
Lista de Tabelas	viii
Lista de Símbolos	ix
Sumário	xii
1 Introdução	1
2 Revisão Bibliográfica	7
3 Modelo Matemático	23
3.1 Equações de Navier-Stokes Filtradas	23
3.2 Modelo de Turbulência	26
3.2.1 Modelo de Smagorinsky	29
3.3 Transformadas de Fourier	30
3.3.1 Propriedades da Transformada de Fourier	31
3.4 Transformação das equações de Navier-Stokes filtradas com Termo Fonte para o espaço de Fourier	32
3.4.1 Método da Projeção	36
3.4.2 Recuperação do Campo de Pressão	38
4 Método Numérico	41
4.1 DFT e FFT	41
4.2 Tratamento do termo não-linear	43
4.3 Avanço temporal	45
5 Resultados	47
5.1 Validação	47
5.2 Análise do Jato Circular Tridimensional em decaimento temporal	53
5.2.1 Visualização das estruturas do escoamento número de Reynolds igual a 5.000 e constata de Smagorinsky igual a 0,27	57
5.2.2 Influência da constante do modelo sub-malha de Smagorinsky	67
5.2.3 Influência do número de Reynolds para o modelo de Smagorinsky	75

5.2.4	Comparação com outros autores	83
6	Conclusões	87
6.1	Perspectiva de trabalhos futuros	88
7	Referencias Bibliográficas	91

CAPÍTULO I

1 INTRODUÇÃO

A turbulência em fluídos é um dos problemas mais desafiadores da atualidade e motiva estudos e pesquisas de físicos, matemáticos e engenheiros. Sua compreensão é de grande importância devido ao vasto número de aplicações industriais e de escoamentos encontrados na natureza que são turbulentos.

Atualmente existem duas maneiras para se compreender a turbulência nos fluídos: os métodos experimentais; e os métodos teóricos, os quais possibilitam simular a dinâmica de escoamentos através de metodologias numéricas. Todas as formas de estudos tentam representar um fenômeno físico o mais próximo da realidade possível.

A resolução numérica das equações de Navier-Stokes é a base para a Dinâmica dos Fluidos Computacional (CFD do inglês *Computational Fluid Dynamics*). O desenvolvimento do que conhecemos hoje por CFD começou em meados de 1960, tendo seus primeiros sucessos na década de 1970 e início em aplicações industriais na década de 1980. A divulgação e aceitação da metodologia vieram a partir de 1990, com o uso massivo de CFD em projetos aeronáuticos e veiculares. A partir daí, passou a ser uma ferramenta de desenvolvimento e melhoria de projetos.

As técnicas experimentais também evoluíram muito, com o advento de instrumentos não intrusivos ou de dimensões praticamente microscópicas e alta precisão. Destacam-se entre esses avanços: modernos anemômetros de fio quente, anemometria *Laser-Doppler* e PIV (*Particle Image Velocimetry*). Essas técnicas são aplicadas a nível acadêmico para estudar e quantificar escoamentos de base como camada limite, escoamentos cisalhantes livres, jatos e esteiras ou mesmo em escoamentos complexos, utilizados na indústria moderna como parte do projeto de aeronaves, veículos, máquinas térmicas, bombas, edificações e etc.

Em alguns casos, a realização de um ensaio experimental exige a execução do projeto em si, ou requer uma condição difícil e/ou cara de se obter em laboratório. Neste ponto torna-se interessante à iteração do projetista com CFD. Muitas vezes em partes preliminares de projetos, onde dimensões básicas precisam ser determinadas e não se têm dados experimentais confiáveis, a metodologia de CFD pode ser uma excelente opção de estudo tanto qualitativa como quantitativa, dependendo do grau de conhecimento do projetista ou de exigência do projeto. Condições de operação extremas de temperaturas, pressões, velocidades ou geometrias complexas em geral são de difícil reprodução em laboratório e demandam tempo e dinheiro para serem realizadas. Aplicando-se modelos e métodos apropriados, resultados confiáveis podem ser obtidos via CFD.

Algumas aplicações podem ser citadas onde o uso de CFD para soluções de problemas práticos é muito promissor. São fenômenos envolvendo aeroacústica, combustão e transição a turbulência. No caso da aeroacústica é importante dispor de um método que consiga capturar as ondas de pressão sonora. Em fenômenos envolvendo transição à turbulência é preciso estudar as pequenas instabilidades as quais devido aos efeitos não lineares amplificam causando a transição do escoamento para um regime turbulento. Na combustão, existem processos que envolvem as pequenas escalas do escoamento turbulento inerente a esse problema, que necessitam ser analisadas. Nessa gama de problemas, CFD utiliza métodos de alta ordem de precisão, para a obtenção de resultados representativos da física dos problemas.

As equações de Navier-Stokes são equações diferenciais parciais (EDP) não-lineares que modelam matematicamente o comportamento dinâmico dos fluidos. Existem várias formas de resolver numericamente essas equações. Dentre elas podem ser citados os métodos das diferenças finitas, volumes finitos, elementos finitos, métodos espectrais, etc. Dependendo do tipo do escoamento que se queira resolver ou o tipo de fenômeno físico que se queira estudar, um desses métodos adequa-se melhor que outro.

O Método das Diferenças Finitas surgiu na década de 1950 e consiste em aproximar as derivadas das equações governantes por meio de diferenças finitas que são geradas a partir de expansões em séries truncadas de Taylor. Este método pode alcançar uma alta ordem de precisão usando fórmulas de alta ordem (fórmulas que envolvem grande número de pontos no estêncil), mas requer uma forte restrição no passo de tempo para a estabilidade da solução.

O Método dos Volumes Finitos consiste em uma integração formal das equações governantes do escoamento de fluido, sobre todos os volumes de controle do domínio. A discretização envolve a substituição dos termos da equação integrada por uma variedade de

aproximações do tipo das diferenças finitas. Isto converte as equações integradas em um sistema de equações algébricas (PATANKAR, 1980 e MALISKA, 1995).

O Método dos Elementos Finitos surgiu por volta de 1960 para a análise de esforços estruturais e desde então são usados para resolver equações diferenciais parciais que aparecem nas áreas da Mecânica dos Sólidos, Elasticidade e na Dinâmica dos Fluidos. Estes métodos são particularmente apropriados para geometrias complexas que aparecem em muitas aplicações da engenharia. A base do Método dos Elementos Finitos consiste em dividir o domínio em um número de elementos e aproximar a solução em cada elemento por uma soma de funções bases, compostas por polinômios. Um novo Método dos Elementos Finitos versão hp, melhorou a convergência ao incrementar simultaneamente o número dos elementos, assim como, a ordem dos polinômios de interpolação dentro do elemento (convergência hp) (ZIENKIEWICZ e TAYLOR, 1991).

Os Métodos Espectrais surgiram em meados de 1970 com o desenvolvimento dos métodos transformados (transformações entre o espaço físico e os espaços espectrais) em problemas da Dinâmica dos Fluidos e Meteorologia (ORSZAG, 1970). Os Métodos Espectrais são caracterizados pela expansão da solução em termos de uma série truncada de funções de aproximação globais (séries de Fourier, séries de polinômios de Chebyshev ou Legendre) das variáveis independentes.

Os Métodos Espectrais têm atraído muito a atenção nos últimos anos devido a sua alta precisão nas simulações numéricas. Estes métodos se mostraram altamente precisos nas simulações diretas da turbulência homogênea, na modelagem global do clima e em meteorologia em todas as escalas espaciais e temporais, na dinâmica dos oceanos (CANUTO, 1988), na transferência de calor, na dinâmica dos fluidos e na aerodinâmica. A alta precisão mostrada por estes métodos permite obter soluções precisas na engenharia usando poucos pontos na malha. Esta alta precisão é conseguida sempre que o domínio for suficientemente simples e suave (domínios retangulares ou circulares). Em resumo, para resolver com alta precisão uma equação diferencial parcial sobre um domínio simples e regular, os Métodos Espectrais são usualmente as melhores ferramentas numéricas (ORSZAG, 1977, CANUTO et al., 1988, HUSSAINI e ZANG, 1987, HUSSAINI et al., 1989).

Eles podem alcançar até 10 dígitos de precisão onde o Método das Diferenças Finitas ou Método dos Elementos Finitos obteriam 2 ou 3 dígitos de precisão (TREFETHEN, 2000). Uma desvantagem destas técnicas numéricas baseadas nos Métodos Espectrais ocorre quando são aplicados em problemas envolvendo geometrias complexas, que devem ser impostas

nestes casos. O uso de transformações suaves de um domínio complexo para outro domínio computacional simples, bem como a utilização de filtros, nem sempre é suficiente para recuperar a alta precisão perdida (MARTINEZ, 1999).

Na Figura 1.1 Kirby e Karniadakis (2003), mostram um esboço de como os métodos espectrais estão enquadrados no contexto da mecânica de fluidos computacional. Ela mostra uma faixa de número de Reynolds versus a complexidade da geometria simulada utilizando a metodologia de Simulação Numérica Direta (DNS). Claramente observa-se que DNS da turbulência em geometrias com domínios simples podem-se alcançar Reynolds muito mais altos que em simulação de domínios com geometrias complexas utilizando os métodos espectrais.

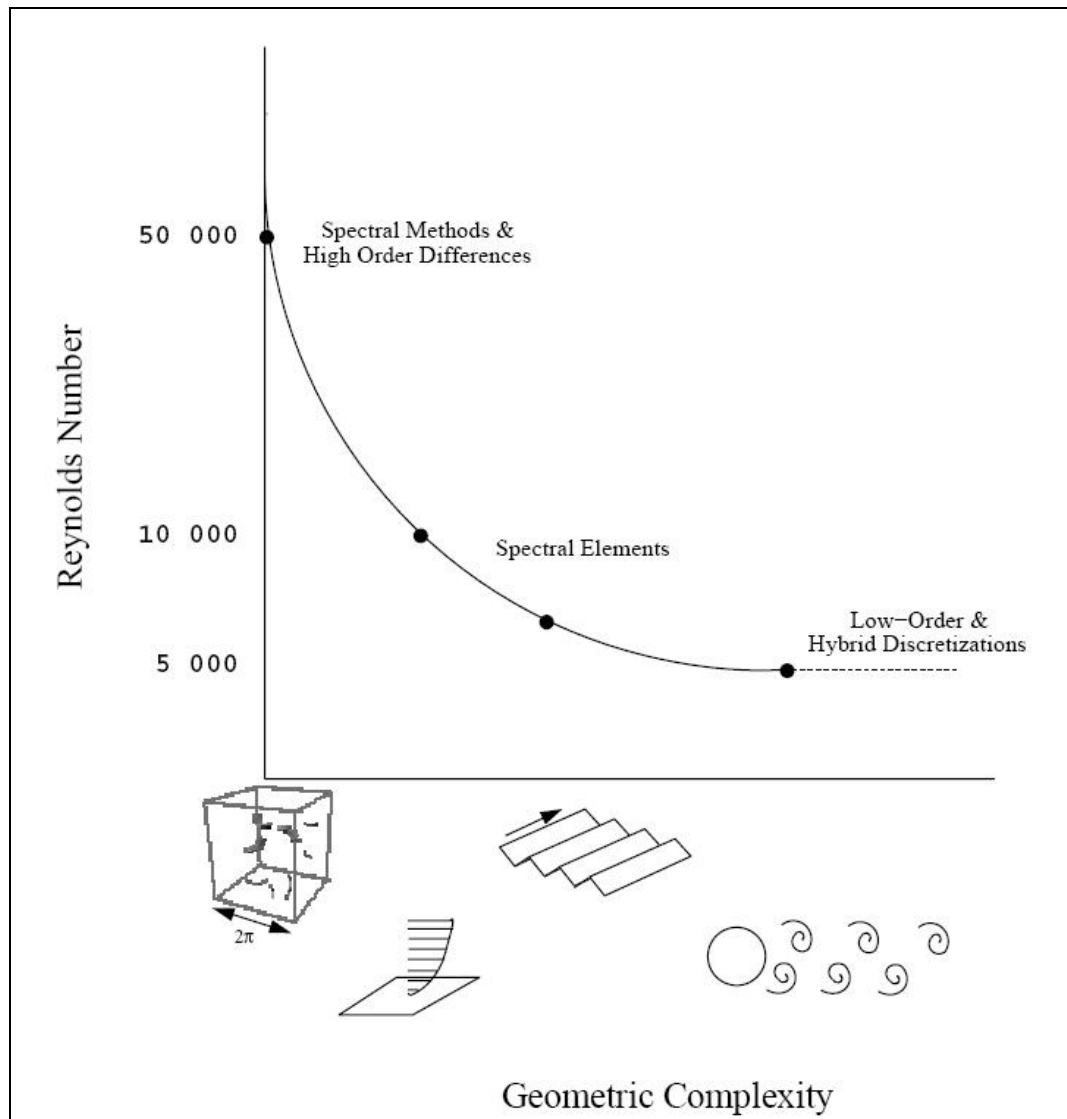


Figura 1.1 Ilustração conceitual de uma DNS de escoamentos turbulentos: máximo número de Reynolds versus complexidade geométrica (KIRBY e KARNIADAKIS, 2003).

Os jatos são escoamentos cisalhantes livres, que, via de regra, se formam quando uma quantidade de momento é injetada, pela passagem por um bocal ou orifício, em um ambiente circundante sem a presença de paredes ou qualquer outra estrutura capaz de exercer força externa sobre o escoamento.

A transição deste tipo de escoamento é caracterizada pela formação de estruturas primárias conhecidas como Kelvin-Helmholtz, as quais apresentam um importante grau de organização local e promovem anisotropia e não homogeneidade do escoamento. Essas estruturas induzem a formação de filamentos secundários, que interagem entre si, formando instabilidades transversais que se amplificam e degeneram em turbulência tridimensional.

A turbulência em jatos tem sido bastante estudada numérica e experimentalmente por pesquisadores, almejando adquirir maiores conhecimentos sobre os fenômenos físicos envolvidos. A melhor compreensão da formação e evolução das estruturas do escoamento permite um controle mais efetivo sobre jatos para os diferentes interesses industriais, bem como contribui para o refinamento de teorias e modelos existentes para descrição de escoamentos turbulentos (SOUSA, 2005).

Os jatos estão entre os escoamentos cisalhantes livres o tipo de escoamento mais estudado, devido à ocorrência em que encontramos na natureza ou em possíveis aplicações industriais. As aplicações industriais envolvem processos de mistura de componentes, transferência de calor, lubrificação e degelo, injeção de combustível em câmaras de combustão, sistemas de propulsão de aviões e aeronaves. A otimização destes processos pode ser obtida através do controle do jato. Este controle pode ser atingido através da manipulação das já mencionadas “estruturas coerentes” (URBIN e METAIS, 1997), as quais são responsáveis por influenciar fortemente a dinâmica do jato, especialmente na região de transição próxima ao bocal.

Além das aplicações mencionadas, o jato turbulento é um escoamento canônico simples bastante importante do ponto de vista físico. O estudo deste tipo de escoamento serve como modelo simplificado, fornecendo análises importantes para utilização em escoamentos complexos, comumente encontrados na prática.

Diante deste contexto como objetivos maiores do presente trabalho destacam-se os seguintes:

- Desenvolvimento de um código computacional (ESPC3D), com alta ordem de resolução para simulação de escoamentos do tipo jatos temporal em transição e/ou turbulentos;
- Implementação um tipo modelo sub-malha para a turbulência;
- Utilização do código para análise da transição a turbulência;
- Simulação de escoamentos a número de Reynolds moderados;

CAPÍTULO II

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A turbulência é um regime de operação de qualquer sistema dinâmico caracterizado por um número de graus de liberdade suficientemente elevado. Entre os sistemas dinâmicos encontram-se os escoamentos de fluidos. No atual estágio de conhecimento qualquer tentativa de definição para turbulência seria incompleta e pouco representativa do fenômeno, Silveira-Neto (2002).

A turbulência nos fluidos apresenta certas características que lhe conferem um caráter totalmente não linear e é importante ressaltar que a turbulência é uma característica do escoamento e não do fluido, ocorrendo a altos números de Reynolds. Pode-se caracterizar a turbulência como um fenômeno tridimensional, rotacional, altamente difusivo e dissipativo, contínuo e imprevisível. Além do mais, escoamentos turbulentos apresentam um amplo espectro de energia, possuindo uma larga banda de frequências, ou seja, apresentam estruturas com baixas (grandes comprimento de onda) e altas frequências (pequenos comprimentos de onda). As interações entre estruturas de tamanhos e frequências variadas constituem um refinado e complexo processo de troca de energia.

Apesar de a turbulência ser classificada como imprevisível, é possível através de processos estatísticos determinar médias e flutuações a fim de caracterizar o fenômeno. Segundo Ferziger (2001) para escoamentos turbulentos identifica-se uma parte determinística constituindo cerca de apenas 10% do escoamento na forma de estruturas coerentes que são responsáveis por aproximadamente 90% do transporte de energia e outra randômica (aproximadamente 90%) que aparece na forma de ruído isolado ou mesmo como pequenas oscilações sobre as estruturas coerentes.

A transição à turbulência, identificada por Reynolds (1894) apud Silveira-Neto (2002a), tem origem no aparecimento de instabilidades num escoamento inicialmente estável (denominado regime laminar). Os efeitos advectivos altamente não-lineares são responsáveis pela amplificação de perturbações e geração de instabilidades, as quais se amplificam e interagem entre si, degenerando em regime turbulento. A forma física em que o processo de geração de instabilidades ocorre depende do tipo de escoamento em questão, conduzindo a uma possível classificação dos escoamentos transicionais.

Os escoamentos cisalhantes livres destacam-se entre os escoamentos transicionais e caracterizam-se pela ausência de paredes ou obstáculos. A sua origem está ligada à passagem sobre corpos submersos (esteiras), à expansão em bocais ou orifícios (jatos) ou à união de correntes de diferentes velocidades (camadas de mistura temporais e espaciais). A transição nos escoamentos cisalhantes livres é similarmente caracterizada pela presença das denominadas “estruturas coerentes”, as quais apresentam importante grau de organização local, promovendo anisotropia e inhomogeneidade do escoamento.

As instabilidades que se desenvolvem nesta classe de escoamentos são ditas de natureza cisalhantes uma vez que, pela teoria da estabilidade linear, elas podem se desenvolver mesmo na situação hipotética de escoamentos invíscidos. Rayleigh apud Silveira-Neto (2002) estabeleceu o critério da inflexionalidade do campo de velocidade como requisito necessário para geração de instabilidades em escoamentos cisalhantes livres. Nos escoamentos cujas instabilidades desenvolvem-se sob a influência de uma parede, a transição ocorre indiferente à presença de inflexionalidade, apresentando instabilidades de outra natureza. Assim, a transição pode ter outras origens, nas quais a formação de instabilidades pode ser ocasionada por efeitos viscosos, sob efeitos de rotação ou de convecção térmica.

A transição para a turbulência dos jatos é caracterizada pela formação de instabilidades primárias do tipo Kelvin-Helmholtz, as quais induzem a formação de filamentos secundários. A interação dos filamentos longitudinais contra-rotativos com as estruturas turbilhonares primárias induzirá a formação de oscilações transversais as quais se amplificam e finalizam por levar o escoamento à turbulência tridimensional. A Figura 2.1 ilustra o desenvolvimento espacial de um jato circular em transição, de um estudo experimental.

A transição de um jato laminar para um jato turbulento acontece, via de regra, próximo do bocal que lhe dá origem, de forma que ela depende da geometria do orifício ou do bocal e também das condições do escoamento à jusante. Desta forma os experimentos são

difícilmente comparáveis. Torna-se também difícil de comparar simulações numéricas com dados experimentais, exceto do ponto de vista puramente estatístico (SOUZA, 2005).

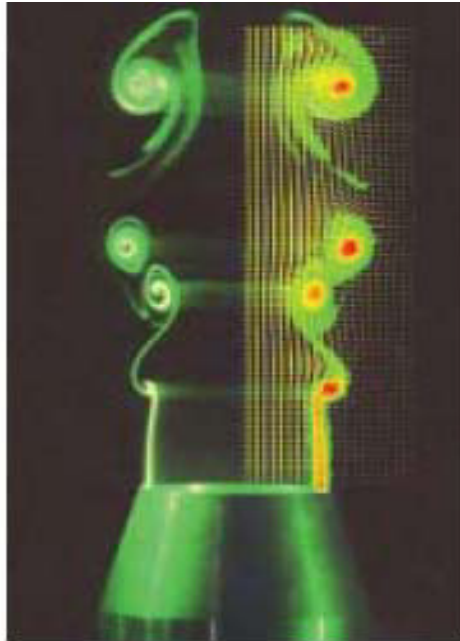


Figura 2.1 Visualização de fumaça e velocimetria por imagem de partículas de pares de vórtices (Aerodynamics of Segmented Solid Motors - Centre National d'Etudes Spatiales-França).

Escoamentos do tipo jato podem ser divididos em duas regiões, a região rotacional (camada cisalhante, em inglês *shear layer*) e a região irrotacional (*irrotational zone*). A camada cisalhante é a região central a qual é dominada pelo seu crescimento radial causado pela difusão de quantidade de movimento. A extensão radial da região de camada cisalhante é a espessura da camada cisalhante (δ) como ilustrado na Figura 2.2. O crescimento radial é seguido pela diminuição da quantidade de movimento a jusante na coordenada radial. Altos gradientes e, conseqüentemente, altas tensões de cisalhamento estão presentes apenas na camada cisalhante. Por outro lado na região irrotacional os gradientes de velocidades são muito baixos e a evolução do escoamento é suave.

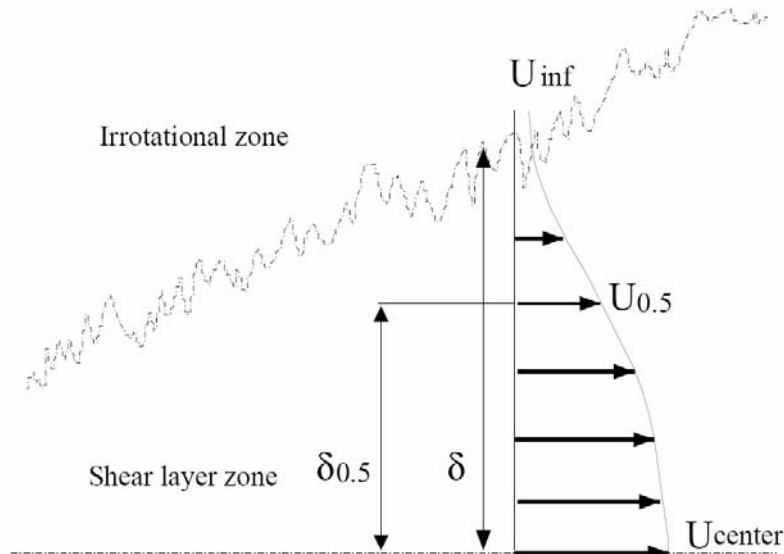


Figura 2.2 Definição da espessura da camada cisalhante, e meia largura em um jato turbulento(SILVA, 2001).

Um importante mecanismo físico que ocorre nos jatos redondos é o arrastamento de fluido da região irrotacional, pobre em quantidade de movimento, para o núcleo da camada cisalhante, rica em quantidade de movimento. O arrastamento é causado pela presença das estruturas coerentes encontradas nos jatos em transição e turbulentos, de natureza intermitente, essas estruturas engolfam quantidades de fluidos na região irrotacional para zona de camada cisalhante.

Pode-se também definir a “meia largura do jato” ($\delta_{0,5}$) que representa a distância onde a velocidade na direção do escoamento é metade da diferença entre a linha central e o escoamento potencial.

Próximo ao bocal de injeção e movendo-se na direção radial, o escoamento pode ser dividido em três regiões: núcleo potencial, camada cisalhante e região de escoamento irrotacional, como ilustra a Figura 2.3. Próximo à região central, o escoamento permanece livre da influência da viscosidade e não existe gradiente de velocidade nas direções longitudinal e radial, nessa região em forma de cone o escoamento é potencial e conserva a velocidade da entrada do bocal. Na região de camada de cisalhamento há grandes gradientes de velocidade radial, causado pelo crescimento da camada proveniente da difusão de momento radial. Por fim a outra região de escoamento é a irrotacional, com uma velocidade radial negativa ditada pela captura de massa causada pelo crescimento da camada cisalhante. Próximo ao bocal e para um número de Reynolds suficientemente alto, a espessura da camada

cisalhante é muito menor que o raio, o qual forma uma camada cisalhante com intensivos efeitos de curvatura.

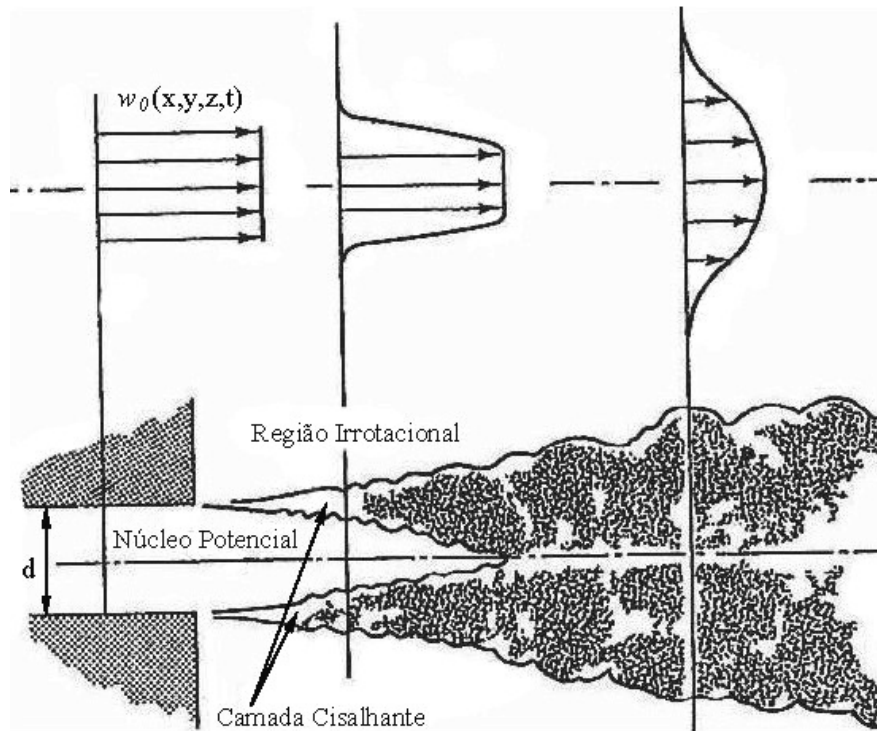


Figura 2.3 Esboço do desenvolvimento do escoamento próximo ao bocal.

Para o presente trabalho é interessante destacar a influência do número de Reynolds neste tipo de escoamento. Com variação do número de Reynolds alguns efeitos são notados nas estruturas coerentes do escoamento e no número de pares de vórtices. Aumentando o número de Reynolds, aumenta o número de pequenas escalas da turbulência, o que acelera o mecanismo de transição à turbulência e torna mais difícil a identificação das estruturas coerentes, pois há uma intensificação do processo de fragmentação dos vórtices.

Morris (1976) apud Silva (2001) estudou a influência do número de Reynolds em instabilidades características para vários perfis de velocidade pela análise da teoria de estabilidade linear. A influência da viscosidade é um parâmetro importante apenas para um número de Reynolds menor que $Re_\theta = 100$. No topo do perfil de velocidade, para $100 < Re_\theta < 500$, o número de Reynolds torna-se um parâmetro seletivo para o modo mais instável. Os modos helicoidais são selecionados a baixos números de Reynolds, os modos axissimétricos a altos números de Reynolds.

Em uma rápida revisão pode-se encontrar diversos trabalhos experimentais que trazem resultados de velocidade média, tensores de Reynolds e intensidade turbulenta. Via de regra estes trabalhos são utilizados para comparação dos resultados de simulações numéricas. Os estudos numéricos geralmente englobam, além dessas análises quantitativas, análises qualitativas, envolvendo visualização da formação e evolução das estruturas que compõem o escoamento.

A existência de estruturas coerentes na turbulência começou a ser constatada a partir de 1930. Brown (1935) apud Souza (2005) evidenciou a existência de vórtices ordenados produzidos por jatos sob forças acústicas. Outros trabalhos comprovando a formação destas estruturas em diferentes tipos de escoamentos turbulentos foram surgindo, desde então, modificando de forma importante a compreensão da física da turbulência. Tais estruturas são extremamente importantes para muitas aplicações práticas, exercendo uma influência direta sobre transporte de fluido, misturas, produção de turbulência e geração de ruídos. Em determinados problemas elas são desejáveis, como por exemplo, para promover o aumento da eficiência em processos de mistura, combustão e em transferência de calor e massa. Em outras situações elas são indesejáveis, por promover aumentos significativos no coeficiente de arrasto, assim como o aumento da potência de bombeamento em sistemas hidráulicos.

A presença de amplas estruturas em um jato plano foram observadas por Oler e Goldschmidt (1986) e Antonia et. al. (1983) confirmadas por Lo (1994) ao aplicar Simulação de Grandes Escalas para estudo de um jato plano turbulento.

Sakakibara et al. (2000) estudaram um jato incidente e acrescentaram informações importantes sobre o desenvolvimento de instabilidades primárias de Kelvin-Helmholtz e de filamentos longitudinais que os conectam no escoamento de um jato plano.

Lo et al. (2000) realizou um interessante trabalho de análise numérica de um jato plano incompressível em desenvolvimento espacial utilizando Simulação de Grandes Escalas. As animações computacionais permitiram o acompanhamento da evolução das estruturas vorticais, auxiliando na compreensão da topologia tridimensional complexa deste tipo de escoamento. A simulação evidenciou a formação dos vórtices na direção do escoamento e turbilhões na direção da expansão do jato sob condições não forçadas. No regime de transição, modos “flapping”, sugerindo formação de anéis, foram observados e o escoamento foi dominado por turbilhões, inicialmente bidimensionais, na direção de expansão do jato. A formação de estruturas tridimensionais foi caracterizada pelo desenvolvimento de ondulações dos turbilhões na direção de expansão. Estes turbilhões eram semelhantes às estruturas

vorticais vistas em esteiras e camadas de mistura, mas a orientação era contrária devido à tensão oposta. Nesse trabalho, os autores também identificaram e apresentaram os vórtices em forma de ferradura na região de transição à turbulência, enfatizando que as extremidades destas estruturas pareciam ser conectadas por uma fina camada de vorticidade e limitadas por um plano central. Eles ressaltaram ainda, que os turbilhões na direção de expansão e vórtices na direção do escoamento pareciam interagir entre si, levando ao aparecimento de arranjos complexos de vórtices e subsequente transição para turbulência.

Os jatos circulares, assim como os jatos planos, também têm sido objeto de extensas pesquisas desde trabalhos experimentais e teóricos por Abramovich (1954). Os jatos circulares apresentam numerosas aplicações em engenharia e a presença de estruturas coerentes complexas neste tipo de escoamentos tem sido evidenciada em recentes trabalhos. O surgimento de vórtices a jusante (na direção do escoamento) e de jatos laterais, os quais disputam um papel proeminente no desenvolvimento do escoamento, tem sido mencionado por Lasheras et al. (1991), Monkewitz e Pfizenmaier (1991), Liepmann e Gharib (1992).

O jato axissimétrico representa um caso-teste na pesquisa sobre a física de escoamentos turbulentos. Embora métodos experimentais sejam complicados devido a altas intensidades turbulentas locais, o estudo teórico é simplificado já que o jato é axissimétrico em média e, ao mesmo tempo, um escoamento cisalhante livre onde aproximações do tipo camada-limite podem ser aplicadas. A importância do jato axissimétrico para a compreensão da turbulência é evidenciada pelo volume de publicações envolvendo dados experimentais, análise matemática e modelagem computacional, tais como Monin e Yaglom (1971), Townsend (1976), Rodi (1975) e List (1979) apud Souza (2005).

Melander et al. (1991) mostraram, através de DNS, um desenvolvimento temporal de um jato redondo, cujas condições de periodicidade criaram um desenvolvimento anormal de vórtices longitudinais em um modo azimutal de quarta ordem. Villiermaux e Hopfinger (1994), em seu trabalho experimental sobre jatos confinados, sustentaram a idéia de que jatos redondos podem ser considerados livres quando se mantêm os limites laterais do domínio distantes de mais de cinco diâmetros. Estes resultados foram confirmados recentemente por experimentos de Djeridante (1996).

Escoamentos do tipo jato também têm sido amplamente estudados por pesquisadores em modelagem da turbulência. O estudo de Tollmien (1926) baseado no comprimento de mistura de Prandtl foi o primeiro de muitos tratamentos teóricos do jato circular. As dificuldades na predição deste escoamento com constantes determinadas de outros modelos

têm se mostrado um dos problemas mais desafiadores enfrentados por especialistas em turbulência nas últimas três décadas. Estes esforços foram revisados em detalhe por Rodi (1975a) e Taulbee (1989).

Bardina et al. (1997) apresenta resultados de vários modelos de turbulência clássicos para jatos redondos. Nenhum dos modelos utilizados reproduz bem a taxa de espalhamento deste escoamento. Para o jato plano, entretanto, os resultados dos modelos normalmente são satisfatórios e este efeito é conhecido como “round jet anomaly” (WILCOX, 1998).

Algumas das simulações de jatos circulares baseadas em hipóteses axissimétricas encontradas na literatura consideram o escoamento apenas no plano radial bidimensional, e apresentam seu desenvolvimento espacial (GAMET e ESTIVELEZES, 1995; BOERSMA, 1998) apud Souza (2005). Outras simulações consideram os aspectos tridimensionais, mas restringem-se à evolução temporal de forma a possibilitar a utilização de malha de discretização suficientemente finas (MARTIN e MEIBURG, 1991; COMTE et al., 1992; VERZICCO e ORLANDI, 1994; BRANCHER, 1996) apud Souza (2005). Diante deste contexto, Urbin e Métais (1997) propuseram demonstrar a possibilidade de se realizar uma simulação tridimensional e em desenvolvimento espacial com razoável custo computacional para aplicações de engenharia. Estes autores aplicaram Simulações de Grandes Escalas baseada no modelo de função estrutura seletivo (LESIEUR e METAIS, 1996), para avaliar o comportamento estatístico e topológico de jatos circulares em evolução espacial. As equações filtradas de Navier-Stokes foram resolvidas por um software industrial chamado TRIO-VF (GRAND et al., 1988), que foi validado em muitas simulações utilizando a metodologia LES em vários escoamentos (SILVEIRA-NETO et al., 1993). Neste trabalho, foi observado o crescimento do modo de instabilidade axissimétrico, o qual conduziu a vórtices em forma de anéis. Os vórtices anulares originaram também estruturas de vórtices que consistem em pares alternados localizados entre os anéis (COMTE et al., 1992). Vórtices helicoidais também foram visualizados em alternância com os anulares. Os resultados para velocidades axiais médias e suas flutuações apresentaram uma boa concordância com dados experimentais. Os autores mostraram ainda, em concordância com vários resultados experimentais (CROW e CHAMPAGNE, 1971; ZAMAN e HUSSEIN, 1980), a alteração do comportamento do jato através de uma excitação específica (axissimétrica, alternada, helicoidal), o que possibilita o controle das estruturas e uma forte modificação da estatística do jato (taxa de espalhamento, nível de turbulência, etc.).

Urbin e Métais (1997) aplicaram perturbações específicas na entrada de um jato circular em evolução espacial para controle de sua dinâmica. As estruturas numericamente obtidas com a excitação “alternate pairing” foram muito similares às obtidas experimentalmente por Lee e Reynolds (1992). No entanto, a natureza altamente dissipativa do esquema numérico usado levantou algumas dúvidas com relação à possibilidade do controle do jato utilizando este esquema de forçagem a elevados números de Reynolds. Danaila e Boersma (2000) revisaram o trabalho de Urbin e Métais (1997) usando DNS a baixos números de Reynolds. Eles restabeleceram os resultados de Urbin e Métais (1997) com um método de forçagem similar chamado excitação “flapping”. Danaila e Boersma (2000) também introduziram uma denominada excitação “bifurcating” resultante da combinação das excitações axissimétrica e “flapping”. Ambas as excitações “flapping” e “bifurcating” causaram aumento drástico na taxa de espalhamento, mas apresentaram características topológicas e estatísticas muito distintas. A excitação “bifurcating” induziu à micro taxa de espalhamento. No entanto, vale ressaltar, que Danaila e Boersma (2000) utilizaram maiores amplitude de perturbação na velocidade de entrada.

A literatura apresenta outros estudos (HILGERS, 1999; HILGERS e BOERSMA, 2001; KOUMOUTSAKOS et al., 1998) os quais tratam da aplicação de procedimentos de otimização estocástica para a determinação das frequências de forçagem mais eficientes para jatos de mistura em escoamentos a baixos e elevados números de Reynolds. No entanto, estes trabalhos não apresentam análises detalhadas sobre a dinâmica dos vórtices resultantes da excitação do escoamento, e utilizam amplitudes de forçagem muito elevadas.

Silva e Métais (2002) realizaram simulações numéricas de jatos circulares em desenvolvimento espacial utilizando LES, aplicando um esquema de discretização compacto de sexta ordem na direção de escoamento do jato e métodos pseudo-espectrais nas demais direções. Estes autores objetivaram estudar a dinâmica dos vórtices de jatos bifurcados, tendo como foco as análises da influência da frequência de forçagem e do número de Reynolds sobre a eficiência de controle. Foram estudados diferentes métodos de forçagem utilizando excitação “flapping”, excitação “flapping” à frequência subharmônica, e o denominado “variflap”, o qual combina o modo de excitação vorticoso à frequência preferencial do jato e o modo “flapping”. Foi verificado através da análise detalhada da dinâmica dos vórtices coerentes que o método que combina excitação axi-simétrica à frequência preferencial e uma excitação “flapping” à frequência subharmônica é a estratégia de controle mais eficiente para jatos bifurcados mesmo a elevados números de Reynolds. A riqueza de detalhes com relação à

dinâmica do escoamento de jatos, apresentada por Silva e Métais (2002), torna este trabalho uma importante referência para realização de demais estudos, sejam estes focados na aplicação direta no controle de jatos, sejam focados apenas na melhor compreensão das estruturas coerentes que compõem o escoamento.

O estudo da dinâmica das estruturas do escoamento para controle de jatos encontra importante aplicação na redução de ruídos. A literatura apresenta muitos trabalhos relacionados ao estudo dos mecanismos geradores de ruídos aplicando metodologias DNS e LES. Os resultados LES são encorajadores e mostram potencial promissor para compreensão de ruídos em jatos. Embora a compreensão dos ruídos não seja o assunto de interesse do presente trabalho, estudiosos, como Freund (2001) e Uzun (2003), fornecem resultados e conclusões interessantes, as quais merecem ser ressaltadas.

Freund (2001) estudou um jato com interesse nos mecanismos de geração de som a Mach 0,9, número de Reynolds 3600 através de DNS. Embora a representação teórica da fonte acústica em escoamento turbulento exista há aproximadamente 50 anos (Lighthill, 1952), medidas precisas de qualquer fonte teórica em jato turbulento real têm sido impossíveis devido às dificuldades experimentais. Este trabalho apresenta tensores de Reynolds comparados aos dados de Panchapakesan e Lumley (1993). Segundo Freund (2001) os tensores de Reynolds são insensíveis ao número de Reynolds, o que possibilitou a comparação e uma boa concordância pode ser observada. A visualização da vorticidade é apresentada na Figura 2.4.

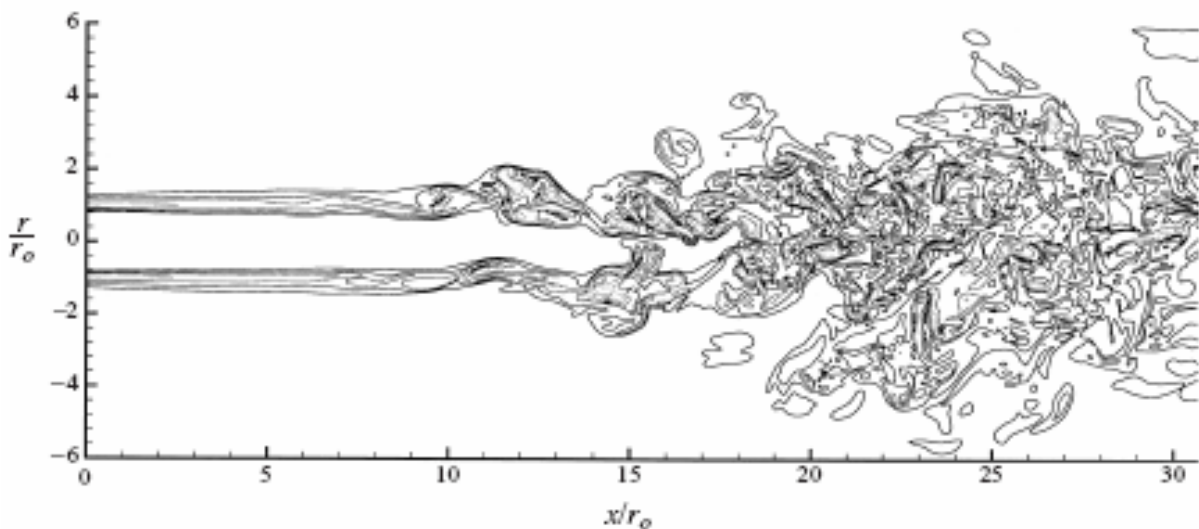


Figura 2.4 Contorno instantâneo da vorticidade (Freund, 2001).

Uzun (2003) realizou um estudo de jatos compressíveis com interesse em aerodinâmica e acústica. Este autor desenvolveu um código 3D LES com uma diferenciação finita compacta de alta ordem de precisão e o modelo sub-malha de Smagorinsky dinâmico para modelar o efeito das escalas não resolvidas.

O trabalho de Uzun (2003) apresenta resultados da simulação de jatos a número de Mach 0,9 e número de Reynolds 100.000, utilizando uma malha de discretização de 12 milhões de pontos, cuja visualização pode ser observada através da Figura 2.5. A taxa de espalhamento do jato encontrada por aquele autor mostrou-se dentro da faixa experimental encontrada para jatos incompressíveis (HUSSEIN et al, 1994; PANCHAPAKESAN e LUMLEY, 1993 e WIGNANSKY e FIDLER, 1969) apud Souza (2005). Os perfis de velocidade média na direção do escoamento a três localizações a jusante coincidem muito bem entre si e apresentam auto-similaridade consistente com observações experimentais em jatos incompressíveis. Apesar da boa concordância entre dados experimentais e simulados, Uzun ressaltava algumas justificativas para as possíveis diferenças entre os dados. Primeiramente, o autor lembra que o tensor de Reynolds calculado por LES é baseado em velocidades filtradas. Ele menciona também a diferença entre as condições iniciais impostas na simulação (flutuações randômicas de velocidade) e as condições iniciais do experimento. Além disso, Uzun argumenta que os tensores de Reynolds experimentais têm sido medidos a distantes regiões a jusante, usualmente 100 raios do bocal ou mais. Tem sido observado experimentalmente que os tensores atingem auto-similaridade assintótica a diferentes localizações a jusante, dependendo das condições iniciais e do número de Reynolds. Os experimentos de Wignansky e Fidler (1969) sugerem uma distância de cerca de 100 raios de jato a jusante do bocal para iniciar a região de auto-similaridade a elevados números de Reynolds, enquanto a DNS de Freund mostra que região de auto-similaridade começa a cerca de $x = 25 r_0$ a baixos números de Reynolds. Desta forma, segundo, Uzun, como o domínio de 60 raios do bocal de saída do jato é ainda relativamente curto comparado aos experimentos, sendo o número de Reynolds elevado, os tensores podem não ter atingido valores assintóticos verdadeiros.

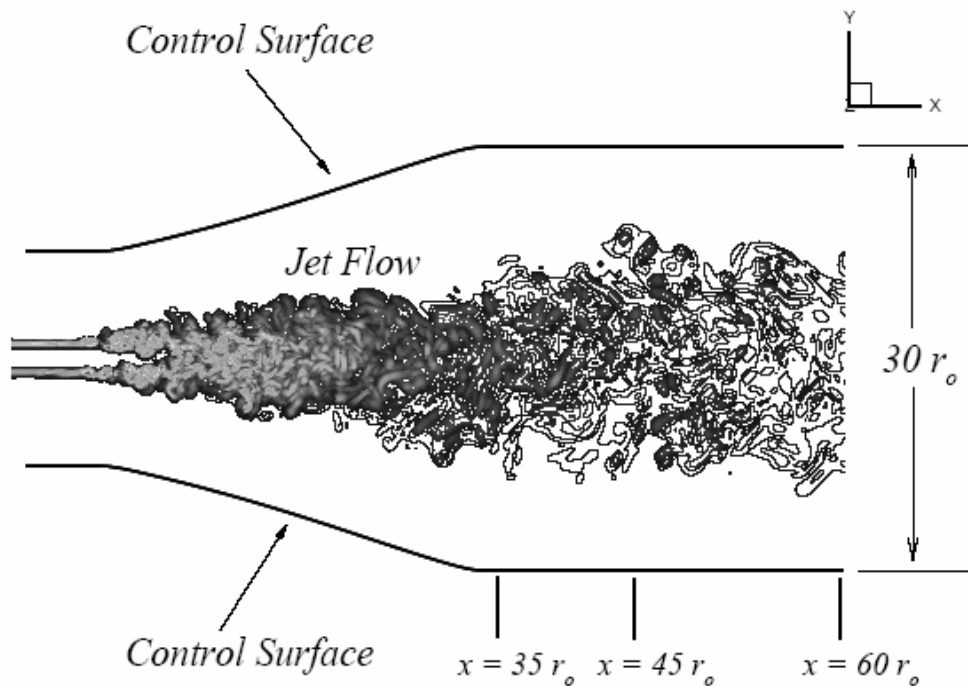


Figura 2.5 Esquema da superfície de controle na vizinhança do escoamento do jato (Uzun, 2003).

Ribault (1999) simulou um jato espacial em estado de transição e turbulento para testar modelos de turbulência. Foram analisados os modelos de Smagorinsky, Dinâmico Smagorinsky e modelo de mistura dinâmico. As simulações foram realizadas usando um esquema de discretização espacial compacto de quarta ordem e para avanço no tempo utilizou-se o método de Runge-Kutta de quarta ordem, o avanço temporal de termo viscoso utiliza um esquema de Euler de primeira ordem.

Inicialmente as simulações foram realizadas a um número de $Re_d = 3000$ de modo que seja possível comparar com dados de DNS com mesmo número de Reynolds e em seqüência simulações com número de $Re_d = 30000$ foram simulados. Com maiores números de Reynolds os dados foram comparados com dados experimentais. Nestes testes foram analisados a evolução do meio comprimento do jato, o decaimento de velocidade na linha central, perfis de velocidade média e intensidade de turbulência. Ribault (1999) mostra que o modelo de Smagorinsky é bastante dissipativo, quando analisada a evolução temporal do perfil central de velocidade. Os modelos Smagorinsky dinâmico e modelo de mistura dinâmico têm boa comparação com os dados experimentais e DNS.

Silva (2004) simulou um jato em decaimento temporal para estudar o efeito dos modelos sub-malha nos vórtices calculados pela metodologia de simulação de grandes

escalas. Os modelos avaliados foram: Smagorinsky, Smagorinsky dinâmico, função estrutura, função estrutura filtrado, escala de similaridade e modelos de mistura. Todas as simulações foram realizadas em um código pseudo-spectral para resolver as derivadas espaciais e para avanço temporal utilizou-se Runge-Kutta de terceira ordem, e em todas as simulações utilizou-se dealising, Canuto (1988). Neste trabalho analisou-se a dinâmica dos vórtices resolvidos por DNS e em seguida os modelos sub-malha foram simulados. Por final comparam-se os modelos de turbulência com os dados obtidos por DNS. Os modelos de Smagorinsky, função estrutura e modelos de mistura causam excessiva dissipação dos vórtices, em comparação com os demais modelos, essa dissipação excessiva afeta principalmente as menores escalas resolvidas. A princípio os modelos de Smagorinsky dinâmico, função estrutura filtrado, apresentaram os melhores resultados, mas em geral todos os modelos apresentam uma boa representação física dos fenômenos.

Sousa (2005) realizou um interessante trabalho focando análise física de jatos circulares livres em decaimento temporal, através de simulações tridimensionais. Ele estudou também a influência de diferentes tipos de ruídos na formação e evolução das estruturas turbilhonares. As simulações foram realizadas usando um código pseudo-spectral para os termos espaciais e um esquema de avanço temporal Adams-Bashfort de terceira ordem. Nenhum tipo de modelagem de turbulência foi implementado neste código.

Os resultados das simulações realizadas por Sousa (2005) permitiu evidenciar a formação de estruturas turbilhonares como também a identificação dos principais mecanismos de geração das estruturas. Neste trabalho, simulando jatos forçados fez um estudo sobre os diferentes refinamentos de malhas destacando que, à medida que se aumenta o número de pontos na malha os resultados das simulações se mostram com maior riqueza de detalhes físicos. Outra análise que pode ser destacada é influência de precisão do cálculo. Souza (2005) não encontrou diferenças significativas entre os cálculos com simples e dupla precisão. Destaca-se também no trabalho de Souza o estudo sobre a influência do número de Reynolds em jatos forçados. Percebe-se que na medida em que se aumenta o número de Reynolds uma maior quantidade de estruturas podem ser notadas no escoamento, e cabe destacar que Souza (2005) encontrou oscilações numéricas para moderados números de Reynolds. Outro aspecto importante destacado por Sousa é a possibilidade do controle do jato pela imposição de diferentes formas de ruído sobre o mesmo.

Muitos dos estudos não-periódicos de SND e LES encontrados na literatura tratam de escoamentos transicionais. Tal fato deve-se provavelmente a uma melhor definição e maior

facilidade de implementação das condições de entrada para o regime de transição do que para os escoamentos turbulentos completamente desenvolvidos. Forçagens harmônicas com superposição de flutuações randômicas de velocidade são comumente usadas para suprir as frequências de excitação necessárias para iniciar a instabilidade da camada cisalhante e a eventual transição à turbulência. Entretanto, este tipo de tratamento não é muito adequado para simular um escoamento completamente turbulento, uma vez que medidas experimentais e numéricas apresentam alta sensibilidade às condições de entrada. Esta é, inclusive, uma das justificativas ressaltadas por Uzun (2003) para as possíveis diferenças entre os resultados de suas simulações e dados experimentais.

Glaze e Frankel (2003) objetivaram seu estudo na comparação do comportamento de duas diferentes metodologias de condições de entrada, as quais são destinadas a simular uma entrada turbulenta para um jato circular a Reynolds 21.000, utilizando LES e um esquema de discretização espacial finita compacto de sexta ordem. Este trabalho apresenta interessantes resultados em termos de visualização de vórtices. Foram obtidas detalhadas estruturas instantâneas a qual possibilitando observar a formação de estruturas toroidais, interação entre filamentos secundários e degeneração em turbulência tridimensional.

Condições de contorno periódicas podem fornecer bons resultados para configurações simples como camadas de mistura em desenvolvimento temporal ou turbulência completamente desenvolvida em escoamentos em tubos ou canais (Ling et al., 1998). Mathew e Basu (2000) mostraram que o uso de periodicidade, bem como o uso de malhas cartesianas, não afetou os resultados obtidos em suas simulações. Estas simulações foram realizadas utilizando um método pseudo-espectral baseado em expansões de séries de Fourier em um sistema de coordenadas cartesianas. Os autores verificaram que este método é econômico para estudo da simulação de jatos circulares em DNS, apresentando facilidade computacional, já que não há restrição devida à estrutura da malha cilíndrica próxima ao eixo do jato.

Esta revisão mostrou que o uso de metodologias de alta ordem é necessário para análise da transição à turbulência. Neste caso o método pseudo-espectral é uma ferramenta que apresenta bons resultados a um custo computacional baixo, que aliado a um esquema de avanço temporal de alta ordem, permite simular de forma satisfatória, a transição a turbulência para escoamentos transicionais, a números de Reynolds baixos ou moderados. Uma alternativa bastante usada é a metodologia LES que apresenta bons resultados em casos onde se deseja evidenciar a fases de transição a turbulência. Desta forma no presente trabalho

a metodologia pseudo-espectral de Fourier foi usada em conjunto com a LES para simulação a de um jato em decaimento temporal.

CAPÍTULO III

3 MODELO MATEMÁTICO

O presente trabalho trata de escoamentos turbulentos modelados através das equações de Navier-Stokes filtradas, utilizando a hipótese de viscosidade turbulenta de Boussinesq.

Observam-se atualmente duas correntes filosóficas distintas na modelagem de escoamentos turbulentos, baseadas na hipótese da viscosidade turbulenta de Boussinesq, a Simulação de Grandes Escalas (LES do inglês Large Eddy Simulation) e a metodologia URANS (Unsteady Reynolds-Average Navier-Stokes). Uma terceira metodologia, a híbrida URANS/LES, começa a ser desenvolvida e aplicada com o intuito de unir as duas anteriores procurando tirar proveito de suas capacidades.

O presente capítulo apresenta o equacionamento e hipóteses da metodologia abordada na presente dissertação, LES, através do modelos de Smagorinsky. Além disso, a seção 3.3 apresenta de forma sucinta as transformadas de Fourier e suas propriedades e a seção 3.4 apresenta a transformação das equações de Navier-Stokes para o Espaço de Fourier.

3.1 Equações de Navier-Stokes Filtradas

Neste capítulo serão descritas as equações utilizadas para a modelagem dos escoamentos. Para tanto, será utilizada a notação tensorial de Einstein, na qual os índices repetidos no mesmo termo indicam um somatório. Com esta notação a equação de conservação da massa para escoamentos incompressíveis pode ser representada pela Eq. (3.1). Restringindo-se a escoamentos em regime incompressível e a fluidos newtonianos, podemos escrever as equações de Navier-Stokes pela Eq. (3.2), que resultam da aplicação da segunda

Lei de Newton a um referencial euleriano e da relação estabelecida por Stokes (WHITE, 1991) para as tensões viscosas proporcionais à taxa de deformação do fluido:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right]. \quad (3.2)$$

Observa-se que o índice j no termo da derivada espacial indica o somatório das derivadas das velocidades. O desenvolvimento desta equação bem como da equação de Navier-Stokes pode ser encontrada em White (1991).

Considerando uma abordagem tridimensional, as equações acima representam um sistema de quatro equações e quatro incógnitas, ou seja, um sistema fechado. Em princípio, a solução numérica das Equações (3.1), (3.2), para todas as escalas presentes num dado escoamento, é possível e caracteriza a abordagem denominada Simulação Numérica Direta (DNS do inglês Direct Numerical Simulation). Entretanto, devido ao elevado número de graus de liberdade dos escoamentos turbulentos, este tipo de resolução apresenta, quase sempre, custos computacionais proibitivos, sendo viável apenas para escoamentos a números de Reynolds moderados. No entanto, para números de Reynolds mais elevados, onde o espectro de energia se torna bastante largo, não é possível refinar a malha de modo a captar todas as escalas. Nesse momento, torna-se atraente a metodologia de Simulações Grandes Escalas, separando o escoamento em duas bandas de escalas espaciais, as resolvidas (grandes escalas) e as modeladas (escalas sub-malha, as pequenas escalas) através de um processo de filtragem.

As variáveis presentes nas Eqs. (3.1) e (3.2) são separadas em escalas filtradas $\bar{f}(\vec{x}, t)$ e escalas flutuantes ou sub-malha $f'(\vec{x}, t)$:

$$f(\vec{x}, t) = \bar{f}(\vec{x}, t) + f'(\vec{x}, t). \quad (3.3)$$

A parte filtrada é definida como sendo o produto de convolução da função a ser filtrada por com a função filtro $G(\vec{x}, t)$ ou seja:

$$\overline{f}(\vec{x}, t) = \int_D f(\vec{x}', t) G(\vec{x} - \vec{x}') d\vec{x}', \quad (3.4)$$

onde a função filtro é definida, no presente trabalho, na forma de um filtro volumétrico:

$$G(\vec{x}) = \begin{cases} 1/\Delta^3 & \text{se } |\vec{x}| \leq \Delta/2 \\ 0 & \text{se } |\vec{x}| \geq \Delta/2 \end{cases}. \quad (3.5)$$

Esta função caracteriza o filtro e por conseqüência o número de onda ou frequência de corte. Nesse ponto é interessante ressaltar que, em metodologias numéricas o simples fato de discretizar uma equação e assumir que dentro de um volume de controle as variáveis são constantes já caracteriza um processo de filtragem. Esta discretização é semelhante ao processo que se faz nos métodos pseudo-espectrais, onde as equações de Navier-Stokes são resolvidas apenas nos pontos de colocação específicos.

Aplicando o processo de filtragem nas Eq. (3.1) e (3.2), elas assumem as formas:

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_i} = 0. \quad (3.7)$$

Devido ao processo de filtragem, o termo não linear torna-se o produto filtrado de duas variáveis, inviabilizando a solução direta do sistema. Para contornar o problema (GERMANO, 1986) define o tensor de Reynolds global pela Eq. (3.8), e aplicando na Eq. (3.6) chega-se a Eq.(3.9) que são conhecidas como as Equações Globais Filtradas para a turbulência (SILVEIRA-NETO, 2002),

$$\overline{\tau}_{ij} = -(\overline{u_i u_j} - \overline{u}_i \overline{u}_j), \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u_i u_j}) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) + \overline{\tau}_{ij} \right]. \quad (3.9)$$

Este tensor é tradicionalmente colocado junto ao termo difusivo para ressaltar o papel da modelagem de turbulência no aumento da difusividade das grandezas envolvidas no escoamento, em particular na quantidade de movimento.

A consequência imediata da decomposição das escalas e da transformação das equações de Navier-Stokes nas Equações Globais Filtradas para a turbulência é o aparecimento do tensor de Reynolds Global Sub-malha, onde o sistema formado pelas equações da conservação de massa filtrada e equações globais filtradas para a turbulência, possui mais incógnitas que equações. Este é o famoso problema de fechamento da turbulência. Para resolver o problema de fechamento da turbulência é necessário algum modelo de turbulência.

3.2 Modelo de Turbulência

Boussinesq propôs modelar o tensor sub-malha de forma análoga ao modelo das tensões viscosas. Para tanto, utilizou o conceito de viscosidade turbulenta em camada limite sobre uma placa plana infinita. Kolmogorov (1941) propôs uma forma generalizada da hipótese de Boussinesq e esta tem sido a forma utilizada até os dias atuais. Através da hipótese de Boussinesq propõe-se expressar o tensor de Reynolds sub-malha em função da taxa de deformação gerada pelo campo de velocidades filtrado e da energia cinética turbulenta k_c ,

$$\tau_{ij} = \left(\nu_t \bar{S}_{ij} - \frac{2}{3} k_c \delta_{ij} \right), \quad (3.10)$$

sendo o tensor deformação, dado por:

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (3.11)$$

Aplicando a hipótese de Boussinesq na Eq. (3.9) tem-se:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k_c \delta_{ij} \right]. \quad (3.12)$$

Observa-se que do divergente do termo envolvendo a energia cinética turbulenta e o delta de Kronecker resulta no gradiente da energia cinética turbulenta:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{2}{3} k_c \delta_{ij} \right) = \frac{2}{3} \frac{\partial k_c}{\partial x_i}, \quad (3.13)$$

o que permite incorporar este termo ao termo da pressão, gerando uma pressão modificada (\bar{p}^*) na equação modelada:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (3.14)$$

em que

$$\bar{p}^* = \bar{p} + \frac{2}{3} K_c \quad (3.15)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_i \bar{u}_j) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}^*}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu_{ef} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3.16)$$

onde ν_{ef} é a viscosidade efetiva

$$\nu_{ef} = \nu + \nu_t. \quad (3.17)$$

Ressalta-se que ν_t é a viscosidade turbulenta e ν_{ef} viscosidade efetiva, uma propriedade do escoamento e não do fluido, como a viscosidade molecular ν . Esta característica implica na dificuldade maior de avaliação desta propriedade uma vez que ela depende da natureza do próprio escoamento, constituindo-se numa forte não linearidade na solução das equações. Trata-se de uma propriedade que depende do espaço e do tempo.

Observa-se que esta equação de transporte para as componentes filtradas da velocidade tem uma natureza fechada, sendo composta de um mesmo número de equações que de

incógnitas. No entanto resta ainda o cálculo da viscosidade turbulenta, o que é o papel fundamental dos chamados modelos de turbulência.

Para recuperar o verdadeiro campo de pressão torna-se necessário modelar também a energia cinética turbulenta, o que deve ser feito simultaneamente com o cálculo da viscosidade turbulenta. Quando se resolve as equações da turbulência modeladas, o que se chama de pressão não é a pressão termodinâmica, mas uma pressão modificada pela energia cinética turbulenta, que por conveniência será denotado por \bar{p} , deixando de utilizar o sobrescrito(*).

Uma questão importante em relação à validade desta hipótese de Boussinesq é o fato de que a viscosidade molecular caracteriza a troca de quantidade de movimento entre partículas de fluido seguindo uma difusão molecular, o que permite modelar macroscopicamente os fenômenos moleculares. Esta separação não ocorre entre as maiores escalas da turbulência e as escalas dissipativas de Kolmogorov onde se observa um espectro contínuo de energia (Figura 3.1). No entanto, os resultados obtidos com modelos baseados nesta suposição são muito próximos dos resultados obtidos experimentalmente, o que tem justificado a ampla utilização deste tipo de modelo pela comunidade científica. Em Lesieur (1997) e Lesieur et al. (2005) encontra-se esta e outras discussões relacionadas a modelos de turbulência e suas utilizações.

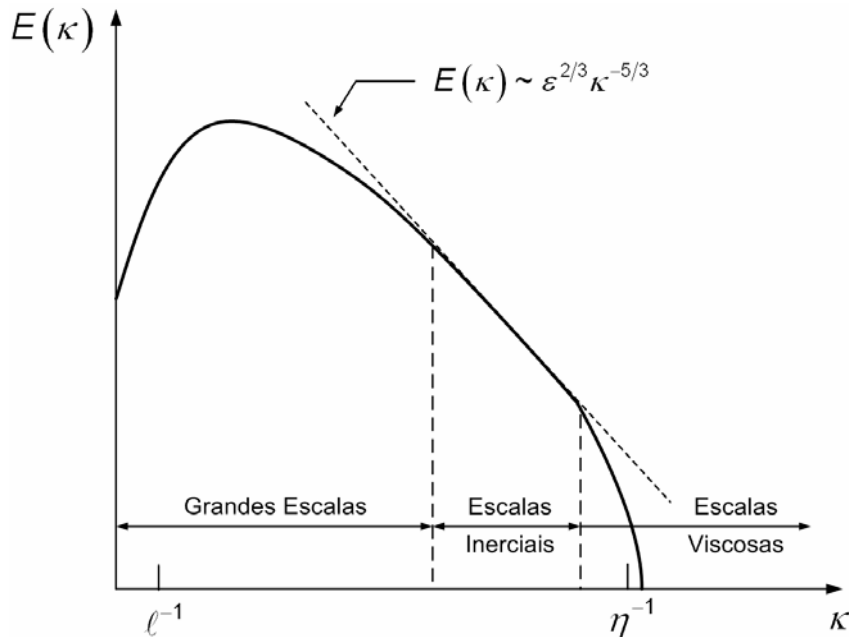


Figura 3.1 Espectro de energia em função do número de onda para um escoamento turbulento, escala em log-log. Wilcox (1998).

3.2.1 Modelo de Smagorinsky

Proposto por Smagorinsky (1963) trata-se de um modelo que tem por base a hipótese do equilíbrio local para as pequenas escalas, sendo a produção de tensões turbulentas igual à dissipação:

$$\mathcal{P} = \mathcal{E} , \quad (3.18)$$

onde a produção pode ser escrita em função da taxa de cisalhamento do campo filtrado e a dissipação em função da escala de velocidade e do comprimento característicos sub-malha.

A viscosidade turbulenta proposta por Smagorinsky é dada por:

$$\nu_t = (C_s \ell)^2 \sqrt{2 \bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij}} , \quad (3.19)$$

em que

$$\ell = \sqrt[3]{\prod_{l=1}^3 \Delta x_l} . \quad (3.20)$$

onde C_s é a constante de Smagorinsky, ℓ é o comprimento característico e \bar{S}_{ij} o tensor taxa de deformação filtrado:

A dependência do tensor taxa de deformação e do filtro utilizado garante um caráter totalmente tridimensional ao modelo. Fisicamente, a hipótese de que os turbilhões se comportam como moléculas não é verdadeira. Entretanto, assim como o modelo de comprimento de mistura pode ser calibrado para uma classe de escoamentos, também o coeficiente de Smagorinsky C_s o pode. Seu valor varia de escoamento para escoamento e localmente dentro de um dado escoamento. Lilly (1967) determinou $C_s = 0,18$ para turbulência homogênea isotrópica. Entretanto, seu valor em aplicações práticas é na faixa de $0,05 \leq C_s \leq 0,30$.

Essa dependência da constante de proporcionalidade de Smagorinsky tem fortes efeitos colaterais quando lidamos com escoamentos parietais, devido aos altos gradientes de velocidade que acarretam produção excessiva de viscosidade turbulenta devida a dependência do tensor taxa de deformação. Diferentemente dos chamados modelos dinâmicos, onde se têm uma constante que é função do tempo e espaço, o modelo de Smagorinsky não faz nenhuma

consideração com relação à proximidade de paredes, sendo necessário adicionar uma função externa de amortecimento que compute esse efeito e leve a zero o seu valor próximo às paredes.

As principais desvantagens deste modelo, amplamente estudado, é que se observa uma pobre correlação entre os tensores, e é um modelo puramente dissipativo, que não permite cascata inversa de energia cinética turbulenta (backscatter). Além disso, em escoamentos complexos como, por exemplo, em escoamentos rotativos ou em regiões próximas à separação, a hipótese de equilíbrio global não é verdadeira. Silva e Métais (2002) mostraram que em escoamentos simples a hipótese de equilíbrio local falha. Contudo e surpreendentemente, o modelo de Smagorinsky representa muito bem o espectro de energia cinética turbulenta e a cascata de energia em escoamentos cisalhantes.

3.3 Transformadas de Fourier

Diz-se que uma função $f(\vec{x})$ no intervalo $(-\infty, \infty)$, é integrável em todo domínio real (BRIGGS, 1995), se:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\vec{x})| dx < \infty. \quad (3.21)$$

Pode-se definir uma função $\hat{f}(\vec{k})$ pela Eq (3.22):

$$\hat{f}(\vec{k}) = \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \int_{-\infty}^{\infty} f(\vec{x}) e^{-i2\pi\vec{k}\cdot\vec{x}} dx, \quad (3.22)$$

onde $-\infty < \vec{k} < \infty$ representa os números de onda, parâmetros de transformação.

A função $\hat{f}(\vec{k})$ é a transformada de Fourier da função $f(\vec{x})$. Pode-se dizer que $\hat{f}(\vec{k})$ está definida no domínio espectral, ou domínio transformado.

Existe também a operação inversa, a qual transforma uma função que está no espaço de Fourier para o espaço físico, denominada transformada inversa de Fourier, dada pela Eq. (3.23):

$$f(\vec{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\vec{k}) e^{i2\pi\vec{k}\cdot\vec{x}} d\vec{k}. \quad (3.23)$$

Para interpretar fisicamente a transformada de Fourier, deve-se observar o cerne das Eqs. (3.22) e (3.23). Aplicando-se a fórmula de Euler, tem-se que:

$$e^{\pm i2\pi\vec{k}\cdot\vec{x}} = \cos(2\pi\vec{k}\cdot\vec{x}) \pm i \sin(2\pi\vec{k}\cdot\vec{x}). \quad (3.24)$$

Esta fórmula diz que, para um valor fixo de \vec{k} a equação acima consiste de ondas (senos e cossenos) com um número de onda \vec{k} , medido em unidades do inverso de \vec{x} (inverso de comprimento), ou seja, para um valor fixo de \vec{k} existe um número de onda por unidade de comprimento. A transformada inversa de Fourier (3.23) recupera uma função $f(\vec{x})$ a partir da combinação dos modos de Fourier para todos os números de onda. O modo associado com um número de onda particular \vec{k} tem um peso determinado por $\hat{f}(\vec{k})$ em (3.22).

3.3.1 Propriedades da Transformada de Fourier

O objetivo de transformar uma função para o espaço espectral é que nele existem propriedades interessantes, principalmente para se trabalhar com equações diferenciais parciais (EDP). Normalmente, uma EDP no espaço físico é reduzida a uma equação diferencial ordinária (EDO) no espaço espectral. As principais propriedades do espaço espectral de Fourier são:

- Homogeneidade, Eq. (3.25):

$$\widehat{\alpha f}(\vec{k}) = \alpha \hat{f}(\vec{k}), \quad (3.25)$$

onde, α é uma constante.

- Aditividade: a transformada da soma de duas funções é a soma das transformadas:

$$\widehat{f(\vec{x}) + g(\vec{x})} = \widehat{f}(\vec{r}) + \widehat{g}(\vec{s}), \quad (3.26)$$

- Derivada: a transformada da derivada de uma função é dada por (3.27):

$$\widehat{\frac{\partial^n f}{\partial x_l^n}}(\vec{k}) = (ik_l)^n \widehat{f}(\vec{k}), \quad (3.27)$$

onde n é a ordem da derivada.

- Produto de funções: a transformada do produto de duas funções é um produto de convolução entre as transformadas dessas funções:

$$\widehat{f(\vec{x})g(\vec{x})}(\vec{k}) = \widehat{f}(\vec{r}) * \widehat{g}(\vec{s}), \quad (3.28)$$

onde \vec{k} é o parâmetro de transformação do produto, \vec{r} é o parâmetro de transformação da função $f(\vec{x})$ e \vec{s} é o parâmetro de transformação da função $g(\vec{x})$. Esse produto de convolução é dado por:

$$\left[\widehat{f}(\vec{r}) * \widehat{g}(\vec{s}) \right](\vec{k}) = \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{f}(\vec{r}) \widehat{g}(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r}. \quad (3.29)$$

Essa propriedade é que justifica o uso do método pseudo-espectral, pois resolver a integral de convolução que aparece no termo não-linear das equações de Navier-Stokes é um procedimento muito caro computacionalmente. Esta metodologia será definida no capítulo de Métodos Numéricos.

3.4 Transformação das equações de Navier-Stokes filtradas com Termo Fonte para o espaço de Fourier

Depois de definida a transformada de Fourier e estabelecidas as suas propriedades de interesse, será feita a transformação das equações de Navier-Stokes filtradas com um termo

fonte adicional para o espaço espectral de Fourier. Também será mostrado o método da projeção, o qual desvincula o termo da pressão das equações de Navier-Stokes.

Reescreve-se aqui as equações de Navier-Stokes filtradas com o termo fonte, e a continuidade para escoamentos incompressíveis, Eqs. (3.30) e (3.31):

$$\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}_l \bar{u}_j) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_l} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu_{ef} \left(\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_l} \right) \right] + f_l, \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial \bar{u}_l}{\partial x_l} = 0. \quad (3.31)$$

O termo fonte foi acrescido na Equação de Navier-Stokes para a validação do código.

Por questões de simplificação de notação o sobrescrito (-) que indica que a variável foi filtrada será abolido, mas as Equações do presente trabalho são as equações de Navier-Stokes filtradas.

$$\frac{\partial u_l}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j} (u_l u_j) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_l} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu_{ef} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) \right] + f_l, \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial u_l}{\partial x_l} = 0. \quad (3.33)$$

Transformando-se a equação da continuidade (3.33) para o espaço de Fourier,

$$\widehat{\frac{\partial u_l}{\partial x_l}} = 0, \quad (3.34)$$

e aplicando-se a propriedade da transformação de derivadas, dada por (3.27), tem-se:

$$ik_l \widehat{u_l} = 0. \quad (3.35)$$

Assim equação da continuidade transformada para o espaço de Fourier (3.35), indica que o vetor número de onda \vec{k} é ortogonal à velocidade transformada $\widehat{\vec{v}}(\vec{k}, t)$. Desta forma

pode-se definir um plano π perpendicular ao vetor número de onda \vec{k} ao qual o vetor velocidade transformado $\hat{\vec{v}}(\vec{k}, t)$ pertence.

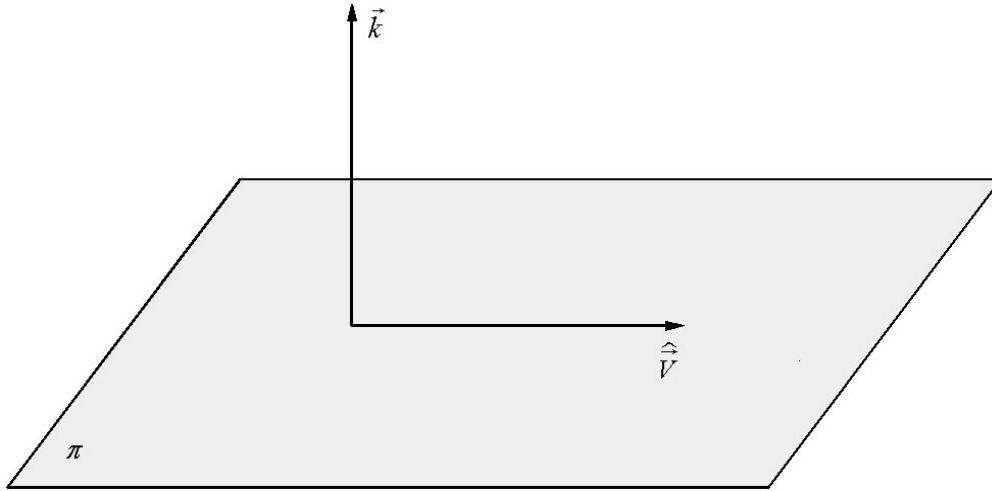


Figura 3.2 Definição do plano π (SILVEIRA-NETO, 2002).

Transformando a equação (3.32) para o espaço de Fourier, aplicando as propriedades definidas por (3.25) a (3.27), tem-se:

$$\frac{\partial \hat{u}_l}{\partial t} = -\widehat{\frac{\partial}{\partial x_j} (u_l u_j)} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_l} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu_{ef} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) \right] + \hat{f}_l. \quad (3.36)$$

Observando separadamente cada um dos termos transformados em (3.36), tem-se:

- Termo da taxa de variação da quantidade de movimento linear:

$$\frac{\partial \hat{u}_l}{\partial t} = \frac{\partial \hat{u}_l}{\partial t}, \quad (3.37)$$

mas, tem-se de (3.35) que $k_l \hat{u}_l = 0$.

Então,

$$\frac{\partial}{\partial t} (k_l \hat{u}_l) = k_l \frac{\partial \hat{u}_l}{\partial t}. \quad (3.38)$$

Assim, o termo transiente transformado também pertence ao plano π .

- Gradiente da pressão

$$\widehat{\frac{\partial p}{\partial x_l}} = ik_l \widehat{p}. \quad (3.39)$$

Nota-se que a transformada da pressão é colinear ao vetor número de onda, sendo, portanto perpendicular ao plano π .

- Termo não-linear

$$\widehat{\frac{\partial(u_l u_j)}{\partial x_j}} = ik_j \widehat{u_l u_j}. \quad (3.40)$$

No termo não-linear, Eq. (3.40), aparece a transformada do produto de duas funções que recai em uma integral de convolução, como definida em (3.29), ou seja:

$$\widehat{u_l u_j}(\vec{k}) = \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{u_l}(\vec{r}) \widehat{u_j}(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r}, \quad (3.41)$$

onde $\vec{k} = \vec{r} + \vec{s}$ representa as interações triádicas entre os vetores número de onda \vec{k} , \vec{r} e \vec{s} . Não se sabe a priori onde este termo transformado se encontra em relação ao plano π .

- Termo da difusão da quantidade de movimento linear:

$$\widehat{\frac{\partial}{\partial x_j} \left[v_{ef} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) \right]} = ik_j \widehat{v_{ef} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right)}. \quad (3.42)$$

O termo viscoso assim como o termo não linear também recai em uma integral de convolução, uma vez que tem-se a transformada de um produto de duas funções ou seja:

$$\widehat{v_{ef} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right)} = \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{v_{ef}}(\vec{r}) \widehat{\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right)}(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r}. \quad (3.43)$$

Não se sabe onde este termo está em relação ao plano π .

3.4.1 Método da Projeção

Com os termos definidos em (3.38), (3.39), (3.40) e (3.43) tem-se que:

$$\underbrace{\left[\frac{\partial \hat{u}_l}{\partial t} \right]}_{\in \pi} + \underbrace{\left[\frac{\partial(\widehat{u_l u_j})}{\partial x_j} + ik_l \hat{p} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu_{ef} \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_l} \right) \right] - \hat{f}_l \right]}_{\in \pi} = 0, \quad (3.44)$$

ou seja, sabendo-se que o termo transiente pertence ao plano π , tem-se que a soma do termo não-linear transformado com o gradiente de pressão transformado com o termo viscoso transformado e com o termo fonte transformado também deve pertencer ao plano π , já que a soma dos quatro termos é nula. Isto se deve ao fato que, se a soma de dois vetores é nula, então os dois vetores devem ser colineares.

Não se sabe a priori, em que posição se encontra o termo não-linear e o termo viscoso transformados e o termo fonte em relação ao plano π . No entanto pelos argumentos acima, sabe-se que a soma dos quatro vetores (gradiente de pressão, termo não linear, termo difusivo e termo fonte) transformados deve ser igual a projeção da soma do termo não linear, termo difusivo e do termo fonte no plano π . Assim será definido o tensor projeção, Eq. (3.45):

$$\overline{\delta}_{ij}(\vec{k}) = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}, \quad (3.45)$$

onde:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (3.46)$$

é o delta de Kronecker e k^2 é a norma ao quadrado do vetor número de onda, ou seja, $k^2 = k_i k_i$.

O tensor projeção $\left(\overline{\varphi}\right)$ projeta qualquer vetor sobre o plano π Lesieur (1997) apud Silveira-Neto (2002). Para verificar esta propriedade, toma-se um vetor \vec{a} qualquer, e faz-se a projeção de \vec{a} utilizando-se o tensor $\overline{\varphi}$, obtendo-se o seguinte:

$$\overline{\varphi} \cdot \vec{a} = \varphi_{ij} a_j = a_j \delta_{ij} - a_j \frac{k_i k_j}{k^2} = a_i - a_j k_j \frac{k_i}{k^2} = a_i^p, \quad (3.47)$$

onde a_i^p é o vetor a_i projetado por $\overline{\varphi}$. Fazendo-se o produto escalar da projeção a_i^p pelo vetor número de onda k_i , tem-se:

$$a_i^p k_i = a_i k_i - a_j k_j \frac{k_i k_i}{k^2} = 0. \quad (3.48)$$

Assim, verifica-se que o tensor $\overline{\varphi}$ projeta um vetor \vec{a} qualquer no plano π . Retornando à transformação das equações de Navier-Stokes filtradas, é necessário que:

$$\left[\frac{\widehat{\partial(u_i u_j)}}{\partial x_j} + ik_i \hat{p} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{v_{ef} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \right] - \hat{f}_i \right] \in \pi. \quad (3.49)$$

Como $ik_i \hat{p}$ é ortogonal ao plano π estabelece-se a Eq. (3.50):

$$\begin{aligned} \left[\frac{\widehat{\partial(u_i u_j)}}{\partial x_j} + ik_i \hat{p} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{v_{ef} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)} \right] - \hat{f}_i \right] = \\ \varphi_{lm} \left[\frac{\widehat{\partial(u_m u_j)}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\overline{v_{ef} \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right)} \right] - \hat{f}_m \right]. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Conclui-se, da Eq. (3.50), que a soma dos vetores transformados do gradiente de pressão, termo não-linear (*tnl*), do termo viscoso (*visc*) e do termo fonte transformados é a projeção do termo não-linear transformado somado ao termo viscoso transformado e somado ao termo fonte transformado sobre o plano π (Figura 3.3). Portanto, as equações de Navier-

Stokes para escoamentos incompressíveis com viscosidade variável acrescido de um termo fonte, assumem a seguinte forma, no espaço de Fourier:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{u}_i(\vec{k}, t)}{\partial t} = & -ik_j \wp_{lm} \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{u}_m(\vec{r}) \widehat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} \\ & + ik_j \wp_{lm} \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{v}_{ef}(\vec{r}) \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right) (\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} + \wp_{lm} \widehat{f}_m \end{aligned} \quad (3.51)$$

Estas são as equações de Navier-Stokes no espaço de Fourier, as quais são independentes do campo de pressão transformado.

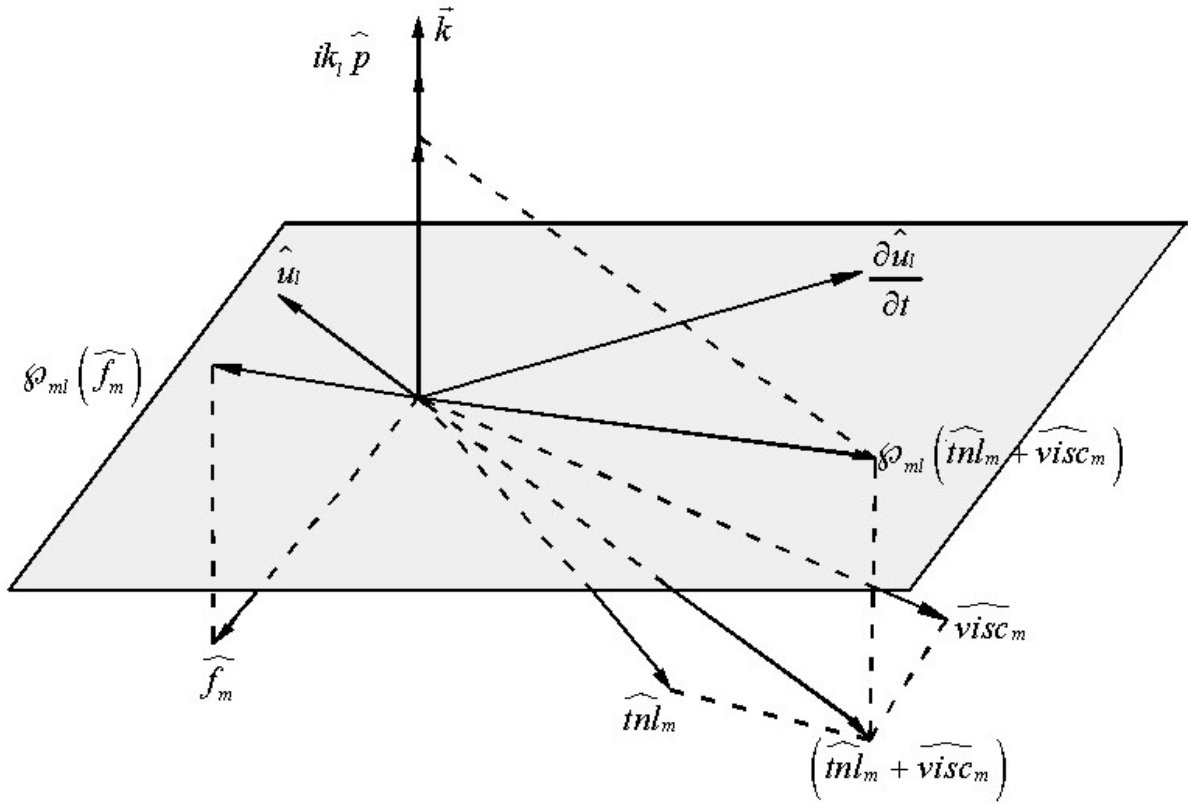


Figura 3.3 Projeção do termo não-linear, do termo difusivo e do termo fonte sobre o plano π .

3.4.2 Recuperação do Campo de Pressão

As equações de Navier-Stokes no espaço de Fourier (3.51) não dependem do campo de pressão, diferente de como acontece no espaço físico. Portanto, o método da projeção minimiza os cálculos para a resolução destas equações, já que não é necessário resolver o

campo de pressão, o qual, normalmente, demanda o maior esforço computacional nas metodologias convencionais. No entanto é possível determinar o campo de pressão a partir da equação (3.50).

Isolando-se o termo de pressão transformado, tem-se que:

$$\begin{aligned}
 ik_l \hat{p}(\vec{k}, t) = & \wp_{lm} \left[-ik_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \hat{u}_m(\vec{r}) \hat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} - \hat{f}_m \right] (\vec{k}, t) \\
 & + \wp_{lm} \left[ik_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{v}_{ef}(\vec{r}) \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right) (\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} \right] (\vec{k}, t) \\
 & - I_{lm} \left[-ik_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \hat{u}_m(\vec{r}) \hat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} + ik_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{v}_{ef}(\vec{r}) \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right) (\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} - \hat{f}_l \right] (\vec{k}, t).
 \end{aligned} \tag{3.52}$$

Observa-se que o tensor identidade (I_{lm}) foi introduzido, por conveniência, sem alterar a Eq. (3.50). Substituindo as transformadas, tem-se:

$$\begin{aligned}
 ik_l \hat{p}(\vec{k}, t) = & (\wp_{lm} - I_{lm}) ik_j \left[- \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \hat{u}_m(\vec{r}) \hat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} - \hat{f}_m \right] (\vec{k}, t) \\
 & + \left[\int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{v}_{ef}(\vec{r}) \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right) (\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} \right] (\vec{k}, t).
 \end{aligned} \tag{3.53}$$

Fazendo o produto escalar desta equação pelo vetor número de onda k_l , tem-se:

$$\begin{aligned}
 k^2 \hat{p}(\vec{k}, t) = & (\wp_{lm} - I_{lm}) k_l k_j \left[- \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \hat{u}_m(\vec{r}) \hat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} - \hat{f}_m \right] (\vec{k}, t) \\
 & + \left[\int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{v}_{ef}(\vec{r}) \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right) (\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} \right] (\vec{k}, t).
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

Observando-se que:

$$(\wp_{lm} - I_{lm}) k_l = \left(\delta_{lj} - \frac{k_l k_j}{k^2} - I_{lm} \right) k_l = -k_m. \tag{3.55}$$

Assim, tem-se que:

$$k^2 \hat{p}(\vec{k}, t) = -k_m k_j \left[- \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \hat{u}_m(\vec{r}) \hat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} + \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{v}_{ef}(\vec{r}) \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right) (\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} - \hat{f}_m \right] (\vec{k}, t), \quad (3.56)$$

logo,

$$\hat{p}(\vec{k}, t) = \frac{-k_m k_j}{k^2} \left[- \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \hat{u}_m(\vec{r}) \hat{u}_j(\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} + \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{v}_{ef}(\vec{r}) \left(\frac{\partial u_m}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_m} \right) (\vec{k}-\vec{r}) d\vec{r} - \hat{f}_m \right] (\vec{k}, t), \quad (3.57)$$

de onde,

$$p(\vec{x}, t) = \left[\hat{p}(\vec{k}, t) \right]^{-1}. \quad (3.58)$$

A notação $[\]^{-1}$ tem aqui o significado de transformada inversa de Fourier.

CAPÍTULO IV

4 MÉTODO NUMÉRICO

4.1 DFT e FFT

Para trabalhar computacionalmente com a transformada de Fourier utiliza-se a versão discreta, denominada Transformada Discreta de Fourier (DFT do inglês Discrete Fourier transform), definida na Eq. (4.1) (BRIGGS, 1995):

$$\hat{f}_k = \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} f_n e^{\frac{-i2\pi kn}{N}}, \quad (4.1)$$

onde k é o número de onda, N é o número de pontos da malha, n fornece a posição x_n dos nós de colocação ($x_n = n \cdot x$) e $i = \sqrt{-1}$.

A Eq. (4.1) é a aproximação numérica da transformada de Fourier. Existe também a Transformada Inversa Discreta de Fourier, definida na Eq. (4.2):

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \hat{f}_k e^{\frac{i2\pi kn}{N}}. \quad (4.2)$$

Deve-se notar que para se trabalhar com a DFT, a função a ser transformada para o espaço espectral deve ser periódica, ou seja:

$$\vec{f}(\vec{x}, t) = \vec{f}(\vec{x} + L, t), \quad (4.3)$$

onde L é o comprimento de onda considerado. Esta propriedade limita o uso do método espectral de Fourier para problemas modelados por EDP's com condições de contorno periódicas.

Cooley e Tukey (1965) desenvolveram o algoritmo denominado Transformada Rápida de Fourier (FFT do inglês Fast Fourier transform), o qual trabalha com o procedimento denominado rotação de bit, tornando o cálculo da DFT muito mais eficiente quando comparado com (4.1), pois o número de operações reduz-se de N^2 para $N \log_2 N$. Esse custo computacional torna atrativa a utilização de métodos espectrais para resolver equações diferenciais parciais. Outra grande vantagem do método espectral é a precisão numérica, a qual será mostrada mais adiante através da resolução de problemas teste. Porém, para se conseguir atingir a melhor performance na utilização das FFTs é preciso usar $2N$ pontos de colocação (onde N é um número inteiro). Além disto, a malha deve ser regular e os pontos de colocação uniformemente espaçados.

Encontram-se disponíveis várias sub-rotinas para o uso da FFT (<http://www.fftw.org/benchfft/ffts.html>), as quais levam em conta diversos parâmetros, como por exemplo, trabalhar com dados reais ou complexos, número par ou ímpar de nós de colocação, simples ou dupla precisão, unidimensional, bidimensional ou tridimensional, serial ou paralelo, números de nós de colocação de potência 2, 3 ou 5 e em diversas linguagens de programação. No presente trabalho foram utilizadas as rotinas FFTE escritas por Takahashi, (2005), que são rotinas de código aberto escritas em Fortran.

Um parâmetro muito importante a ser considerado é o cálculo dos números de onda (\vec{k}), que são usados na resolução das equações transformadas.

Para a FFT os vetores número de onda são calculados da seguinte forma (POULTER, 2004):

$$\begin{aligned} k_{l(\eta)} &= \eta - 1 & 1 < \eta < \frac{N}{2} + 1 \\ k_{l(\eta)} &= \eta - 1 - N & \frac{N}{2} + 2 < \eta < N, \end{aligned} \quad (4.4)$$

onde, k_l é o vetor número de onda, N é o número de nós de colocação e η é a posição no vetor em uma direção do domínio. Caso outra subrotina que calcule a FFT for utilizada, deve-se observar como é cálculo dos números de onda da mesma, uma vez que este parâmetro é mudado para cada subrotina.

Nas equações de Navier-Stokes existe o produto de duas variáveis. Quando se transforma o produto para o espaço espectral, pelas propriedades já apresentadas, recai num

$$\text{integral de convolução } \left(\widehat{f(\vec{x})g(\vec{x})}(\vec{k}) = \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{f}(\vec{r})\widehat{g}(\vec{k}-\vec{r})d\vec{r} = \widehat{f} * \widehat{g} \right).$$

Numericamente a resolução de integrais de convolução é inviável devido ao alto custo computacional. Para contornar este problema utiliza-se o método pseudo-espectral, que consiste em transformar para o espaço físico os campos das variáveis $[\widehat{f}]^{-1}$ e $[\widehat{g}]^{-1}$. Calcula-se este produto das variáveis no espaço físico ($p = f \cdot g$) e posteriormente leva-se o produto para o espaço espectral $[p]^{-1}$, como exemplo segue a baixo o processo de calculo para o termo não linear na forma divergente.

$$\underbrace{\frac{\partial(\widehat{u_l u_j})}{\partial x_j} = ik_j \widehat{u_l u_j} = ik_j (\widehat{u_l} * \widehat{u_j}) = ik_j \int_{\vec{k}=\vec{r}+\vec{s}} \widehat{u_l}(\vec{r})\widehat{u_j}(\vec{k}-\vec{r})d\vec{r}}_{\text{Método Espectral}} = \underbrace{ik_j \left([\widehat{u_l}]^{-1} [\widehat{u_j}]^{-1} \right)}_{\text{Método Pseudo-Espectral}}. \quad (4.5)$$

4.2 Tratamento do termo não-linear

O termo não-linear pode ser tratado de diferentes formas (CANUTO et al. 1988), que apesar de matematicamente idênticas, apresentam diferentes propriedades quando discretizadas. Estas formas são:

Forma advectiva:

$$(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}) \vec{V}. \quad (4.6)$$

Forma divergente:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{V}). \quad (4.7)$$

Forma skew-simétrica:

$$\frac{1}{2} \left[(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) \vec{V} + \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \vec{V}) \right]. \quad (4.8)$$

Forma rotacional:

$$\frac{1}{2} \vec{\nabla} \cdot (\vec{V} \vec{V}) + \vec{\omega} \times \vec{V}. \quad (4.9)$$

onde $\vec{\omega} = \vec{\nabla} \times \vec{V}$.

Estas expressões são algebricamente iguais, assumindo $\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0$. Porém quando discretizada, a forma rotacional é a menos cara, mas introduz oscilações nas altas frequências espaciais, a menos que o processo de dealias (CANUTO, 1988) seja usado. No entanto, este processo aumenta o custo do cálculo dos coeficientes de Fourier consideravelmente. A forma skew-simétrica é a mais estável e apresenta os melhores resultados, mas é cerca duas vezes mais cara computacionalmente que a rotacional. No entanto, este inconveniente pode ser resolvido. Observando as expressões acima, nota-se que a forma skew-simétrica é a média entre as formas advectiva e divergente. Portanto, a forma skew-simétrica pode ser simulada pela alternância entre as formas advectiva e divergente em sucessivos passos de tempo (ZANG, 1987). O algoritmo básico de um método pseudo-espectral com tratamento do termo não-linear na forma skew-simétrica alternada, utilizada no presente trabalho está descrito abaixo:

- 1) Primeiro traz-se o campo \widehat{u}_l para o espaço físico, como condição inicial utiliza-se um campo que satisfaça a equação da continuidade;
- 2) Calcula-se o produto $u_l u_j$ no espaço físico;
- 3) Transforma-se o produto $u_l u_j$ para o espaço de Fourier $\widehat{u_l u_j}$;
- 4) Calcula-se a derivada de $\widehat{u_l u_j}$ no espaço de Fourier, ou seja, $ik_j \widehat{u_l u_j}$;

5) Avança-se no tempo e resolvem-se as equações de Navier-Stokes;

Esta é a parte que trabalha com o termo não-linear na forma divergente. No próximo passo de tempo o termo não-linear será tratado na forma advectiva.

1) Calcula-se a derivada $ik_j \widehat{u_l}$;

2) Faz-se a transformada inversa da derivada $ik_j \widehat{u_l}$ e do campo de velocidade $\widehat{u_j}$;

3) Multiplica-se no espaço físico $u_j \frac{\partial u_l}{\partial x_j}$;

4) Transforma-se o produto $u_j \frac{\partial u_l}{\partial x_j}$ para o espaço de Fourier, obtendo-se $\widehat{u_j \frac{\partial u_l}{\partial x_j}}$;

5) Resolve-se as equações de Navier-Stokes, avança-se no tempo e retorna-se ao cálculo do termo não-linear na forma advectiva.

Esta seqüência de passos é o tratamento do termo não-linear através da forma skew-simétrica alternada equivalente. Esta metodologia é mais barata computacionalmente do que resolver a integral de convolução. Além disso, segundo Souza (2005), ela é mais estável que as formas advectiva e divergente separadamente e mais barata que as formas rotacional com dealise e skew-simétrica convencional.

4.3 Avanço temporal

Analísaram-se diferentes métodos de avanço temporal de diferentes ordens de precisão. Em geral os testes realizados foram apenas para escolher o esquema de avanço temporal, não sendo o objetivo do presente trabalho a análise ou comparação entre as metodologias. Serão expostos apenas os motivos que levaram à escolha do método de Runge-Kutta de ordem quatro aos outros métodos, que será usado em todas as simulações do presente trabalho.

Testou-se um caso com diferentes esquemas de avanço temporal para os métodos Adams-Bashforth de terceira ordem e os métodos de Runge-Kutta com segunda, terceira e quarta ordens.

O método de Adams-Bashforth de terceira ordem é mais barato que o método de Runge-Kutta de terceira ordem quando se usa o mesmo incremento de avanço temporal, mas requer o

conhecimento de três passos de tempo precedentes das variáveis. Já o método de Runge-Kutta necessita do conhecimento apenas do tempo anterior.

O método de Runge-Kutta quando comparado com o método de Adams-Bashforth é mais caro, mas como é mais estável ele permite a uso de um incremento temporal maior que o método de Adams-Bashforth tornando-se assim mais rápido com computo total das simulações.

A escolha do método de Runge-Kutta de quarta ordem em relação às ordens inferiores foi para garantir que o esquema de avanço temporal não comprometa a alta precisão do método espectral. Assim, mais uma vez, os principais motivos da escolha do método de Runge-Kutta de quarta é a ordem de convergência aliado a boa estabilidade.

Aplicando a metodologia aos métodos espectrais para a Eq. (3.51) temos:

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \widehat{RHS}(\widehat{u}_l^n, t_n), \\
 K_2 &= \widehat{RHS}\left(\widehat{u}_l^n + \frac{1}{2}\Delta t K_1, t_n + \frac{1}{2}\Delta t\right), \\
 K_3 &= \widehat{RHS}\left(\widehat{u}_l^n + \frac{1}{2}\Delta t K_2, t_n + \frac{1}{2}\Delta t\right), \\
 K_4 &= \widehat{RHS}\left(\widehat{u}_l^n + \Delta t K_3, t_n + \Delta t\right), \\
 \widehat{u}_l^{n+1} &= \widehat{u}_l^n + \frac{1}{6}\Delta t (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4),
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

onde \widehat{RHS} é o lado direito da equação diferencial no espaço de Fourier com o termo não-linear e o termo viscoso tratados de forma pseudo-espectral, como descrito na sessão anterior:

$$\widehat{RHS}_l^n = \wp_{lm} \left[\widehat{tnl}_m^n + \widehat{visc}_m^n \right], \tag{4.11}$$

onde \widehat{tnl}_m^n é o termo não linear calculado de forma pseudo-espectral e \widehat{visc}_m^n é o termo viscoso calculado de forma pseudo-espectral, ambos no tempo n, assim este é um método totalmente explícito.

CAPÍTULO V

5 RESULTADOS

5.1 Validação

A validação do código ESPC3D foi feita para o caso decaimento temporal dos vórtices de Taylor-Green (HENSHAW, 1994), em um domínio retangular $L_x \times L_y \times L_z$ com condições periódicas nos contornos $x=0$, $x=L_x$, $y=0$, $y=L_y$ e $z=0$ e $z=L_z$, partindo das condições iniciais:

$$u(x, y, z) = \sin(x) \cos(y) \cos(z), \quad (5.1)$$

$$v(x, y, z) = \cos(x) \sin(y) \cos(z), \quad (5.2)$$

$$w(x, y, z) = -2 \cos(x) \cos(y) \sin(z), \quad (5.3)$$

$$p(x, y, z) = \sin(x) \sin(y) \sin(z), \quad (5.4)$$

com a solução analítica para as equações de Navier-Stokes dada por:

$$u(x, y, z, t) = \sin(x) \cos(y) \cos(z) \cos(2\pi t), \quad (5.5)$$

$$v(x, y, z, t) = \cos(x) \sin(y) \cos(z) \cos(2\pi t), \quad (5.6)$$

$$w(x, y, z, t) = -2 \cos(x) \cos(y) \sin(z) \cos(2\pi t), \quad (5.7)$$

$$p(x, y, z, t) = \sin(x) \sin(y) \sin(z) \cos(2\pi t). \quad (5.8)$$

Esta solução exata foi utilizada para comparações com os resultados obtidos através do código ESPC3D em uma simulação considerando um domínio cúbico com $L_x = L_y = L_z$ discretizado em $n_x \times n_y \times n_z$ pontos de malha com $n_x = n_y = n_z$. Foram utilizadas malhas com 8^3 , 16^3 e 32^3 pontos, com simples precisão para todas as simulações. O erro foi calculado através da norma L_2 da componente de velocidade calculada u_c e a sua solução exata u_e :

$$L_2 = \sqrt{\frac{1}{n_x} \frac{1}{n_y} \frac{1}{n_z} \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{k=1}^{n_z} \left(u_c(x_i, y_j, z_k, t_1) - u_e(x_i, y_j, z_k, t_1) \right)^2}, \quad (5.9)$$

com $x_i = (i-1)L_x / n_x$, $y_j = (j-1)L_y / n_y$ e $z_k = (k-1)L_z / n_z$.

A Figura 5.1 (a) apresenta o campo do módulo de vorticidade e a Figura 5.1 (b) apresenta a pressão resultante das simulações dos vórtices de Taylor Green. As cores vermelha e azul representam grande concentração da variável. A cor verde indica que os valores próximos a zero.

As Figura 5.2, Figura 5.3 e Figura 5.4 ilustram a evolução temporal (em segundos) para as variáveis do escoamento e para as malhas de 8^3 , 16^3 e 32^3 . O eu , ev , ew e ep representam respectivamente os erros em relação à componente u de velocidade, à componente v de velocidade, à componente w de velocidade e o à pressão.

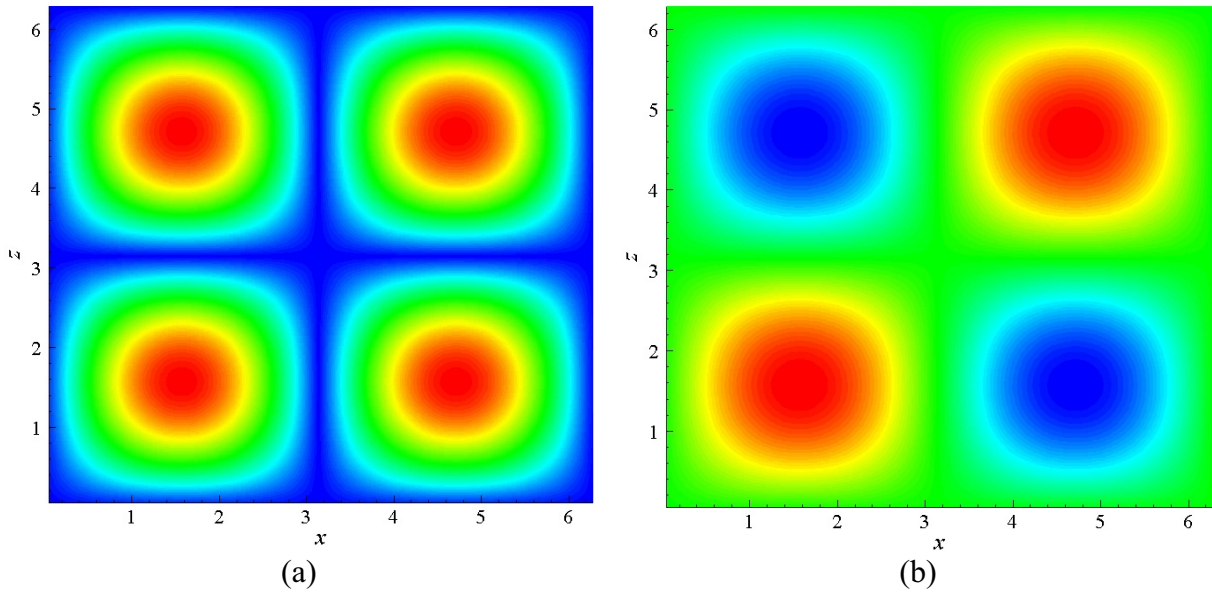


Figura 5.1 Campos gerados pelos vórtices de Taylor-Green: (a) módulo de vorticidade $\|w\|$ e (b) pressão.

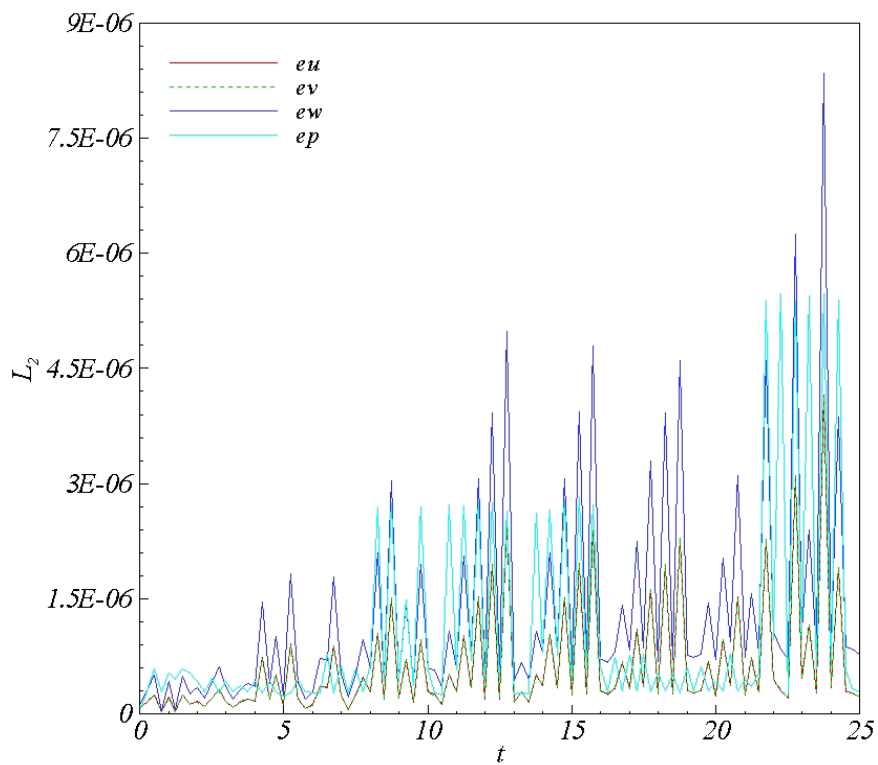


Figura 5.2 Evolução temporal do erro das componentes de velocidade e pressão para uma malha de 8^3 .

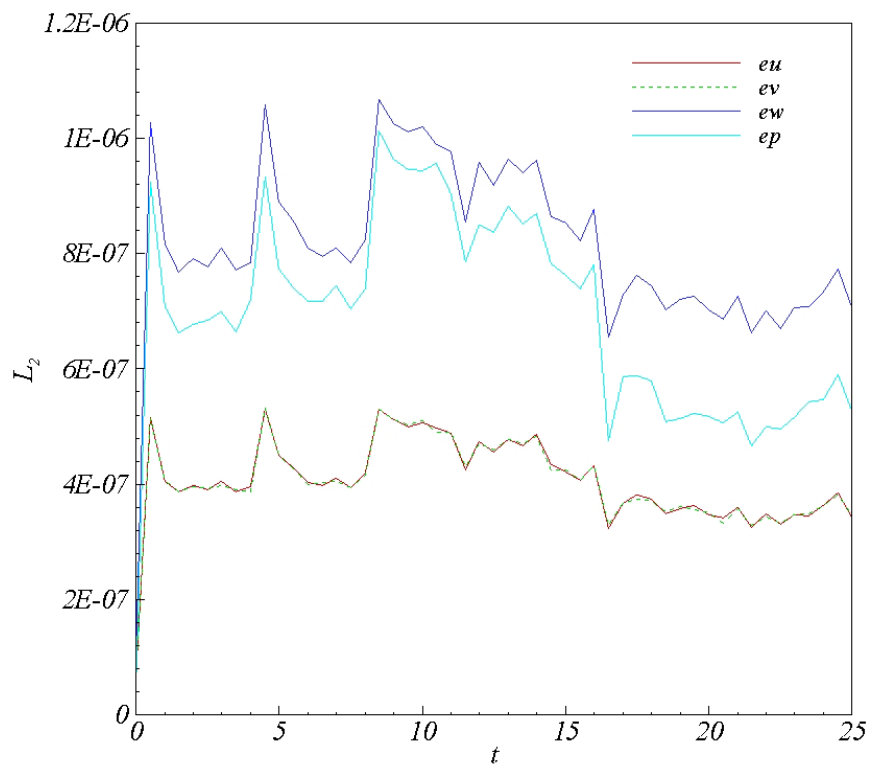


Figura 5.3 Evolução temporal do erro das componentes de velocidade e pressão para uma malha de 16^3 .

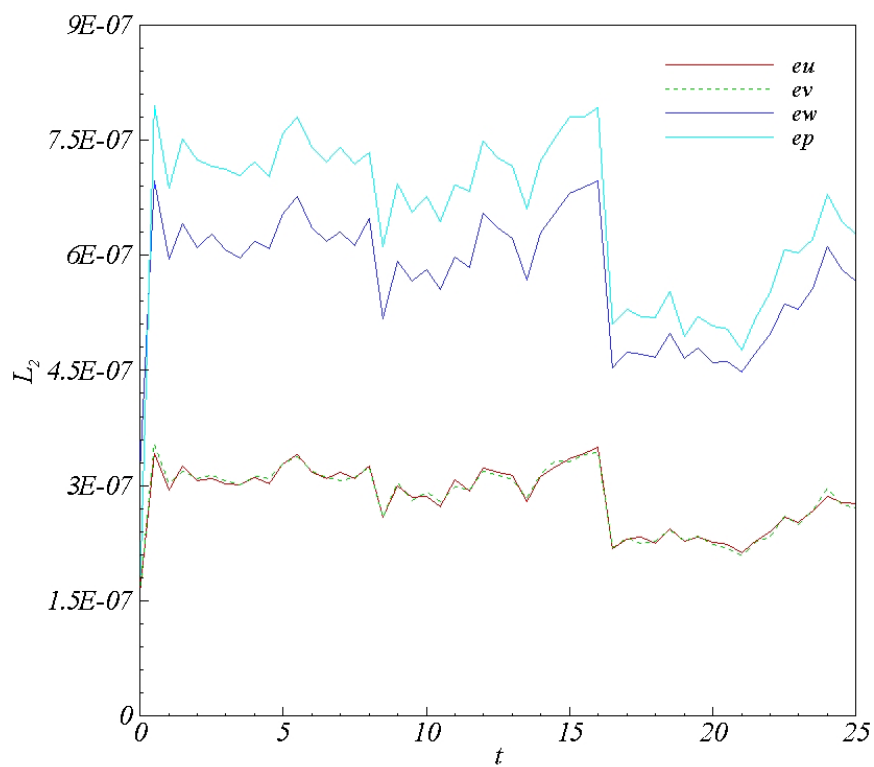


Figura 5.4 Evolução temporal do erro das componentes de velocidade e pressão para uma malha de 32^3 .

A Figura 5.5 ilustra a evolução temporal da componente u de velocidade para as malhas de 8^3 , 16^3 e 32^3 . À medida que aumenta o número de pontos de colocação o erro diminui, como esperado. Para a malha de 8^3 o erro da componente u de velocidade têm um comportamento oscilante e com o desenvolver da simulação há também o aumento da amplitude das oscilações. Este fenômeno provavelmente está relacionado com o baixo número de pontos de colocação, pois com o aumento dos pontos da malha este comportamento desaparece. Comportamento semelhante pode ser observado nas Figura 5.6, Figura 5.7 e Figura 5.8.

As Figura 5.6, Figura 5.7 e Figura 5.8 ilustram as evoluções temporais das componentes v e w e para a pressão 8^3 , 16^3 e 32^3 .

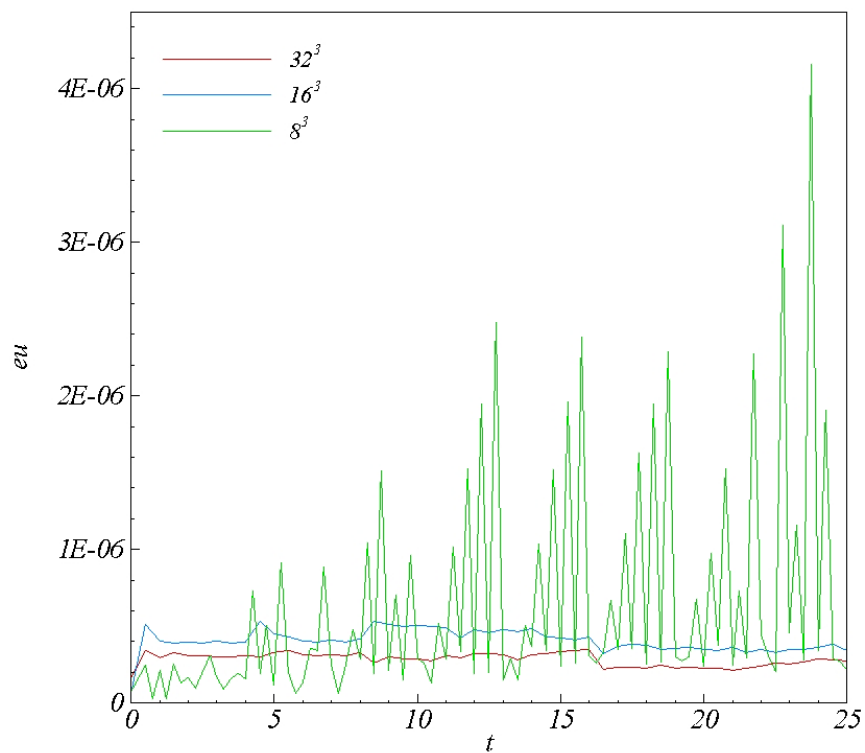


Figura 5.5 Evolução temporal do erro da componente de velocidade u para as malhas de 8^3 , 16^3 e 32^3 .

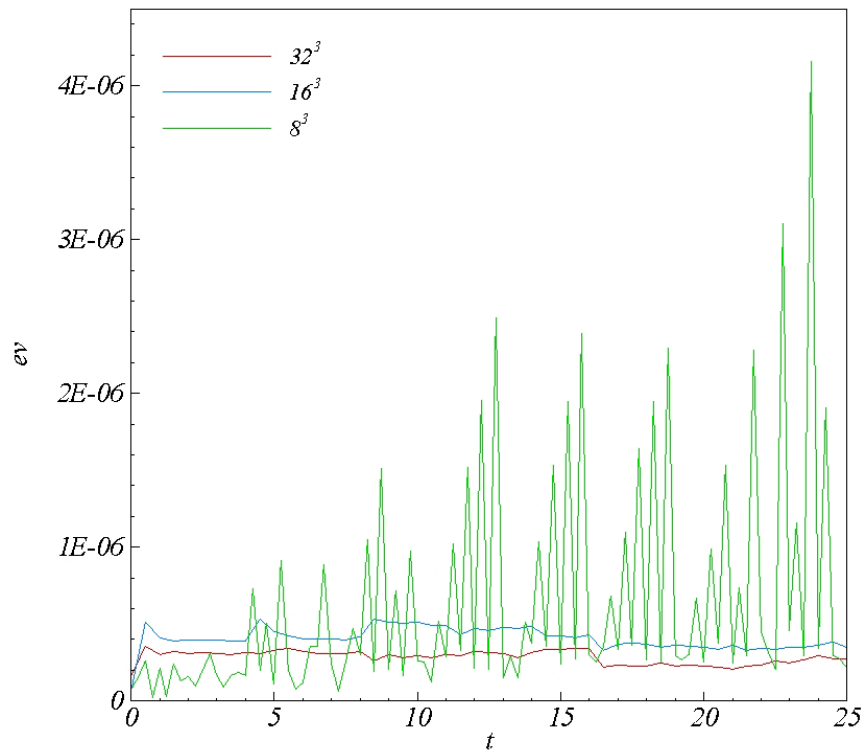


Figura 5.6 Evolução temporal do erro da componente de velocidade v para as malhas de 8^3 , 16^3 e 32^3 .

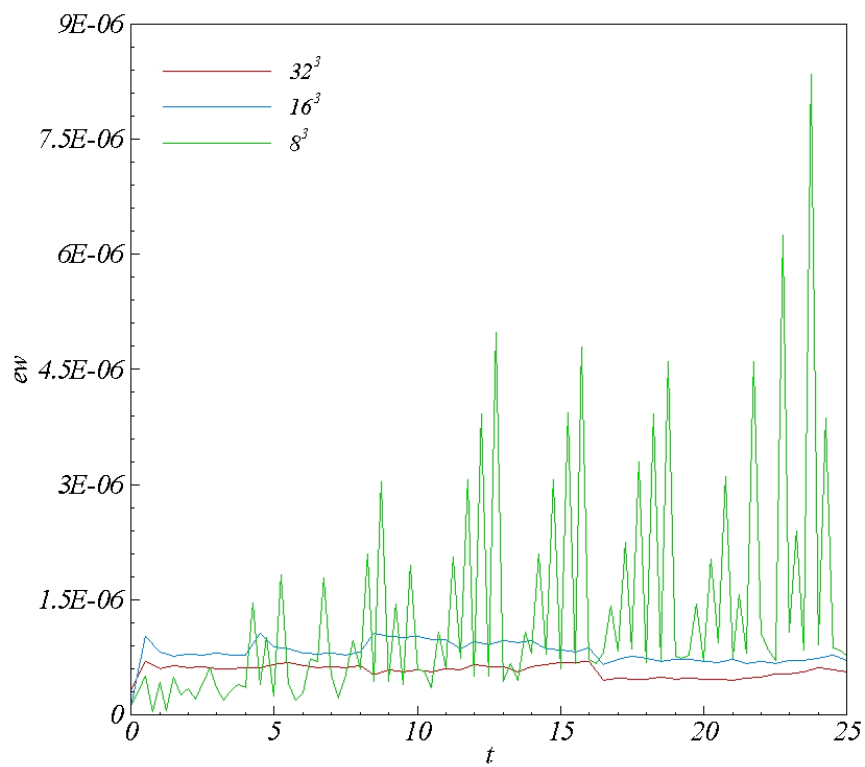


Figura 5.7 Evolução temporal do erro da componente de velocidade w para as malhas de 8^3 , 16^3 e 32^3 .

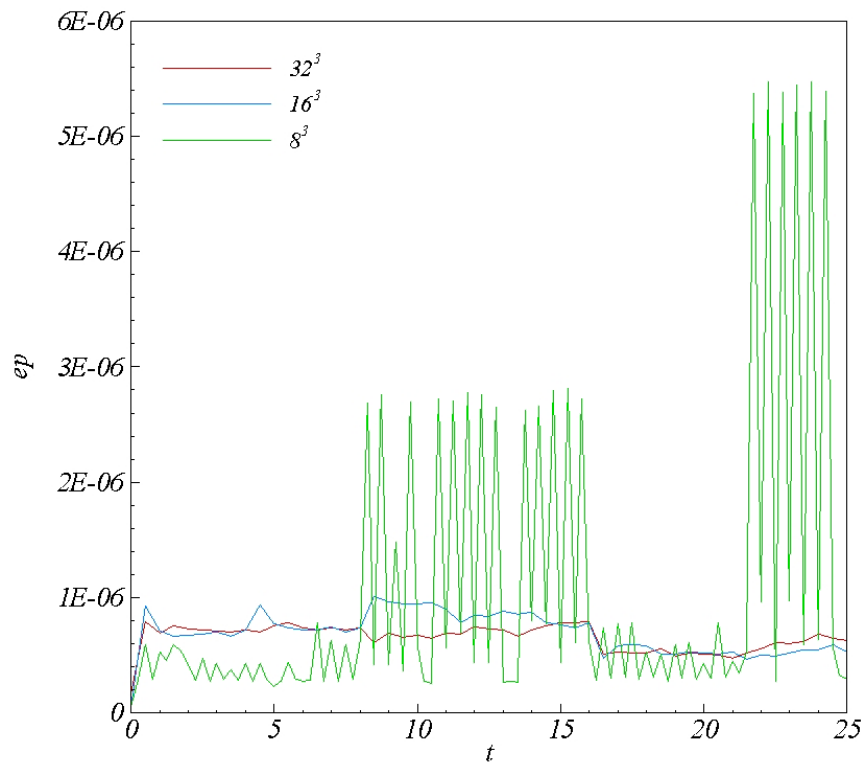


Figura 5.8 Evolução temporal do erro da pressão para as malhas de 8^3 , 16^3 e 32^3 .

A Tabela 1 apresenta os erros máximos calculados com as Eqs. (5.9). Verifica-se que à medida que aumenta o número de pontos da malha os erros diminuem, mas mesmo para uma malha de 8^3 os cálculos apresentam erros da ordem de 4×10^{-6} , o que comprova mais uma vez a precisão do método pseudo-espectral utilizado no código ESPC3D.

Tabela 1 – Máxima Norma L_2 entre a solução analítica e solução numérica.

Nº de Pontos de Colocação	8^3	16^3	32^3
eu	$4,15 \times 10^{-6}$	$5,30 \times 10^{-7}$	$3,53 \times 10^{-7}$
ev	$4,15 \times 10^{-6}$	$5,31 \times 10^{-7}$	$3,46 \times 10^{-7}$
ew	$8,30 \times 10^{-6}$	$1,06 \times 10^{-6}$	$6,70 \times 10^{-7}$
ep	$5,46 \times 10^{-6}$	$1,01 \times 10^{-6}$	$7,92 \times 10^{-7}$

5.2 Análise do Jato Circular Tridimensional em decaimento temporal

Realizada a validação do código (ESPC3D), objetivou-se o estudo da influência da modelagem sub-malha nas simulações de um jato circular em decaimento temporal. Este

estudo restringe a análises qualitativas de simulações de jatos em transição e/ou turbulentos utilizando o modelo de Smagorinsky para modelar as escalas filtradas do escoamento.

Simulações utilizando jatos temporais foram realizadas, pois em desenvolvimentos de métodos pseudo-espectrais, necessitamos fazer a hipótese de periodicidade. Assim, ficamos restritos ao uso de alguns escoamentos que podem ser, teoricamente, considerados periódicos como: turbulência homogênea e isotrópica numa caixa quadrangular; camadas de mistura em desenvolvimento temporal e jatos temporais.

Primeiramente definiu-se um caso teste, e simulações foram feitas para o ajuste da constante de Smagorinsky, em seguida, será apresentada a influência da constante a ser ajustada sobre escoamentos do tipo jatos. Analisou-se também a influência do número de Reynolds em função da constante de Smagorinsky.

Para todas as simulações são utilizadas condições de contorno periódicas nas três direções do escoamento, sendo esta uma condição necessária do método pseudo-espectral, utilizado no presente trabalho. Utilizou-se um passo de tempo de 0,025 s , e o domínio de cálculo cúbico de dimensões $10d \times 10d \times 10d$, onde d é o diâmetro do jato, como mostra a Figura 5.9. Em todas as simulações utilizou-se um malha de $128 \times 128 \times 128$ pontos de colocação.

O perfil de velocidade inicial de cálculo é o mesmo em todas as simulações, dado por:

$$w_0(x, y, z) = \frac{w_1 + w_2}{2} - \frac{w_1 - w_2}{2} \tanh\left(\frac{1}{4} \frac{R}{\theta} \left(\frac{r}{R} - \frac{R}{r}\right)\right), \quad (5.10)$$

onde w_1 é a velocidade de entrada do jato, w_2 a velocidade de “co-flow”, a qual no presente trabalho, foi adotada como zero, R o raio do jato e θ a espessura do momento cisalhante. A Taxa R/θ define a inclinação do perfil de velocidade, e tem forte influência no processo de transição a turbulência, e de forma geral, na medida em que a taxa aumenta, a instabilidade do jato também aumenta, Michalke e Herman (1982) apud Silva (2001). No presente trabalho foi utilizada a taxa $R/\theta = 20$, Silva (2002). A Figura 5.10 mostra esquematicamente o perfil $w_0(x, y, z)$.

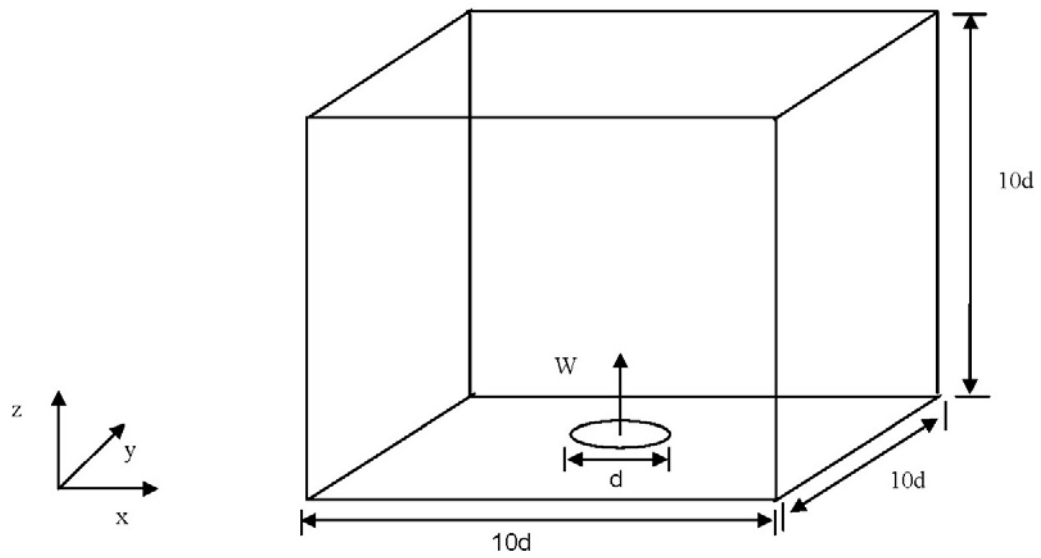


Figura 5.9 Esquema do domínio de cálculo.

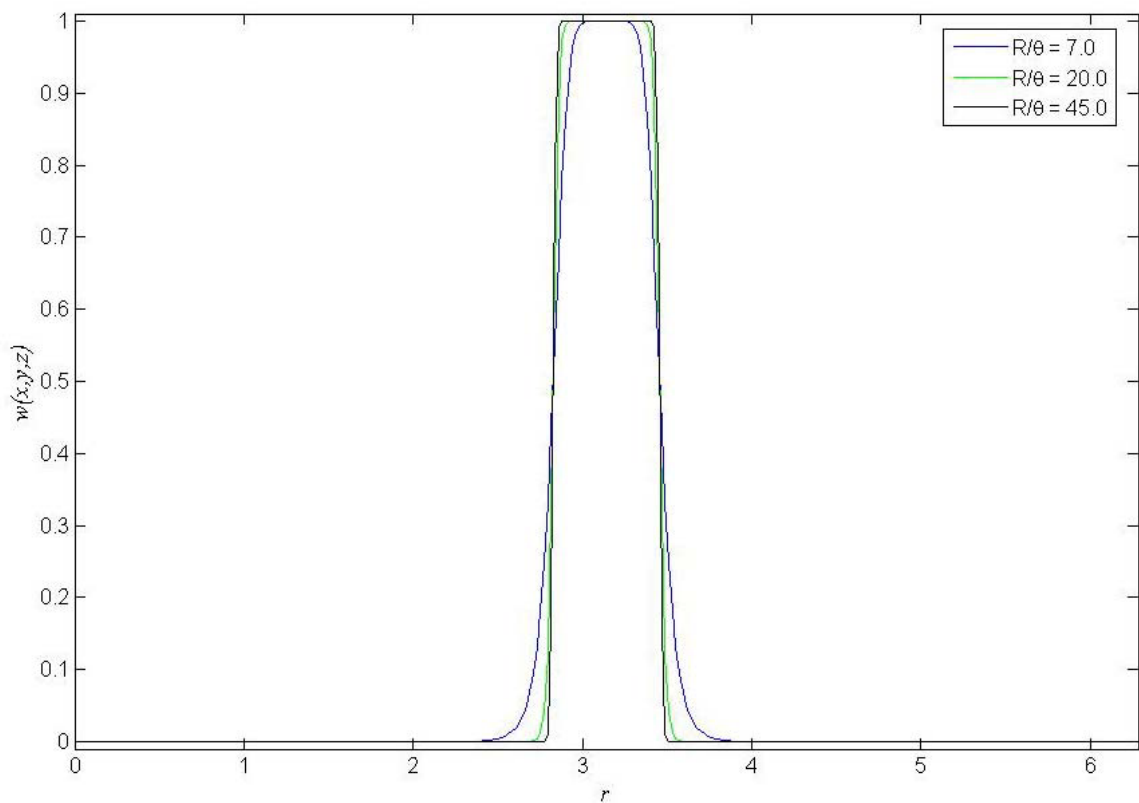


Figura 5.10 Perfil de velocidade axial inicial $w(x, y, z)$.

É importante lembrar que as condições de periodicidade impostas produzem um escoamento que, embora não seja idêntico ao desenvolvimento espacial do jato, assemelha-se a ele. Estruturas tridimensionais, fenômenos como formação de instabilidades de Kelvin-Helmholtz toroidais e emparelhamentos são identificados em evolução temporal e não em uma região particular do espaço.

As análises qualitativas do escoamento em cada caso estudado foram feitas através de visualizações de isosuperfície do módulo de vorticidade, da relação entre a viscosidade efetiva e molecular e do denominado critério Q (HUNT et al., 1988) em diferentes instantes de tempo. Um valor positivo do critério Q indica estruturas coerentes em escoamentos cisalhantes livres, Silva (2002). O critério Q é baseado no segundo invariante dos tensores rotação e taxa de deformação:

$$Q = \frac{1}{2}(\Omega_{ij}\Omega_{ij} - S_{ij}S_{ij}), \quad (5.11)$$

onde Ω_{ij} é a parte anti-simétrica e S_{ij} é a parte simétrica do tensor gradiente de velocidade:

$$\Omega_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (5.12)$$

$$S_{ij} = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (5.13)$$

São analisados o módulo de vorticidade e a relação entre a viscosidade efetiva e molecular em dois planos específicos do domínio de cálculo, no plano xy ($z = \pi$) e no plano xz ($y = \pi$).

Além de análises qualitativas, foram também construídos os espectros de energia cinética turbulenta dos escoamentos em diferentes instantes de tempo, calculado, segundo a metodologia proposta por Pope (2000), a partir dos campos de velocidade no espaço de Fourier a diferentes instantes de tempo.

O espectro (Figura 3.1) é uma forma poderosa de se entender como a atividade turbulenta de um escoamento se dá em função dos tamanhos das diferentes estruturas turbilhonares que o caracterizam. Como é intuitivo, as maiores estruturas (menores números de onda) são as portadoras de maior quantidade de energia. Quanto maior o número de onda, menor é a estrutura turbilhonar e menor a quantidade de energia transportada por ela. No espectro podem-se identificar diferentes zonas características, a primeira é a zona inercial, onde o processo de transferência de energia entre as diferentes escalas do fenômeno é não linear. À medida que o número de onda aumenta, ou seja, o tamanho das estruturas turbulentas diminui, o número de Reynolds local diminui também e o processo de dissipação

viscosa começa a predominar sobre os efeitos não lineares.

Destaca-se que cada escoamento tem um número de onda característico de injeção de energia, $k_I = 2\pi / \ell_I$, onde ℓ_I é o tamanho da estrutura turbilhonar associada. A energia injetada se divide seguindo dois cursos, ou seja, o curso da transferência direta de energia, das maiores para as menores escalas, e o curso da transferência inversa de energia, ou seja, das menores para as maiores escalas.

O denominado jato “natural” caracteriza-se pela imposição de uma perturbação randômica do tipo “ruído branco” à componente axial de velocidade. As perturbações são adicionadas apenas na camada de cisalhamento da condição inicial que tem o perfil de velocidade dado pela w_0 na Eq (5.10). Para que a transição ocorra mais rapidamente também será acrescentado “ruído branco” nas componentes u e v de velocidade dados pelas Eq. (5.14) e (5.15):

$$u(x, y, z) = 5 \left(\frac{0,5 - a}{100,0} \right), \quad (5.14)$$

$$v(x, y, z) = 5 \left(\frac{0,5 - a}{100,0} \right), \quad (5.15)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y, z) + 5 \left(\frac{0,5 - a}{100,0} \right), \quad (5.16)$$

sendo a um número aleatoriamente gerado entre 0 e 1.

5.2.1 Visualização das estruturas do escoamento número de Reynolds igual a 5.000 e constante de Smagorinsky igual a 0,27

Os resultados da simulação do jato natural são apresentados a seguir na Figura 5.11, que ilustra a evolução temporal do jato pela visualização das isosuperfícies do módulo de vorticidade $\|w\|$ ao nível $1,6 \text{ s}^{-1}$, mostrando como as instabilidades são iniciadas e como elas evoluem no tempo. Na Figura 5.12 são apresentadas as isosuperfícies da evolução temporal da relação entre a viscosidade efetiva e viscosidade molecular ao nível 2,0, enquanto na Figura 5.13 é apresentada a evolução temporal das isosuperfícies do critério Q , no nível $0,01 \text{ s}^{-1}$. Escolha dos isovalores foi realizada de forma que os campos tivessem uma boa visualização qualitativa dos campos em questão.

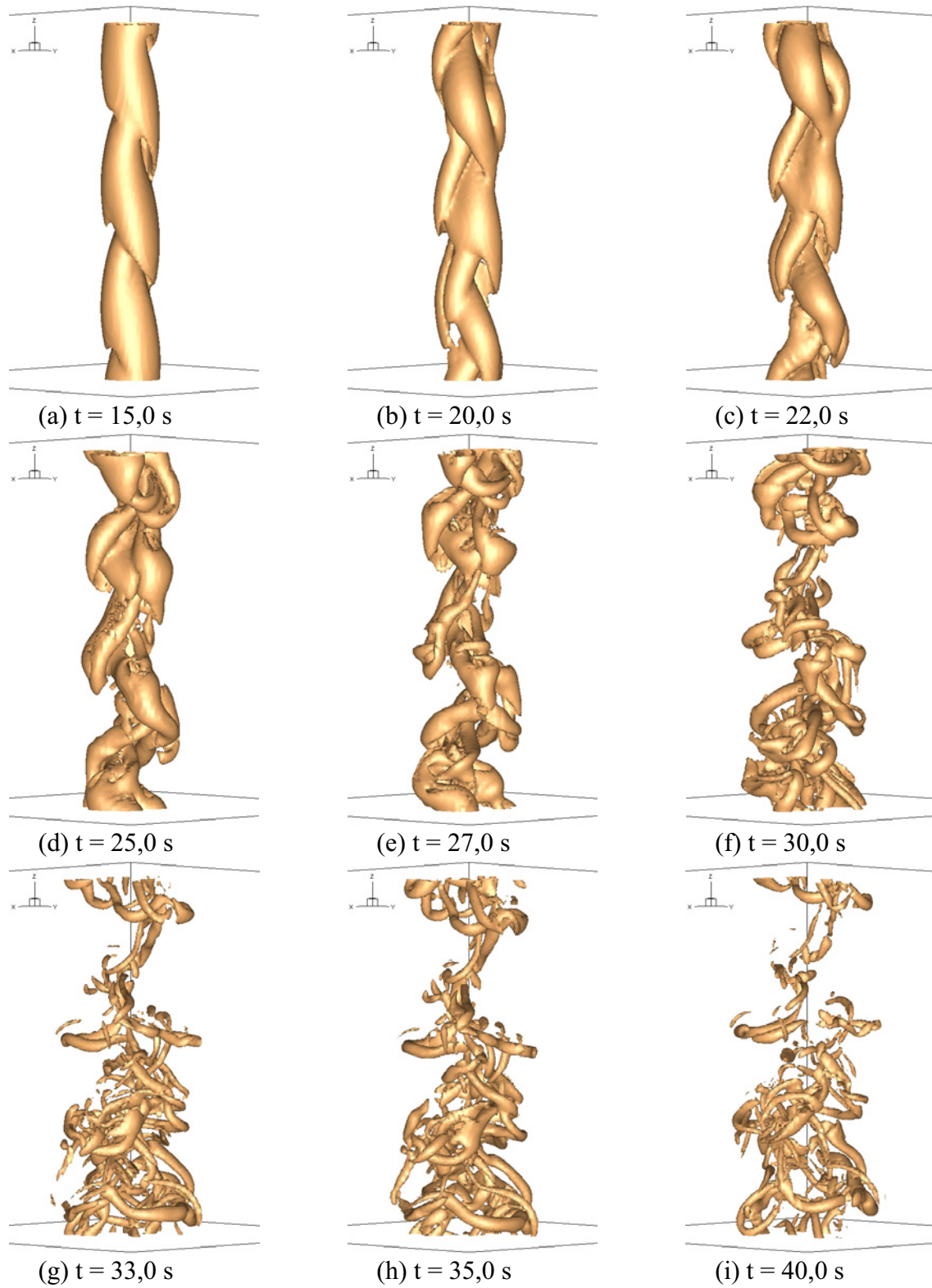


Figura 5.11 Evolução temporal do Módulo de Vorticidade $\|w\|$ (Isosuperfície Nível $1,6 \text{ s}^{-1}$) para $Re=5000$ e malha de 128^3 .

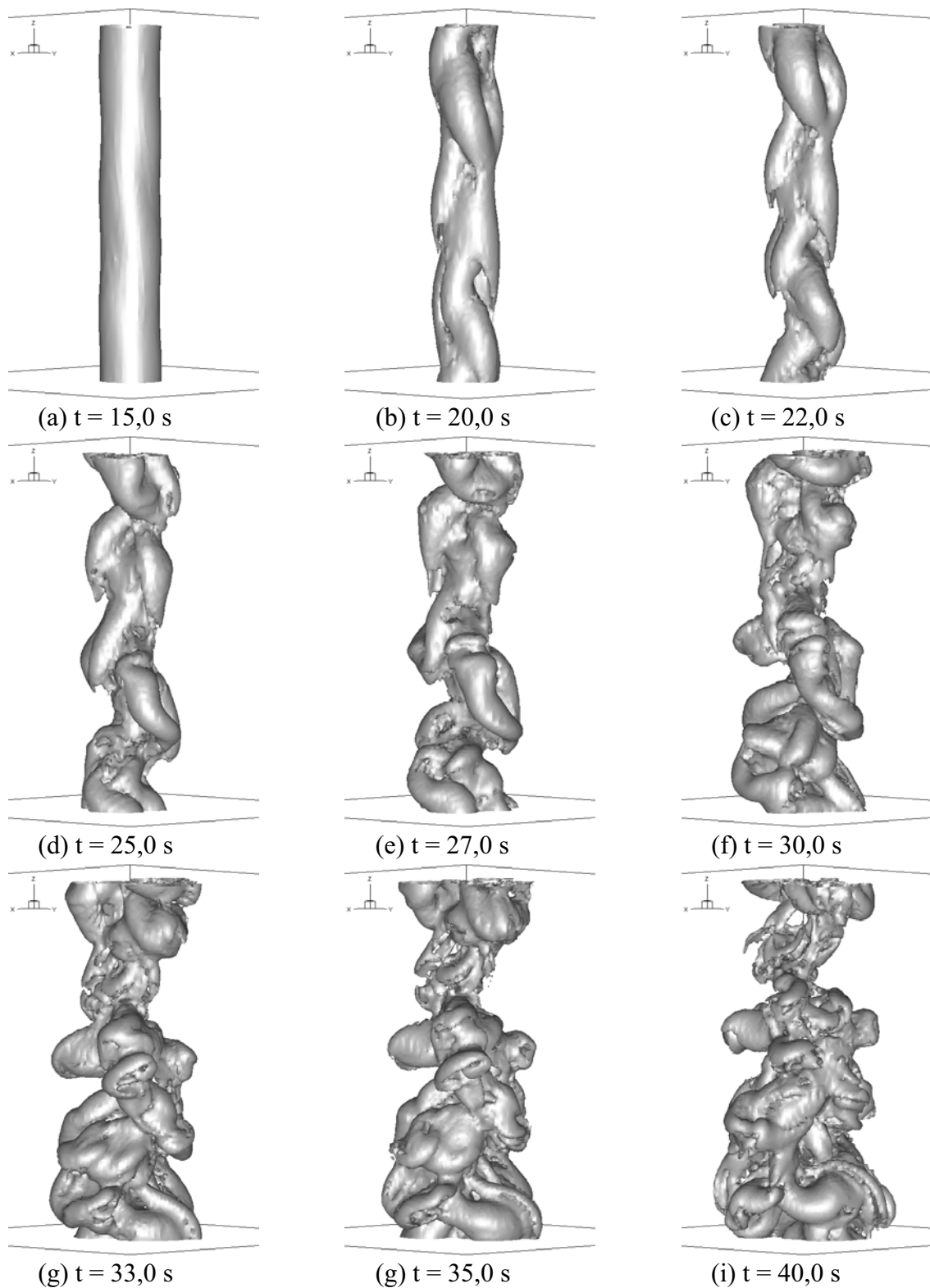


Figura 5.12 Evolução temporal relação entre a viscosidade efetiva e molecular (isosuperfície Nível 2,0) para $Re=5000$ e malha de 128^3 .

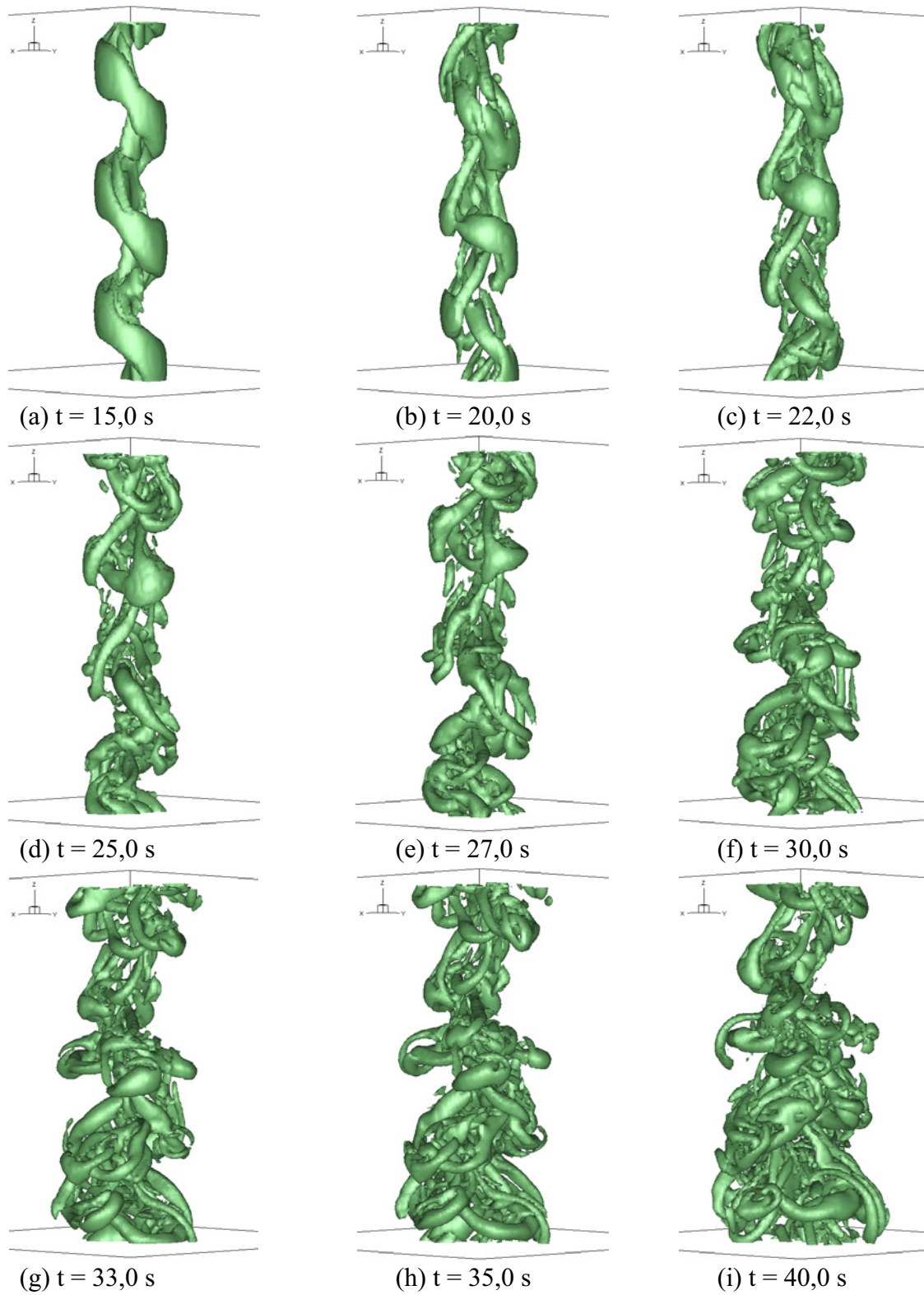


Figura 5.13 Evolução temporal do campo do critério Q (Isosuperfície Nível $0,01 \text{ s}^{-2}$) – Jato Natural para $Re=5000$ e malha de 128^3 .

Na Figura 5.11 (a) é possível verificar as primeiras instabilidades, já em estado tridimensional. Na Figura 5.11(b) e (c) essas instabilidades são amplificadas. No intervalo de tempo 25 s até 27 s (Figura 5.11 (d) e (e)) nota-se as interações de estruturas primárias com as estruturas secundárias, e a partir de então o jato encontra-se em um estado caótico. Pode-se notar que a partir do tempo 35 s o jato entra em decaimento, isso também pode ser notado na Figura 5.18.

A Figura 5.12 ilustra a isosuperfície da relação entre a viscosidade turbulenta e a viscosidade molecular, mostrando que existe uma correlação entre viscosidade turbulenta e vorticidade. No tempo de 15 s (Figura 5.12 (a)) é possível verificar que neste instante ainda conserva a forma da camada de cisalhamento. A Figura 5.12 (b) mostra claramente que existe uma grande semelhança entre a forma da isosuperfície do módulo de vorticidade e da isosuperfície da relação entre a viscosidade efetiva e viscosidade molecular, onde temos vorticidade, devemos ter também viscosidade turbulenta uma vez que existem interações não lineares que devem ser modeladas. Esta estreita semelhança pode ser explicada, pois ambos os campos, são calculados em função de gradientes de velocidade. Outra forma de explicar esta semelhança é através de uma visão física do problema, onde as estruturas coerentes, visualizadas pela isosuperfície do módulo de vorticidade, são formadas por estruturas de escalas ainda menores e são estas pequenas escalas que são modeladas pela metodologia LES.

Verifica-se na Figura 5.13 (a) formação de dois anéis consecutivos que se conectam formando uma estrutura de vórtice em zig-zag: o denominado emparelhamento alternado, Urbin e Métais (1997). Na Figura 5.13 (b) e (c) nota-se a presença de filamentos longitudinais, formados pelo estiramento dos vórtices. Estes filamentos interagem com as instabilidades anteriormente formadas, e uma maior interação entre as estruturas primárias e secundárias pode ser visualizada a partir de então. A partir do instante $t = 27,0$ s (Figura 5.13 (e)) pode ser verificada a evolução de estruturas turbulentas tridimensionais e já não se pode observar qualquer comportamento determinístico.

Os vórtices em emparelhamento alternado, claramente evidenciados na Figura 5.13 (a), são estruturas típicas do jato natural, cujo mecanismo de formação foi explicado por Silva e Métais (2002). A Figura 5.14 mostra o esquema do arranjo de anéis de vórtice que conduzem ao fenômeno do emparelhamento alternado. Os vórtices toroidais primários, liberados periodicamente a uma distância do bocal de origem, apresentam entre si uma distância L (Figura 5.14 (a)). A velocidade de advecção W_c destes anéis e sua frequência preferencial f_p são relacionadas por $f_p = W_c/L$. A perturbação imposta gera diferentes frequências longitudinais

associadas ao comprimento de onda $2L$ na direção do escoamento. Eles então induzem um deslocamento radial alternado dos anéis de vórtices para fora do eixo central do jato (Figura 5.14 (b)). Devido ao perfil de velocidade médio do jato, a lateral do anel que fica fora do eixo do jato é advectada a uma velocidade inferior a W_c , enquanto a lateral do anel que se encontra no eixo do jato, é advectada a uma velocidade maior que W_c (Figura 5.14 (c)). Assim, a lateral do anel advectada com maior velocidade tende a se unir a lateral advectada com menor velocidade do anel posterior, gerando assim um emparelhamento localizado de dois anéis consecutivos (Figura 5.14 (d)) e conforme verificado na Figura 5.13 (a).

Naturalmente, a análise acima foi feita para o jato em desenvolvimento espacial, mas muitos mecanismos são válidos também para o jato em desenvolvimento temporal. De uma forma simplificada, pode-se conceber o jato temporal como um referencial lagrangiano acompanhando o jato em desenvolvimento espacial. A principal diferença é que no desenvolvimento temporal do jato, não há entradas ou saídas, e assim, analisa-se a evolução de perturbações iniciais em uma mesma região específica do espaço (SOUZA, 2005).

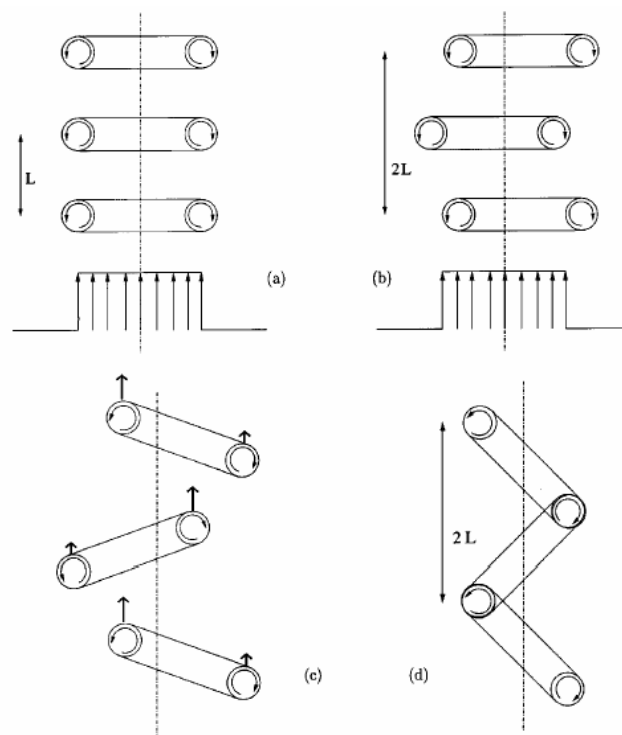


Figura 5.14 Esquema do arranjo de anéis de vórtice conduzindo à ocorrência de emparelhamento alternado, (SILVA e MÉTAIS, 2002).

Comparando a visualização dos campos dos isovalores nota-se que os campos do critério Q é bastante rico em detalhes comparado ao módulo de vorticidade, mas uma maneira

bem detalhada de analisar a transição a turbulência é a análise da evolução dos campos do módulo de vorticidade nos planos xy em $z = \pi$ e xz em $y = \pi$. Seguindo o mesmo critério de comparação foi também plotada a evolução temporal da relação entre a viscosidade efetiva no plano xz em $y = \pi$.

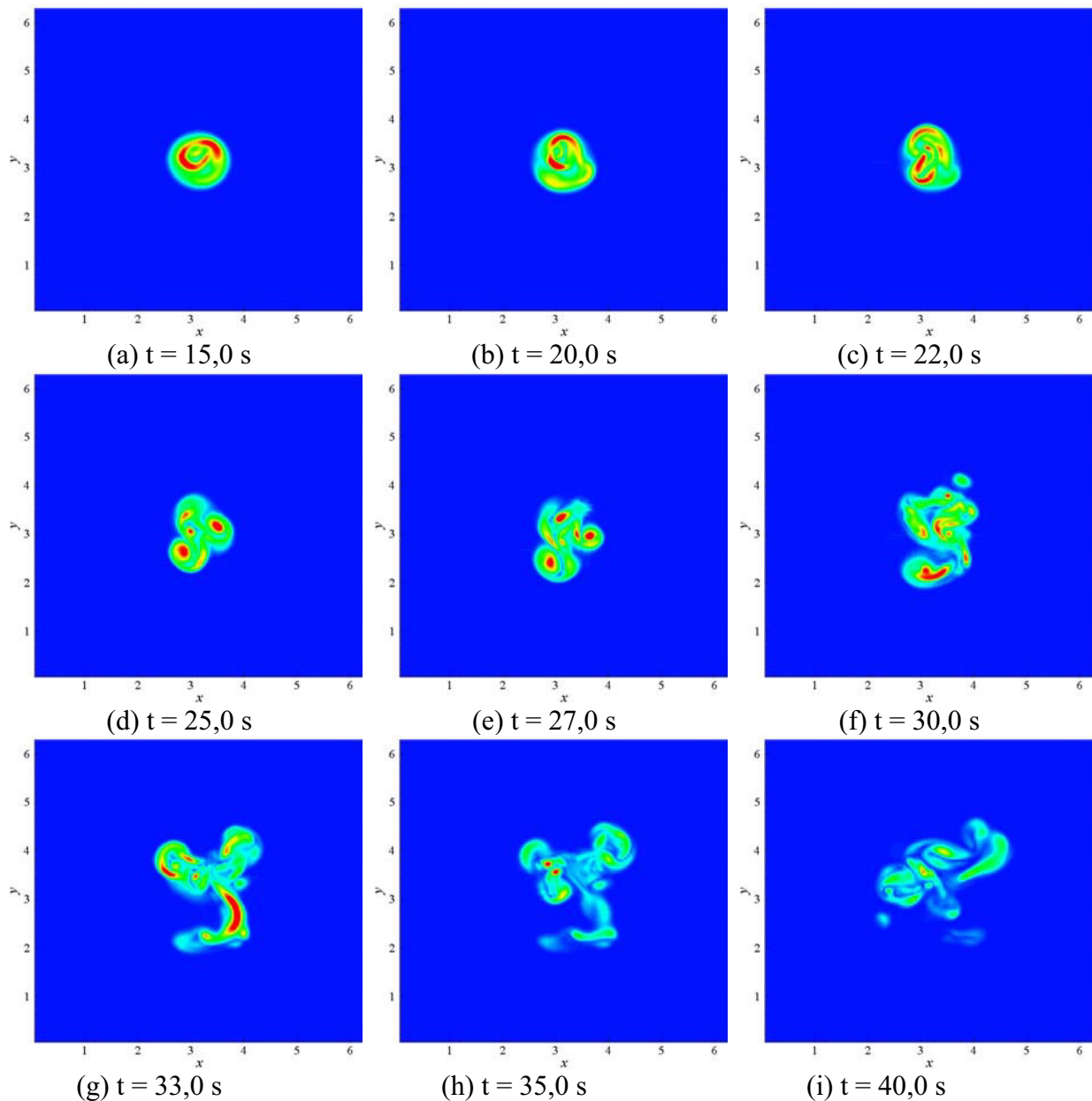


Figura 5.15 Evolução temporal do Módulo de Vorticidade $\|\vec{w}\|$ no plano xy ($z = \pi$) para $Re=5000$ e malha de 128^3 .